

Kapitel II

Theoretische Konzepte

1 Physikalische Beschreibung der Ausbreitung seismischer Wellen

Für eine eingehende mathematische Behandlung der seismischen Wellenausbreitung verweise ich auf die einschlägigen Lehrbücher der Kontinuumsmechanik (Love, 1927; Becker und Bürger, 1975; Sommerfeld, 1978a) und der theoretischen Seismologie (Aki und Richards, 1980; Ben-Menahem und Singh, 1981; Dahlen und Tromp, 1998). Zu einer physikalischen Arbeit gehört es meines Erachtens jedoch, sich die Grunderkenntnisse und die Spezialisierungen und Einschränkungen ins Gedächtnis zu rufen, auf welchen die benutzten theoretischen Konzepte basieren. Für die vorliegende Arbeit ist die lineare, elastische Bewegungsgleichung

$$\rho \ddot{\vec{u}} - \text{Div} \boldsymbol{\sigma} = \vec{f}_V \quad (\text{II.1})$$

mit $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \circ \vec{u} + (\vec{\nabla} \circ \vec{u})^T \right)$

von grundlegender Bedeutung. Die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit will ich summarisch nennen.

Größen, die der formalen Beschreibung dienen: Die Bewegung des Mediums wird durch das *Verschiebungsfeld* \vec{u} beschrieben. Die Verschiebung ist die Observable der seismischen Messungen. Der *symmetrische Dehnungstensor* $\boldsymbol{\epsilon}$ bemisst den Teil der Verzerrung des Mediums, der für das Entstehen von

Spannungen und damit inneren Kräften verantwortlich ist. Die elastischen Eigenschaften des Mediums, beschrieben durch den *Tensor der elastischen Konstanten* \mathbf{M} , bestimmen die Größe der daraus resultierenden Spannungen. Diese werden durch den *symmetrischen Spannungstensor* σ in die Theorie eingebracht. In der Kräftebilanz (II.1) wird die Volumendichte der *Spannungskräfte* $\operatorname{div} \sigma$ der Volumendichte der *Trägheitskräfte* $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ und derjenigen der über endliche Distanzen wirkenden *Volumenkräfte* \vec{f}_V gegenübergestellt. Eine weitere, für die Wellenausbreitung wesentliche Materialeigenschaft ist die *Massendichte* ρ im Trägheitsterm. Alle diese Größen sind im Allgemeinen orts- und zeitabhängig.

Die physikalische Basis der Theorie bildet die *Impulserhaltung* als elementare *Bilanzgleichung*. Mit Hilfe der *Massenerhaltung* wird der Trägheitsterm umformuliert, so dass die zeitliche Ableitung der Massendichte nicht mehr auftritt, obwohl diese weiterhin zeitabhängig sein darf. Die *Drehimpulserhaltung* führt auf die Bedingung, dass der Spannungstensor σ symmetrisch sein muss. Die *Energieerhaltung* wird nicht explizit verlangt, führt aber zu konkreten Bedingungen für die Elemente des Tensors der elastischen Konstanten (Abschnitt II.2.1.3, S. 35). Soll tatsächlich eine zeitliche Änderung der Massendichte aufgrund der Verzerrung des Mediums berücksichtigt werden, muss als weitere Differentialgleichung die Kontinuitätsgleichung, die aus der Massenerhaltung folgt, hinzugenommen werden. Typischerweise werden die Erhaltungssätze für die extensiven Größen Impuls, Masse und Drehimpuls zunächst als Integralgleichungen über ein Volumen formuliert. Durch Anwendung von Integralsätzen und die Verallgemeinerung des Integrationsvolumens gelangt man zu den genannten, lokal formulierten Differentialgleichungen für die intensiven Größen (wie etwa der Spannung).

Einige Spezialisierungen müssen eingeführt werden, um von den elementaren Bilanzgleichungen zu einer Bewegungsgleichung zu gelangen, welche zur Beschreibung der seismischen Wellenausbreitung nützlich ist. Die Spezialisierungen sind immer auch Einschränkungen für die Gültigkeit der theoretischen Beschreibung.

1. Es wird vorausgesetzt, dass das Medium im betrachteten Gebiet einfach zusammenhängend ist. Dies wird als *Geometrisches Grundgesetz* bezeichnet. Versetzungen und Risse werden als Ränder des Gebietes aufgefasst. Angesichts der an die Verschiebung \vec{u} gestellten Forderungen verbietet sich die Behandlung von Rissen und Versetzungen ohnehin.

2. Die Komponenten von \vec{u} und ihre Ableitungen müssen klein sein. Es wird $\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \gg \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$ verlangt, um zu einem in \vec{u} linearen Dehnungsmaß ϵ zu gelangen. Für kleine \vec{u} ist es außerdem belanglos, ob bezüglich der Koordinaten im

verzerrten Zustand oder im Referenzzustand differenziert wird. Aus Laborexperimenten ist bekannt, dass in typischen seismischen Medien für $\frac{\partial u_k}{\partial x_j} > 10^{-6}$ nicht-lineare Effekte bedeutsam werden können (Cate und Shankland, 1996). Das Hookesche Gesetz, also ein in ϵ lineares Materialgesetz $\sigma = \mathbf{M} : \epsilon$ ist damit nur für kleine Dehnungen $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ anwendbar. Für $\vec{v} \cdot (\text{grad} \circ \vec{v}) \ll \partial \vec{v} / \partial t$ kann der Trägheitsterm der Impulsbilanz linearisiert werden. Diese Forderung bedeutet, dass die Beschleunigung, welche ein Massenelement in einem inhomogenen, stationären Geschwindigkeitsfeld erfährt, klein gegen die lokale Beschleunigung sein muss. Dieselbe Forderung ist auch für die Ableitungen von \vec{u} zu stellen. Das kommt einer Hochfrequenznäherung gleich, die Fließbewegungen im Medium ausschließt.

3. Zur Beschreibung der durch die Dehnung im Medium wirkenden Kräfte wurde das Konzept der Spannungen eingeführt. Nur wenn die inneren Kräfte unmittelbar wirken und von keiner Distanz (beispielsweise zwischen benachbarten Atomen) abhängen, können sie durch einen Spannungstensor σ beschrieben werden. Diese Forderung wird auch als *Nahewirkung der inneren Kräfte* bezeichnet. Sie ist nicht selbstverständlich und ist mit konkreten Vorstellungen vom mikroskopischen Aufbau der Materie verknüpft (Love, 1927, Anhang B). So schließt sie beispielsweise die Behandlung von Ionenkristallen aus.

4. Die Gravitation der Massen im Medium wird vernachlässigt. Sie liefert nur bei tiefen Frequenzen, im Bereich der Eigenschwingungen des gesamten Erdkörpers, einen nennenswerten Beitrag. Denn bei gleichbleibender Amplitude der Verschiebung nehmen Trägheits- und Spannungskräfte mit der Wellenzahl und der Frequenz im Verhältnis zur Änderung der Gravitationskraft ab. Die Vorspannung des Materials durch die Schwerebeschleunigung zum Erdschwerpunkt hin muss durch das Materialgesetz mit beschrieben werden. Damit verbleiben keine relevanten Volumenkräfte \vec{f}_V . In der Theorie der seismischen Wellenausbreitung dient \vec{f}_V dazu, einen Quellterm einzubringen, also eine seismische Quelle über ein äquivalentes Kraftfeld zu beschreiben.

2 Das Materialgesetz

In Gleichung (II.1) wurde ad hoc ein Zusammenhang der Form

$$\sigma = \mathbf{M} : \epsilon \quad (\text{II.2})$$

zwischen der Spannung σ und der Dehnung ϵ eingeführt und damit die beim Durchgang einer seismischen Welle auftretende Verzerrung als alleinige Ursache der Spannung identifiziert. Für *kleine Verschiebungen* lässt sich die Verzerrung

durch einen *linearen Dehnungstensor*

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \circ \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \circ \vec{u} \right)^T \right)$$

mit sechs unabhängigen Komponenten¹ bemessen. Die Elemente des Tensors M beschreiben die Eigenschaften des elastischen Materials. Ein seismisches Experiment soll dazu dienen, genau diese zu bestimmen. Damit das dazu benutzte Interpretationsverfahren erfolgreich sein kann, ist es notwendig, dass die theoretische Beschreibung in der Lage ist, die tatsächliche Situation im Material angemessen wiederzugeben. Daher lasse ich hier einige Ausführungen über das zu verwendende *Materialgesetz* folgen.

M hat 81 Elemente, von denen allein aus Symmetriegründen nur 21 unabhängig sein können. Im Falle isotropen Materials sind jedoch nur zwei von ihnen unabhängig (Feynman, 1969; Sommerfeld, 1978b, §39). Dann vereinfacht sich der Zusammenhang von Gl. (II.2) zu

$$\sigma = 2 \mu \epsilon + \lambda \mathbb{1} \text{ Spur}(\epsilon). \quad (\text{II.3})$$

Die Parameter λ und μ werden „Lamésche Konstanten“ genannt. Die in dieser Arbeit behandelten Datensätze lassen sich ohne die Annahme von Anisotropie behandeln. Sie wurden allerdings auch nicht speziell auf Anisotropie hin untersucht. Im Folgenden gehe ich von einem isotropen Materialgesetz aus.

Ganz allgemein formuliert, kann die Spannung

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, \epsilon : C : \epsilon, \vec{r}, t, T, p, c, \dots)$$

nicht nur von der Dehnung ϵ , sondern auch von deren Änderung $\dot{\epsilon}$, von höheren Ordnungen $\epsilon : C : \epsilon$, aber auch von Ort und Zeit abhängen. Außerdem werden Größen wie die Temperatur T , der statische Druck p , die Wassersättigung c oder auch das Porenvolumen den funktionalen Zusammenhang beeinflussen. Häufig sollen gerade die letztgenannten Parameter durch eine geophysikalische Messung untersucht werden. Die funktionale Abhängigkeit zwischen ihnen und der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist nicht Thema dieser Arbeit. Diese kann mit seismischen Feldmessungen auch kaum bestimmt werden. Vielmehr sind aufwendige Laboruntersuchungen (Toksöz und Johnston, 1981) und komplexe theoretische Modelle (Mavko et al., 1998) zu ihrer Behandlung notwendig. Eine umfangreiche Zusammenstellung experimenteller Resultate zu diesem Thema findet man in der Monographie von Schön (1998).

¹Darin geht die Vorstellung ein, dass eine gleichförmige Drehung eines Teilvolumens keine Spannungen verursacht. Daher muss ϵ symmetrisch sein.

Es ist vernünftig, anzunehmen, dass die Eigenschaften des Materials sich während einer seismischen Messung nicht ändern. Außerdem weisen experimentelle Befunde darauf hin, dass der Zusammenhang zwischen σ und ϵ für Dehnungsbeträge kleiner 10^{-6} in Gestein linear ist (Savage und Hasegawa, 1967; Cate und Shankland, 1996). Diese wurden bereits in Abschnitt II.1 als klein vorausgesetzt. Ferner soll der Zusammenhang zwischen den elastischen Moduln \tilde{M} und Einflussgrößen wie der Temperatur und der Wassersättigung nicht parametrisiert werden. Experimentelle Befunde (Burkhardt et al., 1992; Toksöz und Johnston, 1981; Spencer, 1981) weisen aber auch auf eine möglicherweise starke, intrinsische Dämpfung in flachseismischen Medien, speziell Lockersedimenten, hin.

Zur Beschreibung des Materials benutzt man daher häufig eine lineare Beziehung (*Hookesches Gesetz*), die räumlich lokal aber nicht konstant ist und die zeitlich konstant aber *nicht* lokal ist. Ein solches, *viskoelastisches* Materialgesetz lautet

$$\sigma(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} \tilde{M}(\vec{r}, \tau) \epsilon(\vec{r}, t - \tau) d\tau. \quad (\text{II.4})$$

2.1 Viskoelastische Materialgesetze

Für die nun folgenden Überlegungen soll beispielhaft der Zusammenhang zwischen einer allgemeinen, skalaren Spannungsgröße σ und einer allgemeinen, skalaren Dehnungsgröße ϵ betrachtet werden. In diesem Sinne kann für jedes Tensorelement in Gl. (II.4) exemplarisch

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.5a})$$

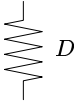
geschrieben werden. Für ein kausales Materialgesetz wird dabei explizit

$$\tilde{M}(\tau) = 0 \quad \text{bei } \tau < 0 \quad (\text{II.5b})$$

gefordert. Das Material besitzt jedoch ein „Gedächtnis“. Die Spannung hängt von allen in der Vergangenheit ($t < 0$) erreichten Dehnungen ab. Dies wird in der Literatur auch als „Nachwirkung“ bezeichnet (Boltzmann, 1876).

Gl. (II.5a) ist ein Faltungsintegral. Zwischen den komplexen Fourier-Koeffizienten $\tilde{\sigma}$, \tilde{M} und $\tilde{\epsilon}$ der Größen ergibt sich damit eine besonders einfacher Zusammenhang

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{M}(\omega) \tilde{\epsilon}(\omega). \quad (\text{II.6})$$



$$\begin{aligned}\sigma &= D \epsilon & \tilde{\sigma} &= D \tilde{\epsilon} \\ \tilde{M} &= D & Q &= \infty\end{aligned}$$

Tabelle II.1: Rheologisches Element: Elastizität

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).



$$\begin{aligned}\sigma &= \eta \dot{\epsilon} & \tilde{\sigma} &= -i\omega \eta \tilde{\epsilon} \\ \tilde{M} &= -i\omega \eta & Q &= 0\end{aligned}$$

Tabelle II.2: Rheologisches Element: Dynamische Viskosität

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

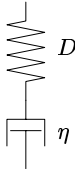
Diese Beziehung lässt sich ganz zwanglos bei der später beschriebenen Lösung der elastischen Wellengleichung berücksichtigen, bei der ein Separationsansatz zu einer Differentialgleichung ausschließlich für die Ortsabhängigkeit der Fourier-Koeffizienten der elastischen Verschiebung führt (Abschnitt II.3.1, S. 43). Allgemeine Materialgesetze dieser Art in nicht transformierter Form zu behandeln, beispielsweise in Finite-Differenzen-Verfahren (Bohlen, 1998), ist wesentlich aufwendiger. Für lateral heterogene Medien wäre das allerdings unumgänglich.

2.1.1 Rheologische Modelle

Dass es sich bei dem mit Gl. (II.5) formulierten Materialgesetz um ein allgemeines, viskoelastisches Materialgesetz handelt, wird beim Vergleich mit einfachen rheologischen Modellen (Tab. II.1 bis II.5) klar. Ein elastisches Element D (Tab. II.1) bildet einen Beitrag zum Realteil von \tilde{M} . Ein viskoses Element η (Tab. II.2) gibt einen Beitrag zum Imaginärteil von \tilde{M} und tritt in der Bewegungsgleichung (II.1) als dissipativer Term auf. Die Vorzeichen der Imaginärteile sind dabei durch die Definition der Fourier-Transformation bestimmt (Abschnitt A.2.1, S. 218).

Zur Beschreibung der dissipativen Eigenschaften des Materials wird hier auch die aus der Resonatortheorie bekannte, dimensionslose Güte Q eingeführt. Es existieren verschiedene Definitionen der elastischen Güte (Toksöz und Johnston, 1981; Mavko et al., 1998). Sie kann als Maß für den relativen Energieverlust pro Wellenlänge verstanden werden. Formal eingeführt wird sie in der Regel über das Verhältnis

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\Re(\tilde{M})}{\Im(\tilde{M})} = -\cot \phi$$



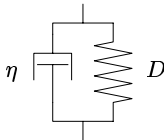
$$\epsilon = \frac{1}{D} \sigma + \frac{1}{\eta} \int \sigma dt \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{\frac{1}{D} + \frac{i}{\omega\eta}} \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{M} = M_\infty \frac{\omega}{\omega + i\omega_0} \quad |\tilde{M}| = M_\infty \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

$$M_\infty = D \quad \omega_0 = \frac{D}{\eta} \quad Q = \frac{\omega}{\omega_0} \propto \omega$$

Tabelle II.3: Rheologischer Körper: Maxwell

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).



$$\sigma = D \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad \tilde{\sigma} = (D - i\omega \eta) \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{M} = M_0 \left(1 - i \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad |\tilde{M}| = M_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$M_0 = D \quad \omega_0 = \frac{D}{\eta} \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega} \propto \omega^{-1}$$

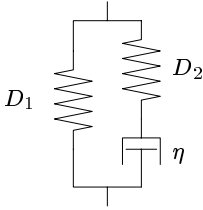
Tabelle II.4: Rheologischer Körper: Kelvin-Voigt

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

von Real- und Imaginärteil² des komplexen Moduls $\tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}$. Großes Q bedeutet daher kleine Dämpfung.

Durch Kombination der Grundelemente D und η ergeben sich Materialien mit Frequenz-abhängigen Eigenschaften. Dies ist exemplarisch anhand des Maxwell-Körpers in Tab. II.3 und des Kelvin-Voigt-Körpers in Tab. II.4 dargestellt. In den Tabellen sind neben den Ausdrücken für den komplexen Modul \tilde{M} und seinen Betrag auch die Werte für die Güte Q und die Extremwerte des Moduls M_0 für den statischen Fall und M_∞ für die Asymptote hoher Frequenzen angegeben. Dabei stellen der Maxwell-Körper und der Kelvin-Voigt-Körper auch Extrema bezüglich der Frequenz-Abhängigkeit von Q dar. Da in den Definitionsgleichungen eines viskoelastischen Materialgesetzes nur erste Ableitungen nach der Zeit auftreten, muss der Exponent γ der Frequenz-Abhängigkeit von $Q \propto \omega^\gamma$ zwischen -1 und 1

²Aufgrund der von mir in Abschnitt A.2.1 (S. 218) gewählten Vorzeichenkonvention für die Fourier-Transformation ist der Imaginärteil des Moduls negativ.



$$\ddot{\sigma} = \left(D_1 + \frac{1}{\frac{i}{\omega\eta} + \frac{1}{D_2}} \right) \ddot{\epsilon} \quad \tilde{M} = M_0 \frac{1 - i\omega\tau_\epsilon}{1 - i\omega\tau_\sigma}$$

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = M_0 (\epsilon + \tau_\epsilon \dot{\epsilon}) \quad |\tilde{M}| = M_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_\epsilon^2}{1 + \omega^2\tau_\sigma^2}}$$

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{D_2}$$

$$\tau_\epsilon = \frac{\eta}{D_2} + \frac{\eta}{D_1}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon}$$

$$\xi = \frac{M_\infty}{M_0} = \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}$$

$$M_0 = D_1$$

$$M_\infty = D_1 + D_2$$

$$Q = Q_{\min} \frac{1 + \tau^2\omega^2}{2\omega\tau}$$

$$Q_{\min} = \frac{2\tau}{\tau_\epsilon - \tau_\sigma} = \frac{2\eta^2 M_0^2 \sqrt{\xi}}{(\xi - 1)^3}$$

Tabelle II.5: Rheologischer Körper: Standard-Linear-Solid (SLS)

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

liegen. Die Frequenz-Abhängigkeit der seismischen Geschwindigkeit für solche Materialgesetze diskutiert Müller (1983) ausführlich. Der Modul selbst wechselt bei der Frequenz ω_0 seinen Charakter.

Der Standard-Linear-Solid (Tab. II.5) gilt nach Zener (1948) als einfachstes Modell für die Rheologie eines Festkörpers. Der Standard-Linear-Solid (SLS) besteht aus drei rheologischen Elementen und wird daher durch drei Parameter bestimmt. Als kanonische Parameter können die zwei *Relaxationszeiten* τ_σ und τ_ϵ betrachtet werden. Dabei ist τ_σ die Zeitkonstante der Spannungsantwort, wenn dem SLS eine Schrittfunktion für ϵ aufgeprägt wird. Umgekehrt ergibt τ_ϵ die Zeitkonstante für die Dehnungsantwort, bei einer Schrittfunktion in der Spannung. Für $\omega = 1/\sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon} = 1/\tau$ tritt die größte Dämpfung auf. Und das Verhältnis $\tau_\epsilon/\tau_\sigma$ ist gleich dem Verhältnis der asymptotischen Werte des Moduls. Sowohl im statischen Grenzfall, wie für die Asymptote hoher Frequenzen ergibt sich jeweils ein rein elastisches Material. Damit ist das der einfachste rheologische Körper, der über den ganzen Frequenzbereich bei endlichem $|\tilde{M}|$ kein reines Fließverhalten zeigt und damit die Forderung endlicher Dehnung bei endlichen äußeren Kräften implizit erfüllt. Die Frequenz-Abhängigkeit der Güte Q variiert zwischen den extremen Exponenten $Q \propto \omega^{-1}$ (Kelvin-Voigt) für kleine Frequenzen und $Q \propto \omega^1$ (Maxwell) für große Frequenzen. Zur Beschreibung realer Festkörper ist ein einzelner SLS nicht ausreichend. Es wird dazu in der Regel eine Verteilung von Relaxationszeiten angesetzt (Spencer, 1981). Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden.

2.1.2 Allgemeine Bedingungen für \tilde{M}

Aus der kausalen Definition in Gl. (II.5) ergeben sich einige zwingende Forderungen für die Eigenschaften von \tilde{M} . Außerdem lässt sich für die physikalische Forderung eines stabilen Materials die Bedingung für einen positiven Realteil und einen negativen Imaginärteil von \tilde{M} ableiten. Da das im seismischen Experiment gesuchte Materialgesetz nicht nur die aufgezeichneten Daten über eine Lösung der Differentialgleichung (II.1) erklären, sondern auch physikalisch sinnvoll sein soll, wird in den folgenden zwei Abschnitten weiter auf die physikalischen Forderungen an \tilde{M} eingegangen.

Die Kausalitätsbedingung

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \tau < 0$$

ist nur erfüllt, falls $\tilde{M}(\omega)$ in der oberen ω -Halbebene, also für $\Im(\omega) > 0$, analytisch ist. Das folgt unmittelbar aus dem Residuensatz.

Damit lässt sich das Hauptwertintegral

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{M}(\omega)}{\omega - \omega'} d\omega = i\pi (\tilde{M}(\omega') - \tilde{M}(\infty))$$

durch schließen des Integrationsweges in der oberen ω -Halbebene berechnen (Ben-Menahem und Singh, 1981, Anhang K.3). Man weicht dazu dem Pol bei $\omega = \omega'$ in die obere Halbebene hinein aus. Dabei ist $\tilde{M}(\infty) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \tilde{M}(\omega)$ der asymptotische Wert des Moduls für große ω .

Ganz analog dazu lässt sich eine Integralbeziehung für $\ln(\tilde{M})$ herleiten. Falls \tilde{M} keine Nullstellen in der oberen ω -Halbebene besitzt, beschreibt es ein „Minimum-Delay-System“. Dann gelten die sogenannten „Kramers-Kronig Dispersionsrelationen“ zwischen Phase und Betrag des Moduls (Ben-Menahem und Singh, 1981; Müller, 1983). Diese lauten

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\tilde{M}(\omega)|}{\omega - \omega'} d\omega = \pi (\phi(\infty) - \phi(\omega')) \tag{II.12a}$$

und

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega)}{\omega - \omega'} d\omega = \pi (\ln|\tilde{M}(\omega')| - \ln|\tilde{M}(\infty)|) \tag{II.12b}$$

für $\tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}$.

Da $M(\tau)$ eine reelle Größe ist, muss $\tilde{M}(\omega) = \tilde{M}^*(-\omega)$ gelten. Der Realteil von \tilde{M} ist also eine gerade Funktion von ω , während der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenz ist und somit $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$. Für $|\tilde{M}(\omega)| = \text{const}$ verschwindet Gl. (II.12a). Es ist dann $\phi(\infty) = \phi(\omega)$ für beliebiges ω , also $\phi(\omega) = \text{const}$. Wegen $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ ist dies nur für $\phi(\omega) = 0$ und damit $1/Q = 0$ möglich. Ein konstanter Modul impliziert also dämpfungsfreies Material.

Real- und Imaginärteil, wie auch die Phase und der Logarithmus der Amplitude des Moduls sind somit Hilbert-Transformationspaare. Eine qualitative, lokale Beziehung zwischen den beiden Partnern des Transformationspaares lässt sich ableiten, wenn man die Größen um ω' nach Taylor entwickelt. Die geraden Ordnungen der Entwicklung heben sich unter dem Integral wegen des antisymmetrischen Nenners heraus. Aufgrund des Pols bei ω' wird der Wert von $\ln|\tilde{M}|$ um den Pol besonders stark zum Wert von Gl. (II.12a) beitragen. Nach Division mit dem Nenner $(\omega - \omega')$ bleibt aber gerade der Koeffizient der ersten Ordnung der Entwicklung bei $\omega = \omega'$. Die Größe des Integrals wird also stark durch den Wert der Ableitung von $\ln|\tilde{M}|$ bei ω' bestimmt. Oder anders ausgedrückt: Je größer $|\phi|$ und damit die intrinsische Dämpfung, umso stärker muss der Betrag des Moduls mit der Frequenz zunehmen. Ben-Menahem und Singh (1981, Anhang K.4) gelangen nach formaler Rechnung zu der Beziehung³

$$\phi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d \ln|\tilde{M}(\omega)|}{d \ln \omega}. \quad (\text{II.13})$$

Der Betrag von \tilde{M} wächst monoton mit der Frequenz, da die viskosen Elemente im Material mit zunehmender Frequenz versteifend wirken. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |\tilde{M}(\omega)| \geq 0 \quad \text{für } \omega > 0.$$

Wie bereits in Abschnitt II.2.1.1 diskutiert wurde, muss außerdem

$$-1 \leq \frac{\partial Q(\omega)}{\partial \omega} \leq 1$$

gelten.

³Alle in dieser Arbeit gegebenen Beziehungen folgen der von mir in Abschnitt A.2.1 (S. 218) gewählten Vorzeichenkonvention für die Fourier-Transformation. Das Vorzeichen des Phasenwinkels ist daher entgegengesetzt zum von Ben-Menahem und Singh (1981) angegebenen Wert.

2.1.3 Stabilitätsbedingungen

Eine Deformation des Materials darf nicht dazu führen, dass spontan Energie frei wird, sonst wäre es in keinem stabilen Zustand. Für das Differential der Arbeit A , die zu verrichten ist, um das Material aus dem Gleichgewicht auszulenken, also eine Dehnung aufzuprägen, gilt somit

$$dA = \sigma d\epsilon \stackrel{!}{\geq} 0.$$

Für eine periodische Beanspruchung

$$\epsilon = |\tilde{\epsilon}| \sin(\omega t)$$

des Materials folgt

$$\sigma = |\tilde{\epsilon}| |\tilde{M}| \sin(\omega t - \phi)$$

wegen

$$\tilde{\sigma} = \tilde{M} \tilde{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}.$$

Damit ergibt sich für die mechanische Leistung

$$P = \sigma \frac{d\epsilon}{dt} = \omega |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \cos(\omega t) \sin(\omega t - \phi).$$

Die aufzuwendende Leistung $P(t=0) = \omega |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \sin(-\phi)$ bei Auslenkung des Materials aus dem Gleichgewicht ist positiv, falls $-\pi \leq \phi \leq 0$. Für $\phi = 0$ erhält man ein rein elastisches Materialgesetz. Die für das Durchlaufen einer Periode aufzuwendende Arbeit

$$A = \int \sigma d\epsilon = |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \sin(\alpha - \phi) d\alpha$$

verschwindet dann. Die größte Arbeit A wird für $\phi = -\pi/2$ verrichtet.

Eine Phase zwischen $-\pi$ und $-\pi/2$ führt zwar formal zu einem stabilen Material, ist aber bezüglich Gl. (II.1) unsinnig. Am anschaulichsten wird dies durch die Betrachtung eines viskos gedämpften Masse-Feder-Pendels (Abb. II.1) verdeutlicht. Auf eine anregende Kraft F reagiert das Pendel mit einer Auslenkung x gemäß der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + Dx = F.$$

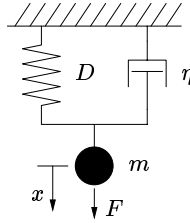


Abbildung II.1: Gedämpftes Masse-Feder-Pendel

Das Verhältnis

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{x}} = \tilde{Z} = |\tilde{Z}| e^{i\phi} = D - i\omega\eta - \omega^2 m \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{-\omega\eta}{D - \omega^2 m}$$

entspricht dem komplexen Modul \tilde{M} (vergleiche mit dem im Pendel enthaltenen Kelvin-Voigt Körper in Tab. II.4). Phasenwinkel $-\pi \leq \phi < -\pi/2$ für \tilde{M} zuzulassen würde bedeuten, die Eigenschaft der trägen Masse m in das Materialgesetz aufzunehmen. Das Material kann dann nicht nur potentielle Energie speichern, sondern auch kinetische. Für $\eta = 0$ und $D = \omega^2 m$ und damit $\tilde{Z} = 0$ (obwohl $D \neq 0$) befindet sich das System in ungedämpfter Resonanz, bei der beide Energieformen ohne äußere Kraft zyklisch ineinander umgewandelt werden. Die Masendichte ρ wird aber schon wegen ihres skalaren Charakters in der elastischen Differentialgleichung (II.1) getrennt behandelt.

Wäre die Gleichung massebezogen formuliert, so würde \tilde{M}/ρ als Materialeigenschaft auftreten. Dann würden die kinematische Viskosität η/ρ und das Quadrat der seismischen Geschwindigkeit D/ρ als Grundelemente dienen.

Abschließend ist

$$\Re(\tilde{M}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \Im(\tilde{M}) \leq 0 \quad \text{für} \quad \omega > 0 \quad (\text{II.14})$$

zu fordern (bezogen auf die Definition des Fourier-Integrals in Abschnitt A.2.1, S. 218). Diese Ungleichungen müssen für jedes Element im Tensor \tilde{M} erfüllt sein.

2.1.4 Anwendbarkeit viskoelastischer Materialgesetze

Aufgrund der Anschauung bei der seismischen Feldmessung selbst, wie auch aufgrund von Laboruntersuchungen (Burkhardt et al., 1992; Toksöz und Johnston, 1981; Spencer, 1981) ist klar, dass typische flachseismische Materialien

stark dissipativ sein können. Es muss also im Allgemeinen ein Frequenz-abhängiger Modul $\tilde{M}(\omega)$ angesetzt werden. Bei der Untersuchung von Oberflächenwellen soll aber gerade aus der Frequenz-Abhängigkeit der Messgrößen auf eine Tiefen-Abhängigkeit der Materialeigenschaften geschlossen werden. Eine intrinsische Frequenz-Abhängigkeit lässt sich daher nicht unabhängig von der Tiefen-Abhängigkeit bestimmen. Jeder weitere Parameter, mit dem eine kompliziertere Frequenz-Abhängigkeit als $Q(\omega) = Q_{\text{ref}}\omega^\gamma$ parametrisiert wird, lässt sich kaum aus einer seismischen Feldmessung ableiten. Damit verbleibt man bei der etwas unbefriedigenden Einsicht, dass ein Materialgesetz gemäß Gl. (II.4) physikalisch notwendig ist, aber zu nicht auflösbaren Mehrdeutigkeiten bei der Interpretation der Messung führt. Siehe dazu auch die Bemerkungen in Abschnitt V.2.6 (S. 126).

2.2 Seismische Geschwindigkeiten im isotropen Material

Nun will ich die oben aufgezählten Schlussfolgerungen für die allgemeinen viskoelastischen Moduln auf die sogenannten „seismischen Geschwindigkeiten“ übertragen. Mit Gleichung (II.3) wurde bereits ein isotropes Material eingeführt. Für die Verschiebung \vec{u} werde ich in Gleichung (II.30) Potentiale definieren, für deren Fourier-Koeffizienten sich insbesondere im homogenen Vollraum Helmholtz-Gleichungen der Form

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\Phi} = 0 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{C} \quad (\text{II.15a})$$

aus der elastischen Differentialgleichung (II.1) ableiten lassen (Abschnitt II.3.3, S. 45). Für das Kompressionspotential ($\Phi = \phi$) ist c die Geschwindigkeit

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (\text{II.15b})$$

der Kompressionswellen. Für die Scherpotentiale ($\Phi = \psi$ oder $\Phi = \chi$) ist c die Geschwindigkeit

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.15c})$$

der Scherwellen.

In den Ausdrücken (II.15b) und (II.15c) für die seismischen Geschwindigkeiten treten die elastischen Moduln auf. In den folgenden Abschnitten zeige ich, welche Implikationen für die seismischen Geschwindigkeiten sich aus den zuvor für die Moduln aufgestellten Bedingungen ergeben.

2.2.1 Stabilitätskriterien

Bei der Beanspruchung eines Körpers aus isotropem, elastischem Material wird, je nach Randbedingung, zwischen den vier kanonischen Moduln κ , μ , M und E unterschieden, welche die Spannung σ mit der Dehnung ϵ verknüpfen (Mavko et al., 1998; Schön, 1998). Davon sind jeweils nur zwei unabhängig. Die anderen können aus ihnen berechnet werden. Für eine gleichmäßige Kompression von allen Seiten wirkt der Volumenkompressionsmodul (englisch „bulk modulus“) κ gemäß⁴ $\sigma_{kk} = 3\kappa \epsilon_{kk}$ mit $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ und $\epsilon_{kl} = 0$ für $k \neq l$. Für eine reine Scherbeanspruchung gilt $\sigma_{kl} = 2\mu \epsilon_{kl}$ für $k \neq l$ und $\epsilon_{kk} = 0$ mit dem Schermodul μ (englisch „rigidity“). Die Eigenschaft eines eingespannten Körpers unter uniaxialer Beanspruchung (wie beim Durchgang einer ebenen Kompressionswelle) wird durch den Modul M gemäß $\sigma_{11} = M \epsilon_{11}$ für $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$ bestimmt. Bei uniaxialer Spannung eines freien Körpers ist der Elastizitätsmodul E (englisch „Young's modulus“) mit $\sigma_{11} = E \epsilon_{11}$ und $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ maßgeblich. Für die letztgenannte Art der Beanspruchung wird die Querkontraktionszahl $\nu = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$, das sogenannte *Poisson-Verhältnis* definiert. Für alle Moduln müssen die oben definierten Stabilitätskriterien unabhängig voneinander gelten. Hier möchte ich speziell darauf hinweisen, dass es sich bei der Laméschen Konstante λ um keinen Modul handelt. Theoretisch kann $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$ durchaus negativ werden!

Als ausgezeichnete Moduln können κ und μ betrachtet werden. κ beschreibt die Volumentreue eines Materials, während μ ein Maß für die Winkel- oder Formtreue ist. Die anderen beiden genannten Moduln können nur größer oder gleich dem kleineren von κ oder μ sein. Während die Scherwellen-Geschwindigkeit v_s allein durch μ (und die Dichte ρ) bestimmt wird, gehen in v_p über den Modul $M = \kappa + \frac{4}{3}\mu$ zwei elementare Moduln ein.

