

# **Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien**

von

**Thomas M. Hettich**

Bericht Nr. 50 (2007)  
Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff  
Stuttgart 2007



© 2007 Thomas M. Hettich

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
D-70550 Stuttgart  
Tel.: ++49 (0)711/685 66123  
Fax: ++49 (0)711/685 66130  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-022270-2

# Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Thomas M. Hettich**

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. dr.ir. René de Borst

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 2007

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2007



# Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der diskontinuierlichen Modellierung des Versagens von Verbundmaterialien. Verbundmaterialien sind durch das Zusammenwirken von zwei oder mehreren individuellen Werkstoffen gekennzeichnet. In der vorliegenden Arbeit werden Verbundmaterialien untersucht, die zum Großteil aus kohäsiven Werkstoffen bestehen. Kohäsive Werkstoffe sind in der Natur beispielsweise in Form von bindigen Böden zu finden oder können künstlich hergestellt werden, wie z.B. Beton und Keramik. Das Materialverhalten kohäsiver Werkstoffe ist unter anderem von einer versagensinduzierten anisotropen Degradation der elastischen Steifigkeitseigenschaften geprägt. Das anisotrope Versagen kohäsiver Werkstoffe zeigt sich auf Strukturebene häufig in der Entwicklung von schmalen Zonen, in denen Deformationen lokalisieren, während der Rest des Tragwerks meistens eine Entlastung erfährt.

Das Verhalten der untersuchten Verbundmaterialien wird im Rahmen einer erweiterten Kontinuumsmechanischen Beschreibung durch die Kohäsivzonentheorie abgebildet. Die Lokalisierungszone wird als singuläre Rissfläche approximiert, über die auf Grund von mikroskopischen Mechanismen Spannungen übertragen werden, solange beide Rissufer nicht vollständig voneinander getrennt sind. Da die Modellierung der Lokalisierungszone als diskreter Riss eine diskontinuierliche Lösung impliziert, kann man von einer diskontinuierlichen Modellierung des Materialversagens sprechen. In der vorliegenden Arbeit werden numerische Versagensanalysen von Verbundstrukturen auf unterschiedlichen Materialebenen durchgeführt. Auf der Grundlage einer mesoskopischen Betrachtungsweise wird textilverstärkter Beton untersucht, während bei Stahlbeton eine makroskopische Betrachtungsweise gewählt wird. Bei der mesoskopischen Modellierung des textilverstärkten Betons muss die Grenzfläche zwischen den beiden konstituierenden Materialien, der Textilfaser und des Betons, explizit berücksichtigt werden. Damit erfordert die diskontinuierliche Versagensanalyse von Verbundstrukturen auf der Mesoebene nicht nur die Erfassung von Diskontinuitäten im Sinne von diskreten Rissen, sondern auch von materiellen Grenzflächen. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Herleitung eines Finite Element Verfahrens zur Diskretisierung dieser zwei Diskontinuitäten mit unterschiedlicher physikalischer Bedeutung. Darüber hinaus werden Techniken diskutiert, mit denen die Geometrie der Diskontinuitäten beschrieben werden kann.

Das nichtlineare, entfestigende Materialverhalten von Beton und materiellen Grenzflächen wird im Rahmen der Kohäsivzonentheorie durch geeignete Konstitutivgesetze vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ modelliert. Bei der diskontinuierlichen Versagensanalyse von Stahlbeton auf der Makroebene wird die Materialstruktur homogenisiert, so dass auf die diskrete Abbildung der Stahlbewehrung verzichtet werden kann. Zur Modellierung des Materialverhaltens werden spezielle Konstitutivgesetze vom Spannungs-Verzerrungs- und Traktions-Verschiebungssprung-Typ eingesetzt.

Das in dieser Arbeit entwickelte Diskretisierungsverfahren zur Simulation von Verbundstrukturen wird in ein hierarchisches Zweiskalenkonzept eingebettet. Das resultierende Zweiskalenmodell ermöglicht die Durchführung effizienter Versagensanalysen von makroskopischen Tragwerken unter Berücksichtigung mesoskopischer Effekte. Da eine Gebietszerlegung Bestandteil des Zweiskalenmodells ist, müssen Nebenbedingungen formuliert werden, die im Hinblick auf die realitätsnahe Abbildung von diskontinuierlichem Versagen mit mehrskaligem Charakter diskutiert und geprüft werden.

# Abstract

This thesis addresses the discontinuous modeling of failure in composite materials. Composite materials are characterized by the interaction of two or more individual materials. In the present thesis such composites are analyzed which in large part consist of cohesive materials. Cohesive materials may be found in nature in form of soils or can be manufactured synthetically like concrete and ceramics. The material behavior of cohesive materials is characterized, among other things, by a failure induced anisotropic degradation of the elastic stiffness properties. At the structural level the anisotropic failure of cohesive materials often appears in the evolution of narrow zones in which deformations localize whereas the rest of the structure mostly unloads.

On the basis of an enhanced continuum-mechanical description the behavior in failure of the investigated composites is modeled by the cohesive zone theory. The localization zone is approximated by a singular crack plane which can carry loads due to microscopic mechanisms as long as both crack faces are not completely separated. Since the modeling of the localization zone with a discrete crack implies a discontinuous solution, this kind to model material failure can be named discontinuous. In the present thesis numerical failure analyses of the composites are accomplished on different levels of material observation. Textile-reinforced concrete is analyzed based on a mesoscopic approach, whereas a macroscopic approach is chosen to model steel-reinforced concrete. In the mesoscopic modeling concept of textile-reinforced concrete the interface between both material constituents, the textile fiber and the concrete, has to be considered explicitly. For this reason the discontinuous failure analysis of composite structures on the mesoscopic level demands not only the consideration of discrete cracks but also of material interfaces. A main focus of this thesis is the derivation of a finite element approach to discretize these two discontinuities with different physical meanings. In addition, techniques are discussed to describe the geometry of the discontinuities.

The nonlinear, softening material behavior of concrete and material interfaces is modeled by appropriate traction-separation-laws in the context of the cohesive zone theory. In order to accomplish discontinuous failure analyses of steel-reinforced concrete on the macroscopic level, the material structure is homogenized so that it can be passed on the discrete modeling of the steel-reinforcement. The material behavior is described by special constitutive laws of stress-strain- and traction-separation-type.

The discretization method developed in this thesis for the simulation of composite structures is included in a hierarchical two-scale concept. The resultant two-scale model affords the realization of efficient failure analyses of macroscopic structures under consideration of mesoscopic effects. Since a domain decomposition is part of the two-scale model, side conditions have to be formulated which are discussed and proven in terms of the ability to exactly model discontinuous failure with multiscale character.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart in der Zeit von November 2002 bis April 2007 im Rahmen des deutsch-holländischen Forschungsvorhabens „Multiscale Methods in Computational Mechanics“. In diesem Zusammenhang sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm gilt mein besonderer Dank für die Übernahme des Hauptberichts und die Grundsteinlegung dieser Arbeit. Einen wesentlichen Anteil am Gelingen meiner Promotion hatten sein fortwährendes Interesse und seine wissenschaftliche Unterstützung in einem optimalen Umfeld am Institut. Dabei hat er mir großen Freiraum bei der Gestaltung der Forschungsarbeit und bei der Entwicklung meiner Persönlichkeit gelassen. Seine Vorlesungen haben nicht nur das für diese Arbeit nötige Interesse für den Bereich „Computational Mechanics“, sondern auch schon für das Bauingenieurstudium in mir geweckt. Außerdem möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, dem Nachfolger von Prof. Ramm am Institut für Baustatik und Baudynamik, dafür bedanken, dass ich mich in angenehmer Atmosphäre weiterhin auf meine Arbeit konzentrieren konnte.

Zu großem Dank bin ich auch den Herren Prof. dr.ir. René de Borst und Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers verpflichtet. Ihre bereitwillige und unkomplizierte Übernahme des Mitberichts und die äußerst zügige Durchsicht meiner Arbeit ermöglichten ein schnelles Promotionsverfahren. An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. de Borst für die lehrreiche Zeit bedanken, die ich im Oktober 2005 an seinem Lehrstuhl in Delft, Holland, verbringen durfte.

Mein Dank gilt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Baudynamik für die freundschaftliche Zusammenarbeit. Ihre Hilfsbereitschaft und Freundlichkeit haben zu einem angenehmen Arbeitsklima beigetragen. Neben den fachlichen und nicht-fachlichen Diskussionen werden mir die sozialen Ereignisse, wie beispielsweise die täglichen Kaffeepausen und die gemeinsamen Ausflüge, in guter Erinnerung bleiben.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir in jungen Jahren so viel „Gepäck“ mitgegeben haben, welches auch für diese Arbeit sehr wichtig war. Nicht zuletzt möchte ich mich ganz herzlich bei meiner lieben Ivonne für den Zuspruch und ihr Verständnis in schwierigen Phasen während der Promotionszeit bedanken.

Stuttgart, im Juli 2007

Thomas M. Hettich





# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Modellierung von Materialversagen . . . . .	3
1.2.1 Regularisierungsstrategien . . . . .	4
1.2.2 Anmerkungen zur Kohäsivzonentheorie . . . . .	6
1.2.3 Diskretisierung lokalisierter Versagensformen . . . . .	6
1.3 Zielsetzung . . . . .	9
1.4 Gliederung . . . . .	10
<b>2 Mechanische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1 Kinematik und Deformation . . . . .	13
2.1.1 Verzerrungsmaß und Bewegung der Rissnormalen . . . . .	16
2.1.2 Anmerkungen zur Kinematik von Gleitflächenrissen . . . . .	17
2.2 Spannung . . . . .	18
2.3 Bilanzsätze . . . . .	18
2.4 Randwertproblem . . . . .	20
<b>3 Geometrische Beschreibung von Diskontinuitäten</b>	<b>23</b>
3.1 Einführung . . . . .	23
3.2 Materielle Grenzflächen und Grenzflächenrisse . . . . .	24
3.2.1 Numerische Berechnung der Anreicherungsfunktionen . . . . .	27
3.3 Risse innerhalb Festkörperphasen . . . . .	29
3.3.1 Numerische Berechnung der Anreicherungsfunktion . . . . .	31
3.3.2 Alternative Strategien zur Rissverfolgung . . . . .	33
<b>4 Erweitertes Finite Element Modell</b>	<b>35</b>
4.1 Allgemeines . . . . .	35

4.2	Variationsformulierung . . . . .	40
4.3	Diskretisierung . . . . .	42
4.4	Linearisierung . . . . .	45
4.5	Aspekte der Implementierung . . . . .	48
4.5.1	Risswachstum und Koaleszenz . . . . .	48
4.5.2	Knotenanreicherung mit Sprungfreiheitsgraden . . . . .	50
4.5.3	Numerische Integration . . . . .	50
4.5.4	Behandlung mehrfacher Rissbildung . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Materialformulierung</b>	<b>53</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	53
5.2	Lineare Elastizität . . . . .	56
5.2.1	Mischung zweier linear elastischer Materialien . . . . .	57
5.3	Schädigungsbasiertes Konstitutivgesetz . . . . .	57
5.3.1	Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsmodelle . . . . .	60
5.4	Mischung eines schädigungs- und plastizitätsbasierten Konstitutivgesetzes . . . . .	62
5.5	Modellierung der Rissentstehung . . . . .	66
5.5.1	Versagenskriterien . . . . .	66
5.5.2	Bestimmung der Rissrichtung . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Numerische Beispiele: X-FEM</b>	<b>73</b>
6.1	Single-Edge-Notched Beam (SEN) . . . . .	73
6.2	Gekerbte Scheibe unter Zug-Schub-Belastung . . . . .	78
6.3	Bewehrter vierpunktgestützter Biegebalken . . . . .	83
6.4	Ablöseprozesse in einer Verbundstruktur . . . . .	87
6.5	Verbundstruktur unter Zugbelastung . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Hierarchisches Zweiskalenmodell</b>	<b>97</b>
7.1	Anmerkungen zur Mehrskalenmodellierung . . . . .	97
7.2	Problembeschreibung . . . . .	103
7.2.1	Zerlegung des Feinskalengebietes . . . . .	105
7.3	Variationsformulierung . . . . .	107
7.4	Diskretisierung . . . . .	110
7.5	Linearisierung . . . . .	111
7.5.1	Statische Kondensation . . . . .	114
7.6	Aspekte der Implementierung . . . . .	115

---

7.6.1	Anmerkungen zur Diskretisierung . . . . .	115
7.6.2	Risswachstum über benachbarte Teilgebiete . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele: Zweiskalenmodell</b>	<b>119</b>
8.1	Scheibe unter Zug-Schub-Belastung . . . . .	120
8.2	Verbundstruktur unter Zug-Schub-Belastung . . . . .	126
8.3	Dreipunktgestützter Biegebalken . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	137
9.2	Ausblick . . . . .	140
<b>A</b>	<b>Notation &amp; Tensorrechnung</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Numerische Modellierung des Rissspitzenfeldes mit der X-FEM</b>	<b>147</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die numerische Analyse von Strukturen im Rahmen der computerorientierten Mechanik hat in den letzten Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Dies liegt nicht nur an der rasanten Zunahme der Rechnerleistung, sondern auch am ständigen Fortschritt im Bereich der theoretischen und numerischen Formulierung des Materialverhaltens und der zugrunde liegenden physikalischen Phänomene.

In der numerischen Festkörpermechanik und der Materialwissenschaft gibt es immer noch zahlreiche Herausforderungen. Dazu gehört die Entwicklung und Modellierung von leistungsfähigen Materialien, wie beispielsweise von Verbundwerkstoffen. Der Einsatz von Verbundwerkstoffen bei Anwendungen im Bereich verschiedener Ingenieurwissenschaften ist in den letzten Jahren beachtlich gestiegen. Dies liegt an der Möglichkeit, durch Mischung mehrerer Materialkomponenten auf relativ einfache Art und Weise spezielle (Verbund-) Werkstoffe entwerfen zu können, die sich in Bezug auf die gestellten mechanischen Anforderungen optimal verhalten. Dafür werden die Materialkomponenten entsprechend ihrer Fähigkeiten ausgesucht und gezielt eingesetzt. Beispielsweise kommen Verbundwerkstoffe in der Luft- und Raumfahrtindustrie bei der Verkleidung des Flugzeugrumpfes zum Einsatz, um bei minimalem Gewicht maximale Steifigkeit und Festigkeit zu erreichen. Ein relativ neuer Verbundwerkstoff zur bautechnischen Konstruktion stellt textilverstärkter Beton dar. Da dieser Werkstoff im Gegensatz zu konventionellem Stahlbeton korrosionsunempfindlich ist, lassen sich extrem dünnwandige Bauteile bei gleichzeitig hohen Tragfähigkeiten realisieren. Textilbewehrter Beton wird aus zwei industriell gefertigten Materialkomponenten hergestellt. Die Matrix aus Beton bzw. Mörtel besteht aus einem Konglomerat aus Zementstein und feinkörnigen Zuschlagstoffen und gehört zur Klasse der kohäsiven Reibungsmaterialien. Für das Verhalten dieser Materialien sind der Unterschied zwischen der Druck- und der Zugfestigkeit sowie die versagensinduzierte anisotrope Degradation der elastischen Steifigkeitseigenschaften kennzeichnend. Die Bewehrung aus Textilfaser wird aus organischen oder anorganischen Filamenten gesponnen. Zur Beeinflussung der mechanischen Eigenschaften kann die Textilfaser durch Beschichtung oder Imprägnierung nachbehandelt werden. Spannungs-Dehnungs-Diagramme aus Zugversuchen an Textilfasern und dem Matrixmaterial Beton zeigen je nach Sorte und Nachbehandlung der Fasern in etwa dieselbe Charakteristik. Durch das Zusammenfügen von Beton und Faser entsteht ein neuer künstlich hergestellter Werkstoff, der sich durch eine extrem heterogene Mikrostruktur auszeichnet.

Traglastuntersuchungen von Konstruktionen bis zum Eintritt des vollständigen Versagens sind im Bereich der Ingenieurwissenschaften von großem Interesse. Dabei steht das Ziel im Vordergrund, durch besseres Verständnis des Materialverhaltens sowie durch Weiter- oder Neuentwicklung von Simulationsmethoden nicht nur sicher, sondern auch effizient

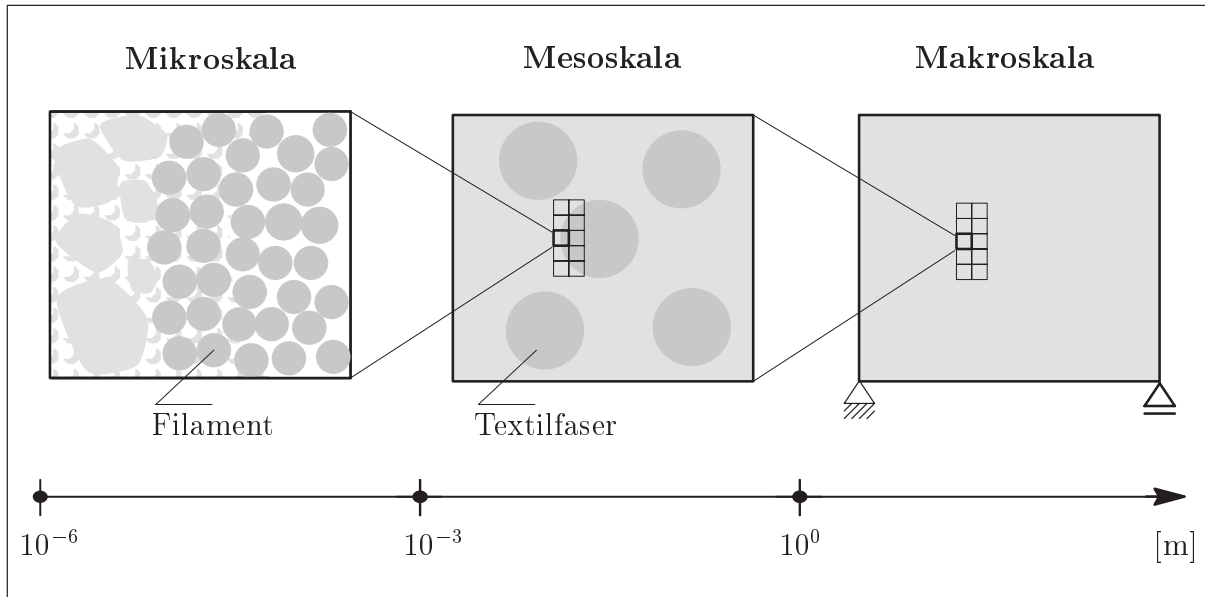


Abbildung 1.1: Typische Skalenbereiche von textilverstärktem Beton

entwerfen zu können. Die Versagensanalyse von Verbundstrukturen, die zum Großteil aus kohäsiven oder kohäsivartigen Materialien bestehen, stellt eine besonders anspruchsvolle Aufgabe dar, da das materielle und damit auch das strukturelle Verhalten durch zahlreiche mikromechanische Effekte bestimmt ist.

Um das Versagen von Konstruktionen zu verstehen, muss in die Materialstruktur hineingezoomt werden. In Abbildung 1.1 ist der strukturelle Aufbau von textilverstärktem Beton bezüglich verschiedener Skalenbereiche schematisch dargestellt. Vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet, scheint der Verbundwerkstoff homogen zu sein. Aber schon die mesoskopische Sicht auf den Verbundwerkstoff offenbart seine heterogene Struktur. Die beiden Materialkomponenten, die textile Faser sowie die umhüllende Betonmatrix, können auf der Mesoskala noch als homogen betrachtet und abgebildet werden, ohne dabei einen größeren Modellierungsfehler zu machen. Auf der Mikroskala zeigt sich allerdings ihr extrem inhomogener Aufbau. Dieser ist geprägt von den einzelnen Filamenten und dem Material zur Imprägnierung oder Beschichtung der Textilfaser bzw. dem Zementstein und den feinkörnigen Zuschlagstoffen des Betons. Des Weiteren ist aus mikroskopischen Materialansichten erkennbar, inwieweit die beiden Materialkomponenten miteinander verschmolzen sind. Anhand der vorliegenden Ansicht wird deutlich, dass die dargestellte nicht-imprägnierte Textilfaser nur teilweise mit Zementleim durchdrungen ist. Es ist offensichtlich, dass mitunter die hochgradige Inhomogenität des Verbundmaterials den hohen Anspruch an exakte Versagensanalysen begründet. In Abbildung 1.2 sind zwei auf der mesoskopischen Beobachtungsebene charakteristische Versagensmoden eines textilverstärkten Betons illustriert. Dabei handelt es sich um Matrixrisse und Risse in der Kontaktzone zwischen Faser und Matrix. Für die exakte Vorhersage der Traglast einer Verbundstruktur und ihrer Resttragfähigkeit im Nachbruchbereich ist es erforderlich, die beiden charakteristischen Versagensmoden möglichst realitätsnah abzubilden.

Die Modellierung der Materialantwort erfolgt in der klassischen Kontinuumsmechanik in homogenisierter Form. Die Inhomogenitäten des Materials werden auf der entsprechenden Beobachtungsebene verschmiert. Wie oben erläutert, kann textilverstärkter Beton im



Abbildung 1.2: Rissbildung in textilverstärktem Beton

Rahmen einer mesoskopischen Beschreibung als zweiphasiges Verbundmaterial betrachtet werden. Dadurch lassen sich kennzeichnende Versagensmoden, wie der Bruch der Matrix und der Grenzfläche zwischen Matrix und Faser, auf natürliche Art und Weise modellieren. Für die Durchführung effizienter numerischer Versagensanalysen von makroskopischen Tragwerken unter Berücksichtigung dieser mesoskopischen Versagensphänomene müssen geeignete Mehrskalenmethoden eingesetzt werden.

## 1.2 Modellierung von Materialversagen

Das Versagen von kohäsiven Reibungsmaterialien, zu denen neben Beton zum Beispiel auch Keramik gezählt werden kann, ist durch eine Reihe von ineinander übergehenden Mechanismen geprägt. Es ist offensichtlich, dass diese Mechanismen materialspezifischen Beobachtungsebenen zugewiesen werden können. So beginnt das Materialversagen unter anderem mit dem Lösen atomarer Verbindungen. Die Konsequenz hieraus ist die Bildung von mikroskopischen Defekten, aus denen durch Zusammenwachsen mesoskopische Rissmuster entstehen. Die Koaleszenz dominanter mesoskopischer Rissegmente endet schließlich in der Bildung eines makroskopischen Risses, der oft schon mit bloßem Auge sichtbar ist. Der beschriebene Versagensprozess, der mit der Zerrüttung (Deterioration) des Materials einhergeht, äußert sich in der Reduktion von dessen makromechanischen Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften. Darüber hinaus können je nach Werkstoff und Belastungsmodus mehr oder weniger große plastische Deformationen entstehen. Der Versagensprozess ist irreversibel und führt zur Dissipation von Energie.

Im Rahmen der kontinuumsmechanischen Festkörperbeschreibung lässt sich der gesamte Versagensprozess auf Materialpunktebene mit Hilfe unterschiedlicher Kriterien in drei charakteristische Kategorien einteilen. Diese sind das so genannte diffuse Versagen sowie die schwache und die starke Diskontinuität. Das diffuse Versagen beschreibt einen Schädigungszustand mit homogen verteilter Deformation. Schwache und starke Diskontinuitäten bezeichnet man als lokalisierte Versagensformen. Sie äußern sich in der Präsenz eines diskontinuierlichen Verschiebungsgradienten beziehungsweise in einem diskontinuierlichen Verschiebungsfeld. Auf Strukturebene zeigt sich der Übergang von diffusem Versagen zur schwachen Diskontinuität in der Entstehung einer Zone mit großen Deformationen. Wenn die Breite dieser Zone gegen null konvergiert hat, ist in Bezug auf die Ebene der

Materialmodellierung die Evolution eines Risses abgeschlossen. Die Kriterien zur Klassifizierung der Versagensformen sowie eine algorithmische Formulierung für numerische Analysen von materieller Bifurkation finden sich in *Mosler* [120].

Mittels klassischer Kontinuumsmodelle kann Materialversagen nur in verschmierter Art und Weise beschrieben werden. Außerdem führen diese Modelle bei der Erfassung von versagensinduzierter Materialentfestigung zur Abhängigkeit der numerischen Lösung von der gewählten Diskretisierung, siehe *de Borst* [37]. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, liegt die Ursache hierfür am möglichen Typwechsel der zugrunde liegenden Differentialgleichung. Bei quasi-statischen Randwertproblemen findet ein Wechsel dieser Gleichungen vom elliptischen zum hyperbolischen Typ statt. Der Verlust der Elliptizität ist durch die Entstehung einer schwachen Diskontinuität geprägt. Auf Grund des Typwechsels sind die vorhandenen Randbedingungen unzureichend, was zu einem schlecht gestellten Problem führt. Dies zeigt sich unter anderem in dem Phänomen, dass die dissipierte Energie beim Übergang zu unendlich feinen Finite Element Netzen gegen null konvergiert. Abhilfe kann durch verschiedene Regularisierungsstrategien geschaffen werden. Neben dem kontinuumsmechanischen kann auf einen bruchmechanischen Ansatz zurückgegriffen werden, der im Folgenden auch unter dem Namen Regularisierungsstrategie geführt werden soll.

### 1.2.1 Regularisierungsstrategien

Das Verhalten einiger Werkstoffe ist von der Belastungsgeschwindigkeit äußerst abhängig. Aus diesem Grund wurden viskose Terme in den konstitutiven Gleichungen berücksichtigt, siehe *Perzyna* [146]. Es hat sich gezeigt, dass die Berücksichtigung viskoser Effekte bei transienten Problemen regularisierenden Einfluss hat. Da sich dieser Einfluss nur bei extrem hohen Belastungsgeschwindigkeiten einstellt, ist die Verwendung dieser Regularisierungsstrategie bei quasi-statischen Problemen nicht sinnvoll. Als anschauliche und einfache Regularisierungsstrategie wurde beispielsweise von *Pietruszczak & Mróz* [147] die bekannte Rissbandmethode vorgeschlagen, die auf der Einführung eines netzadaptierten Entfestigungsmoduls gründet. Darüber hinaus stehen nicht-lokale Kontinuumsmodelle zur Verfügung, die auf der Annahme basieren, dass die Antwort eines materiellen Punktes nicht nur von dem Punkt selbst, sondern auch von seiner Nachbarschaft beeinflusst wird. Das Prinzip der lokalen Wirkung wird bei diesen Modellen allerdings aufgegeben. Die Grundidee nicht-lokaler Kontinuumsmodelle wurde von *Pijaudier-Cabot & Bazant* [148] auf inelastisches Materialverhalten infolge Schädigung angewendet. Alternativ haben sich gradientenerweiterte Theorien etabliert, die die räumlichen Interaktionen in der Lokalisierungszone mittels höherwertiger räumlicher Gradienten berücksichtigen, siehe *Peerlings* [144]. Eine weitere Regularisierungsstrategie bietet die mikropolare Kontinuumsmechanik, die auf die Gebrüder *Cosserat* [35] zurückgeht. Im Vergleich zur klassischen Kontinuumsmechanik wird die Kinematik eines materiellen Punktes und seiner kontinuierlichen Verschiebung um Rotationsfreiheitsgrade angereichert. Wie sich gezeigt hat, ist die regularisierende Wirkung nur bei schubdominanten Belastungszuständen zufriedenstellend. Da kohäsive Reibungsmaterialien häufig unter zugdominanter Beanspruchung versagen, ist die Verwendung der mikropolaren Theorie zur Regularisierung eher nicht geeignet, siehe *de Borst* [38]. Mit Ausnahme der Rissbandmethode wird bei den genannten Regularisierungsstrategien eine interne Längenskala in die Formulierung eingeführt, die zur Breite der Lokalisierungszone korrespondiert. Für die realistische Auflösung der



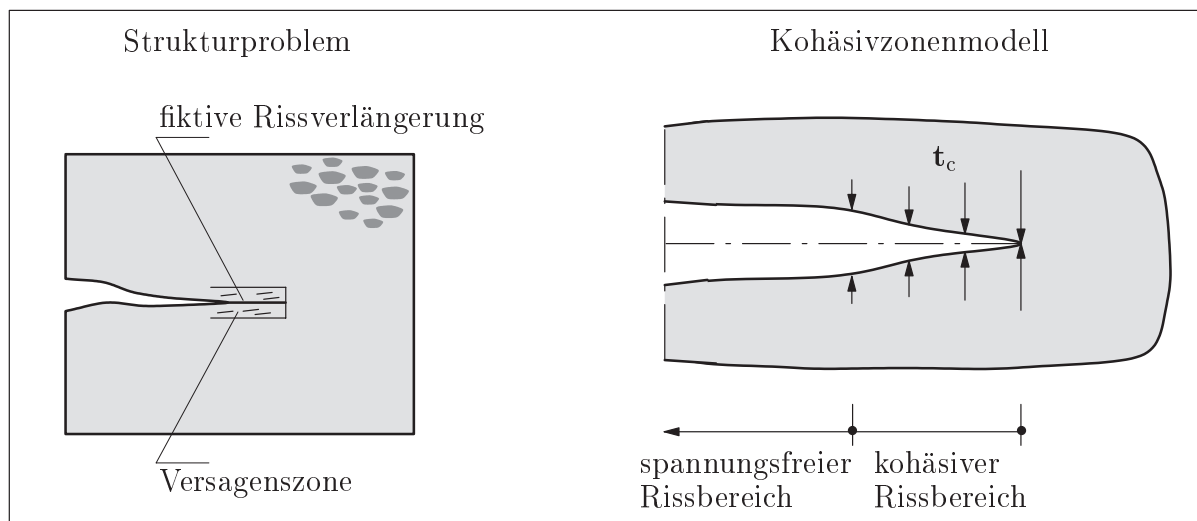


Abbildung 1.3: Strukturproblem und Kohäsivzonenmodell

Versagenszone ist daher häufig eine sehr feine räumliche Diskretisierung notwendig. Für effiziente numerische Simulationen müssen dann adaptive Methoden zur Netzverfeinerung oder geeignete Mehrskaliskonzepte angewendet werden. Außerdem ist es auch heute noch schwierig, den internen Längensparameter aus Experimenten zu bestimmen, siehe *de Borst et al.* [39]. In Bezug auf die Modellierung lokalisierter Versagenszustände lässt sich Folgendes zusammenfassend feststellen. Schwache Diskontinuitäten können mit Hilfe der Regularisierungsstrategien, die auf der Einführung einer internen Längenskala basieren, in der Simulation gewissermaßen approximiert werden. Die numerische Approximation starker Diskontinuitäten ist jedoch nicht möglich.

Durch die Erweiterung des gewöhnlichen kontinuierlichen Verschiebungsansatzes mit einer diskontinuierlichen Komponente können starke Diskontinuitäten bei der Modellierung materiellen Versagens berücksichtigt werden. Es ist offensichtlich, dass man infolge dieser kinematischen Anreicherung die Festkörperbeschreibung als quasi-kontinuumsmechanisch oder bruchmechanisch bezeichnen könnte. In der Regel wird bei der Einführung einer diskontinuierlichen Verschiebungskomponente auf die Berücksichtigung von diffusem Versagen und schwachen Diskontinuitäten verzichtet. Die schmale Versagenszone, die eigentlich erst im Laufe des Versagensprozesses gegen eine Fläche konvergiert, wird durch einen diskreten Riss repräsentiert. Die Evolution des Versagensprofils kann somit nicht direkt erfasst werden. Der vollständige Versagens- und Entfestigungsprozess innerhalb der Lokalisierungszone wird durch ein Konstitutivgesetz abgebildet, das die Spannungsübertragung in Abhängigkeit der Separation der beiden Rissufer beschreibt und durch wenige aussagekräftige Materialparameter definiert ist, siehe Kapitel 1.2.2. Durch diesen bruchmechanischen Ansatz lässt sich versagensinduziertes anisotropes Materialverhalten auf natürliche Art und Weise modellieren. Da sich die beim Versagen dissipierte Energie aus einem Integral über die Rissfläche ergibt, ist sie unabhängig von der Größe der Finiten Elemente des Rechnetzes und verschwindet nie. Damit ist eine wichtige Voraussetzung für die Erzielung diskretisierungsunabhängiger Lösungen erfüllt. Außerdem müssen für numerische Versagensanalysen von Tragwerken keine extrem feinen Finite Element Netze verwendet werden. Dies ist vor allem bei Berechnungen von Tragstrukturen von Bedeutung, wo der Abstand zwischen der Material- und der Strukturskala groß ist.

*Bemerkung:*

In der vorliegenden Arbeit wird auf den beschriebenen bruchmechanischen Ansatz zurückgegriffen. Wie erläutert, wird dabei direkt vom ungeschädigten elastischen Zustand des Materials auf die Bildung eines diskreten Risses übergegangen. Dieser Ansatz wird nicht nur zur Versagensmodellierung von kohäsiven Materialien, sondern auch von adhäsiven materiellen Grenzflächen verwendet.

### 1.2.2 Anmerkungen zur Kohäsivzonentheorie

In Kapitel 1.2.1 wurde der Riss als konzentrierte Versagenszone interpretiert, über die auf Grund der materiellen Verzahnung Spannungen übertragen werden können. Natürlich führt die zunehmende Deterioration des Materials in der Versagenszone zum sukzessiven Verlust dieser Fähigkeit. Die Modellierung der Versagensmechanismen mit kohäsiven Risssegmenten basiert auf den Arbeiten von *Dugdale* [44] und *Barenblatt* [12]. Diese schlugen vor, die inelastischen Deformationen in der Versagenszone vor der Risspitze über eine fiktive Rissverlängerung zu erfassen. Dazu wird der spannungsfreie Riss in die Versagenszone hinein verlängert. Auf die fiktive Rissverlängerung wirken die kohäsiven Spannungen  $t_c$ , die die beiden Rissufer zusammenhalten, siehe Abbildung 1.3. Die Evolution dieser Spannungen lässt sich durch geeignete Materialgesetze in Abhängigkeit der Rissöffnung konstitutiv bestimmen. Vom dimensionsanalytischen Standpunkt aus betrachtet, bedeutet die fiktive Rissverlängerung die Einführung einer charakteristischen Länge. *Hillerborg, Modéer & Petersson* [77] benutzten die Kohäsivzonentheorie zur Beschreibung von quasi-sprödem Versagen von Beton. Die Entwicklung der Normalspannung am Riss wurde durch ein Konstitutivgesetz kontrolliert, das durch die Zugfestigkeit und die Bruchenergie des Materials definiert wurde.

Die Kohäsivzonentheorie kann als Weiterführung der linear elastischen Bruchmechanik (LEFM) verstanden werden, die nur bei Rissproblemen eingesetzt werden darf, bei denen die Länge der Prozesszone im Vergleich zur strukturellen Dimension klein ist. Im Gegensatz zur LEFM bietet die Kohäsivzonentheorie den attraktiven Nebeneffekt, dass keine Spannungssingularität an der modellierten Risspitze auftritt.

### 1.2.3 Diskretisierung lokalisierter Versagensformen

Die numerische Modellierung diskontinuierlicher Verschiebungsfelder im Kontext kohäsiven Risswachstums stellt eine anspruchsvolle Aufgabe dar. Heutzutage stehen hierfür verschiedene Methoden zur Auswahl. An dieser Stelle sollen jedoch nur einige Finite Element Formulierungen skizziert werden.

Ein auf den ersten Blick relativ unkompliziertes Verfahren ist die Verwendung von kohäsiven Interface-Elementen, die an den Kanten Finiter Kontinuumselemente positioniert werden. Dabei stehen in Abhängigkeit der Problemstellung verschiedene Strategien zur Verfügung. Wenn der Rissverlauf im Voraus bekannt ist, können a priori zwischen den Kontinuumselementen an den entsprechenden Stellen Interface-Elemente eingeführt werden, siehe *Rots* [157]. Der Rissverlauf kann durch Versuche, durch Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften des Problems oder durch die Kenntnis über potentielle Bruchstellen, wie z.B. materielle Grenzflächen, bekannt sein. Wenn die Rissgeometrie nicht bekannt ist, muss auf andere Strategien zurückgegriffen werden. *Xu & Needleman* [197] führten die Interface-Elemente zwischen allen Kontinuumselementen ein. Dieser Ansatz wurde

beispielsweise auch von *Carol, López & Roa* [28] zur mikromechanischen Versagensanalyse von quasi-spröden Materialien verfolgt. Jedoch wurden die Interface-Elemente nur in den Kontinuums-elementkanten platziert, die als die hauptsächlichsten potentiellen Risspfade angesehen wurden. Da die Interface-Elemente von Anfang an Teil des numerischen Modells sind, müssen zur Abbildung von elastischem Materialverhalten elastische Interface-Steifigkeiten verwendet werden. Im elastischen Bereich ist jedoch aus physikalischer Sicht kein Riss vorhanden, der zur Schädigung des Verbundes der Kontinuums-elemente führt. Damit im ungeschädigten Bereich ein perfekter Verbund simuliert werden kann, müssten diese Steifigkeiten theoretisch unendlich hoch sein. Die Verwendung von hohen Interface-Steifigkeiten kann jedoch numerische Probleme verursachen. Diese äußern sich in Spannungsoszillationen an der kohäsiven Rissfläche, siehe *Schellekens & de Borst* [161]. Die Verwendung von niedrigen Interface-Steifigkeiten verfälscht die Strukturantwort durch zusätzliche Deformationen auf Grund der Weichheit der Interface-Elemente und führt zu fehlerhaften Spannungsverteilungen. Eine alternative Strategie zur Diskretisierung eines diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes, das durch einen kohäsiven Riss induziert wird, ist die Einführung von Interface-Elementen in das numerische Modell, sobald entsprechende Versagenskriterien erfüllt sind, siehe *Ruiz, Pandolfi & Ortiz* [158]. Damit entfällt die Notwendigkeit, den elastischen Bereich in der Interface-Formulierung zu berücksichtigen. Infolgedessen ist die erwähnte Problematik, die im Zusammenhang mit den elastischen Interface-Steifigkeiten steht, hinfällig. Die Reduktion der Anzahl der Interface-Elemente führt auch zur Reduktion der Anzahl der Systemfreiheitsgrade. Die Zeitersparnis bei der numerischen Lösung steht der Schwierigkeit gegenüber, die dynamische Erweiterung des zugrunde liegenden Gleichungssystems infolge der sukzessiven Einführung einzelner Interface-Elemente zu realisieren. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Einführung von Interface-Elementen an den Kanten der Kontinuums-elemente eine Restriktion für die Simulation nicht vordefinierter Rissverläufe bedeutet. Die erzielten Lösungen können daher nicht vollständig unabhängig von der räumlichen Diskretisierung sein. Wenn die kohäsiven Interface-Elemente nicht a priori an allen Kanten der Kontinuums-elemente, sondern sukzessive eingeführt werden, kann durch die Anwendung von Neuvernetzungsstrategien Abhilfe geschaffen werden, siehe *Bocca, Carpinteri & Valente* [23].

Alternativ kann auf Methoden zurückgegriffen werden, die die elementinterne Modellierung von lokalisiertem Materialversagen erlauben. Die offensichtliche Sensitivität der numerischen Lösung von der Ausrichtung des Finite Element Netzes besteht bei Verwendung dieser Methoden nicht. Grundsätzlich kann man zwischen elementbasierten und knotenbasierten Ansätzen unterscheiden. Im Folgenden sollen verschiedene elementbasierte Ansätze skizziert werden. Ein Überblick über knotenbasierte Ansätze findet sich in Kapitel 4.1. In den Arbeiten von *Ortiz, Leroy & Needleman* [138] und *Belytschko, Fish & Engelmann* [18] wurden die Verzerrungen in einem Finiten Element mit charakteristischen Moden erweitert. Diese Moden ermöglichten die Abbildung von Versagenszonen im Sinne schwacher Diskontinuitäten. Die Kinematik von diskreten Rissen konnte mit dieser Methode nicht erfasst werden. Die Diskretisierung diskontinuierlicher Verschiebungsfelder erfuhr Mitte der 1990'er Jahre durch das Konzept von *Simo, Oliver & Armero* [167] und seiner Erweiterung für zweidimensionale Probleme in *Simo & Oliver* [166] einen großen Fortschritt. Eine ausführliche Diskussion theoretischer und numerischer Aspekte dieses Konzepts, das im Englischen *Strong Discontinuity Approach* (SDA) genannt wird, findet sich in der Arbeit von *Oliver* [130]. Der diskontinuierliche Anteil des Verschiebungsfeldes

führt zu unendlich großen Verzerrungen, die durch die Regularisierung der Dirac-Delta Verteilung approximiert wurden. Geeignete kontinuumsmechanische Konstitutivgesetze auf Basis der Schädigungs- und Plastizitätstheorie wurden verwendet, um das inelastische Materialverhalten in der als Riss idealisierten Versagenszone zu beschreiben. *Armero & Garikipati* [7] gelang es, die Dirac-Delta Verteilung mathematisch korrekt abzubilden. Damit konnten Konstitutivgesetze vom oben erwähnten Traktions-Verschiebungssprung-Typ zur Materialmodellierung eingesetzt werden. Die konsistente Erweiterung dieses Konzepts auf die geometrisch nichtlineare Theorie wurde kurze Zeit später vorgenommen, siehe *Armero & Garikipati* [8]. Die Vergrößerung des Anwendungsbereichs des SDA konnte durch die Erweiterung auf dreidimensionale Finite Elemente realisiert werden, siehe *Mosler & Meschke* [122] und *Wells & Sluys* [191]. Beispielsweise wurde der SDA in der Biomechanik zur numerischen Modellierung von Ablösevorgängen in dreidimensionalen biologischen Geweben unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität eingesetzt, siehe *Gasser & Holzapfel* [59]. Ein Schwerpunkt der letztgenannten Arbeit war die vergleichende Untersuchung von unterschiedlichen Finite Element Umsetzungen des SDA im Hinblick auf Locking-Effekte. Eine ausführliche Studie zu dieser Thematik findet sich auch in *Oliver, Huespe & Samaniego* [134]. Die Methoden zur numerischen Modellierung von Rissen basieren üblicherweise auf der physikalisch motivierten Annahme einer zeitlich invarianten Risstopologie. Darüber hinaus wird in der Regel die Entwicklung eines einzigen Risses pro Integrationspunkt oder Element erlaubt. Bei Anwendung der Kohäsivzonentheorie kann jedoch argumentiert werden, dass in der Versagenszone mehrere Mikrorisse mit unterschiedlichen Orientierungen vorhanden sind, von denen einer den Makroriss bilden wird. Im Rahmen der verschmierten Rissmodellierung wurde sowohl die Berücksichtigung mehrfacher Rissbildung, als auch die Rotation eines existierenden Risses umgesetzt, siehe *Rots* [157]. Die Ideen beider Ansätze wurden von *Mosler* [121] aufgegriffen, um die Wirkungsweise des SDA durch die Reduktion von Locking-Effekten weiterhin zu verbessern. Für einen umfassenden und bewertenden Überblick über verschiedene Formulierungen von Finiten Elementen mit eingebetteten Diskontinuitäten sei auf die Arbeit von *Jirásek* [86] verwiesen.

In jüngster Zeit wurden verschiedene Methoden kombiniert, um mehrere der drei genannten Versagensformen abbilden zu können. Zur Modellierung von kontinuierlichem Versagen verwendeten *Jirásek & Zimmermann* [88] ein nicht-lokales Schädigungsmodell. Sobald die Entstehung einer starken Diskontinuität durch ein ausgewähltes Kriterium angezeigt wurde, berechneten sie ihre Richtung. Unter Verwendung des SDA führten sie dann die starke Diskontinuität als kohäsiven Riss in das numerische Modell ein. *Mediavilla, Peerlings & Geers* [109] benutzten ein gradientenerweitertes Plastizitätsmodell zur Abbildung von duktilem Versagen. Im Gegensatz zur erstgenannten Arbeit führten sie die starke Diskontinuität als spannungsfreien Riss an den Kanten Finiten Elemente ein. Dabei mussten sie von einer Neuvernetzungsstrategie Gebrauch machen. Eine alternative Methode zur Modellierung lokalisierter Versagensformen wurde in *Oliver, Cervera & Manzoli* [132] vorgeschlagen. Diese realisierten im Rahmen des SDA den Übergang von einer schwachen zu einer starken Diskontinuität durch ein Evolutionsgesetz für die Breite der Lokalisierungszone. In Kapitel 4.1 findet sich eine Auswahl an Arbeiten, die sich mit der numerischen Modellierung des gesamten Versagensprozesses bzw. der Kombination einzelner Versagenszustände beschäftigen und in denen zur Diskretisierung von starken Diskontinuitäten die erweiterte Finite Element Methode (X-FEM) benutzt wird. Diese Methode wird auch in der vorliegenden Arbeit angewendet.

## 1.3 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Finite Element Modells zur Diskretisierung von diskontinuierlichem Versagen in Verbundwerkstoffen unter Verwendung der Kohäsivzonentheorie. Das entwickelte Lösungsverfahren soll zur numerischen Versagensanalyse von Strukturen eingesetzt werden, die aus unbewehrtem und bewehrtem Beton hergestellt sind. Die Bewehrung besteht entweder aus Stahl oder aus textilen Fasern. Während der Verbundwerkstoff Stahlbeton auf der makroskopischen Betrachtungsebene als einphasiges Material modelliert wird, wird das Verhalten von textilverstärktem Beton auf der mesoskopischen Betrachtungsebene abgebildet. Daher müssen nicht nur diskrete Risse, sondern auch materielle Grenzflächen berücksichtigt werden. Es wird angenommen, dass die materiellen Grenzflächen vor der Rissbildung vollkommen intakt sind und somit als perfekte Verbindungen zwischen zwei unterschiedlichen Materialien zu verstehen sind.

Das zu entwickelnde Finite Element Modell soll bei einfacher Diskretisierung von wachsenden Rissen und fixen materiellen Grenzflächen qualitativ hochwertige Simulationsergebnisse liefern. Um dieses Ziel zu erreichen, muss zunächst die Vorschrift zur Abbildung materieller Punkte von der Referenz- in die Momentankonfiguration formuliert werden, die nicht nur den kinematischen Erfordernissen von Rissflächen, sondern auch von ungeschädigten materiellen Grenzflächen gerecht wird. Dabei muss auf Funktionen zurückgegriffen werden, die vom Typ der beiden Flächen unterschiedlicher physikalischer Bedeutung abhängen. Zur geometrischen Beschreibung der Flächen werden verschiedene Level Set Techniken benutzt. Es ist bemerkenswert, dass mittels dieser Techniken die in der Abbildungsvorschrift benötigten Funktionen definiert oder sogar konstruiert werden können. Die Diskussion dieser Techniken ist ein weiterer zentraler Punkt der vorliegenden Arbeit.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Herleitung von Materialformulierungen, die den Werkstoffcharakteristiken von kohäsiven Reibungsmaterialien und adhäsiven materiellen Grenzflächen genügen. Außerdem wird auf Basis eines Homogenisierungskonzepts ein Konstitutivgesetz für die makromechanische Modellierung des Materialverhaltens von Stahlbeton entwickelt. Hierfür müssen die charakteristischen Eigenschaften der beiden konstituierenden Materialien, Beton und Stahl, berücksichtigt werden. Dazu gehören die anisotrope Degradation der elastischen Steifigkeitseigenschaften von Beton und die Evolution irreversibler Dehnungen im Stahl. Es ist darauf hinzuweisen, dass generell oder der Einfachheit halber ohne Verlust an Allgemeinheit Druckversagen von Beton ausgeschlossen werden soll. Zur Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kohäsivzonentheorie wird auf Materialmodelle vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ zurückgegriffen, die durch wenige aussagekräftige Materialparameter definiert sind. Im Zusammenhang mit der Modellierung von diskontinuierlichem Versagen sind Kriterien zu formulieren, mit denen der Zeitpunkt der Rissinitiierung und die Rissrichtung definiert werden. Die Skizzierung verschiedener Ansätze ist Teil dieser Arbeit.

Wenn makroskopische Strukturprobleme unter direkter Einbeziehung des mesoskopischen Materialaufbaus numerisch effizient untersucht werden sollen, ist die Verwendung eines Mehrskalenkonzpts fast unausweichlich. Aus diesem Grund stellt die Einbettung der bereitgestellten Methodik in ein geeignetes Mehrskalenkonzpt ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit dar. Ein äußerst wichtiges Kriterium bei der Wahl eines geeigneten Mehrskalenkonzpts ist die Möglichkeit, Versagen mit mehrskaligem Charakter model-

lieren zu können. Diese Art von Versagen soll den Entwicklungsprozess eines Risses bezeichnen, der im Anfangsstadium nur lokale Wirkung besitzt, aber durch fortschreitendes Wachstum das Verhalten der gesamten Struktur beeinflusst. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein hierarchisches Zweiskalenkonzept ausgewählt, das auf einer additiven Zerlegung der Gesamtlösung in einen grob- und einen feinskaligen Anteil basiert. Dadurch ist man in der Lage, feinskalige Mechanismen eindeutig identifizieren und auf natürliche Art und Weise modellieren zu können.

## 1.4 Gliederung

Die vorliegende Arbeit kann grob in zwei Teile gegliedert werden. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Herleitung der numerischen Methode zur Analyse von diskontinuierlichem Versagen kohäsiver Verbundstrukturen. Im zweiten Teil wird die Einbettung dieser Methode in das erwähnte Zweiskalenkonzept vorgestellt. Die Arbeit besteht aus neun Kapiteln, deren Inhalte im Folgenden kurz erläutert werden.

In *Kapitel 2* werden zunächst die notwendigen mechanischen Grundlagen bereitgestellt. Hierzu gehören die kinematische Beschreibung und Deformation einer gerissenen Verbundstruktur sowie die Erläuterung des Spannungsbegriffs. Nachdem universelle physikalische Aussagen für Kontinua als Bilanzprinzipien angegeben wurden, wird das quasi-statische Randwertproblem der geometrisch linearen Theorie definiert.

Das *Kapitel 3* stellt zwei Verfahren vor, die zur geometrischen Beschreibung eines Körpers und seiner internen Flächen verwendet werden können. Bei diesen Flächen handelt es sich um materielle Grenzflächen und diskrete Risse. Die Wirkungsweise der beiden Verfahren wird mit numerischen Beispielen verifiziert. Außerdem werden alternative Ansätze zur Beschreibung der Rissgeometrie aufgezeigt.

In *Kapitel 4* wird das erweiterte Finite Element Modell zur numerischen Lösung des erläuterten Randwertproblems hergeleitet. Da nichtlineare Materialgesetze zur Modellierung des Werkstoffverhaltens verwendet werden, müssen die zugrunde liegenden Gleichungen linearisiert werden, um sie dann inkrementell iterativ lösen zu können. Abschließend werden wichtige Aspekte der Implementierung des erweiterten Finite Element Modells diskutiert.

Das *Kapitel 5* befasst sich mit der Formulierung unterschiedlicher Materialmodelle im Rahmen eines nichtlinearen bruchmechanischen Konzepts. Dabei wird im Sinne einer thermodynamisch konsistenten Herleitung sowohl auf klassische kontinuumsmechanische Konstitutivgesetze als auch auf Materialgesetze vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ zurückgegriffen. Darüber hinaus werden offene Fragen im Hinblick auf die Rissentstehung beantwortet. Wann und in welche Richtung wächst ein Riss?

In *Kapitel 6* wird die Wirkungsweise der entwickelten Methodik zur numerischen Versagensanalyse von Tragwerken untersucht. Dazu wird die Formulierung anhand von ausgewählten Strukturbeispielen getestet und mit eventuell vorhandenen Versuchsergebnissen verglichen.

Das *Kapitel 7* widmet sich zunächst der Skizzierung und Klassifizierung verschiedener Mehrskalmethoden, bevor das hierarchische Zweiskalenmodell hergeleitet wird. Nachdem die Grundzüge dieses Modells beschrieben wurden, wird auf die variationelle Formulierung des Zweiskalenproblems eingegangen. Anschließend wird die Diskretisierung und Linearisierung der zugrunde liegenden Gleichungen aufgezeigt. Das Kapitel schließt mit einigen Hinweisen auf Implementierungsdetails.

---

In *Kapitel 8* wird die Leistungsfähigkeit des Zweiskalenmodells anhand mehrerer Strukturbeispiele getestet. Dazu werden die gewonnenen Ergebnisse numerischen Referenzlösungen gegenübergestellt. Bei einem der Strukturbeispiele liegen Versuchsergebnisse vor, die zur Beurteilung der Qualität der numerischen Lösungen zusätzlich herangezogen werden.

Das *Kapitel 9* beinhaltet eine Zusammenfassung und Bewertung dieser Arbeit und gibt einen Ausblick auf mögliche weiterführende Problemstellungen.





# Kapitel 2

## Mechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden wesentliche Grundlagen der Kontinuumsmechanik anhand eines zweiphasigen Festkörpers vorgestellt, der sowohl durch die Grenzflächen zwischen den beiden konstituierenden Materialien, als auch durch diskrete Risse charakterisiert ist. Zunächst werden die Kinematik und Deformation des geschädigten Körpers diskutiert sowie der Spannungsbegriff erläutert. Dann wird auf physikalische Bilanzaussagen und schließlich auf die Formulierung des entsprechenden Randwertproblems eingegangen. Eine ausführliche Diskussion über kontinuumsmechanische Grundgleichungen findet sich in den klassischen Werken von *Truesdell & Toupin* [184], *Truesdell & Noll* [183], *Marsden & Hughes* [108], *Stein & Barthold* [172] oder auch *Holzapfel* [78] und *Wriggers* [194].

### 2.1 Kinematik und Deformation

Die Kinematik beziehungsweise der Bewegungsablauf eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  als Teilgebiet des Euklidischen Raumes  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  ist durch eine Platzierungsfunktion  $\varphi$  gegeben. Diese Funktion weist jedem materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  des Körpers seine aktuelle Platzierung  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t > t_0$  zu. Die Abbildung muss dabei ausgenommen einer finiten Anzahl von inneren Flächen, wo die Bewegung oder ihre Ableitung diskontinuierlich sein kann, bijektiv und stetig differenzierbar sein. Solche inneren Flächen stellen z.B. diskrete Risse oder materielle Grenzflächen dar. Im Rahmen einer Lagrangeschen Beschreibung der Bewegung ist die aktuelle Lage des Punktes  $\mathcal{P}$  durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in einer zeitlich konstanten Referenzkonfiguration  $t = t_0$  und die Funktion  $\varphi$  bestimmt.

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Aus Gleichung (2.1) ist zu erkennen, dass sich die Platzierungsfunktion  $\varphi$  aus der Addition des Ortsvektors  $\mathbf{X}$  mit einem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ergibt. Wenn die Platzierungsfunktion bekannt ist, kann der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ermittelt werden. Dieser beschreibt den Transport eines inkrementellen Linienelementes, das den gerichteten differentiellen Abstand zwischen zwei benachbarten materiellen Punkten darstellt, von der Referenz- $d\mathbf{X}$  in die aktuelle  $d\mathbf{x}$  Konfiguration.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.2)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass sich der Nabla-Operator  $\nabla(\cdot)$  in diesem Abschnitt auf die partielle Ableitung hinsichtlich der Referenzkonfiguration bezieht. In der vorliegenden Arbeit werden durch diskrete Risse geschädigte Festkörper  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\alpha \cup \mathcal{B}^\beta$  untersucht, die aus den zwei Festkörperphasen  $\mathcal{B}^\alpha$  und  $\mathcal{B}^\beta$  bestehen, siehe Abbildung 2.1. Bevor auf den gewählten Ansatz zur Beschreibung der Bewegung des Körpers eingegangen wird, werden die kinematischen Erfordernisse formuliert.

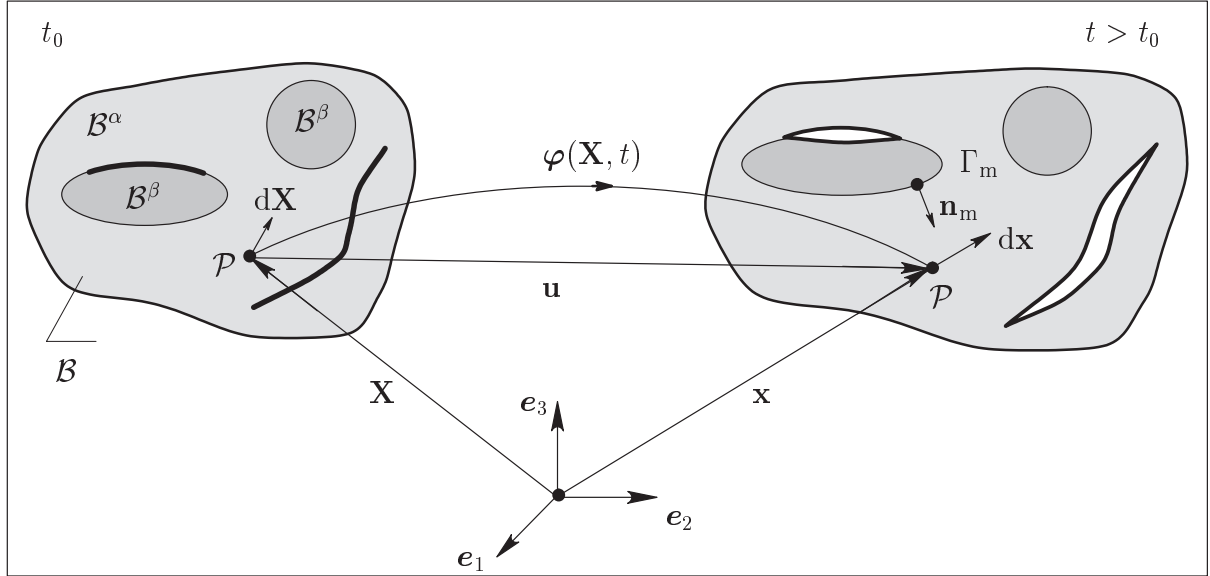


Abbildung 2.1: Der materielle Körper  $\mathcal{B}$  in Referenz- ( $t_0$ ) und aktueller ( $t$ ) Konfiguration

### Formulierung der kinematischen Erfordernisse

Es wird angenommen, dass die beiden Festkörperphasen  $\mathcal{B}^\alpha$  und  $\mathcal{B}^\beta$  an der ungeschädigten Grenzfläche  $\Gamma_m$  perfekt miteinander verbunden sind. Damit ist die Bewegung über diese Fläche hinweg kontinuierlich. Da allerdings die zwei Festkörperphasen unterschiedliche Materialeigenschaften aufweisen, muss die Hadamard-Bedingung erfüllt werden, siehe *Krongauz & Belytschko* [92].

$$[[\mathbf{F}]]_m := \mathbf{F}^\beta - \mathbf{F}^\alpha = \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{n}_m \quad \text{auf } \Gamma_m \quad (2.3)$$

$\mathbf{F}^\alpha$  und  $\mathbf{F}^\beta$  kennzeichnen den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  innerhalb der Festkörperphasen  $\mathcal{B}^\alpha$  bzw.  $\mathcal{B}^\beta$  an der ungeschädigten Grenzfläche. Die Variable  $\mathbf{n}_m$  bezeichnet den in die Festkörperphase  $\mathcal{B}^\alpha$  zeigenden Normalenvektor der Grenzfläche und  $\mathbf{a}_m$  einen beliebigen Vektor. In Gleichung (2.3) ist die Forderung nach der Diskontinuität des Deformationsgradienten an der ungeschädigten Grenzfläche formuliert. Bei diesem Typ von innerer Fläche muss die Ableitung der Bewegung diskontinuierlich sein. Die Bewegung selbst bleibt jedoch kontinuierlich.

Im Gegensatz zu ungeschädigten materiellen Grenzflächen induzieren Risse diskontinuierliche Verschiebungsfelder. Die Platzierungsfunktion muss daher in der Lage sein, einen materiellen Punkt, durch den ein Riss verläuft, auf zwei assoziierte Punkte abbilden zu können. Eine anschauliche Erklärung liefert die Vorstellung, dass ein Riss  $\Gamma_{0,c}$  zunächst zwei zusammenliegende Flächen beschreibt, die während des Bewegungsablaufs voneinander getrennt werden, siehe Abbildungen 2.1 und 2.2. Die Differenz der Verschiebungen  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{u}^-$  zwischen zwei assoziierten Punkten der Rissufer  $\Gamma_c^+$  und  $\Gamma_c^-$  wird als Verschiebungssprung  $[[\mathbf{u}]]_c$  bezeichnet. Die kinematische Beschreibung muss folgende Bedingung befriedigen können,

$$[[\mathbf{u}]]_c := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \mathbf{a}_c \quad \text{auf } \Gamma_c \quad (2.4)$$

wobei  $\mathbf{a}_c$  einen beliebigen Vektor kennzeichnet.

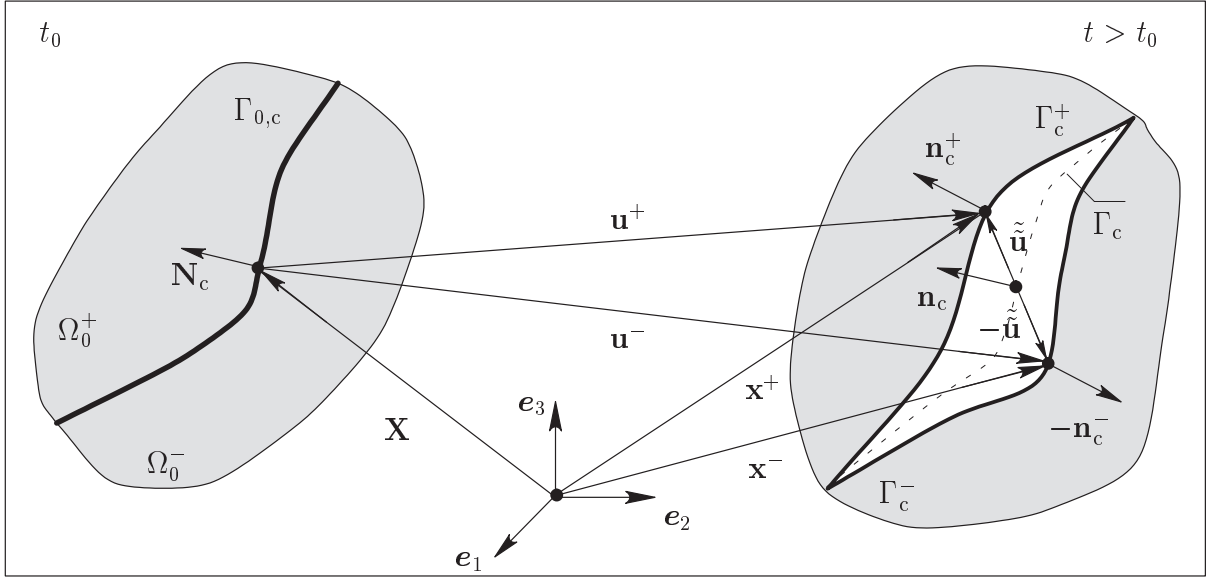


Abbildung 2.2: Vergrößerung eines der Risse aus Abbildung 2.1 in Referenz- ( $t_0$ ) und aktueller ( $t$ ) Konfiguration

### Realisierung der kinematischen Erfordernisse

Im Rahmen dieser Arbeit werden Festkörper untersucht, die sowohl mehrere materielle Grenzflächen, als auch mehrere sich nicht-überschneidende Risse aufweisen. In Abbildung 2.3 ist der materielle Körper in seiner aktuellen Konfiguration dargestellt. Die Festkörperphase  $\mathcal{B}^\alpha$  nimmt das Gebiet  $\Omega_1$  ein. Das Gebiet  $\Omega_2 = \cup_i \Omega_{2,i}$  repräsentiert die Festkörperphase  $\mathcal{B}^\beta$ . Somit beschreibt  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  das Gebiet des gesamten Körpers  $\mathcal{B}$  in seiner aktuellen Konfiguration. Die Anzahl der unabhängig voneinander modellierten materiellen Grenzflächen des Körpers ist durch die Variable  $n_m$  bestimmt. Die Anzahl der Risse ist durch  $n_c$  gegeben. Um den kinematischen Erfordernissen gerecht zu werden, wird folgende Verschiebungsfunktion verwendet.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i}(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j}(\mathbf{X}) \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j(\mathbf{X}, t) \quad (2.5)$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  stellt den gewöhnlichen Anteil des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  dar. Die Verschiebung  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  ist mit der materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  assoziiert. Die Verschiebung  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  steht mit dem diskreten Riss  $\Gamma_{0,c,j}$  in Verbindung. Alle drei Verschiebungskomponenten beschreiben kontinuierliche Größen mit kontinuierlichen Ableitungen.

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  lässt sich aus dem obigen Verschiebungsfeld unter Verwendung der Gleichungen (2.2) und (2.1) berechnen.

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} [\tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla \chi_{m,i} + \chi_{m,i} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_i] + \sum_{j=1}^{n_c} [\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \otimes \nabla \chi_{c,j} + \chi_{c,j} \nabla \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j] \quad (2.6)$$

$\mathbf{1}$  stellt den zweistufigen Einheitstensor dar. Da die Verschiebung  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  in ihren Ableitungen kontinuierlich ist, muss die Funktion  $\chi_{m,i}$  über die materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  hinweg in ihrer Ableitung diskontinuierlich sein, damit die Forderung (2.3) befriedigt werden kann.

Um die Kontinuität der Bewegung über die materielle Grenzfläche hinweg zu gewährleisten, muss  $\chi_{m,i}$  selbst stetig sein. In der vorliegenden Arbeit wird die Funktion  $\chi_{m,i}$  über die mathematische Beschreibung von  $\Gamma_{m,i}$  konstruiert. Deshalb wird erst im Kapitel 3.2.1 genauer auf  $\chi_{m,i}$  eingegangen. Durch die Bildung der Differenz der Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^\beta$  und  $\mathbf{F}^\alpha$  an der materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  kann der erzeugte Sprung identifiziert werden, vergleiche Gleichung (2.3).

$$[[\mathbf{F}]]_{m,i} := \mathbf{F}^\beta - \mathbf{F}^\alpha = \tilde{\mathbf{u}}_i \otimes [[\nabla\chi_{m,i}]] \quad \text{auf } \Gamma_{m,i} \quad (2.7)$$

Damit sich ein diskontinuierliches Verschiebungsfeld über den Riss  $\Gamma_{0,c,j}$  hinweg entwickeln kann, wird die Verschiebungskomponente  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  mit einer Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  multipliziert.

$$\chi_{c,j} = 2\mathcal{H}_{c,j} - 1 = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^+ \\ -1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^- \end{cases} \quad (2.8)$$

$\mathcal{H}_{c,j}$  ist die Heaviside-Funktion, die in Abhängigkeit des Ortes den Wert eins oder null annimmt, siehe Anhang A. In Abbildung 2.2 ist die Kinematik eines Risses veranschaulicht. Der materielle Punkt  $\mathbf{X}$  wird durch die Platzierungsfunktion  $\varphi$  auf die Punkte  $\mathbf{x}^+$  und  $\mathbf{x}^-$  abgebildet. Die Bildung der Differenz der dazugehörigen Verschiebungen  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{u}^-$  zeigt, dass mit der Verschiebungsfunktion (2.5) die in Gleichung (2.4) formulierte Bedingung erfüllt werden kann.

$$[[\mathbf{u}]]_{c,j} := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = 2\tilde{\mathbf{u}}_j \quad \text{auf } \Gamma_{c,j} \quad (2.9)$$

### 2.1.1 Verzerrungsmaß und Bewegung der Rissnormalen

In der vorliegenden Arbeit wird von der Annahme einer linearen Kinematik mit kleinen Deformationen ausgegangen, so dass als Verzerrungsmaß der klassische Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  benutzt werden kann. Dieser ergibt sich aus der Linearisierung der Green-Lagrange Verzerrungen als der symmetrische Anteil des Gradienten des Verschiebungsfeldes (2.5).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}}}_{\text{kont.}} + \sum_{i=1}^{n_m} \left[ \underbrace{(\tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla\chi_{m,i})^s}_{\text{diskont.}} + \underbrace{\chi_{m,i} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_i}_{\text{kont.}} \right] + \sum_{j=1}^{n_c} \left[ \underbrace{2\delta_{c,j}(\tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{N}_{c,j})^s}_{\text{unbegr.}} + \underbrace{\chi_{c,j} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_j}_{\text{diskont.}} \right] \quad (2.10)$$

Das Verzerrungsfeld  $\boldsymbol{\varepsilon}$  kann in mehrere Teile aufgesplittet werden. Der kontinuierliche Anteil  $\nabla^s \hat{\mathbf{u}}$  beschreibt die gewöhnliche Verzerrungskomponente. Die Erweiterung der standardmäßigen Verschiebungsfunktion zur Berücksichtigung von mehreren, individuell behandelten materiellen Grenzflächen liefert diskontinuierliche und kontinuierliche Anteile. Jeder diskontinuierliche Anteil resultiert aus der Diskontinuität des Gradienten der Anreicherungsfunktion  $\chi_{m,i}$  an der entsprechenden materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$ . Die kinematische Anreicherung zur Modellierung von Rissen führt zu unbegrenzten und diskontinuierlichen Verzerrungskomponenten. Jede unbegrenzte Komponente wird durch die Dirac-Delta Verteilung  $\delta_{c,j}$  verursacht, die wie der Normalenvektor  $\mathbf{N}_{c,j}$  des Risses  $\Gamma_{0,c,j}$  aus der Gradientenbildung der Heaviside-Funktion resultiert, siehe Anhang A. Sie liefert für materielle Punkte, die nicht auf dem entsprechenden Riss liegen, keinen Beitrag und hat für alle anderen Punkte unendlich große Verzerrungen zur Folge.

Auf Grund der Bewegung und Deformation des Körpers verändert sich die Rissnormale.

Mit Hilfe der Formel von Nanson lässt sich die Beziehung zwischen dem bekannten Normalenvektor  $\mathbf{N}_{c,j}$  der Rissfläche  $\Gamma_{0,c,j}$  in der Referenzkonfiguration und dem unbekanntem Normalenvektor  $\mathbf{n}_{c,j}^*$  der Rissfläche  $\Gamma_{c,j}^*$  in der aktuellen Konfiguration herstellen.

$$\mathbf{n}_{c,j}^* = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_{c,j} \frac{d\Gamma_{0,c,j}}{d\Gamma_{c,j}^*} \quad (2.11)$$

Die Inkremente  $d\Gamma_{0,c,j}$  und  $d\Gamma_{c,j}^*$  beschreiben die infinitesimalen Flächenelemente des Risses in der Referenz- bzw. aktuellen Konfiguration. Der Deformationsgradient ist auf Grund der Vorzeichenfunktion über den jeweiligen Riss hinweg diskontinuierlich. Daher ist der entsprechende Normalenvektor  $\mathbf{n}_{c,j}^*$  der aktuellen Konfiguration nicht ein- sondern zweideutig. Die beiden resultierenden Vektoren  $\mathbf{n}_{c,j}^+$  und  $\mathbf{n}_{c,j}^-$  stellen die Normalen der zwei Rissufer  $\Gamma_{c,j}^+$  bzw.  $\Gamma_{c,j}^-$  dar, siehe Abbildung 2.2.

Die Modellierung der Deterioration des Materials im Rahmen der Kohäsivzonentheorie ist mit der Annahme verbunden, dass Spannungen über die beiden Rissufer hinweg übertragen werden können. Wenn man unabhängig vom zugrunde liegenden Materialverhalten annimmt, dass die Spannungsübertragung nur bei Kontakt möglich ist, müssten die Normalen der Rissufer parallel sein. Dem möglichen Widerspruch kann im Rahmen eines heuristischen Ansatzes durch die Verwendung der Normalen  $\mathbf{n}_{c,j}$  der fiktiven Fläche  $\Gamma_{c,j}$ , die in der Mitte von beiden Rissufern liegt, Rechnung getragen werden, siehe *Wells, de Borst & Sluys* [189] und *Gasser & Holzapfel* [59]. Ein alternativer Ansatz wurde von *Mergheim & Steinmann* [112] vorgeschlagen. Er basiert auf der Voraussetzung, dass der Spannungsvektor am Riss in dieselbe Richtung zeigt wie der Verschiebungssprung. Dabei kann auf die Definition einer eindeutigen Rissnormalen verzichtet werden. Jedoch impliziert diese Voraussetzung eine spezielle adhäsive Verbindung zwischen den beiden Rissufern.

In der vorliegenden Arbeit wird von Problemstellungen ausgegangen, bei denen lediglich kleine Deformationen auftreten. Des Weiteren wird angenommen, dass speziell in den Rissbereichen keine großen Rotationen auftreten und die Rissoberfläche während des Deformationsprozesses konstant bleibt. Damit kann vorausgesetzt werden, dass die Normale  $\mathbf{n}_{c,j}$  der fiktiven Rissmittelfläche  $\Gamma_{c,j}$  ungefähr identisch der Einheitsnormalen  $\mathbf{N}_{c,j}$  des entsprechenden Risses in der Referenzkonfiguration ist. Diese Voraussetzung führt nur dann zu signifikanten Ungenauigkeiten in der numerischen Lösung, wenn der Riss erhebliche Spannungen überträgt und dabei einer größeren Rotation oder Dehnung unterliegt. Bei vielen praktischen Problemstellungen sind die transferierten Spannungen klein, wenn die Richtungsänderung der Rissnormalen oder die Änderung der Rissoberfläche bemerkbar werden. Somit dürften Ungenauigkeiten auf Grund der getroffenen Voraussetzungen in der Regel relativ gering bleiben.

### 2.1.2 Anmerkungen zur Kinematik von Gleitflächenrissen

Festkörperprobleme, die sich durch die Existenz von Gleitflächen auszeichnen, gehören zu einer wichtigen Problemklasse zahlreicher Ingenieurwissenschaften. Gleitflächen beschreiben Scherfugen oder Schubrisse, die hauptsächlich unter Druckbelastung entstehen oder aktiviert werden. Beispielsweise werden im Bereich der Geotechnik Untersuchungen angestellt, bei denen die Modellierung von Gleitflächen eine große Rolle spielt. Hierzu zählen unter anderem Analysen über Böschungsbrüche in diversen Böden oder in geklüftetem Fels. Dabei kann die Lage und Geometrie potentieller Gleitflächen entweder

durch geeignete Kriterien berechnet werden oder, wie im Falle von geklüftetem Fels, a priori vorgegeben sein.

Die in diesem Kapitel vorgestellte, allgemeingültige Abbildungsvorschrift erfasst natürlich auch die Kinematik eines Gleitflächenrisses. Allerdings erkennt man bei Gleitflächenrissen, dass zur korrekten Rissmodellierung eine Nebenbedingung erfüllt werden muss. An den Ufern eines Schubrisses entsteht nur ein tangenciales Abgleiten. Die unrealistische Penetration beider Rissufer infolge der anstehenden Druckbelastung muss im Rahmen einer numerischen Simulation durch geeignete Strategien verhindert werden. Eine elegante Methode liefert die unmittelbare Berücksichtigung der speziellen Risscharakteristik im Ansatz für die Verschiebungskomponente  $\tilde{\mathbf{u}}_j$ . Bei zweidimensionalen Problemen kann folgender Ansatz benutzt werden, siehe *Belytschko et al.* [19] und *Belytschko et al.* [21].

$$\tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{u}_j \mathbf{e}_{t,j} \quad (2.12)$$

Darin beschreibt der tangentielle Einheitsvektor  $\mathbf{e}_{t,j}$  des Risses  $\Gamma_{0,c,j}$  die Richtung des Verschiebungssprunges und die skalare Größe  $\tilde{u}_j$  die vorzeichenbehaftete Hälfte seines Betrages, vergleiche Gleichung (2.9). Es sei darauf hingewiesen, dass dieser Ansatz seine Gültigkeit verliert, wenn sich der Versagensmodus während der Simulation maßgeblich ändert und der Riss durch Zugkräfte zum Öffnen gezwungen wird.

Der Verschiebungsansatz (2.12) lässt sich nicht immer durch Anschauung motivieren. Im Allgemeinen ist die Charakteristik eines Risses materialabhängig. Zum Beispiel kann der Verschiebungsansatz bei plastischem Materialverhalten auch über die Betrachtung der gewöhnlichen  $J_2$ -Fließtheorie im Kontext starker Diskontinuitäten hergeleitet werden, siehe *Samaniego & Belytschko* [160]. Hierbei kann gezeigt werden, dass die Fließrichtung unabhängig vom Belastungszustand immer tangential bezüglich der Gleitfläche ist.

## 2.2 Spannung

Durch äußere Kraftereinwirkung auf einen Körper  $\mathcal{B}$  entstehen in dessen Inneren lokale mechanische Beanspruchungen, die durch Spannungen beschrieben werden. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$ , der auf den Punkt  $\mathbf{x}$  des Körpers in der aktuellen Konfiguration bezüglich einer Schnittfläche mit der Normalen  $\mathbf{n}$  wirkt, kann mit Hilfe des Cauchy-Theorems angegeben werden.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.13)$$

Die Cauchy-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  stellen die wahren Spannungen dar, da sie auf die aktuelle Konfiguration bezogen sind. In der Literatur über mechanische Grundlagen finden sich weitere Spannungsmaße. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie kann jedoch gezeigt werden, dass all diese Spannungsmaße gleichwertig sind.

## 2.3 Bilanzsätze

Die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik sind grundlegende Axiome, die auf Grund empirischer Beobachtungen aufgestellt wurden. Sie stellen materialunabhängige Aussagen dar, die die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe in einem bestimmten Volumen bilanzieren. In diesem Abschnitt werden die Bilanz der Masse, des Impulses, des Dralls und der Energie sowie die Entropiegleichung für einen materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  in der Momentankonfiguration diskutiert.

Die Erhaltung der Masse besagt, dass in einem geschlossenen System die Masse eines Körpers  $\mathcal{B}$  konstant bleibt. Nach einigen Umformungen lässt sich die Massenerhaltung in lokaler Form angeben.

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.14)$$

Darin symbolisiert  $\rho$  die Dichte des materiellen Punktes.

