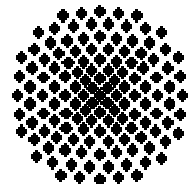


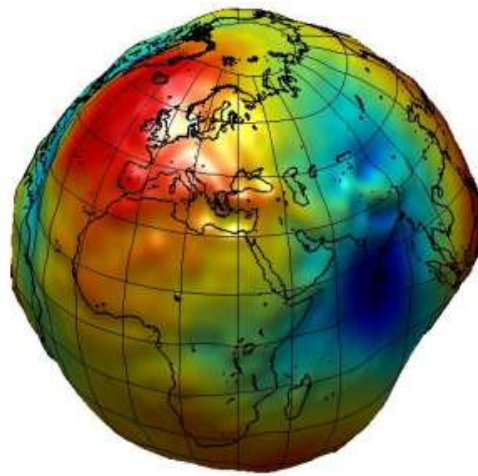


Universität Stuttgart

Geodätisches Institut



Systemtransformation und Gezeitenmodellierung



Studienarbeit im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Katharina Bulach

Stuttgart, Januar 2005

Betreuer:

Dipl.-Ing. Oliver Baur, Universität Stuttgart

Prüfer:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. tek. h.c. Dr.-Ing. E.h. Erik W. Grafarend,
Universität Stuttgart

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir eingereichte Studienarbeit zum Thema

„Systemtransformation und Gezeitenmodellierung“

selbstständig und nur unter Benutzung der in der Arbeit angegebenen Literatur angefertigt habe.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Zielsetzung und Vorgehensweise	4
2	Allgemeine Grundlagen.....	7
2.1	Zeitsysteme	7
2.1.1	Julianisches Datum (JD)	7
2.1.2	Sternzeit (ST).....	7
2.1.3	Sonnenzeit (AT)	8
2.1.4	Weltzeit (Universal Time, UT).....	8
2.1.5	Ephemeridenzeit (ET).....	9
2.1.6	Internationale Atomzeit (Temps Atomique International, TAI)	9
2.1.7	Koordinierte Weltzeit (Universal Time Coordinated, UTC).....	9
2.1.8	GPS-Zeit (GPST).....	10
2.1.9	Dynamische Zeit (TT)	10
2.2	Referenzsysteme	11
2.2.1	Erdfestes System	11
2.2.2	Terrestrisches intermediäres System	11
2.2.3	Zälestisches intermediäres System	11
2.2.4	Raumfestes System.....	12
2.2.5	Zusammenhang der Systeme	12
2.2.5.1	Präzession	12
2.2.5.2	Nutation	13
2.2.5.3	Polbewegung	14
2.2.5.4	Beschreibung der Transformation	14
2.3	Gezeitenpotenzial	15
2.3.1	Herleitung des Gezeitenpotenzials	16
2.3.1.1	Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers.....	16
2.3.1.2	Gezeitenpotenzial eines Himmelskörpers	19
2.3.2	Gezeiteneffekte in der Satellitengeodäsie.....	21
2.3.2.1	Direkte Gezeiten	21
2.3.2.2	Indirekte Gezeiten.....	21
3	Systemtransformation	23
3.1	Konzepterstellung.....	23
3.1.1	Klassische Methode (Option 1)	24
3.1.1.1	Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$	24
3.1.1.2	Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$	27
3.1.1.3	Transformationsmatrix $\mathbf{B}(t)$	28
3.1.2	Alternative Methode (Option 2)	28
3.1.2.1	Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$	29
3.1.2.2	Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$	31
3.1.2.3	Transformationsmatrix $\mathbf{B}(t)$	31

3.2	Implementierung.....	31
3.2.1	Ein- und Ausgabefiles	31
3.2.1.1	Klassische Methode.....	34
3.2.1.2	Alternative Methode.....	36
3.2.2	Hauptfunktion.....	39
3.3	Ergebnisbeurteilung.....	40
3.3.1	Klassische Methode.....	40
3.3.2	Alternative Methode.....	40
4	Gezeitenmodellierung.....	41
4.1	Konzepterstellung.....	41
4.1.1	Direkte Gezeiten.....	41
4.1.2	Gezeiten der festen Erde.....	42
4.1.3	Ozeangezeiten.....	46
4.2	Implementierung.....	47
4.2.1	Ein- und Ausgabefiles	48
4.2.2	Hilfsfunktionen.....	54
4.2.3	Hauptfunktion.....	59
5	Berechnungsbeispiele.....	61
5.1	Beispiele: Systemtransformation	61
5.1.1	Beispiel 1: ITRF → ICRF	61
5.1.2	Beispiel 2: ICRF → ITRF	62
5.2	Beispiele: Gezeitenmodellierung.....	62
5.2.1	Beispiel 1: direkte Gezeiten.....	63
5.2.2	Beispiel 2: Gezeiten der festen Erde.....	63
5.2.3	Beispiel 3: Ozeangezeiten	64
6	Zusammenfassung	65
7	Literaturverzeichnis	67

1 Einleitung

1.1 Motivation

Für Isaac Newton war die Erdanziehung eine Konstante. Doch die Vorstellung, dass ein Apfel überall auf der Erde das gleiche Gewicht hat, stimmt nicht ganz. Die Anziehungskraft unseres Planeten schwankt geringfügig je nach Ort und Zeit. Der Grund hierfür ist, dass die großen Massen der Erde – Gestein, Ozeane und Eis – ungleich verteilt sind und sich zudem ständig verschieben.

Diese Massenverteilung und damit die Kenntnis des Schwerfeldes der Erde ist für viele Wissenschaftszweige von großer Bedeutung. Schweredaten werden heute unter anderem benutzt zur Bestimmung der Ozeantopographie, zur Analyse von Mechanismen und Massenverlagerungen auf der Erdoberfläche bis hin zur Ermittlung der Leistung von Wasserkraftwerken. Neben der Verwendung der Schweremessungen selbst können die Messdaten aber auch für geophysikalische Fragestellungen interpretiert werden. Kleinere räumliche Variationen erlauben die Feststellung von Hohlräumen wie Grabkammern, Höhlen oder U-Bahn-Tunnels, im größeren Raster zeigen sich zum Beispiel Öl-Lagerstätten, Gebirgswurzeln oder tektonische Plattenränder. Aufgrund dieser zahlreichen Anwendungen werden seit über hundert Jahren Messungen in diese Richtung durchgeführt.

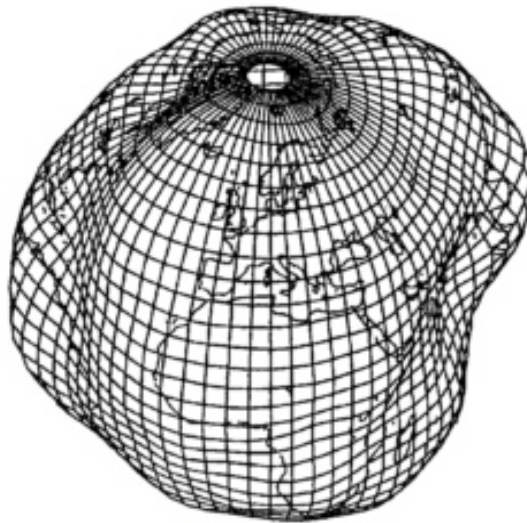


Abbildung 1-1: Überhöhte Darstellung des Erdschwerfeldes

Die Modellierung des Schwerfeldes, wie sie beispielsweise in Abbildung 1-1 dargestellt ist, stützt sich auf komplementäre Informationsquellen: die Bahninformation einer Vielzahl geodätischer und nichtgeodätischer Satelliten, terrestrische Schwereanomalien, Fluggravimetrie, Satellitenaltimetrie, u.a.. In der Geodäsie bemüht man sich bereits seit mehr als zwei Jahrzehnten um die Realisierung von Schwerfeldsatellitenmissionen, die primär auf das Erreichen eines detaillierten und genauen Modells des Erdschwerfeldes ausgelegt sind. Diese Bemühungen haben zur Realisierung der GRACE und GOCE Satellitenmissionen geführt. Die innovative Sensorik an Bord der Satelliten ergänzt die oben angeführten Informationsquellen. Derartige Missionen zeichnen sich aus durch sehr niedrige Bahnen, einem kontinuier-

lichen Fluss gravitativer Messdaten sowie durch die Messung oder Kompensation von Störeinflüssen.

Grundlegend für eine möglichst exakte Bestimmung des Erdschwerefeldes ist die genaue Bestimmung der Satellitenbahn. Da die Messdaten die Summe aller gravitativen Effekte beinhalten, d.h. neben der gravitativen Wirkung der Erde auch die gravitative Wirkung verschiedener Gezeiteneffekte, ist eine Reduktion der Störkräfte von entscheidender Bedeutung.

1.2 Zielsetzung und Vorgehensweise

Vor diesem Hintergrund beschäftigt sich auch die Satellitengeodäsie mit der Modellierung der Gezeiteneffekte. Durch die Gezeitenmodellierung können Messungen der sich frei um die Erde bewegendes Sensorik um die Einflüsse der gravitativen Störkräfte befreit werden. Nur so besteht die Möglichkeit, Aussagen über die gravitativen Eigenschaften des Erdkörpers selbst zu gewinnen.

Weiterhin ist für eine Vielzahl geodätischer Anwendungen der Übergang von einem erdfesten zu einem raumfesten Referenzsystem von fundamentaler Bedeutung. Beobachtungen werden häufig in einem erdfesten System, wie z.B. dem ITRS (International Terrestrial Reference System), durchgeführt. Die Auswertung und Analyse der beobachteten Werte fordert jedoch oft ein von der Erdrotation entkoppeltes System, wie es beispielsweise durch das ICRS (International Celestial Reference System) definiert wird. Zu beachten ist weiterhin, dass die Modellierung und Berechnung der erwähnten Gezeiteneffekte bezüglich des erdfesten Referenzsystems erfolgt. Folglich liegt deren Berücksichtigung im raumfesten Referenzsystem die erwähnte Systemtransformation zugrunde.

Zur Realisierung der angesprochenen Systemtransformation sowie der Modellierung der Gezeiten existiert eine Definition des Internationalen Erdrotations- und Bezugssystemdienstes (International Earth Rotation and Reference System Service, IERS) im Dokument „IERS Technical Note No. 32“, welches auch als IERS Conventions 2003 bezeichnet wird. Das Dokument stellt ein Update zu den IERS Conventions 1996 dar.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein benutzerfreundliches Tool in der Programmiersprache C zu erstellen zur Berechnung der Systemtransformation $\text{ITRS} \leftrightarrow \text{ICRS}$ einerseits und der Gezeitenkräfte andererseits, sowie die Dokumentation beider Programme in einer Art „Handbuch“ zusammenzufassen. Gemäß den IERS Conventions 2003 gilt es die Systemtransformation auf zwei verschiedene Arten zu programmieren sowie die Ergebnisse anhand eines Vergleichsprogramms, basierend auf den IERS Conventions 1996, zu beurteilen. Zur Modellierung der Gezeiten existiert bereits ein C-Programm, welches benutzerfreundlicher und vor allem variabler gestaltet werden soll.

Die Arbeit ist so aufgebaut, dass die zwei verschiedenen Programme zwar getrennt voneinander behandelt werden, dennoch aber der Zusammenhang beider dargestellt wird. Einem Anwender soll dadurch die Möglichkeit gegeben werden, die Programme, je nach Bedarf, auch getrennt voneinander verstehen und anwenden zu können. Der genaue Aufbau der Arbeit wird im Folgenden kurz erläutert.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen dargestellt, die zum Verstehen der Arbeit erforderlich sind. Hierbei werden zum einen die verschiedenen Zeit- und Referenzsysteme, welche die Grundlage der Systemtransformation bilden, erklärt, zum anderen wird auf die unterschiedlichen Arten der Gezeiten eingegangen, welche für die Modellierung des Gezeiteneffektes von Bedeutung sind. Zudem erfolgt die Herleitung des Gezeitenpotenzials.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Systemtransformation. In der Konzepterstellung wird der formelmäßige Ablauf zweier unterschiedlicher Berechnungsmethoden mit den notwendigen

Transformationsmatrizen aufgezeigt, wie er in einem C-Programm umgesetzt wurde. Die zur Berechnung notwendigen Ein- und Ausgabefiles sowie die richtige Steuerung des Programms werden zudem erläutert. Zuletzt erfolgt die Beurteilung der erzielten Ergebnisse.

Kapitel 4 widmet sich dem zweiten Teil der Ausarbeitung. Hierin steht die Gezeitenmodellierung im Mittelpunkt. Die Konzepterstellung stellt alle wichtigen Formeln dar, welche zur Berechnung der Gezeiten von Nöten sind. Im letzten Teil dieses Kapitels werden die in das Programm implementierten Funktionen sowie der Aufbau der Ein- und Ausgabefiles dargestellt. Wie auch in Kapitel 3 werden die wichtigsten Einstellungen zur Programmsteuerung aufgezeigt.

Kapitel 5 zeigt schließlich die Anwendung der beiden C-Programme. Es werden einige beispielhafte Berechnungen sowohl bezüglich der Systemtransformation als auch bezüglich der Gezeitenmodellierung mit unterschiedlichen Programmeinstellungen durchgeführt, um die verschiedenen Einstellungsmöglichkeiten, welche die Programme bieten, aufzuzeigen.

2 Allgemeine Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst einige wichtige Begriffe zum besseren Verständnis der nachfolgenden Kapitel eingeführt und erläutert. Mit Ausnahme der Herleitung des Gezeitenpotenzials wird auf eine ausführliche Darstellung von Formeln verzichtet. Dies wird an entsprechender Stelle nachgeholt.

2.1 Zeitsysteme

Die Zeitmessung zählt mit zu den ältesten Zweigen der Astronomie. Alle dem Menschen natürlich erscheinenden Zeiteinheiten sind durch astronomische Phänomene bestimmt, wie beispielsweise das Jahr durch den Umlauf der Erde um die Sonne oder der Monat durch die Bewegung des Mondes um die Erde. Bei höheren Ansprüchen an die Genauigkeit zeigt sich aber, dass die Festlegung der Zeiteinheiten nicht unproblematisch ist. Weder lässt sich das Jahr präzise durch eine ganze Anzahl von Monaten oder Tagen ausdrücken, noch enthält ein Monat eine ganze Zahl von Tagen. Zur Lösung dieser Probleme sind eine Vielzahl von Zeitskalen entwickelt worden, deren wichtigste im Folgenden beschrieben werden.

2.1.1 Julianisches Datum (JD)

Für viele Berechnungen ist es oft zweckmäßig eine durchlaufende Tageszählung zu haben. Dies wird durch das Julianische Datum (JD) erreicht, das am 1. Januar 4713 v. Chr. mittags 12 Uhr (bezogen auf Greenwich) beginnt. Das Julianische Jahr dauert genau 365,25 Tage und entspricht somit nicht der tatsächlichen Länge des tropischen Jahres von ca. 365,2422 Tagen, erleichtert aber die rechnerische Handhabung. Ein besonderer Zeitpunkt ist der 1. Januar 2000 12 Uhr mittags. Dieser Zeitpunkt hat das Julianische Datum 2451545,0 und wird als Standarddepoche J2000.0 bezeichnet. Im Internationalen Geophysikalischen Jahr (1957/58) wurde ein modifiziertes Julianisches Datum (MJD) festgelegt mit Nullpunkt am 17.11. 1858 0:00 Uhr. Die Standarddepoche dieses Datums lautet 51544,5. Auf diesen Zeitpunkt beziehen sich viele Theorien und Parameter (Hartmann, 1996), weshalb das JD bzw. das MJD von fundamentaler Bedeutung ist.

2.1.2 Sternzeit (ST)

Die Sternzeit wird abgeleitet aus der Umdrehung der Erde gegenüber dem Sternenhimmel. Sie ist definiert als der Stundenwinkel des Frühlingsäquinoktiums. Man unterscheidet zwischen der wahren Sternzeit (apparent sidereal time, AST), dem Stundenwinkel des wahren Frühlingsäquinoktiums, und der mittleren Sternzeit (mean sidereal time, MST), dem Stundenwinkel des mittleren Frühlingsäquinoktiums. Der Stundenwinkel wird dabei immer auf den Meridian durch den Zenit des Beobachtungsortes und den wahren Nordpol bezogen.

Die Einheit der Sternzeit ist der Sterntag. Dieser entspricht ziemlich genau einer einmaligen Umdrehung der Erde. Er wird unterteilt in 24 Stunden zu je 60 Minuten zu je 60 Sekunden.

Wegen des Bezugs auf den Meridian führt die obige Definition zu einer Sternzeit, die ortsabhängig ist (Richter, 1999). An einem Ort mit der astronomischen Länge $\Lambda = 0$ bezeichnet man die Sternzeit als die Greenwicher Sternzeit (Greenwich sidereal time, GST). Auch hier wird unterschieden zwischen der wahren Greenwicher Sternzeit (Greenwich apparent sidereal time, GAST) und der mittleren Greenwicher Sternzeit (Greenwich mean sidereal time, GMST). Die Beziehungen der vorgestellten Sternzeiten sind nachfolgend dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{AST} &= \text{GAST} + \Lambda \\ \text{MST} &= \text{GMST} + \Lambda \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

Um auf eine weltweit einheitliche Sternzeit zu kommen, bezieht man sich auf den Meridian von Greenwich und auf die so erhaltene Zeitskala GMST. Um zwischen GMST und der lokalen Sternzeit umrechnen zu können, muss folglich die geographische Länge des Beobachtungsortes bekannt sein.

2.1.3 Sonnenzeit (AT)

Für die Zeiteinteilung des täglichen Lebens ist nicht die Sternzeit, sondern die Sonnenzeit maßgeblich. Die Sonnenzeit ist definiert als der Stundenwinkel der Sonne ± 12 h. Man unterscheidet, ebenso wie bei der Sternzeit, zwischen der wahren Sonnenzeit (apparent time, AT) als dem Stundenwinkel der wahren Sonne ± 12 h und der mittleren Sonnenzeit (mean time, MT) als dem Stundenwinkel der mittleren Sonne ± 12 h. Die entsprechenden Zeiteinheiten sind der wahre und der mittlere Sonnentag. Der wahre Sonnentag ist um etwa vier Minuten länger als der Sterntag.

Wie die Sternzeit ist auch die Sonnenzeit für Orte verschiedener astronomischer Längen unterschiedlich. Für einen Ort mit der astronomischen Länge $\Lambda = 0$ erhält man die wahre Sonnenzeit von Greenwich (Greenwich apparent time, GAT) bzw. die mittlere Sonnenzeit von Greenwich (Greenwich mean time, GMT). Analog zur Sternzeit ergeben sich folgende Beziehungen.

$$\begin{aligned} \text{AT} &= \text{GAT} + \Lambda \\ \text{MT} &= \text{GMT} + \Lambda \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

Von besonderer Bedeutung ist die auf den Null-Meridian bezogene mittlere Zeit, die Greenwich Mean Time (GMT). Immer dann, wenn Angaben allgemein gültig sein sollen, z.B. in astronomischen Jahrbüchern, findet sie Verwendung. Eine Umrechnung auf Zonenzeiten war kein Problem. Sie wurde so zu einer universellen Zeit. Jedoch waren zum Teil deutlich unterschiedliche Definitionen von GMT in Umlauf. In der Astronomie wurde GMT sogar von Mittag bis Mittag gerechnet.

2.1.4 Weltzeit (Universal Time, UT)

Wegen all dieser Verwirrungen im Zusammenhang mit GMT wurde im Jahre 1926 die Weltzeit (Universal Time, UT) als Ersatz für die GMT eingeführt. Von ihr gibt es verschiedene Varianten

UT0: Die mittlere Sonnenzeit von Greenwich bezeichnet man auch als UT0. Diese Zeit ist eine Vorstufe von UT1.