Zur Charakterisierung der lithologischen Eigenschaften eines Materials wird häufig das Verhältnis der seismischen Geschwindigkeiten v_p/v_s oder auch die Poisson-Zahl ν benutzt. Zwischen diesen Größen und den Moduln κ und μ bestehen die Beziehungen

$$\nu = \frac{\frac{3}{2}\kappa - \mu}{3\kappa + \mu} = \frac{\frac{1}{2}v_p^2 - v_s^2}{v_p^2 - v_s^2} \quad \text{und} \quad (\text{II.16a})$$

$$\frac{v_p^2}{v_s^2} = \frac{\kappa}{\mu} + \frac{4}{3} = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} + \frac{4}{3}. \quad (\text{II.16b})$$

Aus den Stabilitätsüberlegungen und experimentellen Befunden lassen sich ein paar Eckwerte für diese Größen zusammenstellen. Wird allein die physikalische

⁴Die Summenkonvention wende ich in dieser Arbeit an keiner Stelle an.

Stabilität durch $\kappa > 0$ und $\mu > 0$ gefordert, ergeben sich die Wertebereiche

$$\begin{aligned} -1 &\leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 &\leq \frac{v_p}{v_s} \leq \infty. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Dabei ergibt sich $\nu = 1/2$ für eine ideale Flüssigkeit. Der Fall $\nu = -1$ entspricht einem unendlich formtreuen und dabei vernachlässigbar volumentreuen Material. Ein Material mit $\nu < 0$, das bei uniaxialer Zugbeanspruchung auch in die anderen Raumrichtungen expandiert, würde man aber intuitiv ablehnen. Nur für synthetische Materialien (Lakes, 1987) oder ganz spezielle Gitterstrukturen (Kesar und Chelikowsky, 1992) wurde bisher ein negatives Poisson-Verhältnis nachgewiesen. Aus flachseismischen Experimenten bekannte Werte⁵ bewegen sich im Bereich

$$\begin{aligned} 0.1 &< \nu < 0.49 \quad \text{entsprechend} \\ 1.5 &< \frac{v_p}{v_s} < 10. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Als mittlerer Wert für typische Festkörper wird häufig der Poissonsche Wert $\nu = 0.25$, also $v_p/v_s = \sqrt{3}$ angegeben. Für $\nu = 0.1$ ist $\kappa/\mu = 11/12$ und somit bereits $\mu > \kappa$.

2.2.2 Dissipation und komplexe Geschwindigkeiten

Für die Berechnung synthetischer Seismogramme werden die Materialeigenschaften in der Regel in Form der Beträge der seismischen Geschwindigkeiten aus Gl. (II.15b) und (II.15c), der Dichte ρ und der Güte-Werte Q_{v_p} und Q_{v_s} für die seismischen Geschwindigkeiten angegeben. Diese Größen müssen nach einer Inversion auf ihre Sinnhaftigkeit bezüglich der oben aufgestellten Forderungen geprüft werden. Die dafür notwendigen Beziehungen werden hier kurz angegeben.

Mit Gl. (II.15c) lässt sich die komplexe Scherwellen-Geschwindigkeit direkt als

$$\begin{aligned} \tilde{v}_s &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho}} = |\tilde{v}_s| e^{i\phi_{v_s}} \quad \text{mit} \quad |\tilde{v}_s| = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}|}{\rho}} \\ \text{und} \quad \phi_{v_s} &= \frac{\phi_\mu}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{Q_{v_s}}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

angeben. Damit ergibt sich auch der Wert von Q_{v_s} durch

$$\frac{1}{Q_{v_s}} = \tan\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{Q_\mu}\right)\right). \quad (\text{II.20})$$

⁵Siehe Abschnitt VI.3 (S. 167) und den Artikel von Steeples et al. (1995).

Für große Q wird dieser Ausdruck durch $Q_{v_s} \approx 2Q_\mu$ genähert. Zu beachten ist, dass das Stabilitätskriterium $-\pi/2 \leq \phi_\mu \leq 0$ zwar $0 \leq Q_\mu \leq \infty$ zulässt, jedoch mit $1 \leq Q_{v_s} \leq \infty$ bereits für $Q_{v_s} = 1$ das Materialverhalten einer newtonschen Flüssigkeit erreicht ist.

Analog dazu ergeben sich aus Gl. (II.15b) Beziehungen zwischen der komplexen Geschwindigkeit \tilde{v}_p und dem komplexen Modul $\tilde{M} = \tilde{\kappa} + \tilde{\mu}4/3$. Gleichung (II.16b) lässt sich für die komplexen Größen zu

$$\frac{|\tilde{v}_p|^2}{|\tilde{v}_s|^2} e^{2i\phi_{v_p}} - \frac{4}{3} e^{2i\phi_{v_s}} = \frac{|\tilde{\kappa}|}{|\tilde{\mu}|} e^{i\phi_\kappa} \quad (\text{II.21})$$

umformen. Diese Größe muss aus den Modellparametern berechnet und auf Plausibilität, insbesondere $-\pi/2 \leq \phi_\kappa \leq 0$ für alle Frequenzen überprüft werden. Damit werden jedoch nur Aussagen über die grundsätzliche physikalische Realisierbarkeit des Materials gemacht. Ob ein Material mit ϕ_κ nahe $-\pi/2$ im Rahmen der untersuchten geologischen/lithologischen Situation sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

Formeln für die Frequenz-Abhängigkeit der komplexen seismischen Geschwindigkeit für ein kausales Materialgesetz mit $Q \propto \omega^\gamma$ werden von Müller (1983) angegeben.

2.2.3 Ein alternativer Satz von Modellparametern

Die angestellten Überlegungen, die in unhandlichen Beziehungen wie Gleichung (II.21) oder Gl. (II.20) gipfeln, legen es nahe, für die Parametrisierung eines voll viskoelastischen Materialgesetzes eher

$$\frac{\Re(\tilde{\kappa})}{\rho}, \frac{\Im(\tilde{\kappa})}{\rho}, \frac{\Re(\tilde{\mu})}{\rho}, \frac{\Im(\tilde{\mu})}{\rho} \quad \text{und} \quad \rho$$

statt v_p , v_s , Q_{v_p} , Q_{v_s} und ρ zu benutzen. Es sollten die auf die Massendichte ρ bezogenen Moduln statt der Moduln selbst benutzt werden, da die seismische Wellenausbreitung hauptsächlich durch diesen Quotienten beeinflusst wird.

Eine Abweichung von der gängigen Parametrisierung hat aber auch Nachteile. Das Ergebnis einer Inversion soll in der Regel in den Werten für die seismischen Geschwindigkeiten und die Güte angegeben werden, um mit anderen Arbeiten vergleichbar zu sein. Ist das Modell nach Basisfunktionen entwickelt (Abschnitt V.2.1, S. 120), so lassen sich die Koeffizienten für den einen Parametersatz nicht exakt in jene für den anderen umrechnen. Die Ursache dafür sind die transzendenten trigonometrischen Funktionen und die Wurzel in Gl. (II.15b) und (II.15c). Generell ist es günstig, das Modell mit den Parametern zu beschreiben,

die für die weitere Interpretation des Inversionsergebnisses benutzt werden sollen (Abschnitt V.2.4, S. 125).

Ein voll tiefenabhängiges viskoelastisches Materialgesetz kann wohl kaum aus seismischen Felddaten bestimmt werden⁶. Die Güte Q hat daher eher qualitative Bedeutung (Abschnitt V.2.6, S. 126). In der Praxis dient sie als Maß für die Größenordnung der Dämpfung, weniger als exakter viskoelastischer Parameter. Trotzdem muss der Wert von Q Grenzen einhalten, um in den durchgeführten Berechnungen sinnvoll zu sein.

3 Die Lösung der Wellengleichung

Die gängigen Verfahren zur Lösung der elastischen Wellengleichung in eindimensionalen Medien entwickeln die seismische Verschiebung \vec{u} nach Zylinderfunktionen. Die von mir in den Kapiteln III und IV vorgestellte Inversionsmethode beruht darauf, dass das gemessene Wellenfeld in derselben Weise entwickelt wird. So können ausgewählte Entwicklungskoeffizienten der Daten mit numerisch ermittelten Werten verglichen werden und es ist nicht erforderlich vollständige Wellenformen zu berechnen.

Nimmt man an, dass die Materialeigenschaften nur mit der Tiefe variieren und dass die Oberfläche des Mediums eben ist und verwendet man ferner für die Flachseismik typische zylindersymmetrische Quellen (vertikaler Hammerschlag oder Explosion), so lässt sich das Wellenfeld in einfacher Weise entwickeln. In Zylinderkoordinaten sind die Fourier-Koeffizienten der Vertikalverschiebung

$$u_z(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} G_z(p, z, \omega) J_0(p\omega r) p dp, \quad (\text{II.22a})$$

der Radialverschiebung

$$u_r(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} G_r(p, z, \omega) J_1(p\omega r) p dp \quad (\text{II.22b})$$

und überall $u_\varphi = 0$ für die Tangentialverschiebung. Das Wellenfeld ist zylindersymmetrisch also unabhängig vom Azimut φ . In der Praxis befinden sich die Empfänger (Geophone) in der Regel an der Erdoberfläche. Damit ist $z = 0$. In

⁶Siehe dazu auch Toksöz und Johnston (1981) zu Untersuchungen mit Raumwellen.

Bezug auf die Messung gibt r den Offset des Geophons an und p kann als Phasenlangsamkeit⁷ des Wellenzuges im Fernfeld verstanden werden.

Den Weg zu einer Lösung der Form (II.22) will ich hier nur skizzieren und dabei insbesondere auf praktisch relevante Eigenarten der numerischen Lösungsverfahren hinweisen. Für eine eingehende Behandlung der Theorie zur Lösung der elastischen Differentialgleichung (II.1) unter allgemeinen Bedingungen verweise ich auf die Lehrbücher.

Die Verfahren können in zwei Kategorien eingeteilt werden. Im einen Fall wird die Differentialgleichung (II.1) in einer Darstellung des Wellenfeldes nach der Verschiebung und Spannung numerisch integriert (Abschnitt II.3.2). Im anderen Fall wird das Medium in homogene Abschnitte zerlegt und das Wellenfeld durch elastische Potentiale ausgedrückt, für die sich Lösungen unmittelbar angeben lassen (Abschnitt II.3.3). Beide Vorgehensweisen profitieren von einem Separationsansatz, der nur für rein tiefenabhängige Materialeigenschaften zum Ziel führt (Abschnitt II.3.1). Wird das Medium in homogene Schichten zerlegt, führen beide Verfahren jeweils zu Matrixalgorithmen, die sich numerisch bequem realisieren lassen (Abschnitt II.3.4, S. 47).

3.1 Eindimensionales Medium

Die Gleichung (II.1) ergibt ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die elastische Verschiebung \vec{u} . Zusammen mit der Forderung, dass die Erdoberfläche spannungsfrei sein muss und dass alle Verschiebungen physikalisch durch den Quellterm verursacht sein müssen, also keine Wellen von außen in das Untersuchungsgebiet einfallen, ergibt sich ein Randwertproblem. Zum Auffinden der Lösung wird versucht, die partiellen Differentialgleichungen durch einen geeigneten Separationsansatz in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen umzuwandeln. Dies ist nicht in jedem Koordinatensystem

⁷Die zum Offset r konjugierte Größe ist die Wellenzahl $k = p\omega$. Hier wird jedoch nicht nach der Wellenzahl, sondern der Phasenslowness p entwickelt. Diese, für die Reflektivitätsmethode (Müller, 1985) typische, Darstellung wird aus mehreren Gründen gewählt. Wird das Medium durch homogene Schichten beschrieben (Abschnitt II.3.4, S. 47), so werden die Anschlussbedingungen an Schichtgrenzen Frequenz-unabhängig, wenn sie bezüglich der Phasenslowness formuliert werden. Oder anders ausgedrückt: Die Phasenslowness ist gleich dem Strahlparameter der Raumwellen-Näherung. Aus diesem Grund werden homogene Bereiche des Mediums durch horizontale Tangenten in der ω, p -Darstellung abgebildet. Das erleichtert die Interpretation der Spektren. Allerdings werden in dieser Darstellung sowohl das Aliasing (Abschnitt III.3.1, S. 75), wie auch die Unschärfe (Abschnitt III.3.2, S. 79) der Dispersionsanalyse Frequenz-abhängig.

Wegen $k = p\omega$ tritt beim Wechsel von der natürlichen Entwicklungsvariablen k zu p eigentlich noch ein Faktor ω^2 unter dem Integral auf. Aus Gründen der Übersichtlichkeit nehme ich diesen Faktor in das Spektrum G auf. Erst bei der Umkehroperation (Gl. (III.14), Abschnitt III.2.3, S. 72) tritt der Faktor dann explizit in Erscheinung.

möglich, gelingt aber in den praktisch relevanten Fällen der kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten (Ben-Menahem und Singh, 1981, Abschnitt 2.2 und 2.3).

Durch den Ansatz $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ wird als erstes die Zeitabhängigkeit separiert. Die Lösung ergibt sich dann in Form der Fourier-Entwicklungskoeffizienten. Ein viskoelastisches Materialgesetz vereinfacht sich dadurch von einem Faltungsintegral (II.5a) zu einem einfachen Produkt Frequenz-abhängiger, komplexer Größen (II.6).

Ist das Material isotrop und hängen seine Eigenschaften nur von der Tiefenkoordinate z ab, so kann Gl. (II.1) in

$$\rho\omega^2 \vec{u} + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \hat{e}_z \frac{d\lambda}{dz} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{d\mu}{dz} \left(2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \hat{e}_z \times \operatorname{rot} \vec{u} \right) = -\vec{f}_V \quad (\text{II.23})$$

umgeformt werden. Für ein sphärisch symmetrisches Medium ergibt sich der gleiche Ausdruck, wobei die Koordinate z durch r und der Einheitsvektor in z -Richtung \hat{e}_z durch \hat{e}_r zu ersetzen sind (Ben-Menahem und Singh, 1981, Gl. (1.107) und (1.108)).

Ein Medium, dessen Eigenschaften nur von einer Koordinatenrichtung abhängen, wird auch als „eindimensionales Medium“ bezeichnet. Durch die Forderung einer solchen geometrischen Eigenschaft vereinfacht sich die theoretische Formulierung und numerische Lösung des Problems erheblich. Ein eindimensionales Medium muss aber auch aus anderen, praktischen Gründen gefordert werden. Der verfügbare Messdatensatz bildet das seismische Wellenfeld in einer Dimension (maximal zwei Dimensionen) ab, nämlich entlang der Geländeoberfläche. Durch die seismische Messung werden tiefenabhängige Eigenschaften quasi auf die Oberfläche projiziert. Zur Bestimmung seismischer Geschwindigkeiten müssen Wellenlängen entlang der Oberfläche gemessen werden. Die Messung ist aufgrund der Unschärferelation (siehe Abschnitt III.3.2, S. 79) umso genauer, je größer der Offsetbereich ist, über den die Messung erfolgt. Das gilt sowohl für die Bestimmung von Scheingeschwindigkeiten in der Refraktionsseismik, wie für die Bestimmung von Phasengeschwindigkeiten der Oberflächenwellen. Starke laterale Variationen der Materialeigenschaften schränken den Offsetbereich ein, in dem sich Wellen einheitlicher Phasenbeziehung ausbilden. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Verfahren beruht auf der Messung von Wellenlängen und ist daher eine reine Sondiermethode.

Um endgültig zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu gelangen, wird der Verschiebungsvektor \vec{u} bezüglich Basisvektoren dargestellt, die eine Separation erlauben.

3.2 „Vector Surface Harmonics“

Als besonders elegant erweist sich der Separationsansatz

$$\vec{u}(z, r, \varphi) = u_1(z) \vec{b}_1(r, \varphi) + u_2(z) \vec{b}_2(r, \varphi) + u_3(z) \vec{b}_3(r, \varphi). \quad (\text{II.24})$$

Das Vektorfeld der Verschiebung wird in Komponenten der ortsabhängigen, orthogonalen Basis (Backus, 1967)

$$\vec{b}_1 = \hat{e}_z \Phi(r, \varphi), \quad \vec{b}_2 = \text{grad } \Phi(r, \varphi) \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \hat{e}_z \times \vec{b}_2 \quad (\text{II.25})$$

dargestellt. Die (r, φ) -Abhängigkeit wird so auf die Basisvektoren abgewälzt. Diese sind keine Einheitsvektoren. Die Komponenten u_1 , u_2 und u_3 hängen nur von z ab.

Gl. (II.24) führt, in die Wellengleichung eingesetzt, auf ein Eigenwertproblem

$$(\Delta + k^2) \Phi(r, \varphi) = 0, \quad (\text{II.26})$$

die sogenannte Helmholtzgleichung. Diese wird in Zylinderkoordinaten⁸ durch den Produktansatz

$$\Phi(r, \varphi) = e^{im\varphi} Z_m(kr), \quad m \in \mathbb{N} \quad (\text{II.27})$$

gelöst. Z_m steht dabei für eine der Besselschen Funktionen. Für jedes k und m ergibt sich mit Gl. (II.27) eine Basis (II.25), die sogenannten „Vector Surface Harmonics“ (Aki und Richards, 1980, Abschnitt 7.4.2). Die Wellengleichung lässt sich mit dieser Darstellung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung umformen:

$$\frac{d}{dz} \vec{Y}_{m,k}(z) = A_k(z) \vec{Y}_{m,k}(z) + \vec{F}_{m,k}(z). \quad (\text{II.28})$$

Der Vektor $\vec{Y}_{m,k}$ hat sechs Elemente, nämlich die je drei Komponenten bezüglich der Basis (II.25) der Verschiebung und der Spannung auf einer horizontalen Fläche.

Der Vektor $\vec{F}_{m,k}$ ist eine entsprechende Entwicklung des Quellterms \vec{f} nach dieser Basis (Takeuchi und Saito, 1972, Abschnitt A.1). Aufgrund der einfachen Orthogonalitätsrelationen für die Besselfunktionen erster Art J_m werden diese

⁸Für ein sphärisch symmetrisches Medium lässt sich die gleiche Schreibweise ableiten, wobei die Zylinderkoordinaten z , r und φ durch die Kugelkoordinaten r , ϑ und φ ersetzt werden müssen. Gl. (II.26) wird dann von Kugelfunktionen erfüllt, wobei $k^2 = l(l+1)$ gilt und l die Ordnung der Kugelfunktion ist (Takeuchi und Saito, 1972; Kennett, 1983; Friederich und Dalkolmo, 1995).

in Gl. (II.27) benutzt und die Quellterme nach diesen entwickelt⁹, womit auch die Entwicklung für die Lösungsfunktionen festgelegt ist. Die Zylinderfunktionen (II.27) bilden ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem, so dass sich jedes Wellenfeld nach der Basis (II.25) entlang (r, φ) entwickeln lässt.

Die Matrix $A_k(z)$ enthält unter anderem die von z abhängigen Materialparameter und ist unabhängig von m . Sie lässt sich so partitionieren, dass das gesamte Gleichungssystem in zwei kleinere für PSV-polarisierte und SH-polarisierte Fernfeld-Verschiebung zerfällt.

Die Lösung der elastischen Wellengleichung in Form der Entwicklungskoeffizienten $\vec{Y}_{m,k}(z)$ wird durch Integration von Gl. (II.28) unter Berücksichtigung der Randbedingungen gefunden. Die Struktur des Problems erfordert es, zunächst oberhalb und unterhalb der Quelle jeweils zwei unabhängige Basislösungen des homogenen Systems zu bestimmen, welche die Randbedingungen erfüllen. Die endgültige Lösung wird dann als eine Linearkombination dieser Basislösungen gebildet, welche das inhomogene System erfüllt. Zur Bestimmung der Koeffizienten, mit denen die Basislösungen in die Gesamtlösung eingehen, muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Lösungsfunktionen enthalten exponentiell anwachsende Terme. Aufgrund der endlichen numerischen Rechengenauigkeit „verschlucken“ diese Terme andere, unabhängige Anteile der Lösung, die um Größenordnungen kleiner sein können. Daher neigt das Gleichungssystem dazu numerisch singular zu sein. Numerisch stabile Verfahren erfordern daher spezielle Lösungstechniken (Friederich und Dalkolmo, 1995; Buchen und Ben-Hador, 1996; Wang, 1999).

3.3 Elastische Potentiale

Sind die elastischen Parameter stückweise konstant, so entspricht das einem Stapel homogener Schichten. Dort wo die Schichten aneinander grenzen haben die Materialeigenschaften Diskontinuitäten erster Ordnung in z -Richtung. Innerhalb der homogenen Schicht entfallen jedoch alle Ableitungen der Materialparameter nach z in Gleichung (II.23). Zerlegt man das Wellenfeld in einen rotationsfreien Anteil \vec{u}_1 und einen divergenzfreien Anteil \vec{u}_2 (und den Quellterm entsprechend), so ergeben sich die einfachen Wellengleichungen

$$\left(\omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta\right) \vec{u}_1 = -\frac{\vec{f}_1}{\rho} \quad \text{und} \quad \left(\omega^2 + \frac{\mu}{\rho} \Delta\right) \vec{u}_2 = -\frac{\vec{f}_2}{\rho}. \quad (\text{II.29})$$

Offenbar beschreibt \vec{u}_1 Wellen, die sich mit der Kompressionswellen-Geschwindigkeit $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ausbreiten, während es sich bei \vec{u}_2 um Scherwellen mit $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$ handelt.

⁹Siehe Abschnitt II.3.5, S. 48 und A.4.5, S. 222 im Anhang, sowie bei Sommerfeld (1978b, §31).

Diese Zerlegung des Wellenfeldes in Anteile kanonischer Wellentypen führt auf eine Darstellung der drei Komponenten des Verschiebungsvektors \vec{u} durch drei skalare elastische Potentiale ϕ , ψ und χ gemäß

$$\vec{u}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r}) + \text{rot}(\hat{e}_z \psi(\vec{r})) + \text{rot rot}(\hat{e}_z \chi(\vec{r})) \quad (\text{II.30})$$

entsprechend einer Darstellung mit ortsabhängigen Basisvektoren.

Die Wellengleichung (II.23) ist im homogenen Medium erfüllt, falls die elastischen Potentiale die einfachen skalaren Wellengleichungen (II.15) erfüllen. Dabei kann ϕ direkt als Feld sich ausbreitender Kompressionswellen verstanden werden. Entsprechend repräsentieren ψ und χ Scherwellen. Diese skalaren Wellengleichungen können nach einem klassischen Ansatz separiert werden. Dabei tritt wieder die Differentialgleichung (II.26) auf. Anstatt des Gleichungssystems (II.28) erhält man nun nicht gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen für die elastischen Potentiale, die durch einen Ansatz mit Exponentialfunktionen gelöst werden.

Die Wellengleichung für das gesamte Medium wird in dieser Darstellung mit der Reflektivitätsmethode (Müller, 1985) gelöst. Dieses Verfahren kann physikalisch sehr anschaulich vollzogen werden. Von der seismischen Quelle ausgehend, werden die Wellenfelder, welche die Quelle im elastischen Vollraum anregt, durch das Medium propagiert. An jeder Diskontinuität wird die physikalisch notwendige Stetigkeit von Verschiebung und Normalspannung dadurch erreicht, dass als sekundäre Wellen transmittierte und reflektierte Kompressions- und Scherwellen erzeugt werden. Im eben geschichteten Fall koppeln auf diese Weise nur ϕ und ψ . Obwohl alle Potentiale, zumindest im Nahfeld, zu allen Komponenten der Verschiebung beitragen, stellt das Potential χ den vollständig entkoppelten Fall für die Ausbreitung von SH-Wellen dar.

Beschreibt man auf diese Weise das komplette Wellenfeld mit allen (unendlich vielen) Mehrfachreflexionen, führt die formale Beschreibung auf eine geometrische Reihe von Matrizen, die analytisch geschlossen ausgedrückt werden kann. Beachtenswert ist, dass dieses Verfahren nicht die am Ende von Abschnitt II.3.2 angesprochenen Instabilitäten zu bewältigen hat. Formal wird das von Kennett und Kerry (1979), von Chin, Hedstrom und Thigpen (1984) sowie von Buchen und Ben-Hador (1996) gezeigt. Der Effekt ist aber auch anschaulich verständlich. Es werden physikalisch sinnvoll von der Quelle ausgehende Wellen propagiert und die Anschlussbedingungen an den Diskontinuitäten werden nur durch ausfallende (konvertierte und reflektierte) Wellen erfüllt. Auf diese Weise werden von vornherein alle physikalisch unsinnigen Lösungen (einfallende Wellen, die nicht von der Quelle ausgehen und exponentiell anwachsende Lösungsfunktionen) ausgeschlossen. Bei der formalen Integration des Differentialgleichungssystems geschieht dies, wie oben beschrieben, erst ganz zum Schluss.

3.4 Matrixverfahren

Die Darstellung des Mediums durch homogene Schichten ist bequem und hat auch methodische Vorteile (Abschnitt V.2.1, S. 120). Die Lösungsfunktionen können in homogenen Bereichen analytisch angegeben werden. Die Koeffizienten für die Entwicklung nach diesen elementaren Lösungsfunktionen werden durch die Rand- und Anschlussbedingungen bestimmt. Auf diese Weise entsteht ein Matrizenalgorithmus, wie die oben zitierte Reflektivitätsmethode (Müller, 1985; Ungerer, 1990). Matrizenverfahren lassen sich numerisch sehr effizient umsetzen. Ist das zu beschreibende Medium tatsächlich in weiten Teilen homogen, so genügen wenige homogene Schichten zur Beschreibung, was die Anzahl der notwendigen Rechenschritte drastisch reduziert. Außerdem sind homogene Schichten für die Darstellung des Mediums in einem Inversionsverfahren vorteilhaft. Denn Boxcar-Funktionen, mit denen homogene Schichten dargestellt werden, sind orthogonale Basisfunktionen, die alle den Mittelwert eines Parameters über einen Tiefenbereich darstellen. Polynome beispielsweise sind nicht über jedes Intervall orthogonal und haben Koeffizienten unterschiedlicher physikalischer Einheit.

Sollen auch kontinuierlich veränderliche Medien mit homogenen Schichten dargestellt werden, geschieht dies durch einen Stapel dünner Schichten. Die Schichten müssen so dünn sein, dass sie mit den auftretenden Wellenlängen nicht aufgelöst werden können. Wie fein die Ortsfunktion der Materialeigenschaften abgetastet werden soll, muss auf diese Weise im Voraus festgelegt werden. Das kann ein Nachteil sein. Ein Integrationsalgorithmus zur Lösung von Gl. (II.28) kann hingegen seine Schrittweite der Struktur wellenlängenabhängig anpassen.

Auch die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (II.28) für die Totalverschiebung und die Totalspannung kann von den Vorteilen einer Parametrisierung nach homogenen Schichten profitieren. Auch in diesem Fall wird ausgenutzt, dass die Lösungsfunktionen in homogenen Bereichen analytisch bekannt sind. Es ergibt sich wiederum ein Matrixalgorithmus, der als „Thomson-Haskell-Algorithmus“ bekannt ist (Thomson, 1950; Haskell, 1953). Doch auch dieser führt, wie die numerische Integration von Gl. (II.28), auf ein möglicherweise numerisch singuläres Gleichungssystem und erfordert daher spezielle Lösungstechniken (Buchen und Ben-Hador, 1996; Wang, 1999).

Zur Berechnung partieller Ableitungen des Wellenfeldes nach den Materialparametern ist dieses Lösungsverfahren allerdings von erheblichem Nutzen (Tessler, 1999). In vielen Inversionsverfahren wird ein Großteil der Rechenzeit für die Bestimmung dieser Ableitungen verwendet. Das Thomson-Haskell-Verfahren führt auf Basislösungen, die als Produkte endlich vieler, analytisch bekannter Faktoren angegeben werden. Die Materialparameter der homogenen Schichten treten jeweils nur in zwei bis drei dieser Faktoren auf. Die Ausdrücke in denen sie

auftreten sind analytisch bekannt und publiziert (Aki und Richards, 1980; Kennett, 1983). Auf diese Weise können auch die partiellen Ableitungen analytisch geschlossen angegeben werden. Zu ihrer numerischen Berechnung können auf diese Weise viele Zahlenwerte mitverwendet werden, welche zur Bestimmung der Basislösungen selbst bereits berechnet wurden. Das kann den numerischen Gesamtaufwand erheblich reduzieren.

Um eine solche Formulierung mit der Reflektivitätsmethode zu realisieren, müssten viele der üblicherweise numerisch berechneten Ausdrücke analytisch ausgewertet werden. Das würde auf die gleichen Matrizen führen, die auch der Thomson-Haskell-Algorithmus verwendet, allerdings in andere Faktoren zerlegt (Buchen und Ben-Hador, 1996). Der für die Reflektivitätsmethode übliche Rekursionsalgorithmus stellt die notwendigen Ausdrücke nicht zur Verfügung.

3.5 Entwicklung laufender Wellen nach Besselfunktionen

Alle beschriebenen Verfahren zur Lösung der elastischen Wellengleichung stellen das Wellenfeld durch eine Entwicklung (II.22) nach Zylinderfunktionen dar. Diese schreibe ich in diesem Abschnitt exemplarisch für u_z und mit $k = \omega p$ verkürzt als

$$u(r) = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk. \quad (\text{II.31})$$

Diese Darstellung mache ich mir bei der zweistufigen Inversion zu Nutze. Für die Inversion wird das synthetische Wellenfeld nur in der Form der Entwicklungskoeffizienten $G(k)$ berechnet. Dafür muss allerdings aus den gemessenen Seismogrammen $u(r)$ ein entsprechendes Spektrum bestimmt werden. Unabhängig von den Eigenschaften des seismischen Mediums ist aufgrund der durchgeführten Messung bekannt, dass es sich um ein von der Quelle (bei $r = 0$) ausgehendes Wellenfeld handeln muss. Im Zusammenhang mit der in Kapitel III zu besprechenden Dispersionsanalyse tritt die Frage auf, welche Eigenschaften daher für die Entwicklungskoeffizienten $G(k)$ vorausgesetzt werden können. Unter diesem Gesichtspunkt, also der Forderung, dass die beschriebenen Wellen von einer Punktquelle *auslaufen* sollen, werde ich die Entwicklung (II.31) nun eingehender betrachten.

Sommerfeld (1978b, im Folgenden durch Som78 zitiert) führt die Zylinderfunktionen als Überlagerung ebener Wellen ein (Som78, §19.8). In Polarkoordinaten ist

$$u(r, \varphi) = A e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)}$$

eine aus der Richtung α mit Wellenzahl k einfallende und am Ort (r, φ) beobach-

tete ebene Welle. In diesem Sinne kann die Besselfunktion (Som78, §19.14)

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

als Überlagerung von aus allen Richtungen einfallenden ebenen Wellen verstanden werden, die durch Interferenz ein Feld stehender Wellen erzeugen. Für die Hankelfunktionen (Som78, §19.22)

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

und

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

fallen die ebenen Wellen immer nur aus einer (r, φ) -Halbebene in den Ursprung $r = 0$ ein und kulminieren dort. Für $H_0^{(1)}$ ergeben sich aus dem Ursprung auslaufende und für $H_0^{(2)}$ in den Ursprung einfallende Wellen (positive Wellenzahl k und $r \geq 0$ vorausgesetzt). Der Charakter stehender und laufender Wellen spiegelt sich auch in den Fernfeldnäherungen der Zylinderfunktionen wieder, wie sie in Gl. (A.8) auf Seite 221 angegeben sind. Unter diesem Gesichtspunkt ist es verwunderlich, dass mit Gl. (II.31) eine Entwicklung nach stehenden Wellen zur Beschreibung eines laufenden Wellenfeldes gewählt wurde.

Sommerfeld (Som78, §32) weist darauf hin, dass eine Darstellung

$$u(r) = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k dk, \quad (\text{II.32})$$

die für $G(-k) = G(k)$ möglich ist, den Charakter der Wellenausbreitung deutlicher macht. In der Tat hängen die Entwicklungskoeffizienten der physikalisch relevanten Felder nur von k^2 ab (Lamb, 1904; Forbriger, 1996a; Sommerfeld, 1978b, §31.13a). Allerdings wird dann mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k dk = \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(2)}(kr) k dk$$

das Feld in mathematisch und optisch identischer Weise auch nach einlaufenden

Wellen entwickelt. Im Gegensatz zur Entwicklung nach ebenen Wellen

$$u(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikr} dk$$

bestehen die Entwicklungskoeffizienten $G(k)$ nicht aus δ -Funktionen, die eine positive oder negative Wellenzahl selektieren. Das wäre auch mit der Bedingung $G(-k) = G(k)$ nicht vereinbar. Gl. (II.32) trägt also nichts zum Verständnis der physikalischen Natur von $G(k)$ bei.

Die Ursache der Verwirrung ist, dass wir es bei Gl. (II.31) in Wahrheit mit einer Entwicklung von Kugelwellen nach Zylinderfunktionen zu tun haben. Dies wird etwas verschleiert, weil bereits oben festgelegt wurde, dass die Beobachtung nur in einer Ebene ($z = 0$) erfolgt. Für eine Punktquelle der Zeitabhängigkeit $q(t)$ im Koordinatenursprung ergibt sich (bis auf einen konstanten Faktor)

$$\Phi(r, t) = \frac{q(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (\text{II.33})$$

als Lösung der skalaren Wellengleichung in Kugelkoordinaten. Das retardierte Potential (II.33) hat bis auf die r -Abhängigkeit die Form der d'Alembertschen Lösung. Der Charakter der beschriebenen Wellen ergibt sich aus der Bewegung von Flächen konstanter Phase, also für konstantes Argument von q . Es handelt sich um Wellen, die mit der Geschwindigkeit c vom Ursprung auslaufen. Die Darstellung Gl. (II.31) ergibt sich, indem die Fourier-Koeffizienten der Kugelwelle Gl. (II.33)

$$\tilde{\Phi}(r, \omega) = \tilde{q}(\omega) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r}$$

durch das Sommerfeldintegral (Som78, §31.14)

$$\frac{e^{ik_0(\omega)r}}{r} = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk \quad \text{mit} \quad G(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_0^2(\omega)}}$$

nach Besselfunktionen entwickelt werden. Bei der Integration ist zu beachten, dass $G(k)$ zweiblättrig ist. Für Integrationswege auf dem Riemannschen Blatt $\Re(G) \geq 0$ ergeben sich auslaufende Wellen. Dort liegt also der Charakter der laufenden Wellen verborgen.

Eine solche Entwicklung für auslaufende Zylinderwellen mit

$$G(k) = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k_0 r) J_0(kr) r dr$$

ist nicht bekannt.

