



Institut für Konstruktionstechnik  
und Technisches Design  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr.-Ing. H. Binz

Daniel Marino

**Geometrische Auslegung und  
Optimierung der Zahnflankengeometrie  
von konischen Stirnrädern in  
beliebiger Achslage**

Bericht Nr. 714







**Geometrische Auslegung und Optimierung der Zahnflankengeometrie  
von konischen Stirnrädern in beliebiger Achslage**

Geometrical design and optimization of the tooth flank geometry of beveloid gears in  
arbitrary axis position

**Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik der  
Universität Stuttgart**

**zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

**genehmigte Abhandlung**

**vorgelegt von**

**Daniel Marino M.Sc.**

**aus Leonberg**

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche

Tag der mündlichen Prüfung: 06.07.2022

Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design

Universität Stuttgart

D 93

ISBN-13: 978-3-946924-21-0

## **Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design**

Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 9

D-70569 Stuttgart

Telefon +49 (0)711 685-66055

Telefax: +49 (0)711 685-66219

E-Mail: [mail@iktd.uni-stuttgart.de](mailto:mail@iktd.uni-stuttgart.de)

# Vorwort

*„Die Neugier steht immer an erster Stelle eines Problems,  
das gelöst werden will.“  
(G. Galilei)*

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design (IKTD) der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz für seine wertvollen Anregungen und hervorragende Betreuung der Arbeit. Erst sein entgegengebrachtes Vertrauen und die wissenschaftliche Freiheit, die er mir bei der Bearbeitung des Forschungsfeldes gewährt hat, haben es mir ermöglicht, diese Arbeit erfolgreich zu Ende zu führen. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche für die Übernahme des Mitberichts sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Gundelsweiler für den Prüfungsvorsitz.

Während meiner Zeit am Institut bleibt mir besonders die angenehme Arbeitsatmosphäre und die großartige Zusammenarbeit in Erinnerung. Dafür ein Dankeschön an alle meine Kolleginnen und Kollegen des Instituts. Ganz besonderes danke ich meinem Gruppenleiter Herrn Dipl.-Ing. Matthias Bachmann, Herrn Dr.-Ing. Timon Schöler und Herrn Dr.-Ing. Christopher Traut für die zahlreichen Fachdiskussionen und die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts.

Ein wesentlicher Dank gebührt auch den wissenschaftlichen Hilfskräften, Bachelor-, Studien- und Masterarbeiterinnen und -arbeitern, die einen Beitrag zu dieser Abhandlung geleistet haben.

All meinen Freunden danke ich für die Aufmunterung und den Rückhalt in schwierigen Phasen während der Promotion. Insbesondere ist hier Florian Morlock zu erwähnen, mit dem zwischen den vielen Sporteinheiten immer ein reger Austausch zu aktuellen Problemen stattfand.

Der größte Dank gebührt meiner Familie, insbesondere meiner lieben Amelie. Ohne ihr großes Verständnis und ihre Mithilfe hätte ich das Ziel der Promotion nicht erreichen können. Ihr gilt auch ein Dank für die kritische Durchsicht der schriftlichen Arbeit und des Vortrags. Auch ohne die unermüdliche Unterstützung und das unerschütterliche Vertrauen meiner Eltern Birgit und Matteo Marino sowie meines Bruders Sebastian wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen.

Stuttgart, August 2022

Daniel Marino





## Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis .....	I
Bezeichnungen und Einheiten .....	V
Abstract .....	XIII
1 Einleitung .....	1
1.1 Problemstellung und Motivation.....	2
1.2 Zielsetzung und Struktur der Arbeit .....	5
2 Stand der Forschung und Technik .....	9
2.1 Einordnung und Einsatzgebiete von Beveloidradpaarungen .....	9
2.2 Geometrie und Eigenschaften von Beveloidradpaarungen.....	11
2.2.1 Zahnform von Beveloidrädern .....	12
2.2.2 Beveloidradpaarungen und deren Eingriffsverhältnisse .....	15
2.3 Abgrenzung der Beveloidräder von anderen Verzahnungen .....	22
2.3.1 Abgrenzung von Zylinder- und Schraubädern.....	22
2.3.2 Abgrenzung von Kegel- und Hypoidrädern .....	23
2.4 Auslegungsprozess von Beveloidradpaarungen.....	24
2.4.1 Dimensionierung und Auslegung der Hauptverzahnungsdaten .....	25
2.4.2 Modifikation der Zahnflankengeometrie zur Optimierung des Übertragungsverhaltens .....	27
2.5 Abweichungen und Verlagerungen von Beveloidradpaarungen .....	32
2.6 Zusammenfassung und abgeleiteter Forschungsbedarf.....	33
3 Detaillierung der Aufgabenstellung .....	35
3.1 Konkretisierung der Aufgabenstellung und Zielsetzung.....	35
3.2 Vorgehensweise zur Erreichung der Forschungsziele.....	37
4 Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage .....	41
4.1 Überblick über die vorgestellte Berechnungsmethode.....	41
4.2 Dimensionierung der festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten .....	43
4.3 Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten von Beveloidradpaarungen .....	45
4.3.1 Auslegung mit mittigem Tragbild und definiertem Verdrehflankenspiel .....	45
4.3.2 Umsetzung eines definierten Verdrehflankenspiels .....	52
4.3.3 Einfluss der Einbaulage auf die Hauptverzahnungsdaten .....	54
4.4 Optimierung durch lokales Anpassen der Verzahnungsdaten .....	57
4.4.1 Bestimmung der lokal angepassten Verzahnungsdaten .....	58
4.4.2 Modellierung und Analyse der Zahnflankengeometrie mit lokal angepassten Verzahnungsdaten.....	62

---

4.4.3	Tangentialmodifikation für beliebige Achslagen .....	69
4.4.4	Verlauf der lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite .....	75
4.4.5	Vergleich mit den Ergebnissen aus dem Stand der Forschung .....	78
4.5	Abweichungen und Verlagerungen von Beveloidradpaarungen .....	79
4.5.1	Definition des verlagerten Achssystems .....	80
4.5.2	Einfluss eines verlagerten Achssystems auf die Tragbilder .....	82
4.6	Skalierung und Positionierung der Tragbilder .....	84
4.6.1	Zusätzliche Zahnflankenmodifikationen zur Einstellung der Tragbilder .....	85
4.6.2	Analyse der Skalierung und Positionierung der Tragbilder .....	86
5	Theoretische Untersuchung .....	89
5.1	Ableitung von Bewertungskriterien und Versuchsplanung .....	89
5.2	Theoretische Untersuchung des Übertragungsverhaltens .....	92
5.2.1	Nicht modifizierte Beveloidradpaarungen .....	92
5.2.2	Modifizierte Beveloidradpaarungen .....	94
5.3	Ableiten eines Vertrauensbereichs für die Berechnungsmethode .....	99
5.4	Theoretische Untersuchungen im verlagerten Achssystem .....	101
6	Experimentelle Validierung .....	103
6.1	Versuchskonzept .....	103
6.2	Versuchsplanung .....	104
6.2.1	Vorgehensweise zur Versuchsvorbereitung und -durchführung .....	104
6.2.2	Auslegung der Prüfradpaarungen .....	106
6.3	Versuchsvorbereitung und -durchführung .....	108
6.3.1	Vermessung der Verzahnungen und Auswertung .....	108
6.3.2	Kontaktsimulation der Ist-Geometrie der Zahnflanken .....	108
6.3.3	Einstellungen am DÜP zur Versuchsdurchführung .....	109
6.4	Versuchsergebnisse und Auswertung .....	110
6.4.1	Vergleich der Tragbilder und Drehfehlerverläufe .....	111
6.4.2	Reproduzierbarkeit und Einflussgrößen auf die Ergebnisse .....	117
6.4.3	Abwälzversuche bei verlagertem Achssystem .....	118
7	Beurteilung der Herstellbarkeit modifizierter Beveloidräder .....	121
7.1	Berechnung der Werkzeugbahn mittels Stirnschnittbezugskurve .....	121
7.2	Ergebnisse der Fertigungssimulation .....	123
7.2.1	Vergleich zwischen den Zahnflankengeometrien aus dem Flankengenerator und aus der Fertigungssimulation .....	124
7.2.2	Übertragungsverhalten modifizierter Beveloidradpaarungen .....	127

---

8	Übertragbarkeit auf weitere evolventische Verzahnungen .....	129
8.1	Übertragbarkeit auf Schraubradpaarungen .....	129
8.1.1	Anpassung der Berechnungsmethode an Schraubradpaarungen.	129
8.1.2	Schraubradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten	131
8.2	Übertragbarkeit auf Verzahnungen mit abweichender Herstellkinematik.....	133
9	Zusammenfassung.....	135
10	Ausblick.....	139
	Literaturverzeichnis .....	141
	Anhang .....	149
A.1	Impact-Model .....	149
A.2	Trigonometrische Umformungen in windschiefer Achslage .....	150
A.3	Skalierung des konjugierten Eingriffs.....	153
A.4	Theoretische Untersuchung der Berechnungsmethode.....	155
A.5	Vermessung der Prüfräder .....	157
A.6	Vergleich der Simulations- und Prüfstandsergebnisse .....	163
A.7	Fertigungssimulation.....	170



## Bezeichnungen und Einheiten

### Abkürzungen

BECAL	Kegelradberechnungsprogramm (BEvel gear CALculation), Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion (IMM), TU Dresden
BEVELO	Berechnungsprogramm zur geometrischen Auslegung von Stirnrädern mit kleinem Achsenkreuzungswinkel
DIN	Deutsches Institut für Normung
DRM	Design Research Methodology
DS	Deskriptive Studie
DÜP	Drehübertragungsprüfstand
F	Ferse
FPD	Erste Hauptrichtung (First Principle Direction)
FVA	Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.
HVD	Hauptverzahnungsdaten
IKTD	Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design
inv	Involut-Funktion
ISO	Internationale Organisation für Normung (International Organization for Standardization)
IT	ISO-Toleranzfeld
KOS	Koordinatensystem
KWS	Kontinuierliches Wälzfräsen bzw. -schleifen
LF	Linksflanke
PBL	Profilbezugslinie
PoC	Kontaktpfad (Path of Contact)
PS	Präskriptive Studie
PVZ	Planverzahnung
RC	Forschungsplanung (Research Clarification)
RF	Rechtsflanke

---

RIKOR	Ritzelkorrekturprogramm, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG), TU München
RSS	Referenzstirnschnitt
SBK	Stirnschnittbezugskurve
sgn	Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)
SimKoS	Simulationsprogramm zur Optimierung konischer Stirnräder, IKTD, Universität Stuttgart
TRA	Traganteil
VDI	Verein Deutscher Ingenieure e.V.
Z	Zehe

### Formelzeichen

Symbol	Einheit	Erläuterung
a	mm	Achsversatz, Achsabstand
$a_E$	mm	Ersatzachsabstand
b	mm	Zahnbreite
$b_i$	mm	Breitenposition
C	$\mu\text{m}$	Modifikation
d	mm	Durchmesser
$\vec{d}$	-	Differenzvektor
e	mm	Exzentrizität
e	mm	Zahnlückenweite
f	$\mu\text{m}$	Abweichung
f'	$\mu\text{m}$	Einflankenwälzsprung
$f_\delta$	$\mu\text{m}$	Systematischer Fehler
F	$\mu\text{m}$	Gesamtabweichung
i	-	Übersetzungsverhältnis
j	$\mu\text{m}$	Verdrehflankenspiel

---

<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Erläuterung</b>
k	-	Verallgemeinerung für modifizierte Anteile
k	-	Anzahl der Messungen
k'	-	Modifikationsaufteilung
K	-	Kraftfaktor
m	mm	Modul
n	-	Fallunterscheidung Rad 1 und 2
$\vec{n}$	-	Normalenvektor
p	mm	Koordinate der Stirnschnittbezugskurve
p	mm	Teilung
$\vec{p}$	mm	Ortsvektor
r	mm	Radius
$r_{TB}$	mm	Radiale Lage des Tragbildschwerpunkts
$r_{xy}$	-	Korrelationskoeffizient der Messwertreihe x und y
s	mm	Zahndicke
s'	-	Skalierungsfaktor
$s_{\delta}$	$\mu\text{m}$	Zufälliger Fehler
S	$\mu\text{m}$	Betrag der Schränkung
$S_{Fmin}$	-	Sicherheitsfaktor für Zahnfußbeanspruchung
$S_{Hmin}$	-	Sicherheitsfaktor für Zahnflankenpressung
$\vec{t}$	-	Tangentialvektor
$T_1$	Nm	Antriebsmoment
u	-	Zähnezahlverhältnis
v	mm / s	Geschwindigkeit
w	mm	Koordinate der Werkzeugbahn
x	-	Profilverschiebungsfaktor
$x_E$	-	Erzeugungsprofilverschiebungsfaktor
x'	-	Profilverschiebungsaufteilung

<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Erläuterung</b>
$Y_A$	-	Wechselastfaktor Zahnfuß
$Y_{FS}$	-	Kopffaktor Zahnfuß
$Y_N$	-	Lebensdauerfaktor Zahnfuß
$Y_\beta$	-	Schrägenfaktor Zahnfuß
$Y_\varepsilon$	-	Überdeckungsfaktor Zahnfuß
$z$	-	Zähnezahl
$z_K$	-	Zähnezahl Planverzahnung (Kronenrad)
$z_{TB}$	mm	Axiale Lage des Tragbildschwerpunkts
$Z$	mm	Einbauabstand
$Z_E$	$\sqrt{N/mm^2}$	Elastizitätsfaktor Zahnflanke
$Z_H$	-	Zonenfaktor Zahnflanke
$Z_N$	-	Lebensdauerfaktor Zahnflanke
$Z_\beta$	-	Schrägenfaktor Zahnflanke
$Z_\varepsilon$	-	Überdeckungsfaktor Zahnflanke
$\alpha$	°	Profil- bzw. Eingriffswinkel
$\beta$	°	Schrägungswinkel
$\beta'$	-	Schrägungswinkelaufteilung
$\gamma$	°	Winkel zw. Zahnmittellinie und Strahl von Radachse zum Wälzpunkt
$\delta$	°	(Wälz-)Kegelwinkel
$\delta_0$	°	Einstellwinkel der Schnecke
$\delta_{L,R}$	$\mu m$	Drehfehler auf der Links- und Rechtsflanke
$\delta_{xy}$	$\mu m$	Differenz der Messwertreihen x und y
$\delta\zeta$	-	Normierte Schrittweite der Diskretisierung
$\Delta C$	$\mu m$	Korrekturterme
$\Delta C_x$	mm	Abstand benachbarter Wälzpunkte
$\Delta j$	$\mu m$	Abweichung von definiertem zu simuliertem Verdrehflankenspiel
$\Delta p$	$\mu m$	Modifikationsbeträge der Stirnschnittbezugskurve



<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Erläuterung</b>
$\Delta s$	mm	Diskretisierte Bogenlänge
$\Delta S_{\beta}$	$\mu\text{m}$	Korrektur der Schränkung
$\Delta T$	mm	Achsabstandsabweichung
$\Delta z$	mm	Axialer Abstand benachbarter Stirnschnitte
$\Delta z_a$	mm	Axiale Verschiebung
$\Delta\beta$	$^{\circ}$	Abweichung Schrägungswinkel
$\Delta_{\delta}$	$\mu\text{m}$	Messabweichung
$\Delta\zeta$	-	Normierter Abstand benachbarter Stirnschnitte
$\Delta\theta$	$^{\circ}$	Abweichung Konuswinkel
$\Delta\xi$	$^{\circ}$	Tangentialmodifikation
$\varepsilon$	$^{\circ}$	Drehwinkel zwischen Ausgangs- und Eingriffslage des vorgegebenen Rads
$\varepsilon'$	$^{\circ}$	Neigung des Kontaktpfads (Path of Contact)
$\zeta$	-	Normierte Zahnbreitenposition
$\eta$	$^{\circ}$	Verdrehwinkel der Wälzpunkte aus der $y_1z_1$ -Ebene
$\eta$	$^{\circ}$	Schwenkwinkel
$\theta$	$^{\circ}$	Konuswinkel
$\theta'$	-	Konuswinkelauflösung
$\kappa$	$^{\circ}$	Winkel der ersten Hauptrichtungen (First Principle Directions)
$\lambda$	-	Variable für Geradengleichung
$\lambda_M$	$^{\circ}$	Rückdrehwinkel der Stirnschnitte
$\mu$	$^{\circ}$	Verdrehwinkel zwischen Koordinatensystemen
$\nu$	$^{\circ}$	Rückdrehwinkel des Gegenrads
$\xi$	$^{\circ}$	Verdrehwinkel der Stirnschnitte bei einer Schrägverzahnung
$\rho$	$^{\circ}$	Winkel zur Beschreibung der Eingriffslage des vorgegebenen Rads
$\sigma_{FE}$	MPa	Dauerfestigkeit Zahnfuß
$\sigma_{Hlim}$	MPa	Dauerfestigkeit Zahnflanke

<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Erläuterung</b>
$\Sigma$	°	Achswinkel
$\Sigma x$	-	Summe der Profilverschiebungsfaktoren
$\Sigma \theta$	°	Konuswinkelsumme
$\tau$	°	Winkel zur Beschreibung der Ausgangslage des vorgegebenen Rads
$\varphi$	°	Azimutwinkel einer sphärischen Evolvente
$\phi$	°	Polarwinkel zu einem Flankenpunkt des Gegenrads
$\psi$	°	Zahndickenwinkel
$\omega$	1 / s	Winkelgeschwindigkeit

### Indizes

<b>Index</b>	<b>Erläuterung</b>
a	Zahnkopf
a	Achsversatz (Achsabstand)
b	Grundkreis
b	Quadratischer Anteil
C	Wälzpunkt
f	Zahnfuß
F	Zahnflanke
H	Linearer Anteil
i	Zählindex
j	Globales Koordinatensystem der Zahnräder
j'	Lokales Koordinatensystem der Zahnräder
konj	Konjugiert
lin	Linear
L	Linksflanke
max	Maximum
min	Minimum

---

<b>Index</b>	<b>Erläuterung</b>
mod	Modifizierte Größe
M	Zahnbreitenmitte
MA1	Momentanachse ausgehend von Rad 1
n	Normalschnitt
n	Normalenrichtung
p	Teilkegel
PBL	Profilbezugslinie
R	Rechtsflanke
RSS	Referenzstirnschnitt
s	Axiale Richtung
SBK	Stirnschnittbezugskurve
t	Stirnschnitt
w	Wälzkegel
WKZ	Werkzeug
x	X-Koordinate
y	Y-Koordinate
z	Z-Koordinate
$\alpha$	Profillinie
$\beta$	Flankenlinie
$\Sigma$	Achswinkel
$\Sigma\beta$	Zahnbreitenrichtung
$\Sigma\delta$	Zahnhöhenrichtung
0	Absolutwert
1	Zahnrad 1
2	Zahnrad 2
*	Gewichtete Größe



## Abstract

This thesis proposes an analytical design method for beveloid gear pairs in arbitrary axis positions to approximate conjugate meshing by locally adapting the gearing data. The applicability of this method is demonstrated by theoretical and experimental studies of the contact behavior.

Beveloid gears belong to involute gearings with a linearly variable addendum modification along the face width, resulting in a conical tooth shape. Thus, gear concepts with shaft angles of up to  $20^\circ$  can be implemented. In particular, a skewed axis position offers the advantage of enabling concepts with multiple input and output shafts as well as optimum use of installation space, weight and cost savings. In non-parallel axis positions, base cylinders of beveloid gears are tilted to each other, causing only punctual flank contact. The existing ease-off results in a small contact pattern on the tooth flank while the gear pair is meshing, which leads to local stress peaks regarding to the contact behavior.

In literature, numerous approaches to design and optimize beveloid gear pairs are found. Taking point contact as reference, either many computations or special software are required to achieve best contact behavior for a given operating point. As an alternative, conjugate meshing is approximated first and then optimized for a desired operating point. This approach offers the advantage that the tooth flank geometry can be described via gearing data. Currently, its application is limited to the intersecting axis position. The aim of this thesis is therefore to derive an analytical design method supporting gear developer while designing and optimizing beveloid gear pairs in arbitrary axis positions. In addition to theoretical and experimental investigations of contact behavior, an economical manufacturability is simulatively assessed and applicability of the proposed approach on other types of involute gearing is examined. The method is implemented in an executable program and can be started by SimKoS.

First, strength-related gearing parameters are dimensioned by means of an equivalent spur gearing, whereby basic equations of cylindrical gears are expediently adapted to additional specifications of beveloid gear pairs.

For the design of the main gearing data, kinematic cones of beveloid gears are positioned in space so that they are in contact at one point. In addition, the surface areas are tangent to a common pitch plane. In this theoretical view, beveloid gears not only roll with each other at point of contact, but also with two different racks. The sizes of these imaginary racks of zero thickness are related via the common base cylinder. With derived equations

for installation position and tooth thickness at pitch circle, a nonlinear system of equations can be set up, whose solution yields the main gearing data of a beveloid gear pair. The analysis of meshing behavior between tooth flank and rack enables an analytical description of contact lines and paths of contact, allowing conclusions to be drawn about contact characteristics of unmodified beveloid gear pairs.

The centered contact pattern serves as starting point for a subsequent optimization, in which a beveloid gear pair is first divided into transverse section pairs. The proposed system of equations is extended to include local gearing data, enabling compensation of the ease-off. Beveloid gears with local gearing data can be modeled using a transverse section reference curve. To approximate conjugate meshing, a tangential modification is required in addition to local gearing data, which can be calculated analytically via the law of spatial gearing. Subsequently, position and size of contact patterns are adjustable by modifying the transverse section reference curve.

In a detailed theoretical investigation of contact behavior of unmodified and modified beveloid gear pairs, a confidence region of the method can be derived. The limitation of the analytical approach occurs because optimization is performed within a transverse section. Generally, however, path of contact is outside the transverse section. The inclined path of contact implies that a transverse section is in contact with several transverse sections of the mating gear, which are not considered in optimization.

So far, only simulative results of contact behavior of beveloid gear pairs with local gearing data are available. Therefore, exemplary designed beveloid gear pairs are used to carry out test runs on a test rig, in which contact patterns are determined and transmission errors are recorded. To compare with simulations, manufactured beveloid gears are measured and the actual tooth flank geometry is examined in contact simulations. An evaluation of results on test rig and in simulation show a high degree of agreement in contact patterns and transmission errors.

To evaluate an economic manufacturability of beveloid gears with local gearing data, the simulation module in SimKoS is expediently extended. The comparison of tooth flank geometries and the analysis of the contact behavior show that manufacturing of modified beveloid gears is generally possible using continuous hobbing processes.

The analytical approach of the proposed method describes meshing of involute gearings and can therefore be applied to cylindrical and helical gear pairs by adapting kinematic bodies. In addition, similarities in design of bevel and hypoid gears suggest that a transferability might also be possible.

# 1 Einleitung

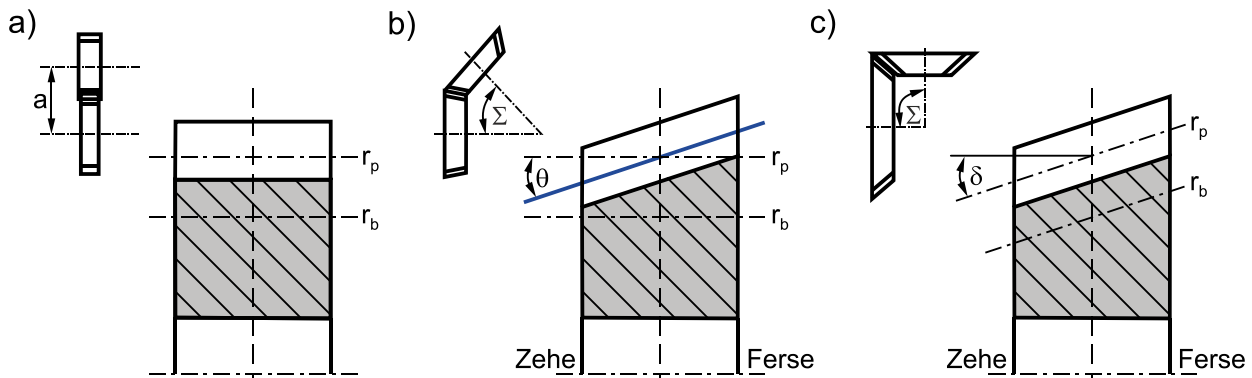
Durch gesetzliche und technologische Vorgaben werden Trends wie Elektrifizierung, Digitalisierung, Ressourcenschonung oder additive Fertigung zukünftig die Auslegung und den Einsatz klassischer Zahnradgetriebe im Maschinenbau merklich verändern. So tritt durch die Elektrifizierung im Automobilbereich die Spreizung des Getriebes in den Hintergrund und das Geräuschverhalten sowie der Wirkungsgrad gewinnen weiter an Bedeutung [NAUNHEIMER19, S. 103 f.].

Einen hohen Wirkungsgrad erzielen beispielsweise Getriebekonzepte mit direktem Leistungsfluss bei optimaler Materialausnutzung. Entscheidend für die Wahl des Konzepts und damit der Verzahnungsart ist die Achsanordnung der An- und Abtriebswelle. Für eine parallele Achsanordnung werden die am besten erforschten Zylinderradpaarungen eingesetzt, da sie aufgrund der evolventischen Zahnform unempfindlich auf Abweichungen reagieren und eine gleichförmige Drehwegübertragung bei hoher Leistungsdichte ermöglichen. Soll stattdessen eine nicht parallele Achsanordnung realisiert werden, kommen Kegel- und Hypoidradpaarungen zum Einsatz, für die es ebenfalls genormte Ansätze zur Auslegung und Berechnung gibt. Der typische Anwendungsbereich liegt bei Achswinkeln von etwa  $90^\circ$ , da aufgrund der Herstellkinematik auf konventionellen Kegelradverzahnungsmaschinen kleine Teilkegelwinkel nur mit erhöhtem Aufwand fertigbar sind [BÜRKLE93; KLOCKE17, S. 61].

Mit den genannten Verzahnungen werden Getriebekonzepte mit kleinem Achswinkel  $\Sigma$  bis  $20^\circ$  bisher nicht abgedeckt. Dieser Achswinkelbereich ermöglicht insbesondere bei Antriebssträngen mit mehreren An- und Abtriebswellen (Schiffswendegetriebe, Hybridantriebe, Nebenaggregate) kompakte Getriebekonzepte und kann u. a. durch konische Außenstirnräder erschlossen werden. In der Literatur werden diese auch Konuszahnrad [ROTH98, S. 231 ff.] oder Beveloidrad [VINCO50] genannt.

In Bild 1.1 sind die Axialschnitte eines Zylinder-, Beveloid- und Kegelrads mit dem Teilkreisradius  $r_p$  und Grundkreisradius  $r_b$  dargestellt. Im Vergleich zu Zylinderrädern besitzen Beveloidräder eine linear veränderliche Profilverchiebung entlang der Zahnbreite bei sonst unveränderten Verzahnungsdaten. Dies führt zu einer konischen Zahnform mit veränderlichen Kopf- und Fußkreisradien bei konstantem Teilkreis- und Grundkreisradius. Das Zahnde mit kleinem Kopfkreisradius wird als Zehe, das mit großem als Ferse bezeichnet [KLOCKE17, S. 66]. Zwar weisen Kegelräder ebenfalls eine konische Zahnform mit dem

Wälzkegelwinkel  $\delta$  auf, diese entsteht jedoch aufgrund des variablen Moduls entlang der Zahnbreite, weshalb sich auch Teil- und Grundkreisradius je nach Breitenposition ändern.



**Bild 1.1:** Axialschnitt und Achsanordnung bei a) Zylinder-, b) Beveloid- und c) Kegellrädern in Anlehnung an [HENSER15, S. 8]

Der Vorteil von Beveloidrädern ist, dass sie wie herkömmliche Stirnräder mit einem zahnstangenartigen Werkzeug hergestellt werden, das wie in Bild 1.1b um einen vorgegebenen Konuswinkel  $\theta$  gekippt wird. Im Gegensatz zu Kegellrädern ist damit die Herstellung von kleinen Teilkegelwinkeln mit konventionellen Verzahnungsmaschinen für Stirnräder wirtschaftlich möglich [BÜRKLE93; ROTH98, S. 164].

Aufgrund des zahnstangenartigen Werkzeugs kann ein Beveloidrad entweder mit einem zweiten Beveloidrad oder einem Zylinderrad gepaart werden, sodass der fehlende Achswinkelbereich zwischen der parallelen Achsanordnung mit Zylinderrädern und der senkrechten Achsanordnung mit Kegellrädern erschlossen wird.

## 1.1 Problemstellung und Motivation

Aktuell ist es nur mittels spezieller Software [BÖRNER05B] oder einer Vielzahl an Variantenrechnungen einzelnen Firmen vorbehalten, Beveloidradpaarungen zur Leistungsübertragung einzusetzen. Kleinen und mittelständischen Unternehmen fehlt es neben der Erfahrung und dem Wissen im Bereich der evolventischen Sonderverzahnung auch meist an Simulations- und Prüfmöglichkeiten, um Beveloidradpaarungen zweckmäßig auszulegen.

Grundsätzlich unterteilt sich die Entwicklung einer Getriebestufe in die Auslegung der Makro- und Mikrogeometrie. Die Bestimmung der Makrogeometrie wird im Wesentlichen durch die konstruktiven Vorgaben wie Achslage, Übersetzung und Lagerabstand sowie durch das zu übertragende Drehmoment beeinflusst. Insbesondere Letztgenanntes legt bei der Dimensionierung die festigkeitsrelevanten Größen wie Modul, Zähnezah und

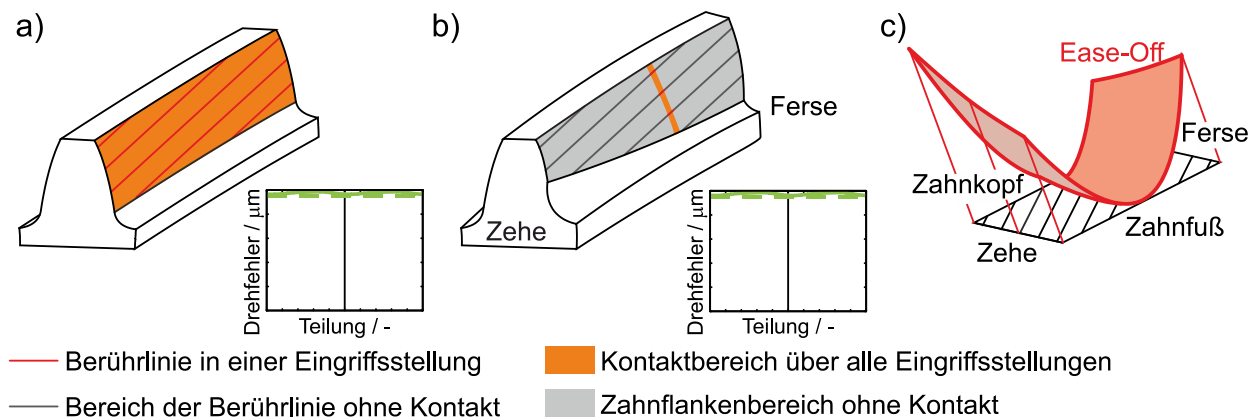


Zahnbreite fest. Für die am häufigsten eingesetzten Zylinder- und Kegelräder gibt es anerkannte Ansätze bzw. genormte Berechnungsvorschriften ([DIN3990-1 1987] und [DIN3991-1 1988]). Beveloidräder werden aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu Zylinderrädern vorzugsweise über eine Ersatzstirnradverzahnung abgebildet und mit konservativen Sicherheitsfaktoren ausgelegt [BÖRNER05B; KLOCKE17, S. 141]. Anschließend werden je nach Achswinkel und Achsversatz die Konus- und Schrägungswinkel festgelegt, sodass zwar eine funktionierende Getriebestufe vorliegt, die jedoch in der Regel überdimensioniert ist.

Weitaus komplexer gestaltet sich die Definition der Mikrogeometrie bzw. die Optimierung des Einsatzverhaltens mithilfe von Zahnflankenmodifikation. Die Mikrogeometrie soll unter Berücksichtigung von Einflüssen wie beispielsweise lastbedingten Verformungen im Getriebeumfeld, Herstellabweichungen und Montagetoleranzen so angepasst werden, dass für einen gegebenen Betriebspunkt ein möglichst optimales Übertragungsverhalten erzielt wird. Als charakteristische Qualitätsmerkmale zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens können die Lastverteilung auf der Zahnflanke und der auftretende Drehfehler, der durch die Schwingungsanregung zu Geräuschen führt, herangezogen werden. Bei Zylinder- und Kegelrädern wird zur Festlegung der Mikrogeometrie auf Standardmodifikationen wie Balligkeiten, Winkelmodifikationen und Rücknahmen an Zahnkopf und -fuß zurückgegriffen [DIN21771 2014], deren erforderliche Beträge über dokumentierte Erfahrungswerte (u. a. aus [NIEMANN03; WITKE94]) bestimmt werden können. Außerdem können Variantenrechnungen mit genormten Modifikationen mit in der Praxis validierten Programmen wie RIKOR [OTTO07], BECAL [SCHLECHT14] und KISSsoft [KISSLING13] vorgenommen werden, um so die optimale Mikrogeometrie ohne umfangreiche Erfahrungen in der Verzahnungstechnik festzulegen. Darüber hinaus befähigen die Programme den Anwender durch Abbildung der geometrie- und lastbedingten Flankenverlagerungen, die Wirksamkeit der vorgenommenen Modifikation zu prüfen.

Bei der zielgerichteten Definition der Mikrogeometrie von Beveloidrädern ist der Einsatz genormter Standardmodifikationen nur eingeschränkt möglich, was sich mit der Kontaktcharakteristik in Bild 1.2 erklären lässt. Beim lastfreien Abwälzen von Zylinderradpaarungen berühren sich die Zahnflanken zu einem Zeitpunkt linienartig entlang der Berührlinie, die durch die Berandung der Verzahnung begrenzt wird [DIN21771 2014]. Die Berührlinie stellt eine durch die momentane Eingriffsstellung gegebene theoretische Linie dar. Wie in Bild 1.2a gezeigt, bildet sich über alle Eingriffsstellungen betrachtet ein

Kontaktbereich über die komplette Zahnflanke (konjugierter Eingriff). Bei Beveloidradpaarungen findet im Allgemeinen der Flankenkontakt nur punktförmig an einer Breitenposition statt, die in der Regel nicht der Zahnbreitenmitte entspricht, wie Bild 1.2b zeigt.



**Bild 1.2:** Kontaktcharakteristik und Drehfehlerverlauf einer a) Zylinderrad- und b) einer Beveloidradpaarung in Anlehnung an [TRAUT19, S. 4] sowie c) Ease-Off einer Beveloidradpaarung

Die weiteren Bereiche der theoretischen Berührlinie klaffen auseinander. Über alle Eingriffsstellungen ergibt sich so nur ein schmaler Kontaktbereich von Zahnkopf bis -fuß. Während eines kompletten Durchlaufs bildet das Minimum der vorliegenden Klaffmaße den geometriebedingten Ease-Off ab [KLINGELNBERG08, S. 88], der exemplarisch in Bild 1.2c visualisiert wird. Der Ease-Off kann im Allgemeinen mit genormten Standardmodifikationen nicht zufriedenstellend kompensiert werden, weshalb deren Einsatz nicht zur zielgerichteten Definition der Mikrogeometrie ausreicht [BRIMMERS21, S. 92].

Der Punktkontakt und insbesondere die komplexe Form des Ease-Offs verdeutlichen die Herausforderung bei der Definition der Mikrogeometrie von Beveloidrädern. Es kann entweder durch Variantenrechnungen [BRIMMERS21] eine optimierte Mikrogeometrie für einen gewünschten Betriebspunkt oder wie bei Zylinderrädern zunächst ein konjugierter Eingriff [TRAUT19] erzielt werden. Der Ansatz mit konjugiertem Eingriff im lastfreien Zustand bietet den Vorteil, dass die Mikrogeometrie über Verzahnungsdaten beschreibbar ist. Darauf aufbauend findet eine Optimierung der annähernd konjugiert abwälzenden Beveloidradpaarung für einen gewünschten Betriebspunkt statt, um die auftretenden Verformungen und Verlagerungen unter Last zu berücksichtigen. Bei der endgültigen Festlegung der Mikrogeometrie kann auf Erfahrungen von Zylinderrädern zurückgegriffen werden [TRAUT19]. Dieser Ansatz beschränkt sich jedoch auf die schneidende Achslage und kann nicht auf Beveloidradpaarungen in windschiefer Achslage angewendet werden.

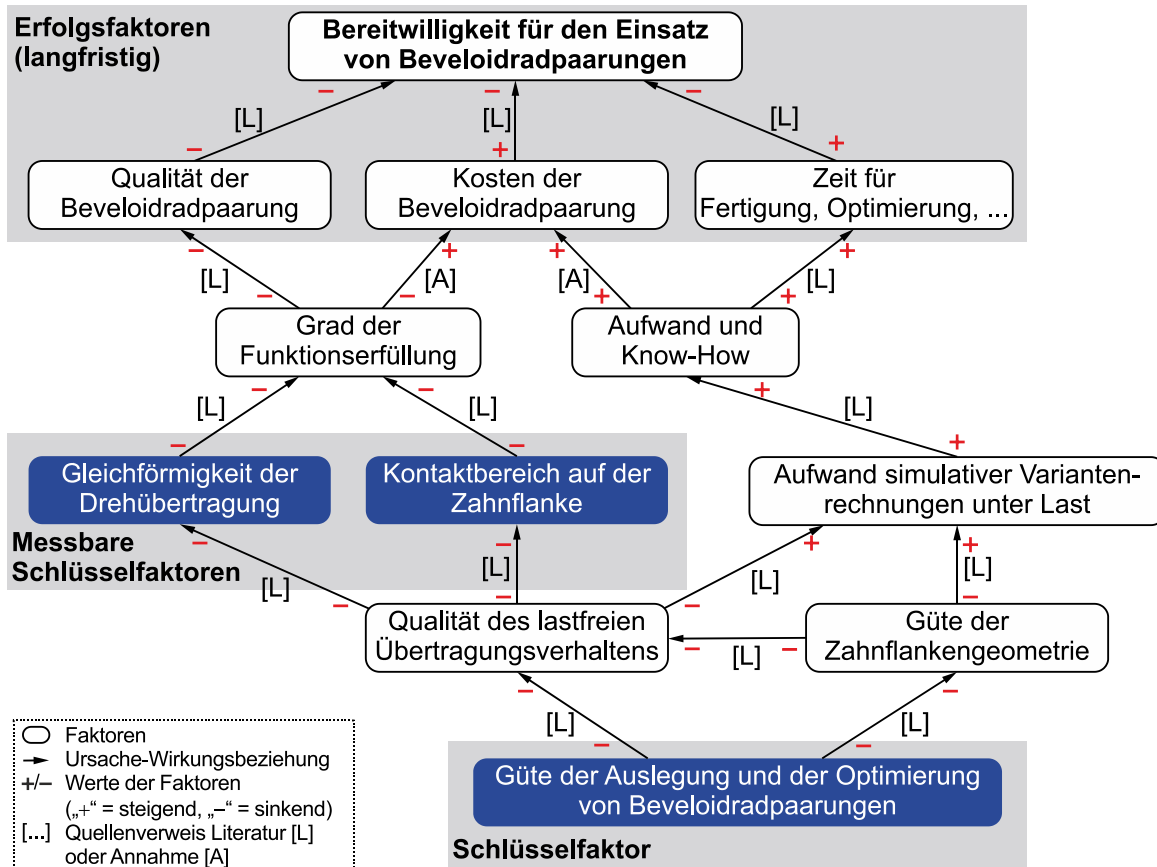
Neben dem Kontaktbereich ist der Drehfehler zur Beurteilung des Übertragungsverhaltens zu berücksichtigen. Der Drehfehler (Drehwegabweichung) beschreibt die Abweichung zwischen dem am Abtrieb auftretenden Drehweg und dem durch das Übersetzungsverhältnis festgelegten Drehweg. Wie in Bild 1.2 für den Drehfehler angedeutet, wälzen Zylinderrad- und nicht modifizierte Beveloidradpaarungen im lastfreien Zustand gleichförmig ab, da bei fehlerfreier Betrachtung zwei Evolventen vorliegen. Zur Kompensation des Ease-Offs wird die evolventische Zahnform von Beveloidrädern geändert, so dass bereits im lastfreien Zustand ein geometriebedingter Drehfehler entsteht. Dieser kann sich unter Last noch vergrößern, was die Optimierung hin zu einem geringen Drehfehler für den gewünschten Betriebspunkt erschwert. Zur Auslegung einer drehfehleroptimalen Mikrogeometrie sind Zahnflankenmodifikationen in Profilrichtung, z. B. Rücknahmen an Zahnkopf und -fuß sowie Stirnprofil-Balligkeiten, vorzusehen [LINKE10, S. 596 f.; WITKE94, S. 75].

Abschließend ist ein Verdrehflankenspiel für ein Abwälzen ohne Klemmen zu bestimmen. Neben dem Klemmen bei zu gering bemessenem Verdrehflankenspiel schwächt ein zu großes Verdrehflankenspiel die Zahndicke unnötig und erhöht den Leerweg beim Lastwechsel [KLINGELNBERG08]. Bei Zylinder- und Kegelrädern stehen genormte Methoden [DIN21771 2014; DIN3971 1980] zur Umsetzung und Bestimmung [DIN3967 1978] des Verdrehflankenspiels zur Verfügung. Bei Beveloidradpaarungen wird das Verdrehflankenspiel zwar mathematisch berücksichtigt (u. a. in [TSAI07]), jedoch bei der gezielten Auslegung bisher nur iterativ bestimmt [SCHÖLER21].

## 1.2 Zielsetzung und Struktur der Arbeit

Übergeordnetes Ziel der Arbeit ist eine analytische Berechnungsmethode zur geometrischen Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage, die den Getriebeentwickler beginnend bei der Vordimensionierung bis hin zur Optimierung der Mikrogeometrie unterstützt. Als Ergebnis der Berechnungsmethode liegt eine modifizierte Beveloidradpaarung vor, die im lastfreien Zustand einen angenäherten konjugierten Eingriff besitzt. Darauf aufbauend kann zur endgültigen Festlegung der Mikrogeometrie auf Erfahrungen von Zylinderrädern zurückgegriffen werden [TRAUT19]. Damit soll als langfristiger Erfolgsfaktor eine Steigerung der *Bereitwilligkeit für den Einsatz von Beveloidradpaarungen* erzielt werden, wie im Reference-Model in Bild 1.3 dargestellt. Das Reference-Model ist ein Hilfsmittel der Design Research Methodology (DRM) nach

Blessing und Chakrabarti [BLESSING09], welches zur Beschreibung der aktuellen Situation mit Ursache-Wirkungsbeziehungen zwischen den Faktoren verwendet wird. Mit dem zugehörigen Impact-Model kann die zukünftige Situation mit der eigens entwickelten Unterstützung visualisiert werden.



**Bild 1.3:** Vereinfachtes Reference-Model der vorliegenden Arbeit

Die langfristigen Erfolgsfaktoren, die im Rahmen der Arbeit nicht direkt messbar sind, beeinflussen den verbreiteten Einsatz von Beveloidradpaarungen. So fehlt es bei der Dimensionierung von Beveloidradpaarungen an einem genormten Vorgehen, weshalb eine gewisse Unsicherheit bei der ausgelegten Paarung vorliegt und der *Grad der Funktionserfüllung* (z. B. Überdimensionierung) niedrig ist [BÜRKLE93; BÖRNER05A]. Ferner hemmen Kosten und Zeit bei der Entwicklung und Fertigung den flächendeckenden Einsatz von Beveloidradpaarungen, da entweder spezielle Software [BÖRNER05B] oder Kapazitäten für Variantenrechnungen [BRECHER16] nicht verfügbar sind, um eine geeignete Zahnflankengeometrie zur Leistungsübertragung auszulegen. Besonders eine unzureichend ausgelegte Zahnflankengeometrie (Definition der Mikrogeometrie) erhöht den Aufwand simulativer Variantenrechnungen unter Last und führt bereits im lastfreien Zustand zu einem ungünstigen Übertragungsverhalten [RÖTHLINGSHÖFER12, S. 101], wie

die messbaren Schlüsselfaktoren *Gleichförmigkeit der Drehübertragung* und *Kontaktbereich auf der Zahnflanke* zeigen. Beide messbaren Faktoren tragen dazu bei, dass ein niedriger *Grad der Funktionserfüllung* vorliegt [BÜRKLE93; BECK15]. Sowohl die *Qualität des lastfreien Übertragungsverhaltens* als auch die *Güte der Zahnflankengeometrie* werden von der *Güte der Auslegung und der Optimierung von Beveloidradpaarungen* vorgegeben, weshalb dies den Schlüsselfaktor in der vorliegenden Arbeit darstellt und positiv zu beeinflussen ist.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass eine Unterstützung für die Auslegung und die Optimierung von Beveloidradpaarungen erforderlich ist. Dies soll in Form einer Berechnungsmethode umgesetzt werden. Mit aktuellen Ansätzen ist entweder eine Vielzahl an Variantenrechnungen notwendig oder ein unzureichendes Übertragungsverhalten vorhanden, bei dem dennoch durch konservative Sicherheitsfaktoren eine funktionierende Beveloidradpaarung sichergestellt wird.

Bild 1.4 stellt die Struktur der Arbeit mit den Schritten der DRM nach [BLESSING09] dar. Nach dem einleitenden Kapitel (entspricht der Forschungsplanung RC) mit Problemstellung, Motivation und Zielsetzung folgt in Kapitel 2 der Stand der Forschung und Technik. Zum Verständnis der Arbeit werden zunächst die Zahnflankengeometrie von Beveloidrädern, deren Eingriffsverhältnisse in beliebiger Achslage und die Abgrenzung zu weiteren Verzahnungen vorgestellt. Weiterhin wird an bisher übliche Vorgehensweisen zur Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen herangeführt. Mit dem Verständnisaufbau erfolgt innerhalb der Deskriptiven Studie I (DS I) die Konkretisierung der Aufgabenstellung und Zielsetzung in Kapitel 3, sodass die notwendige Vorgehensweise zum Erreichen der Ziele festgelegt werden kann.

In Kapitel 4 wird im Rahmen der Präskriptiven Studie (PS) die Berechnungsmethode für Beveloidradpaarungen hergeleitet, mit der ausgehend von der Dimensionierung der Hauptverzahnungsdaten bis hin zur Festlegung der Zahnflankengeometrie ein durchgängiger Ansatz geschaffen wird. Bei der Methode wird die Mikrogeometrie durch lokal angepasste Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite so modifiziert, dass ein konjugierter Eingriff angenähert wird. Darauf aufbauend erfolgt die Definition der endgültigen Mikrogeometrie für den vorliegenden Betriebspunkt.

Die Deskriptive Studie II (DS II) erfolgt in Kapitel 5 und 6. Zunächst wird in einer theoretischen Parameterstudie eine funktionale Bewertung (Tragbild, Drehfehler, Verdrehflankenspiel) ausgelegter Beveloidradpaarungen durchgeführt. Die Ergebnisse dienen zur

Ableitung eines Vertrauensbereichs. In Kapitel 6 werden exemplarisch ausgelegte Prüfradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten experimentell untersucht. Die Prüfräder werden für die Prüfstandsversuche mittels Fünf-Achs-Fräsen gefertigt. Für eine zukünftig praxisnahe Anwendung von modifizierten Beveloidradpaarungen soll in Kapitel 7 in einer Fertigungssimulation die Möglichkeit der wirtschaftlichen Herstellbarkeit mittels kontinuierlichen Abwälzverfahren beurteilt werden. Hierzu ist zunächst die Werkzeugbahn abzuleiten (PS), mit der anschließend Fertigungssimulationen von modifizierten Beveloidrädern durchgeführt werden (DS II).

In Kapitel 8 wird aufgrund der evolventischen Stirnschnitte bei Beveloidrädern die Übertragbarkeit der Berechnungsmethode auf weitere Verzahnungen mit evolventischem Stirnschnitt untersucht. Hierzu ist eine Anpassung des Ansatzes (PS) erforderlich, die anschließend theoretisch an exemplarisch ausgewählten Beispielen geprüft wird (DS II).

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung (Kapitel 9) und dem Ausblick (Kapitel 10).



**Bild 1.4:** Struktur der Arbeit

## 2 Stand der Forschung und Technik

Die konische Zahnform von Beveloidrädern ermöglicht eine Drehwegübertragung in beliebiger Achslage. Nachfolgende Zusammenstellung beschreibt die geometrischen Besonderheiten und Eingriffsverhältnisse von Beveloidrädern sowie deren Abgrenzung zu anderen Verzahnungen. Dies wird um den Stand des Wissens über den Auslegungsprozess bestehend aus der Dimensionierung, der Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten und der Optimierung von Beveloidradpaarungen ergänzt.

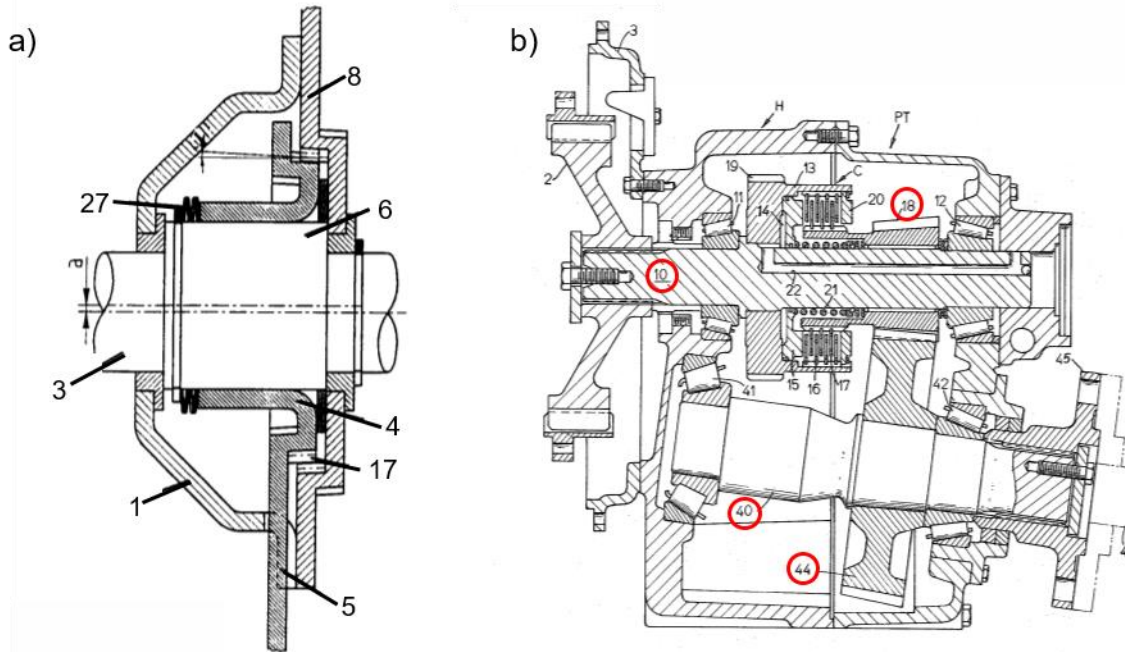
### 2.1 Einordnung und Einsatzgebiete von Beveloidradpaarungen

Beveloidräder werden trotz der äußerlichen Ähnlichkeit zu Kegelrädern von der Systematik her wie zylindrische Stirnräder den teilungskonstanten Evolventenverzahnungen zugeordnet [ROTH98, S. 159; RÖTHLINGSHÖFER12, S. 5 f.]. Die vielfältigen Einbaumöglichkeiten in paralleler, schneidender und windschiefer Achslage führen zu verschiedenen praktischen Anwendungsfällen der Beveloidradpaarungen in Fahrzeug-, Schiffs- und Industriegetrieben.

Beveloidräder in paralleler Achslage werden bereits in der Patentschrift [LAMATSCH34] zur Einstellung des Achsabstands einer Rotationsdruckmaschine verwendet, indem die Räder axial zueinander verschoben werden. Heutige Anwendungen von Beveloidradpaarungen mit parallelen Achsen zielen auf die Einstellung des Zahnspiels bei gleichem Achsabstand ab. Weisz stellt in [WEISZ98] ein Exzentergetriebe mit einstellbarem Zahnspiel vor. In der Skizze in Bild 2.1a kann über die drehbare Antriebswelle (3) eine durch das Gehäuse (1) begrenzte Drehbewegung des Abtriebs (5) erzielt werden. Dabei wird das Beveloidrad (17) relativ zu der ebenfalls konisch ausgeführten Drehmomentstütze (8) axial verschoben, sodass ein spielfreier Eingriff ermöglicht wird. Somschor et al. [SOMSCHOR96] untersuchen die axiale Zustellung der Beveloidräder zur effektiven Einstellung des Zahnspiels eines Robotergetriebes. Die Planetenbauweise mit konischen Hohlrädern bietet neben der Spielarmut eine hohe Steifigkeit und gleichförmige Drehbewegungsübertragung und somit eine kostengünstige Lösung [SOMSCHOR96].

In größerer Stückzahl werden außenverzahnte Beveloidräder in der schneidenden und windschiefen Achslage eingesetzt. Dabei beschränkt sich in der Regel der Einsatz auf kleine Achswinkel bis etwa  $20^\circ$ , da in diesem Bereich die Grenzen der wirtschaftlichen Herstellbarkeit von Kegelrädern erreicht werden [ROTH98, S. 164]. Für eine umfangreiche Betrachtung der Einsatzgebiete von Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage sei

auf [TRAUT19, S. 14 ff.] verwiesen. Nachfolgende Beispiele zeigen das Potenzial der windschiefen Achslage hinsichtlich der bauraumoptimalen Anordnung und der Möglichkeit, mehrere An- und Abtriebswellen zu verbinden.



**Bild 2.1:** Beispiel für eine Beveloidradpaarung im a) Exzentergetriebe nach [WEISZ98]  
b) Schiffswendegetriebe mit einer geneigten Abtriebswelle nach [YOKEL72]

In Bild 2.1b ist aus der Patentschrift [YOKEL72] eine Schnittdarstellung eines Schiffswendegetriebes mit einer geneigten Abtriebswelle (40) zu den zwei horizontalen Eingangswellen dargestellt. Die Eingangswelle (10) verdeckt die zweite Eingangswelle. Dieses Konzept stellt abtriebsseitig in beiden Drehrichtungen die gleiche Leistung bereit, da sich die Eingangswellen dauerhaft mit der Ausgangswelle im Eingriff befinden und über Kuppelungen wahlweise zur Leistungsübertragung zu- und abgeschaltet werden können. Die Verzahnung der Abtriebswelle ist als schrägverzahntes Beveloidrad (44) ausgeführt, welches mit einem schrägverzahnten Stirnrad in der Vorwärtsfahrt und mit einem schrägverzahnten Beveloidrad (18) in der Rückwärtsfahrt abwälzt. Die kompakt angeordneten Wellen lassen ein platzsparendes Getriebekonzept mit horizontal angeordnetem Schiffsmotor und einer geneigten Propellerwelle realisieren.

Die vorgestellte Achsanordnung aus [YOKEL72] wird auch in [OHTSUKI87] bei kleinen Jachten aufgrund der platzsparenden Anordnung verwendet.

In Großserie werden Beveloidradpaarungen in Verteilergetrieben bei Allradfahrzeugen eingesetzt. Ein Beispiel hierfür liefert ZF Friedrichshafen AG in [ZF02], bei der ein Antriebsstrang für Fahrzeuge mit Frontantrieb und einem in Fahrtrichtung angeordneten



Hauptgetriebe vorgestellt wird. Hierbei erfolgt die Kraftübertragung mit einer schneidend angeordneten Verbindungswelle vom Hauptgetriebe zum Vorderachsdifferential. Höbel und Ralph [HÖBEL09] veröffentlichen darauf aufbauend ein Getriebekonzept mit einer windschief angeordneten Verbindungswelle im Antriebsstrang. Die beliebige Anordnung der Verbindungswelle ermöglicht eine optimale Ausnutzung des Bauraums sowie eine Einsparung von Gewicht und Kosten aufgrund wegfallender Gelenke.

Für die vorgestellten Einsatzmöglichkeiten der Beveloidradpaarungen zeigt sich insbesondere bei windschiefen Achslagen, dass mit den Getriebekonzepten Bauraum, Gewicht und teils Kosten im Vergleich zu konventionellen Konzepten mit paralleler Achsanordnung eingespart werden. Im Hinblick auf die Verringerung des Leistungsgewichts bei mobilen Anwendungen ist ein vermehrter Einsatz von Beveloidradpaarungen in windschiefen Achsanordnungen vielversprechend.

## 2.2 Geometrie und Eigenschaften von Beveloidradpaarungen

Beveloidräder und deren geometrische Beschreibung gehen bereits auf die Patentschrift von Bregi und Francis [BREGI46] zurück und sind seither Gegenstand verschiedener Forschungsarbeiten, u. a. [BEAM54; HIERSIG79; SMITH90; TSAI97; ZIERAU89].

Tsai [TSAI97] unterteilt in seiner Arbeit systematisch die evolventischen Zahnräder, wobei die Torusverzahnung die Verallgemeinerung für Kronenräder, konische und zylindrische Räder darstellt. Die Gemeinsamkeit dieser Verzahnungen liegt in der möglichen Herstellung über ein Schneidrad (evolventisches Ritzel). Er unterscheidet dabei die mit einem Schneidrad hergestellten „Konischen Verzahnungen“ und die „Konusverzahnungen“, die über eine Zahnstange definiert werden können. In Anlehnung an diese Unterscheidung werden in dieser Arbeit ausschließlich Konusverzahnungen berücksichtigt.

Beveloidräder stellen einen verallgemeinerten Fall von zylindrischen Stirnrädern dar [ARTONI17]. Grundsätzlich können sie als Außen- und Innenverzahnung ausgeführt werden, jedoch befasst sich diese Arbeit angesichts praktischer Relevanz ausschließlich mit außenverzahnten Beveloidrädern. Wenn nicht ausdrücklich anderweitig angegeben, werden die Definitionen für Zylinderräder nach DIN ISO 21771 [DIN21771 2014] auf Beveloidräder übertragen und in Anlehnung an Roth [ROTH98, S. 232 ff.] entsprechend ergänzt.

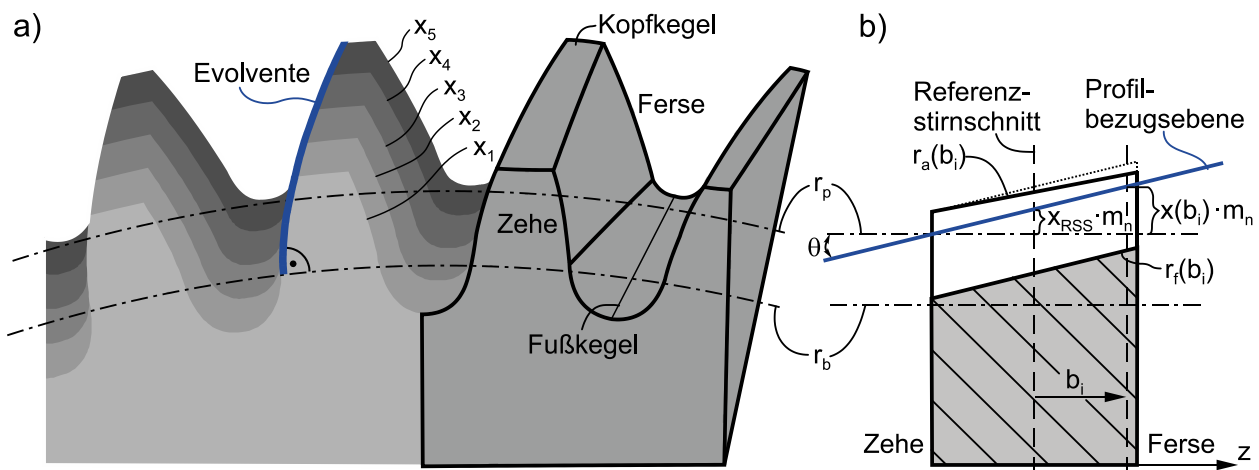
Die Verzahnungsgeometrie und Eingriffsverhältnisse von Beveloidrädern schaffen die wesentlichen Grundlagen für die in dieser Arbeit beschriebene Auslegung und Optimierung. Daher wird nachfolgend detailliert auf die geometrischen Zusammenhänge ein-

gegangen, insbesondere für den allgemeinen Fall windschiefer Achslagen, sodass in späteren Kapiteln darauf aufgebaut werden kann. Für eine umfangreiche Betrachtung schneidender Achslage sei auf Traut [TRAUT19, S. 14 ff.] verwiesen.

### 2.2.1 Zahnform von Beveloidrädern

Zylinder- und Beveloidräder weisen geometrische Ähnlichkeiten auf, da beide Verzahnungen mit einem zahnstangenartigen Werkzeug hergestellt werden. Im Gegensatz zur konstanten Profilverschiebung bei zylindrischen Stirnrädern verändert sich die Profilverschiebung bei Beveloidrädern linear entlang der Zahnbreite, sodass bei sonst gleichen Verzahnungsdaten eine konische Zahnform entsteht. Bild 2.2 zeigt den Zusammenhang zwischen der veränderlichen Profilverschiebung  $x(b_i) \cdot m_n$  und der konischen Zahnform eines geradzahnten Beveloidrads.

In Bild 2.2a wird ein Beveloidrad durch fünf Scheiben diskretisiert. Jede Scheibe entspricht dem Stirnschnitt eines geradzahnten Zylinderrads für unterschiedliche Profilverschiebungen. Werden die Scheiben in eine Ebene projiziert, können die Zahnflanken durch dieselbe Evolvente beschrieben werden. Bei einem Beveloidrad wird die veränderliche Zahnform in Breitenrichtung durch Verwendung verschiedener Teile der Evolvente erzielt.



**Bild 2.2:** Herleitung der konischen Zahnform für ein geradzahntes Beveloidrad dargestellt durch a) fünf Scheiben und als b) schematische Schnittansicht

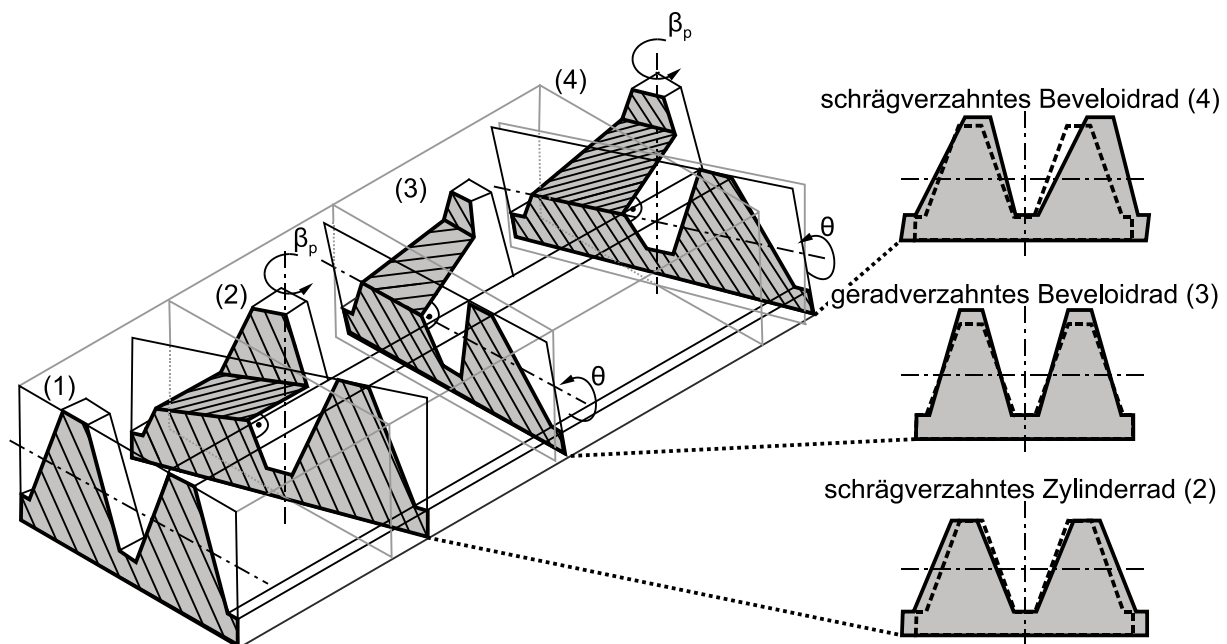
In Bild 2.2b ist erkenntlich, dass Beveloidräder trotz des zylindrischen Teilkreis-  $r_p$  und Grundkreisradius  $r_b$  eine konische Zahnform besitzen. Diese resultiert aus der verkippten Profilbezugsebene, die mit der Tangentialebene (auch Herstellwälzebene) den Konuswinkel  $\theta$  einschließt. Das Vorzeichen des Konuswinkels ist positiv, wenn die Ferse in positiver z-Richtung liegt [WINKLER02; RÖTHLINGSHÖFER12]. Über den Konuswinkel und

einen vorgegebenen Wert des Profilverschiebungsfaktors für den Referenzstirnschnitt (RSS)  $x_{RSS}$  (hier: Zahnbreitenmitte) kann der Profilverschiebungsfaktor  $x$  in Abhängigkeit von der Breitenposition  $b_i$  bestimmt werden.

$$x(b_i) = \frac{b_i \cdot \tan \theta}{m_n} + x_{RSS} \quad (2.1)$$

Am Verlauf des Fußkreisradius  $r_f$  ist der Konuswinkel direkt erkennbar. Der Kopfkegel hingegen kann aufgrund des gewählten Rohlings oder notwendiger Kopfmodifikationen davon abweichen. Bild 2.2b zeigt beispielhaft eine zunehmende Kürzung des Kopfkreisradius  $r_a$  in Richtung Ferse.

Bild 2.3 zeigt zwei Zähne einer geradflankigen Planverzahnung. Wie bei Zylinderrädern kann über eine zahnstangenartige Planverzahnung die entlang der Zahnbreite veränderliche Zahnform der Beveloidräder erzeugt werden. Dies entsteht durch Streckung und Scherung des in DIN 867 [DIN867 1986] definierten Bezugsprofils.



**Bild 2.3:** Schnitte der Planverzahnung in Anlehnung an [TRAUT19, S. 15]

Ausgehend vom Normalschnitt (1) kann der geometrieerzeugende Schnitt eines schrägverzahnten Zylinderrads (2) durch Verdrehung um den Schrägungswinkel  $\beta_p$  an der Planverzahnung dargestellt werden. In der projizierten Ebene wird die Streckung in Zahndickenrichtung ersichtlich, was eine gleichmäßige Vergrößerung der Stirneingriffswinkel an Links- und Rechtsflanke zur Folge hat. Bei einem geradverzahnten Beveloidrad (3) entsteht durch das Verkippen um den Konuswinkel  $\theta$  eine Streckung in Zahnhöhenrichtung, was den Stirneingriffswinkel auf Links- und Rechtsflanke gleichermaßen ver-

ringert. Die Kombination aus Verdrehung und anschließender Verkippung stellt den allgemeinen Fall eines schrägverzahnten Beveloidrads (4) dar.

Die Besonderheit eines schrägverzahnten Beveloidrads ist, dass der geometrieeerzeugende Schnitt aufgrund der Verdrehung und Verkippung asymmetrisch wird. Dies hat unterschiedliche Stirneingriffswinkel  $\alpha_{tL,R}$  auf Links- und Rechtsflanke zur Folge, die sich aufgrund des Konuswinkels auch bei einer Geradverzahnung vom Profilwinkel  $\alpha_p$  unterscheiden.

$$\tan \alpha_{tL,R} = \frac{\tan \alpha_p}{\cos \beta_p} \cdot \cos \theta \pm \tan \beta_p \cdot \sin \theta \quad (2.2)$$

Das positive Vorzeichen ist der Linksflanke und das negative der Rechtsflanke zugeordnet. Eine weitere Besonderheit neben dem asymmetrischen Stirnschnitt zeigt sich bei einem geradverzahnten Beveloidrad (3) in Bild 2.3. Hier ist am linken Zahn beim Schnitt der Planverzahnung auf Höhe des Teilkreises eine verjüngende Schnittfläche zu erkennen. Diese Verjüngung kann mit (2.3) beschrieben werden. Die Schrägungswinkel  $\beta_{L,R}$  auf Links- und Rechtsflanke haben die gleiche Größe bei entgegengesetztem Vorzeichen.

$$\tan \beta_{L,R} = \mp \frac{\tan \alpha_p}{\cos \beta_p} \cdot \sin \theta + \tan \beta_p \cdot \cos \theta \quad (2.3)$$

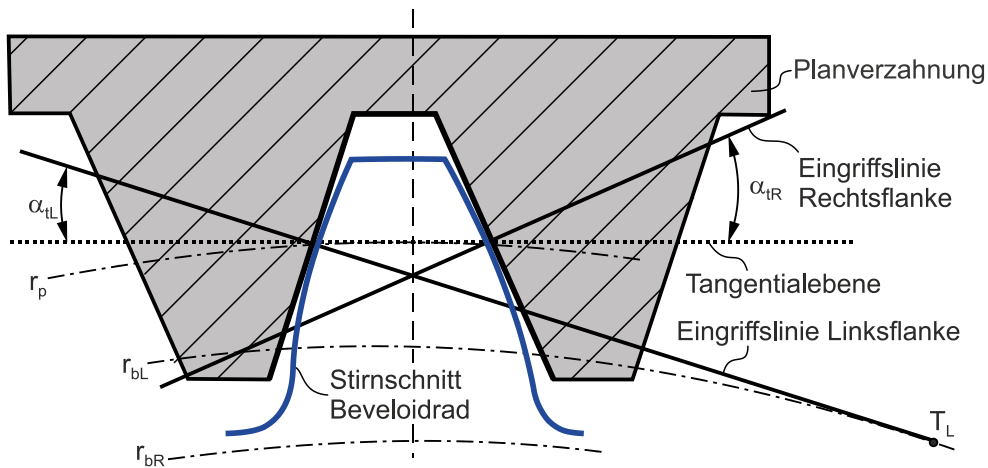
Durch zusätzliches Verdrehen der Planverzahnung um  $\beta_p$  wird der Schrägungswinkel auf Links- und Rechtsflanke durch den zweiten Term gleichgerichtet verändert. Nachfolgend wird ein schrägverzahntes Beveloidrad (4) durch den Schrägungswinkel des Bezugsprofils  $\beta_p$  charakterisiert.

Bild 2.4 zeigt die geometrieeerzeugende Zahnücke einer Planverzahnung, welche den evolventischen Stirnschnitt des Beveloidrads festlegt. Auf Höhe der Tangentialebene wälzen Planverzahnung und Beveloidrad ab. Für den allgemeinen Fall schrägverzahnter Beveloidräder ergeben sich aufgrund unterschiedlicher Stirneingriffswinkel abweichende Grundkreisradien  $r_{bL,R}$  für die Links- und Rechtsflanke.

Der Teilkreisradius  $r_p$  ist für beide Flanken identisch und lässt sich wie bei Zylinderrädern über die Zähnezahzahl  $z$ , den Modul  $m_n$  und den Schrägungswinkel  $\beta_p$  berechnen.

$$r_p = \frac{m_n \cdot z}{2 \cdot \cos \beta_p} \quad (2.4)$$

$$r_{bL,R} = r_p \cdot \cos \alpha_{tL,R} \quad (2.5)$$



**Bild 2.4:** Geometrieerzeugende Zahnfläche einer Planverzahnung im Eingriff mit einem schrägverzahnten Beveloidrad

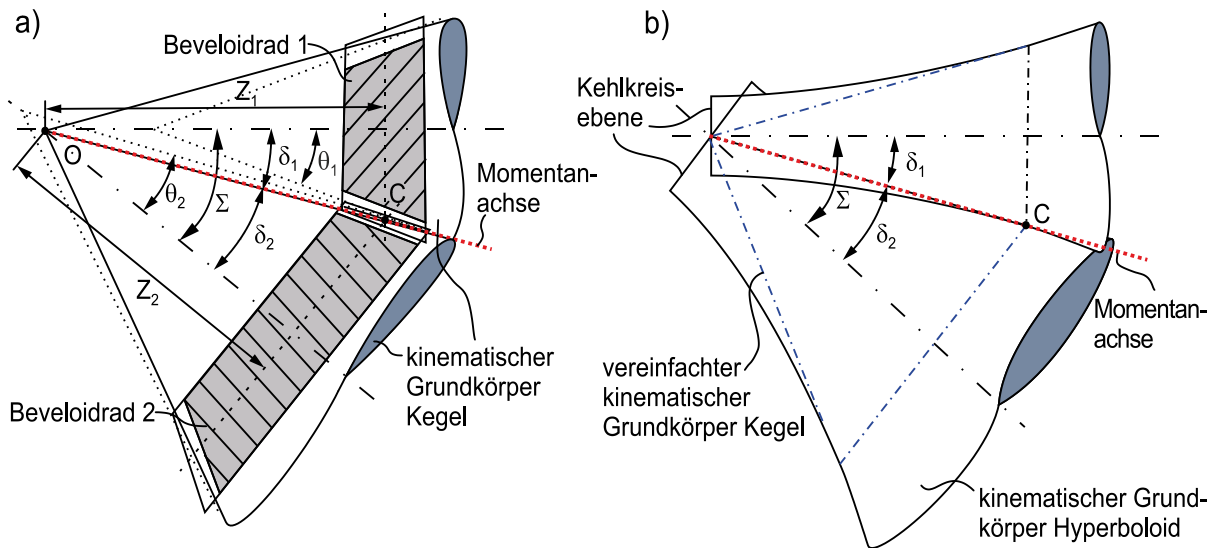
Werden mit einer zahnstangenartigen Planverzahnung die Stirnschnitte entlang der Zahnbreite definiert, zeigt sich aufgrund verzahnungsgeometrischer Grenzen eine begrenzte Ausführbarkeit der Zahnbreite. Wie in Bild 2.2 bereits angedeutet, wird die Zahnbreite an der Ferse durch den spitz zulaufenden Zahn, auch Spitzgrenze genannt, und an der Zehe durch den Unterschnitt bzw. die aktive Zahnhöhe begrenzt. Die maximal ausführbare Zahnbreite hängt von mehreren Verzahnungsdaten ab. Detaillierte Untersuchungen dazu liefern u. a. [HIERSIG79; TSAI97, S. 220 ff.; LIU01]. Aufbauend auf den analytischen Gleichungen in [TSAI97] setzen Schöler et al. in [SCHÖLER17] ein Programmmodul zur Vorauslegung um, welches unter Berücksichtigung der Profilverschiebungsgrenzen verzahnungsgeometrische Größen wie Konuswinkel und Profilverschiebungen bestimmt [SCHÖLER21, S. 145].

### 2.2.2 Beveloidradpaarungen und deren Eingriffsverhältnisse

Beide Räder einer Beveloidradpaarung werden unabhängig von der Zähnezahl, dem Konus- und dem Schrägungswinkel mit dem gleichen zahnstangenartigen Werkzeug hergestellt. Neben der Radpaarung bestehend aus zwei Beveloidrädern kann ein Beveloidrad mit einem Zylinderrad, einem Schraubrad, einer Zahnschnecke oder einer Zahnstange abwälzen.

Bild 2.5 zeigt die kinematischen Grundkörper einer Beveloidradpaarung in schneidender und windschiefer Achslage. In schneidender Achslage besitzt eine Beveloidradpaarung zwei Kegel als kinematische Grundkörper. Die Kegelspitzen treffen sich in einem gemeinsamen Ursprung  $O$ , an dem der Achswinkel  $\Sigma$  definiert ist. Der Einbauabstand  $Z_{1,2}$  ist der Abstand zwischen dem Ursprung und dem Stirnschnitt von Wälzpunkt  $C$ . Durch diesen

Ursprung und den Wälzpunkt verläuft die Momentanachse, an welcher die Kegel schlupfrei abrollen [BEAM54; LITVIN04, S. 52]. Alle Wälzpunkte entlang der Zahnbreite bilden die Wälzlinie der kinematischen Grundkörper (Wälzkegel) [ROTH98, S. 289 f.].



**Bild 2.5:** Kinematische Grundkörper einer Beveloidradpaarung in a) schneidender und b) windschiefer Achslage in Anlehnung an [BEAM54; WAGNER93, S. 42]

Die Wälzkegelwinkel  $\delta_{1,2}$  zur Beschreibung der kinematischen Grundkörper sind nur von Achswinkel  $\Sigma$  und Übersetzung  $i$  abhängig [HIERSIG79].

$$\tan \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma + i} \qquad \tan \delta_2 = \frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma + 1/i} \qquad (2.6)$$

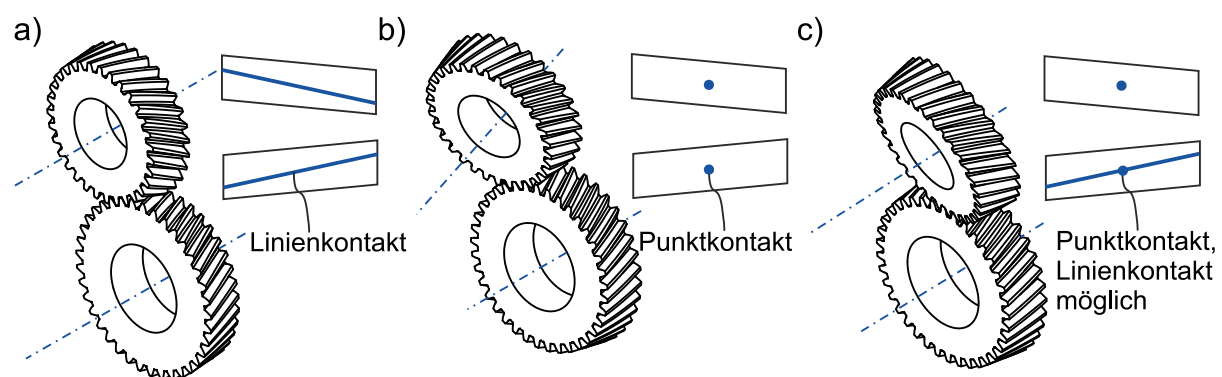
Weitere Verzahnungsgrößen wie Konus- und Schrägungswinkel haben bei schneidender Achslage keinen Einfluss auf die Kinematik. Das bedeutet für Beveloidradpaarungen, dass die kinematischen Grundkörper (definiert über  $\delta_{1,2}$ ) und die konischen Radkörper (definiert über  $\theta_{1,2}$ ) im Allgemeinen nicht übereinstimmen, wie es in Bild 2.5a dargestellt ist. So besitzen Radpaarungen bei vorgegebener Übersetzung und Achswinkel die identischen kinematischen Kegel unabhängig von der Aufteilung des Achswinkels auf die beiden Räder. Selbst eine Paarung aus Zylinder- und Beveloidrad besitzt zwei Kegel als kinematische Grundkörper.