UT1: Infolge der Polschwankungen der Erde variiert die Differenz der geographischen Längen zum Nullmeridian. Berücksichtigt man diese Polschwankungen erhält man UT1. Wenn in der Literatur von UT gesprochen wird, ist in der Regel UT1 gemeint.

UT2: Berücksichtigt man noch die wichtigsten nichtsäkularen Schwankungen der Erdrotation erhält man UT2, die wohl gleichförmigste Skala für Zeiten, die durch die Erdrotation definiert sind.

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Weltzeiten liegt im Bereich von Millisekunden.

2.1.5 Ephemeridenzeit (ET)

Alle bisher genannten Zeiten sind definiert in Abhängigkeit zur Dauer der Erdrotation. Diese ist allerdings nicht konstant. Zum einen ist sie kurzfristigen Schwankungen unterworfen, zum anderen verlangsamt sie sich stetig. Jede Zeitskala, die auf der Erdrotation basiert, muss daher unregelmäßig sein. Physiker und Astronomen standen somit vor der Notwendigkeit, ein absolut gleichförmiges Zeitmaß zu finden. Dies führte zur Einführung der Ephemeridenzeit. Diese Zeit beruht auf der Bahnbewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten. Die in der Himmelsmechanik entwickelten Modelle ermöglichen es, die Stellung der einzelnen Körper des Sonnensystems als Funktion der Zeit anzugeben. Diese unabhängige Variable in den Bewegungsgleichungen, als deren Funktion sich die Ephemeriden, d.h. die Örter und Bahnparameter der Körper des Sonnensystems berechnen lassen, ist die Ephemeridenzeit (Richter, 1999).

2.1.6 Internationale Atomzeit (Temps Atomique International, TAI)

Für die immer exakter werdenden Forschungen der Physiker erwies sich die aufgezeigte Definition einer gleichmäßigen Zeit im Laufe der Jahrzehnte als nicht sehr genau und praktikabel. Im Jahre 1967 beschloss die 13. Internationale Generalkonferenz für Masse und Gewichte die Einführung einer Atomsekunde, welche folgendermaßen definiert ist:

„Eine Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids Caesium 133 entsprechenden Strahlung.“

Damit wurde die Zeit erstmals in das Internationale System der Masse und Gewichte (SI) aufgenommen.

Diese so definierte SI-Sekunde bildet die Einheit der 1972 eingeführten Atomzeit (TAI). Die Atomsekunde war so festgelegt worden, dass sie die gleiche Dauer wie die Ephemeridensekunde hat. Andererseits wurde die Atomzeit so eingerichtet, dass sie am 1. Januar 1958 mit der Weltzeit (UT) übereinstimmte. Ephemeridenzeit und Atomzeit unterscheiden sich daher um einen konstanten Faktor.

$$ET = TAI + 32.184 \text{ sec.}$$

(2.1-3)

Rund 200 Atomuhren, verstreut über die gesamte Erdoberfläche, melden derzeit ihre Messergebnisse dem Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) in Sevres (Frankreich). Dort wird dann die genaue Atomzeit berechnet.

2.1.7 Koordinierte Weltzeit (Universal Time Coordinated, UTC)

Seit dem 1. Januar 1972 wird weltweit das System der Koordinierten Weltzeit verwendet. UTC stimmt bis auf eine ganze Anzahl von Sekunden mit der Internationalen Atomzeit (TAI) überein. Der Zeitpunkt 1. Januar 1972 0h UTC fällt zusammen mit dem 31. Dezember 1971,

23h 59min 59,59sec UT1. Die Differenz zwischen UTC und TAI betrug am Anfang 1972 zehn Sekunden.

$$\text{TAI} - \text{UTC} = 10 \text{ Sekunden} \quad (2.1-4)$$

Wenn die Differenz zwischen UTC und UT1 größer als 0,9 Sekunden wird, wird am Ende der letzten Minute des 30. Juni UTC oder des 31. Dezember UTC eine positive oder negative Schaltsekunde eingeführt. Derzeit (Dezember 2004) sind 32 Schaltsekunden eingeführt.

2.1.8 GPS-Zeit (GPST)

Die GPS-Zeit basiert auf TAI. Sie wird realisiert mit Atomuhren im GPS Kontrollzentrum. Die GPS-Zeitrechnung beginnt um 0 Uhr am 6. Januar 1980. Zu diesem Zeitpunkt wurde $\text{GPST} = \text{UTC}$ gesetzt, wobei eine Abweichung von 19 Sekunden zwischen TAI und UTC bestand. Demzufolge gilt für die Relation zwischen GPST und TAI

$$\text{GPST} = \text{TAI} - 19\text{sec} \quad (2.1-5)$$

Seit Beginn der GPS Zeitrechnung bis heute (Dezember, 2004) wurden in UTC insgesamt 13 Schaltsekunden eingeführt. Demnach gilt zur Zeit folgende Relation.

$$\text{GPST} = \text{UTC} + 13\text{sec} \quad (2.1-6)$$

GPS Zeitpunkte werden in GPS-Wochen und innerhalb der GPS-Wochen in Sekunden angegeben. Der Übergang von einer GPS-Woche zur Nächsten ist immer zu Mitternacht von Samstag zu Sonntag GPST (Kleusberg, 1998).

2.1.9 Dynamische Zeit (TT)

Nach den Erkenntnissen der Relativitätstheorie ist die Zeit keine unabhängige Größe sondern steht immer in Relation zu einem Referenzsystem. Diese relativistischen Effekte berücksichtigen die 1984 eingeführten dynamischen Zeiten, die sich auf die dynamischen Gesetze der Planetenbewegungen im Sonnensystem beziehen, die wiederum auf der Definition eines Referenzsystems beruhen. Bei der Terrestrial Time (TT) dient die Erde als Bezugskörper, der Bezugspunkt der Baryzentric Dynamical Time (TDB) ist der Schwerpunkt des Sonnensystems. Sie weicht von der TT um nicht mehr als 0.002 sec ab.

Diesen dynamischen Zeiten liegt als Einheit die SI-Sekunde zugrunde. Sie lösten die Ephemeridenzeit als Grundlage der Zeitrechnung ab. Im Interesse einer Kontinuität zwischen Ephemeridenzeit und dynamischer Zeit wurde die Differenz zur Atomzeit ebenfalls auf 32.184 Sekunden festgelegt:

$$\text{TT} = \text{ET} = \text{TAI} + 32.184 \text{ sec} \quad (2.1-7)$$

2.2 Referenzsysteme

Neben den Zeitsystemen sind in der Astronomie auch Referenzsysteme von besonderer Bedeutung. Um die Bewegung von Körpern eindeutig zu beschreiben, sind Angaben zum Ort des Körpers zu verschiedenen Zeitpunkten in eindeutiger Weise notwendig. Dies geschieht über Referenzsysteme. Fixiert man ein Koordinatensystem im Raum, so kann es als Referenzsystem dienen, um beispielsweise Satellitenorte und -geschwindigkeiten anzugeben. Kennt man die Lage des Ursprungs und die Achsrichtungen (x-, y- und z-Achse) so machen Koordinatenangaben einen Sinn. Häufig findet man auch die Ebene, in der sich die x- und y-Achse befinden, als weitere Angabe. Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevanten Referenzsysteme näher erläutert. Eine Beschreibung weiterer Referenzsysteme ist bei (Gerstl, 1999) zu finden. Bei allen hier vorgestellten Systemen handelt es sich um orthonormale Rechtssysteme.

2.2.1 Erdfestes System

Als erdfestes Referenzsystem dient das Internationale Terrestrische Referenzsystem ITRS (International Terrestrial Reference System). Seine dritte Achse ist bestimmt durch die Richtung des CIO (Conventional International Origin), welcher durch die mittlere Richtung des Rotationsvektors der Erde in den Jahren 1900 bis 1905 definiert ist. Die erste Achse nimmt die Richtung zum Schnittpunkt des Meridians von Greenwich mit der Ebene senkrecht zum CIO ein. Der zweite Basisvektor ergänzt das orthonormale System zu einem Rechtssystem. Eine Position wird im erdfesten System durch die kartesischen Koordinaten x, y und z beschrieben.

2.2.2 Terrestrisches intermediäres System

Das terrestrische intermediäre System ersetzt das terrestrische Äquatorsystem. Die dritte Achse ist zum zälestischen intermediären Pol gerichtet. Der Rotationsvektor dieses Systems besitzt in bezug auf ein erdfestes System keine Komponente in Richtung des zälestischen intermediären Pols. Die Richtung der ersten Achse zeigt zum „terrestrischen Ephemeridenursprung“, welcher immer im wahren Äquator und damit rechtwinklig zum zälestischen intermediären Pol liegt (McCarthy et al., 2004).

Das vorläufige terrestrische intermediäre System bezeichnet das bisherige wahre terrestrische Äquatorsystem, dessen erste Achse zum Schnittpunkt des Meridian von Greenwich mit der Äquatorebene zeigt. Es unterscheidet sich vom terrestrischen intermediären System durch den Winkel zwischen dem „terrestrischen Ephemeridenursprung“ und dem oben genannten Schnittpunkt.

2.2.3 Zälestisches intermediäres System

Das zälestische intermediäre System ersetzt das zälestische Äquatorsystem. Es ist definiert durch die dritte Achse, welche, wie beim terrestrischen intermediären System, zum zälestischen intermediären Pol gerichtet ist. Die Richtung der ersten Achse im rechtwinklig zum zälestischen Ephemeridenpol liegenden Äquator zeigt zum „zälestischen Ephemeridenursprung“ (McCarthy et al., 2004).

Das vorläufige zälestische intermediäre System bezeichnet das bisherige wahre zälestische Äquatorsystem, dessen erste Achse in Richtung des wahren Frühlingsäquinoktiums zeigt. Es unterscheidet sich vom zälestischen intermediären System durch den Winkel zwischen dem zälestischen Ephemeridenursprung und dem wahren Frühlingsäquinoktium.

2.2.4 Raumfestes System

Das raumfeste Referenzsystem ist seit 1998 das Internationale Zälestische Referenzsystem ICRS (International Celestial Reference System). Es wird mit hoher Genauigkeit durch Positionen extragalaktischer Radioquellen realisiert. Es fällt nicht genau mit dem früheren raumfesten Referenzsystem, dem mittleren zälestischen Äquatorsystem der Epoche J2000.0, zusammen. Der Unterschied des ICRS zum mittleren zälestischen Äquatorsystem lässt sich durch eine konstante Cardansche Rotationsmatrix darstellen (McCarthy et al., 2004).

2.2.5 Zusammenhang der Systeme

Die Verknüpfung von ICRS und ITRS erfolgt über verschiedene Effekte, die darauf zurückzuführen sind, dass die Rotationsachse der Erde weder innerhalb des Erdkörpers noch im Raume fest ist. Sie werden bezeichnet als Präzession, Nutation und Polbewegung. Diese drei Begriffe werden im Folgenden kurz erläutert vor allem im Hinblick auf die Ursachen sowie auf ihre Kenngrößen, welche die Effekte auszeichnen. Im Anschluss erfolgt die Beschreibung der Transformation vom erdfesten in das raumfeste System.

2.2.5.1 Präzession

Langperiodische Variationen der Erdrotationsachse werden als Präzession bezeichnet. Etwa alle 26000 Jahre erfolgt ein kompletter Umlauf der Rotationsachse der Erde um eine mittlere Achse, die senkrecht auf der Ekliptikebene steht.

Die Ursache der Präzession liegt in der gravitativen Wechselwirkung zwischen der Erde und den anderen Körpern im Sonnensystem. Der Mond und die Sonne bewirken dabei die Haupteffekte. Die Erde ist nur in grober Näherung eine Kugel, eine weitaus bessere Näherung ist das Rotationsellipsoid, wobei der Äquatordurchmesser um etwa 43 km größer ist als der Polardurchmesser. Man spricht von einer Äquatorwulst der Erde. Zudem dreht sich die Erde um die eigene Achse und stellt damit physikalisch einen Kreisel dar. Durch die gravitative Anziehung üben der Mond und die Sonne, in geringem Maße auch die anderen Planeten, Kräfte und damit auch Drehmomente auf die Erde aus. Der Effekt dieses Drehmomentes ist, wie auch bei allen anderen Kreisel, die Aufrichtung der Drehachse, in diesem Falle also die Aufrichtung der Erdrotationsachse. Die Erde weicht nun den äußeren Drehmomenten durch eine Verlagerung der Achse aus, so wie sich auch jeder andere physikalische Kreisel verhält. Dieser Effekt wird als Präzession bezeichnet. In verfeinerter Näherung beschreibt die Rotationsachse der Erde mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit einen Kreiskegel um die feste Ekliptiknormale. Infolge der Präzession verändert sich die räumliche Lage des Äquators der Erde. Der Nordpol, der sich heute in der Nähe des Polarsterns im Sternbild des „kleinen Bären“ befindet, wird beispielsweise nach einigen Jahrtausenden in einem ganz anderen Sternbild liegen.

Die Kenndaten der Präzession bilden die drei Größen ζ_A , θ_A und z_A , welche die Winkelunterschiede zwischen dem äquatorialen Quasi-Inertialsystem und dem mittleren zälestischen Äquatorsystem zu verschiedenen Epochen darstellen. Abbildung 2-1 zeigt die Bedeutung der drei Präzessionselemente. Die Übergangsepoche, von welcher aus das Zeitintervall gezählt wird, ist J2000.0.

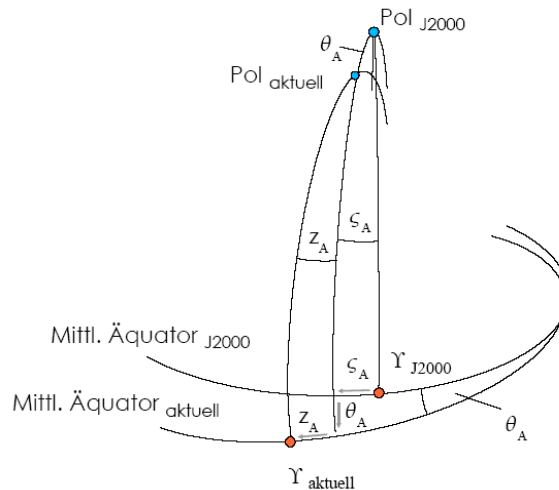


Abbildung 2-1: Bedeutung der Präzessionselemente

2.2.5.2 Nutation

Die Nutation ist eine der Präzession überlagerte Bewegung, nur ist sie im Vergleich zu dieser winzig klein. Physikalisch gesehen hat die Nutation dieselben Ursachen wie die Präzession. In der Summe ergibt sich eine "wellenartige" Bewegung um den Pol der Ekliptik. Die Erdachse beschreibt keine glatte Kegelfläche, sondern eine Art "Wellblechkegel". Hauptsächlich wird die Nutation durch den Mond verursacht, weil dessen Bahn um die Erde um etwa $5,1^\circ$ gegen die Ekliptikebene geneigt ist und sich dadurch ständig die Deklination des Mondes ändert. Weil sich die Knoten dieser Bahn rückläufig mit einer Umlaufzeit von etwa 18,6 Jahren durch die Ekliptik bewegen, "zieht" der Mond nicht immer in derselben Richtung. Einmal addiert sich die Neigung der Mondbahn zur Ekliptikschiefe von $23,5^\circ$ und einmal wird sie abgezogen, wenn sich der Mondbahnknoten um die Hälfte der Zeit, also 9,3 Jahre, weiterbewegt hat. Das alles ändert das oben angesprochene Drehmoment auf die Erdachse. Der wahre Himmelspol beschreibt eine winzige Ellipse um den mittleren Himmelspol, was dann zusammen mit der Präzession diese wellenartige Bewegung ergibt.

Nutation in Länge $\Delta\psi$ und Nutation in Schiefe $\Delta\epsilon$ sind die erforderlichen Kenngrößen. Die Nutation hängt über die zusätzlich zu berücksichtigenden Objekte Sonne und Mond und in etwas komplizierter Form von der Zeit ab. Dennoch wird die Nutation direkt von der Zeit abgeleitet. Die Bedeutung der Nutationselemente, die den Übergang zwischen mittlerem und wahren zälestischen Äquatorsystem vermitteln, werden in Abbildung 2-2 verdeutlicht.

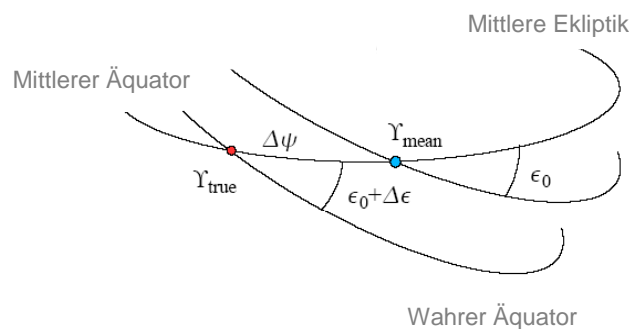


Abbildung 2-2: Bedeutung der Nutationselemente

2.2.5.3 Polbewegung

Die Rotation der Erde ist variabel, sowohl was die Lage der Achse als auch die Geschwindigkeit betrifft. Ursache dafür sind Massenverlagerungen im Erdinnern, auf der Erdoberfläche, in den Ozeanen und in der Atmosphäre. Die Richtung des Rotationsvektors der Erde ändert sich nicht nur relativ zu einem raumfesten Referenzsystem sondern auch relativ zum Erdkörper. Die Richtungsänderung relativ zum Erdkörper bezeichnet man als Polbewegung (Richter, 1999).

Der Hauptanteil der Polbewegung setzt sich aus zwei kegelförmigen Umläufen des Rotationsvektors zusammen. Der eine Umlauf hat eine Dauer von ungefähr 430 Tagen, der Chandler-schen Periode, und einem Öffnungswinkel von etwa $0,2''$, der zweite Umlauf dauert ein Jahr und besitzt einen Öffnungswinkel von unter $0,1''$. Die Überlagerung dieser beiden periodischen Bewegungen mit einer etwas unterschiedlichen Frequenz hat einen schwebungsartig zu- und abnehmenden Öffnungswinkel und einen periodischen Umlauf des Pols gegen den Uhrzeigersinn zur Folge. Die Polbewegung, aufgefasst als Bewegung des geographischen Nordpols, wird oft in Meter statt in Bogensekunden ausgedrückt. Das Maximum des periodisch zu- und abnehmenden Bahnradiuses des geographischen Nordpols beträgt fast zehn Meter.

Die Ursache für den Chandler-periodischen Anteil der Polbewegung besteht darin, dass die Rotationsachse der Erde zwar näherungsweise, aber nicht genau mit der Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmomentes der Erde übereinstimmt. Die Chandler Periode folgt also aus der Nichtstarrheit der Erde. Der jahresperiodische Anteil dagegen hat seine Ursache in jahreszeitlichen Massenverlagerungen, insbesondere in der Atmosphäre durch meteorologische Vorgänge, aber auch durch ozeanische Strömungen und Grundwasserschwankungen (Richter, 1999).

Die Polbewegung wird durch die Daten x_P und y_P (Lage des Pols) festgelegt. Abbildung 2-3 zeigt den Übergang vom CIO (Conventional International Origin) zum momentanen Pol durch die Polkoordinaten x_P und y_P .

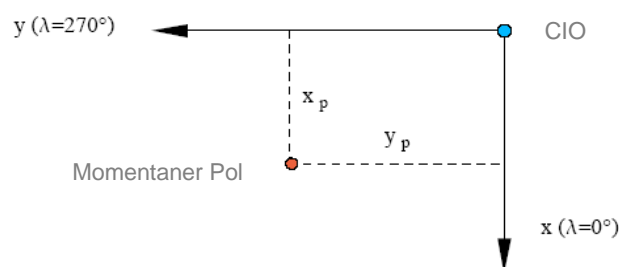


Abbildung 2-3: Übergang vom CIO zum momentanen Pol

2.2.5.4 Beschreibung der Transformation

Um Koordinatendarstellungen bezüglich des raumfesten bzw. des erdfesten Referenzsystems ineinander überzuführen, müssen Präzession, Nutation und Polbewegung berücksichtigt werden. Zur Transformation der Koordinaten gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Zwei dieser Möglichkeiten werden im Folgenden kurz erläutert.