Die Impulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses und somit der Bewegung eines Körpers  $\mathcal{B}$  gleich der Summe der von Außen auf ihn einwirkenden Kräfte ist. Nach einigen Umformungen und unter Verwendung der lokalen Massenerhaltung kann die lokale Form der Impulsbilanz gewonnen werden.

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}^* \quad (2.15)$$

Der Vektor  $\mathbf{b}^*$  kennzeichnet die Beschleunigung, die auf den materiellen Punkt durch Volumenkräfte wirkt.

Die Drall- oder Drehimpulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Dralls eines Körpers  $\mathcal{B}$  gleich der Summe der von Außen auf ihn einwirkenden Momente ist. Unter Berücksichtigung der lokalen Massen- und Impulserhaltung folgt für Boltzmann Kontinua die Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.16)$$

Dieses Ergebnis ist nicht aus der Impulsbilanz herleitbar und kennzeichnet den Drallsatz als eigenständiges Axiom.

Mit Hilfe der Energiebilanz kann eine Aussage über die Evolution der gesamten Energie eines Körpers  $\mathcal{B}$  getroffen werden. Die Bilanz wird als 1. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet. Sie liefert den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Summe aus kinetischer und innerer Energie und der Summe aus mechanischer und thermischer Leistung. Unter Verwendung der lokalen Massen- und Impulsbilanzen ergibt sich die Energiebilanz in lokaler Form.

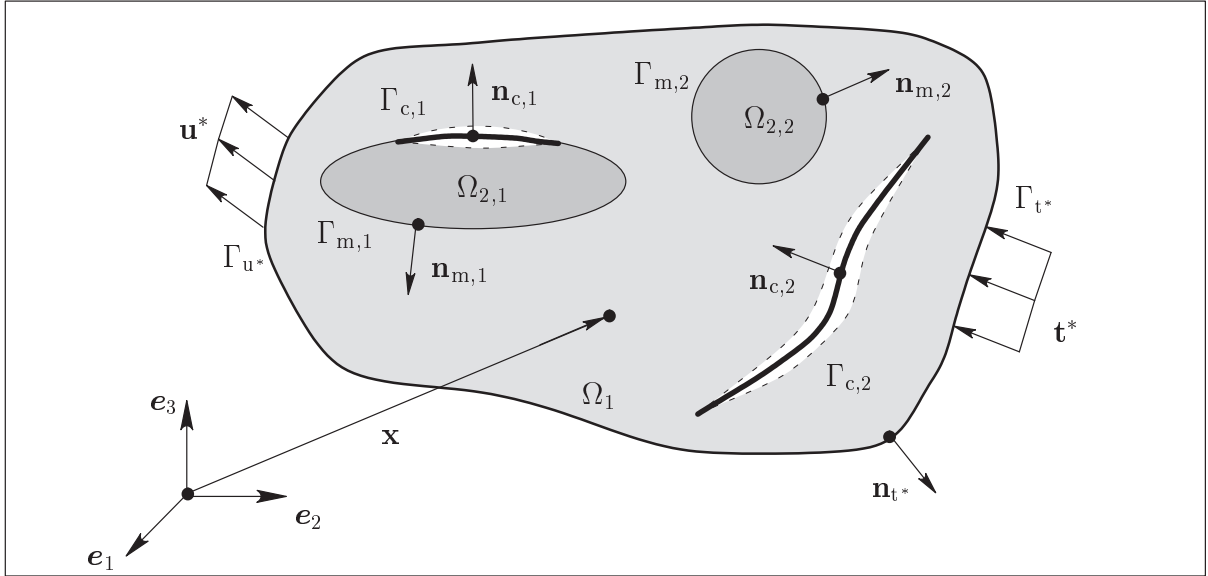
$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad (2.17)$$

Die Evolution der spezifischen inneren Energiedichte  $e$  des materiellen Punktes ist abhängig von der Wärmequelle  $r$ , dem Wärmeflussvektor  $\mathbf{q}$  und der Spannungsleistung  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ . Der zweistufige Tensor  $\mathbf{D} = \nabla^s \dot{\mathbf{x}}$  symbolisiert den räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitsgradienten.

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik stellt die Entropieungleichung bzw. Clausius-Duhem Ungleichung dar. Sie postuliert, dass für thermomechanische Vorgänge die Prozessrichtung natürlich gegeben ist. Anschaulich lässt sich diese Aussage dadurch erläutern, dass der Wärmefluss von selbst nur von einem wärmeren zu einem kälteren Medium stattfinden kann. Die Entropieungleichung besagt, dass die Änderung der totalen Entropie  $\eta$  nie kleiner als die Differenz aus Wärmeproduktion und Wärmefluss dividiert durch die absolute Temperatur  $\Theta$  sein kann. Unter Beachtung der Energiebilanz (2.17) erhält man die Entropieungleichung in lokaler Form.

$$\rho \Theta \dot{\eta} - \rho \dot{e} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta \geq 0 \quad (2.18)$$

Die massenspezifische freie Helmholtz Energie  $\psi = \rho [e - \Theta \eta]$  kann als die Multiplikation der Dichte mit der Differenz aus spezifischer innerer Energie und der temperaturgewichteten Entropie definiert werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden isotherme

Abbildung 2.3: Randwertproblem in der Momentankonfiguration ( $t$ )

Prozesse bei geometrischer Linearität untersucht. Mit der Definition der freien Energie kann die Entropie- bzw. Clausius-Duhem Ungleichung isothermer Prozesse folgendermaßen angegeben werden.

$$\mathcal{D} := \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.19)$$

Dies bedeutet, dass die Dissipation  $\mathcal{D}$  nie negativ sein darf. Damit ist die Spannungsleistung nie kleiner als die zeitliche Änderung der freien Energie. Die Dissipation ist bei reversiblen, also umkehrbaren Prozessen gleich null und bei irreversiblen Prozessen größer null. Die Clausius-Duhem Ungleichung liefert eine Restriktion für die Entwicklung von konstitutiven Gleichungen, die thermodynamischen Argumenten genügen sollen, siehe Kapitel 5.

## 2.4 Randwertproblem

Das Randwertproblem in der Kontinuumsmechanik besteht in der Erfüllung der Bilanzsätze aus Kapitel 2.3 unter Berücksichtigung von bestimmten Randbedingungen. Die Impulsbilanz (2.15) beschreibt das lokale Gleichgewicht, das punktweise erfüllt werden muss. Aus mathematischer Sicht stellt die Bilanz drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden statische Probleme untersucht, so dass die materiellen Punkte keine Beschleunigung erfahren. Des Weiteren wird angenommen, dass die über Volumenkkräfte wirkende Beschleunigung  $\mathbf{b}^*$  gleich null ist. Damit reduziert sich die Impulsbilanz zu folgender Gleichung.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Der gesamte Rand  $\Gamma$  des Gebietes  $\Omega$  besteht aus mehreren Teilrändern, die entweder die Oberfläche des Körpers darstellen oder materielle Grenzflächen bzw. Risse sind, siehe Abbildung 2.3. Auf der Oberfläche des Körpers werden entweder die Verschiebungen  $\mathbf{u}^*$  oder der Vektor  $\mathbf{t}^*$  der Kontaktspannungen vorgeschrieben. Der Teil der Oberfläche, auf



dem die Lösung bekannt ist, wird als Dirichlet-Rand  $\Gamma_{u^*}$  bezeichnet. Der restliche Teil, auf dem der Spannungsvektor bekannt ist, stellt den Neumann-Rand  $\Gamma_{t^*}$  dar.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{auf } \Gamma_{u^*} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{t^*} = \mathbf{t}^* \quad \text{auf } \Gamma_{t^*} \quad (2.21)$$

Die gesamte materielle Grenzfläche  $\Gamma_m = \cup_i \Gamma_{m,i}$  ist die Menge aller unabhängig voneinander behandelte ungeschädigte Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$ . Auf jeder dieser Flächen muss die Kontinuität des Spannungsvektors erfüllt sein.

$$[[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{m,i}]] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_{m,i} \quad (2.22)$$

Die gesamte Rissfläche  $\Gamma_c = \cup_j \Gamma_{c,j}$  bildet sich aus den einzelnen Rissen  $\Gamma_{c,j}$ . In der vorliegenden Arbeit wird diskontinuierliches Materialversagen auf der Meso- oder Makroskala im Rahmen der Kohäsivzonentheorie modelliert. Die Risse besitzen die Fähigkeit, Spannungen zu übertragen. Allerdings nimmt diese Fähigkeit bei entfestigenden Materialien mit fortschreitender Rissöffnung ab. Die übertragbaren Spannungen  $\mathbf{t}_{c,j}$  werden mittels materialspezifischer Traktions-Verschiebungssprung-Gesetze bestimmt, siehe Kapitel 5.3 und 5.4.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{c,j} = \mathbf{t}_{c,j} \quad \text{auf } \Gamma_{c,j} \quad (2.23)$$

Der gesamte Rand des Gebietes ist durch die Menge aller Teileränder beschrieben, so dass  $\Gamma = \Gamma_{u^*} \cup \Gamma_{t^*} \cup \Gamma_m \cup \Gamma_c$  gilt. Es wird darauf hingewiesen, dass es keine Schnittmenge zwischen zwei Rändern unterschiedlicher Art gibt.



# Kapitel 3

## Geometrische Beschreibung von Diskontinuitäten

### 3.1 Einführung

In diesem Kapitel wird die Beschreibung der Geometrie und Lage von materiellen Grenzflächen und diskreten Rissen diskutiert. Zur geometrischen Beschreibung von diesen Diskontinuitäten kann grundsätzlich auf verschiedene Ansätze zurückgegriffen werden. Eine mögliche Methode bietet die Polynominterpolation zwischen bekannten Punkten auf der Diskontinuität mit Lagrange- oder Newton-Polynomen. Eine weitere Möglichkeit kennzeichnet die Identifikation von unbekanntem Koeffizienten einer Funktion, mit der eine Diskontinuität beschrieben werden soll, aus ihrer Least-Square Anpassung an eine Menge von bekannten Punkten auf der Diskontinuität. Außerdem kann die Geometrie von Diskontinuitäten über zusammengesetzte Segmente beschrieben werden. Um eine gewisse Glattheit der Diskontinuitäten zu garantieren, müsste die Beschreibung mindestens  $C^1$ -kontinuierlich sein. Beispielsweise können in 2D bei der parametrisierten Darstellung einer Kurve kubische Hermite Splines verwendet werden, die durch kubische Hermite Polynome, die Anfangs- und Endpunkte der Splines sowie die dazugehörigen Tangentenvektoren definiert sind. In dieser Arbeit interessiert nicht nur die Geometrie, sondern insbesondere auch die Lage der Diskontinuität bezüglich eines beliebigen Punktes im Gebiet  $\Omega$  des Körpers  $\mathcal{B}$ .

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird hierfür die so genannte *Level Set Methode* (LSM) benutzt. Eine Übersicht über diese Methode findet sich in den Büchern von *Sethian* [165] und *Osher & Fedkiw* [140]. Die LSM stellt ein numerisches Verfahren dar, das ursprünglich entwickelt wurde, um die Bewegung beliebiger Diskontinuitäten zu erfassen. Sie basiert auf der Idee, die entsprechende Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit Hilfe einer Funktion  $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als Iso-Kurve darzustellen.

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (3.1)$$

In Gleichung (3.1) kennzeichnet  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  einen materiellen Punkt in der Momentankonfiguration. Die Bewegung von  $\Gamma$  ist durch die räumliche Zeitableitung von  $\phi = 0$  gegeben.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F |\nabla \phi| = 0, \quad \phi(\mathbf{x}, t_0) \text{ gegeben} \quad (3.2)$$

Die obige Gleichung ist vom Hamilton-Jacobi-Typ und wird häufig als Level Set Gleichung bezeichnet, siehe *Osher & Sethian* [141]. Darin symbolisiert  $F = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma \cdot \mathbf{n}$  die Geschwindigkeit der Punkte  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$  senkrecht zu  $\Gamma$ . Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit dieser Punkte hat somit keinen Einfluss auf die Position der Fläche. Die Anfangsbedingungen können so gewählt werden, dass  $\phi$  den vorzeichenbehafteten Abstand  $d$  zu  $\Gamma$  beschreibt,

siehe Abbildung 3.1. Bei der Lösung von Gleichung (3.2) bleibt diese Eigenschaft von  $\phi$  unter bestimmten Voraussetzungen erhalten, siehe *Zhao et al.* [198] und *Mourad, Dolbow & Garikipati* [125]. Allerdings können Diskretisierungsfehler in der Zeit und im Raum dazu führen, dass die Abstandsinformation verloren geht. In diesem Zusammenhang ist es nützlich, auf Reinitialisierungsalgorithmen zurückzugreifen, mit denen aus der Level Set Funktion wieder eine annähernde Abstandsfunktion generiert werden kann.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \underbrace{\min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma|}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.3)$$

Das Vorzeichen der Abstandsfunktion hängt vom Ort des Punktes  $\mathbf{x}$  bezüglich  $\Gamma$  ab. Im Falle einer materiellen Grenzfläche trennt  $\Gamma$  zwei Festkörperphasen, welche die Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  einnehmen. Nun kann man der Funktion  $\phi$  für Punkte im Gebiet  $\Omega_1$  ein positives und für Punkte in  $\Omega_2$  ein negatives Vorzeichen zuweisen, siehe Abbildung 2.3. Wenn  $\Gamma$  einen Riss repräsentiert, kann das Vorzeichen von  $\phi$  im Sinne von Gleichung (2.8) und Abbildung 2.2 vergeben werden.

Über die Funktion  $\phi$  lassen sich geometrische Eigenschaften von  $\Gamma$  auf einfache Art und Weise berechnen. Zu diesen Eigenschaften gehören die Flächennormale  $\mathbf{n}$  und die mittlere Krümmung  $\kappa^*$ .

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \text{und} \quad \kappa^* = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (3.4)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Norm des Gradienten der Funktion  $\phi$  in der Regel gleich eins ist, wenn  $\phi$  eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion darstellt. Die Flächennormale zeigt in das Gebiet, in dem die materiellen Punkte positive Funktionswerte annehmen. Die mittlere Krümmung entspricht dem reziproken Radius der Schmiegunskugel. Sie ist in konvexen Bereichen von  $\Gamma$  größer als null und in konkaven Bereichen kleiner als null. Bei ebenen Flächen hat die Krümmung den Wert null.

## 3.2 Materielle Grenzflächen und Grenzflächenrisse

In diesem Abschnitt wird die geometrische Beschreibung von materiellen Grenzflächen und Grenzflächenrissen behandelt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Probleme untersucht, bei denen kleine Deformationen vorausgesetzt werden können. Deshalb kann davon ausgegangen werden, dass die zeitliche Änderung der Lage einer Grenzfläche bezüglich des materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  zumindest in den Bereichen nahe ungeschädigter Grenzflächensegmente vernachlässigbar ist. Es gilt somit zu jeder Zeit für die materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$ :

$$\phi_{m,i}(\mathbf{x}) := \phi_{m,i}(\mathbf{x}, t_0) . \quad (3.5)$$

Dies bedeutet, dass die Level Set Gleichung (3.2) nicht gelöst werden muss. Vielmehr besteht die Aufgabe darin, geeignete mathematische Funktionen für  $\phi_{m,i}$  zu finden oder zu konstruieren. Auf Grund der ausgewählten Anwendungsbeispiele können die materiellen Grenzflächen durch spezielle Quadriken bzw. Flächen zweiter Ordnung mit Symmetriepunkt beschrieben werden.

$$\phi_{m,i}(\mathbf{x}) := \mathbf{r}_i \mathbf{M}_i \mathbf{r}_i - m_i = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,i} \quad (3.6)$$

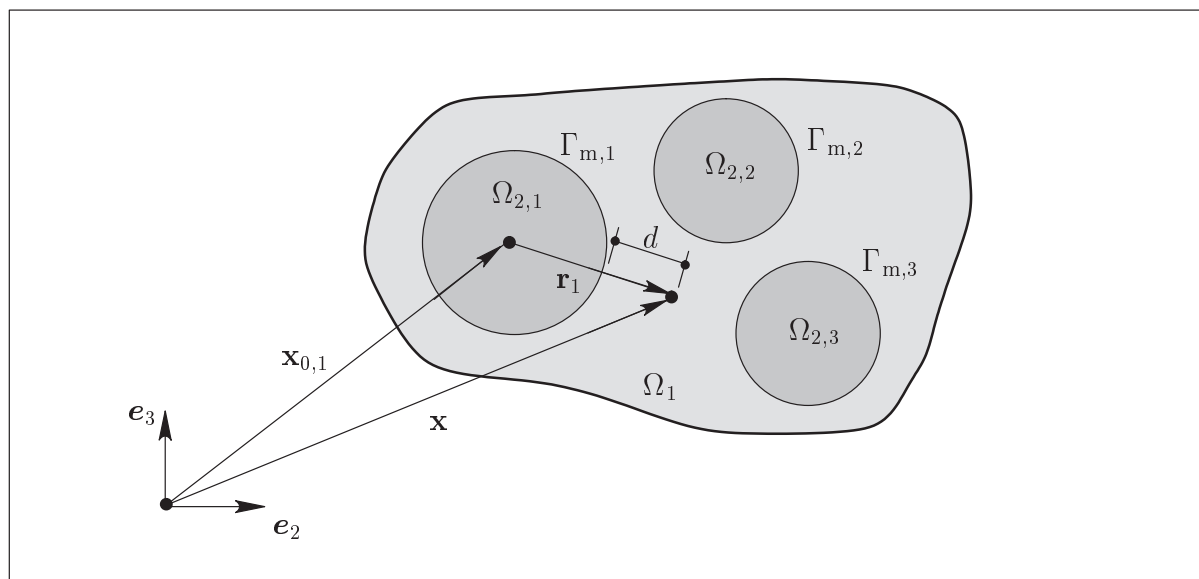


Abbildung 3.1: Runde Einschlüsse umgeben von Matrixmaterial

Darin symbolisiert  $\mathbf{x}_{0,i}$  den Symmetriepunkt der Quadrike. Die Matrix  $\mathbf{M}_i$  und der Skalar  $m_i$  klassifizieren den Flächentyp. In der vorliegenden Arbeit werden 2D-Problemstellungen untersucht. Dabei wird bei allen Anwendungsbeispielen vorausgesetzt, dass die Gebiete  $\Omega_{2,i}$  kreisförmig sind, siehe Abbildung 3.1. In diesem speziellen Fall kennzeichnet  $\mathbf{x}_{0,i}$  den Kreismittelpunkt, die Matrix  $\mathbf{M}_i$  stellt die Einheitsmatrix dar und  $m_i = r_i^2$  symbolisiert das Quadrat des Kreisradius. Die Kreisfunktion enthält in Darstellung (3.6) nur eine Vorzeichen-, aber keine Abstandsinformation. Die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion, die jedem Punkt im gesamten Gebiet das Vorzeichen und den Abstand  $d$  zum Kreis zuweist, lautet folgendermaßen.

$$\phi_{m,i}(\mathbf{x}) := |\mathbf{r}_i| - r_i = \begin{cases} +d & : \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_{2,i} \\ 0 & : \mathbf{x} \in \Gamma_{m,i} \\ -d & : \mathbf{x} \in \Omega_{2,i} \end{cases} \quad (3.7)$$

Die Funktion ist negativ, wenn der Punkt innerhalb des Gebietes  $\Omega_{2,i}$  liegt. Für Punkte, die sich im restlichen Gebiet  $\Omega \setminus \Omega_{2,i}$  befinden, nimmt sie positive Werte an. Es ist offensichtlich, dass die Funktionswerte für Punkte auf der Kreiskurve null sind. Bei einer anderen Art von Kurve zweiter Ordnung mit Symmetriepunkt, der Ellipse, müsste die entsprechende vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ausgehend von Gleichung (3.6) zuerst berechnet werden. Hierfür kann im Sinne der Level Set Methode eine partielle Differentialgleichung vom Hamilton-Jacobi-Typ gelöst werden, siehe *Gravouil, Moës & Belytschko* [65]. Eine andere Möglichkeit bietet die Lösung einer Eikonalgleichung mit der zur LSM verwandten Fast Marching Methode, siehe *Sukumar, Chopp & Moran* [179]. Die zu lösende Eikonalgleichung besagt, dass der Betrag des Gradienten der Level Set Funktion gleich eins sein muss, um aus dieser eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion zu generieren.

Wenn keine geschlossenen mathematischen Funktionen, sondern eine Scan-Analyse oder ein CAD-Modell des untersuchten Körpers mit Diskontinuität zur Verfügung steht, kann auch eine Level Set Funktion erzeugt werden. Es sei angemerkt, dass die physikalische Bedeutung der Diskontinuität dabei natürlich keine Rolle spielt. Bei der Diskontinuität

könnte es sich entweder um eine materielle Grenzfläche oder beispielsweise auch um eine Rissfläche handeln. Aus den vorhandenen Daten muss zur Erzeugung der Level Set Funktion eine Menge von Punkten auf der Diskontinuität extrahiert werden. Zudem werden Punkte neben der Diskontinuität benötigt. Sie werden durch ein Verfahren generiert, bei dem die annähernden Normalen der Diskontinuität benutzt werden. Für die ausgewählten Punkte sind der Ort und der Level Set Funktionswert bekannt. Die Level Set Funktion  $\phi_{m,i}$  zur geometrischen Beschreibung der materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  kann dann unter Verwendung von radialen Basisfunktionen, wie z.B. biharmonischen Splines, berechnet werden, siehe *Belytschko et al.* [21]. In diesem Zusammenhang stellt die Approximation der Geometrie jeder einzelnen Diskontinuität durch das stückweise Zusammenfügen von Ebenen ein einfaches Verfahren dar. Beispielsweise ergibt sich die Level Set Funktion  $\phi_{m,i}$  als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion aus der Multiplikation des kleinsten Abstands bezüglich aller Ebenensegmente von  $\Gamma_{m,i}$  mit einer Vorzeichenfunktion, vergleiche Gleichung (3.3). Bei 2D-Problemen wird damit jede einzelne Diskontinuität als Polygonzug approximiert. Bei existierenden Strukturen können Level Set Funktionen beliebiger Diskontinuitäten auch mit Hilfe der Holografie und anderen Methoden gewonnen werden.

Um eine im Gebiet  $\Omega$  eindeutige Level Set Funktion  $\phi_m$  zu erzeugen, kann die folgende Vorschrift verwendet werden: Die Funktion  $\phi_m$  soll immer gleich derjenigen Funktion  $\phi_{m,i}$  sein, die für den Punkt  $\mathbf{x}$  den kleinsten Wert annimmt, siehe *Sukumar et al.* [178].

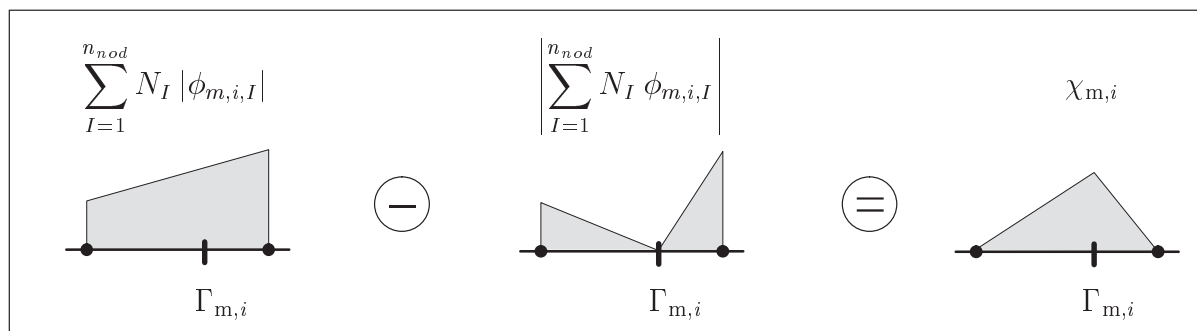
$$\phi_m = \min_{i=1 \dots n_m} (\phi_{m,i}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.8)$$

Die Verwendung der eindeutigen Level Set Funktion  $\phi_m$  hat zur Folge, dass es nicht mehr  $n_m$ , sondern formal nur noch eine einzige materielle Grenzfläche gibt. Obwohl diese Strategie in der vorliegenden Arbeit umgesetzt wird, werden in den Formulierungen weiterhin alle materiellen Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  individuell behandelt, vergleiche Gleichung (2.5). Generell sollte immer geprüft werden, ob Gleichung (3.8) benutzt werden darf. Beispielsweise kann diese Gleichung nicht verwendet werden, wenn das Teilgebiet  $\Omega_{2,i}$  einen Kreisring darstellt, der durch einen inneren und einen äußeren Kreis beschrieben wird. Die Folge wäre, dass die innere Grenzfläche durch die Funktion  $\phi_m$  nicht mehr erfasst werden würde. Des Weiteren ist es möglich, dass die Genauigkeit bei der numerischen Approximation der Geometrie einzelner Grenzflächen abnimmt. Abhilfe kann dann entweder die Verwendung eines feineren Finite Element Netzes oder die individuelle Behandlung der materiellen Grenzflächen liefern.

Es ist bemerkenswert, dass sich die Materialverteilung im gesamten Gebiet über das Vorzeichen der Level Set Funktion  $\phi_m$  definieren lässt. Beispielsweise gilt in Bezug auf die Gleichungen (3.7) und (3.8) folgende Feststellung.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_2 & \quad \text{wenn} \quad \text{sgn}(\phi_m(\mathbf{x})) = -1 \\ \mathbf{x} \in \Omega_1 & \quad \text{wenn} \quad \text{sgn}(\phi_m(\mathbf{x})) = +1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Wenn das Vorzeichen negativ ist, besteht der materielle Punkt aus der Festkörperphase  $\Omega_2$ . Wenn das Vorzeichen positiv ist, gehört er zur Festkörperphase  $\Omega_1$ . Allen Punkten Materialeigenschaften über eine Funktion zuzuweisen, bringt bei der Suche nach einer optimalen Struktur hohe Flexibilität im Hinblick auf die Variation der Materialverteilung innerhalb eines mehrphasigen Festkörpers.

Abbildung 3.2: 1D-Darstellung der diskretisierten Funktion  $\chi_{m,i}$ 

### 3.2.1 Numerische Berechnung der Anreicherungsfunktionen

Die Level Set Funktion, die die Grenzflächengeometrie von  $\Gamma_{m,i}$  beschreibt, kann verwendet werden, um die Anreicherungsfunktion  $\chi_{m,i}$  zu konstruieren, siehe Kapitel 2.1. In den Arbeiten von *Sukumar et al.* [178] und *Belytschko et al.* [21] sind zwei ähnliche Versionen von Anreicherungsfunktionen für Grenzflächen in Abhängigkeit einer Level Set Funktion entwickelt worden. In *Moës et al.* [115] findet man eine dritte Version, die auch in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Darin wurde die Wirkungsweise der erweiterten Finite Element Methode zur numerischen Lösung von Strukturproblemen mit materiellen Grenzflächen untersucht, siehe Kapitel 4. Anhand ausgewählter Strukturprobleme wurde gezeigt, dass die Wirkungsweise der Methode bei Verwendung dieser Version der Anreicherungsfunktion verbessert wird. Außerdem wurde nachgewiesen, dass die Konvergenzrate der dazugehörigen Lösung sehr nahe an der „optimalen“ Konvergenzrate der gewöhnlichen Finite Element Lösung ist, die mit einer konformen Diskretisierung gewonnen wird. Die verwendete Anreicherungsfunktion kann ausschließlich in knotenbasierter Form im Rahmen einer Finite Element Formulierung angegeben werden.

$$\chi_{m,i} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I |\phi_{m,i,I}| - \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \right| \quad (3.10)$$

Darin kennzeichnet  $\phi_{m,i,I}$  den Wert der Funktion  $\phi_{m,i}$  am Knoten  $I$  und  $n_{nod}$  die Anzahl der Elementknoten. Die Diskretisierung der Anreicherungsfunktion mit den Ansatzfunktionen  $N_I$  impliziert die Approximation der materiellen Grenzfläche. Beispielsweise wird die materielle Grenzfläche bei Verwendung von bilinearen vierknotigen Finiten Elementen durch eine Sequenz stückweise linearer Segmente approximiert. In Abbildung 3.2 ist die Funktion  $\chi_{m,i}$  und ihre Entstehung aus der Differenz zweier Komponenten veranschaulicht. Dabei ist der eindimensionale Fall anhand eines zweiknotigen Finiten Elementes dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Funktion über die materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  hinweg zwar stetig, aber in ihrer Ableitung diskontinuierlich ist, was dem Verlauf der Verschiebungen an materiellen Grenzflächen entspricht.

Im Falle der Rissbildung zwischen den zwei Festkörperphasen  $\Omega_1$  und  $\Omega_{2,i}$  muss die Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  spezifiziert werden, siehe Kapitel 2.1. Wie in Abbildung 2.3 zu erkennen ist, kann die betroffene materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  bei diesem Vorgang teilweise oder sogar gänzlich in den Riss  $\Gamma_{c,j}$  übergehen. Die Vorzeicheninformation der Funktion  $\phi_{m,i}$  kann genutzt werden, um  $\chi_{c,j}$  zu definieren. In einer Finite Element Implementierung, bei der die Level Set Funktion  $\phi_{m,i}$  als Knoteninformation vorliegt, wird zur elementweisen

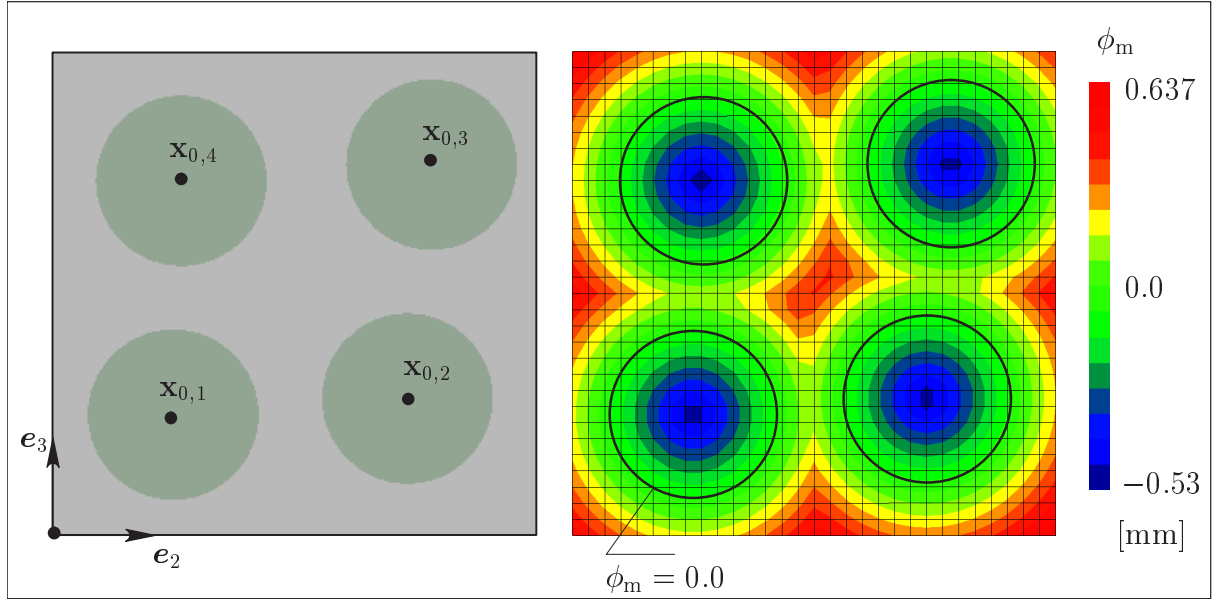


Abbildung 3.3: Level Set Beschreibung einer Faserverbundstruktur

Approximation der Funktion eine Finite Element Interpolation benötigt.

$$\chi_{c,j} = \text{sgn}(\phi_{m,i}) \quad \text{mit} \quad \phi_{m,i} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \quad (3.11)$$

Die Level Set Funktion  $\phi_{m,i}$  liefert somit auf elegante Art und Weise notwendige Informationen für die Bewegungsabbildung eines Körpers, um nicht nur die kinematischen Anforderungen von ungeschädigten materiellen Grenzflächen, sondern auch von Grenzflächenrissen erfüllen zu können.

### Beispiel: Faserverbundmaterial

Die numerische Modellierung der Funktion  $\phi_m$ , die sich aus der Gleichung (3.8) ergibt, wird in der vorliegenden Arbeit mittels der Finite Element Methode durchgeführt, vergleiche Gleichung (3.11) rechts. Eine Veranschaulichung soll das folgende Beispiel liefern. Dabei handelt es sich um eine quadratische Struktur, die aus einem Matrixmaterial mit vier darin eingebetteten kreisförmigen Fasern besteht, siehe Abbildung 3.3. Die Struktur soll ein Querschnittssegment eines Bauteils darstellen, das aus faserverstärktem Material konstruiert ist. Die Kantenlänge der Struktur beträgt 3.0 mm. Die vier Fasern sind alle durch denselben Radius  $r_{1-4} = 0.53$  mm gekennzeichnet. Die Mittelpunkte der Fasern haben die folgenden Koordinaten:  $\mathbf{x}_{0,1} = (0.75 \ 0.75)^T$ ,  $\mathbf{x}_{0,2} = (2.20 \ 0.85)^T$ ,  $\mathbf{x}_{0,3} = (2.35 \ 2.30)^T$  und  $\mathbf{x}_{0,4} = (0.80 \ 2.20)^T$ . Alle Einträge der Ortsvektoren haben die Einheit Millimeter. Auf der rechten Seite von Abbildung 3.3 ist die Level Set Funktion  $\phi_m$  anhand eines Farbpplots dargestellt. Man erkennt, dass die Funktionswerte innerhalb des Gebietes, das durch die vier Fasern gebildet wird, negativ und ansonsten positiv sind. Auf der Grenzfläche sind die Funktionswerte gleich null.



### 3.3 Risse innerhalb Festkörperphasen

In diesem Abschnitt wird die geometrische Beschreibung von diskreten Rissen diskutiert, deren potentieller Ort und Form nicht a priori bekannt sind. Zuerst werden einige Arbeiten skizziert, die sich mit diesem Thema im Rahmen von Level Set oder Fast Marching Methoden befassen. Danach wird die so genannte Vektor Level Set Methode vorgestellt, auf die auch in der vorliegenden Arbeit zurückgegriffen wird. Zwei Beispiele sollen die Wirkungsweise dieser Methode demonstrieren. Abschließend wird auf alternative Strategien zur Rissverfolgung hingewiesen.

In *Stolarska et al.* [175] wurde die Geometrie eines wachsenden Risses im 2D-Raum mit Hilfe zweier Level Set Funktionen beschrieben. Eine Funktion gab den Riss wieder, die andere kennzeichnete die beiden Rissenden. In *Sukumar, Chopp & Moran* [179] konnte die Evolution ebener Rissflächen in 3D-Körpern erfasst werden. Um die Rissgeometrie zu aktualisieren, wurde die Fast Marching Methode benutzt. Diese Methode ist für monoton fortschreitende Fronten auf Grund ihrer numerischen Effizienz sehr attraktiv, siehe *Sethian* [164] und *Chopp* [32]. Neben ausgewählten Problemen in der Strukturmechanik wurde sie auch auf Aufgabenstellungen in der Seismologie, Photolithographie oder Medizin angewendet. In *Gravouil, Moës & Belytschko* [65] konnte das Risswachstum gekrümmter Rissflächen im 3D-Raum geometrisch abgebildet werden. Die Rissgeometrie wurde durch zwei fast orthogonale Level Set Funktionen definiert. Davon beschrieb die eine den Riss als 2D-Fläche. Die andere wurde eingesetzt, um die Rissfront darzustellen. Die Evolution beider Funktionen wurde durch die Lösung von partiellen Differentialgleichungen erfasst, vergleiche Gleichung (3.2). Bei der Aktualisierung der Level Set Funktionen muss bei Rissproblemen generell darauf geachtet werden, dass sich die Geometrie und Lage des bisherigen Risses nicht ändert.

Die Vektor Level Set Methode ermöglicht die geometrische Beschreibung fortschreitender Risse, ohne partielle Differentialgleichungen lösen zu müssen. Stattdessen werden einfache algebraische Gleichungen aufgestellt und gelöst. Die oben skizzierten Verfahren

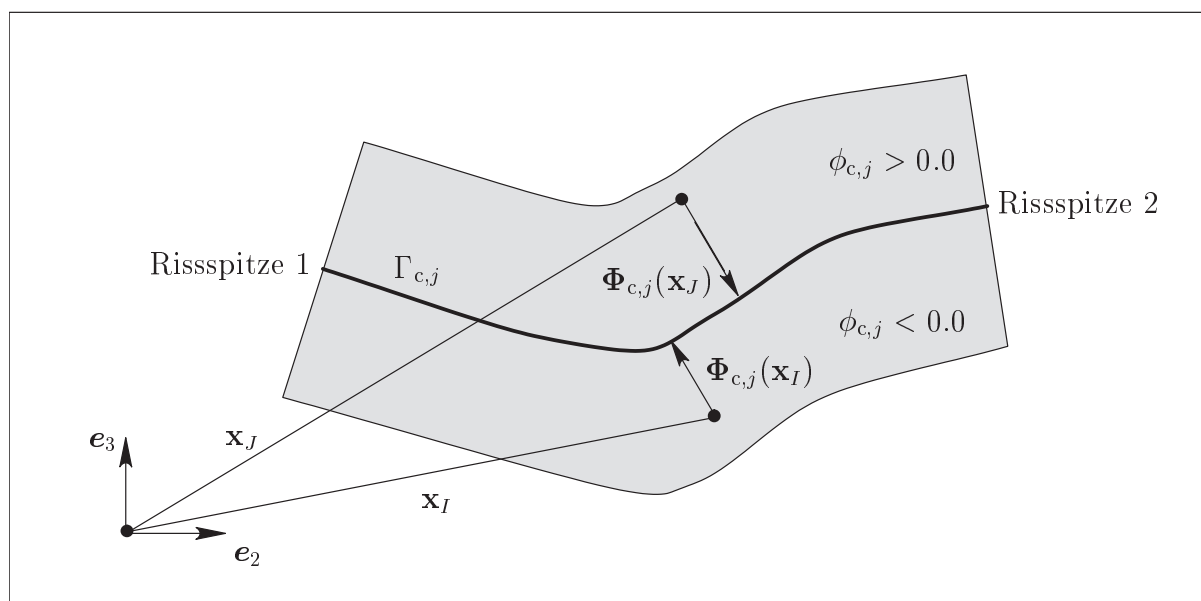


Abbildung 3.4: Geometrische Beschreibung eines Risses

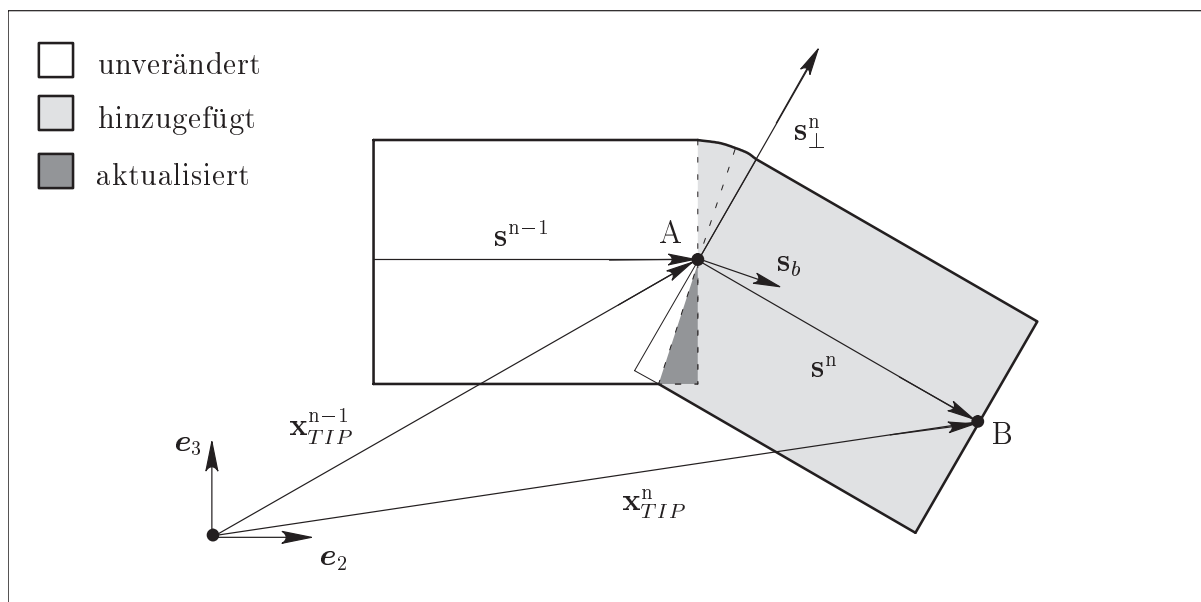


Abbildung 3.5: Geometrische Bedingungen für die Berechnung des Level Sets

basieren auf mehr oder weniger gewöhnlichen Level Set Methoden, die ursprünglich für die Modellierung vollständig bewegter Flächen gedacht waren. Bei Rissen findet eine Bewegung jedoch nur an der Rissfront statt. Infolgedessen müssen sie zudem die Schwierigkeit bewältigen, schon vorhandene Rissegmente zu fixieren. Vektor Level Sets wurden von *Steinhoff, Fan & Wang* [173] und *Ruuth, Merriman & Osher* [159] für die geometrische Abbildung verschiedenartiger Flächen, wie z.B. akustischer und elektromagnetischer Wellen, benutzt. Im Rahmen einer *Element Free Galerkin Method* wurde in *Ventura, Xu & Belytschko* [187] eine neue Vektor Level Set Formulierung zur geometrischen Beschreibung von wachsenden Rissen entwickelt. *Ventura, Budyn & Belytschko* [186] passten diese Formulierung an Finite Element Methoden an. Eine hierzu ähnliche Level Set Beschreibung der Rissgeometrie wurde in *Stazi et al.* [171] vorgestellt.

Im Rahmen der Vektor Level Set Methode wird die Rissgeometrie im Falle von 3D-Problemen durch vier und bei 2D-Problemen durch drei Komponenten erfasst. Diese bezeichnen zum einen die drei bzw. zwei Einträge des Abstandsvektors  $\Phi_{c,j}$ , der vom Punkt  $\mathbf{x}$  zu dem nächst gelegenen Punkt auf dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  zeigt und zum anderen die Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$ . Wenn alle Komponenten bekannt sind, kann die skalarwertige Level Set Funktion  $\phi_{c,j}$  aus der Norm des Abstandsvektors und der Vorzeichenfunktion berechnet werden. Da die Information der Rissgeometrie nur in einem schmalen Band um den Riss herum benötigt wird, muss auch nur dort die Level Set Funktion definiert sein, siehe Abbildung 3.4. Im Rahmen einer numerischen Behandlung der Evolution von  $\phi_{c,j}$  wird das schmale Band um den Riss herum, der von Punkt A nach Punkt B wächst, in drei unterschiedliche Bereiche aufgeteilt, siehe Abbildung 3.5. In diesen Bereichen bleibt die Level Set Funktion entweder unverändert oder wird aktualisiert (dunkelgrau hinterlegt) oder zum ersten Mal berechnet (hellgrau hinterlegt). Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Abschnitt zur übersichtlicheren Darstellung der Vektor Level Set Methode der risskennzeichnende Index  $(c, j)$  teilweise weggelassen wird. Die Menge aller Punkte, die in den grau hinterlegten Gebieten liegen, soll als  $\mathcal{F}^n$  bezeichnet werden.

$$\mathcal{F}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^n) \cdot \mathbf{s}^n \leq 0, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \mathbf{s}^{n-1} > 0 \text{ oder } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \mathbf{s}_b > 0\} \quad (3.12)$$

Darin symbolisiert der Vektor  $\mathbf{s}_b$  die Summe aus den normierten Rissrichtungen  $\mathbf{s}^{n-1}$  und  $\mathbf{s}^n$  im Rechenschritt  $n - 1$  beziehungsweise  $n$ . Die gesuchte Menge aller Punkte, für die die Level Set Funktion aktualisiert oder zum ersten Mal berechnet werden muss, ist durch drei Ungleichungen definiert. Die erste Ungleichung rechts vom Doppelpunkt in (3.12) kennzeichnet den gesamten Bereich, der hinter der aktuellen Rissspitze  $\mathbf{x}_{TIP}^n$  liegt. Die zwei darauf folgenden Ungleichungen gewährleisten, dass die Level Set Funktion lediglich im Bereich vor der alten Rissspitze  $\mathbf{x}_{TIP}^{n-1}$  oder im dunkelgrauen Bereich berechnet wird. Die Rechenvorschriften für den Abstandsvektor  $\Phi_{c,j}$  und die Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  lauten folgendermaßen.

$$\Phi_{c,j} = \begin{cases} -\hat{\mathbf{s}}_{\perp}^n [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{\perp}^n] & \text{wenn } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \mathbf{s}^n \geq 0 \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) & \text{wenn } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \mathbf{s}^n < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\chi_{c,j} = \text{sgn}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{TIP}^{n-1}) \cdot \mathbf{s}_{\perp}^n]$$

Darin kennzeichnet  $\hat{\mathbf{s}}_{\perp}^n$  den normierten Vektor  $\mathbf{s}_{\perp}^n$ , der die im Gegenuhrzeigersinn um  $90^\circ$  gedrehte Rissrichtung  $\mathbf{s}^n$  darstellt. Die Level Set Funktion  $\phi_{c,j}$  kann aus der Multiplikation der Norm des Abstandsvektors mit der Vorzeichenfunktion gewonnen werden, vergleiche Gleichung (3.3).

$$\phi_{c,j} = \chi_{c,j} |\Phi_{c,j}| \quad (3.14)$$

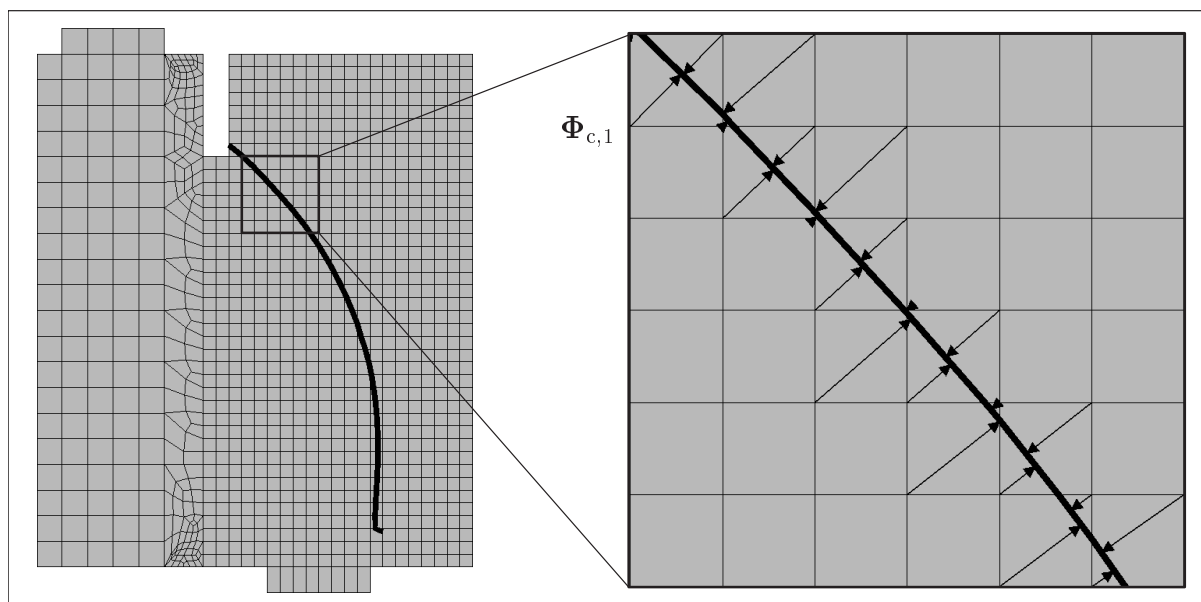
Im folgenden Abschnitt wird auf die numerischen Berechnungen dieser Level Set Funktion und insbesondere der Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  eingegangen, die zur Anreicherung der Bewegungsabbildung einer Struktur mit Festkörperphasenriss eingesetzt wird.

### 3.3.1 Numerische Berechnung der Anreicherungsfunktion

Im Rahmen einer Finite Element Implementierung wird die Gleichung (3.14) an ausgewählten Punkten ausgewertet. Da im numerischen Modell die Level Set Funktion nur in einem schmalen Band um den Riss herum benötigt wird, beschreiben diese Punkte die Knoten derjenigen Elemente, durch die der Riss verläuft. Der in den Abbildungen 3.4 und 3.5 dargestellte Bereich wird durch Finite Elemente definiert. Die Interpolation der Level Set Funktion (3.14) für Punkte innerhalb der entsprechenden Elemente wird in der vorliegenden Arbeit über Ansatzfunktionen realisiert. Wenn beispielsweise bilineare vierknotige Elemente verwendet werden, wird der Riss näherungsweise als Polygonzug modelliert. Es ist offensichtlich, dass auch der Wert der Vorzeichenfunktion (3.13) zunächst nur an den Knoten bekannt ist. Ihr Wert kann jedoch mittels der Finite Element Approximation der Level Set Funktion für jeden beliebigen Punkt innerhalb der Elemente, die das schmale Band um den Riss herum diskretisieren, berechnet werden, vergleiche Gleichung (3.11).

$$\chi_{c,j} = \text{sgn}(\phi_{c,j}) \quad \text{mit} \quad \phi_{c,j} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{c,j,I} \quad (3.15)$$

Darin symbolisiert  $\phi_{c,j,I}$  den Funktionswert von  $\phi_{c,j}$  am Knoten  $I$ , der über Gleichung (3.14) ermittelt wird. Die Variable  $n_{nod}$  beschreibt die Anzahl der Knoten des Finiten Elementes und  $N_I$  die Ansatzfunktion, die zum Knoten  $I$  gehört. In *Ventura, Budyn & Belytschko* [186] werden alternative Ansätze zur Extra- und Interpolation der Komponenten des Vektor Level Sets diskutiert.

Abbildung 3.6: Abstandsvektoren  $\Phi_{c,1}$ 

In der vorliegenden Arbeit wird die aktuelle Rissspitze  $\mathbf{x}_{TIP}^n$  imaginär verlängert, so dass immer alle Knoten eines Finiten Elementes, durch das ein Riss vollständig verläuft, in der Menge  $\mathcal{F}^n$  enthalten sind. Damit ist eine genaue Interpolation der Level Set Funktion innerhalb aller betroffenen Elemente möglich. Nachdem die Vektor Level Set Komponenten an den Knoten zum aktuellen Rechenschritt  $n$  berechnet wurden, wird wieder die tatsächliche Rissspitze als  $\mathbf{x}_{TIP}^{n-1}$  gespeichert. Ohne weitere Konsequenz kann dies in bestimmten Fällen dazu führen, dass ein Teil des hellgrau hinterlegten Bereiches in Abbildung 3.5 eigentlich dunkelgrau hinterlegt werden müsste, da hier die Level Set Komponenten schon im Rechenschritt  $n - 1$  berechnet wurden und jetzt nur noch aktualisiert werden.

In *Ventura, Budyn & Belytschko* [186] wird bei großen Änderungen der Rissrichtung empfohlen, aus Gründen der Genauigkeit anstelle der Level Set Aktualisierung eine separate Level Set Beschreibung aufzubauen. Dabei wird das Rissegment vor der aktuellen Rissspitze geometrisch als neuer Riss behandelt. In der vorliegenden Arbeit wird darauf verzichtet. Die Vektor Level Set Methode wird jedoch so umgesetzt, dass an bestimmten Knoten derselbe Effekt erzielt wird.

## Beispiele

Die folgenden zwei Beispiele dienen der Veranschaulichung der Wirkungsweise der vorgestellten Vektor Level Set Methode zur Erfassung des Verlaufs von einem und mehreren Rissen mit komplexer Geometrie.

In Abbildung 3.6 ist ein gekrümmter Riss in einem einphasigen Festkörper dargestellt. Die Rissgeometrie wird mit den Abstandsvektoren  $\Phi_{c,1}$  erfasst. Sie werden an den Knoten der Finiten Elemente berechnet, durch die der Riss verläuft. Wie man erkennen kann, zeigen die Abstandsvektoren exakt auf die Risspunkte mit der kürzesten Entfernung. Hierfür müssen sie orthogonal zur Risstangente sein, was offensichtlich der Fall ist. Eine detaillierte Analyse des Versagens der Struktur findet sich in Kapitel 6.1.

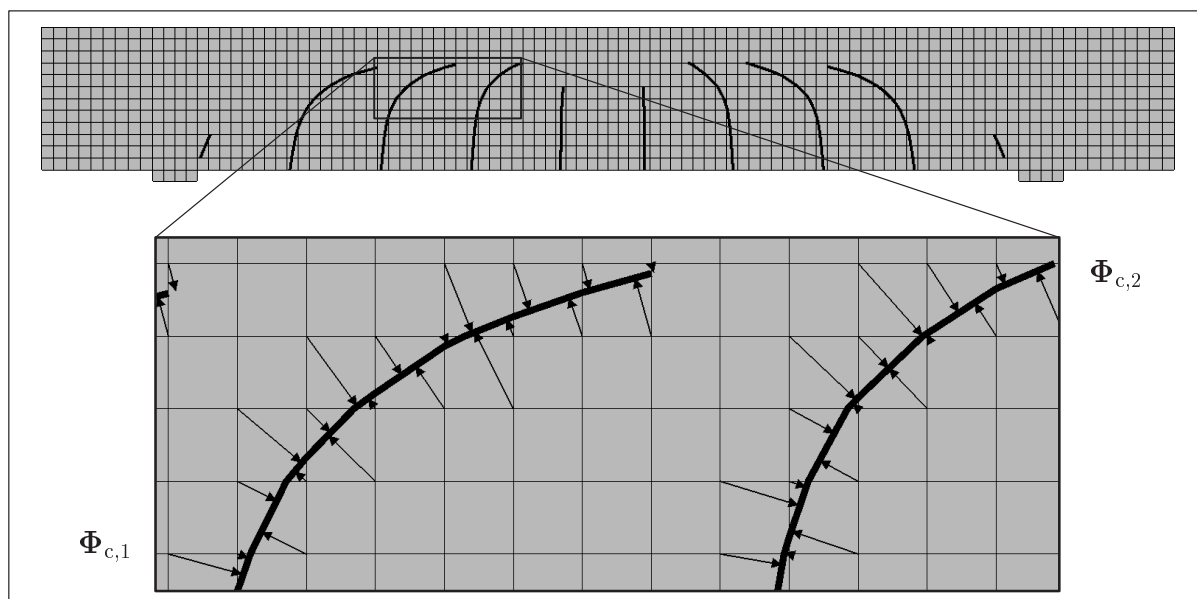
Abbildung 3.7: Abstandsvektoren  $\Phi_{c,1}$  und  $\Phi_{c,2}$ 

Abbildung 3.7 zeigt mehrere gekrümmte Risse in einem Stahlbetonbalken, der als homogene Struktur modelliert wird. Dies bedeutet, dass der Beton im Verbundwerkstoff Stahlbeton als einphasiges Festkörpermateriale abgebildet wird. Damit handelt es sich bei den Rissen um Risse innerhalb einer Festkörperphase. In diesem Beispiel werden die zwei Risse vergrößert dargestellt, deren Geometrie durch die Abstandsvektoren  $\Phi_{c,1}$  und  $\Phi_{c,2}$  beschrieben wird. Die Vektoren stehen trotz starker Risskrümmung und relativ grobem Finite Element Netz senkrecht auf den Rissen und haben die richtige Länge. Der Versagensprozess des Stahlbetonbalkens wird ausführlich in Kapitel 6.3 analysiert.

### 3.3.2 Alternative Strategien zur Rissverfolgung

Eine alternative Beschreibung der Rissgeometrie liefert die globale Rissverfolgungsstrategie, die von *Oliver et al.* [135] entwickelt wurde. Dazu wird im gesamten Gebiet eine Art stationäres, anisotropes Wärmeleitproblem gelöst. Die Isothermen des berechneten Temperaturfeldes repräsentieren mögliche Risspfade. Die „Wärmeleitmatrix“ wird über ein geeignetes Rissrichtungskriterium konstruiert, siehe Kapitel 5.5.2. Die Matrix wird aus dem dyadischen Produkt des Einheitsvektors, der in Rissfortschrittsrichtung zeigt, mit sich selbst gebildet. Um die Schlechtgestellttheit des Problems zu verhindern, wird durch einen additiven Zusatz eine Störung der Matrix eingeführt. Wenn das verwendete Versagenskriterium Risswachstum anzeigt, werden die Temperaturen an den Risspitzen ermittelt. Die Risse werden dann entlang der korrespondierenden Isolinie vorangetrieben. In *Feist* [51] wurde die globale Rissverfolgungsstrategie modifiziert, um gewisse Nachteile der Methode zu umgehen, die aus den falschen Rotationen der Isolinien in bereits gerissenen Elementen resultieren. Hierfür wurde die Anwendung der Rissverfolgungsstrategie auf charakteristische Teilbereiche beschränkt. Diese Teilbereiche sind durch diejenigen Finiten Elemente beschrieben, die von aktiven Rissen aktuell oder möglicherweise später durchtrennt werden.

*Gasser & Holzapfel* [61] beschäftigten sich mit der Abbildung von Rissflächen in 3D-

Medien. Ihre geometrische Beschreibung basierte auf der Annahme, dass der Riss in jedem Element eine ebene Fläche darstellt. Die Fläche ist durch einen Aufpunkt und ihre Normale definiert, die durch geeignete Kriterien berechnet werden kann, siehe Kapitel 5.5.2. Damit ist es jedoch nicht möglich, die Kontinuität des Risspfades zu realisieren. Die gesamte Rissfläche wird durch den elementweisen Zusammenbau der Flächensegmente als offene und unebene Fläche approximiert. Durch das Fehlen der Kontinuität kann nicht sichergestellt werden, dass jeder materielle Punkt bzw. Knoten eines Finite Element Netzes eindeutig dem Gebiet links oder rechts vom Riss zugewiesen werden kann. Des Weiteren kann die unebene Rissfläche möglicherweise zu unphysikalischen Rissverzweigungen führen. Aus diesen Gründen entwickelten *Gasser & Holzapfel* [61] ein Verfahren, um bei 3D-Problemen aus der unebenen, offenen Rissfläche eine glatte, geschlossene Rissfläche generieren zu können. Dabei wurde in der Umgebung des Aufpunktes eines Risssegmentes eine Punktwolke bestimmt. Eine lineare oder quadratische Funktion, die die Rissfläche beschreiben sollte, wurde dann unter Minimierung eines Least-Square Problems gewonnen. Anschließend wurde die dazugehörige, neue Rissnormale berechnet.

# Kapitel 4

## Erweitertes Finite Element Modell

### 4.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird ein Finite Element Modell vorgestellt, mit dem später numerische Versagensanalysen von ein- und zweiphasigen Festkörpern durchgeführt werden. Zunächst wird ein kurzer Überblick über die Entwicklung der zugrunde liegenden erweiterten Finite Element Methode gegeben, die im Englischen *eXtended Finite Element Method* (X-FEM) genannt wird, siehe *Moës, Dolbow & Belytschko* [116]. Dabei steht die Entwicklung dieser Methode zur numerischen Lösung von statischen Problemen im Vordergrund.

In den späten 1990'er Jahren befassten sich *Belytschko & Black* [15] mit der numerischen Modellierung von spannungsfreien Rissen in elastischen Festkörpern im Rahmen einer Finite Element Formulierung. Hierfür lieferte ihnen die lineare elastische Bruchmechanik (LEFM) die analytischen Grundlagen. Sie entwickelten ein Konzept, mit dem ein Riss in Bezug auf die gewählte Diskretisierung beliebig ausgerichtet sein konnte. Jedoch wurde es unter Umständen bei stark gekrümmten Rissverläufen notwendig, eine minimale Neuvernetzung in der Nähe der Risswurzel vorzunehmen. Die wesentliche Idee in diesem Konzept war die lokale Erweiterung der Finite Element Approximation mit charakteristischen Funktionen aus dem asymptotischen Rissspitzenfeld, vergleiche *Fleming et al.* [55]. Das Konzept basierte auf der *Partition of Unity*-Eigenschaft der verwendeten Formfunktionen, siehe *Duarte & Oden* [43] und *Babuška & Melenk* [11]. Wie schon seit langem bekannt ist, müssen Formfunktionen diese Eigenschaft besitzen, damit sich dehnungsfreie Starrkörperverschiebungen abbilden lassen und Konvergenz gewährleistet werden kann. Das von *Belytschko & Black* [15] vorgestellte Finite Element Konzept zur numerischen Rissmodellierung wurde in *Moës, Dolbow & Belytschko* [116] weiterentwickelt. Die entscheidende Verbesserung brachte die Idee, den Ansatz für das Verschiebungsfeld nicht nur mit charakteristischen Funktionen aus der asymptotischen Rissspitzenlösung, sondern auch mit Hilfe einer Sprungfunktion zu erweitern. Damit konnte der gesamte Riss unabhängig von der räumlichen Diskretisierung und ohne jegliche Neuvernetzung abgebildet werden. Auf Grund der Erweiterung kann diese Formulierung auch als Generalisierung des Konzepts der Verdopplung der Knoten verstanden werden. Bemerkenswerterweise bringt die Einführung von zusätzlichen Freiheitsgraden mittels des *Partition of Unity*-Konzepts mit sich, dass die diskretisierten Gleichungen die Sparsity-Eigenschaften des Originalnetzes beibehalten. In *Daux et al.* [36] und *Budyn et al.* [26] wurde die X-FEM auf komplexe Rissprobleme in elastischen Körpern angewendet. Offene Fragestellungen bei der Verzweigung, Koaleszenz und Überschneidung von mehreren Risssegmenten konnten beantwortet werden. Darüber hinaus wurde die Diskretisierung von Hohlräumen oder Materialfehlstellen mit Finiten Elementen diskutiert, die nicht an die Geometrie dieser Defekte angepasst werden müssen.

Zur numerischen Modellierung elementweise gekrümmter Risse wurden in *Stazi et al.*

[171] höherwertige erweiterte Finite Elemente eingesetzt. Für die Diskretisierung des gewöhnlichen Anteils der Verschiebungen wurde eine quadratische Interpolationsordnung gewählt. Zur Approximation der Verschiebungskomponenten, die mit dem Riss assoziiert sind, wurden lineare Ansatzfunktionen benutzt. Durch die Verwendung einer linearen und nicht einer höherwertigen Approximation der Rissspitzenlösung sollten offensichtlich größere Schwierigkeiten im Übergangsbereich zwischen angereicherten und gewöhnlichen Elementen vermieden werden. Eine grundlegende Untersuchung zu diesem Themengebiet findet sich in der Arbeit von *Chessa, Wang & Belytschko* [29]. Darin wurde konstatiert, dass die Formfunktionen der angereicherten Knoten in den Finiten Elementen des Übergangsbereichs durch die lokale Erweiterung des Verschiebungsfeldes keine *Partition of Unity* bilden. Dies kann zum Genauigkeitsverlust der Verschiebungsapproximation in diesen Elementen führen. Die Aussage wurde durch die Reduktion der Konvergenzrate der numerischen Lösung bei Verwendung einer charakteristischen Anreicherungsfunktion zur Modellierung von diskontinuierlichen Gradienten bestätigt. Zur Verbesserung der Wirkungsweise der Methode wurden verschiedene Ansätze vorgeschlagen. Es ist angemerkt, dass mit der in dieser Arbeit verwendeten Anreicherungsfunktion zur Modellierung von diskontinuierlichen Gradienten auch ohne spezielle Übergangselemente „optimale“ Konvergenz erreicht wird, siehe Kapitel 3.2.1. Die Kombination der X-FEM mit der S-Version der Finite Element Methode wurde von *Lee et al.* [97] zur numerischen Lösung von Randwertproblemen mit stationären oder wachsenden spannungsfreien Rissen eingeführt, siehe Kapitel 7.1. Das Rissspitzenfeld wurde durch singuläre Viertelpunkt-Elemente auf einem überlagerten Netz modelliert, siehe *Barsoum* [13]. Die restliche Diskontinuität wurde im Rahmen des *Partition of Unity*-Konzepts unter Verwendung einer Sprungfunktion beschrieben. Die Anwendung der hybriden Methode vermeidet durch die spezielle Diskretisierung des Rissspitzenfeldes die oben skizzierte Problematik in Übergangsbereichen. Jedoch wird mittels der Viertelpunkt-Elemente die Singularität an der Rissspitze nur entlang der Elementkanten genau erfasst. *Legay, Wang & Belytschko* [98] benutzten das Konzept der X-FEM zur Diskretisierung von schwachen und starken Diskontinuitäten unter Verwendung spektraler Finiten Elemente, die gegenüber gewöhnlichen Finiten Elementen für glatte Probleme beachtliche Vorteile in Bezug auf die Genauigkeit bieten. Ein Schwerpunkt ihrer Arbeit war das Konvergenzverhalten der vorgestellten Methode für unterschiedliche Elementformulierungen im Hinblick auf den erwähnten Übergangsbereich bei Problemen mit diskontinuierlichen Gradienten.

In Verbundwerkstoffen kann diskontinuierliches Versagen nicht nur innerhalb der konstituierenden Materialphasen, sondern auch in den materiellen Grenzflächen auftreten, siehe Kapitel 1.1. Die Anwendung der erweiterten Finite Element Methode zur numerischen Modellierung von spannungsfreien Grenzflächenrissen auf Basis der LEFM findet sich in *Nagashima, Omoto & Tani* [126], *Liu, Xiao & Karihaloo* [102] und *Sukumar et al.* [180]. Zur Diskretisierung der untersuchten Probleme wurden in allen drei Arbeiten Netze verwendet, die an die Geometrie der materiellen Grenzfläche angepasst waren. Während jedoch in der erstgenannten Arbeit die Anreicherungsfunktionen von der asymptotischen Lösung eines Risses innerhalb homogener Materialien abgeleitet wurden, berücksichtigten die zwei letztgenannten Arbeiten die analytische Lösung an der Spitze eines Risses zwischen zwei unterschiedlichen Materialien.

Die linear elastische Bruchmechanik ist auf Anwendungen beschränkt, bei denen die Ausdehnung der Versagenszone im Vergleich zur Größe des Risses und der untersuchten Struktur klein ist. Für solche Fälle muss auf geeignete Modellierungsstrategien zurückgegriffen



werden, mit denen die Versagenszone berücksichtigt werden kann. Unter Verwendung der Kohäsivzonentheorie wurde die X-FEM zur numerischen Analyse entfestigender Materialien erfolgreich eingesetzt, siehe *Wells & Sluys* [190], *Moës & Belytschko* [114] und *Mariani & Perego* [105]. Motiviert durch die Tatsache, dass typische Versagensmechanismen auf der Mikroebene mit nur einem einzigen kohäsiven Riss nicht erfasst werden können, wurde dieser in *Remmers, de Borst & Needleman* [153] durch sich überschneidende kohäsive Segmente repräsentiert. Es ist offensichtlich, dass hierbei mehrfache Rissbildung berücksichtigt werden musste. Im Gegensatz zu Rissen in elastischen Medien liegt bei Rissmodellen in kohäsiven Materialien keine Spannungssingularität an der Risspitze vor, da die Spannungen durch die Festigkeit des Materials begrenzt werden. Die Lösung an der Risspitze kann durch die Verwendung einer zusätzlichen Verschiebungskomponente verfeinert werden. Zur Diskretisierung der zusätzlichen Verschiebungskomponente wird die polynomiale Basis mit Rissspitzenfunktionen angereichert. Diese dürfen natürlich nicht zu singulären Spannungen führen, siehe Anhang B.

In *Dolbow, Moës & Belytschko* [42] wurde die erweiterte Finite Element Methode dazu verwendet, die zugrunde liegenden Gleichungen für Probleme mit reibungsbehaftetem Kontakt zu diskretisieren. Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wurde die LATIN-Methode verwendet, siehe *Ladevèze* [94]. Kurze Zeit später wurde von *Wells, de Borst & Sluys* [189] das Konzept der *Partition of Unity* zur Diskretisierung von diskontinuierlichen Ablösevorgängen in geschichteten, einphasigen Festkörperstrukturen unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte eingesetzt. Dabei wurden auch die Beiträge der spannungsübertragenden Rissflächen zur geometrischen Systemsteifigkeit beachtet. Diese resultieren aus der Linearisierung der Bewegung des Rissnormalenvektors, siehe Kapitel 2.1.1. Im Unterschied zum Bruch von quasi-spröden Materialien ist die Rissbildung in duktilen Werkstoffen dadurch gekennzeichnet, dass es zunächst in der Umgebung der Risspitze zur Plastifizierung kommt. Für die Modellierung dieses Phänomens wendeten *Elguedj, Gravouil & Combescure* [47] im Rahmen der erweiterten Finite Element Methode die elastisch plastische Bruchmechanik an. Sie benutzten das bekannte Hutchinson-Rice-Rosengren Rissspitzenfeld, um die von einem Verfestigungsparameter abhängige Singularität an der Risspitze zu beschreiben.

In Kapitel 1.2 wurde auf die Klassifizierung und Modellierung von Materialversagen eingegangen. Es wurde herausgestellt, dass man zwischen drei charakteristischen Versagenszuständen unterscheiden kann. Nun sollen diverse Arbeiten skizziert werden, die sich mit der kombinierten Modellierung von verschmiertem Versagen und lokalisierten Versagensformen im Rahmen der X-FEM befassen. *Samaniego & Belytschko* [160] diskutierten die Modellierung von Scherbändern in duktilen Materialien unter dynamischer Beanspruchung. Dabei wechselten sie in Analogie zu *Belytschko et al.* [16] von einer klassischen kontinuumsmechanischen Materialbeschreibung zu einem Konstitutivgesetz vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ, sobald der Verlust der Hyperbolizität des anfänglichen Randwertproblems festgestellt wurde. Die Tatsache, dass in der Scherfuge nur ein gegenseitiges Abgleiten zu erwarten ist, wurde durch einen speziellen Ansatz des diskontinuierlichen Anteils der Verschiebungen berücksichtigt, siehe Kapitel 2.1.2. Die Motivation, diffuses Versagen und starke Diskontinuitäten zu modellieren, ging auf die Arbeit von *Bažant & Belytschko* [14] zurück. Diese gaben eine geschlossene Lösung für den eindimensionalen Stab aus ratenunabhängigem, entfestigendem Material unter einer dynamischen Belastung an. Daraus ging hervor, dass die Verzerrung eine Dirac-Delta Funktion werden wird, sobald die Materialtangente negativ und damit die zugrunde liegende partielle Differentialgleichung

elliptisch wird. In *Wells, Sluys & de Borst* [192] wurde ein visko-plastisches Kontinuumsmechanisches Konstitutivmodell verwendet, mit dem das Verhalten entfestigender Materialien auf regularisierende Art und Weise beschrieben wurde. Nachdem die inelastische Deformation einen kritischen Wert erreicht hat, führten sie einen diskreten Riss ein, der außer bei Kontakt der beiden Rissufer spannungsfrei war und den vollständigen Verlust der Unversehrtheit des Materials kennzeichnete. *Simone, Wells & Sluys* [170] benutzten ein gradientenerweitertes Kontinuumsschädigungsmodell zur regularisierten Beschreibung von verschmiertem Materialversagen. Sie definierten den Zeitpunkt der Entstehung eines spannungsfreien Risses durch einen charakteristischen Schädigungszustand. Durch die Einführung der Diskontinuität konnte das Defizit von gradientenerweiterten Modellen behoben werden, bei denen fälschlicherweise ein Zuwachs an Schädigung hinter der Versagensfront beobachtet werden kann. Der eingeführte diskontinuierliche Versagensmodus verhindert die nicht-lokale Interaktion über die hoch lokalisierte Versagenszone, da die Bereiche links und rechts des Risses durch die entsprechenden kinematischen Erweiterungen entkoppelt werden. In *Patzák & Jirásek* [143] wurde die gewöhnliche Verschiebungsapproximation erweitert, um das lokalisierte Verzerrungsprofil mit Hilfe einer regularisierten Heaviside-Funktion abzubilden. Zur diskretisierungsunabhängigen Modellierung von entfestigendem Materialverhalten wurde ein nicht-lokales Schädigungsmodell benutzt. Obwohl der Einfachheit halber darauf verzichtet wurde, besteht mit dieser Methode prinzipiell die Möglichkeit, die Evolution des Verzerrungsprofils während des gesamten Belastungsprozesses exakt wiedergeben zu können. Die Breite der Versagenszone, in der die Kinematik angereichert wurde, ist aus einer eindimensionalen mathematischen Lokalisierungsanalyse bestimmt worden. Anhand eines numerischen Beispiels konnte gezeigt werden, dass die Methode sogar bei groben Finite Element Netzen zu genauen Lösungen führt.

Damit die X-FEM zur numerischen Versagensanalyse von verschiedenartigen Strukturproblemen eingesetzt werden kann, erfolgte die Erweiterung auf unterschiedliche Finite Element Typen. Zuerst werden einige Arbeiten vorgestellt, in denen zur Lösung von dreidimensionalen Rissproblemen Kontinuums-elemente verwendet wurden. Danach folgt die Skizzierung von Arbeiten, in denen erweiterte Platten- und Schalenelemente hergeleitet wurden. *Sukumar et al.* [181] und *Moës, Gravouil & Belytschko* [117] führten Simulationen von diskontinuierlichem Versagen in elastischen Medien durch. In der erstgenannten Arbeit wurden ebene Risse unter Mode-I Belastung untersucht. Die hohe Übereinstimmung zwischen den berechneten Lösungen und analytischen oder Referenz-Lösungen bestätigten die Leistungsfähigkeit der Methode. Die letztgenannte Arbeit entwickelte diesen Ansatz weiter, um numerische Analysen von Problemen mit beliebiger Rissgeometrie zu ermöglichen. Die Verwendung von vorzeichenbehafteten Abstandsfunktionen zur geometrischen Beschreibung der Risse erleichterte die mechanische Behandlung, vergleiche Kapitel 3.3. *Gasser & Holzapfel* [60] befassten sich mit der X-FEM, um die dreidimensionale Rissausbreitung in quasi-spröden Materialien zu diskretisieren. Zur Abbildung der materiellen Entfestigung entwickelten sie im Rahmen der Invariantentheorie ein Kohäsivzonenmodell, das auf einem transvers-isotropen Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz basiert. *Areias & Belytschko* [3] koppelten diskontinuierliches Versagen in 3D-Strukturen aus kohäsivem Material mit einem Kontinuumsschädigungsmodell, das durch die Berücksichtigung von viskosen Effekten regularisiert wurde. Der Zeitpunkt des Übergangs von einer kontinuierlichen zu einer diskontinuierlichen Abbildung wurde durch die Erfüllung einer Stabilitätsbedingung definiert. Auf Grund der begrenzten Eignung der verwendeten

viskosen Regularisierung wurde zur Sicherstellung von Stabilität das kontinuumsmechanische Konstitutivgesetz durch den Einbau eines konstanten Spannungswertes modifiziert. *Dolbow, Moës & Belytschko* [41] entwickelten im Rahmen der Reissner-Mindlin Plattentheorie eine erweiterte Finite Element Formulierung zur Simulation von Risswachstum in ebenen, dünnwandigen Strukturen aus elastischen Materialien. In *Areias & Belytschko* [4] wurde eine neue Formulierung zur numerischen Modellierung des Fortschrittes kohäsiver Risse in Schalentragwerken unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität vorgestellt. In den zwei letzteren Arbeiten wurden Risse modelliert, die die Strukturen in Dickenrichtung komplett durchtrennen.

Wie schon oben angedeutet, ist die X-FEM nicht nur für die Durchführung von diskontinuierlichen Versagensanalysen geeignet. Die Methode kann auch zur äußerst genauen Lösung von Problemen eingesetzt werden, die sich durch die verschiedensten internen Flächen auszeichnen. Dabei kann auf die Benutzung von Finite Element Netzen verzichtet werden, die an die Geometrie der internen Flächen angepasst sind. Beispielsweise können Verbundstrukturen mit fixen materiellen Grenzflächen auf einfache Art und Weise diskretisiert werden, siehe *Belytschko et al.* [19], *Belytschko et al.* [21] und *Sukumar et al.* [178]. Die Leistungsfähigkeit der X-FEM konnte durch die Kopplung mit verschiedenen Level Set Techniken erhöht werden, siehe Kapitel 3. Diese Techniken dienen nicht nur der Beschreibung von Geometrie und Lage der internen Flächen, sondern werden auch eingesetzt, um die benötigten Anreicherungsfunktionen zu konstruieren. Vor kurzem wurde die Wirkungsweise der X-FEM in Verbindung mit Penalty- und Lagrange-Methoden untersucht, um Dirichlet-Bedingungen an Phasengrenzen zu erzwingen, an deren Geometrie das zugrunde liegende Finite Element Netz nicht angepasst werden muss, siehe *Ji & Dolbow* [85]. Die Motivation für die letztgenannte Arbeit lieferte das Problem der Phasentransformation in Hydrogelen.

Die vorliegende Arbeit orientiert sich an den Ausführungen von *Hettich & Ramm* [73]. Diese schlugen ein erweitertes Finite Element Modell vor, um in Verbundstrukturen das Versagen der Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Materialien mit unangepassten Netzen diskretisieren zu können. Die Grenzfläche wurde in ungeschädigte und geschädigte Bereiche unterteilt. In ungeschädigten Bereichen herrschte der perfekte Verbund zwischen den Materialien. Zur Modellierung der geschädigten Bereiche wurden kohäsive Rissegmente eingeführt. Bei Anwendung dieses neuen Konzepts müssen im Gegensatz zum konventionellen Ansatz, bei dem die gesamte Grenzfläche von Anfang an mit diskontinuierlichen Segmenten beschrieben wird, keine hohen elastischen Interface-Steifigkeiten benutzt werden, um einen perfekten Verbund simulieren zu können, siehe Kapitel 1.2.3 und *Simone* [168].

