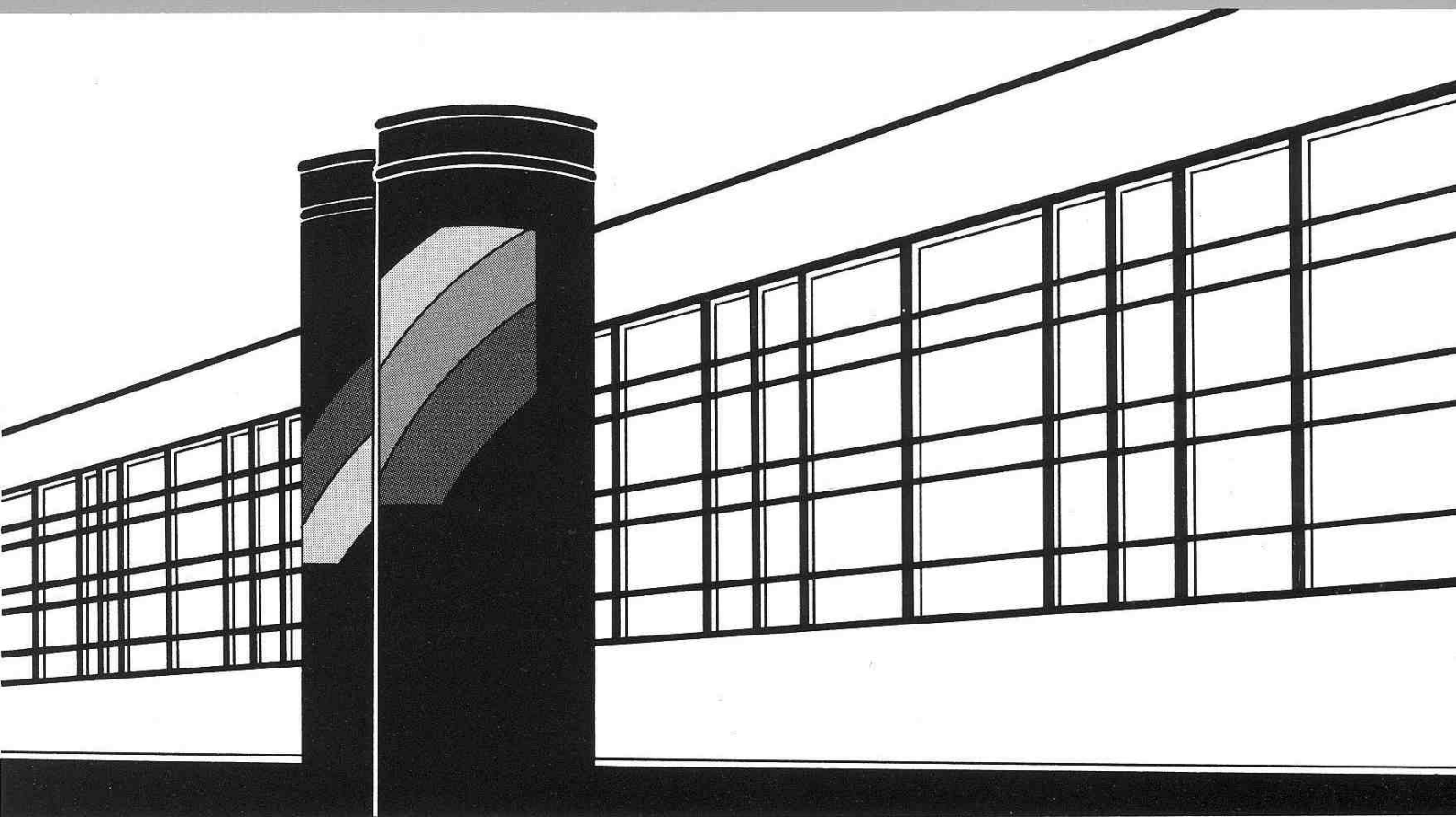


Institut für Wasserbau · Universität Stuttgart

# ***Mitteilungen***



Heft 185    Frank Zöllner

**Implementierung und Anwendung  
netzfreier Methoden  
im Konstruktiven Wasserbau  
und in der Hydromechanik**

# **Implementierung und Anwendung netzfreier Methoden im Konstruktiven Wasserbau und in der Hydromechanik**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der  
Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
**Frank Zöllner**  
aus Kaiserslautern

Hauptberichter:	Prof. em. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Jürgen Giesecke
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff PD Dr.-Ing. Walter Marx

Tag der mündlichen Prüfung: 6. August 2009

Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart  
2009



Heft 185    Implementierung und Anwen-  
dung netzfreier Methoden im  
Konstruktiven Wasserbau und  
in der Hydromechanik

von  
Dr.-Ing.  
Frank Zöllner

**D93** Implementierung und Anwendung netzfreier Methoden im Konstruktiven Wasserbau und in der Hydromechanik

Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Zöllner, Frank:  
Implementierung und Anwendung netzfreier Methoden im Konstruktiven Wasserbau  
und in der Hydromechanik / von Frank Zöllner. Institut für  
Wasserbau, Universität Stuttgart. - Stuttgart: Inst. für Wasserbau, 2009  
  
(Mitteilungen / Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart: H. 185)  
Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2009  
ISBN 978-3-933761-89-7  
NE: Institut für Wasserbau <Stuttgart>: Mitteilungen

Gegen Vervielfältigung und Übersetzung bestehen keine Einwände, es wird lediglich um Quellenangabe gebeten.

Herausgegeben 2009 vom Eigenverlag des Instituts für Wasserbau  
Druck: Document Center S. Kästl, Ostfildern

# Vorwort

## Veranlassung

### **Numerische Simulationsverfahren für den Nachweis der Tragfähigkeit von Wasserbauwerken**

Im Konstruktiven Ingenieurbau findet die Methode der Finiten Elemente (FEM) oder der Finiten Volumen (FVM) zum Nachweis der Tragfähigkeit von Bauwerken seit Jahrzehnten eine breite Anwendung. Hierbei handelt es sich um ein numerisches Verfahren zur Analyse des in einer Konstruktion durch verschiedenste Belastungen hervorgerufenen Spannungs- und Verformungszustandes. Die rechnerischen Untersuchungen gehen von einem Netz einer endlichen Anzahl geometrisch eindeutig begrenzter Elemente aus, in die das Kontinuum eines Tragwerkssystems, beispielsweise im Wasserbau einer Talsperre und zugehörigen Baugrundes, zerlegt wird. Netzgüte und Maschendichte haben einen starken Einfluss auf die Aussagekraft der auszuführenden statischen und festigkeitstheoretischen Berechnung. Jedoch sind komplexere Geometrien von Baukörpern, Baustoff- und Zustandsänderungen wie bei Flüssigkeiten und hydraulischen Vorgängen derartigen, ein starres Rechnernetz voraussetzenden numerischen Simulationsverfahren (FEM und FVM) nur schwer zugänglich.

Letzteres zeigt sich insbesondere bei dynamischen Vorgängen, die auf das Kräfte- und Verformungsbild einwirken und ebenso eine Veränderung der Geometrie bzw. Netzstrukturen als Randbedingungen zur Folge haben. Im Falle einer Betonstauwand können diese Einflussfaktoren Erdbeben, Wellenkräfte, wechselnde Stauspiegellagen oder sich im Baukörper fortpflanzende Risse, auch interaktive Abläufe zwischen Festkörper und aufgestautem Wasserkörper, sein.

So liegt es nahe, für derartige Lastfälle auf sogenannte, in jüngerer Zeit entwickelte Netzfremde Methoden zurückzugreifen. Diese besitzen andersartige, weniger von der Körpergeometrie abhängige Verknüpfungen von Stützstellen. Sie gestatten überdies die Einbeziehung freier Flüssigkeitsoberflächen und die Ablösung einzelner Teilchen. Unter der Vielfalt bislang bekannt gewordener, in den Grundlagen ähnlicher Netzfremder Methoden empfehlen sich einerseits für die Verfolgung von Flüssigkeitsbewegungen und instationären Druckbelastungen die frei bewegliche Partikel einschließende Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) und andererseits für die Behandlung von Festkörpern hinsichtlich Verformungen, Spannungsverteilung und Rissebildung die Elementfreie Galerkinsche Methode (EFGM), auch Finite-Punkte-Methode (FPM) genannt.

Die Kombination beider Methoden eröffnet zudem ein breites Spektrum zur Verfolgung

hydrodynamischer Prozesse in der Hydromechanik und im Konstruktiven Wasserbau. Nicht zuletzt ist eine exaktere, realitätsnahe Analyse des Tragverhaltens, beispielsweise einer unter vielgliedrigen statischen und dynamischen Lasten stehenden Staumauer, ein Wirtschaftlichkeitsfaktor; dies umso mehr bei einer zielsichereren Ausnutzung der Baustofffestigkeiten, ganz abgesehen von den ausschlaggebenden Sicherheitskriterien.

## **Zielsetzung der Dissertation**

Laut DIN 19700 - Stauanlagen, Teil 10: Gemeinsame Festlegungen und Teil 11: Talsperren, Ausgabe Juli 2004, sind zum Nachweis der Tragwerkssicherheit u.a. neben den statischen Belastungen auch die dynamischen Lastfälle, z.B. Wellenkräfte auf das Stauwerk, Schwingungen aus extremen Strömungsabläufen (Entlastungsanlagen) und aus Erdbeben, einzubeziehen, sowie die Fortentwicklung von Rissen und die Begrenzung der jeweiligen Risslängen bis höchstens zur Mittelfläche des Staumauerquerschnittes zu analysieren.

Für diesen Aufgabenkreis und die zugehörigen Lösungsansätze werden sich die beiden vorgenannten netzfreien Methoden in deren Kombination entwickeln und zu einem für die Wasserbaupraxis geeigneten, allgemein anwendungsfähigen Softwarepaket darstellen lassen.

## **Zum Inhalt**

Die von Herrn Zöllner eingereichte Promotionsschrift umfasst insgesamt 238 Seiten und gliedert sich in 8 Hauptkapiteln. Die hinzugezogene Fachliteratur weist im Schriftenverzeichnis 95 Publikationen, hauptsächlich englischsprachig, aus. Im 8-seitigen Anhang sind die Einzelschritte für die neu entwickelte Software (Programmcode, SPH- und EFGM-Module, deren Interaktion, Suchalgorithmen, Visualisierung) zusammengestellt. Schließlich zählt die vorangestellte englischsprachige Zusammenfassung der Dissertation 13 Seiten.

Der Autor schildert in der im Kapitel 1 enthaltenen Einführung übersichtlich die Problemkreise, die Zielsetzungen und die ins Auge gefassten Lösungswege. Letztere zeichnen sich in der Anwendung netzgebundener und netzfreier Simulationsmethoden je nach Aufgabenstellung ab.

Im 2. Kapitel befasst sich der Doktorand zunächst mit der Ausgangsbasis der in Frage kommenden elastizitätstheoretischen, numerischen Modelle. Deren Grundprinzip ist die Diskretisierung, d.h. die Abbildung kontinuierlicher Größen. Betrachtet man beispielsweise eine Verschiebung, so kommen Ersatzfunktionen und unbekannte Verschiebungsvektoren an beliebig oder unregelmäßig verteilten, von der Körpergeometrie unabhängigen Knoten in Frage. Letztere sind als Rechenstützstellen zu verstehen. Die mit einer Diskretisierung erfolgte Reduktion eines Kontinuums ergibt ein endliches algebraisches System partieller Differenzialgleichungen unter Einbeziehung von Randbedingungen, die den Lösungsweg mit bestimmen.

Es werden zum besseren Verständnis des in der Dissertation verfolgten Lösungsweges das Für und Wider bzw. die Vor- und Nachteile der Methode der Finiten Elemente nochmals aufgezeigt. Wenn auch die vielfache Anwendungspraxis mit der Diskretisierung von Kontinua in örtlich begrenzte Teilräume mit definiertem Verhalten bei Einzelbelastungen unbestritten ist, ergeben sich Nachteile. Diese sind beispielsweise begründet in hoher Netzdichte an Stellen hoher Gradienten mit erhöhtem Rechenaufwand, in der Netzgenerierung bei komplexen Geometrien, ferner in der Erfassung fortschreitender Diskontinuitäten (z.B. Rissentwicklung) oder in unstetigen Dehnungsverläufen. So muss bei einer durch FEM vorgenommenen Rissanalyse für jeden Zeitschritt eine neue Netzgenerierung angesichts der ständigen Änderung der Körpergeometrie durchgeführt werden.

Das 3. Kapitel ist der Elementfreien Galerkin-Methode (EFGM) gewidmet. Im Vergleich zur FE-Methode werden wohl für die mit den Knoten identischen Stützstellen Parameter, z.B. örtliche Verschiebungen, berechnet. Jedoch treten an die Stelle eines die Knoten verknüpfenden Netzes die Einzelknoten überdeckende Einflussfelder, deren zugehörige Ansatzfunktionen zur Beschreibung des Einflusses eines innerhalb des betrachteten Teilgebietes ausgewählten Ortes mittels der Moving Least Squares (ähnlich der statistischen Methode der kleinsten Fehlerquadrate) konstruiert werden.

Dieses im mehrdimensionalen Fall oberflächenbildende Verfahren geht auf Lancaster und Salkauskas zurück, die es im Jahre 1981 eingeführt haben. Es erlaubt eine nahezu beliebige Anordnung von Knoten unter Einhaltung der für die verlangte Genauigkeit notwendigen Knotendichte. Darüber hinaus können mit diesem Verfahren Diskontinuitäten (z.B. Risse) behandelt werden, wie auch die höhere Stetigkeit der Ableitungen dieses Verfahrens bei der Betrachtung von Dehnungen Sprünge vermeidet.

Die Methode der Moving Least Squares kommt der statistischen Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Gewinnung einer Regressionsgeraden durch eine gesamte Punkteverteilung mit dem Unterschied nahe, dass hier nur jene Punkte einbezogen werden, die sich innerhalb eines vorgegebenen Fensters befinden. Letzteres wird über das Untersuchungsgebiet schrittweise geschoben, wodurch die generierte Oberfläche erhalten wird. Hierbei bestimmt die einem Knoten zugewiesene Wichtungsfunktion dessen Einflussbereich, gekennzeichnet durch einen Radius unter Wahrung der gewünschten Knotendichte und eines eingeschränkten Rechenaufwandes.

Nach sehr detaillierter Darlegung der Bearbeitungsschritte vergleicht der Doktorand die mit dem EFGM-Verfahren gewonnenen Ergebnisse mit jenen eines analytischen Lösungsweges am Beispiel des sogenannten Timoshenko-Balkens. Er ist an einem Ende aufgelagert und am freien Ende mit einer parabolischen Schublast belastet. Die errechneten und grafisch dargestellten Horizontal- und Vertikalverformungen sowie die Horizontal-, Vertikal- und Schubspannungen zeigen gute Übereinstimmungen.

Mit der bildlichen Darstellung des numerischen Ablaufes der vorgestellten Elementfreien Galerkin-Methode schließt das 3. Kapitel. Im Falle dynamischer Beanspruchungen ist der Simulationsablauf zyklisch unter Einbeziehung der Zeit vorzunehmen.

Ein anderer Weg kann mit der im 4. Kapitel behandelten Methode der Smoothed



Particles Hydrodynamics (SPH) zur Führung statischer und dynamischer Nachweise eines Tragwerksverhaltens beschränkt werden. Im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente wird ein Kontinuum nicht durch ein Netz von geometrisch einfachen Elementen, sondern durch eine Partikelmenge abgebildet. Es eignet sich bei der Verfolgung starker Verformungen und Bewegungen.

Jedes Teilchen wird als ein räumliches Fluidelement verstanden, dem eine Wichtungsfunktion zugeordnet ist und das sowohl eine Ortskoordinate als auch Masse, Dichte, Druck oder Geschwindigkeit repräsentieren kann. So kennzeichnet z.B. die Anzahl von Partikeln pro Volumeneinheit die örtliche Dichte, von der der örtlich herrschende Druck abhängig ist und daher mit jedem Zeitschritt ein Druckgradient berechnet werden kann. Zusammen mit den auf den Körper einwirkenden Kräften oder mit Viskoseneigenschaften lässt sich die Änderung der Partikelgeschwindigkeit berechnen.

Frank Zöllner arbeitete in umfangreichen mathematischen und physikalischen Ableitungen die Thematik der Anwendungsvielfalt von SPH auf. Diese Darstellungen befassen sich im Detail mit Wichtungsfunktionen, der Wiedergabe künstlicher Kompressibilität und Viskosität, ferner mit Wärmediffusion und Geschwindigkeit, schließlich mit der Definition von Modellrändern und maßgebenden Parametern, aber auch mit der Zeitintegration und den Navier-Stokes-Gleichungen, abschließend mit der Validierung und den Darstellungsmöglichkeiten von Turbulenz und Oberflächenspannungen.

Teilergebnisse werden durch aufschlussreiche bildliche Darstellungen veranschaulicht, wie z.B. Wichtungsfunktionen und Ableitungen, Modellränder durch abstoßende Partikelkräfte, repulsive Kräfte von Randpartikeln, Druckausbreitungen in Flüssigkeitsbehältern. Auch finden Berücksichtigung das Auseinanderfließen eines zweidimensionalen elliptisch geformten Tropfes, die Ausbreitung einer Flutwelle als Folge eines Dammbruches und der in zwei kommunizierenden Röhren stattfindende Druckausgleich nach anfänglicher Wasserfüllung einer der beiden Röhren. Erneut wird das Kapitel durch die Wiedergabe eines zyklischen Programmablaufes abgeschlossen, der sich nach Festlegung des Untersuchungsgebietes und seiner Geometrie, der Partikelanzahl, ferner der anfänglichen Eigenschaften wie Dichte, Druck, Viskosität, Geschwindigkeit und mit der anschließenden Integration der Zeit ergibt.

Das 5. Kapitel befasst sich mit der Kombination der netzfreien Methoden EFGM und SPH. Deren Vorteil zeigt sich insbesondere bei Tragfähigkeitsnachweisen von Talsperren, die mit Staumauer und aufgestautem Wasserkörper sowohl statische als auch dynamische Beanspruchungen erfahren und bei denen eine Interaktion zwischen Festkörper und Wasserkörper besteht. Für die Untersuchung des Festkörpers wird die Elementfreie Galerkin-Methode herangezogen, während die Smoothed Particles Hydrodynamics-Simulation dem sich bewegenden Wasserkörper dient. Den beiden Modellansätzen ist somit eine Schnittstelle zuzuordnen, die ihren physikalischen Ausdruck in der Bedingung Aktion gleich Reaktion findet und deren mathematische Formulierung von der Einführung sogenannter hybrider Partikel für beide Verfahren ausgeht.

Für den numerischen Ablauf dieser kombinierten Simulation für beide Teilmodelle EFGM und SPH geben zwei Flussdiagramme eine leicht verfolgbare Übersicht.

Das unter dem Titel “Modellierungen für Talsperren” auf 78 Seiten sehr ausführlich gehaltene 6. Kapitel gibt zunächst in knapper Darstellung Aufschluss über die nach DIN 19700-Stauanlagen zu führenden Nachweise für die Standsicherheit bzw. Tragsicherheit, Gebrauchstauglichkeit bzw. Beständigkeit und Dauerhaftigkeit von Stauanlagen. Diese nehmen ihren Ausgang von wahrscheinlichen, weniger wahrscheinlichen und unwahrscheinlichen Tragwiderständen, die sich auf die maßgebenden Materialkennwerte und die jeweiligen Bauzustände der Tragwerke beziehen.

Hinsichtlich der Höhe des Absperrbauwerkes und des Gesamtstauraumes werden die Talsperren in zwei Größenklassen unterteilt. Deren Gefährdungspotenziale aufgrund statischer und dynamischer Beanspruchungen erklären sich aus dem hydrostatischen Druck und dem Auftrieb, aus den Durch- und Unterströmungen sowie aus dem Risswasserdruck, ferner aus Erdbebenlasten und sonstigen Schwingungen. Hinzu treten Wärmespannungen, Kriech- und Schwindvorgänge.

Zur Untergliederung der auf diese Kräftegruppen und die Tragwiderstände sich beziehenden Bemessungsfälle dienen die 3 Bemessungssituationen BS I, BS II und BS III. Sie kennzeichnen die aus Kombinationen der Lastfälle und Tragwiderstandsbedingungen hervorgehenden ständigen, vorübergehenden und außergewöhnlichen Bemessungssituationen. Die Tragsicherheitsnachweise sind gegen Druck- und Schubversagen zu führen, ebenso für die Rissbildung.

Hierfür befasst sich der Autor eingehend mit den verschiedenen Bruchkriterien im Rahmen der Technischen Bruchmechanik und deren numerischer Erfassung. Für die zum Bruch führenden kritischen Belastungen sind Betrag und Frequenz zu ermitteln, unter denen der entstandene Bruch fortschreitet. Auch ist die geometrische Ausbildung eines aufgetretenen Risses von Interesse, wobei das Versagen an der Rissstelle durch konstante und impulsartige Belastungen als auch durch wiederholte Überbeanspruchungen eintreten kann. Unterschiedlich fallen die Rissflanken bei Spröd- und Verformungsbrüchen aus. Dasselbe gilt für die Energiedissipation. Aufgrund der fehlenden Plastizität zum Sprödbbruch neigender Baustoffe wie Beton und Bruchsteinmauerwerk fördert die gesamte Dehnungsenergie die Entstehung und das Fortschreiten der Rissfront.

Für diese Erscheinungsformen werden die umfangreichen Beziehungen zur Erklärung der variierenden Rissausprägungen, ihrer maßgebenden Parameter, der mehrdimensionalen Spannungs- und Verformungszustände, der Rissprogression und der Energieinhalte aufgestellt. Im Rahmen der numerischen Ermittlung der das Bruchverhalten bestimmenden Kennwerte und der Berechnung der eintretenden materialabhängigen Risspfade werden die ursprünglich sich auf Finite Elemente stützenden bruchmechanischen Rechenansätze auf Netzfremde Methoden umgestellt.

Für die Untersuchung eines im Kontinuum bzw. Beton- oder Mauerwerkskörpers eingefügten Risses wird die hierdurch entstandene Diskontinuität durch eine Nichtfortsetzung der maßgebenden Ansatzfunktion bzw. Wichtungsfunktion über die Rissflanken hinweg numerisch abgebildet. An den Rissflanken werden die Wichtungsfunktionen der Knoten abgebrochen. An der Risspitze zeigt die Wichtungs- und somit Ansatzfunktion eine Unstetigkeit.

Der hohe Wert der bisher in den vorausgegangenen Kapiteln bewältigten theoretischen Untersuchungen mit dem Elementfreien Galerkin-Verfahren (EFGM) und anschließend mit der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) offenbart sich in weiteren interessanten Modellierungen. Als erstes Beispiel werden im Kapitel 6.3 dynamische Druckvorgänge im Stauraum einer Talsperre untersucht, woraus sich eine Wellenfront mit auf den Sperrenkörper einwirkenden Druckkräften entwickelt. Dabei ist mit Rücksicht auf den Rechenaufwand nur ein Bruchteil des sich längs eines Tales ausdehnenden Stauvolumens einzubeziehen.

Die Abbildungen 6.37a - 6.37d geben interessanten Aufschluss über die Fortpflanzung einer Störung im Staukörper in Richtung des Sperrbauwerkes, die als dynamischer Vorgang mit der SPH-Methode berechnet worden ist. Ähnlich lässt sich im Erdbebenfall der dynamische Wasserdruck auf die Staumauer erfassen (Kapitel 6.4).

Dagegen werden die Auswirkungen auf den Mauerkörper als Festkörper mittels EFGM erfasst. An der Grenze zwischen Wasservolumen und Mauerkörper, d.h. zwischen Stauinhalt und Festkörper (Wasserseite des Mauerkörpers mit den Rissflanken) gehen die rechnerischen Untersuchungen von der SPH-Methode an der Interaktionszone von Fluid und Festkörper zu dem EFGM-Verfahren über.

Die zeitlichen Verläufe des dynamischen, durch Erdbeben ausgelösten Wasserdruckes unter Zugrundelegung von 4 unterschiedlichen Horizontalbeschleunigungen zwischen 0,5 und 10,0 m/s<sup>2</sup> sind zu verschiedenen Zeitpunkten den Abbildungen 6.40a - 6.40d zu entnehmen. Diese mit der SPH-Methode gewonnenen Resultate zeigen eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Ansätzen von Westergaard und Sharan (Abb. 6.47 bis 6.50). Für dieselben Horizontalbeschleunigungen veranschaulichen die Abbildungen 6.51a - 6.51d die entsprechenden Wellenhöhen, die den einzuhaltenden Freibord des Sperrbauwerkes vorgeben. Des weiteren sind die Kräfte, die Vertikal- und Schubspannungen sowie Verformungen im Talsperrenkörper als Folge der 4 angenommenen Erdbeben bzw. Horizontalbeschleunigungen unter Vorgabe der Festigkeitseigenschaften berechnet und dargestellt worden (Abb. 6.53 bis 6.55). Schließlich sind die Risspfade und deren maximalen Ausdehnungen innerhalb des Mauerkörpers von Interesse, die sich bei Überbeanspruchung in den Schwächezonen, besonders die Fugen bei in Mauerwerk errichteten Staumauern, einstellen (Abb. 6.56 und 6.57).

Weitere zahlreiche Anschauungsbeispiele für die universelle Anwendbarkeit der EFGM- und SPH-Methoden, letztere auch als Festkörpermodell, wurden vom Doktoranden aufgegriffen. Diese Darstellungen wurden im Kapitel 7 zusammen mit Kurzbeschreibungen aufgenommen, um den thematisch vorgegebenen Rahmen des 6. Kapitels nicht zu sprengen.

So ist es zunächst ein wassergefüllter Behälter aus elastischem Material, der nach freiem Fall starke Verformungen der Wasserfüllung und der Behälterwandungen in verschiedenen Zeitschritten erfährt (Abb. 7.1), ähnlich dem zuvor gezeigten wassergefüllten Behälter aus sprödem Werkstoff, der innerhalb eines zweiten Behälters nach freiem Fall zu Bruch geht und wodurch dann das Wasser sich in diesem ausbreitet (Abb. 6.31).

Weiter beeindrucken im Kapitel 7 freie Flüssigkeitsbewegungen, insbesondere mit freier

Oberfläche und komplexen Geometrien, die mit der SPH-Methode anschaulich abgebildet werden konnten und in den Abbildungen 7.2 bis 7.6 wiedergegeben sind. Hierbei handelt es sich beispielsweise um eine überschlagende Welle innerhalb eines Behälters, die durch einen plötzlich wie bei einem Dammbruch in Gang gesetzten Flüssigkeitskörper mit Ausbreiten, Auflaufen und Überschlagen ausgelöst worden ist (Abb. 7.2). Es folgen das Zusammenbrechen von Flüssigkeitssäulen (Abb. 7.3), überschlagende Wellen in einem Behälter (Abb. 7.4), ferner die Aufnahme eines in eine Flüssigkeit eintretenden Tropfens (Abb. 7.5), dann schließlich der Einschlag eines kleineren Flüssigkeitskörpers unter hoher Geschwindigkeit in ein größeres Flüssigkeitsvolumen (Abb. 7.6). Weitere Aufgabenstellungen dieser Art waren Bauwerksüber-, Um- oder Unterströmungen (Abb. 7.7), ferner Lagenveränderung unterschiedlich dichter Flüssigkeitskörper zu einer horizontalen Staffelung (Abb. 7.8) und die nach oben gerichtete Bewegung eines Tropfens geringerer Dichte an die Oberfläche eines schwereren Flüssigkeitsvolumens (Abb. 7.9).

Nicht minder interessant ist die SPH-Modellierung nichttrivialer Strömungsgebiete wie z.B. quer zu einer Kanalströmung angeordnete, zu umströmende Hindernisse (Abb. 7.10). Analog lassen sich wieder auf Basis des im 4. Kapitel dargelegten SPH-Modells als Festkörper durch die Kombination mit einer Flüssigkeitssimulation Schwimmkörper in bewegten Flüssigkeiten hinsichtlich deren Schwingungen, Auftriebskräfte und Gleichgewichtsverhalten verfolgen (Abb. 7.11).

Eine deutlich kennzeichnende Kombination beider netzfreier Verfahren EFGM und SPH bot sich bei der zu lösenden Aufgabe an, dass ein teilweise hohler Festkörper auf einem eingespannten Balken aufschlägt, sich bei dieser Kollision dreht und in einen darunter befindlichen Flüssigkeitsbehälter weiter fällt, in dem er dann aufschwimmt (Abb. 7.12). Das elastodynamische Verhalten des nachschwingenden "Sprungbrettes" hätte sich mit EFGM ebenfalls simulieren lassen.

Beispiele aus der Seildynamik in Form von Mehrkörperschwingern schließen sich an wie Impulsübertragung durch eine Pendelreihe (Abb. 7.14), ferner die Kollision eines fallenden Seiles (Abb. 7.13) oder eines schwingenden, dünnen Balkens mit einem Festkörper (Abb. 7.15), schließlich die Ausbreitung eines anfangs gestrafften Faserbündels (Abb. 7.16) und eine schwingende, an Seilen aufgehängte Brückenfahrbahn (Abb. 7.17).

Die im Anhang A aufgenommenen Einzelbeschreibungen befassen sich ausführlich mit der für die beiden Netzfreen Methoden EFGM und SPH entwickelten, sich in zwei Module aufteilenden Software. Diese zwei unabhängigen und ebenso miteinander gekoppelten Module des umfangreichen, gänzlich neu entwickelten Programmpaketes sind eigenständig; sie besitzen zusammen mit effektiven Algorithmen alle erforderlichen Routinen zur Erzeugung der gewünschten Modelle, zu eigentlichen Simulationen sowie zu visuellen und tabellarischen Wiedergaben.

Mit dem 8. Kapitel wird ein Ausblick auf weitere Verfeinerungen und Anwendungsbereiche der beiden vorgestellten netzfreien Verfahren und ihrer sehr vorteilhaften Kombination gegeben. So ist denkbar, Rissbegrenzungen innerhalb eines Festkörpers bzw. einer Staumauer zu definieren, die nicht zum Gefahrenmoment hinsichtlich der

Tragfähigkeit reichen, sondern vielmehr zu wirtschaftlichen Bauabmessungen oder Sanierungsvarianten Anlass geben. Universelle Analysen von Temperatur-, Wärme- und Rissverhalten sind ebenso möglich wie Prognosen für bedrohliche Hochwasserabläufe, Überschwemmungen und Flutwellen, je nach Topografie und Gewässernutzung.

Ebenso eröffnen sich ungeahnte Möglichkeiten für hydrodynamische und statische Untersuchungen mittels der kombinierten EFGM- und SPH-Methoden an z.B. Wasserturbinen mit ihren Komponenten (Gehäuse, Laufrad, Ein- und Ausläufe) und an Spiralgehäuse- und Rohrauflagerungen, ebenso an Stauanlagen und Talsperren unter Einwirkung schwingender Wassermassen. Durch Einbeziehung der Methoden EFGM und SPH in das Netzwerk einer auf Prognosen und Szenarien aufbauenden Talsperrenüberwachung kann eine weitgehende Automatisierung der Messwerterfassung und der Datenverarbeitung erreicht werden.

## Zusammenfassende Betrachtung

Herr Dipl.-Ing. Frank Zöllner fertigte eine außergewöhnliche Dissertation, die sich sowohl durch theoretische Tiefe als auch durch glänzende pädagogische Aufarbeitung der schwierigen Sachverhalte auszeichnet. Nachdem in jüngster Zeit aufgrund der vielfach eingerichteten Zentren von Großrechenanlagen sich netzfreie Methoden vor allem in der Physik innerhalb der letzten zwei bis drei Jahrzehnte durchgesetzt haben und in einer forschungsintensiven Weiterentwicklung begriffen sind, war es nahe liegend, diese auch dem Wasserbau, der Hydraulik und den Wasserbauwerken zu erschließen. So eignen sich zur Berechnung komplexer dynamischer Wasserbewegungen und Strömungsabläufe die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) und zur statischen Untersuchung von Festkörpern die Elementfreie Galerkin-Methode (EFGM). Beide sind netzfreie Methoden und lassen sich für eine ganze Reihe von Problemstellungen miteinander kombinieren.

Der Verfasser stellt diesen beiden Verfahren zunächst die einschlägigen Tragsicherheitsnachweise für Stauanlagen, die Grundzüge der Technischen Bruchmechanik und die Methode der netzgebundenen finiten Elemente voran. Mit weit greifenden mathematischen, physikalischen und festigkeitstheoretischen, geradezu akribisch durchgeführten Untersuchungsschritten werden die zwei netzfreien Methoden in deren Universalität ausgearbeitet. Die unmittelbare Anwendung wird anhand von rund 20 überaus unterschiedlichen Aufgabenfeldern mit kennzeichnenden Beispielen unter Beweis gestellt.

Die praxisnahe Handhabung der neuartigen Instrumentarien wird durch eine ausführliche Darlegung der modulartig aufgebauten, durch den Doktoranden selbständig erarbeiteten Software in Verbindung mit anschaulichen, die Rechenabläufe dokumentierenden Flussdiagrammen erleichtert.

Stuttgart, im August 2009

Jürgen Giesecke

# Danksagung

Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. em. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Jürgen Giesecke. Seine von Anfang an zu spürende Begeisterung für die Thematik der netzfreien Methoden hat mich stets angespornt. Immer hatte ich die Gewissheit seiner vollen Unterstützung. Gerade in den Phasen, in denen mir die beruflichen Umstände nur wenig Zeit ließen, empfand ich diesen Rückhalt als äußerst wichtig. Neben der intensiven und geduldigen Betreuung meiner Dissertation möchte ich mich in gleichem Maße für die Jahre am Institut bedanken, die mir immer in bester Erinnerung bleiben werden.

Herzlich bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Ordinarius für Baustatik und Baudynamik, der sich freundlicherweise bereit erklärte, die Mitberichterschaft zu übernehmen.

Herr PD Dr.-Ing. Walter Marx begleitete ebenfalls als Mitberichter das Entstehen der Arbeit. Seiner Kompetenz auf dem Gebiet numerischer Methoden habe ich viele Anregungen zu verdanken. Auch bei ihm möchte ich mich für die erfahrungsreiche und wichtige Zeit zuvor am Institut bedanken. An der am Lehrstuhl für Wasserbau und Wassermengenwirtschaft zu spürenden freundlichen Atmosphäre hat er wesentlichen Anteil.

Frau Prof. Dr.-Ing. Silke Wieprecht räumte mir nach ihrer Übernahme der Lehrstuhlleitung trotz hohem Arbeitsaufkommen so viel Zeit wie möglich für die Bearbeitung der Dissertation ein. Dafür möchte mich sehr bedanken.

Besonders danken möchte ich auch den Herren Prof. Dr.-Ing. Klaus Jorde und Dr.-Ing. Matthias Schneider. Sie waren es, die sich nach Abschluss des Studiums für meinen Verbleib am Institut trotz wie immer knapper Drittmittel einsetzten. Ohne sie wäre die vorliegende Arbeit nicht entstanden. Auch kam mir die Erfahrung aus der folgenden Programmierarbeit für das Softwarepaket *CASiMiR* sehr bei der Erstellung der umfangreichen Programme im Zuge der Dissertation zugute.

Meinen Eltern, besonders meiner Mutter, möchte ich hier zutiefst danken. Niemals hätte sich alles so entwickelt ohne ihre Unterstützung, gerade auch in schwierigeren Zeiten.

Nicht zuletzt danke ich meiner Partnerin Suvdgerel Tsedev, der ich zumutete, dass ich die wenigen gemeinsamen Wochen im Jahr in Deutschland zu nicht unerheblichem Teil am Schreibtisch verbrachte.

Stuttgart, im August 2009

Frank Zöllner



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Danksagung</b>	<b>ix</b>
<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>	<b>xxiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>15</b>
<b>2 Grundprinzipien numerischer Methoden der Elastizitätstheorie</b>	<b>21</b>
2.1 Direkte Steifigkeitsmethode . . . . .	21
2.2 Galerkin-Formulierung . . . . .	24
2.3 Implementierung der Randbedingungen . . . . .	28
2.3.1 Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	29
2.3.2 Penalty Methode . . . . .	31
2.4 Numerische Integration, Gauß-Quadratur . . . . .	32
2.5 Methode der Finiten Elemente FEM . . . . .	34
2.5.1 Grundlegende Formulierung . . . . .	35
2.5.2 Diskretisierung . . . . .	37
2.5.3 Ansatzfunktionen . . . . .	38
2.5.4 Zweidimensionale Elemente . . . . .	42
2.5.5 Interpolation der Stützstellen-Parameter . . . . .	46
2.5.6 Numerischer Ablauf einer FEM-Berechnung . . . . .	48
2.6 Methode der Finiten Volumen FVM . . . . .	50
2.7 Voronoi-Diagramm . . . . .	55
2.8 Generation des Element- oder Gitternetzes . . . . .	57
<b>3 Elementfreie Galerkin Methode EFGM</b>	<b>59</b>
3.1 Ansatzfunktionen . . . . .	60
3.1.1 Moving Least Squares Interpolation . . . . .	60
3.1.2 Wichtungsfunktionen . . . . .	64
3.1.3 Splines . . . . .	67
3.2 Randbedingungen . . . . .	70
3.2.1 Essentielle Ränder . . . . .	70
3.2.2 Natürliche Ränder . . . . .	70
3.3 Aufstellen der diskreten Gleichungen . . . . .	70



3.4	Elastodynamik . . . . .	72
	Zeitintegration . . . . .	73
3.5	Quadratur . . . . .	74
3.6	Validierung . . . . .	76
3.7	Numerischer Ablauf einer EFGM-Berechnung . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics SPH</b>	<b>85</b>
4.1	Wichtungsfunktionen . . . . .	86
	4.1.1 Kernfunktionen mit Splines . . . . .	88
	4.1.2 Anpassung des Wirkungsradius . . . . .	90
4.2	Zustandsgleichung, Künstliche Kompressibilität . . . . .	91
4.3	Körperkräfte . . . . .	91
4.4	Viskosität . . . . .	92
4.5	Künstliche Viskosität . . . . .	92
4.6	Geschwindigkeits-Korrektur . . . . .	93
4.7	Modellränder . . . . .	94
	4.7.1 Federkräfte . . . . .	95
	4.7.2 Partikelarretierung . . . . .	95
	4.7.3 Virtuelle Partikel . . . . .	96
	Virtuelle Randlinie . . . . .	98
	4.7.4 Randnahe Partikel . . . . .	98
4.8	Örtliche Parameter . . . . .	99
4.9	Zeitintegration . . . . .	101
	4.9.1 Zeitschrittweite . . . . .	103
	4.9.2 Startbedingungen . . . . .	104
	Dichte zum Simulationsstart . . . . .	104
	Dichteste Kugelpackung . . . . .	105
4.10	Formulierung der Erhaltungsgleichungen . . . . .	108
4.11	Validierung . . . . .	109
	Fehlerabschätzung . . . . .	111
4.12	Weitere Eigenschaften und Anwendungen . . . . .	112
	4.12.1 Turbulenzen . . . . .	112
	4.12.2 Wärme . . . . .	113
	4.12.3 Oberflächenspannung . . . . .	115
	4.12.4 Bestimmung des Verlaufes der freien Oberfläche . . . . .	116
	4.12.5 Variierende Kernfunktionen . . . . .	117
	4.12.6 Festkörpermodellierungen . . . . .	117
	Festkörperansatz durch Gegenkräfte . . . . .	119
4.13	Numerischer Ablauf einer SPH-Berechnung . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Kombination der netzfreien Methoden EFGM und SPH</b>	<b>123</b>
5.1	Bedingungen an der Schnittstelle der Modelle . . . . .	123
	5.1.1 Actio = Reactio . . . . .	123
	5.1.2 Penetrationsunterdrückung . . . . .	124

5.1.3	Reibung . . . . .	124
5.2	Implementierung der Schnittstelle der Modelle . . . . .	125
5.2.1	Hybride Partikel . . . . .	125
5.2.2	Hybridpartikel des EFGM-Modells . . . . .	126
5.2.3	Hybridpartikel des SPH-Modells . . . . .	126
5.2.4	Numerischer Ablauf einer kombinierten Simulation . . . . .	127
	Vereinfachter Ansatz der Kombination . . . . .	130

## 6 Modellierungen für Talsperren 131

6.1	Technische Richtlinie DIN 19700 . . . . .	131
6.1.1	Nachweisverfahren . . . . .	131
6.1.2	Tragwiderstände . . . . .	132
6.1.3	Lastannahmen . . . . .	133
6.1.4	Tragsicherheitsnachweise . . . . .	135
6.1.5	Hauptdruckspannungen . . . . .	136
6.1.6	Schubspannungen . . . . .	136
6.1.7	Ausmittigkeit der Resultierenden . . . . .	136
6.1.8	Rissbildung . . . . .	138
6.2	Implementierung bruchmechanischer Konzepte . . . . .	139
6.2.1	Risscharakteristik . . . . .	139
6.2.2	Rissbeanspruchungsparameter . . . . .	140
6.2.3	Lokale Rissbeanspruchungsparameter . . . . .	141
	Spannungsintensitätsfaktoren . . . . .	141
6.2.4	Globale Rissbeanspruchungsparameter . . . . .	145
	Energiefreisetzungsrate, virtuelle Rissverlängerung . . . . .	146
	J-Integral . . . . .	149
6.2.5	Numerische Ermittlung der Rissbeanspruchungsparameter . . . . .	152
	Rissöffnungswinkel-Verfahren . . . . .	152
6.2.6	Energieansätze . . . . .	153
	Energiefreisetzungsrate, virtuelle Rissverlängerung . . . . .	153
	J-Integral . . . . .	154
	Interaktionsintegral . . . . .	159
6.2.7	Rissgeschwindigkeiten, Keilwirkung . . . . .	161
6.2.8	Rissverästelung . . . . .	164
6.2.9	Bruchinitiierung . . . . .	164
	Mohr-Hypothese . . . . .	164
	Hauptspannungs-Hypothese . . . . .	165
	Kombinierende Verfahren . . . . .	165
6.2.10	Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen Berechnung . . . . .	165
6.2.11	Bruchmechanische FEM-Implementierung . . . . .	167
	Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen FEM-Berechnung . . . . .	167
6.2.12	Bruchmechanische EFGM-Implementierung . . . . .	169
	Sichtbarkeitskriterium . . . . .	169
	Diffraction . . . . .	171

Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen EFGM-Berechnung	174
6.2.13 Bruchmechanische SPH-Implementierung . . . . .	176
Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen SPH-Berechnung . .	179
6.3 Bildung des numerischen Modells . . . . .	180
6.4 Dynamischer Wasserdruck im Erdbebenfall . . . . .	187
6.5 Vergleich mit analytischen Lösungen . . . . .	195
6.6 Wellenbildung . . . . .	201
6.7 Verformungen und Kräfte im Talsperrenkörper . . . . .	202
6.8 Risspfade . . . . .	205
<b>7 Weitere Anwendungen</b>	<b>209</b>
7.1 Freie Flüssigkeitsbewegungen . . . . .	210
7.2 Bauwerksüberströmungen . . . . .	214
7.3 Dichteströmungen . . . . .	215
7.4 Umströmungen . . . . .	216
7.5 Schwimmkörper . . . . .	217
7.6 Mehrkörperdynamik . . . . .	218
<b>8 Abschließende Betrachtung und Ausblick</b>	<b>223</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>228</b>
<b>A Anhang</b>	<b>237</b>
A.1 Der entwickelte Programmcode . . . . .	237
A.1.1 SPH-Modul . . . . .	237
Interne Struktur des SPH-Modells . . . . .	238
A.1.2 EFGM-Modul . . . . .	239
Interne Struktur des EFGM-Modells . . . . .	240
A.1.3 Interaktion der Module . . . . .	240
A.2 Suchalgorithmen . . . . .	241
A.3 Visualisierung . . . . .	242

# Abbildungsverzeichnis

1	FEM mesh and single finite element, shape functions . . . . .	2
2	FEM linear shape functions of three nodes . . . . .	2
3	Weighting functions of three nodes . . . . .	3
4	Spline weighting function and achieved approximation . . . . .	5
5	Counterforce $\mathbf{F}_{ij}$ on particle $j$ . . . . .	7
6	Combination of both meshfree models . . . . .	8
7	Crack modes <i>I-III</i> . . . . .	8
8	Path of crack tip surrounding J-integral . . . . .	9
9	Diffraction round the crack tip . . . . .	10
10	Shape of modeled dam . . . . .	10
11	Example of time dependent pressure curve at different depths . . . . .	11
12	Depth dependent transient pressure distributions . . . . .	12
13	Example of crack path . . . . .	13
14	Falling half liquid filled container . . . . .	13
2.1	Feder . . . . .	22
2.2	Fachwerkträger . . . . .	22
2.3	Balken . . . . .	25
2.4	Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	29
2.5	Penalty-Element . . . . .	31
2.6	4-Punkt-Gaußquadratur für 1D und 2D . . . . .	33
2.7	1-Punkt-Gaußquadratur . . . . .	33
2.8	Virtuelle Verschiebung . . . . .	36
2.9	Diskretisierung durch Knoten . . . . .	37
2.10	FEM Verschiebungs-Diskretisierung . . . . .	38
2.11	Lineare Ansatzfunktion . . . . .	38
2.12	Einflussbereich eines Knotens . . . . .	39
2.13	Ansatzfunktionen $N_{v_1}^e$ , $N_{\theta_1}^e$ und $N_{v_2}^e$ , $N_{\theta_2}^e$ mit $\mathcal{C}_1$ -Stetigkeit . . . . .	42
2.14	Drei-Knoten-Element mit natürlichen Koordinaten . . . . .	42
2.15	Isoparametrisches Vierknoten-Element . . . . .	44
2.16	Saisonal bedingter Temperaturgradient . . . . .	47
2.17	Programmablauf FEM . . . . .	49
2.18	Gleichgewicht am Fluidelement . . . . .	50
2.19	Knoten und Gitterzellen . . . . .	53
2.20	Beispielrechnung mit der Methode der Finiten Volumen . . . . .	53
2.21	Transienter Wärmetransport mit FVM . . . . .	54
2.22	Beispielsimulation FVM . . . . .	54

2.23	Voronoidiagramm einer komplexen Geometrie . . . . .	55
2.24	Einfache Erzeugung eines Voronoi-Diagramms . . . . .	56
2.25	Voronoi- und Delaunaydiagramm . . . . .	57
2.26	Finite-Elemente-Netz des Modells einer kleineren Talsperre . . . . .	58
3.1	EFGM-Modell, Knoten und Spannungsverlauf . . . . .	60
3.2	Oberflächenbildung durch MLS . . . . .	61
3.3	Knoten-Einflussradius . . . . .	65
3.4	Konstante Wichtungsfunktion und zugehörige Approximation . . . . .	65
3.5	Bereichsweise konstant und zugehörige Approximation . . . . .	66
3.6	Gaußfunktion, schematisch . . . . .	67
3.7	Beispielhafte Darstellung eines Spline . . . . .	68
3.8	Kubischer Spline und zugehörige Approximation . . . . .	68
3.9	Auswirkungen unterschiedlicher Wirkungsradien . . . . .	69
3.10	Schwingender einseitig eingespannter Balken . . . . .	73
3.11	Gauß-Quadraturzellen . . . . .	74
3.12	Gauß-Quadratur . . . . .	75
3.13	Timoshenko-Balken . . . . .	76
3.14	Horizontal- und Vertikalverschiebungen . . . . .	77
3.15	Verlauf der Horizontal-, Vertikal- und Schubspannungen . . . . .	77
3.16	Timoshenko-Balken, zugrunde liegendes EFGM-Modell . . . . .	78
3.17	EFG-Modellierung: Horizontalspannungen . . . . .	78
3.18	Vergleich Schubspannungen . . . . .	78
3.19	Horizontalspannungen . . . . .	79
3.20	Schubspannungen . . . . .	80
3.21	Horizontalverschiebung . . . . .	81
3.22	Programmablauf einer EFGM-Simulation . . . . .	83
4.1	SPH-Simulation eines Impakt-Vorgangs . . . . .	86
4.2	Dirac-Delta-Funktion . . . . .	86
4.3	Beispiel einer Kernfunktion . . . . .	87
4.4	Wichtungsfunktion und partielle Ableitungen . . . . .	89
4.5	Überlappende Einflussbereiche . . . . .	90
4.6	Modellränder . . . . .	95
4.7	Randpartikel Typ <i>I</i> und Typ <i>II</i> . . . . .	97
4.8	Repulsive Kräfte der Randpartikel . . . . .	97
4.9	Ansatz mit speziellem Randlinien-Mechanismus . . . . .	98
4.10	Randnahe Partikel . . . . .	99
4.11	Beeinflussende Knotenbereiche . . . . .	100
4.12	Zeitintegration nach Leap-Frog-Schema . . . . .	101
4.13	Dichteverteilung im Ausgangszustand . . . . .	105
4.14	Dichteste Kugelpackung . . . . .	105
4.15	Behältermodell . . . . .	106
4.16	Zeitliche Entwicklung des Druckes ohne tiefenabhängiger Initialdichte . .	106

4.17	Zeitliche Entwicklung des Druckes mit tiefenabhängiger Initialdichte . . .	107
4.18	Zeitliche Entwicklung des Druckes am Behälterrand . . . . .	107
4.19	Ausbreitung eines Tropfens . . . . .	109
4.20	Dammbruch . . . . .	110
4.21	Druckausgleich in kommunizierenden Röhren . . . . .	110
4.22	Oberflächenspannung . . . . .	115
4.23	SPH-Festkörpermodell . . . . .	119
4.24	Rückstellkraft . . . . .	120
4.25	Programmablauf einer SPH-Simulation . . . . .	121
5.1	Hybride Partikel als Schnittmenge beider Teilmodelle . . . . .	125
5.2	Zyklische Iteration über beide Teilmodelle . . . . .	127
5.3	Iteration über SPH-Teilmodell . . . . .	128
5.4	Iteration über EFGM-Teilmodell . . . . .	129
5.5	Flüssigkeitsdruck-Integration über Gaußpunkte . . . . .	130
6.1	Beispiel maßgeblicher Schnitte in Talsperrenkörper und Sohlfuge . . . . .	135
6.2	Einheitsflächen einer Untersuchungsebene . . . . .	137
6.3	Spannungsverläufe bei einachsigem Zugversuch . . . . .	140
6.4	Rissöffnungsarten entsprechend den Rissmodi <i>I-III</i> . . . . .	140
6.5	Spannungssingularität an der Rissspitze . . . . .	141
6.6	Beispiele tabellierter $K_I$ -Spannungsintensitätsfaktoren . . . . .	142
6.7	Rissfortschrittswinkel . . . . .	144
6.8	Rissausbreitung gemischter Modus . . . . .	145
6.9	Virtueller Rissfortschritt . . . . .	146
6.10	Rissfortschritt . . . . .	147
6.11	Fixierte vertikale Verformung einer Probe mit Riss . . . . .	148
6.12	Rissfortschritt durch konstante Last . . . . .	149
6.13	Pfad des J-Integrals . . . . .	150
6.14	Rissspitzenöffnung . . . . .	152
6.15	Stützpunkt-Positionen an den Rissflanken . . . . .	153
6.16	Detail J-Integralpfad . . . . .	155
6.17	Numerisch günstige J-Integralpfade . . . . .	156
6.18	J-Integralpfade ohne intern umschlossene Rissspitze . . . . .	157
6.19	Rissgeschwindigkeit . . . . .	163
6.20	Toricelli-Ausflussformel . . . . .	163
6.21	Programmablauf einer Rissberechnung . . . . .	166
6.22	Risspitzenelement . . . . .	167
6.23	Programmablauf einer FEM-Bruchsimulation . . . . .	168
6.24	Sichtbarkeitskriterium . . . . .	170
6.25	Zusätzliche Knoten in Kreisanordnung um die Rissspitze . . . . .	170
6.26	Diffraction . . . . .	171
6.27	Nur Sichtbarkeitskriterium . . . . .	173
6.28	Sichtbarkeitskriterium mit Diffraction . . . . .	173

6.29	Beispiel eines Hauptspannungs-Verlaufes in konkaven Strukturen . . . . .	174
6.30	Programmablauf einer EFGM-Bruchsimulation . . . . .	175
6.31	Flüssigkeitsgefüllter spröder Behälter . . . . .	178
6.32	Programmablauf einer bruchmechanischen SPH-Simulation . . . . .	179
6.33	Bedingungen an den Modellrändern . . . . .	181
6.34	Hydrodynamischer Druck . . . . .	182
6.35	Initialbedingungen . . . . .	183
6.36	Dynamische Drücke im Reservoir ohne Horizontalbeschleunigung . . . . .	183
6.37	Tiefengestaffelte Drücke nach 0,040 sec und 0,121 sec . . . . .	184
6.37	Tiefengestaffelte Drücke nach 0,202 sec und 0,364 sec . . . . .	185
6.38	Dynamische Drücke bei Partikelabstand von 0,2 m . . . . .	186
6.38	Dynamische Drücke bei Partikelabstand von 0,3 m . . . . .	187
6.39	Schwingungsvorgang Erdbeben . . . . .	188
6.40	Druckverlauf bei $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$ und $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	189
6.40	Druckverlauf bei $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$ und $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	190
6.41	Druckverlauf für $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$ . . . . .	191
6.42	Druckverlauf für $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	192
6.43	Druckverlauf für $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	193
6.44	Druckverlauf für $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	194
6.45	Parameter der Westergaard-Formulierung . . . . .	195
6.46	Dynamischer Wasserdruck nach Westergaard . . . . .	196
6.47	Vergleich analytische Lösung und SPH für $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$ . . . . .	197
6.48	Vergleich analytische Lösung und SPH für $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	198
6.49	Vergleich analytische Lösung und SPH für $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	199
6.50	Vergleich analytische Lösung und SPH für $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$ . . . . .	200
6.51	Wellenausbildung . . . . .	201
6.52	Simulationsmodell . . . . .	202
6.53	Verschiebungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen . . . . .	203
6.54	Vertikalspannungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen . . . . .	204
6.55	Schubspannungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen . . . . .	205
6.56	Risspfad . . . . .	206
6.57	Zum Stillstand kommender Riss . . . . .	207
7.1	Flüssigkeitsgefüllter elastischer Behälter . . . . .	209
7.2	Überschlagende Welle in Behälter . . . . .	210
7.3	Zusammenbrechende Flüssigkeitssäule . . . . .	211
7.4	Überschlagende Welle in Behälter . . . . .	212
7.5	In Flüssigkeit eintretender Tropfen . . . . .	213
7.6	Kollision mit sehr hoher Geschwindigkeit . . . . .	214
7.7	Über- und unterströmtes Wehr . . . . .	215
7.8	Lageveränderung unterschiedlich dichter Flüssigkeiten . . . . .	216
7.9	Dichteströmung . . . . .	216
7.10	Umströmung stationärer Hindernisse . . . . .	217
7.11	Schwimmende Körper . . . . .	217

7.12	Kombination einer Festkörper- und Fluidsimulation . . . . .	218
7.13	Im Fall kollidierendes Seil . . . . .	219
7.14	Newton-Kugelstosspendel . . . . .	219
7.15	Dünner Balken mit Kollision . . . . .	219
7.16	Faserbündel unter Schwerkraft . . . . .	220
7.17	Schwingende Seilbrücke . . . . .	221
A.1	Benutzeroberfläche des SPH-Moduls . . . . .	238
A.2	Benutzeroberfläche des EFGM-Moduls . . . . .	239
A.3	Nachbarpartikel-Suchalgorithmen . . . . .	241
A.4	Verkettete Liste . . . . .	242
A.5	Marching Squares . . . . .	243
A.6	Beispiele von Marching-Squares-Farbflächen . . . . .	244
A.7	Beispiel-Darstellung mit Marching Squares . . . . .	244





# Tabellenverzeichnis

2.1	Gewichte und Stützpunktabzissen für 4-Punkt-Gauß-Quadratur . . . . .	34
2.2	Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf FEM . . . . .	48
3.1	Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf EFGM . . . . .	82
4.1	SPH-Simulation nach Monaghan . . . . .	110
4.2	Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf SPH . . . . .	122
6.1	Bemessungsfälle nach DIN 19700 . . . . .	132
6.2	Lastfälle der Tragwiderstandsbedingung A . . . . .	134
6.3	Lastfälle der Tragwiderstandsbedingungen B und C . . . . .	135
6.4	Einzuhaltende Sicherheitsbeiwerte der Hauptdruckspannungen . . . . .	136
6.5	Einzuhaltende Sicherheitsbeiwerte der Schubspannungen . . . . .	136
6.6	Kritische Spannungsintensitätsfaktoren $K_{Ic}$ . . . . .	144
6.7	Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf Bruchmechanik . .	166
6.8	Erläuterungen und Verweise zum bruchmechanischen Ablauf FEM . . . .	169
6.9	Erläuterungen und Verweise zum bruchmechanischen Ablauf EFGM . . .	174
6.10	Erläuterungen und Verweise zum bruchmechanischen Ablauf SPH . . . .	180



# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzung      Erläuterung

EFGM	Elementfreie Galerkin Methode
FEM	Methode der Finiten Elemente
FVM	Methode der Finiten Volumen
MLS	Moving Least Squares
SPH	Smoothed Particles Hydrodynamics

## Symbol      Verwendung      Einheit

$a$	Distanz zur Rissspitze, Beschleunigung	[m] [m/s <sup>2</sup> ]
$a(\mathbf{x})$	Ortsabhängige Koeffizienten, Ortsabhängige Beschleunigung	[-] [m/s <sup>2</sup> ]
$\dot{a}$	Rissfortschrittsgeschwindigkeit	[m/s]
$c$	Schall- oder Wellengeschwindigkeit	[m/s]
$\mathbf{e}$	Einheitsvektor, auch $\vec{e}$	[-]
$\mathbf{f}$	Globaler Kraftvektor	[N]
$\mathbf{f}^e$	Lokaler- oder Elementkraftvektor, auch $\vec{f}^e$	[N]
$g$	Erdbeschleunigung	[m/s <sup>2</sup> ]
$h$	Wirkungsradius eines Knotens	[m]
$i,j,k$	Knotenindex	[-]
$l$	Länge	[m]
$\mathbf{n}$	Normalenvektor, auch $\vec{n}$	[-]
$p$	Druck	[N/m <sup>2</sup> ]
$p_0$	Ausgangsdruck	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{p}$	Basispolynom der Moving Least Squares	[-]
$r$	Radius	[m]
$r_{ij}$	Entfernung von Knoten $i$ zu Knoten $j$	[m]
$\tilde{r}$	Radius bezogen auf Knoten-Wirkungsradius	[m]
$\mathbf{r}$	Koordinatenvektor	[m]
$t$	Zeitpunkt, Schubspannung, Wassertiefe	[s] [N/m <sup>2</sup> ] [m]
$\bar{t}$	Kraftvektor auf natürlichem Rand	[N]
$s$	Strecke	[m]

<b>u</b>	Verschiebungsvektor	[m]
<b><math>\dot{\mathbf{u}}</math></b>	Erste zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors	[m/s]
<b><math>\ddot{\mathbf{u}}</math></b>	Zweite zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors	[m/s <sup>2</sup> ]
<i>u</i>	Knoten-Funktionswert,	[-]
	Verschiebung in erster Raumrichtung	[m]
<i>u<sup>h</sup></i>	Approximation des Funktionswertes <i>u</i>	[-]
<i>v</i>	Geschwindigkeit,	[m/s]
	Verschiebung in zweiter Raumrichtung	[m]
<b>v</b>	Geschwindigkeitsvektor	[m/s]
<i>w</i>	Dehnungsenergiedichte,	[J/m <sup>3</sup> ]
<b>w</b>	Knotengewicht,	[-]
	Gaußgewicht	[-]
<b>x</b>	Koordinatenvektor (Knoten)	[m]
<b>x'</b>	Koordinatenvektor (Nachbarknoten)	[m]
<i>x, x<sub>i</sub></i>	Kartesische Koordinate	[m]
<b>x<sub>c</sub></b>	Rissspitzenkoordinatenvektor	[m]
<b>A</b>	Moving Least Squares-Matrix	[-]
<i>A</i>	Flächeninhalt	[m <sup>2</sup> ]
<b>B</b>	Dehnungsmatrix	[-]
<b>C</b>	Dämpfungsmatrix,	[-]
	Koeffizientenmatrix	[-]
<i>C<sub>k</sub></i>	k-fache Stetigkeit der ersten Ableitung	[-]
<b>D</b>	Dehnsteifigkeit (Konstitutive Beziehungen)	[-]
<b>E</b>	E-Modul	[N/m <sup>2</sup> ]
<b>E'</b>	Modifiziertes E-Modul	[N/m <sup>2</sup> ]
<b>F</b>	Kraftvektor	[N]
<b>G</b>	Schubmodul,	[N/m <sup>2</sup> ]
	Energiefreisetzungsrate	[Nm/m <sup>2</sup> ]
<b>G<sub>c</sub></b>	Kritische Energiefreisetzungsrate	[Nm/m <sup>2</sup> ]
<i>H</i>	Gesamt-Wassertiefe	[m]
<i>I</i>	Flächenträgheitsmoment	[m <sup>4</sup> ]
<b>J</b>	Jacobi-Determinante,	[-]
	J-Integral	[-]
<i>J</i>	Potential,	[-]
	Zu minimierende Funktion	[-]
<b>K</b>	Spannungsintensitätsfaktor,	[MPa√m]
	Steifigkeitsmatrix	[-]
<b>K<sub>c</sub></b>	Kritischer Spannungsintensitätsfaktor	[MPa√m]
<b>K<sub>w</sub></b>	Kompressionsmodul	[N/m]
<i>L</i>	Länge	[m]
<b>M</b>	Massenmatrix	[-]
<b>N<sub>i</sub></b>	Knoten mit Index <i>i</i> ,	[-]
	FEM-Formfunktion des Knotens <i>i</i>	[-]

$\mathbf{N}^e$	Element-Ansatzfunktion	[-]
$\mathbf{N}_i^e$	Ansatzfunktion des Knotens $i$ des Elements $e$	[-]
$T$	Temperatur	[°C]
$U$	Dehnungsenergie	[J]
$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]
$W$	Von äußeren Kräften verrichtete Arbeit	[J]
$\mathbf{W}$	Matrix der Knotengewichte	[-]
$\mathbf{W}_{ij}$	Knotengewicht zwischen Knoten $i$ und Knoten $j$	[-]
$\alpha, \beta, \gamma$	Winkel,	[°]
	Faktor,	[-]
	Koordinatenrichtung	[-]
$\delta$	Dirac-Delta-Funktion,	[-]
	Risspitzenöffnung,	[m]
	Schwellenwert	[-]
$\delta a$	Virtuelle Risspitzenverschiebung	[m]
$\delta \mathbf{u}$	Test-Verschiebungsfunktion eines Knotens	[m]
$\eta$	Natürliche Elementkoordinate	[-]
$\varepsilon$	Dehnung, Scherdehnung	[-]
$\kappa$	Kolosov-Konstante,	[-]
	Schub-Korrekturkoeffizient	[-]
$\lambda$	Lagrange-Multiplikator	[-]
$\mu$	Querdehnzahl	[-]
$\nu$	Querdehnzahl,	[-]
	Dynamische Viskosität	[Ns/m <sup>2</sup> ]
$\phi$	Formfunktion	[-]
$\rho$	Werkstoffdichte	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{ii}, \sigma_{jj}, \sigma_{kk}$	Druck- oder Zugspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{ij}, \sigma_{jk}, \sigma_{ik}$	Schubspannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{\theta\theta}$	Radialspannung um Risspitze	[N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{\theta\phi}$	Tangentialspannung um Risspitze	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Schubspannung, Viskose Spannung	[N/m <sup>2</sup> ]
$\theta$	Rissfortschrittswinkel	[°]
$\xi$	Natürliche Elementkoordinate, Gaußkoordinate	[-]
$\Phi$	Formfunktion	[-]
$\Phi_{,i}$	Ableitung der Formfunktion in Richtung $i$	[-]
$\Gamma$	Rand eines Gebietes	[-]
$\Delta a$	Rissverlängerungsintervall	[m]
$\Delta t$	Zeitschritt	[s]
$\Omega$	Gebiet	[-]
$\partial\Omega$	Rand eines Gebietes	[-]
$\Pi$	Energetisches Potential	[J]



# Abstract

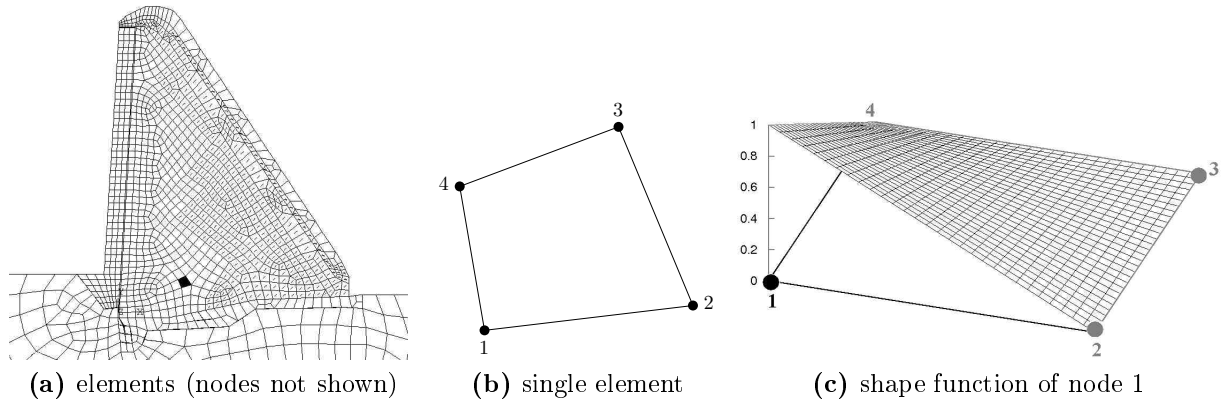
## Implementation and application of meshfree methods in fields of hydraulic structures and hydromechanics

Today's numerical methods of structural analysis and hydromechanics commonly applied in research and engineering such as the Finite Element Method (FEM) or the Finite Volume Method (FVM) are based on a mesh. Despite the availability of contemporary sophisticated mesh generators the creation of this basic grid frequently becomes the most time consuming phase of a numerical analysis. In cases of complex geometric shapes the output of automatic mesh generators is unsatisfactory necessitating a manual grid rectification, particularly in highly dynamic processes such as crack propagation in terms of a fast changing body shape where each single time step requires an entire mesh regeneration. Hence a proper automation of such simulation processes seems unfeasible in many cases of applying mesh based techniques. Furthermore it has always been a challenge to deal with variable discontinuities of material or state as transition from dry to wet arising prevalently in the field of hydraulic engineering. Also the phenomenon of particle separation occurring, for instance in splashy water, is currently difficult to reproduce in a usual numeric framework. In a sense the use of a mesh is contradictory to the nature of a fluid. So the application of conventional grid based numerical methods in this field without extraordinary expense is limited. This thesis suggests an answer to these deficiencies by the use of meshfree Methods. These methods are not based on a grid, subsequently they are not suffering from the mentioned shortcomings. Two of these gridless approaches are combined to cope with the interaction of solid bodies and fluid as it is frequently the subject of hydraulic engineering investigations, for example within a proof of dam stability. The Element Free Galerkin Method (EFGM) has been implemented for the analysis of displacement, stress and crack propagation of the barrage solid state body. Emphasis is placed on the fracture mechanical issues due to the superiority of this method compared with the Finite Element Method. Associated hydrodynamic incidents are simulated by a developed module comprising the method of Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Based on a two dimensional combination of both methods numerical simulations to perform stability surveys according to the German technical guideline DIN 19700 for instance concerning the transient water pressure and the crack propagation caused by earthquake impact have been carried out. Moreover, this thesis deals with a number of further simulations to demonstrate the wide variety of possibilities mesh free methods are offering in the field of hydraulic engineering and general problems of structural mechanics beyond the means of grid based approaches.



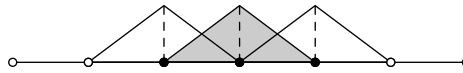
## Basic concepts of numerical methods in structural mechanics

The elementary idea of mesh based approaches like the method of finite elements in structural terms is to divide an entity into a number of subdomains of known mechanical properties, fig. 1b. The vertices of such finite element are defined by nodes which are the supporting points of the computation based on the principle of virtual work. Node-connecting boundary lines of these subdomains are forming the element mesh, fig. 1a. The virtual displacements of the supporting points are related to the stiffness of their neighbouring elements. As shape and material properties of the elements are known, the only missing link to obtain the element stiffness is the inner displacement distribution in dependence to the displacement of the surrounding nodes. This correlation is expressed by shape functions.



**Fig. 1:** FEM mesh and single finite element, shape functions

Shape functions define the distance-dependent influence of node properties. From the maximum at the location of the node the influence decreases to zero at the adjoining nodes. Fig. 1c displays a linear shape function of node 1 of a quadrilateral element. Summing up throughout the element of the shape function weighted displacement contributions of all vertex nodes yields the displacement at each location inside the element, fig. 2.



**Fig. 2:** FEM linear shape functions of three nodes

The strain within the element is obtained by differentiating the shape functions. So the required parameters for applying the virtual displacement method are entirely available now. In conjunction with the global boundary conditions an equation system can be assembled to obtain the unknown nodal displacements. Similarly, this applies to other field functions like temperature. The validity of such numeric analysis comes along with the quality of the mesh in terms of the element shape. Extremely skewed shapes may decrease accuracy or even lead to a numeric crash.

## Meshfree Methods

The omission of the need for in-advance point mapping was the stimulus of many enhancements leading to the meshfree methods. Meanwhile quite a number of these grid-less approaches have been introduced. Unlike mesh based algorithms, meshfree methods approximate field functions entirely in terms of the nodal point, fig. 3. No pairwise interrelationship has to be established in advance as the interpolating node-overlapping shape functions are generated during the analysis.

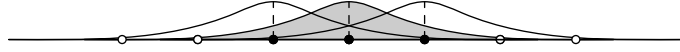


Fig. 3: Weighting functions of three nodes

In the year 1977, Lucy and Gingold [50] invented the method of smoothed particles hydrodynamics (SPH) which has been extended for applications of fluid mechanics and lately also of continuum solid mechanics. Fifteen years later, the first meshfree method employing moving least squares interpolation (MLS) for generating the shape functions have been proposed by Nayroles [62] by the diffuse element method (DEM). Sharing the MLS shape function generating concept, Belytschko et al. [10] invented in 1994 the element free Galerkin method (EFGM). Mesh free methods are not dividing but representing a domain by a set of nodal points. Nevertheless, apart from the way of creating shape functions, these methods share main procedures with the finite element method and other common numerical approaches. Following both meshfree methods employed by this thesis are introduced in brief form.

## The element free Galerkin method

The element free Galerkin method (EFGM) is approximating a field function by the use of the Galerkin weak form. As mentioned above, the process computes shape functions generated by the moving least squares interpolation to establish the connectivity of the supporting points. These nodes can be randomly scattered as long as each node lies in a sufficient number of neighboured node domains. Integral operations to assemble the discrete equations are carried out by usual techniques such as the Gaussian quadrature. As no mesh is required, the method is predestined to deal with discontinuities like a propagating crack. Therefore, the element free Galerkin approach was implemented to cover most of the solid mechanical surveys discussed in this thesis.

## Galerkin weak form

The Galerkin weak form, used by meshless methods as well as by contemporary FEM codes, represents the weak form of a differential equation by employing Hamilton's principle of energy and work. Therefore, a function is satisfied over a domain in an average sense rather than in each single point. For stationary conditions the Galerkin weak form

of virtual work is expressed by

$$-\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

where  $\delta$  is the virtual displacement,  $\mathbf{u}$  is the field function,  $\mathbf{b}$  are the body forces,  $\bar{\mathbf{t}}$  are boundary traction forces,  $\varepsilon$  is the symbol of strain and the tensions are represented by  $\sigma$ . Virtual work resulting from real acting forces vanishes under application of the virtual displacement  $\delta$ .

### Moving least squares interpolation

The interpolation by moving least squares (MLS) was introduced in 1981 by Lancaster and Salkauskas [44] and forms a surface based on scattered nodes. For this reason, it is utilized by the EFGM approach for generating the shape functions. Beside a nodal weighting function  $w$ , the main components are a polynomial basis  $\mathbf{p}$  and a number of unknown location-dependent coefficients  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . With these, the approximation of the field function  $\mathbf{u}$ , e.g. the distribution of displacement, can be written with  $n$  as the number of neighboured nodes like

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

The point of interest is located at the Cartesian coordinates  $\mathbf{x}$  while node locations are symbolized by  $\mathbf{x}_I$ . Minimizing

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \quad (3)$$

on condition  $\partial J(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0$  leads to a linear equation system  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$  with

$$\mathbf{A} = \sum_{I=1}^n w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \dots, w_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (4)$$

Combining (4) and (2) yields

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (5)$$

With the abbreviation of the shape function and it's derivation with respect to  $i$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \Phi_{,i} = \mathbf{p}_{,i}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i} \quad (6)$$

the approximation of the field function can be expressed by  $\mathbf{u}^h = \Phi \mathbf{u}$ . For example, the displacement  $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$  at a random location  $\mathbf{x}$  is calculated by

$$\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (7)$$

## Weighting functions

The weighting function as a basis for the generation of the shape function defines the nodal domain of influence. As the shape function inherits the continuity of the weighting function it shall be monotonically decreasing within a finite radius, everywhere positive and bear the partition of unity-property. Though the Gaussian curve fulfills all requirements but the limited domain, it is substituted by restrained spline functions to avoid numerical expense. An example of such spline based weighting function is given by

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{für } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{für } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad (8)$$

where  $w(r)$  is the weight in respect to the distance  $r$  of the coordinates of the node  $\mathbf{x}_I$  and the point of interest  $\mathbf{x}$ . Fig. 4 displays the spline function and the achieved field function approximation.

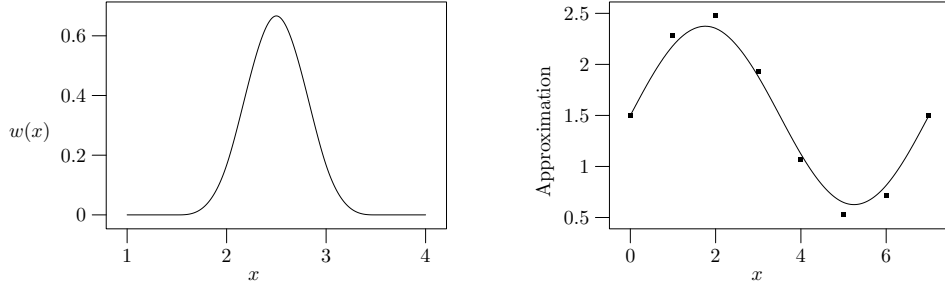


Fig. 4: Spline weighting function and achieved approximation

## Boundary conditions

The EFGM model coded within the frame of this thesis enforces the essential boundary conditions by the use of Lagrangian multipliers which can be regarded as a sort of counter force exacting the required displacements at the essential boundaries.

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(s)\lambda_i \quad \text{and} \quad \delta\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(s)\delta\lambda_i \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (9)$$

The Lagrangian multipliers are symbolized by  $\lambda$ ,  $n$  is the number of nodes located at the essential boundary  $\Gamma_u$  and  $s$  is the spacing between, the Lagrangian polynomial is written as  $N$ . The integration of the acting forces on the natural boundary is covered by a Gaussian quadrature carried out at Gaussian points within Gaussian cells. For these cells the element free Galerkin method sometimes is regarded as not really mesh free. But unlike in mesh based methods, this regular grid is nearly independent of the domain shape and it's sole purpose is locating the Gaussian quadrature points.

## Obtaining the discrete equations

The equilibrium of forces in a solid is expressed as  $\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = 0$  with the stress tensor  $\sigma$  and the vector of body forces  $\mathbf{b}$ . Together with the Lagrangian multipliers the Galerkin weak form is formed by

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \cdot \lambda \, d\Gamma = 0 \quad (10)$$

with the test-functions  $\delta \mathbf{v}$ . The domain is symbolized by  $\Omega$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  is the displacement of the essential boundary. From this, the discrete equations are obtained in matrix-form as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (11)$$

with

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J \, d\Omega \quad \mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b} \, d\Omega$$

where  $\mathbf{K}_{IJ}$  is the local stiffness matrix and  $\mathbf{f}$  the global vector of force, and

$$\mathbf{q}_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{N}_K \, d\Gamma$$

Solving the equations system yields the field function approximation  $\mathbf{u}$ , for example the displacement.

## Smoothed particles hydrodynamics

For assessments of hydromechanical issues of this thesis the method of smoothed particles hydrodynamics (SPH) has been programmed. SPH represents the fluid by a number of freely time-step-wise movable particles smoothed by a weighting function across a finite radius. Particles lying within domains of other particles are interacting e.g. in terms of acceleration due to a density gradient. As SPH is similar to a weak form method, it is more alike EFGM than it appears at first sight. Even SPH approaches employing the moving least squares interpolation have been developed [16]. The major difference of both approaches is the integral operation carried out within the SPH approach at the stage of function approximation while this is performed by EFGM at the stage of assembling the discrete equations. Physical quantities like the density of any particle or at a random location are obtained by summing up the related properties of neighboured particles. Therefore, SPH appears numerical stable without the requirement of a minimum number of neighbouring particles and is particularly appropriate for cases of large deformation, free surface flows and complex geometries. On the other hand, SPH shows an instability in tension and the difficulties in enforcing essential boundary conditions have yet not

really been overcome. As mentioned, the basic algorithm of SPH is to approximate a function  $F$  by summing up the related distance-weighted nodal parameters. With the Dirac delta function  $\delta$  this can be expressed by

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) F(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \quad \text{with} \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \infty & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (12)$$

## Kernel functions

The contributions of each particle to the field function approximation are weighted by a kernel function. Due to numerical difficulties dealing with the Dirac delta function or the Gaussian curve, commonly spline curves  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  similar to the weighting functions applied in the element free Galerkin method described above are employed as SPH kernel functions. The point of interest is located at  $\mathbf{x}$ , the particle coordinates are noted as  $\mathbf{x}'$  and the smoothing radius is symbolized by  $h$ . Now, using the approximation operator  $\langle \dots \rangle$  (12) is changed into

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) F(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \quad (13)$$

Unlike the EFGM procedure, no further transformation beside summing up the weighted particle properties is performed for generating shape functions. Therefore, the density as the central SPH parameter can be calculated with mass  $m_j$  of each neighbouring particle as

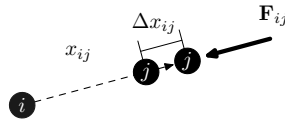
$$\rho_n = \sum_{j=1}^N m_j W_{nj} \quad (14)$$

With the approach described, the Navier-Stokes-equations are solved in a direct way as (15) shows for the conservation of momentum. The vector of velocity is noted by  $\mathbf{v}$ .

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}^\beta}{\partial \mathbf{x}^\beta} \approx \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} \quad (15)$$

## Solid state model by applying particle counterforces

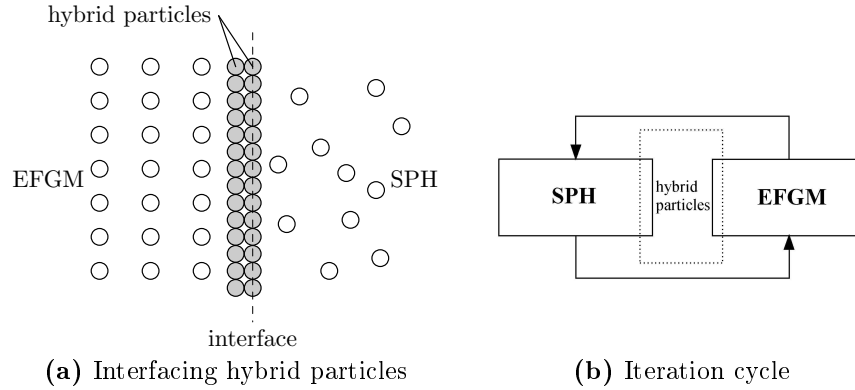
Reflecting the impact of short range forces only in fluids, common SPH algorithms take no tensile forces into account. Aside from the fluid simulations an implementation of continuum solid mechanics is suggested in terms of enabling tensile forces. Particles are constrained to increase their distance by a counterforce  $\mathbf{F}_{ij}$  in dependence to the exceedance  $\Delta x$  of the primary distance  $x_{ij}$  spanned by the neighbouring particles  $i$  and  $j$ , fig. 5.



**Fig. 5:** Counterforce  $\mathbf{F}_{ij}$  on particle  $j$

## Combining SPH and EFGM

Focused items of this thesis are caused by the interaction of storage lake fluid and the dam solid state body. Fluid has been modeled by SPH while the latter is surveyed with an EFGM model. The interface of both meshfree methods is put into effect by hybrid particles, fig 6a. These particles appearing in both methods at the same position. Actually each hybrid particle is represented by an EFGM node and the complementary SPH particle. On behalf of the SPH model represented as special treated boundary particles, in the EFGM model as natural boundary nodes adopting the forces of the related SPH particle by Gaussian quadrature.



**Fig. 6:** Combination of both meshfree models

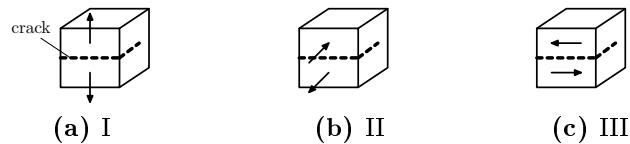
Transient simulations are processed in a cyclic way, fig. 6b. The force of each SPH boundary particle is applied to the related EFGM boundary node. Subsequently the solid body displacements are calculated in the EFGM part providing the new positions of the interfacing particles.

## Numerical dam surveys and further applications

Mainly examined are topics related to evidences required by the German guideline DIN 19700 in case of earthquake impacts. In addition to stress analysis, crack propagation and transient fluid pressure distributions are assessed.

### Numerical crack propagation analysis

The types of crack causing loads are categorized as Mode-I, -II, or -III, fig. 7.



**Fig. 7:** Crack modes *I-III*

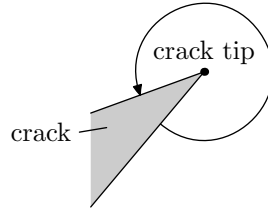
In dependence of the relevant load types  $I$  and  $II$  related stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  predicting the stress state at the crack tip.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} \quad (16)$$

The crack propagation continues as long as the material-dependent critical value  $K_{Ic}$  is exceeded. The relationship of  $K_{Ic}$  and  $K_I$ ,  $K_{II}$  is given by

$$K_{Ic} = \frac{4\sqrt{2}K_{II}^3 \left( K_I + 3\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2} \right)}{\left( K_I^2 + 12K_{II}^2 - K_I\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

Several ways to obtain the stress intensity factors are discussed. One of them is the J-Integral which represents the flow of energy to the crack tip, fig. 8. The amount of available energy is arbitratve for the crack grow.



**Fig. 8:** Path of crack tip surrounding J-integral

The integral is expressed by

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \quad \text{with} \quad J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (18)$$

where  $w$  is the density of strain energy,  $T$  is the force vector normal to the path. While  $\Gamma$  means the surface of the path and  $E'$  is the modified elastic modulus, the coordinates of the local system are expressed by  $x_1$  and  $x_2$ . The special values of both intensity factors are obtained by the interaction-integral which superposes real and virtual conditions of mode I or II.

### Wedge effects by penetrating water

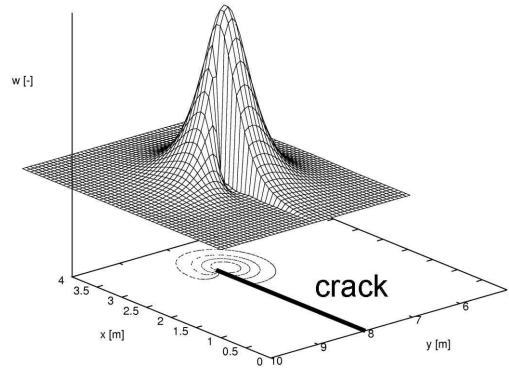
In conjunction with the time scale of earthquake oscillations of around 7 Hz [87], the crack propagation velocities are considered to estimate the influence of a possible wedge effect by water penetrating into the opening crack. The velocity of crack propagation in concrete is around  $v_{cr} = 200 - 500$  m/s [71], [24]. Lawn and Wilshaw [45] were assuming 40% of the velocity of primary waves for the mentioned type of material. Experiments by Du [27] and Belytschko [13] yielded crack propagation velocities around 15% of the Rayleigh-velocity. Estimated by the Torricelli-equation  $v = \sqrt{2gH}$ , the maximum flow velocity of penetrating water in dependence of the total depth  $H$  is much slower than the



one of the crack propagation. So a wedge effect is negligible and the crack characteristics will not change due to such appearance. Nevertheless, water later infiltrating into the damaged zone may bear full hydrostatic pressure within a certain area. Yet, an iterative crack process seems unlikely due to the usual pressure releasing drainage equipment of dams.

### Fracture mechanical implementation in EFGM

One of the advantages of meshfree methods is the easy implementation of discontinuities achieved by cutting the weighting functions at the crack edges. So pairs of nodes positioned opposite of a crack do not have influence on each other. To avoid stress singularities at the crack tip this approach is modified to a diffraction effect so nodes close to the crack tip exert certain influence round the corner, fig. 9.

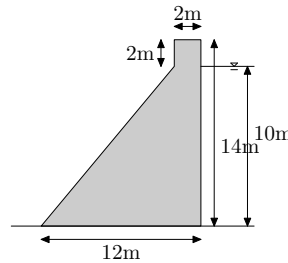


**Fig. 9:** Diffraction round the crack tip

With the obtained stress distribution the above mentioned J-integral can be summed up. In case the critical stress intensity factor is exceeded the crack extends by a certain length to be chosen and a new iteration starts.

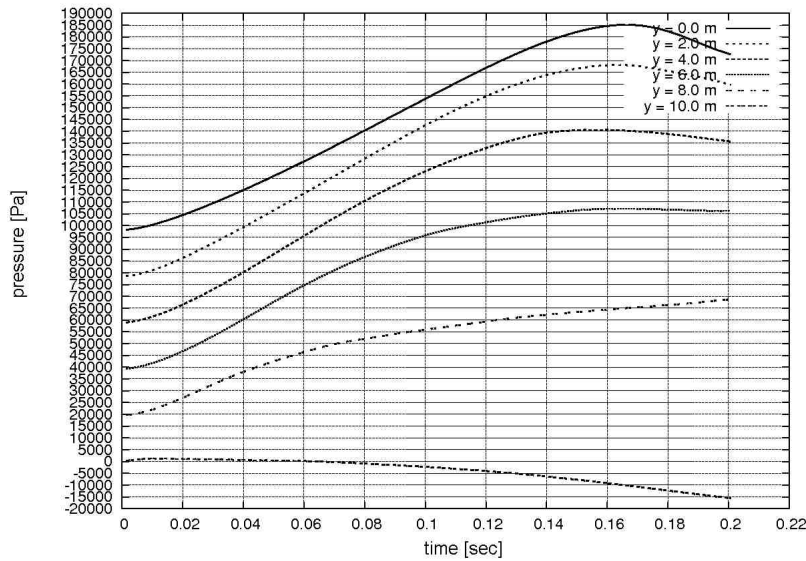
### Examples of surveys

Transient water pressure distributions during earthquake impacts at the upstream side of a gravity dam with a height of 14 m and a reservoir water depth of 10 m have been assessed by a developed SPH model, fig. 10.



**Fig. 10:** Shape of modeled dam

By the resulting distributions of acting pressure forces, crack propagations within the solid state dam body are analyzed by using the established EFGM code. Further simulations employing the proposed solid state SPH approach are carried out. After the minimum model dimensions concerning the reservoir have been determined according to the Sommerfeld condition, earthquake accelerations of different intensities have been applied on the liquid of the reservoir. Herewith, the point of time of maximum pressure was identified, fig. 11.



**Fig. 11:** Example of time dependent pressure curve at different depths

At this point of time, 0.17sec after the start of applying the horizontal acceleration, a more detailed examination of the depth dependent fluid pressures acting on the dam front side assumed as fixed was carried out. The results have been compared by the commonly used equation by Westergaard [85] and the analytical approach by Sharan [76]. High conformity with the mentioned references were found, fig. 12. Solely at very high accelerations between  $5.0 \text{ m/s}^2$  and  $10.0 \text{ m/s}^2$  the pressures of deep sections are slightly overestimated while shallow zones are somewhat underestimated. Close to the free fluid surface and the bottom of the reservoir negligible numerical artifacts of the pressure distribution are visible. Based on stress distributions calculated by the developed EFGM model with applying earthquake accelerations, the propagation of cracks was analyzed. Employing the above mentioned numerical implementations of fracture mechanical principles in an iterative manner, crack paths in conjunction with displacement and tension distribution as exemplarily displayed in fig. 13 have been obtained.

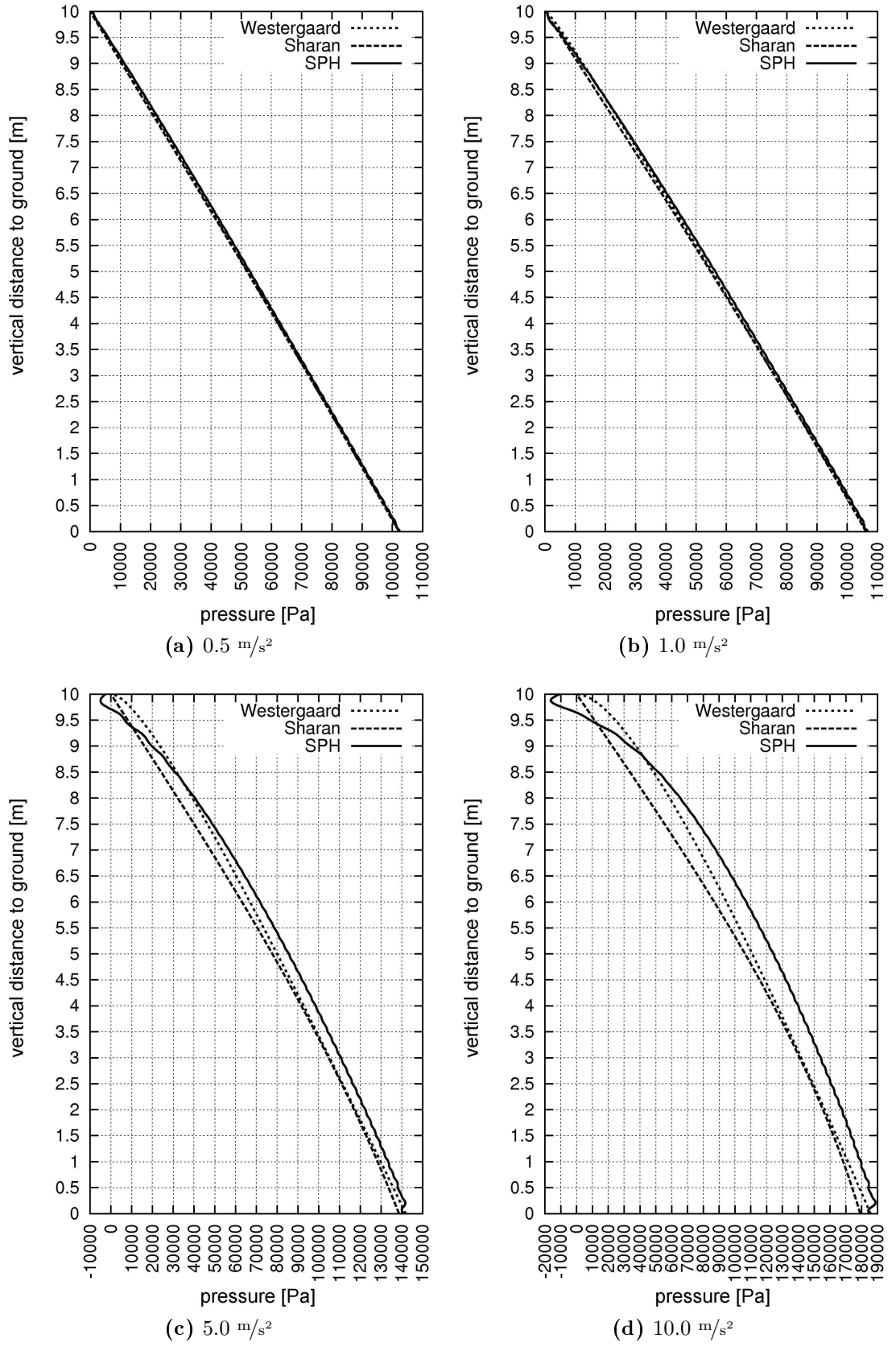


Fig. 12: Depth dependent transient pressure distributions

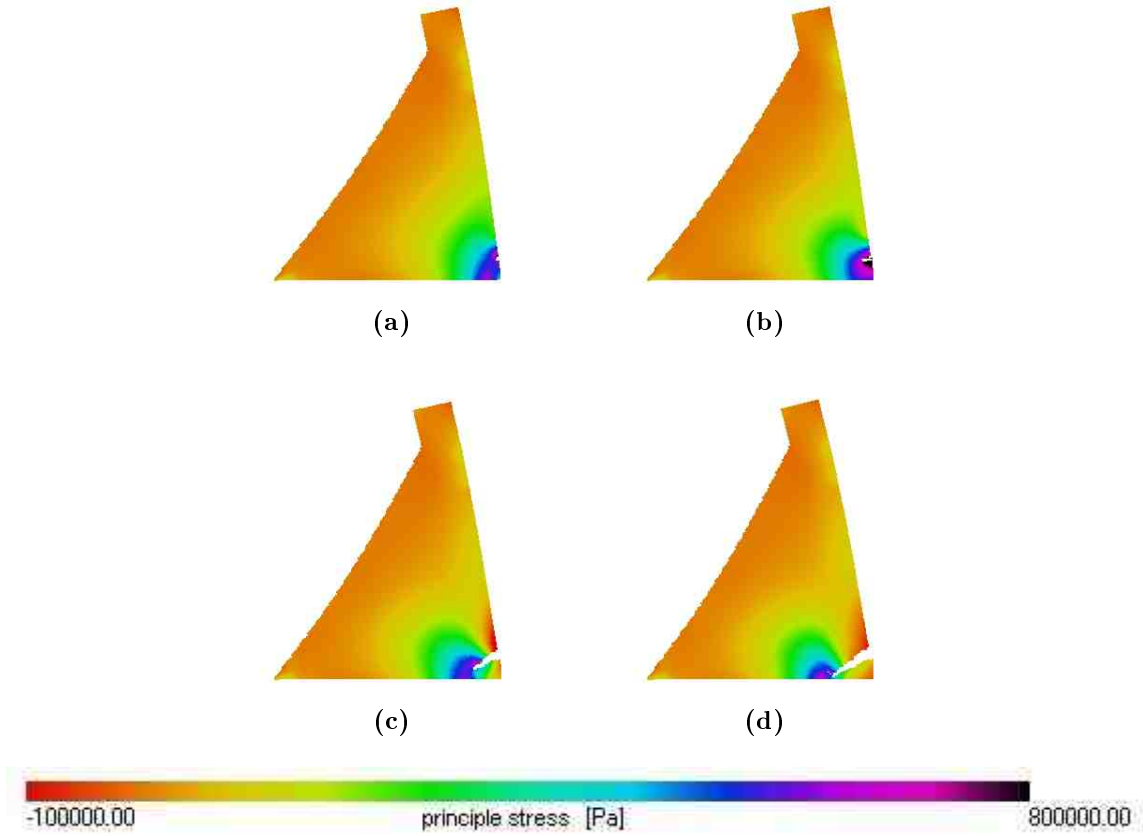


Fig. 13: Example of crack path

### Further applications

Beyond the main topics a number of further simulations have been carried out. In particular the suggested SPH approach for solid state modeling opens new perspectives. Herewith, heavy deformations are easy to be simulated as well as interactions of different materials like shown in fig. 14 with liquid in an elastic container. From splashing water, overturning surface waves or overtopping of weirs up to vibration analysis and density flow, the range of possible applications of meshfree methods seems nearly unlimited.

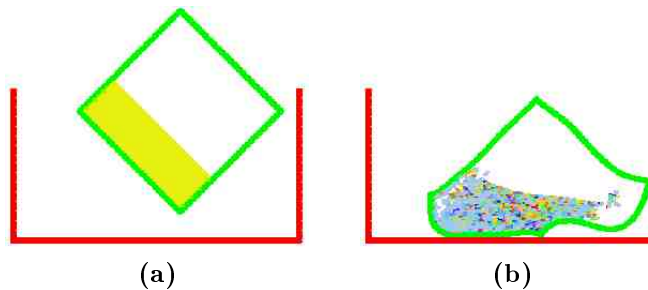


Fig. 14: Falling half liquid filled container



# 1 Einführung

Die gängigen, heute in Forschung und Ingenieurpraxis verbreitet Anwendung findenden numerischen Methoden, beispielsweise die Methode der Finiten Elemente (FEM) oder der Finiten Volumen (FVM), basieren auf einem Rechennetz. Die Erzeugung dieses Rechennetzes stellt trotz des hohen Entwicklungsstandes heute erhältlicher Softwarepakete oft denjenigen Teil einer numerischen Analyse dar, der die meiste Bearbeitungszeit in Anspruch nimmt. Zwar stehen heute hoch entwickelte automatische Netzgeneratoren zur Verfügung, jedoch liefern diese bei komplizierten Geometrien häufig kein zufrieden stellendes Ergebnis, womit das erhaltene Rechennetz einer intensiven Nacharbeit bedarf. Insbesondere bei sich dynamisch ändernder Geometrie, beispielsweise im Fortschreiten eines Risses gegeben, fällt dies besonders ins Gewicht, da eine vollständige Neuvernetzung für jeden einzelnen Zeitschritt des Rechenganges erforderlich ist. Eine wirkliche Automatisierung ist dann nicht möglich. Darüber hinaus stellen Teilchenablösungen und wechselnde Material- oder Zustandsübergänge wie zwischen trockenen und benetzten Zonen, wasserbaulichen Problemstellungen inhärent, hohe Hürden für herkömmliche numerische Methoden dar. In gewissem Sinn widerspricht ein starres Rechennetz der Natur einer Flüssigkeit. Damit ist der Einsatz eines hierauf basierenden Verfahrens in Hydromechanik und Konstruktivem Wasserbau eingeschränkt. Die vorliegende Arbeit schlägt Lösungen auf Basis netzfreier Methoden vor. Diese benötigen kein Rechennetz und sind dadurch den genannten Einschränkungen nicht unterworfen. Der im Konstruktiven Wasserbau stets präsenten Interaktion zwischen Festkörper und Flüssigkeit, beispielsweise im Zuge der Standsicherheitsuntersuchung einer Talsperre eine zentrale Rolle spielend, wird durch die Kombination zweier netzfreier Methoden Rechnung getragen: Die Elementfreie Galerkin Methode (EFGM) wurde zur Analyse des Talsperrenkörpers hinsichtlich Verformungen, Spannungen und Rissbildung implementiert und eingesetzt. Betont wird hierbei die numerische Umsetzung bruchmechanischer Vorgänge als Grundlage nach DIN 19700 zu führender Nachweise bestimmter Bemessungssituationen, da die Elementfreie Galerkin Methode hier besondere Vorteile gegenüber der Methode der Finiten Elemente aufweist. Zur Abbildung verbundener hydrodynamischer Prozesse, insbesondere des instationären Wasserdrucks infolge Erdbebens, wurde ein Programmmodul auf Basis der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) entwickelt und angewandt. Unter Kombination beider Methoden werden mögliche Ansätze maßgeblicher Talsperren-Nachweise aufgezeigt. Darüber hinaus werden zahlreiche weitere Simulationen vorgestellt, welche das breite Anwendungsspektrum netzfreier Methoden in Konstruktivem Wasserbau und Hydromechanik sowie in allgemeineren Fragestellungen der Mechanik veranschaulichen.

## 1 Einführung

Statische Untersuchungen an Talsperren, sei es im Zuge einer Neuplanung oder im Rahmen der Überprüfung älterer Bauwerke, werden heute gewöhnlich unter Zuhilfenahme numerischer Methoden durchgeführt. Bei neu zu errichtenden Staumauern, welche oft ein komplexes Tragverhalten aufweisen, kann nur so eine zeitgemäße wirtschaftliche Auslegung und Planung garantiert werden. Hier ermöglicht die computergestützte Berechnung eine bessere Ausnutzung der Werkstoffeigenschaften und ein individuelles Anpassen an die örtlichen Gegebenheiten. Eine traditionelle, rein analytische Betrachtung geht zwangsläufig mit einer Vereinfachung des Rechenmodells gegenüber der realen Ausführung einher. Damit bleiben vorhandene Tragwerksreserven ungenutzt. Besonders gravierend kann sich dies bei der Überprüfung bestehender älterer Anlagen auswirken. Aufgrund der heute geltenden technischen Richtlinien, die höhere Ansprüche an die Sicherheitsabstände stellen als dies zum Zeitpunkt der Errichtung der Fall war, ist ein Nachweis ausschließlich mit analytischen Methoden dann häufig nicht zu erbringen. Numerische Betrachtungen können in diesem Fall helfen, Staumauern sicherer zu beurteilen. Das einer solchen Betrachtung zugrunde liegende Modell kann weitaus besser und detaillierter an die tatsächlichen Bedingungen angepasst werden. Es ist damit möglich, aussagekräftige Informationen über den tatsächlichen Kraftfluss und anderer maßgeblicher Faktoren zu erhalten. Auch dynamische Vorgänge wie Schwingungen werden realitätsnah abgebildet. Die erhaltenen Ergebnisse lassen damit eine sichere Beurteilung unter hoher Ausnutzung der Werkstoffe und der Tragfähigkeit des Untergrundes zu.

Das heute gebräuchlichste numerische Verfahren für derartige Berechnungen ist die Methode der Finiten Elemente (FEM). Hierbei wird das Kontinuum des Talsperrenkörpers und des Untergrundes in eine endliche Anzahl geometrisch eindeutig begrenzter Elemente diskretisiert. Die mechanischen Eigenschaften dieser relativ einfach geformten Elemente, beispielsweise das Verformungsverhalten, ist bekannt und die Abhängigkeiten aller Elemente können damit unter Einbezug der Randbedingungen zu einem lösbaren Gesamtgleichungssystem zusammengefügt werden. Für Simulationen des Wasserkörpers des Reservoirs oder Fließvorgängen wie der Unterströmung eines Bauwerks findet häufig auch die Methode der Finiten Volumen (FVM) Anwendung. Diese löst im Rahmen eines Eulerschen Ansatzes die Erhaltungsgleichungen innerhalb einer endlichen Zahl räumlich begrenzter Kontrollvolumina, den Gitterzellen. Zur Erzeugung des beiden genannten Methoden zugrunde liegenden Netzes dienen im Allgemeinen automatische Netzgeneratoren. Bei ausgeprägt heterogenen Strukturen, wie Talsperren sie aufweisen, bedürfen die generierten Netze jedoch trotz hoch entwickelter erzeugender Algorithmen umfangreicher manueller Nacharbeit, da die Rechengenauigkeit mit der Güte und Dichte des Netzes einhergeht. Besonders ins Gewicht fällt dieser Umstand bei sich ständig ändernden Randbedingungen hinsichtlich der Geometrie und der Krafteinleitung, wie dies bei der Betrachtung des Fortschritts eines Risses der Fall ist. Gerade bei der Beurteilung der Erdbebensicherheit älterer Talsperren ist jedoch eine fundierte Analyse des Rissverhaltens unter extremer Belastung nötig und in der betreffenden deutschen Norm DIN 19700 zwingend vorgeschrieben: Ein zum Stillstandkommen des Risses abhängig vom Bemessungslastfall spätestens in Querschnittsmitte ist nachzuweisen. Für diese dynamische Berechnung des Fortschreitens der Bruchzone ist ein iterativer Lösungsansatz nötig, welcher

bei Anwendung der Finiten Elemente Methode ein Neuvernetzen zu jedem Zeitschritt bedingt, da sich durch den fortschreitenden Riss die Geometrie fortwährend ändert und das Netz unmittelbar an diese gebunden ist. Eine nicht automatisierbare manuelle Nachbearbeitung des erhaltenen Rechennetzes ist dann für jeden Teilschritt erforderlich. Auch andere Teilbereiche einer vollständigen Standsicherheitsbetrachtung, beispielsweise das Überströmen des Bauwerks, sind mit netzbasierten Verfahren schwierig: Freie Fluidoberflächen oder gar Teilchenablösungen stellen die Stabilität des Rechengangs in Frage. Damit ist mit der Anwendung der genannten Methoden zumindest für bestimmte Teile einer Standsicherheitsuntersuchung, beispielsweise der Erdbebenlastfälle, erheblicher Aufwand verbunden.

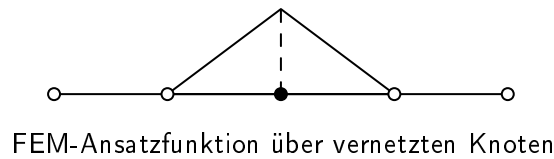
Es bietet sich aus den genannten Erwägungen an, für den Tragsicherheitsnachweis von Talsperren numerische Methoden anzuwenden, die kein an die zu untersuchende Körpergeometrie gebundenes Netz voraussetzen. Diese Eigenschaft besitzen die in den letzten Jahrzehnten entwickelten netzfreien Verfahren. Als älteste netzfreie Methode wurde die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) 1977 von Bob Gingold, Joe Monaghan [34] und unabhängig von Leon Lucy [50] entwickelt. Neben der Netzfreiheit weist SPH die Besonderheit einer selbstständigen Anpassung der Rechenauflösung in Form der Teilchendichte auf, was zusammen mit den für Partikelmethoden günstigen Randbedingungen im freien Raum ihre Anwendung zunächst in der Astrophysik erklärt. Inzwischen wird diese Methode wie auch in der vorliegenden Arbeit besonders für die Simulation von Flüssigkeiten verwendet, aber auch Ansätze zu elastodynamischen und bruchmechanischen Berechnungen existieren mittlerweile. 1994 stellten Belytschko, Lu und Gu [10] die Elementfreie Galerkin Methode (EFGM) vor. Sie weist enge Verwandtschaft mit der Methode der Finiten Elemente auf, jedoch werden die knotenüberlappenden Ansatzfunktionen über ein spezielles oberflächenbildendes Verfahren entwickelt und sind nicht an Elementgrenzen gebunden. Netzfrequen Methoden benötigen damit aufgrund ihrer anders abgebildeten Stützstellenkonnektivität primär kein Rechennetz. Die Präzision der Ergebnisse ist somit weit weniger stark an die Körpergeometrie gekoppelt, eine einfache, gut zu automatisierende Adaption ist möglich. Unter Einsatz der genannten netzfreien Methoden wird einerseits die Betrachtung von Rissvorgängen im Festkörper des Talsperrenbauwerks möglich, andererseits können auch realitätsnahe Aussagen über das Verhalten von Flüssigkeiten gewonnen werden. Die Interaktion des Wasservolumens des Stausees mit der Talsperre bei Erschütterungsvorgängen kann nun präzise in die Beurteilung einbezogen werden.

