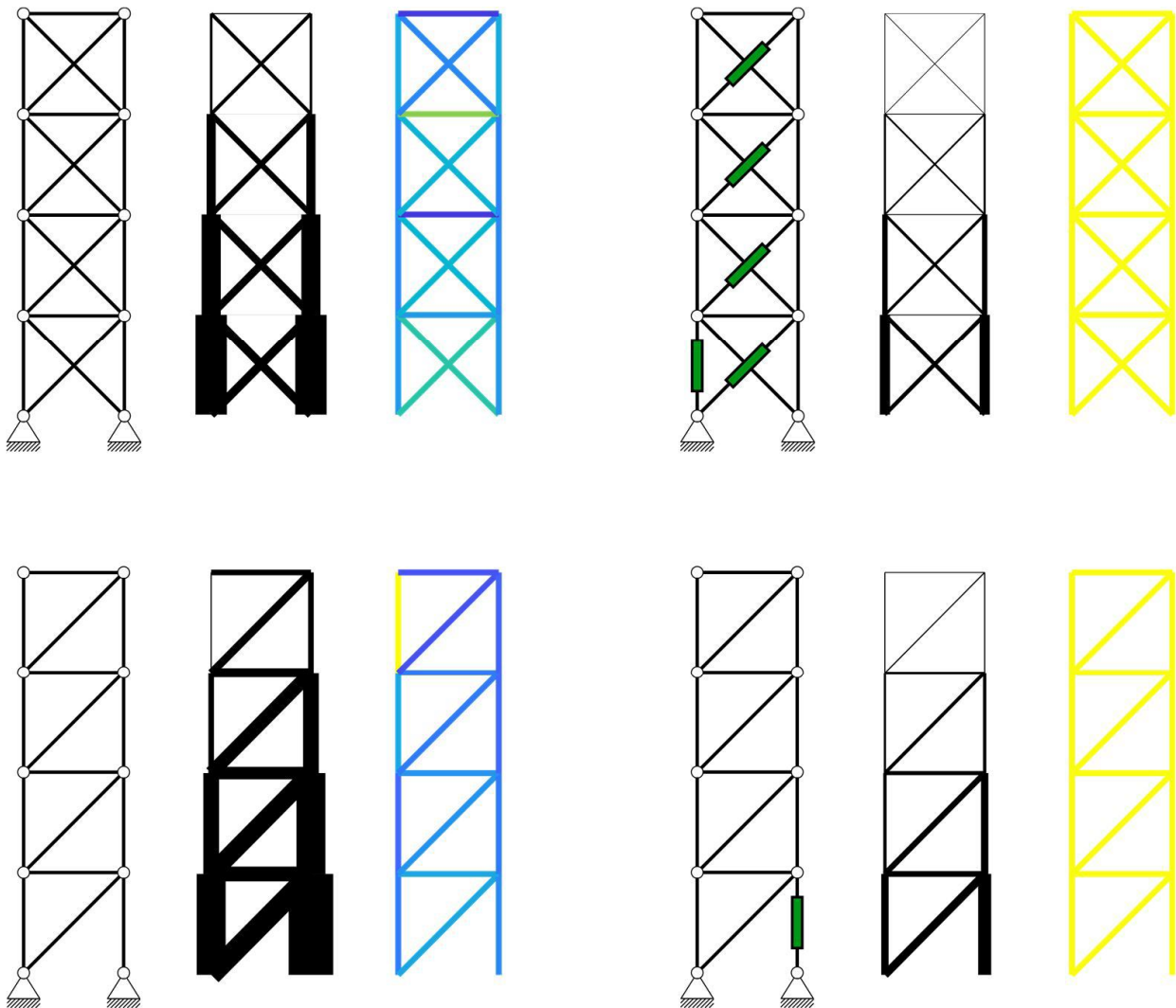


Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke

Florian Geiger



Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke

von

Florian Geiger

Bericht Nr. 74

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2022



© Florian Geiger

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123
Fax: 0711 - 685 66130
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D 93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-072660-6

Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Florian Geiger

aus Oettingen i.Bay.

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Roland Wüchner, Braunschweig

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Mai 2022

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2022

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der strukturmechanischen Charakterisierung von Stabtragwerken mit dem Ziel, daraus Erkenntnisse und Empfehlungen für den Entwurf adaptiver Tragwerke zu gewinnen und abzuleiten. Unter der strukturmechanischen Charakterisierung von Stabtragwerken wird die Analyse von wesentlichen lastfallabhängigen und lastfallunabhängigen Eigenschaften von Tragwerken verstanden, die aus Fachwerk- und Stabelementen aufgebaut sein können. Zu den analysierten Eigenschaften zählen der Grad der statischen Unbestimmtheit, die Steifigkeit sowie die Traglast. Die Ausprägungen dieser Charakteristika beeinflussen das Tragverhalten der untersuchten Strukturen.

Adaptive Tragwerke besitzen die Fähigkeit, ihren Zustand, der durch Verformungen und Schnittgrößen beschrieben werden kann, aktiv an veränderte äußere Einflüsse so anzupassen, dass bestimmte Ziele erreicht und Grenzwerte eingehalten werden. Die ersten Ideen, den Zustand von Tragwerken durch aktive Beeinflussung an die äußeren Einflüsse anzupassen, existieren seit den 1970er-Jahren und wurden seitdem in verschiedenen Bereichen weiterentwickelt. Für die Realisierung von Bauwerken konnten sich die Konzepte bislang aber kaum durchsetzen.

Der im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Entwurf von adaptiven Tragwerken beschreibt sowohl den gesamten Entwurfsprozess, einschließlich beispielsweise des Aufbaus und der Dimensionierung von Tragwerken, als auch den Entwurf eines Aktuierungskonzepts für bereits bestehende Tragwerke, die nachträglich verbessert bzw. ertüchtigt werden sollen. Es wird adressiert, welche strukturmechanischen Voraussetzungen für die Anpassungsfähigkeit notwendig sind, welche Eigenschaften von Tragwerken anpassungsfähig gestaltet werden können, ob Charaktereigenschaften existieren, die nur für adaptive und nicht für passive Tragwerke eine Rolle spielen, sowie welche Besonderheiten bei der Optimierung adaptiver Tragwerke beachtet werden müssen. Die Arbeit betrachtet adaptive Tragwerke aus einer strukturmechanischen Perspektive und liefert Einblicke in interdisziplinäre Zusammenhänge zwischen der Regelungstechnik bzw. Systemdynamik und der Strukturmechanik.

In einem ersten Schritt werden verschiedene Varianten, die Aktuierung zu modellieren, untersucht und verglichen. Die Sensorik und die Regelung werden dabei nicht im Detail betrachtet: Für die Sensorik wird angenommen, dass der gesamte Tragwerkszustand zu jeder Zeit bekannt ist, und der Regler wird durch die Lösung eines Optimierungsproblems ersetzt, mit dessen Hilfe beispielsweise die Aktorwege ermittelt werden. Bei der Untersuchung der Modellierung zeigt sich, dass unter den getroffenen Annahmen die Aktuierung als vorgegebene Stablängenänderung modelliert werden kann. Die Äquivalenz dieser Vorgehensweise mit dem Einsatz eines finiten Fachwerk-Aktor-Elements wird gezeigt und die Alternative, eine effektive Steifigkeitsmatrix bzw. eine effektive Flexibilitätsmatrix einzusetzen, wird aufgrund der größeren Komplexität verworfen.

Daraufhin werden zwei Verfahren diskutiert, mit deren Hilfe die Anordnung der Aktoren im Tragwerk unabhängig vom einwirkenden Lastfall automatisiert ermittelt werden kann. Dazu wird ein Verfahren, das basierend auf den Eigenschaften der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix die Güte einer Aktorplatzierung für beliebige äußere Lasten quantifiziert, mit einem Verfahren verglichen, das auf der Redundanzmatrix basiert. Im Gegensatz zum Verfahren mithilfe der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix wird im Verfahren mit der Redundanzmatrix der iterative Prozess, der aus Erstellung und Vergleich vieler Aktorplatzierungen besteht, vermieden und durch eine Vorwärtsrechnung ersetzt. Dieses Verfahren kann nur bei der Schnittgrößenadaption eingesetzt werden, nicht jedoch bei der Verschiebungsadaption.

Anschließend werden in einer systematischen Studie die Auswirkungen der Aktuierung auf den Tragwerkszustand und die damit erreichbaren Ziele quantifiziert. Dazu werden die Einflüsse verschiedener Parameter, wie z. B. die Anzahl an Aktoren, die Ausprägungen verschiedener Tragwerkeigenschaften und das globale Tragverhalten, untersucht. Zusammengefasst ergeben sich aus der Studie die folgenden Erkenntnisse.

Für die Adaption von Schnittgrößen ist die Voraussetzung, dass diejenigen Elemente einen Beitrag zum Grad der statischen Unbestimmtheit leisten, in denen Schnittgrößen verändert werden sollen. Die Untersuchung, welche Elemente einen solchen Beitrag leisten, kann erneut mithilfe der Redundanzmatrix erfolgen. Es werden verschiedene Ziele, wie z. B. die Entlastung bestimmter Elemente, die Minimierung der Beanspruchung der gesamten Struktur sowie die Erhöhung der Traglast, untersucht. In Abhängigkeit von den Ausprägungen der untersuchten Eigenschaften können die Ziele unterschiedlich gut erreicht werden.

Die Adaption von Verschiebungen erfordert keine Grundvoraussetzung. Prinzipiell können in allen Tragwerken die Verschiebungen verändert werden. Auch für die Verschiebungsadaption wird die Erreichbarkeit verschiedener Ziele untersucht, darunter die Erhöhung der Steifigkeit sowie die vollständige Kompensation aller Verschiebungen.

Die Adaption von Verschiebung und die Adaption von Schnittgrößen sind im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander. In statisch unbestimmten Tragwerken ergeben sich bei der Adaption von Verschiebungen auch Schnittgrößen, die sich jedoch wieder kompensieren lassen, und bei der Adaption von Schnittgrößen ergeben sich Verschiebungen, die ebenfalls kompensiert werden können. Dazu ist jedoch jeweils eine größere Anzahl an Aktoren im Tragwerk nötig als für den isolierten Adaptionsfall. In statisch bestimmten Tragwerken ist keine Adaption der Schnittgrößen möglich und bei der Adaption von Verschiebungen ergeben sich deshalb auch keine Schnittgrößen.

Bei der Veränderung von Schnittgrößen und Verschiebungen wird mechanische Arbeit verrichtet, die ein Maß für den erforderlichen Aufwand darstellt. Weiterhin kann beispielsweise der erforderliche Aktorweg oder die erforderliche Aktorkraft für die Quantifizierung des Aufwands herangezogen werden. Dazu werden im Rahmen der Arbeit

Untersuchungen durchgeführt, in denen der Aufwand in Abhängigkeit von der Aktorplatzierung und von den Tragwerkseigenschaften quantifiziert wird. Daraus werden Erkenntnisse über den Optimierungsprozess gewonnen, die in der letzten Studie zur möglichen Materialeinsparung genutzt werden.

Die Einsparung von Material eröffnet neben der Erhöhung der Steifigkeit und der Reduktion der Beanspruchung im Material das wesentliche Potential adaptiver Tragwerke. Bei den Untersuchungen zeigt sich aber, dass bei Tragwerken, deren Dimensionierung maßgeblich durch die Materialfestigkeit beeinflusst wird, abhängig von den Tragwerkseigenschaften, der Aktorplatzierung und der Anzahl an einwirkenden Lastfällen, nur geringe Materialeinsparungen möglich sind. Bei Tragwerken, deren Dimensionierung maßgeblich von Steifigkeiten beeinflusst wird, können deutlich größere Materialeinsparungen erzielt werden. Dabei spielt die Verschiebungsadaption die wesentliche Rolle.

Abstract

This thesis deals with the structural characterization of truss and beam structures with the aim to gain knowledge and recommendations for the design of adaptive structures. The structural characterization of those structures is understood as the analysis of essential load-dependent and load-independent properties. The analyzed properties include the degree of statical indeterminacy, the stiffness, and the ultimate load level. These characteristics describe the load-bearing behavior of the structures under investigation.

Adaptive structures have the ability to actively adapt their state, which can be described by deformations and internal forces, to changing external influences in such a way that certain objectives are met and limit values are maintained. The first ideas of adapting the state of structures to external influences by actively influencing them have existed since the 1970s and have been further developed in various fields since then. They have hardly become established in the realization of load bearing structures.

The design of adaptive structures considered in this thesis describes both the entire design process, including, for example, the topology and the sizing of structures, and the design of actuation concepts for already existing structures that are to be improved or strengthened. This thesis addresses which mechanical prerequisites are necessary for adaptability, which properties of structures can be made adaptable, whether character properties exist that only play a role for adaptive and not for passive structures, as well as which special features have to be considered when optimizing adaptive structures. The work considers adaptive structures from a structural mechanics perspective, providing insight into interdisciplinary relationships between control theory or system dynamics and structural mechanics.

In a first step, different variants to model the actuation are investigated and compared. The sensor system and the controller are not considered in detail. For the sensor system, it is assumed that the entire structure state is known at all times, and the controller is replaced by the solution of an optimization problem, which is used to determine the actuator strokes, for example. Examination of the modeling shows that, under the assumptions made, the actuation can be modeled as a prescribed length change. The equivalence of this approach with the use of a finite truss-actuator element is shown and the alternative of using an effective stiffness matrix or an effective flexibility matrix is rejected due to its greater complexity.

Thereupon, two methods are discussed, which can be used to automatically determine the placement of the actuators in the structure independent of the load case. For this purpose, a method that quantifies the quality of an actuator placement for arbitrary external loads based on the properties of a gramian-type disturbance compensability matrix is compared with a method based on the redundancy matrix. In contrast to the procedure using the disturbance compensability matrix, the procedure using the redundancy matrix avoids the iterative process of creating and comparing many actuator

placements and replaces it with a forward calculation. This method can only be used for internal force adaptation, but not for displacement adaptation.

Subsequently, the effects of actuation on the structure and the objectives that can be achieved with it are quantified in a systematic study. For this purpose, the influences of different parameters, such as the number of actuators, the characteristics of different structural properties or the global load-bearing behavior, are investigated. In summary, the following findings result from the study.

For the adaptation of internal forces, the prerequisite is that those elements make a contribution to the degree of static indeterminacy in which internal forces are to be changed. The investigation of which elements make such a contribution can again be done with the help of the redundancy matrix. Different objectives, such as unloading certain elements, minimizing the stress on the entire structure and increasing the ultimate load, are investigated. Depending on the characteristics of the investigated properties, the objectives can be achieved to varying degrees.

The adaptation of displacements does not require any special prerequisite. In principle, displacements can be changed in all structures. The achievability of different objectives is also investigated for displacement adaptation, including the increase of stiffness as well as the complete compensation of all displacements.

The adaptation of displacements and the adaptation of internal forces are generally not independent of each other. In statically indeterminate structures, the adaptation of displacements also results in internal forces that can, however, be compensated again, and the adaptation of internal forces results in displacements that can also be compensated. However, this requires a larger number of actuators in the structure than for the isolated adaptation case. In statically determinate structures, no adaptation of internal forces is possible and therefore no internal forces result from the adaptation of displacements.

During the adaptation of internal forces and displacements, mechanical work is performed, which represents a measure of the required effort. Furthermore, the required actuator stroke or the required actuator force, for example, can be used to quantify the effort. For this purpose, investigations are carried out within this work in which the effort is quantified as a function of the actuator placement and of the structure properties. This will provide insights into the optimization process, which will be used in the final study for possible material savings.

In addition to the increase in stiffness and the reduction of stress in the material, the saving of material opens up the essential potential of adaptive load-bearing structures. The investigations show that only minor material savings are possible for structures whose sizing is significantly influenced by the material strength, depending on the structure properties, the actuator placement and the number of acting load cases. For structures whose sizing is significantly influenced by stiffness, much greater material savings can be achieved. Here, the displacement adaptation plays the essential role.

Danksagung

Diese Arbeit entstand in meiner Zeit als akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 1244.

Zuerst gilt mein Dank dem Institutsleiter und meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, der es uns Doktorandinnen und Doktoranden durch seinen unermüdlichen Einsatz ermöglicht, unter hervorragenden Bedingungen wissenschaftlich zu arbeiten und die Doktorarbeit anzufertigen. In allen Entstehungsphasen der Arbeit erhält man von ihm die volle Unterstützung und neue Anregungen.

Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. habil. Roland Wüchner für die Übernahme des Mitberichts und für die Anfertigung des Gutachtens trotz des sehr gut gefüllten Terminkalenders.

Ein weiterer Dank geht an alle Forschungspartnerinnen und Forschungspartner im Sonderforschungsbereich, die in Diskussionen, Vorträgen, Veröffentlichungen und Barabenden zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Auch allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am IBB gilt mein Dank. Die vielen fachlichen und privaten Erlebnisse werden noch lange in Erinnerung bleiben. Insbesondere gilt dabei mein Dank Steffen Roth und Christoph Wilking, die wesentlich dazu beigetragen haben, dass ich den Weg ans IBB gefunden habe, und dadurch diese Arbeit erst ermöglicht haben.

Außerdem bedanke ich mich bei allen, die die ganze Arbeit oder Teile daraus gelesen haben, um sie möglichst fehlerfrei und verständlich zu gestalten.

Ein besonderer Dank gilt meiner ganzen Familie, die mir das Studium ermöglicht hat und mich in der gesamten Zeit bis zur Promotion immer bestärkt und unterstützt hat.

Mein größter Dank gilt meiner Freundin Rebecca, die durch fachliche Kritik und uneingeschränkte Unterstützung zu meinem erfolgreichen Abschluss einen großen Beitrag geleistet hat.

Stuttgart, im Juli 2022

Florian Geiger

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
Abkürzungen und Bezeichnungen	xv
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	2
1.2 Stand der Technik	2
1.3 Zielsetzung	8
1.4 Aufbau der Arbeit	9
2 Grundlagen	11
2.1 Strukturmechanik	11
2.1.1 Bewegung und Verzerrung	14
2.1.2 Werkstoff und Spannung	16
2.1.3 Gleichgewicht	17
2.1.4 Lösungsverfahren und Randbedingungen	18
2.2 Tragwerksentwurf und Strukturoptimierung	25
2.2.1 Untersuchte Problemstellungen	26
2.2.2 Problemformulierung und mathematische Optimierung	27
2.2.3 Lösungsverfahren	31
3 Charakteristika von Stabtragwerken	39
3.1 Lastfallunabhängige Eigenschaften	40
3.1.1 Grad der statischen Unbestimmtheit	41
3.1.2 Redundanz und Redundanzverteilung	43
3.1.3 Eigenspannungszustände	48
3.2 Lastfallabhängige Tragwerkseigenschaften	51
3.2.1 Steifigkeit	51

3.2.2	Traglast und Duktilität	54
3.3	Besonderheiten optimierter Tragwerke	58
4	Adaptive Stabtragwerke	61
4.1	Aufbau und Komponenten	62
4.2	Modellierung der Aktuierung	64
4.2.1	Aktuierung als Lastfall	64
4.2.2	Aktuierung mithilfe eines Fachwerk-Aktor-Elements	64
4.2.3	Aktuierung als effektive Flexibilität und effektive Steifigkeit	70
4.2.4	Fazit	74
4.3	Aktuierungsziele und Aktuierungsaufwand	74
4.3.1	Kraftadaption	75
4.3.2	Verschiebungsadaption	88
4.3.3	Aktuierungsarbeit	93
4.3.4	Fazit	95
4.4	Automatisierte Platzierung von Aktoren	96
4.4.1	Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix	97
4.4.2	Redundanzmatrix	105
4.4.3	Fazit	108
5	Studien zum Potential und zur Performanz adaptiver Stabtragwerke	111
5.1	Kraftadaption	112
5.1.1	Fachwerkurm	112
5.1.2	Fachwerkbrücke	121
5.2	Verschiebungsadaption	125
5.2.1	Statisch unbestimmter Fachwerkurm	125
5.2.2	Statisch bestimmter Fachwerkurm	131
5.3	Minimierung des Aktuierungsaufwands	133
5.3.1	Fachwerkurm	134
5.3.2	Balkenbrücke	136
5.4	Minimierung der Tragwerksmasse	143
5.4.1	Drei-Stab-Tragwerk	144
5.4.2	Fachwerkurm	155
5.5	Fazit	165
6	Zusammenfassung und Ausblick	169
6.1	Zusammenfassung	169
6.2	Ausblick	172
	Literaturverzeichnis	175

Abbildungsverzeichnis

2.1	Fachwerkstab in unverformter und verformter Lage	14
2.2	Längenänderung des Fachwerkstabs bei einer Bewegung	15
2.3	Infinitesimales Fachwerkelement der Länge dx an der Stelle x mit angreifenden Kräften	17
2.4	Definitionen der Verschiebungsfreiheitsgrade und Visualisierung der Formfunktionen	19
2.5	Darstellung der projizierten Längen	21
2.6	Tonti-Diagramm der Fachwerkanalyse am diskretisierten Gesamtsystem nach geometrisch linearer eindimensionaler Elastizitätstheorie	24
2.7	Unterteilung der Strukturoptimierung von Fachwerken	26
2.8	Drei-Stab-Tragwerk für die Querschnittsoptimierung	28
2.9	Visualisierung des Volumenminimierungsproblems des Drei-Stab-Tragwerks	31
2.10	Volumenminimierung des Drei-Stab-Tragwerks mithilfe der SQP-Methode	36
3.1	Fachwerkstruktur zur Ermittlung der Redundanzmatrix	47
3.2	Visualisierung der Eigenspannungszustände sowie des Nullraums und des Bilds der Redundanzmatrix für verschiedene Beispiele	51
3.3	Drei-Stab-Tragwerk zur Ermittlung der Steifigkeit	52
3.4	Schematische Darstellung der Spannungs-Verzerrungs-Kurve bei elastischem Materialverhalten bis zum Versagen und bei ideal-elasto-plastischem Materialverhalten	54
3.5	Drei-Stab-Tragwerk zur Ermittlung der Traglast	55
3.6	Drei-Stab-Tragwerk nach dem Entstehen des ersten Fließgelenks	56
4.1	Vereinfachter schematischer Aufbau einer adaptiven Struktur nach YAO (1972) (S. 1571) und TEUFFEL (2004) (S. 12)	62
4.2	Darstellung von serieller und paralleler Anordnung eines Aktors zu einem Fachwerkstab	63

4.3	Eindimensionales Fachwerk-Aktor-Element mit Materialparametern und Bemaßung	65
4.4	(a) Aufteilung des Fachwerk-Aktor-Elements im lokalen Elementkoordinatensystem zur Berücksichtigung des Verschiebungssprungs; (b) Definition der Verschiebungsfreiheitsgrade	66
4.5	Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Aktuierungsmodellierung mithilfe effektiver Flexibilität und effektiver Steifigkeit	72
4.6	Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Kraftadaption mit serieller Aktuierung	76
4.7	Darstellung der Normalkraftverteilungen bei Kraftadaption und verschiedener Bewertungsmaße der Kraftverteilung in Abhängigkeit vom vorgegebenen Aktorweg	77
4.8	Fachwerkturn-Beispiel zur Veranschaulichung des Kraft-Aktuierungsraums, Redundanzanteile und anschauliche Interpretation der raumaufspannenden Vektoren des Kraft-Aktuierungsraums	83
4.9	Redundanzmatrix des Fachwerkturn-Beispiels aus Abbildung 4.8	85
4.10	Ausschnitt aus dem Fachwerkturn-Beispiel mit zusätzlichem parallelem Element zu Element 11	86
4.11	Ausschnitt aus dem Fachwerkturn-Beispiel mit zusätzlichem parallelem Element zu Element 1	87
4.12	Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Verschiebungsadaption	88
4.13	Knotenverschiebungen im Drei-Stab-Tragwerk bei Verschiebungsadaption	89
4.14	Darstellung der euklidischen Norm und des betragsmäßigen Maximalwerts des Verschiebungsvektors	90
4.15	Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Lastfallunabhängigkeit	101
4.16	Visualisierung der relevanten Größen für die Aktorplatzierung mithilfe der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix	102
4.17	Darstellung des Fehlermaßes für alle Lastangriffswinkel	103
4.18	Darstellung des Ablaufs der Aktorplatzierung mithilfe der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix als Flussdiagramm	106
4.19	Darstellung des Ablaufs der Aktorplatzierung zur Kraftadaption mithilfe der Redundanzmatrix als Flussdiagramm	107
5.1	Darstellung des Fachwerkturns für die Kraftadaption	113
5.2	Vergleich der Ergebnisse der Aktorplatzierung zur Kraftadaption mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung von zwei verschiedenen Gütemaßen	114
5.3	Darstellung des Ablaufs der Platzierung serieller Aktoren zur Kraftadaption unter Verwendung der Redundanzmatrix	116

5.4	Darstellung der Normalkräfte in allen Stäben infolge verschiedener Lastfälle im passiven und im adaptiven Tragwerk	118
5.5	Darstellung der Normalkraftverteilungen im Traglastzustand	120
5.6	Darstellung der Fachwerkbrücke für die Kraftadaption	122
5.7	Darstellung des Fachwerksturms in verschiedenen Varianten für die Verschiebungsadaption	125
5.8	Vergleich der Ergebnisse der Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung von zwei verschiedenen Gütemaßen	126
5.9	Darstellung der Aktorplatzierung und der Verformungszustände des Fachwerksturms	127
5.10	Darstellung der Normalkräfte in allen Elementen für den statisch unbestimmten Fachwerkurm bei Verschiebungsadaption	128
5.11	Ergebnisse der Aktorplatzierung mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix für das reduzierte Kandidatenset	130
5.12	Ergebnisse der Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung des Gütemaßes Spur am statisch bestimmten Fachwerkurm	132
5.13	Visualisierung der Verschiebungen im passiven Tragwerk und im adaptiven Tragwerk für verschiedene Aktorsets	133
5.14	Darstellung der notwendigen Aktuierungsarbeiten und der betragsmäßig maximalen Verschiebungen im adaptiven Zustand	135
5.15	Darstellung des vereinfachten Modells des Stuttgarter Trägers	136
5.16	Verläufe der Funktion der Verschiebung im passiven Tragwerk am Ort der Wanderlast und der Funktion des Betrags des erforderlichen Aktuierungsmoments	140
5.17	Erforderliches Aktuierungsmoment zur vollständigen Kompensation der Vertikalverschiebung am Ort der Last für die beiden optimierten Auflagerabstände	142
5.18	Drei-Stab-Tragwerk zur Untersuchung der Dimensionierung adaptiver Tragwerke	145
5.19	Visualisierung des festigkeitsdominierten Volumenminimierungsproblems des adaptiven Drei-Stab-Tragwerks	146
5.20	Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens und des Einsparungspotentials in Abhängigkeit von der zulässigen Spannung	147
5.21	Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens in Abhängigkeit von der zulässigen Aktorkraft und vom zulässigen Aktorweg	149
5.22	Darstellung des steifigkeitsdominierten Volumenminimierungsproblems des adaptiven Drei-Stab-Tragwerks	151

5.23	Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens und des Einsparungspotentials in Abhängigkeit von der zulässigen Verschiebung	153
5.24	Darstellung des Fachwerkturns in verschiedenen Varianten für die Untersuchung zur Dimensionierung adaptiver Tragwerke	156
5.25	Maßgebender Ausschnitt aus dem Verlauf der Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption und Verlauf der Aktorplatzierung zur Kraftadaption	157
5.26	Darstellung der verschiedenen Varianten mit Aktoren	158
5.27	Darstellung der optimierten Tragwerke und des elementweise maximalen Ausnutzungsgrads über alle aufgebrauchten Lastfälle jeweils für das passive Tragwerk und für die adaptiven Tragwerke mit ausgewählten Aktorssets .	161
5.28	Darstellung der Normalkraftverteilungen in verschiedenen Varianten des optimierten Tragwerks	162
5.29	Darstellung der optimierten Tragwerke für das festigkeitsdominierte Bemessungsproblem jeweils unter nur einem Lastfall	165

Tabellenverzeichnis

4.1	Eigenschaften der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix für verschiedene Aktorsets	105
5.1	Aktuierungsarbeiten zur Kraftadaption für den Fachwerkturm für verschiedene Aktorplatzierungen	121
5.2	Übersicht über die Ergebnisse der Kraftadaption der Fachwerkbrücken . .	123
5.3	Maßgebende Änderungen von Normalkräften durch die Kraftadaption im Fachwerkturm	129
5.4	Euklidische Norm des Verschiebungsvektors und dafür erforderliche Aktuierungsarbeiten am statisch bestimmten Fachwerkturm für verschiedene Aktorplatzierungen	132
5.5	Ergebnisse der Massenminimierung für das steifigkeitsdominierte Bemessungsproblem mit verschiedenen Aktorsets	160
5.6	Ergebnisse der Massenminimierung für das festigkeitsdominierte Bemessungsproblem mit unterschiedlicher Anzahl an Lastfällen und verschiedenen Querschnitten	163

Abkürzungen und Bezeichnungen

Abkürzungen

BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
CSDA	Complex step derivative approximation
DSM	Direkte Steifigkeitsmethode
EW	Eigenwert
FEM	Finite-Elemente-Methode
FG	Fließgelenk
FHG	Freiheitsgrad bzw. Freiheitsgrade
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LF	Lastfall
SQP	Sequentielle quadratische Programmierung

Mathematische Notationen

$\max(\bullet)$	Maximum der skalarwertigen Funktion (\bullet) bzw. maximaler Eintrag des Vektors (\bullet)
$\min(\bullet)$	Minimum der skalarwertigen Funktion (\bullet) bzw. minimaler Eintrag des Vektors (\bullet)
$\arg \min(\bullet)$..	Funktion liefert Argument, das (\bullet) minimiert
$(\bullet)^+$	Pseudoinverse der Matrix (\bullet)
$(\bullet)^{-1}$	Inverse der Matrix (\bullet)
$(\bullet)^T$	Transponierte der Matrix (\bullet)
$(\bullet)^{-T}$	Inverse der Transponierten der Matrix (\bullet)
$\tilde{(\bullet)}$	Approximation der Größe (\bullet)
$(\bullet)_{i,j}$	Eintrag i,j der Matrix (\bullet)

$(\bullet)_i$	Eintrag i des Vektors (\bullet)
$(\bullet)_{(k)}$	Größe \bullet im Schritt k
$\square(\bullet)$	Funktion \square mit Argument(en) (\bullet)
$H(\bullet)$	Heaviside-Funktion mit Argument(en) (\bullet)
$\delta(\bullet)$	Dirac-Funktion mit Argument(en) (\bullet)
$\frac{d(\square)}{d(\bullet)}$	Totale Ableitung der Funktion (\square) nach (\bullet)
$\frac{\partial(\square)}{\partial(\bullet)}$	Partielle Ableitung der Funktion (\square) nach (\bullet)
$\Delta\bullet$	Änderung von Größe \bullet
$\lim_{h \rightarrow (\square)+0}(\bullet)$	Rechtsseitiger Grenzwert der Funktion (\bullet) an der Stelle (\square)
\cup	Vereinigungsmenge
\setminus	Differenzmenge
\emptyset	Leere Menge
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
$\text{Bild}(\bullet)$	Bild der Matrix (\bullet)
$\text{Eigenwerte}(\bullet)$	Eigenwerte der Matrix (\bullet)
$\text{Im}(\bullet)$	Imaginärteil von (\bullet)
$\text{Nullraum}(\bullet)$	Nullraum der Matrix (\bullet)
$\text{Rang}(\bullet)$	Rang der Matrix (\bullet)
$\text{Spur}(\bullet)$	Spur der Matrix (\bullet)
$\mathbf{1}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{0}$	Null-Matrix
$ (\bullet) $	Betrag der skalaren Größe (\bullet) oder Anzahl der Elemente in Menge (\bullet)
$\ (\bullet)\ _2$	Euklidische Norm des Vektors (\bullet)
$\ (\bullet)\ _\infty$	Unendlich-Norm des Vektors (\bullet)
$\mathcal{O}(\bullet)$	Term in der Größenordnung von (\bullet)

Lateinische Buchstaben

\mathcal{A}	Aktorset: gewählte Akteurpositionen
\mathbf{A}	Kinematik-Matrix
A	Querschnittsfläche
\mathbf{a}	Zeile der Kinematik-Matrix
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
$\bar{\mathbf{C}}$	Ausgangsmatrix

\mathcal{C}	Kandidatenset: mögliche Positionen für Aktoren
\mathbf{C}	Diagonalmatrix der Elementsteifigkeiten
\mathbf{D}	Durchgriffsmatrix
\mathbf{d}	Vektor der Knotenverschiebungen
$\mathbf{d}(x)$	Vektor der Verschiebungen des Punkts x
\mathbf{d}_h	Lösung der homogenen Kinematikgleichung
D_{\max}	Maximal zulässige Verschiebung
d_i	Verschiebung in Richtung von Freiheitsgrad i
d_x	Anteil der Verschiebung in Richtung der lokalen x -Achse
\mathbf{e}	Vektor des Fehlers bzw. der Abweichung zwischen aktuellem und gewünschtem Ausgang
\mathcal{E}	Set aller Elemente
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{F}_{eff}	Effektive Flexibilitätsmatrix
$\mathbf{f}_{\text{erw}}, \mathbf{d}_{\text{erw}}$	Erweiterte Vektoren für die Formulierung des Aktorelements
F	Einzellast
f_{akt}	Aktorkraft
\mathbf{f}_{ext}	Vektor der äußeren Lasten
$\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}$	Vektor der äußeren Knotenlasten
\mathbf{g}	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen
g	Erdbeschleunigung
\mathbf{h}	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
\mathbf{H}	Hesse-Matrix
I	Flächenträgheitsmoment
J_λ, J_S	Gütemaße für die Aktorplatzierung
\mathbf{k}_A	Elementsteifigkeitsmatrix eines Aktorelements
\mathbf{k}	Elementsteifigkeitsmatrix eines Stabelements
\mathbf{K}_{eff}	Effektive Systemsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}	Systemsteifigkeitsmatrix
$\Delta\ell, \Delta\mathbf{l}$	Gesamte Längenänderung eines Stabs bzw. als Vektor auf Systemebene für alle Stäbe
$\Delta\ell_0, \Delta\mathbf{l}_0$	Vorgegebene Längenänderung eines Stabs bzw. als Vektor auf Systemebene für alle Stäbe
$\Delta\ell_{\text{el}}, \Delta\mathbf{l}_{\text{el}}$...	Elastischer Anteil der Längenänderung eines Stabs bzw. als Vektor auf Systemebene für alle Stäbe

\mathcal{L}	Langrange-Funktion
L, ℓ	Stablängen in unverformter und verformter Lage
\mathbf{N}	Matrix der Ansatzfunktionen
N	Ansatzfunktion
\mathbf{n}	Vektor der Normalkräfte aller Stäbe
\mathbf{n}_h	Löung der homogenen Gleichgewichtsgleichung
\mathbf{n}_p	Löung der Gleichgewichtsgleichung mit vollständiger rechter Seite
$\hat{n}(x)$	Verteilte Normalkraftbelastung im Stab
N	Normalkraft im Stab
N_{\max}^-	Maximal zulässige Drucknormalkraft
N_{\max}^+	Maximal zulässige Zugnormalkraft
n_E	Anzahl der Elemente
n_K	Anzahl der Knoten
n_{FHG}	Anzahl der Freiheitsgrade
n_L	Anzahl festgehaltener Freiheitsgrade
n_C	Anzahl der Freiheitsgrade mit beschränkten Verschiebungen
n_s	Grad der statischen Unbestimmtheit
n_{akt}	Anzahl der Aktoren
n_g	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
n_h	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
\mathbf{R}	Redundanzmatrix
$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$	Beispielhafte Matrizen zur Modellierung der Regelung
\mathbf{s}	Vektor der Entwurfsvariablen
$\mathbf{s}_o, \mathbf{s}_u$	Grenzen für die Wertebereiche der Entwurfsvariablen
\mathbf{u}	Aktoreingang
\hat{u}	Aktorweg
V	Volumen
\mathbf{W}	Gram'sche Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix
W^{akt}	Verrichtete mechanische Arbeit der Aktoren
W^{ext}	Verrichtete mechanische Arbeit der äußeren Lasten
$\mathbf{X}_0(x), \mathbf{X}(x)$	Ortsvektoren in unverformter und verformter Lage
x, y, z	Lokales Stabkoordinatensystem
X^i	Globales Koordinatensystem
\mathbf{y}	Ausgang
\mathbf{y}_0	Zielzustand des Ausgangs

Griechische Buchstaben

α	Schrittweitenparameter
$\varepsilon(x)$	Verzerrungsfunktion
ε_0	Vorgegebene Verzerrung
ε_{el}	Elastischer Anteil der Verzerrung
γ	Lastmultiplikator
λ, μ	Vektoren der Lagrange-Multiplikatoren
λ	Eigenwert
$\lambda_{\mathbf{W}}$	Vektor mit den Eigenwerten der Matrix \mathbf{W}
μ	Lagrange-Multiplikator
Π^{int}	Verzerrungsenergie
Π^{tot}	Gesamte potentielle Energie
ρ	Dichte
Σ	Vektor bzw. Diagonalmatrix mit Singulärwerten
σ	Normalspannung
σ_{max}^-	Maximal zulässige Druckspannung
σ_{max}^+	Maximal zulässige Zugspannung
$\sigma_{\text{max,K}}$	Maximal zulässige Knickspannung

Kopf- und Fußzeiger

$(\bullet)^*$	Wert von (\bullet) im gefundenen Optimum
$(\bullet)_{\text{pas}}$	Größe (\bullet) im passiven Zustand
$(\bullet)_{\text{akt}}$	Größe (\bullet) im aktiven Zustand
$(\bullet)_{\text{ada}}$	Größe (\bullet) im adaptiven Zustand
$(\bullet)_{\text{T}}$	Größe (\bullet) im Traglastzustand
$(\bullet)_{\text{Te}}$	Größe (\bullet) im Traglastzustand bei rein elastischem Systemverhalten

Einleitung

Die Adaptivität von tragenden Strukturen im Bauwesen ist bisher nicht weit verbreitet. Der Begriff Adaptivität wird in der Fachsprache gleichbedeutend mit Anpassungsfähigkeit verwendet, ist jedoch nicht im Duden vertreten¹. Der im Duden vorhandene Begriff der Adaptabilität hat sich in der Fachsprache nicht durchgesetzt. Die Anpassung und Weiterentwicklung der Fachsprache wird mit fortschreitenden Entwicklungen und dem Gewinn neuer Erkenntnisse erforderlich. Diese sprachliche Adaptivität ergibt sich insbesondere aus der interdisziplinären Zusammenarbeit mit Kolleginnen und Kollegen aus fachfremden Bereichen, wie sie beispielsweise im Sonderforschungsbereich 1244 „Adaptive Hüllen und Strukturen für die gebaute Umwelt von morgen“ stattfindet, in dessen Rahmen die vorliegende Arbeit entstanden ist. Ein inhaltlicher Überblick über die Arbeiten im Sonderforschungsbereich ist in SOBEK U. A. (2021) zu finden. Alle beteiligten Disziplinen müssen sich dabei auf einheitliche Begrifflichkeiten einigen und ihre eigenen Begriffe anpassen, um eine erfolgreiche Zusammenarbeit gestalten zu können.

In der vorliegenden Arbeit werden deshalb zwei Formen der Adaptivität betrachtet: die begriffliche Adaptivität bei der Beschreibung und Analyse der begrifflich noch nicht etablierten adaptiven Tragwerke sowie die technische Adaptivität im Rahmen der Strukturmechanik. Im Gegensatz zum Bauwesen ist in der Natur die Anpassungsfähigkeit von Pflanzen und Tieren wesentlich und sorgt für die Weiterentwicklung der Arten unter sich ändernden Umgebungseinflüssen. Die Nachahmung dieser Adaptivität wird auch zunehmend in der Technik umgesetzt. Diese Arbeit soll neben dem rein technischen Erkenntnisgewinn zu adaptiven Tragwerken auch einen Beitrag dazu leisten, die Möglichkeit, Tragwerke adaptiv zu gestalten, in die Sprache und Denkweisen von allen am Entwurf und an der Umsetzung Beteiligten einfließen zu lassen.

¹Stand: Dezember 2021, www.duden.de

1.1 Motivation

In der Zusammenfassung des Berichts des Intergovernmental Panel on Climate Change wird beschrieben, welche verheerenden Auswirkungen eine weitere Steigerung des CO₂-Ausstoßes auf das Weltklima und das zukünftige Zusammenleben haben wird (IPCC 2021). Nach einem Bericht des United Nations Environment Programme ist der Gebäudesektor für rund 38 % der gesamten CO₂-Emissionen weltweit verantwortlich (UNEP 2020). WEIDNER U. A. (2021) stellen fest, dass zur Einhaltung des im Pariser Klimaschutzabkommen vereinbarten Ziels, die globale Erwärmung unter 1,5 K zu halten, unter Berücksichtigung verschiedener Szenarien der Hochbau in Deutschland spätestens im Jahr 2050 CO₂-neutral sein muss. Deshalb müssen die Entwicklungen der nächsten Jahre, insbesondere im Bauwesen, vom Erreichen der CO₂-Neutralität geprägt sein. Konzepte und Lösungen zur Einsparung dieser Emissionen sind gefragt.

Nach WEIDNER U. A. (2021) spielen insbesondere die Emissionen zur Herstellung der Werkstoffe dabei eine entscheidende Rolle, wobei davon rund 70 % auf die tragende Struktur entfallen. Durch die Nutzung erneuerbarer Energien in der Herstellung der Werkstoffe kann bereits eine deutliche Reduktion erzielt werden. Jedoch ergeben sich beispielsweise bei der Zementherstellung CO₂-Emissionen aufgrund der ablaufenden chemischen Prozesse, die nicht mithilfe des Einsatzes erneuerbarer Energien kompensiert werden können. Deshalb müssen zusätzliche Maßnahmen ergriffen werden.

Zwei mögliche Beiträge zur Reduktion des Materialeinsatzes werden im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt und weiter untersucht. Einerseits kann durch weitere Verbesserungen im Leichtbau eine direkte Materialeinsparungen erreicht werden, wenn Bauwerke neu zu erstellen sind, und andererseits kann die Nutzungsdauer von bereits existierenden Gebäuden durch verschiedene nachträgliche Verbesserungen deutlich verlängert werden, sodass der Bedarf eines Neubaus nicht entsteht. Ein Ansatz, der beide Beiträge zur Reduktion des Materialbedarfs positiv beeinflussen kann, ist, Bauwerke in die Lage zu versetzen, sich an veränderte Umgebungsbedingungen anzupassen – adaptiv zu sein. Bauwerke, die in der Lage sind, nach dem Vorbild der Natur auf veränderte Belastungen zu reagieren, können damit einen Beitrag zum Erreichen der Emissionsneutralität leisten.

1.2 Stand der Technik

Im Folgenden werden wesentliche wissenschaftliche Arbeiten und erreichte Meilensteine für den Einsatz adaptiver Tragwerke im Bauwesen vorgestellt. Zusätzlich werden Beschränkungen im heutigen Stand der Technik aufgezeigt, die den Forschungsbedarf

unterstreichen. Die folgende Darstellung des Stands der Technik hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit, es werden hauptsächlich die für die vorliegende Arbeit relevanten Arbeiten vorgestellt.

Zum ersten Mal beschreiben ZUK UND CLARK (1970) die Idee, das Verhalten von tragenden Strukturen durch den Einbau einer veränderlichen Vorspannung an die äußeren Einflüsse anpassen zu können. Darauf folgt eine Vielzahl von Arbeiten, die sich aus der Sicht der Regelungstechnik mit dem Aufbau solcher Systeme und der Kompensation von Verschiebungen infolge von Wind- und Erdbebenanregung von Bauwerken beschäftigt (ROORDA 1975; SAMALI U. A. 1985; YANG UND SAMALI 1983; YAO 1972). ABDEL-ROHMAN UND LEIPHOLZ (1983) vergleichen den Einsatz adaptiver Vorspannung mit den Möglichkeiten aus der Nutzung passiver Schwingungstilger, insbesondere tuned mass dampers, die bereits in Hochhäusern zur Reduktion von Schwingungen verwendet werden.

Die Analyse der Regelung und deren Entwurf wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf dem Tragwerk, das adaptiv gestaltet werden soll und dabei insbesondere auf den strukturmechanischen Eigenschaften des Tragwerks und deren Anpassbarkeit. Einige dieser Eigenschaften werden von WADA (1992) für die Anwendung in der Raumfahrttechnik beschrieben.

Viele Arbeiten beschäftigen sich mit der Kompensation von Schwingungen und Verschiebungen bzw. der Erhöhung der Steifigkeit von Strukturen durch den Einsatz von Aktoren (RAMESH U. A. 1991; SENER U. A. 1993; SOONG UND MANOLIS 1987). Von PELLEGRINO (1986) werden Spannungszustände in Tragwerken beschrieben, die sich ohne äußere Lasten im Gleichgewicht befinden und deshalb als Eigenspannungszustände bezeichnet werden. Außerdem wird beschrieben, dass sich diese Zustände durch den Einsatz von Aktoren erzeugen lassen. Zudem gibt PELLEGRINO (1986) an, wie diese Zustände ermittelt werden können. In vielen weiteren Arbeiten werden damit Verschiebungen in Strukturen reduziert oder kompensiert, ohne dass dabei Schnittgrößen entstehen oder die entstehenden Schnittgrößen gezielt beeinflusst werden (IRSCHIK UND ZIEGLER 2001; KAWAGUCHI U. A. 1996; NYASHIN U. A. 2005; SAEED UND KWAN 2016; YOU 1997). Verschiedene Ziele, die der Aktuierung zugrunde liegen, werden von SENATORE UND REKSOWARDOJO (2020) beschrieben.

Die gezielte Beeinflussung von Schnittgrößen wird beispielsweise von IRSCHIK UND PICHLER (2005) beschrieben, wobei die Verschiebungen im Tragwerk nicht beeinflusst werden sollen. Ansätze zur Homogenisierung der Spannungen bzw. des Ausnutzungsgrads der zulässigen Spannungen in einer Struktur werden beispielsweise von NEUHÄUSER (2014) und BÖHM U. A. (2019) beschrieben. STEFFEN U. A. (2020) beschäftigen sich in aktuellen Arbeiten mit der Aktuierung von Schnittgrößen und den dafür notwendigen Voraussetzungen.

Nach der Kenntnis des Autors zielen diese Arbeiten hauptsächlich auf die Aktuierung von Verschiebungen unter Umständen in Kombination mit der Aktuierung von Schnittgrößen ab. Die Aktuierung von Schnittgrößen, die dafür notwendigen Voraussetzungen und insbesondere die Potentiale, die damit erschlossen werden können, wurde bisher nur in wenigen Arbeiten systematisch betrachtet.

Einen guten Überblick über die Arbeiten im Bereich der adaptiven Strukturen bieten die Arbeiten von SOONG (1988), SOONG UND SPENCER (1992) und KORKMAZ (2011) sowie die Arbeiten mit lehrbuchartigem Charakter LEIPHOLZ UND ABDEL-ROHMAN (1986) und UTKU (1998).

Es existieren bereits mehrere adaptive Tragwerke, deren Realisierung in der Literatur beschrieben ist. EDBERG U. A. (1992) beschreiben die Realisierung eines adaptiven Fachwerkträgers mit dem Einsatz von piezoelektrischen Aktoren. Daneben existiert viel Literatur aus dem Bereich der Sensorik und Aktorik mithilfe des piezoelektrischen Effekts, was aber in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet wird. REINHORN U. A. (1992) beschreibt die Realisierung eines adaptiven Fachwerks, das mit der neueren Realisierung im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 1244, die in WEIDNER U. A. (2018) beschrieben ist, vergleichbar ist. Weitere Beispiele und ein Überblick über bisherige Realisierungen finden sich in KWAN UND PELLEGRINO (1993), TEUFFEL (2004) sowie SENATORE (2016).

Analysemethoden

Im Folgenden werden kurz die wissenschaftlichen Arbeiten vorgestellt, die relevant für die eingesetzte Methodik zur Analyse adaptiver Stabtragwerke sind. KIRSCH (1976) beschreibt die Analyse von adaptiven Tragwerken mit dem Kraftgrößenverfahren. Von ABDEL-ROHMAN UND LEIPHOLZ (1983) wird die Aktuierung von Hochhaustragwerken im Rahmen der direkten Steifigkeitsmethode mithilfe äußerer Kräfte modelliert, die als Gleichgewichtsgruppen aufgebracht werden. PATNAIK UND JOSEPH (1986) analysieren adaptive Strukturen unter Verwendung des Kraftgrößenverfahrens und beschreiben in der Arbeit den Übergang von der standard force method, bei der ein statisch bestimmtes Grundsystem gewählt werden muss, zur integrated force method, bei der die statisch unbestimmten Eigenspannungszustände automatisiert numerisch aus den kinematischen Zusammenhängen abgeleitet werden. Dazu werden die unter anderem von PELLEGRINO (1986) ausführlich vorgestellten fundamentalen Unterräume der Gleichgewichtsmatrix, die in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 2.1.4 vorgestellt wird, eingesetzt. KWAN UND PELLEGRINO (1993) verwenden zur Modellierung der Aktuierung in der direkten Steifigkeitsmethode selbst formulierte Aktorelemente. KAWAGUCHI U. A. (1996) setzen

zur Analyse adaptiver Strukturen eine Matrix ein, die eine große Ähnlichkeit zur Redundanzmatrix aus Abschnitt 3.1.2 aufweist. Mithilfe der Pseudoinversen wird damit die notwendige Aktuierung von Strukturen in einem Schritt so ermittelt, dass sich vorgegebene Elementkräfte und Knotenverschiebungen einstellen. KOŁAKOWSKI U. A. (2008) beschreiben den Gedanken, dass verschiedene Änderungen der Struktur, beispielsweise eine Vorspannung oder Aktuierung, auch als Änderung eines effektiven Querschnitts interpretiert werden können. In aktuellen Arbeiten werden von REKSOWARDOJO (2020) und SACHSE U. A. (2021) adaptive Strukturen bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten analysiert.

Aktorplatzierung

Ein wesentlicher Faktor bei der Analyse adaptive Strukturen in der Entwurfs- und Planungsphase ist die Anordnung der Aktoren im Tragwerk. Dieses Problem kann als binär bezeichnet werden, da jedes Element entweder Aktor oder kein Aktor ist bzw. einen parallel angeordneten Aktor erhält oder nicht. In Tragwerken, in denen viele mögliche Orte für Aktoren existieren, ist die Lösung durch Ausprobieren aller Möglichkeiten aufgrund des kombinatorischen Charakters dieses Problems zu aufwändig. Deshalb gibt es verschiedene Verfahren, das Problem zu lösen.

Die folgenden Arbeiten beschäftigen sich mit der Platzierung von Aktoren zur Anpassung von Verschiebungen und Schnittgrößen in Stabtragwerken im Rahmen der linearen Theorie bei kleinen Verformungen und Verzerrungen. Um Aktoren zur Adaption von Verschiebungen zu platzieren, wird zuerst von HAFTKA UND ADELMAN (1985) der Einsatz heuristischer Algorithmen zur Aktorplatzierung in Stabtragwerken vorgeschlagen. BURDISSO UND HAFTKA (1990) beschreiben einen Ansatz, der auf statistischen Maßen basiert. Viele Verfahren zur Aktorplatzierung beruhen auf dem Einsatz von verschiedenen Einfluss- oder Sensitivitätsmatrizen und daraus abgeleiteten Gütemaßen. DAS U. A. (1991) beschreiben einen Algorithmus zur Aktorplatzierung basierend auf einer Matrix, die Ähnlichkeiten zur gewichteten Redundanzmatrix aus Abschnitt 3.1.2 aufweist. Weitere Verfahren zur Platzierung von Aktoren zur Adaption des Kraftzustands werden von JALIHAL U. A. (1996) und KAWAGUCHI U. A. (1996) vorgeschlagen. In der Arbeit von HOLNICKI-SZULC U. A. (1998) werden mithilfe einer Spannungseinflussmatrix aktive Dämpferelemente platziert, die ihre lokalen Eigenschaften zum Beispiel zur Dissipation von Energie bei außergewöhnlichen Belastungen ändern können. Die im Lastpfadmanagement von TEUFFEL (2004) enthaltene Methodik zur Platzierung der Aktoren basiert ebenfalls auf Einflussmatrizen für Verschiebungen und Schnittgrößen. Einflussmatrizen werden auch beispielsweise von STEFFEN U. A. (2020) in aktuellen Arbeiten untersucht und genutzt. KWAN UND PELLEGRINO (1993) berechnen die optimalen Orte für Aktoren mit dem Gütemaß, dass ein bestimmter Vorspannungszustand mit möglichst

geringen Aktorwegen hergestellt werden soll, wodurch das kombinatorische Problem der Aktorplatzierung in ein beschränktes lineares Optimierungsproblem umgewandelt wird. Die bisher genannten Arbeiten sind rein statischer bzw. quasi-statischer Natur. PADULA UND KINCAID (1995) und PADULA UND KINCAID (1999) stellen Strategien zur Aktorplatzierung mit einem Greedy-Algorithmus und Gütemaßen aus einer Einflussmatrix zur Dämpfung von Vibrationen vor. FURUYA UND HAFTKA (1995) platzieren Aktoren in einer Struktur zur Dämpfung von Vibrationen mit einem genetischen Algorithmus, wobei eine sehr große Anzahl an Auswertungen der Zielfunktion notwendig ist, weshalb dieses Verfahren nicht allgemein anwendbar ist. Aktoren, die große Bewegungen hervorrufen und damit im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Analyse platziert werden müssen, können beispielsweise mithilfe heuristischer Algorithmen platziert werden (MARKER U. A. 2019; SACHSE U. A. 2021).

Nach der Kenntnis des Autors basieren die meisten Algorithmen zur automatisierten Aktorplatzierung auf Optimierungsverfahren, die durch die Kombinatorik des Anordnungsproblems lange Rechenzeiten erfordern. Weiterhin existieren insbesondere im Bereich der Platzierung von Aktoren bisher keine Untersuchungen die auf energetische Aspekte abzielen.

Tragwerksentwurf und Strukturoptimierung

Die Strukturoptimierung von adaptiven Tragwerken unter Berücksichtigung der Möglichkeit zur Aktuierung wird das erste Mal von KIRSCH (1976) im Rahmen einer Querschnittsoptimierung beschrieben. Dabei wird auch ein aus drei Elementen bestehendes Fachwerk diskutiert, das in leicht abgewandelter Form in der vorliegenden Arbeit als Drei-Stab-Tragwerk bezeichnet wird. Weiterhin wird bereits hier die Äquivalenz der Traglast eines Tragwerks und der maximal erreichbaren Last, bei der das Tragwerk durch Aktuierung noch elastisch bleiben kann, erkannt. In der nachfolgenden Arbeit beschreiben KIRSCH UND MOSES (1977) den grundlegenden Gedanken, dass die optimierte adaptive Struktur immer mindestens so gut ist wie die passive Struktur, da der Entwurfsraum im passiven Fall als Spezialfall mit Null-Aktuierung im Entwurfsraum des adaptiven Falls enthalten ist. Mithilfe strukturmechanischer Einsicht in das Problem der Querschnittsoptimierung adaptiver Strukturen entwickelt KIRSCH (1987) den Ansatz, den Prozess in mehrere Einzelschritte zu unterteilen. Dabei werden in einem ersten Schritt, dem equilibrium linear program (ELP), die minimal notwendigen Querschnittswerte nur mithilfe der Statik-Gleichung ermittelt. Die Entwurfsvariablen im ELP sind Querschnittsflächen und Schnittgrößen. Im zweiten Schritt, dem non-linear program, werden Werkstoff- und Kinematik-Gleichungen zusätzlich in der Optimierung berücksichtigt und mithilfe der Aktuierung, die die Entwurfsvariable darstellt, erfüllt. Das Potential zur Masseneinsparung durch Änderung des Kraftzustands in einer Struktur

beim Einsatz von Adaptivität wird mit der eben beschriebenen Methode von KIRSCH (1989) untersucht. Von MESSAC UND MALEK (1992) wird vorgeschlagen, die Parameter der Regelung und die Struktur synchron in einem Optimierungsproblem zu formulieren. Beispiele zur Optimierung von Tragwerken, für die analytische Lösungen existieren, werden von HOLNICKI-SZULC (1995) gezeigt.

SOBEK (2000) beschreibt das Potential selbstanpassender Systeme im Bauwesen als weitreichend und noch nicht überschaubar. Aus dieser Gruppe präsentiert daraufhin TEUFFEL (2004) das Lastpfadmanagement, ein Werkzeug zur Querschnittsoptimierung und zur Formoptimierung von adaptiven Fachwerkstrukturen. Das Verfahren basiert auf der von KIRSCH (1987) vorgeschlagenen Zweischrittlösung. Der erste Ansatz zur Optimierung der Topologie von adaptiven Fachwerken wird darauf aufbauend von LEMAITRE (2008) beschrieben. Darin werden verschiedene Indikatoren eingesetzt, die den Vergleich verschiedener Entwürfe untereinander ermöglichen. Die Querschnittsoptimierung aus dem Lastpfadmanagement wird von SENATORE (2016) um die Minimierung der Gesamtenergie erweitert. Einen guten Überblick über bisherige Ansätze zum Entwurf und zur Optimierung adaptiver Strukturen geben SENATORE U. A. (2019). FRÖHLICH U. A. (2019) beschreiben ein Beispiel zur Optimierung einer adaptiven Struktur, die auch im weiteren Verlauf der Arbeit vorgestellt wird, unter Berücksichtigung dynamischer Effekte und mit dem Ziel der Minimierung des Aktuierungsaufwands.

Von HEIDENREICH (2015) wird die Idee formuliert, die Steifigkeit des Tragwerks durch das Einbringen von Aktuierungsarbeit zu ersetzen und damit die im Material gebundene graue Energie zu minimieren. SENATORE U. A. (2019) verrechnen diese Arbeit und Energie unter zusätzlichen Annahmen, um in der Optimierung ein Minimum dieser aufaddierten Gesamtenergie zu bestimmen. In jüngerer Zeit wurde von WANG UND SENATORE (2020) vorgeschlagen, ein „All-In-One“-Optimierungsproblem zu formulieren, in dem neben den Querschnitten beispielsweise auch die Anordnung der Aktoren optimiert wird. Die Lösung des entstehenden gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblems ist jedoch sehr aufwändig und wird daher nur zur beispielhaften Validierung anderer Verfahren eingesetzt.

REKSOWARDOJO U. A. (2020) beschreiben einen Ansatz zur Optimierung adaptiver Strukturen unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität. Im Bereich der Optimierung von adaptiven Flächentragwerke existieren Arbeiten beispielsweise von MASCHING (2016) und GEISER U. A. (2017). Diese Richtungen werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet.

Nach der Kenntnis des Autors liegt der Fokus in den bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Aufzeigen der methodischen Grundlagen und der Potentiale, die erschlossen werden können. Der Einfluss einzelner strukturmechanischer Charakteristika auf das Ergebnis von Optimierungen und damit auch auf die Potentiale adaptiver Strukturen wur-

de noch nicht systematisch untersucht. Zudem wurde noch nicht systematisch versucht, ein Verständnis für die Auswirkungen verschiedener Einflussfaktoren auf das resultierende adaptive Tragwerk zu entwickeln, um damit den Entwurfsprozess unabhängiger von Blackbox-Optimierungsverfahren zu machen.

1.3 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist die strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken und der Gewinn von Erkenntnissen für den Entwurf und die Optimierung adaptiver Tragwerke aus den beschriebenen Charakteristika.

Der Weg zur Charakterisierung und zum Erkenntnisgewinn beinhaltet unter anderem die Beantwortung folgender grundlegender Fragen:

- Welche strukturmechanischen Voraussetzungen sind für die Anpassungsfähigkeit notwendig und mit welchen Verfahren lassen sich diese unter welchen Annahmen quantifizieren?
- Welche Eigenschaften können adaptiv gestaltet werden?
- Welche strukturmechanischen Eigenschaften adaptiver Strukturen sind günstig für die Adaptivität und sollen deshalb im Entwurf und in der Optimierung angestrebt werden?
- Existieren Charakteristika, die nur in adaptiven und nicht in passiven Tragwerken beobachtet werden?
- Ist eine gute passive Struktur, die nachträglich adaptiv gemacht wird, auch eine gute adaptive Struktur?

Auf dem Weg zur Beantwortung dieser Fragen werden einzelne adaptive Tragwerke im Hinblick auf deren Potential und Performanz untersucht. Die Analyse des Potentials beschäftigt sich damit, was ein adaptives Tragwerk wie gut kann und die Analyse der Performanz damit, mit welchem Aufwand ein Ziel erreicht werden kann.

Weiterhin stellt sich an vielen Stellen die methodische Frage, ob der Einsatz von Blackbox-Optimierungen vermieden werden kann. Bestenfalls können diese mithilfe von strukturmechanischem Problemverständnis durch den Einsatz von anschaulichen Verfahren oder Vorwärtsrechnungen ersetzt werden.

1.4 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 beschreibt die zum Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen aus dem Bereich der Strukturmechanik und der Optimierung und führt insbesondere die verwendeten Schreibweisen ein. Dieses Kapitel liefert die Basis für die Analysen und Studien, die in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden.

Kapitel 3 beschreibt die für die vorliegende Arbeit maßgebenden Charakteristika von Stabtragwerken und dazu Vorgehensweisen, wie diese Charakteristika mithilfe der Methoden aus Kapitel 2 ermittelt werden können. Der Fokus liegt dabei auf den Eigenschaften, die für das Tragverhalten von Stabtragwerken entscheidend sind und deren Anpassbarkeit erzielt werden soll.

In **Kapitel 4** werden adaptive Stabtragwerke vorgestellt. Die Unterschiede in Aufbau und Funktionsweise werden in Abgrenzung zu herkömmlichen Stabtragwerken erläutert. Es werden Möglichkeiten zur Modellierung der Adaptivität vorgestellt, mit deren Hilfe im Anschluss die Anpassbarkeit des Tragwerkszustands und damit der Tragwerkeigenschaften analysiert werden kann. Zudem werden Methoden vorgestellt, die eine optimale Anordnung der Aktoren automatisiert ermitteln können.

Kapitel 5 beschreibt die Studien, in denen anhand von Fallbeispielen für verschiedene adaptive Tragwerke jeweils das Potential und die Performanz systematisch analysiert werden. Dazu wird in vier Abschnitten jeweils ein ausgewählter Aspekt untersucht und in einer abschließenden Synthese werden die jeweiligen Schlussfolgerungen für wünschenswerte und vorteilhafte Eigenschaften und Fähigkeiten diskutiert.

Kapitel 6 fasst die in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Beobachtungen und Erkenntnisse zusammen. Weiterhin werden anhand ausgewählter Aspekte neue Vorschläge dargestellt, wie die vorgestellten Arbeiten zukünftig erweitert und vertieft werden können.

2

Grundlagen

Die Analyse von Tragwerken ist der erste Schritt zum Verständnis der Funktionsweise und der Eigenschaften adaptiver Strukturen. Dazu werden in Abschnitt 2.1 die Grundgleichungen der linearen Strukturmechanik anhand von Fachwerkstrukturen eingeführt. Aufbauend auf der Strukturanalyse werden im weiteren Verlauf der Arbeit mithilfe von Optimierungsverfahren die Auswirkungen von Ausprägungen einiger strukturmechanischer Eigenschaften auf das Potential und auf die Performanz von Strukturen bewertet. Daraus kann ein Verständnis für strukturmechanische Anforderungen an Tragwerke, die adaptiv gestaltet werden sollen, entwickelt werden. Dazu wird in Abschnitt 2.2 zunächst ein Überblick über die Anwendungsbereiche der Strukturoptimierung gegeben. Anschließend werden die in dieser Arbeit auftretenden Problemstellungen und das eingesetzte Optimierungsverfahren vorgestellt.

Die strukturmechanische Betrachtung und die Strukturoptimierung kommen in dieser Arbeit somit als Hilfsmittel zum Einsatz, durch die ein tieferes Verständnis für adaptive Tragwerke und deren Eigenschaften entwickelt wird. Mithilfe des gewonnenen Verständnisses können sowohl der Entwurf als auch der Entwurfsprozess von adaptiven Tragwerken verbessert werden.

Das Kapitel hat nicht den Anspruch, einen vollumfänglichen Überblick über die eingesetzten Methoden und Alternativen zu geben, es dient vielmehr der Einführung von Bezeichnungen und Schreibweisen, insbesondere der formalen Basis der „Matrizenstatik“, die für das Verständnis der Arbeit unerlässlich sind.

2.1 Strukturmechanik

Die Strukturmechanik ist ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik. Die Kontinuumsmechanik wird von ALTENBACH (2015) als eine phänomenologische Feldtheorie beschrie-

ben. Aus Beobachtungen und Experimenten wird dabei eine mathematische Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Kontinua generiert. Die Kontinuumsmechanik umfasst die Beschreibung von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen. Die Strukturmechanik im Speziellen befasst sich mit der mechanischen Beschreibung von Festkörpern, die bestimmte geometrische Grundobjekte darstellen. Die behandelten Festkörper sind beispielsweise Balken oder Fachwerkstäbe, die durch Linien beschrieben werden können, Platten oder Scheiben, die als ebene Flächen beschrieben werden können, sowie Schalen oder Membrane, die im Allgemeinen als gekrümmte Flächen beschrieben werden können. Den Kern der Strukturmechanik bildet dabei die Übertragung der Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik für die Beschreibung des allgemeinen dreidimensionalen Kontinuums auf diese Grundobjekte. Dies wird als Dimensionsreduktion bezeichnet, da die Gleichungen vom dreidimensionalen Kontinuum durch zusätzliche Annahmen auf die eben genannten ein- bzw. zweidimensionalen Geometrien übertragen werden. Diese Reduktion führt nicht zwangsläufig zu einer Vereinfachung der Theorien, jedoch verbessert sich häufig die Lösbarkeit des Problems und es kann tiefere Einsicht in das mechanische Problem gewonnen werden. Beispielsweise ist eine der Eigenschaften, deren Betrachtung diese tiefere Einsicht bietet, der Grad der statischen Unbestimmtheit einer Struktur. Dieser wird in Abschnitt 3.1.1 eingeführt und spielt in der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle. Die Grundlagen im Bereich der Strukturmechanik werden im Folgenden für eine rein statische bzw. quasi-statische und stationäre Betrachtung vorgestellt. Dafür werden Effekte aus der Massenträgheit (statisch bzw. quasi-statisch) und eventuelle zeitabhängige Effekte (stationär) vernachlässigt.

In der Modellbildung wird die Entscheidung getroffen, wie weit abstrahiert werden darf und welche relevanten Effekte abgebildet werden müssen. Dabei gilt das berühmte Zitat von Albert Einstein¹: „*So einfach wie möglich, aber nicht einfacher*“. Stark vereinfachte Modelle bilden das reale Verhalten unter Umständen nicht ausreichend genau ab, jedoch können sehr komplexe Modelle nur schwerer verstanden werden und sowohl Modellierung als auch Simulation und Fehlersuche sind meist deutlich aufwändiger. In der vorliegenden Arbeit werden vorwiegend Fachwerke untersucht, die den Stabtragwerken zugeordnet sind. Fachwerkstrukturen sind aus abschnittsweise geraden Fachwerkstäben aufgebaut, die sich wiederum dadurch auszeichnen, dass zwei Abmessungen (Breite und Höhe) viel kleiner sind als die dritte Abmessung (Länge). Deshalb werden für die Darstellung des strukturmechanischen Modells eines Fachwerks nur die geraden Stabachsen der einzelnen Stäbe verwendet. Zusätzlich sind Annahmen über die Querschnittsflächen und -formen der Elemente sowie über die Verbindungen der einzelnen Stäbe untereinander zur Beschreibung des Tragwerksmodells notwendig. Vereinfachend wird im Rahmen dieser Herleitung angenommen, dass in einem Fachwerkstab zwischen zwei Knoten ein

¹Albert Einstein (1879–1955)

konstanter Querschnitt vorhanden ist. Dem Prinzip von de St. Venant² folgend wird angenommen, dass Effekte aus der Lasteinleitung bzw. Lagerung nach einem kurzen Abklingbereich zu vernachlässigen sind. Da der Fokus dieser Arbeit nicht auf der Analyse und konstruktiven Durchbildung dieser Details liegt, werden lokale Effekte in der Modellierung vernachlässigt. Die Verbindung zwischen den einzelnen, abschnittsweise geraden Fachwerkstäben wird als gelenkig angenommen, in dem Sinne, dass sich zwei Fachwerkstäbe an einem gemeinsamen Knoten reibungsfrei gegeneinander verdrehen können. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass die Rotation eines Fachwerkstabs um seine eigene Achse verhindert ist. Diese wird daher in der Modellierung nicht berücksichtigt. Zusätzlich wird die Lagerung, die beispielsweise das Fundament eines Bauwerks darstellt, als unnachgiebige Festhaltung modelliert.

Der gesamte Zusammenbau der Tragwerkselemente einschließlich der Lagerung wird auch als Tragwerk, System oder statisches System bezeichnet. Da in der vorliegenden Arbeit keine begriffliche Unterscheidung zwischen dem realen Bauwerk und dem reinen Modell vorgenommen wird, werden die Begriffe Tragwerk und Tragwerksmodell bzw. Modell im Folgenden gleichbedeutend verwendet.

Auf das gelagerte Tragwerk wirken Belastungen ein, die als resultierende Einzelkräfte auf die Fachwerkknotten aufgebracht werden. Im Rahmen der hier durchgeführten Betrachtungen von idealen Fachwerken werden nur Knotenlasten und keine verteilten Kraftlasten betrachtet. Jede Knotenlast wirkt dabei zentrisch auf den Knoten, eventuell vorhandene Exzentrizitäten werden nicht berücksichtigt.

Unter dem Begriff Stabtragwerke werden neben den Fachwerkstrukturen zum einen auch Strukturen aus Balken mit biegesteifen Verbindungen zwischen den einzelnen Elementen und zum anderen Strukturen, die aus Fachwerkstäben und Balken aufgebaut sind, zusammengefasst. Die Vorgehensweise zur Analyse von allgemeinen Stabtragwerken unterscheidet sich von der Analyse reiner Fachwerkstrukturen nur durch die Größen von Vektoren und Matrizen sowie durch die Zahlenwerte der Variablen. Jedoch kann dieselbe formale Basis verwendet werden. Deshalb wird die Herleitung der strukturmechanischen Grundgleichungen und dieser formalen Basis im Folgenden am Beispiel des Fachwerks vorgenommen, wodurch eine signifikante Verkürzung und Vereinfachung der Herleitung erzielt werden kann. Die folgenden Abschnitte zu den Grundlagen der Strukturmechanik sind angelehnt an HJELMSTAD (2005), LIVESLEY (1964), ARGYRIS (1957) und STRANG (1986).

²Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886)

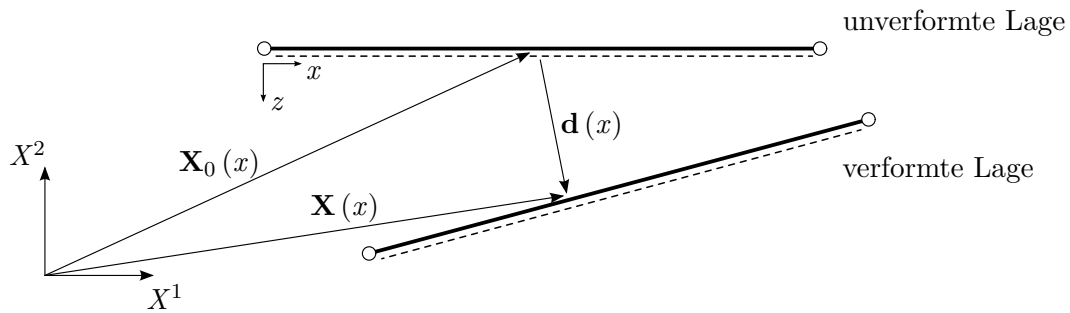


Abbildung 2.1: Fachwerkstab in unverformter und verformter Lage

2.1.1 Bewegung und Verzerrung

Zur Ermittlung der mechanischen Beanspruchung wird in einem ersten Schritt die Bewegung der betrachteten Struktur beschrieben. Diese Bewegung setzt sich im Allgemeinen aus einem Starrkörperanteil, der wiederum aus Rotation und Translation besteht, und einem Formänderungsanteil zusammen.

In Abbildung 2.1 ist die Bewegung eines Fachwerkstabs dargestellt. Für die Beschreibung der auftretenden Größen wird zunächst nur ein globales Koordinatensystem verwendet. Im weiteren Verlauf wird ein lokales (Stab-)Koordinatensystem eingeführt, dessen x -Achse gleich der Systemachse des Fachwerkstabs bzw. der Verbindungslinie der beiden Endpunkte ist. Orthogonal zur Systemachse beschreiben die lokalen y - und z -Achsen die Ebene, in der der Querschnitt des Stabs definiert ist. Bei der Betrachtung von ebenen (zweidimensionalen) Stabtragwerken in einer Ebene beschreibt die gestrichelt dargestellte Faser die positive Richtung der lokalen z -Achse.

Die Verschiebung eines Punktes x wird mithilfe der in Abbildung 2.1 eingeführten Größen als die Differenz der Ortsvektoren in verformter Lage \mathbf{X} und unverformter Lage \mathbf{X}_0 definiert als

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{X}(x) - \mathbf{X}_0(x). \quad (2.1)$$

Wesentlich für die Dimensionsreduktion von Fachwerkstäben ist die Annahme einer konstanten Verschiebung über den Querschnitt, weshalb der Verschiebungsvektor $\mathbf{d}(x)$, der die Bewegung des Stabs beschreibt, nur eine Funktion der lokalen x -Koordinate ist.