Im Folgenden wird auf Methoden hingewiesen, die teilweise gewisse Ähnlichkeiten oder Gemeinsamkeiten mit der X-FEM aufweisen. In diesem Zusammenhang ist zuerst die *Generalized Finite Element Method* zu nennen, die ein zur X-FEM hochgradig verwandtes Berechnungsverfahren beschreibt. Darin werden analytische oder Referenz-Lösungen unter Verwendung des *Partition of Unity*-Konzepts in der Finite Element Approximation berücksichtigt, um die lokale und globale Genauigkeit der numerischen Lösung zu erhöhen, siehe *Strouboulis, Babuška & Copps* [176] und *Strouboulis, Copps & Babuška* [177]. In *Mergheim, Kuhl & Steinmann* [111] wurde eine Finite Element Formulierung zur numerischen Modellierung von Risswachstum in kohäsiven Materialien vorgestellt, mit der die Diskontinuität wie bei der X-FEM durch die Kontinuumselemente verlaufen darf. Die Weiterentwicklung dieser Formulierung zur Anwendung auf geometrisch nichtlineare Prob-

leme mit starken oder schwachen Diskontinuitäten findet sich in *Mergheim & Steinmann* [112]. Die in den zwei letztgenannten Arbeiten vorgestellte Methode ist eng verwandt mit dem Ansatz, der von *Hansbo & Hansbo* [68, 69] vorgeschlagen wurde. In der Arbeit von *Cho & Im* [30] wurden spezielle Finite Elemente zur Modellierung spannungsfreier Risse entwickelt. Auch diese Formulierung erlaubt die Einbettung der Risse in die Elemente. Um den kinematischen Anforderungen gerecht zu werden, muss die Anzahl der Knoten eines Finiten Elementes variabel sein. Die ursprüngliche Motivation für die Herleitung der Formulierung bestand in der Aufgabe, mittels der Moving Least-Square Approximation zwei unpassende Finite Element Netze zusammenzufügen, siehe *Cho et al.* [31].

Abschließend sei auf die Arbeiten von *Dumstorff, Mosler & Meschke* [46] und *Oliver, Huespe & Sánchez* [137] hingewiesen, die sich mit einer vergleichenden Untersuchung der Diskretisierung starker Diskontinuitäten unter Verwendung des elementbasierten SDA und der knotenbasierten X-FEM beschäftigten, siehe Kapitel 1.2.3.

## 4.2 Variationsformulierung

Mit der Methode der Finiten Elemente soll nun das Randwertproblem aus Kapitel 2.4 gelöst werden. Dazu ist die Überführung der punktweise formulierten Gleichgewichtsbeziehungen in die schwache Form notwendig. Dabei wird die lokale Impulsbilanz (2.20) und die statischen Randbedingungen mit einer Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  gewichtet und anschließend über das Gebiet  $\Omega$  integriert. Nach einigen Umformungen erhält man die schwache Form des Gleichgewichts:

Finde die Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$ , so dass

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega}_{\delta W_{int}} = \underbrace{\int_{\Gamma_{t^*}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma}_{\delta W_{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (4.1)$$

erfüllt ist. Der linke Term beschreibt die innere virtuelle Arbeit  $\delta W_{int}$ , während der rechte Term  $\delta W_{ext}$  die virtuelle äußere Arbeit wiedergibt. Die gesuchte Lösung  $\mathbf{u}$  muss die Dirichlet-Randbedingungen (2.21) des Randwertproblems erfüllen und außer an den einzelnen materiellen Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  und Rissen  $\Gamma_{c,j}$  im gesamten Gebiet  $\Omega$  hinreichend glatt sein, vergleiche Gleichung (2.5). Der Lösungsraum  $\mathcal{U}$  wird durch die Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  mit den Verschiebungskomponenten  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \in \mathcal{U}$  definiert.

$$\mathcal{U} = \{ \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \mid \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \in H^1(\Omega) \text{ und } \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{u^*}} = \mathbf{u}^*, \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_{u^*}} = \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j|_{\Gamma_{u^*}} = \mathbf{0} \} \quad (4.2)$$

$H^1$  symbolisiert einen Sobolev-Raum. Die auf dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_{u^*}$  vorgeschriebenen Verschiebungen  $\mathbf{u}^*$  werden dem gewöhnlichen Anteil der Verschiebungsfunktion  $\hat{\mathbf{u}}$  zugewiesen, um die Dirichlet-Randbedingung in der üblichen Weise realisieren zu können. Im Sinne der Galerkin-Methode soll der Raum zulässiger Testfunktionen  $\mathcal{V}$  dem Lösungsraum  $\mathcal{U}$  entsprechen.  $\mathcal{V}$  ist durch die Testfunktion  $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  mit ihren Komponenten  $\delta \hat{\mathbf{u}}$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \in \mathcal{V}$  definiert.

$$\mathcal{V} = \{ \delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_i, \delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \mid \delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_i, \delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \in H^1(\Omega) \text{ und } \delta \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{u^*}} = \delta \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_{u^*}} = \delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j|_{\Gamma_{u^*}} = \mathbf{0} \} \quad (4.3)$$

Durch Einsetzen dieses Testfunktionsansatzes in die schwache Form des Gleichgewichts (4.1) erhält man zunächst folgende Gleichgewichtsaussage.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \sum_{i=1}^{n_m} \left[ \int_{\Omega} \chi_{m,i} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_i : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] + \sum_{i=1}^{n_m} \left[ \int_{\Omega} (\delta \tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla \chi_{m,i})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] \\
& \quad + \sum_{j=1}^{n_c} \left[ \int_{\Omega} \chi_{c,j} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_j : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] + \sum_{j=1}^{n_c} \left[ \int_{\Omega} 2 \delta_{c,j} (\delta \tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{n}_{c,j})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] \quad (4.4) \\
& = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma + \sum_{i=1}^{n_m} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{n_c} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{c,j} \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

Die Dirac-Delta Verteilung  $\delta_{c,j}$  ergibt sich aus der Gradientenbildung der Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$ , siehe Gleichung (2.8) und Anhang A. Das unbegrenzte Volumenintegral, das die Dirac-Delta Verteilung enthält, kann durch die Eigenschaft von  $\delta_{c,j}$  in ein begrenztes Oberflächenintegral überführt werden, siehe Anhang A.

$$\int_{\Omega} 2 \delta_{c,j} (\delta \tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{n}_{c,j})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{c,j}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{t}_{c,j} \, d\Gamma \quad (4.5)$$

Darin bezeichnet der Vektor  $\mathbf{t}_{c,j}$  die Spannungen, die über den Riss  $\Gamma_{c,j}$  hinweg übertragen werden können, siehe Gleichung (2.23). Aus der Aufteilung der Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$  folgt, dass jede zulässige Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  als zulässige Testfunktion  $\delta \hat{\mathbf{u}}$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_j$  betrachtet werden kann. Dies erlaubt die Unterteilung von Gleichung (4.4) in einen Satz von  $1 + n_m + n_c$  variationeller Aussagen. Hierfür wird zunächst die Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  identisch  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  gewählt. Danach wird angenommen, dass  $\delta \mathbf{u}$  gleichbedeutend mit jeder einzelnen Funktion  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_j$  ist.

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [(\chi_{m,1} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_1) + (\delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \nabla \chi_{m,1})^s] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
&\vdots \\
\int_{\Omega} [(\chi_{m,n_m} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m}) + (\delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m} \otimes \nabla \chi_{m,n_m})^s] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,n_m} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma
\end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \chi_{c,1} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,1}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{c,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
&\vdots \\
\int_{\Omega} \chi_{c,n_c} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,n_c}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{c,n_c} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma
\end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Gleichung (4.6) kennzeichnet die übliche Gleichgewichtsaussage eines quasi-statischen Randwertproblems ohne Volumenkräfte in schwacher bzw. integraler Form. Der Gleichungsblock (4.7) beschreibt die integrale Forderung nach Spannungskontinuität über jede der individuellen materiellen Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  hinweg, vergleiche Gleichung (2.22).

Der Satz an Gleichungen (4.8) stellt sicher, dass die Spannungskontinuität an jedem Riss  $\Gamma_{c,j}$  in schwacher Form gewährleistet ist. Die Gleichgewichtsbeziehungen in (4.6) – (4.8) repräsentieren ein Problem, das durch den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  gekoppelt ist.

### 4.3 Diskretisierung

Im Folgenden wird auf die Diskretisierung der Gleichungen (4.6) – (4.8) eingegangen. Zunächst wird das gesamte Gebiet  $\Omega$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in  $n_{ele}$  Finite Elemente zerlegt, so dass  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Omega^e$  gilt. Dabei symbolisiert  $\bigcup_{e=1}^{n_{ele}}$  den Zusammenbau aller Finiten Elemente. Der Verschiebungsverlauf innerhalb eines Elementes wird über diskrete Knotenfreiwerte und dazugehörige Ansatzfunktionen approximiert. Charakteristisch für das erweiterte Finite Element Modell ist die Ausnutzung der Eigenschaft der verwendeten Ansatzfunktionen, *Partitions of Unity* zu sein.

$$\sum_{o \in I} N_o(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.9)$$

Darin symbolisiert  $I$  die Menge aller diskreten Punkte bzw. Knoten im Gebiet  $\Omega$ . Um die *Partition of Unity*-Eigenschaft zu erfüllen, müssen die Ansatzfunktionen  $N_o$  hinreichend glatt sein. Dies wird dadurch gewährleistet, dass ausschließlich Ansatzfunktionen benutzt werden, die mindestens  $C^0$ -kontinuierlich sind. Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  aus Gleichung (2.5) wird folgendermaßen diskretisiert.

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{o \in I} N_o \hat{\mathbf{u}}_o}_{\hat{\mathbf{u}}} + \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{\sum_{p \in J_i} \chi_{m,i} N_p \tilde{\mathbf{u}}_{p,i}}_{\chi_{m,i} \tilde{\mathbf{u}}_i} + \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{\sum_{q \in K_j} \chi_{c,j} N_q \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_{q,j}}_{\chi_{c,j} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j} \quad (4.10)$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{u}}_o$  beinhaltet die gewöhnlichen Verschiebungsfreiheitsgrade am Knoten  $o$ . Durch die Multiplikation mit der entsprechenden Ansatzfunktion  $N_o$  wird der gewöhnliche Anteil  $\hat{\mathbf{u}}$  des Verschiebungsfeldes diskretisiert. Die Menge  $J_i \subset I$  besteht aus allen Knoten  $p$  Finiten Elemente, in denen die materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  verläuft. Diese Knoten werden mit den zusätzlichen Freiheitsgraden  $\tilde{\mathbf{u}}_{p,i}$  angereichert. Es ist darauf hinzuweisen, dass die Anreicherung mit diesen Freiheitsgraden hinfällig ist, wenn die Knoten zu zwei Elementkanten gehören, die beide auf der Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  liegen. Die Multiplikation der Knotenfreiwerte mit den dazugehörigen Ansatzfunktion  $N_p$  approximiert die Verschiebungskomponente  $\tilde{\mathbf{u}}_i$ . Die Funktion  $\chi_{m,i}$  erweitert die Basis zur Abbildung der Grenzflächenkinematik. Sie wird gemäß Gleichung (3.10) berechnet.

Alle Knoten  $q$  der Teilmenge  $K_j \subset I$  werden mit den Freiheitsgraden  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_{q,j}$  angereichert, um den Verschiebungsanteil  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  unter Verwendung der Ansatzfunktion  $N_q$  zu diskretisieren. Für die Modellierung der Risskinematik wird dieser Anteil mit der Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  multipliziert. Die Vorzeichenfunktion ist mit Hilfe der Anwendung entsprechender Level Set Techniken definiert, siehe Kapitel 3. Bei einem Grenzflächenriss wird auf Gleichung (3.11) zurückgegriffen. Für einen Festkörperphasenriss ist die Vektor Level Set Darstellung und somit Gleichung (3.15) relevant. Die Menge  $K_j$  enthält alle Knoten, deren Support von dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  durchtrennt wird. Dabei kennzeichnet der Support eines Knotens den Patch aus denjenigen Finiten Elementen, die alle an diesem Knoten hängen. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 4.1 auf der rechten Seite der Support des grauen

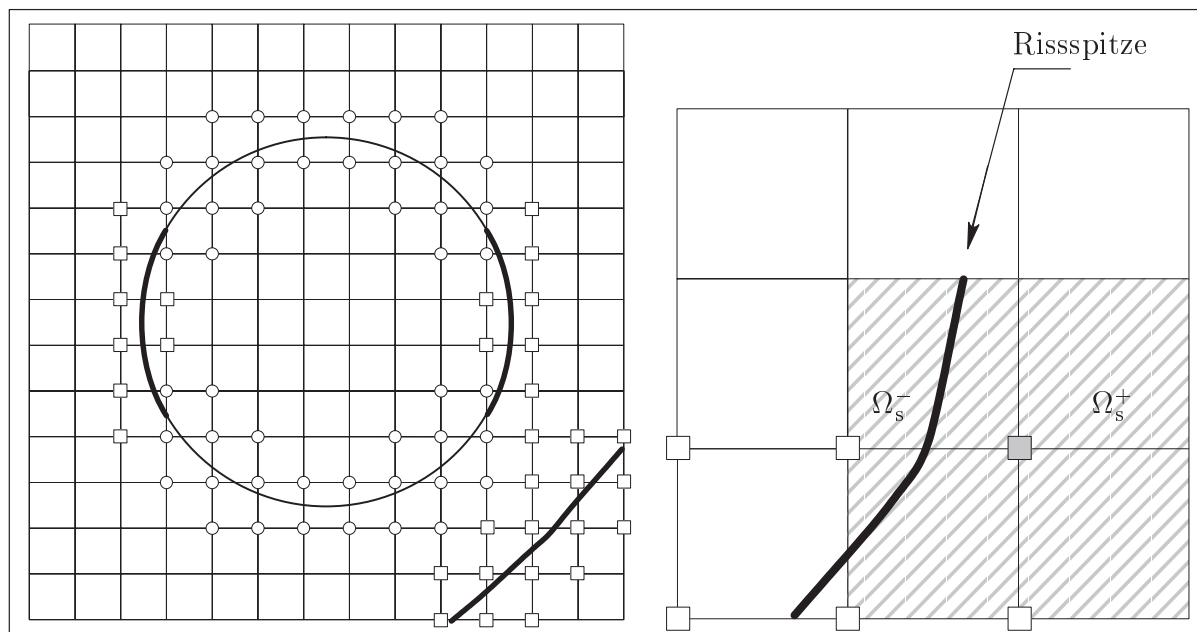


Abbildung 4.1: Links: Diskretisierung mit fixem FE Netz. Rechts: Support eines Knotens und Risspitze

Knotens schraffiert hinterlegt.

In Abbildung 4.1 ist auf der linken Seite die Diskretisierung eines Gebietes dargestellt, das durch eine ungeschädigte materielle Grenzfläche und Risse gekennzeichnet ist. Die Risse befinden sich sowohl dort, wo zwei Festkörperphasen einmal perfekt miteinander verbunden waren, als auch an beliebiger Stelle innerhalb des Materials. Die kreisförmigen Knoten gehören der Menge  $J_i$  an. Die Quadrate charakterisieren Knoten, die zu den Mengen  $K_j$  zählen. Es ist natürlich möglich, dass Knoten sowohl in  $J_i$ , als auch in  $K_j$  enthalten sind. Durch die verwendete Diskretisierungsmethode ist das approximierte Verschiebungsfeld entlang der gesamten Ausdehnung der Risse diskontinuierlich. Des Weiteren ist durch die Definition der Teilmenge  $K_j$  automatisch erfüllt, dass der Verschiebungssprung an der Risspitze null ist. Eine anschauliche Erklärung liefert die Vorstellung, dass die Knoten auf dem Rand eines vierknotigen Elementes, auf dem die noch geschlossene Risspitze liegt, nicht mit den zusätzlichen Freiwerten  $\tilde{\mathbf{u}}_{q,j}$  angereichert werden. Die Risspitze muss auf Grund der verwendeten Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  auf der Kante eines Elementes liegen. Beispielsweise können aber unter Verwendung einer knotenformulierten Definition der Vorzeichenfunktion spezielle Risspitzenelemente eingesetzt werden, mit denen der Riss innerhalb eines Finiten Elementes inkrementell vorangetrieben werden kann, siehe Zi & Belytschko [199] und Anhang B.

Die Darstellungsform des diskretisierten Verschiebungsfeldes (4.10) passt ausgezeichnet zur Erklärung des Vorgangs der Knotenanreicherung. Von nun an wird zur Darstellung der Approximation der Verschiebungs- und Testfunktionskomponenten innerhalb eines Finiten Elementes auf die übliche Matrixschreibweise übergegangen.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}_a \mathbf{a} & \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{N}_b \mathbf{b}_i & \tilde{\mathbf{u}}_j &= \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \\
 \delta \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}_a \delta \mathbf{a} & \delta \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{N}_b \delta \mathbf{b}_i & \delta \tilde{\mathbf{u}}_j &= \mathbf{N}_c \delta \mathbf{c}_j
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Der Vektor  $\mathbf{a}$  enthält alle gewöhnlichen Freiheitsgrade  $\hat{\mathbf{u}}_o$  eines Finiten Elementes,  $\mathbf{b}_i$  beinhaltet die Elementfreiheitsgrade für die materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  und  $\mathbf{c}_j$  diejenigen Knotenwerte eines Finiten Elementes, die zu dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  gehören. Die Matrizen  $\mathbf{N}_{a,b,c}$  werden aus den Ansatzfunktionen  $N_{o,p,q}$  gebildet. Da in der vorliegenden Arbeit das Bubnov-Galerkin Verfahren angewendet wird, werden die Komponenten der Verschiebungs- und der Testfunktion in gleicher Weise diskretisiert. Die symmetrischen Gradienten dieser Komponenten lauten in diskretisierter Form folgendermaßen.

$$\begin{aligned} \nabla^s \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{B}_a \mathbf{a} & \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{B}_b \mathbf{b}_i & \nabla^s \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j &= \mathbf{B}_c \mathbf{c}_j \\ \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{B}_a \delta \mathbf{a} & \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{B}_b \delta \mathbf{b}_i & \nabla^s \delta \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j &= \mathbf{B}_c \delta \mathbf{c}_j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Matrizen  $\mathbf{B}_{a,b,c}$  definieren die räumlichen Gradienten der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_{a,b,c}$ . Zur Berechnung von  $\mathbf{B}_{a,b,c}$  wird die bekannte Differentialoperator-Matrix  $\mathbf{L}$  benutzt. Der in Gleichung (2.9) angegebene Verschiebungssprung auf dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  wird durch die entsprechende Verschiebungskomponente (4.11) approximiert.

$$[[\mathbf{u}]]_{c,j} = 2 \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{c,j} \quad (4.13)$$

Die relevante kinematische Größe zur Charakterisierung des Deformationszustandes von materiellen Punkten neben einem Riss ist durch den linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensor (2.10) gegeben. Die Dirac-Delta Verteilung liefert für solche Punkte keinen Beitrag zum Verzerrungstensor. Unter Verwendung von Gleichungen (4.11) und (4.12) lässt sich dieser in diskretisierter Form bestimmen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{[\mathbf{L} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b + \chi_{m,i} \mathbf{B}_b]}_{\bar{\mathbf{B}}_{b,i}} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{[\chi_{c,j} \mathbf{B}_c]}_{\bar{\mathbf{B}}_{c,j}} \mathbf{c}_j \quad \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_c \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen der diskretisierten Verschiebungsverläufe (4.11) und deren symmetrischer Gradienten (4.12) in (4.6) – (4.8) ergibt sich die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts. Auf Grund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung müssen die Gleichgewichtsbeziehungen für beliebige Variationen der Knotenverschiebungen  $\delta \mathbf{a}$ ,  $\delta \mathbf{b}_i$  und  $\delta \mathbf{c}_j$  gelten. Dies führt auf das globale Gleichungssystem des diskretisierten Randwertproblems.

$$\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^e} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,1} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \\ &\vdots \\ \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,n_m}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,n_m} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$



$$\begin{aligned}
\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,1}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,1} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \\
&\vdots \\
\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,n_c}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,n_c}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,n_c} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

In obigen Gleichungen definieren die linken Terme den Vektor der inneren Knotenkräfte  $\mathbf{F}_{int}$ , während die rechten Terme die Einträge des Knotenkraftvektors  $\mathbf{F}_{ext}$  aus äußerer Belastung darstellen.

*Bemerkungen:*

Die erste Bemerkung betrifft die Rissmodellierung im Rahmen der X-FEM. Hier besteht die Möglichkeit, das Risspitzennahfeld aus diversen Gründen mittels der Diskretisierung einer zusätzlichen lokalen Verschiebungskomponente im numerischen Modell auf einfache Art und Weise zu berücksichtigen, siehe Anhang B. In der vorliegenden Arbeit wird auf dieses Vorgehen verzichtet.

Nun folgen einige Bemerkungen zur Diskretisierung eines Randwertproblems mit materiellen Grenzflächen. Üblicherweise werden bei der Simulation von Verbundstrukturen Finite Element Netze verwendet, die an die Geometrie der materiellen Grenzflächen angepasst sind. Damit kann auf Kosten von oftmals schwierigen und zeitaufwendigen Vernetzungen die Bedingung (2.3) erfüllt werden, ohne die Verschiebungsanteile bemühen zu müssen, die mit den materiellen Grenzflächen assoziiert sind. Insbesondere bei komplexer Geometrie des Materialaufbaus in 2D und vor allem natürlich in 3D kann die Erzeugung von unverzerrten angepassten Netzen eine außerordentlich große Herausforderung darstellen. In *Löhnert* [104] wurde die Wirkungsweise von zwei alternativen Vorgehensweisen diskutiert. Zum einen wurde die Anzahl der Gaußpunkte eines Elementes erhöht, das von einer materiellen Grenzfläche durchtrennt wird, ohne den gewöhnlichen Verschiebungsansatz anzureichern. Diese Vorgehensweise ist mehr oder weniger durch den integralen Charakter der Finite Element Methode motiviert. Das Ziel ist die Erhöhung der Genauigkeit der numerischen Integration der Elemente mit materieller Diskontinuität. Zum anderen wurde eine Hanging Node Technik vorgeschlagen, um das Finite Element Netz an einer materiellen Grenzfläche bei akzeptablem Rechenaufwand zu verfeinern und dadurch den Diskretisierungsfehler zu reduzieren. Diese Vorgehensweise wurde dem erstgenannten alternativen Ansatz und der eher herkömmlichen Methode, das Netz an die Grenzflächengeometrie anzupassen, bevorzugt. Eine weitere Möglichkeit, die Diskontinuität des Deformationsgradienten an der materiellen Grenzfläche bei unangepassten Finite Element Netzen zu berücksichtigen, bietet die Einführung eines inkompatiblen Verzerungsmodus in den Elementen, die die materielle Grenzfläche beinhalten, siehe *Ibrahimbegović* [83].

## 4.4 Linearisierung

In der vorliegenden Arbeit werden Materialien mit nichtlinearem Verhalten untersucht. Dabei resultiert die materielle Nichtlinearität aus nichtlinearen Traktions-Verschiebungs-

sprung-Gesetzen. Die Verwendung von nichtlinearen kontinuumsmechanischen Konstitutivgesetzen würde den Grad der materiellen Nichtlinearität sogar noch erhöhen. Die Lösung des globalen Gleichungssystems muss inkrementell iterativ bestimmt werden. In der Regel wird hierfür das Newton-Raphson Verfahren verwendet. Dazu werden die diskretisierten Gleichungen (4.15) – (4.17) in folgendes Format gebracht.

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) := \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Darin symbolisiert  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  das Residuum, das als die Differenz zwischen den inneren und den äußeren Knotenkräften definiert ist. Im Vektor  $\mathbf{D}$  sind alle Freiheitsgrade des Systems gesammelt. Es wird vorausgesetzt, dass die externen Lasten verschiebungsunabhängig sind. Im Rahmen des Lösungsverfahrens wird das Residuum in eine Taylorreihe entwickelt. Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt, so dass sich das linearisierte Residuum zum Iterationsschritt  $k + 1$  folgendermaßen angeben lässt.

$$\text{Lin } \mathbf{R}(\mathbf{D}_{k+1}) := \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{D}_k) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \Big|_{\mathbf{D}_k}}_{\mathbf{K}_k} [\Delta \mathbf{D}_{k+1}] = \mathbf{0} \quad \text{mit } \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} - \mathbf{D}_k \quad (4.19)$$

Damit lautet das linearisierte globale Gleichungssystem folgendermaßen.

$$\mathbf{K}_k \Delta \mathbf{D}_{k+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{D}_k) \quad (4.20)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert die inkrementelle Änderung des globalen Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$ . Die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_k$  sowie das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)$  ergeben sich aus dem Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_k^e$  und den Elementresiduen  $\mathbf{r}_k^e$ . Durch den Assemblierungsprozess entsteht aus der Änderung des Elementfreiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{d}_{k+1}$  der Systemfreiheitsgradvektor  $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$ . Der Vektor  $\Delta \mathbf{d}_{k+1}$  beschreibt die Differenz aller Knotenfreiwerte des Elementes zwischen Iterationsschritt  $k + 1$  und  $k$ .

$$\mathbf{K}_k = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_k^e \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_k) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_k^e \quad \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta \mathbf{d}_{k+1} \quad (4.21)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix und das Elementresiduum setzen sich aus mehreren Integralausdrücken zusammen, die in Abhängigkeit ihrer Position mit entsprechenden Indizes versehen werden.

$$\mathbf{k}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ab_{n_m}} & \mathbf{k}_{ac_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ac_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{b_1a} & \mathbf{k}_{b_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1c_{n_c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{k}_{b_{n_m}a} & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{c_1a} & \mathbf{k}_{c_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1c_{n_c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{k}_{c_{n_c}a} & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_{n_c}} \end{bmatrix}_k^e \quad \mathbf{r}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{b_{n_m}} \\ \mathbf{r}_{c_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{c_{n_c}} \end{bmatrix}_k^e \quad (4.22)$$

Die einzelnen Integralausdrücke, die die Elementsteifigkeitsmatrix bilden, lauten wie folgt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{aa,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{tan,k} \mathbf{B}_a \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{ab_i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{ac_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{b_i a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{tan,k} \mathbf{B}_a \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{b_i b_r,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{b,r} \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{b_i c_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{c_j a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{tan,k} \mathbf{B}_a \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{c_j b_i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, d\Omega \\
\mathbf{k}_{c_j c_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,j}^e} 4 \mathbf{N}_c^T \mathbf{T}_{tan,k} \mathbf{N}_c \, d\Gamma \\
\mathbf{k}_{c_j c_s,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{c,s} \, d\Omega \quad \text{wenn } j \neq s
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Die Materialmatrix  $\mathbf{C}_{tan,k}$  ist durch die Ableitung der Cauchy-Spannungen nach den Verzerrungen gegeben. Die Materialmatrix  $\mathbf{T}_{tan,k}$  für spannungsübertragende Risse folgt aus der Ableitung des Spannungsvektors nach dem Verschiebungssprung. Beide Materialmatrizen werden in Kapitel 5 spezifiziert. Die Anteile des Elementresiduums ergeben sich aus den folgenden Integralausdrücken. Sie sind definiert als die Differenz zwischen den internen und den externen Knotenkräften, die die Integration über das Elementgebiet liefert.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{b_i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{c_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,j}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,j,k} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Welche Integralausdrücke zur Ermittlung der Elementsteifigkeit  $\mathbf{k}_k^e$  und des Elementresiduums  $\mathbf{r}_k^e$  letztendlich ausgewertet werden müssen, hängt von den Freiheitsgraden des jeweiligen Elementes ab.

Wie bemerkt wurde, ist ein Körper im Gleichgewicht, wenn die internen Kräfte so groß wie die externen Kräfte sind. Die internen Kräfte sowie die globale Steifigkeitsmatrix werden maßgebend von den Cauchy-Spannungen und den Spannungen, die über die Risse übertragen werden, gesteuert. Die Evolution dieser Spannungen wird in Kapitel 5 detailliert diskutiert.

## 4.5 Aspekte der Implementierung

In diesem Kapitel werden wichtige Aspekte und Details der Implementierung des erweiterten Finite Element Modells beschrieben. Zunächst wird auf die numerische Umsetzung von Risswachstum und Koaleszenz bei zweidimensionalen Problemen eingegangen. Danach werden Details bezüglich der Knotenanreicherung mit Sprungfreiheitsgraden und der numerischen Integration vorgestellt. Abschließend wird die Behandlung von mehrfacher Rissbildung diskutiert.

### 4.5.1 Risswachstum und Koaleszenz

Mit der Modellierung von Risswachstum, das im Allgemeinen materialabhängig ist, sind die Ermittlung der Rissrichtung und die Formulierung eines Rissinitiierungskriteriums verbunden, siehe Kapitel 5.5. Im Gegensatz zu Festkörperphasenrissen sind bei Grenzflächenrissen die Orientierung und sogar die Lage durch die Level Set Beschreibung der vormals ungeschädigten Grenzflächen a priori bekannt, siehe Kapitel 3.2. Neben der Definition eines Versagens- und je nach Risstyp auch eines Rissrichtungskriteriums hat man bei der numerischen Modellierung des Risswachstums zwischen zwei Problemstellungen zu unterscheiden. Dabei handelt es sich um die Weiterführung eines vorhandenen Risses und um die Entstehung eines neuen Risses. Im ersten Fall muss der Riss lediglich von der bekannten Risspitze aus vorangetrieben werden. Dazu wird überprüft, ob das verwendete Rissinitiierungskriterium an allen Gaußpunkten des Finiten Elementes vor der Risspitze erfüllt ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass bei Grenzflächenrissen das Kriterium ebenfalls an den Punkten ausgewertet wird wie im Falle eines Festkörperphasenrisses. Bei Erfüllung des Versagenskriteriums wird der Riss entsprechend der ermittelten Rissrichtung durch das gesamte Element gelegt. Der zweite Fall beschreibt die Entstehung eines neuen Risses. In diesem Fall existiert keine Risspitze. Dies stellt bei Grenzflächenrissen kein Problem dar, da die Rissgeometrie vordefiniert ist. Bei Festkörperphasenrissen wird gefordert, dass der Riss durch den Schwerpunkt des Elementes verläuft, in dem das verwendete Rissinitiierungskriterium an allen Gaußpunkten erfüllt ist und das nicht an eine Risspitze grenzt. Dieses Element wird sowohl bei Festkörperphasen-, als auch bei Grenzflächenrissen als Mutterelement bezeichnet. Die Mutterelemente von zwei Festkörperphasenrissen sind in Abbildung 4.2 auf der linken Seite grau schraffiert dargestellt. Die gekreuzten Kreise markieren die Schwerpunkte der Mutterelemente. Auf Grund der knotenbasierten Formulierung muss bei der Einführung eines neuen Risses zusätzlich geprüft werden, ob Knoten des Mutterelementes angereichert werden dürfen. Die Situation links oben zeigt die Entstehung eines Festkörperphasenrisses am Rand der Struktur, bei der die Erfüllung des Rissinitiierungskriteriums im Mutterelement ausreicht. Im linken Bild unten ist ein Zustand veranschaulicht, bei dem das Rissinitiierungskriterium für ein weiteres, angrenzendes Element erfüllt sein muss. Bei der Implementierung des vorgestellten erweiterten Finite Element Modells muss beachtet werden, dass sich die Anzahl der Knotenfreiheitsgrade im Laufe einer Simulation erhöhen kann. Offensichtlich ist dies für die Diskretisierung fixer materieller Grenzflächen nicht von Bedeutung, da vor der Lösung des zugrunde liegenden Gleichungssystems die Anzahl aller Freiheitsgrade feststeht. Auch die Einführung diskreter Risse an den materiellen Grenzflächen ändert in der Regel nichts daran, da die Freiheitsgrade  $\mathbf{b}_i$  durch  $\mathbf{c}_j$  ersetzt werden. Für die Modellierung von wachsenden Rissen innerhalb kontinuierlich verteilter Materialphasen ist die

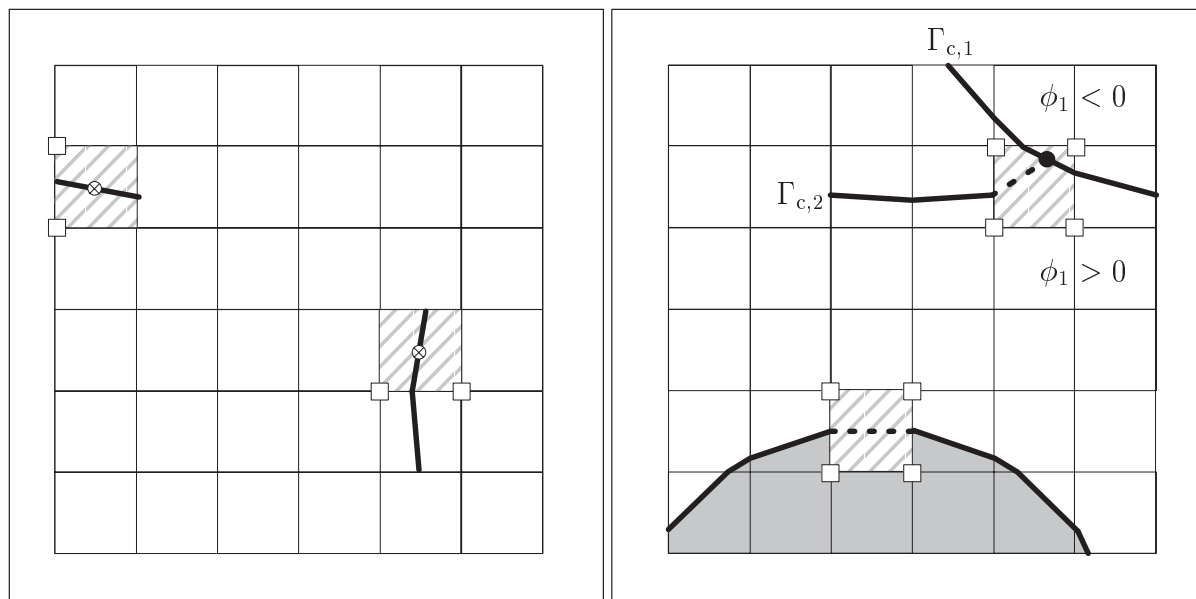


Abbildung 4.2: Links: Entstehung von Rissen. Rechts: Zusammenwachsen von Rissen

dynamische Erweiterung der Knotenfreiheitsgrade jedoch essentiell.

Für eine Versagensanalyse ist neben der numerischen Abbildung von Risswachstum die Beschreibung von Koaleszenz und Rissverzweigung ein wichtiger Aspekt. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.2 sind zwei Szenarien gezeigt, wo Risse zusammenwachsen oder sich verzweigen. Die grau schraffierten Finiten Elemente kennzeichnen die Orte der Rissverbindungen. Die untere Situation beschreibt die Koaleszenz zweier Rissegmente einer geschädigten materiellen Grenzfläche. Die durchgezogenen dicken Linien symbolisieren die Rissegmente. Die gestrichelte dicke Linie beschreibt die Rissverbindung. Die numerische Modellierung des Zusammenwachsens von Grenzflächenrissen ist durch die im Voraus bekannte Rissgeometrie relativ einfach. Hierzu werden alle Knoten des Finiten Elementes, in dem die Koaleszenz stattfindet, mit Sprungfreiheitsgraden angereichert. Rechts oben ist die Vereinigung des Festkörperphasenrisses  $\Gamma_{c,2}$  mit einem Riss  $\Gamma_{c,1}$  dargestellt. Um die Vereinigung beider Risse sicherzustellen, wird vorgeschrieben, dass die Risse im Mittelpunkt des Rissegmentes  $\Gamma_{c,1}$  des schraffierten Elementes zusammenwachsen. Der Zeitpunkt der Koaleszenz ist durch die Erfüllung des entsprechenden Rissinitiiierungskriteriums an einem einzigen Beobachtungspunkt im Schwerpunkt der Teilfläche des schraffierten Elementes, die vom Festkörperphasenriss  $\Gamma_{c,2}$  durchtrennt wird, definiert. Zur Diskretisierung der Risskinematik von  $\Gamma_{c,2}$  werden alle Knoten des grau schraffierten Finiten Elementes mit zusätzlichen Sprungfreiheitsgraden angereichert. Die Anreicherungsfunktion für den Festkörperphasenriss  $\Gamma_{c,2}$  ist eine leicht veränderte Vorzeichenfunktion. Die Definition dieser Funktion kann mit Hilfe der Level Set Beschreibung der Geometrie beider Risse erfolgen.

$$\chi_{c,2} = \begin{cases} \text{sgn}(\phi_{c,2}) & \text{wenn } \phi_1 > 0 \\ 0 & \text{wenn } \phi_1 < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Für den Fall, dass  $\Gamma_{c,1}$  einen Festkörperphasenriss darstellt, ist  $\phi_1$  äquivalent der Vektor Level Set Funktion  $\phi_{c,1}$ . Im Falle eines Grenzflächenrisses ist  $\phi_1$  durch die Level Set Beschreibung der vormals ungeschädigten Grenzfläche als  $\phi_{m,i}$  gegeben.

Damit es keinen Versatz der Risse an den Kanten eines Elementes gibt, wird für alle Risse die Kontinuität des Risspfades gefordert. Diese Forderung ist für *Partition of Unity*-basierte Formulierungen natürlich und wichtig, da der Verschiebungssprung eine kontinuierliche Größe ist. Die Weiterführung und Einführung von Rissen bzw. die Anreicherung von Knotenfreiheitsgraden geschieht nur am Ende eines Lastinkrements, um die quadratische Konvergenz des inkrementell iterativen Lösungsverfahrens sicherstellen zu können.

### 4.5.2 Knotenanreicherung mit Sprungfreiheitsgraden

Die Diskretisierung der Verschiebungskomponente  $\chi_{c,j} \tilde{\mathbf{u}}_j$  durch die Anreicherung derjenigen Knoten mit Sprungfreiheitsgraden, in deren Support der Riss  $\Gamma_{c,j}$  nicht liegt, wäre von demselben Typ wie die Approximation der gewöhnlichen Verschiebungskomponente  $\hat{\mathbf{u}}$ . Da dies die lineare Abhängigkeit des Gleichungssystems zur Folge hätte, sind solche Knoten nicht in  $K_j$  enthalten. Wenn ein Riss den Support eines Knotens nur knapp durchtrennt, können sich schlecht konditionierte Systemsteifigkeitsmatrizen ergeben. Um dies zu vermeiden, wird der Knoten bei Erfüllung folgender Ungleichung aus der Menge  $K_j$  entfernt.

$$\frac{\min(\Omega_s^+, \Omega_s^-)}{\Omega_s} \leq \text{tol} \quad (4.26)$$

Darin kennzeichnet  $\Omega_s = \Omega_s^+ \cup \Omega_s^-$  das Gebiet des Supports eines Knotens, der in  $\Omega_s^+$  und  $\Omega_s^-$  unterteilt ist, siehe Abbildung 4.1. Die Toleranz  $\text{tol}$  hängt von der Genauigkeit des Gleichungslösers ab und liegt typischerweise im Bereich  $10^{-4}$ .

### 4.5.3 Numerische Integration

Zur Berücksichtigung der Kinematik von Festkörpern mit Rissen und materiellen Grenzflächen werden Verschiebungsansätze benötigt, die durch die Anreicherungsfunktionen nicht ausschließlich aus Lagrange-Polynomen bestehen. Für eine genaue Integration der entsprechenden Ausdrücke in der schwachen Formulierung müssen bei Elementen, die von einer Diskontinuität durchtrennt werden, besondere Integrationsvorschriften verwendet werden. Gewöhnlich werden diese Elemente in geeigneter Weise in Dreieckselemente zerlegt, siehe *Moës, Dolbow & Belytschko* [116] und *Sukumar et al.* [178]. Innerhalb der Dreieckselemente wird eine Dreipunkt-Gauß Integration durchgeführt. Für die Berechnung der Steifigkeitsanteile spannungsübertragender Risse wird eine Zweipunkt-Gauß Integration verwendet, siehe *Wells & Sluys* [190]. Auf den ersten Blick scheint die Integrationsvorschrift aufwendig. Man muss jedoch bedenken, dass in der Regel nur wenige Elemente von Diskontinuitäten durchtrennt werden. Eine alternative Methode zur Berechnung der Steifigkeit und des Residuums eines Elementes mit einer Diskontinuität, bei der auf die erwähnte Triangulation verzichtet werden kann, wurde von *Ventura* [185] vorgeschlagen und diskutiert. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch auf die zuvor beschriebene, übliche Integrationsmethode zurückgegriffen. Es sei darauf hingewiesen, dass Finite Elemente, die keine Diskontinuität beinhalten, mit einer gewöhnlichen Gauß-Quadratur integriert werden.

Die Elementknoten sowie die Schnittpunkte der Diskontinuitäten mit den Kanten eines Elementes sind im globalen Koordinatensystem gegeben. Im Gegensatz zu Festkörperphasenrissen können die Schnittpunkte von materiellen Grenzflächen und damit auch von

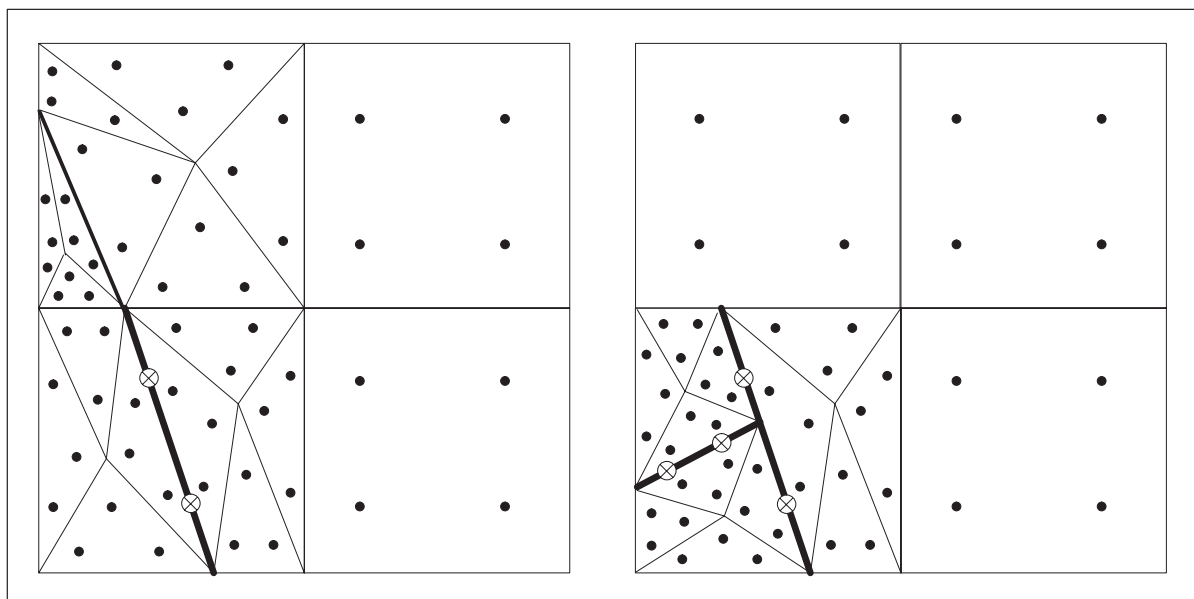


Abbildung 4.3: Verteilung von Integrationspunkten

potentiellen Grenzflächenrissen mit den Elementkanten a priori berechnet werden. Der Schnittpunkt  $\mathbf{x}_p$  zwischen der Elementkante mit den beiden Eckpunkten  $\mathbf{x}_I$  und  $\mathbf{x}_J$  und der materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  lässt sich über die diskretisierte Level Set Funktion  $\phi_{m,i}$  mittels einer linearen Interpolation ermitteln.

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_I - \frac{\phi_{m,i,I}}{\phi_{m,i,J} - \phi_{m,i,I}} [\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I] \quad \text{wenn} \quad \phi_{m,i,I} \phi_{m,i,J} < 0 \quad (4.27)$$

Durch die Triangulation des Elementes mit Diskontinuität ergibt sich zunächst der Ort der Gaußpunkte im globalen Koordinatensystem. Die dazugehörigen lokalen Koordinaten bezüglich des Elementes müssen durch eine inverse isoparametrische Abbildung bestimmt werden. Da die verwendeten Ansatzfunktionen nichtlineare Terme enthalten, wurde hierzu eine lokale Newton-Iteration programmiert. In Abbildung 4.3 ist auf der linken Seite die Verteilung der Integrationspunkte innerhalb vier bilinearer Elemente dargestellt, die entweder einen Riss, eine materielle Grenzfläche oder keine Diskontinuität beinhalten. Die gekreuzten Kreise kennzeichnen die Gaußpunkte auf einem spannungsübertragenden Riss, der durch die dicke Linie beschrieben ist. Die dünne Linie zeigt eine ungeschädigte materielle Grenzfläche. Die schwarzen Kreise symbolisieren die Integrationspunkte im kontinuierlichen Festkörpermateriale. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.3 ist die Integration eines Elementes gezeigt, in der eine Verzweigung oder ein Zusammenwachsen zweier Risse stattfindet. Dieses Element muss auf eine andere Art und Weise unterteilt werden, wie das Element, das nur ein einziges Risssegment enthält. Wie zu erkennen ist, werden nun 36 statt 24 Gaußpunkte für die Integration innerhalb des Kontinuums und 4 statt 2 Gaußpunkte für die Integration auf den Risssegmenten benutzt.

#### 4.5.4 Behandlung mehrfacher Rissbildung

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Implementierung betrifft die Robustheit der erweiterten Finite Element Methode für numerische Analysen von strukturellem Versagen, das durch

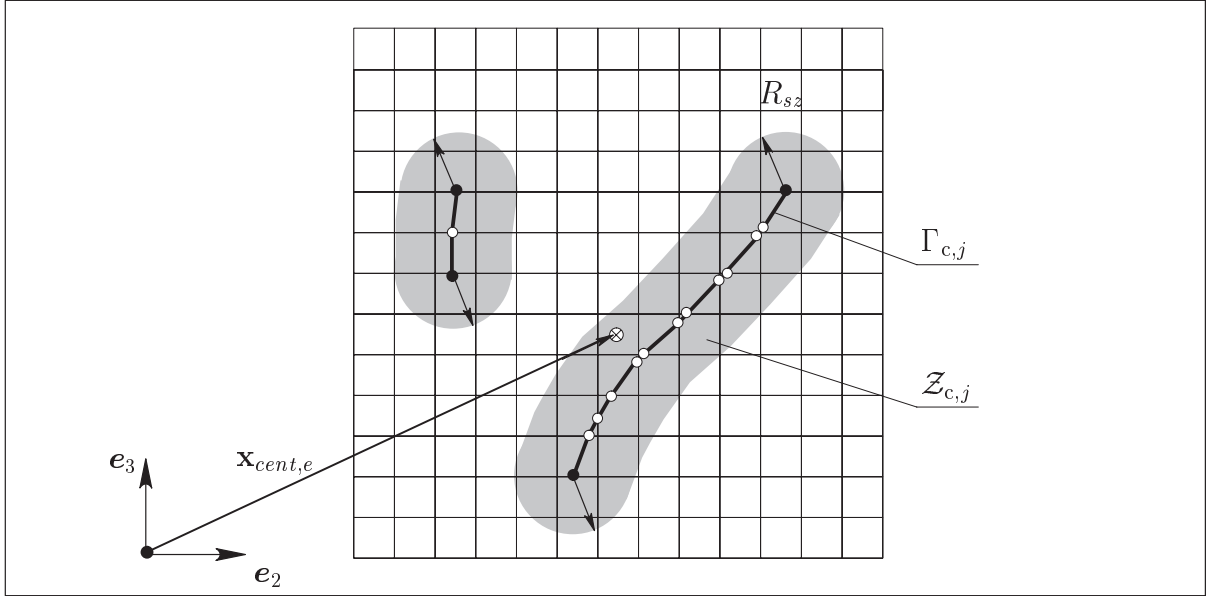


Abbildung 4.4: Abschirmzonen

das Wachstum mehrerer Risse gekennzeichnet ist. Die Berücksichtigung von mehreren Rissen führt im Vergleich zur Erfassung eines einzigen Risses zur Steigerung der Komplexität des numerischen Modells. Hiermit ist die Schwierigkeit verbunden, die globale Strukturantwort erfolgreich verfolgen zu können. Bei mehrfacher Rissbildung kann man zwischen Primär- und Sekundärrissen unterscheiden. Primärrisse wachsen während der entscheidenden Periode des Deformationsprozesses und tragen wesentlich zur globalen Dissipation der Struktur bei. Sekundärrisse sind nur zu bestimmten Belastungszuständen aktiv und haben keinen bedeutenden Einfluss auf die gesamte Dissipation. Sie können beispielsweise im Bereich der Spitze eines Primärrisses entstehen, wenn große Lastinkremente verwendet werden. Zur Steigerung der numerischen Robustheit wurde von *Oliver et al.* [136] im Rahmen einer SDA-Formulierung vorgeschlagen, die Risse gegenseitig abzuschirmen. Hierfür wird gefordert, dass in der Nachbarschaftszone eines vorhandenen Risses keine neuen Risse entstehen dürfen. Je nach Implementierung können Rissverzweigungen und Risskoaleszenz jedoch zugelassen werden. Die Formulierung der Abschirmzone  $\mathcal{Z}_{c,j}$  des Risses  $\Gamma_{c,j}$  lautet folgendermaßen.

$$\mathcal{Z}_{c,j} = \{e \in \{1, \dots, n_{ele}\} \mid d_e \leq R_{sz}\} \quad \text{mit} \quad d_e = \min_{\mathbf{x}_{\Gamma_{c,j}} \in \Gamma_{c,j}} |\mathbf{x}_{cent,e} - \mathbf{x}_{\Gamma_{c,j}}| \quad (4.28)$$

Die Abschirmzone wird durch alle Finiten Elemente definiert, deren Abstand zum Riss kleiner oder gleich dem Parameter  $R_{sz}$  ist. Sie ist in Abbildung 4.4 als grauer Bereich dargestellt. Der Abstand wird aus der Norm des Vektors berechnet, der vom Schwerpunkt  $\mathbf{x}_{cent,e}$  des Elementes  $e$  auf den Riss zeigt. Der Riss  $\Gamma_{c,j}$  soll dabei durch die Vielzahl der Punkte  $\mathbf{x}_{\Gamma_{c,j}}$  definiert sein, die in Abbildung 4.4 durch die weißen und schwarzen Kreise gekennzeichnet sind. Diese sind die bekannten Schnittpunkte des Risses mit den Kanten der Elemente, die den Riss enthalten. Aufwendige Abstandsberechnungen des Elementschwerpunktes zu den einzelnen Segmenten, aus denen ein Riss besteht, werden somit vermieden. Die rechnerische Effizienz geht auf Kosten einer kleinen Ungenauigkeit, die jedoch mit abnehmender Elementgröße verschwindet. Die Abschirmzonen werden in der vorliegenden Arbeit nur um Festkörperphasenrisse etabliert.



# Kapitel 5

## Materialformulierung

### 5.1 Allgemeines

In Kapitel 1.1 wurden typische Versagensmechanismen von Verbundmaterialien anhand von textilverstärktem Beton beschrieben. Stahlbeton stellt ein weiteres Beispiel für einen Werkstoff dar, der aus zwei konstituierenden Materialien, nämlich Beton und Stahl, besteht. Im Rahmen dieser Arbeit werden numerische Analysen von 2D-Strukturen aus textilverstärktem Beton auf der mesoskopischen Beobachtungsebene durchgeführt. Außerdem wird ein Materialmodell diskutiert, mit dem genaue Simulationen von Bauteilen aus Stahlbeton auf Basis einer makroskopischen Betrachtungsweise möglich sind.

Zur Realisierung dieser Aufgaben müssen unterschiedliche numerische Modelle und Konstitutivgesetze ausgewählt werden. Bei der mesoskopischen Beschreibung des textilverstärkten Betons wird sowohl die Betonmatrix, als auch die textile Faser diskretisiert. Eine mögliche Schädigung der textilen Faser durch die Entwicklung und das Zusammenwachsen von Mikrorissen wird ausgeschlossen. Es wird angenommen, dass die textile Faser während der gesamten Belastung linear elastisch bleibt. Des Weiteren wird die Annahme getroffen, dass sie sich isotrop verhält. Beton gehört zur Klasse der kohäsiven Reibungsmaterialien. Bis zu einem materialspezifischen Belastungszustand verhalten sich diese Materialien in der Regel isotrop und linear elastisch. Danach ist ihre Materialantwort anisotrop und hochgradig nichtlinear. Der Grund hierfür sind mehrere komplexe Versagensmechanismen, die sich über ein weites Skalenspektrum erstrecken. Eine zusätzliche Quelle für das nichtlineare Verhalten des zweiphasigen Werkstoffes steckt im sukzessiven Versagen des adhäsiven Verbundes zwischen der Betonmatrix und der textilen Faser. Für die numerische Simulation von Stahlbetontragwerken wurde eine makroskopische Betrachtungsweise gewählt. Die Eigenschaften des Werkstoffes Stahlbeton werden durch Homogenisierung aus den beiden konstituierenden Materialien ermittelt. Teilbereiche des Tragwerks können somit als homogene Strukturen diskretisiert werden.

Der Gegenstand dieses Kapitels ist die Formulierung des Materialverhaltens im Kontext diskreten Risswachstums. Hierzu werden Konstitutivgesetze verwendet, die die lokale Spannungsantwort eines materiellen Punktes in Abhängigkeit der lokalen Deformation und der Belastungsgeschichte liefern. Es ist angemerkt, dass diese Gesetze auch deshalb benötigt werden, um die maßgeblichen Gleichungen des Randwertproblems, das in Kapitel 2.4 definiert wurde, zu schließen. Da im Rahmen dieser Arbeit spannungsübertragende Risse modelliert werden, müssen nicht nur klassische kontinuumsmechanische Werkstoffgleichungen, sondern auch Materialmodelle vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ verwendet werden. Die erforderlichen Konstitutivgesetze beschreiben Funktionen, die die folgenden Grundstrukturen besitzen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_{c,j} = \mathbf{f}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{c,j}, \boldsymbol{\beta}) \quad (5.1)$$

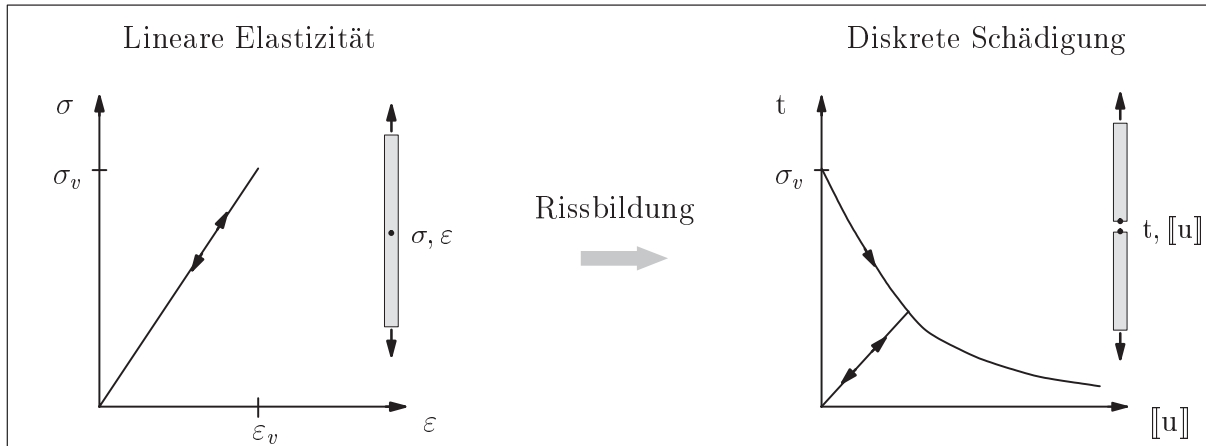


Abbildung 5.1: Zusammengesetztes Materialmodell

Darin symbolisieren die Vektoren  $\alpha$  und  $\beta$  Sätze interner Variablen, mit denen das inelastische Materialverhalten neben oder auf einem Riss spezifiziert wird. In zahlreichen Experimenten mit kohäsiven Reibungsmaterialien sowie mit duktilen Materialien, wie z.B. Stahl, konnte bei niedrigen Belastungsgeschwindigkeiten keine Ratenabhängigkeit nachgewiesen werden. Folglich wird in dieser Arbeit, in der quasi-statische Probleme betrachtet werden, von der vereinfachenden Annahme der Ratenunabhängigkeit ausgegangen. Bei zyklischen Be- und Entlastungsversuchen können bei kohäsiven Reibungsmaterialien und vor allem bei duktilen Materialien bleibende Verformungen festgestellt werden. In der vorliegenden Arbeit werden irreversible Dehnungen im Material Beton jedoch nicht berücksichtigt.

Das nichtlineare Materialverhalten von Beton, des Verbundes zwischen Beton und der textilen Faser sowie von Stahlbeton wird auf das Wachstum von diskreten Rissen zurückgeführt. Die kontinuierlichen, ungeschädigten Bereiche einer Struktur links und rechts eines Risses sollen sich linear elastisch verhalten. Inelastische Deformationen werden damit ausschließlich durch Risse eingeführt. Auf Grund des verwendeten Finite Element Modells ist man in der Lage, einen Riss erst bei Erreichen eines kritischen Belastungszustands diskretisieren zu müssen. Da die Risse im vorkritischen Bereich also noch nicht vorhanden sind, tragen sie auch nicht zur elastischen Deformation der Struktur bei. Die Vorteile hieraus wurden in Kapitel 1.2.3 diskutiert. Das verwendete numerische Berechnungsverfahren bedingt ein zusammengesetztes Materialmodell. In Abbildung 5.1 ist das zusammengesetzte Materialmodell, mit dem in der vorliegenden Arbeit das Bruchverhalten von Beton erfasst wird, für den eindimensionalen Zugspannungszustand schematisch dargestellt. Das linear elastische Materialverhalten vor der Rissbildung wird durch ein klassisches kontinuumsmechanisches Gesetz modelliert. Bei Erreichen des kritischen Belastungszustands kommt es zur Initiierung eines Risses. Auf dem Riss wird das verwendete kontinuumsmechanische Konstitutivmodell von diesem Zeitpunkt an durch ein geeignetes Materialmodell vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ ersetzt. Im Gegensatz zu kontinuumsmechanischen Konstitutivgesetzen führen Traktions-Verschiebungssprung-Modelle nicht zur Null-Dissipation bei lokalisiertem Versagen in entfestigenden Materialien. Damit ist eine wichtige Voraussetzung für die Erzielung einer objektiven und diskretisierungsunabhängigen Lösung eines Randwertproblems erfüllt. Des Weiteren kann anisotropes Materialverhalten, das durch Versagen induziert wird, durch

die Aufteilung des Verschiebungssprunges in charakteristische Komponenten, die eine eindeutige physikalische Bedeutung haben, auf natürliche Art und Weise modelliert werden, siehe Kapitel 5.3 und 5.4.

Die Entwicklung von nichtlinearen Konstitutivgesetzen, mit denen dissipative Vorgänge modelliert werden, kann auf einer thermodynamischen Betrachtungsweise basieren. Dabei wird die Existenz von thermodynamischen Potentialen postuliert. Durch die Verwendung von Materialmodellen, die auf diese Weise gewonnen werden, ist die Einhaltung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik garantiert, siehe Gleichung (2.19). Im Rahmen eines thermodynamischen Ansatzes kann die Herleitung von Traktions-Verschiebungssprung-Gesetzen auf zwei unterschiedlichen Strategien beruhen. Eine Möglichkeit stellt die Projektion eines geeigneten, klassischen kontinuumsmechanischen Materialmodells auf die singuläre Rissfläche dar, siehe *Simo, Oliver & Armero* [167]. Es kann gezeigt werden, dass jedes dieser Materialmodelle in Verbindung mit der Kinematik einer starken Diskontinuität ein Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz beinhaltet, siehe *Oliver* [131] und *Oliver et al.* [133]. So können zur diskontinuierlichen Modellierung materieller Entfestigung in kohäsiven Materialien beispielsweise auch kontinuumsmechanische Schädigungsmodelle eingesetzt werden, die gewöhnlich für die Beschreibung von verschmiertem Versagen benutzt werden. Die zweite Möglichkeit basiert auf dem Postulat eines singulär verteilten Energiefunktionalen  $\psi$ , siehe *Armero* [6] und *Mosler* [119]. Auf diese Variante wird in der vorliegenden Arbeit zurückgegriffen.

$$\psi = \psi^* + \sum_{j=1}^{n_c} \delta_{c,j} \tilde{\psi}_{c,j} \quad (5.2)$$

Hierbei symbolisieren  $\psi^*$  den regulären Anteil der freien Energie von materiellen Punkten des Gebietes  $\Omega^* = \Omega \setminus \Gamma_c$  und  $\tilde{\psi}_{c,j}$  den singulären Anteil, der mit dem inelastischen Verhalten materieller Punkte auf dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  assoziiert ist. Der reguläre Energieausdruck beschreibt das Verhalten innerhalb der Teilbereiche des Körpers links und rechts der Risse, in denen die Verschiebungen kontinuierlich sind. Im Gegensatz zum regulären Anteil ist der singuläre Anteil nicht in Abhängigkeit der Verzerrungen, sondern des Verschiebungssprunges formuliert, siehe *Ortiz & Pandolfi* [139], *Jirásek & Zimmermann* [87] und *Gasser & Holzapfel* [60]. Die hauptsächliche Konsequenz der additiven Aufteilung des Energieausdruckes in einen regulären und in singuläre Anteile ist die Entkopplung der lokalen Materialantwort des Kontinuums von den dissipativen Mechanismen, die sich in den Rissen abspielen. Das Integral der lokalen Dissipation (2.19) über das gesamte Gebiet des Körpers liefert das Dissipationsfunktional  $D$ , das sich unter Verwendung der Aufspaltung des Verzerrungsfeldes (2.10) und der freien Energie (5.2) in folgender Form angeben lässt.

$$D := \int_{\Omega} \mathcal{D} \, d\Omega = \int_{\Omega^*} \underbrace{[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi}^*]}_{\mathcal{D}^* \geq 0} \, d\Omega + \sum_{j=1}^{n_c} \int_{\Gamma_{c,j}} \underbrace{[\mathbf{t}_{c,j} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{c,j} - \dot{\tilde{\psi}}_{c,j}]}_{\tilde{\mathcal{D}}_{c,j} \geq 0} \, d\Gamma \geq 0 \quad (5.3)$$

Man erkennt die prinzipielle Aufteilung in zwei Komponenten. Diese sind die Beiträge, die von materiellen Punkten des kontinuierlichen Bereiches und der diskreten Risse geleistet werden. Es sei darauf hingewiesen, dass wegen der Eigenschaften der Dirac-Delta Verteilung die dazugehörigen, unbegrenzten Volumenintegrale in begrenzte Oberflächenintegrale umgewandelt werden konnten, vergleiche Gleichung (4.5) und Anhang A. Aus

Gleichung (5.3) lassen sich zwei unterschiedliche Typen von entkoppelten Clausius-Duhem Ungleichungen isothermer Prozesse extrahieren. Die Dissipation  $\mathcal{D}^*$  ist einem materiellen Punkt des kontinuierlichen Gebietes  $\Omega^*$  zugeordnet. Sie beschreibt einen Ausdruck, der mit Hilfe des Cauchyschen Spannungstensors und dem linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensor formuliert ist. Die Größe  $\tilde{\mathcal{D}}_{c,j}$  kennzeichnet die Dissipation materieller Punkte, die auf dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  liegen. Sie ist unter anderem durch den Spannungsvektor und den dazugehörigen Verschiebungssprung definiert.

In diesem Kapitel erfolgt eine ausführliche Diskussion der verwendeten Materialmodelle vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ sowie eine kurze Beschreibung der linearen Elastizität im Sinne einer kontinuumsmechanischen Formulierung. Ebenso werden die bei der Modellierung diskreter Rissentstehung wichtigen Fragestellungen geklärt, wie der kritische Belastungszustand definiert ist und in welche Richtung der Riss wächst. Im Weiteren wird der risskennzeichnende Index  $(c,j)$  zur Steigerung der Übersichtlichkeit der Ausführungen bei den entsprechenden Größen weggelassen.

## 5.2 Lineare Elastizität

Elastische Materialgesetze werden bei Werkstoffen verwendet, bei denen keine inelastischen Deformationen messbar sind. Der Werkstoff kehrt bei vollständiger Entlastung wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, ohne Energie dissipiert zu haben. In dieser Arbeit wird neben den Rissen linear elastisches Materialverhalten angenommen. Damit ist die Dissipation  $\mathcal{D}^*$  eines materiellen Punktes des Kontinuums identisch null. Darüber hinaus besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den lokalen Spannungen und Verzerrungen. Der reguläre Anteil der freien Energie  $\psi^*$  ist durch einen vierstufigen Materialtensor  $\mathbf{C}^{el}$  und die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  definiert. Der Satz interner Variablen  $\boldsymbol{\alpha} = \{\emptyset\}$  ist leer.

$$\psi^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.4)$$

Die Auswertung der Clausius-Duhem Ungleichung (5.3) für materielle Punkte des Gebietes  $\Omega^*$  liefert die Definition des Spannungstensors als thermodynamisch konjugierte Größe zu den Verzerrungen. Mit der zweiten Ableitung der freien Energie nach den Verzerrungen erhält man den Materialtensor des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes.

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}^{el} := \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.5)$$

Im allgemeinen Fall anisotropen Materialverhaltens besitzt der Materialtensor 81 Einträge. Die Anzahl der Konstanten lässt sich durch die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften reduzieren. In *Altenbach, Altenbach & Rikards* [2] findet sich eine ausführliche Diskussion verschiedener elastischer Werkstoffgesetze. In der vorliegenden Arbeit wird gefordert, dass sich einphasiges Material vor der Rissbildung isotrop elastisch verhält. Damit ist der Materialtensor durch nur zwei Parameter beschrieben.

$$\mathbf{C}^{el} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (5.6)$$

Darin symbolisieren  $\mu = \frac{E}{2[1+\nu]}$  und  $\lambda = \frac{E\nu}{[1+\nu][1-2\nu]}$  die beiden Lamé-Konstanten.  $\mathbf{I}$  und  $\mathbf{1}$  stellen einen vier- bzw. zweistufigen Einheitstensor dar. Der Tangententensor  $\mathbf{C}_{tan}$  ist für linear elastisches Materialverhalten identisch der Sekante  $\mathbf{C}^{el}$ .

### 5.2.1 Mischung zweier linear elastischer Materialien

In dieser Arbeit wird Stahlbeton auf der makroskopischen Materialebene betrachtet. Dabei werden die mechanischen Eigenschaften seiner konstituierenden Materialien, Beton und Stahl, mittels Mischung homogenisiert. Das formale Ergebnis der Homogenisierung ist die Modellierung von Stahlbeton als einphasiger Werkstoff. Im Folgenden wird das kontinuumsmechanische Konstitutivgesetz zur Modellierung des elastischen Materialverhaltens des Werkstoffes Stahlbeton hergeleitet. Das Konstitutivgesetz vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ zur Abbildung des inelastischen Materialverhaltens wird in Kapitel 5.4 erläutert.

Eine grundlegende Hypothese der Mischungstheorie stellt die Aussage dar, dass jedes infinitesimale Volumen eines Verbundwerkstoffes die Summe seiner konstituierenden Materialien ist, *Truesdell & Tupin* [184]. Folglich wird die gesamte, elastische freie Energie  $\psi^*$  additiv in zwei volumengewichtete Komponenten aufgeteilt. Diese sind mit den beiden konstituierenden Materialien assoziiert. Der Anteil der elastischen freien Energie in der Stahlbewehrung  $\psi_s^*$  wird mit dem Bewehrungsgrad  $\rho^*$  multipliziert. In der vorliegenden Arbeit wird der Anteil der elastischen freien Energie im Beton  $\psi_b^*$  nicht gewichtet. Das Volumen der Bewehrung wird vernachlässigt, vergleiche Gleichung (5.21).

$$\psi^* = \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_b^{el} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\psi_b^*} + \rho^* \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho^*} E_s \varepsilon_{\rho^*}}_{\psi_s^*} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\rho^*} = \mathbf{m}_{\rho^*} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}_{\rho^*} \quad (5.7)$$

Zur Beschreibung von Beton wird der Materialtensor  $\mathbf{C}_b^{el}$  aus Gleichung (5.6) für isotrope Elastizität verwendet. Das Materialverhalten von Beton ist damit durch die Parameter  $\mu_b$  und  $\lambda_b$  bestimmt. Die Bewehrung wird durch 1D-Stabelemente modelliert, die die elastische Steifigkeit  $E_s$  von Stahl besitzen. Da die Bewehrung ausschließlich axiale Kräfte aufnehmen kann, wirkt sie lediglich in axialer Richtung  $\mathbf{m}_{\rho^*}$ , siehe Abbildung 5.4 rechts. Die Verzerrung  $\varepsilon_{\rho^*}$  in dieser Richtung ergibt sich aus der Projektion des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , mit dem sich der Deformationszustand von beiden konstituierenden Werkstoffen des Verbundmaterials charakterisieren lässt.

Die Auswertung der Clausius-Duhem Ungleichung (5.3) für materielle Punkte des Gebietes  $\Omega^*$  liefert die Definition des Spannungstensors.

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\mathbf{C}_b^{el} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}_b} + \rho^* \underbrace{E_s \varepsilon_{\rho^*} \mathbf{m}_{\rho^*} \otimes \mathbf{m}_{\rho^*}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} \quad (5.8)$$

Der Spannungstensor kann additiv in die Komponenten  $\boldsymbol{\sigma}_b$  und den mit dem Bewehrungsgrad  $\rho^*$  gewichteten Anteil  $\boldsymbol{\sigma}_s$  unterteilt werden. Diese wirken im Beton bzw. im Bewehrungsstahl. Die zweite Ableitung der freien Energie nach den Verzerrungen definiert den Materialtensor  $\mathbf{C}^{el}$  des vorgestellten Konstitutivgesetzes.

$$\mathbf{C}^{el} := \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2 \mu_b \mathbf{I} + \lambda_b \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \rho^* E_s \mathbf{m}_{\rho^*} \otimes \mathbf{m}_{\rho^*} \otimes \mathbf{m}_{\rho^*} \otimes \mathbf{m}_{\rho^*} \quad (5.9)$$

## 5.3 Schädigungsbasiertes Konstitutivgesetz

Bei der Versagensanalyse kohäsiver Reibungsmaterialien im Rahmen eines bruchmechanischen Ansatzes werden die Entstehung und die Koaleszenz von mikroskopischen Defekten innerhalb einer äußerst schmalen Zone in einem einzigen Riss konzentriert. Die

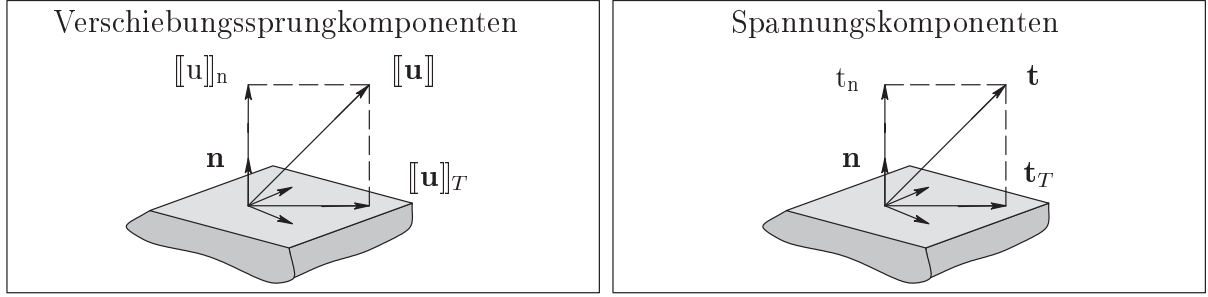


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Verschiebungssprung- und Spannungskomponenten am Riss

Ursachen für die Entstehung dieser Defekte und der damit verbundenen Deterioration des Materials können im Allgemeinen nicht nur auf physikalische, sondern auch auf thermische und chemische Prozesse zurückgeführt werden. Die Folge ist die Degradation der mechanischen Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften des Materials. In der vorliegenden Arbeit wird die Kohäsivzonentheorie verwendet, um im Rahmen eines bruchmechanischen Ansatzes auf phänomenologische Art und Weise die Deterioration des Materials zu beschreiben. Dabei werden kohäsive Spannungen eingeführt, die die beiden Ufer des modellierten Risses an ihrer Trennung behindern, siehe Kapitel 1.2.2 und Abbildung 1.3. Die Abnahme der kohäsiven Spannungen auf Grund der sukzessiven Zunahme an mikromechanischen Defekten wird durch schädigungs-basierte Konstitutivgesetze vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ erfasst.

Da bei Rissen ein stark unterschiedliches Bruchverhalten in Normal- und Tangentialrichtung beobachtet werden kann, gründet die Formulierung von schädigungs-basierten Modellen in der Regel auf der Aufteilung des Verschiebungssprunges  $[[\mathbf{u}]]$  in zwei charakteristische Komponenten. Diese sind der skalarwertige Normalanteil  $[[\mathbf{u}]]_n$  und der Tangentialvektor  $[[\mathbf{u}]]_T$ , siehe Abbildung 5.2.

$$[[\mathbf{u}]] = [[\mathbf{u}]]_n \mathbf{n} + [[\mathbf{u}]]_T \quad (5.10)$$

Da isotropes Verhalten in der Tangentialebene des Risses angenommen wird, wird auf eine Zerlegung des tangentialen Verschiebungssprunges in charakteristische Anteile verzichtet. Die Normal- und Tangentialkomponente können aus einer Normal- und Tangentialprojektion des Verschiebungssprungvektors mit folgenden Gleichungen gewonnen werden.

$$[[\mathbf{u}]]_n = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n} \quad [[\mathbf{u}]]_T = [[\mathbf{u}]] \cdot \underbrace{[\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]}_{\mathbf{T}} \quad (5.11)$$

Darin bezeichnen  $\mathbf{n}$  die Rissnormale,  $\mathbf{1}$  den zweistufigen Einheitstensor und  $\mathbf{T}$  einen zweistufigen Projektionstensor. Der Satz interner Variablen  $\boldsymbol{\beta} = \{\kappa\}$  reduziert sich bei den verwendeten Materialmodellen auf eine einzige skalare Variable  $\kappa$ , für die  $\kappa \in [0, \infty)$  gilt. Damit wird impliziert, dass das inelastische Materialverhalten in Normal- und Tangentialrichtung gekoppelt ist. Die singuläre Komponente der freien Energie wird als Funktion der beiden Komponenten des Verschiebungssprunges und der internen Variablen definiert.

$$\tilde{\psi} := \tilde{\psi}^\kappa([[u]]_n, [[u]]_T, \kappa) = \frac{1}{2} [[u]]_n K_n(\kappa) [[u]]_n + \frac{1}{2} [[u]]_T \cdot K_T(\kappa) [[u]]_T \quad (5.12)$$

Darin bezeichnen  $K_n$  und  $K_T$  die Steifigkeiten in normaler bzw. in tangentialer Rissrichtung. Beide Größen sind von der internen Variablen  $\kappa$  abhängig und immer größer oder gleich null. Die Evolutionen der Steifigkeiten sind für verschiedene Risstypen in Tabelle 5.2 angegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass die Annahme der Parallelität der tangentialen Verschiebungssprung- und Spannungsvektoren, die ein isotropes Verhalten impliziert, in obiger Gleichung berücksichtigt wurde. Daraus resultierte die Vereinfachung der tensorwertigen tangentialen Steifigkeit zu  $\mathbf{K}_T = K_T \mathbf{1}$ .

Basierend auf thermodynamischen Argumenten erhält man über die Auswertung der Clausius-Duhem Ungleichung (5.3) für materielle Punkte auf einem Riss die Definition des Vektors der kohäsiven Spannungen  $\mathbf{t}$  als thermodynamisch konjugierte Größe zum Verschiebungssprung, siehe *Coleman & Noll* [34] und *Coleman & Gurtin* [33].

$$\mathbf{t} := \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \underbrace{K_n \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n}_{\mathbf{t}_n} \mathbf{n} + \underbrace{K_T \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T}_{\mathbf{t}_T} \quad (5.13)$$

Die Zerlegung des Spannungsvektors in eine Normal-  $\mathbf{t}_n$  und eine Tangentialkomponente  $\mathbf{t}_T$  ist in Abbildung 5.2 veranschaulicht.

Mittels der Funktion  $F^\kappa$  wird entschieden, ob für die vorliegende Belastung eine Zunahme an Schädigung stattfindet oder nicht. Sie ist als die Differenz zwischen dem äquivalenten Verschiebungssprung  $\eta$  und der Variablen  $\kappa$  definiert.

$$F^\kappa = \eta - \kappa \leq 0 \quad (5.14)$$

Der äquivalente Verschiebungssprung ist die treibende Größe für die Dekohäsion in einem Riss. Der Einfluss der zwei Komponenten des Verschiebungssprungvektors auf das materialspezifische Versagen kann durch unterschiedliche Berechnungsformeln für  $\eta$  berücksichtigt werden, siehe Tabelle 5.1.

Wenn man dem thermodynamischen Konzept zur Herleitung von konstitutiven Materialmodellen folgt, ergibt sich mit Gleichung (5.14) die Definition der internen Variablen, deren Evolution immer größer oder gleich null sein muss.

$$\kappa = \max_{0 \leq t < \tau} (\eta(t)) \quad (5.15)$$

Die interne Variable kennzeichnet einen Geschichtsparameter, der den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert des äquivalenten Verschiebungssprungs annimmt.