Die klassische Methode stellt den Weg über den vorläufigen zälestischen intermediären Pol dar, zu welchem man vom raumfesten System aus über die Nutation-Präzessionmatrix \mathbf{NP} gelangt. Durch eine Rotation um die dritte Achse um den Winkel GST kommt man zum vor-

läufigen terrestrischen intermediären System. Die Polbewegungsmatrix \mathbf{W}' überführt schließlich wieder das vorläufige terrestrische intermediäre System in das erdfeste System.

Bei der alternativen Methode wird das raumfeste System mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{Q} in das zälestische intermediäre System überführt, das erdfeste System mit Hilfe der Polbewegungsmatrix \mathbf{W} in das terrestrische intermediäre System. Die Matrix $\mathbf{R}_3(\theta)$ der täglichen Rotation verbindet das zälestische und das terrestrische intermediäre System. Der Erdrotationswinkel θ ist dem im Äquator rechtwinklig zum zälestischen Ephemeridenpol liegende Winkel zwischen der ersten Achse des zälestischen und der ersten Achse des terrestrischen intermediären Systems. Dieser Winkel nimmt entsprechend der Rotationsgeschwindigkeit der Erde an einem Tag um rund 360° zu und bildet gleichzeitig das Zentrum der Transformation.

Insgesamt lässt sich die Systemtransformation vom raumfesten System in das erdfeste System beschreiben als Hintereinanderausführung der beschriebenen Rotationsvorgänge (Richter, 1999). Abbildung 2-4 stellt die beiden Möglichkeiten zur Transformation von Systemen schematisch dar.

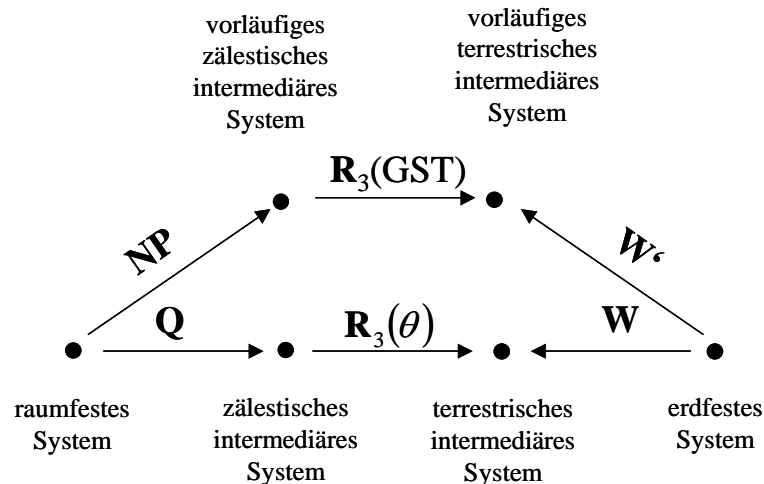


Abbildung 2-4: Transformation zwischen raumfestem und erdfestem System

2.3 Gezeitenpotenzial

Die Gezeiten gehören zu den kompliziertesten Phänomenen der Geophysik. Die theoretische Deutung hat ihren Ausgangspunkt in den astronomischen Wirkungen zwischen Erde, Mond und Sonne. Aufgrund dessen wurde eine Erklärung auch erst möglich, als Kepler die Planetenbahnen genauer beschrieben hatte und Newton durch das in seinem berühmten Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica“ erläuterte Gravitationsgesetz die notwendigen Grundlagen geschaffen hatte.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz, bzw. die allgemeine Relativitätstheorie, beschreibt die wechselseitige gravitative Anziehung von Massen, so z.B. die Anziehung der Erde und des Mondes bzw. der Sonne. Es stellt die Grundlage dar zur Bestimmung der gegenseitigen Kräfte und der Bestimmung der Bahnbewegungen der Himmelskörper. Das System Erde-Mond rotiert um seinen gemeinsamen Massenmittelpunkt. Im Massenmittelpunkt der Erde herrscht dabei Kräftegleichgewicht zwischen der Fliehkraft der Rotation und der Gravitationskraft

zwischen den Massen. Die Kräfte des Mondes sind jedoch aufgrund der endlichen Ausdehnung der Erde nicht überall auf der Erde gleich groß, ihre räumlichen Unterschiede sind die Gezeitenkräfte bzw. die Gezeitenbeschleunigungen. Abbildung 2-5 zeigt die Gezeitenbeschleunigung an der Erdoberfläche durch den Mond. Diese Überlegungen können für jeden beliebigen Himmelskörper und letztlich für die Summe aller Himmelskörper analog vollzogen werden. Die gezeitenerzeugende Kräfte ergeben sich aus der Differenz der Anziehungskraft der Himmelskörper und der Beschleunigung des Erdmittelpunktes.

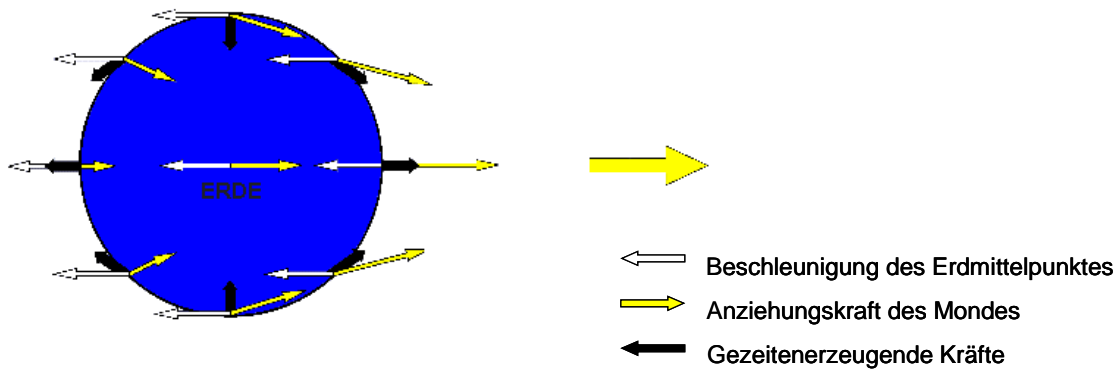


Abbildung 2-5: Gezeitenerzeugende Kräfte

2.3.1 Herleitung des Gezeitenpotenzials

Zum besseren Verständnis der Gezeiten erfolgt in diesem Abschnitt die Herleitung des Gezeitenpotenzials mit Hilfe des Gravitationspotenzials.

2.3.1.1 Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers

Die Herleitung des Gravitationspotenzials eines Himmelskörpers basiert auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz, welches lautet

$$m_p \Gamma_{\text{grav}}(P) = G \frac{m_Q m_p}{l^2} \quad (2.3-1)$$

Das Newtonsche Gravitationsgesetz für zwei Punktmassen gibt die Kraft an, die ein Massenpunkt Q auf einen Massenpunkt P ausübt. G ist die Gravitationskonstante, m_Q und m_p bezeichnen die Massen der Punkte Q und P . Q bezeichnet dabei den Quellpunkt, P den Aufpunkt. Der Abstand zwischen den beiden Punktmassen sei l . Verdeutlicht ist der Zusammenhang in Abbildung 2-6 bezüglich des erdfesten Koordinatensystems $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 | O)$.

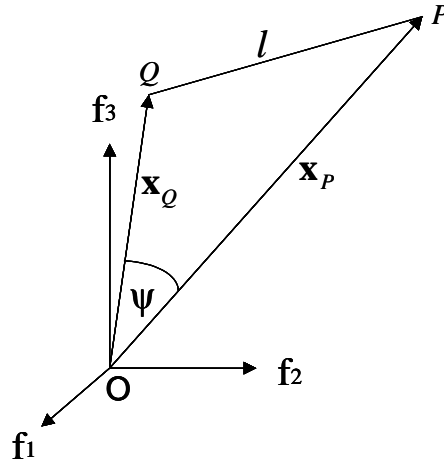


Abbildung 2-6: Quell- und Aufpunkt

In vektorieller Darstellung kann dieses Gesetz geschrieben werden als

$$\Gamma_{grav}(\mathbf{x}_P) = G \frac{m_Q}{\|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\|^3} (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \quad (2.3-2)$$

Für einen ausgedehnten Körper muss man über alle Quellpunkte summieren, was bei einer kontinuierlichen Ausdehnung einer Integration entspricht. Folglich ergibt sich

$$\Gamma_{grav}(\mathbf{x}_P) = G \int_{Körper} \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{\|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\|^3} dm = G \iiint_{Körper} \rho(\mathbf{x}_Q) \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{\|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\|^3} d\omega_3 \quad (2.3-3)$$

$\rho(\mathbf{x}_Q)$ stellt hierbei die Dichte im Quellpunkt dar, $d\omega_3$ das Volumenelement in kartesischen Koordinaten.

Das Vektorfeld $\Gamma_{grav}(\mathbf{x}_P)$ ist ein konservatives Vektorfeld, d.h. es gilt

$$rot \Gamma_{grav}(\mathbf{x}_P) = 0 \quad (2.3-4)$$

Zu diesem Vektorfeld existiert folglich ein Potenzial $U(\mathbf{x}_P)$.

Das Newton-Potenzial in kartesischer Darstellung lässt sich wie folgt darstellen.

$$U(\mathbf{x}_P) = G \iiint_{Körper} \frac{\rho(\mathbf{x}_Q)}{\|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\|} d\omega_3 \quad (2.3-5)$$

Da die Verteilung der Massendichte eines Quellkörpers nur unzureichend bekannt ist, ist das Newton-Potenzial nicht direkt evaluierbar.

Betrachtet man das Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers im masselosen Raum, so erfüllt dies aufgrund der Quellen- und Wirbelfreiheit des Gravitationsfeldes die Laplace-Gleichung

$$\Delta U_{grav} = 0 \quad (2.3-6)$$

Im Folgenden bezeichnet O das Geozentrum als Ursprung des Koordinatensystems, $H_i=Q$ den Quellkörper, $m_{H_i} = m_Q$ die Masse des Himmelskörpers H_i , r_E den Abstand zwischen Aufpunkt und Geozentrum O, r_{H_i} den Abstand des Geozentrums O von dem Massenmittelpunkt des Himmelskörpers und R_{Erde} den Erdradius.

Mit dem Ansatz eines radialsymmetrischen Kraftfeldes, dem Übergang von kartesischen in sphärische Koordinaten sowie der Entwicklung des reziproken Abstandes gelangt man schließlich zum Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers.

$$U^{H_i}(\lambda, \varphi, r_E) = \frac{Gm_{H_i}}{r_E} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_E}{r_{H_i}} \right)^{l+1} P_l(\cos \psi) \quad (2.3-7)$$

Die $P_l(\cos \psi)$ bezeichnen die Legendresche Polynome in Abhängigkeit des Raumwinkels ψ (vgl. Abbildung 2-6). Sie werden wie folgt berechnet.

$$P_l(\cos \psi) = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l \left[R_{lm}^*(\lambda, \varphi) R_{lm}^*(\lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}) + S_{lm}^*(\lambda, \varphi) S_{lm}^*(\lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}) \right] \quad (2.3-8)$$

Dabei bezeichnen l und m Grad und Ordnung der Polynome.

Die gängigste Darstellung des Gravitationspotenzials eines Himmelskörpers erhält man durch die Einführung der Kugelflächenfunktionen $e^{lm}(\lambda, \varphi)$. Diese lassen sich darstellen durch

$$e^{lm}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} R_{lm}^*(\lambda, \varphi) & 0 \leq m < l \\ S_{lm}^*(\lambda, \varphi) & -l < m < 0 \end{cases} \quad (2.3-9)$$

oder mit Hilfe der normierten Legendre Funktionen

$$e^{lm}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda & m > 0 \\ \bar{P}_l(\sin \varphi) & m = 0 \\ \bar{P}_{l|m|}(\sin \varphi) \sin |m|\lambda & m < 0 \end{cases} \quad (2.3-10)$$

Das Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers besitzt somit folgende Form.

$$U^{H_i}(\lambda, \varphi, r_E) = \frac{Gm_{H_i}}{r_E} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{r_{H_i}} \right)^{l+1} \frac{1}{2l+1} e^{lm}(\lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}) e^{lm}(\lambda, \varphi) \quad (2.3-11)$$

2.3.1.2 Gezeitenpotenzial eines Himmelskörpers

Zwischen Himmelskörper und Erdkörper gibt es eine gravitative Wechselwirkung, die eine Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Erde $\ddot{\mathbf{x}}_E$ zur Folge hat (Grafarend et al., 1996). In sehr guter Näherung lässt sich $\ddot{\mathbf{x}}_E$ darstellen als die Gravitationsbeschleunigung $\gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_E)$ im Massenmittelpunkt der Erde \mathbf{x}_E .

$$\ddot{\mathbf{x}}_E \approx \gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_E) \quad (2.3-12)$$

Zur Darstellung der Beschleunigung, die auf den Satelliten einwirkt, relativ zu einem erdfesten System, muss die Beschleunigung des Koordinatenursprungs $\ddot{\mathbf{x}}_E$, von der ebenfalls auf das erdfeste System bezogenen Beschleunigung $\gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_P)$ subtrahiert werden. Die resultierende Beschleunigung wird als die vom Himmelskörper hervorgerufene direkte Gezeitenbeschleunigung $\gamma_{\text{tid}(H_i)}(\mathbf{x}_P)$ bezeichnet.

$$\gamma_{\text{tid}(H_i)}(\mathbf{x}_P) = \gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_P) - \ddot{\mathbf{x}}_E = \gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_P) - \gamma_{\text{grav}(H_i)}(\mathbf{x}_E) \quad (2.3-13)$$

Betrachtet man die Gravitationswirkungen mehrerer Himmelskörper, so wird die gesamte Gezeitenbeschleunigung auf den Satelliten aus der Summe der von den einzelnen Himmelskörpern hervorgerufenen Teilbeschleunigungen gebildet.

$$\gamma_{\text{tid}}(\mathbf{x}_P) = \sum_i \gamma_{\text{tid}(H_i)}(\mathbf{x}_P) \quad (2.3-14)$$

Es ist bekannt, dass die Gravitationskraft eines Himmelskörpers ein Potenzial besitzt. Nach der Lösung der Laplace-Gleichung (vgl. (2.3-6)) hat dieses Potenzial folgende Form.

$$U^{H_i}(\mathbf{x}_P) = U^{H_i}(\lambda, \varphi, r_E) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l e^{lm}(\lambda, \varphi) \cdot u_{lm}^{H_i} \quad (2.3-15)$$

Durch die Gradientenbildung von $U^{H_i}(\mathbf{x}_P)$ lässt sich in jedem beliebigen Aufpunkt P die Gravitationsbeschleunigung berechnen.

$$\gamma_{grad(H_i)}(\mathbf{x}_P) = \left(grad U^{H_i}(\mathbf{x}) \right)_{x_P} = \frac{\sqrt{3}}{R_{Erde}} [\mathbf{e}_x u_{1,1}^{H_i} + \mathbf{e}_y u_{1,-1}^{H_i} \mathbf{e}_z u_{1,0}^{H_i}] + grad \left(\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l e^{lm}(\lambda, \varphi) \cdot u_{lm}^{H_i} \right) \quad (2.3-16)$$

Der gesamte Term wurde so aufgeteilt, dass im vorderen Teil die ausgeschriebenen Terme des Grades und $l = 1$ der Kugelfunktionsentwicklung dargestellt sind, im zweiten Teil die restlichen Terme für $l \geq 2$. Ein Term von Grad $l = 0$ tritt durch die Gradientenbildung nicht auf. Wie man erkennt ist der erste Term konstant, der Zweite weist eine Abhängigkeit des variablen Radiuses r_E auf.

Die Gravitationsbeschleunigung im Massenmittelpunkt $\gamma_{grav(H_i)}(\mathbf{x}_E)$ erhält man dadurch, dass nach der Gradientenbildung $r_E = 0$ gesetzt wird.

$$\gamma_{grav(H_i)}(\mathbf{x}_E) = \frac{\sqrt{3}}{R_{Erde}} [\mathbf{e}_x u_{1,1}^{H_i} + \mathbf{e}_y u_{1,-1}^{H_i} \mathbf{e}_z u_{1,0}^{H_i}] \quad (2.3-17)$$

Die Gravitationsbeschleunigung im Massenmittelpunkt beinhaltet folglich nur die Terme des Gravitationspotenzials vom Grad $l = 1$.

$$\gamma_{grav(H_i)}(\mathbf{x}_E) = \frac{\sqrt{3}}{R_{Erde}} [\mathbf{e}_x u_{1,1}^{H_i} + \mathbf{e}_y u_{1,-1}^{H_i} \mathbf{e}_z u_{1,0}^{H_i}] = grad \left(\sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l e^{lm}(\lambda, \varphi) \cdot u_{lm}^{H_i} \right) \quad (2.3-18)$$

Die Gezeitenbeschleunigung eines Himmelskörpers ergibt sich schließlich als Differenz zwischen dem Gravitationsvektor des Himmelskörpers im Aufpunkt und dem Gravitationsvektor des Himmelskörpers im Massenmittelpunkt und ist somit gleich dem Gradienten des Gravitationspotenzials des Himmelskörpers ohne die Terme des Grades $l = 0$ und $l = 1$.

$$\gamma_{tid(H_i)}(\mathbf{x}_P) = \gamma_{grav(H_i)}(\mathbf{x}_P) - \gamma_{grav(H_i)}(\mathbf{x}_E) = grad \left(\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l e^{lm}(\lambda, \varphi) \cdot u_{lm}^{H_i} \right) \quad (2.3-19)$$

Das Gezeitenpotenzial eines Himmelskörpers ergibt sich zu

$$U^{tid(H_i)}(\mathbf{x}_P) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l e^{lm}(\lambda, \varphi) \cdot u_{lm}^{H_i} \quad (2.3-20)$$

Die Kugelfunktionsentwicklung des Gezeitenpotenzials stimmt mit der Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotenzials bis auf die Terme des Grades $l = 0$ und $l = 1$ überein. Somit ist gezeigt, dass die Gezeitenbeschleunigung konservativ ist. Es gilt schließlich noch die Koeffizienten $u_{lm}^{H_i}$ zu bestimmen. Die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten geschieht durch Koeffizientenvergleich.

Vergleicht man das Gezeitenpotenzial eines Himmelskörpers (2.3-20) mit dem Gravitationspotenzial eines Himmelskörpers (2.3-11) ohne die Terme des Grades $l = 0$ und $l = 1$ (2.3-21), so erhält man die vom Himmelskörper verursachten Anteile $u_{lm}^{H_i}$.

$$U^{tid(H_i)}(\mathbf{x}_P) = \frac{Gm_{H_i}}{r_E} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r_E}{r_{H_i}} \right)^{l+1} \frac{1}{2l+1} e^{lm}(\lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}) e^{lm}(\lambda, \varphi) \quad (2.3-21)$$

$$u_{lm}^{H_i} = \frac{Gm_{H_i}}{R_{Erde}} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R_{Erde}}{r_{H_i}} \right)^{l+1} e^{lm}(\lambda_{H_i}, \varphi_{H_i}) \quad (2.3-22)$$

Die gesamten Koeffizienten ergeben sich schließlich durch Aufsummieren der Anteile aller Himmelskörper.

$$u_{lm}^H = \sum_i u_{lm}^{H_i} \quad (2.3-23)$$

2.3.2 Gezeiteneffekte in der Satellitengeodäsie

Der Erdkörper, als auch die Massen aller weiteren Himmelskörper, beeinflussen durch ihre Gravitationswirkungen mehr oder weniger die Bahn eines künstlichen Satelliten. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwischen direkten und indirekten Gravitationswirkungen der Himmelskörper (Baker, 1984).