Zur Ermittlung der Beanspruchung im Material wird aus den Verschiebungen mithilfe der sogenannten Kinematik-Gleichung die Verzerrung berechnet. Für die eindimensionale Elastizität ist die Verzerrung $\varepsilon(x)$, die auch als Ingenieurdehnung bezeichnet wird, als die Ableitung der Verschiebungsfunktion in Stablängsrichtung $d_x(x)$ nach dem Ort x

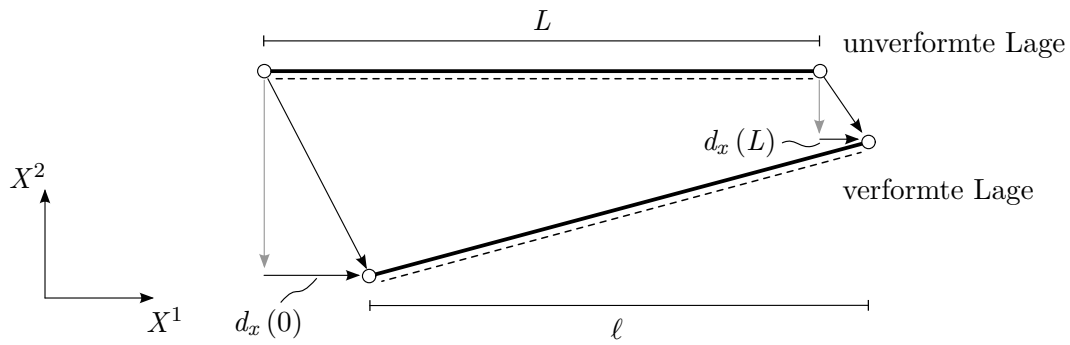


Abbildung 2.2: Längenänderung des Fachwerkstabs bei einer Bewegung

definiert:

$$\varepsilon(x) = \frac{dd_x(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Die Bewegung wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit linearisiert. Daraus ergibt sich der Anteil der Verschiebung, der eine Formänderung hervorruft, immer als Projektion der gesamten Verschiebung auf die Stabachse in der unverformten Lage. Diese Vereinfachung wird auch als Theorie I. Ordnung bezeichnet. Die aktuelle Länge des Stabs in der verformten Lage wird in dieselbe Richtung gemessen wie in der unverformten Lage (siehe Abbildung 2.2). Damit können nur infinitesimal kleine Verformungen ausreichend genau abgebildet werden.

Unter der Annahme einer konstanten Verzerrung entlang der Stabachse, die sich wiederum aus dem konstanten Querschnitt und den aufgebrachtten Knotenlasten ergibt, lässt sich der Formänderungsanteil über den Zusammenhang der Stablängen in verformter und unverformter Lage beschreiben. Bei der Analyse von Fachwerken wird als Verzerrungsgröße die Längenänderung $\Delta\ell$ eines Stabs verwendet. Diese ergibt sich nach Abbildung 2.2 zu

$$\Delta\ell = \ell - L \quad (2.3a)$$

$$= L - d_x(0) + d_x(L) - L \quad (2.3b)$$

$$= d_x(L) - d_x(0). \quad (2.3c)$$

Dabei ist L die Ausgangslänge des Stabs in der unverformten Lage und ℓ die Länge des Stabs in der verformten Lage.

Neben den Knotenlasten existieren weitere Belastungen, die auf den Fachwerkstab einwirken, z. B. aus Temperaturänderung oder aus Fertigungsungenauigkeiten. Diese werden durch eine vorgegebene Längenänderung $\Delta\ell_0$ aus der entsprechenden Belastung berücksichtigt. Die gesamte Längenänderung $\Delta\ell$ eines Fachwerkstabs lässt sich damit

aufteilen in die vorgegebene und die elastische Längenänderung Δl_{el} :

$$\Delta l = \Delta l_{\text{el}} + \Delta l_0. \quad (2.4)$$

Mithilfe der Längenänderung des Stabs wird die Ingenieurdehnung im Fachwerkstab definiert als

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} = \frac{\Delta l_{\text{el}} + \Delta l_0}{L} = \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_0. \quad (2.5)$$

Alternative Verzerrungsmaße, insbesondere zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte, können zum Beispiel HJELMSTAD (2005) entnommen werden.

2.1.2 Werkstoff und Spannung

Die Beschreibung der Bewegung eines Stabs erlaubt die Berechnung der linearisierten Verzerrungen ε bzw. ε_{el} unter der Annahme eines konstanten Verzerrungszustands entlang der Stabachse. Aus den elastischen Verzerrungen können mithilfe von Annahmen über das verwendete Material die auftretende Spannung und die auftretende Normalkraft berechnet werden.

Die Beschreibung des Zusammenhangs von Verzerrung und Spannung erfolgt im Allgemeinen mithilfe des Materialgesetzes, das sich im betrachteten Fall der eindimensionalen linearen Elastizität durch einen Parameter, den Elastizitätsmodul E , ausdrücken lässt. Dieser beschreibt den Zusammenhang von Spannung σ und elastischer Verzerrung ε_{el} in Axialrichtung des Stabs durch

$$\sigma = E\varepsilon_{\text{el}}. \quad (2.6)$$

Aus der im Querschnitt konstanten Verzerrung folgt die im Querschnitt konstante Verteilung der Normalspannung σ . Somit ergibt sich aus der Integration der Spannung über den Querschnitt die vorherrschende Normalkraft N zu

$$\int_A \sigma \, dA = \sigma A = N. \quad (2.7)$$

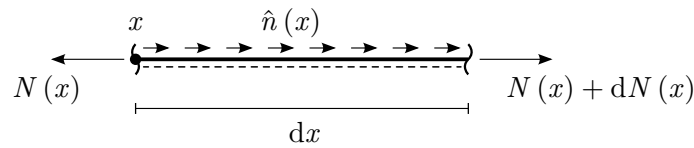


Abbildung 2.3: Infinitesimales Fachwerkelement der Länge dx an der Stelle x mit angreifenden Kräften

Die Normalkraft im Fachwerkelement kann auch in Abhängigkeit von Verzerrungen bzw. Längenänderungen als

$$N = \sigma A = \varepsilon_{\text{el}} EA = (\varepsilon - \varepsilon_0) EA \quad (2.8a)$$

$$= \Delta \ell_{\text{el}} \frac{EA}{L} = (\Delta \ell - \Delta \ell_0) \frac{EA}{L} \quad (2.8b)$$

angegeben werden. Damit können aus der Beschreibung der Bewegung eines Fachwerkstabs die Beanspruchung des Materials und die auftretende Normalkraft ermittelt werden.

2.1.3 Gleichgewicht

Nun kann mithilfe der sogenannten Gleichgewichts- bzw. Statik-Gleichung der Zusammenhang von Normalkräften in der Struktur und äußeren Kräften formuliert werden. Das Gleichgewicht aller Kräfte in x -Richtung an einem infinitesimalen Fachwerkelement der Länge dx ergibt sich aus Abbildung 2.3 zu

$$-N(x) + N(x) + dN(x) + \hat{n}(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -\hat{n}(x). \quad (2.10)$$

Die Ableitung der Normalkraft im Element ist somit gleich der negativen verteilten Normalkraft-Belastung $\hat{n}(x)$. Da nur eine Unbekannte (Normalkraft) und eine Statik-Gleichung (Kräftesumme in x -Richtung) beteiligt sind und daraus sowohl Lösbarkeit als auch eine eindeutige Lösung folgen, werden Fachwerkstäbe auch als innerlich statisch bestimmt bezeichnet. Da die Einwirkung einer verteilten Normalkraft-Belastung in dieser Arbeit ausgeschlossen ist, ergibt sich ein konstanter Normalkraftverlauf $N(x) = N$ entlang der Stabachse.

Zusätzlich zum Gleichgewicht im Stab muss das Gleichgewicht auch an den Rändern des Stabs erfüllt sein. Bei der Lösung von Gleichung (2.10) ergibt sich formal eine Integrationskonstante, die als konstanter Wert der Normalkraft im Stab identifiziert werden

kann, der aus der bzw. den Gleichgewichtsbedingung(en) an den Knoten ermittelt werden kann.

2.1.4 Lösungsverfahren und Randbedingungen

Die vorgestellten Gleichungen beschreiben das Verhalten von Fachwerkstäben unter mechanischen Beanspruchungen. Unter den gewählten Annahmen ist in Spezialfällen die geschlossene Lösung dieser Gleichungen für ganze Fachwerksysteme möglich, im Allgemeinen ist dies jedoch zu aufwändig oder unmöglich. Deshalb werden numerische Verfahren eingesetzt, mit denen eine Näherungslösung für die Gleichungen bestimmt werden kann. Diese Verfahren können beispielsweise aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie hergeleitet werden.

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagt, dass die gesamte potentielle Energie eines geschlossenen Systems ein Minimum aufweist, wenn das System im Gleichgewicht ist (siehe beispielsweise HJELMSTAD (2005)). Die potentielle Energie ergibt sich aus der Verzerrungsenergie Π^{int} und aus dem Potential äußerer Kräfte Π^{ext} zu

$$\Pi = \Pi^{\text{int}} + \Pi^{\text{ext}}. \quad (2.11)$$

Die Bedingung für statisches Gleichgewicht besagt, dass die potentielle Energie ein Minimum aufweisen muss, dass also die Variation des Potentials verschwinden muss:

$$\delta\Pi = 0. \quad (2.12)$$

Die Verzerrungsenergie ergibt sich aus der Integration des Produkts von Spannungen und Verzerrungen über das gesamte Volumen V zu

$$\Pi^{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma(x) \varepsilon(x) \, dV. \quad (2.13)$$

Damit folgt für die gesamte potentielle Energie des Fachwerks unter den getroffenen Annahmen

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma(x) \varepsilon(x) \, dV + \Pi^{\text{ext}} \quad (2.14a)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(x) E \varepsilon(x) \, dV + \Pi^{\text{ext}} \quad (2.14b)$$

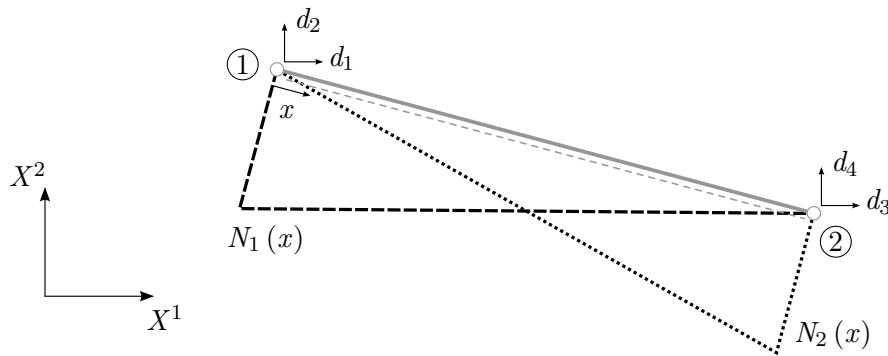


Abbildung 2.4: Definitionen der Verschiebungsfreiheitsgrade und Visualisierung der Formfunktionen

und damit für die Bedingung, dass die potentielle Energie ein Minimum aufweist

$$\delta\Pi = 0 = \frac{1}{2} \int_V \delta\sigma(x) \varepsilon(x) + \sigma(x) \delta\varepsilon(x) \, dV + \delta\Pi^{\text{ext}} \quad (2.15a)$$

$$= \int_V \delta\varepsilon(x) E\varepsilon(x) \, dV + \delta\Pi^{\text{ext}}. \quad (2.15b)$$

Da geschlossene Lösungen für das Variationsproblem (2.15b) nur für Sonderfälle existieren, wird im Allgemeinen eine räumliche Diskretisierung eingeführt. Das Gebiet wird dabei in Teilgebiete zerlegt und für jedes Teilgebiet werden Ansatzfunktionen verwendet, um die Verschiebungsfunktion zu approximieren. Weiterhin werden zur Interpolation der Variation der Verschiebungen dieselben Ansatzfunktionen verwendet, was auch als Bubnow³-Galerkin⁴-Verfahren bezeichnet wird.

Insbesondere für Fachwerke ergibt sich die Gebietszerlegung anschaulich durch die bereits vorgegebene diskrete Struktur des Gebiets. Das heißt, dass jeder Fachwerkstab als ein Element verwendet wird und die Verbindungsstellen als Knoten angesehen werden. Daraus resultieren n_E Elemente und n_K Knoten. Ein einzelnes Fachwerkelement ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Hier werden lineare Ansatzfunktionen für die Verschiebungen und gleichzeitig für die Geometrie eingesetzt (isoparametrisches Konzept). Daraus ergibt sich im Rahmen der hier getroffenen Annahmen (konstanter Querschnitt entlang des Elements und nur Knotenlasten) die exakte Darstellung der Verschiebungsfunktionen, da diese ebenfalls linear sind.

Ein einzelnes Element besitzt zwei Knoten (hier 1 und 2) mit den Koordinaten X_1^1 und X_1^2 von Knoten 1 und X_2^1 und X_2^2 von Knoten 2. Die Verschiebungen der Knoten werden durch global orientierte Freiheitsgrade (FHG) d_1 und d_2 bzw. d_3 und d_4 angegeben. Die

³Ivan Grigorjewitsch Bubnov (1872–1919)

⁴Boris Grigorjewitsch Galerkin (1871–1945)

mathematische Beschreibung der Geometrie $\mathbf{X}(x)$ und die Verschiebungsfunktion $\mathbf{d}(x)$ im Inneren eines Fachwerkelements werden in diskretisierter Form mit dem Kopfzeiger h gekennzeichnet, was hier aufgrund der exakten Repräsentation keine weitere Bedeutung einnimmt. Da ein einzelner Fachwerkstab in dieser Arbeit auch durch ein Fachwerkelement diskretisiert wird, es also keine alternative Diskretisierung mit einer anderen Anzahl an Elementen bzw. einer anderen Elementgröße gibt, wird dieser Kopfzeiger nicht als Variable betrachtet und deshalb nicht kursiv geschrieben. Als Formfunktionen, mit denen sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen diskretisiert werden, werden hier beispielhaft die linearen Funktionen

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.16)$$

verwendet, die im lokalen Elementkoordinatensystem definiert sind und in die Matrix der Formfunktionen $\mathbf{N}(x)$ einsortiert werden:

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Eine Visualisierung der Formfunktionen kann Abbildung 2.4 entnommen werden. Damit ergeben sich die Funktionen, von denen die Geometrie und die Verschiebungen beschrieben werden, aus der Interpolation der entsprechenden Knotenwerte durch

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{X}^h(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{X} \quad \text{und} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{d}^h(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{d}_E, \quad (2.19)$$

mit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_E = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Die linearen Interpolationsvorschriften in Gleichungen (2.18) und (2.19) liefern für Fachwerke unter den getroffenen Annahmen die exakten Funktionen und verursachen damit keinen Diskretisierungsfehler.

Für die Ermittlung der Verzerrung ist der Anteil der Verschiebungen in Stablängsrichtung relevant. Dieser wird aus den Verschiebungen mithilfe einer Projektion berechnet. Aus dem linearen Verlauf der Verschiebungsfunktion ergibt sich im Element eine konstante Verzerrung, die durch Integration in eine Stablängenänderung umgerechnet werden kann. Dadurch kann der Zusammenhang von Verschiebung und Längenänderung

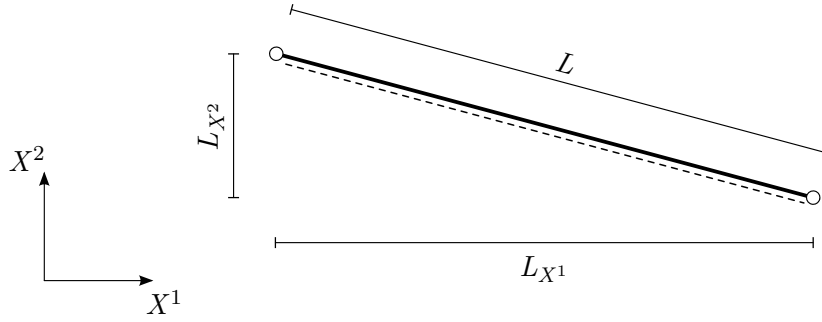


Abbildung 2.5: Darstellung der projizierten Längen

für ein Element zusammengefasst werden zu

$$\Delta \ell = \mathbf{a} \mathbf{d}_E \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{L} = \frac{1}{L} \mathbf{a} \mathbf{d}_E, \quad (2.21)$$

mit dem Zeilenvektor

$$\mathbf{a} = \left[-\frac{d\mathbf{X}(x)}{dx} \quad \frac{d\mathbf{X}(x)}{dx} \right] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -L_{X^1} & -L_{X^2} & L_{X^1} & L_{X^2} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Dabei stellen L_{X^1} und L_{X^2} die projizierten Längen des Fachwerkelements in die globalen Koordinatenrichtungen X^1 und X^2 dar (siehe Abbildung 2.5). Die Größe \mathbf{a} bzw. \mathbf{a}/L wird im Rahmen der Finite-Elemente-Methode, deren Zusammenhang mit dem hier beschriebenen Vorgehen später erläutert wird, häufig als diskreter B-Operator bzw. strain displacement matrix bezeichnet.

Nach dem Einsetzen in das Variationsproblem (2.15b) kann das Integral über das gesamte Gebiet durch die Summe von Integralen über alle Teilgebiete bzw. Elemente ersetzt werden. Dafür werden die für ein einzelnes Element hergeleiteten Größen nun für ein beliebiges Element i der Fachwerkstruktur eingesetzt. Damit ergibt sich für die diskretisierte schwache Form:

$$\delta \Pi^h = \sum_{i=1}^{n_E} \delta \mathbf{d}_{E,i}^T \mathbf{a}_i^T \frac{EA_i}{L_i} \mathbf{a}_i \mathbf{d}_{E,i} + \delta \Pi^{\text{ext},h}(\mathbf{d}_{E,i}) = 0. \quad (2.23)$$

Die Darstellung in Matrix-Form für das gesamte Fachwerk ergibt sich daraus mithilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung zu

$$\underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}}_{=\mathbf{K}} \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^K. \quad (2.24)$$

Dabei enthält die Matrix \mathbf{A} alle Elementvektoren \mathbf{a}_i mit der entsprechenden Zuordnung zur globalen Nummerierung der Verschiebungen aller Knoten. Die resultierende Größe

der Matrix \mathbf{A} ist für das ebene Beispiel $n_E \times 2n_K$. Die Matrix \mathbf{C} ist eine Diagonalmatrix der Größe $n_E \times n_E$, deren Hauptdiagonaleinträge den Dehnsteifigkeiten der Elemente entsprechen:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{EA_2}{L_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_{n_E}}{L_{n_E}} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Der Vektor \mathbf{d} enthält alle Knotenverschiebungen und hat damit für ein ebenes Problem die Dimension $2n_K$. Der Vektor der äußeren Knotenkräfte \mathbf{f}_{ext} kann analog aus Gleichung 2.14b hergeleitet werden. Sowohl in den Beschreibungen als auch in den Implementierungen der Methode ist die Herleitung und Berechnung der Systemsteifigkeitsmatrix auf Systemebene aus den Matrix-Produkten nach Gleichung (2.24) aus verschiedenen Gründen nicht üblich, jedoch bilden diese Art der Betrachtung und die Einführung der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} im weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Hilfsmittel.

Üblicherweise kommt das im Folgenden angedeutete Verfahren zum Einsatz, bei dem eine andere Reihenfolge der Einzelschritte dieselbe Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} ergibt. Für ein einzelnes Fachwerkelement i in horizontaler Lage (parallel zu X^1) kann die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_i zu

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_i^T (\mathbf{C})_{i,i} \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{EA_i}{L_i} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

berechnet werden.

Anstelle des Zusammenbaus von \mathbf{A} und dem Ausführen der Matrix-Produkte auf Systemebene können auch die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{k}_i nach einer entsprechenden Vorschrift zur Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} assembliert werden. Diese Methode wurde von LEVY (1953) und TURNER U. A. (1956) als direct stiffness method bzw. direkte Steifigkeitsmethode (DSM) eingeführt (siehe auch ARGYRIS (1957)). Ein detaillierter Überblick über die daraus hervorgehende Entwicklung der Finite-Elemente-Methode (FEM), in der die beschriebene Vorgehensweise für beliebige Strukturelemente formalisiert ist, kann FELIPPA (2001) entnommen werden. Die Vorgehensweise, vorher berechnete Elementsteifigkeitsmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix zusammenzubauen, bringt insbesondere bei Modellen, die aus unterschiedlichen Elementtypen aufgebaut sind, eine deutliche Erleichterung.

Es existieren verschiedene Wege, Gleichung (2.24) herzuleiten. Der vorgestellte Weg ist direkt übertragbar auf andere Elementtypen mit anderen physikalischen Eigenschaften und zusätzlich gut erweiterbar um zusätzliche Bedingungen, wie in Abschnitt 4.2.2 gezeigt wird. Jedoch ist dieser Weg nur möglich, wenn dem mechanischen Problem ein Potential zugrunde liegt. Die hier präsentierte Herleitung und Vorgehensweise lässt sich analog auch für Balken durchführen, bei denen entsprechend zusätzliche Anteile aus Biegung (Bernoulli-Balkentheorie) und gegebenenfalls aus Querschub (Timoschenko-Balkentheorie) berücksichtigt werden müssen.

Für die Ermittlung der Verschiebungen aus Gleichung (2.24) ist es erforderlich, die Randbedingungen für die Verschiebungen aus Lagerung zu berücksichtigen. Die kann formal an verschiedenen Stellen im Ablauf der Berechnung erfolgen, führt jedoch stets zum selben Ergebnis. Einerseits können Festhaltungen in der zusammengesetzten Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und entsprechend in den Vektoren \mathbf{d} und \mathbf{f}_{ext} durch Streichen der Zeilen und Spalten, die zu festgehaltenen Freiheitsgraden gehören, berücksichtigt werden. Damit ergibt sich für die Anzahl der Einträge von \mathbf{d} und \mathbf{f}_{ext} für ein zweidimensionales Beispiel jeweils $2n_K - n_L$, wobei n_L die Anzahl der durch Lager festgehaltenen Verschiebungsfreiheitsgrade beschreibt. Alternativ zur nachträglichen Verkleinerung von \mathbf{K} können bereits aus der Matrix \mathbf{A} die entsprechenden Spalten gestrichen werden. Wenn nicht explizit anders angegeben, wird im Folgenden angenommen, dass zur Berücksichtigung der Randbedingungen bereits entsprechende Spalten aus der Matrix \mathbf{A} entfernt wurden und dadurch Gleichung (2.24) eindeutig lösbar ist.

Durch die Lösung von Gleichung (2.24) werden die auftretenden Knotenverschiebungen \mathbf{d} ermittelt, aus denen Verzerrungen, Spannungen und innere Kräfte rückgerechnet werden können. Da die Knotenverschiebungen durch die Lösung von Gleichung (2.24) direkt ermittelt werden, werden diese als primäre Variablen und die Vorgehensweise als Verschiebungsgrößenverfahren bzw. displacement method bezeichnet. Es existieren auch verschiedene Ansätze, die als primäre Variablen z. B. Normalkräfte in bestimmten Stäben bzw. im Allgemeinen bestimmte Kraftgrößen verwenden. Eine solche Methode kann analog aus Gleichung (2.14b) hergeleitet werden und wird folgerichtig mit dem Begriff Kraftgrößenverfahren bzw. force method bezeichnet.

Das auf Gleichung (2.24) basierende Rechenmodell kann wiederum in die zugrunde liegenden Gleichungen zerlegt und in einem sogenannten Tonti⁵-Diagramm dargestellt werden. Das Tonti-Diagramm für die Analyse von Fachwerken in diskretisierter Form nach geometrisch linearer, eindimensionaler Elastizitätstheorie ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Darin treten die Statik-, die Kinematik- und die Werkstoff-Gleichung in matrizieller Form auf Systemebene auf. Diese Gleichung stellen die verbindenden Elemente zwischen den Knotenverschiebungen \mathbf{d} , den Knotenlasten $\mathbf{f}_{\text{ext}}^K$ und den auf Systemebene

⁵Enzo Tonti (geb. 1935)

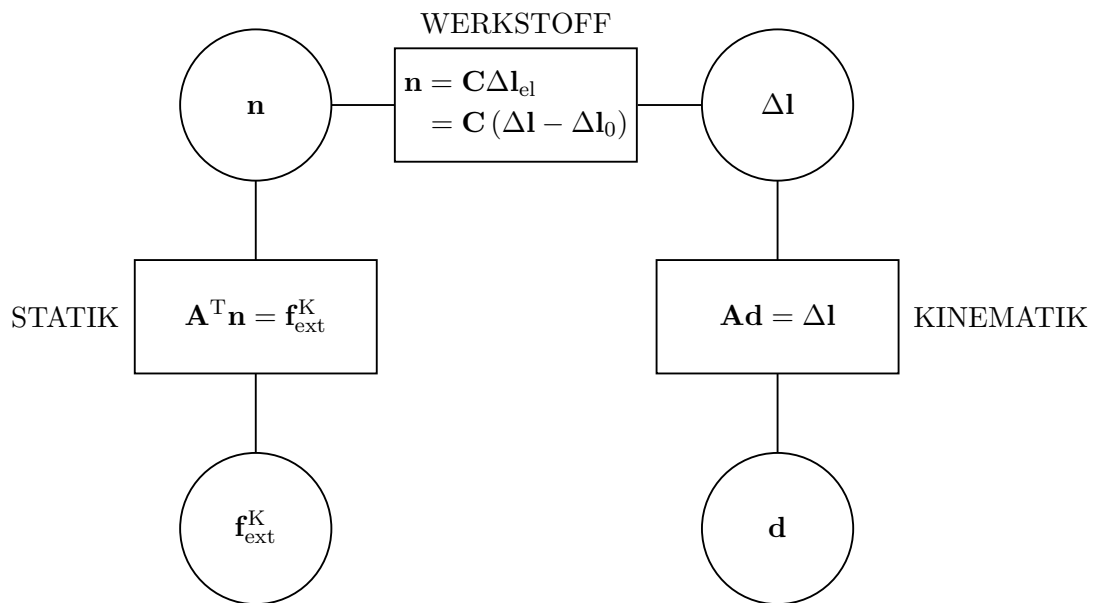


Abbildung 2.6: Tonti-Diagramm der Fachwerkanalyse am diskretisierten Gesamtsystem nach geometrisch linearer eindimensionaler Elastizitätstheorie

in Vektoren gesammelten Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}$ sowie Normalkräften \mathbf{n} dar. Dabei haben die Vektoren \mathbf{d} und $\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}$ die Dimension $\mathbb{R}^{n_{\text{FHG}}}$, wobei n_{FHG} die Anzahl der nicht gehaltenen Verschiebungsfreiheitsgrade beschreibt, und die Vektoren $\Delta \mathbf{l}$ und \mathbf{n} haben die Dimension $\mathbb{R}^{n_{\text{E}}}$.

Im Tonti-Diagramm werden üblicherweise auch Randbedingungen für die entsprechenden Variablen angegeben. Hier tauchen jedoch die Gleichungen unter Verwendung der reduzierten \mathbf{A} -Matrix bereits ohne die gelagerten Freiheitsgrade auf, weshalb die Verschiebungsrandbedingungen bereits implizit berücksichtigt sind und deshalb nicht mehr explizit angegeben sind. Die einwirkenden Kraftlasten können in der gewählten Darstellung bereits als Randbedingungen interpretiert werden.

Diese Art der Darstellung bietet eine übersichtliche Anordnung der auftretenden Variablen und einen Überblick über deren Zusammenhang mit den vorhandenen Gleichungen auf Systemebene. Die Statik-Gleichung beschreibt für jeden Freiheitsgrad den Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung und den Normalkräften in den angeschlossenen Elementen. Die Werkstoff-Gleichung stellt für jeden Stab den Zusammenhang zwischen Längenänderung und Normalkraft her. Die Kinematik-Gleichung beschreibt für jeden Stab den Zusammenhang zwischen Knotenverschiebungen und gesamter Stablängenänderung. Durch Einsetzen und Umformen der Gleichungen kann die bereits bekannte Gleichung (2.24) ermittelt werden. Weiterhin lassen sich nun die Auswirkungen von vorgegebenen Stablängenänderungen einfach quantifizieren. Für die Verschiebungen infolge

äußerer Lasten und vorgegebener Stablängenänderungen ergibt sich

$$\mathbf{d} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^K + \mathbf{A}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0). \quad (2.27)$$

Die Normalkräfte am Gesamtsystem ergeben sich mithilfe der elastischen Längenänderungen zu

$$\Delta \mathbf{l}_{\text{el}} = \mathbf{A} \mathbf{d} - \Delta \mathbf{l}_0 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_{\text{el}} = \mathbf{C} \left(\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^K + \mathbf{A}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0) - \Delta \mathbf{l}_0 \right). \quad (2.29)$$

Mit den Gleichungen (2.27) und (2.29) lassen sich für beliebige Kombinationen aus äußeren Lasten $\mathbf{f}_{\text{ext}}^K$ und vorgegebenen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ die Verschiebungen und die Beanspruchungen in einer Fachwerkstruktur bestimmen.

2.2 Tragwerksentwurf und Strukturoptimierung

Die Tragwerksanalyse nach der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Methode erfordert, dass die Lage der Knoten, deren Verbindungen mit Elementen sowie die Querschnitte und Materialien der Elemente bereits bekannt sind. Der Entwurf und die Auslegung bzw. Bemessung eines Tragwerks sind die wesentliche Aufgabe der Tragwerksplanung. Diese Aufgabe gliedert sich für ein herkömmliches Tragwerk nach GERBER (2010) in folgende Einzelschritte:

- 1) Festlegung der geometrischen Form unter gegebenen Randbedingungen,
- 2) Entwurf eines statischen Systems für die festgelegte Geometrie,
- 3) Auswahl geeigneter Materialien,
- 4) Berechnung der Beanspruchungen der Elemente und
- 5) Dimensionierung aller Elemente.

Der Prozess zur Lösung dieser Aufgabe für herkömmliche Strukturen ist ein kreativer, iterativer und interdisziplinärer Vorgang, in dem Entwürfe erzeugt und schrittweise verbessert werden. Dabei werden sowohl rein subjektive – häufig optische – Kriterien, als auch objektive Maßzahlen herangezogen. Für weniger durch ästhetische Eindrücke sondern durch objektive Maßzahlen geprägte Problemstellungen kann dieser Prozess als mathematisches Optimierungsproblem formalisiert und mithilfe geeigneter Methoden gelöst werden. So ergibt sich die Möglichkeit, einen im gewählten Maß optimierten

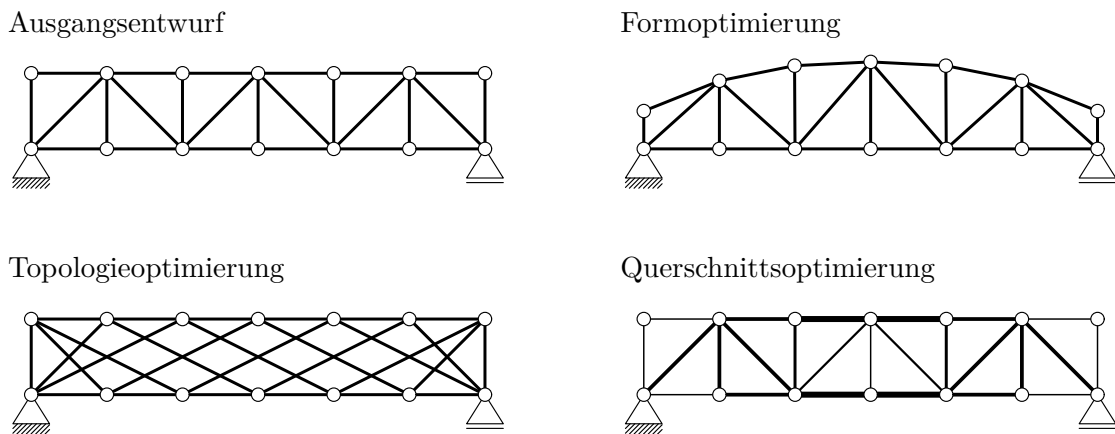


Abbildung 2.7: Unterteilung der Strukturoptimierung von Fachwerken

Entwurf zu ermitteln, wo ein händisches Ausprobieren aller Möglichkeiten aufwändiger wäre.

Nach HARZHEIM (2019) sind für die erfolgreiche Anwendung der Optimierungsverfahren eine tiefe Kenntnis und ein gutes Verständnis des mechanischen Modells notwendig, das für die vorliegende Arbeit in Kapitel 2.1 beschrieben wird. Optimierungsverfahren können nur Lösungen finden, die das zugrunde liegende Modell zulässt, deshalb müssen insbesondere Beschränkungen und Schwächen der Modellierung bekannt sein und Ergebnisse auf Plausibilität geprüft werden.

2.2.1 Untersuchte Problemstellungen

Nach RAMM u. A. (1998) untergliedert sich die Strukturoptimierung in die Topologieoptimierung, die Formoptimierung und die Querschnittsoptimierung. Abbildung 2.7 veranschaulicht diese verschiedenen Unterdisziplinen skizzenhaft. Dabei können die Unterdisziplinen den erwähnten fünf Einzelschritten des Entwurfsprozesses zugeordnet werden.

Bei der Formoptimierung bleibt der Zusammenbau des Systems aus Elementen gleich, jedoch werden durch den Optimierungsalgorithmus die Koordinaten der Knoten und damit die Form der Struktur verändert, was formal Schritt 1 entspricht. In der Topologieoptimierung wird die Lage der Knoten erhalten, Anzahl und Anordnung der Elemente werden vom Optimierungsalgorithmus verändert, was als Schritt 2 identifiziert werden kann. Bei der Querschnittsoptimierung (auch Dimensionierung oder sizing) sind die Anzahl sowie die Anordnung der Elemente und die Lage der Knoten unveränderlich und die notwendigen Querschnittsgrößen wie z. B. Querschnittsflächen und/oder Flächenträgheitsmomente werden vom Optimierungsalgorithmus verändert. Dies entspricht den

Schritten 4 und 5 des Entwurfsprozesses. Somit können Topologie- und Formoptimierung hauptsächlich den ersten beiden Einzelschritten des herkömmlichen Tragwerksentwurfs und die Querschnittsoptimierung den letzten beiden Einzelschritten zugeordnet werden. Die Materialauswahl kann entweder händisch erfolgen oder beispielsweise in die Querschnittsoptimierung integriert werden. Ebenso kann eine Optimierung des Materials durchgeführt werden, die jedoch in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet wird.

Subjektive, ästhetische Kriterien sind nur schwer mathematisch quantifizierbar und können damit nicht in der Optimierung berücksichtigt werden. Stattdessen können beispielsweise Entwurfswerkzeuge, wie z. B. Agentensysteme, zum Einsatz kommen, die eine interaktive Zusammenarbeit zwischen dem Entwerfenden und einem Algorithmus ermöglichen, sodass dadurch eine direkte Einflussnahme auf den Entwurf während des Optimierungsprozesses erfolgen kann (GROENEWOLT U. A. 2018). Außerdem können weitere Kriterien durch eine Mehrkriterienoptimierung berücksichtigt werden, in der verschiedene Ziele unterschiedlich gewichtet zu paretooptimalen⁶ Entwürfen führt.

In der vorliegenden Arbeit werden für die strukturmechanischen Modelle von Fachwerken Querschnittsoptimierungen durchgeführt. Form- und Topologieoptimierungen werden in dieser Arbeit nur am Rande weiter betrachtet. Die Tragwerke werden im Hinblick auf Masse, Tragfähigkeit, Adaptierbarkeit und Verformungen optimiert. Im Rahmen dieser Arbeit zielt die Anwendung von Optimierungsverfahren nicht auf den Entwurf eines Tragwerks zur unmittelbaren Realisierung ab, sondern vielmehr auf die Auswertung und den Vergleich der erhaltenen optimierten Strukturen.

2.2.2 Problemformulierung und mathematische Optimierung

Die mathematische Optimierung hat ihre Ursprünge in der Variationsrechnung, die Mitte des 18. Jahrhunderts hauptsächlich von Leonhard Euler⁷ und Joseph-Louis Lagrange⁸ entwickelt wurde. Die vorgestellten Inhalte zu mathematischen Optimierungsverfahren sind angelehnt an die Darstellungen in HARZHEIM (2019), NOCEDAL UND WRIGHT (2006), FLETCHER (2013), KIRSCH (1993) und BLETZINGER (1990).

In der folgenden allgemeinen Beschreibung eines Optimierungsproblems soll für eine Zielfunktion f der Vektor der Entwurfsvariablen \mathbf{s} so bestimmt werden, dass der Funktionswert $f(\mathbf{s})$ minimal ist. Eine Entwurfsvariable s_i kann im Allgemeinen beispielsweise ein Querschnittswert, eine Knotenkoordinate oder eine topologische Information repräsentieren. Ein Minimierungsproblem mit einer beliebigen skalarwertigen Zielfunktion

⁶Vilfredo Pareto (1848–1923)

⁷Leonhard Euler (1707–1783)

⁸Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

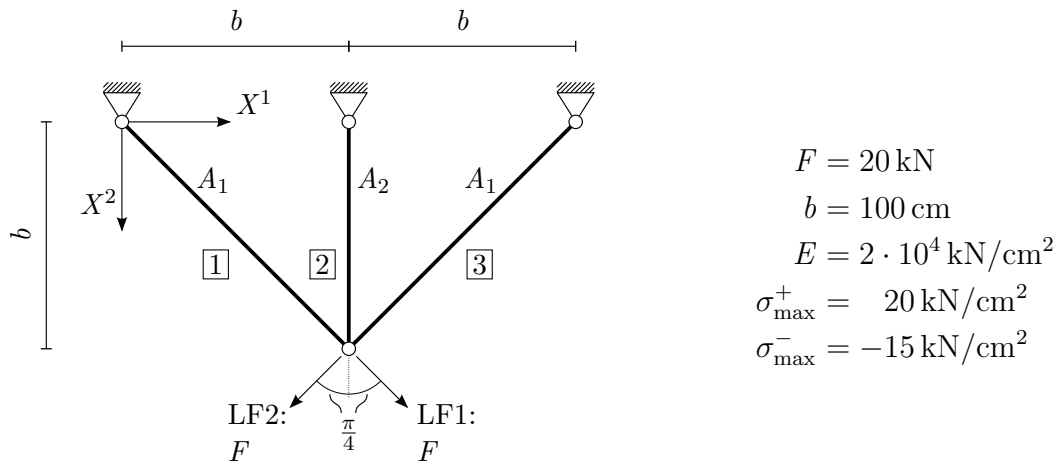


Abbildung 2.8: Drei-Stab-Tragwerk für die Querschnittsoptimierung

wird im Allgemeinen wie folgt angegeben:

$$\min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \tag{2.30}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq \mathbf{0}, \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g} \tag{2.31a}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h} \tag{2.31b}$$

im Bereich

$$\mathbf{s}_u \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_o. \tag{2.32}$$

Der zulässige Bereich, in dem sich Lösungen befinden dürfen, wird dabei sowohl durch n_h Gleichheitsnebenbedingungen $\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$, als auch durch n_g Ungleichheitsnebenbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq \mathbf{0}$ sowie durch Begrenzungen des zulässigen Wertebereichs der Entwurfsvariablen nach oben \mathbf{s}_o und nach unten \mathbf{s}_u beschränkt. Der zulässige Wertebereich der Entwurfsvariablen wird dabei auch als Entwurfsraum bezeichnet. Ziel ist es, die Werte für die Entwurfsvariablen so zu bestimmen, dass die Zielfunktion im zulässigen Bereich minimal wird. In realistischen Anwendungen ergibt sich häufig die Problematik, dass die Zielfunktion zwar ein globales Minimum, daneben jedoch auch lokale Minima besitzt.

Für manche Anwendungen kann es sinnvoll sein, eine bestimmte Zielfunktion $\bar{f}(\mathbf{s})$ zu maximieren, wobei sich jedoch jedes Maximierungsproblem durch

$$\max_{\mathbf{s}} \bar{f}(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s}} (-\bar{f}(\mathbf{s})) \tag{2.33}$$

in ein Minimierungsproblem überführen lässt.

Ein häufig beschriebenes Beispiel für die Formulierung der Dimensionierung einer Struktur mithilfe der mathematischen Optimierung ist das 3-Stab-System, das von RAZANI (1965) und KIRSCH (1976) beschrieben wird und im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit an mehreren Stellen herangezogen wird. Das statische System mit Randbedingungen und Lasten ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Das einfach statisch unbestimmte Fachwerk wird unter Berücksichtigung von zwei Lastfällen LF1 und LF2 optimiert. Dabei wird angenommen, dass die beiden Lastfälle nicht gleichzeitig auftreten. Die Zielfunktion ist das Volumen der Struktur, das minimiert werden soll. Der Entwurfsraum wird auf den physikalisch sinnvollen Bereich positiver Querschnitte eingeschränkt. Eine verschwindende Querschnittsfläche mit dem Wert Null und damit ein „Wegnehmen“ des Stabs wird in diesem Beispiel explizit ausgeschlossen. Die Nebenbedingungen beschränken den Bereich der zulässigen Spannungen in den Stäben, die durch die Festigkeit des Materials auf Zug σ_{\max}^+ und auf Druck σ_{\max}^- vorgegeben werden. Dabei ist σ_{\max}^- die maximal zulässige Druckspannung als negativer Wert. Aufgrund der Symmetrie des Tragwerks und der Eigenschaft, dass die beiden Lastfälle ebenfalls eine Symmetrie aufweisen, wird die Symmetrie der Lösung angenommen. Dadurch kann die Anzahl der Entwurfsvariablen auf zwei reduziert werden und nur einer der beiden Lastfälle muss analysiert werden. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie das Optimierungsproblem für LF1: Minimiere das Volumen V der Struktur

$$\min_{\mathbf{s}} V(\mathbf{s}), \quad V(\mathbf{s}) = A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_1 L_3, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

unter der Spannungsnebenbedingung

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\mathbf{s}) - \sigma_{\max}^+ \\ \sigma_2(\mathbf{s}) - \sigma_{\max}^+ \\ \sigma_3(\mathbf{s}) - \sigma_{\max}^+ \\ -\sigma_1(\mathbf{s}) + \sigma_{\max}^- \\ -\sigma_2(\mathbf{s}) + \sigma_{\max}^- \\ -\sigma_3(\mathbf{s}) + \sigma_{\max}^- \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Die Spannungen in den Elementen können geschlossen zu

$$\sigma_1(\mathbf{s}) = \frac{20A_1^2\sqrt{2} + 20A_2^2\sqrt{2} + 60A_1A_2}{(A_2\sqrt{2} + A_1)(\sqrt{2}A_1 + 2A_2)A_1}, \quad (2.36a)$$

$$\sigma_2(\mathbf{s}) = \frac{20}{A_1 + \sqrt{2}A_2} \quad \text{und} \quad (2.36b)$$

$$\sigma_3(\mathbf{s}) = -\frac{20A_2}{A_1(\sqrt{2}A_1 + 2A_2)} \quad (2.36c)$$

ermittelt werden. Die zulässige Bereich der Entwurfsvariablen wird durch

$$A_j > 0 \quad \forall j \in [1,2] \tag{2.37}$$

angegeben.

Abbildung 2.9 zeigt eine Visualisierung des Optimierungsproblems im relevanten Ausschnitt aus dem Entwurfsraum. Die rot hinterlegte Fläche beschreibt den zulässigen Bereich. Dabei beschreiben die schwarzen Kurven genau die Grenzen, an denen bestimmte Ungleichheitsnebenbedingungen aktiv werden, d. h. deren Funktionswerte identisch null werden. Die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen sind neben der Darstellung angegeben. Die grauen Linien stellen die Höhenlinien der Zielfunktion dar. Das Optimum kann für diesen Fall bereits aus der Abbildung für $A_1^* \approx 0,79 \text{ cm}^2$ und $A_2^* \approx 0,40 \text{ cm}^2$ zu $V^* \approx 263,4 \text{ cm}^3$ bestimmt werden. Dabei werden optimierte Werte für die Entwurfsvariablen und alle im gefundenen Optimum ausgewerteten Größen mit dem Kopfzeiger * versehen.

Das gefundene Optimum zeichnet sich dadurch aus, dass nur eine Ungleichheitsnebenbedingung aktiv ist. Die sogenannte aktive Menge, also die Menge aller im Optimum aktiven Ungleichheitsnebenbedingung, beinhaltet in diesem Fall nur die Nebenbedingung (a). Mechanisch betrachtet bedeutet das, dass bei der Analyse von LF2 genau symmetrisch dazu die Nebenbedingung (c) von Stab 3 aktiv wäre und damit dieser Stab voll ausgenutzt wäre. Stab 2 wird in der optimierten Struktur nicht voll ausgenutzt. Die Nebenbedingung (b) bleibt inaktiv.

Bei dem Beispiel handelt es sich formal um ein mehrdimensionales, beschränktes, nicht-lineares, kontinuierliches, monokriterielles Optimierungsproblem. Die Kategorisierung der Problemstellung in ein- bzw. mehrdimensional ergibt sich aus der Anzahl der Entwurfsvariablen. Die Unterteilung in beschränkt bzw. unbeschränkt ergibt sich aus der Fragestellung, ob der zulässige Bereich durch Nebenbedingungen eingeschränkt wird. Die Eigenschaft nichtlinear beschreibt die Art der Abhängigkeit der Zielfunktion und der Nebenbedingungen von den Entwurfsvariablen. Weiterhin wird in kontinuierliche und diskrete Optimierungsprobleme unterschieden, die sich im zulässigen Wertebereich für die Entwurfsvariablen unterscheiden. Beispiele für diskrete Optimierungsprobleme sind die Optimierung einer Anzahl, wobei der Entwurfsraum auf die Menge der natürlichen Zahlen $s \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, oder die Festlegung eines bestimmten Querschnittstyps, wobei aus einer vorgegeben Menge $s \in [\text{IPE180}; \text{IPE200}; \dots]$ ausgewählt werden muss. Die Querschnittswerte im vorliegenden Beispiel können auch beliebige Zwischenwerte annehmen und sind deshalb kontinuierliche Entwurfsvariable. Kann keine eindeutige Zielfunktion identifiziert werden oder soll eine Zielfunktion im Hinblick auf mehrere, sich evtl. widersprechende Kriterien optimiert werden, dann spricht man im Gegensatz zur monokriteriellen Optimierung von einer multikriteriellen Optimierung.

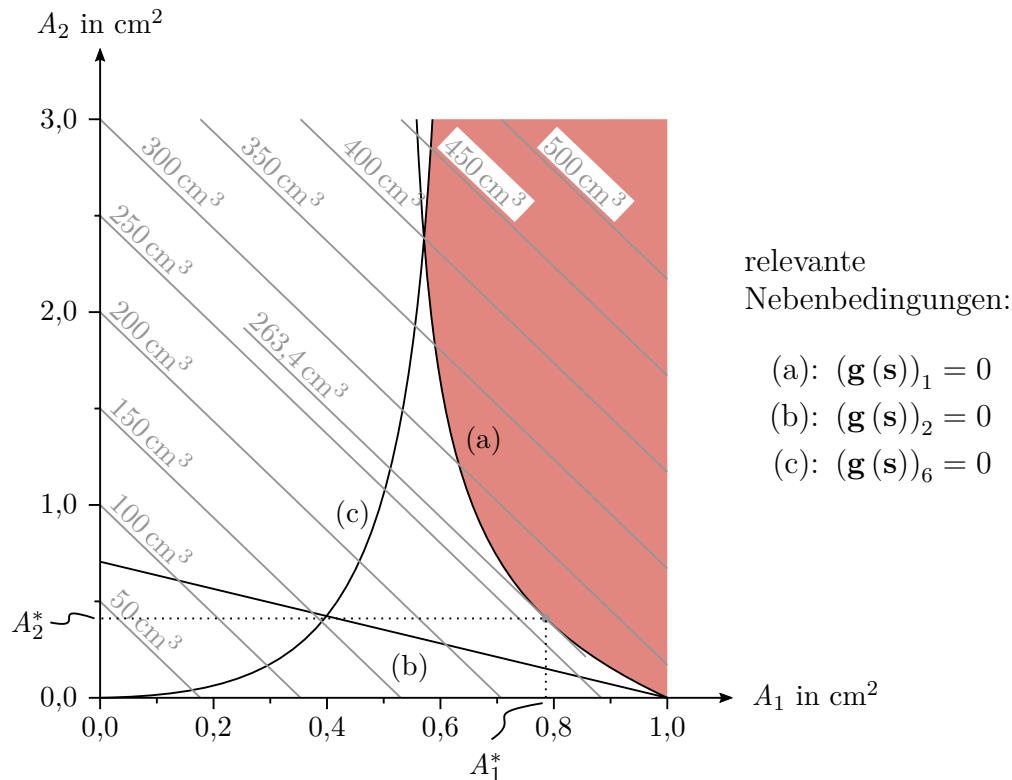


Abbildung 2.9: Visualisierung des Volumenminimierungsproblems des Drei-Stab-Tragwerks

Aus der Formulierung einer Zielfunktion als eine gewichtete Summe der verschiedenen Ziele kann durch mehrere Optimierungen mit einer unterschiedlichen Wahl der Gewichte eine Pareto-Front ermittelt werden. Durch die Festlegung der Gewichte existiert dabei für jede Optimierung eine eindeutige Zielfunktion und mithilfe der entstehenden Pareto-Front kann die Entscheidung für eine bestimmte Gewichtung der Ziele getroffen werden. Diese Paretooptimierung wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet.

2.2.3 Lösungsverfahren

Es existieren verschiedene Verfahren zur Lösung der verschiedenen Klassen von Optimierungsproblemen. Die Klasse von Problemen, die in der vorliegenden Arbeit gelöst werden sollen, wird bereits durch das Beispiel aus Abschnitt 2.2.2 eingeführt. Als Entwurfsvariable dienen dabei nur Größen, die in bestimmten Grenzen einen kontinuierlichen Definitionsbereich besitzen, wie z. B. Querschnittsflächen. Durch die Erweiterung des zulässigen Bereichs für die variablen Querschnittsflächen um den Wert Null kann die Querschnittsoptimierung um einen Teilaspekt der Topologieoptimierung erweitert

werden, da der Entwurfsraum nun auch das Entfernen dieser Elemente zulässt. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich das diskrete Optimierungsproblem (Stab vorhanden/ Stab nicht vorhanden) in ein kontinuierliches Ersatzproblem überführen (siehe dazu beispielsweise RAMM U. A. (1998)), das mit dem im folgenden Abschnitt vorgestellten Verfahren gelöst werden kann.

Lagrange-Funktion und Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

Die beschränkten Optimierungsprobleme mit kontinuierlichen Variablen werden in der vorliegenden Arbeit mithilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode gelöst. Durch die Integration der Nebenbedingungen in die Lagrange-Funktion kann ein beschränktes Optimierungsproblem wie ein unbeschränktes Problem formuliert werden.

Die Lagrange-Funktion ergibt sich aus der Summe von Zielfunktion f , allen Gleichheitsnebenbedingungen \mathbf{h} jeweils multipliziert mit entsprechenden Lagrange-Multiplikatoren, die im Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ gesammelt sind, und allen Ungleichheitsnebenbedingungen \mathbf{g} jeweils multipliziert mit den Lagrange-Multiplikatoren aus dem Vektor $\boldsymbol{\mu}$. Die Lagrange-Funktion \mathcal{L} für die Minimierung einer Funktion $f(\mathbf{s})$ unter den Nebenbedingungen $\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq \mathbf{0}$ ergibt sich damit in vektorieller Schreibweise zu

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{s}). \quad (2.38)$$

Die Karush⁹-Kuhn¹⁰-Tucker¹¹-Bedingungen (KKT-Bedingungen) stellen notwendige Bedingungen für ein Optimum des beschränkten Optimierungsproblems dar. Die ersten drei Bedingungen ergeben sich aus der Stationarität der Lagrange-Funktion zu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{df(\mathbf{s}^*)}{d\mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{h}(\mathbf{s}^*)}{d\mathbf{s}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{s}^*)}{d\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0} \quad (2.39b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) \leq \mathbf{0}. \quad (2.39c)$$

Die beiden weiteren Bedingungen

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0} \quad (2.39d)$$

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad (2.39e)$$

⁹William Karush (1917–1997)

¹⁰Harold W. Kuhn (1925–2014)

¹¹Albert W. Tucker (1905–1995)

sorgen dafür, dass die nicht aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen keinen Einfluss auf die Lösung des Problems haben.

Für das Beispiel aus Abbildung 2.8 kann eine geschlossene Lösung aus den KKT-Bedingungen ermittelt werden. Die so ermittelten optimierten Querschnittsflächen $A_i^{*\text{KKT}}$ ergeben sich dabei zu

$$A_1^{*\text{KKT}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2 \approx 0,789 \text{ cm}^2 \quad (2.40)$$

$$A_2^{*\text{KKT}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ cm}^2 \approx 0,408 \text{ cm}^2 \quad (2.41)$$

und daraus ergibt sich das optimierte Volumen $V^{*\text{KKT}}$ zu

$$V^{*\text{KKT}} = 50\sqrt{2} (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^3 \approx 263,9 \text{ cm}^3. \quad (2.42)$$

Da im Allgemeinen keine geschlossene Lösung derartiger Optimierungsprobleme möglich ist, stehen verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung zur Verfügung. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der sequentiellen quadratischen Programmierung eingesetzt.

Methode der sequentiellen quadratischen Programmierung

Die Methode der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) ist eine iterative Methode zweiter Ordnung, basierend auf einer Linearisierung der KKT-Bedingungen. Ausgehend von einem Startpunkt $\mathbf{s}_{(0)}$ wird für eine beliebige, nichtlineare Zielfunktion f in der Iteration k mithilfe des im vorherigen Schritt ermittelten Lösungspunkts $\mathbf{s}_{(k)}$ eine quadratische Approximation \tilde{f} der Zielfunktion aufgebaut. Die Gleichheits- und die Ungleichheitsnebenbedingungen werden linear approximiert und entsprechend mit \tilde{h} bzw. \tilde{g} bezeichnet. Das approximierte Optimierungsmodell bestehend aus der Zielfunktion

$$\tilde{f}(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}_{(k)}) + \nabla f(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(k)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(k)})^T \nabla^2 f(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(k)}) \quad (2.43)$$

und den Nebenbedingungen

$$(\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{s}))_i = (\mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}))_i + \nabla (\mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}))_i (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(k)}) = 0, \quad i = 1..n_h \quad (2.44a)$$

$$(\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{s}))_j = (\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))_j + \nabla (\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))_j (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{(k)}) \leq 0, \quad j = 1..n_g \quad (2.44b)$$

kann nun genutzt werden, um den nächsten Punkt $\mathbf{s}_{(k+1)}$ und die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{(k+1)}$ und $\boldsymbol{\mu}_{(k+1)}$ zu ermitteln. Dabei bezeichnen der Nabla-Operator ∇ die Gradientenbildung und der Laplace-Operator ∇^2 die Berechnung der Hesse-Matrix.

Die Linearisierung der KKT-Bedingungen für das approximierte Modell am aktuellen Punkt $\mathbf{s}_{(k)}$ mit den aktuellen Werten für die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{(k)}$ und $\boldsymbol{\mu}_{(k)}$ ergibt sich zu

$$\nabla f(\mathbf{s}_{(k)}) + \nabla^2 f(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}) \quad (2.45a)$$

$$+ \nabla (\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))^T \boldsymbol{\mu}_{(k)} + \nabla (\mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}))^T \boldsymbol{\lambda}_{(k)} \quad (2.45b)$$

$$+ \boldsymbol{\mu}_{(k)}^T \nabla^2 \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}) + \boldsymbol{\lambda}_{(k)}^T \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}) \quad (2.45c)$$

$$+ \nabla (\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))^T (\boldsymbol{\mu}_{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}_{(k)}) + \nabla (\mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}))^T (\boldsymbol{\lambda}_{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}_{(k)}) = \mathbf{0}, \quad (2.45d)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) (\mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}) = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Die Suchrichtung für den neuen Punkt $\Delta \mathbf{s}_{(k+1)} = \mathbf{s}_{(k+1)} - \mathbf{s}_{(k)}$ ergibt sich als Lösung des quadratischen Optimierungsproblems, das durch das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{s}_{(k)}) & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) \\ (\nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}))^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\nabla \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{s}_{(k+1)} \\ \boldsymbol{\lambda}_{(k+1)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{s}_{(k)}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

beschrieben wird, und sich mit der Abkürzung für die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}_{(k)}) = \nabla^2 f(\mathbf{s}_{(k)}) + \boldsymbol{\mu}_{(k)}^T \nabla^2 \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) + \boldsymbol{\lambda}_{(k)}^T \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) \quad (2.49)$$

direkt aus der Matrixform der Gleichungen (2.45d), (2.46) und (2.47) ergibt. Im Gleichungssystem (2.48) werden nur diejenigen Ungleichheitsnebenbedingungen berücksichtigt, die am aktuellen Punkt aktiv sind, sich also in der aktiven Menge $\hat{\mathcal{A}}$ befinden. Zur Bestimmung der aktiven Menge werden die Funktionen $(\mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}))_j$ ausgewertet. Wenn diese einen Wert größer oder gleich null annehmen, gelten Sie als aktiv und sind in der aktiven Menge enthalten. Für inaktive Nebenbedingungen $j \notin \hat{\mathcal{A}}$ werden die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren $(\boldsymbol{\mu})_j$ zu null gesetzt. Dies ist auch als Aktive-Restriktions-Verfahren bzw. Aktive-Menge-Strategie bekannt. Nach BLETZINGER (1990) kann dabei der Fall auftreten, dass das Ersatzproblem inkonsistent wird, d. h. dass sich die linearisierten Nebenbedingungen gegenseitig ausschließen. Ebenda wird jedoch auch auf eine mögliche Behandlung dieses Falls eingegangen.

Nachdem die Suchrichtung $\Delta \mathbf{s}_{(k+1)}$ bestimmt wurde, kann damit das Optimum für das Ersatzproblem $\mathbf{s}_{(k+1)}$ theoretisch direkt bestimmt werden. Da die Optima des Ersatz-

problems und des wirklichen Problems nur exakt im Optimum des wirklichen Problems übereinstimmen, wird ein Schrittweitenparameter $\alpha_{(k+1)}$ eingeführt, der festlegt, wie weit in Richtung $\Delta \mathbf{s}_{(k+1)}$ gegangen wird. Dadurch ergibt sich

$$\mathbf{s}_{(k+1)} = \mathbf{s}_{(k)} + \alpha_{(k+1)} \Delta \mathbf{s}_{(k+1)}. \quad (2.50)$$

Die Bestimmung der optimalen Schrittweite ist ein eindimensionales Optimierungsproblem, für dessen Lösung wiederum verschiedene Verfahren eingesetzt werden können. Hierbei kann beispielsweise eine Bewertungsfunktion minimiert werden, die sowohl die Zielfunktion als auch Änderungen in der aktiven Menge berücksichtigt. Beispielsweise kann für die eindimensionale Optimierung eine Intervallschachtelung nach dem Verfahren des goldenen Schnitts oder wiederum eine quadratische Approximation eingesetzt werden. Mögliche Bewertungsfunktionen und weitere Verfahren können der Literatur entnommen werden.

Wenn der Punkt $\mathbf{s}_{(k+1)}$ und die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{(k+1)}$ und $\boldsymbol{\mu}_{(k+1)}$ bestimmt sind, startet das Verfahren erneut. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis ein zulässiges Minimum gefunden wird. Für die praktische Anwendung des Verfahrens werden verschiedene Schranken eingeführt, deren Über- bzw. Unterschreitung zum Abbruch des iterativen Vorgangs führt. Dabei können beispielsweise die maximale Iterationszahl oder die maximale Anzahl an Auswertungen der Zielfunktion als Schranken dafür gewählt werden, dass das Verfahren nach endlicher Zeit abbricht, wenn kein Minimum gefunden wird. Das Erreichen eines Minimums wird durch das Unterschreiten einer minimalen Schrittgröße, einer minimalen Änderung der Zielfunktion und Steigung am aktuellen Ort detektiert. Für das gefundene Optimum muss weiterhin die Einhaltung aller Nebenbedingungen geprüft werden, da im SQP-Verfahren auch Zwischenlösungen auftreten können, die nicht im zulässigen Bereich liegen.

Der Verlauf der Ermittlung des Volumenminimums für das System aus Abbildung 2.8 ist in Abbildung 2.10 dargestellt. Der Startvektor $\mathbf{s}_{(0)} = [0,9 \quad 1,6]^T \text{ cm}^2$ wurde beliebig gewählt. Die Methode konvergiert mit beispielhaft gewählten Abbruchschranken in sieben Iterationsschritten zum gesuchten Minimum.

Approximation der Hesse-Matrix

Die Berechnung der exakten Hesse-Matrix \mathbf{H} ist aufwändig und führt nicht notwendigerweise zu einer schnelleren Konvergenz des Verfahrens. Eine gute Approximation der Hesse-Matrix $\tilde{\mathbf{H}}$, die stets positiv definit ist und dadurch eine eindeutige Lösung sicherstellt, kann parallel zum iterativen Ablauf der SQP-Methode mithilfe des Broyden¹²-

¹²Charles G. Broyden (1933–2011)

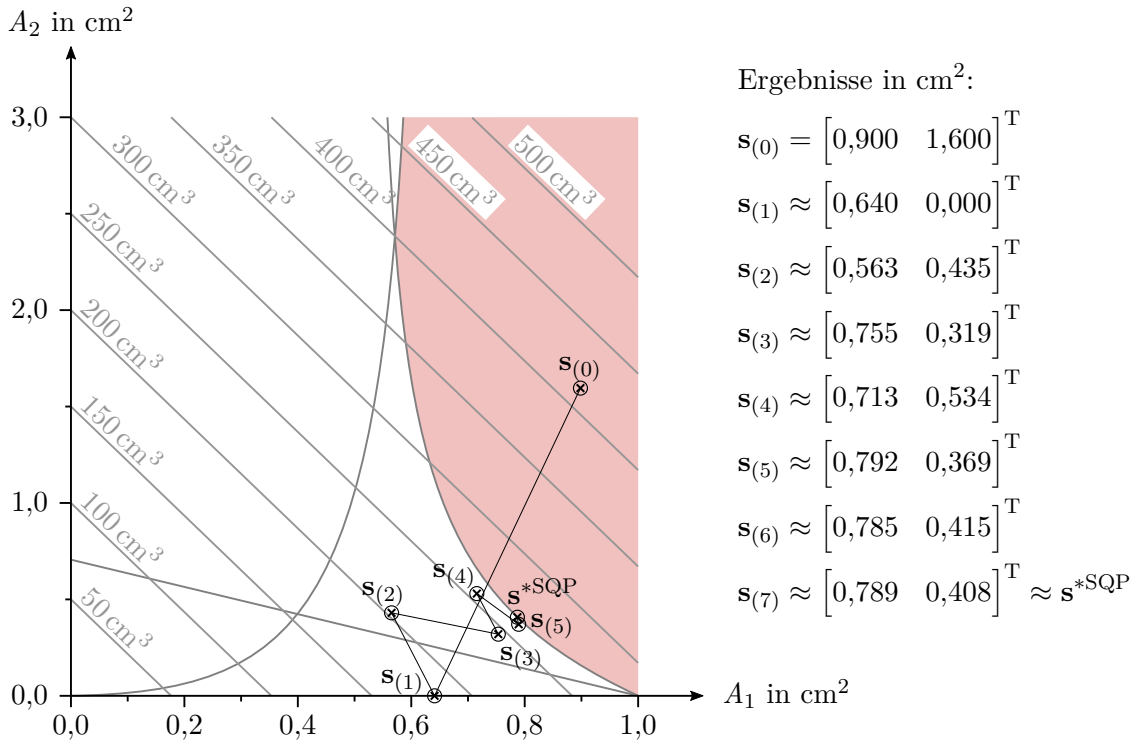


Abbildung 2.10: Volumenminimierung des Drei-Stab-Tragwerks mithilfe der SQP-Methode

Fletcher¹³-Goldfarb¹⁴-Shanno¹⁵-Algorithmus (BFGS) ermittelt werden (NOCEDAL UND WRIGHT 2006). Dabei wird ausgehend von einer Einheitsmatrix als Hesse-Matrix für die Startwerte der Entwurfsvariablen $\mathbf{s}_{(0)}$ zu Beginn der Iteration in jedem Schritt eine Aktualisierung nach der folgenden Formel vorgenommen:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(k)}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(k-1)}) - \frac{\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(k-1)}) \Delta \mathbf{s}_{(k-1)} \Delta \mathbf{s}_{(k-1)}^T \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(k-1)})}{\Delta \mathbf{s}_{(k-1)}^T \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(k-1)}) \Delta \mathbf{s}_{(k-1)}} + \frac{\mathbf{y}_{(k-1)} \mathbf{y}_{(k-1)}^T}{\Delta \mathbf{s}_{(k-1)}^T \mathbf{y}_{(k-1)}} \quad (2.51)$$

mit

$$\mathbf{y}_{(k-1)} = \left(\nabla f(\mathbf{s}_{(k)}) + \boldsymbol{\mu}_{(k)}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k)}) + \boldsymbol{\lambda}_{(k)}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k)}) \right) - \quad (2.52a)$$

$$\left(\nabla f(\mathbf{s}_{(k-1)}) + \boldsymbol{\mu}_{(k-1)}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{s}_{(k-1)}) + \boldsymbol{\lambda}_{(k-1)}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{s}_{(k-1)}) \right) \quad (2.52b)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}_{(0)}) = \mathbf{1}. \quad (2.52c)$$

¹³Roger Fletcher (1939–2016)

¹⁴Donald Goldfarb (geb. 1941)

¹⁵David F. Shanno (1938–2019)

In der Literatur werden weitere Anpassungen der Update-Gleichung vorgeschlagen, um die positive Definitheit der neuen Hesse-Matrix in jedem Fall sicherzustellen (siehe dazu beispielsweise NOCEDAL UND WRIGHT (2006)). Durch die quadratische Approximation einer im Allgemeinen beliebig stark nichtlinearen Funktion tritt der Effekt einer Glättung auf, durch den die Wahrscheinlichkeit, nur ein lokales Minimum zu erreichen, verringert werden kann. Die Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen sollten dagegen bestenfalls exakt oder zumindest mit minimalem Fehler vorliegen, um das optimale Konvergenzverhalten des Verfahrens erzielen zu können.

Berechnung der Gradienten mithilfe komplexer Zahlen

Eine analytische Berechnung der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen wäre in den meisten Fällen, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, möglich, ist jedoch aufwändig. Die Berechnung der Gradienten erfolgt daher mithilfe der complex step derivative approximation (CSDA), die mit deutlich reduziertem Implementierungsaufwand eine sehr gute Approximation der Gradienten liefert. Dieses Verfahren wurde von LYNESS UND MOLER (1967) beschrieben und beispielsweise von SQUIRE UND TRAPP (1998) eingesetzt. Es basiert auf der Vorwärtsdifferenzenmethode und damit auf einer Taylorreihenentwicklung zur Ermittlung numerischer Ableitungen, jedoch wird als Schrittweite h nicht eine angemessen kleine reelle Zahl, sondern eine kleine komplexe Zahl ohne Realteil verwendet. Dadurch ergibt sich für die Ableitung einer beliebigen skalarwertigen Funktion f an der Stelle s anstatt der bekannten Formel der Vorwärtsdifferenzen-Methode

$$f'(s) = \frac{f(s+h) - f(s)}{h} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \quad (2.53)$$

die veränderte Formel

$$f'(s) = \frac{\operatorname{Im}(f(s+ih))}{h} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{\operatorname{Im}(f(s+ih))}{h}. \quad (2.54)$$

In der Berechnung der Ableitung mithilfe der Vorwärtsdifferenzen nach Gleichung (2.53) treten zwei Fehler in der berechneten ersten Ableitung auf. Der Auslöschungsfehler entsteht aus der Berechnung der Differenz von zwei ähnlich großen Zahlen, im vorliegenden Fall im Zähler zwischen $f(s+h)$ und $f(s)$. Der zweite Fehler liegt im Abschneiden der Taylorreihen-Entwicklung und damit in der Vernachlässigung von Termen der Größenordnung $\mathcal{O}(h)$. Die Schrittweite zur Berechnung der numerischen Ableitung muss klein genug sein, um den Fehler aus dem Abschneiden der Taylorreihen-Entwicklung zu kontrollieren, jedoch auch groß genug, dass die beiden Zahlen $f(s+h)$ und $f(s)$ ausreichend unterschiedlich sind, sodass der Fehler aus der Auslöschung nicht zu groß wird. Die

Abschätzung eines optimalen Kompromisses ist vor der Berechnung nicht trivial und eine ungünstige Wahl verschlechtert das Konvergenzverhalten des gesamten Verfahrens signifikant.

Die Berechnung der Ableitungen mithilfe komplexer Zahlen ermöglicht es, die erste Fehlerquelle zu eliminieren und die Auswirkung der zweiten Fehlerquelle zu minimieren. Da in der Bestimmungsgleichung (2.54) keine Differenz mehr auftritt, kann die Schrittweite theoretisch beliebig klein gewählt werden. Weiterhin ergibt sich die Größenordnung des abgeschnitten Teils der Taylorreihe nun nur noch zu $\mathcal{O}(h^2)$. Damit wird beispielsweise für eine im Rahmen der Arbeit gewählte Schrittweite von $h = 10^{-10}$ theoretisch ein Fehler in der Größenordnung von $\mathcal{O}(10^{-20})$ erreicht, der im Rahmen der Maschinengenauigkeit bereits keine Rolle mehr spielt.

Details und Beispiele zur CSDA finden sich in MARTINS U. A. (2003). Weitere Anwendungen aus dem Gebiet der Strukturmechanik finden sich beispielsweise in ROTH (2020).

In der vorliegenden Arbeit wird die SQP-Methode unter Verwendung der Approximation der Hesse-Matrix nach BFGS aus der kommerziellen Softwareumgebung Matlab eingesetzt. Die Berechnung der Gradienten von Zielfunktionen und Nebenbedingungen mittels CSDA wird selbst implementiert.

3

Charakteristika von Stabtragwerken

In diesem Kapitel werden die Charakteristika von herkömmlichen bzw. nicht adaptiven Stabtragwerken beschrieben, die im Hinblick auf Funktionsweise und Potential adaptiver Strukturen eine besondere Bedeutung einnehmen. Insbesondere ist dabei der Lastabtrag der Tragwerke und der damit zusammenhängende, notwendige Materialeinsatz zur Erfüllung der Anforderungen an die Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit relevant. Im Allgemeinen kann der Lastabtrag anhand vieler Begriffe charakterisiert werden.

Dazu zählen unter anderem die Tragfähigkeit, die die maximal zulässige Belastung des Tragwerks beschreibt, und die damit zusammenhängende Duktilität, die die maximale Verformungsfähigkeit vor dem Versagen angibt. Weiterhin spielen die Steifigkeit, die angibt, wie groß die notwendige Kraft ist, um eine bestimmte Einheitsdeformation des Tragwerks hervorzurufen, und deren Kehrwert, die Flexibilität, eine wichtige Rolle. Weitere wesentliche Charakteristika sind der Grad der statischen Unbestimmtheit und die Redundanz des Tragwerks. Die Analyse dieser beiden Eigenschaften ermöglicht unter anderem Aussagen über die Ausfallsicherheit des Tragwerks bzw. von Tragwerksteilen und über das Auftreten von Schnittgrößen aus Zwang. Tragwerke können zudem beispielsweise anhand der auftretenden Schnittgrößen als biegedominiert, zugdominiert oder druckdominiert und anhand bemessungsrelevanter Größen in beispielsweise festigkeitsdominiert oder steifigkeitsdominiert eingeteilt werden. Weitere Größen, die relevant für die Bemessung sein können, wie Schwingungen und Stabilität können wie der Ausnutzungsgrad der Materialfestigkeit zur Charakterisierung herangezogen werden. Zum Beispiel liegt dann ein sogenanntes fully stressed design vor, wenn jedes Element vollständig ausgenutzt ist.

Neben den genannten Eigenschaften, deren Ausprägungen im Allgemeinen durch eine Strukturanalyse ermittelt werden bzw. direkt mit der Strukturanalyse zusammenhängen, können Tragwerkseigenschaften, wie z. B. die Gesamtmasse, die Schlankheit sowie

weitere geometrische Größen, die das Bauwerk beschreiben, zur Beschreibung genutzt werden.

In der Literatur finden sich weitere Ansätze zur Bewertung des Lastabtrags. SCHLAICH (2000) schlägt vor, das Verhältnis von Nutzlast zu Eigenlast als eine charakteristische Größe zur Bewertung zu verwenden. Die Kennzahlen BIC und Tra werden in OTTO (1998) zur Bewertung des Lastabtrags eingesetzt. Das eingesetzte Material kann beispielsweise durch dessen spezifische Steifigkeit, dem Quotienten von E-Modul und Dichte, und durch dessen spezifische Festigkeit, dem Quotienten von Zugfestigkeit und Dichte, charakterisiert werden (OTTO 1998). Auch die Robustheit ist eine relevante Eigenschaft von Tragwerken, die beispielsweise von PÖTZL (1996) näher betrachtet wird. Ein interessanter Ansatz zur immer bedeutender werdenden Bewertung der Wiederverwendbarkeit von Bauteilen wird von BRUETTING U. A. (2019) thematisiert. Andere Aspekte, die das Tragwerk erfüllen muss, wie Beiträge zu Nutzung und Gestalt, werden in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet. Einen Überblick über Ansätze zur Bewertung von Tragwerken und deren Tragverhalten findet sich in GERBER (2010).

Relevant für die vorliegende Arbeit ist einerseits der Grad der statischen Unbestimmtheit, der eine Eigenschaft des Tragwerks, insbesondere der Tragwerkstopologie, unabhängig vom Lastfall darstellt. Dieser und damit zusammenhängende Eigenschaften werden in Abschnitt 3.1 ausführlich diskutiert. In Abschnitt 3.1.2 wird die Redundanzmatrix beschrieben, die ein hilfreiches Werkzeug zur Analyse des Grads der statischen Unbestimmtheit und dessen räumlicher Verteilung liefert. Andererseits werden Tragwerkeigenschaften aus dem Verhalten des Tragwerks unter bestimmten Lastfällen abgeleitet. Dazu werden in Abschnitt 3.2 die Steifigkeit, die Traglast und die Duktilität eines Stabtragwerks ermittelt und im späteren Verlauf der Arbeit als Vergleichsgrößen herangezogen.

