

# Mehrskalenmodellierung von aeroakustischen Quellen in schwach kompressiblen Strömungen

Von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie  
der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung.

Vorgelegt von Dipl.-Math. techn. Roland Fortenbach  
aus Bräunlingen, Schwarzwald-Baar Kreis

Hauptberichter : Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus-Dieter Munz  
Mitberichter : Prof. Dr.-Ing. habil. Bernhard Weigand  
Tag der mündlichen Prüfung : 01.12.2005

Institut für Aero- und Gasdynamik der Universität Stuttgart



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aero- und Gasdynamik (IAG) der Universität Stuttgart. Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Deutsch-Französischen Gemeinschaftsprogramms mit den Fördernummern MU 1319/1-2 und MU 1319/1-3 unterstützt.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. rer. nat. Claus-Dieter Munz, danke ich herzlich für die hervorragende fachliche Betreuung, sein großes Engagement und für das entgegengebrachte Vertrauen. Dem Institutsleiter, Herrn Prof. Dr.-Ing. Siegfried Wagner, danke ich für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen, die entscheidend zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernhard Weigand vom Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt (ITLR) der Universität Stuttgart für die Mitberichterstattung und die interessierte und genaue Durchsicht der Arbeit sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg F. Wagner vom Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen (ISD) der Universität Stuttgart für den Vorsitz der Prüfungskommission.

Mein Dank geht ebenfalls an die Forschungsabteilung LG-MD von EADS in Ottobrunn, für die ich eine Auftragsarbeit anfertigte. Bei Herrn Dr. Grünewald und Herrn Dipl.-Ing. Benjamin Basel bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit und die zahlreichen Anregungen und Diskussionen.

Schließlich gilt mein Dank auch meinen Kollegen am Institut für die fachlichen Diskussionen und die angenehme, kollegiale Atmosphäre. Am IAG zu arbeiten, bereitete mir stets große Freude. Bei meinen Kollegen Thomas Schwartzkopff, Marc Ratzel, Michael Dumbser und Matthias Lang bedanke ich mich für die Freundschaft, die in unserer gemeinsamen Zeit am Institut entstanden ist.

Meiner Frau Silke und meinen Eltern danke ich ganz besonders für die Geduld und die Unterstützung, die sie während der Fertigstellung meiner Arbeit aufbrachten.

Salzburg, Juni 2006

Roland Fortenbach



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>xi</b>
<b>Short description</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	2
1.3 Ziel der Arbeit . . . . .	4
1.4 Inhalt der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Akustik</b>	<b>7</b>
2.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen . . . . .	7
2.2 Dimensionslose Formulierung der Grundgleichungen . . . . .	9
2.3 Vereinfachte Grundgleichungen . . . . .	12
2.4 Wellengleichung der Akustik . . . . .	16
<b>3 Asymptotik</b>	<b>19</b>
3.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	19
3.2 Grundlegende Sätze . . . . .	21
<b>4 Mathematische Modelle der Aeroakustik</b>	<b>23</b>
4.1 Akustische Analogie . . . . .	23
4.2 Entwicklung um die inkompressible Strömung . . . . .	31
<b>5 Mehrskalenmodellierung von aeroakustischen Quellen</b>	<b>35</b>
5.1 Einskalenmodellierung <i>Scaled Perturbation Ansatz (SPA)</i> . . . . .	35
5.1.1 Inkompressibler Grenzwert: Einskalenentwicklung . . . . .	36
5.1.2 Skalierter Störungsansatz . . . . .	41
5.2 Mehrskalenmodellierung . . . . .	46
5.2.1 Definition der Raumskalen . . . . .	46
5.2.2 Inkompressibler Grenzwert: Mehrskalenentwicklung . . . . .	47
5.2.3 Mehrskalenmodell der Thermoakustik . . . . .	52
5.2.4 Mehrskalenmodell der Strömungsakustik . . . . .	54

<b>6</b>	<b>Numerische Verfahren</b>	<b>61</b>
6.1	Analytische Integrationsmethode . . . . .	61
6.2	Optimiertes Finite-Differenzen Verfahren . . . . .	65
6.3	Koppelung von Strömung und Akustik . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>73</b>
7.1	Validierung der Numerischen Verfahren . . . . .	73
7.1.1	Validierung der analytischen Integrationsmethode . . . . .	73
7.1.2	Validierung des optimierten Finite-Differenzen Verfahrens . . . . .	81
7.2	Aeroakustischer Testfall: Rotierendes Wirbelpaar . . . . .	90
7.2.1	Konfiguration und Analytische Lösung . . . . .	90
7.2.2	Aeroakustische Modellierungen . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Grundgleichungen</b>	<b>118</b>
A.1	Navier-Stokes Gleichungen in konservativen und primitiven Variablen . .	118
A.2	Entdimensionalisierung der Navier-Stokes Gleichungen . . . . .	121
A.3	Transformation in den Wellenzahl-Frequenz-Raum . . . . .	125
<b>B</b>	<b>Asymptotische Gleichungen</b>	<b>127</b>
B.1	Entwicklung auf einer Raumskala und einer Zeitskala . . . . .	127
B.2	Entwicklung auf zwei Raumskalen und einer Zeitskala . . . . .	132
<b>C</b>	<b>Lebenslauf</b>	<b>139</b>

## Formelzeichen und Abkürzungen

### Indizierung

$\sim$	Index, dimensionsbehaftete Größe
$\hat{\cdot}$	Index, Größe in der Wellenzahl-Frequenz Beschreibung
$\bar{\cdot}$	Index, gemittelte Größe
<i>ref</i>	Subskript, Referenz zur Entdimensionalisierung
$\infty$	Subskript, Hintergrundgröße
<i>ak</i>	Subskript, akustische Größe
<i>num</i>	Subskript, Größe aus numerischem Verfahren
<i>O, U, B</i>	Subskript, Oberseite, Unterseite, Beobachtungspunkt
$'$ , $''$	Hochgestellt, Störgrößen
$(i)$	Hochgestellt, Größe aus asymptotischer Reihenentwicklung $i=1,2,\dots$
<i>inc</i>	Hochgestellt, inkompressible Strömungsgröße
<i>hyd</i>	Hochgestellt, hydrodynamische Größe, Strömungsgröße

### Mathematische Formelzeichen

$\nabla$	Nabla Operator, Gradient
$\nabla\cdot$	Nabla Operator, Divergenz
$\circ$	Dyadisches Produkt
<i>T</i>	Hochgestellt, transponierte Matrix
$D/Dt$	Substantielle Ableitung
$\partial/\partial x$	Partielle Raumableitung
$\partial/\partial t$	Partielle Zeitableitung
<i>f, g, h</i>	Platzhalter für Funktionen in Rechenregeln
$O(\cdot)$ , $o(\cdot)$	Landau Symbolik
$\underline{\underline{I}}$	Einheitsmatrix
$\Re(\cdot)$	Realteil
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$\delta_{ij}$	Kronecker Symbol
$H_2^{(2)}$	Hankel Funktion zweiter Ordnung und zweiter Art
$J_2, Y_2$	Bessel Funktion zweiter Ordnung und erster Art
$Y_2$	Bessel Funktion zweiter Ordnung und zweiter Art
$G(\cdot, \cdot)$	Greensche Funktion

### Formelzeichen in den Grundgleichungen

$\rho$	Massendichte
$\rho \underline{u}$	Impulsdichte
$\underline{u}$	Strömungsgeschwindigkeit
$c$	Schallgeschwindigkeit
$p$	Druck
$e$	Gesamtenergie
$\epsilon$	Innere Energie
$T$	Temperatur
$\underline{\underline{\tau}}$	Viskoser Spannungstensor
$\underline{q}$	Vektor der Wärmestromdichte
$\Phi_{Diss}$	Dissipationsfunktion
$s$	Entropie
$\Gamma$	Zirkulation
$\kappa$	Wirbelstärke
$\Phi$	Geschwindigkeitspotential
$\Psi$	Stromfunktion
$w$	Komplexe Potentialfunktion
$\mu$	Schubviskosität
$\eta$	Volumenviskosität
$k$	Wärmeleitungskoeffizient
$R$	Gaskonstante
$c_P$	Spezifische Wärme bei konstantem Druck
$c_V$	Spezifische Wärme bei konstantem Volumen
$\gamma$	Adiabatenindex
$\tilde{\underline{G}}$	Rechte Gleichungsseite der linearisierten Eulergleichungen
$\lambda_i$	Eigenwerte der linearisierten Eulergleichungen
$\underline{X}_i$	Eigenvektoren der linearisierten Eulergleichungen
$\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$	Raumvariable
$t$	Zeitvariable
$\alpha, \beta$	Räumliche Wellenzahlen in der Wellenzahl-Frequenz Beschreibung
$k$	Wellenzahl
$\omega$	Zeitliche Frequenz in der Wellenzahl-Frequenz Beschreibung



**Formelzeichen für dimensionslose Parameter**

$M$	Mach Zahl
$Re$	Reynoldszahl
$Pr$	Prandtl Zahl
$Pe$	Peclet Zahl

**Formelzeichen der aeroakustischen Modellierungen**

$\epsilon, \epsilon_0$	Parameter für die asymptotische Reihenentwicklung
$f^{(n)}$	Glied einer asymptotischen Reihenentwicklung
$\Phi_n$	Asymptotische Folge
$L_n$	Asymptotische Gleichung
$\underline{\eta}, \underline{\xi}$	Raumvariablen im Mehrskalensatz
$R$	Abstand zwischen Beobachter und Quelle
$\tau$	Retardierte Zeitvariable
$\rho^{(1)}$	Dichtekorrektur

**Formelzeichen in den numerischen Verfahren und Testfällen**

$\Delta x$	Raumschrittweite
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$a_i$	Koeffizienten der <i>DRP</i> -Raumdiskretisierung, $i = -3, \dots, 3$
$d_i$	Koeffizienten der künstlichen <i>DRP</i> -Dämpfung, $i = -3, \dots, 3$
$b_i$	Koeffizienten der <i>DRP</i> -Zeitdiskretisierung, $i = -3, \dots, 3$
$D$	Künstlicher <i>DRP</i> -Dämpfungsfaktor
$d$	Lage im Sponge Layer
$D_{Sponge}$	Breite des Sponge Layers
$E$	Fehlerintegral für die spektrale Optimierung des <i>DRP</i> -Verfahrens
$\zeta$	Integralgrenzen des Fehlerintegrals $E$
$\Omega$	Rechengebiet
$\partial\Omega$	Rand des Rechengebiets
$V$	Volumen des Rechengebiets
$S$	Oberfläche eines aktiven Hindernisses
$\underline{T}$	Lighthill Tensor
$\underline{n}^R$	Einheitsnormalenvektor auf einem passivem Hindernis
$\underline{a}^R$	Beschleunigungsvektor auf einem passivem Hindernis
$\lambda$	Wellenlänge
$r_0$	Abstand der Wirbelzentren

**Abkürzungen**

<i>CAA</i>	<b>C</b> omputational <b>A</b> ero <b>a</b> coustics
<i>CFD</i>	<b>C</b> omputational <b>F</b> luid <b>D</b> ynamics
<i>CFL</i>	<b>C</b> ourant- <b>F</b> riedrich- <b>L</b> evy, Zeitschrittweitenbedingung
<i>DNS</i>	<b>D</b> irekte <b>N</b> umerische <b>S</b> imulation
<i>DRP</i>	<b>D</b> ispersion <b>R</b> elation <b>P</b> reserving
<i>ENO</i>	<b>E</b> ssentially <b>N</b> on <b>O</b> scillatory
<i>FD</i>	<b>F</b> inite- <b>D</b> ifferenzen Methode
<i>MAE</i>	<b>M</b> atched <b>A</b> symptotic <b>E</b> xpansion
<i>PML</i>	<b>P</b> erfectly <b>M</b> atched <b>L</b> ayer
<i>PPW</i>	<b>P</b> oints <b>p</b> er <b>W</b> avelength
<i>SPA</i>	<b>S</b> caled <b>P</b> erturbation <b>A</b> nsatz
<i>WENO</i>	<b>W</b> eighted <b>E</b> ssentially <b>N</b> on <b>O</b> scillatory

## Kurzfassung

Die Herausforderung der Strömungsakustik im Regime von Strömungen mit kleiner Mach-Zahl  $M$  besteht in der Behandlung der deutlich variierenden Skalen. Die Strömung ist gekennzeichnet durch sehr kleine räumliche Strukturen, wie sie beispielsweise in den Wirbeln von turbulenten Strömungen auftreten. Sie breitet sich mit langsamer Konvektion aus und enthält den Hauptteil der Energie des Systems. Dagegen sind die akustischen Wellen räumlich langskalig, da sie sich mit der schnellen Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Eine weitere Eigenschaft der Akustik ist ihr sehr geringer Energieanteil, der durch ihre kleinen Druckamplituden zum Ausdruck kommt.

Um dem beschriebenen Mehrskalenproblem zu begegnen, verwendet die vorliegende Arbeit einen Störungsansatz, der auf den inkompressiblen Strömungsgleichungen basiert und der die Schallerzeugung und ihre Ausbreitung modelliert. Dazu werden die Erkenntnisse aus der inkompressiblen Grenzwertbetrachtung einer kompressiblen Strömungen verwendet. Das motiviert eine Skalierung der Terme einer Entwicklung um die inkompressible Strömungslösung. Der Vorteil der Skalierung besteht darin, dass die physikalisch bedeutenden Terme hervortreten, was sich an der Potenz der Mach-Zahl ablesen läßt, mit welcher der jeweilige Term gewichtet ist.

Gerade im Regime sehr kleiner Mach-Zahlen wird eine Mehrskalenbetrachtung den unterschiedlichen räumlichen Skalen gerecht. Denn die Mehrskalenmodellierung führt eine zweite, langskalige Raumvariable ein. Die aus diesem Ansatz resultierenden Störungsgleichungen beinhalten Gradienten der physikalischen Größen, die sich sowohl auf die kurze wie auf die lange Raumskala beziehen. Die Eigenschaften der langskaligen Anteile werden über einen Mittelungsprozeß extrahiert, was in einer inhomogenen Wellengleichung für die akustische Ausbreitung resultiert. Die Quellterme sind durch die Strömungslösung definiert und modellieren die Schallerzeugung. Der konvektive Einfluß der Strömung auf die akustische Ausbreitung wird in Störungen der nächst höheren Ordnung beschrieben.

Der Grundgedanke der Mehrskalenmodellierung wird im numerischen Verfahren wieder aufgegriffen. Denn die Strömung wird auf einem feinen Rechengitter diskretisiert, um die kleinen räumlichen Strukturen abzubilden. Dieses ist eingebettet in ein deutlich gröber aufgelöstes Rechengitter, auf dem die akustische Ausbreitung simuliert und das den langskaligen akustischen Wellen angepaßt ist. Die beiden Rechengebiete für die Strömung und die Akustik kommunizieren über akustische Quellterme. Diese sind durch die schallerzeugende Strömung auf dem feinen CFD-Gitter definiert und regen

auf dem groben CAA-Rechengitter die Akustik an. Die Vorschrift für den Transfer der Quellterme zwischen den Rechengebieten wird von der Mehrskalenmodellierung explizit durch einen Mittelungsprozeß geliefert.

Die numerischen Ergebnisse bestehen einerseits aus der Validierung der numerischen Methoden für deren aeroakustische Anwendbarkeit, andererseits wurde das aeroakustische Mehrskalenmodell mit dem analytischen Testfall des rotierenden Wirbelpaars getestet.

## Short description

The main difficulty in the calculation of sound generated by fluid flow at low Mach numbers  $M$  is the occurrence of different scales. The fluid flow is characterized by small spatial structures containing a large amount of energy that may propagate with a small convective velocity, e.g. small vortices in a turbulent flow. The radiated acoustic waves have small amplitudes as they carry a small amount of energy, but have a long wavelength due to their fast propagation velocity.

In this thesis a perturbation method is used to calculate the noise generation and the propagation in combination with fluid flow based on the incompressible equations. Therefore this thesis uses the insight into the limit of a compressible fluid flow. This motivates a scaling of the expansion about an incompressible flow for small Mach numbers  $M$ . One advantage of the scaling is that the important terms become obvious, because all the small terms are multiplied by some power of  $M$ , e.g. all the products of the fluctuations.