Alternativ zu Gleichung (5.13) lässt sich die Berechnung der kohäsiven Spannungen mit Hilfe des Sekantentensors  $\mathbf{T}_{sec}^\kappa$  umformulieren.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}_{sec}^\kappa \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{sec}^\kappa = K_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + K_T \mathbf{T} \quad (5.16)$$

Der Sekantentensor ist über die beiden Steifigkeitskomponenten  $K_n$  und  $K_T$  definiert, siehe Tabelle 5.2. Durch die Ratenbeziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verschiebungssprungvektor  $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}_{tan}^\kappa \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  wird der zweistufige Tangententensor  $\mathbf{T}_{tan}^\kappa$  des Schädigungsmodells bestimmt.

$$\mathbf{T}_{tan}^\kappa = \mathbf{T}_{sec}^\kappa + \left[ \frac{\partial K_n}{\partial \kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T \right] \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \eta}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T} \cdot \mathbf{T} \right] \quad (5.17)$$

Bei Ent- oder Wiederbelastung stellt die interne Variable eine Konstante dar, siehe Gleichung (5.15). Folglich ist die partielle Ableitung der internen Variablen nach dem äquivalenten Verschiebungssprung bei diesen Belastungszuständen gleich null bzw. der Tangententensor gleich dem Sekantentensor.

	äquivalenter Verschiebungssprung
Matrixriss	$\eta = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n$
Grenzflächenriss	$\eta = \sqrt{\langle \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \rangle^2 + \beta^2 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T^2}$ , $\langle \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \rangle = \frac{1}{2} (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n +  \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n )$

Tabelle 5.1: Äquivalenter Verschiebungssprung für unterschiedliche Risstypen

### 5.3.1 Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsmodelle

Im vorigen Abschnitt wurden die Grundgleichungen für einparametrische schädigungsbaasierte Kohäsivzonenmodelle hergeleitet. Neben der Formulierung der Steifigkeitskomponenten  $K_n$  und  $K_T$  sind diese Modelle maßgebend durch die Spezifizierung des äquivalenten Verschiebungssprunges gekennzeichnet. In dieser Arbeit wird zwischen Versagen von adhäsiven materiellen Grenzflächen und quasi-spröden Materialien unterschieden. Bei Grenzflächen wird mögliches Zug-Schub bzw. Mixed-Mode Versagen modelliert. Eine ausführliche Diskussion unterschiedlicher Modelle für die Delaminationsanalyse von Laminaten findet sich in *Alfano & Crisfield* [1]. Es wird angenommen, dass das Versagen von quasi-spröden Materialien zugdominant, also hauptsächlich vom Mode-I Typ ist.

Zur Abbildung des Materialverhaltens der beiden Risstypen werden in dieser Arbeit die zwei Ansätze für den äquivalenten Verschiebungssprung verwendet, die in Tabelle 5.1 angegeben sind. Im Sinne einer anwendungsbezogenen Schreibweise wird ein Riss in quasi-sprödem Material als Matrixriss bezeichnet. In der Regel stellt die maßgebliche Größe, die die Schädigung innerhalb eines quasi-spröden Materials vorantreibt, der Normalanteil der Rissöffnung dar. Folglich wird bei Matrixrissen der äquivalente Verschiebungssprung als der Normalanteil der Rissöffnung definiert, siehe *Wells & Sluys* [191]. Ein Matrixriss bildet sich auf Grund von Zugspannungen, vergleiche Kapitel 5.5.1. Bei stetiger äußerer Belastung kann daher in der Regel angenommen werden, dass der Normalanteil der Rissöffnung nie negativ ist. Die Kontaktsituation wird formal ausgeschlossen. Bei Grenzflächenrissen wird der äquivalente Verschiebungssprung als eine Kombination aus normaler und tangentialer Rissöffnung formuliert, siehe *Camacho & Ortiz* [27] und *Ortiz & Pandolfi* [139].

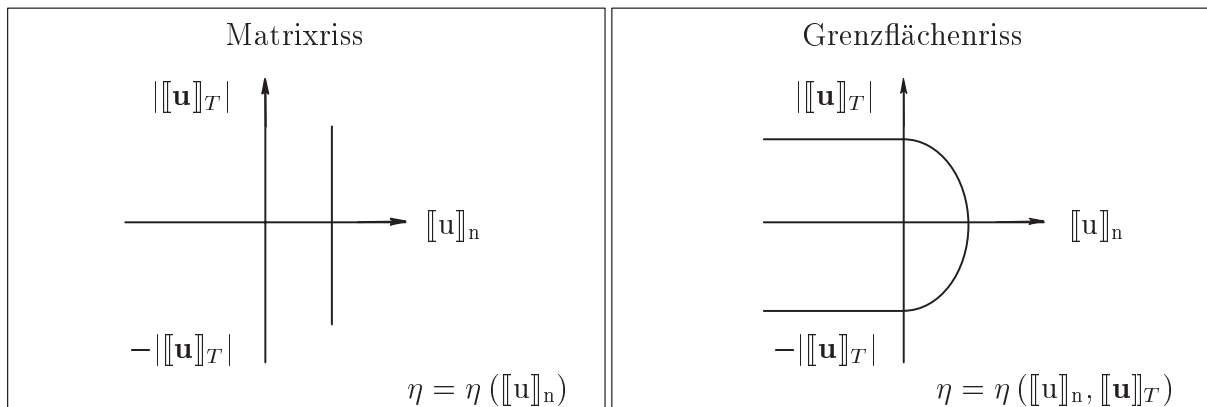


Abbildung 5.3: Schädigungsflächen für unterschiedliche Risstypen



	Normalkomponente	Tangentialkomponente
Matrixriss	$K_n = t^*/\kappa$	$K_T = d_T \exp(h_T \kappa)$
Grenzflächenriss	$K_n = t^*/\kappa$ wenn $[[u]]_n \geq 0$ $K_n = d_n$ wenn $[[u]]_n < 0$	$K_T = \beta^2 t^*/\kappa$

Tabelle 5.2: Steifigkeitskomponenten für unterschiedliche Risstypen

Zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Schädigungsverhaltens bei Zug- und Druckbelastung wird die Rissnormalöffnung mit Macauly-Klammern  $\langle \cdot \rangle$  eingeklammert. Somit trägt nur eine positive Rissnormalöffnung zur Ablösung zweier Materialphasen bei. Im Fall von Kontakt der beiden Rissufer bei reinen Schubrisen steuert nur der tangential Anteil des Verschiebungssprunges das Versagen. Durch den Parameter  $\beta$  wird der Betrag der tangentialen Verschiebungssprungkomponente gewichtet. Die Definition dieses Parameters findet sich in Kapitel 5.5.1.

Auf der linken Seite von Abbildung 5.3 ist die Schädigungsfläche für Matrixrisse schematisch dargestellt. Sie ist unabhängig von der tangentialen Rissöffnung. Auf der rechten Seite ist die Schädigungsfläche für Grenzflächenrisse abgebildet. Im Bereich positiver Rissnormalöffnungen hat sie elliptische Form. Im Bereich negativer Rissnormalöffnungen ist sie konstant, da diese nicht zur Dekohäsion zwischen zwei Materialphasen beitragen. Neben der Definition eines äquivalenten Verschiebungssprunges werden die Steifigkeitsfunktionen  $K_n$  und  $K_T$  für die Bestimmung der Normal- und Tangentialkomponenten des kohäsiven Spannungsvektors benötigt. Bei Matrixrisen ist die Tangentialsteifigkeit durch den Parameter  $d_T$  und eine Exponentialfunktion gegeben, die von der mit dem Parameter  $h_T$  multiplizierten internen Variablen  $\kappa$  abhängt. Mit dem Parameter  $h_T$  lässt sich der Einfluss der internen Variablen auf die Degradation der tangentialen Steifigkeit steuern. Bei Grenzflächenrisen ist die tangentiale Steifigkeit durch den konstanten Parameter  $\beta$ , die Funktion einer effektiven Spannung  $t^*$  und die interne Variable bestimmt. In Tabelle 5.2 ist zu erkennen, dass die Steifigkeitsfunktion  $K_n$  zur Ermittlung der Normalspannung bei zugbeanspruchten Matrix- und Grenzflächenrisen formal identisch ist. Grenzflächenrisse können auf Grund enormer Schubbelastung auch bei Druckspannungen entstehen. Die beiden Ufer des Schubrisse befinden sich dann in Kontakt. Zur Berechnung der Kontaktspannung in Normalenrichtung wird eine Art elastische Steifigkeit  $d_n$  eingeführt. Um die künstliche Penetration der beiden Rissufer zu minimieren, wird in der Regel diese Steifigkeit relativ hoch gewählt. Im Grunde stellt dieser Ansatz eine Penalty-Methode dar, bei der  $d_n$  die Rolle des Penalty-Parameters spielt. In der vorliegenden Arbeit ist die Evaluation der effektiven Spannung durch ein exponentielles Entfestigungsgesetz gegeben.

$$t^* = \sigma_v \exp\left(-\frac{\sigma_v}{G_f} \kappa\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_v = f_t, c_n \quad (5.18)$$

Darin symbolisieren  $f_t$  und  $c_n$  die Zugfestigkeiten des Matrixmaterials bzw. der Grenzfläche.  $G_f$  kennzeichnet die Bruchenergie, die beim Versagensprozess in einem Matrix- bzw. Grenzflächenriss dissipiert wird. Sie repräsentiert die Fläche unter der Kurve, die auf der rechten Seite von Abbildung 5.1 dargestellt ist.

## 5.4 Mischung eines schädigungs- und plastizitätsbasierten Konstitutivgesetzes

Das Materialverhalten von Stahlbeton im elastischen Zustand wird durch ein kontinuumsmechanisches Elastizitätsgesetz beschrieben, siehe Kapitel 5.2.1. In diesem Abschnitt wird ein Konstitutivgesetz vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ zur Modellierung des inelastischen Materialverhaltens von Stahlbeton entwickelt. Hierfür wird das schädigungs-basierte Kohäsivzonenmodell aus Kapitel 5.3 für die Modellierung von Matrixversagen mit einem 1D-Plastizitätsmodell gemischt. Stahlbeton ist ein Verbundmaterial, das vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet durch die Stahlbewehrung im Vergleich zu unbewehrtem Beton eine hohe Zugfestigkeit besitzt. Je nach Bewehrungsgrad können mit diesem Verbundmaterial relativ duktile Tragwerke konstruiert werden.

Für die genaue Erfassung des Materialverhaltens von Stahlbeton muss das Materialverhalten der beiden konstituierenden Werkstoffe, Beton und Bewehrungsstahl, konstitutiv berücksichtigt werden. Dabei spielt die numerische Modellierung der Bewehrung eine große Rolle. Grundsätzlich kann man zwischen zwei Modellierungsstrategien unterscheiden, siehe Abbildung 5.4. Bei der *diskreten* Modellierung wird jeder individuelle Stahlstab als eigenständiges Element erfasst. In Abhängigkeit der Formulierung können hierbei die Stabelemente entweder an den Kanten, Ansatz A, oder innerhalb Finiter Kontinuums-elemente, Ansatz B, positioniert werden. Bei beiden Ansätzen werden sowohl die Geometrie, als auch die Kinematik jedes einzelnen Bewehrungsstabes diskretisiert. Zur Diskretisierung der Stäbe genügen bei Ansatz A die Knoten der Kontinuums-elemente, an deren Kanten die Bewehrung verläuft, und die entsprechenden Formfunktionen. Bei Ansatz B benötigt man alle Knoten des Kontinuums-elementes mit den dazugehörigen Formfunktionen, um den eingebetteten Bewehrungsstab zu diskretisieren. Dieser Ansatz hat gegenüber dem anderen den Vorteil, dass die Diskretisierung der gesamten Konstruktion unabhängig von der Bewehrungsführung ist. Allerdings ist seine Finite Element Formulierung aufwendiger.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz der *verschmierten* Bewehrungsmodellierung angewendet. Der oder die Bewehrungsstäbe werden gleichmäßig in charakteristische Elemente eingebettet. Der Einfluss der Bewehrung auf das strukturelle Verhalten

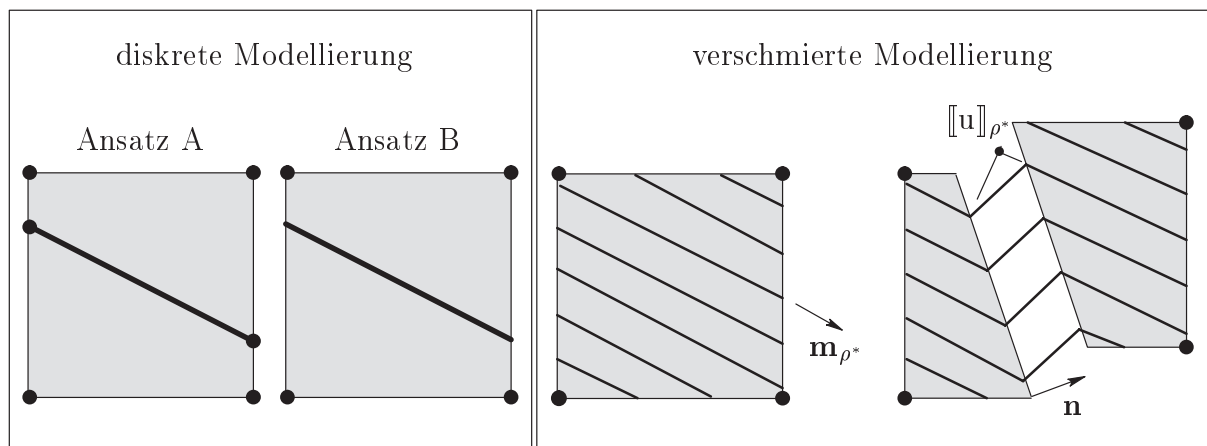


Abbildung 5.4: Bewehrungsmodelle

wird ausschließlich konstitutiv berücksichtigt. Grundsätzlich können dabei mehrere unabhängige Bewehrungsrichtungen abgebildet werden. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch nur eine einzige Bewehrungsrichtung zugelassen. Wie allgemein üblich wird angenommen, dass die Stahlstäbe nur axiale Kräfte aufnehmen können. Dies soll nicht nur vor der Rissbildung gelten, wenn die Verschiebungen noch kontinuierlich sind, sondern auch beim Vorhandensein eines Risses, der die Bewehrung kreuzt. Die Dübelwirkung der Stäbe in einem Riss, die bei Mixed-Mode Versagen hauptsächlich durch ihre Biegesteifigkeit und bei Mode-II Versagen durch ihre Schubsteifigkeit aktiviert wird, kann damit nicht erfasst werden. Der Verbund beider konstituierenden Materialien, des Betons und des Bewehrungsstahls, wird als perfekt angenommen. Diese Annahme impliziert, dass der Verbund durch chemische Haftung des Zementgels an der Stahloberfläche ausreicht, Zug- und Schubkräfte zerstörungsfrei übertragen zu können. Der Scherverbund, der nach der Zerstörung des Haftverbunds einsetzen würde, und der darauf folgende Reibverbund werden nicht aktiviert und brauchen daher nicht modelliert zu werden.

Das Versagen von Stahlbeton zeichnet sich durch das komplexe Zusammenwirken von zwei Phänomenen aus. Durch Mikrorissbildung im Beton kommt es zur Degradation der elastischen Steifigkeitseigenschaften. Des Weiteren entstehen irreversible Deformationen, nachdem die Spannungen die Fließgrenze des Bewehrungsstahls erreicht haben. Beide Phänomene sollen durch das herzuleitende Konstitutivgesetz vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ modelliert werden. Damit wird vorausgesetzt, dass sich plastische Deformationen nur in den bewehrten, zugbelasteten Querschnittsbereichen entwickeln können, die durch einen kohäsiven Riss geschädigt sind. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ist mit diesem Modellierungskonzept durch den perfekten Verbund automatisch berücksichtigt. Der Zeitpunkt der Rissinitiierung und die Rissrichtung werden durch dieselben Kriterien definiert, wie bei einem einphasigen quasi-spröden Material, siehe Kapitel 5.5. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird unter Druckbelastung kein Riss initiiert. Deshalb muss zur verschmierten Modellierung von Druckbewehrung, die bei entsprechender Beanspruchung plastifizieren wird, auf ein konventionelles Materialgesetz vom Spannungs-Dehnungs-Typ zurückgegriffen werden, siehe *Menrath* [110]. In *Linero et al.* [101] findet sich die Modellierung von Stahlbeton im Rahmen des *Strong Discontinuity Approach* unter Verwendung eines kontinuumsmechanischen Konstitutivgesetzes.

Zur Abbildung des nichtlinearen Materialverhaltens von Stahl wird heutzutage auf Plastizitätsformulierungen zurückgegriffen, die auf der Fließtheorie von *Prandtl & Reuss* [155] basieren. Bei diesem Ansatz wird unter Annahme kleiner Verzerrungen der Verzerrungstensor additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt. In Analogie hierzu kann bei Verwendung eines Traktions-Verschiebungssprung-Gesetzes anstatt der Verzerrungen der Verschiebungssprung auf die beschriebene Art und Weise aufgeteilt werden. Im Sinne des vorgestellten zusammengesetzten Materialmodells, bei dem der elastische Anteil vollständig in den Verzerrungen steckt, wäre der gesamte Verschiebungssprung plastischer Art. Zur Modellierung von diskontinuierlichem Versagen in Stahlbeton wird auf den ersten Blick entgegen diesem Konzept die Zerlegung des Verschiebungssprunges in einen elastischen und einen plastischen Anteil vorgenommen. Die Motivation hierfür liefern die mechanischen Eigenschaften von Beton und Stahl. Bei Beginn des Reißens von Beton befindet sich der Stahl wegen seiner höheren Festigkeit in der Regel noch im elastischen Bereich. Aus diesem Grund muss zur Modellierung der Stahlkomponente im Rissquerschnitt der Verschiebungssprung nicht nur einen plastischen, sondern auch einen

elastischen Anteil beinhalten.

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}]^{el} + [\mathbf{u}]^{pl} \quad \text{mit} \quad [\mathbf{u}]^{pl} = [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl} \mathbf{m}_{\rho^*} \quad (5.19)$$

Die plastische Komponente zeigt in Bewehrungsrichtung  $\mathbf{m}_{\rho^*}$ , siehe Abbildung 5.4. Damit ist die Fließrichtung von Anfang an durch die Ausrichtung der Bewehrungsstäbe definiert. Die skalare Größe  $[\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl}$  entspricht dem Betrag der plastischen Deformation. Der gesamte Verschiebungssprung in Stabrichtung  $[\mathbf{u}]_{\rho^*}$  wird durch die folgende Projektion ermittelt.

$$[\mathbf{u}]_{\rho^*} = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{m}_{\rho^*} \quad \text{und} \quad [\mathbf{u}]_{\rho^*} = [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{el} + [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl} \quad (5.20)$$

Unter Verwendung von Gleichung (5.19) kann dieser in eine elastische und eine plastische Komponente aufgeteilt werden.

Der Satz interner Variablen, mit dem die freie Energie definiert wird, setzt sich bei der Mischung des vorgestellten schädigungs-basierten Konstitutivgesetzes und eines 1D-Plastizitätsmodells aus drei skalaren Größen zusammen, so dass  $\beta = \left\{ \kappa, [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl}, \xi \right\}$  gilt. Dabei charakterisiert  $\xi$  das isotrope Verfestigungsverhalten des Bewehrungsstahls. Ausgangspunkt für die Herleitung des hybriden Materialmodells stellt die gemischte freie Energie dar, mit der sowohl die Schädigungs-, als auch die Fließmechanismen im Riss erfasst werden.

$$\tilde{\psi} := \tilde{\psi}^{\kappa}([\mathbf{u}]_n, [\mathbf{u}]_T, \kappa) + \rho^p \tilde{\psi}^p([\mathbf{u}]_{\rho^*}, [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl}, \xi) \quad \text{mit} \quad \rho^p = \rho^* |\mathbf{m}_{\rho^*} \cdot \mathbf{n}| \quad (5.21)$$

Die gesamte Energie ergibt sich als die Summe der volumengewichteten freien Energieanteile eines materiellen Punktes im Rissquerschnitt aus Beton  $\tilde{\psi}^{\kappa}$  und Bewehrungsstahl  $\tilde{\psi}^p$ , vergleiche Kapitel 5.2.1. Dabei wird die Abminderung des Betonvolumens infolge der vorhandenen Bewehrung nicht berücksichtigt. Die Variable  $\rho^p$ , mit der der Anteil der freien Energie aus dem Bewehrungsmaterial gewichtet wird, beschreibt den Bewehrungsgrad im Rissquerschnitt. Es ist offensichtlich, dass die Bewehrung keinen Einfluss auf die Spannungsübertragung am Riss hat, wenn die Rissnormale  $\mathbf{n}$  und die Bewehrungsrichtung  $\mathbf{m}_{\rho^*}$  orthogonal zueinander sind. Die freie Energie  $\tilde{\psi}^{\kappa}$  ist durch Gleichung (5.12) und Tabelle 5.2 definiert. Die freie Energie  $\tilde{\psi}^p$  lautet folgendermaßen.

$$\tilde{\psi}^p = \frac{1}{2} \left[ [\mathbf{u}]_{\rho^*} - [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl} \right] d_{\rho^*} \left[ [\mathbf{u}]_{\rho^*} - [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl} \right] + \int_0^{\xi} \sigma_{eq}(\xi) d\xi \quad (5.22)$$

Darin bezeichnet der Parameter  $d_{\rho^*}$  die elastische Modellsteifigkeit des Bewehrungsstahls, die nicht mit dem Elastizitätsmodul  $E_s$  aus Gleichung (5.7) zu verwechseln ist. Durch diesen Parameter wird nicht eine Verzerrungs-, sondern eine Verschiebungsgröße mit der Spannung im Stahl in Beziehung zueinander gesetzt. Die äquivalente Fließspannung  $\sigma_{eq}$  ist durch eine noch nicht näher spezifizierte Funktion beschrieben, die von der internen Variablen  $\xi$  für die Verfestigung abhängt.

Die Clausius-Duhem Ungleichung (5.3) für materielle Punkt auf einem Riss liefert nach *Coleman & Noll* [34] und *Coleman & Gurtin* [33] den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  im Rissquerschnitt. Die Mischung der freien Energie (5.21) impliziert die additive Aufteilung des Spannungsvektors in die Komponente  $\mathbf{t}^{\kappa}$ , die im Beton wirkt, und die gewichtete Stahlspannung  $\mathbf{t}^p$ , die in Bewehrungsrichtung zeigt.

$$\mathbf{t} := \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial [\mathbf{u}]} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{\psi}^{\kappa}}{\partial [\mathbf{u}]}}_{\mathbf{t}^{\kappa}} + \rho^p \underbrace{\frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial [\mathbf{u}]}}_{\mathbf{t}^p} \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}^p = d_{\rho^*} \underbrace{\left[ [\mathbf{u}]_{\rho^*} - [\mathbf{u}]_{\rho^*}^{pl} \right]}_{t^p} \mathbf{m}_{\rho^*} \quad (5.23)$$

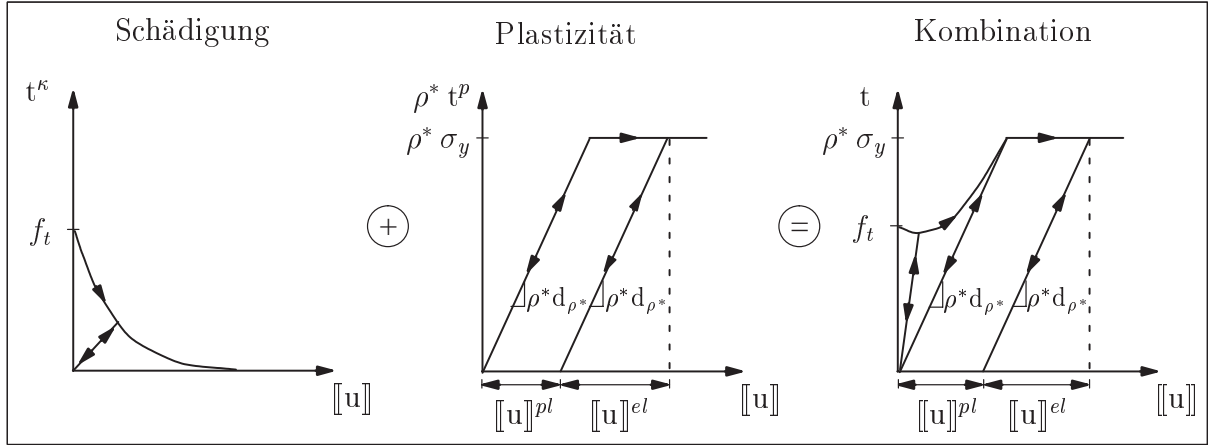


Abbildung 5.5: Hybrides Materialmodell für Stahlbeton

Die Evolutionen der zwei Spannungskomponenten  $\mathbf{t}^k$  und  $\mathbf{t}^p$  können unabhängig voneinander behandelt werden, da sie formal entkoppelt sind. Die Herleitung der Spannungen  $\mathbf{t}^k$ , die im Matrixmaterial Beton wirken, findet sich in Kapitel 5.3. Wenn der Riss parallel zur Achse der Bewehrungsstäbe verläuft, werden im Riss keine Stahlspannungen  $\mathbf{t}^p$  und keine irreversiblen Deformationen aktiviert. Hierdurch motiviert, wird der Einfachheit halber bei jedem Belastungszustand angenommen, dass die gesamte Kraft in Rissrichtung zum Zeitpunkt des Rissbeginns im Beton steckt. Folglich soll sich die Stahlspannung  $\mathbf{t}^p$  erst während des Versagensprozesses entwickeln. Konsequenterweise wird zur Bestimmung des Zeitpunktes der Rissinitiierung und der Rissrichtung der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und nicht der Spannungsanteil im Beton  $\boldsymbol{\sigma}_b$  eingesetzt, siehe Gleichung (5.8) und Kapitel 5.5. Im Folgenden wird das Plastizitätsmodell näher spezifiziert.

Die Fließfunktion  $F^p$  grenzt den zulässigen vom unzulässigen Spannungszustand in der Stahlbewehrung ab. Sie ist spannungsbasiert definiert und beschreibt die Differenz zwischen der Vergleichsspannung, die hier identisch dem Betrag von  $t^p$  ist, und der äquivalenten Fließspannung  $\sigma_{eq}$ .

$$F^p = |t^p| - \sigma_{eq}(\xi) \leq 0 \quad (5.24)$$

Das Postulat der maximalen Dissipation mit der Fließbedingung (5.24) als Nebenbedingung des Plastizitätsmodells kann in ein mathematisches Optimierungsproblem überführt werden. Dabei fließt der Lagrange-Parameter  $\dot{\gamma}$  in die Formulierung ein. Dieser wird üblicherweise als plastischer Multiplikator bezeichnet. Aus dem Optimierungsproblem ergeben sich die Evolutionsgleichungen des plastischen Verschiebungssprunges und der Verfestigungsvariablen  $\xi$

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{\rho^*}^{pl} = \dot{\gamma} n \quad \text{mit} \quad n := \frac{\partial F^p}{\partial t^p} = \pm 1 \quad \text{und} \quad \dot{\xi} = \dot{\gamma} \quad (5.25)$$

sowie die Be- und Entlastungsvorschriften in Form der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung.

$$F^p \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad F^p \dot{\gamma} = 0; \quad \dot{F}^p \dot{\gamma} = 0 \quad (5.26)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingung liefert die Evolutionsgleichung des plastischen Multiplikators.

$$\dot{\gamma} = \frac{n \, d_{\rho^*} [[\dot{\mathbf{u}}]]_{\rho^*}}{n \, d_{\rho^*} n + H} \quad \text{mit} \quad H = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \xi} \quad (5.27)$$

Der isotrope Verfestigungsmodul  $H$  steuert die Expansion bzw. Kontraktion der Fließfläche. Er ergibt sich aus der partiellen Ableitung der Fließspannung nach der Verfestigungsvariablen. Der zweistufige Materialtensor  $\mathbf{T}_{tan}^{\kappa p}$  des Materialmodells auf Basis der Mischung eines schädigungsspezifischen Konstitutivgesetzes und eines 1D-Plastizitätsmodells definiert die Ratenbeziehung zwischen dem Spannungsvektor und dem Verschiebungssprung, so dass  $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}_{tan}^{\kappa p} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  gilt.

$$\mathbf{T}_{tan}^{\kappa p} = \mathbf{T}_{tan}^{\kappa} + \left[ d_{\rho^*} - \frac{d_{\rho^*} d_{\rho^*}}{d_{\rho^*} + H} \right] \mathbf{m}_{\rho^*} \otimes \mathbf{m}_{\rho^*} \quad (5.28)$$

Die Materialtangente  $\mathbf{T}_{tan}^{\kappa}$  ist in Gleichung (5.17) angegeben. Eine schematische Darstellung des hybriden Materialmodells für Stahlbeton ist in Abbildung 5.5 veranschaulicht. Dabei ist der Fall dargestellt, bei dem die Rissnormalrichtung coaxial zur Bewehrungsrichtung verläuft. Die Ordinaten der Diagramme beschreiben Rissnormalspannungen, während die Abszissen durch den Verschiebungssprung in Rissnormalrichtung gegeben sind. Die Spannung  $t^p$  in der Bewehrung ist am Beginn der Rissbildung gleich null. Zu diesem Zeitpunkt steckt die gesamte Kraft noch im Beton. Während der Rissöffnung nehmen die Spannungen im Beton exponentiell ab. Gleichzeitig wachsen die Spannungen in der Bewehrung linear an. Da ideale Plastizität bei  $H = 0$  dargestellt ist, endet die Spannungszunahme im Stahl mit dem Erreichen der Fließgrenze  $\sigma_y$ .

## 5.5 Modellierung der Rissentstehung

In diesem Kapitel werden Kriterien vorgestellt, mit denen zwei bedeutende Fragen der Rissmodellierung beantwortet werden: Wann und in welche Richtung wächst ein Riss? Die Kriterien, die in dieser Arbeit verwendet werden, werden ausführlich diskutiert und als Berechnungsformeln angegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass ein Kriterium zur Ermittlung der Rissrichtung nur bei Verwendung eines numerischen Modells interessiert, in dem ein Riss in beliebiger Richtung fortschreiten kann, vergleiche Kapitel 1.2.3. Dieses Kriterium wird nicht benötigt, wenn Risse ausschließlich entlang der Kanten der Kontinuums-elemente wachsen dürfen und auf Neuvernetzungsstrategien verzichtet wird.

### 5.5.1 Versagenskriterien

In diesem Abschnitt werden verschiedene Versagenskriterien diskutiert. Diese definieren den Beginn der Mikrorissbildung und den Zeitpunkt, zu dem von einem klassischen kontinuumsmechanischen Konstitutivmodell auf ein Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz gewechselt wird. Zur Herleitung von Versagenskriterien stehen grundsätzlich der kontinuumsmechanische und der bruchmechanische Ansatz zur Verfügung. Viele Versagenskriterien, die beispielsweise im Rahmen der linear elastischen Bruchmechanik (LEFM) entwickelt wurden, sind bei kohäsiven Rissen nicht anwendbar oder müssen entsprechend umformuliert werden. An dieser Stelle soll auf die Existenz von klassischen Versagenskriterien oder Festigkeitshypothesen hingewiesen werden, die jedoch teilweise nur noch historische Bedeutung besitzen. Ein ausführlicher Überblick über diese Hypothesen findet sich beispielsweise in der Arbeit von *Kupfer* [93]. Im Folgenden sollen einige Versagenskriterien aufgezeigt werden, die auf einer bruch- oder kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise basieren.

In der LEFM ist das asymptotische Verschiebungsfeld an der Rissspitze durch die drei Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  eindeutig charakterisiert, siehe *Irwin* [84] und Anhang B. Diese Faktoren stellen ein Maß für die Singularität der Spannungen an der Rissspitze dar und sind mit den drei möglichen Rissöffnungsmoden I, II und III assoziiert. Für spannungsfreie Risse kann ein Bruchkriterium definiert werden, das im allgemeinen Fall in den drei Spannungsintensitätsfaktoren und den dazugehörigen, materialspezifischen Bruchzähigkeiten formuliert ist. In der Kohäsivzonentheorie liegt keine Spannungssingularität an der Rissspitze vor. Um die Anwendbarkeit von Bruch- bzw. Stabilitätskriterien auf Basis des  $K$ -Konzepts zu ermöglichen, muss man im Prinzip die materialspezifischen Bruchzähigkeiten durch  $K$ -Faktoren ersetzen, die von kohäsiven Kräften verursacht werden. Die Summe der  $K$ -Faktoren aus äußerer Belastung und kohäsiven Kräften muss dann gleich null sein, siehe *Moës & Belytschko* [114]. Zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren kann nicht nur bei spannungsfreien, sondern auch bei spannungsübertragenden Rissen das  $J$ -Integral benutzt werden, siehe *Rice* [156]. Im energetischen Sinn kann  $J$  als verallgemeinerte oder materielle Kraft interpretiert werden, die auf den Riss wirkt. Dies führt zu einem weiteren Rissinitiierungskriterium. Es wird angenommen, dass der Rissfortschritt dann einsetzt, wenn der Bruchparameter  $J$  einen materialspezifischen Kennwert erreicht. Die Einführung eines energiebasierten Kriteriums geht auf *Griffith* [66] zurück. Die energiebasierte Bruchbedingung lautet in Worten ausgedrückt: Im quasi-statischen Fall muss die freigesetzte Energie beim Rissfortschritt gleich der für den Bruchprozess benötigten Energie  $G_f$  sein. In *Parks* [142] wurde eine energiebasierte Technik hergeleitet, mit der die Spannungsintensitätsfaktoren berechnet werden können. Dazu wurde die Änderung des Gesamtpotentials eines elastischen Körpers mit spannungsfreien Rissen in Abhängigkeit einer virtuellen Rissverlängerung ausgedrückt. Die Formulierung wurde erweitert, um das Gesamtpotential eines elastischen Körpers mit kohäsiven Rissen für eine virtuelle Rissverlängerung berechnen zu können, siehe *Xie* [196]. Mit Hilfe dieses Gesamtpotentials lässt sich der Fortschrittszeitpunkt eines existierenden kohäsiven Risses definieren. Die Formulierung impliziert die Aussage, dass der kohäsive Riss dann fortschreitet, wenn die elastische Energiefreisetzungsrage auf Grund der virtuellen Rissverlängerung die Energierate im kohäsiven Riss erreicht. In den 1960'er Jahren wurde von *Erdogan & Sih* [48] ein spannungsbasiertes Bruchkriterium für elastische Materialien entwickelt. Dieses Kriterium besagt, dass der Riss sich dann ausbreitet, wenn die maximale Umfangsspannung in einem charakteristischen Punkt vor der Rissspitze einen kritischen Wert annimmt.

Wie angedeutet, kann das ein oder andere Versagenskriterium, das im Rahmen der LEFM entwickelt worden ist, durch geeignete Umformulierungen auch für kohäsive Risse eingesetzt werden. Daneben können Kriterien auf Basis eines kontinuumsmechanischen Ansatzes verwendet werden. Als Indikator für die Rissbildung in quasi-spröden Materialien genügt die Bestimmung einer Vergleichsspannung  $\sigma_v$  oder der entsprechenden Dehnung  $\varepsilon_v$ , siehe Abbildung 5.1. Dies bedeutet, dass bei Anwendung der Kohäsivzonentheorie die Formulierung einer geeigneten Fließ- oder Schädigungsfunktion zur Definition der Rissinitiierung ausreicht. Der Rissbeginn findet dann statt, wenn diese Funktion zum ersten Mal anzeigt, dass der Belastungszustand am Ende des elastischen Bereiches liegt. Natürlich können solche Funktionen auch in Abhängigkeit der Rissnormalen definiert sein. Da bei Matrixrissen die Normale des zukünftigen Risssegmentes noch nicht bekannt ist, muss bei diesem Ansatz ein Minimierungsproblem gelöst werden, siehe *Remmers* [152]. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Rissbeginns oder Rissfortschritts bietet eine

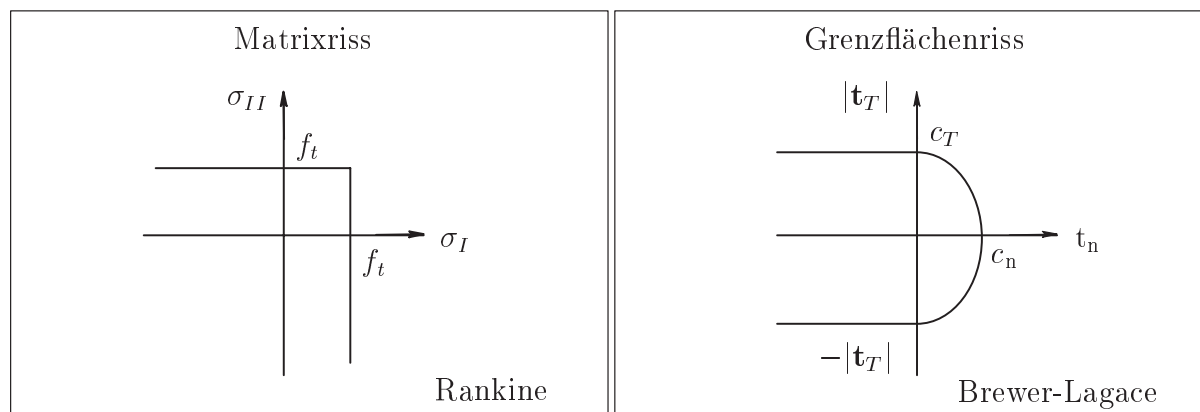


Abbildung 5.6: Versagensflächen für unterschiedliche Risstypen

materielle Bifurkationsanalyse, siehe Kapitel 1.2. Die Bedingung für lokalisiertes Materialversagen kennzeichnet im quasi-statischen Fall den Verlust von (starker) Elliptizität. Sie ist erfüllt, wenn der akustische Tensor bzw. sein symmetrischer Anteil singular wird. Wenn Kontinuumsmodelle zur Abbildung von verschmiertem Materialversagen verwendet werden, kann auf charakteristische Größen, wie z.B. interne Variablen, zurückgegriffen werden, mit denen der Zeitpunkt der Rissinitiierung definiert wird, siehe Kapitel 4.1. Beispielsweise liegt es bei Verwendung eines einparametrischen Schädigungsmodells auf der Hand, hierfür die Schädigungsvariable einzusetzen, siehe *Simone, Wells & Sluys* [170]. In der vorliegenden Arbeit wird vor Rissbeginn elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Daher ist es offensichtlich, dass eine Verzweigungsanalyse beziehungsweise Untersuchung des akustischen Tensors oder der Einsatz interner Variablen nicht in Frage kommen kann. Stattdessen wird das bekannte Hauptspannungskriterium von Rankine für die Entstehung und das Wachstum kohäsiver Matrixrisse verwendet. Dieses Kriterium zählt zu denjenigen klassischen Festigkeitshypothesen, die auch heute noch aktuell sind. Zur Bestimmung der Rissinitiierung in materiellen Grenzflächen wird das Kriterium nach *Brewer & Lagace* [25] verwendet.

### Rankine Kriterium

Zur Bestimmung des Beginns von Matrixversagen wird das klassische Versagenskriterium von Rankine verwendet. Dieses Kriterium basiert auf der Spektralzerlegung des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ , die seine Eigenwerte  $\sigma_I$  und die dazugehörige Basis  $\mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I$  liefert.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{I=1}^3 \sigma_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I \quad (5.29)$$

Die maximale Hauptspannung  $\sigma_A$  ist definiert als der größte der drei Eigenwerte des Spannungstensors. Die Bedingung für das Wachstum eines Matrixrisses ist erfüllt, wenn die maximale Hauptspannung die Zugfestigkeit  $f_t$  des Materials erreicht.

$$\sigma_A = f_t \quad (5.30)$$

In dieser Arbeit werden zweidimensionale Probleme betrachtet. Zur Berechnung der zwei maßgeblichen Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  wird auf die Mohrsche Spannungskreis-Analogie zurückgegriffen. Auf der linken Seite von Abbildung 5.6 ist die Versagensfläche



von Rankine für den ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand veranschaulicht, bei denen diese zwei Hauptspannungen interessieren.

*Bemerkung:*

Auch *Gasser & Holzapfel* [61] benutzten das Versagenskriterium von Rankine. Jedoch setzten sie anstelle der lokalen Cauchyschen Spannungen einen „nicht-lokalen“ Spannungstensor ein, vergleiche Kapitel 5.5.2. Allerdings wurde von *Simone, Askes & Sluys* [169] gezeigt, dass die Anwendung eines Versagenskriteriums, das in nicht-lokalen Größen formuliert ist, zu unphysikalischen Rissinitiierungen führen kann.

### Brewer-Lagace Kriterium

Zur Bestimmung des Beginns von Grenzflächenversagen wird auf den Ansatz von *Brewer & Lagace* [25] zurückgegriffen, siehe auch *Camacho & Ortiz* [27]. Diese entwickelten ein Versagenskriterium für Delamination in laminaren Strukturen. Das Versagenskriterium wurde in denjenigen Spannungskomponenten formuliert, die für die Initiierung von Grenzflächenversagen als maßgebend erachtet wurden, vergleiche *Hörmann* [79].

$$\sqrt{\langle t_n \rangle^2 + \beta^{-2} t_T^2} = c_n \quad (5.31)$$

Die materielle Grenzfläche besitzt unterschiedliche Festigkeiten gegenüber einer reinen Zug-  $c_n$  und einer reinen Schubbelastung  $c_T$ . Der Parameter  $\beta = \frac{c_T}{c_n}$  beschreibt das Verhältnis der beiden Festigkeiten. Entgegen der ursprünglichen Formulierung des Kriteriums, aber in Analogie zu den in Kapitel 5.3 getroffenen Annahmen, wird nicht mehr zwischen dem Einfluss einzelner Schubkomponenten auf das Versagen unterschieden. Durch Macauly-Klammern  $\langle \cdot \rangle$  wird gewährleistet, dass nur positive Normalspannungen zur Delamination beitragen, vergleiche Tabelle 5.1.

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  eines materiellen Punktes der Fläche, die durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gekennzeichnet ist, wird entsprechend dem Theorem von Cauchy (2.13) aus dem kontinuumsmechanischen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  berechnet. In dieser Arbeit wird der Normalenvektor der materiellen Grenzfläche über ihre Level Set Beschreibung ermittelt. Dazu wird die Gleichung (3.4) auf die eindeutige Level Set Funktion (3.8) angewendet. Die Normal- und Tangentialkomponenten des Spannungsvektors ergeben sich analog zu den Projektionen, die in Gleichung (5.11) angegeben sind.

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad \text{und} \quad t_T = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \quad (5.32)$$

Auf der rechten Seite von Abbildung 5.6 ist die Versagensfläche von *Brewer & Lagace* [25] für zwei- bzw. dreidimensionale Spannungszustände dargestellt.

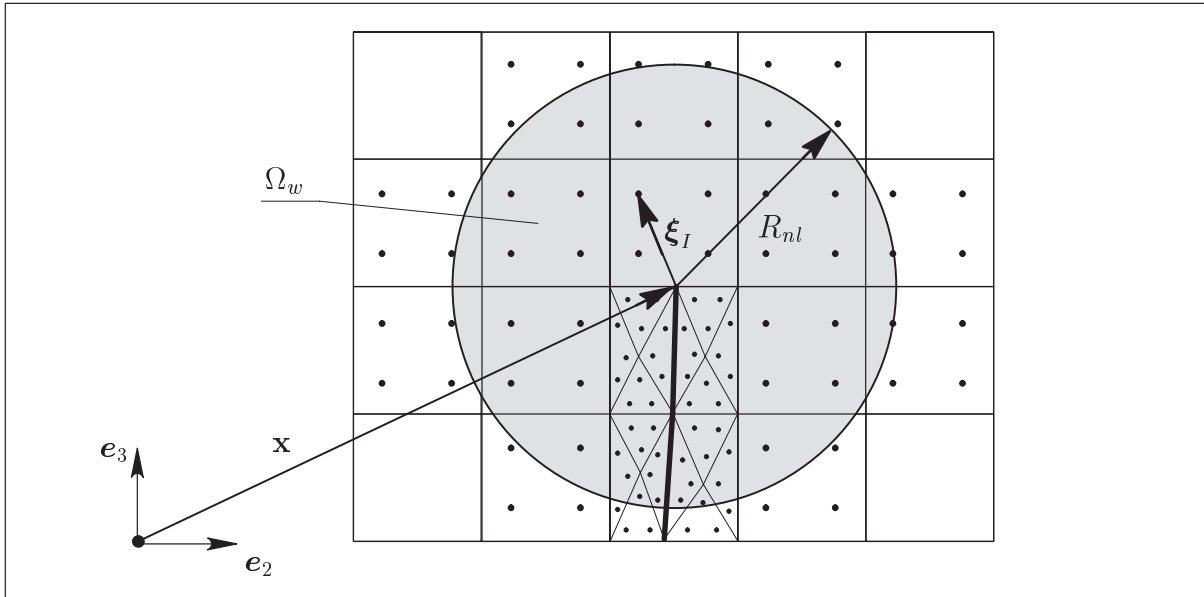
### 5.5.2 Bestimmung der Rissrichtung

Neben der Formulierung geeigneter Versagenskriterien muss geklärt werden, in welche Richtung ein Festkörperphasen- bzw. Matrixriss voranschreitet. Dabei liefert in der Regel die Methode, aus der sich ein Versagenskriterium ableiten lässt, auch das dazugehörige Kriterium zur Ermittlung der Rissrichtung. Da die Rissgeometrie einen entscheidenden Einfluss auf das gesamte Strukturverhalten hat, spielt die Qualität der Rissrichtung eine bedeutende Rolle.

In der LEFM wird häufig das Kriterium der maximalen Umfangsspannung von *Erdogan & Sih* [48] zur Bestimmung der Rissrichtung verwendet. Es besagt, dass der Riss senkrecht zur Richtung der maximalen Umfangsspannung wächst. Alternativ zur Verwendung eines spannungsbasierten Kriteriums kann auf ein energiebasiertes Kriterium zurückgegriffen werden. Mit Hilfe der Formulierung der Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit des Risswinkels lässt sich nicht nur der Zeitpunkt des Versagens, sondern auch die Richtung des Risswachstums in elastischen Materialien definieren. Der Riss wächst in die Richtung, in der die Energiefreisetzungsrate maximal ist. In *Larsson & Fagerström* [95] wurde ein theoretisches und numerisches Rahmenwerk zur Lösung von Rissproblemen unter Verwendung der LEFM und der Kohäsivzonentheorie vorgeschlagen. Dabei wurde eine vektorielle Form des  $J$ -Integrals hergeleitet, die eine enge Verbindung mit dem Konzept der materiellen Kräfte von *Steinmann, Ackermann & Barth* [174] aufweist. Der resultierende Vektor kann als risstreibende Kraft verstanden werden, da er zur virtuellen Rissverlängerung energetisch konjugiert ist. Es liegt nahe, anzunehmen, dass dieser Vektor in die Rissfortschrittsrichtung zeigt.

Bei kohäsiven Rissen stellt die Entwicklung eines allgemeingültigen Kriteriums zur Bestimmung der Rissrichtung immer noch eine Herausforderung dar. Neben der vergleichenden Untersuchung verschiedener Rissrichtungskriterien im Rahmen der X-FEM wurde von *Dumstorff & Meschke* [45] eine energiebasierte Methode eingeführt, die äquivalent zum Konzept der Maximierung der globalen Verzerrungsenergiefreisetzungsrate ist. Dabei wird das Gesamtpotential der untersuchten Struktur für mögliche Rissrichtungen bei vorgegebenem fixem Winkelinkrement berechnet. Wenn Risswachstum signalisiert wird, wird der Riss in die Richtung vorangetrieben, für die das Gesamtpotential ein Minimum aufweist. Da das Gesamtpotential von dem Verschiebungsfeld und dem Risswinkel abhängt, wurde von *Meschke et al.* [113] der Risswinkel als zusätzlicher globaler Freiheitsgrad in das numerische Modell eingeführt. Wie angedeutet, resultiert aus den Methoden zur Bestimmung der Rissrichtung oft die dazugehörige Rissnormale. Am Beispiel von Versagenskriterien, die in Abhängigkeit der Normalen eines fiktiven Risssegmentes formuliert sind, kann dieser Sachverhalt anschaulich verdeutlicht werden. Auch eine Bifurkationsanalyse auf Basis des akustischen Tensors liefert nicht nur den Zeitpunkt, sondern auch die Richtung des Risswachstums. Bei Verwendung von regularisierten Materialmodellen lässt sich allerdings die Rissrichtung nicht über die erwähnte Bifurkationsanalyse ermitteln. Wenn kontinuumsmechanische Konstitutivgesetze zur Abbildung von verschmiertem Materialversagen eingesetzt werden, können geeignete Rissrichtungskriterien auf phänomenologische Art und Weise entwickelt werden. Diese sind dann in Abhängigkeit von charakteristischen Größen definiert, siehe Kapitel 5.5.1. Beispielsweise kann in einem gradientenerweiterten Schädigungsmodell die Rissrichtung aus der maximalen Akkumulation der nicht-lokalen äquivalenten Verzerrung in einem bestimmten Bereich vor der Risspitze ermittelt werden, siehe *Simone, Wells & Sluys* [170].

Wenn das Hauptspannungskriterium von Rankine benutzt wird, scheint es nur folgerichtig, die Rissnormale entsprechend der Richtung der maximalen Hauptspannung zu wählen. In *Jirásek & Zimmermann* [88] wurde angenommen, dass die Rissnormale identisch der Richtung der maximalen Hauptverzerrung ist. Im Rahmen einer elementbasierten Rissformulierung wurde festgestellt, dass bei Berechnung der Rissrichtung über einen nicht-lokalen Verzerrungstensor genauere Ergebnisse erzielt werden können. Bei Verwendung der lokalen Verzerrungen wurden ungleichmäßige Rissverläufe beobachtet. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn ungleichförmige Verzerrungs- oder Spannungsfelder vorliegen.

Abbildung 5.7: Einflussgebiet  $\Omega_w$  bei der Ermittlung der Rissrichtung

Interessanterweise wurde anhand eines Strukturbeispiels gezeigt, dass die Verfeinerung des zugrunde liegenden Finite Element Netzes nicht unbedingt zur Lösung dieses Problems führt. Die Rissrichtungskriterien müssten theoretisch bezüglich der aktuellen Risspitze ausgewertet werden. Die Risspitze liegt in der vorliegenden Arbeit immer auf der Kante eines Finiten Elementes. Auch wenn die Risspitzenposition im numerischen Modell beliebig sein kann, ist eine exakte Übereinstimmung mit den Koordinaten eines Gaußpunktes, wo die lokalen Feldgrößen bekannt sind, eher unwahrscheinlich.

In dieser Arbeit wird aus den Gründen, die im letzten Absatz vorgestellt wurden, die Rissnormalrichtung als die Richtung der maximalen Hauptspannung des „nicht-lokalen“ Cauchyschen Spannungstensors  $\bar{\sigma}$  angenommen. Da zweidimensionale Probleme betrachtet werden, wird hierfür anstelle der Spektralzerlegung (5.29) auf die Mohrsche Spannungskreis-Analogie zurückgegriffen. Der „nicht-lokale“ Spannungstensor  $\bar{\sigma}$  ergibt sich aus der Multiplikation des lokalen Spannungsfeldes mit einer Gaußschen Verteilungsfunktion und der anschließenden Mittelwertbildung über das Rissspitzennahgebiet  $\Omega_w$ .

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_w} w(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d\Omega \quad \text{mit} \quad w(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_{nl}^3} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2 R_{nl}^2}\right) \quad (5.33)$$

Darin symbolisiert  $w$  die Gaußsche Gewichtsfunktion, die den abklingenden Einfluss der lokalen auf die „nicht-lokalen“ Spannungen mit wachsender Entfernung  $\boldsymbol{\xi}$  von der Risspitze  $\mathbf{x}$  widerspiegelt, siehe *Wells & Sluys* [190] und *Mergheim, Kuhl & Steinmann* [111]. Der Parameter  $R_{nl}$  definiert das kreisförmige Rissspitzennahgebiet  $\Omega_w$ . Mit seiner Hilfe lässt sich regeln, wie schnell der Einfluss der lokalen Spannungen auf die Rissrichtung mit der Entfernung zur Risspitze abnimmt.

*Mariani & Perego* [105] stellten ein alternatives spannungsbasiertes Rissrichtungskriterium vor. Sie betrachteten das Spannungsfeld in einem Halbkreis vor der Risspitze. Mit Hilfe der kleinsten Fehlerquadrate approximierten sie aus den Spannungen der Finite Element Lösung ein Spannungsfeld als Polynom vierter Ordnung. Die polynomialen Spannungen an der Risspitze dienten der Ermittlung der maximalen Hauptspannung und der

dazugehörigen Richtung, die als die Rissnormalenrichtung angenommen wurde.

### Numerische Berechnung der „nicht-lokalen“ Spannungen

Die Integration der Spannungen über das Rissspitzennahgebiet wird im Rahmen des vorgestellten Simulationsmodells numerisch durchgeführt. Die Integralbeziehung in Gleichung (5.33) wird durch eine diskrete Summe ersetzt. Die approximierte Version der Berechnung des „nicht-lokalen“ Spannungstensors lautet,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \approx \sum_{I=1}^{n_{GP}} w_I \boldsymbol{\sigma}_I V_I \quad \text{mit} \quad w_I = w(\boldsymbol{\xi}_I) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_I) \quad (5.34)$$

wobei  $n_{GP}$  die Anzahl der Gaußpunkte im Einflussgebiet  $\Omega_w$  darstellt. Der Parameter  $V_I$  beschreibt das Volumen, das mit dem Gaußpunkt  $I$  assoziiert ist. In Abbildung 5.7 ist am Beispiel eines zweidimensionalen Strukturproblems das kreisförmige Einflussgebiet  $\Omega_w$  in diskretisierter Form grau hinterlegt dargestellt. Die Rissspitze  $\mathbf{x}$  beschreibt den Mittelpunkt des Kreises, der durch den Radius  $R_{nl}$  charakterisiert ist. Die schwarzen Punkte kennzeichnen Gaußpunkte. Nur diejenigen Gaußpunkte, die innerhalb des Einflussgebietes liegen, werden bei der Berechnung des „nicht-lokalen“ Spannungstensors  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit wird der Radius  $R_{nl}$  des Einflussgebietes  $\Omega_w$  in Abhängigkeit der charakteristischen Größe  $h_e$  des Finiten Elementes vor der Rissspitze berechnet. Diese wird als die Quadratwurzel der Elementfläche angenommen.

# Kapitel 6

## Numerische Beispiele: X-FEM

In diesem Kapitel werden verschiedene Randwertprobleme untersucht, um Aussagen über die Wirkungsweise der erweiterten Finite Element Methode (X-FEM) in Kopplung mit ausgewählten Level Set Techniken bei der Simulation von kohäsivem Risswachstum treffen zu können. Mehrere Aspekte stehen im Vordergrund der Untersuchungen. Ein Schwerpunkt ist die Gegenüberstellung der numerisch ermittelten Antworten mit experimentellen Ergebnissen. Damit bei entfestigendem Materialverhalten netzunabhängige Lösungen erzielt werden können, müssen geeignete Regularisierungsstrategien benutzt werden. Aus diesem Grund werden Untersuchungen im Hinblick auf die regularisierende Wirkung beziehungsweise die Qualität des vorgestellten numerischen Konzepts zur Diskretisierung von kohäsiven Rissen angestellt. Dabei werden Konstitutivgesetze vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ benötigt. In dieser Arbeit wurden Konstitutivgesetze hergeleitet, die sich zur diskontinuierlichen Modellierung von Versagen in quasi-spröden Materialien mit oder ohne Stahlbewehrung und in adhäsiven materiellen Grenzflächen eignen. Sie kommen nun bei den verschiedensten Strukturproblemen zur Anwendung.

Zuerst wird das Verhalten von Tragwerken untersucht, die entweder aus unbewehrtem oder aus stahlbewehrtem Beton konstruiert sind. Da das Materialverhalten auf der meso- oder makroskopischen Beobachtungsebene modelliert wird, kann der Werkstoff Beton als homogen betrachtet werden. Bei der Simulation von Stahlbeton wird ein verschmiertes Bewehrungsmodell eingesetzt, so dass die Annahme der Homogenität des Materials in den bewehrten Elementen nicht verworfen werden muss. Die Level Set Methode wird bei diesen Strukturbeispielen ausschließlich zur geometrischen Beschreibung von Matrixrissen verwendet, da im numerischen Modell materielle Grenzflächen nicht existieren. Darüber hinaus werden Verbundstrukturen numerisch analysiert, bei denen nur Grenzflächenversagen berücksichtigt wird. Matrixversagen wird ausgeschlossen. Bei diesen Analysen kommt die Level Set Technik zur geometrischen Beschreibung materieller Grenzflächen zum Einsatz. Zuletzt wird eine Scheibe als Querschnittssegment eines Bauteils aus textilverstärktem Beton auf der mesoskopischen Beobachtungsebene untersucht. Dabei wird sowohl Rissbildung in der Grenzfläche zwischen den konstituierenden Materialien, als auch innerhalb des Matrixmaterials zugelassen. Dieses Anwendungsbeispiel stellt ein äußerst komplexes und hochgradig nichtlineares Problem dar, da sich mehrere Matrix- und Grenzflächenrisse entwickeln.

Alle Simulationen werden unter Verwendung von vierknotigen Scheibenelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen durchgeführt.

### 6.1 Single-Edge-Notched Beam (SEN)

Zunächst wird die Fähigkeit der vorgestellten numerischen Methodik anhand eines anspruchsvollen Benchmarkproblems für Mixed-Mode Versagen von unbewehrtem Beton

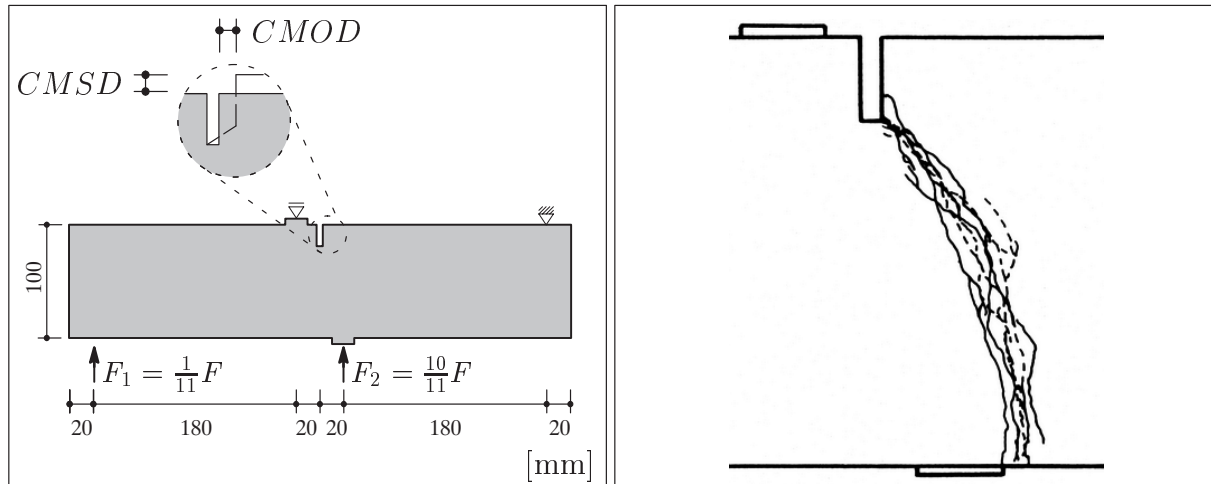
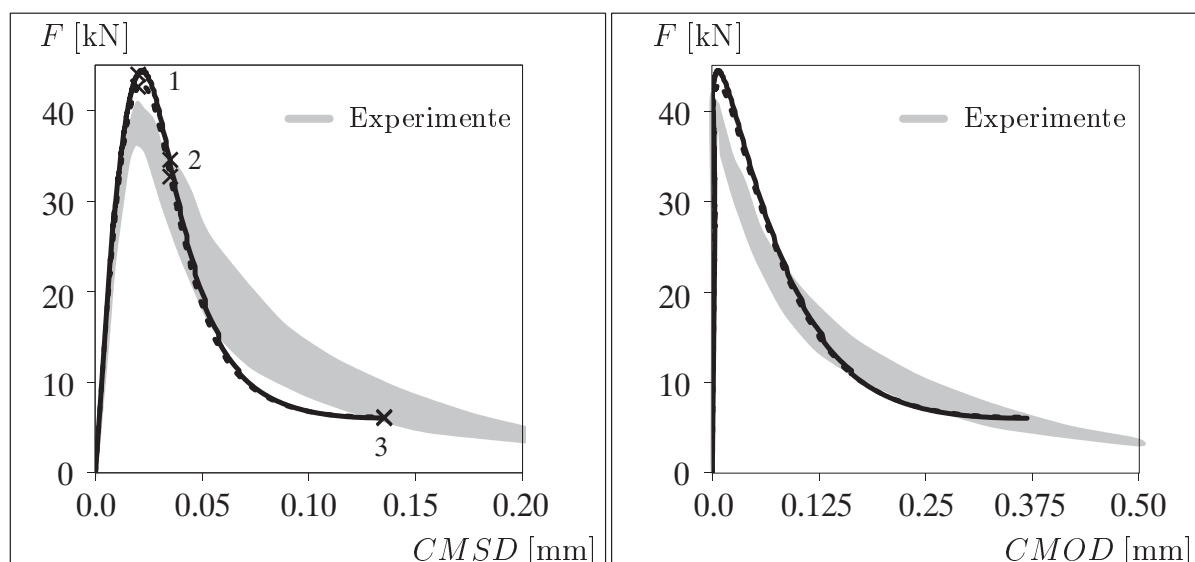


Abbildung 6.1: Links: Geometrie und Belastung des SEN Balkens. Rechts: experimentelle Rissmuster [162]

untersucht. Das Benchmarkproblem beschreibt einen einfach gekerbten Biegebalken, den Single-Edge-Notched Beam. Mit diesem Problem wurde ursprünglich das Verhalten metallischer Werkstoffe geprüft, bis es in den 1980'er Jahren von *Arrea & Ingraffea* [9] auch auf das kohäsive Material Beton übertragen wurde. Mittlerweile wurden einige Berechnungsverfahren anhand des SEN Balkens getestet, darunter auch gradientenerweiterte Schädigungsmodelle. Ausführliche Diskussionen hierzu finden sich in den Arbeiten um die Gruppe von *de Borst & Peerlings* [145, 62]. Außerdem wurde die Wirkungsweise von verschiedenen numerischen Methoden zur diskontinuierlichen Versagensmodellierung des SEN Balkens untersucht, wie z.B. die elementbasierte Rissformulierung SDA von *Wells & Sluys* [191]. Inzwischen wurde hierfür auch schon das knotenbasierte Diskretisierungsverfahren X-FEM eingesetzt, siehe *Wells & Sluys* [190], *Löblein* [103] und *Gasser & Holzapfel* [60]. In *Simone, Wells & Sluys* [170] wurde auf das Balkenproblem zurückgegriffen, um die Leistungsfähigkeit der Kombination eines gradientenerweiterten Schädigungsmodells mit der X-FEM zu prüfen. Die in den genannten Aufsätzen und in der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegten experimentellen Ergebnisse basieren auf den Versuchen, die von *Schlagen* [162] durchgeführt wurden.

In Abbildung 6.1 ist der  $440 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$  große Balken mit einer Kerbe von  $5 \times 20 \text{ mm}^2$  dargestellt. Er unterliegt einer antimetrischen Belastung. Die elastischen Materialeigenschaften sind entsprechend den Experimenten von *Schlagen* [162] durch den Elastizitätsmodul  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl  $\nu = 0.15$  gekennzeichnet. Für die beiden 20 mm großen Lastplatten im mittleren Balkenbereich wird ein Elastizitätsmodul gewählt, der 10-mal so groß ist wie der Elastizitätsmodul des Betonbalkens. Die beiden äußeren Lastplatten haben keinen signifikanten Einfluss auf die Strukturantwort in der Versagenszone, so dass sie als punktförmige Last bzw. Lagerung abgebildet werden. Im Folgenden werden die Materialkennwerte für das Kohäsivzonenmodell zur Beschreibung von Mode-I dominantem Versagen identifiziert. Die Bruchenergie pro Quadratmillimeter Rissfläche beträgt  $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ . Die Zugfestigkeit des Betons wird zu  $f_t = 2.8 \text{ N/mm}^2$  angenommen. Die anfängliche Steifigkeit in tangentialer Rissrichtung wird durch den Parameter  $d_T = 10.0 \text{ N/mm}^3$  bestimmt. Der Parameter, der die Rate der Degradation der tangentialen Steifigkeit kontrolliert, wird zu  $h_T = -13.8/\text{mm}$  festgelegt. Dies

Abbildung 6.2: Last- $CMSD$  und Last- $CMOD$  Diagramme

bedeutet, dass die Fähigkeit eines kohäsiven Risses, Tangentialspannungen zu übertragen, mit fortschreitender Belastung abnimmt. Bei einer Rissnormalöffnung von 1.0 mm ergibt sich mit dem gewählten Wert für  $h_T$  eine Schubsteifigkeit, die noch  $10^{-6}$ -mal so groß ist wie die anfängliche Schubsteifigkeit  $d_T$ .

Zur Untersuchung der regularisierenden Wirkung des erweiterten Finite Element Modells wird der Balken mit zwei unterschiedlichen Netzen diskretisiert. Das grobe Netz bilden 1837 Finite Elemente. Das feine Netz wird durch 6084 Finite Elemente erzeugt. In der Versagenszone des SEN Balkens besitzen beide Netze eine höhere Elementdichte als im übrigen Bereich. Hier ist die charakteristische Größe eines Finiten Elementes des groben Netzes  $h_e = 2.5$  mm. Bei dem feinen Netz ist in diesem Bereich die Elementfläche ein Viertel so groß, so dass für die charakteristische Elementgröße  $h_e = 1.25$  mm gilt. Der Radius zur Berechnung der „nicht-lokalen“ Spannungen, über die die Rissrichtung ermittelt wird, wird in Abhängigkeit der Größe des Finiten Elementes vor der Risspitze zu  $R_{nl} = 2.25 h_e$  gewählt. Es wird ein ebener Spannungszustand angenommen. Außerdem darf sich in den Simulationen ausschließlich ein einziger Riss entwickeln. Die Einführung von weiteren Rissen würde nicht zur Erhöhung der Genauigkeit der numerischen Lösung führen, da es sich hierbei um Sekundärrisse von untergeordneter Bedeutung handelt.

Bei dem betrachteten Problem ist es kaum möglich, das Verhalten des Betonbalkens mit Hilfe einer einzigen Last-Verschiebungskurve zu beschreiben. Deshalb werden zwei unterschiedliche Verformungsmoden betrachtet, über die die Gesamtlast  $F$  aufgetragen wird. Zum einen ist dies die vertikale Differenzverschiebung zwischen den zwei oberen Eckpunkten der Kerbe, die *Crack Mouth Sliding Displacement* ( $CMSD$ ) genannt wird. Zum anderen wird die horizontale Differenzverschiebung dieser Punkte benutzt, die als *Crack Mouth Opening Displacement* ( $CMOD$ ) bezeichnet wird. Beide Verformungsmoden sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Vergleich der Last-Verschiebungskurven zeigt, dass die numerisch ermittelten Lösungen die experimentellen Ergebnisse gut wiedergeben können, siehe Abbildung 6.2. Die durchgezogenen Linien repräsentieren das Ergebnis, das mit der groben Diskretisierung erzielt wurde. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Lösung bei Verwendung des feinen Finite Element Netzes. Beide Simulationen liefern Last- $CMSD$

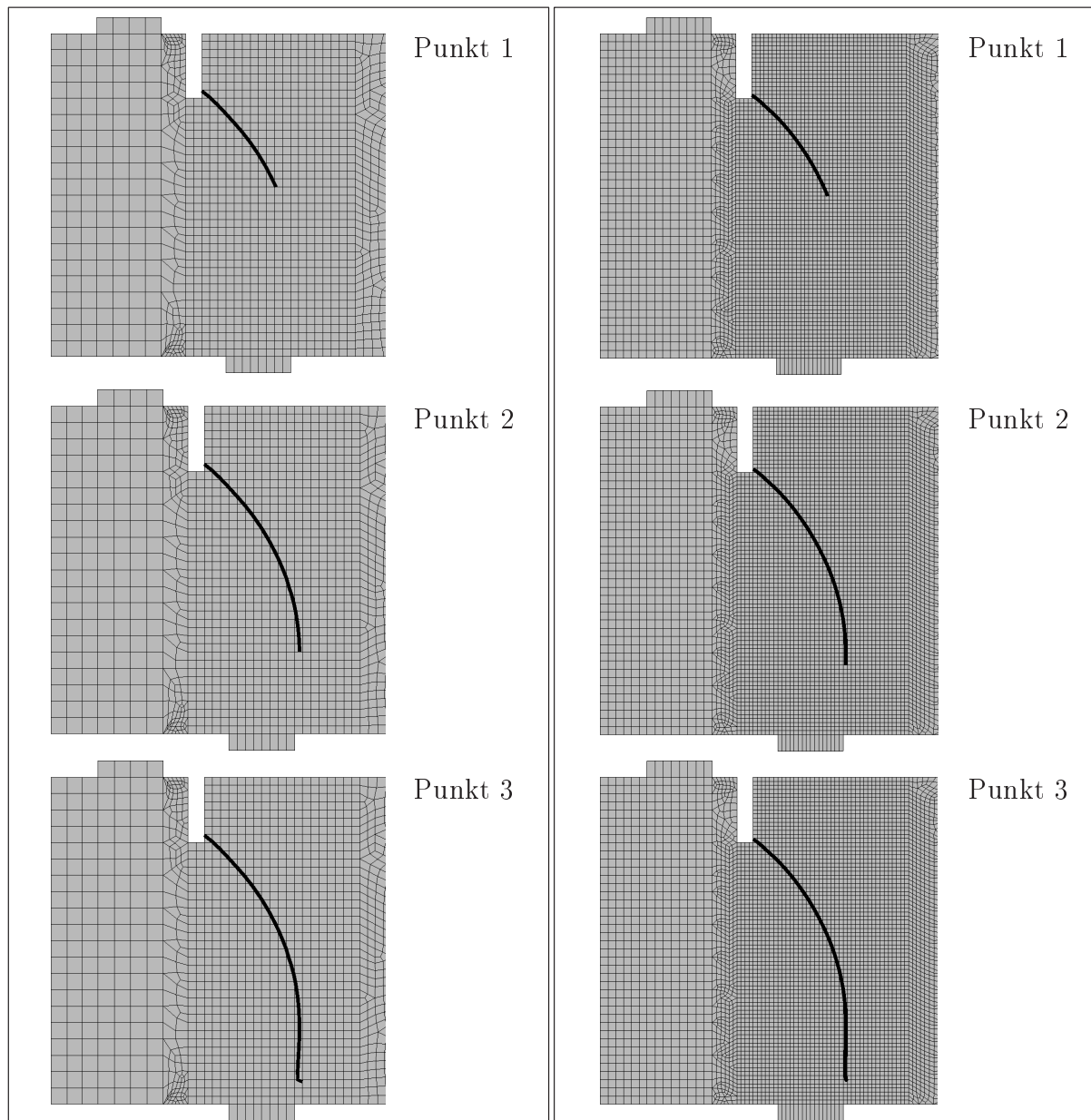


Abbildung 6.3: Risswachstum bei grober und feiner Diskretisierung

Kurven, die im Vergleich zu den Resultaten aus den Versuchen ein etwas zu sprödes Nachbruchverhalten des Balkens zeichnen. Allerdings kann diese Beobachtung in Bezug auf die Last-*CMOD* Kurven nicht in dem Maße gemacht werden. Bei genauer Analyse erkennt man, dass die numerisch ermittelten Traglasten die kritische Last aus den Versuchen leicht überschätzen. Dies ist insbesondere bei Verwendung der groben Diskretisierung feststellbar. Die Last-Verschiebungskurven, die mit der groben und der feinen Diskretisierung gewonnen wurden, stimmen in beiden Diagrammen im Großen und Ganzen ausgesprochen gut überein.

In Abbildung 6.3 ist das simulierte Risswachstum für beide Diskretisierungen anhand von drei unterschiedlichen Belastungszuständen dargestellt. Diese sind im Last-*CSMD* Diagramm durch die Punkte 1 bis 3 markiert. Der Riss wird in der rechten unteren



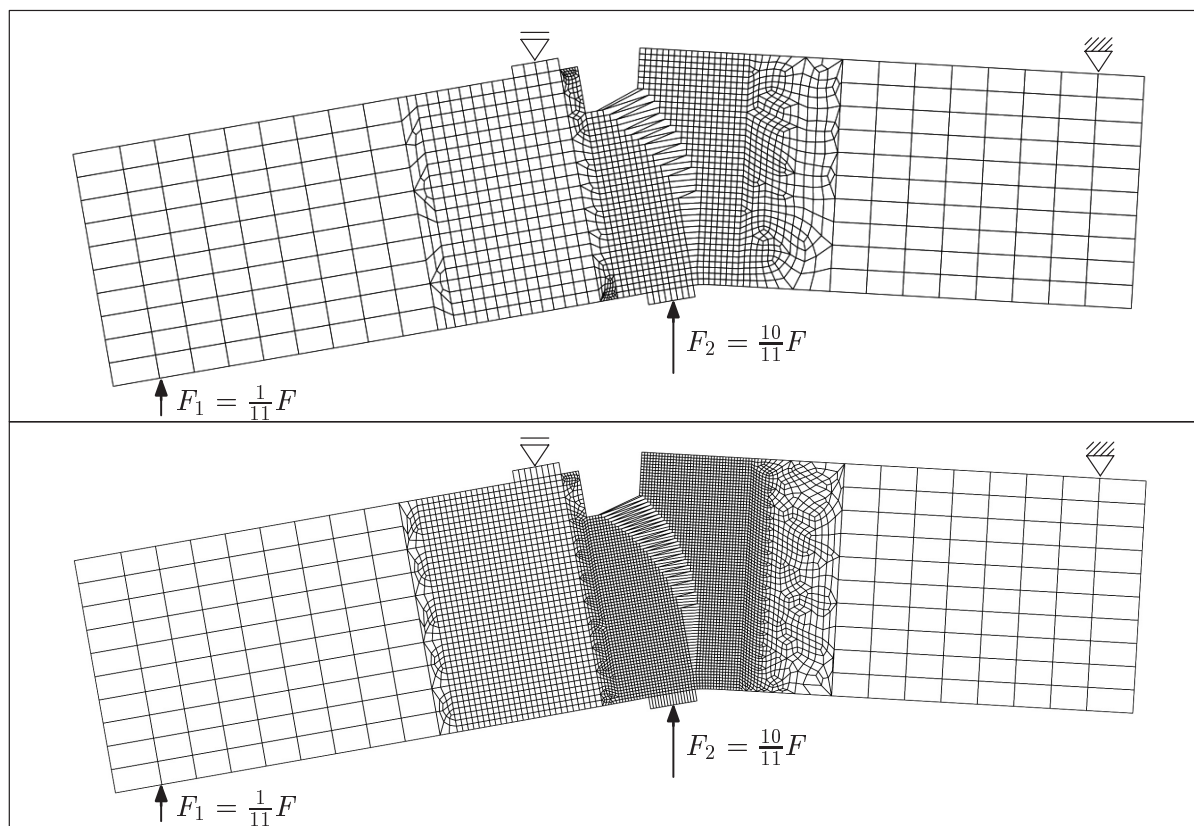


Abbildung 6.4: Deformierte Strukturen bei grober und feiner Diskretisierung

Ecke der Kerbe unter einem Winkel von ca.  $45^\circ$  initiiert und wächst mit abnehmender Krümmung in Richtung der unteren Lasteinleitungsplatte. Es ist angemerkt, dass der Riss im Bereich der unteren Lasteinleitungsplatte angehalten wird, um die Einführung eines Risssegmentes zu verhindern, das zu einer starken Änderung der Richtung des bisherigen Risses führen würde. Die Simulationen beider Elementierungen liefern fast identische Risspfade. Das verwendete numerische Modell erlaubt, dass ein Riss die Finiten Elemente des Rechnetzes in beliebiger Weise durchtrennen kann. Aus diesem Grund ist der simulierte Rissverlauf ziemlich glatt und offensichtlich weitgehend unabhängig von der gewählten Diskretisierung. Da der Rissverlauf gekrümmt ist, besteht die Objektivität der numerischen Lösung nicht nur in Bezug auf die Größe, sondern auch auf die Orientierung der Finiten Elemente. Darüber hinaus stimmen die numerisch ermittelten Rissverläufe mit dem experimentellen Rissmuster aus den Versuchen von *Schlangen* [162] äußerst gut überein, siehe Abbildung 6.1.