Netzgebundene und netzfreie numerische Methode teilen sich das Prinzip der Approximation eines Funktionswertes, beispielsweise der örtlichen Verschiebung, durch eine per Ansatzfunktion gewichtete Summe des entsprechenden Freiheitsgrades benachbarter Knoten oder Partikel. Die Ansatzfunktion stellt dabei den Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Knoten und den dazwischenliegenden Bereichen, etwa innerhalb der Elemente, her. Dabei gewichtet die Ansatzfunktion nach der Entfernung vom Knoten. In der Konstruktion dieser Ansatzfunktionen liegt der wesentliche Unterschied zwischen den netzbasierten Verfahren und elementfreien Methoden: Die Konnektivität der Knoten eines FEM-Modells beispielsweise ist durch das dazwischenliegende Element definiert;

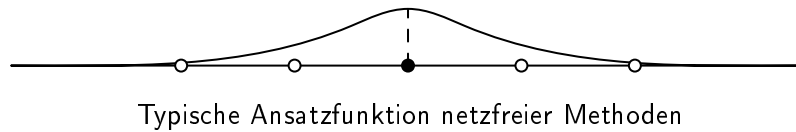


## 1 Einführung

die Ansatzfunktionen enden exakt an den Knoten.



Netzfrie Methoden hingegen weisen keine Vernetzung ihrer Knoten durch verbindende Elemente auf: Ihre Ansatzfunktionen erstrecken sich Knoten übergreifend über einen bestimmten Radius, der so zu wählen ist, dass genügend Knoten erfasst werden, enden jedoch davon abgesehen unabhängig von deren Position.



Die Konnektivität der Knoten wird bei netzfriren Methoden also nicht durch eine Vorab-Vernetzung festgelegt, wodurch sich die erwähnten Vorteile aufgrund einer weitgehenden Unabhängigkeit von der Körpergeometrie ergeben.

Es gibt mittlerweile eine zweistellige Zahl verschiedener netzfrier Methoden, die sich jedoch weitaus weniger unterschiedliche Grundkonzepte teilen. Je nach Anwendungszweck weisen sie unterschiedliche Eignungen und Schwächen auf. Für die Betrachtung eines Festkörpers eignet sich die Elementfreie Galerkin Methode, auch Finite-Punkte-Methode genannt. Abgesehen von der Elementfreiheit ist ihr Galerkin-Ansatz ähnlich dem, wie er auch in der Methode der Finiten Elemente Anwendung findet. Das Verfahren ist besonders robust hinsichtlich der numerischen Behandlung von Diskontinuitäten wie Rissen. Die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics hingegen ist durch ihre frei beweglichen Partikel und der dadurch von vornherein enthaltenen zeitlichen Dimension besonders zur Simulation von instationären Flüssigkeitsbewegungen geeignet. Sie bildet ein Fluidum als eine Menge von Teilchen ab, die örtlich ebenfalls nicht scharf begrenzt sind, sondern ähnlich einer Gauß-Glockenkurve innerhalb eines bestimmten Bereiches gewichtet sind. Jedes Teilchen besitzt bestimmte Materialeigenschaften, beispielsweise die repräsentierte Masse, und gehorcht den Grundsätzen der Impulserhaltung, sodass die Erhaltungsgleichungen automatisch auch für das gesamte Fluidum erfüllt sind. Die Einflussbereiche der Partikel können sich gegenseitig überlappen. Hierdurch stellt sich ein "weiches" Interagieren der Partikel untereinander ein, was dem Verhalten einer realen Flüssigkeit sehr nahe kommt und darüber hinaus eine numerisch aufwändige Kollisionskontrolle im eigentlichen Sinn überflüssig macht.

Die beiden im wesentlichen zu betrachtenden Systeme einer Talsperrenuntersuchung, der Talsperrenkörper und das einwirkende Wasservolumen, können mit diesen netzfrieren Verfahren in einfacherer Weise, als dies unter Verwendung netzgebundener Methoden möglich wäre, modelliert werden. Die vorliegende Arbeit stellt die beiden genannten Verfahren vor und zeigt Möglichkeiten der kombinierten Implementierung und Anwendung

im Rahmen der Betrachtung besonders von Erdbebeneinwirkungen bezüglich Wasserbauwerken auf.

## **Zum Inhalt**

Zunächst werden im nachfolgenden Kapitel die grundlegenden Prinzipien elastizitätstheoretischer numerischer Modelle vorgestellt. Dies dient insbesondere dem leichteren Verständnis der Elementfreien Galerkin Methode, die sich mit gängigen numerischen Verfahren wie der Methode der Finiten Elemente zahlreiche Eigenschaften teilt. Erwähnt sei beispielsweise das grundlegende Konzept der Verwendung von Ansatzfunktionen, der Galerkin-Ansatz oder die Integrationsinstrumente. Daher geschieht die Darlegung dieser grundsätzlichen Verfahrensweisen in Anlehnung an die Methode der Finiten Elemente. Kurz werden auch die Grundlagen der Methode der Finiten Volumen beleuchtet, da diese in ähnlichen Anwendungsfeldern zum Einsatz kommt, wie es auch für eine Analyse mithilfe der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics zu erwarten ist. Das dritte Kapitel führt aufbauend auf die gelegten Grundlagen in die Elementfreie Galerkin Methode ein, betonend vor allem die besondere Konstruktion der Ansatzfunktionen über das Moving-Least-Squares-Verfahren und die spezielle Behandlung der Randbedingungen. Ebenfalls wird die gute Eignung der Methode zur Rissfortschritts-Simulation hergeleitet, welche zur numerischen Behandlung der in DIN 19700 geforderten bruchmechanischen Nachweise gefordert ist. Im Folgenden schließt sich die Betrachtung des Weiteren im Rahmen dieser Arbeit angewandten netzfreien Verfahrens, der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics, an. Obgleich der Fokus im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf einer Anwendung des Modells zur Simulation von Flüssigkeiten liegt, werden in kompakter Form Ansätze zur Festkörpermechanik mit SPH gezeigt. Damit wird die besondere Universalität dieser Methode deutlich, die sie für praktisch alle Bereiche des Wasserbaus einsetzbar erscheinen lässt. Die Interaktion zwischen Festkörper und Wasser durch numerische Modelle abzubilden, ist hier oft wesentlicher Bestandteil einer Vielzahl unterschiedlichster Untersuchungen. Entsprechend der besonderen Eignung der Elementfreien Galerkin Methode für festkörpermechanische Analysen und der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics für die Simulation von Flüssigkeiten legt das folgende Kapitel die entwickelten Ansätze zur Kombination der beiden vorgestellten netzfreien Modelle dar. Hierbei wird besonders auf die Schnittstelle zwischen Festkörper und Fluid an der wasserzugewandten Talsperrenseite eingegangen, an der die wesentlichen Einwirkungen, welche im Rahmen eines Standsicherheitsnachweises zu betrachten sind, auftreten. Für eine Talsperrenüberprüfung maßgebliche Simulationen mithilfe beider numerischer Methoden finden sich im Folgekapitel "Modellierungen für Talsperren". Der konkreten Umsetzung in die Ingenieurspraxis dient zunächst die Darlegung der grundlegenden Konzepte des Nachweises nach DIN 19700. Neben den einzuhaltenden Kriterien wird auf die Gewinnung der benötigten Parameter durch numerischer Werkzeuge eingegangen. Die genannte Norm sieht einen Nachweis hinsichtlich der zu erwartenden Länge eines in bestimmten Bemessungssituationen möglicherweise auftretenden Risses vor. Daher werden die komplexen Vorgänge beim Fortschreiten eines Risses nun hinsichtlich der bruchmechanischen Grundlagen und deren Umsetzung

in den verschiedenen numerischen Modellen erörtert. Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurden die verschiedensten Modellierungen mit den genannten Verfahren durchgeführt. Kern ist die Kombination der Elementfreien Galerkin Methode und des Verfahrens der Smoothed Particles Hydrodynamics zur Beurteilung der auftretenden Belastungen einer Talsperre im Erdbebenfall. Im Vergleich mit bekannten Methoden wie der von Westergaard [85] zeigt sich die Realitätsnähe der Ergebnisse. Um die breite Anwendbarkeit der netzfreien Verfahren hervorzuheben, finden sich schließlich auch zahlreiche weitere im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachteten Beispiele unterschiedlichster Anwendungen auf dem Feld der Hydromechanik bis hin zur Seildynamik. Deutlich wird hier die breitbandige Anwendbarkeit des Verfahrens der Smoothed Particles Hydrodynamics auch für Festkörper-Betrachtungen unter Einsatz des zuvor dargelegten eigenen Ansatzes. Die abschließende Betrachtung fasst besondere Eigenschaften und Herausforderungen der vorgestellten Modelle zusammen und zeigt im Ausblick Möglichkeiten der Fortentwicklung und Gebiete weiterer Forschung auf. Schließlich wird im Anhang die entwickelte Software vorgestellt, mit deren Hilfe die vorgestellten Modellierungen durchgeführt wurden. Im Zuge der vorliegenden Dissertation ist ein umfangreiches Programmpaket auf Basis netzfreier Methoden entstanden. Die Software besteht einerseits aus einem Modul basierend auf der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics sowie einer Implementierung der Elementfreien Galerkin Methode andererseits. Eingabe- und Visualisierungsmodule ermöglichen den effektiven Einsatz der vorgestellten Verfahren. Weiter werden grundlegende programmtechnische Aspekte effektiver Algorithmen für die integrierten Methoden, aber auch der Visualisierung der Ergebnisse diskutiert.

## 2 Grundprinzipien numerischer Methoden der Elastizitätstheorie

Ziel einer elastizitätstheoretischen Untersuchung ist es, eine Aussage über den Spannungs- und Verformungszustand eines Körpers unter bestimmten Randbedingungen zu gewinnen. Hierzu müssen die zugrunde liegenden Differentialgleichungen gelöst werden. Dies kann in einfachen Fällen analytisch erfolgen. Im Regelfall aber wird die Komplexität des zu betrachtenden mechanischen Systems, etwa einer Talsperre, dies nicht ohne starke Vereinfachungen zulassen. Damit ist eine Näherungslösung zu akzeptieren. Diese kann wiederum in geschlossener Form für das vereinfachte System erfolgen, oder mit einer diskreten Methode. Obwohl erstgenannter Ansatz bis in die jüngere Vergangenheit üblich war, so sind es heute wirtschaftliche und zeitliche Gründe, oder verschärfte technische Richtlinien, die dem Ingenieur eine weniger vereinfachende Analyse auferlegen. Dies ist möglich mit diskretisierenden Modellen. Unter Diskretisierung ist das Abbilden kontinuierlicher Größen, beispielsweise der Verschiebung, durch so genannte Ansatzfunktionen und unbekannte Verschiebungsvektoren an einzelnen verteilten Rechenstützstellen, den Knoten, zu verstehen. Beide zuletzt genannten Lösungsansätze sind Approximationen. Jedoch kann ein diskreter Ansatz praktisch beliebig hoch aufgelöst werden, womit präzise, örtlich detaillierte Aussagen über die maßgeblichen Zustände des Systems gewonnen werden können. Die hohe Auflösung geht dann aber mit einem Umfang des zu lösenden Gleichungssystems daher, der ein rechnergestütztes Lösen notwendig macht. Damit erklärt sich auch der Durchbruch dieser Methoden innerhalb erst der vergangenen 50 Jahre, obwohl theoretische Grundlagen und Matrizenverfahren schon viel länger zur Verfügung standen. Im Folgenden wird auf grundsätzliche Prinzipien numerischer Methoden eingegangen. Aufgrund der engen Verwandtschaft zur Elementfreien Galerkinmethode geschieht dies anhand der Methode der Finiten Elemente.

### 2.1 Direkte Steifigkeitsmethode

Die Direkte Steifigkeitsmethode (DSM) kann als Vorläufer und Basis der Methode der Finiten Elemente angesehen werden. Sie weist einige deren Hauptmerkmale wie die Verwendung von Matrizenformulierungen, Elementen und Knoten auf. Erste Ansätze hierzu gab es bereits in den 1930er Jahren von Collar und Duncan [23] [30]. Der eigentliche Durchbruch der matrizenbasierten strukturanalytischen Methoden kam mit den Veröffentlichungen Argyris' in den 1950er Jahren [3], der diese Methode neben weiteren Persönlichkeiten wie Jones [41] stetig zur Methode der Finiten Elemente fortentwickelte [7]. Veröffentlicht wurde das Verfahren erstmals 1959 von Turner [82] und wird im

Folgenden an [29] orientiert umrissen. Die Direkte Steifigkeitsmethode basiert auf der generalisierten Feder-Analogie eines eindimensionalen Elements. Dessen den Bezug von Kraft zu Verschiebung beschreibende Gleichung lautet:

$$F = k \cdot u \quad (2.1)$$

Hierin ist  $F$  die wirkende Kraft,  $k$  die Federsteifigkeit und  $u$  die Verschiebung in Kraftrichtung, Abb. 2.1.

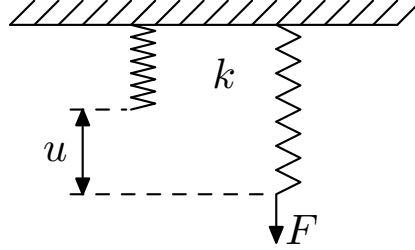


Abb. 2.1: Feder

Im Falle des einfachen Fachwerkträgers wie in Abb. 2.2 gezeigt, entspräche die Federsteifigkeit  $k_s = EA/L$ , und der Zusammenhang zwischen wirkender Kraft  $F = f_{xj}^e = -f_{xi}^e$  und Verschiebung  $d$  wird beschrieben durch  $F = k_s d = \frac{EA}{L} d$ .

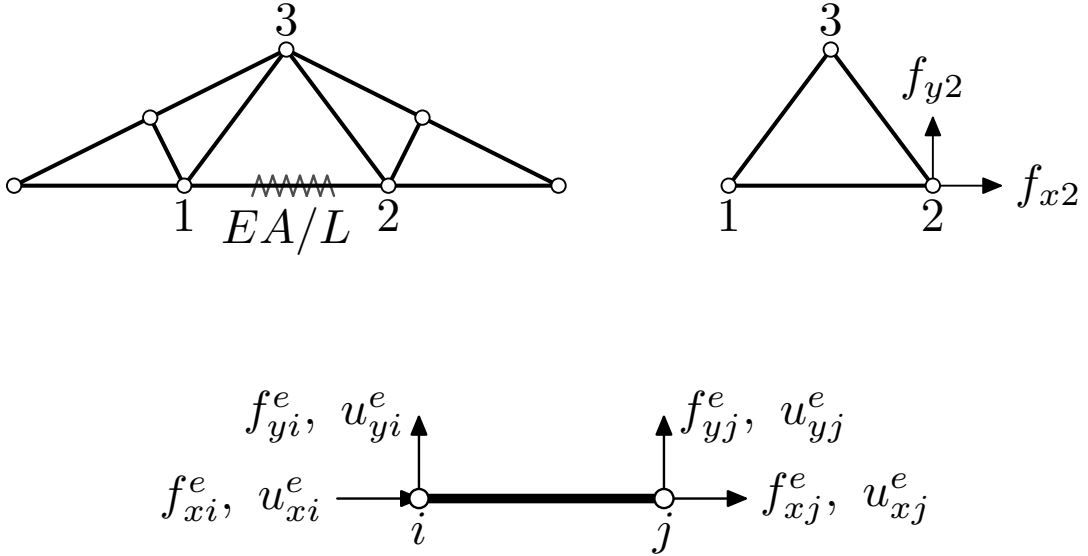


Abb. 2.2: Fachwerkträger

Hierbei ist  $E$  der E-Modul des Trägers,  $A$  seine Querschnittsfläche und  $L$  seine Länge, die Verschiebung  $d = u_{xj}^e - u_{xi}^e$ . In Matrixform ergibt sich für das finite Element "Fachwerkträger" der folgende Ausdruck, wobei Matrizen und Vektoren in dieser Arbeit wie allgemein üblich in **Fettschrift** notiert werden:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (2.2)$$

Der obere Index  $e$  entspricht der Elementnummer. (2.2) lautet ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} f_{xi}^e \\ f_{yi}^e \\ f_{xj}^e \\ f_{yj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xixi}^e & K_{xiyi}^e & K_{xixj}^e & K_{xiyj}^e \\ K_{yixi}^e & K_{yiyi}^e & K_{yixj}^e & K_{yiyj}^e \\ K_{xjxi}^e & K_{xjyi}^e & K_{xjxj}^e & K_{xjyj}^e \\ K_{yjxi}^e & K_{yjyi}^e & K_{yjxj}^e & K_{yjyj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi}^e \\ u_{yi}^e \\ u_{xj}^e \\ u_{yj}^e \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Die Indizes  $i$  bzw.  $j$  sind die Nummern der beiden Knoten des 1D-Elements mit Index  $e$ , für dessen lokale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  somit auch notieren lässt:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Für das Gesamttragwerk bestehend aus sämtlichen Trägern lautet (2.1) in Matrizendarstellung analog:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2.5)$$

hierbei wird  $\mathbf{K}$  als globale Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{f}$  als globaler Kraftvektor und  $\mathbf{u}$  als globaler Verschiebungsvektor bezeichnet.  $\mathbf{f}$  beinhaltet die Kräfte, welche in horizontaler und vertikaler Richtung an den als gelenkig angenommenen Verbindungen aller Stäbe wirken und damit auch äußere Krafteinleitungen beispielsweise an den Systemrändern. Die Verschiebungen aller Knoten wird durch  $\mathbf{u}$  beschrieben,  $\mathbf{K}$  legt den Zusammenhang der Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  in Bezug auf die wirkenden Kräftekomponenten von  $\mathbf{f}$  fest. Für den in Abb. 2.2 heraus gelösten Verband auf der rechten Bildhälfte lautet (2.5) ausgeschrieben, wobei bei den Vektoren der erste Index die Richtung, der zweite die Knotennummer angibt:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Zur Veranschaulichung der Bedeutung und Indexierung der Steifigkeits-Koeffizienten in  $\mathbf{K}$  kann gedanklich die Verschiebung

$$\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.7)$$

auf das Tragwerk aufgebracht werden. Der aus (2.6) resultierende Kraftvektor wäre folglich

$$\mathbf{f} = [K_{x1x2} \ K_{y1x2} \ K_{x2x2} \ K_{y2x2} \ K_{x3x2} \ K_{y3x2}]^T \quad (2.8)$$

$K_{y1x2}$  beispielsweise wäre dann die Kraft in vertikaler Richtung am Knoten 1, wenn am Knoten 2 eine horizontale 1-Verschiebung aufgebracht würde. Die Steifigkeitskoeffizienten können somit als den Einfluss einer Verschiebung ausdrückende Parameter angesehen werden. Über gegebene Randbedingungen, welche auf bestimmte Knoten aufgebrachte Kräfte oder Verschiebungen festlegen, wird (2.6) lösbar. Die Direkte Steifigkeitsmethode kommt aufgrund der einfachen homogenen Elemente einer räumlichen Dimension ohne Ansatzfunktionen und den Einsatz von Energiemethoden aus. Sie ist jedoch auf einfache Anwendungsfälle beschränkt. Aufgrund dessen wurde sie zur Methode der Finiten Elemente weiterentwickelt, welche universeller einzusetzen ist, jedoch zum Preis einer aufwändigeren Gewinnung der Systemmatrizen mithilfe von Ansatzfunktionen zur Lösung der "schwachen" Form der Differenzialgleichungen.

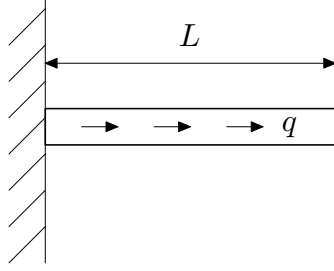
## 2.2 Starke und schwache Form der Differenzialgleichungen, Galerkin-Formulierung

Die Diskretisierung, also die Reduktion eines Kontinuums zu einem endlichen algebraischen System, kann auf drei Typen von Differenzialgleichungen führen: Die "starke" Form, die "schwache" Form, oder eine Form der Variationsrechnung. Unter der starken Form ist ein System von partiellen Differenzialgleichungen zusammen mit deren Randbedingungen zu verstehen. Die schwache Formulierung drückt die starke Form der Differenzialgleichung aus durch ein gewichtetes Integral, von dem nicht mehr gefordert wird, dass es an jeder Stelle exakt die Lösung erfüllt, sondern dieser über einen bestimmten Bereich gemittelt entspricht. Sie ist daher eine "schwächere" Formulierung des Problems. Die variationale Form schließlich ist ein Funktional, dessen Extremal-Bedingungen die starke oder schwache Form erzeugen. Alle in dieser Arbeit besprochenen numerischen Verfahren, ob mit oder ohne zugrunde liegendem Rechnernetz, dienen der Lösung von partiellen Differenzialgleichungen. Eine partielle Differenzialgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion, deren Ableitungen in verschiedene Richtungen sowie eventuell weiterer Variablen her. Ziel der Lösung einer solchen Differenzialgleichung ist es, die Funktion zu finden, über deren Ableitung eine Aussage vorliegt, was im Rahmen der hier betrachteten Fragestellungen die Verschiebung ist. Als Beispiel sei die Gleichgewichtsbedingung des einseitig eingespannten, durch die gleichmäßige Längskraft  $q$  belasteten Balkens mit der angenommenen Steifigkeit  $EA = 1$  wie in Abb. 2.3 gezeigt genannt

$$\frac{d^2u}{dx^2} = q \quad (2.9)$$

Die Randbedingungen sind gegeben mit der Verschiebung  $u$  in achsialer Richtung

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{du^2}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.10)$$

**Abb. 2.3:** Balken mit Steifigkeit  $EA = 1$ 

Ziel ist es, den Verschiebungsverlauf  $u(x)$  zu finden. Gleichung (2.9) stellt die starke Formulierung einer partiellen Differentialgleichung dar. Die starke Lösung wird an jedem Punkt der Funktion exakt erfüllt. Die Methode der Finiten Differenzen beispielsweise löst eine solche Formulierung durch Approximation nach Übergang auf den Differenzenquotienten. Allerdings ist sie nur für regelmäßige Geometrien und einfache Randbedingungen anwendbar. Die meisten numerischen Modelle arbeiten daher mit der schwachen Form, gleichbedeutend mit dem variationalen Ausdruck des Problems, welcher gegen eine Testfunktion integriert wird. Diese Testfunktion ist oft identisch mit der Ansatzfunktion, wie später verdeutlicht wird. Wie erwähnt wird nun nicht mehr ein exaktes Erfüllen der Lösung an jedem Punkt, sondern lediglich im Mittel über einen bestimmten Bereich verlangt. Mit dem Residuum, (2.9) entsprechend

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - q = 0 \quad (2.11)$$

lautet die schwache Form mit der Testfunktion  $v$

$$\int_0^L \left( \frac{d^2 u}{dx^2} - q \right) v \, dx = 0 \quad (2.12)$$

Die Testfunktion soll die essentiellen Randbedingungen erfüllen, in diesem Fall  $v(0) = 0$ . Gleichung (2.12) lautet umgestellt

$$\int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2} v \, dx = \int_0^L q v \, dx \quad (2.13)$$

Partielle Integration liefert

$$-\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx + \left[ v(x) \frac{du}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} = -\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx + v(L) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} - v(0) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad (2.14)$$

Mit den zuvor genannten Randbedingungen

$$u(0) = 0 \quad \frac{du^2}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad v(0) = 0 \quad (2.15)$$

wird (2.14) zur gesuchten schwachen Formulierung

$$\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^L q v \, dx \quad (2.16)$$



Die in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Methoden lösen diese Formulierung durch den Summations-Ansatz

$$u(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad v(x) = \sum_{j=1}^N b_j \phi(x) \quad (2.17)$$

wobei  $u_j$  die gesuchten Knotenparameter sind, hingegen die Parameter  $b_j$  beliebig gewählt werden können. Die Ansatz- bzw. Testfunktionen sind durch  $\phi$  symbolisiert.  $N$  gibt die Anzahl der Knoten an, über die aufsummiert wird. Eingesetzt in (2.16) ergibt sich

$$\int_0^L \sum_{j=1}^N u_j \frac{d\phi_j}{dx}(x) \sum_{i=1}^N b_j \frac{d\phi_i}{dx}(x) dx = \int_0^L q \sum_{j=1}^N b_j \phi_j(x) dx \quad (2.18)$$

Nach Umordnung wird (2.18) notiert zu

$$\sum_{i=1}^N b_i \sum_{j=1}^N u_j \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = \sum_{i=1}^N b_i \int_0^L q \phi_i dx \quad (2.19)$$

Nach Streichungen erhalten wir

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = \int_0^L q \phi_i dx \quad (2.20)$$

Betrachtet man nun mit (2.5) das zugrunde liegende Gleichungssystem  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ , so lässt sich zuordnen:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (2.21)$$

und

$$f_i = \int_0^L q \phi_i dx \quad (2.22)$$

wobei  $u_j$  die Elemente des Vektors der Unbekannten, in diesem Fall der Knotenverschiebungen sind. Diese Formulierung entspricht dem Galerkin-Ansatz, wie er sowohl den meisten Finite-Elementen-Modellen als auch der Elementfreien Galerkin-Methode zugrunde liegt. Dieser lässt sich auch über eine Energiebetrachtung herleiten: Das Prinzip der minimalen Energie, auch “Hamiltonsches Prinzip” oder “Prinzip der minimalen Wirkung” genannt, lautet mit dem Variationssymbol  $\delta$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T - U + W dt = 0 \quad (2.23)$$

wobei  $t_1$  und  $t_2$  Anfangs- und Endzeit symbolisieren, was für statische Betrachtungen keine Rolle spielt. Die Kinetische Energie wird im dynamischen Fall durch

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.24)$$

ausgedrückt, während der Anteil der Dehnungsenergie

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma \, d\Omega \quad (2.25)$$

lautet und die Arbeit durch externe Kräfte im Körper und am Rand mit

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (2.26)$$

notiert wird, wobei  $\mathbf{u}$  die noch unbekannte Feldfunktion in Form der Verschiebungen ausdrückt,  $\mathbf{b}$  Körperkräfte wie Gravitation sein können und  $\bar{\mathbf{t}}$  Traktionskräfte auf dem betreffenden Körperrand  $\Gamma_t$  des Gebiets  $\Omega$  bezeichnet. Betrachtet man nun den stationären Fall, so lässt sich das Gesamtpotential vereinfacht als

$$\Pi = U + W \quad (2.27)$$

notieren. (2.23) wird damit zu

$$\delta\Pi = \delta(U + W) = 0 \quad (2.28)$$

Nun werden Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_a$  gebildet, welche die unbekannten Feldfunktionen  $\mathbf{u}$  anhand der Knotenparameter  $\tilde{\mathbf{u}}_a^e$  über das Gebiet approximieren.

$$\mathbf{u} \approx \sum_a \mathbf{N}_a \tilde{\mathbf{u}}_a \quad (2.29)$$

Die Konstruktion der Ansatzfunktionen geschieht in den unterschiedlichen Modellen auf sehr verschiedene Art. Die erhaltene Approximation ist die durch die Ansatzfunktionen gewichtete Summe über alle Knotenwerte, dessen Indices durch  $a$  angezeigt werden. Das Grundgleichungs-System  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  wird damit durch die Näherung

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (2.30)$$

ersetzt. Das Gesamtpotential lautet in dieser Formulierung

$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} \quad (2.31)$$

mit der symmetrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und dem Vektor der Kräfte  $\mathbf{f}$ . Die Bedingung für das Minimum der potentiellen Energie, das Stationärwerden des Funktionals wie in (2.28) ausgedrückt, lässt sich damit durch die  $n$  Einzelpotentiale der Elemente darstellen zu

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_n} \end{array} \right\} = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} = 0 \quad (2.32)$$

(2.24), (2.25) und (2.26) in das Lagrangesche Funktional für Festkörper (2.23) eingesetzt führt auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \right] dt = 0 \quad (2.33)$$

nachdem die Variationsoperatoren in die Integralterme überführt wurden [46]. Unter Anwendung der Variations-Kettenregel und partieller Integration wird (2.33) zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \rho \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega \right] dt = 0 \quad (2.34)$$

Um vorstehende Gleichung für beliebige  $\mathbf{u}$  zu erfüllen, muss der zeitabhängige Integrand verschwinden:

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \rho \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega = 0 \quad (2.35)$$

(2.35) ist die Galerkin-Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit: Diese, geleistet von den elastischen Kräften im Körperinneren und den äußeren Kräften, verschwindet unter Aufbringung einer virtuellen Verschiebung  $\delta$ . Für statische Betrachtungen verschwinden die zeitabhängigen Terme und die Galerkin-Formulierung vereinfacht sich zu

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (2.36)$$

## 2.3 Implementierung der Randbedingungen

Die Grundgleichung  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  wird erst durch bekannte Randbedingungen lösbar. Dabei wird zwischen natürlichen und essentiellen Randbedingungen unterschieden. Vereinfacht ist unter natürlichen Randbedingungen, auch als Neumann-Randbedingungen bezeichnet, das Einwirken von Kräften zu verstehen. Sie sind Bestandteil der Formulierung und treten als Randintegrale auf und werden automatisch von einer Lösung der schwachen Formulierung erfüllt. Unter essentiellen Randbedingungen sind die Gegebenheiten hinsichtlich der Verschiebungen zu verstehen. Essentielle Randbedingungen werden auch Dirichletsche Randbedingungen genannt und legen den Wert der Verschiebung  $u$  an den Randknoten auf  $\Gamma$  fest. Sie müssen zusätzlich zu der integralen Formulierung gefordert werden. Eine Dirichlet-Randbedingung gibt damit einen Funktionswert direkt vor, dagegen gibt eine Neumann-Randbedingung die Ableitung eines Funktionswertes vor. Mit einer Dirichlet-Randbedingung wird somit ein Freiheitsgrad direkt vorgegeben. Die zugehörige Zeile und Spalte im Matrizenystem ist damit hinfällig. Zur Realisierung im Modell sind zwei Verfahren üblich, die im Folgenden skizziert werden [29].

## 2.3.1 Lagrange-Multiplikatoren

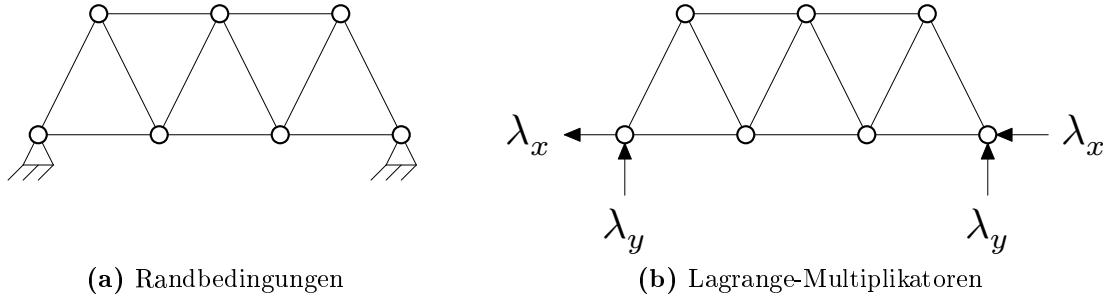


Abb. 2.4: Lagrange-Multiplikatoren

Lagrange-Multiplikatoren können als Kräfte interpretiert werden, welche an den betrachteten Knoten gerade zur gewünschten Verschiebung führen, beispielsweise  $\mathbf{u}_i = 0$  für ein Festlager, und sind daher quasi als Reaktionskräfte  $\lambda$  zu betrachten, Abb. 2.4. Ihre Anzahl pro Knoten entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade; in einem zweidimensionalen Modell gibt es somit auch jeweils zwei Lagrange-Multiplikatoren für die Knoten der essentiellen Ränder. Die Lagrange-Multiplikatoren gehören zu den Unbekannten des Systems und werden durch

$$\lambda(x) = \sum_i^N N_i \lambda_i \quad (2.37)$$

für jeden Knoten auf den essentiellen Rändern interpoliert. Hierin ist  $N_i$  das Lagrange-Interpolationspolynom: Lagrange-Multiplikatoren werden zur Lösung von Extremwertaufgaben von Funktionen mehrerer Veränderlicher mit Nebenbedingungen eingesetzt, beispielsweise der Funktion  $z = f(x, y)$  mit der Nebenbedingung  $\varphi(x, y) = 0$ . Statt nun die Gleichung der Nebenbedingung nach einer Variablen aufzulösen und in die Gleichung  $z = f(x, y)$  einzusetzen, sodass eine Gleichung mit nur noch einer Variablen vorliegt, wird durch Linearkombination der Funktionen  $f(x, y)$  und  $\varphi(x, y)$  eine neue künstliche Funktion  $L(x, y, \lambda)$ , die Lagrange-Funktion, definiert:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) \quad (2.38)$$

Der Parameter  $\lambda$  ist der unbekannte Lagrange-Multiplikator. Die Extremwerte der ursprünglichen Funktion  $f(x, y)$  und der Lagrange-Funktion  $L(x, y, \lambda)$  sind identisch, weil stets  $\varphi(x, y) = 0$  gilt. Die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Extremwertes der Lagrange-Funktion ergeben sich mit den Ableitungen  $f_{,x}$ ,  $f_{,y}$  beziehungsweise  $\varphi_{,x}$ ,  $\varphi_{,y}$  in beide Richtungen  $x$  und  $y$  zu:

$$L_{,x} = f_{,x} - 0 \cdot \varphi(x, y) - \lambda \varphi_{,x} = f_{,x} - \lambda \varphi_{,x} = 0 \quad (2.39)$$

$$L_{,y} = f_{,y} - 0 \cdot \varphi(x, y) - \lambda \varphi_{,y} = f_{,y} - \lambda \varphi_{,y} = 0 \quad (2.40)$$

$$L_{,\lambda} = 0 - 1 \cdot \varphi(x, y) = \varphi(x, y) = 0 \quad (2.41)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert die Extremwerte von  $f(x, y)$  unter Erfüllung der Nebenbedingung  $\varphi(x, y) = 0$  und der Bedingungsgleichungen:

$$f_{,x} - \lambda \varphi_{,x} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{f_{,x}}{\varphi_{,x}} \quad f_{,y} - \lambda \varphi_{,y} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{f_{,y}}{\varphi_{,y}} \quad \text{und damit} \quad \frac{f_{,x}}{\varphi_{,x}} = \frac{f_{,y}}{\varphi_{,y}} \quad (2.42)$$

Beispiel: Ermittlung der kleinstmöglichen Oberfläche  $A$  eines Zylinders mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  bei vorgegebenem Volumen  $V_0$  [53]:

$$A_{\text{zyl}} = f(r, h) = \underbrace{2\pi r h}_{\text{Mantelfläche}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Deckelflächen}} \quad (2.43)$$

Nebenbedingung:

$$V = \pi r^2 h = V_0 \rightarrow \varphi(r, h) = \pi r^2 h - V_0 = 0 \quad (2.44)$$

Anwendung der Lagrangeschen Bedingungsgleichungen

$$f_{,r} = 2\pi h + 4\pi r \quad f_{,h} = 2\pi r \quad \varphi_{,r} = 2\pi r h \quad \varphi_{,h} = \pi r^2 \quad (2.45)$$

führt auf

$$\frac{2\pi h + 4\pi r}{2\pi r h} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \rightarrow h = 2r \rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \quad (2.46)$$

Es ergibt sich ein Vektor aller Lagrange-Multiplikatoren des Systems. Der entsprechende Überschuss an Unbekannten ist eben durch die bekannten Randbedingungen ausgeglichen. Aus  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  wird damit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Hierin ist  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  das Lösungssystem aller essentiellen Freiheitsgrade. Die Lösung des Systems hat  $\lambda$  und  $\mathbf{u}$  zum Ergebnis. Die Reaktionskräfte sind dann mit  $-\mathbf{A}^T \lambda$  definiert. Mit dem Differenzial-Operator

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

und dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u} = [u \ v]^T$  ergibt sich für die Galerkin-Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \lambda^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda^T \delta \mathbf{C}(\mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad (2.49)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = [\mathbf{C}_1(\mathbf{u}) \ \mathbf{C}_2(\mathbf{u}) \ \dots \ \mathbf{C}_k(\mathbf{u})]^T$  ist hierin der Vektor, der nicht durch die Approximation erfüllten Bedingungen. Für den ebenen Spannungszustand gilt mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\mu$  für die Dehnungssteifigkeiten

$$\mathbf{D}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.50a)$$

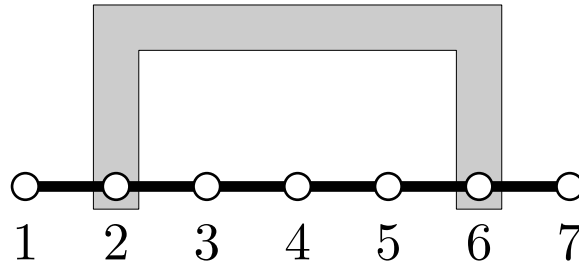
während für den ebenen Verzerrungszustand

$$\mathbf{D}_{\text{EVZ}} = \frac{E(1 - \mu^2)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (2.50b)$$

gilt. Die Verfahrensweisen sind für netzbasierte und netzfreie Methoden prinzipiell gleich.

### 2.3.2 Penalty Methode

Neben der Darstellung der Randbedingungen durch Lagrange-Multiplikatoren ist die Penalty-Methode gebräuchlich. Die Penalty-Methode kann man sich anschaulich vorstellen, als ob ein weiteres Element einer definierten Steifigkeit eingeführt würde, welches die Verschiebung bestimmter Knoten beeinflusst. Dieses Element wird rechnerisch identisch eines normalen Elements behandelt. Abb. 2.5 zeigt ein Penalty-Element, mit dem die Verschiebungen des zweiten und sechsten Knotens “gleichgeschaltet” werden:  $u_2 = u_6$ .



**Abb. 2.5:** Penalty-Element zwischen zweitem und sechstem Knoten

Nach der Grundgleichung  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  ergibt sich mit dem zu wählenden Gewicht  $w$  des Penalty-Elements

$$w \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2^{\text{penalty}} \\ f_6^{\text{penalty}} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Hiermit ergibt sich nun eine geänderte globale Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}$ . Im gezeigten Beispiel

ist

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} + w & K_{23} & 0 & 0 & -w & 0 \\ 0 & K_{23} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 & K_{56} & K_{66} + w & K_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{67} & K_{77} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Auch die Formulierung  $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha$  ist möglich, wobei  $\mathbf{K}^\alpha$  eine Diagonalmatrix mit den Penalty-Gewichten ist. Zur Lösung des Gleichungssystems  $\widehat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}$ , wobei gilt  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  und  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ , muss die Invertierbarkeit von  $\widehat{\mathbf{K}}$  gewährleistet sein. Das Penalty-Gewicht  $w$  kann deshalb nicht unendlich groß gewählt werden. Hierdurch entsteht ein Fehler, im obigen Beispiel  $u_6 - u_2 \neq 0$ , dessen Größe vom elektronisch verarbeiteten Variablentyp abhängt. Für die Galerkin-Formulierung ergibt sich unter Verwendung der Diagonal-Matrix der Penalty-Faktoren

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

der Ausdruck

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{C}(\mathbf{u})^T \alpha \mathbf{C}(\mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad (2.54)$$

## 2.4 Numerische Integration, Gauß-Quadratur

Zur Berechnung der Elementmatrizen, beispielsweise der Steifigkeitsmatrizen, oder zur Erfassung von Kräften, müssen die Ansatzfunktionen aller bezogenen Modellkonzepte integriert werden. Diese Integration geschieht üblicherweise mithilfe der Methode der Gaußquadratur über bestimmte Stützstellen der Ansatzfunktionen. Mithilfe der Gaußquadratur lassen sich generell Integrale der Form

$$\int_a^b F(x)w(x) \, dx \quad (2.55)$$

numerisch lösen. Hierbei wird das Integral durch eine gewichtete Summe

$$\sum_{i=1}^n F(x_i)w(x_i) \quad (2.56)$$

ersetzt. Die Gewichte sind dabei  $w_1$  bis  $w_n$ ,  $x_1$  bis  $x_n$  die Abszissen der Stützpunkte,  $n$  ist der Grad der Quadratur. Näher zur Mitte liegende Stützpunkte werden dabei stärker gewichtet als äußere Punkte, in Abb. 2.6 durch den Radius der Stützstellen dargestellt.

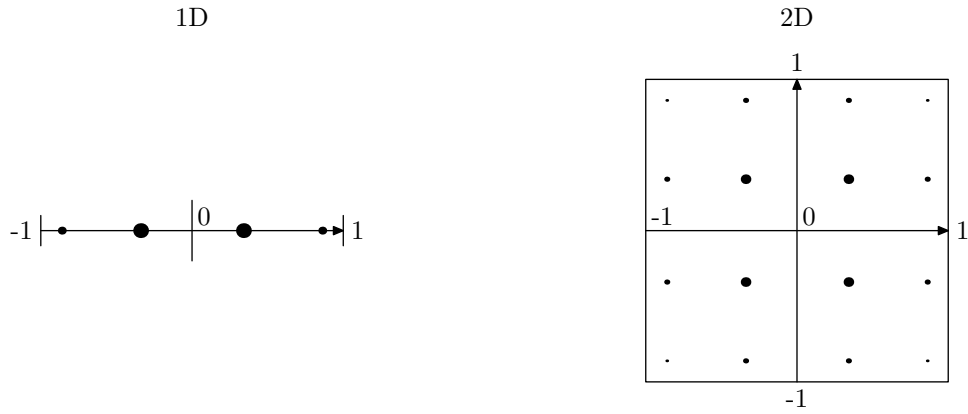


Abb. 2.6: 4-Punkt-Gaußquadratur für 1D und 2D

Eine Gaußquadratur mit nur einer zentralen, mit Faktor 2 gewichteten Stützstelle  $x_{i0}$  entspricht der Trapezregel bzw. Riemann-Summation, Abb. 2.7.

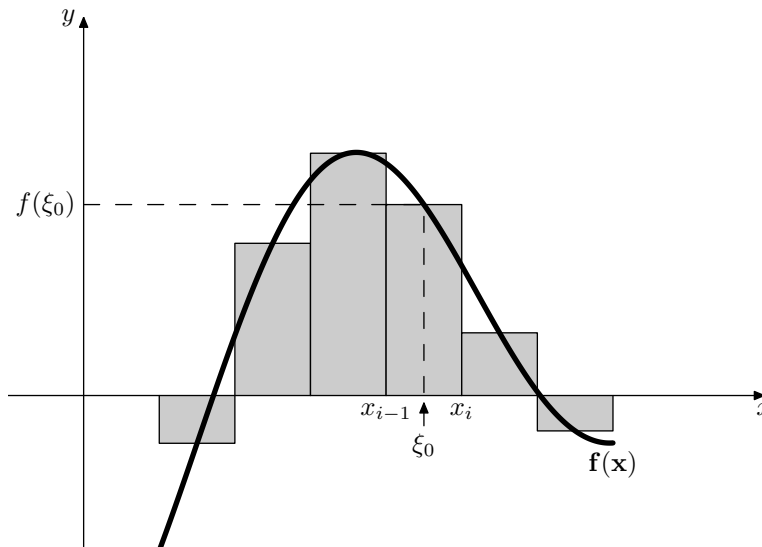


Abb. 2.7: 1-Punkt-Gaußquadratur

Für die Berechnung des Integrals ist somit lediglich die Berechnung von  $n$  Funktionswerten  $f(\xi_i)$  an den Stellen  $\xi_1$  bis  $\xi_n$  jeweils im Intervall  $x_{i-1}$  bis  $x_i$  erforderlich. Diese beziehen sich auf ein Intervall von -1 bis 1. Funktionen sind daher auf dieses Intervall zu projizieren, was mithilfe der Jacobi-Matrix geschieht. Dennoch ist die Gauß-Quadratur ein Verfahren hoher Genauigkeit, soweit die zu integrierende Funktion gut durch ein Polynom approximiert werden kann. Für Polynome vom Grad  $2n$  ist das Verfahren sogar exakt. Zweidimensionale Berechnungen summieren über beide Richtungen, wobei die Gewichte multipliziert werden:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F(x_i, x_j) w(x_i) w(x_j) \quad (2.57)$$



Tabelle 2.1 listet Abszissen und Gewichte für die Quadratur mit 4 Stützpunkten auf, welche in der vorliegenden Arbeit bevorzugt eingesetzt wurde. Für Quadraturen anderer Grade existieren umfangreiche Tabellenwerke.

**Tab. 2.1:** Gewichte und Stützpunktabzissen für 4-Punkt-Gauß-Quadratur

Abszissenwert $\xi_i$	Gewicht $w_i$
-0.861136311594053	0.347854845137454
-0.339981043584856	0.652145154862546
0.339981043584856	0.652145154862546
0.861136311594053	0.347854845137454

## 2.5 Methode der Finiten Elemente FEM

Die konkrete Umsetzung der zuvor beschriebenen Verfahren soll im Folgenden anhand der Methode der Finiten Elemente aufgezeigt werden. Diese weist zahlreiche Parallelen zu der in dieser Arbeit diskutierten Elementfreien Galerkin Methode auf, ist jedoch durch einfacher konstruierte Ansatzfunktionen zunächst leichter zu überblicken. Die Methode der Finiten Elemente löst die schwache Form der Differenzialgleichungen durch Einführung von Ansatzfunktionen unter Ausnutzung des Prinzips der Minimalen Energie beziehungsweise der Virtuellen Verrückungen. Die Methode beruht auf einem Rechnernetz: Die Finiten Elemente sind an ihren Eckpunkten, den Knoten, verbunden. Das Rechnernetz definiert die Konnektivität der Knoten, also den Grad ihrer gegenseitigen Beeinflussung. Der Grundstein zur Entwicklung dieser numerischen Methode wurde in den 1950er Jahren beim Luft- und Raumfahrt-Konzern Boeing mit der Formulierung der vorgestellten Direkten Steifigkeitsmethode gelegt. Deren Grundprinzipien bilden noch immer die Basis auch moderner FEM-Pakete. Bereits in der zweiten Hälfte der 1950er Jahre bestanden FEM-Formulierungen, welche Ansatzfunktionen, isoparametrische Elementformulierungen und Rayleigh-Ritz-Prinzipien aufwiesen. Ihren Weg vom alleinigen Einsatz in der Luftfahrtindustrie hin zu einer breit gefächerten Anwendung in praktisch allen Ingenieurs-Aufgabenfeldern fand die Finite-Elemente-Methode neben Olgierd C. Zienkiewicz [95] vor allem durch John Argyris [4] [5] [6], welcher seit 1959 Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart (heute Universität Stuttgart) tätig war. Aufgrund zahlreicher positiver Eigenschaften ist die Methode der Finiten Elemente heute zum Standardwerkzeug der Ingenieurwissenschaften und Forschung geworden:

- Die Methode der Finiten Elemente ist bewährt und akzeptiert
- Problemlos bei einfachen Geometrien
- Randbedingungen einfach zu implementieren
- Umfangreiche Pakete und Elementbibliotheken verfügbar

Jedoch sind auch Nachteile zu verzeichnen, etwa:

- Generierung des Netzes bei komplexen Geometrien schwierig
- Wandernde geometrische Diskontinuitäten, etwa Risse, nur schwer darstellbar

Die Nachteile wirken sich insbesondere bei Fragestellungen, welche wie in der vorliegenden Arbeit die Behandlung von Diskontinuitäten zum Gegenstand haben, gravierend aus. Auch wenn die automatischen Netzgeneratoren eine starke Weiterentwicklung erfahren haben, so ist ein manuelles Nacheditieren meist unumgänglich; die Netzgeneration ist damit bestenfalls als halbautomatisch zu bezeichnen. Zwar ist eine Triangulation prinzipiell immer möglich, jedoch weisen Dreieckselemente bei gleicher Dichte eine niedrigere Genauigkeit auf als beispielsweise quadrilaterale Elemente, welche jedoch wiederum schwieriger zu vernetzen sind. Eine per FEM durchgeführte Rissanalyse beispielsweise bedarf für jeden Zeitschritt einer erneuten Netzgeneration, da sich die Geometrie des Körpers stets ändert. Im Folgenden wird die Umsetzung der im vorherigen Kapitel eingeführten numerischen Ansätze im Rahmen der Finite Elemente Methode orientiert an [29] dargelegt.

### 2.5.1 FEM-Formulierung mithilfe des Prinzips der minimalen Energie

Grundidee der Methode der Finiten Elemente ist es, das komplexe Kontinuum eines Körpers in eine endliche Zahl kleiner endlicher Elemente definierten Verformungsverhaltens zu unterteilen. Zur Beschreibung dieses Verformungsverhaltens, der Steifigkeit der Finiten Elemente, werden Energiemethoden angewandt. Die Dehnungsenergie eines Volumens  $V$  erhält man mit der Formänderungs-Energiedichte

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.58)$$

welche der Dehnungsenergie pro Volumeneinheit entspricht

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (2.59)$$

zu

$$U_V = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dV \quad (2.60)$$

Im betrachteten eindimensionalen Fall entspricht  $\sigma = E\varepsilon$  und  $\varepsilon = u_{,x} = \frac{du}{dx}$ . Die äußere Arbeit setzt sich zusammen aus

- verteilten Kräften  $p$ , beispielsweise aus Beschleunigungen
- an den Rädern eingeleiteten Kräften  $P$ , etwa Wasserlast, Auflagerreaktionen

Die eingeleiteten Kräfte rufen äquivalente innere Kräfte hervor, sodass sich beispielsweise für die äußere Arbeit  $W$  über die Länge  $L$  eines stabförmigen Körpers notieren lässt

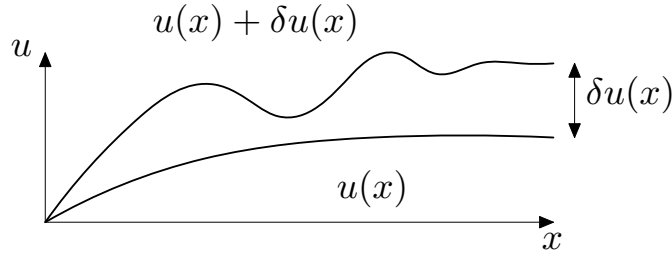
$$W = \int_0^L q u \, dx \quad (2.61)$$

Das Gesamtpotential ergibt sich zu

$$\Pi = U - W \quad (2.62)$$

und hängt nur von der Verformung  $u(x)$  ab. Im Zuge des Energieverfahrens wird nun mit  $u(x) = u^*(x) + \delta u(x)$  über  $u$  variiert, wobei  $u^*(x)$  der exakte Verschiebungsverlauf ist. Die infinitesimale virtuelle Verschiebung  $\delta u(x)$ , die das System in die neue Gleichgewichtslage  $u + \delta u$  verschiebt, muss kinematisch zulässig und möglich sein. Die Randbedingungen, in Beispiel aus Abb. 2.3 mit  $u(0) = 0$  gegeben, müssen eingehalten werden. Weiterhin muss die Variation stetig sein:

$$u(x) \in \mathcal{C}_0 \text{ in } x \in [0, L] \quad (2.63)$$



**Abb. 2.8:** Variation über  $u$

Zur Unterscheidung vom Differenzial  $du$  wird das Symbol  $\delta$  verwendet. Mathematisch darf das Verschiebungsinkrement, von oben genannten Einschränkungen abgesehen, als Differenzial behandelt werden. Zum identisch notierten Kronecker-Delta-Symbol besteht keine Beziehung. Infolge der virtuellen Verschiebungen  $\delta u_i$  stellen sich virtuelle Verzerrungen ein:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.64)$$

Es gilt mit

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (2.65)$$

dass ein deformierter Körper sich dann im Gleichgewicht befindet, wenn die Arbeit infolge einer virtuellen Verrückung der inneren Kräfte  $\delta W_i$  gleich der Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W_a$  ist. Aus der Forderung der kinematischen Zulässigkeit folgert, dass Reaktionskräfte unverschieblicher Auflager hieran keinen Anteil haben. Für elastische Körper gilt

$$\delta W_i = \delta \Pi_i \quad \text{und} \quad \delta W_a = -\delta \Pi_a$$

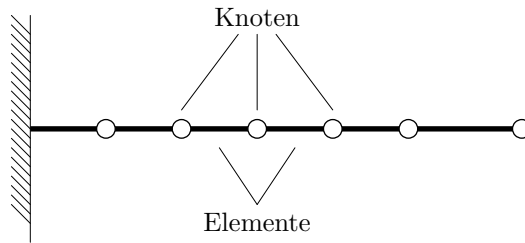
Das Prinzip des Minimums des Gesamtpotentials besagt, dass die exakte Lösung für die Verschiebung  $u^*$  diejenige ist, welche das Gesamtpotential  $\Pi$  minimiert:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.66)$$

Dies ist identisch mit der Aussage, dass das Gesamtpotential eines Körpers in der Gleichgewichtslage minimal ist.

### 2.5.2 Diskretisierung

Bleiben anders als im obigen Beispiel die Eigenschaften, beispielsweise der Querschnitt, nicht über die gesamte Länge konstant, so wird eine Aufteilung in einzelne Elemente, also eine Diskretisierung, nötig. Diese nicht zwingend gleichförmigen Elemente weisen intern konstante Eigenschaften auf und werden im eindimensionalen Fall durch je 2 Knoten, welche sie sich mit benachbarten Elementen teilen, begrenzt. Abb. 2.9 zeigt das diskretisierte Modell eines einseitig eingespannten Balkens wie in Abb. 2.3 dargestellt.



**Abb. 2.9:** Diskretisierung durch Knoten

Das Gesamtpotential des Stabes über die Länge  $L$  setzt sich nun aus den Potentialen der einzelnen Elemente zusammen:

$$\Pi = \Pi^1 + \Pi^2 + \Pi^3 + \Pi^4 + \dots + \Pi^n \quad (2.67)$$

$n$  ist hier die Anzahl der Elemente. Das gilt auch für die Variation

$$\delta\Pi = \delta\Pi^1 + \delta\Pi^2 + \delta\Pi^3 + \delta\Pi^4 + \dots + \delta\Pi^n \quad (2.68)$$

Das Potential des Einzelements ist:

$$\delta\Pi^e = \delta U^e - \delta W^e \quad (2.69)$$

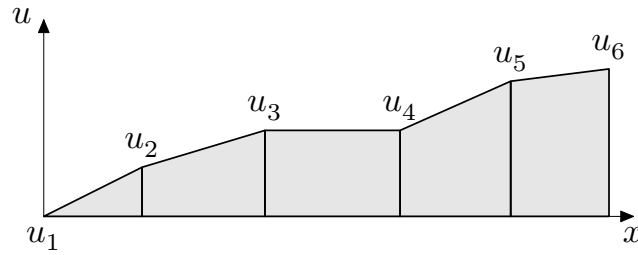
und damit gilt

$$\delta\Pi^1 + \delta\Pi^2 + \delta\Pi^3 + \delta\Pi^4 + \dots + \delta\Pi^n = 0 \quad (2.70)$$

Aus dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung leitet sich ab, dass zur Erfüllung von (2.70) ein Verschwinden der Einzelpotentiale der Elemente erforderlich ist:

$$\delta\Pi^e = 0 \quad (2.71)$$

Da die Eigenschaften der einzelnen Elemente, beispielsweise die Steifigkeit, nicht zwingend identisch sind, ergeben sich lediglich abschnittsweise lineare Verschiebungsverläufe, Abb. 2.10.

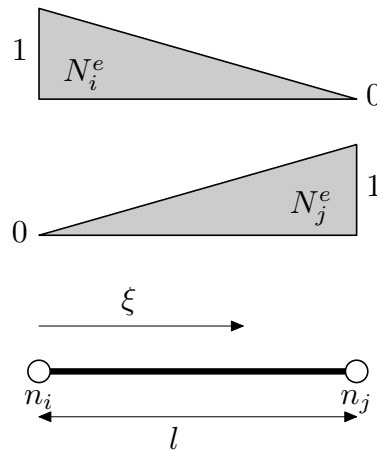


**Abb. 2.10:** FEM Verschiebungs-Diskretisierung

### 2.5.3 Ansatzfunktionen

Das energetische Potential eines Elements ist unmittelbar an den internen Verschiebungsverlauf gebunden. Es muss daher ein Verfahren gefunden werden, welches es ermöglicht, von den (bis dato unbekannten) Verschiebungen der Knoten auf die Verschiebungen an jeder Stelle innerhalb des Elements zu schließen. Dies geschieht mit Hilfe der Ansatzfunktionen, auch Formfunktionen oder Hutfunktionen genannt. Im einfachsten Fall handelt es sich hierbei um keilförmige lineare Funktionen, welche an den Knoten den Wert 1 aufweisen und linear auf 0 am gegenüber liegenden Knoten abnehmen, Abb. 2.11.

$$N_i^e = 1 - \frac{x - x_i}{l} \quad \text{beziehungsweise} \quad N_j^e = \frac{x - x_i}{l} \quad (2.72)$$



**Abb. 2.11:** Lineare Ansatzfunktion

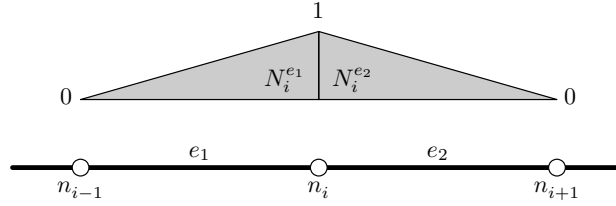
Aus mathematischer Sicht entsprechen die Ansatzfunktionen den Testfunktionen des Petrov-Galerkin-Verfahrens zur Lösung partieller Differenzialgleichungen, Abschnitt 2.2. Ansatz- und Testfunktion sind in diesem Fall identisch. Die Verschiebung an Stelle  $x$

innerhalb des Elements ist damit definiert als Summe der überlagerten Anteile der beiden Ansatzfunktionen der abschließenden Knoten:

$$u^e(x) = N_i^e u_i^e + N_j^e u_j^e = [N_i^e \quad N_j^e] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (2.73)$$

Der Einflussbereich eines Knotens erstreckt sich über die unmittelbar benachbarten Elemente und endet exakt an deren Grenzen, Abb. 2.12:

$$N_i(x) = \begin{cases} N_i^{e1} & x \in e_1 \\ N_i^{e2} & x \in e_2 \\ 0 & x \notin e_1, e_2 \end{cases} \quad (2.74)$$



**Abb. 2.12:** Einflussbereich des Knotens  $n_i$

Zur Vereinfachung wird ein lokales elementinternes Koordinatensystem eingeführt, die natürlichen Koordinaten. Hierbei ist

$$\xi = \frac{x - x_i}{l} \quad \text{und damit} \quad dx = l d\xi \quad \text{sowie} \quad d\xi = \frac{dx}{l} \quad (2.75)$$

Nun lässt sich die Dehnung innerhalb des Elements über die erste Ableitung der Ansatzfunktion in Abhängigkeit der Verschiebungen ausdrücken zu:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{dN_i^e}{dx} & \frac{dN_j^e}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Da die Ansatzfunktionen linear sind und damit deren erste Ableitung konstant, ergibt sich eine über das Element ebenfalls konstante Dehnung. Als Konsequenz weist der Dehnungsverlauf des Körpers an den Knoten Sprünge und damit Unstetigkeiten auf. Dies ist ein wesentlicher Nachteil der Methode der Finiten Elemente in Kombination mit linearen Ansatzfunktionen. Kompensiert werden kann dieses im Widerspruch zum natürlichen Materialverhalten stehende Ergebnis durch

- Hohe Knoten- und Elementdichte, was durch hohen Rechenaufwand erkauft wird
- Elementtypen höherer Ordnung
- Einen “weichzeichnenden” Postprozessor, welcher die Dehnungssprünge glättet, Abschnitt 2.5.5. Hierdurch werden jedoch örtliche Ungenauigkeiten in Kauf genommen.

Mit der Definition der örtlichen Dehnungsmatrix für das betrachtete Beispiel

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

wird (2.76) in Matrizenform notiert zu:

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad (2.78)$$

Mit den nun über die Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der Knoten an jeder Stelle innerhalb des Elements definierten Verschiebungen ergibt sich die Dehnungsenergiedichte eines einzelnen Elements zu

$$U^e = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (2.79)$$

und die externe Arbeit kann über

$$W^e = (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e \quad (2.80)$$

beschrieben werden, wobei  $\mathbf{f}^e$  der Vektor der äußeren Kräfte, welche am Einzelement angreifen, ist. Das Stationärwerden des Potentials des einzelnen Elements nach (2.71) nimmt nun durch die Definition der Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  im Element über die Formfunktionen  $\mathbf{N}$  folgende Gestalt an:

$$\delta \Pi^e = (\delta \mathbf{u}^e)^T \frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{u}^e} = (\delta \mathbf{u}^e)^T [\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e] = 0 \quad (2.81)$$

Im Falle des eindimensionalen Elements mit der Steifigkeit  $EA$  ist

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon EA \varepsilon l \, d\xi \quad (2.82)$$

und

$$\varepsilon = \varepsilon^T = (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{B} \quad (2.83)$$

Die Dehnungsenergiedichte eines Elements lässt sich weiter ausschreiben zu

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} l \, d\xi \quad (2.84)$$

bzw.

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix} \int_0^1 \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} l \, d\xi \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

und kann zusammengefasst zu

$$U^e = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (2.86)$$

Hierin ist  $\mathbf{K}^e$  die örtliche Steifigkeitsmatrix, welche sich in Abhängigkeit der örtlichen Dehnungsmatrix  $\mathbf{B}$  im Falle des eindimensionalen Elements schreiben lässt zu

$$\mathbf{K}^e = \int_0^1 EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} l d\xi = \int_0^1 \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} l d\xi \quad (2.87)$$

Die äußere Arbeit ist das Integral der Belastungen  $q$  längs des Elements, also im Intervall  $[x_i \ x_{i+1}]$ :

$$W^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} qu dx = \int_0^1 q \mathbf{N}^T \mathbf{u}^e l d\xi = (\mathbf{u}^e)^T \int_0^1 q \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} l d\xi = (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e \quad (2.88)$$

Die Beziehung zwischen  $q$  und  $\mathbf{f}^e$  stellt

$$\mathbf{f}^e = \int_0^1 q \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} l d\xi \quad (2.89)$$

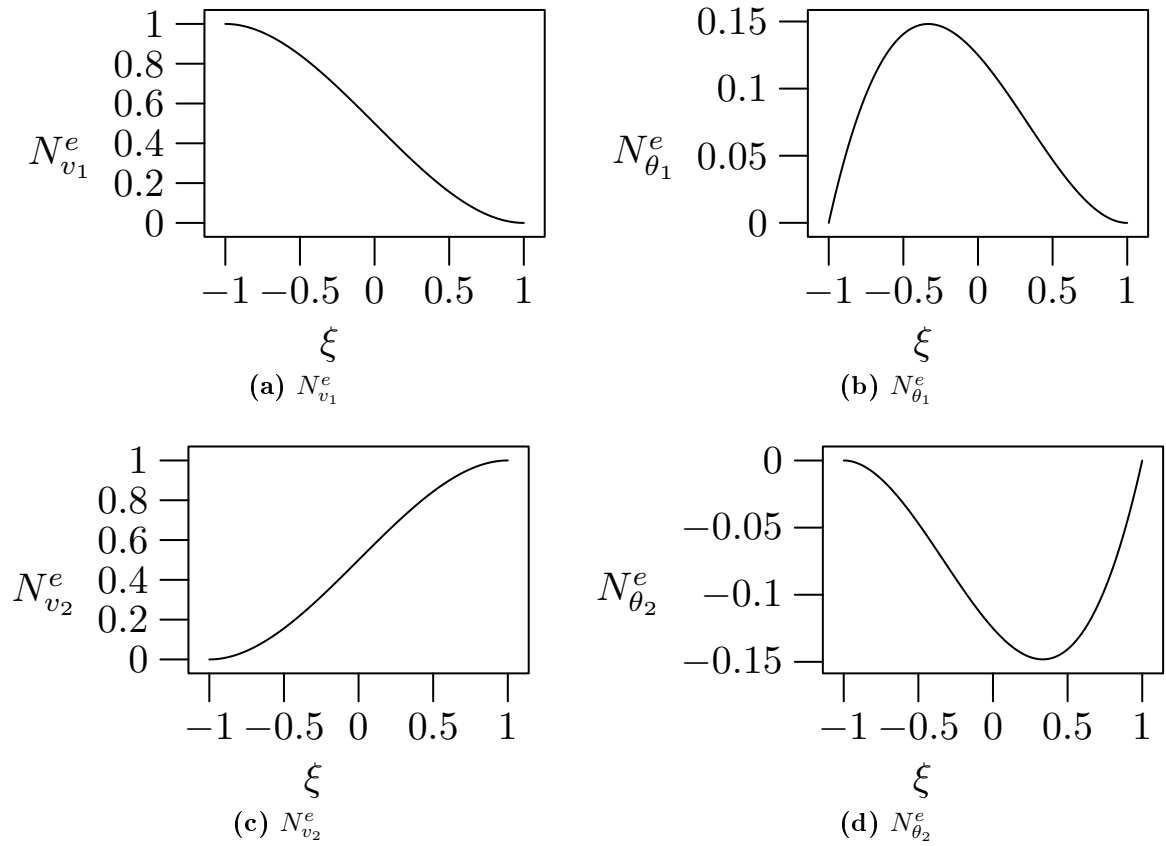
her. Einfache lineare Ansatzfunktionen mit  $\mathcal{C}_0$ -Stetigkeit, also einfacher Ableitbarkeit, können bereits bei einfachen Balkenelementen, welche in ihrem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}^e = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T$  zusätzlich einen Verdrehungs-Freiheitsgrad  $\theta = dv(x)/dx$  aufweisen, nicht mehr eingesetzt werden, da Sprünge in den Verdrehungen zwischen den Elementen nicht zulässig sind. Die verwendeten Formfunktionen müssen also mindestens  $\mathcal{C}_1$ -Stetigkeit aufweisen, d.h. auch die erste Ableitung muss stetig und differenzierbar sein. Für die Interpolation der Verschiebung und Verdrehung über

$$v^e = [N_{v_1}^e \ N_{\theta_1}^e \ N_{v_2}^e \ N_{\theta_2}^e] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e \quad (2.90)$$

ist ein Satz von vier Formfunktionen erforderlich. Mit  $\xi = 2x/l - 1$  im Intervall  $[\xi = -1 \ \xi = 1]$  zwischen den Knoten des Elements der Länge  $l$  erfüllt diese Anforderung beispielsweise folgende Anordnung von Formfunktionen, Abb. 2.13:

$$\begin{aligned} N_{v_1}^e &= \frac{1}{4} (1 - \xi)^2 (2 + \xi) \\ N_{\theta_1}^e &= \frac{1}{8} l (1 - \xi)^2 (1 + \xi) \\ N_{v_2}^e &= \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 (2 - \xi) \\ N_{\theta_2}^e &= -\frac{1}{8} l (1 + \xi)^2 (1 - \xi) \end{aligned} \quad (2.91)$$

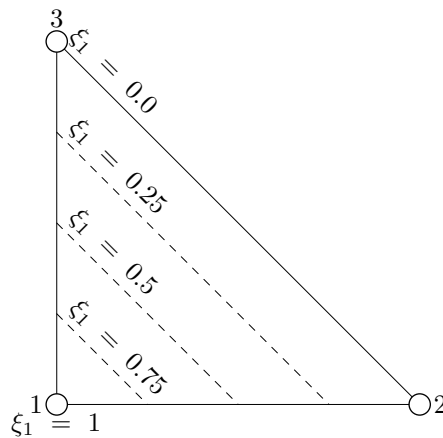




**Abb. 2.13:** Ansatzfunktionen  $N_{v_1}^e$ ,  $N_{\theta_1}^e$  und  $N_{v_2}^e$ ,  $N_{\theta_2}^e$  mit  $C_1$ -Stetigkeit

### 2.5.4 Zweidimensionale Elemente

Äquivalent zu eindimensionalen Elementen werden natürliche Koordinaten eingeführt. Abb. 2.14 zeigt die Koordinate  $\xi$  beispielhaft für den Knoten 1 (links unten) in einem Dreieckselement. Die Formfunktion eines Knotens dieses Elements ist damit  $N_i^e = \xi_i$ .



**Abb. 2.14:** Drei-Knoten-Element mit natürlichen Koordinaten

Zwischen kartesischen und natürlichen Koordinaten besteht im ebenen Dreieckselement mit den Knotenkoordinaten  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  und  $(x_3, y_3)$  der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

(2.92) invertiert ergibt

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} A/3 & y_{23} & x_{23} \\ A/3 & y_{31} & x_{13} \\ A/3 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Hierin ist  $A$  der Flächeninhalt des Dreiecks und  $x_{jk} = x_j - x_k$  bzw.  $y_{jk} = y_j - y_k$ . Aus (2.92) und (2.93) lassen sich die partiellen Ableitungen der Formfunktionen herleiten zu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1} y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} y_{12} \right) \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1} x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} x_{21} \right) \quad (2.95)$$

Wie vor gilt die FEM-Standardformulierung der Parameterinterpolation

$$u_x = \sum_{i=1}^N u_{xi} N_i^e \quad \text{bzw.} \quad u_y = \sum_{i=1}^N u_{yi} N_i^e \quad (2.96)$$

Für die Verschiebungen an einer beliebigen Stelle innerhalb des Dreieckselements ergibt sich damit

$$u_x = u_{x1}\xi_1 + u_{x2}\xi_2 + u_{x3}\xi_3 \quad \text{bzw.} \quad u_y = u_{y1}\xi_1 + u_{y2}\xi_2 + u_{y3}\xi_3 \quad (2.97)$$

Dies ist neben der Verschiebung analog anwendbar für sämtliche Knotenparameter. Allgemein gilt für den isoparametrischen Ansatz:

$$\sum_{i=1}^N N_i^e = 1 \quad (2.98)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Knoten ist. Zwischen jedem Ort mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  innerhalb des Elements gilt der Bezug zu den Koordinaten der Knoten

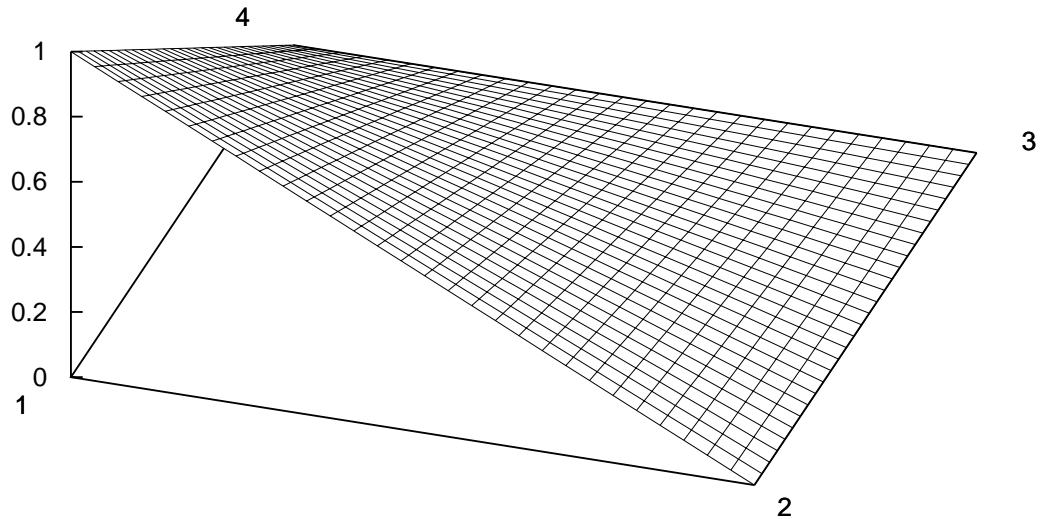
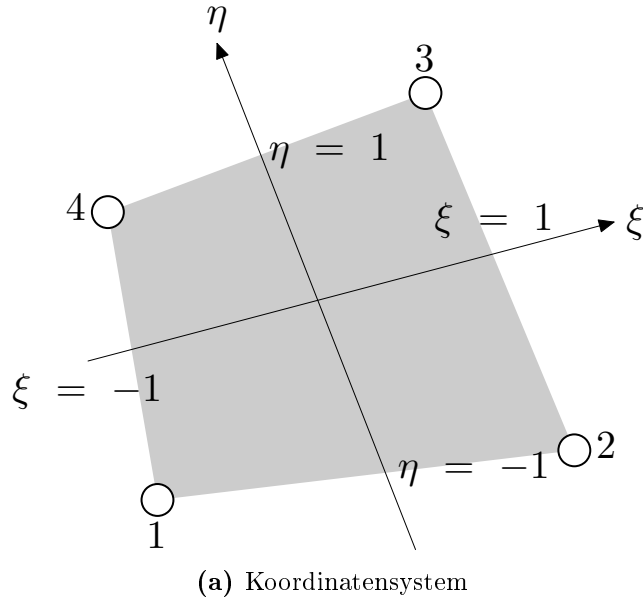
$$x = \sum_{i=1}^N x_i N_i^e \quad \text{bzw.} \quad y = \sum_{i=1}^N y_i N_i^e \quad (2.99)$$

Besonders bei Elementen mit komplexen, eventuell gekrümmten Geometrien mit zahlreichen, auch auf den Kanten liegenden Knoten ist dies hilfreich. Diese Gleichungen

können zu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ u_{x1} & u_{x2} & \cdots & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & \cdots & u_{yn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ \vdots \\ N_n^e \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

kombiniert werden, wobei auch Temperaturfelder, Materialeigenschaften etc. integriert werden können. Analog werden isoparametrische Vierknoten-Elemente dargestellt. Sie besitzen ein  $\eta$ - $\xi$  Koordinatensystem, welches nicht zwingend orthogonal ist, Abb. 2.15.



**Abb. 2.15:** Isoparametrisches Vierknoten-Element

Lineare Formfunktionen eines isoparametrischen Vierknoten-Elements werden beschrieben durch

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Die zugeordneten partiellen Ableitungen, welche beispielsweise zur Ermittlung der Dehnungen benötigt werden, sind:

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.102)$$

Mithilfe der invertierten Jacobi-Matrix lässt sich (2.102) notieren zu:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Die Jacobi-Matrix bildet hierbei die ersten Ableitungen einer Funktion  $f$  in Matrix-Darstellung ab:

$$J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Die örtliche Dehnungsmatrix ergibt sich in dieser Form zu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Für numerisch zu berechnende Integrale ist auch die Jacobi-Determinante  $\det J$  zur Transformation in verschiedene Koordinatensysteme von Bedeutung. Mit ihr können beispielsweise am isoparametrischen Element im Intervall  $[-1, 1]$  per Gauß-Integration durchgeführte Integrale zurück in das globale System transformiert werden. Oft wird in der einschlägigen Literatur nicht sauber zwischen  $J$  und  $\det J$  getrennt. Meist ist mit  $J$  die Determinante der Jacobi-Matrix gemeint. Zusammen mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  nach (2.96) folgen für die Längs- und Querdehnungen  $\varepsilon_{xx}$  bzw.  $\varepsilon_{yy}$  und die Verzerrungen  $\varepsilon_{xy}$  die innerhalb des Elements konstanten Werte

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (2.106)$$

Ebenso ist die örtliche Dehnungsmatrix  $\mathbf{B}$  Bestandteil der örtlichen Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} h \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega^e \quad (2.107)$$

Hierin ist  $h$  die Elementdicke und

$$\mathbf{E}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \quad (2.108a)$$

$$\mathbf{E}_{\text{EVZ}} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\mu) \end{bmatrix} \quad (2.108b)$$

die modifizierten Elastizitätsmodule im Falle des ebenen Spannungszustandes (ESZ) bzw. ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) mit der Querdehnzahl  $\mu$ . Das Gebiet innerhalb des betrachteten Elements bezeichnet  $\Omega^e$ . Das Integral (2.107) wird üblicherweise mit Hilfe der Gaußquadratur berechnet, Abschnitt 2.4.

### 2.5.5 Interpolation der Stützstellen-Parameter

Eine FEM-Rechnung hat den komponentenweisen Betrag des Verschiebungsvektors an den Orten der Stützstellen, also der Knoten oder Gauß-Integrationspunkte im betrachteten Gebiet  $\Omega$  als Lösung der Gleichung  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$  zum Ergebnis. Jedoch ist es erforderlich, eine Aussage beispielsweise betreffend der mechanischen Spannungen in jedem beliebigen Punkt zu erhalten, nicht nur an den Koordinaten der Knoten oder Gaußpunkte. Im Folgenden wird die hierfür notwendige Interpolation der Knotenparameter auf das Gesamtgebiet diskutiert, welche normalerweise im "Postprozessor" stattfindet, einem dem eigentlichen Rechenprozess nachgeordneten Vorgang. Grundsätzlich berechnen sich Dehnung und Spannung in Abhängigkeit der Verschiebung mit dem erweiterten Elastizitätsmodul  $\mathbf{E}$  und der örtlichen Dehnungsmatrix  $\mathbf{B}$ :

$$\varepsilon = \mathbf{Bu} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{EBu} \quad (2.109)$$

Je nach Form und Art der verwendeten Elemente sind zwei Verfahren zum Erhalten des Spannungsvektors an den Knoten üblich:

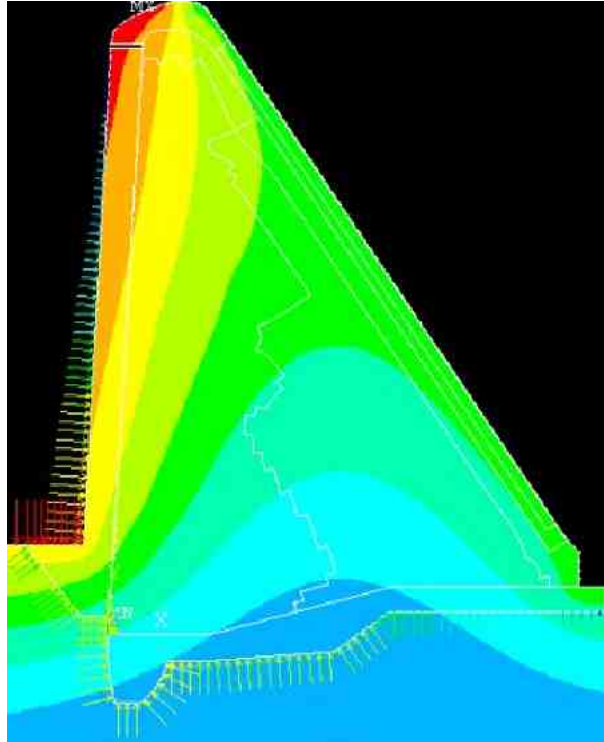
- Direktes Errechnen der Spannungen an den Knoten durch Ersatz der natürlichen Koordinaten innerhalb der Ansatzfunktionen und Einsetzen in (2.109)
- Errechnen der Spannungen an den Gauß-Quadraturpunkten und Extrapolation auf die Knoten

Nach dieser Vorgehensweise liegen die Komponenten der Verschiebungen  $u_{ix}$  und  $u_{iy}$ , der Dehnungen  $\varepsilon_{ix}$  und  $\varepsilon_{iy}$  sowie der Normal- und Schubspannungen  $\sigma_{ix}$ ,  $\sigma_{iy}$  und  $\sigma_{ixy}$  für jeden Knoten an dessen Koordinaten  $(x_i, y_i)$  vor. In ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen interessieren vor allem die Beträge der Spannungen, um die Tragfähigkeit einer Struktur anhand eines Vergleichs mit der entsprechenden Materialkapazität beurteilen zu können. Über eine Summation mithilfe der Ansatzfunktionen, welche für jeden Punkt innerhalb eines Elements die Knotenparameter gewichtet, werden diese Werte für

jede beliebige Koordinate erhalten. Für die Spannungen hätte dies beispielsweise für ein Vierknotenelement die folgende Form:

$$[\sigma_{\xi_{\alpha\beta}}, \sigma_{\eta_{\alpha\beta}}] = [\sigma_{1_{\alpha\beta}} \ \sigma_{2_{\alpha\beta}} \ \sigma_{3_{\alpha\beta}} \ \sigma_{4_{\alpha\beta}}] \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Hierin sind  $(\xi, \eta)$  die natürlichen Koordinaten des Punktes  $(x, y)$  innerhalb des Elements und  $\sigma_1 \dots \sigma_4$  die gewünschte Komponente  $\alpha$  bzw.  $\beta$  der Spannung, also  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  oder  $\sigma_{xy}$  an den Knoten  $1 \dots 4$  des Elements. Die Formfunktionen  $N_1^e \dots N_4^e$  werden nach (2.101) errechnet. Für die netzfreien Methoden gilt dies analog, auch wenn die Ansatzfunktionen mit einem anderen Ansatz hergeleitet werden. In der Methode der Finiten Elemente ergeben sich unter Verwendung linearer Ansatzfunktionen konstante Dehnungen über das einzelne Element. Vor allem für graphische Darstellungen werden diese Sprünge geglättet, indem die Parameter der angrenzenden Elemente gemittelt werden, eventuell in Abhängigkeit der Elementgeometrien gewichtet. Zusammen mit den graphischen Verfahren der Marching Squares, siehe Abschnitt A.3, mit welchem effizient die Isolinien gefunden werden können, ergeben sich weiche Verläufe. Bild 2.16 zeigt beispielhaft den mit diesem Verfahren dargestellten Temperaturgradienten innerhalb eines Talsperrenkörpers von kälteren Zonen im Sohlbereich bis zur aufgrund höherer Wassertemperaturen erwärmten Reservoirseite.



**Abb. 2.16:** Saisonal bedingter Temperaturgradient in Talsperrenkörper

### 2.5.6 Numerischer Ablauf einer FEM-Berechnung

Das Flussdiagramm der Abb. 2.17 zeigt den prinzipiellen Ablauf einer numerischen Berechnung mithilfe der Methode der Finiten Elemente. Grundsätzlich kann dieses Vorgehen als generelle Lösungstechnik gängiger Verfahren angesehen werden, die sich zwischen den einzelnen Methoden nur in Details unterscheidet. So arbeitet beispielsweise die Elementfreie Galerkin Methode nach dem selben Schema, jedoch gibt es keine Vorab-Vernetzung, dafür ist die Konstruktion der Ansatzfunktionen ein umfangreicherer Schritt. Tab. 2.2 gibt Hinweise zu den einzelnen Simulationsphasen.

**Tab. 2.2:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf FEM

Nr.	Erläuterung
1	Grundlegende material- und modellabhängige Parameter wie E-Modul $E$ , Querdehnzahl $\mu$ etc. sind festzulegen. Wahl des Spannungs- oder Verzerungszustandes (Ebener Spannungs- oder Verzerrungszustand). Festlegen der Geometrie und der Dimensionen.
2	Bestimmen des Elementtyps (Form, Anzahl der elementeigenen Knoten, spezielle Eigenschaften). Festlegen der Ansatzfunktionen, beispielsweise keilförmig nach (2.72) oder höher ableitbare wie beispielsweise nach (2.91).
3	Starten des Netzgenerators oder manuelles Einfügen der Knoten. Für jede Änderung der Körpergeometrie erforderlich. Im Falle einer Rissfortschrittsberechnung für jeden Zeitschritt.
4	Füllen der globalen Steifigkeitsmatrix mithilfe der Ansatzfunktionen. Für dynamische Betrachtungen wird die Massenmatrix, und, falls notwendig, die Dämpfungsmatrix erzeugt.
5	Die Gegebenheiten an den freien Rändern fließen in die Formulierung über den $\mathbf{f}$ -Vektor ein, (2.2).
6	Die vorgegebenen Verschiebungen an den Rändern werden in Form der entsprechenden Einträge des globalen Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$ des Gleichungssystems (2.2) gesetzt. Dies kann über Lagrange-Multiplikatoren, Abschnitt 2.3.1, oder über die Penalty-Methode, wie im Abschnitt 2.3.2 dargelegt, geschehen.
7	Nun kann das zentrale Gleichungssystem $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ (2.5) gelöst werden, beispielsweise per Gauß-Algorithmus. Als Ergebnis der hier betrachteten Fragestellungen liegen die Knotenverschiebungen $\mathbf{u}$ vor.
8	Aus den Knotenverschiebungen werden die Spannungen abhängig von den Material- und Modellparametern, beispielsweise E-Modul $\mathbf{E}$ (2.108a) und Querdehnzahl $\mu$ unter Zuhilfenahme der örtlichen Dehnungsmatrix (2.105) über $\sigma = \mathbf{EBu}$ (2.109) an den Knoten berechnet.
9	Im Falle einer statischen Berechnung können die Ergebnisse nun ausgegeben werden. Für instationäre Vorgänge, beispielsweise einer Rissfortschrittsberechnung wird hier verzweigt zum nächsten Iterationsschritt. Abschnitt 6.2.11 gibt hierfür ein Beispiel.

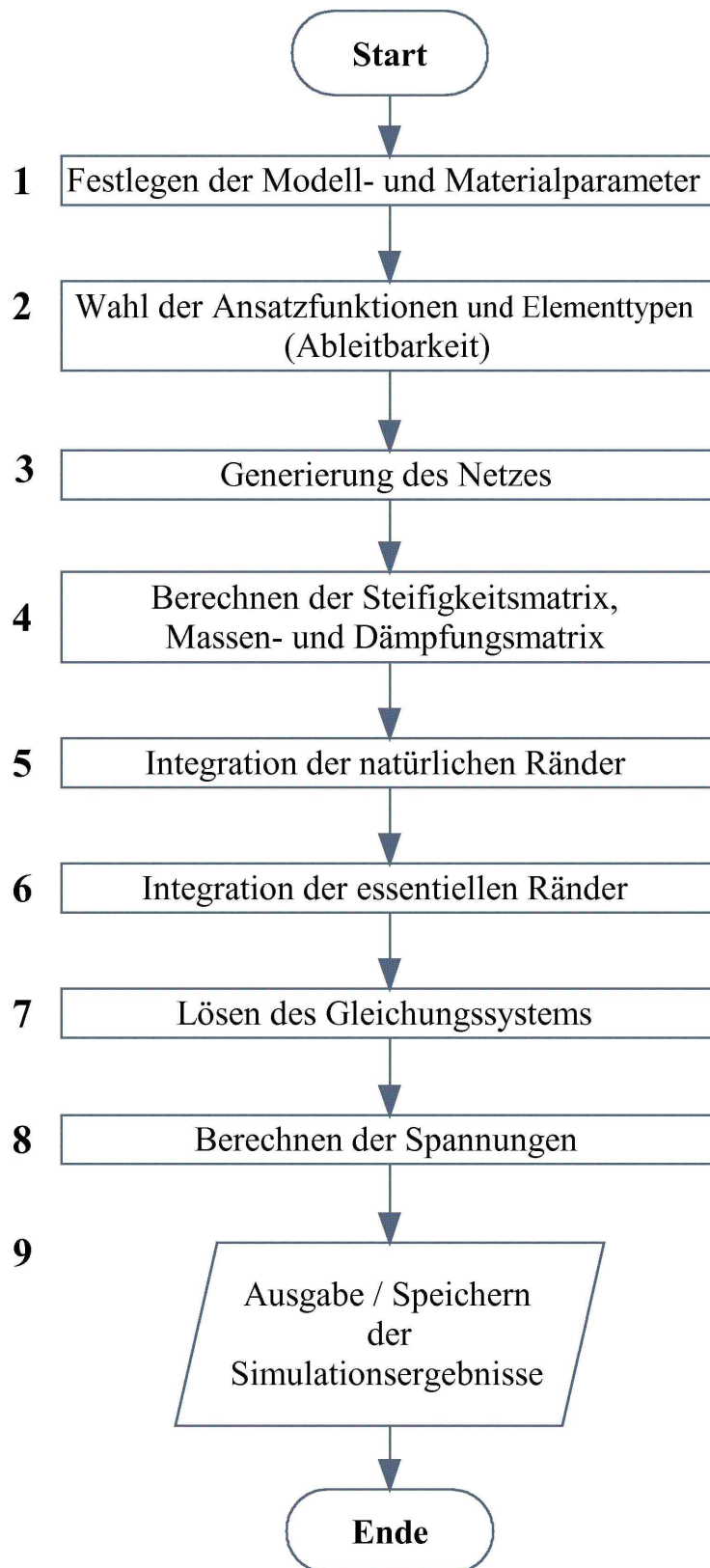
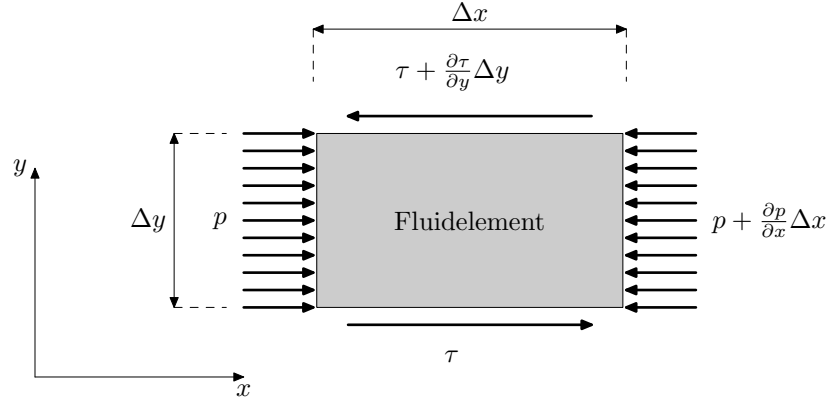


Abb. 2.17: Programmablauf FEM



## 2.6 Methode der Finiten Volumen FVM

Da das in dieser Arbeit diskutierte netzfreie Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics ähnliche Anwendungsbereiche wie die häufig eingesetzte gitterbasierte Methode der Finite-Volumen-Methode (FVM) abdeckt, sollen im Folgenden die Grundlagen der letztgenannten Methode kurz an [9] angelehnt umrissen werden. Es wird als grundsätzliche Idee des Verfahrens der Finiten Volumen von der Impulserhaltung am Fluidelement ausgegangen. Das entsprechende Kräftegleichgewicht in einer der drei Koordinatenrichtungen ist in Abb. 2.18 gezeigt.



**Abb. 2.18:** Gleichgewicht in x-Richtung am infinitesimalen Fluidelement

Das auch “Finite Box Method” genannte Verfahren beruht auf der Eulerschen Formulierung, was bedeutet, dass im Gegensatz zur später vorgestellten Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics die Bewegung des Fluids an stationären Orten beobachtet wird. Das Rechengebiet wird hierfür vollständig in nicht überlappende Kontrollvolumina, den Gitterzellen, endlicher Größe unterteilt, eben den “Finiten Volumen”. Hierbei kann es sich um regelmäßige Quader oder auch Voronoi- oder Delaunay-Zellen, Abschnitt 2.7, handeln. Auch für unstrukturierte Gitter existieren entsprechende Modelle. Die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Fluidelement ergebende Navier-Stokes-Gleichung wird nicht in der differentiellen, sondern integralen Form der Impulserhaltung

$$\int_V \rho \vec{v} dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S (\mathbf{T} - p\mathbf{I}) \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{g} dV \quad (2.111)$$

betrachtet. Dabei ist  $V$  das Kontrollvolumen und  $S$  dessen Oberfläche mit dem senkrecht darauf stehenden, in positiver Richtung vom Körperzentrum nach außen weisenden Normalenvektor  $\vec{n}$ . Der Geschwindigkeitsvektor hat das Symbol  $\vec{v}$ ,  $\vec{g}$  der Vektor der Körperkräfte. Die Änderung der betrachteten Eigenschaft setzt sich also durch Abweichungen im Kontrollvolumen  $V$  und dem Gesamtfluss durch dessen Oberfläche  $S$  zusammen.  $\mathbf{I}$  ist der Einheitstensor, für die Abkürzung  $\mathbf{T}$  gilt mit der Viskositätszahl  $\eta$

$$\mathbf{T} = - \left( p + \frac{2}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} \right) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{D} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] \quad (2.112)$$

Die Parameter werden an Knoten ermittelt, welche im Zentrum der Gitterzellen liegen. Die Kontinuitätsgleichung lautet nach (2.111)

$$\int_V \rho \, dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (2.113)$$

Mit der Massenerhaltung

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.114)$$

und Impulserhaltung

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{f} \quad (2.115)$$

Die integrale Form der Erhaltung einer bestimmten Eigenschaft  $\Phi$  lautet dann

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{KM}} \rho \, d\Omega \quad (2.116)$$

Es wird über das von der Masse  $KM$  belegte Kontrollvolumen  $KV$  integriert. Massenerhaltung etwa wird durch  $\Phi = 1$  erreicht, Impulserhaltung durch  $\Phi = \vec{v}$ . Die Änderung der Eigenschaft  $\Phi$  setzt sich wie erwähnt zusammen aus der Änderung innerhalb des Kontrollvolumens  $KV$  und dem Gesamtfluss von  $\Phi$  durch die Oberfläche  $S$  des Kontrollvolumens

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{KM}} (\rho\Phi) \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{KV}} (\rho\Phi) \, d\Omega + \int_{S_{KV}} (\rho\Phi)(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (2.117)$$

Dies wird angewandt für alle Volumina  $V_i$  über das Gesamtvolumen. Um ein lineares Gleichungssystem zu erhalten, werden die Integrale durch den Mittelwert eines Volumens ausgedrückt:

$$\Phi_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \Phi \, dV \quad (2.118)$$

Aufgrund der Analogie zu Fluidströmungen soll hier als einfaches Beispiel die Verwendung der Methode der Finiten Volumen zur Simulation transienter Wärmeleitung aufgeführt werden. Das Wärmegleichgewicht eines Finiten Volumens ist beschrieben durch

$$\int \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = q_l A - q_r A \quad (2.119)$$

mit der Temperatur  $T$ , der spezifischen Wärmekapazität  $c$ , der Wärmestromdichte  $q_l$  und  $q_r$  durch den linken beziehungsweise rechten Rand des Elements mit Querschnittsfläche  $A$ . Das Volumenintegral des Volumens  $i$  mit Länge  $\Delta x$  lässt sich approximieren durch

$$\rho c \frac{\partial T_i}{\partial t} \Delta x A = q_l A - q_r A \quad (2.120a)$$

$$\rho c \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{q_l A - q_r A}{\Delta x} \quad (2.120b)$$

Der Wärmestrom durch den linken Rand ist gegeben mit

$$q_L = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.121)$$

was zu

$$q_L \approx -k \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.122)$$

approximiert werden kann, wobei  $T_i$  die Temperatur des betrachteten Volumens ist und  $T_{i-1}$  die Temperatur des links liegenden Nachbarvolumens.  $k$  ist die Wärmeleitfähigkeit. Entsprechend gilt für den Wärmestrom zum rechten Element

$$q_R \approx -k \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad (2.123)$$

Für den rechten Teil von (2.120b) gilt damit die Diskretisierung

$$\frac{q_l A - q_r A}{\Delta x} \approx k \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.124)$$

und so

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.125)$$

Mit dem Euler-Zeitintegrationsverfahren ergibt sich aus (2.125)

$$\frac{T_{i,\text{neu}} - T_{i,\text{alt}}}{\Delta t} = \frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1,\text{alt}} - 2T_{i,\text{alt}} + T_{i-1,\text{alt}}}{\Delta x^2} \quad (2.126)$$

Hierbei steht  $T_{i,\text{neu}}$  für die Temperatur des Volumens  $T$  für den nächsten Zeitschritt,  $T_{i,\text{alt}}$  für die Temperatur des Volumens  $T$  des vorhergehenden Zeitschrittes und  $\Delta t$  für die Länge des Zeitschrittes. Für die Temperatur  $T_{i,\text{neu}}$  leitet sich nun ab:

$$T_{i,\text{neu}} = T_{i,\text{alt}} + \Delta t \frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1,\text{alt}} - 2T_{i,\text{alt}} + T_{i-1,\text{alt}}}{\Delta x^2} \quad (2.127)$$

Als Abbruchkriterium der Iteration wird eine zu unterschreitende Differenz  $\delta\varepsilon$  beispielsweise der Form

$$|T_{i,\text{neu}} - T_{i,\text{alt}}| \leq \delta\varepsilon \quad (2.128)$$

der errechneten Parameter des vorhergehenden und aktuellen Zeitschritts festgelegt. Dabei kann es sich um gemittelte Werte oder um Werte gewählter Orte handeln. Dieses Prinzip kann analog zum bisher beschriebenen Verfahren auf zwei Dimensionen erweitert werden, wobei die Zellen wie in Abb. 2.19 gezeigt angeordnet sind.

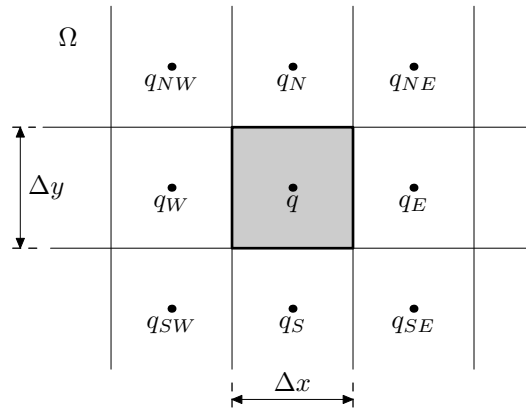


Abb. 2.19: Knoten und Gitter der Finite-Volumen-Methode

Mit einem derartigen Ansatz wurde mithilfe eines einfachen, experimentell im Zuge der vorliegenden Arbeit entstandenen Programmcodes das folgende Beispiel zu Vergleichszwecken berechnet, Abb. 2.20.

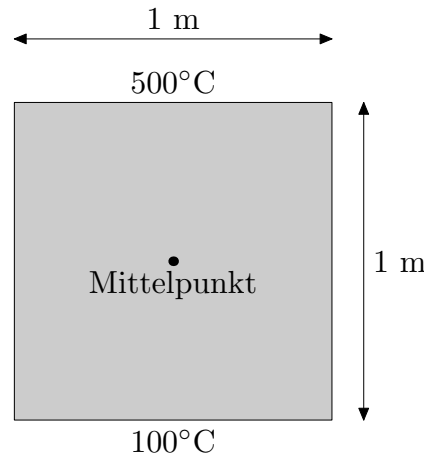
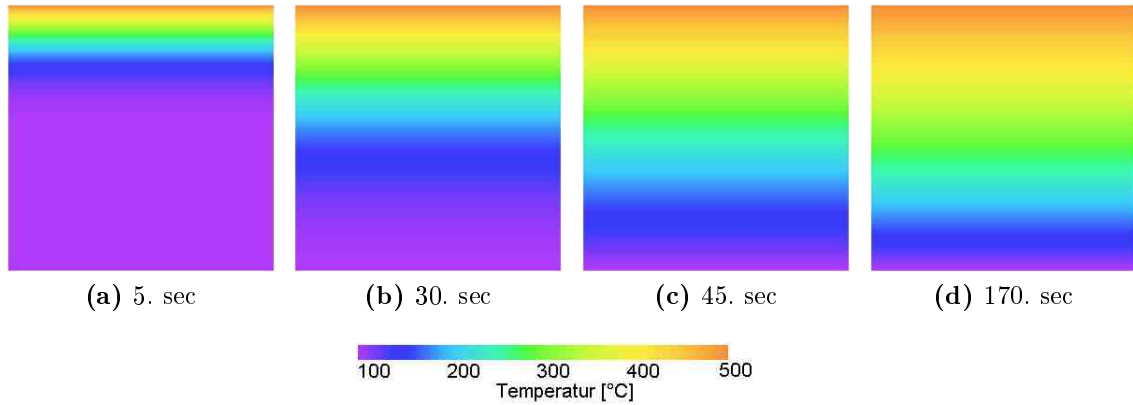


Abb. 2.20: Beispielrechnung mit der Methode der Finiten Volumen

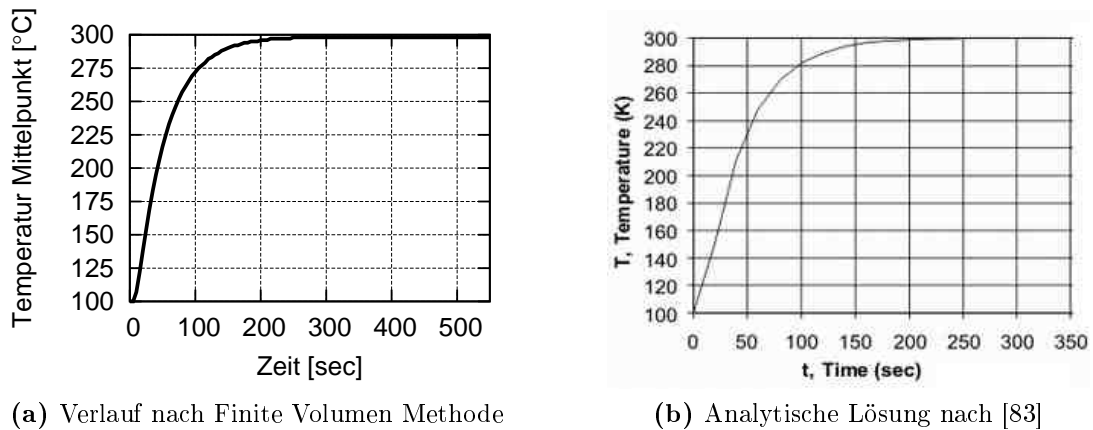
Eine quadratische Platte mit einem Meter Kantenlänge konstanter Dicke wird an einer Seite dauerhaft auf einer Temperatur von 500 °C gehalten, während die gegenüberliegende Seite gleich bleibend 100 °C aufweist. Die beiden anderen Seiten sind ideal isoliert. Als Startbedingung gilt für alle Orte im Körperinneren ebenfalls eine Temperatur von 100 °C. Die Platte wurde mit regelmäßigen, quadratischen Gitterzellen von  $\Delta x = 0,005 \text{ m}$  Kantenlänge diskretisiert. Als Materialkonstanten wurden zum Vergleich mit der nach [83] vorliegenden analytischen Lösung die für Festkörper eigentlich untypischen Werte von  $K = 10,0 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  für die Wärmeleitfähigkeit,  $\rho = 920,0 \text{ kg/m}^3$  für die Dichte und  $C = 2,040 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  für die spezifische Wärmekapazität gewählt. Für die dem in Abb. 2.21 und Abb. 2.22a gezeigten Ergebnis zugrundeliegende Berechnung wurde ein Zeitschritt von  $\Delta t = 0,005 \text{ sec}$  gewählt. In Abb. 2.21 ist der Temperaturverlauf in regelmäßigen zeitlichen Abständen bis ca. 300 Sekunden nach Start über die Fläche der

Platte als farbliche Schattierung zu erkennen. Mit fortschreitender Zeit linearisiert sich der Temperaturverlauf über die Platte, was besonders deutlich zutage tritt, wenn der Graph eines einzelnen Punktes betrachtet wird. Abb. 2.22 zeigt den Verlauf der Temperatur im Mittelpunkt der Platte als Vergleich der FVM-Rechnung mit der analytischen Lösung. Deutlich ist die asymptotische Annäherung an den Mittelwert der beiden thermischen Randbedingungen zu erkennen.



**Abb. 2.21:** Transienter Wärmetransport mit FVM

Abb. 2.22 zeigt die gute Übereinstimmung des so ermittelten Mittelpunkts-Temperaturverlaufs mit der analytischen Lösung nach [83].



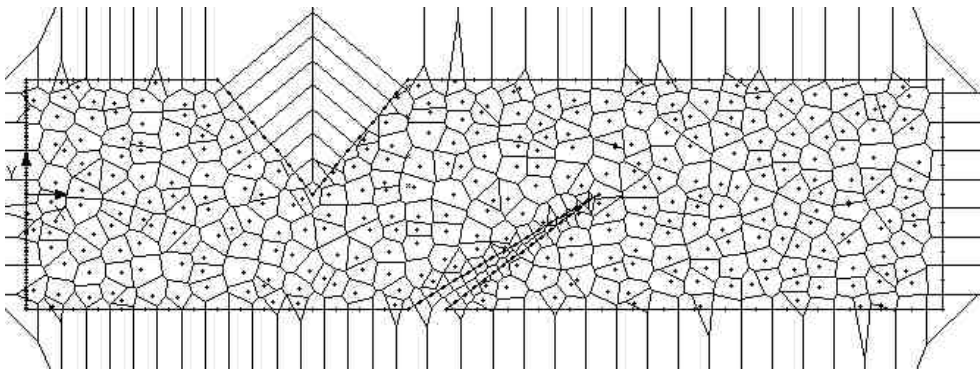
**Abb. 2.22:** Beispielsimulation FVM

Über eine Justage des zeitlichen Intervalls und der räumlichen Auflösung kann ein akzeptabler Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gefunden werden. Bereits mit derart einfachen Ansätzen lassen sich analogen Gesetzen gehorchende Vorgänge des Wasserbaus, beispielsweise die Unterströmung von Bauwerken, analysieren. Wesentlicher Nachteil des Verfahrens der Finiten Volumen ist, wie bei der Methode der Finiten

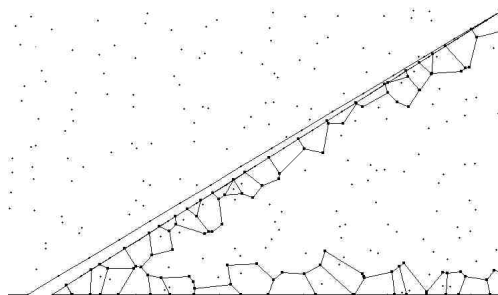
Elemente ebenfalls zu verzeichnen, die Notwendigkeit eines Rechnernetzes. Zwar ist die Methode nicht an regelmäßige Zellen gebunden, zugrunde liegen können, wie eingangs erwähnt, auch unstrukturierte Gitter oder auch Voronoizellen, Abschnitt 2.7, dennoch ist die Erzeugung eines solchen Netzes bei komplexen Konstellationen ein zeitaufwändiger Vorgang. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit das netzfreie Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics diskutiert, welches kein Rechnernetz voraussetzt und daher unter diesem Gesichtspunkt günstiger erscheint.

## 2.7 Voronoi-Diagramm

Alternativ zu integralen Methoden kann die Gewichtung einzelner Knoten auch über eine zugeordnete Fläche erfolgen. So kann beispielsweise jedem Knoten direkt eine bestimmte Masse zugeordnet werden, wie es für dynamische Berechnungen erforderlich ist. Bei ungeordnet verteilten Knoten netzfreier Methoden kann eine solche Gewichtung durch das Voronoi-Diagramm erfolgen. Das Voronoi-Diagramm ist damit eines der gebräuchlichsten Verfahren, um zufällig verteilte Knoten zu vernetzen und ihnen einen bestimmten Flächenanteil zuzuordnen. Beispielsweise wird es aufgrund dessen auch zur Planung von Mobilfunknetzwerken eingesetzt. Viele Netz-Generatoren, wie sie auch zur Erzeugung des Netzes der Methode der Finiten Elemente eingesetzt werden, basieren auf diesem Diagramm.