Unter Verwendung der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Methoden können Tragwerke theoretisch für beliebige Zielfunktionen unter beliebigen Nebenbedingungen optimiert werden. Dies eröffnet einen sehr großen Variantenreichtum, weshalb in Abschnitt 3.3 ohne Anspruch auf Vollständigkeit anhand ausgewählter Beispiele, insbesondere aus dem Bereich der Massenminimierung, die Eigenschaften beschrieben werden, durch die sich optimierte Stabtragwerke auszeichnen.

3.1 Lastfallunabhängige Eigenschaften

In den folgenden Abschnitten werden die für die Arbeit wesentlichen lastfallunabhängigen Eigenschaften vorgestellt. Neben dem Grad der statischen Unbestimmtheit in Form einer Ganzzahl spielt auch die örtliche Verteilung der statischen Unbestimmtheit im

Tragwerk eine wichtige Rolle. Diese Verteilung entspricht unter den getroffenen Annahmen der Redundanzverteilung, die aus der Redundanzmatrix ermittelt werden kann. Aus der Ausprägung dieser Eigenschaften bzw. aus den entsprechenden mathematischen Größen können gegebenenfalls mögliche Eigenspannungszustände ermittelt werden, deren Bedeutung abschließend vorgestellt wird.

3.1.1 Grad der statischen Unbestimmtheit

Der Grad der statischen Unbestimmtheit n_s ist eine entscheidende Größe beim Entwurf und bei der Analyse von Tragwerken. Die Reaktion einer Struktur auf äußere Einflüsse, wie zum Beispiel Temperaturänderungen oder Setzungen des Baugrundes sowie auch auf gezielt oder ungeplant eingeführte Stablängenänderungen, hängt maßgeblich von ihrem Grad der statischen Unbestimmtheit ab. Zudem liefert der Grad der statischen Unbestimmtheit Informationen darüber, ob im Tragwerk generell Redundanzen vorhanden sind und somit beim Ausfall einzelner Elemente die Tragfähigkeit weiterhin sichergestellt werden kann. Diese Analyse des Tragverhaltens ist nur aufgrund der Idealisierung des Tragwerks als Fachwerk bzw. als Stabtragwerk möglich. Die daraus abgeleiteten Aussagen sind deshalb nur durch die Betrachtung im Sinne der Strukturmechanik zugänglich.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist definiert als die Anzahl der fehlenden Gleichgewichtsbedingungen, um die Schnittgrößen in der gesamten Struktur berechnen zu können. Es ergibt sich somit eine ganze Zahl ($n_s \in \mathbb{Z}$) für die gesamte Struktur. Es existieren verschiedene Verfahren, mit denen der Grad der statischen Unbestimmtheit ermittelt werden kann. Ein Verfahren, das wenig fehleranfällig ist und gleichzeitig einen guten Einblick in das Tragverhalten der Struktur liefert, ist die Zerlegung des Tragwerks in Grundtragwerke, siehe dazu BORNSCHEUER (1975). Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von n_s ist die sogenannte „Abzählformel“ nach MAXWELL (1864). Zur Bestimmung des Grads der statischen Unbestimmtheit von ebenen Fachwerkstrukturen lautet diese

$$n_s = n_E - (2n_K - n_L). \quad (3.1)$$

Folgende Klassifizierung kann anhand von n_s vorgenommen werden: Tragwerke mit

- $n_s > 0$ werden als statisch unbestimmt bzw. statisch unterbestimmt,
- $n_s = 0$ werden als statisch bestimmt und
- $n_s < 0$ werden als statisch überbestimmt bzw. kinematisch

bezeichnet. Mathematisch interpretiert beschreibt der Grad der statischen Unbestimmtheit Eigenschaften der Matrix \mathbf{A} , die beispielsweise in den Kinematik- und Statik-Gleichungen in Abbildung 2.6 enthalten ist. Für statisch bestimmte Tragwerke ($n_s = 0$) ist die Matrix quadratisch und invertierbar. Somit besitzt die Statik-Gleichung aus Abbildung 2.6 eine eindeutige Lösung und alle Normalkräfte in einer Struktur können allein mithilfe der Statik-Gleichung berechnet werden. Unter Annahme der Existenz von \mathbf{A}^{-1} ergibt sich für die Normalkräfte nach Gleichung (2.29) der Zusammenhang

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^{-T} \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0 - \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0 = \mathbf{A}^{-T} \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.2)$$

Durch vorgegebene Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ entstehen in statisch bestimmten Tragwerken somit keine Normalkräfte, jedoch nach Gleichung (2.27) Verschiebungen in der Struktur. Außerdem bestehen statisch bestimmte Tragwerke aus der minimal notwendigen Anzahl an Elementen, die für die gegebene Anzahl an Freiheitsgraden nach Gleichung (3.1) (für ebene Fachwerke $n_{\text{FHG}} = 2n_K - n_L$) ein brauchbares Tragwerk bilden können. Ein Tragwerk, das aus weniger Elementen besteht, ist im hier gewählten Rahmen der geometrischen Linearität nicht brauchbar.

Für statisch unbestimmte Tragwerke ($n_s > 0$) besitzt \mathbf{A} mehr Zeilen als Spalten. Die Inverse \mathbf{A}^{-1} existiert nicht. Damit kann die gesamte Lösung \mathbf{n} der Statik-Gleichung $\mathbf{A}^T \mathbf{n} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$ additiv aus einer Lösung \mathbf{n}_h der homogenen Gleichung $\mathbf{A}^T \mathbf{n}_h = \mathbf{0}$ und einer Lösung \mathbf{n}_p für die Gleichung mit der richtigen rechte Seite $\mathbf{A}^T \mathbf{n}_p = \mathbf{f}_{\text{ext}}$ zusammengesetzt werden. Die Lösung der homogenen Gleichung kann als eine Normalkraftverteilung interpretiert werden, die mit sich selbst im Gleichgewicht ist – also einen Eigenspannungszustand darstellt. Mathematisch betrachtet befindet sich diese Lösung im Nullraum der Matrix \mathbf{A}^T . Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Begriff Nullraum einer Matrix gleichbedeutend mit dem Kern der Abbildung eines Vektors mit der entsprechenden Matrix verwendet.

Für statisch überbestimmte Tragwerke ($n_s < 0$) besitzt \mathbf{A} mehr Spalten als Zeilen. Dadurch kann in der Kinematik-Gleichung $\mathbf{A} \mathbf{d} = \Delta \mathbf{l}$ die gesamte Lösung für die Verschiebungen in die beiden eben identifizierten Anteile zerlegt werden. Eine Lösung \mathbf{d}_h der homogenen Gleichung $\mathbf{A} \mathbf{d}_h = \mathbf{0}$ kann dabei als Verschiebungszustand interpretiert werden, der sich ohne Längenänderungen der Stäbe, also ohne Normalkräfte hervorzurufen, einstellen kann und somit von der Struktur nicht verhindert werden kann. Deshalb werden im Rahmen dieser Betrachtung solche Strukturen auch als kinematisch bzw. unbrauchbar bezeichnet.

Häufig treten Kombinationen dieser Tragwerksklassen auf. Insbesondere kann das Verhalten dreidimensionaler Tragwerke in die unterschiedlichen Raumrichtungen oder für unterschiedliche Lastfälle grundlegend unterschiedlich sein. Deshalb eignet sich der Grad der statischen Unbestimmtheit nur bedingt zur Beschreibung der Eigenschaften der

gesamten Struktur. Zudem charakterisiert die Abzählformel (3.1) einen topologischen Aufbau zwar formal korrekt, jedoch werden mögliche Kinematiken in der Struktur durch das „Verrechnen“ mit statischer Unbestimmtheit an anderer Stelle gegebenenfalls nicht erkannt. Die Ermittlung des Grads der statischen Unbestimmtheit gleichzeitig mit der Untersuchung des Tragwerks auf Brauchbarkeit kann durch die Anwendung des Grundtragwerke-Konzepts erfolgen, jedoch ist die Formalisierung und Automatisierung dieser Methode schwierig und bisher nicht bekannt.

3.1.2 Redundanz und Redundanzverteilung

Wie sich der Grad der statischen Unbestimmtheit auf Tragwerksteile oder einzelne Elemente aufteilt, wurde in der Literatur kaum systematisch untersucht. Ein Werkzeug zu dieser Analyse ist die Redundanzmatrix, die für die betrachteten Fachwerke die Verteilung des Grads der statischen Unbestimmtheit auf einzelne Elemente beschreibt. Die Redundanzmatrix wurde bereits von LINKWITZ (1961) bei der Analyse von Messungen in der Geodäsie berechnet, jedoch wurden die für die Strukturmechanik relevanten Eigenschaften erst später erkannt. BAHNDORF (1991) gelang dies durch eine vergleichende Betrachtung der Ausgleichsrechnung der Geodäsie und der Berechnung von Verschiebungen bzw. Längenänderungen in Fachwerkstrukturen.

Von STRÖBEL (1995) werden Redundanzmatrizen für vorgespannte Seilnetze berechnet und interpretiert. Weitergehend werden darin die Redundanzmatrizen von Balkentragwerken beispielhaft angegeben, ohne jedoch explizit eine Methode zu deren Berechnung darzustellen. Die Formulierung einer kontinuierlichen Redundanzdichte-Funktion für einzelne Fachwerkstäbe sowie ein Überblick über Eigenschaften der Redundanzmatrix und deren bisherige Einsatzbereiche finden sich in VON SCHEVEN U. A. (2021) und in GADE U. A. (2021). Die Erweiterung der Formulierung auf Flächentragwerke ist Gegenstand aktueller Arbeiten. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Eigenschaften von Redundanzmatrizen für Fachwerkstrukturen vorgestellt und diskutiert.

Berechnungsvorschrift und mechanische Interpretation

Formal beschreibt die negative Redundanzmatrix $-\mathbf{R}$ den Zusammenhang zwischen vorgegebenen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ und den dadurch hervorgerufenen elastischen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{el}$. Dabei werden keine äußeren Knotenlasten auf die Struktur berücksichtigt ($\mathbf{f}_{ext}^K = \mathbf{0}$). Sie ergibt sich damit als reine Tragwerkeigenschaft aus den

3 Charakteristika von Stabtragwerken

Gleichungen (2.27) und (2.28) zu

$$\Delta \mathbf{l}_{el} = \underbrace{\left(\mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} - \mathbf{1} \right)}_{= -\mathbf{R}} \Delta \mathbf{l}_0. \quad (3.3)$$

Die Vorschrift zur Berechnung der Redundanzmatrix für brauchbare Tragwerke

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{1}}_{\substack{\text{vorgegebene} \\ \text{Stablängenänderungen}}} - \mathbf{A} \underbrace{\left(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \right)^{-1}}_{\substack{\text{inverse} \\ \text{Steifigkeitsmatrix}}} \underbrace{\left(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \right)}_{\substack{\text{Ersatzlasten}}} \quad (3.4)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{= \mathbf{A}_0 \\ \text{gesamte Stablängenänderungen} \\ \text{im System infolge der Ersatzlasten}}}$
 Verschiebungen infolge der Ersatzlasten

kann mechanisch dabei sehr anschaulich interpretiert werden. Für ein Fachwerk mit n_E Elementen besitzt die Matrix der Ersatzlasten n_E Spalten. Eine Spalte entspricht einem Lastfall, der jeweils ein Element aus dem Fachwerk um eins verlängern würde, wenn das entsprechende Element statisch bestimmt, d. h. zwangsfrei, gelagert wäre. Daraus ergeben sich durch die Multiplikation mit der inversen Steifigkeitsmatrix die Knotenverschiebungen und aus der Multiplikation mit \mathbf{A} die gesamten Längenänderungen in diesen Lastfällen. Diese werden von den gedanklich vorgegebenen Stablängenänderungen von eins abgezogen, wodurch die Einträge der Redundanzmatrix den Unterschied zwischen einer ideal-zwangsfreien und der wirklichen Einbausituation quantifizieren.

Die Spalte i der Redundanzmatrix enthält Werte, welche als die negativen elastischen Längenänderungen $-\Delta \mathbf{l}_{el}$ aller Stäbe interpretiert werden können, die entstehen, wenn Element i mit einer vorgegebenen Längenänderung von eins versehen wird. Zeile i der Redundanzmatrix enthält die Werte, welche als die negativen Normalkräfte $-\mathbf{n}$ in allen Stäben interpretiert werden können, die entstehen, wenn Element i mit einer vorgegebenen Längenänderung versehen würde, die eine Normalkraft von eins erzeugen würde, wenn das Element zwischen zwei starren Auflagern eingebaut wäre und damit einen Redundanzanteil von eins hätte.

Die Werte der Hauptdiagonaleinträge der Redundanzmatrix liegen zwischen null und eins, wobei auch null und eins selbst auftreten können. Die Spur der Redundanzmatrix, also die Summe der Hauptdiagonaleinträge, entspricht dem Grad der statischen Unbestimmtheit n_s . Jedoch liegt diese Information nun nicht mehr nur als ganze Zahl vor, sondern als Verteilung im gesamten Fachwerk. Jeder Hauptdiagonaleintrag der Redundanzmatrix $(\mathbf{R})_{i,i}$ kann direkt dem Fachwerkelement i zugeordnet werden und ist ein Maß dafür, wie stark die umgebende Struktur gegen eine Ausdehnung des Elements wirkt.

Ein Element mit Redundanzanteil Null hat die Möglichkeit zur zwangsfreien Längenänderung. Zusätzlich kann die Normalkraft in diesem Element mithilfe der vorhandenen Gleichgewichtsbedingungen direkt ermittelt werden. Deshalb wird dieses Element als statisch bestimmt bezeichnet. Dies gilt für jedes Element eines statisch bestimmten Fachwerks und unter Umständen auch für bestimmte Stäbe eines insgesamt statisch unbestimmten Fachwerks.

Die Längenänderung eines Elements mit Redundanzanteil Eins ist vollständig verhindert. Dieser Sonderfall kann beispielsweise für ein beidseitig festgehaltenes Fachwerkelement identifiziert werden, ist jedoch im Allgemeinen eher akademischer Natur.

Für die in Gleichung (3.4) definierte Matrix \mathbf{A}_0 ergeben sich spaltenweise die gesamten Stablängenänderungen infolge des entsprechenden Ersatzlastvektors.

Mathematische Eigenschaften

Die erste Eigenschaft, die hier diskutiert wird, ist die Idempotenz. Durch Ausrechnen lässt sich zeigen, dass für Redundanzmatrizen

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R} \tag{3.5}$$

gilt. Formal werden beim Quadrieren einer Matrix ihre Eigenwerte quadriert. Idempotente Matrizen verändern sich durch diese Operation nicht und entsprechend ändern sich die Eigenwerte durch Quadrieren nicht. Diese Eigenschaft gilt nur für die Eigenwerte Null und Eins. Die Redundanzmatrix eines Tragwerks besitzt genau $n_E - n_s$ Null-Eigenwerte und entsprechend n_s Eins-Eigenwerte. Mit dem Zusammenhang, dass die Summe der Eigenwerte der Spur einer Matrix entspricht, ergibt sich, dass die Spur genau der Anzahl an Eins-Eigenwerten entspricht. Damit gilt für die Redundanzmatrix der Zusammenhang

$$\text{Spur}(\mathbf{R}) = \text{Rang}(\mathbf{R}) = n_s. \tag{3.6}$$

Da die Anzahl der Elemente eines Fachwerks immer größer ist als der Grad der statischen Unbestimmtheit, ist die Redundanzmatrix nach Gleichung (3.4) nicht invertierbar. Weiterhin ist die Redundanzmatrix im Allgemeinen nicht symmetrisch $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^T$. Durch Ausrechnen kann einfach gezeigt werden, dass sich die Transponierte der Redundanzmatrix aus der Ähnlichkeitstransformation der Redundanzmatrix

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{C}^{-1} \tag{3.7}$$

ergibt. Symmetrie der Redundanzmatrix tritt nur für den Sonderfall auf, dass die Dehnsteifigkeiten aller Elemente eines Fachwerks gleich sind:

$$\frac{EA_i}{L_i} = \frac{EA}{L} = \text{konst.} \quad (3.8)$$

und damit

$$\mathbf{C} = \frac{EA}{L} \mathbf{1} \quad (3.9)$$

gilt.

Die in Gleichung (3.4) definierte Matrix \mathbf{A}_0 ergibt sich formal zu

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{1} - \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

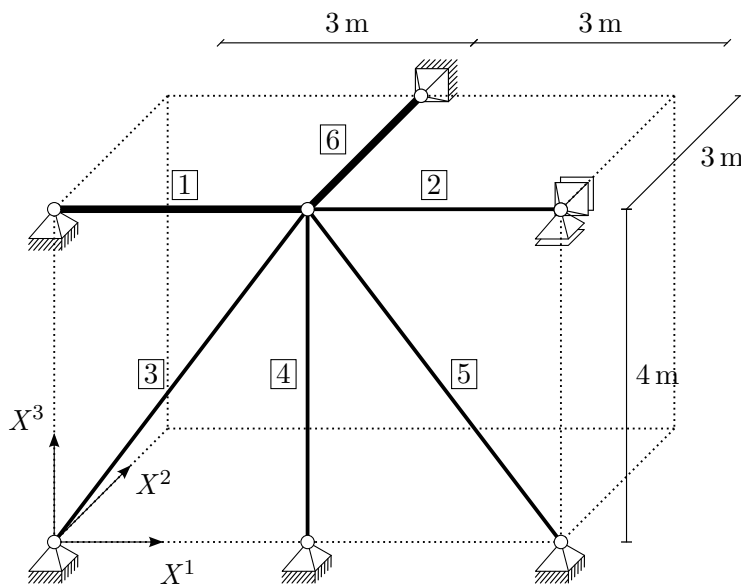
Die Matrix \mathbf{A}_0 addiert sich dementsprechend mit der Redundanzmatrix zur Einheitsmatrix und ist ebenfalls idempotent und im Allgemeinen unsymmetrisch. Durch den Zusammenhang zur Redundanzmatrix nach Gleichung (3.10) besitzt die Matrix \mathbf{A}_0 genau $n_E - n_s$ Eins-Eigenwerte und entsprechend n_s Null-Eigenwerte.

Gewichtete Redundanzmatrix

Durch Vormultiplikation der Redundanzmatrix mit der Matrix der Stabsteifigkeiten \mathbf{C} ergibt sich die gewichtete Redundanzmatrix mit Gleichung (3.4) zu

$$\mathbf{CR} = \mathbf{C} - \mathbf{CA} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{CA} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}. \quad (3.11)$$

Aus dieser Berechnungsvorschrift entsteht eine symmetrische Matrix, die wiederum die folgende mechanisch-anschauliche Interpretation zulässt. In der Redundanzmatrix \mathbf{R} sind spaltenweise elastische Längenänderungen aller Stäbe in einem Lastfall enthalten, die, mit den entsprechenden Stabsteifigkeiten multipliziert, die Normalkräfte in diesem Lastfall ergeben. Damit enthält die gewichtete Redundanzmatrix \mathbf{CR} spalten- und zeilenweise (Symmetrie) Normalkraftverteilungen, die entstehen, wenn das entsprechende Element mit einer vorgegebenen Längenänderung von eins beaufschlagt wird. Die Information über den Grad der statischen Unbestimmtheit kann nicht mehr direkt aus der Spur der Matrix berechnet werden, jedoch stimmt der Rang der gewichteten Redundanzmatrix weiterhin mit n_s überein.



Elemente 1 und 6:

$$EA_1 = 2000 \text{ kN}$$

Elemente 2, 3, 4 und 5:

$$EA_2 = 1000 \text{ kN}$$

$$n_s = 2$$

Abbildung 3.1: Fachwerkstruktur zur Ermittlung der Redundanzmatrix

Beispiel für eine Redundanzmatrix

Für das zweifach statisch unbestimmte Tragwerk aus Abbildung 3.1 wird die Redundanzmatrix nach Gleichung (3.4) zu

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,1776 & 0 & -0,1480 & 0 & 0,1480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4934 & 0 & 0,6582 & -0,3953 & -0,1641 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3162 & 0,5059 & -0,3162 & 0 \\ 0,4934 & 0 & -0,1641 & -0,3953 & 0,6582 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

ermittelt.

Die Spur ergibt sich zu zwei (Abweichung rundungsbedingt), was genau dem Grad der statischen Unbestimmtheit entspricht. Die einzelnen Hauptdiagonaleinträge können nun mit den Elementen in Verbindung gebracht werden. Dabei fällt auf, dass sich der Grad der statischen Unbestimmtheit ungleich auf die Fachwerkstäbe verteilt. Elemente 2 und 6 sind zwangsfrei bzw. statisch bestimmt. Das heißt, dass in diesen Stäben bei vorgegebenen Stablängenänderungen oder anderen reinen Zwangsbeanspruchungen keine Normalkräfte entstehen können. Der Redundanzanteil von Stab 1 ist deutlich geringer als die Anteile der Stäbe 3, 4 und 5. Im vorliegenden Beispiel bedeutet das, dass Stab 1 durch seine deutlich größere Steifigkeit wichtiger, d. h. weniger überflüssig bzw. redundant, für das Tragwerk ist.

3.1.3 Eigenspannungszustände

Im Hinblick auf die Analyse adaptiver Tragwerke besitzen Eigenspannungszustände eine besondere Bedeutung, weshalb sie an dieser Stelle detailliert beschrieben werden. Als Eigenspannungszustände werden bei Fachwerken Normalkraftverteilungen \mathbf{n}_h bezeichnet, die die homogenen Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{n}_h = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

erfüllen. Der Raum der Eigenspannungszustände ist ein linearer Vektorraum, der alle möglichen Eigenspannungszustände eines Tragwerks enthält.

Diese Zustände können nur in statisch unbestimmten Tragwerken bzw. Tragwerksteilen auftreten, da sich in statisch bestimmten Tragwerken aus der Invertierbarkeit von \mathbf{A}^T direkt $\mathbf{n}_h = \mathbf{0}$ als eindeutige Lösung von Gleichung (3.13) ergibt. Auch Vielfache $\alpha \mathbf{n}_h$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Lösungen von Gleichung (3.13) und somit Eigenspannungszustände.

Für ein gegebenes Fachwerk kann der Raum der Eigenspannungszustände – bzw. genauer: eine Basis für diesen Raum – aus mehreren bereits bekannten Matrizen ermittelt werden. Nach PELLEGRINO (1986) ergibt sich eine Basis für den Raum der Eigenspannungszustände aus dem Nullraum der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^T (vgl. Gleichung (3.13)). Wie bereits im Zusammenhang mit der Redundanzmatrix in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, entspricht jede Zeile der Redundanzmatrix einem Eigenspannungszustand.

Für ein statisch bestimmtes Element in einem statisch unbestimmten Fachwerk ergibt sich eine Nullzeile in der Redundanzmatrix und damit nur die triviale Lösung der homogenen Gleichung (3.13), die formal immer im Raum der Eigenspannungszustände enthalten ist, jedoch im Folgenden nicht weiter berücksichtigt wird. Als Basis für den Raum der Eigenspannungszustände mit den notwendigen n_s Basisvektoren kann deshalb auch das Bild der transponierten Redundanzmatrix \mathbf{R}^T verwendet werden, das sich aus den Eigenvektoren zu den Eins-Eigenwerten zusammensetzt.

Eine weitere Möglichkeit, eine Basis für den Raum der Eigenspannungszustände anzugeben, ergibt sich aus der gewichteten Redundanzmatrix. Auch hier spannt das Bild der Matrix \mathbf{CR} den Raum der Eigenspannungszustände auf.

Damit ergibt sich der Zusammenhang der aufgespannten Räume zu

$$\text{Nullraum}(\mathbf{A}^T) = \text{Bild}(\mathbf{R}^T) = \text{Bild}(\mathbf{CR}). \quad (3.14)$$

Für das Beispiel aus Abbildung 3.1 ergeben sich die Eigenwerte der transponierten Redundanzmatrix zu

$$\text{Eigenwerte } (\mathbf{R}^T) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.15)$$

Die Eigenvektoren zu den Eins-Eigenwerten ergeben sich zu

$$\text{Bild } (\mathbf{R}^T) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0,647 \\ 0 \\ -0,539 \\ 0 \\ 0,539 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0,424 \\ 0 \\ -0,707 \\ 0,566 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \right\} \quad (3.16)$$

und die Eigenvektoren zu den Null-Eigenwerten zu

$$\text{Nullraum } (\mathbf{R}^T) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0,910 \\ 0 \\ 0,327 \\ 0,256 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,00 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -0,969 \\ 0 \\ -0,174 \\ 0 \\ 0,174 \\ 0 \end{array} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Abbildung 3.2 (a) visualisiert die als Normalkraftverteilungen (in kN) interpretierten Eigenvektoren zu den Eins-Eigenwerten der transponierten Redundanzmatrix als geschlossene, d. h. ohne äußere Lasten im Gleichgewicht stehende, Kraftecke. Die Orientierungen der Kraftpfeile sind dabei durch die Stabrichtungen und die Längen der Kraftpfeile durch die entsprechenden Einträge im Eigenvektor vorgegeben. Da das Tragwerk zweifach statisch unbestimmt ist, ergeben sich zwei dieser Verteilungen.

Für das Drei-Stab-Tragwerk, das in Abbildung 2.8 dargestellt ist, ergeben sich die relevanten Eigenschaften der Redundanzmatrix zu

$$\text{Eigenwerte } (\mathbf{R}) = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.18)$$

$$\text{Bild } (\mathbf{R}) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0,418 \\ -0,807 \\ 0,418 \end{array} \right] \right\} \quad (3.19)$$

$$\text{und Nullraum } (\mathbf{R}) = \left\{ \left[\begin{array}{c} -0,707 \\ 0 \\ 0,707 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0,816 \\ 0,577 \\ 0 \end{array} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

Abbildung 3.2 (b) stellt diese abstrakten Größen im dreidimensionalen Raum der Stablängenänderungen dar. Der Nullraum ist in diesem Fall zweidimensional und wird deshalb als Fläche dargestellt, die von den beiden grün gestrichelt eingezeichneten Richtungen der Eigenvektoren zu Null-Eigenwerten aufgespannt wird. Das Bild ist ein eindimensionaler Raum, der von der blau gestrichelt dargestellten Richtung des Eigenvektors zum Eins-Eigenwert aufgespannt wird. Beispielhaft ist in dieser Abbildung eingetragen, wie die Auswirkung einer in rot dargestellten, vorgegebenen Längenänderung von $\Delta \mathbf{l}_0 = [0 \quad \Delta \ell_{0,2} \quad 0]^T$ grafisch ermittelt werden kann. Die auftretenden elastischen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{el}$, die durch eine durchgezogene blaue Linie veranschaulicht werden, ergeben sich als Projektion der negativen vorgegebenen Längenänderungen entlang des Nullraums von \mathbf{R} auf das Bild von \mathbf{R} (zur Veranschaulichung ist die Ebene, die den Nullraum darstellt, nochmals in den linken Bereich des Bilds parallel verschoben und angedeutet). Die sich einstellenden gesamten Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}$, die durch eine durchgezogene grüne Linie veranschaulicht werden, ergeben sich aus der Projektion der vorgegebenen Längenänderung entlang des Bilds von \mathbf{R} auf den Nullraum von \mathbf{R} , wobei zur Veranschaulichung nochmals eine zum Bild parallele Linie in die Abbildung eingezeichnet ist.

Werden vorgegebene Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ so gewählt, dass sie vollständig im Nullraum liegen, stellen sich Tragwerkszustände ein, in denen die gesamten Längenänderungen genau den vorgegebenen Längenänderungen entsprechen. Die elastischen Längenänderungen ergeben sich dann zu null, wodurch keine Normalkräfte in der Struktur entstehen. In diesem Fall werden auch in statisch unbestimmten Strukturen Verschiebungen hervorgerufen, ohne dass Normalkräfte entstehen. In statisch bestimmten Strukturen ist der gesamte Raum gleichzeitig der Nullraum, da die Redundanzmatrix in diesem Fall genau der Nullmatrix entspricht. Werden Längenänderungen vorgegeben, die vollständig im Bild von \mathbf{R} liegen, erzeugt dies reine Normalkraftbeanspruchungen, ohne Verschiebungen der Struktur hervorzurufen. Dies ist auch unter den Begriffen im- bzw. nilpotent eigenstress bzw. eigenstrain bekannt (FURUHASHI UND MURA 1979).

Die Idempotenz der Abbildung mit der Redundanzmatrix kann damit mechanisch so interpretiert werden, dass das Resultat der erstmaligen Abbildung von negativen vorgegebenen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ die elastischen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{el}$ ergibt. Eine darauffolgende, wiederholte Abbildung bildet die bereits im Bild der Abbildung liegenden elastischen Längenänderungen wiederum nur auf sich selbst ab. Eine weitere Abbildung mit der Redundanzmatrix liefert keine weitere Veränderung mehr, was die Eigenschaft der Idempotenz widerspiegelt.

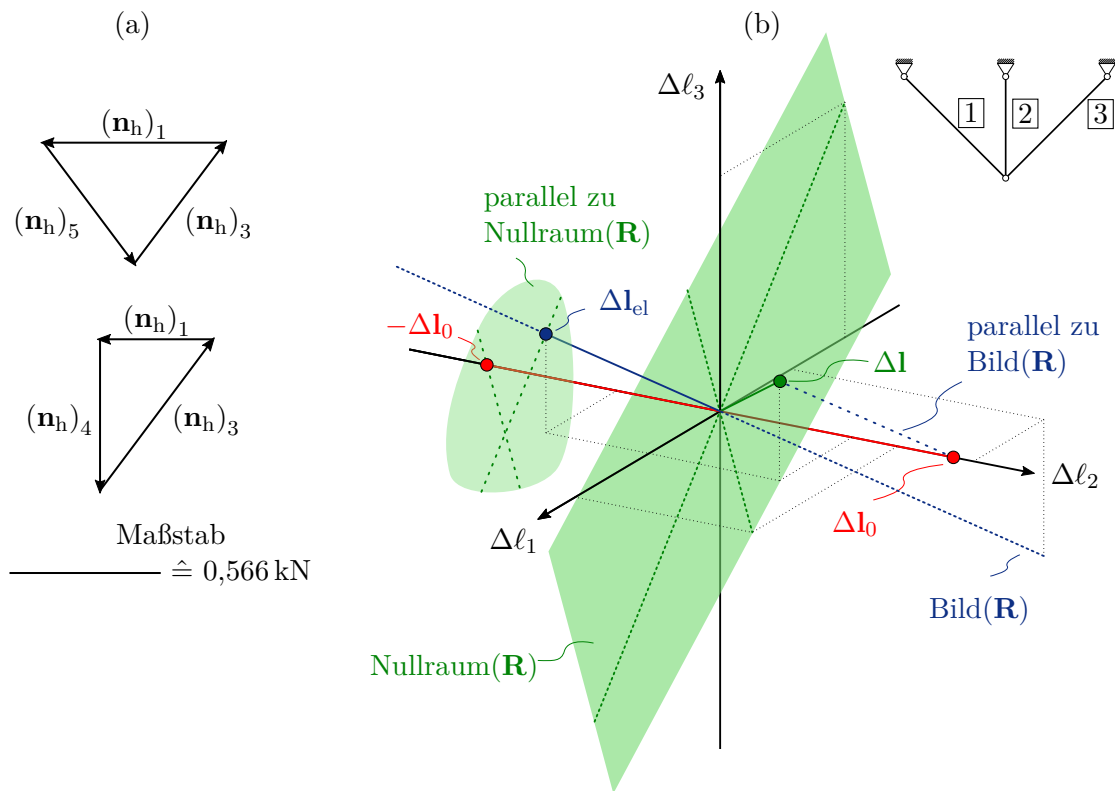


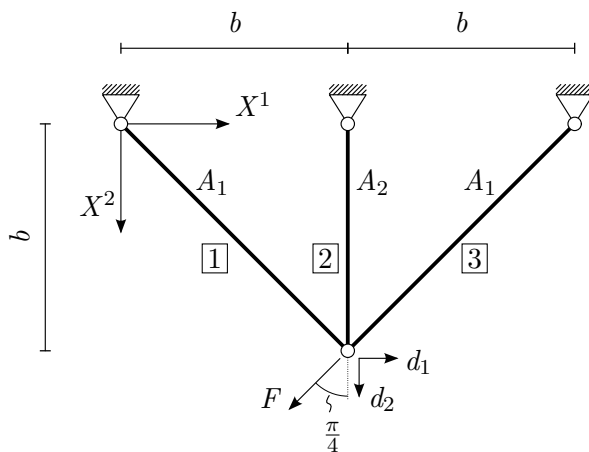
Abbildung 3.2: (a) Darstellung der Eigenspannungszustände des Beispieltragwerks aus Abbildung 3.1 als geschlossene Kraftecke; (b) Visualisierung des Bilds und des Nullraums der Redundanzmatrix für das Drei-Stab-Tragwerk aus Abbildung 2.8 und der Aufteilung von beispielhaft vorgegebenen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ in die auftretenden elastischen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{el}$ und die gesamten Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}$

3.2 Lastfallabhängige Tragwerkseigenschaften

Im Folgenden werden die Steifigkeit sowie die Traglast und die Duktilität als Tragwerkeigenschaften beschrieben. Die Tragfähigkeit und Duktilität sind Tragwerkeigenschaften, die für einen bestimmten Lastfall ermittelt werden. Die Steifigkeit wird zwar im Allgemeinen lastfallunabhängig ermittelt, kann aber sowohl lastfallunabhängig als auch lastfallbezogen betrachtet werden. Sie wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit, wenn nicht explizit anders angegeben, bezogen auf einen bestimmten Lastfall bewertet.

3.2.1 Steifigkeit

Im Kontext der linearen Strukturmechanik beschreibt die Steifigkeit diejenige Kraft, die notwendig ist, um eine Einheitsverschiebung zu erzeugen. Der Kehrwert der Steifigkeit



$$\begin{aligned}
 F &= 20 \text{ kN} \\
 b &= 100 \text{ cm} \\
 E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 \\
 A_1 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2 \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.3: Drei-Stab-Tragwerk zur Ermittlung der Steifigkeit

wird als Flexibilität bezeichnet und beschreibt folglich die Verschiebung, die unter einer Einheitskraft auftritt. Dieser Zusammenhang von Kraft- und Verschiebungsgrößen findet sich in der Mechanik in verschiedenen Skalen wieder: es werden Steifigkeiten von Materialien, Querschnitten, (Fachwerk-)Elementen oder gesamten Tragwerken beschrieben. Dabei setzt sich die Steifigkeit der nächsten Stufe der Skala aus der bzw. den Steifigkeiten der jeweils kleineren Stufe zusammen. Beispielsweise ergibt sich die Querschnittssteifigkeit EA eines homogenen Querschnitts aus dem Produkt des Elastizitätsmoduls E , der die Steifigkeit des verwendeten Materials beschreibt, und der Querschnittsfläche A . Die hier betrachtete Tragwerks- oder Systemsteifigkeit lässt sich auch als Zusammenbau der einzelnen Elementsteifigkeiten aller Elemente des Tragwerks interpretieren (vgl. Gleichung (2.24)).

Die Steifigkeit eines Tragwerks kann mithilfe der Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (2.24) auf verschiedene Arten charakterisiert werden. Aus der Eigenwertzerlegung der Steifigkeitsmatrix resultierende Eigenvektoren können als Verschiebungszustände und zugehörige Eigenwerte als Steifigkeit des entsprechenden Verschiebungszustands interpretiert werden. Mithilfe der Eigenwertermittlung kann ein guter Gesamteindruck vom Tragverhalten gewonnen werden und es können eventuelle Schwachstellen identifiziert werden. Für diese Untersuchung ist keine weitere Kenntnis über die äußere Belastung nötig. Deshalb kann jedoch auch keine Aussage über das Verhalten der Struktur unter konkreten Lastfällen getroffen werden. Wenn die äußere Belastung bekannt ist, können mithilfe von Gleichung (2.24) die auftretenden Knotenverschiebungen ermittelt werden, mit deren Hilfe ein Eindruck von der lastfallbezogenen Systemsteifigkeit gewonnen werden kann.

Abbildung 3.3 zeigt das bereits in Abschnitt 2.2 eingeführte Drei-Stab-Tragwerk mit optimierten Querschnittsflächen nach Gleichungen (2.40) und (2.41). Die Steifigkeits-

matrix \mathbf{K} bezogen auf die angegebenen Freiheitsgrade ergibt sich zu

$$\mathbf{K} = 50\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ kN/cm} \approx \begin{bmatrix} 111,5 & 0 \\ 0 & 193,2 \end{bmatrix} \text{ kN/cm.} \quad (3.21)$$

Aufgrund der Symmetrie des Tragwerks ergibt sich ein entkoppeltes Gleichungssystem und damit eine diagonale Systemmatrix, aus der sich direkt die Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx 111,5, \quad (3.22a)$$

$$\lambda_2 \approx 193,2 \quad (3.22b)$$

sowie die zugehörigen Eigenvektoren

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ablesen lassen. Die Zahlenwerte werden im Folgenden vergleichend betrachtet, weshalb hier auf die Angabe von Einheiten verzichtet wird. Die Steifigkeit des Tragwerks gegenüber einer äußeren Last in Richtung $\boldsymbol{\varphi}_1$ bzw. d_1 ist deutlich geringer, da nur die Elemente 1 und 3 am Lastabtrag beteiligt werden. In die vertikale Richtung ergibt sich dabei keine Verschiebung, die eine Längenänderung und somit ein Mitwirken von Element 2 hervorrufen würde, was bereits in der Entkopplung des Gleichungssystems ersichtlich ist. Gegenüber einer äußeren Last in Richtung $\boldsymbol{\varphi}_2$ bzw. d_2 ergibt sich eine deutlich größere Steifigkeit durch die Mitwirkung aller Elemente.

Für den in Abbildung 3.3 dargestellten Lastfall ergibt sich der Verschiebungsvektor zu

$$\mathbf{d} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 3 \\ \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{bmatrix} -1,268 \cdot 10^{-1} \\ 7,321 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \text{ cm.} \quad (3.24)$$

Dabei wirkt die Last F wie in Lastfall LF1 im entsprechenden Beispiel aus Abschnitt 2.2 unter einem Winkel von $\pi/4$. Dies erzeugt gleiche Beträge der Knotenlast in Richtung der beiden Freiheitsgrade d_1 und d_2 . Da sich die Lösung für die Verschiebungen als Superposition der Eigenvektoren mit Gewichtungsfaktoren, die von den Lasten und Steifigkeiten abhängen, ergibt, zeigt sich auch hier die größere Steifigkeit des Tragwerks in vertikaler Richtung. Aufgrund der Entkopplung des Gleichungssystems ergibt sich für die Steifigkeit des Tragwerks in d_1 -Richtung aus Kraft pro Verschiebung

$$\frac{\left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}\right)_1}{d_1} \approx 111,5 \text{ kN/cm} \quad (3.25)$$

genau der Eintrag der Steifigkeitsmatrix $(\mathbf{K})_{1,1}$.

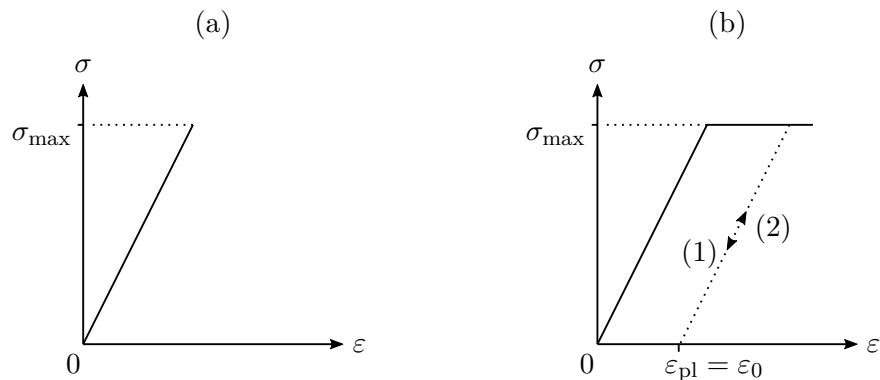


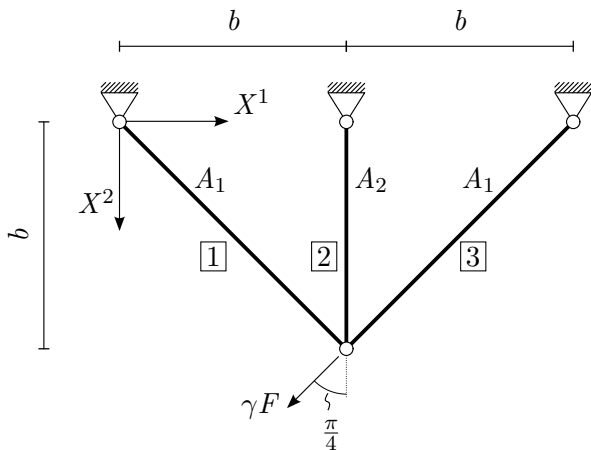
Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Spannungs-Verzerrungs-Kurve bei einem Kraftlastfall bei (a) elastischem Materialhalten bis zum Versagen und bei (b) ideal-elasto-plastischem Materialverhalten

3.2.2 Traglast und Duktilität

Bei der Traglast handelt es sich um eine Größe, die den Maximalwert der Last für einen vorgegebenen Lastfall beschreibt, bei deren Überschreiten das Tragwerk bzw. ein Teil des Tragwerks versagt. Die Duktilität beschreibt hingegen die maximal zulässige Verformung, bei deren Überschreiten Versagen eintritt.

In der Herleitung der Gleichungen zur Strukturanalyse in Abschnitt 2.1 ist das Überschreiten einer maximalen Spannung bzw. Verzerrung und damit das Versagen eines Elements bzw. des Tragwerks nicht berücksichtigt. Im Folgenden werden zur Ermittlung der Traglast zwei einfache Materialmodelle herangezogen. Abbildung 3.4 zeigt die beiden Varianten, mit denen das Materialverhalten näherungsweise abgebildet wird. Variante (a) zeigt beispielhaft für den Zugbereich ein ideal-elastisches Materialverhalten, das durch eine lineare Funktion beschrieben wird. Wenn die maximale Spannung überschritten wird, versagt das Material und kann nicht mehr am Lastabtrag beteiligt werden. Die durchgezogene Linie in Variante (b) beschreibt auch hier beispielhaft für den Zugbereich ein ideal-elasto-plastisches Materialverhalten, das nach dem Erreichen der maximal zulässigen Spannung σ_{\max} keine weitere Steigerung der Spannung zulässt, jedoch das Spannungslevel auch bei theoretisch unendlicher Vergrößerung der Verzerrung unter Plastifizieren noch aufrechterhalten kann. Beispielhaft ist das Materialverhalten bei einer Entlastung (1) und bei danach folgender Wiederbelastung (2) des Tragwerks, nachdem bereits plastische Verzerrungen aufgetreten sind, gestrichelt dargestellt.

Wenn im Rahmen der vorliegenden Arbeit die elastische Traglast ermittelt wird, ist diese dann erreicht, wenn bei der Erhöhung der Last die maximal zulässige Spannung in einem Element zum ersten Mal erreicht ist (Variante (a)).



$$\begin{aligned}
 F &= 20 \text{ kN} \\
 b &= 100 \text{ cm} \\
 E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 \\
 \sigma_{\max}^+ &= 20 \text{ kN/cm}^2 \\
 \sigma_{\max}^- &= -15 \text{ kN/cm}^2 \\
 A_1 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2 \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.5: Drei-Stab-Tragwerk zur Ermittlung der Traglast

Unter bestimmten Voraussetzungen kann in statisch unbestimmten Tragwerken durch Zulassen von Plastifizieren die äußere Belastung auch nach dem Erreichen der maximal zulässigen Beanspruchung eines Elements oder mehrere Elemente weiter gesteigert werden (Variante (b)). Wenn keine weiteren Umlagerungen mehr möglich sind und deshalb die Last nicht mehr weiter gesteigert werden kann, ist die Traglast erreicht. Dies wird im folgenden Beispiel veranschaulicht.

Abbildung 3.5 zeigt das bereits bekannte Drei-Stab-Tragwerk, an dem die Traglast für den eingezeichneten Lastfall ermittelt wird. Die Laststeigerung wird durch den Lastmultiplikator γ modelliert, dessen Wert im Verlauf der Berechnung schrittweise gesteigert wird. Im ersten Schritt ergeben sich infolge der Belastung die Normalkräfte und Normalspannungen in der Struktur zu

$$\mathbf{n}_{\text{el}} = 10\gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \\ \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \approx \gamma \begin{bmatrix} -4,226 \\ 5,977 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (3.26)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{el}} = 20\gamma \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ \sqrt{3} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2 \approx \gamma \begin{bmatrix} -5,359 \\ 14,64 \\ 20,00 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2. \quad (3.27)$$

Diese sind mit dem Fußzeiger el gekennzeichnet, da sie unter der Annahme des linear-elastischen Verhaltens ermittelt werden. In Element 3 ist bereits für $\gamma = 1$ die maximal zulässige Spannung erreicht (siehe auch Ergebnis der Optimierung aus Abschnitt 2.2). Der Lastfaktor für die elastische Traglast ist daher $\gamma_{\text{Te}} = 1,0$.

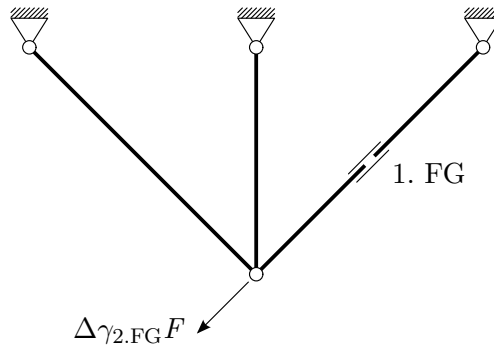


Abbildung 3.6: Drei-Stab-Tragwerk nach dem Entstehen des ersten Fließgelenks

Bei weiterer Laststeigerung erreicht Element 3 den plastischen Bereich und es ist keine weitere Steigerung der Normalspannung möglich. In diesem Element bildet sich also bei $\gamma_{1,FG} = 1,0$ das erste Fließgelenk und es beteiligt sich nicht am Abtrag der zusätzlichen Last. Das Restsystem, das bei weiterer Laststeigerung zum Lastabtrag herangezogen wird, ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Dabei wird die Belastung nun mit dem Faktor $\Delta\gamma_{2,FG}$ gewichtet, dessen Bezeichnung veranschaulicht, dass dieser die Änderung des Lastfaktors bis zum Öffnen des zweiten Fließgelenkes beschreibt.

Am Restsystem werden die Normalkräfte und Normalspannungen zu

$$\Delta\mathbf{n}_2 = 20\Delta\gamma_{2,FG} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \approx \Delta\gamma_{2,FG} \begin{bmatrix} -20,00 \\ 28,28 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (3.28)$$

und

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_2 = 20\Delta\gamma_{2,FG} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 3 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2 \approx \Delta\gamma_{2,FG} \begin{bmatrix} -25,36 \\ 69,28 \\ 0,000 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2. \quad (3.29)$$

ermittelt. Daraus ergibt sich ein weiteres Laststeigerungspotential von $\Delta\gamma_{2,FG} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$, bis Element 2 die maximal zulässige Spannung erreicht. Darüber hinaus ist keine Laststeigerung möglich, da das Restsystem nicht mehr brauchbar ist. Der Traglastfaktor ergibt sich insgesamt zu $\gamma_T = \gamma_{2,FG} = \gamma_{1,FG} + \Delta\gamma_{2,FG} = \frac{2\sqrt{3}+3}{6} \approx 1,077$. Die maximal zulässige Last für das untersuchte Tragwerk beträgt $F_{\max} = 10 + \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 21,55$ kN. Die Normalkräfte und Normalspannungen im Traglastzustand ergeben sich zu

$$\mathbf{n}_T = \gamma_{1,FG}\mathbf{n}_{el} + \Delta\mathbf{n}_2 \approx \begin{bmatrix} -5,774 \\ 8,165 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (3.30)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma}_T \approx \begin{bmatrix} -7,321 \\ 20,00 \\ 20,00 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2. \quad (3.31)$$

In dem einfach statisch unbestimmten System sind im Traglastzustand zwei Elemente maximal ausgenutzt.

Die Verformungen werden über den Verlauf der Berechnung aufaddiert und ergeben sich zu

$$\mathbf{d}_T \approx \begin{bmatrix} -1,732 \\ 1,000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1} \text{ cm}. \quad (3.32)$$

Diese Verformungen im Traglastzustand beschreiben die Duktilität des Tragwerks. In einem spröden Tragwerk sind diese Verformungen relativ gering, wohingegen in einem duktilen Tragwerk relativ große Verformungen vor dem Versagen auftreten. Die Begriffe relativ gering bzw. relativ groß sind an dieser Stelle sehr unkonkret und müssen im Rahmen der Spezifika der jeweiligen Aufgabe festgelegt werden. Ein möglichst duktiles Versagen ist in der Auslegung von herkömmlichen Tragwerken präferiert, da sich dieses sichtbar ankündigt und deshalb keinen unerwarteten Charakter besitzt.

Weitere Details zur notwendigen, aber hier nicht gezeigten, Prüfung der positiven Dissipationsarbeit und zu sich wieder schließenden Fließgelenken können der Literatur zur Fließgelenktheorie, beispielsweise GRAF UND VASSILEV (2006), entnommen werden.

Nach dem vollständigen Aufbringen der Traglast wird für Materialvariante (b) nach dem Erreichen der Traglast die Entlastung des Tragwerks betrachtet. Wie in Abbildung 3.4 durch Pfad (1) dargestellt, gilt die Annahme, dass der Entlastungsprozess elastisch abläuft. Die hervorgerufenen plastischen Verzerrungen ε_{pl} bleiben im Tragwerk bestehen. Der dadurch eingeprägte Kraftzustand nach Entlastung \mathbf{n}_{ent} ergibt sich zu

$$\mathbf{n}_{ent} = \mathbf{n}_T - \gamma_T \mathbf{n}_{el} = \begin{bmatrix} -1,220 \\ 1,725 \\ -1,220 \end{bmatrix} \text{ kN} \in \text{Bild}(\mathbf{R}^T). \quad (3.33)$$

Diese Normalkraftverteilung bildet einen Eigenspannungszustand, der ohne äußere Lasten nur mit sich selbst im Gleichgewicht steht $\mathbf{A}^T \mathbf{n}_{ent} = \mathbf{0}$. Die zugehörige plastische Verzerrung von Element 3 ergibt sich zu $\varepsilon_{pl} = -3,660 \cdot 10^{-4}$ bzw. als plastische Längenänderung $\Delta \ell_{pl} = -0,05176 \text{ cm}$. Sind die plastischen Längenänderungen aller Elemente im Traglastzustand bekannt und werden diese als vorgegebene Längenänderungen aufgebracht, kann mithilfe von Gleichung (2.29) der eingeprägte Eigenspannungszustand

direkt ermittelt werden. Dies wird z. B. im Rahmen der virtual distortion method von HOLNICKI-SZULC (1995) ausgenutzt.

Bei einer nach dieser Entlastung folgenden Wiederbelastung würde das System direkt in einem elastischen Vorgang (vgl. Pfad (2) in Abbildung 3.4 (b)) in den Traglastzustand gelangen. Dies wird in der Baupraxis beispielsweise beim Vorrecken von Seilen ausgenutzt, hier aber nicht weiter betrachtet.

3.3 Besonderheiten optimierter Tragwerke

Die Idee, eine zunächst unbekannte Form eines Tragwerks mit minimaler Masse zu bestimmen, kann bis Galileo Galilei¹ ins 17. Jahrhundert zurückverfolgt werden. Die ersten Veröffentlichungen zu optimalen Tragstrukturen gehen auf MAXWELL (1870) und MICHELL (1904) zurück. Maxwell² beschreibt in seiner Arbeit den Zusammenhang zwischen minimal notwendiger Gesamtmasse einer Fachwerkstruktur und der Summe der Produkte von Normalkraft und Stablänge über alle Elemente. Michell³ leitet daraus geometrische Formen ab, die in diesem Maß optimal und als sog. Michell-Strukturen bekannt sind. Bei der Optimierung von Fachwerken ist häufig vom fully stressed design die Rede, d. h. jeder Stab ist in mindestens einem Lastfall hinsichtlich der Festigkeit zu 100 % ausgenutzt. Dies wird von RAZANI (1965) in Zusammenhang mit dem massenminimalen Design gebracht. Für statisch bestimmte Strukturen unter einem Lastfall fallen diese beiden Eigenschaften zusammen. Für statisch unbestimmte Strukturen unter mehreren Lastfällen ist das massenminimale Design im Allgemeinen nicht voll ausgenutzt. DAYARATNAM UND PATNAIK (1969) beschreiben den Zusammenhang zwischen der Anzahl an Lastfällen und dem Grad der statischen Unbestimmtheit, der erfüllt sein muss, sodass das massenminimale Design auch voll ausgenutzt ist. Weiterhin wird beschrieben, dass sich dieser Zusammenhang durch Vorspannung der Elemente verändern lässt. HARZHEIM (2019) gibt eine übersichtliche Darstellung über zu erwartende Optimierungsergebnisse, abhängig vom Grad der statischen Unbestimmtheit und der Anzahl der Lastfälle.

Von WANG (1992) werden Beispiele zum fully stressed design von Strukturen untersucht. Die wesentliche Erkenntnis darin ist, dass ein optimiertes statisch unbestimmtes Fachwerk in voll ausgenutzter Konfiguration leichter ist als der optimierte und voll ausgenutzte Entwurf eines zugehörigen statisch bestimmten Grundsystems. Der Grund dafür wird in der Einführung zusätzlicher, effizienterer Möglichkeiten zum Lastabtrag erkannt. PATNAIK UND HOPKINS (1998) beschreiben die Optimalität von fully stressed

¹Galileo Galilei (1564–1641)

²James C. Maxwell (1831–1879)

³Anthony Michell (1870–1959)

designs für verschiedene Anzahlen an Lastfällen, Stäben und Knoten. Außerdem werden darin verschiedene Optimierungsalgorithmen, u. a. die in Abschnitt 2.2.3 vorgestellte SQP-Methode, miteinander verglichen.

In den genannten Vorarbeiten wird häufig das Ziel verfolgt, die Masse der Struktur zu minimieren, da diese direkt als ein quantitatives Maß für die Effizienz des gewählten Lastabtrags dienen kann. Nach OTTO (1998) (S. 46) existiert von Richard Buckminster Fuller⁴ der Ausspruch: „Wenn man wissen will, was eine Konstruktion wirklich taugt, muß man sie wiegen“, der das Ziel der Masseneinsparung nochmals unterstreicht. Das Ziel, die Masse zu minimieren, basiert daneben auch auf ästhetischen (Schlankheit), wirtschaftlichen (Materialkosten) und Nachhaltigkeitsgründen (Emissionen und Rohstoffknappheit). Wie bereits erwähnt, erhält man für spezielle Fälle das massenminimierte Design auch durch die Berücksichtigung der Bedingung, dass alle Stäbe zu 100 % ausgenutzt werden sollen, was auch als Optimalitätskriterienmethode bezeichnet wird (HARZHEIM 2019). Weiterhin werden beispielsweise für gegebene Massen und Belastungen die Strukturen gesucht, die die geringsten Verschiebungen aufweisen. Dazu kann beispielsweise die Arbeit der äußeren Lasten als Produkt aus äußerer Kraft und Verschiebung in Kraftrichtung minimiert werden. Dies wird auch als Minimierung der Nachgiebigkeit bezeichnet (HARZHEIM 2019).

Bei der Realisierung von Tragwerken müssen neben den genannten Anforderungen und Zielen aus der Strukturmechanik meist auch optische und viele weitere Anforderungen erfüllt werden, die nicht alle objektiv quantifizierbar sind. Deshalb resultieren Tragwerksentwürfe häufig aus Kompromissen zwischen verschiedenen Zielvorgaben. Die Ausgestaltung des jeweils möglichst optimalen Entwurfs ist keine triviale Aufgabe für die Tragwerksplanung, die mithilfe der Strukturoptimierung gelöst werden kann. Häufig wird jedoch nicht auf die Strukturoptimierung, sondern auf bereits bekannte und etablierte Bauweisen bzw. Tragwerksformen zurückgegriffen (z. B. Outrigger- oder Tube-Systeme für Hochhaustragwerke), von denen angenommen wird, dass sie für die jeweilige Situation geeignet und in gewisser Weise auch optimal sind. Es wird also häufig auf eine Art Baukasten zurückgegriffen, der für die meisten Anwendungen ausreichend ist und sich über viele Jahre entwickelt hat. Optimierungsverfahren kommen in der Baupraxis bisher eher für Spezialkonstruktionen zum Einsatz.

⁴Richard Buckminster Fuller (1895–1983)

4

Adaptive Stabtragwerke

Adaptivität beschreibt die Fähigkeit eines Systems, sich selbständig an veränderte Umgebungsbedingungen anzupassen (SOBEK 2000). In der Natur existiert eine Vielzahl an erfolgreichen Beispielen, in denen diese Veränderungen kurzfristig, mittelfristig oder langfristig erfolgen. Adaptivität in der Technik bzw. direkt in Strukturen wird bereits seit den 1960er Jahren in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Maschinenbau erfolgreich eingesetzt. Bei den ersten Entwicklungen spielten insbesondere die Beeinflussung von Schwingungen im Maschinenbau (SOONG 1988) sowie die Bewegung von Satelliten und die Steuerung von Spiegeln in der Raumfahrt (PELLEGRINO 1986) eine Rolle.

ZUK UND CLARK (1970) beschreiben als Erste die Idee, statische Verformungen und Schnittgrößen an Gebäuden mit aktiven Elementen zu beeinflussen. Von YAO (1972) wird diese Idee verfeinert und ein beispielhafter Aufbau adaptiver Strukturen vorgeschlagen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist insbesondere interessant, welche der in Kapitel 3 aufgeführten Tragwerkseigenschaften durch den Einsatz von Adaptivität in Tragwerken verändert werden können, welche Voraussetzungen dafür bestehen und welche Ziele damit erreicht werden können.

In diesem Kapitel werden zu Beginn Aufbau und Funktionsweise von adaptiven Tragwerken erläutert und dabei notwendige Begriffe eingeführt. Abschnitt 4.2 stellt die Grundlagen dafür vor, den Einsatz der Adaptivität im Tragwerksmodell zu berücksichtigen. Daraufhin werden in Abschnitt 4.3 die grundlegenden Funktionsweisen aufgezeigt, mit deren Hilfe die Anpassung des Tragwerkszustands erfolgen kann. Zum Abschluss des Kapitels werden in Abschnitt 4.4 Algorithmen zur automatisierten Platzierung der Aktoren vorgestellt.

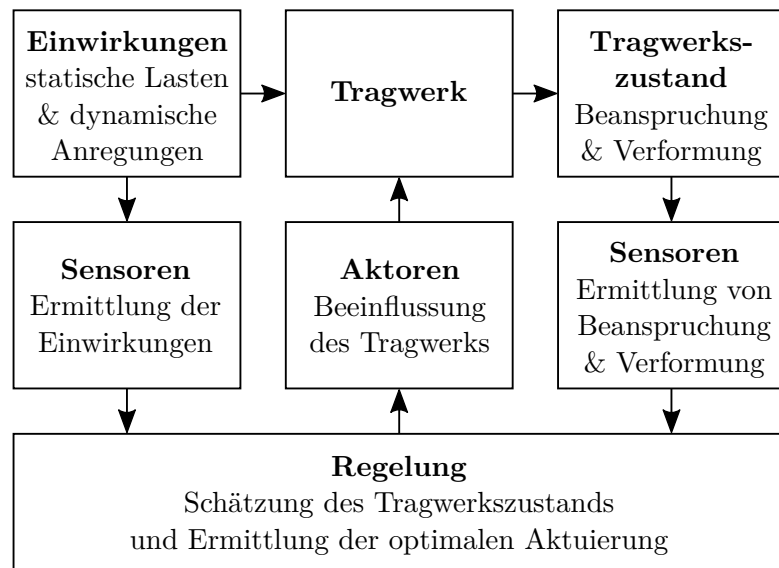


Abbildung 4.1: Vereinfachter schematischer Aufbau einer adaptiven Struktur nach YAO (1972) (S. 1571) und TEUFFEL (2004) (S. 12)

4.1 Aufbau und Komponenten

Um adaptive Strukturen zu verstehen, müssen im ersten Schritt die wichtigsten Begriffe bekannt sein. Dabei sind in erster Linie die Komponenten zu beschreiben, aus denen eine adaptive Struktur besteht. Herkömmliche (passive) Tragwerke werden durch Aktoren, Sensoren und die Regelung ergänzt. Der Aufbau eines adaptiven Tragwerks wurde von TEUFFEL (2004) ausführlich beschrieben und der Arbeit von YAO (1972) folgend in Abbildung 4.1 vereinfacht schematisch dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit weniger relevant sind die Sensoren, da im Rahmen der Untersuchungen davon ausgegangen wird, dass der Tragwerkszustand komplett bekannt ist. Dies ist jedoch eine stark vereinfachende Annahme. Im Allgemeinen werden verschiedene Sensoren eingesetzt, um Tragwerkszustand und ggf. Einwirkungen bestmöglich zu ermitteln. Dazu können beispielsweise Dehnmessstreifen, Beschleunigungssensoren, Windmesser etc. eingesetzt werden. Weitere Informationen dazu können der einschlägigen Literatur entnommen werden, siehe beispielsweise JANOCHA (2007).

Relevant für die vorliegende Arbeit sind Aktoren und die Regelung, da diese beiden Komponenten aktiv die Tragwerkeigenschaften bzw. den Tragwerkszustand verändern. Bekannte Aktoren sind beispielsweise Hydraulikzylinder, die durch eine Änderung von hydraulischem Druck, der von einer Pumpe erzeugt wird, ihre Länge anpassen können. Da diese Verlängerung oder Verkürzung in Richtung der Elementachse erfolgt, werden diese Aktoren auch als Linearaktoren bezeichnet. Davon unterscheiden sich beispielsweise flächige Aktoren, die mehrdimensionale Bewegungen ausführen, aber in dieser Arbeit



Abbildung 4.2: Darstellung von serieller und paralleler Anordnung eines Aktors zu einem Fachwerkstab

nicht weiter betrachtet werden. Weitere Ausführungen zu Aktoren können beispielsweise JANOCHA (2007) entnommen werden. Bei Aktoren wird in der vorliegenden Arbeit weiterhin anhand der Anordnung im Tragwerk unterschieden. Dabei können Aktoren parallel oder seriell zu einem passiven Tragwerkselement eingebaut werden, was beispielhaft in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Aktoren bzw. aktive Elemente werden durch ein grün gefülltes Rechteck gekennzeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird von einer seriellen Anordnung von Aktoren ausgegangen. Der Grund dafür ist, dass der Fall der parallelen Anordnung von Aktoren als serielle Anordnung eines Aktors in einem parallelen Stab betrachtet werden kann und somit der Fall der parallelen Aktoranordnung damit bereits abgedeckt ist und nicht separat betrachtet werden muss. Wenn doch eine parallele Aktoranordnung untersucht werden soll, ist dies explizit angegeben. Die Ermittlung der Anordnung von Aktoren im Tragwerk wird als Aktorplatzierung bezeichnet.

Die Regelung besteht wiederum aus mehreren Komponenten, die nicht weiter aufgeführt werden. Die Aufgaben der Regelung sind die Ermittlung des Zustands des Tragwerks anhand der gemessenen Daten aus den Sensoren, der Abgleich dieses Zustands mit einem vorher definierten, gewünschten Zustand und die Ermittlung von Anweisungen an die Aktoren, die dann durch Längenänderung den Tragwerkszustand entsprechend beeinflussen. Weitere Ausführungen zur Regelung sind beispielsweise in LUNZE (2010) zu finden.

Die aktive Beeinflussung des Tragwerkszustands wird auch als Aktuierung oder Adaption bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden mit den Adjektiven passiv, aktiv und adaptiv verschiedene Zustände beschrieben, in denen sich das Tragwerk befindet. Im passiven Zustand wird davon ausgegangen, dass sich das Tragwerk nur unter der Beanspruchung von auftretenden äußeren Lasten befindet und keine Aktuierung stattfindet. Bei der Betrachtung des aktiven Zustands werden keine äußeren Lasten berücksichtigt, sondern nur die Wirkung der Aktuierung auf das Tragwerk. Der adaptive Zustand ergibt sich im Rahmen der Theorie I. Ordnung, bei der die Superposition der verschiedenen Zustände zulässig ist, als Überlagerung von passivem und aktivem Zustand. In der vorliegenden Arbeit werden Größen, die sich auf einen der Zustände beziehen, mit den Fußzeigern pas, akt und ada versehen.

Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, dass kein Zeitverzug durch die Regelung entsteht. Sobald sich die Erfordernis zur Aktuierung ergibt, findet diese statt. Die

Gültigkeit dieser Annahmen muss vor der Realisierung geprüft werden und bei Ungültigkeit dieser Annahme müssen Auswirkungen aus der Latenz berücksichtigt werden.

4.2 Modellierung der Aktuierung

Die in Abschnitt 2.1 vorgestellte Tragwerksanalyse, wird um die Möglichkeit erweitert, Aktuierung zu berücksichtigen. Bei Verwendung der DSM bzw. der FEM existieren unter anderem die im Folgenden vorgestellten Ansätze, die Aktuierung zu modellieren. Dabei gelten – wenn nicht explizit anders angegeben – die Annahmen aus der Einführung der strukturmechanischen Grundlagen in Abschnitt 2.1.

4.2.1 Aktuierung als Lastfall

Die intuitive Methode, die Auswirkungen von Aktuierung im Tragwerk zu modellieren, ist das Aufbringen von äquivalenten Ersatzlasten, die die Auswirkung der Aktuierung korrekt berücksichtigen. Dazu werden in den Elementen, die als Aktoren ausgewählt wurden, initiale Längenänderungen Δl_0 vorgegeben. Diese werden nach Gleichung (2.27) in eine Kraft-Gleichgewichtsgruppe, die entlang der Elementachse wirkt, umgerechnet und im Lastvektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems (2.24) berücksichtigt. Damit wird für die Aktuierung ein Aktorweg vorgegeben, dessen Einheit ein Längenmaß ist. So können beispielsweise Verschiebungen der Struktur infolge der vorgegebenen Aktuierung ermittelt werden. Zur Rückrechnung von elastischen Längenänderungen bzw. Schnittgrößen aus den erhaltenen Verschiebungen ist die Berücksichtigung der vorgegebenen Längenänderungen nach Gleichung (2.28) nötig. Die Methode, Aktuierung als initiale Längenänderungen zu modellieren, entspricht technisch exakt der Berücksichtigung von Beanspruchungen aus Temperaturänderungen.

4.2.2 Aktuierung mithilfe eines Fachwerk-Aktor-Elements

Basierend auf der Herleitung der Fachwerkelemente in Abschnitt 2.1 kann für einen Fachwerkstab, der mit einem Aktor ausgestattet ist, ein Fachwerk-Aktor-Element formuliert und beim Zusammenbau des Gleichungssystems eingesetzt werden. Aktorelemente werden beispielsweise auch von KWAN UND PELLEGRINO (1993) und RAJA UND NARAYANAN (2009) eingesetzt. Auch in kommerzieller Software sind finite Elemente

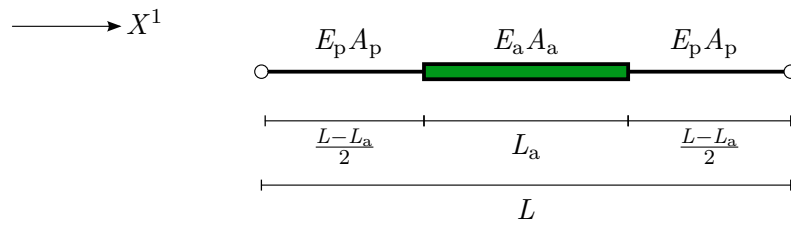


Abbildung 4.3: Eindimensionales Fachwerk-Aktor-Element mit Materialparametern und Bemaßung

verfügbar, die einen Fachwerk-Aktor modellieren. Beispielsweise kann in dem Finite-Elemente-Programm ANSYS das Element LINK11 eingesetzt werden, mit dem im Rahmen der getroffenen Annahmen identische Ergebnisse erzeugt werden können wie mit dem hier hergeleiteten Element.

Die Herleitung wird hier beispielhaft an einem eindimensionalen Beispiel aus Abbildung 4.3 gezeigt und ist in gekürzter Form bereits in GEIGER U. A. (2020c) zu finden. Wie in Abschnitt 2.1 ist der Ausgangspunkt für die Herleitung der Gleichungen des Fachwerk-Aktor-Elements die Beschreibung der Bewegung eines solchen Elements. Das Element besteht aus einem passiven (Fußzeiger p) und einem aktiven Teil (Fußzeiger a). Die Anordnung und Länge des adaptiven Teils ist beliebig und wird nur für die vereinfachte Herleitung mit einem symmetrischen Aufbau angenommen. Außerdem können die Materialeigenschaften E_p und E_a und die Querschnittsflächen A_p und A_a theoretisch beliebig festgelegt werden.

Die Aktuierung soll hier durch die Vorgabe eines Aktorwegs erfolgen. Der Aktorweg \hat{u} wird als Sprung in der Verschiebungsfunktion d_x des Elements in der Mitte des aktiven Teils berücksichtigt. Dieser Sprung wird hier mithilfe einer gedanklichen Aufteilung des Elements in zwei getrennte Fachwerkelemente realisiert, die in Abbildung 4.4 (a) dargestellt ist. Bei der Darstellung der Aufteilung ist zu beachten, dass kein Abstand zwischen den beiden Hälften des Elements modelliert wird, sondern dieser nur für eine verbesserte Übersichtlichkeit eingefügt ist. Mithilfe der angenommenen Aufteilung ergibt sich die Bedingung für den Verschiebungssprung zu

$$d_x(b) - d_x(a) = \hat{u}. \quad (4.1)$$

Dabei ergibt ein positiver Wert für den Aktorweg eine positive Längenänderung – also eine Verlängerung – des Elements. Die potentielle Energie des Fachwerkelements nach Gleichung (2.14b) wird herangezogen und mithilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode wird die Bedingung für den Verschiebungssprung integriert. Dies führt auf das Lagrange-

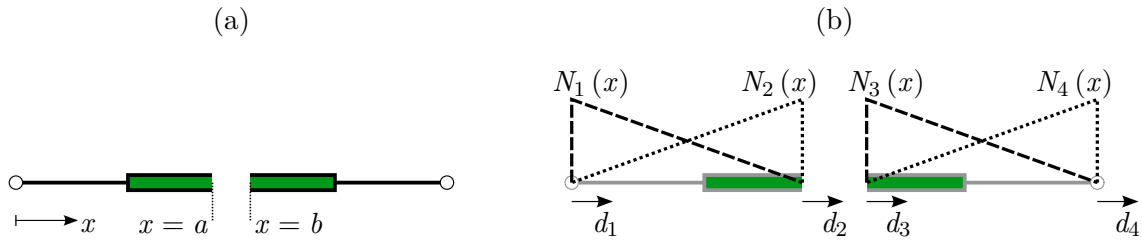


Abbildung 4.4: (a) Aufteilung des Fachwerk-Aktor-Elements im lokalen Elementkoordinatensystem zur Berücksichtigung des Verschiebungssprungs; (b) Definition der Verschiebungsfreiheitsgrade

Funktional

$$\mathcal{L} = \Pi^{\text{int}} + \mu (d_x(b) - d_x(a) - \hat{u}) + \Pi^{\text{ext}} \quad (4.2)$$

mit dem Lagrange-Multiplikator μ .

Um die Herleitung möglichst einfach zu gestalten, wird angenommen, dass entlang des Elements die Materialeigenschaften und die Querschnittsfläche konstant sind und durch EA beschrieben werden. Nach der Variation des Ausdrucks für die potentielle Energie analog zu Abschnitt 2.1 wird das Problem diskretisiert. Die Verschiebungsfreiheitsgrade, die zur Beschreibung herangezogen werden, sind in Abbildung 4.4 (b) definiert. Damit ergibt sich für das eindimensionale Problem

$$\mathbf{N}(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \quad (4.3)$$

und der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]^T. \quad (4.4)$$

Für den Anteil der inneren potentiellen Energie Π^{int} ergibt sich das weitere Vorgehen analog zu Abschnitt 2.1. Jedoch wird zusätzlich der Anteil zur Berücksichtigung des Verschiebungssprungs \hat{u} betrachtet. Die Bedingung (4.1) lässt sich nach der Diskretisierung auch als

$$(\mathbf{N}(b) - \mathbf{N}(a)) \mathbf{d} - \hat{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{d} - \hat{u} = 0 \quad (4.5)$$

bzw. als

$$[0 \quad -1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} - \hat{u} = d_3 - d_2 - \hat{u} = 0 \quad (4.6)$$

darstellen.

Nach dem Einsetzen und dem Bilden der ersten Variation des Lagrange-Funktional (4.2) ergibt sich

$$\delta\mathcal{L}^h = \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{d} + \mu \mathbf{N}_u^T) + \delta\mu (\mathbf{N}_u \mathbf{d} - \hat{u}) + \delta\Pi^{\text{ext}} = 0. \quad (4.7)$$

Dabei wird die Matrix \mathbf{A} eingesetzt, die aus dem Zusammenbau der beiden halben Elemente nach Abschnitt 2.1.4 ermittelt wird. Die Berücksichtigung des Sprungs in der Verschiebungsfunktion geschieht mithilfe des Lagrange-Multiplikators μ , der sich zur Normalkraft im Element und damit genau zur Kraft im Aktor ergibt.

Unter Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ergibt sich daraus die Elementsteifigkeitsmatrix des Fachwerk-Aktor-Elements zu

$$\mathbf{k}_A = \begin{bmatrix} k^* & -k^* & 0 & 0 & 0 \\ -k^* & k^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k^* & -k^* & 1 \\ 0 & 0 & -k^* & k^* & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } k^* = \frac{EA}{\frac{L}{2}}. \quad (4.8)$$

Der gesuchte erweiterte Lösungsvektor \mathbf{d}_{erw} und der erweiterte Vektor der rechten Seite \mathbf{f}_{erw} ergeben sich für das Element zu

$$\mathbf{d}_{\text{erw}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ f_{\text{akt}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\text{erw}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \hat{u} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Der Vektor der rechten Seite beinhaltet nun den Aktorweg \hat{u} , der direkt vorgegeben werden kann. Der Lösungsvektor \mathbf{d}_{erw} ist erweitert um die Unbekannte f_{akt} , die sich aus dem Lagrange-Multiplikator ergibt und die Kraft im Aktor darstellt.