Bild 2.5b zeigt die kinematischen Zusammenhänge in windschiefer Achslage. Hier werden aufgrund der Übersichtlichkeit die konischen Radkörper weggelassen. Bei konstantem Achsversatz, Achswinkel und Übersetzung entsteht durch Rotation einer Achse (Momentanachse) um eine weitere windschiefe Achse (Radachse) ein Hyperboloid. Durch Rotation der Momentanachse um beide windschiefen Radachsen entstehen daher zwei Hyperboloide, die sich entlang der Momentanachse berühren [WAGNER93, S. 40].

Umgekehrt bedeutet dies, dass zwei windschief angeordnete Kegel keine gemeinsame Momentanachse besitzen. Stattdessen liegt eine Schraubwälzbewegung vor, wobei sich Rotation um und Translation entlang dieser Schraublinie überlagern [LITVIN04, S. 679].

Die Kehlkreisebenen beschreiben jeweils die kleinsten Querschnitte der Hyperboloide und definieren über deren Radius den Achsversatz  $a$  (kleinster Abstand der windschiefen Achsen). Mit zunehmendem Abstand zur Kehlkreisebene des Hyperboloids nimmt die Krümmung der Mantellinie ab, sodass nach [WAGNER93, S. 43] ein Kegel zur Vereinfachung des kinematischen Grundkörpers verwendet werden kann. Der Kegel berührt dabei das Hyperboloid genau an einem Stirnschnitt, sodass statt der Wälzlinie nur der in Bild 2.5b dargestellte Wälzpunkt C vorliegt [LINDNER54, S. 3].

Bild 2.6 stellt die möglichen Achslagen einer Beveloidradpaarung und die zugehörigen charakteristischen Kontaktbilder dar. In diesem Beispiel wird das obere Rad jeweils unverändert übernommen und nur der Konus- bzw. Schrägungswinkel am unteren Rad geändert. Bild 2.6a zeigt eine parallele Achslage, bei der die gegensinnig angeordneten Beveloidräder die betragsmäßig gleichen Konus- und Schrägungswinkel besitzen. Trotz der verkippten Planverzahnung liegt ein Linienkontakt auf Links- und Rechtsflanke vor. Voraussetzung für diesen konjugierten Eingriff ist eine gemeinsame Ebene tangential an die Grundzylinder [BÜRKLE93]. Darüber hinaus kann bei parallelen Achsen durch axiales Verschieben der Beveloidräder zueinander das Verdrehflankenspiel gezielt eingestellt werden, da jeweils andere Stirnschnitte mit linear veränderter Profilverschiebung in Eingriff kommen und so die Profilverschiebungssumme angepasst wird [HIERSIG79].

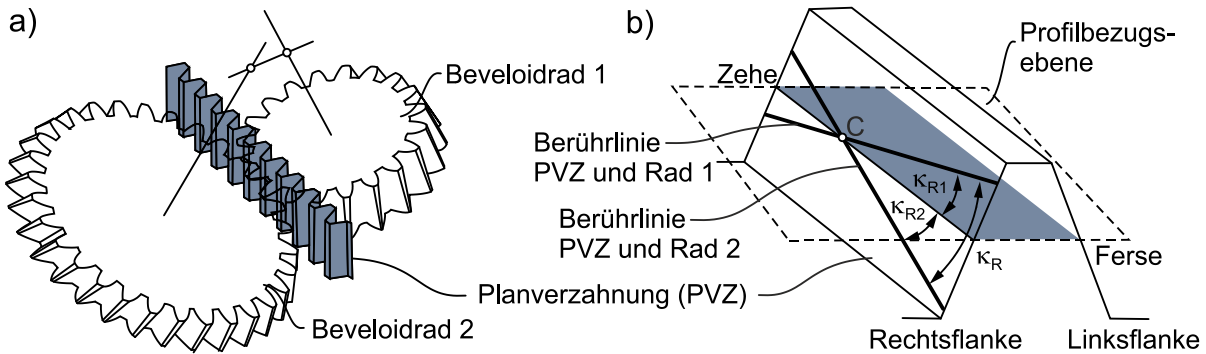


**Bild 2.6:** a) Parallele, b) schneidende und c) windschiefe Achslage einer Beveloidradpaarung mit charakteristischem Kontaktbild in Anlehnung an [BEAM54; BÜRKLE93]

Sowohl bei schneidender Achslage in Bild 2.6b als auch bei windschiefer Achslage in Bild 2.6c kommt es im Allgemeinen zu einem Punktkontakt auf den Zahnflanken. Nur bei

besonderer Anordnung wälzt eine Beveloidradpaarung in der windschiefen Achslage unter Linienkontakt in einer Drehrichtung ab.

Um das charakteristische Kontaktbild zu beurteilen, wird der Eingriff eines Beveloidrads mit einer Planverzahnung betrachtet. Die Planverzahnung gleicht in dieser theoretischen Betrachtung einer Zahnstange der Dicke null, die wie in Bild 2.7a mit beiden Rädern gleichzeitig im Eingriff ist [LITVIN04, S. 276 ff.].



**Bild 2.7:** a) Planverzahnung im Eingriff mit zwei Beveloidrädern nach [TSAI97, S. 188]  
 b) Berührlinien auf der gemeinsamen Planverzahnung nach [ZHU12A]

Die resultierenden Berührlinien zwischen den Rädern und der Planverzahnung sind in Bild 2.7b exemplarisch für die Rechtsflanke dargestellt. Der konjugierte Eingriff kann damit begründet werden, dass Beveloidräder mit einem zahnstangenartigen Werkzeug hergestellt werden. So entspricht die Berührlinie zwischen der Planverzahnung und dem Beveloidrad der Erzeugenden [DIN21771 2014, S. 44].

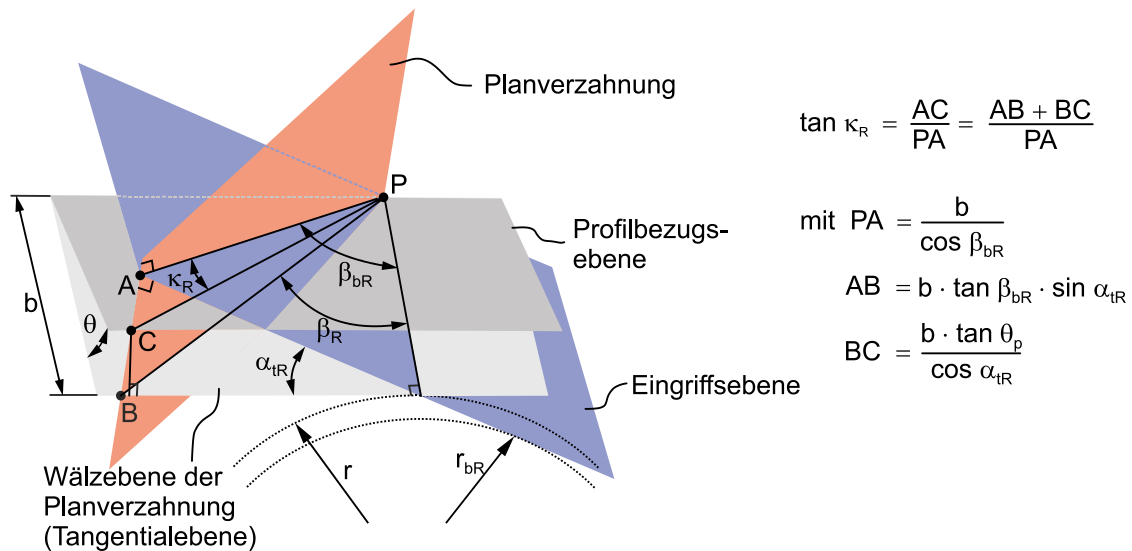
Die Berührlinien im Zahneingriff von Beveloidrädern sind jedoch jeweils um den Winkel  $\kappa_{R1,2}$  zur Profilbezugsebene geneigt und schneiden sich im Wälzpunkt C. Dies hat bei Beveloidradpaarungen in nicht paralleler Achslage einen punktförmigen Kontaktbereich zur Folge. Der Winkel  $\kappa_R$  zwischen den Berührlinien beschreibt den Winkel der ersten Haupttrichtungen (First Principle Directions, FPD) und kann zur Bewertung des charakteristischen Kontaktbilds herangezogen werden [WU09; ZHU12A].

$$\tan \kappa_{L,R} = \tan \beta_p \cdot \sin \alpha_p \pm \frac{\tan \theta_p \cdot \cos \alpha_p}{\cos \beta_p} \quad (2.7)$$

Die Berechnung des FPD-Winkels erfolgt durch den geometrischen Zusammenhang in Bild 2.8. Die Linie PA ist die Schnittlinie zwischen der tangential an den Grundzylinder anliegenden Eingriffsebene des Beveloidrads und der Planverzahnung und kann über den Grundschrägungswinkel  $\beta_{bR}$  beschrieben werden.

$$\tan \beta_{bL,R} = \tan \beta_{L,R} \cdot \cos \alpha_{tL,R} \quad (2.8)$$



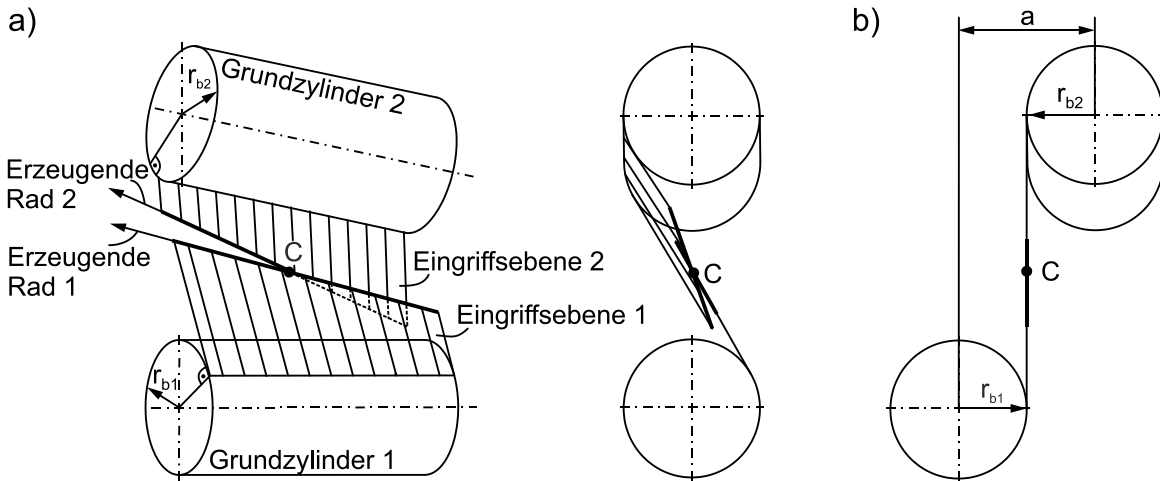


**Bild 2.8:** Herleitung der Berührlinie zwischen Beveloidrad und Planverzahnung für die Rechtsflanke in Anlehnung an [ZHU12A]

Umfangreiche Untersuchungen von Zhu et al. [ZHU12A] belegen, dass Konus- und Schrägungswinkel die FPD-Winkel  $\kappa_{L,R}$  und somit die Steigung der Berührlinien maßgeblich beeinflussen. Werden die Verzahnungsdaten so gewählt, dass sich die FPD-Winkel  $\kappa_{L,R}$  null annähern, kann ein linienartiger Kontakt erzielt werden. Bereits für den Sonderfall geradverzahnter Beveloidräder leitet Beam [BEAM54] den Verlauf der Berührlinien her und findet heraus, dass deren Steigung kleiner als der Konuswinkel ist. Auch in [TRAUT19, S. 62 f.] werden die Verläufe der Berührlinien zur Analyse des punktförmigen Zahneingriffs bei Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage verwendet.

Eine weitere Veranschaulichung für den Punkt- und Linienkontakt bei Beveloidradpaarungen liefern Bürkle [BÜRKLE93] und Tsai [TSAI97]. Bild 2.9a zeigt für eine schneidende Achslage die Grundzylinder und die Eingriffsebenen für eine definierte Eingriffsstellung. Ähnlich wie bei den Berührlinien auf der Planverzahnung in Bild 2.7b schneiden sich die Erzeugenden im Wälzpunkt C. Da die um den Achswinkel verkippten Eingriffsebenen keine gemeinsame Erzeugende besitzen, findet ein Punktkontakt statt.

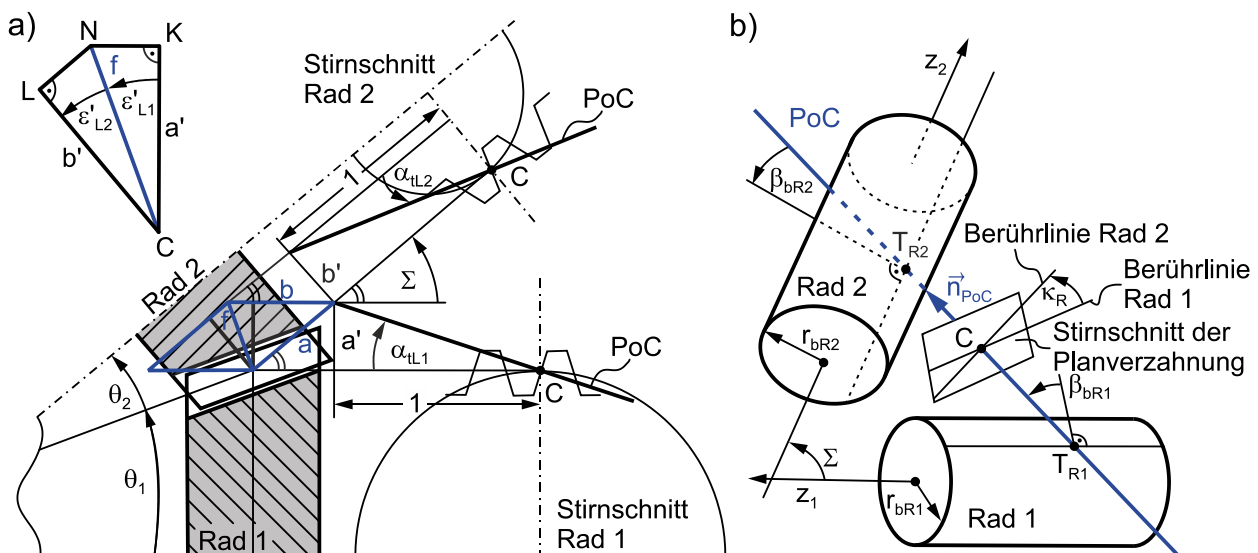
In Bild 2.9b wird ein Achsversatz  $a$  in der Höhe der Summe der Grundkreisradien aufgebracht, sodass die Eingriffsebenen eine gemeinsame Erzeugende besitzen [TSAI97]. Genau für diese Konstellation liegt ein konjugierter Eingriff für eine Drehrichtung vor. Auch die analytische Betrachtung der Berührlinien auf der Planverzahnung zeigt, dass für diesen Sonderfall der Winkel zwischen den ersten Hauptrichtungen null wird. Gleichzeitig stellt sich auf der gegenüberliegenden Flanke ein großer Winkel  $\kappa$  ein, sodass ein Punktkontakt auftritt.



**Bild 2.9:** Grundzylinder einer Beveloidradpaarung mit a) Punktkontakt in schneidender und b) Linienkontakt in windschiefer Achslage [BÜRKLE93; TSAI97]

Neben dem Verlauf der Berührlinien ist der Verlauf des Kontaktpfads (Path of Contact, PoC), welcher über den jeweils kleinsten Kontaktabstand jeder Berührlinie definiert wird, wesentlich zur Analyse des charakteristischen Kontaktbilds [KLINGELNBERG08, S. 91].

Theoretische Überlegungen zur Neigung und zum räumlichen Verlauf des PoC sind in Bild 2.10 dargestellt. Bereits Beam [BEAM54] leitet geometrisch her, dass die in den Axial-schnitt projizierten Schnittpunkte von den Eingriffsebenen und Ebenen mit definiertem Abstand ein Viereck aufspannen, welches wie in Bild 2.10a durch den PoC in zwei Dreiecke geteilt wird.



**Bild 2.10:** a) Herleitung der Neigungswinkel  $\varepsilon'_{1,2}$  des PoC zu den Stirnschnittebenen nach [TRAUT19, S. 65] für Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage  
b) Räumlicher Verlauf des Path of Contact (PoC) nach [MITOME85]

Die Winkel  $\varepsilon'$  beschreiben dabei die Neigung des PoC auf der Zahnflanke. Für eine geradverzahnte Beveloidradpaarung in schneidender Achslage findet Beam heraus, dass die Winkel  $\varepsilon'_{1,2}$  den Konuswinkeln  $\theta_{1,2}$  entsprechen. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass der PoC die Planverzahnung im Normalschnitt senkrecht schneidet. Der Ansatz von Beam [BEAM54] zur Bestimmung der Neigungswinkel bei Geradverzahnungen wird in [TRAUT19, S. 65] auf Schrägverzahnungen in schneidender Achslage erweitert. Um das Viereck CKNL in Bild 2.10a aufzuspannen, werden zunächst die Seiten a und b des Parallelogramms ermittelt. Mithilfe von trigonometrischen Umformungen werden anschließend die Neigungswinkel über Achswinkel und Stirneingriffswinkel ausgedrückt.

Basierend auf den Erkenntnissen von [BEAM54] verallgemeinert Mitome [MITOME85] für Paarungen mit schrägverzahnten Beveloidrädern, dass der räumliche Verlauf des PoC in Bild 2.10b senkrecht durch den Stirnschnitt der Planverzahnung verläuft. Die Darstellung kann ohne Einschränkungen auf die Linksflanke übertragen werden. Der PoC tangiert beide Grundzylinder und schließt zur Senkrechten der Mantellinie den Grundschrägungswinkel  $\beta_b$  ein. Da der PoC den Verlauf der Kontaktpunkte über alle Eingriffsstellungen wiedergibt, geht dieser durch den Wälzpunkt C. Mitome leitet aus dem Eingriff der Planverzahnung mit den Beveloidrädern den Vektor  $\vec{n}_{PoC}$  und den zuvor hergeleiteten Winkel zwischen den Berührlinien  $\kappa_{1,2}$  her.

Die analytische Herleitung zu Lage und Verlauf der Berührlinie und des PoC ermöglichen, eine Aussage über das charakteristische Kontaktbild nicht modifizierter Beveloidradpaarungen zu treffen. Gerade für den punktförmigen Kontakt ist es jedoch essenziell, eine ausreichende Überdeckung für eine kontinuierliche Drehwegübertragung zu gewährleisten. Sowohl Beam [BEAM54] mit der Tredgold'schen Näherung als auch Mitome [MITOME85] mit einer elliptischen Schnittfläche durch den Kopfkegel nähern die Länge des PoC und somit die Überdeckung für Beveloidradpaarungen hinreichend an.

Darüber hinaus stellt Roth [ROTH98] einen analytischen Ansatz für Beveloidradpaarungen mit nicht parallelen Radachsen vor. Beim Punktkontakt liegt statt der Eingriffsebene nur eine Eingriffslinie vor, weshalb sich die Überdeckung aus der Profilüberdeckung ergibt. Die tangential anliegende Eingriffsfläche schneidet den Kopfkegel in einem Hyperbelbogen. Mit dieser Schnittkurve kann die Länge der Eingriffsstrecke aus dem Ansatz der allgemeinen Hyperbelgleichung 2. Ordnung bestimmt werden [ROTH98, S. 277]. Tsai [TSAI07] erweitert diesen Ansatz für Beveloidradpaarungen mit einer Profilverschiebung in der Radmitte.

## 2.3 Abgrenzung der Beveloidräder von anderen Verzahnungen

Die vorgestellten Beveloidräder sollen von anderen Verzahnungen abgegrenzt bzw. Gemeinsamkeiten dargestellt werden. Zunächst erfolgt der Vergleich zu Zylinder- und Schraubrädern, die einen Spezialfall der Beveloidräder darstellen. Anschließend werden aufgrund der vergleichbaren Einbaulage Kegel- und Hypoidräder betrachtet.

### 2.3.1 Abgrenzung von Zylinder- und Schraubrädern

Zylinder- und Schraubräder gehören wie Beveloidräder zu den teilungskonstanten Verzahnungen [ROTH98, S. 159] und besitzen eine evolventische Profilform. Durch Vereinfachen der Gleichungen für Beveloidräder können die bekannten Gleichungen für Zylinder- und Schraubräder abgeleitet werden. Tabelle 2.1 fasst die Unterschiede und Gemeinsamkeiten hinsichtlich der Zahngeometrie und des Eingriffsverhaltens zusammen.

Eigenschaften / Kriterien	Beveloidrad	Zylinderrad	Schraubrad
Erzeugungsprinzip	Zahnstange	Zahnstange	Zahnstange
Profilform	Evolvente	Evolvente	Evolvente
Stirnschnitt	(a-)symmetrisch	(a-)symmetrisch	(a-)symmetrisch
Zahnform entlang Zahnbreite	veränderlich	konstant	konstant
Profilverschiebung entlang Zahnbreite	veränderlich	konstant	konstant
Kinematischer Grundkörper	kegelig	zylindrisch	zylindrisch
Mögliche Achslagen	parallel / schneidend / windschief	parallel	windschief
Charakteristisches Kontaktbild	Punktkontakt (Linienkontakt*)	Linienkontakt	Punktkontakt

\* bei besonderer Anordnung in windschiefer Achslage ausschließlich in einer Drehrichtung

**Tabelle 2.1:** Abgrenzung der Beveloidräder von Zylinder- und Schraubrädern in Anlehnung an [ROTH98; ROTH01]

Asymmetrische Stirnschnitte werden teilweise bei Zylinder- und Schraubrädern eingesetzt, um beispielsweise bei einer Vorzugsbelastungsrichtung die Tragfähigkeit zu erhöhen [LINKE10, S. 161]. Eine detaillierte Übersicht zur Auslegung und zum Eingriffsverhalten von asymmetrischen Zylinderrädern ist in [KAPALEVICH13, S. 40 ff.] gegeben.

Bei Schraubrädern kommt es wie bei Beveloidrädern zu einer Punktberührung, welche zusammen mit dem Zahnlängsgleiten dazu führt, dass mit einer Schraubradpaarung bevorzugt nur geringe Lasten übertragen werden. Eine Ausnahme stellen kleine Achswinkel bis etwa 20° dar, da sich hierbei eine große Kontaktellipse unter Last [NIEMANN83, S. 9] ausbildet.

### 2.3.2 Abgrenzung von Kegel- und Hypoidrädern

Im Gegensatz zum vorherigen Vergleich unterscheiden sich Beveloidräder von Kegel- und Hypoidrädern bereits im Erzeugungsprinzip, was gedanklich mit einem Übergang vom Zwei- ins Dreidimensionale vergleichbar ist und die Zahnformgebung und Eingriffsverhältnisse weitaus komplexer gestaltet [STADTFELD17, S. 20]. So ist beispielsweise die Zahnform von Kegelrädern vom gewählten Herstellverfahren abhängig [KLINGELNBERG08, S. 13 ff.]. Darüber hinaus lassen sich Kegelräder und deren Geometrie noch anhand weiterer Eigenschaften wie z. B. Flankenlängslinien- und Zahnhöhenverlauf einteilen [KLOCKE17, S. 46 f.]. Daher wird in Tabelle 2.2 und im Folgenden nur auf die für diese Arbeit zum Verständnis beitragenden Eigenschaften eingegangen, um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten darzulegen. Für eine ausführliche Betrachtung der zahnformgebenden Herstellverfahren und Auslegungsansätze von Makro- und Mikrogeometrie der Kegel- und Hypoidräder sei auf [KLINGELNBERG08; STADTFELD17] verwiesen.

Eigenschaften / Kriterien	Beveloidrad	Kegelrad	Hypoidrad
Erzeugungsprinzip	Zahnstange	Planrad	Planrad
Profilform	Evolvente	Oktoide*	Oktoide*
Stirnschnitt	(a-)symmetrisch	(a-)symmetrisch	asymmetrisch
Zahnform entlang Zahnbreite	veränderlich	veränderlich	veränderlich
Profilverschiebung entlang Zahnbreite	veränderlich	konstant	konstant
Kinematischer Grundkörper	kegelig	kegelig	kegelig**
Mögliche Achslagen	parallel / schneidend / windschief	schneidend	windschief
Charakteristisches Kontaktbild	Punktkontakt (Linienkontakt)	Punktkontakt (Linienkontakt)	Punktkontakt

\* Oktoide statt Kugelevolvente aus fertigungstechnischen Gründen

\*\* Annäherung der hyperbolischen Schraubwälzfläche durch Kegelfläche, da wirtschaftlich herstellbar

**Tabelle 2.2:** Abgrenzung der Beveloidräder von Kegel- und Hypoidrädern in Anlehnung an [KLINGELNBERG08; LINKE10; STADTFELD17]

Neben der abweichenden Herstellkinematik ist ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal zwischen Beveloid- und Kegelrädern der veränderliche Modul entlang der Zahnbreite. Dieser führt bei Kegelrädern mit konstanter Profilverschiebung aufgrund der modulabhängigen Zahnhöhenkenngrößen zu einer konischen Zahnform mit einem Kopf-, Teil- und Fußkegel. Der im Allgemeinen asymmetrische Stirnschnitt bei Kegelrädern besitzt theoretisch eine Kugelevolvente als Profilform. Aus fertigungstechnischen Gründen wird jedoch ein Trapezprofil als Zahnprofil der Planverzahnung bevorzugt, weshalb sich eine Oktoide bildet [KLINGELNBERG08, S. 28].

Beim Hypoidrad werden die hyperbolischen Schraubwalzflachen durch Kegelflächen angenähert, wie bei einer Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage in Bild 2.5b gezeigt. Die angenäherten kinematischen Grundkörper der Hypoidradpaarung ermöglichen eine wirtschaftliche Herstellbarkeit.

Beveloidräder besitzen aufgrund des Erzeugungsprinzips die Satzradereigenschaft, wohingegen ein Kegelrad nur mit dem in der Auslegung verwendeten Gegenrad gepaart werden kann. Zudem bieten Beveloidräder den Vorteil, dass zum korrekten Abwälzen kein gemeinsamer Scheitelpunkt erforderlich ist, was sie gegenüber axialen Verlagerungen, Achswinkelanderungen und kleinen Achsabstandsanderungen unempfindlicher machen als Kegelräder [BURKLE93, S. 105].

Bereits Bürkle hat in [BURKLE93] einen Vergleich von Beveloid- und Kegelrädern vorgenommen. Im Mittelpunkt steht hierbei der vorteilhafte Einsatz von Beveloidrädern gegenüber Kegelrädern.

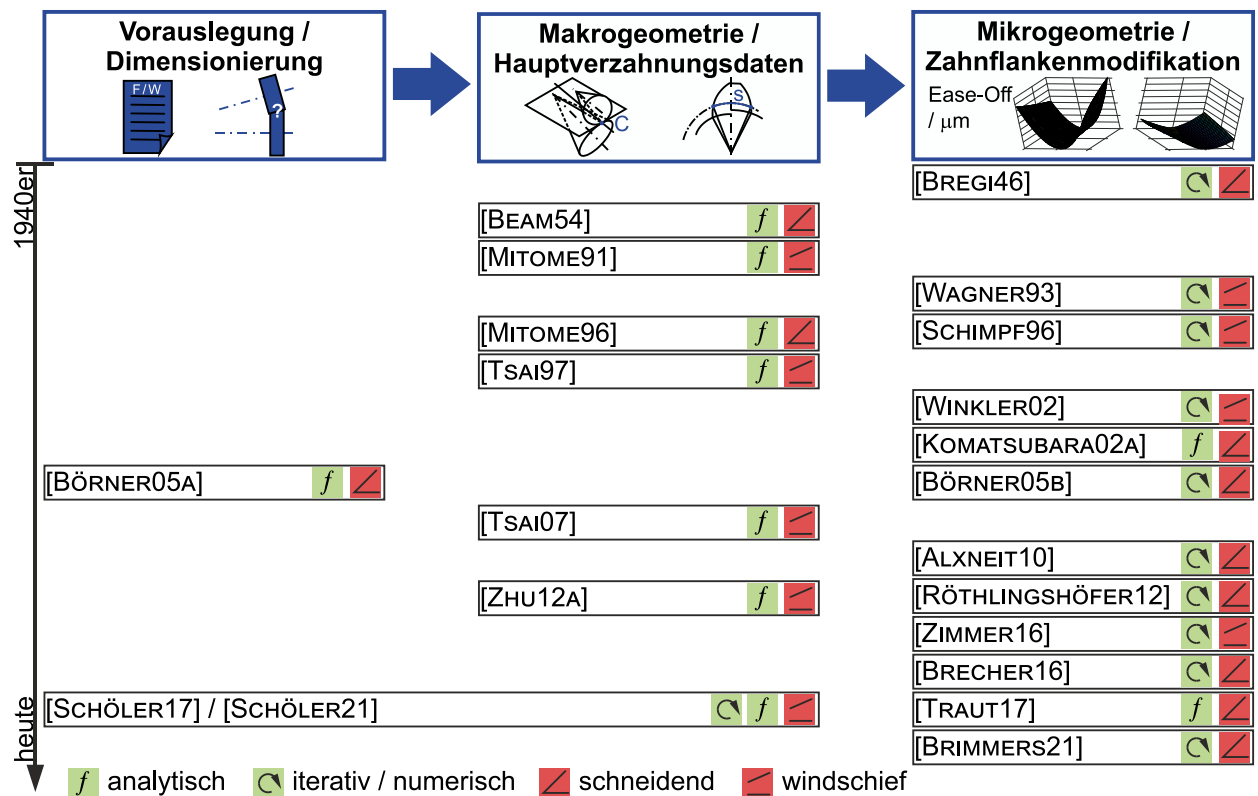
Die Abgrenzung hilft bei der Einordnung von Beveloidrädern gegenüber weiteren Verzahnungen. Im Hinblick auf die Gemeinsamkeiten lässt sich abschließend festhalten, dass das Erzeugungsprinzip sowie die Profilform im Stirnschnitt mit denen der Zylinderräder übereinstimmt und die kinematischen Grundkörper sowie die Flankenberuhrung Ähnlichkeiten zu Kegelrädern aufweisen.

## **2.4 Auslegungsprozess von Beveloidradpaarungen**

Eine vereinfachte Übersicht zum Auslegungsprozess von Beveloidradpaarungen ist in Bild 2.11 gegeben. Zu den einzelnen Schritten sind für diese Arbeit relevante Untersuchungen zugeordnet und gekennzeichnet, ob ein analytischer oder numerischer Ansatz in der Veröffentlichung vorgestellt wird. Darüber hinaus ist dargestellt, ob Beveloidradpaarungen in schneidender oder windschiefer (beliebiger) Achslage ausgelegt oder simulativ und experimentell untersucht werden.

Zur Auslegung einer Beveloidradpaarung sind nach der Dimensionierung die Hauptverzahnungsdaten zur Festlegung der Makrogeometrie zu bestimmen, um das Abwälzen der Räder in beliebiger Achslage sicherzustellen. Eine anschließende Modifikation der Zahnflankengeometrie zur Definition der Mikrogeometrie zielt darauf ab, das Übertragungsverhalten hinsichtlich Tragfähigkeit und Geräusch zu optimieren.

Nachfolgend werden die in Bild 2.11 zum Auslegungsprozess zugeordneten Untersuchungen und abgeleiteten Erkenntnisse beschrieben.



**Bild 2.11:** Auslegungsprozess und Einordnung der für diese Arbeit relevanten Untersuchungen

### 2.4.1 Dimensionierung und Auslegung der Hauptverzahnungsdaten

Die Dimensionierung und Auslegung einer Beveloidradpaarung ist aufgrund der komplexen geometrischen Verhältnisse ungleich schwieriger als bei Zylinderrädern [ROTH98]. Aufgrund der besonderen Eingriffsverhältnisse berühren sich die Zahnflanken von Beveloidrädern nur punktförmig an einer Breitenposition. Diese entspricht nur in Sonderfällen der Zahnbreitenmitte. Die restlichen Bereiche der Zahnflanken klaffen auseinander.

Bereits in den theoretischen Herleitungen von Beam [BEAM54] wird empfohlen, dass das Ritzel mit einem kleineren Konuswinkel ausgeführt werden soll, da durch die geringere Zähnezahl eher Unterschnitt eintritt. Eine genaue Aufteilung der Konuswinkel wird nicht vorgegeben.

In Mitome [MITOME91] wird die Auslegung von Beveloidradpaarungen in windschiefer Achslage untersucht, wobei sich die kinematischen Wälzkegel im Wälzpunkt tangieren und eine gemeinsame Ebene bilden („pitch cone design“). Dabei wälzen die Beveloidräder im Zahneingriff nicht nur miteinander ab, sondern auch mit einer imaginären Zahnstange der Dicke null. Durch trigonometrische Umformungen können Achswinkel, Achsversatz und Einbauabstand bestimmt werden. Zur Validierung werden drei Testräder

gefertigt und in verschiedenen Einbaulagen untersucht. Außerdem stellt Mitome in [MITOME96] für schneidende Achslagen eine Methode vor, bei der durch eine geeignete Wahl der Profilverschiebung im Referenzstirnschnitt das Tragbild mittig positioniert wird. Auch Tsai leitet in [TSAI97, S. 187 ff.] über duale Vektoren Gleichungen zur Beschreibung der Einbaulage von Beveloidrädern her, die bei gleichen Ergebnissen wie in [MITOME91] wesentlich übersichtlicher sind. Weiterhin zeigt Tsai, dass die Verzahnungsgeometrie von Beveloidrädern unter Berücksichtigung von geometrischen Grenzen beschrieben werden kann. Hierzu führt Tsai systematische Untersuchungen durch, um die Einflüsse der Verzahnungsgrößen auf die ausführbare Zahnbreite zu analysieren.

Darüber hinaus erweitert Tsai [TSAI07] den Ansatz von Mitome [MITOME96] für den allgemeinen Fall windschiefer Achslagen. Mit den vorgestellten mathematischen Grundgleichungen lassen sich Beveloidradpaarungen beschreiben, deren Profilverschiebung im Referenzstirnschnitt ungleich null ist. Wie in [MITOME91] wird hierzu der Zahneingriff einer Beveloidradpaarung in beliebiger Achslage betrachtet. In dem Gedankenmodell wälzen die Beveloidräder nicht nur miteinander ab, sondern auch mit zwei imaginären Zahnstangen der Dicke null. Durch Vorgabe der Zahnstange am Teilkegel können die Größen am Wälzkegel abgeleitet werden, da beide Kegel einen gemeinsamen Grundzylinder besitzen. Die identischen Zusammenhänge hat bereits He [HE04] durch trigonometrische Umformungen hergeleitet. Tsai stellt zwei Vorgehensweisen vor, mit denen eine Auslegung der Verzahnung vorgenommen werden kann. Um die zwei möglichen Auslegungsprozesse vorzustellen, werden beispielhafte Beveloidradpaarungen ausgelegt. Den Ansatz in [TSAI07] erweitern Wu et al. [WU09], indem sie zusätzliche Einbaubedingungen vorgeben, sodass die Drehachsen beider Räder parallel zur Eingriffsebene liegen. Dadurch liegt näherungsweise Linienkontakt in einer Drehrichtung vor.

Auch Zhu et al. [ZHU12A] verwenden den Ansatz der tangierenden Teil- und Wälzkegel, um die Hauptverzahnungsdaten zu bestimmen. Sie stellen dazu zwei Vorgehensweisen vor, bei denen entweder die Profilverschiebung oder die Konuswinkel variiert werden, bis ein Linienkontakt vorliegt. Weiterhin zeigen sie den Einfluss der Verzahnungsdaten auf den FPD-Winkel, vgl. Kapitel 2.2.2.

Die aufgezeigten Auslegungsverfahren ermitteln die Einbauposition und Verzahnungsdaten rein geometrisch ohne Berücksichtigung von anliegenden Belastungen. Entweder ist der Bauraum bekannt oder ein Rad der Beveloidradpaarung ist gegeben. Schöler et al. leiten in [SCHÖLER17; SCHÖLER21] einen Berechnungsansatz zur Dimensionierung in



Anlehnung an [ISO6336 2006] und [LINKE10] her, welcher die Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten ermöglicht. Zunächst wird die Dimensionierung einer Ersatzstirnradverzahnung unter Berücksichtigung der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit nach ISO 6336 [ISO6336 2006] durchgeführt. Diese wird anschließend mit dem Achswinkel in eine schneidende Achslage überführt. Um eine windschiefe Achslage zu erreichen, wird eine Transformation vorgenommen, bei der Einbaumaße und Schrägungswinkel schrittweise so angepasst werden, dass sich die Wälzkreisradien für Ritzel und Rad nicht ändern [SCHÖLER21, S. 66 ff.]. Abschließend wird über das Anpassen der Konuswinkelsumme das Tragbild nahezu mittig positioniert.

Börner et al. [BÖRNER05A, S. 31] schlagen vor, dass eine äquivalente Ersatzstirnradverzahnung herangezogen werden kann, deren Hauptverzahnungsdaten die Zahnbreitenmitten der Beveloidräder beschreiben. Die Zahnbreitenmitte stellt dabei einen guten Kompromiss dar, um die sich aufgrund der linear veränderlichen Profilverschiebung ausgleichenden Einflüsse auf die Flanken- und Zahnfußtragfähigkeit zu berücksichtigen. Für eine umfangreiche Betrachtung hinsichtlich der Dimensionierung der festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten von Beveloidradpaarungen sei auf Schöler [SCHÖLER21, S. 47 ff.] verwiesen.

#### **2.4.2 Modifikation der Zahnflankengeometrie zur Optimierung des Übertragungsverhaltens**

Bei einer Beveloidradpaarung ist eine Änderung der Mikrogeometrie durch Modifikation der Zahnflankengeometrie zwingend notwendig. Dadurch kann der Kontaktbereich vergrößert werden.

In der Patentschrift von Bregi und Francis [BREGI46] wird erstmals der punktförmige Kontakt im Eingriff beschrieben. Nach mittigem Ausrichten des Punktkontakts wird eine hohlballige Modifikation entlang der Zahnbreite vorgeschlagen, mit der sich der Traganteil von Beveloidrädern vergrößern lässt. Die vorab bestimmte Modifikation soll dabei so gewählt werden, dass das Tragbild nicht bis hin zu den Zahnenden ausgebildet ist, um mögliches Kantentragen zu vermeiden. Neben dem vergrößerten Tragbild wird die erhöhte Tragfähigkeit und Laufruhe im Einsatz hervorgehoben.

Wagner [WAGNER93] beschreibt eine Methode zur Optimierung der Lage und Größe des Tragbilds von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage. Hierzu wird die Geometrie von einem Rad vorgegeben und das exakte Gegenrad mit dem Relativgeschwindigkeitsverfahren nach [FORT77] bestimmt. In diese konjugiert abwälzende Geometrie wird an-

schließlich ein Beveloidrad eingepasst, indem Konus- und Schrägungswinkel angenähert werden. Aufgrund der Einpassung entsteht eine voroptimierte Beveloidradpaarung, die trotz verringerter Klaffung immer noch punktförmig abwälzt. In windschiefer Achslage wird nur für eine Drehrichtung eine gute Annäherung an das exakte Gegenrad erreicht.

Die Methode von [WAGNER93] wird in der Software BEVELO implementiert und durch Schimpf [SCHIMPF96] an einem Schiffswendegetriebe angewendet. Zur Umsetzung einer Breitenballigkeit ermittelt er über einen Schleifschablonenradius eine kreisförmige Korrektur. Mit dieser modifizierten Bahn der Schleifscheibe wird während dem Schleifprozess mehr Material in der Zahnbreitenmitte abgetragen.

Basierend auf den Erkenntnissen in [SCHIMPF96] untersucht Winkler [WINKLER02] hohlballig korrigierte Beveloidräder an einem Schiffsgetriebeprüfstand. Die hohlballige Korrektur der Verzahnung führt zu einem vergrößerten Tragbild, sodass Versuche eine erhöhte Tragfähigkeit nachweisen. Darüber hinaus bestätigt er die in der Literatur beschriebene Unempfindlichkeit gegenüber Lageabweichungen und zeigt durch Schallmessungen, dass die Zahnflankengeometrie einen wesentlichen Einfluss auf das Geräuschverhalten besitzt.

Auch Komatsubara et al. [KOMATSUBARA02A; KOMATSUBARA02B] stellen eine hohlballige Modifikation über der Zahnbreite von Beveloidrädern vor, die jedoch nur für Geradverzahnungen zielführend angewendet werden kann. Die Zahnflankengeometrie wird hierzu durch eine hyperbolisch verlaufende Erzeugende modifiziert, sodass sich der Kontaktbereich vergrößert. Zur Validierung am Prüfstand werden Testräder mit einer doppelkegeligen Schleifscheibe gefertigt. Auf Grundlage dessen entwickelt Liu in [LIU02A] ein mathematisches Modell zur Erzeugung einer hohlballigen Zahnflankengeometrie für Schrägverzahnungen. Hierbei ist jedoch eine der beiden Verzahnungen nicht durch eine Evolvente beschreibbar.

Börner et al. [BÖRNER05A; BÖRNER05B] legen eine schneidende Paarung bestehend aus Beveloid- und Zylinderrad aus. Dabei werden auf das Zylinderrad topologische Modifikationen durch einen Schleifprozess aufgebracht, um das Übertragungsverhalten zu verbessern. Die erzeugte Zahnflankengeometrie zeigt ein ähnlich gutes Einsatzverhalten hinsichtlich des Geräuschs wie ein schrägverzahntes Zylinderrad [BÖRNER05A]. Außerdem untersuchen Börner et al. [BÖRNER05B] mittels Kontaktsimulationen den Ease-Off von Beveloidradpaarungen. Ausgehend vom Ease-Off werden topologische Modifikationen abgeleitet, die mit herkömmlichen Verzahnungsmaschinen fertigbar sind. Die

dazu erforderlichen Maschineneinstellungen und Werkzeuggeometrien werden mithilfe von Fertigungssimulationen berechnet.

Auf Grundlage von breit angelegten Parameterstudien leitet Alxneit [ALXNEIT10] eine zweistufige Optimierungsmethodik ab. Im ersten Schritt werden die Beveloidräder so modifiziert, dass im lastfreien Zustand ein geringer Drehfehler unter Berücksichtigung der Tragbilder vorliegt. Daran anknüpfend können die Räder durch Überlagern von Korrekturgeometrien optimiert werden, wobei deren Bestimmung einen großen Aufwand erfordert [ALXNEIT10, S. 119]. Zur Überprüfung wird eine Beveloidradpaarung lastfrei abgewälzt und das ermittelte Abwälzverhalten mit dem Drehfehler und Kontaktbereich aus der Simulation verglichen. Ebenfalls mit einem zweistufigen Vorgehen entwickelt Röthlingshöfer [RÖTHLINGSHÖFER12] eine Auslegungsmethodik, um das Übertragungsverhalten von Beveloidradpaarungen zu verbessern. Zunächst wird basierend auf [WAGNER93] die Makrogeometrie der Verzahnung bestimmt. Anschließend erfolgt mit Variationsrechnungen die Modifikation der Mikrogeometrie, sodass eine geringe Drehwinkelabweichung und ein mittiges Tragbild vorliegt. Neben den lastfreien Abwälzversuchen wird auch das Abwälzverhalten unter Last untersucht und mit Simulationsergebnissen verglichen. Das verbesserte Übertragungsverhalten durch eine hohlballige Modifikation stößt bei Verzahnungen mit großer Klaffung an die Grenzen [RÖTHLINGSHÖFER12, S. 101].

Zimmer [ZIMMER16] entwickelt auf Basis des räumlichen Verzahnungsgesetzes einen Flankengenerator, mit dem beliebige Zahnflankengeometrien erzeugt werden können. Die mathematische Beschreibung geht auf [JOHANN09] zurück. So kann bei Beveloidrädern durch Vorgabe eines Werkzeugprofils die Zahngeometrie modelliert oder ausgehend von einer vorgegebenen Verzahnung das benötigte Werkzeug abgeleitet werden. Darüber hinaus zeigt [ZIMMER16] für eine gegebene Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage, dass eine Optimierung der Verzahnung mit einem rückwärts konjugierten virtuellen Bezugsprofil möglich ist. Die notwendige Werkzeugbahn wird in einer Closed-Loop-Analyse über den Ease-Off ermittelt.

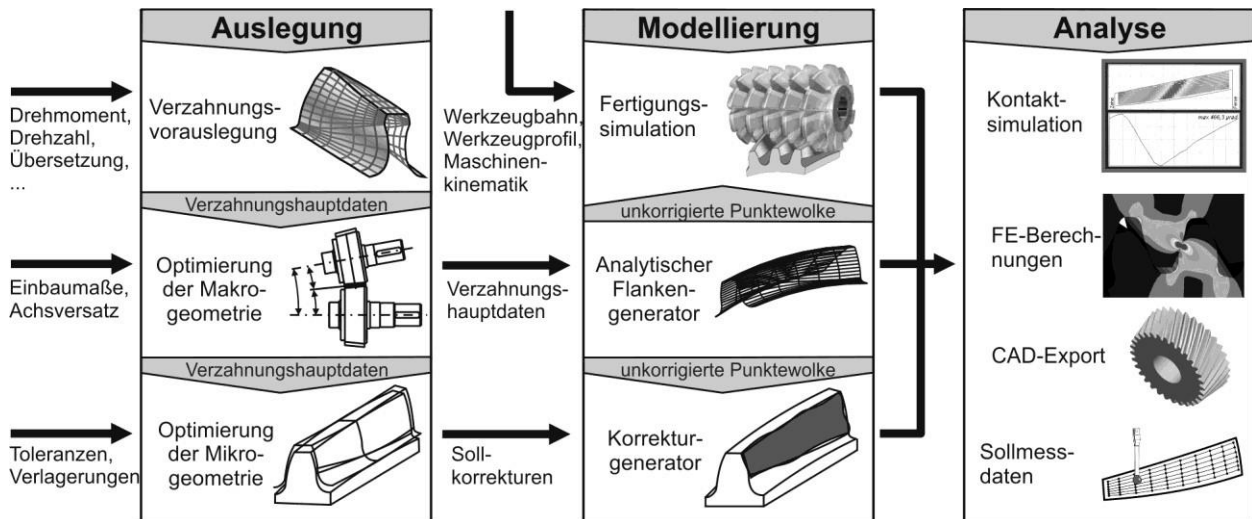
Brecher et al. [BRECHER15; BRECHER16] legen dar, dass zur Auslegung einer geeigneten Beveloidradpaarung umfangreiche Studien erforderlich sind, um unter Vorgabe von Zielgrößen (z. B. Zahnfußtragfähigkeit, Lebensdauer) die bestmögliche Lösung zu ermitteln. Bei der Herstellung der abgeleiteten Zahnflankengeometrie sind Toleranzen unvermeidbar. Dieser Herausforderung begegnen Brecher et al. [BRECHER16], indem auch ähnliche Varianten der Mikrogeometrie, die im möglichen Fertigungstoleranzfeld liegen, bei der Auswahl berücksichtigt werden.

Brimmers et al. stellen in [BRIMMERS17; BRIMMERS21] einen Ansatz mit mathematisch beschreibbaren Zahnflankenmodifikationen vor. Um das Übertragungsverhalten von Beveloidradpaarungen zu optimieren, wird ein zweidimensionales Polynom fünften Grads verwendet. Im Mittelpunkt der Untersuchung steht die Herstellbarkeit der freien Zahnflankenmodifikationen unter Berücksichtigung von möglichen Abweichungen. Insbesondere durch das vorgestellte Metamodellierungskonzept kann eine effiziente Berechnung durch Verringerung der Variantenrechnungen erzielt werden. In Simulationen kann anhand einer Beispielradpaarung in schneidender Achslage das Potenzial dieses Ansatzes gezeigt werden. Im Vergleich zur nicht modifizierten Grundvariante oder zur Variante mit Standardmodifikationen können deutliche Verbesserungen hinsichtlich des Drehfehlers und der Beanspruchung erzielt werden [BRIMMERS21, S. 92 ff.]. Die experimentellen Ergebnisse für den Drehfehler und das Tragbild unter Last stimmen gut mit den Simulationsergebnissen überein und bestätigen somit die Wirksamkeit der freien Zahnflankenmodifikationen [BRIMMERS21, S. 113 ff.].

Im Gegensatz zu iterativen Ansätzen leitet Traut in [TRAUT19] einen Ansatz für Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage her, mit dem die notwendigen Zahnflankenmodifikationen analytisch berechnet werden können. Hierbei erfolgt eine Modifikation der Profilverschiebungssumme entlang der Zahnbreite, sodass in jedem Stirnschnitt ein spielfreier Eingriff vorliegt. Zusätzlich wird eine tangentielle Anpassung der Stirnschnitte durchgeführt, damit die Wälzpunkte in der Eingriffslage die gleichen Positionen haben [TRAUT19, S. 109 ff.]. Dies führt in beiden Drehrichtungen zu einer Vergrößerung des Tragbilds und somit zu einer verbesserten Lastverteilung auf der Zahnflanke. Mit Änderung der Profilverschiebung ist auch eine lokale Anpassung der Konuswinkel erforderlich, wodurch sich der links- und rechtsseitige Stirneingriffswinkel und somit die Grundkreisradien entlang der Zahnbreite ändern. Die modifizierte Zahnflankengeometrie wird dabei stirnschnittweise über ein Bezugsprofil festgelegt, dessen Stirnschnittgeometrie von den lokalen Verzahnungsdaten abhängt. Über die vorgestellte Stirnschnittbezugskurve (SBK) werden die Stirnschnitte im Raum positioniert. Die Herstellbarkeit wird durch Fertigungssimulationen gezeigt und anhand von gefertigten Testradsätzen verifiziert [TRAUT19]. Eine experimentelle Validierung der optimierten Beveloidradpaarungen fehlt jedoch.

Neben dem hergeleiteten Ansatz implementiert Traut weitere Analyse- und Simulationswerkzeuge im Simulationsprogramm für konische Stirnräder (SimKoS). Die Module von SimKoS sind in Bild 2.12 zusammengefasst. Eine ausführliche Beschreibung der Module ist in [TRAUT19, S. 43 ff.] gegeben. Mit der im Rahmen eines FVA-Projekts entwickelten

Erweiterung des Kegelradberechnungsprogramms BECAL 5.0 können Zahnkontakt-simulationen zur Berechnung der Tragfähigkeit und Geräuschanregung von Beveloidradpaarungen realisiert werden [SCHLECHT14]. Die Schnittstelle zwischen SimKoS und BECAL ermöglicht, in SimKoS definierte 3D-Geometriedaten, Einbaulagen und Betriebsdaten an BECAL zu übergeben und eine Simulation mit und ohne Last durchzuführen. Auf diese Schnittstelle und einzelne Berechnungsmodule in SimKoS wird im Rahmen dieser Arbeit zurückgegriffen.



**Bild 2.12:** Berechnungsmodule in SimKoS nach [TRAUT19, S. 43]

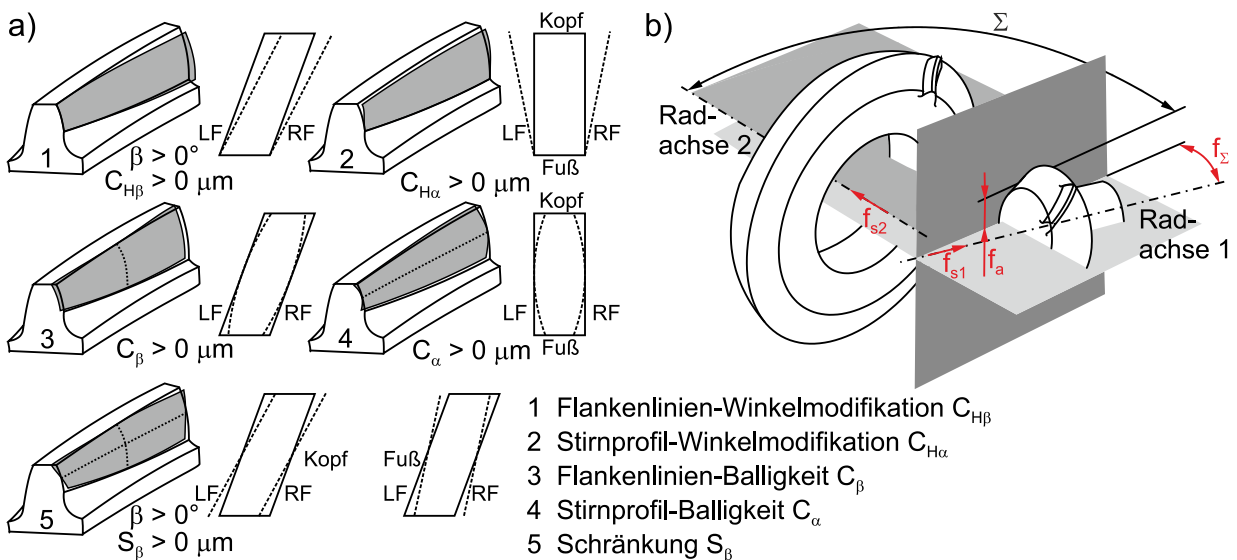
Mit der Schnittstelle zwischen SimKoS und der FE-Berechnung untersucht Beck [BECK15] die Steifigkeit im Zahneingriff einer Beveloidradpaarung und leitet einen lokalen Ansatz zur Bestimmung der Zahnfußspannung auf Basis der DIN-Berechnung [DIN3990-1 1987] her. In Prüfstandsversuchen können die mittels FE-Berechnung ermittelten Zahnfußspannungen bestätigt werden. Auch Henser [HENSER15] untersucht theoretisch und experimentell die Zahnfußtragfähigkeit von Beveloidradpaarungen. Er entwickelt für die parallele Achslage einen normbasierten Berechnungsansatz.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die analytische Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage, weshalb nicht näher auf den Stand der Technik zum Festigkeitsnachweis eingegangen wird. Grundsätzlich wird für eine in Anlehnung an Zylinderräder genormte DIN- oder ISO-Berechnung ein annähernder Linienkontakt vorausgesetzt. Für eine Betrachtung der Tragfähigkeit einer Beveloidradpaarung sei auf Beck [BECK15, S. 27 ff.] und Traut [TRAUT19, S. 29 ff.] verwiesen.

## 2.5 Abweichungen und Verlagerungen von Beveloidradpaarungen

Bei der Auslegung einer Radpaarung sind auftretende Abweichungen und Verlagerungen zu berücksichtigen. So liegen bereits im lastfreien Zustand montage- und fertigungsbedingte Abweichungen der Achslage sowie fertigungsbedingte Zahnflankenabweichungen vor, die unter Last u. a. durch Deformationen der Zähne und des Welle-Lager-Systems überlagert werden [KLINGELNBERG08, S. 207]. Durch Zahnflankenmodifikationen können die entstehenden Flankenverlagerungen für einen bestimmten Lastbereich kompensiert werden. Hierzu werden bei Zylinderradpaarungen die in Bild 2.13a dargestellten Standardmodifikationen nach DIN ISO 21771 [DIN21771 2014] aufgebracht. Bei Beveloidradpaarungen wird außerdem die Umsetzbarkeit von freien Zahnflankenmodifikationen durch Polynome höheren Grads gezeigt [TRAUT19; BRIMMERS21].

Aufgrund der nicht parallelen Achslage bei Beveloidradpaarungen werden montage- und fertigungsbedingte Abweichungen der Achslage meist wie bei Kegelrädern am Achsen-schnittpunkt definiert. Diese sind nach DIN 3971 [DIN3971 1980] die in Bild 2.13b eingezeichnete Achsversetzungsabweichung  $f_a$ , Achswinkelabweichung  $f_\Sigma$  sowie Ritzel- und Radverlagerung  $f_{s1,2}$  [SCHLECHT14].



**Bild 2.13:** a) Standardmodifikationen nach [DIN21771 2014]

b) Achslageabweichungen bei Kegelrädern in Anlehnung [DIN3971 1980]

Liu et al. [LIU02B] und Zhu et al. [ZHU12B] untersuchen in Sensitivitätsanalysen die Auswirkung von Axial- und Winkelabweichungen auf das Übertragungsverhalten verlagerter Beveloidradpaarungen. Wie bereits in [BÜRKLE93] beschrieben, bestätigen sie die Unempfindlichkeit gegenüber axialen Abweichungen. Es werden jedoch trotz des deutlichen

Einflusses bei Winkelabweichungen und der resultierenden Verlagerungen des Tragbilds keine Modifikationen der Zahnflankengeometrie abgeleitet.

Auch Liu et al. [LIU19A; LIU19B] führen Kontaktsimulationen von Beveloidradpaarungen in einem verlagerten Achssystem durch. Dabei werden Verformungen der Welle und Abweichungen der Einbaulage berücksichtigt, um die Sensitivität einer modifizierten Beveloidradpaarungen zu untersuchen [LIU19B].

Traut [TRAUT19, S. 68 ff.] führt Untersuchungen zum Einfluss von Standardmodifikationen sowie Fertigungs- und Achslageabweichungen auf das Übertragungsverhalten von numerisch konjugierten Beveloidradpaarungen durch. Er kommt zu dem Erkenntnis, dass sich konjugierte Beveloidradpaarungen hinsichtlich Tragbild und Drehfehler unter Berücksichtigung von Abweichungen in der Größe genormter Qualitätsstufen [DIN3962-1 1978; DIN3962-2 1978; DIN3964 1980] ähnlich zu Zylinderradpaarungen verhalten.

## **2.6 Zusammenfassung und abgeleiteter Forschungsbedarf**

Der Stand der Forschung und Technik zeigt auf, dass sich Beveloidradpaarungen durch ihre Eignung zur Anordnung in beliebigen Achslagen bei kleinem Achswinkel hervorheben. Besonders eine windschiefe Achslage hat Potenzial, eine kompakte und flexible Getriebekonfiguration zu ermöglichen. Im Hinblick auf die Elektrifizierung gewinnen solche gewichtssparende und bauraumoptimale Antriebsstränge an Bedeutung.

Zu Beveloidrädern und deren Eingriffsverhältnissen gibt es mehrere Untersuchungen, die ein umfassendes theoretisches Verständnis des Abwälzens schaffen, indem ausgehend von einer gemeinsamen Planverzahnung die Berührlinien und Kontaktpfade hergeleitet werden [BEAM54; HIERSIG79; MITOME85]. Obwohl die zugrunde liegenden Gleichungen von Beveloidrädern die Verallgemeinerung der Zylinderräder widerspiegeln, stellen die Auslegung und insbesondere die Optimierung von Beveloidradpaarungen große Herausforderungen dar, da im Allgemeinen ein asymmetrisch verteilter Ease-Off vorliegt.

Für die Dimensionierung festigkeitsrelevanter Verzahnungsdaten gibt es Ansätze, die auf eine Ersatzstirnradverzahnung zurückgreifen [BÖRNER05B; SCHÖLER21]. Davon ausgehend werden Konus- und Schrägungswinkel für die vorgegebene Einbaulage festgelegt. Dies erfolgt entweder mittels Berechnung der kinematischen Wälzkörper [TSAI07] oder iterativ durch Annäherung an die Einbaulage [SCHÖLER21]. Beide Ansätze führen zu einem mittigen Tragbild. Zu den Zahnenden hin klaffen die Zahnflanken aufgrund des Punktkontakts jedoch auseinander.

Um diesem Ease-Off entgegenzuwirken, wird bereits in der Patentschrift von Bregi und Fancis [BREGI46] eine ballige Modifikation vorgeschlagen. Viele Arbeiten befassen sich daraufhin mit der Definition der Zahnflankengeometrie von Beveloidradpaarungen, um das Übertragungsverhalten durch gezielte Modifikationen zu verbessern, wie auch in [BÖRNER05B; BRIMMERS21; SCHIMPF96; TRAUT19] nachzulesen ist.

Detaillierte Untersuchungen des Ease-Offs in [BÖRNER05B; TRAUT19] zeigen, dass die anfänglich vorgeschlagene ballige Modifikation nicht ausreicht. Zur Kompensation des Ease-Offs ist eine komplexe Zahnflankenmodifikation erforderlich, die insbesondere eine Verschränkung auf der Zahnflanke aufweist. In der Praxis wird dazu entweder über Annäherung des numerisch konjugierten Gegenrads [SCHIMPF96] oder durch iteratives Vorgehen mit einer speziellen Software [BÖRNER05B] eine Modifikation ausgehend von einem vorgegebenen Rad abgeleitet.

Brimmers [BRIMMERS21] schlägt freie Zahnflankenmodifikationen vor, um die konjugierte Zahnform anzunähern. Mit dem zweidimensionalen Polynom fünften Grads wird ein vergleichbares Übertragungsverhalten wie bei der konjugierten Zahnform erzielt. Zur Bestimmung sind jedoch trotz eingeführtem Metamodell Variantenrechnungen erforderlich [BRIMMERS21, S. 96 ff.].

Statt eines iterativen Ansatzes wird in [TRAUT19] eine analytische Vorgehensweise vorgestellt, durch die die notwendigen Zahnflankenmodifikationen berechnet werden können. Die Grundidee dahinter ist eine Modifikation der Profilverchiebungssumme entlang der Zahnbreite, sodass in jedem Stirnschnitt ein spielfreier Eingriff vorliegt. Die Wirksamkeit dieses analytischen Ansatzes bei einer praxisrelevanten Auslegung wird gezeigt in [BACHMANN15; MARINO15].

Durch die zweidimensionale Betrachtungsweise eignet sich der Ansatz in [TRAUT19] ausschließlich für Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage. Eine Erweiterung für windschiefe Achslagen ist nicht vorgesehen. Dieses Defizit ist aber von Bedeutung, wenn beispielsweise eine beliebige Anordnung der Verbindungswellen in einem allradgetriebenen Automobil zur optimalen Bauraumnutzung sowie Gewichts- und Kosteneinsparung [HÖBEL09] umgesetzt werden soll. Zudem werden erst mit windschiefen Achslagen Getriebekonzepte wie ein Schiffswendegetriebe [YOKEL72] ermöglicht. Mit dieser Arbeit soll diese Forschungslücke geschlossen und eine analytische Berechnungsmethode für Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage hergeleitet werden, die nach Möglichkeit auf weitere evolventische Verzahnungen übertragen werden kann.



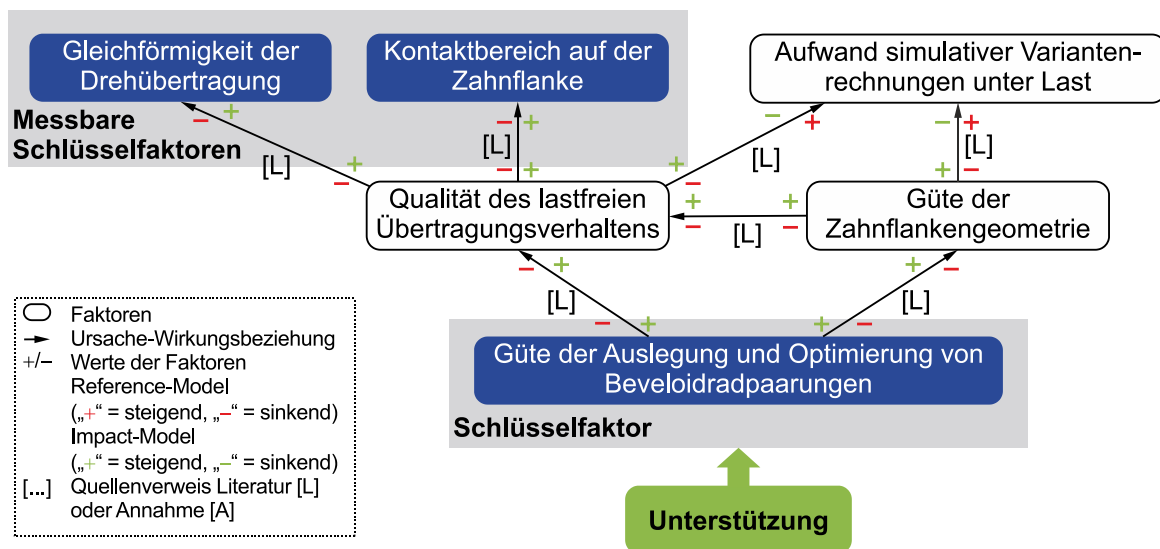
### 3 Detaillierung der Aufgabenstellung

Basierend auf der einleitenden Problemstellung und der Motivation sowie dem abgeleiteten Forschungsbedarf soll die Zielsetzung und Aufgabenstellung konkretisiert werden. Anschließend folgt die Vorgehensweise, um die Forschungsziele der Arbeit umzusetzen.

#### 3.1 Konkretisierung der Aufgabenstellung und Zielsetzung

Im Stand der Forschung und Technik werden Ansätze zur Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen vorgestellt, die jedoch insbesondere für windschiefe Achslagen und für die Definition der Mikrogeometrie (Zahnflankengeometrie) hauptsächlich auf iterativen Lösungen beruhen. Eine durchgängige analytische Berechnungsmethode zur geometrischen Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage existiert bisher nicht.

Wie der Auszug des Impact-Models in Bild 3.1 zeigt, werden durch die beabsichtigte Berechnungsmethode (= **Unterstützung**) die *Qualität des Übertragungsverhaltens* und die *Güte der Zahnflankengeometrie* direkt beeinflusst, sodass sich die messbaren Schlüsselfaktoren *Gleichförmigkeit der Drehübertragung* und *Kontaktbereich auf der Zahnflanke* verbessern (vollständiges Impact-Model in Anhang A.1).



**Bild 3.1:** Auszug aus dem Impact-Model mit der Methode (= Unterstützung)

Wie bereits in Kapitel 1 formuliert, lautet das Primärziel der vorliegenden Arbeit die Herleitung einer analytischen Berechnungsmethode für die Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage.

Mit der Berechnungsmethode soll über veränderliche Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite eine drehfehleroptimale Zahnflankengeometrie mit voll ausgebildeten Tragbildern und definiertem Verdrehflankenspiel erzielt werden. Ausgehend davon kann das Tragbild durch eine Änderung der Stirnschnittbezugskurve skaliert und positioniert werden, um äußere Belastungen und die resultierenden Flankenverlagerungen zu berücksichtigen. Für den Einsatz dieser analytischen Modifikationen in der Praxis ist eine wirtschaftliche Herstellung auf konventionellen Verzahnungsmaschinen erforderlich. Daher wird zusätzlich in einer Fertigungssimulation die Herstellbarkeit von Beveloidrädern mit lokal angepassten Verzahnungsdaten beurteilt.

Die vorgestellte Berechnungsmethode kann zu einer Zeiteinsparung bei der Auslegung der Zahnflankengeometrie führen, da der Ansatz den Nachteil bezüglich des Zeitaufwands iterativer Vorgehensweisen umgeht. Ein interessanter Aspekt eröffnet sich mit der Übertragbarkeit des mathematischen Ansatzes zur Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten für weitere evolventische Verzahnungen wie z. B. Schraubräder.

Mit der vorgestellten Konkretisierung der Zielsetzung kann im Hinblick auf die wissenschaftliche Fragestellung folgende zentrale Forschungsfrage abgeleitet werden.

**Zentrale Forschungsfrage:**

**Wie kann analytisch durch die Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten und der Zahnflankengeometrie ein optimiertes Übertragungsverhalten von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage erzielt werden?**

Abgeleitet von der zentralen Forschungsfrage kann die zentrale Forschungshypothese aufgestellt werden, die es in der Arbeit zu bestätigen gilt.

**Zentrale Forschungshypothese:**

**Für eine Auslegung<sup>(1)</sup> von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage<sup>(3,4)</sup> kann eine analytische Berechnungsmethode verwendet werden, die zu einem optimierten Übertragungsverhalten<sup>(2)</sup> führt, eine wirtschaftliche Fertigung<sup>(5)</sup> der modifizierten Beveloidräder ermöglicht und sich auf weitere Evolventenverzahnungen<sup>(6)</sup> übertragen lässt.**

Aus der zentralen Forschungshypothese dieser Arbeit lassen sich folgende Fragestellungen ableiten, welche die Arbeitsschritte zur Beantwortung der Forschungsfrage definieren. Die Indizierung in der Forschungshypothese bezieht sich auf die Nummerierung der Fragestellungen.

- (1) Wie müssen bekannte Gleichungen für Beveloidradpaarungen erweitert werden, um die Hauptverzahnungsdaten in beliebiger Achslage für ein mittiges Tragbild und definiertes Verdrehflankenspiel abzuleiten?
- (2) Wie kann bei einer Beveloidradpaarung über analytisch berechnete, lokal angepasste Verzahnungsdaten eine Annäherung an den konjugierten Eingriff erzielt werden?
- (3) Welche Grenzen liegen bei der Auslegung vor, die den Vertrauensbereich der Berechnungsmethode definieren?
- (4) Welche experimentellen Untersuchungen sind notwendig, um die mit der Berechnungsmethode ausgelegten Beveloidradpaarungen gezielt zu validieren?
- (5) Können Beveloidräder mit lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite wirtschaftlich auf konventionellen Verzahnungsmaschinen gefertigt werden?
- (6) Auf welche evolventischen Verzahnungen kann die Berechnungsmethode durch geeignete Anpassungen übertragen werden?

Der wesentliche Forschungsbedarf besteht in der Erarbeitung einer analytischen Berechnungsmethode für Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage, die eine drehfehleroptimale Zahnflankengeometrie mit voll ausgebildeten Tragbildern ermittelt. Diese Methode soll dem Getriebeentwickler ermöglichen, auf Grundlage von geometrischen Randbedingungen und Belastungen eine gezielte Auslegung und Optimierung der Beveloidradpaarung ohne umfangreiche, iterative Simulationen und Untersuchungen durchzuführen. Darüber hinaus sollen die Verzahnungsdaten frei innerhalb der durch die Einbaulage vorgegebenen Einschränkungen definierbar sein, sodass der Anwender bei der Getriebeentwicklung nicht eingeschränkt wird.

### **3.2 Vorgehensweise zur Erreichung der Forschungsziele**

Aufbauend auf der allgemeinen Struktur in Bild 1.4 und den zugehörigen Fragestellungen wird die detaillierte Vorgehensweise in Bild 3.2 dargestellt. Zum Erreichen der Ziele gliedert sich die Arbeit in die nachfolgenden Kapitel.

*Kapitel 4: Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage*

Ausgehend von geometrischen Randbedingungen sind die festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten (Zähnezahl, Modul, Zahnbreite) zu bestimmen, die zusammen mit den Vorgaben des Getriebeentwicklers zur Ermittlung der

Hauptverzahnungsdaten herangezogen werden. Mit den Gleichungen für den Achsversatz, den Achswinkel und die Zahndicke am Wälzkreis kann ein nicht lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, dessen Lösung eine Beveloidradpaarung mit mittigem Tragbild und definiertem Verdrehflankenspiel ergibt. Darauf basierend werden mit der räumlichen Betrachtung der Eingriffsverhältnisse die Verzahnungsdaten lokal angepasst, um einen annähernd konjugierten Eingriff zu erzielen. Die in [TRAUT19, S. 83 ff.] vorgestellte Stirnschnittbezugskurve zur Geometrieerzeugung wird erweitert, sodass eine korrekte Anordnung der Stirnschnitte gegeben ist. Weitere Anpassungen der Zahnflankengeometrie durch zusätzliche Vorgabe einer Zahnflankenmodifikation werden zur Skalierung und Positionierung des Tragbilds verwendet. Damit soll Kantentragen verhindert und eine mögliche Flankenverlagerung aufgrund eines verlagerten Achssystems kompensiert werden.

#### *Kapitel 5: Theoretische Untersuchung*

Für die Parameterstudie wird mit den funktionalen Bewertungskriterien (Tragbild, Drehfehler, Verdrehflankenspiel) ein zweistufiger Versuchsplan erstellt. Im ersten Schritt erfolgt die Variation einzelner Verzahnungsparameter, um so die Einzeleffekte zu untersuchen. Im nächsten Schritt werden die Parameter mit einem Einfluss auf die Bewertungskriterien in einem vollfaktoriellen Versuchsplan variiert. Die durchgeführte Untersuchung liefert einen Vertrauensbereich für die vorgestellte Berechnungsmethode. Neben dem abgeleiteten Vertrauensbereich wird in einer Sensitivitätsanalyse der Einfluss eines verlagerten Achssystems auf das Übertragungsverhalten von Beveloidradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten untersucht.

#### *Kapitel 6: Experimentelle Validierung*

Mithilfe des analytischen Flankengenerators in SimKoS werden die Zahnflankengeometrien in Form von Punktedaten generiert, die zur Erzeugung der Prüfradpaarungen mittels Fünf-Achs-Fräsen verwendet werden. Die gefertigte Ist-Geometrie der Prüfräder wird mit einer 3D-Koordinatenmessmaschine bestimmt. Zur Validierung finden auf einem institutseigenen Drehübertragungsprüfstand lastfreie Abwälzversuche statt, bei denen Tragbilder und Drehfehlerverläufe ermittelt und mit den Simulationsergebnissen der vermessenen Verzahnung verglichen werden. Wie bei der theoretischen Untersuchung soll auch am Prüfstand der Einfluss eines verlagerten Achssystems untersucht werden.

### Kapitel 7: Beurteilung der Herstellbarkeit modifizierter Beveloidräder

Neben der Herleitung und Absicherung der Berechnungsmethode soll in einer Fertigungssimulation die Herstellbarkeit von modifizierten Beveloidrädern in einem kontinuierlichen Abwälzverfahren beurteilt werden. Das in SimKoS implementierte Modul der Fertigungssimulation wird an die lokalen Verzahnungsdaten der Berechnungsmethode angepasst, sodass direkt aus der Stirnschnittbezugskurve die erforderliche Werkzeugbahn abgeleitet werden kann.

### Kapitel 8: Übertragbarkeit auf weitere evolventische Verzahnungen

Der mathematische Ansatz der Berechnungsmethode beschreibt den Eingriff von evolventischen Verzahnungen. Die Lösung des nicht linearen Gleichungssystems liefert die Hauptverzahnungsdaten für eine vorgegebene Achslage. Werden die kinematischen Wälzkörper angepasst, ist die Berechnungsmethode auch auf weitere evolventische Verzahnungen wie z. B. Schraubräder übertragbar.



**Bild 3.2:** Detaillierte Struktur der Arbeit mit Vorgehensweise zum Erreichen der Forschungsziele

Die vorgestellte Berechnungsmethode wird in einer Programmdatei umgesetzt, welche von der institutseigenen Simulationssoftware SimKoS ausführbar ist. Auch die weiteren Berechnungsroutinen sind in SimKoS als Module implementiert und können so über eine gemeinsame Oberfläche benutzerfreundlich angesteuert werden.

## **4 Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage**

Der Auslegungsprozess von Beveloidradpaarungen beinhaltet die Dimensionierung der festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten (Zähnezahl, Modul, Zahnbreite), die Bestimmung der weiteren Hauptverzahnungsdaten und die Optimierung der Zahnflankengeometrie. Zunächst soll in Kapitel 4.1 ein Überblick der Berechnungsmethode gegeben werden. Anschließend wird in Kapitel 4.2 - 4.6 auf die neu entwickelten Berechnungsschritte im Detail eingegangen.

### **4.1 Überblick über die vorgestellte Berechnungsmethode**

Die Berechnungsschritte in Bild 4.1 veranschaulichen die vorgestellte Berechnungsmethode. Auf der linken Seite sind Ansatz bzw. Vorgehensweise und auf der rechten Seite die Ergebnisse des jeweiligen Berechnungsschritts vereinfacht dargestellt.

Zunächst werden mit geometrischen Randbedingungen und Vorgaben an eine Radpaarung die festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten einer Ersatzstirnradverzahnung basierend auf den Grundgleichungen der ISO 6336 [ISO6336 2006] für den Nachweis der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit nach dem in Linke [LINKE10, S. 488 f.] vorgestellten Vorgehen bestimmt. Die verwendeten Gleichungen für den Mindestteilkreisdurchmesser und -modul werden dazu an die zusätzlichen Randbedingungen von Beveloidradpaarungen angepasst, sodass die Festigkeitsreserve bestmöglich ausgenutzt wird.

Auf Grundlage der festigkeitsrelevanten Daten wie Modul, Zähnezahl und Zahnbreite können die weiteren Hauptverzahnungsdaten wie Profilverchiebung, Konus- und Schrägungswinkel für das Referenzstirnschnittpaar ermittelt werden. Hierzu wird ein Gleichungssystem bestehend aus der Einbaulage und der Korhammerschen Beziehung um ein definiertes Verdrehflankenspiel erweitert und gelöst. Das Verdrehflankenspiel stellt die Länge des Wälzbogens dar, wenn bei festgehaltenem Rad das Gegenrad von der Anlage der Rechtsflanke bis zur Anlage der Linksflanke verdreht wird [DIN21771 2014]. Die so ausgelegte Beveloidradpaarung wälzt drehfehlerfrei mit einem mittigen Tragbild und einem definierten Verdrehflankenspiel ab.