Zur Erinnerung sei noch einmal darauf hingewiesen, dass der Separationsansatz für die Wellengleichung eines z -abhängigen Mediums auf Zylinderfunktionen führt. Eine Behandlung des Problems mit retardierten Potentialen ist daher in heterogenen Medien nicht angebracht. Eine Entwicklung nach Besselfunktionen anstatt nach Hankelfunktionen wird aufgrund der einfachen Orthogonalitätsbeziehung bevorzugt (Abschnitt A.4.5, S. 222). Diese wird von Lamb (1904) unmittelbar benutzt, um die Quelle über die Randbedingung einzubringen. Außerdem führt sie auf die Sommerfeldintegrale. Diese werden in praktisch allen Arbeiten über die Anregung seismischer Wellen durch Punktquellen benutzt, um die retardierten Potentiale im Vollraum nach Bessel-Funktionen zu entwickeln.

Formal kann die von Sommerfeld eingeführte Ausstrahlungsbedingung (Som78, §28.7a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{II.34}$$

auf das Entwicklungsintegral

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_0^\infty G(k) J_0(kr) k \, dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty G(k) H_0^{(1)}(kr) k \, dk + \frac{1}{2} \int_0^\infty G(k) H_0^{(2)}(kr) k \, dk \end{aligned} \tag{II.35}$$

angewandt werden. Im $H^{(1)}$ -Term von Gl. (II.35) wird die Bedingung (II.34) bereits von den Entwicklungsfunktionen erfüllt. Für den $H^{(2)}$ -Term ist das nicht der Fall. Dessen Beiträge müssen daher im Fernfeld unter dem Integral verschwinden, also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty G(k) H_0^{(2)}(kr) k \, dk \rightarrow 0. \tag{II.36}$$

Im Nahfeld liefert dieser Term allerdings einen notwendigen Beitrag zur Entwicklung der Kugelwellen. Im Grenzübergang für das Fernfeld erhält man dann eine Entwicklung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty G(k) H_0^{(1)}(kr) k \, dk$$

nach auslaufenden Zylinderwellen $H_0^{(1)}$ zu positiven Wellenzahlen. In der praktischen Anwendung ist die Bedingung Gl. (II.36) für die Entwicklungskoeffizienten $G(k)$ eines auslaufenden Wellenfeldes leider nahezu nutzlos, weil sich das Integral für die benötigten Fälle nicht analytisch auswerten lässt.

4 Inversionstheorie

Die praktischen Fragestellungen der Geophysik führen in der Regel auf sogenannte „Inversionsprobleme“. Die geophysikalische Messung liefert Werte für eine physikalische Observable (im vorliegenden Fall ist das die Verschiebung der Erdoberfläche beim Durchgang eines seismischen Wellenfeldes). Aus diesen Werten sollen Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des untersuchten Mediums gezogen werden.

Die physikalische Beschreibung des Vorgangs schlägt den umgekehrten Weg ein. Ausgehend von Grundtatsachen wie der Impulserhaltung lässt sich mathematisch formal ein physikalisches Modell¹⁰ formulieren. Eine Spezialisierung für eine bestimmte Klasse von Fragestellungen (im vorliegenden Fall ist das die Ausbreitung seismischer Wellen in einem viskoelastischen Medium) führt meistens auf eine Differentialgleichung (hier die Wellengleichung (II.23)). Die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung sagen Werte für die Observable (hier die Oberflächenverschiebung) voraus, wie sie bei einer Messung erwartet würden. In diese Funktionen, die als Lösung des *Vorwärtsproblems* bezeichnet werden, gehen die Materialeigenschaften ein (im vorliegenden Fall sind das zum Beispiel die strukturellen seismischen Geschwindigkeiten).

Die umgekehrte Frage nach den Materialeigenschaften bei gegebenen Werten der Observablen ist in der Regel nicht analytisch geschlossen beantwortbar. Diese Fragestellung wird als *inverses Problem* und das Auffinden seiner Lösung als *Inversion* bezeichnet. Ganz allgemein formuliert lautet das Inversionsproblem:

Die Lösung des Vorwärtsproblems ist ein Funktional beliebiger, aber gegebener Parameterfunktionen. Einige Werte dieser Lösung sind bekannt. Wie müssen die Parameter gewählt werden, damit sich diese Lösungswerte physikalisch sinnvoll ergeben?

Die Antwort auf diese Frage lässt sich in der Regel nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Annahmen und möglicherweise nur durch einen numerischen Suchprozess finden. Zusätzliche Annahmen sind notwendig, da die praktisch relevanten Inversionsprobleme prinzipiell mehrdeutig sind. Ein numerischer Suchprozess ist notwendig, wenn die gesuchten Parameter nichtlinear in das Vorwärtsproblem eingehen.

Für die Mehrdeutigkeit des Problems gibt es mehrere Ursachen. Erstens resultiert sie aus der Geometrie der Messung. Während sich das zu untersuchende Medium in drei Raumdimensionen erstreckt, werden Messwerte in der Regel

¹⁰Im weiteren Verlauf der Arbeit benutze ich den Begriff „Modell“ in einem anderen Sinne. Während hier die physikalische Vorstellung von Vorgängen in der Natur gemeint ist, wird später mit dem Begriff „Modell“ eine Vorstellung von den Materialeigenschaften des untersuchten Mediums bezeichnet.

nur in einer oder maximal zwei Dimensionen gesammelt (an der Oberfläche oder in einem Bohrloch). Außerdem werden nur einzelne, in Raum und Zeit diskret verteilte Werte (Samples) aufgezeichnet, während sich die gesuchten Parameterfunktionen kontinuierlich verändern. Aus einer reinen Dimensionsbetrachtung ergibt sich damit bereits, dass das Problem unterbestimmt ist.

Zweitens sind die gemessenen Werte mit statistischen oder systematischen, aber immer unbekanntem (sonst ließen sie sich korrigieren) Fehlern behaftet. Bei unterschiedlichen Werten der Fehlergrößen können verschiedene Ergebnisse des Vorwärtsproblems zum selben Messwert führen. Auch aus diesem Grund ist die Fragestellung mehrdeutig.

Die Mehrdeutigkeit lässt sich nur bewältigen, indem weitere Forderungen (Nebenbedingungen) an das Ergebnis der Inversion gestellt werden. Eine sinnvolle und häufig benutzte Forderung ist, dass die Messdaten durch ein Modell erklärt werden sollen, welches möglichst wenig strukturelle Details besitzt. Die im Ergebnis enthaltene Struktur ist dann wirklich *notwendig*, um die Messdaten zu erklären. Dagegen lässt sich immer ein detailreicheres Modell finden, welches die Daten genauso gut erklärt.

In jedes Inversionsverfahren fließen solche Nebenbedingungen ein, auch wenn diese nicht explizit genannt werden. Die zusätzlichen (und nicht aus der Messung begründeten) Forderungen zu benennen, ist eine Voraussetzung für eine verlässliche Interpretation des Ergebnisses.

4.1 Lineare Inversion exakter Daten

Im Folgenden werde ich das elementare, theoretische Konzept einführen, dem eine der Dispersionsanalysen folgt, so wie ich sie in Abschnitt III.2.1 diskutiere. Es handelt sich um die Inversion eines linearen Funktional für exakte Daten, wie sie von Parker (Henry et al., 1980; Parker, 1994) formuliert wird.

Gegeben ist ein Satz von M Messwerten d_l . Diese sollen frei von systematischen und statistischen Fehlern sein. Sie können damit exakt durch die physikalische Theorie beschrieben werden. Das Vorwärtsproblem wird als Funktional $F_l[\mathbf{m}]$ der Parameterfunktion \mathbf{m} beschrieben. Gesucht wird dasjenige \mathbf{m} , welches die Beziehung $d_l = F_l[\mathbf{m}]$ erfüllt. Betrachtet werden außerdem nur Fälle, für welche $F_l[\mathbf{m}]$ ein lineares Funktional ist. Es soll sich als Skalarprodukt $F_l[\mathbf{m}] = (\mathbf{g}_l, \mathbf{m})$ eines Hilbertraumes schreiben lassen. \mathbf{g}_l wird als *Repräsentant* des Datums d_l bezeichnet. Sowohl \mathbf{m} als auch \mathbf{g}_l müssen gültige Elemente des Hilbertraumes sein. Das Skalarprodukt definiert im Hilbertraum außerdem eine Norm $\|\mathbf{m}\|$ mit $\|\mathbf{m}\|^2 = (\mathbf{m}, \mathbf{m})$.

Das Inversionsproblem lautet nun: Suche ein \mathbf{m} , welches

$$d_l = (\mathbf{g}_l, \mathbf{m}) \quad \forall l \quad (\text{II.37})$$

erfüllt. Dabei sind die Repräsentanten \mathbf{g}_l durch die physikalische Theorie gegeben und bekannt. Als Ansatz wird die Parameterfunktion

$$\mathbf{m} = \sum_l \alpha_l \mathbf{g}_l \quad (\text{II.38})$$

nach den Repräsentanten entwickelt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$d_l = \sum_k \underbrace{(\mathbf{g}_l, \mathbf{g}_k)}_{=\Gamma_{lk}} \alpha_k, \quad (\text{II.39})$$

dessen Lösung die Entwicklungskoeffizienten α_l und damit \mathbf{m} liefert. Die sogenannte *Gram-Matrix* Γ ist durch die Repräsentanten gegeben und damit, ebenso wie diese, bekannt. Formal lässt sich damit die Lösung

$$\mathbf{m} = \sum_{l,k} \mathbf{g}_l (\Gamma^{-1})_{lk} d_k \quad (\text{II.40})$$

des Inversionsproblems aus Gleichung (II.37) analytisch geschlossen angeben.

Es kann gezeigt werden, dass die Entwicklung nach Gleichung (II.39) vollständig und eindeutig ist und zum Modell kleinster Norm führt (Parker, 1994, Abschnitt 1.12). Die Definition des Skalarprodukts (und damit der Norm im Hilbertraum) wird man daher günstigerweise so wählen, dass die Forderung kleinster Norm eine sinnvolle Nebenbedingung für die Inversion darstellt.

4.2 Iterative Least-Squares-Inversion

Als zweite Stufe der Inversion wird in Kapitel IV eine stabilisierte Least-Squares-Inversion beschrieben. Die Behandlung nichtlinearer Inversionsprobleme und fehlerbehafteter Daten ist Lehrbuchstoff, dem ich hier nichts grundsätzlich Neues hinzufügen. Die sorgfältige Formulierung des Problems gibt jedoch bereits wichtige Einblicke in die Aussagekraft der Inversionsergebnisse. Daher stelle ich hier einige Überlegungen zu prinzipiellen Gesichtspunkten des Verfahrens voran. Dies geschieht wieder in starker Anlehnung an die von Parker (1994) benutzten Formulierungen.

4.2.1 Charakter der gestellten Aufgabe

Der formale Zusammenhang zwischen Messdaten und Modelleigenschaften wird nun als

$$d_j = F_j(\vec{m}) + n_j \quad (\text{II.41})$$

beschrieben. Darin kommen drei Unterschiede zum vorangegangenen Abschnitt zum Ausdruck:

Der theoretische Zusammenhang zwischen den Modellparametern m_l und den Daten d_j wird durch eine allgemeine, beliebig nichtlineare Funktion $F_j(\vec{m})$ beschrieben. Im Gegensatz dazu wurde im vorigen Abschnitt von einem linearen Zusammenhang ausgegangen. Für eine systematische Lösung des Inversionsproblems muss die Funktion $F_j(\vec{m})$ linearisiert werden.

Die numerische Lösung des Vorwärtsproblems erfordert eine A-priori-Parametrisierung des Modells. Damit werden die gesuchten Materialeigenschaften nicht mehr durch ortsabhängige Funktionen, sondern durch einen diskreten Satz von Koeffizienten m_l beschrieben.

Während in Abschnitt II.4.1 (S. 53) und der ersten Stufe der Inversion (Kapitel III) von fehlerfreien Daten ausgegangen wird, muss hier berücksichtigt werden, dass die Daten Signale n_j enthalten, die durch die vereinfachte physikalische Theorie nicht erklärt werden können. Ursachen für diese, unter dem Begriff „Noise“ zusammengefassten Signale, werden in Abschnitt III.4.2 (S. 90) diskutiert.

4.2.2 Umgang mit fehlerbehafteten Daten

Es ist nicht erwünscht die Daten d_j exakt durch die Vorwärtsbeziehung $F_j(\vec{m})$ zu erklären, da die n_j in der physikalischen Vorstellung, die dem Zusammenhang $F_j(\vec{m})$ zugrunde liegt, nicht existieren. Dies wird in der Regel auch gar nicht oder nur durch eine unrealistische Wahl von \vec{m} möglich sein. Für einen gegebenen Datensatz d_j und ein gegebenes Modell \vec{m} können die Residuen $R_j = d_j - F_j(\vec{m})$ berechnet werden. Sie geben jetzt ein Maß dafür, wie gut das Modell die Messdaten im Rahmen der physikalischen Theorie erklärt.

Für die Inversion wird eine skalare Funktion¹¹ gesucht, deren Größe die Qualität der Anpassung bemisst und die für des optimale Modell \vec{m}_{opt} (beste Anpas-

¹¹In der englischsprachigen Literatur wird diese als „objective function“ bezeichnet.

sung an die Messdaten) ein Extremum annimmt. Beispiele dafür sind

$$\begin{aligned} \text{die Betragssumme} & \quad \sum_j |d_j - F_j(\vec{m})| && \stackrel{!}{=} \min \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}, \\ \text{die Betragsquadratsumme} & \quad \sum_j |d_j - F_j(\vec{m})|^2 && \stackrel{!}{=} \min \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}, \\ \text{oder das Skalarprodukt} & \quad (\text{Frazer und Sun, 1998}) \\ & \quad \frac{\sum_j d_j F_j(\vec{m})}{|\vec{d}| |\vec{F}(\vec{m})|} && \stackrel{!}{=} \max \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}. \end{aligned}$$

Letzteres ist der Wert der normierten Kreuzkorrelierten zum Argument $\tau = 0$.

In den weiteren Ausführungen wird nur die Betragsquadratsumme behandelt, da die Extremalbedingung dann für eine lineare Funktion $F_j(\vec{m}) = (\vec{F}_0 + D\vec{m})_j$ mit der Methode der Gaußschen Fehlerquadrate gelöst werden kann.

Falls die durch n_j in Gl. (II.41) beschriebenen Messfehler voneinander unabhängig und mit einer Standardabweichung σ_j und dem Erwartungswert 0 statistisch normalverteilt sind, ist

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{|d_j - F_j(\vec{m})|^2}{\sigma_j^2} \quad (\text{II.42})$$

eine Chi-Quadrat-Größe im Sinne der Statistik (Press et al., 1992, Abschnitt 15.1). In der Inversionstheorie wird sie als „Misfit“ bezeichnet. Als Maß für die Anpassung beinhaltet sie die Vorstellung, dass durch die Messung schlecht bestimmte Daten (σ_j groß) im Anpassungsmaß schwächer gewichtet werden. Außerdem sind die Terme der Summe jetzt dimensionslos, so dass physikalische Messwerte unterschiedlicher Einheit kombiniert werden können. Werden alle Daten genau im Rahmen der mittleren Toleranzen σ_j angepasst, so ergibt sich $\chi^2 = M$. Eine weitere Vertiefung dieses statistischen Ansatzes halte ich für überflüssig, da im vorliegenden Fall über die Messfehler zu wenig bekannt ist. Die Störsignale beruhen größtenteils selber auf seismischer Wellenausbreitung. Das Noise ist damit selbst von den gesuchten Materialeigenschaften abhängig. Die Messfehler (im Sinne der physikalischen Theorie) sind nicht normalverteilt und nicht statistisch unabhängig (Abschnitt III.4.2.2, S. 92). Es handelt sich größtenteils um systematische Fehler, deren Größe aber unbekannt ist und die daher nicht eliminiert werden können. Das ist eine für die Geophysik durchaus typische Situation (Scales und Snieder, 1998).

Trotzdem ist die in Gl. (II.42) definierte Größe eine nützliche Misfit-Funktion. Sie muss aber häufig noch weiter modifiziert werden. Das Signal-/Stör-Verhältnis

$|d_j|/\sigma_j$ hat über den gesamten Datensatz eine enorme Dynamik. Bei gleichem Noisepegel können sich die Amplituden von refraktierten p-Wellen und Oberflächenwellen um Größenordnungen unterscheiden. Eine Gewichtung der Quadratsumme mit den reziproken σ_j würde Anpassungsfehler in den Oberflächenwellen stärker gewichten als in den Raumwellen. Die Oberflächenwellen werden dann auf Kosten der Raumwellen angepasst. Da aber beispielsweise die refraktierten p-Wellen Information über das Medium liefern, die im Sinne der Inversion gleich wertvoll ist, wie die aus den Oberflächenwellen (wobei die eine die andere nicht ersetzen kann), wird man die Terme der Quadratsumme anders gewichten wollen. Dieser Schritt und die Wahl der Gewichtungsfaktoren lässt sich nicht neutral durch physikalische Größen begründen, die in die Messung einfließen, sondern ist eine subjektive Entscheidung des Geophysikers, der die Inversion durchführt. Der Misfit wird daher als „Fehlerquadratsumme“

$$\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2 \quad (\text{II.43})$$

mit einer (in der Regel) diagonalen Gewichtungsmatrix $W = \text{diag } w_j$ geschrieben, wobei w_j die reziproke Einheit des Datums d_j besitzt.

4.2.3 Formulierung nach Parker

Wie ich bereits in der Einleitung zu Abschnitt II.4 erläutert habe, sind geophysikalische Inversionsprobleme schon aufgrund einer Dimensionsbetrachtung grundsätzlich unterbestimmt. Eine Parametrisierung, die weniger Modellkoeffizienten m_k zulässt, als Daten d_j vorliegen, verschleiert dies und lässt das Problem überbestimmt erscheinen. Parker empfiehlt daher folgenden Weg zu beschreiten:

Zunächst wird eine vernünftige A-priori-Forderung an das Ergebnis der Inversion gestellt. Man sucht beispielsweise nach dem Modell, das die geringsten strukturellen Details aufweist oder das am wenigsten von möglicherweise vorhandenen Referenzwerten abweicht. Dies ist ein Schritt, der notwendig ist, um das Problem zu lösen, der sich aber nicht aus den Messdaten begründen lässt. Er unterliegt der subjektiven Einschätzung des Geophysikers, der die Inversion durchführt. Diese Vorgehensweise ist dazu geeignet, das Problem überbestimmt zu machen.

Formal wird dies wie in Abschnitt II.4.1 durch eine Norm über ein Innenprodukt in einem Hilbertraum beschrieben. Für einen Satz diskreter Modellparameter \vec{m} ergibt sich diese zu $\|S\vec{m}\|$ und nimmt für das optimale Modell ein Minimum ein. Die Bedeutung der Norm wird durch die Koeffizienten der Matrix S bestimmt. Als *Nebenbedingung* fordert Parker, dass das Modell geeignet sein muss, die Messdaten zu erklären. Zur Lösung des Inversionsproblems stellt Parker ein Lagrange-

Funktional

$$L(\nu, \vec{m}) = \|\mathbf{S}\vec{m}\|^2 + \nu \left(\sum_j \left| \frac{d_j - F_j(\vec{m})}{\sigma_j} \right|^2 - M \right)$$

auf, das für das optimale Modell bezüglich aller m_k und des Lagrange-Parameters ν stationär sein muss. Das bedeutet, dass ein Modell gesucht wird, welches die A-priori-Forderung $\|\mathbf{S}\vec{m}\|^2 \stackrel{!}{=} \min$ möglichst gut erfüllt und die Daten genau im Rahmen der Messfehler σ_j erklärt.

Diese Herangehensweise scheitert im vorliegenden Fall daran, dass die σ_j nahezu unbekannt und auf keinen Fall normalverteilt und unabhängig sind. Das Konzept, die A-priori-Forderung klar verständlich zu formulieren, ohne das Modell durch eine zu willkürliche Parametrisierung von vornherein festzulegen, kann aber angewandt werden und ist geeignet die Aussagekraft des Inversionsergebnisses zu verbessern.

Für das vorliegende Problem wird eine Misfit-Funktion (II.43) um Strafterme erweitert, welche die A-priori-Forderungen beschreiben. Das optimale Modell ergibt sich dann für ein Minimum von

$$E^2 = |\mathbf{W}(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2 + \sum_l |\mathbf{S}_l(\vec{m} - \vec{m}_{\text{ref}})|^2$$

bezüglich aller m_k . Die Lösung des Inversionsproblems läuft also auf eine Minimierung von E^2 hinaus. Falls $\vec{F}(\vec{m})$ einen linearen Zusammenhang beschreibt, bildet E^2 ein Paraboloid im Raum der \vec{m} und hat ein einziges Extremum, nämlich ein globales Minimum.

4.2.4 Lösung nichtlinearer Inversionsprobleme

Die Funktion $F_j(\vec{m})$ stellt im hier zu behandelnden Fall den Zusammenhang zwischen den Materialparametern des Mediums und den Entwicklungskoeffizienten des seismischen Wellenfeldes dar. Dieser Zusammenhang ist nichtlinear. Für nichtlineare $F_j(\vec{m})$ kann der Misfit χ^2 mehrere Minima besitzen. Das gilt ebenso für E^2 . Während ein Mensch durch den visuellen Vergleich von gemessenen und synthetischen Daten sofort zwischen einer guten Anpassung (globales Minimum) und einer Ähnlichkeit (lokales Minimum) unterscheiden kann, ist dies für einen automatischen Algorithmus nur möglich, wenn der gesamte Modellraum abgesucht wird. Umgekehrt ist es aber in der Regel für den Operateur möglich manuell eine Voranpassung vorzunehmen und ein geeignetes Startmodell \vec{m}_0 auszuwählen, für welches $E^2(\vec{m}_0)$ im Einzugsbereich des globalen Minimums liegt. Von dort

aus ist eine systematische Suche nach dem globalen Minimum mit einem automatischen Verfahren möglich.

Trotzdem werden häufig Zufallsverfahren zur Inversion von Wellenfeldern benutzt. Um die hier gewählte Vorgehensweise zu begründen, insbesondere im Hinblick auf die Möglichkeiten, die sich durch die zweistufige Inversion ergeben (Abschnitt III.1, S. 63), klassifiziere ich hier die wichtigsten Inversionsverfahren für nichtlineare Probleme kurz und stelle sie einander gegenüber. Die ersten drei sind dabei Vertreter einer globalen Suche im Modellraum. Sie müssen benutzt werden, wenn entweder kein brauchbares Startmodell auffindbar ist oder wenn $F_j(\vec{m})$ nicht differenzierbar ist. Die letzten beiden Verfahren führen eine lokale Optimierung durch und nutzen dazu die Differenzierbarkeit von $F_j(\vec{m})$. Für die Bewertung der numerischen Effizienz ist entscheidend, wie oft ein Verfahren $\vec{F}(\vec{m})$ berechnen muss, da dies wesentlich mehr Rechenzeit erfordert als alle anderen Schritte.

- 1. Systematisches Ausprobieren**
„Grid Search“

Vorgehensweise: Der Modellraum wird regelmäßig gerastert und für jeden Rasterpunkt E^2 berechnet. Der kleinste Wert ergibt sich für \vec{m}_{opt} . **Bewertung:** Das Verfahren ist einfach, gründlich und bequem. Es führt bei genügend feiner Rasterung garantiert zum Ziel. Der numerische Aufwand wächst aber mit der Potenz der Dimension des Modellraumes und ist nicht zu bewältigen, wenn der Vektor \vec{m} mehr als drei oder vier Elemente hat.
- 2. Stichprobensuche**
„Monte Carlo“

Vorgehensweise: Nach einem Zufallskriterium werden beliebige Punkte aus dem Modellraum ausgewählt und E^2 berechnet. Der kleinste Wert ergibt sich wieder für \vec{m}_{opt} . **Bewertung:** Der Rechenaufwand ist nur scheinbar kleiner. Für weniger berechnete Modellpunkte entspricht das einem „Grid Search“ mit schlechterer Auflösung. Ein „Grid Search“ ist in jedem Fall vorzuziehen, da er systematisch arbeitet.
- 3. Intelligentes Raten**
„Genetic Algorithms“
„Simulated Annealing“

Vorgehensweise: Wieder werden Punkte des Modellraumes nach einem Zufallskriterium ausgewählt. Das Kriterium wird aber so modifiziert, dass bevorzugt in der Umgebung bereits gefundener, kleiner Werte von $E^2(\vec{m})$ gesucht wird. Der kleinste Wert ergibt sich wieder für \vec{m}_{opt} . **Bewertung:** Diese Verfahren entfalten ihre volle Stärke für Probleme mit diskretem Modellraum („Travelling-Salesman“-Problem). Für die Wellenfeldinversion erscheinen sie zunächst vielversprechend. Der ganze Modellraum wird abgesucht, die Abtastung wird in erfolgversprechenden Bereichen verfeinert und die Methode ist mühelos zu

implementieren. Sind jedoch die Flanken des Minimums von $E^2(\vec{m})$ in verschiedenen Richtungen unterschiedlich steil, so wird eine Verringerung des Misfits aufgrund eines zufällig gewählten Schritts sehr unwahrscheinlich (Press et al., 1992, „Continuous Minimization by Simulated Annealing“ in Abschnitt 10.9). Diese Verfahren auf differenzierbare Probleme effizient anzuwenden erfordert mindestens soviel Sorgfalt wie die Aufstellung eines „Least-Squares“-Verfahrens.

4. **Systematische Suche** „Steepest Descent“ „Conjugate Gradients“ **Vorgehensweise:** Für ein vom Operateur ausgewähltes Startmodell \vec{m}_0 werden $E^2(\vec{m}_0)$ und $\text{grad } E^2(\vec{m}_0)$ berechnet. Anhand des Gradienten wird bestimmt, in welcher Richtung vom Startmodell aus das Minimum liegt, das in einem iterativen Prozeß gefunden wird. **Bewertung:** Das Verfahren ist sehr robust, aber nicht so effizient, wie eine „Least Squares“-Inversion. Da nur $\text{grad } E^2(\vec{m}_0)$ für die Linearisierung benötigt wird, ist der Speicherbedarf geringer als bei der Verwendung von „Least Squares“.
5. **Linearisierte Inversion** „Least Squares“ **Vorgehensweise:** Auch in diesem Fall wird, ausgehend von einem gegebenen Startmodell \vec{m}_0 , eine systematische Suche betrieben. Allerdings wird nicht $E^2(\vec{m})$ linearisiert, sondern direkt $\vec{F}(\vec{m})$. Die Extremalbedingung für E^2 führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung $\vec{m}_0 + \delta\vec{m}$ näher an \vec{m}_{opt} liegt. **Bewertung:** Das Verfahren wird umso effizienter, je besser die Linearisierung das tatsächliche Verhalten von $\vec{F}(\vec{m})$ beschreibt. Für einen linearen Zusammenhang wird das optimale Modell in nur einem einzigen Schritt gefunden. Der Speicherbedarf kann erheblich sein, da die partiellen Ableitungen $\partial F_j / \partial m_k$ aller Datenpunkte nach allen Modellwerten benötigt werden. Im vorliegenden Fall kann der Speicherbedarf durch einen geeigneten Aufbau des Algorithmus jedoch deutlich verringert werden (Abschnitt IV.1.6, S. 103).

4.2.5 Stabilisierte Least-Squares-Inversion

Als Ausgangspunkt für die Darstellung in Kapitel IV skizziere ich nun das Konzept der iterativen, stabilisierten Least-Squares-Inversion.

Die $F_j(\vec{m})$ werden in eine Taylor-Reihe entwickelt. Die Linearisierung ergibt sich, wenn die Reihe

$$F_j(\vec{m}) = F_j(\vec{m}_0) + \sum_k \left. \frac{\partial F_j(\vec{m})}{\partial m_k} \right|_{\vec{m}_0} (m_k - m_{0k}) + \mathcal{O}((\vec{m} - \vec{m}_0)^2) \quad (\text{II.44})$$

nach dem zweiten Glied abgebrochen wird. Gesucht wird das Minimum von

$$E^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}_0 - D\delta\vec{m})|^2 + |S\delta\vec{m}|^2 \quad (\text{II.45a})$$

mit

$$D_{jk} = \frac{\partial F_j(\vec{m})}{\partial m_k}, \quad (\text{II.45b})$$

$$\vec{F}_0 = \vec{F}(\vec{m}_0), \quad (\text{II.45c})$$

$$\delta\vec{m} = \vec{m} - \vec{m}_0 \quad (\text{II.45d})$$

und nur einem exemplarischen Strafterm $|S\delta\vec{m}|^2$. Die Bedingung für Stationarität

$$\frac{\partial E^2}{\partial m_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall k$$

führt auf das lineare Gleichungssystem¹²

$$(D^\dagger W^2 D + S^\dagger S) \delta\vec{m} = D^\dagger W^2 (\vec{d} - \vec{F}_0). \quad (\text{II.46})$$

Für ein lineares \vec{F} würde die Lösung $\delta\vec{m}$ des Gleichungssystems in einem einzigen Schritt $\vec{m}_{\text{opt}} = \vec{m}_0 + \delta\vec{m}$ ergeben. Für ein nichtlineares \vec{F} muss iteriert werden. Das heißt, \vec{m}_0 wird auf den Wert von $\vec{m}_0 + \delta\vec{m}$ gesetzt. Mit diesem neuen Startmodell wird das Gleichungssystem erneut aufgestellt und gelöst. Dieser Prozess wird so lange fortgesetzt, bis der Misfit oder seine Änderung pro Iterationsschritt einen bestimmten Wert unterschreiten.

Im einfachsten Fall enthält die Matrix $S = \text{diag}(1/r_k)$ die „Suchbereiche“ r_k (Wielandt, 1991). Dabei besitzt r_k dieselbe Einheit wie m_k und gibt die Umgebung um m_{0k} an, in welcher die Linearisierung eine gute Näherung ist. Der Strafterm erfüllt dann zwei Aufgaben. Einerseits sorgt er dafür, dass die Modelländerung $\delta\vec{m}$ für jeden Iterationsschritt im Bereich einer guten Linearisierung bleibt, andererseits sorgt $S^\dagger S$ dafür, dass das Gleichungssystem in jedem Fall regulär ist und mit Standardverfahren gelöst werden kann.

¹²Siehe Abschnitt A.3 (S. 219) zu Least-Squares-Problemen mit komplexwertigen Größen.

Kapitel III

Erste Stufe der Inversion: Dispersionsanalyse

1 Ziel der Dispersionsanalyse und Motivation für eine zweistufige Inversion

1.1 Motivation

Dieses Kapitel wird sich mit der ersten Stufe der Inversion flachseismischer Wellenfelder befassen, mit der Dispersionsanalyse. Vier wesentliche Gründe haben mich dazu veranlasst, die Inversion in zwei Stufen aufzuteilen. Es handelt sich erstens um die bessere Linearisierbarkeit der Wellenfeldspektren, zweitens um die Reduzierung der Nebenminima in der Misfit-Funktion, drittens um eine deutliche Reduzierung der Rechenzeit und viertens um Erleichterungen beim Auffinden des Startmodells. Die nun folgende Diskussion dieser Gesichtspunkte wird anhand einiger später folgender Abbildungen noch verständlicher. Hilfreich kann die Darstellung der Greenschen Funktion für einen Fall „Schicht über Halbraum“ in Abb. III.11 (S. 88) sein. Die Vergleiche zwischen Wellenform und Spektrum werden anhand einiger Abbildungen in Kapitel VI anschaulich. Zu nennen sind Abb. VI.1 (S. 136) und Abb. VI.5 (S. 140) für den Datensatz BIETIGHEIM, Abb. VI.13 (S. 152) und Abb. VI.14 (S. 153) für den Datensatz BERKHEIM, sowie Abb. VI.43 (S. 193), Abb. VI.44 (S. 194) und Abb. VI.45 (S. 195) für den Datensatz LAPTEV-SEE.

Der Zusammenhang zwischen der Wellenform und den seismischen Modellparametern (v_p, v_s, \dots) ist nichtlinear. Ein Großteil der Nichtlinearität liegt in der oszillatorischen Natur der Wellenformen begründet. Bei Anwendung der in Abschnitt II.3 (S. 41) besprochenen Verfahren zur Berechnung synthetischer Seismogramme wird diese Eigenschaft durch die in den Entwicklungsintegralen

$$u_z(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} G_z(\omega, p) S(\omega) J_0(\omega pr) e^{-i\omega t} p dp \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{III.1a})$$

und

$$u_r(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} G_r(\omega, p) S(\omega) J_1(\omega pr) e^{-i\omega t} p dp \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{III.1b})$$

auftretenden Besselfunktionen $J_n(\omega pr)$ und harmonischen Funktionen $e^{-i\omega t}$ in das Wellenfeld eingeführt. Der Zusammenhang zu den Modellparametern mag zunächst nicht einleuchten, da die Funktionen als Oszillationen bezüglich des Offsets r und der Zeit t verstanden werden. Für ein festes Datum (Abtastwert eines Seismogramms für $r, t = \text{const}$) oszillieren diese Funktionen bezüglich der Frequenz ω und der Phasenslowness p . Die Greensche Funktion $G(\omega, p)$ des Mediums hat die Eigenschaft, Wellen für von den Modellparametern abhängige ω und p zu selektieren. Daher oszilliert der Wert eines Abtastwertes bei Variation der seismischen Parameter.

$S(\omega)$ in Gl. (III.1) ist die Übertragungsfunktion der Messgeräte, also der seismischen Quelle, der Geophone und des Rekorders. Als Impulsantwort des Mediums wird die Greensche Funktion $G(\omega, p)$ numerisch berechnet. Gemessen wird aber die Wellenform, die Faltung von G und S . Wie in Abschnitt V.1.2 (S. 116) beschrieben, kann S im Rahmen der zweiten Stufe der Inversion bestimmt werden. Für die Diskussion der Dispersionsanalyse wird das Produkt $\hat{G} = GS$ im Folgenden zusammengefasst und als „ ω, p -Spektrum des Wellenfeldes“ bezeichnet. Abb. VI.5 (S. 140) zeigt beispielsweise ω, p -Spektren des Datensatzes BIETIGHEIM. Entsprechende Spektren G der Greenschen Funktion, die synthetisch für das Ergebnismodell berechnet wurden, sind in Abb. VI.6 (S. 141) dargestellt. Die dazugehörige Übertragungsfunktion S ist als Impulsantwort in Abb. VI.11 (S. 146) wiedergegeben.

Für eine Least-Squares-Inversion muss der Zusammenhang zwischen den numerisch vorhergesagten Observablen und den Modellparametern (hier v_p, v_s, \dots) durch eine abgebrochene Taylor-Reihe linearisiert werden (Gl. (II.44), Abschnitt II.4.2.5, S. 60). Die Linearisierung einer oszillierenden Funktion ist heikel. Das Spektrum der Greenschen Funktion $G(\omega, p)$ verhält sich in der Regel gutmütiger, als die Wellenform $u(r, t)$.