2.3.2.1 Direkte Gezeiten

Als direkte Einflüsse bezeichnet man die Summe der Gravitationsbeschleunigungen aller Himmelskörper, wie sie unmittelbar, also direkt, auf den Satelliten einwirken.

2.3.2.2 Indirekte Gezeiten

Die direkten Gravitationswirkungen der Himmelskörper haben Reaktionen der festen Erde als auch der Ozeane in Form von Massenverlagerungen zur Folge. Die Deformationen der Erdmassen führen zu Deformationen des Gravitationsfeldes, welche sich wiederum als indirekte

Gravitationseinwirkung der Himmelskörper auf die Satellitenbahn auswirken. Zu den indirekten Gezeiten zählen hauptsächlich die Ozeangezeiten und die Gezeiten der festen Erde.

- **Ozeangezeiten**

Unter Ozeangezeiten versteht man die Bewegung der Meeresoberfläche relativ zum Meeresboden infolge der Gezeitenwellen in den Ozeanen, sowie durch Aufstauereffekt in Buchten und Schelfgebieten, welche auch als Ebbe und Flut bekannt sind. Gemessen werden diese Gezeiten durch Ozeanhöhenmessungen sowie durch Druckmessungen über Sensoren, welche auf dem Meeresboden in Tiefseegebieten installiert werden.

- **Gezeiten der festen Erde**

Unter Gezeiten der festen Erde versteht man die Verformung der Landgebiete und des Meeresbodens als Reaktion der festen Erde infolge der direkten externen Kräfte. Die Wassermassen bleiben hierbei unberücksichtigt. Würden keine Ozeane existieren, so gäbe es dennoch die Gezeiten der festen Erde (Baur, 2002).

3 Systemtransformation

Oft liegen Messergebnisse nur in einem erdfesten Koordinatensystem vor. Viele Algorithmen verlangen aber aufgrund der einfacheren und einheitlichen Berechnung und Darstellung Koordinaten bezüglich eines raumfesten Referenzsystems. Umgekehrt können jedoch auch Koordinaten nur in Bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem gegeben sein, die beispielsweise, um den Vergleich mit anderen Daten zu ermöglichen, bezüglich eines erdfesten Systems benötigt werden. Zur Transformation der Koordinaten in das gewünschte Referenzsystem dient die Systemtransformation.

Die internationale astronomische Union (IAU) hat im Jahr 2000 eine Reihe von Beschlüssen gefasst, die im Jahr 2003 in Kraft getreten sind. Einige dieser Beschlüsse betreffen die Rotation der Erde und haben damit eine unmittelbare Auswirkung auf geodätische Raumbeobachtungsverfahren wie optische Sternbeobachtungen, Beobachtungen künstlicher Satelliten oder radioastronomische Beobachtungen extragalaktischer Radioquellen (VLBI). Das bisherige Präzessionsmodell von 1976 und das dazugehörige Nutationsmodell von 1980 wurden durch ein Präzessions- und Nutationsmodell IAU2000 abgelöst. Die neuesten Festsetzungen sind in Kapitel 5 der vom Internationalen Erdrotations- und Bezugssystemdienst (IERS) herausgegebenen IERS Conventions 2003 beschrieben.

Dieses Kapitel stellt das mit Hilfe der IERS Conventions 2003 entwickelte C-Programm zur Transformation von Koordinaten bezüglich des raumfesten Systems in das erdfeste System, bzw. des erdfesten Systems in das raumfeste System, dar. Es werden die zur Berechnung erforderlichen Formeln dargestellt sowie die nötigen Eingabefiles. Am Ende des Kapitels erfolgt die Beurteilung der erzielten Ergebnisse.

3.1 Konzepterstellung

Die IERS Conventions 2003 beschreiben zwei Möglichkeiten zur Transformation von Koordinaten. Das Programm zur Systemtransformation gliedert sich daher in zwei Teile. Der erste Teil beschreibt die Umsetzung der Systemtransformation mit der klassischen Methode, welche in den IERS Conventions 2003 auch als Option 1 bezeichnet wird, der zweite Teil zeigt eine alternative Berechnungsmöglichkeit auf, welche auch als Option 2 bezeichnet wird. In Zukunft wird vom IERS jedoch nur die Option 2 verfolgt, weshalb diese Methode von größerer Bedeutung ist.

Die allgemeine Darstellung der Koordinatentransformation, welche in beiden Optionen eingesetzt wird zur Überführung von Koordinaten des erdfesten Referenzsystems (ITRS) in das raumfeste Referenzsystem (ICRS) zu einer bestimmten Epoche t der Beobachtung, wird wie folgt dargestellt.

$$[ICRS] = \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \cdot [ITRS] \quad (3.1-1)$$

$\mathbf{D}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ und $\mathbf{B}(t)$ stellen dabei die Transformationsmatrizen dar, welche in den beiden Optionen jeweils entsprechend definiert werden.

Der Zeitparameter t , bezogen auf TT (Terrestrial Time), von welchem die drei Matrizen abhängig sind, ist definiert als

$$t = (TT - 2000 \text{ Januar 1d 12h } TT) \text{ in Tage/36525} \quad (3.1-2)$$

mit

$$2000 \text{ Januar 1d 12h} = 51544,5 \text{ (MJD)} \quad (3.1-3)$$

Im Folgenden werden die zwei verschiedenen Möglichkeiten vorgestellt, die Transformation vom ITRS in das ICRS durchzuführen. \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 und \mathbf{R}_3 stellen dabei Rotationsmatrizen dar im Sinne mathematisch positiver Drehungen um die Achsen 1, 2 und 3 des betreffenden Koordinatensystems.

3.1.1 Klassische Methode (Option 1)

Die klassische Methode zur Berechnung der Systemtransformation, zeichnet sich dadurch aus, dass die Gleichung der Äquinoktien bei der Durchführung der Transformation Berücksichtigung findet. Die Transformation geht hierbei vom erdfesten System über das vorläufige terrestrische intermediäre System und das vorläufige zälestische intermediäre System zum raumfesten System. Diese Option 1 verwendet die Greenwich Sidereal Time (GST) in der Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ sowie die klassischen Präzessions- und Nutationsparameter in der Matrix $\mathbf{D}(t)$. Die Polbewegungsmatrix $\mathbf{B}(t)$ setzt sich aus den Polkoordinaten zusammen.

3.1.1.1 Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$ stellt das Produkt aus Präzessions- und Nutationsmatrix dar und transformiert zum vorläufigen zälestischen intermediären System.

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{NP}(t) \quad (3.1-4)$$

Jede räumliche Drehung lässt sich bekanntlich durch drei Elementarrotationen darstellen. Die Präzessionsmatrix \mathbf{P} kann somit dargestellt werden durch eine Eulersche Rotationsmatrix um die drei Präzessionswinkel ζ_A , θ_A und z_A (vgl. Abbildung 2-1).

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_3(\zeta_A) \cdot \mathbf{R}_2(-\theta_A) \cdot \mathbf{R}_3(z_A) \quad (3.1-5)$$

Die drei Präzessionswinkel sind Funktionen von Zeitargumenten. Dargestellt werden die drei Winkel als Reihendarstellung in Abhängigkeit der aktuellen Epoche t .

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= 2,5976176'' + 2306,0809506''t + 0,03019015''t^2 \\
&\quad + 0,0179663''t^3 - 0,0000327''t^4 - 0,0000002''t^5 \\
\theta_A &= 2004,1917476''t - 0,4269353''t^2 \\
&\quad - 0,0418251''t^3 - 0,0000601''t^4 - 0,0000001''t^5
\end{aligned}
\tag{3.1-6}$$

$$\begin{aligned}
z_A &= -2,5976176'' + 2306,8083226''t + 1,0947790''t^2 \\
&\quad + 0,0182273''t^3 + 0,0000470''t^4 - 0,0000003''t^5
\end{aligned}$$

Die Nutationsmatrix **N** wird, wie die Präzessionmatrix, aus drei Einzelrotationen gebildet und lässt sich wie folgt berechnen.

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon_A) \cdot \mathbf{R}_3(\Delta\psi) \cdot \mathbf{R}_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \tag{3.1-7}$$

Die Nutationsparameter $\Delta\psi$ (Nutation in Länge) und $\Delta\varepsilon$ (Nutation in Schiefe) (vgl. Abbildung 2-2) hängen von den periodischen Bewegungskomponenten der Sonne, des Mondes und der Planeten relativ zur Erde ab. Dargestellt werden die Bewegungskomponenten durch die Fundamentalargumente, welche im Folgenden aufgezeigt werden.

Die Fundamentalargumente sind gegeben durch die luni-solaren sowie durch die planetarischen Argumente (Darwin, 1888).

Luni-solare Fundamentalargumente:

- Mittlere Anomalie des Mondes

$$\begin{aligned}
F_1 = l &= 134,96340251^\circ + 1717915923,2178''t + 31,8792''t^2 \\
&\quad + 0,051635''t^3 - 0,00024470''t^4
\end{aligned}$$

- Mittlere Anomalie der Sonne

$$\begin{aligned}
F_2 = l' &= 357,52910918^\circ + 129596581,0481''t - 0,5532''t^2 \\
&\quad + 0,000136''t^3 - 0,00001149''t^4
\end{aligned}$$

- mittlere Elongation des Mondes von der Sonne

$$\begin{aligned}
F_4 = D &= 297,85019547^\circ + 1602961601,2090''t - 6,3706''t^2 \\
&\quad + 0,006593''t^3 - 0,00003169''t^4
\end{aligned}
\tag{3.1-8}$$

- Differenz zwischen der ekliptikalen Lage des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn auf der Ekliptik und der mittleren ekliptikalen Länge

$$\begin{aligned}
F_3 = F &= 93,27209062^\circ + 1739527262,8478''t - 12,7512''t^2 \\
&\quad - 0,001037''t^3 + 0,00000417''t^4
\end{aligned}$$

- ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn auf der Ekliptik

$$F_5 = \Omega = 125,04455501^\circ - 6962890,5431''t + 7,4722''t^2 \\ + 0,007702''t^3 - 0,00005939''t^4$$

Planetarische Fundamentalargumente:

- Mittlere Länge des Merkurs

$$F_6 = l_{Me} = 252,2509055^\circ + 149472,6746^\circ t$$

- Mittlere Länge der Venus

$$F_7 = l_{Ve} = 181,979800853^\circ + 58517,8157^\circ t$$

- Mittlere Länge der Erde

$$F_8 = l_E = 100,4664485^\circ + 35999,37286^\circ t$$

- Mittlere Länge des Mars

$$F_9 = l_{Ma} = 355,4332746^\circ + 19713,2571^\circ t$$

- Mittlere Länge des Jupiters

$$F_{10} = l_{Ju} = 34,351511^\circ + 3034,90566^\circ t$$

(3.1-9)

- Mittlere Länge des Saturns

$$F_{11} = l_{Sa} = 50,0774714^\circ + 1222,113848^\circ t$$

- Mittlere Länge des Uranus

$$F_{12} = l_{Ur} = 314,0550051^\circ + 428,4669983^\circ t$$

- Mittlere Länge des Neptuns

$$F_{13} = l_{Ne} = 304,3486655^\circ + 218,4862002^\circ t$$

- allgemeine Präzession in Länge

$$F_{14} = p_a = 1,396971372^\circ t + 0,000308652^\circ t^2$$

Die Fundamentalargumente $F_1 \dots F_5$ werden benötigt zur Berechnung der luni-solaren Terme, welche nur von Sonne und Mond abhängen. Die Fundamentalargumente $F_6 \dots F_{14}$ gehen in die Berechnung der planetarischen Terme mit ein, welche den sehr geringen Einfluss der Planeten auf die Erde beschreiben.

Die periodisch variierenden Nutationsparameter $\Delta\psi$ und $\Delta\varepsilon$ werden schließlich mit Hilfe der Fundamentalargumente durch Fourierreihen der Zeit dargestellt.

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^N (A_i + A_i' t) \sin(\text{ARGUMENT}) + (A_i'' + A_i''' t) \cos(\text{ARGUMENT}) \quad (3.1-10)$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^N (B_i + B_i' t) \cos(\text{ARGUMENT}) + (B_i'' + B_i''' t) \sin(\text{ARGUMENT}) \quad (3.1-11)$$

Jeder der luni-solaren Terme in den Nutationsreihen wird dabei charakterisiert durch 5, jeder der planetarischen Terme durch 14 Integerzahlen N_j . Die Summe über das Produkt aus den Integerzahlen N_j und den entsprechenden Fundamentalargumenten F_j ergibt das *ARGUMENT*.

$$\text{ARGUMENT} = \sum_{j=1}^5 N_j F_j \quad \text{luni-solar} \quad (3.1-12)$$

$$\text{ARGUMENT} = \sum_{j=1}^{14} N_j F_j \quad \text{planetar} \quad (3.1-13)$$

A, A', A'', A''' und B, B', B'', B''' stellen die größten Komponenten der „in-phase“ und „out-of-phase“ Terme in Länge und Schiefe dar. Sie sind, ebenso wie die Integerzahlen N_j , in Tabelle 3-4 bzw. in Tabelle 3-5 verzeichnet.

Schließlich fehlt zur Berechnung der Nutationsmatrix noch die Schiefe der Ekliptik ε_A . Diese lässt sich darstellen als Zeitreihe in Abhängigkeit von t .

$$\varepsilon_A = \varepsilon_0 - 46,84024'' t - 0,00059'' t^2 + 0,001813'' t^3 \quad (3.1-14)$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_0 = 84381,441''$$

3.1.1.2 Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$

Die zweite Matrix bildet $\mathbf{R}(t)$. Diese Matrix beschreibt eine Rotation um die dritte Achse um den Winkel GST (Greenwich Sideral Time) zum Zeitpunkt t und stellt den Bezug zwischen dem vorläufigen zälestischen intermediären und dem vorläufigen terrestrischen intermediären System dar.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_3(-GST) \quad (3.1-15)$$

Der numerische Ausdruck für GST lautet

$$\begin{aligned} GST = & 0,014506'' + \theta + 4612,15739966'' t + 1,39667721'' t^2 - 0,00009344'' t^3 \\ & + 0,00001882'' t^4 + \Delta\psi \cos \varepsilon_A - \sum_k C_k' \sin \alpha_k - 0,00000087'' t \sin \Omega \end{aligned} \quad (3.1-16)$$

Dabei ist θ der Erdrotationswinkel, welcher wie folgt berechnet wird.

$$\theta = 2\pi(0,7790572732640) + 1.00273781191135448 \cdot T_u \quad (3.1-17)$$

mit

$$T_u = \text{Julian UT1 date} - 51544,5 \quad (3.1-18)$$

und

$$\text{UT1} = \text{UTC} + \text{UT1-UTC} \quad (3.1-19)$$

Der Term $\Delta\psi \cos \varepsilon_A$ lässt sich auffassen als Rektazension des mittleren Frühlingsäquinoktums. Die Größe wird daher als Gleichung der Äquinoktien bezeichnet. Zu deren Berechnung sei auf die Formeln (3.1-10) und (3.1-14) verwiesen.

Die Größe „UT1-UTC“ wird vom IERS bereitgestellt und ist in Tabelle 3-3 verzeichnet.

$\sum_k C'_k \sin \alpha_k$ lässt sich berechnen mit Hilfe der Komponenten C'_k und den Multiplikatoren N_j der Fundamentalargumente, welche aus Tabelle 3-6 entnommen werden können.

$$\begin{aligned} \sum_k C'_k \sin \alpha_k = & \sum_i C_{s,j=0}^i \cdot \sin(\text{ARGUMENT}) + C_{c,j=0}^i \cdot \cos(\text{ARGUMENT}) \\ & + \sum_i C_{s,j=1}^i \cdot \sin(\text{ARGUMENT}) \cdot t + C_{c,j=1}^i \cdot \cos(\text{ARGUMENT}) \cdot t \end{aligned} \quad (3.1-20)$$

3.1.1.3 Transformationsmatrix $\mathbf{B}(t)$

Mit der Polbewegungsmatrix $\mathbf{B}(t)$ gelangt man vom erdfesten System zum terrestrischen intermediären System.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{W}'(t) = \mathbf{R}_2(x_p) \cdot \mathbf{R}_1(y_p) \quad (3.1-21)$$

Die Parameter x_p und y_p beschreiben die Richtung des zälestischen Ephemeridenpols in bezug auf das ITRS. Sie werden vom IERS bereitgestellt (siehe Tabelle 3-3).

3.1.2 Alternative Methode (Option 2)

Der zweite Ansatz nach den IERS Conventions 2003 macht Gebrauch von dem „zälestischen Ephemeridenursprung“ (celestial ephemeris origin) sowie von der präzisen Festlegung der ersten Achse des terrestrischen intermediären Systems durch den „terrestrischen Ephemeridenursprung“. Sie nutzt den Erdrotationswinkel in der Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ sowie die zwei Koordinaten X und Y des zälestischen Pols in der Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$.

3.1.2.1 Transformationsmatrix $\mathbf{D}(t)$

Die Matrix $\mathbf{D}(t)$ transformiert unmittelbar vom raumfesten System zum zälestischen intermediären System und ist gegeben durch

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}'(t) \cdot \mathbf{R}_3(s) \quad (3.1-22)$$

Die Matrix $\mathbf{Q}'(t)$ transformiert vom raumfesten in das vorläufige zälestische intermediäre System, dessen dritte Achse zu jeder Zeit die Richtung des zälestischen intermediären Pols hat. Präzession und Nutation werden in $\mathbf{Q}'(t)$ zusammengefasst und mit Hilfe der zwei Koordinaten X und Y des zälestischen Pols angegeben.

$$\mathbf{Q}'(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \quad (3.1-23)$$

Der Faktor a ist abhängig von X und Y und wird wie folgt berechnet

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(X^2 + Y^2) \quad (3.1-24)$$

Die Entwicklungen der Koordinaten $X(\text{IAU2000})$ und $Y(\text{IAU2000})$ besitzen folgende Form

$$\begin{aligned} X(\text{IAU2000}) = & -0,01661699'' + 2004,19174288''t - 0,42721905''t^2 \\ & - 0,19862054''t^3 - 0,00004605''t^4 + 0,000000598''t^5 \\ & + \sum_i [(a_{s,0})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (a_{c,0})_i \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \sum_i [(a_{s,1})_i t \sin(\text{ARGUMENT}) + (a_{c,1})_i t \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \sum_i [(a_{s,2})_i t^2 \sin(\text{ARGUMENT}) + (a_{c,2})_i t^2 \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.1-25)$$

$$\begin{aligned} Y(\text{IAU2000}) = & -0,00695078'' + 0,02538199''t - 22,40725099''t^2 \\ & - 0,00184228''t^3 - 0,00111306''t^4 + 0,00000099''t^5 \\ & + \sum_i [(b_{s,0})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (b_{c,0})_i \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \sum_i [(b_{s,1})_i t \sin(\text{ARGUMENT}) + (b_{c,1})_i t \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \sum_i [(b_{s,2})_i t^2 \sin(\text{ARGUMENT}) + (b_{c,2})_i t^2 \cos(\text{ARGUMENT})] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.1-26)$$

Das Argument ist eine Funktion der Fundamentalargumente der Nutationstheorie, dessen Berechnung dargestellt ist in (3.1-8) für die luni-solaren Terme und in (3.1-9) für die planetarischen Terme.