In Abbildung 6.4 sind die deformierten Strukturen für beide Diskretisierungen am Ende der Simulation mit 60-facher Überhöhung veranschaulicht. Man erkennt sehr schön, dass die Deformationen des Balkens in dem diskreten Riss konzentriert sind. Große Verschiebungsgradienten sind nur bei denjenigen Finiten Elementen zu beobachten, die von dem Riss durchtrennt werden. Infolge der Lokalisierung erfahren die strukturellen Bereiche neben dem Riss eine Entlastung. Anhand der deformierten Strukturen lässt sich feststellen, wie sich das Versagen des Balkens während der äußeren Belastung mit zunehmendem Rissfortschritt von Mixed-Mode zu Mode-I bzw. Biegezugversagen ändert. Die Ergebnisse bestätigen nochmals das hohe Maß an Unabhängigkeit der numerisch er-

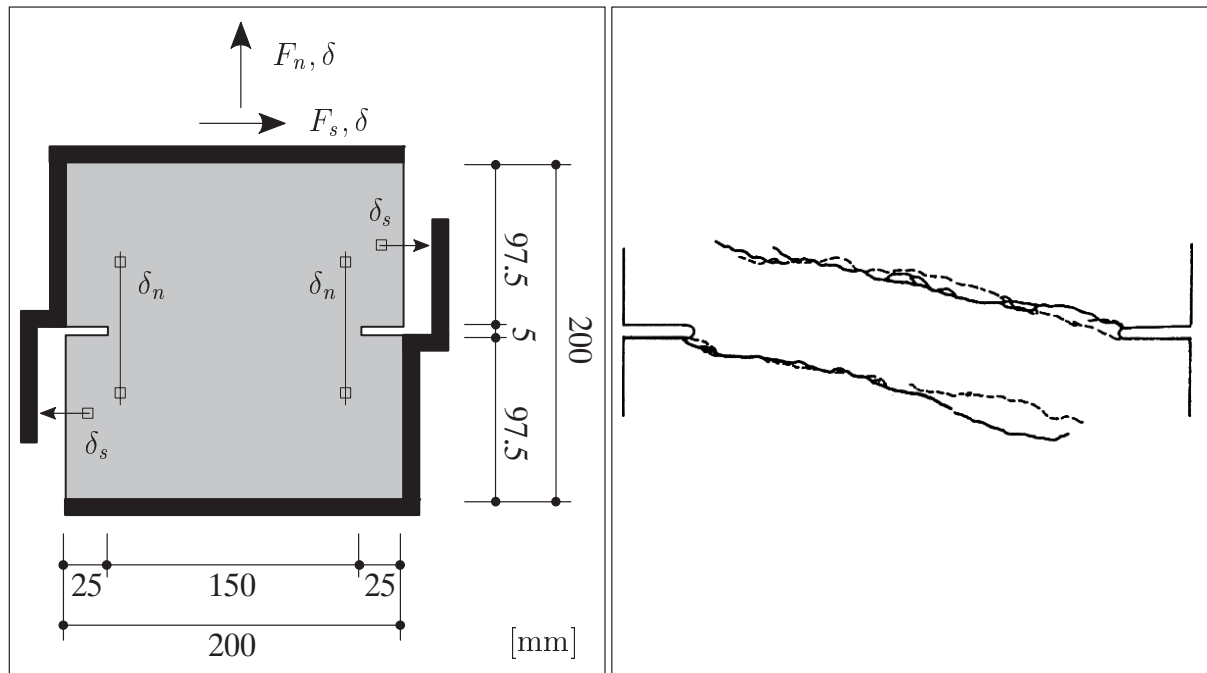


Abbildung 6.5: Links: Gekerbte Betonscheibe mit Belastung. Rechts: experimentelle Rissmuster [128]

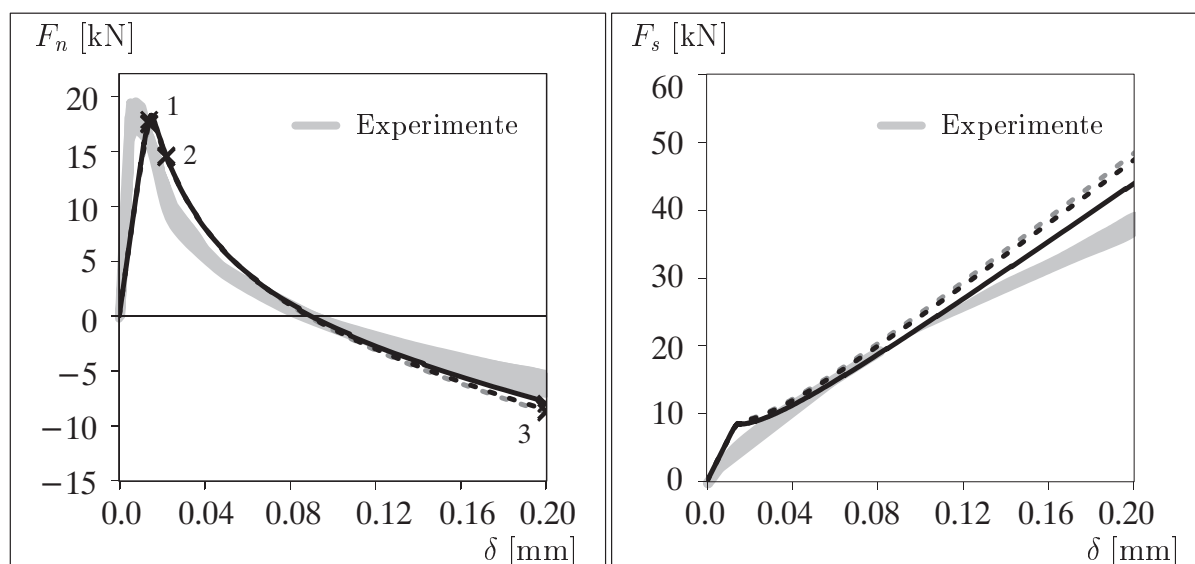
mittelten Strukturantwort von dem gewählten Finite Element Netz.

Wie sich gezeigt hat, sind die erzielten numerischen Lösungen in zweierlei Hinsicht von hoher Qualität. Zum einen stimmen Experiment und Simulation ausgesprochen gut überein. Zum anderen kann man feststellen, dass die erweiterte Finite Element Methode zur Modellierung von kohäsivem Risswachstum ein hohes Maß an Netzunabhängigkeit garantiert.

## 6.2 Gekerbte Scheibe unter Zug-Schub-Belastung

Die ersten experimentellen Studien über das Versagen von kohäsiven Materialien unter Zug-Schub-Belastung verfolgten hauptsächlich ein Ziel: Die Erweiterung des Modells von *Hillerborg, Modéer & Petersson* [77], siehe Kapitel 1.2.2. Außerdem interessierte die Auswirkung der Rissverzahnung bei relativ kleinen Rissöffnungen. Beispielsweise wollten *Reinhardt, Cornelissen & Hordijk* [151] aus Versuchen Schubspannungs-Schlupf-Beziehungen für verschiedene Rissnormalöffnungen gewinnen.

In den 1990'er Jahren wurden von *Nooru-Mohamed* [128] weiterführende Untersuchungen mittels Mixed-Mode Bruchversuchen an zweiseitig gekerbten Betonscheiben angestellt. Dabei wurde durch Variation der Einfluss der Betonsorte, der Belastung und der Größe des Probekörpers auf den Versagensmodus und das Tragverhalten der Struktur diskutiert. In diesem Abschnitt wird das Versagen der zweiseitig gekerbten Betonscheibe numerisch analysiert. Durch den Vergleich der erzielten Simulationsergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen von *Nooru-Mohamed* [128] soll die Wirkungsweise der X-FEM in Verbindung mit dem vorgestellten Kohäsivzonenmodell für Mode-I dominantes Versagen beurteilt werden, siehe auch *Larsson & Runesson* [96], *Ohlsson & Olofsson* [129] und *Feist* [51]. Ein interessanter Aspekt bei diesem Benchmarkproblem ist die Entstehung und das Wachstum zweier Risse.

Abbildung 6.6:  $F_n - \delta$  und  $F_s - \delta$  Diagramme

In Abbildung 6.5 ist die  $200 \times 200 \times 50 \text{ mm}^3$  große Scheibe mit zwei Kerben von  $25 \times 5 \text{ mm}^2$ , die sich in der horizontalen Symmetrieachse der Struktur befinden, dargestellt. In den Versuchen wurden der linke obere und der rechte untere L-förmige Rand der Probe in einem Stahlrahmen befestigt. Dieser diente als Lager und zum Aufbringen der Belastung. Zur Kontrolle der Verschiebungen wurden die Proben mit Wegaufnehmern versehen. Mit den Wegaufnehmern wurden an charakteristischen Punkten die vertikale Differenzverschiebung  $\delta_n$  und die horizontale Verschiebung  $\delta_s$  gemessen, siehe Abbildung 6.5. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Versuchsprogramm, das von *Nooru-Mohamed* [128] als Versuchsserie 6a bezeichnet wurde. Hier wurden die vertikale Zugkraft  $F_n$  und die seitliche Schubkraft  $F_s$  in der Art und Weise aufgebracht, dass die vertikale Verformung  $\delta_n$  während des gesamten Experimentes so groß wie die seitliche Verschiebung  $\delta_s$  blieb. Um die Aussagekraft der experimentellen Ergebnisse zu garantieren, wurden zwei identische Probekörper getestet. Es sei darauf hingewiesen, dass in der Versuchsserie 6a auch unterschiedlich große Betonscheiben geprüft wurden, um den Einfluss der Prüfkörpergröße auf die Materialantwort zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit wird der zur Versuchsmaschine gehörige Stahlrahmen, in dem die Proben befestigt wurden, als starr angenommen. Die entsprechenden Randbedingungen werden direkt auf den Prüfkörper aufgebracht. Dabei wird der obere L-förmige Rand des Betonkörpers durch eine vertikale und seitliche Kraft gleichzeitig und verschiebungskontrolliert belastet. In Analogie zu den Versuchen wird vorausgesetzt, dass die vertikale und die seitliche Bewegung  $\delta$  des oberen L-förmigen Probenrandes gleich sind, siehe Abbildung 6.5. Der belastete Rand wird somit unter  $45^\circ$  nach rechts oben verschoben.

In der Arbeit von *Nooru-Mohamed* [128] wurden die elastischen Materialparameter des Betons, aus dem die Prüfkörper hergestellt wurden, offensichtlich nicht experimentell bestimmt. Lediglich die Druck- und Spaltzugfestigkeiten von Probewürfeln sind dokumentiert. Angaben über die einaxiale Zugfestigkeit und die Bruchenergie fehlen. Die elastischen Materialeigenschaften sind durch den Elastizitätsmodul  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl  $\nu = 0.2$  charakterisiert. Dieselben Werte wurden beispielsweise auch in den numerischen Simulationen von *Nooru-Mohamed* [128] gewählt. Zur Beschreibung

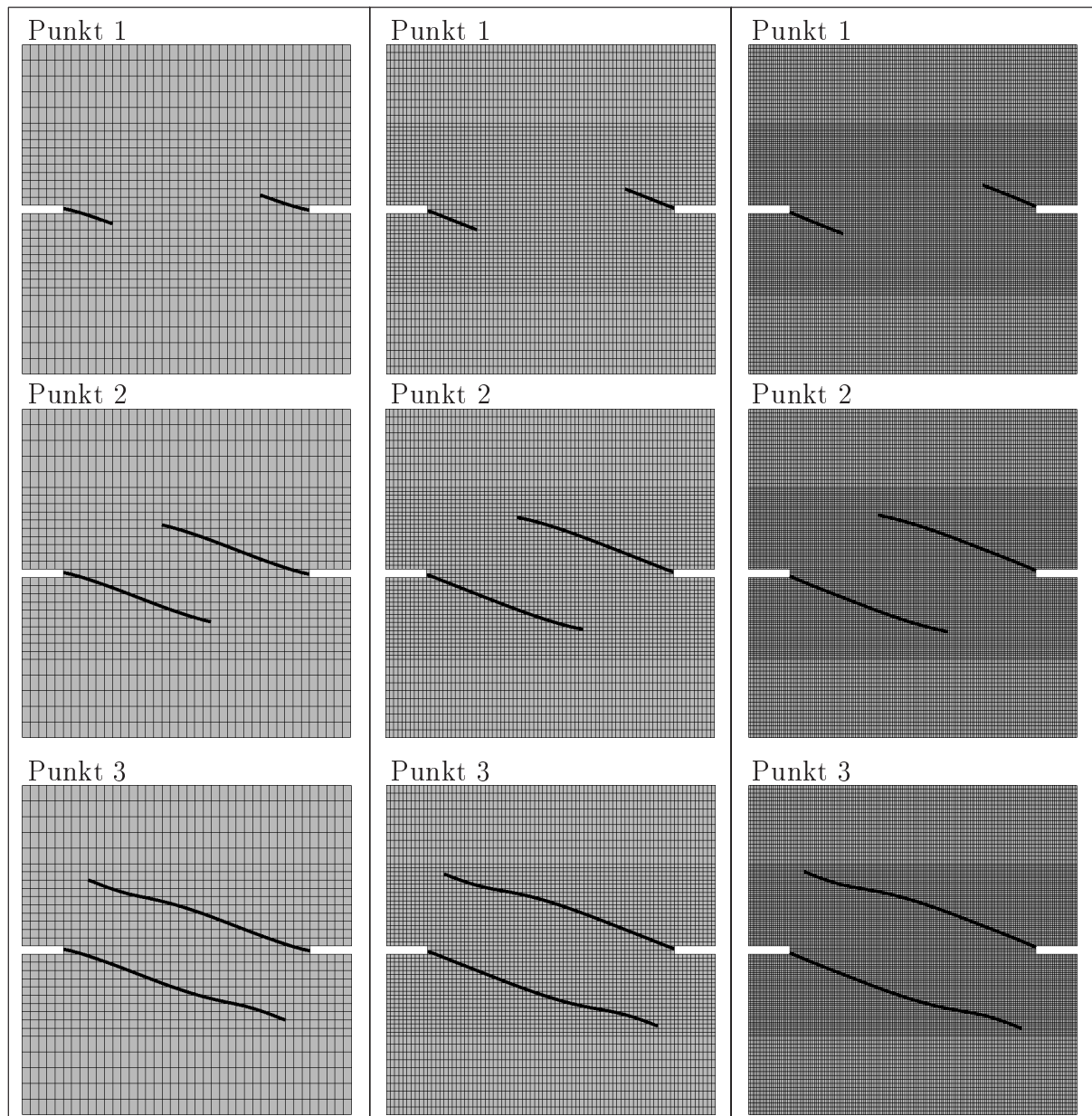


Abbildung 6.7: Risswachstum bei grober, mittelfeiner und feiner Diskretisierung

von Betonversagen werden neben elastischen auch bruchmechanische Materialkennwerte benötigt, die in das Kohäsivzonenmodell eingehen. Die Bruchenergie pro Quadratmillimeter Rissfläche beträgt  $G_f = 0.11 \text{ N/mm}$ . Die Zugfestigkeit des Betons wird zu  $f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2$  angenommen. Die anfängliche Steifigkeit in tangentialer Rissrichtung wird durch den Parameter  $d_T = 1.0 \text{ N/mm}^3$  bestimmt. Der Parameter, der die Rate der Degradation der tangentialen Steifigkeit kontrolliert, wird zu  $h_T = 0.0/\text{mm}$  festgelegt. Somit nimmt die Fähigkeit eines kohäsiven Risses, Tangentialspannungen zu übertragen, mit fortschreitender Rissöffnung nicht ab.

Für die Simulationen werden drei verschiedene Diskretisierungen der Betonscheibe verwendet. Diese bestehen aus 1230, 4920 und 19680 Finiten Elementen. In der Versagenszone der Scheibe besitzen alle drei Netze eine höhere Elementdichte als im übrigen

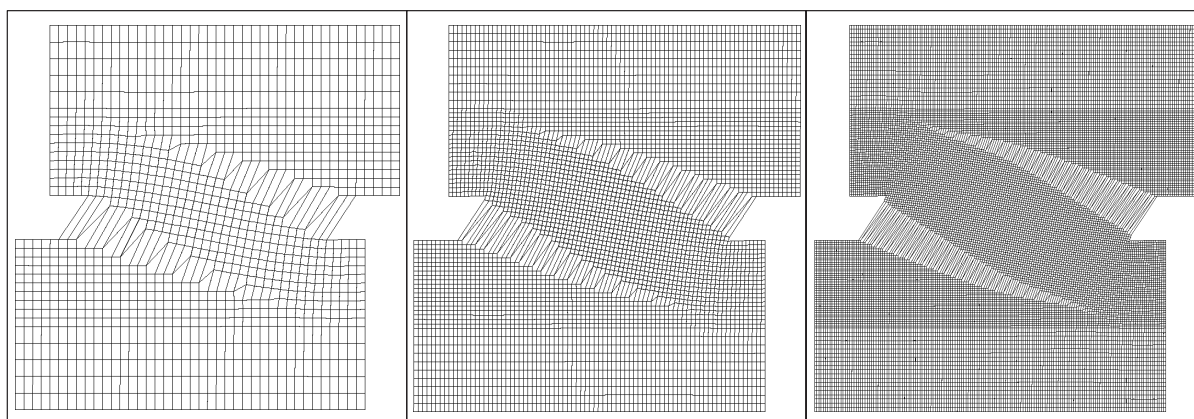


Abbildung 6.8: Deformierte Strukturen bei grober, mittelfeiner und feiner Diskretisierung

Bereich. Die charakteristische Größe eines Finiten Elementes des groben Netzes ist im Bruchbereich gleich  $h_e = 5.0$  mm. Die Elemente des mittelfeinen Netzes und des feinen Netzes sind halb bzw. ein viertel so groß. Der Radius zur Berechnung der „nicht-lokalen“ Spannungen, über die die Rissrichtung ermittelt wird, wird in Abhängigkeit der Größe des Finiten Elementes vor der Rissspitze zu  $R_{nl} = 3 h_e$  bestimmt. Es wird ein ebener Spannungszustand angenommen. Die Simulationen konzentrieren sich ausschließlich auf die Entwicklung der beiden Risse, die das Strukturverhalten dominieren und im Versuch beobachtet wurden.

Bei komplexen Versuchen, wie der zweiseitig gekerbten Betonscheibe, ist es nicht möglich das Strukturverhalten mit einer einzigen Last-Verschiebungskurve zu erfassen. Deshalb wird die Strukturantwort für die Belastung in vertikaler  $F_n$  und in seitlicher  $F_s$  Richtung untersucht. Beide Kräfte sind über die Verschiebung  $\delta$  des belasteten Probenrandes aufgetragen, siehe Abbildung 6.6. Das Spektrum der Strukturantworten aus den Versuchen an zwei identischen Probekörpern ist in dieser Abbildung grau hinterlegt. Die beiden experimentell ermittelten Strukturantworten werden dabei als die obere und die untere Schranke der grauen Flächen betrachtet. Die numerisch ermittelten Last-Verschiebungskurven zeigen in beiden Diagrammen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Lösung bei Verwendung der groben Diskretisierung. Die gestrichelten schwarzen und grauen Linien kennzeichnen die Ergebnisse, die mit den mittelfeinen bzw. feinen Diskretisierungen erzielt wurden. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die Verschiebungen aus den numerischen Simulationen und aus den Experimenten  $\delta := \delta_n$  bzw.  $\delta := \delta_s$  gewissermaßen eine unterschiedliche Bedeutung haben, was der Grund für den Unterschied zwischen den numerisch und experimentell ermittelten Anfangssteifigkeiten sein dürfte. Trotzdem sind die entsprechenden Verschiebungsmoden vergleichbar. Anhand des  $F_n$ - $\delta$  Diagramms wird deutlich, dass sowohl die experimentell ermittelte Traglast, als auch das experimentell ermittelte Nachbruchverhalten sehr gut wiedergegeben wird. Die hohe Übereinstimmung von Simulation und Versuch wird durch das  $F_s$ - $\delta$  Diagramm untermauert. Des Weiteren dokumentieren die Last-Verschiebungskurven in beiden Diagrammen die enorme Kongruenz der numerischen Lösungen, die mit den drei gewählten Finite Element Netzen gewonnen wurden.

Zur Darstellung der Versagensevolution sind in Abbildung 6.7 die numerisch ermittelten Rissbilder für drei verschiedene Belastungszustände veranschaulicht, die in Abbildung

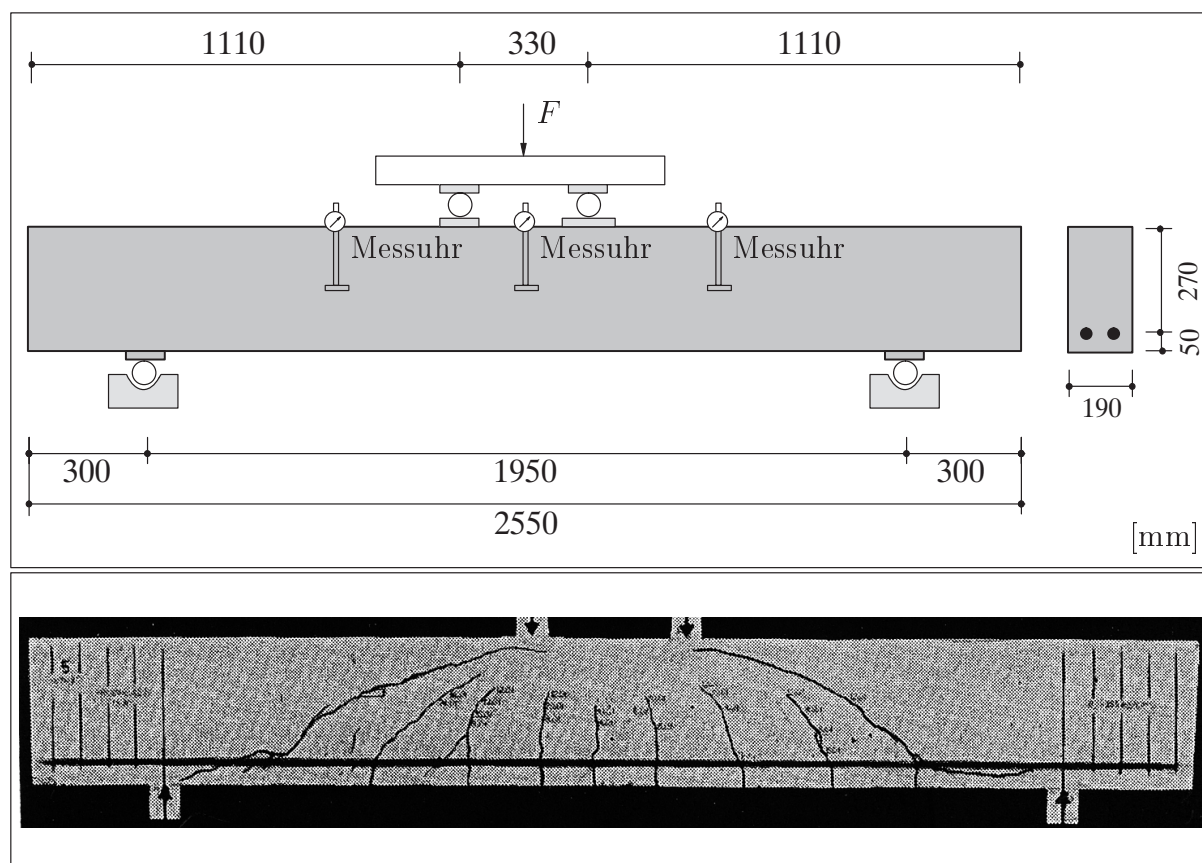


Abbildung 6.9: Oben: Geometrie und Belastung des Stahlbetonbalkens. Unten: Stahlbetonbalken mit experimentellem Rissmuster [99]

6.6 markiert sind (Punkt 1: Erreichen der Traglast, Punkt 2: Nachbruchbereich, Punkt 3: Belastungsende). Auf der linken Seite ist die Lösung bei Verwendung der groben Diskretisierung gezeigt. In der Mitte und rechts sind die Ergebnisse abgebildet, die mit dem mittelfeinen bzw. feinen Finite Element Netz erzielt wurden. Das Versagen der Betonscheibe beginnt mit der Initiierung von zwei Rissen an den beiden Kerben. Diese wachsen zunächst mit nahezu konstantem Winkel. Etwa ab der vertikalen Mittelachse der Scheibe flachen die Risse ab, um dann wieder mit der ursprünglichen Neigung weiter zu wachsen. In Abbildung 6.5 ist das auf der Vorder- und Rückseite des Probekörpers sichtbare Rissmuster veranschaulicht, das einer der beiden Versuche von *Nooru-Mohamed* [128] lieferte. Die Übereinstimmung mit den numerisch ermittelten Rissverläufen bekräftigt die hohe Leistungsfähigkeit der erweiterten Finite Element Methode in Verbindung mit dem verwendeten Kohäsivzonenmodell für Mode-I dominantes Versagen.

In Abbildung 6.8 sind die deformierten Strukturen in 100-facher Überhöhung am Ende der Belastung abgebildet. Links ist das Ergebnis der Simulation bei Verwendung der groben Diskretisierung gezeigt. In der Mitte und rechts sind die numerischen Ergebnisse veranschaulicht, die mit dem mittelfeinen bzw. feinen Finite Element Netze gewonnen wurden. Die deformierten Strukturen spiegeln die Rissverläufe sehr gut wider. Die Deformationen lokalisieren ausschließlich in den beiden Rissflächen beziehungsweise in den Elementen, die diese enthalten. Anhand der deformierten Strukturen erkennt man, dass sich das Versagen der Scheibe während der äußeren Belastung vom Mixed-Mode-Typ mit

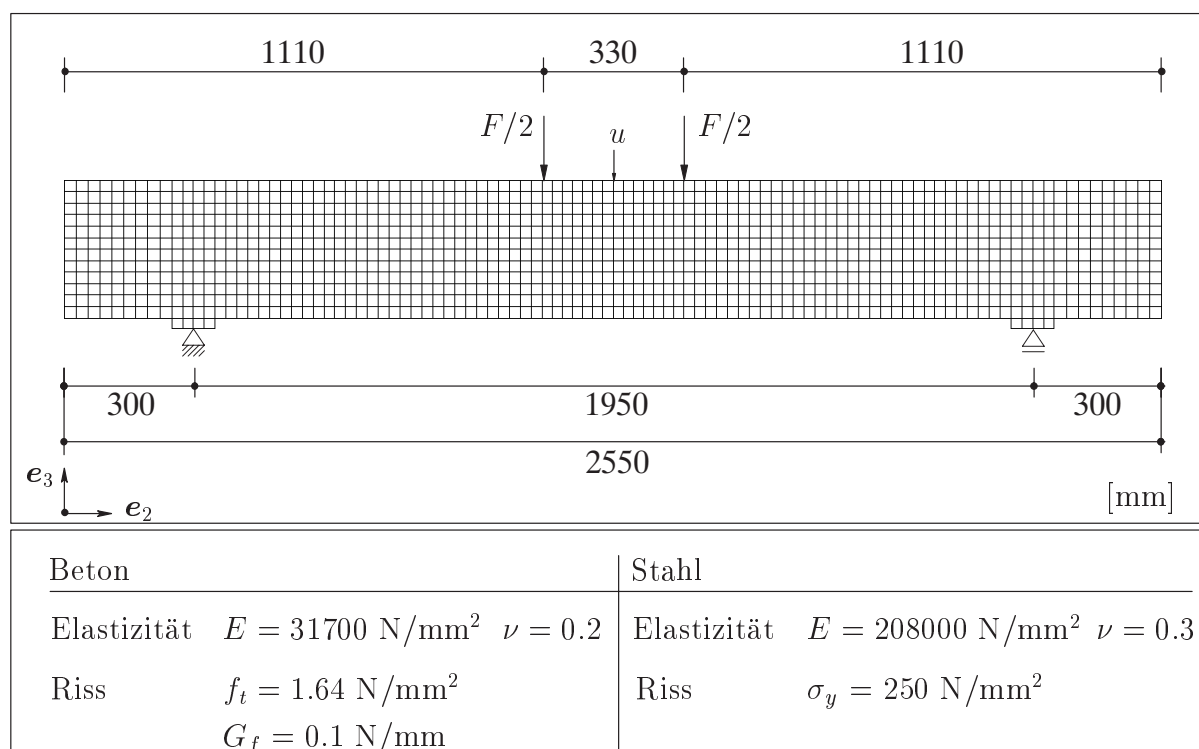


Abbildung 6.10: Diskretisierung und Systemdaten

zunehmendem Rissfortschritt kaum ändert.

Die außerordentlich hohe Ähnlichkeit der Simulationsergebnisse in den Last-Verschiebungskurven, den Rissverläufen und den deformierten Strukturen bestätigt, dass bei Verwendung der X-FEM die Objektivität in Bezug auf die gewählte Diskretisierung gewährleistet ist.

### 6.3 Bewehrter vierpunktgestützter Biegebalken

Mit diesem Strukturbeispiel wird die erweiterte Finite Element Methode im Hinblick auf mehrfache Rissbildung in bewehrtem Beton getestet. Dabei ist die Änderung des Versagensmodus einzelner Risse bemerkenswert. Das Verifikationsbeispiel beschreibt einen vierpunktgestützten Betonbalken, der durch eine Biegebewehrung aus Stahl verstärkt wird. Der Balken wurde von *Leonhardt & Walther* [99] in den 1960'er Jahren experimentell analysiert. Er ist Teil einer Testserie zur Untersuchung des Einflusses des Momenten-Schub-Verhältnisses auf die Schubtragfähigkeit von Rechteckbalken ohne Schubbewehrung. Schubbewehrung war im Balkenfeld nicht vorhanden. Die reichlich überstehenden Balkenenden wurden jedoch im Versuch mit Bügelbewehrung versehen, um Verankerungsbrüche der Biegebewehrung zu vermeiden, siehe Abbildung 6.9. Dies scheint offensichtlich erfolgreich gewesen zu sein, da kein Schlupf an den Enden der Bewehrungsstäbe gemessen werden konnte. Eine numerische Analyse des Stahlbetonbalkens findet sich in *Most* [123].

Die Abmessungen des Versuchskörpers sind in Abbildung 6.9 dargestellt. Er besitzt eine Länge von 2550 mm und eine Höhe von 320 mm. Die Dicke des Balkens beträgt 190 mm. Die Achse der Längsbewehrung befindet sich im Abstand von 50 mm oberhalb der

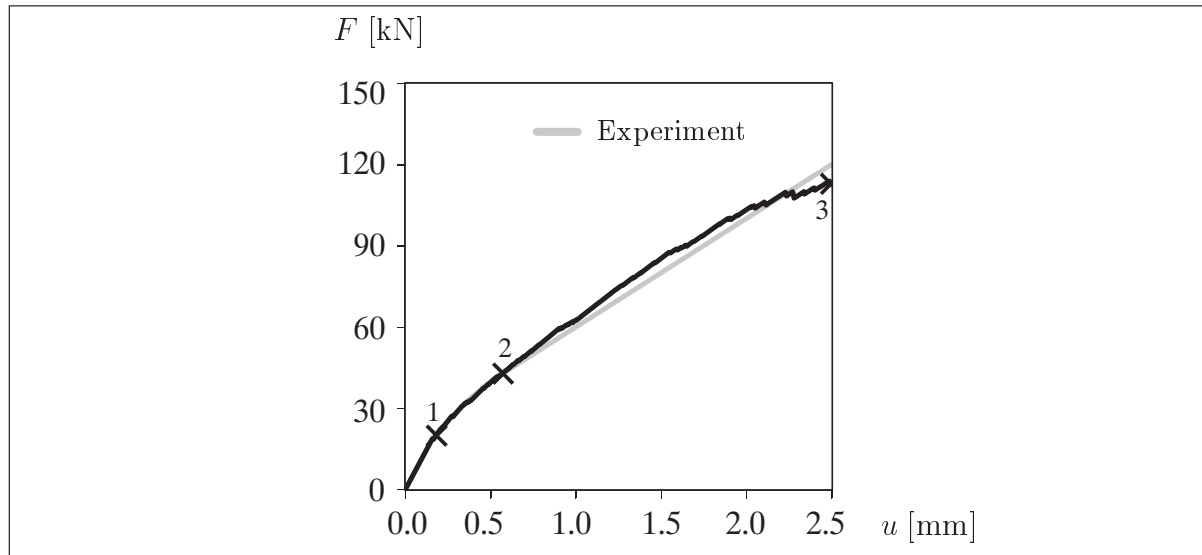


Abbildung 6.11: Last-Verschiebungskurven

Unterkante des Balkens. Der Durchmesser jedes der zwei Bewehrungsstäbe misst 26 mm. In der Mitte und in den Viertelpunkten des Balkenfeldes sind Messuhren angebracht, mit denen die Durchbiegung des Balkens gemessen wird. Im Versuch von *Leonhardt & Walther* [99] war die linke Lastverteilungsplatte etwas schmaler als die rechte, um herauszufinden, ob der Unterschied in den örtlichen Lastpressungen von Einfluss ist. Es konnte jedoch kein Einfluss beobachtet werden. Der Balken wurde lastgesteuert stufenweise mit ungefähr dem 0.1-fachen der erwarteten Bruchlast je nur etwa 30 Minuten lang belastet, so dass man hier von einem Kurzzeitversuch sprechen kann. Anhand des Versuchs wurde festgestellt, dass die äußeren Risse erst bei verhältnismäßig hoher Last entstanden sind. Diese Risse verlaufen im oberen Balkenbereich sehr flach, weil sie sich nur unter der Druckstrebe des Sprengwerks entwickeln können, die bei schlanken Balken wenig geneigt ist. Dem Versuch zufolge änderte sich während der äußeren Belastung der Versagensmodus einzelner Risse, die unter Biegezugbeanspruchung initiiert wurden. In *Leonhardt & Walther* [99] sind der Versuchsaufbau, die Versuchsergebnisse und die Zusammensetzung des Betons dokumentiert.

Zur Modellierung des Materialverhaltens von Stahlbeton wurden in Kapitel 5.2.1 und 5.4 Konstitutivgesetze hergeleitet, die durch mehrere Materialparameter spezifiziert sind. Einige dieser Parameter sind in Abbildung 6.10 angegeben. Sie entsprechen den Angaben von *Most* [123]. Die hergeleiteten Konstitutivgesetze wurden speziell für dieses Beispiel mit der Bewehrungsrichtung  $\mathbf{m}_{\rho^*} = \mathbf{e}_2$  und dem Verfestigungsmodul  $H = 0.0 \text{ N/mm}^3$  umgesetzt. Die tangentielle Steifigkeit eines Risses im Beton wird als  $d_T = 1.0 \text{ N/mm}^3$  angenommen. Diese Steifigkeit bleibt konstant, da für den Parameter  $h_T = 0.0/\text{mm}$  gelten soll. Für die Modellierung des als elastisch angenommenen Materialverhaltens der unteren linken und rechten Lagerplatten werden die Elastizitätsparameter für Stahl benutzt. Die beiden Lasteinleitungsplatten werden nicht abgebildet, da im Versuch kein Einfluss der örtlichen Lastpressungen auf das Bruchverhalten des Balkens beobachtet werden konnte. Die Bewehrung wird über die zweite und dritte Elementlage von unten verschmiert. Der Bewehrungsgrad ergibt sich somit zu  $\rho^* = 0.105$ . Die elastische Modellsteifigkeit der Bewehrung, die im Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz für den Riss verwendet wird,



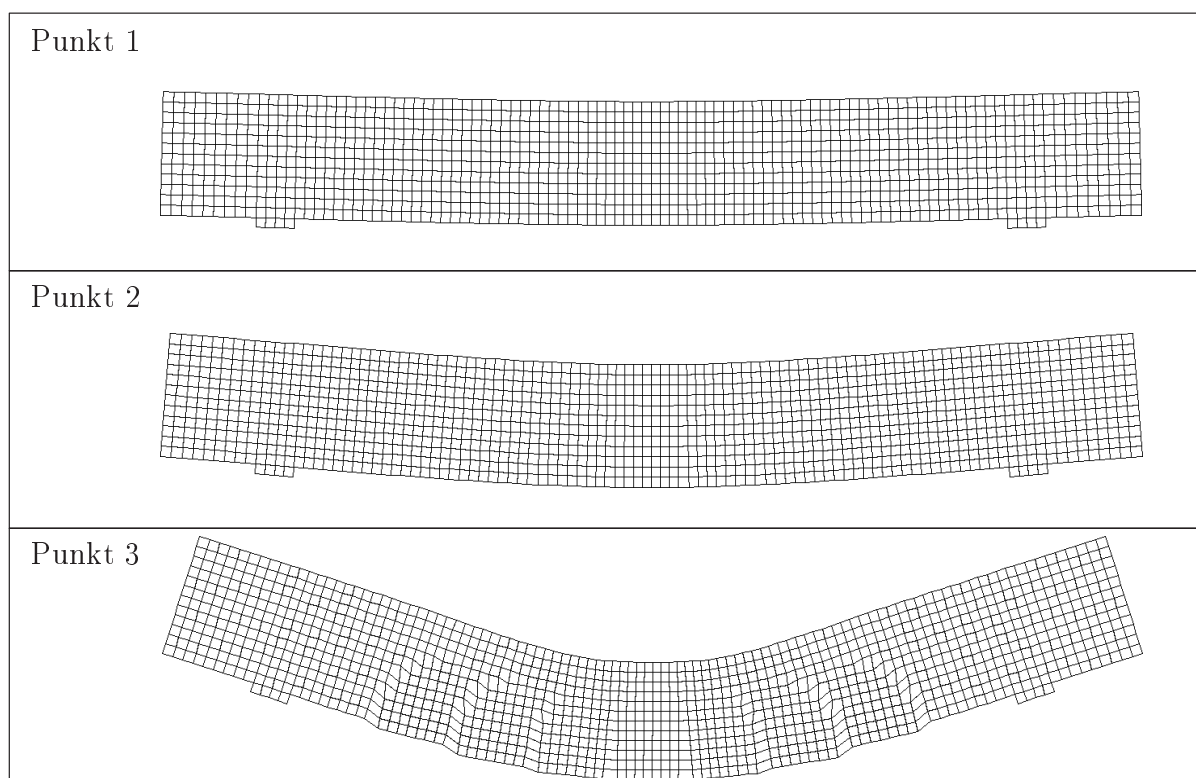


Abbildung 6.12: Deformationsentwicklung (100-fach überhöht)

berechnet sich über die Division der Fließgrenze des Stahls mit der dazugehörigen Verschiebung  $[[u]]_{\rho^*} = 0.17 \text{ mm}$  zu  $d_{\rho^*} = 1471 \text{ N/mm}^3$ . Die Abschirmzonen der Risse sind durch den Parameter  $R_{sz} = 180 \text{ mm}$  definiert.

Das Strukturproblem wird mit 1208 bilinearen Finiten Elementen diskretisiert, von denen insgesamt 8 Elemente die beiden Lagerplatten abbilden. Die 1200 Elemente, mit denen das Balkengebiet vernetzt wird, haben eine Größe von etwa  $h_e = 26 \text{ mm}$ . Die Rissrichtung wird über das in Kapitel 5.5.2 diskutierte spannungsbasierte Kriterium berechnet. Der Radius des Einflussgebietes wird in Abhängigkeit der charakteristischen Elementgröße vor der Risspitze als  $R_{nl} = 3 h_e$  angenommen. Entsprechend dem Versuch wird die Gesamtlast  $F$  an zwei Stellen je zur Hälfte aufgebracht. Die Berechnung wird verschiebungsgesteuert durchgeführt. Dabei wird die vertikale Verschiebung  $u$  am oberen Rand in der Mitte des Balkens kontrolliert, siehe Abbildung 6.10. Es wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt.

In Abbildung 6.11 sind die numerisch und experimentell ermittelten Last-Verschiebungskurven des bewehrten Betonbalkens gegenübergestellt. Es sei darauf hingewiesen, dass die Durchbiegung des Balkens im Versuch offensichtlich nicht am oberen Rand, sondern in der horizontalen Mittelachse gemessen wurde. Die Verformungsmoden beider Untersuchungen sind jedoch miteinander vergleichbar. Die Strukturantwort aus dem Versuch repräsentiert die graue, die aus der Simulation die schwarze Linie. Beide Kurven liegen ausgesprochen nahe beieinander.

Zur Darstellung der Deformationsentwicklung beim Versagen des Balkens sind in Abbildung 6.12 die deformierten Strukturen in 100-facher Überhöhung zu drei Belastungszuständen illustriert. Diese sind in Abbildung 6.11 markiert. Punkt 1 kennzeichnet

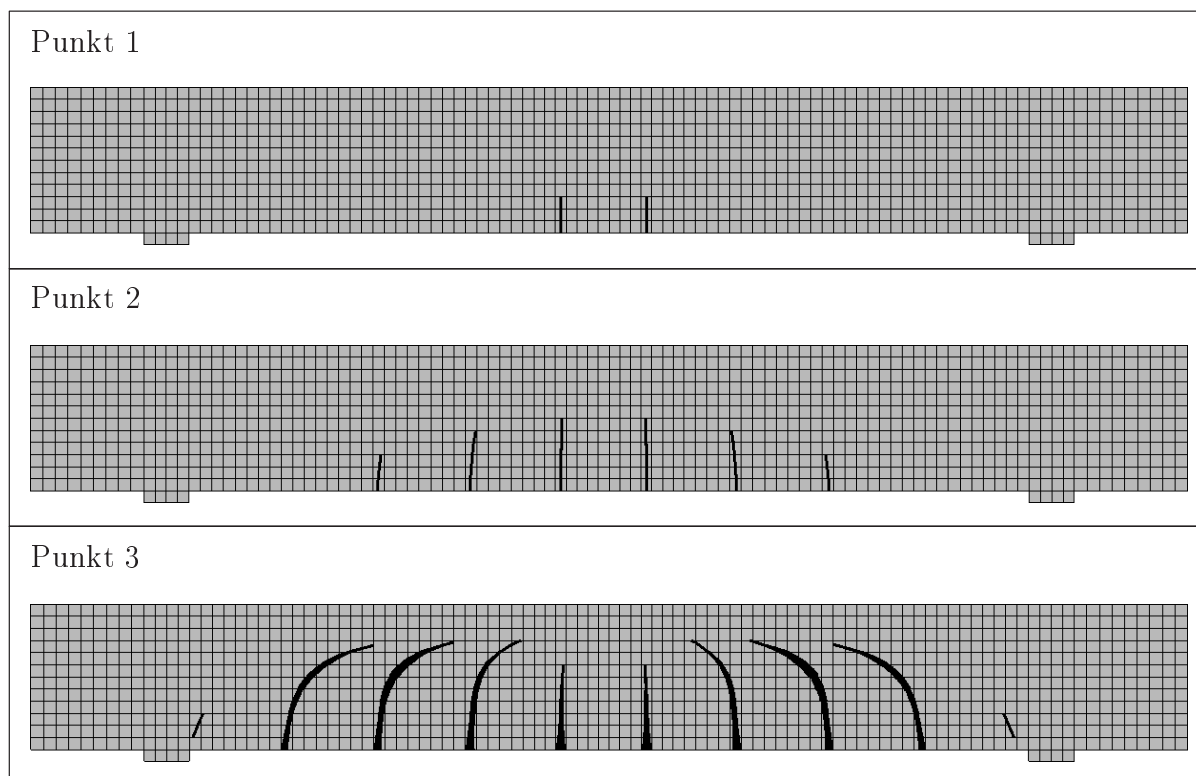


Abbildung 6.13: Risswachstum

einen Zustand anfänglichen Versagens. Da das deformierte Netz bei diesem Zustand noch eine gleichmäßige Verformung des Tragwerks zeigt, wird auf das entsprechende Rissbild 6.13 verwiesen. Anhand der Last-Verschiebungskurve erkennt man, dass die Abnahme der Struktursteifigkeit schon bei diesem Belastungszustand beginnt. Auch zum Belastungszeitpunkt 2 sind auf Grund des gewählten Überhöhungsfaktors noch kaum ungleichmäßige Verformungen feststellbar. Das dazugehörige Rissbild 6.13 zeigt jedoch, dass von der Mitte des Balkens nach außen hin neue Biegerisse entstanden sind. Punkt 3 kennzeichnet den Belastungszustand am Ende der Simulation, bei dem das deformierte Netz mehrere Bereiche mit größeren Deformationen aufweist. Wenn man die Darstellung der Balkendurchbiegung zum Belastungszeitpunkt 2 mit größerem Faktor überhöht und anschließend mit der Deformationsfigur 3 vergleicht, kann man erkennen, wie sich der Versagensmodus der äußeren Risse während der Belastung ändert. In den ursprünglich zugdominanten Rissen sind am Ende der Simulation relativ große Schubdeformationen konzentriert. Dies stimmt mit der experimentellen Beobachtung von *Leonhardt & Walther* [99] überein.

Das Versagen des Balkens soll durch die Rissbilder verdeutlicht werden. In Abbildung 6.13 sind die Rissbilder zu denselben drei Belastungszeitpunkten dargestellt, wie die deformierten Strukturen. Die Rissnormalöffnung ist mit 120-facher Überhöhung skaliert. Zur Veranschaulichung wenig geöffneter Risse wurde eine minimale Rissnormalöffnung festgelegt. Die Schädigung des Tragwerks beginnt mit der Entstehung von zwei senkrechten Rissen vom Mode-I Typ am unteren Rand in Balkenmitte, der den Bereich größter Biegezugbeanspruchung darstellt. Mit zunehmender Belastung wachsen diese Risse, ohne ihre Richtung merklich zu ändern. Gleichzeitig entstehen hauptsächlich durch Biegebe-

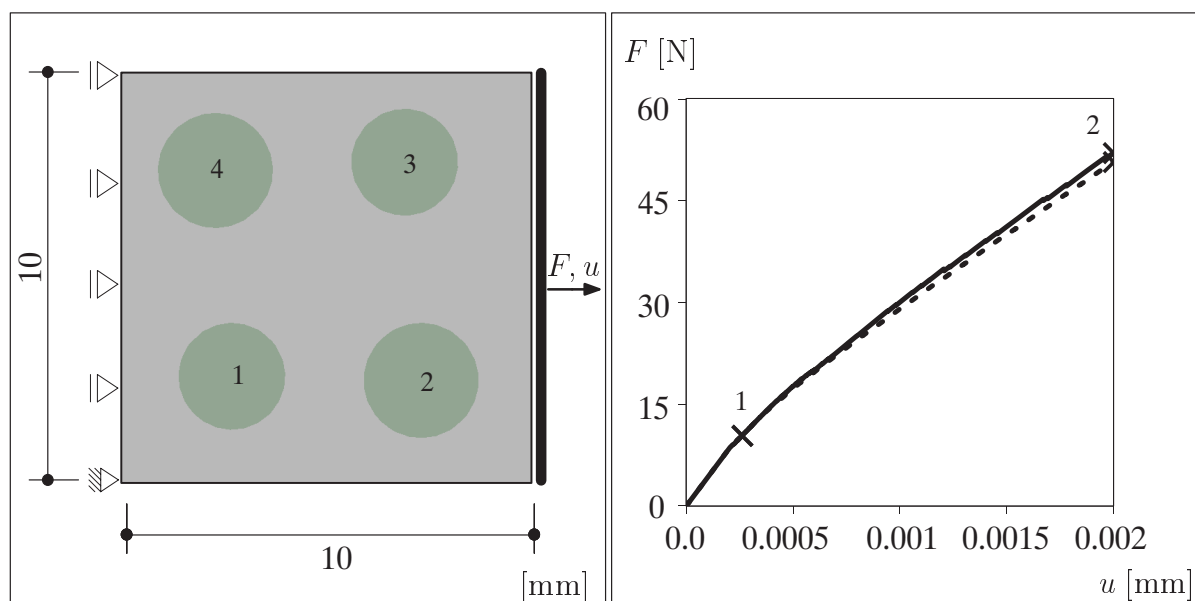


Abbildung 6.14: Problem und Last-Verschiebungskurven

lastung am unteren Strukturrand weitere Risse. Je näher die Risse an den schubbeanspruchten Auflagerbereichen liegen, desto gekrümmter ist ihr Verlauf in Richtung der beiden Lasteinleitungsorte. Zur Überprüfung der Qualität der numerischen Lösung wird das Rissbild aus der Simulation mit dem experimentell ermittelten Rissmuster verglichen, siehe Abbildung 6.9. Die Richtungsänderung der Risse, die im Experiment beobachtet wurde, kann ausreichend genau erfasst werden. Jedoch ist anzumerken, dass im Gegensatz zum Versuch kein extrem dominanter Riss auszumachen ist, der die anderen Risse von oben her abschirmt. Trotzdem ist die erweiterte Finite Element Methode in Verbindung mit den verwendeten Materialmodellen in der Lage, das komplexe Versagen der Struktur wiederzugeben. Davon zeugt insbesondere die sehr gute Übereinstimmung der Last-Verschiebungskurven aus der Simulation und dem Versuch.

## 6.4 Ablöseprozesse in einer Verbundstruktur

In diesem Abschnitt wird anhand von zwei Beispielen die Wirkungsweise des vorgestellten erweiterten Finite Element Modells zur Simulation von Grenzflächenversagen untersucht. Bei den Beispielen handelt es sich um eine quadratische Scheibe gleichen Typs, auf die verschiebungskontrolliert zwei unterschiedliche Belastungszustände aufgebracht werden. In der ersten Simulation wird die Scheibe mit einaxialen Zugspannungen belastet. In der zweiten Berechnung wird ein einfacher Schubversuch durchgeführt. In den Simulationen wird die Struktur solange belastet, bis die Ablösung der Fasern weitgehend abgeschlossen ist. Für die Durchführung der numerischen Analysen werden zwei unterschiedliche Diskretisierungen benutzt. Die grobe Diskretisierung besteht aus  $30 \times 30$  Elementen. Das feine Netz wird von  $60 \times 60$  Elementen gebildet. Beide Netze sind strukturiert und nicht an die Fasergeometrie angepasst. Da die Scheibe ein Querschnittssegment einer länglichen Faserverbundstruktur beschreibt, wird ein ebener Verzerrungszustand vorausgesetzt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass mit dem verwendeten numerischen Modell keine zusätzlichen elastischen Deformationen in der Verbundfläche zwischen den

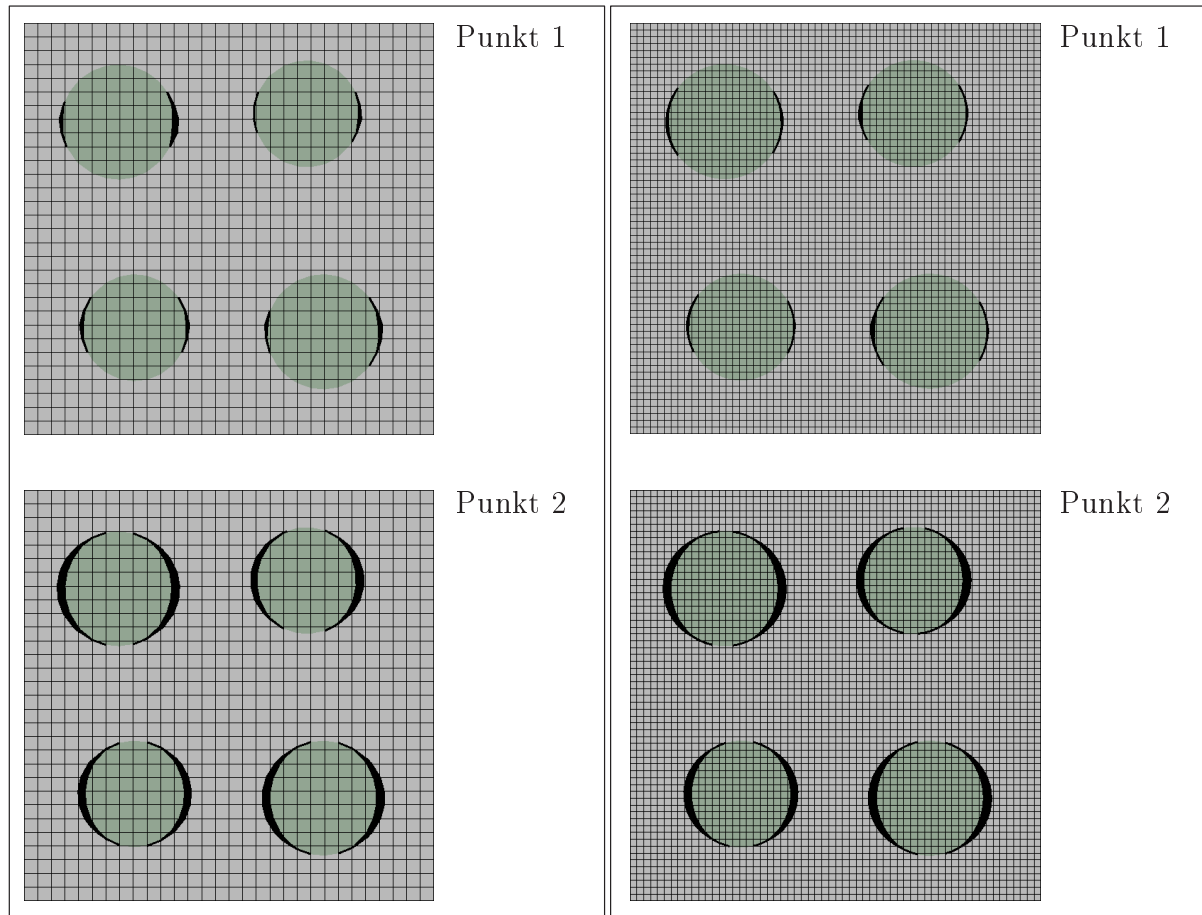


Abbildung 6.15: Risswachstum bei grober und feiner Diskretisierung

beiden Festkörperphasen erzeugt werden und das Verschiebungsfeld vor dem Auftreten der lokalen Entfestigung kontinuierlich ist. Bevor das Versagen der materiellen Grenzfläche mit der Abnahme der Spannungen eintritt, die über sie übertragen werden können, besteht ein perfekter Verbund zwischen Matrix- und Fasermaterial.

Die untersuchte Scheibe besitzt eine Fläche von  $10 \times 10 \text{ mm}^2$  und ist  $1 \text{ mm}$  dick. Sie besteht aus einer Betonmatrix, die durch vier kreisförmige Fasern verstärkt wird. Die Fasergeometrie wird durch eine einzige Level Set Funktion  $\phi_m$  beschrieben, die mittels der Anwendung von Gleichung (3.8) aus den vier Level Set Funktionen  $\phi_{m,i}$  zur Darstellung der vier Fasern generiert wird, siehe Gleichung (3.7). Die vier Grenzflächen werden somit nicht unabhängig voneinander modelliert. Ihre Anzahl im Gebiet reduziert sich formal auf eine einzige, so dass im Verschiebungsansatz (2.5) für den Parameter  $n_m = 1$  gilt. Jede der vier Level Set Funktionen  $\phi_{m,i}$  ergibt sich aus den Mittelpunktsvektoren  $\mathbf{x}_{0,i}$  und den Radien  $r_i$  der Fasern:  $\mathbf{x}_{0,1} = (2.70 \ 2.60)^T$  und  $r_1 = 1.30 \text{ mm}$ ,  $\mathbf{x}_{0,2} = (7.30 \ 2.50)^T$  und  $r_2 = 1.40 \text{ mm}$ ,  $\mathbf{x}_{0,3} = (6.90 \ 7.80)^T$  und  $r_3 = 1.30 \text{ mm}$  sowie  $\mathbf{x}_{0,4} = (2.30 \ 7.60)^T$  und  $r_4 = 1.40 \text{ mm}$ . Alle Einträge der Ortsvektoren sind in der Einheit Millimeter angegeben und beziehen sich auf ein globales Koordinatensystem, dessen Ursprung in der linken unteren Ecke der Struktur liegt. Die Indizes 1–4 entsprechen der Fasernummerierung, die in den Abbildungen 6.14 und 6.17 angegeben ist.

Die Betonmatrix ist durch den Elastizitätsmodul  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl  $\nu = 0.2$  charakterisiert. Es wird angenommen, dass sich die Betonmatrix und die

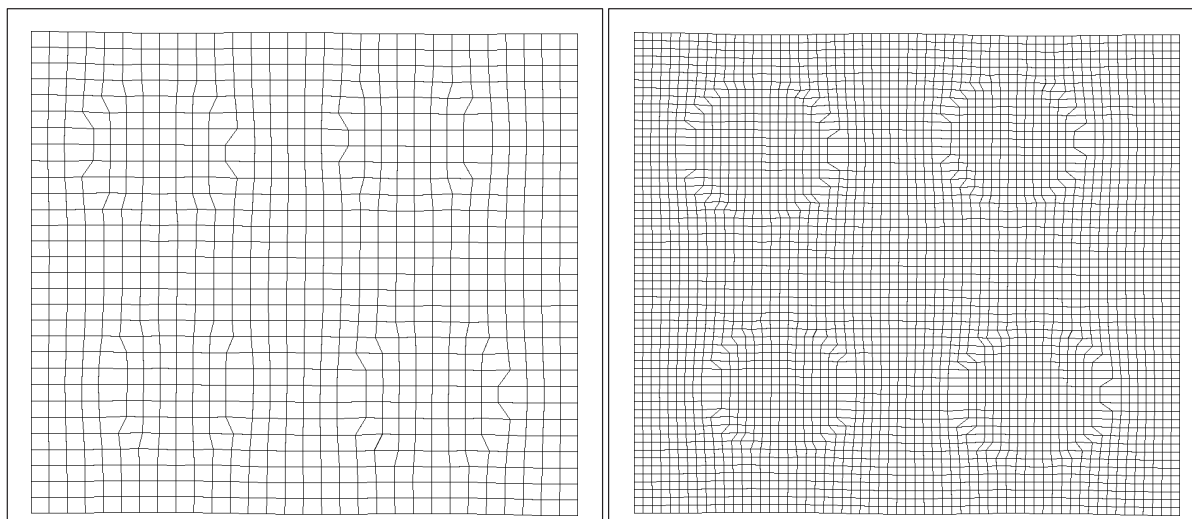


Abbildung 6.16: Deformierte Strukturen bei grober und feiner Diskretisierung

Fasern isotrop elastisch verhalten und nie versagen. Für die Materialbeschreibung der Fasern reicht somit auch der Elastizitätsmodul  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl  $\nu = 0.2$  aus. Die Fasern haben in Bezug auf die Betonmatrix die Bedeutung von harten Einschlüssen, da ihr Elastizitätsmodul doppelt so hoch ist. Im Kohäsivzonenmodell zur Versagensmodellierung der materiellen Grenzflächen werden die folgenden Materialkennwerte verwendet. Die Bruchenergie wird zu  $G_f = 0.05 \text{ N/mm}$  angenommen. Die Zugfestigkeit wird als  $c_n = 1.0 \text{ N/mm}^2$  spezifiziert. Die Schubfestigkeit ist durch den Parameter  $c_T = 2.0 \text{ N/mm}^2$  bestimmt, so dass für das Verhältnis beider Festigkeiten  $\beta = 2.0$  gilt. Die elastische Steifigkeit im Falle der Rissbildung unter Druckbeanspruchung wird zu  $d_n = 10^6 \text{ N/mm}^3$  gewählt.

Zur besseren Veranschaulichung der Verläufe wenig geöffneten Risse wird in den Rissbildern eine minimale Rissnormalöffnung definiert.

### Einaxialer Zug

In Abbildung 6.14 sind die Geometrie und die Belastung der faserverstärkten Scheibe sowie das Last-Verschiebungsdiagramm angegeben. Die Scheibe wird an ihrem gesamten rechten Rand mit einaxialen Zugspannungen belastet. Dabei kann sich der belastete Rand in vertikaler Richtung frei verformen. Die externe Last wird so aufgebracht, dass alle Punkte des belasteten Randes dieselbe horizontale Verschiebung aufweisen. Die durchgezogene Kurve repräsentiert die Lösung bei Verwendung der groben Diskretisierung. Die gestrichelte Linie spezifiziert das Ergebnis, das mit dem feinen Finite Element Netz erzielt wurde. Beide Simulationen wurden mit derselben Anzahl und Größe der Verschiebungsinkremente durchgeführt. Wie zu erkennen ist, liegen die Lösungen sehr nahe beieinander. Dies gilt nicht nur für den elastischen, sondern auch für den inelastischen Bereich, der mit dem Einsetzen des Ablösens der Fasern beginnt.

In Abbildung 6.15 sind die Rissbilder für beide Diskretisierungen zu den zwei Belastungszeitpunkten illustriert, die im Last-Verschiebungsdiagramm 6.14 markiert sind. Die Rissbilder unter Punkt 1 kennzeichnen einen anfänglichen Versagenszustand. Dabei ist die Normalöffnung der Risse mit 5000-facher Überhöhung skaliert. Der Ablöseprozess

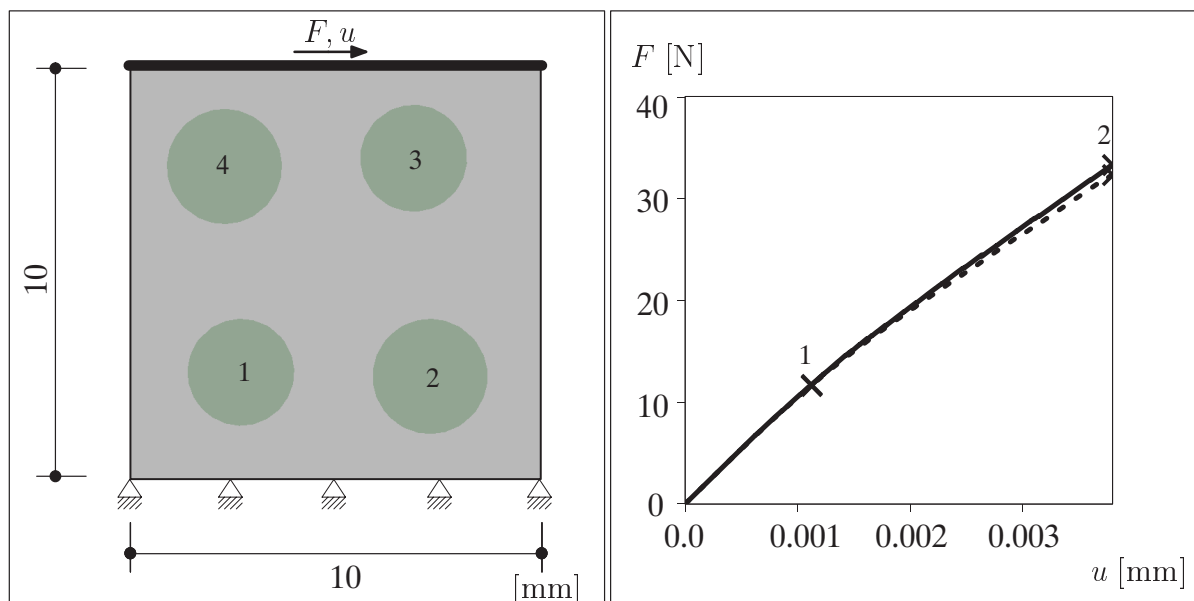


Abbildung 6.17: Problem und Last-Verschiebungskurven

beginnt immer an den Stellen, wo das Versagenkriterium für Grenzflächenrisse zuerst erfüllt ist. Offensichtlich ist dies für Bereiche der Fall, bei denen der Normalenvektor der Verbundfläche ungefähr in Belastungsrichtung zeigt. Die Rissbilder unter Punkt 2 repräsentieren den Versagenszustand am Ende der Belastung. Die Normalöffnung der Risse ist 500-fach überhöht dargestellt. Die Risse sind auf Grund der Belastungszunahme entlang der gekrümmten Grenzflächen in Bereiche mit Zug-Schub-Belastung gewachsen. Dadurch wurden die Grenzflächen fast vollständig geschädigt. Die dazugehörigen deformierten Strukturen in 600-facher Überhöhung geben die Rissverläufe sehr gut wieder, siehe Abbildung 6.16.

Durch das Grenzflächenversagen hat die Steifigkeit der Verbundstruktur laut den Simulationen bei Verwendung der groben Diskretisierung um zirka 45% und bei Verwendung der feinen Diskretisierung um zirka 48% abgenommen. Allerdings bleibt sie weiterhin in der Lage, die äußeren Kräfte aufzunehmen. Anhand der großen Übereinstimmung der numerischen Lösungen für beide Diskretisierungen in den Last-Verschiebungskurven, den Rissbildern und den deformierten Strukturen kann die Behauptung gerechtfertigt werden, dass mit dem erweiterten Finite Element Modell auch für Grenzflächenrisse diskretisierungsunabhängige Lösungen erzielt werden können.

### Einfache Scherung

In Abbildung 6.17 sind die Geometrie sowie die Belastung und Lagerung der Scheibe neben den numerisch ermittelten Last-Verschiebungskurven dargestellt. Es wird ein einfacher Schubversuch durchgeführt. Die vertikale Verformung am belasteten Rand wird behindert. Die externe Last wird so aufgebracht, dass alle materiellen Punkte des belasteten Randes dieselbe horizontale Verschiebung erfahren. Die durchgezogene Last-Verschiebungskurve repräsentiert die Lösung bei Verwendung der groben Diskretisierung. Die gestrichelte Linie beschreibt das Ergebnis, das mit dem feinen Finite Element Netz erzielt wurde. Beide Simulationen wurden mit derselben Anzahl und Größe der Verschiebungsinckremente durchgeführt. Auch in diesem Verifikationsbeispiel liegen die Lösungen sehr nahe

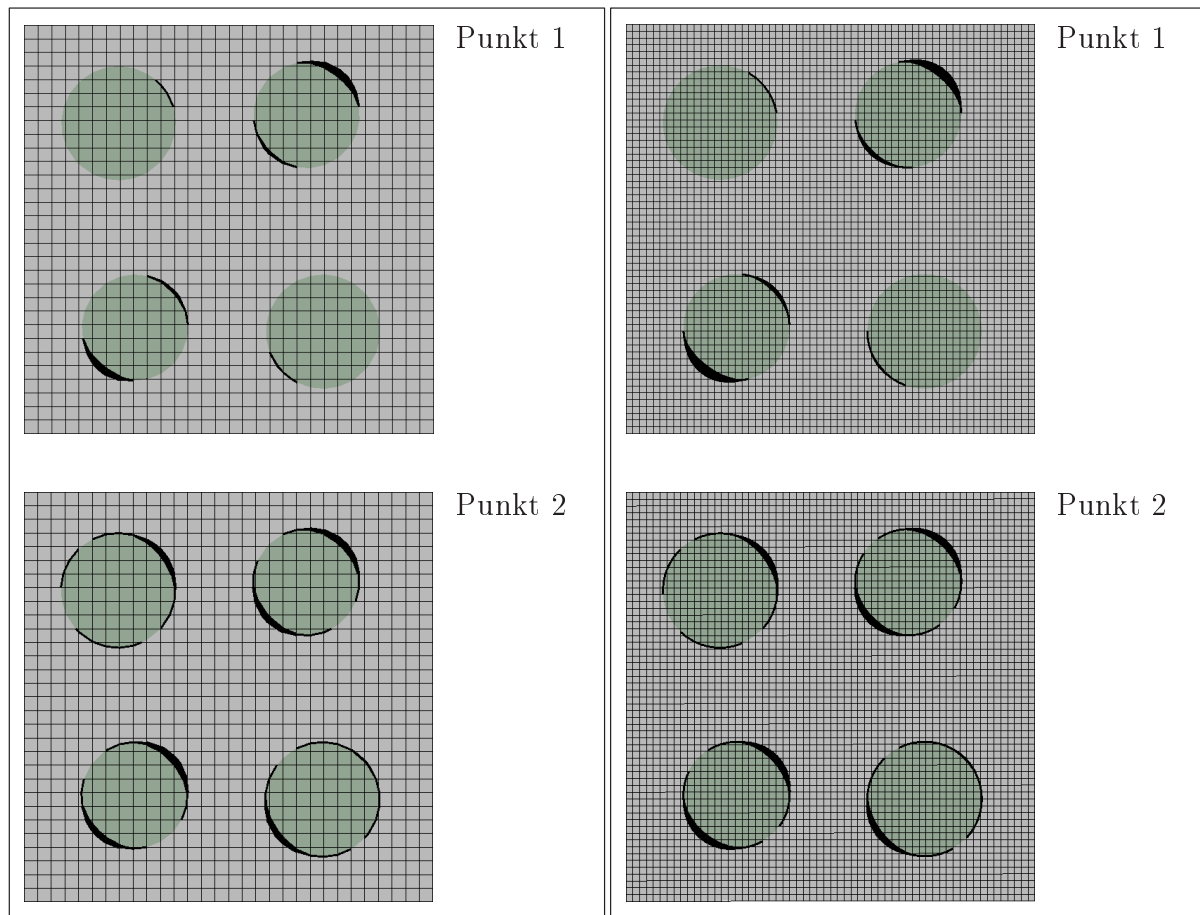


Abbildung 6.18: Risswachstum bei grober und feiner Diskretisierung

beieinander.

Abbildung 6.18 zeigt für beide Diskretisierungen die Versagensentwicklung der Verbundstruktur anhand von zwei Zuständen, die in Abbildung 6.17 markiert sind. Die Normalöffnung der Risse ist in den Rissbildern unter Punkt 1 zur besseren Veranschaulichung in 3000-facher Überhöhung dargestellt. Diese Rissbilder illustrieren einen Zustand anfänglichen Versagens, wobei das Ablösen der Fasern von der Matrix schon an mehreren Stellen begonnen hat. Im Versagenskriterium für Grenzflächenrisse wurde eingeführt, dass Druckspannungen nicht zur Rissinitiierung beitragen. Da die Schubfestigkeit der Grenzflächen doppelt so groß ist wie ihre Zugfestigkeit, entstehen Risse zuerst in den Bereichen, wo Zugspannungen vorherrschen. Die größten Zugspannungen sind dort zu finden, wo die materielle Grenzfläche senkrecht zur Richtung der maximalen Hauptspannung steht. In diesem Beispiel wirken die maximalen Hauptspannungen etwa unter einem Winkel von  $45^\circ$ , gemessen in Bezug auf die Belastungsrichtung.

In den Rissbildern unter Punkt 2 ist die Normalöffnung der Risse 500-fach überhöht dargestellt. Zum einen erkennt man, dass die ersten, zugspannungsinitierten Risse entlang der kreisrunden Fasern über Bereiche mit Zug-Schub- in Bereiche mit Druck-Schub-Bbeanspruchung gewachsen sind. Zum anderen ist ersichtlich, dass neue Risse durch Mode-II Versagen entstanden sind. Dies kann sehr schön an der linken oberen Faser beobachtet werden. Im Gegensatz zur linken oberen Faser kommt es bei der rechten unteren Faser noch zur Koaleszenz der beiden schubspannungsinitierten Risse. Die Klassifizierung des

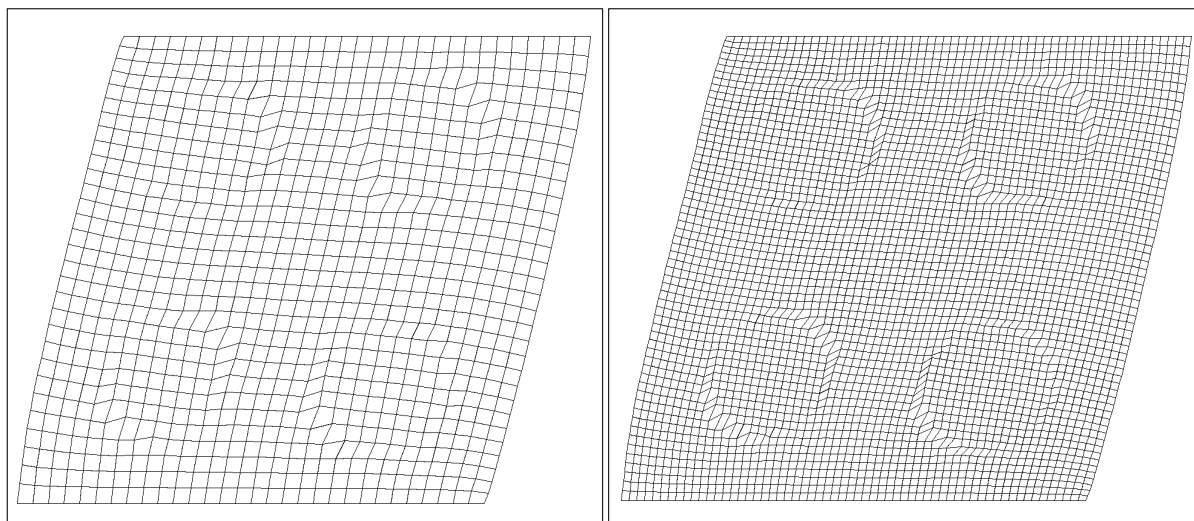


Abbildung 6.19: Deformierte Strukturen bei grober und feiner Diskretisierung

Versagensmodus bzw. der Risse kann sich im vorkritischen Bereich bei stetiger äußerer Belastung an der Rissnormalöffnung orientieren. Die Enden der zugspannungsiniierten Risse und die neu dazu gekommenen Risse sind nur deshalb sichtbar, weil bei der Visualisierung eine minimale Rissnormalöffnung definiert wurde. Durch die entsprechenden Deformationsfiguren, die 600-fach überhöht dargestellt sind, wird deutlich, dass die Risse in den Bereichen mit Druck-Schub-Beanspruchung eine Scherfuge zwischen Faser und Matrixmaterial bilden, siehe Abbildung 6.19.

Die Last-Verschiebungskurven 6.17 zeigen, dass die Steifigkeitsabnahme der Verbundstruktur auf Grund von Grenzflächenversagen im Vergleich zum vorherigen Zugproblem geringer ausfällt. Sie beträgt den Simulationen zufolge bei Verwendung der groben Diskretisierung nur noch zirka 28% und bei Verwendung der feinen Diskretisierung noch zirka 31%. Die Last-Verschiebungskurven und die Rissbilder sowie die deformierten Strukturen bekräftigen die Aussage, dass mit dem verwendeten numerischen Modell Objektivität bezüglich der gewählten Diskretisierung garantiert wird.

## 6.5 Verbundstruktur unter Zugbelastung

Mit diesem Strukturbeispiel wird die Qualität der erweiterten Finite Element Methode zur numerischen Modellierung des Wachstums mehrerer Risse in Verbundmaterialien untersucht. Dabei ist das Versagen nicht wie bei dem vorherigen Beispiel 6.4 auf die materielle Grenzfläche beschränkt, sondern kann auch das Matrixmaterial betreffen. Da die Netzunabhängigkeit der Lösungen bei Matrix- oder Grenzflächenversagen anhand verschiedener Verifikationsbeispiele nachgewiesen wurde, wird auf die Diskussion dieser Fragestellung hier verzichtet. Stattdessen wird die Struktur mit einer einzigen Diskretisierung untersucht, die aus  $60 \times 60$  Finiten Elementen mit einer Größe von ca.  $h_e = 0.17$  mm besteht. Das Rechnetz ist strukturiert und gleichförmig, da es auf Grund der verwendeten numerischen Methode nicht an die Fasergeometrie angepasst werden muss.

Die Materialverteilung und die Belastung der Verbundstruktur sind in Abbildung 6.20 dargestellt. Es handelt sich um dieselbe faserverstärkte Betonprobe unter einaxialer Zugbelastung in einem ebenen Verzerrungszustand wie in Beispiel 6.4. Die elastischen Para-



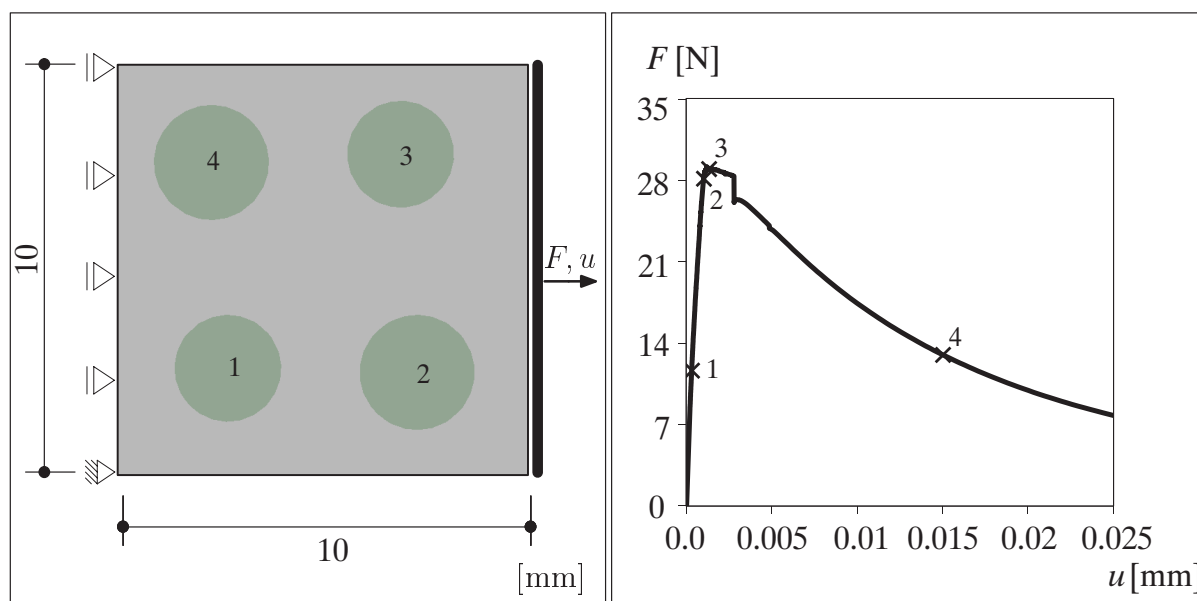


Abbildung 6.20: Problem und Last-Verschiebungskurve

meter des Matrix- und des Fasermaterials sowie die Materialkennwerte für das Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz zur Modellierung kohäsiver Grenzflächenrisse sind in Beispiel 6.4 angegeben. Für das Kohäsivzonenmodell zur Beschreibung von Mode-I dominantem Versagen werden die folgenden Parameter verwendet. Die Zugfestigkeit des Betons wird zu  $f_t = 4.0 \text{ N/mm}^2$  angenommen und ist somit 4-mal so groß wie die Zugfestigkeit der materiellen Grenzflächen. Die Bruchenergie entspricht mit  $G_f = 0.05 \text{ N/mm}$  der Bruchenergie, die pro Quadratmillimeter Grenzflächenriss dissipiert wird. Die anfängliche Steifigkeit in tangentialer Rissrichtung ist durch den Parameter  $d_T = 1.0 \text{ N/mm}^3$  gegeben. Eine Degradation der tangentialen Steifigkeit wird ausgeschlossen, so dass  $h_T = 0.0/\text{mm}$  gilt. Zur Ermittlung der Normalen eines Matrixrisses werden die „nicht-lokalen“ Spannungen bezüglich der Risspitze benötigt. Diese ergeben sich aus der Integration des gewichteten Spannungsfeldes über ein kreisförmiges Gebiet, dessen Radius in Abhängigkeit der Größe eines Finiten Elementes als  $R_{nl} = 3 h_e$  angenommen wird. Um die Robustheit des Simulationsverfahrens bei mehrfacher Matrixrissbildung zu erhöhen, werden Abschirmzonen um die Matrixrisse etabliert. Die Abschirmzonen sind durch den Parameter  $R_{sz} = 3 h_e$  definiert, der in diesem Beispiel in Abhängigkeit der charakteristischen Elementgröße bestimmt wird.