Das mittige Tragbild stellt die Ausgangslage für den in dieser Arbeit entwickelten Optimierungsschritt dar, bei dem die Radpaarung zunächst in Stirnschnittpaare unterteilt wird. Anschließend werden die Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite so angepasst, dass jedes Stirnschnittpaar einzeln betrachtet unter einem definierten Verdrehflankenspiel

abwält und so über alle Eingriffsstellungen ein annähernd konjugierter Eingriff resultiert. Aus den lokal angepassten Verzahnungsdaten resultieren unterschiedliche Stirnschnittgeometrien aufgrund der nicht konstanten Grundkreisradien und Stirneingriffswinkel.

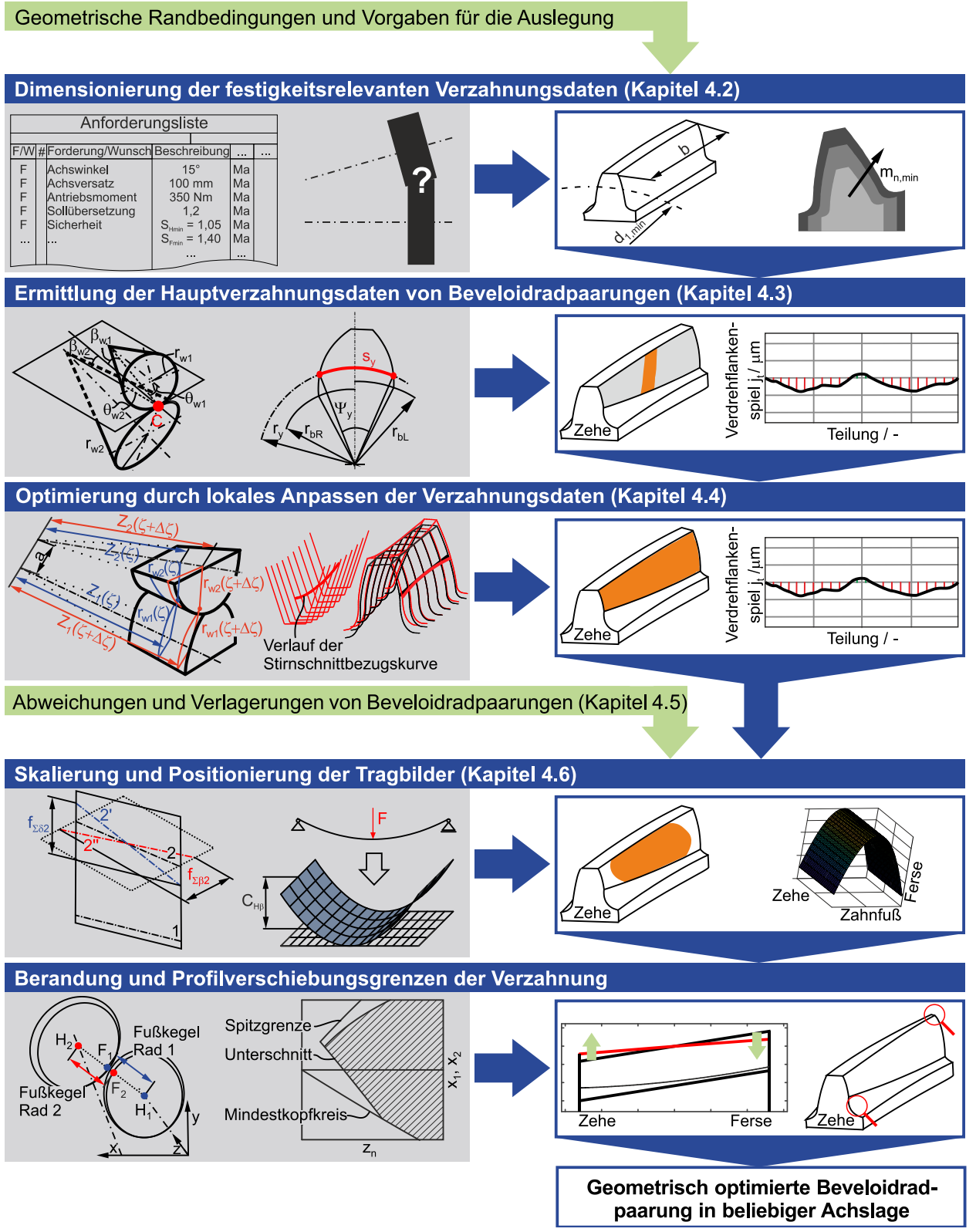


Bild 4.1: Überblick der vorgestellten Berechnungsmethode



Zur korrekten Modellierung der Zahnflankengeometrie mit veränderlichen Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite wird die räumliche Stirnschnittbezugskurve (SBK) aus [TRAUT19, S. 83 ff.] erweitert.

Ähnlich wie Zylinderräder können Beveloidradpaarungen mit konjugiertem Eingriff nicht ohne weitere Modifikationen eingesetzt werden, da aufgrund von Abweichungen und Verlagerungen Kantentragen und konzentrierte Lastspitzen im Einsatz entstehen. Eine Möglichkeit zur Skalierung und Positionierung des Tragbilds bietet die Modifikation der Stirnschnittbezugskurve oder des Verdrehflankenspiels entlang der Zahnbreite.

Für die ausgelegte Beveloidradpaarung ist zu prüfen, ob die Berandung der Zahnflanken und die Profilverschiebungsgrenzen entsprechend den Vorgaben eingehalten werden. Die Anpassung der Kopfberandung ist insbesondere bei modifizierten Beveloidradpaarungen erforderlich, da eine nicht lineare Profilverschiebung rechnerisch einen gekrümmten Verlauf der Kopfkreisradien zur Folge hat. Im Bereich der Ferse kann dieser Verlauf zu einer Kollision mit dem Zahnfußbereich des Gegenrads führen. Um dies zu verhindern und die endgültige Außengeometrie des Rohlings festzulegen, wird an drei Stützstellen der Kopfkreisradius zur Umsetzung eines definierten Kopfspiels festgelegt. Die Stützstellen werden jeweils durch Geraden verbunden. Abschließend wird mit den bekannten Zusammenhängen aus dem Stand der Technik geprüft, ob die geometrischen Grenzen an der Zehe (Unterschnitt und Mindestkopfkreis) sowie an der Ferse (Spitzgrenze) eingehalten werden [BACHMANN09; ROTH98, S. 243 ff.].

Im Fall einer verletzten geometrischen Grenze kann gezielt zu einem der vorherigen Schritte gesprungen werden und in Abhängigkeit der Vorgaben ggf. die Zahnbreite, die Profilverschiebung oder der Konuswinkel angepasst werden. Eine detaillierte Beschreibung zur Behandlung einer verletzten geometrischen Grenze ist in [SCHÖLER21, S. 54 ff.] zu finden und ist teilweise durch Tomaz [TOMAZ20, S. 23 ff.] in die hier vorgestellte Berechnungsmethode überführt worden.

## **4.2 Dimensionierung der festigkeitsrelevanten Verzahnungsdaten**

Die Dimensionierung zielt darauf ab, die Verzahnungsdaten so festzulegen, dass eine möglichst hohe Ausnutzung der Festigkeitsreserven gelingt. In Anlehnung an Zylinderräder werden die Grundgleichungen der ISO 6336 [ISO6336 2006] für den Nachweis der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit herangezogen. Damit wird nach dem in [LINKE10, S. 488 f.] vorgestellten Vorgehen der Mindestteilkreisdurchmesser und -modul einer Ersatzstirnradverzahnung ausgelegt, welche die Zahnbreitenmitte der Beveloidradpaarung

beschreibt [BÖRNER05A, S. 31]. Aufgrund zusätzlicher Randbedingungen bei Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage sind die Grundgleichungen so zu modifizieren, dass nach Möglichkeit eine optimale Ausnutzung des Bauraums bzw. Materials erreicht wird. Die Herleitung der Dimensionierung einer Beveloidradpaarung ist nicht Teil dieser Arbeit und in [SCHÖLER21, S. 48 ff.] zu finden. Der nachfolgende Abschnitt beschreibt die wesentlichen Erweiterungen im Vergleich zur Auslegung von Zylinderrädern.

Der hier zugrunde liegende Ansatz zur Dimensionierung wurde unter Anleitung des Autors von Tomaz [TOMAZ20] basierend auf [SCHÖLER17] erweitert. Bei einer Beveloidradpaarung sind aufgrund der zusätzlichen Freiheitsgrade jeweils ein Konus-  $\theta$  und Schrägungswinkel  $\beta$  bzw. deren Aufteilung auf Rad 1 und 2 nach (4.1) erforderlich, um eine eindeutige Auslegung sicherzustellen.

$$\theta' = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad \text{und} \quad \beta' = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (4.1)$$

Insbesondere die Kenntnis über den Schrägungswinkel  $\beta$  ermöglicht es, die Gleichungen für Mindestteilkreisdurchmesser  $d_{1 \min}$  (4.2) und -modul  $m_{n \min}$  (4.3) um den Schrägenfaktor  $Z_\beta$  bzw.  $Y_\beta$  zu erweitern, vgl. [SCHÖLER21, S. 50 f.]. Die Abhängigkeit des Schrägenfaktors  $Y_\beta$  vom Modul erfordert jedoch das Lösen einer quadratischen Gleichung, wie in [SCHÖLER21, S. 52] ausführlich beschrieben ist. Für eine konservative Auslegung bei der Dimensionierung ist der größere Schrägungswinkel der Radpaarung einzusetzen.

$$d_{1 \min} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot K_H}{b/d_1} \cdot \left( \frac{Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta}{(Z_N \cdot \sigma_{Hlim}) / S_{Hmin}} \right)^2 \cdot \frac{u + 1}{u}} \quad (4.2)$$

$$m_{n \min} = \frac{2 \cdot T_1 \cdot K_F}{d_1^2 \cdot b/d_1} \cdot \frac{Y_{FS} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta(m_n)}{(Y_N \cdot Y_A \cdot \sigma_{FE}) / S_{Fmin}} \quad (4.3)$$

Mit (4.2) und (4.3) können Mindestteilkreisdurchmesser und -modul in Abhängigkeit des Antriebsmoments  $T_1$ , des Zähnezahlnverhältnisses  $u$ , des Breiten-Durchmesserverhältnisses  $b/d_1$ , der Sicherheiten  $S_{H,Fmin}$ , der Dauerfestigkeiten  $\sigma_{FE,Hlim}$  sowie der Kraft- und Anwendungsfaktoren  $Z$  und  $Y$  berechnet werden. Für die Wahl der einzelnen Faktoren sei auf ISO 6336 [ISO6336 2006] und auf Empfehlungen in [SCHÖLER21] verwiesen.

In dieser Arbeit wird bei der Dimensionierung von Beveloidradpaarungen die über Achswinkel  $\Sigma$  und Achsversatz  $a$  vorgegebene Einbaulage [ROTH98, S. 273 f.] berücksichtigt, um die unbekanntenen Konus- und Schrägungswinkel zu bestimmen.

$$\cos \Sigma = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\beta_1 + \beta_2) - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \quad (4.4)$$

$$a = \frac{(r_1 \cdot \cos \theta_2 + r_2 \cdot \cos \theta_1) \cdot \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin \Sigma} \quad \text{mit} \quad r_2 = r_1 \cdot u \quad (4.5)$$

So kann beispielsweise bei Vorgabe eines Schrägungswinkels mittels einer Iteration von (4.2) bis (4.5) der Schrägungswinkel des Gegenrads in Abhängigkeit der Einbaulage ausreichend genau berechnet werden, um  $Z_\beta$  bzw.  $Y_\beta$  zu berücksichtigen.

### 4.3 Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten von Beveloidradpaarungen

Bei Beveloidradpaarungen können zur Beschreibung des Eingriffsverhaltens die bekannten Gleichungen für evolventische Verzahnungen in angepasster Form herangezogen werden. Aufgrund der Übertragbarkeit dieser Gleichungen wird die nachfolgende Forschungsfrage zur Auslegung von Beveloidradpaarungen entwickelt.

#### Forschungsfrage zu Kapitel 4.3

Wie müssen bekannte Gleichungen für Beveloidradpaarungen erweitert werden, um die Hauptverzahnungsdaten in beliebiger Achslage für ein mittiges Tragbild und definiertes Verdrehflankenspiel abzuleiten?

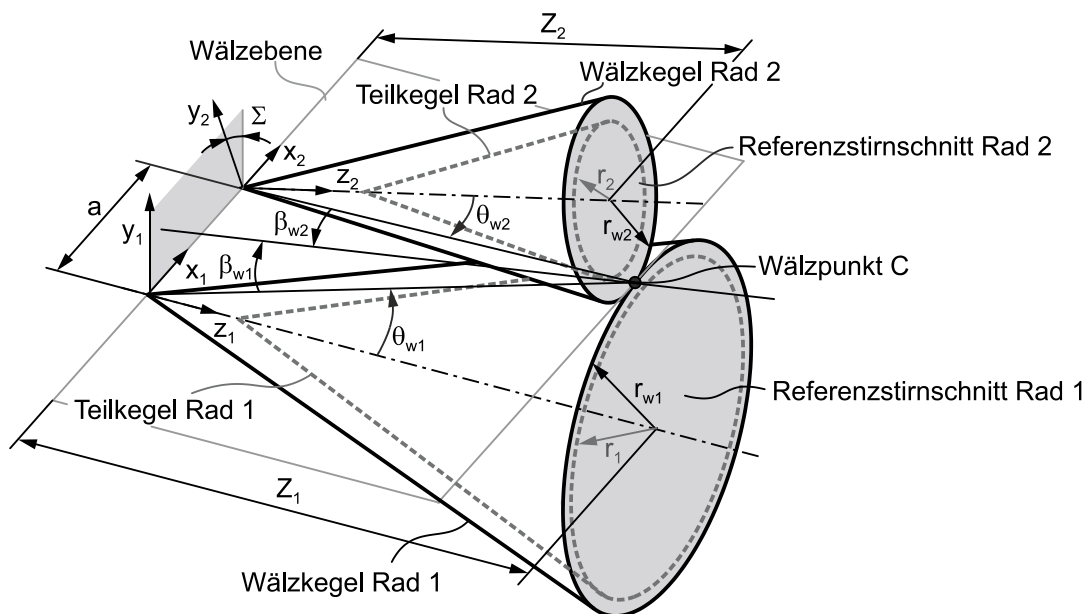
Der Ansatz zur Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten beruht darauf, dass zwei imaginäre Zahnstangen zur Beschreibung der identischen Beveloidradpaarung verwendet werden können [TSAI07]. Die Zahnstangen besitzen zwar unterschiedliche Geometrien (Eingriffswinkel und Modul), hängen jedoch über die Größen am Grundzylinder voneinander ab. Liegt bei der Paarung keine Profilverschiebung im betrachteten Stirnschnitt vor, sind beide Zahnstangen identisch. Dies ist bei einer Zylinderradpaarung vergleichbar mit dem Teil- und Wälzzyylinder, die sich bei vorgegebener Profilverschiebung unterscheiden, aber dennoch auf den gleichen Grundzylinder zurückgeführt werden können.

Das neu eingeführte Gleichungssystem und die Ergebnisse sind teilweise in Marino et al. [MARINO19A] veröffentlicht.

#### 4.3.1 Auslegung mit mittigem Tragbild und definiertem Verdrehflankenspiel

Die Hauptverzahnungsdaten einer Beveloidradpaarung definieren die evolventische Form des Referenzstirnschnittpaars. Dieses Paar bestehend aus dem Referenzstirnschnitt (RSS) von Rad 1 und 2 kann an einer beliebigen Position entlang der Zahnbreite definiert werden. Nachfolgend befindet sich der RSS jeweils in der Zahnbreitenmitte, was für Beveloidradpaarungen üblich ist, u. a. in [BÖRNER05A, S. 31].

Bild 4.2 zeigt die kinematischen Grundkörper (Kegel) einer Beveloidradpaarung. Die Grundflächen entsprechen der Position des RSS und werden über die Teilkreisradien  $r_{p1,2}$  bzw. Wälzkreisradien  $r_{w1,2}$  bestimmt. Bei einer Profilverchiebung  $x_{1,2} \cdot m_n$  im RSS unterscheiden sich Teil- und Wälzkegel. Die Wälzkegel sind dabei so im Raum angeordnet, dass sich die Grundflächen im Wälzpunkt C berühren und die Mantelflächen eine gemeinsame Wälzebene tangieren. Die räumliche Anordnung der Radachsen zueinander wird über den Achsversatz  $a$  und den Achswinkel  $\Sigma$  definiert. Für das Koordinatensystem von Rad 1 und 2 gilt, dass die z-Achse mit der Radachse übereinstimmt und die x-Achse von Rad 1 betrachtet in Richtung des Achsversatzes zeigt. Die y-Achse ergibt sich entsprechend für ein Rechtssystem. Die Koordinatensysteme werden in Anhang A.2 hergeleitet.

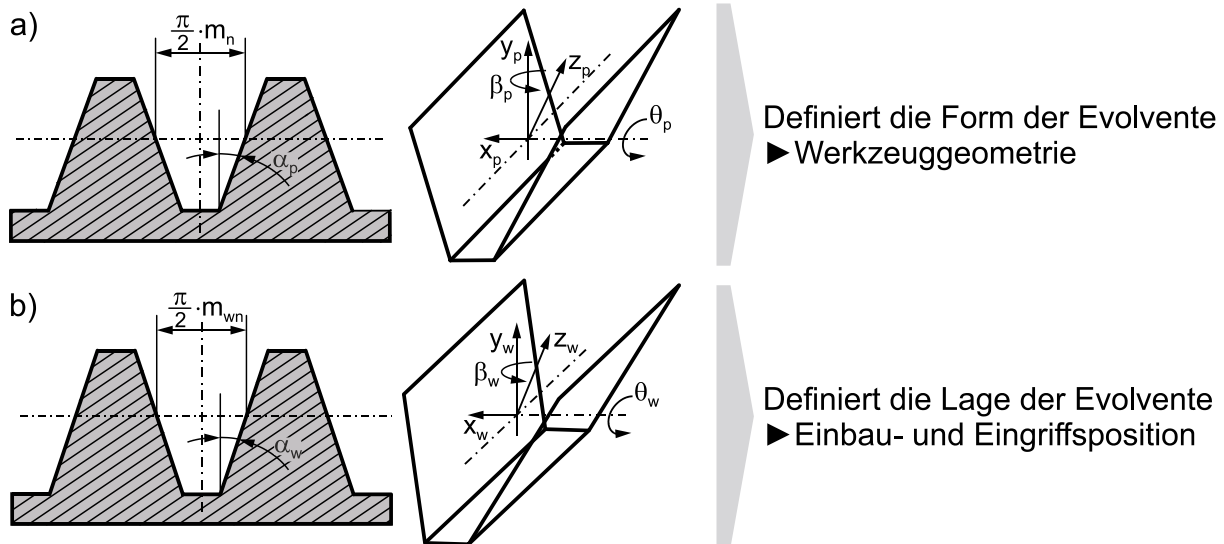


**Bild 4.2:** Kinematische Grundkörper einer Beveloidradpaarung in beliebiger Achslage

Um den Zahneingriff in beliebiger Achslage zu betrachten, wälzen die Beveloidräder mit zwei imaginären Zahnstangen der Dicke null ab, wie in Bild 2.7 dargestellt [MITOME91; TSAI07]. Bild 4.3 zeigt die nach DIN 867 [DIN867 1986] definierten Bezugsprofile der beiden Zahnstangen. Daneben befinden sich die im Raum angeordneten Zahnstangen, wobei diese vereinfacht als Zahnücke wiedergegeben werden.

An der imaginären Zahnstange des Teilkegels in Bild 4.3a werden Normalmodul  $m_n$  und Profilwinkel  $\alpha_p$  des Bezugsprofils definiert. Der Schrägungswinkel  $\beta_p$  und der Konuswinkel  $\theta_p$  legen dabei die Verdrehung und Verkippung der imaginären Zahnstange fest. Die Größen am Teilkegel beschreiben die Evolvente des Beveloidrads und somit die Werkzeuggeometrie.

Die imaginäre Zahnstange mit dem Modul  $m_{wn}$  und dem Profilwinkel  $\alpha_w$  definiert die Größen am Wälzkegel, siehe Bild 4.3b. Die Verdrehung und Verkippung durch Schrägungswinkel  $\beta_w$  und Konuswinkel  $\theta_w$  ordnet die Wälzkegel aus Bild 4.2 so im Raum an, dass sie sich im Wälzpunkt C tangieren. Somit dienen die Größen am Wälzkegel der Berechnung der Einbau- und Eingriffsposition. [TSAI07]



**Bild 4.3:** Imaginäre Zahnstangen zur Definition der a) Teil- und b) Wälzkegel einer Beveloidradpaarung

Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Achslage gilt nach dem Verzahnungsgesetz für ein Abwälzen ohne Abheben oder Durchdringen, dass die Normalgeschwindigkeiten  $v_n$  von Rad 1 und 2 am Wälzpunkt C identisch sind [ZIMMER16, S. 6].

$$v_n = \omega_1 \cdot r_{w1} \cdot \cos \beta_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2} \cdot \cos \beta_{w2} \quad (4.6)$$

Aus dem Verhältnis der Wälzgeschwindigkeiten  $\omega_{1,2}$  kann der Zusammenhang zwischen den Wälzkreisradien von Rad 1 und 2 abgeleitet werden. Gleichzeitig kann die Übersetzung  $i$  über die Teilkreisradien ausgedrückt werden.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2} \cdot \cos \beta_{w2}}{r_{w1} \cdot \cos \beta_{w1}} = \frac{r_2 \cdot \cos \beta_{p2}}{r_1 \cdot \cos \beta_{p1}} \quad (4.7)$$

Wird (4.7) so umgestellt, dass die Größen für Rad 1 auf der linken und für Rad 2 auf der rechten Seite stehen, können nach Tsai [TSAI07] die Profilwinkel der beiden Zahnstangen aus Bild 4.3 ins Verhältnis gesetzt werden.

$$\frac{r_{p1} \cdot \cos \beta_{p1}}{r_{w1} \cdot \cos \beta_{w1}} = \frac{r_{p2} \cdot \cos \beta_{p2}}{r_{w2} \cdot \cos \beta_{w2}} = \frac{\cos \alpha_w}{\cos \alpha_p} \quad (4.8)$$

Wie bereits aus dem Stand der Technik bekannt ist, haben schrägverzahnte Beveloidräder aufgrund der Verdrehung und Verkippung des Bezugsprofils einen asymmetrischen

Stirnschnitt. Die unterschiedlichen Stirneingriffswinkel auf Links- und Rechtsflanke gelten für die Zahnstange am Teil- und Wälzkreis.

$$\tan \alpha_{t(w)L,R} = \frac{\tan \alpha_{p(w)}}{\cos \beta_{p(w)}} \cdot \cos \theta_{p(w)} \pm \tan \beta_{p(w)} \cdot \sin \theta_{p(w)} \quad (4.9)$$

Der Vorteil des vorgestellten Ansatzes liegt in der direkten Bestimmung der Wälzeingriffswinkel  $\alpha_{wL,R}$  über die Zahnstange, sodass die Wälzkreisradien ohne abgewinkelten Achsabstand festgelegt werden können. Eine Transformation ausgehend von einer Zylinderadpaarung mit Ersatzachsabstand  $a_E$  nach [BÜCKLE93] entfällt, wie es in [SCHÖLER21, S. 64 ff.; TRAUT19, S. 44 f.] erforderlich ist. Analoges gilt für den Schrägungswinkel auf Links- und Rechtsflanke.

$$\tan \beta_{(w)L,R} = \mp \frac{\tan \alpha_{p(w)}}{\cos \beta_{p(w)}} \cdot \sin \theta_{p(w)} + \tan \beta_{p(w)} \cdot \cos \theta_{p(w)} \quad (4.10)$$

Mit dem Zusammenhang der Größen in (4.8) und der Bedingung, dass Wälz- und Teilkegel jeweils den identischen Grundzylinder besitzen, gilt für den Schrägungs- und Stirneingriffswinkel folgende Gleichung.

$$\tan \beta_{wL,R} = \tan \beta_{L,R} \cdot \frac{\cos \alpha_{tL,R}}{\cos \alpha_{wL,R}} \quad (4.11)$$

Die Herleitung der Gleichung findet sich in [TSAI07]. Durch Umformungen und Differenzbildungen können der Konus- und Schrägungswinkel am Wälzkegel in Abhängigkeit von den Größen am Teilkegel und dem Profilwinkel  $\alpha_w$  ausgedrückt werden.

$$\sin \theta_w = \sin \theta_p \cdot \frac{\sin \alpha_p}{\sin \alpha_w} \quad (4.12)$$

$$\sin \beta_w = \sin \beta_p \cdot \frac{\cos \alpha_p \cdot \cos \theta_p}{\cos \alpha_w \cdot \cos \theta_w} \quad (4.13)$$

Bei Verzahnungen ohne Profilverchiebung kann mit (4.12) und (4.13) gezeigt werden, dass bei gleichem Profilwinkel ( $\alpha_p = \alpha_w$ ) auch die Verkippung ( $\theta_p = \theta_w$ ) und Verdrehung ( $\beta_p = \beta_w$ ) der Zahnstangen übereinstimmen.

Mit den hergeleiteten Größen können die Beveloidräder über den Achswinkel  $\Sigma$ , den Achsversatz  $a$  und die Einbauabstände  $Z_{1,2}$  so positioniert werden, dass das Abwälzen am Referenzstirnschnittpaar stattfindet. Die Summe der Schrägungswinkel am Wälzkreis definiert das Vorzeichen des Achsversatzes. So liegt bei einer positiven Summe ein positiver Achsversatz vor. Diese Definition ist im Vergleich zu Kegelrädern unabhängig von der Verteilung der Schrägungswinkel auf Rad 1 und 2 [KLINGELNBERG08, S. 14 f.].

$$\cos \Sigma = \cos \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2}) - \sin \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \quad (4.14)$$

$$a = \frac{(r_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} + r_{w2} \cdot \cos \theta_{w1}) \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})}{\sin \Sigma} \quad (4.15)$$

$$Z_{1,2} = \frac{r_{w1,2} \cdot \cos \Sigma + r_{w2,1} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2}) - (a \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2}) \cdot \cos \theta_{w2,1}) / \tan \Sigma}{\sin \theta_{w1,2} \cdot \cos \theta_{w2,1} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2}) + \cos \theta_{w1,2} \cdot \sin \theta_{w2,1}} \quad (4.16)$$

Zusätzlich zum mittigen Tragbild soll bei der Beveloidradpaarung ein Eingriff mit definiertem Verdrehflankenspiel realisiert werden. Hierzu müssen am Wälzkreis die Summe aus Zahndicke  $s_{wn1,2}$  und Verdrehflankenspiel  $j_{wn}$  der Teilung  $p_{wn}$  entsprechen [ROTH98 S. 150]. Die Zahndicken sind im Stirnschnitt des Beveloidrads angegeben und werden mit dem Schrägungswinkel  $\beta_{w1,2}$  in den Normalschnitt umgerechnet.

$$p_{wn} = s_{wt1} \cdot \cos \beta_{w1} + s_{wt2} \cdot \cos \beta_{w2} + j_{wn} = m_{wn} \cdot \pi \quad (4.17)$$

Nach Umformungen ergibt sich die Korhammersche Beziehung [KORHAMMER52] für eine Beveloidradpaarung erweitert um ein definiertes Verdrehflankenspiel. Die Berücksichtigung des Verdrehflankenspiels bei der Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten unterscheidet die Berechnungsmethode von bisherigen Ansätzen.

$$2 \cdot \tan \alpha_p \cdot (x_1 \cdot \cos \theta_{p1} + x_2 \cdot \cos \theta_{p2}) + \frac{j_{t1,2}}{m_{t1,2}} = \quad (4.18)$$

$$\frac{Z_1}{2} \cdot (\text{inv } \alpha_{wL1} + \text{inv } \alpha_{wR1} - \text{inv } \alpha_{tL1} - \text{inv } \alpha_{tR1}) +$$

$$\frac{Z_2}{2} \cdot (\text{inv } \alpha_{wL2} + \text{inv } \alpha_{wR2} - \text{inv } \alpha_{tL2} - \text{inv } \alpha_{tR2})$$

In (4.18) erfolgt eine Umrechnung des definierten Verdrehflankenspiels vom Normalschnitt am Wälzkreis  $j_{wn}$  zum Stirnschnitt am Teilkreis  $j_{t1,2}$ , da das für den Vergleich herangezogene simulierte Verdrehflankenspiel in BECAL am Teilkreisradius von Rad 2 ausgewertet wird [SCHLECHT14, S. 19 f.].

Die bekannten Gleichungen für den Achswinkel  $\Sigma$  (4.14), den Achsversatz  $a$  (4.15) und die Korhammersche Beziehung erweitert um ein definiertes Verdrehflankenspiel (4.18) bilden das hergeleitete Gleichungssystem in dieser Arbeit. Durch Lösen der Gleichungen können die Hauptverzahnungsdaten für das Referenzstirnschnittpaar bestimmt werden.

$$\Sigma = f(\alpha_p, \alpha_w, \beta_{p1,2}, \theta_{p1,2}) \quad (4.19)$$

$$a = f(\alpha_p, \alpha_w, \beta_{p1,2}, \theta_{p1,2}, m_n, Z_{1,2})$$

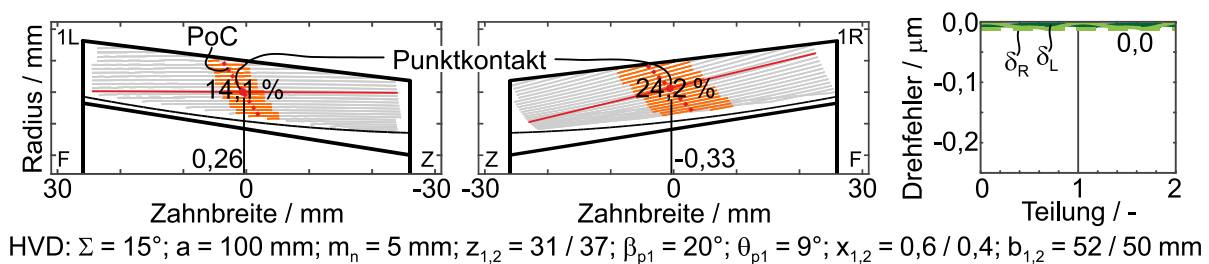
$$p_w = f(\alpha_p, \alpha_w, \beta_{p1,2}, \theta_{p1,2}, m_n, Z_{1,2}, x_{1,2}, j_{t1,2})$$

Das aus verzahnungsgeometrischen Gleichungen bestehende Gleichungssystem kann numerisch nach den unbekanntem Größen Konuswinkel  $\theta_{p1,2}$ , Schrägungswinkel  $\beta_{p1,2}$  und Profilwinkel  $\alpha_w$  aufgelöst werden. Letztgenannter ergibt sich aus dem Zusammenhang

zwischen den Größen am Wälz- und Teilkegel. Die Anzahl der Unbekannten wird reduziert, indem die Konus- und Schrägungswinkel entweder für ein Rad vorgegeben oder entsprechend dem Verhältnis in (4.1) verteilt werden. Die Angabe eines Verhältnisses ermöglicht eine Auslegung ohne Vorgabe eines Winkels.

Weitere Vorgaben wie Modul, Zahnbreite und Zähnezahl folgen aus der Dimensionierung der Beveloidradpaarung in Kapitel 4.2 oder können vorgegeben werden. Die Profilverschiebungssumme und deren Aufteilung auf Rad 1 und 2 kann entweder frei gewählt oder in Bezug auf Tragfähigkeit und Überdeckung aufgebracht werden. Zu berücksichtigen ist dabei die maximal ausführbare Zahnbreite, die durch die Wahl der Profilverschiebung beeinflusst werden kann, wie in [SCHÖLER21, S. 58] ausführlich beschrieben ist. Für eine von null abweichende Profilverschiebungssumme in der Zahnbreitenmitte ist eine Anpassung der Konuswinkel notwendig, um ein mittiges Tragbild auf der Zahnflanke zu erhalten, u. a. in [TSAI07]. Bei dem hier vorgestellten Ansatz werden die Konuswinkel durch Lösen des Gleichungssystems in (4.19) direkt bestimmt.

Die Einbaulage und die Hauptverzahnungsdaten des Referenzstirnschnittpaars ermöglichen, eine nicht modifizierte Zahnflankengeometrie in SimKoS zu modellieren und mittels der Schnittstelle zu BECAL [SCHLECHT14] eine Kontaktsimulation durchzuführen. In Bild 4.4 sind die Tragbilder und Drehfehlerverläufe für eine lastfrei abgewälzte Beveloidradpaarung mit Achswinkel  $\Sigma = 15^\circ$  und Achsversatz  $a = 100$  mm dargestellt. Diese Radpaarung dient im weiteren Verlauf als Referenzverzahnung. Falls nicht ausdrücklich darauf hingewiesen, werden Hauptverzahnungsdaten (HVD) und Ergebnisdarstellung für nachfolgende Untersuchungen übernommen. Abweichende Hauptverzahnungsdaten werden in den Bildern fett hervorgehoben. Die lastfreien Tragbilder werden mit einem Kontaktabstand (entspricht der Tuschierpastendicke [KLINGELNBERG08, S. 90]) von kleiner als  $6 \mu\text{m}$  eingefärbt. Der Flächenschwerpunkt bildet in axiale Richtung die Lage des Tragbildschwerpunkts  $z_{TB}$ .



**Bild 4.4:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe einer beispielhaften Beveloidradpaarung für Links- (links) und Rechtsflanke (rechts) von Rad 1



Die Zuordnung der Links- und Rechtsflanke erfolgt über 1L und 1R. In Zahnbreitenrichtung ist die Zehe durch Z und die Ferse durch F gekennzeichnet. Der geometrische Drehfehlerverlauf wird mithilfe von 25 Wälzstellungen je Teilung diskretisiert.

Durch Vorgabe von Rad 1 können Konus- und Schrägungswinkel von Rad 2 ( $\theta_{p2} = 5,59^\circ$ ,  $\beta_{p2} = -11,91^\circ$ ) mit (4.19) berechnet werden. Mit dem punktförmigen Kontakt in der Zahnbreitenmitte entsteht auf Links- und Rechtsflanke jeweils ein Tragbild, dessen Form nach DIN 3971 [DIN3971 1980, S. 21] als hohes Mittentragen charakterisiert werden kann. Die rot gekennzeichnete Linie stellt exemplarisch die Berührlinie für eine Eingriffsstellung dar, welche in Kapitel 2.2.2 anhand der Planverzahnung hergeleitet wird. Der Abschnitt der Berührlinie, in dem sich die Zahnflanken tatsächlich berühren, wird als Kontaktstrecke bezeichnet und bestimmt das charakteristische Kontaktbild [DIN21771 2014]. Die axiale Lage des Tragbildschwerpunkts  $z_{TB}$  quantifiziert die Außermittigkeit des Tragbilds. Auf beiden Flanken liegt ein absoluter Wert von etwa 0,3 mm vor. Der Traganteil ist der prozentuale Anteil der aktiven Zahnflanke [LINKE10, S. 613]. Der geringere Traganteil von 14,1 % auf der Linksflanke im Vergleich zu 24,2 % auf der Rechtsflanke kann mit dem größeren Absolutwert des FPD-Winkels auf der Linksflanke ( $\kappa_L \approx 15,3^\circ$  und  $\kappa_R \approx 8,5^\circ$ ) begründet werden, vgl. Kapitel 2.2.2. Zur Bestimmung der FPD-Winkel müssen in (2.7) die Größen der Zahnstange am Wälzkreis eingesetzt werden. Über alle Eingriffsstellungen betrachtet entsteht durch den Punktkontakt der dargestellte Kontaktpfad (PoC) von Zahnkopf bis -fuß.

Die Neigungen des PoC  $\varepsilon'_{L,R}$  können für eine beliebige Achslage bestimmt werden, indem der Normalenvektor des PoC  $\vec{n}_{PoC}$  in den Axialschnitt projiziert wird. Die neu eingeführte Gleichung für  $\varepsilon'_{L,R}$  wird in Anhang A.2 hergeleitet und basiert auf den geometrischen Überlegungen von Mitome [MITOME85].

$$\cos \varepsilon'_{L,R} = \frac{\tan \alpha_{wL,R}}{\sqrt{\tan^2 \alpha_w + \tan^2 \alpha_w \cdot \tan^2 \beta_w + \tan^2 \beta_w}} \quad (4.20)$$

Für die Referenzverzahnung ergibt sich mit den Verzahnungsdaten am Wälzkegel eine Neigung des PoC von  $\varepsilon'_{L1} = 31,1^\circ$  auf der Links- und  $\varepsilon'_{R1} = 46,6^\circ$  auf der Rechtsflanke.

Im rechten Diagramm in Bild 4.4 ist der Verlauf des Drehfehlers  $\delta$  über zwei Teilungen aufgezeichnet. Auf beiden Zahnflanken tritt kein Drehfehler ( $\delta_{L,R} \ll 0,1 \mu\text{m}$ ) auf, sodass die Beveloidradpaarung die Drehbewegung richtungsunabhängig gleichmäßig überträgt. Zusammengefasst ermöglicht das Gleichungssystem in (4.19) die Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten einer Beveloidradpaarung in beliebiger Achslage, sodass im Refe-

renzstirnschnittpaar Abwälzen stattfindet. Die erforderlichen Gleichungen sind in diesem Kapitel aufgeführt und befähigen zur direkten Auslegung einer Beveloidradpaarung.

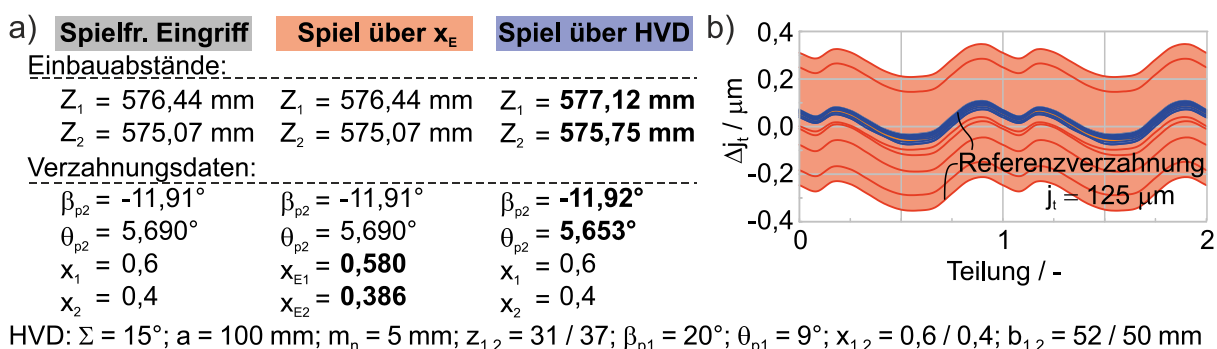
### 4.3.2 Umsetzung eines definierten Verdrehflankenspiels

Das Verdrehflankenspiel verhindert ein Klemmen der Radpaarung aufgrund von Zahndickentoleranzen sowie weiteren Abweichungen und Verformungen. Der erforderliche Wert für Zylinderräder kann nach DIN 3967 [DIN3967 1978] bestimmt werden. Die Referenzverzahnung wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit um ein Verdrehflankenspiel von  $j_t = 125 \mu\text{m}$  ergänzt und gleicht damit der Paarung 1, die in Kapitel 6 am Prüfstand experimentell untersucht wird.

Bei Zylinderradpaarungen erfolgt die Umsetzung mit dem Erzeugungsprofilverschiebungsfaktor  $x_E$ , welcher den Auslegungsprofilverschiebungsfaktor  $x$  in der Korhammerischen Beziehung ersetzt. Der Übersichtlichkeit wegen wird der konstant gehaltene rechte Teil aus (4.18) nicht ausgeschrieben.

$$2 \cdot \tan \alpha_p \cdot (x_{E1} \cdot \cos \theta_{p1} + x_{E2} \cdot \cos \theta_{p2}) + \frac{j_{t1,2}}{m_{t1,2}} = \text{konst.} \quad (4.21)$$

Dieses Vorgehen ist bei einer Beveloidradpaarung ebenfalls anwendbar [SCHÖLER21 S. 80 ff.], indem zunächst die Hauptverzahnungsdaten bei spielfreiem Eingriff ( $j_t = 0 \mu\text{m}$ ) bestimmt werden. Anschließend wird das Verdrehflankenspiel über die Veränderung der Auslegungs- hin zur Erzeugungsprofilverschiebung eingestellt. Die Einbauabstände und weiteren Verzahnungsdaten bleiben dabei unverändert, wie der Vergleich zwischen spielfreiem Eingriff und Spiel über  $x_E$  in Bild 4.5a beispielhaft für ein Verdrehflankenspiel  $j_t = 125 \mu\text{m}$  zeigt.



**Bild 4.5:** a) Umsetzung des Verdrehflankenspiels  $j_t = 125 \mu\text{m}$   
 b) Unterschied zwischen definiertem und simuliertem Verdrehflankenspiel  $\Delta j_t$  für Auslegungs- und Erzeugungsprofilverschiebung ( $j_t = 0 \dots 200 \mu\text{m}$ )

Eine weitere Möglichkeit zum Einstellen des Verdrehflankenspiels ist die direkte Berücksichtigung bei der Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten. Im Vergleich zur Auslegung mit spielfreiem Eingriff ändern sich dadurch sowohl die Hauptverzahnungsdaten als auch die Einbauabstände minimal. Für das Beispiel in Bild 4.5a wird Rad 1 vorgegeben und Rad 2 entsprechend (4.17) und dem Gleichungssystem in (4.19) ermittelt, sodass die Größen von Rad 2 und die Einbauabstände voneinander abweichen.

Bei der Umsetzung des Verdrehflankenspiels über die Hauptverzahnungsdaten wird das Spiel zwischen den Zahnflanken durch eine minimale Änderung der Konus- und Schrägungswinkel erzielt. Dies wirkt sich auf die Einbauabstände aus. Beim konventionellen Ansatz mit der Erzeugungsprofilverschiebung hängt das Verdrehflankenspiel hingegen einzig von der Änderung der Profilverschiebung ab.

Beide Ansätze zur Umsetzung eines definierten Verdrehflankenspiels sind in Bild 4.5b gegenübergestellt. Das Diagramm zeigt den Unterschied zwischen dem definierten und dem in einer Kontaktanalyse simulierten Verdrehflankenspiel  $\Delta_j$  über zwei Teilungen. Ausgehend von der Referenzverzahnung wird das Spiel zwischen 0  $\mu\text{m}$  und 200  $\mu\text{m}$  auf neun äquidistanten Stufen variiert, wobei jede Linie eine Stufe des Verdrehflankenspiels darstellt.

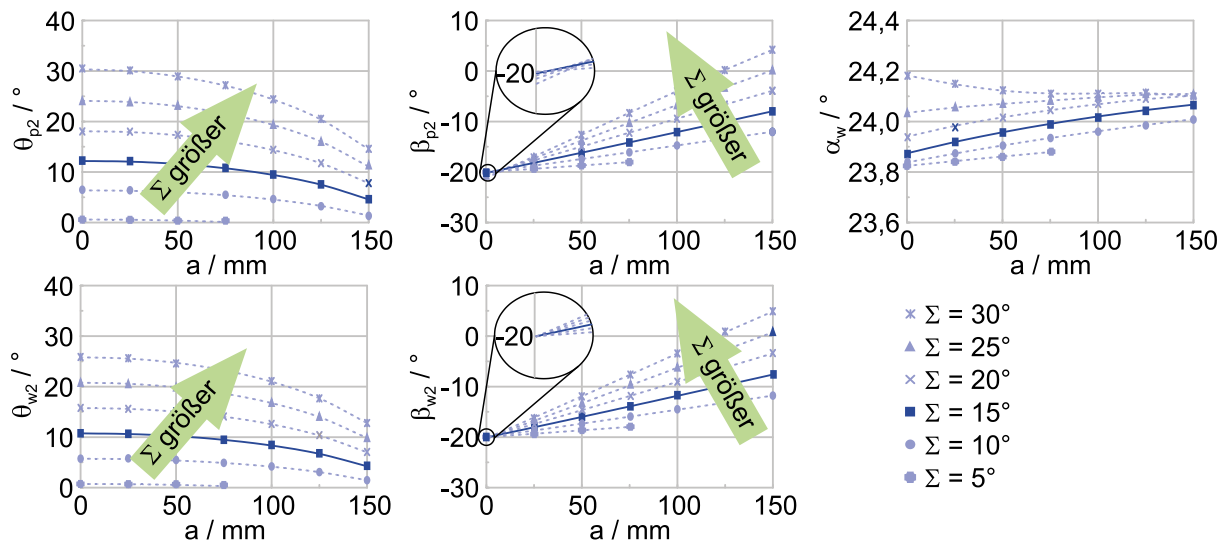
Die Abweichungen  $\Delta_j < 0,4 \mu\text{m}$  bestätigen, dass mit beiden Ansätzen das definierte Verdrehflankenspiel umgesetzt werden kann. Die Verläufe mit der Erzeugungsprofilverschiebung (rot) weichen stärker vom Sollwert ab als die der Auslegungsprofilverschiebung (blau). Hier liegen die Linien nahezu übereinander. Ein Trend einer vergrößerten Differenz mit steigendem Verdrehflankenspiel, wie in [SCHÖLER21, S. 109] beschrieben, kann nicht festgestellt werden.

Weitere Variationen von Achswinkel und Achsversatz haben ebenfalls keinen signifikanten Einfluss auf die Umsetzung des Verdrehflankenspiels. Auch hier zeigt sich ein geringfügiger Unterschied zwischen beiden Ansätzen, der in der Praxis vernachlässigbar ist.

Im Folgenden wird der Ansatz mit direkter Berücksichtigung des Verdrehflankenspiels bei Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten verwendet. Dieser bietet den Vorteil, dass eine Skalierung und Positionierung des Tragbilds über das Verdrehflankenspiel erzielt werden kann, worauf in Kapitel 4.6 näher eingegangen wird.

### 4.3.3 Einfluss der Einbaulage auf die Hauptverzahnungsdaten

Mit der Variation von Achswinkel und Achsversatz kann der Einfluss der Einbaulage auf Konus- und Schrägungswinkel und somit auf das charakteristische Kontaktbild (Berührlinie und PoC) aufgezeigt werden. Die weiteren Größen wie Modul, Zähnezah, Profilver-schiebungsfaktor, Zahnbreite, Profilwinkel und Verdrehflankenspiel bleiben bei der nach-folgenden Untersuchung unverändert, da sie entweder keinen oder nur einen indirekten Einfluss auf die Berührlinie und den PoC haben [MITOME85; ZHU12A]. Die Verläufe in Bild 4.6 zeigen für Rad 2 den Konus- und Schrägungswinkel am Teil- und Wälzkegel sowie den Profilwinkel am Wälzkegel bei Variation von Achsversatz und Achswinkel. Der Achswinkel wird bis zu einem maximalen Wert von  $30^\circ$  und der Achsversatz bis zu 150 mm (etwa 90 % des möglichen Achsversatzes) variiert. Bei der Referenzverzahnung wird der Konuswinkel von Rad 1  $\theta_{p1} = 5^\circ$  vorgegeben, damit auch kleinere Achswinkel untersucht werden können. Die durchgezogene Linie stellt  $\Sigma = 15^\circ$  dar, auf der sich für  $a = 100$  mm die Ergebnisse der angepassten Referenzverzahnung befinden.



HVD:  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 5^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $b_{1,2} = 52 / 50$  mm;  $j_t = 125$   $\mu$ m

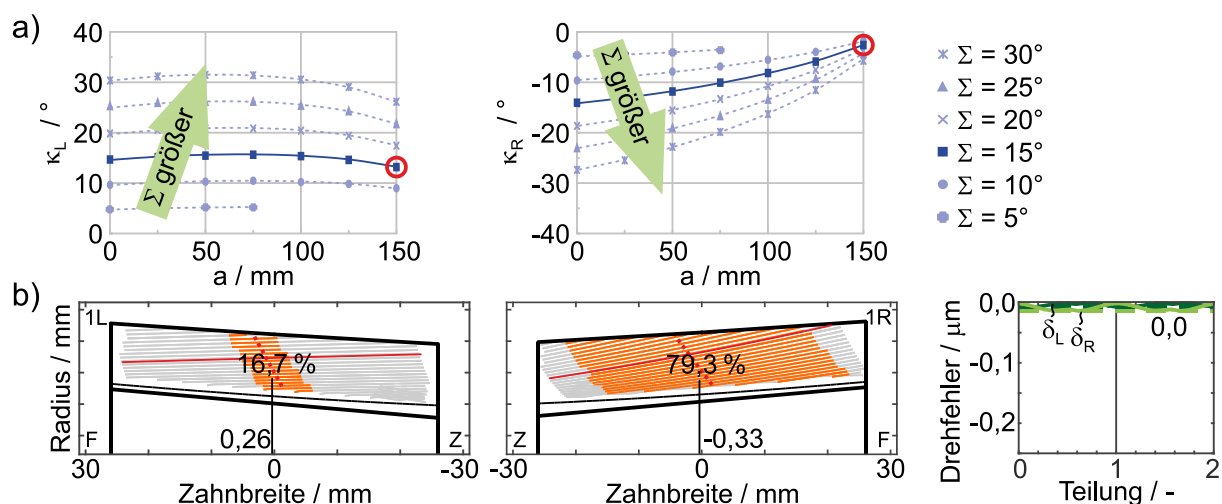
**Bild 4.6:** Untersuchung von Konus-  $\theta$  und Schrägungswinkel  $\beta$  sowie Profilwinkel  $\alpha$  am Teil- und Wälzkegel von Rad 2 bei Variation von Achswinkel  $\Sigma$  und Achs- versatz  $a$

Eine Verletzung der Profilver-schiebungsgrenzen für große Konuswinkel wird bei dieser Untersuchung zugelassen, da hier ausschließlich die Hauptverzahnungsdaten im RSS betrachtet werden. Für einen Achswinkel  $\Sigma = 5^\circ$  liegen für Achsversätze  $a > 75$  mm keine Ergebnisse aufgrund des negativen Konuswinkels von Rad 2 vor.

Mit zunehmendem Achswinkel vergrößert sich die Konuswinkelsumme bzw. der Konuswinkel von Rad 2. Gleichzeitig verringert sich bei Vergrößerung des Achsversatzes der Konuswinkel von Rad 2. Dies gilt gleichermaßen für die Konuswinkel am Teil- und Wälzkreis. Die positive Profilverschiebungssumme führt dazu, dass der Profilwinkel am Wälzkegel  $\alpha_w$  größer ist als derjenige am Teilkegel ( $\alpha_p = 20^\circ$ ). Aus dem Zusammenhang in (4.12) folgt, dass der Konuswinkel am Wälzkegel kleiner ist als derjenige am Teilkegel. So gilt bei einer positiven Profilverschiebungssumme unabhängig von der Einbaulage für beide Räder  $\theta_{p1,2} > \theta_{w1,2}$ . Für den Sonderfall einer schneidenden Achslage entspricht die Summe der Konuswinkel am Wälzkegel dem Achswinkel ( $\theta_{w1} + \theta_{w2} = \Sigma$ ).

Der Schrägungswinkel verringert sich betragsmäßig mit Vergrößerung des Achsversatzes und Achswinkels. Auch hier kann bei genauer Betrachtung ein Unterschied zwischen dem Schrägungswinkel am Teil- und Wälzkegel festgestellt werden. Bei schneidender Achslage ist hervorzuheben, dass die Summe der Schrägungswinkel ungleich null ( $\beta_{p1} + \beta_{p2} \neq 0$ ) ist, da die Verläufe von  $\beta_{p2}$  die Ordinate nicht bei  $-20^\circ$  schneiden. Am Wälzkegel hingegen ist bei schneidender Achslage unabhängig vom Achswinkel der Schrägungswinkel  $\beta_{w2} = -20^\circ$ .

Zur qualitativen Bewertung der Tragbilder können die Neigungswinkel des PoC  $\varepsilon'_{L,R}$  und die FPD-Winkel  $\kappa_{L,R}$  herangezogen werden. In Bild 4.7 sind die Verläufe der FPD-Winkel dargestellt, wobei deren absolute Werte Rückschlüsse auf die Größe des Tragbilds ermöglichen. Für  $\kappa_{L,R} = 0^\circ$  liegt Linienkontakt mit vollem Tragbild vor. Mit betragsmäßiger Vergrößerung verringert sich das Tragbild.



HVD:  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 5^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $b_{1,2} = 52 / 50$  mm;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 4.7:** a) Verlauf der FPD-Winkel  $\kappa_{L,R}$  über dem Achsversatz  $a$

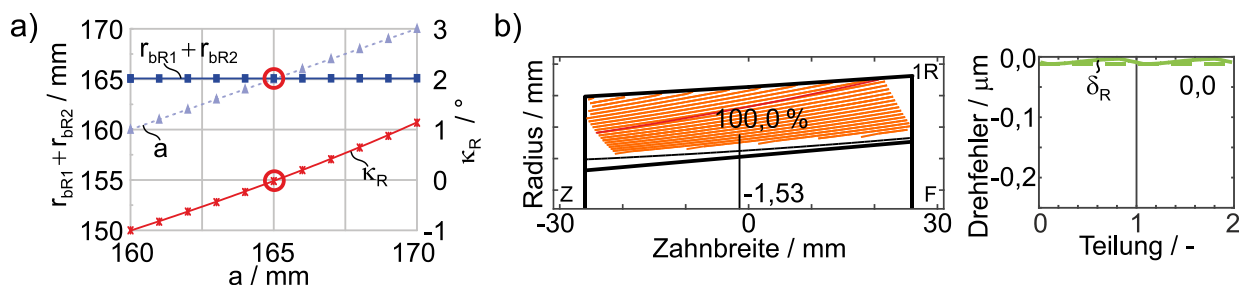
b) Tragbilder und Drehfehlerverläufe für Achswinkel  $\Sigma = 15^\circ$  und Achsversatz  $a = 150$  mm

In Bild 4.7a ist zu erkennen, dass der Winkel auf der Linksflanke  $\kappa_L$  ein Maximum im betrachteten Bereich besitzt. Mit steigendem Achswinkel verschiebt sich der Verlauf von  $\kappa_L$  zu höheren Werten, was auf die verkippeten Grundzylinder zurückzuführen ist.

Betragsmäßig ist dieses Verhalten auf der Rechtsflanke für einen steigenden Achswinkel ebenfalls zu erkennen. Im Gegensatz zur Linksflanke verringert sich  $\kappa_R$  mit Vergrößerung des Achsversatzes, was eine Vergrößerung des Traganteils bedeutet. Für die rot hervorgehobene Einbaulage kann anhand der FPD-Winkel  $\kappa_L \approx 13,2^\circ$  und  $\kappa_R \approx -2,7^\circ$  bereits eine qualitative Aussage über die Traganteile auf der Links- und Rechtsflanke getroffen werden. Auf der Linksflanke ist das Tragbild ähnlich ausgebildet wie bei schneidender Achslage mit  $\Sigma = 15^\circ$  und kann als hohes Mittentragen [DIN3971 1980, S. 21] charakterisiert werden. Auf der Rechtsflanke hingegen liegt ein deutlich größerer Traganteil aufgrund des betragsmäßig kleinen FPD-Winkels vor. Diese auf analytischen Gleichungen beruhende Bewertung kann mit den Tragbildern in Bild 4.7b gestützt werden.

Der Neigungswinkel des PoC  $\varepsilon'_{L,R}$  hat im Vergleich zum FPD-Winkel einen geringeren Einfluss auf die Tragbildgröße, da dieser die Neigung in Zahnhöhenrichtung beschreibt. Es gilt für das Tragbild, dass sich mit zunehmender Schiefstellung gegenüber den Stirnschnitten der Traganteil vergrößert.

Bei weiterer Vergrößerung des Achsversatzes tritt für die betrachteten Verzahnungsdaten Linienkontakt auf der Rechtsflanke auf. Veranschaulichen lässt sich dies mit den Verläufen in Bild 4.8a. Zum einen folgt aus  $\kappa_R$ , der für  $a \approx 165$  mm gleich null ist, ein volles Tragbild. Zum anderen kann die Anschauung aus Bild 2.9 verwendet werden, wonach Linienkontakt vorliegt, sobald die Summe der Grundkreisradien dem Achsversatz ( $r_{bR1} + r_{bR2} = a$ ) entspricht. Auch der Schnittpunkt zwischen dem Achsversatz und der Summe der Grundkreisradien befindet sich bei  $a \approx 165$  mm.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 5^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $b_{1,2} = 52 / 50$  mm;  $j_t = 125$  μm

**Bild 4.8:** a) Verlauf der Summe der Grundkreisradien  $r_{bR1} + r_{bR2}$  und FPD-Winkel  $\kappa_R$  über dem Achsversatz  $a$  sowie b) Tragbild und Drehfehlerverlauf der Rechtsflanke bei konjugiertem Eingriff mit Achsversatz  $a \approx 165$  mm

Das voll über die Zahnbreite ausgebildete Tragbild der Rechtsflanke und der Drehfehlerverlauf in Bild 4.8b bestätigen den konjugierten Eingriff. Zu beachten ist, dass die Konus- und Schrägungswinkel von Rad 2 für jede Einbaulage neu berechnet werden, was eine geringfügige Änderung der Grundkreisradien zur Folge hat.

Zusammenfassend kann für die Untersuchungen festgehalten werden, dass die Hauptverzahnungsdaten bei nicht modifizierten Beveloidradpaarungen bereits eine Bewertung des Kontaktbilds hinsichtlich Größe und Neigung ermöglichen. Für die nicht modifizierte Referenzverzahnung kann nur für die in Bild 4.8a gezeigte Einbaulage ein konjugierter Eingriff in einer Drehrichtung (hier: Rechtsflanke) erzielt werden. Bei Beveloidradpaarungen in windschiefer Achslage verdeutlichen die unterschiedlichen Traganteile für Links- und Rechtsflanke den stark ungleich verteilten Ease-Off im Eingriff. Folglich ist eine Modifikation notwendig, welche die Zahnflankengeometrie auf Links- und Rechtsflanke unterschiedlich anpasst. Hierzu wird ein Ansatz hergeleitet, um unabhängig von der Einbaulage für beide Drehrichtungen eine drehfehleroptimale Zahnflankengeometrie mit voll ausgebildetem Tragbild wie beim konjugierten Eingriff zu ermöglichen.

#### **4.4 Optimierung durch lokales Anpassen der Verzahnungsdaten**

Ziel der Optimierung ist die Vergrößerung des Kontaktbereichs von nicht modifizierten Beveloidradpaarungen durch eine Modifikation der Zahnflankengeometrie, sodass zunächst ein angenäherter konjugierter Eingriff erzielt wird. Damit ergibt sich nachfolgende Forschungsfrage, die es zu klären gilt.

##### **Forschungsfrage zu Kapitel 4.4**

Wie kann bei einer Beveloidradpaarung über analytisch berechnete, lokal angepasste Verzahnungsdaten eine Annäherung an den konjugierten Eingriff erzielt werden?

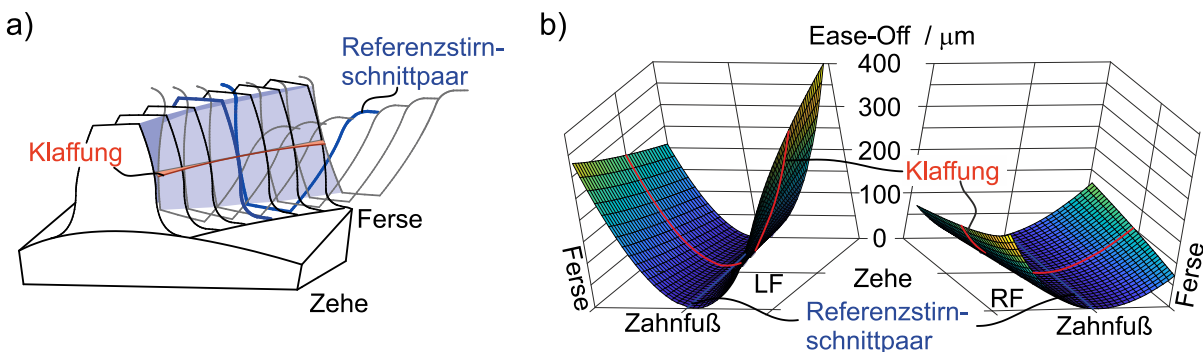
Zur Beantwortung wird eine Berechnungsmethode entwickelt, die den konjugierten Eingriff über die Anpassung der Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite annähert. Der Ansatz über den konjugierten Eingriff kann mit den Erkenntnissen von Traut [TRAUT19, S. 80] begründet werden. Er zeigt mit Untersuchungen des Übertragungsverhaltens, dass konjugiert abwälzende Beveloidradpaarungen ähnlich auf Zahnflankenmodifikationen, Fertigungsabweichungen und Lageabweichungen reagieren wie vergleichbare Zylinderradpaarungen.

Mit dem Ansatz in [TRAUT19] werden die lokal angepassten Verzahnungsdaten so bestimmt, dass bei Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage ein angenäherter

konjugierter Eingriff vorliegt. Aufgrund der ebenen Betrachtungsweise ist jedoch eine Erweiterung auf windschiefe Achslagen nicht möglich. Der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz zur Berechnung der lokal angepassten Verzahnungsdaten ermöglicht, einen konjugierten Eingriff bei Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage anzunähern. Die Herleitung der zugrunde liegenden Gleichungen ist in Marino et al. [MARINO20] veröffentlicht.

#### 4.4.1 Bestimmung der lokal angepassten Verzahnungsdaten

Ausgangspunkt für die Optimierung sind die in Kapitel 4.3 ermittelten Hauptverzahnungsdaten von Beveloidradpaarungen. Wie in Bild 4.9a dargestellt ist, wälzen diese nur am Referenzstirnschnittpaar auf Höhe des Wälzkreises spielfrei oder mit einem definierten Verdrehflankenspiel miteinander ab. Die weiteren Stirnschnittpaare abseits von dieser Position weisen entlang der Berührlinie eine Klaffung auf, die zur Zehe und Ferse hin ansteigt.



**Bild 4.9:** a) Referenzstirnschnittpaar mit Klaffung entlang der Berührlinie  
b) Ease-Off der nicht modifizierten Referenzverzahnung

Über alle Eingriffsstellungen betrachtet ergibt sich daraus der Ease-Off der Beveloidradpaarung in Bild 4.9b. Für die Referenzverzahnung ist ersichtlich, dass der Ease-Off asymmetrisch auf Links- und Rechtsflanke verteilt ist und eine Schränkung auf beiden Zahnflanken vorliegt. Der dargestellte Ease-Off kann nicht mithilfe von Standardmodifikationen kompensiert werden.

Im nicht modifizierten Zustand erfüllt nur das Referenzstirnschnittpaar das Gleichungssystem in (4.19), weshalb die Verzahnungsdaten der weiteren Stirnschnittpaare zu verändern sind. Dazu wird das Beveloidrad in Stirnschnitte unterteilt, deren Position ausgehend vom Einbauabstand des RSS definiert wird.

$$Z_{1,2}(\zeta) = Z_{RSS} + (\zeta - 0,5) \cdot b_{1,2} \quad \text{mit} \quad \zeta \in [0,1] \quad (4.22)$$



Das Ziel der Optimierung ist, dass jedes Stirnschnittpaar entlang der normierten Zahnbreitenposition  $\zeta$  unter einem definierten Verdrehflankenspiel abwälzt und somit das Gleichungssystem in (4.19) erfüllt. Zur Einstellung der Zahndicke ist die lineare Profilverschiebung anzupassen, was zu einem nicht linearen Verlauf entlang der Zahnbreite führt. Daraus resultiert als weitere unbekannte Größe der Profilverschiebungsfaktor  $x_{1,2}(\zeta)$ , weshalb das Gleichungssystem in (4.19) um den Einbauabstand erweitert wird. Darüber hinaus werden stirnschnittbezogene Größen berücksichtigt, um so die lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite bestimmen zu können. Das Gleichungssystem wird an jeder Zahnbreitenposition  $\zeta$  aufgestellt und numerisch nach den Unbekannten aufgelöst.

$$\Sigma = f \left( \alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), \theta_{p1,2}(\zeta) \right) \quad (4.23)$$

$$a = f \left( \alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), \theta_{p1,2}(\zeta), m_n \right)$$

$$p_w = f \left( \alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), \theta_{p1,2}(\zeta), m_n, x_{1,2}(\zeta), j_{t1,2} \right)$$

$$Z = f \left( \alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), \theta_{p1,2}(\zeta), m_n \right)$$

Die lokal angepassten Verzahnungsdaten bestehen aus der Größe am RSS und einem entlang der Zahnbreite veränderlichen modifizierten Anteil, was in (4.24) für Konus- und Schrägungswinkel dargestellt ist.

$$\theta_{p1,2}(\zeta) = \theta_{p1,2} + \theta_{\text{mod}1,2}(\zeta) \quad (4.24)$$

$$\beta_{p1,2}(\zeta) = \beta_{p1,2} + \beta_{\text{mod}1,2}(\zeta)$$

$$x_{1,2}(\zeta) = \frac{(\zeta - 0,5) \cdot b_{1,2}}{m_n} \cdot \tan \theta_{p1,2} + x_{\text{mod}1,2}(\zeta)$$

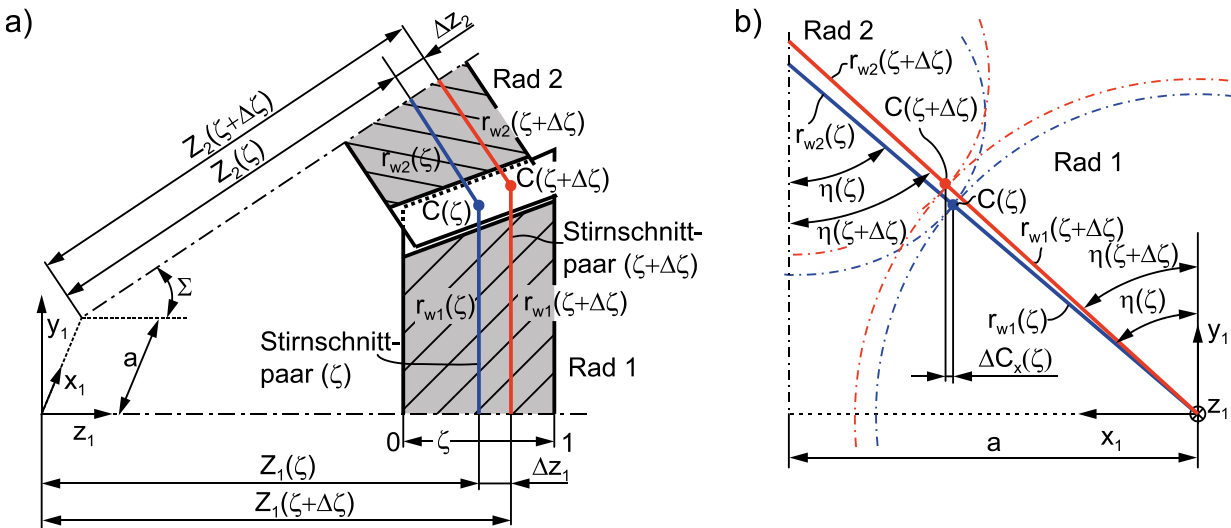
Bei der Profilverschiebung ergeben der bekannte lineare Verlauf und die modifizierte Größe  $x_{\text{mod}1,2}(\zeta)$  einen nicht linearen Verlauf für modifizierte Verzahnungen.

Die Aufteilung der modifizierten Anteile wird über die Größe  $k'$  zusammengefasst und kann beliebig auf Rad 1 und 2 erfolgen.

$$k' = \frac{k_2(\zeta)}{k_1(\zeta) + k_2(\zeta)} \quad \text{mit} \quad k(\zeta) = \beta_{\text{mod}}(\zeta), \theta_{\text{mod}}(\zeta), x_{\text{mod}}(\zeta) \quad (4.25)$$

Bei diesem Ansatz liegt ein Vorteil in der beliebigen Aufteilung der Modifikation, sodass entweder zwei modifizierte Räder oder ein modifiziertes und ein nicht modifiziertes Rad miteinander gepaart werden können.

Mit den ermittelten Hauptverzahnungsdaten für das Referenzstirnschnittpaar wird ausgehend von einem der beiden Räder die Optimierung durchgeführt. Bild 4.10a zeigt eine Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage mit zwei benachbarten Stirnschnittpaaren.



**Bild 4.10:** a) Stirnschnittweise Betrachtung der Beveloidradpaarung in beliebiger Achslage und b) räumliche Anordnung der Wälzpunkte

Im Folgenden entspricht das Stirnschnittpaar  $\zeta$  dem Referenzstirnschnittpaar ( $\zeta = 0,5$ ). Die Zahnbreitenposition wird über Rad 1 definiert, kann jedoch ohne Einschränkungen auch über Rad 2 erfolgen. Ausgehend vom Einbauabstand  $Z_1(\zeta)$  wird der nächste Stirnschnitt mit  $Z_1(\zeta+\Delta\zeta)$  nach (4.22) mit dem Abstand  $\Delta z_1$  bestimmt. Für den normierten Abstand  $\Delta\zeta$  zwischen zwei Stirnschnitten gilt (4.26).

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta z_1}{b_1} \quad (4.26)$$

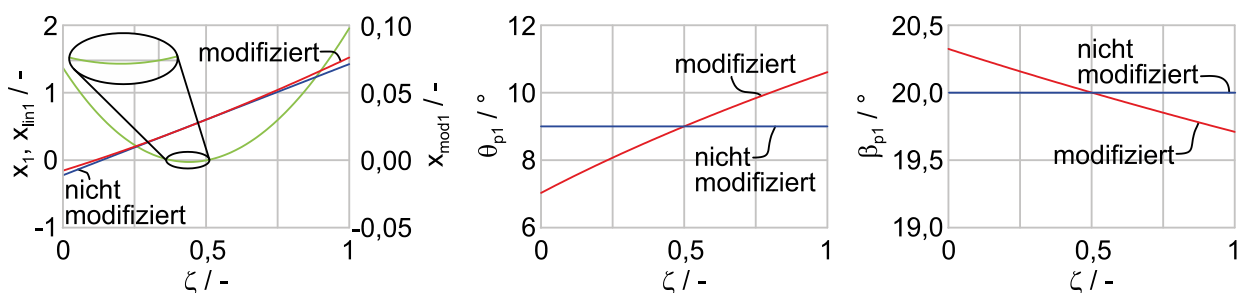
Für das neue Stirnschnittpaar wird das Gleichungssystem in (4.23) gelöst, wobei der Einbauabstand  $Z_2(\zeta+\Delta\zeta)$  des zugehörigen Stirnschnitts von Rad 2 nach (4.16) mit den lokal angepassten Verzahnungsdaten ermittelt wird. Von Rad 2 aus betrachtet entspricht der Abstand der benachbarten Stirnschnitte  $\Delta z_2$  jedoch nicht  $\Delta z_1$ . Für schneidende Achslagen sind die Abstände über den Zusammenhang mit den Wälzkegelwinkeln  $\delta_{1,2}$  beschreibbar.

$$\Delta z_2 = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot \Delta z_1 \quad (4.27)$$

Dies gilt aber nur für den Sonderfall der schneidenden Achslage, indem durch Vereinfachen der Einbauabstände in (4.16) ( $a = 0$  mm) und Anordnen der Wälzpunkte auf der Momentanachse die Abstände  $\Delta z_{1,2}$  ins Verhältnis gebracht werden können. Bei windschiefer Achslage ergibt sich der Abstand  $\Delta z_2$  aufgrund der weitaus komplexeren Eingriffsverhältnisse einzig durch Lösen des Gleichungssystems in (4.23).

Außerdem besitzt eine Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage keine Momentanachse, auf der sich die Wälzpunkte befinden. Stattdessen zeigt Bild 4.10b die räumliche Anordnung der blau und rot dargestellten Wälzpunkte  $C(\zeta)$  und  $C(\zeta+\Delta\zeta)$  und die zugehörigen Wälzkreisradien  $r_{w1,2}(\zeta)$  und  $r_{w1,2}(\zeta+\Delta\zeta)$ . Hierbei verläuft die  $z_1$ -Achse in Blatt-richtung, sodass sich die betrachtete  $x_1$ - $y_1$ -Ebene parallel zu den Stirnschnitten von Rad 1 befindet. In der Draufsicht sind die abgewinkelten Achsabstände  $(r_{w1} + r_{w2})$  von Rad 1 und 2 um die Winkel  $\eta(\zeta)$  und  $\eta(\zeta+\Delta\zeta)$  aus der  $y_1$ - $z_1$ -Ebene bzw. aus der um den Achsversatz  $a$  parallelverschobenen Ebene verdreht, sodass sie mit den Schnittpunkten der Wälzkreisradien die Position der Wälzpunkte  $C(\zeta)$  und  $C(\zeta+\Delta\zeta)$  im Raum definieren. Die Koordinatentransformation zur Bestimmung der Winkel  $\eta$  kann Anhang A.2 entnommen werden. Eine Untersuchung der Position der Wälzpunkte wird in Kapitel 4.4.4 durchgeführt.

Für die modifizierte Referenzverzahnung sind in Bild 4.11 die Verläufe der lokal angepassten Verzahnungsdaten am Teilkegel über der normierten Zahnbreite dargestellt. Die Verläufe ergeben sich durch stirnschnittweises Lösen des Gleichungssystems in (4.23). Die Referenzverzahnung besitzt eine Modifikationsaufteilung von  $k' = 0,3$ , was einer Verteilung von 30 % auf Rad 2 und 70 % auf Rad 1 entspricht. Im linken Diagramm steigt ausgehend vom Tiefpunkt nahe der Zahnbreitenmitte der grüne Verlauf der Profilverschiebungsmodifikation  $x_{mod1}$  zu den Zahnenden hin an. Im Gegensatz zur schneidenden Achslage liegt der Tiefpunkt nicht zwingend am RSS [TRAUT19, S. 103], wie der vergrößerte Ausschnitt zeigt. Die Verschiebung in Richtung Zehe kann mit den lokalen Konus-  $\theta_{p1}$  und Schrägungswinkel  $\beta_{p1}$  begründet werden, wie in Kapitel 4.4.4 ausführlich beschrieben wird.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 4.11:** Profilverschiebungsfaktor  $x_1$ , Konus-  $\theta_{p1}$  und Schrägungswinkel  $\beta_{p1}$  von Rad 1 über der normierten Zahnbreite  $\zeta$

Der Verlauf des lokal modifizierten Konuswinkels  $\theta_{p1}$  im mittleren Diagramm unterscheidet sich deutlich vom nicht modifizierten Konuswinkel am RSS. Wie im rechten

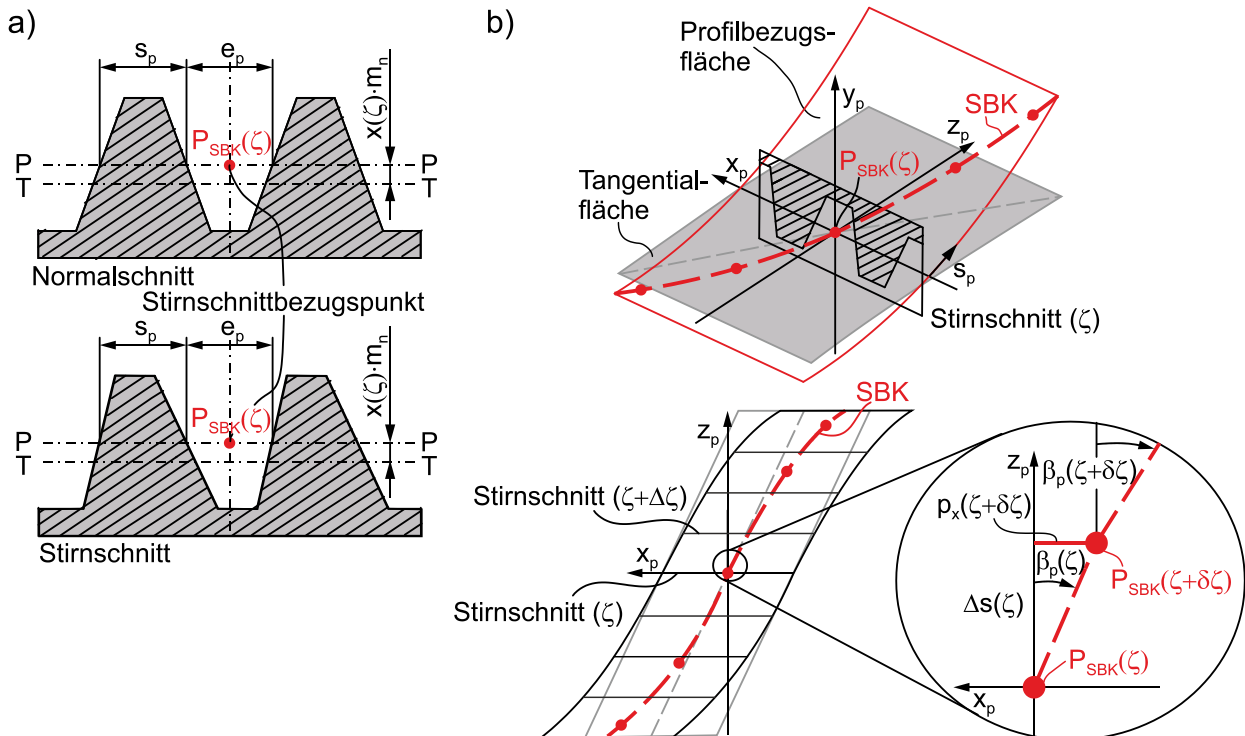
Diagramm zu erkennen ist, ändert sich der Schrägungswinkel  $\beta_{p1}$  ebenfalls entlang der Zahnbreite. Die Änderung ist im Vergleich zum Konuswinkel geringer, jedoch führt diese zu einem veränderlichen Teilkreisradius  $r_p(\zeta)$  entlang der Zahnbreite.