Wird die in Gl. (II.43) (S. 57) definierte Misfit-Funktion χ^2 für ein oszillierendes $\vec{F}(\vec{m})$ gebildet, so ergibt sich für Phasenverschiebungen um 2π jeweils ein lokales Minimum. Die Least-Squares-Methode führt immer zum nächsten lokalen Minimum von χ^2 . Um sicherzustellen, dass das globale Minimum erreicht wird, müsste das Startmodell in diesem Fall viel sorgfältiger ausgewählt werden. Dafür liegen bei flachseismischen Untersuchungen in der Regel keine ausreichenden A-priori-Informationen vor. Eine für das ω, p -Spektrum definierte Misfit-Funktion ist weniger heikel.

Falls die partiellen Ableitungen (II.45b) durch Differenzenquotienten genähert werden müssen, ist pro Iterationsschritt des Least-Squares-Verfahrens nicht nur ein Satz synthetischer Daten $\vec{F}(\vec{m})$ zu berechnen. Die Berechnung muss zusätzlich für jeden Inversionsparameter durchgeführt werden, so dass die gesamte Rechenzeit stark vom Aufwand für eine Vorwärtsrechnung abhängt.

Die Korrespondenz zwischen Paaren der diskreten Fouriertransformation lässt darauf schließen, dass ein Datensatz mit Seismogrammen von M verschiedenen Offset-Positionen auch nur Information über M unabhängige Koeffizienten $\tilde{G}(p)$ pro Frequenz enthält. Es erscheint mir daher nicht sinnvoll, mehr als M Koeffizienten der Greenschen Funktion $G(p)$ zur Bestimmung des Erdmodells heranzuziehen. Zur Berechnung brauchbarer Wellenformen durch numerische Integration der Entwicklungintegrale (III.1) müssen allerdings nicht nur zusätzlich Besselfunktionen berechnet werden. Selbst mit optimierten Integrationsverfahren (Frazer und Gettrust, 1984; Frazer, 1988; Wang, 1997; Reimann, 1999) ist die Berechnung von wesentlich mehr als M Koeffizienten notwendig. Eine Least-Squares-Inversion, die auf die Berechnung der Wellenformen verzichtet und statt dessen die ω, p -Spektren benutzt, kann daher um den Faktor 10 bis 20 numerisch effizienter sein als die direkte Inversion der Wellenformen.

Die iterative Least-Squares-Inversion, mit der das Erdmodell bestimmt werden soll, muss mit einem A-priori-Startmodell begonnen werden. Damit die Inversion zum globalen Minimum der Fehlerfunktion χ^2 und damit zum optimalen Modell konvergieren kann, muss das Startmodell bereits im Einzugsbereich des globalen Minimums liegen. Das heißt, es muss bereits vor der Inversion sichergestellt werden, dass das vom Startmodell aus nächste lokale Minimum auch das globale Minimum ist. Die verfügbaren A-priori-Informationen reichen bei flachseismischen Fragestellungen häufig nicht dazu aus. Das Startmodell muss durch eine manuelle „Versuch-und-Irrtum“-Prozedur gefunden werden. Auch hierbei ist ein Vergleich des ω, p -Spektrums der Daten mit einer numerisch berechneten Greenschen Funktion aufschlussreicher. Die in den Wellenformen interferierenden Moden sind in den Spektren klar getrennt¹.

¹Siehe dazu auch Abb. III.11 auf Seite 88 und die Erläuterungen in Abschnitt III.4.1, S. 89.

1.2 Aufgabenstellung

Zum weiteren Gebrauch in diesem Kapitel werde ich die Entwicklungsintegrale (III.1) für die Fourier-Koeffizienten der Verschiebung an den M Geophon-Positionen r_j verkürzt schreiben, nämlich als

$$u_\eta(\omega, r_j) = \int_0^\infty \tilde{G}_\eta(\omega, p) J_\eta(\omega p r_j) p \, dp. \quad (\text{III.2})$$

Für die Radial-Komponente werden u_r , \tilde{G}_r und J_1 eingesetzt, für die Vertikal-Komponente stehen u_z , \tilde{G}_z und J_0 . Das ω, p -Spektrum $\tilde{G}_\eta(\omega, p) = G_\eta(\omega, p) S(\omega)$ fasst die Übertragungsfunktionen der Messapparatur (Quelle, Geophone, etc.) und des Mediums zusammen. Diese lassen sich im ersten Schritt der Inversion noch nicht trennen. Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten $u_\eta(\omega, r_j)$ aus den Abtastwerten der Seismogramme erfolgt über eine diskrete (schnelle) Fourier-Transformation und ist unproblematisch.

Aufgabe der Dispersionsanalyse ist es, ein ω, p -Spektrum zu bestimmen, welches in der Beziehung (III.2) die gemessenen Seismogramme reproduziert. Die Aufgabe ist damit noch nicht eindeutig lösbar, da das Wellenfeld nur an den r_j bekannt ist. Es muss weiter gefordert werden, dass $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$ in Gl. (III.2) das Wellenfeld zwischen den r_j sinnvoll interpoliert und (streng genommen) hinter dem letzten Geophon (größtes r_j) extrapoliert. Nur dann kann es in der zweiten Stufe (Kapitel IV) durch eine numerisch berechnete Greensche Funktion modelliert werden.

2 Methoden zur Dispersionsanalyse

2.1 Lineare Inversion für Zylinderwellen

Der Zusammenhang (III.2) zwischen den Seismogramm-Koeffizienten und dem ω, p -Spektrum ist linear. Daher bietet es sich an, eine lineare Inversion durchzuführen. Das ist im Ergebnis eine Dispersionsanalyse unter Berücksichtigung der zylindersymmetrischen Wellenausbreitung, die zugleich ein ω, p -Spektrum liefert, welches geeignet ist, die Seismogramme an den Geophon-Positionen mathematisch exakt zu reproduzieren.

Im Sinne der in Abschnitt II.4.1 (S. 53) eingeführten Grundlagen werden die Fourier-Koeffizienten $u_\eta(\omega, r_j)$ zu einer Frequenz ω als Daten d_j aufgefasst. In diesem Sinne müssen auch \tilde{G}_η als Modellfunktion und \mathbf{J}_η als Repräsentanten

aufgefasst werden. Der zugehörige Hilbertraum wird dann durch das Skalarprodukt

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^{\infty} a^*(p) b(p) p \, dp \quad (\text{III.3})$$

definiert. Allerdings sind die \mathbf{J}_η keine gültigen Elemente dieses Hilbertraumes, da

$$\|\mathbf{J}_\eta\|^2 = \int_0^{\infty} J_\eta^2(p) p \, dp \rightarrow \infty$$

nicht endlich ist. Das Skalarprodukt

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^{\infty} a^*(p) b(p) D(p) p \, dp$$

wird daher um eine Dämpfungsfunktion $D(p)$ erweitert, die für quadratische Integrierbarkeit sorgt.

Als Elemente der linearen Inversion lassen sich jetzt

$$\begin{aligned} \text{die Modellfunktion} \quad \mathbf{m} &= \frac{\tilde{G}_\eta(\omega, p)}{D(p)}, \\ \text{die Repräsentanten} \quad \mathbf{g}_j &= J_\eta(\omega p r_j), \\ \text{die Daten} \quad d_j &= u_\eta(\omega, r_j) = (\mathbf{g}_j, \mathbf{m}) \quad \text{und} \\ \text{die Gram-Matrix} \quad \Gamma_{kl} &= \int_0^{\infty} J_\eta(\omega p r_k) J_\eta(\omega p r_l) D(p) p \, dp \end{aligned}$$

identifizieren. Wie in Abschnitt II.4.1 (S. 53) beschrieben, ergibt sich dann das gesuchte ω, p -Spektrum

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = D(p) m(p) = D(p) \sum_{j=1}^M \alpha_j J_\eta(\omega p r_j) \quad (\text{III.5})$$

aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$d_k = \sum_{l=1}^M \Gamma_{kl} \alpha_l. \quad (\text{III.6})$$

2.1.1 Die Wahl der Dämpfungsfunktion

In Abschnitt II.4.1 (S. 53) habe ich darauf hingewiesen, dass die oben formulierte lineare Inversion auf das Modell \mathbf{m} mit der kleinsten Norm

$$\|\mathbf{m}\|^2 = \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{G}_\eta(\omega, p)|^2}{D(p)} p \, dp$$

führt. Die Wirkung dieser Nebenbedingung wird entscheidend durch die Dämpfungsfunktion $D(p)$ bestimmt. Oben habe ich $D(p)$ eingeführt, um $\|\mathbf{J}_\eta\|$ integrierbar zu machen und somit verlangt, dass $D(p)$ für große p rasch genug gegen Null gehen soll. Es werden dadurch ω, p -Spektra bevorzugt, deren Wert für große p rasch gegen 0 konvergiert.

In Abschnitt III.3 (S. 73) zeige ich, dass die diskrete Abtastung des Wellenfeldes in r zu einem periodischen Spektrum in p führt (analog zum diskreten Fourier-Spektrum). Dies muss als Aliasing verstanden werden. Die durch $D(p)$ eingeführte Nebenbedingung ist geeignet, die periodische Fortsetzung in \tilde{G} zu verhindern und die Inversion auf diese Weise eindeutig zu machen. Das wird in Abb. III.2 (S. 77) und Abb. III.3 (S. 78) veranschaulicht.

Durch eine geschickte Wahl der Norm könnte es außerdem gelingen, Nebenmaxima, die aufgrund der endlichen Länge der Geophon-Auslage entstehen, zu unterdrücken ohne das Wellenfeld durch Fensterung zu verzerren. In der Praxis wird man jedoch in erster Linie darauf Wert legen, ein Skalarprodukt zu wählen, welches auf ein analytisch lösbares Integral für die Gram-Matrix führt. Drei dazu geeignete Dämpfungsfunktionen stelle ich im Folgenden vor.

Lorentz-Kurve als Dämpfungsfunktion

Henry, Orcutt und Parker (1980) beschreiben ein Methode zur Berechnung von Slant Stacks für die Vertikal-Komponenten zylindersymmetrischer Wellen, welche eine lineare Inversion nach den oben beschriebenen Grundzügen benutzt. In der hier benutzten Bezeichnungsweise verwenden sie eine Dämpfungsfunktion

$$D(p) = \frac{\omega^2}{(p\omega)^2 + \kappa^2}. \quad (\text{III.7})$$

Diese führt auf eine Gram-Matrix

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl} &= \int_0^\infty \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2} J_\eta(\omega p r_k) J_\eta(\omega p r_l) p \, dp \\ &= \begin{cases} I_\eta(\kappa r_k) K_\eta(\kappa r_l) & \text{für } r_k \leq r_l \text{ und} \\ I_\eta(\kappa r_l) K_\eta(\kappa r_k) & \text{für } r_k > r_l, \end{cases} \end{aligned}$$

die hier für Vertikal- und Horizontal-Komponente verallgemeinert ist. Von Gradstein und Ryshik (1981) wird nicht nur eine analytische Lösung des Integrals angegeben (Gl. (A.12c), S. 223), sondern die Matrix ist auch analytisch geschlossen invertierbar. Sie ist außerdem frequenzunabhängig und muss daher für alle Fourier-Koeffizienten nur einmal berechnet werden.

Die Offsetwerte seien in aufsteigender Folge sortiert, also $r_j < r_{j+1}$. Die modifizierten Besselfunktionen schreibe ich abgekürzt als $p_j = I_\eta(\kappa r_j)$ und $q_j = K_\eta(\kappa r_j)$. Sie seien von gleicher Ordnung wie die Besselfunktion $J_\eta(\omega p r_j)$ im Entwicklungsintegral (III.2). Dann lassen sich die von 0 verschiedenen Elemente der Inversen von Γ angeben als (Henry et al., 1980)

$$\begin{aligned} (\Gamma^{-1})_{j,j+1} &= \frac{1}{p_j q_{j+1} - q_j p_{j+1}} \quad \text{für } 1 \leq j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{j+1,j} &= (\Gamma^{-1})_{j,j+1} \quad \text{für } 1 \leq j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{j,j} &= (\Gamma^{-1})_{j,j-1} (\Gamma^{-1})_{j,j+1} (p_{j+1} q_{j-1} - q_{j+1} p_{j-1}) \\ &\quad \text{für } 1 < j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{1,1} &= -(\Gamma^{-1})_{1,2} \frac{p_2}{p_1} \quad \text{und} \\ (\Gamma^{-1})_{M,M} &= -(\Gamma^{-1})_{M,M-1} \frac{q_{M-1}}{q_M}. \end{aligned}$$

Die Matrix Γ^{-1} ist also tridiagonal und symmetrisch, was aus numerischer Sicht nochmals einen erheblichen Vorteil darstellt.

Damit lässt sich das durch die Inversion bestimmte ω, p -Spektrum

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2} \sum_{k=1}^M J_\eta(\omega p r_k) \sum_{l=1}^M (\Gamma^{-1})_{kl} u_\eta(\omega, r_l) \quad (\text{III.8})$$

geschlossen angeben. Diese Form der Dispersionsanalyse werde ich im Folgenden auch als „HOP-Inversion“ bezeichnen. Der Dämpfungsparameter wird, wie in Abschnitt III.3 (S. 73) erläutert, sinnvollerweise als $\kappa = 1/\overline{\Delta r}$ gewählt, wobei $\overline{\Delta r}$ der mittlere Geophonabstand ist.

Das so bestimmte $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$ in das Entwicklungintegral (III.2) eingesetzt, reproduziert die Seismogramme an den Geophon-Positionen r_j mathematisch exakt. In der Praxis kann dies allerdings auch ungünstig sein, da \tilde{G} gezwungen wird, auch nicht zylindersymmetrische Störsignale exakt zu reproduzieren. Außerdem wird nicht gefordert, dass das Wellenfeld zwischen den r_j sinnvoll interpoliert wird.

Gauß-Kurve als Dämpfungsfunktion

Für

$$D(p) = e^{-(p\omega/\kappa)^2} \quad (\text{III.9})$$

findet man bei Gradstein und Ryshik (1981) ebenfalls ein analytisches Integral (Gl. (A.12), Seite 223), welches es erlaubt, die Gram-Matrix

$$\Gamma_{kl} = \frac{\kappa^2}{2\omega^2} \exp(-\kappa^2(r_k^2 + r_l^2)/4) I_\eta(\kappa^2 r_k r_l / 2) \quad (\text{III.10})$$

geschlossen anzugeben. Die Ordnung der modifizierten Besselfunktion erster Gattung I_η ist dabei identisch mit der Ordnung der Besselfunktion J_η in Gl. (III.2).

Diese Gram-Matrix kann nicht analytisch invertiert werden. Das ω, p -Spektrum muss durch numerisches Lösen des linearen Gleichungssystems (III.6) bestimmt werden.

Modifizierte Besselfunktion als Dämpfungsfunktion

Ein weiteres analytisches Integral welches Gradstein und Ryshik (1981) angeben (Gl. (A.12a), Seite 223) ist nur für die Vertikal-Komponente anwendbar. Die Dämpfungsfunktion

$$D(p) = K_0(p\omega/\kappa) \quad (\text{III.11})$$

führt auf

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{r_k^4 + r_l^4 + \frac{1}{\kappa^4} + 2((r_k^2 + r_l^2)/\kappa^2 - r_k^2 r_l^2)}}. \quad (\text{III.12})$$

Auch in diesem Fall muss das lineare Gleichungssystem (III.6) numerisch gelöst werden.

2.1.2 Boxcar als Dämpfungsfunktion

Eine weitere Möglichkeit $\|\mathbf{J}_\eta\|$ endlich zu machen, ist das Skalarprodukt (III.3) mit einer endlichen oberen Integrationsgrenze zu definieren. Diese Vorgehensweise entspricht der Verwendung einer Boxcar-Dämpfungsfunktion

$$D(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \leq p_{\max} \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei wird für p_{\max} der Wert gewählt, ab dem mit Aliasing aufgrund der diskreten Offset-Abtastung zu rechnen ist. In diesem Fall muß jedoch nicht nur das Gleichungssystem (III.6) numerisch gelöst werden, sondern auch die Elemente der Gram-Matrix müssen durch numerische Integration berechnet werden. Das Verfahren wird dadurch sehr ineffizient.

2.2 Slant Stack

Ein Slant Stack kann auch als Dispersionsanalyse verstanden werden. Mit einer Fourier-Transformation verknüpft, führt er auf ein ω, p -Spektrum. Am einfachsten wird das Spektrum

$$\tilde{G}_\eta^{\text{pw}}(\omega, p) = \sum_{j=1}^M u_\eta(\omega, r_j) f_j e^{-i\omega p r_j} \quad (\text{III.13})$$

direkt aus den Fourier-Koeffizienten der Seismogramme berechnet. Der Slant Stack ist eine Analyse nach ebenen Wellen, „pw“ steht für „plane wave“. Daher wird mit $f_j = \sqrt{r_j}$ die geometrisch bedingte Amplitudenabnahme der Zylinderwellen aus den Daten entfernt. Es kann auch sinnvoll sein, die f_j so zu bestimmen, dass die einzelnen Seismogramme den gleichen rms-Wert besitzen. In rein elastischen Medien sollte die seismische Energie ebener Wellen nicht mit dem Offset abnehmen. Im Gegensatz zu $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$ ist $\tilde{G}_\eta^{\text{pw}}(\omega, p)$ nicht unbedingt in der Lage das Wellenfeld zu rekonstruieren. In den Amplituden des so berechneten ω, p -Spektrums bilden sich jedoch ebenfalls die Moden der Oberflächenwellen ab. Damit kann dieses auch zur Bestimmung eines Erdmodells herangezogen werden (Abschnitt V.1.3, S. 118).

Anders formuliert ist der Slant Stack (im Gegensatz zur linearen Inversion) nicht dazu gezwungen ein ω, p -Spektrum zu erzeugen, welches das Wellenfeld an den Geophon-Positionen r_j identisch reproduziert. Ist das aufgezeichnete Wellenfeld stark durch Anteile gestört, die nicht durch eine zylindersymmetrische Ausbreitung erklärt werden können, so erweist sich der Slant Stack gegenüber der linearen Inversion in der Regel als robuster.

Abb. VI.31 (S. 181) zeigt zwei durch Slant Stack berechnete Spektren.

2.3 Bessel-Transformation

Das Entwicklungsintegral (III.2) kann auch als Integraltransformation² verstanden werden, zu der eine Umkehrtransformation³

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = \int_0^\infty u_\eta(\omega, r) J_\eta(\omega pr) \omega^2 r \, dr \quad (\text{III.14})$$

existiert. Werte für den Integranden liegen jedoch nur an den Geophon-Offsets r_j vor, so dass Gl. (III.14) durch die Trapezregel genähert werden muss. Die Summenformel lautet

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) \approx \sum_{j=1}^M u_\eta(\omega, r_j) J_\eta(\omega pr_j) \omega^2 r_j \Delta r_j \quad (\text{III.15a})$$

mit $r_{j+1} \geq r_j$ und

$$\Delta r_j = \frac{1}{2} \begin{cases} r_2 - r_1 & \text{für } j = 1, \\ r_M - r_{M-1} & \text{für } j = M \text{ und} \\ r_{j+1} - r_{j-1} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{III.15b})$$

Zunächst ist nicht zu erwarten, dass die bei der Messung gewählte Abtastung r_j eine gute Näherung durch Gl. (III.15) ermöglicht. Wird jedoch berücksichtigt, dass es sich bei $u_\eta(\omega, r_j)$ um Wellen handeln muss, die von $r = 0$ auslaufen, so kann $J_\eta(\omega pr_j)$ in Gl. (III.15) durch $\frac{1}{2} H_\eta^{(2)}(\omega pr_j)$ ersetzt werden (Abschnitt III.3.4, S. 84). In der Praxis habe ich damit gute Resultate erzielt. Bis auf Abb. VI.31 (S. 181) wurden alle in Kapitel VI gezeigten ω, p -Spektren mit dieser Methode berechnet.

2.4 Ergänzungen

Neben den hier beschriebenen Verfahren zur Dispersionsanalyse sind natürlich weitere Ansätze denkbar. Zunächst wurde hier (außer einer Bemerkung zur

²Siehe dazu Abschnitt A.4.5 (S. 222) im Anhang.

³Hier tritt der Faktor ω^2 in Erscheinung, der bei der Definition der Wellenfeld-Entwicklung in das Spektrum G mit aufgenommen wurde (siehe Fußnote auf Seite 42). Er tritt auch in der linearen Inversion auf. Die Dämpfungsfunktionen Gl. (III.7), (III.9) und (III.11) sind bezüglich der Wellenzahl $k = p\omega$ formuliert. Der Faktor ω^2 wird im Falle von Gl. (III.10) und (III.12) durch die Inverse der Gram-Matrix in das Spektrum eingebracht. Der Faktor ω^2 in Gl. (III.8) stammt aus der Dämpfungsfunktion.

Bessel-Transformation) kein Gebrauch von der Tatsache gemacht, dass es sich um ein Feld auslaufender Wellen handelt. Es wurde also nicht verlangt, dass die Wellenformen zwischen den Seismogrammen sinnvoll interpoliert werden können. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt II.3.5 (S. 48) könnte dies als Bedingung eingebracht werden.

Ferner könnte man die Aufgabe im Sinne kleinster Fehlerquadrate formulieren. So wäre eine quantitative Aussage über die Forderungen an das ω, p -Spektrum möglich, ohne eine mathematisch exakte Anpassung der Seismogramme zu fordern. Im Gegenzug könnten weitere Forderungen, wie das Verschwinden von Nebenmaxima, an das Spektrum gestellt werden.

Alle Alternativen zu den vorgestellten Ansätzen führen auf Integrale von gemischten Produkten von Zylinderfunktionen, die nicht analytisch geschlossen behandelt werden können. Diese müssen über Summen-Näherungen zeitaufwendig numerisch berechnet werden. Die oben beschriebenen Methoden sind dagegen numerisch sehr effizient. Die damit erzielten Ergebnisse sind im praktischen Einsatz völlig zufriedenstellend.

3 Abbildungseigenschaften

Die räumliche Abtastung des Wellenfeldes entlang des Offsets r wird durch die Geländegegebenheiten und die Anzahl der zur Verfügung stehenden Geophone bestimmt. Im Gegensatz zur Abtastung in der Zeit t , ist daher nicht davon auszugehen, dass das Abtasttheorem für die räumliche Abtastung in jedem Fall erfüllt ist. Für eine eindeutige Rekonstruktion des Wellenfeldes sind mindestens zwei Geophone pro Wellenlänge erforderlich. Die Verletzung dieser Bedingung führt zu Aliasing. Die Beschränkung der Geophonauslage auf eine maximale Gesamtlänge führt zu Unschärfe und Nebenmaxima im ω, p -Spektrum.

Anhand eines Test-Wellenfeldes werde ich das auf den folgenden Seiten näher untersuchen. Ausgehend vom asymptotischen Fernfeldverhalten der Lösung der skalaren Wellengleichung in Polarkoordinaten wird

$$u(\omega, r_j) = \frac{1}{\omega^2} \frac{e^{i\omega p_{\text{ref}} r_j}}{\sqrt{r_j}} F(r_j) \quad (\text{III.16})$$

als Test-Wellenfeld gewählt. Der Faktor $1/\omega^2$ wurde zur Skalierung der aus $u(\omega, r_j)$ berechneten Spektren aufgenommen (siehe auch die Fußnote auf Seite 42). Gl. (III.16) beschreibt das zweifache Integral eines δ -Pulses, der mit der Geschwindigkeit $1/p_{\text{ref}}$ vom Ursprung ($r = 0$) fort propagiert und dessen Amplitude mit $1/\sqrt{r}$ abnimmt. Die Funktion $F(r_j)$ kann eine Amplitudenabnahme durch

anelastische Dämpfung oder eine, bei der Analyse angebrachte, Fensterfunktion beschreiben.

Die Dispersionsanalyse dieses Wellenfeldes ergibt in Gl. (III.8) eingesetzt als lineare „HOP-Inversion“

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \frac{1}{(\omega p)^2 + \kappa^2} \sum_{k=1}^M J_0(\omega p r_k) \sum_{l=1}^M (\Gamma^{-1})_{kl} \frac{e^{i\omega p_{\text{ref}} r_l}}{\sqrt{r_l}} F(r_l). \quad (\text{III.17a})$$

Mit Gl. (III.13) ergibt sich

$$\tilde{G}^{\text{pw}}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{j=1}^M e^{i\omega r_j (p_{\text{ref}} - p)} F(r_j) \quad (\text{III.17b})$$

für einen *Slant Stack* mit $f_j = \sqrt{r_j} \omega^2$. Der Faktor ω^2 wurde wieder nur aus Skalierungsgründen eingeführt. Und schließlich ergibt sich aus Gl. (III.15)

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{l=1}^M J_0(\omega p r_l) e^{i\omega p_{\text{ref}} r_l} F(r_l) \sqrt{r_l} \Delta r_l \quad (\text{III.17c})$$

für die genäherte *Bessel-Transformation*⁴. Aus der Anschauung ist klar, dass sich das in Gl. (III.16) definierte Test-Wellenfeld durch ein Amplitudenmaximum von $\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}})$ bei $p = p_{\text{ref}}$ für alle ω abbilden muss. Für ein gegebenes ω beschreibt $\tilde{G}(p, p_{\text{ref}})$ die Abbildungseigenschaften der Dispersionsanalyse.

Für eine formale Betrachtung wird J_0 in Gl. (III.17c) durch die Hankel-Funktionen ausgedrückt. Für äquidistante Geophone und $F(r) = \sqrt{2\pi}$ ergibt sich

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{l=1}^M \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(H_0^{(1)}(\omega p l \Delta r) + H_0^{(2)}(\omega p l \Delta r) \right) e^{i\omega p_{\text{ref}} l \Delta r} \sqrt{l \Delta r} \Delta r \quad (\text{III.18a})$$

und

$$\approx \frac{\Delta r}{\sqrt{\omega p}} e^{i\pi/4} \sum_{l=1}^M \left(\underbrace{e^{i l \omega \Delta r (p_{\text{ref}} + p)}}_{\textcircled{1}} e^{-i\pi/2} + \underbrace{e^{i l \omega \Delta r (p_{\text{ref}} - p)}}_{\textcircled{2}} \right), \quad (\text{III.18b})$$

wenn die Hankel-Funktionen durch ihre Fernfeldnäherungen⁵ ersetzt werden.

⁴Der Übersichtlichkeit halber lasse ich den Faktor 1/2 aus Gl. (III.15) hier aus.

⁵Siehe Gl. (A.8) auf Seite 221 im Anhang.

3.1 Räumliches Aliasing und Wellen mit positiver und negativer Phasengeschwindigkeit

Ein Maximum in der Amplitude von $G(\omega, p, p_{\text{ref}})$ ergibt sich, wenn Exponentialfunktionen gleicher Phase summiert werden. Für den $H^{(2)}$ -Term ② in Gl. (III.18b) ist das für

$$p = p_{\text{ref}} - n \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.19a})$$

der Fall. Während sich für ① die Bedingung

$$p = -p_{\text{ref}} + n \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad (\text{III.19b})$$

ergibt. Für $n \neq 0$ hängt der Wert p in Gl. (III.19) vom Abtastintervall Δr ab. Diese Maxima sind als Aliasing zu verstehen. Für $n = 0$ ergibt ② das gesuchte Hauptmaximum der Analyse. Charakterisiert ist es dadurch, dass es als einziges Maximum für $p > 0$ nicht von Δr und damit nur vom Wellenfeld selbst abhängt. Der Term ① ergibt für $n = 0$ ein Maximum bei negativen p . Da die Dispersionsanalyse nur Werte $p \geq 0$ erfasst, stört dies nicht. Aliasingterme mit $n > 0$ für ① können aber im ω, p -Spektrum auftreten. Auch sie stellen Wellen mit negativer Phasengeschwindigkeit dar, wie das rechte Wellenfeld in Abb. III.10 (S. 87) zeigt. Eliminiert werden sie, indem J_η als Entwicklungsfunktion in Gl. (III.5) und als Integralkern in Gl. (III.14) und allen daraus abgeleiteten Gleichungen durch $\frac{1}{2}H_\eta^{(2)}$ ersetzt wird. Dann verschwindet auch ① in Gl. (III.18b). Durch die Wahl der Exponentialfunktion im Slant Stack Gl. (III.13) tritt dort kein Äquivalent zu Term ① auf.

In Abb. III.1 (S. 76) ist eine Dispersionsanalyse des Test-Wellenfeldes nach Gl. (III.18a) für $p_{\text{ref}} = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ und äquidistantes Sampling mit $M = 24$ und $\Delta r = 2\text{m}$ abgebildet. Markierung **A** weist auf das Hauptmaximum des Terms ② für $n = 0$ und $p = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$. Alle anderen Signale entstehen durch Aliasing aufgrund des endlichen Abtastintervalls Δr . Markierung **D** zeigt das Aliasing für ② mit $n = 1$. Markierung **B** und **E** verweisen auf das Aliasing von Term ① für $n = 1$ und $n = 2$. Die mit **C** gekennzeichnete Hyperbel

$$p = \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad (\text{III.20})$$

markiert die *doppelte* Nyquist-Langsamkeit, ab der erstmals Aliasing für ② auftritt. Bei der Frequenz, bei welcher das Maximum **A** die Hyperbel schneidet, tritt der Aliasing-Ast **D** aus der Abszisse heraus. Das Maximum **B** schneidet das Hauptmaximum bereits bei der einfachen Nyquist-Langsamkeit.

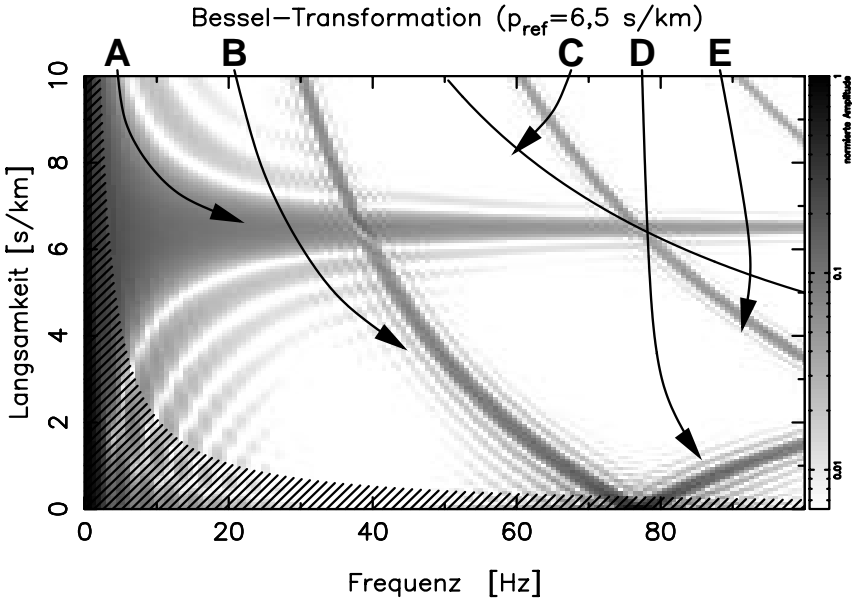


Abbildung III.1: Ein nach Gl. (III.18a) berechnetes ω, p -Spektrum für ein Test-Wellenfeld mit $p_{\text{ref}} = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$. Die auf das Maximum normierte Amplitude wird durch die Graustufe wiedergegeben. Das Spektrum wurde für eine äquidistante Geophonauslage mit 24 Geophonen und einem Geophonabstand von 2m berechnet.

A ist das Hauptmaximum der Analyse. Die Hyperbel **C** nach Gl. (III.20) markiert die durch den Geophonabstand bestimmte, Frequenz-abhängige doppelte Nyquist-Langsamkeit, ab der Aliasing für Term ② in Gl. (III.18b) auftritt. Markierung **B** und **E** weisen auf Aliasing-Signale für negative Phasengeschwindigkeiten entsprechend der Bedingung Gl. (III.19b) für $n = 1$ und $n = 2$. Ein Aliasing-Signal nach Gl. (III.19a) für $n = 1$ wird durch **D** markiert. Die durch eine Hyperbel begrenzte, schraffierte Fläche gibt die Breite des Hauptmaximums an, die sich gemäß Gl. (III.22) aufgrund der Unschärferelation für die Länge der Auslage (48m) ergibt.

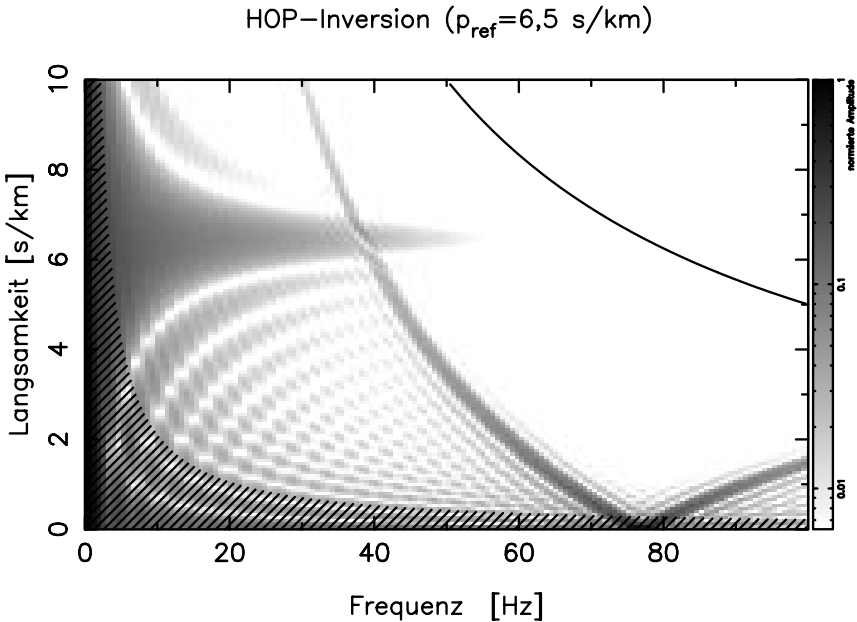


Abbildung III.2: Lineare Inversion desselben Test-Wellenfeldes wie in Abb. III.1 (S. 76). Allerdings wurde hier die HOP-Inversion nach Gl. (III.17a) zur Dispersionsanalyse benutzt. Hier wird die Wirkung der Dämpfungsfunktion Gl. (III.7) mit $\kappa = 0,25/\text{m}$ deutlich, welche das Signal auf den Bereich unter der Hyperbel Gl. (III.20) begrenzt und die Inversion auf diese Weise eindeutig macht.