Especially in the low Mach number case the different space scales are accounted for by performing a multi scale analysis. The perturbation equations contain derivatives with respect to the small scale as well as to the large scale variables. The information about the large scales is extracted via an averaging procedure. This results in a wave equation as propagation model for the acoustic perturbations and source terms on the right hand side calculated from the flow solution. The influence of fluid convection to the propagation of the acoustic perturbations is represented by higher order perturbations.

According to the multi scale analysis the main idea for the numerical modelling is to introduce a fine grid for the resolution of the fluid flow that is embedded into a larger acoustical domain with a coarse grid adapted to the long wavelength acoustics. The computational domains communicate via the acoustic source terms that are defined on the fine CFD-grid and generate acoustic waves on the coarse CAA-grid. To get an appropriate restriction for the acoustical source terms from the fine CFD-grid to the coarse CAA-grid, the multi-scale expansion with one time scale and two space scales defines explicitly an averaging process.

Numerical results are shown for the validation of the numerical schemes. The aeroacoustic modelling is tested with the analytic test case of the co-rotating vortex pair.



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Durch eine zunehmende Anzahl von Verordnungen und Richtlinien spielt die Umweltverträglichkeit in der wirtschaftlichen Bedeutung von technischen Produkten eine immer wichtigere Rolle. Die Vermeidung oder die Reduktion von aerodynamischem Lärm ist dabei ein wesentlicher Aspekt in der Luftfahrt (Verkehrsflugzeuge, Hubschrauber) oder im Automobilbau (Außen- und Innengeräusch, Motorgeräusch). Die Ursache des Lärms ist in vielen Fällen eine instationäre Strömung. Bevor jedoch die Lärmentstehung im Entwicklungsprozeß untersucht werden kann, ist es wichtig, deren Entstehungsmechanismen zu kennen. Erst dann kann eine aktive Vermeidung in der Produktentwicklung berücksichtigt werden.

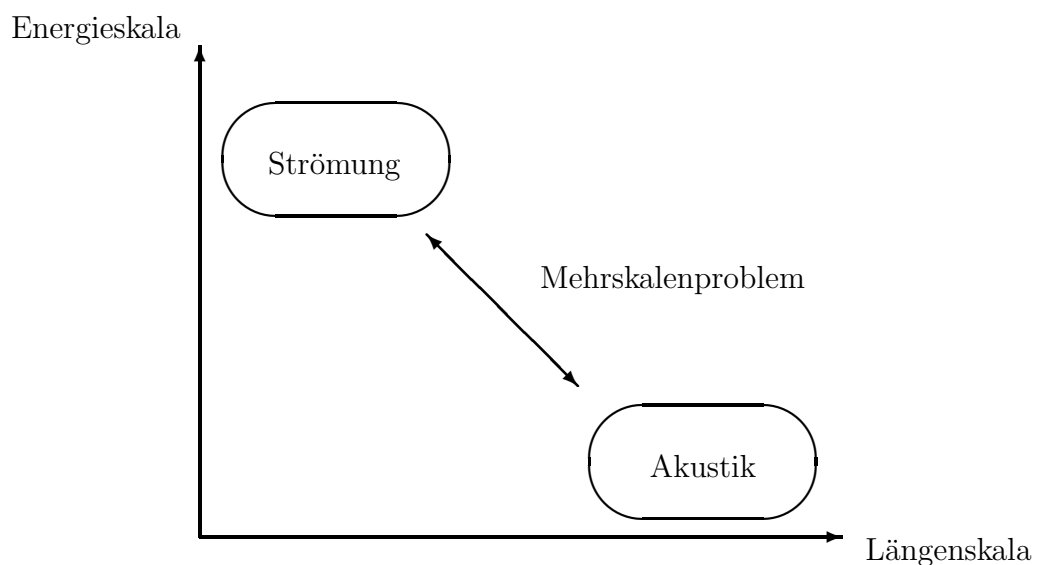


Abbildung 1.1.1: Darstellung des Mehrskalensproblems der Aeroakustik.

Die obigen Beispiele aus der Luftfahrt oder dem Automobilbau sind durch eine Strömung mit kleiner Mach-Zahl gekennzeichnet. Dadurch breiten sich die akustischen Wellen deutlich schneller aus als die konvektiven Strömungsvorgänge. Das hat zur Folge, dass ein Größenunterschied in den Strömungsvariablen und den akustischen Größen besteht, der mehrere Potenzen betragen kann. Die Abbildung 1.1.1 macht deutlich, dass die Variablen, die die Strömung beschreiben, durch einen hohen Energiegehalt und eine kleine räumliche Skala (Turbulenz, Grenzschicht) charakterisiert sind. Dagegen besitzen die akustischen Größen nur eine kleine Menge Energie, sie spielen sich aber auf einer im Vergleich großen Raumskala ab (eine akustische Welle mit einer Frequenz von 1000 Hz hat eine Wellenlänge von 33 cm). Das macht es schwierig, beide Phänomene in einer numerischen Simulation zu beschreiben. Doch gerade diese Wechselwirkung von Strömung und Akustik liegt der Lärmentstehung zugrunde, so dass es einer geeigneten mathematischen Modellierung und der Anwendung von speziellen numerischen Verfahren bedarf, um eine Vorhersage über das Geräuschverhalten zu machen.

## 1.2 Stand der Forschung

Den Beginn der wissenschaftlichen Behandlung des Problems der Schallerzeugung durch Strömungen markierte der englische Mathematiker Sir James Lighthill mit seinen beiden Veröffentlichungen *On sound generated aerodynamically I + II* in den Jahren 1952 [26] und 1954 [27]. Er untersuchte den Strahlärm von Triebwerken und begründete mit seiner Arbeit das Verfahren der akustischen Analogie. Dabei konzentrierte er sich darauf, die Akustik als einen instationären Strömungsvorgang zu beschreiben, dem die Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die Navier-Stokes Gleichungen, zugrunde liegen. Um zu der gewohnten Beschreibung der Akustik durch die akustische Grundgleichung zurückzukehren, brachte er die Navier-Stokes Gleichungen durch Differentiation und ineinander Einsetzen auf die Form einer Wellengleichung. Damit verblieb der Wellenoperator für die akustische Variable, während die restlichen Terme, also die Differenz aus den Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Akustik, von Lighthill als akustische Quellterme interpretiert und als Inhomogenität auf die rechte Gleichungsseite platziert wurden. Bei bekannten Quelltermen läßt sich die Lighthillsche Wellengleichung mit Randelementverfahren sehr effizient lösen, da eine räumliche Diskretisierung auf den Bereich der Quellen beschränkt bleibt. Dieses Vorgehen setzt jedoch eine Ausbreitung der Akustik in einem homogenen, ruhenden Medium voraus, wodurch beispielsweise eine Berechnung der Schallwellenbeugung an Strömungsgradienten nicht berücksichtigt werden kann. Zahlreiche Autoren wie Curle [5], Ribner [41], Phillips [38], Powell [39], Ffwoes-Williams und Hawkings [10], Lilley [28] und Howe [21] nahmen die Idee Lighthills auf und entwickelten diese weiter. Deren erweiterte Analogiebetrachtung führte auf eine verallgemeinerte Wellengleichung, die allerdings aufgrund fehlender analytischer Greenschen Funktionen nur mit deutlich gesteigertem Aufwand berechnet werden



konnte. Dennoch galt die Zeit bis in die 70-er Jahre des 20. Jahrhunderts als ein goldenes Zeitalter der Aeroakustik, denn viele strömungsakustische Phänomene ließen sich aufgrund theoretischer Untersuchungen physikalisch interpretieren.

Ab dem Jahr 1990 folgte ein zweiter Entwicklungsschub, der die Aeroakustik vor allem in den Bereichen der Messverfahren und der Gerätetechnik sowie der Theorieentwicklung und der numerischen Verfahren weiter voran brachte [7]. Statt der Umformulierung der strömungsmechanischen Grundgleichungen in eine akustische Wellengleichung, werden aus den Grundgleichungen Störungsgleichungen abgeleitet, die das Verhalten der Akustik und deren Wechselwirkung mit der Strömung beschreiben. Diese Verfahren haben mit der ursprünglichen akustischen Analogie gemeinsam, dass zuvor instationäre Quellterme aus einer Strömungssimulation ermittelt werden, weswegen sie als hybride Verfahren bezeichnet werden. Die Quellterme bestimmen sich aus hochauflösenden Strömungssimulationen. Neben der DNS (Direkte Numerische Simulation) [32] kommen auch LES- (Large Eddy Simulation) [4] und RANS- (Reynolds Averaged Navier-Stokes) [9] Methoden zum Einsatz. Auch statistische Methoden [34] sind für die Beschreibung der Strömungsschwankungen entwickelt worden. Anschließend können die Quellterme als bekannt vorausgesetzt werden.

Die Störungsgleichungen werden im Zeitbereich als Feldproblem gelöst, so dass von den zum Einsatz kommenden numerischen Verfahren besondere Eigenschaften hinsichtlich der Spektraltrou und der Zeitgenauigkeit verlangt werden. Den Grundstein legte Tam [50] mit seinen optimierten Finite-Differenzen Verfahren, die er als *Dispersion Relation Preserving Schemes* bezeichnete. Die Grundidee besteht darin, die freien Koeffizienten des Finite-Differenzen Verfahrens nicht allein aus einem Taylorabgleich zu bestimmen, sondern einen Koeffizienten so zu wählen, dass die spektralen Eigenschaften des numerischen Verfahrens optimiert werden. Das führt einerseits auf ein Verfahren mit einer reduzierten Fehlerordnung, andererseits verbessern sich die Eigenschaften der Numerik bei der Ausbreitung von akustischen Wellen.

Die hybriden Verfahren, die gegenwärtig einen Forschungsschwerpunkt darstellen, lassen sich anhand ihrer Quelltermformulierung und ihrer akustischen Ausbreitungsgleichungen unterscheiden. Neben Quelltermen aus kompressiblen [2], [4] und inkompressiblen [36], [6], [19], [47], [46] Strömungslösungen kommen lineare und nichtlineare Störungsgleichungen zur Anwendung. In Veröffentlichungen bleibt allerdings meist unbeachtet, wie die Quellterme für die Akustiksimulation aus der Strömungssimulation zu bilden sind. Durch die hybride Vorgehensweise kann für jede Simulation ein auf die Anwendung spezialisiertes, numerisches Verfahren verwendet werden. Dadurch liegt in der Regel die ermittelte Strömungslösung zur Berechnung der Quellterme nicht auf dem Gitter der Akustiksimulation vor. Die aeroakustischen Modelle geben keine Auskunft

darüber, wie dieses nicht triviale Problem der Quelltermtransformation zu behandeln ist. Lediglich Ewert [9] fordert eine Filterung der Quellterme, um die Mitnahme von Strömungsinstabilitäten in die Akustiksimulation über die Quellterme zu vermeiden.

Daneben existieren asymptotische Ansätze von Viviand [53], Ting und Miksis [52] sowie von Slimon, Soteriou und Davis [48], [49]. Ihnen gemeinsam ist eine asymptotische Reihenentwicklung für die Strömung (Nahfeldlösung) und die Akustik (Fernfeldlösung). Über Bedingungen aus der Analyse der asymptotischen Gleichungen werden die beiden Lösung aneinander angepaßt. Dadurch bestimmen sich die Parameter aus der Reihenentwicklung, die die akustische Fernfeldlösung festlegen.

### 1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines mathematischen Modells für die Aeroakustik im Regime von schwach kompressiblen Strömungen. Auf Basis der asymptotischen Mehrskalenanalyse von Klein [24] ist dessen Ansatz um Terme höherer Ordnung bzw. akustische Störungen so zu erweitern, dass sich daraus aeroakustische Modellgleichungen ableiten. Das beschriebene Vorgehen ist sowohl auf die asymptotischen Einkalenentwicklungen mit einer Raum- und einer Zeitskala als auch die Mehrskalentwicklungen mit zwei Raumskalen und einer Zeitskala anzuwenden. Eine Analyse der asymptotischen Gleichungen und der Störungen resultiert in mathematischen Modellgleichungen, die neben der Ausbreitung der Akustik auch deren Entstehung in der Strömung beschreiben.

Die entwickelten aeroakustischen Modelle sind durch einen Vergleich mit dem klassischen Verfahren der Aeroakustik von Lighthill und dem bekanntesten Vertreter der Entwicklungen um die inkompressible Strömungslösung von Hardin und Pope zu bewerten. Dafür werden die verschiedenen Verfahren auf ein analytisches Aeroakustikproblem mit bekannter Lösung angewendet und die Ergebnisse verglichen. Als Testproblem eignet sich das Beispiel des rotierenden Wirbelpaars, das eine potentialtheoretische Strömungslösung besitzt und dessen Akustik durch eine angepaßte asymptotische Entwicklung beschrieben werden kann.

Ein weiteres Ziel der Arbeit ist es, die dabei eingesetzten numerischen Verfahren so zu wählen, dass sie sich für den Transport von akustischen Wellen eignen. Das erfordert eine Untersuchung der numerischen Methoden hin auf ihre spektralen Eigenschaften. Durch die Definition von Testproblemen werden die numerischen Verfahren verglichen und deren Eignung für den Einsatz in aeroakustischen Fragestellungen sichergestellt.

## 1.4 Inhalt der Arbeit

Die strömungsmechanischen und akustischen Grundgleichungen werden im **Kapitel 2** bereitgestellt. Für die Strömungsmechanik sind das die Navier-Stokes Gleichungen, die in ihrer vereinfachten Form auch die Wellengleichung der Akustik beinhalten. Durch die Entdimensionalisierung mit unterschiedlichen Referenzen für die langsame, konvektive Strömungsgeschwindigkeit und die schnelle Schallgeschwindigkeit treten in den Grundgleichungen dimensionslose Kenngrößen hervor, die eine mathematische Charakterisierung erlauben. Dadurch ist es möglich, die Singularität in den Grundgleichungen für eine verschwindende Mach-Zahl  $M \rightarrow 0$ , die für das Regime schwachkompressibler Strömungen bezeichnend ist, darzustellen.

Die mathematischen Werkzeuge zur Untersuchung dieser Singularität werden im **Kapitel 3** eingeführt. Dazu werden die grundlegenden Definitionen, Sätze und Vorgehensweisen der Asymptotik zitiert. Es ist naheliegend, dass auch die Lösungen der Grundgleichungen eine Abhängigkeit von der Mach-Zahl  $M$  besitzen. Die Asymptotik berücksichtigt diese Abhängigkeit, indem sie die Lösung als Reihenentwicklung in der Mach-Zahl  $M$  ansetzt.

Das **Kapitel 4** über mathematische Modelle der Aeroakustik greift zwei grundlegende Modellierungen heraus und stellt diese ausführlich vor. Beiden aeroakustischen Modellierungen ist gemeinsam, dass sie in ihrer Zeit richtungsweisend waren. Zahlreiche Autoren verwendeten ihre Ideen und entwickelten diese weiter. Neben den Ursprüngen der Aeroakustik, die von Lighthill in seiner akustischen Analogie im Jahr 1952 gelegt wurden, wird der Ansatz einer Entwicklung um die inkompressible Strömung von Hardin und Pope aus dem Jahr 1994 vorgestellt.

Die Mehrskalenmodellierung aeroakustischer Quellterme im **Kapitel 5** beginnt im ersten Abschnitt mit einer Einskalenmodellierung der Aeroakustik, und wird im zweiten Abschnitt auf eine Mehrskalenmodellierung weiterentwickelt. Beide Modellierungen haben gemeinsam, dass sie die inkompressible Strömungslösung durch Werkzeuge der Asymptotik, d.h. durch asymptotische Entwicklungen, beschreiben. Darauf aufsetzend wird ein skaliertes Störungsansatz um die inkompressible Lösung entwickelt, der auf akustische Evolutionsgleichungen führt. Die Störungsgleichungen werden durch akustische Quellterme angeregt, die sich aus der inkompressiblen Lösung definieren. Diese Vorgehensweise löst das Mehrskalenproblem bezüglich der Unterschiede in den Amplituden von Strömung und Akustik. Die Skalierung der Terme im Störungsansatz und die Aufspaltung in eine inkompressible Strömungslösung und eine kompressible Störung, die als Akustik interpretiert wird, ermöglichen eine geeignete Approximation der unbekanntenen Größen. Allerdings bleibt das Mehrskalenproblem in den unterschiedlichen

Raumskalen, auf denen Strömungs- und Akustikphänomene existieren, von der Einkalenmodellierung unberücksichtigt und wird erst durch die Einführung einer zweiten, langskaligen Raumskala in der Mehrskalenmodellierung vollständig gelöst. Die aus diesem Mehrskalenansatz resultierenden Störungsgleichungen beinhalten Gradienten der physikalischen Größen, die sich sowohl auf die kurze wie auf die lange Raumskala beziehen. Die Eigenschaften der langskaligen Anteile werden über einen Mittelungsprozeß extrahiert, der in einer inhomogenen Wellengleichung für die akustische Ausbreitung resultiert. Die Quellterme der Störungsgleichungen sind durch die Strömungslösung definiert und modellieren die Schallerzeugung. Der konvektive Einfluß der Strömung auf die akustische Ausbreitung wird in Störungen der nächst höheren Ordnung beschrieben.