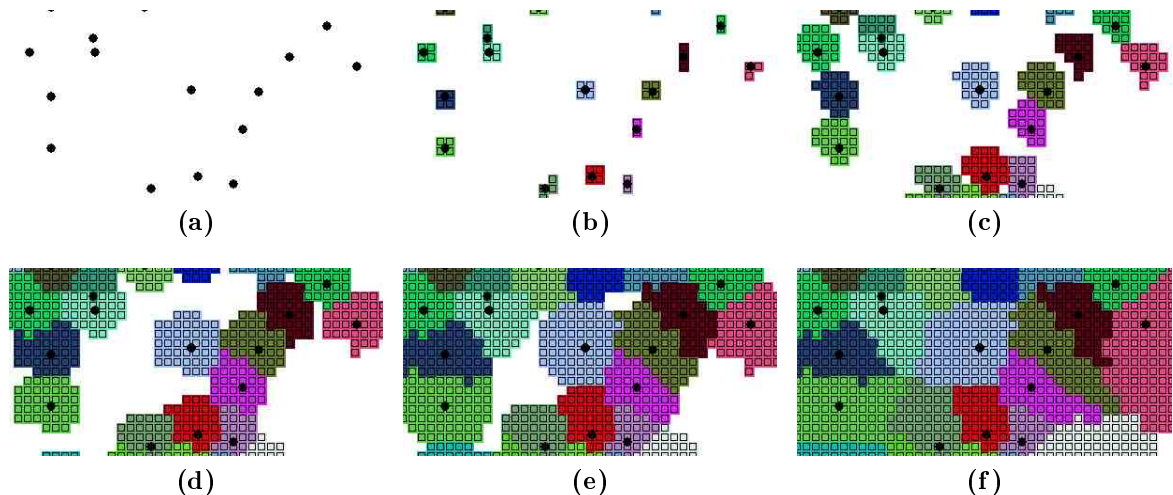
(a) Voronoi-Diagramm



(b) Begrenzung

**Abb. 2.23:** Voronoidiagramm einer komplexen Geometrie

Jede Zelle eines Voronoi-Diagramms umfasst alle Koordinaten, die ihrem zentralen Punkt näher sind als allen anderen Punkten. Die Linien der Zellenränder haben zu mehreren Punkten die gleiche Entfernung. Ein Voronoidiagramm ist damit prinzipiell nicht begrenzt. Die Begrenzung an den Körperperrändern gestaltet sich insbesondere bei komplexen Geometrien äußerst aufwändig. Abb. 2.23a zeigt ein mit herkömmlichen Algorithmen, beispielsweise dem Sweep-Line-Verfahren [32], erzeugtes Voronoi-Diagramm eines quaderförmigen Körpers mit einer Einkerbung auf der Oberseite und einem schrägen dünnen Spalt ausgehend von der Unterkante: Das Voronoi-Diagramm ist an Körpereinkerbungen nicht unterbrochen. Den dort liegenden Knoten würde also zuviel Fläche zugewiesen. In der für diese Arbeit entwickelten Software wurde ein Algorithmus für die Begrenzung des Voronoi-Diagramms implementiert. Mit dessen Hilfe ist es möglich, auch den Randpunkten korrekte Flächen zuzuweisen, Abb. 2.23b. Sibson [78] entwickelte auf Basis des Voronoi-Diagramms die Natural-Neighbour-Methode. Sie wird trotz der Verwendung von Voronoi-Zellen und der damit vorausgesetzten Delauney-Triangulation den netzfreien Methoden zugeordnet. De facto wird damit jedoch der gleiche Algorithmus genutzt, wie er beispielsweise vielen Netzgeneratoren der Finite Elemente Methode zugrunde liegt. Damit geht mit der notwendigen, relativ aufwändigen Erzeugung der Zellen der bedeutendste Vorteil der netzfreien Methoden gegenüber anderen numerischen Methoden, eben die wirkliche Netzfreiheit, verloren. Auch wenn eine Triangulation prinzipiell immer möglich ist, können ungünstige Elementgeometrien das Ergebnis negativ beeinflussen. Daher wurde während der Entwicklung der dieser Arbeit zugeordneten Software mit einem Verfahren experimentiert, welchem die Beobachtung der Ausbildung eines Voronoi-Musters in zahlreichen Vorgängen in der Natur zugrunde liegt: Biologische Zellverbände beispielsweise bilden ein solches Muster, auch Konvektionszellen (Bénard-Zellen) bilden ein Voronoidiagramm aus. Territorien bestimmter Tierarten, beispielsweise des Maulbrüter-Fischs (*Tilapia mossambica*), haben die Form von Voronoi-Zellen [8].



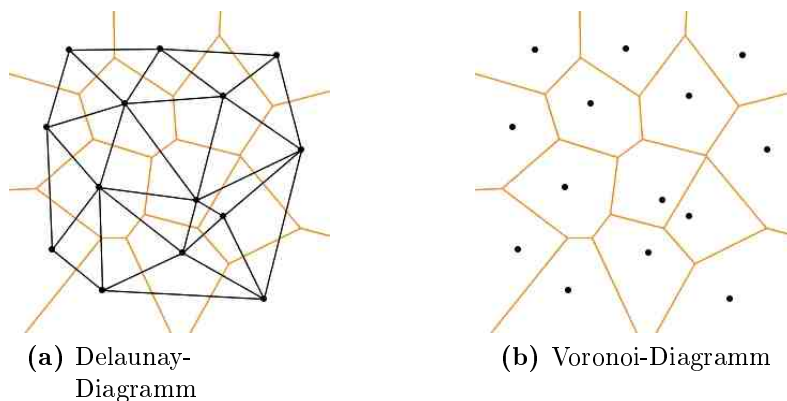
**Abb. 2.24:** Einfache Erzeugung eines Voronoi-Diagramms

Alle genannten Vorkommen des Voronoi-Musters haben ihre Ursache in einem zentral

beginnenden, radial gleichmäßig expandierenden Ausbreitungsvorgang, welcher an Kontaktstellen zu einem gleichartigen und -schnellen Vorgang des Nachbarzentrums zum Stehen kommt. Dieser Vorgang wurde programmtechnisch derart nachgebildet, dass ausgehend von den Knoten als Zentren um diese herum mit zunehmendem Radius Zellen eines regelmäßigen quadratischen Rasters “für den Knoten vereinnahmt” werden. Dies kann nur dann geschehen, wenn die betreffende Rasterzelle noch nicht einem anderen Knoten zugeordnet wurde und innerhalb des Körpers liegt. Damit kommt das Wachstum der Voronoizellen zum Stillstand bei gegenseitigem Kontakt oder Erreichen der Körpergrenzen. Abb. 2.24 stellt diesen Vorgang in grobem Raster dar. Über die Anzahl der zu einem Knoten gehörenden Rasterzellen kann der Flächeninhalt der erhaltenen Voronoizelle bestimmt werden. Die Kantenlänge der Rasterzellen ist beliebig zu verkleinern, womit hohe Präzision erreicht werden kann. Die einfache Implementierung und unproblematische Erfassung auch komplizierter Körpergeometrie wird allerdings durch relativ hohe Rechenzeiten erkauft.

## 2.8 Generation des Element- oder Gitternetzes netzbasierter Methoden

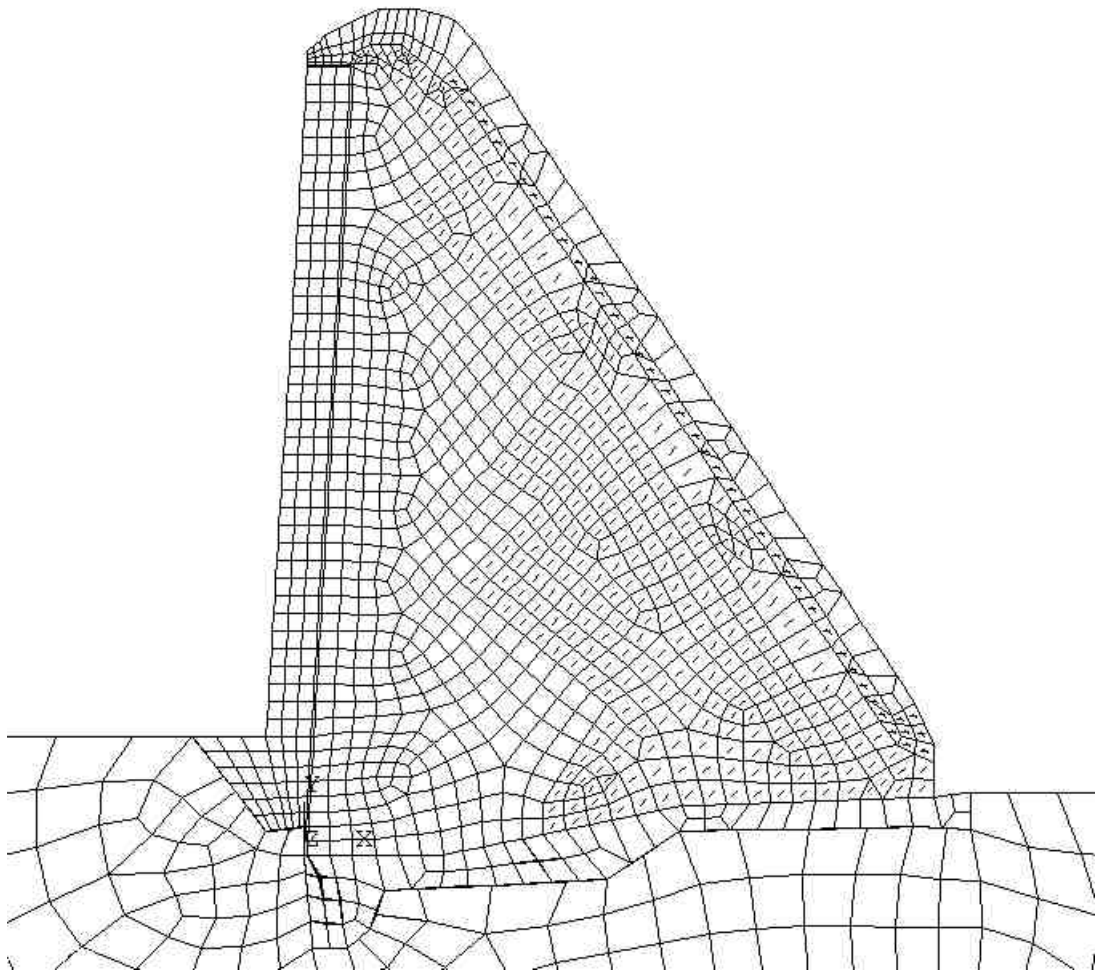
Nur bei einfacheren Geometrien, kleinen Gebieten und geringen Auflösungen ist eine manuelle Platzierung der Knoten möglich. Für übliche Problemstellungen im Umfang gewöhnlicher FEM- oder FVM-Anwendungen scheitert dies aufgrund der Vielzahl der nötigen Elemente. Daher kommen automatische Netzgeneratoren zum Einsatz. Oft basieren diese auf der Delaunay-Triangulation: Man verbindet alle erzeugenden Punkte derart, dass innerhalb des Kreises, auf welchem die drei Dreieckspunkte liegen, keine anderen Punkte enthalten sind, Abb. 2.25a. Damit ist das Delaunay-Diagramm sehr verwandt mit dem Voronoi-Diagramm, welches entsteht, wenn man die Fläche unter einer Punktwolke derart in konvexe Polygone unterteilt, dass jedes dieser Polygone exakt einen erzeugenden Punkt enthält und jeder Ort in diesem Polygon näher an diesem Punkt ist als an allen anderen Punkten, Abb. 2.25b.



**Abb. 2.25:** Voronoi- und Delaunaydiagramm, Quelle: [88]



Mit dieser Art mittlerweile hoch entwickelter Netzgeneratoren lassen sich auch Netze variierender Auflösung unterschiedlichster Geometrien erzeugen. Dennoch bedürfen automatisch generierte Netze komplizierterer Geometrien im Regelfall der manuellen nachträglichen Bearbeitung. Damit kann die Knotendichte angepasst und die Geometrie der Elemente günstiger gestaltet werden. Diese nötige Anpassung ist als ein wesentlicher Nachteil der Methode der Finiten Elemente oder Finiten Volumen gegenüber den netzfreien Methoden, welche in diesem Punkt wesentlich einfacher zu automatisieren und stabiler sind, zu sehen, da sie sehr zeitaufwändig und damit kostenintensiv ist. Besonders zum Tragen kommt dies, wenn über viele Zeitschritte iteriert werden muss, wie dies beispielsweise bei der Berechnung des Fortschreitens eines Risses der Fall ist. Ein Beispiel eines manuell editierten Netzes finiter Elemente eines Talsperrenmodells gibt Abb. 2.26.



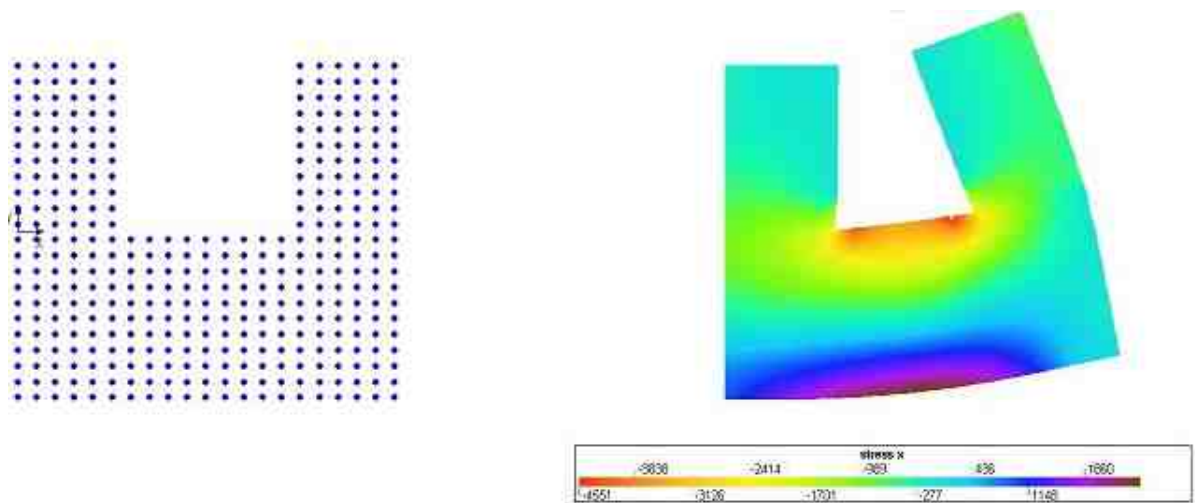
**Abb. 2.26:** Finite-Elemente-Netz des Modells einer kleineren Talsperre

# 3 Elementfreie Galerkin Methode

## EFGM

Die Elementfreie Galerkin Methode approximiert Knoten-Parameter auf Basis des Galerkin-Verfahrens. Dies ist auch bei der Methode der Finiten Elemente der Fall, jedoch wird die Konnektivität der Knoten nun nicht durch ein Netz, sondern über das oberflächenbildende Verfahren der Moving Least Squares-Interpolation mit überlappenden Einflussgebieten der Stützstellen hergestellt. Prinzipiell besteht damit der Unterschied beider Methoden darin, dass das Verfahren der Finiten Elemente ein vorab erstelltes elementbasiertes Netz und elementbasierte Ansatzfunktionen zur Aufstellung der Systemgleichungen nutzt, während dies im Elementfreien Galerkin-Verfahren einzig auf Basis von Knoten während des eigentlichen Prozesses geschieht. Die Finiten Elemente diskretisieren ein Gebiet, während dieses im elementfreien Verfahren von den Knoten repräsentiert wird. Sind jedoch einmal die globalen Matrizen aufgestellt, verläuft die weitere Rechnung in beiden Verfahren analog. Der wesentliche Schritt von der Methode der Finiten Elemente zur Elementfreien Galerkin Methode ist damit die Anpassung des Galerkin-Verfahrens an die Moving-Least-Squares-Interpolation. Diese Interpolation bildet eine stetige Funktion auf Basis beliebig verteilter Stützstellen. Das Entfallen eines Netzes bietet zahlreiche Vorteile. So ist keine oder nur geringe manuelle Nacharbeit erforderlich, da die Knoten fast beliebig angeordnet werden können, solange die für die gewünschte Konvergenz erforderliche Knotendichte in Relation zu den Stützstellenradien eingehalten wird. Weiterhin eignet sich das Verfahren aufgrund der hierdurch einfach möglichen Implementierung besonders zur Behandlung von Diskontinuitäten wie Rissen und örtlich veränderlichen Körpergrenzen. Im Vergleich mit der Methode der Finiten Elemente ist die Genauigkeit des Verfahrens bezogen auf die Knotenanzahl höher: Zwar ist der Rechenaufwand größer, jedoch ist das Verhältnis von Rechenzeit zur Abweichung der Approximation von der exakten Lösung vorteilhafter. Dies drückt sich beispielsweise auch in der guten Auflösung steiler Gradienten aus. Nachteilig ist die aufwändigere Implementierung der Randbedingungen sowie die schwierigere Abbildung von Materialgrenzen aufgrund der Glättung durch das Interpolationsverfahren. Die Elementfreie Galerkin Methode wurde von Belytschko et. al. 1994 vorgestellt [10] und stellt eine Weiterentwicklung der Diffuse Elemente Methode (DEM) dar, welche 1992 von Nayroles, Touzot und Villon initiiert wurde [62]. Die Diffuse Elemente Methode weist in ihrer Art eine Funktion über gegebenen unvernetzten Knoten zu approximieren ebenfalls Ähnlichkeiten mit der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) auf, wo ähnliche Knoten-Wichtungsfunktionen verwendet werden, welche dort jedoch direkt zur Herstellung der Konnektivität der Stützstellen dienen und nicht in eine weitere, die eigentliche Ansatzfunktion bildende Interpolation einfließen. Vielmehr stellt die unmittelbare

gewichtete Summierung schon den Vorgang der Integration der schwachen Smoothed Particles Hydrodynamics-Formulierung dar. Dieser findet innerhalb der an dieser Stelle diskutierten Elementfreien Galerkin Methode erst zum Zeitpunkt der Zusammenstellung der diskreten Gleichungen statt, woraus sich die Notwendigkeit einer bestimmten Mindestanzahl gleichzeitig betrachteter Knoten ergibt. Die Elementfreie Galerkin Methode verwendet mit dem genannten Interpolationsprozess analoge Grundkonzepte hinsichtlich der Erzeugung der Ansatzfunktionen wie die Diffuse Elemente Methode, jedoch fanden einige Modifikationen zum Erreichen höherer Genauigkeit Eingang. Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft das Modell mit den Knoten innerhalb eines U-förmigen Körpers unter bestimmter Krafteinwirkung und einen durch dieses Verfahren gewonnenen Spannungsverlauf.



**Abb. 3.1:** Beispiel eines EFGM-Modells des entwickelten Programms; Knoten und erhaltener Spannungsverlauf

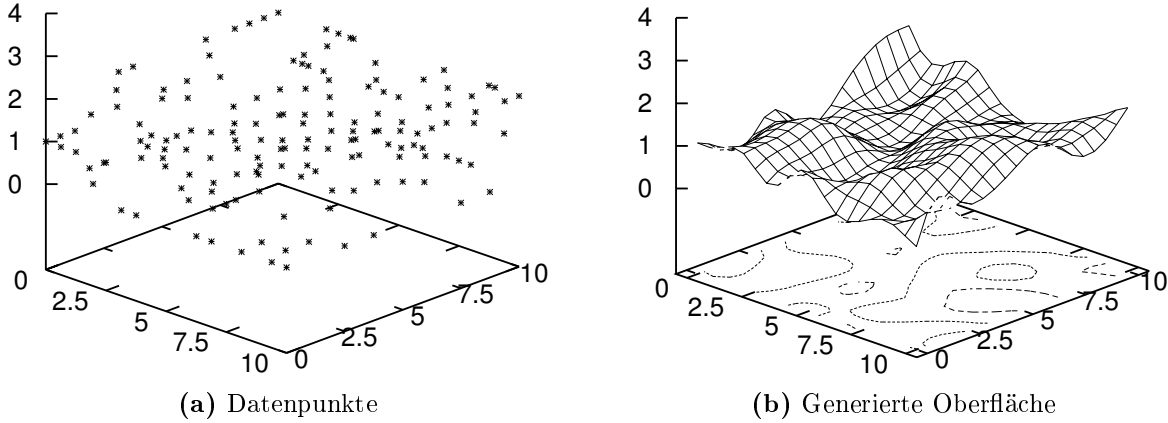
## 3.1 Ansatzfunktionen

Die Elementfreie Galerkin Methode ist in ihrem grundsätzlichen Vorgehen der Methode der Finiten Elemente ähnlich. Der wesentliche Unterschied liegt in der Konstruktion der Ansatzfunktionen. Bedingt durch das fehlende Netz haben die Ansatzfunktionen in diesem Verfahren die Funktion, eine Knoten übergreifende Konnektivität herzustellen. Im Folgenden wird die Konstruktion der Ansatzfunktionen, mit denen der Einfluss eines bestimmten Knotens bezüglich eines bestimmten Ortes innerhalb des betrachteten Gebiets  $\Omega$  bestimmt wird, durch das Verfahren der Moving Least Squares in Anlehnung an [12] beschrieben.

### 3.1.1 Die Moving Least Squares Interpolation

Das Verfahren der Moving Least Squares (MLS) wurde 1981 von Lancaster und Salkauskas [44] vorgestellt. Dieser Ansatz erzeugt aus unregelmäßig verteilten Knoten eine

stetige Funktion. Abb. 3.2 zeigt ein Beispiel der Generierung einer Oberfläche aus diskreten Punkten.



**Abb. 3.2:** Oberflächenbildung durch MLS

Die Betrachtung findet beim Verfahren der Moving Least Squares nicht gleichzeitig über alle Punkte statt, sondern bezieht jeweils nur Punkte mit ein, die innerhalb eines Fensters liegen. Dieses Fenster wird förmlich in Form einer Knoten-Wichtungsfunktion über das gesamte Gebiet geschoben, womit sich die Bezeichnung des Verfahrens erklärt. Damit wird eine Funktion  $u(x)$  mit der Approximation  $u^h(x)$  angenähert. Die Methode hat drei wesentliche Komponenten:

- die Wichtungsfunktion  $w$  jedes Knotens mit endlicher Ausdehnung
- die aus einem Polynom bestehenden Basis  $\mathbf{p}$
- eine Anzahl ortsabhängiger Koeffizienten  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

Jedem Knoten wird ein Parameter  $u_I$  zugeordnet, welcher die Bildung der Approximation bestimmt. Im Unterschied zur Methode der Finiten Elemente gilt jedoch  $\mathbf{u}_I \neq \Phi(\mathbf{x}_I)\mathbf{u}$ , Knotenparameter  $\mathbf{u}_I$  und Approximation  $\Phi(\mathbf{x}_I)\mathbf{u}$  liegen also nicht aufeinander. Damit begründet sich auch die Notwendigkeit einer besonderen Behandlung der Randbedingungen. Die Approximation wird durch ein Polynom, die Basis, gebildet. Es gibt verschiedene Typen dieses Polynoms. Für eine lineare Basis im eindimensionalen Fall gilt beispielsweise

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}) + a_1(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Ein Beispiel einer quadratischen Basis ist

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}) + a_1(\mathbf{x})\mathbf{x} + a_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^2 \quad (3.2)$$

Es existiert eine Vielzahl möglicher Ansätze. Die Ausdrücke (3.1) und (3.2) können allgemein notiert werden in der Form

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

### 3 Elementfreie Galerkin Methode EFGM

Die Basis  $\mathbf{p}$  ist ein Polynom vom Grad  $m$ :  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ . Für (3.1) gilt dann  $\mathbf{p}^T = [1 \ x]$ , für (3.2)  $\mathbf{p}^T = [1 \ x \ x^2]$ . Für ebene Probleme sind folgende Basen gebräuchlich:

$$\mathbf{p}^T = [1 \ x \ y] \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{p}^T = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy] \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{p}^T = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \ x^3 \ y^3 \ x^2y \ xy^2] \quad (3.4c)$$

Die unbekannten Koeffizienten  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , deren Anzahl vom Grad der Basis abhängt, werden gefunden durch Minimieren der Funktion

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \quad (3.5)$$

Hierin ist  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$  das Gewicht eines Knotens an der Stelle  $\mathbf{x}_I$  in Bezug auf den Ort mit dem Koordinatenvektor  $\mathbf{x}$ . Dieses Gewicht ist abhängig vom Einflussradius des Knotens. Liegt der Bezugspunkt außerhalb des durch den Einflussradius beschriebenen Gebiets, so ist  $w = 0$ . Das Funktional (3.5) wird minimiert in Abhängigkeit zu  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , es gilt daher die Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})} = 0 \quad (3.6)$$

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.7)$$

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  ist hierbei der Vektor der Knotenparameter, welche beispielsweise die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_I)$  bestimmen. Für die Matrix  $\mathbf{A}$  gilt

$$\mathbf{A} = \sum_{I=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (3.8)$$

während Matrix  $\mathbf{B}$  durch

$$\mathbf{B} = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (3.9)$$

definiert ist. Im eindimensionalen Fall mit  $\mathbf{p} = [1 \ x]$  wäre (3.8) ausgeschrieben

$$\mathbf{A} = w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} + \dots + w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

(3.9) stellt sich unter gleichen Bedingungen zu

$$\mathbf{B} = \left[ w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \end{bmatrix} \right] \quad (3.11)$$

dar. Durch Einsetzen von (3.7) in (3.3) ergibt sich

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.12)$$

Mit

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

kann (3.12) kurz

$$\mathbf{u}^h = \Phi\mathbf{u} \quad (3.14)$$

formuliert werden.  $\Phi$  ist die Ansatzfunktion. Diese wird zum gleichen Zweck wie eine Ansatzfunktion in der Methode der Finiten Elemente eingesetzt, Abschnitt 2.5.3, erstreckt sich jedoch im Unterschied zur genannten elementbasierten Methode über mehrere Knoten. Die Verschiebung  $\mathbf{u}_p$  an einem beliebigen Punkt  $p$  innerhalb des Gebietes wird nach (3.14) mit

$$\mathbf{u}_p = \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \quad (3.15)$$

approximiert. Der Index  $i$  läuft bis zur Anzahl  $n$  der Knoten-Einflussbereiche, in denen der Punkt  $p$  liegt. Zur Gewinnung der Ableitung  $\mathbf{u}_{,\mathbf{x}}$  der örtlichen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  benötigt man die Differenzierung  $\Phi_{,\mathbf{x}}$  der Ansatzfunktion. Die Ableitung von  $\Phi$  in Richtung  $i$  wird erhalten durch

$$\Phi_{,i} = \mathbf{p}_{,i}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i} \quad (3.16)$$

Hierin ist die Inverse der Ableitung der  $\mathbf{A}$ -Matrix  $\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1}$ . Zur Berechnung der Ansatzfunktionen muss demnach die  $\mathbf{A}$ -Matrix invertiert werden. Dies ist bei zwei oder mehr räumlichen Dimensionen ein numerisch aufwändiger Vorgang. Belytschko [12] schlägt folgendes Verfahren vor, welches auf der Rechts-Links-Zerlegung der  $\mathbf{A}$ -Matrix beruht: Der Ansatz lautet

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = \gamma^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

hierin ist

$$\gamma^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

Der Vektor  $\gamma(\mathbf{x})$  kann nun durch eine Rechts-Links-Zerlegung der  $\mathbf{A}$ -Matrix und anschließende Rücksubstitution bestimmt werden, ebenso dessen Ableitungen. (3.18) besitzt die Ableitung

$$\mathbf{A}_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\gamma_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

Dies kann umgeordnet werden zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\gamma_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

Damit entfällt eine erneute Rechts-Links-Zerlegung, da die erhaltene Matrix auch zur Kalkulation der Ableitung  $\gamma_{,\mathbf{x}}$  direkt verwendet werden kann, womit die Effizienz des Verfahrens gegenüber der Invertierung der  $\mathbf{A}$ -Matrix begründet ist. Es ergibt sich folgende Beziehung für die Ableitung der Ansatzfunktion:

$$\Phi_{I,\mathbf{x}} = \gamma_{,\mathbf{x}}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x})^T\mathbf{B}_{I,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

#### 3.1.2 Wichtungsfunktionen

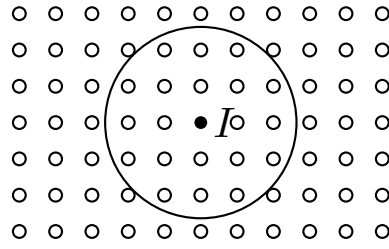
Die Wichtungsfunktion eines Knotens bestimmt seinen Einflussbereich, Abb 3.3. Damit wird unmittelbar die numerische Auflösung des Modells bestimmt. Die Wahl des Radius des Einflussbereiches bildet einen Kompromiss. Einerseits muss der Einflussbereich groß genug sein, um genügend Nachbarpunkte einzuschließen. Andernfalls ist eine Invertierung der  $\mathbf{A}$ -Matrix nicht möglich. Andererseits werden mit steigenden Einflussradien lokale Parameter geglättet, was nur bis zu einem bestimmten Maß gewünscht ist. Für die Darstellung beispielsweise von Materialgrenzen ist eine solche Unschärfe nachteilig. Ein kleiner Wirkungsradius bedingt daher auch eine hohe lokale Knotendichte. Auch ist zu beachten, dass große Wirkungsradien durch zahlreiches Interagieren der Knoten hohen numerischen Aufwand zur Folge haben. Jedoch ist es möglich, die Größe der Einflussradien zu variieren: Für Bereiche, in denen hohe Präzision gefordert ist, kann eine hohe Knotendichte mit kleinen Radien vorgesehen werden, Orte mit weniger steilen Gradienten können eine weniger hohe Knotendichte und größere Einflussradien aufweisen. Liu [49] gibt als Richtwert für den Radius  $d_s$  der Wichtungsfunktion

$$d_s = \alpha \frac{D_s}{n_{D_s} - 1} \quad (3.22)$$

an. Hierin ist  $2.0 \leq \alpha \leq 3.0$  ein dimensionsloser Faktor. Er gibt das Verhältnis des durchschnittlichen Knotenabstandes zum Radius der Wichtungsfunktion an.  $D_s = 1, 2, 3$  für 1D, 2D, 3D gibt die räumliche Dimension des Problems an, während  $n_{D_s}$  die Anzahl der Knoten definiert. Der gleiche Autor gibt für den zweidimensionalen Fall einen vereinfachten, auf (3.22) basierenden Term mit

$$d_s = \alpha \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s}} - 1} \quad (3.23)$$

unter  $A_s$  als der abgeschätzten Fläche des Untersuchungsgebiets an. Für die vorliegende Arbeit wurde ein Verfahren implementiert, welches vor dem eigentlichen Rechengang auf ausreichende Knotendichte anhand der Invertierbarkeit der  $\mathbf{A}$ -Matrix nach (3.8) überprüft. Bei festgestellter Nichtinvertierbarkeit können wahlweise automatisch Knoten in der entsprechenden Umgebung eingefügt werden. Dies geschieht anhand einer einfachen Ermittlung des maximalen örtlichen Knotenabstandes. Idealerweise fände ein solches Einfügen unter Ermitteln der optimalen neuen Knotenkoordinaten anhand des Voronoi-Diagramms statt, Abschnitt 2.7, womit jedoch ein netzbasierter Algorithmus eingeführt würde.

**Abb. 3.3:** Einflussradius des Knotens  $I$ 

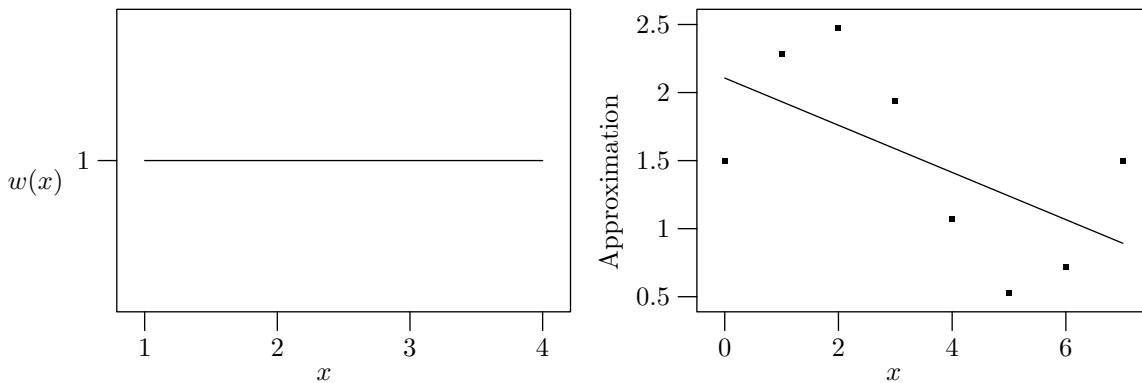
Die Wahl der Wichtungsfunktion bestimmt auch unmittelbar die Stetigkeit der MLS-Approximation, welche zum Erhalt der partiellen Ableitungen beispielsweise zur Spannungsermittlung wichtig ist. Eine über das gesamte Gebiet gleich bleibende Gewichtung jedes Knotens entspräche einer Least Squares Approximation, da die Parameter aller Knoten gleichermaßen eingeht: Örtliche Details werden völlig verwischt. Abb. 3.4 zeigt die Gewichtung der Form

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = 1 \quad \text{für alle } r \quad (3.24)$$

mit der ebenfalls konstanten Ableitung

$$\frac{w_I}{dx} = \frac{dw_I}{dr} \frac{dr}{dx} = 0 \quad \text{für alle } r \quad (3.25)$$

und die resultierende, über alle Knoten mittelnde Approximation.

**Abb. 3.4:** Konstante Wichtungsfunktion und zugehörige Approximation

Belässt man nun die Wichtungsfunktion konstant, begrenzt jedoch ihren Wirkungsradius  $r$  in der Form

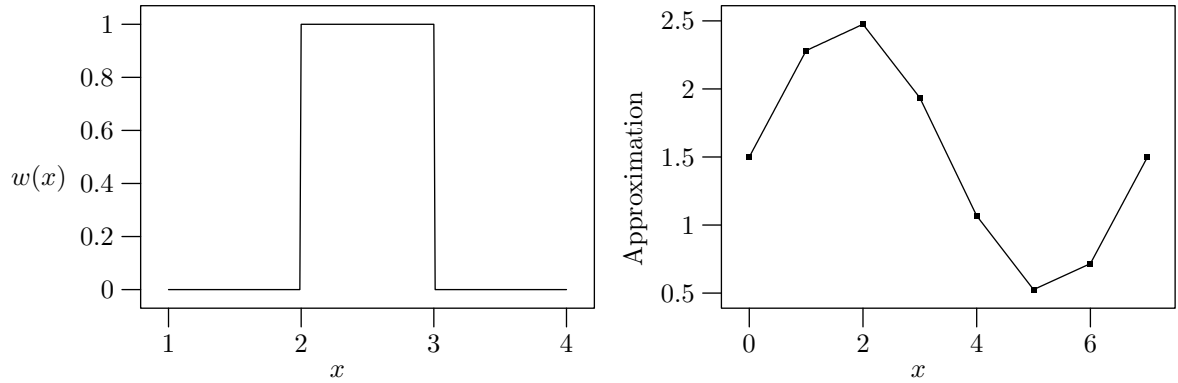
$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

mit der zugehörigen Ableitung

$$\frac{w_I}{dx} = \frac{dw_I}{dr} \frac{dr}{dx} = 0 \quad (3.27)$$



so werden örtliche Parameter bereits wiedergegeben, wie die resultierende Approximation in Abb. 3.5 zeigt. Die Approximation entspricht in diesem Fall einer linearen Interpolation zwischen den Knotenparametern  $\mathbf{u}_I$ , an den Knoten gilt hier ausnahmsweise  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_I(\mathbf{x})$ , die erzeugte Oberfläche läuft also durch die Knoten.



**Abb. 3.5:** Bereichsweise konstant und zugehörige Approximation

Problematisch ist jedoch, dass die Approximation lediglich  $\mathcal{C}_0$ -Stetigkeit aufweist. Die Ableitung zeigt entsprechende Sprünge an den Knoten, damit ist auch der Verlauf der Dehnungen unstetig. Die Ansatzfunktion  $\Phi$  „erbt“ die Stetigkeit der Wichtungsfunktion  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ . Daher werden normalerweise Wichtungsfunktionen verwendet, die folgende Eigenschaften aufweisen:

- monoton fallend mit mindestens  $\mathcal{C}_1$ -Stetigkeit
- begrenzter Radius  $r$
- überall positiv
- $\int w \, dx = 1$

Bis auf die Begrenztheit weist die Kurve der Gauß-Normalverteilung nach

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.28)$$

mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  alle genannten Eigenschaften auf. Abb. 3.6 zeigt die Skizze des typischen Kurvenverlaufs.

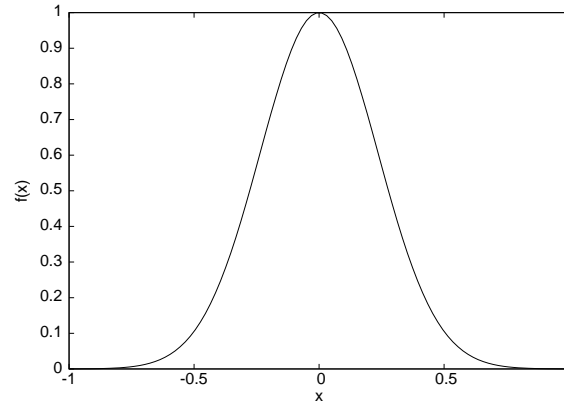


Abb. 3.6: Gaußfunktion, schematisch

Da die Gauß-Verteilung jedoch wie erwähnt nicht örtlich begrenzt ist, was alle Knoten miteinander interagieren ließe und damit unnötigen numerischen Aufwand erzeugen würde, weiterhin die Ermittlung der Ableitungen nicht unproblematisch ist, verwendet man generell stattdessen Splinefunktionen, wie sie im Folgenden beschrieben werden.

### 3.1.3 Splines

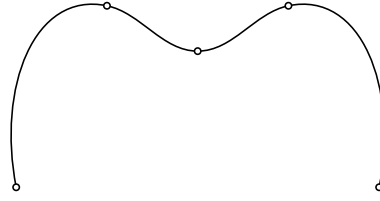
Splines, zum ersten Mal 1946 von Isaac Jacob Schoenberg [77] erwähnt, werden zur Approximation oder Interpolation verwendet, also um eine Kurve möglichst “sanft” durch eine Punktmenge zu führen. Sie bestehen aus stückweise definierten Polynomen. Handelt es sich dabei um lineare Funktionen, so ist der Spline linear, analog verhält es sich bei quadratischen oder kubischen Splines. Bedingung an den Definitionsgrenzen der Polynome ist die dortige Stetigkeit. Beispiel für einen kubischen Spline: Die Kurve durch die Punktmenge  $P(x_i, y_i)$  wird durch das Polynom

$$s_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n-1$$

angenähert. Die Bedingungen für die Stetigkeit an den Stützpunkten sind

- gleicher Funktionswert  $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
- gleiche erste Ableitung  $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$
- gleiche zweite Ableitung  $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

Mit diesen Bedingungen lassen sich die unbekannten Koeffizienten  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  finden. Abb. 3.7 zeigt ein Beispiel eines Splines durch 5 Punkte.



**Abb. 3.7:** Beispielhafte Darstellung eines Spline

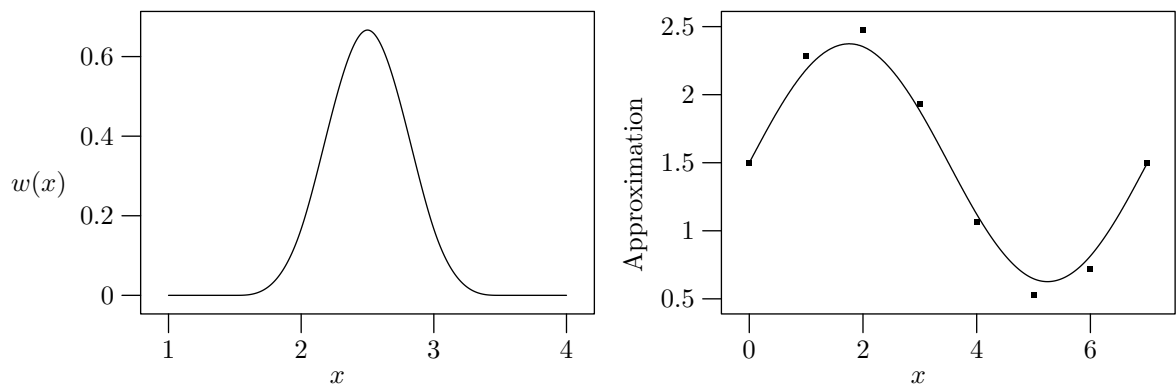
Spline-Kernfunktionen können damit ähnliche Eigenschaften wie die Gauß-Verteilung aufweisen, sind jedoch einfacher zu behandeln und enden innerhalb eines definierten Radius. Gebräuchlich ist beispielsweise die folgende Definition der Wichtungsfunktion mittels eines kubischen Splines:

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{für } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{für } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Ableitung:

$$\frac{w_I}{dx} = \frac{dw_I}{dr} \frac{dr}{dx} = \begin{cases} (-8r + 12r^2)\text{sign}(x - x_I) & \text{für } r \leq \frac{1}{2} \\ (-4 + -8r - 4r^2)\text{sign}(x - x_I) & \text{für } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

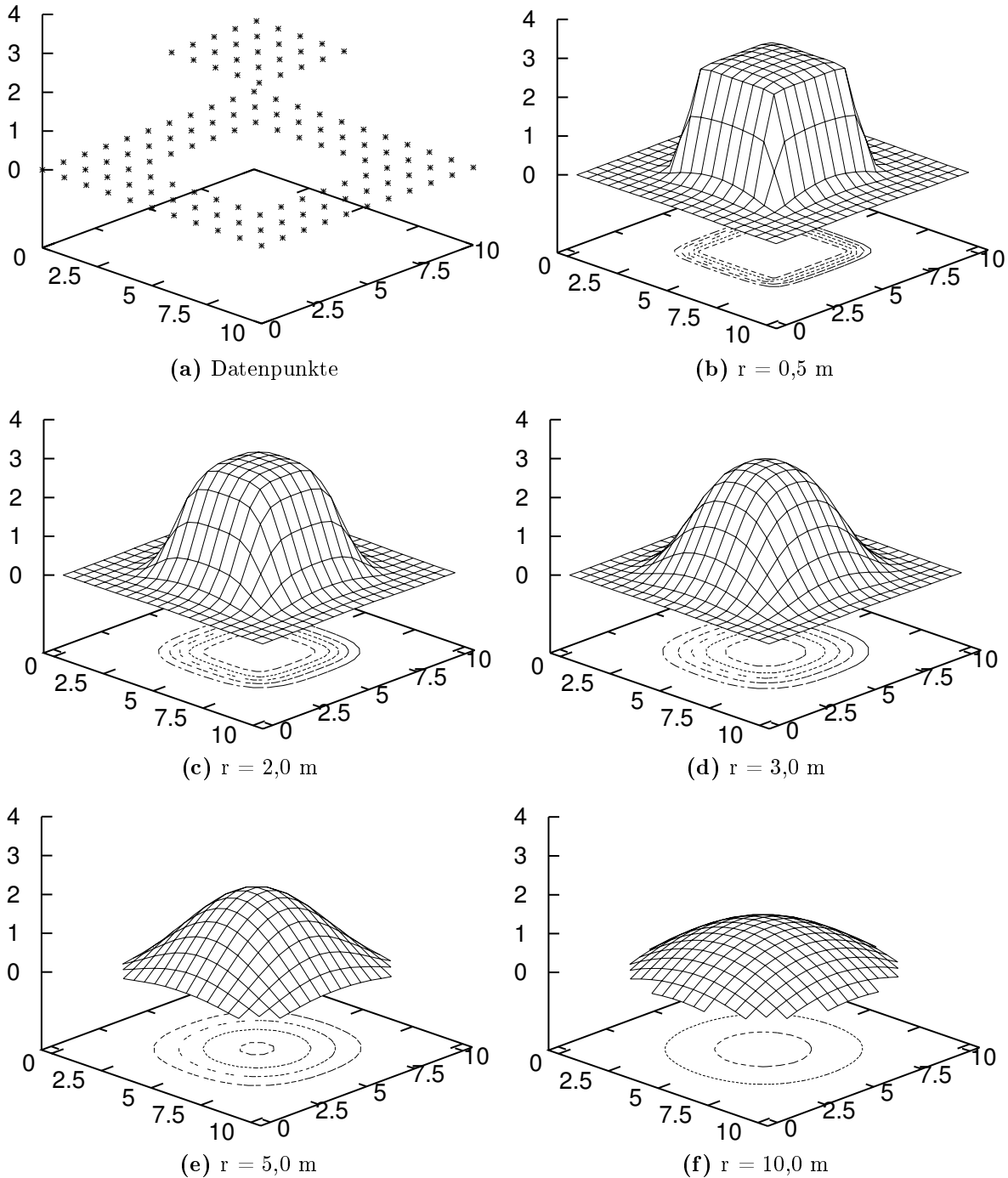
Hiermit ergibt sich eine weiche Approximationsfunktion, welche die gleiche Stetigkeit wie die Splinefunktion aufweist und örtlich eine gute Näherung bietet, auch wenn die Parameter der einzelnen Knoten nicht exakt getroffen werden, Abb 3.8b.



**Abb. 3.8:** Kubischer Spline und zugehörige Approximation

Es sind viele ähnliche Definitionen üblich, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. In der Praxis werden oft die gleichen Splines eingesetzt, wie sie auch für die Wichtungsfunktionen im SPH-Verfahren verwendet werden, siehe Abschnitt 4.1.

Abb. 3.9 zeigt beispielhaft eine mit zweidimensionalen Spline-Wichtungsfunktionen gebildete Moving-Least-Squares-Oberfläche: Auf einem  $10 \cdot 10$  m messenden Feld befinden sich regelmäßig verteilte Datenpunkte, welche in einem zentralen Quadrat mit 5,0 m Kantenlänge die Höhenkoordinate 4,0 m aufweisen, sonst 0,0 m. Deutlich ist zu sehen, wie der Höhengsprung mit wachsendem Einflussradius geglättet wird.



**Abb. 3.9:** Auswirkungen unterschiedlicher Wirkungsradien

## 3.2 Randbedingungen

### 3.2.1 Essentielle Ränder

Analog zur Methode der Finiten Elemente werden zur Implementierung der essentiellen Randbedingungen auf  $\Gamma_u$ , beispielsweise Auflager-Rändern, die Methode der Lagrange-Multiplikatoren eingesetzt. Alternativ ist auch die Penalty-Methode, siehe Abschnitt 2.3.2, oder eine Kopplung mit Finiten Elementen möglich, was wegen deren Kronecker-Delta-Eigenschaft  $N_I(x_j) = \delta_{ij}$  günstig ist: Es genügt bei Finiten Elementen, den Randpunkten eine bestimmte Verschiebung zuzuweisen. Auf die letztgenannte Möglichkeit soll in diesem Rahmen aber nicht näher eingegangen werden. Die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda$  haben die Funktion von Lagerreaktionskräften, welche den Rand gerade um den gewünschten Betrag verschieben. Ihre Interpolation entlang des essentiellen Randes stellt sich mit dem Variationssymbol  $\delta$  wie folgt dar:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(s) \lambda_i \quad \text{und} \quad \delta \lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(s) \delta \lambda_i \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.31)$$

Hierin ist  $n$  die Zahl der Randknoten des essentiellen Randes  $\Gamma_u$ ,  $s$  ist deren Abstand, und  $N$  das Lagrange-Polynom, welches sich in erster Ordnung wie folgt ausdrücken lässt.

$$N_o(s) = \frac{s - s_1}{s_0 - s_1} \quad \text{und} \quad N_1(s) = \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \quad (3.32)$$

### 3.2.2 Natürliche Ränder

Die Implementierung der aufgebrachten Kräfte auf den natürlichen Rändern  $\Gamma_t$  erfolgt über die Quadratur mithilfe der Gaußpunkte, siehe Abschnitt 3.5. Mit diesem Verfahren werden die auf den Rändern wirkenden Kräfte in den globalen Kraftvektor  $\mathbf{f}$  integriert.

## 3.3 Aufstellen der diskreten Gleichungen

Für einen Festkörper  $\Omega$  mit den Rändern  $\Gamma_t$  und  $\Gamma_u$  gilt

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = 0 \quad (3.33)$$

Hierin ist  $\sigma$  der Spannungstensor, und  $\mathbf{b}$  ist der Vektor der Körperkräfte. Der Kräftevektor  $\bar{\mathbf{t}}$  des natürlichen Randes ist  $\bar{\mathbf{t}} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ , wobei  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der Oberfläche ist. Die Verformungen des essentiellen Randes  $\bar{\mathbf{u}}$  entsprechen der Lagerverschiebung. Die variationale Galerkin-Form, Abschnitt 2.2, von Gleichung (3.33) ist dann

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \cdot \lambda \, d\Gamma = 0 \quad (3.34)$$

Hierin sind  $\delta \mathbf{v}(\mathbf{x})$  die Testfunktionen,  $\nabla_s \mathbf{v}^T$  der symmetrische Teil von  $\nabla \mathbf{v}^T$  und  $\lambda$  die Lagrangeschen Multiplikatoren sowie  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  die gesuchte Approximation, etwa die Verschiebung. Zusammen mit (3.31) werden hieraus die diskreten Gleichungen erhalten zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$\mathbf{K}$  die globale Steifigkeitsmatrix mit den Elementen

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (3.36)$$

mit der örtlichen Dehnungsmatrix

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,x} & \Phi_{I,y} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

und der Matrix  $\mathbf{D}$  der Dehnungssteifigkeit. Für den ebenen Spannungszustand gilt für diese mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\mu$

$$\mathbf{D}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.38a)$$

während für den ebenen Verzerrungszustand

$$\mathbf{D}_{\text{EVZ}} = \frac{E(1-\mu^2)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (3.38b)$$

gilt. Der globale Kraftvektor  $\mathbf{f}$  besitzt die Komponenten

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b} d\Omega \quad (3.39)$$

Die Matrix  $\mathbf{q}$  besteht aus den Parametern

$$\mathbf{q}_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (3.40)$$

mit

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

und Matrix  $\mathbf{G}$  aus

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma \quad (3.42)$$

Die Indices  $I, J$  beziehen sich auf Knoten im Gebiet  $\Omega$ , während  $K$  auf Indexbildung von Knoten auf den Rändern  $\Gamma$  hinweist.

### 3.4 Elastodynamik

Für den instationären Fall wird (3.33) zu

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.43)$$

mit den Initialbedingungen für  $t = 0$

$$\sigma(\mathbf{x}, 0) = \sigma_0(\mathbf{x}) \quad (3.44a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (3.44b)$$

Die schwache Gleichgewichtsformulierung (3.34) wird zu

$$\int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma \, d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{t_i}} \delta u_i \bar{t}_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.45)$$

Hierin ist  $\varepsilon = \nabla_s \mathbf{u}$ ,  $\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$  und  $\delta \varepsilon = \nabla_s(\delta \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{D}$  nach (3.38). Es ergeben sich die bestimmenden Gleichungen zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (3.46)$$

Hierin ist die Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{II} = \sum_J \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_j \, d\Omega \quad (3.47)$$

und der Vektor der internen Kräfte

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \sigma \, d\Omega \quad (3.48)$$

mit der örtlichen Dehnungsmatrix  $\mathbf{B}$  nach (3.37). Der Vektor der externen Kräfte notiert

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_t} \Phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.49)$$

(3.46) kann auch durch

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.50)$$

formuliert werden. Wird zusätzlich viskose Dämpfung berücksichtigt, erhält man

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.51)$$

Oft wird die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als Kombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix angenommen, der Rayleigh-Dämpfungsmatrix:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.52)$$

wobei  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gewichtende Faktoren sind.

### Zeitintegration

Die Integration über die Zeit kann beispielsweise über den Newton-Zeitschritt-Algorithmus stattfinden, welcher hier für den eindimensionalen Fall skizziert werden soll. Als Initialbedingungen seien bekannt: Die Steifigkeit  $k$ , die Masse  $m$ , die Verschiebung  $u(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , und die entsprechende Geschwindigkeit  $\dot{u}(0)$  sowie die wirkende äußere Kraft  $f(0)$ , deren Momentanwert  $f(t)$  auch für alle anderen Zeitpunkte der Berechnung bekannt sein muss. Die Initialbeschleunigung wird erhalten durch

$$\ddot{u}(0) = \frac{1}{m} (-ku(0) + f(0)) \quad (3.53)$$

Für jeden weiteren Zeitschritt wird die Beschleunigung jedes Knotens errechnet über

$$\ddot{u}(t+\Delta t) = \frac{1}{m + k\beta_2\Delta t^2} \left( -k \left( u(t) + \Delta t\dot{u}(t) + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - \beta_2)\ddot{u}(t) \right) + f(t + \Delta t) \right) \quad (3.54)$$

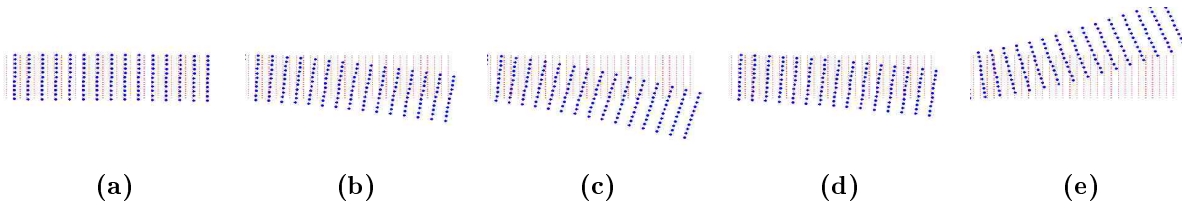
Die neue Verschiebung wird damit erhalten zu

$$u(t + \Delta t) \approx u(t) + \Delta t\dot{u}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - \beta_2)\ddot{u}(t) + \beta_2\ddot{u}(t + \Delta t)) \quad (3.55)$$

und die Geschwindigkeit am Ende des Zeitschrittes wird angenähert durch

$$\dot{u}(t + \Delta t) \approx \dot{u}(t) + \Delta t ((1 - \beta_1)\ddot{u}(t) + \beta_1\ddot{u}(t + \Delta t)) \quad (3.56)$$

Hierin sind  $\beta_1$  und  $\beta_2$  Parameter, die zwischen 0 und 1 eingestellt werden. Gilt  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , so wird die Beschleunigung ausgehend vom Zustand zum Zeitpunkt  $t$  geschätzt, was einem expliziten Zeitintegrationsschema entspricht. Gilt  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , so ist  $t + \Delta t$  der Zeitpunkt für die Beschleunigungsschätzung, was einem impliziten Schema entspricht. Auch andere Methoden, beispielsweise wie sie im Abschnitt 4.9 beschrieben werden, sind möglich. Abb. 3.10 zeigt beispielhaft für die Anwendung eines zweidimensionalen Newton-Schemas in Kombination mit der EFG-Methode den mithilfe des entwickelten Programm-Moduls gewonnenen zeitlichen Verlauf der Verschiebungen der Knoten eines einseitig links eingespannten Balkens, welcher nach einem initialen Impuls in negativer vertikaler Richtung schwingt.

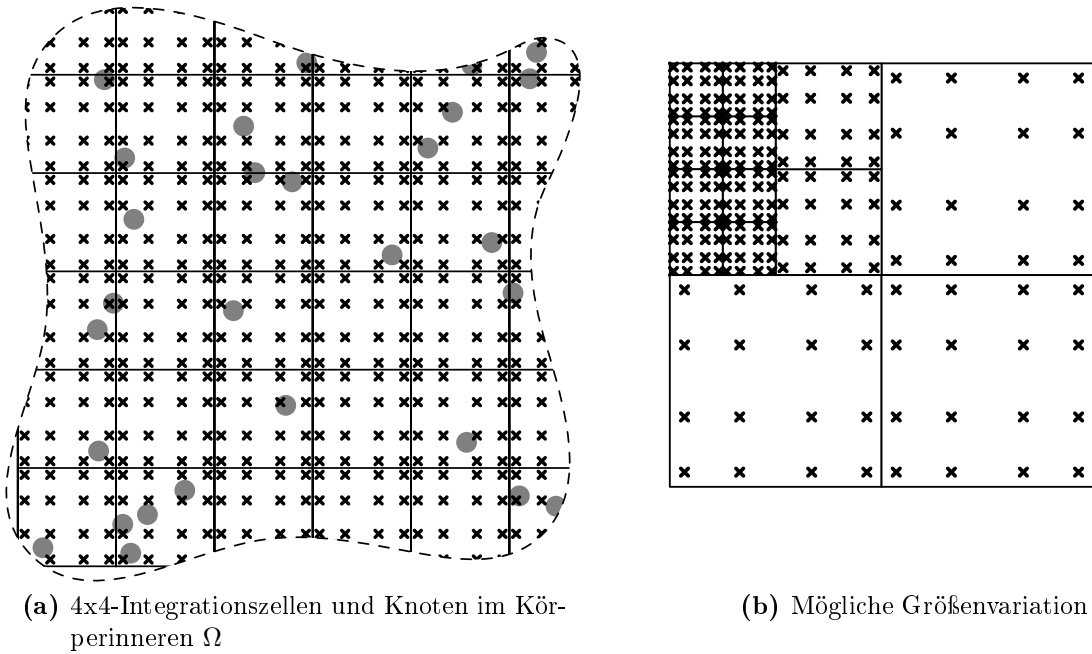


**Abb. 3.10:** Schwingender einseitig eingespannter Balken



### 3.5 Quadratur

Für die Zusammenstellung beispielsweise der örtlichen Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{IJ}$ ,  $\mathbf{G}_{IK}$ , dem Vektor  $\mathbf{f}_I$ , sowie  $\mathbf{q}_K$  ist die numerische Integration von Flächen- oder Linienintegralen, auch Quadratur genannt, erforderlich. Dies geschieht grundsätzlich mit dem Verfahren der Gauß-Quadratur, Abschnitt 2.4. Für die flächenhafte Integration der Steifigkeitsmatrizen wird in der vorliegenden Arbeit eine 4x4-Punkt-Quadratur durchgeführt. Hierzu wird das Gebiet  $\Omega$  in einzelne Zellen unterteilt, Abb. 3.11a. Diese Zellen haben keinen direkten Bezug zur Geometrie des Körpers, sondern dienen lediglich der Positionierung der Gaußpunkte. Ihre örtliche Größe und damit Anzahl richtet sich nach der örtlichen Knotendichte und kann gegebenenfalls variiert werden, Abb. 3.11b. Als Faustregel zur Sicherstellung ausreichender Genauigkeit gilt, dass die örtliche Anzahl der Gauß-Quadraturpunkte mindestens etwa drei mal diejenige der Knoten sein sollte [46], was sich mit den Erfahrungen des Autors deckt.



**Abb. 3.11:** Gauß-Quadraturzellen

Die Quadratur läuft wie folgt ab:

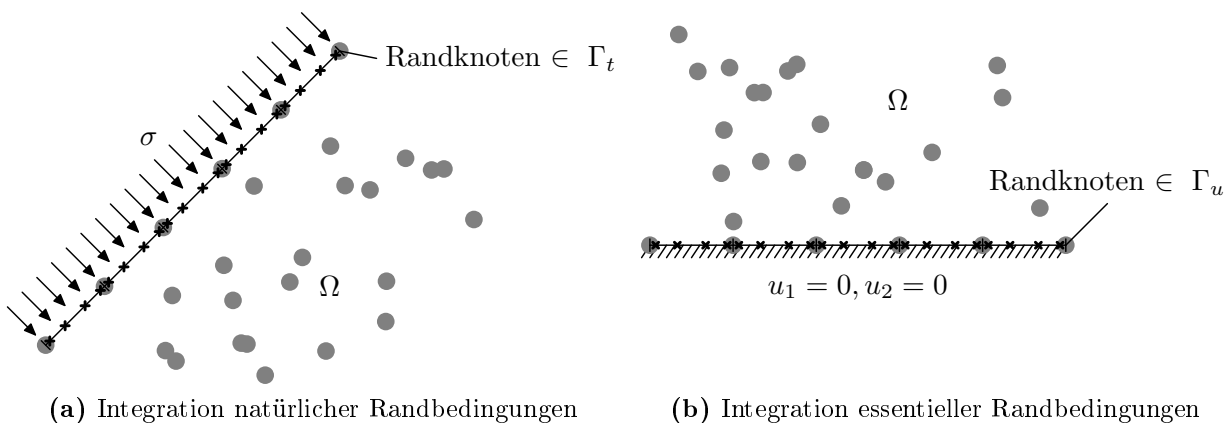
- Aufstellen der Quadraturzellen über das Gesamtgebiet  $\Omega$ 
  - Einfügen der 16 Quadraturpunkte pro Zelle entsprechend den Gauß-Koordinaten  $\xi_i$
  - Berechnen der Gauß-Gewichte  $w_i$  für jeden Quadraturpunkt
  - Aufstellen der Jacobi-Matrix für jede Zelle. Mit der Jacobi-Matrix wird das Intervall der Gauß-Quadratur von  $[-1 \ 1]$  auf die reale Größe der Quadraturzelle projiziert

- Schleife über alle Gauß-Quadraturpunkte
  - Finden aller Nachbarknoten, in Rissnähe Berücksichtigung des Sichtbarkeitskriteriums bzw. Diffraktionsverfahren, Abschnitt 6.2.12
  - Knotengewichte und örtliche Ansatzfunktion sowie deren partielle Ableitungen berechnen
  - Örtliche Dehnungsmatrix (**B**-Matrix) zusammenstellen
  - Errechnete lokale Anteile in globale Steifigkeitsmatrix (**K**-Matrix) einfügen

Für die Integration der Vektoren **f** und **q** zur Abbildung der natürlichen und essentiellen Randbedingungen wird eine 4-Punkt-Quadratur über die entsprechende Oberfläche  $\Gamma$  durchgeführt. Diese läuft wie folgt ab:

- Einfügen der 4 Quadraturpunkte pro Linienabschnitt entsprechend den Gauß-Koordinaten  $\xi_i$
- Berechnen der Gauß-Gewichte und der Jacobi-Matrix
- Finden der Nachbarknoten jedes Quadraturpunktes
- Integrieren der Kräfte entlang der beaufschlagten Oberflächen zur Erstellung des **f**-Vektors
- Integrieren der Lagrange-Multiplikatoren entlang der essentiellen Ränder zur Erstellung des **q**-Vektors und der Matrix **G**

Auch hier kann die Größe der einzelnen Integrationsbereiche variiert werden, deren sich hierdurch veränderndes Gewicht wird durch die für jeden Bereich aufzustellende Jacobi-Matrix berücksichtigt. Eine regelmäßige Verteilung der auf den Rändern liegenden Knoten, wie in den Abbildungen 3.12a bzw. 3.12b gezeigt, ist nicht zwingend erforderlich.



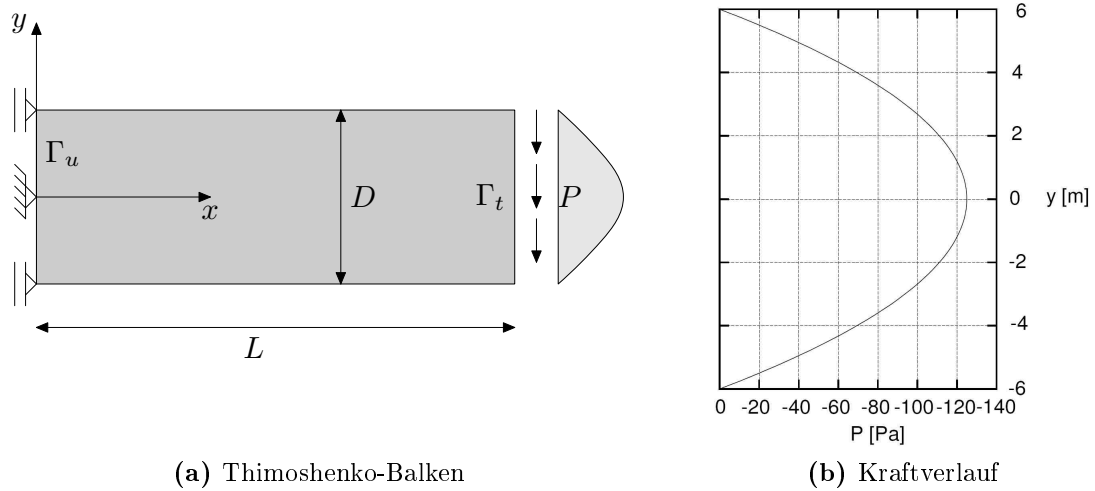
**Abb. 3.12:** Gauß-Quadratur

### 3.6 Validierung

Die mit EFGM erzielten Ergebnisse werden mit analytischen Lösungen verglichen. Klassisches Beispiel hierfür ist der “Timoshenko-Balken”. Bei diesem wird im Gegensatz zum Euler-Bernoulli-Balken kein Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt, der Querschnitt ist also entsprechend dem Schubwinkel gedreht. Damit ist die übliche Balkentheorie nicht mehr anwendbar. Ein am linken Ende nach Abb. 3.13a gelagerter Balken, welcher am freien Ende durch eine parabolische Schublast der Form

$$t_y(L, y) = -\frac{P}{2I} \frac{D^2}{4 - y^2} \text{ Pa} \quad (3.57)$$

in negativer  $y$ -Richtung belastet ist. Abb. 3.13b zeigt den Verlauf der Kraft  $P(y)$ .



**Abb. 3.13:** Timoshenko-Balken

Das Flächenträgheitsmoment ist mit  $I = \frac{D^3}{12}$  gegeben. Die exakten analytischen Lösungen für die Verschiebungen, welche nach der Timoshenko-Theorie auch die Schubverformung der Querschnittsebene berücksichtigen, lauten

$$u_x(x, y) = -\frac{Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \mu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (3.58a)$$

$$u_y(x, y) = \frac{Py}{6EI} \left[ (3\mu y^2(L - x) + (4 + 5\mu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (3.58b)$$

mit der Querdehnzahl  $\mu$  und dem Elastizitätsmodul  $E$ . Abb. 3.14 zeigt graphisch die Verläufe von (3.58). Die Verschiebungen an jeder Stelle werden über (3.15) erhalten, Spannungen werden analog interpoliert:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{x}) \sigma_i \quad (3.59)$$

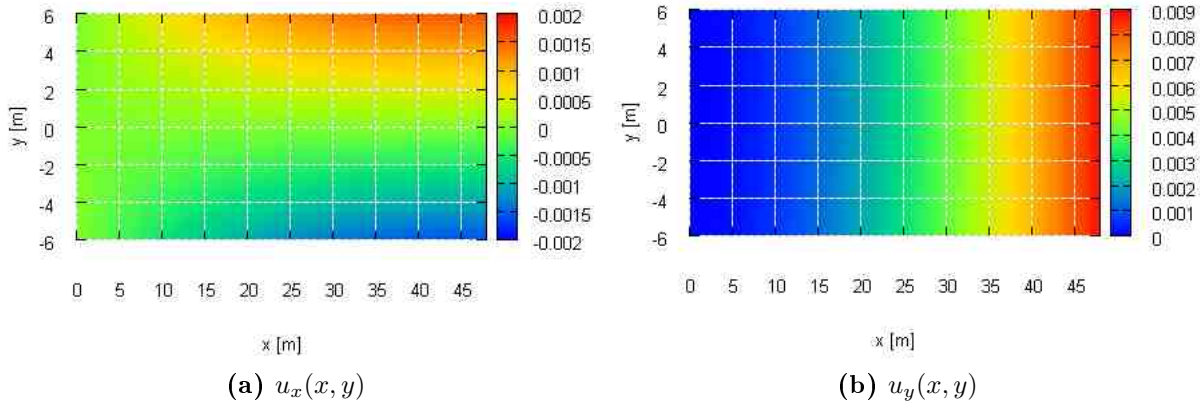


Abb. 3.14: Verlauf der Horizontal- und Vertikalverschiebungen

Die Lösung für die Spannungen lautet

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (3.60a)$$

$$\sigma_y(x, y) = 0 \quad (3.60b)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.60c)$$

Abb. 3.15 stellt (3.60) graphisch dar.

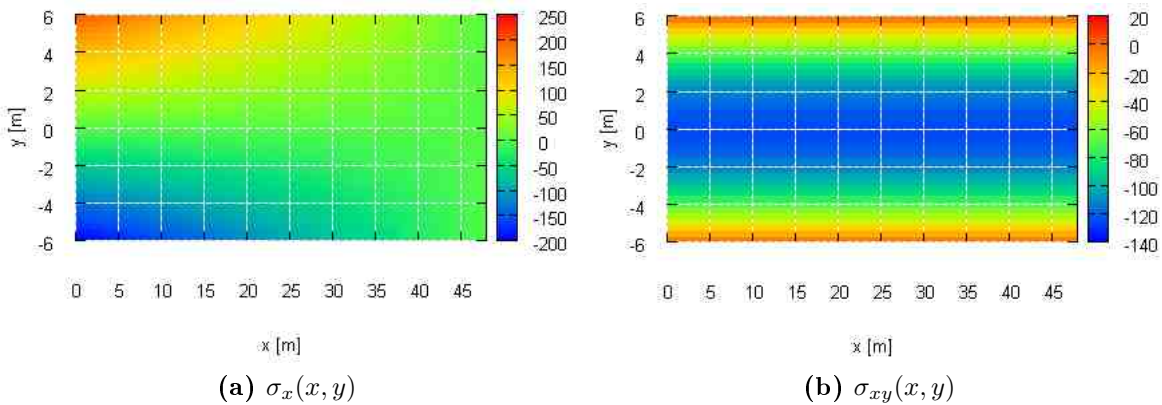
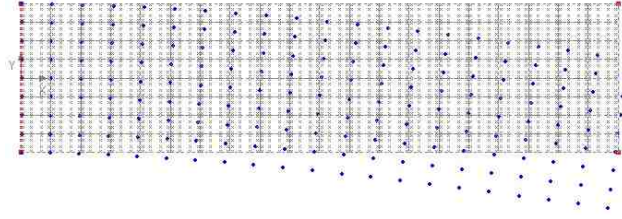


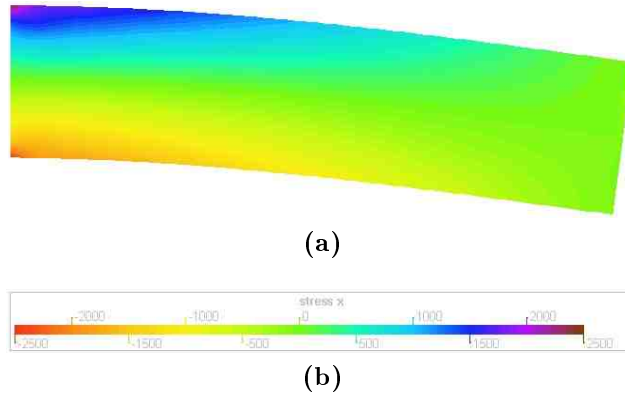
Abb. 3.15: Verlauf der Horizontal-, Vertikal- und Schubspannungen

Abb. 3.16 zeigt die 191 Knoten mit aufgebrachten Verschiebungen in 500-facher Überzeichnung, mit denen ein 48 m langer und 12 m starker Timoshenko-Balken modelliert wurde. Die Quadratur erfolgte mit einer 4 x 4 Gauß-Integration, an den Rändern mit 4-Punkt-Quadratur. Die Gaußpunkte und -Zellen sind in Abb. 3.16 ebenfalls zu erkennen. Die Daten des Materials wurden mit  $\mu = 0,3$  und  $E = 30,0E6$  Pa festgelegt.



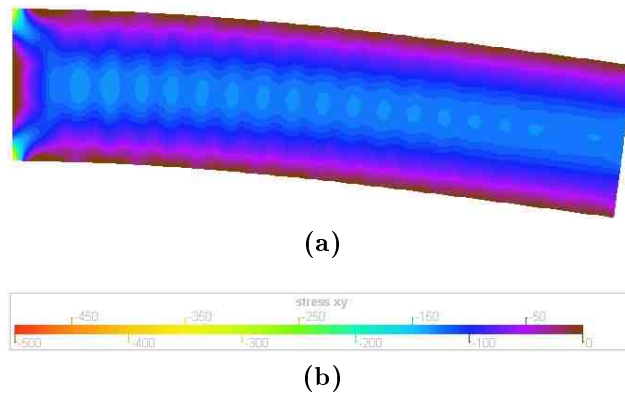
**Abb. 3.16:** Timoshenko-Balken, EFG-Modell mit Knoten

Es zeigt sich eine fast 100%-ige Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Abb. 3.17 zeigt farbig skaliert die Horizontalspannungen  $\sigma_x$ . Die Verschiebungen sind in 500-facher Vergrößerung dargestellt.



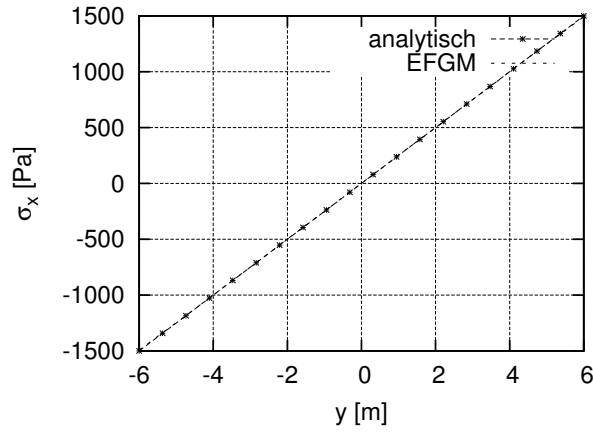
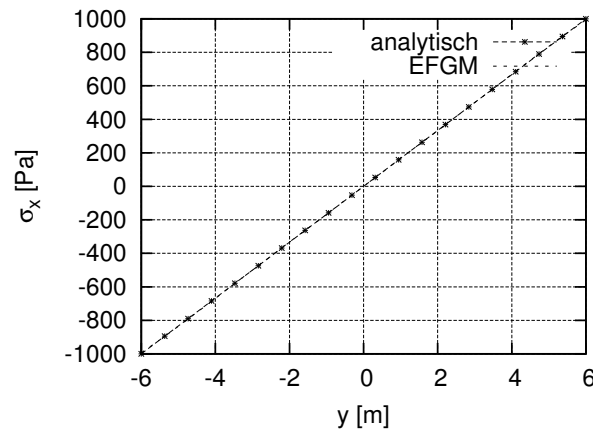
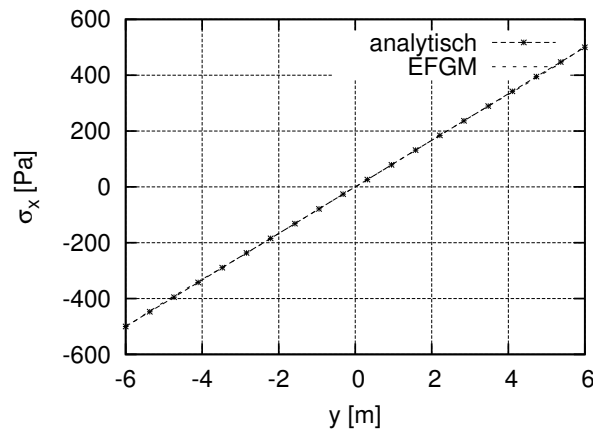
**Abb. 3.17:** Horizontalspannungen  $\sigma_x$  EFG-Modellierung

Auch die Schubspannungsverläufe zeigen gute Übereinstimmung, Abb. 3.18. Lediglich an der Lagerung zeigen sich geringe Abweichungen.



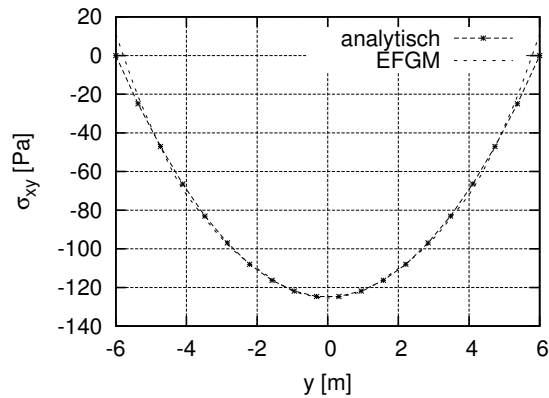
**Abb. 3.18:** Schubspannungen  $\sigma_{xy}$  EFG-Modellierung und analytisch

Abb. 3.19 zeigt die Schubspannungen für die Querschnitte an den Stellen  $x = 12\text{ m}$ ,  $x = 24\text{ m}$  (Balkenmitte), und  $x = 36\text{ m}$ . Die Abweichungen liegen in einem Bereich, der für praktische Anwendungen vernachlässigbar ist.

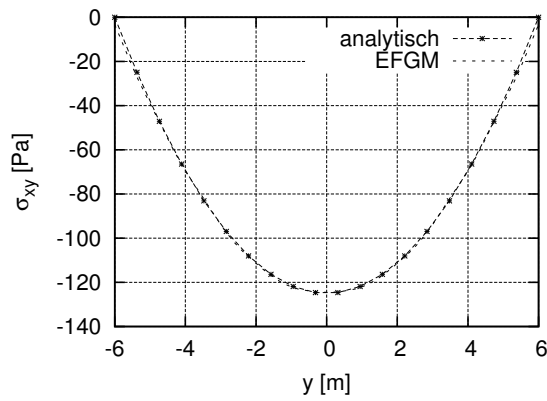
(a)  $x = 12 \text{ m}$ (b)  $x = 24 \text{ m}$ (c)  $x = 36 \text{ m}$ **Abb. 3.19:** Horizontalspannungen  $\sigma_x$  an den x-Koordinaten 12, 24 und 36 m

Die Schubspannungen sind für das gezeigte Problem nach (3.60c) unabhängig von der x-Koordinate. Dies spiegelt sich auch im Rechenergebnis wider, lediglich nahe am einge-

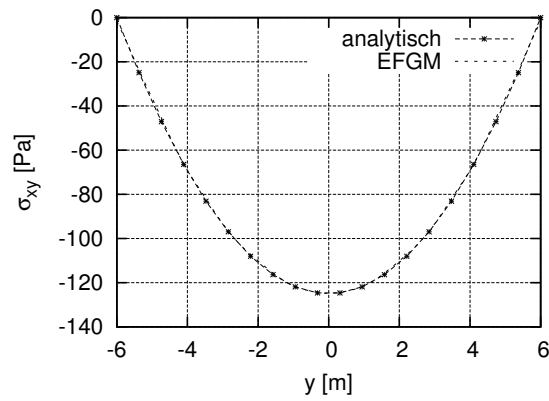
spannten Rand sind sehr geringe Abweichungen zu beobachten, Abb. 3.20. Hervorzuheben ist die Tatsache, dass an den Rändern sehr wirklichkeitsnah  $\sigma_{xy} = 0$  erreicht wird, was mit Finiten Elementen nicht ohne Weiteres zu erzielen ist.



(a)  $x = 12$  m



(b)  $x = 24$  m

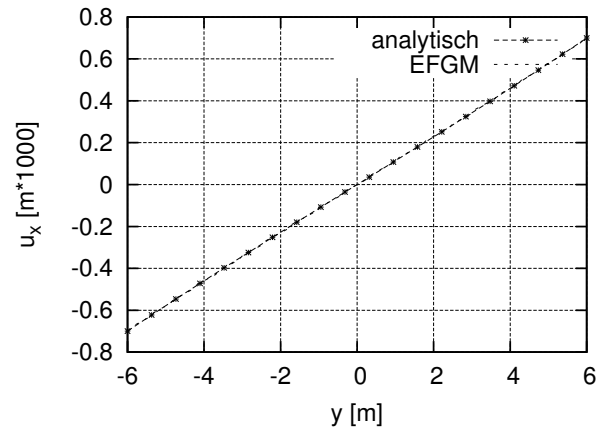


(c)  $x = 36$  m

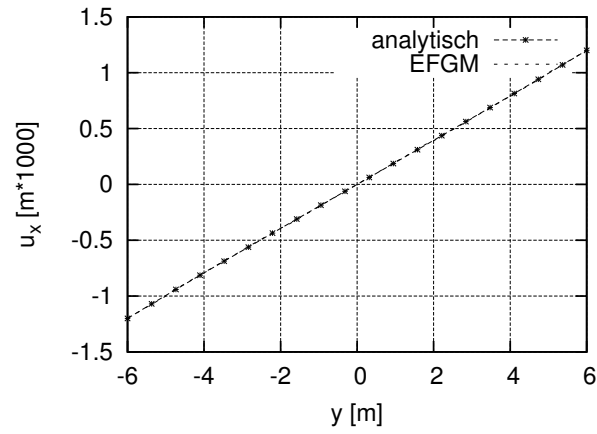
**Abb. 3.20:** Schubspannungen  $\sigma_{xy}$  an den x-Koordinaten 12, 24 und 36 m

Abb. 3.21 zeigt die mit Faktor 1000 multiplizierten Horizontalverschiebungen  $u_x$ . Auch

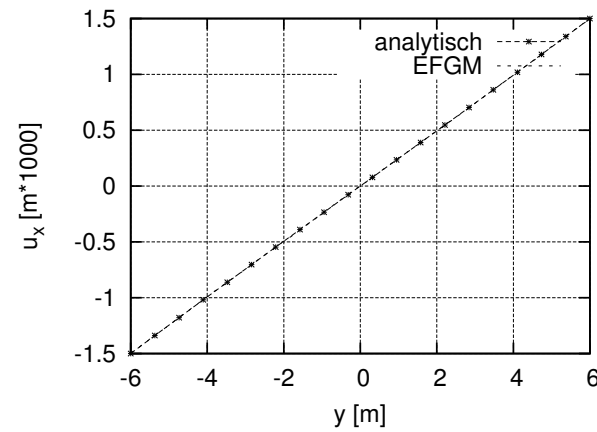
hier sind in diesem Maßstab keine Abweichungen von der analytischen Lösung zu beobachten.



(a)  $x = 12$  m



(b)  $x = 24$  m



(c)  $x = 36$  m

**Abb. 3.21:** Horizontalverschiebung an den x-Koordinaten 12, 24, und 36 m



### 3.7 Numerischer Ablauf einer EFGM-Berechnung

Der prinzipielle Ablauf einer Simulation mit der Elementfreien Galerkin Methode ist in Abb. 6.30 gegeben. Tab. 3.1 gibt nähere Hinweise.

**Tab. 3.1:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf EFGM

Nr.	Erläuterung
1	Festlegen grundlegender material- und modellabhängiger Parameter. Wahl des Spannungs- und Verzerrungszustandes bei ebenen Betrachtungen. Festlegen der Geometrie.
2	Die Knoten werden erzeugt, wobei an deren Verteilung niedrigere Ansprüche als in einem FEM-Modell gestellt werden. Jedoch ist eine ausreichende Anzahl von Knoten sicherzustellen.
3	Über das zu integrierende Gebiet werden die Gaußzellen als Basis zur Positionierung der Gauß-Integrationspunkte gelegt. An den Rändern werden analog Gaußpunkte entsprechend den Koordinaten einer 1D-Gaußintegration entlang der Randlinie erzeugt. In beiden Fällen hängt die zu erreichende Konvergenz von der Dichte der Gaußpunkte ab.
4	Zur Invertierung der $\mathbf{A}$ -Matrix (3.10) ist eine Mindestanzahl Nachbarpunkte erforderlich. Je geringer die örtliche Punktedichte ist, desto größer muss also der Einflussbereich der Punkte sein.
5	In den meisten Fällen geschieht die Zuordnung der Nachbarpunkte wie unter 4 beschrieben. Nur bei von vornherein festliegenden Einflussgebieten erfolgt noch eine gesonderte Zuordnung. Entsprechend der Entfernung zum betrachteten Nachbarknoten wird dessen Gewichtung beispielsweise über (3.29) festgelegt.
6	Über (3.14) werden die Ansatzfunktionen ermittelt. Deren partielle Ableitung ist über (3.16) festgelegt.
7	Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ , deren Elemente über (3.36) festgelegt sind, wird erzeugt. Im Falle einer dynamischen Betrachtung sind zusätzlich die Massenmatrix $\mathbf{M}$ und Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}$ über (3.47) bzw. (3.37) festzulegen.
8	Die Implementierung der aufgebrachten Kräfte auf den natürlichen Rändern $\Gamma_t$ erfolgt über die Quadratur mithilfe der Gaußpunkte, siehe Abschnitt 3.5.
9	Integration an den essentiellen Rändern, beispielsweise mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren wie unter Abschnitt 3.2.1 skizziert.
10	Das System der diskreten Gleichungen nach (3.35) ist zu lösen. Dies erfolgt über gebräuchliche Gleichungslöser, welche beispielsweise nach dem Gauß-Algorithmus arbeiten.
11	Die Unbekannten des Gleichungssystems (3.35) sind die Knotenparameter $\mathbf{u}_i$ . Hieraus werden nach (3.15) die Verschiebungen an jedem beliebigen Punkt gewonnen.
12	Mit $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$ und $\sigma = \varepsilon\mathbf{E}$ liegen mit dem Ergebnis aus Punkt 11, den Knotenverschiebungen, auch die Dehnungen und Spannungen über (3.38) fest. Für eine iterative Berechnung würde an dieser Stelle verzweigt, siehe Abb. 6.30.
13	Die Ausgabe der Daten erfolgt graphisch oder in Tabellenform auf Bildschirm oder in Datei.



Abb. 3.22: Programmablauf einer EFGM-Simulation



## 4 Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics SPH

Anders als netzbasierte Methoden unterteilt die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics ein Gebiet nicht, sondern ihre Partikelmenge stellt die Approximation eines Quasi-Kontinuums dar. Innerhalb eines endlichen Bereiches durch eine Wichtungsfunktion geglättete Partikel repräsentieren dabei jeweils ein Fluidelement. Prinzipiell ist das Verfahren ähnlich einer Monte-Carlo-Simulation: Frei bewegliche interagierende Teilchen lösen die klassische Newtonsche Hydromechanik "direkt". Die zugrunde liegenden partiellen Differenzialgleichungen werden durch den Ansatz der Glättung in einen Satz gewöhnlicher Differenzialgleichungen umgewandelt. Die Anzahl der Partikel pro Volumeneinheit bestimmt die örtliche Dichte. Aufgrund der direkten Proportionalität kann damit für jeden Zeitschritt der örtliche Druckgradient bestimmt werden. Zusammen mit weiteren Faktoren wie der Viskosität oder dem Wirken von Körperkräften wird daraus die Partikelbeschleunigung und -geschwindigkeit hergeleitet, und nach Neupositionierung der Partikel beginnt der Rechenzyklus von vorn. Die Glättung erfüllt mehrere Zwecke: Aus mathematischer Sicht wandelt sie die starke Form der Differenzialgleichung derart um, dass die Anforderungen an die Funktionsstetigkeit jenen einer schwachen Formulierung entsprechen. Im Unterschied zur zuvor vorgestellten Elementfreien Galerkin Methode, welche die durch diese Formulierung bedingten Integrationsprozesse erst im Moment der Zusammenstellung der diskreten Systemgleichungen durchführt, geschieht dies bei der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics im Stadium der Funktions-Approximation. Dies begründet die Reduktion der Ansprüche an die Stetigkeit der approximierten Feldfunktionen. Daher erweist sich SPH auch für beliebig verteilte Partikel ohne Mindestanspruch an die Anzahl der Nachbarpartikel als stabiles numerisches Verfahren, was auch die Tatsache widerspiegelt, dass in Flüssigkeiten nur kurzreichweitige Kräfte eine Rolle spielen. Weiterhin verhindert die Glättung ein gegenseitiges Durchdringen der Partikel, obwohl keinerlei Kollisionskontrolle im eigentlichen Sinn stattfindet. Die Interaktion zweier Partikel findet wegen der Auflösung des Partikels auf eine bestimmte räumliche Ausdehnung über viele Zeitschritte hinweg verteilt statt. Nähern sich benachbarte Partikel, steigt die örtliche Dichte und damit der Druck, wodurch entgegengesetzte Beschleunigungskräfte wirksam werden, welche die Partikel eine gewisse Distanz nicht unterschreiten lassen. Voraussetzung ist ein genügend kleiner Zeitschritt, der unmittelbar mit der räumlichen Partikelverteilung und der Schallgeschwindigkeit des Fluidums zusammenhängt. Das Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics wurde 1977 von Monaghan und Gingold [34] zum Zweck astrophysikalischer Berechnungen eingeführt. Die Methode wurde von Monaghan und zahlreichen weiteren Autoren, beispielsweise Benz und Asphaug [14], stetig fortentwickelt und auf

neue Bereiche ausgedehnt. Verschiedene Ansätze zur Betrachtung von Festkörpern und Bruchvorgängen wurden vorgestellt, inzwischen existieren selbst Dialekte, welche analog zur Elementfreien Galerkin Methode Ansatzfunktionen auf Basis eines Moving Least Squares-Interpolationsverfahrens bilden [16]. Die vollständig netzfreie Partikelmethode bietet sich damit längst nicht mehr nur für hydromechanische Anwendungen an, obgleich SPH zur Simulation von Vorgängen starker Verformung und Bewegung aufgrund seiner sehr hohen numerischen Stabilität besonders geeignet ist. Dennoch besteht weiterhin Forschungsbedarf, auch in der von Beginn an stehenden Frage der korrekten Darstellung der essentiellen Ränder. Abb. 4.1 zeigt beispielhaft die SPH-Simulation eines Impaktvorgangs: Ein kleiner Körper trifft mit hoher Geschwindigkeit auf einen größeren ortsfesten Körper, mit der Folge starker Verformungen und Materialablösungen.

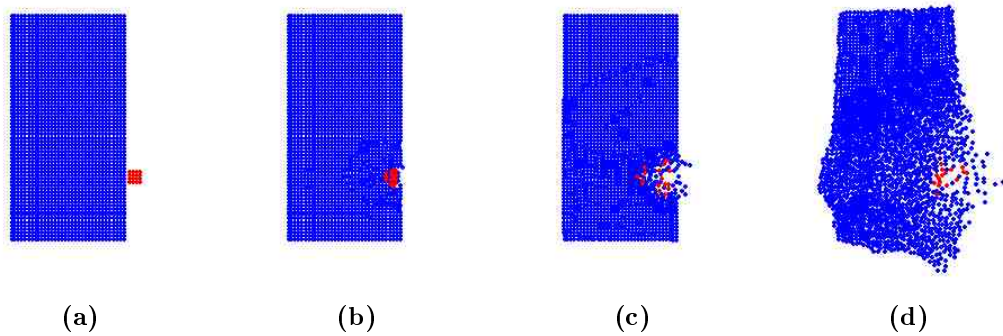


Abb. 4.1: SPH-Simulation eines Impakt-Vorgangs

## 4.1 Wichtungsfunktionen

Die grundlegende Idee einer SPH-Approximation ist die Annäherung einer Feldfunktion  $F$  eines  $d$ -dimensionalen Raumes durch Integration entfernungsgewichteter Parameter verteilter Knoten über den Ansatz

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.1)$$

Die Ortskoordinaten des betrachteten Punktes bzw. der benachbarten Partikel werden hierbei mit  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{x}'$  gekennzeichnet. Durch  $\Omega$  ist das Gesamtgebiet symbolisiert, etwa der Flüssigkeitskörper. Die Dirac-Delta-Funktion ist mit  $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x)$  definiert, Abb. 4.2.

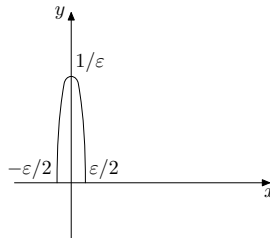


Abb. 4.2: Dirac-Delta-Funktion

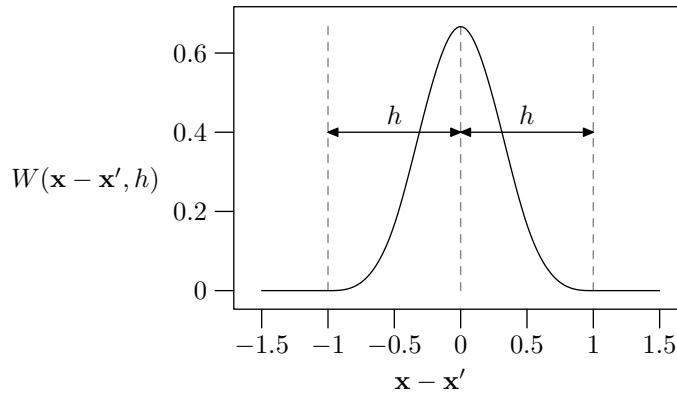
Für sie gilt

$$\delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } \frac{-\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } x > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (4.2)$$

Die Dirac-Delta-Funktion hat mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta - x) f(\zeta) d\zeta = f(x) \quad (4.3)$$

die Eigenschaften der “Einheit der 1” bzw. des Kronecker-Deltas. Die Dirac-Delta-Funktion ist wegen ihrer Unstetigkeit und der damit verbundenen Schwierigkeit bei der Gewinnung der benötigten Ableitungen jedoch nicht geeignet für den Einsatz in den hier diskutierten numerischen Modellen. Obgleich auch die verwandte Gaußkurve der grundlegenden Idee der räumlich verteilten Einheit entspricht – anfänglich von Benz als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert [14] – wird sie hier ebenfalls nicht verwendet, da durch ihre Unbeschränktheit und die komplizierten partiellen Ableitungen ein hoher numerischer Aufwand bedingt würde. Daher werden die Gewichtungen durch numerisch einfacher handhabbare Kernfunktionen  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  ähnlicher Ausprägung ersetzt, Abb. 4.3.



**Abb. 4.3:** Beispiel Kernfunktion  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  mit  $h = 1,0$

Hierbei ist  $h$  der Parameter, welcher die Größe des Einflussbereiches von  $W$  bestimmt. Die Integralformulierung (4.1) geht damit über in eine gewichtete Summations-Approximation:

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) F(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \approx \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}_i) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) \Delta V_i \quad (4.4)$$

Der Approximations-Operator wird hierbei mit dem Symbol  $\langle \dots \rangle$  gekennzeichnet,  $\mathbf{x}$  ist der Koordinatenvektor des betrachteten Ortes,  $\mathbf{x}_i$  die Koordinatenvektoren der Partikel  $i = 1 \dots N$ , über die summiert wird,  $h$  der Radius, auf dessen Bereich die Kernfunktion

$W$  begrenzt ist.  $N$  ist die Zahl aller Partikel, in deren Einflussbereich der Punkt des Interesses, etwa ebenfalls ein Partikel oder ein beliebiger anderer Ort, mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$  liegt. Im Gegensatz zur Elementfreien Galerkin Methode, in welcher derartige Wichtungsfunktionen lediglich die Basis zur Generation der Ansatzfunktion über die Moving Least-Squares-Interpolation darstellen, findet hier keine weitere Transformation auf Basis dieser Gewichtungen statt.

#### 4.1.1 Kernfunktionen mit Splines

Für die einfachere Erzeugung und Behandlung der Kernfunktion bietet sich analog zur Elementfreien Galerkin Methode die Verwendung von Splines an. In der Praxis werden in beiden Modellen oft die gleichen Splinefunktionen verwendet. Daher wird hier für die Grundlagen dieser Funktionen auf Abschnitt 3.1.3 verwiesen. Ein Beispiel einer typischen durch Splines definierten SPH-Kernfunktion ist:

$$W(\tilde{r}, h) = \frac{\sigma}{h^d} \begin{cases} 6 \left(\frac{\tilde{r}}{h}\right)^3 - 6 \left(\frac{\tilde{r}}{h}\right)^2 + 1 & \text{für } 0 \leq \frac{\tilde{r}}{h} < \frac{1}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{\tilde{r}}{h}\right)^3 & \text{für } \frac{1}{2} \leq \frac{\tilde{r}}{h} \leq 1 \\ 0 & \text{für } \frac{\tilde{r}}{h} > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Dabei berücksichtigt  $d = 1, 2, 3$  die Dimension und  $\tilde{r}$  den Abstand der Partikel  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$  sowie der Normierungskonstanten  $\sigma$ . Diese besitzt den Wert  $4/3$  für eindimensionale Probleme,  $40/7\pi$  für 2D, und  $8/\pi$  für räumliche Konstellationen. Die Ableitung des Kernels  $W$  nach  $\tilde{r}$  errechnet sich nach

$$\frac{\partial W(\tilde{r}, h)}{\partial \tilde{r}} = \frac{6\sigma}{h^{d+1}} \begin{cases} 3 \left(\frac{\tilde{r}}{h}\right)^2 - 2 \frac{\tilde{r}}{h} & \text{für } 0 \leq \frac{\tilde{r}}{h} < \frac{1}{2} \\ - \left(1 - \frac{\tilde{r}}{h}\right)^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq \frac{\tilde{r}}{h} \leq 1 \\ 0 & \text{für } \frac{\tilde{r}}{h} > 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

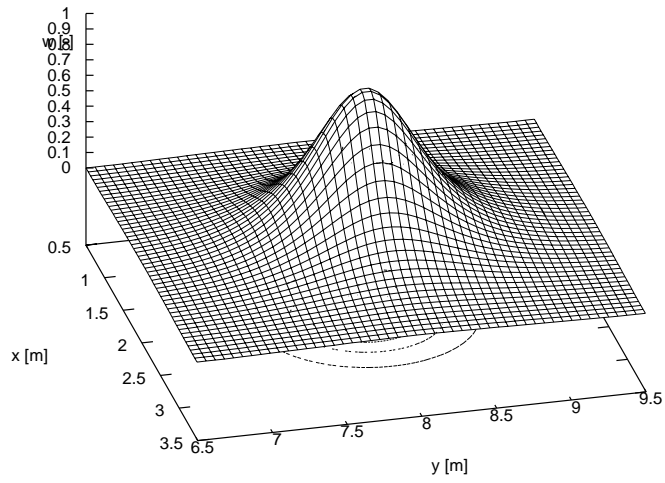
Für die Kalkulation des Gradienten der Kernfunktion gilt hierbei

$$\nabla W(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|, h) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{\partial W(\tilde{r}, h)}{\partial \tilde{r}} \quad (4.7)$$

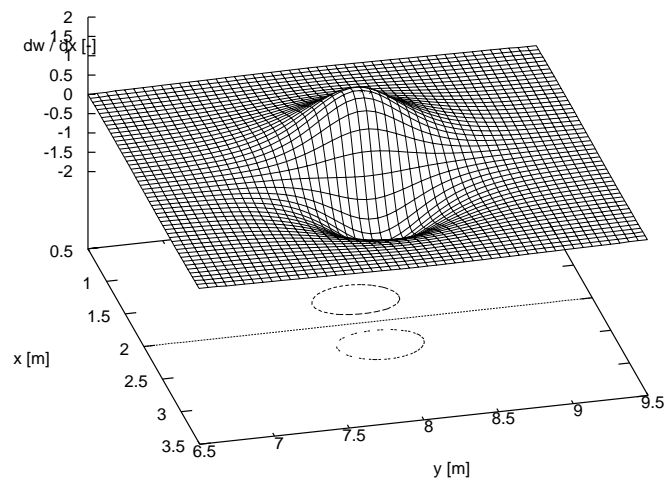
In obigen Gleichungen ist  $\mathbf{r} = [x_{i1} \ x_{i2}]^T$  der Ortsvektor des betrachteten Partikels  $i$  und  $\mathbf{r}' = [x_{j1} \ x_{j2}]^T$  der Ortsvektor eines Nachbarpartikels  $j$ . Der Wirkungsradius der Partikel ist  $h$ . Die Gradienten sind bezüglich der Nachbarpartikel symmetrisch mit umgekehrten Vorzeichen:

$$\nabla W(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|, h) = -\nabla' W(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|, h) \quad (4.8)$$

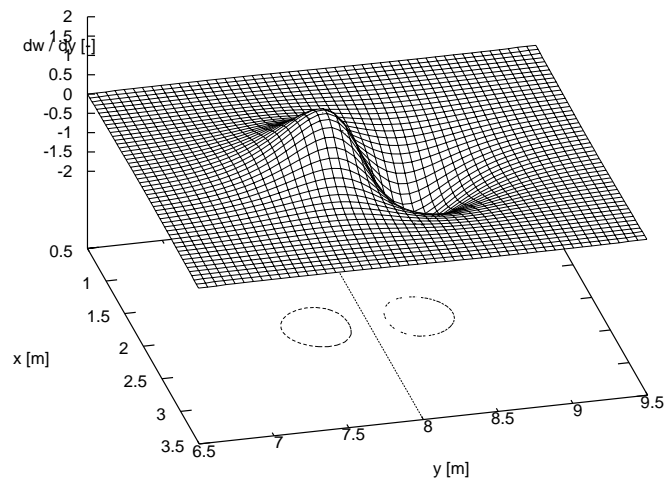
Abb. 4.4 zeigt die Wichtungsfunktion nach (4.5) und deren Ableitungen in zwei orthogonalen Richtungen  $x$  und  $y$  nach (4.6).



(a) Wichtungsfunktion  $W$



(b) partielle Ableitung  $\frac{\partial W}{\partial x}$



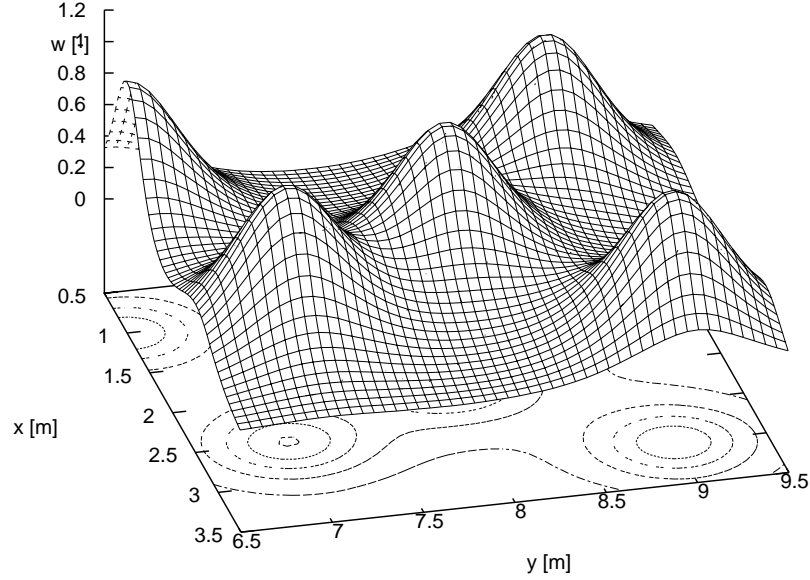
(c) partielle Ableitung  $\frac{\partial W}{\partial y}$

**Abb. 4.4:** Wichtungsfunktion und partielle Ableitungen



### 4.1.2 Anpassung des Wirkungsradius

Der Wirkungsradius bestimmt neben der Anzahl der Partikel unmittelbar die Auflösung und damit die Rechengenauigkeit, Abb. 4.5 zeigt das Überlappen der Wichtungsbereiche für Partikel, deren Distanz kleiner ist als ihr Wirkungsradius.



**Abb. 4.5:** Überlappende Einflussbereiche

Ein kleiner Wirkungsradius bedingt jedoch eine hohe Teilchenanzahl und damit hohen numerischen Aufwand. Daher ist eine dynamische Anpassung der Wirkungsradien in Abhängigkeit der örtlichen Teilchendichte günstig. An Orten geringer Teilchendichte wird der Wirkungsradius des einzelnen Teilchens größer gewählt, während bei hoher Teilchendichte ein geringerer Radius die Auflösung und damit die Wiedergabe steiler Gradienten günstig beeinflusst. Der Wirkungsradius weist dann eine Proportionalität zur lokalen Teilchendichte auf:

$$h \propto \frac{1}{\langle \rho \rangle^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (4.9)$$

Die Approximation der lokalen Dichte über die Nachbarpartikel ist hierbei

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{n} \sum_j \rho_j \quad (4.10)$$

$\langle \dots \rangle$  ist der Approximationsoperator. Der räumlichen Dimension entsprechend wird  $\alpha = 1, 2, 3$  gesetzt: Bei eindimensionalen Fragestellungen gilt  $\alpha = 1$ , bei ebenen Modellen wie in der vorliegenden Arbeit  $\alpha = 2$ . Da sich die örtliche Dichte über die Zeit verändert, ist nun auch der Wirkungsradius des betrachteten Partikels  $i$  zeitabhängig:

$$\frac{dh_i}{dt} = - \left( \frac{h_i}{\alpha \rho_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} \quad (4.11)$$

## 4.2 Zustandsgleichung, Künstliche Kompressibilität

Ein reales Fluid ist nicht absolut inkompressibel. Eine solche Inkompressibilität hätte das Verschwinden des Druckgradienten zur Folge. Im SPH-Verfahren werden die Partikel unter Anderem durch Kräfte, welche aus dem Druckgradienten herrühren, beschleunigt. Der Druck ist eine Funktion der örtlichen Dichte. Der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte wird durch die Zustandsgleichung beschrieben. Die klassische Zustandsgleichung für Wasser ist die Tate'sche Gleichung:

$$p - p_0 = B \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m - 1 \right) \quad (4.12)$$

mit  $B = \rho_0 c_0^2 / m = K_w / m \approx 0,3214 \text{ GPa}$  und  $m = c_p / c_v \approx 7$ . Weiter ist  $p$  der aktuelle Druck,  $p_0$  der Ausgangsdruck,  $\rho$  die momentane Dichte,  $\rho_0$  die Ausgangsdichte,  $c_0$  die Schallgeschwindigkeit bei Ausgangsdruck,  $K_w$  der materialabhängige Kompressionsmodul und  $m$  der Adiabatenexponent. Der Adiabatenexponent ist dabei definiert als das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck  $c_p$  und konstantem Volumen  $c_v$ . Der Kompressionsmodul  $K_w$  beschreibt, welche Druckänderung für eine bestimmte Volumenänderung nötig ist:

$$K_w = - \frac{V dp}{dV} = - \frac{dp}{dV/V} \quad (4.13)$$

Monaghan [57] leitet aus (4.12) die in der vorliegenden Arbeit zumeist verwendete Zustandsgleichung

$$p = B \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (4.14)$$

mit  $\gamma = 7,0$  und  $B = p_0$  ab. Durch den mit  $\gamma$  dargestellten Exponenten haben kleine Dichteänderungen große Druckänderungen zur Folge, was dem realen Verhalten nahezu inkompressibler Fluide entspricht. Eine vereinfachte Zustandsgleichung Monaghans [57], welche lediglich die Schallgeschwindigkeit und Dichte parametrisiert, lautet mit (4.20) für Parameter  $c$ :

$$p = c^2 \rho \quad (4.15)$$

## 4.3 Körperkräfte

Die Wirkung von Körperkräften, beispielsweise der Gravitation  $g$ , findet als direktes Aufbringen einer Partikel-Beschleunigung entsprechenden Betrages und Richtung ihren Niederschlag:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{g}{m_i} \quad (4.16)$$

mit der Partikelmasse  $m$ .

## 4.4 Viskosität

Die durch dynamische Viskosität entstehenden komponentenweisen Partikelkräfte werden durch

$$\mathbf{f}_{iv} = \eta \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (4.17)$$

abgebildet, wobei  $\eta$  hier die materialabhängige dynamische Viskositätszahl ist.