Für die Beurteilung des Übertragungsverhaltens ist eine Modellierung der Zahnflanken-geometrie mit lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite erforderlich. Hierzu ist die Stirnschnittbezugskurve in [TRAUT19] zu erweitern, wobei der lokale Schrägungswinkel eine Herausforderung bei der Modellierung darstellt.

#### 4.4.2 Modellierung und Analyse der Zahnflankengeometrie mit lokal angepassten Verzahnungsdaten

Die Herleitung der Stirnschnittbezugskurve (SBK) und die Modellierung der Zahnflanken-geometrie mittels dieser Kurve geht auf Traut [TRAUT19, S. 83 ff.] zurück und ist im Flankengenerator von SimKoS implementiert.

Grundlage stellt die Beschreibung des evolventischen Stirnschnitts eines Beveloidrads über eine zahnstangenartige Planverzahnung dar. Hierzu wird je nach Zahnbreitenposition das nach DIN 867 [DIN867 1986] definierte Bezugsprofil um den lokalen Schrägungswinkel gedreht und anschließend um den lokalen Konuswinkel verkippt, siehe Bild 4.12a.



**Bild 4.12:** a) Bezugsprofil im Normal- und Stirnschnitt

b) Definition und Verlauf der Stirnschnittbezugskurve (SBK)

Sowohl im Normal- als auch im Stirnschnitt entspricht auf Höhe der Profilbezugslinie P-P die Zahn­lücke  $e_p$  der Zahndicke  $s_p$ . In der Mitte der Zahn­lücke befindet sich der Stirnschnitt­bezugspunkt  $P_{SBK}$ , welcher die Position des Stirnschnitts definiert. Der Abstand zwischen der Profilbezugs­linie P-P und der Tangential­linie T-T wird über die Profilverschiebung festgelegt.

Wie in Bild 4.12b zu erkennen ist, bilden die Profilbezugs- und Tangential­linie ausgehend von der ebenen Betrachtung die Profilbezugs- und Tangential­fläche entlang der Zahn­breite. Diese Flächen sind für nicht modifizierte Beveloidräder Ebenen, die sich an der Breitenposition mit  $x(\zeta) = 0$  schneiden und den Konuswinkel  $\theta_p$  einschließen.

Für modifizierte Beveloidräder führt eine nicht lineare Profilverschiebung hingegen zu einer gekrümmten Profilbezugs­fläche. Zusätzlich entsteht beim vorgestellten Ansatz aufgrund veränderlicher Teil­kreisradien (lokale Schrägungswinkel) eine Tangential­fläche, die eine geringfügige Krümmung besitzt. Exemplarisch ist für die Zahn­breitenmitte der Stirnschnitt mit dem Stirnschnitt­bezugspunkt  $P_{SBK}(\zeta)$  dargestellt. Mit den stirnschnitt­abhängigen Verzahnungsdaten kann die räumliche SBK bestimmt und so die Stirnschnitte zur Modellierung der Zahn­flankengeometrie angeordnet werden.

Der lokale Schrägungswinkel  $\beta_p$  ist definitionsgemäß innerhalb der gekrümmten Profil­bezugs­fläche angegeben. Selbst für einen konstanten Schrägungswinkel führt die gekrümmte Fläche zu einem s-förmigen Verlauf, wie überhöht in Bild 4.12b dargestellt ist. Der modifizierte Anteil des Schrägungswinkels wird dem s-förmigen Verlauf überlagert und verstärkt in der Regel die nicht lineare Änderung der x-Komponente.

Die y- und z-Komponenten der SBK können direkt berechnet werden, da die Kurve innerhalb der Profilbezugs­fläche liegt.

$$\text{SBK: } \begin{bmatrix} p_x(\zeta) \\ p_y(\zeta) \\ p_z(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(\zeta) \cdot r_p(\zeta) \\ x(\zeta) \cdot m_n \\ ((\zeta - 0,5) \cdot b) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

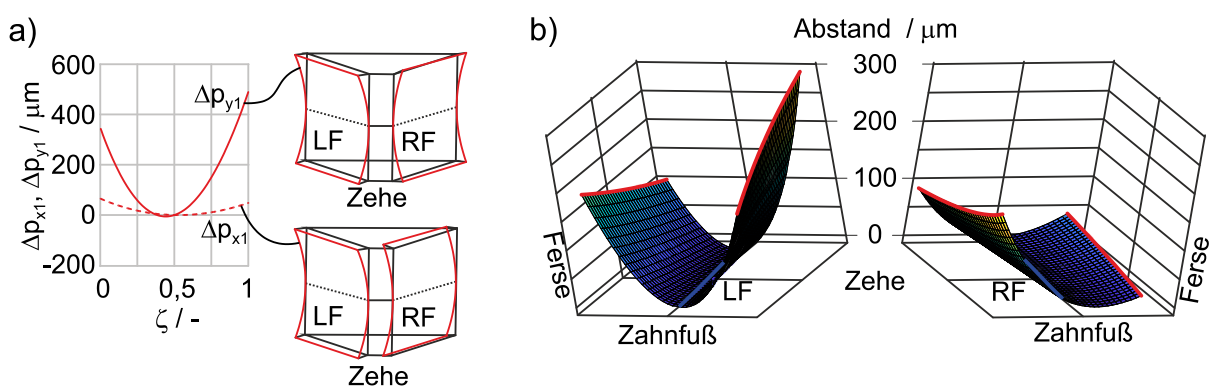
Die x-Komponente kann über den Verdrehwinkel der Stirnschnitte  $\xi$  auf Höhe des Teil­kreisradius  $r_p$  ausgedrückt und über das explizite Euler-Verfahren berechnet werden. Hierzu wird am Referenzstirnschnitt ein Startwert von null gewählt. Dies bietet sich an, da an diesem Stirnschnitt keine Modifikation erforderlich ist. Der Verlauf der SBK wird zwischen zwei beliebigen Stirnschnitten mit einer hinreichend großen Anzahl an Punkten ( $\delta\zeta \ll \Delta\zeta$ ) durch einen Polygonzug in (4.29) diskretisiert. Die Schrittweite der Diskretisierung  $\delta\zeta$  wird so gewählt, dass der Diskretisierungsfehler vernachlässigbar gering ist

(< 0,1 μm). Weitere Einschnittverfahren mit einer besseren Annäherung wurden betrachtet, führen jedoch zu keinen nennenswerten Verbesserungen.

$$p_x(\zeta) = \Delta s(\zeta) \cdot \tan(\beta_p(\zeta)) \text{ mit } \Delta s(\zeta) \approx \sqrt{(m_n \cdot (x(\zeta) - x(\zeta + \delta\zeta)))^2 + (\delta\zeta)^2} \quad (4.29)$$

Für eine direkte analytische Modellierung der Zahnflankengeometrie müssen die Verläufe der Profilverchiebung und des Schrägungswinkels als Funktionen vorliegen und stetig differenzierbar sein. Damit kann eine gewöhnliche Differenzialgleichung aufgestellt werden, deren Lösung die x-Komponente ergibt.

Die SBK ermöglicht die stirnschnittweise Modellierung von modifizierten Beveloidrädern mit dem Flankengenerator in SimKoS. Bild 4.13 zeigt den Unterschied zwischen einem nicht modifizierten und einem durch lokal angepasste Verzahnungsdaten modifizierten Rad. In Bild 4.13a sind die Modifikationsbeträge der SBK in radialer und tangentialer Richtung  $\Delta p_{x,y1}$  dargestellt. Der parabelförmige Verlauf von  $\Delta p_{y1}$  in radialer Richtung spiegelt exakt den modifizierten Anteil der Profilverchiebung wider ( $\Delta p_{y1} = x_{mod1} \cdot m_n$ ). In der Zahnbreitenmitte stimmen die modifizierte und nicht modifizierte Zahnflankengeometrie überein, da die Verläufe von  $\Delta p_{x,y1}$  die Abszisse schneiden und die modifizierten Anteile null sind. Wie beim Verlauf der Profilverchiebung ist der Tiefpunkt von  $\Delta p_{y1}$  jedoch leicht in Richtung Zehe verschoben, sodass sich bei  $\zeta \approx 0,38$  ein zweiter Nullpunkt befindet. An dieser Stelle sind zwar die Profilverchiebungen identisch, jedoch weichen die weiteren lokal angepassten Verzahnungsdaten wie Konus- und Schrägungswinkel von den nicht modifizierten Größen ab, wie in Bild 4.11 dargestellt ist.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125 \text{ μm}$

**Bild 4.13:** a) Modifikationsbeträge  $\Delta p_{x,y1}$  über der normierten Zahnbreite  $\zeta$

b) Zahnradvergleich zwischen modifiziertem und nicht modifiziertem Rad 1

Qualitativ verbreitert sich durch den Verlauf von  $\Delta p_{y1}$  die Zahndicke hin zu den Zahnenden. Beim gestrichelt dargestellten Verlauf von  $\Delta p_{x1}$  in tangentialer Richtung dominiert

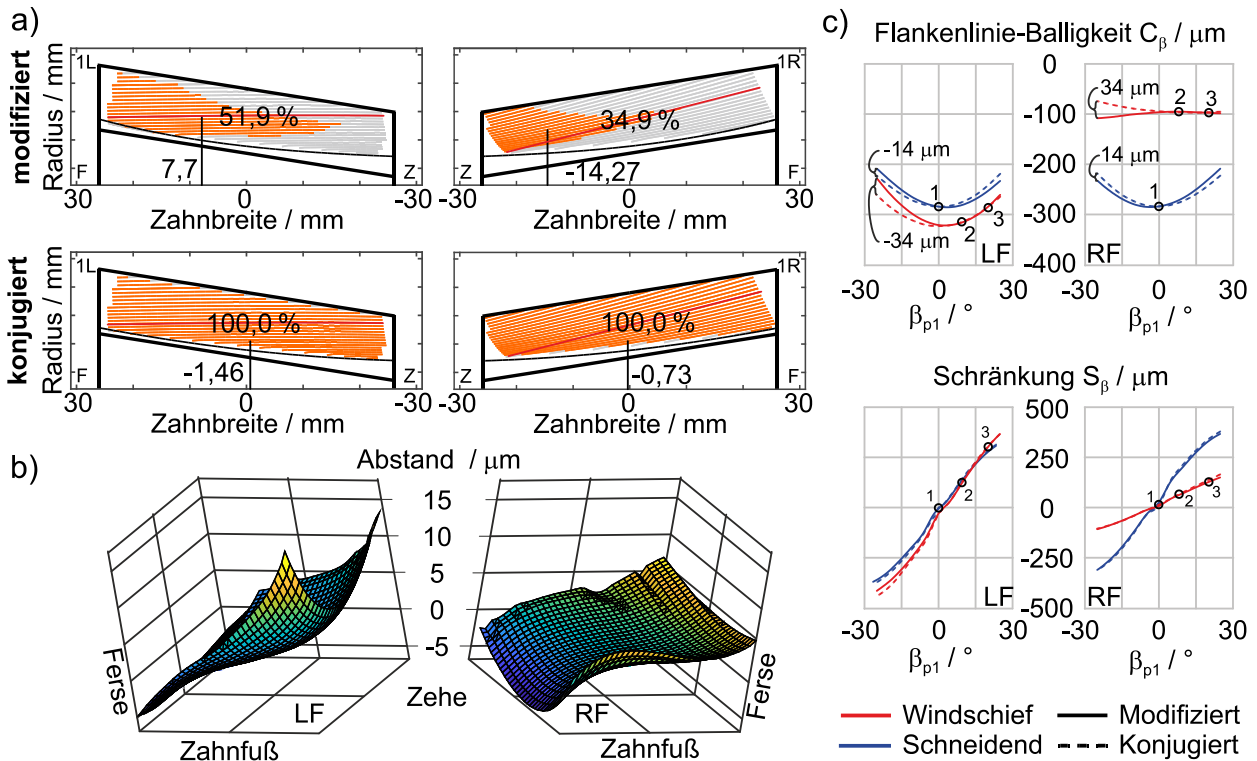
der Einfluss des lokalen Schrägungswinkels gegenüber dem durch die Profilverschiebung hervorgerufenen s-förmigen Verlauf. So führt der sich verringernde Schrägungswinkel zu einem parabelförmigen Verlauf von  $\Delta p_{x1}$ . Für die Modellierung der Zahnflanken-geometrie bedeutet dies eine gleichgerichtete Flankenlinien-Balligkeit auf der Links- und Rechtsflanke.

Der Zahnradvergleich zwischen modifiziertem und nicht modifiziertem Rad 1 in Bild 4.13b zeigt die Auswirkungen der lokal angepassten Verzahnungsdaten auf die Zahnflanken-geometrie. So ist auf der Linksflanke ein deutlich größerer Abstand zu erkennen, da sich die Modifikationsbeträge in x- und y-Richtung überlagern. Auf der Rechtsflanke hingegen führen die entgegengerichteten Balligkeiten zu einem geringen Abstand. Die ungleiche Verteilung auf Links- und Rechtsflanke lässt sich auf den asymmetrischen Ease-Off der nicht modifizierten Beveloidradpaarung in Bild 4.9b zurückführen.

Obwohl der Verlauf des modifizierten Anteils der Profilverschiebung in Bild 4.11 den größten Wert an der Ferse aufweist, zeigt der Zahnradvergleich den maximalen Flankenabstand für beide Flanken an der Zehe. Um diesen Effekt zu erklären, sind die Auswirkungen des lokalen Schrägungswinkels auf die Zahnflankengeometrie genauer zu betrachten. Neben der Beeinflussung des Verlaufs von  $\Delta p_{x1}$  und somit der Position des Stirnschnittbezugspunkts bewirkt die lokale Anpassung entlang der Zahnbreite eine sich stetig veränderte Verdrehung der Planverzahnung. So entsteht durch betragsmäßiges Vergrößern des Schrägungswinkels eine Zahndickenzunahme, die zu einem größeren Abstand an der Zehe führt. Umgekehrtes gilt an der Ferse, wodurch sich der Abstand zwischen der modifizierten und nicht modifizierten Zahnflankengeometrie verringert. Darüber hinaus hat auch der lokale Konuswinkel einen geringen Einfluss auf die Zahndicke. Der Unterschied zwischen modifiziertem und nicht modifiziertem Beveloidrad hängt somit sowohl von der Position des Stirnschnittbezugspunkts als auch von der Form des Stirnschnitts ab.

Allgemein kann die durch lokale Anpassungen modifizierte Zahnflankengeometrie in guter Näherung durch eine Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und eine Schränkung  $S_\beta$  sowie deren Glieder dritter Ordnung charakterisiert werden [TRAUT19, S. 75]. Für windschiefe Achslagen ist jedoch aufgrund des asymmetrischen Ease-Offs der Restfehler mit  $< 10 \mu\text{m}$  größer als bei schneidenden Achslagen mit einem Restfehler  $< 4 \mu\text{m}$ . Für eine genauere Beschreibung der Zahnflankengeometrie sind Polynome höheren Grads notwendig, wie Brimmers [BRIMMERS21, S. 92] mit freien Zahnflankenmodifikationen zeigt.

Nachfolgend wird zur Analyse der Zahnflankengeometrie der Wert der Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und der Schränkung  $S_\beta$  verwendet. Für die Referenzverzahnung sind in Bild 4.14a beispielhaft die Tragbilder bei vollständiger Modifikation von Rad 1 ( $k' = 0,0$ ) und bei punktweise konjugiertem Rad 1 nach [WAGNER93] dargestellt. In beiden Kontakt-simulationen wird ein nicht modifiziertes Rad 2 mit einem angepassten Rad 1 gepaart.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,0$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 4.14:** Auswertung einer modifizierten und konjugierten Beveloidradpaarung mit  
a) Tragbildern, b) Zahnradvergleich sowie c) Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und Schränkung  $S_\beta$  über dem Schrägungswinkel von Rad 1 ( $\beta_{p1} = -25 \dots 25^\circ$ )

Bei der durch lokale Anpassungen modifizierten Radpaarung findet der Eingriff auf der Linksflanke an der Ferse und auf der Rechtsflanke an der Zehe statt. Ein konjugierter Eingriff wie bei den unteren Tragbildern wird nicht erzielt. Hier wird ausgehend von Rad 2 die Zahnflankengeometrie von Rad 1 punktweise numerisch ermittelt und besitzt im Allgemeinen keine Evolvente. Der Zahnradvergleich zwischen der modifizierten und konjugierten Geometrie in Bild 4.14b zeigt einen Abstand von  $-5 \mu\text{m}$  bis  $15 \mu\text{m}$ . Bei der Linksflanke liegt am konjugierten Rad ein positiver Abstand an der Zehe und ein negativer an der Ferse gegenüber dem modifizierten Rad vor. Folglich ist beim konjugierten Rad an der Zehe mehr und an der Ferse weniger Material vorhanden. Dies spiegelt auch das



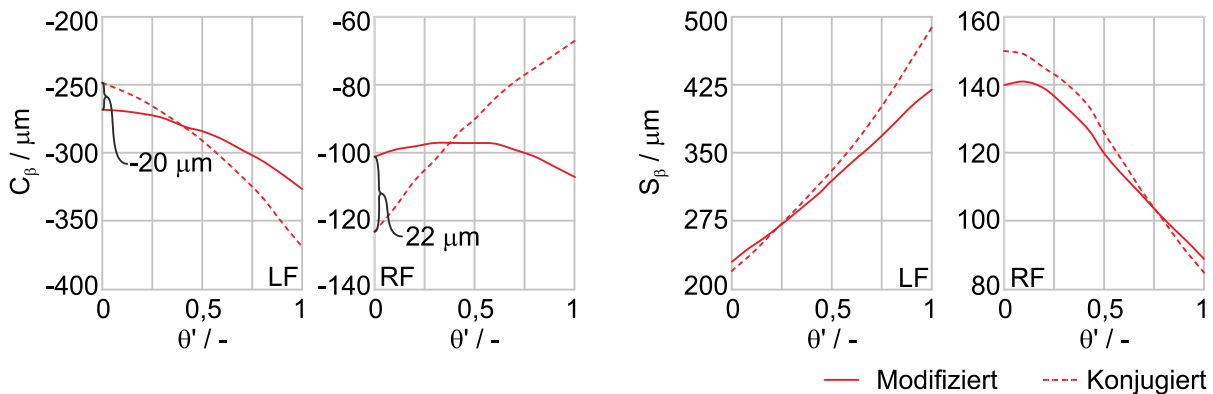
kreuzweise Tragen [DIN3971 1980, S. 21] wider. An der Rechtsflanke liegt der umgekehrte Zustand vor. Dies lässt vermuten, dass zwar die Zahndicken am modifizierten Rad korrekt bestimmt werden, jedoch die Verdrehung der Stirnschnitte fehlerhaft ist.

In Bild 4.14c wird zur Analyse von modifizierten und konjugierten Beveloidrädern der Verlauf der Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und der Schränkung  $S_\beta$  über dem Schrägungswinkel von Rad 1  $\beta_{p1}$  betrachtet. Die Ergebnisse der schneidenden Achslage stimmen mit den Ergebnissen in [TRAUT19, S. 106 ff.] nahezu überein. So gilt für  $C_\beta$  und  $S_\beta$ , dass der gestrichelte Verlauf der konjugierten Zahnform den durchgezogenen Verlauf des modifizierten Rads bei  $\beta_{p1} = 0^\circ$  (Markierung 1) schneidet. Für die Flankenlinien-Balligkeit findet bei  $\beta_{p1} = -25^\circ$  eine zu geringe Modifikation von  $-14 \mu\text{m}$  auf der Linksflanke bei gleichzeitig zu hoher Modifikation von  $14 \mu\text{m}$  auf der Rechtsflanke statt. Für positive Schrägungswinkel drehen sich die Verhältnisse um. Auch die Verläufe der Schränkung weichen für betragsmäßig größere Schrägungswinkel voneinander ab.

Demgegenüber ist für eine windschiefe Achslage mit  $a = 100 \text{ mm}$  ersichtlich, dass die Schnittpunkte der Verläufe von  $C_\beta$  und  $S_\beta$  hin zu positiven Schrägungswinkeln verschoben sind. Die gute Übereinstimmung für positive  $\beta_{p1}$  kann mit dem ausgelegten Gegenrad (Rad 2) begründet werden, welches bei einem Achsversatz von  $a = 100 \text{ mm}$  für  $\beta_{p1} = 8,34^\circ$  (Markierung 2) ein geradverzahntes Beveloidrad darstellt.

Wie bei schneidender Achslage entsteht auch hier für  $\beta_{p1} = -25^\circ$  auf der Linksflanke eine zu geringe Modifikation von  $-34 \mu\text{m}$ , wohingegen auf der Rechtsflanke eine zu hohe Modifikation von  $34 \mu\text{m}$  vorliegt. Eine ähnliche Tendenz ist bei der Schränkung auf der Linksflanke zu erkennen, da der Verlauf der modifizierten Zahnform bei negativen  $\beta_{p1}$  vom konjugierten Verlauf abweicht. Für die Referenzverzahnung (Markierung 3) liegt ein geringer Abstand zwischen den abgeleiteten  $C_\beta$  und  $S_\beta$  der konjugierten und modifizierten Zahnform vor, was der Zahnradvergleich in Bild 4.14b belegt. Die Darstellung der Modifikationsbeträge über dem Schrägungswinkel zeigt, dass sich die modifizierten und konjugierten Verläufe nur in einem Punkt schneiden und ausgehend davon eine stetige Vergrößerung der Abstände auf Links- und Rechtsflanke stattfindet. Dies resultiert teilweise in einer erheblichen Abweichung zwischen der zu erzielenden konjugierten und der modifizierten Zahnflankengeometrie.

Zur weiteren Verdeutlichung ist in Bild 4.15 für die konjugierte und modifizierte Zahnflankengeometrie der Verlauf der Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und Schränkung  $S_\beta$  über der Konuswinkelaufteilung  $\theta'$  dargestellt.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta' = 0 \dots 1$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \mathbf{0}$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 4.15:** Vergleich der Flankenlinien-Balligkeit  $C_\beta$  und Schränkung  $S_\beta$  über der Konuswinkelaufteilung  $\theta'$  für konjugierte und modifizierte Zahnflankengeometrien

Im Gegensatz zur schneidenden Achslage liegt der Schnittpunkt der Verläufe nicht bei einer Konuswinkelaufteilung von  $\theta' = 0,5$  [TRAUT19, S. 109]. Weitere Variationen von Schrägungswinkel, Achswinkel und Achsversatz zeigen, dass der Schnittpunkt von der Einbaulage der Beveloidradpaarung abhängt. Dennoch kann für die Flankenlinien-Balligkeit die Erkenntnis abgeleitet werden, dass sich die zu geringe und die zu hohe Modifikation auf Links- und Rechtsflanke nahezu ausgleicht. So tritt bei einem komplett modifizierten Beveloidrad ( $\theta' = 0$ ) eine zu geringe Modifikation auf der Linksflanke von  $-20 \mu\text{m}$  bei gleichzeitig zu hoher Modifikation auf der Rechtsflanke von  $22 \mu\text{m}$  auf. Für ein komplett modifiziertes Zylinderrad ( $\theta' = 1$ ) kehrt sich zwar die Verteilung der Modifikation um, die Werte stimmen betragsmäßig dennoch überein.

Beim Vergleich zwischen der modifizierten und konjugierten Zahnflankengeometrie fällt die Schränkung ebenfalls entweder zu hoch oder zu gering auf den Zahnflanken aus. Eine Übereinstimmung der Modifikationsbeträge zwischen der Links- und Rechtsflanke wie bei der Flankenlinien-Balligkeit kann für die Verläufe der Schränkung nicht festgestellt werden. Die teils großen Abweichungen besonders für  $\theta' = 0$  und  $\theta' = 1$  können mit den nicht dargestellten Verläufen der Glieder dritter Ordnung begründet werden, die sich wesentlich unterscheiden, jedoch für eine gute Annäherung der Zahnflanken ebenfalls zu berücksichtigen sind.

Auch Traut [TRAUT19] kommt zu der Erkenntnis, dass die Flankenlinien-Balligkeit und die Schränkung der punktweise konjugierten und der analytisch modifizierten Beveloidräder nicht übereinstimmen. Die dargestellten Zusammenhänge insbesondere in Bezug auf die Flankenlinien-Balligkeit deuten darauf hin, dass die Modifikation der einzelnen Stirnschnitte zwar korrekt ist, die Verdrehung jedoch zu einer zu geringen bzw. zu hohen

Modifikation auf Links- und Rechtsflanke führt. Daher wird der modifizierten Verzahnung eine tangentielle Modifikation überlagert, deren Herleitung im Folgenden erläutert wird.

#### 4.4.3 Tangentialmodifikation für beliebige Achslagen

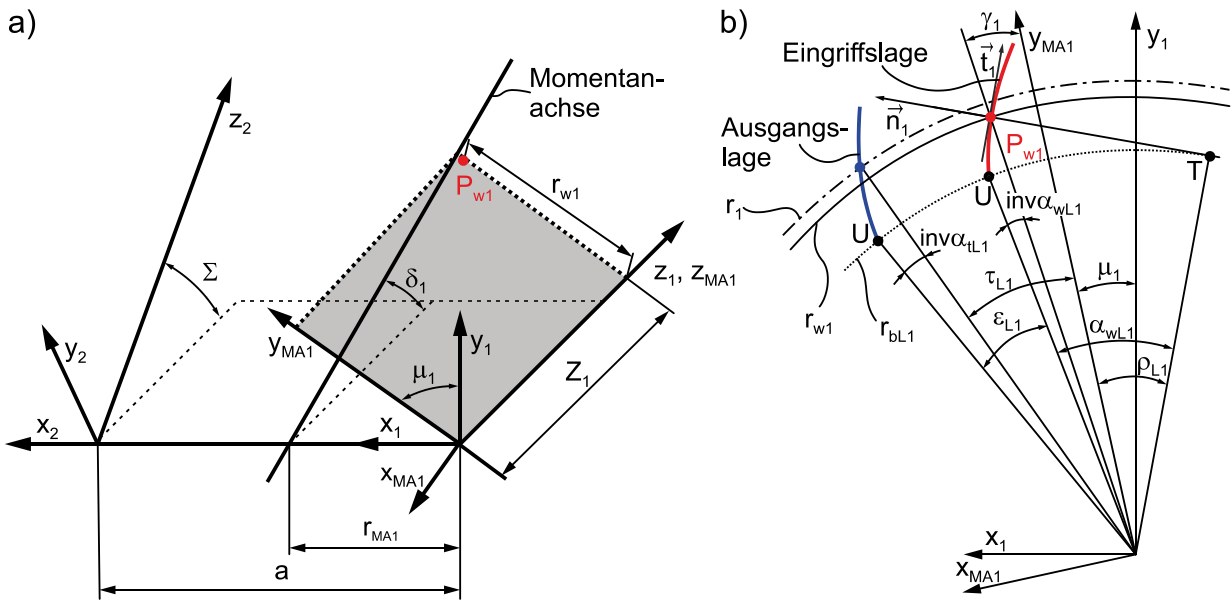
Die Untersuchungen aus dem vorherigen Kapitel und die Erkenntnisse in [TRAUT19, S. 109] verdeutlichen, dass eine zusätzliche tangentielle Modifikation der Stirnschnitte notwendig ist, um die durch lokale Anpassung modifizierte Zahnflankengeometrie an die konjugierte anzugleichen. Bei der hergeleiteten Tangentialmodifikation soll die Position der Stirnschnitte angepasst, jedoch die evolventische Zahnform der modifizierten Zahnflankengeometrie beibehalten werden. Für eine Vorgehensweise zur Ermittlung der Tangentialmodifikation ist eine genaue Betrachtung der Eingriffsverhältnisse einer Beveloidradpaarung notwendig.

Das Vorgehen zur Positionierung der Stirnschnitte im Raum ist von der exakten Bestimmung der Gegenflankenfläche in [WAGNER93, S. 72 ff.] abgeleitet, welches auf dem Relativgeschwindigkeitsverfahren von Fort [FORT77] beruht. Die Tangentialmodifikation erfolgt wie bei der Anpassung der Verzahnungsdaten stirnschnittweise. Die nachfolgend hergeleitete Prozedur wird für jedes Stirnschnittpaar durchgeführt. Für eine bessere Übersichtlichkeit wird die Kennzeichnung der betrachteten Zahnbreitenposition  $\zeta$  weggelassen.

Die Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten im Referenzstirnschnittpaar und daraus abgeleitet die lokal angepassten Verzahnungsdaten beruhen auf dem räumlichen Verzahnungsgesetz, das ein Abwälzen ohne Abheben und Durchdringen der Zahnflanken voraussetzt [ZIMMER16, S. 6]. Die Bedingung für eine konjugierte Verzahnung ist, dass sie das Verzahnungsgesetz in (4.30) erfüllt.

$$\left( \vec{v}_{w1}^{MA1} - \vec{v}_{w2}^{MA1} \right) \cdot \vec{n}_1^{MA1} = 0 \quad (4.30)$$

Die Geschwindigkeitsvektoren am Wälzpunkt  $\vec{v}_{w1,2}^{MA1}$  und der Normalenvektor  $\vec{n}_1^{MA1}$  werden im Koordinatensystem MA1 ausgedrückt. MA1 wird eingeführt, um eine Vorzeichenumkehr der trigonometrischen Funktionen zu vermeiden [WAGNER93, S. 73]. Bild 4.16a visualisiert die Verdrehung von Koordinatensystem 1 (Rad 1) in MA1 um den Winkel  $\mu_1$ . Neben den Koordinatensystemen 1, 2 und MA1 ist die zum Hyperboloid gehörende Momentanachse eingezeichnet, die über den Abstand  $r_{MA1}$  und den Wälzkegelwinkel  $\delta_1$  beschrieben werden kann. Mit dem Einbauabstand  $Z_1$  und dem Wälzkreisradius  $r_{w1}$  ist ein Wälzpunkt  $P_{w1}$  dargestellt, der sich nicht auf der Momentanachse befindet.



**Bild 4.16:** a) Definition der Koordinatensysteme für die Tangentialmodifikation

b) Drehwinkel zur Verdrehung der Zahnflanke in Anlehnung an [WAGNER93]

Bild 4.16b zeigt für die Linksflanke von Rad 1 den Wälzpunkt  $P_{w1}$  mit dem Grund-, Teil- und Wälzkreisradius sowie die Winkelbeziehungen zur Beschreibung einer Evolvente. Die Ausgangslage (blau) beschreibt die Zahnflankengeometrie und somit die räumliche Anordnung des betrachteten Stirnschnitts durch die SBK. Von der Ausgangslage wird der Stirnschnitt von Rad 1 um den Winkel  $\varepsilon_{L,R1}$  verdreht, bis der Normalenvektor senkrecht durch den Wälzpunkt verläuft. In der rot dargestellten Lage (Eingriffslage) wird das Verzahnungsgesetz erfüllt. Der Abstand zur Momentanachse wird dabei über den Winkel  $\gamma_1$  quantifiziert. Dieser ändert sich bei windschiefer Achslage entlang der Zahnbreite, da der tatsächliche kinematische Grundkörper (Hyperboloid) durch einen Kegel angenähert wird und die Wälzpunkte nicht exakt auf einer Geraden angeordnet sind [LITVIN04, S. 679]. Für den Sonderfall der schneidenden Achslage ist der Winkel  $\gamma_1$  null und die Wälzpunkte befinden sich auf der Momentanachse. Während sich Rad 1 um den Winkel  $\varepsilon_{L,R1}$  verdreht, wird die Eingriffslage vom im Eingriff befindlichen Stirnschnitt von Rad 2 durch  $\nu_{L,R2}$  definiert, der aus  $\varepsilon_{L,R1}$  unter Berücksichtigung der Übersetzung folgt.

$$\varepsilon_{L,R1} = \tau_{L,R1} \pm \text{inv } \alpha_{tL,R1} - \gamma_1 \mp \text{inv } \alpha_{wL,R1} \quad \text{und} \quad \nu_{L,R2} = -\frac{z_1}{z_2} \cdot \varepsilon_{L,R1} \quad (4.31)$$

Die Verdrehung  $\tau_{L,R1}$  lässt sich aus dem Verlauf der SBK und den Zahndickenwinkeln für Links- und Rechtsflanke  $\psi_{L,R1}$  berechnen.

$$\tau_{L,R1} = \xi_1 \pm \psi_{L,R1} \quad \text{mit} \quad \psi_{L,R1} = \frac{\pi/2 + 2 \cdot x_1 \cdot (\tan \alpha_p \cdot \cos \theta_{p1} \pm \sin \beta_{p1} \cdot \sin \theta_{p1})}{z_1} \quad (4.32)$$

Der Ortsvektor zum Wälzpunkt von Rad 2  $\vec{P}_{w2}^2$  im Koordinatensystem 2 wird eindeutig über den Radius  $r_{w2}$ , Einbauabstand  $Z_2$  und Drehwinkel  $\Phi_2$  um die Radachse definiert.

$$\vec{P}_{w2}^2 = \begin{bmatrix} -r_{w2} \cdot \sin \Phi_2 \\ r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Bild 4.17a veranschaulicht die räumliche Anordnung der Zahnflanken in der Ausgangs- und Eingriffslage. Letztere wird erreicht, indem der Drehwinkel  $\Phi_2$  um  $v_{L,R2}$  angepasst wird, sodass das Verzahnungsgesetz in (4.30) erfüllt ist. In der Eingriffslage gilt  $\vec{P}_{w1}^{MA1} = \vec{P}_{w2}^{MA1}$ , sodass auch der Ortsvektor  $\vec{P}_{w1}^{MA1}$  in Abhängigkeit der Koordinaten von Rad 2 ausgehend vom Koordinatensystem MA1 definiert werden kann.

$$\vec{P}_{w1}^{MA1} = \begin{bmatrix} (a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2) \cdot \cos \mu_1 + (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma) \cdot \sin \mu_1 \\ (a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2) \cdot \sin \mu_1 + (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma) \cdot \cos \mu_1 \\ - r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \sin \Sigma + Z_2 \cdot \cos \Sigma \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Im Koordinatensystem MA1 ergibt das Kreuzprodukt aus den Ortsvektoren  $\vec{P}_{w1,2}^{MA1}$  und den Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega}_{w1,2}^{MA1}$  die im Verzahnungsgesetz verwendeten Geschwindigkeiten am Wälzpunkt für Rad 1 und 2.

$$\vec{v}_{w1}^{MA1} = \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} -(a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2) \cdot \sin \mu_1 + (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma) \cdot \cos \mu_1 \\ (a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2) \cdot \cos \mu_1 + (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma) \cdot \sin \mu_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\vec{v}_{w2}^{MA1} = \omega_2 \cdot \begin{bmatrix} r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \mu_1 - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2 \cdot \cos \Sigma \cdot \sin \mu_1 \\ r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \sin \mu_1 + r_{w2} \cdot \sin \Phi_2 \cdot \cos \Sigma \cdot \cos \mu_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Die Geschwindigkeiten können damit in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\Phi_2$  beschrieben werden.

Der Normalenvektor  $\vec{n}_1^{MA1}$  berechnet sich mit dem Kreuzprodukt aus Tangentialvektor  $\vec{t}_1^{MA1}$  in Bild 4.16b und Differenzvektor  $\vec{d}_1^{MA1}$ , welcher in Zahnbreitenrichtung die Verschraubung von Rad 1 charakterisiert. Der Tangentialvektor wird mit den lokal angepassten Verzahnungsdaten der modifizierten Zahnflankengeometrie und dem Winkel  $\gamma_1$  bestimmt.

$$\vec{t}_1^{MA1} = \begin{bmatrix} -\sin \rho_{L,R1} \\ \cos \rho_{L,R1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho_{L,R1} = \gamma_1 \pm \sqrt{\left(\frac{r_{w1}}{r_{bL,R1}}\right)^2 - 1} \quad (4.37)$$

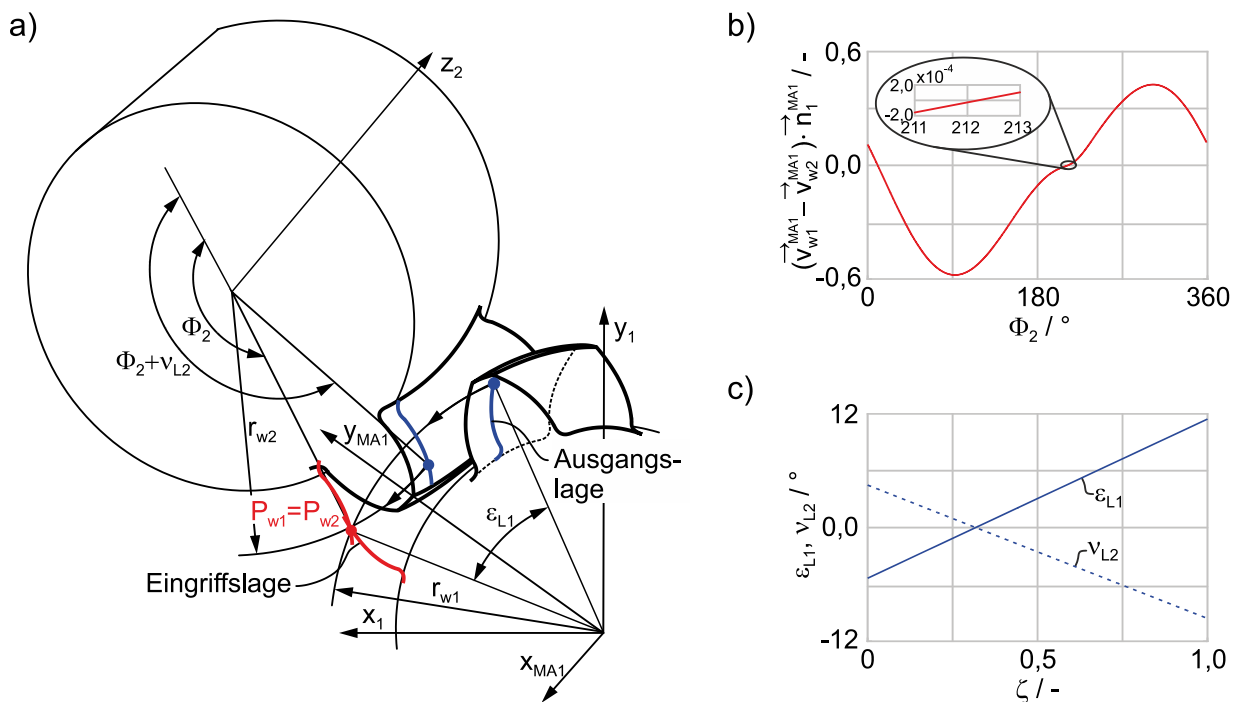
Der Winkel  $\gamma_1$  lässt sich nach einigen Umformungen mit (4.38) ausdrücken.

$$\sin \gamma_1 = \frac{(a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2) \cdot \cos \mu_1 - (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma) \cdot \sin \mu_1}{\sqrt{(a - r_{w2} \cdot \sin \Phi_2)^2 + (r_{w2} \cdot \cos \Phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_2 \cdot \sin \Sigma)^2}} \quad (4.38)$$

Der Differenzvektor  $\vec{d}_1^{MA1}$  beschreibt die Verschraubung, welche aus den lokal angepassten Verzahnungsdaten der Zahnbreitenpositionen vor  $(\zeta - \delta\zeta)$  und hinter  $(\zeta + \delta\zeta)$  dem untersuchten Stirnschnitt abgeleitet wird.

$$\vec{d}_1^{MA1} = \frac{1}{|\vec{d}_1^{MA1}|} \cdot \begin{bmatrix} r_{p1} \cdot \left[ \sin(\gamma_1 + \tau_{L,R1}(\zeta + \delta\zeta)) - \sin(\gamma_1 + \tau_{L,R1}(\zeta - \delta\zeta)) \right] \\ r_{p1} \cdot \left[ \cos(\gamma_1 + \tau_{L,R1}(\zeta + \delta\zeta)) - \cos(\gamma_1 + \tau_{L,R1}(\zeta - \delta\zeta)) \right] \\ 2 \cdot \delta\zeta \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Der Verlauf in Bild 4.17b zeigt für das Stirnschnittpaar an der Zehe die linke Seite des Verzahnungsgesetzes aus (4.30) in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\Phi_2$ . Im Bereich der zweiten Nullstelle liegt eine geringe Steigung vor, sodass aufgrund der Diskretisierung der SBK eine Ungenauigkeit bei der Lösung auftritt. Diese Ungenauigkeit führt bereits bei Abweichungen in der Größenordnung von  $1 \cdot 10^{-6}$  bei der Lösung des Verzahnungsgesetzes zu einer Änderung von  $\Phi_2$ , die sich auf die Position der Zahnflanke auswirkt.



**Bild 4.17:** a) Rückdrehung der Stirnschnitte von der Eingriffs- in die Ausgangslage  
 b) Verlauf der linken Seite des Verzahnungsgesetzes über Drehwinkel  $\Phi_2$   
 c) Rückdrehung von Rad 1 und 2 über der normierten Zahnbreite  $\zeta$

Zur korrekten Positionierung der Zahnflanke werden neben dem Verzahnungsgesetz die Bedingungen in (4.40) verwendet. Diese berücksichtigen, dass der resultierende Vektor  $\vec{P}_{w1}^{MA1}$  den zuvor bestimmten Wälzkreisradius  $r_{w1}$  und Einbauabstand  $Z_1$  besitzt.

$$P_{w1z}^{MA1} - Z_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{(P_{w1x}^{MA1})^2 + (P_{w1y}^{MA1})^2} - r_{w1} = 0 \quad (4.40)$$

Außerdem zeigt der Verlauf in Bild 4.17b, dass das Verzahnungsgesetz theoretisch zwei mögliche Lösungen hat, wobei eine Lösung als imaginäre Gegenflanke zu betrachten ist und in der Praxis keine Bedeutung hat [WAGNER93, S. 90]. Durch die Wahl eines geeigneten Anfangswerts ( $\Phi_2 = 180^\circ$ ) wird die korrekte Nullstelle ermittelt.

Bild 4.17c stellt für die Referenzverzahnung die Drehwinkel von der Ausgangs- in die Eingriffslage über der normierten Zahnbreite dar. Beide Kurven haben einen entgegengerichteten nahezu linearen Verlauf, wobei die Drehwinkel nach (4.31) durch die Übersetzung in Beziehung stehen. Mit der Rückdrehung von Rad 2  $\nu_{L,R2}$  von der Eingriffs- in die Ausgangslage kann die erforderliche Tangentialmodifikation  $\Delta\xi$  abgeleitet werden.

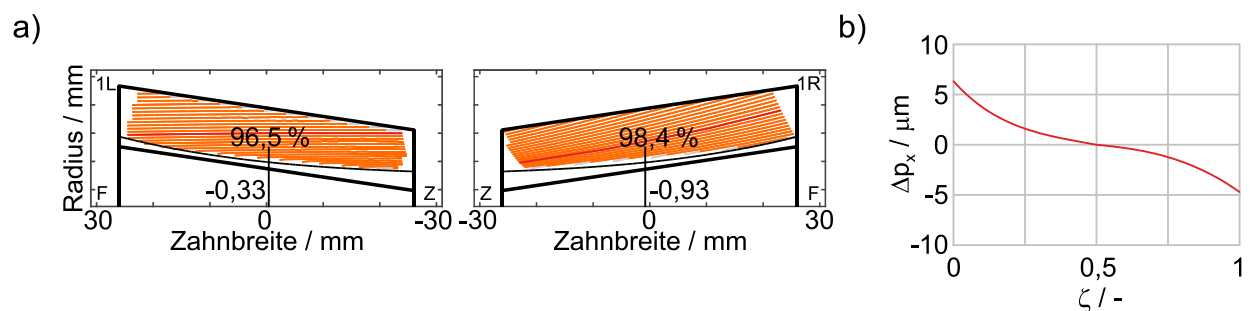
$$\Delta\xi = \xi_2 + \nu_{L,R2} + \Phi_2 \mp \text{inv}\alpha_{tL,R2} \mp \psi_{L,R2} \pm \text{inv}\alpha_{wL,R2} - \lambda_{M2} \quad (4.41)$$

Die über alle Stirnschnitte konstante Verdrehung  $\lambda_{M2}$  positioniert den Stirnschnitt in der Zahnbreitenmitte so, dass die x-Komponente der SBK gleich null ist. Der Unterschied für Links- und Rechtsflanke ist dabei vernachlässigbar gering ( $< 0,1 \mu\text{m}$ ).

Der Verlauf der SBK berechnet sich mit der Tangentialmodifikation  $\Delta\xi$  nach (4.42). Die Modifikation wird durch den Aufteilungsfaktor  $k'$  aus (4.25) auf Rad 1 und 2 aufgebracht.

$$\text{SBK: } \begin{bmatrix} p_x(\zeta) \\ p_y(\zeta) \\ p_z(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\xi(\zeta) + n \cdot \Delta\xi(\zeta)) \cdot r_p(\zeta) \\ x(\zeta) \cdot m_n \\ (\zeta - 0,5) \cdot b \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} n = 1 - k' & \text{für Rad 1} \\ n = k' & \text{für Rad 2} \end{array} \quad (4.42)$$

In Bild 4.18a sind die Tragbilder der modifizierten Beveloidradpaarung nach der Tangentialmodifikation dargestellt. Durch die zusätzliche Verdrehung der Stirnschnitte entlang der Zahnbreite können in beiden Drehrichtungen voll ausgebildete Tragbilder erzielt werden. Der Drehfehler von Links- und Rechtsflanke erhöht sich dabei nur geringfügig auf  $\delta_L = 0,6 \mu\text{m}$  und  $\delta_R = 0,8 \mu\text{m}$ . Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Eingriff als konjugiert modifiziert bezeichnet, da der konjugierte Eingriff angenähert wird.

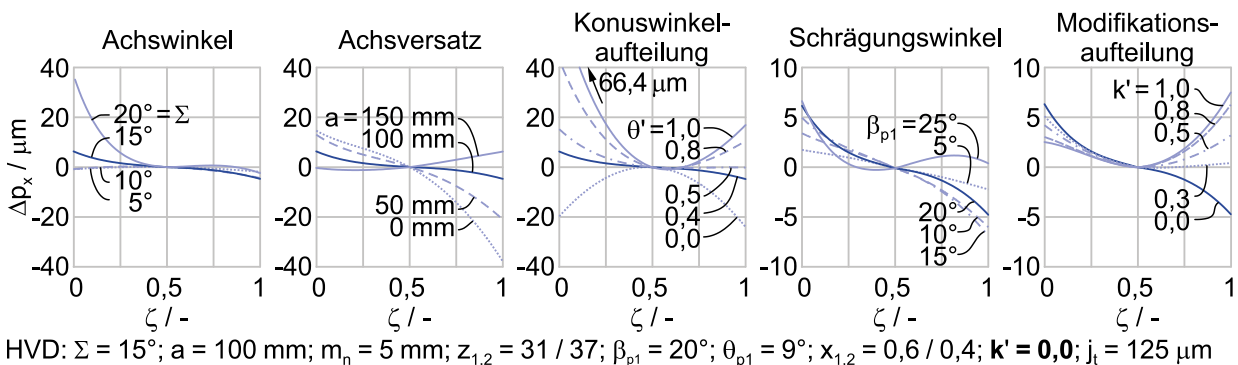


HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,0$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 4.18:** a) Tragbilder der modifizierten Beveloidradpaarung mit b) Änderung der SBK  $\Delta p_x$  aufgrund Tangentialmodifikation über der normierten Zahnbreite  $\zeta$

Bild 4.18b zeigt die berechnete Änderung der x-Komponente der SBK  $\Delta p_x$  entlang der Zahnbreite. Diese ergibt sich aus der zusätzlichen Verdrehung durch die Tangentialmodifikation bezogen auf den lokalen Teilkreisradius. Der positive Wert in Richtung Zehe ( $\zeta < 0,5$ ) führt dazu, dass die Stirnschnitte hin zur Linksflanke verdreht werden. Diese Verdrehung kann bei der Modellierung der Zahnflankengeometrie als ein vergrößerter Materialabtrag an der Rechtsflanke bei gleichzeitig verringertem Materialabtrag an der Linksflanke interpretiert werden. In Richtung Ferse werden die Stirnschnitte entsprechend zur Rechtsflanke hin verdreht.

In Bild 4.19 sind die für den konjugiert modifizierten Eingriff erforderlichen Änderungen der x-Komponente der SBK  $\Delta p_x$  in Abhängigkeit der Einbaulage und Hauptverzahnungsdaten dargestellt. Die Untersuchung der Einbaulage zeigt, dass sich mit zunehmendem Achswinkel die Tangentialmodifikation im Bereich der Zehe vergrößert. Auch der Achsversatz beeinflusst den Verlauf deutlich, wobei mit zunehmendem Achsversatz der Wert abnimmt. Dies kann damit begründet werden, dass bei unverändertem Achswinkel der zunehmende Achsversatz sich der Summe der Grundkreisradien annähert. Somit nimmt der FPD-Winkel  $\kappa_R$  der Rechtsflanke ab, während sich  $\kappa_L$  auf der Linksflanke nur geringfügig ändert, wie in Bild 4.6 dargestellt ist. Die kleineren Modifikationsbeträge führen schließlich zu einer geringeren Änderung von  $\Delta p_x$ .



**Bild 4.19:** Verlauf der Änderungen der SBK  $\Delta p_x$  über der normierten Zahnbreite  $\zeta$  in Abhängigkeit der Einbaulage und der Hauptverzahnungsdaten

Wird die Einbaulage bei gleichzeitiger Variation der Verzahnungsdaten beibehalten, kann über die Aufteilung der Konuswinkel die Tangentialmodifikation deutlich beeinflusst werden. Bei einer gleichmäßigen Aufteilung fällt  $\Delta p_x$  am geringsten aus und steigt zu den Extremwerten hin an, sodass die Tangentialmodifikation bei einer Radpaarung aus Zylinder- und Beveloidrad am größten ausfällt. Der Schrägungswinkel und die Modifikations-

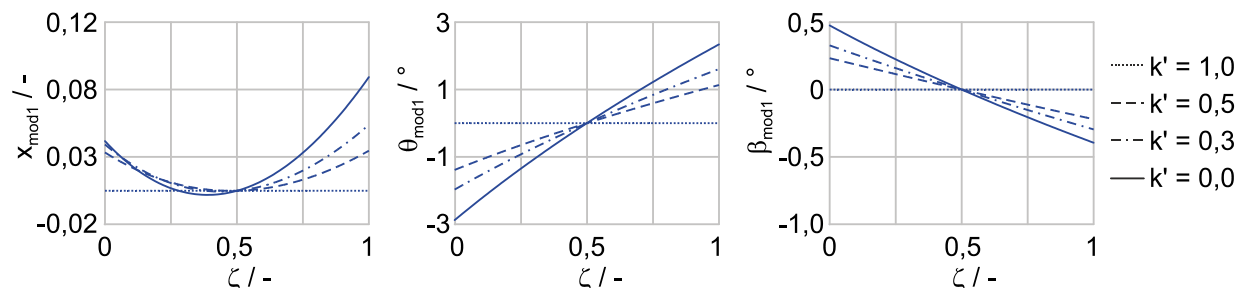


aufteilung führen im untersuchten Bereich im Vergleich zu den bisher vorgestellten Parametern zu geringen Änderungen von  $\Delta p_x < 7 \mu\text{m}$ .

Das resultierende Übertragungsverhalten der modifizierten Zahnflankengeometrien wird in Kapitel 5.2.2 in einer ausführlichen Parameterstudie untersucht. Die vorgestellte Tangentialmodifikation verdreht die Stirnschnitte ohne Änderung der Verzahnungsdaten, sodass ein konjugiert modifizierter Eingriff bei Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage ohne iteratives Vorgehen angenähert wird.

#### 4.4.4 Verlauf der lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite

Eine Besonderheit der vorgestellten Berechnungsmethode ist, dass die zur Kompensation des Ease-Offs erforderliche Modifikation beliebig zwischen den Zahnrädern aufgeteilt werden kann. Je nach vorgegebener Aufteilung ändern sich die lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite. Für die Hauptverzahnungsdaten der Referenzverzahnung sind für verschiedene Aufteilungen der Modifikation  $k'$  die Verläufe der modifizierten Anteile von Profilverschiebungsfaktor  $x_{\text{mod}1}$ , Konus-  $\theta_{\text{mod}1}$  und Schrägungswinkel  $\beta_{\text{mod}1}$  von Rad 1 in Bild 4.20 dargestellt.



**Bild 4.20:** Lokal angepasste Verzahnungsdaten ( $x_{\text{mod}}$ ,  $\theta_{\text{mod}}$ ,  $\beta_{\text{mod}}$ ) von Rad 1 über der normierten Zahnbreite  $\zeta$  bei unterschiedlicher Aufteilung der Modifikation  $k'$

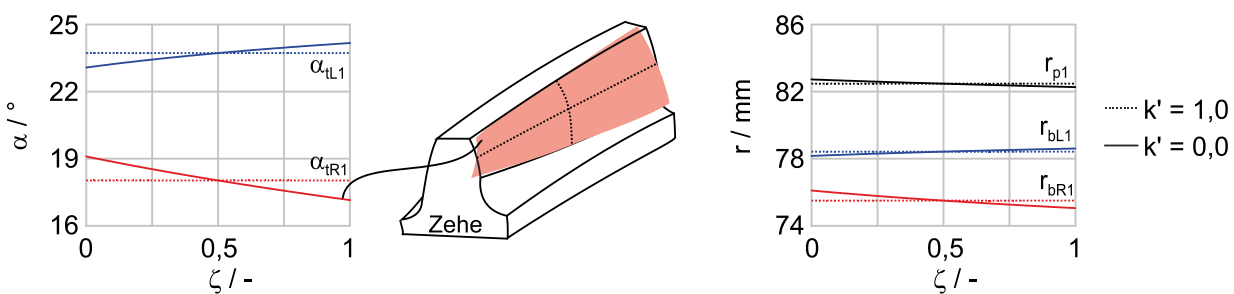
Wird die komplette Modifikation auf Rad 2 aufgebracht ( $k' = 1$ ), stellt Rad 1 ein nicht modifiziertes Beveloidrad dar, wodurch sich konstante Verläufe entlang der Zahnbreite ergeben (gepunkteter Verlauf). Je größer der Anteil der Modifikation auf Rad 1 ist, desto stärker weichen die lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite vom RSS ab.

Der modifizierte Anteil des Profilverschiebungsfaktors  $x_{\text{mod}1}$  kann durch einen parabelförmigen Verlauf charakterisiert werden. Im Vergleich zur nicht modifizierten Zahnflankengeometrie wird die Zahndicke hin zur Zehe und Ferse vergrößert. Es ist hervorzuheben, dass sich zur Kompensation des identischen Ease-Offs mit zunehmender Modifikation

von Rad 1 das Minimum in Richtung Zehe verschiebt. An der Zehe unterscheiden sich die maximalen Werte nur geringfügig, wohingegen an der Ferse ein deutlicher Unterschied vorliegt.

Dieser Unterschied kann mit dem Verlauf der Schrägungswinkel begründet werden, da ein lokal größerer Schrägungswinkel zu einer Zahndickenzunahme führt. Im Bereich der Zehe vergrößert somit der modifizierte Schrägungswinkel die Zahndicke, sodass die Profilverschiebungsmodifikation geringer ausfällt. Umgekehrt verringert der kleinere Schrägungswinkel die Zahndicke an der Ferse und der modifizierte Anteil der Profilverschiebung nimmt zu. Auch der monoton zunehmende Konuswinkel beeinflusst geringfügig den Verlauf der Profilverschiebungsmodifikation.

Die lokal angepassten Verzahnungsdaten beeinflussen die Eingriffsverhältnisse der modifizierten Beveloidradpaarung, da sich die Grundkreisradien  $r_b$  und Stirneingriffswinkel  $\alpha_t$  entlang der Zahnbreite ändern, wie in den Diagrammen in Bild 4.21 dargestellt ist. Für eine bessere Übersichtlichkeit sind nur die Extremfälle  $k' = 0,0$  und  $k' = 1,0$  eingezeichnet.



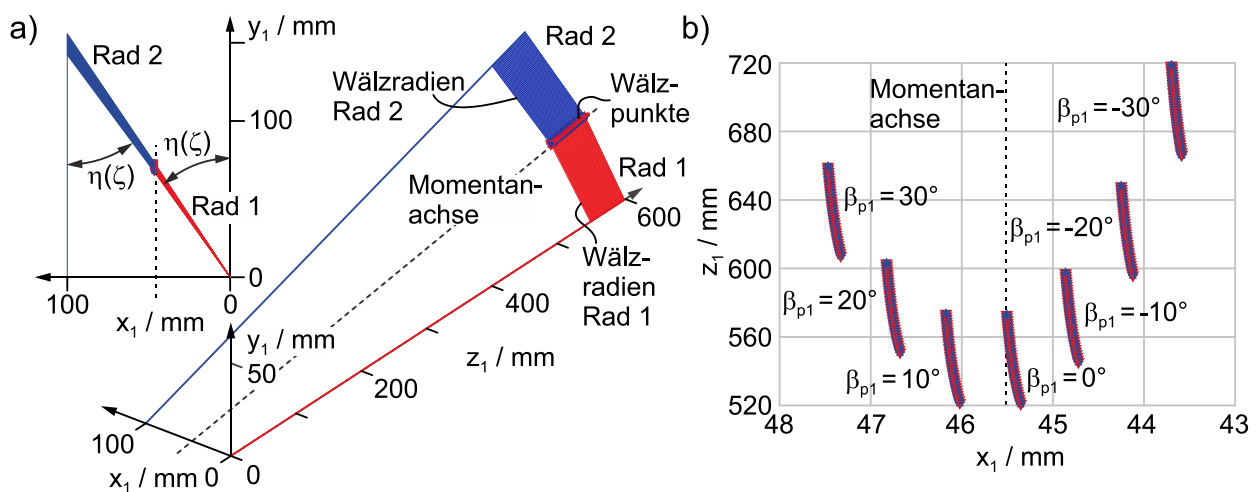
HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0 \dots 1$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 4.21:** Lokale Stirneingriffswinkel  $\alpha_{tL,R1}$  und Teil-  $r_{p1}$  und Grundkreisradien  $r_{bL,R1}$  über der normierten Zahnbreite  $\zeta$  bei unterschiedlicher Modifikationsaufteilung  $k'$

Die Auswirkungen der lokalen Konus- und Schrägungswinkel zeigen sich im Verlauf der Stirneingriffswinkel. Die monoton verlaufende Änderung entlang der Zahnbreite resultiert in einer Verschränkung der Zahnflanke. Der Anstieg des rechtsseitigen Stirneingriffswinkels von der Radmitte hin zur Zehe führt dazu, dass sich der Zahnkopf in Richtung Zahnücke und der Zahnfuß in Richtung Zahnkörper verkippt. Aufgrund der lokalen Stirneingriffswinkel bilden die Eingriffslinien eine gekrümmte Fläche im Raum, die einen durch die Grundkreisradien definierten Grundkörper tangiert. Die Grundkreisradien von Links- und Rechtsflanke werden mit den nach (2.5) ermittelten Stirneingriffswinkeln berechnet. Zusätzlich nimmt aufgrund des abnehmenden Schrägungswinkels der Teilkreisradius  $r_{p1}$  von Zehe zu Ferse ab.

Zur Beschreibung der Einbau- und Eingriffsposition der Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage werden die Verzahnungsdaten am Wälzkegel herangezogen. Die Lage der Wälzpunkte im Raum kann über die Wälzkreisradien  $r_w$  und die Winkel  $\eta$  nach Anhang A.2 eindeutig festgelegt werden. Aufgrund der lokal angepassten Verzahnungsdaten am Wälzkegel resultieren auch breitenabhängige Winkel  $\eta(\zeta)$ .

Bild 4.22a zeigt für die Referenzverzahnung die mittels der Koordinatentransformation aus Anhang A.2 angeordneten Wälzpunkte im raumfesten Koordinatensystem von Rad 1. Die Wälzpunkte liegen nicht auf der Momentanachse. Ausgehend von den Radachsen sind für jedes Stirnschnittpaar die Wälzkreisradien beider Räder zum gemeinsamen Wälzpunkt eingezeichnet. Die über Rad 1 definierten roten Markierungen und die über Rad 2 definierten blauen Markierungen liegen exakt übereinander und bilden die gemeinsame Wälzkurve im Raum. Zusätzlich ist die zum Hyperboloid gehörende Momentanachse dargestellt [WAGNER93]. Für den Sonderfall der schneidenden Achslage werden die Winkel  $\eta$  zu null, sodass sich die Wälzpunkte beider Beveloidräder und die Momentanachse in der  $y_1$ - $z_1$ -Ebene befinden.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = -30 \dots 30^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \mathbf{0}$ ;  $j_t = 125$   $\mu\text{m}$

**Bild 4.22:** a) Räumliche Anordnung der Wälzpunkte

b) Lage der Wälzpunkte relativ zur Momentanachse des Hyperboloids dargestellt in der  $x_1$ - $z_1$ -Ebene

Eine genaue Betrachtung der Wälzpunkte in Bezug auf die Momentanachse stellt der Ausschnitt in Bild 4.22b dar. Die Variation des Schrägungswinkels zeigt, dass sich die Position der Wälzpunkte in axialer und tangentialer Richtung ändert. Die über Achswinkel und Übersetzung definierte Momentanachse der hyperbolischen Grundkörper bleibt jedoch unverändert. Die axiale Verschiebung entsteht, da sich mit Änderung der

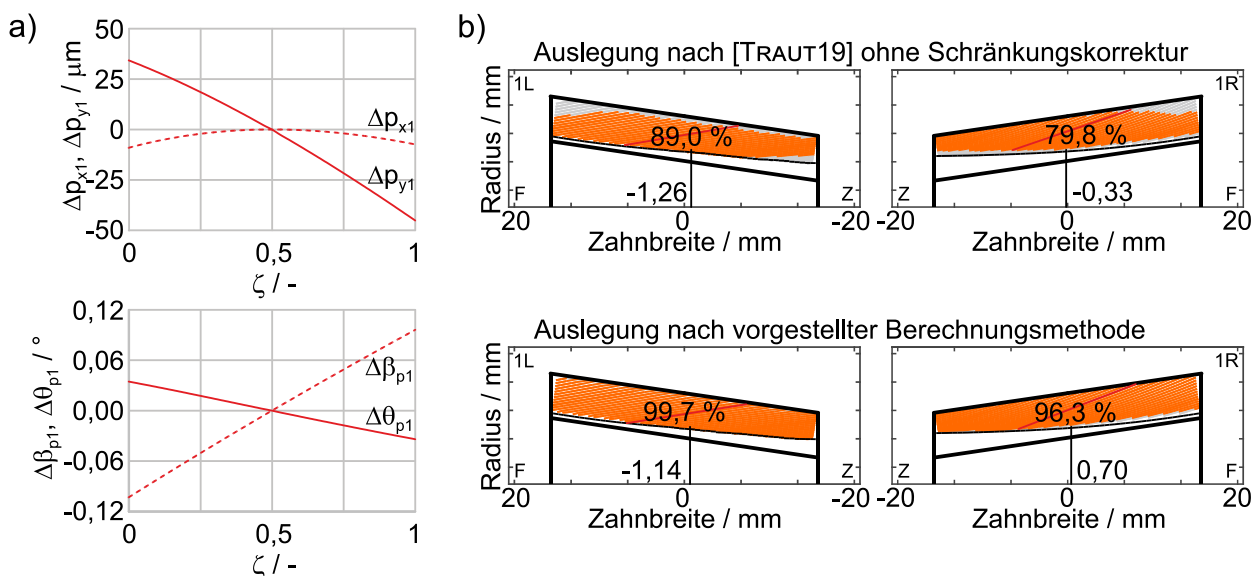
Schrägungswinkel die Wälzkreisradien und somit die Einbauabstände ändern. Die Untersuchung der Eingriffsposition in windschiefer Achslage bestätigt, dass die Wälzkurven von den gewählten Verzahnungsdaten abhängen. Eine detaillierte Untersuchung der Wälzpunkte im Raum in Bezug auf die Momentanachse wurde unter Anleitung des Autors von Schmidt [SCHMIDT19] durchgeführt.

Bei der schneidenden Achslage befinden sich die Wälzpunkte auf der Momentanachse und können nach (2.6) über Achswinkel und Übersetzung beschrieben werden. Dieser Zusammenhang und der Einbauabstand der Beveloidräder wird in Traut [TRAUT19] zur stirnschnittweisen Optimierung der Zahnflankengeometrie verwendet. Nachfolgend werden die damit erzielten Ergebnisse für die schneidende Achslage mit der hier vorgestellten Berechnungsmethode verglichen.

#### 4.4.5 Vergleich mit den Ergebnissen aus dem Stand der Forschung

Für den Sonderfall der schneidenden Achslage ist in [TRAUT19] ein analytischer Ansatz vorgestellt, der ebenfalls die Verzahnungsdaten stirnschnittweise anpasst, sodass ein konjugierter Eingriff angenähert wird.

Für die in [TRAUT19, S. 59] definierte Beispielverzahnung zeigt Bild 4.23 den Unterschied beider Ansätze zur Optimierung der Zahnflankengeometrie.



HVD:  $\Sigma = 8^\circ$ ;  $a = 0 \text{ mm}$ ;  $m_n = 2,25 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 33$ ;  $\beta_{p1} = 30^\circ$ ;  $\theta' = 0,0$ ;  $x_{1,2} = 0,0 / 0,0$ ;  $k' = 0,0$ ;  $j_t = 0 \mu\text{m}$

**Bild 4.23:** a) Unterschied des Verlaufs der SBK  $\Delta p$  und der lokal angepassten Verzahnungsdaten  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \beta$  über der normierten Zahnbreite  $\zeta$   
 b) Tragbilder für Ansatz in [TRAUT19] und vorgestellte Berechnungsmethode

In Bild 4.23a ist die Differenz für die SBK und die lokal angepassten Verzahnungsdaten bezogen auf die Größen in [TRAUT19] dargestellt. Alle Verläufe sind in der Zahnbreitenmitte null, da die Hauptverzahnungsdaten identisch sind.

Die radiale Abweichung  $\Delta p_{y1}$  nimmt von Zehe zu Ferse ab, was bei dem hier vorgestellten Ansatz einer größeren Profilverschiebung in Richtung Zehe und einer kleineren in Richtung Ferse entspricht. Dies zeigt sich auch im Unterschied des Konuswinkels  $\Delta\theta_{p1}$ , der linear von Zehe zu Ferse abnimmt. Die unterschiedliche Zahndickenänderung entlang der Zahnbreite aufgrund der abweichenden Profilverschiebungsverläufe wird mit dem lokalen Schrägungswinkel ausgeglichen, sodass beide Ansätze die Korhammersche Beziehung stirnschnittweise erfüllen. Der linear ansteigende Unterschied der lokalen Schrägungswinkel führt zu einer parabelförmigen Abweichung in tangentialer Richtung  $\Delta p_{x1}$ .

Die unterschiedlichen lokalen Konus- und Schrägungswinkel führen zu abweichenden Stirneingriffswinkeln, was sich in den Tragbildern in Bild 4.23b zeigt. Bei der Auslegung nach [TRAUT19] wird die Schrängung nicht exakt wiedergegeben, sodass keine voll ausgebildeten Tragbilder vorliegen. Eine zusätzliche Schrängungskorrektur in Form einer Stirnprofil-Winkelmodifikation führt zu einer weiteren Verbesserung. Die ungewollte Stirnprofil-Balligkeit kann damit jedoch nicht kompensiert werden [TRAUT19, S. 114]. Die Auslegung nach der vorgestellten Berechnungsmethode führt zu voll ausgebildeten Tragbildern, da Flankenlinien-Balligkeit und Schrängung gut angenähert werden. Die lokale Anpassung der Schrägungswinkel verbessert die Annäherung an den konjugierten Eingriff, kann jedoch zu einer ungewollten Durchdringung zwischen Werkzeug und Verzahnung führen [TRAUT19, S. 88]. Dies soll in Kapitel 7 mithilfe einer Fertigungssimulation beurteilt werden.

## 4.5 Abweichungen und Verlagerungen von Beveloidradpaarungen

Abweichungen von Beveloidradpaarungen und deren Auswirkung auf das Übertragungsverhalten werden in mehreren Studien untersucht, wobei hierbei die Definition des verlagerten Achssystems meist über den Ursprung des Koordinatensystems ähnlich wie bei Kegel- und Hypoidradpaarungen erfolgt. So werden die Abweichungen in schneidender Achslage im Achsenschnittpunkt und in windschiefer Achslage am Achsversatz festgelegt. Im Gegensatz zu Kegelradpaarungen liegt aufgrund des kleinen Achswinkels der Achsenschnittpunkt in der Regel jedoch weit außerhalb des Getriebes. Daher sollen trotz

des Achswinkels bei Beveloidradpaarungen die für Zylinderräder geltenden Abweichungen nach DIN 21772 [DIN21772 2012] verwendet werden. Die in dieser Arbeit eingeführte Definition bietet zudem die Möglichkeit, die an einer Messmaschine ermittelten Abweichungen der Einbaulage mit den in DIN 3964 [DIN3964 1980] zulässigen Abweichungen zu bewerten. Die bei Kegelradpaarungen übliche Tolerierung nach DIN 3965 [DIN3965-1 1986] mit Bezug auf den Achsenschnittpunkt ist nicht zielführend und kann nur unter erheblichem Aufwand gemessen und bewertet werden. Die Ergebnisse sind bereits in Marino et al. [MARINO17] für schneidende Achslagen veröffentlicht.

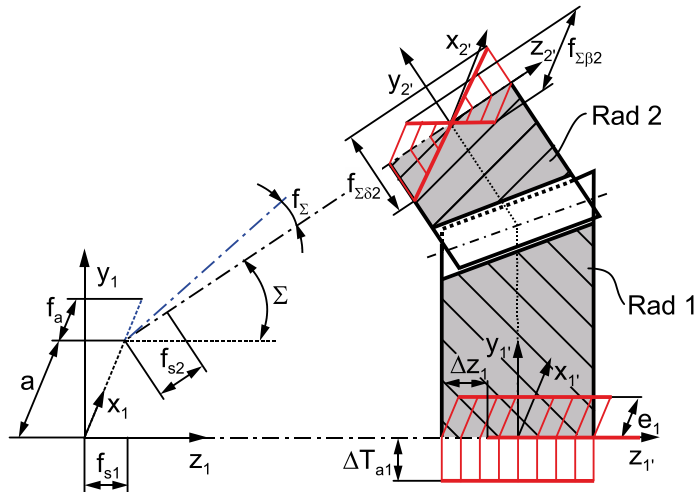
#### 4.5.1 Definition des verlagerten Achssystems

Aufgrund der Ähnlichkeit zwischen Beveloid- und Zylinderrädern wird ein Bezugssystem eingeführt, das analog zur Definition in DIN 21772 [DIN21772 2012] die Abweichungen direkt an der Verzahnung beschreibt und so eine eindeutige Festlegung im Raum ermöglicht. Anschließend werden die tatsächlichen Abweichungen in die Grundformen nach DIN 21772 [DIN21772 2012] zerlegt und durch Superposition des nicht verlagerten Achssystems in ein verlagertes Achssystem überführt. Dieses Vorgehen eignet sich ebenfalls zur Kompensation von lastbedingten Verformungen, indem diese in Abweichungen überführt werden. Für eine gute Annäherung ist hierzu aufgrund des nicht linearen Zusammenhangs zwischen Belastung und Verformung eine abschnittsweise Linearisierung erforderlich [KLINGELNBERG08, S. 208], sodass eine möglichst lineare Biegelinie im Bereich der Verzahnung vorliegt. Die Verformungen des Welle-Lager-Systems können beispielsweise mit Werkzeugen wie KISSsoft [KLINGELNBERG08] oder RIKOR [OTTO07] in Abhängigkeit der auftretenden Belastungen berechnet werden.

In Bild 4.24 sind die lokalen Koordinatensysteme zur Definition von Abweichungen in der Zahnbreitenmitte eingezeichnet. Die untersuchten Abweichungen werden am Beveloidrad lokal quantifiziert und zur Anordnung in BECAL in die für Kegelräder üblichen Abweichungen überführt [SCHLECHT14]. Diese sind nach DIN 3971 [DIN3971 1980] die Achsversetzungsabweichung  $f_a$ , die Achswinkelabweichung  $f_\Sigma$  sowie die Ritzel- und Radverlagerung  $f_{s1,2}$  [SCHLECHT14], wie in Bild 2.13b für Kegelräder eingeführt.

Das raumfeste Koordinatensystem von Rad 1, bei dem die  $z_1$ -Achse mit der Radachse übereinstimmt und die  $x_1$ -Achse in Richtung des Achsversatzes zeigt, definiert die Verlagerungen. Die Definition des nicht verlagerten Achssystems erfolgt über den Achswinkel, den Achsversatz und die Einbauabstände. Das verlagerte Achssystem kann mit der Achsneigung  $f_{\Sigma\delta}$ , Achsschränkung  $f_{\Sigma\beta}$ , Achsabstandsabweichung  $\Delta T_a$ , Exzentrizität  $e$  und

axialen Verschiebung  $\Delta z$  am lokalen Koordinatensystem von Rad 1 und 2 charakterisiert werden. Die Achsneigung ist für beide Räder so definiert, dass eine positive Achsneigung zu einer Vergrößerung des Achswinkels führt, wie in Bild 4.24 für Rad 2 angegeben ist. Die Achsschrägung ist positiv definiert, wenn sich dadurch der Achsversatz vergrößert. Die an Rad 1 dargestellten Abweichungen sind ebenfalls positiv eingezeichnet.



**Bild 4.24:** Definition des verlagerten Achssystems über lokale Koordinatensysteme

Mit den Abweichungen an den Rädern können die zur räumlichen Anordnung relevanten Größen  $f_a$ ,  $f_{s1,2}$  und  $f_\Sigma$  bestimmt werden. Hierzu werden die Radachsen als Geradengleichungen  $g_1$  und  $g_2$  mithilfe der Zehe (Z) und Ferse (F) ausgedrückt.

$$\text{Rad 1:} \quad g_1: \vec{P}_{Z1}^1 + \lambda_1 \cdot \vec{S}_1^1 \quad \text{mit} \quad \vec{S}_1^1 = (\vec{P}_{F1}^1 - \vec{P}_{Z1}^1) \quad (4.43)$$

$$\text{Rad 2:} \quad g_2: \vec{P}_{Z2}^1 + \lambda_2 \cdot \vec{S}_2^1 \quad \text{mit} \quad \vec{S}_2^1 = (\vec{P}_{F2}^1 - \vec{P}_{Z2}^1)$$

Die Stützpunkte  $\vec{P}$  der Geradengleichung im raumfesten Koordinatensystem sind in (4.44) und (4.45) angegeben.

$$\vec{P}_{Z,F1}^1 = \begin{bmatrix} e_1 \pm f_{\Sigma\beta 1} \\ -\Delta T_{a1} \pm f_{\Sigma\delta 1} \\ Z_1 \mp b_1/2 + \Delta Z_1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\vec{P}_{Z,F2}^1 = \begin{bmatrix} a + e_2 \pm f_{\Sigma\beta 2} \\ (\Delta T_{a1} \mp f_{\Sigma\delta 1}) \cdot \cos \Sigma + (Z_2 \mp b_2/2 + \Delta Z_2) \cdot \sin \Sigma \\ -(\Delta T_{a1} \mp f_{\Sigma\delta 1}) \cdot \sin \Sigma + (Z_2 \mp b_2/2 + \Delta Z_2) \cdot \cos \Sigma \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Die unbekanntenen Abweichungen können über räumliche Vektorrechnungen bestimmt werden. So folgt die Achswinkeländerung  $f_\Sigma$  aus dem eingeschlossenen Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

$$f_{\Sigma} = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{S}_1^1 \circ \vec{S}_2^1}{|\vec{S}_1^1| \cdot |\vec{S}_2^1|} \right) - \Sigma \quad (4.46)$$

Die Achsversetzungsabweichung  $f_a$  ergibt sich aus der Lotgeraden zwischen den Geraden. Dazu wird aus dem normierten Kreuzprodukt ein Einheitsvektor ermittelt, der senkrecht auf beiden Richtungsvektoren steht. Diese Richtung entspricht der Lotgeraden und stellt die Richtung des geringsten Abstands bei windschiefen Geraden dar. Das Skalarprodukt angewendet auf das normierte Kreuzprodukt und die Differenz der Ortsvektoren ergibt die gesuchte Länge [GELLERT89].

$$f_a = \left( \frac{\vec{S}_1^1 \times \vec{S}_2^1}{|\vec{S}_1^1 \times \vec{S}_2^1|} \right) \circ (\vec{P}_{Z2}^1 - \vec{P}_{Z1}^1) - a \quad (4.47)$$

Für die Ritzel- und Radverlagerung  $f_{s1,2}$  sind die Einbauabstände im verlagerten Achssystem zu bestimmen. In (4.48) erfolgt eine Verschiebung der Gerade  $g_2$  in Richtung des Achsversatzes, sodass die Lösung des linearen Gleichungssystems die Abstände zwischen der Zahnbreitenmitte und dem kleinsten Abstand der Geraden liefert.

$$\vec{P}_{Z1}^1 + \left( f_{s1} + Z_1 + \frac{b_1}{2} \right) \cdot \frac{\vec{S}_1^1}{|\vec{S}_1^1|} = \vec{P}_{Z2}^1 + \left( f_{s2} + Z_2 + \frac{b_2}{2} \right) \cdot \frac{\vec{S}_2^1}{|\vec{S}_2^1|} + (a + f_a) \cdot \left( \frac{\vec{S}_1^1 \times \vec{S}_2^1}{|\vec{S}_1^1 \times \vec{S}_2^1|} \right) \quad (4.48)$$

Die in (4.46) bis (4.48) definierten Zusammenhänge zur Berechnung der Größen  $f_a$ ,  $f_{\Sigma}$ , und  $f_{s1,2}$  werden verwendet, um die Auswirkungen der Achsverlagerung auf das Tragbild von Beveloidradpaarungen zu untersuchen.