Das **Kapitel 6** geht auf die numerischen Verfahren ein, die für die Lösung der entwickelten mathematischen Modelle benötigt werden. Neben einem analytischen Verfahren, das auf die integrierten Gleichungen der akustischen Analogie von Lighthill anwendbar ist, wird ein Finite-Differenzen Verfahren vorgestellt, das für die genaue Ausbreitung von akustischen Wellen optimiert wurde. Es ist auf all diejenigen aeroakustischen Modellierungen anwendbar, denen ein linearisiertes Feldproblem zugrunde liegt.

Die numerischen Verfahren werden im **Kapitel 7** validiert, wodurch deren Verwendbarkeit für aeroakustische Problemstellungen nachgewiesen wird. Dafür werden analytische Testfälle mit bekannter Lösung herangezogen. Die aeroakustischen Modelle werden anhand des rotierenden Wirbelpaars getestet. Das Beispiel beschreibt zwei Potentialwirbel, die auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_0$  rotieren. Deren instationäres Strömungsfeld erzeugt spiralförmige, akustische Wellen mit einer Wellenlänge  $\lambda \approx 37.16r_0$ . Es stellt sehr deutlich den Mehrskalencharakter in den Raumskalen und den Amplituden von Strömung und Akustik dar. Die Existenz einer analytischen, geschlossenen Lösung der induzierten Akustik im Fernfeld leitet sich aus einer angepassten asymptotischen Entwicklung her und erlaubt eine Verifizierung der aeroakustischen Modelle.

Das **Kapitel 8** faßt die Ergebnisse der Arbeit zusammen.

## 2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Akustik

Alle Variablen sind zu Beginn dimensionsbehaftet und durch die Schreibweise mit einer Tilde kenntlich gemacht. Die Tilde über dem Nabla Operator  $\tilde{\nabla}$  und über der Zeitvariablen im Subskript bedeutet, dass die Differentiation nach dimensionsbehafteten Variablen durchgeführt wird. Durch  $\tilde{\nabla}$  ist der Gradient und durch  $\tilde{\nabla} \cdot$  die Divergenz einer Strömungsvariablen dargestellt. Das dyadische Produkt zweier Variablen wird durch den Kreisoperator  $\circ$  gekennzeichnet. Eine vektorielle Größe wird mit einem Unterstrich gekennzeichnet und Matrizen sind zweimal unterstrichen.

Nach dem Vorgang der Entdimensionalisierung, der einen Bezug zu Referenzgrößen mit Subskript *ref* herstellt, werden ausschließlich dimensionslose Variablen verwendet (mit Ausnahme des Abschnitts 4.2).

### 2.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen

Das mathematische Modell zur Beschreibung einer kompressiblen und reibungsbehafteten Strömung sind die Navier-Stokes Gleichungen. Es handelt sich um Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie

$$\tilde{\rho}_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \underline{\tilde{u}}) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$(\tilde{\rho} \underline{\tilde{u}})_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \underline{\tilde{u}} \circ \underline{\tilde{u}}) + \tilde{\nabla} \tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}, \quad (2.1.2)$$

$$\tilde{e}_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\tilde{u}}(\tilde{e} + \tilde{p})) = \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\tilde{\tau}}} \underline{\tilde{u}}) - \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{q}}. \quad (2.1.3)$$

Die abhängigen Variablen sind die Erhaltungsgrößen  $\tilde{\rho}$  für die Massendichte,  $\tilde{\rho} \underline{\tilde{u}}$  für die Impulsdichte und  $\tilde{e}$  für die Gesamtenergie pro Einheitsvolumen. Mit  $\tilde{p}$  wird der Druck bezeichnet. Der viskose Spannungstensor  $\underline{\underline{\tilde{\tau}}}$  für ein Newtonsches Fluid und der Vektor

der Wärmestromdichte  $\underline{\tilde{q}}$  sind gegeben durch

$$\underline{\tilde{\tau}} = \tilde{\mu}(\nabla\tilde{\underline{u}} + (\nabla\tilde{\underline{u}})^T) + \tilde{\eta}(\nabla \cdot \tilde{\underline{u}})\underline{I},$$

$$\underline{\tilde{q}} = -\tilde{k}\nabla\tilde{T},$$

wobei  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\eta}$  die Schub- und Volumenviskositäten bezeichnen und  $\underline{I}$  die Einheitsmatrix ist. Der Wärmeleitkoeffizient ist  $\tilde{k}$  und die Temperatur wird durch  $\tilde{T}$  dargestellt. Das System der fünf partiellen Differentialgleichungen für die sieben Unbekannten  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\rho}\tilde{\underline{u}}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\epsilon}$  und  $\tilde{T}$  (in einer 3D-Formulierung sind es fünf Gleichungen und sieben Unbekannte, bei 2D- oder 1D-Betrachtungen verringert sich die Anzahl der Unbekannten und die der Impulserhaltungsgleichungen gleichermaßen) wird durch zwei zusätzliche Gleichungen, die Zustandsgleichungen, geschlossen. Für ein thermisch und kalorisch ideales Gas gelten

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{R}\tilde{T}, \quad (2.1.4)$$

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{c}_V(\tilde{T})\tilde{T}. \quad (2.1.5)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{R}$  die Gaskonstante,  $\tilde{c}_V$  die temperaturabhängige spezifische Wärme bei konstantem Volumen und  $\tilde{\epsilon}$  die innere Energie. Die Gesamtbilanz der Energie  $\tilde{\epsilon}$  stellt einen Zusammenhang zwischen der inneren und der kinetischen Energie her

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\rho}\tilde{\epsilon} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{\underline{u}}^2.$$

Für die Untersuchung von schwach kompressiblen Strömungen kann die Betrachtung in den primitiven Variablen Dichte  $\tilde{\rho}$  Geschwindigkeit  $\tilde{\underline{u}}$  und Druck  $\tilde{p}$  gewählt werden, da das Interesse an den Erhaltungsgrößen Impuls und Energie von nachrangiger Bedeutung ist. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen (2.1.1) - (2.1.3) in eine Formulierung in diesen Größen gebracht. Die Vorgehensweise wird im folgenden kurz geschildert, die Details zu dieser Umformung finden sich im Anhang A.1. Durch Einsetzen der Massenerhaltung (2.1.1) in die Impulserhaltung (2.1.2) wird die Zeitableitung der Massendichte eliminiert. Das ergibt eine Evolutionsgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit  $\tilde{\underline{u}}$ . Aus der Energieerhaltung (2.1.3) wird eine Gleichung für den Druck formuliert. Ein Zusammenhang zwischen Druck und Gesamtenergie ergibt sich wie folgt. Da die Gaskonstante die Differenz der spezifischen Wärmen darstellt  $\tilde{R} = \tilde{c}_p - \tilde{c}_V$  und der Adiabatenindex  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen bezeichnet  $\gamma = \tilde{c}_p/\tilde{c}_V$ , gilt der Zusammenhang

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{R}\tilde{T} = \tilde{\rho}(\tilde{c}_p - \tilde{c}_V)\tilde{T} = \tilde{\rho}\frac{\tilde{c}_p - \tilde{c}_V}{\tilde{c}_V}\tilde{c}_V\tilde{T} = (\gamma - 1)\tilde{\rho}\tilde{\epsilon}$$

zwischen Druck und innerer Energie. Mit Hilfe der Zustandsgleichungen eines thermisch (2.1.4) und kalorisch (2.1.5) idealen Gases und unter Anwendung der Gesamtenergiebilanz ergibt sich durch Einsetzen

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{\underline{u}}^2.$$

Der Zusammenhang zwischen Druck und Energie kann in die Energiegleichung (2.1.3) eingesetzt werden, so dass sich eine Evolutionsgleichung für den Druck  $\tilde{p}$  ergibt. Die Navier-Stokes Gleichungen in primitiven Variablen lauten

$$\tilde{\rho}_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\underline{u}}) = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\tilde{\underline{u}}_{\tilde{t}} + (\tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\underline{u}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\underline{\tau}}}, \quad (2.1.7)$$

$$\tilde{p}_{\tilde{t}} + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = (\gamma - 1) (\tilde{\Phi}_{Diss} - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}}). \quad (2.1.8)$$

Mit  $\tilde{\Phi}$  wird die Dissipationsfunktion bezeichnet, die sich nach

$$\tilde{\Phi}_{Diss} = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} \tilde{\underline{u}}) - \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\underline{\tau}}} = \tilde{\underline{\underline{\tau}}} \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}}$$

berechnet und die den irreversiblen Energieübergang in Wärme infolge dissipativer Reibung beschreibt. Die Temperatur berechnet sich aus bekannten Druck- und Dichtewerten mit der Zustandsgleichung (2.1.4) für ein thermisch ideales Gas.

## 2.2 Dimensionslose Formulierung der Grundgleichungen

Die dimensionsbehafteten Strömungsvariablen können in ihrer Größenordnung deutlich variieren. So stellt sich für Luft bei einer Temperatur von  $\tilde{T} = 20$  [°C] und einer Dichte  $\tilde{\rho} = 1.188$  [kg/m<sup>3</sup>] ein Druck  $\tilde{p} = 100\,000$  [N/m<sup>2</sup>] ein [54]. Wird mit diesen Zahlenwerten auf einem Computer mit endlicher Zahldarstellung gerechnet kann das Ergebnis aufgrund von Rundungsfehlern verfälscht werden. Eine Entdimensionalisierung der Strömungsgrößen beseitigt diese Unterschiede. Durch den Bezug auf eine Referenzgröße sind die entdimensionalisierten Variablen von derselben Größenordnung  $O(1)$ . Hinsichtlich Rundungsfehlern kann somit besser mit ihnen gerechnet werden. Durch die Entdimensionalisierung der zugrunde liegenden Gleichungen treten Kenngrößen auf, die eine mathematische Charakterisierung erlauben. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleichungen treten in Form von globalen Parametern hervor und machen die Gleichungen einer mathematischen Analyse zugänglich.

Im Regime schwach kompressibler Strömungen unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Strömung  $\tilde{\underline{u}}$  und des Schalls  $\tilde{c} = \sqrt{\gamma \tilde{p} / \tilde{\rho}}$  um Größenordnungen, so dass es sinnvoll ist, verschiedene Referenzen für deren Entdimensionalisierung zu verwenden. Neben den Referenzen

- $\rho_{ref}$  für die Dichte,
- $x_{ref}$  für die Raumvariable und
- $p_{ref}$  für den Druck

werden für die Geschwindigkeiten die Referenzen vereinbart

- $u_{ref}$  für die Strömungsgeschwindigkeit und
- $c_{ref} = \sqrt{p_{ref}/\rho_{ref}}$  aus funktionalem Zusammenhang für die Schallgeschwindigkeit.

An dieser Stelle ist zu beachten, dass sich die physikalische Schallgeschwindigkeit aus  $\tilde{c} = \sqrt{\gamma \tilde{p}/\tilde{\rho}}$  berechnet, die Schallgeschwindigkeitsreferenz aber den Adiabatenindex  $\gamma$  unter der Wurzel nicht enthält. Dadurch berechnet sich die dimensionslose Schallgeschwindigkeit aus  $c = \tilde{c}/c_{ref} = \sqrt{\gamma p/\rho}$  nach der gleichen Vorschrift wie sie für die dimensionsbehafteten Variablen gilt. Die Geschwindigkeitsreferenzen  $u_{ref}$  und  $c_{ref}$  sind skalare Größen. Für die vektorielle Strömungsgeschwindigkeit hat das zur Folge, dass die Geschwindigkeitskomponenten der verschiedenen Raumrichtungen mit derselben Referenz behandelt werden. Die gleichen Verhältnisse, d.h. eine skalare Referenz für eine vektorielle Größe, bestehen für die Raumvariable  $\underline{x}$ . Die noch fehlende Referenz

- $t_{ref} = x_{ref}/u_{ref}$  für die Zeitvariable

ergibt sich aus einem funktionalen Zusammenhang. Daneben werden die Referenzen

- $\mu_{ref}$  für die Schub- und Volumenviskositäten  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\eta}$ ,
- $k_{ref}$  für den Wärmeleitungskoeffizienten  $\tilde{k}$ ,
- $R_{ref}$  für die die Gaskonstante  $\tilde{R}$  und die spezifischen Wärmen  $\tilde{c}_p$ ,  $\tilde{c}_V$  sowie
- $T_{ref} = \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} R_{ref}}$  für die Temperatur  $\tilde{T}$

eingeführt. Die als konstant angenommenen Stoffgrößen  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{k}$  und  $\tilde{R}$  werden mit einer Referenz versehen, die dem Wert der Stoffgröße selbst entspricht. Dadurch berechnen sich die dimensionslosen Stoffgrößen zu eins. Für den Vorgang der Entdimensionalisierung gelten die Rechenregeln

$$\tilde{f} = f \cdot f_{ref},$$

$$\tilde{f}_{\tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial (f \cdot f_{ref})}{\partial (z \cdot z_{ref})} = f_z \cdot \frac{f_{ref}}{z_{ref}},$$

die beim Einsetzen in die dimensionsbehafteten Gleichungen benutzt werden. Dabei steht  $\tilde{f}$  stellvertretend für eine dimensionsbehaftete Strömungsvariable,  $f_{ref}$  für deren Referenzwert und  $f$  bezeichnet die dimensionslose Variable. Eine analoge Bezeichnung gilt für den Subskript  $\tilde{z}$ , der für die abhängige Raumvariable  $\underline{\tilde{x}}$  oder die Zeitvariable  $\tilde{t}$  steht. Die ausführliche Darstellung der Rechenschritte zur Entdimensionalisierung sind im Anhang A.2 aufgeführt.



Daraus ergeben sich die Navier-Stokes Gleichungen in dimensionslosen, primitiven Variablen

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\underline{u}_t + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \frac{1}{\rho M^2} \nabla p = \frac{1}{\rho Re} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad (2.2.2)$$

$$p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} = (\gamma - 1) \left( \frac{M^2}{Re} \Phi - \frac{1}{Pe} \nabla \cdot \underline{q} \right) \quad (2.2.3)$$

mit den dimensionslosen Zustandsgleichungen für ein thermisch und kalorisch ideales Gas

$$p = \rho RT, \quad (2.2.4)$$

$$\epsilon = c_V(T)T \quad (2.2.5)$$

und den Definitionen für den Spannungstensor, den Vektor der Wärmeflußdichte und die Dissipationsfunktion

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T) + \eta(\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}},$$

$$\underline{q} = -k \nabla T,$$

$$\Phi = \underline{\underline{\tau}} \nabla \underline{u}$$

sowie der Gesamtenergiebilanz

$$e = \rho \epsilon + \frac{M^2}{2} \rho \underline{u}^2.$$

Zu beachten sind die globalen, dimensionslosen Parameter, die in den Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) und der Energiebilanz auftauchen. Es sind dies

$$\text{die Mach-Zahl} \quad M = \frac{u_{ref}}{c_{ref}}, \quad (2.2.6)$$

$$\text{die Reynolds-Zahl} \quad Re = \frac{x_{ref} u_{ref} \rho_{ref}}{\mu_{ref}},$$

$$\text{die Prandtl-Zahl} \quad Pr = \frac{\mu_{ref} / \rho_{ref}}{k_{ref} / (\rho_{ref} \tilde{c}_P)}$$

$$\text{und die Peclet-Zahl} \quad Pe = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} Re Pr.$$

Die Mach-Zahl  $M$  beschreibt das Geschwindigkeitsverhältnis der Konvektion zur Schallausbreitung, die Reynolds-Zahl  $Re$  setzt die Trägheit ins Verhältnis zur Viskosität und

die Prandtl-Zahl  $Pr$  stellt die Reibungseffekte der Wärmeleitung gegenüber. Die Peclet-Zahl  $Pe$  wird aus dem Produkt der Prandtl-Zahl  $Pr$  und der Reynolds-Zahl  $Re$  gebildet. Der Vorfaktor, der aus dem Adiabatenindex gebildet wird, begründet sich durch die Referenz der Schallgeschwindigkeit. Die Prandtl Zahl  $Pr$  ist der einzige globale Parameter, der ausschließlich aus Stoffgrößen bestimmt ist und nicht aus Strömungsgrößen abgeleitet wird.