Der Aufbau des Gleichungssystems bzw. die Besetztheit der Matrix spiegelt genau den Ansatz wider, nach dem das Element hergeleitet wurde. Die beiden Block-Matrizen zwischen den Freiheitsgraden d_1 und d_2 bzw. zwischen d_3 und d_4 zeigen die entsprechenden Matrizen zweier herkömmlicher Stabelemente der halben Länge. Die Kopplung der beiden Stabelemente wird mithilfe der zusätzlich eingebrachten Bedingung (4.1) sichergestellt. Die Einträge der fünften Zeile stellen den geforderten Zusammenhang der Verschiebungen her und die Einträge in der fünften Spalte stellen entsprechend das Gleichgewicht der Kräfte unter Berücksichtigung der Aktorkraft her. Wird auf der rechten Seite ein Aktorweg $\hat{u} = 0$ vorgegeben, dann verhält sich das Element genau wie

das äquivalente passive Stabelement. Der einzige Unterschied, der sich dabei ergibt, ist, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade dafür verwendet werden, direkt die Stabkraft zu ermitteln, die in diesem Fall durch die Lösung für f_{akt} dargestellt wird.

Beim Einsatz des Elements in zwei- bzw. dreidimensionalen Tragwerken und der dazu notwendigen Rotation der Elementmatrix in das globale Koordinatensystem ist darauf zu achten, dass an den Knoten zusätzliche Freiheitsgrade in die zusätzlichen Dimensionen benötigt werden, die inneren Freiheitsgrade jedoch immer in Richtung der Elementachse ausgerichtet bleiben und sich deren Anzahl nicht ändert. Deshalb ergeben sich für dieses einfach Fachwerk-Aktor-Element bei der gewählten Diskretisierung $2n_{\text{dim}} + 3$ Freiheitsgrade, wobei n_{dim} die Anzahl der Raumdimensionen 1, 2 oder 3 beschreibt.

Die inneren Freiheitsgrade (d_2 , d_3 und f_{akt}) werden beim Zusammenbau des Gesamtsystems in die Systemsteifigkeitsmatrix übernommen und – wenn nicht zwei Aktoren beispielsweise immer dieselbe Kraft aufweisen sollen – nicht mit anderen Freiheitsgraden gekoppelt.

Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass er sowohl für die Kombination mit anderen Elementtypen, wie Schalen, als auch für die Erweiterung der Formulierung für geometrische Nichtlinearität, sehr gut geeignet ist. Die Umsetzung der Formulierung für geometrische Nichtlinearität unter Mitarbeit des Autors ist in der Arbeit von SACHSE U. A. (2021) zu finden. Andere Erweiterungen, wie zum Beispiel die Formulierung eines Linear-Aktors für Balkentragwerke, ist in GEIGER U. A. (2020b) zu finden. Analog zu der vorgestellten Vorgehensweise können auch erweiterte Balkenelemente formuliert werden, die in der Lage sind, Krümmungen bzw. Schubwinkel als Biege- bzw. Querkraft-Aktoren aufzubringen. Im Hinblick auf die Optimierung adaptiver Tragwerke werden beim Lösen des Gleichungssystems auf Kosten von mehr Freiheitsgraden direkt auch die Aktorkräfte ermittelt, was zu einer effizienten Implementierung beitragen kann. Durch die eigenständige Formulierung des Elements sind die Ableitungen direkt im Programmablauf verfügbar und können beispielsweise im SQP-Verfahren aus Abschnitt 2.2.3 direkt eingesetzt werden.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Verwendung des Fachwerk-Aktor-Elements und der Berücksichtigung der Aktuierung als Lastfall aus dem vorhergehenden Abschnitt, der auf das passive System aufgebracht wird, untersucht. Dazu wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{k}_A \mathbf{d}_{\text{erw}} = \mathbf{f}_{\text{erw}} \quad (4.10)$$

unter Anwendung der statischen Kondensation weiter vereinfacht. Dabei wird ein System mit nur einem einzelnen Element betrachtet, was jedoch die Gültigkeit der Aussagen nicht einschränkt. Für bessere Lesbarkeit werden Variablenamen der Systemebene für

das einzelne Element gewählt und die Einteilung in abhängige und unabhängige Freiheitsgrade wird durch die Fußzeiger p und q verdeutlicht. Dabei werden die abhängigen Unbekannten \mathbf{d}_q aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pq} \\ \mathbf{K}_{qp} & \mathbf{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_q \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

eliminiert. Die bei der Herleitung des Fachwerk-Aktor-Elements als innere Freiheitsgrade bezeichneten Größen werden als abhängige Unbekannte festgelegt:

$$\mathbf{d}_q = [d_2 \quad d_3 \quad f_{\text{akt}}]^T. \quad (4.12)$$

Durch entsprechendes Umsortieren der Gleichungen und Unbekannten sowie die Umformungen

$$\mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{pq} \mathbf{K}_{qq}^{-1} \mathbf{K}_{qp} \quad (4.13)$$

und

$$\mathbf{f}_{\text{red}} = \mathbf{f}_p - \mathbf{K}_{pq} \mathbf{K}_{qq}^{-1} \mathbf{f}_q \quad (4.14)$$

wird das reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{\text{red}} \mathbf{d}_p = \mathbf{f}_{\text{red}} \quad (4.15)$$

generiert, das äquivalent zum gesamten Gleichungssystem ist. Bei der Lösung des Gleichungssystems wird jedoch nicht mehr direkt nach den abhängigen Unbekannten gelöst. Diese können – wenn nötig – in einem weiteren Schritt aus

$$\mathbf{d}_q = \mathbf{K}_{qq}^{-1} (\mathbf{f}_q - \mathbf{K}_{qp} \mathbf{d}_p) \quad (4.16)$$

rückgerechnet werden.

Angewendet auf das aus einem Fachwerk-Aktor-Element bestehende eindimensionale System ergibt sich das reduzierte Gleichungssystem nach Einsetzen zu

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \hat{u}. \quad (4.17)$$

Zusätzlich wurde berücksichtigt, dass in Richtung der inneren Verschiebungsfreiheitsgrade d_2 und d_3 keine äußeren Kraftlasten zugelassen werden, also gilt:

$$\mathbf{f}_q = [0 \quad 0 \quad \hat{u}]^T. \quad (4.18)$$

Als reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix für ein herkömmliches Fachwerkelement. Der zweite Summand auf der rechten Seite von Gleichung (4.17) kann formal mithilfe von Gleichung (2.27) als Anteil aus der initialen Längenänderung $\mathbf{A}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0$ hergeleitet werden, wobei gilt:

$$\mathbf{A} = [-1 \quad 1], \quad \mathbf{C} = \left[\frac{EA}{L} \right] \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{l}_0 = [\hat{u}]. \quad (4.19)$$

Weiterhin ist die Betrachtung von Gleichung (4.16) interessant. Nach Einsetzen aller bekannten Größen ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ f_{\text{akt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^* & 0 & -1 \\ 0 & k^* & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k^* & 0 \\ 0 & -k^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} \right) \quad (4.20a)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{k^*} & \frac{1}{k^*} & -1 \\ \frac{1}{k^*} & \frac{1}{k^*} & 1 \\ -1 & 1 & -k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* d_1 \\ k^* d_4 \\ \hat{u} \end{bmatrix}. \quad (4.20b)$$

Dabei wird deutlich, dass die letzte Zeile der vektoriellen Gleichung

$$f_{\text{akt}} = -\frac{1}{2} k^* d_1 + \frac{1}{2} k^* d_4 - \frac{1}{2} k^* \hat{u} = \frac{1}{2} k^* (-d_1 + d_4 - \hat{u}) \quad (4.21a)$$

$$= \frac{EA}{L} (d_4 - d_1 - \hat{u}) \quad (4.21b)$$

$$= \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{d}_q - \Delta \mathbf{l}_0) \quad (4.21c)$$

genau der Gleichung zur Rückrechnung der Normalkräfte aus den Verschiebungen infolge vorgegebener Längenänderungen nach Gleichung (2.29) entspricht. Somit ist die Äquivalenz der beiden Herangehensweisen gezeigt.

4.2.3 Aktuierung als effektive Flexibilität und effektive Steifigkeit

Die bisher vorgestellten Verfahren sind in der Lage, die Aktuierung auf der rechten Seite des Gleichungssystems (2.24) zu berücksichtigen. Dazu werden entweder Ersatzlasten im herkömmlichen, nicht erweiterten Lastvektor berücksichtigt oder es wird der Lastvektor um den vorgegebenen Aktorweg erweitert und das entsprechende Gleichungssystem

gelöst. Das zu lösende Gleichungssystem hat in diesen Fällen die Form $\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$, wobei die Aktuierung in \mathbf{f}_{ext} berücksichtigt ist. Eine weitere Methode, die Aktuierung zu berücksichtigen, stellt die Ermittlung einer effektiven Steifigkeits- bzw. einer effektiven Flexibilitätsmatrix dar. Dabei wird die Aktuierung in \mathbf{K} bzw. in \mathbf{K}^{-1} integriert. Die Idee dazu wird unter Beteiligung des Autors bereits in BÖHM U. A. (2020) skizziert und durch die folgenden Vorüberlegungen veranschaulicht.

Ausgehend von der bereits bekannten Grundgleichung für das passive System mit den Abkürzungen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{u} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{l}_0$ ergibt sich

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} + \mathbf{A}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_0 \quad (4.22a)$$

$$= \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4.22b)$$

Die Variable \mathbf{u} enthält die Informationen über die vorgegebene Aktuierung und wird im Folgenden auch als Aktoreingang bezeichnet. Die Variable \mathbf{B} enthält die Information, an welchen Orten im Tragwerk – genauer: an welchen Freiheitsgraden im Modell – die Aktuierung aufgebracht wird. Die Matrix \mathbf{B} wird auch als Eingangsmatrix bezeichnet. Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, wird der Aktoreingang \mathbf{u} durch den Regler ermittelt, was hier nicht detaillierter betrachtet werden soll.

Dafür wird beispielsweise angenommen, dass die Aktuierung mithilfe einer Matrix \mathbf{R}_1 aus einer Matrix-Vektor-Multiplikation mit der äußeren Kraftlast berechnet werden kann. Daraus ergibt sich

$$\mathbf{u}^* \left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \right) = \mathbf{R}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \quad (4.23)$$

und nach Einsetzen in Gleichung (4.22b)

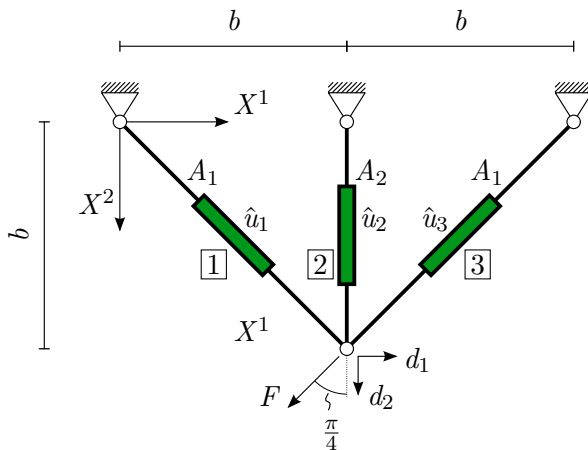
$$\mathbf{K}\mathbf{d}^* = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} + \mathbf{B}\mathbf{R}_1 \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{d}^* = \underbrace{\left(\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}_1 \right)}_{=: \mathbf{F}_{\text{eff}}} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}. \quad (4.24b)$$

Die Matrix \mathbf{F}_{eff} wird als effektive Flexibilitätsmatrix bezeichnet. Unter Umständen kann bereits hier durch Invertierung die effektive Steifigkeitsmatrix ermittelt werden, jedoch ist die Existenz der Inversen fallabhängig zu untersuchen.

Unter der alternativen Annahme, dass die Aktuierung aus dem Matrix-Vektor-Produkt einer Matrix \mathbf{R}_2 mit dem Vektor der Knotenverschiebungen formuliert werden kann, ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{u}^* (\mathbf{d}) = \mathbf{R}_2 \mathbf{d}. \quad (4.25)$$



$$F = 20 \text{ kN}$$

$$b = 100 \text{ cm}$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ cm}^2$$

Abbildung 4.5: Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Aktuierungsmodellierung mithilfe effektiver Flexibilität und effektiver Steifigkeit

Nach Einsetzen in Gleichung (4.22b) ergibt sich

$$\mathbf{K}\mathbf{d}^* = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} + \mathbf{B}\mathbf{R}_2\mathbf{d}^* \quad (4.26a)$$

$$\underbrace{(\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{R}_2)}_{=: \mathbf{K}_{\text{eff}}}\mathbf{d}^* = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} \quad (4.26b)$$

mit der effektiven Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{eff} .

Im Folgenden wird anhand des Beispiels aus Abbildung 4.5 eine Vorgehensweise vorgestellt, für die eine geschlossene Lösung existiert. Die beiden Größen \mathbf{B} und \mathbf{u} ergeben sich zu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

und

$$\mathbf{u} = [\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \hat{u}_3]^T. \quad (4.28)$$

Zur Ermittlung des Aktoreingangs in Abhängigkeit von den äußeren Lasten $\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}$ bzw. von den Verschiebungen \mathbf{d} ist die Definition eines Aktuierungsziels notwendig. Da der Entwurf eines Reglers nicht Teil der vorliegenden Arbeit ist, wird hier beispielhaft davon ausgegangen, dass die quadrierte euklidische Norm des Verschiebungsvektors $\|\mathbf{d}\|_2^2$ mithilfe der Aktuierung minimiert werden soll. Weitere Ausführungen zum Hintergrund dieser Zielformulierung finden sich in Abschnitt 4.3.2. Dies wird beschrieben durch

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{d}\|_2^2 \quad (4.29)$$

mit

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} + \mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (4.30)$$

In diesem Fall ist die geschlossene Lösung des Minimierungsproblems nach Umformung und unter Verwendung der Pseudoinversen (siehe zum Beispiel STRANG (1986)), die durch den Kopfzeiger + gekennzeichnet wird, gegeben durch

$$\mathbf{u}^* = - (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B})^+ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}. \quad (4.31)$$

Einsetzen des ermittelten Aktoreingangs in Gleichung (4.30) liefert

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{K}^{-1} \left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} - \mathbf{B} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B})^+ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} \right) \quad (4.32a)$$

$$= \underbrace{\left(\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} (\mathbf{0} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B})^+ \mathbf{K}^{-1} \right)}_{=\mathbf{F}_{\text{eff}}} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}. \quad (4.32b)$$

Dabei wurde $\mathbf{0}$ addiert, um die folgende Umformung mithilfe der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel (siehe beispielsweise SACK U. A. (1967)) zu veranschaulichen. Unter der Annahme, dass die Inverse von $(\mathbf{0} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B})$ existiert und somit die Pseudoinverse identisch mit der Inversen ist, und übertragen auf das vorliegende Problem hat die Formel die folgende Form:

$$\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} (\mathbf{0} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{0}^{-1})^{-1}. \quad (4.33)$$

Die effektive Steifigkeitsmatrix würde sich danach zu

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} = \mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{0}^{-1} \quad (4.34)$$

ergeben. Darin wird ersichtlich, dass die Invertierung einer Nullmatrix notwendig wäre. Anschaulich kann hier die strukturmechanische Einsicht in das Problem zur Interpretation verwendet werden. Mathematisch nicht einwandfrei, jedoch hilfreich zur Anschauung würde diese Invertierung aufgrund von

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} h^{-1} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{0}^{-1} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & \dots \\ 0 & \infty & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

zu einer unendlich großen Steifigkeit führen. Dies würde wiederum dazu führen, dass an Freiheitsgraden, die durch Aktuierung beeinflusst werden können (angezeigt durch \mathbf{B}), keine Verschiebungen auftreten, was wiederum plausibel ist, da dies das definierte Ziel

der Aktuierung war. Hier wird bereits ersichtlich, dass mithilfe der eingesetzten Aktorik gezielt Verschiebungen und damit die Steifigkeit als Tragwerkseigenschaft verändert werden können, was im nächsten Abschnitt 4.3 ausführlich diskutiert wird.

4.2.4 Fazit

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, die Auswirkungen der Aktuierung zu modellieren. Ausgehend von der Grundgleichung $\mathbf{Kd} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$ kann die Aktuierung auf beiden Seiten der Gleichung berücksichtigt werden. Bei Verwendung des herkömmlichen, passiven Modells kann unter Berücksichtigung von vorgegebenen Längenänderungen die Aktuierung ins Modell integriert werden. Dies muss bei der Rückrechnung von Schnittgrößen wiederum berücksichtigt werden. Alternativ kann unter Verwendung von Aktorelementen ein erweitertes Gleichungssystem formuliert werden, bei dem der Aktorweg auf der rechten Seite des Gleichungssystems berücksichtigt werden kann. Dabei ergibt sich eine größere Systemmatrix, jedoch muss in der Rückrechnung die Aktuierung nicht berücksichtigt werden. Außerdem existiert die Möglichkeit, die Aktuierung direkt in der Systemmatrix zu berücksichtigen. Jedoch ist für diesen Ansatz weitere Kenntnis über den eingesetzten Regler notwendig, weshalb dieser Ansatz zwar theoretisch interessant ist und deshalb hier gezeigt, jedoch nicht weiter verfolgt wird. Da die ersten beiden Ansätze im Rahmen der Annahmen äquivalente Resultate liefern, der Ansatz der Berücksichtigung von vorgegebenen Längenänderungen jedoch technisch einfacher umzusetzen ist, wird dieser in den folgenden Untersuchungen verwendet.

4.3 Aktuierungsziele und Aktuierungsaufwand

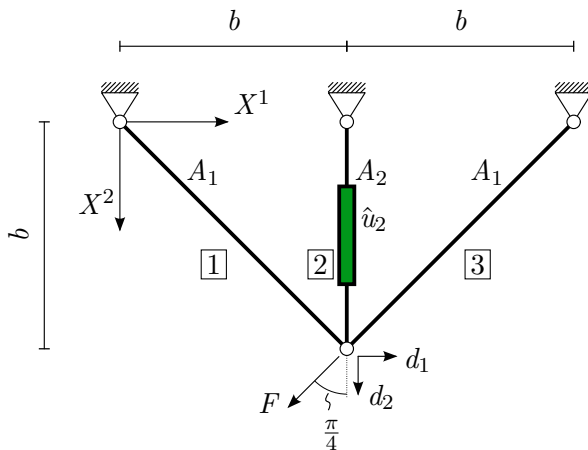
Die Aktuierung wird eingesetzt, um das Verhalten und den Zustand von Tragwerken zu beeinflussen. Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, erfüllt in einem adaptiven System die Regelung den Zweck, aus dem bekannten oder geschätzten aktuellen Zustand die Anweisungen an die Aktorik so zu ermitteln, dass die Abweichung zu einem bestimmten Ziel-Zustand verringert wird. Dabei sind verschiedene Aktuierungsziele bzw. Ziel-Zustände möglich. Beispielsweise gehören die Reduktion von statischen Verschiebungen und Schnittgrößen zu diesen Zielen. Daneben existiert eine Vielzahl von Zielen, die sich auf das Verhalten der Struktur unter dynamischer Belastung bezieht. Im Folgenden werden die Verschiebungsadaptation, also die Veränderung statischer Verschiebungen, und die Kraftadaptation, die Veränderung statischer Schnittgrößen, genauer betrachtet. Weitere Ziele, wie beispielsweise die Erhöhung der Lebensdauer von Tragwerken oder eine Masseneinsparung in neuen Tragwerken, können mithilfe dieser grundlegenden Adaptionsmechanismen erreicht werden.

4.3.1 Kraftadaption

Die Kraftadaption beschreibt die Nutzung der Aktorik zur gezielten Änderung der Kraftverteilung im Tragwerk. Im Folgenden werden die strukturmechanischen Voraussetzungen diskutiert, die für eine gezielte Adaption von Kräften erfüllt sein müssen. In Abschnitt 4.2 wurde die Möglichkeit vorgestellt, die Aktuierung als initiale bzw. vorgegebene Längenänderung zu modellieren. Bereits in Abschnitt 3.1.1 wird beschrieben, dass durch eine vorgegebene Längenänderung in einem Tragwerk nur dann ein Kraftzustand hervorgerufen werden kann, wenn es statisch unbestimmt ist. Folglich ist im Rahmen der in der vorliegenden Arbeit getroffenen Annahmen die Kraftadaption nur in einem statisch unbestimmten Tragwerk bzw. Tragwerksteil möglich.

Die Entscheidung über die serielle oder parallele Anordnung der Aktoren (siehe Abbildung 4.2) spielt eine wichtige Rolle für die Kraftadaption. Bei der Anordnung eines Aktors parallel zu einem passiven Stab erhöht sich der Grad der statischen Unbestimmtheit des gesamten Tragwerks um eins. Wird der Aktor in den Stab eingebaut bzw. der passive Stab durch das Aktorelement ersetzt, dann ergibt sich daraus keine Änderung im Grad der statischen Unbestimmtheit.

Eine Normalkraftverteilung, die durch die Längenänderung eines Aktors oder mehrerer Aktoren hervorgerufen wird, stellt einen Eigenspannungszustand dar. In Abschnitt 3.1.3 wird beschrieben, dass genau n_s linear unabhängige Eigenspannungszustände in einem Tragwerk auftreten können. Diese Zustände werden mithilfe von Gleichung (3.14) beschrieben und ermittelt. Um alle unabhängigen Eigenspannungszustände erzeugen zu können, sind ebenso viele Aktoren an unterschiedlichen Orten in der Struktur notwendig. Aufgrund der zugrunde liegenden Theorie I. Ordnung dürfen die mithilfe der Aktuierung erzeugten Eigenspannungszustände mit der Normalkraftverteilung aus der äußeren Last superponiert werden. Bei genauerer Betrachtung dieser Superposition ergibt sich direkt eine wesentliche Eigenschaft der Kraftadaption: der Kraftzustand, der infolge von äußeren Kräften in einem Tragwerk hervorgerufen wird, kann nicht vollständig kompensiert werden. Es ist also nicht möglich, eine Struktur, die durch eine oder mehrere Kraftlasten belastet ist, durch geschickte Kraftadaption komplett frei von Schnittgrößen zu machen. Dies ist insbesondere daran ersichtlich, dass durch die Adaption nur Eigenspannungszustände hervorgerufen werden, die per Definition ohne die äußeren Lasten im Gleichgewicht stehen. Nicht alle Anteile des Normalkraftzustands, die mit den äußeren Lasten im Gleichgewicht stehen, sind durch die Superposition kompensierbar.



$$\begin{aligned}
 F &= 20 \text{ kN} \\
 b &= 100 \text{ cm} \\
 E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 \\
 A_1 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2 \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ cm}^2 \\
 n_s &= 1
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.6: Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Kraftadaption mit serieller Aktuierung

Anhand des bekannten Drei-Stab-Tragwerks aus Abbildung 4.6 soll die Kraftadaption veranschaulicht werden. Für das Beispiel ergeben sich die involvierten Größen zu

$$\Delta \mathbf{l}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (4.36a)$$

$$\text{mit} \quad C_1 = C_3 = \frac{50\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})}{3} \text{ kN/cm}, \quad C_2 = \frac{100\sqrt{6}}{3} \text{ kN/cm} \quad (4.36b)$$

$$\text{und} \quad [\hat{u}_2] = \text{cm}. \quad (4.36c)$$

Infolge der äußeren Last ergibt sich bei passivem Strukturverhalten für die Variante mit serieller Aktuierung der bereits aus Gleichung (3.26) bekannte Normalkraftzustand

$$\mathbf{n}_{\text{pas}} = 10 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \approx \begin{bmatrix} -4,226 \\ 5,977 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (4.37)$$

Für die Berechnung der Normalkraft aus Aktuierung nach Gleichung (2.29) wird die Definition der gewichteten Redundanzmatrix nach Gleichung (3.11) ausgenutzt. Damit ergibt sich der Normalkraftzustand, der durch die Aktuierung im Tragwerk erzeugt wird, zu

$$\mathbf{n}_{\text{akt}} = -\mathbf{C}\mathbf{R}\Delta \mathbf{l}_0 = \frac{100}{3} \hat{u}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ kN/cm} \approx \hat{u}_2 \begin{bmatrix} 33,33 \\ -47,14 \\ 33,33 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}. \quad (4.38)$$

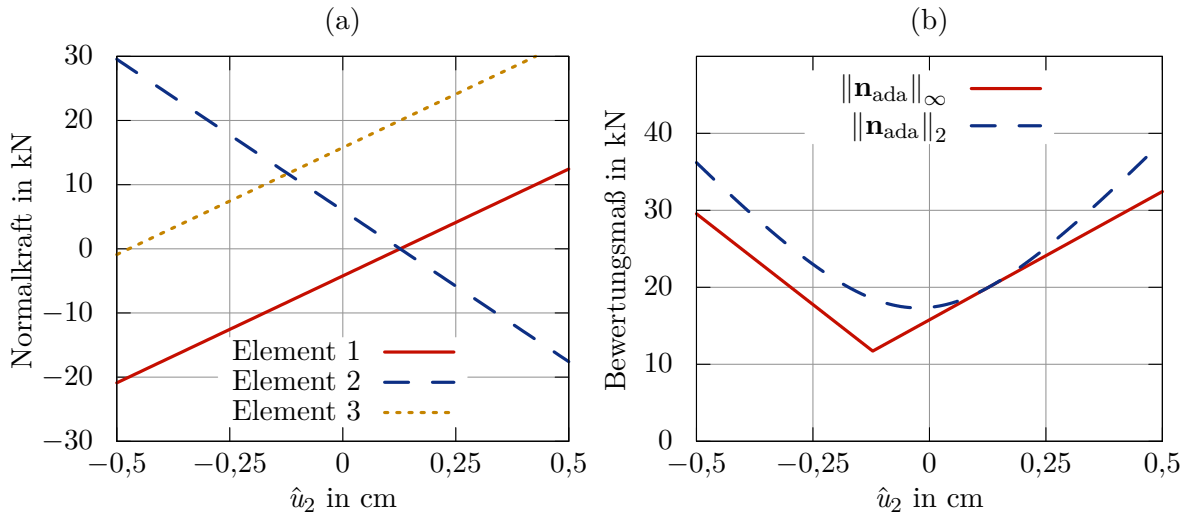


Abbildung 4.7: (a) Darstellung der Werte der Normalkräfte in den drei Stäben im adaptiven Zustand in Abhängigkeit vom vorgegebenen Aktorweg; (b) Betragsmäßig maximale Normalkraft und euklidische Norm des Vektors aller Normalkräfte in Abhängigkeit vom vorgegebenen Aktorweg

Aus der Superposition der beiden Zustände kann die Normalkraftverteilung im adaptiven Zustand zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}} \approx \begin{bmatrix} -4,226 \\ 5,977 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN} + \hat{u}_2 \begin{bmatrix} 33,33 \\ -47,14 \\ 33,33 \end{bmatrix} \text{ kN/cm} \quad (4.39)$$

ermittelt werden. Dabei bleibt in der hier vorgestellten Betrachtung der Aktorweg \hat{u}_2 symbolisch erhalten und kann so eingestellt werden, dass ein beliebiger Zielzustand erreicht wird.

Abbildung 4.7 (a) zeigt den Verlauf der adaptiven Normalkräfte \mathbf{n}_{ada} für einen Aktorweg von $-0,5$ cm bis $+0,5$ cm. Zusätzlich werden folgende Eigenschaften des Normalkraft-Vektors beispielhaft betrachtet:

- Die Unendlich-Norm von \mathbf{n}_{ada} , also die betragsmäßig maximale Normalkraft $\|\mathbf{n}_{\text{ada}}\|_{\infty} = \max(|(\mathbf{n}_{\text{ada}})_1|; |(\mathbf{n}_{\text{ada}})_2|; |(\mathbf{n}_{\text{ada}})_3|)$ und
- die euklidische Norm des Vektors aller Normalkräfte $\|\mathbf{n}_{\text{ada}}\|_2 = \sqrt{\mathbf{n}_{\text{ada}}^T \mathbf{n}_{\text{ada}}}$.

Abbildung 4.7 (b) zeigt die Verläufe dieser Maßzahlen in Abhängigkeit vom vorgegebenen Aktorweg. Die Maßzahlen besitzen zwar gleiche Einheiten, aber aufgrund unterschiedlicher mechanischer Bedeutungen können deren Beträge nicht direkt miteinander

verglichen werden. Um eine vergleichende Interpretation der qualitativen Verläufe zu ermöglichen, werden die Funktionen, die die Maßzahlen beschreiben, trotzdem in einem Diagramm dargestellt.

Weitere Eigenschaften der Verteilung der Schnittgrößen können auch zur Bewertung herangezogen werden. Beispielsweise könnte die Homogenität der Verteilung mithilfe der Standardabweichung oder vergleichbarer Maßzahlen quantifiziert werden, was hier jedoch nicht weiter untersucht wird.

Die Ermittlung des jeweils erforderlichen Aktorwegs kann in dem einfachen Beispiel durch Ablesen aus den Diagrammen bzw. durch geschlossene Lösung der Gleichungen erfolgen. Im Allgemeinen und im späteren Verlauf der Arbeit werden dazu Optimierungsprobleme mit numerischen Verfahren gelöst.

Entlastung bestimmter Elemente

Jede der linearen Funktionen im Diagramm 4.7 (a) hat ihre Nullstelle im betrachteten Bereich. Die Nullstelle der Normalkraft beschreibt den Zustand, in dem das entsprechende Element vollständig entlastet ist (Kopfzeiger E mit Elementnummer). Im betrachteten Beispiel ergibt sich bei einem Aktorweg

$$\hat{u}_2^{*E1} = \arg \min_{\hat{u}_2} |(\mathbf{n}_{\text{ada}})_1| \quad (4.40a)$$

$$= \hat{u}_2^{*E2} = \arg \min_{\hat{u}_2} |(\mathbf{n}_{\text{ada}})_2| = \frac{3 - \sqrt{3}}{10} \text{ cm} \approx 0,1268 \text{ cm} \quad (4.40b)$$

die vollständige Entlastung von zwei Elementen und die Last wird komplett von Element 3 abgetragen. Dabei ergibt sich die Normalkraftverteilung zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}} \left(\hat{u}_2 = \hat{u}_2^{*E1} = \hat{u}_2^{*E2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (4.41)$$

Dass die Möglichkeit zur vollständigen Entlastung von zwei Elementen in diesem Beispiel existiert, ergibt sich aufgrund der speziellen Eigenschaften von System und Lastfall. Im Allgemeinen entspricht die Anzahl der gleichzeitig kompensierbaren Normalkräfte in statisch unbestimmten Systemen dem Grad der statischen Unbestimmtheit, in diesem Fall also nur eins. Auch die Normalkraft in Element 3 kann durch eine Aktuierung mit

$$\hat{u}_2^{*E3} = \arg \min_{\hat{u}_2} |(\mathbf{n}_{\text{ada}})_3| = \frac{-3 - \sqrt{3}}{10} \text{ cm} \approx -0,4732 \text{ cm} \quad (4.42)$$

kompensiert werden. Dabei ergibt sich die Normalkraftverteilung zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}}(\hat{u}_2 = \hat{u}_2^{*E3}) = \begin{bmatrix} -20 \\ 20\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \approx \begin{bmatrix} -20,00 \\ 28,28 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (4.43)$$

Durch die Entlastung eines oder mehrerer Elemente werden die übrigen Elemente durch eine betragsmäßig größere Normalkraft beansprucht. Hier und bei den folgenden Betrachtungen zur Beanspruchungsreduktion wird auf die Überprüfung, ob die höher beanspruchten Elemente dafür ausgelegt sind, verzichtet. In dieser Untersuchung sind außerdem keine Beschränkungen der Aktorwege und Aktorkräfte vorgegeben. Im Allgemeinen müssen diese jedoch abhängig von der gewählten Aktorik geprüft werden.

Reduktion der maximalen Beanspruchung

Zur Reduktion der maximal auftretenden Beanspruchung wird der betragsmäßige Maximalwert des Vektors \mathbf{n}_{ada} herangezogen. Am Minimum ist die betragsmäßig maximale Normalkraft im Tragwerk am geringsten (Kopfzeiger R). Dieser Zustand tritt genau am Schnittpunkt der beiden Funktionen der Normalkräfte in den Elementen 2 und 3 an der Stelle

$$\hat{u}_2^{*R} = \arg \min_{\hat{u}_2} \|\mathbf{n}_{\text{ada}}\|_{\infty} = \frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{3} - 3}{10\sqrt{2} + 10} \text{ cm} \approx -0,1217 \text{ cm} \quad (4.44)$$

auf. Diese Aktuierung resultiert in der Normalkraftverteilung

$$\mathbf{n}_{\text{ada}}(\hat{u}_2 = \hat{u}_2^{*R}) = \frac{20}{1 + \sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ kN} \approx \begin{bmatrix} -8,284 \\ 11,72 \\ 11,72 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (4.45)$$

Dabei lässt sich die maximale Reduktion einer Normalkraft im Element 3 von rund 26 % bezogen auf den passiven Zustand (siehe $\hat{u}_2 = 0$) erzielen.

Minimierung der euklidischen Norm

Die Verwendung der euklidischen Norm des Vektors der Normalkraftverteilung hat bei erster Betrachtung keine mechanisch motivierte Grundlage. Dass dieses Maß in Vorarbeiten, wie zum Beispiel unter Beteiligung des Autors in WAGNER U. A. (2018), eingesetzt wird, ist vielmehr technisch motiviert. Für die Minimierung der euklidischen Norm eines Vektors lassen sich im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen mithilfe der

Pseudoinversen geschlossene Lösungen ermitteln. In der erwähnten Vorarbeit wird die Minimierung der euklidischen Norm nicht als Ziel der Regelung im adaptiven Tragwerk definiert, sondern zur Ermittlung eines Gütemaßes in der automatisierten Platzierung der Aktoren eingesetzt. Dahinter steckt die Hypothese, dass eine Aktorplatzierung, die in der Lage ist, die euklidische Norm des Normalkraft-Vektors so zu beeinflussen, dass diese minimal wird, auch die hier vorgestellten anderen Eigenschaften des Vektors in die gewünschte Richtung beeinflussen kann (siehe dazu auch Abschnitt 4.4).

Der Aktorweg zur Minimierung der euklidischen Norm (Kopfzeiger N) des Vektors der Normalkraftverteilung ergibt sich für das Drei-Stab-Tragwerk zu

$$\hat{u}_2^{*N} \approx -0,02321 \text{ cm} \quad (4.46)$$

und der zugehörige Normalkraftzustand ergibt sich zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}}(\hat{u}_2 = \hat{u}_2^{*N}) \approx \begin{bmatrix} -5,000 \\ 7,071 \\ 15,00 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (4.47)$$

An dieser Stelle soll jedoch nochmals wiederholt werden, dass eine Aktuierung mit diesem Ziel im Allgemeinen nicht zu positiven mechanischen Eigenschaften der Normalkraftverteilung führt.

Erhöhung der Tragfähigkeit

Durch die Veränderung der Normalkraftverteilung ergibt sich die Möglichkeit, die Tragfähigkeit eines gegebenen Tragwerks zu vergrößern. Anhand des bereits bekannten Drei-Stab-Tragwerks aus Abbildung 4.6 wird die Erhöhung der Tragfähigkeit veranschaulicht. Weiterhin wird zur Analyse der Tragfähigkeit die maximal zulässige Beanspruchung wie in Abschnitt 3.2 zu

$$\sigma_{\text{max}}^+ = 20 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{max}}^- = -15 \text{ kN/cm}^2 \quad (4.48)$$

gewählt und die Kraft F ist unbekannt. Mathematisch lässt sich das resultierende Optimierungsproblem als

$$\max_{\hat{u}_2} F \quad (4.49)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sigma_{\text{max}}^- \leq \sigma_i(F, \hat{u}_2) \leq \sigma_{\text{max}}^+ \quad \forall i \in [1,2,3] \quad (4.50)$$

beschreiben.

Das gefundene Optimum

$$F^* = 10 + \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ kN} \approx 21,55 \text{ kN} \quad (4.51)$$

wird ermöglicht durch die Aktuierung

$$\hat{u}_2^{*\text{TF}} = \frac{1}{20} - \frac{\sqrt{3}}{20} \text{ cm} \approx -0,03660 \text{ cm} \quad (4.52)$$

und die zugehörige Normalkraftverteilung ergibt sich zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}} \left(\hat{u}_2 = \hat{u}_2^{*\text{TF}} \right) \approx \begin{bmatrix} -5,774 \\ 8,165 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (4.53)$$

Das ist dieselbe Normalkraftverteilung, wie aus der Berechnung nach dem Traglastverfahren, und entsprechend wirkt dieselbe maximale Belastung, wie in Abschnitt 3.2. Der Gleichgewichtszustand, der durch die Aktuierung der Struktur mit $\hat{u}_2^{*\text{TF}}$ erzeugt wird, entspricht genau dem Gleichgewichtszustand aus Gleichung (3.30), der durch die ermittelte plastische Verformung des Stabs 3 in der Berechnung mit dem Traglastverfahren ermittelt wurde. Beim Einsatz eines Aktors in Element 3 würde die ermittelte plastische Längenänderung genau dem vorgegebenden Aktorweg entsprechen. Das Traglastverfahren, mit dem also ermittelt werden kann, wie groß die maximale Traglast des adaptiven Tragwerks im rein elastischem Zustand ist, liefert gleichzeitig eine Aktorplatzierung, nach der in allen Stäben mit Fließgelenken ein Aktor angeordnet werden muss.

Fließgelenke öffnen sich selbständig durch die vorhandene Beanspruchung, d. h. beispielsweise wird in einem Stab, in dem eine Zugkraft wirkt, ein Fließgelenk entstehen, durch das der Stab länger wird. Übertragen auf die Kraftadaption bedeutet das, dass die durch die Orte der Fließgelenke vorgegebene Aktorplatzierung den Vorteil besitzt, dass ausschließlich durch Nachlassen der Aktoren, d. h. der Beanspruchung nachgeben, die höhere Tragfähigkeit erzielt werden kann. Nachteilig ist, dass beim Auftreten lokaler Versagensmechanismen gegebenenfalls nicht der vollständige Aktuierungsraum aufgespannt wird und die Aktoren außerdem in den am höchsten beanspruchten Elementen angeordnet werden, was hier nicht weiter berücksichtigt wird, jedoch in der technischen Umsetzung Probleme verursachen kann. Dieser Zusammenhang gilt in der Form nur für die Betrachtung eines Tragwerks für einen Lastfall. Bei der Berücksichtigung weiterer Lastfälle ergeben sich unter Umständen Fließgelenke in anderen Elementen, wobei die maximale Anzahl an Fließgelenken und damit die Anzahl der notwendigen Aktoren

gleich bleibt. Um welchen Betrag die Tragfähigkeit jeweils gesteigert werden kann, ist lastfallabhängig.

Die Analogie zwischen Kraftadaption zur Steigerung der Tragfähigkeit und Traglastverfahren ermöglicht die Übertragung der Erkenntnisse beispielsweise auf den Bereich der Flächentragwerke, da das Traglastverfahren auch für diesen Tragwerkstypus beschrieben ist. Für Plattentragwerke werden die hier diskret in Stäben auftretenden Fließgelenke zu Fließlinien, an denen die Anordnung von Aktoren in der Platte vorteilhaft für die Adaption des Kraftzustands sein kann. Diese Untersuchungen gehen jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Eine Einführung und eine geschichtliche Aufarbeitung der Fließlinientheorie finden sich beispielsweise in WÜST UND WAGNER (2008).

Außerdem liefert dieser Zusammenhang auch eine anschauliche Interpretation des Traglastverfahrens als ein Lösungsverfahren für das Optimierungsproblem, bei dem die äußere Last maximiert werden soll. Dabei wird in jedem Schritt die Suchrichtung aus der Lösung des strukturmechanischen Problems nach den Normalkräften bzw. den Spannungen ermittelt. Die Schrittweite wird so bestimmt, dass ein weiterer Stab zu fließen beginnt, also die maximal zulässige Beanspruchung erreicht bzw. eine weitere Restriktion aktiv wird. Im darauf folgenden Schritt wird im Beispiel in Abschnitt 3.2 bereits das Maximum gefunden, im Allgemeinen kann eine weitere Nebenbedingung aktiv werden und die Berechnung wird fortgesetzt. Unter Umständen können bei der Prüfung der positiven Dissipationsarbeit auch aktive Nebenbedingungen wieder inaktiv werden.

Einsatz von mehr als n_s seriellen Aktoren

Bei den bisherigen Untersuchungen wird das System wie in Abbildung 4.6 dargestellt und in Gleichung (4.36a) beschrieben mit einem seriellen Aktor in Element 2 aktuiert. Beim Einsatz eines zweiten seriellen Aktors in Element 1 ergibt sich der Vektor der initialen Längenänderungen zu

$$\Delta \mathbf{l}_0 = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Damit ergibt sich die resultierende Verteilung der Normalkräfte in Abhängigkeit von den beiden unbekanntem Aktorwegen zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}} \approx \begin{bmatrix} -4,226 \\ 5,977 \\ 15,77 \end{bmatrix} \text{ kN} + \hat{u}_1 \begin{bmatrix} -23,57 \\ 33,33 \\ -23,57 \end{bmatrix} \text{ kN/cm} + \hat{u}_2 \begin{bmatrix} 33,33 \\ -47,14 \\ 33,33 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}. \quad (4.55)$$

Die zusätzlichen Normalkraftanteile entsprechen dem $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen der Anteile aus dem zweiten Aktor und ermöglichen damit keine zusätzlichen Vorteile. In dem einfach statisch

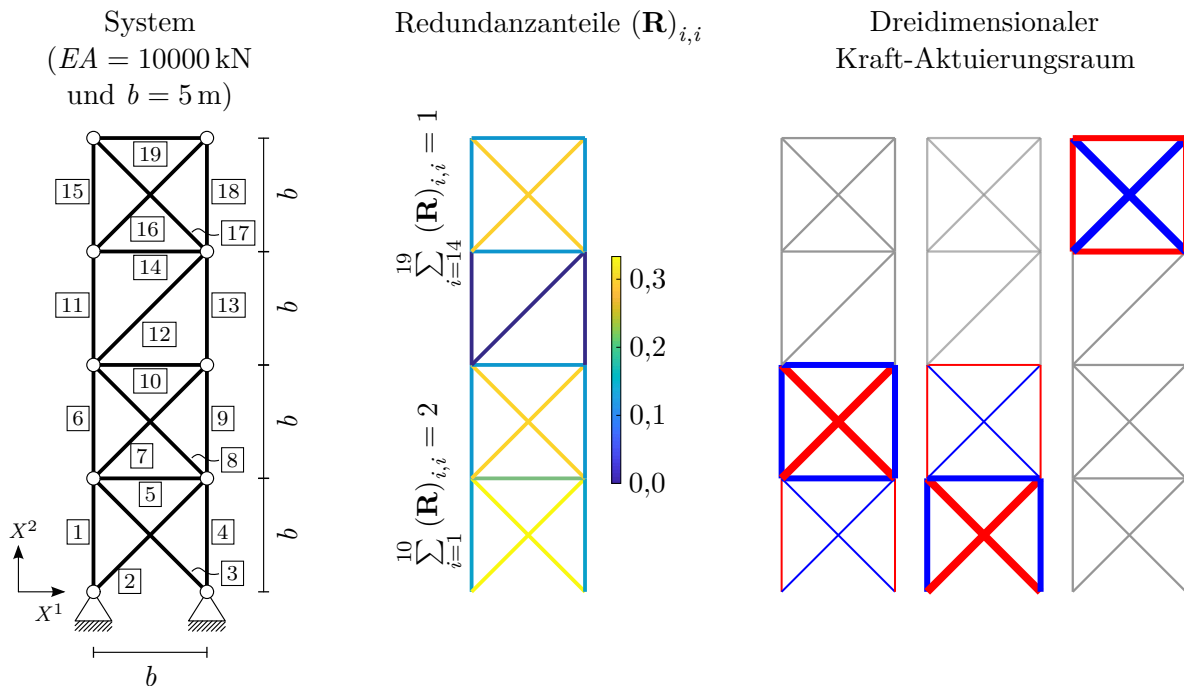


Abbildung 4.8: Fachwerkurm-Beispiel zur Veranschaulichung des Kraft-Aktuierungsraums (links), Redundanzanteile (mitte) und anschauliche Interpretation der raumaufspannenden Vektoren des Kraft-Aktuierungsraums (rechts)

unbestimmten Tragwerk kann durch den zusätzlichen zweiten Aktor bei einer reinen Kraftadaption kein weiterer Effekt erzielt werden.

Kraft-Aktuierungsraum

Alle Normalkraftverteilungen, die im Raum der Eigenspannungszustände enthalten sind (siehe Abschnitt 3.1.3), können durch Aktuierung im Tragwerk hervorgerufen werden. Dieser Raum wird deshalb im Rahmen der Analyse adaptiver Tragwerke auch als Kraft-Aktuierungsraum bezeichnet. Im untersuchten einfach statisch unbestimmten Drei-Stab-Tragwerk ist dieser Raum eindimensional. Deshalb reicht ein Aktor aus, um alle möglichen Eigenspannungszustände hervorzurufen.

Anhand eines weiteren einfachen Beispiels wird gezeigt, dass die Anzahl und Anordnung der Aktoren zur Kraftmanipulation beispielespezifisch bestimmt werden muss, dafür jedoch mathematische Kriterien formuliert werden können. Das Beispielsystem ist in Abbildung 4.8 (links) dargestellt. Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Die Besonderheit bei dem betrachteten Tragwerk ist die Zweiteilung der statischen Unbestimmtheit in den oberen und den unteren Tragwerksteil, die mithilfe der Redun-

danzmatrix aus Abschnitt 3.1.2 einfach analysiert werden kann. Die Redundanzanteile sind in Abbildung 4.8 (mitte) farblich codiert. In den unteren beiden ausgekreuzten Feldern (Elemente 1–10) ergibt sich insgesamt eine zweifache statische Unbestimmtheit, die Summe aller Redundanzanteile der Elemente ist zwei. Das obere Feld (Elemente 14–19) ist einfach statisch unbestimmt, jedoch durch die drei statisch bestimmten Elemente 11, 12 und 13 mit den Null-Redundanzanteilen vom unteren Teil entkoppelt. Diese Zweiteilung findet sich bei der gewählten Elementnummerierung auch sehr anschaulich in der Struktur der Redundanzmatrix als Blockdiagonalmatrix in Abbildung 4.9. Dabei werden die Blöcke der Elemente 1–10 und 14–19 durch die Nullzeilen und Nullspalten 11, 12 und 13 getrennt. Die Summe der hervorgehobenen Hauptdiagonaleinträge, der Redundanzanteile, ergibt sich zu drei (Abweichung rundungsbedingt).

Bei der Analyse des zugehörigen Eigenspannungs- bzw. Kraft-Aktuierungsraums kann eine Dimension als Normalkraftverteilung im oberen Feld und zwei Dimensionen als Normalkraftverteilungen in den beiden unteren Feldern interpretiert werden. In Abbildung 4.8 (rechts) ist eine so gewählte Basis für das Bild der transponierten Redundanzmatrix dargestellt (vgl. Abschnitt 3.1.3). Dabei werden die Vorzeichen der Einträge farblich (rot: Druck; blau: Zug) und die Beträge durch die gewählten Strichstärken codiert. Besteht die Möglichkeit, alle Linearkombinationen der dargestellten Eigenvektoren zu erzeugen, wird davon gesprochen, dass der gesamte Kraft-Aktuierungsraum aufgespannt wird. Dazu sind zwei Aktoren in den beiden unteren Feldern und ein Aktor im oberen Feld notwendig. Die beiden Aktoren in den unteren Feldern müssen zusätzlich so platziert werden, dass die entstehenden Normalkraftverteilungen linear unabhängig sind. Eine Aktuierung der Elemente 2 und 3 führt aufgrund der Symmetrie des Tragwerks zu identischen Normalkraftverteilungen (siehe entsprechende Zeilen der Redundanzmatrix in Abbildung 4.9). Diese Form der Aktuierung wird als redundante Aktuierung bezeichnet, jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Die Erzeugung eines Eigenspannungszustands im oberen Feld durch Aktoren in den beiden unteren Feldern ist aufgrund der trennenden statisch bestimmten Elemente 11, 12 und 13 nicht möglich. Bei der Betrachtung des Kraft-Aktuierungsraums wird noch einmal deutlich, dass sich in statisch bestimmten Elementen, die durch einen Redundanzanteil von null gekennzeichnet sind, die Normalkräfte durch serielle Aktuierung nicht verändern lassen.

Parallele Aktuierung

Nachfolgend wird untersucht, wie die parallele Aktuierung im Vergleich zur seriellen Aktuierung den Aktuierungsraum beeinflusst. Für eine bessere Vergleichbarkeit wird davon ausgegangen, dass durch den parallelen Aktor kein zusätzliches Material in die Struktur eingebaut wird, sondern entsprechend viel Material vom parallelen passiven Element entfernt wird. Abbildung 4.10 (links) zeigt einen Ausschnitt aus dem Fachwerkturn-Beispiel

$\begin{bmatrix} \mathbf{0,1169} & -0,1653 & -0,1653 & 0,1169 & 0,1048 & -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 \\ -0,2338 & \mathbf{0,3307} & \mathbf{0,3307} & -0,2338 & -0,2096 & 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 \\ -0,2338 & 0,3307 & 0,3307 & -0,2338 & -0,2096 & 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 \\ 0,1169 & -0,1653 & -0,1653 & \mathbf{0,1169} & 0,1048 & -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 \\ 0,1048 & -0,1482 & -0,1482 & 0,1048 & \mathbf{0,1975} & 0,1048 & -0,1311 & -0,1311 & -0,1311 & 0,09270 & 0,2964 & 0,2964 & -0,2096 \\ 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 & -0,1854 & 0,09270 & 0,1048 & 0,1048 & 0,1048 & -0,2096 & \mathbf{0,2964} & \mathbf{0,2964} & -0,2096 \\ 0,02421 & -0,03424 & -0,03424 & 0,02421 & -0,1854 & 0,09270 & 0,1048 & 0,1048 & -0,1482 & -0,2096 & \mathbf{0,1048} & \mathbf{0,1048} & -0,2096 \\ -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 & 0,09270 & 0,1048 & 0,1048 & -0,1482 & -0,1482 & \mathbf{0,1048} & \mathbf{0,1048} & 0,1048 & -0,2096 \\ -0,01211 & 0,01712 & 0,01712 & -0,01211 & 0,09270 & 0,1048 & 0,1048 & -0,1482 & -0,1482 & 0,1048 & \mathbf{0,1048} & 0,1048 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$(\mathbf{R})_{\dots,1-10} =$	$=$	$(\mathbf{R})_{\dots,11-19} =$

Abbildung 4.9: Redundanzmatrix des Fachwerkturm-Beispiels aus Abbildung 4.8; Redundanzanteile der Elemente fett dargestellt

aus Abbildung 4.8, das um einen parallelen Aktor im statisch bestimmten Element 11 ergänzt wurde. Der parallele Aktor wird durch das parallel angeordnete Element 20 modelliert, das im weiteren Verlauf mit einem seriellen Aktor ausgestattet wird. Beide Elemente erhalten jeweils die halbe Querschnittsfläche des Elements aus der vorherigen Betrachtung. Bei der parallelen Aktuierung werden im gewählten Detaillierungsgrad

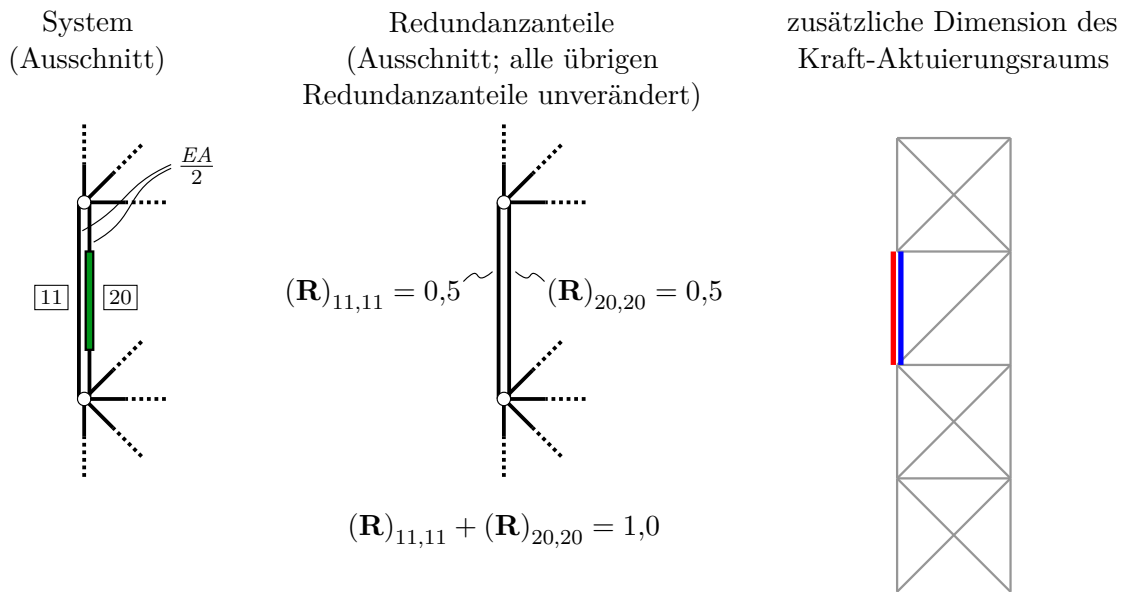


Abbildung 4.10: Ausschnitt aus dem Fachwerktruss-Beispiel mit zusätzlichem parallelem Element zu Element 11 zur Veranschaulichung der parallelen Aktuierung (links), Veränderungen in den Redundanzanteilen (mitte) und zusätzliche Dimension des Kraft-Aktuierungsraums (rechts)

keine eventuell vorhandenen Exzentrizitäten berücksichtigt, deshalb befinden sich das passive Element und der Aktor im Modell genau an derselben Stelle und sind nur zur Übersichtlichkeit nebeneinander dargestellt. Durch das zusätzlich eingefügte Element erhöht sich der Grad der statischen Unbestimmtheit der Struktur um 1. Diese Änderung ist in den Redundanzanteilen der betroffenen Elemente 11 und 20 erkennbar, deren Summe genau die Änderung des Grads der statischen Unbestimmtheit von 1 beschreibt (siehe Abbildung 4.10 (mitte)). Da die beiden Elemente identische Steifigkeiten besitzen, verteilen sich die Redundanzanteile genau jeweils zur Hälfte. Damit zusammenhängend gibt es eine zusätzliche Dimension des Aktuierungsraums, die nur die Normalkräfte dieser beiden Elemente betrifft. Daneben ergibt sich keine weitere Änderung des Kraft-Aktuierungsraums aus Abbildung 4.8 (rechts). Durch den parallelen Aktor neben Element 11 kann somit nur der Kraftzustand aus Abbildung 4.10 (rechts) hervorgerufen werden. Dadurch kann die Normalkraft zwischen Element 11 und Element 20 umverteilt werden, aber es können keine weiteren Elemente beeinflusst werden.

Der Zustand nach dem Einbau eines parallelen Aktors neben einem bereits vorher statisch unbestimmten Element ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Die Änderung der Redundanzanteile der gegebenenfalls betroffenen Elemente in den unteren beiden Feldern ist in Abbildung 4.11 (mitte) dargestellt. Für den zusätzlichen Stab ergibt sich ein Redundanzanteil von rund 0,5585. Bei dieser Betrachtung fällt auf, dass sich nur eine Änderung des Redundanzanteils in dem parallelen passiven Stab ($\Delta(\mathbf{R})_{1,1} \approx 0,4415$) und in der Sum-

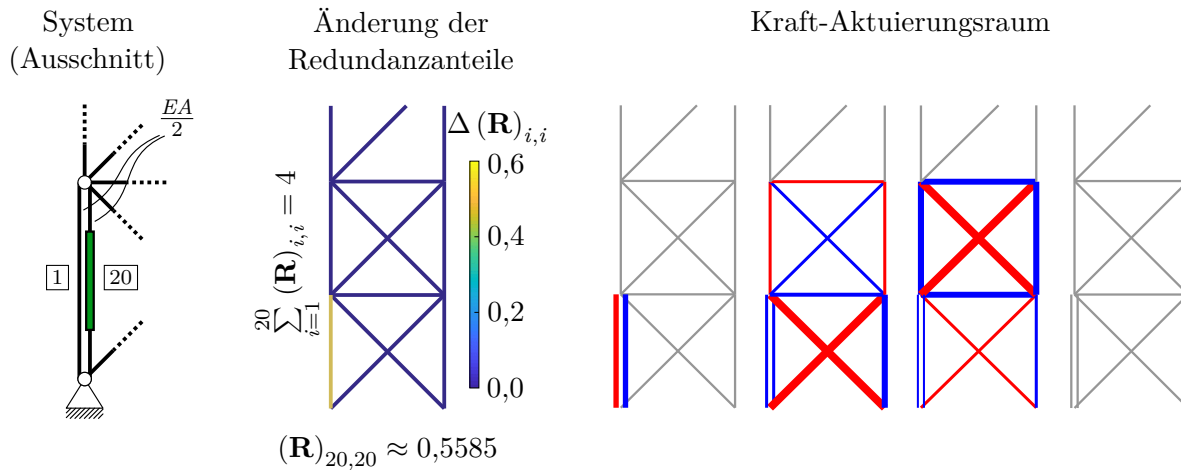


Abbildung 4.11: Ausschnitt aus dem Fachwerkurm-Beispiel mit zusätzlichem parallelem Element zu Element 1 zur Veranschaulichung der parallelen Aktuierung (links), Änderung den Redundanzanteile der Elemente 1–10 durch das Aufteilen von Element 1 in zwei Elemente (mitte) und resultierender vierdimensionaler Kraft-Aktuierungsraum (rechts)

me aller Redundanzanteile ergibt. Die Redundanzanteile der übrigen Elemente werden durch den parallel geschalteten Stab nicht beeinflusst. Die Einträge der Eigenvektoren, die in Abbildung 4.11 (rechts) qualitativ dargestellt sind, ergeben sich für die beiden Stützen im untersten Feld in der Elementreihenfolge

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{20} \\ \boxed{4} \end{array} \text{ zu } \begin{bmatrix} -0,7071 \\ 0,7071 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,1940 \\ 0,1940 \\ 0,3880 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,03983 \\ 0,03983 \\ 0,07966 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Die ersten beiden Einträge des Vektors repräsentieren Normalkräfte, die in den beiden Elementen der linken Stütze erzeugt werden können. Der dritte Eintrag gibt die Normalkraft an, die in der rechten Stütze erzeugt werden kann. Beim Vergleich der Werte fällt auf, dass sich die gesamte Kraft in der linken Stütze, die sich jeweils als Summe des ersten und zweiten Eintrags ergibt, nur im selben Maß wie die Normalkraft in der rechten Stütze verändern lässt. Somit kann durch die parallele Aktuierung, bei der eine ursprüngliche Stütze geteilt wird und das gesamte Bauteilvolumen nicht vergrößert wird, nur zwischen den beiden parallelen Elementen Kraft umverteilt werden. Global kann jedoch nicht mehr erreicht werden, als mit der vorher diskutierten seriellen Aktuierung von Element 1.

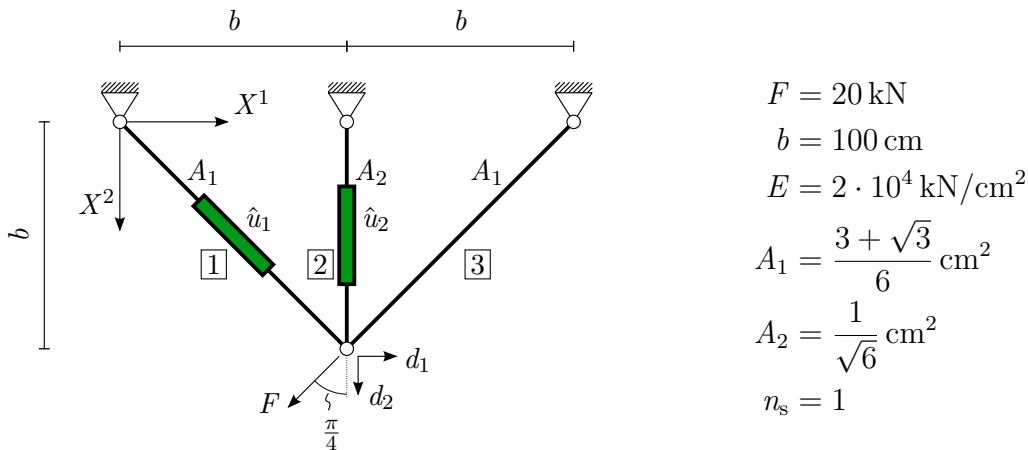


Abbildung 4.12: Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Verschiebungsadaption

4.3.2 Verschiebungsadaption

Die Verschiebungsadaption beschreibt die Nutzung der Aktorik zur gezielten Änderung des Verschiebungszustands des Tragwerks. Dies wird im Folgenden diskutiert. Dazu ist das bereits bekannte Drei-Stab-Tragwerk mit einem neuen Aktorset in Abbildung 4.12 dargestellt. Dieses neue System wird im Folgenden herangezogen, um die Verschiebungsadaption zu veranschaulichen.

Die Superposition der Verschiebungen im passiven und im aktiven Zustand ergibt auch hier den Zustand des adaptiven Tragwerks. Für das betrachtete Beispiel ergeben sich die Verschiebungen nach Gleichung (2.27) zu

$$\mathbf{d} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 3 \\ \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} \text{ cm} + \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} \quad (4.57a)$$

$$\approx \begin{bmatrix} -1,268 \cdot 10^{-1} \\ 7,321 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \text{ cm} + \hat{u}_1 \begin{bmatrix} 7,071 \cdot 10^{-1} \\ 40,82 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} + \hat{u}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 42,26 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (4.57b)$$

Analog zur Betrachtung der Kraftadaption können Anforderungen und damit Zielfunktionen formuliert werden, mit deren Hilfe durch Optimierungsverfahren die notwendigen Aktorwege \hat{u}_1 und \hat{u}_2 ermittelt werden. Für das betrachtete Beispiel können die Optima analytisch ermittelt werden, was im Folgenden ausgenutzt wird. Der häufigste Anwendungsfall ist die Kompensation oder Verringerung von auftretenden Verschiebungen in der Struktur. Folgende Eigenschaften des Verschiebungsvektors werden beispielhaft betrachtet:

- Die betragsmäßig maximale Verschiebung $\|\mathbf{d}\|_\infty = \max(|d_1|; |d_2|)$ und

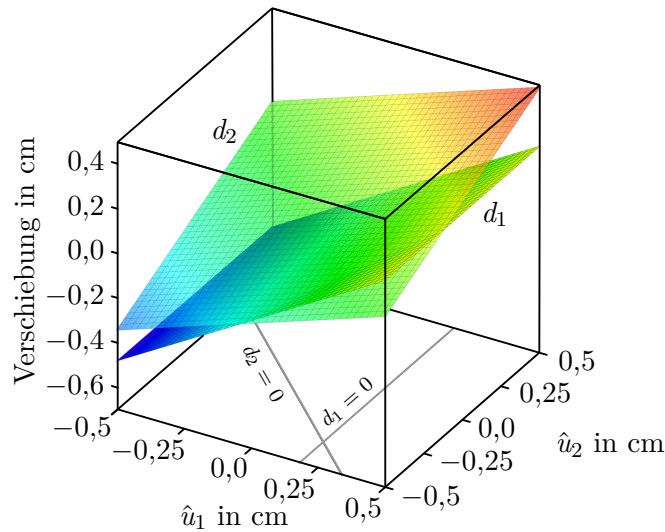


Abbildung 4.13: Knotenverschiebungen im Drei-Stab-Tragwerk an den Freiheitsgraden d_1 und d_2 in Abhängigkeit von den Aktorwegen \hat{u}_1 und \hat{u}_2 ; Wert der Verschiebung farblich codiert

- die euklidische Norm des Verschiebungsvektors
 $\|\mathbf{d}\|_2 = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}$.

Bereits aus der Struktur von (4.57b) als lineares Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen lässt sich schließen, dass für die vollständige Kompensation der Verschiebungen zwei Unbekannte, d. h. zwei Aktorwege bzw. Aktoren, nötig sind. Vollständige Verschiebungsadaption bedeutet, dass sich in Richtung aller Freiheitsgrade beliebige Verschiebungen einstellen lassen. Diese Verschiebungen müssen im Rahmen der Annahmen aus Abschnitt 2.1 zulässig sein. Somit kann ein Verschiebungszustand gefordert werden und das lineare Gleichungssystem kann nach den erforderlichen Aktorwegen gelöst werden. Dabei ergibt sich beispielsweise für die vollständige Kompensation der Verschiebungen, d. h. der Verschiebungsvektor im Zielzustand \mathbf{d}^* entspricht genau dem Null-Vektor, im vorliegenden Beispiel durch Umformung von Gleichung (4.57b)

$$\mathbf{d}^* \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{u}_1^* \\ \hat{u}_2^* \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{bmatrix} 0,1793 \\ -0,3464 \end{bmatrix} \text{ cm}. \quad (4.58)$$

Geometrisch kann die ermittelte Aktuierung auch als der Schnittpunkt der beiden Höhenlinien der Null-Verschiebungen in Abbildung 4.13 gefunden werden.

Im Gegensatz zur Kraftadaption aus Abschnitt 4.3.1 kann bei der Verschiebungsadaption die gezeigte vollständige Kompensation erzielt werden. Dabei entspricht die notwendige Anzahl an Aktoren im Allgemeinen der Anzahl an Verschiebungsfreiheitsgraden, deren Verschiebung eingestellt bzw. kontrolliert werden soll. Bei der Betrachtung der

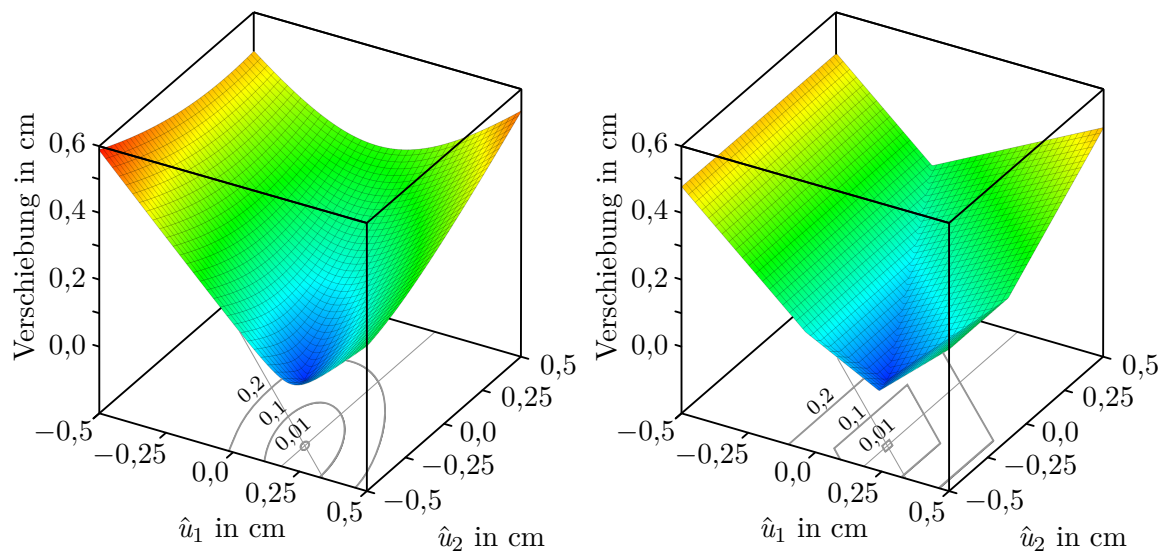


Abbildung 4.14: Euklidische Norm des Verschiebungsvektors (links) und betragsmäßig maximale Verschiebung (rechts) in Abhängigkeit von der Aktuierung; maßgebende Höhenlinien und Linien für $d_1 = 0$ bzw. $d_2 = 0$ in der \hat{u}_1 - \hat{u}_2 -Ebene in grau; Wert der Verschiebung farblich codiert

Verläufe der Maßzahlen in Abbildung 4.14 fällt auf, dass diese Funktionen ihre Minima bei der bereits analytisch gefundenen Aktuierung aus Gleichung (4.58) besitzen. Alle betrachteten Zielformulierungen führen bei der Verschiebungskompensation zu identischen Ergebnissen.

Häufig wird die Verschiebungsadaption nur für bestimmte Freiheitsgrade durchgeführt. Die Anzahl der Freiheitsgrade, an denen die Verschiebungen adaptiert werden sollen, wird im Folgenden mit n_C bezeichnet. Im Allgemeinen sind dann n_C Aktoren zur Verschiebungsadaption notwendig (siehe dazu auch UTKU (1998)).

Eine Besonderheit, die an dieser Stelle erwähnt, jedoch im weiteren Verlauf nicht tiefergehend untersucht wird, ergibt sich bei der Analyse von Verschiebungslastfällen. Dabei können einerseits Auflagerverschiebungen z. B. durch Setzungen auftreten. Diese erzeugen in statisch bestimmten Tragwerken keine Schnittgrößen, jedoch Verschiebungen, die wiederum durch Aktuierung kompensiert werden können. In statisch unbestimmten Tragwerken werden Schnittgrößen aus Zwang und Verschiebungen erzeugt, die ebenfalls kompensiert werden können. Andererseits können Verschiebungslastfälle auftreten, in denen beispielsweise einzelne Knoten, die nicht gelagert sind, eine bestimmte (vorgegebene) Verschiebung erfahren. Diese sind gesondert zu betrachten, da die Vorgabe einer Verschiebung an einem Knoten wie das Festhalten dieses Knotens und damit wie ein zusätzliches Lager wirkt. Dieses gedachte Lager erhöht den Grad der statischen Unbestimmtheit der Struktur um eins und sorgt dafür, dass auch in statisch bestimmten

Strukturen Schnittgrößen entstehen, die ebenfalls vollständig kompensiert werden können.

Erhöhung der Steifigkeit

In Abschnitt 3.2 wird neben der Traglast, deren Veränderung durch Aktuierung in Abschnitt 4.3.1 beschrieben wird, auch die Steifigkeit als eine relevante Eigenschaft für das Tragverhalten einer Struktur beschrieben. Dass sich auch die Steifigkeit eines Tragwerks durch Aktuierung verändern lässt, wird bereits in Abschnitt 4.2.3 erkannt.

Verschiebungsadaption mit einer Zielfunktion, die vollständige Kompensation der Verschiebungen fordert, erzeugt eine unendlich große effektive Steifigkeit, da die einwirkenden Lasten keine Verschiebungen im Tragwerk hervorrufen. Häufig wird für die Verschiebungen jedoch nur die Unterschreitung bestimmter Grenzwerte gefordert, was zur Notwendigkeit einer Steifigkeit in der Größenordnung vergleichbarer passiver Tragwerke führt. Der große Vorteil des Einsatzes adaptiver Tragwerke liegt hier in der Möglichkeit die Steifigkeit adaptiv anzupassen und bei Bedarf eine deutlich größere Steifigkeit herzustellen, als das eingesetzte Material in der gebauten Form im passiven Zustand bieten würde.

Zwang in statisch unbestimmten Tragwerken

In statisch unbestimmten Tragwerken werden Schnittgrößen aus Zwang durch Längenänderung von Aktoren hervorgerufen. Die gezielte Nutzung dieses Effekts wird zur Kraftadaption eingesetzt und in Abschnitt 4.3.1 ausführlich diskutiert. In statisch unbestimmten Tragwerken entstehen diese Schnittgrößen jedoch auch dann, wenn mit dem Ziel, Verschiebungen zu verändern oder zu kompensieren, aktuiert wird. Für die vollständige Kompensation der auftretenden Verschiebungen in dem Drei-Stab-Tragwerk ergibt sich der Vektor der vorgegebenen Längenänderungen mithilfe der Lösung in Gleichung (4.58) zu

$$\Delta \mathbf{l}_0 = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^* \\ \hat{u}_2^* \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,1793 \\ -0,3464 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad (4.59)$$

und die daraus entstehenden Normalkräfte ergeben sich zu

$$\mathbf{n}_{\text{akt}} \approx \begin{bmatrix} -15,77 \\ 22,31 \\ -15,77 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (4.60)$$

Die Erkenntnisse zur Kraftadaption aus Abschnitt 4.3.1 bedeuten, dass Normalkraftzustände, die durch Aktuierung erzeugt werden, durch entsprechende Kraftadaption kompensiert werden können, da diese immer im Kraft-Aktuierungsraum liegen. Dieser Zusammenhang wird beispielsweise auch von NYASHIN U. A. (2005) beschrieben. Technisch betrachtet kann das Problem der Bestimmung der erforderlichen Aktorwege für den Fall, dass alle Elemente als Aktoren gewählt werden, sowohl mit Optimierungsverfahren als auch geschlossen unter Verwendung der Pseudoinversen gelöst werden (siehe zum Beispiel KAWAGUCHI U. A. (1996)). Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Aktorwege zur gleichzeitigen Verschiebungs- und Zwangskompensation mit der Pseudoinversen wird im Folgenden kurz erläutert. Dazu wird aus der Abhängigkeit der Verschiebungen und der Normalkräfte aus Aktuierung von den Aktorwegen in allen Elementen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n}_{\text{akt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \mathbf{R} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \quad (4.61)$$

für das Minimierungsproblem

$$\min_{\Delta \mathbf{l}_0} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n}_{\text{akt}} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (4.62)$$

die geschlossene Lösung

$$\Delta \mathbf{l}_0^* = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \mathbf{R} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

ermittelt. Wenn weniger Elemente aktuiert werden sollen, müssen entsprechend Zeilen aus $\Delta \mathbf{l}_0$ und zugehörige Spalten aus den Matrizen $\mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{C}$ und $\mathbf{C} \mathbf{R}$ gestrichen werden und die Zulässigkeit dieses Lösungsvorschlags muss geprüft werden. Die Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Pseudoinversen erfüllt die beiden Adaptionziele Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors und Minimierung der euklidischen Norm des Vektors der Normalkräfte aus Aktuierung. Dabei wird die vollständige Kompensation dieser Normalkräfte ausgedrückt durch $\mathbf{n}_{\text{akt}} = \mathbf{0}$, was aufgrund der bisher gewonnenen Erkenntnisse auch möglich ist. Das in Gleichung (4.62) gesuchte Minimum wird für $\mathbf{n}_{\text{akt}} = \mathbf{0}$ erreicht. In diesem Fall entspricht die euklidische Norm des erweiterten Vektors $[\mathbf{d} \ \mathbf{n}_{\text{akt}}]^{\text{T}}$ genau der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors und somit ist die geschlossene Lösung mithilfe der Pseudoinversen zulässig.