Zur Darstellung des simulierten Bruchverhaltens sind in Abbildung 6.21 die Verläufe von zwanzig verfolgten Matrixrissen zu vier Belastungszeitpunkten abgebildet. Die Dicke eines Risses stellt seine Normalöffnung dar, die mit geeigneten Faktoren multipliziert wird. Um auch kleine Rissnormalöffnungen sichtbar zu machen, wird eine minimale Rissnormalöffnung definiert. Die vier Belastungszeitpunkte sind in der Last-Verschiebungskurve markiert, siehe Abbildung 6.20. Die untersuchte Verbundstruktur ist vorwiegend durch Zugspannungen belastet. Da die Zugfestigkeit der materiellen Grenzflächen geringer gewählt wurde als die der Betonmatrix, entstehen zunächst Risse, die entlang der gekrümmten Grenzflächen wachsen, siehe Punkt 1 in Abbildung 6.21. Wie schon in Beispiel 6.4 beobachtet wurde, wird dadurch die Steifigkeit der Gesamtstruktur leicht abgemindert. Eine Steigerung der äußeren Last ist jedoch möglich. Auf Grund der Spannungskonzen-

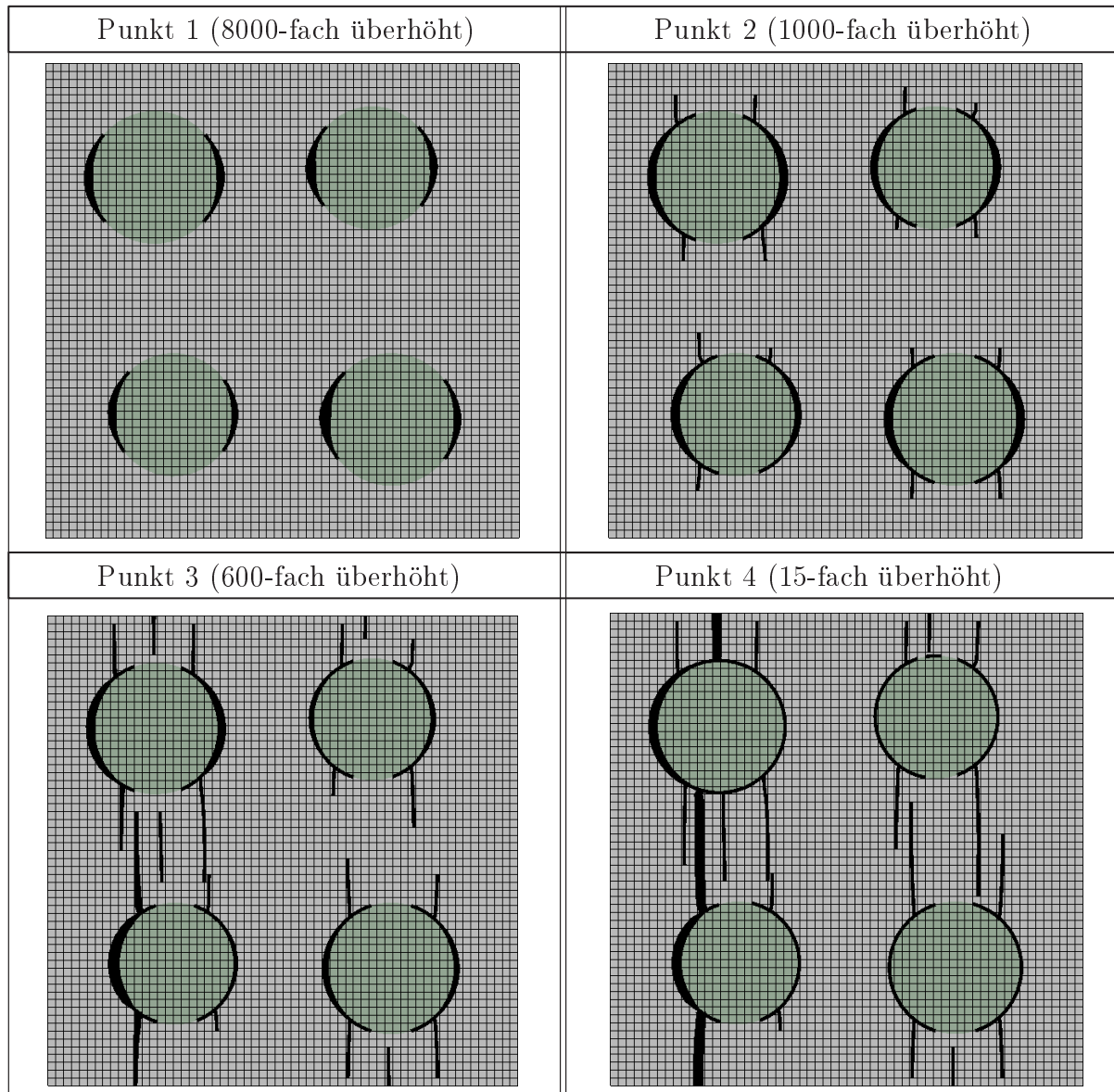


Abbildung 6.21: Risswachstum

trationen an den Spitzen der Grenzflächenrisse verzweigen diese bei Erfüllung des Initiierungskriteriums für Matrixrisse in den Beton, siehe Punkt 2 in Abbildung 6.21. Die Matrixrisse wachsen orthogonal zur Hauptspannungsrichtung des über das Rissspitzennahfeld ermittelten „nicht-lokalen“ Spannungstensors. Diese entspricht in etwa der Belastungsrichtung. Weitere Rissegmente entstehen in noch ungeschädigten Bereichen, wo die äußere Last wegen höherer Steifigkeit angezogen wird. Diese Bereiche befinden sich zwischen der linken oberen und der linken unteren Faser sowie an diversen Stellen am oberen und unteren Rand der Struktur, siehe Punkt 3 in Abbildung 6.21. Bei diesem Versagenszustand ist die von der Struktur maximal aufnehmbare Last erreicht. Das Wachstum einzelner Matrixrisse endet jedoch erst mit der Bildung eines kontinuierlichen Risses. Dieser entsteht aus der Koaleszenz von drei Matrixrisse mit zwei Grenzflächenrisse, siehe Abbildung 6.21 unter Punkt 4. Der Vorgang wird durch einen kleinen Sprung in der Last-Verschiebungskurve bei einer horizontalen Verschiebung von  $u = 0.00278$  mm

angezeigt. Ab diesem Zeitpunkt lokalisieren die Deformationen in dem kontinuierlichen Riss. Alle anderen Risse werden inaktiv und schließen sich. Sie leisten keinen Beitrag mehr zur Dissipation der Struktur.

Anhand der faserverstärkten Scheibe lassen sich verschiedene Versagensphänomene beobachten. Beispielsweise zeigt sich, dass sich Risse gegenseitig abschirmen können. Dieser Abschirmmechanismus wird im oberen und unteren Bereich der Struktur deutlich. Die am Rand entstandenen Risssegmente sorgen dafür, dass die in Matrixrisse verzweigten Grenzflächenrisse aufhören, weiter zu wachsen. Des Weiteren lässt sich feststellen, dass vorhandene Risse durch Spannungskonzentrationen an ihrer Spitze neue Risse auslösen können.



# Kapitel 7

## Hierarchisches Zweiskalenmodell

In diesem Kapitel wird ein hierarchisches Zweiskalenmodell hergeleitet und diskutiert. Dieses Modell basiert auf der lokalen Anreicherung der gewöhnlichen Lösung mit einer feinskaligen Komponente, die diskontinuierliche Anteile enthält. Mittels des Zweiskalenmodells soll die Durchführung effizienter numerischer Versagensanalysen von makroskopischen Verbundstrukturen unter direkter Berücksichtigung mesoskopischer Phänomene in Form von kohäsiven Rissen und materiellen Grenzflächen ermöglicht werden. Die Einführung und Umsetzung der X-FEM zur Diskretisierung der diskontinuierlichen Feinskalenlösung stellt die Grundidee der Weiterentwicklung des Zweiskalenmodells von *Hund & Ramm* [81] und einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Das erweiterte Finite Element Modell wird durch die Anwendung von Level Set Techniken zur geometrischen Beschreibung von materiellen Grenzflächen und Rissen unterstützt, vergleiche Kapitel 4. Die gewöhnliche Lösungskomponente wird mittels der standardmäßigen Finite Element Methode approximiert. Die Ausführungen orientieren sich an *Ramm, Hund & Hettich* [149] und *Hettich, Hund & Ramm* [72].

Zunächst werden verschiedene Mehrskalenmethoden skizziert, um die hierarchische Zweiskalenformulierung einordnen zu können. Dann wird das Zweiskalenproblem vorgestellt. Nachdem die schwache Form des Gleichgewichts angegeben wurde, wird auf die Diskretisierung und Linearisierung der zugrunde liegenden Gleichungen eingegangen. Abschließend werden einige wichtige Aspekte der Implementierung des Zweiskalenmodells erläutert.

### 7.1 Anmerkungen zur Mehrskalenmodellierung

Im Rahmen einer makroskopischen Betrachtungsweise werden ganze Tragwerke bzw. einzelne Tragelemente häufig als homogene Kontinua idealisiert. Dabei kann man von einer Idealisierung sprechen, weil der strukturelle Aufbau des Konstruktionsmaterials bei jedem beliebigem Werkstoff und erst recht bei Verbundwerkstoffen als heterogen bezeichnet werden kann, wenn eine ausreichend kleine Auflösung gewählt wird. In der idealisierten Beschreibung werden der strukturelle Aufbau des Materials sowie seine Beanspruchung in Form von lokalen Spannungen oder Verzerrungen als gleichmäßig angenommen. Detaillierte Kenntnisse über den materiellen Aufbau und über Versagensmechanismen, die sich auf der Mesoskala ereignen, gehen bei dieser Art der Modellierung verloren. Um das makroskopische Verhalten von Strukturen trotzdem einigermaßen genau wiedergeben zu können, müssen charakteristische Eigenschaften des mesoskopischen Materialaufbaus berücksichtigt werden. Hierfür sind oft komplexe makroskopische Materialmodelle nötig. Diese Modelle können zu Schwierigkeiten bei der Identifikation und der physikalischen Interpretation der verwendeten Variablen führen. Mehrskalenmodelle ermöglichen eine einfache und natürliche Beschreibung des Materialverhaltens auf einer charakteristischen

Skala und den Transfer der Materialantwort auf die Strukturebene. Ein Überblick über die Multi-Skalen-Modellierung von Konstruktionen und den zugehörigen adaptiven Finite Element Methoden findet sich in *Wriggers & Stein* [195].

### Homogenisierungsbasierte Methoden

Homogenisierungsbasierte Methoden stellen Mehrskalenverfahren dar, mit denen das strukturelle Verhalten eines Kontinuums auf Makroebene durch die unmittelbare Modellierung von mechanischen Vorgängen, die sich auf der Mesoskala abspielen, beschrieben werden kann. Diese Methoden basieren auf der Einführung eines repräsentativen Volumenelementes (RVE). Das RVE ist für einen Punkt des Kontinuums als materielles Volumen definiert, das in Bezug auf die lokalen Eigenschaften des Kontinuums statistisch repräsentativ ist. Das makroskopische Materialverhalten wird mittels geeigneter Modelle abgebildet, die auf der Verwendung von effektiven Ersatzgrößen gründen. Die Ersatzgrößen werden durch Mittelungsbildung von charakteristischen Feldgrößen der Mesostruktur im RVE gewonnen, siehe *Hill* [74], *Hashin* [70] und *Nemat-Nasser & Hori* [127]. Klassische Homogenisierungsmethoden basieren auf der Annahme einer eindeutigen Skalenseparation. Die Trennung von Meso- und Makroskala ist dann eindeutig und ausreichend, wenn die makroskopischen Feldgrößen in einem Teilausschnitt der Mesostruktur als konstant angenommen werden können. Es sei darauf hingewiesen, dass die Annahme einer ausreichenden Skalenseparation nicht immer gültig ist beziehungsweise während der Belastung gültig bleibt. Beispielsweise geht die Gültigkeit der Skalenseparation bei Versagensprozessen verloren, die lokal auf Mesoebene initiiert werden und sich zu makroskopischen Phänomenen entwickeln.

Homogenisierungsverfahren können für verschiedene Problemstellungen eingesetzt werden. Eine Möglichkeit ist ihre Verwendung bei der Formulierung von makroskopischen Konstitutivgesetzen. Zur Bestimmung effektiver Materialparameter eines Verbundwerkstoffes, der aus mehreren linear elastischen Konstituierenden besteht, können unterschiedliche Methoden benutzt werden. Als einfachste Methode gilt die Mischungstheorie. Daneben existieren weitere Näherungsverfahren. Dazu gehören die Selbstkonsistente Methode von *Hill* [75] sowie die von *Eshelby* [49] und *Mori & Tanaka* [118] eingeführten Methoden. Außerdem stehen energiebasierte Variationsformulierungen zur Verfügung, die allerdings nur obere und untere Schranken für effektive Elastizitätsmoduli liefern, siehe *Voigt* [188], *Reuss* [154] und *Hashin & Shtrikman* [71]. Die Herleitung von makroskopischen Werkstoffgesetzen aus dem mechanischen Verhalten eines RVE für elementare Belastungszustände ist bei nichtlinearen Problemen, bei denen die Gültigkeit des Superpositionsprinzips verloren geht, weitaus schwieriger. Bei inelastischem Materialverhalten werden interne Variablen zur phänomenologischen Beschreibung der Vorgänge auf der Mesoskala eingeführt. In *Döbert* [40] wurden die Materialparameter eines makroskopischen Werkstoffgesetzes zur Modellierung des inelastischen Verhaltens von Verbundmaterialien infolge Schädigung mittels Parameteridentifikation aus numerisch ermittelten effektiven Antworten eines RVE bestimmt. Für einen umfassenden Überblick über computerorientierte Homogenisierung sei auf *Zohdi & Wriggers* [200] verwiesen.

In diesem Zusammenhang ist die homogenisierungsbasierte Mehrskalenmethode zu nennen, die von *Schröder* [163] vorgeschlagen wurde. Auf die Entwicklung von makroskopischen Materialmodellen wird bei dieser Methode verzichtet. Stattdessen wird an jedem Integrationspunkt des Makrokontinuums das lokale Randwertproblem des RVE gelöst,

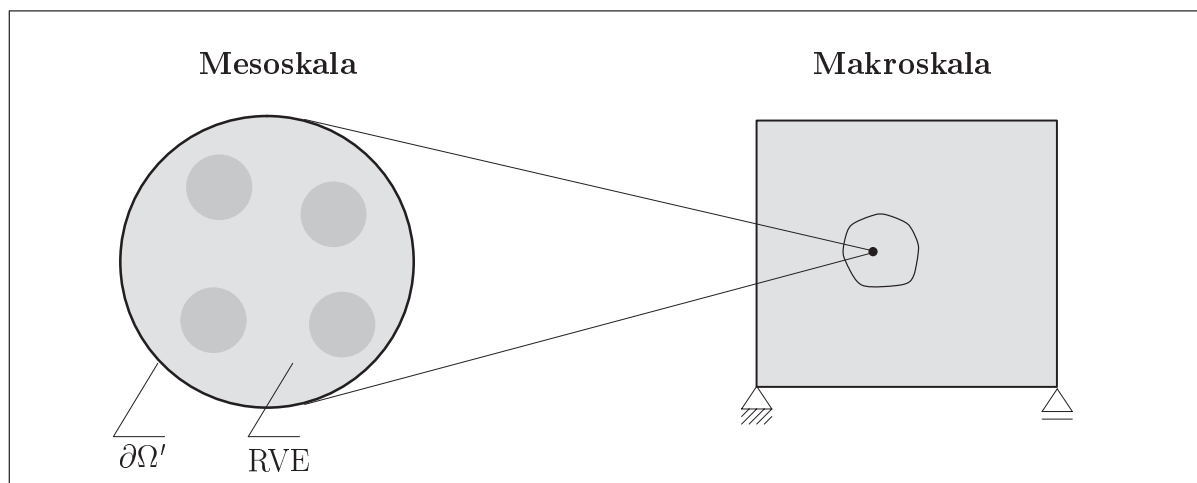


Abbildung 7.1: Homogenisierungsbasiertes Zweiskalenproblem

siehe Abbildung 7.1. Anschließend werden durch Homogenisierung die effektiven makroskopischen Feldgrößen berechnet. Es ist offensichtlich, dass diese Mehrskalenmethode vergleichsweise rechenintensiv und zeitaufwendig ist, insbesondere wenn das RVE groß sein muss, um statistisch repräsentativ zu sein. Durch die Einschränkung der Anwendung der Methode auf charakteristische Bereiche der Makrostruktur und den Einsatz geeigneter makroskopischer Werkstoffgesetze im restlichen Strukturgebiet könnte Rechenzeit reduziert werden, vergleiche Kapitel 7.2.

Zur Definition des lokalen Randwertproblems auf der Mesoebene gehört die Formulierung geeigneter Randbedingungen auf dem Rand  $\partial\Omega'$  des RVE. Dabei kann man zwischen homogenen und periodischen Randbedingungen unterscheiden. Die homogene Randbedingung kann als Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung aufgebracht werden. Bei der periodischen Randbedingung werden am Rand des RVE die Periodizität der mesoskopischen Verschiebungen und gleichzeitig die Antiperiodizität der mesoskopischen Spannungen vorgeschrieben. Die Grundlage für die Lösung des lokalen Randwertproblems auf der Basis eines Variationsprinzips ist die Erfüllung der Makro-Homogenitätsbedingung, siehe *Hill* [76]. Sie fordert die Gleichheit der makroskopischen und der im RVE gemittelten mesoskopischen Arbeiten. Es kann gezeigt werden, dass sowohl mit der Verwendung von homogenen, als auch periodischen Randbedingungen die Makro-Homogenitätsbedingung erfüllt wird. Die Anwendbarkeit homogener und periodischer Randbedingungen hängt von der mesoskopischen Materialstruktur ab. Wenn der mesoskopische Aufbau eines Werkstoffes völlig unregelmäßig ist, lassen sich homogene Randbedingungen annehmen, siehe *Hill* [74] und *Hashin* [70]. Die Irregularität der Mesostruktur kann durch die Existenz von zufällig verteilten Defekten, wie z.B. Poren oder Rissen, gekennzeichnet sein. Bei Verbundwerkstoffen kann sich die Irregularität auch durch die chaotische Verteilung der konstituierenden Materialien ausdrücken. Die Annahme einer periodisch aufgebauten Mesostruktur führt zu periodischen Randbedingungen, siehe *Suquet* [182]. In diesem Fall wird das mesoskopische Verzerrungsfeld additiv in zwei Anteile zerlegt. Die eine Komponente beschreibt den effektiven makroskopischen Verzerrungszustand unter Annahme eines homogenen RVE. Die andere kennzeichnet einen Korrekturterm, der sich aus dem fluktuierenden Anteil des Verschiebungsfeldes ergibt. Dieser resultiert aus der Periodizität der betrachteten Struktur und berücksichtigt die vorhandenen Heterogeni-

täten. Im integralen Sinn verschwindet der Korrekturterm, so dass die Homogenität der Zustandsgrößen des Makrokontinuums gewährleistet ist. Als Spezialfall eines RVE gilt die periodische Einheitszelle. Sie beschreibt im Rahmen der Homogenisierung ein klassisches Konzept für die Modellierung von Verbundwerkstoffen, die sich aus regelmäßigen Einheitszellen zusammensetzen, siehe *Böhm, Rammerstorfer & Weissenbek* [24].

Neben klassischen Homogenisierungsmethoden, die auf der Annahme einer eindeutigen Skalenseparation basieren, existiert die so genannte Homogenisierung zweiter Ordnung, siehe *Kouznetsova* [90]. Bei diesem Ansatz muss nicht gefordert werden, dass die Skalen einen ausreichend großen Abstand voneinander haben. Auf den Rand des RVE werden nicht nur Gradienten der makroskopischen Lösung erster, sondern auch zweiter Ordnung als Randbedingung aufgebracht. Die Annahme konstanter makroskopischer Feldgrößen im RVE wird damit verworfen.

Zu den Simulationsverfahren, die zur numerischen Lösung des Randwertproblems eines RVE eingesetzt werden können, zählt neben der konventionellen Finite Element Methode unter anderem die *Voronoi-Cell Finite Element Method*, siehe *Ghosh, Lee & Moorthy* [63]. Diese Methode wurde entwickelt, um numerische Untersuchungen heterogener Materialien unter Einbeziehung von Spannungsfunktionen durchführen zu können, die auf analytischen mikromechanischen Ergebnissen basieren. Die Erweiterung der Methode durch *Li & Ghosh* [100] ermöglichte die Modellierung des Wachstums mehrerer kohäsiver Risse in quasi-spröden Materialien, vergleiche Kapitel 4.

## Hierarchische Methoden

Neben verschiedenen Homogenisierungsverfahren existieren diverse Mehrskalenmethoden, die nicht auf einer punktwisen Formulierung des Skalentransfers basieren und im Weiteren hierarchische Mehrskalenmethoden genannt werden. Die Bezeichnung als hierarchische Methoden resultiert aus einer hierarchischen Aufteilung, die unterschiedliche Bedeutung haben kann. Sie kann sich auf den additiven Split des Lösungsraumes in grobskalige und feinskalige Komponente beziehen, so dass im Bereich der Lösungsdekomposition die Materialmodellierung auf einer kleineren Skala möglich ist. Außerdem könnte allein schon die Unterteilung der gesamten Struktur im Sinne einer Gebietszerlegung in Bereiche, die niedrig und hoch aufgelöst werden, als hierarchische Methode bezeichnet werden. Dazu muss bei beiden Ansätzen das Gebiet  $\Omega'$  definiert werden, in dem der lokale mesoskopische Aufbau der Struktur berücksichtigt werden soll, siehe Abbildung 7.2. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Kopplung des Gebietes  $\Omega'$  mit der restlichen Struktur abhängig vom hierarchischen Ansatz ist. Bei Ansätzen, die auf der Aufteilung des Lösungsraumes basieren, findet die Kopplung im Gegensatz zur klassischen Gebietszerlegung nicht nur am Rand  $\partial\Omega'$ , sondern hauptsächlich im Sinne einer volumetrischen Kopplung im Gebiet  $\Omega'$  statt. Die hierarchischen Mehrskalenmethoden setzen nicht die Erfüllung einer eindeutigen Skalenseparation voraus, so dass sie ohne Probleme für die Modellierung skalenübergreifender Phänomene, wie beispielsweise den Wachstumsprozess eines Risses, angewendet werden können. Im Gebiet  $\Omega'$  wird der reale lokale Strukturaufbau abgebildet. Daher sind offensichtlich im Gegensatz zu Homogenisierungsverfahren Probleme bei der Definition von statistisch repräsentativen Volumenelementen (RVE) hinfällig.

Man kann sich leicht vorstellen, dass eine Vielzahl von unterschiedlichen Verfahren existiert, die zur Klasse der hierarchischen Mehrskalenkonzepte gezählt werden können. Im



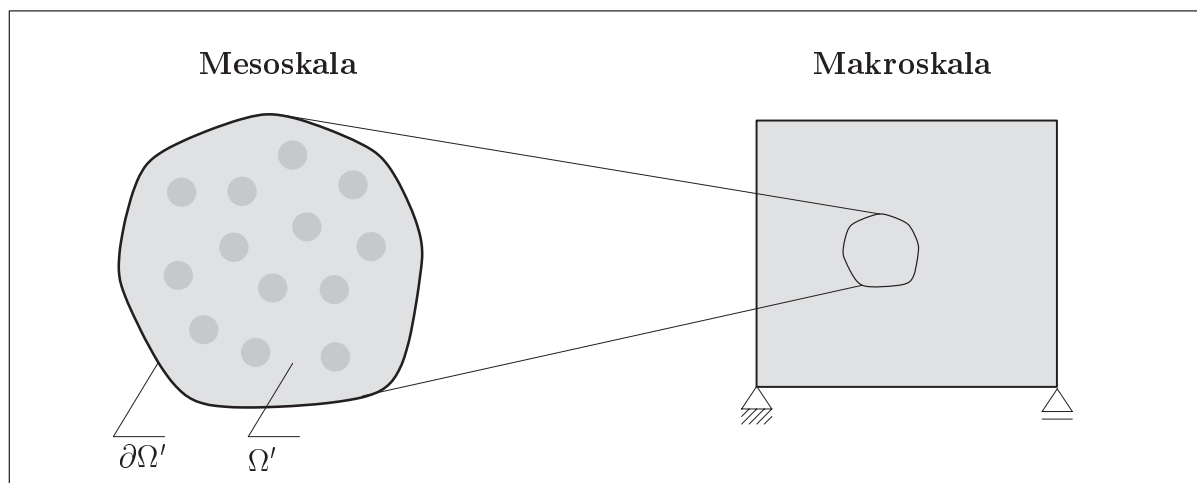


Abbildung 7.2: Hierarchisches Zweiskalenproblem

Weiteren werden einige Arbeiten skizziert, die sich mit solchen Verfahren beschäftigen. Schon Anfang der 1970'er Jahre wurde von *Mote* [124] zur Verbesserung der Genauigkeit numerischer Strukturanalysen eine „Global-Local“ Formulierung eingeführt, die auf der Kombination der konventionellen Finite Element Methode mit der Ritz Methode basiert. Ungefähr zwanzig Jahre später entwickelten *Belytschko, Fish & Bayliss* [17] ein Verfahren zur Diskretisierung des Verschiebungsfeldes, das in denjenigen strukturellen Bereichen in zwei Anteile zerlegt wurde, wo die Lösung große Gradienten anzeigte. Zur Approximation der beiden Verschiebungskomponenten wurden nicht nur die gewöhnlichen polynomialen Finite Element, sondern auch spektrale Formfunktionen eingesetzt. *Fish* [53] stellte die so genannte S-Version der Finite Element Methode (S-FEM) vor, bei der in diesen Bereichen hierarchische Elemente höherer Ordnung auf das zugrunde liegende Finite Element Netz gelegt wurden. Die Motivation für die Herleitung beider Verfahren war die Erhöhung der Genauigkeit der numerischen Lösung durch eine mehr oder weniger lokale Anreicherung der Finite Element Approximation mit Formfunktionen unterschiedlichen Typs. Dabei kann die S-FEM im Prinzip als Generalisierung hierarchischer h-, p- oder hp-Vorgehensweisen interpretiert werden, da die Erhöhung der polynomialen Ordnung nicht mehr mit dem zugrunde liegenden Finite Element Netz verbunden ist. Die Erweiterung des Anwendungsbereichs der S-FEM auf Rissprobleme in elastischen Medien konnte kurze Zeit später von *Fish* [52] realisiert werden. Zur Diskretisierung der diskontinuierlichen Lösungen wurden in den Risspitzenbereichen singuläre hierarchische Elemente eingesetzt. Der restliche Riss wurde durch die Verdopplung der Knoten hierarchischer Elemente modelliert. Die Formulierung der singulären hierarchischen Elemente basierte auf einer speziellen Mapping-Technik, siehe *Barsoum* [13]. An dieser Stelle sei nochmals auf die Arbeit von *Lee et al.* [97] hingewiesen, die sich mit der Kombination der X-FEM und S-FEM zur numerischen Modellierung von Risswachstum in elastischen Körpern befasst, siehe Kapitel 4.1. In *Rank* [150] wurde eine hp-Version der Finite Element Methode mit einer Gebietszerlegungsmethode kombiniert und auf ein Reaktions-Diffusions-Problem angewendet. Die Wirkungsweise der Methode wurde von *Krause & Rank* [91] anhand zweier Benchmarkbeispiele und eines bodenmechanischen Problems für lineare Elastizität ausführlich diskutiert.

In *Haidar, Dubé & Pijaudier-Cabot* [67] wurde das Versagen von Tragwerken aus Be-

ton mit einem einfachen Zweiskalenansatz numerisch analysiert. Das Materialverhalten wurde auf Strukturebene als linear elastisch angenommen. Innerhalb ausgewählter Finiter Elemente des Basisnetzes wurde die Struktur feiner diskretisiert. Zur Abbildung des Materialverhaltens in den verfeinerten Bereichen wurde ein nicht-lokales Schädigungsmodell verwendet. Die Kopplung des globalen und der lokalen Probleme erfolgte mit Hilfe eines iterativen Lösungsalgorithmus. *Ghosh & Raghavan* [64] stellten ein adaptives Mehrskalensmodell zur Simulation von Verbundwerkstoffen vor, die durch Grenzflächenversagen zwischen den konstituierenden Materialien geschädigt werden. Die Mehrskalensformulierung basierte auf der Einführung dreier hierarchischer Ebenen der Materialmodellierung, die charakteristischen Bereichen der Makrostruktur zugewiesen wurden, um Modellierungs- und Diskretisierungsfehler zu reduzieren. Zur Definition des Zeitpunktes eines Modellwechsels wurden physikalisch motivierte Kriterien eingesetzt. Zur Lösung von Randwertproblemen wurde die konventionelle mit der *Voronoi-Cell Finite Element Method* kombiniert.

*Hughes et al.* [80] entwickelten einen variationellen Rahmen für hierarchische Mehrskalensmethoden, die auf einer Aufteilung der Lösung in eine grob- und eine feinskalige Komponente basieren. Die gewonnenen Erkenntnisse können als Denkmuster für Subgrid-Scale Modelle und a posteriori Fehlerschätzer dienen. Die *variationelle Mehrskalensmethode* (VMM) ist von *Garikipati & Hughes* [58] verwendet worden, um Lokalisierungseffekte in entfestigenden Festkörpermateriale zu erfassen. Die Grundidee dieser Arbeit beschreibt die Vorstellung, dass die feinskalige Lösung mit der Verschiebungskomponente identifiziert werden kann, die einen großen Gradienten aufweist. *Garikipati & Hughes* [57] stellten in einer eindimensionalen Formulierung die Einbettung einer diskontinuierlichen Feinskalenlösung in die VMM vor. Entfestigendes Materialverhalten wurde durch ein ratenunabhängiges Plastizitätsmodell vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ beschrieben, das als feinskaliges Konstitutivgesetz in die gewöhnliche makromechanische Kontinuumsbeschreibung eingeführt wurde. Die entsprechenden Ausführungen folgten einschlägigen Arbeiten zum SDA, siehe Kapitel 1.2.3. Die Erweiterung dieses Konzepts auf mehrere Dimensionen findet sich in *Garikipati* [56]. Der darin gewählte diskontinuierliche Ansatz für die feinskalige Verschiebungskomponente lieferte eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen grob- und einen feinskaligen Anteil. Eine grundlegende Annahme Finiter Plastizität ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil. In Verbindung mit einem Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz und einem plastizitätsbasierten Kontinuumsmodell wurde folglich der elastische als der grobskalige und der plastische als der feinskalige Anteil identifiziert.

In Abhängigkeit der Problemstellung müssen unterschiedliche Modelle zur Abbildung der grob- und feinskaligen Lösungen verwendet werden. Beispielsweise wurde in der Arbeit von *Belytschko & Xiao* [22] eine Mehrskalensmethode auf Basis einer Gebietszerlegung diskutiert, bei der ein molekulares Modell mit einem Kontinuumsmodell mittels zweier unterschiedlicher Techniken über den Rand  $\partial\Omega'$  gekoppelt wurde. Zur Erzwingung der Kompatibilität der beiden Lösungen wurden die gewöhnliche und die erweiterte (augmented) Lagrange-Multiplikator-Methode eingesetzt.

Wie schon oben angedeutet, unterscheiden sich hierarchische Mehrskalensmethoden durch die Aufteilung der Lösung oder des Gebietes in zwei Kategorien. Da die Dekomposition der Lösung aus Gründen der Effizienz nur in charakteristischen Bereichen durchgeführt werden sollte, müssen auch bei diesem Ansatz geeignete Kopplungsstrategien angewendet

werden. Der Grad der Kopplung beeinflusst die Wahl des Algorithmus zur Ermittlung der Lösung des Zweiskalenproblems. Typischerweise wird in Abhängigkeit des Problems ein partitionierter oder ein simultaner Algorithmus gewählt. Ein weiteres klassifizierendes Kriterium ist die Vorgehensweise bei der Spezifizierung des Ortes und der Größe der Substrukturen  $\Omega'$ . Des Weiteren ist zu klären, ob die Substrukturierung eines Bauteils im Sinne eines adaptiven Verfahrens während der Simulation stattfindet oder einmalig am Anfang der Strukturanalyse vorgenommen wird.

### ***Partition of Unity*-basierte Methoden**

Als weitere Klasse von Mehrskalenmethoden können Verfahren gezählt werden, die auf dem *Partition of Unity*-Konzept basieren. Im Folgenden sollen drei unterschiedliche Arbeiten skizziert werden, die sich mit diesem Thema beschäftigen.

*Mariano & Stazi* [106] passten die erweiterte Finite Element Methode (X-FEM) einem Mehrfeldmodell für Festkörper mit Mikrorissen an. Dabei untersuchten sie den Einfluss der im Modell frei wählbaren Mikrorissverteilung auf die Lösung nahe der Spitze eines fixen Makrorisses und verglichen die Ergebnisse mit denen einer gewöhnlichen Finite Element Simulation. *Fish & Yuan* [54] entwickelten ein Mehrskalenverfahren, das eine Kombination der mathematischen Homogenisierung und der *Partition of Unity*-Methode darstellt. Die hauptsächliche Motivation dieser Technik ist die Erweiterung der Anwendbarkeit der mathematischen Homogenisierungstheorie auf Probleme, bei denen die eindeutige Skalenseparation eventuell nicht mehr möglich ist. In *Areias & Belytschko* [5] wurde die X-FEM benutzt, um die Entwicklung von Scherbändern in visko-plastischen Materialien im Sinne einer Zweiskalenformulierung zu modellieren. Die lokale Anreicherung des Verschiebungsfeldes, das sich im Bereich der Scherzone durch große Gradienten auszeichnet, konnte damit auf einfache Art und Weise realisiert werden. Sie wurde als der feinskalige Anteil der Gesamtlösung für die Verschiebungen bezeichnet. Mittels eines charakteristischen Ansatzes wurde ausschließlich der Gleitmechanismus berücksichtigt, so dass große Deformationen normal zur Scherzone auf elegante Art und Weise verhindert wurden, siehe Kapitel 2.1.2. Als Indikator für die Initiierung und die Ausbreitungsrichtung des Scherbandes fungierte der Verlust der Stabilität des Randwertproblems. In gewisser Weise kann der Ansatz auch als Weiterentwicklung der X-FEM verstanden werden, siehe Kapitel 4.1.

## **7.2 Problembeschreibung**

In der vorliegenden Arbeit wird ein geschädigter zweiphasiger Festkörper  $\mathcal{B}$  untersucht, der das Gebiet  $\Omega$  einnimmt und durch den Rand  $\Gamma$  begrenzt wird. Der Festkörper kann in zwei Gebiete unterteilt werden, siehe Abbildung 7.3. Diese sind das Teilgebiet  $\Omega'$ , in dem der lokale mesostrukturelle Aufbau von  $\mathcal{B}$  explizit berücksichtigt wird, und der Rest des Gesamtgebietes  $\Omega \setminus \Omega'$ , in dem die entsprechende Mesostruktur im Sinne einer klassischen kontinuumsmechanischen Beschreibung verschmiert dargestellt wird. Zur Vereinfachung der Erläuterungen wird gefordert, dass nur ein einziges, zusammenhängendes Teilgebiet  $\Omega'$  existiert. Der zweiphasige Körper wird im Gebiet  $\Omega \setminus \Omega'$  formal als einphasiges und kontinuierliches Medium betrachtet, das sich linear elastisch verhält. Im Gebiet  $\Omega'$  werden ungeschädigte materielle Grenzflächen, die die konstituierenden Materialphasen perfekt miteinander verbinden, und kohäsive Risse modelliert. Für eine genaue Beschreibung des

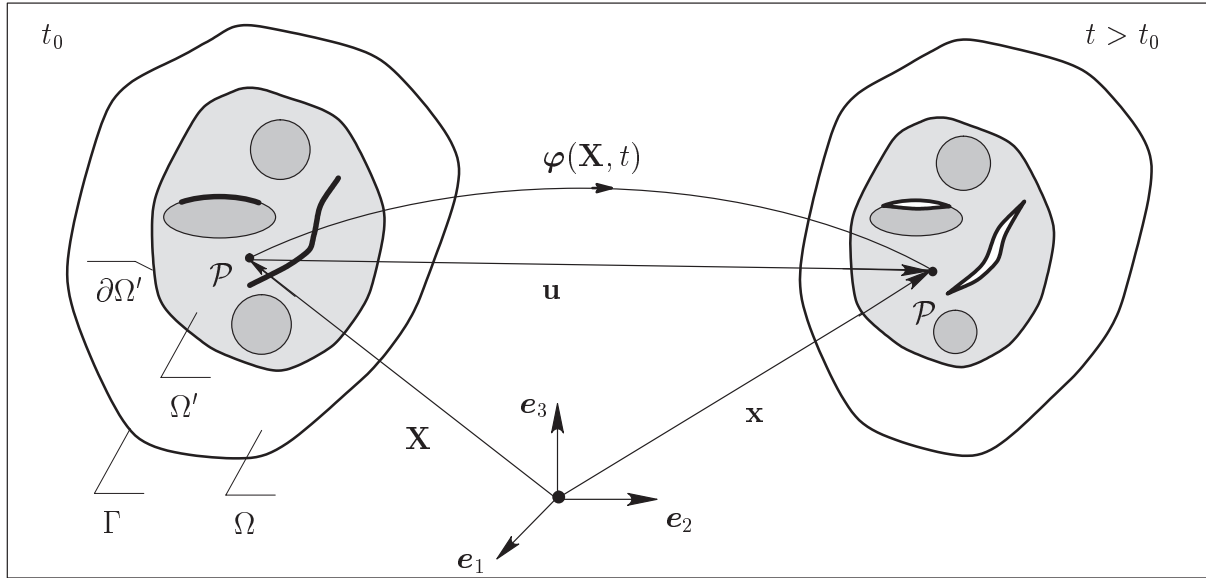


Abbildung 7.3: Hierarchisches Zweiskalenproblem des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in Referenz- ( $t_0$ ) und aktueller ( $t$ ) Konfiguration

strukturellen Aufbau des Körpers auf Mesoebene wird auf das Kapitel 2.1 verwiesen. Unter Bezugnahme auf die Gleichungen (2.1) und (2.5) ist die Abbildungsvorschrift  $\varphi$  von der Referenz- in die aktuelle Konfiguration des Körpers  $\mathcal{B}$  durch die folgende Verschiebungsfunktion gegeben.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{X} \in \Omega \setminus \Omega' \\ \bar{\mathbf{u}} + \underbrace{\hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j}_{\mathbf{u}'} & \forall \mathbf{X} \in \Omega' \end{cases} \quad (7.1)$$

Bei der Definition der Verschiebungsfunktion wird zwischen den Gebieten  $\Omega \setminus \Omega'$  und  $\Omega'$  unterschieden. Im Gebiet  $\Omega'$  wird die Gesamtlösung  $\mathbf{u}$  aus der Summe zweier Komponenten gebildet. Dabei symbolisiert  $\bar{\mathbf{u}}$  die grobskalige Lösung und  $\mathbf{u}'$  den feinskaligen Lösungsanteil. Das Gebiet  $\Omega'$  wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit Feinskalengebiet genannt. Die feinskalige Lösung repräsentiert den Fluktuationsanteil der Gesamtlösung und kann als a posteriori Schätzung des Fehlers der Grobskalenlösung interpretiert werden. Die Ursache für die Fluktuationen ist die Existenz von Heterogenitäten. Bei Verbundwerkstoffen ist die Materialstruktur an sich heterogen. Das Vorhandensein von Rissen stellt eine weitere Quelle dar, die zur Heterogenität eines Werkstoffes beiträgt. Durch die lokale Auflösung der Materialstruktur kann der komplexe Versagensprozess von Verbundmaterialien sehr genau erfasst werden. Die Feinskalenlösung wird analog zum Verschiebungsansatz (2.5) in drei Komponenten aufgeteilt, um die kinematischen Erfordernisse von materiellen Grenz- und Rissflächen im Gebiet  $\Omega'$  erfüllen zu können. Es sei nochmals angemerkt, dass die Anreicherung des feinskaligen Verschiebungsfeldes zur Abbildung von materiellen Grenzflächen vorgenommen wird, um im Hinblick auf die Materialverteilung in  $\Omega'$  diskretisierungsunabhängige exakte numerische Simulationen mit der Finite Element Methode durchführen zu können. Durch die Aufteilung der feinskaligen Verschiebungen in drei Komponenten lassen sich die Beiträge der materiellen Grenz-

und Rissflächen zur Fluktuation eindeutig zuordnen. Die grobskalige Lösung  $\bar{\mathbf{u}}$  entspricht im restlichen Gebiet des Körpers  $\Omega \setminus \Omega'$ , das von nun an als Grobskalengebiet bezeichnet wird, der Gesamtlösung. Die Möglichkeit der Unterteilung der gesamten Struktur in ein Grob- und ein Feinskalengebiet resultiert aus der physikalischen Lokalität des Problems, die in der Natur materiellen Versagens begründet ist. In diesem Zusammenhang muss definiert werden, wann ein Grobskalengebiet zum Feinskalengebiet erklärt wird, beziehungsweise wann die Genauigkeit der Grobskalenlösung als unzureichend erachtet wird. Mit dieser Definition ist der Zeitpunkt festgelegt, zu dem lokal der Modellwechsel von der Grobskalen- zur Zweiskalenformulierung stattfindet.

Die Definition des zweiskaligen Randwertproblems besteht unter anderem aus der Spezifizierung von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen, siehe Kapitel 2.4. Außerdem müssen auf dem Teil des Randes  $\partial\Omega' \not\subset \Gamma$ , der das Grob- vom Feinskalengebiet trennt und im Inneren des Körpers liegt, Nebenbedingungen formuliert werden. Bei Nebenbedingungen kann man zwischen Rand- und Übergangsbedingungen unterscheiden. Während Übergangsbedingungen lediglich die Kontinuität charakteristischer Größen auf dem Rand zwischen den zwei benachbarten Gebieten fordern, postulieren Randbedingungen den Verlauf dieser Größen. Durch dieses Postulat führen Randbedingungen zu zusätzlichen Approximationsfehlern, denen meistens der vergleichsweise geringere numerische Aufwand der Randbedingung gegenübersteht. Die Art der Nebenbedingung beeinflusst die Qualität und Quantität des Informationstransfers zwischen beiden Gebieten. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird als Nebenbedingung die folgende Randbedingung verwendet, mit der automatisch die Verschiebungscompatibilität zwischen dem Grob- und dem Feinskalengebiet  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$  punktweise gewährleistet wird.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega' \not\subset \Gamma \quad (7.2)$$

Damit die Randbedingung nicht zu unzulässigen Fehlern führt, muss sichergestellt werden, dass das Feinskalengebiet  $\Omega'$  ausreichend groß gewählt wird. Ausreichend groß wird durch die Lokalität des untersuchten physikalischen Problems beziehungsweise durch eine Situation definiert, in der die Feinskalenlösung zum Rand  $\partial\Omega' \not\subset \Gamma$  hin von sich aus abklingt. Alternativ zur Randbedingung (7.2) könnte eine Übergangsbedingung verwendet werden, mit der die Verschiebungscompatibilität beispielsweise mittels der Lagrange-Multiplikator-Methode realisiert wird, siehe *Markovic & Ibrahimbegovic* [107].

Auf Gleichgewichtsbetrachtungen am Rand zwischen Grob- und Feinskalengebiet wird in der vorliegenden Arbeit verzichtet.

### 7.2.1 Zerlegung des Feinskalengebietes

Zur Realisierung eines effizienten Lösungsalgorithmus des Feinskalenproblems werden für die Feinskalenlösung lokale Träger im Sinne eines Grobskalenelementes eingeführt. Die Effizienz des Lösungsverfahrens basiert hauptsächlich auf der Tatsache, dass die Lösung eines Problems weniger zeitaufwendig ist, wenn das Problem in mehrere getrennt gelöste Subprobleme unterteilt wird, anstatt es geschlossen zu lösen. Dabei bietet sich ein paralleles Lösungsverfahren an. Die lokalen Träger kennzeichnen  $n_d$  sich nicht-überlappende Teilgebiete  $\Omega'_k$ , in die das Gebiet  $\Omega' = \cup_{k=1}^{n_d} \Omega'_k$  zerlegt wird. Die Kopplung von zwei benachbarten Teilgebieten  $\Omega'_m$  und  $\Omega'_s$  findet an ihrer Grenzfläche  $\Gamma'_{ms}$  statt, siehe Abbildung 7.4. Die Gesamtheit aller Kopplungsränder im Gebiet  $\Omega'$  bildet den Rand  $\Gamma'$ .

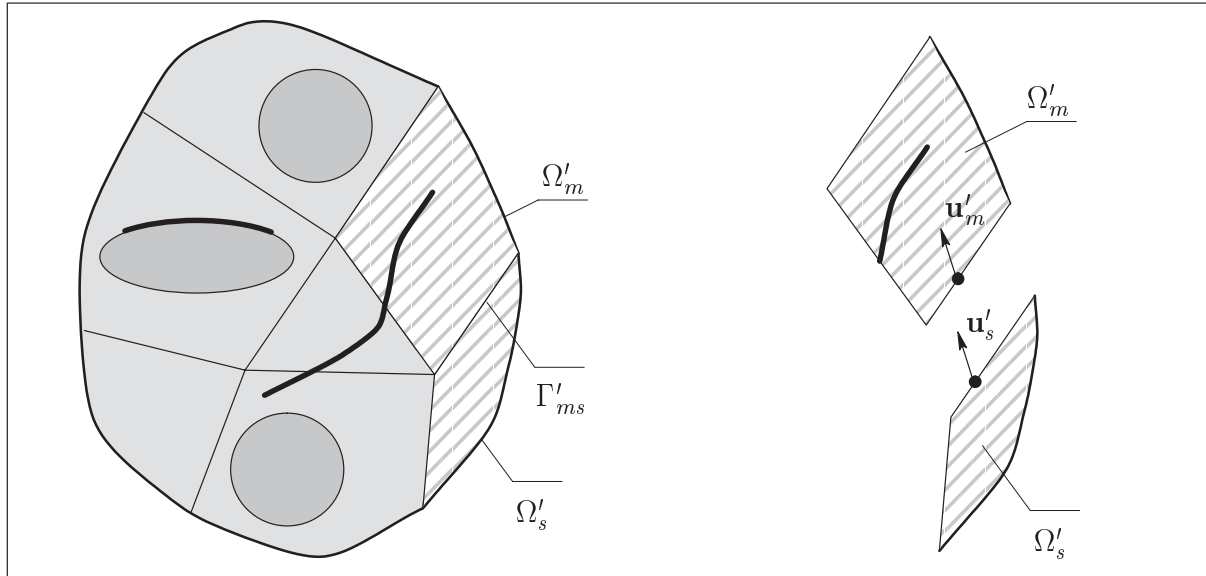


Abbildung 7.4: Nicht-überlappende Zerlegung des Feinskalengebietes  $\Omega'$

Es ist offensichtlich, dass  $\Gamma' \cap \partial\Omega' = \emptyset$  gilt. Die Einführung lokaler Träger der Feinskalenlösung erfordert die Formulierung geeigneter Nebenbedingungen auf dem Rand  $\Gamma'$ , die die Qualität der Feinskalen- und damit der Gesamtlösung maßgeblich beeinflussen. In der vorliegenden Arbeit wird als Nebenbedingung auf eine verschiebungsformulierte Randbedingung und eine verschiebungsformulierte Übergangsbedingung zurückgegriffen. Als Randbedingung wird entsprechend Gleichung (7.2) gefordert, dass die Lösung der feinskaligen Verschiebungen auf dem Rand  $\Gamma'$  punktweise verschwindet.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma' \quad (7.3)$$

Die Nullrandbedingung ist durch die Annahme der physikalischen Lokalität des Feinskalenproblems bezüglich der Teilgebiete  $\Omega'_k$  motiviert. Darüber hinaus ist die Implementierung der Randbedingung einfach und der numerische Aufwand für die Lösung des Randwertproblems vergleichsweise gering. Bei Verwendung der Nullrandbedingung bietet sich an, das Verschwinden der Feinskalenlösung auch auf  $\Gamma_{t^*}$  zu erzwingen, um somit die Implementierung des Zweiskalenmodells noch mehr zu vereinfachen und dessen Effizienz weiterhin zu steigern, vergleiche Gleichung (7.6). Dies wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit umgesetzt. Wie sich zeigen wird, verursacht die Nullrandbedingung bei den behandelten Problemen viel zu steife numerische Lösungen. Die Nullrandbedingung kann nicht nur punktweise, sondern auch in einem integralen Sinn erfüllt werden, siehe *Markovic & Ibrahimbegovic* [107]. Die integrale Variante führt zwar zur Aufweichung, kann jedoch ungenaue Lösungen und den Verlust der numerischen Robustheit liefern, siehe *Hund & Ramm* [81]. Die Motivation für die Verwendung dieser Variante stellt die Annahme dar, dass die feinskalige Lösung als der Fluktuationsanteil der Gesamtverschiebung im integralen Mittel über den Kopplungsrand verschwindet.

Wie oben erwähnt, wird neben der Randbedingung (7.3) eine Übergangsbedingung umgesetzt, die die Kontinuität der Feinskalenlösung  $\mathbf{u}'$  über die Kopplungsränder postuliert. Die Kontinuität der Feinskalenlösung bedeutet mathematisch formuliert, dass die Differenz der feinskaligen Verschiebungen auf dem Kopplungsrand  $\Gamma'_{ms}$  der zwei benachbarten

Teilgebiete  $\Omega'_m$  (master) und  $\Omega'_s$  (slave) gleich dem Nullvektor ist, siehe Abbildung 7.4.

$$[[\mathbf{u}']] := \mathbf{u}'_m - \mathbf{u}'_s = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma'_{ms} \quad (7.4)$$

Im Falle von materiellen Grenzflächen und Rissen, die den Kopplungsrand  $\Gamma'_{ms}$  ohne Versatz durchdringen, ist mit obiger Übergangsbedingung jedoch nicht gewährleistet, dass die dazugehörigen Verschiebungskomponenten  $\chi_{m,i} \tilde{\mathbf{u}}_i$  bzw.  $\chi_{c,j} \tilde{\mathbf{u}}_j$  über  $\Gamma'_{ms}$  hinweg kontinuierlich sind. Die Kontinuität der Feinskalenlösung  $\mathbf{u}'$  wird in einem additiven Sinn gefordert. Bei Verwendung der Nullrandbedingung (7.3) müssen alle Verschiebungskomponenten verschwinden, so dass deren Kontinuität automatisch erfüllt wird.

Das Gleichgewicht am Kopplungsrand, das sich durch die Kontinuität des Spannungsvektors auszeichnet, wird in dieser Arbeit nur schwach berücksichtigt.

### 7.3 Variationsformulierung

In diesem Abschnitt werden die Gleichgewichtsgleichungen des Körpers in schwache Form gebracht. Da sich eine ausführliche Diskussion der starken und der schwachen Form des Gleichgewichts in den Kapitel 2.4 und 4.2 findet, werden hier lediglich ergänzende Anmerkungen gemacht.

Zur Definition des Lösungsraumes im Feinskalengebiet wird eine direkte Summendekomposition vorgenommen, so dass  $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{U}'$  gilt. Der Raum  $\bar{\mathcal{U}}$  potentieller grobskaliger Verschiebungsfunktionen  $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{U}}$  ist folgendermaßen definiert.

$$\bar{\mathcal{U}} = \{ \bar{\mathbf{u}} \mid \bar{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \text{ und } \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{u^*}} = \mathbf{u}^* \} \quad (7.5)$$

$H^1$  symbolisiert einen Sobolev-Raum. Die vorgeschriebenen Verschiebungen  $\mathbf{u}^*$  auf dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_{u^*}$  werden den Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  zugewiesen, vergleiche Gleichung (4.2). Unter Berücksichtigung der Randbedingung (7.2) und der Lösung (7.1) lässt sich der Funktionenraum  $\mathcal{U}'$  definieren.

$$\mathcal{U}' = \{ \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \mid \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \in H^1(\Omega) \text{ und } \hat{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega' \notin \Gamma_{t^*}} = \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\partial\Omega' \notin \Gamma_{t^*}} = \tilde{\mathbf{u}}_j|_{\partial\Omega' \notin \Gamma_{t^*}} = \mathbf{0} \} \quad (7.6)$$

Aus der Zuordnung von  $\mathbf{u}^*$  zu den Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  folgt die Erweiterung des Randes  $\partial\Omega' \notin \Gamma$ , auf dem die Nulllösung der feinskaligen Verschiebungen aus Kompatibilitätsgründen gefordert wurde, um den Dirichlet-Rand  $\Gamma_{u^*}$ . Wie oben erwähnt, wird in der Umsetzung der Nullrandbedingung (7.3) dieser erweiterte Rand noch durch den Neumann-Rand  $\Gamma_{t^*}$  ergänzt. Bei der Wahl der Testfunktionen  $\delta\mathbf{u}$  wird wie bei den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  unterschieden, ob der materielle Punkt innerhalb des Grob- oder des Feinskalengebietes liegt.

$$\delta\mathbf{u} = \begin{cases} \delta\bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{X} \in \Omega \setminus \Omega' \\ \delta\bar{\mathbf{u}} + \underbrace{\delta\hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \delta\tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \delta\tilde{\mathbf{u}}_j}_{\delta\mathbf{u}'} & \forall \mathbf{X} \in \Omega' \end{cases} \quad (7.7)$$

Entsprechend der Aufteilung des Lösungsraumes im Feinskalengebiet wird die direkte Summendekomposition des Testfunktionenraumes in  $\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{V}'$  vorgenommen. Der grobskalige Anteil und die drei Komponenten des feinskaligen Anteils der Testfunktionen stammen ebenso aus einem Sobolev-Raum. Sie sind auf Rändern, auf denen die

Lösungskomponenten vorgegeben sind, jeweils identisch dem Nullvektor.

Zur Realisierung der Kontinuitätsbedingung (7.4) wird auf die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zurückgegriffen. Auf Grund dieses Vorgehens ergibt sich der variationelle Ausdruck  $\delta\Pi_\lambda$ , der einen zusätzlichen Beitrag zur inneren virtuellen Arbeit  $\delta W_{int}$  leistet, vergleiche Gleichung (4.1). Bei Anwendung der Nullrandbedingung (7.3) ist der zusätzliche variationelle Ausdruck  $\delta\Pi_\lambda$  nicht vorhanden. Das resultierende Zweiskalenmodell ist als Spezialfall in den folgenden Ausführungen enthalten. Die schwache Form des Gleichgewichts eines quasi-statischen Randwertproblems, vereinfachend ohne Volumenkräfte, lautet dann folgendermaßen:

Finde die Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$  und den Lagrange-Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$ , so dass

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma'} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}' \rrbracket \, d\Gamma + \int_{\Gamma'} \llbracket \delta \mathbf{u}' \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma}_{\delta \Pi_\lambda} = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\lambda} \quad (7.8)$$

erfüllt ist. Der Lagrange-Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$  stellt als Randspannungsvektor die energetisch konjugierte Größe zur Differenz der Feinskalenlösung bzw. zum Fehler  $\llbracket \mathbf{u}' \rrbracket$  auf dem Rand  $\Gamma'$  dar. Da er neben den Verschiebungskomponenten eine weitere Primärvariable beschreibt, kann die Gleichgewichtsformulierung als gemischt bezeichnet werden. Die schwache Kopplung von Teilgebieten unter einer Nebenbedingung mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren ist auch als Mortar-Methode bekannt, siehe *Wohlmuth* [193]. Durch Einsetzen von Gleichung (7.7) in die schwache Form des Gleichgewichts (7.8) erhält man nach einigen Umformungen unter Ausnutzung der Beliebigkeit bzw. linearen Unabhängigkeit aller Testfunktionen die Formulierung des Zweiskalenproblems. Da die Nullrandbedingung (7.2) verwendet wird, ist das Zweiskalenproblem im Prinzip ausschließlich auf volumetrische Art und Weise über den Cauchyschen Spannungstensor miteinander gekoppelt.

Grobskaliges Problem formuliert in  $\delta \bar{\mathbf{u}}$ :

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \bar{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad (7.9)$$

Feinskaliges Problem formuliert in  $\delta \hat{\mathbf{u}}$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_j$ :

$$\int_{\Omega'} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \hat{\tau} = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad (7.10)$$

$$\int_{\Omega'} \nabla^s [\chi_{m,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \tilde{\tau}_1 = \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma$$

$$\vdots \quad (7.11)$$

$$\int_{\Omega'} \nabla^s [\chi_{m,n_m} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m}] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \tilde{\tau}_{n_m} = \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,n_m} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma$$

$$\int_{\Omega'} \chi_{c,1} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,1}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma + \tilde{\tau}_1 = \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{c,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma$$

$$\vdots \quad (7.12)$$

$$\int_{\Omega'} \chi_{c,n_c} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,n_c}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma + \tilde{\tau}_{n_c} = \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{c,n_c} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma$$



mit zusätzlicher Gleichung infolge Übergangsbedingung formuliert in  $\delta\boldsymbol{\lambda}$ :

$$\int_{\Gamma'} \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}' \rrbracket d\Gamma = 0 \quad (7.13)$$

Das Grobskalenproblem mit grobskaligen Testfunktionen ist durch Gleichung (7.9) in integraler Form beschrieben. Die schwache Form des Feinskalenproblems mit feinskaligen Testfunktionen ist durch den Gleichungssatz (7.10) – (7.12) gekennzeichnet, vergleiche Kapitel 4.2. Der Cauchysche Spannungstensor ist durch ein geeignetes Konstitutivgesetz von der Gesamtverschiebung abhängig. Damit ergeben sich im Grob- als auch im Feinskalenproblem gemischte Integralausdrücke, die aus den Testfunktionen der grobskaligen Lösung und den Komponenten der Feinskalenlösung bzw. den Testfunktionen der feinskaligen Lösungskomponenten und der Grobskalenlösung gebildet werden. Diese gemischten Volumenintegrale sorgen für die Kommunikation zwischen den zwei Skalen bzw. für einen volumengekoppelten Skalenübergang. In Gleichung (7.13) ist die schwache Form der Nebenbedingung (7.4) am Kopplungsrand mit der Variation des Lagrange-Multiplikators ausgedrückt. Die zusätzlichen Summanden  $\hat{\tau}$ ,  $\tilde{\tau}_i$  und  $\tilde{\tilde{\tau}}_j$  in (7.10) – (7.12) resultieren aus demjenigen integralen Term von  $\delta\Pi_\lambda$ , dessen Integrand das Skalarprodukt zwischen den Testfunktionen der feinskaligen Verschiebungskomponenten und dem Lagrange-Multiplikator bildet.

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \int_{\Gamma'} \llbracket \delta\hat{\mathbf{u}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \\ \tilde{\tau}_i &= \int_{\Gamma'} \llbracket \chi_{m,i} \delta\tilde{\mathbf{u}}_i \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \\ \tilde{\tilde{\tau}}_j &= \int_{\Gamma'} \llbracket \chi_{c,j} \delta\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \end{aligned} \quad (7.14)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Gleichung (7.13) bei Verwendung der Nullrandbedingung (7.3) entfällt. Außerdem existieren dann die Terme  $\hat{\tau}$ ,  $\tilde{\tau}_i$  und  $\tilde{\tilde{\tau}}_j$  in den entsprechenden Gleichungen (7.10) – (7.12) nicht.

Neben der Lagrange-Multiplikator-Methode gibt es andere Konzepte, mit denen die Verschiebungskompatibilität auf dem Kopplungsrand erzwungen werden kann. Hier ist beispielsweise die Penalty-Methode zu nennen. Diese Methode hat gegenüber der Lagrange-Multiplikator-Methode den Vorteil, dass keine zusätzlichen Freiheitsgrade eingeführt werden müssen. Die Genauigkeit, mit der die Nebenbedingung erfüllt wird, ist jedoch von der Wahl des Penalty-Parameters abhängig. Leider führen Parameter, mit denen die Nebenbedingung sehr genau erfüllt werden kann, gleichzeitig zum Genauigkeitsverlust der Gesamtlösung. Außerdem müssen bei der Penalty-Methode geeignete Verfahren angewendet werden, um die Lokalität der Feinskalenprobleme zu erhalten. Durch eine nicht-konsistente Linearisierung der Nebenbedingung kann der Kopplungsgrad benachbarter Teilgebiete  $\Omega'_k$  vermindert werden. Dabei ist es sinnvoll, zur Beschleunigung der Konvergenz spezielle Strategien einzusetzen. Eine andere Technik zur Realisierung der Nebenbedingung stellt die erweiterte Lagrange-Methode (augmented Lagrange) dar, die auf der Kombination von Lagrange- und Penalty-Methode basiert. Damit sollen die Vorteile beider Methoden vereint werden, um die Nebenbedingung ohne zusätzliche Freiheitsgrade und numerische Schwierigkeiten sehr genau erfüllen zu können. Das Verfahren ist allerdings deutlich aufwändiger. Umfassende Untersuchungen zu dieser Thematik finden sich in *Hund & Ramm* [81] und *Hund* [82].

## 7.4 Diskretisierung

Das gesamte Gebiet  $\Omega$  wird zunächst in  $n_\varepsilon$  grobskalige Finite Elemente zerlegt, so dass  $\Omega = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_\varepsilon} \Omega^\varepsilon$  gilt. Mit diesen Elementen wird die Verschiebungsfunktion  $\bar{\mathbf{u}}$  und die dazugehörige Testfunktion  $\delta\bar{\mathbf{u}}$  diskretisiert. Im Sinne eines Bubnov-Galerkin Verfahrens werden hierfür in beiden Fällen die Formfunktionen  $\mathbf{N}_{\bar{\mathbf{d}}}$  eingesetzt, die mit den Knotenfreiwerten  $\bar{\mathbf{d}}$  bzw.  $\delta\bar{\mathbf{d}}$  multipliziert werden, vergleiche Gleichung (4.11). Mittels der Matrix  $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}$  und den entsprechenden Knotenfreiheitsgraden lassen sich die symmetrischen Gradienten der Funktionen ermitteln, siehe Gleichung (4.12).

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{d}}} \bar{\mathbf{d}} \quad \delta\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{d}}} \delta\bar{\mathbf{d}} \quad \nabla^s \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \bar{\mathbf{d}} \quad \nabla^s \delta\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \delta\bar{\mathbf{d}} \quad (7.15)$$

Die Diskretisierung der Verschiebungen und Verschiebungsgradienten der Feinskalenlösung wird gemäß Kapitel 4.3 mit der erweiterten Finite Element Methode vorgenommen. Im Rahmen dieser Arbeit definiert jedes Element der Grobskalendiskretisierung einen lokalen Träger der Feinskalenlösung, vergleiche Abbildungen 7.4 und 7.5. Damit ist die sukzessive adaptive Ausdehnung des Feinskalengebietes von der Größe und Form eines Grobskalenelementes geprägt. Die feinskaligen Verschiebungen bedeuten eine hierarchische h-Verfeinerung der Grobskalenlösung. Die Diskretisierung der Feinskalenlösung geschieht innerhalb eines Grobskalenelementes mit jeweils  $n_{ele}$  Elementen, so dass  $\Omega'_k := \Omega^\varepsilon = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Omega^e$  gilt. Die lineare Unabhängigkeit der grob- und feinskaligen Verschiebungskomponenten sowie der entsprechenden Testfunktionen wird durch die Forderung der Nulllösung der feinskaligen Anteile an den Knoten der Grobskalenelemente gewährleistet.

Für die Diskretisierung der Lagrange-Multiplikatoren, die als globale Variablen eingeführt werden, wird der gesamte Kopplungsrand  $\Gamma^\varepsilon$  eines Grobskalenelementes in  $n_\mathcal{L}$  Elemente unterteilt, so dass  $\Gamma^\varepsilon = \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_\mathcal{L}} \Gamma'^\mathcal{L}$  gilt. Diese Unterteilung gilt natürlich auch für die entsprechenden benachbarten Grobskalenelemente. Die Ansatzordnung für die Lagrange-Multiplikatoren hat großen Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung, siehe *Hund* [82]. Die Erfüllung der inf-sup Bedingung liefert eine Restriktion für die Ordnung der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_\lambda$  zur Approximation von  $\boldsymbol{\lambda}$  bei vorab gewählter Ansatzordnung für die feinskaligen Verschiebungskomponenten, siehe *Babuška* [10].

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \mathbf{l} \quad \delta\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \delta\mathbf{l} \quad (7.16)$$

In obiger Gleichung kennzeichnet der Vektor  $\mathbf{l}$  die Knotenfreiwerte der Lagrange-Multiplikatoren eines Elementes. Durch Einsetzen aller Ansätze für die grobskaligen und feinskaligen Verschiebungen und Verschiebungsgradienten sowie des Ansatzes für den Lagrange-Multiplikator in die schwache Form des Gleichgewichts (7.9) – (7.13) ergibt sich die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt das Gleichungssystem des diskretisierten Randwertproblems.

Grobskaliges Problem:

$$\bigcup_{\varepsilon=1}^{n_\varepsilon} \left[ \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_\varepsilon} \left[ \int_{\Gamma_{t^*}^\varepsilon} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \quad (7.17)$$

Feinskaliges Problem als Summe von  $n_d$  Subproblemen in  $\Omega^\varepsilon$ :

$$\bigcup_{\varepsilon=1}^{n_d} \left[ \square_a + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_\mathcal{L}} \int_{\Gamma'^\mathcal{L}} \pm \mathbf{N}_a^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \right] = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_d} \diamond_a \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \left[ \square_{b_1} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{m,1} \mathbf{N}_b^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \diamond_{b_1} \\ &\vdots \\ \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \left[ \square_{b_{n_m}} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{m,n_m} \mathbf{N}_b^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \diamond_{b_{n_m}} \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \left[ \square_{c_1} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{c,1} \mathbf{N}_c^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \diamond_{c_1} \\ &\vdots \\ \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \left[ \square_{c_{n_c}} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{c,n_c} \mathbf{N}_c^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \diamond_{c_{n_c}} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Übergangsbedingung:

$$\bigcup_{\mathcal{E}=1}^{n_d} \left[ \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \mathbf{N}_l^T \mathbf{u}' \, d\Gamma \right] = 0 \quad (7.21)$$

Die Platzhalter  $\square_a$ ,  $\square_{b_i}$ ,  $\square_{c_j}$  und  $\diamond_a$ ,  $\diamond_{b_i}$ ,  $\diamond_{c_j}$  bezeichnen die Terme, die aus den dazugehörigen feinskaligen Verschiebungskomponenten resultieren. Diese sind die linken bzw. rechten Ausdrücke der Gleichungen (4.15) – (4.17). In obigen Gleichungen wird das positive Vorzeichen bei der Integration eingesetzt, die mit dem *master*-Grobskalenelement  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_m$  verbunden ist. Das negative Vorzeichen muss bei der Integration innerhalb des *slave*-Grobskalenelementes benutzt werden, wenn  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_s$  gilt. Die linken Terme definieren den Vektor der inneren Knotenkräfte  $\mathbf{F}_{int}$ . Die rechten Terme beschreiben die Einträge des Knotenkraftvektors  $\mathbf{F}_{ext}$  aus äußerer Belastung.

In weiterführenden Arbeiten könnte die Flexibilität des Zweiskalenmodells dadurch gesteigert werden, dass der lokale Träger der Feinskalenlösung nicht nur ein einziges, sondern mehrere Grobskalenelemente umfasst. Damit würde sich einerseits die Anzahl der globalen Freiheitsgrade verringern, da weniger Lagrange-Parameter eingeführt werden müssten. Auf der anderen Seite würde sich aber die Anzahl der feinskaligen Freiheitsgrade eines lokalen Trägers erhöhen, was wiederum zu einer Erhöhung der Rechenzeit führen könnte.

## 7.5 Linearisierung

Das Zweiskalenproblem ist ein nichtlineares Problem, da nichtlineare Materialgesetze im Sinne von Traktions-Verschiebungssprung-Beziehungen zur Modellierung kohäsiver Risse eingesetzt werden. Die zusätzliche Verwendung von nichtlinearen kontinuumsmechanischen Spannungs-Dehnungs-Gesetzen würde den Grad der Nichtlinearität des Zweiskalenproblems sogar erhöhen. So werden die diskretisierten Gleichgewichtsbeziehungen in schwacher Form (7.17) – (7.21) mittels einer Taylorreihenentwicklung linearisiert und im Rahmen eines Newton-Raphson Verfahrens inkrementell iterativ gelöst, siehe Kapitel 4.4. Wegen der starken Kopplung der Skalen wird die Lösung des Zweiskalenproblems simultan vorgenommen, siehe *Hund* [82].

Auf Grund der Zerlegung des Feinskalengebietes kann das Inkrement aller Freiheitsgrade der feinskaligen Lösung  $\Delta \mathbf{D}'_{k+1}$  zum Iterationsschritt  $k+1$  innerhalb eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes durch statische Kondensation eliminiert werden. Der Lösungsvektor  $\Delta \mathbf{D}'_{k+1} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta \mathbf{d}'_{k+1}$  wird durch Assemblierung der inkrementellen Verschiebungsvariablen  $\Delta \mathbf{d}'_{k+1}$  jedes einzelnen Feinskalenelementes gebildet, das zur Diskretisierung des Grobskalenelementes gehört. Es verbleibt ein Gleichungssystem in Form von (4.20), das die inkrementelle Änderung des Vektors aller globalen Freiheitsgrade  $\Delta \mathbf{D}_{k+1} = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_{\varepsilon}} \Delta \mathbf{d}_{k+1}$  liefert. Dieser entsteht durch Assemblierung aus dem Vektor  $\Delta \mathbf{d}_{k+1}$ , der die inkrementelle Änderung der Verschiebungsfreiheitsgrade  $\bar{\mathbf{d}}$  des Grobskalenelementes und, falls vorhanden, der Knotenfreiwerte  $\mathbf{l}$  der Lagrange-Multiplikatoren an seinem Kopplungsrand enthält. In Tabelle 7.1 findet sich eine Übersicht über die Bezeichnung der globalen und lokalen Knotenfreiwerte auf Element- und Systemebene. Die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_k$  und das globale Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)$  ergeben sich aus dem Zusammenbau der Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_k^{\varepsilon}$  und der Residuen  $\mathbf{r}_k^{\varepsilon}$  aller Grobskalenelemente, vergleiche Gleichung (4.21).

$$\mathbf{K}_k = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_{\varepsilon}} \mathbf{k}_k^{\varepsilon} \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_k) = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_{\varepsilon}} \mathbf{r}_k^{\varepsilon} \quad \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n_{\varepsilon}} \Delta \mathbf{d}_{k+1} \quad (7.22)$$

In folgender Gleichung beschreibt der erste Ausdruck die Steifigkeit eines Elementes zur Diskretisierung des Grobskalengebietes, so dass  $\mathbf{k}_k^{\varepsilon} = \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}},k}^{\varepsilon}$  gilt. Die restlichen Ausdrücke stellen weitere Steifigkeitsanteile eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes dar.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}},k}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega^{\varepsilon}} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \mathbf{c}_{tan,k} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\mathbf{d}_a,k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \mathbf{c}_{tan,k} \mathbf{B}_a \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}_b,i,k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \mathbf{c}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}_c,j,k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}}^T \mathbf{c}_{tan,k} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\mathbf{a}\bar{\mathbf{d}},k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{c}_{tan,k} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_i\bar{\mathbf{d}},k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{c}_{tan,k} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{\mathbf{c}_j\bar{\mathbf{d}},k}^{\varepsilon} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{c}_{tan,k} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{d}}} \, d\Omega \end{aligned} \quad (7.23)$$

Sie werden durch Assemblierung der Steifigkeitsanteile aller  $n_{ele}$  Feinskalenelemente gewonnen, mit denen das Grobskalenelement diskretisiert wird. Die Steifigkeitsanteile eines Feinskalenelementes, die ausschließlich aus den Komponenten der Feinskalenlösung resultieren, finden sich in Gleichung (4.23). Durch ihren Zusammenbau ergeben sich weitere Steifigkeitsanteile von  $\mathbf{k}_k^{\varepsilon}$ . Aus der Diskretisierung der Lagrange-Multiplikatoren am

gesamten Kopplungsrand des Grobskalenelementes mit  $n_{\mathcal{L}}$  Elementen resultieren folgende Steifigkeitsanteile, die als Steifigkeiten des Grobskalenelementes eingeführt werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{\text{al},k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_1 \, d\Gamma & \mathbf{k}_{\text{la},k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_a \, d\Gamma \\
\mathbf{k}_{\text{b}i,1,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_1 \, d\Gamma & \mathbf{k}_{\text{lb},i,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{m,i} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_b \, d\Gamma \\
\mathbf{k}_{\text{c}j,1,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^T \mathbf{N}_1 \, d\Gamma & \mathbf{k}_{\text{lc},j,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{c,j} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_c \, d\Gamma
\end{aligned} \quad (7.24)$$

Das positive Vorzeichen gilt bei der Integration, die mit einem Finiten Element verbunden ist, das zur Feinskalendiskretisierung des Grobskalenelementes  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_m$  gehört. Das negative Vorzeichen muss entsprechend bei der Integration benutzt werden, die mit einem Finiten Element der Feinskalendiskretisierung von  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_s$  assoziiert ist. Zur inkrementell iterativen Lösung des globalen Gleichungssystems (4.20) werden nicht nur die Elementsteifigkeiten, sondern auch die Elementresiduen benötigt, siehe Gleichung (7.22). Der erste Ausdruck in der folgenden Gleichung beschreibt das Residuum eines Elementes zur Diskretisierung des Grobskalengebietes, so dass  $\mathbf{r}_k^{\mathcal{E}} = \mathbf{r}_{\text{d},k}^{\mathcal{E}}$  gilt. Die anderen Residuen existieren nur, wenn das Grobskalenelement hierarchisch verfeinert ist bzw. Lagrange-Multiplikatoren auf seinem Rand positioniert sind.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{d},k}^{\mathcal{E}} &= \int_{\Omega^{\mathcal{E}}} \mathbf{B}_d^T \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\mathbf{t}^*}^{\mathcal{E}}} \mathbf{N}_d^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{\text{l},k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \mathbf{N}_l^T \mathbf{u}'_k \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{\text{a},k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta_a + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \mathbf{N}_a^T \boldsymbol{\lambda}_k \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{\text{b}i,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta_{b_i} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^T \boldsymbol{\lambda}_k \, d\Gamma \\
\mathbf{r}_{\text{c}j,k}^{\mathcal{E}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta_{c_j} + \bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma^{\mathcal{L}}} \pm \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^T \boldsymbol{\lambda}_k \, d\Gamma
\end{aligned} \quad (7.25)$$

Die Platzhalter  $\Delta_a$ ,  $\Delta_{b_i}$  und  $\Delta_{c_j}$  kennzeichnen die Terme, die aus den dazugehörigen feinskaligen Verschiebungskomponenten resultieren. Sie werden entsprechend Gleichung (4.24) berechnet. Zu diesen Termen werden weitere hinzuaddiert, die infolge der Lagrange-Multiplikatoren entstehen. Bei ihrer Berechnung muss auf die korrekte Verwendung des Vorzeichens geachtet werden. Wie oben erläutert, wird das Vorzeichen in Abhängigkeit der Zugehörigkeit des Feinskalenelementes zum Grobskalenelement  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_m$  bzw.  $\Omega^{\mathcal{E}} = \Omega'_s$  gewählt. Welche Elementsteifigkeiten und Elementresiduen letztendlich ausgewertet werden müssen, hängt von den Verschiebungsfreiheitsgraden der Feinskalenelemente und der Existenz von Lagrange-Multiplikatoren auf dem Rand des Grobskalenelementes ab, vergleiche Kapitel 4.4. Es ist offensichtlich, dass zur Berechnung bestimmter Elementsteifigkeiten und Elementresiduen am Integrationspunkt eines Feinskalenelementes die lokalen

	Element	System
Grobskalenlösung (global)	$\bar{\mathbf{d}} \quad \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}$	$\mathbf{D}$
Feinskalenlösung (lokal)	$\mathbf{a} \quad \mathbf{b}_i \quad \mathbf{c}_j \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}'$	$\mathbf{D}'$

Tabelle 7.1: Bezeichnung der globalen und lokalen Variablen

Koordinaten des entsprechenden Grobskalenelementes benötigt werden. Diese müssen über eine inverse isoparametrische Abbildung aus den globalen Koordinaten des Integrationspunktes ermittelt werden, vergleiche Kapitel 4.5.3.

Wie bereits angemerkt, wird im Rahmen dieser Arbeit die statische Kondensation zur Elimination der Feinskalenlösung benutzt. Zur Lösung des Gleichungssystems (4.20), das die inkrementelle Änderung der globalen Variablen  $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$  liefert, muss deshalb die Steifigkeit  $\mathbf{k}_k^\mathcal{E}$  und das Residuum  $\mathbf{r}_k^\mathcal{E}$  eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes reduziert werden. Die reduzierten Größen werden bei der Assemblierung zur globalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_k$  und zum globalen Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)$  benötigt, siehe Gleichung (7.22).