Die Navier-Stokes Gleichungen in ihrer dimensionslosen Form (2.2.1) - (2.2.3) erlauben eine mathematische Analyse im Fall einer schwach kompressiblen Strömung. Da der globale Parameter Mach-Zahl  $M$  die Kompressibilität beschreibt, kann sein Auftreten in der Geschwindigkeitsgleichung (2.2.2) detektiert werden. Er steht im Nenner vor dem Druckgradienten und führt im Grenzfall  $M \rightarrow 0$  zu einer Singularität. Die einzelnen Terme der Geschwindigkeitsgleichung stehen nicht mehr im Gleichgewicht zueinander, sondern sie entkoppeln voneinander. Die Untersuchung dieser Singularität erfordert mathematische Werkzeuge, die im folgenden Kapitel 3 eingeführt werden.

### 2.3 Vereinfachte Grundgleichungen

Unter gewissen Annahmen lassen sich die Navier-Stokes Gleichungen vereinfachen. Das führt von den Navier-Stokes Gleichungen zu den Euler Gleichungen und weiter über die lokal linearisierten Euler Gleichungen hin zu den global linearisierten Euler Gleichungen. Ein besonderer Zusammenhang zwischen der Dichte  $\rho$  und dem Druck  $p$  besteht für isentrope Strömungen.

#### Euler Gleichungen

Kann in einer Strömung der Einfluß der Viskosität und des Wärmeflusses vernachlässigt werden, bedeutet das mathematisch, dass für die globalen Parameter  $Re$  und  $Pe$  die Grenzwerte  $Re \rightarrow \infty$  und  $Pe \rightarrow \infty$  gebildet werden. Daraus ergeben sich die rechten Seiten der Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) zu Null und führen zu den Euler Gleichungen

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\underline{u}_t + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \frac{1}{\rho M^2} \nabla p = \underline{0}, \quad (2.3.2)$$

$$p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (2.3.3)$$

die ein geschlossenes System von Gleichungen bilden.

### Linearisierte Euler Gleichungen

Ist eine Strömung gekennzeichnet durch eine gleichförmige Hintergrundströmung mit überlagerten Störungen, die sich um mehrere Größenordnungen unterscheiden, dann können nichtlineare Effekte vernachlässigt werden. Zu diesem Zweck werden die Variablen in eine räumlich und zeitlich gleichförmige Hintergrundströmung, dargestellt durch einen Index  $\infty$ , und eine Störung mit Index  $'$  aufgespalten

$$\rho = \rho_\infty + \rho',$$

$$\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}',$$

$$p = p_\infty + p'.$$

Dieser Ansatz wird in die Euler Gleichungen (2.3.1) - (2.3.3) eingesetzt. Dabei werden Produkte von Störgrößen vernachlässigt. Das führt zu den linearisierten Euler Gleichungen

$$\rho'_t + \underline{u}_\infty \cdot \nabla \rho' + \rho_\infty \nabla \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.3.4)$$

$$\underline{u}'_t + (\underline{u}_\infty \cdot \nabla) \underline{u}' + \frac{1}{\rho_\infty M^2} \nabla p' = \underline{0}, \quad (2.3.5)$$

$$p'_t + \underline{u}_\infty \cdot \nabla p' + \gamma p_\infty \nabla \cdot \underline{u}' = 0 \quad (2.3.6)$$

Es sind geschlossene Evolutionsgleichungen für die Störgrößen  $\rho'$ ,  $\underline{u}'$  und  $p'$ , wenn die Hintergrundgrößen  $\rho_\infty$ ,  $\underline{u}_\infty$  und  $p_\infty$  als bekannt vorausgesetzt werden.

Für eine gleichförmige Hintergrundströmung  $\underline{u}_\infty$  kann angenommen werden, dass nur eine Komponente z.B. in x-Richtung existiert

$$\underline{u}_\infty = \begin{pmatrix} u_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In jedem anderen Fall lässt sich durch Drehung des Koordinatensystems die Reduzierung auf eine Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung erreichen. Da durch die Gleichungen (2.3.4) - (2.3.6) eine lineare Wellenausbreitung beschrieben wird, kann eine Umformung von der Raum-Zeit Beschreibung zur Wellenzahl-Frequenz Beschreibung durchgeführt werden. Die dafür notwendige Fourier bzw. Laplace Transformation lässt sich im zweidimensionalen Fall beschreiben durch

$$\hat{f}(\alpha, \beta, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y, t) e^{-i(\alpha x + \beta y - \omega t)} dx dy dt,$$

$$f(x, y, t) = \int \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\alpha, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} d\alpha d\beta dt.$$

Darin bezeichnet  $\hat{f}$  eine in die Wellenzahl-Frequenz Beschreibung transformierte Größe und  $f$  die ursprüngliche Größe in der Raum-Zeit Beschreibung. Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  beschreiben die räumlichen Wellenzahlen und  $\omega$  steht für die zeitliche Frequenz. Unter Beachtung der obigen Transformationsvorschriften und des Ableitungssatzes aus dem Anhang A.3 lassen sich die linearisierten Euler Gleichungen aus der Raum-Zeit Beschreibung (2.3.4) - (2.3.6) in die Wellenzahl-Frequenz Beschreibung bringen. Aus dem partiellen Differentialgleichungssystem wird ein analytisches Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \omega - \alpha u_\infty & -\rho_\infty \alpha & \rho_\infty \beta & 0 \\ 0 & \omega - \alpha u_\infty & 0 & -\alpha/\rho_\infty \\ 0 & 0 & \omega - \alpha u_\infty & -\beta/\rho_\infty \\ 0 & -\gamma p_\infty \alpha & -\gamma p_\infty \beta & \omega - \alpha u_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho}' \\ \hat{u}' \\ \hat{v}' \\ \hat{p}' \end{pmatrix} = \hat{\underline{G}}. \quad (2.3.7)$$

Die rechte Seite  $\hat{\underline{G}}$  des linearen Gleichungssystems repräsentiert einen möglichen Quellterm in den linearisierten Eulergleichungen und die Anfangsbedingungen. Jede Anfangsbedingung kann durch eine Transformation der Variablen auf eine homogene Form gebracht werden, so dass in der Abwesenheit von Quelltermen ein homogenes Gleichungssystem bleibt. Jede Lösung von (2.3.7) läßt sich durch eine Linearkombination der Eigenwerte  $\lambda_i$  und der Eigenvektoren  $\underline{X}_i$  der Matrix in (2.3.7) ausdrücken. Diese lauten

$$\lambda_1 = \omega - \alpha u_\infty, \quad (2.3.8)$$

$$\lambda_2 = \omega - \alpha u_\infty, \quad (2.3.9)$$

$$\lambda_3 = \omega - \alpha u_\infty + c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (2.3.10)$$

$$\lambda_4 = \omega - \alpha u_\infty - c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (2.3.11)$$

$$\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X}_3 = \begin{pmatrix} 1/c_\infty^2 \\ -\alpha/(\rho_\infty c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ -\beta/(\rho_\infty c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X}_4 = \begin{pmatrix} 1/c_\infty^2 \\ \alpha/(\rho_\infty c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ \beta/(\rho_\infty c_\infty \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Darin steht  $c_\infty$  für die ungestörte Schallgeschwindigkeit  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ . In der Wellenzahl-Frequenz Beschreibung stellt sich jede Lösung von (2.3.7) als Linearkombination aus den Eigenvektoren dar. Die Anteile in  $\underline{X}_1$  können nach Tam [50] als Entropiewelle interpretiert werden,  $\underline{X}_2$  ist eine Wirbelwelle und  $\underline{X}_3$  bzw.  $\underline{X}_4$  sind akustische Wellen. Die Wellen eines Fundamentalanteils  $\underline{X}_i$  bilden denselben Eigenwert  $\lambda_i$ , d.h. die Wellenzahlen  $\alpha$ ,  $\beta$  und die Frequenz  $\omega$  erfüllen die obige Gleichung zur Bildung des Eigenwerts. Der Zusammenhang zwischen den Wellenzahlen und der Frequenz durch die Gleichungen (2.3.8) bis (2.3.11) wird als Dispersionsrelation bezeichnet.

### Isentrope Strömung

Eine isentrope Strömung, in der die Reibung und der Wärmefluß vernachlässigbar sind, ist gekennzeichnet durch eine Entropie  $s$  für die gilt

$$\frac{D s}{D t} = 0.$$

Die substantielle Ableitung  $\frac{D s}{D t} = \frac{d s}{d t} + \underline{u} \cdot \nabla s$  bringt zum Ausdruck, dass die Entropie  $s$  entlang von Teilchenbahnen konstant ist, sie aber von einem Teilchen zum anderen variieren kann. Kann die Entropie  $s$  als gleichförmig angenommen werden, wird die Strömung als homentrop bezeichnet.

Für ein thermisch ideales Gas berechnet sich die Entropie zu

$$s - s_\infty = c_V \log\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right).$$

Daraus folgt im Fall einer isentropen Strömung der direkte Zusammenhang zwischen Druck und Dichte

$$p = \rho^\gamma. \tag{2.3.12}$$

Wird der Störungsansatz der linearisierten Euler Gleichungen aus dem vorangegangenen Abschnitt in die gewonnene Zustandsgleichung (2.3.12) eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} p_\infty + p' &= (\rho_\infty + \rho')^\gamma \\ &= \rho_\infty^\gamma \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^\gamma \\ &= \rho_\infty^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho'}{\rho_\infty} + \frac{1}{2} \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

und in einer Näherung erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} p_\infty &= \rho_\infty^\gamma \\ p' &= \gamma \frac{\rho_\infty^\gamma}{\rho_\infty} \rho' = c_\infty^2 \rho'. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Darin ist neben einem Zusammenhang zwischen der Hintergrunddichte und dem Hintergrunddruck auch eine Beziehung zwischen einer Dichtestörung und einer Druckstörung abgebildet. Die ungestörte Schallgeschwindigkeit ist mit  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$  bezeichnet.

## 2.4 Wellengleichung der Akustik

Generell lassen sich akustische Phänomene mit den Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) beschreiben, denn sie enthalten alle kompressiblen Effekte. Es liegt jedoch nahe, für die Beschreibung der Ausbreitung von akustischen Wellen ein vereinfachtes Modell zu verwenden. Die Annahmen über

- die Vernachlässigung von Reibung und Wärmefluß (vgl. 2.3) und
- die Darstellung der akustischen Größen als Störvariablen (vgl. 2.3)

lassen sich anwenden. Desweiteren werden die Vereinfachungen über die Hintergrundströmung im Folgenden erweitert

- auf ein ruhendes Fluid  $\underline{u}_\infty = \underline{0}$ .

Ausgehend von den linearisierten Euler Gleichungen (2.3.4) - (2.3.6) ergeben sich

$$\rho'_t + \rho_\infty \nabla \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.4.1)$$

$$\underline{u}'_t + \frac{1}{\rho_\infty M^2} \nabla p' = \underline{0}, \quad (2.4.2)$$

$$p'_t + \gamma p_\infty \nabla \cdot \underline{u}' = 0. \quad (2.4.3)$$

Die Gleichungen (2.4.2) und (2.4.3) lassen sich zu einer Wellengleichung für den Druck umformulieren. Die Divergenz von Gleichung (2.4.2) wird in die nach der Zeit abgeleitete Gleichung (2.4.3) eingesetzt. Daraus resultiert die akustische Grundgleichung

$$p'_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla p' = 0 \quad (2.4.4)$$

mit der ungestörten Schallgeschwindigkeit  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ . Die Umrechnung zwischen Druck- und Dichtestörung kann nach Gleichung (2.3.13) in erster Näherung aus dem Zusammenhang  $p' = c_\infty^2 \rho'$  erfolgen und führt analog zu (2.4.4) zu einer Wellengleichung für die Dichte  $\rho'$

$$\rho'_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (2.4.5)$$





### 3 Asymptotik

Durch die Entdimensionalisierung der Grundgleichungen mit Referenzwerten in Abschnitt 2.2 tauchen in den Gleichungen zur Strömungsmechanik (2.2.1) - (2.2.3) und zur Akustik (2.4.4) globale Parameter auf. In der Behandlung von schwach kompressiblen Strömungen ist die Mach-Zahl  $M$  aus (2.2.6) und der Grenzfall  $M \rightarrow 0$  von besonderer Bedeutung. Die globale Mach-Zahl wird durch

$$M = \frac{u_{ref}}{c_{ref}}$$

definiert und ist ein konstanter Wert. Daraus folgt, dass auch die Lösungen der Gleichungen eine Abhängigkeit von  $M$  besitzen. Die Asymptotik berücksichtigt diese Abhängigkeit durch die Annahme einer Lösung als Reihenentwicklung in der Mach-Zahl  $M$ .

In diesem Kapitel wird der zu untersuchende Parameter mit  $\epsilon$  bezeichnet. Nachdem in Abschnitt 3.1 einführende Definitionen und Begriffe gegeben werden, sind in Abschnitt 3.2 die Werkzeuge dargestellt, mit denen die Asymptotik ihre Aussagen gewinnt. Es handelt sich um eine Zusammenstellung der Ergebnisse aus der Arbeit von Meister [31], Schneider [45] und Van Dyke [8], auf die für eine detaillierte Darstellung verwiesen wird.

#### 3.1 Grundlegende Definitionen

Unter der Annahme, dass sich die Lösung als Reihenentwicklung im Parameter  $\epsilon$  darstellen lässt, untersucht eine asymptotische Analyse eine Schar von Funktionen für ein Grenzverhalten  $\epsilon \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  oder  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ . Im Rahmen der Analyse lassen sich Aussagen über die Größenordnung von Termen treffen. Für die Charakterisierung der Größenordnung eines Ausdrucks wird die Landau Symbolik [31] verwendet, die durch ihre Symbole  $O$  (Groß O) und  $o$  (Klein O) einen Bezug zum Grenzverhalten von bekannten Funktionen herstellt. Das Grenzverhalten einer zu charakterisierenden Funktion  $f(x, \epsilon)$

kann durch eine bekannte Funktion  $g(x, \epsilon)$  beschrieben werden.

Das Landau-Symbol  $O$  bedeutet, dass für das Grenzverhalten  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  die Funktion  $f$  genauso schnell wie die Funktion  $g$  gegen eine Konstante geht.

**Definition:** Landau-Symbol  $O$

$$f(x, \epsilon) = O(g(x, \epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(x, \epsilon)}{g(x, \epsilon)} = \text{const.}$$

Das Landau-Symbol  $o$  sagt aus, dass im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  die Funktion  $f$  schneller verschwindet als die Funktion  $g$ .

**Definition:** Landau-Symbol  $o$

$$f(x, \epsilon) = o(g(x, \epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(x, \epsilon)}{g(x, \epsilon)} = 0$$

Mit dem Begriff der Größenordnung läßt sich eine asymptotische Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$  vereinbaren. Eine Folge wird als eine asymptotische Folge bezeichnet, wenn für  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  jedes Folgenglied schneller verschwindet als sein Vorgänger.

**Definition:** Asymptotische Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad &\text{heißt asymptotische Folge} \\ :\Leftrightarrow \quad &\Phi_{n+1}(\epsilon) = o(\Phi_n(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \quad \text{und } \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Durch die asymptotische Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$  kann eine asymptotische  $N$ -Term Einskalenentwicklung der Funktion  $f(x, \epsilon)$  definiert werden. Damit lassen sich Phänomene beschreiben, deren Verhalten im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  durch sehr unterschiedliche Amplituden charakterisiert sind. Eine Voraussetzung an die physikalischen Eigenschaften der Phänomene ist, dass sie sich auf derselben Skala  $x$  abspielen. Die Funktionen  $f^{(n)}(x)$  werden Entwicklungsfunktionen genannt.