Dasselbe Test-Wellenfeld, aber mit der HOP-Inversion nach Gl. (III.17a) invertiert, ist in Abb. III.2 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die Wirkung der Dämpfungsfunktion (III.7) mit $\kappa = 0,25/\text{m}$. Sie unterdrückt alle Signale oberhalb der Nyquist-Langsamkeit (III.20) und macht die Inversion auf diese Weise eindeutig. Ebenfalls mit der HOP-Inversion wurden die Auflösungsfunktionen in Abb. III.3 berechnet. In diesen Darstellungen liegt das Hauptmaximum **A** auf der Diagonalen. Es tritt Aliasing für $n = 1$ in Gl. (III.19b) (Markierung **B**) und Gl. (III.19a) (Markierung **C**) auf.

Die Herkunft der Aliasing-Signale wird auch in Abb. III.9 (S. 86) deutlich. Dort ist eine Transformation nach Gl. (III.15) sowohl für J_0 als Integralkern, wie auch für $H_0^{(1)}$ und $H_0^{(2)}$ dargestellt. Damit wird auch nochmals deutlich, wie die aus Term ① resultierenden Signale durch Verwendung von $H_\eta^{(2)}$ anstatt J_η eliminiert werden können. Letztendlich ist dann nur noch die doppelte Nyquist-Langsamkeit nach Gl. (III.20) eine effektive Grenze.

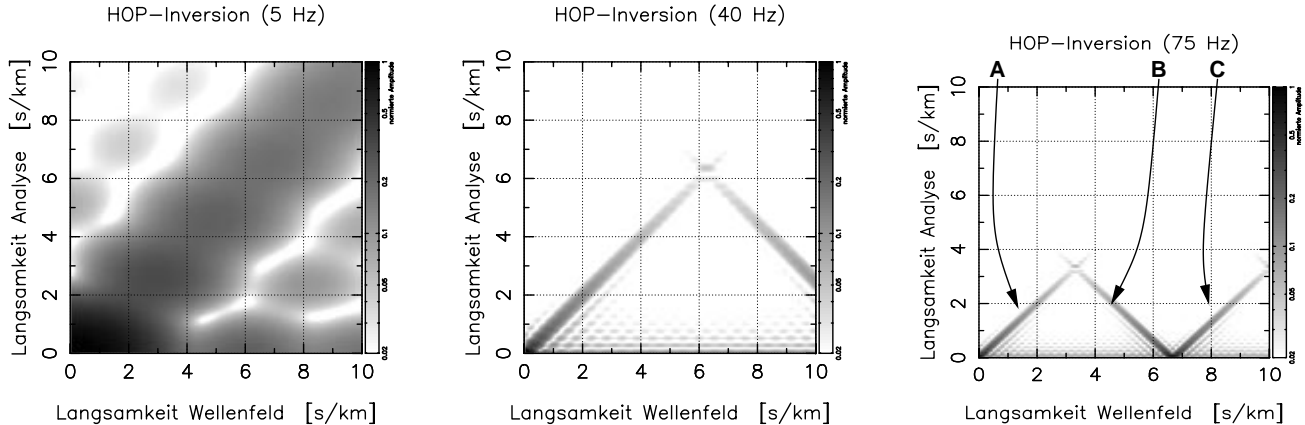


Abbildung III.3: Auflösungsfunktionen für die HOP-Inversion eines Test-Wellenfeldes nach Gl. (III.17a) für die Frequenzen (von links nach rechts) 5 Hz, 40 Hz und 75 Hz. In der Darstellung wird der Langsamkeit des Test-Wellenfeldes p_{ref} (Abszisse) der Wert des Spektrums für eine Analyse-Slowness p (Ordinate) gegenüber gestellt. Die Berechnung wurde für eine äquidistante Geophonauslage mit 24 Geophonen und einem Geophonabstand von 2m durchgeführt. Die auf das Maximum normierte Amplitude wird durch die Graustufe wiedergegeben.

Das Hauptmaximum **A** verläuft jeweils in der Diagonalen. Parallel zu seinen Rändern sind Nebenmaxima zu erkennen. Diese entstehen aufgrund der auf 48m beschränkten Länge der Auslage, die wie ein Boxcar-Fenster in der Offset-Koordinate wirkt. Die aufgrund der Unschärferelation Gl. (III.22) mögliche Auflösung wird mit abnehmender Frequenz rasch schlechter. Für 5Hz bedeckt das Maximum bereits die Hälfte der Abbildung.

Ein Aliasing-Signal nach Bedingung (III.19b) für negative Phasengeschwindigkeiten ist mit **B** markiert. Bei **C** handelt es sich um Aliasing nach Gl. (III.19a). Deutlich erkennbar ist die Wirkung der Dämpfungsfunktion Gl. (III.7). Diese unterdrückt die Signale für Langsamkeiten größer der Nyquist-Langsamkeit und macht die Inversion auf diese Weise eindeutig.

3.2 Die Unschärferelation und Nebenmaxima

Die Summe über die Terme ② in Gl. (III.18b) verschwindet, wenn die Phase der Summanden für $l = 1 \dots M$ ein Vielfaches von 2π durchläuft, also für

$$(p - p_{\text{ref}}) = n \frac{2\pi}{\omega M \Delta r} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III.21})$$

Dazwischen und insbesondere bis zum Erreichen einer Differenz $|p - p_{\text{ref}}| = (2\pi)/(\omega M \Delta r)$ ist die Auslöschung nur unvollständig. Daraus ergibt sich eine Frequenz-abhängige Unschärfe für das Hauptmaximum bei $p = p_{\text{ref}}$, die mit

$$\Delta p = \frac{2\pi}{\omega L} \quad (\text{III.22})$$

und der Länge $L = M \Delta r$ der Geophon-Auslage angegeben werden kann. Diese prinzipielle Unschärfe ist durch die schraffierte Fläche in Abb. III.1 angegeben. Die mit abnehmender Frequenz zunehmende Unschärfe wird auch in den Auflösungs-funktionen deutlich, die in Abb. III.3 dargestellt sind. Bei der praktischen Anwendung wird die tiefste verwertbare Frequenz (und damit in der Regel die Eindringtiefe der auswertbaren Oberflächenwellen) weniger durch die Übertragungseigen-schaften der Mess-Einrichtung (Geophone, Rekorder, etc.), als vielmehr durch die Unschärfe aufgrund einer endlich langen Geophon-Auslage bestimmt.

Für ganzzahlige n in Gl. (III.21) entstehen Nebenmaxima. Diese sind als „Schatten“ des Hauptmaximums in Abb. III.1 und auch Abb. III.3 zu erkennen. Sie können als Wirkung eines r -abhängigen Boxcar-Fensters (die Abtastung erfolgt nur bis $r = L$) verstanden werden und lassen sich durch die Anwendung einer glatten Fensterfunktion, wie aus der Spektralanalyse bekannt, abmildern. In der Dispersionsanalyse wird eine Mode durch die Nebenmaxima quasi vervielfacht. In der zweiten Stufe der Inversion führt dies zu lokalen Minima der Fehlerfunktion (siehe Abschnitt II.4.2.2, S. 56) und kann das Auffinden des globalen Minimums erschweren.

Auch für $L \rightarrow \infty$ hätte die Analyse eine endliche Auflösung, da die Wellen-ausbreitung in den untersuchten Medien nicht rein elastisch stattfindet. Die Amplituden klingen daher rascher als $1/\sqrt{r}$ ab. Das wirkt sich in einer Verbreiterung der Maxima im ω, p -Spektrum aus. Daraus lässt sich eine Information über die Wellendämpfung im Medium erschließen. Wurde jedoch eine Fensterfunktion angebracht, welche das Maximum künstlich verbreitert, kann diese Information nicht mehr voll genutzt werden. Das betrifft genauso die endliche Länge der Auslage, die ebenfalls wie ein Offset-Fenster wirkt.

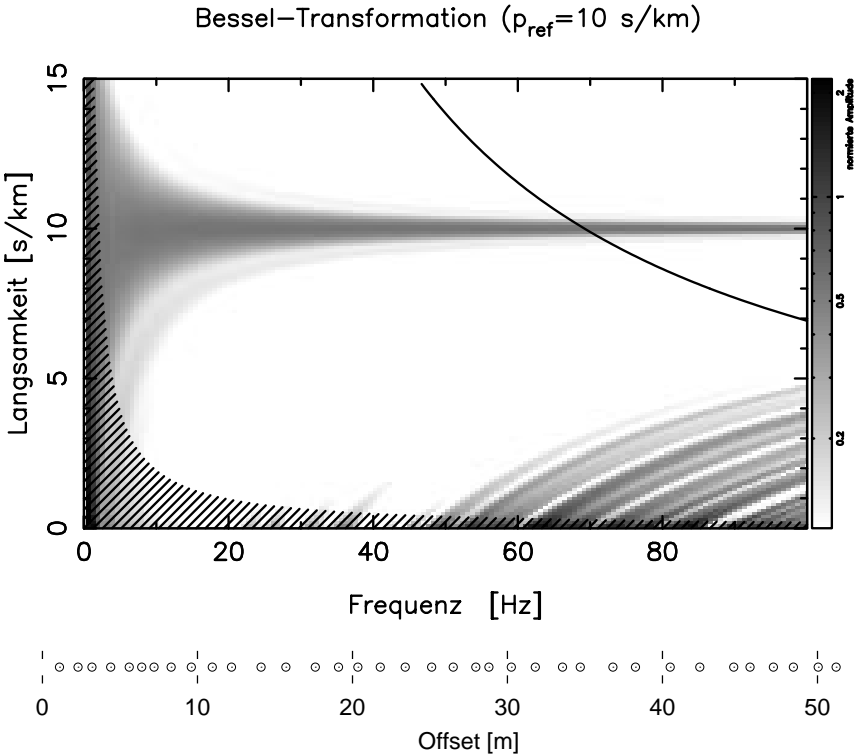


Abbildung III.4: Transformation eines Test-Wellenfeldes mit $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ nach Gl. (III.17c) mit $H^{(2)}$ anstatt J . Das Wellenfeld wurde mit zufällig gewählten Geophon-Positionen abgetastet. Die Positionen der 36 Geophone sind unter dem ω, p -Spektrum dargestellt. Es handelt sich um einen Teil der Auslage für den Datensatz KÖRSCHTAL (Abschnitt VI.3.1, S. 169).

Das Wellenfeld wurde mit einer Funktion $F(r) = \exp(r/30\text{m})$ multipliziert und die hinteren 40% der Auslage vor der Analyse mit einem Cosinus-Fenster belegt. Die Darstellung wurde Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ normiert. Die Aliasing-Hyperbel ist für einen äquidistanten Geophonabstand $\Delta r = 1,44\text{m}$ angegeben.

Durch die ungleichmäßige Verteilung der Geophone wird das Aliasing-Signal über einen größeren Bereich des ω, p -Spektrums verteilt. Die Zylinderfunktionen der Bessel-Transformation enthalten implizit den Faktor $1/\sqrt{p}$. Dieser tritt in Gl. (III.18b) explizit auf. Daher nimmt die Amplitude der „verschmierten“ Aliasing-Maxima für kleine p zu und kann Raumwellen verdecken, die auch dort abgebildet werden.

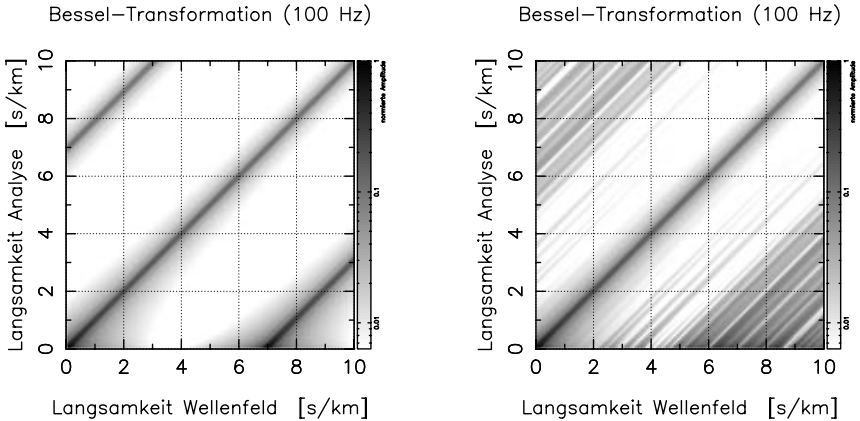


Abbildung III.5: Gegenüberstellung der Auflösungsfunktionen der Transformation nach Gl. (III.17c) mit $H^{(2)}$ anstatt J für äquidistante Abtastung des Wellenfeldes (links) und zufällige Geophon-Distanzen (rechts). Es handelt sich um die Auflösungsfunktionen für die Dispersionsanalysen in Abb. III.4 und III.6.

Bei unregelmäßiger Verteilung der Geophone wird das Aliasing-Signal über einen größeren Bereich „verschmiert“.

3.3 Wahl der Geophon-Abstände

Unschärfe und Mehrdeutigkeit (Aliasing) der Dispersionsanalyse werden durch die Wahl der Geophon-Positionen r_l bestimmt. Um ein optimales Ergebnis zu erzielen, ist es also notwendig, die Länge $L = M \Delta r$ der Auslage entsprechend Gl. (III.22) möglichst groß und die Geophon-Abstände Δr gemäß Gl. (III.20) möglichst klein zu wählen. Bei einer gegebenen Anzahl M von Geophonen widersprechen sich diese Forderungen.

Neben der in Abschnitt V.1.1 (S. 115) beschriebenen Kombination mehrerer Einzelschüsse besteht die Möglichkeit, die Auslage nicht äquidistant auszuführen und so kleine Δr und ein großes L zu kombinieren. Eine vollständig konstruktive Summe der Terme in Gl. (III.17c) ergibt sich dann nur noch für $n = 0$ in Gl. (III.19). Das Aliasing verteilt sich über einen größeren Bereich und seine Amplituden nehmen leicht ab.

In Abb. III.4 ist das ω, p -Spektrum eines Test-Wellenfeldes mit $p_{ref} = 10 \frac{s}{km}$ dargestellt. Die Transformation wurde gemäß Gl. (III.17c) für die in der Abbildung ebenfalls wiedergegebene Geophon-Konfiguration berechnet. Es wurde jedoch $H_0^{(2)}$ anstatt J_0 als Integralkern benutzt, um Anteile negativer Phasenslowness im Spektrum zu eliminieren. Bei den verwendeten Geophon-Positionen handelt es sich um einen Teil der Auslage für den Datensatz KÖRSCHTAL (Abschnitt VI.3.1,

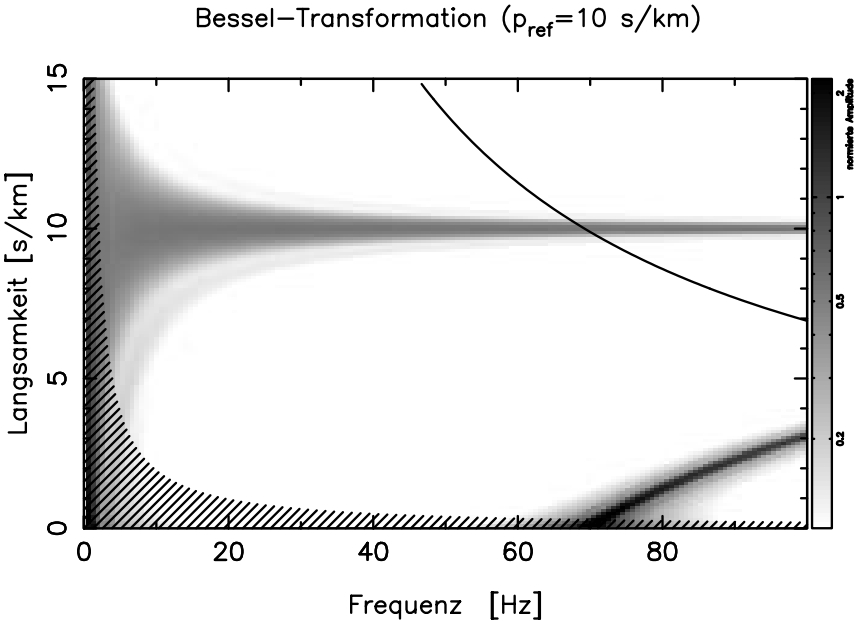


Abbildung III.6: Analyse eines Test-Wellenfeldes mit $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ nach Gl. (III.17c) mit $H^{(2)}$ anstatt J . Test-Wellenfeld und Fensterfunktion sind identisch mit den Werten in Abb. III.4. Jedoch wurde äquidistant mit 36 Geophonen auf 52m abgetastet. Die Darstellung wurde Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ normiert.

Das Aliasing Signal konzentriert sich auf einen schmalen Bereich und ist anhand der Hyperbel Gl. (III.20) und des Hauptmaximums eindeutig identifizierbar. Die Amplitude des Aliasing ist allerdings um den Faktor zwei größer als die des Nutzsignals.

S. 169). Die Geophone wurden auf einer Strecke von ungefähr 50m Länge an den in Abb. III.4 (S. 80) gezeigt Offsets abgeworfen. Ihre Positionen wurden erst nach dem Stecken eingemessen. Dies lässt sich rascher durchführen und ist flexibler als eine äquidistante Auslage. Allerdings wird die Interpretation von Seismogrammen anhand der Kontrollausdrucke der Messapparatur erschwert.

Zum Vergleich ist in Abb. III.6 (S. 82) und Abb. III.5 (S. 81) eine Test-Analyse desselben Wellenfeldes, aber für eine äquidistante Abtastung dargestellt. Die Maximalamplitude des Aliasing für eine äquidistante Auslage hat eine größere Amplitude als das „verschmierte“ Aliasing in Abb. III.4. Das Signal lässt sich jedoch anhand der Kenntnis der Geophon-Abstände eindeutig identifizieren, während in Abb. III.4 für zufällige Geophon-Abstände ein großer Bereich des ω, p -Spektrums

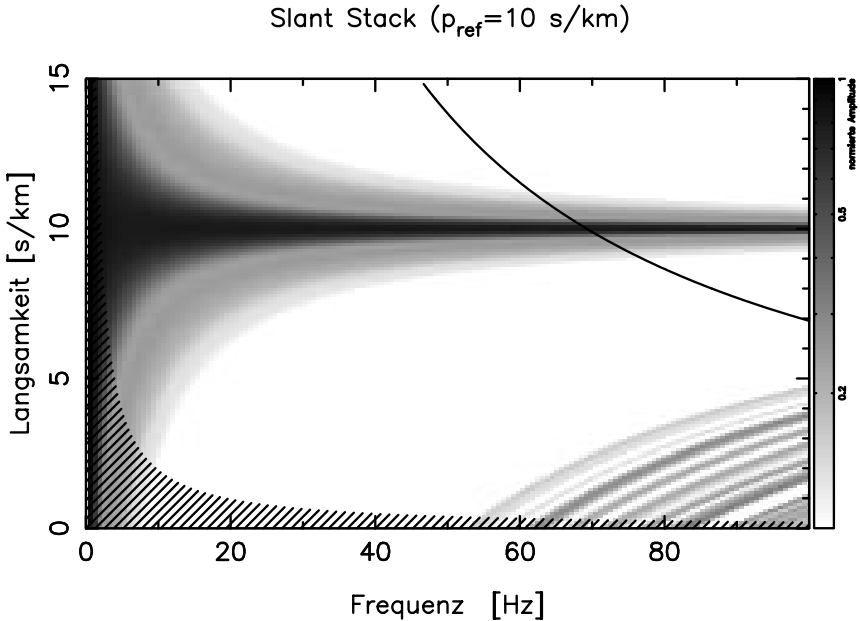


Abbildung III.7: Slant Stack eines Test-Wellenfeldes mit $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ gemäß Gl. (III.17b). Wellenfeld und Fensterfunktion sind identisch mit den Werten für Abb. III.4. Die Darstellung ist Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ normiert.

Das Aliasing-Signal, welches für äquidistante Abtastung die gleiche Amplitude wie das Nutzsignal hätte, ist in seiner Amplitude reduziert und über einen größeren Bereich des ω, p -Spektrums „verschmiert“.

verdeckt wird, aus dem eventuell wertvolle Information über Scherwellen gewonnen werden könnte. Die Dominanz des Aliasing resultiert aus dem Faktor $1/\sqrt{p}$, der in den Zylinderfunktionen implizit enthalten ist. In Gl. (III.18b) tritt der Faktor explizit in Erscheinung. Ein anderes Bild ergibt sich für den Slant Stack in Abb. III.7. Hier kommt die positive Wirkung zufälliger Geophon-Distanzen voll zur Geltung. Das Signal-/Stör-Verhältnis ist deshalb aber nicht unbedingt besser, denn bei der Transformation werden auch die Nutzsignale mit $1/\sqrt{p}$ skaliert.

Soll bei der Messung auf einen Gegenschuss verzichtet werden, ist es vorteilhaft mit dem Offset anwachsende Geophon-Intervalle zu benutzen, wie beispielsweise für den Datensatz WOLFSCHLUGEN (Abschnitt VI.2.3, S. 159). Dies ist günstig, da die Dämpfung proportional zur Wellenlänge erfolgt. Außerdem wird der stark gekrümmte Teil der Laufzeitkurve so besser abgetastet.

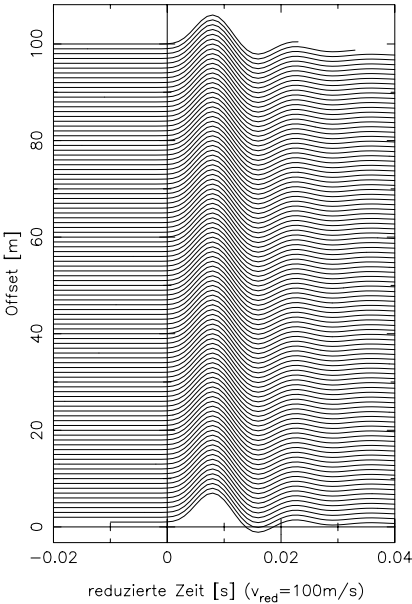


Abbildung III.8: Der dargestellte, synthetisch erzeugte δ -Puls wurde mit einem 1Hz Butterworth-Hochpass zweiter Ordnung und einem 80Hz Butterworth-Tiefpass sechster Ordnung gefiltert. Er propagiert mit $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Seine Amplitude nimmt mit $1/\sqrt{r}$ ab, entsprechend dem Fernfeld von Zylinderwellen. Die Wellenformen liegen in Abständen von 1m vor. Die Zeitachse ist Offset-abhängig mit $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ reduziert. Die Amplitude ist Offset-abhängig mit \sqrt{r} skaliert.

3.4 Rekonstruktion des Wellenfeldes

In Abschnitt III.1.2 habe ich die Aufgabe formuliert, ein ω, p -Spektrum zu finden, welches in Gl. (III.2) die gemessenen Wellenformen rekonstruiert und diese zwischen den Geophonen sinnvoll, das heißt als auslaufende Wellen, interpoliert. Als Abschluss der methodischen Aspekte untersuche ich in diesem Abschnitt die vorgestellten Verfahren zur Dispersionsanalyse hinsichtlich ihrer Fähigkeit das Wellenfeld zu rekonstruieren.

Dazu benutze ich einem Testimpuls (Abb. III.8, S. 84) mit der für zylindersymmetrische Wellenausbreitung im Fernfeld typischen Amplitudenabnahme $\propto 1/\sqrt{r}$. In Abb. III.9 (S. 86) ist die Transformation des Wellenfeldes gemäß Gl. (III.15) zu sehen. Das Spektrum wurde entsprechend der Terme ② und ① in Gl. (III.18b) in den Teil für $H_0^{(2)}$ als Integralkern (in der Abbildung links oben) und $H_0^{(1)}$ (rechts oben) zerlegt. Diese Teilspektren wurden in das Entwicklungintegral Gl. (III.2) eingesetzt. Die daraus berechneten Wellenformen und ein Teil des ursprünglichen Wellenfeldes sind in Abb. III.10 (S. 87) dargestellt.

Offenbar ist die Summen-Näherung (III.15) der Bessel-Transformation mit $H_\eta^{(2)}$ als Kern geeignet ein Spektrum zu erzeugen, welches einerseits die Daten richtig rekonstruiert und andererseits das Wellenfeld zwischen den Geophonen sinnvoll

interpoliert. Im Nahfeld für kleine r treten allerdings Diskrepanzen auf⁶. Der $H^{(1)}$ -Term der Dispersionsanalyse erzeugt dagegen ein Wellenfeld, das zwar mit einer Gruppengeschwindigkeit von $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ propagiert, aber aus Wellen negativer Phasengeschwindigkeit aufgebaut ist. Das Signal in Abb. III.10 rechts zeigt, dass die Summenformel (III.15) mit J_0 als Kern nicht einmal in der Lage wäre, die Daten an den Geophon-Positionen zu rekonstruieren.

Ergänzend zur Rekonstruktion des synthetischen Testpulses werden in Abb. VI.7 (S. 142) sowie Abb. VI.8 (S. 143) rekonstruierte Wellenformen für den Datensatz BIETIGHEIM und in Abb. VI.17 (S. 156) für den Datensatz BERKHEIM gezeigt. Die Spektren wurden alle gemäß Gl. (III.15) mit $H_0^{(2)}$ als Transformations-Kern berechnet.

In Abschnitt III.2.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die lineare Inversion die Eigenschaft hat ein ω, p -Spektrum zu erzeugen, welches die Wellenformen an den Geophon-Positionen identisch reproduziert. Dies gilt jedoch nur für die Entwicklung (III.5) nach Bessel-Funktionen. Wird anstelle von J_η in Gl. (III.8) $H_\eta^{(2)}$ benutzt, so verschwinden zwar die Aliasing-Signale analog zu **B** und **E** in Abb. III.1 (S. 76). Da jedoch das Hauptmaximum durch die Dämpfungsfunktion manipuliert wird, können die Wellenformen nicht mehr rekonstruiert werden. Das Gesamtspektrum (analog Abb. III.2, S. 77) rekonstruiert zwar die Wellenformen an den r_i , interpoliert dazwischen aber nicht mit auslaufenden Wellen. Damit ist die lineare Inversion nur bis zur einfachen Nyquist-Slowness, also der Hälfte von Gl. (III.20), uneingeschränkt einsetzbar.

Beim Slant Stack Gl. (III.13) treten keine Aliasing-Signale entsprechend **B** und **E** in Abb. III.1 (S. 76) auf. Allerdings ist der allgemeine Slant Stack nicht in der Lage die Wellenformen zu reproduzieren. Dazu fehlen ihm ein Phasenfaktor und ein Faktor $1/\sqrt{\omega p}$, wie ein Vergleich zwischen Gl. (III.17b) und Gl. (III.18b) zeigt. Der Slant Stack und die Summen-Näherung der Bessel-Transformation mit $H_\eta^{(2)}$ sind sich allerdings sehr ähnlich.

4 Anatomie des ω, p -Spektrums

Im Verlauf der Inversion muss das ω, p -Spektrum eines Datensatzes mehrfach qualitativ beurteilt werden. Einerseits ist dies bei der Erstellung und manuellen Verbesserung eines Startmodells für die zweite Stufe der Inversion erforderlich. Andererseits ermöglicht ein Verständnis der im ω, p -Spektrum abgebildeten Signale eine Einschätzung der Datenqualität und damit der Aussagekraft der Inversion insgesamt. In den folgenden Abschnitten beschreibe ich die Natur der in Erscheinung tretenden Signale und Ihre Lage im ω, p -Spektrum.

⁶Der $H_\eta^{(1)}$ -Term der Integraltransformation (III.14) wird im Nahfeld auch für auslaufende Wellenfelder benötigt.

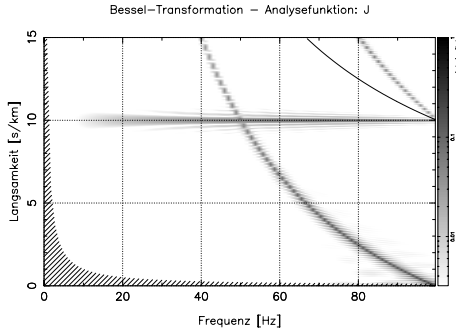
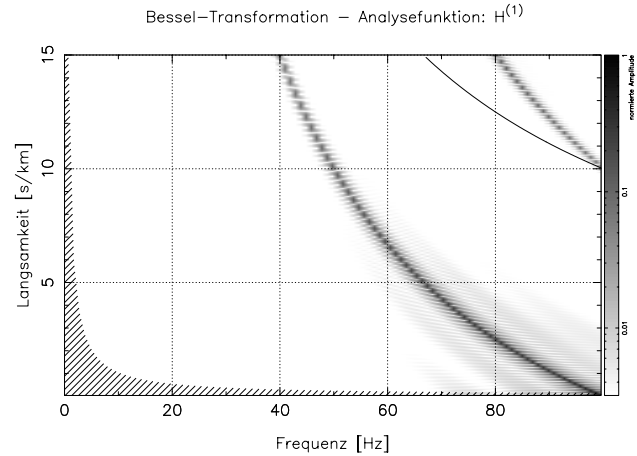
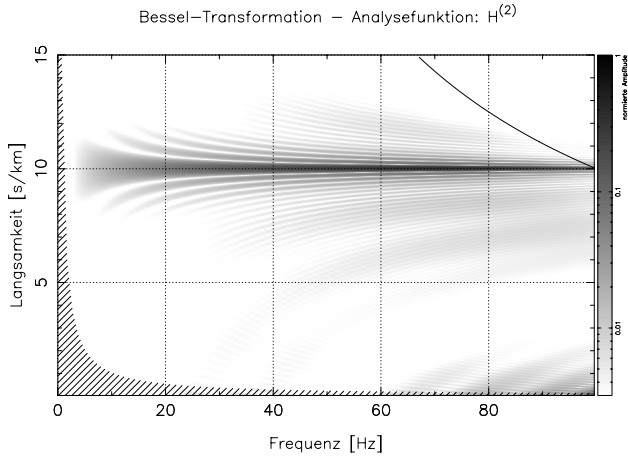


Abbildung III.9: Abgebildet sind die mit der Bessel-Transformation Gl. (III.15) und jeweils einer der Hankel-Funktionen als Kern berechneten ω, p -Spektren des Testpulses aus Abb. III.8. Die kleine Abbildung links zeigt das vollständige Spektrum. Wird statt der Bessel-Funktion $J_0 = \frac{1}{2}(H_0^{(1)} + H_0^{(2)})$ nur jeweils eine Hankel-Funktion verwendet, so zerfällt das Spektrum in die oben dargestellten Summanden entsprechend der Terme ① und ② in Gl. (III.18b). Links ist das Spektrum für $H_0^{(2)}$ dargestellt, rechts für $H_0^{(1)}$. Das linke ω, p -Spektrum rekonstruiert den Testpuls korrekt, wenn es in das Entwicklungsintegral Gl. (III.2) eingesetzt wird (siehe Abb. III.10).

Die Hyperbeln, jeweils in der rechten oberen Ecke der Spektren, geben wieder die doppelte Nyquist-Langsamkeit an.

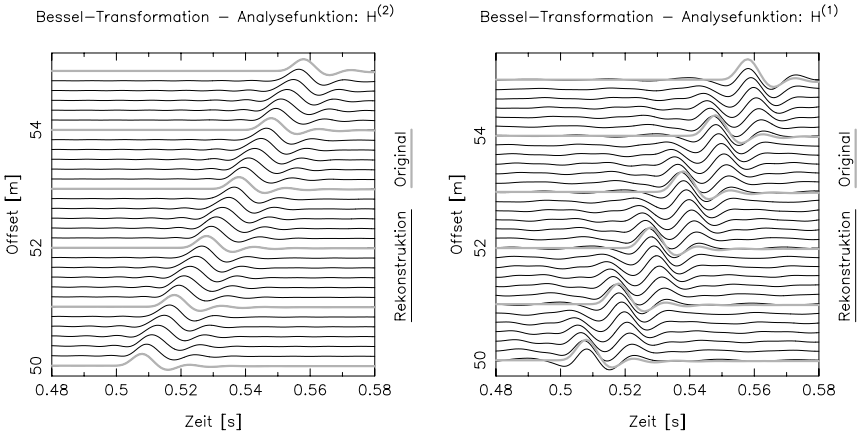


Abbildung III.10: Gezeigt sind zwei Rekonstruktionen des Testpulses (Abb. III.8) aus den ω, p -Spektren in Abb. III.9. Dazu wurden die Spektren in das Entwicklungintegral Gl. (III.2) eingesetzt.

Die Amplituden der Seismogramme sind Offset-abhängig mit \sqrt{r} skaliert.

Das mit $H_0^{(2)}$ berechnete Spektrum (oben links in Abb. III.9) interpoliert das Wellenfeld auch zwischen den Geophon-Positionen korrekt (linkes Bild). Dagegen stellt der zweite Term der Dispersionsanalyse (oben rechts in Abb. III.9) eine Welle mit $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Gruppengeschwindigkeit, aber negativer Phasengeschwindigkeit dar (rechtes Bild). Die Summe der beiden Spektren beschreibt eine Welle mit unendlicher Phasengeschwindigkeit (stehende Welle) und korrekter Gruppengeschwindigkeit.

Das Auftreten des Terms mit negativer Phasengeschwindigkeit muss als Aliasing, als Artefakt aufgrund der räumlichen Abtastung des Wellenfeldes verstanden werden. Sowohl das Spektrum rechts in Abb. III.9, wie auch das Wellenfeld rechts in dieser Abbildung hängen vom gewählten Geophon-Intervall Δr ab. Das Wellenfeld verschwindet im Fernfeld für $\Delta r \rightarrow 0$ (Gl. (II.36), S. 51). Der $H_0^{(2)}$ -Term der Transformation (III.15) ist unabhängig von Δr . Daher wird nur dieser Term für die Dispersionsanalyse eines auslaufenden Wellenfeldes benutzt.

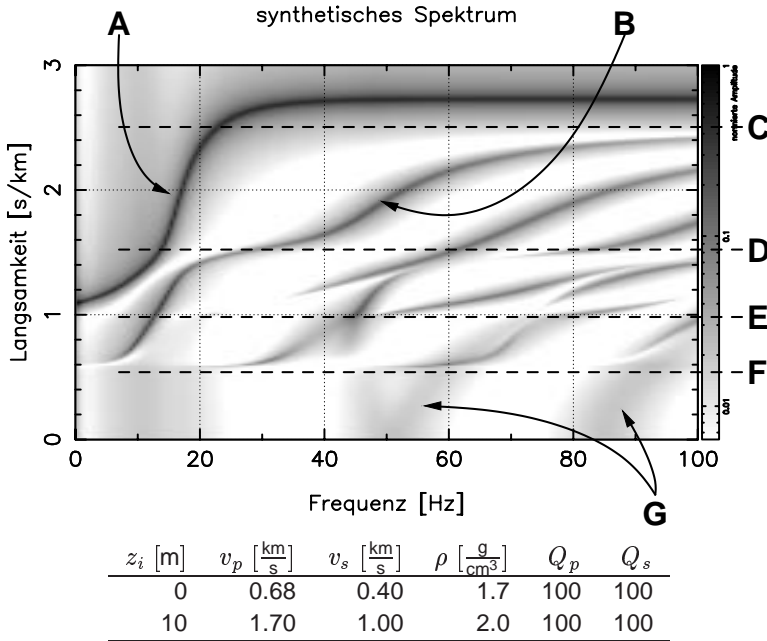


Abbildung III.11: Mit der Reflektivitätsmethode berechnetes Spektrum der Greenschen Funktion für das in der Tabelle angegebene Modell einer Schicht über einem Halbraum. Als Quelle wurde eine vertikale Einzelkraft bei $z = 0$ m an der Oberfläche des Mediums benutzt. Der Betrag der komplexen Koeffizienten $G(\omega, p)$ wird durch die Graustufe dargestellt.