#### 4.5.2 Einfluss eines verlagerten Achssystems auf die Tragbilder

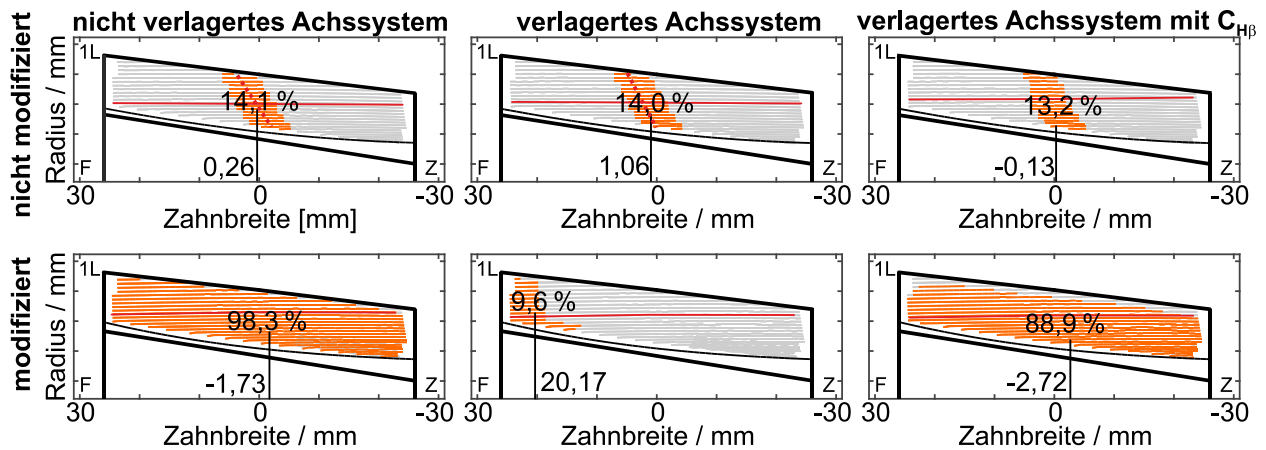
Exemplarisch werden an der Referenzverzahnung die Auswirkungen eines verlagerten Achssystems dargestellt, indem Rad 1 mit einer Achsneigung und -schränkung gezielt verlagert wird. Die Werte der aufgebrachten Abweichungen  $f_{\Sigma\delta}$  und  $f_{\Sigma\beta}$  von 40  $\mu\text{m}$  orientieren sich am ISO-Toleranzfeld 9 [DIN3964 1980]. Umgerechnet auf den Ursprung ergeben sich die Abweichungen in Tabelle 4.1.

Abweichung am Rad				Abweichung am Ursprung			
Achsneigung Rad 1	$f_{\Sigma\delta 1}$	$\mu\text{m}$	40	Achswinkelabweichung	$f_{\Sigma}$	$^{\circ}$	0,0458
Achsschränkung Rad 1	$f_{\Sigma\beta 1}$	$\mu\text{m}$	40	Achsversetzungsabweichung	$f_a$	mm	0,0442
				Ritzelverlagerung	$f_{s1}$	mm	-2,80
				Radverlagerung	$f_{s2}$	mm	-2,82

**Tabelle 4.1:** Umrechnung der am Rad definierten Abweichungen auf den Ursprung



Für die Tragbilder der nicht modifizierten Beveloidradpaarung in Bild 4.25 hat das verlagerte Achssystem einen vernachlässigbar geringen Einfluss. Der Ease-Off kompensiert die durch die Abweichungen hervorgerufene Verlagerung. Bei der modifizierten Beveloidradpaarung hingegen führt das verlagerte Achssystem zu Kantentragen an der Ferse.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 4.25:** Tragbilder nicht modifizierter und modifizierter Beveloidradpaarungen bei verlagertem Achssystem

Der Flankenverlagerung ist durch eine geeignete Zahnflankenmodifikation entgegenzuwirken. Wie Untersuchungen von Traut [TRAUT19, S. 68 ff.] mit Zahnflankenmodifikationen und Achslageabweichungen zeigen, verhält sich das Übertragungsverhalten von Beveloidradpaarungen mit konjugiertem Zahneingriff ähnlich wie bei vergleichbaren Zylinderradpaarungen.

Daher soll in Anlehnung an Wittke [WITTKE94, S. 28] die Achsneigung und -schrägung in eine wirksame Flankenlinien-Winkelabweichung  $f_{H\beta}$  umgerechnet werden, welche durch eine gegensinnig orientierte Flankenlinien-Winkelmodifikation  $C_{H\beta}$  kompensiert wird. Die in dieser Arbeit vorgestellten Gleichungen zur Berechnung von  $C_{H\beta}$  gelten uneingeschränkt für Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage.

$$C_{H\beta L} = \pm(f_{x1} + f_{x2}) \cdot \cos \alpha_{wL1,2} \cdot \operatorname{sgn} \beta_p - (f_{y1} + f_{y2}) \cdot \sin \alpha_{wL1,2} \cdot \operatorname{sgn} \beta_p \quad \beta_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.49)$$

$$C_{H\beta R} = \pm(f_{x1} + f_{x2}) \cdot \cos \alpha_{wR1,2} \cdot \operatorname{sgn} \beta_p + (f_{y1} + f_{y2}) \cdot \sin \alpha_{wR1,2} \cdot \operatorname{sgn} \beta_p \quad \beta_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.50)$$

Eine positive Flankenlinien-Winkelmodifikation führt dabei zu einem betragsmäßig größeren Schrägungswinkel [DIN21771 2014], weshalb in Abhängigkeit des Schrägungswinkels eine Fallunterscheidung über die Vorzeichenfunktion  $\operatorname{sgn}$  notwendig ist.

Die lokal am Rad definierte Achsneigung und -schrägung ist über den Winkel  $\eta$  in das globale Koordinatensystem zu überführen. Wie in Bild 4.10 dargestellt, beschreibt der

Winkel die Verdrehung der Wälzpunkte aus der  $y_1$ - $z_1$ -Ebene. Modifizierte Beveloidradpaarungen besitzen veränderliche Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite, sodass die Betriebseingriffswinkel  $\alpha_{wL,R}$  und die Verdrehung  $\eta$  abhängig von der axialen Position sind. Um dennoch eine wirksame Flankenlinien-Winkelmodifikation je Zahnflanke zu bestimmen, werden die Größen der Zahnbreitenmitte verwendet.

$$f_{x1,2} = f_{\Sigma\beta1,2} \cdot \cos \eta - f_{\Sigma\delta1,2} \cdot \sin \eta \quad f_{y1,2} = f_{\Sigma\beta1,2} \cdot \sin \eta + f_{\Sigma\delta1,2} \cdot \cos \eta \quad (4.51)$$

Der Sonderfall einer Geradverzahnung ist nicht über die Vorzeichenfunktion definiert. Die Vorzeichen können jedoch für ein positives  $\beta_p$  angewandt werden.

Für die modifizierte Beveloidradpaarung im verlagerten Achssystem mit den Abweichungen  $f_{\Sigma\delta1} = 40 \mu\text{m}$  und  $f_{\Sigma\beta1} = 40 \mu\text{m}$  ergeben (4.49) bis (4.51) für Rad 1  $C_{H\beta L1} = 44 \mu\text{m}$  und  $C_{H\beta R1} = 55 \mu\text{m}$ . Durch Aufbringen der Flankenlinien-Winkelmodifikationen können die Tragbilder wieder mittig positioniert werden, wie die Tragbilder in Bild 4.25, rechts bestätigen.

Es kann festgehalten werden, dass für den angenäherten konjugierten Eingriff eine Skalierung und Positionierung des Tragbilds erforderlich ist, um Flankenverlagerungen aufgrund auftretender Abweichungen und Verformungen kompensieren zu können. Hierzu werden im folgenden Kapitel analytische Ansätze vorgestellt, die neben den aus dem Stand der Technik bekannten Standardmodifikationen für Zylinderräder eine Anpassung des Tragbilds direkt bei der Auslegung und Optimierung von modifizierten Beveloidradpaarungen ermöglichen.

## 4.6 Skalierung und Positionierung der Tragbilder

Der Einfluss eines verlagerten Achssystems auf die konjugiert modifizierte Beveloidradpaarung zeigt, dass zusätzliche Zahnflankenmodifikationen zwingend erforderlich sind. Diese gewünschten Änderungen werden der modifizierten Zahnflankengeometrie aus Kapitel 4.4 überlagert, sodass sich im Betriebspunkt u. a. ein definiertes Tragbild ausbildet. Wie Standardmodifikationen bei Zylinderrädern werden die zusätzlichen Modifikationen im Stirnschnitt senkrecht zur Evolvente definiert [DIN21771 2014]. Somit kann bei Beveloidradpaarungen basierend auf der konjugierten Modifikation auf Erfahrungen von Zylinderrädern zurückgegriffen werden, um je nach Auslegungsziel weitere Modifikationen an der Zahnflankengeometrie vorzunehmen [TRAUT19, S. 116 ff.].

#### 4.6.1 Zusätzliche Zahnflankenmodifikationen zur Einstellung der Tragbilder

Der in [TRAUT19] hergeleitete Zusammenhang zwischen zusätzlichen Zahnflankenmodifikationen auf Höhe der Profilbezugslinie und dem Verlauf der SBK ist für Evolventenverzahnungen allgemeingültig. Traut [TRAUT19, S. 92 ff.] zeigt, dass die frei definierbaren Zahnflankenmodifikationen von Links- und Rechtsflanke  $C_{PBLL,R}$  in einen Anteil in x- und y-Richtung umgerechnet und dem Verlauf der SBK überlagert werden können. Umgekehrt besteht die Möglichkeit, die SBK der konjugierten Modifikation in breitenabhängige Zahnflankenmodifikationen für Links- und Rechtsflanke  $C_{konjL,R}$  zu überführen. Die endgültigen Zahnflankenmodifikationen  $C_{L,R}$  zur gezielten Einstellung der Tragbilder bestehen aus einem skalierbaren Anteil der  $C_{konjL,R}$  und einem je nach Auslegungsziel frei definierbaren Verlauf  $C_{PBLL,R}$ . In dieser Arbeit wird  $C_{PBLL,R}$  beispielhaft durch eine quadratische Funktion dargestellt.

$$C_{L,R}(\zeta) = s'_{L,R} \cdot C_{konjL,R}(\zeta) + C_{PBLL,R}(\zeta) \quad (4.52)$$

$$C_{PBLL,R}(\zeta) = 4 \cdot C_{bL,R} \cdot (\zeta - 0,5)^2 + C_{HL,R} \cdot (\zeta - 0,5) + C_{0L,R} \quad (4.53)$$

Die Skalierungsfaktoren  $s'_{L,R}$  skalieren die Zahnflankenmodifikationen, welche für einen angenäherten konjugierten Eingriff erforderlich sind. Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Zahnflanken beider Räder unabhängig voneinander modifiziert werden können. Ebenfalls hervorzuheben ist, dass die zusätzlichen Zahnflankenmodifikationen ausschließlich den Verlauf der SBK beeinflussen, jedoch nicht die lokal angepassten Verzahnungsdaten.

In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Möglichkeit aufgezeigt, die Tragbildgröße und -lage gezielt einzustellen. Für das Verdrehflankenspiel  $j_t$  in der Korhammerschen Beziehung in (4.18) erfolgt hierzu eine stirnschnittweise Anpassung. Neben dem Verlauf der SBK wird dadurch die Profilverschiebung lokal geändert. Die Vorgabe eines beliebigen Verlaufs wird auch hier ermöglicht. Zur Vergleichbarkeit ist wiederum eine quadratische Funktion angegeben.

$$j_t(\zeta) = 4 \cdot j_{tb} \cdot (\zeta - 0,5)^2 + j_{tH} \cdot (\zeta - 0,5) + j_{t0} \quad (4.54)$$

Im Gegensatz zum erstgenannten Ansatz können Links- und Rechtsflanke nicht getrennt voneinander modifiziert werden. Die Verteilung auf Rad 1 und 2 erfolgt über die Modifikationsaufteilung  $k'$  in (4.25). Es stehen nunmehr zwei analytische Ansätze zur Verfügung, um die SBK anzupassen und so zusätzliche Zahnflankenmodifikationen in

Flankenrichtung aufzubringen. Die Änderung der SBK ermöglicht jedoch keine Modifikationen in Profilrichtung. Diese sind stattdessen direkt am Bezugsprofil, also am Werkzeugprofil, zu berücksichtigen.

#### 4.6.2 Analyse der Skalierung und Positionierung der Tragbilder

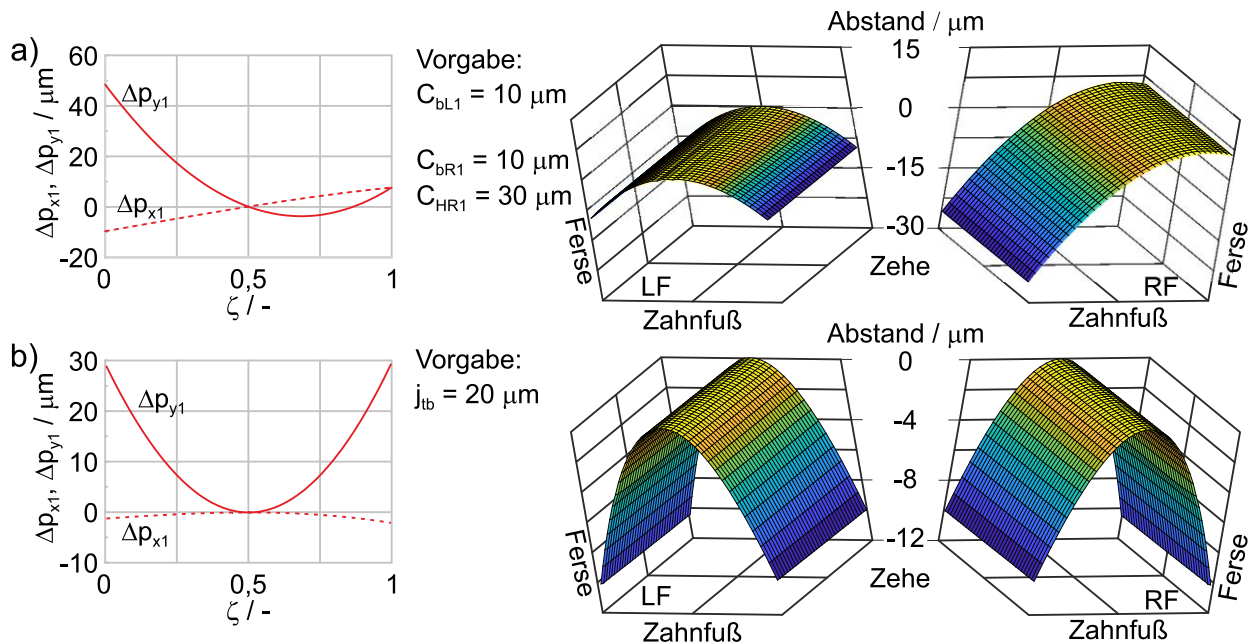
Nachfolgend werden die vorgestellten Ansätze zur Skalierung und Positionierung des Tragbilds angewendet und gegenübergestellt. Dabei wird die tatsächlich entstehende Zahnflankengeometrie mittels eines Zahnradvergleichs untersucht.

Mit den Skalierungsfaktoren  $s'_{L,R}$  kann eine Restklaffung in Abhängigkeit des Ease-Offs auf Höhe der Profilbezugslinie umgesetzt werden. Da jedoch die Skalierungsfaktoren die Verschränkung der Zahnflanke aufgrund der lokal angepassten Verzahnungsdaten nicht berücksichtigt, entstehen ungewollte Zahnflankengeometrien [TRAUT19, S. 117]. Eine ausführliche Betrachtung ist in Anhang A.3 zu finden. Die Skalierungsfaktoren in (4.52) eignen sich somit nicht zur gezielten Einstellung des Tragbilds. Stattdessen sind zusätzliche Zahnflankenmodifikationen über den frei definierbaren Verlauf  $C_{PBL,L,R}$  zweckmäßig. Eine Anpassung durch den zweitgenannten Ansatz mithilfe des Verdrehflankenspiels ist ebenfalls zielführend, da auch hier unabhängig vom auftretenden Ease-Off eine Zahnflankenmodifikation erzielt wird.

Bild 4.26 visualisiert exemplarisch die Änderung der Zahnflankengeometrie von Rad 1 durch Überlagern der SBK mit zusätzlichen Modifikationen an der Profilbezugslinie  $C_{PBL,L,R}$  oder Änderung des Verdrehflankenspiels  $j_t$  entlang der Zahnbreite. In Bild 4.26a wird ausgehend von der konjugierten Modifikation auf der Linksflanke eine Flankenlinien-Balligkeit  $C_{bL1} = 10 \mu\text{m}$  in Höhe der zulässigen Flankenlinien-Formabweichung nach DIN 3962 [DIN3962-2 1978] der Qualitätsstufe 6 aufgebracht. Auf der Rechtsflanke wird eine Flankenlinien-Balligkeit  $C_{bR1} = 10 \mu\text{m}$  mit einer Flankenlinien-Winkelmodifikation  $C_{HR1} = 30 \mu\text{m}$  überlagert, um so beispielhaft eine drehrichtungsabhängige Verlagerung des Achssystems zu kompensieren.

Zunächst erfolgt eine Umrechnung der zusätzlichen Zahnflankenmodifikationen in eine radiale und tangential Änderung  $\Delta p_{x,y1}$  des Verlaufs der SBK. Mit der geänderten SBK in Bild 4.26a werden die vorgegebenen Modifikationen ( $C_{bL1}$ ,  $C_{bR1}$  und  $C_{HR1}$ ) in Zahnbreitenrichtung auf der Zahnflanke umgesetzt. Die radiale Änderung  $\Delta p_{y1}$  setzt sich aus einem parabelförmigen und einem linearen Anteil zusammen. Dies führt zu einer Flankenlinien-Balligkeit und einer positiven Flankenlinien-Winkelmodifikation auf beiden Zahnflanken. Die annähernd linear von Zehe zu Ferse abfallende tangential Änderung

$\Delta p_{x1}$  führt hingegen auf der Linksflanke zu einer negativen und auf der Rechtsflanke zu einer positiven Flankenlinien-Winkelmodifikation. Durch Überlagern von  $\Delta p_{x1}$  und  $\Delta p_{y1}$  wird die Flankenlinien-Winkelmodifikation auf der Linksflanke kompensiert und auf der Rechtsflanke entsprechend der Vorgabe vergrößert. Der Zahnradvergleich in Bild 4.26a zeigt, dass die Zahnflankenmodifikation trotz Umrechnung auf die SBK mit der Soll-Modifikation übereinstimmt ( $< 0,1 \mu\text{m}$ ).



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \mathbf{0}$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 4.26:** Vergleich der Zahnflankengeometrie zwischen konjugierter Modifikation und zusätzlicher Zahnflankenmodifikation durch Änderung a) der SBK und b) des Verdrehflankenspiels

In Bild 4.26b wird der konjugierten Modifikation über den neu vorgestellten Ansatz ein veränderliches Verdrehflankenspiel  $j_{tb} = 20 \mu\text{m}$  nach (4.54) überlagert. Die resultierende Flankenlinien-Balligkeit verteilt sich gleichmäßig auf Links- und Rechtsflanke. Der Ansatz mit dem Verdrehflankenspiel hat einen Einfluss auf die lokal angepassten Verzahnungsdaten in der Korhammerschen Beziehung (4.23), sodass sich die modifizierten Profilverschiebungen ändern.

Die vorgestellten Ansätze zur Skalierung und Positionierung der Tragbilder ermöglichen die Kompensation von Fertigungsabweichungen, Montagefehlern sowie lastbedingten Verformungen in Breitenrichtung und verhindern so Kantenträgern im verlagerten Achssystem. Zu beachten ist jedoch, dass im Flankengenerator die Zahnflankengeometrie stirnschnittweise definiert wird und eine mögliche Durchdringung außerhalb der Stirnschnitte aufgrund der gekrümmten SBK nicht abgebildet wird. Dieser Effekt auf der

Zahnflanke ist vergleichbar mit einer Verschränkung bei breitenballig modifizierten Schrägverzahnungen [ESCHER96, S. 59 ff.]. In Kapitel 7 erfolgt daher eine Fertigungssimulation von modifizierten Beveloidrädern, um die tatsächlich resultierende Zahnflankengeometrie zu beurteilen.

## 5 Theoretische Untersuchung

In einer theoretischen Untersuchung sollen die Ergebnisse der Berechnungsmethode mittels Kontaktsimulationen beurteilt werden. Zunächst werden Bewertungskriterien abgeleitet und ein Versuchsplan erstellt. Anschließend wird das Übertragungsverhalten nicht modifizierter und modifizierter Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage untersucht. Die Untersuchung soll zur Beantwortung der folgenden Forschungsfrage herangezogen werden.

### Forschungsfrage zu Kapitel 5

Welche Grenzen liegen bei der Auslegung vor, die den Vertrauensbereich der Berechnungsmethode definieren?

Die gewonnenen Erkenntnisse können zur Definition eines Vertrauensbereichs verwendet werden. Abschließend soll die Empfindlichkeit der modifizierten Referenzverzahnung bei verlagertem Achssystem ermittelt werden.

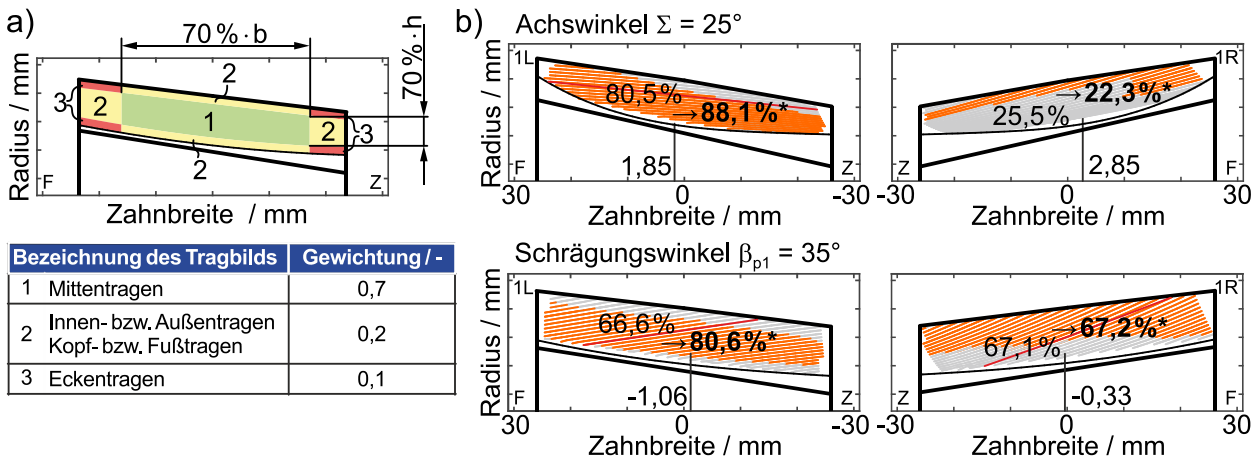
### 5.1 Ableitung von Bewertungskriterien und Versuchsplanung

Zur Bewertung des Übertragungsverhaltens in einer lastfreien Kontaktsimulation werden das Tragbild, der Drehfehler und das simulierte Verdrehflankenspiel berücksichtigt. Für die nicht modifizierte Beveloidradpaarung wird wegen des Punktkontakts die axiale Position des Tragbilds als Bewertungskriterium herangezogen und bei der modifizierten Paarung der Traganteil. Die Bewertungskriterien mit den drei Bewertungsklassen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. In Anlehnung an [MARINO19B] wird die Tragbildlage bis zu einer axialen Lage des Tragbildschwerpunkts  $|z_{TB}| \leq 0,8$  mm als gut bewertet. Innerhalb des 20 % Toleranzbereichs sind die Ergebnisse ausreichend. Bei Verlagerungen darüber hinaus werden sie als unbefriedigend eingeordnet.

Bewertungskriterium			gut	ausreichend	unbefriedigend
Axiale Tragbildlage	$z_{TB}$	mm	$ z_{TB}  \leq 0,8$	$0,8 <  z_{TB}  \leq 1,0$	$ z_{TB}  > 1,0$
Gewichteter Traganteil	TRA*	%	$TRA^* \geq 85$	$85 > TRA^* \geq 70$	$TRA^* < 70$
Drehfehler	$\delta$	$\mu\text{m}$	$ \delta  \leq 2,5$	$2,5 <  \delta  \leq 3,0$	$ \delta  > 3,0$
Abweichung Verdrehflankenspiel	$\Delta j_t$	$\mu\text{m}$	$ \Delta j_t  \leq 5,0$	$5,0 <  \Delta j_t  \leq 6,0$	$ \Delta j_t  > 6,0$

**Tabelle 5.1:** Definition der Bewertungskriterien zur theoretischen Untersuchung

Für den Traganteil wird nach Bild 5.1a eine Gewichtung eingeführt. Dazu wird die Zahnflanke in neun Bereiche unterteilt, sodass ein Mittentragen höher gewichtet wird als ein Kanten- oder Ecktragen.



HVD:  $\Sigma = 15 / 25^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20 / 35^\circ$ ;  $\theta' = 0,4$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 5.1:** a) Unterteilung der Zahnflanke in Bereiche zur Gewichtung des Traganteils  
b) Einfluss des gewichteten Traganteils für ausgewählte Radpaarungen

Der nach DIN 3971 [DIN3971 1980, S. 21] als Mittentragen definierte Bereich entspricht dabei etwa 50 % des möglichen Tragbilds. Die Begrenzung ist über 70 % der Zahnbreite und 70 % der Zahnhöhe festgelegt, wobei für die Höhe in jedem Stirnschnitt der nutzbare Kopf- und Fußkreisradius bestimmt wird. Die gelb hervorgehobenen Bereiche werden in Anlehnung an Kegelräder in Innen- (Zehe) und Außentragen (Ferse) sowie Kopf- und Fußtragen eingeteilt. Die Eckbereiche decken die übrigen Flächen der Zahnflanke ab. Wie bisher wird auch in der theoretischen Untersuchung die Zahnflanke bei einem Kontaktabstand (entspricht Tuschierpastendicke) von kleiner als 6  $\mu$ m eingefärbt.

Die Gewichtung und Bewertung der Traganteile werden mithilfe von Voruntersuchungen festgelegt. Für eine Gewichtung in Anlehnung an Bild 5.1a wird in Tabelle 5.1 der gewichtete Traganteil  $TRA^* \geq 85\%$  als gut bewertet, vgl. Empfehlungen in [NIEMANN83, S. 35]. Mit dem Toleranzbereich wird der gewichtete Traganteil  $TRA^* < 70\%$  als unbefriedigend gekennzeichnet. Bild 5.1b zeigt einen Auszug der Untersuchung, wobei bei den oberen Tragbildern der Achswinkel auf  $\Sigma = 25^\circ$  und bei den unteren der Schrägungswinkel auf  $\beta_{p1} = 35^\circ$  erhöht wird. Der gewichtete Traganteil ist jeweils mit einem Sternchen gekennzeichnet.

Es zeigt sich bei der Linksflanke mit erhöhtem Achswinkel, dass das mittige Tragbild unter Berücksichtigung der Gewichtung einen deutlich höheren Traganteil besitzt und somit eine gute statt ausreichende Bewertung erhält. Der gewichtete Traganteil der Rechtsflanke verringert sich aufgrund von Kopftragen und Außentragen. Die Tragbilder bei erhöhtem Schrägungswinkel besitzen einen ähnlichen Traganteil, jedoch liegt auf der Rechtsflanke tendenziell ein Kopftragen im Vergleich zum Mittentragen auf der



Linksflanke vor. Die Gewichtung ermöglicht bei gleichem Traganteil eine Differenzierung, da der gewichtete Traganteil der Linksflanke als ausreichend bewertet wird.

Die Bewertung des Drehfehlers orientiert sich am Einflankenwälzsprung  $f'_i$  nach DIN 3963 [DIN3963 1978]. Ein Drehfehler  $|\delta| \leq 2,5 \mu\text{m}$  entspricht dabei der Verzahnungsqualität 1 und wird als theoretisch drehfehlerfrei betrachtet. Ebenso wird die Abweichung zwischen dem definierten und dem simulierten Verdrehflankenspiel in Anlehnung an den Drehfehler bis  $|\Delta j_t| \leq 5,0 \mu\text{m}$  als gut eingestuft, da die Ergebnisse von Links- und Rechtsflanke einfließen. Die Grenze liegt somit deutlich unterhalb der kleinsten Zahndickentoleranz ( $8 \mu\text{m}$  bei Toleranzreihe 21) in DIN 3967 [DIN3967 1978].

Die Vorgaben der Hauptverzahnungsdaten zur Definition der Ausgangspaarung sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Ausgehend von dieser werden die Parameter zunächst einzeln zwischen der minimalen und maximalen Größe variiert und so die Einzeleffekte untersucht. Basierend auf den Erkenntnissen werden die Parameter mit einem Einfluss auf die Bewertungskriterien in einem vollfaktoriellen Versuchsplan auf mehreren Stufen variiert.

Hauptverzahnungsdaten			Rad 1	Rad 2	min	max
Achswinkel	$\Sigma$	$^\circ$	15		5	25
Achsversatz	a	mm	100		0	160
Modul	$m_n$	mm	5		3	7
Zähnezahl	z	-	31	34	$(z_2 =) 29$	$(z_2 =) 91$
Zahnbreite	b	mm	52	50	-	-
Schrägungswinkel	$\beta_p$	$^\circ$	20	-	0	35
Verdrehflankenspiel	$j_t$	$\mu\text{m}$	125		0	250
Profilwinkel	$\alpha_p$	$^\circ$	20		17,5	22,5
Summe Profilverschiebungsfaktoren	$\Sigma x$	-	1,0		-0,4	1,2
Profilverschiebungsaufteilung	$x'$	-	0,4		0	1
Konuswinkelaufteilung	$\theta'$	-	0,4		0	1
Modifikationsaufteilung	$k'$	-	0,3		0	1

**Tabelle 5.2:** Hauptverzahnungsdaten und Variationsbereich der einzelnen Parameter

Für die Untersuchung der Einbaulage werden der Achswinkel zum Abdecken des für Beveloidradpaarungen üblichen Bereichs und der Achsversatz bis etwa 90 % des möglichen Achsversatzes variiert.

Die minimale Grenze des Moduls hängt direkt vom Achsversatz ab, da bei zu kleinen Werten kein Eingriff stattfinden kann. Die Übersetzung wird durch die Variation der Zähnezahl von Rad 2 realisiert und deckt einen Bereich bis zu einer Übersetzung von etwa drei ab. Die maximale Grenze des Schrägungswinkels ergibt sich aufgrund der resultierenden Axialkraft und orientiert sich an Zylinderradpaarungen [NIEMANN03, S. 271]. Bei den weiteren Variationsgrenzen wird auf Erfahrungen von Zylinderrädern

zurückgegriffen, sodass das Verdrehflankenspiel die für den üblichen Maschinenbau berücksichtigten Zahndickentoleranzen nach DIN 3967 [DIN3967 1978] beinhaltet. Der Bereich des Profilwinkels stellt einen Kompromiss aus Tragfähigkeit und Geräusch-anregung [NIEMANN03, S. 53] dar. Die Summe der Profilverschiebungsfaktoren deckt den üblichen Bereich der Zylinderradpaarungen nach DIN 3992 [DIN3992 1964] ab. Die Aufteilung der Konuswinkel, Profilverschiebung und Modifikation wird von null bis eins variiert, sodass der komplette Variationsbereich untersucht wird.

## 5.2 Theoretische Untersuchung des Übertragungsverhaltens

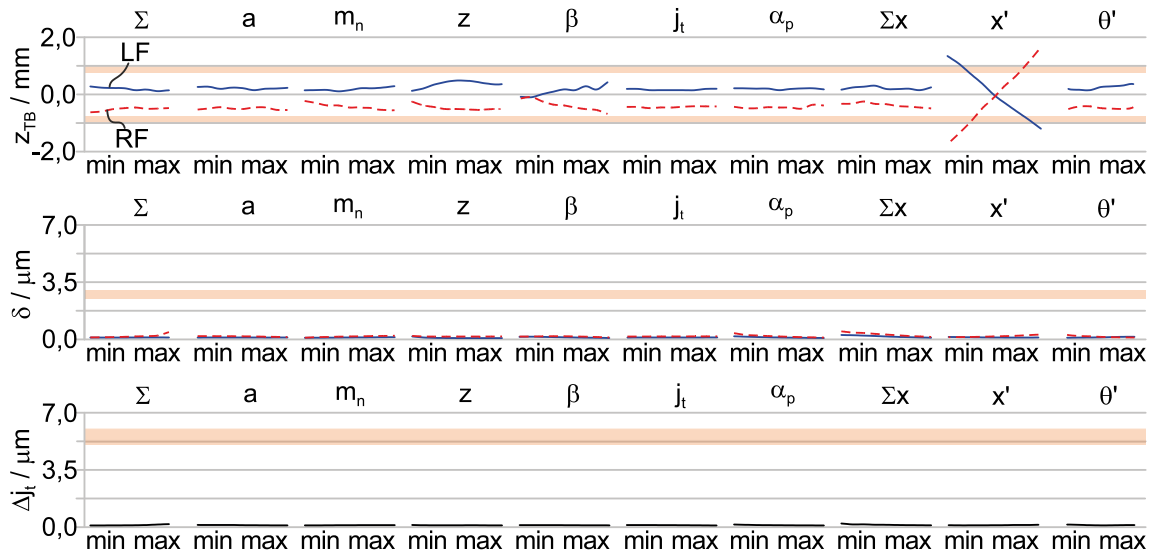
In diesem Kapitel werden mittels lastfreien Kontaktsimulationen die Bewertungskriterien für Beveloidradpaarungen mit nicht modifizierter und modifizierter Zahnflankengeometrie ausgewertet.

### 5.2.1 Nicht modifizierte Beveloidradpaarungen

Die Hauptverzahnungsdaten der nicht modifizierten Beveloidradpaarungen werden nach Kapitel 4.3 bestimmt. Die Ergebnisse der nach Tabelle 5.2 variierten Hauptverzahnungsdaten sind im Effektdiagramm in Bild 5.2 zusammengefasst. Der Verlauf zwischen der minimalen und maximalen Größe gibt den Einfluss des Variationsbereichs wieder. Es werden jeweils bei konstanter Schrittweite neun Kontaktsimulationen durchgeführt, wobei eine Größe variiert wird und die übrigen unverändert bleiben. Bei Beveloidradpaarungen unterscheiden sich die Eingriffsverhältnisse je nach Drehrichtung. Daher stellt die durchgezogene Linie die Linksflanke und die gestrichelte die Rechtsflanke dar. Für den maximalen Wert des Achswinkels und der Konuswinkelauflteilung liegen aufgrund von Unterschnitt keine Ergebnisse vor.

Das obere Diagramm zeigt die Auswirkungen der variierten Hauptverzahnungsdaten auf die axiale Lage des Tragbildschwerpunkts  $z_{TB}$ . Der Toleranzbereich nach Tabelle 5.1 ist orange hervorgehoben. Bis auf die Aufteilung der Profilverschiebungsfaktoren  $x'$  liegen alle Verläufe der variierten Hauptverzahnungsdaten innerhalb der beiden Toleranzbereiche und können als gut bewertet werden. Die Ergebnisse für den Drehfehler und das Verdrehflankenspiel werden durch Variation der Hauptverzahnungsdaten vernachlässigbar gering beeinflusst und liegen deutlich unterhalb des Toleranzbereichs. Die Lage des Tragbildschwerpunkts bei Variation von  $x'$  zeigt einen gegenläufigen Trend für Links- und Rechtsflanke, sodass sich bei den minimalen und maximalen Werten die Verläufe außerhalb der Toleranzbereiche befinden. Eine Verteilung  $x' = 0$  bedeutet, dass die

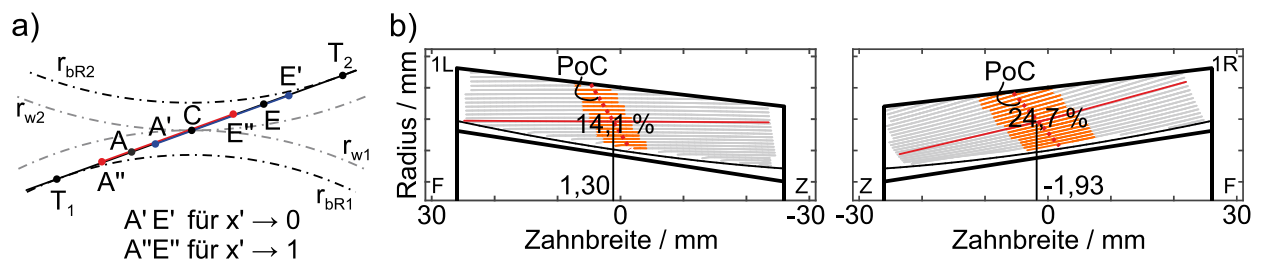
Summe der Profilverschiebungsfaktoren  $\Sigma x = 1$  komplett auf Rad 1 bzw. bei  $x' = 1$  komplett auf Rad 2 aufgebracht wird.



**Bild 5.2:** Effektendiagramm der Hauptverzahnungsdaten für Beveloidradpaarungen mit nicht modifizierter Zahnflankengeometrie

Das Verhalten der Lage des Tragbildschwerpunkts  $z_{TB}$  bei Variation von  $x'$  ist aus [SCHÖLER21, S. 115] bekannt. Die Richtung und die Größe der Verlagerung hängen von der Neigung des PoC und der Verteilung der Summe der Profilverschiebungsfaktoren  $\Sigma x$  ab. Letzteres beeinflusst dabei die Lage der Eingriffsstrecke bezüglich des Wälzpunkts C [ROTH01, S. 244].

Eine Erklärung für die Änderung der Tragbildlage liefert Bild 5.3a. So gilt für den Eingriffsbeginn A, dass eine Verteilung der Profilverschiebung auf Rad 1 zu einer Verschiebung hin zum Wälzpunkt C führt ( $A \rightarrow A'$ ), wohingegen bei Verteilung auf Rad 2 der Eingriffsbeginn  $A''$  vom Wälzpunkt C wegrückt. Bei dieser Betrachtung wird die Länge der Eingriffsstrecke als konstant angenommen, sodass sich auch jeweils das Eingriffsende E ändert.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta' = 0,4$ ;  $x_{1,2} = 1,0 / 0,0$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 5.3:** a) Verschiebung der Eingriffsstrecke durch Profilverschiebungsaufteilung  $x'$   
 b) Verlagerte Tragbilder einer nicht modifizierten Beveloidradpaarung

Die Tragbilder in Bild 5.3b zeigen exemplarisch die axiale Lage des Tragbildschwerpunkts für  $x' = 0$ . Mit dem in Richtung Wälzpunkt C verschobenen Eingriffsbeginn A' und dem zur Ferse hin geneigten PoC auf der Linksflanke entsteht eine geringfügige axiale Verlagerung hin zur Ferse. Aufgrund des entgegen gerichteten PoC auf der Rechtsflanke verschiebt sich das Tragbild in Richtung Zehe. Die umgekehrte Verlagerung bei  $x' = 1$  kann damit begründet werden, dass bei gleicher Neigung des PoC der Eingriffsbeginn weiter weg vom Wälzpunkt C in Richtung Tangentialpunkt  $T_1$  rückt.

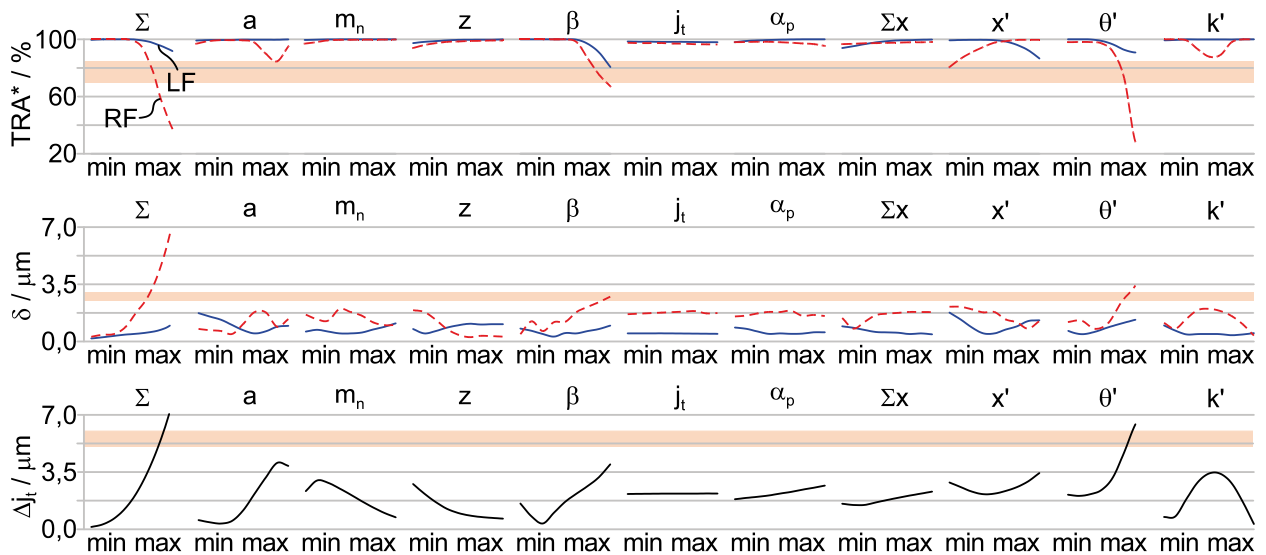
Die Erkenntnisse erklären auch den Trend bei Verringerung des Schrägungswinkels, da sich der PoC aufrichtet und somit die axiale Verlagerung gegen null strebt. Zwar zeigen sich auch bei der Variation von Modul und Übersetzung innerhalb der Toleranzbereiche Änderungen, jedoch ist kein eindeutiger Trend zu erkennen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich bei Auslegung nach Kapitel 4.3 der Punktkontakt bei nicht modifizierten Beveloidradpaarungen mittig auf der Zahnflanke befindet. Beim Abwälzen zeigen sich keine Abweichungen in der Drehwegübertragung und im Verdrehflankenspiel. Diese Erkenntnisse stimmen mit den Ergebnissen aus [MARINO19B] überein. Hierbei wurde der analytische Ansatz ausgehend von einer vergleichbaren Ausgangsverzahnung untersucht. Einzig die Aufteilung der Profilverschiebungsfaktoren überschreitet den Toleranzbereich, weshalb keine weitere Untersuchung zur Bestimmung der Wechselwirkungen der Einzeleffekte erforderlich erscheint.

### 5.2.2 Modifizierte Beveloidradpaarungen

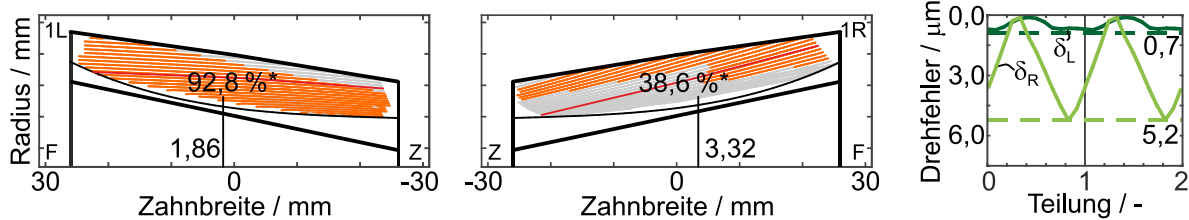
Die modifizierten Beveloidradpaarungen werden nach Kapitel 4.4 bestimmt, indem durch die lokale Anpassung der Verzahnungsdaten ein konjugierter Eingriff angenähert wird. In Bild 5.4 sind die Ergebnisse für die Parametervariation der Hauptverzahnungsdaten aus Tabelle 5.2 zusammengefasst. Die Darstellung gleicht dem Aufbau von Bild 5.2. Statt der Lage des Tragbildschwerpunkts zeigen die oberen Verläufe den Einfluss der variierten Hauptverzahnungsdaten auf den gewichteten Traganteil  $TRA^*$ . Für einen maximalen Achswinkel und eine maximale Konuswinkelaufteilung liegen erneut aufgrund von Unterschnitt keine Ergebnisse vor.

Die Verläufe zeigen einen signifikanten Einfluss des Achs-, Konus- und Schrägungswinkels auf den gewichteten Traganteil. Die Verzahnungsdaten führen mit zunehmendem Betrag zu einer deutlichen Verringerung des Traganteils. Insbesondere auf der Rechtsflanke ist der Traganteil als unbefriedigend einzustufen, wie Bild 5.5 exemplarisch für  $\Sigma = 22,5^\circ$  zeigt.



**Bild 5.4:** Effektdiagramm der Hauptverzahnungsdaten für Beveloidradpaarungen mit modifizierter Zahnflankengeometrie

Das Tragbild bildet sich zwar auf der Rechtsflanke entlang der kompletten Zahnbreite aus, ist jedoch in Richtung Zahnkopf verschoben. Auf der Linksflanke wird dagegen ein mittiges Tragbild erzielt. Einzig am Zahnkopf im Bereich der Zehe wird der definierte Kontaktabstand überschritten, sodass dieser Bereich grau eingefärbt ist.



HVD:  $\Sigma = 22,5^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta' = 0,4$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu\text{m}$

**Bild 5.5:** Tragbilder mit gewichtetem Traganteil und Drehfehlerverläufe einer Beveloidradpaarung mit unbefriedigendem Ergebnis auf der Rechtsflanke

Der Einfluss der Profilverchiebungsaufteilung  $x'$  auf den gewichteten Traganteil wird durch die Verschiebung der Eingriffsstrecke hervorgerufen, wie ausführlich in Kapitel 5.2.1 für nicht modifizierte Beveloidradpaarungen erläutert.

Auch der Achsversatz und die Modifikationsaufteilung verringern den Traganteil auf der Rechtsflanke, jedoch ohne signifikante Änderung auf der Linksflanke. Für den Achsversatz kann die Verringerung des Traganteils und der erneute Anstieg damit begründet werden, dass sich der Achsversatz der Summe der Grundkreisradien annähert und so bereits bei der nicht modifizierten Radpaarung ein großer Traganteil auf der Rechtsflanke vorliegt, wie in Kapitel 4.3.3 aufgezeigt wird. Die Veränderung des gewichteten Traganteils bei Variation der Modifikationsaufteilung zeigt, dass auf der Rechtsflanke bessere

Ergebnisse erzielt werden, wenn die Modifikation nur auf ein Rad verteilt wird. Die weiteren Hauptverzahnungsdaten haben dagegen einen vernachlässigbar geringen Einfluss auf den gewichteten Traganteil.

Bei den Verläufen des Drehfehlers  $\delta$  fallen besonders der Anstieg bei Vergrößerung des Achswinkels und der Konuswinkelaufteilung auf, die den Toleranzbereich überschreiten. So liegt in Bild 5.5 auf der Rechtsflanke ein Drehfehler von  $\delta_R = 5,2 \mu\text{m}$  (Verzahnungsqualität 4 [DIN3963 1978]) vor, wohingegen auf der Linksflanke eine geringfügige Erhöhung des Drehfehlers zu erkennen ist. Ähnliches gilt für das sich ergebende Verdrehflankenspiel, das sich mit Vergrößerung des Achswinkels und der Konuswinkelaufteilung erhöht. Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Hauptverzahnungsdaten mit einem Einfluss auf den Traganteil auch den Drehfehler und das Verdrehflankenspiel beeinflussen.

Die Ursache für die begrenzte Anwendbarkeit des analytischen Ansatzes liegt in der stirnschnittweisen Optimierung ohne Berücksichtigung der benachbarten Stirnschnitte. Zum einen ist auf Links- und Rechtsflanke die Neigung der Berührlinien nicht parallel zum Verlauf der Wälzkreisradien, zum anderen verlaufen bei schrägverzahnten Beveloidradpaarungen die Kontaktpfade (PoC) geneigt zum Stirnschnitt, sodass in Abhängigkeit der Neigung des Kontaktpfades ein Stirnschnitt mit mehreren Stirnschnitten des Gegenrads in Kontakt ist. Der geneigte Kontaktpfad und die lokalen Stirneingriffswinkel führen dazu, dass sich in einer Eingriffsstellung der geringste Abstand zwischen den Zahnflanken nicht im Wälzpunkt des Stirnschnittpaars befindet. Dies kann in einem ungewollten Eingriff mit einem benachbarten Stirnschnitt im Bereich des Zahnkopfs bzw. -fußes resultieren und so das Tragbild, den Drehfehler und das Verdrehflankenspiel negativ beeinflussen.

Ein vergleichbarer Effekt tritt bei der Fertigung eines schrägverzahnten Zylinderrads mit einer Breitenmodifikation auf [ESCHER96, S. 59 ff.]. Hier befindet sich bei kontinuierlichen Herstellverfahren der Kontaktpfad von Werkstück und Werkzeug außerhalb der Stirnschnittebene der Verzahnung, sodass ohne Anpassung der Werkzeugbahn eine ungewollte Verschränkung auf der Zahnflanke entsteht [GRAF17].

Bei den Verläufen in Bild 5.4 fallen die schlechteren Ergebnisse auf der Rechtsflanke auf. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass bei positivem Schrägungswinkel von Rad 1 die Neigung der Berührlinie  $\kappa_R$  und des PoC  $\varepsilon'_R$  ungünstiger in Bezug zum Stirnschnitt verläuft. Durch eine Vorzeichenumkehr des Schrägungswinkels ändern sich qualitativ die Ergebnisse auf Links- und Rechtsflanke, sodass die Variation der Hauptverzahnungsdaten zu schlechteren Ergebnissen auf der Linksflanke führt.

Bild 5.4 spiegelt die Auswirkung der einzeln variierten Hauptverzahnungsdaten auf das Übertragungsverhalten wider. Um einen Vertrauensbereich abzuleiten, sind jedoch auch die Wechselwirkungen der Einzeleffekte zu berücksichtigen. Hierzu werden in einem mehrstufigen vollfaktoriellen Versuchsplan die zuvor identifizierten Einzeleffekte und deren Einfluss auf die Bewertungskriterien näher betrachtet.

Die Einbaulage wird nach Tabelle 5.3 über Achswinkel und Achsversatz auf sechs bzw. vier Stufen variiert. Für die unterschiedlichen Einbaulagen besitzen die Schrägungswinkel fünf und die Konuswinkel- sowie die Modifikationsaufteilung jeweils vier Stufen. Bei der Profilverschiebung werden drei Varianten untersucht, die eine hohe Summe der Profilverschiebungsfaktoren mit ungleich verteilter und gleichmäßiger Aufteilung sowie eine geringe Summe mit ungleich verteilter Aufteilung beinhaltet.

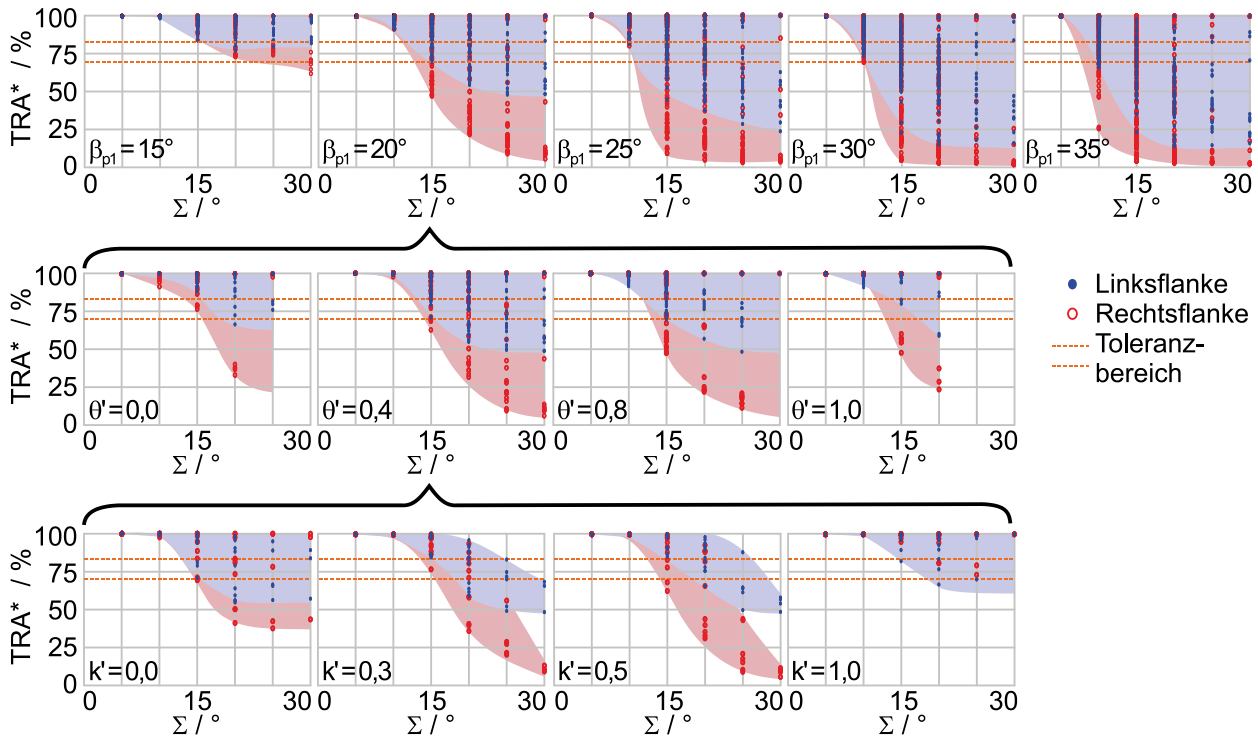
Hauptverzahnungsdaten			Stufe					
			1	2	3	4	5	6
Achswinkel	$\Sigma$	°	5	10	15	20	25	30
Achsversatz	a	mm	0	50	100	150		
Schrägungswinkel Rad 1	$\beta_{p1}$	°	15	20	25	30	35	
Konuswinkelaufteilung	$\theta'$	-	0	0,4	0,8	1		
Modifikationsaufteilung	k'	-	0	0,3	0,5	1		
Profilverschiebungsfaktor	$x_1$	-	1,0	0,3	0,6			
	$x_2$	-	0,0	0,1	0,4			

**Tabelle 5.3:** Definition der untersuchten Parameter und deren Variationsbereiche zur Ermittlung der Wechselwirkungen auf das Übertragungsverhalten

Zur Ermittlung der Wechselwirkungen auf das Übertragungsverhalten sind in Bild 5.6 die Ergebnisse des gewichteten Traganteils über dem Achswinkel ausgewertet. Jeder Punkt stellt für Links- oder Rechtsflanke ein Simulationsergebnis der möglichen Varianten aus Tabelle 5.3 dar. Im untersuchten Variationsbereich werden bei großem Achswinkel und kleinem Achsversatz bzw. einseitiger Konuswinkelaufteilung die geometrischen Grenzen an der Zehe (Unterschnitt und Mindestkopfkreis) sowie an der Ferse (Spitzgrenze) verletzt. Solch eine Beveloidradpaarung wird in der Auswertung nicht berücksichtigt, da etwaige Korrekturmaßnahmen wie die Änderung der Zahnbreiten, Konuswinkel oder Profilverschiebungsfaktoren die Ergebnisse verfälschen. Daher sind insbesondere ab einem Achswinkel von  $\Sigma > 20^\circ$  weniger Ergebnisse vorhanden, da überwiegend nur Paarungen mit gleichmäßiger Konuswinkelaufteilung und großem Achsversatz auslegbar sind.

Für alle Verläufe in Bild 5.6 zeigt sich mit steigendem Achs- bzw. Konuswinkel eine Verringerung des Traganteils. Interessant ist, dass mit einem Achswinkel von  $\Sigma = 30^\circ$  noch ein gutes Ergebnis erzielt wird, wenn die Verzahnungsdaten zweckmäßig ausgewählt

werden. An den oberen Verläufen ist zu erkennen, dass sich mit steigendem Schrägungswinkel der Traganteil verringert. Bei Vorgabe des Schrägungswinkels  $\beta_{p1} = 15^\circ$  liegen die Ergebnisse oberhalb bzw. für große Achswinkel innerhalb des Toleranzbereichs. Bereits bei  $\beta_{p1} = 20^\circ$  befindet sich der gewichtete Traganteil der Rechtsflanke deutlich unterhalb des Toleranzbereichs. Dieser Trend wird mit steigendem Schrägungswinkel verstärkt.



**Bild 5.6:** Einfluss der Wechselwirkungen auf den gewichteten Traganteil  $TRA^*$  über dem Achswinkel  $\Sigma$  bei Variation des Schrägungswinkels  $\beta_{p1}$ , Variation der Konuswinkelaufteilung  $\theta'$  ( $\beta_{p1} = 20^\circ$ ), Variation der Modifikationsaufteilung  $k'$  ( $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta' = 0,4$ )

Die mittleren Verläufe zeigen die Ergebnisse des gewichteten Traganteils für  $\beta_{p1} = 20^\circ$  und einer variierten Konuswinkelaufteilung  $\theta'$ . Für extreme Aufteilungen liegen für große Achswinkel keine Ergebnisse vor, da die Profilverschiebungsgrenzen verletzt werden. Die Aufteilung der Konuswinkel zeigt keinen eindeutigen Einfluss auf den Traganteil. Die Verringerung mit zunehmendem Achswinkel lässt schlussfolgern, dass sich nicht die Aufteilung, sondern der Wert der Konuswinkel entscheidend auf den Traganteil auswirkt. Die unteren Verläufe stellen nur die Ergebnisse für  $\beta_{p1} = 20^\circ$  und  $\theta' = 0,4$  bei unterschiedlicher Modifikationsaufteilung  $k'$  dar. Bis zu einem Achswinkel von  $\Sigma = 15^\circ$  zeigen sich keine Unterschiede in den Verläufen. Bei weiterer Vergrößerung des Achswinkels tritt für  $k' = 1$  keine signifikante Änderung des Traganteils ein. Die besseren Ergebnisse im Vergleich zu den anderen Aufteilungen können darauf zurückgeführt werden, dass das hier



modifizierte Rad 2 einen geringen Schrägungswinkel aufweist. Interessant ist, dass bei einer Aufteilung auf beide Räder für Achswinkel  $\Sigma \geq 25^\circ$  kein Traganteil oberhalb des Toleranzbereichs erzielbar ist. Wird die Modifikation hingegen vollständig auf Rad 1 aufgebracht, werden selbst mit Achswinkel von  $\Sigma = 30^\circ$  noch zufriedenstellende Ergebnisse erzielt.

In Bild A.4 in Anhang A.4 sind der Drehfehler und die Abweichung zum definierten Verdrehflankenspiel ausgewertet. Die Verläufe zeigen einen vergleichbaren Trend hin zu unbefriedigenden Ergebnissen bei Vergrößerung des Achs- und Schrägungswinkels. So besitzt eine Zahnflanke mit geringem gewichteten Traganteil in der Regel auch einen erhöhten Drehfehler, wie beispielhaft in Bild 5.5 dargestellt ist.

Insgesamt legt die Untersuchung der Wechselwirkungen den Schluss nahe, dass die Berechnungsmethode insbesondere bei großen Konus- und Schrägungswinkeln an ihre Grenzen kommt. Die weiteren Parameter wie Achsversatz, Konuswinkelaufteilung und Profilverschiebungsfaktoren haben nur einen geringen, indirekten Effekt auf das gewichtete Tragbild, da auch sie Konus- und Schrägungswinkel beeinflussen. Wie die Gleichungen für  $\kappa$  (2.7) und  $\varepsilon'$  (4.20) zeigen, führen Konus- und Schrägungswinkel zu einer schräg über die Zahnflanke verlaufenden Berührlinie sowie einem geneigten Kontaktpfad gegenüber dem Stirnschnitt. Daraus resultiert, dass beim Abwälzen ein Stirnschnitt mit mehreren Stirnschnitten des Gegenrads in Eingriff kommt. Dies wird jedoch bei der Optimierung mit lokal angepassten Verzahnungsdaten nicht berücksichtigt.

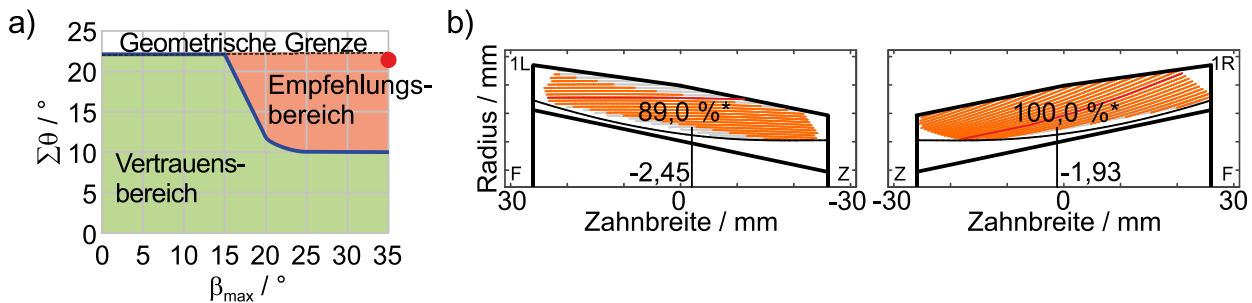
### **5.3 Ableiten eines Vertrauensbereichs für die Berechnungsmethode**

Die Auswertung in Bild 5.6 kann analog für die weiteren Variationsstufen von  $\beta$  und  $\theta'$  durchgeführt werden, sodass sich ein Vertrauensbereich sowie Auslegungsempfehlungen für die Optimierung einer Beveloidradpaarung ableiten lassen.

Die Untersuchung der Wechselwirkungen hat ergeben, dass besonders der Achswinkel bzw. der Konuswinkel und der Schrägungswinkel einen signifikanten Einfluss auf das Übertragungsverhalten modifizierter Beveloidradpaarungen haben.

Der Vertrauensbereich kann nach Bild 5.7a über dem maximalen Schrägungswinkel  $\beta_{\max}$  der Radpaarung und der Summe der Konuswinkel  $\Sigma\theta$  dargestellt werden. Für eine Zahnbreite von 50 mm werden die geometrischen Grenzen an Zehe oder Ferse in Abhängigkeit der gewählten Profilverschiebungsfaktoren bei einer Konuswinkelsumme  $\Sigma\theta \approx 22,5^\circ$  erreicht. Bis zum Schrägungswinkel  $\beta_{\max} = 15^\circ$  kann der Ansatz zur Optimierung uneingeschränkt angewendet werden. Für den Schrägungswinkel  $\beta_{\max} = 20^\circ$  verringert sich der

Vertrauensbereich bereits auf eine Konuswinkelsumme  $\Sigma\theta = 12,5^\circ$ . Für größere Schrägungswinkel ist noch eine maximale Konuswinkelsumme  $\Sigma\theta = 10^\circ$  möglich.



HVD:  $\Sigma = 30^\circ$ ;  $a = 150$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 35^\circ$ ;  $\theta' = 0,4$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 1,0$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 5.7:** a) Vertrauensbereich über maximalem Schrägungswinkel  $\beta_{max}$  und Konuswinkelsumme  $\Sigma\theta$  sowie b) Beveloidradpaarung nach Auslegungsempfehlung

Soll aufgrund vorgegebener Randbedingungen dennoch eine Beveloidradpaarung im rot gekennzeichneten Empfehlungsbereich ausgelegt werden, kann unter Berücksichtigung folgender Empfehlungen die analytische Optimierung erfolgreich durchgeführt werden. Die Empfehlungen sind nach ihrer Wirksamkeit sortiert, wobei die Punkte 3 und 4 aufgrund der geometrischen Grenzen nur bedingt umsetzbar sind.

1. Modifikation des Rads mit dem geringeren Schrägungswinkel
2. Modifikation des Rads mit dem geringeren Konuswinkel
3. Summe der Profilverschiebungsfaktoren möglichst gering
4. Gleichmäßige Aufteilung der Profilverschiebung

Die in Bild 5.7a durch den roten Punkt hervorgehobene Beveloidradpaarung liegt weit außerhalb des Vertrauensbereichs und wird unter Berücksichtigung der Punkte 1, 2 und 4 optimiert. Für die extreme Einbaulage ( $\Sigma = 30^\circ$ ,  $a = 150$  mm) und Vorgabe des Schrägungswinkels  $\beta_{p1} = 35^\circ$  können die Tragbilder in Bild 5.7b erzielt werden, wenn die Modifikation komplett auf Rad 2 aufgebracht wird. Rad 2 hat einen geringeren Konus ( $\theta_{p2} = 8,85^\circ$ ) und Schrägungswinkel ( $\beta_{p2} = -12,26^\circ$ ) im Vergleich zu Rad 1.

Die Neigung der Berührlinie und des Kontaktpfads wird zwar als Ursache für die Einschränkung der Optimierung hervorgehoben, aufgrund der lokal angepassten Verzahnungsdaten ist es jedoch nicht möglich, ausgehend vom absoluten Wert direkt auf die Anwendbarkeit der Berechnungsmethode zu schließen. Dies zeigt sich anhand der unterschiedlichen Ergebnisse bei der Aufteilung der Modifikation. Die minimalen Änderungen der lokal angepassten Verzahnungsdaten beeinflussen die Neigung der Berührlinie und des Kontaktpfads nur geringfügig, führen jedoch teilweise zu deutlichen Unterschieden im Übertragungsverhalten.

## 5.4 Theoretische Untersuchungen im verlagerten Achssystem

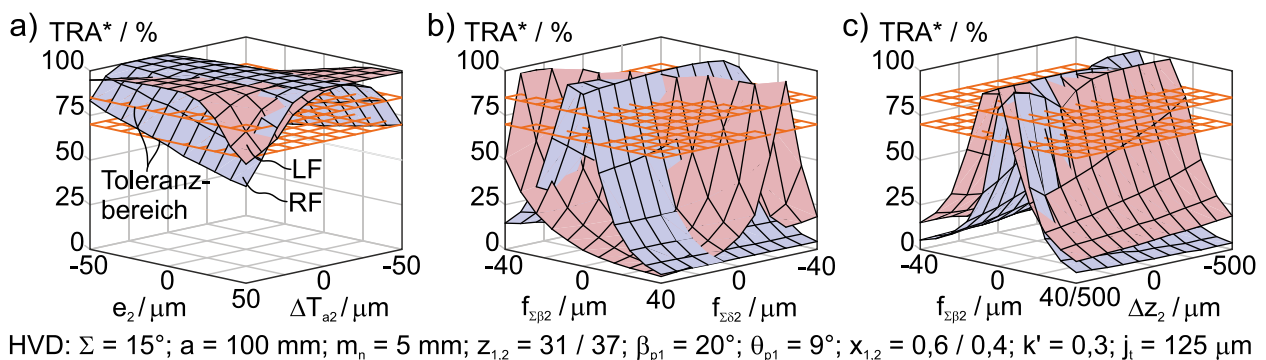
Die Parameterstudie mit dem abgeleiteten Vertrauensbereich zeigt die Anwendbarkeit der analytischen Berechnungsmethode bei fehlerfreier Achsanordnung der Beveloidradpaarung. Wie in den Kapiteln 4.5 und 4.6 vorgestellt wird, führen Abweichungen bei der Fertigung und Montage sowie Verformungen im Bereich der Verzahnung zu Flankenverlagerungen, die durch Zahnflankenmodifikationen zu kompensieren sind.

In einer Sensitivitätsanalyse wird für vorgegebene Achslageabweichungen das Übertragungsverhalten exemplarisch an der modifizierten Referenzverzahnung untersucht. Die Abweichungen werden in Anlehnung an Kapitel 4.5 definiert, sodass sich das verlagerte Achssystem über die Größen in Tabelle 5.4 beschreiben lässt. Der Variationsbereich der Abweichungen orientiert sich an DIN 3964 [DIN3964 1980], die die zulässigen Toleranzen der Achslage von Zylinderradpaarungen festlegt. Der untersuchte Bereich der Achsneigung und -schränkung sowie der Achsabstandsabweichung entspricht ISO-Toleranzfeld (IT) 9. Für die Exzentrizität werden die identischen Grenzen wie bei der Achsabstandsabweichung gewählt. Die axiale Verschiebung orientiert sich an den Grenzen von Hypoidradpaarungen mit ähnlicher Makrogeometrie [HÖHN09, S. 27].

Abweichung bezogen auf Rad 2		min	max	IT nach [DIN3964 1980]
Achsneigung	$f_{\Sigma\delta}$ $\mu\text{m}$	-40	40	9
Achsschränkung	$f_{\Sigma\beta}$ $\mu\text{m}$	-40	40	9
Exzentrizität	$e$ $\mu\text{m}$	-50	50	9
Achsabstandsabweichung	$\Delta T_a$ $\mu\text{m}$	-50	50	9
Axiale Verschiebung	$\Delta Z$ $\mu\text{m}$	-500	500	[HÖHN09, S. 27]

**Tabelle 5.4:** Abweichungen bezogen auf Rad 2 mit Variationsbereich

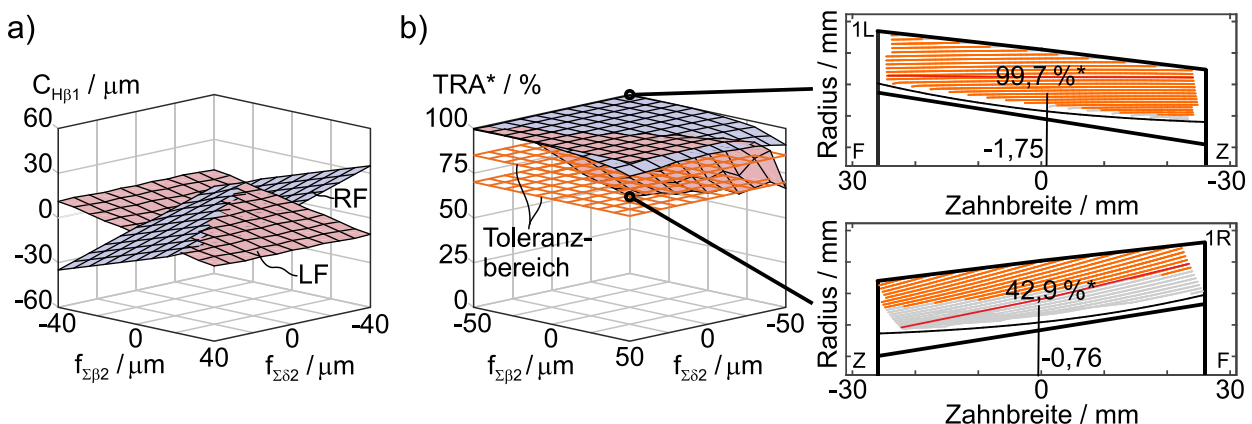
In Bild 5.8 werden die Abweichungen zur Bestimmung des verlagerten Achssystems an Rad 2 definiert und der gewichtete Traganteil für Links- und Rechtsflanke ausgewertet.



**Bild 5.8:** Gewichteter Traganteil  $\text{TRA}^*$  bei verlagertem Achssystem durch a) Exzentrizität  $e_2$  und Achsabstandsabweichung  $\Delta T_{a2}$ , b) Achsschränkung  $f_{\Sigma\beta 2}$  und -neigung  $f_{\Sigma\delta 2}$  und c) Achsschränkung  $f_{\Sigma\beta 2}$  und axiale Verschiebung  $\Delta Z_2$

Bild 5.8a zeigt die Auswirkungen der Exzentrizität  $e_2$  und Achsabstandsabweichung  $\Delta T_{a2}$  auf den Traganteil. Einzig bei maximaler Überlagerung beider Abweichungen sinkt der gewichtete Traganteil unter den Toleranzbereich nach Tabelle 5.1. Werden in Bild 5.8b die Achsschränkung  $f_{\Sigma\beta 2}$  und -neigung  $f_{\Sigma\delta 2}$  betrachtet, so zeigt sich eine deutliche Verringerung des Traganteils. Dies kann mit der Position des Tragbildschwerpunkts in Anhang A.4 begründet werden, da Kantentragen an Zehe bzw. Ferse resultiert. Die axiale Verlagerung  $\Delta z_2$  in Bild 5.8c beeinflusst den Traganteil im untersuchten Bereich kaum. Im Vergleich zu Hypoidradpaarungen [HÖHN09, S. 27] ändert sich die Position des Tragbilds nur geringfügig. In Anhang A.4 sind zusätzlich die Ergebnisse für den Drehfehler dargestellt.

Für ein durch Achsschränkung und -neigung verlagertes Achssystem kann eine Flankenlinien-Winkelmodifikation  $C_{H\beta}$  nach (4.49) bis (4.51) bestimmt werden, mit der das Tragbild wieder mittig auf der Zahnflanke ausgerichtet wird. Für die Untersuchungen in Bild 5.9 gilt, dass die Modifikationen an Rad 1 vorgenommen werden. Bild 5.9a zeigt die berechneten Flankenlinien-Winkelmodifikationen  $C_{H\beta 1}$  in Abhängigkeit des verlagerten Achssystems. Die Werte an Links- und Rechtsflanke unterscheiden sich bei windschiefer Achslage aufgrund der Verdrehung um den Winkel  $\eta$ . Mit dem Aufbringen der zusätzlichen Modifikationen kann das Tragbild im untersuchten Bereich mittig platziert und der Traganteil in Bild 5.9b signifikant erhöht werden. Für negative Achsneigungen verschiebt sich das Tragbild auf der Rechtsflanke zum Zahnkopf, sodass trotz mittigem Schwerpunkt der gewichtete Traganteil unterhalb des Toleranzbereichs liegt. Eine Verbesserung kann nur über eine zusätzliche Stirnprofil-Winkelmodifikation  $C_{H\alpha}$  erzielt werden.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu\text{m}$

**Bild 5.9:** a) Berechnete Flankenlinien-Winkelmodifikation  $C_{H\beta 1}$

b) Gewichteter Traganteil  $\text{TRA}^*$  mit zusätzlicher Zahnflankenmodifikation für ein durch Achsschränkung  $f_{\Sigma\beta 2}$  und -neigung  $f_{\Sigma\delta 2}$  verlagertes Achssystem

## 6 Experimentelle Validierung

Die bisher rein analytische Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen sowie Kontaktsimulationen mit diskret erzeugten Punktedaten soll durch experimentelle Untersuchungen validiert werden. Dazu ist die folgende Forschungsfrage zu klären.

### Forschungsfrage zu Kapitel 6

Welche experimentellen Untersuchungen sind notwendig, um die mit der Berechnungsmethode ausgelegten Beveloidradpaarungen gezielt zu validieren?

Zunächst wird ein Versuchskonzept aufgestellt und Prüfradpaarungen ausgelegt. Mit den gefertigten Rädern können am institutseigenen Drehübertragungsprüfstand (DÜP) Abwälzversuche durchgeführt werden. Als Qualitätsmerkmale der experimentellen Untersuchungen dienen die erfassten Tragbilder und die aufgezeichneten Drehfehlerverläufe, die mit den Ergebnissen aus der Kontaktsimulation zu vergleichen sind. Anschließend werden Versuchsvorbereitung, -durchführung und -auswertung vorgestellt. Mit der Versuchsauswertung wird die Berechnungsmethode validiert.

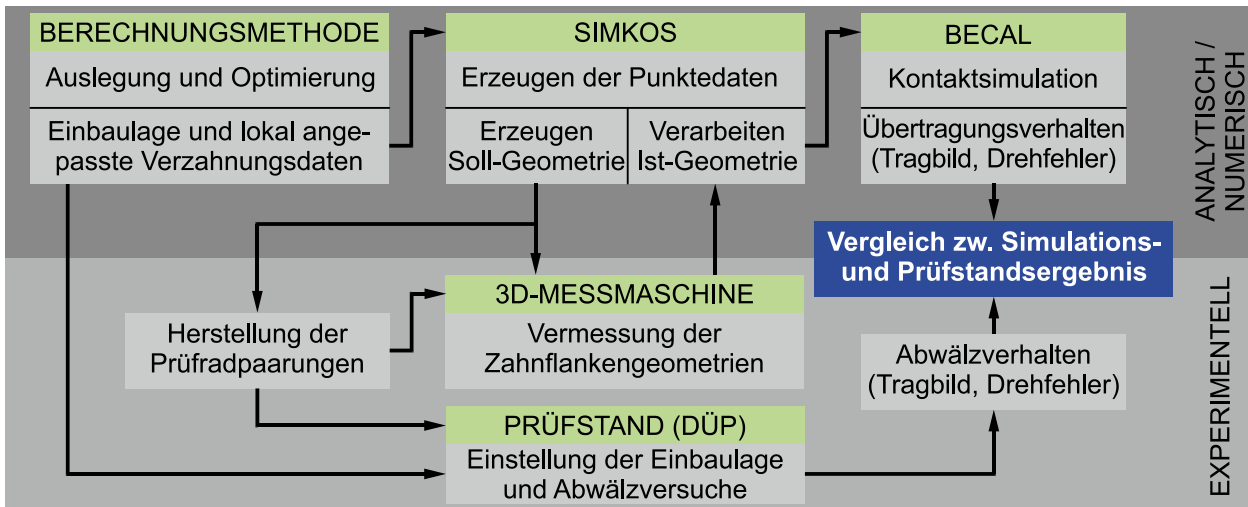
### 6.1 Versuchskonzept

Die Güte des lastfreien Abwälzverhaltens von Radpaarungen kann mittels Kontaktbild (lastfreies Tragbild) und Drehfehler charakterisiert werden. So besitzen Zylinderradpaarungen beispielsweise im nicht modifizierten Zustand bereits konjugierte Zahnflanken und wälzen lastfrei kinematisch exakt ab [KLINGELNBERG08, S. 89]. Bei Beveloidradpaarungen ist hingegen eine Modifikation der Zahnflankengeometrie erforderlich, wobei ein möglichst geringer Drehfehler im lastfreien Zustand anzustreben ist.