**Definition:** Asymptotische  $N$ -Term Einskalenentwicklung  $\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(x)$

$$\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(x) \quad \text{heißt asymptotische } N\text{-Term Einskalenentwicklung von } f(x, \epsilon)$$

$$:\Leftrightarrow f(x, \epsilon) - \sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(x) = o(\Phi_N(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

Ist die für die Einskalenentwicklung geforderte Voraussetzung verletzt und die zu beschreibenden Phänomene spielen sich auf unterschiedlichen Skalen von  $x$  ab, dann kann eine Mehrskalenentwicklung weiterhelfen. Eine Vorschrift  $h(x, \epsilon)$ , die  $x$  auf mehrere Skalen transformiert, wird definiert. Die Entwicklungsfunktionen  $f^{(n)}(h(x, \epsilon))$  erhalten dadurch die Eigenschaft, auf unterschiedlichen Skalen von  $x$  zu existieren. Zusammen mit der asymptotischen Folge  $\Phi_n(\epsilon)$  definieren sie eine asymptotische  $N$ -Term Mehrskalenentwicklung.

**Definition:** Asymptotische  $N$ -Term Mehrskalenentwicklung  $\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(h(x, \epsilon))$

$$\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(h(x, \epsilon)) \quad \text{heißt asymptotische } N\text{-Term Mehrskalenentwicklung von } f(x, \epsilon)$$

$$:\Leftrightarrow f(x, \epsilon) - \sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(h(x, \epsilon)) = o(\Phi_N(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

## 3.2 Grundlegende Sätze

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die grundlegenden Begriffe eingeführt, die ein Arbeiten mit asymptotischen Entwicklungen ermöglichen. In diesem Abschnitt werden die Werkzeuge aus der Arbeit von Meister [31] vorgestellt, um asymptotische Entwicklungen praktisch einzusetzen.

Der erste Satz beschäftigt sich mit der asymptotischen Entwicklung einer explizit gegebenen Funktion  $f(x, \epsilon)$ . Er besagt, dass im Fall einer gewählten asymptotischen Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die Entwicklungsfunktionen  $f^{(n)}(x)$  festliegen. Da für die Differentialgleichungen im Kapitel 2 keine explizite Lösung vorliegt, kann diese Vorgehensweise nicht angewendet werden. Der Satz weist allerdings auf ein grundlegendes Problem hin, das für asymptotische Entwicklungen besteht. Durch die Wahl der asymptotischen Folge wird der Funktionenraum festgelegt, innerhalb dessen nach einer Lösung gesucht wird. Für die Existenz einer Lösung im betrachteten Funktionenraum werden keine Kriterien zur Verfügung gestellt. Daraus ist ersichtlich, dass der Erfolg einer asymptotischen Analyse sehr stark daran geknüpft ist, eine geeignete asymptotische Folge auszuwählen.

**Satz:** Bestimmung der Entwicklungsfunktionen  $f^{(n)}(x)$

Gegeben sind eine explizite Funktion  $f(x, \epsilon)$  und eine asymptotische Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

$$\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(x) \quad \text{heißt asymptotische } N\text{-Term Entwicklung von } f(x, \epsilon)$$

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(x, \epsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(\epsilon) f^{(k)}(x)}{\Phi_n(\epsilon)}, \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, N.$$

Für die Berechnung der Lösung von Differentialgleichungen ist die folgende Vorgehensweise üblich. Die Lösung  $f(x, \epsilon)$  wird in der Form einer asymptotischen Entwicklung dargestellt

$$f(x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) f^{(n)}(x) + o(\Phi_N(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0,$$

die anschließend in die Differentialgleichung eingesetzt wird. Da die Differentialgleichung den Parameter  $\epsilon$  enthält, resultiert daraus eine Gleichung der Form

$$\sum_{n=0}^M \Psi_n(\epsilon) L_n(f^{(n)}, \dots, f^{(n)}) = o(\Psi_M(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0,$$

mit einer Folge  $\{\Psi_n\}_n$  und den Operatoren  $L_n$ . Durch die Unabhängigkeit der  $L_n$  von  $\epsilon$  lassen sich die gesuchten Funktionen  $f^{(n)}(x)$  bestimmen aus den Bedingungen

$$L_n = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, M.$$

Die Hierarchie von asymptotischen Gleichungen der Form  $L_n = 0$  kann einerseits dazu benutzt werden, sukzessive immer genauere Näherungslösungen zu berechnen. Andererseits erlaubt die Analyse der asymptotischen Gleichungen  $L_n = 0$ , Einblicke in das Grenzverhalten der Lösung für  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  zu gewinnen. Die Vorgehensweise wird durch den folgenden, wertvollen Satz gerechtfertigt.

**Satz:** Analyse der asymptotischen Gleichungen

Gegeben sind eine asymptotische Folge  $\{\Phi_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$  und die Terme  $L_n$  für  $n = 1, \dots, N$ , die von  $\epsilon$  unabhängig sind. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^N \Phi_n(\epsilon) L_n = o(\Phi_N(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow L_n = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

## 4 Mathematische Modelle der Aeroakustik

Das Kapitel über mathematische Modelle der Aeroakustik greift zwei grundlegende Modellierungen heraus und stellt diese ausführlich dar. Beiden aeroakustischen Modellierungen ist gemeinsam, dass sie in ihrer Zeit richtungsweisend waren. Zahlreiche Autoren verwendeten ihre Ideen und entwickelten diese weiter.

Der erste Abschnitt geht auf die Ursprünge der Aeroakustik ein, die von Lighthill in seiner akustischen Analogie (*Acoustic Analogy*) im Jahr 1952 [26] und 1954 [27] gelegt wurden und von Ffwoes-Williams und Hawkings [10] im Jahr 1969 weiter entwickelt wurden. Im zweiten Abschnitt des Kapitels wird die Arbeit von Hardin und Pope vorgestellt, die im Jahr 1994 [19] aus einer Entwicklung um die inkompressible Strömungslösung akustische Störungsgleichungen ableiteten.

### 4.1 Akustische Analogie

Sir James Lighthill legte den Grundstein der Aeroakustik. Sein Ziel war die Berechnung der Akustik, die von einem Gebiet mit turbulenter Strömung erzeugt wird, z.B. beim Betrieb von Strahltriebwerken. Neben der Vorstellung seiner Idee und der Vorgehensweise enthält dieser Abschnitt auch Vereinfachungen und Bemerkungen zur akustischen Analogie von Lighthill. Die Erweiterung der akustischen Analogie auf die Schallerzeugung umströmter Körper wurde von Ffwoes-Williams und Hawkings [10] im Jahr 1969 entwickelt und wird in diesem Abschnitt ebenfalls beschrieben.

#### Idee und Vorgehen der Analogie von Lighthill

In einem ersten Schritt beschreibt Lighthill die Schallausbreitung in einem homogenen, ruhenden Fluid ohne Quellen und ohne äußere Kräfte. Das homogene Fluid ist gekennzeichnet durch die Dichte  $\rho_\infty$  und den Druck  $p_\infty$ , die zu einer ungestörten Schall-

geschwindigkeit  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$  führen. Da das Fluid in Ruhe ist, gilt für die Hintergrundgeschwindigkeit  $\underline{u}_\infty = \underline{0}$ . Die Gleichungen

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (4.1.1)$$

$$(\rho \underline{u})_t + \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \rho = \underline{0} \quad (4.1.2)$$

beschreiben die Ausbreitung einer akustischen Welle in diesem Fluid. Alle Größen sind dimensionslos und dem Vorgang der Entdimensionalisierung liegen die Referenzgrößen aus Abschnitt 2.2 zugrunde. Die Gleichung (4.1.1) beschreibt die Erhaltung der Masse und Gleichung (4.1.2) stellt eine vereinfachte Impulsbilanz dar. Die vereinfachte Impulsleichung unterscheidet sich von der in den Navier-Stokes Gleichungen notierten Impulsbilanz (2.2.2) durch das Fehlen der nichtlinearen und der viskosen Terme. Zusätzlich wurde der Druckgradient  $\nabla p$  durch einen Dichtegradienten  $c_\infty^2 \nabla \rho$  ersetzt. Diese Vereinfachungen bezüglich der Nichtlinearität und der Viskosität sind für die Beschreibung von akustischen Phänomenen mit kleinen Amplituden zulässig. Der Zusammenhang zwischen Dichte- und Druckgradient ist unter Annahme der Isentropie für die Akustik, siehe Abschnitt 2.3, erlaubt.

Die Gleichungen zur Massenerhaltung (4.1.1) und zur vereinfachten Impulserhaltung (4.1.2) lassen sich zu einer Wellengleichung in der Dichte  $\rho$

$$\rho_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4.1.3)$$

verknüpfen, wenn aus ihnen die Impulsdichte  $(\rho \underline{u})$  eliminiert wird. Das vollzieht sich durch Differenzieren von Gleichung (4.1.1) nach der Zeit und der Divergenzbildung von Gleichung (4.1.2) mit anschließendem ineinander Einsetzen. Die Wellengleichung (4.1.3) ist die Basis der klassischen Akustik und wird als Grundgleichung der Akustik bezeichnet.

Im zweiten Schritt beschreibt Lighthill eine kompressible, reibungsbehaftete Strömung, wie sie in seiner Problemstellung zugrunde liegt. Dazu werden die Massenerhaltung (2.1.1) und die Impulserhaltung (2.1.2) der Navier-Stokes Gleichungen aus Abschnitt 2.1 betrachtet. Werden diese Grundgleichungen nach Abschnitt 2.2 entdimensionalisiert und so umgeschrieben, dass auf der linken Seite die Ausbreitungsgleichungen der Akustik in einem homogenen, ruhenden Fluid (4.1.1) und (4.1.2) stehen, führt das auf

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) &= 0, \\ (\rho \underline{u})_t + \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \rho &= - \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) - \frac{1}{M^2} \nabla \cdot (p - c_\infty^2 \rho) \underline{I} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Der Term  $(\frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \rho)$  wurde in Anlehnung an Gleichung (4.1.2) künstlich hinzugefügt und auf beiden Seiten addiert. Die Formulierung des obigen Systems als Wellengleichung lautet

$$\rho_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \frac{1}{M^2} \nabla \cdot \nabla \cdot (p - c_\infty^2 \rho) \underline{I} - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{T}}. \quad (4.1.4)$$

Die strömungsmechanischen Grundgleichungen wurden so umformuliert, dass durch die linke Gleichungsseite die akustische Ausbreitung in einem ruhenden Fluid beschrieben wird. Die rechte Gleichungsseite wird von Lighthill als schallerzeugender Quellterm interpretiert. Der Quellterm in der Wellengleichung (4.1.4) wird als Lighthill Tensor bezeichnet

$$\underline{\underline{T}} = (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \frac{1}{M^2} (p - c_\infty^2 \rho) \underline{I} - \frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}}. \quad (4.1.5)$$

Er besteht aus

- den Reynoldsspannungen  $(\rho \underline{u} \circ \underline{u})$ ,
- den nichtisotropen Druck- und Dichteänderungen  $\frac{1}{M^2} (p - c_\infty^2 \rho) \underline{I}$  und
- den viskosen Termen  $\frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}}$ .

Die aus der Massen- und Impulserhaltung der Navier-Stokes Gleichungen formulierte Wellengleichung (4.1.4) wurde durch eine reine Umformulierung gewonnen. Zwar wurden Voraussetzungen bezüglich der akustischen Wellenausbreitung und der Strömungseigenschaften getroffen, aber in der Wellengleichung (4.1.4) werden keine Terme vernachlässigt und die hinzugefügten Terme werden auf beiden Gleichungsseiten addiert. Das rechtfertigt, die hergeleitete Wellengleichung in ihrer Form (4.1.4) als exakt zu bezeichnen.

### Vereinfachungen der Analogie von Lighthill

Die Exaktheit der Wellengleichung (4.1.4) hat zur Folge, dass die unbekanntes Größen, wie beispielsweise die Dichte, sowohl auf der linken als auch auf der rechten Gleichungsseite auftreten. Die Wellengleichung kann aufgrund dieser Abhängigkeit nicht einfach gelöst werden. Dieser Sachverhalt erfordert eine Approximation bzw. weitere vereinfachende Annahmen. Die linke und die rechte Gleichungsseite werden von Lighthill als unabhängig voneinander angesehen. Er begründet sein Vorgehen mit den unterschiedlichen Eigenschaften des Fernfeldes, das durch die linke Gleichungsseite dargestellt wird und wo die Akustik sich ohne Anregung ausbreitet, und des Nahfeldes, das von der

rechten Gleichungsseite repräsentiert wird und wo die Akustik durch die Strömung erzeugt wird.

Unter gewissen Annahmen über die schallerzeugende Strömung können Vereinfachungen der Analogie von Lighthill getroffen werden, siehe Roger in [42]. Dann müssen nicht alle Quellterme in der Wellengleichung (4.1.4) berücksichtigt werden:

- Ist die Viskosität der Strömung vernachlässigbar klein, so kann auf die Reibungsterme in der Quellterm Beschreibung verzichtet werden, d.h. der Quellterm  $-\frac{1}{Re}\nabla\cdot\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}$  wird nicht verwendet.
- Lassen sich nicht-isentrope Dichteänderungen in der Strömung ausschließen, weil beispielsweise thermische Effekte nicht vorhanden sind, so kann der Quellterm  $\frac{1}{M^2}\nabla\cdot\nabla\cdot(p-c_\infty^2\rho)\underline{\underline{I}}$  vernachlässigt werden.
- Für schwach kompressible Strömungen ist es zulässig, die Reynoldsspannungen aus einer inkompressiblen Strömungslösung zu bilden. Diese führen auf einen Quellterm der Form  $\nabla\cdot\nabla\cdot(\rho^{inc}\underline{u}^{inc}\circ\underline{u}^{inc})$ .

Mit den obigen Annahmen vereinfacht sich die Analogie von Lighthill auf die Formulierung

$$\rho_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2}\nabla\cdot\nabla\rho = \nabla\cdot\nabla\cdot(\rho^{inc}\underline{u}^{inc}\circ\underline{u}^{inc}). \quad (4.1.6)$$

Der Quellterm aus den Reynoldsspannungen  $(\rho^{inc}\underline{u}^{inc}\circ\underline{u}^{inc})$  auf der rechten Gleichungsseite berechnet sich ausgeschrieben als

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\nabla\cdot(\rho^{inc}\underline{u}^{inc}\circ\underline{u}^{inc}) &= \nabla\cdot\nabla\cdot\left(\begin{pmatrix} \rho^{inc}u^{inc} \\ \rho^{inc}v^{inc} \\ \rho^{inc}w^{inc} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u^{inc} \\ v^{inc} \\ w^{inc} \end{pmatrix}\right) \\ &= \nabla\cdot\nabla\cdot\begin{pmatrix} \rho^{inc}u^{inc}u^{inc} & \rho^{inc}u^{inc}v^{inc} & \rho^{inc}u^{inc}w^{inc} \\ \rho^{inc}v^{inc}u^{inc} & \rho^{inc}v^{inc}v^{inc} & \rho^{inc}v^{inc}w^{inc} \\ \rho^{inc}w^{inc}u^{inc} & \rho^{inc}w^{inc}v^{inc} & \rho^{inc}w^{inc}w^{inc} \end{pmatrix} \\ &= \nabla\cdot\begin{pmatrix} (\rho^{inc}u^{inc}u^{inc})_x + (\rho^{inc}v^{inc}u^{inc})_y + (\rho^{inc}w^{inc}u^{inc})_z \\ (\rho^{inc}u^{inc}v^{inc})_x + (\rho^{inc}v^{inc}v^{inc})_y + (\rho^{inc}w^{inc}v^{inc})_z \\ (\rho^{inc}u^{inc}w^{inc})_x + (\rho^{inc}v^{inc}w^{inc})_y + (\rho^{inc}w^{inc}w^{inc})_z \end{pmatrix} \\ &= (\rho^{inc}u^{inc}u^{inc})_{xx} + (\rho^{inc}v^{inc}v^{inc})_{yy} + (\rho^{inc}w^{inc}w^{inc})_{zz} + \\ &\quad 2(\rho^{inc}u^{inc}v^{inc})_{xy} + 2(\rho^{inc}v^{inc}w^{inc})_{yz} + 2(\rho^{inc}w^{inc}u^{inc})_{zx}. \end{aligned}$$



Werden weitere Annahmen über eine inkompressible Strömung getroffen,  $\rho^{inc} = const.$  und  $\nabla \cdot \underline{u}^{inc} = 0$ , so vereinfacht sich der Quellterm zu

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \cdot (\rho^{inc} \underline{u}^{inc} \circ \underline{u}^{inc}) &= \nabla \cdot ( (\rho^{inc} \underline{u}^{inc} \cdot \nabla) \underline{u}^{inc} + (\rho^{inc} \underline{u}^{inc}) \nabla \cdot \underline{u}^{inc} ) \\
&= \rho^{inc} \nabla \cdot ( (\underline{u}^{inc} \cdot \nabla) \underline{u}^{inc} ) \\
&= \rho^{inc} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u^{inc} u_x^{inc} + v^{inc} u_y^{inc} + w^{inc} u_z^{inc} \\ u^{inc} v_x^{inc} + v^{inc} v_y^{inc} + w^{inc} v_z^{inc} \\ u^{inc} w_x^{inc} + v^{inc} w_y^{inc} + w^{inc} w_z^{inc} \end{pmatrix} \\
&= \rho^{inc} (u^{inc} u_x^{inc} + v^{inc} u_y^{inc} + w^{inc} u_z^{inc})_x + \\
&\quad \rho^{inc} (u^{inc} v_x^{inc} + v^{inc} v_y^{inc} + w^{inc} v_z^{inc})_y + \\
&\quad \rho^{inc} (u^{inc} w_x^{inc} + v^{inc} w_y^{inc} + w^{inc} w_z^{inc})_z.
\end{aligned}$$

### Formulierung in der Druckvariablen

Die akustische Analogie von Lighthill führt auf die Wellengleichung (4.1.4), die in der Dichteveriablen formuliert ist. Im folgenden wird gezeigt, wie aus der Dichtestörung eine Druckstörung berechnet werden kann.