Die numerischen Werte der Koeffizienten im säkularen Teil der Koordinaten $X(IAU2000)$ und $Y(IAU2000)$ wurden abgeleitet als eine Funktion der Zeit von der Entwicklung der Präzession. Die Amplituden $(a_{s,j})_i, (a_{c,j})_i, (b_{s,j})_i, (b_{c,j})_i$ für $j = 1, 2, \dots$ im periodischen und gemischten Teil des Terms sind auf die Amplituden der Präzessions- und Nutationsreihen zurückzuführen.

Die Werte zur Berechnung der Argumente sowie die Komponenten $(a_{s,j})_i, (a_{c,j})_i, (b_{s,j})_i, (b_{c,j})_i$ sind aus Tabelle 3-7 bzw. Tabelle 3-8 zu entnehmen.

Da in den Reihen (3.1-25) und (3.1-26) nur die modellmäßige Präzession und Nutation des zälestischen intermediären Pols enthalten ist, müssen noch Korrekturen angebracht werden.

Die entgültigen Koordinaten X und Y ergeben sich durch die Addition der Poloffsets δX und δY , welche mit Hilfe von Tabelle 3-3 entsprechend linear interpoliert werden.

$$\begin{aligned} X &= X(IAU2000) + \delta X \\ Y &= Y(IAU2000) + \delta Y \end{aligned} \quad (3.1-27)$$

Um vom vorläufigen zälestischen intermediären System zum zälestischen intermediären System zu gelangen, muss das vorläufige System um die gemeinsame dritte Achse um den Winkel s zurück gedreht werden, um welchen seine erste Achse sich vom zälestischen Ephemeridenursprung unterscheidet.

Die Berechnung von s lässt sich in ähnlicher Weise wie die Berechnung der Koordinaten X und Y in Abhängigkeit der Zeit t darstellen. Die Komponenten hierzu können Tabelle 3-9 entnommen werden.

$$\begin{aligned} s &= -\frac{XY}{2} + 0,000094'' + 0,00380835''t - 0,00011994''t^2 \\ &\quad - 0,07257409''t^3 + 0,00002770''t^4 + 0,00001561''t^5 \\ &\quad + \sum_i [(c_{s,0})_i \sin(ARGUMENT) + (c_{c,0})_i \cos(ARGUMENT)] \\ &\quad + \sum_i [(c_{s,1})_i t \sin(ARGUMENT) + (c_{c,1})_i t \cos(ARGUMENT)] \\ &\quad + \sum_i [(c_{s,2})_i t^2 \sin(ARGUMENT) + (c_{c,2})_i t^2 \cos(ARGUMENT)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (3.1-28)$$

3.1.2.2 Transformationsmatrix $\mathbf{R}(t)$

Die Rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ beschreibt eine Drehung um den Erdrotationswinkel θ .

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_3(-\theta) \quad (3.1-29)$$

Zur Berechnung des Erdrotationswinkels sei auf (3.1-17) verwiesen.

3.1.2.3 Transformationsmatrix $\mathbf{B}(t)$

Mit der Polbewegungsmatrix $\mathbf{B}(t)$ gelangt man vom erdfesten System zum terrestrischen intermediären System. Hierzu wird zunächst die Matrix $\mathbf{W}'(t)$ gemäß 3.1.1.3 aufgestellt.

Das vorläufige terrestrische intermediäre System ist um seine dritte Achse um den Winkel s' zurückzudrehen, um welchen sich seine erste Achse sich vom terrestrischen Ephemeridenursprung entfernt hat.

$$s' = -47 \mu as \cdot t \quad (3.1-30)$$

Die Polbewegungsmatrix ergibt sich schließlich zu

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_3(-s) \cdot \mathbf{W}'(t) \quad (3.1-31)$$

3.2 Implementierung

Das hier vorgestellte Konzept zur Berechnung der Systemtransformation wurde mit Hilfe der Entwicklungsumgebung Microsoft Visual C++ 6.0 umgesetzt. Das Programm wurde konzipiert für Zeitpunkte, die zwischen dem 1. Januar 2000 und dem 30. Dezember 2004 liegen.

In diesem Teil werden die notwendigen Eingabefiles sowie das durch das C-Programm erzeugte Ausgabefile bezüglich ihres Aufbaus näher erläutert. Im Folgenden werden Auszüge der in das Programm einzulesenden Files dargestellt sowie deren Parameter und deren Quellenangabe genannt. Zudem werden die notwendigen Programmeinstellungen aufgezeigt.

3.2.1 Ein- und Ausgabefiles

Es wurde versucht die Eingabefiles so zu übernehmen, d.h. so in das Programm einzubinden, wie sie im Internet vom IERS bereitgestellt werden, um unnötigen Formatierungsaufwand zu vermeiden. Daher kann es vorkommen, dass Spalten mit eingelesen werden, die für diese Anwendung ohne Bedeutung sind. Generell ist zu bemerken, dass die Files ohne Header eingelesen werden.

inputfilename

Parameter: Modifiziertes Julianisches Datum des Beobachtungszeitpunktes `obs_mjd` bezogen auf GPST in Tagen [d]

Kartesische Koordinatentripel `obs_x1`, `obs_x2` und `obs_x3` in Meter [m]

Aufgabe: Dieses Datenfile beinhaltet dreidimensionale kartesische Koordinaten der Punkte, die in ein anderes Referenzsystem transformiert werden sollen. Da bei der Berechnung der genaue Zeitpunkt der Beobachtung eine wesentliche Rolle spielt, ist dieser so genau wie möglich anzugeben. Die eingelesenen Parameter werden in Vektoren abgespeichert.

Auszug des Datenfiles :

Tabelle 3-1: Eingabefile

MJD	x	y	z
5.2051300000000003e+04	-1.3205569332530827e+06	-1.4716024990770894e+06	-6.0869134601160139e+06
5.2052599999999999e+04	-3.4040289475381006e+06	1.6009617017179972e+06	-5.1777899295102376e+06
5.2053900000000001e+04	7.6293951020066033e+05	5.1213446933136769e+06	-3.7616155885741883e+06
5.2055199999999997e+04	6.0240527029149663e+06	8.7265389412837522e+05	-1.9771859329880381e+06
5.2056500000000000e+04	2.7007372616979764e+06	-5.8022424834504668e+06	6.3774750217506778e+02
5.2057800000000003e+04	-4.5458868682818366e+06	-4.0474321125198798e+06	1.9781824676592285e+06
...

outputfilename

Parameter: Modifiziertes Julianisches Datum des Beobachtungszeitpunktes `mjd` bezogen auf GPST in Tagen [d]

Kartesische Koordinatentripel `x1`, `x2` und `x3` in Meter [m]

Aufgabe: Das Ausgabefile liefert die transformierten Koordinaten und besitzt bei beiden hier vorgestellten Berechnungsmethoden folgende Form.

Auszug des Datenfiles :

Tabelle 3-2: Ausgabefile

MJD	X	Y	Z
5.2051300000000003e+04	-1.5999999995109618e+06	-1.1624680470325937e+06	-6.0867617040087394e+06
5.2052599999999999e+04	-1.1624680382402944e+06	-3.5777087673265557e+06	-5.1777087631931584e+06
5.2053900000000001e+04	1.6000000032835379e+06	-4.9242936586870570e+06	-3.7618256143352566e+06
5.2055199999999997e+04	4.9242936603215840e+06	-3.5777087631432777e+06	-1.9777087634646215e+06
5.2056500000000000e+04	6.400000000158763e+06	-5.9157923082440566e-03	1.3921441401407719e-03
5.2057800000000003e+04	4.9242936631126180e+06	3.5777087590385280e+06	1.9777087639378654e+06
...

eop_c04

Parameter: Beobachtungsdatum *year, month, day*
 Modifiziertes Julianisches Datum *MJD_* bezogen auf GPST in Tagen [*d*]
 Polkoordinaten *x_pol, y_pol* in Bogensekunden [*as*]
 Differenz zwischen UT1 und UTC *UT1-UTC* in Sekunden [*s*]
 Length of days *LOD* in Sekunden [*s*]
 Pol-Offset *dx, dy* in Bogensekunden [*as*]
 Die Parameter sind bezogen auf 0h UTC.

Aufgabe: Das Datenfile enthält die Erdrotationsparameter zu verschiedenen Zeitpunkten. Werte für dazwischenliegende Zeitpunkte werden mittels linearer Interpolation bestimmt.

Bemerkung: Liegen Punkte außerhalb des für dieses Programm konzipierten Zeitraum vor, so ist dieses Datenfile um die entsprechenden Daten zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 3-3: Erdrotationsparameter

Jahr	Monat	Tag	MJD	<i>x_{pol}</i>	<i>y_{pol}</i>	UT1-UTC	LOD	<i>dx</i>	<i>dy</i>
2000	01	1	51544	.043251	.377681	.3555151	.0009068	-.000222	.000124
2000	01	2	51545	.043494	.377501	.3546563	.0008206	-.000115	.000022
2000	01	3	51546	.043566	.377251	.3538732	.0007142	-.000001	-.000113
2000	01	4	51547	.043460	.376959	.3532227	.0005585	.000122	-.000166
2000	01	5	51548	.043174	.376661	.3527467	.0004132	.000128	-.000093
2000	01	6	51549	.043162	.376291	.3523835	.0003912	.000088	.000034
...									

Quelle: <http://hpiers.obspm.fr/eoppc/eop/eopc04/>

3.2.1.1 Klassische Methode

nut_luni

Parameter: Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente
 mult_l, mult_ls, mult_F, mult_D, mult_omega
 Periode P in Tagen [d]
 in-phase Terme in Länge A_i, A_is in Millibogensekunden [mas]
 out-of-phase Terme in Länge A_iss, A_issss in Millibogensekunden [mas]
 in-phase Terme in Schiefe B_i, B_is in Millibogensekunden [mas]
 out-of-phase Terme in Schiefe B_iss, B_issss in Millibogensekunden [mas]

Aufgabe: Dieses Datenfile stellt die luni-solaren Nutationsparameter bereit, welche zur Berechnung der Nutationsparameter in Länge und Schiefe benötigt werden.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 3-4: luni-solare Nutationsparameter

I	I'	F	D	Ω	P	A	A'	B	B'	A''	A'''	B''	B'''
0	0	0	0	1	-6798.383	-17206.4161	-17.4666	9205.2331	0.9086	3.3386	0.0029	1.269.951	0.0002
0	0	2	-2	2	182.621	-1317.0906	-0.1675	573.0336	-0.3015	-1.3696	0.0012	-0.4587	-0.0003
0	0	2	0	2	13.661	-227.6413	-0.0234	97.8459	-0.0485	0.2796	0.0002	0.1374	-0.0001
0	0	0	0	2	-3399.192	207.4554	0.0207	-89.7492	0.0470	-0.0698	0.0000	-0.0291	0.0000
0	1	0	0	0	365.260	147.5877	-0.3633	720.076	-0.0184	1.1817	-0.0015	-0.1924	0.0005
0	1	2	-2	2	121.749	-51.6821	0.1226	22.4386	-0.0677	-0.0524	0.0002	-0.0174	0.0000
....													

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/tab5.3a.txt>

nut_planet

Parameter: Nummer term_p
 Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente
 p_l, p_ls, p_F, p_D, p_omega, L_me,
 L_ve, L_e, L_ma, L_j, L_sa, L_u, L_ne, p_p
 Periode P in Tagen [d]
 in-phase Terme in Länge pA_i in Millibogensekunden [mas]
 out-of-phase Terme in Länge pA_iss, in Millibogensekunden [mas]
 in-phase Terme in Schiefe pB_i in Millibogensekunden [mas]
 out-of-phase Terme in Schiefe pB_iss in Millibogensekunden [mas]

Amplitude `amplitude` in Millibogensekunden [mas]

Aufgabe: Das Datenfile stellt die planetaren Nutationsparameter bereit, welche - wie die luni-solaren Nutationsparameter - zur Berechnung der Nutationsparameter in Länge und Schiefe benötigt werden.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 3-5: planetarische Nutationsparameter

Nr.	I	I'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A	P	A	A''	B	B''	Amp.
687	0	0	2	2	2	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	6.85	0.0003	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0002
686	1	0	2	0	2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	8.99	0.0003	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0002
685	-1	0	2	2	2	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	9.11	0.0007	0.0000	0.0000	-0.0003	0.0004
684	-1	0	2	2	2	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	9.12	0.0013	0.0000	0.0000	-0.0006	0.0008
683	2	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6.73	0.0004	0.0000	-0.0001	-0.0002	0.0003
682	0	0	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	13.17	-0.0024	-0.0012	-0.0005	0.0010	0.0015
....																				

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/5.3b.txt>

GST_

Parameter: Nummer `gst_nr`

Komponenten `gst_cs` in Mikrobogensekunden [μas]

Komponenten `gst_cc` in Mikrobogensekunden [μas]

Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente

`gst_l`, `gst_ls`, `gst_F`, `gst_D`, `gst_omega`, `gst_me`,

`gst_ve`, `gst_e`, `gst_ma`, `gst_j`, `gst_sa`, `gst_u`, `gst_ne`, `gst_pa`

Aufgabe: Dieses File stellt Daten zur Berechnung des Rotationswinkels Greenwich Sideral Time (GST) bereit.

Die Daten für alle j stehen fortlaufend im Datenfile (vgl. 3.1-20).

Bemerkung: Wird ein anderes als das hier bereitgestellte „GST“-File verwendet, so sind die „for“-Schleifen zur Berechnung von GST im entsprechenden Programmteil an die neue Anzahl i der Komponenten anzupassen und für neue j zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 3-6: GST

Nr.	cs	cc	I	I'	F	D	Ω	L _{Me}	L _{Ve}	L _E	L _{Ma}	L _J	L _{Sa}	L _U	L _{Ne}	p _A
1	2640.96	-0.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	63.52	-0.02	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	11.75	0.01	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	11.21	0.01	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-4.55	0.00	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2.02	0.00	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....																

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/tab4.txt>

3.2.1.2 Alternative Methode

expr_X

Parameter: Nummer X_{nr}

Amplituden X_{as}, X_{ac} in Mikrobogensekunden [μ as]

Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente

X_l, X_{ls}, X_F, X_D, X_{omega},

X_{Lme}, X_{Lve}, X_{Le}, X_{Lma}, X_{Lj}, X_{Lsa}, X_{Lu}, X_{Lne}, X_{pa}

Aufgabe: Die Daten dieses Files dienen zur Berechnung der Komponente X, welche zur Berechnung der Transformationsmatrix $\mathbf{Q}(t)$ notwendig ist.

Die Daten für alle j stehen fortlaufend im Datenfile (vgl. (3.1-25))

Bemerkung: Wird ein anderes als das hier bereitgestellte „expr_X“-File eingelesen, so sind die „for“-Schleifen zur Berechnung von X im entsprechenden Programmteil an die neue Anzahl i der Komponenten anzupassen und für neue j zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:Tabelle 3-7: Parameter zur Berechnung von X

i	$(a_{s,i})$	$(a_{c,i})$	I	I'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1	-6844318.44	1328.67	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-523908.04	-544.76	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-90552.22	111.23	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	82168.76	-27.64	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	58707.02	470.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...																
1307	-3328.48	205833.15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1308	197.53	12814.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...																

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/5.2a.txt>

expr_Y

Parameter: Nummer Y_{nr}

Amplituden Y_{bs}, Y_{bc} in Mikrobogensekunden $[\mu s]$

Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente

$Y_l, Y_{ls}, Y_F, Y_D, Y_{\omega},$

$Y_{Lme}, Y_{Lve}, Y_{Le}, Y_{Lma}, Y_{Lj}, Y_{Lsa}, Y_{Lu}, Y_{Lne}, Y_{pa}$

Aufgabe: Die Daten dieses Files dienen zur Berechnung der Komponente Y , welche zusammen mit der Komponente X zur Berechnung der Transformationsmatrix benötigt $Q(t)$ wird.

Die Daten für alle j stehen fortlaufend im Datenfile (vgl. (3.1-26)).

Bemerkung: Wird ein anderes als das hier bereitgestellte „expr_Y“-File eingelesen, so sind die „for“-Schleifen zur Berechnung von Y im entsprechenden Programmteil an die neue Anzahl i der Komponenten anzupassen und für neue j zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:Tabelle 3-8: Parameter zur Berechnung von Y

i	$(b_{s,i})$	$(b_{c,i})$	I	I'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1	1538.18	9205236.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-458.66	573033.42	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	137.41	97846.69	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-29.05	-89618.24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-17.40	22438.42	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....																
963	153041.82	878.89	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
964	11714.49	-289.32	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
965	2024.68	-50.99	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
966	-1837.33	47.75	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
967	-1312.21	-28.91	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....																

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/tab5.2b.txt>

expr_s

Parameter: Nummer s_{nr}

Amplituden s_{cs}, s_{cc} in Mikrobogensekunden $[\mu as]$

Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente

$s_l, s_{ls}, s_F, s_D, s_{\omega},$

$s_{lme}, s_{lve}, s_{le}, s_{lma}, s_{lj}, s_{lsa}, s_{lu}, s_{lne}, s_{pa}$

Aufgabe: Auch die Daten dieses Files sind notwendig zur Berechnung der Transformationsmatrix $Q(t)$.

Die Daten für alle j stehen fortlaufend im Datenfile (vgl. (3.1-28)).

Bemerkung: Wird ein anderes als das hier bereitgestellte „expr_s“-File eingelesen, so sind die „for“-Schleifen zur Berechnung von s im entsprechenden Programmteil an die neue Anzahl i der Komponenten anzupassen und für neue j zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:Tabelle 3-9: Parameter zur Berechnung von s

i	($c_{s,i}$)	($c_{e,i}$)	I	I'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1	-2640.73	0.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-63.53	0.02	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-11.75	-0.01	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-11.21	-0.01	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4.57	0.00	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....																
33	-0.11	0.00	1	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	-0.07	3.57	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	1.71	-0.03	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0.00	0.48	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	743.53	-0.17	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....																

Quelle: <ftp://maia.usno.navy.mil/conv2003/chapter5/tab5.2c.txt>

3.2.2 Hauptfunktion

main ()

Aufgabe: Das Programm Systemtransformation transformiert beliebig viele Koordinaten bezüglich des ITRS in das raumfeste Referenzsystem ICRS oder umgekehrt.

Im Folgenden werden die wichtigsten Einstellungen zur Programmsteuerung zusammengefasst.

Einstellungen:

trans_frame: 0 ... Transformation von ITRS nach ICRS
1 ... Transformation von ICRS nach ITRS

methode: 0 ... Berechnung mit der klassischen Methode (Option 1)
1 ... Berechnung mit der alternativen Methode (Option 2)

leap_sec: Anzahl der Schaltsekunden

3.3 Ergebnisbeurteilung

Die Richtigkeit der durch das C-Programm erzeugten Ergebnisse wurde überprüft mit Hilfe eines auf den IERS Conventions 1996 basierenden Programms zur Systemtransformation. Die Ergebnisse des erstellten Programms und des Vergleichsprogramms sollten sich nur unwesentlich voneinander unterscheiden, da die in den IERS Conventions 2003 dokumentierten Neuerungen keine signifikanten Änderungen im Hinblick auf die Ergebnisse hervorrufen. Jedoch konnten auch die Ergebnisse des Vergleichsprogramms ebenfalls nur mit Hilfe anderer Programme verglichen werden, so dass eine absolute Exaktheit dieser Ergebnisse nicht gegeben ist. Da keine alternativen Vergleichsmöglichkeiten gegeben sind, erfolgt die Beurteilung der Ergebnisse hinsichtlich des Vergleichsprogramms basierend auf den IERS Conventions 1996.

Theoretisch müssen beide Berechnungsmethoden im Rahmen der Rechengenauigkeit identische Ergebnisse liefern. Die Gleichheit der Ergebnisse beider Methoden konnten hier trotz ausführlicher Studie nicht erreicht werden. Zukünftige Untersuchungen müssen daher zeigen, an welcher Stelle Ungereimtheit auftritt.