A: Die Fundamentalmode nähert sich für hohe Frequenzen asymptotisch einem Wert, der ungefähr gleich der Scherwellen-Geschwindigkeit in der Schicht ist. Die Asymptote für kleine Frequenzen ist ungefähr gleich v_s im Halbraum. Die Frequenz, bei welcher die Mode von der einen zur anderen Asymptote wechselt, wird durch die Mächtigkeit der Schicht bestimmt.

B: Erste höhere Mode der Rayleigh-Wellen.

Die höheren Moden bauen mit ihren horizontalen Tangenten nicht dispergierte Raumwellen auf. Die Lage dieser Tangenten ergibt sich daher aus den Geschwindigkeiten des Modells. **C:** Direkte Scherwelle in der Schicht. **D:** Direkte Kompressionswelle in der Schicht. **E:** Refraktierte Scherwelle aus dem Halbraum. **F:** Refraktierte Kompressionswelle aus dem Halbraum.

G: Leaky-Moden, die als multiple Reflexionen in der Schicht verstanden werden können. Die reflektierten Signale interferieren konstruktiv, strahlen aber Energie in den Halbraum ab. Auch die Moden zwischen den Tangenten **E** und **F** sind verlustbehaftet. Sie strahlen Scherwellen-Energie in den Halbraum ab.

4.1 Nutzsignale

In Abb. III.11 ist das mit der Reflektivitätsmethode berechnete Spektrum einer Greenschen Funktion für eine Schicht über einem Halbraum dargestellt. In diesem Beispiel sind alle theoretisch nutzbaren Signale erkennbar. Das mit **A** markierte Maximum ist die Fundamentalmode der Oberflächenwellen. Die resonanten Eigenschwingungen des Mediums zeichnen sich auch im Spektrum durch große Amplituden aus. Die Markierung **B** bezeichnet die erste höhere Mode der Rayleigh-Wellen. Mit wachsender Frequenz folgen weitere Obertöne. Die Maxima verlaufen entlang der Dispersionskurven für die Eigenschwingungen des Mediums, allerdings nicht mit gleichbleibender Amplitude. Anregung und Beobachtung erfolgen im Falle dieses Beispiels an der Oberfläche ($z = 0$ m) und in vertikaler Richtung. Moden, die keine Vertikalauslenkung bei $z = 0$ haben, bilden sich nicht im ω, p -Spektrum ab. Das erschwert die Zuordnung der im ω, p -Spektrum beobachteten Oberflächenwellen zur Zählweise für die freien Moden des geschichteten Halbraumes und kann bei der Interpretation höherer Moden zu Fehlern führen⁷. Die Dispersionskurven $p(\omega)$ wachsen monoton mit ω . Dies ist typisch für Medien, deren seismische Geschwindigkeit monoton mit der Tiefe z zunimmt.

Nicht dispergierte Raumwellen erscheinen im Bild der Eigenschwingungen als horizontale Tangenten der Moden. In der Abb. III.11 sind die direkte Scherwelle (**C**), die direkte Kompressionswelle (**D**), die refraktierte Scherwelle (**E**) und die refraktierte Kompressionswelle (**F**) markiert. Die Phasengeschwindigkeit der fundamentalen Rayleigh-Mode wird für große Frequenzen offenbar durch v_s in der Schicht, für kleine Frequenzen durch v_s im Halbraum bestimmt. Anschaulich verständlich wird das durch die mit $1/\omega$ zunehmende Wellenlänge und Eindringtiefe der Moden. Die Frequenz, bei welcher der Wechsel von der Langsamkeit der oberen Asymptote zur unteren Asymptote erfolgt, ist durch das Verhältnis von Schichtmächtigkeit und Eindringtiefe bestimmt.

Aus dem bisher Gesagten lassen sich „Daumenregeln“ für die manuelle Suche nach einem Startmodell für die zweite Stufe der Inversion ableiten: Die ω, p -Koeffizienten für große ω und große p werden durch oberflächennahe Bereiche des Mediums beeinflusst, während sich bei kleinen ω und kleinen p tiefer liegende Bereiche abbilden. Die strukturellen seismischen Geschwindigkeiten beeinflussen die Lage der horizontalen Asymptoten der Dispersionskurven. Die Tiefe einer Diskontinuität bestimmt die Lage steil verlaufender Kurvenabschnitte. Über den Grad einer „Daumenregel“ kommen diese Aussagen jedoch nicht hinaus. Für Medien, deren Poisson-Verhältnis deutlich von 0,25 abweicht, unterscheidet sich die Pha-

⁷Ein besonders eklatantes Beispiel diskutiere ich in Abschnitt VI.4.2 (S. 202). Aber auch die ω, p -Spektrale des Datensatzes RIEDENBERG in Abb. VI.28 (S. 178) und der Niedrig-Geschwindigkeits-Kanäle in BERKHEIM (Abb. VI.14, S. 153) und HILZINGEN (Abb. VI.36, S. 186) veranschaulichen das Problem.

sengeschwindigkeit der Rayleigh-Wellen ebenso deutlich von der Scherwellen-Geschwindigkeit. Der Datensatz BERKHEIM (Abschnitt VI.2.2, S. 148) ist ein schönes Beispiel dafür, dass aufgrund einer Niedrig-Geschwindigkeits-Zone fast alle der genannten Regeln versagen können.

Für die Tiefenreichweite einer Untersuchung ist jedoch immer die Auflösung bei kleinen ω und kleinen p entscheidend. Begrenzend wirken sich hier die Eigenfrequenz der Geophone und die Hochpassfrequenz des Vorverstärkers aus. In der Regel bestimmt allerdings die in Abschnitt 3.2 diskutierte Unschärfe die kleinste nutzbare Frequenz. Die Nutzbarkeit der ω, p -Koeffizienten für kleine p wird durch die in Abschnitt 3.1 diskutierten Aliasing-Signale beeinträchtigt, aber auch dadurch, dass von der Seite einfallende Störwellen mit großen Scheingeschwindigkeiten im Datensatz vertreten sind.

In Abb. III.11 sind mit Markierung **G** Signale bezeichnet, die nicht mit der Theorie der Normalmoden verstanden werden können. Bereits für $p < 1 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ erfolgt im gezeigten Beispiel Scherwellen-Abstrahlung in den Halbraum. Das heißt, auch die Signale zwischen den Tangenten **E** und **F** sind verlustbehaftet und keine Eigenschwingungen im Sinne der Normalmoden. Sie werden häufig als „Leaky-Moden“ bezeichnet. Unterhalb von **F** erfolgt dann auch Kompressionswellen-Abstrahlung in den Halbraum. Die mit **G** markierten Maxima können jedoch als multiple Reflexionen von Kompressionswellen in der Schicht verstanden werden, welche konstruktiv miteinander interferieren. Während eine Inversion von Dispersionskurven der Normalmoden nicht in der Lage wäre, diese Signale zu Nutzen, können sie bei der Inversion von ω, p -Spektren zum Inversionsergebnis beitragen.

4.2 Störsignale

The association of noise with nondeterministic processes may be misleading since the concept of noise is also used as the garbage-can of unexplained deterministic phenomena. A treatment of this type of noise on purely statistical grounds may lead to conceptual as well as practical problems. (Scales und Snieder, 1998)

Nach Abschluss der zweiten Stufe der Inversion (Kapitel IV) wird ein Erdmodell, eine Beschreibung des untersuchten Mediums vorliegen. Dieses Erdmodell soll sich dadurch auszeichnen, dass für die Modellparameter synthetisch berechnete Daten mit den gemessenen übereinstimmen. Dies wird nicht vollständig der Fall sein können, da die Messdaten auch Signale enthalten, die nicht modelliert werden können, weil sowohl ihre Natur, wie auch ihre Ursache unbekannt sind (siehe auch Abschnitt II.4.2.2, S. 55). Diese Signale, die größtenteils aus seismischen Fremdquellen, aber auch aus nicht berücksichtigter Heterogenität oder elektri-

schen Quellen stammen, werden unter dem Begriff „Noise“ (Rauschen) oder besser dem deutschen Wort „Störsignale“ zusammengefasst.

Durch die Dispersionsanalyse werden diese Störsignale in das ω, p -Spektrum übertragen. Dass dies prinzipiell auch für nicht zylindersymmetrische Signale möglich ist, garantiert der Satz über Bessel-Transformations-Paare (Abschnitt A.4.5, S. 222 im Anhang). Da die meisten Störungen auch einer Wellenausbreitung unterliegen, treten sie im Spektrum nicht als homogener Hintergrundpegel, sondern strukturiert auf. Deshalb will ich die wichtigsten Ursachen von Störsignalen im Folgenden beschreiben.

Eine rein statistische Behandlung der Störsignale ist in der Praxis nicht möglich. Da alle Abtastwerte gleichzeitig aufgezeichnet werden und die Signale einer Wellenausbreitung unterliegen, sind sie stark korreliert. Die Kovarianzen für eine statistische Beschreibung können jedoch nicht bestimmt werden, da weder die Gesetzmäßigkeiten der Wellenausbreitung noch die genauen Quellen a priori bekannt sind. Zwischen zwei Schüssen ist die Phasenbeziehung der Signale externer Quellen zufällig. Daher kann durch Stapelung von Einzelschüssen eine Verbesserung des Signal-/Stör-Verhältnisses erreicht werden. Störungen durch nicht berücksichtigte Heterogenität weisen jedoch in jedem Schuss dieselbe Phasenbeziehung zur Quelle auf. Andererseits kann der Verlust der Phasenbeziehung externer Quellen zwischen zwei Schüssen eine Verminderung des Aliasing durch die in Abschnitt V.1.1 (S. 115) beschriebene Verdichtung der Geophon-Auslage zunichte machen.

4.2.1 Elektrische Quellen

Gegenüber allen anderen Störeinflüssen, sind das Rauschen der Messverstärker und die Verzerrungen durch die Analog-Digital-Wandlung zu vernachlässigen. Die stärksten elektrischen Störsignale beruhen auf externen Quellen und haben typische Frequenzen, wie die Bahnfrequenz von $16\frac{2}{3}$ Hz, die Netzfrequenz von 50 Hz und deren Obertöne. Sie sind nahezu monochromatisch. Beispiele für 50Hz und 100Hz sind in Abb. VI.32 (S. 182) zu sehen. Durch Isolierung der Geophon-Kontakte vom (oft feuchten) Boden können diese Signale stark vermindert werden.

Beim Einsatz eines Kontaktschlusses als Abriss wird häufig ein sogenannter „seismoelektrischer Effekt“ beobachtet. Das Einpressen der seismischen Quelle in den Boden führt zu Ladungstrennung. Die induzierte Potentialdifferenz gegen den Boden gelangt an die Messapparatur und verursacht ein Störsignal am Anfang jeder Spur, welches die Amplitude des seismischen Signals leicht übersteigt. Durch geeignete galvanische Trennung der Quelle vom Rekorder wird dieser Effekt bereits bei der Messung vermieden.

4.2.2 Seismische Quellen

Den bei der Messung gezielt angeregten seismischen Wellen überlagern sich solche, die von externen Quellen angeregt werden. Als Störquellen kommen einerseits die natürliche Mikroseismik und an Geländeunebenheiten, Bäumen und Gebäuden vom Wind angeregte Signale in Betracht. Andererseits können der Straßen- und Schienenverkehr sowie industrielle Anlagen starke Quellen sein. Auch hier können monochromatische Signale angeregt werden, beispielsweise durch vom Wind angeregte Resonanzen, oder beispielsweise bei 2Hz durch Synchronmotoren (Plešinger und Wielandt, 1974).

Da die Störquellen an der Erdoberfläche anregen, ist davon auszugehen, dass die amplitudenstärksten Signale als Oberflächenwellen propagieren. Ihre Dispersion wird durch das Medium bestimmt und ist identisch mit der des Nutzsignals. Fällt die Störwelle unter einem Winkel φ (wobei $\varphi = 0$ Ausbreitung parallel zum Profil bedeutet) mit einer Phasenslowness p_0 ein, so erscheint sie in der Analyse (in der Projektion auf das Profil) mit einer Phasenslowness $p = p_0 \cos \varphi$. Es können also Werte von $-p_0 \leq p \leq p_0$ eingenommen werden. Bei Gleichverteilung von φ sind die Werte $-p_0$ und p_0 besonders wahrscheinlich. Dies ist jedoch kaum von Belang, da die Störquellen häufig lokalisiert sind und während einer Einzelmessung nicht statistisch streuen. Von Bedeutung ist dagegen, dass kleine p für beliebige p_0 hervorgerufen werden können, während p_0 die maximale Slowness angibt, mit der das Störsignal im ω, p -Spektrum auftreten kann. Die ω, p -Koeffizienten werden bei kleinen Langsamkeiten daher stärker von Fehlern betroffen sein.

Wenn zur Verdichtung der Geophonauslage mehrere Einzelschüsse zu einem Datensatz kombiniert werden, hat das Nutzsignal über den ganzen Datensatz eine feste Phasenbeziehung (Abschnitt V.1.1, S. 115). Die Störsignale haben allerdings nur innerhalb der Einzelschüsse eine feste Phasenbeziehung. Während im zusammengesetzten Datensatz das Aliasing des Nutzsignals erst für größere Frequenzen auftritt, sind für das Aliasing des Störsignals weiterhin die ursprünglichen Geophon-Distanzen maßgeblich. Dieser Effekt ist beispielsweise in Abb. VI.33 (S. 183) für den Datensatz RIEDHEIM 1997 oder Abb. VI.41 (S. 191) für den Datensatz BÄRWALDE zu erkennen. Heterogenität kann aber einen vergleichbaren Effekt haben, wie die Seismogramme in Abb. VI.29 (S. 179) und das ω, p -Spektrum in Abb. VI.28 (S. 178) links für den Datensatz RIEDENBERG zeigen.

Das seismische Hintergrundsignal charakterisiere ich hier als Störung. Es kann allerdings auch genutzt werden, um Informationen über die durch das Medium bestimmte Dispersion zu erhalten. Dazu müssen die Geophone jedoch flächenhaft angeordnet werden, um auch die Ausbreitungsrichtung bestimmen zu können (Toksöz, 1964; Asten und Henstridge, 1984; Tokimatsu et al., 1992a). Müssen dann noch mehrere Moden sicher getrennt werden können, nimmt die Anzahl der

notwendigen Geophon-Positionen quadratisch zu.

Seismische Oberflächenquellen (Hammer, Fallgewicht, etc.) regen auch starken Luftschall an, der sich mit ca. $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ entlang des Profils ausbreitet und in jedem Einzelschuss die gleiche Phase aufweist. Luftschall kann aber auch von externen Quellen angeregt werden. Da er auf einer großen Fläche einkoppelt, kann der Schall in den Seismogrammen große Amplituden erreichen. Im Datensatz KÖRSCHTAL (Abb. VI.31, S. 181 und Abb. VI.32, S. 182) sind Schall-Signale zu erkennen.

4.2.3 Heterogenität

Laterale Heterogenität im Medium kann zu seitlicher Streuung führen. Die von der Seite einfallenden Streuwellen äußern sich im ω, p -Spektrum wie andere seitlich einfallende Störwellen. Allerdings treten sie zeitlich nach den direkten Wellen auf. Daher können Streuwellen häufig durch geeignete Fensterung der Seismogramme vor der Dispersionsanalyse unterdrückt werden.

Auch für die direkte Wellenausbreitung kann Heterogenität störend wirken. Statistisch verteilte Variationen der Eigenschaften des Mediums entlang des Profils und Fehler in der Bestimmung der Geophon-Koordinaten werden sich dabei in ähnlicher Weise durch eine Verbreiterung der Maxima im Spektrum auswirken. Ist die Heterogenität zu stark, so wird die Phasenbeziehung der Signale soweit gestört, dass die Dispersionsanalyse zusammenbricht. Im Fall LERCHENBERG (Abschnitt VI.3.1, S. 173 und Abb. VI.40, S. 190) ist eine Interpretation der ω, p -Spektren aufgrund oberflächennaher Heterogenität unmöglich. Andererseits zeigt der Datensatz GÜLTSTEIN (Abschnitt VI.3.1, S. 174), dass noch annähernd konstante Phasenbeziehungen über das ganze Profil bestehen, wenn die Heterogenität großskalig genug ist. Einzelne gestörte Geophon-Positionen können beim Zusammensetzen eines Datensatzes aus Einzelschüssen zu unerwünschten Periodizitäten führen, wie im Datensatz WOLFSCHLUGEN (Abb. VI.26, S. 166).

Eine weitere Fehlerquelle darf nicht ungenannt bleiben. Die in der Praxis eingesetzten Geophone sind nicht komponentenrein, sondern im hier ausgewerteten Frequenzbereich bis ca. 100Hz um 10% querempfindlich (Edelmann, 1998). Das heißt, dass ein Vertikal-Geophon auch aufgrund horizontaler Bewegungen ein Ausgangssignal erzeugt, das aber stark nichtlinear mit der Bodenbewegung verknüpft ist. Dieser systematische Fehler ist im Bereich parasitärer Resonanzen besonders stark, kann aber nicht mehr aus dem Messsignal isoliert werden. Schlecht gesetzte Geophone können zudem schräg stehen, was die Komponentenreinheit weiter vermindert. Oder sie sind schlecht an den Boden angekoppelt und zeigen dadurch Resonanzen und damit eine andere Übertragungsfunktion als die anderen Aufnehmer im Profil.

Kapitel IV

Zweite Stufe der Inversion: Bestimmung eines Erdmodells durch iterative Least-Squares-Inversion

1 Das Problem „auspacken“¹

Mit der zweiten Stufe der Inversion wird ein Erdmodell bestimmt. Das heißt, sie soll zu einer Aussage über die Materialeigenschaften des seismischen Mediums führen. Als von Störsignalen überlagerte und in diesem Sinne fehlerbehaftete „Daten“ stehen die in der ersten Stufe berechneten ω, p -Spektren sowie aus den Seismogrammen abgelesene Ankunftszeiten von Raumwellen zur Verfügung. Der Zusammenhang zwischen den Materialeigenschaften und den ω, p -Spektren ist nichtlinear. Daher linearisiere ich die Vorwärtsrechnung und benutze ein iteratives Least-Squares-Schema zur Inversion. In den folgenden Abschnitten werde ich die grundsätzlichen Überlegungen aus Abschnitt II.4.2 (S. 54) auf die Inversion flachseismischer Datensätze übertragen.

Die formale Beschreibung des Inversionsproblems führt zu der Aufgabe, eine

¹Mein Lehrer Friedrich Noack prägte das Wort vom „Auspacken“ eines Problems. Damit meinte er die Spezialisierung einer allgemeinen, elementaren Formulierung bei der Anwendung auf eine konkrete Fragestellung. Wenn elegant durchgeführt, kann das zur Lebensfreude eines Physikers beitragen. Professor Friedrich Noack verstarb am 3. Februar 1997 im Alter von 64 Jahren.

quadratische „Fehlerfunktion“

$$E^2(\vec{m}) = \chi^2(\vec{m}) + \sum_{l=1}^L \xi_l^2(\vec{m}) \quad (\text{IV.1})$$

zu minimieren. Die Misfit-Funktion $\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2$ bemisst die Anpassung der für das Modell \vec{m} theoretisch berechneten Daten $\vec{F}(\vec{m})$ an die gemessenen Daten \vec{d} . Für eine schlechte Anpassung werden die Residuen $\vec{R} = \vec{d} - \vec{F}(\vec{m})$ groß und damit auch χ^2 . Die L Straffunktionen ξ_l^2 bewerten die Erfüllung von A-priori-Erwartungen an das Modell \vec{m} . Sie werden umso größer, je weiter das Modell von diesen Erwartungen abweicht.

1.1 Die Modellparameter

Die in \vec{m} zusammengefassten Modellparameter umfassen zunächst natürlich die seismisch wirksamen Materialeigenschaften. Das sind die strukturellen Wellengeschwindigkeiten $v_p(z)$ und $v_s(z)$, die Massendichte $\rho(z)$, sowie Parameter, welche die Anelastizität beschreiben, beispielsweise die Güte-Werte $Q_p(z)$ und $Q_s(z)$. Als Ergebnis der Inversion werden konkrete Zahlenwerte für diese Größen gesucht.

Über die genannten Parameter hinaus gibt es weitere unbekannte Größen, die während der Inversion zur Berechnung der synthetisch vorhergesagten Daten $\vec{F}(\vec{m})$ benötigt werden. Auch diese müssen aus den Messdaten erschlossen werden und sind in diesem Sinne Inversionsparameter. Formal sind daher in \vec{m} auch die komplexen Koeffizienten $S(\omega)$ des Fourier-Spektrums der Quelle enthalten (Abschnitt V.1.2, S. 116). Die Charakteristik typischer Explosionsquellen (beispielsweise S.I.S.Sy., siehe Abschnitt VI.2.1.2, S. 132) setzt sich aus einem unbekanntem Verhältnis von Explosionsmoment und Einzelkraftkomponenten zusammen. Ebenso unsicher ist möglicherweise der Wert der wirksamen Quelltiefe. All diese Parameter haben einen wesentlichen Einfluß auf das Wellenfeld und müssen mit bestimmt werden.

Die Beschreibung der Materialeigenschaften muss häufig in zwei unterschiedlichen Formen vorliegen. Wird ein Matrixalgorithmus (Abschnitt II.3.4, S. 47) wie die Reflektivitätsmethode oder ein Abkömmling des Thomson-Haskell-Verfahrens für die Vorwärtsrechnung benutzt, so muss das Material für die Vorwärtsrechnung in Form homogener Schichten \vec{m}' beschrieben werden. Für die Inversion selbst kann es numerisch effizienter sein, Koeffizienten \vec{m} einer Entwicklung nach Basisfunktionen zu benutzen (Abschnitt V.2.2, S. 123). Bei gegebener Parametrisierung (Abschnitt V.2.1, S. 120) wird der Parameterwert der homogenen Schicht

m'_k als Mittelwert über den Tiefenbereich des Modellabschnitts von z_k bis z_{k+1} bestimmt, nämlich

$$\begin{aligned}
 m'_k &= \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} m(z) dz \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} m_l \underbrace{\frac{1}{z_{k+1} - z_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} b_l(z) dz}_{=F_{kl}}.
 \end{aligned}$$

Um beide Darstellungen bequem kombinieren zu können verwende ich im Folgenden die $(N' \times N)$ Parametrisierungsmatrix P (mit typischerweise $N' > N$), die mit $\vec{m}' = P\vec{m}$ zwischen beiden Darstellungen vermittelt. Die Tiefen z_k der Schichtgrenzen und damit die Matrix P werden Modell-abhängig gewählt. Die Schichten sollten so dünn sein, dass das Modell von den untersuchten Wellen nicht als Stufenfunktion aufgelöst werden kann.

1.2 Die Misfit-Funktion

Die quadratische Misfit-Funktion wurde in Abschnitt II.4.2 (S. 54) als

$$\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2$$

definiert. Dabei ist $W = \text{diag}(w_j)$ eine Diagonalmatrix reellwertiger Gewichtungsfaktoren w_j . Der Vektor \vec{d} enthält die M Messdaten. Für die in Kapitel VI gezeigten Beispiele sind das die komplexen ω, p -Spektralkoeffizienten sowie die Ankunftszeiten der refraktierten Kompressions-Welle. Je mehr Daten hier kombiniert werden (Spektralkoeffizienten, Einsatzzeiten, Wellenform-Abtastwerte, angeregt durch mehrere unterschiedliche Quellen und registriert mit mehreren unterschiedlichen Geophonkomponenten), umso aussagekräftiger kann die Inversion werden (siehe auch Abschnitt V.1.4, S. 118). Um unterschiedliche Daten kombinieren zu können, müssen die Gewichtungsfaktoren w_j die reziproke Einheit der Daten d_j haben. Dann enthält die Summe nur einheitenlose Terme, welche von gleicher Größenordnung sein sollten. $F_j(\vec{m})$ ist der für die Modellkonfiguration \vec{m} gemäß der physikalischen Theorie synthetisch berechnete Messwert korrespondierend zum realen Datum d_j .

Um aus dem Wert von χ^2 eine sinnvolle Aussage ableiten zu können und um Misfit und Strafterme in eine vernünftige Beziehung zu setzen, ist auf eine Normierung der w_j beispielsweise auf $|W\vec{d}|^2 = 1$ zu achten. Ebenso sollten auch die

w_j der Teildatensätze normiert werden. Die Argumentation ist ähnlich der Überlegung, die in Abschnitt II.4.2.2 (S. 56) von den σ_j auf die w_j geführt hat. Die beispielsweise in 100 Punkten der Laufzeitkurve enthaltene Information über die refraktierte Kompressions-Welle kann genauso wertvoll sein, wie die in 20000 Punkten des Spektrums enthaltene Information. Weitere Überlegungen zur Normierung der Daten stelle ich in Abschnitt V.1.4.1 (S. 119) an.

1.3 Die Linearisierung

Zur Lösung der Aufgabenstellung mit der Methode der kleinsten Quadrate muss die Vorwärtsrechnung wie in Gl. (II.44) auf Seite 60 linearisiert werden. Es ist dann

$$\vec{F}(\vec{m}) \approx \underbrace{\vec{F}(\vec{m}_0)}_{=\vec{F}_0} + D \underbrace{(\vec{m} - \vec{m}_0)}_{=\delta\vec{m}}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$D_{jk} = \left. \frac{\partial F_j}{\partial m_k} \right|_{\vec{m}_0}.$$

Falls D nicht direkt berechenbar ist, kann es über Differenzenquotienten

$$D_{jk} \approx \frac{F_j(\vec{m}_0 + hr_k \vec{e}_k) - F_j(\vec{m}_0)}{hr_k} \quad \text{mit } h \ll 1$$

genähert werden. Die Elemente des Vektors \vec{e}_k verschwinden alle bis auf das k -te, welches gleich eins ist. Mit r_k bezeichne ich den in Abschnitt II.4.2.5 (S. 61) definierten Suchbereich zum Parameter m_k . Bei der Berechnung der Differenzenquotienten werden möglicherweise kleine Differenzen großer Werte berechnet, was eine Berechnung der \vec{F} mit doppelt genauer Darstellung erfordern kann. Außerdem ist pro freiem Inversionsparameter, für den eine partielle Ableitung berechnet wird, eine zusätzliche Vorwärtsrechnung notwendig. Dies wirkt sich sehr ungünstig auf die numerische Effizienz des Verfahrens aus und verlangt häufig eine restriktive Parametrisierung, um die Zahl der freien Parameter klein zu halten (Abschnitt V.2.2, S. 123).

Für eine Formulierung des Thomson-Haskell-Verfahrens nach Wang (1999) beschreibt Teshler (1999) die semianalytische Berechnung aller partiellen Ableitungen während einer Vorwärtsrechnung „on-the-fly“. Die dabei berechneten Ableitungen D' beziehen sich auf die Parameter der Vorwärtsrechnung. Weichen die

Inversionsparameter aufgrund einer Parametrisierung davon ab, so ergibt sich die Linearisierung in Kombination mit der Parametrisierungsmatrix P zu

$$\vec{F}(\vec{m}) \approx \vec{F}_0 + \underbrace{D'P}_{=D} \delta\vec{m}.$$

Mit der beschriebenen Linearisierung ist die Misfit-Funktion

$$\chi^2 = |W(\underbrace{\vec{d} - \vec{F}_0}_{=\vec{\Delta}} - D\delta\vec{m})|^2$$

eine quadratische Form in $\delta\vec{m}$. Die Startresiduen bezeichne ich im Folgenden mit $\vec{\Delta}$.

Ist bekannt, dass ein Teil der Parameter m_k durch die Daten nicht eingeschränkt werden kann, also $D_{lk} \rightarrow 0 \forall l$ gilt, so ist es sinnvoll, den numerischen Aufwand zur Berechnung der D_{lk} für diese k zu sparen. Alle Parameter \vec{m} sollen aber in den Straftermen wirksam bleiben. Um diese Auswahl in die formale Beschreibung aufzunehmen, wird hier eine $(N \times N')$ Selektionsmatrix X mit $N > N'$ definiert. Jede ihrer Spalten enthält nur eine 1, alle anderen Elemente sind 0. Auf diese Weise bildet sie den reduzierten Parametersatz $\delta\vec{m}''$ auf den vollen Satz $\delta\vec{m} = X\delta\vec{m}''$ ab. Bei der Verwendung von Differenzenquotienten wird nun $D'PX$ direkt berechnet, was die Anzahl der erforderlichen Vorwärtsrechnungen weiter reduziert.

1.4 Die Strafterme

Die Strafterme ξ_i^2 in Gl. (IV.1) müssen ebenfalls als quadratische Formen in den Modellparametern in das Least-Squares-Schema eingebracht werden. Ganz allgemein lassen sich für beliebige Linearkombinationen der Parameter Vorgaben $A\vec{m} = \vec{q}$ formulieren und analog zum Misfit als Strafterm $\xi^2 = |S(A\vec{m} - \vec{q})|^2$ in die Inversion einbringen. Wie man von integralen Bedingungen für eine Parameterfunktion $p(z)$ zu einer solchen Formulierung gelangt, ist in Abschnitt V.2.1 (S. 120) skizziert. Alle Strafterme müssen sorgfältig gegeneinander und gegenüber dem Misfit χ^2 gewichtet werden, damit die Minimierung von E^2 zu einer sinnvollen Modellverbesserung führt.

Im Folgenden werde ich vier Klassen von A-priori-Erwartungen für die Schichtparameter \vec{m}' formulieren, die mir insbesondere unter den besonderen Gegebenheiten der Flachseismik nützlich erscheinen.

1.4.1 Kleine Modelländerungen (Regularisierung)

Bereits in Abschnitt II.4.2.5 (S. 60) wurde ein Strafterm

$$\xi_1^2 = |S_1 \delta \vec{m}'|^2 \quad \text{mit} \quad S_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{r_k} \right)$$

eingeführt, der zur Stabilisierung der iterativen Inversion dient. Dabei ist r_k der sogenannte „Suchbereich“ zum Parameter m_k . Dieser Strafterm sorgt dafür, dass die Modelländerung pro Iterationsschritt im Bereich der Linearisierung bleibt und dass das Least-Squares-Gleichungssystem regulär ist.

1.4.2 Orientierung am Referenzmodell

In der Regel werden einige der Modellparameter durch die Messdaten kaum eingeschränkt. Werden diese Parameter in der Inversion frei gelassen, so entwickeln sie sich häufig aufgrund von Störsignalen oder ungünstiger Parametrisierung zu vollkommen unsinnigen Werten. Gl. (IV.21) in Abschnitt IV.2.4 (S. 111) zeigt das sehr deutlich. Sie einfach auf den Wert des Anfangsmodells festzusetzen, ist allerdings auch nicht gerechtfertigt. Das Startmodell stellt nämlich meistens nur eine vage Schätzung dar. Darum durchlaufen die Modelle auch während der Inversion erhebliche Veränderungen bis zum Ergebnismodell. Aus diesem Grund werden Einschränkungen durch die Daten möglicherweise erst nach mehreren Iterationen wirksam. Beispielsweise kann eine nennenswerte Verringerung des Misfits erst eintreten, wenn eine Mode nahe genug an das Maximum des ω, p -Spektrums herangerückt wurde.

Über einen Strafterm können die Parameter \vec{m}' lose an eine A-priori-Vorgabe \vec{m}'_{ref} gekoppelt werden. Dazu wird

$$\xi_2^2 = |S_2 (\vec{m}'_0 + \delta \vec{m}' - \vec{m}'_{\text{ref}})|^2 \quad \text{mit} \quad S_2 = \text{diag}(\eta_k)$$

als Strafterm eingeführt. Die η_k gewichten die A-priori-Information und werden gleich Null für Parameter, die allein aus den Daten bestimmt werden sollen. Ist der Term nicht zu stark gewichtet, so kann sich eine Einschränkung durch die Daten auch nach mehreren Inversionsschritten noch bemerkbar machen.

1.4.3 A-priori-Korrelationen

Für manche Materialien existieren empirische v_p/v_s -Verhältnisse, während Richtwerte für den Absolutwert unbekannt sind. In Fortführung des vorigen Abschnitts kann es dann sinnvoll sein, eine lose Vorgabe für Verhältnisse zwischen freien Parametern vorzugeben.

Dafür kann es auch „kosmetische“ Gründe geben. Kann beispielsweise aus den Daten nur ein Mittelwert für v_p bestimmt werden, während sich für v_s starke Variationen ergeben, wird die Kombination beider Modellkurven als wenig realistisch empfunden. In einem solchen Fall ist es erwünscht, miteinander möglichst ähnliche und trotzdem mit den Daten verträgliche Modellkurven zu finden.

Mit

$$\xi_3^2 = |S_3 (\vec{m}'_0 + \delta \vec{m}') - \vec{q}|^2$$

wird eine Linearkombination

$$S_3 \vec{m}' = \vec{q}$$

als Richtwert gegeben. Ohne weitere Einschränkungen für S_3 und q ist das zugleich die allgemeinste Formulierung, in die auch die anderen Strafterme aufgenommen werden könnten.

Als Beispiel kann

$$v_p = av_s \quad \text{und} \quad \rho = bv_s + c$$

gegeben werden. Dann wäre

$$\xi_3^2 = \eta_1^2 |v_p - av_s|^2 + \eta_2^2 |\rho - bv_s - c|^2$$

mit

$$\vec{m}' = \begin{pmatrix} v_p \\ v_s \\ \rho \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 c \end{pmatrix}.$$

Dabei dienen η_1 und η_2 dazu, das Gewicht dieser Vorgaben einzustellen.

1.4.4 Glättung

Da nur endlich viele Messwerte vorliegen und diese zudem von Störsignalen überlagert werden, sind keine beliebig detaillierten Rückschlüsse auf das untersuchte Medium möglich. Zu jedem Ergebnismodell einer Inversion gibt es weitere, stärker strukturierte Modelle, welche zu einem gleich kleinen oder kleineren Misfit führen². Es ist daher ein Ergebnismodell anzustreben, welches nicht mehr Detail-Struktur aufweist, als notwendig ist, um die Daten unter Berücksichtigung

²Ein übermäßig kleiner Misfit wird beispielsweise erreicht, wenn mit einem (unsinnigen) Modell auch Störsignale der Messdaten in den synthetischen Werten erzeugt werden. Die Daten wurden dann „überinterpretiert“.

der Messfehler anzupassen. Es werden also „glatte“ Modellkurven verlangt. Allerdings müssen auch Diskontinuitäten zugelassen werden, um die in der Flachseismik auftretenden enormen Parameterkontraste (siehe Abschnitt VI.3, S. 167) beschreiben zu können.