Da die Berechnung der Akustik von Lighthill die Isentropie im Fernfeld annimmt und die akustische Dichte hinreichend als Störung aufgefasst werden kann, ist die Bedingung aus Abschnitt 2.3 erfüllt. Eine direkte Umrechnung der akustischen Dichte in einen akustischen Druck durch den Zusammenhang in Gleichung (2.3.13) über das Quadrat der ungestörten Schallgeschwindigkeit ist dadurch möglich. Diese Beziehung kann auf die linke Seite der Wellengleichung (4.1.4) angewendet werden. An dieser Stelle ist es erlaubt, den Zusammenhang nur auf einer Gleichungsseite zu verwenden, da die Unabhängigkeit zwischen linker und rechter Gleichungsseite vorausgesetzt wird. Als Folge ergibt sich eine äquivalente Formulierung im Druck

$$p_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla p = c_\infty^2 (\nabla \cdot \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u})) + \frac{1}{M^2} \nabla \cdot \nabla \cdot (p - c_\infty^2 \rho) \underline{I} - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{T}, \quad (4.1.7)$$

wobei die rechte Gleichungsseite bis auf den Faktor  $c_\infty^2$  unberührt bleibt, da sie aus einer vorangestellten, kompressiblen Strömungsberechnung bestimmt wird.

Anschließend werden die vereinfachenden Annahmen des vorangegangenen Abschnitts angewendet:

- Vernachlässigung der viskosen Quellterme und der Quellterme aus nichtisentropen Dichteänderungen
- Approximation der kompressiblen Strömungslösung durch die inkompressible Strömungslösung. Das erfordert eine Druckaufspaltung der Form

$$p = p^{inc} + p'$$

mit einem inkompressiblen Anteil  $p^{inc}$  und einem akustischen Anteil  $p'$

- Gültigkeit der Poisson Gleichung für die inkompressible Lösung

$$\frac{1}{M^2} \nabla \cdot \nabla p^{inc} = -\nabla \cdot \nabla \cdot (\rho^{inc} \underline{u}^{inc} \circ \underline{u}^{inc}),$$

die sich unter Verwendung von  $\nabla \cdot (\rho^{inc} \underline{u}^{inc})_t = 0$  aus der Impulserhaltung herleitet.

Daraus läßt sich nach Roger [42] eine Wellengleichung für den akustischen Druck ermitteln. Diese lautet

$$p'_{tt} - \frac{c_\infty^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla p' = -p'_{tt}^{inc} \quad (4.1.8)$$

und beinhaltet als Quellterm die zweifache Zeitableitung des inkompressiblen Drucks.

### Erweiterungen von Ffowcs-Williams und Hawkings

Die Erweiterung der Theorie von Lighthill um die Beschreibung von Hindernissen im Strömungsgebiet wurde von Ffowcs-Williams und Hawkings [10] durchgeführt und wird von Goldstein [18] ausführlich dokumentiert. In diesem Abschnitt wird die Theorie der Schallerzeugung für den Fall eines unbewegten, umströmten Körpers mit isentroper Strömung dargestellt.

Betrachtet wird ein umströmter Körper, dessen Oberfläche mit  $S$  bezeichnet wird, während das Gebiet außerhalb des Körpers die Bezeichnung  $V$  trägt. Der Normalenvektor auf der Oberfläche  $S$  zeigt in den umströmten Körper. Die Wellengleichung im Druck aus (4.1.7) wird mit den Werkzeugen der klassischen Akustik aus Goldstein [18] bearbeitet: den Greenschen Funktionen. Mit der Fundamentallösung

$$G(\underline{x}, t; \underline{y}, \tau) = \frac{1}{4\pi R} \delta(\tau - t + M \frac{R}{c_\infty})$$

kann die Lösung einer Wellengleichung direkt angegeben werden. Darin steht  $R$  für den Abstand zwischen dem Beobachter im Punkt  $\underline{x}$  und der Quelle in  $\underline{y}$ ,  $c_\infty$  ist die ungestörte Schallgeschwindigkeit und  $\delta$  ist die Diracsche Delta Funktion. In Worten

ausgedrückt stellt die Greensche Funktion  $G$  die Lösung der inhomogenen Wellengleichung im Beobachterpunkt  $\underline{x}$  zur Beobachterzeit  $t$  dar, die zum retardierten Zeitpunkt  $\tau$  im Quellpunkt  $\underline{y}$  angeregt wird. Generell wird in diesem Abschnitt die Position des Beobachters im Fernfeld zu einem Zeitpunkt mit dem Tupel  $(\underline{x}, t)$  dargestellt. Zur Unterscheidung wird im Quellgebiet die Ort und Zeit Beschreibung mit  $(\underline{y}, \tau)$  gewählt.

Der akustische Druck  $p$  berechnet sich nach Umformungen, die ausführlich in Wandinger [55] dokumentiert sind, zu

$$p(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{M^2}{R} T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) dV - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{1}{R} f_j(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) dS. \quad (4.1.9)$$

Der akustische Druck  $p$  steht auf der linken Gleichungsseite und wird am Beobachtungspunkt  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$  zur Beobachterzeit  $t$  ausgewertet. Dieser berechnet sich aus den zweiten Raumableitungen eines Volumenintegrals über  $V = V(\underline{y})$  und den ersten Raumableitungen eines Oberflächenintegrals  $S = S(\underline{y})$ . Das Oberflächenintegral über die Körperoberfläche  $S$  des aktiven, schallerzeugenden Hindernisses beschreibt die Dipol-Quellterme. Das Volumenintegral über  $V$  stellt die Quadrupol-Quellterme dar.

In den Integranden werden neben dem Abstand  $R$

$$R = |\underline{x} - \underline{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

zwischen Beobachtungspunkt  $\underline{x}$  und dem Wirkungspunkt  $\underline{y}$  des Quellterms auch der Lighthill Tensor  $T_{ij}$  und die Oberflächenkraft  $f_j$  ausgewertet

$$T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) = \rho u_i u_j - \frac{1}{Re} \tau_{ij}, \quad (4.1.10)$$

$$f_j(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) = (\frac{M^2}{Re} \tau_{ij} - p \delta_{ij}) n_i. \quad (4.1.11)$$

Für die Beschreibung der Quellterme wird die Raumvariable  $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$  und die retardierte Zeitvariable  $\tau = t - M \frac{R}{c_\infty}$  verwendet. Mit  $c_\infty$  wird die ungestörte Schallgeschwindigkeit im Fernfeld bezeichnet. Der Lighthill Tensor berechnet die Differenz zwischen den Reynoldsspannungen  $\rho u_i u_j$  und den Reibungsanteilen  $\tau_{ij}$  der Strömungslösung. Im Oberflächenintegral über die Körperoberfläche  $S$  des aktiven, schallerzeugenden Hindernisses wird die Differenz von viskosen  $\tau_{ij} n_i$  und dynamischen  $p \delta_{ij} n_i$  Anteilen der Strömungslösung integriert. Mit  $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$  wird die nach innen gerichtete Körperoberflächennormale bezeichnet. In der Schreibweise von Gleichung (4.1.9) gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. dass über gleiche Indizes summiert wird. Somit besteht das Volumenintegral aus einer Doppelsumme über  $i$  und  $j$  und das Oberflächenintegral ist als Summe über  $j$  zu betrachten.

Durch die dimensionslose Darstellung der Lösung im numerischen Verfahren wird die Abhängigkeit der Dipol- und Quadrupolanteile von der Mach-Zahl  $M$  deutlich. Es wird erkennbar, dass für kleine Mach-Zahlen die Quadrupole vernachlässigbar sind, da diese mindestens den Vorfaktor  $M^2$  besitzen. Der Einfluß der Reynolds-Zahl auf die Quellterme findet sich in den Integranden (4.1.10) und (4.1.11) wieder. Dabei kommt zum Ausdruck, dass für große Reynolds-Zahlen die viskosen Terme vernachlässigbar sind. Für kleine Mach-Zahlen und große Reynolds-Zahlen lassen sich die Integranden der Quellterme durch

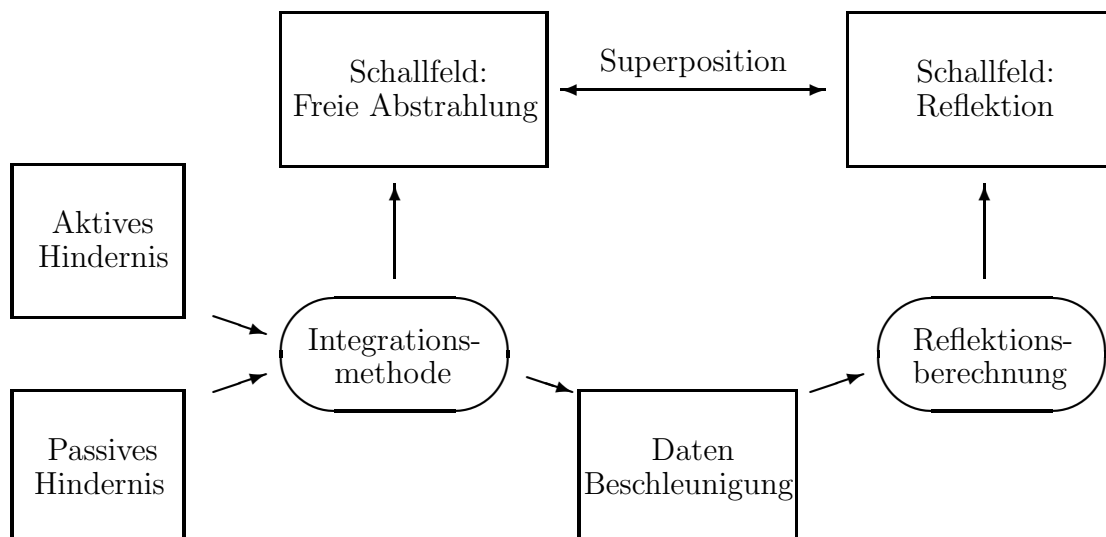
$$T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) = \rho u_i u_j, \quad (4.1.12)$$

$$f_j(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) = -pn_j \quad (4.1.13)$$

approximieren.

### Behandlung des reflektierten Schallfeldes

Da der umströmte Körper für die Schallentstehung verantwortlich ist, wird er als aktives Hindernis bezeichnet. Dagegen werden Körper, die nicht selbst schallerzeugend sind, aber die Schallausbreitung beeinflussen, als passive Hindernisse bezeichnet. In der Integrationsmethode wird vorausgesetzt, dass keine passiven Hindernisse die freie Abstrahlung in das Fernfeld beeinflussen. Die Berücksichtigung von passiven Hindernissen geschieht über das Prinzip der Superposition.



**Abbildung 4.1.1:** Behandlung der Reflektionen an passiven Hindernissen.

Wird die Schallausbreitung an passiven Hindernissen reflektiert, so lassen sich mit der Integrationsmethode Beschleunigungsdaten an den Oberflächen der passiven Hindernisse ermitteln. Mit diesen Beschleunigungsdaten läßt sich das an den passiven Hindernissen reflektierte Schallfeld berechnen. Eine Überlagerung des frei abgestrahlten Schallfeldes der Integrationsmethode mit dem reflektierten Schallfeld ergibt zusammen das physikalische Schallfeld, vgl. Abbildung 4.1.1. Da in beiden Fällen lineare Ausbreitungsgleichungen zugrunde liegen, ist die Superposition der Lösungen zulässig.

Für die Berechnung des reflektierten Schallfeldes werden auf den Oberflächen der passiven Hindernisse der nach außen gerichtete Normalenvektor  $\underline{n}^R$  definiert und die Beschleunigungsrandbedingungen

$$\underline{n}^R \underline{a}^R = \frac{\nabla p(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}^R}{\rho} \quad (4.1.14)$$

erzeugt. Dazu ist der räumliche Gradient des akustischen Drucks aus Gleichung (4.1.9) zu berechnen.

## 4.2 Entwicklung um die inkompressible Strömung

In diesem Abschnitt wird die Akustik als eine kompressible Störung der inkompressiblen Strömungslösung angenommen. Die kompressible Strömungslösung wird somit als eine Superposition von inkompressiblem Anteil und kompressibler Korrektur dargestellt.

Daneben steht die Trennung von akustischen und viskosen Termen im Vordergrund der Methode von Hardin und Pope [19]. Eine Störungsrechnung um die inkompressible Strömungslösung, die einem dimensionsbehaftetem Ansatz folgt, wird durchgeführt mit

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{inc} + \tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{\rho}', \quad (4.2.1)$$

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{u}}^{inc} + \tilde{\underline{u}}', \quad (4.2.2)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}^{inc} + \tilde{p}'. \quad (4.2.3)$$

Die Autoren setzen voraus, dass die inkompressiblen Terme  $\tilde{\rho}^{inc}$ ,  $\tilde{\underline{u}}^{inc}$  und  $\tilde{p}^{inc}$  die inkompressiblen Gleichungen mit konstanter Dichte  $\tilde{\rho}^{inc}$  und divergenzfreiem Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{\underline{u}}^{inc}$

$$\tilde{\underline{u}}_t^{inc} + (\tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\underline{u}}^{inc} + \frac{1}{\tilde{\rho}^{inc}} \tilde{\nabla} \tilde{p}^{inc} = \frac{1}{\tilde{\rho}^{inc}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\tau}}^{inc}, \quad (4.2.4)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}^{inc} = 0 \quad (4.2.5)$$

erfüllen. Die Störungen werden durch  $\tilde{\rho}'$ ,  $\tilde{\underline{u}}'$  und  $\tilde{p}'$  beschrieben.

Das Besondere an dem Ansatz (4.2.1) - (4.2.3) ist die Dichtekorrektur  $\tilde{\rho}^{(1)}$ , welche die inkompressiblen Druckänderungen gegenüber der konstanten inkompressiblen Dichte berücksichtigt. Die inkompressiblen Druckschwankungen haben Änderungen in der Dichte zur Folge, die aber im mathematischen Modell der inkompressiblen Gleichungen vernachlässigt werden. Die Schwierigkeit in der Bestimmung von  $\tilde{\rho}^{(1)}$  besteht darin, nur solche Anteile von  $\tilde{p}^{inc}$  zu verwenden, die in einer Dichteänderung resultieren und nicht die Entropie des Systems erhöhen. Die Autoren verweisen auf Batchelor [3], wonach die Viskositäts- und Wärmeflußeffekte zwar zu einer globalen Druckänderung führen, die Amplituden der lokalen Druckschwankungen aber nahezu unbeeinflusst lassen. Mit anderen Worten sind die reibungs- und thermischbehafteten Einflüsse als langsam im Vergleich zur akustischen Zeitskala zu betrachten. Werden die entropieändernden Einflüsse eliminiert, lassen sich die verbleibenden Änderungen im Druck als isentrop annehmen. Diese Eigenschaft wird von Hardin und Pope als Kriterium für die Unterscheidung der Druckschwankungen verwendet.