Die experimentelle Validierung erfolgt in Anlehnung an das Versuchskonzept in Bild 6.1. Zunächst werden drei Prüfradpaarungen ausgelegt und optimiert. Um die Anzahl der Kombinationen zu erhöhen, werden segmentierte Räder mit unterschiedlicher Zahnflankengeometrie am Umfang eingesetzt.

Die mittels Fünf-Achs-Fräsen hergestellten Prüfräder werden an einer 3D-Messmaschine vermessen. Als Bezugsgeometrie dient die in SimKoS erzeugte Soll-Geometrie der Verzahnung. Die gemessenen Geometrien der Zahnflanke werden in SimKoS importiert und verarbeitet, sodass die tatsächlichen Zahnflankengeometrien als Punktedaten vorliegen. Mit BECAL werden diese in einer numerischen Kontaktsimulation abgewälzt und so die simulierten Tragbilder und Drehfehlerverläufe ermittelt. Das Ergebnis aus BECAL wird

mit dem am DÜP ermittelten Abwälzverhalten verglichen, um die mit der Berechnungsmethode analytisch optimierten Beveloidradpaarungen zu validieren.



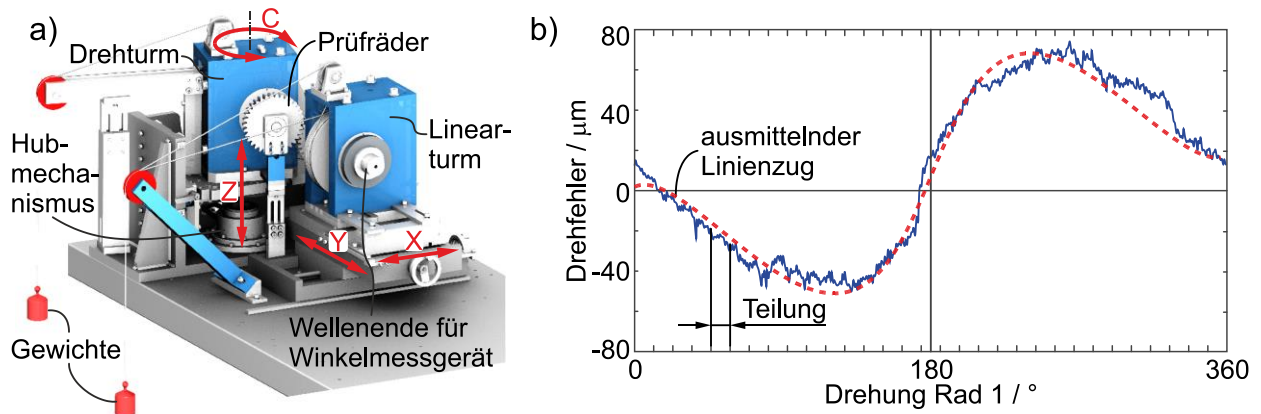
**Bild 6.1:** Versuchskonzept zur Validierung der Ergebnisse der Berechnungsmethode

## 6.2 Versuchsplanung

Vor den Abwälzversuchen am Prüfstand sind mit der Planung der Versuche die Vorgehensweise zur Versuchsvorbereitung und -durchführung festzulegen. Anschließend sind unter Berücksichtigung der Einschränkungen des institutseigenen Prüfstands die Prüfradpaarungen auszulegen.

### 6.2.1 Vorgehensweise zur Versuchsvorbereitung und -durchführung

Die Versuche werden am modifizierten DÜP des IKTD durchgeführt, siehe Bild 6.2a. Der Prüfstand stammt aus der Arbeit von Alxneit [ALXNEIT10, S. 131 ff.] und wurde ursprünglich zum Abwälzen von Beveloidradpaarungen in schneidender Achslage konzipiert. Eine grundlegende Erweiterung des Prüfstandsbaus erfolgte im Rahmen der Untersuchungen von Schöler [SCHÖLER21, S. 126 ff.] und bildet den in dieser Arbeit verwendeten Stand ab. Mit dem umgesetzten Hubmechanismus am Drehturm können Beveloidradpaarungen in windschiefer Achslage untersucht werden [SCHÖLER21, S. 128 f.]. Zur Einstellung der Einbaulage stehen der Linearturm mit den Freiheitsgraden in x- und y-Richtung sowie der Drehturm mit den Freiheitsgraden in z-Richtung und um die c-Achse zur Verfügung. Mit dem Prüfstand nach Bild 6.2a kann ein Achswinkel bis 40° und ein Achsversatz bis 200 mm eingestellt werden, was bei der Auslegung der Prüfradpaarungen zu berücksichtigen ist [SCHÖLER21, S. 127]. Um ein Abheben der Zahnflanken zu verhindern, werden Gewichte angebracht, die den Kontakt zwischen den zu untersuchenden Flanken sicherstellen.



**Bild 6.2:** a) Drehübertragungsprüfstand (DÜP) nach [SCHÖLER21, S. 129]

b) Drehfehlerverlauf und ausmittelnder Linienzug über einer Raddrehung

Zur Bestimmung der Güte des lastfreien Abwälzverhaltens am DÜP werden das Tragbild und der Drehfehlerverlauf erfasst. Das Tragbild bildet alle Traglinien und der Drehfehlerverlauf den Unterschied zwischen der Ist- und Sollübersetzung während eines vollständigen Durchwälzens eines Zahnpaars ab [KLINGELNBERG08, S. 89 f.].

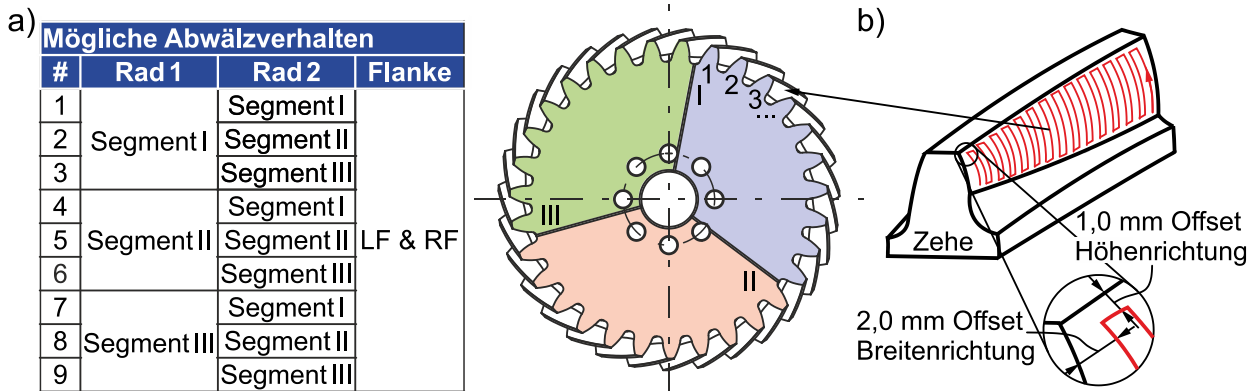
Die Erfassung des Tragbilds wird in Anlehnung an VDI 2609 [VDI2609 2000] durchgeführt, in der die Vorgehensweise zur Vorbereitung und Durchführung der Tragbildprüfung beschrieben ist. Für die lastfreie Prüfung ist darauf zu achten, dass die Zahnflanken quasi lastfrei abwälzen, wobei der Kontakt mittels Handkraft erzeugt wird [VDI2609 2000, S. 3]. Voruntersuchungen am Prüfstand ergaben, dass eine Handkraft von knapp 50 N erforderlich ist, um mit den angebrachten Gewichten ein gleichmäßiges Abwälzen durchzuführen. Als Kontrastmittel wird eine Tuschiepaste verwendet, mit der nach vorgeschriebener Vorbehandlung der Zahnflanke und des Pinsels eine Schichtdicke von 5 - 12 µm realisiert werden kann [VDI2609 2000, S. 4 f.]. Die Dokumentation und Auswertung der erfassten Tragbilder wird fotografisch durchgeführt, wobei die Verzerrung aufgrund der Krümmung in Profil- und Flankenrichtung zu berücksichtigen ist.

Zur Bestimmung des Drehfehlerverlaufs werden die Beveloidradpaarungen quasi lastfrei abgewälzt, indem sich durch Anbringen von Gewichten entweder die Links- oder Rechtsflanke ständig im Eingriff befindet. Die Vorgehensweise kann VDI 2608 [VDI2608 2001] entnommen werden. Zur Aufzeichnung des Drehfehlerverlaufs wird der in [ALXNEIT10, S. 128] beschriebene Messaufbau mit jeweils einem Winkelmeßgerät RPN 886 der Fa. Heidenhain [HEIDENHAIN06] verwendet. Der aufgezeichnete Drehwinkel wird in dem angepassten Messprogramm von Glaser [GLASER07] aufbereitet, sodass ein Vergleich zu den simulierten Ergebnissen des Drehfehlers möglich ist. Bei der Kontaktsimulation mittels BECAL werden Abweichungen wie Exzentrizitäten und Teilungsfehler bei der

Bestimmung des Drehfehlers nicht berücksichtigt. Daher wird wie in Bild 6.2b mittels einer Umdrehung ein ausmittelnder Linienzug nach [VDI2608 2001, S. 13] aufgezeichnet, um die entstehenden langwelligen Anteile zu verrechnen. Durch diese Mittelung werden analog zur Kontaktsimulation ausschließlich die kurzwelligen Anteile ausgewertet, welche die Einflüsse von Profil- und Flankenlinienabweichungen wiedergeben [DIN1328-1 2018].

### 6.2.2 Auslegung der Prüfradpaarungen

Die Abwälzversuche der Prüfradpaarungen dienen zur Validierung der konjugierten Modifikation sowie zum Nachweis einer praxisnahen Auslegung, bei der sich durch gezielt aufgebrachte Zahnflankenmodifikationen ein definiertes Tragbild ausbildet. Wie in Bild 6.3a dargestellt, werden hierzu drei Beveloidradpaarungen mit segmentierten Rädern ausgelegt. Die am Umfang der Räder verteilten Segmente können jeweils eine unterschiedliche Mikrogeometrie besitzen. Zusätzlich werden die Links- und Rechtsflanken teilweise abweichend modifiziert. Die Herausforderung bei der Wahl der Mikrogeometrie besteht darin, dass jede Variante mit den drei Varianten des Gegenrads ohne Klemmen oder Kantentragen abwälzt. Dies ist zwingend erforderlich, da zur Messung des Drehfehlerverlaufs eine Raddrehung durchzuführen ist.



**Bild 6.3:** a) Segmentiertes Prüfrad und Nummerierung der Zähne  
 b) Messprogramm mit mäanderförmigem Abtasten der Zahnflanke

In Tabelle 6.1 sind die Verzahnungsdaten mit den unterschiedlichen Zahnflankengeometrien zusammengefasst. Paarung 1 besteht aus einer Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage. Für die Verzahnungssegmente gilt:

- I: nicht modifiziert
- II: Rechtsflanke konjugierte Modifikation und Linksflanke konjugierte Modifikation mit zusätzlicher Modifikation der SBK
- III: Modifikation des Verdrehflankenspiels über quadratisches Polynom



Paarung 2 besteht aus einem nicht modifizierten Zylinder- und einem Beveloidrad in windschiefer Achslage. In Abhängigkeit der Einbaulage wird das Beveloidrad so ausgelegt, dass für die Verzahnungssegmente gilt:

- I: nicht modifiziert
- II: Rechtsflanke konjugierte Modifikation und Linksflanke Skalierung von 98 %
- III: konjugierte Modifikation mit zusätzlicher Modifikation der SBK

Hauptverzahnungsdaten			Paarung 1		Paarung 2		Paarung 3	
			Rad 1	Rad 2	Rad 1	Rad 2	Rad 1	Rad 2
Achswinkel	$\Sigma$	°	15		12		30	
Achsversatz	a	mm	100		80		168	
Normalmodul	$m_n$	mm	5					
Zähnezahl	z	-	31	37	23	42	31	34
Zahnbreite	b	mm	52	50	52	50	52	50
Profilwinkel	$\alpha_p$	°	20					
Schrägungswinkel	$\beta$	°	20,00	-11,92	20,00	-14,68	14,95	14,95
Konuswinkel	$\theta$	°	9,00	5,65	0,00	12,24	1,05	1,05
Profilverschiebungsfaktor	x	-	0,6	0,4	0,5	0,3	0,0	0,0
Verdrehflankenspiel	$j_t$	$\mu\text{m}$	125		150		150	
<b>Verzahnungssegment I</b>								
			keine		keine		keine	
<b>Verzahnungssegment II</b>								
Modifikationsaufteilung	k'	-	0,3		1,0		0,5	
Skalierungsfaktor (LF / RF)	s'	-	1 / 1	1 / 1	-	0,98 / 1	1 / 1	1 / 1
Zahnflankenmodifikation über die SBK (LF / RF)	$C_b$	$\mu\text{m}$	0 / 0	-25 / 0	-	-	-	-10 / 0
	$C_H$	$\mu\text{m}$	-60 / 0	0 / 0	-	-	-	0 / 0
	$C_0$	$\mu\text{m}$	15 / 0	0 / 0	-	-	-	0 / 0
Zahnflankenmodifikation über das Verdrehflankenspiel	$j_{tb}$	$\mu\text{m}$	-		-		-	
	$j_{tH}$	$\mu\text{m}$	-		-		-	
	$j_{t0}$	$\mu\text{m}$	-		-		-	
<b>Verzahnungssegment III</b>								
Modifikationsaufteilung	k'	-	0,3		1,0		0,5	
Skalierungsfaktor (LF / RF)	s'	-	1 / 1	1 / 1	-	0,98 / 1	1 / 1	1 / 1
Zahnflankenmodifikation über die SBK (LF / RF)	$C_b$	$\mu\text{m}$	-	-	-	-25 / -30	-	-
	$C_H$	$\mu\text{m}$	-	-	-	60 / 0	-	-
	$C_0$	$\mu\text{m}$	-	-	-	0 / 0	-	-
Zahnflankenmodifikation über das Verdrehflankenspiel	$j_{tb}$	$\mu\text{m}$	-20		-		-80	
	$j_{tH}$	$\mu\text{m}$	-50		-		0	
	$j_{t0}$	$\mu\text{m}$	25		-		0	

**Tabelle 6.1:** Verzahnungsdaten und Zahnflankenmodifikationen der Prüfradpaarungen

Paarung 3 besteht aus zwei Beveloidrädern mit geringen Konuswinkeln und großem Achsversatz ( $a \approx 90 \% \cdot a_{\text{max}}$ ). Die Modifikation ist hälftig auf beide Räder aufgeteilt und für die Verzahnungssegmente gilt:

- I: nicht modifiziert
- II: Rechtsflanke konjugierte Modifikation und Linksflanke konjugierte Modifikation mit zusätzlichen Modifikationen der SBK
- III: Modifikation des Verdrehflankenspiels über quadratisches Polynom

### **6.3 Versuchsvorbereitung und -durchführung**

Vor den Abwälzversuchen am DÜP werden die Prüfräder an einer 3D-Messmaschine vermessen. Die ermittelte Ist-Geometrie der Zahnflanke wird mit SimKoS verarbeitet, sodass eine Kontaktsimulation mit der tatsächlich gefertigten Zahnflankengeometrie durchführbar ist.

#### **6.3.1 Vermessung der Verzahnungen und Auswertung**

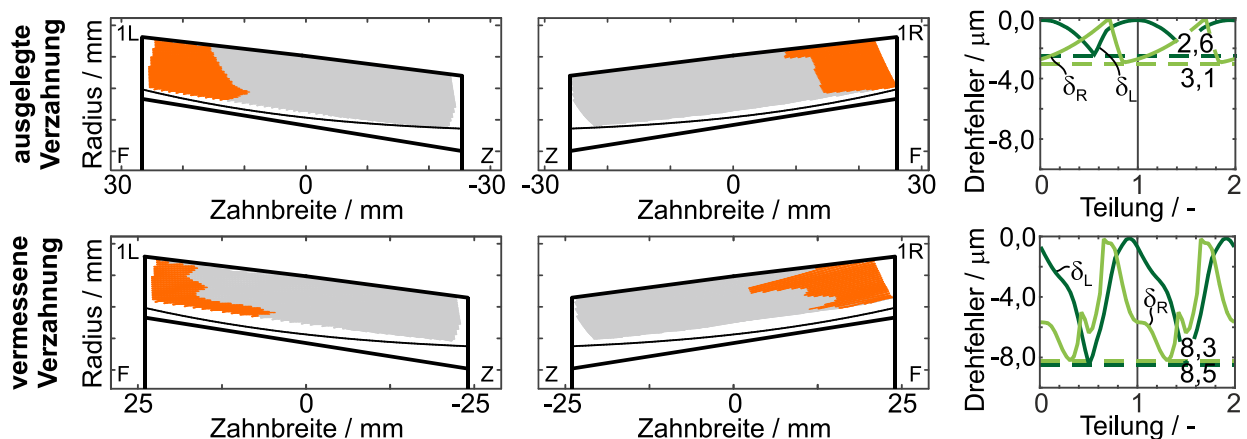
An der 3D-Koordinatenmessmaschine Zeiss Prismo 7 kann mittels des taktilen Messverfahrens die komplexe Zahnflankengeometrie mit einer Wiederholgenauigkeit von unter  $2\ \mu\text{m}$  erfasst werden. Dazu werden die Zahnflanken mit einem Punkteraster der Auflösung  $35 \times 35$  topografisch vermessen. Die äquidistant angeordneten Messpunkte werden mäanderförmig in Profilrichtung abgetastet, wie in Bild 6.3b für die Rechtsflanke dargestellt. Die Soll-Geometrie mit der entsprechenden Auflösung wird in SimKoS erzeugt, wobei in Zahnhöhenrichtung und -breitenrichtung ein Offset von 1,0 mm bzw. 2,0 mm vorgesehen wird, um Randeffekte bei der Vermessung zu vermeiden [VDI2612-1 2018, S. 34].

Insgesamt werden an jedem Prüfrad sechs Zähne (zwei je Segment) viermal vermessen. Die Nummerierung der Zähne erfolgt ausgehend von der Markierung im Verzahnungssegment I und wird im Uhrzeigersinn fortgeführt. Die gemessene Ist-Geometrie der Zahnflanke wird in SimKoS importiert und für die Kontaktsimulation in Form von Punktedaten verwendet, sodass die tatsächliche Zahnflankengeometrie berücksichtigt wird. Eine Auswertung der Flankenabweichungen ist damit nicht zwingend erforderlich, wird jedoch zur Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse in Anhang A.5 dargestellt [VDI2612-1 2018, S. 49].

#### **6.3.2 Kontaktsimulation der Ist-Geometrie der Zahnflanken**

Für die Durchführung von Kontaktsimulationen in BECAL müssen die Punktedaten einen Zahnflanken- und Zahnfußbereich umfassen. Da die Zahnfußgeometrie auf das lastfreie Abwälzverhalten keinen Einfluss hat, wird an die gemessene Ist-Geometrie der Zahnflanke eine analytische Zahnfußgeometrie modelliert. Dies hat den Vorteil, dass der

Zahnfußbereich nicht vermessen werden muss. Bild 6.4 zeigt exemplarisch den Vergleich der Ergebnisse aus der Kontaktsimulation zwischen ausgelegter und vermessener Zahnflankengeometrie von Paarung 1, Verzahnungssegment III. Es ist zu beachten, dass die vermessene Verzahnung aufgrund des Auswertebereichs verringerte Kopfkreisradien und Zahnbreiten im Vergleich zur ausgelegten Verzahnung besitzt.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu\text{m}$

**Bild 6.4:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe der ausgelegten und vermessenen Zahnflankengeometrie von Paarung 1, Verzahnungssegment III

Der Vergleich der Tragbilder zeigt eine hohe Übereinstimmung zwischen den ausgelegten und vermessenen Verzahnungen. Beim Drehfehler sind hingegen deutliche Unterschiede im Verlauf und maximalen Wert erkennlich. Der Unterschied auf der Linksflanke kann auf den Stirnprofil-Formfehler (Balligkeit) und einen Stirnprofil-Winkelfehler zurückgeführt werden [VDI2608 2001, S. 17], was die Messschriebe in Profilrichtung aus Anhang A.5 bestätigen. Auch auf der Rechtsflanke erhöht sich der Drehfehler aufgrund der Abweichung in Profilrichtung. Außerdem tritt bei der Beschleunigung von Rad 2 eine kurzzeitige Verzögerung ein, was durch Welligkeiten auf der Zahnflanke hervorgerufen werden kann.

Die Ergebnisse der weiteren Verzahnungssegmente und Paarungen befinden sich in Anhang A.6. Auch hier stimmen die Tragbilder der ausgelegten und vermessenen Verzahnungen gut überein. Beim Drehfehler treten aufgrund der Fertigungsabweichungen ebenfalls deutliche Unterschiede auf.

### 6.3.3 Einstellungen am DÜP zur Versuchsdurchführung

Eine ausführliche Beschreibung der Vorgehensweise zu den Einstellungen am DÜP wurde unter Anleitung des Autors von Müller erarbeitet [MÜLLER20]. Darüber hinaus werden in [MÜLLER20] die Einbautoleranzen aufgrund der verwendeten Messmittel

(Messschieber und -uhren) hergeleitet und mittels Fehlerfortpflanzung in genormte Abweichungen für Kegelradpaarungen [DIN3965-4 1986] umgerechnet.

Nach dem Verschrauben der Zahnräder wird zunächst unter Abwälzen eine Kontrollmessung gegen Taumeln durchgeführt. Der Achsversatz kann über den Hubmechanismus des Drehturms eingestellt werden. Nach dem Festklemmen wird die Neigung des Drehturms gemessen, um eine mögliche Achsneigung und -schränkung von Rad 2 auszuschließen. Anschließend ist eine genaue Einstellung des Achswinkels zwingend erforderlich, da bereits kleine Abweichungen zu einem verfälschten Abwälzverhalten führen. Die Empfindlichkeit eines verlagerten Achssystems ist bereits in Kapitel 5.4 in Kontakt-simulationen theoretisch untersucht. Die Einstellung des Achswinkels erfolgt indirekt über trigonometrische Zusammenhänge, indem der Linearturm verfahren wird [MÜLLER20, S. 29]. Abschließend können mit dem Linearturm die Einbauabstände über die axiale und radiale Lage von Rad 1 so eingestellt werden, dass das simulierte Verdrehflankenspiel erzielt wird.

Unter Berücksichtigung der verwendeten Messmittel werden in Tabelle 6.2 beispielhaft für Paarung 1 die Einbautoleranzen und Genauigkeitsklassen abgeleitet. Für die Toleranzen wird konservativ angenommen, dass sich der ermittelte Wert und die Standardabweichung, welche von der Messgenauigkeit der Messmittel abhängt [MÜLLER20, S. 59], addieren.

Einstellung	Soll-Wert	Ist-Wert	Standardabweichung	Einbautoleranz	IT nach [DIN3965-4 1986]
Achswinkel $\Sigma$ °	15,000	14,995	+/- 0,007	- 0,012	9
Achsversatz a mm	100,000	100,000	+/- 0,035	0,035	10

**Tabelle 6.2:** Einbautoleranzen und erreichbare Genauigkeitsklasse am DÜP

Aufgrund der Einbautoleranzen wird die finale Einbaulage durch Ermittlung des Tragbilds kontrolliert und ggf. angepasst. Hierzu eignet sich das Abwälzen von modifizierten Verzahnungssegmenten, da diese sensibel auf Verlagerungen reagieren.

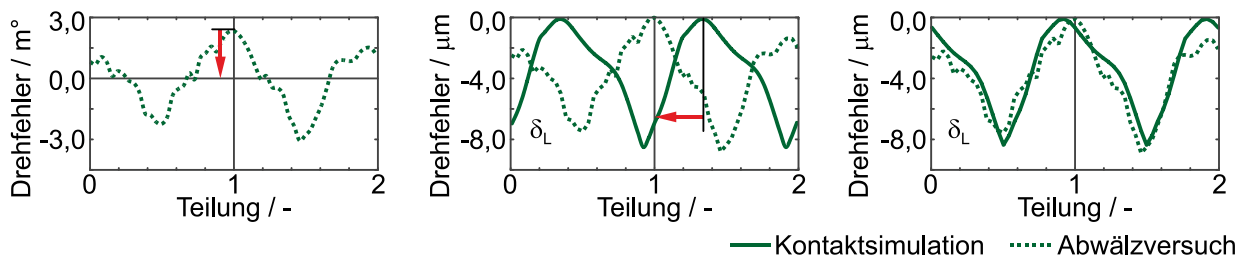
## 6.4 Versuchsergebnisse und Auswertung

Für den Vergleich der Tragbilder und der Drehfehlerverläufe ist zu beachten, dass die Kontaktsimulation der vermessenen Zahnflankengeometrie mit einer reduzierten Zahnbreite und -höhe durchgeführt wird. Neben der Validierung der Berechnungsmethode wird die Reproduzierbarkeit überprüft.

### 6.4.1 Vergleich der Tragbilder und Drehfehlerverläufe

Die fotografierten Tragbilder sind aufgrund der Krümmung der Zahnflanke verzerrt und werden digital nachbearbeitet. Die an die Berandung eingepassten Aufnahmen werden anschließend mit den simulierten Tragbildern verglichen. Auch der Vergleich der aufgezzeichneten Drehfehlerverläufe mit den Simulationsergebnissen ist nicht direkt möglich.

Bild 6.5 zeigt die Auswertung und Umrechnung der Drehfehlerverläufe. Die am Prüfstand aufgezeichnete Drehwinkeldifferenz wird zunächst auf den Teilkreis von Rad 2 umgerechnet und der Maximalwert gleich null gesetzt. Anschließend erfolgt eine Phasenverschiebung des Drehfehlerverlaufs aus der Simulation, da sich dieser periodisch mit jeder Zahnteilung wiederholt. Die Verschiebung ist erforderlich, da am Prüfstand die Aufzeichnung des Drehfehlers in der Regel nicht am Zahneingriff beginnt.



**Bild 6.5:** Auswertung und Umrechnung der Drehfehlerverläufe über zwei Teilungen

Der Vergleich im rechten Teilbild zeigt eine hohe Übereinstimmung zwischen simuliertem und aufgezeichnetem Drehfehler. Von den dargestellten Teilungen wird zur statistischen Auswertung jeweils nur der Abschnitt berücksichtigt, in dem die vermessenen Zähne miteinander abwälzen. Neben der visuellen Übereinstimmung wird als objektives Maß der Korrelationskoeffizient  $r_{xy}$  herangezogen, der die Güte der linearen Abhängigkeit zweier Messwertreihen  $x_i$  und  $y_i$  beschreibt [HUDE20, S. 33 ff.].

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^k \{(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}} \quad (6.1)$$

Für die Definition in (6.1) gilt für den Korrelationskoeffizienten  $-1,0 \leq r_{xy} \leq 1,0$ . Ein Korrelationskoeffizient von 1,0 bedeutet eine lineare Übereinstimmung bzw.  $-1,0$  eine gegenläufige Übereinstimmung der Messwertreihen. Für die vorliegenden Drehfehlerverläufe ist ein Korrelationskoeffizient von 1,0 anzustreben, wobei eine starke Abhängigkeit der Messwertreihen ab einem Wert von etwa 0,8 vorliegt (u. a. in [HUDE20, S. 35]).

Neben dem Korrelationskoeffizienten, der eine qualitative Aussage über die Drehfehlerverläufe ermöglicht, wird der quadratische Mittelwert der Messabweichungen  $\Delta_\delta$  herange-

zogen. Damit wird eine quantitative Beurteilung der Differenz der Messwertreihen  $\delta_{xy}$  vorgenommen. Diese Maßzahl erfasst die Präzision und Richtigkeit der Messung und berechnet sich über den systematischen  $f_\delta$  und zufälligen Fehler  $s_\delta$  [HEDDERICH20, S. 107 f.]. Die Gleichungen vereinfachen sich, da für den Zielwert  $\delta_{xy0} = 0$  gilt.

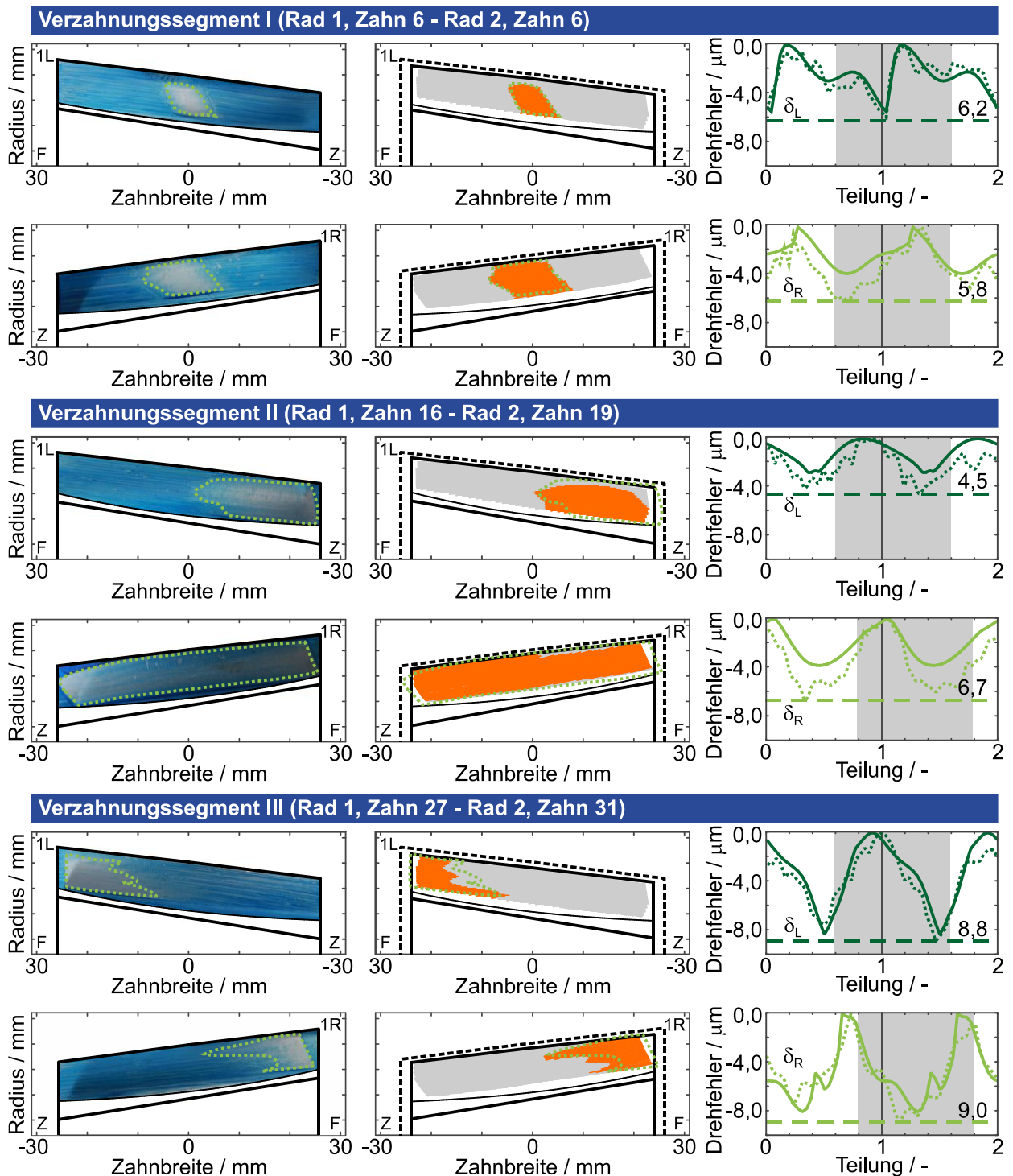
$$\Delta_\delta = \sqrt{\frac{k-1}{k} \cdot s_\delta^2 + f_\delta^2} \quad \text{mit} \quad s_\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\delta_{xyi} - \overline{\delta_{xy}})^2}{(k-1)}} \quad , \quad f_\delta = \delta_{xy0} - \overline{\delta_{xy}} \quad (6.2)$$

Im Vergleich zum zufälligen Fehler, der die Streuung um den Mittelwert quantifiziert, gibt (6.2) die Streuung um einen Zielwert an [HEDDERICH20, S. 107].

In Bild 6.6 sind die Ergebnisse von Paarung 1 zusammengefasst. Es befinden sich jeweils die Ergebnisse der Linksflanke oben und der Rechtsflanke unten. Links sind die am Prüfstand ermittelten und in der Mitte die simulierten Tragbilder mit vermessener Zahnflankengeometrie dargestellt. Der grün umrandete Bereich kennzeichnet die Kontaktfläche beim Abwälzversuch und wird mit dem Ergebnis aus der Kontaktsimulation verglichen. Bei den Simulationsergebnissen ist die tatsächliche Zahnbreite und -höhe gestrichelt dargestellt. Auf der rechten Seite sind die ausgewerteten Drehfehlerverläufe gegenübergestellt. Es werden jeweils zwei Teilungen aufgezeichnet, wobei zur statistischen Auswertung nur der grau hervorgehobene Bereich verwendet wird, in dem die vermessenen Zähne miteinander abwälzen.

Auf der Links- und Rechtsflanke sind die Tragbilder des nicht modifizierten Verzahnungssegments I für Kontaktsimulation und Abwälzversuch deckungsgleich. Auch die Drehfehlerverläufe auf der Links- und Rechtsflanke zeigen ähnliche charakteristische Merkmale. Dies wird durch den Korrelationskoeffizienten bestätigt, der nach (6.1) für die Rechtsflanke bei  $r_{xyR} = 0,908$  und für die Linksflanke bei  $r_{xyL} = 0,897$  liegt. Eine Übersicht der Korrelationskoeffizienten und der quadratischen Mittelwerte der Messabweichungen aller Paarungen folgt in Tabelle 6.3.

Die Zahnflankengeometrie des modifizierten Verzahnungssegments II ist so angepasst, dass auf der Linksflanke ein Tragen im Bereich der Zehe bis zur Zahnbreitenmitte erzielt wird und auf der Rechtsflanke ein komplett ausgebildetes Tragbild vorliegt. Für beide Drehrichtungen kann die ausgelegte Modifikation durch die Tragbilder im Abwälzversuch bestätigt werden. Das ausgebildete Tragbild auf der Rechtsflanke liegt auch in der Kontaktsimulation der vermessenen Zahnflankengeometrie vor, wobei beim Vergleich darauf zu achten ist, dass das Tragbild durch die reduzierte Zahnbreite beschränkt wird.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100$  mm;  $m_n = 5$  mm;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125$   $\mu$ m

**Bild 6.6:** Vergleich der Tragbilder und Drehfehlerverläufe der Abwälzversuche und Kontaktsimulationen von Paarung 1

Für beide Drehrichtungen besitzen die am Prüfstand ermittelten Drehfehlerverläufe größere Maximalwerte. Qualitativ ähneln sich die Verläufe jedoch, was der jeweilige Korrelationskoeffizient ( $r_{xyL} = 0,879$  und  $r_{xyR} = 0,989$ ) bestätigt.

Verzahnungssegment III stellt eine Zahnflankengeometrie dar, die mit einem veränderlichen Verdrehflankenspiel entlang der Zahnbreite modifiziert ist. Die Traganteile der Abwälzversuche und Kontaktsimulationen besitzen beide eine ähnliche Form. Der Kontakt findet jeweils im Bereich der Ferse statt, wobei auf der Linksflanke das Tragbild am Zahnfuß und auf der Rechtsflanke am Zahnkopf ausgeprägter ist. Die simulierten und experimentell ermittelten Drehfehler ähneln sich im Verlauf und im Maximalwert.

Die Ergebnisse der Abwälzversuche von Paarung 1 stimmen gut mit den Simulationsergebnissen überein. Mit den Verzahnungssegmenten II und III wird nachgewiesen, dass die mittels der Berechnungsmethode modifizierten Beveloidradpaarungen auch im Abwälzversuch am Prüfstand einen annähernd konjugierten Eingriff bzw. positionierte und skalierte Tragbilder besitzen.

Ein Auszug der Ergebnisse von Paarung 2 und 3 ist in Bild 6.7 dargestellt. In Anhang A.6 sind die kompletten Ergebnisse zusammengefasst. Für das Verzahnungssegment II von Paarung 2 wird die SBK so angepasst, dass auf der Rechtsflanke eine konjugierte Modifikation und auf der Linksflanke eine Skalierung von 98 % vorliegt, was zu einer Restklaffung (2 %) in Abhängigkeit des Ease-Offs auf Höhe der Profilbezugslinie führt. Für beide Drehrichtungen stimmen sowohl die Tragbilder als auch die Drehfehlerverläufe zwischen Simulation und Abwälzversuch gut überein. Bei den Drehfehlerverläufen liegt jeweils ein Korrelationskoeffizient von  $r_{xy} > 0,9$  vor.

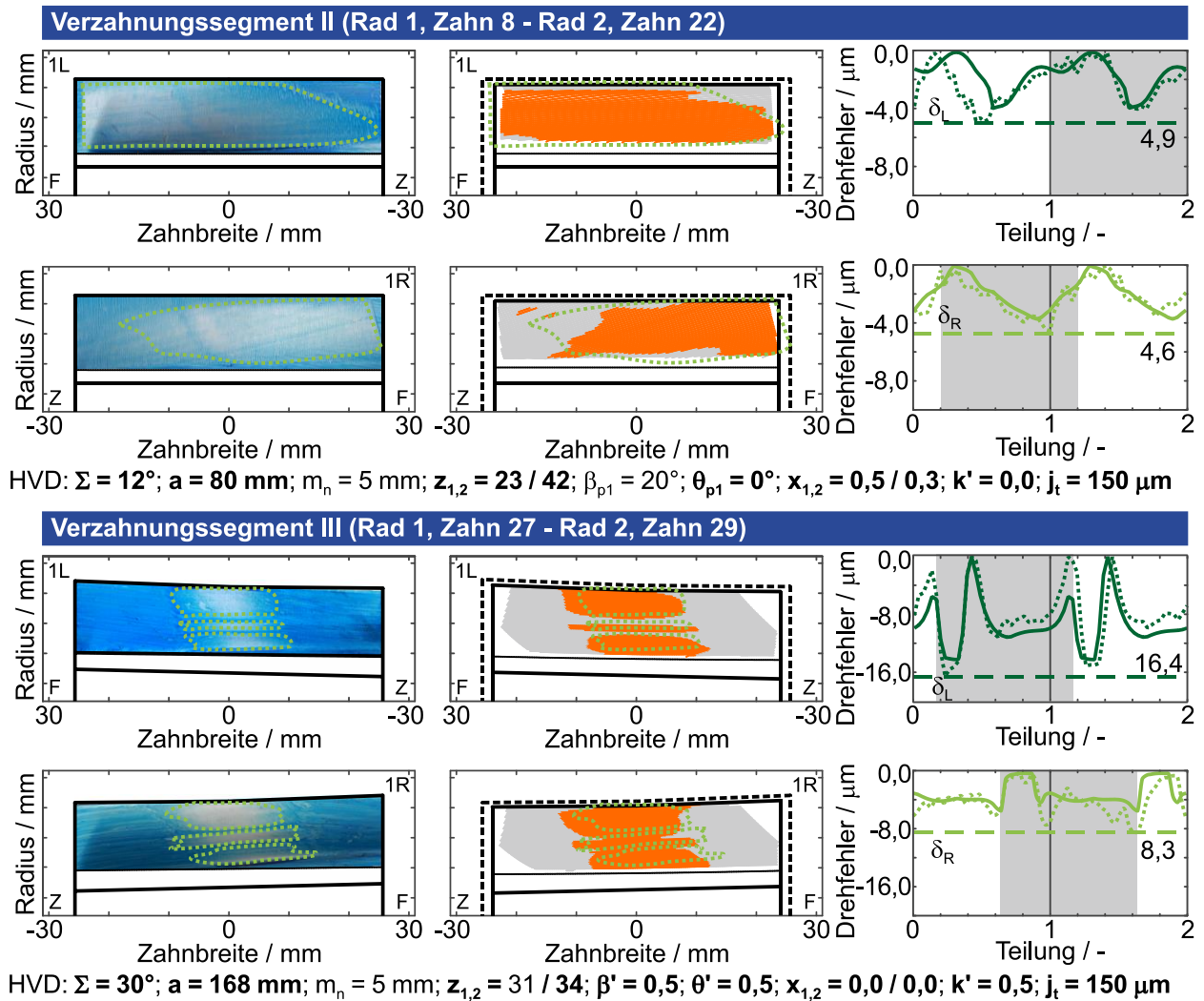
Auf der Rechtsflanke unterscheiden sich die Tragbilder der ausgelegten und vermessenen Zahnflankengeometrie aufgrund der Fertigungsabweichungen in Flankenrichtung. Die positive Flankenlinien-Winkelabweichung von Rad 1 resultiert in einer Vergrößerung des Schrägungswinkels, sodass das Tragbild hin zur Ferse verschoben ist.

Das Ergebnis zeigt jedoch die begrenzte Eignung der Skalierungsfaktoren  $s'$ , mit denen aufgrund des asymmetrischen Ease-Offs das Tragbild nicht gleichmäßig an Zehe und Ferse verringert wird. Die erforderliche Modifikation der SBK im Bereich der Zehe ist etwa dreimal so groß wie an der Ferse, weshalb auch die Skalierung im Bereich der Zehe einen deutlich größeren Einfluss hat, wie den Modifikationsbeträgen der SBK in Bild A.14 zu entnehmen ist.

Bei Paarung 3 zeigt sich in beiden Drehrichtungen für alle Verzahnungssegmente eine Eingriffsstörung, die zu einem unterbrochenen Tragbild führt, siehe Bild A.15. Exemplarisch sind in Bild 6.7 die Ergebnisse von Verzahnungssegment III dargestellt. In beiden Drehrichtungen ist dem annähernd konjugierten Eingriff eine breitenballige Modifikation



durch Variation des Verdrehflankenspiels überlagert, sodass ein mittiges Tragbild mit einem Traganteil von ca. 50 % vorliegt.



**Bild 6.7:** Auszug aus dem Vergleich der Tragbilder und Drehfehlerverläufe der Abwälzversuche und Kontaktsimulationen von Paarung 2 (oben) und 3 (unten)

Im Abwälzversuch und in der Kontaktsimulation der vermessenen Verzahnung sind die mittigen Tragbilder in beiden Drehrichtungen zwar ersichtlich, jedoch sind diese in Profilrichtung unterbrochen. Die Eingriffsstörungen zeigen sich auch bei den sprunghaften Anstiegen in den Drehfehlerverläufen. Die Auswertung der gefertigten Zahnflankengeometrien in Anhang A.5 zeigt signifikante Abweichungen in Profilrichtung. Diese Flankenformfehler führen dazu, dass das im Eingriff befindliche Zahnpaar kurzzeitig abhebt und somit das Tragbild unterbrochen wird [KLOCKE17, S. 300].

Trotz der Eingriffsstörung besitzen die simulierte und die am Prüfstand aufgezeichneten Drehfehlerverläufe ähnliche charakteristische Merkmale. So ist auf der Linksflanke in beiden Verläufen ein Anstieg und eine Abnahme am Beginn des Zahneingriffs zu erkennen,

die in Größe und Form übereinstimmen. Für die Verzahnungssegmente von Paarung 3 führt die Eingriffsstörung zu deutlich größeren Drehfehlern im Vergleich zu Paarung 1 und 2.

Tabelle 6.3 fasst die statistische Auswertung der Drehfehlerverläufe zusammen. Besonders Paarung 1 und 2 zeigen eine hohe qualitative Übereinstimmung mit Korrelationskoeffizienten zwischen 0,87 und 0,99. Der quadratische Mittelwert der Messabweichung liegt für alle Messungen unter 1,5  $\mu\text{m}$ .

Verzahnungssegment			I		II		III	
Zahnflanke			LF	RF	LF	RF	LF	RF
<b>Paarung 1</b>								
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$	$\mu\text{m}$	6,2	5,8	4,5	6,7	8,8	9,0
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$	$\mu\text{m}$	5,7	3,6	2,7	3,8	8,3	8,5
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$	-	0,897	0,908	0,879	0,989	0,931	0,869
Quad. Mittelwert der Messabweichung	$\Delta_\delta$	$\mu\text{m}$	0,795	0,585	1,170	1,20	0,919	1,345
<b>Paarung 2</b>								
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$	$\mu\text{m}$	6,0	5,2	4,9	4,6	7,8	6,2
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$	$\mu\text{m}$	4,0	3,4	3,9	3,7	5,9	3,9
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$	-	0,914	0,903	0,920	0,910	0,952	0,939
Quad. Mittelwert der Messabweichung	$\Delta_\delta$	$\mu\text{m}$	0,704	1,098	1,355	0,884	1,101	0,586
<b>Paarung 3</b>								
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$	$\mu\text{m}$	15,6	11,5	17,8	13,1	16,4	8,3
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$	$\mu\text{m}$	8,4	6,9	14,6	11,5	14,0	5,1
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$	-	0,792	0,914	0,852	0,887	0,916	0,809
Quad. Mittelwert der Messabweichung	$\Delta_\delta$	$\mu\text{m}$	3,260	1,978	2,839	2,671	2,148	2,063

**Tabelle 6.3:** Qualitative und quantitative Bewertung der Drehfehlerverläufe

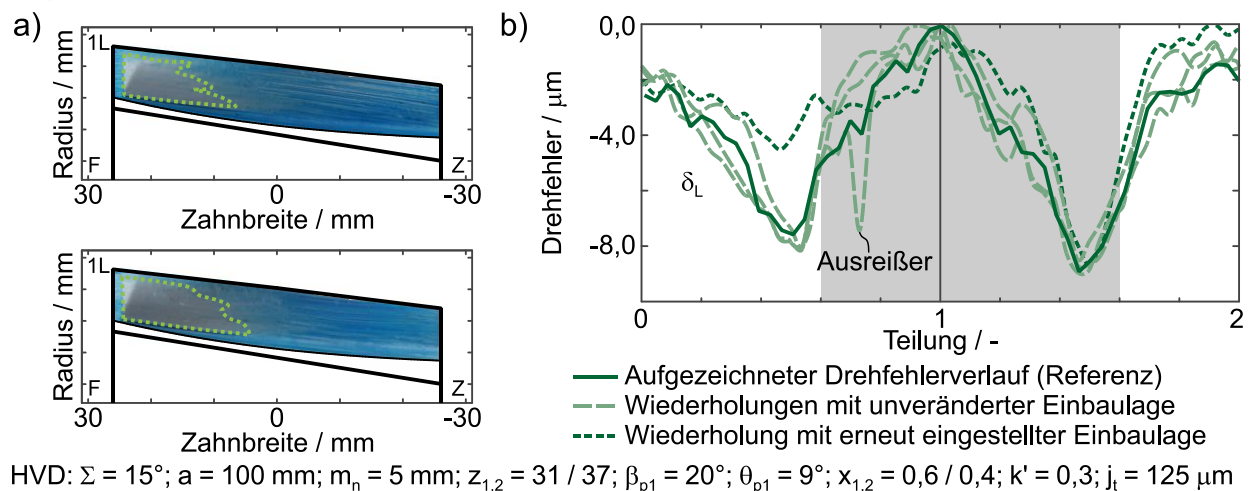
Wie bereits in Bild 6.7 für Paarung 3 dargestellt ist, führt die Eingriffsstörung zu sprunghaften Änderungen im Drehfehlerverlauf. Dies wirkt sich negativ auf die statistische Auswertung aus, da die ermittelten Abweichungen teilweise doppelt so groß sind im Vergleich zu Paarung 1 und 2. So liegen die Korrelationskoeffizienten zwischen 0,79 und 0,92 und der quadratische Mittelwert der Messabweichung deutlich über 2,0  $\mu\text{m}$ . Aufgrund der Diskretisierung der Messdaten werden in der Simulation die Sprünge eventuell nicht korrekt abgebildet.

Die Auswertung der am Prüfstand ermittelten Tragbilder und Drehfehlerverläufe zeigt eine hohe Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der Kontaktsimulation. Dies weist zum einen nach, dass das vorgestellte Versuchskonzept zielführend ist und zum anderen legt es den Schluss nahe, dass mit den Simulationsergebnissen das tatsächliche Abwälzverhalten von modifizierten Beveloidradpaarungen simulativ berechnet werden kann.

### 6.4.2 Reproduzierbarkeit und Einflussgrößen auf die Ergebnisse

Für einen aussagekräftigen Vergleich zwischen Abwälzversuch und Kontaktsimulation wird die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse vorausgesetzt. Dazu werden Untersuchungen durchgeführt, bei denen mehrmals die Einbaumaße eingestellt, die Tuschierpaste aufgetragen und die Drehfehlerverläufe ermittelt werden. Das erneute Einstellen der Einbaumaße soll den Einfluss der Einbautoleranzen aus Kapitel 6.3.3 auf die Tragbilder und Drehfehlerverläufe darstellen. Der Einfluss der einzelnen Größen ist in Tabelle 6.4 zusammengestellt.

Bild 6.8a zeigt das Tragbild der Linksflanke bei zwei nacheinander durchgeführten Abwälzversuchen ohne erneute Einstellung der Einbaulage. Trotz der identischen Anordnung unterscheidet sich die Ausprägung der Tragbilder aufgrund der Tuschierpastendicke. Bei modifizierten Zahnflankengeometrien kommt hinzu, dass beim Einstellen der Einbaulage ein erhöhter Aufwand erforderlich ist, da das Tragbild stark durch die vorliegenden Einbautoleranzen beeinflusst wird.



**Bild 6.8:** a) Tragbilder bei unterschiedlicher Tuschierpastendicke  
b) Aufgezeichnete Drehfehlerverläufe für Linksflanke von Paarung 1, Verzahnungssegment III

Das Aufzeichnen des Drehfehlers besitzt neben den Einbautoleranzen weitere Einflussgrößen wie die Sauberkeit der Zahnflanke und Reibungseffekte im An- und Abtrieb, die den Verlauf beeinflussen. Als Beispiel wird in Bild 6.8b der Drehfehlerverlauf aus Bild 6.5 als Referenz verwendet. Die gestrichelten Verläufe zeigen aufgezeichnete Drehfehlerverläufe bei unveränderten Einbaumaßen. Der Ausreißer im ersten Zahnengriff kann durch Reibungseffekte im An- und Abtrieb begründet werden. Der gepunktete Drehfehlerverlauf ist bei erneuter Einstellung der Einbaulage aufgezeichnet. Der Verlauf unter-

scheidet sich im ersten Zahneingriff stark und bildet kein ausgeprägtes Maximum, wohingegen im zweiten Zahneingriff eine große Übereinstimmung zu den weiteren Verläufen vorliegt. Die gute visuelle Übereinstimmung zeigt sich auch in der statistischen Auswertung der Drehfehlerverläufe in Anhang A.6.

Tabelle 6.4 zeigt die Einflussgrößen auf das Tragbild und den Drehfehlerverlauf. Insgesamt ist beim Aufzeichnen des Drehfehlers ein größerer Aufwand erforderlich, um die Reproduzierbarkeit zu gewährleisten. Bei der Ermittlung des Tragbilds besitzen die Einbautoleranzen einen großen Einfluss auf das Ergebnis.

	<b>Einflussgrößen</b>	<b>Tragbild</b>	<b>Drehfehlerverlauf</b>
Prüfstand	Einbautoleranzen	++	++
	Tuschierpastendicke	+	o
	Sauberkeit	+	++
	Reibungseffekte im An- und Abtrieb	o	++
Kontaktsimulation	Ausgleichspolynom	o	++
	Messdaten der Zahngeometrie	+	+

o = kein Einfluss, + = geringer Einfluss, ++ = großer Einfluss

**Tabelle 6.4:** Einflussgrößen auf die Ergebnisse der Abwälzversuche und Kontaktsimulationen

Neben der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse am Prüfstand sind auch die Ergebnisse der Kontaktsimulation zu betrachten, die von der Vermessung der Zahnflankengeometrie und dem Ausgleichspolynom abhängen.

Die Variation des Polynomgrads der Ausgleichsfläche in BECAL beeinflusst die simulierten Drehfehlerverläufe. Ein geringer Polynomgrad glättet die vermessene Zahnflankengeometrie ungewollt, sodass der Drehfehler kleiner und gleichmäßiger ausfällt. Um die vermessene Geometrie in der Kontaktsimulation möglichst genau abzubilden, wird der maximale Polynomgrad neun verwendet [SCHLECHT14].

Mehrfachiges Vermessen der Zahnflanke und Variation der Auflösung der Messpunkte in Profil- und Flankenrichtung zeigt, dass sowohl der Drehfehlerverlauf als auch das simulierte Tragbild beeinflusst werden. Der Unterschied kann auf die Wiederholgenauigkeit der Messmaschine von unter 2 µm zurückgeführt werden.

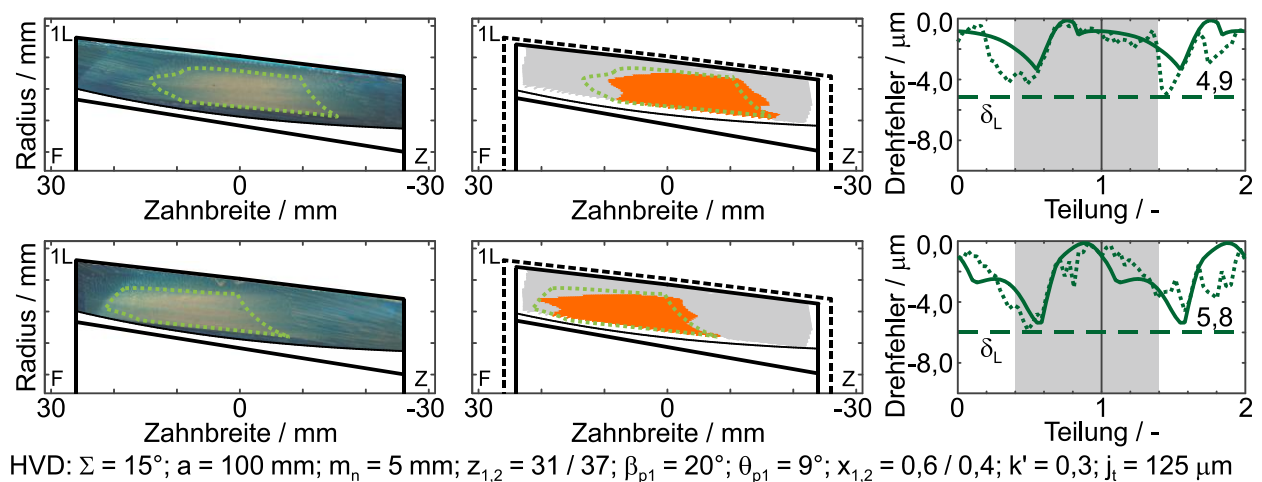
### 6.4.3 Abwälzversuche bei verlagertem Achssystem

Die Ergebnisse der Reproduzierbarkeit zeigen, dass die Einstellung der Einbaulage einen wesentlichen Einfluss auf das Abwälzverhalten insbesondere für modifizierte Beveloidradpaarungen hat. Daher wird nachfolgend experimentell untersucht, inwieweit eine

Abweichung der Einbaumaße zu einer Verlagerung des Tragbilds führt und den Drehfehler beeinflusst.

Die Einbaulage am DÜP wird über den Linear- und Drehturm eingestellt. Zur Umsetzung eines verlagerten Achssystems kann entweder am Linearturm eine axiale Verlagerung oder am Drehturm ein abweichender Achswinkel oder Achsversatz eingestellt werden. Exemplarisch wird bei Paarung 1 die Linksflanke von Verzahnungssegment II untersucht. Hierbei ist der konjugierten Modifikation eine ballige und lineare Zahnflankenmodifikation überlagert, sodass das Tragbild im Bereich der Zehe liegt, wie in Bild 6.6 gezeigt ist.

Bild 6.9 stellt die Ergebnisse am DÜP bei abweichendem Achswinkel dar. Mit einer gezielten Verringerung des Achswinkels um  $0,025^\circ$  verlagern sich die Tragbilder aus dem Abwälzversuch und der Simulation hin zur Zahnbreitenmitte. Bei weiterer Erhöhung der Abweichung auf  $0,050^\circ$  verschiebt sich der Kontaktbereich in den Tragbildern hin zur Ferse. Der Vergleich zwischen den verlagerten Tragbildern aus Abwälzversuch und Simulation zeigt eine gute Übereinstimmung.



**Bild 6.9:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe der Abwälzversuche und Kontaktsimulationen mit Achswinkelabweichungen (oben:  $f_\Sigma = -0,025^\circ$ , unten:  $f_\Sigma = -0,050^\circ$ )

Bei den Drehfehlerverläufen ist zu erkennen, dass sich durch Verringern des Achswinkels sowohl der am Prüfstand ermittelte als auch der simulierte Maximalwert des Drehfehlers vergrößert. Aufgrund der Einbautoleranz in Kapitel 6.3.3 ist jedoch zu beachten, dass der am Prüfstand eingestellte Achswinkel nicht exakt dem simulierten gleich, sodass die dargestellten Ergebnisse nur als Tendenz anzusehen sind.

Zur Untersuchung einer Exzentrizität wird über den Hubmechanismus des Drehturms der Achsversatz abweichend eingestellt. Entsprechend den theoretischen Untersuchungen in Kapitel 5.4 ist für eine Exzentrizität  $e < 0,25$  mm keine Änderung im Abwälzverhalten

erkennbar. Sowohl in der Kontaktsimulation als auch im Abwälzversuch verschiebt sich erst bei weiterer Vergrößerung das Tragbild auf der Linksflanke in Richtung Zehe und der Drehfehler erhöht sich.

Eine axiale Verlagerung wird über den Linearturm erzielt, indem der Einbauabstand von Rad 1 schrittweise verringert wird. Bei einer axialen Verlagerung von  $\Delta z_1 = 1,0$  mm richtet sich das Tragbild mittig auf der Zahnflanke aus. Eine weitere Verringerung ist aufgrund des Verklemmens der Verzahnung nicht möglich. Der Vergleich zwischen den Tragbildern aus der Kontaktsimulation und dem Abwälzversuch zeigt auch hier eine gute Übereinstimmung.

Eine experimentelle Untersuchung der konjugiert modifizierten Rechtsflanke im verlagerten Achssystem ist am verwendeten Prüfstand nicht zielführend umsetzbar. Das Abwälzverhalten reagiert empfindlich auf Abweichungen insbesondere beim Achswinkel, da bereits durch die vorliegende Einbautoleranz das Tragbild und der Drehfehler merklich beeinflusst werden.

## 7 Beurteilung der Herstellbarkeit modifizierter Beveloidräder

Die experimentelle Validierung der Berechnungsmethode zeigt, dass die Simulations- und Prüfstandsergebnisse hinsichtlich des Übertragungsverhaltens gut übereinstimmen. Die Herstellung von Beveloidrädern durch Fünf-Achs-Fräsen ist jedoch aufgrund hoher Fertigungskosten nicht zielführend. Daher soll folgende Forschungsfrage geklärt werden, die zur Beurteilung einer Fertigung modifizierter Beveloidräder mit kontinuierlichem Wälzfräsen bzw. -schleifen (KWS) beiträgt.

### Forschungsfrage zu Kapitel 7

Können Beveloidräder mit lokal angepassten Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite wirtschaftlich auf konventionellen Verzahnungsmaschinen gefertigt werden?

Zunächst ist die Werkzeugbahn ausgehend von der Stirnschnittbezugskurve zu bestimmen, indem die Gleichungen in [TRAUT19, S. 128 f.] für lokal angepasste Verzahnungsdaten erweitert werden. Anschließend sollen Untersuchungen innerhalb des Vertrauensbereichs aus Kapitel 5.3 durchgeführt werden, die Aufschluss über die Herstellbarkeit auf konventionellen Stirnradverzahnungsmaschinen geben.

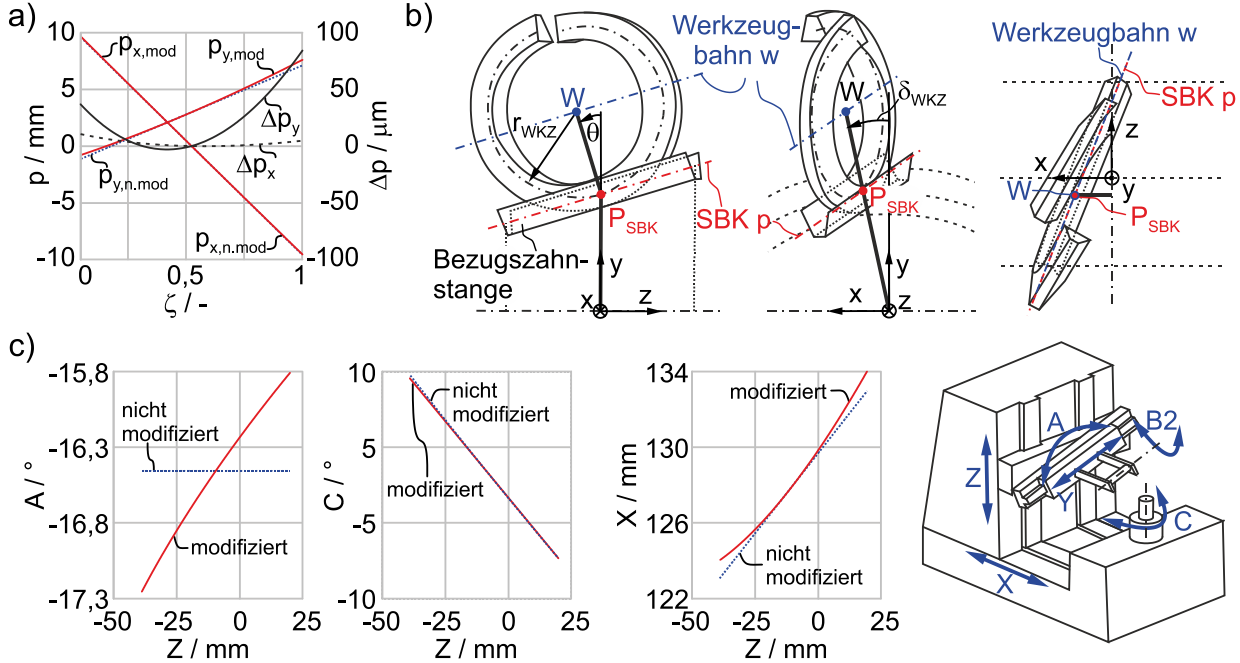
Für den Stand der Forschung hinsichtlich der Fertigungssimulation von Beveloidrädern sei auf [RÖTHLINGSHÖFER12; ZIMMER16; TRAUT19] verwiesen. Zum Verständnis der verwendeten Fertigungssimulation aus [TRAUT19] wird der Zusammenhang zwischen der Werkzeugbahn und der Stirnschnittbezugskurve sowie die resultierende Werkzeugbewegung beschrieben.

### 7.1 Berechnung der Werkzeugbahn mittels Stirnschnittbezugskurve

Die analytische Berechnungsmethode und Modellierung der Zahnflanke über die SBK bietet den Vorteil, dass die Werkzeugbahn  $w$  in Abhängigkeit der lokal angepassten Verzahnungsdaten und des Verlaufs der SBK  $p$  ausgedrückt werden kann. Darüber hinaus befähigt die gezielte Anpassung der SBK, die zur Herstellung von zusätzlichen Zahnflankenmodifikationen erforderliche Werkzeugbahn direkt abzuleiten.

Die Modellierung des Werkzeugprofils und die zugrunde liegende Durchdringungsrechnung nach [ESCHER96] ist in [TRAUT19, S. 119 ff.] für Beveloidräder hergeleitet. Zur Anwendung mit lokalen Konus- und Schrägungswinkeln sowie Profilverschiebungen entlang der Zahnbreite werden die Gleichungen der Werkzeugbahn in dieser Arbeit erweitert.

Der Verlauf der SBK  $p$  ist aus der analytischen Berechnungsmethode bekannt. Bild 7.1a zeigt für ein modifiziertes und ein nicht modifiziertes Rad den Verlauf der SBK  $p$  in radialer (x-) und tangentialer (y-) Richtung aufgetragen über der normierten Zahnbreite. Der Verlauf von  $\Delta p_{x,y}$  ist ballig aufgrund der lokal angepassten Verzahnungsdaten.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \mathbf{0}$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 7.1:** a) Verlauf der SBK  $p$  in radialer und tangentialer Richtung über der normierten Zahnbreite  $\zeta$ , b) Zusammenhang zwischen SBK und Werkzeugbahn in Anlehnung an [TRAUT19, S. 126] und c) resultierende Werkzeugbewegung

Bild 7.1b visualisiert die Position des Werkzeugs relativ zur Bezugzahnstange (Zahn-  
 lücke). Der Stirnschnittbezugspunkt  $P_{SBK}$  kennzeichnet die Position auf der SBK. Durch  
 Umrechnung von  $P_{SBK}$  auf den Werkzeugbezugspunkt  $W$  kann die Werkzeugbahn  $w$   
 bestimmt werden. Diese Bahn beschreibt die Bewegung des Werkzeugs, wobei der  
 Werkzeugdrehwinkel  $\delta_{WKZ}$  die Anordnung bestehend aus Werkzeug und Bezugzahn-  
 stange um die z-Achse dreht [TRAUT19, S. 126].

$$\tan \delta_{WKZ}(\zeta) = \tan \eta(\zeta) \cdot \sin \theta_p(\zeta) \quad \text{mit} \quad \eta(\zeta) = \beta_p(\zeta) - \gamma_0 \quad (7.1)$$

Der Werkzeugdrehwinkel hängt vom lokalen Konuswinkel und Schwenkwinkel  $\eta$  ab, der  
 sich über den lokalen Schrägungswinkel und Einstellwinkel der Schnecke  $\gamma_0$  berechnen  
 lässt. Die Werkzeugbahn  $w$  wird über (7.2) bis (7.4) beschrieben.

$$w_x(\zeta) = p_x(\zeta) \cdot \cos \delta_{WKZ}(\zeta) - \left( r_{WKZ} \cdot \cos \theta_p(\zeta) + r_p(\zeta) + p_y(\zeta) \right) \cdot \sin \delta_{WKZ}(\zeta) \quad (7.2)$$

$$w_y(\zeta) = \left( r_{WKZ} \cdot \cos \theta_p(\zeta) + r_p(\zeta) + p_y(\zeta) \right) / \cos \delta_{WKZ}(\zeta) \quad (7.3)$$



$$w_z(\zeta) = p_z(\zeta) - r_{WKZ} \cdot \sin \theta_p(\zeta) \quad (7.4)$$

Der konstante Werkzeugbezugsradius  $r_{WKZ}$  ist in der Seitenansicht in Bild 7.1b eingezeichnet. Neben der Positionierung des Werkzeugs wird auch dessen Verdrehung von den lokal angepassten Verzahnungsdaten beeinflusst. Für eine optimale Einstellung beträgt der Fertigungsschwenkwinkel  $\eta_{WKZ}$ .

$$\sin \eta_{WKZ}(\zeta) = \sin \eta(\zeta) \cdot \cos \theta_p(\zeta) \quad (7.5)$$

Die Werkzeugbahn  $w$  kann in Abhängigkeit der Verzahnungsmaschine und der Freiheitsgrade in Maschineneinstellungen umgerechnet werden. Die Maschinenkinematik in Bild 7.1c besitzt jeweils drei translatorische und rotatorische Achsen, wobei sich bei KWS die Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade auf drei reduziert [ESCHER96, S. 74 f.]. Die Komponente  $w_z$  wird über den Axialschlitten in Z-Richtung und die Komponente  $w_y$  über den Radialschlitten in X-Richtung angefahren. Die Komponente  $w_x$  ergibt sich aus einer der Abwälzbewegung überlagerten Drehung des Werkstücks um die Drehachse C. Die Schwenkachse A wird mit dem Schwenkwinkel  $\eta_{WKZ}$  verdreht. In den nachfolgenden Simulationen wird davon ausgegangen, dass die Schwenkachse A während der Zahradbearbeitung angepasst werden kann. Dies ist nicht auf allen Maschinen möglich, was zu einer nicht optimalen Einstellung zwischen Werkzeug und Werkstück führt. Untersuchungen in [TRAUT19, S. 132 f.] zeigen den Einfluss bei konstanter Schwenkachse A.

In Bild 7.1c sind die Maschineneinstellungen des modifizierten und nicht modifizierten Beveloidrads dargestellt. Beim nicht modifizierten Rad wird die Schwenkachse A während der Fertigung konstant gehalten. Die Drehachse C und die radiale Zustellung X ändern sich linear über der Zahnbreite. Beim modifizierten Rad sind insbesondere bei der Schwenkachse und der Radialzustellung nicht lineare Verläufe zu erkennen, die sich deutlich von den Verläufen des nicht modifizierten Rads unterscheiden.

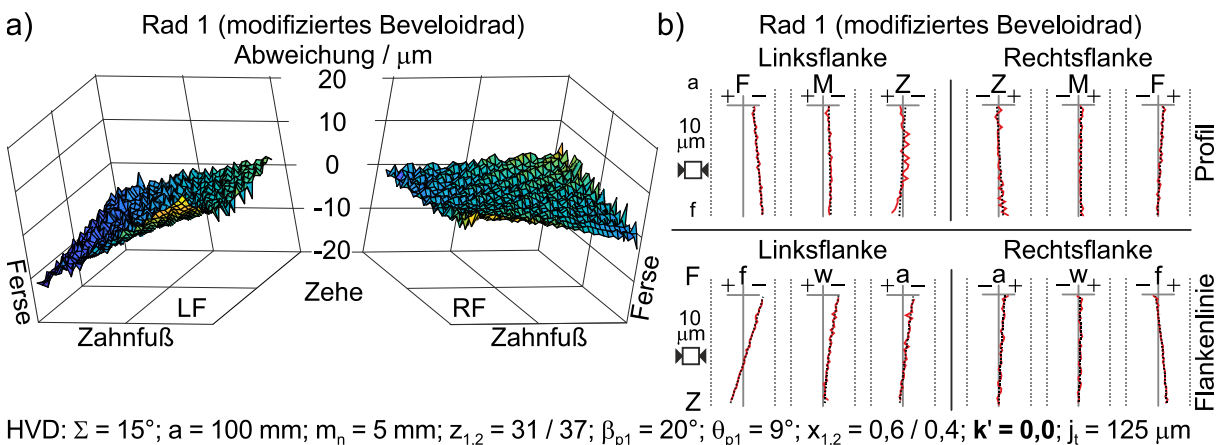
## 7.2 Ergebnisse der Fertigungssimulation

Neben der bisherigen funktionalen Bewertung (Tragbild, Drehfehler und Verdrehflankenspiel) erfolgt bei der Fertigungssimulation eine geometrische Qualitätsprüfung, indem ein Vergleich zwischen der Zahnflankengeometrie aus dem Flankengenerator und aus der Fertigungssimulation durchgeführt wird. Zunächst werden die Ergebnisse der Fertigungssimulation für die modifizierte Referenzverzahnung dargestellt und mit der analytisch berechneten Zahnflankengeometrie verglichen.

### 7.2.1 Vergleich zwischen den Zahnflankengeometrien aus dem Flankengenerator und aus der Fertigungssimulation

Mit den lokal angepassten Verzahnungsdaten aus der Berechnungsmethode und den erweiterten Gleichungen für die Werkzeugbahn aus Kapitel 7.1 kann eine Fertigungssimulation durchgeführt werden. Bild 7.2 zeigt die Ergebnisse des geometrischen Vergleichs der modifizierten Referenzverzahnung, bei der die komplette Modifikation auf Rad 1 aufgebracht ist. Die Zahnflankengeometrie aus dem Flankengenerator dient als Soll-Geometrie und wird mit der Ist-Geometrie aus der Fertigungssimulation verglichen. Für beide Geometrien wird ein Punkteraster der Auflösung 60 x 60 gewählt, welches in der Fertigungssimulation durch jeweils 70 Wälz- und Vorschubstellungen erzeugt wird.

Die topografische Darstellung der Abweichung zwischen der im Flankengenerator und in der Fertigungssimulation erzeugten Zahnflankengeometrie ist in Bild 7.2a dargestellt. Auf der Linksflanke ist ein deutlicher Flankenlinien-Winkelfehler erkennbar. In Profilrichtung liegt ein gegenläufiger Fehler an Zehe und Ferse vor. Auf der Rechtsflanke hingegen sind die Abweichungen deutlich geringer ( $< 5 \mu\text{m}$ ).



**Bild 7.2:** Abweichung der Zahnflankengeometrien aus dem Flankengenerator und der Fertigungssimulation als a) topografische Darstellung und b) Messschiebe

Eine genaue Untersuchung der Abweichungen ist mithilfe der Profil- und Flankenmessungen in Bild 7.2b möglich. Hierzu werden je Zahnflanke drei Schnitte in Profil- und Flankenrichtung betrachtet [BACHMANN13]. In Profilrichtung sind die Stirnschnitte an Zehe (Z), Mitte (M) und Ferse (F) und in Flankenrichtung auf Höhe des Kopfkreis- (a), Wälzkreis- (w) und Fußkreisradius (f) ausgewertet. Im Gegensatz zu Zylinderrädern wird bei der Flankenrichtung ein Kegelschnitt entsprechend des Konuswinkels verwendet [BACHMANN13]. In der Profilmessung der Linksflanke ist eine wechselnde Steigung überlagert mit einer Balligkeit zu erkennen, was auf eine Schränkung in Breitenrichtung

hindeutet. Auf der Rechtsflanke liegt ebenfalls entlang der Zahnbreite eine variierende Profilabweichung vor. Die Schränkung ist nach [VDI2612-1 2018] negativ, da am Zahnfuß der Zehe zu viel und am Zahnkopf der Ferse zu wenig Material vorhanden ist. In Flankenlinienrichtung liegt auf der Linksflanke eine Winkelabweichung vor, was bei der in der Fertigungssimulation erzeugten Verzahnung einen zu kleinen Schrägungswinkel zur Folge hat. Der Vergleich für das nicht modifizierte Rad 2 ist in Anhang A.7 dargestellt.

Mithilfe des Zahnradvergleichs in Bild 7.2a wird eine quadratische Regressionsfläche ermittelt, um eine Beurteilung der Fertigungssimulation zu ermöglichen. Die erforderlichen Korrekturterme setzen sich in Profil- und Flankenlinienrichtung aus einer Balligkeit und Winkelabweichung sowie der Schränkung in Flankenlinienrichtung zusammen [VDI2612-1 2018]. Auch höherwertige Korrekturterme wie in [BRIMMERS21] sind grundsätzlich denkbar. Es zeigt sich jedoch, dass eine Restabweichung von  $\leq 2 \mu\text{m}$  trotz höherem Polynomgrad bestehen bleibt.

Tabelle 7.1 fasst die ermittelten Werte für das modifizierte und nicht modifizierte Rad zusammen. Das modifizierte Rad besitzt auf der Linksflanke eine deutliche Flankenlinien-Winkelabweichung im Vergleich zum nicht modifizierten Rad. Zusätzlich führt die Schränkung zu einer ungewollten Verwindung der Zahnflanke. Beim nicht modifizierten Rad ist in Breitenrichtung keine Abweichung erkennbar. Es ist jedoch ein Trend hin zu einer Balligkeit und Winkelabweichung in Profilrichtung festzustellen [TRAUT19, S. 142 f.].

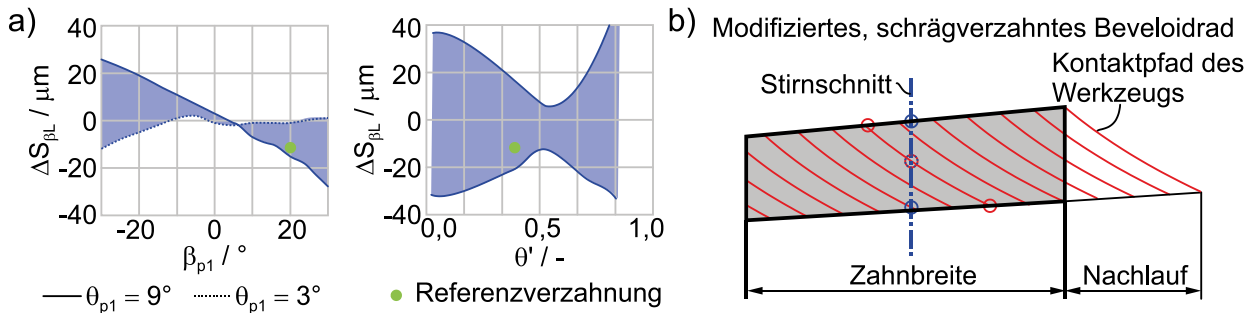
Erforderliche Korrektur		$\Delta C_\beta / \mu\text{m}$	$\Delta C_{H\beta} / \mu\text{m}$	$\Delta S_\beta / \mu\text{m}$	$\Delta C_\alpha / \mu\text{m}$	$\Delta C_{H\alpha} / \mu\text{m}$	Rest / $\mu\text{m}$
Rad 1 (modifiziert)	LF	1	9	-11	-2	1	2
	RF	0	1	9	0	0	2
Rad 2 (nicht modifiziert)	LF	0	0	2	-1	2	2
	RF	0	0	2	-2	-3	2

**Tabelle 7.1:** Erforderliche Korrektur der modifizierten Referenzverzahnung

Zur Beurteilung der mittels Fertigungssimulation errechneten Zahnflankengeometrie wird eine Parameterstudie durchgeführt, in der die erforderliche Korrektur ausgewertet wird. Voruntersuchungen zeigen, dass die Korrekturterme von den lokal angepassten Verzahnungsdaten abhängen, mit denen der Ease-Off kompensiert wird. Die Einbaulage sowie die Konus- und Schrägungswinkel haben einen Einfluss auf den Ease-Off [BÖRNER05B; SCHIMPF96]. Weiterhin besitzen auch Verzahnungsdaten wie Modul, Übersetzung und Profilverchiebung einen Einfluss, der jedoch gering ausfällt und daher in der Studie nicht untersucht wird. Der Variationsbereich der Parameter orientiert sich am abgeleiteten Vertrauensbereich aus Kapitel 5.3 und ist in Anhang A.7 angegeben.