3.3.1 Klassische Methode

Die berechnete Transformationsmatrix in Option 1 erreicht eine Übereinstimmung mit der entsprechenden Matrix des Vergleichsprogramms bis auf sieben Stellen. Die erzielten Ergebnisse stimmen folglich auf insgesamt sieben Stellen im Vergleich zu denen des auf den IERS Conventions 1996 basierenden Programms.

Da das Programm vor allem zur Transformation von Koordinaten niedrig fliegender Satelliten (Low Earth Orbit, LEO) gedacht ist, ist eine Genauigkeit im Submillimeterbereich anzustreben. Die Satellitenkoordinaten liegen in einer Größenordnung von 10^6 Meter. Die Genauigkeit, welche mit der Transformation von Koordinaten mit der klassischen Methode erzielt werden können liegt folglich jedoch nur im Dezimeterbereich. Die Option 1 ist daher zur Transformation von Satellitenkoordinaten unter den genannten Umständen nicht geeignet.

Die Einsatz der klassischen Methode ist nur dann zu empfehlen, wenn insgesamt sieben oder weniger Stellen signifikant sind. Bei Anforderungen geringerer Genauigkeit oder zur Transformation von Koordinaten im Meterbereich ist die klassische Methode problemlos anwendbar.

3.3.2 Alternative Methode

Die in Option 2 berechnete Transformationsmatrix stimmt auf zehn Stellen überein mit der Transformationsmatrix des Vergleichsprogramms. Transformierte Koordinaten stimmen somit bis zur zehnten Stelle relativ zum Vergleichsprogramm.

Werden mit dieser Methode Satellitenkoordinaten in einer Größenordnung von 10^6 Meter in ein anderes System transformiert, so erreicht das Ergebnis eine Genauigkeit im Submillimeterbereich, was den oben genannten Anforderungen entspricht. Die alternative Methode eignet sich aufgrund der zufriedenstellenden Genauigkeit gut zur Transformation von Koordinaten niedrig fliegender Satelliten.

Jedoch gerät auch diese Methode an seine Grenzen. Werden beispielsweise Koordinaten einer Größenordnung von 10^9 Meter mit Option 2 transformiert und ist zudem eine Genauigkeit im Millimeterbereich gefragt, kann die Richtigkeit Ergebnisse dieser Methode nicht gewährleistet werden. Die Berechnung einer Systemtransformation kann immer dann eingesetzt werden, wenn maximal zehn Stellen des Ergebnisses signifikant sind.

4 Gezeitenmodellierung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, spielen die gravitativen Eigenschaften des Erdkörpers eine immer bedeutendere Rolle. Um zu einer möglichst guten Modellierung des Erdschwerefeldes zu gelangen, müssen die Messdaten der sich frei um die Erde bewegendenden Satelliten um die Einflüsse gravitativer Störkräfte reduziert werden. Die Modellierung der Gezeiteneffekte ist daher von großer Bedeutung.

In diesem Kapitel wird ein C-Programm vorgestellt zur Berechnung verschiedener Gezeiten-effekte basierend auf den IERS Conventions 2003. Dazu werden sowohl die Konzepterstellung der Gezeitenmodellierung als auch die Implementierung verschiedener Eingabefiles und Funktionen dargestellt, um den Ablauf des Programms zu verdeutlichen.

4.1 Konzepterstellung

Das Programm zur Berechnung der verschiedenen Gezeitenpotenziale bzw. der Gezeitenbeschleunigungen gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil erfolgt die Berechnung der direkten Gezeiteneffekte, der zweite Teil liefert die Gezeiteneffekte der festen Erde, im dritten Teil werden schließlich die Effekte der Ozeangezeiten modelliert. Im Folgenden werden die drei Teile formelmäßig dargestellt, wie sie auch im C-Programm umgesetzt wurden. Das Programm wurde so konzipiert, dass die einzelnen Gezeiteneffekte sowohl getrennt, als auch in Kombination miteinander berechnet werden können.

4.1.1 Direkte Gezeiten

Das Gezeitenpotenzial der direkten Gezeiten bezüglich eines Himmelskörpers H_i lässt sich folgendermaßen unter Berücksichtigung von (2.3-10) berechnen.

$$U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \left[c_{lm}^{H_i} \cos m\lambda + s_{lm}^{H_i} \sin m\lambda \right] \quad (4.1-1)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{Bmatrix} c_{lm}^{H_i} \\ s_{lm}^{H_i} \end{Bmatrix} = \frac{Gm_{H_i}}{R_{Erde}} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R_{Erde}}{r_{H_i}} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{H_i}) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_{H_i} \\ \sin m\lambda_{H_i} \end{Bmatrix} \quad (4.1-2)$$

Die $\bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$ sind die normierten Legendresche Funktionen vom Grad l und Ordnung m , deren genaue Berechnung im Abschnitt 4.2.2 dokumentiert ist. $c_{lm}^{H_i}$ und $s_{lm}^{H_i}$ stellen die Kugelfunktionskoeffizienten des Himmelskörpers dar, λ_{H_i} entspricht der geographischen Länge des entsprechenden Himmelskörpers H_i .

Das Gezeitenpotenzial aller Himmelskörper ergibt sich schließlich durch die Summe der einzelnen Gezeitenpotenziale der verschiedenen Himmelskörper.

$$U^{tid}(\lambda, \varphi, r_E) = \sum_{H_i} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) \quad (4.1-3)$$

Zur Berechnung der Gezeitenbeschleunigung ist der Gradient des Gezeitenpotenzials von Bedeutung. Die Gezeitenbeschleunigung in sphärischen Koordinaten ergibt sich schließlich aus der Summe der normierten partiellen Ableitungen nach λ , φ , und r_E .

$$\begin{aligned} \text{grad } U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) \cdot \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial r} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

Die partiellen Ableitungen nach λ , φ , und r_E lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_E} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{l}{r_E} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r_E \cos \varphi} \sum \sum \left(\frac{r}{R} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \left[-c_{lm}^{H_i} \sin m\lambda + s_{lm}^{H_i} \cos m\lambda \right] \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} U^{tid(H_i)}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r_E} \sum \sum \left(\frac{r_E}{R_{Erde}} \right)^l \frac{\partial \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \left[c_{lm}^{H_i} \cos m\lambda + s_{lm}^{H_i} \sin m\lambda \right] \end{aligned} \quad (4.1-5)$$

4.1.2 Gezeiten der festen Erde

Die Berechnung des Potenzials der Gezeiten der festen Erde erfolgt in drei Schritten. Im ersten Schritt wird der frequenzunabhängige Teil der Gezeiten der festen Erde behandelt, der zweite Schritt beschreibt den frequenzabhängigen Teil durch Korrekturen an die Koeffizienten des frequenzunabhängigen Teils aus Schritt 1, der dritte Schritt behandelt schließlich die Permanentgezeiten.

• Schritt 1: frequenzunabhängiger Teil

Das Potenzial der Gezeiten der festen Erde lautet

$$U^{solid}(\lambda, \varphi, r_E) = \frac{Gm_{H_i}}{R_{Erde}} \sum_{l=2}^4 \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{Erde}}{r_E} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \left[\Delta c_{lm} \cos m\lambda + \Delta s_{lm} \sin m\lambda \right] \quad (4.1-6)$$

mit den Koeffizienten für Grad 2 und 3

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{2m} \\ \Delta s_{2m} \end{array} \right\} = \frac{k_{lm}}{2l+1} \sum_{j=\text{moon}, \text{sun}} \frac{Gm_j}{Gm_{\text{Erde}}} \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_j} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \quad (4.1-7)$$

sowie denen für Grad 4

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{4m} \\ \Delta s_{4m} \end{array} \right\} = \frac{k_{2m}}{5} \sum_{j=\text{moon}, \text{sun}} \frac{Gm_j}{Gm_{\text{Erde}}} \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_j} \right)^3 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \quad m = 0, 1, 2 \quad (4.1-8)$$

Die oben dargestellten Koeffizienten für Sonne und Mond können bezüglich eines elastischen oder unelastischen Erdmodells berechnet werden. Je nachdem werden die entsprechenden Love-Zahlen k_{lm} zur Berechnung hinzugezogen, welche in Tabelle 4-7 bzw. in Tabelle 4-8 verzeichnet sind.

Die Beschleunigungen der Gezeiten der festen Erde ergeben sich durch die Gradientenbildung des Potentials.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} U^{\text{solid}}(\lambda, \varphi, r_E) &= -\frac{l+1}{r_E} U^{\text{solid}}(\lambda, \varphi, r_E) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} U^{\text{solid}}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r_E \cos \varphi} \frac{Gm_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_E} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) m [-\Delta c_{lm} \sin m\lambda + s_{lm} \cos m\lambda] \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} U^{\text{solid}}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r_E} \frac{Gm_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_E} \right)^{l+1} \frac{\partial \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} [\Delta c_{lm} \cos m\lambda + \Delta s_{lm} \sin m\lambda] \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

• Schritt 2: frequenzabhängiger Teil

Zur Berechnung des frequenzabhängigen Teils der Gezeiten der festen Erde sind Korrekturen an die Koeffizienten Δc_{lm} und Δs_{lm} aus Schritt 1 anzubringen. Dabei wird unterschieden zwischen langperiodischen, täglichen und halbtägigen Tiden.

Langperiodische Tiden (m=0)

$$\begin{aligned} \Delta c_{20}^{\text{kor}} &= \sum_{f(2,0)} \left[(A_0 H_f \delta k_f^R) \cos \theta_f - (A_0 H_f \delta k_f^I) \sin \theta_f \right] \\ &= \sum_{f(2,0)} [A(ip) \cos \theta_f + A(op) \sin \theta_f] \\ \Delta s_{20}^{\text{kor}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1-10)$$

Tägliche Tiden (m=1)

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{21}^{korr} &= \sum_{f(2,1)} \left[(A_1 H_f \delta k_f^R) \sin \theta_f + (A_1 H_f \delta k_f^I) \cos \theta_f \right] \\
 &= \sum_{f(2,1)} \left[A(ip) \sin \theta_f + A(op) \cos \theta_f \right] \\
 \Delta s_{21}^{korr} &= \sum_{f(2,1)} \left[(A_1 H_f \delta k_f^R) \cos \theta_f - (A_1 H_f \delta k_f^I) \sin \theta_f \right] \\
 &= \sum_{f(2,1)} \left[A(ip) \cos \theta_f - A(op) \sin \theta_f \right]
 \end{aligned} \tag{4.1-11}$$

Halbtägliche Tiden (m=2)

$$\begin{aligned}
 \Delta c_{22}^{korr} &= \sum_{f(2,2)} \left[(A_2 H_f \delta k_f^R) \cos \theta_f - (A_2 H_f \delta k_f^I) \sin \theta_f \right] \\
 &= \sum_{f(2,2)} \left[A(ip) \sin \theta_f - A(op) \cos \theta_f \right] \\
 \Delta s_{22}^{korr} &= \sum_{f(2,2)} \left[- (A_2 H_f \delta k_f^R) \sin \theta_f - (A_2 H_f \delta k_f^I) \cos \theta_f \right] \\
 &= \sum_{f(2,2)} \left[- A(ip) \sin \theta_f - A(op) \cos \theta_f \right]
 \end{aligned} \tag{4.1-12}$$

$A(ip)$ sind hierbei die „in-phase“-Amplituden $(A H_f \delta k_f^R)$, $A(op)$ die „out-of-phase“-amplituden $(A H_f \delta k_f^I)$. Die einzelnen Komponenten zur Berechnung der Amplituden sind in Tabelle 4-4 verzeichnet.

θ_f ist das astronomische Argument. Dieses kann berechnet werden aus den Doodsen-Elementen, welche wiederum mit Hilfe der Fundamentalargumente erstellt werden können. Die Bedeutung und Berechnung der einzelnen Fundamentalargumente wurde bereits in Kapitel 3 dargestellt. Die Berechnung der Doodsen-Elemente aus den Fundamentalargumenten ist im Abschnitt 4.2.2 erläutert. An dieser Stelle sollen daher nur noch die sechs klassischen Doodsen-Elemente sowie die daraus berechneten Astronomischen Argumente kurz erläutert werden. Eine ausführliche Beschreibung der Doodsenargumente findet sich z.B. bei (Baur, 2002).

Eingeführt wurden die nach Doodson benannten Elemente im Jahre 1922 aufgrund der Zeitabhängigkeit der Himmelskörperkoordinaten bezüglich der rotierenden Erde (Doodson, 1921). Sie lauten

- τ mittlere Mondzeit (Stundenwinkel des mittleren Mondes + 12h)
- s mittlere ekliptikale Länge des Mondes
- h mittlere ekliptikale Länge der Sonne
- p mittlere ekliptikale Länge des Mondperigäums
- N' negative mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Mondknotens
- p_s mittlere ekliptikale Länge des solaren Perigäums

Die astronomischen Argumente θ_f lassen sich schließlich als Linearkombination dieser Elemente darstellen. Die allgemeine Form der astronomischen Argumente lautet

$$\theta_f = d_1\tau + (d_2 - 5)s + (d_3 - 5)h + (d_4 - 5)p + (d_5 - 5)N' + (d_6 - 5)p_s \quad (4.1-13)$$

Die Doodson-Nutation besitzt folgende Form.

$$d_1 d_2 d_3 . d_4 d_5 d_6$$

Hier eine Auflistung astronomischer Argumente gängiger Tiden. Die linksseitige Bezeichnung geht auf Darwin zurück.

$$Om1 = N'$$

$$Om2 = 2N'$$

$$Sa = h - p_s$$

$$Ssa = 2h$$

$$Mm = s - p$$

$$Mf = 2s$$

$$Mtm = 3s - p$$

$$Msq = 4s - 2h$$

$$Q1 = \tau - 2s + N'$$

$$O1 = \tau - s$$

(4.1-14)

$$P1 = \tau + s - 2h$$

$$K1 = \tau + s$$

$$2N2 = 2\tau - 2s + 2p$$

$$N2 = 2\tau - s + p$$

$$M2 = 2\tau$$

$$S2 = 2\tau + 2s - 2h$$

$$K2 = 2\tau + 2s$$

Die Polzeiten, als Teil der Gezeiten der festen Erde, werden hervorgerufen durch den Zentrifugaleffekt der Polbewegung und können ausgedrückt werden als Korrektur der Koeffizienten Δc_{21} und Δs_{21} .

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{21}^{pt} \\ \Delta s_{21}^{pt} \end{array} \right\} = -1,333 \cdot 10^{-9} \begin{cases} (m_1 - 0,0115m_2) \\ (m_2 - 0,0115m_1) \end{cases} \quad (4.1-15)$$

mit

$$\begin{aligned} m_1 &= x_p - \bar{x}_p \\ m_2 &= -(y_p - \bar{y}_p) \end{aligned} \quad (4.1-16)$$

Dabei stellen x_p und y_p hierbei die aktuellen Polbewegungsparameter, \bar{x}_p und \bar{y}_p die jahresmittlere Polbewegungsparameter dar (vgl. Kapitel 2.2.5.3). Die zum entsprechenden Jahr gehörenden jahresmittlere Parameter können Tabelle 4-9 entnommen werden.

• Schritt 3: Permanentgezeiten

Der zeitabhängige zonale Anteil des Gezeitenpotenzials hat eine permanente Deformation zur Folge. Die permanenten Gezeiten können ausgedrückt werden als Beitrag zu dem Potenzialkoeffizienten c_{20} des Gezeitenpotenzials der festen Erde.

Das Potenzial der Permanentgezeiten lautet

$$U_{Perm}(\lambda, \varphi, r_E) = \frac{Gm_{Erde}}{R_{Erde}} \left(\frac{R_{Erde}}{r_E} \right)^3 \cdot <\bar{c}_{20}> \cdot \bar{P}_{20}(\sin \varphi) \quad (4.1-17)$$

$$<\bar{c}_{20}> = (4,4228 \cdot 10^{-8}) \cdot (-0,3146) \cdot k_{20} \quad (4.1-18)$$

Die Beschleunigungen können durch die Gradientenbildung bestimmt werden.

4.1.3 Ozeangezeiten

Das Ozeangezeitenpotenzial einer Tide s lautet

$$U_s^{Ocean}(\lambda, \varphi, r_E) = \frac{Gm_{Erde}}{R_{Erde}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{Erde}}{r_E} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \cdot [\Delta c_{lm,s} \cos m\lambda + \Delta s_{lm,s} \sin m\lambda] \quad (4.1-19)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{lm,s} \\ \Delta s_{lm,s} \end{array} \right\} = \frac{4\pi G \rho \omega}{g} \cdot \frac{(1+k'_l)}{2l+1} \cdot \begin{cases} (C \cos_+ + C \cos_-) \cos \theta_f + (S \sin_+ + S \sin_-) \sin \theta_f \\ (S \sin_+ - S \sin_-) \cos \theta_f - (C \cos_+ - C \cos_-) \sin \theta_f \end{cases} \quad (4.1-20)$$

$C \cos_+$, $C \cos_-$, $S \sin_+$ und $S \sin_-$ sind normierte Amplituden, welche in Ozeangezeitenmodellen bereitgestellt werden (vgl. Tabelle 4-2). Die vom Grad l abhängigen Load-Zahlen k'_l sind in Tabelle 4-10 verzeichnet. θ_f bezeichnet das bereits erläuterte astronomische Argument.

Das gesamte Ozeangezeitenpotenzial ergibt sich schließlich aus der Summe aller Tiden.

$$U^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) = \sum_s U_s^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) \quad (4.1-21)$$

Die Beschleunigungen ergeben sich wiederum durch Gradientenbildung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_E} U_s^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) &= -\frac{l+1}{r_E} U_s^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} U_s^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r_E \cos \varphi} \frac{Gm_{Erde}}{R_{Erde}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{Erde}}{r_E} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) m [-\Delta c_{lm} \sin m\lambda + s_{lm} \cos m\lambda] \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} U_s^{Ozean}(\lambda, \varphi, r_E) &= \frac{1}{r} \frac{Gm_{Erde}}{R_{Erde}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_{Erde}}{r_E} \right)^{l+1} \frac{\partial \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} [\Delta c_{lm} \cos m\lambda + \Delta s_{lm} \sin m\lambda] \end{aligned} \quad (4.1-22)$$

Die Pionierarbeit in der Ozeangezeitenmodellierung leistete Schwiderski mit seinem Modell SCHW80 (Schwiderski, 1981 und 1983). Mit dem Anfang der 90er Jahre, initiiert durch die erfolgreiche Altimetermission Topex/Poseidon (T/P) entstand eine Vielzahl verbesserter Folgemodelle. So unter anderem die Ozeangezeitenmodelle des Center of Space Research (CSR), Version 1.0 bis 4.0 (Eanes, 1994) sowie die TPXO Modelle (Egbert et al., 1994), von welchen die Modelle der sechsten Generation derzeit am aktuellsten sind. In dieser Arbeit werden einzig die hydrodynamischen Ozeangezeitenmodelle der FES Serie (Finite Element Solution) herangezogen. Das Modell FES 94 war das erste dieser Reihe (Le Provost et al., 1994). Inzwischen stellt das Modell FES 2004 den neusten Stand dar. Letzteres enthält insgesamt 17 Tiden, welche in harmonischer Entwicklung bis Grad und Ordnung 80 bereit gestellt werden. Das Format der FES Ozeangezeitenmodelle erlaubt die direkte Verwendung der vertafelten Amplituden (und Phasen) gemäß der formelmäßigen Beschreibung in den IERS Conventions 2003.