## 4.5 Künstliche Viskosität

Im Moment starker Kompression wird in realen Fluiden kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Ohne diese Dämpfung würde sich auch ohne weitere Energiezufuhr eine stetige Teilchen-Oszillation einstellen. Physikalisch kann dieser Vorgang als viskose Energiedissipation dargestellt werden, welcher direkt abhängig ist von der Divergenz der Teilchengeschwindigkeit  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . Während eines Kompressionsvorganges, und nur dann soll die künstliche Viskosität wirksam sein, ist diese negativ, da sich die Teilchen aufeinander zu bewegen. Dies spiegelt sich im Ansatz von Von-Neumann-Richtmyer [84] zur künstlichen Viskosität wider:

$$\Pi_1 = \begin{cases} a_1 \Delta x^2 \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} < 0 \\ 0 & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

hierin ist  $\Pi_1$  die künstliche Von Neumann-Richtmyer-Viskosität und  $a_1$  ist ein zu justierender dimensionsloser Parameter. Zusätzlich können mit

$$\Pi_2 = \begin{cases} a_2 \Delta x c \rho \nabla \cdot \mathbf{v} & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} < 0 \\ 0 & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

noch nicht unterdrückte Oszillationen weiter vermindert werden.  $a_2$  ist eine dimensionslose festzulegende Konstante, während mit

$$c \approx \sqrt{200gH} \quad (4.20)$$

die Schallgeschwindigkeit dichte- und damit tiefenabhängig (1483 m/s in Wasser bei 20 °C) angenähert werden kann.  $H$  ist die Tiefe,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung. Monaghan [55] entwickelte eine weitere Formulierung, welche zusätzlich zur Abbildung der Energiedissipation dem gegenseitigen Eindringen der Partikel ineinander vorbeugt:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi} \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta_{\Pi} \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{für } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{für } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Das Verhindern des gegenseitigen Eindringens ist immens wichtig für die Stabilität des Modells und realistisches Verhalten der Flüssigkeit an Rändern, beispielsweise zwischen Wasser und Talsperrenfront, Abschnitt 4.7. Auch würde ein gegenseitiges Durchdringen völlig der physikalischen Vorstellung eines Fluidums zuwiderlaufen. Voraussetzung für die Wirksamkeit dieses Mechanismus' ist weiterhin ein klein genug gewählter Zeitschritt, siehe Abschnitt 4.9. Der erste Term des Quotienten stellt eine Scher-Viskosität dar, welche unabhängig von einer Kompression, etwa einer Schockfront, ist. Der zweite Term, welcher gegenseitiges Eindringen unterdrückt, ist hingegen ähnlich der Von Neumann-Richtmyer-Viskosität und somit besonders in Kompressionsphasen wirksam. Die weiteren Parameter sind mit dem Einflussradius  $h$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  sowie dem Positionsvektor  $\mathbf{x}$  jedes Partikels und  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  bzw.  $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  gegeben mit

$$\mu_{ij} = \frac{h_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \varphi^2} \quad (4.22a)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2} (c_i + c_j) \quad (4.22b)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j) \quad (4.22c)$$

$$\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2} (h_i + h_j) \quad (4.22d)$$

Die Parameter  $c$ ,  $\rho$  und  $h$  werden also jeweils gemittelt. Die Konstanten  $\alpha_\Pi$  und  $\beta_\Pi$  werden um den Wert 1,0 herum justiert. Mit  $\varphi$  werden numerische Artefakte durch ein Divergieren des Ausdrucks zu einer Singularität für kleine Teilchenabstände unterdrückt. Zu finden ist oft die Formulierung  $\varphi = \epsilon h_{ij}$ , wobei dann  $\epsilon \approx 0,01$  gesetzt wird. Dieser Wert bestimmt quasi die Rechenauflösung in Bezug auf den Partikeleinflussbereich  $h$ . Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang, dass auch durch die unvermeidlichen Rundungsfehler numerische Artefakte generiert werden, welche viskose Wirkungen haben. Die künstliche Viskosität fließt direkt in die Impulserhaltungsgleichung (4.51b) ein:

$$\frac{D\mathbf{v}_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} \quad (4.23)$$

## 4.6 Geschwindigkeits-Korrektur

Selbst relativ geringe Dichtegradienten ziehen nach (4.14) hohe Druckgradienten nach sich, was zu extremer Beschleunigung einzelner Partikel führen kann. Monaghan [56] schlägt deswegen folgenden Korrekturterm vor, welcher die Geschwindigkeit des einzelnen Partikels an die durchschnittliche Geschwindigkeit der umgebenden Partikel annähert:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \varepsilon \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} W_{ij} \quad (4.24)$$

Hierin ist  $N$  die Zahl der Nachbarpartikel des betrachteten SPH-Teilchens.  $\varepsilon$  wird im Bereich  $0, 0 \leq \varepsilon \leq 1, 0$  gewählt. In der vorliegenden Arbeit wurde  $\varepsilon = 0,3$  bis  $\varepsilon = 0,03$  eingestellt. Für Partikel nahe der Ränder wurde bei extremen Geschwindigkeiten  $\varepsilon = 1,0$  gewählt. Dieses Vorgehen lässt die Partikelbewegung kohärenter werden, was sich insbesondere vorteilhaft hinsichtlich unerwünschter gegenseitiger Penetration auswirkt. Die Gewichtung der Nachbarpartikel relativ zum betrachteten Teilchen kann variiert werden. In (4.25) geht die Dichte als Durchschnitt  $\bar{\rho}$  des aktuellen Partikels und seiner benachbarten Partikel ein:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \varepsilon \sum_j^N \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} \mathbf{v}_{ij} W_{ij} \quad (4.25)$$

wobei

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i}{2} + \frac{\rho_j}{2}$$

gilt. Auch Wichtungen sind unter entsprechender Anpassung von (4.25) möglich, beispielsweise mit

$$\bar{\rho}_{ij} = \rho_i + \frac{\rho_j}{2} \quad (4.26)$$

Jeder Partikel hat damit zwei verschiedene Geschwindigkeiten: Einerseits die reale physikalische Geschwindigkeit, welche in sämtliche Berechnungen Eingang findet, andererseits die korrigierende Geschwindigkeit, welche nur im Moment des Verrückens des Partikels wirksam wird, aber in keiner weiteren Berechnung berücksichtigt wird.

## 4.7 Modellränder

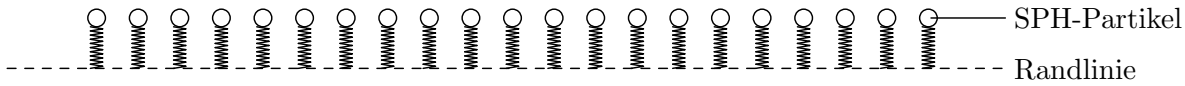
SPH etablierte sich zunächst besonders als Modell astrophysikalischer Fragestellungen. Dies dürfte sich auch darin begründen, dass das nicht Vorhandensein fester Ränder eine SPH-Modellierung stark vereinfacht. Die Behandlung von Rändern, beispielsweise der Oberfläche zwischen Flüssigkeit und Festkörper, sind nach wie vor Gegenstand laufender Weiterentwicklungen der SPH-Methode. Einige Gesichtspunkte der korrekten Verfahrensweise zur Abbildung von Modellrändern lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- möglichst naturnahes Verhalten hinsichtlich Impulsübertragung, Geschwindigkeit, Dämpfung, Reibung, Adhäsion
- kein unerwünschtes Zu- oder Abführen von Energie
- numerisch stabil und wenig aufwändig

Im Folgenden werden einige Ansätze zur Behandlung dieser Fragestellung aufgeführt.

### 4.7.1 Federkräfte

Die einfachste Möglichkeit, innerhalb einer SPH-Formulierung einen Rand darzustellen ist es, sich der Randlinie nähernde Partikel einer entgegengesetzten Kraft normal zum Rand auszusetzen. Diese Kraft steigt mit kleiner werdender Distanz zwischen Rand und Partikel, Abb. 4.6.



**Abb. 4.6:** Implementierung des Modellrandes durch abstoßende Kräfte

Besonders wirksam ist diese Methode, wenn die zurückdrängenden Kräfte exponentiell mit dem Quotienten  $1/r_i$  steigen, wobei  $r_i$  die Entfernung auf der Normalen zum Rand ist. Die Kräfte wirken nur normal zur Oberfläche, die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Rand wird nicht beeinflusst. Dieser Ansatz ist unproblematisch, da keine zusätzliche Energie in das System fließt und numerisch ohne großen Aufwand zu implementieren ist. Jedoch neigen die Partikel nahe des Randes zum Schwingen, was sich durch die künstliche Viskosität, Abschnitt 4.5, und die Korrektur der Partikelgeschwindigkeiten, Abschnitt 4.6, mindern lässt. Die einfache Dämpfung proportional zur Partikelgeschwindigkeit ist unter dem Gesichtspunkt der Energieäquivalenz problematisch. Eine noch einfachere Version dieses Ansatzes besteht darin, bei Überschreiten der Grenzlinie durch einen Partikel lediglich dessen normale Geschwindigkeitskomponente bezüglich des randparallelen Koordinatensystems zu invertieren, was einem ideal elastischen Stoß entspricht. Dies ruft jedoch bei hohen Geschwindigkeiten fallweise numerische Instabilitäten durch Partikeldurchdringungen hervor und verfälscht die Energiebilanz randnaher Partikel. Bei einer sehr großen Anzahl von Partikeln und niedrigen Fortbewegungsraten wurden dennoch mit diesem Ansatz Ergebnisse erzielt, die von denen exakterer Mechanismen nicht signifikant abweichen. Der Einfluss eines etwaigen Fehlers betreffend des Potentials eines Randpartikels nimmt mit zunehmender Teilchenmenge ab. Für Probleme kurzer Zeitskalen und niedriger Relativbewegung zwischen Flüssigkeit und Festkörperwand, wie sie in der vorliegenden Arbeit in Form der Interaktion zwischen Wasser und Talsperre im Erdbebenfall betrachtet werden, können solch einfache Ansätze gerechtfertigt sein.

### 4.7.2 Partikelarretierung

Eine weitere, lediglich zu Versuchszwecken angewandte Methode besteht darin, Partikel, welche sich über die Grenzlinie hinweg bewegen, von diesem Moment an als stationär zu behandeln. Diese Partikel bleiben förmlich an der Grenze haften. Für folgende Partikel bilden sie fortan ein "natürliches" Hindernis, sodass die Grenze an dieser Stelle kein zweites Mal übertreten wird. Jedoch ist dieser numerisch einfach zu implementierende Ansatz aus zweierlei Hinsicht für eine gewöhnliche Simulation bedenklich:

- Die das Fluidum bildende Partikelmenge verringert sich zu Beginn. Bei geringerer Partikelanzahl oder großen Grenzflächen wirkt sich dies besonders aus

- Das Verfahren absorbiert die Energie der eingefrorenen Partikel vollständig, was die Ergebnisse abhängig von der Gesamtpartikelzahl verfälscht

Bei sehr hohen Partikelzahlen bleibt der Fehler dennoch in unter Umständen akzeptablen Grenzen, da wie oben erwähnt lediglich der äußere Partikelfilm beeinflusst wird. Sind die Ränder vollständig durch arretierte Partikel geschlossen, entspricht diese Konstellation den “virtuellen Partikeln”, Abschnitt 4.7.3.

### 4.7.3 Virtuelle Partikel

Eine bewährte Methode zur Darstellung der Ränder in einer Smoothed Particles Hydrodynamics Modellierung besteht darin, Ränder zu Festkörpern mit einer oder mehreren Schichten von Randpartikeln, so genannten “Geisterpartikeln” oder “virtuellen Partikeln”, darzustellen. Hierzu wird auf der Grenzlinie zwischen Flüssigkeit und Körper eine Linie unbeweglicher Partikel angeordnet. Diese finden Eingang in dem normalen SPH-Berechnungsablauf: Sie werden in Randnähe befindlichen Partikeln als Nachbarn zugeordnet, und die Kalkulation der örtlichen Dichte, Druck etc. findet im normalen Ablauf statt. Jedoch behalten die Randpartikel ihre Ortskoordinaten bei. Sollen bewegte Ränder dargestellt werden, kann den Randpartikeln auch eine feste Geschwindigkeit zugewiesen werden. Es stellt sich heraus, dass bei hohen auftretenden Partikelgeschwindigkeiten Durchdringungen einzelner Teilchen durch die Ränder hindurch nicht auszuschließen sind, da die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen bewegtem Flüssigkeitspartikel und starrem Randpartikel zu groß sind. In Grenzen kann dies durch Verringerung der Zeitintervalle kompensiert werden, was den numerischen Aufwand allerdings extrem erhöht. Aus diesem Grunde werden mehrere Schichten von virtuellen Partikeln angeordnet. Sie können auch dynamisch erst im Laufe der Simulation dort generiert werden, wo sich tatsächlich Partikel in Randnähe befinden und im gegenteiligen Fall auch wieder gelöscht werden. Jedem randnahen Partikel kann explizit ein oder mehrere virtuelle Partikel in Richtung seiner Geschwindigkeit gestaffelt zugeordnet werden. Weiterhin kann den generierten Partikeln bei gleicher Dichte und Druck eine symmetrisch konträre Geschwindigkeit ähnlich der Penalty-Methode, Abschnitt 2.3.2, zugeordnet werden, welche zwar in die Impulsberechnungen mit einfließt, jedoch keine Verschiebung der Geisterpartikel zur Folge hat. Zu beachten ist, dass dem System hiermit Energie zugeführt wird, was besonders bei einer geringen Partikelanzahl die Ergebnisse verfälschen kann. Mit der Staffelung gibt es 3 Typen von Partikel [47], Abb. 4.7:

1. reale bewegte Partikel mit gewöhnlichen Eigenschaften
2. stationäre virtuelle Randpartikel auf der Randlinie mit abstoßender Kraftausübung: Typ *I*
3. stationäre virtuelle Randpartikel hinter der Randlinie mit virtueller symmetrisch entgegengesetzter Geschwindigkeit: Typ *II*

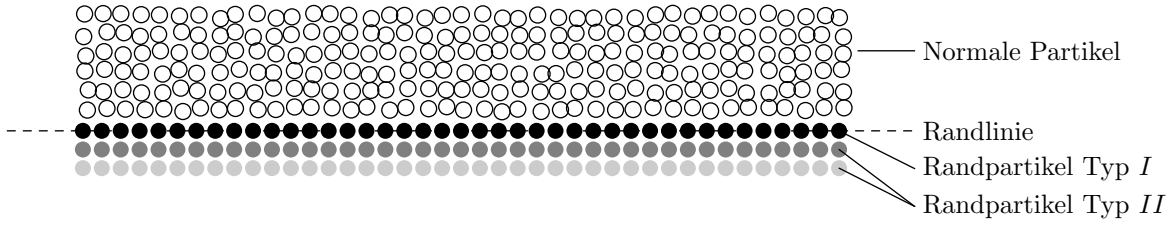


Abb. 4.7: Randpartikel Typ I und Typ II

Die abstoßende Kraft der Partikel des Typs I auf normale SPH-Teilchen berechnet sich dabei wie folgt:

$$PB_{ij} = \begin{cases} D \left[ \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_1} - \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_2} \right] \frac{\mathbf{x}_{ij}}{r_{ij}^2} & \text{für } \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right) \leq 1 \\ 0 & \text{für } \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right) > 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

Hierin sind  $n_1$  bzw.  $n_2$  Parameter, die standardmäßig auf 12,0 bzw. 4,0 gesetzt werden.  $D$  wird in der Größenordnung des Quadrats der höchsten im aktuellen Zeitschritt vorkommenden Partikelgeschwindigkeit gewählt. Der Bereich, in welchem die repulsiven Kräfte wirksam werden, ist  $r_0$  und entspricht dem Partikelabstand bei Simulationsstart. Randpartikel des Typs II üben diese Kräfte nicht aus, sie entfalten eine abstoßende Wirkung durch ihre dem zugeordneten realen Partikel entgegengesetzte Geschwindigkeit. Diese ist virtuell, sie wird in allen Berechnungsschritten wie eine real auftretende Partikelgeschwindigkeit behandelt, Partikel des Typs II bleiben aber stationär. Besonders unproblematisch hat es sich erwiesen, die virtuellen Partikel vollständig aus dem üblichen Vorgang der Dichte- und Druckberechnung zu isolieren, sodass zwischen normalen Partikeln und virtuellen Partikeln ausschließlich die beschriebenen Kräfte, jedoch keine normalen Druckkräfte wirksam sind. Dann zeigt sich eine besonders geringe Neigung zu unerwünschten Oszillationen. Abb. 4.8 veranschaulicht beispielhaft die von Randpartikeln Typ I ausgeübten Kräfte, in einer Situation, in welcher ein 3,0 Meter auf 5,0 Meter großer Flüssigkeitskörper mit einer Geschwindigkeit von 10,0 m/s auf einen vertikalen, unverschieblichen Rand prallt. Die Länge der Linien rechts vom Rand ist proportional zur ausgeübten Kraft, die Richtung der Linie entspricht der resultierenden Kraftrichtung.

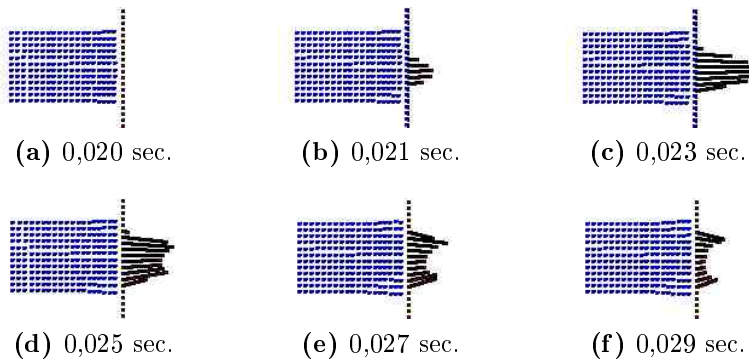
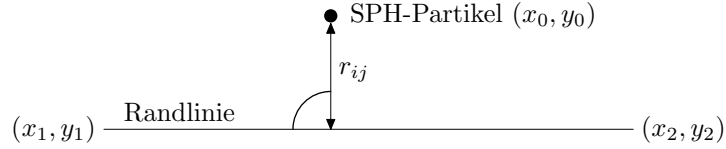


Abb. 4.8: Repulsive Kräfte der Randpartikel



### Virtuelle Randlinie

In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Ansatz dahingehend abgewandelt, dass zur Ausübung der abstoßenden Kräfte an den Rändern keine Randpartikel erforderlich sind, sondern die aus (4.27) resultierende Wirkung bei Annäherung von Partikeln an eine Randlinie auftritt. Das Gebiet wird durch einen Polygonzug begrenzt, dessen linienförmigen Abschnitte die Randlinien sind. Ihre Länge richtet sich nach der gewünschten Auflösung, Anfangs- und Endpunkte jeder Randlinie sind festzulegen.



**Abb. 4.9:** Ansatz mit speziellem Randlinien-Mechanismus

Symbol  $r_{ij}$  bezeichnet dabei die Entfernung des Partikels normal zur Randlinie und errechnet sich im Fall geneigter Randlinien zu

$$r_{ij} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (4.28)$$

wobei  $x_0$  bzw.  $y_0$  die Koordinaten des Partikels sind und  $x_1, y_1$  bzw.  $x_2, y_2$  die Koordinaten der Endpunkte der Randlinie. Bei komplexeren Geometrien sind das die Endpunkte als gerade anzunehmender Teilstrecken. Die abstoßende Kraft  $PB_{ij}$  nach (4.27) wird normal von der Randlinie weisend ausgeübt, was durch einfache Winkelprojektionen geschieht. Ein virtueller Partikel ist nicht vorhanden, sondern das Lot vom normalen SPH-Partikel auf die Randlinie dient der Entfernungsbestimmung, Abb 4.9. Durch diesen Ansatz ergeben sich Vorteile hinsichtlich des numerischen Aufwandes, da lediglich nach Partikeln in Randnähe gesucht werden muss, alle weiteren, auch für virtuelle Partikel erforderlichen Rechenschritte wie Nachbarschaftssuche, Impulsberechnung etc. entfallen. Die abstoßenden Kräfte werden nur dann ausgeübt, wenn der Partikel sich der Grenze nähert. Bewegt er sich ohnehin schon von der Grenze weg, werden keine Kräfte ausgeübt.

#### 4.7.4 Randnahe Partikel

Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurde folgender Ansatz einer einfachen Randpartikelschicht implementiert: Erreicht ein SPH-Partikel den Rand, befindet sich also mindestens ein Randpartikel im Sinne von Abschnitt 4.7.3 in der Liste seiner Nachbarpartikel, so werden alle anderen Einträge dieser Liste, bis auf die eben genannten und Partikel, die ihrerseits ebenfalls "Nahe-Rand-Partikel" sind, gelöscht. Ein Partikel, dessen Grenzen seines Einflussbereiches einen Rand überschneiden, hat somit keine Nachbarpartikel mehr außer Randpartikeln und randnahen Partikeln. Es entsteht zwischen dem Rand und den normalen SPH-Partikeln eine Schicht von Nahe-Rand-Partikeln,

Abb. 4.10. Dadurch nehmen diese randnahen Partikel ähnliche Eigenschaften entsprechend den durch die Merkmale der Randpartikel verkörperten Randbedingungen beispielsweise hinsichtlich der Geschwindigkeit an. Raddurchdringungs-Probleme infolge hoher Partikelgeschwindigkeiten und damit verbundene Berechnungsfehler oder numerische Instabilitäten sind somit ausgeschlossen. Auch bewegte Ränder beispielsweise zur Modellierung von Turbinenschaufeln lassen sich damit relativ einfach simulieren. Da durch dieses Verfahren an sich unerwünscht weder Energie zugeführt noch entnommen wird, entsteht in dieser Hinsicht kein Fehler. Zusätzlich wird der Parameter  $\epsilon$  in (4.24) auf 1,0 gesetzt. Hierdurch wird die Geschwindigkeit von Partikel, die sich so nahe an den Rändern befinden, dass ihr Einflussbereich diese überschneidet, an deren Geschwindigkeit angenähert, wodurch Durchdringungen unterdrückt werden. Partikel, welche zwar Nahe-Rand-Partikel, nicht jedoch "echte" Randpartikel in ihrer Nachbarpartikel-Gruppe haben, reagieren normal, da keinerlei Veränderung in ihren Nachbarschaftsbeziehungen vorgenommen werden. Mit diesem Ansatz kann die bei hohen Partikelgeschwindigkeiten notwendige mehrfache Schichtung von Randpartikeln entfallen, wodurch der numerische Aufwand erheblich sinkt. Zusätzlich reduziert sich dieser noch durch das Streichen von Nachbarschafts-Listeneinträgen der Nahe-Rand-Partikel. Weiterhin wird durch Anwendung dieser Methode die Modellierung geometrisch komplexer Ränder stark vereinfacht, da bis auf die Linie der Randpartikel keinerlei Berechnungen bezüglich der räumlichen Anordnung der üblichen mehrfachen Randpartikel-Schichten zu leisten sind. Der Verlauf der randnahen Partikelschicht ergibt sich im Zuge der Nachbar-Partikelzuordnung.

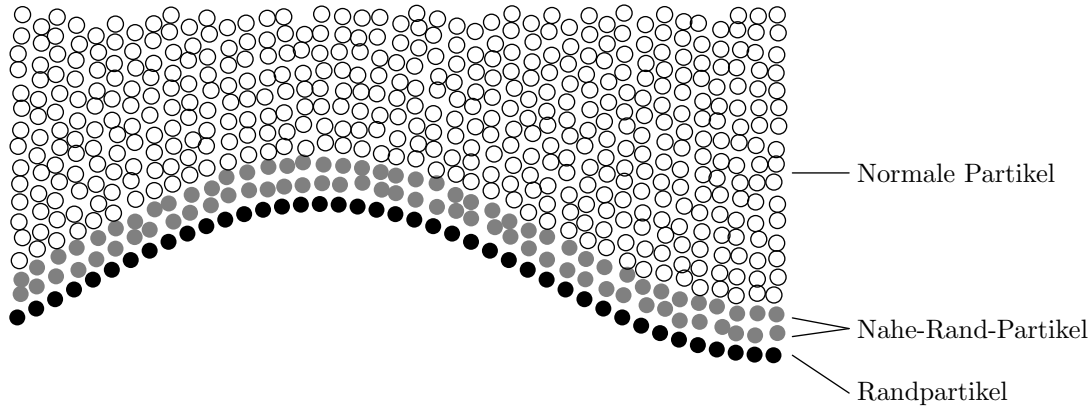


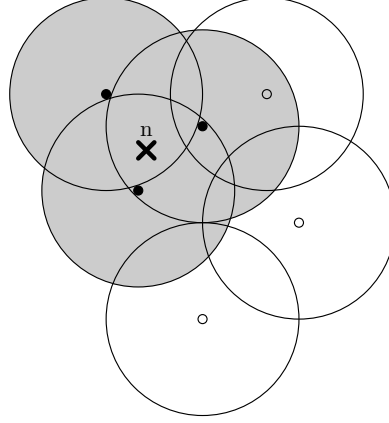
Abb. 4.10: Randnahe Partikel

## 4.8 Örtliche Parameter

Nach der SPH-Grundformulierung über eine Summenapproximation entsprechend (4.4) werden die örtlichen Größen wie Masse, Geschwindigkeit und der Druck an einem beliebigen Ort  $n$  ermittelt. So gilt dort für die örtliche Masse:

$$M_n = \sum_{j=1}^N m_j \frac{W_{nj}}{\rho_j} \quad (4.29)$$

Hierin ist  $m_j$  die Masse des Nachbarpartikels,  $\rho_j$  dessen Dichte,  $W_{nj}$  ist das Gewicht, welches der Koordinatenpunkt  $n(x, y)$  vom Nachbarpunkt  $j$  aus gesehen hat und  $N$  die Anzahl der Nachbarpartikel, in deren Einflussbereich der Punkt  $n(x, y)$  liegt. In der in Abb. 4.11 dargestellten Situation wären dies drei Nachbarpartikel. Eine Definition eines Einflussbereiches des Punktes  $n$  ist nicht erforderlich, da beispielsweise für die Gewichte die Symmetrie  $W_{ij} = W_{ji}$  gilt. Dies jedoch nur dann, wenn der Einflussbereich der Knotenradien nicht variiert, also  $h_i = h_j$  gültig ist.



**Abb. 4.11:** Beeinflussende Knotenbereiche am Punkt  $n(x,y)$

Äquivalent gilt für die örtliche Geschwindigkeit mit den globalen Richtungskomponenten  $V_{n_x}$  bzw.  $V_{n_y}$  und den entsprechenden Komponenten  $v_{j_x}$  bzw.  $v_{j_y}$  des Nachbarpartikels

$$V_{n_x} = \sum_{j=1}^N v_{j_x} \frac{m_j W_{nj}}{\rho_j} \quad (4.30a)$$

bzw.

$$V_{n_y} = \sum_{j=1}^N v_{j_y} \frac{m_j W_{nj}}{\rho_j} \quad (4.30b)$$

und für die örtliche Dichte

$$\rho_n = \sum_{j=1}^N m_j W_{nj} \quad (4.31)$$

bzw. den örtlichen Druck

$$P_n = \sum_{j=1}^N p_j \frac{m_j W_{nj}}{\rho_j} \quad (4.32)$$

wobei  $p_j$  der Druck des Nachbarpartikels  $j = 1 \dots N$  ist. Sind keine Nachbarpartikel vorhanden, deren Einflussbereiche den Punkt  $n(x, y)$  einschließen, ist keine Summation

möglich:  $N = 0$ . Hilfsweise kann Partikel  $n$  in einem solchen Fall ein eigener Einflussbereich  $h_n$  zugewiesen werden, dessen Mindestradius sich aus der gewünschten Anzahl an Nachbarpartikeln herleitet. Über

$$M_n = \sum_{j=1}^N m_j \frac{m_j W_{jn}}{\rho_j} \quad (4.33)$$

und den verbundenen Ausdrücken identisch zu (4.29) mit symmetrischem Gewicht  $W_{jn}$ , ist es nun möglich, die örtlichen Größen zu bestimmen, nachdem zuvor die Nachbarpartikel zugeordnet wurden. Bei hohen Partikeldichten kann es eine ressourcensparende Alternative sein, den zur gewünschten Position nächstliegenden Partikel zu suchen und dessen bereits vorliegende Parameter ohne weitere Rechenschritte direkt zu übernehmen. Die resultierende örtliche Ungenauigkeit ist erfahrungsgemäß gering, besonders wenn die Geschwindigkeitskorrektur nach Abschnitt 4.6 Eingang fand.

## 4.9 Zeitintegration

Die SPH-Grundgleichungen (4.51) sind Differenzialgleichungen in Abhängigkeit zur Zeit  $t$ . Deren Integration findet durch Einteilen in Intervalle  $\Delta t$  statt. Aus Stabilitätsgründen ist es vorteilhaft, Ort und Geschwindigkeit nicht gleichzeitig zu errechnen, sondern die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  in Intervall-Mitte, die neuen Positionen  $\mathbf{x}$  jedoch am Intervall-Ende zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\implies \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} &\implies \mathbf{v}_{i+\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

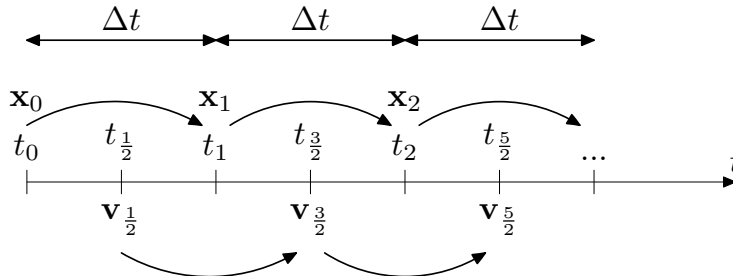
Hierbei sei definiert:

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) \quad \text{für die Zeitschritte } i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

Dies geschieht mithilfe des auch aufgrund des geringen Speicherbedarfs günstigen Leap-Frog-Schemas, Abb. 4.12. Dieses legt fest

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}\Delta t \quad (4.35)$$

$$\mathbf{v}_{i+\frac{2}{3}} = \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} + f(\mathbf{x}_{i+1})\Delta t \quad (4.36)$$



**Abb. 4.12:** Zeitintegration nach Leap-Frog-Schema

Zunächst sind die maßgeblichen Größen im ersten Intervall  $t = t_0 + \Delta t$  zu ermitteln:

$$\rho_i(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) = \rho_i(t_0) + \frac{t_0}{2} D\rho_i(t_0) \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{v}_i(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{v}_i(t_0) + \frac{t_0}{2} D\mathbf{v}_i(t_0) \quad (4.37b)$$

$$\mathbf{x}_i(t_0 + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t_0) + \Delta t \mathbf{v}_i(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \quad (4.37c)$$

Hierbei bezeichnet  $D$  das totale Differenzial. Zu Beginn jedes folgenden Intervalls (Zeitpunkt  $t$ ) werden Dichte und Geschwindigkeit auf halber Intervallstrecke vorhergesagt:

$$\rho_i(t) = \rho_i(t_0 - \frac{t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} D\rho_i(t - \Delta t) \quad (4.38a)$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_i(t_0 - \frac{t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} D\mathbf{v}_i(t - \Delta t) \quad (4.38b)$$

Am Ende jedes Zeitschrittes  $t := t + \Delta t$  findet die Zuordnung der neuen Dichte, Geschwindigkeit und Position statt:

$$\rho_i(t + \frac{\Delta t}{2}) = \rho_i(t - \frac{t}{2}) + \Delta t D\rho_i(t) \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{v}_i(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{v}_i(t - \frac{t}{2}) + \Delta t D\mathbf{v}_i(t) \quad (4.39b)$$

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \Delta t \mathbf{v}_i(t + \frac{t}{2}) \quad (4.39c)$$

Dies entspricht der Predictor-Corrector-Methode zweiter Ordnung. Die Stabilität dieses Vorgehens wird durch die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung  $(v_{max} \cdot \Delta t)/\Delta x < 1$  beschrieben und ist damit proportional zu Zeitschritt  $\Delta t$  und minimaler Partikelentfernung  $\Delta x$ . Das numerische Vorgehen gestaltet sich wie folgt:

1. Berechnung von  $\dot{\mathbf{v}}(t)$
2.  $\mathbf{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{v}(t) + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{v}}(t)$   
 $\mathbf{x}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}(t)$
3. Berechnung von  $\dot{\mathbf{v}}(t + \frac{\Delta t}{2})$
4.  $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{v}}(t + \frac{\Delta t}{2})$   
 $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}(t + \Delta t)$

Damit sind zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  sowohl Ort als auch Geschwindigkeit jedes Teilchens bekannt.

### 4.9.1 Zeitschrittweite

Die Zeitschrittweite  $\Delta t$  ist von besonderer Bedeutung für die Stabilität des Modells. Im Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics findet keine Kollisionskontrolle im Sinn des Abgleichs kreuzender Partikelbahnen statt. Die Durchdringung einzelner Partikel wird dadurch verhindert, dass mit deren Annäherung die örtliche Dichte und somit der Druck zunimmt, was nach den hydrodynamischen Grundgleichungen, Abschnitt 4.10, Beschleunigungskräfte entgegengesetzt zum Druckzentrum gerichtet zur Folge hat. Dies kann sich jedoch aufgrund der Partikelträgheit nur dann auswirken, wenn der Vorgang der Distanzverringering zeitlich über eine ausreichende Anzahl von Zeitschritten verteilt ist. Ein zu großer Zeitschritt birgt die Gefahr des “Übersehens” eines Annäherungsvorgangs und somit eines weiten Eindringens oder sogar vollständigen gegenseitigen Durchdringens der Partikel. Die Stabilität ist insbesondere dann gefährdet, wenn sich zwei Partikel so nahe kommen können, dass ihre Zentrumskoordinaten  $\mathbf{x}$  fast aufeinander liegen. Der örtliche Druck ist dann so hoch, dass eine regelrechte Explosion die Folge sein kann. Dabei können so große Partikelgeschwindigkeiten auftreten, dass eine Kettenreaktion des beschriebenen Phänomens verursacht wird, was den Zusammenbruch der numerischen Simulation bedeutet. Eine grobe Schätzung der größten möglichen Schrittweite der Zeitintegration kann

$$\Delta t = \frac{dx}{c + v_{max}} \quad (4.40)$$

liefern [48]. Hierin ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit des Fluids,  $v_{max}$  ist der höchste vorkommende Betrag der Geschwindigkeitskomponenten aller Partikel und  $dx = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  der kleinste vorkommende räumliche Partikelabstand bzw. der Abstand der äußeren Grenzen ihrer Wirkungsradien  $h$ . Meist sind die auftretenden maximalen Partikelgeschwindigkeiten im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit gering, somit kann (4.40) zu

$$\Delta t = \min \left( \frac{h_i}{c} \right) \quad (4.41)$$

vereinfacht werden.  $h_i$  ist hierbei der kleinste vorkommende Wirkungsradius im System. Unter Miteinbeziehung der künstlichen Viskosität, Abschnitt 4.5, und Einwirkung der externen Kraft  $f$ , beispielsweise der Gravitation, schlägt Monaghan folgende Abschätzung des maximalen Zeitintervalls über zwei Parameter vor [56]:

$$\Delta t_{av} = \min \left( \frac{h_i}{c_i + 0.6 (\alpha_{\Pi} c_i + \beta_{\Pi} \max(\mu_{ij}))} \right) \quad (4.42)$$

und

$$\Delta t_f = \min \left( \frac{h_i}{f_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

Gleichung (4.42) leitet sich aus (4.21) ab. Damit gilt für  $\mu_{ij}$  die Gleichung (4.22a). Dementsprechend sind auch an dieser Stelle  $\alpha_{\Pi}$  sowie  $\beta_{\Pi}$  Konstanten, welche um den

Wert 1,0 herum liegen. Aus dem pessimalen Produkt von (4.42) bzw. (4.43) mit den "Sicherheitsbeiwerten"  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  bestimmt sich die größtmögliche Zeitschrittweite:

$$\Delta t = \min(\lambda_1 \Delta t_{av}, \lambda_2 \Delta t_f) \quad (4.44)$$

Für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  schlägt Monaghan die Werte 0,4 beziehungsweise 0,25 vor, was die längste "sichere" Zeitschrittweite nochmals auf 40% beziehungsweise 25% reduziert. Auch einfachere Abschätzungen sind möglich, beispielsweise nach [37] mit der an die oben genannte Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung angelehnten Formulierung

$$\Delta t = c_{CFL} \min \left( \frac{h_i}{c_i + v_i} \right) \quad (4.45)$$

mit der Zeitschrittweite  $\Delta t$ , dem Partikel-Wirkungsradius  $h_i$ , der - mit der örtlichen Dichte veränderlichen - Schallgeschwindigkeit  $c_i$  und der Partikelgeschwindigkeit  $v_i$ . Für die Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl gilt  $c_{CFL} < 1$ .

### 4.9.2 Startbedingungen

Die Startbedingungen zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind bestimmend für den Verlauf oder zumindest für die Zeitspanne bis zum Einstellen eines stationären Zustandes. Wesentliche Gesichtspunkte hierzu werden in diesem Abschnitt diskutiert.

#### Dichte zum Simulationsstart

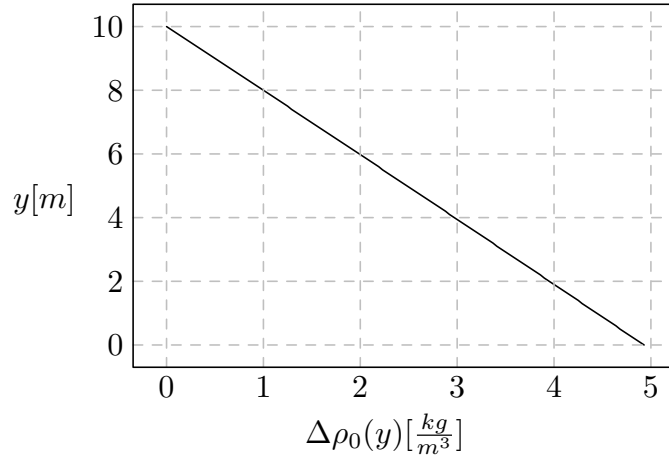
Den SPH-Partikeln wird zur Repräsentation eines Wasser-Volumenteilchens die Dichte  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$  zugewiesen. Wirkt nun eine Körperkraft wie beispielsweise die Gravitation, so hat dies eine Kompression und damit eine Erhöhung der örtlichen Dichte zur Folge. Damit wäre eine gewisse Vorlaufzeit erforderlich, bis sich dieser Zustand mit einhergehender Volumenverringerung beispielsweise im numerischen Modell eines Reservoirs einer Talsperre eingestellt hat. Um dies zu vermeiden, wird den Partikeln vor Simulationsstart eine tiefenabhängige Dichte

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\rho_0 g (H - y)}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.46)$$

mit dem Koeffizienten

$$B = \frac{200 g H \rho_0}{\gamma} \quad (4.47)$$

zugewiesen. Hierin ist  $H$  die Gesamttiefe,  $y$  die Tiefe des einzelnen Teilchens ab Wasserspiegel,  $\gamma$  ist ein Parameter, welcher üblicherweise zu  $\gamma = 7$  gesetzt wird [57]. Für eine Gesamttiefe von  $H = 10,0 \text{ m}$  und  $\rho_0 = 1000,0 \text{ kg/m}^3$  an der Oberfläche ergibt sich die in Abb. 4.13 dargestellte tiefenabhängige Dichtezunahme  $\Delta \rho_0(y)$ .

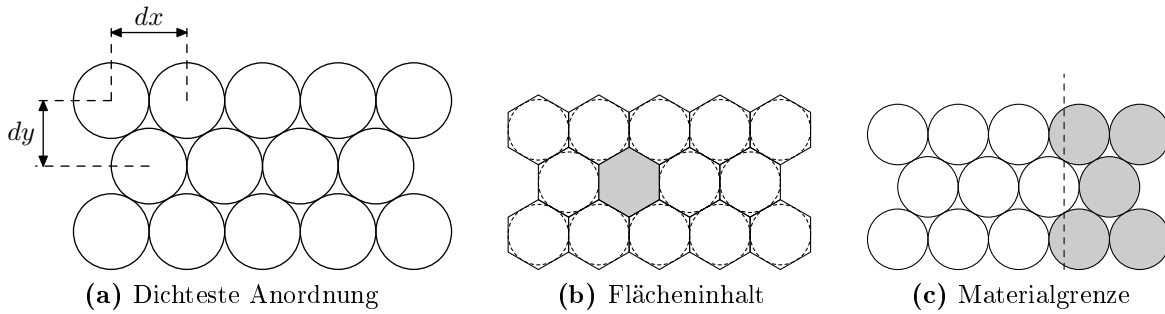


**Abb. 4.13:** Dichteverteilung im Ausgangszustand für  $H = 10,0 \text{ m}$

### Dichteste Kugelpackung

Um unerwünschte anfängliche Kompressionsvorgänge zu vermeiden, wurden die Partikel für Berechnungen der vorliegenden Arbeit in der dichtesten Kugelpackung – durch den zweidimensionalen Ansatz eigentlich als “dichteste Kreisanordnung” zu bezeichnen – gruppiert, Abb. 4.14a. Dabei werden benachbarte Partikelreihen horizontal um  $dx/2$  versetzt. Der vertikale Abstand beträgt dann

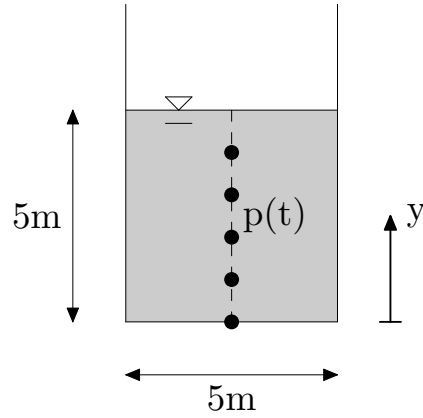
$$dy = \sqrt{dx^2 - \left(\frac{dx}{2}\right)^2} \quad (4.48)$$



**Abb. 4.14:** Dichteste Kugelpackung

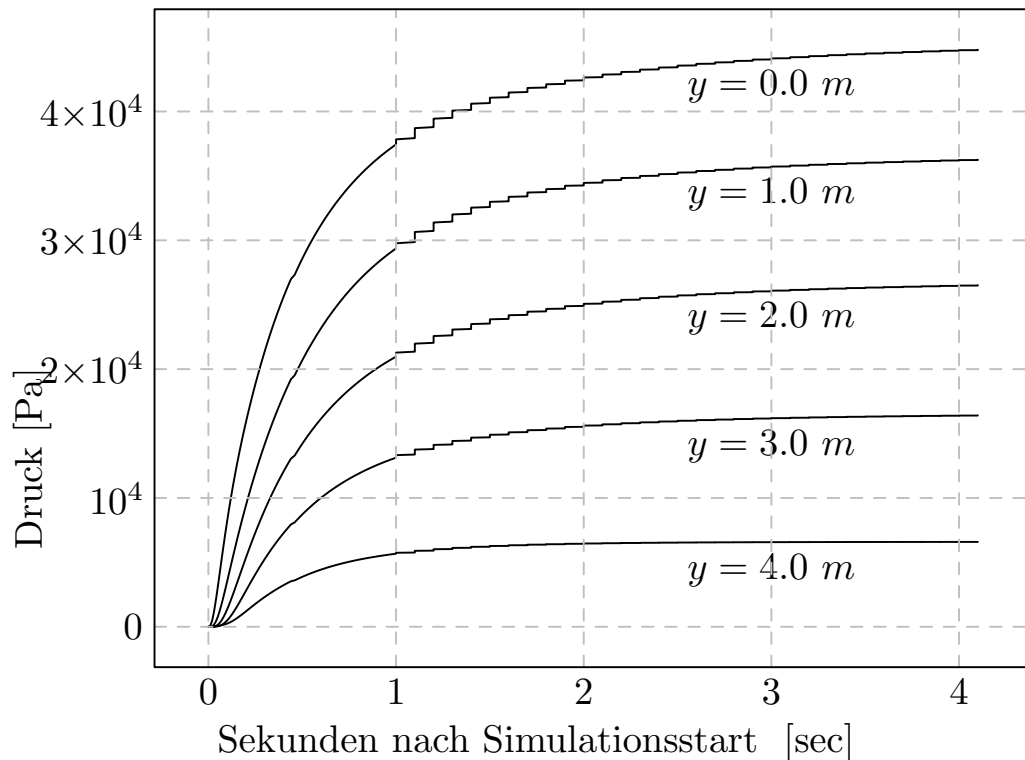
Jeder Partikel repräsentiert dabei eine Masse von  $A_{Hexagon} \cdot \rho$ . Der Flächeninhalt des Hexagons ist mit  $A_{Hexagon} = 3/2 a^2 \sqrt{3}$  gegeben, wobei zum Kugelradius  $r$  die Beziehung  $a = r / \sqrt{3}$  besteht. Optimale Konvergenz wird erzielt, wenn diese Anordnung auch als Startbedingung an Grenzen ebenfalls durch netzfreie Modelle dargestellten Materials realisiert werden kann, Abb. 4.14c, etwa an der Stoffgrenze zwischen Wasser und Tal-sperrenfront. Dies wurde für die in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungen durch den in Abschnitt 5 beschriebenen Ansatz der Modellkombination erfüllt.



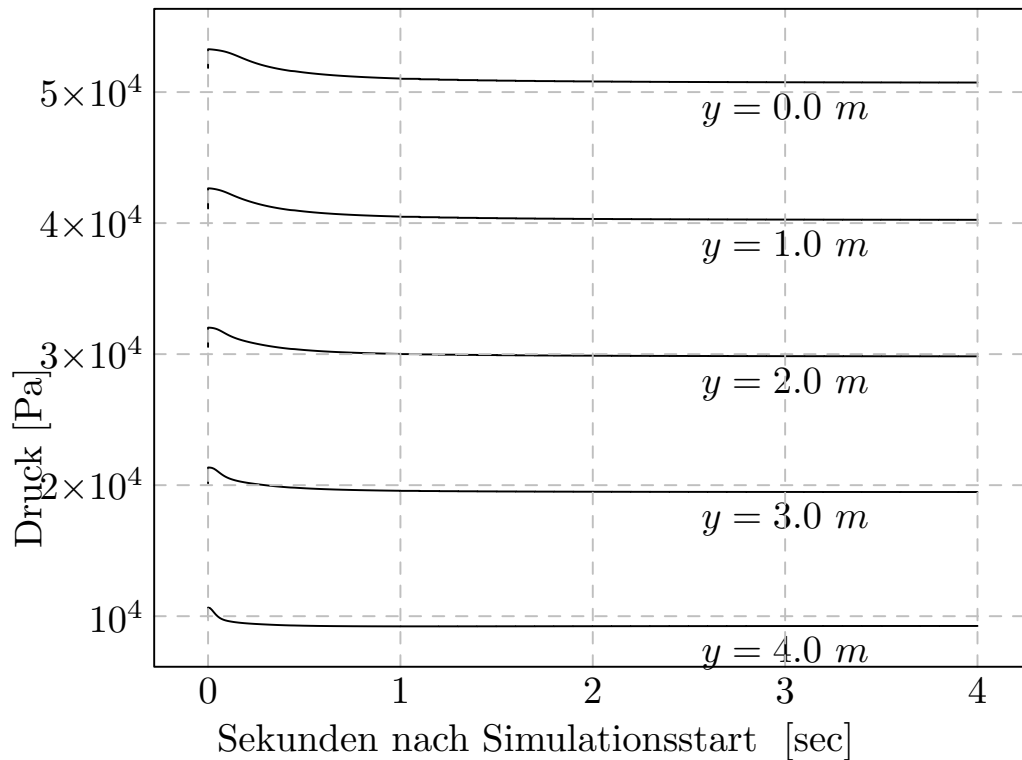


**Abb. 4.15:** Behältermodell

Abb. 4.16 und 4.17 zeigen die Entwicklung des Druckes in einem flüssigkeitsgefüllten Behälter in verschiedenen Tiefen; die maßgeblichen Punkte der Aufzeichnung sind in Abb. 4.15 skizziert. Wird die Dichte initial nicht an den tiefenabhängigen Druck angepasst, so findet anfänglich ein deutlicher Kompressionsvorgang mit damit verbundenem Volumenverlust statt, Abb. 4.16. Werden die Partikeldichten hingegen positionsabhängig eingestellt, sind praktisch keine solchen Effekte zu beobachten, Abb. 4.17. Die leichte Treppung in Abb. 4.16 ist durch Rundungen des verwendeten Variablentyps für die Datenausgabe verursacht.

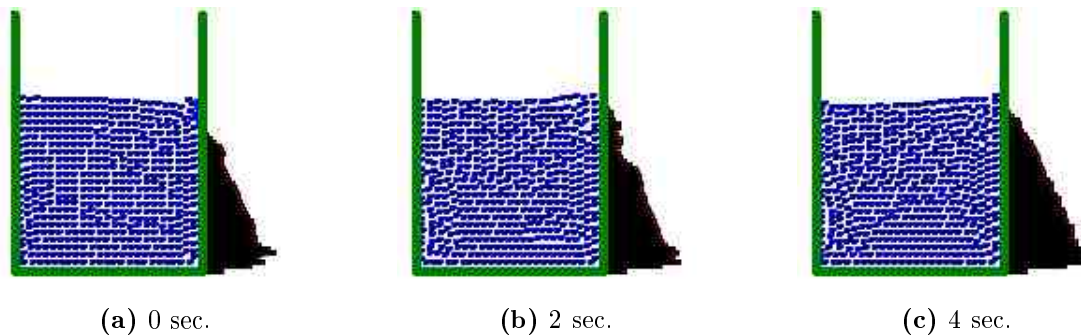


**Abb. 4.16:** Zeitliche Entwicklung des Druckes ohne tiefenabhängiger Initialdichte



**Abb. 4.17:** Zeitliche Entwicklung des Druckes mit tiefenabhängiger Initialdichte

Direkt am Modell zeigt Abb. 4.18 die Druckentwicklung am Behälterrand. Die Länge der Linien ist proportional zum Druck. Die Abnahme des Drucks am Behälterfuß ist auf die virtuellen Partikel des Randes, Abschnitt 4.7.3, zurückzuführen, deren Drücke hier der Einfachheit halber nicht aus der graphischen Darstellung ausgeschlossen wurden.



**Abb. 4.18:** Zeitliche Entwicklung des Druckes am Behälterrand

Dem Vorteil einer schnelleren Konvergenz steht der Aufwand der komplexeren initialen Partikel-Anordnung gegenüber. Diese Anordnung kann im Prinzip als das Äquivalent eines Netzes aufgefasst werden, welches direkt abhängig von der Geometrie des zu untersuchenden Raumes ist. Damit geht einer der wesentlichen Vorteile netzfreier Methoden, eben das Wegfallen der Netzgeneration, verloren. Es ist im Einzelfall abzuwägen, welcher

Kompromiss zwischen dem Aufwand der initialen Partikelanordnung und der Inkaufnahme numerischer Artefakte während der ersten Phase der Simulation gefunden werden kann. Bei den im Folgenden untersuchten Problemstellungen handelt es sich im Wesentlichen um einfache Geometrien, sodass eine günstige Anfangsanordnung der Partikel kein Problem darstellte. Die Partikel wurden nach dem oben beschriebenen Verfahren regelmäßig angeordnet. Bei günstiger Wahl der Körpergrenzen kongruent zum Wirkungsradius der Partikel, was bei den hauptsächlich betrachteten Talsperren-Reservoir-Systemen oder einfachen Körpern mit geraden Rändern problemlos möglich ist, entstehen damit praktisch keine Artefakte. Bei komplexeren Geometrien wurden Partikel, deren Wirkungsradien nach erfolgter Erstanordnung die Körpergrenzen überschritten, eliminiert. Damit können an den Rändern Bereiche der Breite von maximal des Partikelwirkungsradius entstehen, in denen sich kein Partikel befindet. Dies führt zu Erscheinungen wie beispielsweise Druckspitzen beim Kontakt der Randpartikel nach Überwinden des leeren Bereiches. In der Praxis ließen sich solche Vorgänge aber problemlos herausfiltern, im einfachsten Fall durch Abwarten einer gewissen “Einschwingzeit”. Weiterhin nimmt die Dominanz solcher Artefakte wie erwähnt mit zunehmender Partikelanzahl ab.

## 4.10 Formulierung der Erhaltungsgleichungen

Das Verhalten kompressibler viskoser Fluide wird durch die Erhaltungsgleichungen beschrieben, welche den Erhalt der Masse, (4.49a), des Impulses, (4.49b), und der Energie, (4.49c), zum Gegenstand haben [48]. Deren allgemeine Formulierung als Navier-Stokes-Gleichungen lagrangescher Sichtweise lauten

$$\text{Kontinuität} \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}^\beta}{\partial \mathbf{x}^\beta} \quad (4.49a)$$

$$\text{Impuls} \quad \frac{D\mathbf{v}^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}^\beta} \quad (4.49b)$$

$$\text{Energie} \quad \frac{De}{Dt} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\beta} \quad (4.49c)$$

Hierbei geben die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  die räumlichen Koordinaten an. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Exponenten. Das totale Differenzial nach der Zeit wird durch  $\frac{D}{Dt}$  ausgedrückt. Der Spannungstensor ist

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad \tau^{\alpha\beta} = \mu\varepsilon^{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}^\beta}{\partial \mathbf{x}^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta^{\alpha\beta} \quad (4.50)$$

Die viskose Spannung hat das Symbol  $\tau$ ,  $\mu$  ist die dynamische Viskosität,  $p$  der isotropische Druck und  $\varepsilon$  die Scherdehnung. Impulsänderungen sind also eine Folge viskoser Kräfte (“Reibung”), Druckänderungen und Körperkräften wie Gravitation. Die Erhaltungsgleichungen (4.49a), (4.49b) und (4.49c) finden ihr direktes Analogon in den zusammengefassten SPH-Formulierungen

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_{ij}^\beta = (\mathbf{v}_i^\beta - \mathbf{v}_j^\beta) \quad (4.51a)$$

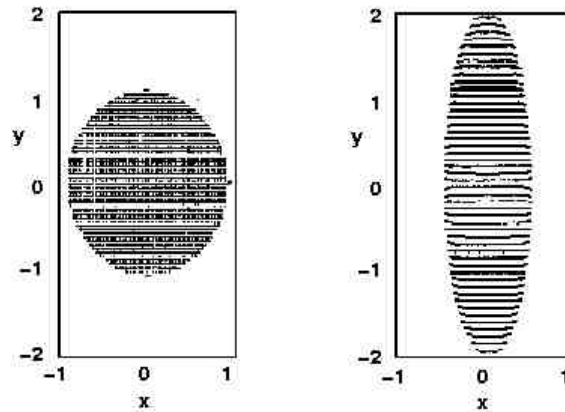
$$\frac{D\mathbf{v}_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} \quad (4.51b)$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \mathbf{v}_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \varepsilon_j^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \quad (4.51c)$$

wobei  $i$  der Index des betrachteten Partikels ist. Die Gleichungen sind durch den Ansatz bewegter Partikel prinzipiell automatisch erfüllt. Somit stellt der SPH-Formalismus ein Werkzeug dar, die Navier-Stokes-Gleichungen realitätsnah zu lösen. Theoretisch ist also kein weiteres Turbulenzmodell vonnöten, vorausgesetzt, die Auflösung ist hoch genug.

## 4.11 Validierung

Da bislang kein direkter Beweis der Konvergenz des SPH-Modells existiert, werden die Ergebnisse mit analytischen Lösungen oder experimentell gewonnenen Werten verglichen. Eine von Monaghan [57] zum Vergleich herangezogene Konstellation ist die analytische Lösung des Auseinanderfließens eines zweidimensionalen zunächst kreisrunden Tropfens, dessen Initialgeschwindigkeitsfeld linear zu den örtlichen Koordinaten ist, Abb. 4.19.



**Abb. 4.19:** Ausbreitung eines Tropfens [57]

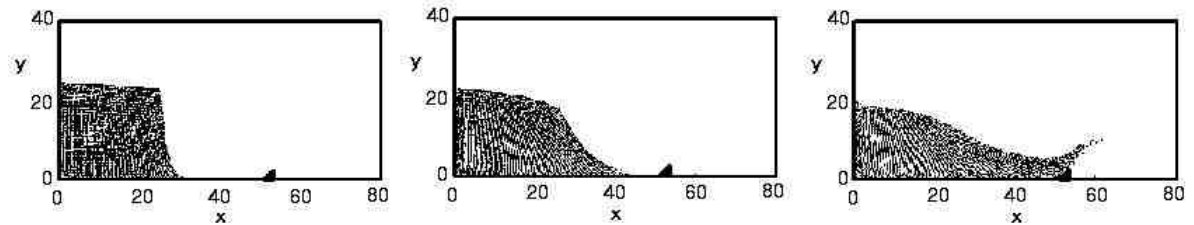
Die örtlichen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes sind dann gegeben durch

$$v_x = \frac{x}{a} \frac{da}{dt} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{y}{b} \frac{db}{dt} \quad (4.52)$$

Hierin sind  $a$  und  $b$  die über die Zeit veränderlichen Achsen der Ellipse. Die Bedingung der Inkompressibilität drückt sich dadurch aus, dass das Produkt  $ab$  der Halbachsen der Tropfengeometrie gleich bleibt, damit ist  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Aus der Impulserhaltung und der Bedingung, dass der Druck am Tropfenrand konstant bleibt, folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A^2(a^4 - \omega^4)}{a^4 + \omega^4} \quad \text{mit} \quad \frac{da}{dt} = -aA \quad (4.53)$$

Der Initialwert von  $ab$  ist  $\omega$ . Monaghan [57] gibt bei einem Modell mit 1884 Partikeln und einer Schallgeschwindigkeit von 1400 m/s eine Dichte-Fluktuation weniger als 1% an. SPH-Modellierungen bieten sich natürlich auch für einen Vergleich mit Versuchsergebnissen an. Ein einfach zu realisierendes Experiment, welches auch im Zuge dieser Arbeit in ähnlicher Form durchgeführt wurde, Abschnitt 7.1, ist der “brechende Damm”, Abb. 4.20.



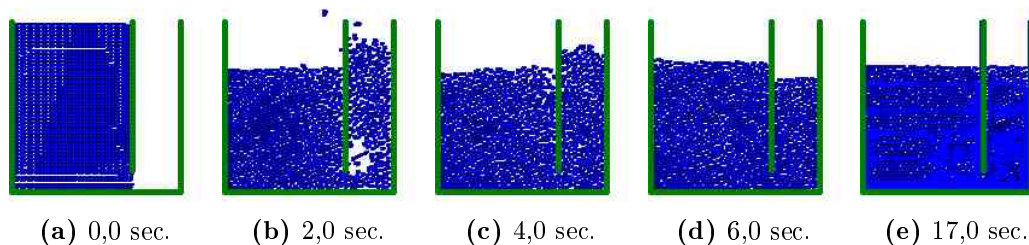
**Abb. 4.20:** Brechender Damm [57]

Als Referenz kann beispielsweise die Höhe des Wasserspiegels  $H$  am festen vertikalen Modellrand zu bestimmten Zeitpunkten dienen. Monaghan [57] erzielte im Vergleich zu Versuchsergebnissen von Martin [51] die in Tab. 4.1 dargelegte Übereinstimmung:

**Tab. 4.1:** Experimentalwerte und SPH-Simulationsergebnisse nach Monaghan [57]

Zeitpunkt $t$ [sec]	$H$ experimentell [m]	$H$ SPH [m]
0,71	0,90	0,90
1,36	0,76	0,75
2,10	0,57	0,56
3,20	0,32	0,37

Die Lösung der Bernoulli-Gleichungen liefert weitere Möglichkeiten zur Überprüfung: Abb. 4.21 zeigt die ausgleichende Wasserspiegelentwicklung in zwei kommunizierenden Röhren unterschiedlicher Breite, von welchen zu Beginn nur eine gefüllt ist, als Simulation durch den im Zuge dieser Arbeit entwickelten SPH-Code. Nach heftigen Fluidbewegungen, auch unter dem Auftreten von Partikelablösungen, zeigt sich das typische Oszillieren des Wasserspiegels zwischen den beiden Röhren. Dieses kommt nach einiger Zeit durch Reibung zum Stillstand.



**Abb. 4.21:** Druckausgleich in kommunizierenden Röhren

Liu [48] erzielt mit SPH-Modellierungen der Poiseuille- und Couetteströmung, für die jeweils analytische Lösungen verfügbar sind, Abweichungen zu diesen von 0,5%. Unter einer Poiseuille-Strömung versteht man die stationäre Strömung einer Newton'schen Flüssigkeit in einem starren, kreiszylindrischen Rohr. Die Couette-Strömung bezeichnet die laminare Strömung einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit zwischen zwei relativ zueinander bewegten, unendlich langen und breiten Platten.

### Fehlerabschätzung

Aus mathematischer Sicht lassen sich im SPH-Modell zwei maßgebliche Faktoren identifizieren, die zu Ungenauigkeiten führen können [80]:

- Das Kontinuum wird durch eine endliche Anzahl Partikel repräsentiert
- Wirkungsradius  $h > 0$  im Gegensatz zur "Idee" der Dirac-Delta-Funktion (4.1)

Durch eine Taylorreihen-Entwicklung mit  $h = 0$  lässt sich für die Größe des Fehlers die Beziehung  $O(h^2)$  herleiten: Die Taylorreihe zur Funktion  $f(\mathbf{x}')$  lautet:

$$f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\tilde{\mathbf{x}} \cdot \nabla)^n f \Big|_{\mathbf{x}} \quad (4.54)$$

Hierin ist im zweidimensionalen Fall

$$(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \nabla) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{x}_1^{n-k} \tilde{x}_2^k \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n-k} \partial y^k} \quad (4.55)$$

Damit ergibt sich mit der SPH-Approximation

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega} W(\tilde{\mathbf{x}}, h) (\tilde{\mathbf{x}} \cdot \nabla)^n f \Big|_{\mathbf{x}} d\tilde{\Omega} \quad (4.56)$$

Aufgelöst wird (4.56) für eine Funktion  $w$  abhängig vom Parameter  $u$  zu

$$f(\mathbf{x}) + \frac{h^2}{2} \Delta f \int_{\Omega} u^2 w(u) d\Omega_u + \mathcal{O}(h^4) \quad (4.57)$$

Die Integrale sind unabhängig vom Einflussradius  $h$ . Damit ergibt sich aus (4.57), dass die SPH-Approximation  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$  einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  in zweiter Ordnung genau in Abhängigkeit vom Einflussradius  $h$  der Partikel ist:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.58)$$

Dies wird auch durch das Schoenberg-Schema [77] hinsichtlich der verwendeten Splines bestätigt. Voraussetzung für dessen Anwendung ist jedoch eine regelmäßige Anordnung der SPH-Partikel, welche in der Praxis bestenfalls zu Beginn gegeben ist. Wegen der genannten, im Allgemeinen nicht erfüllten Bedingungen existiert keine herkömmliche

Fehlerabschätzung für die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics. Eine Quantifizierung des Fehlers kann damit nur durch einen Vergleich der Simulationsergebnisse erfolgen. Dies kann einerseits durch bekannte analytische Lösungen bestimmter Fragestellungen erfolgen, andererseits durch den Vergleich mit den Ergebnissen alternativer numerischer Modelle, für die eine Fehlerabschätzung existiert. Allgemein kann gesagt werden, dass SPH global sehr gute Ergebnisse liefert, deren Fehler unter jenen einer Monte-Carlo-Simulation liegen. Bei geringen Partikelanzahlen kann es zu einer Glättung von lokal eng begrenzten Parametern kommen, was jedoch durch geeignete Wahl der Partikelanzahl und -Wirkungsradius minimiert werden kann.

## 4.12 Weitere Eigenschaften und Anwendungen

### 4.12.1 Turbulenzen

Für die Betrachtung turbulenter Strömungen sind völlig andere räumliche und zeitliche Skalen anzulegen als dies für die in dieser Arbeit betrachteten meso- oder makroskaligen Betrachtungen der Fall ist. Während beispielsweise bei einer laminaren Strömung der Druckverlust proportional zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit ist, ist er in einer turbulenten Strömung proportional zu deren Quadrat. Eine Untersuchung von Turbulenzen mithilfe des Smoothed Particles Hydrodynamics-Modells fand bisher nur in begrenztem Umfang statt. Grundsätzlich ist es bei genügend hoher Auflösung denkbar, kleinskalige turbulente Schwankungen ähnlich der "Direkten Numerischen Simulation" ohne weiteres Turbulenzmodell zu modellieren. Begrenzt durch die heute zur Verfügung stehende Rechenleistung ist man damit aber durch die sehr hohe Partikelanzahl auf sehr kleinräumige Betrachtungen geringer Reynoldszahlen beschränkt. Colagrossi [22] zeigte, dass brechende Wellen präzise mit SPH simuliert werden können. Weiterhin muss die Verwendbarkeit beispielsweise der Geschwindigkeitskorrektur, Abschnitt 4.6, und anderer in größeren Skalen unproblematischer Glättungsalgorithmen untersucht werden: Monaghan [58] entwickelte einen auf dem Lagrangeschen Alpha-Modell basierenden Ansatz: Typischerweise findet eine Geschwindigkeitskorrektur des einzelnen Partikels dahingehend statt, dass es der Geschwindigkeit seiner Nachbarteilchen angenähert wird, siehe Abschnitt 4.6: Analog zu (4.25) wird mit

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \varepsilon \sum_j^N m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \quad (4.59)$$

die örtliche Partikelgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{v}}_i$  angeglichen, wobei üblicherweise  $\varepsilon \approx 0.5$  gesetzt wird. Dies hat keine Änderungen hinsichtlich des Gesamtimpulses zur Folge, jedoch ist das Vorgehen hinsichtlich der Energie nicht konservativ. Um die Methode in Einklang mit dem Lagrangeschen Alpha-Modell zu bringen, wird (4.59) erweitert zu

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \varepsilon \sum_j^N m_j \frac{\hat{\mathbf{v}}_j - \hat{\mathbf{v}}_i}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \quad (4.60)$$

Hierin ist

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\rho} \nabla^j (\rho \nabla^j \hat{\mathbf{v}}_i) \left( \int q^2 W(q, h) dq \right) \quad (4.61)$$

mit  $\nabla^j = \partial/\partial x^j$  und der quadratischen Form des Geschwindigkeitsgradienten unter Einbeziehung der Konstanten  $\alpha$

$$q = \begin{cases} \alpha \rho h^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} \leq 0 \\ 0 & \text{für } \nabla \cdot \mathbf{v} > 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

Nun wird definiert

$$\alpha_{\text{urb}} = \frac{1}{2} \varepsilon \int q^2 W(q, h) dq \quad (4.63)$$

wobei  $\alpha_{\text{urb}} \approx \varepsilon h^2$  ist. Mit der Lagrangeschen Funktion und der potentiellen Energie  $\Phi$  kann der Term der kinetischen Energie über

$$L = \sum_1^N m_j \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{v}}_b \cdot \mathbf{v}_b - \mathbf{u}_j - \Phi_j \right) \quad (4.64)$$

notiert werden zu

$$\frac{1}{2} \sum_1^N m_j \hat{\mathbf{v}}_j \cdot \hat{\mathbf{v}}_j + \frac{\varepsilon}{4} \sum_i^N \sum_j^N m_i m_j \frac{\hat{\mathbf{v}}_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \quad (4.65)$$

wobei  $\bar{\rho}_{ab}$  die gemittelte Dichte ist. Aus (4.65) können die maßgeblichen Bewegungsgrößen ermittelt werden. Ein solcher Ansatz wurde in dieser Arbeit nicht verwendet, da sich die betrachteten Vorgänge im makroskaligen Bereich bewegen.

### 4.12.2 Wärme

Zur Abbildung thermische Vorgänge, etwa in Gasströmungen, entwickelte Noh [63] folgenden Ansatz:

$$H_i = 2 \sum_{j=1}^N \frac{\bar{q}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \frac{e_i - e_j}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \varphi^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (4.66)$$

Hierin sind  $e_i$  bzw.  $e_j$  die thermischen Energien der betrachteten Partikel,  $\alpha$  und  $\beta$  wie vor,

$$\bar{q} = \frac{1}{2} (q_i + q_j) \quad (4.67)$$

mit

$$q_i = \alpha_{\Pi} h_i \rho_i c_i |\nabla \cdot \mathbf{v}_i| + \beta_{\Pi} h_i^2 \rho_i |\nabla \cdot \mathbf{v}_i|^2 \quad \text{bzw.} \quad q_j = \alpha_{\Pi} h_j \rho_j c_j |\nabla \cdot \mathbf{v}_j| + \beta_{\Pi} h_j^2 \rho_j |\nabla \cdot \mathbf{v}_j|^2 \quad (4.68)$$



Gleichung (4.66) fließt als Addition in der Form

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \mathbf{v}_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \varepsilon_j^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta} + H_i \quad (4.69)$$

in die Energie-Erhaltungsgleichung (4.51c) ein. Einen weiteren Ansatz stellte Liu [48] mit dem nachfolgend skizzierten Weg vor. Für ein ort- und zeitabhängiges Attribut  $A(\mathbf{x}, t)$ , beispielsweise der Temperatur oder der Konzentration eines Stoffes, ist die Diffusion gegeben mit

$$\frac{\partial A}{\partial t} = c \nabla^2 A \quad (4.70)$$

Hierin ist  $c$  der Diffusionskoeffizient. (4.70) lautet in SPH-Darstellung

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = c \sum_j^N \frac{A_j - A_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (4.71)$$

Der Wärmetransport innerhalb eines Stoffes wird durch die folgende Fourier-Differenzialgleichung beschrieben:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{k} \nabla T) + Q \quad (4.72)$$

Hierin ist  $\rho$  die Dichte,  $C$  die Wärmekapazität,  $Q$  die Wärmequelle und  $\bar{k}$  der Wärmeleitungs-Koeffizient. Der zu kalkulierende Parameter  $T$  ist das Temperaturfeld. Die Gleichung der Wärmeleitung für den einzelnen Partikel  $i$  ist über (4.72) mit den Indices  $\alpha$  und  $\beta$  der räumlichen Richtungen gegeben mit:

$$\rho_i C_i \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i = \bar{k} T_{i,\alpha\alpha} + Q_i \quad (4.73)$$

Mit der Standard-SPH-Approximation (4.4) wird die Gleichung für den multidimensionalen Wärmetransport in SPH-Formulierung erhalten:

$$\rho_i C_i \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i = \bar{k} \sum_{j=1}^N T_j W_{ij,\alpha\alpha} \frac{m_j}{\rho_j} + Q_i \quad (4.74)$$

Hierin ist  $N$  die Zahl der Nachbarpartikel des Partikels des aktuellen Rechenschritts und  $W_{ij,\alpha\beta}$  die räumlichen gemischten Ableitungen des Kerns mit

$$W_{ij,\alpha\beta} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j^\alpha \partial x_j^\beta} \quad (4.75)$$

Mit

$$\frac{\partial R}{\partial x_j^\alpha} = \frac{1}{h} \frac{\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (4.76)$$

worin  $h$  der Kernradius ist, lässt sich (4.75) vereinfacht schreiben zu

$$W_{ij,\alpha\beta} = \frac{\partial R}{\partial x_j^\alpha} \left( \frac{d^2 W_{ij}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW_{ij}}{dR} \right) \frac{\partial R}{\partial x_j^\beta} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{Rh^2} \frac{dW_{ij}}{dR} \quad (4.77)$$

Vergleiche mit instationären Berechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit Abweichungen der maximalen Temperaturen im Bereich weniger Prozente [48].

### 4.12.3 Oberflächenspannung

Oberflächenspannung kommt durch ein Ungleichgewicht der inneren Kräfte nahe einer Grenze zustande: Während sich die Teilchen im Inneren gleichmäßig gegenseitig in allen Richtungen anziehen, findet diese Anziehung an der Oberfläche nur in Richtung des Körperinneren statt, Abb. 4.22.

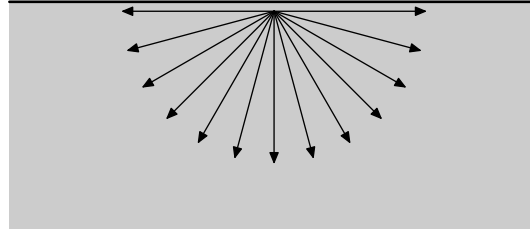


Abb. 4.22: Oberflächenspannung

Um die Oberfläche zu vergrößern, müsste nun Arbeit zur Überwindung dieser gerichteten Kräfte geleistet werden. Dementsprechend ist die Oberflächenspannung  $\sigma$  thermodynamisch wie folgt als Ableitung der freien Enthalpie  $G$  gegen die Fläche  $A$  definiert:

$$\sigma = \frac{\partial G}{\partial A} \quad (4.78)$$

Zur Integration eines der Oberflächenspannung entsprechenden Effektes muss zunächst eine Möglichkeit gefunden werden, mit deren Hilfe festgestellt werden kann, ob sich ein Partikel am Rand des Körpers oder in dessen Inneren befindet. Da von vornherein durch die Partikelformulierung keine scharfe Grenze wie beispielsweise bei einem Polygon gegeben ist, ist diese Frage innerhalb eines SPH-Modells nicht trivial. Zur Lösung macht man sich die Tatsache zunutze, dass sich in der Nähe einer Oberfläche ein starker Gradient der Fluideigenschaften, beispielsweise der Dichte, ergibt. Ob ein Partikel oberflächennah ist, wird dann anhand der Größe des Gradienten entschieden. Der von den Raumkoordinaten  $\mathbf{x}$  abhängige Gradient

$$\nabla A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

einer Funktion  $A$  wird im beschriebenen SPH-Modell wie folgt berechnet:

$$\nabla A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (4.80)$$

Hierin ist  $N$  die Gesamtzahl der Partikel. Da lediglich die Veränderung der Funktion  $A$  interessiert, kann an ihrer Stelle ein beliebiger Parameter, beispielsweise konstant  $A_i = c^i = 1,0$  eingesetzt werden. Außerhalb des Körpers ist  $c^i = 0,0$ . Die örtliche Verteilung von  $c^i$  wird von Müller [59] [61] als "Colorfield" bezeichnet: Interpretiert man  $c^i$  als Farbtintensität, so würde sich innerhalb des Körperinneren eine gleichmäßige Schattierung ergeben, welche sich nur an den Rändern, wie der Grenze zu Gasblasen oder Einschlüssen andersartiger Fluide z.B. anderer Dichte, stark ändert. Durch Festsetzen eines Grenzwertes für den Gradient von  $c^i$  erhält man einen exakt definierten örtlichen Verlauf des Randes. Der nach innen zeigende Normalenvektor auf diesem Rand ist

$$\mathbf{n} = \nabla c^i \quad (4.81)$$

Damit erhält man einen Ausdruck für die Oberflächenspannung:

$$\mathbf{f}_{\text{Oberflächenspannung}} = |\mathbf{n}| \sigma^i \kappa \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \quad (4.82)$$

Hierin ist  $\sigma^i$  der Koeffizient der Oberflächenspannung, welcher von den beiden aneinander grenzenden Medien abhängig ist und  $\kappa$  die Krümmung mit

$$\kappa = -\nabla^2 \frac{c^i}{|\mathbf{n}|} \quad (4.83)$$

Der Laplace-Operator  $\Delta = \nabla^2$  notiert in SPH-Formulierung zu

$$\nabla^2 A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (4.84)$$

#### 4.12.4 Bestimmung des Verlaufes der freien Oberfläche

Da im SPH-Modell das Fluidum in einzelne Partikel diskretisiert wird, stellt sich die Frage, wie eine definierte Oberfläche eines Flüssigkeitskörpers bestimmt werden kann. Gewöhnlich wird dieses Problem derart gelöst, dass ein Grenzwert der örtlichen Dichte  $\rho_{xy}$  festgelegt wird, beispielsweise  $\rho_{xy} = 1/2 \rho_{\text{Wasser}}$  Orte, an denen dieser Grenzwert erreicht wird, bilden die Oberfläche:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &\geq \rho_{\text{Grenzwert}} && \text{Partikel liegt innerhalb des Flüssigkeitskörpers} \\ \rho(\mathbf{x}) &< \rho_{\text{Grenzwert}} && \text{Partikel liegt ausserhalb des Flüssigkeitskörpers} \end{aligned}$$

Die örtliche Dichte wird hierbei wie gewöhnlich mit

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_j \rho_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) V_j \quad (4.85)$$

berechnet. Einzelne isolierte Partikel erscheinen als Tropfenablösung. Die graphische Generation der Oberfläche zwischen den Orten, welche gerade an der Grenze liegen, kann mit oberflächenbildenden Verfahren wie beispielsweise der Methode der Moving Least Squares, wie sie auch zur Bildung der Ansatzfunktionen beim EFGM-Verfahren genutzt wird, Abschnitt 3.1.1, vonstatten gehen oder für graphische Darstellungen mit dem Verfahren der Marching Squares, Abschnitt A.3. Angemerkt sei, dass eine solche Definition normalerweise nur zu Zwecken der Visualisierung benötigt wird. Für gewöhnliche modellinterne Berechnungen existieren keine abgegrenzten Flüssigkeitskörper außer den Partikeln selber.

#### 4.12.5 Variierende Kernfunktionen

Es ist möglich, die Berechnung verschiedener Parameter über unterschiedliche Kernfunktionen zu führen. Müller, Schirm, Teschner [60] verwenden für ihre Simulation des Blutflusses im menschlichen Körper folgendes Set: Normalerweise wird der Kernel

$$W_{\text{poly6}}(\mathbf{r}, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3 & \text{für } 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.86)$$

verwendet. Da festgestellt wurde, dass bei Verwendung dieses Kernels eine Neigung zur Partikelklumpung auftrat, wurde für die Berechnung des Druckterms innerhalb dieses Models der Kernel

$$W_{\text{spiky}}(\mathbf{r}, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - r)^3 & \text{für } 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.87)$$

eingesetzt. Um eine besonders stabile Simulation bezüglich der Viskosität zu erhalten, wurde in den entsprechenden Rechenschritten die Kernfunktion über

$$W_{\text{viscosity}}(\mathbf{r}, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 & \text{für } 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.88)$$

gebildet, die den stets positiven 2. Gradienten

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}, h) = \frac{45}{\pi h^6} (h - r) \quad (4.89)$$

besitzt. Von den genannten Autoren wurden also parallel drei unterschiedliche Kernfunktionen eingesetzt.

#### 4.12.6 Festkörpermodellierungen

SPH wurde von verschiedenen Autoren, beispielsweise Benz und Asphaug [14] dahingehend weiterentwickelt, dass neben Fluid- auch Festkörpersimulationen möglich wurden. Dies geschieht, indem die nichtdiagonalen Terme des Spannungstensors, modifiziert

durch eine Von Mises-Fließbedingung, integriert werden. Das soll hier kurz nach [14] skizziert werden: Die Erhaltung der Masse wird durch

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (4.90)$$

beschrieben, siehe auch Abschnitt 4.10. Unter der Voraussetzung des Nichtvorhandenseins von Körperkräften gilt für die Impulserhaltung

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (4.91)$$

Mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  die Raumkoordinaten symbolisierend. Hierin ist der Spannungstensor gegeben mit

$$\sigma^{\alpha\beta} = -P\delta^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} \quad (4.92)$$

$P(\rho, u)$  ist der Druck,  $S^{\alpha\beta}$  ist der deviatorische Spannungstensor. Für ein plastisches Materialverhalten wird er durch

$$S^{\alpha\beta} = \min \left[ \frac{\sigma_Y^2}{3J_2}, 1 \right] \quad (4.93)$$

begrenzt. Die materialabhängige Fließspannung ist hierbei  $\sigma_Y$ .  $J_2$  ist definiert zu

$$J_2 = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \quad (4.94)$$

Es gilt die übliche Summenkonvention über wiederholte Indices,  $\delta$  ist das Kronecker-Delta. Der Exponent  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gibt dabei jeweils die räumliche Richtung an. Energieerhaltung wird dargestellt durch

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\rho} S^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} \quad (4.95)$$

Hierin ist

$$\dot{\epsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.96)$$

der Tensor der Dehnungsrate. Addiert zu den Rotationstermen  $-\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}$  zusammen mit dem Hookschen Gesetz gilt mit der Querdehnzahl  $\mu$

$$\frac{S^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu \left( \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}^{\gamma\gamma} \right) \quad (4.97)$$

Der Rotationstensor ist komplementär zum Dehnungsratentensor (4.96):

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.98)$$

Über die zuvor hergeleiteten SPH-Standardformulierungen lassen sich nun obige Zusammenhänge entsprechend darstellen: Die mit (4.90) beschriebene Massenerhaltung lautet damit

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (4.99)$$

wobei über alle  $N$  Nachbarpartikel  $j$  des betrachteten Partikels  $i$  summiert wird. Die Erhaltung des Impulses, (4.91), stellt sich wie folgt dar:

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.100)$$

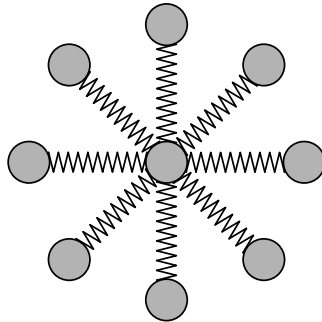
Die für die Lösung von (4.96) nötigen Werte werden aus

$$\rho \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left[ (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right] \quad (4.101)$$

erhalten.

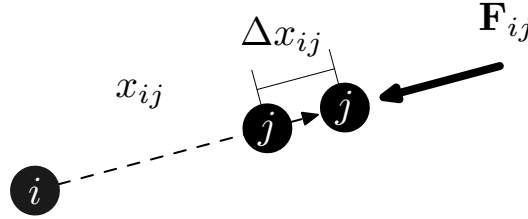
### Festkörperansatz durch Gegenkräfte

Für die Simulation von Flüssigkeiten spielen Kräfte nur kurzer Reichweite eine Rolle. Im Gegensatz dazu fließen Kräfte beider Vorzeichen in Festkörpern über weite Distanzen. Um dies im Modell abzubilden, wurde für die vorliegende Arbeit ein einfacher Ansatz zur Festkörpermodellierung entwickelt, der im Folgenden aufgezeigt wird. Das elastische Materialverhalten wird durch eine Federanalogie nachgebildet. Dabei sind alle benachbarten Partikel durch elastische Kräfte miteinander verbunden. In Abb. 4.23 sind die Kräfte eines Partikels in Bezug auf seine Nachbarpartikel innerhalb seines Wirkungsradius symbolhaft durch Federn dargestellt. Der konventionelle SPH-Ansatz wurde also dahingehend modifiziert, dass auch Zugkräfte zwischen den Partikeln übertragen werden können. Die Übertragung von Druckkräften wird dementsprechend weiterhin beibehalten.



**Abb. 4.23:** SPH-Festkörpermodell, durch beidseitig wirkende Federn symbolisiert

Dies geschieht durch Aufbringung einer Rückstellkraft  $\mathbf{F}$ , welche “versucht”, den Abstand zweier benachbarter Partikel konstant zu halten.  $\mathbf{F}_{ij}$  auf Partikel  $j$  wirkt in Richtung des Nachbarpartikels  $i$  und ist proportional oder exponentiell zur Änderung der Entfernung  $\Delta x_{ij}$  der Partikel  $i$  und  $j$ , Abb. 4.24: Entfernt sich Partikel  $j$  um den Betrag  $\Delta x_{ij}$  über die ursprüngliche Distanz  $x_{ij}$  zum Nachbarpartikel  $i$  hinaus, wird die Rückstellkraft  $\mathbf{F}_{ij}$  auf Partikel  $j$  als Funktion von  $\Delta x_{ij}$  in Linie und Richtung zu Partikel  $i$  wirksam. Als Referenz für  $x_{ij}$  dient die Distanz der Partikel vor dem ersten Zeitschritt zum Zeitpunkt  $t = t_0$ .



**Abb. 4.24:** Entfernungsabhängige Rückstellkraft  $\mathbf{F}_{ij}$  auf Partikel  $j$

Der Vektor  $\mathbf{F}_{ij} = [F_{x_{ij}} \ F_{y_{ij}}]^T$  der Rückstellkraft eines bestimmten Partikels mit Index  $j$  ist die Resultierende aus der SPH-üblichen gewichteten Summation

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ij} W_{ij} \quad (4.102)$$

über alle Rückstellkräfte  $\mathbf{F}_{ij}$  seiner  $N$  Nachbarpartikel. Für die vorliegende Arbeit wurden nur positive  $\Delta x_{ij}$ , also Entfernungsvergößerungen, berücksichtigt. Die Entfernungsproportionalität kann nun so justiert werden, dass sich Steifigkeiten in der Größenordnung des gewünschten E-Moduls ergeben. Brüche können durch Lösen der Verbindung bei Erreichen eines bestimmten Dehnungsschwellenwertes simuliert werden, Abschnitt 6.2.13. Für die Nachbildung nichtlinearen Materialverhaltens sind selbstverständlich auch Rückstellkräfte mit logarithmischer, exponentieller sowie beliebiger anderer Charakteristik möglich. Diese Charakteristik kann über weitere Parameter wie Zeit, örtliche Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur oder auch Historien der genannten Eigenschaften gekoppelt sein. Weitere Einflussnahme durch geschwindigkeitsabhängige Dämpfung kann zur Abbildung entsprechenden Materialverhaltens über eine rheologische Modellierung eingeführt werden.

## 4.13 Numerischer Ablauf einer SPH-Berechnung

Abb. 4.25 skizziert den Zyklus einer SPH-Simulation. Tab. 4.2 gibt detailliertere Hinweise zu den einzelnen Schritten.

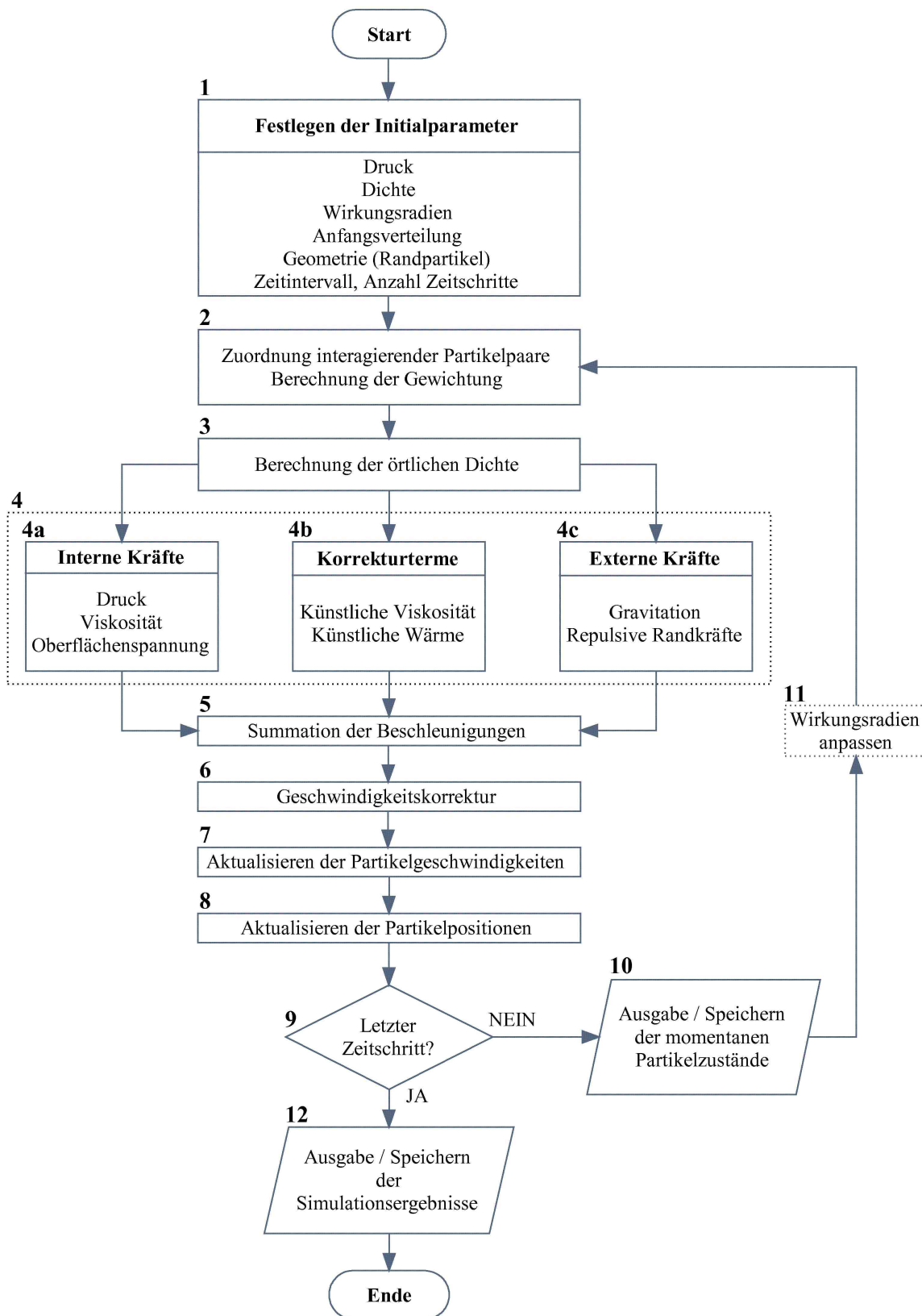


Abb. 4.25: Programmablauf einer SPH-Simulation



**Tab. 4.2:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf SPH

Nr.	Erläuterung
<b>1</b>	Die Ausgangsposition der Partikel im Inneren und an den Rändern werden festgelegt. Hierbei spielen die Initialparameter nach Abschnitt 4.9.2, beispielsweise (4.46) eine entscheidende Rolle für das Verhalten des Modells. Weiterhin sind die Zeitschritte $\Delta t$ festzulegen, Abschnitt 4.9.1. Besonders kleine Zeitschritte sind nach (4.42) zu wählen, wenn künstliche Viskosität nach (4.18) miteinbezogen wird. Weitere Modelleigenschaften wie die verwendete Kernfunktion, beispielsweise nach (4.5) durch Splines, sind festzulegen.
<b>2</b>	Erster Schritt der iterativen Simulationsschleife ist die Suche der Nachbarpartikel. Vorteilhaft sind schnelle Algorithmen, beispielsweise mithilfe Verketteter Listen, wie im Teil A.2 beschrieben. Bei direkter Suche steigt der Aufwand quadratisch mit der Partikelanzahl. Sind die Partikelpaare zugeordnet, wobei keine Mindestanzahl vorgegeben ist, werden die Partikelgewichte über die Kernfunktion errechnet.
<b>3</b>	Die örtliche Dichte $\rho_i$ wird über (4.10), entsprechend in SPH-Formulierung (4.31), ermittelt. Damit kann unmittelbar über die Zustandsgleichung (4.12) der örtliche Druck $p_i$ bestimmt werden.
<b>4</b>	Neben dem Druck wirken die Viskosität, (4.17), und gegebenenfalls die Oberflächenspannung, (4.82), als weitere interne Kräfte. Zur gleichen Zeit können die Korrekturterme wirksam gemacht werden, zu nennen ist hier etwa die künstliche Viskosität nach (4.18). Ebenfalls werden in diesem Stadium der Einfluss der externen Kräfte wie der Gravitation, (4.16), und der repulsiven Kräfte der Modellränder, siehe Abschnitt 4.7, eingebracht.
<b>5</b>	Die Beschleunigungen aus internen und externen Kräften sowie den Korrekturtermen beispielsweise der künstlichen Viskosität (4.18) werden aufsummiert.
<b>6</b>	Die Geschwindigkeit der Partikel wird nach (4.24) korrigiert, indem sie der gewichteten Geschwindigkeit ihrer Nachbarpartikel angepasst wird, Abschnitt 4.6. Für Problemstellungen, bei denen viskose oder turbulente Effekte im Vordergrund stehen, ist dieser Term anzupassen oder abzuschalten. Die Geschwindigkeitskorrektur greift erst zum Zeitpunkt des Verschiebens der Partikel auf die neuen Positionen nach Punkt 8.
<b>7</b>	Die Geschwindigkeiten der Partikel werden für den nächsten Zeitschritt nach festgelegt, beispielsweise nach dem Leap-Frog-Schema.
<b>8</b>	Die neuen Koordinatenvektoren der Partikelpositionen können nun mit (4.39b) errechnet werden.
<b>9</b>	Ist die vorzugebende Anzahl von Zeitschritten abgearbeitet?
<b>10</b>	Falls Bedingung unter <b>9</b> nicht erfüllt, folgen weitere Iterationen. Zuvor können die aktuellen Daten, beispielsweise Partikelpositionen, -Drücke, oder -Geschwindigkeiten, gespeichert werden.
<b>11</b>	Weitere Anpassungen für die nächste Iteration können vorgenommen werden, um Genauigkeit oder Effektivität anzupassen. Beispielsweise können die Wirkungsradien der Partikel angepasst werden.
<b>12</b>	Ist der letzte Zeitschritt erreicht, werden die gewünschten Daten visuell oder in Tabellenform ausgegeben.

# 5 Kombination der netzfreien Methoden EFGM und SPH

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, durch netzfreie Methoden möglich werdende Vereinfachungen numerischer Modellierungen im Zuge von Nachweisen für Wasserbauwerke aufzuzeigen. Ein großer Teil der innerhalb eines Tragfähigkeitsnachweises beispielsweise einer Talsperre zu untersuchenden Lastfälle rührt von der Interaktion zwischen Wasser und Festkörper her. Entsprechend ihrer besonderen Eignung für bestimmte Anwendungen werden die vorgestellten netzfreien Methoden Smoothed Particles Hydrodynamics und die Elementfreie Galerkin Methode kombiniert. Die Elementfreie Galerkin Methode wird für Berechnungen des Festkörpers eingesetzt, während das Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics zur Simulation des Wasserkörpers angewandt wird. Dies bedingt die Entwicklung einer Schnittstelle zwischen den beiden Ansätzen, was im Folgenden diskutiert wird.

## 5.1 Bedingungen an der Schnittstelle der Modelle

### 5.1.1 Actio = Reactio

Generell lässt sich das Verhalten eines elastischen Festkörpers nach der Newtonschen Formel

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_b \quad (5.1)$$

und das einer Flüssigkeit über die Eulerschen Beziehungen

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \sigma(\mathbf{v}) + \mathbf{f}_b \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

beschreiben. Hierbei ist  $\mathbf{u}$  der Verformungsvektor des Festkörpers,  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit,  $\mathbf{f}_b$  sind eventuelle Körperkräfte, beispielsweise durch Gravitation. Die von der Flüssigkeit auf die Oberfläche  $\Gamma_F$  des Festkörpers aufgebrachte normale Kraftkomponente pro Fläche entspricht dem Druck der Flüssigkeit an der identischen Stelle:

$$P_F = -\sigma_{Fluid}(-\mathbf{n}) = \sigma_{\Gamma_F}(\mathbf{n}) \quad (5.3)$$

Dies findet direkten Niederschlag in der Kombination der Modelle durch “hybride Partikel”, die in beiden Verfahren an identischen Positionen vorhanden sind. Damit kann der örtliche Druck der dortigen Partikel aus dem einen Modell direkt als Kraftkomponente in das andere Modell übernommen werden, Abschnitt 5.2.

### 5.1.2 Penetrationsunterdrückung

Da der Festkörper in der vorliegenden Arbeit als wasserundurchdringlich angesehen wird, gilt die Bedingung, dass normal zur Oberfläche des Festkörpers  $\Gamma_F$  in unmittelbarer Nähe relativ zur zeitlichen Ableitung der Verformung der Oberfläche keine Geschwindigkeit der Flüssigkeitspartikel vorhanden sein kann:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.4)$$

$\mathbf{n}$  ist hier der Normalenvektor zur Festkörperoberfläche  $\Gamma_F$ . Die Penetration des Festkörpers durch Flüssigkeitspartikel wird durch “doppelseitige” Partikel, welche nach Abschnitt 5.2 gleichzeitig beiden Modellteilen angehören und sich unmittelbar auf der Oberfläche und einer dahinter liegenden zusätzlichen Reihe befinden, unterdrückt, Abb. 5.1. Sie entsprechen in ihrer Funktion aus Sicht des SPH-Modells den virtuellen Partikeln nach Abschnitt 4.7.3. Der Abstand dieser Partikel zueinander längs der Randlinie und senkrecht dazu entspricht dem Partikelabstand, welcher initial auch innerhalb der Flüssigkeit gesetzt wird. Die Geschwindigkeit der Oberfläche ist in der normalen Komponente gleich der Geschwindigkeit eines unmittelbar angrenzenden SPH-Partikels:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{\Gamma_F} = \mathbf{v}_i \quad (5.5)$$

Der Index des SPH-Partikels wird hierbei mit  $i$  ausgedrückt. (5.5) gilt jedoch nur bei negativem Geschwindigkeitsgradienten unmittelbar vor der Oberfläche. Bewegt sich die Oberfläche von den Partikeln weg, so kann dies selbstverständlich schneller vonstatten gehen, als Partikel nachrücken können. Ebenso ist ein Entfernen der Partikel von  $\Gamma_F$  stets möglich.

### 5.1.3 Reibung

Generell gilt in der Realität die Bedingung der Schlupffreiheit zwischen Fluid und Festkörper: Parallel zur Oberfläche  $\Gamma_F$  haben die Flüssigkeitsteilchen auf molekularer Ebene relativ zur Festkörperoberfläche keine Geschwindigkeit:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} - \mathbf{v} \right) \times \mathbf{n} = 0 \quad (5.6)$$

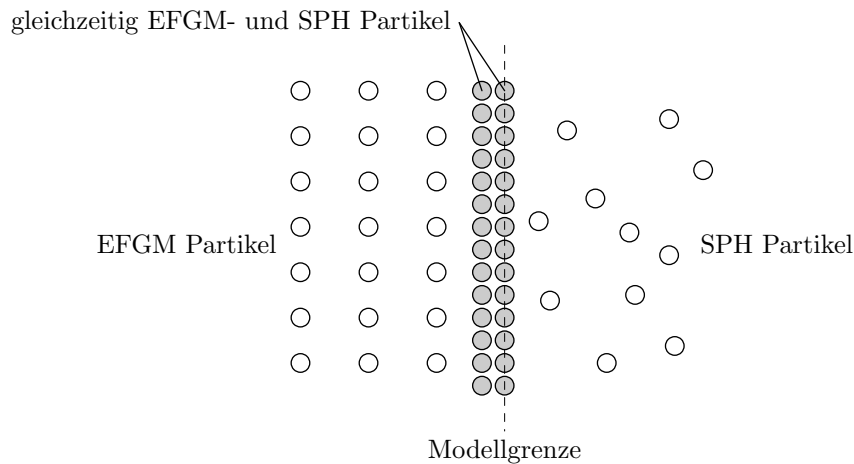
Für reibungsfreie Bedingungen gilt dies nicht. Prinzipiell kann die Beeinflussung der SPH-Partikel hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit parallel zu  $\Gamma_F$  durch die repulsiven Kräfte der virtuellen oder doppelseitigen Partikel frei eingestellt werden. Da in der vorliegenden Arbeit Beschleunigungen normal zur Oberfläche dominieren, spielen die Bedingungen an der Oberfläche hinsichtlich der tangentialen Kräfteübertragung eine untergeordnete Rolle.

## 5.2 Implementierung der Schnittstelle der Modelle

Trotz der unterschiedlichen Lösungsansätze für die zugrunde liegenden Differenzialgleichungen weisen die Elementfreie Galerkin Methode und die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics zahlreiche Gemeinsamkeiten auf. Eines der Hauptmerkmale beider Modelle ist die Wichtungsfunktion jedes Knotens oder Partikels. Während diese Wichtung bei der Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics unmittelbar über eine Summation die Ansatzfunktion stellt, Abschnitt 4.1, dient diese bei der Elementfreien Galerkin Methode als Basis zur Erzeugung der eigentlichen Ansatzfunktion mittels des Verfahrens der Moving Least Squares, Abschnitt 3.1. Dennoch werden für die Gewichtungsfunktionen oft die gleichen Ansätze in Form von identischen Splines verwendet, so auch in den dieser Arbeit zugrunde liegenden Modellen.

### 5.2.1 Hybride Partikel

Es liegt daher nahe, für die Schnittstelle der beiden genannten Modelle Partikel zu verwenden, die hybrid sind, also als Schnittmenge gleichzeitig beiden Teilmodellen angehören, Abb. 5.1. Bestimmte Knoten des EFGM-Modells sind damit gleichzeitig SPH-Randpartikel.



**Abb. 5.1:** Hybride Partikel gehören beiden Teilmodellen an

Dies bietet sich auch insbesondere deswegen an, weil die Ränder eines Smoothed Particles Hydrodynamics Modells ohnehin mit fixen Partikeln spezieller Eigenschaften gebildet werden, den virtuellen Randpartikeln, wie in Abschnitt 4.7 diskutiert. Für die vorliegende Arbeit wurden der Ansatz der Randpartikel ausgehend von den entwickelten “Nahe-Rand-Partikeln”, Abschnitt 4.7.4, dahingehend fortgeführt, dass diese Stützstellen simultan in beiden Modellteilen vorhanden sind. Partikel oder Knoten mit dieser Eigenschaft werden im Folgenden als “Hybride Partikel” bezeichnet. Dabei handelt es sich eigentlich um ein Partikelpaar, bestehend aus SPH-Randpartikel und komplementärem EFGM-Knoten.

### 5.2.2 Hybridpartikel des EFGM-Modells

Die Randpartikel werden auf der EFGM-Seite fast vollständig wie normale Knoten behandelt. Ihre Anordnung geschieht in mehreren Schichten wie in den genannten Abschnitten beschrieben, um Partikelpenetrationen zu unterbinden. Hierfür ist im Regelfall eine wesentlich dichtere Anordnung nötig, wie im übrigen Modellgebiet. Der Wirkungsradius wird entsprechend der geringeren Partikelabstände angeglichen. Die Partikel weisen alle gewöhnlichen Eigenschaften eines EFGM-Knotens auf; ihre Eigenschaften als SPH-Partikel, wie Geschwindigkeit etc. werden ignoriert, mit Ausnahme des örtlichen Drucks. Der Druck der äußeren Partikelreihe wird wie ein gewöhnlicher Oberflächendruck als natürliche Randbedingung über die weiterhin an den Rändern liegenden Gauß-Integrationspunkte integriert wie in Abschnitt 3.2.2 dargelegt. Die eigentliche Kalkulation des Drucks findet im SPH-Teil statt. Die Nachbarschaftssuche erstreckt sich nur bis zu diesen speziellen hybriden Randpartikeln, weiter entfernt liegende SPH-Partikel werden nicht miteinbezogen, was über eine einfache Kennzeichnung programmtechnisch gelöst wird. Aus diesem Grund ist die Zuordnung der Partikel auf der EFGM-Seite für nichttransiente Betrachtungen nur einmal zu Beginn erforderlich. Für alle weiteren Zeitschritte bleiben die Partikelzuordnungen aufgrund der Ortsfestigkeit identisch, vorausgesetzt die Verschiebungen bleiben klein. Werden iterativ die Verschiebungen einer vorangegangenen Simulation als Ausgangspositionen für den nächsten Rechenschritt gesetzt, muss eine neue Partikelzuordnung stattfinden. Durch die Verschiebung haben sich die Partikelabstände geändert und damit auch die Gewichtung der einzelnen Knoten.

### 5.2.3 Hybridpartikel des SPH-Modells

Auf der Seite des Smoothed Particles Hydrodynamics-Modells stellen sich die hybriden Partikel als gewöhnliche ortsfeste Randpartikel nach Abschnitt 4.7 dar. Repulsive Kräfte werden weiterhin ausgeübt. Die Nachbarpartikel-Zuordnung erfolgt für jeden Zeitschritt, da alle anderen SPH-Partikel frei beweglich sind. Einbezogen in den Algorithmus der Zuordnung werden zusätzlich nur die Hybridpartikel, alle weiter entfernt liegenden EFGM-Partikel bleiben unbeachtet. Die Drücke an der Schnittstelle der beiden Modelle, also den Randpartikeln, welche als natürliche Randbedingung in die Simulation eingehen, werden wie gewohnt (4.32) entsprechend über

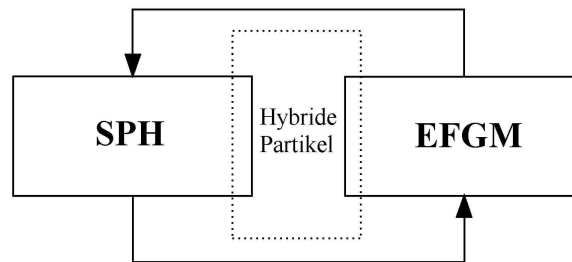
$$P_n = \sum_{j=1}^N p_j \frac{m_j W_{nj}}{\rho_j} \quad (5.7)$$

gewonnen.  $N$  ist hierbei die Anzahl der Partikel, in deren Wirkungsradius der betrachtete Punkt liegt, was normale SPH-Partikel und die speziellen Randpartikel einschließt, jedoch keine weiteren EFGM-Knoten. Während  $n$  den Standort bezeichnet, an dem der Druck ermittelt wird, ist  $j$  der über alle  $N$  Partikel, in dessen Einflussbereich die Koordinaten des Standorts liegen, laufende Index.  $W_{nj}$  ist die Wichtung dieser Partikel. In der vorliegenden Arbeit wurde die Wirkungsrichtung des Drucks als ausschließlich normal zur Oberfläche des Festkörpers wirkend angenommen. Reibung und viskose Kräfte

wurden für die hier betrachteten Modellierungen vernachlässigt, können jedoch durch einfache Ergänzungen der Software als tangential wirkende Oberflächenkräfte integriert werden.

#### 5.2.4 Numerischer Ablauf einer kombinierten Simulation

Prinzipiell ergibt sich ein wechselseitiger zyklischer Programmablauf. Abwechselnd wird das SPH- beziehungsweise EFGM-Modul aufgerufen, Abb. 5.2. Basierend auf den von der vorhergehenden Simulation des komplementären Moduls erzeugten Daten, namentlich den Positionen und Drücken der Hybridpartikel, startet die nächste Iteration des abzuarbeitenden Programmteils.



**Abb. 5.2:** Zyklische Iteration über beide Teilmodelle

In Abb. 5.3 und Abb. 5.4 ist der numerische Ablauf einer kombinierten Simulation für beide Teilmodelle als Flussdiagramm detaillierter dargestellt. Im Wesentlichen entsprechen die Programmabläufe den Standardalgorithmen, wie sie in Abb. 4.25, Abschnitt 4.13 für Smoothed Particles Hydrodynamics und in Abb. 3.22, Abschnitt 3.7 für die Elementfreie Galerkin Methode angegeben wurden. Auf dies verweisend werden hier nur die wenigen Änderungen, in den Abbildungen wurden die entsprechenden Schritte dunkler schattiert, beschrieben. Für jeden Zeitschritt wird zunächst die Smoothed Particles Hydrodynamics-Simulation für einen, eventuell auch mehrere Zeitschritte durchgeführt. Die Partikel der Schnittmenge beider Modelle werden hierfür als Randpartikel erzeugt. Nach Ablauf der eingestellten Anzahl von Iterationen werden die Partikelpositionen und weitere Parameter, vor allem der Druck an den Koordinaten der Randpartikel gespeichert. Das Programm der Elementfreien Galerkin Methode wird gestartet, Punkt **12** und **2** in Abb. 5.3, wobei nach Auslesen der Quelldateien die Randpartikel wie beschrieben identische Positionen besitzen. Der zuvor gespeicherte örtliche Druck wird nun auf die Randpartikel aufgebracht und per Gaußquadratur integriert. Nach Lösung des Hauptgleichungssystems liegt die Verschiebungsfigur und der Spannungsverlauf des Festkörpers vor. Über Punkt **15** und **2** in Abb. 5.4 werden die Daten ins SPH-Modell übernommen und dessen nächste Iteration startet. Technisch wird das wechselseitige Aufrufen der beiden Module durch ein übergeordnetes Programm gesteuert, welches aus einer einfachen Stapelverarbeitungsdatei bestehen kann, wie im Abschnitt A.1.3 dargelegt.