Die Normalkräfte, die bei der Aktuierung entstehen, können aus

$$\mathbf{n}_{\text{akt}} = -\mathbf{C} \mathbf{R} \Delta \mathbf{l}_0 \quad (4.64)$$

ermittelt werden. Sollen nur Verschiebungen aktuiert und keine Normalkräfte erzeugt werden, kann dies mathematisch auch dadurch beschrieben werden, dass sich der Vektor der vorgegebenen Längenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ im Nullraum der gewichteten Redundanzmatrix befinden muss.

Wenn der vollständige Aktuierungsraum aufgespannt wird, also ausreichend Aktoren an den richtigen Stellen eingesetzt werden, bietet sich die Möglichkeit, alle Zwangsbeanspruchungen, die im statisch unbestimmten Tragwerk auftreten, durch die entsprechende Aktuierung zu vermeiden. Diese Aktoren sind jedoch rein zur Vermeidung des Zwangs bzw. zur Kraftadaption notwendig, deshalb addieren sich die Anzahlen der Aktoren aus Kraft- und Verschiebungsadaption zur notwendigen Gesamtzahl an Aktoren. Beispielsweise ergibt sich die Anzahl der mindestens erforderlichen Aktoren n_{akt} unter der Annahme eines ebenen Fachwerks mit n_{FHG} nicht gehaltenen Freiheitsgraden und n_{E} Elementen unter Verwendung von Gleichung (3.1) zu

$$n_{\text{akt}} = n_{\text{C}} + n_{\text{s}} = n_{\text{FHG}} + n_{\text{E}} - n_{\text{FHG}} = n_{\text{E}}. \quad (4.65)$$

Sollen also alle Knotenverschiebungen kontrolliert und zusätzlich der vollständige Kraft-Aktuierungsraum aufgespannt werden, müssen alle Stäbe eines Fachwerks aktuiert werden. Wie bereits erwähnt sind jedoch die Anforderungen an Tragwerke im Allgemeinen nicht so hoch, dass die Verschiebung an jedem Freiheitsgrad unabhängig von allen anderen kontrolliert werden muss. Dies führt zu einer verminderten Anzahl an notwendigen Aktoren. Wie diese Anzahl beispielsweise ermittelt werden kann, wird in Abschnitt 4.4 vorgestellt.

Durch den Einsatz eines zusätzlichen Aktors in Element 3 des Beispiels aus Abbildung 4.12 mit dem Aktorweg \hat{u}_3 könnte somit trotz vollständiger Verschiebungskompensation ($\mathbf{d} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$) der ursprünglich vorhandene Kraftzustand ($\mathbf{n}_{\text{ada}} \stackrel{!}{=} \mathbf{n}_{\text{pas}}$) erhalten werden. Weiterhin könnte dadurch beispielsweise in einem unbelasteten, statisch unbestimmten Tragwerk ein beliebiger Verschiebungszustand eingestellt werden, ohne dass Normalkräfte entstehen.

4.3.3 Aktuierungsarbeit

Bei der Aktuierung können Verschiebungen und Schnittgrößen in Tragwerken erzeugt werden und mechanische Arbeit wird verrichtet. Im Folgenden werden die relevanten Zusammenhänge zwischen im Tragwerk gespeicherter Energie und der Arbeit, die von der Aktorik und den äußeren Lasten verrichtet wird, erläutert. Die in einem Tragwerk

gespeicherte elastische Verzerrungsenergie ergibt sich zu

$$\Pi^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l}_{\text{el}}. \quad (4.66)$$

Die elastischen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{\text{el}}$ lassen sich nach Gleichung (2.4) durch die gesamten und die vorgegebenen Längenänderungen ausdrücken. Einsetzen liefert

$$\Pi^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l} - \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l}_0. \quad (4.67)$$

In den folgenden Abschnitten werden die enthaltenen Anteile diskutiert.

Die von der Aktorik verrichtete Arbeit ergibt sich zu

$$W^{\text{akt}} = -\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{R} & -\frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Die Schreibweise als quadratische Formen bietet eine alternative Darstellung. Die Äquivalenz kann durch Ausrechnen und Umformen gezeigt werden. Das negative Vorzeichen vor $-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l}_0$ kann mit dem folgenden Gedankenexperiment überprüft werden. Wird ein Aktor mit einer positiven vorgegebenen Längenänderung versehen, versucht dieser länger zu werden. Erfolgt diese Verlängerung gegen Zwang, also in einem Aktor, der sich in einer statisch unbestimmten Einbausituation befindet, wird eine negative Normalkraft (Druck) im Aktor erzeugt. Das Produkt aus Aktorkraft und Aktorweg wäre negativ, jedoch wird in diesem Prozess mechanische Arbeit verrichtet und nicht frei, was wiederum zu dem negativen Vorzeichen führt. Durch Einträge auf den Nebendiagonalblöcken ergeben sich hier Fremdarbeiten von Knotenverschiebungen aus der Aktuierung und den äußeren Kraftlasten bzw. der Normalkräfte aus äußeren Kraftlasten mit den vorgegebenen Längenänderungen aus Aktuierung.

Die Arbeit, die von den äußeren Kraftlasten verrichtet wird, ergibt sich zu

$$W^{\text{ext}} = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1} \\ \frac{1}{2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} & \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}})^T \mathbf{d}. \quad (4.69)$$

Für die elastische Verzerrungsenergie, die im Tragwerk gespeichert ist, ergibt sich analog

$$\Pi^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Delta \mathbf{l}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

In der quadratischen Form können zwei Anteile identifiziert werden, aus denen sich die elastische Verzerrungsenergie zusammensetzt. Der Anteil $\frac{1}{2}\Delta\mathbf{l}_0^T\mathbf{C}\mathbf{R}\Delta\mathbf{l}_0$ beschreibt den Beitrag aus Zwang bei vorgegebener Längenänderung bzw. Aktuierung, der in den Eigen Spannungszuständen im Tragwerk gespeichert wird. Der zweite Anteil $\frac{1}{2}\left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^K\right)^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^K$ beschreibt den Beitrag aus der äußeren Kraftlast. Die beiden Anteile sind jeweils immer positiv, weshalb bei der Aktuierung einer Struktur die elastische Verzerrungsenergie entweder konstant bleibt oder größer wird. Eine Verringerung der gespeicherten elastischen Verzerrungsenergie durch Aktuierung ist nicht möglich. Wenn der Vektor der Aktorwege $\Delta\mathbf{l}_0$ im Nullraum von $\mathbf{C}\mathbf{R}$ liegt, werden reine Verschiebungen erzeugt, ohne dass Zwangskräfte induziert werden. In diesem Fall ergibt sich das Produkt $\mathbf{C}\mathbf{R}\Delta\mathbf{l}_0$ zum Nullvektor und es ergibt sich kein Beitrag zur elastischen Verzerrungsenergie. Wenn Kräfte durch Aktuierung in der Struktur verändert werden, dann vergrößert sich stets die elastische Verzerrungsenergie.

Diese gesamte verrichtete Arbeit, die sich aus der Summe der Arbeit der Aktorik und der Arbeit der äußeren Lasten ergibt, entspricht der im Tragwerk gespeicherten elastischen Verzerrungsenergie

$$\Pi^{\text{int}} = W^{\text{ext}} + W^{\text{akt}}. \quad (4.71)$$

Durch die Analyse von W^{akt} lässt sich der Aufwand für eine ideale Aktuierung ohne Reibungsverluste und sonstige Effekte quantifizieren. Aufgrund von Annahmen und Vereinfachungen sind die absoluten Werte für diesen Aufwand in der vorliegenden Arbeit nicht aussagekräftig, jedoch werden diese Werte im weiteren Verlauf für verschiedene Aktorsätze, für verschiedene Aktuierungsziele und für verschiedene Tragwerke verglichen. Die Betrachtung der relativen Werte lässt einen Rückschluss auf die Aktuierbarkeit der Tragwerke zu.

4.3.4 Fazit

Mithilfe der Aktorik können der Tragwerkszustand, der hier durch die Verschiebungen und die Schnittgrößen beschrieben wird, und verschiedene Tragwerkeigenschaften adaptiert werden.

Schnittgrößen können nur in statisch unbestimmten Tragwerken bzw. Tragwerksteilen verändert werden. Durch die Veränderung von Kräften in einem Tragwerk können beispielsweise stark belastete Elemente entlastet und dafür weniger ausgenutzte Teile zusätzlich belastet werden, was unter anderem für die Verlängerung der Lebensdauer von Bauteilen genutzt werden kann, in denen die Materialermüdung maßgebend ist. Außerdem bieten sich Möglichkeiten im Hinblick auf vollständige Entlastung von Elemen-

ten beispielsweise zum Austausch oder zur Reparatur. Die Untersuchungen zur reinen Kraftadaption, bei denen Zielfunktionen verwendet werden, die den Normalkraftvektor bewerten, sind eher von theoretischem Interesse, um die Kraftadaption und die Funktionsweise der adaptiven Tragwerke besser zu verstehen. Häufig werden stattdessen Nebenbedingungen an die Normalkräfte oder Spannungen formuliert, die das Über- bzw. Unterschreiten von Grenzwerten verhindern (siehe z. B. das Drei-Stab-Tragwerk zur Dimensionierung in Abschnitt 2.2.2), was die beschriebenen Effekte implizit beinhaltet, jedoch nicht explizit fordert.

Die Traglast eines Tragwerks, die unter der Annahme, dass alle Stäbe elastisch bleiben, ermittelt wird, kann mithilfe von Kraftadaption bis zur Traglast, die mit dem Traglastverfahren nach Fließgelenktheorie ermittelt wird, gesteigert werden. Durch eine weitere Aktuierung kann diese nicht weiter gesteigert werden, jedoch kann in diesem Fall die Duktilität, die als die Verformung beim Erreichen der Traglast interpretiert wird, durch eine kombinierte Kraft- und Verschiebungsadaption eingestellt werden.

Verschiebungen können unabhängig von den Tragwerkeigenschaften in jedem Stabtragwerk durch Aktuierung verändert werden, womit die Steifigkeit eines Tragwerks adaptiv eingestellt werden kann. Die Anforderungen an die Verschiebungen eines Tragwerks unter Belastungen sind meist nicht auf einen festen Wert bzw. null festgelegt, sondern müssen nur unter einem bestimmten Grenzwert liegen. Deshalb ist die vorgestellte Vorgehensweise auch hier theoretisch interessant, um das Verhalten zu analysieren, wird jedoch praktisch meist nicht genutzt. Die Unterschreitung der zulässigen Maximalwerte der Verschiebungen wird meist nicht als Zielfunktion, sondern in Form von Nebenbedingungen in den Optimierungsproblemen berücksichtigt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Kraft- und Verschiebungsadaption eingesetzt, um den Tragwerkszustand und Tragwerkeigenschaften zu verändern. Sowohl für die Kraft- als auch für die Verschiebungsadaption muss im Allgemeinen mechanische Arbeit verrichtet werden. Die Quantifizierung dieser Energie- und Arbeitsbilanz hängt von den Eigenschaften des Tragwerks und der Anordnung der Aktorik ab. Diese Abhängigkeiten werden in den Studien in Kapitel 5 tiefergehend betrachtet.

4.4 Automatisierte Platzierung von Aktoren

Für die bisher betrachteten Beispiele wurden jeweils Aktorplatzierungen vorgegeben. Anhand der Betrachtung der Adaptionsziele wurden bereits Erkenntnisse gewonnen, wie viele Aktoren in Tragwerken eingesetzt werden müssen, um diese Ziele zu erreichen. Der Prozess der Anordnung der Aktoren im Tragwerk soll im Folgenden systematisiert und automatisiert werden. Dafür werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, nach

denen für eine vorgegebene Zielformulierung (z. B. Verschiebungs- oder Kraftadaption) die Positionierung der Aktoren ermittelt werden kann. Die automatisierte Platzierung der Aktoren im Tragwerk ist eine Aufgabe, aus deren Lösung mithilfe von strukturmechanischem Problemverständnis zudem viele Einsichten gewonnen werden können.

Der erste vorgestellte Ansatz zur Aktorplatzierung mithilfe der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix aus dem Bereich der Systemtheorie ist in der interdisziplinären Zusammenarbeit von WAGNER U. A. (2018) unter Beteiligung des Autors beschrieben. Dabei ist es insbesondere interessant, die Beschreibung der Methode mit der eigenen, disziplinären Sprache zu betrachten und mithilfe der strukturmechanischen Einsicht in das Problem der Aktorplatzierung einen Mehrwert für das Problemverständnis zu generieren. Dieser Ansatz kann direkt sowohl zur Aktorplatzierung für Kraft- als auch für Verschiebungsadaption herangezogen werden.

Der zweite Ansatz, der vorgestellt wird, basiert auf der Ausnutzung von Eigenschaften einer Matrix, die bereits in verschiedenen Varianten in der Literatur und in der vorliegenden Arbeit als Redundanzmatrix beschrieben ist. Diese Matrix ist aus den Arbeiten von TEUFFEL (2004), SENATORE (2016), STEFFEN U. A. (2020) und GEIGER U. A. (2020a) bekannt, wird darin als Sensitivitätsmatrix, Einflussmatrix oder Redundanzmatrix bezeichnet und tritt in den Vorarbeiten mit unterschiedlich skalierten Werten, jedoch demselben Informationsgehalt, auf. Dieser Ansatz wird im Folgenden nur für die Aktorplatzierung zur Kraftadaption beschrieben, eine mögliche Erweiterung zur Adaption von Verschiebungen ist jedoch möglich.

4.4.1 Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix

Für die Herleitung des Verfahrens ist es unerheblich, ob die Aktoren zur Adaption von Verschiebungen oder von Kräften eingesetzt werden sollen. Die folgende Beschreibung stellt die Herleitung unter den im Rahmen dieser Arbeit getroffenen Annahmen und verwendeten Schreibweisen dar. Weitergehend können auch Trägheitseffekte berücksichtigt werden. Eine ausführliche und allgemeine Herleitung ist in der gemeinsamen Publikation in WAGNER U. A. (2018) beschrieben. Zudem ist explizit die Platzierung von seriellen und parallelen Aktoren in diesem Rahmen möglich.

Bewertungsmaß

Ausgangspunkt für die Herleitung ist die Beschreibung der Abweichung der gewählten Adaptionsgröße von einem festgelegten Zielwert \mathbf{y}_0 als einen Fehlervektor \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_0 - \mathbf{y} \tag{4.72}$$

Dabei kann der sogenannte Ausgang \mathbf{y} alle oder nur ausgewählte Verschiebungen oder Normalkräfte sowie Kombinationen enthalten. Die Anzahl der Einträge des Vektors wird im Folgenden mit n_A bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird für eine übersichtliche Herleitung der Zielwert als Null-Vektor $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ gewählt. In Abschnitt 4.3 wird diskutiert, inwiefern diese Wahl für Normalkräfte und Verschiebungen sinnvoll ist.

Das hinterlegte strukturmechanische Modell wird in der aus Gleichung 4.22b bekannten Form

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.73)$$

beschrieben, wobei hier der Aktoreingang \mathbf{u} in seiner Bedeutung wie eine vorgegebene Längenänderung $\Delta\mathbf{l}_0$ interpretiert wird und sich die Eingangsmatrix \mathbf{B} zu $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$ ergibt. Dabei wird die Aktorplatzierung dadurch berücksichtigt, dass nur die Längenänderungen von aktuell eingesetzten Aktoren im Vektor \mathbf{u} enthalten sind und entsprechend fehlende Spalten aus \mathbf{B} gestrichen werden. Deshalb gilt $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_{\text{FHG}} \times n_{\text{akt}}}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_{\text{akt}}}$ im Unterschied zu $\Delta\mathbf{l}_0 \in \mathbb{R}^{n_E}$. Für den Fall, dass alle Elemente Aktoren sind, stimmen $\Delta\mathbf{l}_0$ und \mathbf{u} überein.

Zusätzlich wird eine sogenannte Ausgangsgleichung formuliert, die aus dem Systemzustand, der hier durch den Vektor der Knotenverschiebungen \mathbf{d} beschrieben wird, die Adaptiongröße zu

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{d} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.74)$$

beschreibt. Dabei gilt $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_{\text{FHG}}}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_{\text{akt}}}$. Diese allgemeine Darstellung der Ausgangsgleichung kann für die verschiedenen Adaptiongrößen unterschiedlich interpretiert werden.

Für die **Verschiebungsadaption**, bei der alle Verschiebungen verändert werden sollen, ergibt sich die Ausgangsmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ zur Einheitsmatrix und die sogenannte Durchgriffsmatrix \mathbf{D} zur Null-Matrix und die Ausgangsgleichung vereinfacht sich zu

$$\mathbf{y} = \mathbf{d}. \quad (4.75)$$

Sollen nur die Verschiebungen an ausgewählten Freiheitsgraden adaptiert werden, erfolgt diese Auswahl über ein Streichen der entsprechenden Zeilen aus der Ausgangsmatrix.

Für die **Kraftadaption**, bei der alle Normalkräfte verändert werden sollen, ergibt sich die Ausgangsmatrix zu $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{A}$. Der zweite Summand in der allgemeinen Ausgangsgleichung (4.74) berücksichtigt in diesem Fall die vorgegebene Längenänderung aus der

seriellen Aktuierung \mathbf{u} und die Durchgriffsmatrix \mathbf{D} ergibt sich zu $-\mathbf{C}$. Damit ergibt sich die Ausgangsgleichung für Kraftadaption zu

$$\mathbf{y} = \mathbf{CAd} - \mathbf{Cu}. \quad (4.76)$$

Mit den Definitionen aus Abschnitt 2.1.4 stellt der Ausgang \mathbf{y} somit den Vektor der Normalkräfte \mathbf{n} dar. Durch das Streichen bestimmter Zeilen kann eine Auswahl von Normalkräften erfolgen. Wenn alle Normalkräfte berechnet werden und alle Elemente Aktoren sind, dann ergibt sich hier der Zusammenhang aus Gleichung (2.29) zur Rückrechnung der (hier negativen) Normalkräfte. Unter Vernachlässigung des zweiten Summanden \mathbf{Cu} erhält man eine Rückrechnung von Normalkräften aus den Knotenverschiebungen, ohne dass in der Rückrechnung explizit die vorgegebene innere Längenänderung durch die serielle Aktorik berücksichtigt wird. Dadurch kann eine parallele Aktuierung berücksichtigt werden, ohne dass ein paralleler Stab im Modell vorgesehen wird. Wenn parallele Aktoren eingesetzt werden sollen, ist diese Vorgehensweise für die Aktorplatzierung von Vorteil, da sich die Modellgleichung (4.73) dabei nicht ändert.

Der Term \mathbf{Cu} bzw. $\mathbf{C}\Delta\mathbf{l}_0$ wird häufig als aufgebrachte Normalkraft oder Aktuierungskraft bezeichnet, was aus der Einheit kN und der Charakteristik der Multiplikation einer Dehnsteifigkeit mit einer Längenänderung resultiert. Von dieser Bezeichnung wird jedoch abgeraten, da das Aufbringen bzw. die Vorgabe einer Normalkraft im Allgemeinen nicht möglich ist.

Durch Einsetzen der Modellgleichung (4.73) und der Ausgangsgleichung (4.74) in die Fehlergleichung (4.72) ergibt sich für den Fehler

$$\mathbf{e} = -(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{u} - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{K}}. \quad (4.77)$$

Für den Fall, dass als Adaptiongröße alle Normalkräfte in einer Struktur gewählt werden und dass in allen Elementen Aktoren eingesetzt sind, ergibt sich der Zusammenhang

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = -\mathbf{CR} \quad (4.78)$$

zur gewichteten Redundanzmatrix nach Gleichung (3.11).

Die Ermittlung des optimalen Eingangs \mathbf{u}^* so, dass der Fehler minimal wird, erfordert die Lösung eines Minimierungsproblems. Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, kann eine geschlossene Lösung des Optimierungsproblems ermittelt werden, wenn die quadrierte euklidische Norm eines Vektors minimiert werden soll. Das Minimierungsproblem zur Bestimmung von \mathbf{u}^* wird durch

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{e}\|_2^2 \quad (4.79)$$

beschrieben. Unter Verwendung der Pseudoinversen lässt sich das Minimierungsproblem zu

$$\mathbf{u}^* = - \left(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right)^+ \bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \quad (4.80)$$

geschlossen lösen.

Dabei ist zu beachten, dass insbesondere hier bei der Berechnung der Pseudoinversen die Berechnungstoleranz ϵ in Abhängigkeit vom mechanischen Problem definiert werden muss. Diese Toleranz kann als Grenze interpretiert werden, bei deren Unterschreiten ein Eigenwert der Matrix als Null-Eigenwert interpretiert wird. In der vorliegenden Arbeit werden mithilfe der strukturmechanischen Einsicht in das Problem zwei Toleranzgrenzen definiert. Nach PELLEGRINO (1993) kann die Toleranzgrenze zu $10^{-3} \max(\boldsymbol{\Sigma})$ gewählt werden, wobei $\boldsymbol{\Sigma}$ alle Singulärwerte der zu invertierenden Matrix darstellt. Weitere Details zur Singulärwertzerlegung können beispielsweise GOLUB UND KAHAN (1965) entnommen werden. Jedoch ergibt sich im Fall, dass serielle Aktoren zur Kraftmanipulation platziert werden sollen und im aktuellen Aktorset \mathcal{A} nur ein oder mehrere statisch bestimmte Elemente und keine statisch unbestimmten Elemente enthalten sind, eine zu invertierende Null-Matrix, die sich nach Gleichung (4.80) aus der Differenzberechnung (mit $\mathbf{D} = -\mathbf{C}$) ergibt und deshalb numerisch sehr kleine Werte enthalten kann. In diesem Fall ist das Kriterium nach Pellegrino nicht zielführend und eine absolute Toleranz muss definiert werden. Beispielsweise kann

$$\epsilon = \max \left(10^{-3} \max(\boldsymbol{\Sigma}) ; 10^{-6} \right) \quad (4.81)$$

verwendet werden, wobei die Wahl über Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse oder durch andere Methoden in jedem Fall sichergestellt werden muss. Weitere Untersuchungen zur Wahl der Toleranz für das vorliegende mechanische Problem finden sich in FORSTER (2019).

Der optimierte Fehler ergibt sich nach Einsetzen des optimierten Aktorwegs und weiterer Umformung zu

$$\mathbf{e}^* = \underbrace{\left(\left(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \left(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right)^+ - \mathbf{1} \right) \bar{\mathbf{C}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}}_{=: \bar{\mathbf{H}}} \quad (4.82)$$

Damit ergibt sich die quadrierte euklidische Norm des Fehlervektors zu

$$\|\mathbf{e}^*\|_2^2 = \mathbf{e}^{*\text{T}}\mathbf{e}^* = \left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \right)^{\text{T}} \bar{\mathbf{H}}^{\text{T}} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} = \left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}} \right)^{\text{T}} \mathbf{W} \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}. \quad (4.83)$$

Durch die Struktur des Ausdrucks (4.83) als quadratische Form können Aussagen für den Wertebereich von $\|\mathbf{e}^*\|_2^2$ unabhängig vom Lastfall getroffen werden. Die Analyse der

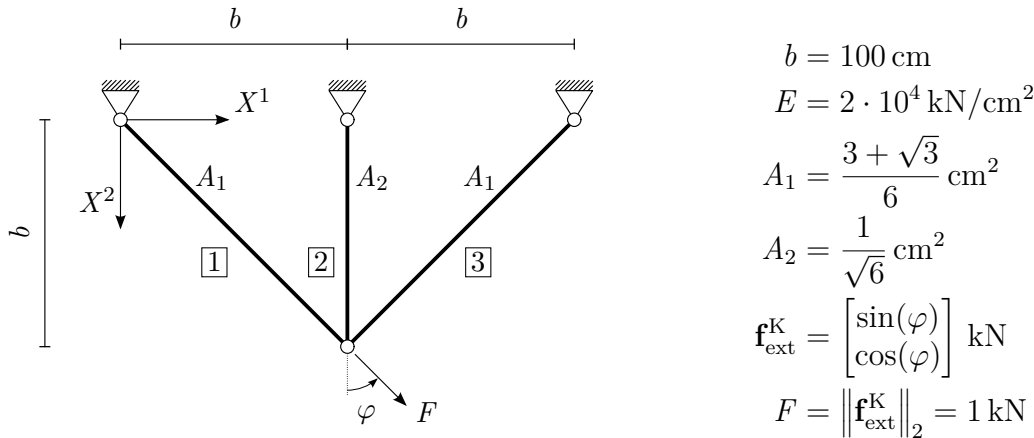


Abbildung 4.15: Drei-Stab-Tragwerk zur Veranschaulichung der Lastfallunabhängigkeit

Eigenschaften der entstehenden Gram'schen¹ Matrix \mathbf{W} ermöglicht die Bewertung einer gewählten Aktorplatzierung im untersuchten Tragwerk unabhängig von der konkret einwirkenden Last. Jedoch ist beispielsweise die unterschiedliche Gewichtung von verschiedenen Lastrichtungen durch eine Filterung möglich. Weitere Details dazu können WAGNER U. A. (2018) entnommen werden.

Um die Unabhängigkeit von einem konkreten Lastfall zu veranschaulichen, wird das bereits bekannte Tragwerk aus Abbildung 4.15 untersucht und als Ziel der Aktuierung wird in diesem Fall die Verschiebungsadaptation definiert. Dabei wird eine einwirkende Einzelast angenommen, die nur in ihrem Betrag, jedoch nicht in der Richtung bestimmt ist. Die Richtung der Last wird durch den Winkel φ beschrieben. Visualisiert ist dies für beliebige Winkel durch den schwarzen Kreis mit Radius von eins in Abbildung 4.16, der alle möglichen Endpunkte des Lastvektors beschreibt. Durch die Multiplikation des Lastvektors $\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}$ mit der Gram'schen Matrix \mathbf{W} ergibt sich eine Größe, die keine einfach interpretierbare strukturmechanische Bedeutung zugeschrieben werden kann, die jedoch den resultierenden Fehler quantifiziert. In der gewählten Darstellungsform in Abbildung 4.16 wird somit die Performanz der jeweiligen Aktorplatzierung veranschaulicht. Im passiven Tragwerk (rot) zeigt sich die höhere Steifigkeit des Tragwerks in X^1 -Richtung, da die Ellipse in diese Richtung eine geringere Ausdehnung aufweist, was wiederum mit einem geringeren Fehler und damit einer geringeren Verschiebung korreliert. Durch die Aktuierung mit einem Aktor in Element 2 (blau) kann die Steifigkeit in diese Richtung weiter vergrößert werden, sodass kein Fehler in der Verschiebung in diese Richtung mehr auftritt. Die horizontale Ausdehnung kann nicht beeinflusst werden und entspricht der horizontalen Ausdehnung der Ellipse des passiven Systems. Wenn ein Aktor in Element 3 (gelb) eingesetzt wird, kann dieser nur den Fehler in derjenigen Verschiebung verhindern, die in Richtung der Elementachse orientiert ist. Die darge-

¹Jørgen Pedersen Gram (1850–1916)

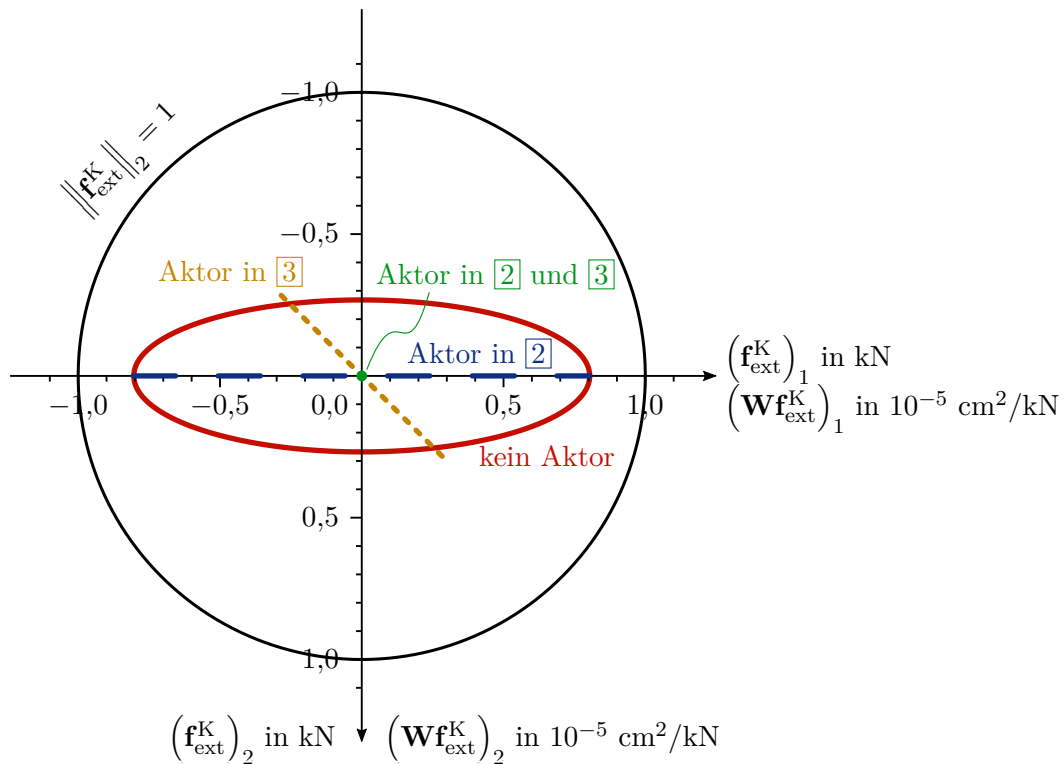


Abbildung 4.16: Darstellung der Richtung des Lastvektors $\mathbf{f}_{\text{ext}}^K$ (schwarz) und der Richtung von $\mathbf{W}\mathbf{f}_{\text{ext}}^K$ als Fehlermaß der Verschiebungskompensation für ausgewählte Aktorplatzierungen für alle Lastangriffswinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$; Umkehrung der vertikalen Achse zur Anpassung an die Richtung der Freiheitsgrade in Abbildung 4.15 und damit vereinfachte visuelle Vergleichbarkeit

stellte gelbe Linie beschreibt genau den Fehler in den Verschiebungen, der orthogonal zu Element 3 orientiert ist und deshalb nicht kompensiert werden kann. Beim Einsatz von zwei Aktoren (grün) kann der gesamte Fehler in den Verschiebungen kompensiert werden (siehe auch Abschnitt 4.3.2).

Abbildung 4.17 zeigt den Betrag des resultierenden Fehlers in den Verschiebungen in Abhängigkeit vom Lastangriffswinkel für ausgewählte Aktorplatzierungen. Dabei lassen sich wiederum die Performanz der verschiedenen Aktorplatzierungen anschaulich sehr gut vergleichen. Weiterhin wird anhand dieser Darstellung die Bedeutung der Eigenschaften der Matrix \mathbf{W} aus Tabelle 4.1 veranschaulicht. Die Matrix \mathbf{W} und die entsprechenden Eigenwerte einsortiert in den Vektor $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{W}}$ ergeben sich beispielhaft für den passiven Fall zu

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,8038 & 0 \\ 0 & 0,2679 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{kN}^2} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0,8038 \\ 0,2679 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{kN}^2}. \quad (4.84)$$

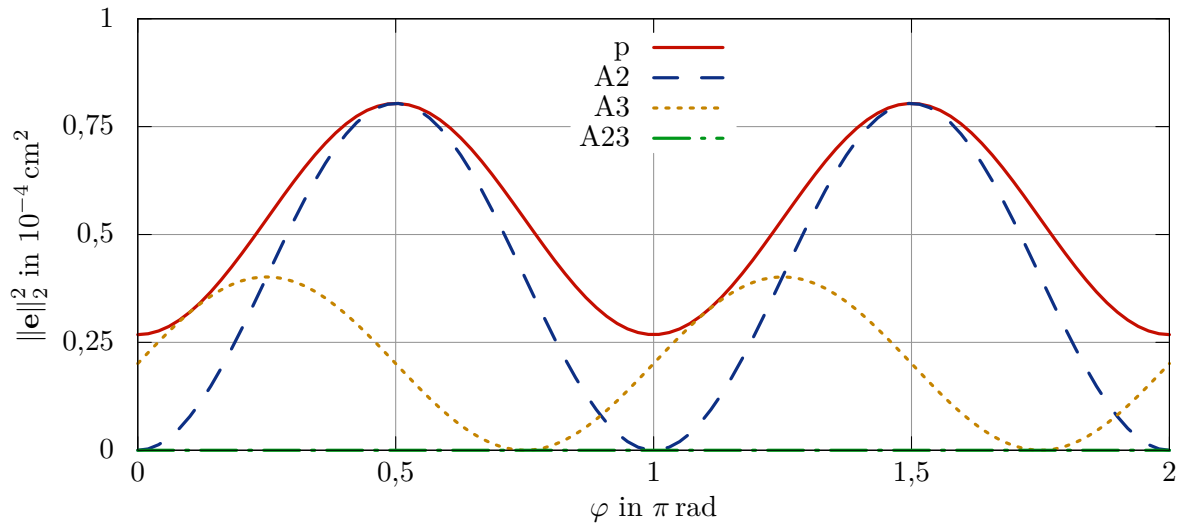


Abbildung 4.17: Fehler $\|e\|_2^2$ für Verschiebungsadaption in Abhängigkeit vom Winkel der angreifenden Last für das passive Tragwerk (p), das Tragwerk mit einem Aktor in Element 2 (A2), das Tragwerk mit einem Aktor in Element 3 (A3) und das Tragwerk mit Aktoren in Elementen 2 und 3 (A23)

Der größte Eigenwert der Matrix beschreibt den im ungünstigsten Fall maximal auftretenden Fehler, der in Abbildung 4.17 als Hochpunkt der jeweiligen Fehlerfunktionen erkennbar ist. Der kleinste Eigenwert beschreibt den im günstigsten Fall minimal auftretenden Fehler; in Abbildung 4.17 als Tiefpunkt dargestellt. Weiterhin können der maximale und der minimale Eigenwert auch als der maximale und minimale Radius der jeweiligen Ellipse in Abbildung 4.16 interpretiert werden. Die über die Größe der Matrix $n_{\text{FHG}} \times n_{\text{FHG}}$ gemittelte Spur der Matrix entspricht dem Mittelwert zwischen minimalem und maximalem Wert der Funktionen in Abbildung 4.17. Diese anschauliche Interpretation ergibt sich nur für den Fall, dass sich die Länge des Lastvektors $\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{K}}$ genau zu eins ergibt. Jedoch kann über die Analyse der Matrixeigenschaften ein direkter Rückschluss auf das Verhalten des adaptiven Systems auf unbekannte Belastungen gezogen werden. Für die Bewertung und den Vergleich verschiedener Aktorplatzierungen können damit diese Eigenschaften, insbesondere die gemittelte Spur $J_{\text{S}} = \frac{\text{Spur}(\mathbf{W})}{n_{\text{FHG}}}$ und der maximale Eigenwert $J_{\lambda} = \max(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{W}})$, herangezogen werden. Diese Eigenschaften quantifizieren, wie gut die Beanspruchungen bzw. die Verschiebungen infolge beliebiger äußerer Lasten kompensiert werden können und damit indirekt auch die Adaptierbarkeit der Struktur.

Platzierungsalgorithmus

Die Ermittlung der besten Platzierung der Aktoren erfolgt durch das Erzeugen verschiedener Aktoranordnungen und dem Vergleich dieser Anordnungen untereinander. Eine gewählte Anordnung der Aktoren wird als Aktorset bezeichnet. Zur Erzeugung der Sets können verschiedene Algorithmen zum Einsatz kommen. Das Ausprobieren aller Möglichkeiten, auch als brute force-Methode bezeichnet, kann nur zur Validierung des Algorithmus herangezogen werden, da der Rechenaufwand für realistische Beispiele aufgrund des kombinatorischen Problemcharakters exponentiell steigt. Die Anzahl der möglichen Kombinationen für eine Fachwerkstruktur mit n Elementen beträgt 2^n .

Die Menge aller Elemente wird durch \mathcal{E} beschrieben, die Menge der gewählten Aktoren wird als Aktorset \mathcal{A} bezeichnet und die Menge der möglichen Aktorpositionen, an denen noch kein Aktor platziert ist, wird als Kandidatenset \mathcal{C} bezeichnet. Im Folgenden wird ein greedy-Algorithmus (siehe NEMHAUSER U. A. (1978)) zur Auswahl der Aktorsets beschrieben, der leichte Veränderungen zur von WAGNER U. A. (2018) vorgeschlagenen Variante aufweist. Im Gegensatz zur Version aus WAGNER U. A. (2018), die mit dem vollen Aktorset startet und schrittweise Aktoren entfernt, beginnt der hier vorgeschlagene Algorithmus mit dem leeren Aktorset und wählt schrittweise Aktoren aus, wodurch die Nachvollziehbarkeit verbessert wird. Veranschaulicht wird der Algorithmus in Abbildung 4.18 beispielhaft für den Fall, dass alle Elemente zum Kandidatenset gehören. Beginnend in Schritt $k = 0$ mit dem leeren Aktorset $\mathcal{A}_{(0)} = \emptyset$ und dem vollen Kandidatenset $\mathcal{C}_{(0)} = \mathcal{E}$ wird das gewählte Gütemaß für die testweise Übernahme eines Kandidaten $(\mathcal{C}_{(0)})_j$ aus dem Kandidatenset zum Aktorset ausgewertet. Der Kandidat, der im aktuellen Schritt k die beste Performanz im gewählten Gütemaß aufweist, wird für den nächsten Schritt aus dem Kandidatenset entfernt, ins Aktorset übernommen und der Prozess startet erneut, bis das Kandidatenset leer ist. Weitere Abbruchkriterien können zur Steigerung der Effizienz vorgegeben werden, jedoch wird hier bis zum leeren Kandidatenset platziert, um den Verlauf der Berechnung interpretieren zu können.

Der Ablauf des Algorithmus kann anhand der Daten aus Tabelle 4.1 veranschaulicht werden. Zu Beginn des Prozesses wird das Gütemaß für die Aktorsets $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$ ausgewertet. Wird beispielsweise die Minimierung des größten Eigenwerts der Matrix $\mathbf{W}(\mathcal{A})$ als Gütemaß für die Aktorplatzierung gewählt, würde in diesem Schritt dann entweder Element 1 oder Element 3 zum Aktorset hinzugefügt werden. Hier wird nun angenommen, dass Element 1 als Aktor ausgewählt wird. Dann würden im zweiten Schritt noch die Kombinationen $\{1,2\}$ und $\{1,3\}$ verglichen werden. Auch hier wäre die Auswahl beliebig, da beide Kombinationen dieselben Verbesserungen bieten. Schließlich würde das verbleibende Element als Aktor gewählt.

Tabelle 4.1: Eigenschaften der Gram'schen Matrix \mathbf{W} für verschiedene Aktorssets

Aktorsset \mathcal{A}	größter Eigenwert von \mathbf{W}	kleinster Eigenwert von \mathbf{W}	$\frac{\text{Spur}(\mathbf{W})}{n_{\text{FHG}}}$
\emptyset	$0,8038 \cdot 10^{-4}$	$0,2679 \cdot 10^{-4}$	$0,5359 \cdot 10^{-4}$
$\{1\}$	$0,4019 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,2010 \cdot 10^{-4}$
$\{2\}$	$0,8038 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,4019 \cdot 10^{-4}$
$\{3\}$	$0,4019 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,2010 \cdot 10^{-4}$
$\{1,2\}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$
$\{2,3\}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$
$\{1,3\}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$
$\{1,2,3\}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$	$0,0000 \cdot 10^{-4}$

Basierend auf dem vorgestellten Gütemaß können auch andere Platzierungsalgorithmen eingesetzt werden. Eine Übersicht und die Validierung des vorgestellten greedy-Algorithmus mit der brute force-Methode können FORSTER (2019) entnommen werden. Trotz der im Vergleich zur brute force-Methode signifikant reduzierten Anzahl an untersuchten Kombinationen, steigt der Aufwand dieses Verfahrens und im Allgemeinen der greedy-Verfahren für Beispiele mit vielen Aktorkandidaten stark an.

4.4.2 Redundanzmatrix

Im Folgenden wird eine alternative Methode zur Actorplatzierung mithilfe der Redundanzmatrix, die in Abschnitt 3.1.2 eingeführt wird, vorgeschlagen. Auch hierbei werden, basierend auf den Einträgen der Redundanzmatrix, schrittweise Elemente ausgewählt, in die serielle Aktoren zur Kraftmanipulation eingefügt werden. Eine Idee zur Nutzung der Redundanzmatrix bei der Platzierung von Aktoren zur Kraftmanipulation wird von GEIGER U. A. (2020a) bereits dargestellt. Außerdem wird von TEUFFEL (2004) und SENATORE (2016) eine Sensitivitätsmatrix zur Kraftmanipulation berechnet, die sich von der Redundanzmatrix bzw. der gewichteten Redundanzmatrix nur durch die Skalierung der Spalten unterscheidet. STEFFEN U. A. (2020) verwenden Einflussmatrizen, die in Sonderfällen mit der Redundanzmatrix übereinstimmen, zur Analyse von adaptiven Strukturen.

Die Redundanzmatrix beschreibt nach Gleichung (3.4) den Zusammenhang von einer vorgegebenen Längenänderung zum Beispiel durch Aktuierung und der dadurch ins System eingebrachten elastischen Längenänderung. Ein Eintrag auf der Hauptdiagonalen der Matrix beschreibt dabei den Zwang, den ein Element bei eigener vorgegebener Längenänderung erfährt. Im Hinblick auf adaptive Strukturen bedeutet das, dass ein serieller Actor in einem Element i mit Redundanzanteil $(\mathbf{R})_{i,i} = 0$ keinen Zwang erfährt. Ein Element j mit Redundanzanteil $0 < (\mathbf{R})_{j,j} < 1$ erfährt Zwang aufgrund der umgebenden

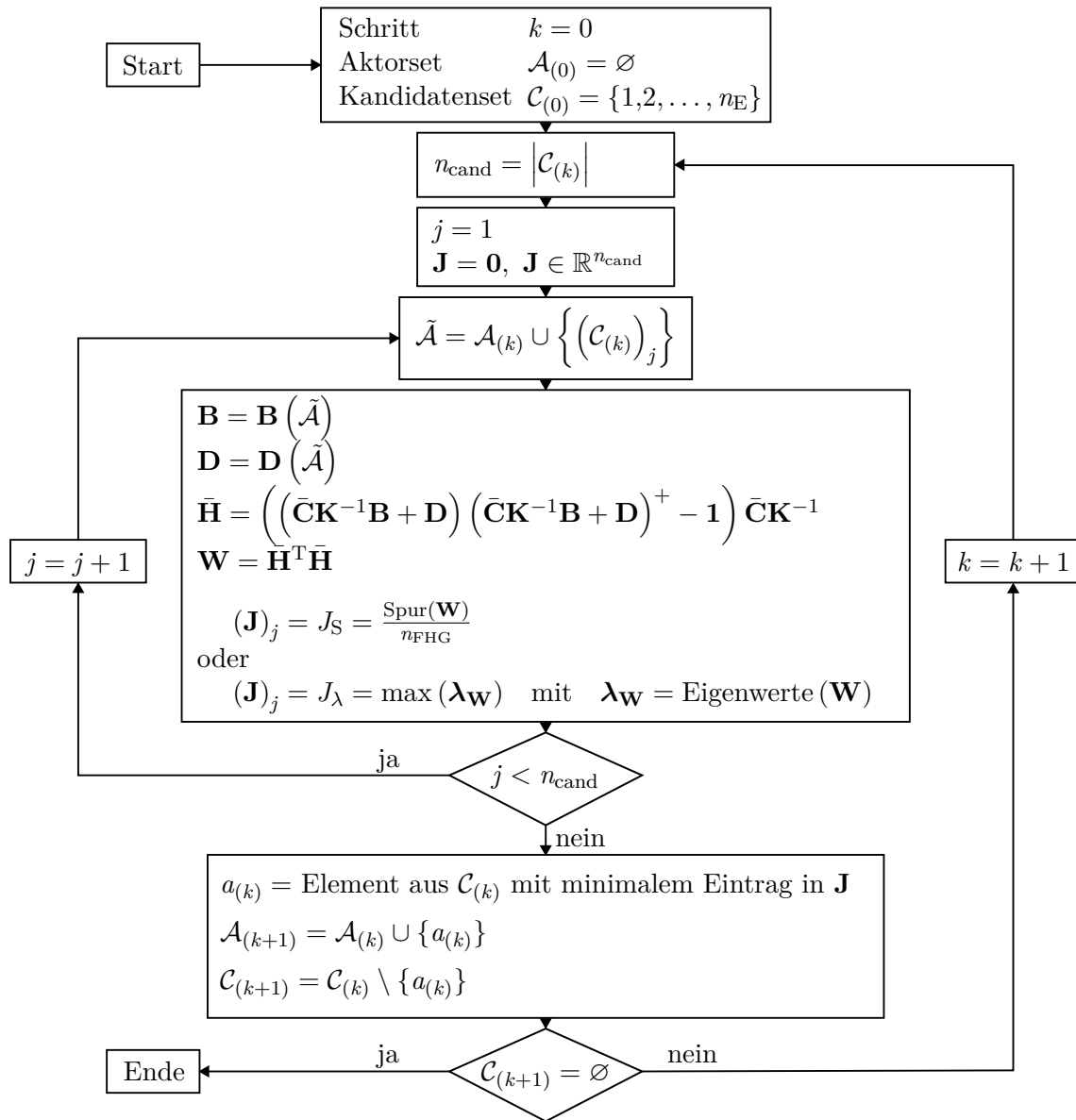


Abbildung 4.18: Darstellung des Ablaufs der Actorplatzierung mithilfe der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix als Flussdiagramm

Struktur und kann deshalb durch Aktuierung Schnittgrößen hervorrufen. Ein Element k mit Redundanzanteil $(\mathbf{R})_{k,k} = 1$ ist vollständig in der Ausdehnung behindert, was nur beim Einbau eines Elements zwischen zwei Auflagern auftreten kann. In diesem Fall kann nur in dem Element selbst eine Normalkraft durch Aktuierung induziert werden.

Der Betrag des Redundanzanteils ist ein Maß für die Größe des Zwangs, den die Umgebende Struktur der Ausdehnung des Elements entgegensetzt. Unter einer vorgegebenen Längenänderung aus Aktuierung von Element j hängt die dadurch hervorgerufene Normalkraft von der Größe des Redundanzanteils ab. Weiterhin kann über die Besetztheit

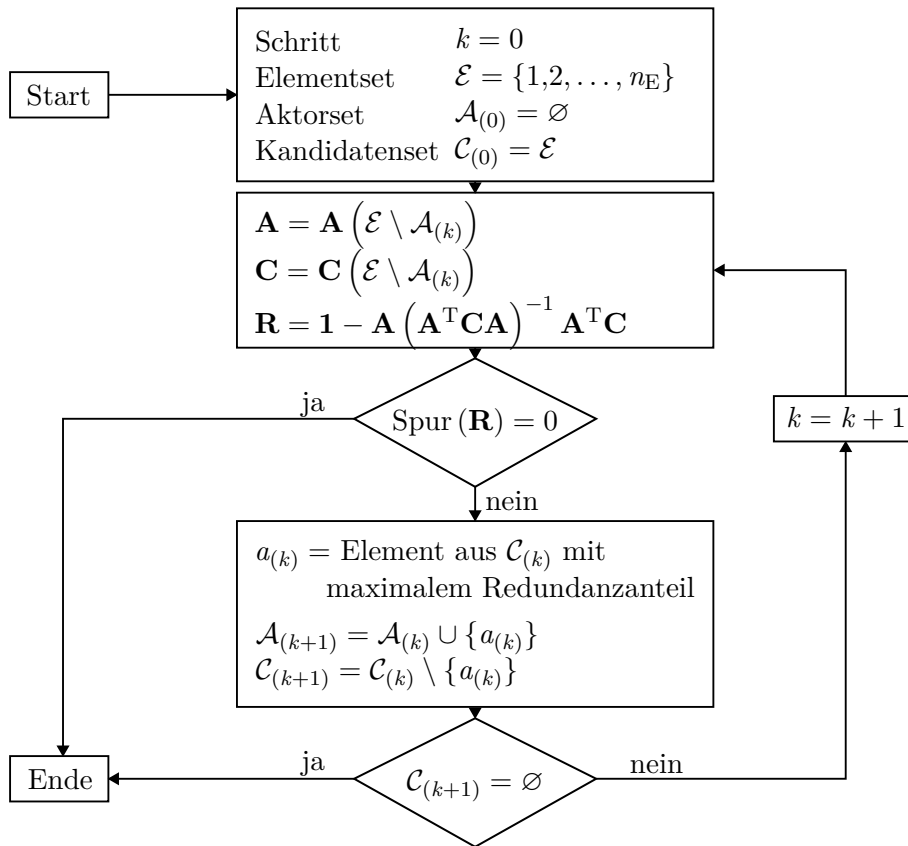


Abbildung 4.19: Darstellung des Ablaufs der Aktorplatzierung zur Kraftadaption mithilfe der Redundanzmatrix als Flussdiagramm

der zum Element gehörenden Zeile oder Spalte in der Redundanzmatrix eine Aussage über den Einflussbereich der Aktuierung getroffen werden, was jedoch im Folgenden nicht weiter betrachtet wird.

Für das vollständige Aufspannen des Aktuierungsraums müssen n_s Elemente so ausgewählt werden, dass die jeweils erzeugbaren Normalkraftverteilungen linear unabhängig sind (siehe Abschnitt 4.3.1). Die naive Variante, die Elemente mit den n_s größten Redundanzanteilen auszuwählen führt deshalb im Allgemeinen nicht zum gewünschten Ergebnis.

Eine verbesserte Variante basiert auf der bereits von BAHNDORF (1991) im Zusammenhang mit der Redundanzmatrix beschriebenen Ausmagerung bzw. der sequentiellen Netzoptimierung. Diese wird von Bahndorf eingesetzt, um Elemente aus statisch unbestimmten Strukturen zu entfernen, die nur einen geringen Einfluss auf das Tragverhalten haben, und um damit im Falle nur eines einwirkenden Lastfalls ein fully stressed design zu erhalten. Veranschaulicht wird der Algorithmus in Abbildung 4.19. Analog zur Aktorplatzierung mit der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix beginnt der Berechnungsablauf

mit allen Elementen im Kandidatenset $\mathcal{C}_{(0)} = \mathcal{E}$ und einem leeren Aktorset $\mathcal{A}_{(0)} = \emptyset$. Dann wird in jedem Schritt k die Redundanzmatrix \mathbf{R} für eine gedachte Struktur berechnet, die aus allen nicht im aktuellen Aktorset enthaltenen Elementen ($\mathcal{E} \setminus \mathcal{A}_{(k)}$) besteht. Daraufhin wird das Element ausgewählt, das im aktuellen Kandidatenset $\mathcal{C}_{(k)}$ ist und den maximalen Redundanzanteil aufweist. Das gewählte Element wird dann aus dem Kandidatenset entfernt und dem Aktorset hinzugefügt. Der Ablauf startet daraufhin erneut.

Theoretisch könnte in einem Schritt jedes Element als neuer Aktor ausgewählt werden, das einen Redundanzanteil größer null besitzt. Hier wird das Element mit dem größten Redundanzanteil gewählt, da dieses dem größtmöglichen Zwang unterliegt. Diese Möglichkeit, die Auswahl zu treffen ist sehr einfach umsetzbar, muss jedoch kritisch betrachtet werden, da auch Elemente mit einer relativ geringen Steifigkeit häufig redundanter sind als andere aber aufgrund ihrer geringen Steifigkeit unter Umständen keine guten Aktorpositionen darstellen. Ein weiterer Ansatz, ein Element auszuwählen, ist die Nutzung der Ähnlichkeit der entsprechenden Spalte von \mathbf{R}^T , die den durch das Element erzeugbaren Kraftzustand beschreibt, mit den Basisvektoren des Kraft-Aktuierungsraums. Diese Ähnlichkeit könnte beispielsweise durch die Ermittlung des Winkels zwischen den Vektoren ermittelt und über alle Basisvektoren gemittelt bewertet werden. Ein hoher Wert würde für eine gute „Abdeckung“ des Kraft-Aktuierungsraums stehen. Jedoch ist für dieses Verfahren in jedem Schritt die Ermittlung des Kraft-Aktuierungsraums erforderlich, was den Rechenaufwand deutlich steigert.

Sobald n_s Aktoren im Tragwerk platziert wurden und dadurch auch n_s Kandidaten aus dem Kandidatenset entfernt wurden, ergibt sich für die Redundanzmatrix der gedachten Struktur eine Nullmatrix und keine weiteren Aktoren werden platziert. Für eine effiziente Berechnung kann ein von CHEN U. A. (2010) und KOU U. A. (2017) vorgeschlagene Algorithmus eingesetzt werden, mit dessen Hilfe die veränderte Redundanzmatrix, die sich beim Entfernen eines Elements aus einer Struktur ergibt, direkt berechnet werden kann. Eine ausführliche Untersuchung des Updates von Redundanzmatrizen bei Systemänderungen findet sich in KRAKE U. A. (2022). Weitere Untersuchungen zur Aktorplatzierung mit der Redundanzmatrix sind in BRIEM (2021) beschrieben.

4.4.3 Fazit

Mit den beiden vorgestellten Verfahren können Aktoren in Tragwerken, deren Geometrie, Topologie und Querschnitte bekannt sind, platziert werden. Beide präsentierten Verfahren sind in der Lage, eine Platzierung von Aktoren zur Kraftadaptation so zu ermitteln, dass der vollständige Aktuierungsraum aufgespannt wird.

Das Verfahren unter Verwendung der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix erzeugt für Systeme mit einer relativ großen Anzahl an Elementen viele Kombinationen, die analysiert werden müssen. In der präsentierten Form kann das Verfahren mithilfe der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix Aktorpositionen zur Kraft- und zur Verschiebungsadaptation ermitteln, die es erlauben auch bei unbekanntem Lastfällen mit möglichst wenigen Aktoren eine gute Performanz zu erzielen. Dabei steigt durch die Charakteristik des kombinatorischen Optimierungsproblems die erforderliche Rechenzeit für die Ermittlung der Aktorpositionen unter anderem durch den Einsatz der Pseudoinversen stark an. Zusätzlich ist der gezeigte greedy-Algorithmus zwar sehr robust, liefert jedoch nicht zwingend das globale Optimum. In FORSTER (2019) wird die Überlegung skizziert, das kombinatorische Problem durch die Anwendung der Idee hinter dem SIMP-Ansatz aus der Topologieoptimierung in ein kontinuierliches Problem zu überführen und mit gradientenbasierten Optimierungsverfahren zu lösen. Weiterhin könnten beispielsweise genetische oder weitere heuristische Algorithmen zur Lösung des kombinatorischen Problems eingesetzt werden. Der Vorteil des Verfahrens mit der Redundanzmatrix liegt darin, dass dieses eine reine Vorwärtsrechnung darstellt. Es wird nur ein Zustand ausgewertet und daraufhin ein Aktor ausgewählt. Das Verfahren unter Verwendung der Redundanzmatrix kann unter Verwendung der \mathbf{A}_0 -Matrix auch um die Verschiebungsadaptation für bestimmte Lastfälle erweitert werden.

Beide Verfahren sind in der hier vorgestellten Ausprägung nicht in der Lage, weitere wünschenswerte Effekte, wie beispielsweise Beschränkungen der Aktorkraft und des Aktorwegs oder einen minimalen Energieeinsatz, zu berücksichtigen. Beide Verfahren setzen voraus, dass Geometrie, Topologie und Dimensionierung des Tragwerks bekannt sind.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Resultate aus beiden Verfahren hinsichtlich der Effektivität und der Performanz verglichen. Zusätzlich werden Aktorplatzierungen auch bei unbekannter Tragwerksdimensionierung unter bestimmten Annahmen ermittelt und im Nachhinein der dabei entstehende Fehler abgeschätzt. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Beispiele bestehen aus verhältnismäßig wenigen Elementen, weshalb die erforderlichen Rechenzeiten keine weitere Betrachtung erfahren. Der Begriff Aktorplatzierung wird sowohl für den Prozess der Ermittlung einer Platzierung als auch für die resultierende Position im Tragwerk verwendet.

5

Studien zum Potential und zur Performanz adaptiver Stabtragwerke

Bisher wurden die Methoden und die grundlegenden Mechanismen vorgestellt, mit denen sich die Wirkungen der Adaptivität modellieren und quantifizieren lassen. Durch die Anwendung auf komplexere Strukturen und in realitätsnäheren Szenarien werden in diesem Kapitel das Potential und die Performanz adaptiver Tragwerke analysiert. Die Untersuchung erfolgt nicht anhand von zufällig gewählten Beispielen, wobei die bereits gezeigten Erkenntnisse bestätigt werden sollen, sondern im Rahmen eines systematischen Experiments, bei dem beispielsweise die Topologie und das globale Tragverhalten der vorgegebenen Struktur gezielt variiert werden. Die Ziele dieser Untersuchung sind einerseits das Ableiten weiterer Erkenntnisse über die Eignung von Tragwerken als adaptive Tragwerke aus den Ergebnissen und andererseits die Beantwortung der Fragen, wie gut und mit welchem Aufwand die Ziele des Einsatzes von Adaptivität erreicht werden können. Dabei werden der Fokus und die Ausführlichkeit der Erklärungen in den einzelnen Abschnitten im Hinblick auf Übersichtlichkeit und Lesbarkeit jeweils unterschiedlich gewählt.

In Abschnitt 5.1 werden zwei gegebene Fachwerkstrukturen auf die Potentiale der Kraftadaption aus Abschnitt 4.3.1 verglichen. Zudem wird die zur Kraftadaption notwendige Aktorplatzierung validiert und der Aktuierungsaufwand quantifiziert.

Die Adaption der Verformungen nach Abschnitt 4.3.2 wird für verschiedene Varianten einer gegebenen Fachwerkstruktur in Abschnitt 5.2 analysiert. Dabei wird ebenfalls die notwendige Aktorplatzierung bewertet und der Aktuierungsaufwand quantifiziert.

In Abschnitt 5.3 werden eine Fachwerkstruktur und ein Balkentragwerk primär im Hinblick auf den Aktuierungsaufwand untersucht. Für das Fachwerk wird die Abhängigkeit des Aufwands von der Anzahl an Aktoren untersucht und bei dem Balkentragwerk wird

die Optimierung von Tragwerkseigenschaften so vorgenommen, dass der Aufwand minimiert wird.

Daraufhin wird in Abschnitt 5.4 die Dimensionierung von adaptiven Tragwerken untersucht. Insbesondere werden Methoden zur Aktorplatzierung, die Rolle des globalen Tragverhaltens sowie der Einsatzbereich der Struktur mit den daraus resultierenden Nebenbedingungen betrachtet.

Die im Folgenden untersuchten Geometrien, Topologien, Steifigkeiten und Lastfälle sind beispielhaft gewählt und sollen nicht in erster Linie Rückschlüsse auf absolute Zahlen zulassen. Vielmehr ist das Ziel dieses Kapitels das Beobachten und Beschreiben von Phänomenen aus einer vergleichenden Auswertung. Daraus werden Schlussfolgerungen gezogen, die bei der Planung des Einsatzes sowie beim Entwurf und der Auslegung von adaptiven Tragwerken berücksichtigt werden müssen.

5.1 Kraftadaption

Im folgenden Abschnitt wird an zwei Fachwerkstrukturen die Kraftadaption eingesetzt, um den Normalkraftzustand und damit auch die Lastabtrag gezielt zu ändern. Dabei sollen die Ergebnisse auf zwei verschiedene Arten betrachtet werden: einerseits kann diese Situation als die nachträgliche Adaption von bestehenden Bauwerken angesehen werden. Damit können Potentiale aufgezeigt werden, die sich für bestehende Tragwerke erschließen lassen. Andererseits sollen dabei die notwendigen Voraussetzungen und die entstehenden Effekte für die Kraftadaption im Detail analysiert und verstanden werden, um daraus Rückschlüsse auf den Entwurf von Strukturen zu ziehen. Dabei wird insbesondere die Frage adressiert, welche Rollen das globale Tragverhalten und der Grad der statischen Unbestimmtheit einer Struktur für die Adaptierbarkeit der Schnittgrößen spielen.

5.1.1 Fachwerkurm

Das untersuchte System ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Vereinfacht kann dieser Fachwerkurm als ein Kragarm (siehe Abbildung 5.1 (c)) betrachtet werden, dessen globales Tragverhalten somit statisch bestimmt ist. Durch die hier gewählte Auflösung des Kragarms als Fachwerkstruktur und eine zusätzliche Lagerung ergibt sich der Grad der statischen Unbestimmtheit zu $n_s = 3$.

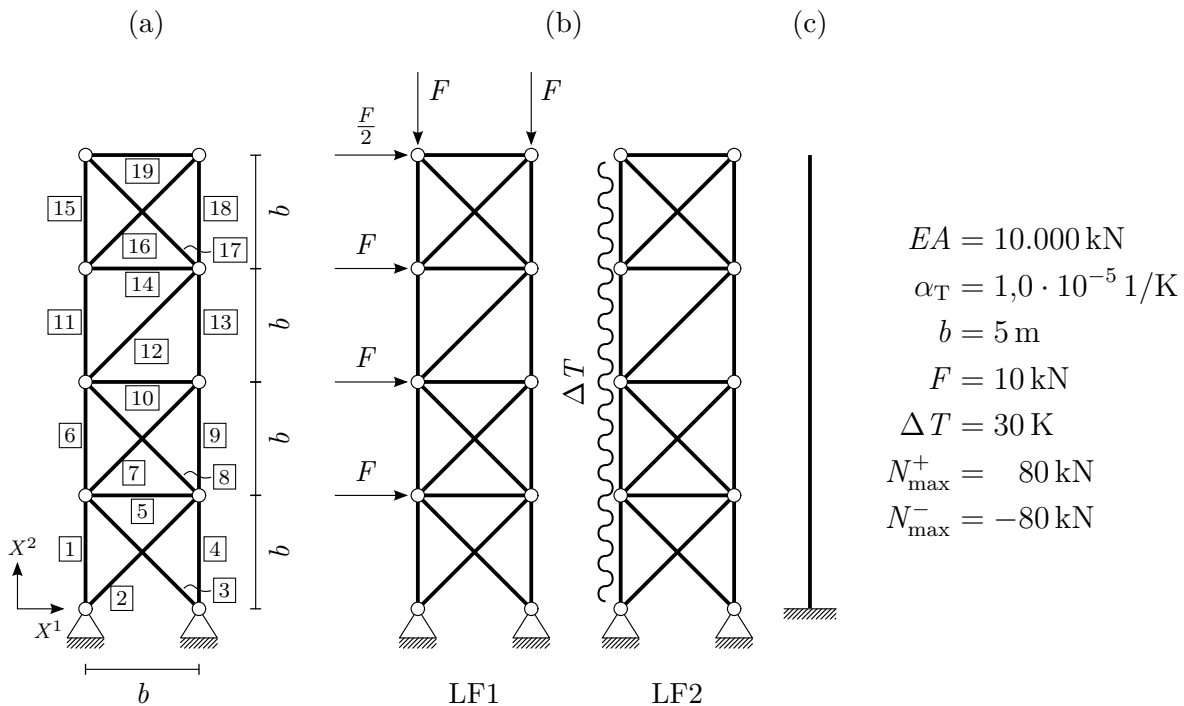


Abbildung 5.1: Darstellung des Fachwerkurm-Beispiels zur Aktorplatzierung (a) unter einem Kraftlastfall (LF1) und einem Temperaturlastfall (LF2) (b) zur Bewertung der Aktorplatzierung und Systemidealisierung als Kragarm (c)

Aktorplatzierung

Abbildung 5.2 veranschaulicht die Ergebnisse der Aktorplatzierung mithilfe der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix für beide Gütemaße nach Abbildung 4.18. Die beiden Diagramme zeigen die Verläufe der Gütemaße über den Verlauf der Berechnung, wobei schrittweise weitere Aktoren hinzugefügt werden. Die Zahl beim jeweiligen Datenpunkt gibt die Nummer des Elements an, das im aktuellen Berechnungsschritt aus der Menge der Kandidaten in die Menge der Aktoren übernommen wird.

Der Verlauf der Gütemaße in Abbildung 5.2 (oben) ergibt sich bei der Ermittlung der Aktorplatzierung zur Kraftadaption mit seriellen Aktoren. In dieser Aktorplatzierung ist das Adaptionziel immer die Minimierung der euklidischen Norm des Vektors aller Normalkräfte (siehe Abschnitt 4.4). Bereits in Abschnitt 4.3.1 wurde diskutiert, dass diesem Adaptionziel keine strukturmechanisch sinnvolle Bedeutung beigemessen werden kann. Jedoch ergibt sich aus der Anwendung des vorgestellten Algorithmus für dieses Ziel eine Aktorplatzierung, durch die der gesamte Kraft-Aktuierungsraum aufgespannt wird. Dieser Raum besitzt hier drei Dimensionen (siehe Abbildung 4.8). Deshalb ergibt sich im Verlauf der Gütemaße, deren Bedeutung in Abschnitt 4.4 besprochen wird, in

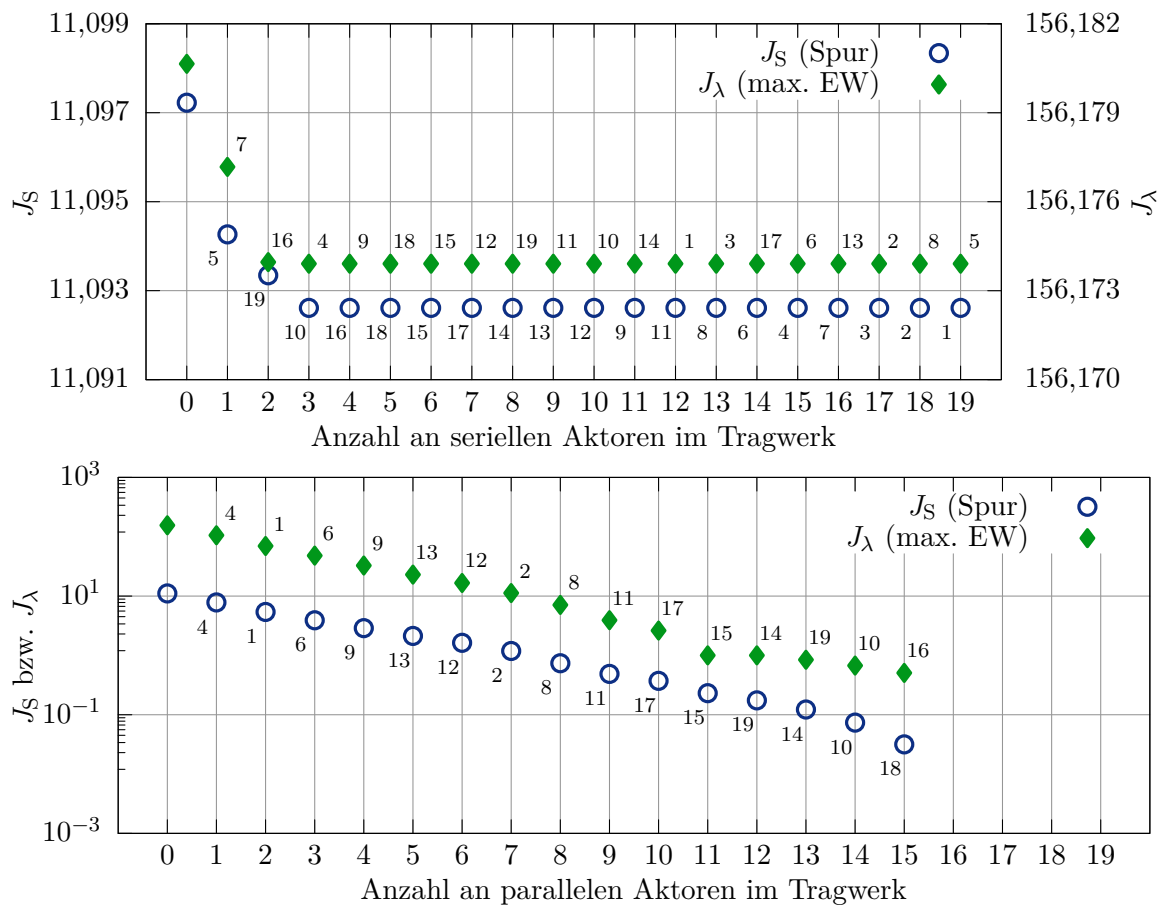


Abbildung 5.2: Vergleich der Ergebnisse der Actorplatzierung mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung von zwei verschiedenen Gütemaßen: J_S und J_λ im Fachwerktrium. Verlauf des Gütemaßes für Kraftadaption mit seriellen Aktoren (oben) und mit parallelen Aktoren logarithmisch (unten); Darstellung der schrittweise als Aktoren ausgewählten Elementnummern über bzw. unter den entsprechenden Datenpunkt

Abbildung 5.2 (oben) nach dem Einbau des dritten Aktors keine weitere Änderung. Eine Änderung des Gütemaßes J_λ beim Einfügen des dritten Aktors ist im Diagramm optisch kaum erfassbar, jedoch vorhanden. Von den drei Aktoren, die den Raum vollständig aufspannen, müssen zwei in den unteren beiden Feldern und ein Aktor im oberen Feld angeordnet werden. Dies wird von beiden Actorplatzierungen auch erfüllt. Für das Gütemaß J_S befinden sich die Aktoren 5 und 10 im unteren Bereich und Aktor 19 im oberen, für das Gütemaß J_λ sind Aktoren 4 und 7 im unteren und der Aktor 16 im oberen Bereich. Das Kriterium, den vollständigen Aktuierungsraum aufzuspannen, wird unter Verwendung der beiden Gütemaße erfüllt. Welche Elemente dazu im Einzelnen

gewählt werden, ist für das Erreichen des Ziels unerheblich. Interessant ist die Beobachtung, dass der Algorithmus mit dem Gütemaß J_S die Aktoren in den horizontalen Elementen platziert. Mit dem Gütemaß J_λ wird ein Aktor in einer vertikalen Stütze und zwei Aktoren in Diagonalen platziert. Die statisch bestimmten Elemente 11, 12 und 13, die keine Rolle bei der Kraftadaption mit seriellen Aktoren spielen, erhalten auch keinen Aktor.

Abbildung 5.2 (unten) zeigt den Verlauf der Gütemaße für die Platzierung von parallelen Aktoren. Auffällig ist dabei, dass sich die Verläufe grundlegend von der Platzierung serieller Aktoren in Abbildung 5.2 (oben) unterscheiden. Die Startwerte der Gütemaße am passiven System sind in beiden Varianten identisch rund $J_S(\emptyset) \approx 11,10$ bzw. $J_\lambda(\emptyset) \approx 156,2$. Durch die Möglichkeit, Normalkräfte in einen parallelen Aktor einzuleiten und damit das passive Element zu entlasten, werden im ersten Schritt bei der Platzierung von parallelen Aktoren die Elemente 1 und 4 bzw. 4 und 1 mit Aktoren versehen, die diese – vermutlich – hochbelasteten Stützen im unteren Bereich entlasten. Zu beachten ist hierbei, dass die Normalkraft im parallelen Aktor in der Berechnung berücksichtigt wird. Im Verlauf der Hinzunahme weiterer Aktoren kann mit der parallelen Kraftadaption eine deutliche Verbesserung der Gütemaße erzielt werden. Der Grund für die weitere Änderung des Gütemaßes im Vergleich zur seriellen Aktuierung ist, dass sich beim Einbau eines parallelen Aktors der Grad der statischen Unbestimmtheit der Struktur um eins erhöht, damit auch die Dimensionalität des Kraft-Aktuierungsraums um eins zunimmt und weitere Kraftumverteilungen in den jeweils parallelen Aktor möglich sind. Beim Einsatz von 16 oder mehr Aktoren werden die passiven Elemente des Tragwerks vollständig entlastet und das Gütemaß verläuft im Bereich der numerischen Null. Um dieses dem ersten Eindruck zufolge sehr positive Ergebnis zu erreichen, wurde das Tragwerk jedoch durch ein „Paralleltragwerk“ aus Aktoren ersetzt, das den Lastabtrag vollständig übernimmt. Dafür reichen genau 16 Aktoren aus, was der Anzahl an minimal einzusetzenden Elementen entspricht, um ein brauchbares Tragwerk mit 16 Verschiebungsfreiheitsgraden zu erstellen (siehe dazu Abschnitt 3.1.1). Das Paralleltragwerk wäre statisch bestimmt.