Die Ergebnisse der Parameterstudie sind in Anhang A.7 visualisiert. In Bild 7.3a wird ein Auszug der Parameterstudie vorgestellt. Das linke Diagramm zeigt die erforderliche Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta L}$  in Abhängigkeit vom Schrangungswinkel für einen Achswinkel von  $\Sigma = 15^\circ$ . Beveloidräder mit einem Konuswinkel von  $\theta = 9^\circ$  werden als durchgezogene und mit einem Konuswinkel von  $\theta = 3^\circ$  als gestrichelte Linie dargestellt. Die weiteren Ergebnisse der Beveloidräder mit unterschiedlichen Konuswinkeln befinden sich innerhalb des blau hervorgehobenen Bereichs. Für eine bessere Übersichtlichkeit werden nur die Ergebnisse mit einem großen Achsversatz  $a = 150$  mm eingezeichnet.

Im rechten Diagramm ist die erforderliche Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta L}$  über der Konuswinkelaufteilung  $\theta'$  dargestellt. Innerhalb des hervorgehobenen Bereichs befinden sich die Ergebnisse der untersuchten Verzahnungen. Zum Vergleich ist die Abweichung der Referenzverzahnung mit dem grünen Punkt gekennzeichnet.



**Bild 7.3:** a) Erforderliche Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta L}$  in Abhängigkeit des Schrangungswinkels  $\beta_{p1}$  und der Konuswinkelaufteilung  $\theta'$   
b) Kontaktpfad eines Beveloidrads in Anlehnung an [GRAF17]

Anhand der Ergebnisse der Studie lassen sich folgende Zusammenhänge ableiten:

- Mit zunehmendem Schrangungswinkel vergrößert sich die erforderliche Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta}$  auf Links- und Rechtsflanke, wie in Bild 7.3a dargestellt ist.
- Eine gleichmäßige Aufteilung der Konuswinkelsumme  $\theta'$  reduziert die erforderliche Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta}$ , vgl. Erkenntnisse in [BORNER05B].
- Durch die Verringerung des Achswinkels  $\Sigma$  wird sowohl die erforderliche Flankenlinien-Winkelkorrektur  $\Delta C_{H\beta}$  als auch die Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta}$  reduziert.
- Die Korrektur der Stirnprofil-Balligkeit  $\Delta C_{\alpha}$  weist eine parabolische Form über dem Schrangungswinkel auf (Anhang A.7).
- Weitere Korrekturterme wie z. B. die Korrektur der Flankenlinien-Balligkeit  $\Delta C_{\beta}$  und die Stirnprofil-Winkelkorrektur  $\Delta C_{H\alpha}$  zeigen keinen klaren Trend und fallen im untersuchten Bereich gering aus ( $< 7 \mu\text{m}$ ).

Der Unterschied zwischen den im Flankengenerator und in der Fertigungssimulation erzeugten Zahnflankengeometrien lässt sich durch den Kontaktpfad in Bild 7.3b erklären.

In der Fertigungssimulation erfolgt der Kontakt zwischen Werkzeug und Zahnrad entlang des Kontaktpfads, welcher bei einem schrägverzahnten Beveloidrad diagonal über die Zahnflanke verläuft. Somit werden Zahnkopf und -fuß eines Stirnschnitts bei unterschiedlichen axialen Zustellungen erzeugt, was bei einer veränderlichen radialen Zustellung zu einer unbeabsichtigten Schränkung auf der Zahnflanke führt [GRAF17]. Diese in der Literatur beschriebene natürliche Verschränkung tritt auch bei der Fertigung von schrägverzahnten Zylinderrädern mit einer Breitenmodifikation auf [ESCHER96, S. 59 ff.]. Darüber hinaus findet bei modifizierten Beveloidrädern eine Schwenkbewegung des Werkzeugs aufgrund von lokal angepassten Verzahnungsdaten statt, die zu einem zusätzlichen Abtrag von Material außerhalb der Stirnschnittebene führen kann.

Demgegenüber definiert der Flankengenerator die Zahnflankengeometrie stirnschnittweise. Das bedeutet, dass hier eine mögliche Durchdringung von Werkzeug und Zahnrad außerhalb der Stirnschnittebene nicht abgebildet wird. Der Unterschied zwischen der Zahnflankengeometrie aus dem Flankengenerator und der Fertigungssimulation legt den Schluss nahe, dass eine zusätzliche Anpassung der Werkzeugbahn erforderlich ist.

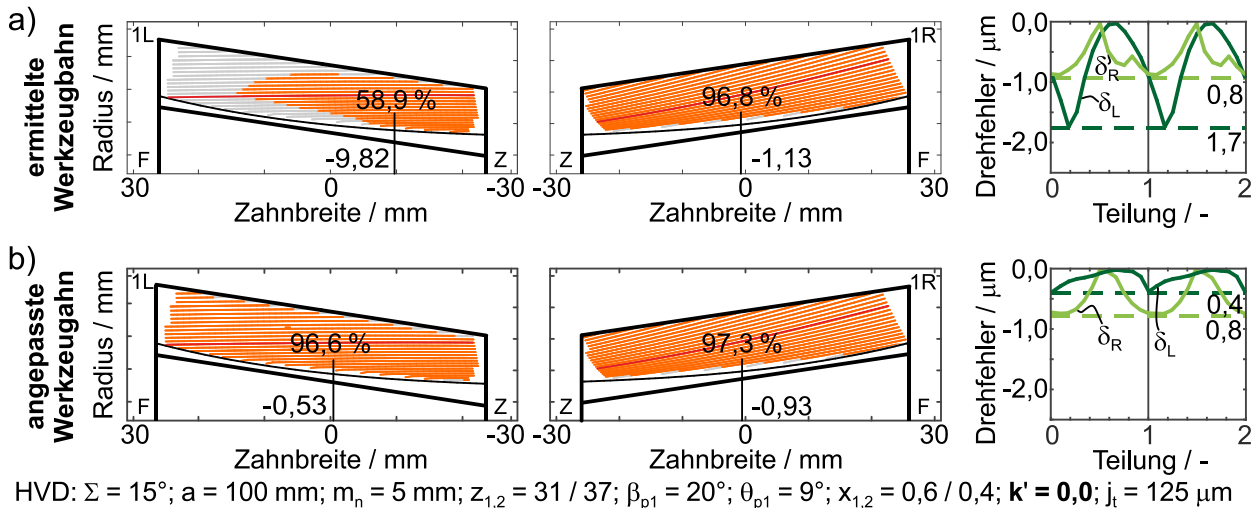
### 7.2.2 Übertragungsverhalten modifizierter Beveloidradpaarungen

Ein Vorteil der vorgestellten Berechnungsmethode ist, dass durch zusätzliche Zahnflankenmodifikationen die SBK angepasst werden kann und diese Anpassungen sich mit den Gleichungen in Kapitel 7.1 direkt auf die Werkzeugbahn übertragen lassen. So kann dem Verlauf der SBK eine Modifikation überlagert werden, deren Betrag sich aus der ermittelten Korrektur im vorherigen Kapitel ableitet.

Die Tragbilder in Bild 7.4a zeigen das Übertragungsverhalten der Referenzverzahnung, wobei die Zahnflankengeometrien mittels Fertigungssimulation ermittelt werden. Auf der Linksflanke verschiebt sich mit der ermittelten Werkzeugbahn nach Kapitel 7.1 der tragende Bereich in Richtung Zehe. Die Ursache hierfür ist die Flankenlinien-Winkelabweichung, welche einen zu kleinen Schrägungswinkel zur Folge hat. Die Verschiebung des Tragbilds führt zusätzlich zu einem erhöhten Drehfehler. Auf der Rechtsflanke wälzen die Beveloidräder aufgrund der geringen Abweichungen annähernd konjugiert ab.

Für eine gezielte Anpassung der Werkzeugbahn lassen sich die Erkenntnisse aus Tabelle 7.1 verwenden. Hierzu wird in einer einmalig durchgeführten Iteration eine zusätzliche Zahnflankenmodifikation auf die SBK aufgebracht, um die Werkzeugbahn in der

Fertigungssimulation anzupassen. Bei der Referenzverzahnung wird exemplarisch eine Flankenlinien-Winkelmodifikation  $C_{H\beta R1} = 9 \mu\text{m}$  verwendet, um die in Tabelle 7.1 ermittelte Korrektur zu kompensieren. Die angepasste Werkzeugbahn führt dazu, dass in beiden Drehrichtungen ein annähernd konjugierter Eingriff erzielt wird, wie die Tragbilder in Bild 7.4b zeigen. Neben der mittigen Positionierung des Tragbilds verringert sich der Drehfehler auf der Linksflanke. Gleichzeitig verändert sich das Übertragungsverhalten der Rechtsflanke bei angepasster Werkzeugbahn nur geringfügig.



**Bild 7.4:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe der in der Fertigungssimulation erzeugten Zahnflankengeometrien mit a) ermittelter und b) angepasster Werkzeugbahn

Die Untersuchung der Herstellbarkeit von modifizierten Beveloidrädern zeigt, dass die Fertigung mit kontinuierlichen Abwälzverfahren grundsätzlich möglich ist. In der Parameterstudie sind die Abweichungen der Zahnflankengeometrien aus der Fertigungssimulation mithilfe von Korrekturtermen quantifiziert.

Durch die gezielte Anpassung der SBK können Abweichungen in der Fertigungssimulation durch eine entgegengewirkende Modifikation in Flankenlinienrichtung ausgeglichen werden. Änderungen in Profilrichtung sind auch möglich, wofür jedoch eine Anpassung des Werkzeugprofils erforderlich ist. Mit der modifizierten Werkzeuggeometrie und einer Shiftbewegung des Werkzeugs können zustellabhängige Zahnflankenmodifikationen in Profilrichtung umgesetzt werden [BAUSCH11, S. 450 ff.].

Das KWS gleicht kinematisch dem Abwälzen einer Schraubradpaarung [HELLMANN15, S. 89], wobei der Kontaktpfad zwischen Werkzeug und Zahnrad dem PoC beim Abwälzen der Radpaarung entspricht. Nachfolgend soll daher untersucht werden, welche Anpassungen erforderlich sind, um die vorgestellte Berechnungsmethode auf Schraubradpaarungen und weitere Radpaarungen mit evolventischen Verzahnungen anzuwenden.

## 8 Übertragbarkeit auf weitere evolventische Verzahnungen

Beveloidräder gehören zu den evolventischen Verzahnungen und besitzen aufgrund der kinematischen Grundkörper Ähnlichkeiten zu Kegelrädern, was folgende Forschungsfrage hervorbringt.

### Forschungsfrage zu Kapitel 8

Auf welche evolventischen Verzahnungen kann die Berechnungsmethode durch geeignete Anpassungen übertragen werden?

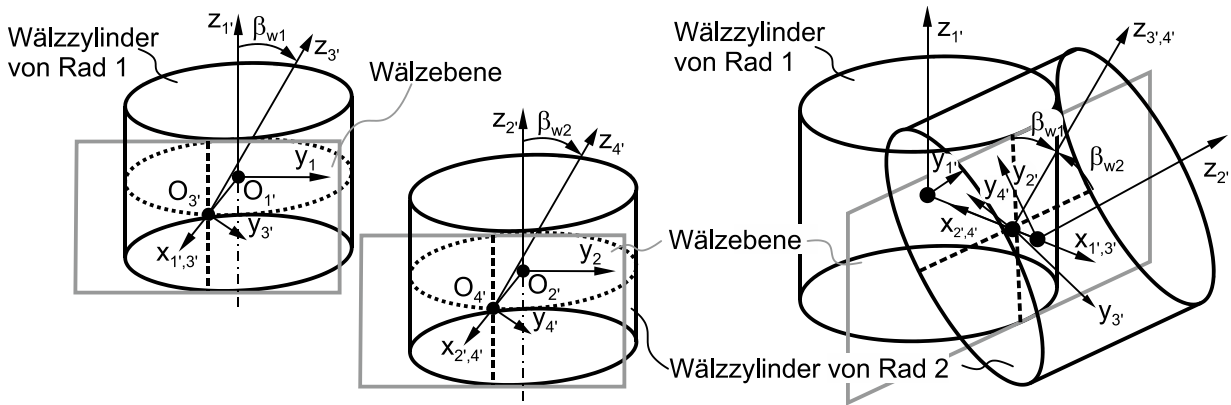
Um diese Frage zu beantworten, kann die Abgrenzung der Beveloidräder zu anderen Verzahnungen in Kapitel 2.3 verwendet werden. Aufgrund der geometrischen Ähnlichkeit werden zunächst Schraubradpaarungen untersucht. Hierbei sind Anwendungen mit Achswinkel bis  $90^\circ$  von großem technischen Interesse, was den von Beveloidradpaarungen üblichen Bereich deutlich überschreitet. Außerdem soll überprüft werden, ob eine Adaption der Methode auf Verzahnungen mit konstanter Zahnhöhe jedoch geänderter Herstellkinematik (wie z. T. bei Kegel- und Hypoidrädern) möglich ist.

### 8.1 Übertragbarkeit auf Schraubradpaarungen

Die vorgestellte Berechnungsmethode beruht auf zwei kinematischen Wälzkegeln, die eine gemeinsame Wälzebene tangieren. Schraubräder besitzen zylindrische Wälzkörper, die windschief im Raum angeordnet sind. Für die Übertragung der Berechnungsmethode auf eine Schraubradpaarung sind somit die kinematischen Grundkörper zu ändern und basierend darauf das Gleichungssystem anzupassen. In einer Kontaktsimulation wird die Wirksamkeit der angepassten Methode geprüft.

#### 8.1.1 Anpassung der Berechnungsmethode an Schraubradpaarungen

Analog zu den kinematischen Grundkörpern der Beveloidräder zeigt Bild 8.1 die kinematischen Grundzylinder einer Schraubradpaarung. Die Wälzkörper sind räumlich so angeordnet, dass sich die Zylinder im Wälzpunkt C berühren und die Mantelflächen eine gemeinsame Wälzebene tangieren. Die Anordnung der Radachsen zueinander erfolgt über den Achswinkel  $\Sigma$  und den Achsversatz  $a$ , welcher der Summe der Wälzkreisradien entspricht. Für die Koordinatensysteme von Rad 1 und 2 gilt, dass die z-Achsen mit den Radachsen übereinstimmen und die x-Achsen von Rad 1 betrachtet in Richtung des Achsversatzes zeigen. Die y-Achsen ergeben sich für ein Rechtssystem.



**Bild 8.1:** Kinematische Grundzylinder einer Schraubradpaarung

Mit den Vereinfachungen und trigonometrischen Umformungen in Anlehnung an Anhang A.1 können die für Schraubradpaarungen bekannten Gleichungen abgeleitet werden [NIEMANN83, S. 4]. Die ausführliche Herleitung der Gleichungen ist unter Anleitung des Autors in [EBERLE19, S. 15 ff.] zu finden.

$$\Sigma = \beta_{w1} + \beta_{w2} \tag{8.1}$$

$$a = r_{w1} + r_{w2} \tag{8.2}$$

Die Einbauabstände werden über die halbe Zahnbreite definiert und legen die Position des Referenzstirnschnittpaars fest. Mit dem gemeinsamen Grundkreisradius gilt für den Schrägungswinkel am Teil- und Wälzkreis folgender Zusammenhang.

$$\sin \beta_w = \sin \beta_p \cdot \frac{\cos \alpha_p}{\cos \alpha_w} \tag{8.3}$$

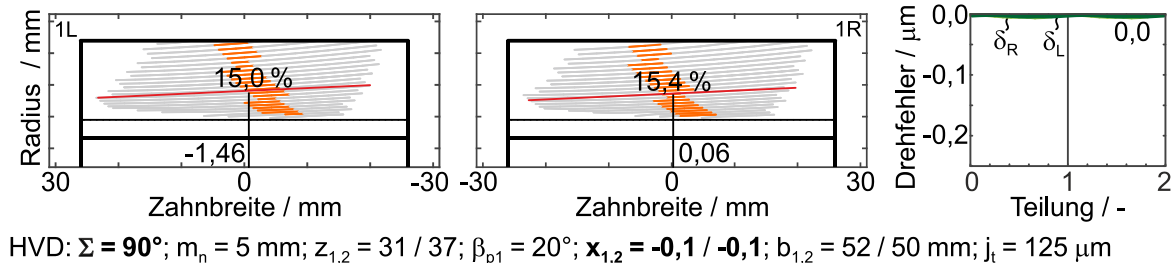
Neben dem mittigen Tragbild wird bei den Schraubradpaarungen ein Eingriff mit definiertem Verdrehflankenspiel realisiert. Die Zahndicken am Wälzkreis  $s_{wt1,2}$  und das Verdrehflankenspiel  $j_{wn}$  entsprechen wie in (4.17) der Teilung  $p_{wn}$ . Nach Umformungen ergibt sich die Korhammersche Beziehung [KORHAMMER52]. In dieser Arbeit wird das definierte Verdrehflankenspiel bereits bei der Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten berücksichtigt.

$$2 \cdot \tan \alpha_p \cdot (x_1 + x_2) + \frac{j_{t1,2}}{m_{t1,2}} = z_1 \cdot (\text{inv } \alpha_{wt1} - \text{inv } \alpha_{t1}) + z_2 \cdot (\text{inv } \alpha_{wt2} - \text{inv } \alpha_{t2}) \tag{8.4}$$

Mit (8.1) und (8.4) kann ein Gleichungssystem für Schraubradpaarungen eingeführt werden, mit dem sich die Hauptverzahnungsdaten berechnen lassen. Die Unbekannten sind der Profilwinkel  $\alpha_w$  und je nach Vorgabe entweder einer der beiden Schrägungswinkel  $\beta_{p1,2}$  oder deren Aufteilung  $\beta'$ . Der Achsversatz  $a$  wird über die Wälzkreisradien festgelegt.



Durch Anwenden der angepassten Berechnungsmethode kann eine Schraubradpaarung mit einem Achswinkel von bis zu  $\Sigma = 90^\circ$  ausgelegt werden, wie exemplarisch in Bild 8.2 dargestellt wird. Die Übertragbarkeit auf Zylinderradpaarungen ( $\Sigma = 0^\circ$ ) ist uneingeschränkt möglich.



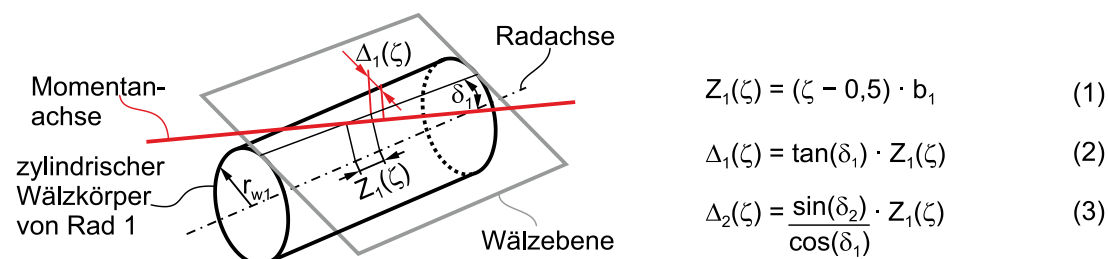
**Bild 8.2:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe einer nicht modifizierten Schraubradpaarung mit mittigem Tragbild

Bei Schraubradpaarungen liegt wie bei Beveloidradpaarungen eine Punktberührung vor [NIEMANN83, S. 9]. Mit einer lokalen Anpassung der Verzahnungsdaten soll nachfolgend die Zahnflankengeometrie optimiert werden.

### 8.1.2 Schraubradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten

Bei Schraubradpaarungen schneiden sich die Berührlinien nur in einem Punkt entlang der Zahnbreite [NIEMANN83, S. 4]. Mit abnehmendem Achswinkel verringert sich der FDP-Winkel  $\kappa$  zwischen den Berührlinien, sodass für Zylinderräder Linienkontakt vorliegt ( $\kappa = 0^\circ$ ).

Das Gleichungssystem zur stirnschnittweisen Modifikation der Verzahnungsdaten ist an die Kinematik der Schraubradpaarung anzupassen. Wie in Bild 8.3 skizziert, wird zur Bestimmung der Wälzpunkte angenommen, dass der Eingriff entlang der Momentanachse des Referenzstirnschnittpaars stattfindet.



**Bild 8.3:** Zusammenhang des Abstands zwischen Momentanachse und Mantellinie

Die Wälzkegelwinkel  $\delta_{1,2}$  definieren dabei die Steigung der in der Wälzebene liegenden Momentanachse gegenüber den Radachsen [WAGNER93, S. 34 ff.]. Ausgehend von der Zahnbreitenmitte vergrößert sich somit der Abstand zwischen Mantellinie am Wälzkörper

und Momentanachse  $\Delta_{1,2}$ . Die Berechnung erfolgt über den Wälzkegelwinkel und die aktuelle Breitenposition. Mit dem trigonometrischen Zusammenhang in Bild 8.3 kann der stirnschnittabhängige Achsversatz  $a$  bestimmt werden. Zur Berechnung sind die Wälzkreisradien in der Zahnbreitenmitte  $r_{wM1,2}$  einzusetzen.

$$a(\zeta) = \sqrt{r_{wM1}^2 + \Delta_1^2(\zeta)} + \sqrt{r_{wM2}^2 + \Delta_2^2(\zeta)} \quad (8.5)$$

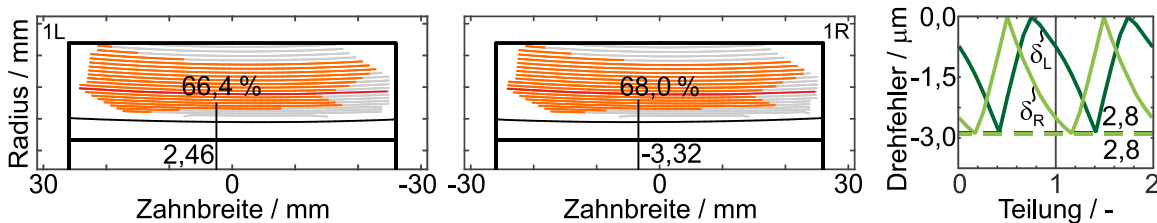
Zusammen mit den bereits hergeleiteten Gleichungen für den Achswinkel (8.1) und für die Korhammersche Beziehung mit definiertem Verdrehflankenspiel (8.4) bildet (8.5) ein Gleichungssystem zur Bestimmung der lokalen Verzahnungsdaten. Wie bei einer Beveloidradpaarung wird dieses Gleichungssystem bestehend aus verzahnungsgeometrischen Gleichungen numerisch gelöst.

$$\Sigma = f(\alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta)) \quad (8.6)$$

$$a = f(\alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), m_n)$$

$$p_w = f(\alpha_p, \alpha_w(\zeta), \beta_{p1,2}(\zeta), m_n, x_{1,2}(\zeta), j_{t1,2})$$

Die Tragbilder und Drehfehlerverläufe einer Schraubradpaarung mit lokal angepassten Verzahnungsdaten sind in Bild 8.4 dargestellt. Die Modifikation wird hälftig auf Rad 1 und 2 aufgeteilt. In beiden Drehrichtungen wird ein ellipsenförmiges Tragbild mit einem Traganteil von knapp 70 % erzielt. Einzig in Flankenbereichen am Zahnkopf und -fuß findet kein Tragen statt. Im Vergleich zum drehfehlerfreien Abwälzen der nicht modifizierten Schraubradpaarungen führt die Modifikation zu einem Drehfehler von  $\delta_{L,R} = 2,8 \mu\text{m}$ .



HVD:  $\Sigma = 50^\circ$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $x_{1,2} = -0,1 / -0,1$ ;  $b_{1,2} = 52 / 50 \text{ mm}$ ;  $k' = 0,5$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild 8.4:** Tragbilder und Drehfehlerverläufe einer modifizierten Schraubradpaarung mit hälftig aufgebrachtener Modifikation bei einem Achswinkel von  $\Sigma = 50^\circ$

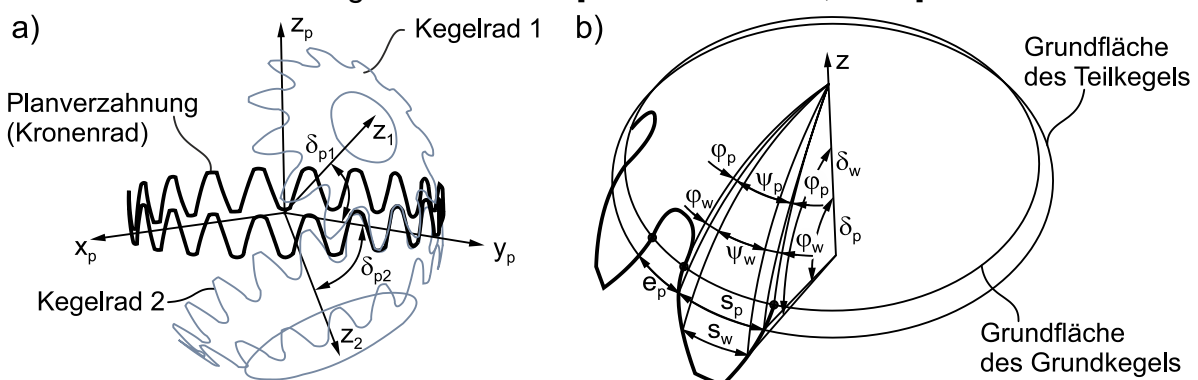
Grundsätzlich zeigen die Ergebnisse, dass eine Übertragbarkeit der Berechnungsmethode auf Schraubradpaarungen möglich ist. Mit der Anpassung an die zylindrischen Wälzkörper können die Hauptverzahnungsdaten berechnet werden. Darüber hinaus lässt sich die Zahnflankengeometrie mithilfe von lokalen Verzahnungsdaten modifizieren. Mit den oben dargestellten Ergebnissen kann die Wirksamkeit der Modifikation exemplarisch

aufgezeigt werden. Wie bereits bei Beveloidradpaarungen mit großem Achs- oder Schrägungswinkel resultiert eine Vergrößerung des Achswinkels (hier: auch Schrägungswinkel) in einem stark geneigten PoC. Dadurch kommt beim Abwälzen ein Stirnschnitt mit mehreren Stirnschnitten des Gegenrads in Eingriff, welche jedoch bei der Optimierung nicht berücksichtigt werden. Für die vorgestellte Beispielverzahnung aus Bild 8.4 führt dies bei größeren Achswinkeln zu Kantentragen, was die Berechnungsmethode einschränkt.

## 8.2 Übertragbarkeit auf Verzahnungen mit abweichender Herstellkinematik

ISO 23509 [ISO23509 2016] vereinheitlicht die Methoden, um die Geometriedaten von Kegel- und Hypoidradpaarungen iterativ zu berechnen. Für die vorgestellte Berechnungsmethode soll geprüft werden, inwieweit der analytische Ansatz übertragbar ist.

Der Vergleich in Kapitel 2.3.2 zwischen Beveloidrädern und Kegel- bzw. Hypoidrädern zeigt insbesondere die Ähnlichkeit bei den kinematischen Grundkörpern sowie der Flankenberührung auf. Trotz der weitaus komplexeren Herstellkinematik und der zusätzlichen Freiheitsgrade zur Beschreibung der Zahnflankengeometrie kann der Eingriff und die Erzeugung von Kegel- und Hypoidradpaarungen theoretisch über eine gemeinsame Planverzahnung definiert werden [FIGLIOLINI05]. Bild 8.5a zeigt das Kronenrad, welches jeweils konjugiert mit den Kegelrädern abwälzt und so das Zahnprofil am Auslegungspunkt definiert [HÖHN09, S. 103]. Die Planverzahnung kann sowohl ein evolventisches als auch ein geradflankiges Zahnprofil besitzen, sodass entweder eine sphärische Evolvente oder eine Oktoide am Kegelrad resultiert [KLINGELNBERG08, S. 28].



**Bild 8.5:** a) Kegelradpaarung mit Planverzahnung nach [PARK11]

b) Zahndicke eines geradverzahnten Kegelrads nach [JEONG16]

Bild 8.5b zeigt die Definition der Zahndicke einer sphärischen Evolvente. Hier wird ähnlich zur Korhammerschen Beziehung für Zylinderräder die Zahndicke  $s_w$  der Kegelräder und die Teilung  $p_w$  der Planverzahnung berücksichtigt. Die Herleitung ist in [JEONG16] zu finden.

Durch Anwendung der Kegelradanordnung und den Zusammenhängen der Zahndicken aus Bild 8.5 können die Hauptverzahnungsdaten für geradverzahnte Kegelradpaarungen berechnet werden. Im Gegensatz zur bisherigen Auslegung ist neben Modul  $m_n$  und Profilwinkel  $\alpha_p$  die Zähnezah  $z_k$  der Planverzahnung (Kronenrad) vorzugeben. Die fiktive Zähnezah  $z_k$  hat einen wesentlichen Einfluss auf die Herstellkinematik und den Unterschnitt [JEONG16]. Zusätzlich sind geometrische Vorgaben bestehend aus Achswinkel  $\Sigma$ , Zähnezah  $z$  und Verdrehflankenspiel  $j_t$  erforderlich. Die Teilkegelwinkel  $\delta_p$  ergeben sich aus den Größen am Kronenrad und der Übersetzung  $i$ . Erste Untersuchungen bestätigen, dass mit den genannten Vorgaben plausible Hauptverzahnungsdaten ermittelt werden, wie das Beispiel in Tabelle 8.1 zeigt. Wie bei den Beveloidradpaarungen weichen die Winkel am Teil- und Wälzkegel voneinander ab.

Vorgaben								
Planverzahnung			Kronenrad	Geometrische Vorgaben			Rad 1	Rad 2
Modul	$m_n$	mm	5	Achswinkel	$\Sigma$	°	90	
Profilwinkel	$\alpha_p$	°	20	Verdrehflankenspiel	$j_t$	$\mu\text{m}$	250	
Zähnezah	$z_k$	-	22,8	Zähnezah	$z$	-	15	17

Hauptverzahnungsdaten			Rad 1	Rad 2
Profilverschiebungsfaktor	$x$	-	0,127	0,127
Teilkegelwinkel	$\delta_p$	°	41,14	48,21

**Tabelle 8.1:** Vorgaben und Hauptverzahnungsdaten einer geradverzahnten Kegelradpaarung

Die Verallgemeinerung der Gleichungen durch Berücksichtigung eines Achsversatzes  $a$  und Schrägungswinkels  $\beta_p$  ermöglicht die Auslegung von Hypoidradpaarungen. Die Übertragbarkeit der vorgestellten Berechnungsmethode zur Auslegung von Kegel- und Hypoidradpaarungen mit konstanter Zahnhöhe ist somit grundsätzlich möglich.

Die verwendete Planverzahnung als Kronenrad legt zudem den Schluss nahe, dass eine Übertragbarkeit auf eine Kronenradpaarung ebenfalls möglich ist. Diese evolventische Sonderverzahnung sowie die Torusverzahnung sind auf die gleichen Grundgleichungen wie Beveloidradpaarungen zurückführbar [ROTH98, S. 427].

## 9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Berechnungsmethode zur Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage hergeleitet. Mit dieser kann durch lokale Anpassung der Verzahnungsdaten ein konjugierter Eingriff angenähert werden. Die Wirksamkeit wird in theoretischen und experimentellen Untersuchungen nachgewiesen.

Beveloidräder besitzen aufgrund einer veränderlichen Profilverchiebung entlang der Zahnbreite eine konische Zahnform mit evolventischer Stirnschnittgeometrie. So können Getriebekonzepte mit kleinem Achswinkel umgesetzt werden. Insbesondere eine windschiefe Achslage bietet den Vorteil, dass Konzepte mit optimaler Bauraumnutzung, Gewichts- und Kosteneinsparung ermöglicht werden. Bei nicht paralleler Achslage sind jedoch die Grundzylinder zueinander verkippt und besitzen keine gemeinsame Eingriffsebene. Dies führt zu einem punktförmigen Flankenkontakt an einer Breitenposition.

In der Literatur sind zahlreiche Ansätze zur Auslegung der Makro- und Mikrogeometrie von Beveloidradpaarungen zu finden. Nach dem Stand der Technik werden zunächst aus einer äquivalenten Ersatzstirnradverzahnung die Hauptverzahnungsdaten bestimmt. Anschließend erfolgt über die Konuswinkel eine Umrechnung in eine schneidende oder windschiefe Achslage, was im Allgemeinen zu einem außermittigen Punktkontakt auf den Zahnflanken führt. Ausgehend von diesem Punktkontakt sind entweder viele Variantenrechnungen oder spezielle Software erforderlich, um für einen Betriebspunkt ein optimales Übertragungsverhalten zu erzielen. Alternativ kann wie bei Zylinderrädern ein konjugierter Eingriff angenähert und anschließend eine Optimierung für den gewünschten Betriebspunkt durchgeführt werden. Die Anwendbarkeit ist jedoch auf eine schneidende Achslage beschränkt.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, eine Berechnungsmethode herzuleiten, die den Getriebeentwickler bei der Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage unterstützt. Neben der theoretischen und experimentellen Untersuchung des Übertragungsverhaltens ausgelegter Beveloidradpaarungen wird deren Herstellbarkeit mit konventionellen Verzahnungsmaschinen durch eine Fertigungssimulation beurteilt und eine Übertragbarkeit auf andere evolventische Verzahnungen geprüft.

Die Berechnungsmethode basiert auf einem analytischen Ansatz, so dass diese mit einer beliebigen mathematischen Software umsetzbar ist. In dieser Arbeit wird zur Berechnung ein Matlab-Skript und zur Übergabe der Eingabegrößen und Visualisierung der Ergebnisse die institutseigene Software SimKoS verwendet.

Die Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten definiert die Makrogeometrie der Beveloidradpaarung. Dazu werden die kinematischen Grundkegel der Beveloidräder so im Raum angeordnet, dass sie sich in einem Punkt berühren und die Mantelflächen eine gemeinsame Wälzebene tangieren. Das Abwälzen der Beveloidräder wird über zwei unterschiedliche Zahnstangen beschrieben. Die damit abgeleiteten Gleichungen für die Einbaulage und die Zahndicke am Wälzkreis liefern ein nicht lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die Hauptverzahnungsdaten einer Beveloidradpaarung mit mittigem Tragbild und definiertem Verdrehflankenspiel ergibt. Die Analyse des Eingriffs zwischen Beveloidrad und Zahnstange ermöglicht neben der direkten Bestimmung der Makrogeometrie die Beschreibung des Verlaufs der Berührlinie und des Kontaktpfads (PoC). So können Aussagen über die Kontaktcharakteristik von nicht modifizierten Beveloidradpaarungen getroffen werden.

Die ermittelte Makrogeometrie stellt die Ausgangslage für die Optimierung dar, bei der die Beveloidradpaarung in Stirnschnittpaare unterteilt wird. Das hergeleitete Gleichungssystem lässt sich um die stirnschnittabhängigen Verzahnungsdaten erweitern. Eine detaillierte Analyse der Zahnflankengeometrie mit lokal angepassten Verzahnungsdaten zeigt, dass eine über das räumliche Verzahnungsgesetz abgeleitete Tangentialmodifikation erforderlich ist, um den konjugierten Eingriff anzunähern. Die endgültige Festlegung der Mikrogeometrie erfolgt durch eine zusätzliche Modifikation der Stirnschnittbezugskurve. So kann die Tragbildlage und -größe gezielt eingestellt werden, um mögliche Abweichungen und Verlagerungen von Beveloidradpaarungen zu kompensieren. Das aus verzahnungsgeometrischen Gleichungen hergeleitete System bietet den Vorteil, dass die Mikrogeometrie über Verzahnungsdaten beschrieben wird und keine Iterationen erforderlich sind, um den konjugierten Eingriff anzunähern.

Mithilfe theoretischer Untersuchungen des Übertragungsverhaltens von modifizierten Beveloidradpaarungen wird ein Vertrauensbereich der Berechnungsmethode abgeleitet. Dieser deckt den für Beveloidradpaarungen üblichen Einsatzbereich ab. Zusätzliche Empfehlungen ermöglichen eine Optimierung auch außerhalb der ermittelten Grenzen.

In dieser Arbeit wird neben der simulativen eine experimentelle Untersuchung des Abwälzverhaltens von Beveloidradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten durchgeführt. Mit exemplarisch ausgelegten Prüfradpaarungen erfolgen Abwälzversuche am Prüfstand, bei denen Tragbilder ermittelt und Drehfehlerverläufe aufgezeichnet werden. Für den Vergleich mit den Simulationsergebnissen werden die Prüfräder vermessen und die tatsächlich gefertigte Zahnflankengeometrie in Kontaktsimulationen untersucht.

Die Auswertung der Ergebnisse am Prüfstand und in der Simulation zeigen eine hohe Übereinstimmung bei den Tragbildern und Drehfehlerverläufen. Dies weist zum einen das zielführende Versuchskonzept und zum anderen die rechnerische Auslegung des tatsächlichen Abwälzverhaltens von modifizierten Beveloidradpaarungen nach.

Die verwendeten Prüfräder zur experimentellen Untersuchung wurden durch Fünf-Achs-Fräsen gefertigt. Zur Beurteilung der Herstellbarkeit mit wirtschaftlichen Verfahren wird in einer Fertigungssimulation das kontinuierliche Wälzfräsen eines Beveloidrads mit lokal angepassten Verzahnungsdaten abgebildet. Der Vergleich der Zahnflankengeometrien und die Auswertung des Übertragungsverhaltens zeigt, dass die Herstellung modifizierter Beveloidräder mithilfe von kontinuierlichen Abwälzverfahren grundsätzlich möglich ist.

Zusätzlich zu Beveloidradpaarungen wird geprüft, inwieweit die Berechnungsmethode auf weitere evolventische Verzahnungen übertragbar ist. So können durch Anpassen der kinematischen Wälzkörper Stirn- und Schraubradpaarungen ausgelegt werden.

Mit der Berechnungsmethode steht dem Getriebeentwickler eine theoretisch und experimentell abgesicherte Unterstützung zur Verfügung, mit der eine Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen auf Basis verzahnungsgeometrischer Gleichungen durchgeführt werden kann.





## 10 Ausblick

Beveloidräder bieten bei kleinen Achswinkeln eine wirtschaftliche Alternative zu Kegelrädern. Aufgrund einer Vielzahl an Unsicherheiten bei der Definition der Makro- und Mikrogeometrie werden trotz vielfältiger Einsatzmöglichkeiten nur in wenigen Anwendungen Beveloidradpaarungen gezielt zur Leistungsübertragung eingesetzt.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in windschiefer Achslage auf Basis verzahnungsgeometrischer Gleichungen. Es wird die Möglichkeit aufgezeigt, ausgehend vom angenäherten konjugierten Eingriff Zahnflankenmodifikationen aufzubringen, um das Tragbild gezielt zu positionieren und zu skalieren. Um die Wirksamkeit für einen gewünschten Betriebspunkt unter Last zu prüfen, ist eine Kopplung zu Werkzeugen erforderlich, mit denen die Verformung im Getriebeumfeld untersucht werden kann. Durch eine Analyse der Flankenverlagerung unter Last kann eine beanspruchungsgerechte und geräuscharme Zahnflankengeometrie ausgehend vom angenäherten konjugierten Eingriff ermittelt werden. Insbesondere für Untersuchungen unter Last kann das evolventische Stirnprofil der Beveloidradpaarungen mit lokal angepassten Verzahnungsdaten vorteilhaft sein. So kann auf Erfahrungen aus der Definition der Mikrogeometrie von Zylinderrädern zurückgegriffen werden.

Die Beurteilung der Herstellbarkeit mittels kontinuierlichen Abwälzverfahren zeigt, dass die Fertigung von Beveloidrädern mit lokal angepassten Verzahnungsdaten grundsätzlich möglich ist. Es besteht jedoch noch weiterer Forschungsbedarf, um die in der Fertigungssimulation ermittelten Zahnflankengeometrien an einer konventionellen Verzahnungsmaschine zu fertigen. Neben kinematischen Restriktionen sind Untersuchungen einer modifizierten Werkzeuggeometrie erforderlich, um so zusätzliche Modifikationen in Profilrichtung zu ermöglichen. Weiterhin ist die entstehende Verschränkung auf der Zahnflanke detailliert zu analysieren. Basierend auf den Erkenntnissen sind zusätzliche Werkzeugbewegungen zur Kompensation abzuleiten.

Ein weiteres interessantes Forschungsfeld eröffnet sich mit der Übertragbarkeit der Berechnungsmethode auf weitere Verzahnungen. In einer ersten Untersuchung wurden Hauptverzahnungsdaten einer geradverzahnten Kegelradpaarung bestimmt. Durch Lösung von der konventionellen Herstellkinematik ist dieser Ansatz beispielsweise bei der additiven Fertigung nutzbar. Durch lokale Anpassung der Verzahnungsdaten kann unabhängig von Maschinendaten die Tragbildlage gezielt eingestellt werden.



## Literaturverzeichnis

- ALXNEIT10 Alxneit, H.: *Optimierung des Übertragungsverhaltens konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Dissertation, 2010. – ISBN 978-3-922823-74-2
- ARTONI17 Artoni, A.; Guiggiani, M.: Revisiting Generation and Meshing Properties of Beveloid Gears. In: *ASME. Journal of Mechanical Design* (2017), Nr. 139(9), S. 1-9.
- BACHMANN09 Bachmann, M.; Binz, H.: Geometrical Design of Beveloid Gearings Considering Gear Limits and Meshing Interference. In: Mihailidis, A. (Hrsg.): *BAPT 3rd International Conference Power Transmission '09*. Kallithea: Sofia Publications, 2009, S. 9-14.
- BACHMANN13 Bachmann, M.; Binz, H.; Traut, C.: Vermessung und Beurteilung von Abweichungen an Beveloidverzahnungen. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2013*. Dresden: TUDpress, 2013, S. 111-120.
- BACHMANN15 Bachmann, M.; Binz, H.: Anwendungsgerechte Auslegung von Beveloidverzahnungen. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2015*. Dresden: TUDpress, 2015, S. 355-368.
- BAUSCH11 Bausch, T.: *Innovative Zahnradfertigung*. 4. Aufl. Renningen: expert-Verlag. 2011. – ISBN 978-3-816929-08-6
- BEAM54 Beam, A. S.: Beveloid gearing. In: *Machine Design* (1954), Nr. 22, S. 220-238.
- BECK15 Beck, M.: *Analyse der Belastung und Beanspruchung von konischen Stirnrädern in kreuzender Achslage*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Dissertation, 2015. – ISBN 978-3-922823-89-6
- BLESSING09 Blessing, L. T. M.; Chakrabarti, A.: *DRM, a Design Research Methodology*. 1. Aufl. Heidelberg, London, New York: Springer-Verlag, 2009. – ISBN 978-1-84882-586-4
- BÖRNER05A Börner, J.; Humm, K.; Joachim, F.: Development of Conical Involute Gears (Beveloids) For Vehicle Transmissions. In: *Gear Technology* (2005), Nr. 6, S. 28-35.
- BÖRNER05B Börner, J.; Joachim, F.; Yakaria, H.: Application, Design and Manufacturing of Conical Involute Gears for Power Transmissions. In: VDI-Wissensforum GmbH (Hrsg.): *International Conference on Gears 2005*. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2005, S. 125-144.
- BRECHER15 Brecher, C.; Löpenhaus, C.; Brimmers, J.: Verbesserung der Zahnfußtragfähigkeit von Beveloids durch Optimierung der Mikrogeometriemodifikationen. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2015*. Dresden: TUDpress, 2015, S. 385-404.
- BRECHER16 Brecher, C.; Löpenhaus, C.; Brimmers, J.: Function-oriented Tolerancing of Tooth Flank Modifications of Beveloid Gears. In: *14th CAT 2016 – Procedia CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing* (2016), Nr. 43, S. 124-129.

- BREGI46 Bregi, B.; Francis, V.: *Gearing*. United States Patent No. 2464963, 1946-08-05.
- BRIMMERS17 Brimmers, J.; Brecher, C.; Löpenhaus, C.: Potenzial von freien Flankenmodifikationen für Beveloidverzahnungen. In: *Forschung im Ingenieurwesen* (2017), Nr. 81, S. 83-94.
- BRIMMERS21 Brimmers, J.: *Funktionsorientierte Auslegung topologischer Zahnflankenmodifikationen für Beveloidverzahnungen*. Aachen, RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen, Dissertation, 2021. – ISBN 978-3-86359-927-0
- BÜRKLE93 Bürkle, R.; Gandbhir, S.; Joachim, F.: *Kegelige Stirnräder zur Leistungsübertragung in Getrieben*. In: VDI-Bericht 1056. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993, S. 95-110.
- DIN867 1986 DIN 867 Februar 1986: *Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinderrädern)*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN1328-1 2018 DIN ISO 1328 Teil 1 März 2018: *Zylinderräder. ISO-Toleranzsystem. Definitionen und zulässige Werte für Abweichungen an Zahnflanken*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3962-1 1978 DIN 3962 Teil 1 August 1978: *Toleranzen für Stirnradverzahnungen. Toleranzen für Abweichungen einzelner Bestimmungsgrößen*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3962-2 1978 DIN 3962 Teil 2 August 1978: *Toleranzen für Stirnradverzahnungen. Toleranzen für Flankenlinienabweichungen*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3963 1978 DIN 3963 August 1978: *Toleranzen für Stirnradverzahnungen. Toleranzen für Wälzabweichungen*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3964 1980 DIN 3964 November 1980: *Achsabstandsmaße und Achslagetoleranzen von Gehäusen für Stirnradgetriebe*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3965-1 1986 DIN 3965 Teil 1 August 1986: *Toleranzen für Kegelradverzahnungen. Grundlagen*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3965-4 1986 DIN 3965 Teil 4 August 1986: *Toleranzen für Kegelradverzahnungen. Toleranzen für Achsenwinkelabweichungen und Achsenschnittpunktabweichungen*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3967 1978 DIN 3967 August 1978: *Flankenspiel, Zahndickenabmaße, Zahndickentoleranzen*. Grundlagen. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3971 1980 DIN 3971 Juli 1980: *Begriffe und Bestimmungsgrößen für Kegelräder und Kegelradpaare*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3990-1 1987 DIN 3990 Teil 1 Dezember 1987: *Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern. Einführung und allgemeine Einflussfaktoren*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3991-1 1988 DIN 3991 Teil 1 September 1988: *Tragfähigkeitsberechnung von Kegelrädern ohne Achsversetzung*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN3992 1964 DIN 3992 März 1964: *Profilverschiebung bei Stirnrädern mit Außenverzahnung*. Berlin: Beuth Verlag.
- DIN21771 2014 DIN ISO 21771 August 2014. *Zahnräder. Zylinderräder und Zylinderradpaare mit Evolventenverzahnung. Begriffe und Geometrie*. Berlin: Beuth Verlag.

- DIN21772 2012      DIN 21772 Juli 2012. Zahnräder. *Zylinderräder und Zylinder-  
radpaare mit Evolventenverzahnungen. Definition der Abwei-  
chungen*. Berlin: Beuth Verlag. (März 2018 zurückgezogen)
- EBERLE19          Eberle, M.: *Erweiterung einer für Beveloidräder entwickelten  
Berechnungsmethode zur Bestimmung der Hauptverzahnungs-  
daten von Zylinder- und Schraubrädern*. Stuttgart, Universität  
Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches  
Design, Bachelorarbeit, 2019.
- ESCHER96          Escher, C.: *Simulation und Optimierung der Erzeugung von  
Zahnflankenmodifikationen an Zylinderrädern*. Aachen, RWTH  
Aachen, Fakultät für Maschinenwesen, Dissertation, 1996.
- FIGLIOLINI05      Figliolini, G.; Angeles, J.: Algorithms for Involute and Octoidal  
Bevel-Gear Generation. In: *Journal of Mechanical Design*  
(2005), Nr. 127(4), S. 664-672.
- FORT77            Fort, P.: *Berechnen und Messen gekrümmter Flächen aufgrund  
der Erzeugungskinetik am Beispiel von Spiralkegelrädern*.  
Zürich, Technische Hochschule Zürich, Dissertation, 1977.
- GELLERT89          Gellert, W.; Gottwald, S.; Hellwich, M.; Kästner, H.; Küstner, H.:  
*CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2. Aufl. New York:  
Van Nostrand Reinhold, 1989.
- GLASER07          Glaser, P.: *Entwicklung und Aufbau der Messtechnik für einen  
Prüfstand für Verzahnungen mit kleinen Achskreuzungswinkeln*.  
Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik  
und Technisches Design, Studienarbeit, 2007.
- GRAF17            Graf, W.: Twist Control Grinding (TCG) In: *Gear Technology*  
(2017), Nr. 6, S. 48-53.
- HE04              He, J.; Wu, X.; Cui, Y.: Gearing principle and geometric design  
of conical involute gear pairs with crossed axes. In: *Proceedings  
of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of  
Mechanical Engineering Science* (2004), Nr. 218, S. 1517-1526.
- HEIDENHAIN06      Heidenhain: *Winkelmessgeräte mit Eigenlagerung*, Dr. Johan-  
nes HEIDENHAIN GmbH. Traunreut: 2006 – Firmenschrift.
- HEDDERICH20      Hedderich, J.; Sachs, L.: *Angewandte Statistik. Methoden-  
sammlung mit R*. 17. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2020. – ISBN  
978-3-662-62294-0
- HELLMANN15      Hellmann, M.: *Berücksichtigung von Fertigungsabweichungen  
bei der Auslegung von Zahnflankenmodifikationen für Stirnrad-  
verzahnungen*. Aachen, RWTH Aachen, Fakultät für Maschi-  
nenwesen, Dissertation, 2015. – ISBN 978-3-86359-360-5
- HENSER15          Henser, J.: *Berechnung der Zahnfußspannungen von Beveloid-  
verzahnungen*. Aachen, RWTH Aachen, Fakultät für Maschi-  
nenwesen, Dissertation, 2015. – ISBN 978-3-86359-359-9
- HIERSIG79          Hiersig, H. M.: Zylinderräder mit Rechts- und Linksflanken  
unterschiedlicher Steigung. In: *Konstruktion im Maschinen-,  
Apparate und Gerätebau* (1979), Nr. 1, S. 7-11.
- HÖBEL09          Höbel, P.; Ralph, M.: *Fahrzeuggetriebe*. Deutsche Patent-  
anmeldung DE102009014565A1, 2009-03-17.

- HÖHN09 Höhn, B.-R.; Michaelis, K.; Wirth, C.: *Entwicklung eines Berechnungsverfahrens zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit von Hypoidrädern, FVA-Forschungsvorhaben Nr. 411 I*. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), Abschlussbericht, FVA-Heft 887, Frankfurt a. M., 2009.
- HUDE20 Von der Hude, M.: *Predictive Analytics und Data Mining. Eine Einführung mit R*. 1. Aufl. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2020. – ISBN 978-3-658-30152-1
- ISO6336 2006 ISO 6336 September 2006: *Calculation of load capacity of spur and helical gears*. Genf: International Organization for Standardization.
- ISO23509 2016 ISO 23509 November 2016: *Bevel and hypoid gear geometry*. Genf: International Organization for Standardization.
- JEONG16 Jeong, M. H.; Park, N. G.; Lee, H. W.: Derivation of design formula for a shifted spherical involute bevel gear pair. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science* (2016), Nr. 232(1), S. 17-30.
- JOHANN09 Johann, A.; Scheurle, J.: On the generation of conjugate flanks for arbitrary gear geometries. In: *GAMM-Mitteilungen* (2009), Nr. 32(1), S. 61-79.
- KAPALEVICH13 Kapalevich, A. L.: *Direct Gear Design*. 1. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2013. – ISBN 978-1-4398-7619-0
- KISSLING13 Kissling, U.: Licht am Ende des Tunnels. Flankenlinienkorrekturen per Software. eine Fallstudie, Teil 1. In: *Antriebstechnik* (2013), Nr. 11, S. 108-111.
- KLINGELNBERG08 Klingelberg, J.: *Kegelräder, Grundlagen, Anwendungen*. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2008. – ISBN 978-3-540-71860-4
- KLOCKE17 Klocke, F.; Brecher, C.: *Zahnrad- und Getriebetechnik. Auslegung, Herstellung, Untersuchung, Simulation*. 1. Aufl. München: Carl Hanser Verlag, 2017. – ISBN 978-3-446-43140-9
- KOMATSUBARA02A Komatsubara, H.; Mitome, K.; Ohmachi, T.: Development of Concave Conical Gear Used for Marine Transmissions. 1st Report, Principle of Generating Helical Concave Conical Gear. In: *JSME International Journal, Series C*. 45 (2002), Nr. 1, S. 371-377.
- KOMATSUBARA02B Komatsubara, H.; Mitome, K.; Ohmachi, T.: Development of Concave Conical Gear Used for Marine Transmissions. 2nd Report, Principle Normal Radii of Concave Conical Gear and Design of a Pair of Gears. In: *JSME International Journal, Series C*. 45 (2002), Nr. 2, S. 543-550.
- KORHAMMER52 Korhammer, A.: Berechnung der Zahnstärke im Teilzylinder bei Schrägverzahnungen. In: *Werkstatt und Betrieb* (1952), Nr. 4, S. 138-139.
- LAMATSCH34 Lamatsch, F.: *Gearing for rotary printing machine folders*. United States Patent No. 2028786, 1934-04-28.
- LINDNER54 Lindner, W.: *Zahnräder. Erster Band: Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen*. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1954.

- LINKE10 Linke, H.: *Stirnradverzahnungen – Berechnung, Werkstoffe, Fertigung*. 2. Aufl. München: Carl Hanser Verlag, 2010.
- LITVIN04 Litvin, F. L.; Fuentes-Aznar, A.: *Gear Geometry and Applied Theory*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – ISBN 978-0-511-23000-4
- LIU01 Liu, C.-C.; Tsay, C.-B.: Tooth Undercutting of Beveloid Gears. In: *Journal of Mechanical Design* (2001), Nr. 123, S. 569-576.
- LIU02A Liu, C.-C.; Tsay, C.-B.: Mathematical Models and Contact Simulations of Concave Beveloid Gears. In: *Journal of Mechanical Design* (2002), Nr. 124(4), S. 753-760.
- LIU02B Liu, C.-C.; Tsay, C.-B.: Contact characteristics of Beveloid gears. In: *Mechanism and Machine Theory* (2002), Nr. 4, S. 333-350.
- LIU19A Liu, S.; Song, C.; Zhu, C.; Fan, Q.: Concave modifications of tooth surfaces of beveloid gears with crossed axes. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science* (2019), Nr. 233(4), S. 1411-1425.
- LIU19B Liu, S.; Song, C.; Zhu, C.; Ni, G.; Ullah, N.: Concave and convex modifications analysis for skewed beveloid gears considering misalignments. In: *Mechanism and Machine Theory* (2019), Nr. 133, S. 127-149.
- MARINO15 Marino, D.: *Entwurf von Beveloidradsätzen für Schiffswendegeräte*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktions-technik und Technisches Design, Studienarbeit, 2015.
- MARINO17 Marino, D.; Bachmann, M.; Binz, H.: Analyse der Abweichungen und Verlagerungen der Welle und des Radkörpers bei Beveloidrädern und der daraus resultierenden Flankenverlagerungen. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2017*. Dresden: Sierke Verlag, 2017, S. 119-132.
- MARINO19A Marino, D.; Binz, H.; Bachmann, M.: Analytical design method for beveloid gears with a small shaft angle and offset. In: *Forschung im Ingenieurwesen* (2019), Nr. 83, S. 611-620.
- MARINO19B Marino, D.; Bachmann, M.; Binz, H.: Theoretical Validation of an Analytical Design Method for Beveloid Gears with Non-Parallel Non-Intersecting Axes. In: *ASME 2019 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2019 International Power Transmission and Gearing Conference* (2019), Nr. 10, S. 1-10.
- MARINO20 Marino, D.; Bachmann, M.; Binz, H.: Herleitung einer analytischen Optimierungsmethode für Beveloidräder durch lokale Anpassung der Verzahnungsdaten. In: *Forschung im Ingenieurwesen* (2020), Nr. 84, S. 281-291.
- MITOME85 Mitome, K.: Conical Involute Gear. Part 3: Tooth Action of a Pair of Gears. In: *Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers* (1985), Nr. 245(28), S. 2757-2764.
- MITOME91 Mitome, K.: Conical involute gear (Design of nonintersecting-nonparallel-axis conical involute gear). In: *Japan Society of*

- Mechanical Engineers International Journal* (1991), Vol. 34, Nr. 2, S. 265-270.
- MITOME96 Mitome, K.; Yamazaki, T.: Design of conical involute gear engaged with profile shifted spur gear on intersecting shafts (in Japanese). In: *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers* (1996), Nr. 62(598), S. 2436-2441.
- MÜLLER20 Müller, A.: *Experimentelle Durchführung und Auswertung von Abwälzversuchen von Beveloidrädern und Ableitung einer Versuchsmethodik*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Bachelorarbeit, 2020.
- NAUNHEIMER19 Naunheimer, H.; Bertsche, B.; Ryborz, J.; Novak, W.; Fietkau, P.: *Fahrzeuggetriebe. Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion*. 3. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2019. – ISBN 978-3-662-58882-6
- NIEMANN83 Niemann, G.; Winter, H.: *Maschinenelemente. Band 3: Schraubrad-, Kegelrad-, Schnecken-, Ketten-, Riemen-, Reibradgetriebe, Kupplungen, Bremsen, Freiläufe*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag. 1983. – ISBN 978-3-642-17468-1
- NIEMANN03 Niemann, G.; Winter, H.; Höhn, B.-R.: *Maschinenelemente Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnradgetriebe*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- OHTSUKI87 Ohtsuki, K.; Yoshii, G.; Okanishi, T.: *Marine reversing gear assembly*. United States Patent No. 4748864, 1987-06-11
- OTTO07 Otto, M.; Thoma, F.; Weitzl, R.: *Ritzelkorrektur (RIKOR H 2.0 mit LAGER2 2.0) – Benutzeranleitung, Forschungsvorhaben 30V*. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), Abschlussbericht, FVA-Heft 481, Frankfurt a. M., 2007.
- PARK11 Park, N. G.; Lee, H. W.: The spherical involute bevel gear: its geometry, kinematic behavior and standardization. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* (2011), Nr. 25 (4), S. 1023-1034.
- ROTH98 Roth, K.: *Zahnradtechnik. Evolventen-Sonderverzahnungen zur Getriebeverbesserung*. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- ROTH01 Roth, K.: *Zahnradtechnik. Stirnrad-Evolventenverzahnungen*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- RÖTHLINGSHÖFER12 Röthlingshöfer, T.: *Auslegungsmethodik zur Optimierung des Einsatzverhaltens von Beveloidverzahnungen*. Aachen, RWTH Aachen, Dissertation, 2012. – ISBN 978-3-840-1020-6
- SCHIMPF96 Schimpf, B.; Langenbeck, K.: *Auslegung von Beveloidradsätzen für Schiffswendegetriebe*. Bericht Nr. 400 des Instituts für Maschinenkonstruktion und Getriebebau, Universität Stuttgart, 1996.
- SCHLECHT14 Schlecht, B.; Schaefer, S.; Hutschenreiter, B.: *Beveloidräder. Entwicklung einer Zahnkontaktanalyse zur Berechnung der Tragfähigkeit und Geräuschanregung von kegeligen Stirnrädern*



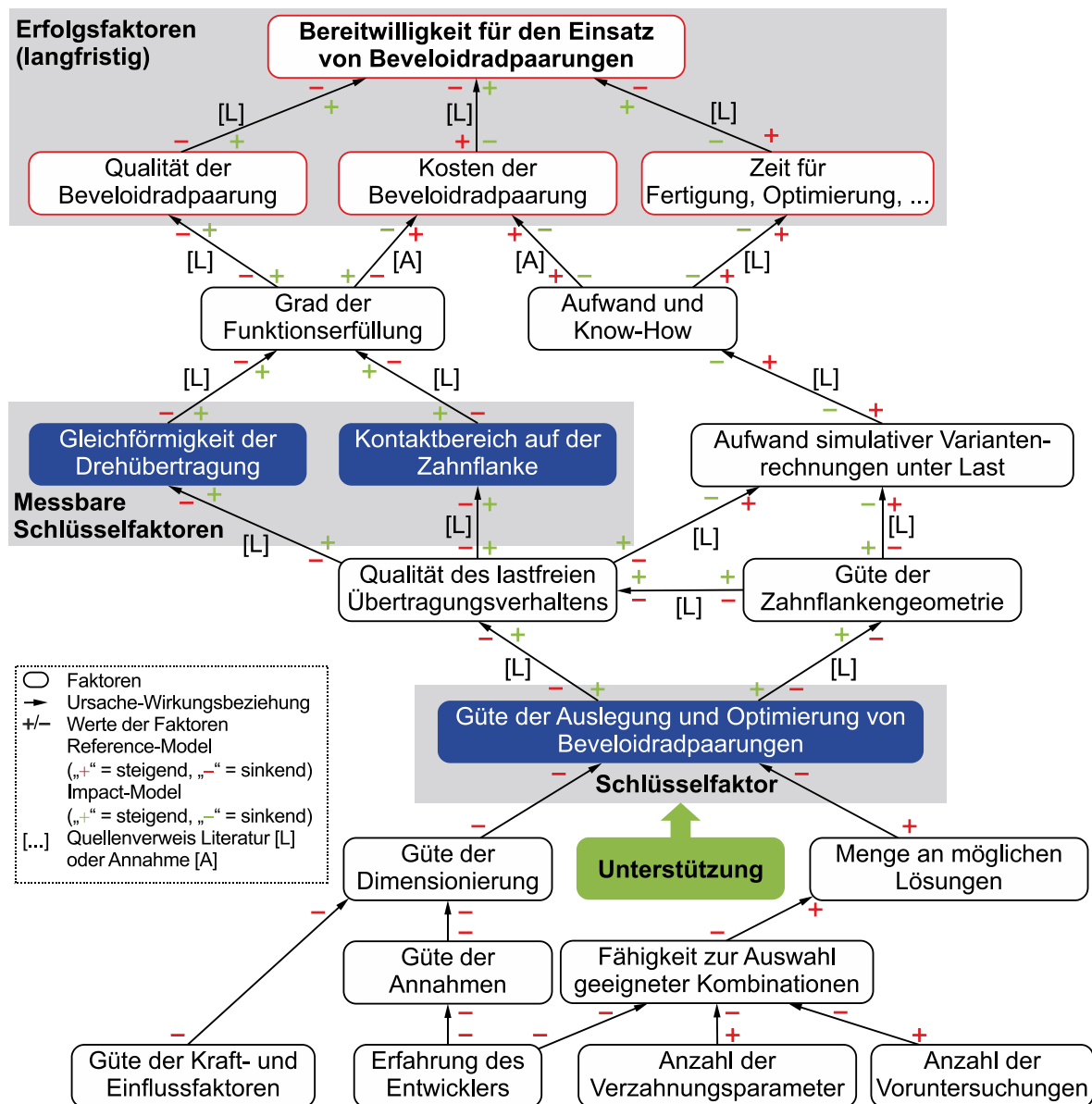
- (Beveloidräder), FVA-Forschungsvorhaben Nr. 657 I. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), Abschlussbericht, FVA-Heft 1115, Frankfurt a. M., 2014.
- SCHMIDT19 Schmidt, V.: *Untersuchung der Stirnschnittbezugskurve für modifizierte Beveloidräder in schneidender Achslage und Erweiterung für die windschiefe Achslage*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Masterarbeit, 2020.
- SCHÖLER17 Schöler, T.; Schumann, S.; Zimmer, M.; Bachmann, M.; Senf, M.; Otto, M.; Binz, H.; Schlecht, B.; Stahl, K.: *Programmmodul zur Vorauslegung der Hauptverzahnungsdaten von Beveloidradstufen*, FVA-Forschungsvorhaben Nr. 657 II. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), Abschlussbericht, FVA-Heft 1210, Frankfurt a. M., 2017.
- SCHÖLER21 Schöler, T.: *Vorauslegung konischer Außenstirnräder für beliebige Achslagen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Dissertation, 2021. – ISBN: 978-3-946924-41-8
- SMITH90 Smith, L. J.: The Involute Helicoid and The Universal Gear. In: *Gear Technology* (1990), Nr. 11, S. 18-27.
- SOMSCHOR96 Somschor, B.; Bürkle, R.; Gandbhir, S.; Schulz, H.: *Konische Verzahnungen in einem neuen spielarmen Robotergetriebe*. In: International Conference on Gears, VDI-Berichte 1230, Dresden, 1996, S. 473-489.
- STADTFELD17 Stadtfeld, H. J.: *Gleason Kegelaradtechnologie*. 2. Aufl. Reningen: expert-verlag, 2017.
- TOMAZ20 Tomaz, F. R.: *Erweiterung einer analytischen Berechnungsmethode für Beveloidräder in windschiefen Achslagen um die Dimensionierung und Kopfberandung der Radpaarung*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Bachelorarbeit, 2020.
- TRAUT19 Traut, C.: *Geometrische Auslegung der Mikrogeometrie konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design, Dissertation, 2019. – ISBN: 978-3-946924-09-8
- TSAI97 Tsai, S.-J.: *Vereinheitlichtes System evolventischer Zahnräder. Auslegung von zylindrischen, konischen, Kronen- und Torusrädern*. Braunschweig, Technische Universität Braunschweig, Institut für Konstruktionslehre Maschinen- und Feinwerk-elemente, Dissertation, 1997.
- TSAI07 Tsai, S.-J.: Geometrical Design of Conical Gear Drives with Profile-shifted Transmission. In: *12th IFToMM World Congress, 18.-21. Juni 2007*. Besançon, 2007.
- VDI2608 2001 VDI/VDE 2608 März 2001: *Einflanken- und Zweiflanken-Wälzprüfung an Zylinderrädern, Kegelarädern, Schnecken und Schneckenrädern*. Berlin: Beuth Verlag.
- VDI2609 2000 VDI/VDE 2609 Oktober 2000: *Ermittlung von Tragbildern an Verzahnungen*. Berlin: Beuth Verlag.

- VDI2612-1 2018 VDI/VDE 2612-1 November 2018: *Messen und Prüfen von Verzahnungen. Auswertung von Profil- und Flankenlinienmessungen an Zylinderrädern mit Evolventenprofil*. Berlin: Beuth Verlag.
- VINCO50 Vinco Corporation Michigan: *Beveloid*. Amerikanische Wortmarke 71607731, 1950-12-15.
- WAGNER93 Wagner, M.: *Beitrag zur geometrischen Auslegung von Stirnradpaaren mit kleinen Achsenkreuzungswinkeln*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Maschinenkonstruktion und Getriebebau, Dissertation, 1993.
- WEISZ98 Weisz, H.: *Exzentergetriebe mit einstellbarem Zahnspiel*. Europäisches Patent EP0861995A2, 1998-02-25.
- WINKLER02 Winkler, T.: *Untersuchung zur Belastbarkeit hohlkorrigierter Beveloidgetriebe für Schiffsgetriebe mittlerer Leistung*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Maschinenkonstruktion und Getriebebau, Dissertation, 2002.
- WITTKER94 Wittke, W.: *Beanspruchungsgerechte und geräuschoptimale Stirnradgetriebe. Toleranzvorgaben und Flankenkorrekturen*. Aachen, RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen, Dissertation, 1994.
- WU09 Wu, S.-H.; Tsai, S.-J.: Geometrical design of skew conical involute gear drives in approximate line contact. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science* (2009), Nr. 223, S. 2201-2211.
- YOKEL72 Yokel, E. C.: *Power Transmission with helical tooth tapered gears on the input and output shafts*. United States Patent No. 3803934, 1974-04-16.
- ZHU12A Zhu, C.; Song, C.; Lim, T. C.; Vijayakar, S.: Geometry Design and Tooth Contact Analysis of Crossed Beveloid Gears for Marine Transmissions. In: *Chinese Journal of Mechanical Engineering* (2012), Nr. 2(25), S. 328-337.
- ZHU12B Zhu, C.; Song, C.; Lim, T. C.; Tao, P.: Pitch cone design and influence of misalignments on tooth contact behaviors of crossed beveloid gears. In: *Mechanism and Machine Theory* (2012), Nr. 59, S. 48-64.
- ZIERAU89 Zierau, S.: *Die geometrische Auslegung konischer Zahnräder und Paarungen mit parallelen Achsen*. Braunschweig, Universität Braunschweig, Institut für Konstruktionslehre. Maschinen- und Feinwerkelemente, Dissertation, 1989.
- ZIMMER16 Zimmer, M.: *Berechnung und Optimierung von Geometrie und Eingriffsverhalten von Verzahnungen beliebiger Achslagen*. München, Technische Universität München, Institut für Maschinen- und Fahrzeugtechnik - Lehrstuhl für Maschinenelemente, Dissertation, 2016. – ISBN: 978-3-8439-3063-5
- ZF02 ZF Friedrichshafen AG: *Antriebsstrang für Fahrzeuge mit Allrad- oder Frontantrieb und einem längs zur Fahrtrichtung angeordneten Gesamtgetriebe*. Deutsches Gebrauchsmuster DE000020212093U1, 2002-08-07.

# Anhang

## A.1 Impact-Model

Das Impact-Model in Bild A.1 ergibt sich aus dem Reference-Model, in dem die zukünftige Situation mit der entwickelten Unterstützung dargestellt wird [BLESSING09, S. 28 f.]. Bisher fehlt eine **Unterstützung** zur Auslegung und Optimierung von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage auf Basis verzahnungsgeometrischer Gleichungen. Durch die beabsichtigte Berechnungsmethode (= Unterstützung) wird die *Qualität des Übertragungsverhaltens* beeinflusst, sodass sich die messbaren Schlüsselfaktoren *Gleichförmigkeit der Drehübertragung* und *Kontaktbereich auf der Zahnflanke* verbessern. Die grünen Faktorenwerte heben den Einfluss der Unterstützung hervor.

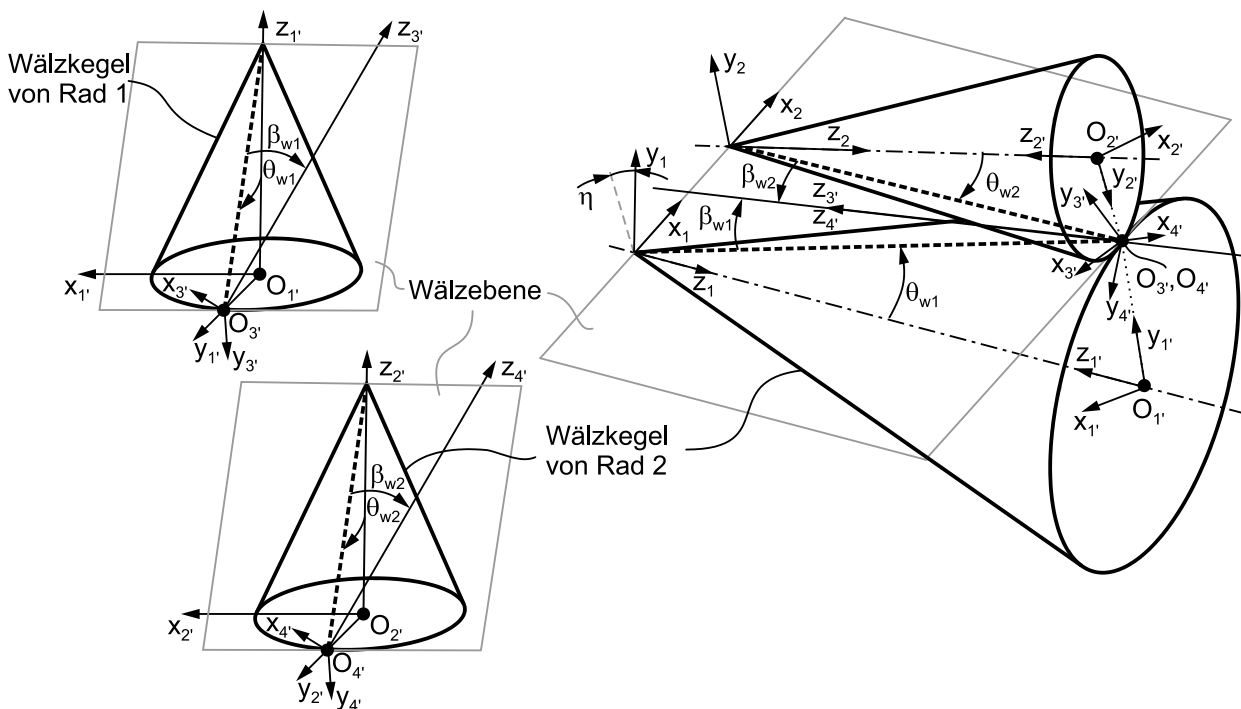


**Bild A.1:** Vollständiges Impact-Model der vorliegenden Arbeit

## A.2 Trigonometrische Umformungen in windschiefer Achslage

### 1. Herleitung des Verdrehwinkels zur Beschreibung der Einbaulage

Die Definition von  $KOS_1$  erfolgt durch mehrere hintereinander ausgeführte Koordinatentransformationen ausgehend von den kinematischen Grundkegeln [MITOME91]. Die Transformationen sind aufgrund der lokalen Verzahnungsdaten für jede Zahnweitenposition  $\zeta$  durchzuführen. In Bild A.2 werden die kinematischen Grundkegel für eine beliebige Breitenposition mit den lokalen  $KOS_j$  dargestellt, wobei der Ursprung  $O_{3'}$  und  $O_{4'}$  mit dem gemeinsamen Wälzpunkt C übereinstimmt. Zur übersichtlichen Darstellung der Transformationen werden homogene Koordinaten verwendet.



**Bild A.2:** Kinematische Wälzkegel zur Bestimmung der Einbaulage von Beveloidradpaarungen in beliebiger Achslage in Anlehnung an [MITOME91]

Die Koordinatentransformation für Rad 1 ausgehend von  $KOS_{3'}$  mit dem Ursprung  $O_{3'}$  zu  $KOS_{1'}$  wird mit der Transformationsmatrix  $T_{1'3'}$  erzielt.

$$T_{1'3'} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{w1} & 0 & -\sin \beta_{w1} & 0 \\ \sin \theta_{w1} \cdot \sin \beta_{w1} & \cos \theta_{w1} & -\sin \theta_{w1} \cdot \cos \beta_{w1} & r_{w1} \\ \cos \theta_{w1} \cdot \sin \beta_{w1} & \sin \theta_{w1} & \cos \theta_{w1} \cdot \cos \beta_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Analog gilt für Rad 2 die Transformationsmatrix  $T_{4'2'}$ , um eine Transformation vom Ursprung  $O_{2'}$  des  $KOS_{2'}$  zu  $KOS_{4'}$  durchzuführen.

$$T_{4'2'} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{w2} & \sin \theta_{w2} \cdot \sin \beta_{w2} & \cos \theta_{w2} \cdot \sin \beta_{w2} & r_{w2} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \sin \beta_{w2} \\ 0 & \cos \theta_{w2} & \sin \theta_{w2} & -r_{w2} \cdot \cos \theta_{w2} \\ -\sin \beta_{w2} & -\sin \theta_{w2} \cdot \cos \beta_{w2} & \cos \theta_{w2} \cdot \cos \beta_{w2} & r_{w2} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \cos \beta_{w2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Am gemeinsamen Wälzpunkt erfolgt durch eine Rotation um die  $z_4'$ -Achse ( $x_4' = -x_3'$ ,  $y_4' = -y_3'$  und  $z_4' = z_3'$ ) die Umrechnung von Rad 2 auf Rad 1. Für die in Mitome [MITOME91] hergeleitete Transformation ergibt sich die Transformationsmatrix  $T_{1'2'}$ , mit welcher durch Umformen die aus dem Stand der Technik bekannten Gleichungen für Achswinkel  $\alpha$ , Achsversatz  $\Sigma$  und Einbauabstände  $Z_{1,2}$  entwickelt werden können [MITOME91]. Für eine bessere Übersichtlichkeit werden für die weiteren Umformungen die Einträge  $A_{ij}$  der Matrix  $T_{1'2'}$  verwendet.

$$T_{1'2'} = T_{1'3'} \cdot T_{3'4'} \cdot T_{4'2'} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$A_{11} = -\cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{12} = \sin \theta_{w2} \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{13} = \cos \theta_{w2} \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{14} = r_{w2} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{21} = \sin \theta_{w1} \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{22} = -\cos \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} + \sin \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{23} = -\cos \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} - \sin \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{24} = r_{w1} + r_{w2} \cdot \{\cos \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} - \sin \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})\}$$

$$A_{31} = -\cos \theta_{w1} \cdot \sin(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{32} = -\sin \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} - \cos \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{33} = -\sin \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} + \cos \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})$$

$$A_{34} = r_{w2} \cdot \{\sin \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} + \cos \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \cdot \cos(\beta_{w1} + \beta_{w2})\}$$

$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0; A_{44} = 1$$

Das KOS<sub>1'</sub> mit dem Einbauabstand von Rad 1 wird in den Kegelursprung verschoben und um die  $y_1'$ -Achse verdreht, sodass die  $z_1'$ -Achse in Richtung der Radachse zeigt. In (A.4) ist die erforderliche Koordinatentransformation dargestellt. Für das raumfeste KOS<sub>1'</sub> fehlt noch die Verdrehung um die  $z_1'$ -Achse, sodass die  $x_1'$ -Achse in Richtung der Spitze des Wälzkegels von Rad 2 zeigt. Mit dem Gleichungssystem in (A.4) kann der gesuchte Verdrehwinkel  $\eta$  bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Aus der zweiten Zeile des Gleichungssystems folgt durch Umformen und Auflösen der Winkel  $\eta$  in (A.5). Durch erneutes Einsetzen des Winkels  $\eta$  in die erste Zeile kann eine Probe durchgeführt werden.

$$\tan \eta = \frac{A_{23} \cdot Z_2 + A_{24}}{A_{13} \cdot Z_2 + A_{14}} \quad (\text{A.5})$$

Das raumfeste KOS<sub>2</sub> hat den Ursprung in der Kegelspitze von Rad 2 mit der z<sub>2</sub>-Achse in Richtung der Radachse und der x<sub>2</sub>-Achse in Richtung der x<sub>1</sub>-Achse.