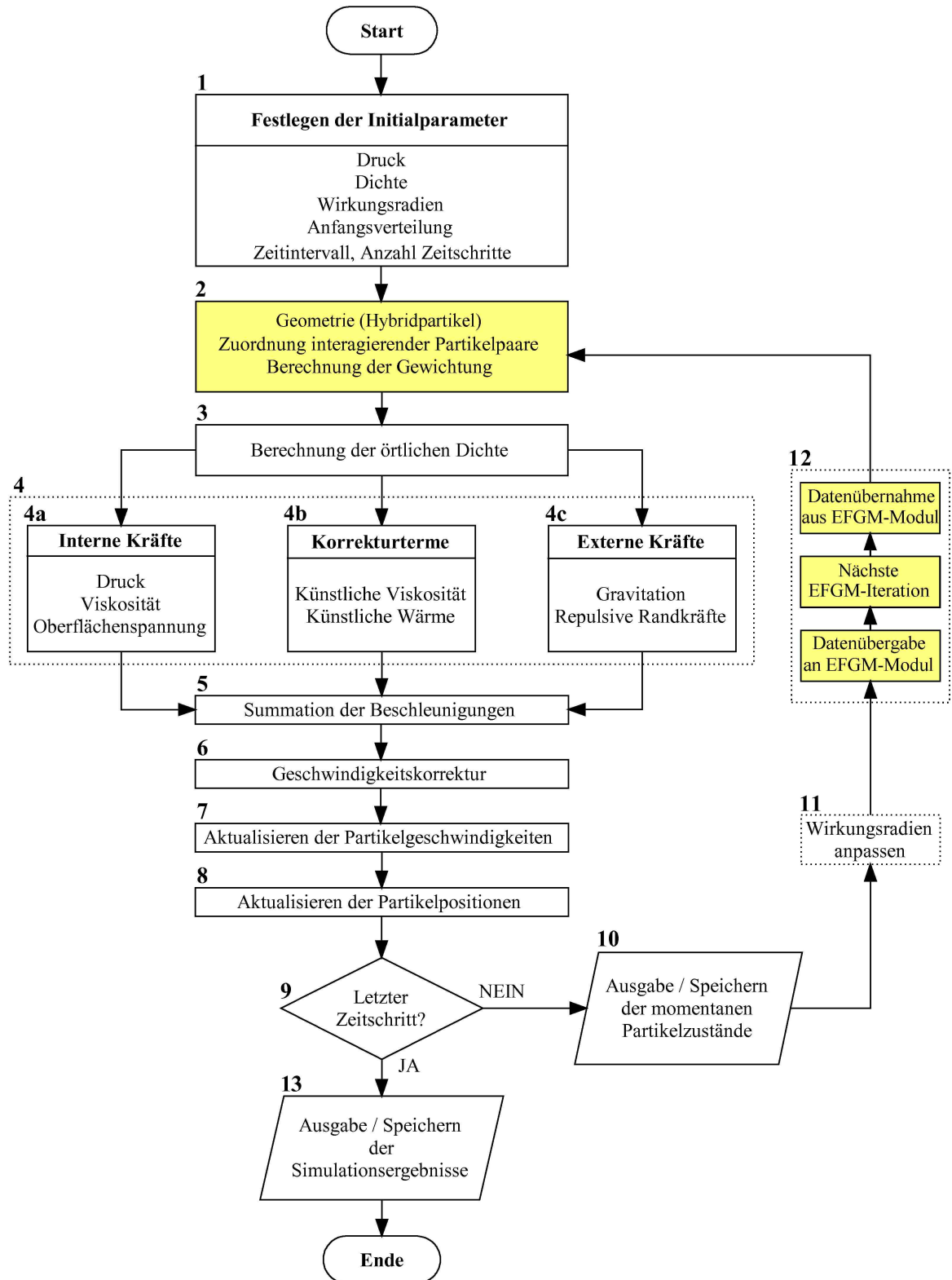


Abb. 5.3: Iteration über SPH-Teilmodell

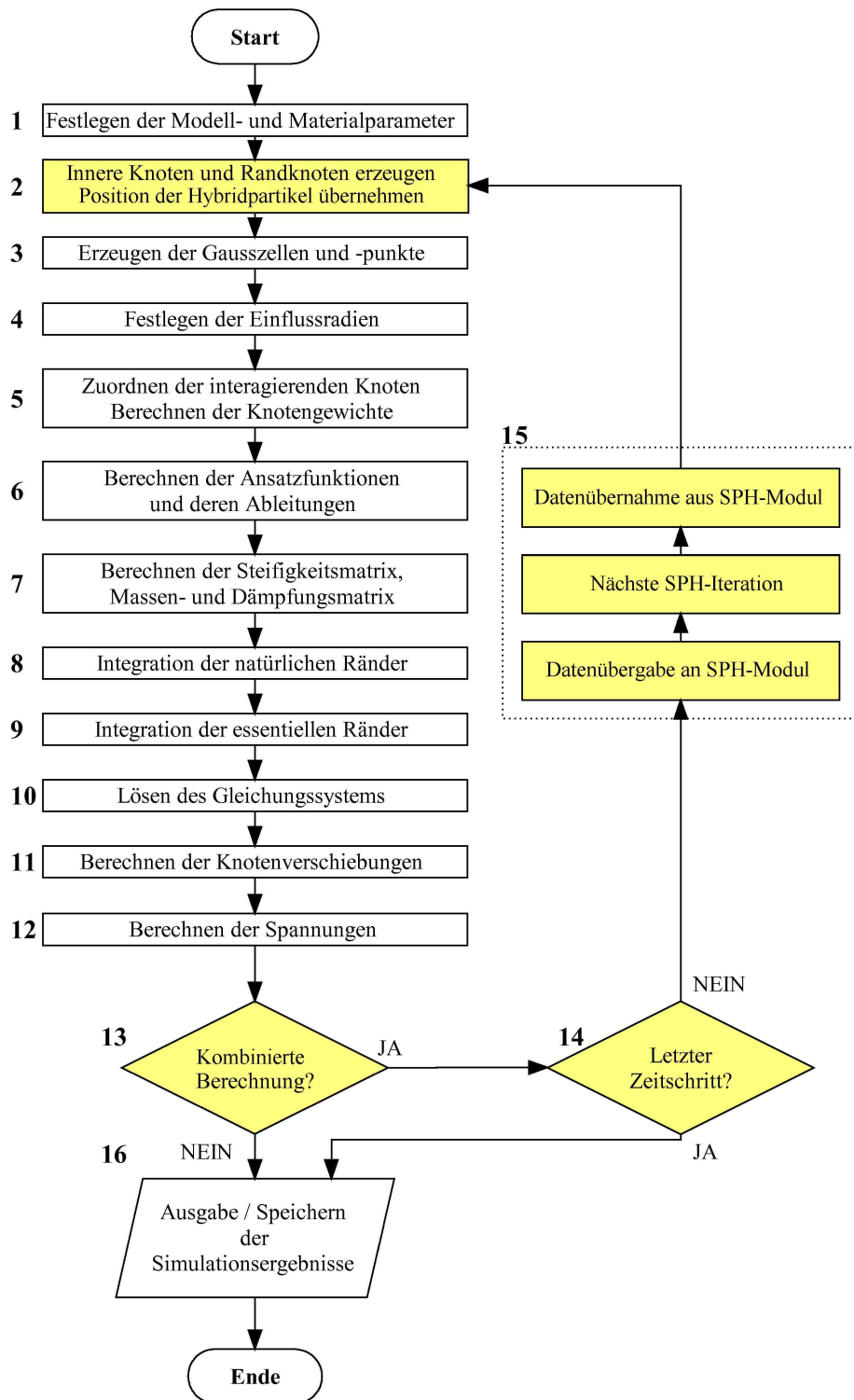


Abb. 5.4: Iteration über EFGM-Teilmodell



### Vereinfachter Ansatz der Kombination

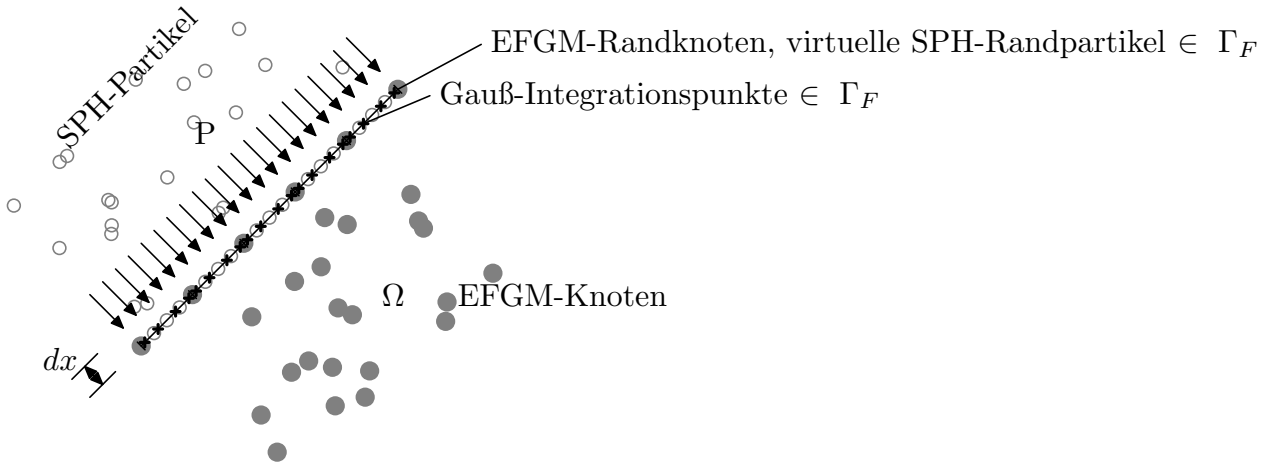
Für Modellierungen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, wurde auf Festkörperseite meist mit einem quasistatischen Ansatz gerechnet. Das Modell wurde dann dahingehend vereinfacht, dass anstelle hybrider Partikel mit einer virtuellen Randlinie, wie unter 4.7.3 entwickelt, gearbeitet wurde. Die auf das EFGM-Modell zu übertragenden Drücke wurden dann mithilfe einer virtuellen "Interaktionszone" gewonnen: Die Breite dieser Zone zwischen Fluid und Festkörper beträgt  $dx$ , was der Variablen  $r_0$  in (4.27) entspricht, Abb. 5.5. Durch die Einwirkung des Druckes auf die Oberfläche  $\Gamma_F$  ist die Randbedingung

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad x \in \Gamma_F \quad (5.8)$$

gegeben. Der Kraftvektor dieses Randes folgt damit zu

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_F} \Phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_F \quad (5.9)$$

Nach (5.3) entspricht der Integrand der rechten Seite von (5.9) dem örtlichen Druck. Nach Abschnitt 3.5 findet die Quadratur über Gauß-Integrationspunkte auf  $\Gamma_F$  statt, Abb. 5.5.



**Abb. 5.5:** Flüssigkeitsdruck-Integration über Gaußpunkte

Die Drücke werden wie erwähnt auf einer Linie parallel zur Festkörperoberfläche im Abstand  $dx$  nach

$$P_n = \sum_{j=1}^N p_j \frac{m_j W_{nj}}{\rho_j} \quad (5.10)$$

gewonnen.  $N$  ist hierbei die Anzahl ausschließlich der SPH-Partikel, in deren Wirkungsradius der betrachtete Punkt liegt.

# 6 Modellierungen für Talsperren

Die in diesem Kapitel dargelegten Simulationsergebnisse wurden unter Anwendung des im Zuge dieser Arbeit entwickelten SPH- und EFGM-Codes gewonnen. Sie sollen beispielhaft die Möglichkeiten der Anwendung netzfreier Methoden auf dem Gebiet des Wasserbaus und darüber hinaus darlegen. Zunächst wird daher ein kurzer Überblick über die wichtigsten wasserbaulichen Nachweise nach der in Deutschland gültigen technischen Richtlinie DIN 19700 für die Talsperren betreffenden Anforderungen gegeben. Aufgrund der geforderten bruchmechanischen Nachweise schließt sich ein Abschnitt an, in welchem die theoretischen Grundlagen hierzu gelegt werden und Ansätze zur numerischen Umsetzung aufgezeigt werden. Folgend werden dynamische Druckvorgänge im Reservoir einer Talsperre sowie deren Einwirkung auf die Bauwerksfront untersucht, wie es für einen einschlägigen Nachweis nach der genannten Richtlinie erforderlich ist. Weiterführend werden die hieraus resultierenden Kräfte im Talsperrenkörper analysiert und beispielhafte Risspfad-Berechnungen gezeigt. Für die Fluidmodellierung wird hierbei das SPH-Modell verwendet, Festkörperbetrachtungen werden mit EFGM durchgeführt. Die Interaktion beider Modelle wurde in Abschnitt 5 diskutiert.

## 6.1 Technische Richtlinie DIN 19700

Der Nachweis der Standsicherheit einer Talsperre wird in Deutschland im Allgemeinen nach DIN 19700 [25] geführt. Die geforderten Sicherheitsabstände bilden die Grundlage zur Beurteilung der Ergebnisse einer statischen Betrachtung. Somit ist dieses Regelwerk durch die Vorgabe zu untersuchender Fragestellungen maßgeblich für die Wahl der Rechenmethode, da nicht jedes Verfahren eine sichere Aussage zu den aufgeführten Punkten machen kann. Beispielsweise ist es praktisch unmöglich, per rein analytischer Rechnung ein sicheres Urteil über das Verhalten eines im Erdbebenfall auftretenden Risses zu erhalten. Im Folgenden wird daher auch die Ermittlung der Beanspruchungen mithilfe numerischer Methoden beleuchtet.

### 6.1.1 Nachweisverfahren

Zugrunde liegt die Überlegung, wie Einwirkungen zu kombinieren sind, um einerseits die geforderte Sicherheit zu gewährleisten, andererseits aber eine wirtschaftliche Bauweise zu ermöglichen. Somit muss eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit des zeitlichen Zusammentreffens der Beanspruchungen gemacht werden. Es handelt sich also um eine stochastische Abschätzung, die für die praktische Anwendung vereinfacht wurde. Wesentlich ist neben der auftretenden Last auch der Zustand des Bauwerks, beispielsweise

hinsichtlich der Kennwerte des Werkstoffs, ebenso in Bezug auf die Funktionstüchtigkeit seiner sicherheitsrelevanten Einrichtungen wie der Hochwasserentlastung oder der Grundablässe. Durch die Kombination von äußerer Einwirkung und Bauwerkszustand werden festgelegte Lastfallkombinationen mit bestimmten Tragwiderstandsbedingungen zu drei Bemessungssituationen BS I, BS II und BS III nach Tab. 6.1 zusammengeführt. Jede sich aus diesen Situationen ergebende Variante muss individuell untersucht werden.

**Tab. 6.1:** Bemessungsfälle nach DIN 19700

Lastfall	Tragwiderstandsbedingung		
	A	B	C
1	BS I	BS II	BS III
2	BS II	BS III	
3	BS III		

Im Zuge einer numerischen Berechnung ist für jeden Bemessungsfall eine eigene Berechnung vorzusehen. Dies hat individuell für die Gegebenheiten am untersuchten Objekt zu erfolgen. Beispielsweise sind die Erdbebenlasten je nach geographischer Lage verschieden, ebenso müssen Materialkennwerte oder der Zustand technischer Einrichtungen der vor Ort anzutreffenden Situation entsprechen. Daher sind vollständig automatisierte Verfahren, welche für jedes beliebige Bauwerk einsetzbar wären, nicht vorstellbar. Jedoch können mit geeigneten Verfahren wie den später vorgestellten netzfreien Methoden einzelne Untersuchungsschritte, unter der Voraussetzung der Anpassung grundlegender Parameter, ohne umfangreiche Nachedition auch für variierende Details durchaus mit selbstständiger Adaption durchgeführt werden.

### 6.1.2 Tragwiderstände

Der Zustand des Bauwerks findet über den Tragwiderstand Eingang in die Untersuchung. Es ist über drei Tragwiderstandsbedingungen A, B, und C zu variieren:

- Tragwiderstandsbedingung A (wahrscheinliche Bedingungen)
  - gesicherte oder allgemein anerkannte Materialkennwerte
  - voll wirksame bauliche Einrichtungen
- Tragwiderstandsbedingung B (wenig wahrscheinliche Bedingungen)
  - ungünstige Kennwerte innerhalb gesicherter Streubereiche *oder*
  - eingeschränkte Wirkung einer der baulichen Einrichtungen
- Tragwiderstandsbedingung C (unwahrscheinliche Bedingungen)
  - ungünstige Kennwerte in Grenzbereichen *oder*
  - Ausfall einer der baulichen Einrichtungen

Im numerischen Modell finden die Tragwiderstandsbedingungen ihren Niederschlag beispielsweise in der Wahl der Materialparameter wie des E-Moduls, oder der zulässigen Maximalspannungen. Es können sich durch die oben aufgeführten Tragwiderstandsbedingungen auch die Beanspruchungen ändern. Eine versagende Hochwasserentlastung kann zu Überströmen oder zu erhöhten Drücken aus Unterströmung führen. Dies findet Niederschlag in einer Variation der Rechenmodelle.

### 6.1.3 Lastannahmen

DIN 19700 sieht die Einteilung von Talsperren in zwei Klassen vor: Talsperrenklasse 1 bezieht sich auf "große" Talsperren. Diese sind definiert durch

- Höhe des Absperrbauwerkes vom tiefsten Punkt der Gründungssohle des Absperrbauwerkes bis zur Krone größer als 15 m oder
- Gesamtstauraum des Speicherbeckens größer als  $10^6 \text{ m}^3$

Talsperrenklasse 2 umfasst kleinere Talsperren, die nicht Talsperrenklasse 1 zuzuordnen sind. Nach dieser Klasseneinteilung richten sich auch die Voraussetzungen für die Findung der Lastannahmen. Ausnahmen bilden Talsperren mit besonderem Gefährdungspotential. Zu den auf eine Talsperre einwirkenden Lasten zählen

- Wasser- und Strömungslasten
  - Druck des Stauwassers und eventueller Rückstau unterwasserseitig
  - hydrostatischer oder -dynamischer Druck, beispielsweise Auftrieb, aus Durch- und Unterströmung, Risswasserdruck
- Verlandungsdruck durch Sedimente im Stausee
- Erdbebenlasten nach Talsperrenklasse und Standort. Nach DIN 19700 ist als Betriebserdbeben für Talsperrenklasse 2 ein Erdbeben mit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von  $T = 100 \text{ a}$  anzusetzen. Als Bemessungserdbeben ist ein Erdbeben mit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von  $T = 1000 \text{ a}$  anzunehmen. Für Talsperren der Klasse 2 ist es zulässig, Erdbebennachweise mit dem 1,0-fachen Wert der zugeordneten Bodenbeschleunigung  $a_h$  als quasi-statische Ersatzlast zu führen; eine Modalanalyse ist somit nicht erforderlich. Talsperren der Klasse I bedürfen hingegen einer Schwingungsanalyse. Die Belastungen setzen sich zusammen aus
  - Kräften aus Verharren des massenträgen Talsperrenkörpers gegenüber beschleunigtem Mauerfuß, Schwingungen
  - dynamischem Wasserdruck durch Beschleunigung der Talsperre gegen den "ortsfesten" Stausee
- Saisonale Temperatureinwirkung. Durch den thermisch trägen Kern entstehen starke jahreszeitlich veränderliche Temperaturgradienten zwischen Kern und Mantel

- Eisdruck nach Standort und Jahreszeit
- Eigenlast aus Gravitations-Körperkräften
- Sonstige Lasten
  - Schiffsanprall, Lasten aus Betriebseinrichtungen, Windlasten
  - Kriech- und Schwindvorgänge
  - Mutwillige Zerstörung

Die hieraus resultierenden Lastfälle werden entsprechend der zu erwartenden Situationen zu drei Lastfallgruppen zusammengestellt. Im Zuge einer numerischen Bearbeitung spiegelt sich jede Kombination dieser Lastfälle in einer entsprechenden Konstellation des Modells wider. Die hierdurch bedingte Vielzahl von Varianten wird durch systematisches Ablegen der Konstellationen in eigenen Steuerdateien organisiert. Die Abarbeitung dieser Steuerdateien kann wiederum durch eine übergeordnete Datei erfolgen. Tab. 6.2 zeigt die Lastfallkombinationen für die Tragwiderstandsbedingung A, Tab. 6.3 führt Entsprechendes für die Tragwiderstandsbedingungen B und C auf. Hierbei stellt **•** das Symbol einer in jedem Fall zu berücksichtigenden Einwirkung dar, während **o** fallweise zu untersuchen ist. Beispielsweise ist die Untersuchung der thermisch bedingten mechanischen Spannungen für sommerliche Temperaturen kombiniert mit Eisdruck in unseren Breitengraden nicht sinnvoll. “BHQ” bezeichnet die Abflüsse der Bemessungs-Hochwasser. Vereinfacht ausgedrückt werden normale Tragwiderstandsbeiwerte kombiniert mit seltenen Einwirkungen und normale Einwirkungen mit pessimalen Tragwiderstandsbedingungen, nicht jedoch letztere mit ebenfalls extremen Einwirkungen.

**Tab. 6.2:** Lastfälle der Tragwiderstandsbedingung A

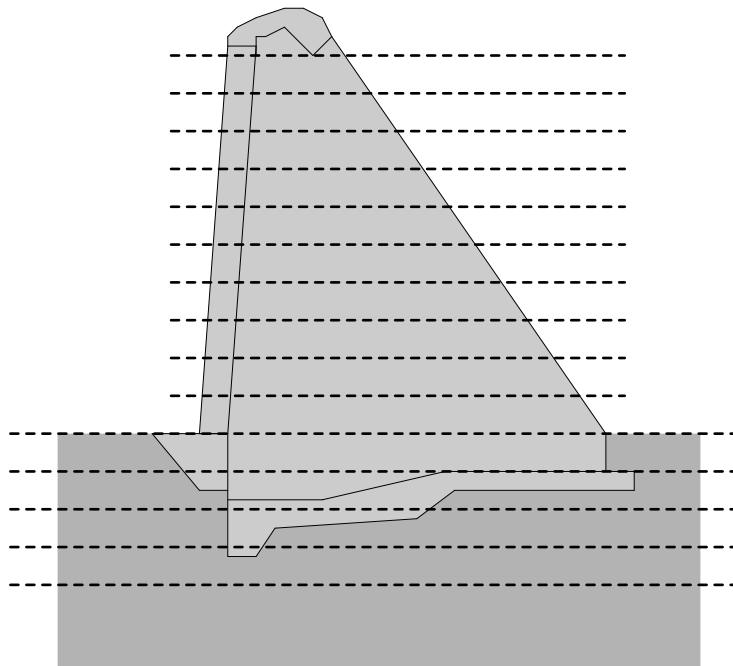
Gruppe	Tragwiderstandsbedingung	A							
	Lastfall	1.1	1.2	2.1	2.2	2.4	3.1	3.2	3.3
1	Sommer-/Wintertemperatur	••	••	••	o•	••	••	••	••
	Eigenlast	•	•	•	•	•	•	•	•
	Normaler Wasser-/Strömungsdruck	•			•	•		•	•
	Saisonaler Temperaturgradient	•	•	•	•	•	•		•
2	Wasser-/Strömungsdruck BHQ <sub>1</sub>			•					
	Eisdruck				•				
	Betriebserdbeben					•			
3	Wasser-/Strömungsdruck BHQ <sub>2</sub>						•		
	Seltene Temperatureinwirkung							•	
	Bemessungserdbeben								•

**Tab. 6.3:** Lastfälle der Tragwiderstandsbedingungen B und C

Gruppe	Tragwiderstandsbedingung	B					C	
		1.1	1.2	2.1	2.2	2.4	1.1	1.2
	Lastfall							
	Sommer-/Wintertemperatur	••	••	••	○•	••	••	••
1	Eigenlast	•	•	•	•	•	•	•
	Normaler Wasser-/Strömungsdruck	•			•	•	•	
	Saisonaler Temperaturgradient	•	•	•	•	•	•	•
2	Wasser-/Strömungsdruck BHQ <sub>1</sub>			•				
	Eisdruck				•			
	Betriebserdbeben					•		
3	Wasser-/Strömungsdruck BHQ <sub>2</sub>							
	Seltene Temperatureinwirkung							
	Bemessungserdbeben							

### 6.1.4 Tragsicherheitsnachweise

Nach DIN 19700 ist die Sicherheit gegen Druck- und Schubversagen in jedem Schnitt nachzuweisen. Diese Schnitte sind individuell festzulegen und erstrecken sich auch über die Sohlfuge. Abb. 6.1 zeigt beispielhafte Verläufe horizontaler Untersuchungsebenen in einer Schwergewichtsmauer und deren Untergrund.

**Abb. 6.1:** Beispiel maßgeblicher Schnitte in Talsperrenkörper und Sohlfuge

In jedem dieser Schnitte sind die Normal- und Scherspannungen, Abschnitt 6.1.6 und

6.1.5, zu ermitteln. Diese sind einerseits mit der Kapazität des Materials zu vergleichen, andererseits wird über die Hebelwirkung in Bezug auf die neutrale Achse das Moment zur Untersuchung hinsichtlich etwaiger klaffender Fugen und zulässiger Ausmittigkeit der Resultierenden, Abschnitt 6.1.7 errechnet. Die Ermittlung der maßgeblichen Parameter an jedem Punkt findet im Rahmen der Finite Elemente Methode nach Abschnitt 2.5.5 statt. Im EFGM-Modell erfolgt dies nach (3.15) für die Verschiebungen und nach (3.59) zum Erhalt der Spannungen.

### 6.1.5 Hauptdruckspannungen

Im gesamten Bauwerk sind in Tab. 6.4 gelistete Abstände zur Druckspannungskapazität der Baustoffe einzuhalten.

**Tab. 6.4:** Einzuhaltende Sicherheitsbeiwerte der Hauptdruckspannungen

BS I	BS II	BS III
2,1	1,7	1,2

Der Abgleich erfolgt unter Einsatz numerischer Methoden mithilfe einer einfachen Lokalisierung der höchsten und niedrigsten auftretenden Werte der Hauptdruckspannungen. Dieser Algorithmus steht in üblichen Softwarepaketen zur Verfügung oder kann einfach etwa als Makro implementiert werden. Zu beachten ist, dass aufgrund von numerischen Artefakten manchmal unrealistisch hohe Spannungsspitzen angegeben werden, was von Fall zu Fall überprüft werden muss.

### 6.1.6 Schubspannungen

Nach DIN 19700 ist die Sicherheit gegen Gleiten in jedem Schnitt des Bauwerks nachzuweisen. Für die Gleitsicherheit in der Sohlfuge sind festgelegte Sicherheitsbeiwerte einzuhalten, welche Tab. 6.5 aufführt.

**Tab. 6.5:** Einzuhaltende Sicherheitsbeiwerte der Schubspannungen

BS I	BS II	BS III
1,5	1,3	1,2

Für die Ermittlung der maximalen Schubspannungen gilt das unter Abschnitt 6.1.5 gesagte.

### 6.1.7 Ausmittigkeit der Resultierenden

Die Lage der Resultierenden ist in jedem horizontalen Schnitt nachzuweisen: Ein Überschreiten der Ausmitte über  $\frac{1}{6}$  der Breite des jeweiligen Schnittes hinaus ist für die Bemessungssituationen I und II nicht zulässig, es darf keine klaffende Fuge entstehen.

Für Bemessungssituation III kann die Exzentrizität der Resultierenden bis zu  $1/3$  der betrachteten Breite betragen. Damit ist für diesen Lastfall eine klaffende Fuge innerhalb definierter Grenzen zulässig. Über die Kennwerte des verwendeten Werkstoffes besteht damit eine Limitierung der zulässigen Zugspannungen. Für die Ausmittigkeit der Resultierenden  $e$  in Abhängigkeit der nach oben positiven Höhenkoordinate  $y$  gilt:

$$e(y) = \frac{M_z(y)}{N(y)} \quad (6.1)$$

Hierbei ist  $M_z(y)$  das Moment um die horizontale Talsperrenachse in Höhe  $y$  und  $N(y) = \Sigma \sigma_{yy} dA$  die Vertikalkraft auf dieser Ebene, Abb. 6.2. Die Teilflächen entsprechen  $dA = dxh$  mit der Ausdehnung  $h$  in Talsperrenachse. Die Breite in x-Richtung liegt anhand der Geometrie des Modells vor, während für  $M_z(y)$  gilt:

$$M_z(y) = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{yy} x \, dA \quad (6.2)$$

Das Moment um die horizontale Bauwerksachse ergibt sich also aus dem Integral des Produkts der Spannungen pro Einheitsfläche  $dA$  längs der Betrachtungsebene mit Fläche  $A$  und des Hebelarms  $x$  in Bezug auf die jeweilige Querschnittsmitte und lässt sich damit auch  $M_z = \int_A \sigma_{yy} x \, dA$  schreiben. Die Vertikalspannung ist durch  $\sigma_{yy}$  symbolisiert. Die numerische Ermittlung führt das genannte Integral auf eine Summe  $M_z = \sum_1^i \sigma_{yy} x \, dA$  für alle Teilflächen zurück. In den meisten Softwarepaketen wie *ANSYS* [1] lassen sich Pfade definieren, entlang derer die genannten Werte vom Programm ermittelt werden. Steht diese Funktion nicht zur Verfügung, muss die Ermittlung des Moments in jedem Querschnitt anhand einer Tabelle gewonnener Spannungswerte der Teilflächen bestimmter Entfernungen zum Mittelpunkt im Zuge einer Nachbearbeitung geschehen.

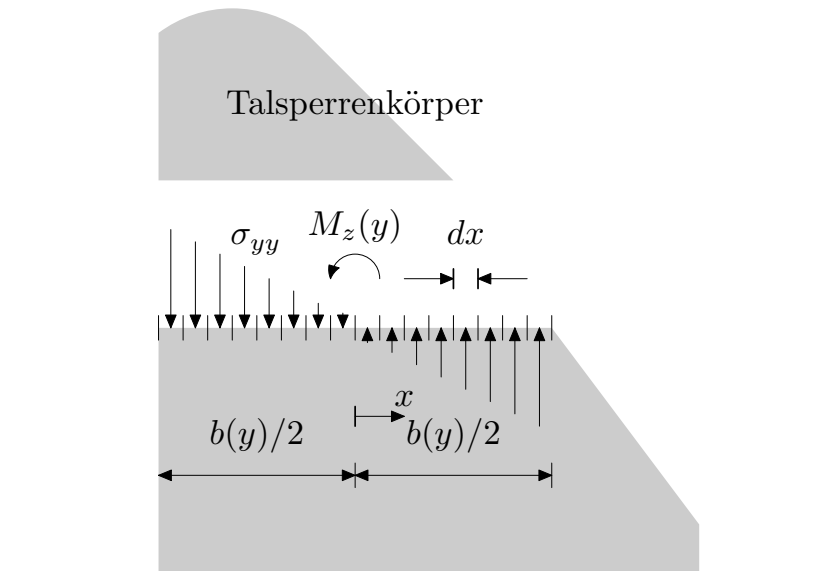


Abb. 6.2: Einheitsflächen einer Untersuchungsebene



### 6.1.8 Rissbildung

DIN 19700 legt hinsichtlich der entstehenden Rissbildung Folgendes fest:

- Für Bemessungssituation I darf die Fugenklaffung die Dichtzone nicht erreichen.
- Für Bemessungssituation II darf die Fugenklaffung die Dichtzone nicht vollständig durchtrennen.
- Für Bemessungssituation III darf die Fugenklaffung höchstens bis zur Mitte des Querschnitts reichen.

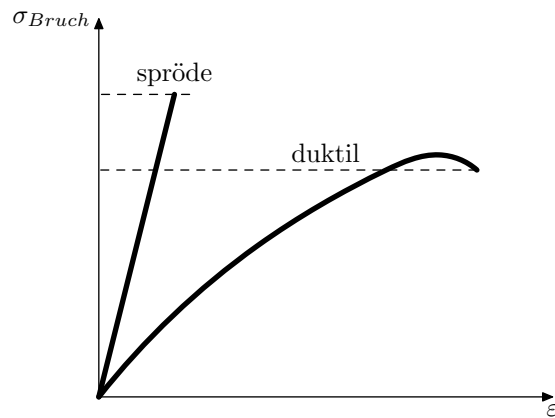
Der Nachweis der zu erwartenden Rissgeometrie, insbesondere der Risslänge wie oben gefordert, stellt eine große Herausforderung für numerische Methoden dar. Im Moment einer sich durch den Rissfortschritt ändernden Bauwerksgeometrie wirkt ein komplexes Zusammenspiel von Kräften. Für rechnergestützte Modelle stellt insbesondere die sich rasch in ihrer geometrischen Ausprägung ändernde Diskontinuität durch den Riss ein Problem dar. Der dynamische Vorgang wird in Zeitschritten unterteilt. Für jeden Zeitschritt ergibt sich durch das Voranschreiten der Rissspitze eine etwas geänderte Geometrie. Die Verteilung der Knoten, also der Stützstellen, welche die Basis einer numerischen Modellierung bilden, ist beispielsweise bei einem FEM-Modell durch die notwendige Vernetzung unmittelbar an die Körpergeometrie gebunden. Damit ergibt sich bei solchen Modellen die Notwendigkeit einer Anpassung der Knotenverteilung, namentlich einer Neuvernetzung, für jeden Zeitschritt. Erschwerend kommt die extreme Ausbildung der Form des Risses hinzu: Verglichen mit den Körperabmessungen sehr schmal und spitz, was für eine automatische Vernetzung sehr ungünstig ist. Damit sind automatisierte Verfahren herkömmlicher numerischer Methoden nur mit starken Einschränkungen tauglich für die Praxis des Standsicherheitsnachweises hinsichtlich der Rissbildung. Netzfrequente Methoden haben hingegen den Vorteil, dass sie nicht auf einem Rechnernetz basieren, welches eng an die Körpergeometrie gebunden ist. Damit erfordert auch eine durch den Riss gebildete veränderliche Diskontinuität nicht unbedingt eine Anpassung der Knotenverteilung, sondern wird durch eine Software-Implementierung auf unveränderter Stützstellenbasis abgebildet: Knoten, die auf oder hinter gegenüberliegenden Rissflanken liegen, „sehen“ sich nicht mehr, wodurch die Rissflanke wie ein freier Rand behandelt wird. Für erhöhte Genauigkeitsanforderungen ist jedoch eine Steigerung der Knotendichte beispielsweise um die Rissspitze einfach möglich, indem dort beispielsweise ringförmig neue Knoten erzeugt werden.

## 6.2 Implementierung bruchmechanischer Konzepte

Ziel des Einsatzes der Elementfreien Galerkin Methode im Zuge der vorliegenden Arbeit ist es, numerische Modellierungen bruchmechanischer Vorgänge wie beispielsweise für einen Talsperren-Standsicherheitsnachweis innerhalb bestimmter Bemessungssituationen nach DIN 19700 verlangt, gegenüber herkömmlichen Methoden zu vereinfachen. Nachdem im vorangehenden Kapitel die Grundlagen der Elementfreien Galerkin Methode aufgezeigt wurden, soll hier vertieft auf den Einsatz numerischer Methoden für die Rissfortschrittsberechnung eingegangen werden. Nachdem zunächst bruchmechanische Grundlagen dargelegt werden, wird nachfolgend der Schwerpunkt auf die rechnerische Gewinnung der benötigten mechanischen Größen zur Beurteilung des Risswachstums gelegt.

### 6.2.1 Risscharakteristik

Unter einem Bruch oder Riss versteht man die vollständige oder teilweise Trennung eines zuvor unverletzten Körpers in mindestens zwei Teile. Ein Bruch tritt auf, wenn genügend Energie zur Verfügung steht, um die atomaren oder kohäsiven Bindungskräfte innerhalb des Materials zu überwinden. Ziel der Technischen Bruchmechanik ist die Bestimmung der kritischen Last hinsichtlich Betrag und Frequenz, unter der in einem Bauteil oder einem Bauwerk ein vorhandener Bruch fortschreitet. Weiterhin soll eine Aussage über die Charakteristik einer solchen Schädigung, beispielsweise die Geometrie des auftretenden Risses, gefunden werden. Hierbei kann zwischen Versagen unter konstanter oder impulsartiger Belastung einerseits und durch wiederholte Beanspruchung andererseits unterschieden werden. Im ersteren Fall spricht man von Gewaltbruch, im letzteren von Schwingungs-, Dauer- oder Ermüdungsbruch. Unabhängig hiervon wird materialbedingt zwischen Fließ- und Sprödbbruch differenziert. Die beiden unterschiedlichen Risscharakteristiken finden ihren analytischen Niederschlag in den Konzepten der Fließbruchmechanik (FBM) beziehungsweise der Linear-Elastischen Bruchmechanik (LEBM). Bei duktilen Werkstoffen gehen Brüche mit starken plastischen Verformungen einher; die Rissflanken weisen unterschiedliche geometrische Formen auf. Das Versagen kündigt sich durch eine vorhergehende Phase des Fließens an, und der schließlich auftretende Defekt schreitet durch die hohe Energiedissipation im Bereich der plastizierenden Rissprozesszone relativ langsam voran. Spröde Materialien hingegen versagen plötzlich mit nur sehr geringer Verformung, Abb. 6.3, die Rissflanken passen geometrisch zueinander. Durch die fehlende Plastizität steht praktisch die gesamte Dehnungsenergie für das Entstehen und Fortschreiten der Rissfront zur Verfügung. Die typischen Baumaterialien von Talsperren sind Beton und Mauerwerk. Diese Werkstoffe sind unter dem bruchmechanischen Aspekt als spröde einzuordnen. Das Rissverhalten eines solchen Bauwerks lässt mit dem zuvor Gesagten also ein plötzliches Auftreten und ein sehr schnelles Fortschreiten eines Bruches, wie er in bestimmten Situationen wie Erdbeben auftreten kann, erwarten. Auch für normale Betriebszustände können Rissanalysen interessant sein, beispielsweise wenn durch Frost-Tau-Vorgänge eine entsprechende Vorschädigung vorhanden ist und deren weitere Entwicklung abgeschätzt werden soll.

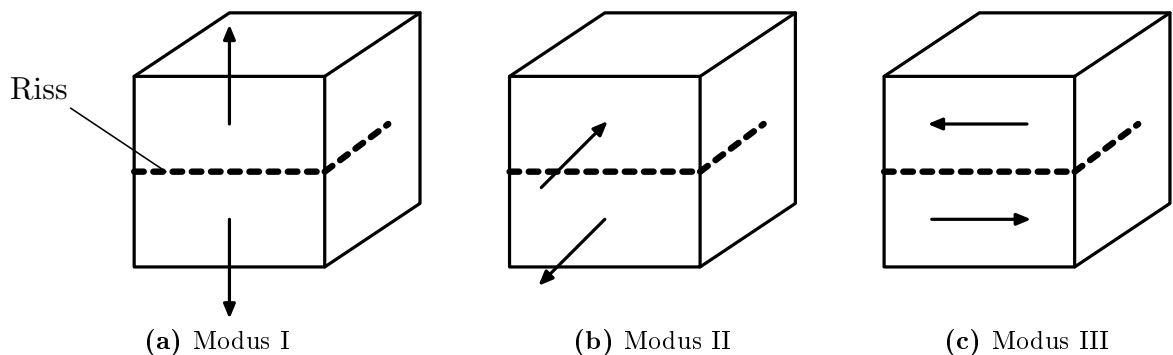


**Abb. 6.3:** Spannungsverläufe des einachsigen Zugversuchs von sprödem bzw. duktilem Material (schematisch)

Sprödbrüche entstehen daher auch unter Vorhandensein nur relativ geringer Initialenergie und zeichnen sich durch sehr schnelle Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Bereich mehrerer 100 m/s aus, Abschnitt 6.2.7. Durch die fehlende Ankündigung des Versagens und die extreme Geschwindigkeit des Vorgangs sind Sprödbrüche besonders gefährlich und bergen großes Schadenspotential. Ungünstig wirken sich weiterhin tiefe Temperaturen, mehrachsige Spannungszustände, hochdynamische Beanspruchungen, Inhomogenitäten und korrosiv wirkende Umgebungen aus.

### 6.2.2 Rissbeanspruchungsparameter

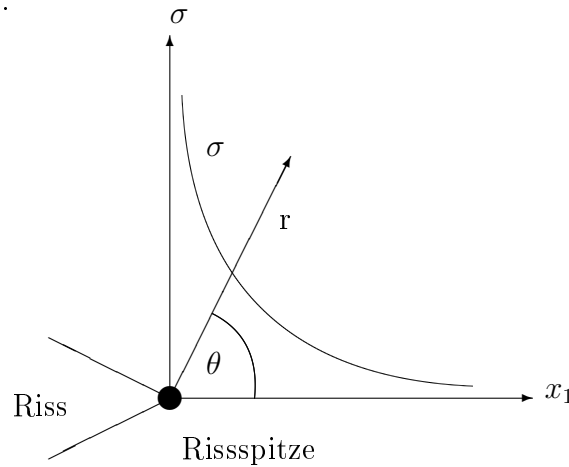
Abhängig von der Art der Belastung werden nach Irwin [39] die drei Rissöffnungsmodi *I*, *II* und *III* unterschieden, Abb. 6.4a bis 6.4c:



**Abb. 6.4:** Rissöffnungsarten entsprechend den Rissmodi *I-III*

Modus *I* bezeichnet hierbei eine Rissöffnung durch Spannungsbeanspruchung normal zur Rissebene. Anschaulich wird dieser Modus beispielsweise beim Spalten von Holz mit der Axt hervorgerufen. Modus *II* tritt bei Scherspannungen parallel zur Rissebene auf. Dieser Modus überwiegt etwa bei spanabhebenden Verfahren wie beim Drechseln im bearbeiteten Material. Modus *III* ist gegenwärtig bei Scherspannungen senkrecht

zur Rissebene, wie sie beim Schneiden eines Körpers mit einer Schere auftreten. Die Spannung weist unabhängig vom Modus in der Rissspitze eine Singularität unbekannten Betrages auf, Abb. 6.5.



**Abb. 6.5:** Spannungssingularität an der Rissspitze

Die Umgebung um die Rissspitze wird im Allgemeinen mit Polarkoordinaten beschrieben.  $\theta$  bezeichnet hierbei den Winkel im Gegenuhrzeigersinn,  $r$  gibt die Entfernung zur Rissspitze an. In Abb. 6.5 ist der Verlauf der Vertikalspannung  $\sigma$  entlang der Achse  $x_1$  durch die Rissspitze gezeigt.

### 6.2.3 Lokale Rissbeanspruchungsparameter

#### Spannungsintensitätsfaktoren

Das Fortschreiten eines Risses ist nicht nur von der Belastung, sondern auch von der Rissgeometrie abhängig. Eine Betrachtung der Spannungen als alleiniges Kriterium ist daher nicht ausreichend zur Beurteilung des Rissfortschritts. Zur Quantifizierung der Spannungssingularität unter Einbezug dieser weiterer Einflussfaktoren werden nach dem Ansatz von Irwin [38], welcher in ähnlicher Weise auch von Westergaard [86] und Griffith [36] hergeleitet wurde, drei den Rissöffnungsmodi zugeordnete Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) eingeführt. Es sind die lokalen Rissbeanspruchungsparameter  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$ . Dabei handelt es sich um temperatur- und belastungsgeschwindigkeitsabhängige Werkstoffkenngrößen. Ihr skalarer Wert ist ein Maß für die Intensität des Spannungsfeldes in der Nähe der Rissspitze und weiterhin hauptsächlich abhängig von der Rissgeometrie und der Art der Belastung. Es wird von einem Polarkoordinatensystem mit Ursprung an der Rissspitze ausgegangen. Radius  $r$  gibt die Entfernung zur Rissspitze an, Winkel  $\theta$  die auf die bisherige Rissrichtung bezogene Richtung im mathematischen Drehsinn. Das für alle weiteren Rechengänge zugrundeliegende Koordinatensystem verschiebt und dreht sich somit entsprechend dem in veränderlicher Neigung fortschreitenden Riss. Abb. 6.13 zeigt ein Beispiel für einen geneigten Riss. Für  $\theta = 0$  sind die Rissbeanspruchungsparameter wie folgt definiert:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \quad (6.3a)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} \quad (6.3b)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{32} \quad (6.3c)$$

Der mit Modus *I* verknüpfte Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  quantifiziert die Rissöffnungs-Verformungen und -Spannungen, Modus *II*-Spannungsintensitätsfaktor  $K_{II}$  charakterisiert die Schubspannungen und -Verformungen in Rissebene,  $K_{III}$  (Modus *III*) beschreibt die entsprechenden Parameter normal zur Rissebene. Durch die große räumliche Ausdehnung einer Talsperre in Mauer-Längsrichtung bzw. deren Einspannung in die Talflanken kann ein Versagen durch einen Modus *III*-Riss unter den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Lastfälle ausgeschlossen werden. Eine entsprechende Verschiebungsform ist nicht möglich. Modus *III* wird aus diesem Grunde nicht weiter betrachtet. Für einfache Geometrien und Belastungen existieren zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren analytische Lösungen und Tabellenwerke beispielsweise nach Irwin [40], ein Beispiel gibt Abb. 6.6a bis 6.6c. Für 6.6a, den Fall eines zentralen Risses in einem sehr breiten Körper unter entfernter reiner Zugspannung  $\sigma$  gilt hierbei

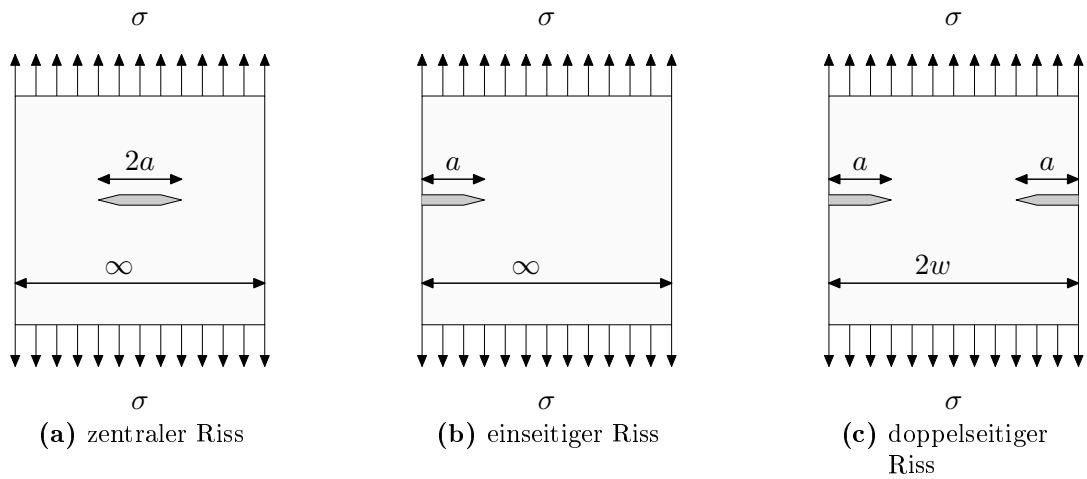
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (6.4)$$

Im Falle eines einseitigen Risses unter sonst gleichen Bedingungen, 6.6b, gilt

$$K_I = 1,12 \sigma \sqrt{a} \quad (6.5)$$

und im in 6.6c gezeigten Fall eines doppelseitigen Risses in einem Körper der Breite  $2w$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left( \frac{2w}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \tan \left( \frac{\pi a}{2w} \right) + 0,1 \sin \left( \frac{\pi a}{w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$



**Abb. 6.6:** Beispiele tabellierter  $K_I$ -Spannungsintensitätsfaktoren

Im Allgemeinen muss der Betrag dieser Faktoren jedoch numerisch hergeleitet werden. Dies kann durch herkömmliche Modelle wie dem der Finiten Elemente oder durch netzfreie Verfahren wie der Elementfreien Galerkin Methode in ähnlicher Weise geschehen.

Als Annahmen für eine analytische Modellierung des Spannungsfeldes um die Rissspitze werden die Spannungsfreiheit der Rissflanken, mit zunehmender Entfernung zur Rissspitze verschwindende Spannungen und eine örtlich begrenzte Dehnungsenergie vorausgesetzt. Das zweidimensionale Spannungsfeld mit den Normalspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$  in den Richtungen  $x_1$  und  $x_2$  um die Rissspitze lässt sich unter diesen Voraussetzungen, hergeleitet über die von Georg Bidell Airy [2] entwickelte gleichnamige Funktion unter Einbeziehung der Spannungsintensitätsfaktoren nach (6.3), bestimmen zu

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (6.7a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (6.7b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (6.7c)$$

Durch Integration der Dehnungen werden die assoziierten Verschiebungen erhalten:

$$u_1 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(2 - 2\mu + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.8a)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-1 + 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (6.8b)$$

Hierin ist das Schubmodul  $G$  definiert zu

$$G = \frac{E}{2 + 2\mu} \quad (6.9)$$

Der Zusammenhang zwischen Spannungsintensitätsfaktor  $K$ , Verschiebung  $u = [u_1 \ u_2]^T$ , Elastizitätsmodul  $E$ , Querdehnzahl  $\mu$  und Schubmodul  $G$  lautet damit für  $\theta = \pi$ :

$$K_I = \frac{E}{1 + \mu} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left( \frac{1}{\kappa + 1} u_1 r \right) \quad (6.10a)$$

$$K_{II} = \frac{E}{1 + \mu} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left( \frac{1}{\kappa + 1} u_2 r \right) \quad (6.10b)$$

mit der Kolosov-Konstante

$$\kappa = \begin{cases} (3 - \mu)(1 + \mu) & \text{für Ebenen Spannungszustand (ESZ)} \\ 3 - 4\mu & \text{für Ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \end{cases} \quad (6.11)$$

Die Bruch- oder Risszähigkeit eines Materials, welche im einachsigen Zugversuch (Modus I) ermittelt wird, ist identisch mit dem kritischen Spannungsintensitätsfaktor  $K_{Ic}$ . Ein Werkstoff versagt unter reiner Zugbeanspruchung, wenn gilt

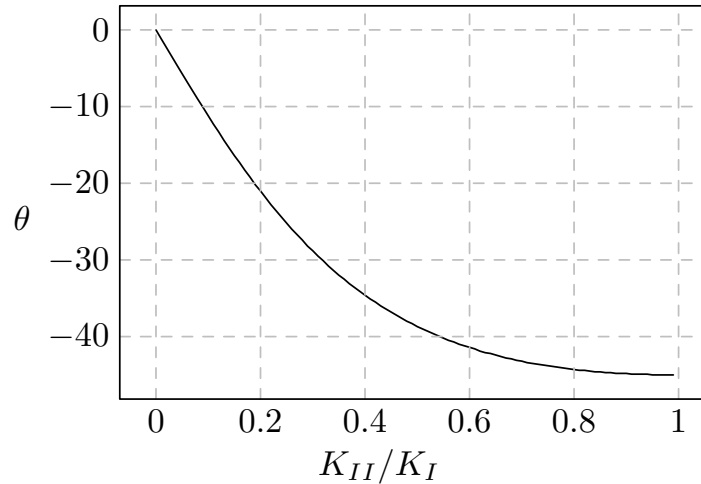
$$K_I \geq K_{Ic} \quad (6.12)$$

Dieser Parameter ist ein Maß für die Anfälligkeit eines Werkstoffes hinsichtlich der Rissbildung: Je höher der kritische Spannungsintensitätsfaktor des Materials, desto mehr Widerstand setzt dieses dem Rissfortschritt entgegen. Einige Werte typischer Baumaterialien für Talsperren für  $K_{Ic}$  führt Tab. 6.6 auf, wobei eine materialspezifische Temperaturabhängigkeit zu beachten ist [28].

**Tab. 6.6:** Kritische Modus  $I$ -Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{Ic}$  nach [28]

Material	$K_{Ic}$ [MPa $\sqrt{\text{m}}$ ]
Granit	3
Beton, unbewehrt	0.2 - 1.4
Beton, bewehrt	10 - 15

Im reinen Modus  $I$  liegt die Rissebene orthogonal zur Zugspannung  $\sigma$ . Normalerweise liegt jedoch kein reiner Modus  $I$ -Zustand vor, sondern ein gemischter Modus mit Anteilen aus beiden Modi  $I$  und  $II$ . Die Richtung des Rissfortschritts liegt dann gebunden an die Richtung der größten Hauptspannungen über (6.14b) bzw. (6.14a) fest, Abb. 6.7 zeigt den Verlauf in Grad abhängig von den Spannungsintensitätsfaktoren.



**Abb. 6.7:** Rissfortschrittswinkel  $\theta$  [°] nach (6.14a)

Der Risspfad würde bei ungehindertem Fortschreiten stets so verlaufen, dass der Spannungsintensitätsfaktor  $K_{II}$  verschwindet, in reinem Modus  $I$  der kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_{Ic}$  erreicht und die geringste Fortschritts-Energie benötigt würde:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6.13a)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta^2} < 0 \quad (6.13b)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (6.13c)$$

$\sigma_{\theta\theta}$  ist hierbei die radiale Normalspannung um die Risspitze in Richtung  $\theta$ . Die Lösung von (6.13a) und (6.13b) für den Rissfortschrittswinkel  $\theta$  ist gegeben durch

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2K_I K_{II}}{K_I^2 + K_{II}^2}\right) \quad (6.14a)$$

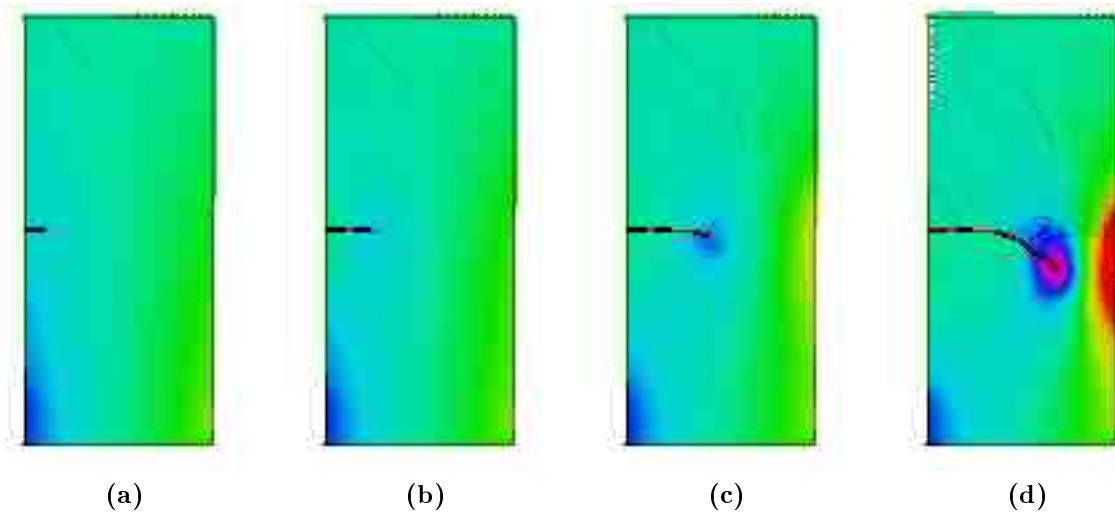
bzw.

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (6.14b)$$

Mit (6.14a) in (6.13c) liegt ein Zusammenhang zwischen  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{Ic}$  fest:

$$K_{Ic} = \frac{4\sqrt{2}K_{II}^3 \left(K_I + 3\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}\right)}{\left(K_I^2 + 12K_{II}^2 - K_I\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.15)$$

Damit liegt ein Kriterium der Rissprogression gemischter Modi vor, welches einen Vergleich der einachsigen Zugfestigkeit des Materials erlaubt. Abb. 6.8 zeigt beispielhaft den mit dem entwickelten EFGM-Programm berechneten Rissverlauf eines am unteren Ende eingespannten, am oberen Ende durch Scherung nach rechts beanspruchten Körpers, welcher sich somit in einem gemischten Modus befindet. Erwartungsgemäß zeigt der Riss ein Verhalten, sich senkrecht zur resultierenden Normalspannung auszurichten.



**Abb. 6.8:** Rissausbreitung gemischter Modus, EFGM-Modell, Vertikalspannungen

#### 6.2.4 Globale Rissbeanspruchungsparameter

Neben dem Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren existieren weitere Verfahren zur Beurteilung der Rissbeanspruchung, insbesondere unter mehrachsigen Spannungszustand. Diese können zum Einen bei Berücksichtigung komplexen Materialverhaltens wie



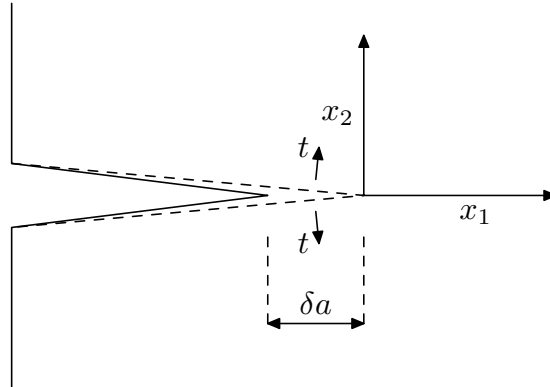
einer Verfestigung unter plastischer Verformung nötig werden, andererseits aber auch für die numerische Analyse im Sinne der benötigten Rechenzeit oder Ausnutzung ohnehin bereits vorliegender Parameter günstiger sein. Lokale und Globale Rissbeanspruchungsparameter lassen sich ineinander überführen.

### Energiefreisetzungsrate, virtuelle Rissverlängerung

Das Rissfortschrittskriterium (6.12) kann neben (6.15) durch weitere Ansätze auf mehrdimensionale Spannungszustände übertragen werden. Für eine Beurteilung eines zwischen Modus *I* und Modus *II* liegenden Problems –gemischter Modus– macht man sich die Tatsache zunutze, dass beim Fortschreiten des Risses Energie freigesetzt wird, deren Menge pro Einheitsfläche durch die Energiefreisetzungsrate  $G$ , auch Rißausbreitungskraft genannt, bestimmt wird. Analog zu (6.12) gilt dann als Bedingung für das Fortschreiten des Rissprozesses

$$G \geq G_c \quad (6.16)$$

wobei die Kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c$  eine experimentell zu gewinnende Eigenschaft des Materials ist. Mit  $L$  stehend für die Einheit der Länge und  $F$  für die wirkende Kraft erklärt sich über  $(\frac{F}{L^2}\sqrt{L})^2/\frac{F}{L^2} = FL^{-1} = FL/L^2$  ihre Dimension  $[\text{Nm}/\text{m}^2]$  oder  $[\text{Nm}^{-1}]$ , also Energie pro Flächeneinheit. Abb. 6.9 zeigt die virtuelle Verlängerung eines Risses um  $\delta a$ . Diese Expansion wurde verursacht durch Kräfte, welche zwischen  $x_1 = -\delta a$  und  $x_1 = 0$  herrschten.



**Abb. 6.9:** Virtueller Rissfortschritt um die Länge  $\delta a$

Nach der Rissverlängerung sind die Rissflanken spannungsfrei. Die Komponenten der während dem Prozess spiegelbildlich im Bereich der späteren Flanken wirkenden Spannungen lassen sich nach (6.3) quantifizieren durch

$$t_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(\delta a + x_1)}} \quad (6.17a)$$

$$t_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(\delta a + x_1)}} \quad (6.17b)$$

wobei die Koordinate  $x_1$  in Richtung des Rissfortschritts zeigt. Über (6.8) erhält man die zugehörigen Verformungsdifferenzen

$$\Delta u_1 = \frac{1-\mu}{\nu} K_{II} \sqrt{\frac{-2x_1}{\pi}} \quad (6.18a)$$

$$\Delta u_2 = \frac{1-\mu}{\nu} K_I \sqrt{\frac{-2x_1}{\pi}} \quad (6.18b)$$

Das Gleitmodul wird zur Unterscheidung von der Energiefreisetzungsrate hier mit  $\nu$  notiert. Die Querdehnzahl wird durch  $\mu$  gekennzeichnet. Die von  $t_1$  und  $t_2$  auf den Wegen  $\Delta u_1$  bzw.  $\Delta u_2$  geleistete Arbeit ist

$$G\delta a = \int_{-\delta a}^0 (t_1 \Delta u_1 + t_2 \Delta u_2) dx_1 \quad (6.19)$$

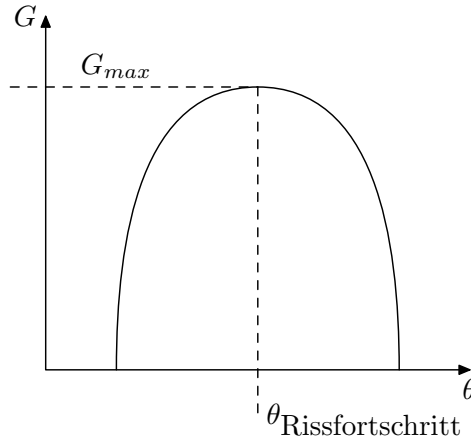
welche hier für den Fall des Ebenen Verzerrungszustandes aufgeführt sind. Damit wird

$$G = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (6.20)$$

mit

$$E' = \begin{cases} E & \text{für Ebenen Spannungszustand (ESZ)} \\ E/(1-\mu^2) & \text{für Ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \end{cases} \quad (6.21)$$

erhalten. Der Riss schreitet, wie bereits durch (6.14a) bzw. (6.14b) konstatiert, in diejenige, durch den Winkel  $\theta$  festgelegte Richtung fort, in der die größte Energiefreisetzungsrate erfolgen kann, wie in Abb. 6.10 schematisch dargestellt.



**Abb. 6.10:** Rissfortschritt in Richtung maximaler Energiefreisetzungsrate

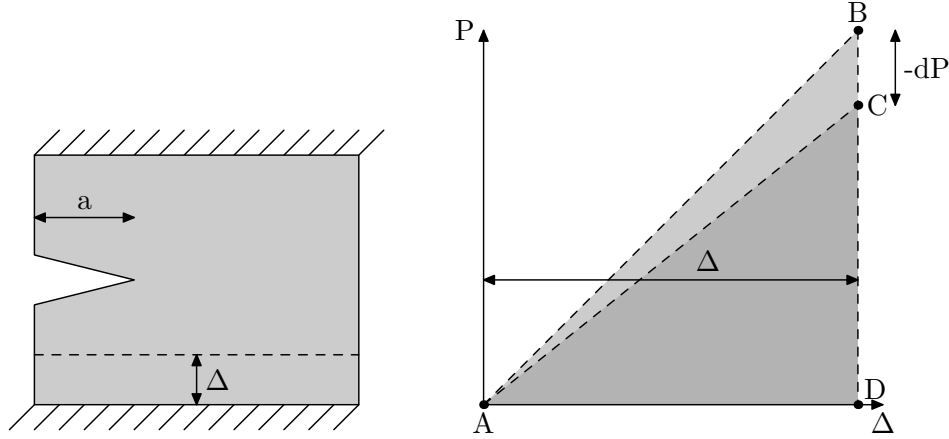
Die Energiefreisetzungsrate kann aufgefasst werden als die Rate der Änderung der potentiellen elastischen Energie  $\Pi = U - W$  in der Nähe des Risses in Bezug zur Rissfläche  $A$ , (6.22), ihre Einheit ist daher der Quotient aus Energie und Flächeneinheit.

$$G = \frac{U - W}{dA} \quad (6.22)$$

$U$  ist die Dehnungsenergie oder spezifische Formänderungsenergie.

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (6.23)$$

$W$  ist die von äußeren Kräften verrichtete Arbeit. Zur Veranschaulichung betrachte man Abb. 6.11 [54]:



**Abb. 6.11:** Fixierte vertikale Verformung einer Probe mit Riss

Eine oben und unten eingespannte Probe gerissenen Zustandes wurde durch vertikale Verschiebung des unteren Lagers um den Betrag  $\Delta$  gespannt. Die resultierende Lagerreaktion sei  $P$ . Die durch den Dehnungsvorgang in der Probe gespeicherte Energie entspricht dem Flächeninhalt des Dreiecks ABD. Dessen Steigung gibt die Probensteifigkeit an; bei ausgeprägter Plastizität in der Rissspitzenumgebung ergäbe sich eine gekrümmte Steigung. Der Riss wächst nun um den Betrag  $da$  weiter. Nach Beendigung des Wachstumsvorgangs ist der Energieinhalt der Probe geringer, da sie nun bedingt durch die geänderte Rissgeometrie weniger steif als vor der Rissverlängerung ist. Der Energieinhalt der Probe mit verlängertem Riss entspricht nun Dreieck ACD. Da während der Rissverlängerung um  $da$  keinerlei externe Kräfte wirkten, ist die volle potentielle Energie der Probe gleich der Dehnungsenergie, welche also die einzige Energiequelle der Rissverlängerung war:

$$\Pi = U = \int_0^\Delta P \, d\Delta = \frac{P\Delta}{2} \quad (6.24)$$

Damit lässt sich die Energiefreisetzungsrate  $G$  nun mit Probendicke  $B$  analog zu (6.22) schreiben:

$$G = -\frac{1}{B} \frac{dU}{da} \quad (6.25)$$

Auch folgende Überlegung kann angestellt werden, Abb. 6.12:

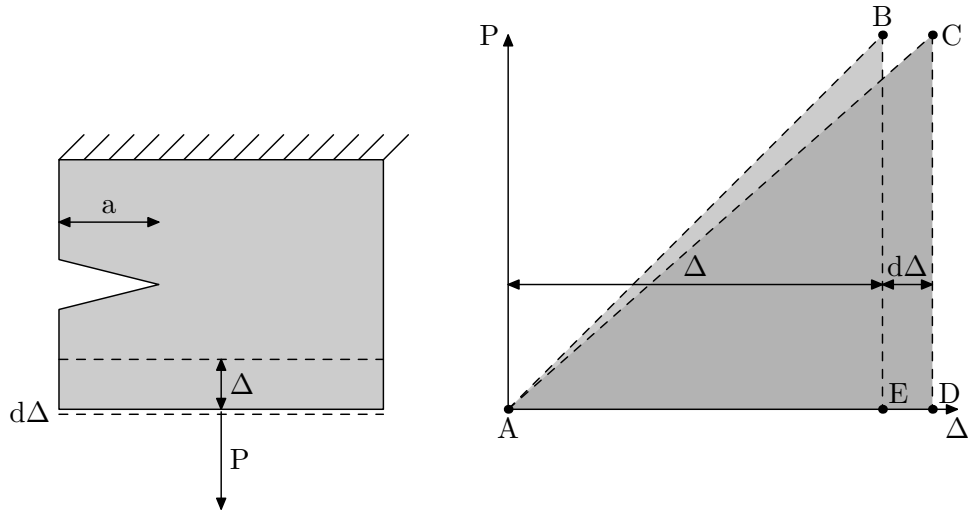


Abb. 6.12: Rissfortschritt durch konstante Last

Eine gerissene Probe, oben eingespannt, wurde an der freien Unterseite mit der konstanten Last  $P$  belastet, was eine vertikale Verformung vom Betrag  $\Delta$  zufolge hatte. Die hierdurch gespeicherte Energie entspricht Dreieck ABE. Unter  $P$  schreitet der Riss nun um den Betrag  $da$  fort, die vertikale Verformung nimmt um  $d\Delta$  zu. Den Energieinhalt des Systems nach Rissfortschritt stellt Dreieck ACD dar: Zwar ist die Probe nun weniger steif, jedoch wurde während des Vorgangs des Reißens dem System die Dehnungsenergie  $U = \int_0^\Delta P d\Delta = \frac{P\Delta}{2}$  zugeführt. Die aus dem System entnommene potentielle Energie  $V$  ist  $P\Delta$ . Das Gesamtpotential ist nun  $\Pi = U - V = \frac{P\Delta}{2} - P\Delta = -U$ , womit wieder (6.25) gilt. Mit der Energiefreisetzungsrate steht nun ein Ansatz zur Beurteilung des Rissfortschritts bei mehrachsigen Spannungszuständen zur Verfügung, sobald die Spannungsintensitätsfaktoren ermittelt wurden; hierzu Abschnitt 6.2.5.

### J-Integral

Auch das J-Integral ist ein energiebasierter Ansatz und beschreibt den Energiefluss zur Rissspitze hin im Moment des fortschreitenden Rissprozesses. Anders formuliert beschreibt das J-Integral die Differenz der potentiellen Energien zweier Körper identischer Geometrie, deren jeweilige Risslänge sich um  $\delta a$  unterscheidet. Es liegt auf der Hand, dass die Energiefreisetzungsrate  $G$  eng zusammenhängt mit dem Energiefluss in Richtung Rissspitze. Voraussetzung ist, dass das wandernde Rissspitzenfeld in seiner Ausprägung unverändert bleibt, sich also für einen sich mit der Rissspitze bewegendem Beobachter ein stationärer Eindruck bieten würde. Unter diesen Umständen sowie für linear-elastisches Materialverhalten ist das J-Integral identisch mit der Energiefreisetzungsrate und kann veranschaulicht werden als die Änderung der Energie bei Verlängerung der Risslänge um  $\delta l$  für die Probendicke  $d$ :  $J = G = -(1/d)(\partial U / \partial l)$ . Das J-Integral ist mit der Verschiebung  $u_i$  jedes Knotens  $N_i$  des Integralspfades  $\Gamma$  definiert zu

$$J = \int_{\Gamma} w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (6.26)$$

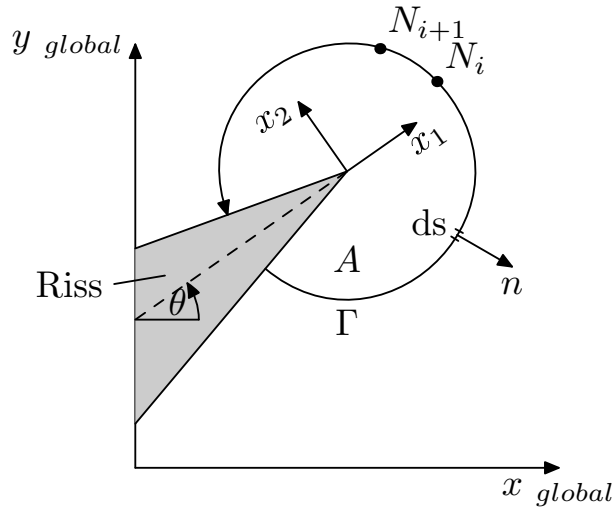
hierin ist  $w$  die Dichte der Dehnungsenergie, also die Menge der durch die Dehnung  $\varepsilon$  gespeicherten Energie pro Raumeinheit des reißenden Materials:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (6.27)$$

$T_i$  ist der Vektor der Kräfte senkrecht zum Integralpfad

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (6.28)$$

$\Gamma$  ist die gedachte Oberfläche des Kreis-Integralpfads. Die Koordinatenangaben  $x_1$  und  $x_2$  beziehen sich auf das System der Risspitze, Abb. 6.13 bzw. Abb. 6.5. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Summenzeichen werden nicht aufgeführt, stattdessen wird über gleich lautende Indices eines Terms aufsummiert, beispielsweise  $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  oder  $\sigma_{ji} n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3$ . Doppelt auftretende Indices werden stumme Indices genannt, da sie nach einer Summation verschwunden sind. Sie können beliebig umbenannt werden:  $\sigma_i n_i = \sigma_k n_k$ . Nur einmal auftretende Indices werden freie Indices genannt. Ihre Anzahl muss in allen Ausdrücken übereinstimmen. Es wird stets summiert, sobald Indices auf einer Seite einer Gleichung mindestens zweifach auftauchen.



**Abb. 6.13:** Pfad des J-Integrals

Grau unterlegt ist die Rissöffnung dargestellt. Das lokale Koordinatensystem um die Risspitze wird von  $x_1$  und  $x_2$  aufgespannt. Um die Risspitze zieht sich der Integralpfad  $\Gamma$ , hier als Kreis des Flächeninhaltes  $A$  gezeigt. Entlang dieses Pfades wird über  $ds$  integriert, wobei die Normale  $n$  nach Aussen zeigt.  $N_i$  und  $N_{i+1}$  zeigen symbolhaft zwei von auf dem Integralpfad zu erzeugenden Stützpunkten. (6.26) lässt sich herleiten wie folgt: Mit der von elastischen Kräften im Körperinneren geleisteten Arbeit  $U$  und der Arbeit der äußeren Kräfte  $W$  kann das elastische Potential  $\Pi = U - W$  als

$$\Pi = \int_A w dA - \int_{\Gamma} T_i u_i ds \quad (6.29)$$

notiert werden.  $A$  ist die durch  $\Gamma$  begrenzte Fläche. Damit gilt für die Ableitung des elastischen Potentials:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{dw}{da} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{du_i}{da} ds \quad (6.30)$$

mit

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.31)$$

kann (6.30) geschrieben werden

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \left( \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA - \int_{\Gamma} T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (6.32)$$

Mit der Formänderungsenergiedichte

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.33)$$

und dem Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.34)$$

sowie dem für isotropische Werkstoffe symmetrischen Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (6.35)$$

gilt

$$\frac{\partial w}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) \quad (6.36)$$

Damit kann (6.32) geschrieben werden zu

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds - \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA \quad (6.37)$$

Nach dem Übergang vom Oberflächen- zum Linienintegral mit  $n_x ds = dy$  durch

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} \left( w n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (6.38)$$

entsteht die endgültige Form des J-Integrals. In den Koordinaten des Rissspitzensystems  $x = x_1$ ,  $y = x_2$  ausgedrückt:

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \quad (6.39)$$

Unter der Voraussetzung, dass keine sich ändernden Volumenkräfte, beispielsweise durch Beschleunigungen, vorhanden sind, ist das J-Integral unabhängig vom Integralfad. Sind Volumenkräfte vorhanden, wird das J-Integral erweitert:

$$J' = \int_{\Gamma} w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds + \int_V \rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} dV \quad (6.40)$$

Wenn über ein sehr kleines Volumen  $V$  integriert wird, kann der erweiterte Teil in guter Näherung vernachlässigt werden. Für die numerischen Berechnungen können Integralfade mit rechteckigen Konturen vorteilhaft sein, Abschnitt 6.2.5.

### 6.2.5 Numerische Ermittlung der Rissbeanspruchungsparameter

Aufgrund der Spannungs-Singularität an Rissspitze können die Spannungsintensitätsfaktoren nicht unmittelbar dort aus den Feldgrößen ermittelt werden. Es muss also durch andere abhängige Parameter rückgeschlossen werden. Grundsätzlich basieren die Methoden zur Gewinnung der Bruchkennwerte auf zwei unterschiedlichen Ansätzen:

- Extrapolation aus Punkten im Verschiebungsfeld nahe der Rissspitze (Rissöffnungswinkel-Verfahren)
- Indirektes Schließen über Energiebetrachtungen durch Virtuelle Rissverlängerung oder J-Integral

#### Rissöffnungswinkel-Verfahren

Zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  bzw.  $K_{II}$  und den Verschiebungen im Feld um die Rissspitze besteht ein durch (6.8) unmittelbar festgelegter Zusammenhang. Für  $K_I$  lautet dieser an den Rissflanken:

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma} \quad (6.41)$$

wobei die Rissspitzen-Öffnungsverschiebung  $\delta$  als die Entfernung der Schnittpunkte rechtwinklig von der Rissspitze ausgehender Schenkel mit den Rissflanken festgelegt ist, Abb. 6.14.

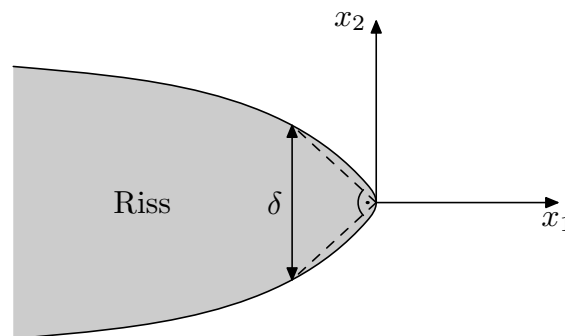


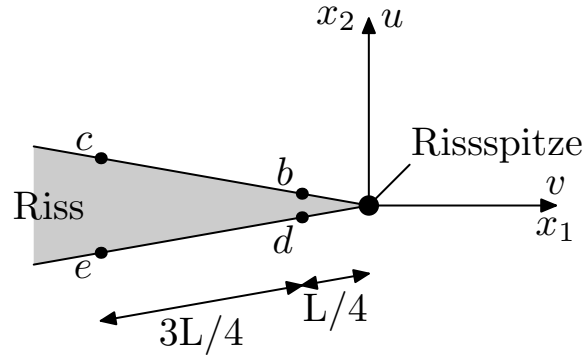
Abb. 6.14: Rissspitzenöffnung

Über (6.41) lässt sich damit auf die Spannungsverhältnisse an der Rissspitze schließen. Dies wird für das Verfahren der numerischen Verschiebungs-Extrapolationsmethode nach Phongthanapanich [67] ausgenutzt, welche folgende Zusammenhänge zwischen Verschiebung und Spannungsintensitätsfaktoren herstellt:

$$K_I = \frac{E}{3(1+\mu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left( 4(v_b - v_d) - \frac{v_c - v_e}{2} \right) \quad (6.42a)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\mu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left( 4(u_b - u_d) - \frac{u_c - u_e}{2} \right) \quad (6.42b)$$

Neben dem E-Modul  $E$  ist  $\mu$  die Querkontraktionszahl und  $\kappa$  die Kolosov-Konstante nach (6.11). Die Verschiebungen in den beiden Richtungen  $x_2$  und  $x_1$  des Koordinatensystems der Rissspitze werden durch  $u$  und  $v$  dargestellt, Abb. 6.15.



**Abb. 6.15:** Stützpunkt-Positionen an den Rissflanken

$L$  ist der für diese Betrachtung anzunehmende Radius um die Rissspitze. Ursprünglich für die Anwendung auf Basis der Methode der Finiten Elemente entwickelt, lässt sich dieser Ansatz äquivalent auf netzfreien Methoden adaptieren. Repräsentativ werden die Verschiebungen von vier spiegelbildlich auf der oberen und unteren Rissflanke liegenden Punkten zur Extrapolation der Spannungsverhältnisse an der Rissspitze herangezogen. Die Entfernungsrelation bezüglich der Rissspitze beider Punktepaares liegt bei 1:4. In der Methode der Finiten Elemente ist dies die Größe des üblicherweise an dieser Stelle Verwendung findenden Rissspitzenelements, Abb. 6.22. Bei netzfreier Implementierung ist dieser Parameter in ähnlichen Größenordnungen relativ zum Einflussbereich eines Knotens bzw. der Knotendichte zu wählen. Unter Umständen kann zur Validierung über  $L$  variiert werden. Diese Methode ist besonders vorteilhaft bei relativ großen Verschiebungen. Der Zusammenhang zum J-Integral ist mit  $J = \text{const} \cdot \sigma_f \cdot \delta$  gegeben, wobei  $\sigma_f$  die Fließspannung ist und  $\text{const}$  eine materialabhängige Konstante.

## 6.2.6 Energieansätze

### Energiefreisetzungsrate, virtuelle Rissverlängerung

Die Energiefreisetzungsrate  $G$  ist über (6.20) unmittelbar mit den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  verknüpft. Gleichzeitig kann sie als Ableitung der potentiellen



Energie  $\Pi$  nach der Rissverlängerung begriffen werden, (6.22). Gelingt es also, die Energiefreisetzungsrate zu ermitteln, kann daraus unmittelbar eine Aussage zum Rissfortschritt gemacht werden. Die potentielle Energie eines Körpers kann in Matrizenform wie folgt ausgedrückt werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (6.43)$$

$\mathbf{u}$  ist die Matrix der Verschiebungen  $u_1, u_2$  für jeden Knoten,  $\mathbf{F}$  der Vektor der äußeren Kräfte.  $\mathbf{K}$  ist die Steifigkeitsmatrix. Mit (6.22) ist es möglich die Energiefreisetzungsrate in Matrizenform auszudrücken:

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{u} \quad (6.44)$$

$\partial \mathbf{K} / \partial a$  kann als Änderung der globalen Steifigkeit in Bezug auf die virtuelle Rissverlängerung um den Betrag von  $\Delta a$  aufgefasst werden, Abschnitt 6.2.4. Daher geschieht die numerische Kalkulation in zwei aufeinander folgenden Durchläufen. Zunächst wird die Globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_a$  für den Status Quo in üblicher Weise ermittelt und gespeichert. Anschliessend wird der Riss um  $\Delta a$  verlängert und abermals die Globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{a+\Delta}$  aufgestellt. Durch Approximieren des Differenzialquotienten durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \approx \frac{\mathbf{K}_{a+\Delta} - \mathbf{K}_a}{\Delta a} \quad (6.45)$$

kann nun die Ableitung der Globalen Steifigkeitsmatrix erhalten werden, es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial K_i^e}{\partial a} \quad (6.46)$$

$K_i^e$  sind die Element-Steifigkeitsmatrizen,  $N$  die Gesamtzahl der Knoten, wobei nur die von der virtuellen Rissverlängerung beeinflussten Knoten einen Beitrag zur Veränderung der Globalen Steifigkeitsmatrix von  $\mathbf{K}_a$  zu  $\mathbf{K}_{a+\Delta}$  leisten.  $\Delta a$  ist festzulegen und bestimmt Genauigkeit vs. Rechen- und damit Zeitaufwand. Besonderer Vorteil dieses Verfahrens ist die einfache Implementierung bei Verwendung der Methode der Finiten Elemente, da keinerlei Neuvernetzung für diesen einen Rechenschritt erforderlich ist. Nachteilig ist jedoch der hohe numerische Aufwand zur Herleitung der Ableitungen, weshalb für netzfreie Methoden andere Verfahren günstiger erscheinen, beispielsweise die im Folgenden beschriebene Methode des J-Integrals. Für netzfreie Verfahren kann der Ansatz analog übernommen werden, die Konstellation der Steifigkeitsmatrizen beispielsweise der hier verwendeten EFG-Methode ist identisch.

### J-Integral

Für das J-Integral sind analytische Lösungen für allgemeine Problemstellungen nicht existent. (6.26) lässt sich in Matrixform darstellen zu

$$J = \int_J w \, dx_2 - \int_{\Gamma} (\sigma_n, \tau_n) \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} ds \quad (6.47)$$

Die Bestandteile dieses Terms lassen sich auflösen:

$$w = \frac{1}{2E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \frac{1+2\mu}{2E}(\tau_{xy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{zz}) \quad (6.48a)$$

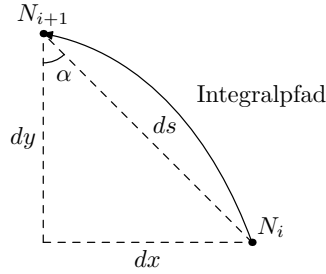
$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (6.48b)$$

$$\tau_n = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (6.48c)$$

$$u_n = u \cos \alpha + v \sin \alpha \quad (6.48d)$$

$$v_n = -u \sin \alpha + v \cos \alpha \quad (6.48e)$$

Der Winkel zwischen Senkrechte im globalen System und Integralpfad wird  $\alpha$  durch angegeben, Abb. 6.16. Der Integralpfad wird hierzu durch lineare Segmente  $ds$ , jeweils zwischen den Knoten  $N_i$  und  $N_{i+1}$  gelegen, angenähert. Für jedes dieser Segmente wird das Integral über die oben genannten Parameter ermittelt, beispielsweise per Gauß-Quadratur, dem numerischen Standard-Integrationsverfahren nach Abschnitt 2.4.



**Abb. 6.16:** Detail J-Integralpfad

Die Summanden des somit in eine Summe zerlegten Integrals notieren im globalen Koordinatensystem mit Risswinkel  $\theta$  zu

$$\begin{aligned} J_{ds} = & \int_{ds} w(-\sin \theta dx + \cos \theta dy) \\ & - \int_{ds} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} \cos \theta dy + \tau_{xy} \varepsilon_{yy} \sin \theta dy - \tau_{xy} \varepsilon_{xx} \cos \theta dx - \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} \sin \theta dx \\ & + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \cos \theta dy - \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin \theta dx + (\sigma_{xx} \sin \theta - \tau_{xy} \cos \theta) du - (\sigma_{yy} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) dv] \end{aligned} \quad (6.49)$$

(6.47) lässt sich mithilfe des Satzes von Gauß in ein Flächenintegral verwandeln, siehe auch (6.53). Dieses Integral lässt sich ebenfalls über eine Gauß-Quadratur numerisch lösen:

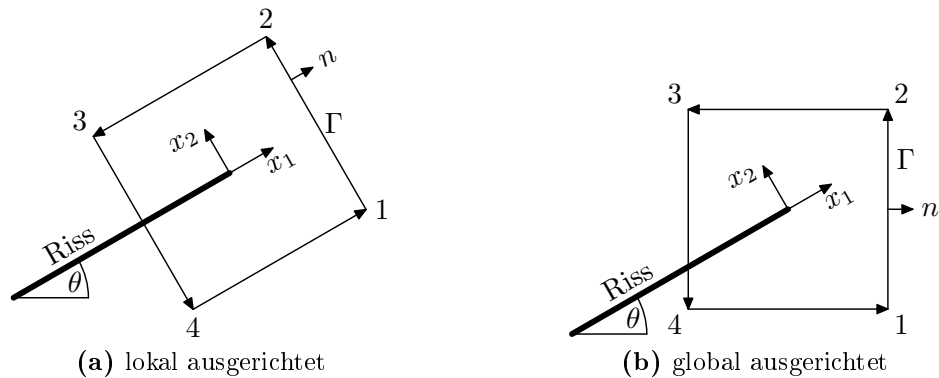
$$J = \sum_A \sum_{n=1}^{n_{\text{Gauß}}} \left\{ \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} \right] \det \left( \frac{\partial x_j}{\partial \zeta_k} \right) \right\}_n w_n \quad (6.50)$$

Symbol  $n_{\text{Gauß}}$  bzw.  $w_n$  ist die Anzahl bzw. Gewichtung der Gauß-Integrationspunkte in jedem Element. Die Wichtungsfunktion  $q$  ist definiert zu  $q = 1$  an der Risspitze und

$q = 0$  am äußeren Rand des Integrationsgebietes  $A$ . Für jeden Punkt  $x_i$  innerhalb des Gebietes gilt

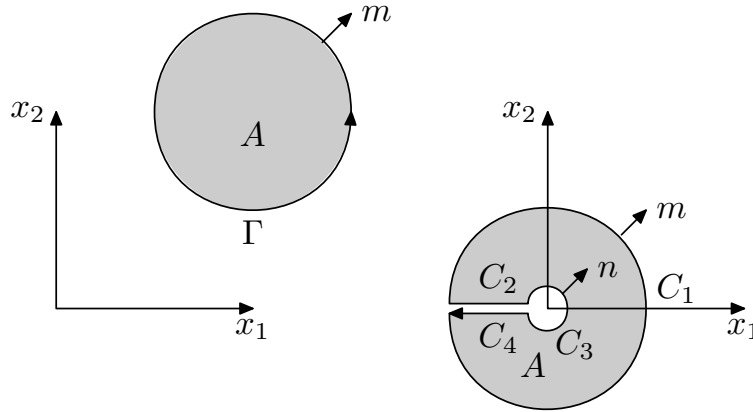
$$q(x_i) = \sum_{I=1}^n N_I q_I \quad (6.51)$$

was der üblichen Approximation eines Wertes über eine Ansatzfunktion  $N$  entspricht, Abschnitt 2.5.3. Auf eine detailliertere Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet werden, da diese Transformation überwiegend in der Methode der Finiten Elemente Verwendung findet, jedoch nicht innerhalb des hier betrachteten Verfahrens des Elementfreien Galerkin-Ansatzes. Dies ist wie folgt begründet: FEM liefert einen an den Elementgrenzen unsteten Verlauf der Dehnungen, was für die Ermittlung der benötigten Werte für das Linienintegral durch einen Postprozessor ungünstiger ist als für ein Flächenintegral. Netzfrie Methoden haben diese Eigenschaft jedoch nicht, sie liefern stetige Dehnungsverläufe. Des weiteren wäre eine Implementierung der Randbedingungen  $q = 1$  bzw.  $q = 0$  am inneren bzw. äußeren Rand des betrachteten Gebietes aufwändiger als in FEM, da unter Verwendung einer netzfrie Darstellung der Ansatzfunktion  $\Phi_I(x_J) \neq \delta_{IJ}$  gilt und daher  $u^h(x_I) \neq u_I$ , siehe Abschnitt 3.2. Im Gegensatz dazu liefern FEM-Ansatzfunktionen  $N_I(x_J) = \delta_{IJ}$ . Es genügt zur Darstellung dieser Randbedingung im Rahmen der Elementfreien Galerkin Methode daher nicht, den entsprechenden Wert der Randbedingung, beispielsweise  $q = 0$ , den auf dem Rand des Integralgebiets  $A$  liegenden Knoten zuzuweisen, da die lokale Approximation  $\Phi_I(x)q(x)$  durch eine gewichtete Summation nicht nur über die Randknoten, sondern aller sich im Einflussbereich befindenden Stützstellen gebildet wird, Abschnitt 3.1. Somit müsste auch an dieser Stelle mit Lagrange-Multiplikatoren gearbeitet werden. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit mit einem achsenparallelen oder entsprechend dem Risswinkel  $\theta$  gedrehten J-Integralpfad  $\Gamma$  quadratischen Umrisses gearbeitet, Abb. 6.17. Neben der einfacheren Implementierung im Vergleich zu einem gekrümmten Integralpfad ist diese Form günstig, da die Integranden parallel zum Riss liegender Teile durch die Multiplikation mit dem Normalenvektor  $n$  verschwinden. Dabei kann die Orientierung wie in Abb. 6.17a am lokalen Risspitzen-Koordinatensystem oder durch entsprechende Projektion am globalen Koordinatensystem erfolgen.



**Abb. 6.17:** Numerisch günstige J-Integralpfade

Die für diese Berechnung in Anspruch genommene Wegunabhängigkeit des J-Integrals kann mit folgender Überlegung veranschaulicht werden, [72], [92]:



**Abb. 6.18:** J-Integralpfade ohne intern umschlossene Rissspitze

Der Betrag jedes geschlossenen J-Integrals, welches die Rissspitze *nicht* enthält, Abb. 6.18 auf beiden Bildhälften, ist 0. Hierfür wendet man das Divergenztheorem

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dA \quad (6.52)$$

mit

$$\int_{\partial A} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dA \quad (6.53)$$

an, wobei  $m$  der bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn nach außen gerichtete Normalenvektor ist,  $n$  der für diese Herleitung zu  $m$  antiparallele in das Gebiet weisende Normalenvektor und  $A$  die durch den Integralpfad  $\Gamma$  umschlossene Fläche im lokalen  $x_1$ - $x_2$ -Rissspitzen-Koordinatensystem, Abb. 6.18 links. Zieht man weiterhin

$$\frac{\partial W}{\partial x_j} \delta_{j1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_1} = \sigma_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_1 \partial x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_1} \quad (6.54)$$

unter der Gleichgewichtsbedingung  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$  in Betracht, kann zusammen mit der Tatsache, dass die auf den Rissflanken liegenden Teile  $C_2$  und  $C_4$  des Integralpfades wegen Orthogonalität zum Normalenvektor verschwinden, Abb. 6.18 rechte Bildhälfte, linke Seite von (6.53), die Bedingung

$$\int_{C_1} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j ds + \int_{C_3} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j ds = 0 \quad (6.55)$$

aufgestellt werden. Unter Beachtung des entgegengesetzt gerichteten Drehsinns von  $C_1$  zu  $C_3$  (äußerer und innerer Kreis) gilt

$$\int_{C_1} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j ds = \int_{C_3} \left( W \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds \quad (6.56)$$

womit die Wegunabhängigkeit des J-Integrals nachgewiesen ist. Nun können die Terme des quadratischen J-Integrals im Rissspitzen-Koordinatensystem, Abb. 6.17a, vereinfacht ausgedrückt werden:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y) + \frac{E}{4(1+\mu)} \varepsilon_{xy}^2 \quad (6.57)$$

Mit  $\mu$  als Symbol der Poissonschen Querkontraktionszahl. (6.57), der erste Term aus (6.47), kann damit in Abhängigkeit der Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , welche als primäres Ergebnis der Berechnungen vorliegen, notiert werden zu

$$W = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2\mu u_{xx} u_{yy}) + \frac{E}{4(1+\mu)} (u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + 2u_{xy} u_{yx}) \quad (6.58)$$

Der zweite Teil des Integranden aus (6.47), welcher die an der Kontur des Linienintegrals  $\Gamma$  wirkenden Kräfte mit den in  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung zeigenden Komponenten  $n_1$  und  $n_2$  des  $\Gamma$ -Normaleneinheitsvektors  $\mathbf{n}$  ausdrückt, ergibt sich im Verhältnis zu den Verformungen zu

$$\begin{aligned} T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} &= (\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} [u_{xx}(u_{xx} + \mu u_{yy}) n_1 + u_{yx}(u_{yy} + \mu u_{xx}) n_2] \\ &\quad + \frac{E}{2(1+\mu)} [u_{xx}(u_{yx} + u_{xy}) n_2 + u_{yx}(u_{yx} + u_{xy}) n_1] \end{aligned} \quad (6.59)$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Notation

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad u_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

verwendet wurde. Es ergibt sich für die vier parallel zu den Achsen des globalen Koordinatensystems ausgerichteten Teil-Linien des quadratischen J-Integralpfads aus Abb. 6.17b:

Linie 1-2 ( $ds = dy$ ,  $dx = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ )

$$J_{1-2} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (u_{yy}^2 - u_{xx}^2) dy + \frac{E}{4(1+\mu)} (u_{xy}^2 - u_{yx}^2) dy$$

Linie 2-3 ( $ds = dx$ ,  $dy = 0$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ )

$$J_{2-3} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} (u_{xy} u_{yy} + \mu u_{xx} u_{yx}) dx + \frac{E}{2(1+\mu)} (u_{xx} u_{yx} + u_{xx} u_{xy}) dx$$

Linie 3-4 ( $ds = dy$ ,  $dx = 0$ ,  $n_1 = -1$ ,  $n_2 = 0$ )

$$J_{3-4} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (3u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 4\mu u_{xx} u_{yy}) dy + \frac{E}{4(1+\mu)} (u_{xy}^2 + 3u_{yx}^2 + 4u_{xy} u_{yx}) dy$$

Linie 4-1 ( $ds = dx$ ,  $dy = 0$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = -1$ )

$$J_{4-1} = -\frac{E}{(1-\mu^2)} u_{xy}(u_{yy} + \mu u_{xx})dx - \frac{E}{2(1+\mu)} u_{xx}(u_{yx} + u_{xy})dx$$

Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Problemstellungen gilt die Äquivalenz zwischen J-Integral  $J$  und Energiefreisetzungsrate  $G$  als Änderungsrate des Gesamtpotentials gegenüber der Risslänge. Über (6.20) ist ein Zusammenhang hergestellt zwischen  $J$  und den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$ :

$$G = J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (6.60)$$

Aus diesem lassen sich jedoch aufgrund der einfachen Unbestimmtheit noch keine konkreten Werte für jeden der beiden skalierenden Faktoren ableiten. Dies geschieht über das Interaktionsintegral, welches im Folgenden orientiert an [91] skizziert wird.

## Interaktionsintegral

Die Grundidee des Interaktionsintegrals ist, die Spannungsintensitätsfaktoren aus einer Überlagerung des realen Zustandes (1) eines normalerweise gemischten Modus und eines zusätzlichen Hilfszustandes (2) reinen Modus  $I$  oder  $II$  abzuleiten. Für Modus  $I$  des Hilfszustandes wird  $K_I^{(2)} = 1$  und  $K_{II}^{(2)} = 0$  festgelegt, für Modus  $II$   $K_I^{(2)} = 0$  und  $K_{II}^{(2)} = 1$ . Die für die folgende Herleitung grundlegenden Spannungs- und Deformationszustände des Hilfsmodus liegen damit über (6.7) bzw. (6.8) ohne einen weiteren numerischen Berechnungsvorgang fest. Das J-Integral des superponierten Zustandes ist analog zu (6.39):

$$J^{(1,2)} = \int \left( \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1m} - (\sigma_{km}^{(1)} + \sigma_{km}^{(2)}) \frac{\partial (u_k^{(1)} + u_k^{(2)})}{\partial x_1} \right) n_m ds \quad (6.61)$$

Hierin bezeichnen  $^{(1)}$  bzw.  $^{(2)}$  die Anteile des aktuellen Zustandes bzw. des Hilfszustandes. Das Integral  $J^{(1,2)}$  der Überlagerung lässt sich spalten in

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (6.62)$$

wobei  $M^{(1,2)}$  das Interaktionsintegral ist,  $J^{(1)}$  und  $J^{(2)}$  die herkömmlichen J-Integrale nach (6.39) der beiden Zustände:

$$\begin{aligned}
 J^{(1,2)} = & \underbrace{\int_{\partial A} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \delta_{1m} - \sigma_{km}^{(1)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_m d\Gamma}_{J^{(1)}} \\
 & + \underbrace{\int_{\partial A} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1m} - \sigma_{km}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_1} \right) n_m d\Gamma}_{J^{(2)}} \\
 & + \underbrace{\int_{\partial A} \left( \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \delta_{1m} - \sigma_{km}^{(1)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{km}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_m d\Gamma}_{M^{(1,2)}}
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

$\partial A$  ist der Rand  $\Gamma$  des Integralgebiets um  $A$ ,  $d\Gamma = ds$ ,  $n_m$  sind die Komponenten des Normalenvektors senkrecht nach außen zeigend auf  $d\Gamma$ . Die Superposition ist auch gültig für (6.60), sodass ebenfalls gilt:

$$J^{(1,2)} = \frac{\left( K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \right)^2}{E'} + \frac{\left( K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \right)^2}{E'} \tag{6.64}$$

wie vor bleibt hierbei der modifizierte E-Modul mit

$$E' = \begin{cases} E & \text{für Ebenen Spannungszustand (ESZ)} \\ E/(1 - \mu^2) & \text{für Ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \end{cases}$$

festgelegt. (6.64) unter Verwendung von (6.60) ergibt:

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \tag{6.65}$$

Der Zusammenhang zwischen Interaktionsintegral und den Spannungsintensitätsfaktoren ist nun durch Kombination von (6.65) und (6.63) mit

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \tag{6.66}$$

gegeben. Jetzt können beide Spannungsintensitätsfaktoren nach folgendem Schema ermittelt werden: Für den Hilfszustand (2) wird ein reiner Modus- $I$ -Zustand angenommen. Dann gilt:  $K_I^{(2)} = 1$  und  $K_{II}^{(2)} = 0$ . Eingesetzt in (6.66) ergibt sich für  $K_I$  des realen Zustandes:

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{1,2, \text{ Modus } I} \tag{6.67}$$

Damit kann  $K_{II}$  über (6.60) oder analog mit  $K_{II}^{(2)} = 1$  und  $K_I^{(2)} = 0$  über

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{1,2, \text{ Modus II}} \quad (6.68)$$

erhalten werden. Deutlich wird durch obige Ausführungen der etwas höhere numerische Aufwand bei Verwendung des J-Integrals im Vergleich etwa mit Methoden, die auf dem Rissöffnungswinkel-Verfahren basieren. Jedoch bietet diese Methode eine gewisse Robustheit beispielsweise in Bezug auf die Knotenverteilung. Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurden beide Verfahren verwendet, wobei sich die auf dem J-Integral basierende Quadratur tatsächlich als robuster erwies. Dies ist auch darin begründet, dass verhältnismäßig weniger Knoten in Rissflankennähe einfließen, deren Parameter durch die Randnähe und die damit einseitig verteilten Nachbarknoten ungünstiger zu bestimmen sind. Die Erschwernisse liegen etwa im Bereich der Ermittlung der Sichtbarkeit, wie in Abschnitt 6.2.12 dargelegt.

### 6.2.7 Rissgeschwindigkeiten, Keilwirkung durch Wasser

DIN 19700 [25] verlangt eine Berücksichtigung hydrodynamischer Vorgänge im Rahmen bestimmter Bemessungssituationen, in welchen Risse im Talsperrenkörper auftreten können. Auf der Hand liegt die Frage, ob in den sich öffnenden Riss eindringendes Wasser verstärkende Wirkung haben könnte. Entscheidend hierfür ist, wie schnell sich ein Riss ausbildet, ob also bis zu dessen zum Stillstand kommen ausreichend Zeit für einen solchen Einstromvorgang zur Verfügung steht. Im Folgenden wird daher der zeitliche Rahmen des Rissfortschritts beleuchtet. Die Geschwindigkeit, mit der ein Riss fortschreitet, hängt neben den wirkenden Kräften vor allem von der Duktilität eines Werkstoffes ab. Diese entscheidet, wie viel Energie für eine weitere Progression aufgewendet werden muss. Duktile Werkstoffe verzehren durch eine ausgeprägte Phase des Fließens viel Energie, die bei spröden Stoffen aufgrund des Fehlens dieser dem Bruch vorangehenden Phase praktisch uneingeschränkt für die Rissbildung zur Verfügung steht. Spröde Materialien reißen deswegen sehr schnell. Neueste Untersuchungen deuten nach Buehler [18] darauf hin, dass die Rissgeschwindigkeit auf atomarer Ebene sogar jenseits der Schallgeschwindigkeit bewegen kann. Dieses im Widerspruch zur herkömmlichen Wellentheorie stehende Phänomen wird durch Verhärtung des Materials unter plötzlicher Dehnung hervorgerufen (Hyperelastizität). Im makroskaligen Bereich können die Rissgeschwindigkeiten in der Größenordnung der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit des betreffenden Materials liegen. Unter gewöhnlichen Umständen wird maximal etwa die halbe Rayleigh-Wellengeschwindigkeit erreicht. Die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit von Beton liegt bei  $v_{\text{Rayleigh}} = 2300 \text{ m/s}$  und gibt die Ausbreitung einer Oberflächenwelle an. Die reale Rissausbreitungsgeschwindigkeit bleibt nach Reinhardt [71] und Curbach [24] mit  $v_{\text{cr}} = 200 - 500 \text{ m/s}$  deutlich darunter. Lawn und Wilshaw [45] nehmen für die Fortschrittsgeschwindigkeit des Risses in spröden Materialien einen konstanten Wert von 40% der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen an. Du [27], übereinstimmend mit Belytschko [13], erhielten Untersuchungsergebnisse, welche einer Rissfortschrittsgeschwindigkeit von etwa 15% der Rayleigh-Geschwindigkeit entsprachen. Ebenfalls un-



ter den theoretischen Bruchgeschwindigkeiten liegende Versuchsergebnisse finden sich bei Yankelevsky und Avnon [90], welche anhand von Proben hochfesten Betons Rissausbreitungsgeschwindigkeiten zwischen 60 m/s und 400 m/s ermittelten. Die Differenz zu den theoretischen Werten wird mit der Bildung einer Rissprozesszone vor der eigentlichen Risspitze begründet, in welcher vorangehende Mikrorisse ein rein sprödes Verhalten des Betons verhindern. Ein sprunghafter Anstieg der Rissausbreitungsgeschwindigkeit wurde von Xu [89] beobachtet beim Übergang eines Modus *I*-Risses zum gemischten Modus. Einen Hinweis auf eine obere Grenze gibt auch folgende Überlegung, deren Kernidee es ist, dass überschüssige Energie in kinetische Energie der gegensätzlich gerichteten Bewegung der Rissflanken umgewandelt wird [54]: Betrachtet wird ein Körper unter reiner Zugbelastung im Modus *I* mit zentralem Riss der Länge  $2a$ , Abb. 6.4a. Die Verschiebungen um die Risspitze können dann zu

$$u = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{ar} f_u(\theta) \quad \text{und} \quad v = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{ar} f_v(\theta) \quad (6.69)$$

dargestellt werden, wobei  $r$  die Entfernung eines betrachteten Bereiches zur Risspitze in deren unmittelbarer Nähe ist,  $f_u(\theta)$  bzw.  $f_v(\theta)$  sind Parameter, die allein von der Geometrie abhängen. Schreitet nun der Riss fort, liegt das betrachtete Element weiter als zuvor von der Risspitze entfernt. Unterstellt man für diesen Vorgang die Proportionalität  $r \propto a$  und fasst weiter zu Konstanten zusammen, so folgt

$$u = C_1 \frac{\sigma a}{E} \Rightarrow \dot{u} = C_1 \frac{\sigma \dot{a}}{E} \quad \text{und} \quad v = C_2 \frac{\sigma a}{E} \Rightarrow \dot{v} = C_2 \frac{\sigma \dot{a}}{E} \quad (6.70)$$

Nun kann die kinetische Energie  $E_k$  des Körpers über

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int \int (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy = \frac{1}{2} \rho \dot{a}^2 \frac{\sigma^2}{E^2} \int \int (C_1^2 + C_2^2) dx dy = \frac{1}{2} k \rho \dot{a}^2 a^2 \frac{\sigma^2}{E^2} \quad (6.71)$$

errechnet werden, wobei im Term  $k$  alle Konstanten zusammengefasst wurden. Die Dichte des Materials ist durch  $\rho$  symbolisiert,  $E$  steht für das Elastizitätsmodul. Die Energiemenge  $E_s$ , welche zur Umwandlung in kinetische Energie durch die beiden Risspitzen zur Verfügung steht, ist

$$E_s = 2 \int_{a_c}^a (G - R) da = -2R(a - a_c) + 2 \int_{a_c}^a \frac{\pi \sigma^2 a}{E} da = \frac{\pi \sigma^2}{E} (a - a_c)^2 \quad (6.72)$$

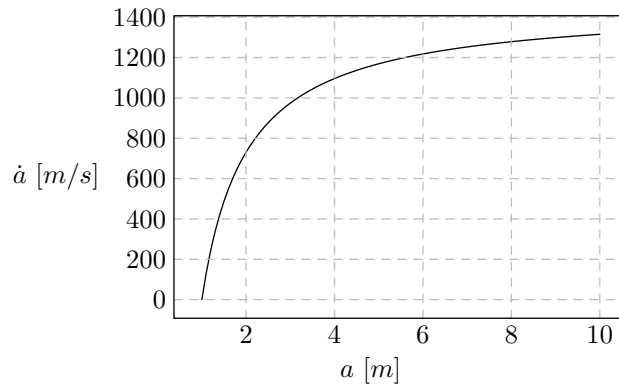
Hierin sind  $G$  und  $R$  die Energiefreisetzungsraten der beiden Risspitzen,  $a_c$  die Risslänge bei Initiierung und  $a$  die aktuelle, im Fortschreiten begriffene Risslänge. Gleichsetzung von (6.71) und (6.72) liefert die Rissgeschwindigkeit als Ableitung der Risslänge:

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1 - \frac{a_c}{a}\right) \quad (6.73)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen in elastischen Medien nach

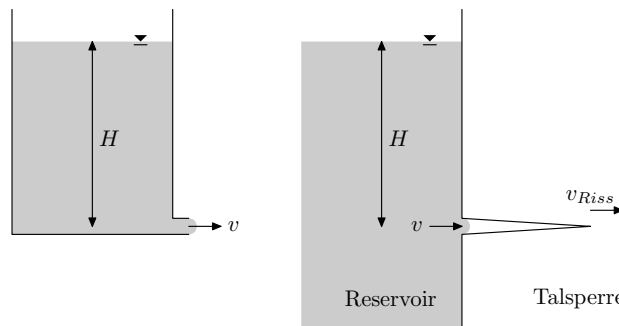
$$c = \sqrt{E(1 - \mu)/\rho(1 - \mu - 2\mu^2)} \quad (6.74)$$

kann für diese Betrachtung durch Vernachlässigung der Querkontraktionszahl  $\mu$  vereinfacht werden zu  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Dies entspricht dem zweiten Term der rechten Seite von (6.73), womit eine obere Begrenzung der Rissgeschwindigkeit festliegt. Bei einer Temperatur von 20 °C beträgt die Schallgeschwindigkeit  $c = 3845$  m/s für Beton des Typs C30/37. Hiermit, für  $a_c = 1$  m und der Schätzung für die beschriebene Konstellation von  $\sqrt{(2\pi)/k} = 0,38$  ist (6.73) in Abb. 6.19 aufgetragen. Damit liegen mögliche Rissgeschwindigkeiten für Beton dennoch, wie oben aufgeführt, im Bereich der halben Schallgeschwindigkeit.



**Abb. 6.19:** Rissgeschwindigkeit  $\dot{a}$  nach (6.73)

Ein Eindringen von Wasser in wesentlichem Umfang im Moment des Reißens einer wasserseitigen Talsperrenoberfläche ist aufgrund der kurzen genannten Zeitskala des Rissvorgangs und der Erdbenefrequenzen von einigen Herz, welche eine Rückbeschleunigung und damit ein Wiederschließen der Rissöffnung nach wenigen Zehntel Sekunden bedeutet, nicht anzunehmen. Einen Anhaltspunkt zur Geschwindigkeit  $v$  des eindringenden Wassers in Abhängigkeit der Gesamtwasserhöhe  $H$  und der Erbeschleunigung  $g$  bietet die Toricellische Ausflussgleichung mit  $v = \sqrt{2gH}$ , Abb. 6.20.