Die Autoren berechnen die Dichtekorrektur  $\tilde{\rho}^{(1)}$  aus dem inkompressiblen Druck  $\tilde{p}^{inc}$  und beschreiben durch eine zeitliche Mittelung des inkompressiblen Drucks die entropieändernden, d.h. die zeitlich langsamen, Einflüsse

$$\bar{p}^{inc} = \lim_{\tilde{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} \tilde{p}^{inc} d\tilde{t}.$$

Sie ziehen diese vom inkompressiblen Druck ab und berechnen aus dem verbleibenden Druck isentrop eine Dichteänderung

$$\tilde{\rho}^{(1)} = \frac{1}{\tilde{c}^2} (\tilde{p}^{inc} - \bar{p}^{inc}). \quad (4.2.6)$$

Der Ansatz (4.2.1) - (4.2.3) wird in die dimensionsbehafteten, kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.1.1) und (2.1.2) eingesetzt, die auf nichtlineare Evolutionsgleichungen für die Störungen in Dichte und Geschwindigkeit führen

$$\tilde{\rho}'_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{f}} = -\tilde{\rho}_{\tilde{t}}^{(1)} - \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho}^{(1)}, \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\underline{f}}_{\tilde{t}} + (\tilde{\underline{f}} \cdot \tilde{\nabla})(\tilde{\underline{u}}^{inc} + \tilde{\underline{u}}') \\ & + ((\tilde{\rho}^{inc} + \tilde{\rho}^{(1)})\tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\underline{u}}' + \tilde{\nabla} \tilde{p}' = -(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{\underline{u}}^{inc})_{\tilde{t}} - \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{\underline{u}}^{inc}), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\text{mit } \tilde{\underline{f}} = (\tilde{\rho}^{inc} + \tilde{\rho}^{(1)})\tilde{\underline{u}}' + \tilde{\rho}'(\tilde{\underline{u}}^{inc} + \tilde{\underline{u}}'). \quad (4.2.9)$$

Auf der rechten Gleichungsseite stehen die akustischen Quellterme, die sich aus der inkompressiblen Strömungslösung und der Dichtekorrektur zusammensetzen.

Die Druckstörung  $\tilde{p}'$  wird von Hardin und Pope als isentrop angenommen. Deren zeitliche Evolution berechnet sich demzufolge aus

$$\tilde{p}' = \tilde{p}'(\tilde{\rho}) \Rightarrow \tilde{p}'_t(\tilde{\rho}) = \frac{\tilde{\partial}\tilde{p}'}{\tilde{\partial}\tilde{\rho}}\tilde{\rho}_t.$$

Die Beschreibung der zeitlichen Ableitung der Druckstörung  $\tilde{p}'_t$  nach der Dichte  $\tilde{\rho}$  geschieht über eine Druckaufspaltung der Form

$$\tilde{p}(\tilde{\rho}, \tilde{s}) = \tilde{p}'(\tilde{\rho}) + \overline{\tilde{p}}^{inc}(\tilde{s}).$$

Der Gesamtdruck  $\tilde{p}(\tilde{\rho}, \tilde{s})$  wird modelliert als Summe einer akustischen Störung  $\tilde{p}'(\tilde{\rho})$ , die isentrop ist, und einem entropiebehafteten Anteil, der aus der zeitlichen Mittelung des inkompressiblen Drucks besteht. Die Ableitung der Druckaufspaltung nach der Dichte ergibt

$$\frac{\tilde{\partial}\tilde{p}'}{\tilde{\partial}\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{\partial}\tilde{p}'}{\tilde{\partial}\tilde{\rho}} = \tilde{c}^2,$$

aus der sich die zeitliche Evolution der Druckstörung beschreiben läßt

$$\tilde{p}'_t(\tilde{\rho}) = \tilde{c}^2 \tilde{\rho}_t. \quad (4.2.10)$$

Das führt auf eine nichtlineare Evolutionsgleichung für die akustische Druckstörung, wenn die Dichte  $\tilde{\rho}$  aus dem Ansatz (4.2.1) auf der rechten Gleichungsseite eingesetzt wird.

Die obige Annahme, dass die zeitliche Mittelung  $\overline{\tilde{p}}^{inc}$  des inkompressiblen Drucks nicht von der Dichte abhängt, stellt eine Inkonsistenz in der Methode von Hardin und Pope dar. Diese wurde von Shen und Sørensen in [47] und [46] dokumentiert. Da sich die Dichtekorrektur  $\tilde{\rho}^{(1)}$  nach Gleichung (4.2.6) über die zeitliche Mittelung des inkompressiblen Drucks definiert und sie ein Teil der Gesamtdichte  $\tilde{\rho}$  ist, läßt sich die Inkonsistenz nachvollziehen. Für Beispiele mit isentroper Strömung bleibt die Inkonsistenz ohne Auswirkungen, da eine vereinfachte Zustandsgleichung aus Abschnitt 2.3 gilt.

Für den Fall einer isentropen Strömung und einer vereinfachenden Linearisierung der Störungsgleichungen ergeben sich nach Ottosson [35] die Evolutionsgleichungen

$$\tilde{\rho}'_t + \tilde{\rho}^{inc} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}' + \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho}' = -(\tilde{\rho}_t^{(1)} + \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho}^{(1)}), \quad (4.2.11)$$

$$\tilde{\underline{u}}_t + (\tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\underline{u}}' + \tilde{\nabla} \tilde{p}' = \underline{0}, \quad (4.2.12)$$

$$\tilde{p}'_t + \gamma \tilde{p}^{inc} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}}' + \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p}' = -(\tilde{p}_t^{inc} + \tilde{\underline{u}}^{inc} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p}^{inc}). \quad (4.2.13)$$

Es sind lokal linearisierte Eulergleichungen für die Ausbreitung der Akustik, die angeregt werden durch die substantielle Ableitung der Dichtekorrektur in Gleichung (4.2.11) bzw. des inkompressiblen Drucks in (4.2.13).



## 5 Mehrskalenmodellierung von aeroakustischen Quellen

Das Kapitel führt zunächst eine Einskalenmodellierung der Aeroakustik in Abschnitt 5.1 ein, die ihren Ursprung in den Arbeiten von Majda aus dem Jahr 1981 [29] und Klainermann und Majda im Jahr 1982 [23] besitzt. Die Autoren zeigen in ihrer Veröffentlichung, dass unter gewissen Forderungen an die Anfangsbedingungen (Beschränktheit) die Lösung der kompressiblen Strömungsgleichungen im Grenzfall  $M \rightarrow 0$  gegen die inkompressible Lösung konvergiert. Die kompressiblen Störungen ihres Ansatzes bleiben beschränkt und folgen im Fernfeld einer Wellengleichung. Das rechtfertigt, die Störungen als Akustik zu interpretieren.

Die Mehrskalenmodellierung im zweiten Abschnitt 5.2 wird aus der Einskalenentwicklung motiviert. Beiden gemeinsam ist die Beschreibung einer inkompressiblen Strömung durch Werkzeuge der Asymptotik wie sie in Kapitel 3 bereitgestellt wurden. Durch die Einführung einer zweiten Raumskala lassen sich alle Aspekte des in der Einleitung 1.1 beschriebenen Mehrskalenproblems abbilden.

### 5.1 Einskalenmodellierung *Scaled Perturbation Ansatz (SPA)*

Das Einskalenmodell basiert auf einer Entwicklung um die inkompressible Lösung, die durch  $M = 0$  charakterisiert wird. Mit asymptotischen Werkzeugen wird in einem ersten Schritt in Abschnitt 5.1.1 untersucht, wie der inkompressible Grenzwert einer kompressiblen Strömung zu beschreiben ist. Das führt auf eine inkompressible Formulierung mit veränderlicher Dichte. Anschließend wird in einem zweiten Schritt in Abschnitt 5.1.2 die inkompressible Lösung von einer Störung überlagert. Die Störung stellt eine kompressible Korrektur an die inkompressible Lösung dar. Durch Einsetzen des Ansatzes aus inkompressiblem Anteil und Störung in die kompressiblen Gleichungen ergeben sich Evolutionsgleichungen für die Störgrößen. Die beiden Anteile aus inkompressibler

Lösung und kompressibler Störung setzen die kompressible Strömungslösung zusammen. Die kompressible Korrektur ist eine Approximation der von der inkompressiblen Strömung erzeugten Akustik.

### 5.1.1 Inkompressibler Grenzwert: Einskalenentwicklung

Der inkompressible Grenzwert einer kompressiblen Strömung ist charakterisiert durch eine Schallgeschwindigkeit, die im Verhältnis zur Strömungsgeschwindigkeit gegen Unendlich strebt. Das hat für den Druck, dessen Schwankungen sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, zur Folge, dass ein nahezu sofortiger Druckausgleich stattfindet. Im inkompressiblen Grenzfall wird der Druck konstant und damit sind keine Dichteänderungen mehr möglich: die Strömung wird im Grenzfall inkompressibel. Im schwach kompressiblen Fall erzeugen die Gradienten der Strömungsgeschwindigkeit nur kleine Druckgradienten, die nahezu keine Dichteänderungen nach sich ziehen.

Da die Mach-Zahl  $M$  nach Definition (2.2.6) das Verhältnis aus Strömungs- und Schallgeschwindigkeit beschreibt, folgt formal mathematisch für den inkompressiblen Grenzfall, dass die Mach-Zahl  $M$  gegen 0 strebt. Demzufolge stellt der Beitrag des Druckgradienten in der Impulsgleichung (2.2.2) eine Singularität dar und entkoppelt von den restlichen Termen der Gleichung. Um Einblick in das Verhalten dieser Singularität zu gewinnen, wird eine formale asymptotische Analyse durchgeführt.

### Formale asymptotische Entwicklung

Da der Parameter  $M$  explizit im System der partiellen Differentialgleichungen (2.2.1) - (2.2.3) auftaucht und im Grenzfall einer inkompressiblen Strömung gegen Null strebt, geht der asymptotische Ansatz davon aus, dass sich die Lösung des Systems als Entwicklung in Potenzen der Mach-Zahl  $M$  darstellen läßt. Das führt auf den asymptotischen Ansatz der Form

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho^{(0)}(\underline{x}, t) + M\rho^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2\rho^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3), \quad (5.1.1)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{(0)}(\underline{x}, t) + M\underline{u}^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2\underline{u}^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3), \quad (5.1.2)$$

$$p(\underline{x}, t) = p^{(0)}(\underline{x}, t) + Mp^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2p^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3), \quad (5.1.3)$$

$$T(\underline{x}, t) = T^{(0)}(\underline{x}, t) + MT^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2T^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3). \quad (5.1.4)$$

Die unbekanntenen Funktionen

$$\rho^{(i)}, \underline{u}^{(i)}, p^{(i)}, T^{(i)} \text{ mit } i = 0, 1, 2, \dots$$

hängen von der Raumvariable  $\underline{x}$  und der Zeitvariable  $t$  ab. Durch die Entwicklung in Potenzen der Mach-Zahl ist eine Unterscheidung der Terme nach ihrer Größenordnung gegeben.

Der Ansatz (5.1.1) - (5.1.4) wird in die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) und die Zustandsgleichung (2.2.4) eingesetzt. Anschließend werden Ausdrücke gleicher Potenz der Mach-Zahl zusammengefaßt und unabhängig voneinander zu Null gesetzt. Diese Vorgehensweise ist im Kapitel 3 über die Asymptotik beschrieben. Daraus resultiert eine Hierarchie von Systemen von asymptotischen Gleichungen, die im Anhang B.1 angefügt ist.

### Analyse der asymptotischen Gleichungen

Die Hierarchie von asymptotischen Gleichungen kann einerseits sukzessive gelöst werden. So werden immer höhere Ordnungen berücksichtigt und die zusammengesetzte Lösung gewinnt an Genauigkeit. Andererseits können die Systeme von Gleichungen dazu verwendet werden, Einblicke in den inkompressiblen Grenzwert einer kompressiblen Strömung zu erlangen. Letztere Vorgehensweise wird an dieser Stelle benutzt. Für den inkompressiblen Grenzwert sind die Terme und Gleichungen führender Ordnung von Interesse.

Die Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^{-2})$  gibt Aufschluß über die räumliche Abhängigkeit des Drucks  $p^{(0)}$ , sie lautet

$$\nabla p^{(0)} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad p^{(0)} = p^{(0)}(t),$$

woraus folgt, dass der Druck  $p^{(0)}$  konstant im Raum ist und nur von der Zeit abhängt.

Die zeitliche Änderung von  $p^{(0)}$  ergibt sich aus der führenden Druckgleichung

$$p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(0)}.$$

Wird die Gleichung über das Strömungsgebiet  $\Omega$  integriert und die räumliche Konstanz von  $p^{(0)}$  beachtet, dann folgt

$$p_t^{(0)} |\Omega| + \gamma p^{(0)} \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} d\Omega = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{q}^{(0)} d\Omega.$$

Wird auf die verbleibenden Integrale der Gaußsche Integralsatz angewendet und die Gleichung durch  $|\Omega|$  dividiert, so folgt die Druckgleichung führender Ordnung in ihrer integrierten Form als

$$p_t^{(0)} = \frac{-\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} ds - \frac{(\gamma - 1)}{Pe |\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} ds \quad \text{mit} \quad \underline{q}^{(0)} = k \nabla T^{(0)}.$$

Aus ihr folgt, dass sich die zeitliche Änderung von  $p^{(0)}$  aus einer Kompression und einem Wärmefluß über den Rand des Strömungsgebiets  $\Omega$  zusammensetzt. Damit ist der Druck in führender Ordnung bekannt.

Weiterhin läßt sich aus obiger Druckgleichung führender Ordnung eine Bedingung für die Divergenz der Geschwindigkeit in führender Ordnung formulieren

$$\nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = \frac{-p_t^{(0)}}{\gamma p^{(0)}} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p^{(0)} Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(0)},$$

die ein Maß für die Kompressibilität darstellt. Sie besteht aus einem ersten Anteil, der zeitlichen Variation von  $p^{(0)}$ , der eine Abhängigkeit vom Rand des Strömungsgebiets besitzt und damit räumlich konstant ist. Ein zweiter Anteil ist durch einen lokalen Wärmefluß im Rechenggebiet gegeben. Die räumliche Variation von  $\nabla \cdot \underline{u}^{(0)}$  hat keine dynamische Ursache, sondern ist begründet durch die Existenz eines lokalen Wärmeflusses. Die Divergenzbedingung für die Geschwindigkeit resultiert aus der Druckgleichung und wird ohne zusätzliche Annahmen über die Dichte gewonnen.

Die divergenzbehaftete Geschwindigkeit führender Ordnung ist verantwortlich für Variationen in der Dichte führender Ordnung

$$\rho_t^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \rho^{(0)} = -\rho^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)}$$

und wird deshalb in der obigen Dichtegleichung auf die rechte Seite als Quellterm geschrieben. Daneben existiert auf der linken Seite noch ein konvektiver Term, der einen vorhandenen Dichtegradienten transportiert.

Aus Druck und Dichte führender Ordnung berechnet sich die Temperatur mit Hilfe der Zustandsgleichung führender Ordnung aus

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}.$$

Die räumlichen und zeitlichen Abhängigkeiten von führendem Druck und führender Dichte übertragen sich auf die Temperatur in führender Ordnung. Die Temperatur ist damit direkt an Druck und Dichte gekoppelt. Da der Druckterm führender Ordnung räumlich konstant ist, bewirkt er eine Temperaturänderung im gesamten Rechenggebiet. Eine räumlich variierende Temperaturänderung geht von einer lokalen Dichteänderung aus, die in einem divergenzbehafteten Geschwindigkeitsfeld begründet ist.