4.2 Implementierung

Der in diesem Kapitel vorgestellte Berechnungsablauf der direkten Gezeiten, der Gezeiten der festen Erde sowie der Ozeangezeiten wurde mit Hilfe der Entwicklungsumgebung Microsoft Visual C++ 6.0 umgesetzt. Das Programm wurde konzipiert für Beobachtungen in dem Zeitraum vom 1. Januar 2000 bis 30. Dezember 2004.

Dieser Teil soll nun einen Überblick über alle innerhalb des C-Programms implementierten Funktionen geben und diese in ihrer Aufgabe und ihrer jeweiligen Parameterliste kurz charak-

terisieren. Wie bei der Systemtransformation wurde auch hier versucht die Daten in ihrer ursprünglichen Anordnung, jedoch ohne Header, einzulesen.

4.2.1 Ein- und Ausgabefiles

inputfilename

Parameter: Modifiziertes Julianisches Datum des Beobachtungszeitpunktes mjd bezogen auf GPST in Tagen $[d]$

Kartesische Koordinaten der Punkte x_1 , x_2 und x_3 in Meter $[m]$

Aufgabe: Dieses Datenfile beinhaltet dreidimensionale kartesische Koordinaten der Punkte, an denen die Gezeitenbeschleunigung berechnet werden soll. Da bei der Berechnung der genaue Zeitpunkt der Beobachtung eine wesentliche Rolle spielt, ist dieser so genau wie möglich anzugeben.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-1: Eingabefile

MJD	x	y	z
5.2050000000000000e+04	-2.9676672192865539e+02	5.7800477687170962e+02	-6.3999999670354053e+06
5.2051300000000000e+04	-1.3205569332530827e+06	-1.4716024990770894e+06	-6.0869134601160139e+06
5.2052599999999999e+04	-3.4040289475381006e+06	1.6009617017179972e+06	-5.1777899295102376e+06
5.2053900000000000e+04	7.6293951020066033e+05	5.1213446933136769e+06	-3.7616155885741883e+06
5.2055199999999997e+04	6.0240527029149663e+06	8.7265389412837522e+05	-1.9771859329880381e+06
5.2056500000000000e+04	2.7007372616979764e+06	-5.8022424834504668e+06	6.3774750217506778e+02
...

inputfilename2

Parameter: Doodsonnumber d_1

Darwinsymbol $temp$

Grad l und Ordnung m d_2, d_3

C+ und C- d_4, d_5

eps+ und eps- d_6, d_7

normierte Amplituden Ccos+, Csin+, Ccos- und Csin- d_8, d_9, d_{10}, d_{11}

Aufgabe: Dieses Datenfile wird in das Programm eingelesen zur Berechnung der Koeffizienten c und s der Ozeangezeiten und somit auch zur Berechnung des Gezeitenpotenzials.

Bemerkung: Das Programm wurde für die Ozeanmodelle FES95, FES2002 und FES2004 konzipiert. Wird ein anderes als eines der drei genannten Modelle eingesetzt,

so ist zum einen die Anzahl der Load-Zahlen zu überprüfen, zum anderen müssen neu hinzugekommene Tiden dem Programm hinzugefügt werden.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-2: Ozeangezeitenmodell FES 2004

Doodson	Darw	I	m	Csin+	Ccos+	Csin-	Ccos-	C+	eps+	C-	eps-
55.565	Om1	2	0	-0.540594	0.000000	0.000000	0.000000	0.5406	270.000	0.0000	0.000
55.575	Om2	2	0	-0.005218	0.000000	0.000000	0.000000	0.0052	270.000	0.0000	0.000
56.554	Sa	1	0	0.017233	0.000013	0.000000	0.000000	0.0172	89.958	0.0000	0.000
56.554	Sa	2	0	-0.046604	-0.000903	0.000000	0.000000	0.0466	268.890	0.0000	0.000
56.554	Sa	3	0	-0.000889	0.000049	0.000000	0.000000	0.0009	273.184	0.0000	0.000
...											

eop_c04

Parameter: Beobachtungsdatum *year, month, day*
 Modifiziertes Julianisches Datum *MJD_* bezogen auf GPST in Tagen [*d*]
 Polkoordinaten *x_pol, y_pol* in Bogensekunden [*as*]
 Differenz zwischen UT1 und UTC *UT1-UTC* in Sekunden [*s*]
 Length of days *LOD* in Sekunden [*s*]
 Pol-Offset *dx, dy* in Bogensekunden [*as*]
 Die Parameter sind bezogen auf 0h UTC.

Aufgabe: Das Datenfile enthält die Erdrotationsparameter zu verschiedenen Zeitpunkten. Werte für dazwischenliegende Zeitpunkte werden mittels linearer Interpolation bestimmt.

Bemerkung: Liegen Punkte außerhalb des für dieses Programm konzipierten Zeitraum vor, so ist dieses Datenfile um die entsprechenden Daten zu erweitern.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-3: Erdrotationsparameter

Jahr	Monat	Tag	MJD	<i>x_{pol}</i>	<i>y_{pol}</i>	UT1-UTC	LOD	<i>dx</i>	<i>dy</i>
2000	01	1	51544	.043251	.377681	.3555151	.0009068	-.000222	.000124
2000	01	2	51545	.043494	.377501	.3546563	.0008206	-.000115	.000022
2000	01	3	51546	.043566	.377251	.3538732	.0007142	-.000001	-.000113
2000	01	4	51547	.043460	.376959	.3532227	.0005585	.000122	-.000166
2000	01	5	51548	.043174	.376661	.3527467	.0004132	.000128	-.000093
2000	01	6	51549	.043162	.376291	.3523835	.0003912	.000088	.000034
...									

Quelle: <http://hpiers.obspm.fr/eoppc/eop/eopc04/>

solid_freqdep

Parameter: Integerzahlen für die Linearkombination der Doodson-Elemente
doel1, doel2, doel3, doel4, doel5, doel6
Integerzahlen für die Linearkombination der Fundamentalargumente
dele1, dele2, dele3, dele4, dele5
Realteil und Imaginärteil zur Berechnung der Amplituden k_r, k_i
„in-phase“ und „out-of-phase“ Amplituden a_{ip}, a_{op}

Aufgabe: Das Datenfile liefert die Komponenten zur Berechnung des frequenzabhängigen Teils der Gezeiten der festen Erde.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-4: Frequenzabhängiger Teil

τ	s	h	p	N'	ps	l	l'	F	D	Ω	δk_f^R	δk_f^I	Amp. (ip)	Amp. (op)
1	-3	0	2	0	0	2	0	2	0	2	-29	3	-0.1	0.0
1	-3	2	0	0	0	0	0	2	2	2	-30	3	-0.1	0.0
1	-2	0	1	-1	0	1	0	2	0	1	-45	5	-0.1	0.0
1	-2	0	1	0	0	1	0	2	0	2	-46	5	-0.7	0.1
1	-2	2	-1	0	0	-1	0	2	2	2	-49	5	-0.1	0.0
1	-1	0	0	-1	0	0	0	2	0	1	-82	7	-1.3	0.1
...														

Quelle: IERS Conventions 2003, Kapitel 6

inputfile_moon

Parameter: Modifiziertes julianische Datum `mjd_solid1` bezogen auf GPST in Tagen
 $[d]$
Kartesische Koordinaten des Mondes im ITRF `x_moon_itrf`, `y_moon_itrf`,
`z_moon_itrf` in Meter $[m]$

Aufgabe: Dieses File beinhaltet die Mondkoordinaten bezüglich des erdfesten Referenzsystems in kartesischer Form zu jedem Zeitpunkt, zu welchem auch die Beobachtungen vorliegen.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-5: Mondkoordinaten

MJD	x	y	z
5.2050000000000000e+04	3.4369847313852167e+08	-1.6571747712081754e+08	-5.5964840890537940e+07
5.2051300000000003e+04	-1.7514439041077539e+08	-3.2330527200027704e+08	-9.4322644316043049e+07
5.2052599999999999e+04	-3.0662474935324097e+08	1.7544697565275311e+08	-1.2408977813914105e+08
5.2053900000000001e+04	1.6990728085436082e+08	2.9723514789984035e+08	-1.4204575033543360e+08
5.2055199999999997e+04	2.9628434318254948e+08	-1.6347107003613010e+08	-1.4603803590137118e+08
5.2056500000000000e+04	-1.6100400089780957e+08	-3.0200456894228697e+08	-1.3539567294913143e+08
...

Quelle: JPL-Ephemeriden

inputfile_sun

Parameter: Modifiziertes julianische Datum `mjd_solid2` bezogen auf GPST om Tagen `[d]`

Kartesische Koordinaten der Sonne im ITRF `x_sun_itrf`, `y_sun_itrf`, `z_sun_itrf` in Meter `[m]`

Aufgabe: Dieses File beinhaltet die Sonnenkoordinaten bezüglich eines erdfesten Referenzsystems in kartesischer Form zu jedem Zeitpunkt, zu welchem auch die Beobachtungen vorliegen.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-6: Sonnenkoordinaten

MJD	x	y	z
5.2050000000000000e+04	1.4212550078119217e+11	-2.0109484855126228e+09	-5.2165113405341614e+10
5.2051300000000003e+04	-4.5712215406169830e+10	-1.3437440325828545e+11	-5.2823069734146477e+10
5.2052599999999999e+04	-1.1355333272250188e+11	8.4827255279921631e+10	-5.3454874840262093e+10
5.2053900000000001e+04	1.1556465646883759e+11	8.1733077073538040e+10	-5.4061567922641495e+10
5.2055199999999997e+04	4.2045638717566193e+10	-1.3496234842060458e+11	-5.4642207691145142e+10
5.2056500000000000e+04	-1.4117073919520273e+11	1.6241243694185760e+09	-5.5195585621383705e+10
...

Quelle: JPL-Ephemeriden

step1_unelastic

Parameter: Love-Zahlen der unelastischen Erde `last_step1`

Aufgabe: `step1_unelastic` liefert die Love-Zahlen zur Berechnung des Gezeitenpotenzials der Gezeiten der festen Erde für ein unelastisches Erdmodell.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-7: Love-Zahlen (unelastisch)

k
0.30190
-0.00000
0.29830
-0.00144
...

Quelle: Conventions 2003, Kapitel 6

step1_elastic

Parameter: Love-Zahlen der elastischen Erde `last_step1`

Aufgabe: `step1_elastic` liefert die Love-Zahlen zur Berechnung des Gezeitenpotenzials der Gezeiten der festen Erde für ein elastisches Erdmodell.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-8: Love-Zahlen (elastisch)

k
0.29525
0.29470
0.29801
0.09300
0.09300
0.09300
...

Quelle: Conventions 2003, Kapitel 6

input_mean

Parameter: Jahr year_mean

jahresmittlere Polbewegungsparameter x_{mean} , y_{mean} in Bogensekunden [as]

Aufgabe: Dieses Datenfile beinhaltet die jahresmittleren Polbewegungsparameter zur Berechnung der Polgezeiten.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-9: Polbewegung

Jahr	x	y
1995.0	.045	.350
1996.0	.047	.342
1997.0	.045	.337
1998.0	.044	.347
1999.0	.046	.353
2000.0	.042	.355

ldc

Parameter: Load-Zahlen AL bis maximaler Grad $l = 200$

Aufgabe: Die Load-Zahlen werden benötigt zur Berechnung der Ozeangezeiten.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-10: Load-Zahlen

AL
0.0000
0.0270
-0.3030
-0.1940
-0.1320
-0.1040
...

outputfilename

Parameter: Modifiziertes Julianisches Datum des Beobachtungszeitpunktes `mjd` bezogen auf GPST in Tagen [*d*]

Beschleunigungen bezüglich des ITRS x_1 , x_2 und x_3 in Meter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m}{s^2} \right]$

Aufgabe: Das Ausgabefile liefert je nach Einstellung im Programm die Gezeitenbeschleunigungen in x-, y- und z-Richtung der direkten Gezeiten, der Gezeiten der festen Erde oder der Ozeangezeiten zu jedem Zeitpunkt der Beobachtung.

Auszug des Datenfiles:

Tabelle 4-11: Ausgabefile

MJD	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}
5.205000000000000e+04	4.602939913799625e-07	-1.108906566280661e-07	6.642057326334760e-07
5.205130000000000e+04	-3.827392772931188e-07	-9.725133465132843e-07	3.866100825917789e-07
5.205260000000000e+04	-1.194290731499504e-06	8.068350842787880e-07	-2.782488212915991e-08
5.205390000000000e+04	1.067565113173450e-06	9.491512274180349e-07	-3.359083615776888e-07
5.205520000000000e+04	4.630058910911425e-07	-9.448601789238780e-07	-4.002879689721543e-07
5.205650000000000e+04	-5.442295905394443e-07	-8.670064788553437e-08	-2.777879880298032e-07
...

4.2.2 Hilfsfunktionen

xyz2lpr ()

Parameter: Ortsvektor `pos` in kartesischen Koordinaten

Rückgabewert: -

Aufgabe: Diese Funktion dient zur Transformation von kartesischen Koordinaten in sphärische Koordinaten.

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

legendre ()

Parameter: Maximalgrad n_max
 Ortsvektor pos in sphärischen Koordinaten
 Ergebnisvektoren p_nm, dp_nm, ddp_nm

Rückgabewert: -

Aufgabe: Diese Funktion führt die rekursive Berechnung der normierten Legendreschen

Funktionen $\bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$ sowie ihre erste $\frac{\partial \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}$ und zweite Ableitungen

$\frac{\partial^2 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi^2}$ durch.

$$\begin{aligned}\bar{P}_{l,m}(\sin \varphi) &= \eta \sin(\varphi) \bar{P}_{l-1,m}(\sin \varphi) - \sigma \bar{P}_{l-2,m}(\sin \varphi) & l > m + 1 \\ \bar{P}_{l,l-1}(\sin \varphi) &= \tau \sin(\varphi) \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi) & l > 1 \\ \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi) &= \nu \cos(\varphi) \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi) & l > 1\end{aligned}$$

mit den Startwerten

$$\bar{P}_{0,0}(\sin \varphi) = 1 \quad \bar{P}_{1,0}(\sin \varphi) = \sqrt{3} \sin \varphi \quad \bar{P}_{1,1}(\sin \varphi) = \sqrt{3} \cos \varphi$$

sowie den ersten Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} &= \eta \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-1,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} - \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-2,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \right) - \sigma \frac{\partial \bar{P}_{l-2,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \bar{P}_{l,l-1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} &= \tau \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} - \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} &= \nu \left(\cos(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} + \sin(\varphi) \frac{\partial \bar{P}_{l-1,l-1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

mit den Starwerten

$$\frac{\partial \bar{P}_{0,0}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial \bar{P}_{1,0}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} = \sqrt{3} \cos \varphi \quad \frac{\partial \bar{P}_{1,1}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} = -\sqrt{3} \sin \varphi$$

Die Normierungsfaktoren η, σ, τ und ν lauten

$$\eta = \sqrt{\frac{(2l+1)(2l-1)}{(l+m)(l-m)}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m-1)(l-m-1)}{(2l-3)(l+m)(l-m)}}$$

$$\tau = \sqrt{(2l+1)}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2l}}$$

und der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi^2} = \tan \varphi \cdot \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{l(l+1)-m^2}{\cos^2 \varphi} \cdot \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)$$

jul_cent ()

Parameter: Modifiziertes Julianisches Datum `mjd` bezogen auf GPST in Tagen [*d*]

Rückgabewert: aktuelle Epoche `t`

Aufgabe: Die Funktion `jul_cent` berechnet die aktuelle Epoche *t* (Julianisches Jahrhundert) aus *MJD*.

$$TT = MJD + 51,184$$

$$t = (TT - 51544,5) / 36525$$

del_gmst ()

Parameter: Fundamentalargumente `F1_`, `F2_`, `F3_`, `F4_`, `F5_` in Grad [$^{\circ}$]

Greenwich Mean Sideral Time `GMST_` in Radiant [*rad*]

Julianisches Jahrhundert `T`

Schaltsekunden zwischen UTC und TAI `leap_sec` in Sekunden [*s*]

Anzahl der Datensets in `eop_c04` `days_eop`

Modifiziertes Julianisches Datum mjd bezogen auf GPST in Tagen $[d]$

Parameter aus eop_c04 $MJD, UT1_UTC, x_pol, y_pol$

Doodsenargumente $arg1, arg2, arg3, arg4, arg5, arg6$ in Radiant $[rad]$

Interpolierte Polkoordinaten zum aktuellen Zeitpunkt x_pol_t, y_pol_t in Bogensekunden $[as]$

Rückgabewert: -

Aufgabe: In dieser Funktion werden die fünf Fundamentalargumente, die sechs Doodsen-Elemente sowie die Greenwich Mean Sideral Time (GMST) berechnet.

Zur Berechnung der Fundamentalargumente sei auf Kapitel 3 verwiesen.

$$GMST = GMST_{0h,UT1} + r(UT1 - UTC) + UTC$$

$$GMST_{0h,UT1} = 6^h 41^m 50^s,5481 + 8640184^s,812866T'_u + 0^s,093104T'^2_u - 6^s,2 \cdot 10^{-6}T'^3_u$$

$$r = 1,002737909350795 + 5,9006 \cdot 10^{-11} \cdot T'_u - 5,9 \cdot 10^{-11} \cdot T'^2_u$$

$$T'_u = d'_u / 36525$$

$$d'_u = \text{floor}(mjd) - 51544,5$$

$$UTC = TT - 32^s,184 + \text{leap_sec}$$

$$\arg 2 = F3 + F5$$

$$\arg 3 = F3 + F5 - F4$$

$$\arg 4 = F3 + F5 - F1$$

$$\arg 5 = -F5$$

$$\arg 6 = F3 + F5 - F4 - F2$$

$$\arg 1 = GMST + \pi - \arg 2$$

step1_elastic ()

Parameter: Ergebnisvektoren $c_solid_moon, s_solid_moon, c_solid_sun$
 s_solid_sun

Gravitationskonstante von Mond und Sonne GM_moon, GM_sun in Kubikmeter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$

Gravitationskonstante der Erde GM in Kubikmeter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$

Erdradius R in Meter $[m]$

Sphärische Koordinaten von Mond und Sonne $moon, sun$ in Meter $[m]$

$p_{nm}, dp_{nm}, ddp_{nm}$ aus Legendre-Funktion

Parameter des elastischen Erdmodells $last_step1$

Rückgabewert: -

Aufgabe: Diese Funktion dient zur Berechnung der Koeffizienten Δc_{lm} und Δs_{lm} von Sonne und Mond der Gezeiten der festen Erde (frequenzunabhängiger Anteil) unter Benutzung des elastischen Erdmodells.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{2m} \\ \Delta s_{2m} \end{array} \right\} = \frac{k_{lm}}{2l+1} \sum_{j=moon, sun} \frac{Gm_j}{Gm_{Erde}} \left(\frac{R_{Erde}}{r_j} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{4m} \\ \Delta s_{4m} \end{array} \right\} = \frac{k_{2m}}{5} \sum_{j=moon, sun} \frac{Gm_j}{Gm_{Erde}} \left(\frac{R_{Erde}}{r_j} \right)^3 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \quad m = 0,1,2$$

step1_anelastic ()

Parameter: Ergebnisvektoren $c_solid_moon, s_solid_moon, c_solid_sun, s_solid_sun$

Gravitationskonstante von Mond und Sonne GM_moon, GM_sun in Kubikmeter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$

Gravitationskonstante der Erde GM in Kubikmeter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$

Erdradius R in Meter $[m]$

Sphärische Koordinaten von Mond und Sonne $moon, sun$ in Meter $[m]$

$p_{nm}, dp_{nm}, ddp_{nm}$ aus Legendre-Funktion

Parameter des unelastischen Erdmodells $last_step1$

Rückgabewert: -

Aufgabe: Die Funktion `step1_anelastic` berechnet die Koeffizienten Δc_{lm} und Δs_{lm} von Sonne und Mond der Gezeiten der festen Erde (frequenzunabhängiger Anteil) unter Benutzung des unelastischen Erdmodells.