**Abb. 6.20:** Geschwindigkeitsabschätzung anhand Toricelli-Formel

Damit liegt die Wasser-Eintrittsgeschwindigkeit für gängige Talsperrenhöhen in Bereichen, die weit geringer sind als die Rissgeschwindigkeit  $v_{Riss}$ . Das Zeitfenster des Stadiums eines geöffneten Risses ist also zu kurz, um eine Füllung des Risses über eine

nennenswerte Strecke zuzulassen, bevor sich der Riss wieder schließt. Im Vergleich zur Größenordnung der das Materialversagen bewirkenden Körper- und Trägheitskräfte ist daher im Moment des Reißens eine maßgebliche spaltende Wirkung des Wassers nicht zu erwarten. Nach der eigentlichen Riss-Entstehungsphase kann Flüssigkeit jedoch innerhalb einer längeren Zeitskala entlang des Pfades der wieder geschlossenen Bruchzone eindringen. Damit ist es denkbar, dass der volle tiefenabhängige Druck bereichsweise dauerhaft auf die Rissflanken wirkt. Allerdings haben Talsperren zum Abbau eines solchen Druckes durch Leckagewasser, wie er auch etwa durch unvermeidbare Fehl- und Nahtstellen im Beton verursacht wird, Drainageeinrichtungen. Eine solche Betrachtung liegt nicht im Fokus dieser Arbeit, dürfte aber bei bekanntem Verlauf des Risses einfach abzuschätzen und im Allgemeinen unkritisch sein.

### 6.2.8 Rissverästelung

Je mehr Energie zur Verfügung steht, desto schneller geht der Rissfortschritt vonstatten. Für das Wachstum eines einzelnen Risses ist eine bestimmte Energiemenge erforderlich. Das Kriterium für eine mögliche Rissverästelung ist nach Freund [31] daher, dass mindestens das Doppelte dieser Energiemenge zur Verfügung steht. Unter bestimmten Materialgegebenheiten, wie zum Beispiel der Gegenwart von Diskontinuitäten wie Fugen oder Materialschwächungen durch Fehlstellen, kann der Riss sich dann verästeln oder es entstehen weitere Risse an anderer Stelle. Dies führt unter extremen Energien, wie sie beispielsweise bei Explosionen oder Impaktvorgängen auftreten, bis zur Fragmentierung des Materials. Grundsätzlich sind netzfreie Methoden zur Untersuchung solcher Vorgänge geeignet [68] [74]. Jedoch sind Rissverästelungen unter den in dieser Arbeit unterstellten zeitlichen und mechanischen Voraussetzungen weder zu erwarten noch maßgeblich, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen wird. Festgestellt sei jedoch, dass eine Rissverästelung weitgehend unterdrückt wird, wenn sich der Riss entlang einer Schwächezone, beispielsweise einer Mauerwerksfuge ausbreitet. Dann können nach Rosakis [73] extrem hohe Rissgeschwindigkeiten im Bereich von 80 - 90 % der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit auftreten. Modus *II*-Risse tendieren dann zu noch größeren Geschwindigkeiten als Risse unter reiner Zugbeanspruchung.

### 6.2.9 Bruchinitiierung

In dieser Arbeit wird die numerische Simulation des Rissfortschritts diskutiert. Natürlich stellt sich aber die Frage, unter welchen Bedingungen die “Geburt” eines bis dato nicht existenten Risses möglich wird. Im Wesentlichen lassen sich drei Kriterien unterscheiden:

#### Mohr-Hypothese

Die Mohr-Hypothese geht davon aus, dass die Entstehung eines Risses dann möglich ist, wenn die Mohrsche Hüllkurve vom Spannungskreis des aktuellen Zustandes überschritten wird. Die Mohrsche Hüllkurve ist materialabhängig, sie umgibt alle für ein

bestimmtes Material zulässigen Mohrschen Spannungskreise und ist damit durch Versuche zu ermitteln.

### Hauptspannungs-Hypothese

Im Rahmen der Hauptspannungs-Hypothese wird davon ausgegangen, dass ein Riss entsteht, wenn eine Hauptspannung über dem Grenzwert des Materials liegt. Den Grenzwert bildet die einachsiale Zugfestigkeit. Dieser Vorgang wird als unabhängig von den anderen Hauptspannungen angesehen, jedoch wird zwischen Druck- und Zugbeanspruchung unterschieden. Die maximale Hauptspannung wird im ebenen Fall aus

$$\sigma_H = \max(\sigma_i) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (6.75)$$

gewählt. Der Riss beginnt senkrecht zur als maximal ermittelten Hauptspannungsrichtung. Die Hauptspannungshypothese ist vor allem für spröde Materialien geeignet und findet daher auch in der vorliegenden Arbeit Verwendung.

### Kombinierende Verfahren

Ohlsson und Olofsson [64] entwickelten ein Verfahren, welches eine Kombination aus den beiden aufgeführten Kriterien darstellt: Über

$$\Phi = q_s t_s^2 + t_n - q_n \quad (6.76)$$

wird ein Zusammenhang zwischen der Normal- und Scherspannung und der Fließfläche hergestellt.  $q_s$  und  $q_n$  sind spannungsabhängige Variablen des Initialzustandes, wobei  $q_n$  der Zugfestigkeit des Materials entspricht. (6.76) wird umgeformt zu

$$\Phi = q_s \sigma_s^2 + \sigma_m + \frac{1}{4q_s} - q_n \quad \text{mit} \quad \sigma_s = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (6.77)$$

$\Phi$  stellt eine zweiachsige Fläche dar; deren Berührungspunkt mit dem Mohrschen Spannungskreis wird über die Tangente zu

$$\sin \Phi = \frac{1}{2q_s \sigma_s} \quad (6.78)$$

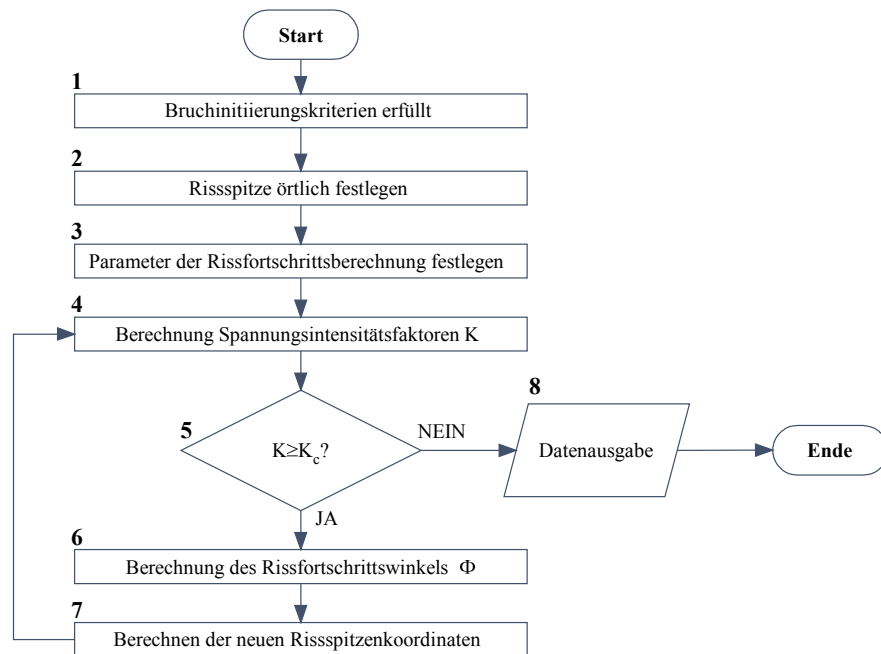
bestimmt. Gleichung (6.78) gilt für den Bereich  $\sigma_m \leq q_n - \frac{1}{2q_s}$ , sonst gilt das Rankine-Kriterium  $\Phi = \sigma_1 - q_n$ . Unter Annahme gleichmäßiger Materialbeschaffenheit lässt sich mit oben umrissenen Ansätzen der Ort des Auftretens eines Risses anhand einer Spannungsanalyse bestimmen. In der Praxis kann der Einfluss zufällig verteilter Schwachstellen, etwa Fugen im Mauerwerk oder Fehlstellen des Betons, die entscheidende Rolle spielen.

#### 6.2.10 Numerischer Ablauf

Die Berechnung des Risspfades geschieht nun nach dem in Abb. 6.21 wiedergegebenen Schema. Tabelle 6.7 gibt detailliertere Hinweise zu den einzelnen Schritten.

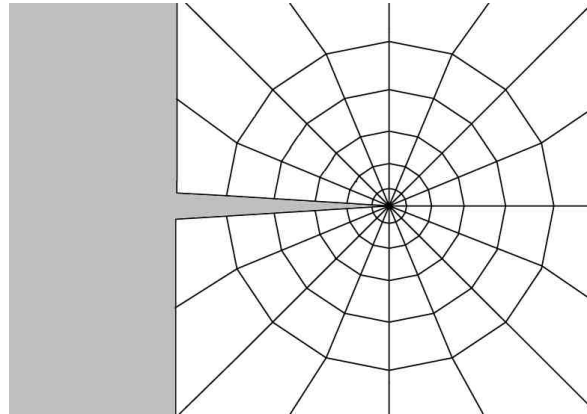
**Tab. 6.7:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf Bruchmechanik

Nr.	Erläuterung
1	Das gesamte Gebiet wird auf Kriterien für den Beginn eines Risses untersucht. Hierfür werden üblicherweise die Ansätze nach Abschnitt 6.2.9 oder 6.2.9 mit (6.75) herangezogen. Damit liegt der Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ als Ausgangspunkt der folgenden Simulation fest.
2	Die Rissspitze wird am Ort der pessimalen Spannungsverhältnisse nach (6.77) an den Koordinaten $\mathbf{x}$ lokalisiert.
3	$K_{Ic}$ ist materialabhängig nach Tabelle 6.6 zu wählen. Das Verfahren zur Ermittlung der Spannungsintensität an der Rissspitze ist zu selektieren, etwa das Rissspitzen-Öffnungs-Verfahren, Abschnitt 6.2.5 oder ein energiebasierter Ansatz, wie die virtuelle Rissverlängerung nach Abschnitt 6.2.6 oder J-Integral nach Abschnitt 6.2.6.
4	Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren nach (6.10a) und (6.10b).
5	Die Spannungsintensitätsfaktoren werden über (6.15) mit dem zulässigen Werten nach (6.12) verglichen.
6	Liegt eine Überschreitung vor, so wird der Winkel $\phi$ des folgenden Rissfortschritts nach (6.14a) bestimmt. Liegt keine Überschreitung vor, ist der Rissfortschritt zum Stehen gekommen und die Ergebnisse, beispielsweise der Risspfad, können ausgegeben und die Simulation beendet werden.
7	Über das gewählte Längenintervall $\Delta a$ liegen die neuen Koordinaten der Rissspitze fest mit $\mathbf{x}_{\text{neu}} = \mathbf{x}_{\text{alt}} + \Delta a(\sin \phi, \cos \phi)$ . Mit den neuen Koordinaten wird eine neue Recheniteration gestartet, beginnend mit der Berechnung der neuen Spannungsintensitätsfaktoren, Punkt 4.

**Abb. 6.21:** Programmablauf einer Rissberechnung

### 6.2.11 Bruchmechanische FEM-Implementierung

Eine Rissfortschrittssimulation stellt mit den gebräuchlichen, netzbasierten Methoden eine große Herausforderung dar: Risse weisen extreme Geometrien auf, welche selbst von modernen Netzgeneratoren, oft auf Basis einer Delaunay-Triangulation, Abschnitt 2.8, nicht sicher verarbeitet werden können. Es kommt zu ungünstigen Elementformen mit spitzen Winkeln, was sich zulasten der Rechengenauigkeit oder gar numerischen Stabilität auswirkt. Insbesondere an der Rissspitze sind Schwierigkeiten unvermeidlich. Deswegen werden oft spezielle Rissspitzenelemente eingeführt, Abb. 6.22 zeigt ein Beispiel eines solchen Elements.



**Abb. 6.22:** Rissspitzenelement um Rissspitze

Diese, die Rissspitze “umfassenden” Rissspitzenelemente sind durch ihre speziell angepassten Eigenschaften in der Lage, die beschriebenen Schwierigkeiten zu mindern. Dennoch bleibt die Simulation eines Rissfortschritts mit der Methode der Finiten Elemente sehr aufwändig. Für jeden Zeitschritt muss das Netz neu generiert und editiert werden, das Rissspitzenelement muss bewegt werden, alle wirkenden Kräfte sind wiederholt auf die Knoten zu projizieren.

#### Numerischer Ablauf

Abb. 6.23 zeigt schematisiert den Ablauf einer Simulation zur Analyse des Rissfortschritts mit Hilfe der Methode der Finite Elemente. Iterativ ist die Vorgehensweise bei elastodynamischen Berechnungen oder Berechnungen des Rissfortschritts. Für letztgenannte Fragestellung muss das Netz durch die Veränderte Rissgeometrie für jeden Zeitschritt neu generiert werden. Aufgrund dieser Unzulänglichkeiten hinsichtlich der beschriebenen Problemstellungen wurde die Methode der Finiten Elemente stetig weiterentwickelt. Dolbow [26] übernahm Elemente der netzfreien Methoden zur Entwicklung der Extended Finite Element Methode (XFEM). Netzfrie Methoden wie die Elementfreie Galerkinmethode, weisen wesentlich günstigere Eigenschaften hinsichtlich der Behandlung von Diskontinuitäten auf als Elementbasierte Methoden. Daher wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit näher auf diese Methoden, die kein Netz im herkömmlichen Sinn benötigen, eingegangen.

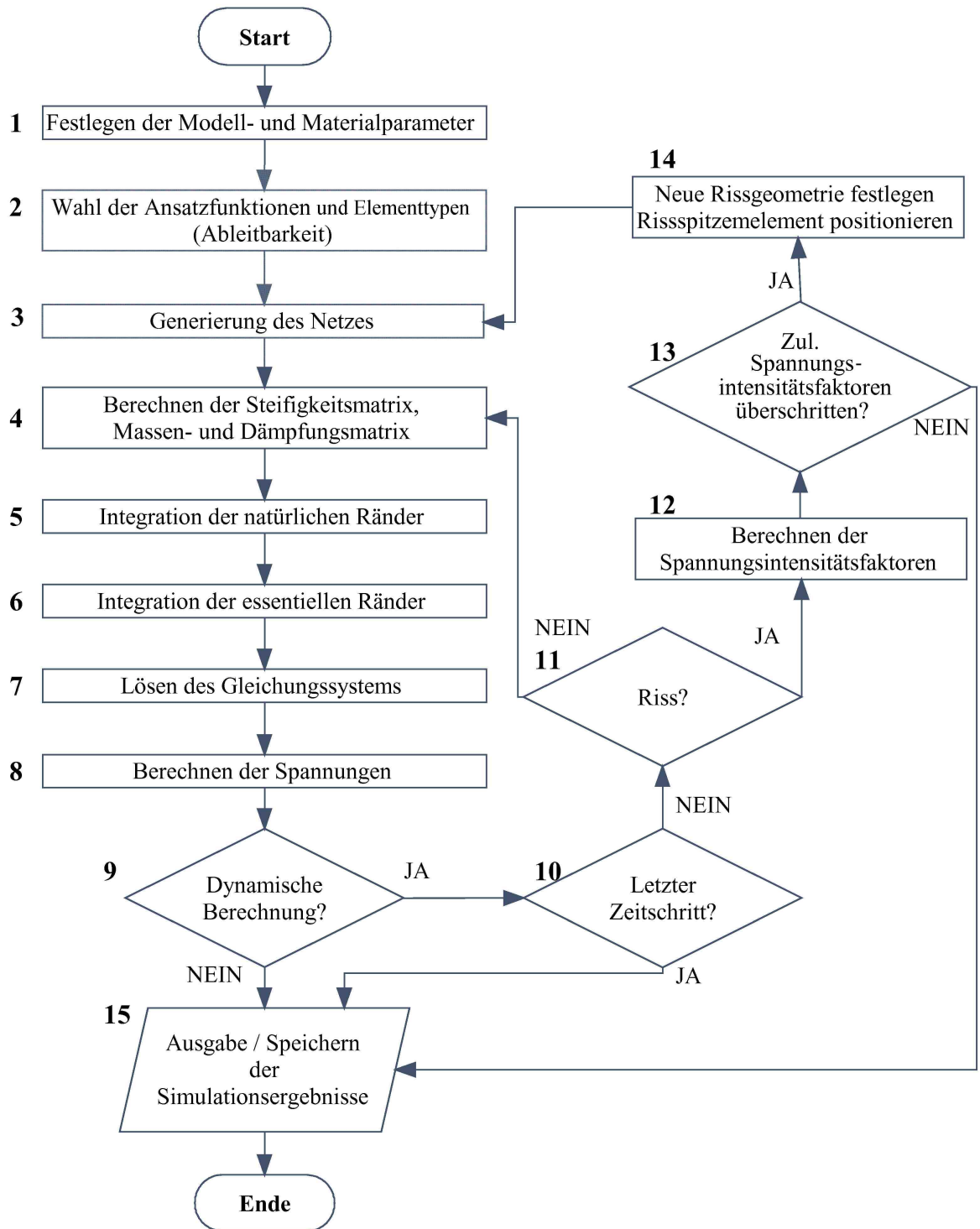


Abb. 6.23: Programmablauf einer FEM-Bruchsimulation

**Tab. 6.8:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf einer bruchmechanischen FEM-Simulation

Nr.	Erläuterung
<b>1-8</b>	Die Vorgehensweise entspricht dem normalen Rechengang einer FEM-Modellierung und kann Tab. 2.2 entnommen werden.
<b>10</b>	Im Falle einer iterierenden Berechnung wird zunächst überprüft, ob eine etwaige Vorgabe der maximalen Iterationen überschritten ist. Falls ja, wird die Berechnung abgebrochen.
<b>11</b>	Im Falle einer elastodynamischen Berechnung, beispielsweise Schwingungsvorgänge, wird über Punkt <b>4</b> iteriert.
<b>12</b>	Im Falle einer Rissfortschrittsberechnung werden die Spannungsintensitätsfaktoren ermittelt, beispielsweise über das Rissspitzen-Öffnungs-Verfahren, Abschnitt 6.2.5, oder mithilfe von Energieansätzen.
<b>13</b>	Die ermittelten Spannungsintensitätsfaktoren werden über (6.15) mit dem zulässigen Spannungsintensitätsfaktor nach (6.12) verglichen und auf Überschreitung überprüft.
<b>14</b>	Liegt eine Überschreitung vor, so wird der Winkel des folgenden Rissfortschritts nach (6.14a) bestimmt, oder, im Falle der Verwendung eines speziellen Rissspitzenelements, dieses neu positioniert. Es schließt sich mit der Neuvernetzung aufgrund der geänderten Geometrie der Rechenzyklus mit dem Verzweig zu Punkt <b>2</b>

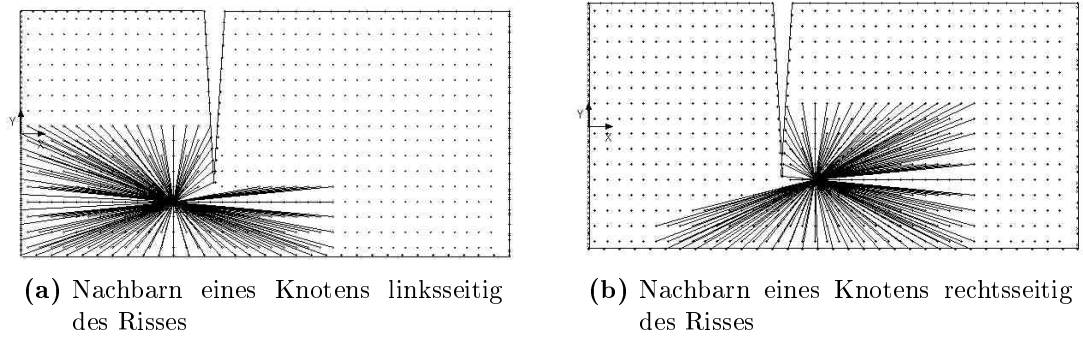
### 6.2.12 Bruchmechanische EFGM-Implementierung

Im Folgenden soll auf die konkrete technische Umsetzung einer bruchmechanischen Modellierung im Rahmen der Elementfreien Galerkin Methode eingegangen werden. Im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente erstrecken sich die Ansatzfunktionen unter Verwendung der Elementfreien Galerkin Methode über eine zunächst nicht definierte Punktmenge, deren Einflussbereich sich mit dem betrachteten Punkt überdeckt. Die Diskontinuität eines Risses wird durch das Nichtfortsetzen der Wichtungs- und damit der Ansatzfunktionen über Rissflanken hinweg numerisch abgebildet. Die unterschiedlichen Ansätze hierzu werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

#### Sichtbarkeitskriterium

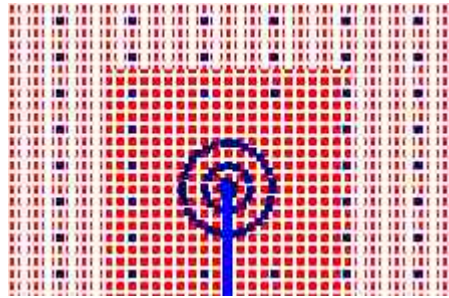
Sich beispielsweise an gegenüberliegenden Rissflanken in räumlicher Nachbarschaft befindliche Knoten sollen sich nicht beeinflussen. Die Knoten dürfen sich also in einem solchen Fall gegenseitig nicht "sehen". Anschaulich kann man sich die Rissflanken als opak, undurchsichtig, vorstellen. Abb. 6.24a und Abb. 6.24b zeigen anhand der Verbindungslinien innerhalb des rechteckig gewählten Einflussbereiches eines Knotens zu seinen Nachbarknoten den entstehenden "Sichtbarkeits-Schatten" hinter der dem Knoten abgewandten Rissflanke.





**Abb. 6.24:** Sichtbarkeitskriterium: Rissflanken sind opak

An den Rissflanken werden die Wichtungsfunktionen der Knoten abgebrochen. Hierdurch findet auch die über das Moving Least Squares-Verfahren gebildete Ansatzfunktion, welche die Stetigkeitseigenschaften der Wichtungsfunktionen erbt, dort ihre Grenze. Abb. 6.27 zeigt die rechteckige Wichtungsfunktion eines Knotens in der Nähe der Rissspitze eines senkrecht von der Oberkante des Körpers nach unten zeigenden Risses. Knoten, welche von diesem Punkt aus gesehen hinter dem Riss liegen, erhalten das Gewicht  $w_i = 0$  und leisten somit keinen Beitrag zur überlappenden Ansatzfunktion. Die Wichtungs- und somit Ansatzfunktion zeigt damit eine gewollte Unstetigkeit an den Rissflanken. Um eine Verringerung der numerischen Präzision oder gar eine Nichtinvertierbarkeit der örtlichen Momentenmatrix durch die zu geringe Anzahl von Nachbarnpunkten auszuschließen, kann um die Rissspitze die Knotendichte erhöht werden. Dies kann in regelmäßigen Abständen innerhalb eines quadratischen Raumes um die Rissspitze erfolgen, oder auch in mehreren konzentrischen Kreisen um diese Stelle. Abb. 6.25 zeigt eine solche Implementierung.



**Abb. 6.25:** Zusätzliche Knoten in Kreisanordnung um die Rissspitze

Um die Rissspitze des von der Unterkante senkrecht nach oben weisenden Risses (Linie) sind in vergleichsweise engem Abstand zusätzliche Knoten auf drei konzentrischen Kreisen angeordnet (Punkte). Besonders effektiv ist eine Lösung, welche die einzufügenden Knoten an Stellen setzt, an denen die Abstände zu den existierenden Knoten maximal sind. Dies ist beispielsweise mithilfe des Voronoi-Diagramms, Abschnitt 2.7 möglich. Zu beachten ist bei der Verfeinerung, dass das Verhältnis der Anzahl der Gauß-Integrationspunkte zu den Knoten adäquat bleibt. Gegebenenfalls werden die Quadra-

turpunkte örtlich ebenfalls erhöht. Ohne diese Verfeinerung werden die Spannungen in der Rissspitze überschätzt. In Ab. 6.25 wurde die Anzahl der Gaußpunkte ebenfalls entsprechend erhöht, zu erkennen an der Dichte der Quadrate im Hintergrund.

## Diffraktion

Zur Vermeidung des durch die steigende Knotenzahl erhöhten rechnerischen Aufwandes und einer eventuellen Überschätzung der herrschenden Spannungen der Rissspitze bietet sich alternativ die Methode der Diffraktion an, Abb. 6.26 und Abb. 6.28. Die Wichtungsfunktionen risspitzennaher Knoten werden nicht abrupt abgeschnitten, sondern gewichten auch gegenüberliegende Knoten innerhalb eines bestimmten Abstandes um die Rissspitze herum, jedoch in geringerem Maß als unter Einsatz gewöhnlicher Wichtung. Knoten können damit in gewissem Sinn “um die Ecke schauen”, Abb. 6.26. Die geringere Gewichtung wird durch die Faltung der Distanz  $s(\mathbf{x})$  zum Nachbarpunkt um die Rissspitze herum erreicht:

$$s(\mathbf{x}) = \left( \frac{s_1 + s_2(\mathbf{x})}{s_0(\mathbf{x})} \right)^\lambda s_0(\mathbf{x}) \quad (6.79)$$

Hierin ist  $s_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$  die Distanz der direkten Verbindung beider Nachbarpunkte über die Rissflanken hinweg,  $s_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_I\|$  die Entfernung eines Nachbarpunktes zur Rissspitze und  $s_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|$  der räumliche Betrag zwischen betrachtetem Ort und der Rissspitze, deren Koordinaten in  $\mathbf{x}_c = \{x_{1c}, x_{2c}\}^T$  notiert sind.

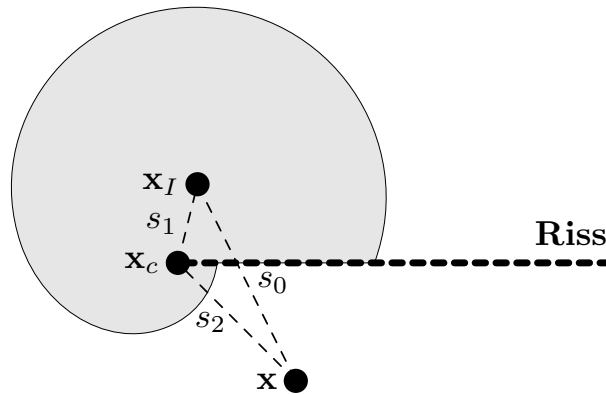


Abb. 6.26: Diffraktion

Eine weitere der Diffraktion ähnliche Vorgehensweise ist die Transparenz-Methode. Hierbei werden die Rissflanken an der Rissspitze als vollkommen transparent angesehen. Mit zunehmendem Abstand zur Rissspitze werden die Oberflächen der Rissflanken zunehmend undurchsichtiger. Dies wird durch eine Dehnung der Distanz  $s(\mathbf{x})$  benachbarter, sich auf gegenseitigen Flanken gegenüberliegender Knoten abgebildet:

$$s(\mathbf{x}) = s_0(\mathbf{x}) + s_{max} \left( \frac{s_c(\mathbf{x})}{\bar{s}_c} \right)^\lambda \quad (6.80)$$

Hierin ist  $s_{max}$  der Einflussradius der Knoten, der Abstand von Rissspitze bis zum Schnittpunkt zwischen Riss und der Verbindungsgeraden der Nachbarknoten wird mit  $s_c(\mathbf{x})$  notiert,  $\lambda$  ist ein justierender Parameter, welcher im Bereich von 2,0 gewählt wird. Diejenige Distanz zur Rissspitze, ab der die Rissflanken vollständig opak erscheinen, bestimmt  $\bar{s}_c = \kappa h$ . Über  $\kappa$  kann die Opakheit variiert werden, während  $h$  ein Maß für den Knotenabstand ist. Durch die veränderten Wichtungsfunktionen weichen auch deren partielle Ableitungen ab. Während diese bei Anwendung des reinen Sichtbarkeitskriteriums schlicht verschwinden, sind sie für die Diffraktion herzuleiten und variieren je nach verwendeter Wichtungsfunktion. Beispielhaft sei dies hier für die Verwendung der von Rahman [69] vorgeschlagenen Wichtungsfunktion auf Basis der Student-Verteilung:

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\left(1 + \beta^2 \frac{z_I^2}{z_{mI}^2}\right)^{-\frac{1+\beta}{2}} - (1+\beta^2)^{-\frac{1+\beta}{2}}}{1 - (1+\beta^2)^{-\frac{1+\beta}{2}}} & \text{für } z_I \leq z_{mI} \\ 0 & \text{für } z_I > z_{mI} \end{cases} \quad (6.81)$$

Hierin ist  $\beta$  ein Parameter, welcher die Kontur der Glockenkurve bestimmt, übliche Werte bewegen sich um 3,0. Der Abstand der betrachteten Knoten ist  $z_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ , während  $z_{mI}$  den Einflussbereich des Knotens  $I$  symbolisiert. Entfernung  $z_I$  wird nach (6.79) um die Rissspitze herum geführt. Die Ableitung von  $w_I(\mathbf{x})$  in die  $i$ -te räumliche Richtung ist

$$w_{I,i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{-\frac{1+\beta}{2} \left(1 + \beta^2 \frac{z_I^2}{z_{mI}^2}\right)^{-\frac{3+\beta}{2}} \frac{2\beta^2 z_I}{z_{mI}^2} z_{I,i}}{1 - (1+\beta^2)^{-\frac{1+\beta}{2}}} & \text{für } z_I \leq z_{mI} \\ 0 & \text{für } z_I > z_{mI} \end{cases} \quad (6.82)$$

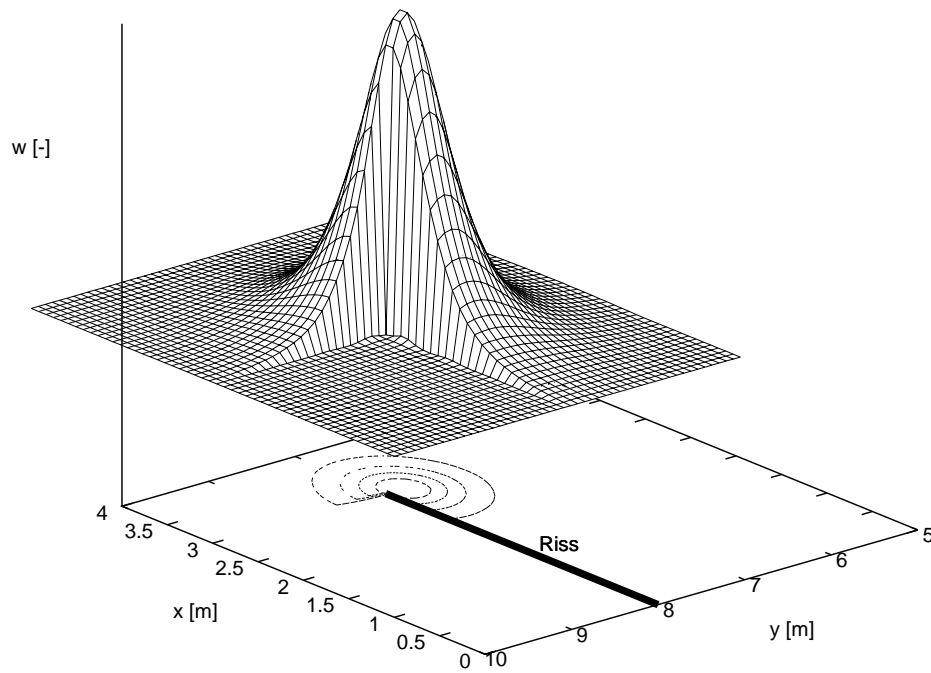
wobei ohne Beeinflussung durch einen Riss gilt

$$z_{I,i} = \frac{x_i - x_{iI}}{z_I} \quad (6.83)$$

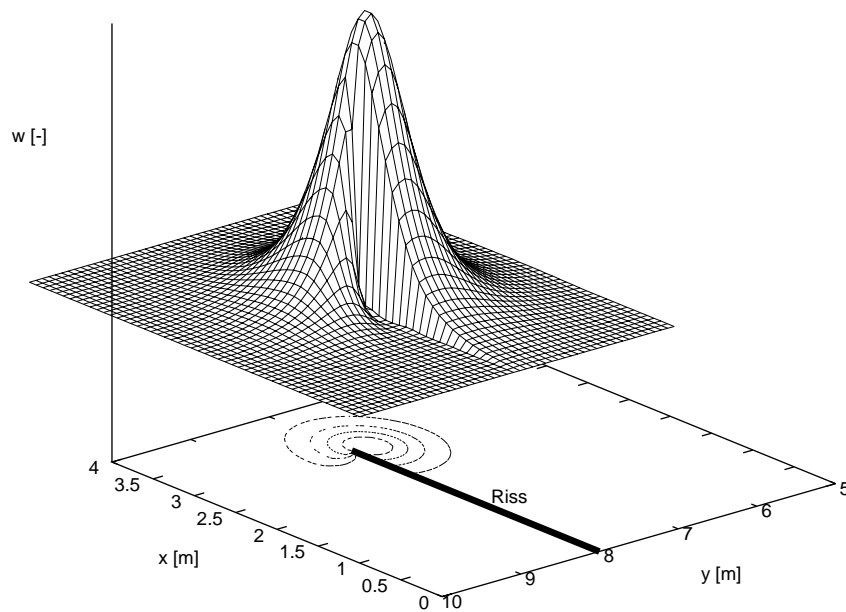
Liegen die benachbarten Knoten im Bereich der Diffraktion, so gilt

$$z_{I,i} = \lambda \left( \frac{s_1 + s_2(\mathbf{x})}{s_0(\mathbf{x})} \right)^{\lambda-1} \frac{x_i - x_{ic}}{s_2(\mathbf{x})} + (1 - \lambda) \left( \frac{s_1 + s_2(\mathbf{x})}{s_0(\mathbf{x})} \right)^{\lambda} \frac{x_i - x_{iI}}{s_0(\mathbf{x})} \quad (6.84)$$

Abb. 6.27 zeigt die Wichtungsfunktion eines Knotens in der Nähe der Rissspitze unter Anwendung des Sichtbarkeitskriteriums. Die Wichtungsfunktion ist scharf begrenzt. Bereiche in "Schatten" des Risses werden nicht erfasst. In Abb. 6.28 ist die Wichtungsfunktion des selben Knotens unter Anwendung der Diffraktion dargestellt. Nun werden auch Bereiche, welche vom Knoten aus gesehen hinter dem Riss liegen, in weitere Rechenschritte einbezogen.



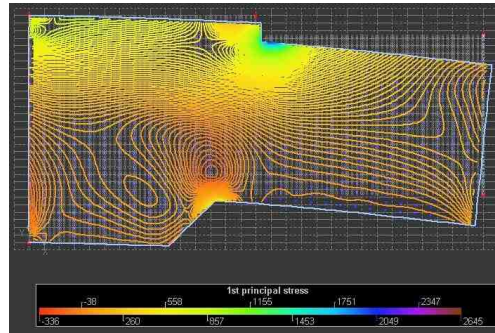
**Abb. 6.27:** Nur Sichtbarkeitskriterium



**Abb. 6.28:** Sichtbarkeitskriterium mit Diffraktion

Eine ähnliche Problematik ergibt sich bei der Implementierung naher konkav zueinander liegender Körperkanten: Auch hier soll eine Interaktion zwischen Knoten benachbarter Bereiche über Körperkanten hinweg nicht stattfinden. Überlappende Wichtungsfunktionen werden daher wie an Rissflanken beschnitten. In der Nähe von eingerückt liegenden

Eckpunkten wurde daher im Zuge der vorliegenden Arbeit mit der Diffraktionsmethode gearbeitet, um realitätsnahe Ergebnisse zu erhalten.



**Abb. 6.29:** Beispiel eines Hauptspannungs-Verlaufes in konkaven Strukturen

### Numerischer Ablauf

Der prinzipielle Ablauf einer Simulation mit der Elementfreien Galerkin Methode ist in Abb. 6.30 gegeben. Bei dynamischer Berechnung, beispielsweise für eine bruchmechanische Betrachtung wie unter Abschnitt 6.2.12 aufgezeigt, ist der Ablauf zyklisch, um die Integration der weiteren Dimension, der Zeit, beispielsweise nach in Abschnitt 3.4 gegebenem Algorithmus zu vollziehen.

**Tab. 6.9:** Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen EFGM-Simulation

Nr.	Erläuterung
<b>1-12</b>	Der Ablauf entspricht einer Standard-Implementierung einer Modellierung mit Hilfe der Elementfreien Galerkin-Methode und kann Tab. 3.1 entnommen werden.
<b>13</b>	Im Falle einer dynamischen Berechnung wird über die Punkte <b>2</b> bis <b>13</b> iteriert. Die Iteration über die Punkte <b>2</b> , <b>3</b> und <b>4</b> ist optional. Bei ausreichender Knotendichte kann auf Einfügen weiterer Punkte, etwa um die Rissspitze, verzichtet werden.
<b>14</b>	Die Iteration wird nach einer festgelegten Anzahl von Zeitschritten beendet.
<b>15</b>	Für eine Rissbetrachtung sind entsprechende Schritte <b>16</b> bis <b>18</b> abzuarbeiten.
<b>16</b>	Die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren als Maß des an der Rissspitze herrschenden Spannungszustandes wird beispielsweise über (6.42) vollzogen.
<b>17</b>	Der Riss kommt zum Stillstand, wenn die zulässigen Spannungsintensitätsfaktoren nicht mehr überschritten sind. Der Abgleich mit dem kritischen Spannungsintensitätsfaktor erfolgt nach (6.15).
<b>18</b>	Liegen die Spannungsintensitätsfaktoren weiterhin über den kritischen Werten, etwa nach Tab. 6.6, wird die Richtung $\phi$ des nächsten Riss schrittes nach (6.14a) und das Verlängerungsintervall $\Delta a$ festgelegt. Damit liegen über $\mathbf{x}_{neu} = \mathbf{x}_{alt} + \Delta a(\sin \phi, \cos \phi)$ die Koordinaten der neuen Rissspitzenposition fest.
<b>19</b>	Die Ausgabe erfolgt graphisch oder in Tabellenform auf Bildschirm oder Datei.

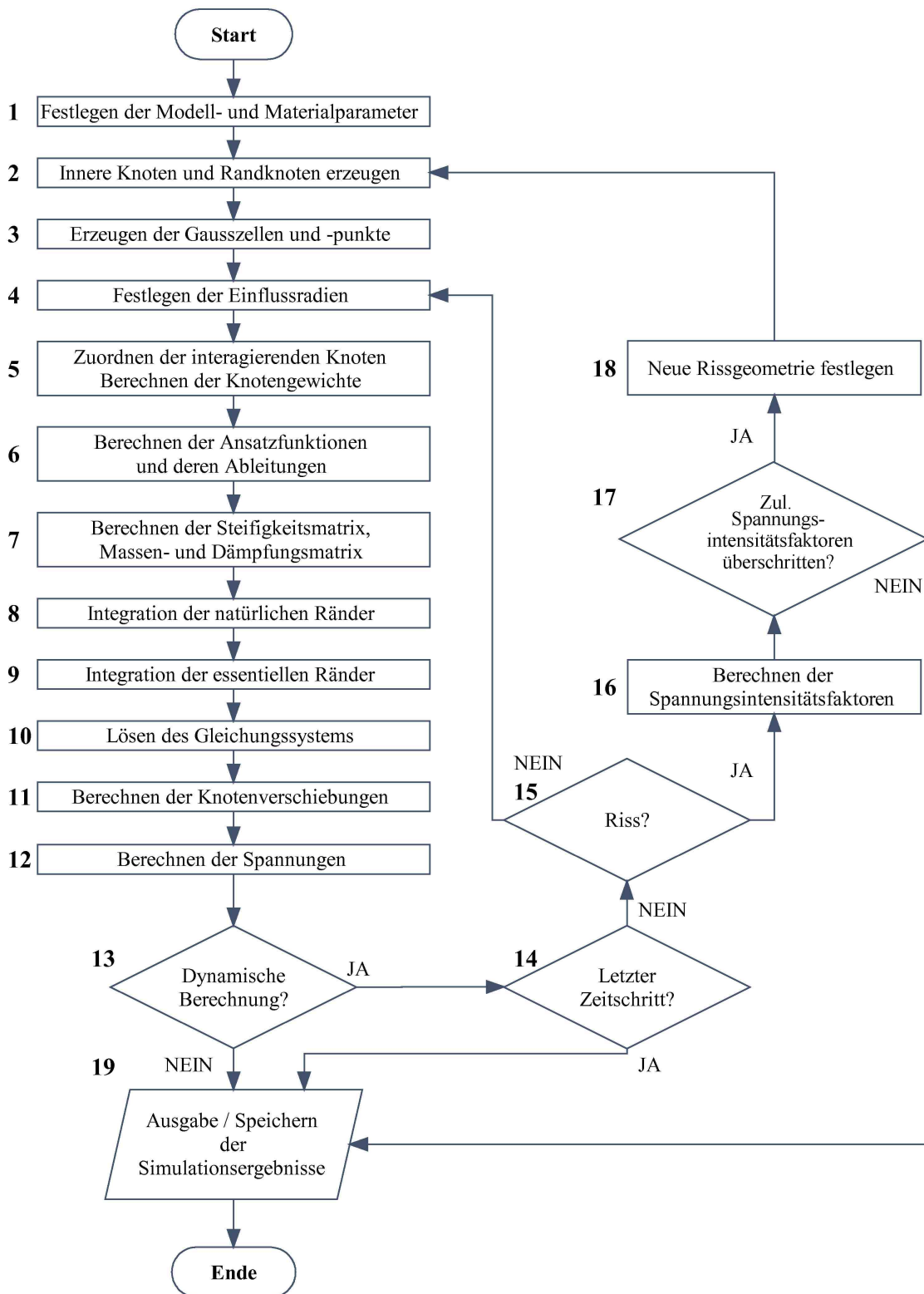


Abb. 6.30: Programmablauf einer EFGM-Bruchsimulation

### 6.2.13 Bruchmechanische SPH-Implementierung

Die Elementfreie Galerkin Methode bietet gegenüber gitterbasierten Vorgehensweisen wie beispielsweise im Rahmen einer Finite-Elemente-basierten Untersuchung zahlreiche Vorteile für die numerische Nachbildung eines Bruchvorgangs. Sie ist daher eine der hauptsächlich genutzten netzfreien Methoden auf diesem Gebiet. Aber auch andere netzfreie Methoden, deren Schwerpunkt bisher auf anderen Bereichen lag, haben mittlerweile einen Entwicklungsstand erreicht, der einen Einsatz für bruchmechanische Analysen ermöglicht. Dies soll am Beispiel eines entsprechenden Ansatzes der Smoothed Particles Hydrodynamics erörtert werden, was deutlich macht, dass dieses Modell nicht mehr nur für hydromechanische Betrachtungen eingesetzt werden kann, sondern auf weiten Feldern der Mechanik ungeahnte Möglichkeiten eröffnet. Dabei wird direkt Nutzen aus dem Partikelansatz gezogen, der sich hervorragend dazu eignet, Bindekräfte, Diskontinuitäten und Fehlstellen innerhalb eines Festkörpers darzustellen. Die atomaren Kräfte eines Materials sind sehr stark. Dennoch brechen Materialien weit unterhalb des Erreichens der Belastungsgrenze dieser Bindekräfte. Der Grund hierfür liegt darin, dass reale Körper nicht wirklich homogen sind, sondern stets Fehlstellen aufweisen. Unter ausreichend großer Last werden diese Fehlstellen zu expliziten Rissen. Grady und Kipp [35] quantifizierten diese Schädigung im Gegensatz zum expliziten Vorgehen, wie es in Abschnitt 6.2.12 vorgestellt wurde, durch einen statistischen Ansatz. Benz und Asphaug [14] erweiterten diesen Ansatz, was die Simulation von expliziten Rissen möglich machte. Dies soll hier kurz skizziert werden. Angenommen wird eine vorhandene Schwächung des spröden Materials durch anfängliche Fehlstellen. Die räumliche Verteilung dieser Fehlstellen ist durch die Weibullsche Verteilung

$$n(\epsilon) = k\epsilon^m \quad (6.85)$$

gegeben.  $\epsilon$  ist die Dehnung im Moment des Versagens, die Parameter  $k$  und  $m$  sind materialabhängige Konstanten. Ein Riss beginnt zu wachsen, wenn die örtliche Dehnung den mit  $\epsilon$  definierten Grenzwert überschreitet. Für die Fortschrittsgeschwindigkeit wird nach Lawn und Wilshaw [45] ein konstanter Wert von 40% der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen angenommen. Um die lokale Schwächung des Materials anhand einer Verminderung der Zugfestigkeit zu spezifizieren, wird die Variable  $D$  eingeführt:

$$\sigma_D = \sigma(1 - D) \quad (6.86)$$

Hierin ist  $\sigma_D$  die Zugfestigkeit nach Schwächung,  $\sigma$  die ursprüngliche Zugspannungsaufnahmekapazität.  $D$  wird definiert zu

$$D = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{V} \quad (6.87)$$

Hierin ist

$$V = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \quad (6.88)$$

folgend der Annahme, dass ein Riss die Spannungen in einem Volumen abbaut, welches eine den Riss einschließende Kugel hätte.  $R_s$  ist die halbe Risslänge,  $a$  die Beschleunigung der Risspitze nach

$$a = c_g(t - t') \quad (6.89)$$

mit  $t'$  als dem Zeitpunkt der Rissaktivierung und  $c_g$  der Rayleigh-Geschwindigkeit.  $D$  ist also das Teilvolumen, welches durch den Riss entspannt wird. Damit wird für die Entwicklung dieses Volumens über die Zeit der Zusammenhang

$$\frac{dD^{\frac{1}{3}}}{dt} = \frac{c_g}{R_s} \quad (6.90)$$

erhalten. Für eine Simulation mit SPH wird nun eine Normalverteilung von  $N_f$  Schwellendehnungen angenommen, welche einen Riss aktivieren können. Für jede Fehlstelle  $j$  wird ein SPH-Partikel zufällig ausgewählt. Ihm wird ein Schwellenwert entsprechend der Weibullverteilung zugewiesen:

$$\epsilon_{i,j}^{act} = \left[ \frac{j}{kV} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (6.91)$$

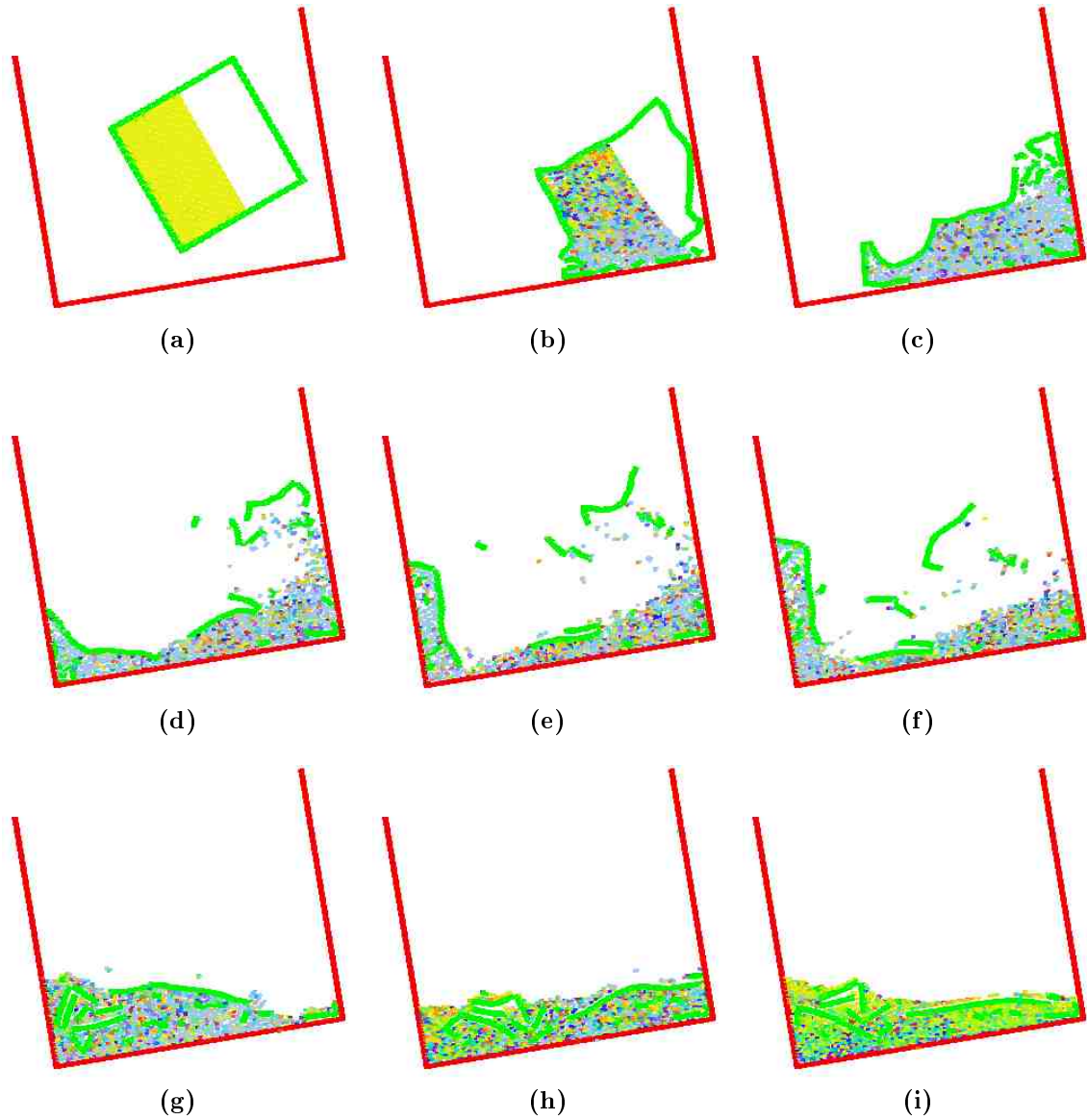
Tritt nun bei einem Partikel eine Dehnung größer als  $\epsilon_i$  auf, beginnt an seinen Koordinaten ein Riss. Der Betrag dieses Dehnungs-Schwellenwertes ist

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i^{max}}{(1 - D_i)E} \quad (6.92)$$

Hierin ist  $D_i$  das zum Partikel gehörende Volumen, welches beeinflusst wird,  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\sigma_i^{max}$  die maximale aufnehmbare Zugspannung. Die entstehenden Fragmente sind nun unbeschädigte Bereiche, in welchen die Partikel interagieren, begrenzt durch die entstehenden Risse, ab welchen keine Partikelbindung mehr besteht. Der Einflussbereich eines Partikels erstreckt sich über  $2h$ . Deswegen besteht ein Riss aus mindestens zwei benachbarten geschädigten Partikeln. Die nachfolgende beispielhafte SPH-Simulation ist durch einen vereinfachten Ansatz nach Abschnitt 4.12.6 entstanden, der im Zuge dieser Arbeit entwickelt wurde: Die Partikel wurden durch lineare positive Federkräfte, welche dem E-Modul entsprechen, aneinander gebunden. Wird ein definierter örtlicher Dehnungsschwellenwert überschritten, wird der entsprechende Partikel aus der Liste der interagierenden Nachbarpartikel gestrichen. Diese Elimination wird gespeichert: Einmal isolierte Partikelpaare können nicht mehr im zuvor genannten Sinn interagieren, auch wenn sie sich im gegenseitigen Wirkungsbereich befinden. Die üblichen SPH-Interaktionen finden jedoch statt. Drücke können daher weiterhin übertragen werden, sodass eine gegenseitige Durchdringung weiterhin ausgeschlossen wird und beispielsweise Kollisionen, auch mit anderen Fragmenten, korrekt wiedergegeben werden. Ein statistischer Ansatz von Vorschädigungen ist nicht angewendet worden, alle Partikel weisen die gleiche Belastbarkeit auf. Abb. 6.31 zeigt einen flüssigkeitsgefüllten Behälter aus sprödem Material, welcher gravitationsbedingt in einen weiteren, stationären Behälter in leichter Schrägstellung fällt. Der spröde Behälter wurde dabei wie



zuvor beschrieben modelliert, während die enthaltene Flüssigkeit durch reguläre SPH-Partikel repräsentiert wird. Der stationäre Behälter besteht aus virtuellen Partikeln nach Abschnitt 4.7.3. Die Sprödeheit wird durch Festlegen eines geringen Dehnungsschwellenwertes erreicht. Beim Auftreffen zerbricht der umgebende Behälter sofort in mehrere Fragmente, die in sich jedoch weiterhin elastisch agieren. Es findet eine Durchmischung von Fragmenten und Flüssigkeitspartikeln statt.



**Abb. 6.31:** Flüssigkeitsgefüllter spröder Behälter

### Numerischer Ablauf einer bruchmechanischen SPH-Berechnung

Abb. 6.32 zeigt das Flussdiagramm einer bruchmechanischen SPH-Implementierung nach dem vorgestellten vereinfachten Ansatz, Tab. 6.10 gibt nähere Hinweise. Die Mehrzahl der Punkte entsprechen einer normalen SPH-Simulation nach Tab. 4.2, sodass hier lediglich auf die modifizierten Programnteile eingegangen wird. In Abb. 6.32 sind diese farblich gekennzeichnet.

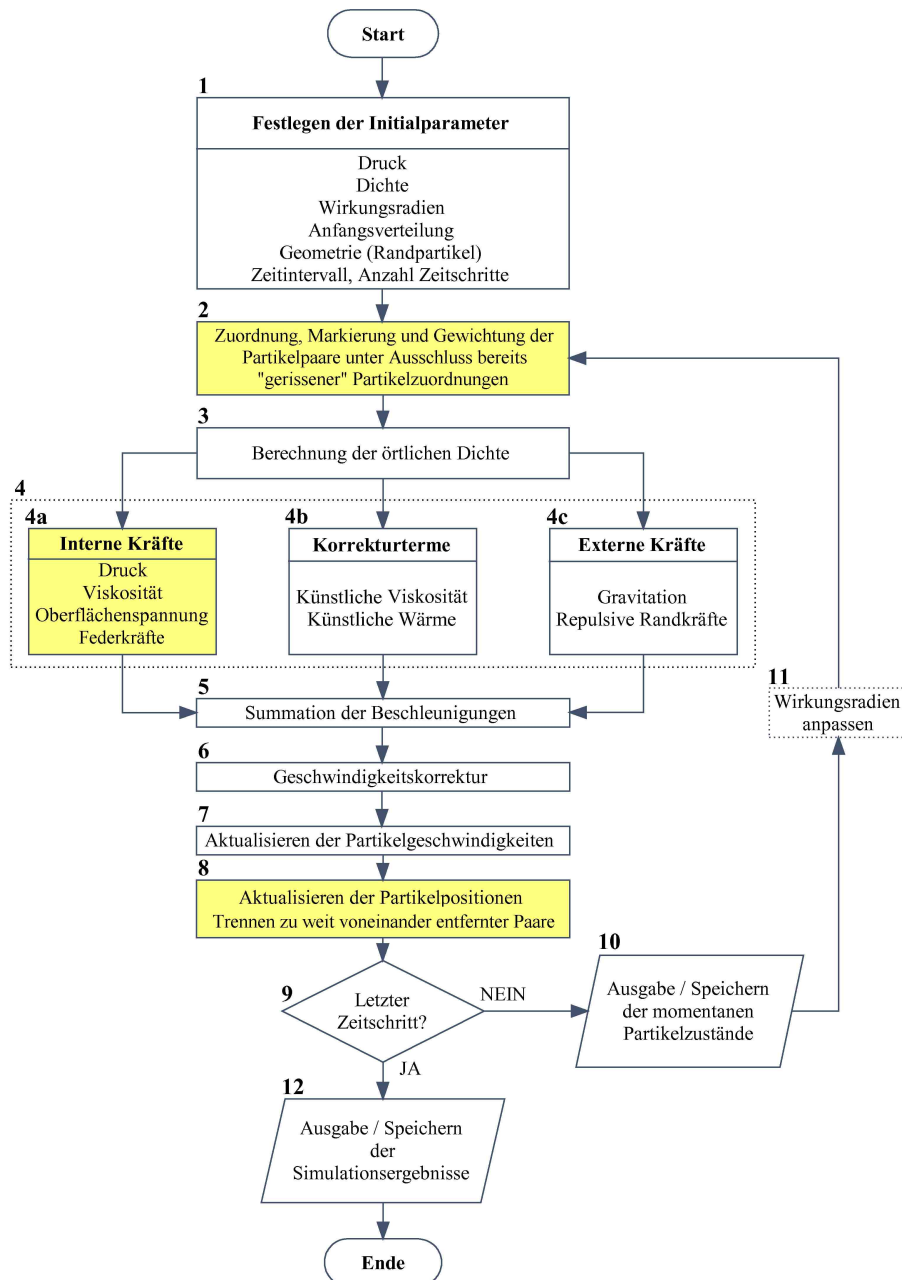


Abb. 6.32: Programmablauf einer bruchmechanischen SPH-Simulation

**Tab. 6.10:** Erläuterungen und Verweise zum numerischen Ablauf einer SPH-Bruchsimulation

Nr.	Erläuterung
2	Die Zuordnung der Partikelpaare und das Festlegen der Gewichtungen wird dahingehend modifiziert, dass Partikel, die zuvor in Punkt 8 getrennt wurden, nicht wieder eine Zuordnung für den “Federkraft-Algorithmus” erhalten. Sie interagieren wieder als normale SPH-Partikel.
4	Neben Druck und Viskosität nach (4.17) wirken nun zusätzlich die Federkräfte nach (4.102) als weitere interne Kräfte.
8	Nach dem Festlegen der neuen Partikelpositionen nach (4.39b) findet nun eine Überprüfung auf Überschreitung der zulässigen Entfernung der Partikel statt. Ist diese bei zuvor durch die Federkräfte verbunden gewesenen Partikeln überschritten, so erhalten sie eine Markierung. Diese Markierung bewirkt einen Ausschluss aus dem in Abschnitt 4.12.6 beschriebenen Ansatz. Dies entspricht durch den Verlust der Zugspannungsübertragung einem Bruch.

## 6.3 Bildung des numerischen Modells

Neben den bruchmechanischen Betrachtungen liegt der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf der Interaktion zwischen Talsperrenkörper und Reservoir. In der Realität hat ein Stausee relativ zu den Dimensionen der Talsperre meist eine sehr große Ausdehnung. Unter anderem aus Gründen der Rechenkapazität ist es jedoch nicht praktikabel, das gesamte Wasservolumen numerisch mit einzubeziehen. Damit stellt sich unmittelbar die Frage, welche Ausdehnung der modellierte Flüssigkeitskörper mindestens aufzuweisen hat, damit Berechnungsergebnisse hinsichtlich des dynamischen Drucks an der Talsperrenfront nicht von den Bedingungen am gegenüberliegenden freien Modellrand beeinflusst werden. Die Lösung ist, am offenen Modellrand Bedingungen einzuführen, die ein möglichst nahes Heranrücken dieser Grenze erlauben. Der gebräuchlichste Ansatz hierfür basiert auf der Sommerfeld-Bedingung, welche einen fixen Modellrand vorsieht [94]. Damit sind die wirklichen Bedingungen der Flüssigkeitsbewegung dort jedoch nicht wiedergegeben. Eine Lösung, mit deren Hilfe eine praktikable und dennoch wirklichkeitsgetreue analytische Lösung gefunden werden kann, soll im folgenden skizziert werden [76]. Unter der Annahme von vollständiger Inkompressibilität und fehlender Viskosität gilt für den Druck innerhalb der Flüssigkeit, welcher von einer Bewegung des Randes verursacht wurde

$$\nabla^2 p = 0 \quad (6.93)$$

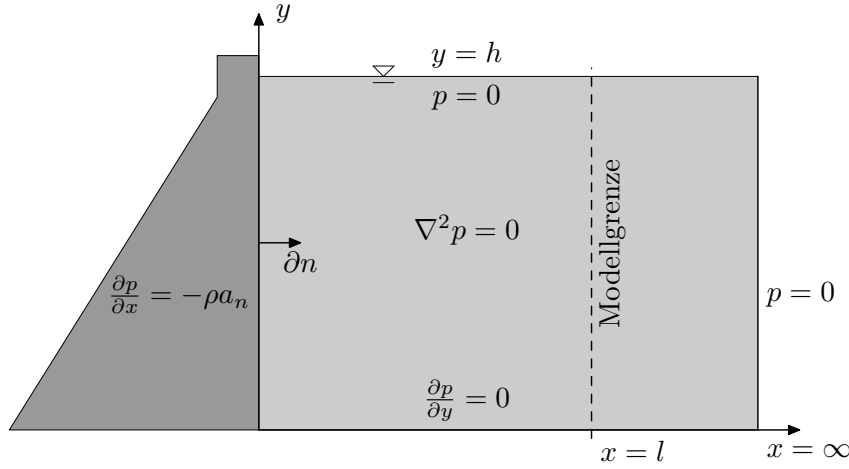
An der freien Oberfläche gilt

$$p = 0 \quad (6.94)$$

und unmittelbar an der Oberfläche des Festkörpers

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \quad (6.95)$$

Hierin ist  $\rho$  die Dichte des Fluids und  $\partial n$  ist die nach außen gerichtete Normale auf der Festkörperoberfläche. Symbol  $a_n$  ist die Beschleunigung der Festkörperoberfläche in Richtung von  $\partial n$ , Abb. 6.33.



**Abb. 6.33:** Bedingungen an den Modellrändern

Nun wird angenommen, dass in einem unendlichen Abstand  $x = \infty$  von der Festkörperoberfläche ebenfalls (6.94) gilt. Für eine nach der Sommerfeld-Bedingung ausreichend weit vom Festkörper entfernten Distanz gilt an der abgeschnittenen Modelloberfläche im Fluid die gleiche Bedingung wie an einer fixen Festkörpergrenze:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (6.96)$$

Es wird von einer senkrecht zur Festkörperoberfläche gerichteten Beschleunigung ausgegangen. Weiter gelten die Voraussetzungen, dass das Fluidum in der Horizontalen unendlich ausgedehnt ist, die Flüssigkeitsbewegungen in der Ebene, also zweidimensional stattfinden, die Festkörperoberfläche vertikal ist und der untere Rand stationär und horizontal ist. Dann ist der Druck an einem beliebigen Punkt mit den Koordinaten  $x, y$  innerhalb der Flüssigkeit [76]

$$p(x, y) = 2a_n \rho h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n \frac{x}{h}\right) \cos\left(-\lambda_n \frac{y}{h}\right) \quad (6.97)$$

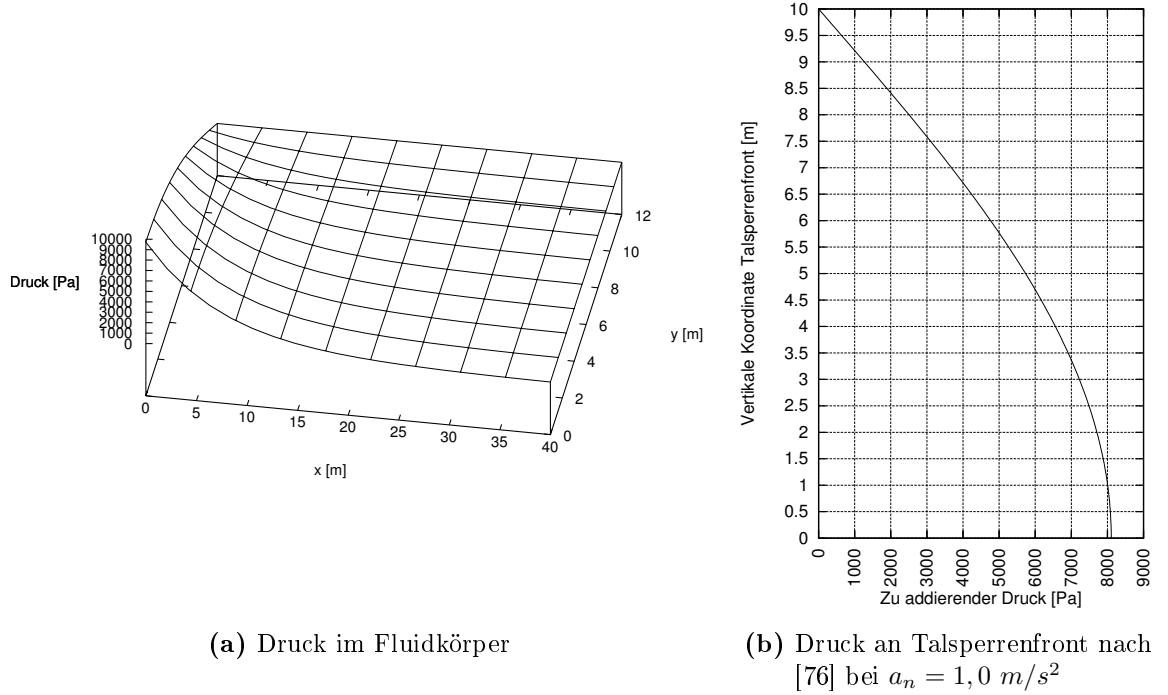
Hierin ist

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (6.98)$$

und  $h$  die Flüssigkeits-Gesamthöhe. Für einen ausreichend großen Quotienten  $x/h$  kann der zweite Term in der Summation vernachlässigt werden, und (6.97) wird zu

$$p(x, y) = \frac{8a_n \rho h}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi x}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2h}\right) \quad (6.99)$$

Abb. 6.34 zeigt ein Beispiel der hydrodynamischen Druckverteilung, verursacht durch horizontale Beschleunigung des Wasserkörpers, welche sich zum hydrostatischen Druck addiert, in einem 40 Meter langen Wasserkörper für  $h = 12,0\text{ m}$  und  $a_n = 1,0\text{ m/s}^2$  in der Fläche des Fluidums und direkt an der Festkörperoberfläche. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit der Formulierung nach Westergaard (6.100) [85].



**Abb. 6.34:** Hydrodynamischer Druck nach (6.99)

Nun wird (6.99) eingesetzt, um die nötige horizontale Modelldimension in Abhängigkeit zur vertikalen räumlichen Ausdehnung abzuschätzen. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verhältnis von 2 : 1 gewählt, was angesichts der Kompressibilität und Viskosität realer Fluide auf der sicheren Seite liegt. Um die Zulässigkeit dieser Annahme zu überprüfen, wurde zunächst wie in Abb. 6.35 gezeigter Konstellation mit initial durchgängig linear tiefenabhängigem hydrostatischen Druck nach Abschnitt 4.9.2 auch am freien Rand, jedoch ohne Horizontalbeschleunigung, ein Simulationslauf mit der entwickelten SPH-Software durchgeführt. Die Modellierung bezieht sich auf eine Talsperre mit 12,2 m Höhe und einer Gesamtwassertiefe von 10,0 m sowie einer angenommenen Stauseelänge von 20,0 m. Die Untersuchung wurde durchgeführt mit einem aus 5459 Partikeln im Abstand von  $\Delta x = 0,2\text{ m}$  bestehenden Fluidmodell mit virtuellen Randpartikeln nach Abschnitt 4.7.3 (in den Bildfolgen nicht dargestellt). Wie für Druckstoß-Konstellationen mit SPH üblich, wurde künstliche Viskosität nach (4.21) mit  $\alpha_{\Pi} = 1,0$  sowie  $\beta_{\Pi} = 1,0$  und  $\epsilon = 0,1$  implementiert. Auf eine Korrektur der Partikelgeschwindigkeiten nach (4.24) wurde zugunsten höherer Genauigkeit verzichtet, was aufgrund der kurzen Zeitskala problemlos möglich ist. Die Dauer eines Zeitschrittes  $\Delta t$  zur Integration mittels Leap-Frog-

Schema, Abschnitt 4.9, wurde mit  $\Delta x/v_{schall} = 0,2 \text{ m}/1483,0 \text{ m/sec} \approx 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$  festgelegt. Der Talsperrenkörper wird als verschiebungsfrei angesehen. Die Veränderung der Drücke im Reservoir als farbliche Schattierung mit Isobaren zeigt Bilderfolge 6.36. Die zeitlich korrespondierenden Drücke im Stausee in Abhängigkeit zur Entfernung zur Talsperrenfront zeigt Abb. 6.37 in Höhen von 0,0 m; 2,0 m; 4,0 m; 6,0 m; 8,0 m und 10,0 m über Sohle in Form entsprechender Diagramme.

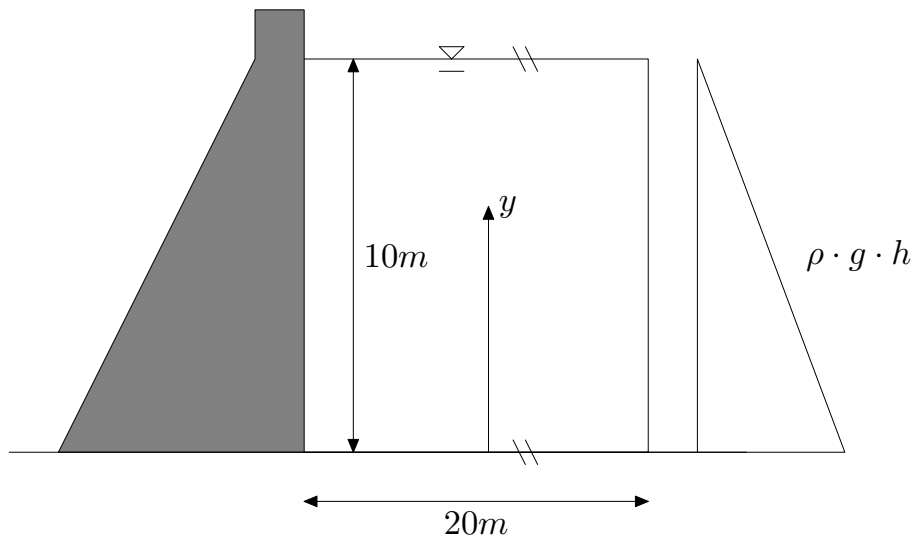


Abb. 6.35: Initialbedingungen

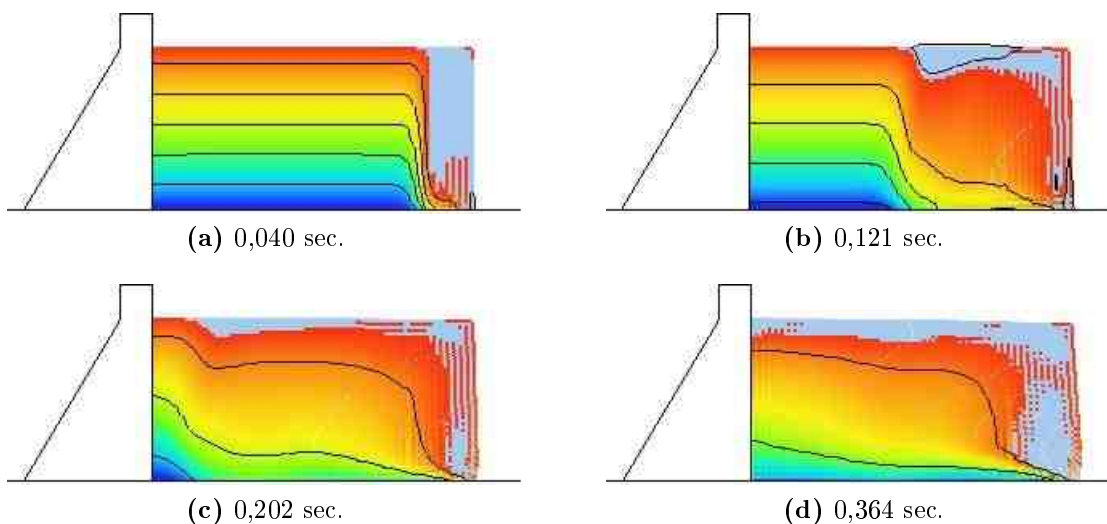
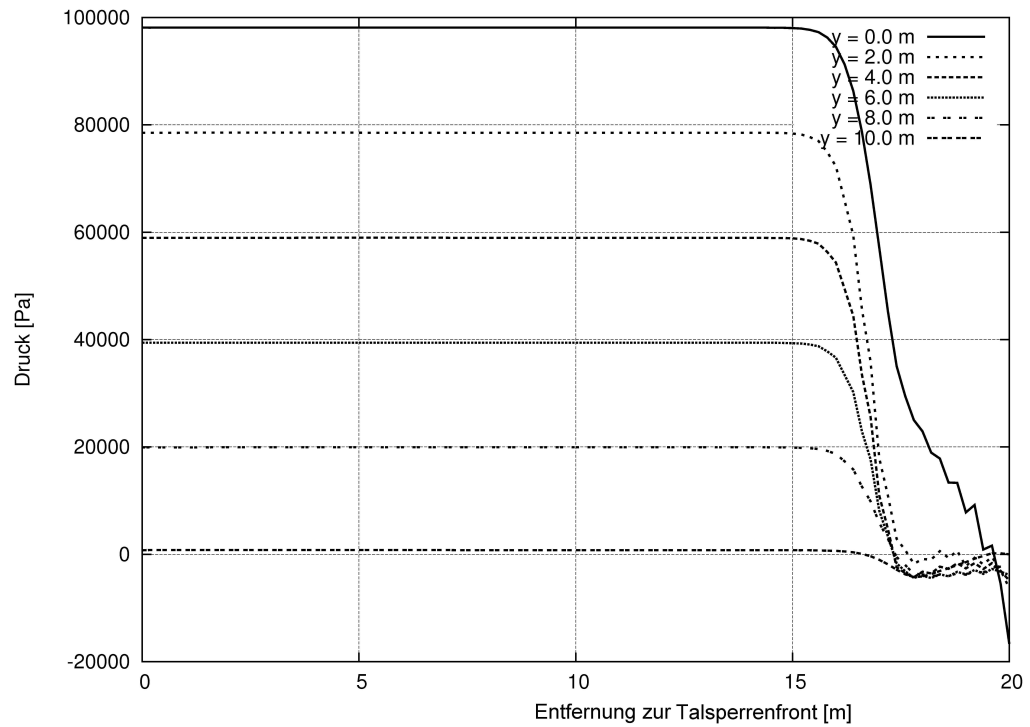
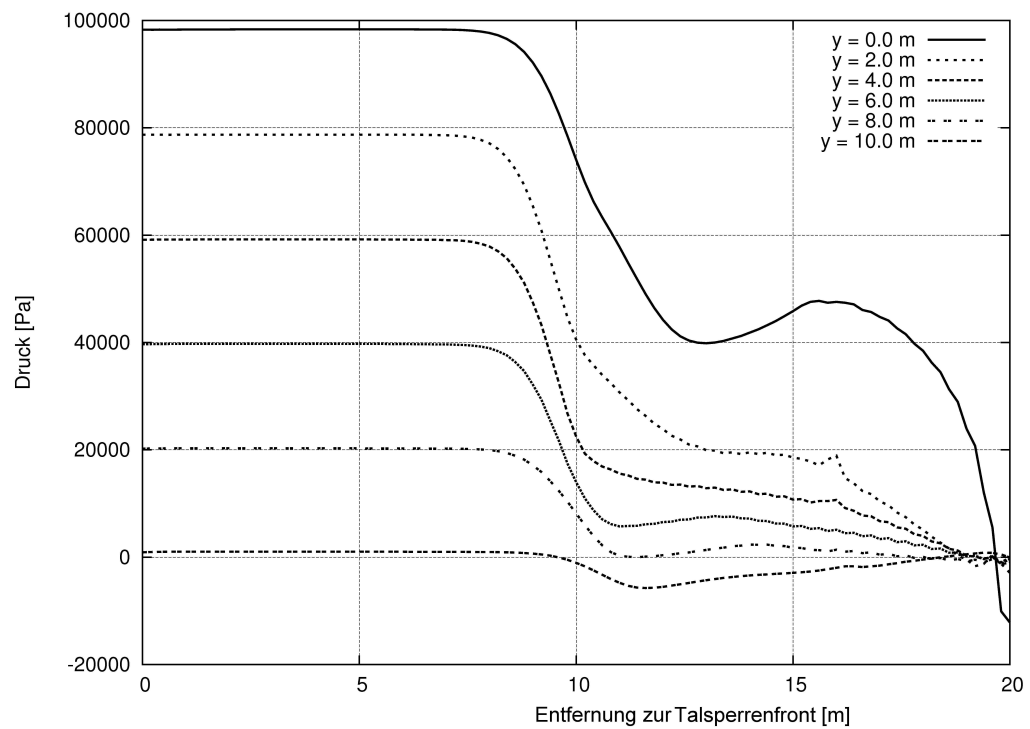


Abb. 6.36: Dynamische Drücke im Reservoir ohne Horizontalbeschleunigung

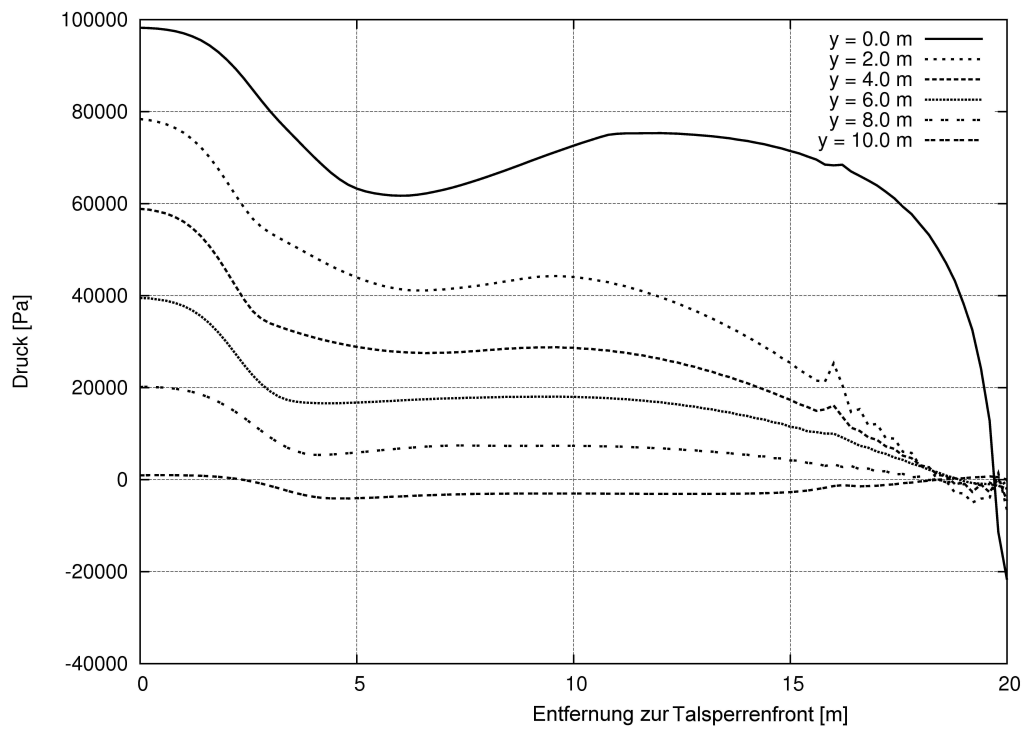


(a) 0,040 sec

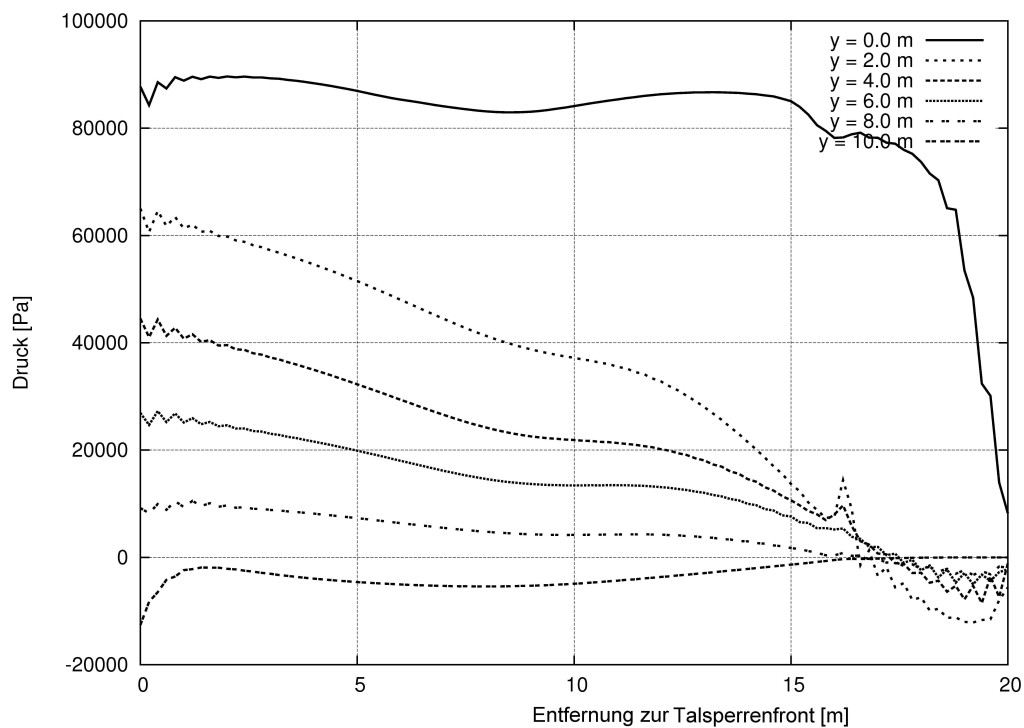


(b) 0,121 sec

**Abb. 6.37:** Tiefengestaffelte dynamische Drücke im Reservoir ohne Horizontalbeschleunigung nach 0,040 sec und 0,121 sec



(c) 0,202 sec

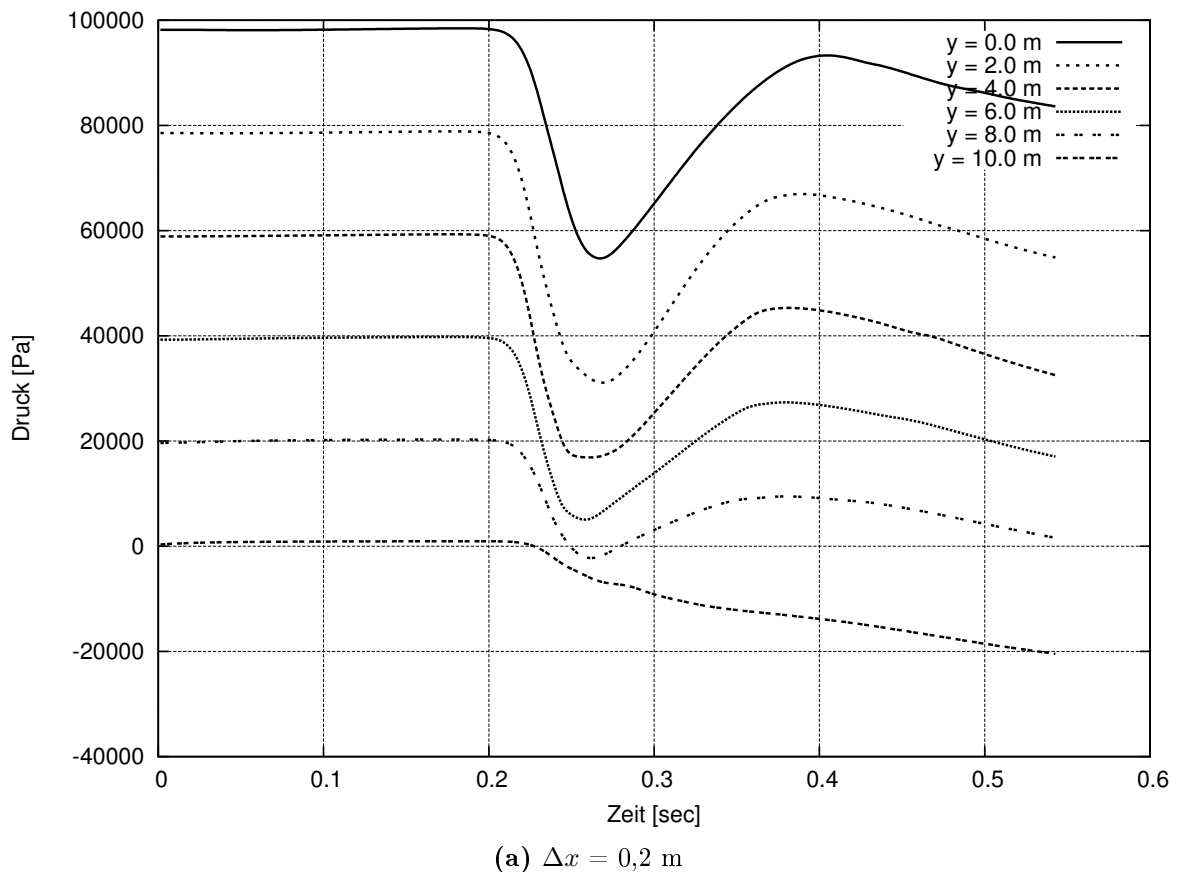


(d) 0,364 sec

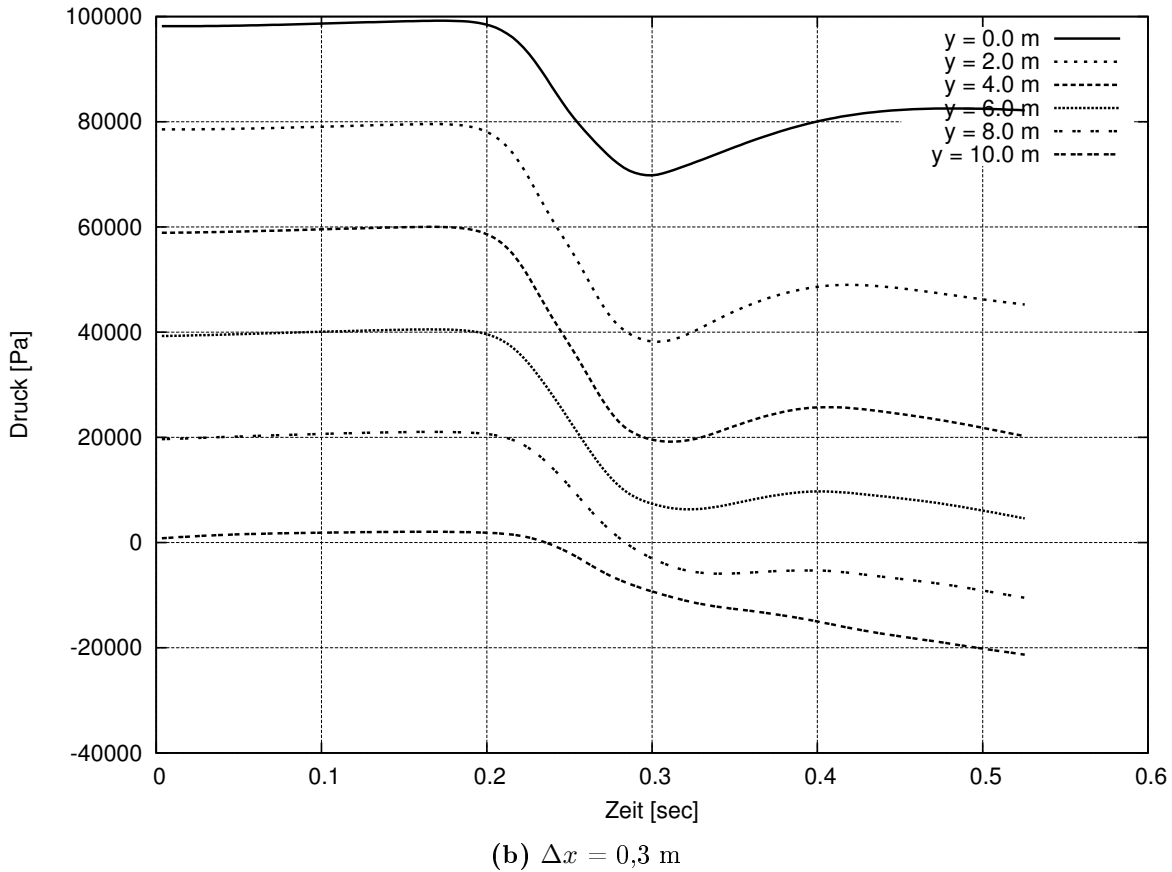
**Abb. 6.37:** Tiefengestaffelte dynamische Drücke im Reservoir ohne Horizontalbeschleunigung nach 0,202 sec und 0,364 sec



Deutlich ist das Wandern der Störung vom freien Rand zur Talsperrenfront zu beobachten. Die Drücke unmittelbar an der Talsperrenfront, dargestellt in Abb. 6.38, zeigen nach etwa 0,2 sec erste Veränderungen. Alle Berechnungen, welche Bezug nehmen auf die Bedingungen an der Talsperrenfront, werden weit vor diesem Zeitpunkt durchgeführt und sind damit als unabhängig von den Randbedingungen am freien Rand zu betrachten. Die negativen Drücke der höher liegenden Koordinaten kommen rechnerisch durch örtliche Dichten von  $\rho < 1000,0 \text{ kg/m}^3$  zustande. Naturgemäß sind die Ergebnisse nicht unabhängig von der durch den Partikelabstand  $\Delta x$  bestimmten Auflösung des Modells. Abb. 6.38 zeigt die ermittelten Druckverläufe zweier Rechengänge. Sie zeigen den Druck unmittelbar an der Wasserseite des Bauwerks mit einer Initial-Partikeldistanz von  $\Delta x = 0,2 \text{ m}$  (6.38a) beziehungsweise  $\Delta x = 0,3 \text{ m}$  (6.38b). Alle anderen Bedingungen sind in beiden Rechenläufen identisch.



**Abb. 6.38:** Dynamische Wasserdrücke Talsperrenfront in den Höhen 0,0; 2,0; 4,0; 6,0; 8,0 und 10,0 m ab Mauerfuß bei  $\Delta x = 0,2 \text{ m}$



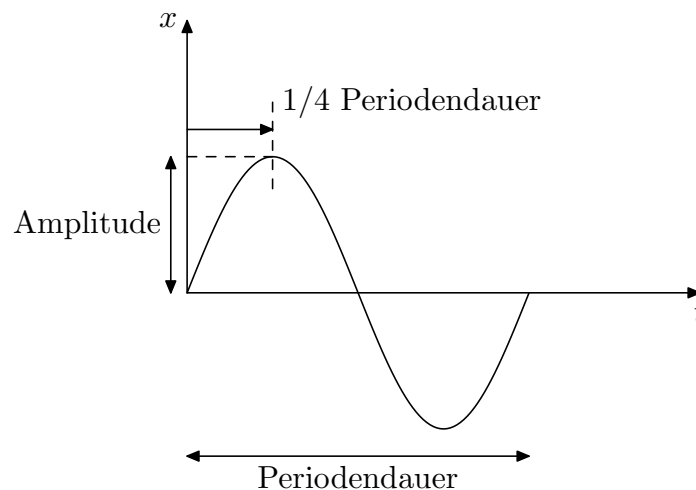
**Abb. 6.38:** Dynamische Wasserdrücke Talsperrenfront in den Höhen 0,0; 2,0; 4,0; 6,0; 8,0 und 10,0 m ab Mauerfuß bei  $\Delta x = 0,3 \text{ m}$

Mit der höheren Auflösung sind die Druckgradienten steiler, und ihre Absolutwerte differieren zur grobskaligeren Rechnung in Größenordnungen von 10%. Da der Schritt von  $\Delta x = 0,2 \text{ m}$  auf  $\Delta x = 0,3 \text{ m}$  jedoch einer Inkrementierung um 50% entspricht, ist die Schwankung der Rechengenauigkeit stark unterproportional zur Änderung der Auflösung. Noch feinere Auflösungen hatten keine wesentlichen Änderungen zur Folge.

## 6.4 Dynamischer Wasserdruck im Erdbebenfall

Für Talsperren der Klasse 2 darf nach [25] vereinfacht mit horizontalen Bodenbeschleunigungen als quasistatischer Ersatzlast gerechnet werden, siehe Abschnitt 6.1.3. Die hierfür anzunehmenden Werte lassen sich über die Zuordnung zu bestimmten Erdbebenzonen und Überschreitungswahrscheinlichkeiten finden. In Erdbebenzone I in Süddeutschland liegen typische Beschleunigungswerte etwa zwischen  $0,4 \text{ m/s}^2$  und  $1,0 \text{ m/s}^2$ . Die stärkste je an einer Talsperre gemessene horizontale Spitzenbeschleunigung wurde 1971 während des San Fernando-Bebens an der Pacoima-Staumauer in Kalifornien mit mehr als  $12 \text{ m/s}^2$  aufgezeichnet. Zur Simulation des auftretenden dynamischen Wasserdrucks, der durch das Beschleunigen der Staumauer gegen das trägheitsbedingt zunächst

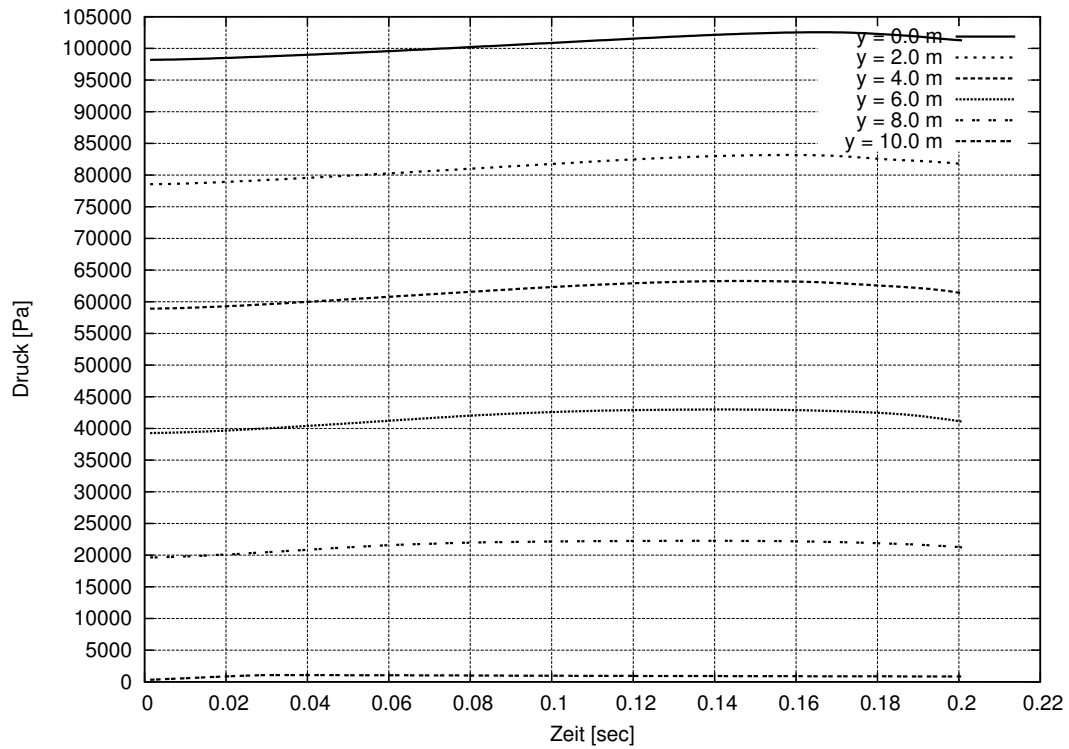
ortsfeste Fluidum entsteht, wird das dynamische SPH-Verfahren verwendet. Es stellt sich damit die Frage nach der Dauer der Beschleunigungseinwirkung. Die durchgeführten Rechengänge orientieren sich daran, dass bei Staumauern für die Rissbildung der Spitzenwert der Bodenbeschleunigung im Frequenzbereich bis zu ca. 7 Hz eine wichtige Rolle spielt [87]. Die Frequenz gibt die Anzahl vollständiger Schwingungszyklen pro Sekunde an, Abb. 6.39, und ist der reziproke Wert der Periodendauer, welche der für eine Schwingung benötigten Zeit entspricht.



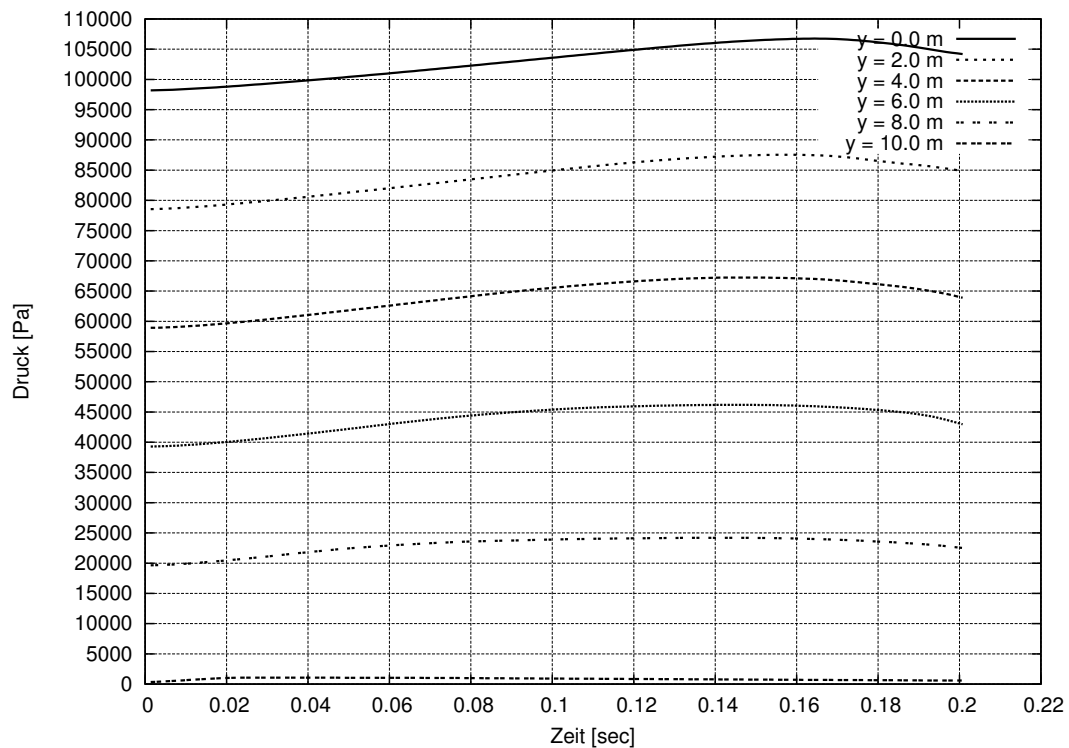
**Abb. 6.39:** Ein vollständiger Schwingungsvorgang

Für eine angenommene Frequenz von 2 bis 7 Hz ergibt sich für einen kompletten Schwingungsvorgang eine Zeitspanne von  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{7}$  sec. Da der erste Beschleunigungsvorgang nach  $\frac{1}{4}$  der Periodendauer abgeschlossen ist, wird als maßgebliche Dauer des untersuchten Vorgangs ein Viertel der Zeit eines vollständigen Schwingungszyklus angenommen, also  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{28}$  sec. Eindeutig ist aus Abb. 6.38 zu schließen, dass erst ab etwa 0,2 sec eine Beeinflussung der Druckverhältnisse an der Talsperrenfront durch den freien Modellrand eintritt. Damit können alle Betrachtungen im oben genannten Zeitfenster als unbeeinflusst vom freien Modellrand angesehen werden. Im Folgenden werden Vorgänge binnen der Zeitspanne bis 0,2 sec betrachtet. Der Talsperrenkörper wird mit konstanten Beschleunigungen von  $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$ ;  $1,0 \text{ m/s}^2$ ;  $5,0 \text{ m/s}^2$  und  $10,0 \text{ m/s}^2$  gegen den Fluidkörper des Reservoirs beschleunigt, gleichzeitig wirkt die normale Gravitation von  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Den Druckverläufen aller Beschleunigungen ist gemein, dass sie nach annähernd linearem Ansteigen ihren Höhepunkt etwa nach 0,17 sec erreichen, um danach etwa in gleichem Maß wieder abzufallen, in Abb. 6.40 für die verschiedenen Höhenkoordinaten an der Talsperren-Vorderseite aufgetragen. Für den Nachweis sind diese maximal auftretenden Drücke maßgeblich. Diese anzusetzenden Druckverläufe in den Höhen 0,0 m; 2,0 m; 4,0 m; 6,0 m; 8,0 m und 10,0 m ab Sohle unmittelbar an der Stirnseite der Talsperre zeigen die Diagramme in Abb. 6.41 bis 6.44.