Es ist ungünstig, die Glattheit des Modells durch eine sparsame Parametrisierung zu erzwingen (Abschnitt V.2.2, S. 123). Falls der Rechenaufwand es zulässt, ist es für ein Modell homogener Schichten zu bevorzugen, die Glattheit über einen Strafterm

$$\xi_4^2 = |S_4 (\vec{m}_0 + \delta\vec{m})|^2$$

zu verlangen.

Für ein Modell aus N homogenen Schichten der Dicke Δz ist eine einfache $((N-2) \times N)$ -Glättungsmatrix

$$(S_4)_{kl} = \frac{\eta_k}{\Delta z^2} \begin{cases} 2 & \text{für } k = l + 1, \\ -1 & \text{für } k = l \text{ oder } k = l + 2 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die η_k dienen dazu, die Glättung in verschiedenen Tiefen unterschiedlich zu gewichten. Für $\eta_k = \eta_{k+1} = 0$ wird in der Tiefe $z = k\Delta z$ eine Diskontinuität zugelassen.

1.5 Das Least-Squares-Gleichungssystem

Die Fehlerfunktion (IV.1) vollständig ausgeschrieben („ausgepackt“) lautet nun

$$\begin{aligned} E^2 = & |W(\vec{d} - \vec{F}_0 - D'PX\delta\vec{m}'')|^2 \\ & + |S_1PX\delta\vec{m}''|^2 + |S_2P(\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_0 - X\delta\vec{m}'')|^2 \\ & + |S_3P(\vec{m}_0 + X\delta\vec{m}'') - \vec{q}|^2 + |S_4P(\vec{m}_0 + X\delta\vec{m}'')|^2. \quad (\text{IV.2}) \end{aligned}$$

Wegen der ω, p -Spektren sind \vec{d} , D und \vec{F}_0 komplexwertige Größen. Alle anderen Größen sind reellwertig.

Die Least-Squares-Bedingung lautet

$$\frac{\partial E^2}{\partial \delta m_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall k.$$

Das ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem (LGS)³

$$\begin{aligned} & \left(\Re \left(X^T P^T D'^{\dagger} W^T W D' P X \right) + \sum_{l=1}^4 X^T P^T S_l^T S_l P X \right) \delta \vec{m}'' \\ & = \Re \left(X^T P^T D'^{\dagger} W^T W \left(\vec{d} - \vec{F}_0 \right) \right) \\ & + X^T P^T S_3^T \vec{q} + X^T P^T S_2^T S_2 P \left(\vec{m}_{ref} - \vec{m}_0 \right) - \sum_{l=3}^4 X^T P^T S_l^T S_l P \vec{m}_0. \quad (IV.3) \end{aligned}$$

Die Lösung $\delta \vec{m}''$ des LGS liefert das Startmodell \vec{m}_0 für die nächste Iteration, indem \vec{m}_0 auf den Wert von $\vec{m}_0 + X \delta \vec{m}''$ gesetzt wird. Der Übersichtlichkeit halber werde ich im Folgenden annehmen, dass P und X Einheitsmatrizen sind und sie fortlassen. Werden sie für eine Anwendung benötigt, so kann einfach $\vec{m} = \vec{m}_0 + \delta \vec{m}$ durch $\vec{m}' = P(\vec{m}_0 + X \delta \vec{m}'')$ in den Formeln entsprechend ersetzt werden. Damit wird Gl. (IV.3) nun vereinfacht als

$$\left(\Re(D^{\dagger} W^T W D) + S^T S \right) \delta \vec{m} = \Re(D^{\dagger} W^T W \vec{\Delta}) + \vec{S} \quad (IV.4)$$

geschrieben, mit den Abkürzungen

$$S^T S = \sum_{l=1}^4 S_l^T S_l, \quad \vec{\Delta} = \vec{d} - \vec{F}_0 \quad \text{und} \quad \vec{S} = S_3^T \vec{q} + S_2^T S_2 \vec{m}_{ref} - \sum_{l=2}^4 S_l^T S_l \vec{m}_0.$$

Die Matrix $S^T S$ tritt bei der Lösung des Inversionsproblems nur als Ganzes auf. Die Schreibweise hat daher eher Symbolcharakter und macht deutlich, dass es sich um eine symmetrische, positiv definite Matrix handelt.

Alle Terme von $\Re(D^{\dagger} W^T W D) + S^T S$ sind positiv definit. Daher garantiert der Term $S_1^T S_1$, dass die Gesamtmatrix regulär ist und das Gleichungssystem mit Standardverfahren gelöst werden kann.

1.6 Optimierte Berechnung der Systemmatrix

Wird die Methode von Teshler (1999) zur Berechnung der partiellen Ableitungen benutzt, so fallen bei der Berechnung von F_{0j} auch alle Elemente der j -ten Zeile von D an. Das kl -Element der Matrix $\Re(D^{\dagger} W^T W D)$ ist

$$\begin{aligned} \left(\Re(D^{\dagger} W^T W D) \right)_{kl} & = \Re \left(\sum_{m,n,j} D_{mk}^* W_{nm} W_{nj} D_{jl} \right) \\ & = \sum_j \Re(D_{jk}^* D_{jl}) w_j^2. \end{aligned}$$

³Siehe auch Abschnitt A.3 (S. 219) zu komplexwertigen Least-Squares-Problemen.

Ähnlich wird das k -te Element von $\Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta})$ als

$$\left(\Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta})\right)_k = \sum_j \Re(D_{jk}^* (d_j - F_{0j})) w_j^2$$

geschrieben. Auf diese Weise wird nach jeder Vorwärtsrechnung für jeweils ein Datum ein Summand zur Systemmatrix und dem Vektor auf der rechten Seite des LGS addiert. Es muss nur noch eine quadratische Matrix mit der Dimension N des Modellraumes gespeichert werden, statt einer $M \times N$ Matrix. Das erfordert wesentlich weniger Speicherbedarf, denn bei typischen Anwendungsbeispielen ist die Dimension M des Datenraumes um das hundert- bis tausendfache größer als N .

2 Auflösungsanalyse

We do not invert data to find „models“, as much as we might like to; we invert data to make inferences about models. There will usually be an infinity of models that fit the data. (Scales und Snieder, 1997)

Das Ergebnis einer Inversion ist unvollständig, wenn das Resultat \vec{m}_{opt} nicht einer Auflösungsanalyse unterzogen wird. Es geht darum, festzustellen wieviel der Information in \vec{m}_{opt} tatsächlich aus den Messdaten gewonnen wurde und welche Eigenschaften durch die A-priori-Information bestimmt sind. Anders ausgedrückt, soll untersucht werden welche anderen Modelle die Messdaten gleich gut erklären würden.

Da bei nichtlinearen Problemen der Misfit χ^2 mehrere lokale Minima besitzen kann, ist es nicht möglich aus seinem lokalen Verlauf alle äquivalenten Modelle zu ermitteln. Aufschluss hierüber erhält man besser durch einen „Grid Search“, der in der Umgebung des als optimal gefundenen Modells χ^2 durchgeführt wird. Außerdem kann die Inversion mit unterschiedlichen Startmodellen oder A-priori-Annahmen mehrmals durchgeführt werden, um festzustellen, ob so unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden können.

In den folgenden Abschnitten beschreibe ich lokale Auflösungsanalysen, die mit den für die Inversion ohnehin berechneten Größen durchgeführt werden können. Auch damit können gut bestimmte Parameter von schlecht bestimmten getrennt werden. Die Analysen führen zu quantitativen Aussagen über die mögliche Modellstreuung. Für $\xi^2 = 0$ lassen sich die für E^2 angestellten Überlegungen auf den Misfit χ^2 und damit allein auf die aus den Messdaten abgeleiteten Aussagen anwenden.

2.1 Eigenwertanalyse

Das optimale Modell \vec{m}_{opt} ist durch ein Minimum von E^2 definiert. Das heißt, es müssen alle in $\delta\vec{m}$ linearen Terme von E^2 verschwinden. Damit ist

$$E^2(\delta\vec{m}) \Big|_{\vec{m}_{\text{opt}}} = \delta\vec{m} \Re(D^\dagger W^T W D + S^T S) \delta\vec{m} + E_{\text{opt}}^2, \quad (\text{IV.5})$$

wobei ich die bezüglich $\delta\vec{m}$ konstanten Terme in

$$E_{\text{opt}}^2 = \underbrace{\vec{\Delta}^* W^T W \vec{\Delta}}_{=\chi^2(\vec{m}_{\text{opt}})} + (\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_{\text{opt}}) S_2^T S_2 (\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_{\text{opt}}) + \sum_{l=3}^4 \vec{m}_{\text{opt}} S_l^T S_l \vec{m}_{\text{opt}} + \vec{q}\vec{q}$$

zusammengefasst. E_{opt} ist der rms-Wert des Restfehlers für \vec{m}_{opt} . Von der Least-Squares-Systemmatrix wird eine Eigenwertanalyse

$$\Re(D^\dagger W^T W D + S^T S) = V \Lambda V^T \quad (\text{IV.6})$$

durchgeführt. Dabei sind die Spaltenvektoren der orthonormalen Matrix V die normierten Eigenvektoren der Systemmatrix. Die Eigenwerte λ_l der Systemmatrix bilden die Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$.

Die Eigenvektoren sind im Sinne des Least-Squares-Problems zueinander orthogonale Kombinationen von Parameteränderungen. Mit

$$\delta\vec{m} = V \vec{x} \quad (\text{IV.7})$$

beschreibt jedes x_k eine dieser Kombinationen. Damit ist

$$E^2 = \vec{x} \Lambda \vec{x} + E_{\text{opt}}^2 \quad \text{und} \quad \Delta E = \sqrt{\vec{x} \Lambda \vec{x} + E_{\text{opt}}^2} - E_{\text{opt}}$$

für eine Abweichung von \vec{m}_{opt} um $V \vec{x}$.

So können einzelne Parameterkombinationen x_k getestet werden. Wird eine Zunahme von E um ein gegebenes ΔE toleriert, so darf \vec{m}_{opt} um

$$\delta\vec{m} = \eta_k V \vec{e}_k \quad \text{mit} \quad \eta_k = \pm \frac{E_{\text{opt}}}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\left(\frac{\Delta E}{E_{\text{opt}}} + 1\right)^2 - 1}$$

variiert werden. Das k -te Element von \vec{e}_k ist 1, alle anderen sind 0. Wird diese Betrachtung für alle $k = 1 \dots N$ durchgeführt, zeigen die $\delta\vec{m}$ die möglichen Streubereiche der Modellparameter.

Während alle x_k den gleichen Zuwachs ΔE des Fehlers verursachen, führen Parameterkombinationen mit kleinen λ_k zu großen Modellstreuungen $\|\delta\vec{m}\|^2 = \eta_l^2 \propto 1/\lambda_k$. Diese Kombinationen sind also schlecht bestimmt und es liegt nahe, sie gar nicht zu variieren. Mit Gl. (IV.6) und Gl. (IV.7) kann die Lösung

$$\vec{x} = \Lambda^{-1}V^T \left(\Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta}) + \vec{S} \right) \quad \text{für} \quad \delta\vec{m} = V\vec{x}$$

des Least-Squares-Gleichungssystems (IV.4) unmittelbar angegeben werden. In dieser Darstellung lassen sich die x_k zu kleinen λ_k auf einfache Weise von der Inversion ausschließen.

2.2 Lineare Auflösungsanalyse nach Wielandt⁴

Soll ein einzelner Modellparameter mit $\delta\vec{m} = \eta_k \vec{e}_k$ getestet werden, so bietet sich ein anderer Weg an, der sich außerdem leicht mit dem für die eigentliche Inversion aufgebauten Algorithmus berechnen lässt.

Es soll ein Parametersatz $\delta\vec{m}$ für ein gegebenes ΔE gefunden werden, bei dem ein ausgewählter Parameter δm_k möglichst groß wird. Dazu wird die Systemmatrix gemäß

$$Q^T Q = \Re(D^\dagger W^T W D + S^T S)$$

zerlegt. Mit $Q = \Lambda^{\frac{1}{2}}V^T$ könnte dies über die Eigenwertanalyse realisiert werden, was aber nicht erforderlich ist, wie aus den weiteren Ausführungen ersichtlich ist. Die Fehlerfunktion (IV.5) wird bei einer Variation $\delta\vec{m} = \eta_k \vec{e}_k$ um $\Delta E^2 = \eta_k^2 (Q^T Q)_{kk}$ wachsen. Dabei wirken sich offenbar nur die Diagonalelemente der Systemmatrix aus. Dies rührt daher, dass alle Parameteränderungen außer δm_k gleich Null sind.

Die Nicht-diagonal-Elemente beschreiben Korrelationen zwischen Parametern, sogenannten „Trade-off“. Wächst die Fehlerfunktion, weil ein Parameter verändert wird, so können in der Regel gleichzeitig die anderen Parameter so optimiert werden, dass die Zunahme von E^2 möglichst klein ausfällt. Erst wenn das berücksichtigt wird, lässt sich erschließen, wie gut ein Parameter wirklich durch die Inversion bestimmt ist.

Der Test wird durchgeführt, indem der zu prüfende Parameter δm_k (das k -te Element des Vektors $\delta\vec{m}$) aus dem Satz der variierten Parameter herausgenommen wird. Mit $\delta\vec{m}$ wird $\delta\vec{m}$ ohne das Element δm_k bezeichnet. Aus der Matrix Q

⁴Nach einer persönlichen Mitteilung von Erhard Wielandt.

wird der Spaltenvektor \vec{q}_k entfernt. Die verbleibende Matrix bezeichne ich mit Q' . Die Fehlerfunktion wird damit als

$$E^2(\delta\vec{m}') \Big|_{\vec{m}_{\text{opt}}} = \delta\vec{m}' Q'^T Q' \delta\vec{m}' + 2\delta\vec{m}' Q'^T \vec{q}_k \delta m_k + \delta m_k \vec{q}_k^T \vec{q}_k \delta m_k + E_{\text{opt}}^2$$

geschrieben.

Während δm_k gegeben sei, soll nun bezüglich der anderen Parameter $\delta\vec{m}'$ optimiert werden. Die Least-Squares-Bedingung führt dann zu

$$Q'^T Q' \delta\vec{m}' = -Q'^T \vec{q}_k \delta m_k. \tag{IV.8}$$

Die Inhomogenität des Gleichungssystems wird jetzt nicht durch die Messdaten gebildet, sondern durch die vorgegebene Parameteränderung. Gl. (IV.8) lässt sich umformen zu

$$Q'^T \underbrace{(Q' \delta\vec{m}' + \vec{q}_k \delta m_k)}_{=Q' \delta\vec{m}'} = \vec{0}. \tag{IV.9}$$

Zusätzlich wird noch die Bedingung

$$\vec{e}_k^T \delta\vec{m}' = 1 \tag{IV.10}$$

gegeben, welche den Parameter δm_k (das k -te Element von $\delta\vec{m}'$) auf eins setzt. Die Gleichungen (IV.9) und (IV.10) lassen sich zu einem Gleichungssystem

$$(Q'^T Q')' \delta\vec{m}'_k = \vec{e}_k \tag{IV.11}$$

zusammenfassen, wobei $(Q'^T Q')'$ aus $Q'^T Q'$ hervorgeht, indem die k -te Zeile gleich null und das k -te Element der k -ten Zeile auf eins gesetzt wird. Damit kann die Systemmatrix für Gl. (IV.11) bequem aus der bereits vorliegenden Systemmatrix der Least-Squares-Aufgabe (IV.4) gewonnen und das Gleichungssystem mit dem vorhandenen Algorithmus gelöst werden. $\delta\vec{m}'_k$ ist die Lösung von Gl. (IV.11). Das k -te Element von $\delta\vec{m}'_k$ ist eins.

Nun wird

$$\eta_k = \pm E_{\text{opt}} \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta E}{E_{\text{opt}}} + 1\right)^2 - 1}{\delta\vec{m}'_k Q'^T Q' \delta\vec{m}'_k}}$$

für ein gegebenes ΔE berechnet. Daraus ergibt sich dann mit $\delta\vec{m}' = \eta_k \delta\vec{m}'_k$ die Veränderung *aller* Modellparameter für den Fall, dass der k -te Parameter δm_k , bis zu einer Zunahme des rms-Fehlers um ΔE , maximal variiert wird. $\delta\vec{m}'$ berücksichtigt damit auch „Trade-off“ zwischen den Modellparametern.

Jackson (1976) hat die Überlegungen dieses und des vorangegangenen Abschnitts unter statistischen Gesichtspunkten vertieft.

2.3 Singular-Value-Decomposition

Wird die volle Matrix D im Speicher gehalten, bietet sich statt der Eigenwertanalyse (IV.6) eine „Singular-Value-Decomposition“ (SVD) an (Press et al., 1992, Abschnitt 2.6). Diese kann als Verallgemeinerung der Eigenwertanalyse auf nicht-quadratische Matrizen verstanden werden.

Für die folgenden Überlegungen gewichte ich die Strafterme in Gl. (IV.2) mit dem Faktor ν . Dies wird es erlauben, zwischen starker Gewichtung der Daten und starker Gewichtung der A-priori-Forderungen zu unterscheiden. Außerdem sollen nur reellwertige Größen vorkommen. Das wird erreicht, indem Real- und Imaginärteil der Daten als unabhängige Werte aufgefasst (was sie tatsächlich sind) und in getrennte Elemente des Vektors \vec{d} eingetragen werden. Damit sind dann auch $D, \vec{\Delta} \in \mathbb{R}$. Das Least-Squares-Gleichungssystem lautet nun

$$(D^T W^T W D + \nu S^T S) \delta \vec{m} = D^T W^T W \vec{\Delta} + \nu \vec{S}. \quad (\text{IV.12})$$

Mit $\vec{x} = S \delta \vec{m}$ wird eine andere Darstellung des Parametersatzes eingeführt. Gl. (IV.12) wird damit zu

$$(S^{-T} D^T W^T W D S^{-1} + \nu \mathbb{1}) \vec{x} = S^{-T} D^T W^T W \vec{\Delta} + \nu S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.13})$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist. Praktisch berechnen lässt sich S durch eine Eigenwertanalyse

$$\left(\sum_{l=1}^4 S_l^T S_l \right) = V_S \Lambda_S V_S^T = S^T S.$$

Die Matrix $\Lambda_S = \text{diag}(s_k)$ enthält die Eigenwerte s_k und die Spaltenvektoren von V_S sind die Eigenvektoren der Matrix $S^T S$ zum jeweiligen Eigenwert. Daraus ergibt sich $S = \Lambda_S^{-\frac{1}{2}} V_S^T$ und $S^{-1} = V_S \Lambda_S^{-\frac{1}{2}}$.

An dieser Stelle wird eine SVD der $(M \times N)$ -Matrix $W D S^{-1}$ durchgeführt. Der Datenvektor \vec{d} hat die Dimension M und N ist die Dimension des Modellvektors $\delta \vec{m}$. Bei der Inversion von ω, p -Spektren ist typischerweise $M \gg N$. Die Matrixzerlegung lautet

$$W D S^{-1} = U \Lambda V^T. \quad (\text{IV.14})$$

Die Spaltenvektoren der $(N \times N)$ Matrix V sind die orthonormalen Eigenvektoren der Matrix $S^{-T} D^T W^T W D S^{-1} = V \Lambda^2 V^T$. Die orthonormalen Eigenvektoren der Matrix $W D S^{-1} S^{-T} D^T W^T = U \Lambda^2 U^T$ bilden die Spalten der $(M \times N)$ Matrix

U. Die Matrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$ enthält die SVD-Eigenwerte⁵ λ_l von WDS^{-1} . Diese werden als „Singular Values“ bezeichnet. Die λ_l^2 mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$ sind die N Eigenwerte der Matrix $S^{-T}D^TW^TWDS^{-1}$. Es sind jeweils $VV^T = V^TV = U^TU = \mathbb{1}$ die $(N \times N)$ -Einheitsmatrix und $UU^T = \text{diag}(\zeta_l)$ mit $\zeta_l = 1$ für $1 \leq l \leq N$ und $\zeta_l = 0$ für $N < l \leq M$.

Mit

$$\vec{x}' = V^T \vec{x} = V^T S \delta \vec{m}, \quad \vec{\Delta}' = U^T W \vec{\Delta} \quad \text{und} \quad \vec{S}' = V^T S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.15})$$

werden neue Darstellungen der Modellparameter, der Daten und des „A-priori-Vektors“ \vec{S}' eingeführt. Diese bringen Gl. (IV.13) in die Diagonalfom

$$(\lambda_k^2 + \nu) x'_k = \lambda_k \Delta'_k + \nu S'_k. \quad (\text{IV.16})$$

Somit ist das $(N \times N)$ Least-Squares-Gleichungssystem (IV.4) in N unabhängige lineare Gleichungen zerfallen.

Die S'_k sind Koeffizienten für eine Darstellung der A-priori-Terme \vec{S}' in der orthogonalen Modell-Basis.

Die dazu führende Transformation (IV.15) lässt sich anschaulich interpretieren. Für jedes nach Gl. (IV.16) bestimmte x'_k ergibt sich eine Modelländerung $\delta \vec{m}_k = S^{-1} \vec{v}_k x'_k$. Die Spaltenvektoren \vec{v}_k der Matrix V beschreiben bezüglich der Daten orthonormale Kombinationen von Modelländerungen. Zu jedem \vec{v}_k gehört ein Eigenwert λ_k , der ein Maß dafür ist, wie gut die Parameterkombination $\delta \vec{m}_k$ über die Misfit-Funktion χ^2 bestimmt werden kann. Die Matrix S gewichtet mit den Suchbereichen und führt A-priori-Korrelationen ein. Auch dadurch wird bestimmt, welche Linearkombinationen von Modellparametern in der Inversion unabhängig voneinander sind.

In ähnlichem Sinn sind die Spaltenvektoren \vec{u}_k der Matrix U zueinander orthonormale Kombinationen von Residuen $\vec{\Delta}'_k = W^{-1} \vec{u}_k \Delta'_k$. Jede dieser Kombinationen erlaubt eine unabhängige Schlußfolgerung für einen Modellparameter x'_k . Formal spielt die Matrix W für die $\vec{\Delta}'_k$ die gleiche Rolle wie die Matrix S für die $\delta \vec{m}_k$. So ist W auch dafür geeignet, Kovarianzen zwischen Messwerten in die Rechnung einzubringen.

Alle Anteile in $W\vec{\Delta}'$, die orthogonal zu den \vec{u}_k sind, können nicht durch die synthetischen Daten angepasst werden und nicht zur Verringerung des Misfits beitragen. Von den M Daten d_l schränken also nur N Linearkombinationen das Erdmodell ein. Es wird nicht die volle Information ausgeschöpft. Deshalb ist es

⁵Die Zerlegung $S^{-T}D^TW^TWDS^{-1} = V\Lambda^2V^T$ ist eine Eigenwertanalyse der gesamten Matrix (ähnlich Abschnitt IV.2.1, S. 105) ausgedrückt mit den SVD-Matrizen. Die Eigenwerte sind die Quadrate der SVD-Eigenwerte. Da die Matrix oft schlecht konditioniert ist, also die Eigenwerte sich um mehrere Größenordnungen unterscheiden, kann die SVD numerisch stabiler sein, als eine Eigenwertanalyse der Systemmatrix.

ungünstig, das Problem von vornherein überbestimmt zu formulieren. Statt dessen sollte die Aufgabe mit $N > M$ gestellt werden. Kombinationen $S\delta\vec{m}$, die orthogonal zu den \vec{v}_k sind, können dann durch die Inversion nicht bestimmt werden. Durch die Strafterme, also die Matrix S , müssen dann M Linearkombinationen aus den N Modellparametern $\delta\vec{m}_k$ für die Inversion ausgewählt werden. Da aber M bei typischen Anwendungen in der Größenordnung 10^4 liegt, lässt sich das Problem in der Regel nur für $N < M$ numerisch handhaben. Trotzdem sollte die Zahl der Modellparameter so groß wie möglich gewählt werden (siehe auch Abschnitt V.2.2, S. 123).

Es ist eine wesentliche Besonderheit dieser Zerlegung, dass die Trennung in Misfit χ^2 und Strafterme ξ^2 erhalten bleibt. Im Gegensatz dazu existiert nach der Eigenwertzerlegung in Abschnitt IV.2.1 (S. 105) nur ein Maß für die Einschränkungen durch alle in der Fehlerfunktion $E^2 = \chi^2 + \xi^2$ enthaltenen Bedingungen zusammen. Der quadratische Misfit, sowie Gl. (IV.5), die Fehlerfunktion am Optimum, lauten in den transformierten Größen geschrieben

$$\chi^2 = \chi_{\text{const}}^2 + \sum_{k=1}^N (\Delta'_k - \lambda_k^2 x'_k)^2 \quad \text{und}$$

$$E^2(\delta\vec{m})|_{\vec{m}_{\text{opt}}} = E_{\text{opt}}^2 + \sum_{k=1}^N x'_k{}^2 (\lambda_k^2 + \nu).$$

Dabei enthält χ_{const}^2 alle Anteile von $W\vec{\Delta}$, die orthogonal zu den \vec{u}_k sind und daher nicht angepasst werden können. Das bestätigt nur ein weiteres Mal, dass erstens Modelländerungen in x_k zu kleinen λ_k wenig zum Misfit beitragen. Zweitens sollte die Dimension N des Modellraumes und damit die Anzahl von zur Verfügung stehenden \vec{u}_k möglichst groß gewählt werden, um den Betrag von χ_{const}^2 klein zu halten.

Die Lösung der Least-Squares-Aufgabe ergibt sich unmittelbar, wenn Gl. (IV.16) in den ursprünglichen Größen formuliert und nach

$$\delta\vec{m} = S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \nu}\right) U^T W \vec{\Delta} + S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{\nu}{\nu + \lambda_k^2}\right) V^T S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.17})$$

aufgelöst wird.

Die Rolle des Faktors ν macht wiederum deutlich, dass die A-priori-Terme für die Kombinationen kleiner oder verschwindender λ_k das Gleichungssystem regulär machen.

2.4 Resolutionsmatrix

Die Darstellung (IV.17) erlaubt eine Betrachtung im Sinne einer Auflösungsmatrix. Zu diesem Zweck führe ich ein Gedankenexperiment durch. Das „wahre“ Modell (in diesem Fall die Modelländerung) sei bekannt. Mit diesem Testmodell $\delta \vec{m}_{\text{test}}$ lassen sich die (synthetischen) Messdaten

$$\vec{d} = \vec{F}_0 + D \delta \vec{m}_{\text{test}} + \vec{n}$$

über die linearisierte Vorwärtsrechnung angeben. Mit \vec{n} wird unbekanntes Noise (Störsignale) dem Testdatensatz überlagert. Wird dieser Testdatensatz invertiert, so erhält man nach Gl. (IV.17) das Modell

$$\begin{aligned} \delta \vec{m} = S^{-1} V \operatorname{diag} \left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 + \nu} \right) V^T S \delta \vec{m}_{\text{test}} + \\ S^{-1} V \operatorname{diag} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \nu} \right) U^T W \vec{n} + \\ S^{-1} V \operatorname{diag} \left(\frac{\nu}{\lambda_k^2 + \nu} \right) V^T S^{-T} \vec{S}. \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Die Matrix

$$R = S^{-1} V \operatorname{diag} \left(\frac{1}{1 + \frac{\nu}{\lambda_k^2}} \right) V^T S, \quad (\text{IV.19})$$

welche das Testmodell $\delta \vec{m}_{\text{test}}$ auf das invertierte Modell $\delta \vec{m}$ abbildet, heißt „Resolutionsmatrix“ oder „Auflösungsmatrix“. Die Spaltenvektoren von V beschreiben Trade-off zwischen Modellparametern. Und Kombinationen \vec{v}_k zu kleinen λ_k werden für $\nu \neq 0$ nur ungenügend auf das invertierte Modell übertragen. Deutlich wird auch die Wirkung der A-priori-Forderungen. Die Matrix S gewichtet und mischt die Parameter zusätzlich.

Für eine starke Gewichtung der Daten ($\nu = 0$) wird R zur Einheitsmatrix, da das Problem formal überbestimmt ist. Allerdings könnten einige der Eigenwerte λ_k verschwinden, so dass auch in diesem Fall eine Reproduktion des Testmodells unmöglich wäre. Je größer ν wird, je stärker also die A-priori-Forderungen gewichtet werden, umso unschärfer wird das Testmodell auf $\delta \vec{m}$ übertragen. Für $\nu \rightarrow \infty$ verschwindet die Auflösungsmatrix.

Mit der Resolutionsmatrix R geschrieben lautet Gl. (IV.18)

$$\delta \vec{m} = R \delta \vec{m}_{\text{test}} + R D^{-1} \vec{n} + S^{-1} V \operatorname{diag} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_k^2}{\nu}} \right) V^T S^{-T} \vec{S}. \quad (\text{IV.20a})$$

Für die Extremfälle verschwindenden und totalen Einflusses der A-priori-Forderungen ergibt das

$$\delta\vec{m} = \delta\vec{m}_{\text{test}} + D^{-1}\vec{n} + 0 \quad \text{für } \nu = 0, \quad (\text{IV.20b})$$

sowie

$$\delta\vec{m} = 0 + 0 + (S^T S)^{-1} \vec{S} \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.20c})$$

Die Inverse von D existiert formal über die SVD als

$$D^{-1} = S^{-1} V \Lambda^{-1} U^T W$$

und wurde hier nur wegen der übersichtlicheren Darstellung eingeführt.

Gl. (IV.20a) macht deutlich, dass das Modell $\delta\vec{m}$ nicht nur eine unscharfe Abbildung des Testmodells $\delta\vec{m}_{\text{test}}$ ist, sondern auch noch konstante Terme aufgrund von Noise und A-priori-Forderungen enthält. Dass sich auch ohne Einfluss der Daten in Gl. (IV.20c) eine endliche Modelländerung ergibt, wird verständlich, wenn man bedenkt, dass das Startmodell \vec{m}_0 auch im Sinne der A-priori-Forderungen nicht optimal sein muss.

Für ungestörte Daten ($\vec{n} = 0$) erhält man bei maximaler Gewichtung der Daten ($\nu = 0$) nach Gl. (IV.20b) eine theoretisch optimale Abbildung des Testmodells. Die Störsignale verursachen jedoch eine Abweichung vom idealen Modell. Diese ist

$$\delta\vec{m}_{\text{test}} - \delta\vec{m} = D^{-1}\vec{n} = S^{-1} V \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) U^T W \vec{n}$$

oder mit $\vec{x}'_{\text{test}} = V^T S \delta\vec{m}_{\text{test}}$ und $\vec{n}' = U^T W \vec{n}$ als

$$x'_k - x'_{\text{test } k} = \frac{1}{\lambda_k} n'_k \quad (\text{IV.21a})$$

in den transformierten Größen ausgedrückt. Parameterkombinationen zu kleinen Eigenwerten werden also überproportional vom Noise gestört. Für den Testfall lautet der quadratische Misfit

$$\chi^2 = \left\| W (\vec{d} - \vec{F}) \right\|^2 = \left\| W (D (\delta\vec{m}_{\text{test}} - \delta\vec{m}) + \vec{n}) \right\|^2 = 4 \left\| W \vec{n} \right\|^2$$

und in der transformierten Darstellung

$$= 4 \left\| U \vec{n}' \right\|^2 = 4 \sum_{k=1}^N n'^2_k. \quad (\text{IV.21b})$$

Die SVD-Matrix (IV.14) hängt nicht von den Daten \vec{d} oder den Startresiduen $\vec{\Delta}$ ab. Sie ist nur über die Vorgaben durch die Daten-Gewichtung und die Strafterme sowie durch die partiellen Ableitungen bestimmt. Letztere ändern sich von einem Inversionsschritt zum nächsten. Damit ändern sich auch die \vec{v}_k und \vec{u}_k . Ebenso können Parameter mit anfangs kleinen Eigenwerten nach einigen Iterationen ein größeres λ_k haben. Es bietet sich an, die Lösung des Least-Squares-Gleichungssystems in der Form (IV.17) zu berechnen. Analog zu den Überlegungen in Abschnitt IV.1.4.2 (S. 100) und Abschnitt V.2.2 (S. 123) lassen sich dann Parameter mit kleinen λ_k anfangs von der Inversion ausschließen und später, wenn der Eigenwert relativ zu den anderen Eigenwerten gewachsen ist, wieder in die Inversion aufnehmen. Dies ist insbesondere günstig, weil Störsignale \vec{n} , die parallel zu \vec{u}_k mit kleinen λ_k auftreten, nicht mehr als anderes Noise zum Misfit beitragen, aber zu erheblich größeren Abweichungen vom Idealmodell führen, wie aus Gl. (IV.21) ersichtlich ist.

Kapitel V

Praktische Aspekte zur Durchführung der Inversion

1 Behandlung der Datensätze

1.1 Zusammensetzen von Einzelschüssen

Für eine erfolgreiche Dispersionsanalyse sollte der Datensatz viele Seismogramme aus einem möglichst großen Offset-Bereich mit möglichst kleinen Geophonabständen enthalten (Abschnitte III.3.1 und III.3.2). Da bei einer Feldmessung nur eine endliche Anzahl von Geophonen zur Verfügung steht, widersprechen sich die Forderungen nach einer möglichst langen Auslage und nach möglichst kleinen Offset-Intervallen. Um diesem Dilemma zu entgehen, besteht beispielsweise die Möglichkeit die Geophone nicht gleichabständig zu stecken (Abschnitt III.3.3). Eine andere Möglichkeit besteht darin, mehrere Einzelschüsse zu kombinieren. Das Umsetzen der Geophone ist wesentlich aufwendiger als das Versetzen des Vorschlaghammers. Daher wird das Wellenfeld an mehreren Schusspunkten angeregt und die Einzeldatensätze entsprechend der *relativen* Offsets zu einem einzigen Datensatz kombiniert.

Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, wenn das Medium lateral homogen ist. Für die Dispersionsanalyse muss das ohnehin vorausgesetzt werden. Haben die Wellenformen innerhalb eines Einzelschusses eine einheitliche Phasenbeziehung über die ganze Auslage (laterale Homogenität), dann ist nicht zu erwarten, dass diese sich durch das Versetzen des Schusspunktes um einen Bruchteil der Auslagenlänge verändert, falls nicht kleinräumige Heterogenität in unmittelbarer Nähe der Quelle auftritt. Ein Beispiel für diese Ausnahme ist der Datensatz RIE-

DENBERG (Abschnitt VI.3.1, S. 169). Bei den anderen Datensätzen in Kapitel VI habe ich diese Technik mit Erfolg angewendet. Allerdings haben die Störsignale aus externen Quellen keine definierte Phasenbeziehung zwischen zwei Einzelschüssen. Auf diese Weise kann trotz der Verdichtung Aliasing entsprechend der ursprünglichen Geophon-Distanz auftreten (Abschnitt III.4.2.2, S. 92).