Abbildung 5.3 veranschaulicht den Ablauf der Platzierung serieller Aktoren zur Kraftadaption mithilfe der Redundanzmatrix. Die Redundanzmatrix für das gesamte Tragwerk ist bereits in Abbildung 4.9 dargestellt. Unter Verwendung der Ausmagerung des Tragwerks nach Abbildung 4.19 ergibt sich im ersten Schritt (a) die bereits aus Abbildung 4.8 bekannte Redundanzverteilung in der Struktur. Aufgrund der Symmetrie des unteren Tragwerksteils ergibt sich der maximale Wert von 0,3307 für die beiden Diagonalelemente 2 und 3. Die Auswahl aus diesen beiden Elementen ist beliebig und hat hier auch keinen Einfluss auf die weitere Berechnung. Hier soll zunächst Element 2 als Aktor gewählt werden. Abbildung 5.3 (b) zeigt die Redundanzverteilung für das System, wenn Element 2 entfernt wird. Dabei ergibt sich für die Diagonalelemente 7, 8, 16 und 17

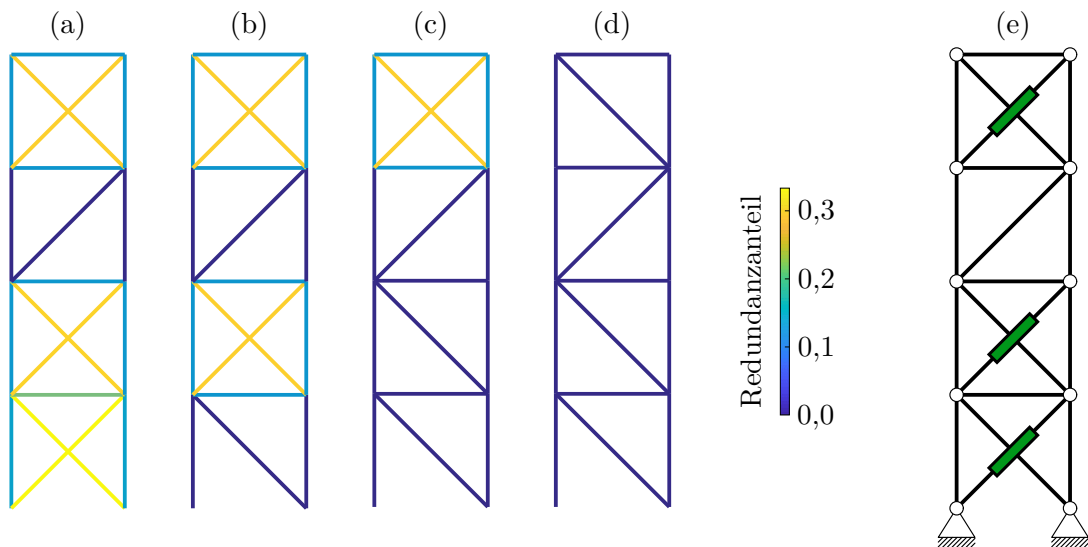


Abbildung 5.3: Darstellung des Ablaufs der Platzierung serieller Aktoren zur Kraftadaption unter Verwendung der Ausmagerung des Tragwerks: Redundanzverteilung des gesamten Systems (a); Redundanzverteilung des Systems ohne Element 2 (b); Redundanzverteilung des Systems ohne Elemente 2 und 7 (c); Redundanzverteilung des Systems ohne Elemente 2, 7 und 16 (d); Aktorplatzierung zur Kraftadaption unter Verwendung der Ausmagerung des Tragwerks (e)

ein Redundanzanteil von 0,2929. Auch hier ist die Auswahl aus diesen Elementen beliebig und es wird Element 7 gewählt. Der letzte Durchlauf ergibt die Redundanzverteilung aus Abbildung 5.3 (c) und der letzte Aktor zur Kraftadaption wird in Element 16 platziert. Die Berechnung endet, nachdem die in Abbildung 5.3 (d) veranschaulichte Redundanzverteilung ein statisch bestimmtes System identifiziert. Kein weiterer Aktor ist zur Kraftadaption notwendig und das vollständig kraftadaptierbare Tragwerk mit den notwendigen Aktoren ist in Abbildung 5.3 (e) dargestellt. Dieser Verlauf des Verfahrens entspricht genau den Erwartungen, die sich auch aus den Beschreibungen von BAHNDORF (1991) ergeben. Darin wird ein Fachwerkträger mit einem ähnlichen Aufbau betrachtet. Es wird beschrieben, dass sich für symmetrische Tragwerke häufig gleichgroße Redundanzanteile in mehreren Stäben ergeben und dass bei der Ausmagerung vorwiegend jeweils eine Diagonale aus ausgekreuzten Feldern entfernt wird.

Für die weiteren Untersuchungen werden die drei ermittelten Aktorsätze zur Kraftadaption (Fußzeiger K) verwendet:

- $\mathcal{A}_{KS} = \{5,10,19\}$ (Fußzeiger S für Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix mit Gütemaß Spur),
- $\mathcal{A}_{K\lambda} = \{4,7,16\}$ (Fußzeiger λ für Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix mit Gütemaß maximaler Eigenwert) und

- $\mathcal{A}_{KR} = \{2,7,16\}$ (Fußzeiger R für Redundanzmatrix).

Minimierung der Maximalbeanspruchung

In dieser Untersuchung wird die maximale Beanspruchung im Tragwerk minimiert. Die Vorgehensweise zur Minimierung der maximalen Beanspruchung ist in Abschnitt 4.3.1 beschrieben. Die Normalkraftverteilung im passiven Zustand in der Struktur infolge der Lastfälle aus Abbildung 5.1 (b) wird für LF1 in Abbildung 5.4 (oben) und für LF2 in Abbildung 5.4 (unten) gezeigt. Die Normalkräfte, die sich bei der Minimierung der maximalen Beanspruchung für Lastfall LF1 ergeben, sind in Abbildung 5.4 (oben) für die drei ermittelten Aktorsets dargestellt. Die jeweiligen Aktorwege ergeben sich zu

$$\mathbf{u}_{\mathcal{A}_{KS}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} -0,036 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}_{K\lambda}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} -0,032 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}_{KR}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} 0,023 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (5.1)$$

Die zugehörigen Kräfte in den Aktoren, die den Normalkräften in den entsprechenden Elementen entsprechen, ergeben sich zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{KS}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} 15,289 \\ -2,211 \\ 1,124 \end{bmatrix} \text{ kN}, \quad \mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{K\lambda}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} -62,500 \\ 13,650 \\ -1,590 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (5.2a)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{KR}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} 10,607 \\ 13,650 \\ -1,590 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (5.2b)$$

Für die Aktorplatzierung mithilfe der Redundanzmatrix \mathcal{A}_{KR} ergibt sich hier der geringste erforderliche Aktorweg und die maximale Aktorkraft ist ebenfalls am geringsten. Bei der Betrachtung von Abbildung 5.4 (oben) fällt auf, dass die maximale Beanspruchung im Tragwerk, die in Element 4 vorliegt, für alle Aktorplatzierungen von rund $-70,0$ kN auf $-62,5$ kN um rund 12 % verringert werden kann. Im resultierenden Normalkraftzustand erfahren die beiden Stützen 1 und 4 die maximale bzw. minimale und betragsmäßig gleiche Beanspruchung von $(\mathbf{n}_{\text{ada}}^{\text{LF1}})_1 = 62,5 \text{ kN} = -(\mathbf{n}_{\text{ada}}^{\text{LF1}})_4$ für alle Aktorplatzierungen. Für diese Reduktion ist der Einsatz von nur einem Aktor ausreichend, die anderen beiden Aktoren können keine weitere Reduktion ausführen, was anschaulich durch die Betrachtung der Aktuierungsmoden erklärt werden kann, die für das untersuchte Tragwerk in Abbildung 4.8 zu finden sind. Die Normalkräfte in den beiden Elementen können durch eine beliebige Aktuierung immer nur Änderungen mit demselben Vorzeichen erfahren, weshalb durch eine weitere Aktuierung keine Verbesserung mehr erzielt werden kann.

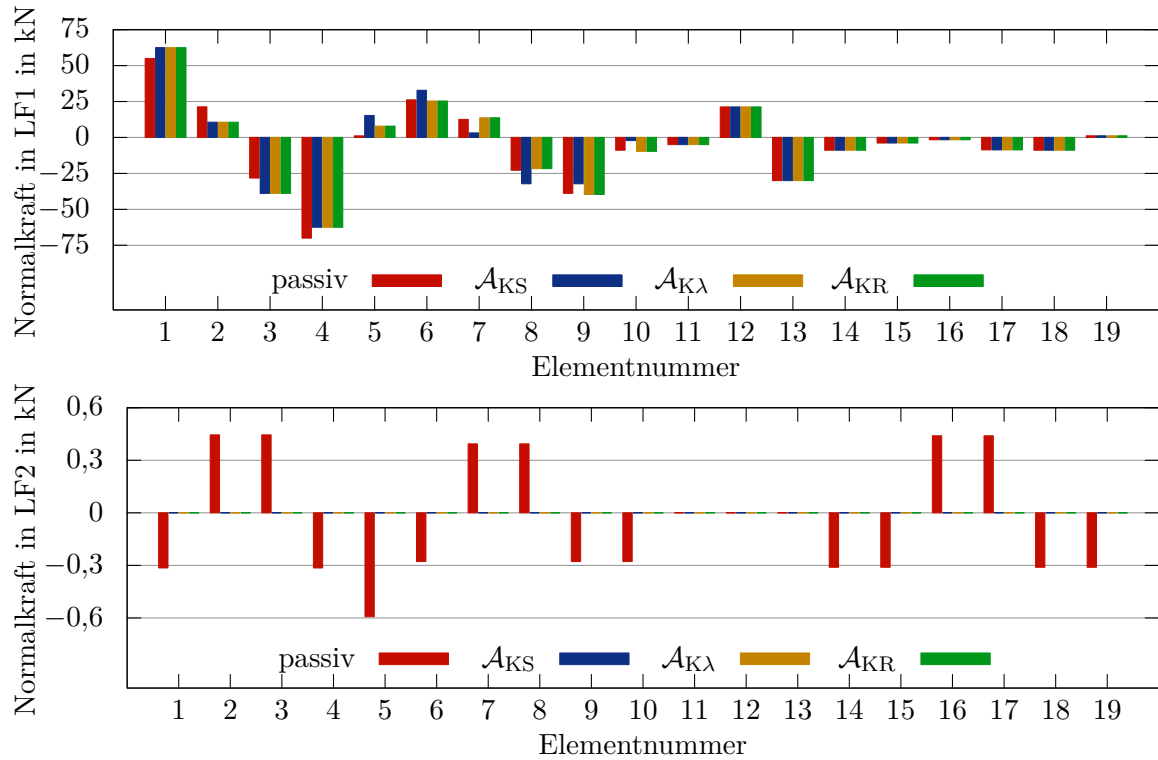


Abbildung 5.4: Darstellung der Normalkräfte in allen Stäben infolge vom Kraftlastfall LF1 (oben) und Temperaturlastfall LF2 (unten) in dem passiven Tragwerk und im adaptiven Tragwerk mit verschiedenen Aktorsets

Die Normalkraftverteilungen in Lastfall LF2 sind in Abbildung 5.4 (unten) dargestellt. Dabei fällt im passiven Zustand bereits auf, dass in den statisch bestimmten Elementen aufgrund des Zwanglastfalls keine Normalkräfte auftreten. Bei der Betrachtung der adaptiven Normalkräfte infolge des Zwanglastfalls durch Temperaturbeanspruchung (LF2) fällt auf, dass durch die Aktuierung der Struktur mit jedem Aktorset die Normalkräfte aus Zwang vollständig verhindert werden können. Die jeweils notwendigen Aktorwege ergeben sich zu

$$\mathbf{u}_{\mathcal{A}_{KS}}^{\text{LF2}} = \begin{bmatrix} -0,0015 \\ 0 \\ -0,0015 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}_{K\lambda}}^{\text{LF2}} = \begin{bmatrix} -0,0015 \\ 0,0011 \\ 0,0011 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}_{KR}}^{\text{LF2}} = \begin{bmatrix} 0,0011 \\ 0,0011 \\ 0,0011 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (5.3)$$

und die zugehörigen Kräfte in den Aktoren zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{KS}}^{\text{LF2}} = \mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{K\lambda}}^{\text{LF2}} = \mathbf{n}_{\text{ada } \mathcal{A}_{KR}}^{\text{LF2}} = \mathbf{0} \text{ kN}. \quad (5.4)$$

Bei Verwendung der Aktorplatzierung \mathcal{A}_{KS} sind in diesem Fall zwei Aktoren ausreichend, um die Normalkräfte aus Zwang vollständig zu kompensieren. Dies ergibt sich jedoch für den vorliegenden Temperaturlastfall aus dem speziellen Grund, dass der Aktor in Element 5 sowohl im untersten als auch im darüberliegenden Feld die entstehenden Normalkräfte beeinflussen kann. Im Allgemeinen sind aber bei dieser Aktorplatzierung alle n_s Aktoren notwendig, um den Zwang aus einem System zu eliminieren. Da die Aktorkräfte genau den Normalkräften in den Elementen entsprechen, ergeben sich diese bei der vollständigen Kompensation der Normalkräfte aus Zwangsbeanspruchungen zu null.

Erhöhung der Traglast

Im Folgenden wird das Potential aufgezeigt, die Traglast für die Struktur unter Lastfall LF1 zu erhöhen. In Abschnitt 4.3.1 wird die Ermittlung der Traglast von adaptiven Tragwerken diskutiert. Die Traglast, die sich unter Anwendung der Fließgelenktheorie ergibt, kann durch Adaptivität erreicht, aber nicht weiter gesteigert werden. Deshalb werden die Traglasten, die bei rein elastischem Strukturverhalten für die drei bekannten Aktorsätze erreicht werden können, mit der Traglast nach Fließgelenk-Theorie verglichen.

Der Traglastfaktor γ_{Te} , der unter Annahme rein elastischer Deformation des Tragwerks ermittelt wird und damit dem Faktor beim Entstehen des ersten Fließgelenks entspricht, ergibt sich zu

$$\gamma_{Te} = \gamma_{1.FG} = 1,14. \quad (5.5)$$

Die zugehörige Normalkraftverteilung ist in Abbildung 5.5 (passiv, elast.) dargestellt. Die maximale Normalkraft ergibt sich bei einem Lastfaktor von 1,14 in Element 4.

Unter Berücksichtigung der Fließgelenktheorie ergibt sich ein Traglastfaktor von

$$\gamma_T = 1,28. \quad (5.6)$$

Im Ablauf des Traglastverfahrens entsteht das erste Fließgelenk in Element 4, woraufhin der Lastfaktor weiter gesteigert werden kann, bis auch in Element 1 die zulässige Normalkraft erreicht ist und damit aufgrund einer lokalen Kinematik die Traglast erreicht ist. In der Abbildung 5.5 sind die Normalkraftverteilung, die sich aus dem Traglastverfahren ergibt (passiv, plast.), und die Normalkraftverteilungen, die sich aus der Maximierung des Lastfaktors für verschiedene Aktorplatzierungen ergeben, dargestellt. Alle Verfahren liefern denselben Traglastfaktor von 1,28. Es zeigt sich jedoch, dass die beiden Aktorplatzierungen, die eine Aktuierung des unteren Felds, in dem auch das relevante Fließgelenk

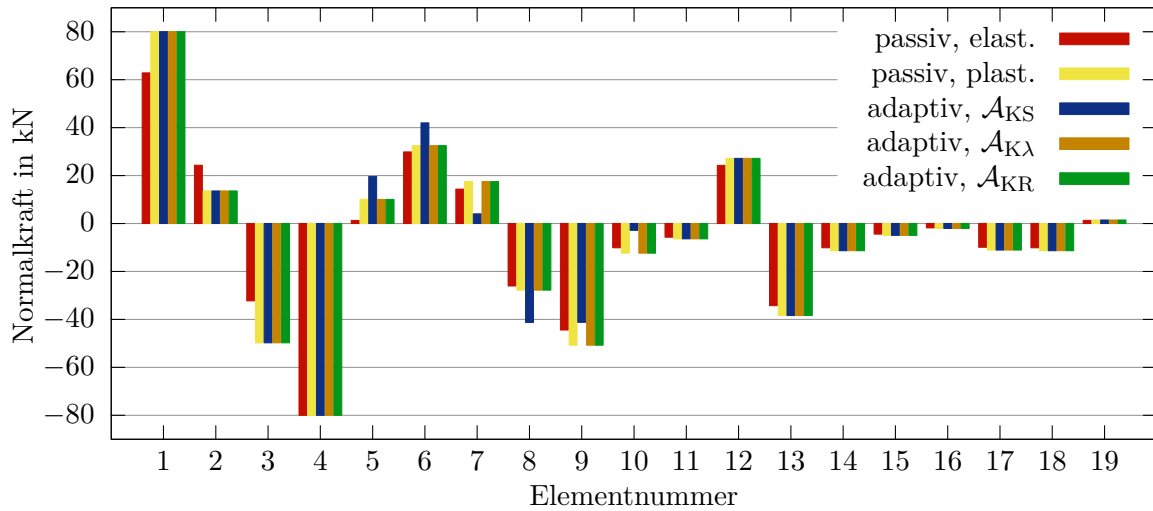


Abbildung 5.5: Normalkraftverteilungen im Traglastzustand: im passiven Tragwerk rein elastisch und mit dem Traglastverfahren nach der Fließgelenktheorie sowie im adaptiven Tragwerk mit den Aktorplatzierungen \mathcal{A}_{KS} , \mathcal{A}_{KL} und \mathcal{A}_{KR}

entsteht, ermöglichen, dieselbe Normalkraftverteilung wie das Traglastverfahren liefern. Beim Einsatz des Aktorsets \mathcal{A}_{KS} jedoch werden zwar in den Elementen 1–4 dieselben Normalkräfte hergestellt, da der Aktor aber auch das zweite Feld beeinflusst, werden auch dort Normalkräfte verändert. Diese weichen daher von den Normalkräften aus dem Traglastverfahren ab. Deren Adaption spielt jedoch keine Rolle für das Erreichen und den Wert der Traglast. Für die reine Steigerung der Traglast ist die Aktuierung von Bereichen, in denen kein Element die zulässige Tragfähigkeit erreicht, also nicht von Bedeutung.

Die Aktorwege und -kräfte ergeben sich unter Verwendung der Aktorplatzierung mit der Redundanzmatrix zu

$$\mathbf{u}_{T \mathcal{A}_{KR}}^{LF1} = \begin{bmatrix} 0,0292 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_{T \mathcal{A}_{KR}}^{LF1} = \begin{bmatrix} 13,58 \\ 17,47 \\ -2,035 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (5.7)$$

Der Traglastfaktor γ_{Te} , wenn nur elastische Deformationen zugelassen werden, kann durch den Einsatz von Adaptivität um rund 12% gesteigert werden. Diese zusätzliche Tragfähigkeit zu erschließen ist damit im Vergleich zur plastischen Bemessung attraktiver, da im Gegensatz dazu beim Erreichen der Tragfähigkeit keine Eigenspannungs- und Verformungszustände entstehen, die in das Tragwerk eingepreßt bleiben.

Tabelle 5.1: Aktuierungsarbeiten zur Kraftadaption für den Fachwerkurm für verschiedene Aktorplatzierungen, die beiden Lastfälle LF1 und LF2 sowie die Erhöhung der Traglast für LF1

Aktorset	$W^{\text{akt LF1}}$ in kNm	$W^{\text{akt LF2}}$ in kNm	$W_{\text{T}}^{\text{akt LF1}}$ in kNm
\mathcal{A}_{KS}	0,2747	0	0,4500
$\mathcal{A}_{\text{K}\lambda}$	-1,007	0	-1,649
\mathcal{A}_{KR}	-0,1208	0	-0,1979

Aktuierungsaufwand

Die Quantifizierung des Aktuierungsaufwands, der für das Erreichen der jeweiligen Ziele nötig ist, erfolgt nach Gleichung (4.68). Die erforderlichen Aktuierungsarbeiten sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Dabei sind die absoluten Zahlen weniger von Interesse. Vielmehr sind die Vorzeichen und der Vergleich der Werte untereinander für die Bewertung interessant.

Für die Minimierung der Maximalbeanspruchung aus Lastfall LF1 ergeben sich deutliche Unterschiede in der geleisteten mechanischen Aktuierungsarbeit. Es zeigt sich, dass im Fall der Aktorplatzierung \mathcal{A}_{KS} Arbeit geleistet werden muss. Für die beiden anderen Aktorsets $\mathcal{A}_{\text{K}\lambda}$ und \mathcal{A}_{KR} ergeben sich Arbeiten mit negativen Vorzeichen. Diese kann theoretisch gespeichert und später oder andernorts genutzt werden. Für das Aktorset $\mathcal{A}_{\text{K}\lambda}$ ergibt sich dabei eine deutlich größere Menge an nutzbarer Arbeit als für Aktorset \mathcal{A}_{KR} . Diese beiden Sets unterscheiden sich durch Aktoren in den Elementen 2 oder 4. Im Traglastverfahren entsteht in Element 4 in diesem Lastfall das erste Fließgelenk in der Struktur. In diesem Element einen Aktor zu platzieren ist geschickt zur Energiegewinnung (siehe dazu auch Erklärung zum Aktuieren durch Nachlassen in Abschnitt 4.3.1).

Die Aktuierungsarbeit in Lastfall LF2 ergibt sich in allen Fällen zu null, da die Normalkräfte vollständig kompensiert werden können und damit insgesamt keine Arbeit verrichtet werden muss. Für die Erhöhung der Tragfähigkeit ergibt sich dasselbe Bild wie für die Minimierung der Maximalbeanspruchung.

5.1.2 Fachwerkbrücke

Das zweite Tragwerk, das in verschiedenen Varianten in Abbildung 5.6 (a)–(d) dargestellt ist, kann global als einseitig eingespannter Einfeldträger (siehe Abbildung 5.6 (e))

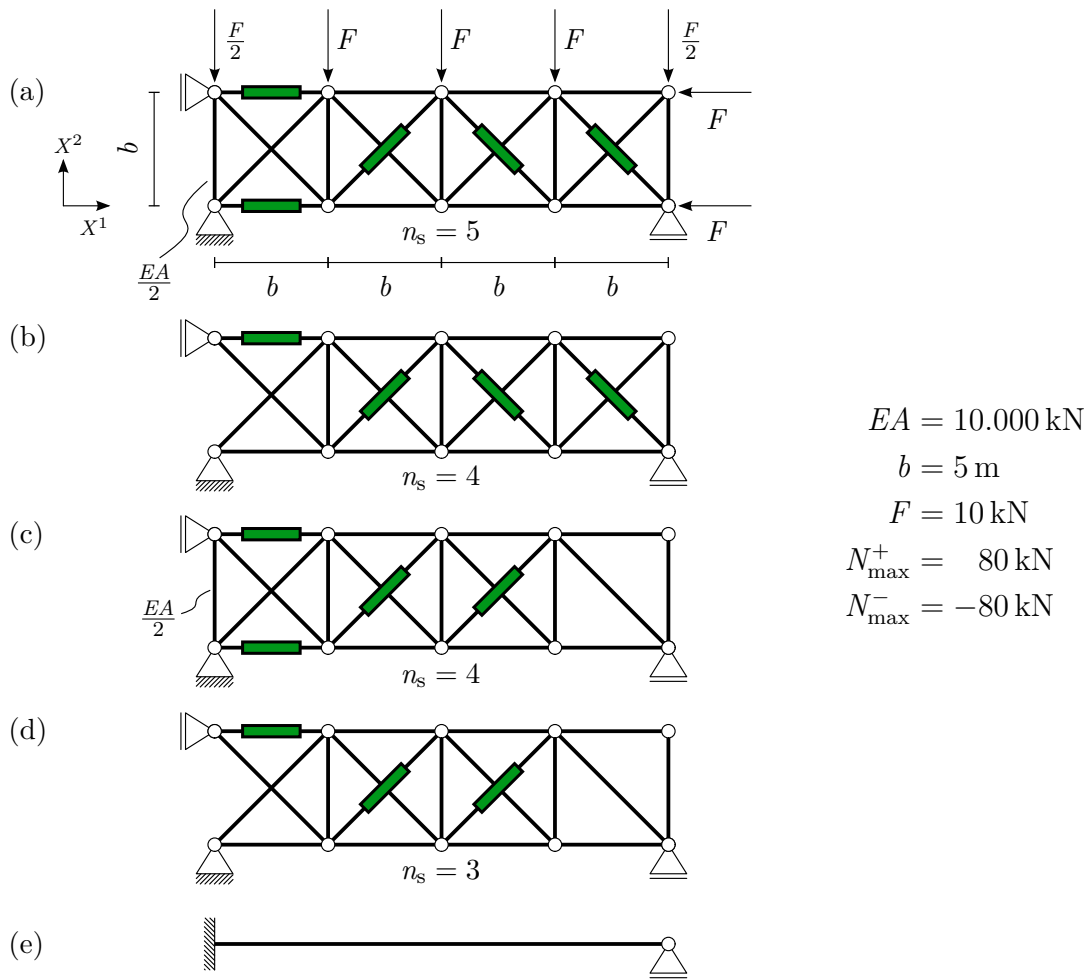


Abbildung 5.6: Darstellung der Fachwerkbrücke mit eingezeichneter Aktorplatzierung und Lastfall in fünffach (a), vierfach (b) & (c) und dreifach (d) statisch unbestimmter Variante sowie als idealisierter einseitig eingespannter Einfeldträger (e)

oder unter Ausnutzung der Symmetrie als ein Durchlaufträger über zwei Felder betrachtet werden. Das abstrahierte Tragwerk (e) ist global betrachtet einfach statisch unbestimmt. Durch das Auflösen als Fachwerkstrukturen ergeben sich für die dargestellten Varianten jeweils unterschiedliche Werte für den Grad der statischen Unbestimmtheit. Die verschiedenen Varianten besitzen also unter derselben Belastung dieselbe globale Tragwerksidealisierung, weisen jedoch einen anderen Grad der statischen Unbestimmtheit auf. Durch diese Vorgehensweise wird versucht, die beiden Effekte zu separieren und getrennt bewerten zu können.

In den Abbildungen ist jeweils die Aktorplatzierung zur Kraftadaption eingetragen, die mit dem Verfahren unter Verwendung der Redundanzmatrix aus Abbildung 4.19 bestimmt wurde.

Tabelle 5.2: Übersicht über die Ergebnisse der Kraftadaption der Fachwerkbrücken

Variante	(a)	(b)	(c)	(d)
n_s	5	4	4	3
$\ \mathbf{n}_{\text{pas}}\ _\infty$ in kN	20,56	32,41	20,47	33,15
$\ \mathbf{n}_{\text{ada}}\ _\infty$ in kN	15,00	28,83	19,29	28,83
Reduktion in %	27	11	6	13
$\ \mathbf{n}_{\text{pas}}\ _\infty / \ \mathbf{n}_{\text{ada}}\ _\infty$	1,37	1,12	1,06	1,15
$\ \mathbf{u}\ _\infty$ in m	0,02126	0,01580	0,01739	0,01981
$\ \mathbf{n}_{\text{ada}} \mathcal{A}_{\text{KR}}\ _\infty$ in kN	15,00	16,55	19,27	16,55
$W_{\text{T}}^{\text{akt}}$ in kNm	0,02440	-0,5232	0,2703	-0,6465
γ_{Te}	3,891	2,469	3,909	2,413
γ_{T}	5,333	2,775	4,151	2,775
Steigerung in %	37	12	6	15
$\gamma_{\text{T}}/\gamma_{\text{Te}}$	1,37	1,12	1,06	1,15
$\ \mathbf{u}_{\text{T}}\ _\infty$ in m	0,1134	0,04384	0,07217	0,05496
$\ \mathbf{n}_{\text{T}} \mathcal{A}_{\text{KR}}\ _\infty$ in kN	80,00	45,93	80,00	45,93
$W_{\text{T}}^{\text{akt}}$ in kNm	0,6940	-4,027	4,657	-4,977

Für die Fachwerkbrücke werden die identischen Analysen wie für den Fachwerkurm aus Abschnitt 5.1.1 durchgeführt. Die Resultate der Untersuchung sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Die Reduktionspotentiale in den Normalkräften liegen zwischen rund 27 % für das fünffach statisch unbestimmte Tragwerk und rund 6 % bei einem vierfach statisch unbestimmten Tragwerk. Die Betrachtung dieser Ergebnisse deutet an, dass kein einfach zugänglicher Zusammenhang zwischen dem Grad der statischen Unbestimmtheit und dem Potential der Kraftadaption besteht.

Auch der Vergleich des Reduktionspotentials mit dem dreifach statisch unbestimmten, jedoch – vereinfacht betrachtet – global statisch bestimmten Kragarm aus Abschnitt 5.1.1, bei dem dieses Potential zu rund 11 % ermittelt wurde, deutet nicht auf einen einfach zugänglichen Zusammenhang mit dem globalen Tragverhalten hin.

Eine interessante Beobachtung ist die offensichtliche Übereinstimmung der in der Tabelle dargestellten Quotienten von betragsmäßig maximalen Normalkräften und der Traglastfaktoren. Diese beobachtete Übereinstimmung scheint auch plausibel, da die Steigerung der Traglast nur über eine Reduktion der Kräfte in den maximal beanspruchten Elementen erfolgen kann. Eine tiefer ins Detail gehende Untersuchung dieser Zusammenhänge erfolgt im Rahmen dieser Arbeit nicht. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass sich die Normalkraftverteilung \mathbf{n}_{ada} , die sich aus der Minimierung der betragsmäßig maximalen Normalkraft ergibt, direkt ermitteln lässt, ohne ein Optimierungsverfahren einzusetzen.

Diese Verteilung ergibt sich aus der Normalkraftverteilung im Traglastzustand \mathbf{n}_T , geteilt durch den Traglastfaktor γ_T zu

$$\mathbf{n}_{\text{ada}} = \frac{1}{\gamma_T} \mathbf{n}_T. \quad (5.8)$$

Die sich einstellende Verteilung ist damit auch von der Verteilung der zulässigen Normalkräfte abhängig. Eine Hypothese dazu ist, dass dieser Zusammenhang nur unter der hier getroffenen Annahme einer im gesamten Tragwerk konstanten maximal zulässigen Normalkraft gilt. In diesem Fall kann auf elegante Art die Lösung des Optimierungsproblems durch eine Vorwärtsrechnung ersetzt werden.

In Tabelle 5.2 sind außerdem die maximal erforderlichen Aktorwege und -kräfte sowie der Aktuierungsaufwand zur Erreichung der Adaptionsziele für die Aktorplatzierung mit der Redundanzmatrix \mathcal{A}_{KR} dargestellt. Da für die Berechnung von W_T^{akt} im Traglastzustand unterschiedlich große Lasten infolge der unterschiedlichen Traglastfaktoren γ_T auf die Tragwerksvarianten einwirken, ist die Betrachtung und der Vergleich des Aufwands zur Reduktion der maximalen Normalkraft W^{akt} aussagekräftiger. Zu beachten ist, dass sich diese Arbeiten jeweils auf das gesamte Tragwerk mit ggf. unterschiedlichen Anzahlen an Aktoren beziehen. Für Varianten (a) und (c) muss mechanische Arbeit geleistet werden, in den Varianten (b) und (d) ergibt sich negative mechanische Arbeit, die theoretisch gespeichert oder anderweitig genutzt werden kann. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich kein offensichtlicher Zusammenhang zwischen dem Reduktions- bzw. Steigerungspotential und dem dafür notwendigen Aktuierungsaufwand. Im Vergleich zur Adaption des Kragarms aus Abschnitt 5.1.1 ergeben sich ebenfalls keine nennenswerten Erkenntnisse für den Zusammenhang zwischen dem globalen Lastabtrag und dem notwendigen Aktuierungsaufwand zur Kraftadaption.

Bei der Betrachtung der Aktuierungsarbeit W_T^{akt} im Traglastzustand zeigt sich die Abhängigkeit zu W^{akt} als Quadrat des Lastfaktors, wie bereits durch die quadratische Form von Gleichung (4.68) deutlich wird. Beispielsweise ergibt sich der Zusammenhang für Variante (a) zu

$$\frac{W_T^{\text{akt}}}{W^{\text{akt}}} = \frac{0,6940}{0,02440} = 28,44 \approx 5,333^2 = \gamma_T^2. \quad (5.9)$$

Der Aufwand für die Kraftadaption steigt bei linearer Erhöhung der Kraft quadratisch.

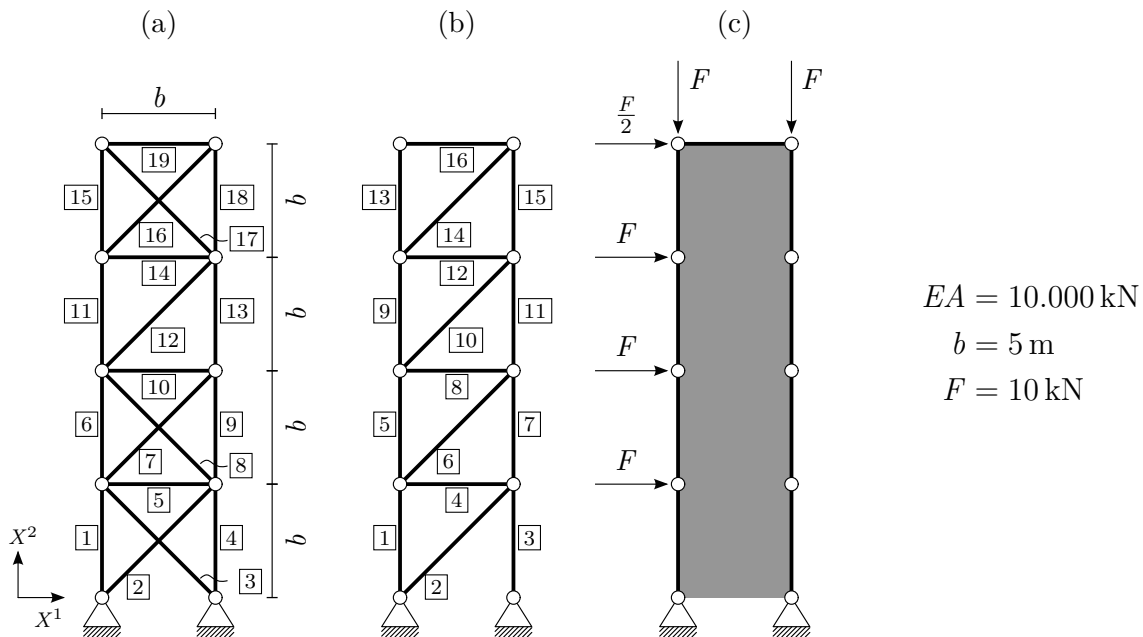


Abbildung 5.7: Darstellung des Fachwerksturms in statisch unbestimmter (a) und statisch bestimmter (b) Variante zur Untersuchung der Verschiebungsadaption durch Adaptivität und Darstellung des zu diesem Zweck aufgebrauchten Lastfalls (c)

5.2 Verschiebungsadaption

Im folgenden Abschnitt wird an zwei Varianten einer Fachwerkstruktur die Verschiebungsadaption eingesetzt, um den Verschiebungszustand und damit auch Tragwerkeigenschaften gezielt zu ändern. Wie bei der Kraftadaption sind hier zwei Betrachtungsweisen möglich: einerseits die direkte Anwendung auf die nachträgliche Adaption von bestehenden Tragwerken, andererseits die Analyse und das Verstehen der notwendigen Voraussetzungen und der Effekte der Verschiebungsadaption.

5.2.1 Statisch unbestimmter Fachwerkurm

Das erste untersuchte Tragwerk ist in der Grundvariante der bereits aus Abschnitt 5.1 bekannte Fachwerkurm. Die entsprechenden Systemwerte können Abbildung 5.7 (a) entnommen werden. Der aufgebrauchte Lastfall entspricht Lastfall LF1 aus Abschnitt 5.1 und ist in Abbildung 5.7 (c) nochmals dargestellt. Im Folgenden werden anhand des Fachwerksturms die maßgeblichen Effekte der Verschiebungsadaption beschrieben.

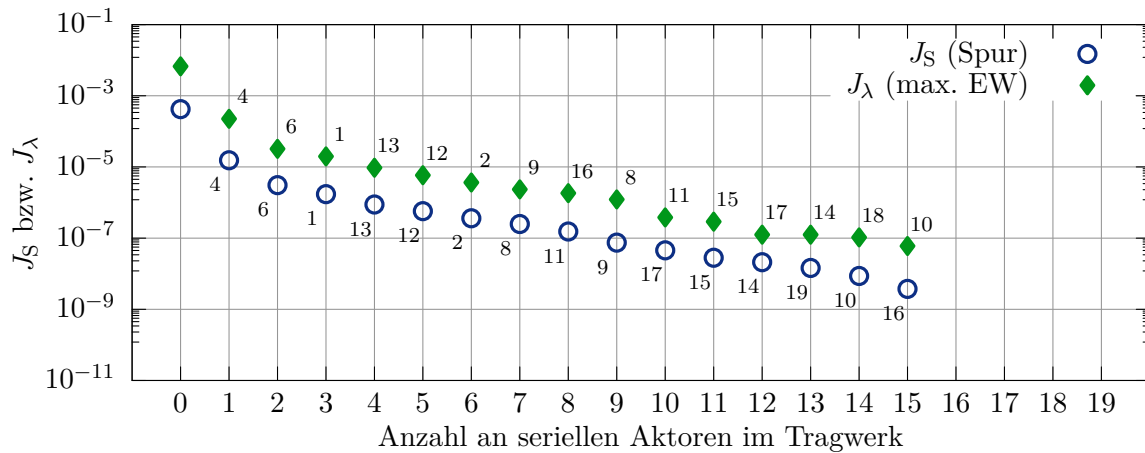


Abbildung 5.8: Vergleich der Ergebnisse der Aktorplatzierung mit der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung von zwei verschiedenen Gütemaßen J_S und J_λ im Fachwerktrurm; Verlauf der Gütemaße für Verschiebungsadaption

Aktorplatzierung

Im ersten Schritt werden die notwendigen Aktoren platziert. Abbildung 5.8 zeigt die Ergebnisse für die Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption mithilfe des Algorithmus unter Verwendung der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix nach Abbildung 4.18. Darin wird ersichtlich, dass eine starke Verbesserung der Gütemaße erzielt werden kann. Werden 16 oder mehr Aktoren eingesetzt, können alle Knotenverschiebungen für beliebige Lastfälle vollständig kompensiert werden. Dabei ergibt sich für die Gütemaße eine numerische Null, die sich nicht mehr im Darstellungsbereich der logarithmischen Skala befindet. Dieses Verhalten entspricht den Erwartungen, nach denen die Anzahl der Aktoren genau der Anzahl an Verschiebungsfreiheitsgraden (hier: $2n_K - n_L = 16$) entsprechen muss, um alle Verschiebungen kontrollieren zu können (siehe Abschnitt 4.3.2). Wie in der Herleitung des Verfahrens zur Aktorplatzierung dargestellt, ist das Ziel der Adaption die Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors, was für beide Gütemaße bereits mit zwei Aktoren in den Elementen 4 und 6 sehr gut erfolgen kann. Durch die Darstellung im logarithmischen Maßstab ist dies nicht direkt optisch zugänglich, jedoch wird für beide Gütemaße von der jeweils gesamt möglichen Verringerung um $\Delta J_S \approx 0,42 \cdot 10^{-3}$ bzw. $\Delta J_\lambda \approx 0,67 \cdot 10^{-2}$ mit den ersten zwei Aktoren bereits rund 99 % erreicht. Diese zwei Elemente sind die vertikalen Stützen im unteren Bereich des Turms, was auch anschaulich für eine effektive Veränderung von Verschiebungen sinnvoll erscheint. Für die reine Verschiebungsadaption wird also zunächst das Aktorset $\mathcal{A}_V = \{4,6\}$ gewählt.

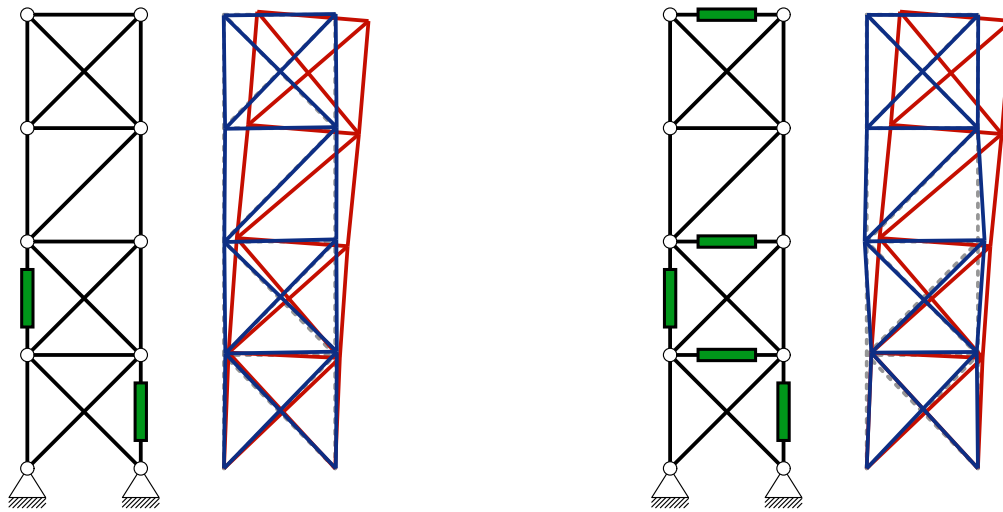


Abbildung 5.9: Darstellung jeweils der Aktorplatzierung und des Verformungszustands des Fachwerkturns in 3,75-facher Überhöhung; links: unbelastet (grau gestrichelt), unter Belastung in passivem Zustand (rot) und adaptiv bei reiner Verschiebungsadaption (blau); rechts: unbelastet (grau gestrichelt), unter Belastung in passivem Zustand (rot) und adaptiv bei Verschiebungs- und gleichzeitiger Kraftadaption zur Kompensation der Normalkräfte aus Zwang (blau)

Erhöhung der Steifigkeit

Für den in Abbildung 5.7 (c) dargestellten Lastfall werden mithilfe des gewählten Aktorsets im nächsten Schritt die auftretenden Verschiebungen kompensiert. Damit ergibt sich der Vektor der vorzugebenden Aktorwege zu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_4 & \hat{u}_6 \end{bmatrix}^T. \quad (5.10)$$

Hier soll die euklidische Norm des Verschiebungsvektors minimiert werden (siehe dazu Abschnitt 4.3.2). Die notwendigen Aktorwege können in diesem Fall beispielsweise direkt mit der Pseudoinversen ermittelt werden. Alternativ kann auch das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{d}\|_2 \quad (5.11)$$

mithilfe der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Verfahren gelöst werden, was zu identischen Resultaten führt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.9 (links) dargestellt. Darin lässt sich leicht erkennen, dass die Verschiebungen durch Aktuierung deutlich reduziert werden können. Der Maximalwert der Verschiebung im passiven System beträgt rund 40 cm (Horizontalverschiebung am Knoten rechts oben) und kann auf rund 4 cm (Vertikalver-

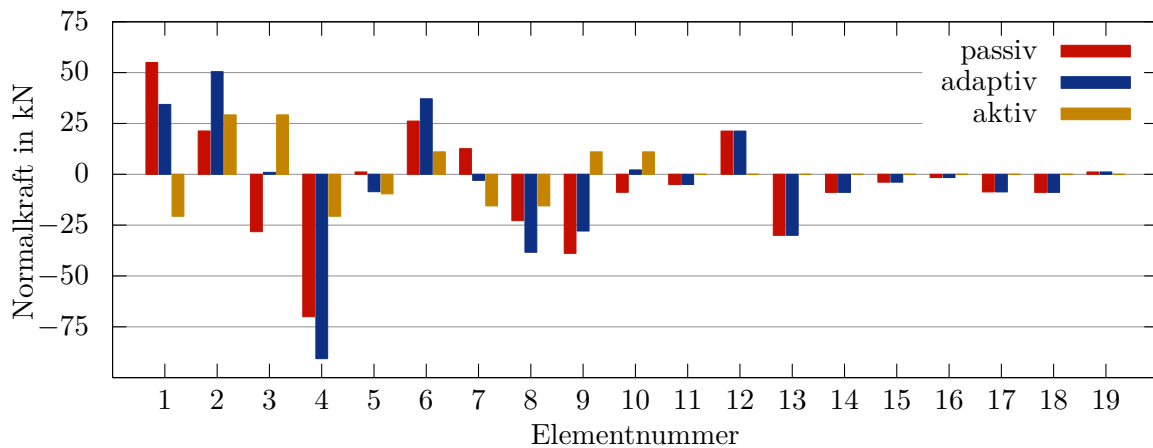


Abbildung 5.10: Darstellung der Normalkräfte in allen Elementen für den Fachwerkturm unter dem gegebenen Kraftlastfall im passiven Zustand (passiv), unter dem gegebenen Kraftlastfall im adaptiven Zustand mit dem Ziel die euklidische Norm des Verschiebungsvektors zu minimieren (adaptiv) und Differenzen der Normalkräfte bzw. Normalkräfte aus der entsprechenden Aktuierung (aktiv)

schiebung am ersten Knoten oberhalb des rechten Auflagers) reduziert werden. Dies entspricht einer Reduktion des betragsmäßigen Maximalwerts um rund 90 %.

Damit kann die effektive Steifigkeit des Tragwerks gegenüber dem gegebenen Lastfall durch die Aktuierung deutlich vergrößert werden. Beispielsweise verringert sich die Verschiebung am rechten oberen Knoten in horizontale Richtung von den genannten rund 40 cm auf rund 0 cm, was theoretisch einer unendlichen Steifigkeit entspricht. Durch die beliebige Wahl der Zielfunktion bzw. weiterer Nebenbedingungen kann die Steifigkeit im Rahmen der Theorie beliebig eingestellt werden. Durch Hinzunahme weiterer Aktoren kann die Bedingung unendlicher Steifigkeit theoretisch auch an allen Freiheitsgraden erfüllt werden (siehe Abschnitt 4.3.2).

Vermeidung von Schnittgrößen aus Zwang

Das untersuchte Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Deshalb entstehen durch die Aktuierung Schnittgrößen aus Zwang. Die Normalkraftverteilungen in der Struktur im passiven und im adaptiven Zustand sowie die Differenz der beiden Verteilungen, die Verteilung im aktiven Zustand, sind in Abbildung 5.10 dargestellt.

In den statisch bestimmten Elementen ergeben sich erwartungsgemäß keine Änderungen der Normalkräfte. Im oberen statisch unbestimmten Tragwerksteil ergeben sich ebenfalls keine Änderungen, da sich dort kein Aktor befindet.

Tabelle 5.3: Maßgebende Änderungen von Normalkräften durch die Kraftadaption im Fachwerkturn

Elementnummer	2	4	5	6	8
Normalkraft (passiv) n_{pas} in kN	21,26	-70,03	1,10	26,13	-22,81
Normalkraft (adaptiv) n_{ada} in kN	50,44	-90,67	-8,55	37,12	-38,35
$n_{\text{ada}}/n_{\text{pas}}$	2,37	1,29	-7,77	1,42	1,68

Bei der Verringerung der Verschiebungen vergrößert sich der Betrag der Normalkraft in einigen Elementen jedoch deutlich. Für die Elemente mit einer betragsmäßig größeren Normalkraft im adaptiven Zustand als im passiven Zustand sind die Veränderungen in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Insbesondere bei der nachträglichen Adaption von bereits bestehenden Tragwerken kann die Erhöhung der Normalkräfte um das betragsmäßig bis zu rund 8-fache die Standsicherheit des Tragwerks gefährden. Deshalb werden in einem nächsten Schritt die erzeugten Normalkräfte, die in Abbildung 5.10 als aktiv gekennzeichnet sind und reine Zwangsbeanspruchungen darstellen, durch den Einbau von zusätzlichen Aktoren zur Kraftadaption vollständig kompensiert.

Dazu müssen weitere Aktoren platziert werden, wobei zuerst die Aktoren für die Verschiebungsadaption platziert werden und diese dann vor der Aktorplatzierung zur Kraftadaption aus dem dafür aufgestellten Kandidatenset entfernt werden. Weiterhin können beispielsweise Tragwerksteile, in denen keine Verschiebungsadaption stattfindet, auch aus dem Kandidatenset entfernt werden. Hier trifft das auf den oberen Tragwerksteil zu, jedoch wird in dieser Untersuchung darauf verzichtet.

Die Ergebnisse der Aktorplatzierung zur Kraftadaption mithilfe der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix nach Abbildung 4.18 für das reduzierte Kandidatenset unter Verwendung des Spur-Gütemaßes sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Die seriellen Aktoren zur Kraftadaption werden in den Elementen 5, 10 und 19 vorgesehen. Damit ergibt sich der Vektor aller vorzugebenden Aktorwege zu

$$\mathbf{u} = [\hat{u}_4 \quad \hat{u}_5 \quad \hat{u}_6 \quad \hat{u}_{10} \quad \hat{u}_{19}]^T. \quad (5.12)$$

Der Zustand des adaptiven Tragwerks bei Verschiebungsadaption und gleichzeitiger Kraftadaption, um die in Abbildung 5.10 beschriebenen Zwangskräfte zu kompensieren, ergibt sich aus der Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{d}\|_2 \quad (5.13)$$

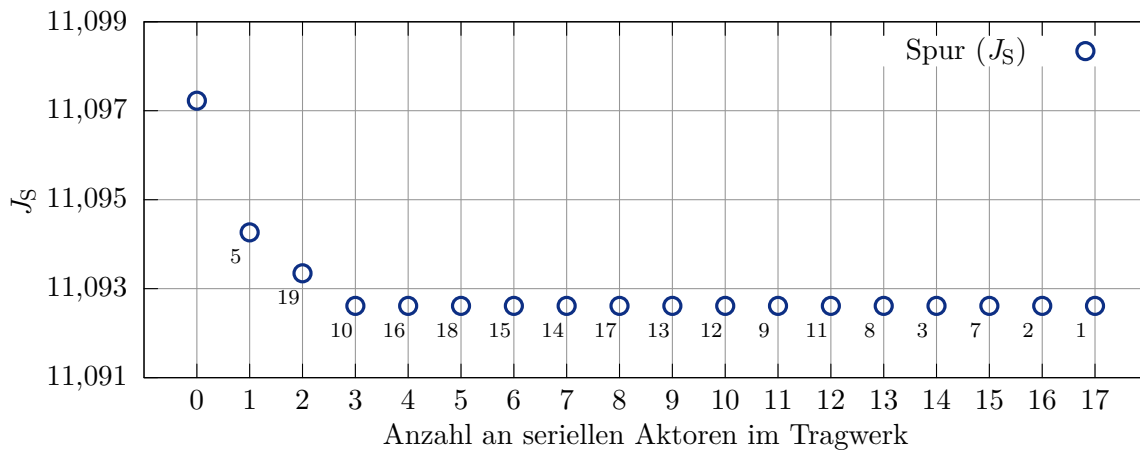


Abbildung 5.11: Ergebnisse der Aktorplatzierung mit der Gram’schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung des Gütemaßes J_S im Fachwerkturn; Kandidatenset ohne Aktoren zur Verschiebungsadaption

mit den Gleichheitsnebenbedingungen

$$\mathbf{n}_{\text{akt}} = \mathbf{0}. \tag{5.14}$$

Bei dieser Problemformulierung geht die vorherige Trennung in die Aktoren, die rein zur Verschiebungsadaption eingesetzt werden, und die Aktoren, die zur Kraftadaption vorhanden sind, verloren.

Der sich einstellende Normalkraftzustand entspricht genau dem mit passiv bezeichneten Zustand aus Abbildung 5.10. Der resultierende Verschiebungszustand ist in Abbildung 5.9 (rechts) dargestellt. Dabei fällt auf, dass die Verschiebungen in diesem Fall visuell im Vergleich zur reinen Verschiebungsadaption (5.9 (links)) etwas größer erscheinen. Bei der Kraftadaption werden Verschiebungen erzeugt, die mit dem gewählten Aktorset nicht vollständig kompensiert werden können. Im Vergleich zur maximalen Verschiebung im passiven Zustand von rund 40 cm und der maximalen Verschiebung im adaptiven Zustand bei reiner Verschiebungsadaption von rund 4 cm ergibt sich für die kombinierte Adaption eine maximale Verschiebung von rund 8 cm (Horizontalverschiebung rechts; mittlerer Knoten über die Höhe). Durch die zusätzliche Adaption der Zwangskräfte kann jedoch beispielsweise für ein bereits existierendes Tragwerk eine deutliche Verformungsreduktion erzielt werden, ohne dass eine neue Bemessung der Elemente erforderlich wird.

Aktuierungsaufwand

Der notwendige Aktuierungsaufwand wird nach Abschnitt 4.3.3 ermittelt. Dabei ergibt sich bei reiner Verschiebungsadaption eine Aktuierungsarbeit von 4,593 kNm. Der dabei maximal notwendige Aktorweg und die maximal notwendige Aktorkraft ergeben sich direkt aus der Lösung des Minimierungsproblems im vorherigen Abschnitt zu 8,4 cm bzw. zu $-90,67$ kN. Bei der Verringerung der Verschiebungen und der zusätzlichen Kompensation der Zwangskräfte ergibt sich eine notwendige Aktuierungsarbeit von 3,488 kNm bei einem maximalen Aktorweg von 10,9 cm und einer maximalen Aktorkraft von $-70,03$ kN. Beim Vergleich dieser Werte zeigt sich, dass für die gewählte Aktorplatzierung der erforderliche Aktorweg bei der zusätzlichen Kraftadaption zunimmt, jedoch die erforderliche Aktorkraft geringer ausfällt. Die Aktuierungsarbeit, die geleistet werden muss, kann durch die zusätzliche Kompensation der Zwangskräfte um rund 24 % reduziert werden. Im Vergleich zur reinen Kraftadaption zur Minimierung der Beanspruchung aus Abschnitt 5.1.1 mit dem Aktorset \mathcal{A}_{KS} , das unter vergleichbaren Annahmen ermittelt wurde, bei der ein maximaler Aktorweg von 3,6 cm, eine maximale Aktorkraft von 15,29 kN und eine Aktuierungsarbeit von 0,2747 kNm erforderlich sind, ergibt sich das folgende Bild: Für die Auswahl der Aktorik, die unter anderem maßgeblich von den erforderlichen Kräften und Verschiebungen abhängt, ergeben sich für die Kraftadaption geringere Anforderungen an Aktorwege und Aktorkräfte als für die Verschiebungsadaption. Die Adaption der Verschiebungen erzielt den größten Effekt durch eine Adaption der am höchsten belasteten Stützen (siehe Ergebnisse der Aktorplatzierung in Abbildung 5.8), es sind aber auch deutlich größere Aktuierungsarbeiten aufzubringen.

5.2.2 Statisch bestimmter Fachwerkurm

Im folgenden Abschnitt wird der eben untersuchte Fachwerkurm in einer abgewandelten Variante analysiert. Diese Variante mit selber Geometrie jedoch statisch bestimmter Topologie ist in Abbildung 5.7 (b) dargestellt. Die Ergebnisse der Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Da das Tragwerk statisch bestimmt ist, werden durch die Aktuierung keine Zwangskräfte in der Struktur hervorgerufen und deshalb auch keine weiteren Aktoren zur Kraftadaption platziert. Für die folgende Untersuchung werden vier Aktorsets

- $\mathcal{A}_{VS}^1 = \{3\}$,
- $\mathcal{A}_{VS}^2 = \{1,3\}$,
- $\mathcal{A}_{VS}^3 = \{1,3,11\}$ und
- $\mathcal{A}_{VS}^4 = \{1,3,4,11\}$

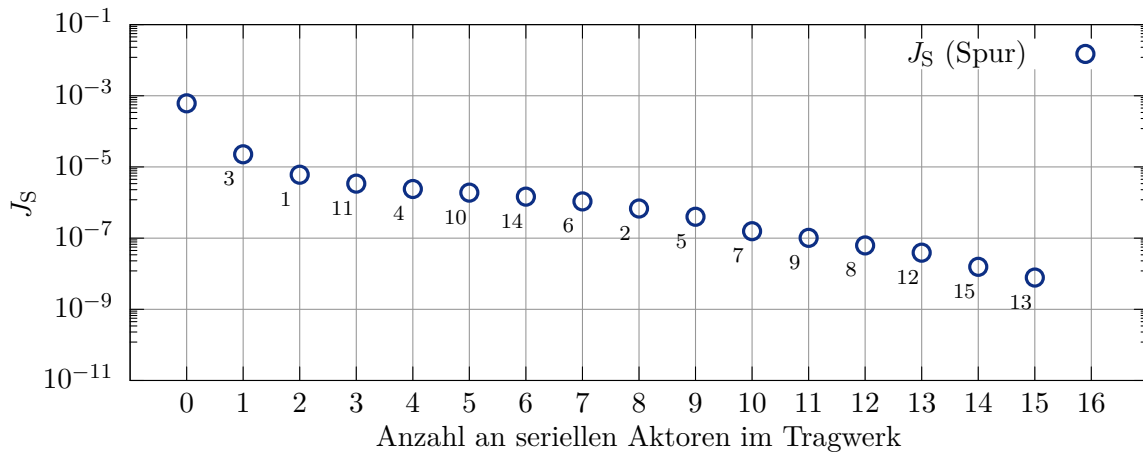


Abbildung 5.12: Ergebnisse der Aktorplatzierung mit der Gram’schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix unter Verwendung des Gütemaßes J_S im statisch bestimmten Fachwerktrüm; Verlauf des Gütemaßes für Verschiebungsadaption

Tabelle 5.4: Euklidische Norm des Verschiebungsvektors und dafür erforderliche Aktuierungsarbeiten am statisch bestimmten Fachwerktrüm für verschiedene Aktorplatzierungen

Aktorset	Anzahl an Aktoren	$\ \mathbf{d}\ _2$ in m	W^{akt} in kNm
\emptyset	0	0,99292	
\mathcal{A}_{VS}^1	1	0,12025	5,544
\mathcal{A}_{VS}^2	2	0,07683	5,173
\mathcal{A}_{VS}^3	3	0,07669	5,172
\mathcal{A}_{VS}^4	4	0,05514	5,407

verwendet und anhand der Verschiebungen im adaptiven Zustand und des Aktuierungsaufwands verglichen.

Abbildung 5.13 zeigt die passiven und die adaptiven Verschiebungen des Tragwerks für alle nicht gelagerten Freiheitsgrade. Für eine verbesserte Übersichtlichkeit ist das Diagramm aufgeteilt in die Verschiebungen in horizontale und vertikale Richtung. Die Verschiebungen in horizontaler Richtung, die aufgrund des globalen Lastabtrags (Kragarm in horizontale Richtung und Dehnstab in vertikale Richtung) und der größeren Belastung im passiven Zustand deutlich größer sind, können durch die Aktuierung stark reduziert werden. Der visuelle Eindruck vermittelt eine deutlich geringere Veränderung für die vertikalen Verschiebungen durch die Adaption. Jedoch sind diese Verschiebungen bereits im passiven Zustand schon deutlich geringer als die horizontalen.

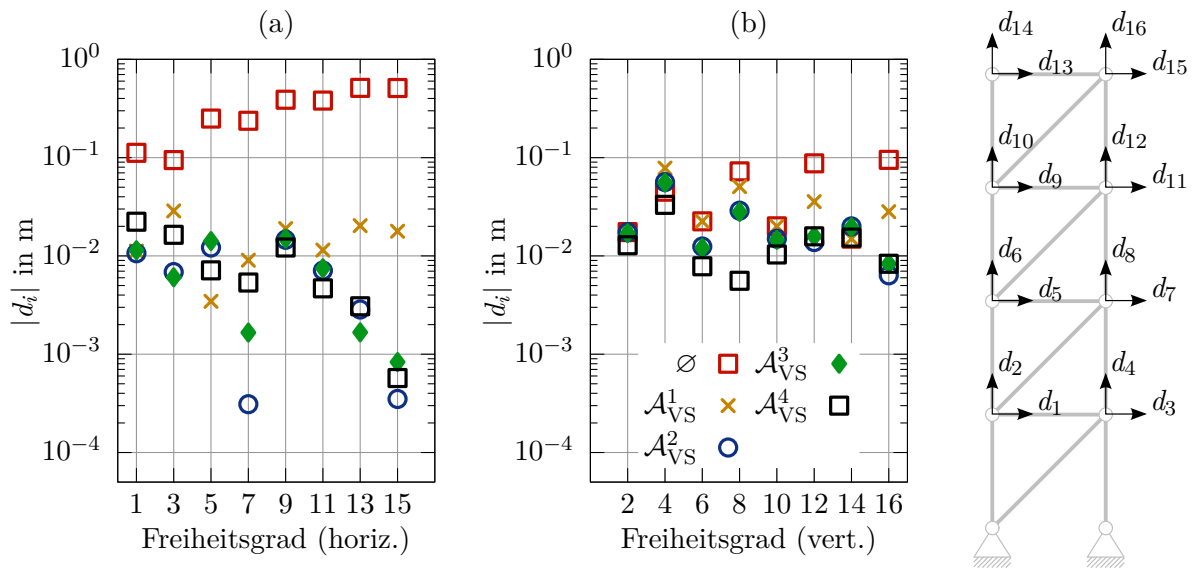


Abbildung 5.13: (a) Darstellung der Verschiebungsbeträge über der Freiheitsgradnummer für das passive System ohne Aktoren (rot) sowie für das adaptive System mit einem Aktor in Element 3 (gelb), mit einem weiteren Aktor in Element 1 (blau), mit einem weiteren Aktor in Element 11 (grün) und mit einem weiteren Aktor in Element 4 (schwarz) für die horizontalen Freiheitsgrade und (b) für die vertikalen Freiheitsgrade; Nummerierung der Freiheitsgrade (rechts)

Die geleisteten Aktuierungsarbeiten sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst. Es wird deutlich, dass der Einsatz des ersten Aktors bereits die größte Verbesserung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors bewirkt. Da sich der Wert dieser Norm mit zusätzlichen Aktoren immer weiter verringert, lassen sich die dafür benötigten Aktuierungsarbeiten nicht direkt miteinander vergleichen. Im Mittel wird die geleistete mechanische Arbeit je Aktor geringer. Für den gesamten Aufwand kann hier kein Zusammenhang zur Anzahl der Aktoren ermittelt werden.

5.3 Minimierung des Aktuierungsaufwands

In diesem Abschnitt wird anhand von zwei Tragwerken beispielhaft der erforderliche Aktuierungsaufwand gezielt untersucht und minimiert. In der ersten Studie, die sich mit der Minimierung des erforderlichen Aktuierungsaufwands zur Verschiebungsadaption beschäftigt, wird in direkter Fortsetzung des vorhergehenden Abschnitts 5.2 das statisch bestimmte Fachwerk untersucht. In Abschnitt 5.3.2 wird eine adaptive Balkenbrücke betrachtet, deren Entwurf so verändert werden soll, dass der notwendige Aktuierungs-

aufwand geringer wird. Dabei wird insbesondere darauf eingegangen, wie ein passendes Optimierungsproblem formuliert werden kann, welche Unterschiede sich im Vergleich zum Entwurf passiver Strukturen ergeben und welches Potential durch Adaptivität erschlossen werden kann.

5.3.1 Fachwerkturn

Am Ende von Abschnitt 5.2 wird die Erkenntnis formuliert, dass bei der Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors der insgesamt notwendige Aufwand nicht von der Anzahl der verwendeten Aktoren abhängt (siehe auch Tabelle 5.4). In diesem Abschnitt wird nun untersucht, ob die Verteilung der Verschiebungsminimierung auf mehrere Aktoren einen Vorteil beim Aufwand bringt, wenn dieser direkt in der Problemformulierung berücksichtigt wird.

Das untersuchte Beispiel ist weiterhin der in Abbildung 5.7 (b) dargestellte statisch bestimmte Fachwerkturn unter der ebenfalls in der Abbildung dargestellten Belastung. Bisher wird zur Bestimmung der Aktorwege für die Verschiebungsadaption die euklidische Norm des Verschiebungsvektors minimiert, wofür mit der Pseudoinversen die Lösung direkt ermittelt werden kann.

Wie bereits in Abschnitt 4.3.2 erwähnt, gibt es für Verschiebungen eines Tragwerks meist einen bestimmten Grenzwert, der beispielsweise abhängig vom Einsatzzweck in Normen gegeben ist oder der individuell festgelegt wird. Der Grenzwert für die horizontale Verformung von Hochhäusern wird gemäß der üblichen Abschätzung mit einem Fünfhundertstel der Höhe, also hier zu 4 cm gewählt. Übertragen auf den Fachwerkturn kann damit das Optimierungsproblem, in dessen Lösung die Aktorwege bestimmt werden, neu formuliert werden zu

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} W^{\text{akt}} \quad (5.15)$$

unter den Nebenbedingungen

$$-4 \text{ cm} \leq (\mathbf{d}(\mathbf{s}))_i \leq 4 \text{ cm} \quad \forall i \in \{1,3,5,\dots,15\}. \quad (5.16)$$

In dieser Studie wird ausgehend von der Untersuchung an dem statisch bestimmten Fachwerkturn aus Abschnitt 5.2 die Aktorplatzierung mit dem Spur-Gütemaß verwendet. Beginnend mit nur einem Aktor wird in jedem Schritt das eben vorgestellte Optimierungsproblem gelöst und für den nächsten Schritt der nächste Aktor hinzugefügt. Die resultierenden Ergebnisse sind in Abbildung 5.14 vergleichend zu den Ergebnissen

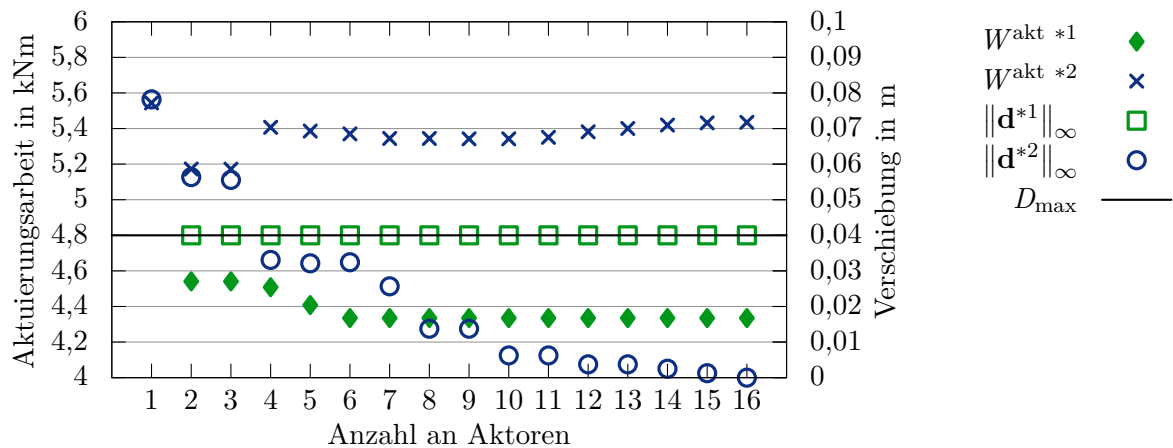


Abbildung 5.14: Darstellung der notwendigen Aktuierungsarbeiten und der betragsmäßig maximalen Verschiebungen im adaptiven Zustand über der Anzahl eingesetzter Aktoren für die beiden Zielformulierungen zur Bestimmung der Aktorwege: Minimierung der Aktuierungsarbeit (*1, grün) und Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors (*2, blau)

dargestellt, die sich bei der Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors ergeben. Der Kopfzeiger 1 bezeichnet die betragsmäßig maximale Verschiebung und die Aktuierungsarbeit, die sich bei der Minimierung der Aktuierungsarbeit ergeben und Kopfzeiger 2 entsprechend die Ergebnisse bei der Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors. Die Ergebnisse für die Minimierung der euklidischen Norm für die ersten vier Aktoren sind auch in Tabelle 5.4 zu finden.

Wird die Aktuierungsarbeit direkt minimiert und dabei die Bedingung der maximalen Verschiebung $D_{\text{max}} = 4 \text{ cm}$ als Nebenbedingung formuliert, kann diese bereits mit zwei Aktoren und dann erwartungsgemäß in jedem weiteren Schritt eingehalten werden. Für den Einsatz von nur einem Aktor liefert die Optimierung kein sinnvolles Ergebnis, da die Nebenbedingung nicht eingehalten werden kann. Deshalb ist für einen Aktor in der Abbildung kein Ergebnis mit Kopfzeiger 1 dargestellt. Der erforderliche Aktuierungsaufwand nimmt mit der Anzahl an Aktoren solange ab, bis das Minimum bei einer Anzahl von sechs oder mehr Aktoren erreicht ist. Mit steigender Anzahl an Aktoren bleibt die maximale Verschiebung konstant an der oberen Grenze des zulässigen Bereichs.

Wird die euklidische Norm des Verschiebungsvektors minimiert ergibt sich die Einhaltung einer typischen Verschiebungsnebenbedingung wie $D_{\text{max}} = 4 \text{ cm}$, die bei dieser Herangehensweise nicht gefordert wird, erst bei mindestens vier Aktoren im Tragwerk. Beim Einsatz von weiteren Aktoren wird die Verschiebung geringer, bis sie beim Einsatz von 16 Aktoren vollständig kompensiert wird. Der Zusammenhang zur Aktuierungsar-

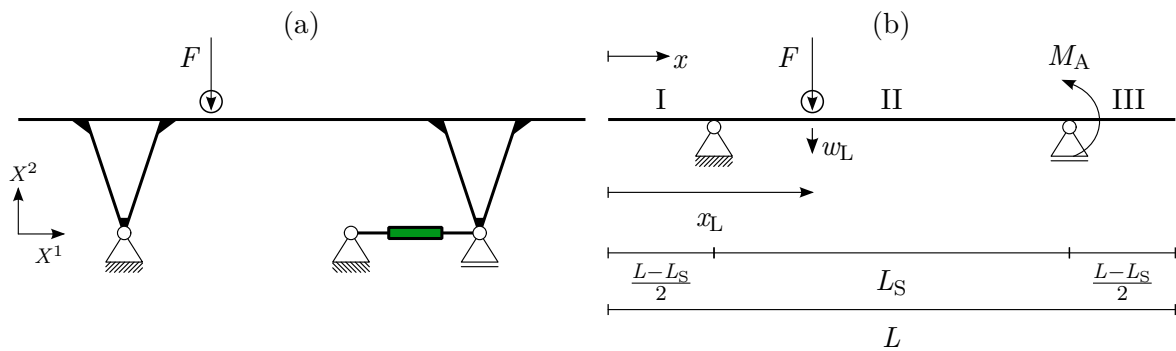


Abbildung 5.15: (a) Skizze der wichtigsten Komponenten und der vereinfachten Belastung des Stuttgarter Trägers in Anlehnung an TEUFFEL (2004); (b) Darstellung des vereinfachten Modells des Tragwerks und der Aktuierung zur Analyse der Verschiebungsadaption

beit bleibt hier – wie bereits in Abschnitt 5.2 beschrieben – unklar. Der Verlauf der Arbeit springt beim Einsatz von zwei oder drei Aktoren auf ein Minimum und weist danach einen glatten Verlauf auf. Durch die Minimierung der Aktuierungsarbeit kann diese im Vergleich zur Minimierung der euklidischen Norm des Verschiebungsvektors reduziert werden. Diese Reduktion beträgt im Durchschnitt über alle Aktoranzahlen aus Abbildung 5.14 rund 18 %.

Ein Beispiel zur Berücksichtigung des Aktuierungsaufwands bereits bei der Dimensionierung von Fachwerkstrukturen kann GEIGER U. A. (2020c) entnommen werden.

5.3.2 Balkenbrücke

Bei dem in Abbildung 5.15 (a) dargestellten Brückentragwerk wird die Steifigkeit mithilfe der Aktuierung vergrößert. Das Ziel der Studie ist, den Abstand der beiden Auflagern so festzulegen, dass der Aktuierungsaufwand minimal wird. Das Beispiel ist angelehnt an den Stuttgarter Träger, einer adaptiven Brücke, die von TEUFFEL (2004) vorgestellt wird und deren strukturmechanische Betrachtung bereits in GEIGER U. A. (2020c) beschrieben ist. Bei der in Abbildung 5.15 (b) dargestellten vereinfachten Modellierung des Stuttgarter Trägers als ebenen Einfeldträger mit zwei Kragarmen wird das prinzipielle Verhalten des adaptiven Tragwerks beibehalten, jedoch werden weniger relevante Effekte vernachlässigt. Dadurch vereinfacht sich das Modell deutlich.

Die Brücke ist durch eine Wanderlast F am Ort x_L belastet, die sich in der vorliegenden Betrachtung von $x = 0$ bis $x = L$ quasi-statisch über die Brücke bewegt. Die Bewegung der Last wird dabei als eine Abfolge von theoretisch unendlich vielen einzelnen statischen Lastfällen betrachtet. Das Ziel der Adaption ist die Kompensation der Verformung der Brücke am jeweils aktuellen Ort der Last.

Im Gegensatz zu den bisher untersuchten Fachwerkstrukturen, stellt die hier dargestellte Struktur ein Balkentragwerk dar, das nach der Bernoulli¹-Balkentheorie analysiert werden soll. Eine Analyse der Struktur mithilfe der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Matrizenstatik ist auch in diesem Fall möglich, im Folgenden wird jedoch die geschlossene Lösung einer Differentialgleichung gezeigt. Das Verhalten des Bernoulli-Balkens wird mithilfe der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (5.17)$$

beschrieben, die durch Integration gelöst werden kann. Die Annahmen von konstantem Flächenträgheitsmoment des Querschnitts I und konstantem Elastizitätsmodul des Materials E über die Balkenlänge sind bereits berücksichtigt. Es treten die Funktionen für die vertikale Verschiebung $w(x)$ und die vertikale Belastung $q(x)$ in Abhängigkeit vom Ort x auf. Die wandernde Einzellast F am Ort x_L wird mit einer Dirac²-Funktion

$$\frac{q(x, x_L)}{F} = \delta(x - x_L) \quad \text{mit} \quad \int_0^L q(x, x_L) dx = F \quad (5.18)$$

modelliert. Mathematische Besonderheiten der Dirac-Funktion, wie beispielsweise die Behandlung der Integrationsränder, werden hier nicht weiter thematisiert, da davon keine maßgebliche Änderung der Untersuchungsergebnisse zu erwarten sind.