## 6.4 Dynamischer Wasserdruck im Erdbebenfall

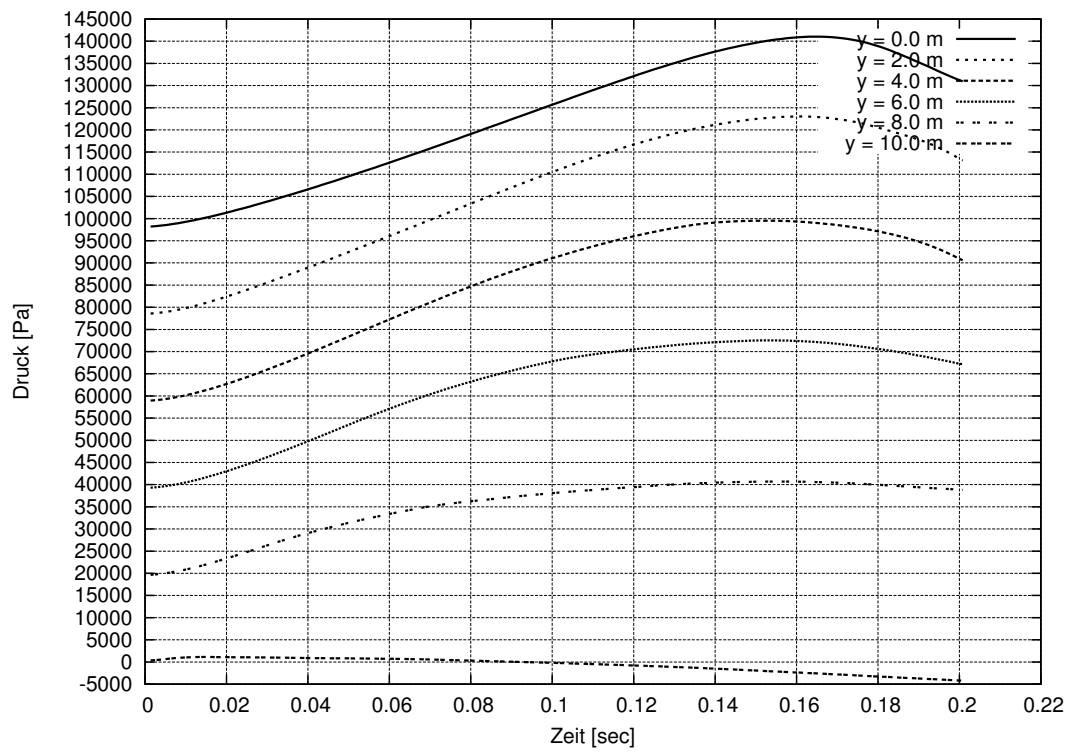


(a)  $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$

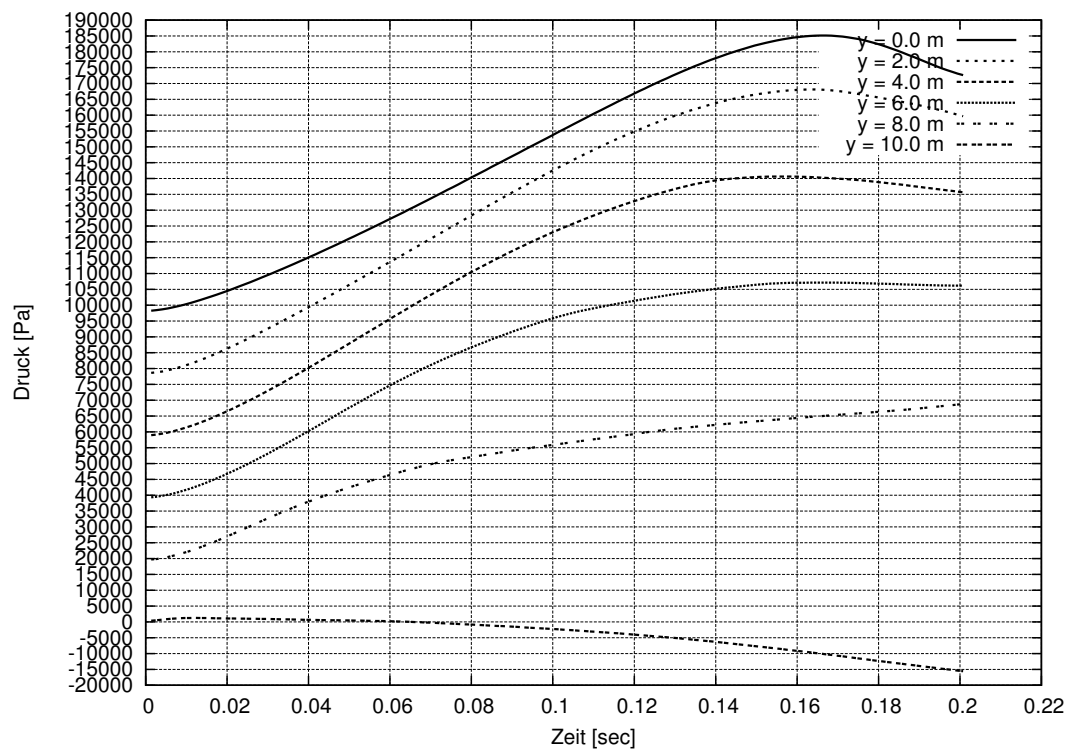


(b)  $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$

**Abb. 6.40:** Zeitlicher Verlauf des dynamischen Wasserdrucks an der Staumauer

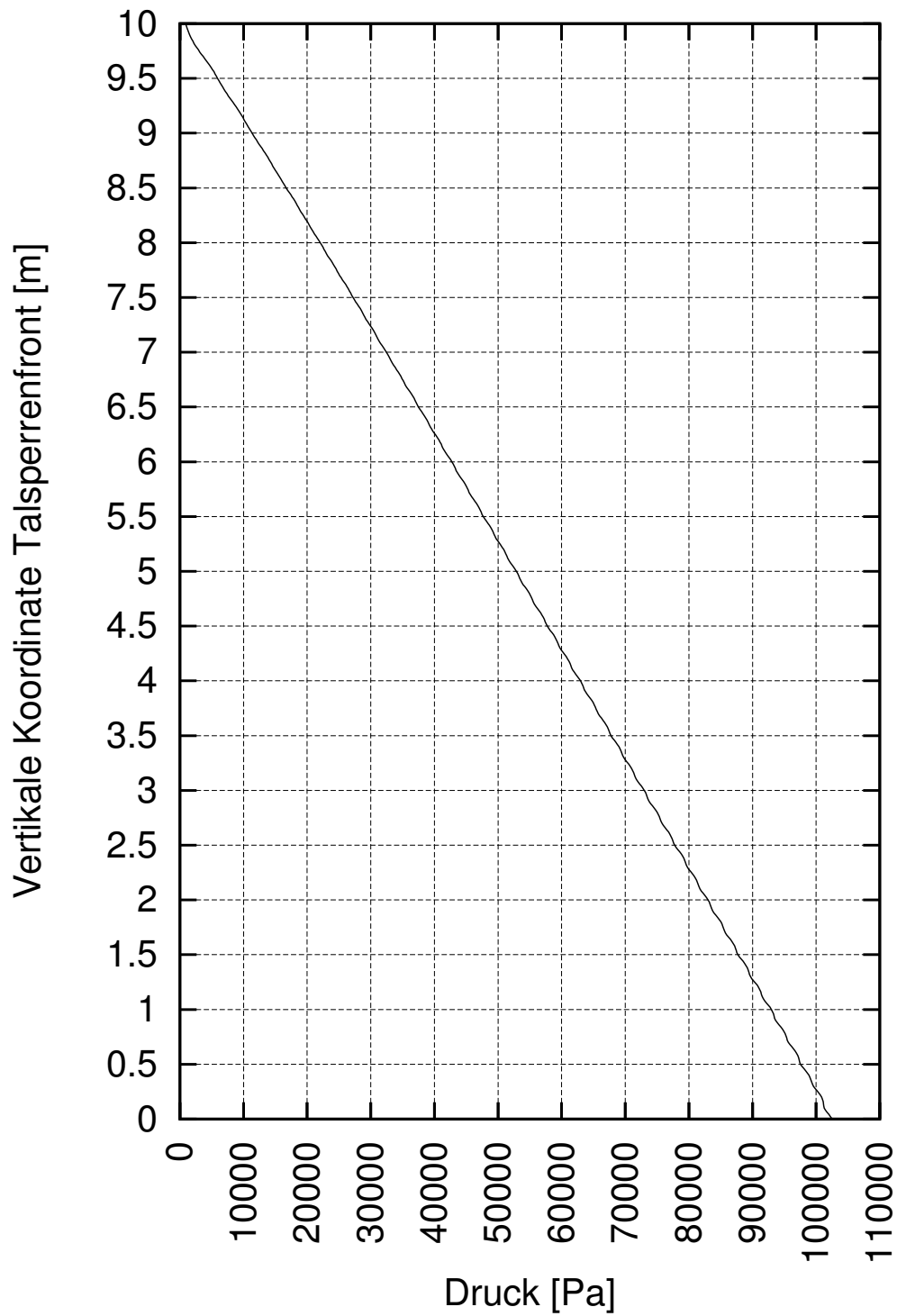


(c)  $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$

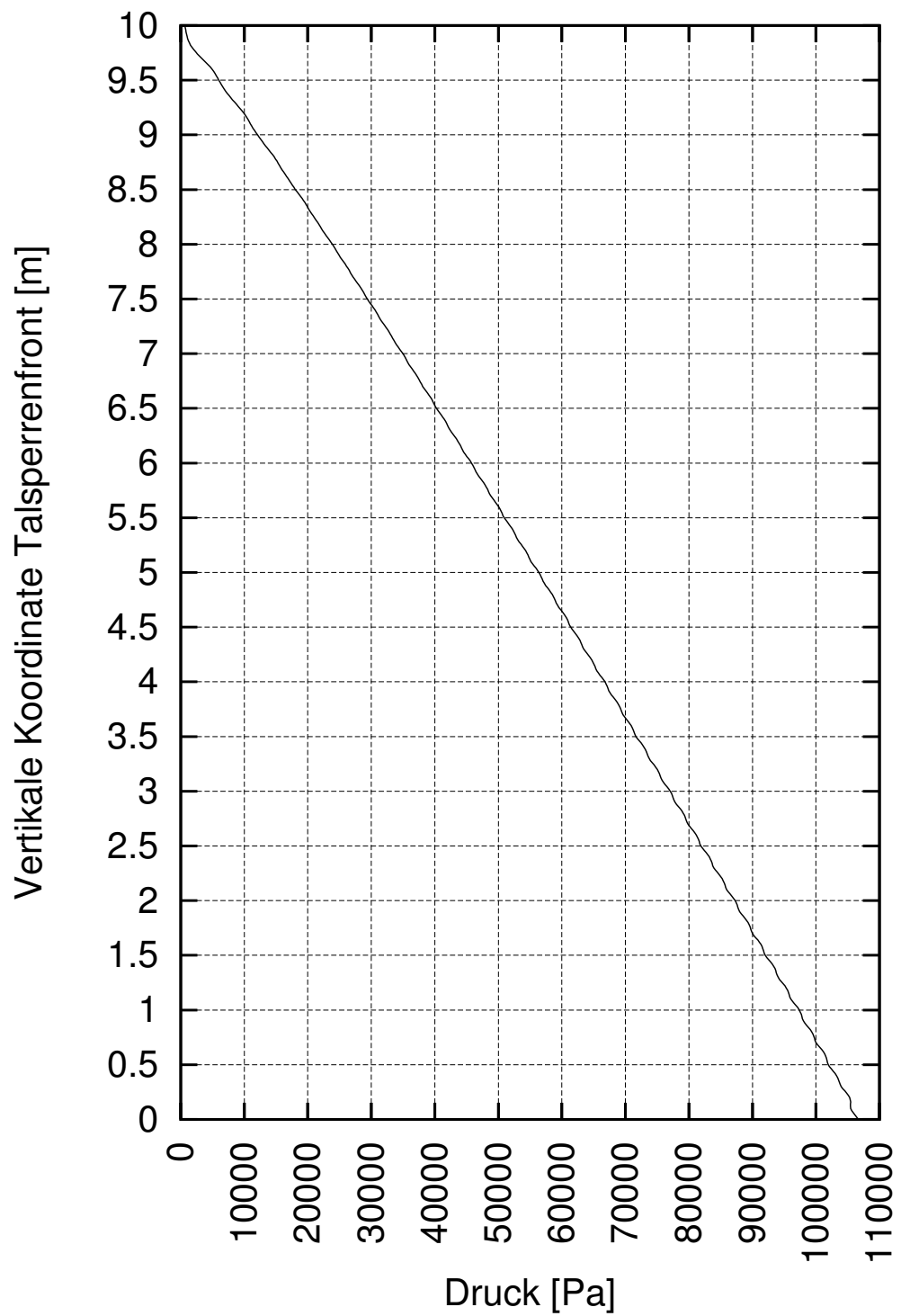


(d)  $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$

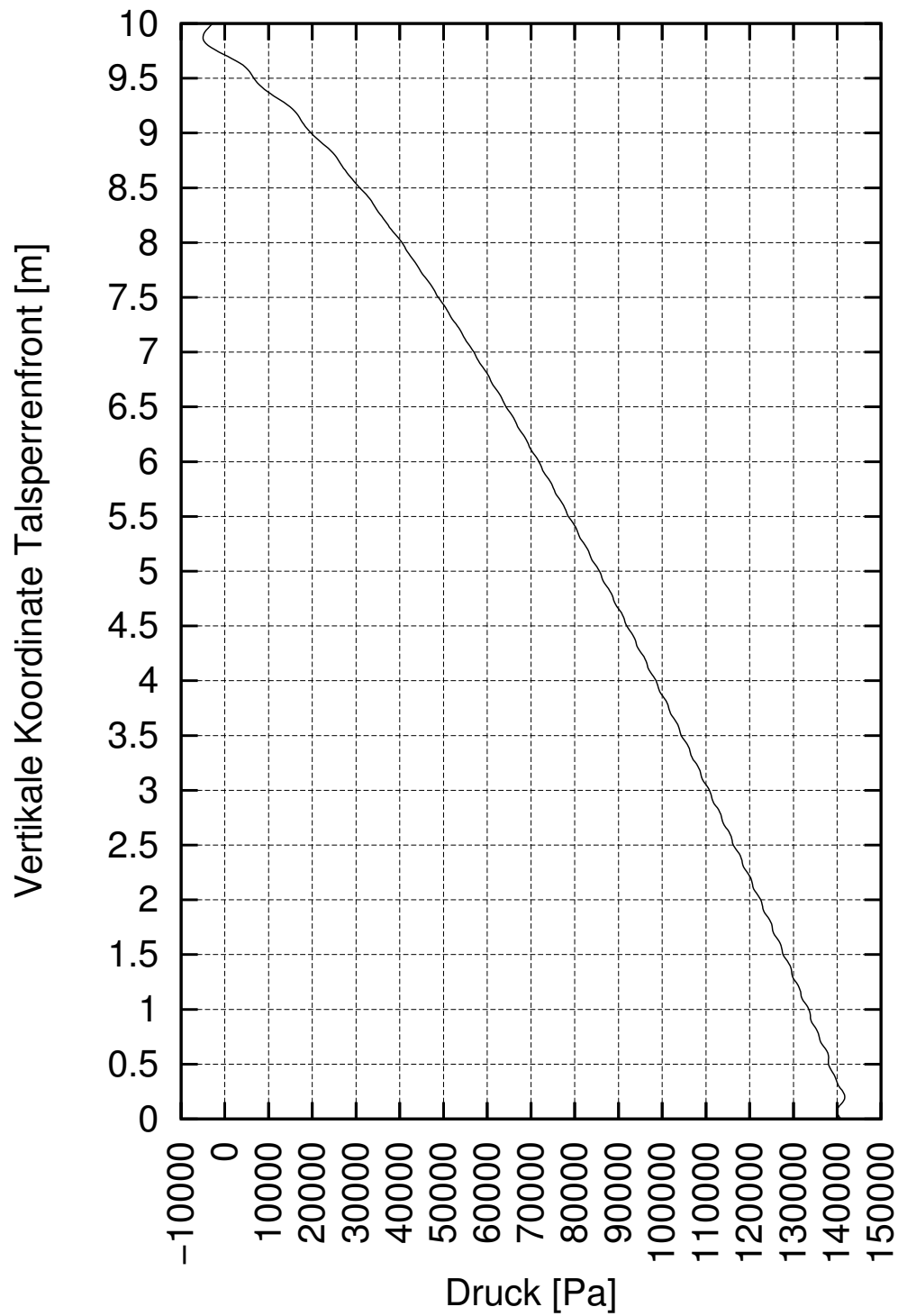
**Abb. 6.40:** Zeitlicher Verlauf des dynamischen Wasserdrucks an der Staumauer



**Abb. 6.41:** Verlauf des maximaler dynamischen Wasserdrucks an der Talsperrenfront zum Zeitpunkt 0,17 sec für  $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$

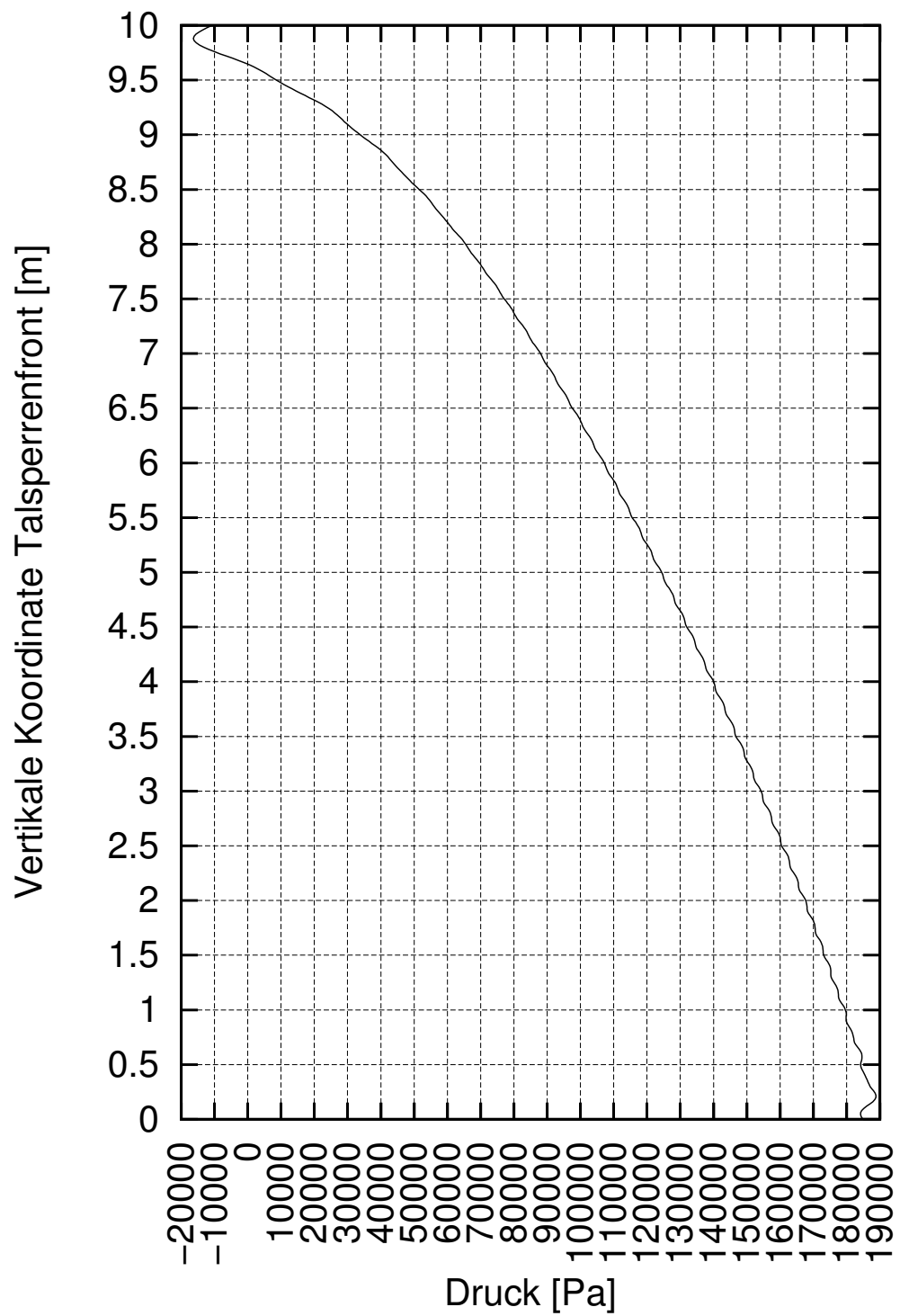


**Abb. 6.42:** Verlauf des maximaler dynamischen Wasserdrucks an der Talsperrenfront zum Zeitpunkt 0,17 sec für  $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$



**Abb. 6.43:** Verlauf des maximaler dynamischen Wasserdrucks an der Talsperrenfront zum Zeitpunkt 0,17 sec für  $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$





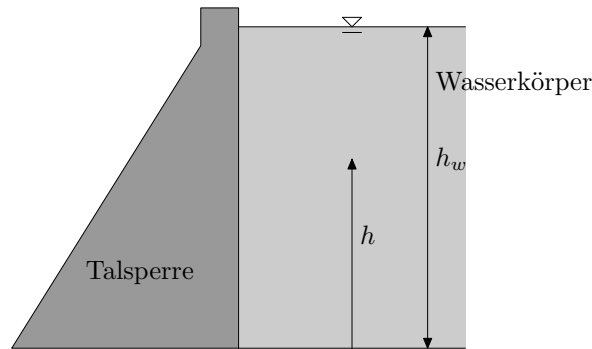
**Abb. 6.44:** Verlauf des maximaler dynamischen Wasserdrucks an der Talsperrenfront zum Zeitpunkt 0,17 sec für  $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$

## 6.5 Vergleich mit analytischen Lösungen

Gebräuchlicher Weise wird der erdbebenbedingte zusätzliche Wasserdruck nach dem Verfahren von Westergaard [85] als statische Ersatzlast berücksichtigt: Hierbei wird eine zusätzliche zu beschleunigende tiefenabhängige Wassermasse angesetzt. Das Produkt dieser zusätzlichen Masse mit der Erdbebenbeschleunigung ergibt den erdbebenbedingten zusätzlichen Wasserdruck jeder Tiefenkoordinate. Es gibt verschiedene Formulierungen dieser Funktion für unterschiedliche Charakteristiken. Häufig anzutreffen ist folgender Ansatz einer parabelförmigen Funktion:

$$m_w(h) = \frac{7}{8} \cdot \rho_w \cdot h_w \cdot \sqrt{1 - \frac{h}{h_w}} \quad (6.100)$$

Hierin ist  $m_w(h)$  die tiefenabhängige, zu beschleunigende zusätzliche Wassermasse,  $\rho_w$  die als tiefenunabhängig angenommene Dichte des Wassers,  $h_w$  die Gesamtwassertiefe und  $h$  die betrachtete Wassertiefe, Abb. 6.45.



**Abb. 6.45:** Parameter der Westergaard-Formulierung

Abb. 6.46 zeigt den parabelförmigen Verlauf des zusätzlichen Wasserdrucks ab Wasseroberfläche mit zunehmender Tiefe für eine Beschleunigung von  $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$ . Die folgenden Diagramme in Abb. 6.47 bis 6.50 stellen die beiden analytischen Ansätze von Westergaard [85] und Sharan [76] nach (6.100) bzw. (6.99) den SPH-Simulationsergebnissen gegenüber. Es zeigt sich gute Übereinstimmung. Bei Beschleunigungen bis  $1,0 \text{ m/s}^2$  ist praktisch Deckungsgleichheit gegeben. Bei höheren Beschleunigungen liegen die Ergebnisse der SPH-Simulation in größeren Wassertiefen etwas über den analytischen Ergebnissen, bei geringen Wassertiefen, etwa unter 1,5 m, darunter. Beide analytische Verfahren bestätigen damit den Ansatz der Smoothed Particles Hydrodynamics. Angemerkt sei, dass die realen Wasserdrücke im Normalfall unter diesen Ergebnissen liegen werden, da die Periodendauer der Erdbebenschwingung im Allgemeinen zu kurz sind, sodass die maximalen Drücke um 0,17 sec nicht erreicht werden. Dies bestätigt jedoch wiederum den ebenfalls sehr konservativen Charakter der analytischen Verfahren zur Ermittlung der hydrodynamischen Erdbebenlasten. Sowohl der Gebrauch der analytischen Verfahren wie auch die SPH-Simulation können damit als auf der sicheren Seite liegend angesehen werden.

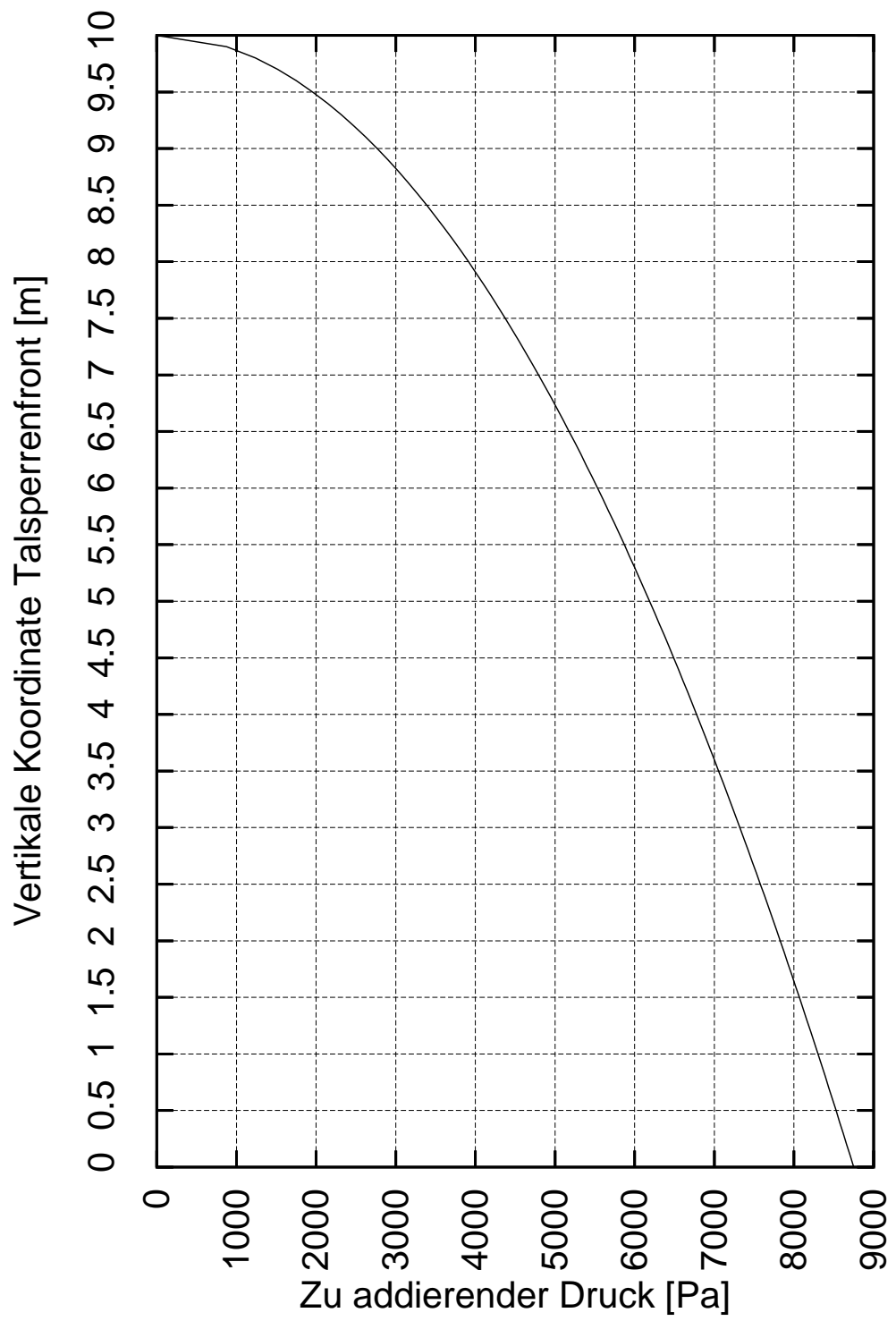


Abb. 6.46: Dynamischer Wasserdruck nach Westergaard

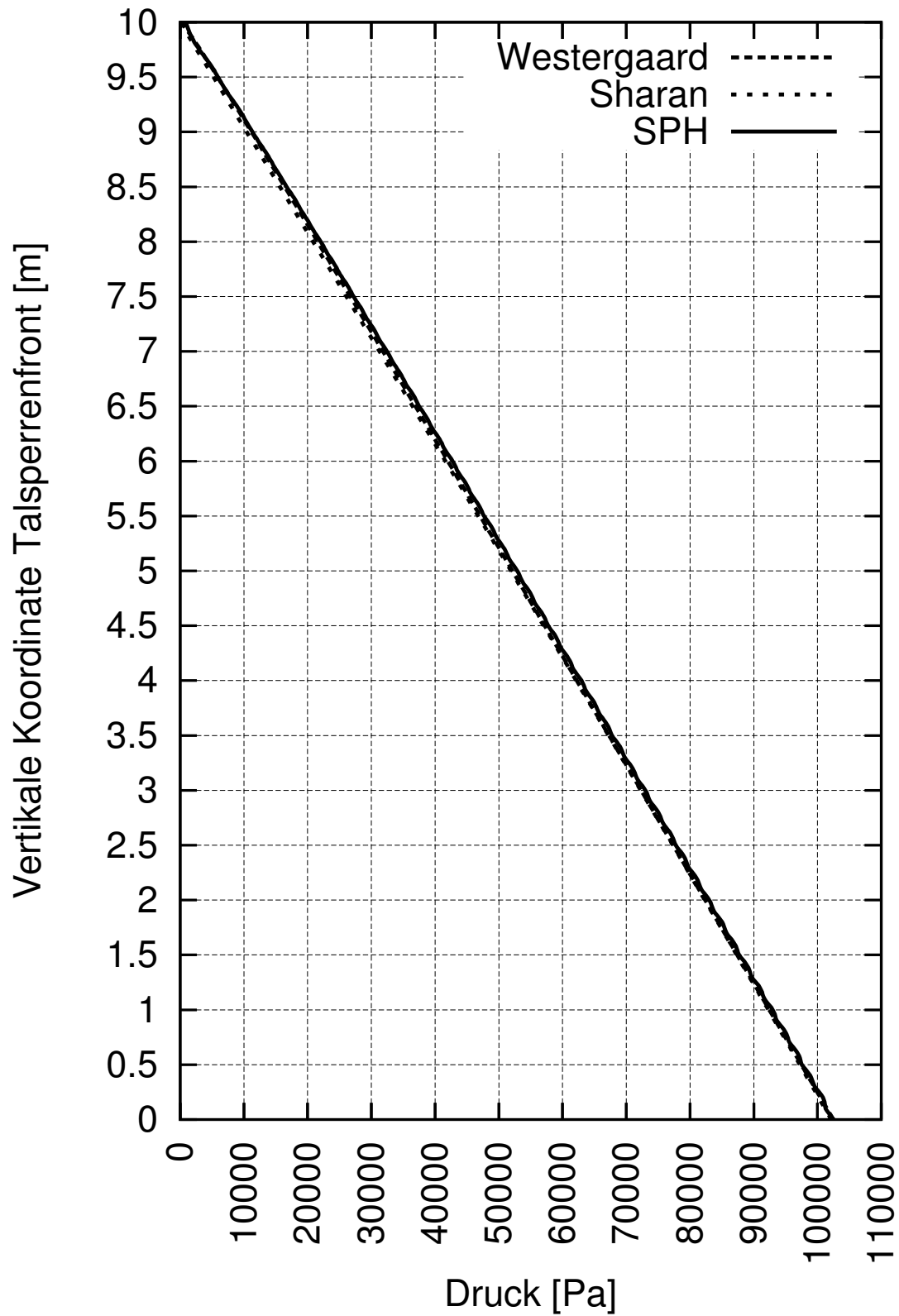


Abb. 6.47: Vergleich Westergaard, Sharan, SPH für  $a_h = 0,5 \text{ m/s}^2$

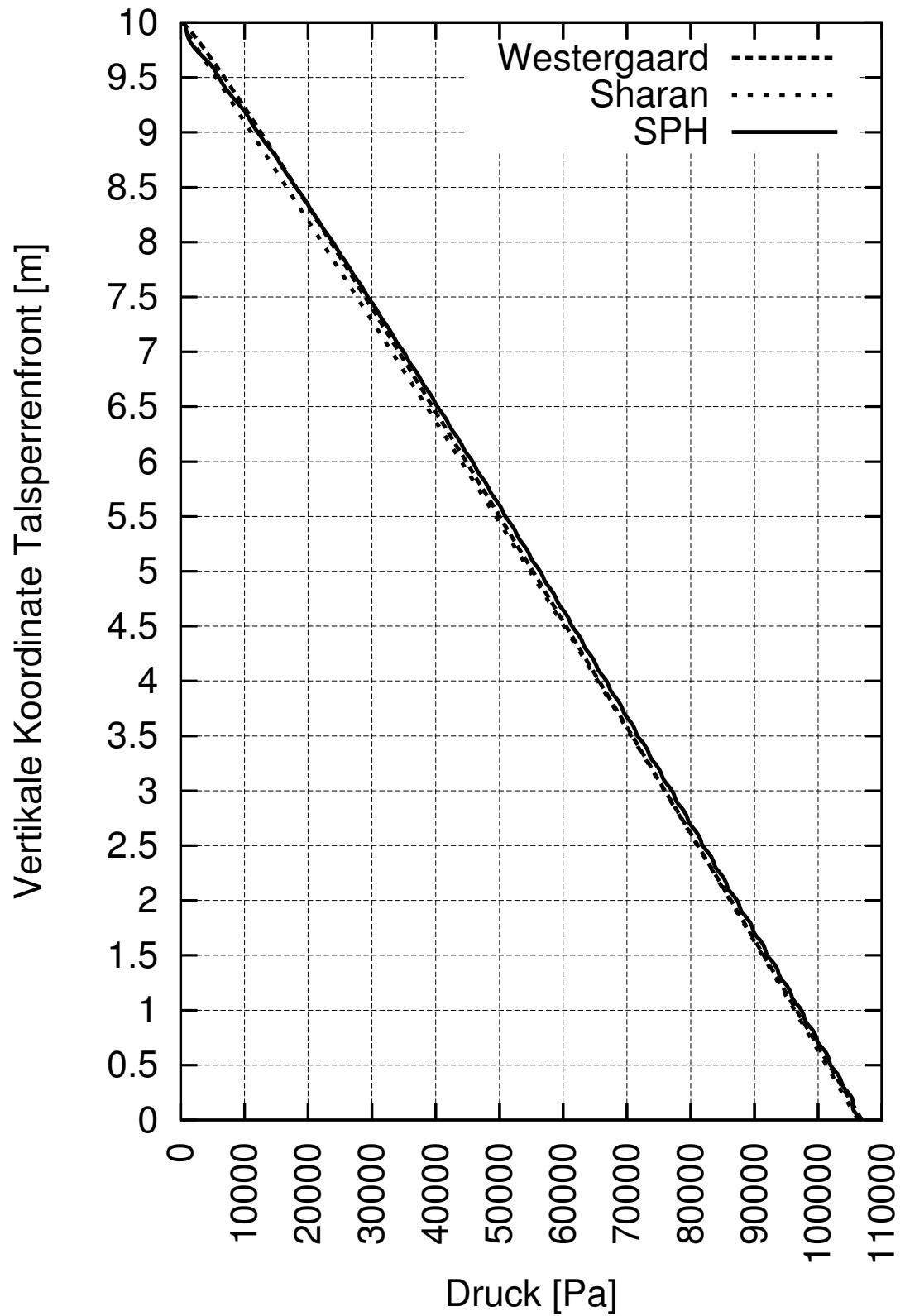


Abb. 6.48: Vergleich Westergaard, Sharan, SPH für  $a_h = 1,0 \text{ m/s}^2$

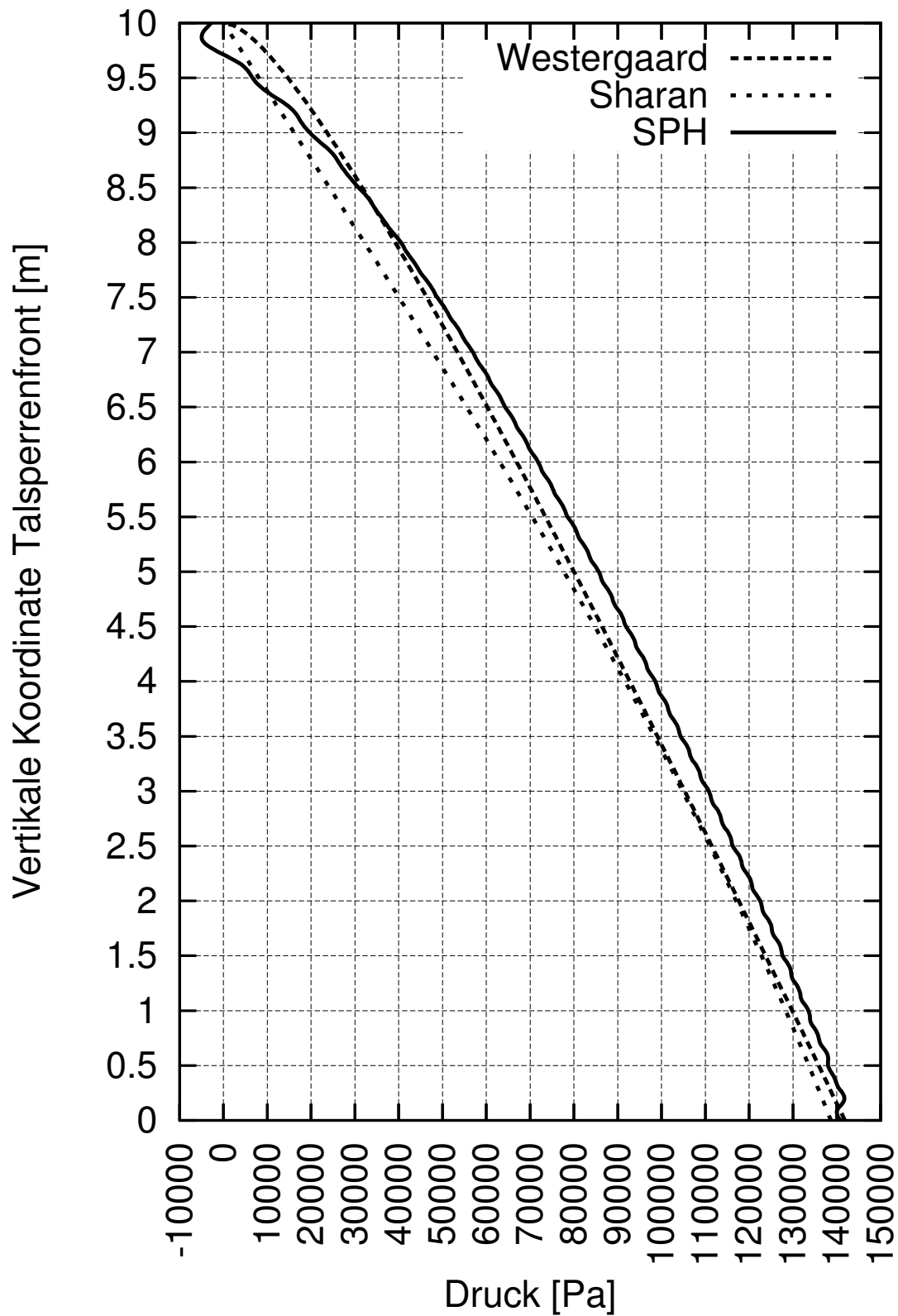


Abb. 6.49: Vergleich Westergaard, Sharan, SPH für  $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$

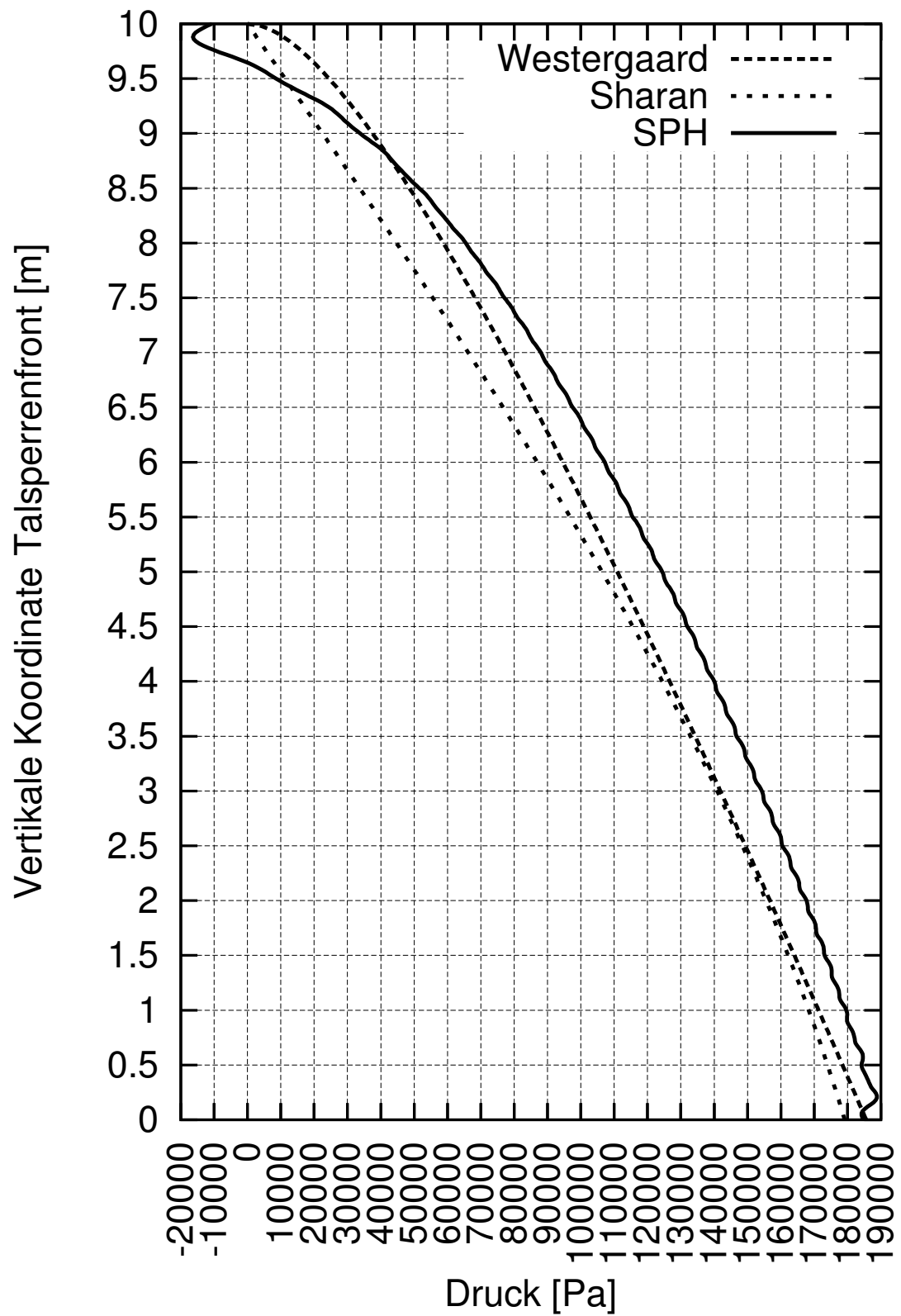
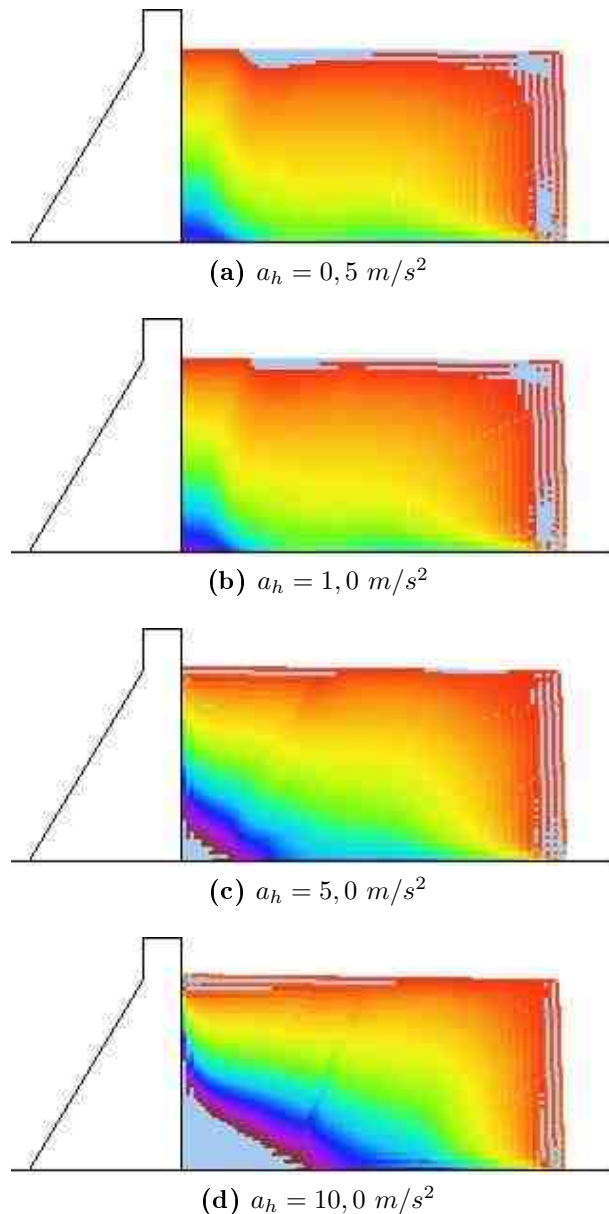


Abb. 6.50: Vergleich Westergaard, Sharan, SPH für  $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$

## 6.6 Wellenbildung

Für die Bemessung des Freibords ist es wichtig, Aussagen über die Höhe von entstehenden Wellen machen zu können. Durch die kurze Einwirkdauer der Erdbebenbeschleunigung entsteht zunächst keine wesentliche Wellenbildung an der Talsperrenfront. Abb. 6.51 zeigt die Wasserspiegel bei den genannten Beschleunigungen. Lediglich bei  $a_h = 5,0 \text{ m/s}^2$  und  $a_h = 10,0 \text{ m/s}^2$  sind leichte Anstiege des Wasserspiegels an der Talsperre zu beobachten, Abb. 6.51. Die Schattierungen geben den Druckverlauf wieder.

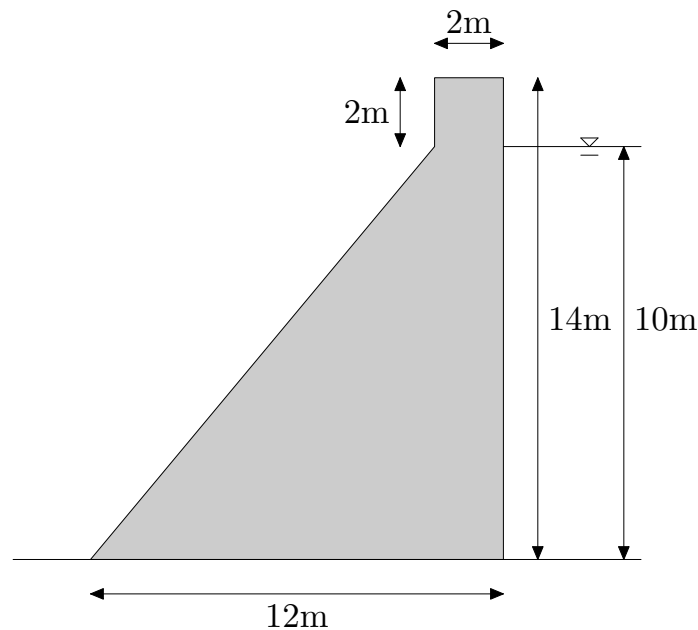


**Abb. 6.51:** Welle zum Zeitpunkt  $t = 0,2 \text{ sec}$  bei konstanten Horizontalbeschleunigungen



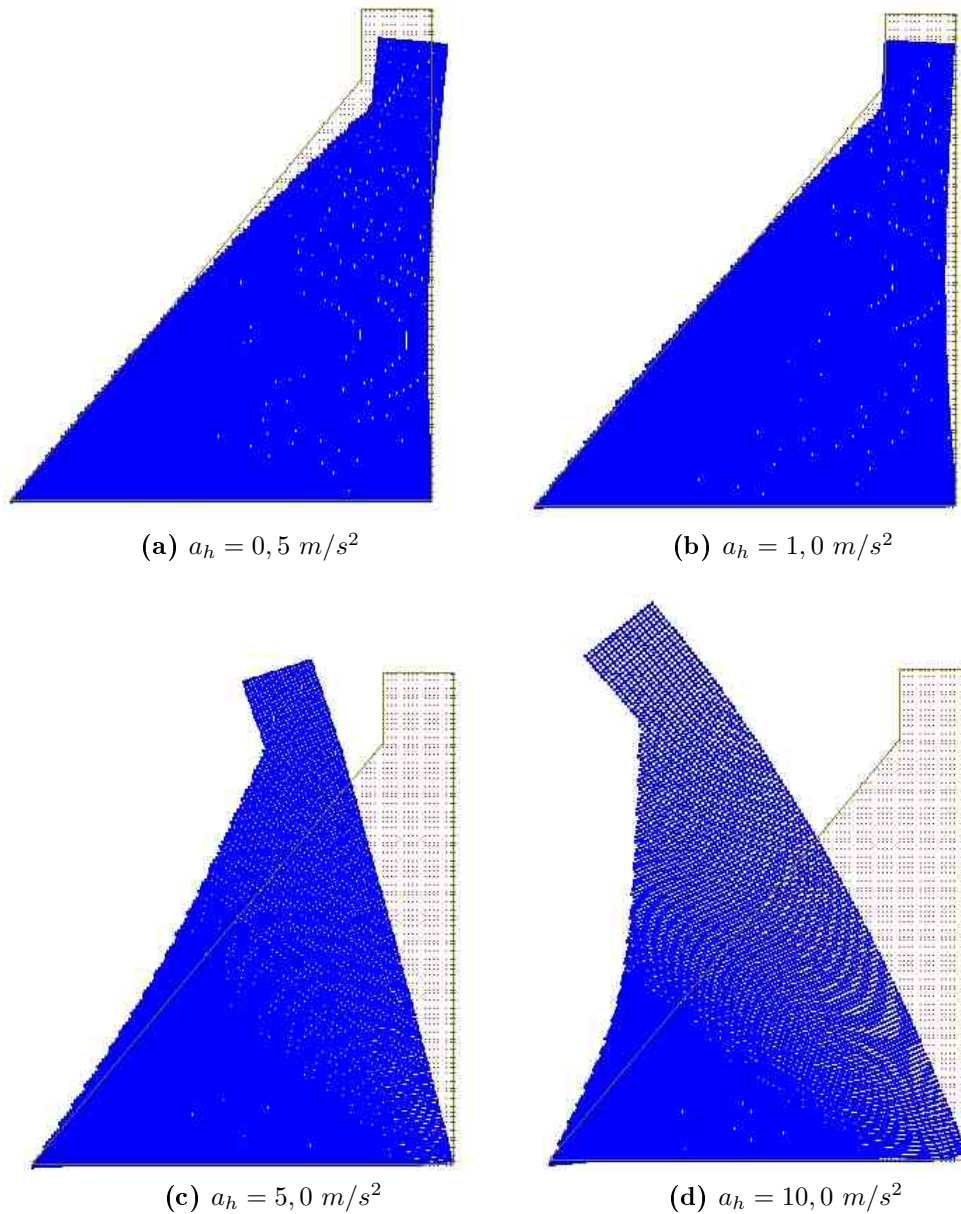
## 6.7 Verformungen und Kräfte im Talsperrenkörper

Im Folgenden werden die durch Erdbebenkräfte veränderten Kraftflüsse und Verformungsfiguren des Talsperrenkörpers diskutiert. Es wurde ein identisch zum vorhergehenden Abschnitt dimensioniertes Modell verwendet, dessen Abmessungen Abb. 6.52 wiedergibt.



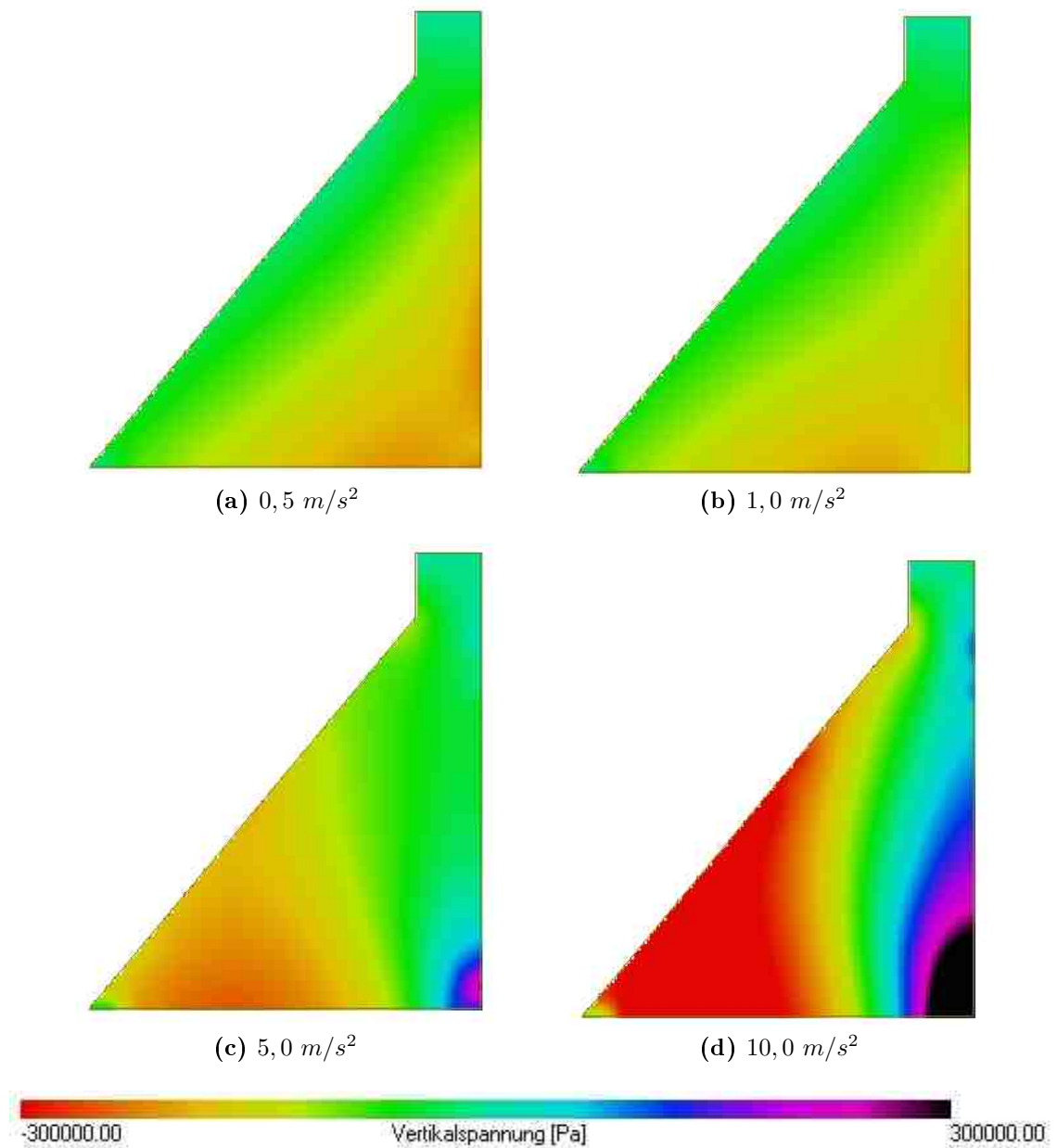
**Abb. 6.52:** Simulationsmodell

Sämtliche Simulationen wurden gerechnet unter Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes mit einem Elastizitätsmodul  $E = 21 \text{ GPa}$ , einem Querdehnungsverhältnis von  $\mu = 0,3$  und einer Dichte von  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ . Abb. 6.53 zeigt die Verschiebungsfiguren des Talsperrenkörpers, verursacht durch Horizontalbeschleunigung des Mauerfußes und daraus trägheitsbedingt wirkende Körperkräfte sowie dynamischen Wasserdruck. Bis  $1,0 \text{ m/s}^2$  überwiegt das Eigengewicht, und eine Verformung gegen das Reservoir ist zu beobachten, stärkere Beschleunigungen haben deutliche Neigungen auf die Luftseite zur Folge. Beim hohen Vergrößerungsfaktor der 500-fachen Überzeichnung sind bereits auch körperinterne Dehnungen und Stauchungen zu erkennen.



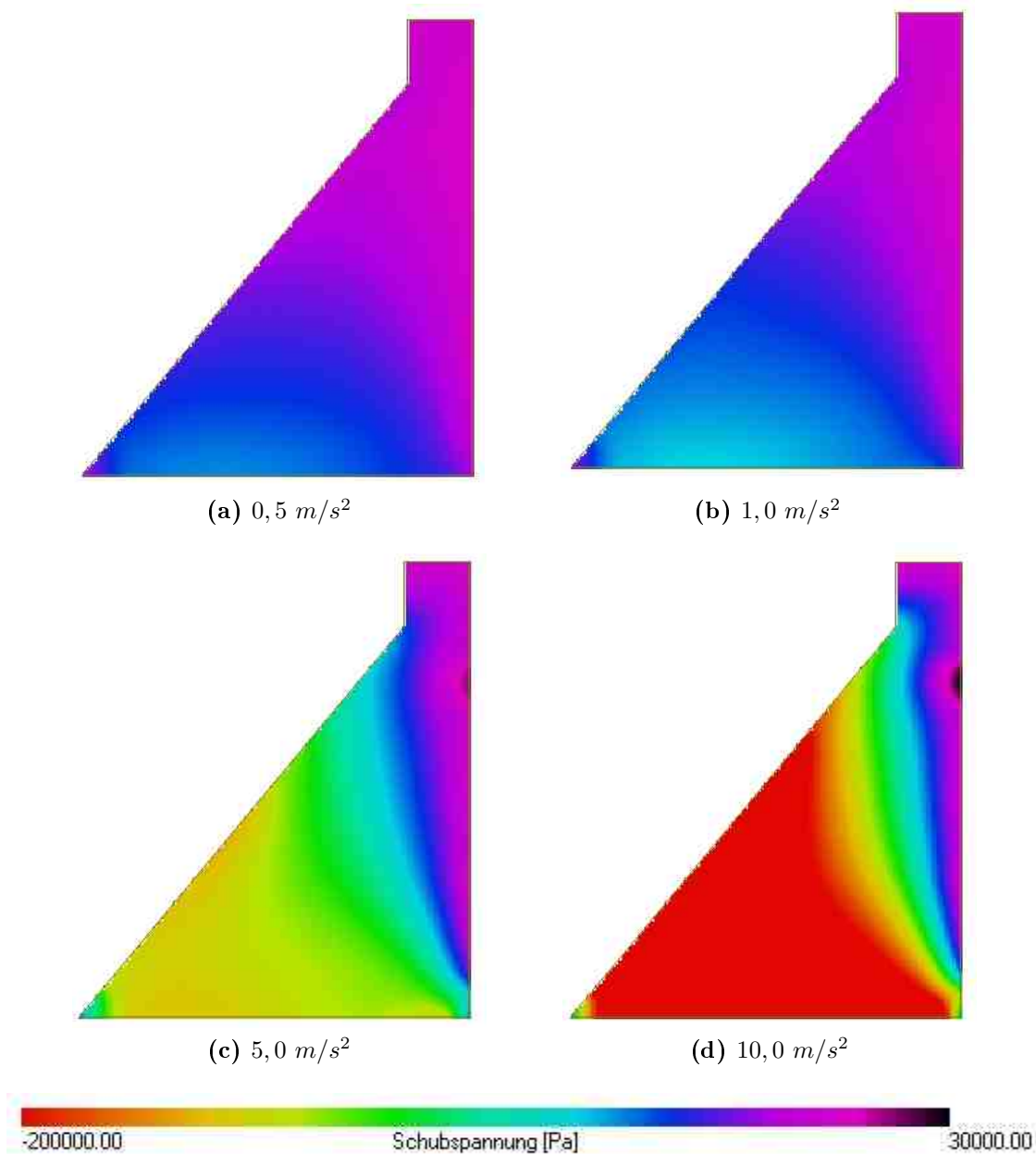
**Abb. 6.53:** Verschiebungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen, 500-fach

Die Bilderserie in Abb. 6.54 zeigt die zugehörigen Vertikalspannungen unter gleichen Last- und Modellannahmen. Während schwächerer Erdbeben bis  $1,0 \text{ m/s}^2$ , wie sie in Süddeutschland typischerweise als Bemessungserdbeben für kleinere Talsperren anzusetzen sind, keine gravierenden Auswirkungen haben, ist bei stärkeren Beben erwartungsgemäß deutlich die Ausbildung von Zugzonen im Bereich des wasserseitigen Talsperrenfußes zu beobachten. Die Verformungen sind nicht dargestellt.



**Abb. 6.54:** Vertikalspannungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen

Ein analoges Bild ergibt sich für die Schubspannungen, Abb. 6.55. Erst bei den starken Beschleunigungen sind deutliche Gradienten zu beobachten, wovon vor allem das vordere Bauwerksdrittel betroffen ist.



**Abb. 6.55:** Schubspannungen bei konstanten Horizontalbeschleunigungen

## 6.8 Risspfade

Theoretisch beginnt ein Riss dort, wo die Rissinitiiierungskriterien nach Abschnitt 6.2.9 erfüllt, also die zulässigen Spannungen überschritten sind. Jedoch wird es in der Realität so sein, dass Risse an Schwäche zonen entstehen; Fugen im Mauerwerk oder zwischen Betonageabschnitten, bereits vorhandene Rissansätze beispielsweise durch Frost-Tau-Wechsel und Ähnliches. Die Ausprägung des anschließenden Rissvorgangs hängt vom

Ort des Entstehens ab, da unterschiedliche Spannungsfelder und Materialzonen durchlaufen werden. Nach den in Abschnitt 6.2.5 vorgestellten Verfahren zur numerischen Risspfadberechnung wird in diesem Teil beispielhaft der Verlauf eines Risses abhängig von seiner Entstehungskordinate, welche nach den unter Abschnitt 6.2.9 erfolgten Darlegungen angenommen werden kann, und der Belastungssituation gezeigt. Abb. 6.56 zeigt den Rissverlauf eines Risses, der nach den gemachten Annahmen an der Stelle der größten Zugspannung angesetzt wurde. Die Rissinkrementierlänge betrug 0,1 m pro Rechenschritt. Die Belastung der Talsperre durch Eigengewicht und Erdbebenbeschleunigung entspricht einem gemischten Modus nach Abschnitt 6.2.2. Risse dieses Modus' haben die Tendenz, ihre Richtung so zu ändern, dass sie sich einem Modus I - Zustand reiner Zugspannung in Bezug auf die Rissachse annähern. Deutlich ist dies in Abb. 6.56 anhand der ersten Hauptspannung zu sehen: Unmittelbar weicht der Riss zur Vertikalen entlang der ausgeprägten Zugspannungszone aus und erreicht die Sohlfuge. Die Verformungen sind stark vergrößert aufgetragen.

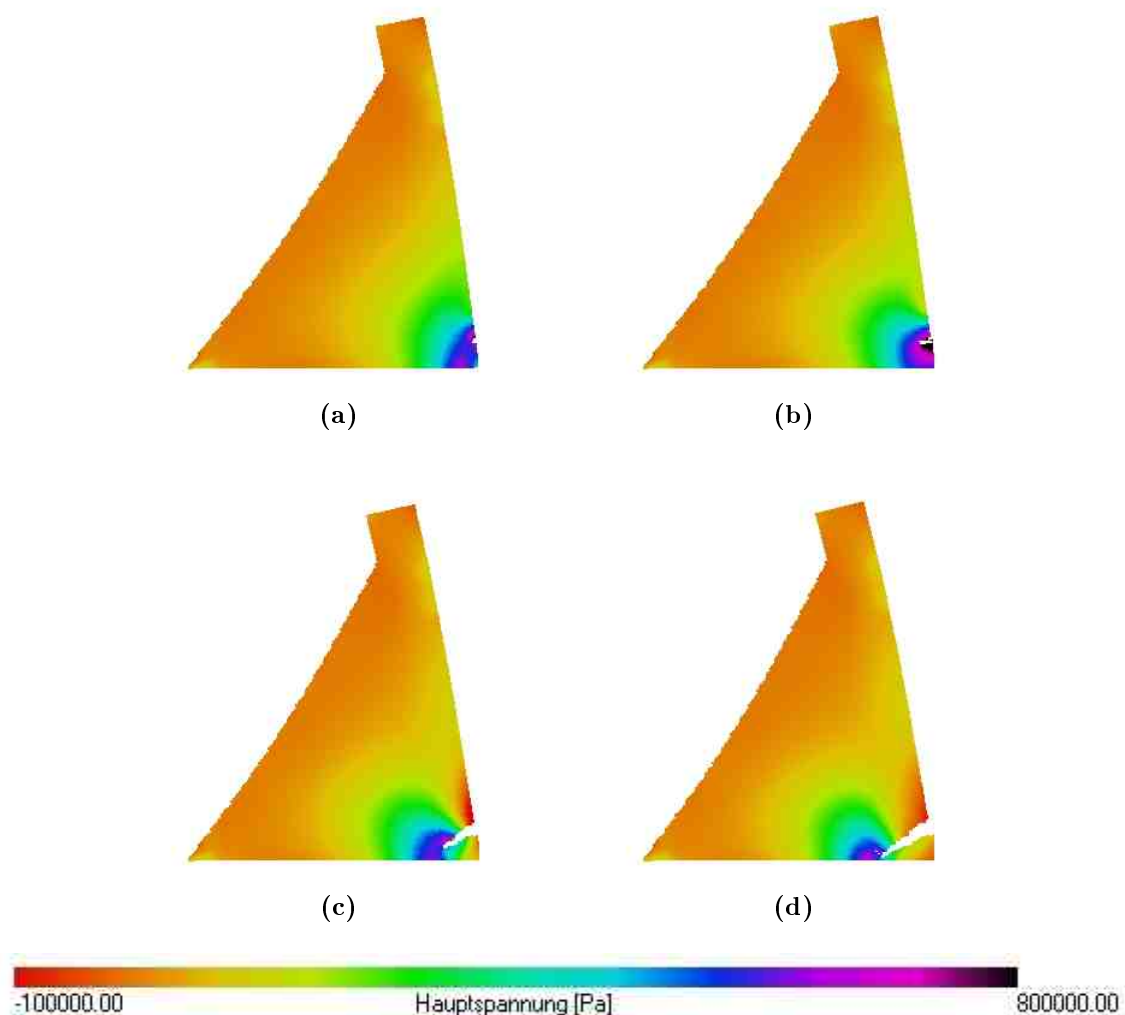
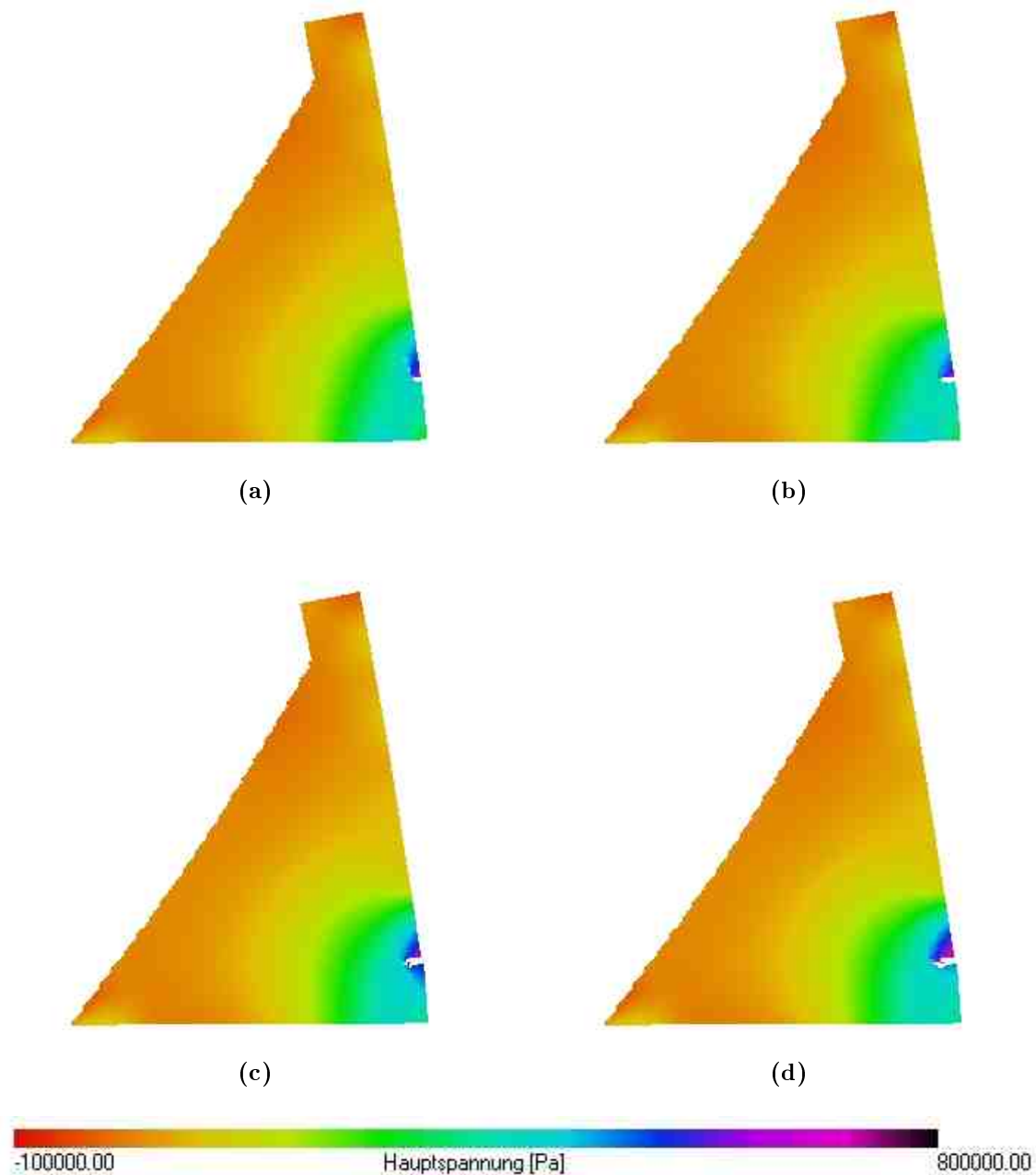


Abb. 6.56: Risspfad

Der Riss schreitet solange fort, bis der für das Material kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IC}$  unterschritten wird. Ein Beispiel für das zum Stillstand Kommen eines Rissvorgangs zeigt Abb. 6.57, welcher in Höhe von 2,0 m über Mauerfuß angesetzt wurde bei einer horizontalen Belastung von  $10,0 \text{ m/s}^2$ .  $K_{IC}$  wurde mit  $1,0 \text{ MNm}^{1/2}$  angesetzt, nach Tab. 6.6 einem typischen Wert für unbewehrten Beton.



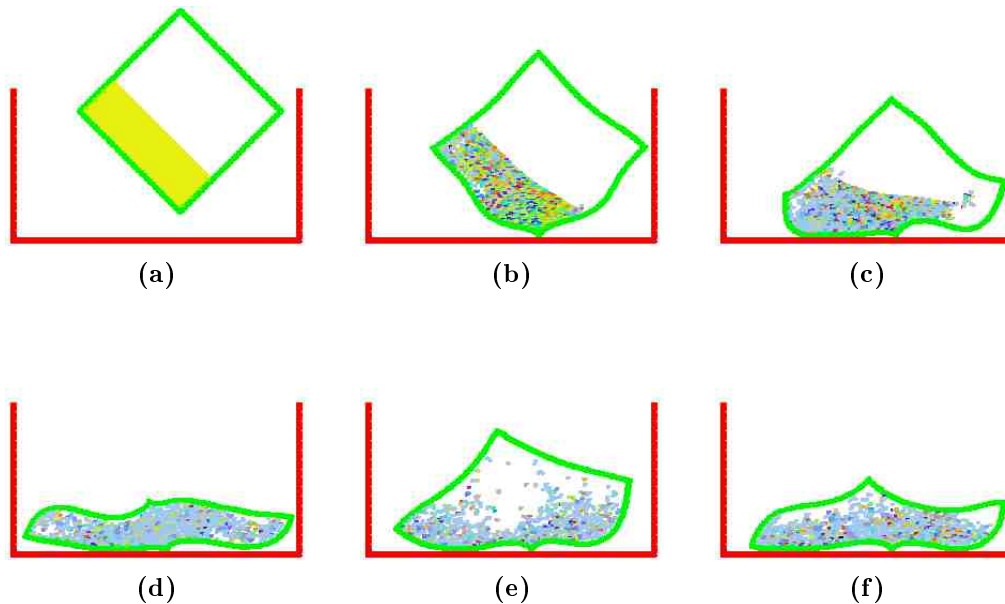
**Abb. 6.57:** Zum Stillstand kommender Riss



## 7 Weitere Anwendungen

Die Eignung der Elementfreien Galerkin Methode zur mechanischen Festkörperanalyse wurde im vorhergehenden Kapitel 6 deutlich. Zur Veranschaulichung der breitbandigen Anwendbarkeit netzfreier Methoden und speziell des Verfahrens der Smoothed Particles Hydrodynamics in hydromechanischen Untersuchungen werden im Folgenden einige Simulationen in knapper Form vorgestellt, die mit dem im Zuge dieser Arbeit entwickelten Softwarepaket durchgeführt wurden. Ohne vertiefte Ergebnisse wiederzugeben, soll gleichfalls ein qualitativer Eindruck vom Potential des Verfahrens auf dem Gebiet der Festkörpermechanik und -dynamik, auch in Fluidinteraktion, nach dem in Abschnitt 4.12.6 entwickelten Ansatz zur Implementierung von Zugfestigkeit gegeben werden. Dies reicht bis hin zu seil- und baudynamischen Experimenten, die außerhalb des Fokus der vorliegenden Dissertation liegen.

Einführend zeigt Abb. 7.1 einen schräg gestellten, etwa zu  $1/3$  flüssigkeitsgefüllten Behälter aus elastischem Material. Die Kantenlänge beträgt 1 m, die Wandstärke etwa 5 cm. Der Elastizitätsmodul wurde mit 1550 MPa etwa den Eigenschaften von Polypropylen entsprechend eingestellt. Der Behälter fällt nun durch Gravitation in einen weiteren, stationären Behälter. Es zeigen sich extreme Verformungen der Hülle und Bewegungen der Flüssigkeit, welche horizontales oszillierendes Gleiten des Behälters zur Folge hat. Der abgebildete Vorgang dauert etwa 1,5 Sekunden.

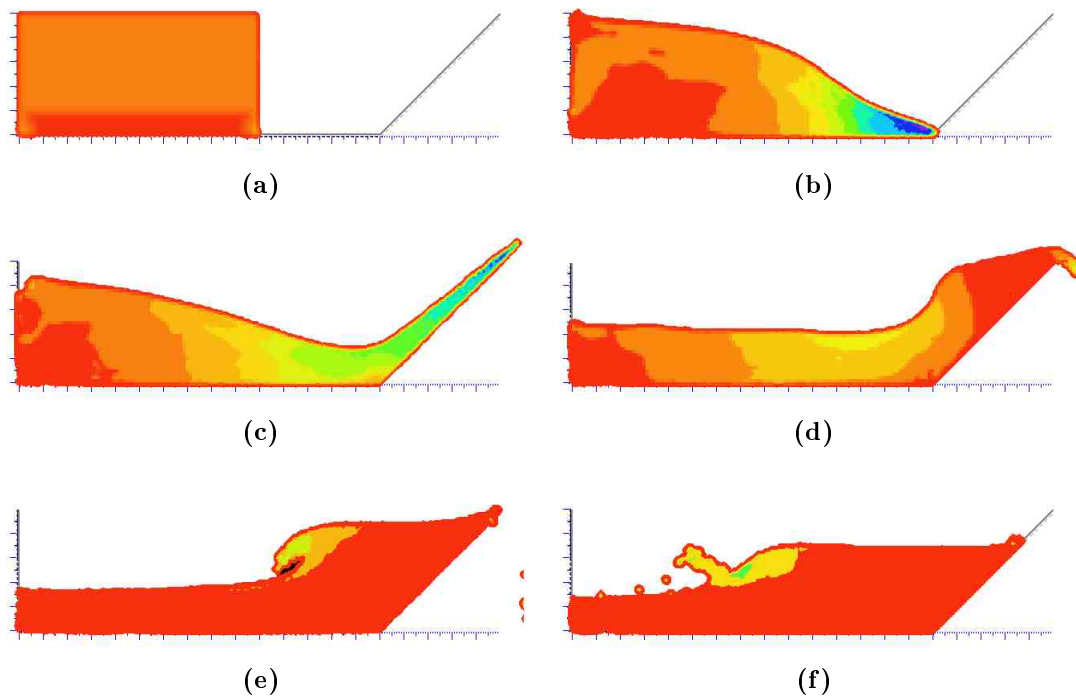


**Abb. 7.1:** Flüssigkeitsgefüllter elastischer Behälter



## 7.1 Freie Flüssigkeitsbewegungen

Bis vor wenigen Jahren war es mit vertretbarem Aufwand praktisch nicht möglich, freie Flüssigkeitsbewegungen zu simulieren. Tropfenablösungen, Turbulenzen und das komplexe Benetzen der Ränder trugen zu instabilem Verhalten der vorhandenen Modelle bei. SPH hat diese Nachteile aufgrund seiner Struktur, die näher an der Realität bewegter Flüssigkeitsteilchen liegt, nicht.



**Abb. 7.2:** Überschlagende Welle in Behälter

Abb. 7.2 zeigt einen Flüssigkeitskörper in einem Behälter, an dessen Innenseite plötzlich die imaginäre Trennwand entfernt wird wie bei einem brechenden Damm. Zu beobachten ist der Ausbreitungsvorgang und das Auflaufen auf die rampenförmig ausgebildete rechte Behälterseite sowie das Überschlagen der sich bildenden rücklaufenden Welle. Zur Darstellung wurde nicht die Wiedergabe einzelner Partikel gewählt, sondern eine flächenhafte Zeichnung, bei der in einem regelmäßigen örtlichen Raster der gewünschte Parameter, hier die Geschwindigkeit, ermittelt wird. Über das Raster werden anschließend mit Hilfe des Marching Squares-Verfahrens, Abschnitt A.3, die Isoflächen gleicher Farbe gelegt. In Abb. 7.3 ist die Bewegung einer freien Säule kompressibler Flüssigkeit, welche plötzlich der Schwerkraft ausgesetzt wird und in sich zusammenfällt dargestellt. Viskositätsbedingt kommt die Flüssigkeit zur Ruhe, nur noch leichte Wellenbewegungen sind gegen Ende zu beobachten. Der Vorgang dauert etwa 10 sec. und wurde mit rund 5000 Partikeln simuliert. Der Vorgang findet in einem rechteckigen Behälter statt, die Höhe der Flüssigkeitssäule ist 5 m bei 0,4 m Breite.

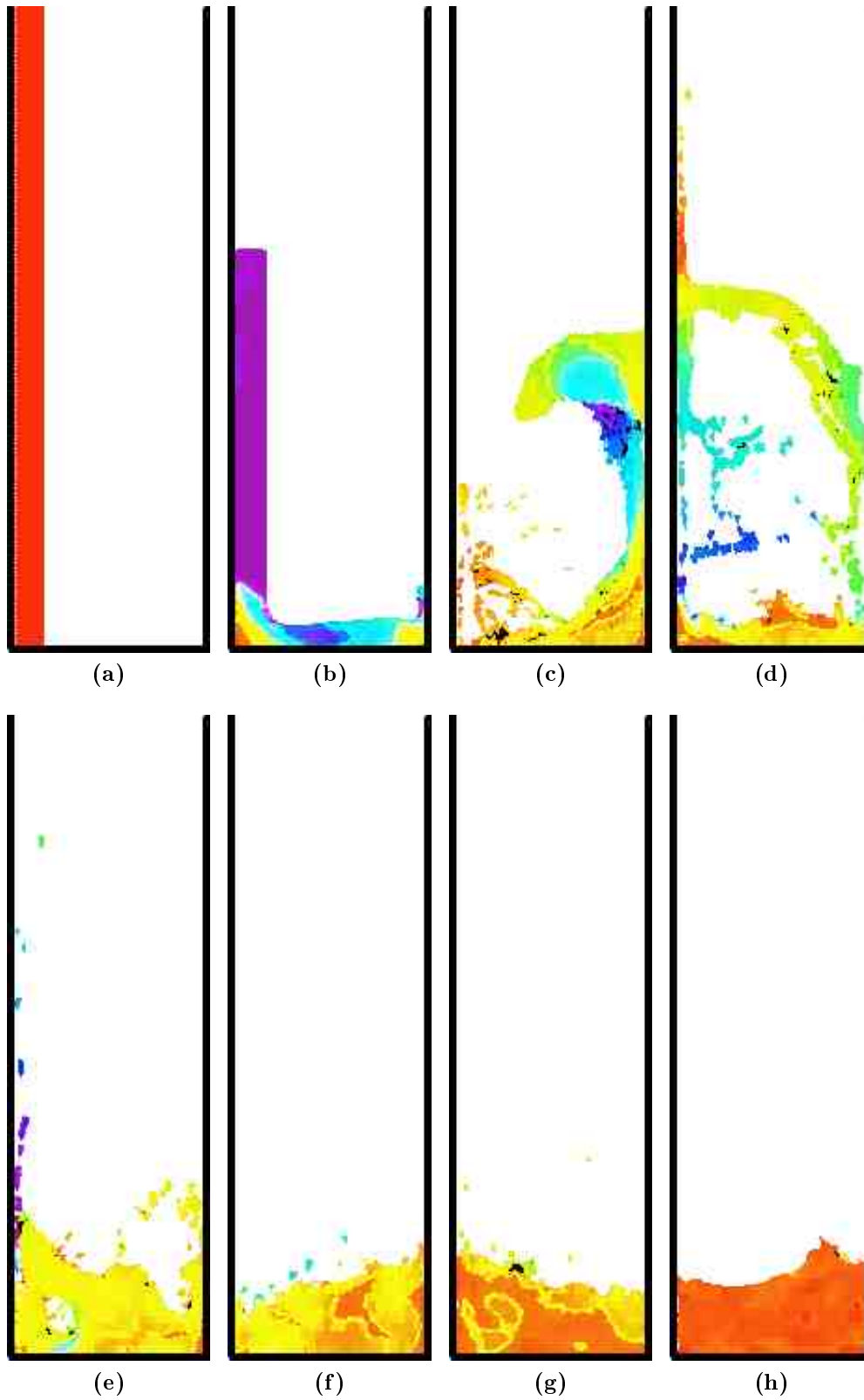
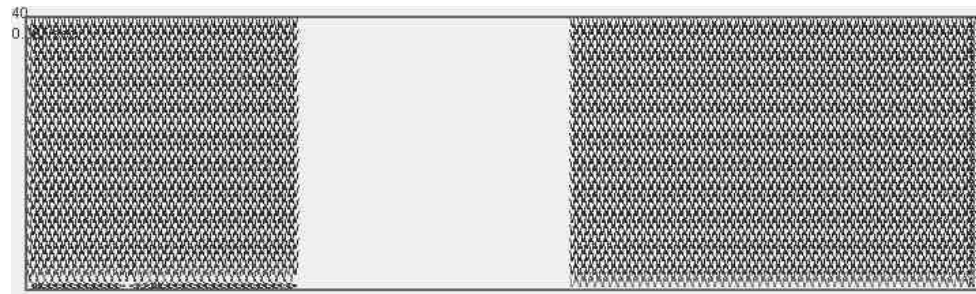


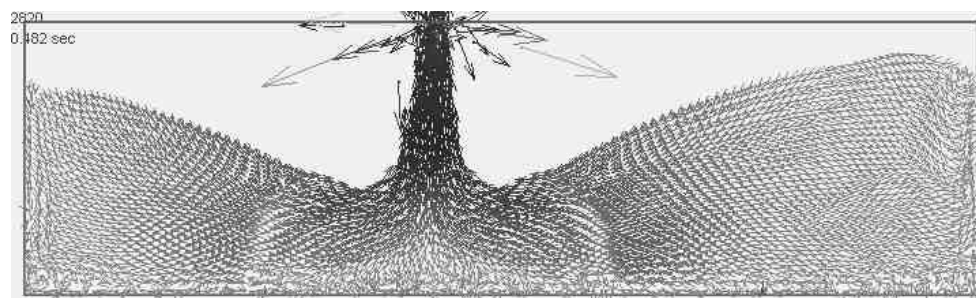
Abb. 7.3: Zusammenbrechende Flüssigkeitssäule

## 7 Weitere Anwendungen

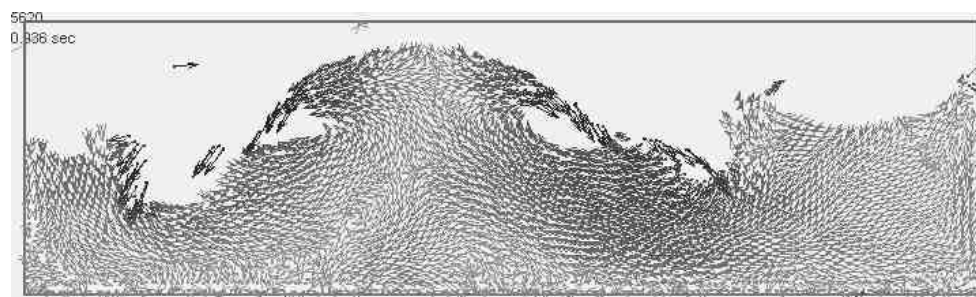
Abb. 7.4 zeigt einen ähnlichen Vorgang in einem geschlossenen rechteckigen Behälter: Links und rechts befinden sich in diesem Flüssigkeitskörper, welche dammbruchartig zusammenfallen, sich dabei aufeinander zu bewegen und beim Zusammenprall eine hohe vertikale Geschwindigkeit erreichen.



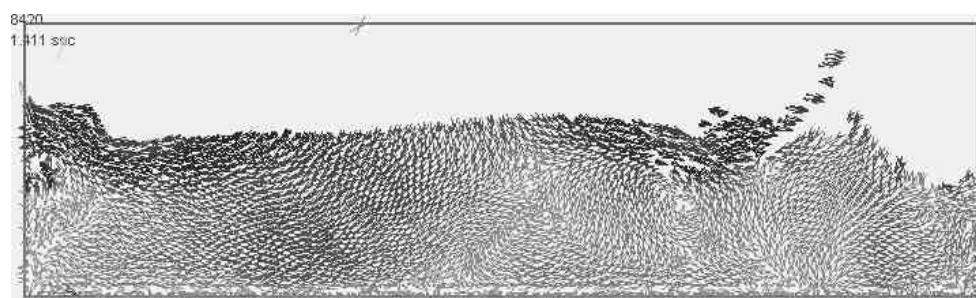
(a)



(b)



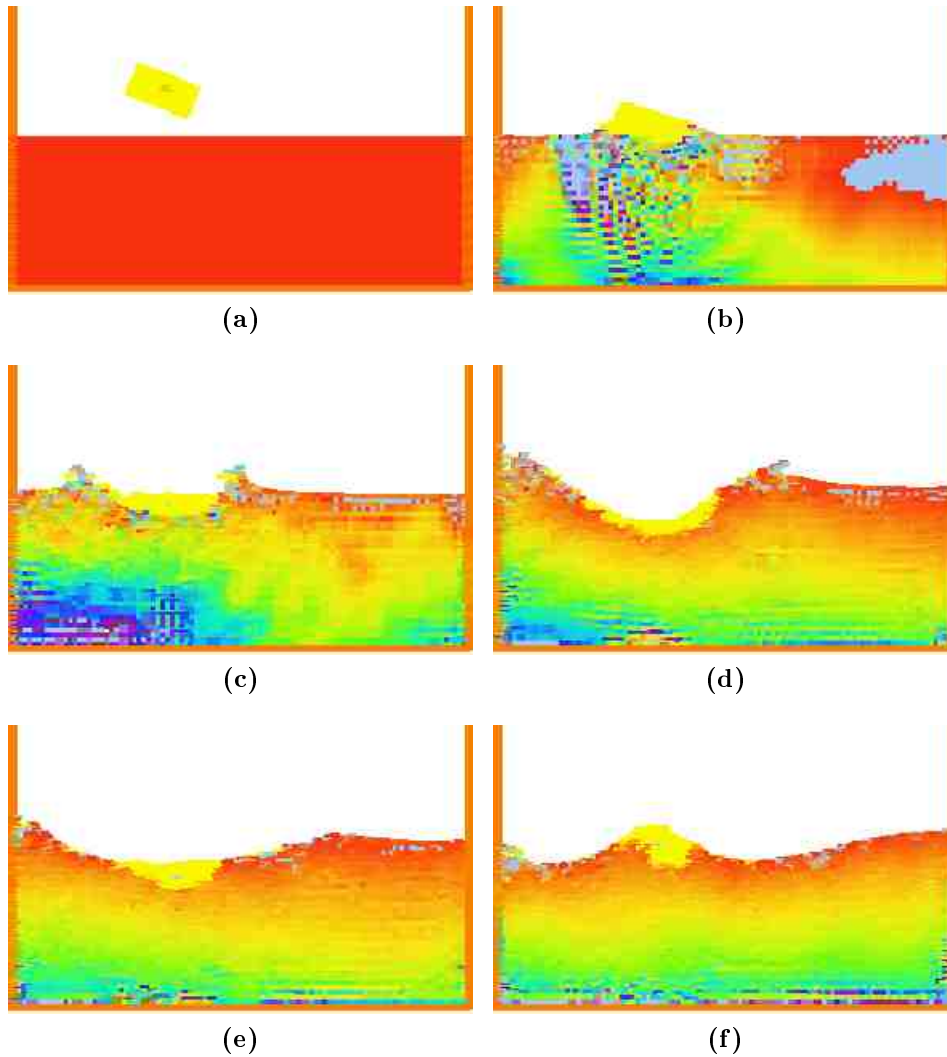
(c)



(d)

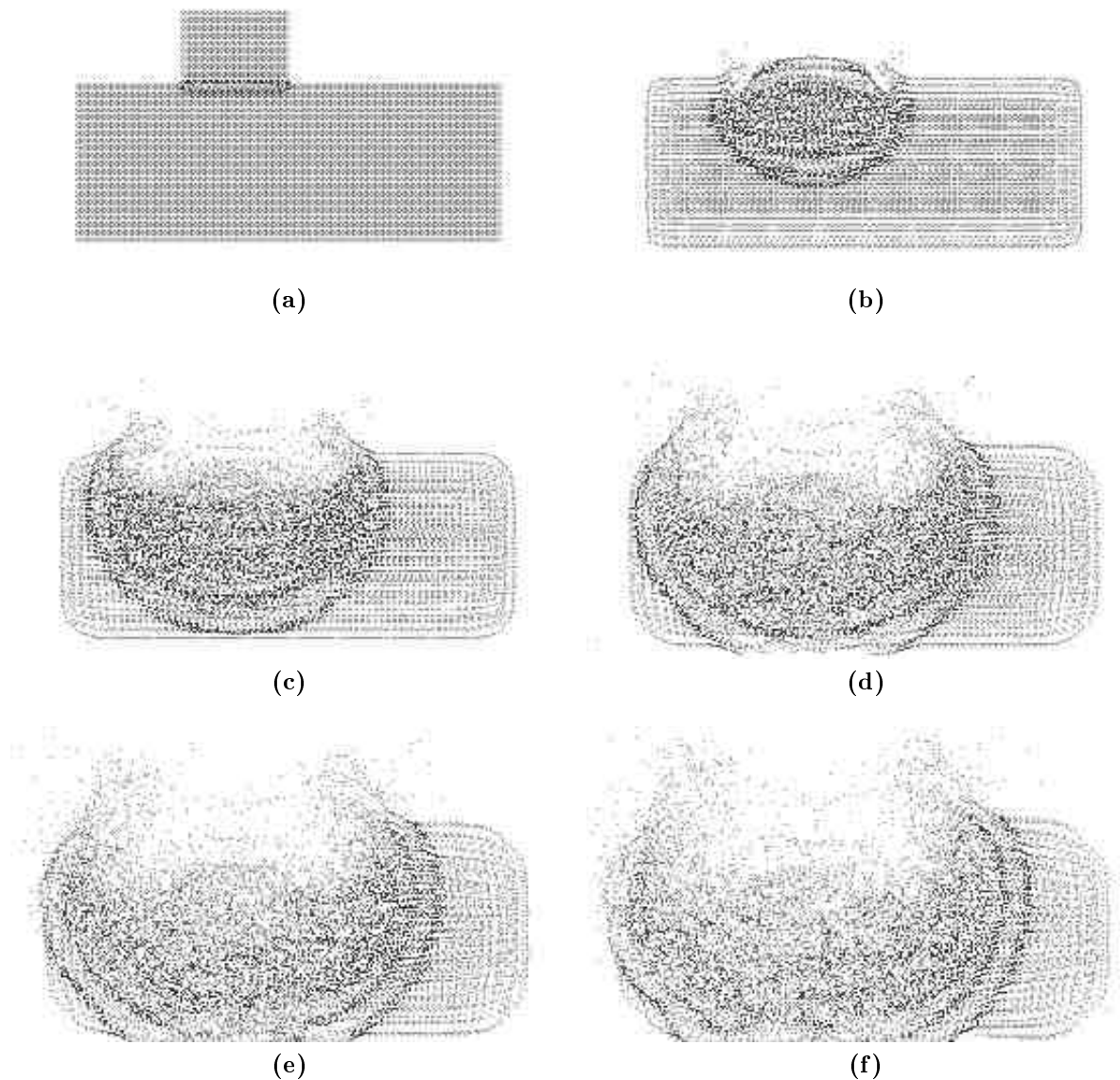
**Abb. 7.4:** Überschlagende Welle in Behälter

Obige Darstellung 7.4 zeigt dabei Geschwindigkeitsvektoren, deren Länge und Graustufung proportional zur Teilchengeschwindigkeit ist. Besonders gut ist damit die Orbitalbewegung des einzelnen Teilchens an den Wellenoberflächen zu erkennen. Ein weiteres Beispiel für die gute Wiedergabe von dynamischen Vorgängen mit freier Oberfläche stellt Abb. 7.5 dar: Ein Tropfen schlägt schräg in einen Flüssigkeitsbehälter. Deutlich ist der typische “Krater” beim Einschlag und der anschließende Wellenberg an dieser Stelle zu sehen.



**Abb. 7.5:** In Flüssigkeit eintretender Tropfen

SPH wurde auch zu Untersuchungen von Impaktvorgängen extremer Geschwindigkeiten oder Fragmentierungen von Festkörpern beispielsweise durch Explosionen eingesetzt [68]. Durch die bei angepassten Parametern frei wählbare Zeitskala sind auch schnelle Vorgänge gut zu beobachten. Abb. 7.6 verdeutlicht dies für den Einschlag eines kleineren Flüssigkeitskörpers in einen größeren mit einer Geschwindigkeit von circa  $100 \text{ m/s}$ .



**Abb. 7.6:** Kollision mit sehr hoher Geschwindigkeit

## 7.2 Bauwerksüberströmungen

Zur Risikoabschätzung einer Talsperre gehört auch, Auswirkungen von Flutwellen im Falle des Mauerbruchs zu untersuchen. Hierzu ist es notwendig, ihre Ausformung in Abhängigkeit der Topologie der Umgebung zu kennen. Auch für die Dimensionierung von Bauwerken, beispielsweise des Tosbeckens eines Wehres, ist es nötig, dass die Überströmungsformen bekannt sind. Ein Beispiel ist in Abb. 7.7 in Form der Über- und Unterströmung eines Wehrkörpers gegeben, nachdem ein oberhalb gelegener Wasserkörper plötzlich der Gravitation ausgesetzt wird.

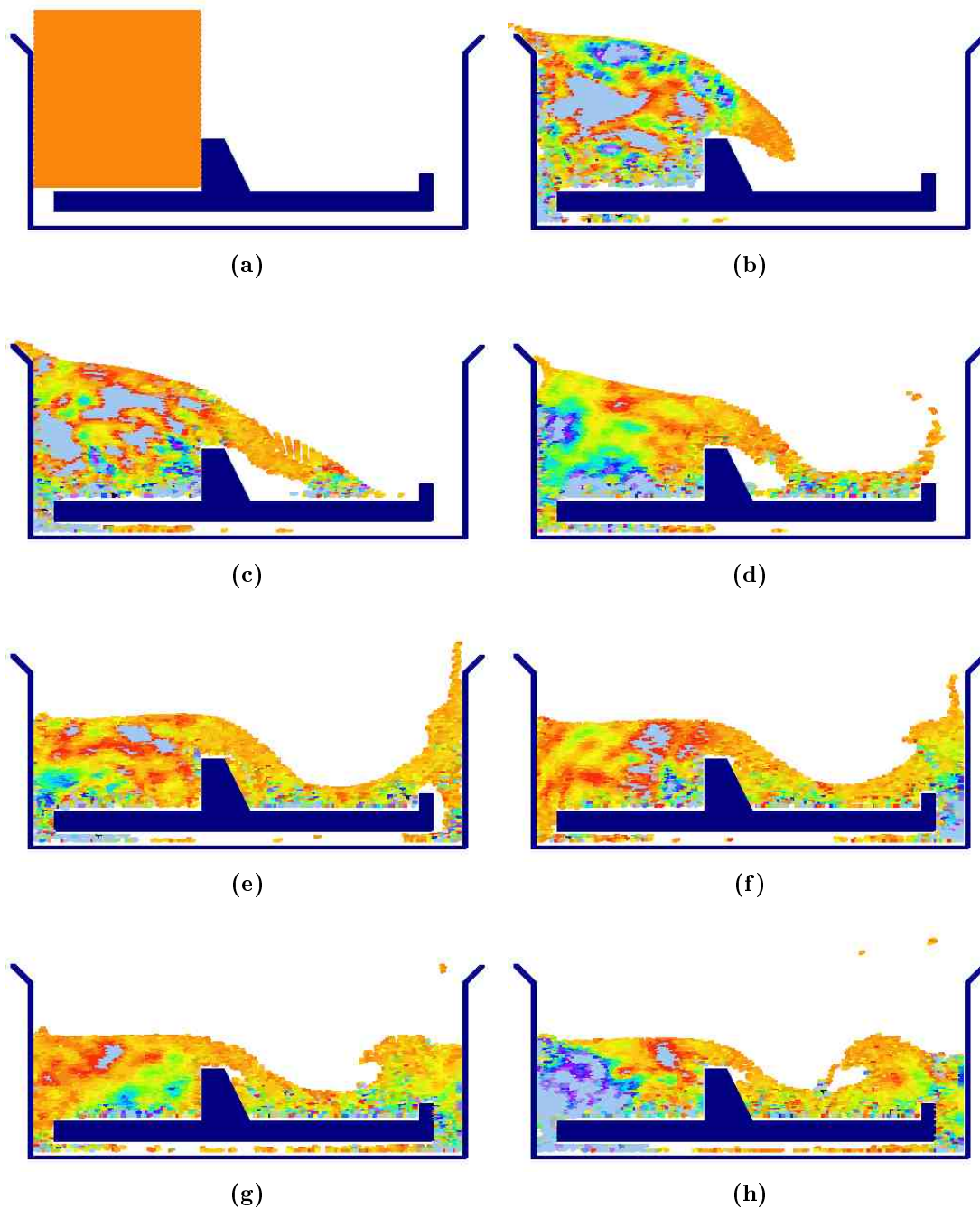
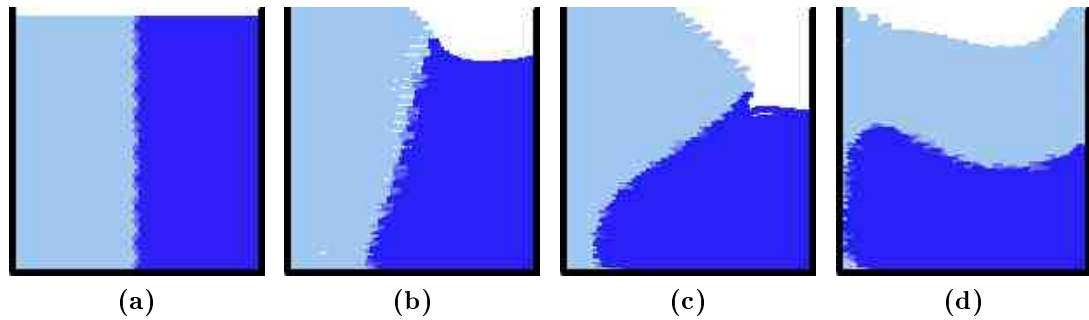


Abb. 7.7: Über- und unterströmtes Wehr

## 7.3 Dichteströmungen

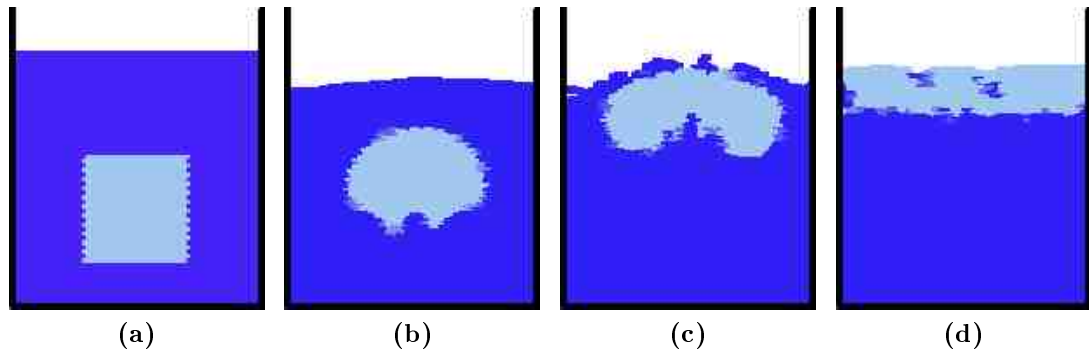
Innerfluide Strömungsvorgänge, ausgelöst durch Dichteunterschiede, sind alltäglich in den Tätigkeitsfeldern von Bauingenieuren. Man denke an Grundwasserkontaminationen, aber etwa auch an Lufteinschlüsse in Rohrleitungen. Auch für die globalen Meeres- oder

Luftströmungen sind Dichteunterschiede, hervorgerufen unter anderem durch Temperaturgradienten, ursächlich. Es liegt auf der Hand, netzfreie Methoden zur Untersuchung derartiger Vorgänge zu modifizieren und einzusetzen. Für die Bilder der in Abb. 7.8 gezeigten Simulation wurden zwei Blöcke von SPH-Partikeln senkrecht nebeneinander gelegt. Hierbei weist der linke Bereich eine nur halb so große Dichte wie die Partikel der rechten Hälfte auf. Innerhalb weniger Sekunden findet ein fast vollständiger Lagewechsel zur horizontalen Schichtung im einen Meter Kantenlänge messenden Behälter statt.



**Abb. 7.8:** Lageveränderung unterschiedlich dichter Flüssigkeiten

Eine Variation dieses Vorgangs ist in Bilderfolge 7.9 zu erkennen. Ein zentraler Bereich geringerer Dichte steigt an die Oberfläche einer umgebenden schwereren Flüssigkeit. In ähnlichen Vorgängen finden Konvektionsprozessen aufgrund thermisch bedingter Dichtedifferenzen ihre Ursache.



**Abb. 7.9:** Dichteströmung

## 7.4 Umströmungen

Strömungen in geschlossenen Gebieten waren mit FEM schon bald gut darstellbar. Problematisch ist hierbei jedoch oft das Erstellen des Netzes bei nicht trivialen Geometrien wie in Bild 7.10: In einem Kanal befinden sich dünne Hindernisse quer zur Fließrichtung von rechts nach links. Da in einer SPH-Modellierung keinerlei Rechnernetze zu editieren



sind, bietet sich das Verfahren auch für die Lösung solcher Probleme an. Die genannte Darstellung zeigt daher eine mit diesem Verfahren durchgeführte qualitative Untersuchung des Umströmungsmusters in diesem circa 12 m langen Gerinne in Abhängigkeit zum Abstand der Hindernisse. Gut zu beobachten ist die Bahn des individuellen Partikels und daher auch das Gesamtbild der Strömung. Die von den Partikeln auf die Hindernisse ausgeübte Kraft kann einfach ermittelt werden. Übertragen auf verwandte Fragestellungen kann daher etwa auch die optimale Anordnung und Ausbildung von Wasserkraft-Turbinen samt Zu- und Abführung des Triebwassers gefunden werden.

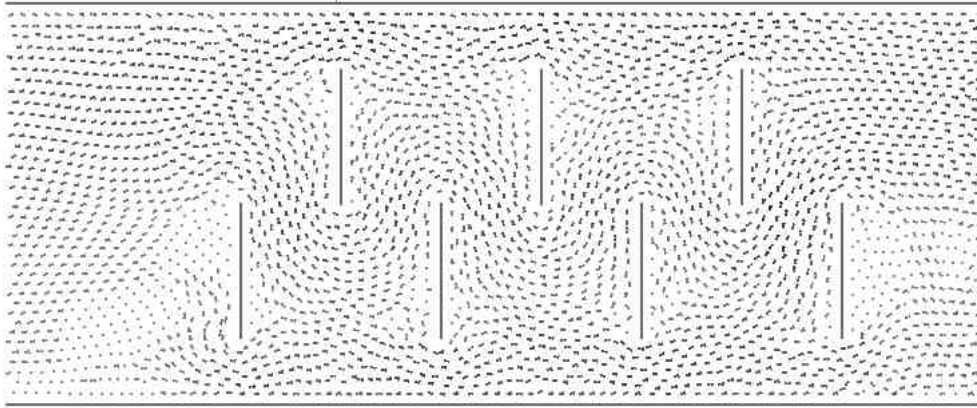


Abb. 7.10: Umströmung stationärer Hindernisse

## 7.5 Schwimmkörper

Gleichgewichtslagen, Auftriebskräfte und damit verbundenes Schwingungsverhalten schwimmender Körper in bewegter Flüssigkeit analytisch zu ermitteln, ist mit herkömmlichen Methoden äußerst schwierig. Es bietet sich daher eine Kombination des SPH-Modells als Festkörper, wie unter Abschnitt 4.12.6 beschrieben, und in originärer Flüssigkeitssimulation an. Das folgende Beispiel, Abb. 7.11, veranschaulicht, wie ein solch komplexes Zusammenspiel numerisch auf netzfreier Basis gelöst werden kann: Zwei Körper unterschiedlicher Form, einer davon hohl, fallen in ein flüssigkeitsgefülltes Becken. Sie tauchen ein, werden durch Auftriebskräfte wieder nach oben getragen und finden ihre Gleichgewichtslage, um die sie in den entstandenen Wellen schwingen.

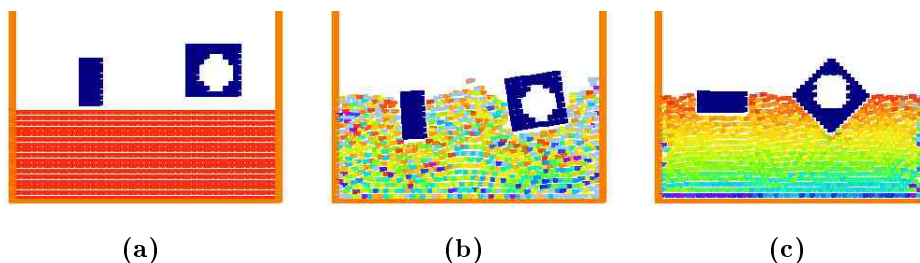
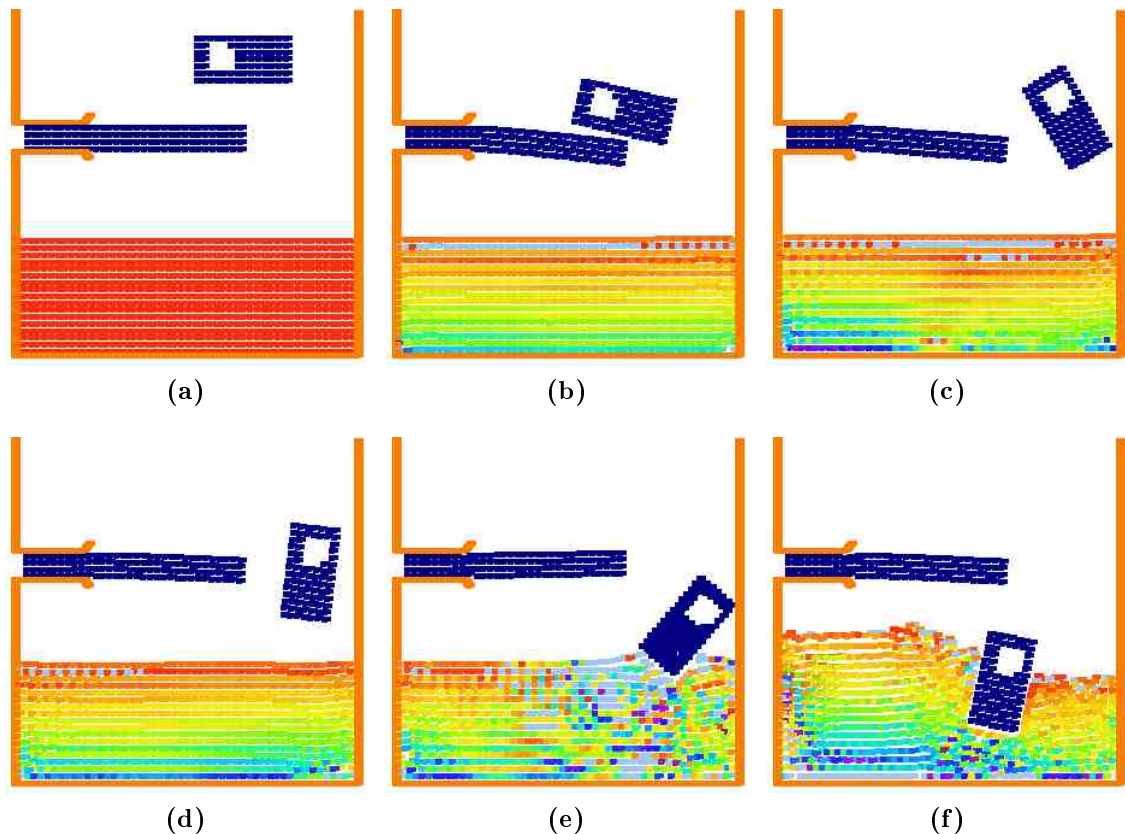


Abb. 7.11: Schwimmende Körper



Einen weiteren Schritt in die Kombination netzfreier Verfahren illustriert Abb. 7.12: Ein teilweiser hohler Festkörper schlägt auf einem eingespannten Balken auf, dreht sich durch die Kollision und fällt in die darunter liegende Flüssigkeit, in welcher er aufschwimmt. Das elastodynamische Verhalten des nachschwingenden “Sprungbretts” wurde hier mit SPH simuliert, böte sich selbstverständlich aber auch für eine Modellierung mit EFGM, wie in Kapitel 3.6 mit dem Timoshenko-Balken gezeigt, an.



**Abb. 7.12:** Kombination einer Festkörper- und Fluidsimulation

## 7.6 Mehrkörperdynamik

Für die in Abb. 7.13 dargestellte Modellierung eines einseitig fixierten, aus der Horizontalen fallenden Seils, welches mit einem stationär darunter angeordneten Festkörper kollidiert, wurden die unter Abschnitt 6.2.13 beschriebenen Bindungen für nur eine Reihe von Partikeln angewendet. Die “eindimensionale” Partikelreihe reagiert biegeweich, Zugkräfte können übertragen werden, Druckkräften weichen die Partikel durch Seitwärtsbewegung aus: Freie Drehbarkeit im Sinne eines gegenseitigen Umkreisen der Partikel ist möglich, da der entwickelte Ansatz lediglich auf Distanz-, nicht aber auf Winkeländerungen reagierend eingestellt wurde.

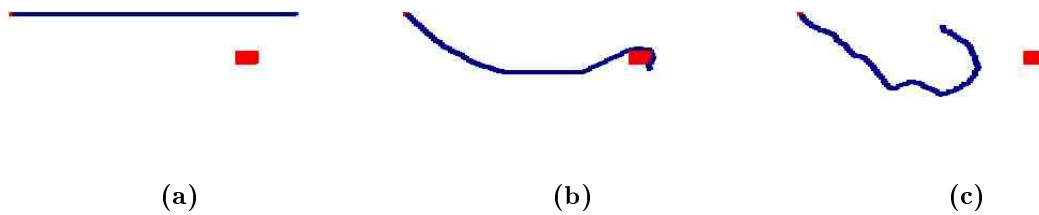
**Abb. 7.13:** Im Fall kollidierendes Seil

Abb. 7.14 zeigt eine weitere Anwendung der Festkörper-Seil-Interaktion in Form des Newton-Kugelstosspendels. Der rechtsliegende von sechs unter Gravitationswirkung zunächst ruhig an Seilen hängenden Körpern erhält einen Impuls nach links. Dieser pflanzt sich durch Kollisionen zwischen den Körpern fort, bis der gegenüberliegende Körper frei ausschwingt. Zu beobachten ist auch die zeitlich versetzte, vertikale Wellenausbreitung in den "Seilen", einfache Partikelreihen.