Die Formeln entsprechen denen des elastischen Erdmodells, wobei hier die entsprechenden Love-Zahlen des unelastischen Erdmodells einzusetzen sind.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{2m} \\ \Delta s_{2m} \end{array} \right\}_{3m} = \frac{k_{lm}}{2l+1} \sum_{j=\text{moon}, \text{sun}} \frac{Gm_j}{Gm_{\text{Erde}}} \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_j} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{4m} \\ \Delta s_{4m} \end{array} \right\} = \frac{k_{2m}}{5} \sum_{j=\text{moon}, \text{sun}} \frac{Gm_j}{Gm_{\text{Erde}}} \left(\frac{R_{\text{Erde}}}{r_j} \right)^3 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \quad m = 0, 1, 2$$

4.2.3 Hauptfunktion

main ()

Aufgabe: Das Programm berechnet wahlweise die Gezeitenbeschleunigung der direkten Gezeiten, der Gezeiten der festen Erde oder die Ozeangezeiten. Die Gezeiten der festen Erde können unter Betrachtung eines elastischen oder eines unelastischen Erdmodells berechnet werden. Zudem besteht die Möglichkeit die Permanentgezeiten in Bezug auf die Gezeiten der festen Erde mitzuberechnen.

Die wichtigsten Einstellungen zur Steuerung des Programmablaufes sowie die im Programm eingesetzten Konstanten sind im Folgenden kurz zusammengefasst.

Einstellungen: Allgemein ist zunächst zu bemerken, dass bei den folgenden Einstellungen wahlweise 0 oder 1 eingegeben werden kann. Die Bedeutung der jeweiligen Einstellung wird hier dargestellt.

direkt:	0 ... keine Berechnung der direkten Gezeiten 1 ... Berechnung der direkten Gezeiten
solid:	0 ... keine Berechnung der Gezeiten der festen Erde 1 ... Berechnung der Gezeiten der festen Erde
ocean:	0 ... keine Berechnung der Ozeangezeiten 1 ... Berechnung der Ozeangezeiten
perm_tide:	0 ... Permanentgezeiten werden bei der Berechnung der Gezeiten der festen Erde berücksichtigt 1 ... Permanentgezeiten bleiben bei der Berechnung der Gezeiten der festen Erde unberücksichtigt

earthmodell: 0 ... verwendet ein elastisches Erdmodell zur Berechnung der Gezeiten der festen Erde
 1 ... verwendet ein elastisches Erdmodell zur Berechnung der Gezeiten der festen Erde

Zudem ist die Anzahl der Berechnungspunkte n einzugeben.

Konstante Werte:

Gravitationskonstante der Erde $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$: $GM = 3.986004418e14$

Erdradius $[m]$: $R = 6378136.49$

Schaltsekunden $[sec]$: $leap_sec = -32$ (aktueller Stand; Dezember 2004)

Gravitationskonstante der Sonne $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$: $GM_{sun} = 1.327124e+20$

Gravitationskonstante des Mondes $\left[\frac{m^3}{s^2} \right]$: $GM_{moon} = GM * 0.0123000345$

Dichte des Wassers $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$: $\rho_{water} = 1025$

Gravitationskonstante $\left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$: $G = 6.67259e-11$

Erdbeschleunigung $\left[\frac{m}{s^2} \right]$: $g = 9.780327$

5 Berechnungsbeispiele

Dieses Kapitel zeigt einige Anwendungsbeispiele zu den in Kapitel 3 und 4 vorgestellten Programmen. Hierbei werden verschiedene Einstellungen zur Berechnung der gewünschten Ergebnisse dargestellt, um die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten der erstellten Programme aufzuzeigen.

5.1 Beispiele: Systemtransformation

Die Systemtransformation kann, wie bereits in Kapitel 3 erwähnt, sowohl Koordinaten des ITRS in Koordinaten des ICRS transformieren als auch umgekehrt. Folgende zwei Beispiele stellen die möglichen Transformationen dar, wobei in Beispiel 2 die Ausgangsdaten von Beispiel 1 als Eingangsdaten eingesetzt werden. Beispiel 2 stellt somit die Rücktransformation dar. Die in das erdfeste System transformierten Koordinaten sind identisch mit den Eingangsdaten von Beispiel 1.

5.1.1 Beispiel 1: ITRF \rightarrow ICRF

Eingangsdaten: 6 Punkte zu verschiedenen Zeitpunkten im ITRF in Meter [m]

MJD	x	y	z
5.2051300000000003e+04	-1.3205569332530827e+06	-1.4716024990770894e+06	-6.0869134601160139e+06
5.2052599999999999e+04	-3.4040289475381006e+06	1.6009617017179972e+06	-5.1777899295102376e+06
5.2053900000000001e+04	7.6293951020066033e+05	5.1213446933136769e+06	-3.7616155885741883e+06
5.2055199999999997e+04	6.0240527029149663e+06	8.7265389412837522e+05	-1.9771859329880381e+06
5.2056500000000000e+04	2.7007372616979764e+06	-5.8022424834504668e+06	6.3774750217506778e+02
5.2057800000000003e+04	-4.5458868682818366e+06	-4.0474321125198798e+06	1.9781824676592285e+06

Einstellungen: methode = 1;
trans_frame = 0;

Die Koordinaten sollen mit der alternativen Methode vom erdfesten in das raumfeste System transformiert werden.

Ausgangsdaten: Die 6 transformierten Koordinaten zu den entsprechenden Zeitpunkten im ICRF in Meter [m]

MJD	X	Y	Z
5.2051300000000003e+04	-1.5999999995109618e+06	-1.1624680470325937e+06	-6.0867617040087394e+06
5.2052599999999999e+04	-1.1624680382402944e+06	-3.5777087673265557e+06	-5.1777087631931584e+06
5.2053900000000001e+04	1.6000000032835379e+06	-4.9242936586870570e+06	-3.7618256143352566e+06
5.2055199999999997e+04	4.9242936603215840e+06	-3.5777087631432777e+06	-1.9777087634646215e+06
5.2056500000000000e+04	6.400000000158763e+06	-5.9157923082440566e-003	1.3921441401407719e-003
5.2057800000000003e+04	4.9242936631126180e+06	3.5777087590385280e+06	1.9777087639378654e+06

5.1.2 Beispiel 2: ICRF → ITRF

Eingangsdaten: 6 Punkte zu verschiedenen Zeitpunkten im ICRF in Meter [m]

MJD	X	Y	Z
5.2051300000000003e+004	-1.5999999995109618e+006	-1.1624680470325937e+006	-6.0867617040087394e+006
5.2052599999999999e+004	-1.1624680382402944e+006	-3.5777087673265557e+006	-5.1777087631931584e+006
5.2053900000000001e+004	1.6000000032835379e+006	-4.9242936586870570e+006	-3.7618256143352566e+006
5.2055199999999997e+004	4.9242936603215840e+006	-3.5777087631432777e+006	-1.9777087634646215e+006
5.2056500000000000e+004	6.4000000000158763e+006	-5.9157923082440566e-003	1.3921441401407719e-003
5.2057800000000003e+004	4.9242936631126180e+006	3.5777087590385280e+006	1.9777087639378654e+006

Einstellungen: methode = 1;
trans_frame = 1;

Die Koordinaten sollen mit der alternativen Methode vom raumfesten in das erdfeste System transformiert werden.

Ausgangsdaten: Die 6 transformierten Koordinaten zu den entsprechenden Zeitpunkten im ITRF in Meter [m]

MJD	x	y	z
5.2051300000000003e+004	-1.3205569332530827e+006	-1.4716024990770894e+006	-6.0869134601160139e+006
5.2052599999999999e+004	-3.4040289475380993e+006	1.6009617017179972e+006	-5.1777899295102395e+006
5.2053900000000001e+004	7.6293951020066056e+005	5.1213446933136769e+006	-3.7616155885741883e+006
5.2055199999999997e+004	6.0240527029149644e+006	8.7265389412837476e+005	-1.9771859329880383e+006
5.2056500000000000e+004	2.7007372616979759e+006	-5.8022424834504668e+006	6.3774750217506778e+002
5.2057800000000003e+004	-4.5458868682818357e+006	-4.0474321125198794e+006	1.9781824676592287e+006

5.2 Beispiele: Gezeitenmodellierung

Hier werden einige Fälle zur Berechnung der Gezeitenbeschleunigungen durchgespielt. Die direkten Gezeiten, die Gezeiten der festen Erde sowie die Ozeangezeiten werden hier jeweils einzeln berechnet. Es sind jedoch auch weitere Eingabemöglichkeiten denkbar, wie beispielsweise die gleichzeitige Berechnung zweier oder dreier verschiedener Effekte.

Die Eingangsdaten sind in allen Berechnungsfällen die selben.

Eingangsdaten in Meter [m]:

MJD	x	y	z
5.2050000000000000e+004	-2.9676672192865539e+02	5.7800477687170962e+02	-6.3999999670354053e+06
5.2051300000000003e+004	-1.3205569332530827e+06	-1.4716024990770894e+06	-6.0869134601160139e+06
5.2052599999999999e+004	-3.4040289475381006e+06	1.6009617017179972e+06	-5.1777899295102376e+06
5.2053900000000001e+004	7.6293951020066033e+05	5.1213446933136769e+06	-3.7616155885741883e+06
5.2055199999999997e+004	6.0240527029149663e+06	8.7265389412837522e+05	-1.9771859329880381e+06
5.2056500000000000e+004	2.7007372616979764e+06	-5.8022424834504668e+06	6.3774750217506778e+02

5.2.1 Beispiel 1: direkte Gezeiten

Einstellungen: `direct = 1;`
 `solid = 0;`
 `ocean = 0;`

Die Einstellungen zu den Permanentgezeiten sowie der Auswahl eines Erdmodells spielen für diese Gezeiten keine Rolle.

Ausgangsdaten: Gezeitenbeschleunigungen bezüglich des ITRS zu den entsprechenden Zeitpunkten in Meter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

MJD	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}
5.205000000000000e+004	4.602939913806608e-007	-1.108906566277076e-007	6.642057326334763e-007
5.205130000000000e+004	-3.827392772931189e-007	-9.725133465132835e-007	3.866100825917796e-007
5.205260000000000e+004	-1.194290731499504e-006	8.068350842787882e-007	-2.782488212915984e-008
5.205390000000000e+004	1.067565113173450e-006	9.491512274180351e-007	-3.359083615776888e-007
5.205520000000000e+004	4.630058910911426e-007	-9.448601789238782e-007	-4.002879689721542e-007
5.205650000000000e+004	-5.442295905394443e-007	-8.670064788553453e-008	-2.777879880298033e-007

5.2.2 Beispiel 2: Gezeiten der festen Erde

Einstellungen: `direct = 0;`
 `solid = 1;`
 `ocean = 0;`

 `perm_tide = 1;`
 `earthmodel = 1;`

Berechnung der Gezeiten der festen Erde mit einem unelastischen Erdmodell mit Berücksichtigung der Permanentgezeiten.

Ausgangsdaten: Gezeitenbeschleunigungen bezüglich des ITRS zu den entsprechenden Zeitpunkten in Meter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

MJD	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}
5.205000000000000e+004	1.261127388667304e-007	-4.622073013115733e-008	-2.245548739173525e-008
5.205130000000000e+004	-2.583026010847400e-008	-1.783167922332969e-007	2.458248744100895e-007
5.205260000000000e+004	1.331970455095135e-007	1.681344553391419e-008	5.000030554182315e-007
5.205390000000000e+004	2.172019431920549e-007	-4.139525176878886e-007	2.640081171631565e-007
5.205520000000000e+004	-9.259297941072177e-008	-3.137563606167519e-007	-1.221850864961997e-007
5.205650000000000e+004	-5.721112828897369e-008	-2.539511476028422e-007	-8.573222792943186e-008

5.2.3 Beispiel 3: Ozeangezeiten

Einstellungen:

```

direct = 0;
solid = 1;
ocean = 0;

```

Wie bei den direkten Gezeiten sind auch hier die Einstellungen der Permanentgezeiten sowie der Wahl des Erdmodells ohne Bedeutung.

Ausgangsdaten: Gezeitenbeschleunigungen bezüglich des ITRS zu den entsprechenden Zeitpunkten in Meter pro Quadratsekunde $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

MJD	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}
5.205000000000000e+004	5.0035650718045294e-008	-3.4123014653535449e-008	1.5917139488453610e-008
5.205130000000000e+004	3.0732399555012520e-008	-5.5605024824606422e-009	1.8581618526143265e-007
5.205259999999999e+004	1.4436198004539261e-007	-6.5593480655033228e-008	8.3594222998310820e-008
5.205390000000000e+004	-6.9350621443975037e-009	-1.6086917552606284e-007	2.1116315289535543e-007
5.205519999999999e+004	-2.0119972585944715e-007	-7.6957314152597425e-008	5.7507235049829544e-008
5.205650000000000e+004	7.7397222699096485e-009	1.1307231342218537e-008	1.4396290381200341e-008

6 Zusammenfassung

Die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde gewinnt immer mehr an Bedeutung. Der Nutzen und die Anwendung reichen von der Bestimmung der Meerestopographie über die Bestimmung des Geoids in Zentimetergenauigkeit bis hin zur Analyse von Mechanismen und Massenverlagerungen auf der Erdoberfläche und im Erdinnern sowie der besseren Bestimmung hydrologischer Prozesse.

Grundlegend für eine möglichst genaue Bestimmung des Erdschwerefeldes ist eine genaue Bestimmung der Satellitenbahn. Da die Messdaten der Satelliten neben der gravitativen Wirkung der Erde auch gravitative Wirkungen der direkten und indirekten Gezeiteneffekte beinhalten, gilt es diese Störeinflüsse zu reduzieren, um schließlich das Gravitationsfeld der Erde bestimmen zu können.

Die Modellierung der Gezeiten ermöglicht es schließlich, die Messungen der sich frei um die Erde bewegend Satelliten um die Einflüsse der gravitativen Störkräfte zu befreien. Somit können Aussagen über die gravitativen Eigenschaften des Erdkörpers an beliebigen Beobachtungspunkten gewonnen werden.

Die Modellierung der Gezeiteneffekte bezieht sich auf das erdfeste Referenzsystem (International Terrestrial Reference System, ITRS), welches üblicherweise auch als Beobachtungssystem dient. Oftmals werden Koordinaten aber beschrieben in einem von der Erdrotation entkoppelten raumfestes System, wie es beispielsweise durch das International Celestial Reference System (ICRS) definiert wird. Aufgrund der Tatsache, dass Beobachtungspunkte nicht immer im gewünschten Referenzsystem vorliegen, müssen diese zunächst entsprechend transformiert werden. Die Erstellung eines C-Programms zur Transformation von Koordinaten bezüglich des ITRS in Koordinaten bezüglich des ICRS oder umgekehrt ist Teil dieser Arbeit.

Liegen die Beobachtungspunkte im erdfesten Referenzsystem vor, so können die Gezeitenbeschleunigungen der direkten Gezeiten, der Gezeiten der festen Erde sowie der Ozeangezeiten an den gewünschten Punkten berechnet werden. Hierzu wurde ein bereits bestehendes C-Programm überarbeitet, was den zweiten Teil dieser Arbeit bildet.

Mit Hilfe der beiden C-Programme besteht somit die Möglichkeit Beobachtungspunkte zum einen in das richtige Referenzsystem zu transformieren, zum anderen Gezeiteneffekte in diesen Punkten zu berechnen.

Zudem wurde eine Art „Handbuch“ erstellt, welches sowohl die Grundlagen als auch die Programme selbst dokumentiert. Im Grundlagenteil werden zunächst die verschiedenen Zeitsysteme und deren Zusammenhänge erläutert. Die Referenzsysteme, welche bei der Systemtransformation von fundamentaler Bedeutung sind, werden vorgestellt sowie deren Zusammenhänge über Präzession, Nutation und Polbewegung dargelegt. Des weiteren erfolgt die Herleitung des Gezeitenpotenzials, welches für die Gezeitenmodellierung von Bedeutung ist.

Die Programmdokumentationen zur Systemtransformation und zur Gezeitenmodellierung werden getrennt voneinander behandelt. Dabei wird zum einen der detaillierte Aufbau der Programme mit den zur Berechnung notwendigen Formeln dargestellt, zum anderen werden die Ein- und Ausgabefiles sowie wichtige Programmeinstellungen näher erläutert. Die aus dem Programm gewonnenen Ergebnisse der Systemtransformation werden anhand eines Vergleichsprogramms beurteilt. Zuletzt werden einige Berechnungsbeispiele zur Systemtransformation als auch zur Gezeitenmodellierung dargestellt um die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten, welche die Programme bieten, aufzuzeigen.

7 Literaturverzeichnis

- Baker, T.F. (1984): Tidal deformations of the Earth, Sci. Prog. Oxf. 69 (1984) 197-233
- Baur, O. (2001): Gezeiten und deren Analyse. Studienarbeit am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart
- Baur, O. (2002): Ozeangezeitenlösungen aus Bahnstörungen erdnaheer Satelliten. Diplomarbeit am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart
- Darwin, G.H. (1888): Tides, Encyclopaedia Britannica, 9th edition, Vol. XXIII, 353-381
- Doodson A.T. (1921): The harmonic development of the tide-generating potential, Proc. Roy. Soc., A 100, 305-329. Reprint in: International Hydrographic Revue, 31 No.1(1954), Monaco
- Eanes, R.J. (1994) : Diurnal and semidiurnal tides from TOPEX/POSEIDON altimetry (abstract), EOS Trans. AGU, 75(16), Spring Meet. Suppl., 108
- Egbert, G.D., Bennett, A.F., Foreman, M.G.G. (1994): TOPEX/POSEIDON tides estimated using a global inverse model, J. of Geophys. Res., 99, 24812-24852
- Gerstl, M. (1999): Bezugssysteme der Satellitengeodäsie. In: 3. DFG-Rundgespräch zum Thema Bezugssysteme, DGK, Reihe A, 116, pp. 110-119, München
- Grafarend, E.W.; Engels, J. (2001): Erdmessung und Physikalische Geodäsie I und II. Skriptum zur Vorlesung: Erdmessung und Physikalische Geodäsie I und II, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart
- Hartmann, T. (1996): Hochgenaue Nutationsbewegung einer starren Erde aus einer verbesserten Gezeitenpotenzialentwicklung. Dissertation der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
- Kleusberg, A. (1998): Navigation I. Skriptum zur Vorlesung: Navigation I, Institut für Navigation der Universität Stuttgart
- Le Provost, C., Genco, M.L., Lyard, F., Vincent, P., Canceil, P. (1994) : Spectroscopy of the world ocean tides from a finite element hydrodynamic model, J. of Geophys. Res., 99, 24777-24797
- McCarthy, D.; Petit, G. 2004: IERS Conventions (2003), IERS Technical Note No. 32, Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt a.M.
- Newton, I. (1999): Philosophiae naturalis principia mathematica. Englische Übersetzung von I.B. Cohen und A. Whitman, University of California Press 1999. Deutsche Übersetzung von V. Schüller, De Gruyter 1999.
- Richter, B. (1999): Die Grundlagen der Geodätischen Astronomie. Skriptum zur Vorlesung Kinematik und Dynamik geodätischer Bezugssysteme I, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart
- Schwiderski, E.W. (1981): Global Ocean Tides, Part V: The diurnal principal lunar tide O1, Atlas of Tidal Charts and Maps, Tech. Rep., 81-142, Nav. Surface Weapons Cent., Dahlgren
- Schwiderski, E.W. (1983): Atlas of Ocean Tidal Charts and Maps, Part I: The semidiurnal principle lunar tide M2, Mar. Geod., 6,4