### 7.5.1 Statische Kondensation

Zur einfacheren Veranschaulichung der statischen Kondensation wird der Fall dargestellt, bei dem nur die feinskaligen Verschiebungskomponenten  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  diskretisiert werden. Des Weiteren sind nur grobskalige Verschiebungsfreiheitsgrade zur Diskretisierung von  $\bar{\mathbf{u}}$  an den Knoten eines Grobskalenelementes als globale Variable vorhanden. Damit werden zur statischen Kondensation ausschließlich die Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementresiduen benötigt, die diese drei Komponenten liefern.

Die reduzierte Steifigkeit  $\mathbf{k}_{\text{red},k}^\mathcal{E}$  eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes wird folgendermaßen berechnet.

$$\mathbf{k}_k^\mathcal{E} := \mathbf{k}_{\text{red},k}^\mathcal{E} = \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Das reduzierte Residuum  $\mathbf{r}_{\text{red},k}^\mathcal{E}$  eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes erhält man über folgende Gleichung.

$$\mathbf{r}_k^\mathcal{E} := \mathbf{r}_{\text{red},k}^\mathcal{E} = \mathbf{r}_{\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{d}}\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{a},k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Die Lösung des globalen Gleichungssystems  $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$  enthält die inkrementelle Änderung der globalen Freiheitsgrade  $\Delta \mathbf{d}_{k+1}$  eines Grobskalenelementes. Mittels Rückrechnung kann die inkrementelle Änderung der feinskaligen Verschiebungsfreiheitsgrade  $\Delta \mathbf{D}'_{k+1}$  innerhalb eines hierarchisch verfeinerten Grobskalenelementes ermittelt werden. Die Rückrechnung erfolgt lokal in jedem dieser Elemente.

$$\Delta \mathbf{D}'_{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{a},k}^\mathcal{E} & \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{a},k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{b}_1,k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{b}_1\bar{\mathbf{d}},k}^\mathcal{E} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{k+1} \right\} \quad (7.28)$$

Nachdem die Lösung  $\Delta \mathbf{D}'_{k+1}$  den Knoten der Feinskalendiskretisierung im Inneren des Grobskalenelementes zugewiesen wurde, sind die inkrementellen Änderungen der Freiheitsgrade  $\Delta \mathbf{d}'_{k+1}$  eines Feinskalenelementes abrufbar.

## 7.6 Aspekte der Implementierung

Im Gegensatz zur Realisierung der Nullrandbedingung (7.3) haben die Feinskalendiskretisierungen Einfluss auf die Umsetzung der Übergangsbedingung (7.4) mit Hilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Feinskalendiskretisierungen verwendet, die am Rand  $\Gamma'_{ms}$  zueinander passen. Dabei wird dem Verfahren von *Farhat & Roux* [50] gefolgt. Diese zerlegten die Diskretisierung einer Struktur in Teilgebiete, denen jeweils ein eigener Prozessor zugewiesen wurde, um eine parallele Lösung des gesamten Problems zu ermöglichen. Die Teilgebiete wurden mit der Lagrange-Multiplikator-Methode miteinander verbunden. Es ist offensichtlich, dass bei Verwendung von diesem Verfahren die Diskretisierungen der Teilgebiete an ihren Rändern zueinander passen. Daher reicht es, den Lagrange-Multiplikator und seine Variation als diskrete Knotenwerte einzuführen. Auf die Verwendung von Ansatzfunktionen zur Approximation des Lagrange-Multiplikators und seiner Variation zwischen Finite Element Knoten kann verzichtet werden. *Farhat & Roux* [50] nannten ihr Verfahren „Finite Element Tearing and Interconnecting“ (FETI). Wie bei diesem Verfahren wird in der vorliegenden Arbeit die Lagrange-Multiplikator-Methode knotenweise umgesetzt. Es sei darauf hingewiesen, dass damit die Verschiebungskomponente  $\chi_{m,i} \tilde{\mathbf{u}}_i$  der materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  generell keinen Beitrag zum Fehler  $\llbracket \mathbf{u}' \rrbracket$  liefert, da sie an allen Knoten identisch null ist. Die Forderung nach gleicher Diskretisierung des Randes benachbarter Grobskalenelemente zwingt die Diskretisierung innerhalb des Grobskalenelementes ein. In den Ausführungen wurden jedoch entsprechend Gleichung (7.16) die Lagrange-Multiplikatoren und ihre Testfunktionen mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen approximiert. Damit sollte der formale Rahmen für weiterführende Arbeiten geschaffen werden, in denen zur Steigerung der Flexibilität des Zweiskalenmodells auf nicht-konforme Feinskalendiskretisierungen zurückgegriffen werden kann.

Auf Grund der knotenweisen Umsetzung der Lagrange-Multiplikator-Methode lassen sich alle Integrale über den Rand  $\Gamma'$  unter Verwendung der Knotenwerte ersetzen.

$$\bigcup_{\mathcal{L}=1}^{n_{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma'^{\mathcal{L}}} (\bullet) d\Gamma \quad \rightarrow \quad \bigcup_{I=1}^{n_{nod}} (\bullet)_I \quad (7.29)$$

Die Integranden werden an den Knoten  $I$  des Randes  $\Gamma'^{\mathcal{E}}$  ausgewertet, auf denen Lagrange-Parameter positioniert sind. Der Zusammenbau der Werte der Integranden an all diesen  $n_{nod}$  Knoten des Randes  $\Gamma'^{\mathcal{E}}$  ersetzt den Zusammenbau der integralen Ausdrücke.

### 7.6.1 Anmerkungen zur Diskretisierung

Die Diskretisierung einer Struktur, die in Grob- und Feinskalengebiet unterteilt ist, soll mit Hilfe von Abbildung 7.5 verdeutlicht werden. Dabei wird die Kompatibilität der feinskaligen Verschiebungen über den Kopplungsrand mit Lagrange-Multiplikatoren realisiert. Auf der linken Seite ist die Diskretisierung der Grobskalenlösung mit vier bilinearen Elementen gezeigt. Die oberen zwei dieser Elemente, die das Gebiet  $\Omega'$  definieren, sind jeweils

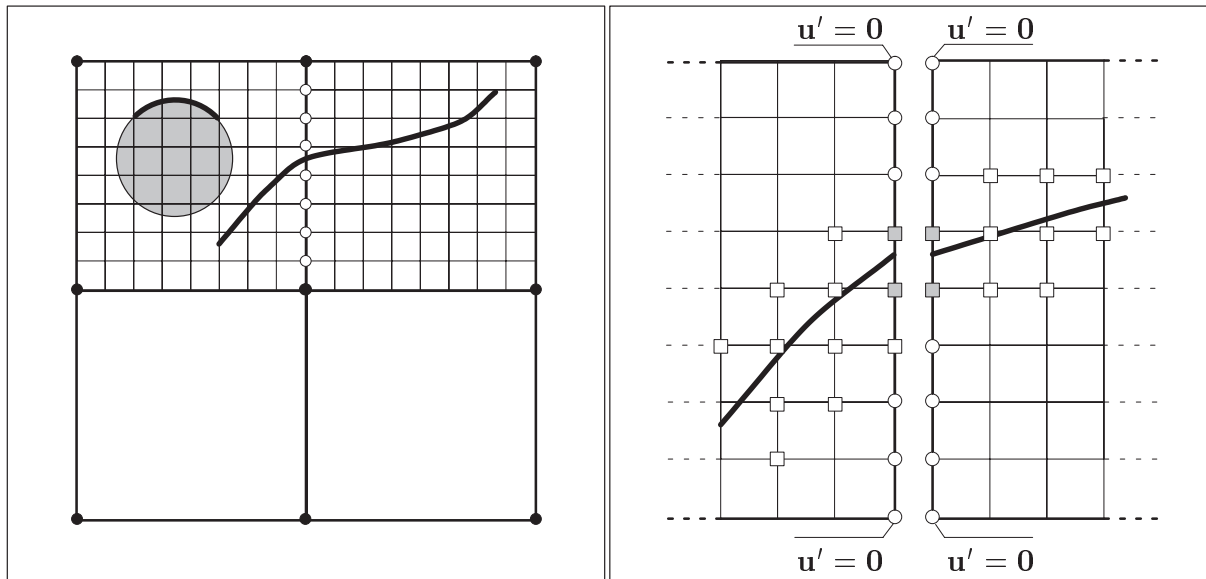


Abbildung 7.5: Diskretisiertes Zweiskalenproblem

mit  $8 \times 8$  bilinearen Elementen zur Approximation der Feinskalenlösung diskretisiert. Die schwarzen Punkte beschreiben die Knoten, auf denen die diskreten Verschiebungsfreiwerte  $\bar{\mathbf{d}}$  leben. Die Kreise symbolisieren die Knoten zur Diskretisierung der Lagrange-Parameter  $\mathbf{l}$ . Sie liegen auf den doppelten Knoten, mit denen die Feinskalenlösungen beider Teilgebiete auf dem Kopplungsrand  $\Gamma'$  diskretisiert werden. Die Feinskalendiskretisierungen sollen am Kopplungsrand zueinander passen, da die Übergangsbedingung sozusagen punktweise schwach erfüllt werden soll. In den Kapitel 4.3 und 4.5.2 wurde diskutiert, wann ein Knoten mit zusätzlichen Freiheitsgraden für die Modellierung eines Risses oder einer materiellen Grenzfläche angereichert werden muss bzw. darf. Dabei spielt der Support des Knotens die maßgebliche Rolle. In diesem Zusammenhang ist es wichtig anzumerken, dass benachbarte Feinskalendiskretisierungen hinsichtlich jener Problematik als unabhängig voneinander betrachtet werden. Dieser Sachverhalt soll am Beispiel des Rissfortschrittes skizziert werden. Auf der rechten Seite von Abbildung 7.5 ist der Bereich nahe des Kopplungsrandes  $\Gamma'$  vergrößert dargestellt. Bei Risswachstum von einem in das andere Grobskalenelement werden die grauen Knoten der Feinskalendiskretisierungen beider Grobskalenelemente mit Sprungfreiheitsgraden angereichert. Wenn der Riss in der Nähe von  $\Gamma'$  verläuft, werden nur ausgewählte Knoten der Feinskalenelemente desjenigen Grobskalenelementes angereichert, das den Riss enthält. Dies ist durch den weißen rechteckigen Knoten auf dem Kopplungsrand angedeutet. Die Kinematik des Risses ist damit im Vergleich zur Nullrandbedingung (7.3) nicht eingeschränkt. Wenn die Risspitze während des Belastungsprozesses auf dem Kopplungsrand zu liegen kommt, dürfen die Knoten auf  $\Gamma'$  des entsprechenden Teilgebietes angereichert werden. Da die Kontinuität der feinskaligen Verschiebungen  $\mathbf{u}'$  über den Kopplungsrand gefordert wird, wird der Riss jedoch mehr oder weniger gezwungen, sich in Richtung  $\Gamma'$  näherungsweise zu schließen. Die näherungsweise Risschließung resultiert aus der schwachen Erfüllung der Übergangsbedingung. Damit wird die Kinematik an der Risspitze gewissermaßen auch dann realitätsnah modelliert, wenn der Riss auf einem Kopplungsrand endet. Auf der rechten Seite von Abbildung 7.5 kennzeichnen die Kreise Knoten, die nur mit der



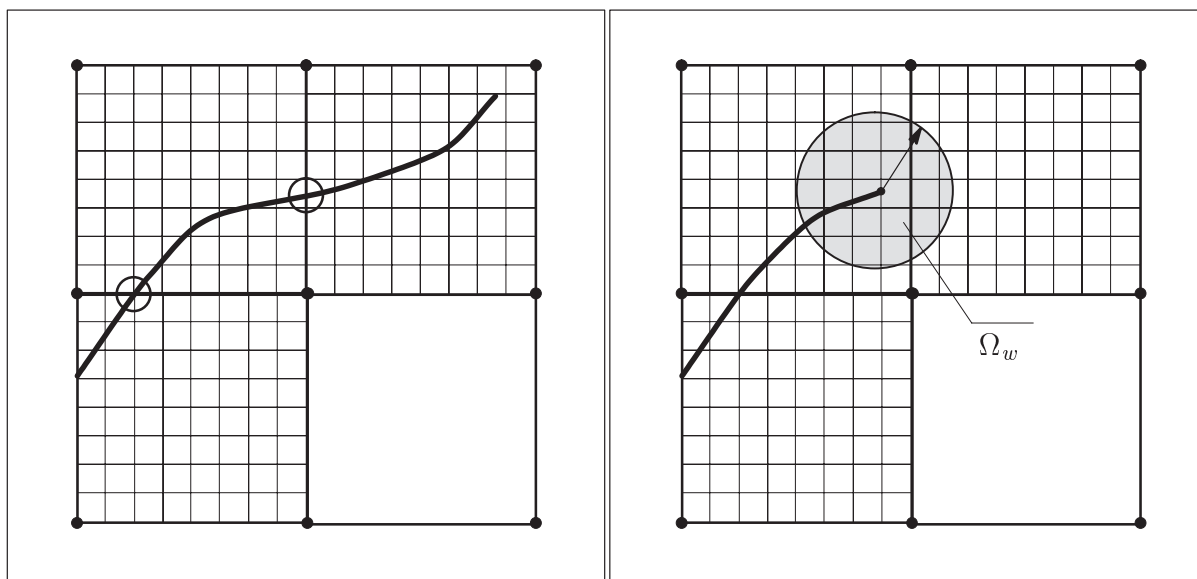


Abbildung 7.6: Risswachstum über benachbarte Teilgebiete

gewöhnlichen Komponente der feinskaligen Verschiebungen angereichert sind. In der vorliegenden Arbeit wird das gesamte strukturelle Gebiet  $\Omega$  von Anfang an als Feinskalengebiet  $\Omega'$  betrachtet. Somit beschreiben alle Grobskalenelemente, die das Gebiet  $\Omega$  diskretisieren, a priori lokale Träger der Feinskalenlösung. Infolgedessen muss die adaptive Erweiterung des Feinskalengebietes nicht thematisiert werden. So entfällt die Notwendigkeit, geeignete Kriterien zu definieren, mit denen über die Qualität der Gesamtlösung beziehungsweise den Wechsel vom Ein- zum Zweiskalenmodell entschieden werden kann. Beispielsweise wurde in *Hund* [82] der Modellwechsel zu dem Zeitpunkt vorgeschlagen, zu dem eine Vergleichsdehnung der Grobskalenlösung einen kritischen Wert erreicht.

### 7.6.2 Risswachstum über benachbarte Teilgebiete

In der vorliegenden Arbeit wird gefordert, dass der Riss über den Rand  $\Gamma'$  hinweg ohne Versatz verläuft. Die Kontinuität des Risspfades ist in Abbildung 7.6 auf der linken Seite veranschaulicht. Zur Umsetzung wird ein Algorithmus benötigt, der die globalen Koordinaten der Risspitze dem entsprechenden Element der Feinskalendiskretisierung des benachbarten Teilgebietes übergibt.

Auf der rechten Seite von Abbildung 7.6 ist gezeigt, wie bei der Berechnung des „nicht-lokalen“ Spannungstensors  $\bar{\sigma}$ , über den die Rissrichtung ermittelt wird, vorgegangen wird, siehe Kapitel 5.5.2. Das Einflussgebiet  $\Omega_w$ , in dem die lokalen Spannungen gewichtet und anschließend gemittelt werden, endet nicht am Kopplungsrand, sondern reicht in das angrenzende Teilgebiet hinein. Damit ist die Lage der Risspitze ohne Bedeutung bei der Ermittlung der Rissrichtung, die durch die Erfüllung vollständiger Einflussgebiete genau berechnet werden kann. Dasselbe Vorgehen wird bei der Definition der Abschirmzone vorgeschlagen, siehe Kapitel 4.5.4. Auch diese sollte in das benachbarte Teilgebiet hineinreichen.

Mit den beschriebenen Maßnahmen soll gewährleistet werden, dass die Gebietszerlegung an sich auf den Rissverlauf und somit auf die Genauigkeit der Lösung im Vergleich zur

numerischen Referenzlösung keinen größeren Einfluss hat, siehe Kapitel 8.

# Kapitel 8

## Numerische Beispiele: Zweiskalenmodell

In diesem Kapitel wird die Wirkungsweise des hierarchischen Zweiskalenmodells, das in Kapitel 7 vorgestellt wurde, anhand von drei unterschiedlichen Randwertproblemen näher untersucht. Eine Besonderheit des Modells ist die Berücksichtigung von ungeschädigten materiellen Grenzflächen und kohäsiven Rissen zur Erfassung von diskontinuierlichem Versagen in Verbundmaterialien. Dabei ist die Anwendung der erweiterten Finite Element Methode (X-FEM) in Kombination mit der Level Set Methode (LSM) zur Diskretisierung der feinskaligen Lösung hervorzuheben.

In Kapitel 6 ist die besondere Leistungsfähigkeit dieses Diskretisierungsverfahrens bei Anwendung der Kohäsivzonentheorie im Hinblick auf die Erzielung von exakten und netzunabhängigen Lösungen im Sinne eines Einskalenmodells dargestellt worden. Der Schwerpunkt des vorliegenden Kapitels ist der Vergleich der numerischen Antworten des hierarchischen Zweiskalenmodells mit numerischen Referenzlösungen. Die Referenzlösungen werden durch die direkte Diskretisierung des mesostrukturellen Materialaufbaus unter Verwendung der mit der LSM kombinierten X-FEM gewonnen und im Weiteren als Feinskalen-Lösung (FSL) bezeichnet.

Das gesamte Strukturgebiet  $\Omega$  wird von Anfang an als Feinskalengebiet  $\Omega'$  betrachtet. Da die Effizienz des Zweiskalenmodells nicht unmaßgeblich aus der adaptiven Ausdehnung des Feinskalengebietes resultiert, wird sie nicht mit der des Einskalenmodells verglichen, siehe hierzu *Hund* [82]. Vielmehr stehen in dieser Arbeit Untersuchungen über die Anwendbarkeit der beiden Nebenbedingungen (7.3) und (7.4), die im Rahmen der Zerlegung des Feinskalengebietes benötigt werden, bei Risswachstum mit mehrskaligem Charakter im Vordergrund. Zur Diskretisierung der Grobskalen- sowie der Feinskalenlösung werden vierknotige Scheibenelemente verwendet, die auf bilinearen Verschiebungsansätzen basieren. Auf denselben Elementtyp wird auch bei der Ermittlung der numerischen Referenzlösung zurückgegriffen. Jedes Element der Grobskalendiskretisierung wird in den Rissbildern durch dicke Kantenlinien hervorgehoben. Zur Berechnung der Wachstumsrichtung eines Matrixrisses wird das in Kapitel 5.5.2 vorgestellte spannungsbasierte Kriterium eingesetzt, das auf einem „nicht-lokalen“ Spannungstensor gründet. Der Radius des kreisförmigen Gebietes zur Evaluation des „nicht-lokalen“ Spannungstensors wird in Abhängigkeit der charakteristischen Größe  $h_e$  des Finiten Elementes vor der Rissspitze in allen Testbeispielen zu  $R_{nl} = 3 h_e$  bestimmt. Bei Anwendung des Zweiskalenmodells ist mit dem Element vor der Rissspitze ein Feinskalenelement gemeint.

Bei den Testbeispielen handelt es sich ausschließlich um Scheibentragwerke. Das erste Problem ist durch eine quadratische Scheibe unter kombinierter Zug- und Schubbeanspruchung gegeben. Danach folgt die Simulation einer Verbundstruktur und eines dreipunktgestützten Biegebalkens, für den experimentelle Ergebnisse verfügbar sind.

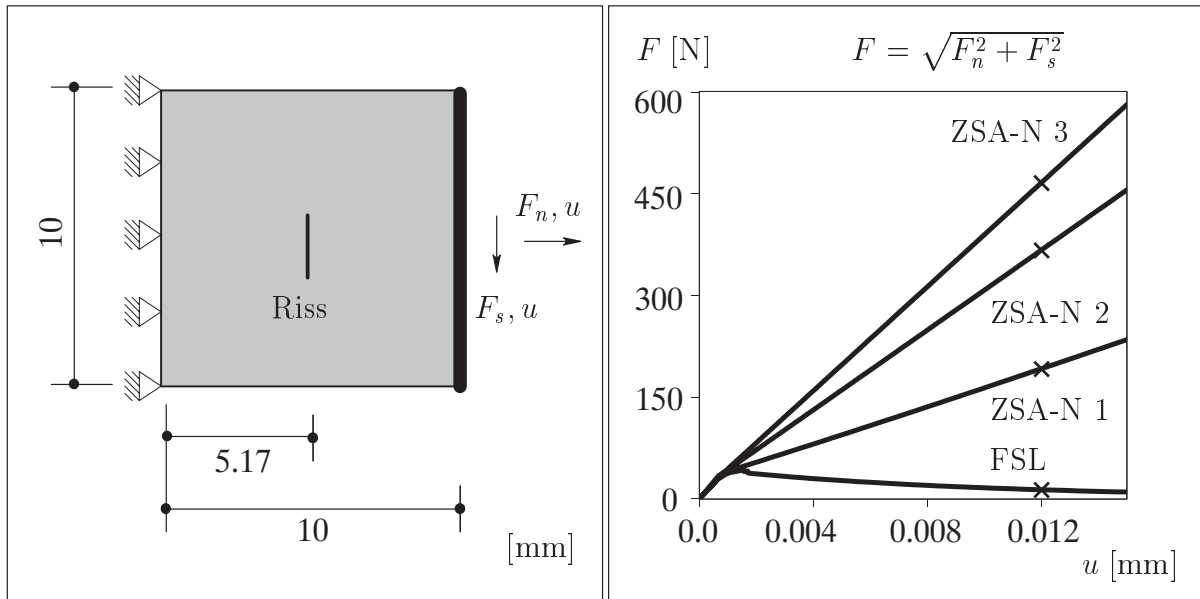


Abbildung 8.1: Problem und Last-Verschiebungskurven

## 8.1 Scheibe unter Zug-Schub-Belastung

In diesem Beispiel wird die Wirkung des Zweiskalenmodells anhand eines Strukturproblems für Mixed-Mode Versagen eines kohäsiven Reibungsmaterials untersucht. Dabei steht die Frage im Vordergrund, in wieweit die Diskretisierungen der Grob- und Feinskalenlösungen bei Verwendung unterschiedlicher Nebenbedingungen am Kopplungsrand Einfluss auf die Genauigkeit der berechneten Strukturantwort haben. Zum einen wird als Nebenbedingung die Nullrandbedingung (7.3) aufgebracht. Die entsprechenden Zweiskalenanalysen werden als ZSA-N bezeichnet. Der Zusatz N steht für Nullrandbedingung. Zum anderen wird die Übergangsbedingung (7.4) unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren eingesetzt. In diesem Fall wird von der ZSA-L gesprochen. Das Problem stellt eine Scheibe aus Beton dar, die quasi mittig durch einen 2.0 mm langen spannungsfreien Riss mit einer horizontalen Versetzung von 0.17 mm geschädigt ist. Besondere Aufmerksamkeit gilt dem Wachstum dieses anfänglichen Risses während der Belastung. Die Größenordnung der Betonscheibe befindet sich im mesoskopischen Bereich. Folglich kann sie in Bezug auf die Struktur des Konstruktionsmaterials noch als homogen betrachtet werden.

In Abbildung 8.1 ist die  $10 \times 10 \times 1 \text{ mm}^3$  große Scheibe mit Riss dargestellt. Sie unterliegt einer Kombination aus Zug- und Schubbelastung, die verschiebungskontrolliert aufgebracht wird, vergleiche Beispiel 6.2. Es wird ein ebener Verzerrungszustand angenommen. Die elastischen Materialeigenschaften der Scheibe sind durch den Elastizitätsmodul  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.2$  charakterisiert. Die Zugfestigkeit des Betons sowie die Parameter, die im Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz verwendet werden, sind in Beispiel 6.5 angegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass zur Modellierung des spannungsfreien Risses die entsprechenden Materialparameter, wie z.B. die Zugfestigkeit und Bruchenergie, sehr klein gewählt werden.

Zur Gewinnung der FSL wird eine Diskretisierung verwendet, die aus  $30 \times 30$  Elementen besteht. Die Zweiskalenanalysen werden mit drei unterschiedlichen Diskretisierungen der Grob- und der Feinskalenlösung durchgeführt. Zur Kennzeichnung der gewählten

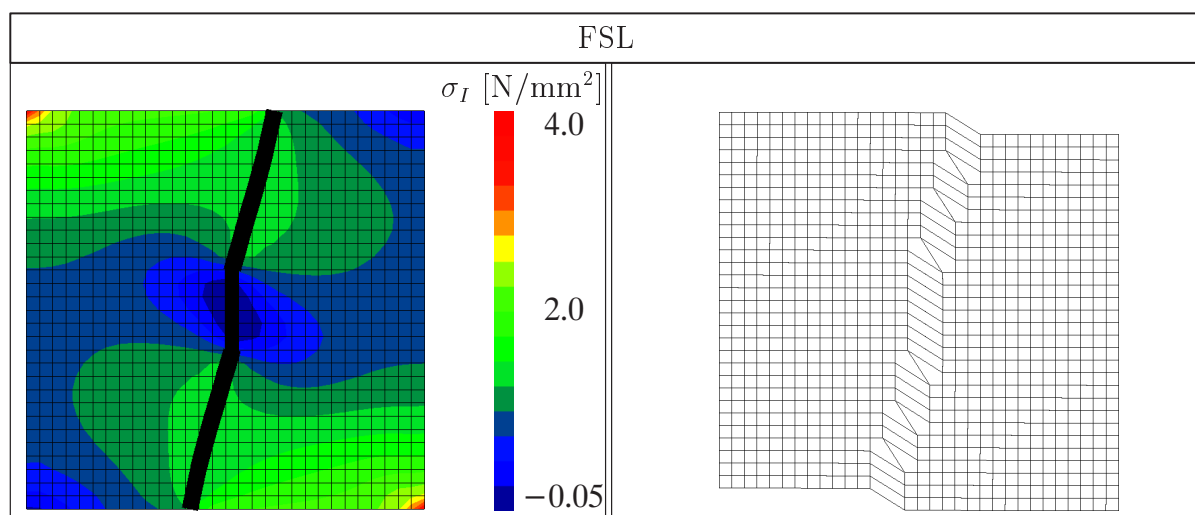


Abbildung 8.2: Rissverlauf auf maximalen Hauptspannungen und deformiertes Netz

Diskretisierungen werden die Kürzel ZSA-N und ZSA-L mit den Zahlen 1, 2 und 3 versehen. Die 1 steht für die Diskretisierung der Scheibe mit einem einzigen Grobskalenelement, das seinerseits in  $30 \times 30$  Feinskalenelemente unterteilt ist. Die 2 kennzeichnet die Unterteilung der Scheibe in  $3 \times 3$  Grobskalenelemente, die mit  $10 \times 10$  Feinskalenelementen hierarchisch verfeinert werden. Die 3 bedeutet, dass die gesamte Struktur mit  $5 \times 5$  Grobskalenelementen diskretisiert wird, wobei diese jeweils mit  $6 \times 6$  Feinskalenelementen vernetzt werden. Somit haben die Feinskalenelemente in den Zweiskalenanalysen ZSA-N sowie ZSA-L und die Elemente, die für die Ermittlung der FSL verwendet werden, dieselben Abmessungen bzw. charakteristische Größe von ca.  $h_e = 0.33$  mm.

In Abbildung 8.2 sind links der Rissverlauf in der Scheibe auf den maximalen Hauptspannungen  $\sigma_I$  und rechts das deformierte Netz in 50-facher Überhöhung dargestellt. Die Rissnormalöffnung ist 30-fach vergrößert worden. Die Ergebnisse repräsentieren die FSL. Beide Darstellungen kennzeichnen den Belastungszustand bei  $u = 0.012$  mm, der in Abbildung 8.1 durch Kreuze markiert ist. Es ist deutlich sichtbar, dass sich der gesamte Riss öffnet. Gleichzeitig nehmen die Spannungen im gesamten Gebiet kontinuierlich ab. Die Deformationsfigur unterstreicht die korrekte Wiedergabe des strukturellen Versagens, das durch eine Art Starrkörperverschiebung des Bereiches rechts vom Riss geprägt ist.

### Verwendung der Nullrandbedingung (7.3)

Nun folgt die Diskussion der Ergebnisse des Zweiskalenmodells unter Verwendung der Nullrandbedingung (7.3). In Abbildung 8.3 sind der Rissverlauf auf den maximalen Hauptspannungen  $\sigma_I$  und die deformierten Strukturen veranschaulicht, die die ZSA-N 1–3 liefern. Die Überhöhungsfaktoren in den Darstellungen entsprechen den Faktoren, die bei der Visualisierung der FSL in Abbildung 8.2 benutzt wurden. Darüber hinaus wurde zur besseren Darstellung des Risses im unteren Rissbild von Abbildung 8.3 eine minimale Rissnormalöffnung definiert. Alle Bilder illustrieren auch hier den Belastungszustand bei  $u = 0.012$  mm, der in Abbildung 8.1 durch Kreuze markiert ist. Die Lösung aus der ZSA-N 1 zeigt, dass die Risskinematik im Zentrum des Grobskalenelementes relativ genau erfasst wird. Zum Rand dieses Elementes hin wird sie allerdings durch die

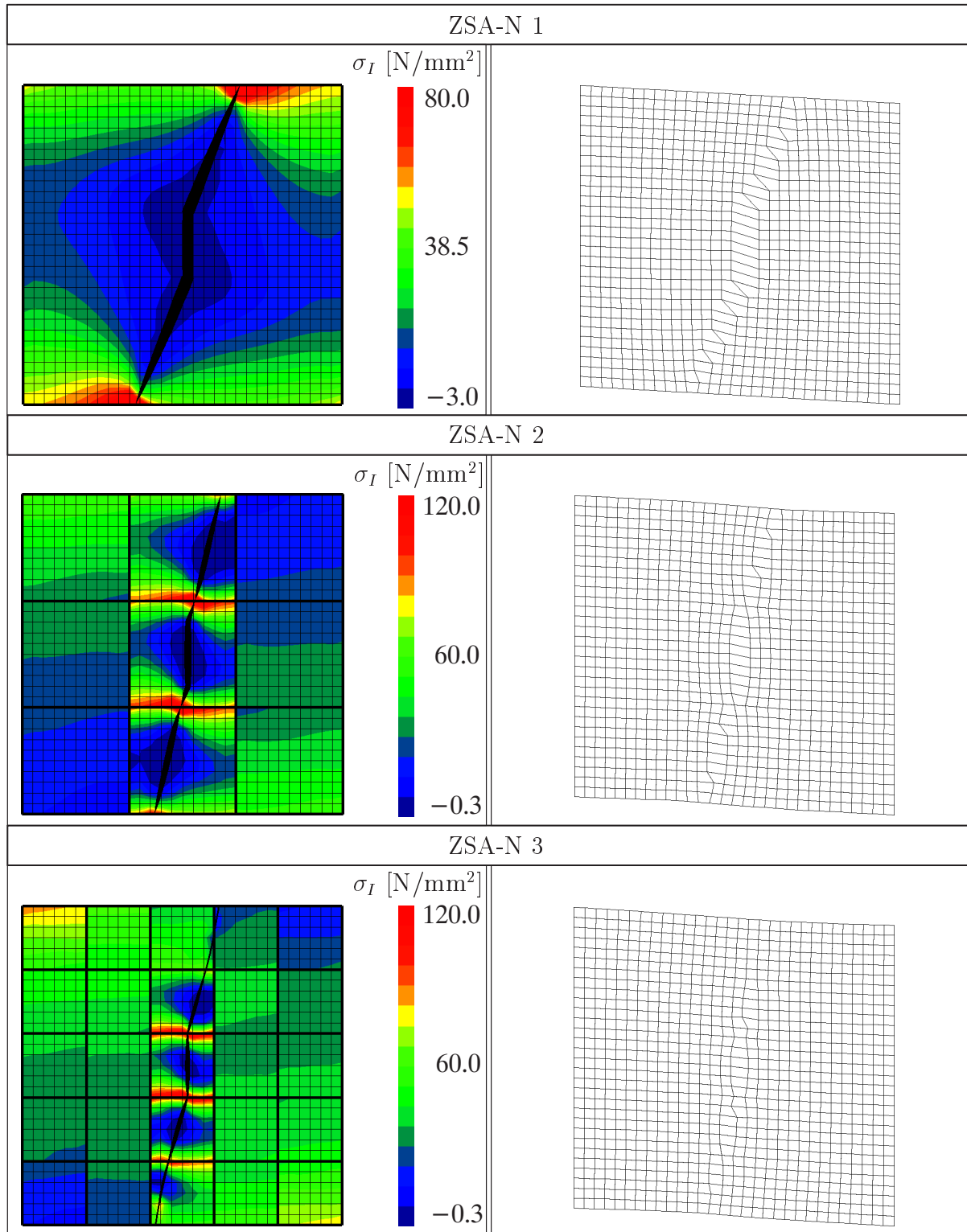


Abbildung 8.3: Rissverläufe auf maximalen Hauptspannungen und deformierte Netze

Nullrandbedingung immer stärker eingeschränkt. Denn der Riss ist gezwungen, sich auf diesem Rand zu schließen. Infolgedessen kann die äußere Belastung weiter gesteigert werden, was sich in der Zunahme der maximalen Hauptspannung in den Bereichen um die Risspitzen herum äußert. Dies hätte fälschlicherweise die Entstehung weiterer Risse zur

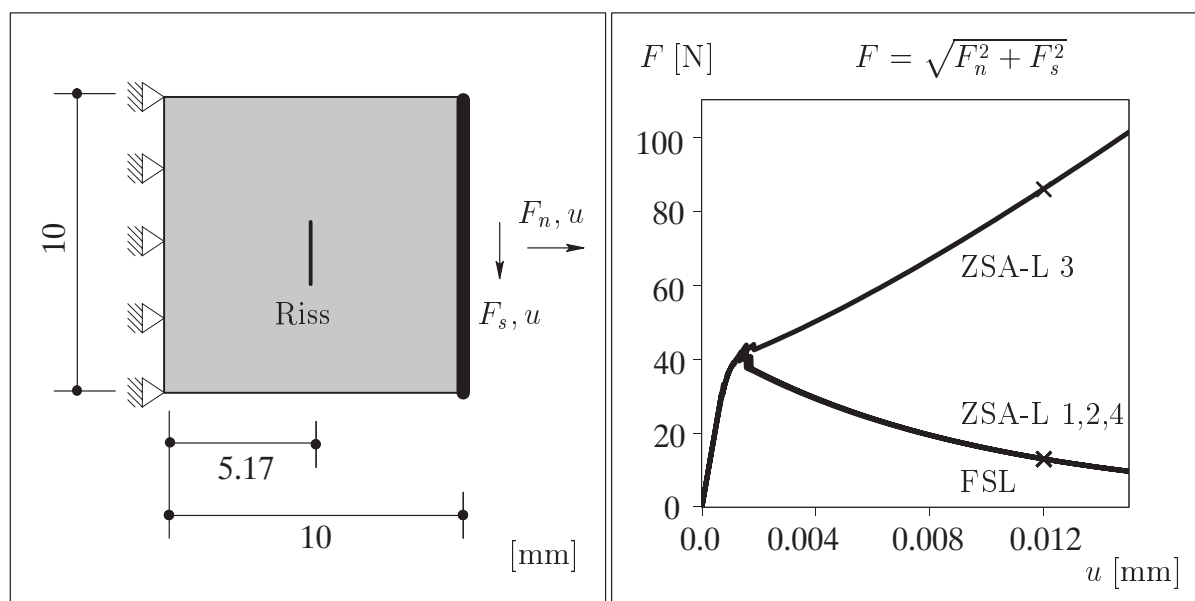


Abbildung 8.4: Problem und Last-Verschiebungskurven

Folge. Anhand des deformierten Netzes erkennt man, dass die Diskretisierung der Scheibe mit einem einzigen Grobskalenelement unter Verwendung der Nullrandbedingung unzureichend ist, um den korrekten Versagensmodus abzubilden. Da bei den ZSA-N 2 und 3 mehr Grobskalenelemente zur Diskretisierung der Scheibe verwendet werden, existieren auch mehr Stellen, an denen der Riss gezwungen ist, sich zu schließen. Dies führt zu einer Verschlechterung in der Abbildung der wirklichen Risskinematik. Die Risssegmente innerhalb der Grobskalenelemente öffnen sich immer weniger. Daher ist es nutzlos, dass die mit der FSL simulierte Starrkörpertranslation des Gebietes rechts vom Riss mit den feineren Grobskalendiskretisierungen, die den ZSA-N 2 und 3 zugrunde liegen, abgebildet werden könnte.

Es hat sich gezeigt, dass bei steigender Anzahl von Grobskalenelementen innerhalb des Feinskalengebietes die Qualität der numerischen Lösung des Zweiskalenmodells abnimmt, wenn die Nullrandbedingung (7.3) am Kopplungsrand aufgebracht wird. Die Last-Verschiebungskurven untermauern diese Beobachtung, siehe Abbildung 8.1. Die Strukturantworten, die mittels des Zweiskalenmodells berechnet werden, werden mit steigender Anzahl von Grobskalenelementen immer steifer. Keine gibt das reale entfestigende Strukturverhalten wieder. Offensichtlich scheinen die Strukturantworten gegen die elastische Lösung zu konvergieren. Wenn man voraussetzt, dass die gewählte Grobskalendiskretisierung nicht a priori die Kinematik der Struktur im elastischen Bereich einschränkt, wird die Abweichung der Zweiskalenanalyse von der FSL auf Grund von Risswachstum um so früher eintreten, je mehr Grobskalenelemente im Feinskalengebiet eingesetzt werden. Letztlich beginnt die Abweichung dann, wenn der Riss zum ersten Mal über die Kanten eines Grobskalenelementes wächst.

### Verwendung der Übergangsbedingung (7.4)

Im Folgenden wird die Wirkungsweise des Zweiskalenmodells unter Verwendung der Übergangsbedingung (7.4) untersucht, die mit Lagrange-Multiplikatoren realisiert wird. In Abbildung 8.4 ist auf der linken Seite nochmals das Problem dargestellt. Die FSL

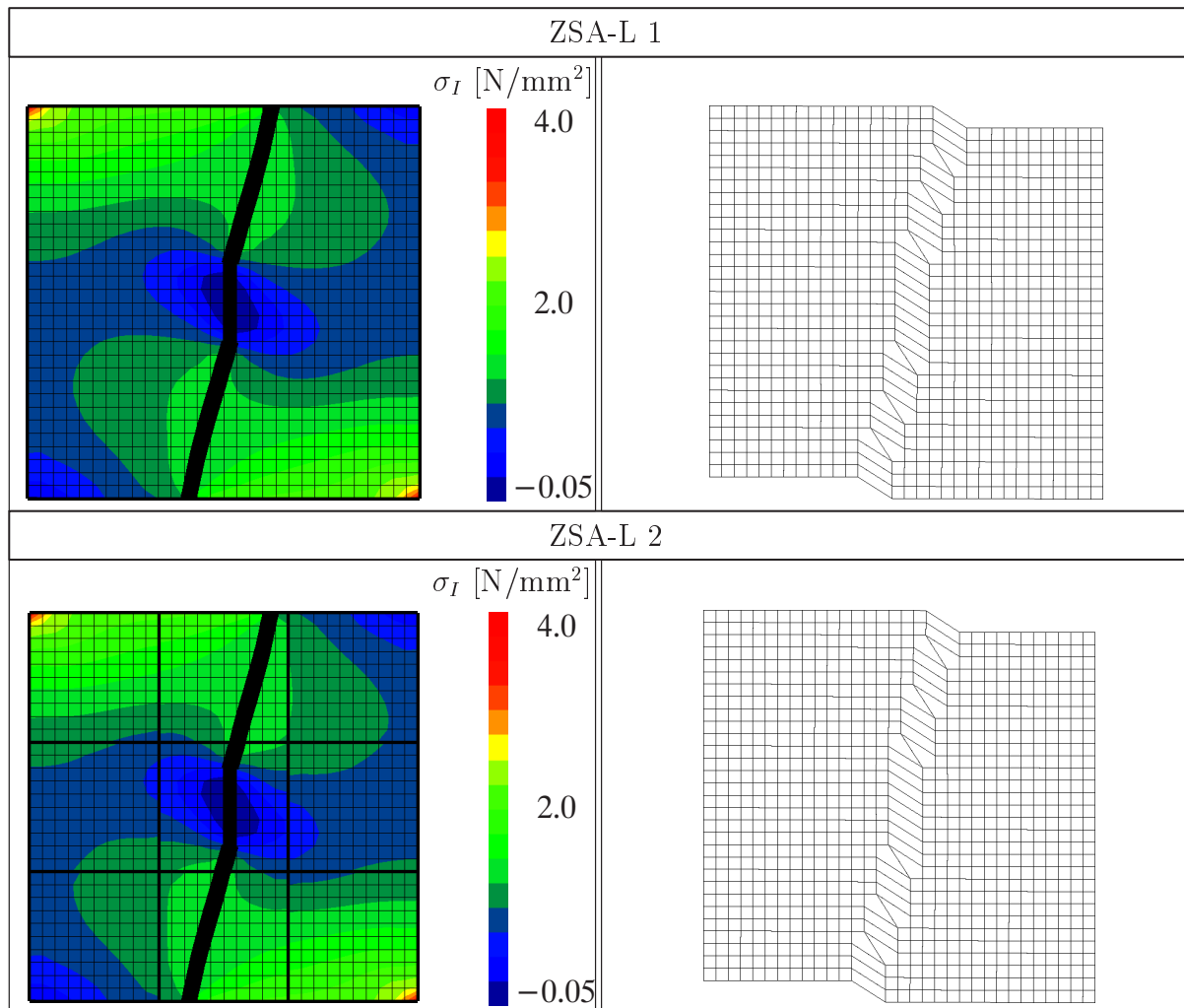


Abbildung 8.5: Rissverläufe auf maximalen Hauptspannungen und deformierte Netze

wird mit den numerischen Lösungen der Zweiskalenanalysen ZSA-L 1–4 verglichen. Zur Durchführung der ZSA-L 4 wird die Scheibe mit  $5 \times 5$  Grouskalenelementen vernetzt, die jeweils mit  $6 \times 6$  Feinskalenelementen unterteilt werden. Der Unterschied zwischen den Rechnernetzen, die durch die Zahlen 3 und 4 gekennzeichnet sind, besteht in der Diskretisierung der Grouskalenelemente. Für die ZSA-L 4 werden nicht mehr gleich große Feinskalenelemente eingesetzt. Die Größe der Feinskalenelemente ist im unmittelbaren Bereich der Knoten der Grouskalenelemente vergleichsweise klein.

In Abbildung 8.4 sind die Last-Verschiebungskurven der FSL und der ZSA-L 1–4 veranschaulicht. Es ist bemerkenswert, dass die Kurven aus der ZSA-L 1, 2 und 4 identisch der Kurve aus der FSL sind. Offensichtlich fällt die numerische Antwort aus der ZSA-L 3 aus dem Rahmen. Die Rissbilder mit der Verteilung der maximalen Hauptspannung  $\sigma_I$  und die deformierten Strukturen unterstreichen diese Beobachtung. Sie sind in den Abbildungen 8.5 und 8.6 für die Randverschiebung  $u = 0.012$  mm dargestellt. Zur Verbesserung der bildlichen Darstellungen werden dieselben Überhöhungsfaktoren eingesetzt, die bei der Visualisierung der FSL verwendet wurden. Die numerischen Lösungen aus den ZSA-L 1, 2 und 4 stimmen mit der FSL exzellent überein. Mit der ZSA-L 3 kann die FSL nur bis zu einem bestimmten Belastungszustand approximiert werden. Danach wird das erzielte



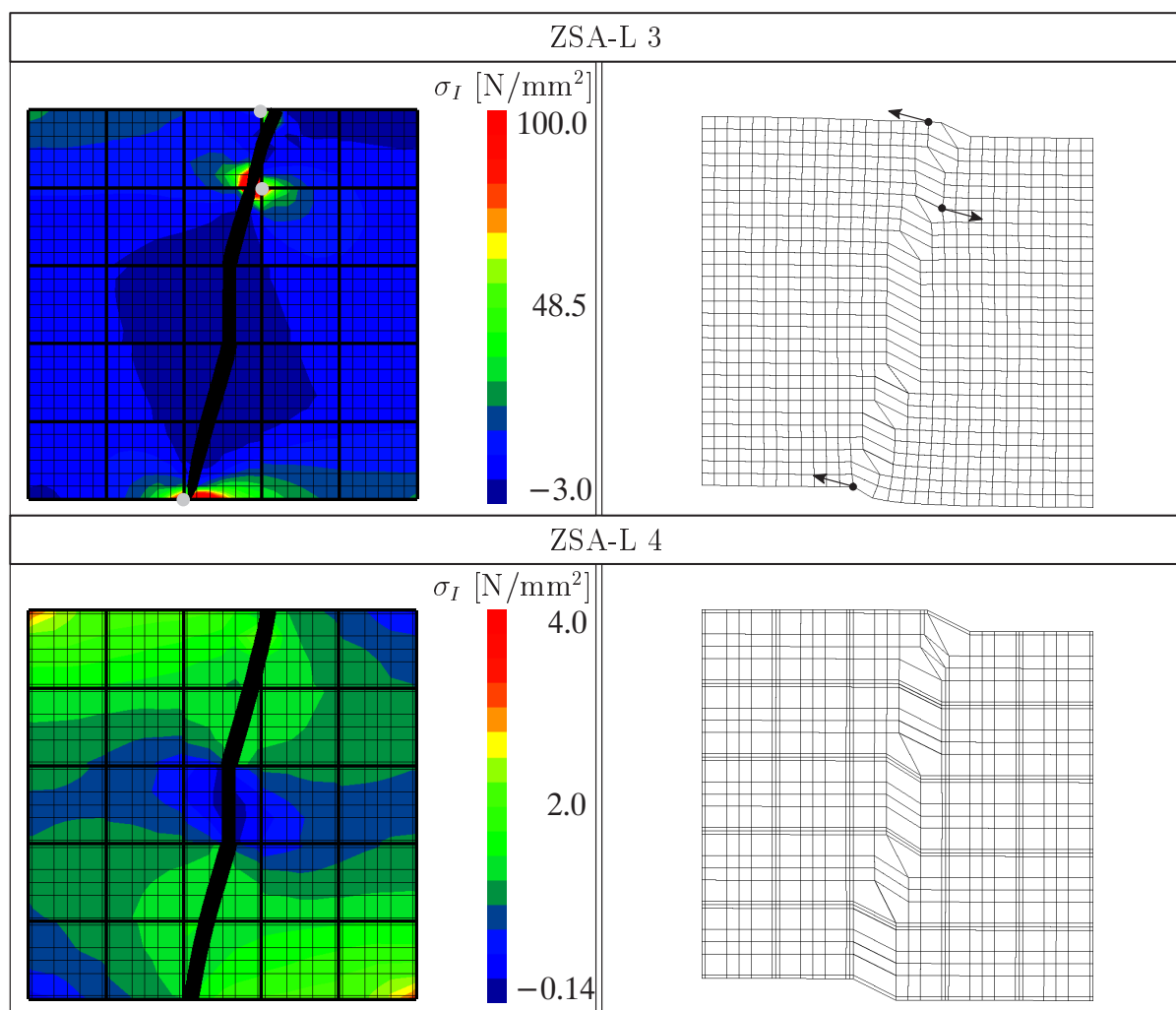


Abbildung 8.6: Rissverläufe auf maximalen Hauptspannungen und deformierte Netze

Simulationsergebnis unbrauchbar. Dies ist auf folgenden Sachverhalt zurückzuführen. An den Knoten der Grobskalenelemente muss die Feinskalenlösung aus Gründen der linearen Unabhängigkeit des Gleichungssystems identisch null sein, siehe Kapitel 7.4 und 7.6.1. Dies betrifft nicht nur die gewöhnliche Komponente der Feinskalenlösung, sondern auch die Komponenten, die mit der Kinematik der Risse und der materiellen Grenzflächen assoziiert sind. Wenn also ein Knoten eines Feinskalenelementes gleich dem Knoten eines Grobskalenelementes ist und sein Support von dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  durchtrennt wird, muss auch die dazugehörige feinskalige Verschiebungskomponente  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  verschwinden. Die Folgen sind die Behinderung der Risskinematik und damit des Versagensmodus der untersuchten Struktur. In Abbildung 8.6 sind die Knoten der Feinskalenelemente, die nicht mit der Feinskalenlösung angereichert werden dürfen, mit grauen bzw. schwarzen Punkten gekennzeichnet. Die Pfeile deuten die unterdrückten Verschiebungen an, die zur genauen Abbildung der Bewegung der Scheibe fehlen. Erstaunlicherweise genügt die Behinderung der Kinematik an einigen wenigen Knoten, um eine zu steife numerische Antwort zu erhalten. Die maximalen Hauptspannungen nehmen lokal im Bereich dieser Knoten während der gesamten Belastung zu. Das entfestigende Verhalten der Scheibe, das in der FSL sowie bei den ZSA-L 1, 2 und 4 beobachtet wird, nachdem der Riss die Struktur vollständig

durchtrennt hat, kann nicht abgebildet werden. Als Lösung für dieses Problem wird vorgeschlagen, den lokalen Träger der feinskaligen Verschiebungen in den kritischen Bereichen zu ändern. Der lokale Träger sollte dort durch mehrere Grobkalenelemente gebildet werden.

In diesem Beispiel interessiert neben der Genauigkeit auch die Effizienz in Bezug auf die Zweiskalendiskretisierungen, mit denen dieselben Ergebnisse erzielt werden wie mit der FSL. So nimmt die ZSA-L 1 mehr als das 1.6-fache an Rechenzeit in Anspruch wie die ZSA-L 2 oder 4, obwohl keine weiteren Lagrange-Parameter als zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden müssen. Dies bestätigt, dass die Substrukturierung die Rechenzeit der Zweiskalenanalysen verringert. Die Rechenzeit für die ZSA-L 4 ist marginal geringer als für die ZSA-L 2. Offensichtlich ist keine weitere Steigerung an Effizienz mehr möglich. Der Grund hierfür liegt auf der Hand. Zwar vermindert sich durch die Verfeinerung der Grobkalendiskretisierung die Anzahl der feinskaligen Freiheitsgrade pro lokalem Träger. Insgesamt nimmt jedoch die Anzahl aller feinskaligen Freiheitsgrade durch die Verdopplung der Knoten auf den zusätzlichen Kopplungsrändern zu; und natürlich auch die Anzahl der grobkaligen Verschiebungsfreiheitsgrade sowie der Lagrange-Parameter.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass man mit dem Zweiskalenmodell bei Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren zur Realisierung der Kompatibilität der Feinskalenlösung an den einzelnen Kopplungsrändern in der Lage ist, die FSL äußerst genau zu approximieren. Dabei spielt die Größe der Grobkalenelemente im Bereich des Feinskalengebietes keine Rolle, solange die Diskretisierung der Feinskalenlösung aus Elementen besteht, die in etwa so groß sind wie die Elemente, die für die Gewinnung der FSL notwendig sind. Wenn ein Grobkalenelement mit nur wenigen Feinskalenelementen verfeinert wird, sollte allerdings eine Verdichtung des Feinskalennetzes in Richtung der Knoten des Grobkalenelementes vorgenommen werden. Damit kann die Wahrscheinlichkeit reduziert werden, dass die Kinematik von Diskontinuitäten auf Grund der feinskaligen Nulllösung an den Knoten der Grobkalenelemente behindert wird. Im Hinblick auf diese Problematik und die Rechenzeiten, die zur Durchführung der Zweiskalenanalysen benötigt werden, ist für dieses Beispiel die Zweiskalendiskretisierung der ZSA-L 2 eine gute Wahl.

## 8.2 Verbundstruktur unter Zug-Schub-Belastung

Mit diesem Strukturbeispiel wird die Wirkungsweise des Zweiskalenmodells zur numerischen Versagensanalyse von Verbundstrukturen getestet. Hierfür werden die Ergebnisse, die mit dem vorgestellten Zweiskalenmodell unter Verwendung der Nebenbedingungen (7.3) und (7.4) erzielt werden, der FSL gegenübergestellt. Das Strukturproblem stellt eine Scheibe dar, die einer kombinierten Zug- und Schubbelastung unterliegt, vergleiche Beispiel 8.1. Die Scheibe besteht aus einer Betonmatrix, in der zur Verstärkung vier kreisförmige Einschlüsse aus Textilfaser eingebettet sind. Des Weiteren ist die Scheibe durch vier spannungsfreie Matrixrisse geschädigt. In den Simulationen wird das diskontinuierliche Versagen der materiellen Grenzflächen sowie das Wachstum der vier spannungsfreien Matrixrisse berücksichtigt.

In Abbildung 8.7 ist die  $10 \times 13.33 \times 1 \text{ mm}^3$  große Verbundstruktur mit vier Rissen und vier runden Textilfasern dargestellt. Es wird ein ebener Verzerrungszustand vorausgesetzt. Die vier spannungsfreien Risse sind alle horizontal und zirka  $0.44 \text{ mm}$  lang. Für ihre Modellierung werden die entsprechenden Materialparameter, wie z.B. die Zugfestigkeit und Bruchenergie, vernachlässigbar klein gewählt. Die vier Textilfasern haben alle

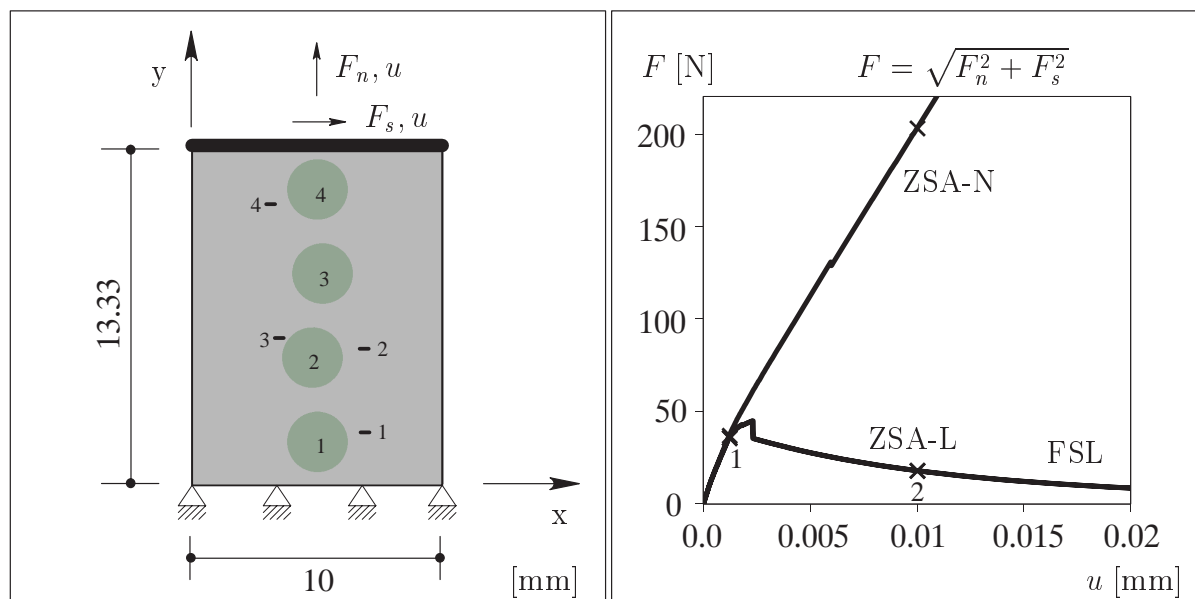


Abbildung 8.7: Problem und Last-Verschiebungskurven

den Radius  $r_{1-4} = 1.20$  mm. Im Sinne einer imperfekten Herstellung weichen ihre Mittelpunkte in horizontaler Richtung um 0.20 mm von der vertikalen Mittelachse der Scheibe ab. Die Fasergeometrie wird durch eine einzige Level Set Funktion  $\phi_m$  beschrieben, die aus den vier Level Set Funktionen  $\phi_{m,i}$  zur Darstellung der vier Textilfasern generiert wird, vergleiche Beispiele 6.4 und 6.5. Die linken Risspitzen  $\mathbf{x}_{c,j}$  sowie die Mittelpunkte  $\mathbf{x}_{0,i}$  der Textilfasern werden bezüglich der linken unteren Scheibenecke angegeben. Sie ist der Ursprung des globalen Koordinatensystems, dessen x- und y-Achsen entlang der unteren bzw. linken Kanten der Scheibe verlaufen. Es folgen die Koordinaten in der Einheit Millimeter für die Lokalisierung der Risse und der Fasern:  $\mathbf{x}_{c,1} = (6.67 \ 2.11)$ ,  $\mathbf{x}_{c,2} = (6.67 \ 5.44)$ ,  $\mathbf{x}_{c,3} = (3.33 \ 5.89)$  sowie  $\mathbf{x}_{c,4} = (2.89 \ 11.22)$ ;  $\mathbf{x}_{0,1} = (5.00 \ 1.66)$ ,  $\mathbf{x}_{0,2} = (4.80 \ 5.00)$ ,  $\mathbf{x}_{0,3} = (5.20 \ 8.33)$  sowie  $\mathbf{x}_{0,4} = (5.00 \ 11.66)$ . Die Benennung der Risse und der Fasern ist in Abbildung 8.7 angegeben. Die elastischen Eigenschaften der Betonmatrix und der Fasern sind in Beispiel 6.4 spezifiziert. Die Zugfestigkeit und Bruchenergie sowie alle anderen Parameter, die in das Kohäsivzonenmodell für einen Grenzflächenriss bzw. Matrixriss eingehen, sind in den Beispielen 6.4 und 6.5 aufgeführt.

Zur Berechnung der FSL wird die Scheibe mit  $45 \times 60$  Elementen diskretisiert. Für die Zweiskalenanalysen wird die gesamte Struktur mit  $3 \times 4$  Grobskalenelementen vernetzt, die jeweils mit  $15 \times 15$  Feinskalenelementen hierarchisch verfeinert werden. Die Elemente zur Ermittlung der FSL und die Feinskalenelemente haben damit dieselbe charakteristische Größe von etwa  $h_e = 0.22$  mm. Die Zweiskalenanalyse, die mit dem vorgestellten Zweiskalenmodell unter Verwendung der Nullrandbedingung (7.3) durchgeführt wird, wird als ZSA-N bezeichnet. Bei Verwendung der Übergangsbedingung (7.4), die mit Lagrange-Multiplikatoren realisiert wird, wird wieder von der ZSA-L gesprochen.

In Abbildung 8.7 sind die entsprechenden Last-Verschiebungskurven dargestellt. Mit Ausnahme des Anfangsbereiches ist die Lösung der ZSA-N zu steif und weit entfernt von der Referenzlösung FSL. Das Ergebnis aus der ZSA-L ist praktisch identisch mit der FSL. Dies gilt nicht nur für den vorkritischen Bereich, sondern auch in Bezug auf die Traglast und den Nachbruchbereich. Zur Darstellung des simulierten Bruchverhaltens werden

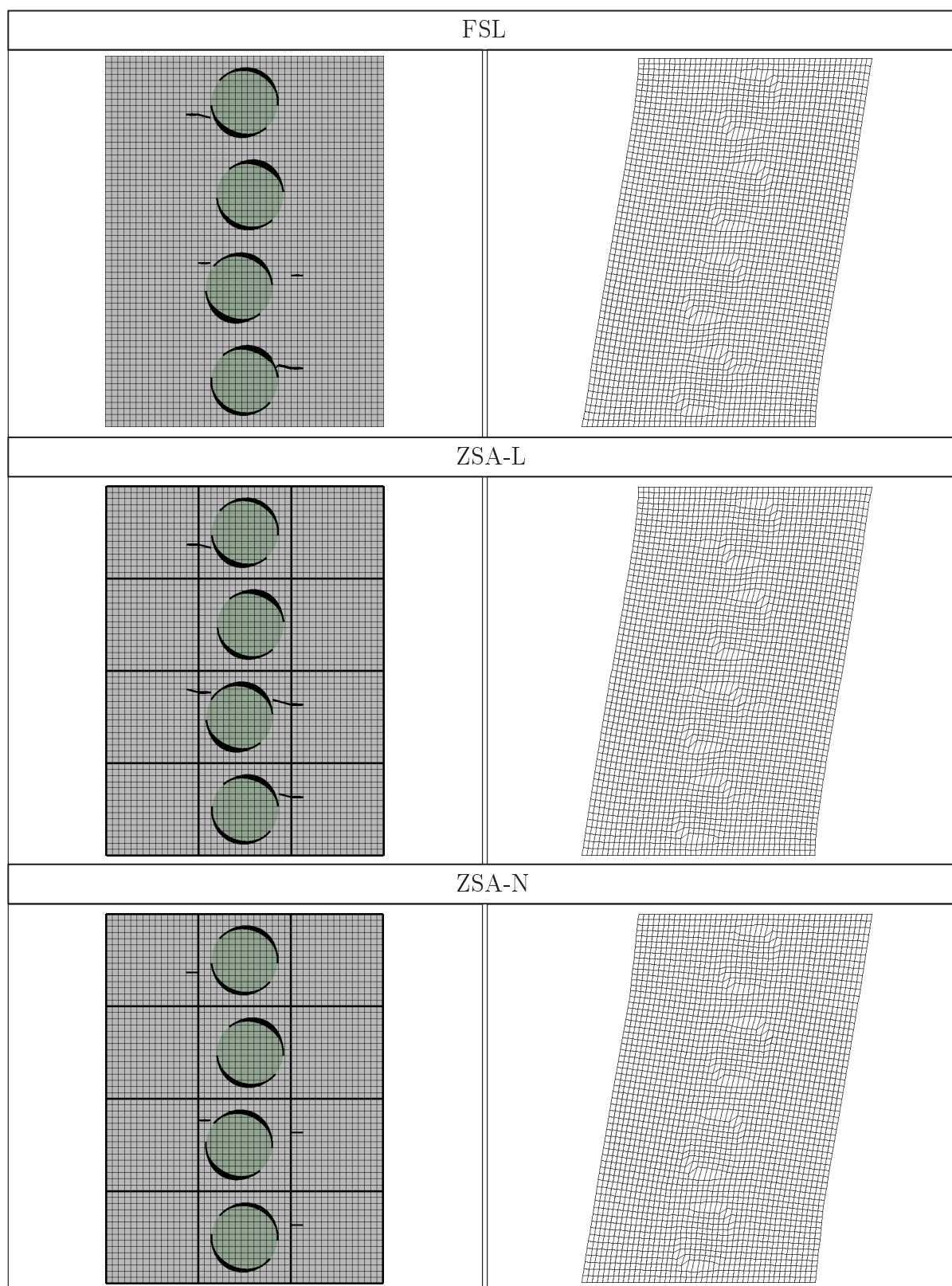


Abbildung 8.8: Rissverläufe und deformierte Netze zum Belastungszeitpunkt 1

zwei charakteristische Belastungszeitpunkte ausgewählt. Sie sind in Abbildung 8.7 durch Kreuze markiert. Damit sehr wenig geöffnete Zugrisse oder Schubrisse in den Rissbildern

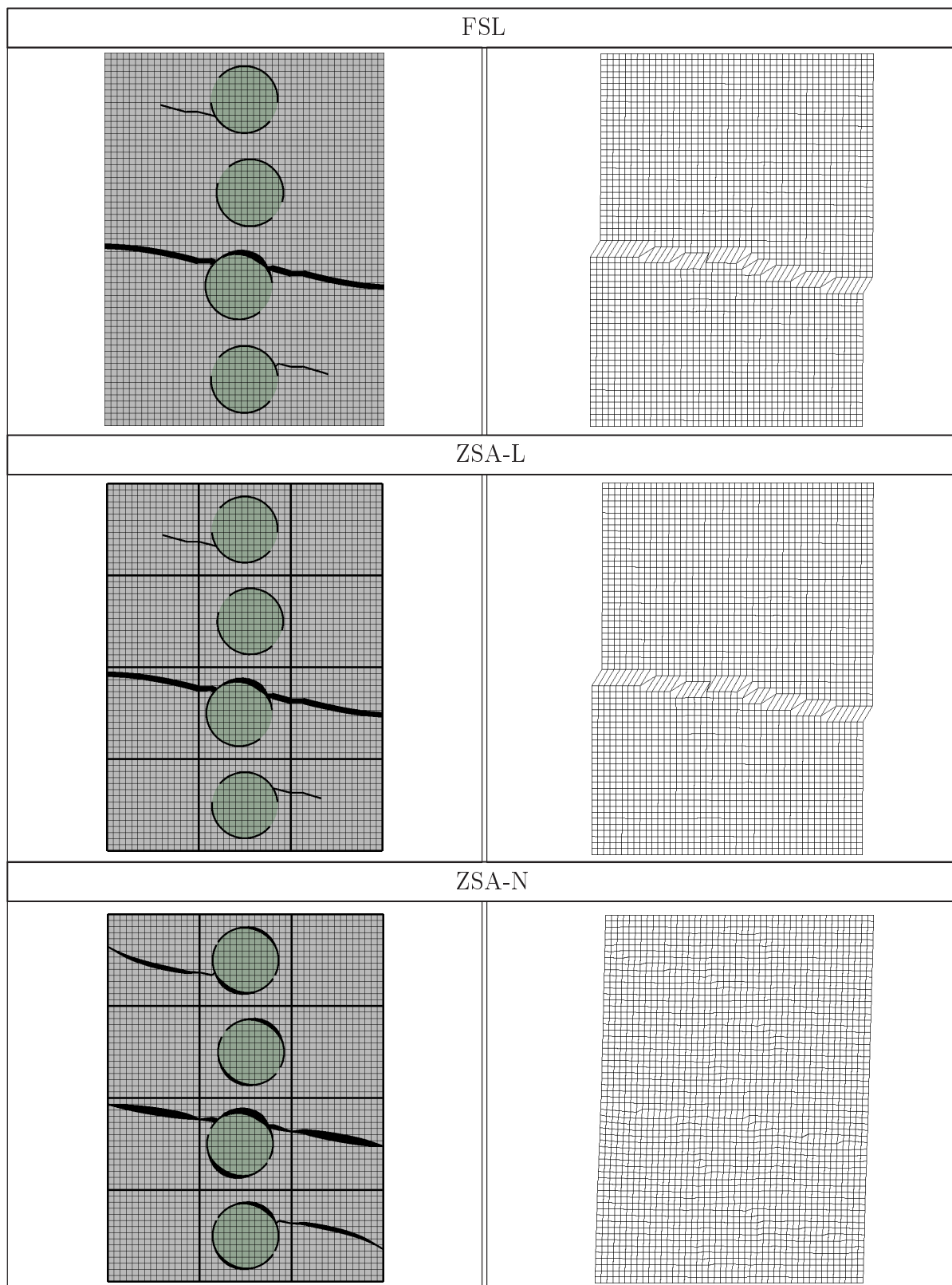


Abbildung 8.9: Rissverläufe und deformierte Netze zum Belastungszeitpunkt 2

sichtbar werden, wird ein unterer Grenzwert der Rissnormalöffnung definiert. In Abbildung 8.8 sind die Rissverläufe und die deformierten Netze in 2000-facher Überhö-

hung für den Belastungszeitpunkt 1 dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung wird die Rissnormalöffnung 1200-fach vergrößert. Anhand der Bilder erkennt man, dass die Fasern begonnen haben, sich von der Betonmatrix abzulösen. Da die Schubfestigkeit der materiellen Grenzflächen doppelt so groß ist wie ihre Zugfestigkeit, entwickelte sich zunächst Mode-I dominiertes Versagen, vergleiche Beispiel 6.4. Die Matrixrisse sind entsprechend dem hauptspannungsbasierten Kriterium in leichter Neigung zur Horizontalen nur wenig beziehungsweise gar nicht fortgeschritten. Mit Ausnahme der Rissbereiche zeigen die deformierten Netze eine gleichmäßige Verformung der Scheibe, was auf die Lokalität des Versagenszustandes hinweist. Die Rissbilder und die deformierten Netze, die die ZSA-L und die ZSA-N liefern, stimmen sehr gut mit der FSL überein. Der Einfluss der Nebenbedingung macht sich zum Belastungszeitpunkt 1, bei dem das Versagen der Scheibe sehr lokal stattfindet, kaum bemerkbar. Offensichtlich spielt die Qualität des Informationsaustausches zwischen zwei Teilbereichen des Feinskalengebietes eine untergeordnete Rolle, solange das Materialverhalten elastisch bleibt oder das strukturelle Versagen noch als lokal bezeichnet werden kann. Die Last-Verschiebungskurven der FSL, der ZSA-L sowie der ZSA-N unterstreichen die hohe Übereinstimmung der numerischen Lösungen für einen Belastungsbereich, der ungefähr am Punkt 1 endet, siehe Abbildung 8.7.

Punkt 2 kennzeichnet einen Belastungszustand nach Erreichen der Traglast. Für diesen Zustand sind die Rissbilder und die deformierten Netze in Abbildung 8.9 dargestellt. Die Deformationsfiguren sind 40-fach überhöht abgebildet. Die Rissnormalöffnungen sind für die FSL sowie die ZSA-L in 20-facher Überhöhung und für die ZSA-N in 100-facher Überhöhung gezeigt. Anhand der FSL kann man erkennen, dass die Lokalisierung der Deformation innerhalb eines einzigen durchgehenden Risses stattfindet. Dieser Riss entstand aus der Koaleszenz zweier Matrixrisse mit einem Grenzflächenriss. Infolgedessen hören alle anderen Risse, seien es Matrix- oder Grenzflächenrisse, zu wachsen auf und schließen sich. Sie tragen damit nicht mehr zur Dissipation der Struktur bei. Sowohl das Rissbild als auch die deformierte Struktur, die mit der ZSA-L gewonnen wurden, entsprechen bemerkenswert gut der FSL. Die Ergebnisse aus der ZSA-N weichen jedoch stark von den Referenzlösungen ab. Wie bei der FSL und der ZSA-L ist ein kontinuierlicher Riss auszumachen, der die Scheibe mit leichter Neigung gegen die Horizontale komplett durchtrennt. Da der Riss aber auf Grund der Nullrandbedingung gezwungen wird, sich an den Kanten der Grobskalenelemente zu schließen, findet keine Entlastung in den zwei Strukturbereichen oberhalb und unterhalb statt. Infolgedessen wachsen die anderen Matrixrisse, bis sie schließlich an den Rändern der Scheibe angekommen sind. Auch die Grenzflächenrisse schreiten fort und tragen weiterhin zur Dissipation der Struktur bei. Die berechnete Strukturantwort fällt daher viel zu steif aus, siehe Abbildung 8.7. Sogar der Anstieg der äußeren Belastung ist möglich. Damit hat sich gezeigt, dass die ZSA-N nicht in der Lage ist, lokalisiertes Versagen mit mehrskaligem Charakter zu modellieren.

### 8.3 Dreipunktgestützter Biegebalken

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Zweiskalenmodells anhand eines gekerbten Betonbalkens unter Biegebeanspruchung diskutiert. Im Rahmen des Zweiskalenmodells werden die Nebenbedingungen (7.3) und (7.4) verwendet. Die dazugehörigen numerischen Analysen werden als ZSA-N beziehungsweise ZSA-L bezeichnet und mit der Referenzlösung FSL verglichen. Alle Simulationen werden verschiebungskontrolliert durchgeführt. Der gekerbte Biegebalken wurde von *John & Shah* [89] dazu benutzt, analytisch und expe-

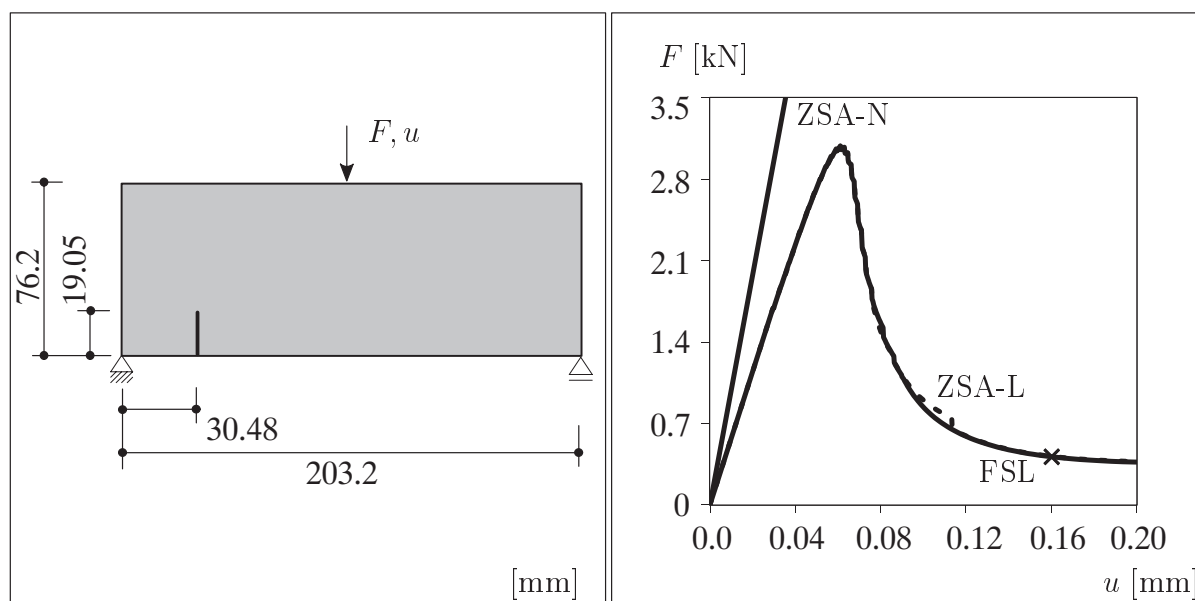


Abbildung 8.10: Problem und Last-Verschiebungskurven

rimentell Mode-I und Mixed-Mode Versagen von Beton unter statischer und dynamischer Belastung zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit sollen mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse Aussagen über die Qualität der erzielten Simulationsergebnisse getroffen werden, siehe auch *Belytschko, Organ & Gerlach* [20], *Ruiz, Pandolfi & Ortiz* [158] und *Mariani & Perego* [105]. Der Versagensmodus des Balkens hängt maßgeblich von der Lage der vertikalen Kerbe ab. In diesem Beispiel wird eine Konfiguration gewählt, die zu Mixed-Mode Versagen führt.

In Abbildung 8.10 ist der  $203.2 \times 76.2 \times 25.4 \text{ mm}^3$  große Balken dargestellt. Er liegt auf zwei starren Lagern auf und wird in der Mitte seines oberen Randes mit einer vertikalen Einzelkraft belastet. Zur Modellierung der 19.05 mm langen Kerbe wird ein spannungsfreier Riss eingeführt, der sich im Abstand von 30.48 mm rechts vom linken Lager befindet. Dieser Abstand entspricht dem 0.3-fachen der halben Balkenlänge. Zur Approximation des spannungsfreien Risses werden die Materialparameter, wie z.B. die Zugfestigkeit und die Bruchenergie, sehr klein gewählt. Es sei darauf hingewiesen, dass der Grund für die unrunderen Zahlenwerte die Umrechnung der Versuchs-Einheit Zoll in die Simulationseinheit Millimeter ist. In *John & Shah* [89] ist für das vorgestellte Problem kein Last-Verschiebungsdiagramm, sondern nur die Traglast von zirka 2.5 kN angegeben. In den Versuchen wurde ein Balken verwendet, der etwas über die Lager hinausragte. In den numerischen Modellen werden diese kurzen Kragbereiche vernachlässigt, so dass der Balken an den Lagern endet. Es wird ausschließlich der spannungsfreie Riss zur Modellierung der Kerbe verfolgt. Des Weiteren wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt.

Die Materialeigenschaften des Betons sind durch den Elastizitätsmodul  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.2$  gekennzeichnet. Der Wert des Elastizitätsmoduls resultiert aus Versuchen, die von *John & Shah* [89] mit kleinen Verzerrungsraten durchgeführt wurden. Die Zugfestigkeit des Betons wird als  $f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2$  angenommen. Die Bruchenergie wurde unter Anwendung einer Rechenregel mit entsprechenden Materialparametern, die in *Belytschko, Organ & Gerlach* [20] angegeben sind, zu  $G_f = 0.13 \text{ N/mm}$  spezifiziert. Die Steifigkeit in tangentialer Rissrichtung beträgt  $d_T = 1.0 \text{ N/mm}^3$ . Sie

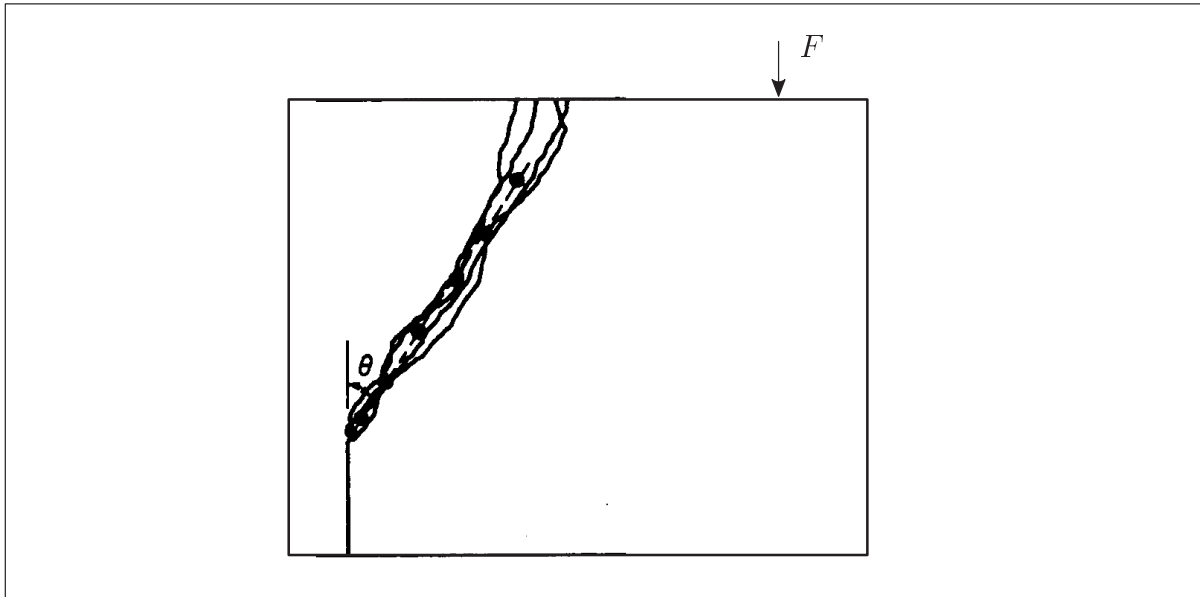


Abbildung 8.11: Experimentelle Rissmuster [89]

bleibt während des Rissöffnungsprozesses konstant, weil für den Parameter  $h_T = 0.0/\text{mm}$  gelten soll.