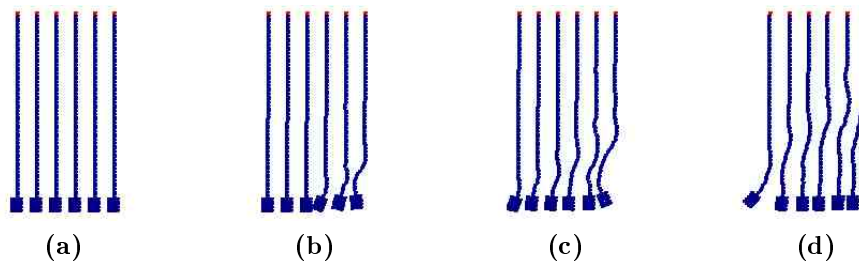
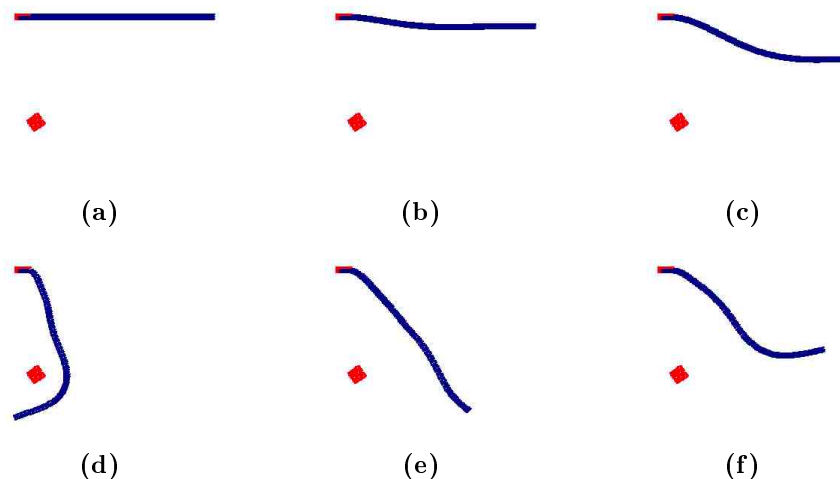
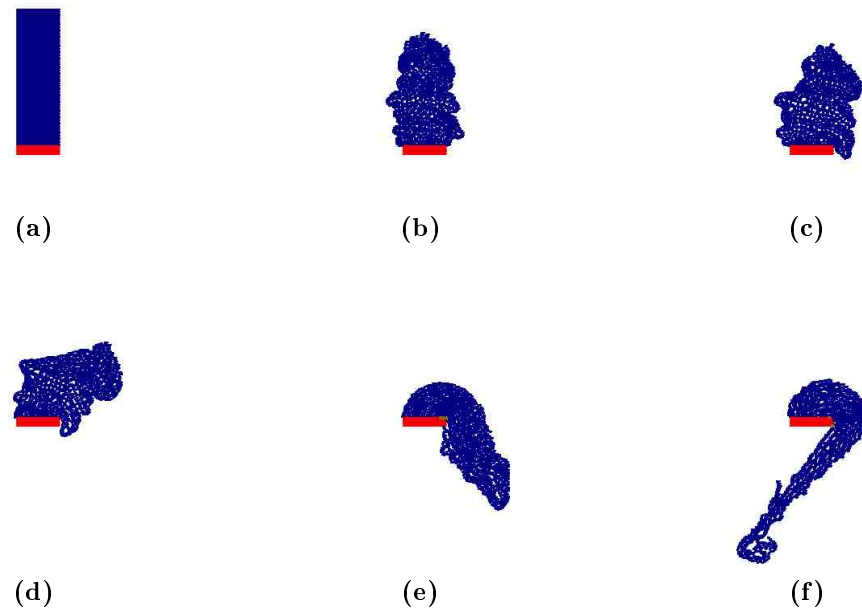
**Abb. 7.14:** Newton-Kugelstosspendel

Abb. 7.15 zeigt einen links einseitig eingespannten dünnen Balken der Stärke mehrerer, untereinander verbundener Partikellagen. Hierdurch besitzt die Struktur eine gewisse Biegesteifigkeit. Der Balken schwingt unter Gravitationseinwirkung nach unten und kollidiert mit einem fixen Körper. Deutlich sind Rück- und interne Schwingungsvorgänge zu beobachten.

**Abb. 7.15:** Dünner Balken mit Kollision

Werden hingegen einlagige Partikelketten parallel zusammengelegt, jedoch nicht wie vor untereinander verbunden, so kann das Verhalten von Faserbündeln untersucht werden. Abb. 7.16 stellt ein solches oberhalb einer fixierten Platte befestigtes Bündel dar, welches sich unter Schwerkraft aus seiner zunächst senkrecht aufgestellten Position nach unten ausbreitet. Eine denkbare Anwendung in erweiterter Form ist etwa die Untersuchung des Einflusses von Wasserpflanzen auf die Fließgewässerhydraulik. Oder umgekehrt, eine Analyse der Strömungen in bewachsenen Gewässerbereichen, welche maßgebliche Faktoren beispielsweise für Fischhabitate sind.



**Abb. 7.16:** Faserbündel unter Schwerkraft

In den Bauingenieurwissenschaften treten oft Kombinationen von Strukturen oder Tragwerkelementen auf, die ein an sich schon komplexes dynamisches Verhalten zeigen. Selbst mit modernen numerischen Methoden wie dem Verfahren der Finiten Elemente erfordert es einen enormen Aufwand, etwa eine dynamische Analyse komplexer Bauwerke durchzuführen. Das Zusammenspiel völlig unterschiedlich gearteter Teile des Bauwerks ist dann oft nur noch schwer ohne ebenfalls kostspielige Versuche vorhersagbar. Netzfreie Methoden können durch die einfach mögliche Implementierung unterschiedlichster Strukturen und deren Kombination, wie vorhergehend gezeigt, eine vorteilhafte Alternative darstellen. Abb. 7.17 zeigt etwa die Druckspannungen und die stark überzeichneten Verformungen einer Kombination aus Festkörper- und Seilkonstruktion in Gestalt einer schematischen Brücke, unten und rechts an Festlagern fixiert. Unter Schwerkraft verformt sich die Brücke, die Seile beginnen zu wirken, und es stellt sich ein Zurückschwingen ein. Die Berechnung erfolgte durch ein entsprechend angepasstes SPH-Modell mithilfe des entwickelten Programmcodes. Neben der Elementfreien Galerkin Methode ist das Verfahren der Smoothed Particles Hydrodynamics offensichtlich ebenfalls zur Untersuchung auch derart komplexen Verhaltens geeignet.

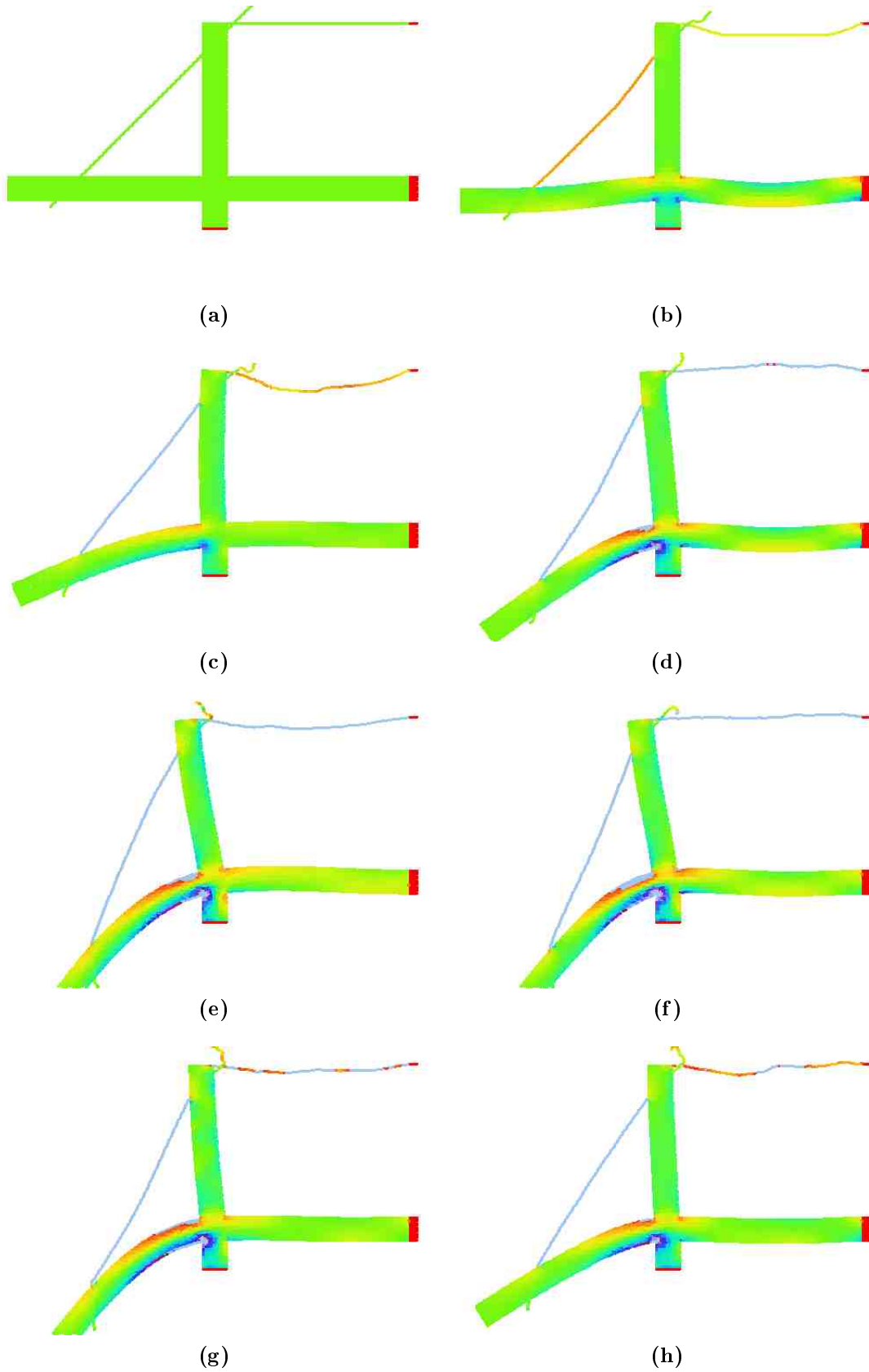


Abb. 7.17: Schwingende Seilbrücke



## 8 Abschließende Betrachtung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, durch Anwendung neuer numerischer Verfahren die rechnerische Behandlung wasserbaulicher und hydromechanischer Problemstellungen zu vereinfachen und für weitere Gebiete zu erschließen. Unter einer Vereinfachung ist in diesem Sinne der Wegfall für den anwendenden Ingenieur aufwändiger Bearbeitungsschritte des numerischen Modells zu verstehen. Erschlossen werden mit den vorgestellten Methoden Bereiche, in denen mit herkömmlichen Methoden eine Berechnung zu zeitintensiv wäre oder aufgrund des Modellkonzepts prinzipiell nicht möglich ist. Für die Verwirklichung der genannten Ziele wurden netzfreie Verfahren vorgeschlagen. Da diesen Verfahren im Gegensatz zu gebräuchlichen Methoden kein Rechnernetz zugrunde liegt, entfallen viele an eine solche starre Konnektivität der Knoten gekoppelte Schwierigkeiten. Die Problematik eines Rechnernetzes liegt in dessen Kopplung an die Körpergeometrie: An den Körperändern folgt das Netz dem Umriss des untersuchten Gebiets. Dies wirkt sich bei üblichen Modelldimensionen auf die gesamte Netzstruktur im Körperinneren aus. Gleichzeitig ist die numerische Präzision der Abbildung von Gradienten direkt abhängig von der Netzdichte. Damit ergibt sich zusätzlich zur geometrischen Abhängigkeit eine Beziehung der Netzstruktur zum Kräfteverlauf, welcher zum Zeitpunkt der Netzgeneration noch nicht bekannt ist. Netzfreie Methoden weisen diese Kopplungen nicht in dieser unmittelbaren Form auf. Durch den anders gearteten Ansatz der Bildung der Stützstellen-Konnektivität kann die Verteilung der Knoten unabhängiger von Körpergeometrie und Gradienten erfolgen. Damit sind netzfreie Methoden prädestiniert für einen Einsatz im Rahmen wasserbaulicher Betrachtungen, in welchen oftmals komplexe Körpergeometrien anzutreffen sind, sei es die Struktur des Bauwerks selbst oder der Flüssigkeitskörper des Wassers. Verschiedene netzfreie Methoden weisen unterschiedlich gute Eignungen für bestimmte Problemstellungen auf. Bestimmte Verfahren eignen sich besonders zur numerischen Modellierung von Festkörpern, andere bilden das Verhalten von Flüssigkeiten besonders gut ab. Daher wurde die Interaktion zwischen Festkörper und Fluid durch die Kombination zweier verschiedener netzfreier Verfahren implementiert.

Die Elementfreie Galerkin Methode (EFGM) besitzt aufgrund ihres speziellen Ansatzes der Herstellung der Knoten-Konnektivität besonders günstige Voraussetzungen, auch mit unregelmäßig verteilten Knoten hohe Genauigkeiten zu erreichen. Dieser spezielle Ansatz unter Verwendung des Verfahrens der Moving Least Squares gestattet auch die einfache Abbildung von Diskontinuitäten. DIN 19700 sieht für den Standsicherheitsnachweis von Talsperren eine Untersuchung der Bauwerksreaktion im Erdbebenfall bezüglich

der Länge eines etwaigen in dieser Bemessungssituation entstehenden Risses vor. Da mithilfe der Elementfreien Galerkin Methode der Riss eines Festkörpers aufgrund der genannten Eigenschaft der Methode besonders einfach numerisch implementiert werden kann, wurde dieses Verfahren im Zuge der vorliegenden Arbeit für die entsprechenden Modellierungen angewendet. Mithilfe dieses Ansatzes wurde eine Software entwickelt, welche eine Aussage zur Entwicklung eines Risses in einem Talsperrenkörper hinsichtlich seiner geometrischen Ausprägung zulässt. Dies ist möglich ohne eine aufwändige Neuvernetzung für jedes Stadium des fortschreitenden Risses, wie sie für eine solche Betrachtung mithilfe der Methode der Finiten Elemente nötig wäre. Damit wurde das Ziel einer Vereinfachung gegenüber gebräuchlichen Methoden erreicht. Entsprechende Untersuchungen können beschleunigt und somit wirtschaftlicher stattfinden. Unterstützend zeigte sich eine besonders hohe Stabilität des Verfahrens.

In wasserbaulichen Untersuchungen spielt das Verhalten der Flüssigkeit naturgemäß eine zentrale Rolle. Gerade aber die numerischen Behandlungen freier Oberflächen, der Bildung isolierter Wasservolumina und des örtlich veränderlichen Kontakts zwischen Fest- und Flüssigkeitskörper stellten bisher hohe Hürden für eine numerische Nachbildung dar. Diese Schwierigkeiten sind im netzbasierten Ansatz begründet. Wo immer die Konnektivität der Knoten hierüber nicht mehr ausreichend gebildet werden kann, wird ein solches Modell instabil. Eine Vernetzung durch geradlinige, zwangsweise verbundene Elemente steht in einem gewissem Widerspruch zur Natur einer Flüssigkeit. Netzansätze funktionieren bei einfachen Geometrien und geringen Verschiebungen. Flüssigkeiten jedoch haben extrem komplexe Strukturen und ebenso extreme Bewegungsabläufe. Die Methode der Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) besitzt einen Ansatz, der näher an der Wirklichkeit eines solchen Mediums liegt: Sie bildet eine Flüssigkeit durch frei bewegliche Partikel ab. Zwar liegt die räumliche Dimension dieser Partikel unvergleichbar über den molekularen Strukturen einer Flüssigkeit, dennoch wird aufgrund einer dem Modell eigenen räumlichen Glättung der Partikel ein sehr naturnahes Verhalten erreicht. Aufgrund dieser besonderen Eignung wurde dieses Verfahren als zweite Methode für die Modellierungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzt. Vorwiegend wurde damit das Verhalten des Flüssigkeitskörpers eines Talsperrenreservoirs analysiert, um eine Aussage zum dynamischen Erdbebendruck zu erhalten, wie nach DIN 19700 gefordert. Jedoch gibt es mittlerweile auch Entwicklungen, die es ermöglichen, SPH zur Simulation von Festkörpern einzusetzen, wie auch in der vorliegenden Arbeit in kompakter Form vorgestellt. Damit wurden Ergebnisse erzielt, die augenscheinlich gut mit in der Realität zu beobachtenden Bruchvorgängen übereinstimmen.

Bei dünnwandigen Körpern kann das SPH-Verfahren hier aufgrund der ungünstigen Anordnung der Knoten in nur wenigen Lagen selbst der EFG-Methode überlegen sein. Modellierungen wie der vorgestellte, dünne, elastische, flüssigkeitsgefüllte Behälter, Abb. 7.1, sind mit anderen, auch netzfreien Methoden aufgrund des völlig unterschiedlichen Verhaltens der beteiligten Materialien viel schwieriger zu implementieren. Im SPH-Modell bedarf es dazu nur der Justage entsprechender Partikelparameter. Keine speziellen weiteren numerischen Algorithmen zum Bruchfortschritt, zur Bewegung isolierter Körperteile oder Ähnlichem sind nötig. Selbst die Behandlung des erneuten

Kontakts bereits getrennter Einheiten, in der Methode der Finiten Elemente auch mit speziellen Kontaktelementen nur schwer in den Griff zu bekommen, bedarf nur geringem Mehraufwands. Auch komplexere Haft-, Diffusions- oder Penetrationsvorgänge sind denkbar.

Die Konvergenz der Methode der Finiten Elemente ist nachgewiesen. Dies steht für viele netzfreie Methoden noch aus, auch wenn die in dieser Arbeit präsentierten Vergleiche mit analytischen Verfahren die hohe zu erreichende Genauigkeit zeigen. Gerade für die Methode der Smoothed Partikel Hydrodynamics mit ihren zahlreichen Parametern, beispielsweise zur Geschwindigkeitskorrektur, kann ein solcher Nachweis auch nur für definierte Konstellationen gültig sein. Im Allgemeinen muss die Kalibrierung des numerischen Modells für den betreffenden Fall neben analytischem Vergleich gegebenenfalls durch Versuche erfolgen. Darüber hinaus enthebt auch eine grundsätzlich nachgewiesene Konvergenz den Anwender nicht von seiner Sorgfaltspflicht: Ohne Weiteres ist es möglich, beispielsweise mit der Methode der Finiten Elemente etwa durch ungeeignete Elementgeometrien völlig realitätsferne Ergebnisse zu erhalten. Dennoch wird einer Berechnung, welche mithilfe der Finiten Elemente entstanden ist, im Allgemeinen großes Vertrauen entgegengebracht. Diese breite Akzeptanz dürften die vorgestellten neuen Verfahren zunächst nicht genießen. Aufgrund der kurzen Zeitspanne seit der Innovation nicht netzbasierter Methoden und dem daher unterschiedlichen Entwicklungsstand im Vergleich zu herkömmlichen numerischen Verfahren sind bisher nur sehr wenige Softwarepakete netzfreier Methoden erhältlich. Eine Anwendung ist im heutigen Stadium daher in vielen Fällen nur im wissenschaftlichen Bereich praktikabel. Jedoch ist es nur eine Frage der Zeit, bis ausgereifte Pakete erhältlich sein werden.

Für die in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungen wurde eine einfache Kopplung der beiden netzfreien Methoden EFGM und SPH implementiert. Diese nutzt direkt das identische Knoten-Wichtungskonzept der beiden Verfahren, um deren bidirektionale Interaktion zu ermöglichen. Hierfür wurde eine hybride, also in beiden Teilmodellen existente Interaktionszone eingeführt. Diese beruht auf Verfahren, wie sie auch üblicherweise zur Behandlung der Ränder im jeweiligen Modell eingesetzt werden, dadurch hält sich der Aufwand in Grenzen. Die Kopplung ist robust gegenüber variablen Randbedingungen wie veränderlichen Zonen benetzten oder trockenen Zustandes. Erkauft wird diese Robustheit zum Preis eines hohen Rechenaufwandes. Während dies für Smoothed Particles Hydrodynamics ohnehin der Fall ist, so wird damit in gewissem Maß die Ausnutzung einer der wesentlichen Vorteile der Elementfreien Galerkinmethode, nämlich die mögliche vergleichsweise niedrige Knotendichte, eingeschränkt. Jedoch dürfte dieser Nachteil durch den geringen zeitlichen Aufwand zur Implementierung der Schnittstelle mehr als aufgewogen werden.

Die Elementfreie Galerkin Methode zeichnet sich durch größere Unabhängigkeit der Knotenverteilung, die nicht gegebene Notwendigkeit einer Vernetzung, und besonders einfache Implementierung von Diskontinuitäten wie Rissen gegenüber beispielsweise der Methode der Finiten Elemente aus. All dies ist in der besonderen Konstruktion ihrer Ansatzfunktionen mithilfe des Verfahrens der "Moving Least Squares" begründet. Man könnte die Elementfreie Galerkin Methode als eine Anpassung der Finiten Elemente Me-



thode auf die Verwendung von Moving Least Squares-Ansatzfunktionen bezeichnen. Damit ist das Verfahren prädestiniert für Problemstellungen komplexer Geometrie, großer Verschiebungen, auftretender Risse. Alle genannten Punkte stellen mit herkömmlichen Methoden nicht nur im Bereich des Wasserbaus hohe Hürden da. Die Elementfreie Galerkinmethode ist daher als universelles Werkzeug insbesondere zur Festkörpermodellierung anzusehen, findet aber auch Einsatz beispielsweise in der Modellierung von Strömungen in Gerinnen mit freien Oberflächen [43]. Sie stellt damit eine vorteilhafte, universell anwendbare Alternative zur Methode der Finiten Elemente dar. Die Smoothed Particles Hydrodynamics eröffnen insbesondere auf dem Gebiet der Hydromechanik Möglichkeiten, die vor wenigen Jahren noch nicht denkbar erschienen. Erstaunlich ist die Einfachheit, mit der dies erreicht wird. Begründet werden kann dies sicher zum Teil damit, dass der Ansatz frei beweglicher Partikel viel eher den realen Vorgängen einer Flüssigkeit entspricht, als etwa ein starres Netz Finiten Volumen. Die Methode eignet sich für alle Flüssigkeitssimulationen, insbesondere mit freier Oberfläche und komplexen Geometrien. In der Summe ihrer Eigenschaften gibt es keine direkt vergleichbare Methode.

Begründet durch die relativ kurze Dauer ihrer Existenz sind bisher kaum Software-Pakete netzfreier Methoden mit vergleichbarem Umfang zu erhalten, wie dies bei den Methoden der Finiten Elemente oder Finiten Volumina der Fall ist. Für den wissenschaftlichen Einsatz wird daher in den meisten Fällen auf Plattformen wie *MATLAB* [52] zurückgegriffen werden, welche umfangreiche Infrastruktur zu Entwicklung und Visualisierung der mathematischen Basis dieser Modelle bereitstellen. Oft wird auch auf selbst erstellten Programmcode zurückgegriffen werden müssen, wie dies auch für die vorliegende Arbeit der Fall war. Nach Wissen des Autors existiert derzeit mit *LS-DYNA* [37] nur ein einziges proprietäres Softwarepaket, welches auf der Kombination netzfreier Methoden basierende Module beinhaltet und für kommerziellen Einsatz geeignet ist.

Die Elementfreie Galerkin Methode hat dennoch trotz ihrer noch kurzen Geschichte einen hohen Entwicklungsstand erreicht. Für viele speziellere Anwendungen wurden zahlreiche Lösungen vorgeschlagen. Das hauptsächliche Hindernis, welches einem Einsatz in Ingenieurbüros derzeit noch entgegensteht, ist einerseits der geringe Bekanntheitsgrad, andererseits die mangelnde Peripherie: Während es heute bei kommerziellen FEM-Paketen selbstverständlich ist, CAD-Daten direkt zu übernehmen, existieren für die Elementfreie Galerkinmethode praktisch keine solchen Schnittstellen, wodurch ihr Potential zu besonderer Wirtschaftlichkeit noch nicht zur Geltung kommen kann. Auch dürfte die Verwendung einer solch neuen Methode auf Skepsis bei Auftraggebern stoßen. Aufgrund der Nichtverfügbarkeit anwenderfreundlicher Software setzt der Einsatz der Elementfreien Galerkin Methode vergleichsweise umfangreiche Kenntnisse des Anwenders voraus.

Unter Einsatz der genannten netzfreien Methoden eröffnen sich zahlreiche Perspektiven: Risspfade- und Längen lassen sich mit den besprochenen Methoden mit bestimmter Genauigkeit vorhersagen. Der Gedanke, einen Riss durch eine hierdurch örtlich bestimmbare bauliche Maßnahme zu verhindern oder sogar aufzuhalten, liegt auf der Hand. Denkbar sind versteifende Elemente, die die Vertikalbewegung der Rissflanken unterdrücken. Diese Versteifungen müssen hinsichtlich ihrer räumlichen Ausdehnung so bemessen sein, dass die gesamte Rissenergie während dessen Hineinwanderns in das Element über eine be-

stimmte Länge verzehrt werden kann. Kann nachgewiesen werden, dass im Extremfall zu erwartende Risse durch diese Prophylaxe innerhalb zugelassener Grenzen terminiert werden können, kann dies zu ökonomischeren Bauformen oder Sanierungsvarianten führen. Weitere Untersuchungen des Modells hinsichtlich seiner Zuverlässigkeit der Risspfadprognose anhand von Experimenten sind dafür Voraussetzung.

SPH bietet sich durch seine gute Fähigkeit, Fluide mit freier Oberfläche zu simulieren, an, Hochwasserverläufe und daraus resultierende Überschwemmungslagen vorherzusagen. Datenbasis ist die Topographie der Flüsse und umliegender Gebiete, sowie örtlich vorgegebene initialer Abflussmengen und -dauern beteiligter Gewässer. Aufgrund der hohen Partikelzahlen und der damit geforderten Rechenkapazitäten sind beim augenblicklichen Stand der Technik hierzu jedoch Höchstleistungsrechner erforderlich. An dieser Stelle wäre das Ziel weiterer Entwicklungen, den bei netzfreien Methoden naturgemäß höheren numerischen Aufwand durch effiziente Algorithmen zu verringern. Denkbar sind beispielsweise dynamische Anpassungen: An Orten starker Gradienten ist höhere Präzision vonnöten als in Bereichen gleichmäßigerer Ausprägung. Das Modell der Smoothed Particles Hydrodynamics lässt die Modellierung von praktisch beliebigen Strömungen zu. Damit eröffnen sich breite Anwendungsfelder im Wasserbau: Genannt seien beispielsweise hydrodynamische Untersuchungen an Komponenten einer Wasserkraftanlage, welche bisher aufwändigen FEM-Simulationen vorbehalten waren: Turbineneinlauf, Druckrohrleitung, Turbinenlaufrad, Saugschlauch und Wiedereintritt in den Fluss. Hierbei kann auch die Interaktion zwischen Fluid und umgebender Struktur besonders betrachtet werden. Ein interessanter Punkt ist etwa die Analyse des Verhaltens mit Hilfe elastischer umhüllender Materialien "weich" ausgeführten Lagerungen von Spiralgehäusen für Francisturbinen im Beton der Wasserkraftanlage. Moderne Ausführungen von solchen Spiralgehäusen weisen im Inneren Strukturen auf, welche Turbulenzverluste minimieren sollen. Auch für Untersuchungen hinsichtlich der Optimierung dieser Strukturen ist SPH aufgrund seiner Fähigkeit der Abbildung auch höchst komplexer Strömungen geeignet. Ausreichende Rechenkapazität vorausgesetzt, beispielsweise durch Parallelrechner oder Cluster, ist es denkbar, auch die komplizierten Strömungsvorgänge Rauer Rampen nachzubilden. Damit könnten Versuchsreihen zur Ermittlung kritischer Fließgeschwindigkeiten unterstützt werden. Aber auch die Überströmung der Hochwasserentlastungsanlage oder einer Fischtreppe mit ihren extrem wechselnden Strömungszonen sind ideale Anwendungsgebiete. Eine detaillierte Modellierung von derart komplexen Strömungen erscheinen erst mit SPH unter vertretbarem Aufwand realisierbar. Auch die Modellierung turbulenter Bäche auf dem Gebiet der Ökohydraulik rückt in den Bereich des Machbaren. Detailliert können Fließgeschwindigkeiten und Wassertiefen dargestellt werden. Zusammen mit weiteren Parametern wie dem Sohlsubstrat kann auf dieser Grundlage mit einem Habitatmodell, beispielsweise dem an der Universität Stuttgart entwickelten Softwarepaket *CASiMiR* [42], der Einfluss von Abfluss- und Strukturänderungen auf die Lebensräume von Fischen, Invertebraten und Makrophyten vorausgesagt werden. Dies kann wiederum im Rahmen einer Umweltverträglichkeitsprüfung einer Wasserkraftanlage angewendet werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS, offizielle Internetpräsenz, [www.ansys.com](http://www.ansys.com) (27.07.2007)
- [2] Airy, G. B.: *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Band 6 (1838), S. 379—402
- [3] Argyris, J.H.; Dunne, P.C.: *Structural Analysis, Structural Principles and Data, Part 2*, Handbook of Aeronautics No. 1, The New Eva Publ. Co. Ltd, London (1952)
- [4] Argyris, J. H.; Kelsey, S.: *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, London (1960)
- [5] Argyris, J. H.; Kelsey, S.; Kamel, H.: *Matrix methods of structural analysis — a precis of recent developments*, AGARDograph 72, Veubeke, Pergamon Press, Oxford, (1964), S. 1–164
- [6] Argyris J. H.: *Continua and discontinua, Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio (1965), S. 10–170
- [7] Argyris, J.H.: *Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method*, J. R. Aeronaut. Tech. Note 69 (1965), S. 711-713
- [8] Barlow, G.: *Hexagonal Territories*, Animal Behaviour, 22 (1974), S. 876-878
- [9] Barth, T.; Ohlberger, M.: *Finite volume methods: foundation and analysis*, in *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1, Fundamentals*, John Wiley and Sons Ltd (2004), S. 439-474
- [10] Belytschko, T.; Lu, Y. Y.; Gu, L.: *Element-free Galerkin methods*, International Journal of Numerical Methods Engineering, 37 (1994), S. 229-256
- [11] Belytschko, T.; Tabbara, M.: *Dynamic fracture using Element-Free Galerkin Methods*, Int. Journal f. Numerical Methods in Engineering, Vol. 39 (1996), S. 923-938
- [12] Belytschko, T.; Dolbow, J.: *An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method*, Archives of Computational Methods in Engineering, 5 (3) (1998), S. 207-241
- [13] Belytschko, T.; Organ, D.; Gerlach, C: *Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 187 (2000), S. 385-399

- [14] Benz, W.; Asphaug, E.: *Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics*, Computer Physics Communications 87, Elsevier (1995), S. 253-265
- [15] Bower, A.: *EN222 Mechanics Of Solids, Lecture Notes*, Division of Engineering, Brown University Providence
- [16] Brownlee, R.; Houston, P.; Levesley, J.; Rosswog, S.: *Enhancing SPH using Moving Least-Squares and Radial Basis Functions*, Algorithms for Approximation, Proceedings of the 5th International Conference, Chester (2005)
- [17] Budiansky, B.; Rice, J. R.: *Conservation Laws and Energy-Release Rates*, Journal of Applied Mechanics, 40 (1973), S. 201-203
- [18] Buehler, M. J.; Abraham, F. F.; Gao, H.: *Hyperelasticity governs dynamic fracture at a critical length scale*, Nature, Vol. 426, 13 (2003), S. 141-146
- [19] Chakrabarti, P.; Chopra, A.K.: *Hydrodynamic effects in earthquake response of gravity dams*, ASCE J. Stuct. Div. (1974), S. 1211-1224
- [20] Chen, Y.; Lee, J. D.; Eskandarian, A.: *Meshless Methods in Solid Mechanics*, Springer (2006)
- [21] Chwang, A.T.; Hausner, G.W.: *Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes. Part 1 : Momentum method*, J. Fluid Mech. 87 (1978), S. 335-341
- [22] Colagrossi A.; Landrini M.: *Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics*, Journal of Computational Physics 191 (2004), S. 448-475
- [23] Collar, A.R.: *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations*, The University Press Cambridge (1938)
- [24] Curbach, M.: *Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten*, Schriftreihe Institut für Massivbau u. Baustofftechnologie, Heft 11, Dissertation Universität Karlsruhe (1987)
- [25] DIN 19700: *Stauanlagen*, Beuth Verlag, Berlin (2004)
- [26] Dolbow, J.: *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*, Ph.D. Thesis, Theoretical & Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL (1999)
- [27] Du, J.; Yon, J.H.; Hawkins, N.M.; Arakawa, K.; Kobayashi, A.S.: *Fracture process zone for concrete for dynamic loading*, ACI Mater. J. 89(3) (1992), S. 252-258
- [28] Engineering Fundamentals, Internetpräsenz: <http://www.efunda.com>, Rev. 03 (12.07.2007)

- [29] Felippa, C.A.: *Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007) - Lecture Notes, Fall 2006*, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder (2006)
- [30] Frazer, R.A.; Duncan, W.J.; Collar, A.R.: *Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations*, Cambridge N.Y. (1947)
- [31] Freund, L.B.: *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, New York (1990)
- [32] Fortune, S. J.: *A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams*, Algorithmica (1987), S. 153-174
- [33] Giesecke J.; Mosonyi, E.: *Wasserkraftanlagen - Planung, Bau und Betrieb*, Springer, Berlin, 4. Auflage (2005), 830 Seiten
- [34] Gingold R.A.; Monaghan J. J.: *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spheric stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomic Society 181 (1977), S. 375-389
- [35] Grady, D. E.; Kipp, M.E.: *Continuum Modelling of Explosive Fracture in Oil Shale*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 17 (1980), S. 147-157
- [36] Griffith, A.A.: *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical Transactions, Series A 221 (1920), S. 163-198
- [37] Hallquist, J. O.: *LS-DYNA Theory Manual - November 2005*, Livermore Software Technology Corporation (2005)
- [38] Irwin, G.R.: *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics 24 (1957), S. 361-364
- [39] Irwin, G.R.: *Fracture*, in: Flügge, S. (Hrsg.) *Handbuch der Physik, Band VI: Elastizität und Plastizität*, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958)
- [40] Irwin, G.R.; Hiroshi Tada; Paris, P. C.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, American Society of Mechanical Engineers, 3rd edition (2000)
- [41] Jones, R.E.: *A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis*, AIAA Journal 0001-1452 vol.2 no.5 (1964), S. 821 - 826
- [42] Jorde, K.: *Ökologisch begründete, dynamische Mindestwasserregelungen bei Ausleitungskraftwerken*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau, Universität Stuttgart, Heft 90, Eigenverlag, Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart (1996)
- [43] Kanzow, U. M.: *Beschreibung des Fließwiderstandes in der numerischen Berechnung von Gerinnen mit extremer relativer Rauheit*, Dissertation, Bauhaus Universität Weimar (2004)

- [44] Lancaster, P.; Salkauskas, K.: *Surfaces generated by moving least squares methods*, Math. Comp. 37 (1981), S. 141-159
- [45] Lawn, B.; Wilshaw, R.: *Indentation fracture: Principles and Applications*, I. Mater. Sc. 10 (1975), S. 1049-1081
- [46] Li, Shofan; Liu, Wing Kam : *Meshfree Particle Methods*, Springer (2004)
- [47] Liu, M.B.; Liu, G.R.; Lam, K.: *Investigations into water mitigations using a meshless particle method*, Shock Waves 12(3) (2002), S. 181-195
- [48] Liu, G.R.; Liu, M.B.: *Smoothed Particle Hydrodynamics - a meshfree particle method*, World Scientific (2003)
- [49] Liu, G.R.: *Mesh Free Methods*, CRC Press (2003)
- [50] Lucy, L.B.: *Numerical approach to testing the fission hypothesis*, Astronomical Journal 82 (1977), S. 1013-1024
- [51] Martin, J.C.; Noyce, W.J.: *Transactions of the Philosophical Society of London*, Vol. 244 (1952), S. 312
- [52] MATHWORKS Internetpräsenz <http://www.mathworks.de/> (12.07.2007)
- [53] Meyberg, K.; Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik*, Band 1, 5. Auflage, Springer-Verlag GmbH (2001)
- [54] Mirazaei, M. : *Fracture Mechanics, Lecture Notes 2, 3*, Dept. of Mechanical Eng., University of Theran, Iran
- [55] Monaghan, J.J.; Poinracic, J.: *Artificial Viscosity For Particle Methods*, Applied Numerical Mathematics, 1 (1985), S. 187-194
- [56] Monaghan, J.J.: *On the problem of penetration in particle methods*, Journal Of Computational Physics, Vol. 82, Academic Press (1989), S. 1-15
- [57] Monaghan, J.J.: *Simulating Free Surface Flows with SPH*, Journal Of Computational Physics, Vol. 110, No. 2, Academic Press (1992)
- [58] Monaghan, J.J.: *SPH compressible turbulence*, Monthly Notes of the Astronomical Society, 335, S. 843-52
- [59] Müller, M.; Charypar, D.; Gross, M.: *Particle-based fluid simulation for interactive applications*, Proceedings of 2003 ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (2003), S. 154-159
- [60] Müller, M.; Schirm, S.; Teschner, M.: *Interactive Blood Simulation für Virtual Surgery Based on Smoothed Particle Hydrodynamics*, Journal of Technology and Health Care, IOS Press Amsterdam (2003)

- [61] Müller, M.; Solenthaler, B.; Kreiser, R.; Gross, M.: *Particle-Based Fluid-Fluid Interaction*, Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (2005)
- [62] Nayroles, B.; Touzot, G.; Vollon, P.: *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Computational Mechanics 10 (1992), S. 307-318
- [63] Noh, W. F.: *Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux*, Journal of Computational Physics, 72 (1987), S. 78-120
- [64] Ohlsson, U.; Olofsson, T.: *Mixed-Mode Fracture and Anchor Bolts in Concrete Analysis with Inner Softening Bands*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123, No 10, New York (1987), S. 1027-1033
- [65] Owen, J. M.: *SPH and Material Failure: Progress Report*, Joint Russian American 5 Laboratory Conference on Computational Mathematics/Physics Vienna, Austria June 19-24 2005
- [66] Parks, D.M.: *A Stiffness derivative Finite Element Technique For Determination Of Crack Tip Stress Intensity Factors*, Int. J. Frac., Vol.10 (1974), S. 487-502
- [67] Phongthanapanich, S.; Dechaumphai, P.: *Adaptive delaunay triangulation with object-oriented programming for crack propagation analysis*, Finite Element in Analysis and Design, 40 (13-14) (2004), S. 1753-1771
- [68] Rabczuk, T.: *Numerische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten von Beton mit Hilfe der SPH-Methode*, Dissertation, Universität Karlsruhe (2002)
- [69] Rahman, S.; Rao, B.N.: *Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods - part I/II*, Computational Mechanics 28, Springer-Verlag (2002), S. 351-364
- [70] Rahman, S.; Rao, B.N.: *An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials*, Computational Mechanics 32, Numbers 1-2, Springer-Verlag (2003)
- [71] Reinhardt, H. W.: *Concrete under impact loading, tensile strength and bond*, Heron, Vol 27 (1982), S. 1-48
- [72] Rice, J.R.: *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, 35 (1968), S. 379-386
- [73] Rosakis, A.J.; Samudrala, O.; Coker, D.: *Cracks faster than shear wave speed*, Science 284 (1999), S. 1337-1340
- [74] Sauer, M.: *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen*, Dissertation, Universität der Bundeswehr München (2000)



- [75] Sedgewick, R.: *Algorithmen in C++*, Addison-Wesley (1999)
- [76] Sharan, S.K.: *Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains*, Int. J. Numer. Meth, 21 (1985), S. 1659-1669
- [77] Schoenberg, I.-J.: *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math., Vol. 4 (1946), S. 45–99 und 112–141
- [78] Sibson, R.: *A vector identity for the Dirichlet tessellation*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 87 (1980), S. 151-155
- [79] Smith, I.M.; Griffiths, D.V.: *Programming the Finite Element Method*, Wiley (2004)
- [80] Steinmetz, M.; Müller, E.: *On the Capabilities and Limits of Smoothed Particle Hydrodynamics*, Astron. Astrophys., 268 (1993), S. 391-410
- [81] Turner, M.J.; Clough, R.W.; Martin, H.C.; Topp, L.J.: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aeronaut. Sci., September (1956)
- [82] Turner, M.J.: *The direct stiffness method of structural analysis*, Preprint of a paper to be presented at a meeting of the Structures & Materials Panel, AGARD, at the Technische Hochschule, Aachen, Germany, on September 17 1959
- [83] University of Alberta: *ANSYS Tutorials* <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/CL/CIT/TransCond/Print.html> (19.09.2008)
- [84] Von Neumann, J.; Richtmyer, R.D.: *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*, J. Appl. Physics, 21 (1950), S. 232-237
- [85] Westergaard, H.M.: *Water pressure on dams during earthquakes*, Trans. ASCE 98 (1933), S. 418-472
- [86] Westergaard, H.M.: *Bearing pressure and cracks*, Journal of Applied Mechanics 6: 49 (1939)
- [87] Wieland, M.: *Erdbeben und Talsperren*, Wasser, Energie, Luft – Eau, Energie, Air, 94. Jahrgang, Heft 9/10 (2002)
- [88] Wikimedia Foundation Inc: *Delaunay-Triangulation* <http://de.wikipedia.org/wiki/Delaunay-Triangulation> (22.09.2008)
- [89] Xu, R.L.; Haung, Y.Y.; Roskalis, A.J.: *Dynamic crack deflection and penetration at interfaces in homogeneous materials: experimental studies and model predictions*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51 (2003), S. 461-486
- [90] Yankelevsky, D.Z.; Avnon, I.: *Controlled Dynamic Cracking of High-Strength Concrete Specimens*, J. Mat. in Civ. Engrg., Volume 6, Issue 4 (1994), S. 564-577

- [91] Yau, J.F.; Wang, S.S.; Corten, H.T.: *A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity*, Journal of Applied Mechanics 47 (1980), S. 335-341
- [92] Zehnder, A. T.: *Lecture Notes on Fracture Mechanics*, Dept. of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca (2007)
- [93] Batra, R.C.; Zhang, G.M.: *Analysis of adiabatic shear bands in elasto-thermo-viscoplastic materials by modified smoothed-particle hydrodynamics (MSPH) method*, Journal of Computational Physics 201 (2004), S. 172–190
- [94] Zienkiewicz, O.C.; Newton, R.E.: *Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid*, Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart (1969)
- [95] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.: *The Finite Element Method*, Elsevier (2005)



# A Anhang

## A.1 Der entwickelte Programmcode

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Nachweise kombinieren die beiden Netzfremden Methoden Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) und die Elementfreie Galerkin Methode (EFGM). Die in diesem Rahmen zur Modellierung entwickelte Software besteht dies widerspiegelnd aus zwei entsprechenden Modulen. Die Module können eigenständig agieren; beide besitzen alle notwendigen Routinen zur Erzeugung der Modelle, der eigentlichen Simulation und der visuellen oder tabellarischen Datenausgabe. Zum Teil werden jedoch sehr ähnliche Algorithmen verwendet: So gestaltet sich beispielsweise die Knoten- bzw. Partikelsuche in beiden Modulen weitgehend parallel, jedoch fügt das EFGM-Modul noch die Sichtbarkeitsuntersuchung an den Rissflanken ein. Auch die zentralen Knoten- und Partikelklassen weisen viele Gemeinsamkeiten auf. Völlig unterschiedlich gestaltet sich jedoch der eigentliche Rechenkern, der im EFGM-Teil matrixenbasiert arbeitet. Im SPH-Teil sind die Partikel-Instanzen hingegen in Vektoren abgelegt. Während im SPH-Modul die zeitliche Integration im Vordergrund steht, wird im EFGM-Modul meist quasistatisch gerechnet. Die Software wurde vollständig mit Hilfe des Borland C++ Builders 6.0 in C++ unter dem Betriebssystem Microsoft Windows entwickelt. Für reine Matrixrechnungen und die Erstellung von Voronoi-Diagramm-Grundstrukturen wurde frei verfügbarer Open-Source-Code eingesetzt, für die dynamische Allokation fand die C++-STL-Standard-Bibliothek Verwendung. Die Bedienung findet mit Ausnahme der Interaktion beider Modelle über Stapeldateien mittels visueller Oberflächen und Elemente statt.

### A.1.1 SPH-Modul

Abb. A.1 zeigt die Oberfläche des SPH-Moduls. Zentral wird die aktuelle Szene wiedergegeben. Zur Auswahl stehen zahlreiche Visualisierungs-Modi, beispielsweise einzelner Partikel als Pixel, Geschwindigkeitsvektoren als farblich und in der Länge abgestufte Vektoren. Weiterhin können Dichte, Druck sowie alle weiteren wichtigen Parameter für jeden Rechenschritt dargestellt werden.

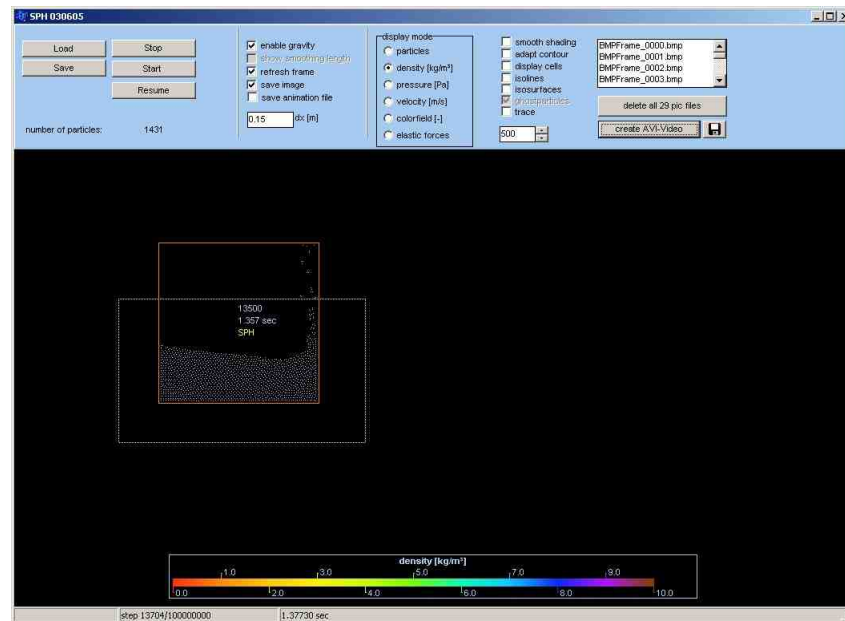


Abb. A.1: Benutzeroberfläche des SPH-Moduls

Zusätzlich wurde ein Modul zur Erzeugung von AVI-Videosequenzen aus den während dem Rechengang abgespeicherten Bitmap-Bilddateien integriert. Diese Möglichkeit hat sich als besonders wertvoll zur Modellentwicklung erwiesen. Der Benutzer hat zahlreiche Auswahlmöglichkeiten hinsichtlich der Zeitschrittweite, des initialen Partikelabstands, des Wirkens von Körperkräften und vielen weiteren relevanten Parametern. Jederzeit kann die Ausführung unterbrochen, bei Bedarf der aktuelle Zustand abgespeichert, und zu gegebener Zeit fortgeführt werden.

### Interne Struktur des SPH-Modells

Die zentrale Klasse im SPH-Modul ist die Klasse *TParticle*. Sie bildet alle Eigenschaften eines Partikels ab, die folgende Darstellung gibt einen Eindruck:

```
class TParticle
{
public:
    TParticle();

private:

    double x,y;    // Koordinaten
    double vx,vy;  // Geschwindigkeiten
    ...
    vector <TParticle*> neighbourparticles; // Nachbarpartikel
    ...
};
```

Der Integrationskern ist die Klasse *TSPH*. Sie besitzt einen dynamischen Speicher aller Partikel und alle zur Steuerung der Interaktion der Partikel notwendigen Algorithmen.

```
class TSPH
{
public:
    TSPH();

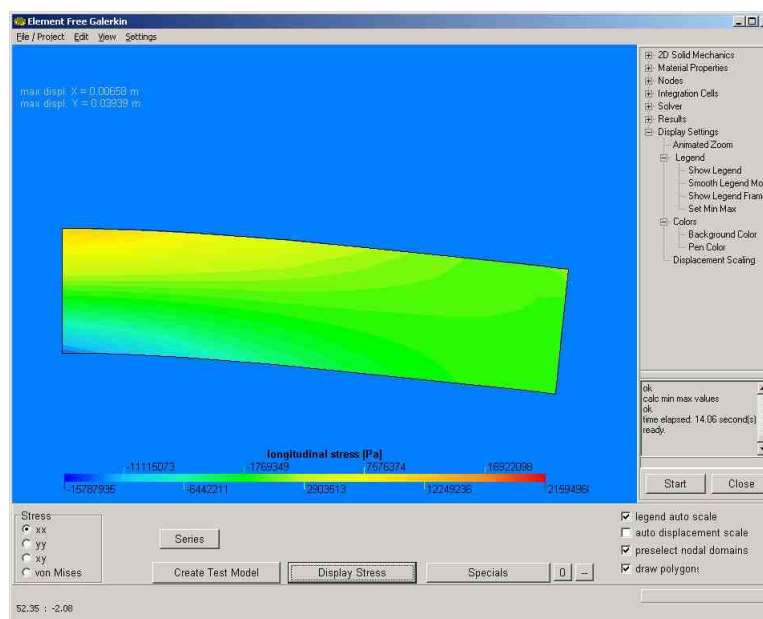
private:

    vector <TParticle> particles;

    void Calc_All_Pressures(vector <TParticle> *particles_rhs);
    ...
};
```

### A.1.2 EFGM-Modul

Abb. A.2 gibt einen Eindruck des EFGM-Bedienteils. Ähnlich dem SPH-Ansichtsmodul ist mittig die zentrale Ansicht angeordnet. Spannungen etc. lassen sich farblich darstellen. Der Faktor der Verformungsdarstellung lässt sich einstellen, zahlreiche benutzerspezifische Optionen ermöglichen eine optimale Abstimmung der Darstellung zur weiteren Verwendung nach Abspeicherung im JPG- oder Bitmap-Dateiformat.



**Abb. A.2:** Benutzeroberfläche des EFGM-Moduls

Die Geometrie des zu berechnenden Körpers und physikalische Eigenschaften lassen sich per Datei einlesen, wobei der Körperumriss durch Keypoints definiert ist.

## Interne Struktur des EFGM-Modells

Analog zur *TParticle*-Klasse im SPH-Modul ist das zentrale Objekt im EFGM-Modul die Klasse *TNode*. Sie besitzt alle grundlegenden Beschreibungen eines Knotens:

```
class TNode
{
    public:
        TNode();

    private:

        double x,y;    // Koordinaten
        double sx,sy;  // Spannungen
        ...
        vector <TNode*> neighbournodes; // Nachbarknoten
        ...
};
```

Steuereinheit ist die Klasse *TEFGM*. Neben einen Speicher aller Knoten besitzt sie alle Algorithmen beispielsweise die Methoden zu den zentralen Matrizenverfahrensweisen zur Berechnung der MLS-Ansatzfunktionen, Inversenbildung etc.

```
class TEFGM
{
    public:
        TEFGM();

    private:

        vector <TNode> nodes; // dynamischer Knotenspeicher

        void Calc_Shapefuctions(vector <TNode> *nodes_rhs); // Methoden
        ...
};
```

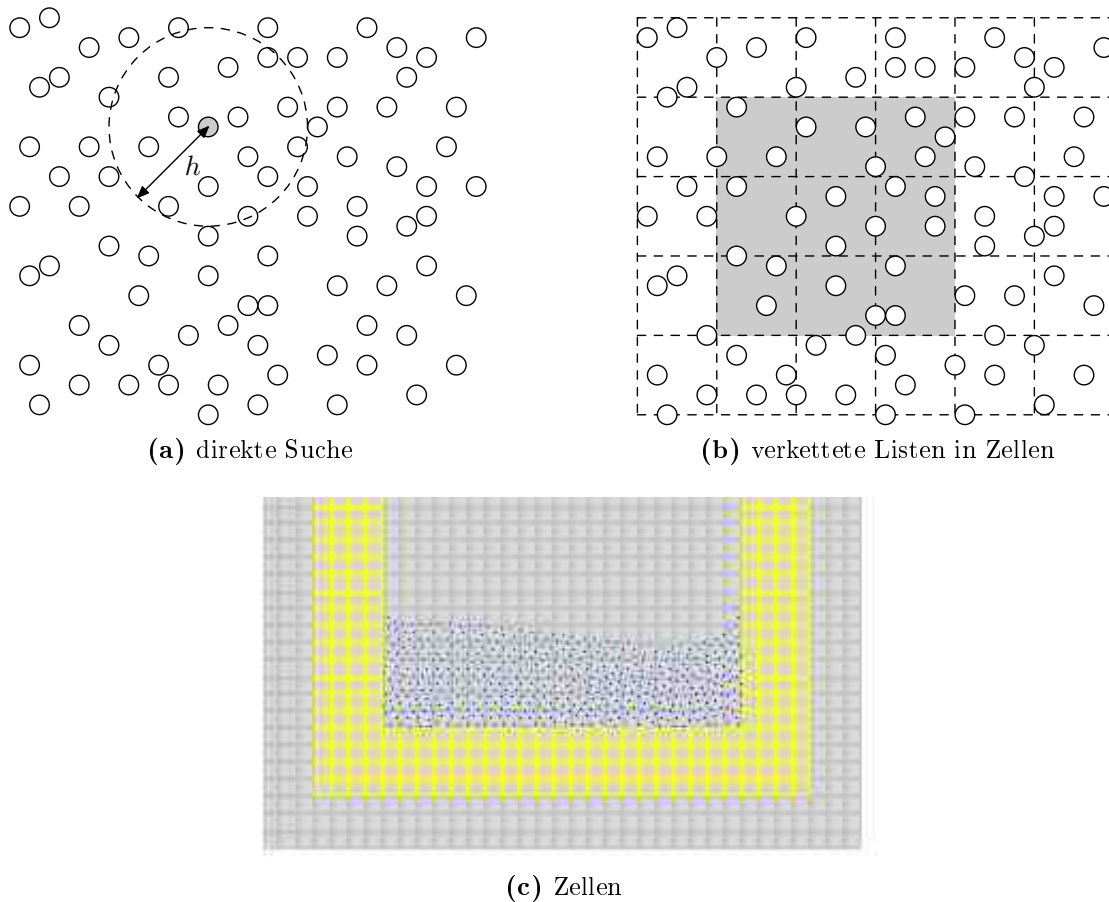
### A.1.3 Interaktion der Module

Für kombinierte Modellierungen, wie in Abschnitt 5.2.4 dargelegt, die ein wechselseitiges Starten und eine Datenübernahme von einem Modul in das Andere erfordern, kann eine einfache Steuerung mittels einer Stapelverarbeitungsdatei angelegt werden. Diese ruft abwechselnd entweder das SPH-Modul oder das EFGM-Modul auf. Übergabeparameter ist der Name der Datei, welche die Ausgangsdaten, beispielsweise lokale Drücke oder die Partikelpositionen des letzten Zeitschritts enthalten. Während der Entwicklungen und Simulationen im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde dies direkt in den Programmcode eines der Module integriert. Beispielsweise wurde das EFGM-Modul direkt aus dem

SPH-Modul gestartet, nachdem die physikalischen Drücke als Simulationsergebnis verfügbar waren und als Randbedingungen für die EFGM-Modellierung dienen konnten. Für eine Anpassung dieser Schnittstelle an die Erfordernisse für andere Vorhaben muss in den Programmcode eingegriffen werden.

## A.2 Suchalgorithmen

Jeder EFGM-Knoten und jeder SPH-Partikel interagiert mit den Partikeln, in deren Einflussbereich mit Radius  $h$  er liegt. Durch die Bewegung der Partikel ändern sich diese Nachbarschaftsverhältnisse mit jedem Zeitschritt. Für jedes  $\Delta t$  müssen also die Nachbar-Partikel jedes Partikels gefunden werden. Dies ist bei fallweise mehreren tausend Partikel oder Knoten eine sehr zeitaufwändige Prozedur und bildet damit einen zentralen Vorgang in beiden Modulen. Für die vorliegende Arbeit wurden zwei Methoden der Nachbarschaftssuche implementiert: Die direkte Suche, Abb. A.3a, und die sehr viel schnellere Methode der verketteten Listen innerhalb von Zellen, Abb. A.3b.



**Abb. A.3:** Nachbarpartikel-Suchalgorithmen

Für die direkte Suche wird für sämtliche Partikel abgefragt, ob sie im Einflussbereich



des betrachteten Partikels liegen bzw. dieser in deren Einflussbereich, was für identische  $h$  gleichbedeutend ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Distanz zweier Partikel kleiner oder gleich des Radius  $h$  ist:  $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| \leq h_i$ . Der rechnerische Aufwand für diese Suche steigt quadratisch mit der Partikelanzahl, weswegen diese direkte Methode nur für kleine Partikelmengen praktikabel ist. Für die Suche mithilfe verketteter Listen wird das Gesamtgebiet der Partikel in von der Körpergeometrie unabhängige, diese jedoch vollständig abdeckende Zellen unterteilt. Jeder dieser Zellen ist eine Liste der in ihr befindlichen Partikel zugeordnet. Jedes Element dieser Liste enthält neben dem Partikel auch einen Zeiger auf den nächsten Partikel der Liste, ähnlich einer Kette, Abb. A.4. Somit können weitere Elemente innerhalb der Liste sehr schnell gefunden werden; wei-

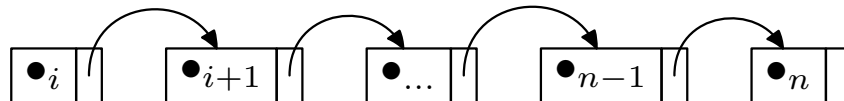


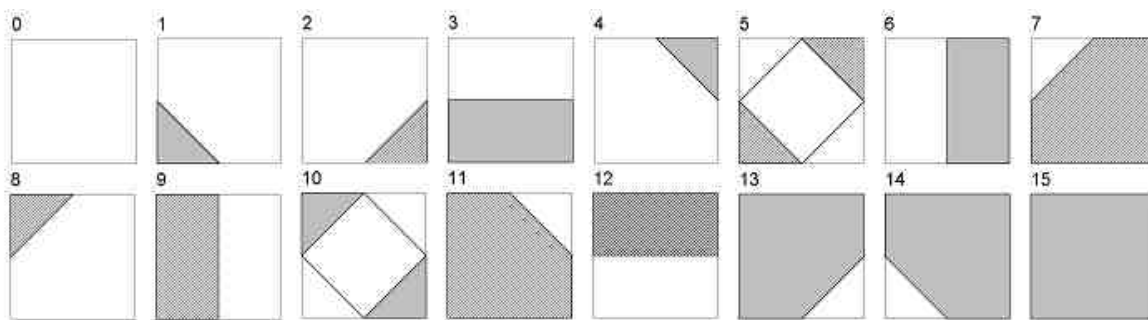
Abb. A.4: Verkettete Liste

terhin besteht dadurch die Möglichkeit, schnell Partikel hinzuzufügen oder zu entfernen: In diesem Fall wird lediglich der Zeiger auf das neue Element gesetzt, ein Verschieben von Speicherinhalten entfällt. Die C++ Standard-Bibliothek *STL* stellt entsprechende Schablonen zur Verfügung. Weiterhin besitzt jede Zelle Zeiger auf ihre unmittelbar anschließenden Nachbarzellen. Dies sind innerhalb des Feldes stets acht Zellen; Zellen am Rand des Feldes haben weniger benachbarte Zellen. Zu Beginn des Suchalgorithmus jedes Zeitschrittes werden die Partikel einmalig in die Listen derjenigen Zellen, in denen sie örtlich liegen, eingefügt. Gleichzeitig erhält jeder Partikel die Information, in welcher Zelle er sich befindet. Dies geschieht über einen einfachen skalaren Index. Je nach Größe der Zelle und der internen Lage des Partikels können sich in Frage kommende Nachbarpartikel nun ausschließlich in dieser Zelle, oder zusätzlich in deren Nachbarzellen befinden. Dort können sie über das Zeigerkonstrukt der Zellen untereinander und der zelleigenen Partikellisten unmittelbar gefunden werden. Die Suche beschränkt sich nun also auf wenige Listen einer geringen Anzahl von Partikeln und muss nicht mehr für sämtliche Partikel des Gesamtgebietes durchgeführt werden. Erfahrungsgemäß beschleunigt dies den Vorgang der Partikelzuordnung durchaus um Faktor zehn. Modellrechnungen mit hoher Partikelanzahl werden auf handelsüblichen Rechnern durch solch effektive Algorithmen erst ermöglicht. Auf weitere, zum Teil sehr ausgeklügelte Suchmechanismen wie binäre Bäume und rekursive Gebietsteilungen soll hier nicht näher eingegangen werden. Die Suche des nächsten Nachbarpaares bildet ein eigenständiges Thema der mathematischen Informatik, in der auch das Voronoi-Diagramm, in Abschnitt 2.7 diskutiert, für effektive Algorithmen eingesetzt werden kann [75].

## A.3 Visualisierung

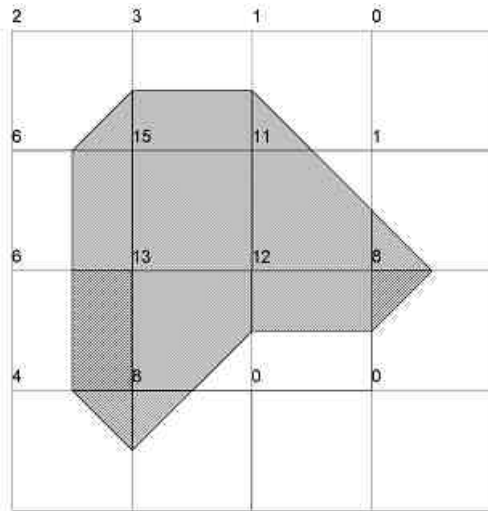
Die visuelle Darstellung lässt eine viel schnellere Erfassung der Gesamtsituation zu als umfangreiche Tabellenausgaben. Daher ist eine effektive und ansprechende graphische

Aufbereitung der Rechenergebnisse wichtiger Bestandteil der Software. Im Folgenden soll ein hierfür zentraler Mechanismus, die *Marching Squares*, vorgestellt werden. Um beispielsweise den Spannungsverlauf in einem Bauteil exakt in Form von Farbschattierungen darzustellen, wäre es erforderlich, für jeden Bildschirmpunkt den zugehörigen Wert an dieser Stelle zu ermitteln. Dies ist sehr rechenintensiv, da diese Parameter nach Durchführung der Simulation nur an bestimmten Stellen, beispielsweise der Knoten oder Gauß-Integrationspunkte vorliegen, nicht aber für jeden beliebigen Punkt. Für alle anderen Orte muss daher aus den vorliegenden, an bestimmte Orte gebundenen Werten interpoliert werden. Wünschenswert ist daher ein Verfahren, welches aus an relativ wenigen vorliegenden Punkten verfügbaren Parametern einen ansprechenden, weichen Farbverlauf über die Gesamtfläche ermittelt. Hierfür müssen die Grenzen der bestimmten Werteintervallen zugeordneten Farbflächen möglichst genau wiedergegeben werden. Da ein echtes Rückrechnen, also beispielsweise von einer bestimmten Spannung auf einen bestimmten Ort zu schließen, nicht möglich oder zumindest nicht eindeutig wäre, bedient man sich Verfahren wie jenes der *Marching Squares*. Die Vorgehensweise beruht darauf, das darzustellende Gebiet zunächst in gleiche Quadrate aufzuteilen. An den Eckpunkten dieser Quadrate wird der farblich wiederzugebende Wert, beispielsweise die Vertikalspannung, ermittelt. Da sich je vier Quadrate einen Eckpunkt teilen, reduziert sich der Rechenaufwand weiter. Diese vier Werte werden nun mit einem Referenzwert verglichen, welcher für eine bestimmte Farbe steht. Liegen alle vier Eckwerte über oder unter dem Referenzwert, wird das Quadrat vollständig ausgefüllt oder bleibt leer. Variieren die Eckwerte um den Referenzpunkt, so läuft die Grenze des Werteintervalls und damit des Farbbereiches in einer von sechzehn möglichen Konfigurationen durch das Quadrat, Abb. A.5. Die genaue Ausrichtung der Grenze zwischen Über- und Unterschreitung –und

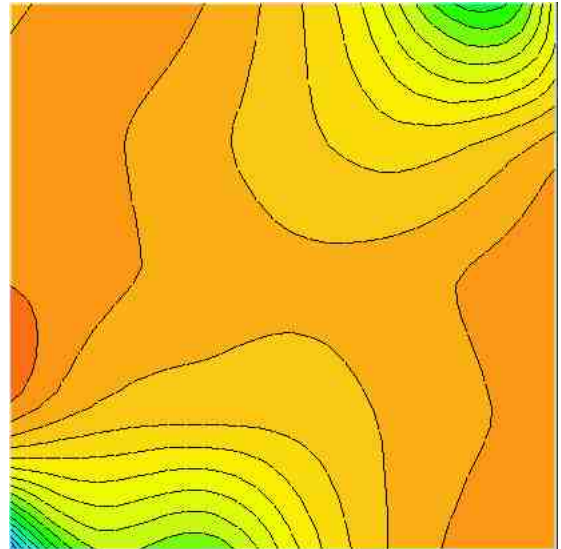


**Abb. A.5:** 16 mögliche Konfigurationen der *Marching Squares*

damit des Randes des zum Referenzwert gehörenden Farbbereichs– wird durch gewöhnliche lineare Interpolation zwischen zwei Eckpunkten ermittelt, in Abb. A.6 vereinfachend immer in der Mitte zwischen zwei Eckpunkten liegend dargestellt. Dieses Verfahren wird nun für alle darzustellenden Werteintervalle der Legende durchgeführt. Aus vorhergehenden Schritten bestehende Farbbereiche können dabei ganz oder teilweise verdeckt werden. Ein Überkreuzen der Farbgrenzen ist jedoch nicht möglich, da es sich um Isolinen handelt. Durch die Vielzahl der Quadrate bei entsprechender Auflösung wirken die Verläufe “weich” und realistisch. Nach dem Durchlaufen des Verfahrens für alle Wertein-



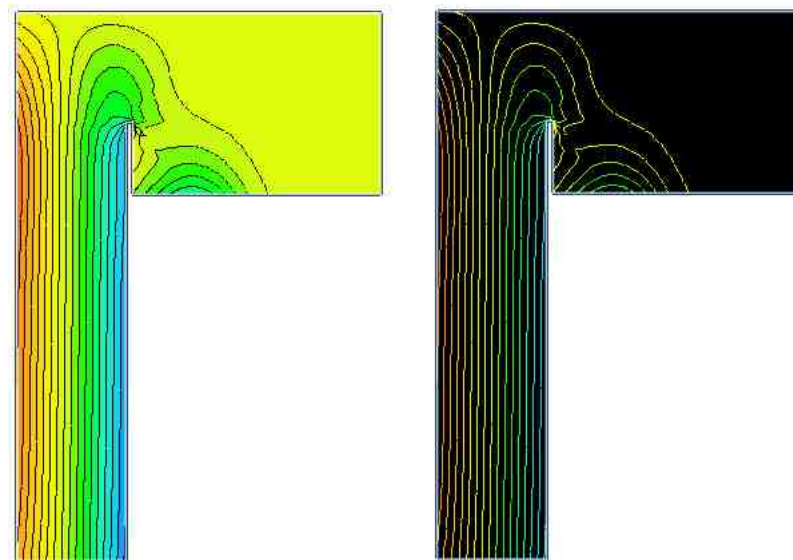
(a) Marching-Squares-Einzelfarbfläche, vereinfacht



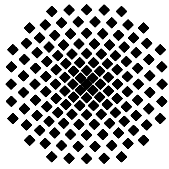
(b) Farbflächen-Kombination

**Abb. A.6:** Beispiele von Marching-Squares-Farbflächen

tervale in der Spannweite der Legende ist die Darstellung vollständig, ein Beispiel des in der entwickelten Software integrierten, auf dem beschriebenen Verfahren basierenden Visualisierungsmoduls ist in Abb A.7, links wiedergegeben. Oft sind bei einer Darstellung keine Schattierungen gewünscht, sondern nur die Grenze von Datenbereichen soll aufgezeigt werden. Dann wird lediglich der durch Marching Squares ermittelte Verlauf der Grenzen ohne Farbfüllung dargestellt, Abb A.7, rechts.



**Abb. A.7:** Mit Marching Squares generierte Darstellung der entwickelten Software



## Institut für Wasserbau Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 61  
70569 Stuttgart (Vaihingen)  
Telefon (0711) 685 - 64717/64749/64752/64679  
Telefax (0711) 685 - 67020 o. 64746 o. 64681  
E-Mail: [iws@iws.uni-stuttgart.de](mailto:iws@iws.uni-stuttgart.de)  
<http://www.iws.uni-stuttgart.de>

### Direktoren

Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. András Bárdossy  
Prof. Dr.-Ing. Rainer Helmig  
Prof. Dr.-Ing. Silke Wieprecht

### Vorstand (Stand 01.04.2009)

Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. A. Bárdossy  
Prof. Dr.-Ing. R. Helmig  
Prof. Dr.-Ing. S. Wieprecht  
Jürgen Braun, PhD  
Dr.-Ing. H. Class  
Dr.-Ing. S. Hartmann  
Dr.-Ing. H.-P. Koschitzky  
PD Dr.-Ing. W. Marx  
Dr. rer. nat. J. Seidel

### Emeriti

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Jürgen Giesecke  
Prof. Dr.h.c. Dr.-Ing. E.h. Helmut Kobus, PhD

### Lehrstuhl für Wasserbau und Wassermengenwirtschaft

Leiter: Prof. Dr.-Ing. Silke Wieprecht  
Stellv.: PD Dr.-Ing. Walter Marx, AOR

### Versuchsanstalt für Wasserbau

Leiter: Dr.-Ing. Sven Hartmann, AOR

### Lehrstuhl für Hydromechanik und Hydrosystemmodellierung

Leiter: Prof. Dr.-Ing. Rainer Helmig  
Stellv.: Dr.-Ing. Holger Class, AOR

### Lehrstuhl für Hydrologie und Geohydrologie

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. András Bárdossy  
Stellv.: Dr. rer. nat. Jochen Seidel

### VEGAS, Versuchseinrichtung zur Grundwasser- und Altlastensanierung

Leitung: Jürgen Braun, PhD  
Dr.-Ing. Hans-Peter Koschitzky, AD

## Verzeichnis der Mitteilungshefte

- 1 Röhnisch, Arthur: *Die Bemühungen um eine Wasserbauliche Versuchsanstalt an der Technischen Hochschule Stuttgart*, und Fattah Abouleid, Abdel: *Beitrag zur Berechnung einer in lockeren Sand gerammten, zweifach verankerten Spundwand*, 1963
- 2 Marotz, Günter: *Beitrag zur Frage der Standfestigkeit von dichten Asphaltbelägen im Großwasserbau*, 1964
- 3 Gurr, Siegfried: *Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter ebener Flächen-tragwerke unter besonderer Berücksichtigung ebener Stauwände, mit Hilfe von Randwert- und Lastwertmatrizen*, 1965
- 4 Plica, Peter: *Ein Beitrag zur Anwendung von Schalenkonstruktionen im Stahlwasserbau*, und Petrikat, Kurt: *Möglichkeiten und Grenzen des wasserbaulichen Versuchswesens*, 1966

- 5 Plate, Erich: *Beitrag zur Bestimmung der Windgeschwindigkeitsverteilung in der durch eine Wand gestörten bodennahen Luftschicht*, und  
Röhnisch, Arthur; Marotz, Günter: *Neue Baustoffe und Bauausführungen für den Schutz der Böschungen und der Sohle von Kanälen, Flüssen und Häfen; Gesteungskosten und jeweilige Vorteile*, sowie Unny, T.E.: *Schwingungsuntersuchungen am Kegelstrahlschieber*, 1967
- 6 Seiler, Erich: *Die Ermittlung des Anlagenwertes der bundeseigenen Binnenschiffahrtsstraßen und Talsperren und des Anteils der Binnenschifffahrt an diesem Wert*, 1967
- 7 *Sonderheft anlässlich des 65. Geburtstages von Prof. Arthur Röhnisch mit Beiträgen von* Benk, Dieter; Breitling, J.; Gurr, Siegfried; Haberhauer, Robert; Honekamp, Hermann; Kuz, Klaus Dieter; Marotz, Günter; Mayer-Vorfelder, Hans-Jörg; Miller, Rudolf; Plate, Erich J.; Radomski, Helge; Schwarz, Helmut; Vollmer, Ernst; Wildenhahn, Eberhard; 1967
- 8 Jumikis, Alfred: *Beitrag zur experimentellen Untersuchung des Wassernachschubs in einem gefrierenden Boden und die Beurteilung der Ergebnisse*, 1968
- 9 Marotz, Günter: *Technische Grundlagen einer Wasserspeicherung im natürlichen Untergrund*, 1968
- 10 Radomski, Helge: *Untersuchungen über den Einfluß der Querschnittsform wellenförmiger Spundwände auf die statischen und rammtechnischen Eigenschaften*, 1968
- 11 Schwarz, Helmut: *Die Grenztragfähigkeit des Baugrundes bei Einwirkung vertikal gezogener Ankerplatten als zweidimensionales Bruchproblem*, 1969
- 12 Erbel, Klaus: *Ein Beitrag zur Untersuchung der Metamorphose von Mittelgebirgsschneedecken unter besonderer Berücksichtigung eines Verfahrens zur Bestimmung der thermischen Schneequalität*, 1969
- 13 Westhaus, Karl-Heinz: *Der Strukturwandel in der Binnenschifffahrt und sein Einfluß auf den Ausbau der Binnenschiffskanäle*, 1969
- 14 Mayer-Vorfelder, Hans-Jörg: *Ein Beitrag zur Berechnung des Erdwiderstandes unter Ansatz der logarithmischen Spirale als Gleitflächenfunktion*, 1970
- 15 Schulz, Manfred: *Berechnung des räumlichen Erddruckes auf die Wandung kreiszylindrischer Körper*, 1970
- 16 Mobasseri, Manoutschehr: *Die Rippenstützmauer. Konstruktion und Grenzen ihrer Standsicherheit*, 1970
- 17 Benk, Dieter: *Ein Beitrag zum Betrieb und zur Bemessung von Hochwasserrückhaltebecken*, 1970

- 18 Gál, Attila: *Bestimmung der mitschwingenden Wassermasse bei überströmten Fischbauchklappen mit kreiszylindrischem Staublech*, 1971, vergriffen
- 19 Kuz, Klaus Dieter: *Ein Beitrag zur Frage des Einsetzens von Kavitationserscheinungen in einer Düsenströmung bei Berücksichtigung der im Wasser gelösten Gase*, 1971, vergriffen
- 20 Schaak, Hartmut: *Verteilleitungen von Wasserkraftanlagen*, 1971
- 21 *Sonderheft zur Eröffnung der neuen Versuchsanstalt des Instituts für Wasserbau der Universität Stuttgart mit Beiträgen von* Brombach, Hansjörg; Dirksen, Wolfram; Gál, Attila; Gerlach, Reinhard; Giesecke, Jürgen; Holthoff, Franz-Josef; Kuz, Klaus Dieter; Marotz, Günter; Minor, Hans-Erwin; Petrikat, Kurt; Röhnisch, Arthur; Rueff, Helge; Schwarz, Helmut; Vollmer, Ernst; Wildenhahn, Eberhard; 1972
- 22 Wang, Chung-su: *Ein Beitrag zur Berechnung der Schwingungen an Kegelstrahlschiebern*, 1972
- 23 Mayer-Vorfelder, Hans-Jörg: *Erdwiderstandsbeiwerte nach dem Ohde-Variationsverfahren*, 1972
- 24 Minor, Hans-Erwin: *Beitrag zur Bestimmung der Schwingungsanfachungsfunktionen überströmter Stauklappen*, 1972, vergriffen
- 25 Brombach, Hansjörg: *Untersuchung strömungsmechanischer Elemente (Fluidik) und die Möglichkeit der Anwendung von Wirbelkammerelementen im Wasserbau*, 1972, vergriffen
- 26 Wildenhahn, Eberhard: *Beitrag zur Berechnung von Horizontalfilterbrunnen*, 1972
- 27 Steinlein, Helmut: *Die Eliminierung der Schwebstoffe aus Flußwasser zum Zweck der unterirdischen Wasserspeicherung, gezeigt am Beispiel der Iller*, 1972
- 28 Holthoff, Franz Josef: *Die Überwindung großer Hubhöhen in der Binnenschifffahrt durch Schwimmerhebwerke*, 1973
- 29 Röder, Karl: *Einwirkungen aus Baugrundbewegungen auf trog- und kastenförmige Konstruktionen des Wasser- und Tunnelbaues*, 1973
- 30 Kretschmer, Heinz: *Die Bemessung von Bogenstaumauern in Abhängigkeit von der Talform*, 1973
- 31 Honekamp, Hermann: *Beitrag zur Berechnung der Montage von Unterwasserpipelines*, 1973
- 32 Giesecke, Jürgen: *Die Wirbelkammertriode als neuartiges Steuerorgan im Wasserbau*, und Brombach, Hansjörg: *Entwicklung, Bauformen, Wirkungsweise und Steuereigenschaften von Wirbelkammerverstärkern*, 1974

- 33 Rueff, Helge: *Untersuchung der schwingungserregenden Kräfte an zwei hintereinander angeordneten Tiefschützen unter besonderer Berücksichtigung von Kavitation*, 1974
- 34 Röhnisch, Arthur: *Einpreßversuche mit Zementmörtel für Spannbeton - Vergleich der Ergebnisse von Modellversuchen mit Ausführungen in Hüllwellrohren*, 1975
- 35 *Sonderheft anlässlich des 65. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. Kurt Petrikat mit Beiträgen von:* Brombach, Hansjörg; Erbel, Klaus; Flinspach, Dieter; Fischer jr., Richard; Gál, Attila; Gerlach, Reinhard; Giesecke, Jürgen; Haberhauer, Robert; Hafner Edzard; Hausenblas, Bernhard; Horlacher, Hans-Burkhard; Hutarew, Andreas; Knoll, Manfred; Krummet, Ralph; Marotz, Günter; Merkle, Theodor; Miller, Christoph; Minor, Hans-Erwin; Neumayer, Hans; Rao, Syamala; Rath, Paul; Rueff, Helge; Ruppert, Jürgen; Schwarz, Wolfgang; Topal-Gökceli, Mehmet; Vollmer, Ernst; Wang, Chung-su; Weber, Hans-Georg; 1975
- 36 Berger, Jochum: *Beitrag zur Berechnung des Spannungszustandes in rotations-symmetrisch belasteten Kugelschalen veränderlicher Wandstärke unter Gas- und Flüssigkeitsdruck durch Integration schwach singulärer Differentialgleichungen*, 1975
- 37 Dirksen, Wolfram: *Berechnung instationärer Abflußvorgänge in gestauten Gerinnen mittels Differenzenverfahren und die Anwendung auf Hochwasserrückhaltebecken*, 1976
- 38 Horlacher, Hans-Burkhard: *Berechnung instationärer Temperatur- und Spannungsfelder in langen mehrschichtigen Hohlzylindern*, 1976
- 39 Hafner, Edzard: *Untersuchung der hydrodynamischen Kräfte auf Baukörper im Tiefwasserbereich des Meeres*, 1977, ISBN 3-921694-39-6
- 40 Ruppert, Jürgen: *Über den Axialwirbelkammervverstärker für den Einsatz im Wasserbau*, 1977, ISBN 3-921694-40-X
- 41 Hutarew, Andreas: *Beitrag zur Beeinflußbarkeit des Sauerstoffgehalts in Fließgewässern an Abstürzen und Wehren*, 1977, ISBN 3-921694-41-8, vergriffen
- 42 Miller, Christoph: *Ein Beitrag zur Bestimmung der schwingungserregenden Kräfte an unterströmten Wehren*, 1977, ISBN 3-921694-42-6
- 43 Schwarz, Wolfgang: *Druckstoßberechnung unter Berücksichtigung der Radial- und Längsverschiebungen der Rohrwandung*, 1978, ISBN 3-921694-43-4
- 44 Kinzelbach, Wolfgang: *Numerische Untersuchungen über den optimalen Einsatz variabler Kühlsysteme einer Kraftwerkskette am Beispiel Oberrhein*, 1978, ISBN 3-921694-44-2
- 45 Barczewski, Baldur: *Neue Meßmethoden für Wasser-Luftgemische und deren Anwendung auf zweiphasige Auftriebsstrahlen*, 1979, ISBN 3-921694-45-0

- 46 Neumayer, Hans: *Untersuchung der Strömungsvorgänge in radialen Wirbelkammerverstärkern*, 1979, ISBN 3-921694-46-9
- 47 Elalfy, Youssef-Elhassan: *Untersuchung der Strömungsvorgänge in Wirbelkammerdioden und -drosseln*, 1979, ISBN 3-921694-47-7
- 48 Brombach, Hansjörg: *Automatisierung der Bewirtschaftung von Wasserspeichern*, 1981, ISBN 3-921694-48-5
- 49 Geldner, Peter: *Deterministische und stochastische Methoden zur Bestimmung der Selbstdichtung von Gewässern*, 1981, ISBN 3-921694-49-3, vergriffen
- 50 Mehlhorn, Hans: *Temperaturveränderungen im Grundwasser durch Brauchwassereinleitungen*, 1982, ISBN 3-921694-50-7, vergriffen
- 51 Hafner, Edzard: *Rohrleitungen und Behälter im Meer*, 1983, ISBN 3-921694-51-5
- 52 Rinnert, Bernd: *Hydrodynamische Dispersion in porösen Medien: Einfluß von Dichteunterschieden auf die Vertikalvermischung in horizontaler Strömung*, 1983, ISBN 3-921694-52-3, vergriffen
- 53 Lindner, Wulf: *Steuerung von Grundwasserentnahmen unter Einhaltung ökologischer Kriterien*, 1983, ISBN 3-921694-53-1, vergriffen
- 54 Herr, Michael; Herzer, Jörg; Kinzelbach, Wolfgang; Kobus, Helmut; Rinnert, Bernd: *Methoden zur rechnerischen Erfassung und hydraulischen Sanierung von Grundwasserkontaminationen*, 1983, ISBN 3-921694-54-X
- 55 Schmitt, Paul: *Wege zur Automatisierung der Niederschlagsermittlung*, 1984, ISBN 3-921694-55-8, vergriffen
- 56 Müller, Peter: *Transport und selektive Sedimentation von Schwebstoffen bei gestautem Abfluß*, 1985, ISBN 3-921694-56-6
- 57 El-Qawasmeh, Fuad: *Möglichkeiten und Grenzen der Tropfbewässerung unter besonderer Berücksichtigung der Verstopfungsanfälligkeit der Tropfelemente*, 1985, ISBN 3-921694-57-4, vergriffen
- 58 Kirchenbaur, Klaus: *Mikroprozessorgesteuerte Erfassung instationärer Druckfelder am Beispiel seegangsbelasteter Baukörper*, 1985, ISBN 3-921694-58-2
- 59 Kobus, Helmut (Hrsg.): *Modellierung des großräumigen Wärme- und Schadstofftransports im Grundwasser*, Tätigkeitsbericht 1984/85 (DFG-Forschergruppe an den Universitäten Hohenheim, Karlsruhe und Stuttgart), 1985, ISBN 3-921694-59-0, vergriffen
- 60 Spitz, Karlheinz: *Dispersion in porösen Medien: Einfluß von Inhomogenitäten und Dichteunterschieden*, 1985, ISBN 3-921694-60-4, vergriffen
- 61 Kobus, Helmut: *An Introduction to Air-Water Flows in Hydraulics*, 1985, ISBN 3-921694-61-2



- 62 Kaleris, Vassilios: *Erfassung des Austausches von Oberflächen- und Grundwasser in horizontalebenen Grundwassermodellen*, 1986, ISBN 3-921694-62-0
- 63 Herr, Michael: *Grundlagen der hydraulischen Sanierung verunreinigter Porengrundwasserleiter*, 1987, ISBN 3-921694-63-9
- 64 Marx, Walter: *Berechnung von Temperatur und Spannung in Massengbeton infolge Hydratation*, 1987, ISBN 3-921694-64-7
- 65 Koschitzky, Hans-Peter: *Dimensionierungskonzept für Sohlbelüfter in Schußbrinnen zur Vermeidung von Kavitationsschäden*, 1987, ISBN 3-921694-65-5
- 66 Kobus, Helmut (Hrsg.): *Modellierung des großräumigen Wärme- und Schadstofftransports im Grundwasser*, Tätigkeitsbericht 1986/87 (DFG-Forschergruppe an den Universitäten Hohenheim, Karlsruhe und Stuttgart) 1987, ISBN 3-921694-66-3
- 67 Söll, Thomas: *Berechnungsverfahren zur Abschätzung anthropogener Temperaturanomalien im Grundwasser*, 1988, ISBN 3-921694-67-1
- 68 Dittrich, Andreas; Westrich, Bernd: *Bodenseeufenerosion, Bestandsaufnahme und Bewertung*, 1988, ISBN 3-921694-68-X, vergriffen
- 69 Huwe, Bernd; van der Ploeg, Rienk R.: *Modelle zur Simulation des Stickstoffhaushaltes von Standorten mit unterschiedlicher landwirtschaftlicher Nutzung*, 1988, ISBN 3-921694-69-8, vergriffen
- 70 Stephan, Karl: *Integration elliptischer Funktionen*, 1988, ISBN 3-921694-70-1
- 71 Kobus, Helmut; Zilliox, Lothaire (Hrsg.): *Nitratbelastung des Grundwassers, Auswirkungen der Landwirtschaft auf die Grundwasser- und Rohwasserbeschaffenheit und Maßnahmen zum Schutz des Grundwassers*. Vorträge des deutsch-französischen Kolloquiums am 6. Oktober 1988, Universitäten Stuttgart und Louis Pasteur Strasbourg (Vorträge in deutsch oder französisch, Kurzfassungen zweisprachig), 1988, ISBN 3-921694-71-X
- 72 Soyeaux, Renald: *Unterströmung von Stauanlagen auf klüftigem Untergrund unter Berücksichtigung laminarer und turbulenter Fließzustände*, 1991, ISBN 3-921694-72-8
- 73 Kohane, Roberto: *Berechnungsmethoden für Hochwasserabfluß in Fließgewässern mit überströmten Vorländern*, 1991, ISBN 3-921694-73-6
- 74 Hassinger, Reinhard: *Beitrag zur Hydraulik und Bemessung von Blocksteinrampen in flexibler Bauweise*, 1991, ISBN 3-921694-74-4, vergriffen
- 75 Schäfer, Gerhard: *Einfluß von Schichtenstrukturen und lokalen Einlagerungen auf die Längsdispersion in Porengrundwasserleitern*, 1991, ISBN 3-921694-75-2
- 76 Giesecke, Jürgen: *Vorträge, Wasserwirtschaft in stark besiedelten Regionen; Umweltforschung mit Schwerpunkt Wasserwirtschaft*, 1991, ISBN 3-921694-76-0

- 77 Huwe, Bernd: *Deterministische und stochastische Ansätze zur Modellierung des Stickstoffhaushalts landwirtschaftlich genutzter Flächen auf unterschiedlichem Skalenniveau*, 1992, ISBN 3-921694-77-9, vergriffen
- 78 Rommel, Michael: *Verwendung von Kluftdaten zur realitätsnahen Generierung von Kluftnetzen mit anschließender laminar-turbulenter Strömungsberechnung*, 1993, ISBN 3-92 1694-78-7
- 79 Marschall, Paul: *Die Ermittlung lokaler Stofffrachten im Grundwasser mit Hilfe von Einbohrloch-Meßverfahren*, 1993, ISBN 3-921694-79-5, vergriffen
- 80 Ptak, Thomas: *Stofftransport in heterogenen Porenaquiferen: Felduntersuchungen und stochastische Modellierung*, 1993, ISBN 3-921694-80-9, vergriffen
- 81 Haakh, Frieder: *Transientes Strömungsverhalten in Wirbelkammern*, 1993, ISBN 3-921694-81-7
- 82 Kobus, Helmut; Cirpka, Olaf; Barczewski, Baldur; Koschitzky, Hans-Peter: *Versuchseinrichtung zur Grundwasser und Altlastensanierung VEGAS, Konzeption und Programmrahmen*, 1993, ISBN 3-921694-82-5
- 83 Zang, Weidong: *Optimaler Echtzeit-Betrieb eines Speichers mit aktueller Abflußregenerierung*, 1994, ISBN 3-921694-83-3, vergriffen
- 84 Franke, Hans-Jörg: *Stochastische Modellierung eines flächenhaften Stoffeintrages und Transports in Grundwasser am Beispiel der Pflanzenschutzmittelproblematik*, 1995, ISBN 3-921694-84-1
- 85 Lang, Ulrich: *Simulation regionaler Strömungs- und Transportvorgänge in Karst-aquiferen mit Hilfe des Doppelkontinuum-Ansatzes: Methodenentwicklung und Parameteridentifikation*, 1995, ISBN 3-921694-85-X, vergriffen
- 86 Helmig, Rainer: *Einführung in die Numerischen Methoden der Hydromechanik*, 1996, ISBN 3-921694-86-8, vergriffen
- 87 Cirpka, Olaf: *CONTRACT: A Numerical Tool for Contaminant Transport and Chemical Transformations - Theory and Program Documentation -*, 1996, ISBN 3-921694-87-6
- 88 Haberlandt, Uwe: *Stochastische Synthese und Regionalisierung des Niederschlages für Schmutzfrachtberechnungen*, 1996, ISBN 3-921694-88-4
- 89 Croisé, Jean: *Extraktion von flüchtigen Chemikalien aus natürlichen Lockergesteinen mittels erzwungener Luftströmung*, 1996, ISBN 3-921694-89-2, vergriffen
- 90 Jorde, Klaus: *Ökologisch begründete, dynamische Mindestwasserregelungen bei Ausleitungskraftwerken*, 1997, ISBN 3-921694-90-6, vergriffen
- 91 Helmig, Rainer: *Gekoppelte Strömungs- und Transportprozesse im Untergrund - Ein Beitrag zur Hydrosystemmodellierung-*, 1998, ISBN 3-921694-91-4, vergriffen

- 92 Emmert, Martin: *Numerische Modellierung nichtisothermer Gas-Wasser Systeme in porösen Medien*, 1997, ISBN 3-921694-92-2
- 93 Kern, Ulrich: *Transport von Schweb- und Schadstoffen in staugeregelten Fließgewässern am Beispiel des Neckars*, 1997, ISBN 3-921694-93-0, vergriffen
- 94 Förster, Georg: *Druckstoßdämpfung durch große Luftblasen in Hochpunkten von Rohrleitungen* 1997, ISBN 3-921694-94-9
- 95 Cirpka, Olaf: *Numerische Methoden zur Simulation des reaktiven Mehrkomponententransports im Grundwasser*, 1997, ISBN 3-921694-95-7, vergriffen
- 96 Färber, Arne: *Wärmetransport in der ungesättigten Bodenzone: Entwicklung einer thermischen In-situ-Sanierungstechnologie*, 1997, ISBN 3-921694-96-5
- 97 Betz, Christoph: *Wasserdampfdestillation von Schadstoffen im porösen Medium: Entwicklung einer thermischen In-situ-Sanierungstechnologie*, 1998, ISBN 3-921694-97-3
- 98 Xu, Yichun: *Numerical Modeling of Suspended Sediment Transport in Rivers*, 1998, ISBN 3-921694-98-1, vergriffen
- 99 Wüst, Wolfgang: *Geochemische Untersuchungen zur Sanierung CKW-kontaminierter Aquifere mit Fe(0)-Reaktionswänden*, 2000, ISBN 3-933761-02-2
- 100 Sheta, Hussam: *Simulation von Mehrphasenvorgängen in porösen Medien unter Einbeziehung von Hysterese-Effekten*, 2000, ISBN 3-933761-03-4
- 101 Ayros, Edwin: *Regionalisierung extremer Abflüsse auf der Grundlage statistischer Verfahren*, 2000, ISBN 3-933761-04-2, vergriffen
- 102 Huber, Ralf: *Compositional Multiphase Flow and Transport in Heterogeneous Porous Media*, 2000, ISBN 3-933761-05-0
- 103 Braun, Christopherus: *Ein Upscaling-Verfahren für Mehrphasenströmungen in porösen Medien*, 2000, ISBN 3-933761-06-9
- 104 Hofmann, Bernd: *Entwicklung eines rechnergestützten Managementsystems zur Beurteilung von Grundwasserschadensfällen*, 2000, ISBN 3-933761-07-7
- 105 Class, Holger: *Theorie und numerische Modellierung nichtisothermer Mehrphasenprozesse in NAPL-kontaminierten porösen Medien*, 2001, ISBN 3-933761-08-5
- 106 Schmidt, Reinhard: *Wasserdampf- und Heißluftinjektion zur thermischen Sanierung kontaminierter Standorte*, 2001, ISBN 3-933761-09-3
- 107 Josef, Reinhold: *Schadstoffextraktion mit hydraulischen Sanierungsverfahren unter Anwendung von grenzflächenaktiven Stoffen*, 2001, ISBN 3-933761-10-7

- 108 Schneider, Matthias: *Habitat- und Abflussmodellierung für Fließgewässer mit unscharfen Berechnungsansätzen*, 2001, ISBN 3-933761-11-5
- 109 Rathgeb, Andreas: *Hydrodynamische Bemessungsgrundlagen für Lockerdeckwerke an überströmbaren Erddämmen*, 2001, ISBN 3-933761-12-3
- 110 Lang, Stefan: *Parallele numerische Simulation instationärer Probleme mit adaptiven Methoden auf unstrukturierten Gittern*, 2001, ISBN 3-933761-13-1
- 111 Appt, Jochen; Stumpp Simone: *Die Bodensee-Messkampagne 2001, IWS/CWR Lake Constance Measurement Program 2001*, 2002, ISBN 3-933761-14-X
- 112 Heimerl, Stephan: *Systematische Beurteilung von Wasserkraftprojekten*, 2002, ISBN 3-933761-15-8
- 113 Iqbal, Amin: *On the Management and Salinity Control of Drip Irrigation*, 2002, ISBN 3-933761-16-6
- 114 Silberhorn-Hemminger, Annette: *Modellierung von Kluftaquifersystemen: Geostatistische Analyse und deterministisch-stochastische Kluftgenerierung*, 2002, ISBN 3-933761-17-4
- 115 Winkler, Angela: *Prozesse des Wärme- und Stofftransports bei der In-situ-Sanierung mit festen Wärmequellen*, 2003, ISBN 3-933761-18-2
- 116 Marx, Walter: *Wasserkraft, Bewässerung, Umwelt - Planungs- und Bewertungsschwerpunkte der Wasserbewirtschaftung*, 2003, ISBN 3-933761-19-0
- 117 Hinkelmann, Reinhard: *Efficient Numerical Methods and Information-Processing Techniques in Environment Water*, 2003, ISBN 3-933761-20-4
- 118 Samaniego-Eguiguren, Luis Eduardo: *Hydrological Consequences of Land Use / Land Cover and Climatic Changes in Mesoscale Catchments*, 2003, ISBN 3-933761-21-2
- 119 Neunhäuserer, Lina: *Diskretisierungsansätze zur Modellierung von Strömungs- und Transportprozessen in geklüftet-porösen Medien*, 2003, ISBN 3-933761-22-0
- 120 Paul, Maren: *Simulation of Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Adaptive Methods*, 2003, ISBN 3-933761-23-9
- 121 Ehret, Uwe: *Rainfall and Flood Nowcasting in Small Catchments using Weather Radar*, 2003, ISBN 3-933761-24-7
- 122 Haag, Ingo: *Der Sauerstoffhaushalt staugeregelter Flüsse am Beispiel des Neckars - Analysen, Experimente, Simulationen -*, 2003, ISBN 3-933761-25-5
- 123 Appt, Jochen: *Analysis of Basin-Scale Internal Waves in Upper Lake Constance*, 2003, ISBN 3-933761-26-3

- 124 Hrsg.: Schrenk, Volker; Batereau, Katrin; Barczewski, Baldur; Weber, Karolin und Koschitzky, Hans-Peter: *Symposium Ressource Fläche und VEGAS - Statuskolloquium 2003, 30. September und 1. Oktober 2003*, 2003, ISBN 3-933761-27-1
- 125 Omar Khalil Ouda: *Optimisation of Agricultural Water Use: A Decision Support System for the Gaza Strip*, 2003, ISBN 3-933761-28-0
- 126 Batereau, Katrin: *Sensorbasierte Bodenluftmessung zur Vor-Ort-Erkundung von Schadensherden im Untergrund*, 2004, ISBN 3-933761-29-8
- 127 Witt, Oliver: *Erosionsstabilität von Gewässersedimenten mit Auswirkung auf den Stofftransport bei Hochwasser am Beispiel ausgewählter Stauhaltungen des Oberrheins*, 2004, ISBN 3-933761-30-1
- 128 Jakobs, Hartmut: *Simulation nicht-isothermer Gas-Wasser-Prozesse in komplexen Kluft-Matrix-Systemen*, 2004, ISBN 3-933761-31-X
- 129 Li, Chen-Chien: *Deterministisch-stochastisches Berechnungskonzept zur Beurteilung der Auswirkungen erosiver Hochwasserereignisse in Flusstauhaltungen*, 2004, ISBN 3-933761-32-8
- 130 Reichenberger, Volker; Helmig, Rainer; Jakobs, Hartmut; Bastian, Peter; Niessner, Jennifer: *Complex Gas-Water Processes in Discrete Fracture-Matrix Systems: Upscaling, Mass-Conservative Discretization and Efficient Multilevel Solution*, 2004, ISBN 3-933761-33-6
- 131 Hrsg.: Barczewski, Baldur; Koschitzky, Hans-Peter; Weber, Karolin; Wege, Ralf: *VEGAS - Statuskolloquium 2004*, Tagungsband zur Veranstaltung am 05. Oktober 2004 an der Universität Stuttgart, Campus Stuttgart-Vaihingen, 2004, ISBN 3-933761-34-4
- 132 Asie, Kemal Jabir: *Finite Volume Models for Multiphase Multicomponent Flow through Porous Media*. 2005, ISBN 3-933761-35-2
- 133 Jacoub, George: *Development of a 2-D Numerical Module for Particulate Contaminant Transport in Flood Retention Reservoirs and Impounded Rivers*, 2004, ISBN 3-933761-36-0
- 134 Nowak, Wolfgang: *Geostatistical Methods for the Identification of Flow and Transport Parameters in the Subsurface*, 2005, ISBN 3-933761-37-9
- 135 Süß, Mia: *Analysis of the influence of structures and boundaries on flow and transport processes in fractured porous media*, 2005, ISBN 3-933761-38-7
- 136 Jose, Surabhin Chackiath: *Experimental Investigations on Longitudinal Dispersive Mixing in Heterogeneous Aquifers*, 2005, ISBN: 3-933761-39-5
- 137 Filiz, Fulya: *Linking Large-Scale Meteorological Conditions to Floods in Mesoscale Catchments*, 2005, ISBN 3-933761-40-9

- 138 Qin, Minghao: *Wirklichkeitsnahe und recheneffiziente Ermittlung von Temperatur und Spannungen bei großen RCC-Staumauern*, 2005, ISBN 3-933761-41-7
- 139 Kobayashi, Kenichiro: *Optimization Methods for Multiphase Systems in the Sub-surface - Application to Methane Migration in Coal Mining Areas*, 2005, ISBN 3-933761-42-5
- 140 Rahman, Md. Arifur: *Experimental Investigations on Transverse Dispersive Mixing in Heterogeneous Porous Media*, 2005, ISBN 3-933761-43-3
- 141 Schrenk, Volker: *Ökobilanzen zur Bewertung von Altlastensanierungsmaßnahmen*, 2005, ISBN 3-933761-44-1
- 142 Hundecha, Hirpa Yesheawatesfa: *Regionalization of Parameters of a Conceptual Rainfall-Runoff Model*, 2005, ISBN: 3-933761-45-X
- 143 Wege, Ralf: *Untersuchungs- und Überwachungsmethoden für die Beurteilung natürlicher Selbstreinigungsprozesse im Grundwasser*, 2005, ISBN 3-933761-46-8
- 144 Breiting, Thomas: *Techniken und Methoden der Hydroinformatik - Modellierung von komplexen Hydrosystemen im Untergrund*, 2006, 3-933761-47-6
- 145 Hrsg.: Braun, Jürgen; Koschitzky, Hans-Peter; Müller, Martin: *Ressource Untergrund: 10 Jahre VEGAS: Forschung und Technologieentwicklung zum Schutz von Grundwasser und Boden*, Tagungsband zur Veranstaltung am 28. und 29. September 2005 an der Universität Stuttgart, Campus Stuttgart-Vaihingen, 2005, ISBN 3-933761-48-4
- 146 Rojanschi, Vlad: *Abflusskonzentration in mesoskaligen Einzugsgebieten unter Berücksichtigung des Sickerraumes*, 2006, ISBN 3-933761-49-2
- 147 Winkler, Nina Simone: *Optimierung der Steuerung von Hochwasserrückhaltebecken-systemen*, 2006, ISBN 3-933761-50-6
- 148 Wolf, Jens: *Räumlich differenzierte Modellierung der Grundwasserströmung alluvialer Aquifere für mesoskalige Einzugsgebiete*, 2006, ISBN: 3-933761-51-4
- 149 Kohler, Beate: *Externe Effekte der Laufwasserkraftnutzung*, 2006, ISBN 3-933761-52-2
- 150 Hrsg.: Braun, Jürgen; Koschitzky, Hans-Peter; Stuhmann, Matthias: *VEGAS-Statuskolloquium 2006*, Tagungsband zur Veranstaltung am 28. September 2006 an der Universität Stuttgart, Campus Stuttgart-Vaihingen, 2006, ISBN 3-933761-53-0
- 151 Niessner, Jennifer: *Multi-Scale Modeling of Multi-Phase - Multi-Component Processes in Heterogeneous Porous Media*, 2006, ISBN 3-933761-54-9
- 152 Fischer, Markus: *Beanspruchung eingeeerdeter Rohrleitungen infolge Austrocknung bindiger Böden*, 2006, ISBN 3-933761-55-7

- 153 Schneck, Alexander: *Optimierung der Grundwasserbewirtschaftung unter Berücksichtigung der Belange der Wasserversorgung, der Landwirtschaft und des Naturschutzes*, 2006, ISBN 3-933761-56-5
- 154 Das, Tapash: *The Impact of Spatial Variability of Precipitation on the Predictive Uncertainty of Hydrological Models*, 2006, ISBN 3-933761-57-3
- 155 Bielinski, Andreas: *Numerical Simulation of CO<sub>2</sub> sequestration in geological formations*, 2007, ISBN 3-933761-58-1
- 156 Mödinger, Jens: *Entwicklung eines Bewertungs- und Entscheidungsunterstützungssystems für eine nachhaltige regionale Grundwasserbewirtschaftung*, 2006, ISBN 3-933761-60-3
- 157 Manthey, Sabine: *Two-phase flow processes with dynamic effects in porous media - parameter estimation and simulation*, 2007, ISBN 3-933761-61-1
- 158 Pozos Estrada, Oscar: *Investigation on the Effects of Entrained Air in Pipelines*, 2007, ISBN 3-933761-62-X
- 159 Ochs, Steffen Oliver: *Steam injection into saturated porous media – process analysis including experimental and numerical investigations*, 2007, ISBN 3-933761-63-8
- 160 Marx, Andreas: *Einsatz gekoppelter Modelle und Wetterradar zur Abschätzung von Niederschlagsintensitäten und zur Abflussvorhersage*, 2007, ISBN 3-933761-64-6
- 161 Hartmann, Gabriele Maria: *Investigation of Evapotranspiration Concepts in Hydrological Modelling for Climate Change Impact Assessment*, 2007, ISBN 3-933761-65-4
- 162 Kebede Gurmessa, Tesfaye: *Numerical Investigation on Flow and Transport Characteristics to Improve Long-Term Simulation of Reservoir Sedimentation*, 2007, ISBN 3-933761-66-2
- 163 Trifković, Aleksandar: *Multi-objective and Risk-based Modelling Methodology for Planning, Design and Operation of Water Supply Systems*, 2007, ISBN 3-933761-67-0
- 164 Göttinger, Jens: *Distributed Conceptual Hydrological Modelling - Simulation of Climate, Land Use Change Impact and Uncertainty Analysis*, 2007, ISBN 3-933761-68-9
- 165 Hrsg.: Braun, Jürgen; Koschitzky, Hans-Peter; Stuhmann, Matthias: *VEGAS – Kolloquium 2007*, Tagungsband zur Veranstaltung am 26. September 2007 an der Universität Stuttgart, Campus Stuttgart-Vaihingen, 2007, ISBN 3-933761-69-7
- 166 Freeman, Beau: *Modernization Criteria Assessment for Water Resources Planning; Klamath Irrigation Project, U.S.*, 2008, ISBN 3-933761-70-0

- 167 Dreher, Thomas: *Selektive Sedimentation von Feinstschwebstoffen in Wechselwirkung mit wandnahen turbulenten Strömungsbedingungen*, 2008, ISBN 3-933761-71-9
- 168 Yang, Wei: *Discrete-Continuous Downscaling Model for Generating Daily Precipitation Time Series*, 2008, ISBN 3-933761-72-7
- 169 Kopecki, Ianina: *Calculational Approach to FST-Hemispheres for Multiparametrical Benthos Habitat Modelling*, 2008, ISBN 3-933761-73-5
- 170 Brommundt, Jürgen: *Stochastische Generierung räumlich zusammenhängender Niederschlagszeitreihen*, 2008, ISBN 3-933761-74-3
- 171 Papafotiou, Alexandros: *Numerical Investigations of the Role of Hysteresis in Heterogeneous Two-Phase Flow Systems*, 2008, ISBN 3-933761-75-1
- 172 He, Yi: *Application of a Non-Parametric Classification Scheme to Catchment Hydrology*, 2008, ISBN 978-3-933761-76-7
- 173 Wagner, Sven: *Water Balance in a Poorly Gauged Basin in West Africa Using Atmospheric Modelling and Remote Sensing Information*, 2008, ISBN 978-3-933761-77-4
- 174 Hrsg.: Braun, Jürgen; Koschitzky, Hans-Peter; Stuhmann, Matthias; Schrenk, Volker: *VEGAS-Kolloquium 2008 Ressource Fläche III*, Tagungsband zur Veranstaltung am 01. Oktober 2008 an der Universität Stuttgart, Campus Stuttgart-Vaihingen, 2008, ISBN 978-3-933761-78-1
- 175 Patil, Sachin: *Regionalization of an Event Based Nash Cascade Model for Flood Predictions in Ungauged Basins*, 2008, ISBN 978-3-933761-79-8
- 176 Assteerawatt, Anongnart: *Flow and Transport Modelling of Fractured Aquifers based on a Geostatistical Approach*, 2008, ISBN 978-3-933761-80-4
- 177 Karnahl, Joachim Alexander: *2D numerische Modellierung von multifraktionalem Schwebstoff- und Schadstofftransport in Flüssen*, 2008, ISBN 978-3-933761-81-1
- 178 Hiester, Uwe: *Technologieentwicklung zur In-situ-Sanierung der ungesättigten Bodenzone mit festen Wärmequellen*, 2009, ISBN 978-3-933761-82-8
- 179 Laux, Patrick: *Statistical Modeling of Precipitation for Agricultural Planning in the Volta Basin of West Africa*, 2009, ISBN 978-3-933761-83-5
- 180 Ehsan, Saqib: *Evaluation of Life Safety Risks Related to Severe Flooding*, 2009, ISBN 978-3-933761-84-2
- 181 Prohaska, Sandra: *Development and Application of a 1D Multi-Strip Fine Sediment Transport Model for Regulated Rivers*, 2009, ISBN 978-3-933761-85-9



- 182 Kopp, Andreas: *Evaluation of CO<sub>2</sub> Injection Processes in Geological Formations for Site Screening*, 2009, ISBN 978-3-933761-86-6
- 183 Ebigbo, Anozie: *Modelling of biofilm growth and its influence on CO<sub>2</sub> and water (two-phase) flow in porous media*, 2009, ISBN 978-3-933761-87-3
- 184 Freiboth, Sandra: *A phenomenological model for the numerical simulation of multiphase multicomponent processes considering structural alterations of porous media*, 2009, ISBN 978-3-933761-88-0
- 185 Zöllner, Frank: *Implementierung und Anwendung netzfreier Methoden im Konstruktiven Wasserbau und in der Hydromechanik*, 2009, ISBN 978-3-933761-89-7

Die Mitteilungshefte ab der Nr. 134 (Jg. 2005) stehen als pdf-Datei über die Homepage des Instituts: [www.iws.uni-stuttgart.de](http://www.iws.uni-stuttgart.de) zur Verfügung.