Die Einzelschüsse können mit deutlich unterschiedlicher Amplitude angeregt sein. Das führt im zusammengesetzten Datensatz zu unerwünschten Periodizitäten. Daher muss nachträglich für jeden Einzelschuss ein Faktor bestimmt werden, der die Seismogramme so skaliert, dass die Energieabnahme über den Offset möglichst gleichmäßig verläuft. Für die in Kapitel VI vorgestellten Datensätze habe ich

$$\int \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(E(r) r^\kappa \right) \right]^2 dr$$

minimiert, wobei $E(r)$ die im Seismogramm für den Offset r enthaltene Gesamtenergie angibt. Der Parameter κ wurde jeweils empirisch so gewählt, dass der Faktor die geometrisch bedingte und durch intrinsische Dämpfung verursachte Amplitudenabnahme ausgleicht. Für ein ideal elastisches Medium wäre $\kappa = 1$ zu wählen.

1.2 Impulsantwort des Mess-Systems

Die gemessenen Seismogramme und damit die daraus berechneten ω, p -Spektren enthalten nicht nur die Impulsantwort des seismischen Mediums („Greensche Funktion“), sondern auch die Impulsantwort des Mess-Systems. Darin enthalten sind die Übertragungseigenschaften der Geophone und der Registriereinheit, aber auch der zeitliche Verlauf der Einwirkung der seismischen Quelle. Das Wavelet mit dem das Wellenfeld angeregt wird, hängt von Quelle und Medium ab und kann daher nicht unabhängig von den Messdaten bestimmt werden.

Soll der Misfit zwischen den komplexen Spektralkoeffizienten berechnet werden, so ist zu berücksichtigen, dass die numerisch berechnete Lösung der elastischen Wellengleichung lediglich die Impulsantwort des Mediums darstellt. Das endgültige synthetische Spektrum ergibt sich erst durch Multiplikation mit den Fourier-Koeffizienten $S(\omega)$ der Impulsantwort des Mess-Systems. Letztere nenne ich im Folgenden „Quell-Wavelet“.

Die Eigenschaften des Mess-Systems können in der Inversion auf zweierlei Weise berücksichtigt werden. Einerseits ist es möglich das „Quell-Wavelet“ aus den Daten zu bestimmen. Andererseits können ω, p -Spektrum und Greensche Funktion auf den gleichen Wert normiert werden.

1.2.1 Bestimmung eines „Quell-Wavelets“

Da $S(\omega)$ für alle Seismogramme und somit auch für alle Slowness-Werte des ω, p -Spektrums gleich sein muss, kann das „Quell-Wavelet“ aus den Daten bestimmt werden. Das Least-Squares-Kriterium

$$E^2 = \sum_{i,j} \left| w_{ij} \left(\tilde{G}(\omega_i, p_j) - S(\omega_i) G_s(\omega_i, p_j) \right) \right|^2 \stackrel{!}{=} \min$$

lässt sich in diesem Fall direkt auflösen zu

$$S(\omega_i) = \frac{\sum_j w_{ij}^2 G_s^*(\omega_i, p_j) \tilde{G}(\omega_i, p_j)}{\sum_l w_{il}^2 G_s^*(\omega_i, p_l) G_s(\omega_i, p_l)}. \quad (\text{V.1})$$

Dabei sind w_{ij} die für die Daten festgelegten Gewichte (Abschnitt V.1.4.1), $\tilde{G}(\omega_i, p_j)$ sind die für die gemessenen Seismogramme berechneten ω, p -Koeffizienten und $G_s(\omega_i, p_j)$ sind die Koeffizienten der synthetisch berechneten Greenschen Funktion.

Für die synthetisch berechneten Wellenformen in Abschnitt VI.2 wurde das „Quell-Wavelet“ auf diese Weise bestimmt. Beispiele sind in den Abbildungen VI.11 (S. 146), VI.20 (S. 158) und VI.26 (S. 166) dargestellt.

1.2.2 Normierung der Daten

Innerhalb einer Inversion kann die Verwendung des Least-Squares-Kriteriums zur Behandlung der Impulsantwort des Mess-Systems nachteilig sein. Falls die synthetischen Daten zu Beginn der Inversion noch schlecht zu den Messwerten passen, ist das Least-Squares-Kriterium durch $S(\omega) \rightarrow 0$ am besten erfüllt. Dann verschwinden aber auch die partiellen Ableitungen und eine Inversion ist nicht mehr möglich.

In diesem Fall ist eine Normierung der Daten und der Synthetics einer Bestimmung des „Quell-Wavelets“ vorzuziehen. Gemäß

$$G'(\omega_j, p_l) = \frac{G(\omega_j, p_l)}{\sum_k w_{kl} G(\omega_k, p_l)}$$

werden das ω, p -Spektrum der Messwerte und die synthetisch berechnete Greensche Funktion jeweils so normiert, dass das gewichtete Mittel der Koeffizienten zu einer Frequenz gleich reell eins wird. In ähnlicher Weise kann statt der Laufzeiten die Differenz zur mittleren Laufzeit benutzt werden, um eine konstante Filterlaufzeit oder sonstige Verzögerung (beispielsweise des Triggers) zu berücksichtigen.

Zu beachten ist, dass die Normierung die effektiven Gewichte verändert. Dies muss bei der Wahl der Gewichte w_{kl} berücksichtigt werden.

1.3 Manipulation der ω, p -Spektren

Laufzeiten und Dispersionskurven sind ein konzentrierter Extrakt des Wellenfeldes unter einem jeweils sehr speziellen Aspekt. Ihre Inversion verläuft in der Regel wesentlich stabiler als die Inversion von ω, p -Spektren oder Wellenformen. Das liegt daran, dass bei der Bildung des Extrakts bereits Mehrdeutigkeiten und viele Störsignale eliminiert wurden. Dafür geben sie jeweils nur einen kleinen Teil der Information im Wellenfeld wieder.

So wie Dispersionskurven als Extrakt aus dem ω, p -Spektrum verstanden werden können, lassen sich die Daten in vielfältiger Weise manipulieren, um die Stabilität der Inversion zu erhöhen. Man könnte beispielsweise darauf verzichten, komplexe Entwicklungskoeffizienten anzupassen und das Ziel der Inversion wie folgt formulieren: Die großen Amplituden sollen in den synthetischen Daten bei den gleichen ω, p -Werten auftreten, wie in die Messdaten.

Dazu können aus einer Dispersionsanalyse Kurven abgelesen werden, auf denen das ω, p -Spektrum ein Maximum hat. Daraus wird künstlich eine ω, p -Amplitudenfunktion $A(\omega, p)$ erzeugt, die ein Maximum auf den abgelesenen Kurven hat und zu anderen ω, p -Werten hin abklingt. Das synthetische Spektrum der Greenschen Funktion muss dann vor der Berechnung des Misfits ebenfalls entsprechend manipuliert werden (Betragsbildung, Normierung).

Dieses Vorgehen ist hilfreich, wenn die Spektren der Daten starke Artefakte enthalten, die zwar identifiziert werden können, bei einer formalen Misfit-Berechnung jedoch stören. Im Vergleich zur Anpassung von Dispersionskurven hat die beschriebene Vorgehensweise immer noch den Vorteil, dass eine Zuordnung zu Normalmoden weiterhin entfällt.

Die in Abschnitt VI.4 (S. 196) beschriebenen numerischen Experimente wurden auf diese Weise durchgeführt.

1.4 Joint-Inversion

Es ist anzustreben, möglichst viel vorhandene Information in einer Inversion auszuschöpfen. Für die in Kapitel VI vorgestellten Datensätze wurden die Zeiten der Ersteinsätze sowie das ω, p -Spektrum des Wellenfeldes gleichzeitig invertiert. Die Ersteinsätze haben kleine Amplituden und werden im ω, p -Spektrum bei kleinen Langsamkeiten abgebildet, wo sie besonders von Störsignalen betroffen sind (Abschnitt III.4.2.2, S. 92). Aus den Seismogrammen abgelesen, wird die in den Laufzeiten enthaltene, eindeutige Information über v_p für die Inversion besser genutzt. Dadurch ist es möglich in einer einzigen Inversion $v_p(z)$ und $v_s(z)$ gleichzeitig zu bestimmen. Dann sind auch sinnvolle Aussagen über die Poisson-Zahl möglich, die beispielsweise ein wichtiger Indikator für die Wassersättigung ist.

In gleicher Weise könnten weitere Datensätze in die Inversion aufgenommen werden, um deren Aussagekraft zu erhöhen. Verschiedene Quellen können in der Lage sein unterschiedliche Moden anzuregen. Ebenso zeigt die Radialkomponente der Verschiebung oft andere Moden als die Vertikalkomponente. Lovewellen können andere Sensitivitäten für die Struktur aufweisen als Rayleigh-Wellen. In einigen Fällen wurden im Weitwinkelbereich bereits im Einzelschuss deutliche Reflexionen beobachtet, die Informationen über Diskontinuitäten enthalten¹. Die Inversion von Wellenformen ermöglicht es, stärkeres Gewicht auf amplitudenschwache Raumwellen zu legen. Jedenfalls ist es sinnvoll all diese Datensätze oder unterschiedlichen Darstellungen eines Datensatzes gemeinsam zu invertieren und damit die Modellparameter stärker einzuschränken, anstatt für jeden Datensatz eine eigene Inversion durchzuführen und die Ergebnisse zu mitteln.

1.4.1 Gewichtung der Daten

Die Definition des gewichteten quadratischen Misfits in Gl. (II.43) auf Seite 57 garantiert die Kombinierbarkeit beliebiger Datenwerte, da die Summanden durch die Faktoren w_j dimensionslos werden. In diesem Sinne besteht kein prinzipieller Unterschied zwischen der Kombination von Laufzeitdaten und Spektralkoeffizienten oder der Kombination mehrerer Spektralkoeffizienten. Dass der Laufzeit-Misfit und der Misfit aus dem ω, p -Spektrum relativ zueinander gewichtet werden müssen, ist offensichtlich. Ähnliche Überlegungen müssen jedoch auch für die Gewichtung der Spektralkoeffizienten untereinander angestellt werden.

Sind die für die Messwerte geschätzten Toleranzen σ_j in Gl. (II.42) auf Seite 56 für alle Werte d_j gleich, so wird der Inversionsalgorithmus zunächst bestrebt sein, die Spektralkoeffizienten größter Amplitude optimal anzupassen. Dies geschieht auf Kosten von Spektralbereichen kleinerer Amplitude, solange weniger Modellparameter als signifikante Daten zur Verfügung stehen (Abschnitt IV.2.3, S. 108). Das ist formal korrekt, da in Gl. (II.42) nur das Signal-/Stör-Verhältnis zur Gewichtung eingeht und dieses ist für die Koeffizienten großer Amplituden am größten.

Intuitiv wird man aber auf amplitudenschwache Koeffizienten, die eine unabhängige Aussage über das Erdmodell zulassen, nicht verzichten und sie ähnlich gewichten wollen, wie die Spektralkoeffizienten großer Amplitude. Daher habe ich die σ_j in Gl. (II.43) durch die Gewichte w_j ersetzt. Im Gegensatz zu den einigermaßen objektiv aus den Bedingungen der Messung ableitbaren Toleranzen

¹Dies ist beispielsweise im Datensatz RIEDHEIM 1997 (Abschnitt VI.3.1, S. 170) der Fall, wird hier aber nicht gezeigt. Es war auf diese Weise möglich die Mergel der Würm Grundmoräne von den Beckentonnen abzugrenzen, die in den Ersteinsätzen überschossen sind (Hecht, 2000). Auch Sain und Reddy (1997) beschreiben den Nutzen von überkritischen Reflexionen zur Abgrenzung überschosser Schichten.

σ_j unterliegt diese Gewichtung der rein subjektiven Einschätzung des interpretierenden Geophysikers. Die Wahl der w_j sollte aber so erfolgen, dass dem Wert $\chi^2 = 1$ in Gl. (II.43) eine sinnvolle Bedeutung zukommt.

Bei der Berechnung der in Kapitel VI vorgestellten Beispiele habe ich für die Laufzeitwerte

$$w_j = \sqrt{1-\zeta} \frac{1}{\sigma_{tt}} \frac{\gamma_j}{\sqrt{\sum_j \gamma_j^2}} \quad \text{und} \quad w_j = \sqrt{\zeta} \frac{1}{\sigma_{\text{green}}} \frac{\gamma_j}{\sqrt{\sum_j \gamma_j^2}}$$

für die Spektralkoeffizienten gewählt. Die Summe erstreckt sich dabei jeweils nur über den Teildatensatz. Für beide Datensätze werden mittlere Toleranzen σ_{tt} (Laufzeiten) und σ_{green} (Spektralkoeffizienten) gegeben. Die $\gamma_j \in [1, 0]$ bestimmen eine relative Gewichtung zwischen den einzelnen Werten und sind im einfachsten Fall alle $\gamma_j = 1$. Die Normierung sorgt dafür, dass die effektive Toleranz für kleine γ_j vergrößert und für $\gamma_j \rightarrow 1$ verkleinert wird. Wollte man gestörte Werte (zum Beispiel durch Aliasing) gezielt ausblenden, wäre es angemessen, für diese die Toleranz zu vergrößern ohne die Normierung der anderen Werte zu beeinflussen.

Die so berechneten Gewichtungsfaktoren w_j geben dem Misfit der Einzeldatensätze bereits eine sinnvolle Bedeutung. Für $\chi^2 = 1$ wird die Toleranz σ für jeden Messwert im gewichteten Mittel ausgeschöpft. Der Faktor $\zeta \in [1, 0]$ bestimmt die relative Gewichtung der Laufzeitwerte zu den Spektralkoeffizienten im Gesamtmissfit. Die Auflösungsanalysen in Abschnitt VI.2 wurden für $\zeta = 0.5$ berechnet.

Es ist sinnvoll, in einem Inversionsprogramm alle eingelesenen Daten und alle neu berechneten Synthetics sofort mit den Gewichten w_j zu multiplizieren. Im Inversionsalgorithmus treten Daten und Synthetics nur gewichtet auf. Da die Gewichte aber im Gleichungssystem Gl. (IV.4) (S. 103) an zwei Stellen auftreten und auch zur Berücksichtigung des Quell-Wavelets (Abschnitt V.1.2) benötigt werden, lassen sich auf diese Weise Multiplikationen sparen. Die Gewichte in das Least-Squares-Gleichungssystem einzubringen oder von vornherein mit entsprechend skalierten Daten zu arbeiten, ist vollkommen äquivalent.

2 Behandlung der Modellparameter

2.1 Anforderungen an eine Modellparametrisierung

An Grenzflächen zwischen zwei Materialien (beispielsweise am anstehenden Festgestein) ändern sich die Materialeigenschaften in der Regel sprunghaft. Insbesondere Lockersedimente weisen aber oft eine ausgeprägte, aber stetige Variation ihrer Materialparameter auf. Diese können am besten durch einen funktionalen Zusammenhang wie $v_p(\vec{r})$, oder in einem eindimensionalen Modell $v_p(z)$,

sinnvoll beschrieben werden. Für eine numerische Behandlung ist es notwendig, die Materialeigenschaften durch eine endliche Anzahl diskreter Parameter zu charakterisieren. Man wählt daher immer eine Entwicklung der Materialparameter ($v_p(z)$, $v_s(z)$, $\rho(z)$, ...) nach N Basisfunktionen $b_i(z)$ in der Form

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i b_i(z).$$

Dabei steht $p(z)$ stellvertretend für einen Materialparameter. Die Materialeigenschaften werden so durch den diskreten Satz der N Koeffizienten p_i beschrieben.

In der Regel ist es notwendig und sinnvoll, eine Diskontinuität erster oder zweiter Ordnung zuzulassen, beispielsweise um die Oberkante anstehenden Festgesteins abzubilden. Dann muss die Parametrisierung in mehrere Sektionen i unterteilt werden, die jeweils das Intervall $[z_{i-1}, z_i)$ zwischen zwei möglichen Diskontinuitäten beschreiben. Es ist dann sinnvoll, die Parametrisierung

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i b_i(x)$$

innerhalb des Intervalls mit einem dimensionslosen Parameter

$$x(z) = \frac{2z - (z_{i-1} + z_i)}{z_i - z_{i-1}} \quad \text{mit } z \in [z_{i-1}, z_i) \quad \text{und damit } x \in [-1, 1)$$

zu beschreiben, der sich auf die Größe des Intervalls bezieht. Eine Änderung der Intervallgrenzen hat dann keine Änderung des durchlaufenen Wertebereichs zur Folge. Auf diese Weise wird die Information über die Tiefe von Diskontinuitäten besser von den elastischen Parametern entkoppelt (Abschnitt V.2.3).

Ferner ist es vorteilhaft, wenn die Basisfunktionen auf diesem Intervall orthonormiert sind, also

$$\int_{-1}^{+1} b_k(x) b_l(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

gilt. Die in Abschnitt IV.1.4 (S. 99) eingeführten Strafterme können für eine parametrisierte Modellfunktion $p(x)$ über die mittlere quadratische Abweichung von

der Vorgabe $p(x) = \alpha q(x)$ formuliert werden. Mit

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |p(x) - \alpha q(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} (p_k - \alpha q_k) \underbrace{\left[\int_{-1}^{+1} b_k(x) b_l(x) dx \right]}_{=H_{kl}} (p_l - \alpha q_l) \\ &= \frac{1}{2} |S(\vec{p} - \alpha \vec{q})|^2 \quad \text{und } H = S^T S \end{aligned}$$

führt das auf eine quadratische Form in den diskreten Modellparametern. Für orthonormierte Basisfunktionen wird H und damit auch S zur Einheitsmatrix und damit

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (p_k - \alpha q_k)^2.$$

Außerdem ist darauf zu achten, dass sich die Basisfunktionen in dem Sinne unterscheiden, dass jeweils nur eine Funktion zum Mittelwert, zum mittleren Gradienten und zur mittleren Krümmung beiträgt. Häufig besteht nur eine Sensitivität für den Mittelwert eines Parameters. Kann dieser auch durch Koeffizienten p_l höherer Ordnung verändert werden, so weist das Inversionsergebnis fast zwangsläufig übertriebene Parametervariationen auf. Ich fordere daher

$$\int_{-1}^{+1} b_l^{(n)}(x) dx = 0 \quad \forall n \neq l,$$

wobei $b_l^{(n)}(x)$ die n -te Ableitung von $b_l(x)$ nach x ist.

Alle diese Forderungen werden beispielsweise von orthonormierten Legendre-Polynomen

$$b_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \quad \text{und} \quad b_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)$$

bis zur zweiten Ordnung erfüllt. Gegenüber anderen Basisfunktionen haben Polynome zweiter Ordnung den Vorteil, dass sie sich einfach analytisch auflösen lassen. Das ist zur flexiblen Bestimmung von Schichtmächtigkeiten hilfreich, wenn das Modell für Matrix-Methoden (Abschnitt II.3.4, S. 47) in homogene Schichten zerlegt werden muss.

Eine sehr spezielle Klasse von Basisfunktionen sind Boxcar-Funktionen

$$b_l(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_l \leq z < z_{l+1} \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Darstellung homogener Schichten. Diese erfüllen ebenfalls alle genannten Voraussetzungen. Sie bieten außerdem den Vorzug, dass jeder Parametrisierungs-Koeffizient p_l dieselbe physikalische Einheit hat, wie der Materialparameter $p(z)$. Sollen kontinuierliche Materialveränderungen durch eine Näherung mit homogenen Schichten dargestellt werden, muss das Modell jedoch in sehr viele Teilintervalle zerlegt werden.

2.2 Vor- und Nachteile einer strikten Parametrisierung

Müssen die partiellen Ableitungen über Differenzenquotienten genähert werden (Abschnitt IV.1.3, S. 98), so hängt der Rechenaufwand wesentlich von der Anzahl der freien Inversionsparameter ab. Unter diesem Gesichtspunkt ist es günstig, möglichst wenige freie Inversionsparameter zu benutzen. Daher benutze ich für die Beispiele in Kapitel VI eine Parametrisierung nach Polynomen maximal zweiter Ordnung (Abschnitt A.2.2, S. 218). Die Parametrisierung erzwingt dann gleichzeitig die „Glattheit“ der Modellkurven. Damit wird die Forderung erfüllt, dass das Erdmodell nicht mehr Struktur aufweisen soll als nötig.

Diese Eingrenzung der Modellbeschreibung auf einen niedrigdimensionalen Raum schränkt auch die Variabilität der synthetischen Daten ein. Und dies wiederum beschränkt die mögliche Misfit-Reduktion, die durch einen physikalischen Parameter erreicht werden kann, da diese auch von der Anzahl der für eine Linearkombination zur Verfügung stehenden partiellen Ableitungen abhängt (Abschnitt IV.2.3, S. 108). Praktisch führt das zu folgendem Effekt: Die Modellparametrisierung lässt nicht den Kurvenverlauf für $v_p(z)$ und $v_s(z)$ zu, der für eine optimale Anpassung notwendig wäre. Weil auch die Dichte einen Einfluss auf die Lage der Moden hat, kann der Misfit durch eine geeignete Wahl von $\rho(z)$ weiter gesenkt werden. Da aber die Sensitivitäten für die Dichte viel kleiner sind, führt dies zu unsinnig großen Dichteänderungen. Eine Misfit-Reduktion gleicher Größe könnte durch kleine Änderungen der Geschwindigkeiten erreicht werden, falls es die zur Verfügung stehenden Kurvenklassen zulassen würden.

Vor einer Optimierung von $\rho(z)$ muss also die maximale Misfit-Reduktion ausgeschöpft werden, die durch eine geeignete Wahl der Geschwindigkeiten möglich ist. Das erfordert aber eine Parametrisierung, die weit mehr Kurvenklassen zulässt als nur Polynome bis zur zweiten Ordnung.

2.3 Die Tiefe von Diskontinuitäten als Inversionsparameter

Die Tiefe z ist keine Materialeigenschaft. Sie ist ein Funktionsparameter zur Beschreibung der räumlichen Veränderlichkeit der Materialeigenschaften. Trotzdem wird die Koordinate z häufig als Inversionsparameter benutzt. Die Ursache dafür liegt in der Form der gewählten Parametrisierung. Für eine Parametrisierung tritt die Tiefen-Koordinate in Form von Intervallgrenzen für die Basisfunktionen auf. Für homogene Schichten sind das die Grenzflächen zwischen den Schichten. Für die in Kapitel VI gewählte Parametrisierung (Abschnitt A.2.2, S. 218) sind das die Grenzen der einzelnen Polynom-Sektionen. Diese Grenzen sind häufig Diskontinuitäten erster Ordnung und stellen damit die Grenze zwischen zwei Materialien mit stark unterschiedlichen Eigenschaften dar.

Besonders für ein Modell aus vielen dünnen homogenen Schichten ist es einleuchtend, dass ein und dieselbe Veränderung des effektiven Modells sowohl durch eine Änderung der Parameterwerte in den Schichten, wie auch durch eine Verschiebung der Schichtgrenzen herbeigeführt werden kann. Formal führt das dazu, dass der Satz der partiellen Ableitungen linear abhängig wird. Die Matrix des Least-Squares-Gleichungssystems hat dann eine große Konditionszahl. Dadurch wird das gesamte Problem instabil. Praktisch kann das dazu führen, dass die stabilisierte Inversion immer zwischen zwei Modellen „hin und her schaukelt“. Der Inversionsparameter „Tiefe“ ist daher nur mit Vorsicht zu gebrauchen.

Trotzdem wird man immer wieder eine z -Koordinate als Inversionsparameter benutzen. Beispielsweise kann die Tiefe einer Diskontinuität erster Ordnung im Material durchaus als Materialeigenschaft verstanden werden. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass die Koordinate z zwar als Funktionsparameter für alle physikalischen Materialeigenschaften auftritt, deshalb aber noch lange nicht alle Materialeigenschaften in derselben Tiefe eine Diskontinuität aufweisen müssen. Ein Beispiel: Die Kompressionswellen-Geschwindigkeit hängt stark nichtlinear von der Wassersättigung ab (Schön, 1998). Geht die Wassersättigung in einer bestimmten Tiefe gegen 100%, so kommt das in Lockersedimenten einer Diskontinuität in $v_p(z)$ gleich. Die Scherwellen-Geschwindigkeit kann davon nahezu unberührt bleiben. Leider wird das manchmal sogar bei der Inversion physikalisch vollkommen verschiedener Eigenschaften übersehen².

²„Completely different physical data can also be integrated into a joint inversion if, at least, the measured data are influenced by a subset of the underground parameters. For example, when using seismic and geoelectrical data the common parameter in both methods is the depth.“ (Hering et al., 1995)

2.4 Wahl der Inversionsparameter

Die Materialeigenschaften können durch unterschiedliche, aber äquivalente Parameter beschrieben werden, beispielsweise durch komplexe seismische Geschwindigkeiten und die Dichte einerseits oder andererseits durch komplexe elastische Moduln und die Dichte. Formale Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungen diskutiere ich in Abschnitt II.2.2.3 (S. 40).

Steht bereits bei der Inversion fest, welche Parameter für eine weitere, lithologische Interpretation des Ergebnismodells benutzt werden sollen, so ist es günstig, diese auch als Inversionsparameter einzusetzen. Soll beispielsweise das Poisson-Verhältnis bestimmt werden, so wird in der Inversion besser nach diesem und einer der Geschwindigkeiten parametrisiert. Insbesondere sollte die Glattheitsbedingung gleich auf das Poisson-Verhältnis angewendet werden. Werden hingegen zunächst möglichst glatte Modellkurven für v_s und v_p bestimmt, so kann das daraus berechnete Poisson-Verhältnis durchaus eine ausgeprägte, aber nicht signifikante Tiefen-Abhängigkeit aufweisen.

2.5 Einschränkungen durch Ungleichungen

Für alle Modellparameter gibt es in der Regel Wertebereiche, die als „physikalisch sinnvoll“ definiert sind. Für die elastischen Eigenschaften diskutiere ich das ausführlich in Abschnitt II.2. Es kann für jeden Parameter eine obere Grenze und eine untere Grenze für den sinnvollen Wertebereich angegeben werden. Dabei können sich Parameter auch gegenseitig einschränken, zum Beispiel durch die Forderung $v_p > 1.5 v_s$.

Die daraus entstehenden Nebenbedingungen für die Inversionsparameter werden durch Ungleichungen ausgedrückt. Diese lassen sich nur schwer rein formal in den Least-Squares-Algorithmus integrieren. Der praktikabelste Weg besteht darin, die Bedingungen nach jedem Inversionsschritt zu prüfen, bevor eine Modelländerung akzeptiert wird. Verletzt ein Parameter die Bedingungen, wird er für den aktuellen Iterationsschritt von der Inversion ausgeschlossen. Dies kann durch Manipulation des Gleichungssystems geschehen, in ähnlicher Weise wie in Abschnitt IV.2.2 (S. 106) beschrieben. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass das Inversionsergebnis physikalisch sinnvoll ist. Anschließend muss nur das Gleichungssystem ein weiteres Mal gelöst werden. Die partiellen Ableitungen sind nicht neu zu berechnen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein weiterer praktischer Aspekt zur Verwendung der z -Koordinate als Inversionsparameter. Sollen die Tiefen der Intervallgrenzen für die Basisfunktionen mit invertiert werden, so ist es sinnvoller diese als Schichtdicken oder Dicken von Sektionen zu parametrisieren, anstatt als absolute Tiefen. Die Forderung, dass ein Parameter positiv sein muss (Dicke),

ist im Algorithmus leichter zu handhaben als der Vergleich zweier Parameter (z -Koordinaten). Werden ferner Basisfunktionen mit einem auf den Definitionsbereich $[-1, 1)$ normierten Parameter benutzt (Abschnitt V.2.1), so kann eine Änderung der Schichtdicke keine Verletzung der Ungleichung für den Wert des Parameters verursachen.

2.6 Q , pragmatisch betrachtet

In Abschnitt II.2.1.1 (S. 30) habe ich die Güte Q als viskoelastischen Materialparameter eingeführt. Doch bereits in Abschnitt II.2.1.4 (S. 36) wird die Verwendung eines voll viskoelastischen Materialgesetzes für die Inversion in Frage gestellt. Der Hintergrund dafür ist, dass viskoelastische Dämpfung zu intrinsischer Dispersion führt. Das heißt, in einem solchen Medium sind die seismischen Wellengeschwindigkeiten auch im homogenen Vollraum von der Frequenz abhängig. In flachseismischen Experimenten trifft man oft stark dämpfende Medien an, so dass auch im schmalen Frequenzband der seismischen Registrierung eine intrinsische Dispersion beobachtbar sein müsste. Für $Q = 10$ beträgt die Geschwindigkeits-Dispersion über eine Frequenz-Dekade gut 7%.

Die Frequenz-Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen wird jedoch zur Ermittlung der räumlichen Struktur des Mediums benutzt. Unabhängig davon zugleich ein viskoelastisches (Frequenz-abhängiges) Materialgesetz zu ermitteln, ist aussichtslos. Dazu müssten gleichzeitig sehr viele Moden mit großer Genauigkeit beobachtet werden.

In Abb. V.1 ist das Ergebnis eines numerischen Experiments dargestellt. Für einen homogenen Halbraum mit $v_p = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_s = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\rho = 1.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $Q_p = 30$ und $Q_s = 20$ und der Rheologie eines Standard-Linear-Solid (SLS, Abschnitt II.2.1.1, S. 30) wurde eine Greensche Funktion bis 100Hz berechnet. Die Relaxation des SLS lag bei 800Hz. Damit ist $Q \propto \omega^{-1}$ im berechneten Frequenzbereich. Die angegebenen Parameter gelten bei 80Hz. Dieses Spektrum habe ich als Datensatz invertiert. Dabei wurde eine vollkommen Frequenz-unabhängige (also akausale) Rheologie zur Anpassung benutzt. Dementsprechend weist das Ergebnismodell in Abb. V.1 eine *scheinbare* Tiefen-Struktur auf. Die Streuungen der seismischen Geschwindigkeiten liegen im Bereich der Toleranzen der Inversionen realer Daten (beispielsweise Abb. VI.3, S. 138). Die ermittelte Q -Struktur ist jedoch irreführend, wenn auch in diesem Beispiel sichtlich überinterpretiert.

Ich ziehe es daher vor, die Güte eher als qualitatives Maß für die intrinsische Dämpfung zu behandeln, denn als exakten Materialparameter. Bestehen Zweifel am Einfluss der gewählten Rheologie auf die ermittelte Struktur, so sollte die Inversion für die beiden Extremfälle $\gamma = 1$ und $\gamma = -1$ mit $Q(\omega) = Q_{\text{ref}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \right)^\gamma$ durchgeführt werden (Abschnitt II.2.2.2, S. 39). Die Unterschiede zwischen den

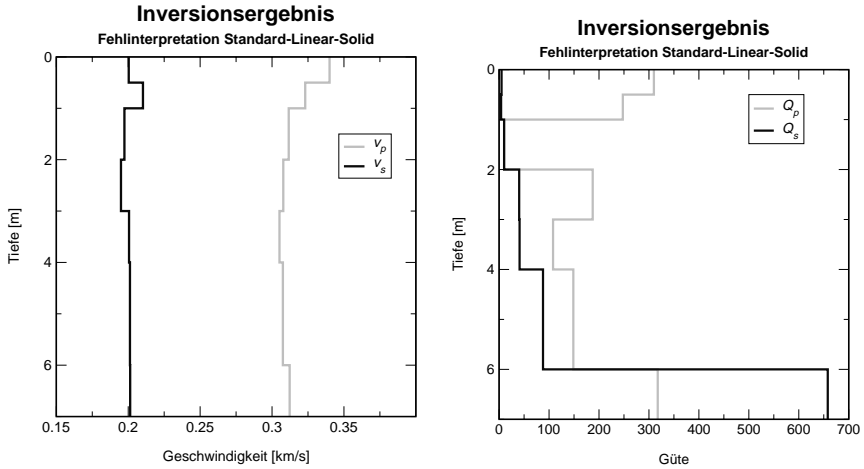


Abbildung V.1; Der scheinbar geschichtete Halbraum: Für einen homogenen Halbraum mit der Rheologie eines Standard-Linear-Solid (SLS) wurde eine Greensche Funktion bis 100Hz berechnet. Die Parameter des Materials sind bei der Referenz-Frequenz 80Hz: $v_p = 340 \frac{m}{s}$, $v_s = 200 \frac{m}{s}$, $\rho = 1.6 \frac{g}{cm^3}$, $Q_p = 30$, $Q_s = 20$. Die Relaxation des SLS liegt bei 800Hz. Damit ist $Q \propto \omega^{-1}$ im berechneten Frequenzband. Soll dieser Datensatz durch ein Medium mit Frequenzunabhängigen Eigenschaften erklärt werden, so wird die beste Anpassung durch die hier dargestellte Tiefen-abhängige Struktur erreicht. Die Dichte wurde nicht verändert.

so erhaltenen Modellen können Aufschluss über die Größenordnung geben, in der die Wahl der Rheologie das Inversionsergebnis beeinflussen kann.

Die iterative Inversion sollte möglichst mit einem Startmodell mit kleinen Q -Werten begonnen werden. Das ω, p -Spektrum lässt sich dann unproblematischer abtasten. Beispielsweise der Datensatz LAPTEV-SEE zeigt sehr scharf begrenzte Maxima im ω, p -Spektrum (Abb. VI.44, S. 194 und Abschnitt VI.3.1, S. 175). Wird die Inversion mit einem realistischen Q -Wert von ca. 1000 begonnen, so muss das Spektrum sehr fein abgetastet werden, damit die linearisierte Vorwärtsrechnung eine verwendbare Näherung ist. Außerdem müssen die Moden der synthetischen Greenschen Funktion schon recht nahe an den Moden des ω, p -Spektrums liegen, damit eine merkliche Misfit-Verringerung möglich ist. Unrealistisch kleine Anfangswerte für Q verbreitern die Maxima des synthetischen Spektrums und erleichtern die Inversion wesentlich. Ist die Lage der synthetisch berechneten Moden zufriedenstellend, so können die Q -Werte erhöht werden, bis die Breite der Maxima den Daten entspricht. In einem solchen Fall kann es nicht schaden, so-

wohl die Geschwindigkeiten als auch die Güte Frequenz-unabhängig zu halten (akausale Rheologie). Die Manipulation an den Q -Werten hat dann keinen Einfluss auf die Beträge der seismischen Geschwindigkeiten.