## 2. Herleitung des Neigungswinkels $\varepsilon'$ für den Path of Contact (PoC)

Die Neigungen der PoC  $\varepsilon'_{L,R}$  können über den Normalenvektor  $\vec{n}_{PoC}$  bestimmt werden, indem dieser in den Axialschnitt projiziert wird. Der Normalenvektor wird über die mit dem Beveloidrad konjugiert abwälzende Zahnstange definiert. Der Vektor  $\vec{n}_{PoC}$  im lokalen Koordinatensystem der Planverzahnung ist nach [MITOME85] in (A.6) angegeben. Die Herleitung gilt für die Linksflanke und kann ohne Einschränkungen auf die Rechtsflanke übertragen werden.

$$\vec{n}_{PoC}^{1,2} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_w \\ -\cos \alpha_w \cdot \cos \beta_w \\ \cos \alpha_w \cdot \sin \beta_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Durch eine Verkipfung um den Konuswinkel  $\theta_w$  kann der Normalenvektor im lokalen Koordinatensystem des jeweiligen Rads ausgedrückt werden. Die Projektion in den Axialschnitt erfolgt über das Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor und einem normierten Vektor in Richtung der y<sub>1</sub>-Achse.

$$\cos \varepsilon'_L = \frac{\vec{n}_{PoC}^{1,2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{|\vec{n}_{PoC}^{1,2}| \cdot \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|} = \frac{\sin \alpha_w \cdot \cos \theta_w + \cos \alpha_w \cdot \sin \beta_w \cdot \cos \theta_w}{\sqrt{\sin^2 \alpha_w + \cos^2 \alpha_w \cdot \sin^2 \beta_w}} \quad (\text{A.7})$$

Mit trigonometrischen Umformungen kann (A.7) vereinfacht werden, sodass daraus die in dieser Arbeit hergeleitete Gleichung zur Bestimmung der Neigungswinkel der PoC  $\varepsilon'_{L,R}$  folgt.

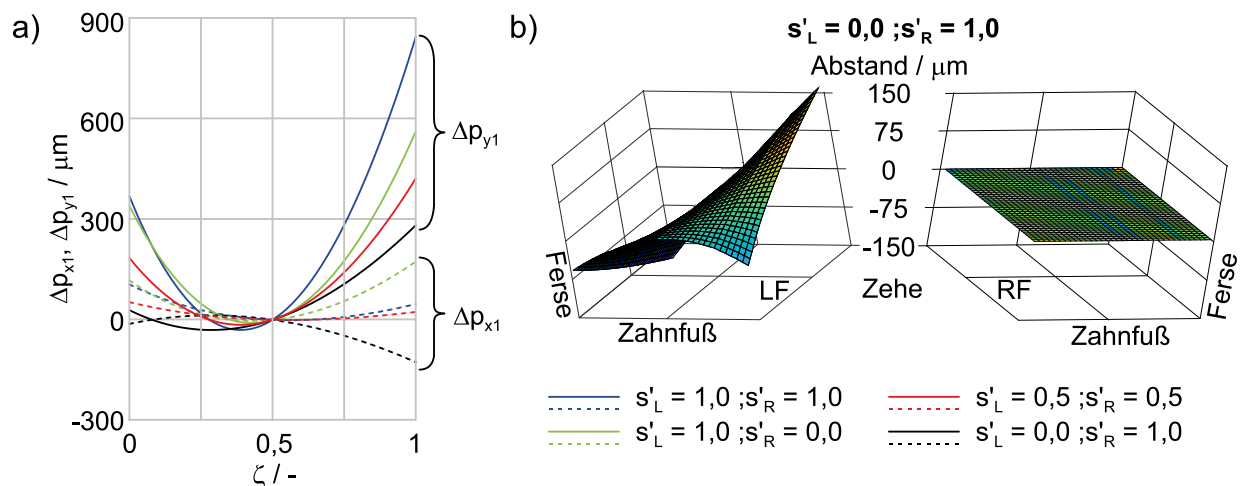
$$\cos \varepsilon'_{L,R} = \frac{\tan \alpha_{wL,R}}{\sqrt{\tan^2 \alpha_w + \tan^2 \alpha_w \cdot \tan^2 \beta_w + \tan^2 \beta_w}} \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Skalierung des konjugierten Eingriffs

Nachfolgend werden die Skalierungsfaktoren  $s'_{L,R}$  gesondert betrachtet, um die Besonderheiten der lokal unveränderten Verzahnungsdaten aufzuzeigen.

Die zusätzlichen Zahnflankenmodifikationen werden zunächst in eine radiale und tangential Änderung  $\Delta p_{x,y1}$  umgerechnet. Bild A.3a stellt für die Referenzverzahnung die Verläufe von  $\Delta p_{x,y1}$  zwischen dem nicht modifizierten und dem modifizierten Rad 1 für unterschiedliche Skalierungsfaktoren  $s'_{L,R}$  gegenüber. Die blauen Verläufe entsprechen der konjugierten Modifikation ohne Skalierung, die roten Verläufe einer beidseitigen Skalierung von 50 % und die grünen bzw. schwarzen Verläufe einer Skalierung, bei der eine Zahnflanke konjugiert modifiziert und die andere nicht modifiziert wird.

Bei gleicher Skalierung der Links- und Rechtsflanke verringern sich die Verläufe der SBK in radialer und tangentialer Richtung in Abhängigkeit der vorgegebenen Skalierungsfaktoren. So halbieren sich die Werte bei einer Skalierung von 50 % (rote Linien) im Vergleich zur konjugierten Modifikation (blaue Linien). Die schwarzen Linien charakterisieren den Verlauf der SBK für eine konjugiert modifizierte Rechtsflanke bei gleichzeitig nicht modifizierter Linksflanke. Bei konjugiert modifizierter Linksflanke (grüne Linien) und gleichzeitig nicht modifizierter Rechtsflanke spiegelt sich der tangentialer Anteil an der Abszisse und ist positiv.



HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,0$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

**Bild A.3:** a) Radiale und tangential Änderung  $\Delta p_{x,y1}$  über der normierten Zahnbreite  $\zeta$  bei Skalierung der Links- und Rechtsflanke  
b) Unterschied zwischen einseitig skalierte Zahnflankengeometrie und einer nicht modifizierter Geometrie auf der Linksflanke sowie konjugiert modifizierten Geometrie auf der Rechtsflanke

Die lokalen Verzahnungsdaten bleiben für alle Verläufe unverändert und sind in Bild 4.20 (Verlauf  $k' = 0,0$ ) dargestellt. Dies führt bei einer Skalierung der konjugierten Modifikation zu beachtlichen Abweichungen. Bild A.3b zeigt die Auswirkungen der unveränderten Verzahnungsdaten bei einer nicht modifizierten Linksflanke und gleichzeitig konjugiert modifizierten Rechtsflanke ( $s'_L = 0,0$ ;  $s'_R = 1,0$ ). Als Referenz für den Zahnradvergleich wird bei der Linksflanke die Zahnflankengeometrie des nicht modifizierten Rads und bei der Rechtsflanke die Geometrie des konjugiert modifizierten Rads herangezogen. Auf der Linksflanke führt der modifizierte Anteil des Schrägungswinkels zu einem deutlichen Flankenlinien-Winkelfehler. Dieser Fehler wird aufgrund der lokalen Stirneingriffswinkel mit einer Verschränkung der Zahnflanke überlagert. Die konjugiert modifizierte Rechtsflanke wird exakt umgesetzt.

Dieses Beispiel veranschaulicht, dass bei einer Skalierung der konjugierten Modifikation eine Abweichung auftritt. Die Abweichungen steigen mit kleiner werdenden Skalierungsfaktoren, sodass der größte Unterschied im nicht modifizierten Zustand vorliegt. Dies hat aufgrund der lokalen Konus- und Schrägungswinkel eine Verlagerung des Tragbilds zur Folge.

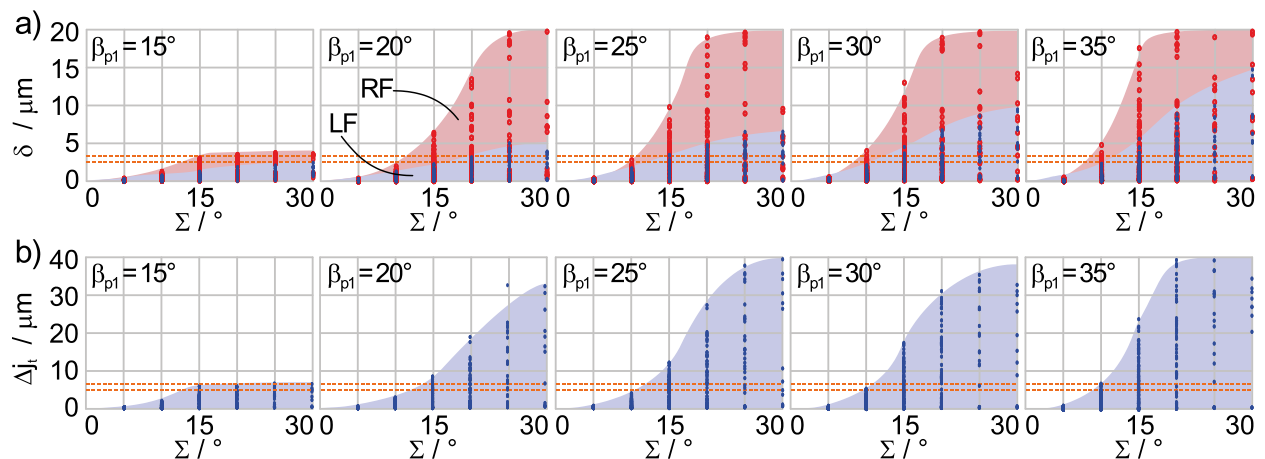
Neben dieser Verlagerung hat die zusätzliche Zahnflankenmodifikation durch Skalierungsfaktoren einen weiteren Effekt, der insbesondere in windschiefer Achslage nicht zu vernachlässigen ist. Der zu kompensierende Ease-Off ist nicht nur asymmetrisch auf Links- und Rechtsflanke verteilt, sondern unterscheidet sich auch deutlich an Zehe und Ferse, vgl. Bild 4.13. Das kann bereits bei geringer Skalierung zu einem verlagerten Tragbild führen, da sich die Modifikationsbeträge lokal nach dem auftretenden Ease-Off richten.



## A.4 Theoretische Untersuchung der Berechnungsmethode

### 1. Drehfehler und Abweichung zum definierten Verdrehflankenspiel

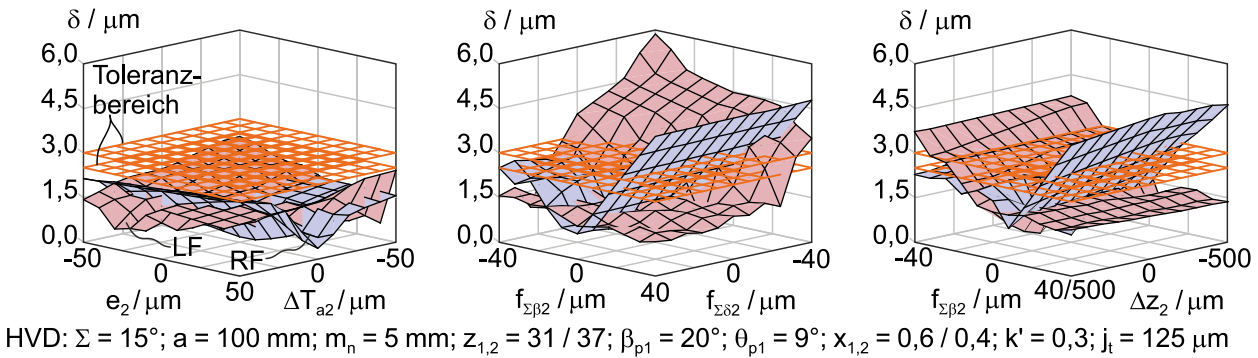
Neben dem Tragbild kann der Drehfehler  $\delta$  und die Abweichung zum definierten Verdrehflankenspiel  $\Delta j_t$  in Bild A.4 herangezogen werden, um das lastfreie Übertragungsverhalten zu bewerten. Die Ergebnisse werden aufgeteilt nach vorgegebenem Schrägungswinkel  $\beta_{p1}$  über dem Achswinkel  $\Sigma$  dargestellt. Wie beim gewichteten Traganteil fallen die Ergebnisse des Drehfehlers der Rechtsflanke schlechter aus als diejenigen der Linksflanke. Über alle Verläufe zeigt sich eine Erhöhung des Drehfehlers mit zunehmenden Achswinkel. Hinsichtlich des Drehfehlers kann die Berechnungsmethode für Achswinkel  $\Sigma < 10^\circ$  bzw. maximale Schrägungswinkel  $\beta_{\max} = 15^\circ$  uneingeschränkt verwendet werden. Ähnliche Erkenntnisse liefert die Abweichung zum definierten Verdrehflankenspiel.



**Bild A.4:** Einfluss der Wechselwirkungen auf den a) Drehfehler  $\delta$  und b) die Abweichung zum definierten Verdrehflankenspiel  $\Delta j_t$

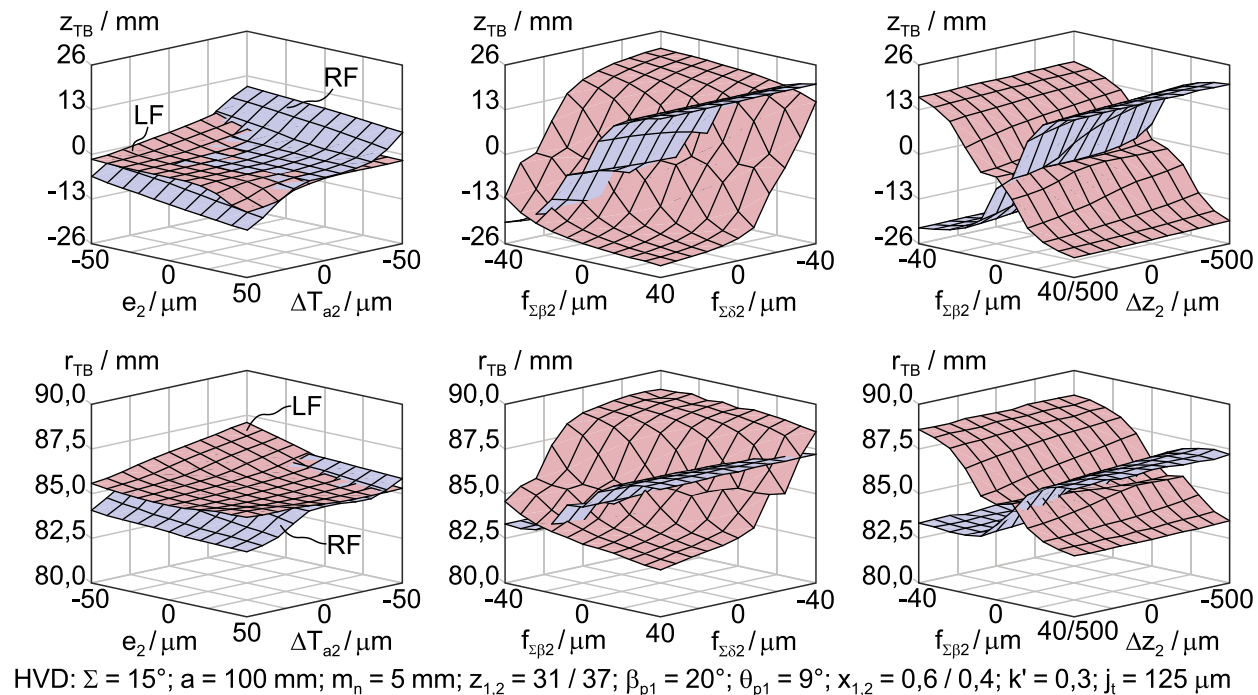
### 2. Auswirkung des verlagerten Achssystems auf den Drehfehler und auf den Tragbildschwerpunkt

Ein verlagertes Achssystem beeinflusst neben dem Traganteil den Drehfehler, sodass sich insbesondere Kantentragen negativ auf den Maximalwert auswirkt. Bild A.5 zeigt den Drehfehler  $\delta$  in Abhängigkeit der Achsverlagerungen. Die Achsabweichungsänderung  $\Delta T_a$ , die Exzentrizität  $e$  und die axiale Verlagerung  $\Delta z$  besitzen nur einen geringfügigen Einfluss auf den Drehfehler. Den maximalen Wert erreicht der Drehfehler für eine negative Achsneigung  $f_{\Sigma\delta}$  und -schränkung  $f_{\Sigma\beta}$ , da hier Kantentragen im Kopfbereich der Ferse vorliegt, siehe Bild A.6 Die Achsneigung und -schränkung führt dazu, dass der Drehfehler den Toleranzbereich merklich überschreitet.



**Bild A.5:** Drehfehler  $\delta$  bei verlagertem Achssystem

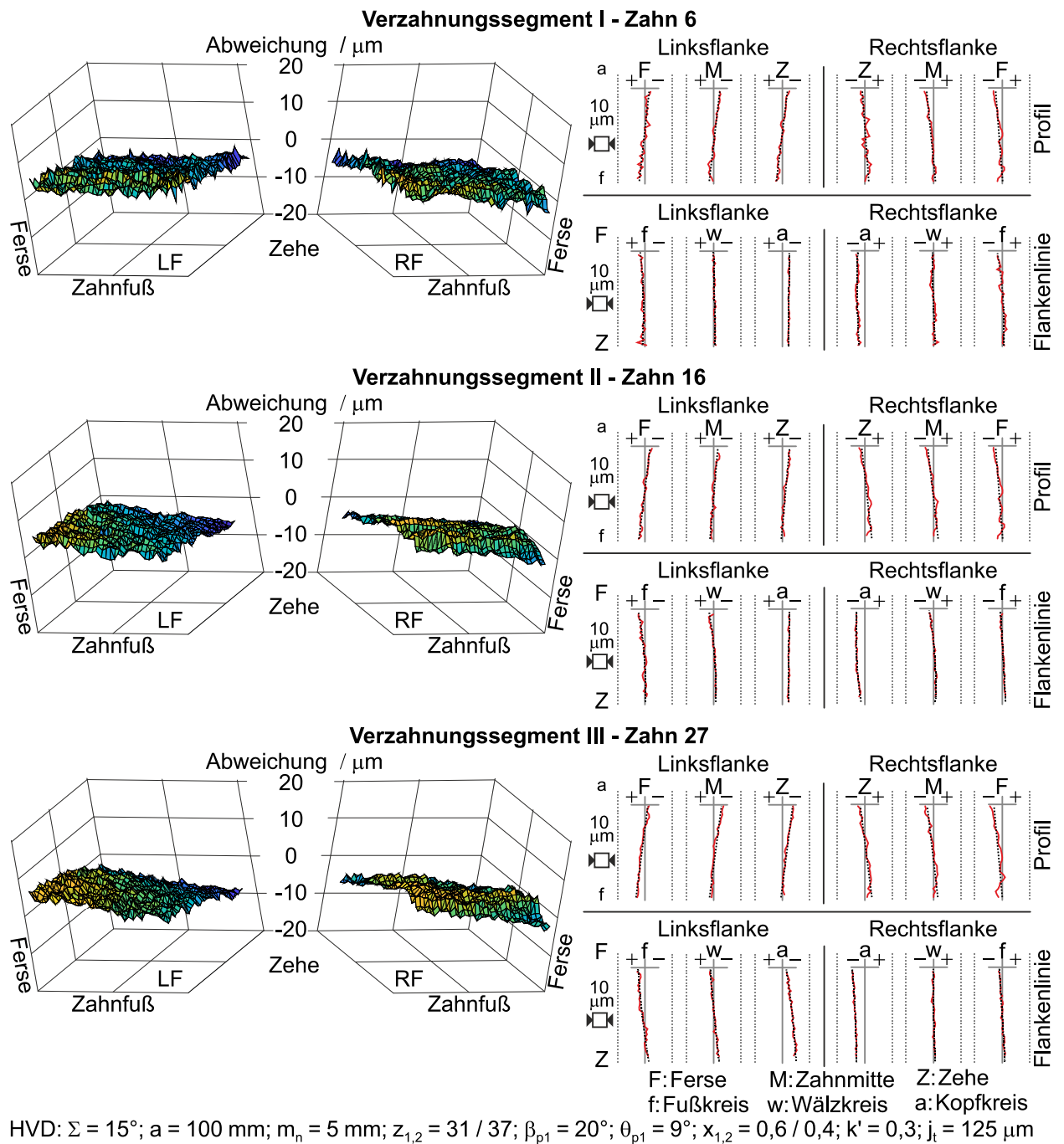
Um einen Eindruck zu bekommen, an welcher Position das Tragen im verlagerten Achssystem stattfindet, ist in Bild A.6 die Position des Tragbildschwerpunkts in axialer ( $z_{TB}$ ) und radialer ( $r_{TB}$ ) Richtung in Abhängigkeit der Achsverlagerungen dargestellt. Wie die Ergebnisse des Traganteils und des Drehfehlers vermuten lassen, wirken sich Achsabweichungsänderung und Exzentrizität geringfügig auf den Tragbildschwerpunkt aus.



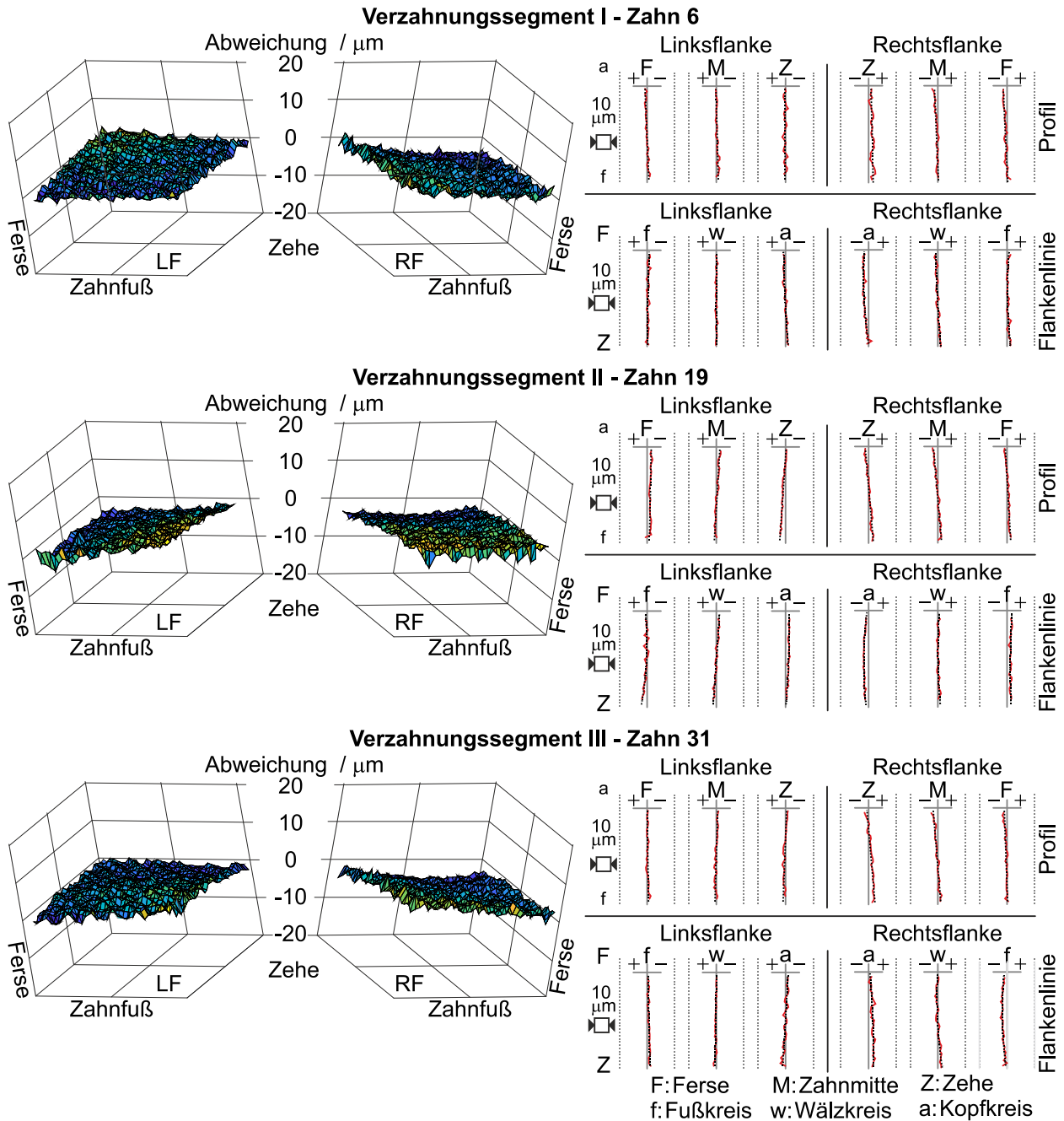
**Bild A.6:** Lage des Tragbildschwerpunkts in axialer ( $z_{TB}$ ) und radialer ( $r_{TB}$ ) Richtung

Bei der Achsneigung und -schränkung verschiebt sich für negative Werte der Tragbildschwerpunkt in Richtung Ferse und Zahnkopf. Bei positiver Achsneigung und -schränkung ist eine gegensätzliche Verlagerung des Schwerpunkts hin zur Zehe und zum Zahnfuß erkennbar. Beide Verlagerungen führen zu Kantentragen und verschlechtern das Übertragungsverhalten. Die axiale Verschiebung hat im untersuchten Bereich einen vernachlässigbar geringen Einfluss auf die Lage des Tragbildschwerpunkts.

### A.5 Vermessung der Prüfräder



**Bild A.7:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 1, Rad 1

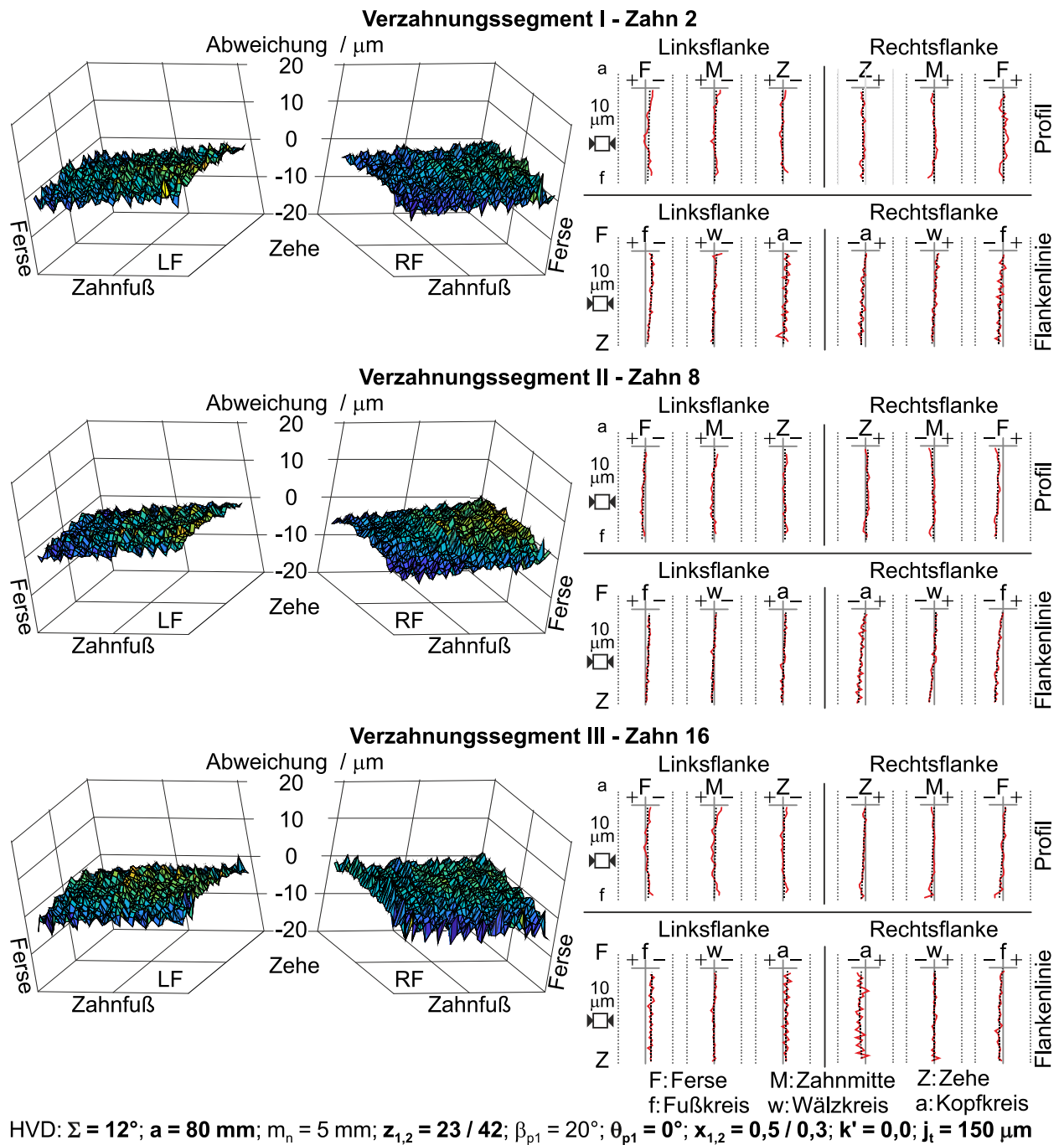


HVD:  $\Sigma = 15^\circ$ ;  $a = 100 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 31 / 37$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 9^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,6 / 0,4$ ;  $k' = 0,3$ ;  $j_t = 125 \mu\text{m}$

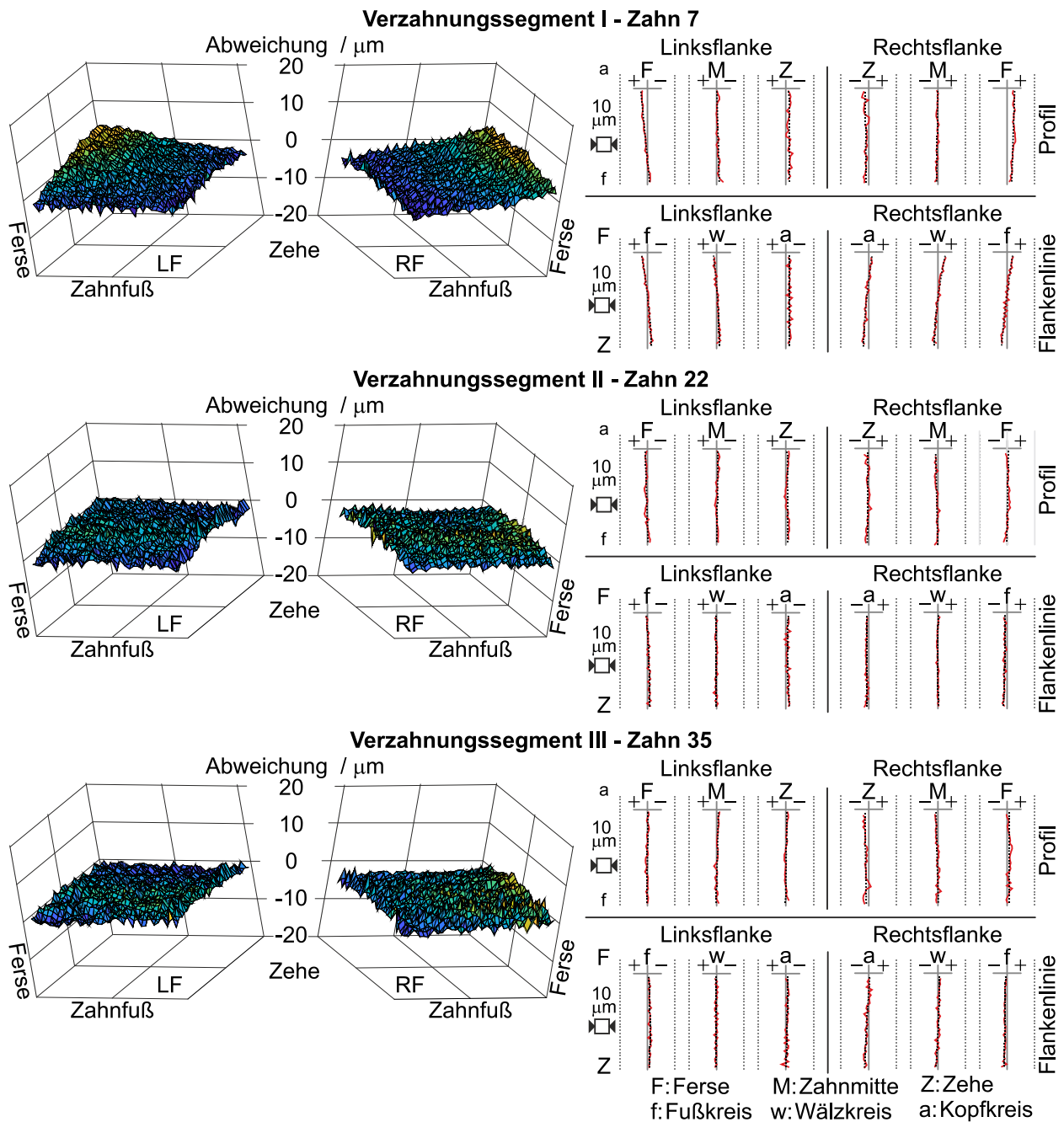
**Bild A.8:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 1, Rad 2

Abweichung	Rad 1						Rad 2						
	Zahn 6		Zahn 16		Zahn 27		Zahn 6		Zahn 19		Zahn 31		
	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	
$F_\beta$	$\mu\text{m}$	6,6	8,0	6,7	6,8	8,7	9,6	4,3	7,2	8,8	4,6	6,0	8,3
$f_{H\beta}$	$\mu\text{m}$	1,4	5,2	5,2	6,6	6,7	2,8	0,1	3,6	8,0	0,3	3,9	4,1
$f_{f\beta}$	$\mu\text{m}$	6,5	4,6	3,5	3,0	4,0	10,1	4,3	4,4	3,4	4,6	3,9	6,5
$F_\alpha$	$\mu\text{m}$	10,2	10,2	10,1	11,3	11,1	12,2	4,5	5,8	5,4	7,3	5,1	8,5
$f_{H\alpha}$	$\mu\text{m}$	8,3	7,3	6,7	10,1	9,1	9,8	3,0	3,5	2,5	4,7	4,2	4,9
$f_{f\alpha}$	$\mu\text{m}$	5,2	4,2	6,0	6,5	4,7	8,1	2,3	3,8	3,9	2,7	2,3	2,6

**Tabelle A.1:** Profil- und Flankenlinienabweichungen von Paarung 1



**Bild A.9:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 2, Rad 1

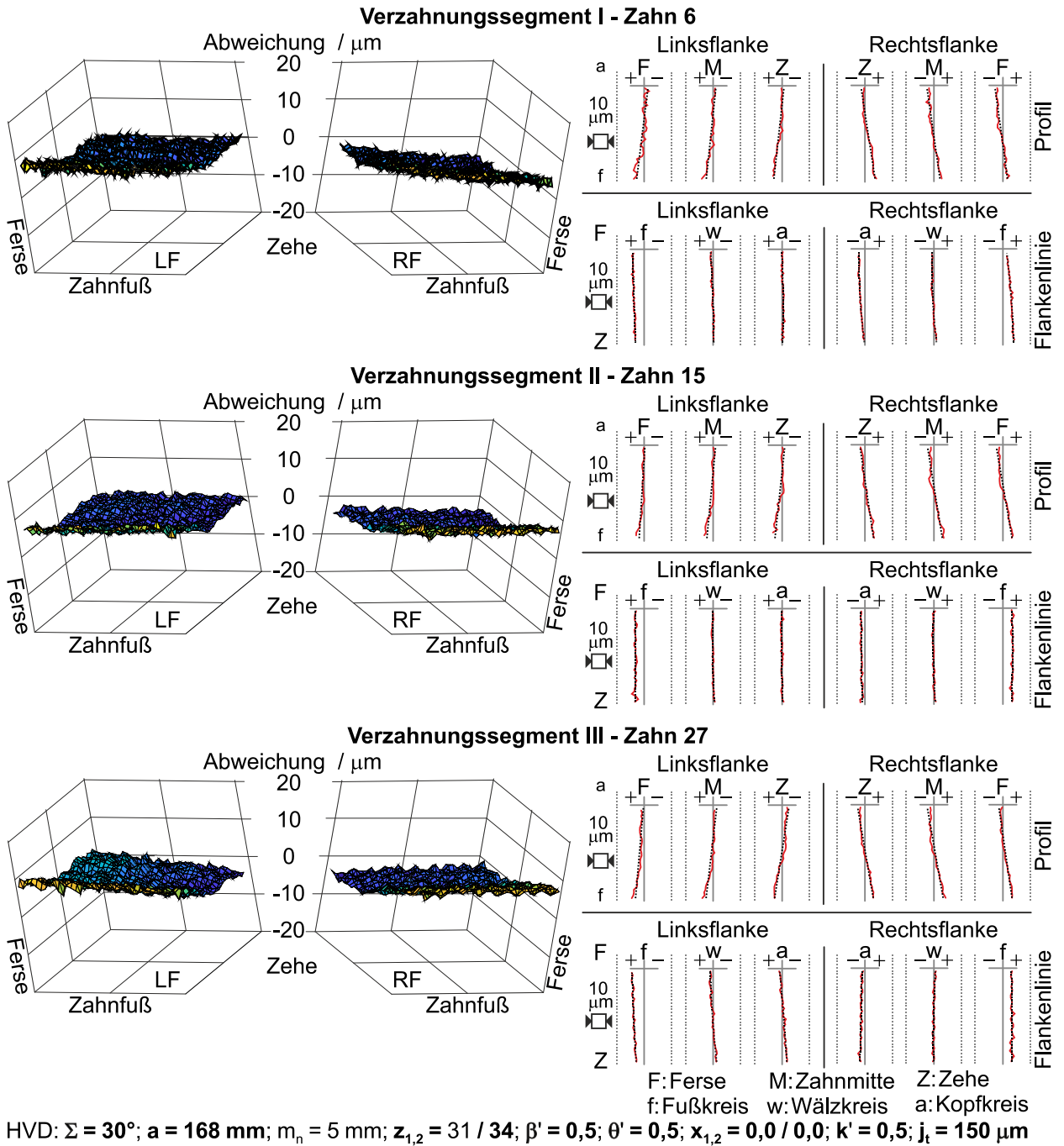


HVD:  $\Sigma = 12^\circ$ ;  $a = 80 \text{ mm}$ ;  $m_n = 5 \text{ mm}$ ;  $z_{1,2} = 23 / 42$ ;  $\beta_{p1} = 20^\circ$ ;  $\theta_{p1} = 0^\circ$ ;  $x_{1,2} = 0,5 / 0,3$ ;  $k' = 0,0$ ;  $j_t = 150 \mu\text{m}$

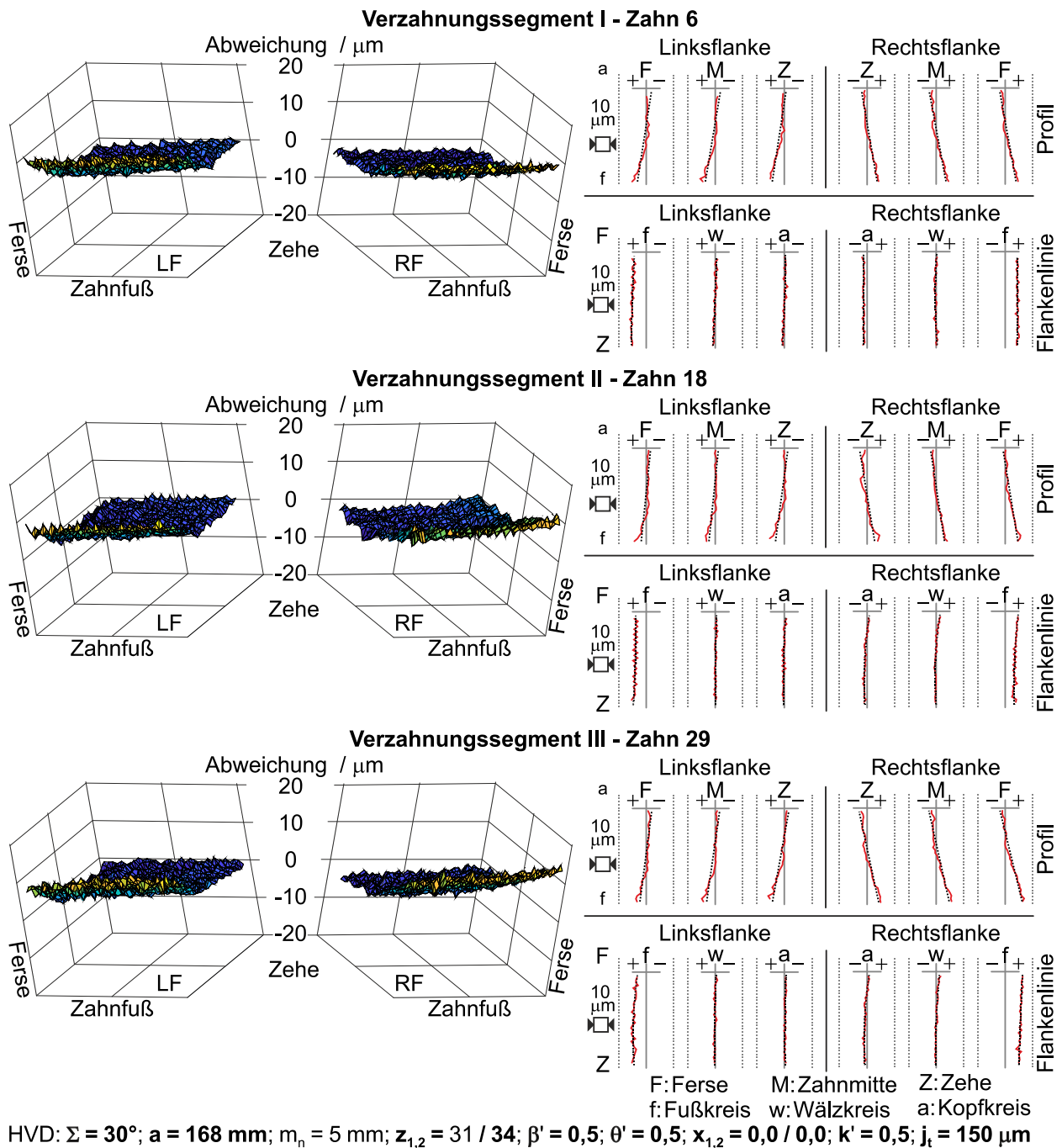
**Bild A.10:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 2, Rad 2

Abweichung		Rad 1						Rad 2					
		Zahn 2		Zahn 8		Zahn 16		Zahn 7		Zahn 22		Zahn 35	
		LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF
$F_\beta$	$\mu\text{m}$	9,7	7,7	5,9	9,4	7,3	9,5	6,3	10,5	6,6	5,2	5,4	7,7
$f_{H\beta}$	$\mu\text{m}$	2,9	3,2	3,3	4,7	1,7	1,1	4,3	8,3	0,9	1,1	1,5	3,5
$f_{f\beta}$	$\mu\text{m}$	8,3	5,5	3,6	6,3	7,3	9,5	2,9	3,3	6,6	4,5	5,0	5,5
$F_\alpha$	$\mu\text{m}$	7,0	6,8	6,3	6,9	8,1	11,9	7,5	5,3	9,8	6,2	5,8	8,7
$f_{H\alpha}$	$\mu\text{m}$	0,9	0,2	0,7	1,7	1,4	4,1	5,3	0,4	2,1	0,3	0,7	2,5
$f_{f\alpha}$	$\mu\text{m}$	6,2	6,8	6,3	6,7	7,6	10,6	2,6	5,2	9,4	5,8	5,5	7,6

**Tabelle A.2:** Profil- und Flankenlinienabweichungen von Paarung 2



**Bild A.11:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 3, Rad 1



**Bild A.12:** Topografische Darstellung und Messschriebe von Paarung 3, Rad 2

Abweichung		Rad 1						Rad 2					
		Zahn 6		Zahn 15		Zahn 27		Zahn 6		Zahn 18		Zahn 29	
		LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF	LF	RF
$F_\beta$	$\mu\text{m}$	4,6	5,8	4,6	4,7	5,6	3,6	6,0	4,7	4,6	7,3	5,7	6,2
$f_{H\beta}$	$\mu\text{m}$	1,8	3,0	0,1	0,4	2,7	0,1	3,4	0,6	0,1	3,2	2,5	2,7
$f_{f\beta}$	$\mu\text{m}$	3,8	4,6	4,6	4,7	5,3	3,6	4,5	4,4	4,5	5,3	5,6	5,4
$F_\alpha$	$\mu\text{m}$	10,5	11,3	10,6	11,7	11,0	12,0	13,7	13,5	11,7	13,8	13,5	16,3
$f_{H\alpha}$	$\mu\text{m}$	8,6	9,7	7,2	11,7	7,4	12,0	8,1	12,8	7,2	11,8	11,2	15,6
$f_{f\alpha}$	$\mu\text{m}$	2,9	3,0	3,6	3,6	5,0	4,5	6,6	5,3	5,8	6,9	3,8	6,9

**Tabelle A.3:** Profil- und Flankenlinienabweichungen von Paarung 3



## A.6 Vergleich der Simulations- und Prüfstandsergebnisse

Im Folgenden sind die Ergebnisse der Prüfradpaarungen zusammengestellt. Zunächst sind für jede Paarung die Tragbilder und Drehfehlerverläufe visualisiert. Die Tabellen zeigen die statistische Auswertung der Drehfehlerverläufe, wobei für jedes Verzahnungssegment in beiden Drehrichtungen fünf Messungen durchgeführt werden.

Die Bilder in diesem Kapitel zeigen die Simulations- und Prüfstandsergebnisse der exemplarisch ausgelegten Prüfradpaarungen. Für jedes Verzahnungssegment sind zur Modellierung der Zahnflankengeometrie die lokal angepassten Verzahnungsdaten und Verläufe der SBK über der normierten Zahnbreite dargestellt. Die Tragbilder unter „Simulation Auslegung“ zeigen die Ergebnisse der Kontaktsimulation für die ausgelegte fehlerfreie Verzahnung. Für die „Simulation Vermessung“ werden die tatsächlichen Zahnflankengeometrien in der Kontaktsimulation berücksichtigt. Der Unterschied zu den erstgenannten Tragbildern spiegelt die Abweichungen bei der Fertigung wider. Die blau eingefärbten Tragbilder sind am Prüfstand ermittelt und zeigen den Kontaktbereich beim lastfreien Abwälzen der Prüfradpaarungen. Für den Vergleich zwischen den Simulations- und Prüfstandsergebnissen kennzeichnet die grüne Berandung den Kontaktbereich aus dem Abwälzversuch. Aufgrund des verringerten Messbereichs sind die Zahnflanken unter „Simulation Vermessung“ in Zahnbreiten und -höhenrichtung reduziert. Die tatsächliche Berandung ist gestrichelt gekennzeichnet.

Der simulierte Drehfehlerverlauf der ausgelegten (gestrichelte Linie) und der vermessenen (durchgezogene Linie) Verzahnung wird über zwei Teilungen abgebildet. Der gepunktete Verlauf charakterisiert den am Prüfstand aufgezeichneten Drehfehler. Der grau hervorgehobene Bereich kennzeichnet dabei den Abschnitt des Drehfehlerverlaufs, in dem die vermessenen Zähne miteinander abwälzen.

Die statistische Auswertung des Drehfehlerverlaufs im hervorgehobenen Bereich ist in den nachfolgenden Tabellen zusammengefasst. Als qualitative und quantitative Maßzahl werden der Korrelationskoeffizient  $r_{xy}$  nach (6.1) [HUDE20, S. 33 ff.] und der quadratische Mittelwert der Messabweichungen  $\Delta_{\delta}$  nach (6.2) herangezogen. Letztgenannter erfasst die Präzision und Richtigkeit der Messung und berechnet sich über den systematischen ( $f_{\delta}$ ) und zufälligen Fehler ( $s_{\delta}$ ) [HEDDERICH20, S. 107 f.]. In der letzten Spalte ist jeweils der Mittelwert der fünf Messungen dargestellt.

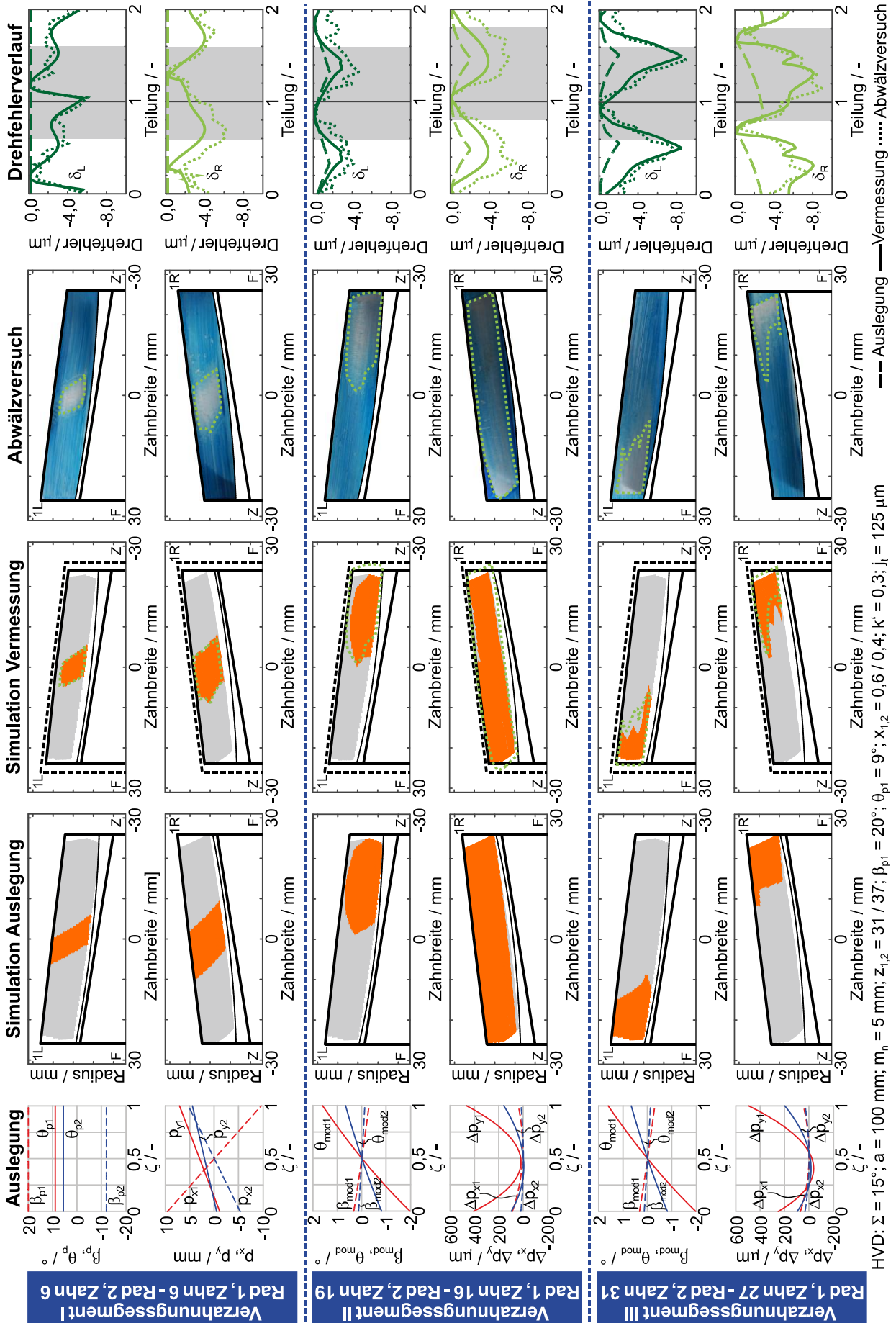


Bild A.13: Vergleich der Simulations- und Prüfstandsergebnisse von Paarung 1

Messung		1	2	3	4	5	Mittelwert
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment I – LF (Rad 1, Zahn 6 - Rad 2, Zahn 6)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	6,2	6,4	6,5	6,5	5,8	<b>6,3</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	<b>5,7</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,897	0,856	0,860	0,913	0,866	<b>0,878</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,795	1,621	1,405	1,112	0,769	<b>1,272</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,404	1,412	1,159	0,794	0,076	<b>0,769</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,698	0,811	0,814	0,793	0,780	<b>0,778</b>
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment I – RF (Rad 1, Zahn 6 - Rad 2, Zahn 6)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	5,8	5,1	4,9	5,4	3,8	<b>5,0</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	<b>3,6</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,908	0,896	0,894	0,836	0,905	<b>0,888</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,585	0,672	1,020	0,915	0,560	<b>0,751</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,723	0,002	0,443	0,085	0,357	<b>0,322</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,733	0,596	0,514	0,928	0,440	<b>0,643</b>
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment II – LF (Rad 1, Zahn 16 - Rad 2, Zahn 19)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	4,5	5,3	5,2	3,5	4,4	<b>4,6</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	<b>2,7</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,879	0,857	0,868	0,903	0,804	<b>0,862</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,170	1,467	1,287	0,842	1,308	<b>1,215</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,830	0,909	0,860	0,417	0,852	<b>0,774</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,170	0,973	0,973	0,743	1,009	<b>0,946</b>
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment II – RF (Rad 1, Zahn 16 - Rad 2, Zahn 19)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	6,7	7,2	6,1	6,4	6,1	<b>6,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	<b>3,8</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,989	0,889	0,866	0,881	0,801	<b>0,885</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,200	1,755	1,712	1,648	1,648	<b>1,670</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,054	1,116	1,164	1,544	1,133	<b>1,202</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,756	1,377	1,275	1,198	1,216	<b>1,164</b>
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment III – LF (Rad 1, Zahn 27 - Rad 2, Zahn 31)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	8,8	8,5	8,9	8,7	9,0	<b>8,8</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	8,3	8,3	8,3	8,3	8,3	<b>8,3</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,931	0,962	0,964	0,924	0,951	<b>0,947</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,919	0,820	1,002	0,993	0,822	<b>0,911</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,360	0,619	0,021	0,084	0,066	<b>0,230</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,953	0,692	0,835	1,008	0,835	<b>0,865</b>
<b>Paarung 1 – Verzahnungssegment III – RF (Rad 1, Zahn 27 - Rad 2, Zahn 31)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	9,0	10,0	8,8	9,5	9,4	<b>9,3</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	<b>8,5</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,869	0,888	0,791	0,827	0,886	<b>0,852</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,345	1,569	1,796	2,456	1,645	<b>1,762</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,552	1,039	0,371	0,106	0,142	<b>0,442</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,570	1,198	1,791	2,500	1,670	<b>1,746</b>

Tabelle A.4: Statistische Auswertung der Drehfehlerverläufe von Paarung 1

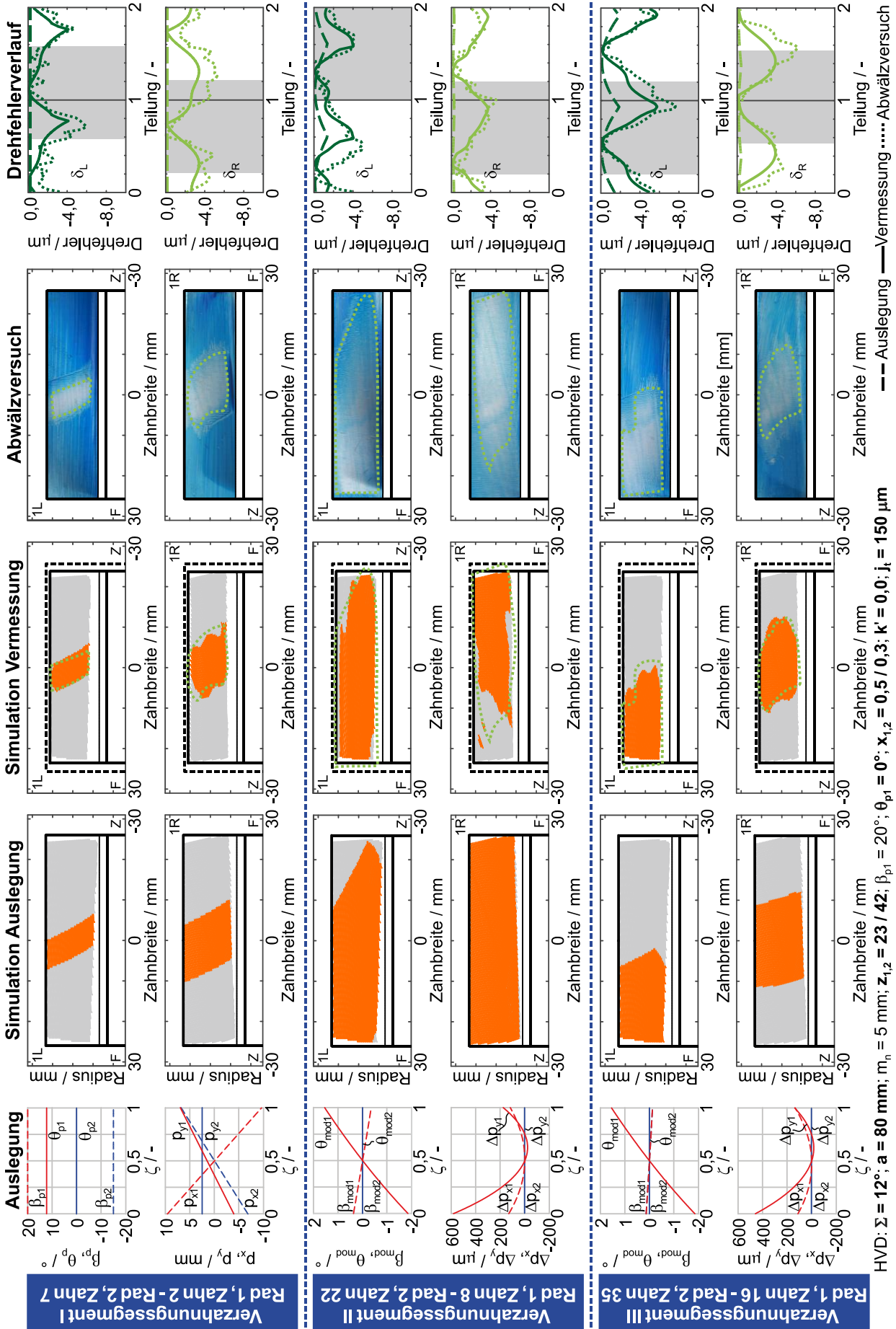


Bild A.14: Vergleich der Simulations- und Prüfstandsergebnisse von Paarung 2

Messung		1	2	3	4	5	Mittelwert
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment I – LF (Rad 1, Zahn 2 - Rad 2, Zahn 7)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	6,0	6,0	5,0	5,4	4,9	<b>5,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	<b>4,0</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,914	0,904	0,824	0,858	0,851	<b>0,870</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,704	1,328	0,759	0,625	0,705	<b>0,824</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,379	0,925	0,100	0,359	0,274	<b>0,407</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,603	0,969	0,764	0,520	0,659	<b>0,767</b>
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment I – RF (Rad 1, Zahn 2 - Rad 2, Zahn 7)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	5,2	4,6	4,7	5,2	4,8	<b>4,9</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	<b>3,4</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,903	0,863	0,935	0,902	0,882	<b>0,898</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,098	0,855	1,170	1,109	1,150	<b>1,076</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,690	0,284	0,717	0,797	0,542	<b>0,608</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,862	0,819	0,939	0,783	1,030	<b>0,887</b>
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment II – LF (Rad 1, Zahn 8 - Rad 2, Zahn 22)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	4,9	5,3	5,7	5,8	5,3	<b>5,4</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	<b>3,9</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,920	0,873	0,844	0,894	0,900	<b>0,886</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,355	0,672	0,899	0,900	0,839	<b>0,933</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,143	0,189	0,250	0,114	0,073	<b>0,154</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,370	0,655	0,878	0,907	0,849	<b>0,932</b>
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment II – RF (Rad 1, Zahn 8 - Rad 2, Zahn 22)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	4,6	4,0	6,0	6,3	5,1	<b>5,2</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	<b>3,7</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,910	0,912	0,829	0,831	0,834	<b>0,863</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,884	0,632	1,184	1,097	0,986	<b>0,957</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,068	0,270	0,006	0,717	0,629	<b>0,338</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,896	0,581	1,203	0,845	0,771	<b>0,859</b>
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment III – LF (Rad 1, Zahn 16 - Rad 2, Zahn 35)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	7,8	9,3	9,1	8,5	8,3	<b>8,6</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	<b>5,9</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,952	0,918	0,942	0,947	0,946	<b>0,941</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,101	1,936	1,898	1,928	2,303	<b>1,833</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,709	1,664	1,490	1,620	1,885	<b>1,474</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,855	1,006	1,195	1,062	1,344	<b>1,092</b>
<b>Paarung 2 – Verzahnungssegment III – RF (Rad 1, Zahn 16 - Rad 2, Zahn 35)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	6,2	6,8	6,6	6,6	6,4	<b>6,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	<b>3,9</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,939	0,920	0,903	0,937	0,954	<b>0,931</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,586	0,859	1,107	1,441	1,130	<b>1,025</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,003	0,188	0,206	1,210	0,549	<b>0,431</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	0,596	0,852	1,105	0,794	1,000	<b>0,870</b>

Tabelle A.5: Statistische Auswertung der Drehfehlerverläufe von Paarung 2

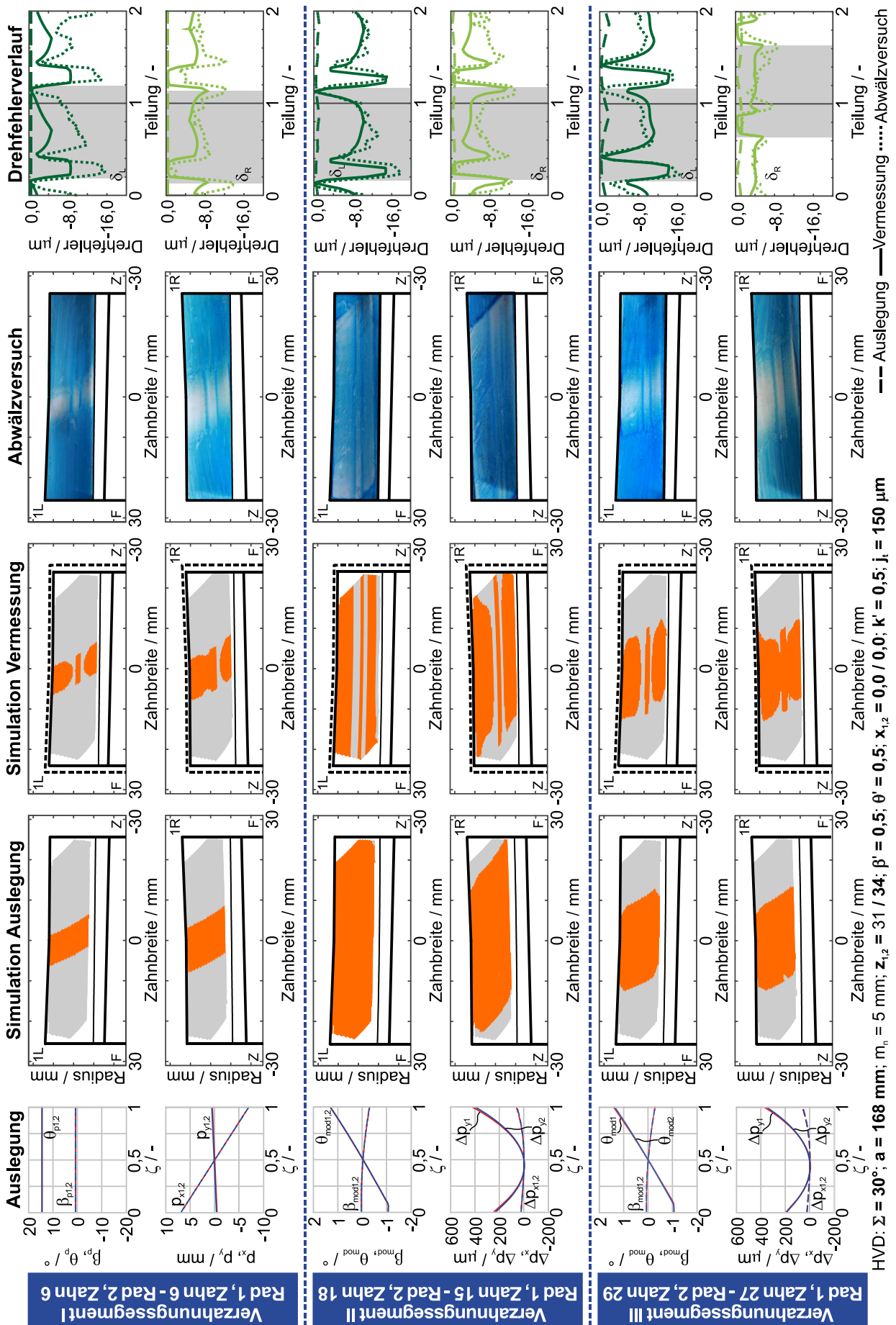


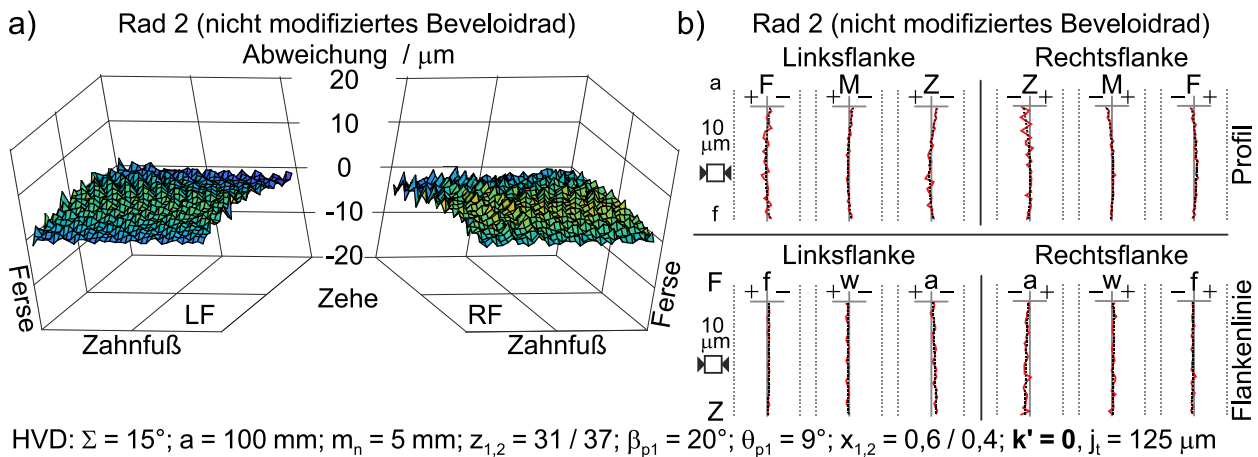
Bild A.15: Vergleich der Simulations- und Prüfstandsergebnisse von Paarung 3

Messung		1	2	3	4	5	Mittelwert
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment I – LF (Rad 1, Zahn 6 - Rad 2, Zahn 6)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	15,6	14,7	15,3	13,7	13,1	<b>14,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	8,4	8,4	8,4	8,4	8,4	<b>8,4</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,792	0,864	0,778	0,857	0,866	<b>0,831</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	3,260	4,636	5,621	3,798	3,305	<b>4,124</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,102	4,097	4,822	2,974	1,867	<b>3,167</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,531	2,204	2,935	2,401	2,791	<b>2,572</b>
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment I – RF (Rad 1, Zahn 6 - Rad 2, Zahn 6)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	11,5	10,8	12,1	13,8	11,5	<b>11,9</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	6,9	6,9	6,9	6,9	6,9	<b>6,9</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,914	0,820	0,850	0,827	0,898	<b>0,862</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,978	1,839	2,941	2,722	2,268	<b>2,349</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,676	0,768	1,302	2,281	1,739	<b>1,553</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,068	1,698	2,658	1,059	1,478	<b>1,592</b>
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment II – LF (Rad 1, Zahn 15 - Rad 2, Zahn 18)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	17,8	17,3	18,7	16,2	17,4	<b>17,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	14,6	14,6	14,6	14,6	14,6	<b>14,6</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,852	0,831	0,819	0,864	0,838	<b>0,841</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,839	2,655	2,983	2,085	2,697	<b>2,652</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,827	1,046	1,491	0,022	0,948	<b>1,067</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,207	2,479	2,625	2,118	2,566	<b>2,399</b>
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment II – RF (Rad 1, Zahn 15- Rad 2, Zahn 18)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	13,1	12,1	11,6	12,6	13,0	<b>12,5</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	<b>11,5</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,887	0,847	0,812	0,814	0,859	<b>0,844</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,671	2,653	2,186	2,296	2,536	<b>2,468</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,171	2,056	1,182	1,320	1,960	<b>1,738</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,580	1,703	1,868	1,909	1,636	<b>1,739</b>
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment III – LF (Rad 1, Zahn 27 - Rad 2, Zahn 29)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	16,4	15,1	13,8	13,2	15,2	<b>14,7</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	14,0	14,0	14,0	14,0	14,0	<b>14,0</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,916	0,927	0,906	0,915	0,939	<b>0,920</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,148	2,103	2,424	2,088	1,820	<b>2,117</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,122	1,684	1,925	1,542	1,244	<b>1,503</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,861	1,281	1,497	1,431	1,349	<b>1,484</b>
<b>Paarung 3 – Verzahnungssegment III – RF (Rad 1, Zahn 27 - Rad 2, Zahn 29)</b>							
Maximaler Drehfehler (Messung)	$\delta$ $\mu\text{m}$	8,3	7,8	10,1	10,6	9,7	<b>9,3</b>
Maximaler Drehfehler (Simulation)	$\delta$ $\mu\text{m}$	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	<b>5,1</b>
Korrelationskoeffizient	$r_{xy}$ -	0,809	0,773	0,791	0,824	0,792	<b>0,798</b>
Quad. Mittelwert der Messabw.	$\Delta_{\delta}$ $\mu\text{m}$	2,063	2,206	2,146	3,315	2,728	<b>2,491</b>
Systematischer Fehler	$f_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,507	1,737	1,367	2,634	2,267	<b>1,902</b>
Zufälliger Fehler	$s_{\delta}$ $\mu\text{m}$	1,431	1,378	1,680	2,045	1,541	<b>1,615</b>

Tabelle A.6: Statistische Auswertung der Drehfehlerverläufe von Paarung 3

### A.7 Fertigungssimulation

Bild A.16 zeigt die Abweichungen zwischen den Zahnflankengeometrien aus dem Flankengenerator und der Fertigungssimulation für ein nicht modifiziertes Beveloidrad. Die Abweichungen verlaufen ballig in Profilrichtung und bestätigen somit die Erkenntnisse in [TRAUT19, S. 130 ff.]. Die Balligkeit nimmt von der Zehe hin zur Ferse ab. In Flankenlinienrichtung sind keine signifikanten Abweichungen im Messschrieb erkennbar.



**Bild A.16:** Abweichung der Zahnflankengeometrien aus dem Flankengenerator und der Fertigungssimulation als a) topografische Darstellung und b) Messschriebe

Für die Fertigungssimulation leitet sich der Variationsbereich der Parameterstudie aus dem Vertrauensbereich der Berechnungsmethode in Kapitel 5.3 ab und ist in Tabelle A.7 zusammengefasst.

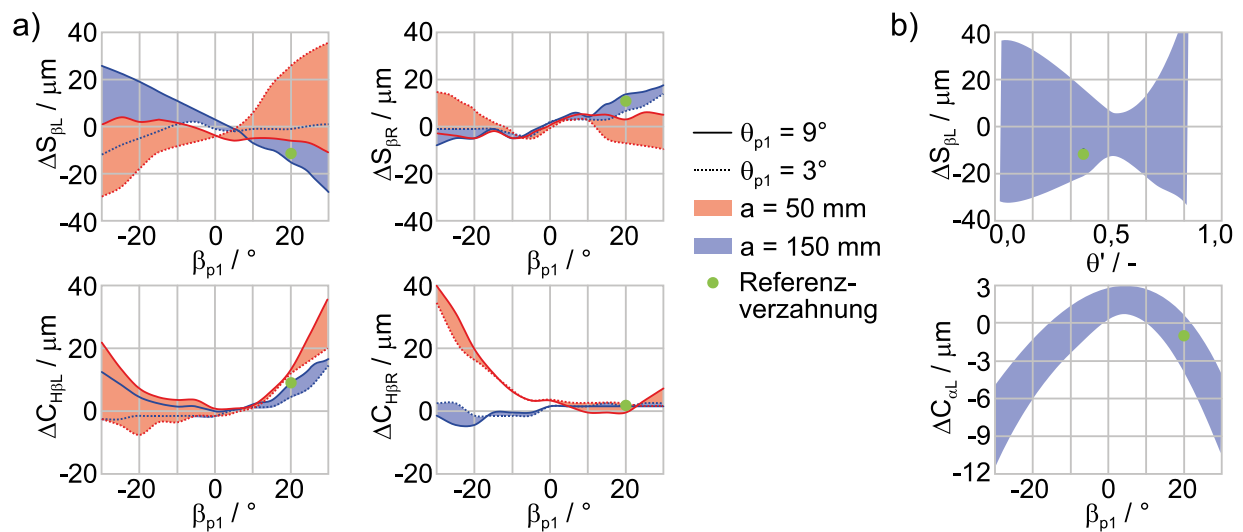
Parameter	min	max	Schritte
Achswinkel $\Sigma$ °	5	15	3
Achsversatz a mm	0	150	4
Konuswinkel Rad 1 $\theta_{p1}$ °	3	9	4
Schrägungswinkel Rad 1 $\beta_{p1}$ °	-30	30	7

**Tabelle A.7:** Variationsbereich der Parameterstudie

Bild A.17 zeigt die Ergebnisse für die Korrektur der Schrängung  $\Delta S_\beta$  und die Flankenlinien-Winkelkorrektur  $\Delta C_{H\beta}$ . In Bild A.17a werden die Ergebnisse für zwei unterschiedliche Achsversätze und Konuswinkel bei einem Achswinkel von  $\Sigma = 15^\circ$  über dem Schrängungswinkel dargestellt. Die durchgezogene Linie steht für die Ergebnisse des maximal untersuchten Konuswinkels ( $\theta_{p1} = 9^\circ$ ). Die gepunktete Linie gilt für den minimalen Konuswinkel ( $\theta_{p1} = 3^\circ$ ). Der dadurch aufgespannte Bereich beinhaltet die Ergebnisse der dazwischenliegenden Konuswinkel. Zum Vergleich ist die Abweichung der Referenzverzahnung mit einem grünen Punkt gekennzeichnet.



Auffällig bei den Abweichungen in Bild A.17a ist, dass bei kleinem Achsversatz und kleinem Konuswinkel sowie bei großem Achsversatz und großem Konuswinkel größere Abweichungen eintreten. Die Tendenzen können auf die Aufteilung der Konuswinkel zurückgeführt werden. Bild A.17b zeigt exemplarisch für die Korrektur der Schränkung  $\Delta S_{\beta L}$ , dass bei gleichmäßiger Aufteilung der Konuswinkel die Abweichung minimal wird. So beträgt bei  $a = 50$  mm die Konuswinkelsumme etwa  $14^\circ$ , was für  $\theta_{p1} = 3^\circ$  zu  $\theta' = 0,21$  führt. Im Vergleich dazu beträgt für  $\theta_{p1} = 9^\circ$  das Verhältnis  $\theta' = 0,64$ . Bei einem größeren Achsversatz von  $a = 150$  mm reduziert sich die Konuswinkelsumme auf etwa  $10^\circ$ , sodass sich die Aufteilung der Konuswinkel zu 0,3 und 0,9 ändert.



**Bild A.17:** Ergebnisse der Parameterstudie zur Fertigungssimulation

Die dargestellten Zusammenhänge und die daraus abgeleiteten Erkenntnisse der Parameterstudie sind in Kapitel 7.2.2 beschrieben.



# Lebenslauf

Daniel Marino

\*16.06.1990, Leonberg

## Ausbildung:

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 09/1997 – 07/2001 | Grund- und Hauptschule, Höfingen  |
| 09/2001 – 06/2009 | Albert-Schweitzer-Gymnasium, Leonberg<br>Abschluss: Allgemeine Hochschulreife   |
| 10/2009 – 07/2015 | Studium Maschinenbau an der Universität Stuttgart mit den Schwerpunkten Konstruktionstechnik und Technische Mechanik<br>Abschluss: Master of Science      |
| 10/2011 – 07/2013 | Tutorientätigkeit am Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design (IKTD) und am Institut für Technische Mechanik (IMA), Universität Stuttgart |
| 08/2013 – 09/2014 | Studium Engineering Science and Mechanics an der Universität Georgia Institute of Technology, Atlanta (USA)<br>Abschluss: Master of Science               |

## Beruflicher Werdegang:

- |                   |  |
|-------------------|--|
| 09/2014 – 03/2015 | Praktikum bei der Daimler AG, Stuttgart im Bereich Neuentwicklung Motoren  |
| 08/2015 – 06/2021 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design (IKTD), Universität Stuttgart |
| 07/2021 – 03/2022 | Entwicklungsingenieur bei der Klingelberg GmbH, Ettlingen im Bereich Berechnungssoftware Kegelradverzahnung              |
| seit 04/2022      | Berechnungsingenieur bei der Daimler Truck AG, Stuttgart im Bereich Betriebsfestigkeit Triebstrang                       |