Zur Berechnung der FSL wird das Balkengebiet mit  $90 \times 32$  Finiten Elementen diskretisiert. Für die Durchführung der beiden Zweiskalenanalysen wird die Balkenstruktur mit  $6 \times 2$  Grobskalenelementen vernetzt, die jeweils mit  $15 \times 16$  Feinskalenelementen hierarchisch verfeinert werden. Die Elemente zur Ermittlung der FSL und die Feinskalenelemente haben damit dieselbe charakteristische Größe von ungefähr  $h_e = 2.32 \text{ mm}$ . Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Testbeispiel die Rissrichtung entsprechend der Version des hauptspannungsbasierten Kriteriums von *Mergheim, Kuhl & Steinmann* [111] ermittelt wurde und folgende kleine Änderungen vorgenommen worden sind:

Die Rissrichtung wird als die Richtung derjenigen „nicht-lokalen“ Hauptspannung angenommen, die am wenigsten von der Richtung des letzten Rissegmentes abweicht. Zusätzlich soll die Differenz des Winkels der Rissegmente in zwei benachbarten Elementen maximal  $30^\circ$  betragen. Die Beschränkung der Winkelabweichung zweier benachbarter Rissegmente wurde ebenso von *Dumstorff, Mosler & Meschke* [46] bei der numerischen Versagensanalyse eines in der Mittelachse gekerbten Biegebalkens vorgeschlagen, um eine physikalisch sinnvolle Rissrichtung zu erhalten. Die Motivation hierfür lieferte die Beobachtung, dass die Richtung der ursprünglich minimalen Hauptspannung bei einem bestimmten Versagenszustand zur Richtung der maximalen Hauptspannung wurde. In *Gasser & Holzapfel* [61] wurde auf die Problematik bei der Ermittlung der Rissrichtung im Falle gleichwertiger Hauptspannungen hingewiesen und eingegangen.

Abbildung 8.12 zeigt die numerisch ermittelten Rissverläufe der FSL und der ZSA-L in 8-facher Überhöhung sowie der ZSA-N in 800-facher Überhöhung. Zur besseren Visualisierung wurde eine minimale Rissnormalöffnung definiert. Der dazugehörige Belastungszustand ist im Last-Verschiebungsdiagramm 8.10 durch ein Kreuz markiert. Die Rissbilder aus der ZSA-L und der FSL stimmen in hohem Maße überein. Das Rissbild, das mit der ZSA-N gewonnen wurde, fällt aus dem Rahmen. An dieser Stelle sei auf die Beispiele 8.1 und 8.2 hingewiesen, wo das Zweiskalenmodell unter Verwendung der



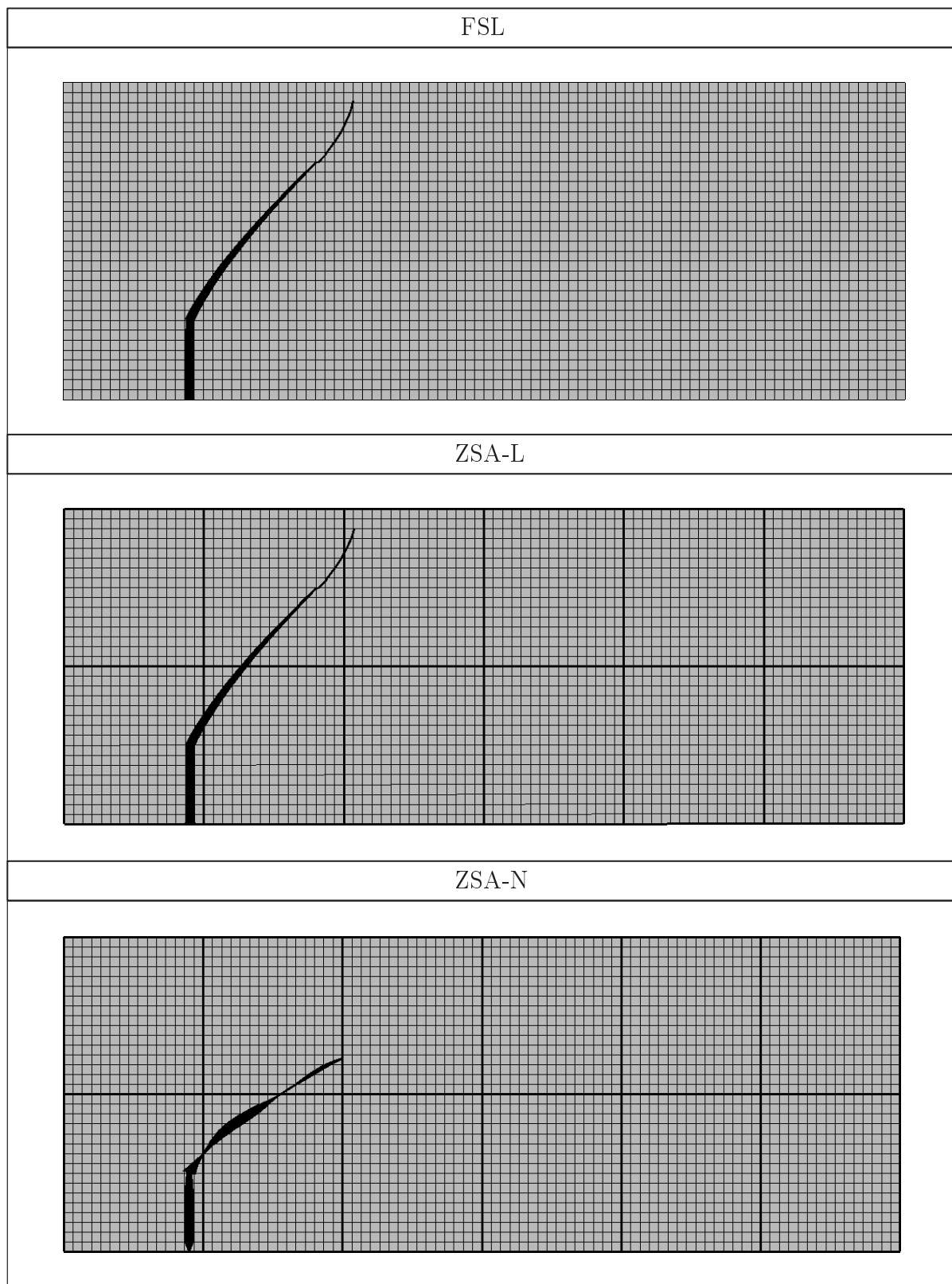


Abbildung 8.12: Numerisch ermittelte Rissverläufe

Nullrandbedingung (7.3) wenigstens den Rissverlauf vergleichsweise gut erfassen konnte. In Abbildung 8.11 sind die Rissmuster dargestellt, die sich aus den Versuchen von *John*

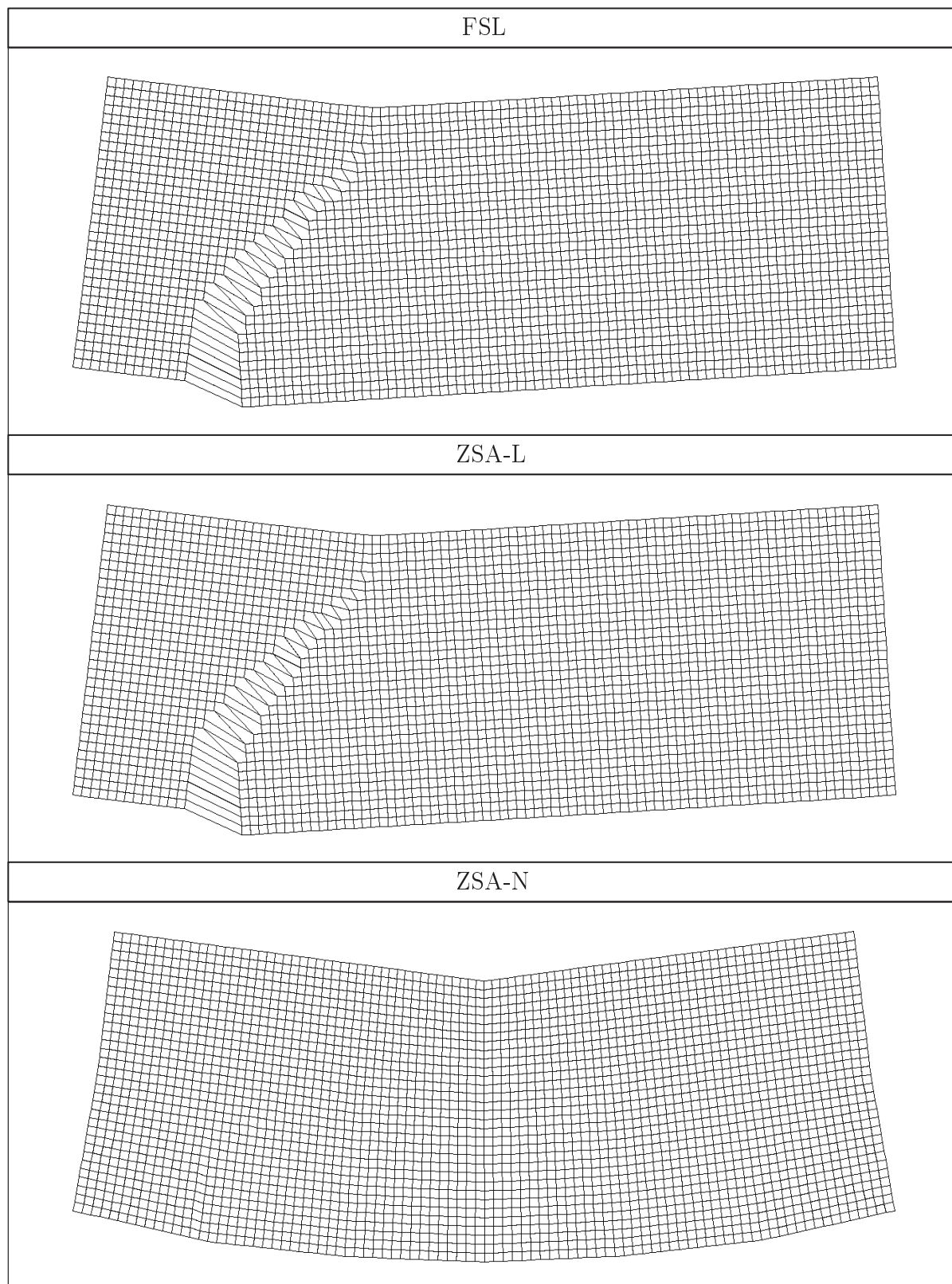


Abbildung 8.13: Deformierte Strukturen

& Shah [89] ergaben. Dabei hat der Abstand der Kerbe vom linken Auflager das 0.28-fache der halben Balkenlänge betragen. Der Vergleich der Rissmuster mit den numerisch

ermittelten Rissverläufen dokumentiert die hohe Qualität der FSL und der ZSA-L. Diese Aussage wird durch die folgenden zwei Beobachtungen motiviert. In den Versuchen entwickelten sich relativ gerade Risse, die in Bezug auf die Horizontale einen Winkel von  $60^\circ$  aufwiesen. Im Endbereich der Risse kann man eine leichte Krümmung erkennen. In den beiden Simulationen zeigt sich dieselbe Risscharakteristik. Der anfängliche Risswinkel beträgt ungefähr  $55^\circ$  und weicht damit kaum vom experimentell ermittelten Risswinkel ab. Darüber hinaus wird die leichte Krümmung des Risses in seinem Endbereich wiedergegeben. Die Lösung aus der ZSA-N ist weit entfernt vom wirklichen Rissverlauf. Der Riss verläuft viel zu flach.

In Abbildung 8.13 sind die deformierten Strukturen dargestellt. Man erkennt die große Übereinstimmung der Ergebnisse aus der FSL und der ZSA-L, die in 40-facher Überhöhung illustriert sind. Anhand der beiden Darstellungen lässt sich sehr schön die Schubdeformation visualisieren, die im Riss lokalisiert ist. Die Verschiebungsfigur des Balkens aus der ZSA-N in 100-facher Überhöhung veranschaulicht, dass die Behinderung der Risskinematik den Versagensmodus der Struktur enorm verfälscht. Da nutzt es nichts, dass die gewählte Grobskalendiskretisierung wahrscheinlich fein genug ist, um die elastischen Verformungen der ungekerbten Struktur ausreichend genau erfassen zu können.

Die Last-Verschiebungskurven in Abbildung 8.10 unterstreichen die Beobachtungen, die anhand der Rissverläufe und der deformierten Netze angestellt wurden. Die Ergebnisse aus der FSL und der ZSA-L stimmen in Bezug auf den vorkritischen Bereich, die Traglast und den Nachbruchbereich sehr gut überein. Die Traglast, die von *John & Shah* [89] angegeben wurde, wird allerdings in beiden Simulationen etwas überschätzt. Die ZSA-N kann in diesem Beispiel nicht einmal das Verhalten des Balkens im anfänglichen Belastungsbereich zufriedenstellend wiedergeben. Die Hauptursache hierfür ist die Modellierung der Kerbe mit einem Riss, der sich an der Balkenunterseite schließen muss. Der Grund für die Risschließung wird zur Erinnerung nochmals kurz erläutert. Zur Steigerung der Effizienz und Vereinfachung der Implementierung des Zweiskalenmodells wird bei Verwendung der Nullrandbedingung (7.3) die Feinskalenlösung gezwungen, an jeder Kante eines Grobskalenelementes zu verschwinden. Dies gilt natürlich auch für die Elementkanten, die den unteren Rand des Balkens diskretisieren.



# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die diskontinuierliche Modellierung von Versagen ein- und zweiphasiger Materialien in 2D. Dabei werden statische Belastungen und eine geometrisch lineare Theorie angenommen. Im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen unbewehrte und bewehrte kohäsive Reibungsmaterialien. Zunächst werden drei typische Skalenbereiche am Beispiel von textilbewehrtem Beton spezifiziert, um den gesamten skalenübergreifenden Versagensprozess anschaulich erläutern zu können. Außerdem soll die Spezifizierung bei der Wahl einer geeigneten Modellierungsstrategie helfen. Zur diskontinuierlichen Modellierung von Festkörperversagen im Rahmen der Kohäsivzonentheorie wird auf einen kontinuumsmechanischen Ansatz zurückgegriffen, der auf einer Erweiterung der gewöhnlichen kinematischen Festkörperbeschreibung basiert. Nachdem der Bewegungsablauf eines Körpers mit verschiedenartigen internen Flächen diskutiert wurde, werden grundlegende Gleichgewichtsaussagen formuliert. Die körperinternen Flächen stellen aus folgendem Grund nicht nur Diskontinuitäten im Sinne von kohäsiven Rissen zur Modellierung schmaler Versagenszonen, sondern auch im Sinne von materiellen Grenzflächen dar. In der vorliegenden Arbeit soll das Materialverhalten sowohl auf der makro- als auch auf der mesoskopischen Beobachtungsebene modelliert werden. Bei der mesoskopischen Betrachtungsweise von zweiphasigen Materialien werden die beiden konstituierenden Werkstoffe diskret abgebildet. Infolgedessen müssen auch die kinematischen Erfordernisse von materiellen Grenzflächen berücksichtigt werden.

Zur Diskretisierung lokalisierter Versagensformen werden unterschiedliche Finite Element Verfahren aufgezeigt. Es wird die erweiterte Finite Element Methode (X-FEM) ausgewählt, die bei fixem Rechenetz qualitative hochwertige Lösungen liefert. Die Umsetzung der erweiterten Verschiebungsformulierung mittels der X-FEM ermöglicht, auf gewöhnliche Vorgehensweisen bei der Modellierung von materiellen Grenzflächen verzichten zu können. So müssen keine speziellen Anforderungen an die Diskretisierung der untersuchten Verbundstruktur gestellt werden oder a priori diskontinuierliche Interface-Elemente in das numerische Modell eingeführt werden. Mit der vorgestellten Weiterentwicklung der X-FEM können in den mesomechanischen Analysen materielle Grenzflächen und diskrete Risse auf elegante und konsequente Art und Weise diskretisiert werden. Genauer gesagt wird der Einsatz der X-FEM zur numerischen Lösung von Randwertproblemen ermöglicht, die sich sowohl durch die Existenz von Rissen, als auch von Grenzflächen zwischen zwei anfänglich perfekt verbundenen Materialien auszeichnen. In diesem Zusammenhang stellen die Ausführungen zur Behandlung von Grenzflächenrissen den Schwerpunkt der Weiterentwicklung dar. Zur Steigerung der Stabilität der Formulierung bei mehrfacher Rissbildung innerhalb von Festkörperphasen werden Abschirmzonen eingeführt, in denen die Entstehung neuer Risse unterdrückt wird.

Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit ist die thermodynamisch konsistente Verwendung und Modifikation von Materialmodellen vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ, mit denen inelastisches Materialverhalten approximiert wird. Zur Beschreibung des elastischen Bereiches vor der Rissinitiierung werden klassische kontinuumsmechanische Konstitutivgesetze eingesetzt. Es wird angenommen, dass das Versagen kohäsiver Reibungsmaterialien bei Erreichen einer kritischen Hauptzugspannung beginnt. Zur Erfassung der Versagensmechanismen wird ein schädigungsbasiertes Konstitutivgesetz vom Mode-I Typ hergeleitet. Bei den mesoskopischen Analysen von textilbewehrtem Beton muss das Versagen von adhäsiven materiellen Grenzflächen modelliert werden. Dieses Ablöseversagen wird häufig durch die kombinierte Beanspruchung in Form von Zug- und Schubspannungen ausgelöst. Energie wird folglich nicht nur in Mode-I, sondern auch in Mode-II dissipiert. Zur realitätsnahen Modellierung wird ein schädigungsbasiertes Konstitutivgesetz vom Mixed-Mode Typ herangezogen. Bei der Entstehung eines reinen Schubrisses in druckbelasteten materiellen Grenzflächen liegt ein Kontaktproblem vor, das mittels verschiedener Ansätze gelöst werden kann. Die Penetration beider Rissufer wird in dieser Arbeit durch die Anwendung einer Penalty-Methode quasi konstitutiv verhindert. Ein alternativer Ansatz auf Basis einer speziellen diskontinuierlichen Anreicherung des Verschiebungsfeldes wird kurz skizziert, aber nicht umgesetzt. Die Herleitung der zwei Materialmodelle zur Beschreibung von kohäsiven Rissen in quasi-spröden Materialien und adhäsiven materiellen Grenzflächen gründet auf der Aufteilung des Verschiebungssprunges am Riss in charakteristische Komponenten. Entsprechend dem herkömmlichen Vorgehen wird die Aufteilung in den Normal- und Tangentialanteil des Verschiebungssprunges durchgeführt. Versagensinduziertes anisotropes Materialverhalten kann damit auf natürliche Art und Weise modelliert werden.

Die durchgeführte Simulation eines Stahlbetontragwerks unter Biegebeanspruchung beruht auf einer makroskopischen Betrachtungsweise. Zur Erfassung des Materialverhaltens wird im Rahmen einer verschmierten Bewehrungsmodellierung auf Basis der Mischungstheorie ein Konstitutivgesetz entwickelt, mit dem nicht nur das entfestigende Verhalten von Beton, sondern auch das duktile Verhalten der Bewehrung aus Stahl erfasst werden kann. Hierfür werden zwei geeignete Traktions-Verschiebungssprung-Modelle kombiniert. Es wird die Annahme getroffen, dass sich plastische Deformationen ausschließlich in einem Riss entwickeln. Diese Annahme lässt sich durch die im Vergleich zu Beton höhere Festigkeit von Stahl physikalisch motivieren. Erst reißt die Betonmatrix, dann fließt die Stahlbewehrung. Folglich wird zur Ermittlung der Rissrichtung das Kriterium für Beton verwendet. Da das Verbundmaterial zum Großteil aus Beton besteht, darf bei der Homogenisierung auf die Abminderung des volumetrischen Anteils des Betons um den Anteil der Stahlbewehrung verzichtet werden. Zur phänomenologischen Beschreibung der irreversiblen Deformationen, die in der Stahlbewehrung bei Erreichen der Fließgrenze entstehen, wird ein plastizitätsbasiertes Konstitutivgesetz eingesetzt. Die Modellierung der Bewehrung als eine Schar von ausgerichteten eindimensionalen Stabelementen, die nur in axialer Richtung wirken, erfordert eine Projektion zur Ermittlung des Verschiebungssprunges in Stabrichtung.

In Verbindung mit der bruchmechanischen Materialformulierung steht die Diskussion der oben angesprochenen Versagenskriterien, mit denen die Rissentstehung beziehungsweise der Rissfortschritt definiert werden können. Es werden Versagenskriterien eingesetzt, die in lokalen Spannungsgrößen formuliert sind. Bei kohäsiven Materialien wird das Rankine Kriterium verwendet. Der Beginn des Versagens materieller Grenzflächen wird durch ein

Kriterium definiert, mit dem die Interaktion von Zug- und Schubbelastung berücksichtigt wird. Die Orientierung eines Grenzflächenrisses ist durch den bekannten Normalenvektor der Grenzfläche vorgegeben. Die Rissrichtung in kohäsiven Materialien wird über ein nicht-lokales spannungsbasiertes Kriterium ermittelt.

Zur geometrischen Beschreibung von materiellen Grenzflächen und diskreten Rissen werden verschiedene Level Set Techniken verwendet. Die Anwendung des erweiterten Finite Element Modells garantiert exakte numerische Lösungen, ohne dass die Diskretisierung des Randwertproblems an die Lage und die Geometrie der internen Flächen angepasst werden muss. Die Kombination dieses Modells mit der Level Set Technik zur geometrischen Beschreibung materieller Grenzflächen liefert bei der Suche nach einer optimalen Struktur, bei der der Entwurfsraum vorgegeben und die Materialverteilung variabel ist, ein hohes Maß an Flexibilität. Außerdem ist bemerkenswert, dass die geometrische Beschreibung der internen Flächen mit Level Set Funktionen bei der Definition und Konstruktion von Anreicherungsfunktionen genutzt wird. Diese Funktionen werden zur Erfüllung der entsprechenden kinematischen Erfordernisse und daher auch im erweiterten Finite Element Modell benötigt.

Ein wesentlicher Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Einbettung der bereitgestellten Methodik in ein geeignetes Mehrskalmodell. Zunächst werden einige Mehrskaliskonzepte skizziert und klassifiziert. Dabei wird zwischen homogenisierungsbasierten, hierarchischen und *Partition of Unity*-basierten Ansätzen unterschieden. Im Fokus dieser Übersicht ist die Anwendbarkeit der Ansätze auf die Probleme, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht werden sollen. Es wird herausgestellt, dass klassische Homogenisierungsverfahren, die auf der Gültigkeit der Skalenseparation basieren, bei Versagen mit mehrskaligem Charakter nicht verwendet werden können. Deshalb wird ein Zweiskaliskonzept verwendet, das primär zur Klasse der hierarchischen Mehrskalmethoden gezählt werden kann, aber durch die Einbettung der bereitgestellten Methodik auch das Konzept der *Partition of Unity* aufgreift. Das hierarchische Zweiskaliskonzept basiert auf der Aufteilung der Gesamtlösung in eine grob- und eine feinskalige Komponente in Kombination mit der räumlichen Zerlegung des Feinskalengebietes. Der grobskalige Lösungsanteil spiegelt die mittlere Verschiebung eines materiellen Punktes wider. Der feinskalige Anteil wird in weitere Komponenten zerlegt, die Fluktuationen auf Grund von Heterogenitäten in Form von materiellen Grenzflächen und Rissen repräsentieren. In dieser Arbeit wird die Summendekomposition der Lösung im gesamten Gebiet der untersuchten Strukturen vorgenommen. Die grobskalige Lösung wird mit gewöhnlichen Finiten Elementen approximiert. Zur numerischen Modellierung der feinskaligen Lösung werden erweiterte Finite Elemente verwendet, mit denen die Grobskalenlösung hierarchisch verfeinert wird. Im Rahmen der Zerlegung des Feinskalengebietes fungieren die Grobskalenelemente als lokale Träger der Feinskalenlösung. Infolgedessen müssen am Rand der Grobskalenelemente Nebenbedingungen formuliert werden. Neben der Verwendung der Nullrandbedingung wird eine Übergangsbedingung mittels der Lagrange-Multiplikator-Methode umgesetzt, um die Kompatibilität der feinskaligen Lösung am Rand der Grobskalenelemente zu erfüllen. Diese Übergangsbedingung liefert im Gegensatz zur Nullrandbedingung äußerst gute Ergebnisse bei Versagen mit mehrskaligem Charakter.

## 9.2 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird die Wirkungsweise des hergeleiteten erweiterten Finite Element Modells anhand von ein- und zweiphasigen Festkörpern unter Annahme ebener Verzerrungs- oder Spannungszustände getestet und für hochwertig erachtet. Bei mehrfacher Rissbildung innerhalb von Festkörperphasen werden Abschirmzonen eingeführt, in denen die Entstehung neuer Risse unterdrückt wird. Genauere Untersuchungen zur Ausdehnung dieser Zone und deren modellspezifischen oder physikalischen Bedeutung sind wünschenswert.

Das erweiterte Finite Element Modell ermöglicht die sukzessive Einführung von Risselementen, so dass auf die Verwendung von künstlich hohen elastischen Steifigkeiten mit folgender Ausnahme verzichtet werden kann. Bei der diskontinuierlichen Modellierung von Versagen adhäsiver materieller Grenzflächen unter Druckbelastung wird eine hohe elastische Steifigkeit als eine Art Penalty-Parameter zur Verhinderung der gegenseitigen Penetration der Rissufer benutzt. Im Rahmen weiterführender Arbeiten sollte überprüft werden, welche Auswirkungen der Wert dieses Parameters auf die Qualität der numerischen Lösung hat. In diesem Zusammenhang kann untersucht werden, ob beispielsweise nicht die direkte Berücksichtigung der Kinematik des druckbeanspruchten Grenzflächenrisses als Gleitflächenriss im Ansatz für die diskontinuierliche Verschiebungskomponente die zu bevorzugende Alternative darstellt.

Die erstrebenswerte Erweiterung des Anwendungsspektrums des bereitgestellten Finite Element Modells kann durch die Dreidimensionalisierung seiner numerischen Umsetzung erreicht werden. Die zugrunde liegenden Gleichungen werden dreidimensional formuliert, so dass die Implementierung im Rahmen dreidimensionaler Finiter Kontinuums-elemente mittels direkter Ergänzungen relativ unproblematisch sein wird. Das Hauptproblem dürfte die Behandlung von Matrixrissen sein, die in beliebiger Form innerhalb des Materials fortschreiten. Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Problem bei Grenzflächenrissen mit vordefinierter Geometrie nicht existiert. Zur Erfassung der Geometrie von Matrixrissen sind in der Literatur verschiedene Konzepte vorgestellt worden. Im Hinblick auf eine konsequente Weiterführung dieser Arbeit liegt es nahe, die Level Set Methode (LSM) zur geometrischen Beschreibung solcher Risse und zur erfolgreichen Lösung dieses Problems zu verwenden.

Auch das vorgestellte hierarchische Zweiskalenmodell wird dreidimensional formuliert, aber nur für die numerische Lösung von zweidimensionalen Problemen umgesetzt. Die Dreidimensionalisierung seiner Implementierung ist wünschenswert. Eine Besonderheit ist die Diskretisierung der Feinskalenlösung mittels des hergeleiteten erweiterten Finite Element Modells. Obwohl in der Beschreibung des Zweiskalenmodells die physikalische Lokalität materiellen Versagens ausgenutzt wird, wird in den numerischen Beispielen darauf verzichtet. Stattdessen wird a priori das gesamte Strukturgebiet als Feinskalengebiet deklariert. Die dem Zweiskalenmodell immanente Möglichkeit, bei der Definition des Feinskalengebietes auf einfache Art und Weise adaptiv vorgehen zu können, wird nicht ausgeschöpft. Infolgedessen werden auch keine Untersuchungen über die Effizienz des Zweiskalenmodells im Vergleich zum entsprechenden Einskalenmodell durchgeführt. Im Vordergrund der Untersuchungen steht die grundsätzliche Wirkungsweise des Zweiskalenmodells bei Verwendung einer Rand- und einer Übergangsbedingung als Nebenbedingungen, die im Rahmen der Zerlegung des Feinskalengebietes benötigt werden. In diesem Zusammenhang können sich zukünftige Untersuchungen mit der Aufspaltung der Über-



gangsbedingung im Falle von Diskontinuitäten beschäftigen, die ohne Versatz über den Kopplungsrand benachbarter Feinskalenteilgebiete hinweg verlaufen. Dabei ist nicht mehr die Kontinuität der feinskaligen Lösung in einem additiven Sinn, sondern jeder ihrer Komponenten ( $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\chi_{m,i}\tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\chi_{c,j}\tilde{\mathbf{u}}_j$ ) gefordert. Weiterführende Arbeiten können sich mit der Anwendung der adaptiven Ausdehnung des Zweiskalengebietes sowie mit Untersuchungen über die Effizienz des Zweiskalenmodells beschäftigen. Die Klärung der Effizienz-Frage stellt einen äußerst wichtigen Punkt dar. Potentielle zukünftige Problemstellungen, die das Zweiskalenmodell betreffen, finden sich auch an entsprechenden Stellen in dieser Arbeit.

Die Lösung aller numerischen Beispiele erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe des Finite Element Programms CCARAT des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Hierfür müssen umfangreiche Ergänzungen zum vorhandenen Finite Element Programm vorgenommen werden. Zur Verkürzung der Rechenzeiten ist es sinnvoll, neben der Anwendung des Zweiskalenmodells anstelle eines einzigen, mehrere Prozessoren einzusetzen. Dies erfordert die Parallelisierung der numerischen Algorithmen, die sich insbesondere bei Anwendung des Zweiskalenmodells anbietet.



# Anhang A

## Notation & Tensorrechnung

In folgendem Abschnitt wird auf die verwendete Notation eingegangen. Dazu werden Grundlagen der Tensorrechnung und weiterer Rechenregeln diskutiert. Alle Darstellungen beziehen sich auf den eigentlich Euklidischen Vektorraum  $\mathcal{V}^3$  und den zugehörigen dyadischen Produktraum  $\mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3$  ( $n$ -mal) der Ordnung  $n$ .

### Notation

In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die direkte Tensorschreibweise benutzt. Zur Verdeutlichung der Rechenoperation wird die Indexnotation herangezogen. Es gilt folgende Notation,

$$\begin{aligned} a &= a & \mathbf{A} &= A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a} &= a_i\mathbf{e}_i & \mathcal{A} &= A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wobei ein Skalar  $a$  mit Kleinbuchstaben, ein Vektor  $\mathbf{a}$  mit fetten Kleinbuchstaben, ein zweistufiger Tensor  $\mathbf{A}$  mit fetten Großbuchstaben und höherwertige Tensoren  $\mathcal{A}$  mit kalligrafischen Großbuchstaben bezeichnet werden. Auf die Darstellung der zugehörigen Basisvektoren  $\mathbf{e}_{i,\dots,l}$  wird verzichtet.

### Skalare Produkte

Skalare Produkte von Vektoren und Tensoren werden durch die Operatoren  $\cdot, :, \dot{:}$  und  $::$  gekennzeichnet. Die Anzahl der Punkte  $k$  bestimmt die Stufe der Verjüngung. Ein Skalarprodukt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  führt auf einen Tensor der Ordnung  $n + m - 2k$ , vergleiche die folgenden Beispiele.

$$\begin{aligned} c &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ij} b_j \\ c &= \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ijk} B_{jk} \\ c &= \mathbf{A} \dot{:} \mathbf{B} = A_{ijk} B_{ijk} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ijk} b_k \\ c &= \mathcal{A} :: \mathcal{B} = A_{ijkl} B_{ijkl} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathcal{A} : \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### Dyadische Produkte

Ein dyadisches Produkt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  wird durch das Symbol  $\otimes$  gekennzeichnet und erzeugt neue Tensoren der Ordnung  $n + m$ .

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ijk} b_l \\ C_{ijk} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ij} b_k & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### Fundamentaltensoren

Der zweistufige Einheitstensor  $\mathbf{1}$  und der vierstufige Einheitstensor  $\mathcal{I}$  lassen sich mit Hilfe des Kronecker Deltas  $\delta_{ij}$  folgendermaßen angeben,

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{A.4})$$

wobei  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  gilt.

### Spezielle Tensoren

Die Transponierte eines Tensors lässt sich durch Vertauschen der Indizes bestimmen. In dieser Arbeit wird die Transponierte eines Tensors wie folgt eingeführt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{ji} \\ \mathbf{A} &= A_{ijk} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{kij} \\ \mathbf{A} &= A_{ijkl} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{iljk} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

In diesem Zusammenhang kann zwischen symmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{s,T}$  und schiefsymmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^{skw} = -\mathbf{A}^{skw,T}$  unterschieden werden.

$$\mathbf{A}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad \mathbf{A}^{skw} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (\text{A.6})$$

Existiert die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  eines beliebigen Tensors  $\mathbf{A}$ , so ergibt deren skalares Produkt den zweistufigen Einheitstensor. Dies gilt in entsprechender Weise für die Inverse  $\mathcal{A}^{-1}$  eines vierstufigen Tensors  $\mathcal{A}$ .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \quad \mathcal{A}:\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \quad (\text{A.7})$$

### Norm eines Tensors

In dieser Arbeit wird ausschließlich die  $L_2$ -Norm verwendet.

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad |\mathbf{A}| := \sqrt{\mathbf{A}:\mathbf{A}} \quad (\text{A.8})$$

### Tensoranalysis

Funktionen, die in Abhängigkeit des Ortsvektors aufgestellt werden, nennt man Feldfunktionen. Die Ableitung dieser Feldfunktionen nach dem Ortsvektor wird als Gradient bezeichnet. Dabei wird im Folgenden zwischen skalarwertigen  $f(\mathbf{x})$ , vektorwertigen  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  oder tensorwertigen  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  Funktionen unterschieden.

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \text{grad } f(\mathbf{x}) := \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_{,i} \\ \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_{i,j} \\ \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = F_{ij,k} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Der Gradient einer skalarwertigen Funktion liefert eine vektorwertige Feldfunktion, der Gradient einer vektorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld zweiter Stufe und der Gradient einer tensorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld dritter Stufe, d. h. die Gradientenbildung  $\nabla(\bullet) = \text{grad}(\bullet)$  hebt den Rang eines Tensors an. Im Kontext der Erhaltungssätze wird noch ein weiterer Differentialoperator benötigt. Dazu wird der Divergenzoperator  $\text{div}(\bullet)$  eingeführt. Die Divergenz eines Vektor- bzw. eines Tensorfeldes ergibt sich wie folgt.

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: f(\mathbf{x}) \quad \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.10})$$

Im Gegensatz zur Gradientenbildung senkt die Divergenzbildung  $\text{div}(\bullet) = \nabla \cdot (\bullet)$  den Rang eines Tensors.

## Integralsätze

Mit Hilfe der Gaußschen Integralsätze lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Oberflächen- und Volumenintegrale angeben.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion  $\mathcal{H}_{c,j}$  stellt eine Sprungfunktion dar. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird sie verwendet, um ein diskontinuierliches Verschiebungsfeld zu erzeugen. In diesem Fall ändert die Funktion sprunghaft ihren Wert über den Riss  $\Gamma_{c,j}$ , der den Körper in das Gebiet  $\Omega_0^+$  und  $\Omega_0^-$  unterteilt. Der Gradient der Heaviside-Funktion ergibt sich aus der Multiplikation der Dirac-Delta Verteilung  $\delta_{c,j}$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{N}_{c,j}$  des Risses.

$$\mathcal{H}_{c,j} = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^+ \\ 0 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^- \end{cases} \quad \nabla \mathcal{H}_{c,j} = \delta_{c,j} \mathbf{N}_{c,j} \quad (\text{A.12})$$

## Dirac-Delta Verteilung

Der mathematische Zusammenhang zwischen diskontinuierlichen und kontinuierlichen Analysen wird in dieser Arbeit durch die Dirac-Delta Verteilung  $\delta_{c,j}$  realisiert. Die Dirac-Delta Verteilung wurde bei der Gradientenbildung der Heaviside-Funktion eingeführt, siehe Gleichung (A.12). Im dreidimensionalen Raum gilt folgende Rechenregel,

$$\int_{\Omega} \delta_{c,j}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_{c,j}} f(\mathbf{x}) \, d\Gamma \quad (\text{A.13})$$

wobei  $\Gamma_{c,j}$  die Rissfläche bezeichnet.



# Anhang B

## Numerische Modellierung des Rissspitzenfeldes mit der X-FEM

In diesem Abschnitt wird auf die numerische Modellierung des Rissspitzenfeldes in linear elastischen und kohäsiven Materialien im Rahmen der erweiterten Finite Element Methode (X-FEM) eingegangen. Dabei wird die Diskretisierung eines Körpers untersucht, der keine materiellen Grenzflächen ( $n_m = 0$ ) enthält und sich durch die Existenz von nur einem einzigen Riss ( $n_c = 1$ ) auszeichnet, vergleiche Gleichung (4.10). Da nur ein einziger Riss betrachtet wird, wird zur übersichtlicheren Darstellung die risskennzeichnende Variable  $j = 1$  weggelassen.

### Riss in linear elastischen Materialien

Die X-FEM wurde anfänglich entwickelt, um diskontinuierliches Versagen von linear elastischen Materialien ohne Neuvernetzung simulieren zu können. Zur Steigerung der Genauigkeit der numerischen Lösung wurde das asymptotische Rissspitzennahfeld modelliert. Typisch für die Rissspitze in elastischen Medien ist die so genannte  $1/\sqrt{r}$ -Singularität der Spannungen, die an der Rissspitze unendlich sind. Bei zweidimensionalen Problemen sind die Komponenten der Gesamtverschiebung  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  in der Nähe der Spitze eines Risses unter Mixed-Mode Belastung folgendermaßen definiert.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{r/2\mu} \cos(\varphi/2) [\kappa^* - 1 + 2 \sin^2(\varphi/2)] \\ &\quad + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{r/2\mu} \sin(\varphi/2) [\kappa^* + 1 + 2 \cos^2(\varphi/2)] \\ u_2 &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{r/2\mu} \sin(\varphi/2) [\kappa^* + 1 - 2 \cos^2(\varphi/2)] \\ &\quad - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{r/2\mu} \cos(\varphi/2) [\kappa^* - 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)] \end{aligned} \tag{B.1}$$

Darin kennzeichnen  $r$  und  $\varphi$  Polarkoordinaten in einem System, das an der Rissspitze seinen Ursprung hat. Der Winkel  $\varphi$  wird im Ursprung des Koordinatensystems in Bezug auf die Risstangente gemessen. Der Radius  $r$  beschreibt den Abstand von der Rissspitze. Die Kolosov-Konstante  $\kappa^*$  muss in Abhängigkeit des Problems gewählt werden. Wenn ein ebener Verzerrungszustand vorliegt, gilt  $\kappa^* = 3 - 4\nu$ . Bei einem ebenen Spannungszustand nimmt die Konstante den Wert  $\kappa^* = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  an. Die Stärke des Rissspitzenfeldes wird durch die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  bestimmt. Diese hängen von der Geometrie des gerissenen Körpers sowie seiner Belastung ab. Sie lassen sich aus bekannten Spannungen oder Deformationen ermitteln. Das Verschiebungsfeld bzw. seine Komponenten

(B.1) ist im Raum der folgenden vier Funktionen  $F_l$  enthalten.

$$\{F_l\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \right\} \quad (\text{B.2})$$

Diese Funktionen werden in der erweiterten Finite Element Formulierung genutzt, um den Raum der Ansatzfunktionen an der Rissspitze anzureichern. Die Diskretisierung der Verschiebungen lautet bei Existenz einer einzigen Rissspitze folgendermaßen, siehe *Moës, Dolbow & Belytschko* [116].

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{o \in I} N_o \hat{\mathbf{u}}_o}_{\hat{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{q \in K} \chi_c N_q \tilde{\mathbf{u}}_q}_{\chi_c \tilde{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{p \in L} N_p \left( \sum_{l=1}^4 F_l \check{\mathbf{u}}_p^l \right)}_{\check{\mathbf{u}}} \quad (\text{B.3})$$

In Gleichung (B.3) entspricht  $L$  dem Satz aller Knoten, die mit den Freiheitsgraden  $\check{\mathbf{u}}_p^l$  angereichert werden. Dies sind üblicherweise die Knoten des Finiten Elementes, das die Rissspitze enthält. Es ist offensichtlich, dass die Verschiebungskomponente  $\check{\mathbf{u}}$  nicht in den Gleichungen (2.5) bzw. (4.10) enthalten ist. Die Anreicherung der konventionellen Verschiebungskomponente  $\hat{\mathbf{u}}$  mit der Verschiebung  $\chi_c \tilde{\mathbf{u}}$  reicht natürlich aus, um das über den Riss diskontinuierliche Verschiebungsfeld modellieren zu können. Die Motivation für die zusätzliche Anreicherung der Verschiebung mit  $\check{\mathbf{u}}$  ist die Erhöhung der Genauigkeit der numerischen Lösung an der Rissspitze bei Versagensanalysen von linear elastischen Medien. Darüber hinaus kann die Rissspitze innerhalb eines Finiten Elementes liegen. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Verschiebungskomponente auf Grund der Funktion  $F_1$  auch über den Riss diskontinuierlich ist.

Das singuläre Spannungsfeld an der Rissspitze hängt ebenso wie die Verschiebungen (B.1) von den  $K$ -Faktoren ab. In vielen Fällen wird zur Berechnung der Rissrichtung ein spannungsbasiertes Kriterium verwendet, das auf Basis des analytischen Spannungsfeldes definiert wird. In der numerischen Analyse müssen deshalb zur Bestimmung der Rissrichtung die  $K$ -Faktoren ermittelt werden. Dies geschieht häufig über die Berechnung des  $J$ -Integrals, siehe *Belytschko & Black* [15].

### Riss in kohäsiven Materialien

Bei Rissen in kohäsiven Materialien besteht keine Spannungssingularität an der Rissspitze. Die Spannungen sind durch die Festigkeit des Materials nach oben begrenzt. In der Arbeit von *Mariani & Perego* [105] wurden kubische diskontinuierliche Polynome eingeführt, um die Rissöffnung in der kohäsiven Zone korrekt abbilden zu können und eine feine Auflösung des Verschiebungsfeldes in der Umgebung zu gewährleisten. Sie benutzten als Verschiebungsapproximation die folgende Funktion.

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{o \in I} N_o \hat{\mathbf{u}}_o}_{\hat{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{q \in K} \chi_c N_q \tilde{\mathbf{u}}_q}_{\chi_c \tilde{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{q \in K} N_q \left( \sum_{l=1}^3 F_l \check{\mathbf{u}}_q^l \right)}_{\check{\mathbf{u}}} \quad (\text{B.4})$$

Darin bezeichnen  $F_l$  Funktionen, mit denen der Raum der Ansatzfunktionen zur Abbildung der Verschiebungskomponente  $\check{\mathbf{u}}$  angereichert wird.

$$\{F_l\} \equiv \left\{ \chi_c \left( \frac{x - x_q}{h_{e,q}} \right)^2, \chi_c \left( \frac{y - y_q}{h_{e,q}} \right)^2, \chi_c \left( \frac{x - x_q}{h_{e,q}} \right) \left( \frac{y - y_q}{h_{e,q}} \right) \right\} \quad (\text{B.5})$$



Im Gegensatz zu den Funktionen in Gleichung (B.2) sind hier alle Funktionen  $F_l$  über den Riss diskontinuierlich. Außerdem leben die Freiwerte  $\check{\mathbf{u}}_q^l$  auf den Knoten, die mit den Freiheitsgraden  $\check{\tilde{\mathbf{u}}}_q$  angereichert sind. Dies bedeutet, dass das diskontinuierliche Verschiebungsfeld durch die Summe von  $\chi_c \check{\tilde{\mathbf{u}}}$  und  $\check{\mathbf{u}}$  approximiert wird. Die Variablen  $x_q$  und  $y_q$  kennzeichnen die Koordinaten des Knotens  $q$ . Der Parameter  $h_{e,q}$  symbolisiert die typische Größe der Elemente, die am Knoten  $q$  hängen. Es ist offensichtlich, dass die Approximation der diskontinuierlichen Verschiebung mit  $\chi_c \check{\tilde{\mathbf{u}}}$  und  $\check{\mathbf{u}}$  im Vergleich zum eher konventionellen Ansatz, bei dem nur die Komponente  $\chi_c \check{\tilde{\mathbf{u}}}$  benutzt wird, relativ aufwendig ist. So müssen beispielsweise in 2D pro angereichertem Knoten weitere sechs Freiheitsgrade zur Approximation der diskontinuierlichen Verschiebung eingeführt werden. Mit diesem Ansatz ist es möglich, dass die Riss Spitze innerhalb eines Finiten Elementes liegt. Zur Vereinfachung der Implementierung wurde von *Mariani & Perego* [105] in diesem Element an der Riss Spitze ein zusätzlicher Knoten eingeführt.

*Moës & Belytschko* [114] benutzten eine nicht-singuläre Riss Spitzenfunktion zur lokalen Verfeinerung der Finite Element Approximation an der Riss Spitze. Damit darf der Riss innerhalb eines Finiten Elementes enden. Sie verwendeten folgenden Ansatz für die Verschiebungen.

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{o \in I} N_o \hat{\mathbf{u}}_o}_{\check{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{q \in K} \chi_c N_q \check{\tilde{\mathbf{u}}}_q}_{\chi_c \check{\tilde{\mathbf{u}}}} + \underbrace{\sum_{p \in L} F_c N_p \check{\mathbf{u}}_p}_{\check{\mathbf{u}}} \quad (\text{B.6})$$

Der Satz  $L$  enthält alle Knoten des Riss Spitzelementes.  $F_c$  kennzeichnet die Anreicherungsfunktion, die zur Approximation des Riss Spitzefeldes  $\check{\mathbf{u}}$  verwendet wird.

$$F_c = r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{oder} \quad F_c = r^{3/2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{oder} \quad F_c = r^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{B.7})$$

Offensichtlich hat sie gewisse Ähnlichkeit mit der Funktion  $F_1$  in Gleichung (B.2). Jedoch ist für die Funktion  $F_c$  charakteristisch, dass sie nicht in der Quadratwurzel des Abstandes zur Riss Spitze formuliert ist, um Spannungssingularitäten an der Riss Spitze zu vermeiden, vergleiche *Dumstorff & Meschke* [45].

*Zi & Belytschko* [199] entwickelten ein neues Riss Spitzelement, ohne spezielle Anreicherungsfunktionen zur Erweiterung der Basis des diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes einzusetzen. Dabei verwendeten sie drei- und sechsknotige Dreieckselemente. Das approximierte Verschiebungsfeld lautet folgendermaßen.

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{o \in I} N_o \hat{\mathbf{u}}_o}_{\check{\mathbf{u}}} + \underbrace{\sum_{q \in K} \chi_{c,q} N_q \check{\tilde{\mathbf{u}}}_q + \sum_{p \in L} \chi_{c,p} N_p^* \check{\tilde{\mathbf{u}}}_p}_{\chi_c \check{\tilde{\mathbf{u}}}} \quad (\text{B.8})$$

Die Menge  $L$  enthält die Knoten des Riss Spitzelementes, die zum Satz  $K$  gehören werden, sobald das Element komplett vom Riss durchtrennt wird. Die Ansatzfunktion  $N_p^*$  stimmt in einem Element, das komplett vom Riss durchtrennt wird, mit der Ansatzfunktion vom Typ  $N_q$  überein. Im Riss Spitzelement wird das lokale Koordinatensystem in Abhängigkeit der Riss Spitzenkoordinaten transformiert. Damit kann der Einfluss des diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes im Riss Spitzelement auf einen charakteristischen Bereich beschränkt werden. Im transformierten lokalen Koordinatensystem des

Rissspitzenelementes ist  $N_p^*$  definiert, siehe *Zi & Belytschko* [199]. Die Anreicherungs-funktion  $\chi_{c,q}$  bzw.  $\chi_{c,p}$  ist knotenbasiert formuliert und soll hier bezüglich des globalen Koordinatensystems angegeben werden.

$$\chi_{c,z} = 2 [\mathcal{H}_c(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_z)] \quad \text{wobei} \quad z = q, p \quad (\text{B.9})$$

Darin kennzeichnet  $\mathbf{x}_z$  die globale Koordinate des Knotens  $z$  und  $\mathcal{H}_c$  die Heaviside-Funktion aus Gleichung (A.12).

# Literaturverzeichnis

- [1] **Alfano, G., Crisfield, M. A. (2001)**: ‘Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 1701–1736.
- [2] **Altenbach, H., Altenbach, J., Rikards, R. (1996)**: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart.
- [3] **Areias, P. M. A., Belytschko, T. (2005)**: ‘Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 63, pp. 760–788.
- [4] **Areias, P. M. A., Belytschko, T. (2005)**: ‘Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 62, pp. 384–415.
- [5] **Areias, P. M. A., Belytschko, T. (2006)**: ‘Two-scale shear band evolution by local partition of unity’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 66, pp. 878–910.
- [6] **Armero, F. (1999)**: ‘Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: application to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids’, *Mech. Cohes.-Frict. Mater.*, Vol. 4, pp. 101–131.
- [7] **Armero, F., Garikipati, K. (1995)**: ‘Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids’, in: **Owen, D. R. J., Oñate, E., Hinton, E.** (eds.), *Proc. 4th Int. Conf. Computational Plasticity*, Vol. 1, pp. 547–561.
- [8] **Armero, F., Garikipati, K. (1996)**: ‘An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 33, pp. 2863–2885.
- [9] **Arrea, M., Ingraffea, A. R. (1982)**: *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*, Department of Structural Engineering 81–83, Cornell University, Ithaca, NY.
- [10] **Babuška, I. (1973)**: ‘The finite element method with Lagrangian multipliers’, *Numerical Mathematics*, Vol. 20, pp. 179–192.
- [11] **Babuška, I., Melenk, J. M. (1997)**: ‘The partition of unity method’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 40, pp. 727–758.
- [12] **Barenblatt, G. I. (1962)**: ‘The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture’, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, pp. 55–129.
- [13] **Barsoum, R. S. (1976)**: ‘On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 25–37.
- [14] **Bažant, Z. P., Belytschko, T. (1985)**: ‘Wave propagation in a strain-softening bar: Exact solution’, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, Vol. 111, pp. 381–389.
- [15] **Belytschko, T., Black, T. (1999)**: ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 45, pp. 601–620.
- [16] **Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., Zi, G. (2003)**: ‘Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 58, pp. 1873–1905.

- [17] **Belytschko, T., Fish, J., Bayliss, A. (1990)**: ‘The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 81, pp. 71–89.
- [18] **Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B. E. (1988)**: ‘A Finite Element with embedded localization zones’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 70, pp. 59–89.
- [19] **Belytschko, T., Moës, N., Usui, S., Parimi, C. (2001)**: ‘Arbitrary discontinuities in finite elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 50, pp. 993–1013.
- [20] **Belytschko, T., Organ, D., Gerlach, C. (2000)**: ‘Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 187, pp. 385–399.
- [21] **Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S. (2003)**: ‘Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 56, pp. 609–635.
- [22] **Belytschko, T., Xiao, S. P. (2003)**: ‘Coupling methods for continuum model with molecular model’, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 1, pp. 115–126.
- [23] **Bocca, P., Carpinteri, A., Valente, S. (1991)**: ‘Mixed mode fracture of concrete’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 27, pp. 1139–1153.
- [24] **Böhm, H. J., Rammerstorfer, F. G., Weissenbek, E. (1993)**: ‘Some simple models for micromechanical investigation of arrangement effects in MMCs’, *Computational Materials Science*, Vol. 1, pp. 177–194.
- [25] **Brewer, J. C., Lagace, P. A. (1988)**: ‘Quadratic stress criterion for initiation of delamination’, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 1141–1155.
- [26] **Budyn, É., Zi, G., Moës, N., Belytschko, T. (2004)**: ‘A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 61, pp. 1741–1770.
- [27] **Camacho, G. T., Ortiz, M. (1996)**: ‘Computational modelling of impact damage in brittle materials’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 33, pp. 2899–2938.
- [28] **Carol, I., López, C. M., Roa, O. (2001)**: ‘Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 52, pp. 193–215.
- [29] **Chessa, J., Wang, H., Belytschko, T. (2003)**: ‘On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 57, pp. 1015–1038.
- [30] **Cho, Y.-S., Im, S. (2006)**: ‘MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation. Part II: Application for finite crack element’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 65, pp. 517–547.
- [31] **Cho, Y.-S., Jun, S., Im, S., Kim, H.-G. (2005)**: ‘An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 194, pp. 3022–3046.
- [32] **Chopp, D. L. (2001)**: ‘Some improvements on the fast marching method’, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 23, pp. 230–244.
- [33] **Coleman, B. D., Gurtin, M. E. (1967)**: ‘Thermodynamics with internal state variables’, *J. Chem. Phys.*, Vol. 47(2), pp. 597–613.
- [34] **Coleman, B. D., Noll, W. (1963)**: ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity’, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 13, pp. 167–178.
- [35] **Cosserat, E., Cosserat, F. (1909)**: *Théorie des Corps Déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris.
- [36] **Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T. (2000)**: ‘Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 48, pp. 1741–1760.
- [37] **de Borst, R. (1986)**: *Non-linear analysis of frictional materials*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.

- [38] **de Borst, R. (1991)**: ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’, *Eng. Comp.*, Vol. 8, pp. 317–332.
- [39] **de Borst, R., Sluys, L. J., Mühlhaus, H. B., Pamin, J. (1993)**: ‘Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation’, *Eng. Comp.*, Vol. 10, pp. 99–121.
- [40] **Döbert, C. (2001)**: *Meso-Makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung*, Ph.D. Thesis, Universität Hannover, Hannover, Deutschland.
- [41] **Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T. (2000)**: ‘Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 37, pp. 7161–7183.
- [42] **Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T. (2001)**: ‘An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp. 6825–6846.
- [43] **Duarte, C. A., Oden, J. T. (1996)**: ‘H-p clouds: an h-p meshless method’, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 12, pp. 673–705.
- [44] **Dugdale, D. S. (1960)**: ‘Yielding of steel sheets containing slits’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp. 100–108.
- [45] **Dumstorff, P., Meschke, G. (2004)**: ‘Investigation of crack growth criteria in the context of the extended finite element method’, in: **Neittaanmäki, T., Rossi, S., Korotov, E., Oñate, E., Périaux, J., Knörzer, D.** (eds.), *Proc. ECCOMAS 2004*.
- [46] **Dumstorff, P., Mosler, J., Meschke, G. (2003)**: ‘Advanced discretization methods for cracked structures: the strong discontinuity approach vs. the extended finite element method’, in: **Oñate, E., Owen, D. R. J.** (eds.), *Proc. COMPLAS 2003*.
- [47] **Elguedj, T., Gravouil, A., Combescure, A. (2006)**: ‘Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, pp. 501–515.
- [48] **Erdogan, F., Sih, G. C. (1963)**: ‘On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear’, *J. Basic Engrg.*, Vol. 85, pp. 519–527.
- [49] **Eschelby, J. D. (1957)**: ‘The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion’, *Proceedings of the Royal Society, London*, Vol. A.241, pp. 376–396.
- [50] **Farhat, C., Roux, F.-X. (1991)**: ‘A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 32, pp. 1205–1227.
- [51] **Feist, C. (2004)**: *A numerical model for cracking of plain concrete based on the Strong Discontinuity Approach*, Ph.D. Thesis, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich.
- [52] **Fish, J. (1992)**: ‘Hierarchical modelling of discontinuous fields’, *Comm. Appl. Num. Meth.*, Vol. 8, pp. 443–453.
- [53] **Fish, J. (1992)**: ‘The s-version of the finite element method’, *Computers & Structures*, Vol. 43, pp. 539–547.
- [54] **Fish, J., Yuan, Z. (2005)**: ‘Multiscale enrichment based on partition of unity’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 62, pp. 1341–1359.
- [55] **Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B., Belytschko, T. (1997)**: ‘Enriched element-free Galerkin methods for singular fields’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 40, pp. 1483–1504.
- [56] **Garikipati, K. (2002)**: ‘A variational multiscale method to embed micromechanical surface laws in the macromechanical continuum formulation’, *CMES*, Vol. 3, pp. 175–184.
- [57] **Garikipati, K., Hughes, T. J. R. (2000)**: ‘Embedding micromechanical laws in the continuum formulation - a multiscale approach applied to discontinuous solutions’, *Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng.*, Vol. 1, pp. 64–78.
- [58] **Garikipati, K., Hughes, T. J. R. (2000)**: ‘A variational multiscale approach to strain localization - formulation for multidimensional problems’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 188, pp. 39–60.

- [59] **Gasser, T. C., Holzapfel, G. A. (2003)**: ‘Geometrically non-linear and consistently linearized embedded strong discontinuity models for 3D problems with an application to the dissection analysis of soft biological tissues’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, pp. 5059–5098.
- [60] **Gasser, T. C., Holzapfel, G. A. (2005)**: ‘Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 194, pp. 2859–2896.
- [61] **Gasser, T. C., Holzapfel, G. A. (2006)**: ‘3D Crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, pp. 5198–5219.
- [62] **Geers, M. G. D., de Borst, R., Peerlings, R. H. J. (2000)**: ‘Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams’, *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 65, pp. 247–261.
- [63] **Ghosh, S., Lee, K., Moorthy, S. (1996)**: ‘Two-scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite elements’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 132, pp. 63–116.
- [64] **Ghosh, S., Raghavan, P. (2004)**: ‘Multiscale model for damage analysis in fiber-reinforced composites with interfacial debonding’, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 2, pp. 621–644.
- [65] **Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T. (2002)**: ‘Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 53, pp. 2569–2586.
- [66] **Griffith, A. A. (1921)**: ‘The phenomena of rupture and flows in solids’, *Philos. T. Roy. Soc. A* 221, pp. 163–197.
- [67] **Haidar, K., Dubé, J. F., Pijaudier-Cabot, G. (2003)**: ‘Modelling crack propagation in concrete structures with a two scale approach’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 27, pp. 1187–1205.
- [68] **Hansbo, A., Hansbo, P. (2002)**: ‘An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 5537–5552.
- [69] **Hansbo, A., Hansbo, P. (2004)**: ‘A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, pp. 3523–3540.
- [70] **Hashin, Z. (1983)**: ‘Analysis of composite materials’, *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 481–505.
- [71] **Hashin, Z., Shtrikman, S. (1963)**: ‘A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials’, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp. 127–140.
- [72] **Hettich, T., Hund, A., Ramm, E.**: ‘Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework’, *submitted to Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- [73] **Hettich, T., Ramm, E. (2006)**: ‘Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, pp. 4753–4767.
- [74] **Hill, R. (1963)**: ‘Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles’, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp. 357–372.
- [75] **Hill, R. (1965)**: ‘A self-consistent mechanics of composite materials’, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 213–222.
- [76] **Hill, R. (1967)**: ‘The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals’, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, pp. 79–95.
- [77] **Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P. E. (1976)**: ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’, *Cement & Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773–782.
- [78] **Holzapfel, G. A. (2000)**: *Nonlinear Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- [79] **Hörmann, M. (2002)**: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*, Ph.D. Thesis, Universität Stuttgart, Stuttgart, Deutschland.

- [80] **Hughes, T. J. R., Feijóo, G. R., Mazzei, L., Quincy, J.-B. (1998)**: ‘The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 166, pp. 3–24.
- [81] **Hund, A., Ramm, E.**: ‘Locality constraints within multiscale model for nonlinear material behavior’, *accepted in Int. J. Numer. Meth. Engng. (2006)*.
- [82] **Hund, A. S. (2007)**: *Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur*, Ph.D. Thesis, Universität Stuttgart, Stuttgart, Deutschland.
- [83] **Ibrahimbegović, A. (2004)**: ‘On the role of structural mechanics in inelastic material analysis and design’, in: *Proc. NATO ARW 2004*, pp. 111–138.
- [84] **Irwin, G. R. (1956)**: ‘Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate’, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, pp. 361–364.
- [85] **Ji, H., Dolbow, J. E. (2004)**: ‘On strategies for enforcing interfacial constraints and evaluating jump conditions with the extended finite element method’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 61, pp. 2508–2535.
- [86] **Jirásek, M. (2000)**: ‘Comparative study on finite elements with embedded discontinuities’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 188, pp. 307–330.
- [87] **Jirásek, M., Zimmermann, T. (2001)**: ‘Embedded crack model: I. Basic formulation’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 1269–1290.
- [88] **Jirásek, M., Zimmermann, T. (2001)**: ‘Embedded crack model. Part II: Combination with smeared cracks’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 1291–1305.
- [89] **John, R., Shah, S. P. (1990)**: ‘Mixed-mode fracture of concrete subjected to impact loading’, *ASCE J. Struct. Engrg.*, Vol. 116, pp. 585–602.
- [90] **Kouznetsova, V. G. (2002)**: *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- [91] **Krause, R., Rank, E. (2003)**: ‘Multiscale computations with a combination of the h- and p-versions of the finite-element method’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, pp. 3959–3983.
- [92] **Krongauz, Y., Belytschko, T. (1998)**: ‘EFG approximation with discontinuous derivatives’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 1215–1233.
- [93] **Kupfer, H. (1973)**: ‘Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung’, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Vol. 229.
- [94] **Ladevèze, P. (1998)**: *Nonlinear Computational Structural Mechanics*, Springer Verlag, New York.
- [95] **Larsson, R., Fagerström, M. (2005)**: ‘A framework for fracture modelling based on the material forces concept with XFEM kinematics’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 62, pp. 1763–1788.
- [96] **Larsson, R., Runesson, K. (1996)**: ‘Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity’, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, Vol. 122, pp. 402–411.
- [97] **Lee, S.-H., Song, J.-H., Yoon, Y.-C., Zi, G., Belytschko, T. (2004)**: ‘Combined extended and superimposed finite element method for cracks’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 59, pp. 1119–1136.
- [98] **Legay, A., Wang, H. W., Belytschko, T. (2005)**: ‘Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 64, pp. 991–1008.
- [99] **Leonhardt, F., Walther, R. (1962)**: ‘Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung’, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Vol. 151.
- [100] **Li, S., Ghosh, S. (2006)**: ‘Extended Voronoi cell finite element model for multiple cohesive crack propagation in brittle materials’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 65, pp. 1028–1067.

- [101] **Linero, D. L., Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. (2006):** ‘Cracking modeling in reinforced concrete via the strong discontinuity approach’, in: **Meschke, G., de Borst, R., Mang, H., Bićanić, N.** (eds.), *Proc. EURO-C 2006*.
- [102] **Liu, X. Y., Xiao, Q. Z., Karihaloo, B. L. (2004):** ‘XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 59, pp. 1103–1118.
- [103] **Löblein, J. (2004):** *Ein Modell zur Beschreibung finiter anisotroper elasto-plastischer Deformationen unter Berücksichtigung diskreter Rissausbreitung*, Ph.D. Thesis, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland.
- [104] **Löhnert, S. (2004):** *Computational Homogenization of Microheterogeneous Materials at Finite Strains Including Damage*, Ph.D. Thesis, Universität Hannover, Hannover, Deutschland.
- [105] **Mariani, S., Perego, U. (2003):** ‘Extended finite element method for quasi-brittle fracture’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 58, pp. 103–126.
- [106] **Mariano, P. M., Stazi, F. L. (2004):** ‘Strain localization due to crack-microcrack interactions: X-FEM for a multifield approach’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 193, pp. 5035–5062.
- [107] **Markovic, D., Ibrahimbegovic, A. (2004):** ‘On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 193, pp. 5503–5523.
- [108] **Marsden, J., Hughes, J. (1983):** *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [109] **Mediavilla, J., Peerlings, R. H. J., Geers, M. G. D. (2006):** ‘Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 66, pp. 661–688.
- [110] **Menrath, H. (1999):** *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*, Ph.D. Thesis, Universität Stuttgart, Stuttgart, Deutschland.
- [111] **Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P. (2005):** ‘A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 63, pp. 276–289.
- [112] **Mergheim, J., Steinmann, P. (2006):** ‘A geometrically nonlinear FE approach for the simulation of strong and weak discontinuities’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 195, pp. 5037–5052.
- [113] **Meschke, G., Dumstorff, P., Fleming, W., Jox, S. (2006):** ‘Numerical analysis of crack propagation in concrete structures using X-FEM’, in: **Meschke, G., de Borst, R., Mang, H., Bićanić, N.** (eds.), *Proc. EURO-C 2006*.
- [114] **Moës, N., Belytschko, T. (2002):** ‘Extended finite element method for cohesive crack growth’, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 813–833.
- [115] **Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., Remacle, J.-F. (2003):** ‘A computational approach to handle complex microstructure geometries’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 192, pp. 3163–3177.
- [116] **Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999):** ‘A finite element method for crack growth without remeshing’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 46, pp. 131–150.
- [117] **Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T. (2002):** ‘Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 53, pp. 2549–2568.
- [118] **Mori, T., Tanaka, K. (1973):** ‘Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions’, *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571–575.
- [119] **Mosler, J. (2002):** *Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände in Tragwerken*, Ph.D. Thesis, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Deutschland.



- [120] **Mosler, J. (2005)**: ‘Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: strong and weak discontinuities’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 194, pp. 979–1000.
- [121] **Mosler, J. (2005)**: ‘On advanced solution strategies to overcome locking effects in strong discontinuity approaches’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 63, pp. 1313–1341.
- [122] **Mosler, J., Meschke, G. (2000)**: ‘3D FE analysis of cracks by means of the strong discontinuity approach’, in: **Oñate, E., Bugeda, G., Suárez, B. (eds.)**, *Proc. ECCOMAS 2000*.
- [123] **Most, T. (2005)**: *Stochastic crack growth simulation in reinforced concrete structures by means of coupled finite element and meshless methods*, Ph.D. Thesis, Bauhaus-Universität Weimar, Weimar, Deutschland.
- [124] **Mote, C. D. (1971)**: ‘Global-local finite element’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 3, pp. 565–574.
- [125] **Mourad, H. M., Dolbow, J., Garikipati, K. (2005)**: ‘An assumed-gradient finite element method for the level set equation’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 64, pp. 1009–1032.
- [126] **Nagashima, T., Omoto, Y., Tani, S. (2003)**: ‘Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 56, pp. 1151–1173.
- [127] **Nemat-Nasser, S., Hori, M. (1993)**: *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, Amsterdam.
- [128] **Nooru-Mohamed, M. B. (1992)**: *Mixed-Mode fracture of concrete: an experimental approach*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Nederlands.
- [129] **Ohlsson, U., Olofsson, T. (1997)**: ‘Mixed-Mode fracture and anchor bolts in concrete analysis with inner softening bands’, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, Vol. 123, pp. 1027–1033.
- [130] **Oliver, J. (1996)**: ‘Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. Part 2: Numerical simulation’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 39, pp. 3575–3623.
- [131] **Oliver, J. (2000)**: ‘On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 37, pp. 7207–7229.
- [132] **Oliver, J., Cervera, M., Manzoli, O. (1999)**: ‘Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach’, *Int. J. Plast.*, Vol. 15, pp. 319–351.
- [133] **Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G., Chaves, E. W. V. (2002)**: ‘From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach’, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 113–136.
- [134] **Oliver, J., Huespe, A. E., Samaniego, E. (2003)**: ‘A study on finite elements for capturing strong discontinuities’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 56, pp. 2135–2161.
- [135] **Oliver, J., Huespe, A. E., Samaniego, E., Chaves, E. W. V. (2002)**: ‘On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics’, in: **Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J. (eds.)**, *Proc. WCCM V*.
- [136] **Oliver, J., Huespe, A. E., Samaniego, E., Chaves, E. W. V. (2004)**: ‘Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 28, pp. 609–632.
- [137] **Oliver, J., Huespe, A. E., Sánchez, P. J. (2006)**: ‘A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, pp. 4732–4752.
- [138] **Ortiz, M., Leroy, Y., Needleman, A. (1987)**: ‘A Finite Element Method for localized failure analysis’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 61, pp. 189–214.
- [139] **Ortiz, M., Pandolfi, A. (1999)**: ‘Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis’, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 44, pp. 1267–1282.
- [140] **Osher, S., Fedkiw, R. (2003)**: *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Applied Mathematical Sciences 153. Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg.

- [141] **Osher, S., Sethian, J. A. (1988)**: ‘Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations’, *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp. 12–49.
- [142] **Parks, D. M. (1975)**: ‘A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors’, *Int. J. Frac.*, Vol. 10, pp. 487–502.
- [143] **Patzák, B., Jirásek, M. (2003)**: ‘Process zone resolution by extended finite elements’, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, pp. 957–977.
- [144] **Peerlings, R. H. J. (1999)**: *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- [145] **Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., Geers, M. G. D. (1998)**: ‘Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture’, *Mech. Coh. Fric. Mat.*, Vol. 3, pp. 323–343.
- [146] **Perzyna, P. (1966)**: ‘Fundamental problems in viscoplasticity’, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 9, pp. 243–377.
- [147] **Pietruszczak, S., Mróz, Z. (1981)**: ‘Finite element analysis of deformation of strain-softening materials’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 327–334.
- [148] **Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z. P. (1987)**: ‘Nonlocal damage theory’, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, Vol. 113, pp. 1512–1533.
- [149] **Ramm, E., Hund, A., Hettich, T. (2006)**: ‘A Variational Multiscale Model for composites with special emphasis on the X-FEM and level sets’, in: **Meschke, G., de Borst, R., Mang, H., Bićanić, N.** (eds.), *Proc. EURO-C 2006*.
- [150] **Rank, E. (1992)**: ‘Adaptive remeshing and h-p domain decomposition’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 101, pp. 299–313.
- [151] **Reinhardt, H. W., Cornelissen, H. A. W., Hordijk, D. A. (1989)**: ‘Mixed mode fracture tests on concrete’, in: **Shah, S. P., Swartz, S. E.** (eds.), *Fracture of Concrete and Rock*, pp. 117–130.
- [152] **Remmers, J. J. C. (2006)**: *Discontinuities in materials and structures. A unifying computational approach*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [153] **Remmers, J. J. C., de Borst, R., Needleman, A. (2003)**: ‘A cohesive segments method for the simulation of crack growth’, *Computational Mechanics*, Vol. 31, pp. 69–77.
- [154] **Reuss, A. (1929)**: ‘Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätstheorie’, *Zeitung für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 9, pp. 49–58.
- [155] **Reuss, A. (1929)**: ‘Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie’, *Zeitung für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 10, pp. 266–274.
- [156] **Rice, J. R. (1968)**: ‘A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks’, *J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 379–386.
- [157] **Rots, J. G. (1988)**: *Computational modelling of concrete fracture*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [158] **Ruiz, G., Pandolfi, A., Ortiz, M. (2001)**: ‘Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 52, pp. 97–120.
- [159] **Ruuth, S. J., Merriman, B., Osher, S. (2000)**: ‘A fixed grid method for capturing the motion of self-intersecting wavefronts and related PDEs’, *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, pp. 1–21.
- [160] **Samaniego, E., Belytschko, T. (2005)**: ‘Continuum-discontinuum modelling of shear bands’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 62, pp. 1857–1872.
- [161] **Schellekens, J. C. J., de Borst, R. (1993)**: ‘On the numerical integration of interface elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 43–66.

- [162] **Schlangen, E. (1993)**: *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [163] **Schröder, J. (1996)**: *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*, Ph.D. Thesis, Universität Hannover, Hannover, Deutschland.
- [164] **Sethian, J. A. (1996)**: ‘A marching level set method for monotonically advancing fronts’, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol. 93, pp. 1591–1595.
- [165] **Sethian, J. A. (1999)**: *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge University Press, U.K.
- [166] **Simo, J., Oliver, J. (1994)**: ‘A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids’, in: **Bažant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M., Mazars, J.** (eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, E. & F. N. Spon, London, pp. 25–39.
- [167] **Simo, J., Oliver, J., Armero, F. (1993)**: ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids’, *Computational Mechanics*, Vol. 12, pp. 277–296.
- [168] **Simone, A. (2004)**: ‘Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issues’, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 20, pp. 465–478.
- [169] **Simone, A., Askes, H., Sluys, L. J. (2004)**: ‘Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 41, pp. 351–363.
- [170] **Simone, A., Wells, G. N., Sluys, L. J. (2003)**: ‘From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 192, pp. 4581–4607.
- [171] **Stazi, F. L., Budyn, E., Chessa, J., Belytschko, T. (2003)**: ‘An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks’, *Computational Mechanics*, Vol. 31, pp. 38–48.
- [172] **Stein, E., Barthold, F.-J. (1992)**: *Elastizitätstheorie*, Unterlagen zur Vorlesung ”Elastizitätstheorie”, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [173] **Steinhoff, J., Fan, M., Wang, L. (2000)**: ‘A new Eulerian method for the computation of propagating short acoustic and electromagnetic pulses’, *Journal of Computational Physics*, Vol. 157, pp. 683–706.
- [174] **Steinmann, P., Ackermann, D., Barth, F. J. (2001)**: ‘Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. II. Computational setting’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 5509–5526.
- [175] **Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N., Belytschko, T. (2001)**: ‘Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 51, pp. 943–960.
- [176] **Strouboulis, T., Babuška, I., Copps, K. (2000)**: ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 181, pp. 43–69.
- [177] **Strouboulis, T., Copps, K., Babuška, I. (2000)**: ‘The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 47, pp. 1401–1417.
- [178] **Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., Belytschko, T. (2001)**: ‘Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 190, pp. 6183–6200.
- [179] **Sukumar, N., Chopp, D. L., Moran, B. (2003)**: ‘Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation’, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, pp. 29–48.
- [180] **Sukumar, N., Huang, Z. Y., Prévost, J.-H., Suo, Z. (2004)**: ‘Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 59, pp. 1075–1102.

- [181] **Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T. (2000)**: ‘Extended finite element method for three-dimensional crack modelling’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, pp. 1549–1570.
- [182] **Suquet, P. M. (1987)**: ‘Elements of homogenization for inelastic solid mechanics’, in: **Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A.** (eds.), *Homogenization Techniques for Composite Media*, Springer Verlag, Berlin, pp. 193–278.
- [183] **Truesdell, C., Noll, W. (1965)**: ‘The non-linear field theories of mechanics’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer Verlag, Berlin.
- [184] **Truesdell, C., Toupin, R. (1960)**: ‘The classical field theories’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Springer Verlag, Berlin.
- [185] **Ventura, G. (2006)**: ‘On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 66, pp. 761–795.
- [186] **Ventura, G., Budyn, E., Belytschko, T. (2003)**: ‘Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 58, pp. 1571–1592.
- [187] **Ventura, G., Xu, J. X., Belytschko, T. (2002)**: ‘A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 54, pp. 923–944.
- [188] **Voigt, W. (1889)**: ‘Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper’, *Wied. Ann.*, Vol. 38, pp. 1377–1397.
- [189] **Wells, G. N., de Borst, R., Sluys, L. J. (2002)**: ‘A consistent geometrically non-linear approach for delamination’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 54, pp. 1333–1355.
- [190] **Wells, G. N., Sluys, L. J. (2001)**: ‘A new method for modelling cohesive cracks using finite elements’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 2667–2682.
- [191] **Wells, G. N., Sluys, L. J. (2001)**: ‘Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 897–913.
- [192] **Wells, G. N., Sluys, L. J., de Borst, R. (2002)**: ‘Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 53, pp. 1235–1256.
- [193] **Wohlmuth, B. I. (2001)**: *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [194] **Wriggers, P. (2001)**: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [195] **Wriggers, P., Stein, E. (2004)**: ‘Multi-Skalen-Methoden und Modelladaptivität bei der Berechnung von komplexen Strukturen’, *Bauingenieur*, Vol. 79, pp. 497–505.
- [196] **Xie, M. (1995)**: *Finite element modelling of discrete crack propagation*, Ph.D. Thesis, University of New Mexico, USA.
- [197] **Xu, X. P., Needleman, A. (1993)**: ‘Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix’, *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.*, Vol. 1, pp. 111–132.
- [198] **Zhao, H.-K., Chan, T., Merriman, B., Osher, S. (1996)**: ‘A variational level set approach to multiphase motion’, *Journal of Computational Physics*, Vol. 127, pp. 179–195.
- [199] **Zi, G., Belytschko, T. (2003)**: ‘New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 57, pp. 2221–2240.
- [200] **Zohdi, T. I., Wriggers, P. (2001)**: ‘Computational micro-macro material testing’, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 131–228.



# Lebenslauf

Name: Thomas Michael Hettich

Geburtstag: 27.03.1976

Geburtsort: Stuttgart-Bad Cannstatt

Staatsangehörigkeit: deutsch

Eltern: Joachim Hettich und Karin Hettich, geb. Hunyadi

Familienstand: ledig

1982 – 1986 Hohewartgrundschule, Stuttgart-Feuerbach

1986 – 1995 Leibniz-Gymnasium, Stuttgart-Feuerbach  
Abschluss: Abitur

10/1997 – 10/2002 Studium Bauingenieurwesen an der  
Universität Stuttgart

10/2002 Abschluss: Dipl.-Ing. (mit Auszeichnung)

11/2002 – 04/2007 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Institut für Baustatik und Baudynamik  
der Universität Stuttgart



## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.



- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhastragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.

- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.

- 43 (2004) M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) A. S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.