Die für die im Folgenden dargestellten Lösung gewählten Systemwerte sind

$$EI = 1000 \text{ kNm}, \quad (5.19a)$$

$$L = 10 \text{ m und} \quad (5.19b)$$

$$F = 10 \text{ kN}. \quad (5.19c)$$

Eine Dreiteilung des Balkens in den Feldbereich und die beiden Kragarme wird eingeführt und für jeden dieser Tragwerksteile wird die Differentialgleichung aufgestellt. Die Verbindung dieser Bereiche wird mithilfe von Übergangsbedingungen hergestellt. Dazu werden die Funktionen w^I , w^{II} und w^{III} für die Verschiebungen in den Bereichen I, II und III verwendet. Die Unterteilung des Balkens in die drei Bereiche ist symmetrisch und wird durch den Wert der Variablen L_S festgelegt. Die Aktuierung mit dem Aktuierungsmoment M_A am rechten Auflager, das die Auswirkung der Aktuierung mit dem im Vergleich zum Brückendeck exzentrischen Linearaktor modelliert, wird durch ein Einzelmoment in der Übergangsbedingung für die Schnittgrößen am Übergangsbereich zwischen Teil II und Teil III berücksichtigt.

¹Jakob I Bernoulli (1655–1705)

²Paul A. M. Dirac (1902–1984)

Die Integrationskonstanten, die sich bei der Integration von Gleichung (5.17) ergeben, werden mithilfe von Rand- und Übergangsbedingungen ermittelt. Daraus können die Funktionen für Verschiebungs- und Schnittgrößen für beliebige Laststellungen bestimmt werden. Es ergeben sich die Verläufe der Biegemomente und der Querkräfte in den drei Bereichen aus der zweiten bzw. dritten Ableitung der Verschiebungsfunktion beispielhaft für Bereich II zu

$$M^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A) = -EI \frac{d^2 w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^2} \quad \text{und} \quad (5.20a)$$

$$V^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A) = EI \frac{d^3 w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^3}. \quad (5.20b)$$

Die zur Lösung verwendeten Übergangsbedingungen können unter Verwendung der Abkürzungen für die Orte der Auflager $x_{S1} = \frac{L-L_S}{2}$ und $x_{S2} = \frac{L+L_S}{2}$ zusammengefasst werden zu

$$w^{\text{I}}(x, x_L, L_S, M_A) \Big|_{x=x_{S1}} = w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A) \Big|_{x=x_{S1}} \quad \text{und} \quad (5.21a)$$

$$w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A) \Big|_{x=x_{S2}} = w^{\text{III}}(x, x_L, L_S, M_A) \Big|_{x=x_{S2}} \quad (5.21b)$$

für die Verschiebungen, zu

$$\frac{dw^{\text{I}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx} \Big|_{x=x_{S1}} = \frac{dw^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx} \Big|_{x=x_{S1}} \quad \text{und} \quad (5.22a)$$

$$\frac{dw^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx} \Big|_{x=x_{S2}} = \frac{dw^{\text{III}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx} \Big|_{x=x_{S2}} \quad (5.22b)$$

für die Verschiebungsableitungen sowie zu

$$-EI \frac{d^2 w^{\text{I}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^2} \Big|_{x=x_{S1}} = -EI \frac{d^2 w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^2} \Big|_{x=x_{S1}} \quad \text{und} \quad (5.23a)$$

$$-EI \frac{d^2 w^{\text{II}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^2} \Big|_{x=x_{S2}} = -EI \frac{d^2 w^{\text{III}}(x, x_L, L_S, M_A)}{dx^2} \Big|_{x=x_{S2}} - M_A \quad (5.23b)$$

für Biegemomente. Die Randbedingungen ergeben sich an den Auflagern zu

$$w^{\text{I}}(x_{S1}, x_L, L_S, M_A) = 0 \text{ m} \quad \text{und} \quad (5.24a)$$

$$w^{\text{II}}(x_{S2}, x_L, L_S, M_A) = 0 \text{ m} \quad (5.24b)$$

für die Verschiebungen. Weiterhin ergeben sich die beiden statischen Randbedingungen an den Rändern zu

$$M^I(0, x_L, L_S, M_A) = M^{III}(L, x_L, L_S, M_A) = 0 \quad \text{und} \quad (5.25a)$$

$$V^I(0, x_L, L_S, M_A) = V^{III}(L, x_L, L_S, M_A) = 0. \quad (5.25b)$$

Mithilfe dieser zwölf Bedingungen können die Werte aller zwölf Integrationskonstanten, die aus der viermaligen Integration der drei Gleichungen zur Bestimmung von w^I , w^{II} und w^{III} resultieren, ermittelt werden.

Im Folgenden werden zwei Herangehensweisen H1 und H2, um ein optimiertes adaptives Tragwerk zu erhalten, miteinander verglichen. Das Ziel ist es, den notwendigen Aktuierungsaufwand, der hier durch die Größe des notwendigen Aktuierungsmoments beschrieben wird, so gering wie möglich zu halten.

Herangehensweise H1

Die erste Herangehensweise zur Lösung des Problems beinhaltet zwei Schritte. Im ersten Schritt wird der Abstand der Auflager L_S so festgelegt, dass das System ohne Aktuierung bereits maximale Steifigkeit aufweist, d. h. in diesem Fall, dass dieses System die kleinste maximale Verschiebung unter der Last über alle Laststellungen aufweist. Im zweiten Schritt wird dann die Aktorik eingesetzt und die noch vorhandenen Verschiebungen werden kompensiert.

Der erste Schritt kann grafisch mithilfe von Abbildung 5.16 (links) gelöst werden. Die in der Abbildung dargestellte Fläche zeigt den Verlauf der Vertikalverschiebung unter der Last über alle Auflagerabstände L_S und über alle Laststellungen x_L ohne Aktuierung. Die Funktion $w_{L,pas}(x_L, L_S)$, von der diese Fläche beschrieben wird, ergibt sich aus der Auswertung der Verschiebungsfunktionen $w^I(x, x_L, L_S, M_A)$, $w^{II}(x, x_L, L_S, M_A)$ und $w^{III}(x, x_L, L_S, M_A)$ für den passiven Zustand $M_A = 0$ kNm am Ort $x = x_L$, wodurch diese Funktionen nur noch vom Abstand der Auflager L_S und vom Ort der Last x_L abhängen, zu

$$w_{L,pas}(x_L, L_S) = \begin{cases} w_{L,pas}^I(x_L, L_S) & 0 \text{ m} \leq x_L \leq x_{S1} \\ w_{L,pas}^{II}(x_L, L_S) & x_{S1} < x_L \leq x_{S2} \\ w_{L,pas}^{III}(x_L, L_S) & x_{S2} < x_L \leq 10 \text{ m} \end{cases} . \quad (5.26)$$

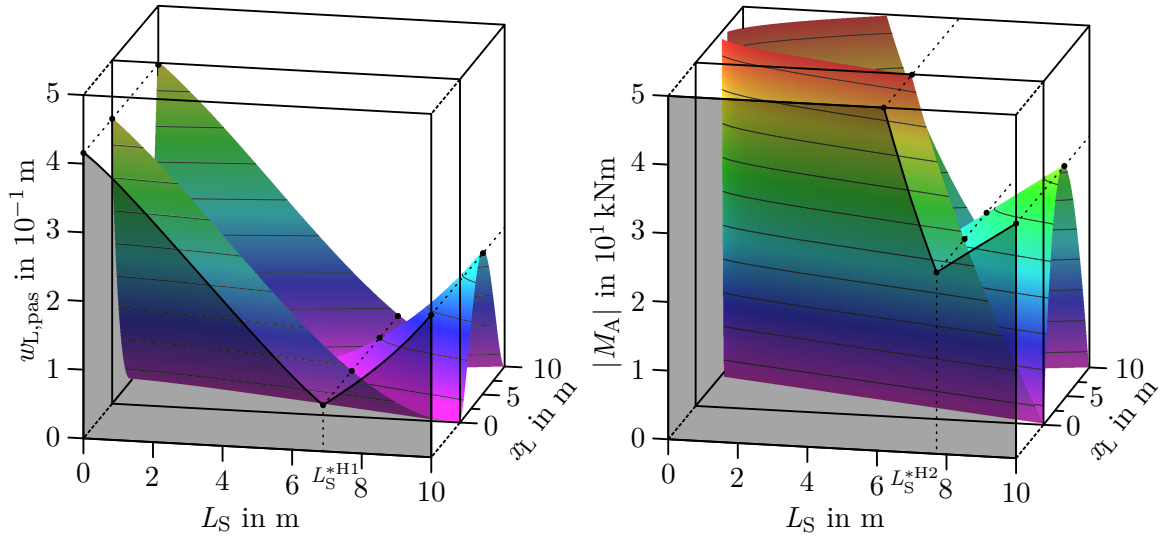


Abbildung 5.16: Verläufe der Funktion der Verschiebung im passiven Tragwerk am Ort der Wanderlast $w_{L,pas}$ (links) und der Funktion des Betrags des erforderlichen Aktuierungsmoments M_A im adaptiven Tragwerk zur vollständigen Kompensation der Verschiebung unter der Last (rechts) jeweils aufgetragen über alle Auflagerabstände und alle Lastpositionen; Einhüllende der Maximalwerte für einen Auflagerabstand über alle Lastpositionen in dunkel; die Farben codieren den jeweiligen Funktionswert

Im Folgenden wird für eine verbesserte Übersichtlichkeit auf die Angabe der Abhängigkeiten verzichtet. Die einzelnen Beiträge ergeben sich mit den Abkürzungen

$$w_1 = -L_1^3 L_2 L_3 H(L_1) \quad w_4 = 2L_1^2 L_2^2 L_3 \quad L_1 = -5 + \frac{L_S}{2} + x_L \quad (5.27a)$$

$$w_2 = L_1 L_2^3 L_3 H(-L_2) \quad w_5 = L_1 L_2^3 L_3 \quad L_2 = 5 + \frac{L_S}{2} - x_L \quad (5.27b)$$

$$w_3 = 2L_1^3 L_2 L_3 \quad L_3 = \frac{1}{600(L_1 + L_2)} \quad (5.27c)$$

zu

$$w_{L,pas}^I = w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4 \quad (5.28a)$$

$$w_{L,pas}^{II} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \quad (5.28b)$$

$$w_{L,pas}^{III} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5. \quad (5.28c)$$

Dabei beschreibt $H(\bullet)$ die Heaviside³-Funktion.

³Oliver Heaviside (1850–1925)

Die im Vordergrund von Abbildung 5.16 (links) dunkel eingefärbte Fläche wird nach oben durch die Einhüllende der maximalen Verschiebung für den jeweiligen Auflagerabstand über alle Laststellungen beschränkt. Das steifste passive Tragwerk ergibt sich für das Minimum dieser Einhüllenden bei einem Auflagerabstand von $L_S^{*H1} \approx 6,89$ m. Das zugehörige aufzubringende Aktuierungsmoment M_A^{*H1} ergibt sich in Abhängigkeit vom Ort der Last durch das Auswerten der Bestimmungsgleichung für das Aktuierungsmoment, die sich wiederum aus der Bedingung $w_{L,ada}(x_L, L_S = L_S^{*H1}, M_A) = 0$ m ermitteln lässt, und ist in Abbildung 5.17 dargestellt. Dabei ergibt sich das betragsmäßig maximal notwendige Aktuierungsmoment für $x_L = 0$ m zu rund $-38,14$ kNm.

Herangehensweise H2

In der zweiten Herangehensweise wird direkt der Betrag des Aktuierungsmoments in einem Schritt minimiert. Der Verlauf der Funktion $|M_A|$, die den Betrag des notwendigen Aktuierungsmoments beschreibt, ist in Abbildung 5.16 (rechts) für alle Auflagerabstände und alle Lastpositionen dargestellt. Die Funktion wird aus der Bedingung ermittelt, dass sich die Verschiebung bei Berücksichtigung des Aktuierungsmoments unter der Last $w_{L,ada}(x_L, L_S, M_A)$ zu null ergibt. Nach dem Auflösen ergibt sich für das Aktuierungsmoment

$$M_A(x_L, L_S) = \frac{5}{2L_S} (L_S^2 - 4x_L + 40x_L - 100) \begin{cases} 2 & 0 \text{ m} \leq x_L \leq x_{S1} \\ \frac{4L_S}{3L_S - 10 + 2x_L} & x_{S1} < x_L \leq x_{S2} \\ 1 & x_{S2} < x_L \leq 10 \text{ m} \end{cases} \quad (5.29)$$

Der Verlauf des Betrags dieser Funktion ist in Abbildung 5.16 (rechts) dargestellt. Analog zur Lösung des Problems für Herangehensweise H1 kann auch hier aus der Visualisierung der Funktion der hier optimale Auflagerabstand L_S^{*H2} aus dem Minimum der Einhüllenden über alle Lastpositionen bei ca. 7,70 m gefunden werden. Der Verlauf des erforderliche Aktuierungsmoments für alle Lastpositionen ist in Abbildung 5.17 für L_S^{*H2} dargestellt. Der Betrag des maximal notwendigen Aktuierungsmoments ergibt sich für $x_L = 0$ m und für $x_L \approx 4,34$ m zu rund 26,42 kNm. Dabei wird verglichen mit Herangehensweise H1 ein um rund 30 % geringeres maximales Aktuierungsmoment benötigt.

Diskussion

Das Ergebnis ist bei mathematischer Betrachtung nicht überraschend. Herangehensweise H1 kann als aufeinanderfolgende Lösung von zwei Optimierungsproblemen (1. Maximierung der Steifigkeit mit der Entwurfsvariable Auflagerabstand; 2. Kompensation der Verschiebung mit der Entwurfsvariable Aktuierungsmoment) interpretiert wer-

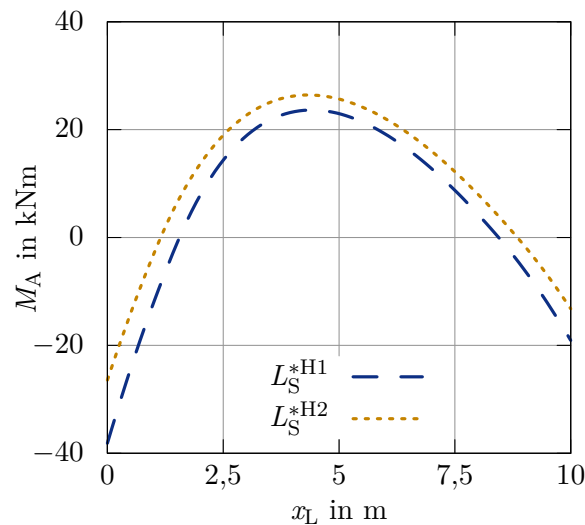


Abbildung 5.17: Erforderliches Aktuierungsmoment M_A^* zur vollständigen Kompensation der Vertikalverschiebung am Ort der Last für die beiden optimierten Auflagerabstände L_S^{*H1} und L_S^{*H2}

den. Für Herangehensweise H2 werden beide Probleme mithilfe von Nebenbedingungen kombiniert und in einem Schritt gelöst (Minimierung des Aktuierungsmoments mit der Entwurfsvariable Auflagerabstand unter der Nebenbedingung, dass die Verschiebungen vollständig kompensiert werden). Dabei entsteht ein höherdimensionaler Entwurfsraum und damit ergeben sich neue Kombinationsmöglichkeiten, die hier und im Allgemeinen zu verbesserten Ergebnissen führen. Obwohl das Ergebnis also nicht überraschend ist, ergeben sich daraus Schlussfolgerungen, die nicht offensichtlich erscheinen.

Der Entwurfsprozess von adaptiven Strukturen sollte sich grundlegend vom Entwurfsprozess herkömmlicher Strukturen unterscheiden. Bei der „naiven“ Strategie nach Herangehensweise H1, bei der in der Optimierung der passiven und der adaptiven Struktur dasselbe übergeordnete Ziel (in diesem Fall Erhöhung der Steifigkeit) verfolgt wird, ergibt sich ein adaptives Tragwerk, dessen Aktuierungsaufwand verglichen mit dem Tragwerk aus Herangehensweise H2 signifikant schlechter abschneidet. Das optimierte passive Tragwerk, das nachträglich aktuiert wird, zeigt deutlich schlechtere Performanz als das Tragwerk, bei dem die Adaptivität im Entwurfsprozess Berücksichtigung findet.

Der Zweck dieser Untersuchung ist der Gewinn der soeben formulierten Erkenntnis. Deshalb wurden bei der Analyse viele Vereinfachungen eingeführt. Beispielsweise werden Spannungsnachweise vollständig vernachlässigt. Weiterhin wird der Einfluss des Grads der statischen Unbestimmtheit der Struktur keiner eingehenden Untersuchung unterzogen. Das eingesetzte vereinfachte Modell ist statisch bestimmt, wobei aber durch die gewählte Modellierung der Aktuierung durch ein angreifendes Einzelmoment trotzdem Schnittgrößen im Tragwerk erzeugt werden, die bei einer Bemessung ebenfalls berück-

sichtigt werden müssten. Die gewählte Modellierung ist im Vergleich mit dem Vorbild Stuttgarter Träger sinnvoll, da in diesem aufgrund der statischen Unbestimmtheit in der Lagerkonstruktion (siehe Abbildung 5.15 (a)) durch die Aktuierung auch Schnittgrößen hervorgerufen werden.

Eine weitere Verringerung des Aktuierungsaufwands kann beispielsweise durch das Einfügen eines Gelenks in der Trägermitte und damit durch Aktuierung zwangsfreier Starrkörperbewegungen erfolgen, wie es in der Arbeit von FRÖHLICH U. A. (2019), an der auch der Autor beteiligt war, beispielhaft ermittelt wird. Dabei muss die Brauchbarkeit des resultierenden Systems durch entsprechende Mechanismen sichergestellt werden, da das hier verwendete vereinfachte, statisch bestimmte Modell in diesem Fall nicht brauchbar wäre. Beim Stuttgarter Träger aus Abbildung 5.15 (links) kann in der Trägermitte jedoch ein Gelenk eingefügt werden, ohne dass das System unbrauchbar wird.

5.4 Minimierung der Tragwerksmasse

In den vorhergehenden Untersuchungen wird das Verhalten von Stabtragwerken unter Belastungen durch den Einsatz von Adaptivität verbessert. Dabei sind die untersuchten adaptiven Stabtragwerke meist bereits in ihrer Geometrie, immer jedoch in ihrer Topologie und in ihrer Dimensionierung festgelegt. Im Folgenden werden die hier durchgeführten Untersuchungen zur Massenminimierung bei der Dimensionierung von adaptiven Stabtragwerken beschrieben, die dabei verfolgten Ziele erläutert und die Ergebnisse präsentiert.

Für ein Tragwerk werden Querschnittsoptimierungen mit dem Ziel der Massenminimierung unter identischen Anforderungen an Verformungen und Spannungen im passiven und adaptiven Zustand durchgeführt. Mit den Erkenntnissen zur Reihenfolge von Berücksichtigung der Adaptivität und Optimierung des Tragwerks aus Abschnitt 5.3 wird die Aktuierung bereits in der Querschnittsoptimierung berücksichtigt (Herangehensweise H2 aus Abschnitt 5.3.2). Die daraus resultierenden minimierten Massen werden verglichen, um das Potential durch den Einsatz von Adaptivität aufzuzeigen. Die erforderlichen Massen, die für das adaptive Tragwerk mit verschiedenen Aktorplatzierungen ermittelt werden, werden untereinander verglichen, um die Rolle der Anzahl der Aktoren und deren Platzierung zu untersuchen. Die Rolle der Topologie bzw. insbesondere des Grads der statischen Unbestimmtheit wird durch den Vergleich verschiedener Tragwerksvarianten, die ebenfalls mit identischen Anforderungen optimiert werden, bewertet. Der Einfluss des globalen Tragverhaltens, dessen Rolle bereits im Zusammenhang mit der Kraftadaption in Abschnitt 5.1 näher beleuchtet wird, kann durch den Vergleich

der Ergebnisse für die hier analysierten Tragwerke untereinander zusammen mit den Erkenntnissen aus der ersten Studie bewertet werden.

Bei der Dimensionierung wird in festigkeits- und steifigkeitsdominierte Bemessungsprobleme unterschieden (siehe beispielsweise ALI UND MOON (2007)). Diese Unterscheidung ist daran orientiert, ob bei dem Fachwerk Nebenbedingungen an die Verformungen für die Dimensionierung maßgebend werden. Auch bei festigkeitsdominierten Bemessungsproblemen können Verformungen durch Restriktionen beschränkt sein, diese beeinflussen jedoch die Verteilung der Querschnittsflächen nicht maßgeblich. Die Unterscheidung in festigkeits- und steifigkeitsdominiert ist im Allgemeinen für ein ganzes Tragwerk schwer zu treffen. Im Rahmen der folgenden Untersuchungen wird deshalb davon ausgegangen, dass für die Untersuchung festigkeitsdominierter Bemessungsprobleme keine Verformungsrestriktionen berücksichtigt werden. Dieser Fall ist eher theoretischer Natur, liefert jedoch durch die eingeführte trennscharfe Unterscheidung tiefere Einsicht in prinzipielle Unterschiede und Effekte.

Die Untersuchungen werden anhand von zwei Tragwerken vorgestellt. Für das erste Tragwerk ist eine grafische und analytische Lösung des Dimensionierungsproblems möglich, was einen anschaulichen Eindruck von den wesentlichen Effekten gibt. Für das zweite Tragwerk wird das Dimensionierungsproblem mithilfe der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Verfahren gelöst. Für beide Tragwerke werden ausgewählte, interessante Aspekte der Lösungen, wie z. B. der Ausnutzungsgrad, der Einfluss der Aktoren oder die aktiven Normalkraftverteilungen, beispielhaft vorgestellt und erläutert. Auch in dieser Untersuchung sind einige der im weiteren Verlauf vorgestellten Annahmen akademischer Natur. Deshalb liegt der Fokus dieser Untersuchung auf dem Vergleich und der phänomenologischen Interpretation von Ergebnissen.

5.4.1 Drei-Stab-Tragwerk

Das bereits bekannte Drei-Stab-Tragwerk aus Abschnitt 2.2 wird im Folgenden unter Berücksichtigung von Adaptivität dimensioniert. Das untersuchte System ist in Abbildung 5.18 dargestellt. Auch hier wird die Symmetrie des Problems ausgenutzt ($A_1 = A_3$) und nur Lastfall LF1 berücksichtigt. In diesem Abschnitt wird das Volumen minimiert, das sich direkt proportional zur Masse verhält.

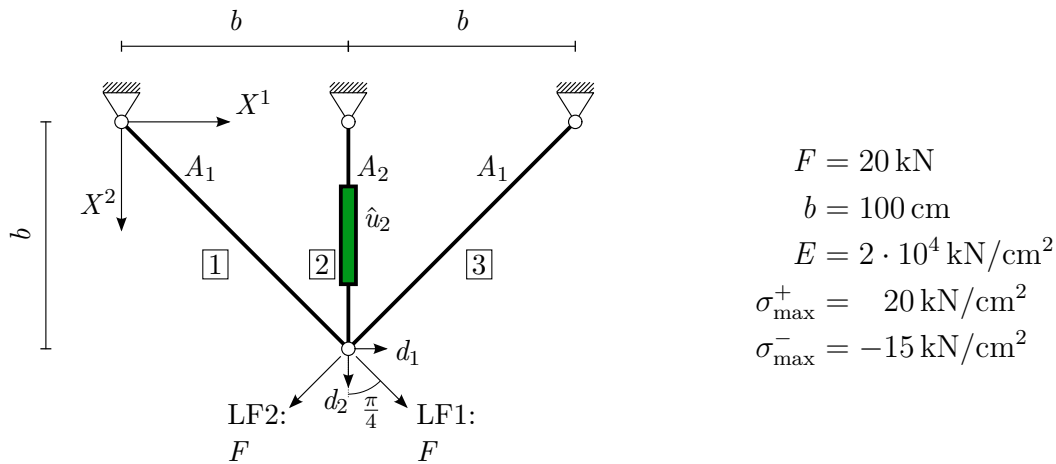


Abbildung 5.18: Drei-Stab-Tragwerk zur Untersuchung der Dimensionierung adaptiver Tragwerke

Festigkeitsdominiertes Bemessungsproblem

Der Vektor der Entwurfsvariablen für das Bemessungsproblem der adaptiven Struktur unter Berücksichtigung der Aktuierung ergibt sich zu

$$\mathbf{s} = [A_1 \quad A_2 \quad \hat{u}_2]^T. \quad (5.30)$$

Das Minimierungsproblem ergibt sich wie in Abschnitt 2.2 zu

$$\min_{\mathbf{s}} V(\mathbf{s}), \quad V(\mathbf{s}) = A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_1 L_3 \quad (5.31)$$

unter den Spannungsnebenbedingungen

$$\sigma_{\max}^- \leq \sigma_i(\mathbf{s}) \leq \sigma_{\max}^+ \quad \forall i \in [1,2,3] \quad (5.32)$$

im Entwurfsraum

$$A_j > 0 \quad \forall j \in [1,2] \quad (5.33a)$$

$$\hat{u}_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.33b)$$

Vergleichbar mit Abbildung 2.9 für den passiven Fall ist die Lösung des Optimierungsproblems in Abbildung 5.19 für die adaptive Struktur veranschaulicht. Hier ist der zulässige Bereich in grün gekennzeichnet. Das Optimum für das festigkeitsdominierte

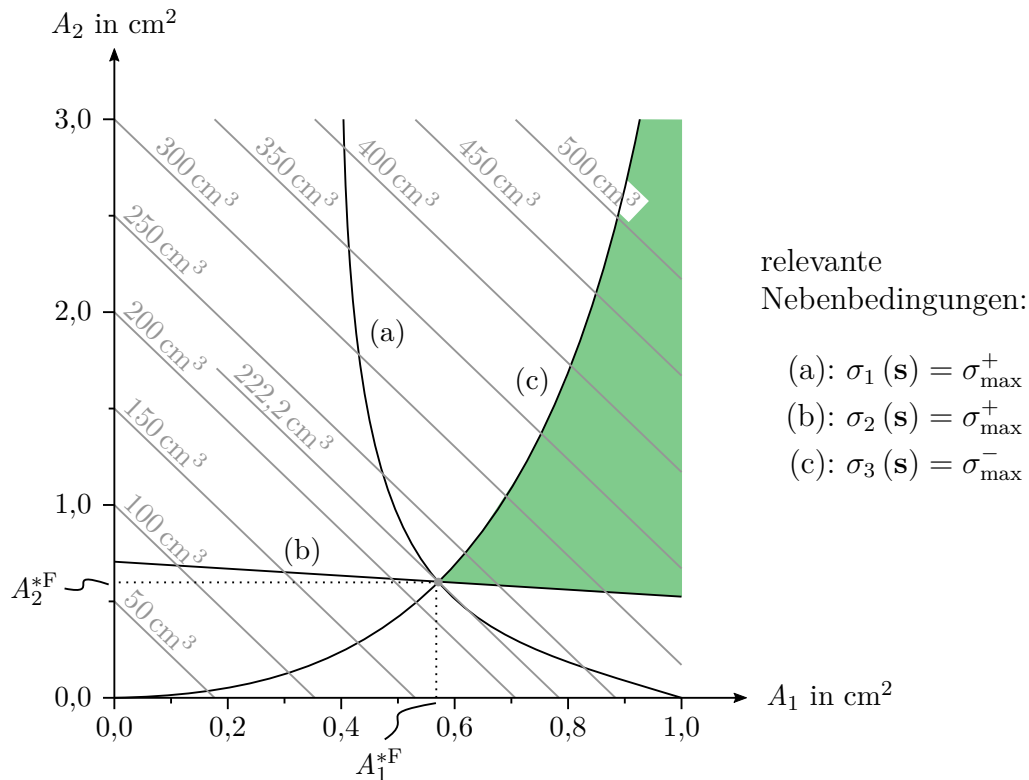


Abbildung 5.19: Visualisierung des festigkeitsdominierten Volumenminimierungsproblems des adaptiven Drei-Stab-Tragwerks für $\hat{u}_2 = -\frac{3}{40}$ cm

Bemessungsproblem (Kopfzeiger F) ergibt sich für

$$\mathbf{s}^{\text{F}} = \begin{bmatrix} A_1^{\text{F}} \\ A_2^{\text{F}} \\ \hat{u}_2^{\text{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{3}{40} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,5714 \text{ cm}^2 \\ 0,6061 \text{ cm}^2 \\ -0,07500 \text{ cm} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

zu

$$V(\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{F}}) \approx 222,2 \text{ cm}^3. \quad (5.35)$$

Die Spannungen im Optimum ergeben sich damit zu

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{F}}) = [20 \quad 20 \quad -15]^T \text{ kN/cm}^2. \quad (5.36)$$

Bereits in der Darstellung ist ersichtlich, dass alle Nebenbedingungen am Minimum aktiv sind und damit alle Elemente voll ausgenutzt sind. Durch die Möglichkeit, alle Elemente voll auszunutzen und damit bestmöglich am Lastabtrag zu beteiligen, wird

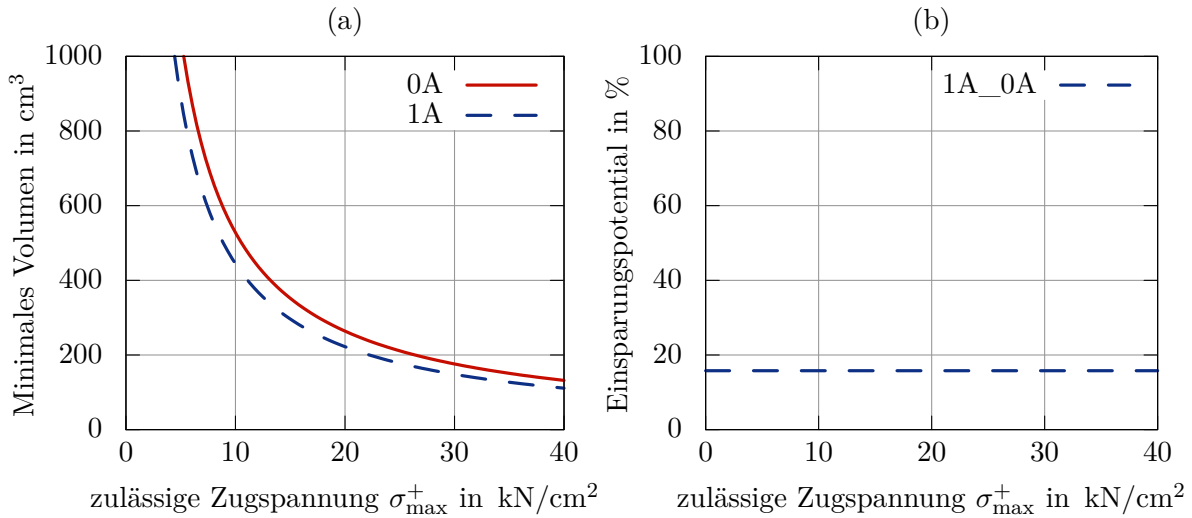


Abbildung 5.20: (a) Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens beim Einsatz von keinem Aktor (0A) und von einem Aktor (1A) in Abhängigkeit von der maximal zulässigen Zugspannung; (b) Darstellung des Volumeneinsparungspotentials mithilfe von einem Aktor bezogen auf die passive Struktur (1A_0A) in Abhängigkeit von der maximal zulässigen Zugspannung; maximal zulässige Druckspannung: $\sigma_{\max}^- = -0,75\sigma_{\max}^+$

rund 16 % weniger Volumen benötigt als im vergleichbaren passiven Tragwerk (vgl. Gleichung (2.42)).

Der Zusammenhang des optimierten Volumens und der vorgegebenen Materialfestigkeit wird in Abbildung 5.20 veranschaulicht. Abbildung 5.20 (a) zeigt das optimierte Tragwerksvolumen aufgetragen über der zulässigen Zugspannung. Die zugelassene Druckspannung wird zu $-0,75\sigma_{\max}^+$ gewählt. Für geringe zulässige Spannungen ergibt sich erwartungsgemäß ein großes benötigtes Volumen, welches beim Einsatz einer höheren Festigkeit hyperbolisch abnimmt. Beide Funktionen streben gegen den Grenzwert von null für ein Material mit theoretisch unendlicher Zugfestigkeit. Durch den Einsatz weiterer Aktoren kann keine zusätzliche Volumenreduktion erzielt werden. Abbildung 5.20 (b) zeigt das prozentuale Einsparungspotential, für das sich ein konstanter Verlauf ergibt. Somit kann das absolute Volumen durch den Einsatz hochfester Materialien verringert, jedoch kann kein größeres Einsparungspotential erzielt werden.

Die Bedingung an Tragwerke, in denen alle Fachwerkstäbe bei einer festigkeitsdominierten Bemessungsaufgabe voll ausgenutzt werden können, wird bereits von TEUFFEL (2004) mit

$$n_E - n_{LF} n_{FHG} \geq 0 \quad (5.37)$$

angegeben. Dabei ist n_{LF} die Anzahl der einwirkenden Lastfälle und die Anzahl der Aktoren wird implizit zu n_s angenommen. Diese Bedingung ergibt sich aus der Überlegung, dass die Anzahl der Unbekannten

- Querschnittsflächen (n_E),
- Elementkräfte in allen Lastfällen ($n_{LF}n_E$) und
- Auflagerkräfte in allen Lastfällen ($n_{LF}n_L$)

größer als oder gleich wie die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen aus

- Gleichgewichtsbedingungen an den Freiheitsgraden und an den Auflagern in allen Lastfällen ($n_{LF}(n_{FHG} + n_L)$) und
- Spannungsnebenbedingungen in allen Lastfällen ($n_{LF}n_E$)

sein muss. Unter Ausnutzung der Symmetrie des Systems und der Lösung ergibt sich mit

$$n_E = 2 \text{ (Anzahl unbekannter Querschnittsflächen)}, \quad (5.38a)$$

$$n_{LF} = 1 \text{ (Anzahl der Lastfälle) und} \quad (5.38b)$$

$$n_{FHG} = 2 \text{ (Anzahl der Freiheitsgrade)} \quad (5.38c)$$

die Bedingung zu

$$2 - 1 \cdot 2 = 0 \geq 0 \quad (5.39)$$

und ist somit erfüllt. Interessant ist hierbei, dass die Bedingung nur für den betrachteten symmetrischen Fall erfüllt ist. Für allgemeine Belastungen des Drei-Stab-Tragwerks ist die Bedingung nicht erfüllt und die volle Ausnutzung aller Elemente ist nicht möglich.

Bisher wird angenommen, dass die eingesetzte Aktorik weder im Vorzeichen (Druck/Zug) oder im Betrag der Aktorkraft noch im Aktorweg Beschränkungen aufweist. Der Einfluss einer solchen Beschränkung wird im Folgenden untersucht. Dabei wird weiterhin angenommen, dass nur ein Aktor in Element 2 zum Einsatz kommt.

Bei der Lösung des Optimierungsproblems zur Ermittlung des optimierten Volumens werden zusätzliche Nebenbedingungen berücksichtigt und die Lösung erfolgt numerisch.

Der Einfluss der maximal zulässigen Aktorkraft wird über eine Beschränkung der Aktorkraft, die der Normalkraft im entsprechenden Stab entspricht zu

$$-f_{akt,max} \leq (\mathbf{n}_{ada}(\mathbf{s}))_2 \leq f_{akt,max} \quad (5.40)$$

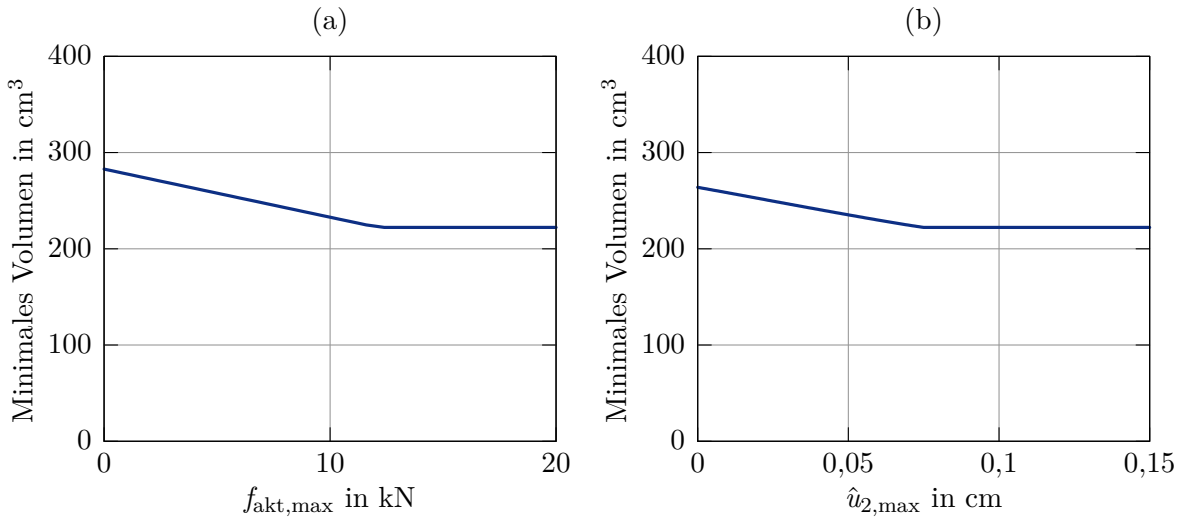


Abbildung 5.21: (a) Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens in Abhängigkeit vom Betrag $f_{\text{akt,max}}$ der maximal bzw. minimal zulässigen Aktorkraft; (b) Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens in Abhängigkeit vom Betrag $\hat{u}_{2,max}$ des maximal bzw. minimal zulässigen Aktorwegs

vorgenommen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.21 dargestellt. Dabei lässt sich erkennen, dass bei einer zulässigen Aktorkraft von mehr als rund 12 kN kein Einfluss auf das optimierte Volumen besteht. Wird die zulässige Aktorkraft reduziert, ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Aktorkraft und dem optimierten Volumen. Bei einer Reduktion der zulässigen Aktorkraft auf null bzw. nahezu null wird – anschaulich betrachtet – das Element 2 vollständig entlastet und aufgrund der Orthogonalität der Elemente 1 und 3 muss die gesamte Last jeweils von einem Element abgetragen werden. Es ergibt sich dafür die bereits in der Literatur beschriebene Lösung von rund $282,8 \text{ cm}^3$. In einem Tragwerk, in dem mithilfe der in Abschnitt 4.4 vorgestellten Verfahren zur Aktorplatzierung n_s Aktoren platziert sind, kann auch im Fall einer nur sehr geringen zulässigen Aktorkraft die Tragfähigkeit gewährleistet werden, da das System auch ohne die Elemente, in denen Aktoren platziert sind, brauchbar ist. Werden zusätzliche Aktoren beispielsweise zur Verschiebungsadaptation eingesetzt ist dieses Verhalten nicht mehr gewährleistet und die Sicherstellung der Tragfähigkeit auch bei geringen zulässigen Aktorkräften sollte in jedem Fall geprüft werden.

Der Einfluss des maximal zulässigen Aktorwegs wird über eine Beschränkung des zulässigen Entwurfsraums für den Aktorweg

$$-\hat{u}_{2,max} \leq \hat{u}_2(\mathbf{s}) \leq \hat{u}_{2,max} \quad (5.41)$$

vorgenommen. Abbildung 5.21 (b) zeigt das resultierende optimierte Volumen in Abhängigkeit vom zulässigen Aktorweg. Auch in diesem Diagramm ergibt sich eine Unabhängigkeit des minimierten Volumens vom zulässigen Aktorweg, wenn dieser größer als ca. 0,075 cm ist. Darunter ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen dem zulässigen Aktorweg und dem minimierten Volumen. Bei der Reduktion des zulässigen Aktorwegs auf null ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der Dimensionierung des passiven Tragwerks, da keine Aktuierung mehr im System wirkt. In diesem Fall ist kein Einfluss der Beschränkung auf die Tragfähigkeit zu erwarten.

Die beiden Diagramme aus Abbildung 5.21 liefern wichtige Einsichten zur Auswahl der benötigten Aktorik. Im betrachteten Beispiel sollte zur vollständigen Nutzung des Volumeneinsparungspotentials eine Aktorik eingesetzt werden, die eine Aktorkraft von ca. ± 12 kN und einen Aktorweg von ca. $\pm 0,075$ cm leisten kann. Dazu können Einordnungen der Aktorarten nach ihrer Leistungsfähigkeit aus WEIDNER U. A. (2018) verwendet werden. Weitere Untersuchungen beispielsweise zur Interaktion der beiden Parameter oder zur notwendigen Aktuierung mit Druck- und Zugkräften bzw. mit positivem und negativem Aktorweg müssen durchgeführt werden.

Steifigkeitsdominiertes Bemessungsproblem

Für die steifigkeitsdominierte Bemessungsproblem wird als zusätzliche Nebenbedingung die Verschiebung des freien Knotens in vertikale Richtung durch

$$-D_{\max} \leq d_2(\mathbf{s}) \leq D_{\max} \quad \text{mit} \quad D_{\max} = \frac{1}{100} \text{ cm} \quad (5.42)$$

beschränkt.

Die Lösung des Optimierungsproblems ist in Abbildung 5.22 für die adaptive Struktur veranschaulicht. Das Optimum für das steifigkeitsdominierte Bemessungsproblem (Kopfzeiger S) ergibt sich bei

$$\mathbf{s}^{*S} = \begin{bmatrix} A_1^{*S} \\ A_2^{*S} \\ \hat{u}_2^{*S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \text{ cm}^2 \\ \frac{15\sqrt{2}}{32} \text{ cm}^2 \\ -\frac{9}{100} \text{ cm} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,6250 \text{ cm}^2 \\ 0,6629 \text{ cm}^2 \\ -0,09000 \text{ cm} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

zu

$$V(\mathbf{s} = \mathbf{s}^{*S}) \approx 243,1 \text{ cm}^3. \quad (5.44)$$

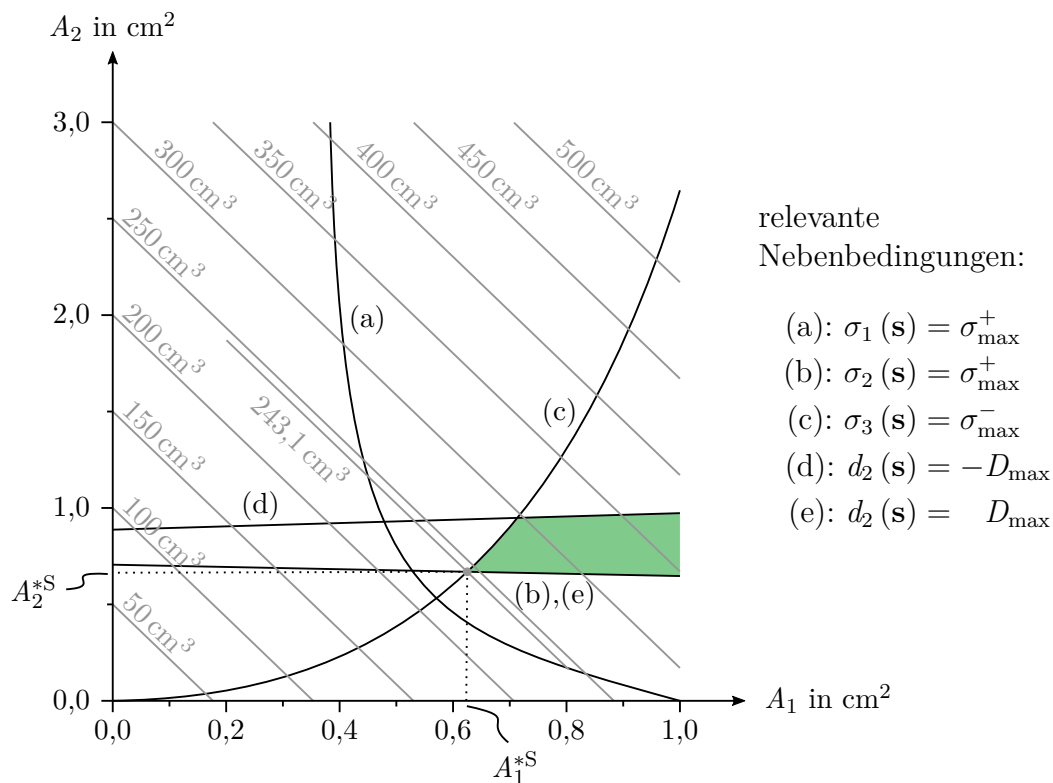


Abbildung 5.22: Darstellung des steifigkeitsdominierten Volumenminimierungsproblems des adaptiven Drei-Stab-Tragwerks für $\hat{u}_2 = -\frac{9}{100}$ cm

Die resultierenden Verschiebungen in Lastfall LF1 ergeben sich zu

$$\mathbf{d}(\mathbf{s} = \mathbf{s}^{*S}) = \begin{bmatrix} 0,16 \\ 0,01 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad (5.45)$$

und die entsprechenden Spannungen zu

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s} = \mathbf{s}^{*S}) = [17 \quad 20 \quad -15]^T \text{ kN/cm}^2. \quad (5.46)$$

Nur in zwei Elementen kann die zulässige Spannung vollständig ausgenutzt werden.

Zum Vergleich wird das Optimierungsproblem im Folgenden für das passive System unter denselben Nebenbedingungen betrachtet. Dafür werden dieselbe Zielfunktion und dieselben Nebenbedingungen verwendet, sie unterscheidet sich jedoch durch den Vektor der Entwurfsvariablen

$$\mathbf{s} = [A_1 \quad A_2]^T. \quad (5.47)$$

Das Optimum ergibt sich für das passive System (Fußzeiger pas) zu

$$V_{\text{pas}}^{*S} = 839,7 \text{ cm}^3 \quad (5.48)$$

mit den Querschnittswerten

$$\mathbf{s}_{\text{pas}}^{*S} = \begin{bmatrix} A_{1\text{pas}}^{*S} \\ A_{1\text{pas}}^{*S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{75\sqrt{2}}{16} \end{bmatrix} \text{ cm}^2 \approx \begin{bmatrix} 0,6250 \\ 6,629 \end{bmatrix} \text{ cm}^2. \quad (5.49)$$

Die Verschiebungen ergeben sich für Lastfall LF1 zu

$$\mathbf{d}(\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{pas}}^{*S}) = \begin{bmatrix} 0,16 \\ 0,01 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad (5.50)$$

und entsprechen damit genau den Verschiebungen des adaptiven Systems. Die Spannungen im passiven System ergeben sich zu

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{pas}}^{*S}) = [17 \quad 2 \quad -15]^T \text{ kN}, \quad (5.51)$$

in denen sich insbesondere der große Querschnitt in Element 2 aufgrund der erforderlichen großen Steifigkeit bemerkbar macht. Bezogen auf das Minimum des passiven Tragwerks ergibt sich für das adaptive Tragwerk ein um rund 71 % geringeres Volumen. Im passiven Tragwerk kann nur in einem Element die zulässige Spannung ausgenutzt werden. Das signifikante Volumeneinsparungspotential hängt maßgeblich von der Wahl der maximal bzw. minimal zulässigen Verschiebung D_{max} ab. Deshalb wird im Folgenden das Volumen in Abhängigkeit von der zulässigen Verschiebung und von der Anzahl der eingesetzten Aktoren ermittelt.

Abbildung 5.23 (a) stellt das minimale Tragwerksvolumen in Abhängigkeit vom Betrag der Verformungsbeschränkung D_{max} dar. Darin können drei Bereiche identifiziert werden:

- Bereich I: $D_{\text{max}} > 0,075 \text{ cm}$,
- Bereich II: $0,025 \text{ cm} < D_{\text{max}} \leq 0,075 \text{ cm}$ und
- Bereich III: $0,0 \text{ cm} \leq D_{\text{max}} \leq 0,025 \text{ cm}$.

In Abbildung 5.23 (a) sind die Funktionen, die den Wert des minimierten Volumens für die verschiedenen Aktoranzahlen beschreiben, für Bereich I konstant. Ebenso sind die Funktionen, die das Einsparungspotential beschreiben in Abbildung 5.23 (b) in diesem Bereich konstant. Weder die Anzahl der Aktoren (1 oder mehr) noch der Wert der Verformungsrestriktion haben in Bereich I Einfluss auf das minimale Volumen. Die

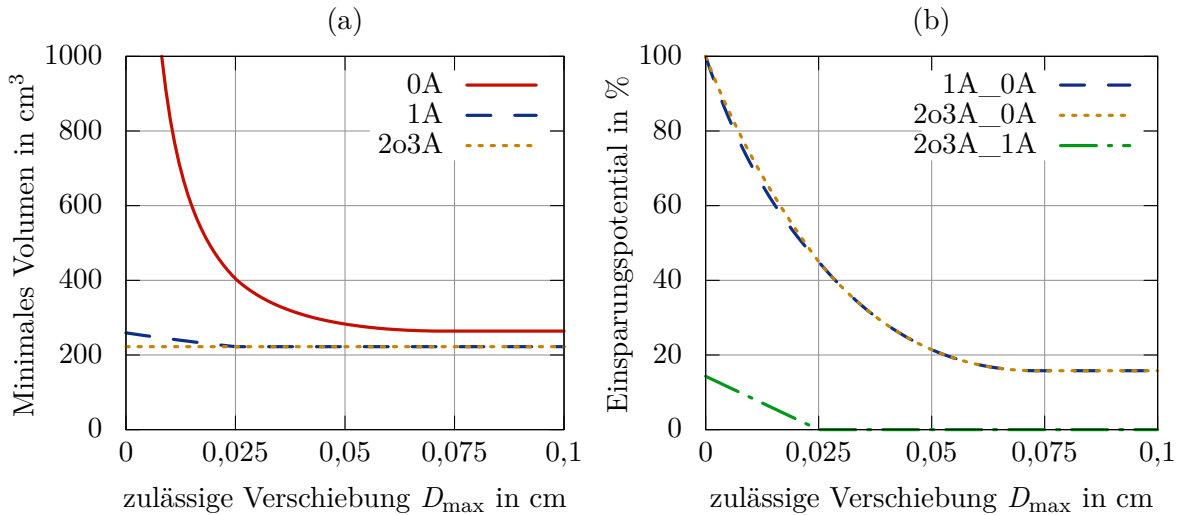


Abbildung 5.23: (a) Darstellung des minimierten Tragwerksvolumens beim Einsatz von keinem Aktor (0A), von einem Aktor (1A) und von zwei oder drei Aktoren (2o3A) in Abhängigkeit von der Verformungsrestriktion in d_2 -Richtung; (b) Darstellung des Volumeneinsparungspotentials bezogen auf die passive Struktur für einen Aktor (1A_0A) und zwei oder drei Aktoren (2o3A_0A) und bezogen auf die Struktur mit einem Aktor für zwei oder drei Aktoren (2o3A_1A) in Abhängigkeit von der Verformungsrestriktion in d_2 -Richtung

Verformungsrestriktion wird in diesem Bereich nicht aktiv. Maßgebend sind die Materialfestigkeiten. Es ergibt sich dasselbe Ergebnis wie für das festigkeitsdominierte Bemessungsproblem im vorhergehenden Abschnitt.

Für Bereich II ergibt sich in Abbildung 5.23 (a) weiterhin ein konstanter Verlauf der Funktionen für die adaptiven Tragwerke mit Aktoren, jedoch steigt das benötigte Volumen für das passive Tragwerk ohne Aktoren in diesem Bereich bereits an. Je weniger Verformung zugelassen wird, desto mehr Volumen ist im passiven Fall notwendig, um die Steifigkeit zu erhöhen und damit diese Verformungsbeschränkung zu erfüllen. Das minimale Volumen für das passive Tragwerk ist am unteren Ende des Bereichs II bereits fast doppelt so groß wie das des adaptiven Tragwerks, somit ergibt sich dort bereits ein Einsparungspotential von fast 50 % in Abbildung 5.23 (b). Die Aktuierung mit einem Aktor in Element 2 reicht aus, um die Verschiebungsbeschränkung einzuhalten und alle Stäbe vollständig auszunutzen.

Für Bereich III ergibt sich nun eine weitere starke Zunahme des minimierten Volumens des passiven Tragwerks. Eine Verschiebung von $d_2 = 0$ cm kann vom passiven Tragwerk nur theoretisch bei einer unendlich großen Steifigkeit, also unendlich großen Querschnitt-

ten und damit ebenfalls unendlich großem Volumen erreicht werden. Interessanter ist in diesem Bereich der Vergleich der beiden Tragwerke mit unterschiedlichen Aktoranzahlen. In Bereich III ist das Tragwerk mit nur einem Aktor nicht mehr in der Lage, die Verformungsrestriktion zu erfüllen und gleichzeitig den effizientesten Lastabtrag zu gewährleisten. Die auch zuvor theoretisch ermittelte Anzahl $n_{\text{akt}} = n_{\text{s}} + n_{\text{K}} = 1 + 1 = 2$ muss hier mindestens eingesetzt werden, um das minimal mögliche Volumen auch in diesem Bereich zu erreichen. Das Einsparungspotential im Vergleich zum passiven Tragwerk weist zwar fast keine Unterschiede auf, jedoch liegt das am sehr großen Volumen des passiven Tragwerks. Bei vollständiger Verschiebungskompensation ($d_2 = 0 \text{ cm}$) können, bezogen auf das Volumen des Tragwerks mit nur einem Aktor, durch den Einsatz eines weiteren Aktors nochmals rund 15 % des Volumens eingespart werden.

Die mithilfe des vorgestellten Verfahrens dimensionierten Tragwerke weisen die Eigenschaft auf, dass zur Sicherstellung der Standsicherheit unter den aufgetragenen Lastfällen die Aktuierung notwendig ist. Bei entsprechenden fail safe- und save life-Konzepten, die einen Zusammenhang von Aktorikausfall und Standsicherheitsgefährdung nach den normativ geregelten Sicherheitskonzepten ausschließen (siehe dazu beispielsweise SOBEK U. A. (2016) und OSTERTAG U. A. (2019)), kann dieses Einsparungspotential, bei entsprechender Systemauslegung, voll ausgenutzt werden. Soll jedoch zur Sicherstellung der Standsicherheit auf die Aktuierung verzichtet werden, kann das volle Einsparungspotential nicht ausgeschöpft werden. Bei festigkeitsdominierten Bemessungssituationen ist unter dieser Randbedingung kein Einsparungspotential erzielbar.

Bei steifigkeitsdominierten Bemessungsproblemen kann das dann optimierte Tragwerk mithilfe folgender Überlegung gefunden werden. In einem ersten Schritt wird die Dimensionierung des passiven Tragwerks ohne Verschiebungsrestriktionen durchgeführt. Im Beispiel ergibt sich daraus das Tragwerk mit dem Volumen $V_{\text{pas}}^* \approx 263,9 \text{ cm}^3$ (siehe Abschnitt 2.2.2). In einem zweiten Schritt wird das resultierende Tragwerk mit Aktorik zur Verschiebungsadaptation und unter Umständen mit Aktorik zur Kompensation der Schnittgrößen aus Zwang ausgestattet. Damit ergibt sich im Vergleich zur passiven Struktur, die zur Einhaltung der Verschiebungsnebenbedingung ein Volumen von $839,7 \text{ cm}^3$ erfordert, ein reduziertes Einsparungspotential von rund 69 %. Weiterhin ergibt sich so ein Tragwerk, das passiv – also ohne Aktuierung – standsicher ist und mithilfe der Aktoren die Verschiebungsanforderungen (Gebrauchstauglichkeit) einhalten kann. Dabei ist zu beachten, dass die hier eingesetzten Aktoren im Falle eines Aktorikausfalls in einen standsicheren Zustand überführt werden, in dem weiterhin die Übertragung der am passiven Tragwerk ermittelten Normalkräfte möglich ist. Diese Forderung stellt einen sehr hohen Anspruch an die Funktionalität der Aktorik dar, der im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet wird, jedoch beispielsweise von dem in STEFFEN U. A. (2021) vorgestellten Aktor erfüllt wird.

5.4.2 Fachwerkturn

Das zweite untersuchte Tragwerk ist der ebenfalls bereits aus vorherigen Untersuchungen bekannte Fachwerkturn, der hier mit leicht abgewandelter Topologie in einer statisch unbestimmten und einer statisch bestimmten Variante untersucht wird. Dieser Abschnitt enthält einen Auszug aus einer Studie, die bereits in GEIGER U. A. (2020b) ausführlich dargestellt ist. Die beiden Varianten sind in Abbildung 5.24 (a) und (b) dargestellt.

Für die Untersuchung werden drei Lastfälle angenommen, die auf das Tragwerk einwirken. Diese sind in Abbildung 5.24 (c) dargestellt. Die Beträge der Lasten werden zu

$$F_1 = 75 \text{ kN} \quad (5.52a)$$

$$\text{und } F_2 = 50 \text{ kN} \quad (5.52b)$$

angenommen. Neben den gegebenen Lastfällen wird das Eigengewicht der Struktur in jedem Lastfall berücksichtigt. Die folgenden Materialparameter werden für die Untersuchung verwendet:

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad (5.53a)$$

$$\rho = 7,85 \text{ t/m}^3, \quad (5.53b)$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2, \quad (5.53c)$$

$$\sigma_{\max}^+ = 2,35 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2 \text{ und} \quad (5.53d)$$

$$\sigma_{\max}^- = -2,35 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2. \quad (5.53e)$$

Die Querschnitte werden in dieser Untersuchung mithilfe der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Methoden optimiert. Angenommen werden quadratische Hohlkasten-Profile, die durch ihre Außenabmessung h und die Wandstärke t beschrieben werden. Die maximal zulässige Außenabmessung h_{\max} beträgt 50 cm und die maximale Wandstärke $t_{\max} = \frac{h}{2}$, was einem Vollquerschnitt entsprechen würde. Die Minimalwerte sind $h_{\min} = 1 \text{ cm}$ und $t_{\min} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$. Die gewählten Minimalwerte liegen für Bauteile mit diesem Einsatzzweck nicht in einem realistischen Bereich, jedoch ist das Ziel dieser Untersuchung nicht die Ermittlung von baubaren Strukturen, sondern das Beobachten und Verstehen von Effekten, die bei der Dimensionierung von adaptiven Strukturen wichtig sind. Dabei spielt es eine entscheidende Rolle, dass der Optimierungsalgorithmus durch die sehr kleinen unteren Grenzen die Möglichkeit erhält, einen Stab praktisch zu entfernen. Theoretisch bleibt der Stab dabei im Tragwerk vorhanden und stellt damit die Lösbarkeit des Gleichungssystems sicher, jedoch besitzt er durch die um Größenordnungen kleinere Masse und Steifigkeit weder signifikanten Einfluss auf die Gesamtmasse noch auf das

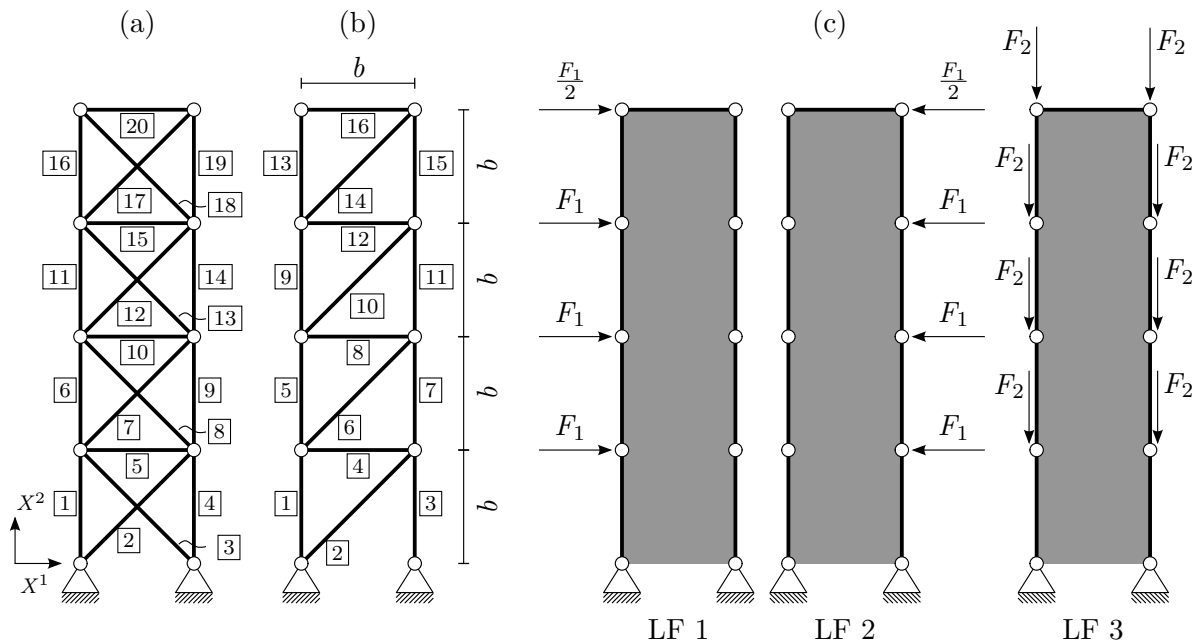


Abbildung 5.24: Darstellung der beiden unterschiedlichen Topologien des Fachwerktrags (a) und (b) für die Untersuchung zur Masseneinsparung; Darstellung der berücksichtigten Lastfälle (c)

Tragverhalten der Struktur. Mit dem Argument des Beobachtens und Verstehens von grundlegenden Effekten wird auch die Vernachlässigung der zusätzlichen Masse durch die serielle Aktorik begründet, die in Vorarbeiten teilweise berücksichtigt wird.

Aktorplatzierung

In der Dimensionierung werden die Querschnittswerte bestimmt. Diese sind deshalb zu Beginn der Berechnung noch nicht bekannt, weshalb die in Abschnitt 4.4 vorgestellten Methoden zur Aktorplatzierung formal nicht eingesetzt werden können. Die Aktoren werden im Folgenden unter der Annahme platziert, dass die Querschnitte im gesamten Tragwerk konstant sind ($EA = \text{konst.}$). Im Verlauf der Studie wird die Zulässigkeit dieser Annahme kritisch überprüft.

An dem Tragwerk werden im Folgenden verschiedene Studien durchgeführt, jeweils mit und ohne Verschiebungs- und Kraftadaptation. Deshalb werden in einem ersten Schritt die Aktoren sowohl für die Verschiebungs- als auch für die Kraftadaptation unabhängig voneinander platziert, d. h. die Aktoren für die Verschiebungsadaptation werden nicht aus dem Kandidatenset für die Aktoren zur Kraftadaptation entfernt. Die Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaptation wird mithilfe des Verfahrens aus Abbildung 4.18 durchgeführt und als Gütemaß wird der maximale Eigenwert gewählt. Das Abbruchkriterium

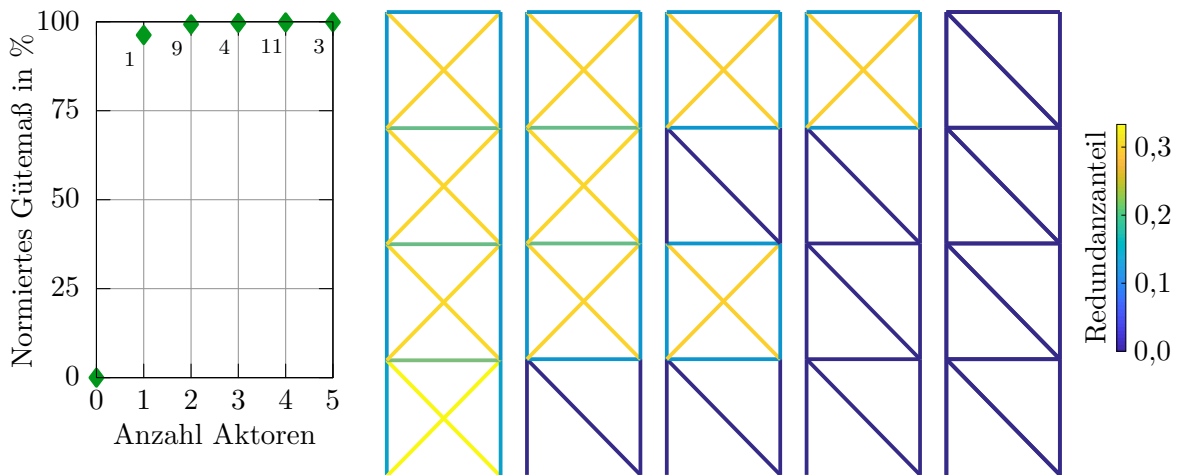


Abbildung 5.25: Maßgebender Ausschnitt aus dem Verlauf der Aktorplatzierung zur Verschiebungsadaption (links) und Verlauf der Aktorplatzierung zur Kraftadaption (rechts)

ist erfüllt, wenn das Gütemaß 95 % der maximal möglichen Verbesserung erreicht hat. Eine Darstellung des relevanten Ausschnitts aus dem Verlauf des aktuellen bezogen auf die maximal mögliche Gütemaß ist in Abbildung 5.25 (links) zu finden. Das Abbruchkriterium ist hier bereits mit einem Akteur in Element 1 erreicht.

Im zweiten Schritt werden die Akteure zur Kraftadaption platziert. Dazu kommt das Verfahren mithilfe der Redundanzmatrix nach Abbildung 4.19 zum Einsatz. Der Verlauf der Berechnung ist in Abbildung 5.25 (rechts) dargestellt. Die schrittweise Reihenfolge der als Akteure gewählten Elemente lautet 2, 12, 7 und 17. Der Akteur in Element 1 für die Verschiebungsadaption wird im Prozess der Akteurplatzierung für die Kraftadaption nicht aus dem Kandidatenset entfernt, wird jedoch zufällig nicht als Akteur gewählt.

In diesen beiden Platzierungen werden keine Elemente doppelt ausgewählt. Deshalb müssen im weiteren Verlauf der Studie keine neuen Platzierungen ermittelt werden, sondern diese können jeweils auch bei isolierter Kraft- bzw. Verschiebungsadaption eingesetzt werden. Also ergeben sich die Akteursätze für die Kraftadaption zu $\mathcal{A}_K^{V1} = \{2, 7, 12, 17\}$ und für die Verschiebungsadaption zu $\mathcal{A}_V^{V1} = \{1\}$.

Die resultierenden Varianten für den statisch unbestimmten Fachwerkturn (V1) sind in Abbildung 5.26 dargestellt. Für den statisch bestimmten Fachwerkturn (V2) werden mit dem entsprechenden Verfahren nur Akteure zur Verschiebungsadaption platziert. Auch hier werden bereits mit einem Akteur über 95 % der insgesamt möglichen Verbesserung erreicht. Das Akteursatz $\mathcal{A}_V^{V2} = \{3\}$ wird gewählt. Eine Kraftadaption ist in dieser Variante nicht möglich und erforderlich. Die resultierende Akteurplatzierung ist ebenfalls in der Abbildung dargestellt.

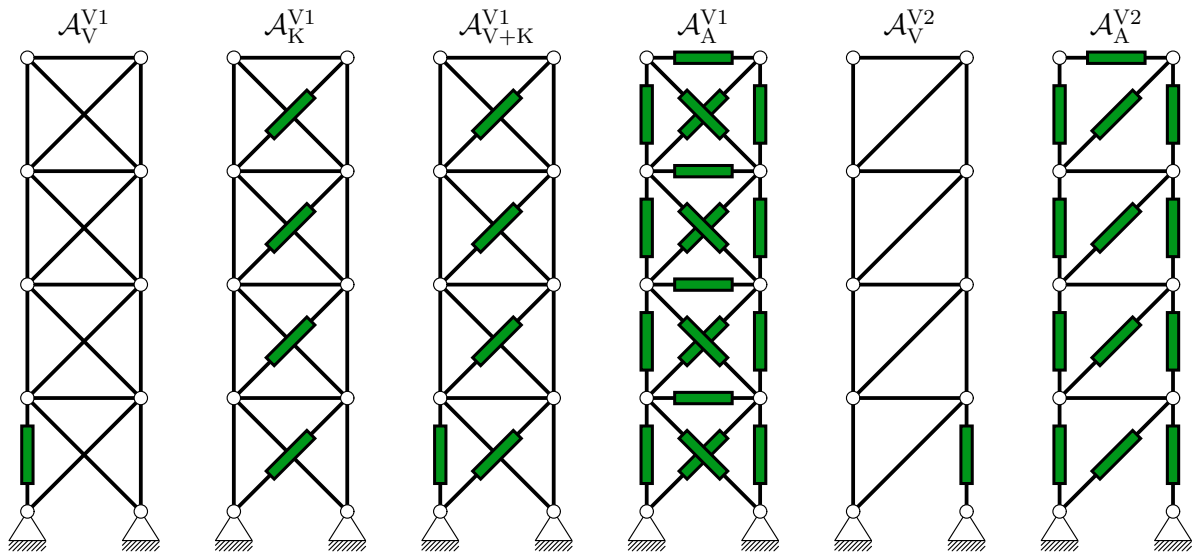


Abbildung 5.26: Darstellung der verschiedenen Varianten mit Aktoren

Zusätzlich wird jeweils noch ein weiteres Aktorset \mathcal{A}_A^{V1} bzw. \mathcal{A}_A^{V2} untersucht, in dem jedes Element einen Aktor darstellt. Damit soll ein eventueller Fehler quantifiziert werden, der aus der Annahme konstanter Elementquerschnitte resultiert.

Optimierungsprobleme

Die Strukturen werden jeweils im passiven und im adaptiven Zustand dimensioniert und die resultierenden Tragwerksmassen werden verglichen. Dazu muss jeweils ein Optimierungsproblem für die passive und für die adaptive Struktur gelöst werden.

Beide Optimierungsprobleme lassen sich vereinheitlicht darstellen als

$$\min_{\mathbf{s}} m = \rho \sum_{i=1}^{n_E} A_i L_i. \quad (5.54)$$

Die $n_C = 8$ ausgewählten Horizontalverschiebungen im Vektor \mathbf{d}_C werden durch D_{\max} beschränkt

$$-D_{\max} \leq (\mathbf{d}_C(\mathbf{s}))_i \leq D_{\max} \quad \forall i = 1 \dots n_C. \quad (5.55)$$

Zusätzlich werden Nebenbedingungen an die Normalspannungen in allen Elementen aufgrund der maximal zulässigen Spannung im Material (σ_{\max}^+ bzw. σ_{\max}^-) und aufgrund der maximal zulässigen Spannung, um Knicken nach Eulerfall 2 eines Fachwerkelements aus-

zuschließen, als

$$\max \left(\sigma_{\max}^-, \sigma_{\max, K}(\mathbf{s}) \right) \leq \sigma_i(\mathbf{s}) \leq \sigma_{\max}^+ \quad \forall i = 1 \dots n_E \quad (5.56)$$

formuliert. Die kritische Knickspannung wird für jedes Element mit

$$\sigma_{\max, K}(\mathbf{s}) = -\frac{I}{A} \frac{E\pi^2}{L^2} \quad (5.57)$$

ermittelt. Stabilitätsversagen auf Systemebene wird nicht berücksichtigt.

Der maßgebende Unterschied zwischen passivem und adaptivem Zustand liegt in der Wahl der Entwurfsvariablen. Im passiven Zustand sind im Vektor der Entwurfsvariablen für jedes Element nur die Querschnittswerte h_i und t_i enthalten und der Vektor ergibt sich entsprechend zu

$$\mathbf{s}_{\text{pas}} = \left[h_1, t_1, h_2, t_2, \dots, h_{n_E}, t_{n_E} \right]^T \quad (5.58)$$

und unter zusätzlicher Berücksichtigung der Aktorwege \mathbf{u}_i in allen Lastfällen $i = 1 \dots n_{LF}$ für den adaptiven Zustand zu

$$\mathbf{s}_{\text{ada}} = \left[h_1, t_1, \dots, h_{n_E}, t_{n_E}, \mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_{n_{LF}}^T \right]^T. \quad (5.59)$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems wird das in Abschnitt 2.2.3 beschriebene SQP-Verfahren eingesetzt.

Studienaufbau

Wie bei der Untersuchung des Drei-Stab-Tragwerks in Abschnitt 5.4.1 werden hier festigkeits- und steifigkeitsdominierte Probleme betrachtet: Soll ein festigkeitsdominierter Fall untersucht werden, werden die Nebenbedingungen zur Beschränkung der Horizontalverschiebungen nicht im Optimierungsproblem berücksichtigt. Zur Untersuchung festigkeitsdominierter Probleme werden insbesondere die Rolle der Anzahl an Lastfällen, die bei der Optimierung berücksichtigt werden, und der Einfluss der Berücksichtigung des Knickens betrachtet.

Für den steifigkeitsdominierten Fall wird die Beschränkung der Horizontalverschiebung berücksichtigt und der Wert für D_{\max} zu $\frac{h}{500}$ gewählt. Bei der Untersuchung steifigkeitsdominierter Probleme wird weiterhin versucht, die Rollen der Aktorplatzierung und des Grads der statischen Unbestimmtheit zu quantifizieren.

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Massenminimierung für das steifigkeitsdominierte Bemessungsproblem mit verschiedenen Aktorsets

Variante	Aktorset	m^* in kg	Einsparung in %
V1	\emptyset	1518,5	
V1	\mathcal{A}_V^{V1}	546,4	64,0
V1	\mathcal{A}_K^{V1}	572,9	62,3
V1	\mathcal{A}_{V+K}^{V1}	503,2	66,9
V1	\mathcal{A}_A^{V1}	503,2	66,9
V2	\emptyset	2107,1	
V2	\mathcal{A}_V^{V2}	598,5	71,6
V2	\mathcal{A}_A^{V2}	598,5	71,6

Steifigkeitsdominiertes Bemessungsproblem

Tabelle 5.5 zeigt die Ergebnisse der Querschnittsoptimierungen für das steifigkeitsdominierte Bemessungsproblem. Bei der Betrachtung der Ergebnisse zeigt sich, dass sich durch den Einsatz von Aktoren in dieser Untersuchung eine signifikante Materialeinsparung ergeben kann. Das größte Einsparungspotential von rund 67 % ergibt sich für die vierfach statisch unbestimmte Variante V1 bei der Verwendung von fünf oder mehr Aktoren (Aktorsets \mathcal{A}_{V+K}^{V1} und \mathcal{A}_A^{V1}). Werden weniger Aktoren eingesetzt (Aktorsets \mathcal{A}_V^{V1} und \mathcal{A}_K^{V1}), ist weiterhin eine signifikante Reduktion der benötigten Materialmenge möglich, jedoch wird das Maximum des Einsparungspotentials nicht erreicht. Für Variante V2 ergibt sich aufgrund der nicht vorhandenen statischen Unbestimmtheit das Minimum des notwendigen Materialaufwands bereits beim Einsatz von nur einem Aktor: keine Kraftadaption ist möglich und nötig. Für die statisch bestimmte Variante ergibt sich ein insgesamt höheres Einsparungspotential von rund 72 %. Verglichen mit dem statisch unbestimmtem Tragwerk, besitzt das statisch bestimmte aufgrund der Topologie eine geringere Steifigkeit, was im betrachteten steifigkeitsdominierten Bemessungsfall zu einem höheren Materialeinsatz im passiven Tragwerk führt. Das zusätzliche Material zur Vergrößerung der Steifigkeit führt zum vergrößerten Einsparungspotential, wenn das Tragwerk adaptiv wird. Bei der Betrachtung der minimierten absoluten Massen anstatt der relativen Einsparungspotentiale liegt der Vorteil jedoch bei Variante V1, da durch die Möglichkeit zur Kraftadaption eine weitere Einsparung möglich ist.

Abbildung 5.27 (oben) zeigt beispielhaft die resultierenden Querschnittsverteilungen wobei die Querschnittsflächen maßstabsgetreu durch die Strichstärke codiert sind. Im unteren Teil der Abbildung ist der elementweise über alle Lastfälle maximale Ausnutzungsgrad farblich gekennzeichnet. Darin zeigt sich die Charakteristik der steifigkeitsdomi-

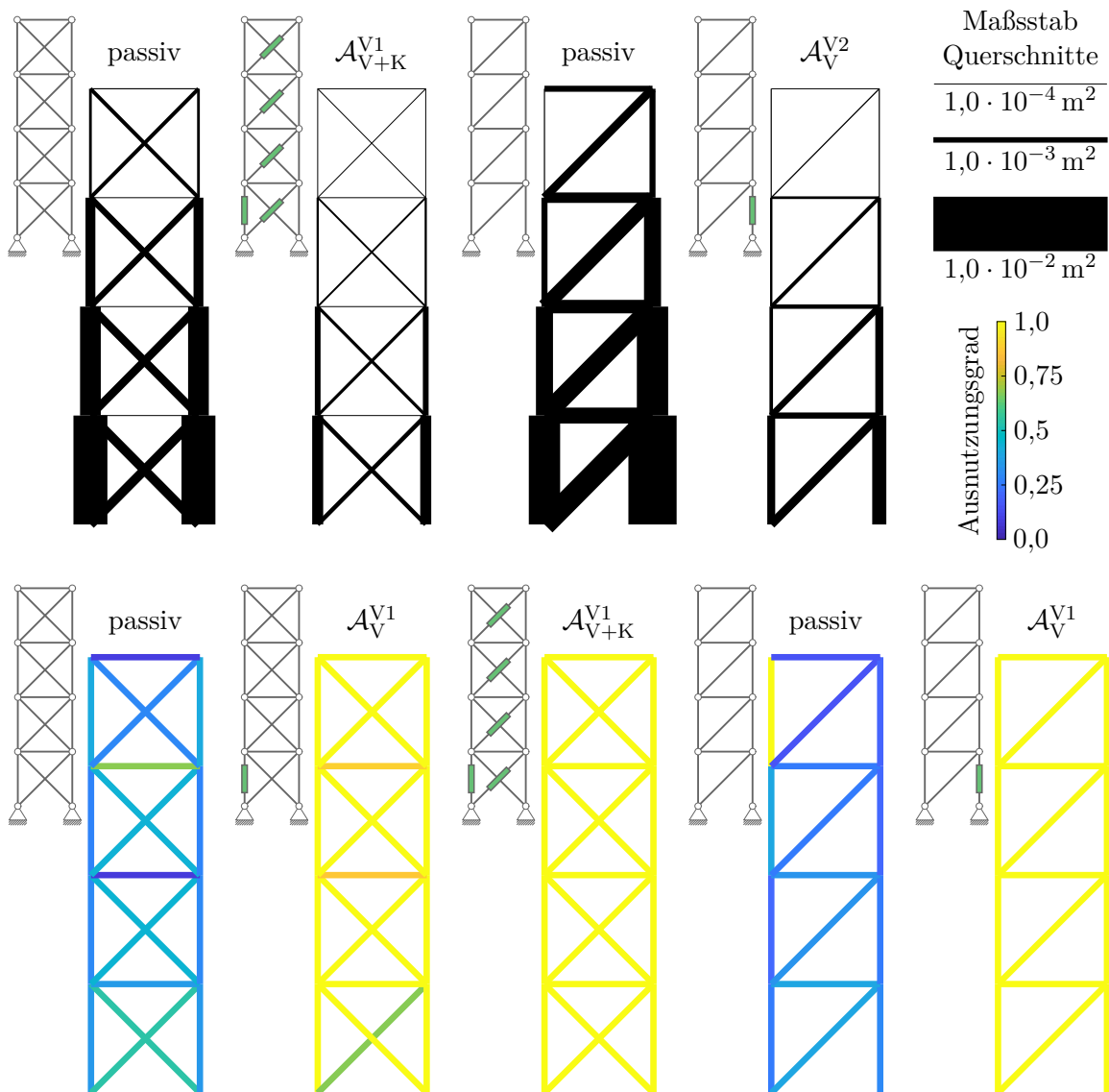


Abbildung 5.27: Darstellung der optimierten Tragwerke (oben) und des elementweise maximalen Ausnutzungsgrads über alle aufgebracht Lastfälle (unten) jeweils für das passive Tragwerk und für die adaptiven Tragwerke mit ausgewählten Aktorsets

nierten Bemessungsprobleme für die passiven Tragwerke: die Tragwerkelemente sind zum größten Teil nur sehr wenig ausgenutzt, da der Materialeinsatz nur zum Erreichen der hohen Steifigkeit und damit der geringen Verschiebungen notwendig ist. Die adaptiven Tragwerke mit ausreichend Aktoren (\mathcal{A}_{V+K}^{V1} und \mathcal{A}_V^{V2}) zeigen den großen Vorteil, dass alle Elemente in mindestens einem Lastfall voll ausgenutzt werden können.

Der Vergleich der Ausnutzungsgrade in Variante V1 für verschiedene Aktorsets zeigt einen Grund für das erhöhte Einsparungspotential beim Einsatz von fünf oder mehr

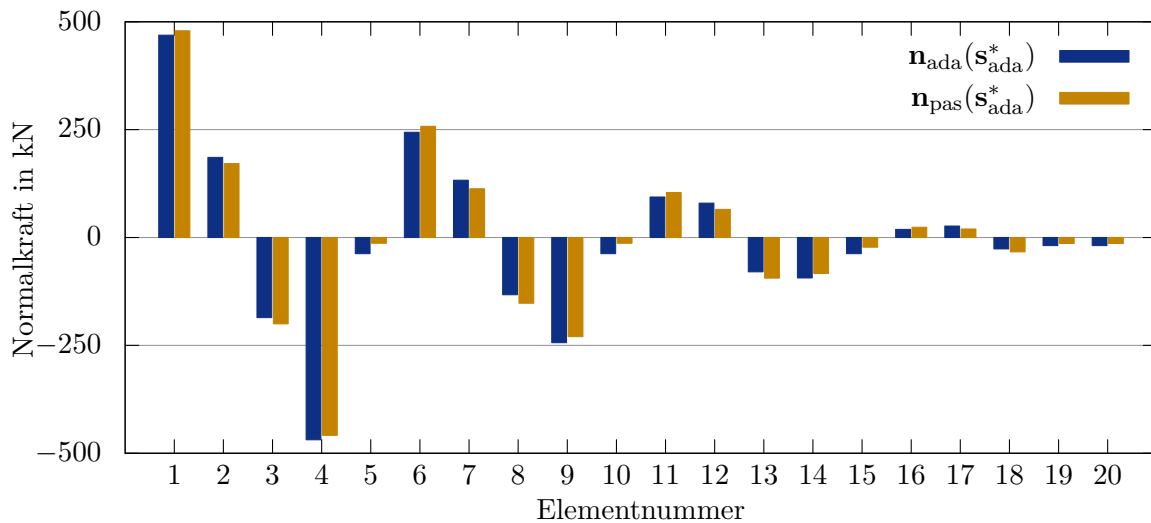


Abbildung 5.28: Darstellung der Normalkraftverteilung \mathbf{n}_{ada} im optimierten adaptiven Tragwerk ($\mathbf{s}_{\text{ada}}^*$, Aktorplatzierung: \mathcal{A}_{V+K}^{V1}) und der Normalkraftverteilung \mathbf{n}_{pas} im optimierten adaptiven Tragwerk $\mathbf{s}_{\text{ada}}^*$ jeweils für Lastfall LF1

Aktoren. Im Gegensatz zum adaptiven Tragwerk mit Aktorset \mathcal{A}_V^{V1} kann mit Aktorset \mathcal{A}_{V+K}^{V1} jedes Element in einem Lastfall oder in mehreren Lastfällen vollständig ausgenutzt werden, wodurch das Materialminimum von rund 502 kg erreicht werden kann. Dabei fällt auf, dass die Aktorplatzierung, die ohne Kenntnis der endgültigen Elementsteifigkeiten im Tragwerk unter bestimmten Annahmen ermittelt wird, die Ausnutzung des vollständigen Einsparungspotentials ermöglicht.

Da bei den adaptiven Tragwerken in jedem Element die Festigkeit maßgebend ist, wird das steifigkeitsdominierte in ein festigkeitsdominiertes Bemessungsproblem überführt. Die vorher maßgebenden Verschiebungen werden mithilfe der Aktorik so beeinflusst, dass sie nicht mehr maßgebend sind.

Abbildung 5.28 zeigt zwei Normalkraftverteilungen für Variante V1 mit Aktorplatzierung \mathcal{A}_{V+K}^{V1} unter Lastfall LF1. Die Verteilung $\mathbf{n}_{\text{ada}}(\mathbf{s}_{\text{ada}}^*)$ beschreibt die Normalkräfte im adaptiven Zustand im optimierten adaptiven Tragwerk und $\mathbf{n}_{\text{pas}}(\mathbf{s}_{\text{ada}}^*)$ die Verteilung der Normalkräfte im passiven Zustand im optimierten adaptiven Tragwerk. Beim Vergleich dieser beiden Verteilungen zeigt sich, dass die Normalkräfte Unterschiede infolge der Aktuierung aufweisen. Als Ergebnis der Optimierung stellt sich somit keine Verschiebungsadaptation mit Kompensation der Zwangsnormalkräfte ein, sondern die Normalkräfte werden gezielt eingestellt.

Tabelle 5.6: Ergebnisse der Massenminimierung für das festigkeitsdominierte Bemessungsproblem für Variante V1 mit unterschiedlicher Anzahl an Lastfällen und verschiedenen Querschnittstypen

Lastfälle	Knicken	Querschnittstyp	m_{passiv} in kg	m_{adaptiv} in kg	Einsparung in %
1	ja	QH	476,0	476,0	0,0
2	ja	QH	476,0	476,0	0,0
3	ja	QH	167,6	167,5	0,1
1,2	ja	QH	537,3	499,0	7,1
1,3	ja	QH	490,5	488,5	0,4
1,2,3	ja	QH	543,9	503,2	7,5
1	nein	QV	476,0	476,0	0,0
1	ja	QV	2153,0	2093,2	2,8
1,2,3	nein	QV	543,9	503,2	7,5
1,2,3	ja	QV	4346,1	3269,8	24,8

Festigkeitsdominiertes Bemessungsproblem

Die Ergebnisse aus der Untersuchung des festigkeitsdominierten Bemessungsproblems sind in Tabelle 5.6 zusammengefasst. Um im weiteren Verlauf den Effekt, der aus der Berücksichtigung des Einzelstabknickens nach Eulerfall 2 resultiert, isolieren zu können, wird hier zusätzlich zum Einsatz des bekannten quadratischen Hohlkastens (QH) eine Untersuchung unter Verwendung eines quadratischen Vollquerschnitts (QV) durchgeführt.

Im ersten Schritt wird jedoch der Einfluss der Anzahl an Lastfällen bei den festigkeitsdominierten Bemessungsproblemen untersucht. Dazu werden verschiedene Kombinationen der Lastfälle auf das Tragwerk aufgebracht und dafür die resultierenden Tragwerksmassen ermittelt. Die daraus resultierenden Daten sind im ersten Teil von Tabelle 5.6 zusammengefasst. Wird nur ein Lastfall berücksichtigt, stimmen die resultierenden Massen für das passive und das adaptive Tragwerk sehr gut überein. Die Abweichung von 0,1 % unter Lastfall 3 resultiert aus der beschriebenen Beschränkung des Entwurfsraums der Querschnittswerte. Sobald mehrere Lastfälle berücksichtigt werden, ergeben sich Unterschiede zwischen den Massen der passiven und der adaptiven Entwürfe. Das mögliche Einsparungspotential steigt bei der Berücksichtigung von zusätzlichen Lastfällen im Allgemeinen weiter an, da dabei die Anpassungsfähigkeit eine immer größere Rolle spielt.

Im zweiten Teil von Tabelle 5.6 sind die Ergebnisse der Studie zum Einfluss des Einzelstabknickens dargestellt. Der eingesetzte quadratische Vollquerschnitt wird in der Querschnittsoptimierung durch eine einzelne Entwurfsvariable, die Querschnittsfläche A ,

beschrieben. Dafür wird als obere und untere Grenzen die gewählt, die sich auch für den quadratischen Hohlkasten ergeben: A_{\max} für die maximal zulässige Außenabmessung $h_{\max} = 50 \text{ cm}$ und die zugehörige maximale Blechstärke von $t_{\max} = 25 \text{ cm}$ zu $A_{\max}^{\text{QV}} = 2500 \text{ cm}^2$ und für die minimalen Maße $h_{\min} = 0,1 \text{ cm}$ und $t_{\min} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ zu $A_{\min}^{\text{QV}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2$.

Die Ergebnisse aus der Tragwerksoptimierung beim Einsatz des quadratischen Vollquerschnitts unterscheiden sich von den Ergebnissen, die sich für den Hohlkasten ergeben, wenn das Einzelstabknicken berücksichtigt wird. Da der Vollquerschnitt bei derselben Querschnittsfläche im Vergleich zum Hohlquerschnitt maximal dasselbe Flächenträgheitsmoment I aufweist, ist der Vollquerschnitt im Allgemeinen weniger geeignet, wenn das Flächenträgheitsmoment eine Rolle spielt. Deshalb ergibt sich insgesamt eine deutlich größere absolute Tragwerksmasse bei der Verwendung des Vollquerschnitts unter Berücksichtigung des Knickens. Wird das Knicken nicht berücksichtigt, ergeben sich identische Ergebnisse unter Verwendung der beiden Querschnittstypen. Die resultierenden Tragwerke, die sich unter Berücksichtigung von nur einem Lastfall, Vernachlässigung von Knicken und Einsatz des Vollquerschnitts ergeben, sind in Abbildung 5.29 dargestellt. Dabei sind die Elemente, deren Querschnitte bei der Optimierung so klein wie möglich und damit praktisch aus dem Tragwerk entfernt werden, gestrichelt dargestellt. Wie in der Literatur beschrieben, ergeben sich in diesem Fall statisch bestimmte Tragwerke.

Interessanterweise ergibt sich bei der Berücksichtigung von Knicken und Verwendung des quadratischen Vollquerschnitts bereits bei einem Lastfall ein Potential zur Massenreduktion, das sich bei der Berücksichtigung von mehreren Lastfällen weiter steigert. Formal betrachtet ergibt sich dabei ein Problem, bei dem die Steifigkeit des Querschnitts EI eine bemessungsrelevante Rolle spielt. Durch die beiden Entwurfsvariablen Außenabmessung und Blechdicke und deren obere Grenzen können für den Hohlkasten im vorliegenden Fall die notwendige Steifigkeit zur Sicherstellung des ausreichenden Widerstands gegen Knicken auch im passiven Tragwerk bereits erhalten werden. Für den Vollquerschnitt ist der Entwurfsraum im passiven Fall dafür nicht ausreichend und nur im adaptiven Tragwerk kann das Massenminimum durch Kraftadaptation erreicht werden. Würde im passiven Tragwerk die Möglichkeit bestehen, Elemente vorzuspannen, könnte das Massenminimum für einen einzigen konstant einwirkenden Lastfall ebenfalls erreicht werden.

Wie bei der Dimensionierung des Drei-Stab-Tragwerks in Abschnitt 5.4.1 sind auch in dieser Untersuchung die resultierenden adaptiven Tragwerke unter den gegebenen Lastfällen im Allgemeinen nur bei einsatzbereiter Aktorik standsicher. Um die Abhängigkeit von der Funktionsfähigkeit der Aktorik zu vermeiden, kann auch hier der passiv standsichere Entwurf mit der Masse von 543,9 kg aus dem festigkeitsdominierten Bemessungs-

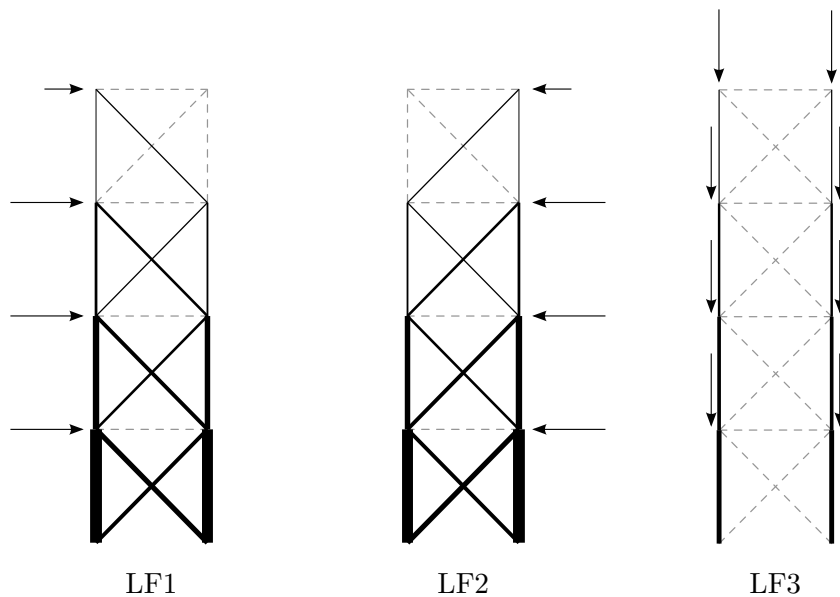


Abbildung 5.29: Darstellung der optimierten Tragwerke (passiv und adaptiv sind identisch) für das festigkeitsdominierte Bemessungsproblem jeweils unter einem Lastfall und unter Vernachlässigung von Einzelstabknicken für den quadratischen Vollquerschnitt; Elemente mit Querschnittsflächen an der unteren Grenze des zulässigen Bereichs gestrichelt; Maßstab in Abbildung 5.27

problem gewählt werden und – wie beschrieben – zusätzlich mit Aktorik zur Verschiebungsadaption ausgestattet werden. Dadurch verringert sich das Einsparungspotential, jedoch kann die Standsicherheit auch ohne Aktuierung gewährleistet werden.

5.5 Fazit

Ziel der Studien ist das Erkennen und Verstehen von Anforderungen, die im Entwurfsprozess von adaptiven Tragwerken berücksichtigt werden können, um sinnvolle adaptive Strukturen zu erhalten. POPPER (1935) bezeichnet den Versuch, generalisierte Regeln aus der Betrachtung von Einzelfällen abzuleiten, als „schwierig bis unmöglich“, da dies nicht unbedingt zu korrekten Resultaten führt. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Studie nochmals zusammengefasst und es wird dennoch versucht, daraus mögliche Schlussfolgerungen für die zu entwerfenden Strukturen zu ziehen.

Der Begriff Entwurf umfasst an dieser Stelle nicht nur den Entwurf eines neuen Tragwerks mit den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Schritten, sondern auch den Entwurf beispielsweise eines Aktuierungskonzepts für eine bisher passive Struktur. Insbesondere die beiden ersten Studien, in denen die Kraftadaption und die Verschiebungsadaption

thematisiert werden, sind auch auf die nachträgliche Ausstattung passiver Strukturen mit Aktoren anwendbar.

Die Steifigkeit, die Festigkeit und die Duktilität, die von der Querschnitts- bzw. Materialskala auf die Tragwerksskala übertragen werden, werden in passiven Strukturen beim Entwurf und der Auslegung einmal festgelegt und sind danach nicht mehr anpassbar, ohne Umbauten im Tragwerk vornehmen zu müssen. Auf der Materialskala beeinflussen sich diese Eigenschaften gegenseitig, beispielsweise ist ein hochfester Stahl relativ spröde, d. h. wenig duktil. Für adaptive Tragwerke kann unter gewissen Voraussetzungen erreicht werden, dass sich Eigenschaften wie Steifigkeit, Festigkeit und Duktilität entkoppeln und während des Betriebs des Tragwerks bedarfsgerecht angepasst werden können.

Die nachträgliche Erhöhung der Tragfähigkeit kann in den statisch unbestimmten Tragwerken durch Kraftadaption erreicht werden, die ein noch ungenutztes Tragfähigkeitspotential aufweisen. In einem Tragwerk jedoch, das so optimiert ist, dass die Ausnutzungsgrade der Spannungen für den relevanten Lastfall bereits im passiven Zustand 100 % betragen, kann die Tragfähigkeit nicht erhöht werden. Häufig sind Tragfähigkeitsreserven dann vorhanden, wenn für die Bemessung des Tragwerks die Steifigkeit und nicht die Festigkeit maßgebend war, wenn das Problem also steifigkeits- und nicht festigkeitsdominiert war. Dann können durch die Aktuierung sowohl Verschiebungen reduziert als auch das zusätzliche Tragfähigkeitspotential ausgenutzt werden. In diese Fall kann theoretisch auch in statisch bestimmten Strukturen die Tragfähigkeit noch erhöht werden. Im Rahmen der Arbeit werden dabei Steigerungspotentiale im einstelligen Prozentbereich beobachtet.

Durch den Einsatz von ausreichend Aktoren kann theoretisch eine unendliche Steifigkeit bei gleichzeitig unveränderter Schnittgrößenverteilung hergestellt werden. Jedoch muss dafür in jedem Element ein serieller Aktor vorgesehen werden, was der nachträglichen Ausrüstung eines bestehenden Tragwerks eher widerspricht und faktisch einen Neubau darstellt. Das nachträgliche Ausrüsten von Tragwerken durch Aktoren um beispielsweise die Schnittgrößen zu verringern und damit die Dauerhaftigkeit beispielsweise von Brücke zu erhöhen, stellt jedoch einen vielversprechenden und realisierbaren Ansatz dar. Wenn die Steifigkeit nur vergrößert werden soll, ist in den untersuchten statisch bestimmten und statisch unbestimmten Beispielen nur eine geringe Anzahl an Aktoren notwendig. In statisch unbestimmten Tragwerken werden dabei zusätzliche Aktoren zur Kompensation der Zwangsschnittgrößen notwendig. Statisch unbestimmte weisen im Vergleich zu statisch bestimmten Tragwerken bereits eine höhere Steifigkeit im passiven Zustand auf, weshalb die Aktuierung unter Umständen weniger häufig erfolgen muss.

Die Häufigkeit der Aktuierung wird in der vorliegenden Untersuchung nicht weiter betrachtet und liegt nicht im Fokus der Arbeit. Der Aufwand für ein einmaliges Aktuieren

wird in der Studie betrachtet und für verschiedene Tragwerke und Lastfälle verglichen. Dabei zeigen sich starke Abhängigkeiten von der gewählten Aktorplatzierung, die so gewählt werden kann, dass während der Kraftadaption das Tragwerk theoretisch als „Kraftwerk“ verwendet werden kann (energy harvesting). Durch reines Nachlassen kann beispielsweise in jedem Fall die Tragfähigkeitserhöhung für einen bestimmten Lastfall erreicht werden und auch eine Reduktion der Maximalbeanspruchung ist damit möglich. Unter Einwirkung verschiedener Lastfälle sind diese Möglichkeiten abhängig von der Platzierung der Aktoren. Dabei ergibt sich im Allgemeinen eine Vergrößerung der Verformungen. Bei der Adaption, insbesondere bei der Kompensation, von Verschiebungen ist die Aktuierung durch Nachlassen nicht zielführend. Die effektivste Verschiebungsadaption erfolgt durch Aktuierung hoch belasteter Elemente, was zu einem großen Bedarf an mechanischer Aktuierungsarbeit führt. Der Aktuierungsaufwand kann in der automatisierten Platzierung der Aktoren jedoch noch nicht berücksichtigt werden.

Bei der Dimensionierung von adaptiven Stabtragwerken können signifikante Volumen- bzw. Masseneinsparungspotentiale erzielt werden. Für festigkeitsdominierte Bemessungsprobleme ergibt sich im Vergleich zu steifigkeitsdominierten Bemessungsproblemen in der hier durchgeführten Studie ein geringeres Einsparungspotential. In diesem Fall spielt ausschließlich die Kraftadaption eine Rolle, weshalb dieser Einsparungseffekt nur bei der Dimensionierung statisch unbestimmter Tragwerke auftritt. Für die vollständige Ausnutzung des Einsparungspotentials muss durch die Aktorik der vollständige Aktuierungsraum aufgespannt werden. Die Rolle des globalen Tragverhaltens wird aus der Betrachtung der Effektivität der Kraftadaption in der Studie zur Erhöhung der Tragfähigkeit und der vergleichenden Betrachtung des möglichen Einsparungspotentials am Drei-Stab-Tragwerk und am Fachwerkurm als untergeordnet betrachtet. Wenn die Verschiebungen nicht bemessungsrelevant sind, ergibt sich kein großes Einsparungspotential. Bei steifigkeitsdominierten Bemessungsproblemen ergibt sich abhängig von den konkreten Anforderungen ein signifikantes Einsparungspotential. Um dieses Potential vollständig erschließen zu können, sind ausreichend Aktoren einzusetzen, die sowohl den Aktuierungsraum vollständig aufspannen als auch die Verschiebungsadaption vornehmen können. In vorher steifigkeitsdominierten Bemessungsproblemen können durch die Verschiebungsadaption die Materialfestigkeiten voll ausgenutzt werden, wodurch diese maßgebend für die Bemessung werden und somit das vorher steifigkeitsdominierte in ein festigkeitsdominiertes Bemessungsproblem transformiert wird.

Die Anzahl an Lastfällen, die auf das Tragwerk einwirken, spielt eine entscheidende Rolle. In den Studien zur Kraft- und zur Verschiebungsadaption wird jeweils nur ein Lastfall untersucht und die Aktuierung wird durch eine vorgegebene Längenänderung modelliert. Wenn auf ein Tragwerk dauerhaft nur ein einziger Lastfall einwirkt, kann diese vorgegebene Längenänderung auch durch eine ständig vorhandene Vorspannung realisiert werden. In diesem vorgespannten Fall ist die passive Struktur in der Lage, den-

selben optimalen Zustand wie die adaptive Struktur einzunehmen. Ergibt sich jedoch eine Änderung der Belastung, ist eine passive Struktur nicht in der Lage, darauf zu reagieren. Diese Belastungsänderung schließt auch eine eventuelle Entlastung der Struktur ein, auf die nicht reagiert werden kann. Auch für die Dimensionierung ergibt sich diese entscheidende Rolle der Anzahl an Lastfällen. Im Falle eines einzelnen, dauerhaft einwirkenden Lastfalls, kann eine passive Struktur durch entsprechend vorgesehene Vorspannung mit derselben minimalen Materialmenge realisiert werden. Jedoch ist auch in diesem Fall bei einer Belastungsänderung keine Anpassung der Vorspannung möglich und die Nebenbedingungen werden unter Umständen nicht mehr eingehalten.

In den untersuchten Bemessungsproblemen hängt das Einsparungspotential von der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Aktorik ab. Dies wird anhand des festigkeitsdominierten Beispiels gezeigt, muss aber im Allgemeinen natürlich auch für steifigkeitsdominierte Probleme betrachtet werden. Weiterhin ist der Totalausfall der Aktorik ein zu beachtender Punkt, dessen Auswirkung jedoch unter bestimmten Annahmen an das fail safe-Konzept durch eine Anpassung des Entwurfsprozesses deutlich weniger kritisch gestaltet werden kann. Dazu wird für die Sicherstellung der Tragfähigkeit der Strukturen keine Kraftadaption berücksichtigt, wodurch ein geringer Teil des Einsparungspotentials verloren geht, jedoch im Fall eines Ausfalls der Aktorik nur die Anforderungen an die Verformungen nicht mehr eingehalten werden können.

Weiterhin kann Adaptivität auch in Tragwerken eine signifikante Materialeinsparung bedeuten, bei deren Bemessung Dauerhaftigkeitsaspekte eine maßgebende Rolle spielen. Dies wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter vertieft, jedoch kann die Kraftadaption bei entsprechender Wahl des Adaptionziels auch Spannungs-Schwingbreiten im Material verringern. Ein Ausfall der Aktorik erzeugt auch dabei keine unmittelbare Gefährdung der Standsicherheit, wenn dieser Zustand nur für einen beschränkten Zeitraum vorhanden ist.

Um weitere Erkenntnisse zu erhalten, müssen Studien mit einer größeren Anzahl an untersuchten Tragwerken bzw. Tragwerksvarianten erfolgen. Die hier präsentierten Ergebnisse sind sowohl ein erster Schritt in Richtung Methodik, mit welcher Untersuchungen erfolgen können, als auch ein deutlicher Fortschritt im Verstehen adaptiver Tragwerke.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Zielsetzung dieser Arbeit war die strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken und die Übertragung der aus der Charakterisierung gewonnenen Erkenntnisse auf den Entwurfs- und Optimierungsprozess von adaptiven Tragwerken. Es wurden Vorarbeiten diskutiert, Methoden zur Charakterisierung analysiert und Studien durchgeführt, um die wesentlichen Fragen, die in Abschnitt 1.3 gestellt werden, zu beantworten. Im folgenden Kapitel werden die erhaltenen Antworten und die daraus gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst sowie Ideen und Potentiale zur Weiterführung der Arbeiten aufgezeigt.

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einsatz von Adaptivität in tragenden Strukturen anhand von Stabtragwerken und insbesondere anhand von Fachwerkstrukturen betrachtet. Dabei wurden die Eigenschaften, die für die Anpassungsfähigkeit der Strukturen maßgeblich sind, und Methoden zur Quantifizierung dieser Eigenschaften vorgestellt. Der Grad der statischen Unbestimmtheit stellt eine der wesentlichen Tragwerkeigenschaften dar, der nicht nur als ganzzahliger Wert, sondern mithilfe der Redundanzmatrix auch als Verteilung im Tragwerk analysiert wurde. Neu im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die Interpretation und Beschreibung der Einträge und der Eigenschaften der Redundanzmatrix für das Verhalten adaptiver Strukturen. Die Werte aus der Redundanzmatrix liefern Aussagen darüber, ob durch eine Aktuierung Schnittgrößen in bestimmten Elementen verändert werden können und wo Aktoren zur Kraftadaption für eine ausreichende Effektivität eingesetzt werden müssen. Aus den Eigenvektoren der Redundanzmatrix kann der Kraft-Aktuierungsraum ermittelt werden, der Einblick in

die Anpassbarkeit von Schnittgrößen auf Systemebene liefert. Neben dem Grad der statischen Unbestimmtheit und der Redundanzmatrix wurden verschiedene lastfallabhängige Eigenschaften passiver Tragwerke und etablierte Verfahren für deren Quantifizierung diskutiert. Außerdem wurden spezielle Eigenschaften optimierter passiver Tragwerke aus der Literatur beschrieben.

Nach der Vorstellung des Aufbaus und der Funktionsweise adaptiver Tragwerke wurden verschiedene Verfahren zur Modellierung der Aktuierung diskutiert. Dabei wurde unter den im Rahmen der Arbeit getroffenen Annahmen die Äquivalenz der Modellierung als Lastfall vorgegebener Längenänderungen und der Modellierung mithilfe eines neu hergeleiteten Fachwerk-Aktor-Elements gezeigt. Eine Modellierung durch die Berücksichtigung der Aktuierung in einer effektiven Flexibilitäts- oder Steifigkeitsmatrix wurde aufgrund der größeren Komplexität nur theoretisch betrachtet, jedoch nicht weiter verfolgt. Die Arbeit betrachtet alle Modellierungsvarianten auf einer strukturmechanischen Ebene und liefert Einblick in interessante interdisziplinäre Zusammenhänge zwischen der Regelungstechnik bzw. Systemdynamik und der Strukturmechanik. Für die weitere Arbeit wurde aufgrund der einfachen technischen Umsetzbarkeit die Modellierung mithilfe vorgegebener Längenänderungen gewählt.

Daraufhin wurden zwei Verfahren zur automatisierten Platzierung von Aktoren in Stabtragwerken vorgestellt. Das auf der Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix basierende Verfahren, das bereits aus dem Bereich der Systemdynamik in der Literatur beschrieben ist, ist in der Lage, Aktoren zur Verschiebungs- und zur Kraftadaption zu platzieren. Dieses Verfahren wurde in die Begrifflichkeit der Strukturmechanik übertragen und für die Anforderungen der vorliegenden Arbeit angepasst. Zur Kraftadaption wird in der Arbeit ein neues Verfahren vorgeschlagen, das ebenfalls Aktorplatzierungen ermitteln kann, die den Aktuierungsraum vollständig aufspannen. Dieses neue Verfahren besitzt Vorteile in der deutlichen Reduktion des Rechenaufwands. Auch an dieser Stelle konnten durch die interdisziplinäre Betrachtung neue disziplinäre Einblicke und Erkenntnisse gewonnen werden, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wurden.

Zu Auswirkungen verschiedener strukturmechanischer Eigenschaften auf das Potential und die Performanz von adaptiven Stabtragwerken gab es nach Kenntnis des Autors in der Literatur bislang keine systematische Analyse. Deshalb wurden Studien durchgeführt, um die bereits beschriebenen Erkenntnisse an weiteren Beispielen zu bestätigen und, vor allem, durch die vergleichende Betrachtung von Tragwerken mit unterschiedlichen Ausprägungen dieser Eigenschaften und unter verschiedenen Belastungen weitere Erkenntnisse zu gewinnen. Bei der gezielten Veränderung der Normalkraftverteilung in einer Struktur können beispielsweise einzelne Elemente entlastet, die maximale Beanspruchung minimiert oder die maximale Traglast vergrößert werden. Dabei konnte beobachtet werden, dass Normalkräfte infolge von einwirkenden Kraftlastfällen im

Gegensatz zu Normalkräften aus Zwangslastfällen durch eine serielle Aktuierung nicht vollständig kompensiert werden können. Der Grad der statischen Unbestimmtheit und dessen Verteilung in der Struktur spielen für die Kraftadaption eine wesentliche Rolle. In statisch bestimmten Tragwerken ist im Rahmen der hier getroffenen Annahmen keine Kraftadaption möglich. Die Verschiebungsadaption ist sowohl in statisch bestimmten als auch in statisch unbestimmten Tragwerken möglich. In beiden Fällen ist theoretisch eine vollständige Kompensation aller auftretenden Verschiebungen möglich. In statisch unbestimmten Tragwerken entstehen bei der Verschiebungsadaption im Allgemeinen Schnittgrößen aus Zwang. Diese Normalkraftverteilungen aus Zwangslastfällen können entsprechend durch weitere Aktoren zur Kraftmanipulation kompensiert werden. Die vorliegende Arbeit liefert das erste Mal eine systematische vergleichende Analyse dieser beiden Adaptionarten auf Basis der strukturmechanischen Eigenschaften.

Eine Studie zur Verringerung des Aktuierungsaufwands lieferte einerseits weitere interessante Einblicke für die Fachwerkstrukturen, andererseits wurde darin der Entwurfsprozess detailliert untersucht. Dabei konnte der Zusammenhang zwischen der Reihenfolge einzelner Schritte im Entwurfsprozess adaptiver Strukturen und der Güte des damit erzielten Ergebnisses studiert werden. Daraus konnte in dieser Arbeit der Schluss gezogen werden, dass die Optimierung einer passiven Struktur mit nachträglichem Einsatz von Adaptivität im Allgemeinen zu einem schlechteren Ergebnis führt als die Optimierung einer adaptiven Struktur. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, dass sich der Entwurfsprozess adaptiver Tragwerke von dem herkömmlicher Tragwerke unterscheiden muss.

In der letzten durchgeführten Studie konnte gezeigt werden, dass bei der Dimensionierung adaptiver Tragwerke im Rahmen der getroffenen Annahmen eine signifikante Materialeinsparung erzielt werden kann. Dazu wurde in dieser Arbeit die analytische Lösung für ein weithin bekanntes Optimierungsbeispiel im Kontext der Möglichkeiten, die durch den Einsatz von adaptiven Strukturen geboten werden, gezeigt. Damit konnten die Einflüsse verschiedener Nebenbedingungen und der Aktoranzahl gezielt untersucht werden. Weiterhin wurde insbesondere bei der Analyse eines Fachwerksturms die Umwandlung von festigkeits- in steifigkeitsdominierte Bemessungsprobleme durch den Einsatz von Adaptivität beschrieben. Dabei konnte gezeigt werden, dass für den Einsatz minimaler Masse in den untersuchten Fällen die statisch unbestimmten adaptiven Stabtragwerke den statisch bestimmten Topologien überlegen waren. Zudem konnte der Einfluss weiterer Parameter, wie z. B. die Querschnittsform und die Anzahl an berücksichtigten Lastfällen, gezielt untersucht und bewertet werden. In der Studie zur Dimensionierung gezielt untersucht, jedoch auch für die anderen Studien gültig ist die Erkenntnis, dass jede adaptive Struktur im Vergleich zur rein passiven Struktur erst dann einen Vorteil besitzt, wenn sich die Belastung verändert und daraus ein Anpassungsbedarf überhaupt

erst entsteht. Unter einem einzigen dauerhaft einwirkenden Lastfall sind vorgespannte passive Strukturen gleichwertig.

6.2 Ausblick

Zu Beginn der Arbeit wurde die Beschreibung von Charakteristika, die nur für adaptive und nicht für passive Tragwerke existieren, als ein Ziel formuliert. Eine maßgebliche Eigenschaft ist die Adaptierbarkeit, die beschreibt, wie gut in einer Struktur Schnittgrößen oder Verschiebungen durch Aktuierung verändert werden können. Eine genaue Quantifizierung findet dafür beispielsweise mithilfe der Eigenschaften der Gram'schen Störgrößenkompensierbarkeitsmatrix im Rahmen der Aktorplatzierung statt. Weitere Maße sind denkbar, beispielsweise basierend auf Matrizen, die sich bei der Berechnung der Arbeiten und Energieanteile in Abschnitt 4.3.3 ergeben.

Weiterhin können die Rollen des globalen Lastabtrags und der Topologie, die sich beim Auflösen des Tragwerks als Fachwerk ergibt, noch weitergehend analysiert werden. In der Arbeit wurde anhand eines Kragarms und eines einseitig eingespannten Einfeldträgers, die jeweils als Fachwerkstrukturen aufgelöst wurden, untersucht, welche Potentiale durch Kraftadaption erschlossen werden können. Die zugrunde liegende Hypothese war, dass der globale Lastabtrag einen signifikanten Einfluss auf dieses Potential hat, was in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht gezeigt werden konnte. Eine weitere Ausweitung der Studie scheint hier nötig.

Die vorgestellten Methoden zur Aktorplatzierung ermitteln automatisiert eine Anordnung von Aktoren im Tragwerk, um entweder Schnittgrößen oder Verschiebungen gezielt zu verringern bzw. um den Kraft-Aktuierungsraum vollständig aufzuspannen. Mithilfe der Aktoren wird das Tragwerk bei der Adaption in einen Zielzustand gebracht, der häufig weiteren Anforderungen unterliegt. Diese Anforderungen werden bei der Aktorplatzierung nicht berücksichtigt und führen unter Umständen zu suboptimalen Ergebnissen im Zusammenspiel von Aktorplatzierung und Adaptionziel. Beispielsweise könnte die Performanz der Aktuierung, quantifiziert durch den notwendigen Aktuierungsaufwand, bereits bei der Aktorplatzierung gezielt verbessert sowie Beschränkungen von Aktorkraft oder Aktorweg berücksichtigt werden.

Die vorliegende Arbeit zum Thema Stabtragwerke beschäftigt sich in weiten Teilen mit Fachwerkstrukturen und geht von der Übertragbarkeit der Erkenntnisse auf Rahmentragwerke aus. An dieser Stelle müssen jedoch weitere Untersuchungen erfolgen, insbesondere zur Rolle der Aktuierungsräume für alle Schnittgrößen und zu verschiedenen Aktoren, die zum Abdecken dieser Räume eingesetzt werden. Dabei können neben den hier eingesetzten Linearaktoren auch weitere Aktortypen zum Einsatz kommen. Der nächste

Schritt wäre die Betrachtung von Flächentragwerken, für die andere Aktuierungskonzepte und Aktoren benötigt werden. Ein erster Ansatzpunkt für die Untersuchung der Kraftadaption in Platten kann beispielsweise die in der Arbeit erwähnte Analogie von Fließgelenken und Fließlinien sein.

Literaturverzeichnis

ABDEL-ROHMAN UND LEIPHOLZ 1983

ABDEL-ROHMAN, M. ; LEIPHOLZ, H. H.: Active Control of Tall Buildings. In: *Journal of Structural Engineering* 109 (1983), Nr. 3, S. 628–645. – ISSN 0733-9445, 1943-541X

ALI UND MOON 2007

ALI, M. M. ; MOON, K. S.: Structural Developments in Tall Buildings: Current Trends and Future Prospects. In: *Architectural Science Review* 50 (2007), Nr. 3, S. 205–223. – ISSN 0003-8628, 1758-9622

ALTENBACH 2015

ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 3. überarbeitete Auflage. Berlin Heidelberg : Springer Vieweg, 2015. – ISBN 978-3-662-47069-5

ARGYRIS 1957

ARGYRIS, J. H.: Die Matrizenmethode der Statik. In: *Ingenieur-Archiv* 25 (1957), Nr. 3, S. 174–192. – ISSN 0020-1154, 1432-0681

BAHNDORF 1991

BAHNDORF, J.: *Zur Systematisierung Der Seilnetzrechnung Und Zur Optimierung von Seilnetzen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1991

BLETZINGER 1990

BLETZINGER, K.-U.: *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1990

BÖHM U. A. 2020

BÖHM, M. ; WAGNER, J. L. ; STEFFEN, S. ; GADE, J. ; GEIGER, F. ; SOBEK, W. ; BISCHOFF, M. ; SAWODNY, O.: Input Modeling for Active Structural Elements - Extending the Established FE-Workflow for Modeling of Adaptive Structures. In:

2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). Boston, MA, USA : IEEE, 2020, S. 1595–1600. – ISBN 978-1-72816-794-7

BÖHM U. A. 2019

BÖHM, M. ; WAGNER, J. L. ; STEFFEN, S. ; SOBEK, W. ; SAWODNY, O.: Homogenizability of Element Utilization in Adaptive Structures. In: *2019 IEEE 15th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. Vancouver, BC, Canada : IEEE, 2019, S. 1263–1268. – ISBN 978-1-72810-356-3

BORNSCHEUER 1975

BORNSCHEUER, W. F.: *Vorlesungen in Baustatik*. 1975. – Unveröffentlichtes Skript, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Mitarbeit: Ramm, E.

BRIEM 2021

BRIEM, S.: *Aktorplatzierung zur Kraftmanipulation mit der Redundanzmatrix*. 2021. – Bachelorarbeit; entstanden unter der Betreuung des Autors; verfügbar am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

BRUETTING U. A. 2019

BRUETTING, J. ; SENATORE, G. ; FIVET, C.: Form Follows Availability - Designing Structures Through Reuse. In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 60 (2019), S. 257–265

BURDISSO UND HAFTKA 1990

BURDISSO, R. A. ; HAFTKA, R. T.: Statistical Analysis of Static Shape Control in Space Structures. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 8, S. 1504–1508. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

CHEN U. A. 2010

CHEN, Q. ; KOU, X. ; ZHANG, Y.-M.: Internal Force and Deformation Matrixes and Their Applications in Load Path. In: *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A* 11 (2010), Nr. 8, S. 563–570. – ISSN 1673-565X, 1862-1775

DAS U. A. 1991

DAS, S. ; UTKU, S. ; CHEN, G. ; WADA, B.: A Mathematical Basis for the Design Optimization of Adaptive Trusses in Precision Control. In: *32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Baltimore, MD, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991

DAYARATNAM UND PATNAIK 1969

DAYARATNAM, P. ; PATNAIK, S.: Feasibility of Full Stress Design. In: *AIAA Journal* 7 (1969), Nr. 4, S. 773–774. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

EDBERG U. A. 1992

EDBERG, D. L. ; BICOS, A. S. ; FULLER, C. M. ; TRACY, J. J. ; FECHTER, J. S.: Theoretical and Experimental Studies of a Truss Incorporating Active Members. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 3 (1992), Nr. 2, S. 333–347. – ISSN 1045-389X, 1530-8138

FELIPPA 2001

FELIPPA, C. A.: A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts. In: *Computers & Structures* 79 (2001), Nr. 14, S. 1313–1324. – ISSN 00457949

FLETCHER 2013

FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. Chichester, England : Wiley, 2013. – ISBN 978-1-118-72318-0

FORSTER 2019

FORSTER, D.: *Entwicklung einer Methode zur optimierten Platzierung von Aktoren in adaptiven Tragwerken*. 2019. – Masterarbeit; entstanden unter der Betreuung des Autors; verfügbar am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

FRÖHLICH U. A. 2019

FRÖHLICH, B. ; GADE, J. ; GEIGER, F. ; BISCHOFF, M. ; EBERHARD, P.: Geometric Element Parameterization and Parametric Model Order Reduction in Finite Element Based Shape Optimization. In: *Computational Mechanics* 63 (2019), Nr. 5, S. 853–868. – ISSN 0178-7675, 1432-0924

FURUHASHI UND MURA 1979

FURUHASHI, R. ; MURA, T.: On the Equivalent Inclusion Method and Impotent Eigenstrains. In: *Journal of Elasticity* 9 (1979), Nr. 3, S. 263–270. – ISSN 0374-3535, 1573-2681

FURUYA UND HAFTKA 1995

FURUYA, H. ; HAFTKA, R. T.: Placing Actuators on Space Structures by Genetic Algorithms and Effectiveness Indices. In: *Structural Optimization* 9 (1995), Nr. 2, S. 69–75. – ISSN 0934-4373, 1615-1488

GADE U. A. 2021

GADE, J. ; TKACHUK, A. ; SCHEVEN, M. von ; BISCHOFF, M.: A Continuum-Mechanical Theory of Redundancy in Elastostatic Structures. In: *International Journal of Solids and Structures* (2021), S. S0020768321000305. – ISSN 00207683

GEIGER U. A. 2020A

GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M.: Anwendung Der Redundanzmatrix Bei Der Bewertung Adaptiver Strukturen (English Title: Application

of the Redundancy Matrix in the Assessment of Adaptive Structures). In: OESTERLE, B. (Hrsg.) ; VON SCHEVEN, M. (Hrsg.) ; BISCHOFF, M. (Hrsg.): *Baustatik – Baupraxis 14*, Institute for Structural Mechanics, University of Stuttgart, 2020, S. 119–128

GEIGER U. A. 2020B

GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M.: A Case Study on Design and Optimization of Adaptive Civil Structures. In: *Frontiers in Built Environment* 6 (2020), S. 94. – ISSN 2297-3362

GEIGER U. A. 2020C

GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M.: Optimal Design of Adaptive Structures vs. Optimal Adaption of Structural Design. In: *21th IFAC World Congress* Bd. 53, 2020, S. 8363–8369. – ISSN 2405-8963

GEISER U. A. 2017

GEISER, A. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K.-U.: Variable Filter Radii for Vertex Morphing Based Design of Adaptive Structures. In: SCHEVEN, M. von (Hrsg.) ; KEIP, M.-A. (Hrsg.) ; KARAJAN, N. (Hrsg.): *Proceedings of the 7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry*, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, 2017

GERBER 2010

GERBER, H.: *Bewertung Der Qualität von Tragwerken*. Hannover, Universität Hannover, Dissertation, 2010

GOLUB UND KAHAN 1965

GOLUB, G. ; KAHAN, W.: Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis* 2 (1965), Nr. 2, S. 205–224. – ISSN 0887-459X

GRAF UND VASSILEV 2006

GRAF, W. ; VASSILEV, T.: *Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik*. Berlin : Ernst, 2006. – ISBN 3-433-01857-X

GROENEWOLT U. A. 2018

GROENEWOLT, A. ; SCHWINN, T. ; NGUYEN, L. ; MENGES, A.: An Interactive Agent-Based Framework for Materialization-Informed Architectural Design. In: *Swarm Intelligence* 12 (2018), Nr. 2, S. 155–186. – ISSN 1935-3820

HAFTKA UND ADELMAN 1985

HAFTKA, T. ; ADELMAN, H. M.: Selection of Actuator Locations for Static Shape Control of Large Space Structures by Heuristic Integer Programing. In: *Computers & Structures* 20 (1985), Nr. 1-3, S. 575–582

HARZHEIM 2019

HARZHEIM, L.: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Third. Haan-Gruiten : Verlag Europa-Lehrmittel Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 2019 (Edition Harri Deutsch). – ISBN 978-3-8085-5882-9

HEIDENREICH 2015

HEIDENREICH, C.: *Adaptivität von Freigeformten Flächentragwerken*. Weimar, Bauhaus-Universität Weimar, Dissertation, 2015

HJELMSTAD 2005

HJELMSTAD, K. D.: *Fundamentals of Structural Mechanics*. 2nd ed. New York : Springer Science + Business, 2005. – ISBN 978-0-387-23330-7

HOLNICKI-SZULC 1995

HOLNICKI-SZULC, J.: *Structural Analysis, Design and Control by the Virtual Distortion Method*. Chichester, UK : John Wiley & Sons, Ltd, 1995. – ISBN 0 471 95656 2

HOLNICKI-SZULC U. A. 1998

HOLNICKI-SZULC, J. ; MACKIEWICZ, A. ; KOLAKOWSKI, P.: Design of Adaptive Structures for Improved Load Capacity. In: *AIAA Journal* 36 (1998), Nr. 3, S. 471–476. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

IPCC 2021

IPCC: Summary for Policymakers. In: MASSON-DELMOTTE, V. (Hrsg.) ; ZHAI, P. (Hrsg.) ; PIRANI, A. (Hrsg.) ; CONNORS, S. L. (Hrsg.) ; PÉAN, C. (Hrsg.) ; BERGER, S. (Hrsg.) ; CAUD, N. (Hrsg.) ; CHEN, Y. (Hrsg.) ; GOLDFARB, L. (Hrsg.) ; GOMIS, M. I. (Hrsg.) ; HUANG, M. (Hrsg.) ; LEITZELL, K. (Hrsg.) ; LONNOY, E. (Hrsg.) ; MATTHEWS, J. B. R. (Hrsg.) ; MAYCOCK, T. K. (Hrsg.) ; WATERFIELD, T. (Hrsg.) ; YELEKÇI, O. (Hrsg.) ; YU, R. (Hrsg.) ; ZHOU, B. (Hrsg.): *Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2021

IRSCHIK UND PICHLER 2005

IRSCHIK, H. ; PICHLER, U.: On Eigenstrains without Displacements. In: *Acta Mechanica* 178 (2005), Nr. 1-2, S. 111–122. – ISSN 0001-5970, 1619-6937

IRSCHIK UND ZIEGLER 2001

IRSCHIK, H. ; ZIEGLER, F.: Eigenstrain Without Stress and Static Shape Control of Structures. In: *AIAA Journal* 39 (2001), Nr. 10, S. 1985–1990. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

JALIHAL U. A. 1996

JALIHAL, P. ; UTKU, S. ; WADA, B.: Optimal Location of Redundants for Prestressing Adaptive Trusses. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 7 (1996), Nr. 4, S. 420–426

JANOCHA 2007

JANOCHA, H. (Hrsg.): *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications*. 2nd, rev. ed. Berlin ; New York : Springer, 2007. – ISBN 978-3-540-71965-6

KAWAGUCHI U. A. 1996

KAWAGUCHI, K.-I. ; HANGAI, Y. ; PELLEGRINO, S. ; FURUYA, H.: Shape and Stress Control Analysis of Prestressed Truss Structures. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 15 (1996), S. 1226–1236

KIRSCH 1976

KIRSCH, U.: Synthesis of Elastic Structures with Controlled Forces. In: *Computers & Structures* 6 (1976), Nr. 2, S. 111–116. – ISSN 00457949

KIRSCH 1987

KIRSCH, U.: The Effect of Compatibility Conditions on Optimal Design of Flexural Structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), Nr. 6, S. 1173–1185. – ISSN 0029-5981, 1097-0207

KIRSCH 1989

KIRSCH, U.: Improved Optimum Structural Design by Passive Control. In: *Engineering with Computers* 5 (1989), Nr. 1, S. 13–22. – ISSN 0177-0667, 1435-5663

KIRSCH 1993

KIRSCH, U.: *Structural Optimization*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1993. – ISBN 978-3-540-55919-1 978-3-642-84845-2

KIRSCH UND MOSES 1977

KIRSCH, U. ; MOSES, F.: Optimization of Structures with Control Forces and Displacements. In: *Engineering Optimization* 3 (1977), Nr. 1, S. 37–44. – ISSN 0305-215X, 1029-0273

KOLAKOWSKI U. A. 2008

KOLAKOWSKI, P. ; WIKŁO, M. ; HOLNICKI-SZULC, J.: The Virtual Distortion Method—a Versatile Reanalysis Tool for Structures and Systems. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 36 (2008), Nr. 3, S. 217–234. – ISSN 1615-1488

KORKMAZ 2011

KORKMAZ, S.: A Review of Active Structural Control: Challenges for Engineering

Informatics. In: *Computers & Structures* 89 (2011), Nr. 23, S. 2113–2132. – ISSN 0045-7949

KOU U. A. 2017

KOU, X. ; LI, L. ; ZHOU, Y. ; SONG, J.: Redundancy Component Matrix and Structural Robustness. In: *International Journal of Civil and Environmental Engineering* 11 (2017), Nr. 8, S. 1155–1160

KRAKE U. A. 2022

KRAKE, T. ; VON SCHEVEN, M. ; GADE, J. ; ABDELAAL, M. ; BISCHOFF, M. ; WEISKOPF, D.: Efficient Update of Redundancy Matrices for Truss and Frame Structures. In: *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics* (2022). – eingereicht

KWAN UND PELLEGRINO 1993

KWAN, A. S. K. ; PELLEGRINO, S.: Prestressing a Space Structure. In: *AIAA Journal* 31 (1993), Nr. 10, S. 1961–1963. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

LEIPHOLZ UND ABDEL-ROHMAN 1986

LEIPHOLZ, H. H. E. ; ABDEL-ROHMAN, M.: *Control of Structures*. Dordrecht, Boston, Lancaster : Martinus Nijhoff Publishers, 1986. – ISBN 978-94-009-4402-2

LEMAITRE 2008

LEMAITRE, C.: *Topologieoptimierung von Adaptiven Stabwerken*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2008

LEVY 1953

LEVY, S.: Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20 (1953), Nr. 7, S. 449–454. – ISSN 1936-9956

LINKWITZ 1961

LINKWITZ, K.: *Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme*. München, Verl. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Dissertation, 1961

LIVESLEY 1964

LIVESLEY, R. K.: *Matrix Methods of Structural Analysis*. Oxford, London : Pergamon Press, 1964

LUNZE 2010

LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978-3-642-13807-2 978-3-642-13808-9

LYNESS UND MOLER 1967

LYNESS, J. N. ; MOLER, C. B.: Numerical Differentiation of Analytic Functions. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4 (1967), Nr. 2, S. 202–210

MARKER U. A. 2019

MARKER, P. ; STAMMEN, L. ; BLEICHER, A.: Energy-Efficient Actuator Placement for a Convertible Bending Active Structure. In: *Proceedings of IASS Annual Symposia*. Barcelona, 2019

MARTINS U. A. 2003

MARTINS, J. R. R. A. ; STURDZA, P. ; ALONSO, J. J.: The Complex-Step Derivative Approximation. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 29 (2003), Nr. 3, S. 245–262. – ISSN 0098-3500

MASCHING 2016

MASCHING, H.: *Parameter free optimization of shape adaptive shell structures*. München, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, Dissertation, 2016

MAXWELL 1864

MAXWELL, J. C.: On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27 (1864), Nr. 182, S. 294–299. – ISSN 1941-5982

MAXWELL 1870

MAXWELL, J. C.: I.—On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 26 (1870), Nr. 1, S. 1–40

MESSAC UND MALEK 1992

MESSAC, A. ; MALEK, K.: Control-Structure Integrated Design. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Nr. 8, S. 2124–2131. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

MICHELL 1904

MICHELL, A. G. M.: The Limits of Economy of Material in Frame-Structures. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8 (1904), Nr. 47, S. 589–597. – ISSN 1941-5982, 1941-5990

NEMHAUSER U. A. 1978

NEMHAUSER, G. L. ; WOLSEY, L. A. ; FISHER, M. L.: An Analysis of Approximations for Maximizing Submodular Set Functions—I. In: *Mathematical Programming* 14 (1978), Nr. 1, S. 265–294. – ISSN 0025-5610, 1436-4646

NEUHÄUSER 2014

NEUHÄUSER, S.: *Untersuchungen Zur Homogenisierung von Spannungsfeldern Bei Adaptiven Schalenträgwerken Mittels Auflagerverschiebung*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 2014

NOCEDAL UND WRIGHT 2006

NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S. J.: *Numerical Optimization*. Second. New York :

Springer, 2006 (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering).
– ISBN 978-0-387-30303-1

NYASHIN U. A. 2005

NYASHIN, Y. ; LOKHOV, V. ; ZIEGLER, F.: Stress-Free Displacement Control of Structures. In: *Acta Mechanica* 175 (2005), Nr. 1-4, S. 45–56. – ISSN 0001-5970, 1619-6937

OSTERTAG U. A. 2019

OSTERTAG, A. ; TOADER, T.-N. ; BERTSCHE, B. ; SOBEK, W.: System-Safety in the Application of Adaptive Load-Bearing Structures. In: *2019 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*. Orlando, FL, USA : IEEE, 2019, S. 1–6.
– ISBN 978-1-5386-6554-1

OTTO 1998

OTTO, F. ; KLENK, F. (Hrsg.): *Mitteilungen des Instituts für leichte Flächentragwerke (IL) 24: Prinzip Leichtbau = Lightweight principle*. Stuttgart : Karl Krämer, 1998. – ISBN 978-3-7828-2024-0

PADULA UND KINCAID 1995

PADULA, S. L. ; KINCAID, R. K.: Aerospace Applications of Integer and Combinatorial Optimization / NASA. Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1995 (TM-110210). – Technical Memorandum

PADULA UND KINCAID 1999

PADULA, S. L. ; KINCAID, R. K.: Optimization Strategies for Sensor and Actuator Placement / NASA. Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1999 (TM-1999-209126). – Technical Memorandum

PATNAIK UND HOPKINS 1998

PATNAIK, S. N. ; HOPKINS, D. A.: Optimality of a Fully Stressed Design. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 165 (1998), Nr. 1-4, S. 215–221. – ISSN 00457825

PATNAIK UND JOSEPH 1986

PATNAIK, S. N. ; JOSEPH, K. T.: Generation of the Compatibility Matrix in the Integrated Force Method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 55 (1986), Nr. 3, S. 239–257. – ISSN 00457825

PELLEGRINO 1986

PELLEGRINO, S.: *Mechanics of Kinematically Indeterminate Structures*, University of Cambridge, Dissertation, 1986

PELLEGRINO 1993

PELLEGRINO, S.: Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium Matrix. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 21, S. 3025–3035

POPPER 1935

POPPER, K.: *Logik der Forschung*. Vienna : Springer Vienna, 1935. – ISBN 978-3-7091-2021-7 978-3-7091-4177-9

PÖTZL 1996

PÖTZL, M.: Robuste Tragwerke – Vorschläge Zu Entwurf Und Konstruktion. In: *Bauingenieur* 71 (1996), Nr. 11, S. 481–488

RAJA UND NARAYANAN 2009

RAJA, M. G. ; NARAYANAN, S.: Simultaneous Optimization of Structure and Control of Smart Tensegrity Structures. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 20 (2009), Nr. 1, S. 109–117. – ISSN 1045-389X, 1530-8138

RAMESH U. A. 1991

RAMESH, A. V. ; UTKU, S. ; WADA, B.: Real-Time Control of Geometry and Stiffness in Adaptive Structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 90 (1991), Nr. 1-3, S. 761–779. – ISSN 00457825

RAMM U. A. 1998

RAMM, E. ; MAUTE, K. ; SCHWARZ, S.: Conceptual Design by Structural Optimization. In: *Proceedings of EURO-C 1998, R. de Borst, N. Bicanic, H. Mang, G. Meschke (Eds), Badgastein, Austria, March 31 - April 3, 1998, Balkema, Rotterdam, 1998, S. 879–896*

RAZANI 1965

RAZANI, R.: Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Nr. 12, S. 2262–2268. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

REINHORN U. A. 1992

REINHORN, A. M. ; SOONG, T. ; LIN, R. C. ; RILEY, M. A. ; WANG, Y. P. ; AIZAWA, S. ; HIGASHINO, M.: Active Bracing System: A Full Scale Implementation of Active Control. (1992), S. 122

REKSOWARDOJO 2020

REKSOWARDOJO, A. P.: *Shape Changes through Geometric Nonlinear Control as a Strategy for Structural Adaptation*. Lausanne, École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), Dissertation, 2020

REKSOWARDOJO U. A. 2020

REKSOWARDOJO, A. P. ; SENATORE, G. ; SMITH, I.: Design of Structures That Adapt to Loads through Large Shape Changes. In: *Journal of Structural Engineering* 146 (2020), S. 04020068

ROORDA 1975

ROORDA, J.: Tendon Control in Tall Structures. In: *Journal of the Structural Division* 101 (1975), Nr. ST3, S. 505–521

ROTH 2020

ROTH, S.: *Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 2020

SACHSE U. A. 2021

SACHSE, R. ; GEIGER, F. ; BISCHOFF, M.: Constrained Motion Design with Distinct Actuators and Motion Stabilization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122 (2021), Nr. 11, S. 2712–2732. – ISSN 1097-0207

SACK U. A. 1967

SACK, R. L. ; CARPENTER, W. C. ; HATCH, G. L.: Modification of Elements in the Displacement Method. In: *AIAA Journal* 5 (1967), Nr. 9, S. 1708–1710. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

SAEED UND KWAN 2016

SAEED, N. M. ; KWAN, A. S. K.: Simultaneous Displacement and Internal Force Prescription in Shape Control of Pin-Jointed Assemblies. In: *AIAA Journal* 54 (2016), Nr. 8, S. 2499–2506. – ISSN 0001-1452, 1533-385X

SAMALI U. A. 1985

SAMALI, B. ; YANG, J. N. ; LIU, S. C.: Active Control of Seismic-Excited Buildings. In: *Journal of Structural Engineering* 111 (1985), Nr. 10, S. 2165–2180. – ISSN 0733-9445, 1943-541X

SCHLAICH 2000

SCHLAICH, J.: Editorial: Leichtbau. In: *Stahlbau* 69 (2000), Nr. 8, S. 581–584. – ISSN 00389145

SENATORE 2016

SENATORE, G.: *Adaptive Building Structures*. London, University College London, Dissertation, 2016

SENATORE U. A. 2019

SENATORE, G. ; DUFFOUR, P. ; WINSLOW, P.: Synthesis of Minimum Energy

Adaptive Structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2019). – ISSN 1615-1488

SENATORE UND REKSOWARDOJO 2020

SENATORE, G. ; REKSOWARDOJO, A. P.: Force and Shape Control Strategies for Minimum Energy Adaptive Structures. In: *Frontiers in Built Environment* 6 (2020), S. 105. – ISSN 2297-3362

SENER U. A. 1993

SENER, M. ; UTKU, S. ; WADA, B.: Geometry Control in Prestressed Adaptive Space Trusses. In: *34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. La Jolla, CA, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993

SOBEK 2000

SOBEK, W.: Selbstanpassende Systeme. In: *Stahlbau* 69 (2000), Nr. 6, S. 429–429. – ISSN 00389145

SOBEK U. A. 2016

SOBEK, W. ; FLAIG, C. ; HAASE, W. ; BINZ, H. ; CROSTACK, A. ; HERRMANN, T. ; ROTH, D.: Sicherheitsuntersuchungen eines adaptiven Schalentragswerks: Teil 1: Grundlagen und Theorie der angewandten Methoden. In: *Stahlbau* 85 (2016), Nr. 3, S. 195–199. – ISSN 00389145

SOBEK U. A. 2021

SOBEK, W. ; SAWODNY, O. ; BISCHOFF, M. ; BLANDINI, L. ; BÖHM, M. ; HAASE, W. ; KLETT, Y. ; MAHALL, M. ; WEIDNER, S. ; BURGHARDT, T. ; LEISTNER, P. ; MAIERHOFER, M. ; PARK, S. ; REINA, G. ; ROTH, D. ; TARÍN, C.: Adaptive Hüllen und Strukturen: Aus den Arbeiten des Sonderforschungsbereichs 1244. In: *Bautechnik* 98 (2021), Nr. 3, S. 208–221. – ISSN 0932-8351, 1437-0999

SOONG 1988

SOONG, T.: State-of-the-Art Review: Active Structural Control in Civil Engineering. In: *Engineering Structures* 10 (1988), S. 74–84

SOONG UND MANOLIS 1987

SOONG, T. ; MANOLIS, G. D.: Active Structures. In: *Journal of Structural Engineering* 113 (1987), Nr. 11, S. 2290–2302. – ISSN 0733-9445, 1943-541X

SOONG UND SPENCER 1992

SOONG, T. ; SPENCER, B. F.: Active Structural Control: Theory and Practice. In: *Journal of Engineering Mechanics* 118 (1992), Nr. 6, S. 1282–1285. – ISSN 0733-9399, 1943-7889

SQUIRE UND TRAPP 1998

SQUIRE, W. ; TRAPP, G.: Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions. In: *SIAM Review* 40 (1998), Nr. 1, S. 110–112. – ISSN 0036-1445, 1095-7200

STEFFEN U. A. 2021

STEFFEN, S. ; NITZLADER, M. ; BURGHARDT, T. ; BINZ, H. ; BLANDINI, L. ; SOBEK, W.: An Actuator Concept for Adaptive Concrete Columns. In: *Actuators* 10 (2021), Nr. 10, S. 273. – ISSN 2076-0825

STEFFEN U. A. 2020

STEFFEN, S. ; WEIDNER, S. ; BLANDINI, L. ; SOBEK, W.: Using Influence Matrices as a Design and Analysis Tool for Adaptive Truss and Beam Structures. In: *Frontiers in Built Environment* 6 (2020), S. 83. – ISSN 2297-3362

STRANG 1986

STRANG, G.: *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley : Wellesley-Cambridge Press, 1986. – ISBN 0-9614088-0-4

STRÖBEL 1995

STRÖBEL, D.: *Die Anwendung Der Ausgleichsrechnung Auf Elastomechanische Systeme*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1995

TEUFFEL 2004

TEUFFEL, P.: *Entwerfen Adaptiver Strukturen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 2004

TURNER U. A. 1956

TURNER, M. J. ; CLOUGH, R. W. ; MARTIN, H. C. ; TOPP, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 23 (1956), Nr. 9, S. 805–823. – ISSN 1936-9956

UNEP 2020

UNEP: 2020 Global Status Report for Buildings and Construction: Towards a Zero-emission, Efficient and Resilient Buildings and Construction Sector / United Nations Environment Programme. Nairobi, 2020. – Forschungsbericht

UTKU 1998

UTKU, S.: *Theory of adaptive structures : incorporating intelligence into engineered products*. Boca Raton, Fl. : CRC Press, 1998 (New directions in civil engineering). – ISBN 0-8493-7431-6

VON SCHEVEN U. A. 2021

VON SCHEVEN, M. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M.: Quantification of the Redundancy

Distribution in Truss and Beam Structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 213 (2021), S. 41–49. – ISSN 00207683

WADA 1992

WADA, B.: Application of Adaptive Structures in the Design of Space Structures. In: *Aerospace Design Conference*. Irvine, CA, USA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992

WAGNER U. A. 2018

WAGNER, J. L. ; GADE, J. ; HEIDINGSFELD, M. ; GEIGER, F. ; VON SCHEVEN, M. ; BÖHM, M. ; BISCHOFF, M. ; SAWODNY, O.: On Steady-State Disturbance Compensability for Actuator Placement in Adaptive Structures. In: *at - Automatisierungstechnik* 66 (2018), Nr. 8, S. 591–603. – ISSN 0178-2312

WANG 1992

WANG, B. P.: Fully Stressed Configuration of Statically Indeterminate Trusses. In: *Communications in Applied Numerical Methods* 8 (1992), Nr. 7, S. 479–487. – ISSN 0748-8025, 1555-2047

WANG UND SENATORE 2020

WANG, Y. ; SENATORE, G.: Minimum Energy Adaptive Structures – All-In-One Problem Formulation. In: *Computers & Structures* 236 (2020), S. 106266. – ISSN 0045-7949

WEIDNER U. A. 2018

WEIDNER, S. ; KELLETER, C. ; STERNBERG, P. ; HAASE, W. ; GEIGER, F. ; BURGHARDT, T. ; HONOLD, C. ; WAGNER, J. L. ; BÖHM, M. ; BISCHOFF, M. ; SAWODNY, O. ; BINZ, H.: The Implementation of Adaptive Elements into an Experimental High-Rise Building. In: *Steel Construction* 11 (2018), Nr. 2, S. 109–117. – ISSN 1867-0539

WEIDNER U. A. 2021

WEIDNER, S. ; MRZIGOD, A. ; BECHMANN, R. ; SOBEK, W.: Graue Emissionen im Bauwesen – Bestandsaufnahme und Optimierungsstrategien. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (2021), S. best.202100065. – ISSN 0005-9900, 1437-1006

WÜST UND WAGNER 2008

WÜST, J. ; WAGNER, W.: Systematic Prediction of Yield-Line Configurations for Arbitrary Polygonal Plates. In: *Engineering Structures* 30 (2008), Nr. 7, S. 2081–2093. – ISSN 01410296

YANG UND SAMALI 1983

YANG, J. N. ; SAMALI, B.: Control of Tall Buildings in Along-Wind Motion. In:

Journal of Structural Engineering 109 (1983), Nr. 1, S. 50–68. – ISSN 0733-9445, 1943-541X

YAO 1972

YAO, J. T. P.: Concept of Structural Control. In: *Journal of the Structural Division* 98 (1972), Nr. ST7, S. 1567–1574

YOU 1997

YOU, Z.: Displacement Control of Prestressed Structures. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 144 (1997), S. 51–59

ZUK UND CLARK 1970

ZUK, W. ; CLARK, R. H.: *Kinetic architecture*. New York [u.a.] : Van Nostrand Reinhold, 1970

Lebenslauf

Persönliche Angaben:

Name: Florian Rudolf Geiger
Geburtsdatum: 12. Juli 1989
Geburtsort: Oettingen i.Bay.

Schulische Ausbildung:

1995 – 1999 Grundschule, Oettingen i.Bay.
1999 – 2008 Albrecht-Ernst-Gymnasium, Oettingen i.Bay.

Universitäre Ausbildung:

2009 – 2012 Bachelorstudium Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
2012 – 2015 Masterstudium Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
seit 2016 Akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nicht-lineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.

- 10 (1989) **K. M. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. L. M. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

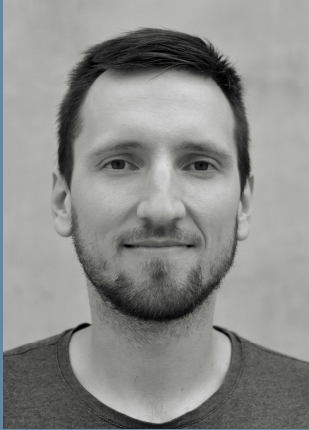
-
- 21 (1996) **C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) **W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.

- 33 (2001) A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton
mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-
optimierung.
- 42 (2004) G. A. D’Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.

-
- 44 (2004) **T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.
- 64 (2015) M. E. Matzen:**
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.

- 65 (2016) V. M. Effinger:**
Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-schäume.
- 66 (2017) C. M. Wilking:**
Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen.
- 67 (2018) B. Oesterle:**
Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen.
- 68 (2018) F. Neukamm:**
Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen.
- 69 (2019) A.-K. Schäuble:**
Variationally consistent inertia templates for speed-up and customization in explicit dynamics.
- 70 (2019) T. Willerding:**
Multiscale simulation of phase transformation in metals.
- 71 (2020) S. Roth:**
Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen.
- 72 (2020) R. Sachse:**
Variational Motion Design for Adaptive Structures.
- 73 (2021) A. Tkachuk:**
Parametrized variational principles in dynamics.



Florian Geiger

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der strukturmechanischen Charakterisierung von Stabtragwerken mit dem Ziel, daraus Erkenntnisse und Empfehlungen für den Entwurf adaptiver Tragwerke zu gewinnen und abzuleiten. Hierfür werden wesentliche lastfallabhängige und lastfallunabhängige Tragwerkeigenschaften betrachtet und deren Zusammenhang mit der Performanz und dem Potential adaptiver Tragwerke analysiert. Der im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Entwurf von adaptiven Tragwerken beschreibt dabei sowohl den gesamten Entwurfsprozess, einschließlich beispielsweise des Aufbaus und der Dimensionierung von Tragwerken, als auch den Entwurf eines Aktuierungskonzepts für bereits bestehende Tragwerke, die nachträglich verbessert bzw. ertüchtigt werden sollen.

Neben einem ausführlichen Überblick über die in der Literatur beschriebenen Verfahren und Erkenntnisse werden verschiedene Varianten für die Modellierung der Aktuierung betrachtet, die Auswirkungen der Aktuierung auf den Tragwerkszustand detailliert analysiert und Verfahren zur automatisierten Platzierung von Aktoren im Tragwerk diskutiert. Anschließend werden in einer systematischen Studie die Auswirkungen der Aktuierung auf den Tragwerkszustand und die damit erreichbaren Ziele quantifiziert. Dazu werden die Einflüsse verschiedener Parameter, wie z. B. die Anzahl an Aktoren, der Grad der statischen Unbestimmtheit und das globale Tragverhalten, untersucht. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse werden abschließend zusammengefasst und können für den Entwurf adaptiver Tragwerke herangezogen werden.