Die Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes in führender Ordnung liefert die Geschwindigkeitsgleichung führender Ordnung, sie lautet

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla \cdot \tau^{(0)}.$$

Darin taucht ein weiterer Druckterm  $p^{(2)}$  auf, dessen Gradient im Gleichgewicht mit der Zeitableitung  $\underline{u}_t^{(0)}$  steht und der für die Einhaltung der Divergenzbedingung an das führende Geschwindigkeitsfeld verantwortlich ist. Der Druckterm der Ordnung  $O(M^2)$ , und damit von der Größenordnung  $O(M^2)$ , besitzt einen Einfluß auf die führende Ordnung der Geschwindigkeit. Da in obiger Evolutionsgleichung für  $\underline{u}^{(0)}$  lediglich der Gradient von  $p^{(2)}$  vorkommt, ist der Druckterm  $p^{(2)}$  nur bis auf eine beliebige, additive Konstante bestimmt. Damit lassen sich für die Analyse der asymptotischen Gleichungen die folgenden Schritte zusammenfassen.

1. Aus der Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^{-2})$  folgt, dass  $p^{(0)}$  raumkonstant ist.
2. Die Analyse der führenden Druckgleichung  $O(M^0)$  beschreibt die zeitliche Änderung von  $p^{(0)}$  infolge Kompression und Wärmefluß über den Rand.
3. Aus der integrierten Druckgleichung  $O(M^0)$  ergibt sich eine Divergenzbedingung an die führende Geschwindigkeit  $u^{(0)}$ , deren Inhomogenität sich durch Kompression und Wärmefluß sowohl vom Rand als auch im Innern definiert.
4. Die Dichtegleichung der führenden Ordnung  $O(M^0)$  ermittelt eine raum- und zeitveränderliche Dichte  $\rho^{(0)}$ , die vom Quellterm  $\nabla \cdot u^{(0)}$  abhängt.
5. Mit Hilfe der Zustandsgleichung  $O(M^0)$  läßt sich die Temperatur  $T^{(0)}$  bestimmen, die ebenfalls raum- und zeitveränderlich sein kann.
6. Die Analyse der Geschwindigkeitsgleichung  $O(M^0)$  liefert eine Evolutionsgleichung für  $u^{(0)}$ . Zusammen mit der Divergenzbedingung an  $u^{(0)}$  bestimmt sich damit  $\nabla p^{(2)}$ .

### **Ergebnis: Inkompressibler Grenzwert**

Zur Beschreibung des inkompressiblen Grenzwerts einer kompressiblen Strömung resul-

tiert in führender Ordnung das System von Gleichungen

$$\rho_t^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \rho^{(0)} = -\rho^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)}, \quad (5.1.5)$$

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla \cdot \tau^{(0)}, \quad (5.1.6)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = \frac{-p_t^{(0)}}{\gamma p^{(0)}} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p^{(0)} Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(0)}, \quad (5.1.7)$$

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}, \quad (5.1.8)$$

$$p_t^{(0)} = \frac{-\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds - \frac{(\gamma - 1)}{Pe |\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds. \quad (5.1.9)$$

Durch ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld ist die Dichte in Raum und Zeit veränderlich. Während  $p^{(0)}$  zusammen mit  $\rho^{(0)}$  und  $T^{(0)}$  die Zustandsgleichung erfüllt und deshalb als thermodynamischer Druck bezeichnet wird, erscheint der Druck  $p^{(2)}$  in der Impulsgleichung. Er ermöglicht die Erfüllung der Divergenzbedingung an das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}^{(0)}$  und wird aufgrund dieser Eigenschaft als hydrodynamischer Druck bezeichnet. Der Druck  $p^{(0)}$  in führender Ordnung ist bestimmt durch Integration über den Rand des Rechengebiets  $\Omega$ . Darin sind sowohl eine Kompression als auch ein Wärmefluß über den Rand  $\partial\Omega$  enthalten.

### Ergebnis: Inkompressibler Grenzwert mit Inkompressibilitätsbedingung

Bei erfüllter Inkompressibilitätsbedingung, d.h. unter den Voraussetzungen

- keine Kompression vom Rand:  $\int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds = 0$ ,
- vernachlässigbarer Wärmefluß
  - über den Rand  $\int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds = 0$  und
  - im Innern  $\nabla \cdot \underline{q}^{(0)} = 0$ ,
- konstante Anfangsdichte, d.h.  $\rho^{(0)}(\underline{x}, t = 0) = \text{const.}$ ,

leiten sich aus (5.1.5) - (5.1.9) die klassischen inkompressiblen Gleichungen ab:

$$\rho^{(0)} = \text{const.}, \quad (5.1.10)$$

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla \cdot \tau^{(0)}, \quad (5.1.11)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = 0, \quad (5.1.12)$$

$$p^{(0)} = \text{const.}, \quad (5.1.13)$$

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}} = \text{const.} \quad (5.1.14)$$

Die Dichte  $\rho^{(0)}$  ist konstant und das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}^{(0)}$  ist divergenzfrei. Hervorzuheben sind die beiden Druckterme  $p^{(0)}$  und  $p^{(2)}$ , also der thermodynamische und der hydrodynamische Druck. Der Druck in führender Ordnung  $p^{(0)}$  ist in diesem Fall konstant. Der Druck  $p^{(2)}$  ermöglicht die Einhaltung der Divergenzbedingung  $\nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = 0$  an das Geschwindigkeitsfeld.

### 5.1.2 Skalierter Störungsansatz

Die inkompressible Lösung aus dem vorangegangenen Abschnitt 5.1.1 wird von einer Störung überlagert. Die Störung stellt eine kompressible Korrektur an die inkompressible Strömung dar und läßt sich als Akustik interpretieren.

#### Skalierter Störungsansatz *Scaled Perturbation Ansatz (SPA)*

Basierend auf der Beschreibung einer inkompressiblen Strömung durch die Gleichungen (5.1.5) - (5.1.9) oder im Fall der erfüllten Inkompressibilitätsbedingung durch das System (5.1.10) - (5.1.14) wird eine kompressible Korrektur eingeführt. Dazu werden die Störgrößen  $\rho'$ ,  $\underline{u}'$  und  $p'$  verwendet, so dass sich der skalierte Störungsansatz beschreiben läßt durch

$$\rho = \rho^{(0)} + M^2(\rho^{(2)} + \rho'), \quad (5.1.15)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^{(0)} + M \underline{u}', \quad (5.1.16)$$

$$p = p^{(0)} + M^2(p^{(2)} + p'). \quad (5.1.17)$$

Die Größen  $\rho^{(0)}$ ,  $\underline{u}^{(0)}$ ,  $p^{(0)}$  und  $p^{(2)}$  erfüllen die inkompressiblen Gleichungen. Die Terme  $p^{(1)}$  und  $\rho^{(1)}$  sind nicht in der Entwicklung enthalten, da ihre Eigenschaften denen der führenden Ordnung gleichen und sie keine neuen Informationen enthalten.

Der Term  $\rho^{(2)}$  wird als Dichte Pendant zu den hydrodynamischen Druckänderungen betrachtet und läßt sich nach der Gleichung

$$p^{(2)} = \frac{\gamma p^{(0)}}{\rho^{(0)}} \rho^{(2)} = c_0^2 \rho^{(2)} \quad (5.1.18)$$

berechnen. Die Störungen enthalten sämtliche Korrekturen höherer Ordnung.

### Einskalenmodell SPA

Um zu den Evolutionsgleichungen für die Störungen zu gelangen, wird der Ansatz (5.1.15) - (5.1.17) in die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) eingesetzt. Dabei werden die Eigenschaften (5.1.5) - (5.1.9) der inkompressiblen Lösung verwendet. Werden keine weiteren Annahmen getroffen und alle Terme mitgeführt, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \rho'_t + \nabla \cdot (\rho' \underline{u}^{(0)}) + \frac{1}{M} \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}') \\ + M (\nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}') + \nabla \cdot (\rho' \underline{u}')) = -(\rho_t^{(2)} + \nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)})) \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

für die Evolution der Dichtestörung. Die Divergenzterme stellen zum einen den Transport von Dichtegradienten dar, zum anderen sind sie für Dichtestörungen infolge von divergenzbehafteten Geschwindigkeitsfeldern verantwortlich. Für die Störung im Geschwindigkeitsfeld läßt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{u}'_t + (\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}' + \frac{1}{M \rho^{(0)}} \nabla p' \\ + M \left( \frac{\rho'}{\rho^{(0)}} \underline{u}'_t + \left( \frac{\rho'}{\rho^{(0)}} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \right) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}' \right) \\ + M^2 \left( \frac{\rho^{(2)} + \rho'}{\rho^{(0)}} (\underline{u}'_t + (\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}') \right) \\ + M^3 \left( \frac{\rho^{(2)} + \rho'}{\rho^{(0)}} \underline{u}' \cdot \nabla \right) \underline{u}' = -M \left( \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \right) \underline{u}^{(0)} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

herleiten. Die Druckstörungen sind durch die Gleichung

$$\begin{aligned} p'_t + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p' + \gamma p' \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} + \frac{\gamma p^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' + M (\underline{u}' \cdot \nabla (p^{(2)} + p')) \\ + \gamma (p^{(2)} + p') \nabla \cdot \underline{u}' = -(p_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(2)} + \gamma p^{(2)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)}) \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

beschrieben. Das sind nichtlineare Evolutionsgleichungen für die kompressiblen Störungen  $\rho'$ ,  $\underline{u}'$  and  $p'$ . Die Quellterme auf der rechten Seite definieren sich ausschließlich aus der inkompressiblen Lösung  $\rho^{(0)}$ ,  $\underline{u}^{(0)}$ ,  $p^{(0)}$ ,  $p^{(2)}$  und  $\rho^{(2)}$ . Die Produkte von Störgrößen und inkompressibler Lösung beschreiben die Wechselwirkungen von inkompressibler Strömung und kompressibler Korrektur.



Das explizite Auftreten von Potenzen der Mach-Zahl  $M$  in den Evolutionsgleichungen (5.1.19) - (5.1.21) macht deutlich, dass es sich nicht mehr um asymptotische Gleichungen, sondern um Störungsgleichungen handelt. Werden die so berechneten Störungen zu den inkompressiblen Lösungen addiert, ergibt sich die kompressible Lösung der Navier-Stokes Gleichungen. Das Einskalenmodell stimmt rein formal, bis auf seine dimensionslose Formulierung, mit der Methode von Hardin und Pope in Abschnitt 4.2 überein. Allerdings unterscheiden sich die Modelle in der Definition der Dichtekorrektur  $\rho^{(2)}$  bzw.  $\rho^{(1)}$ . Der Ansatz von Hardin und Pope macht heuristische Annahmen, um denjenigen Anteil in  $p^{(2)}$  zu extrahieren, der für die hydrodynamische Dichteänderungen in  $\rho^{(2)}$  verantwortlich ist. Darauf kann das Einskalenmodell verzichten, denn ihm liegt eine allgemeinere und dadurch mächtigere Beschreibung der inkompressiblen Strömung zugrunde [13], [14]. Durch eine veränderliche, inkompressible Dichte  $\rho^{(0)}$  und ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}^{(0)}$  lassen sich thermodynamische Phänomene in der Strömungsbeschreibung erfassen. Dadurch wird mit der Druckvariablen  $p^{(2)}$  ein rein hydrodynamischer Druck berechnet, der direkt in eine hydrodynamische Dichtekorrektur umgerechnet werden kann und keinerlei weiterer Modellierung bedarf.

### Einskalenmodell *SPA*: Linearisierung

Da alle kompressiblen Korrekturen, d.h. alle Terme höherer Ordnung, in den Störgrößen enthalten sind, sind in den Evolutionsgleichungen (5.1.19) - (5.1.21) Potenzen der Mach-Zahl als Vorfaktoren enthalten. Zum einen erlaubt das eine Identifikation von Anteilen in den Gleichungen, die von besonderer Bedeutung sind wie beispielsweise diejenigen Ausdrücke mit dem Faktor  $1/M$ . Zum anderen sind vernachlässigbare Terme erkennbar, die mit mindestens der ersten Potenz der Mach-Zahl multipliziert werden.

Eine Vereinfachung des Einskalenmodells stellt somit die Vernachlässigung der Terme der Größenordnung  $O(M)$  dar. Das entspricht einer Linearisierung und führt auf die Gleichungen

$$\rho'_t + \nabla \cdot (\rho' \underline{u}^{(0)}) + \frac{1}{M} \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}') = -(\rho_t^{(2)} + \nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)})), \quad (5.1.22)$$

$$\underline{u}'_t + (\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}' + \frac{1}{M \rho^{(0)}} \nabla p' = \underline{0}, \quad (5.1.23)$$

$$p'_t + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p' + \gamma p' \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} + \frac{\gamma p^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' = -(p_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(2)} + \gamma p^{(2)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)}). \quad (5.1.24)$$

Darin sind die Einflüsse der Dichtekorrektur  $\rho^{(2)}$  und des hydrodynamischen Drucks  $p^{(2)}$  auf die Geschwindigkeitsstörungen  $\underline{u}'$  nicht mehr enthalten. Gleichzeitig findet sich

in der Evolutionsgleichung für die Geschwindigkeitsstörung keine Wechselwirkung von Dichtestörung und inkompressibler Lösung. Durch die Vernachlässigung von nichtlinearen Ausdrücken stellt die zusammengesetzte Lösung aus inkompressibler Lösung und Störung nach (5.1.22) - (5.1.24) nicht mehr die Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen dar. Es handelt sich um eine Approximation in der Nichtlinearitäten in führender Ordnung enthalten sind, diejenigen höherer Ordnung aber vernachlässigt werden.

### Einskalenmodell *SPA*: Linearisierung und Inkompressibilitätsbedingung

Kann für die inkompressible Strömung von einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung ausgegangen werden, so ergeben sich weitere Vereinfachungen. Die Annahmen aus Abschnitt 5.1.1 sind anwendbar und führen auf die folgenden Gleichungen für die Evolution der Störungen

$$\rho'_t + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \rho' + \frac{\rho^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' = -(\rho_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla \rho^{(2)}), \quad (5.1.25)$$

$$\underline{u}'_t + (\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}' + \frac{1}{M \rho^{(0)}} \nabla p' = \underline{0}, \quad (5.1.26)$$

$$p'_t + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p' + \frac{\gamma p^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' = -(p_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(2)}). \quad (5.1.27)$$

Das obige Einskalenmodell berechnet eine Dichtestörung nach Gleichung (5.1.25). Diese stimmt überein mit einer Dichte, die nach  $\rho' = 1/c_0^2 p'$  aus der Druckstörung folgt. Denn sowohl die linke Gleichungsseite, welche die Ausbreitung beschreibt, als auch die rechte Gleichungsseite mit den Quelltermen erfüllt diesen funktionalen Zusammenhang.

### Einskalenmodell *SPA*: Fernfeld

Im Fernfeld, wo sich die inkompressible Lösung auf die konstanten Hintergrundgrößen reduziert  $\rho^{(0)} = \rho_\infty$ ,  $p^{(0)} = p_\infty$ ,  $\rho^{(2)} = p^{(2)} = 0$  und  $\underline{u}^{(0)} = \underline{0}$ , resultieren die reinen Ausbreitungsgleichungen ohne eine Anregung durch Quellterme. Die einfachste Form der Ausbreitungsgleichungen ist ein System von Wellengleichungen

$$\rho'_t + \frac{\rho^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' = 0, \quad (5.1.28)$$

$$\underline{u}'_t + \frac{1}{M \rho^{(0)}} \nabla p' = \underline{0}, \quad (5.1.29)$$

$$p'_t + \frac{\gamma p^{(0)}}{M} \nabla \cdot \underline{u}' = 0. \quad (5.1.30)$$

Die Gleichungen in (5.1.28) - (5.1.30) lassen sich durch Umformungen (Differentiation nach der Zeit, Divergenzbildung und ineinander Einsetzen) zu einer Wellengleichung in der Dichte oder im Druck formulieren. Daraus folgt beispielsweise für die Formulierung im Druck

$$p'_{tt} - \frac{c_0^2}{M^2} \nabla \cdot \nabla p' = 0, \quad (5.1.31)$$

mit der korrekten akustischen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0^2/M^2$ .

Eine weitere Erkenntnis wird aus dem Einskalenmodell in (5.1.28) - (5.1.30) deutlich. Durch die Evolutionsgleichungen wird sowohl eine kurzskalige, hochfrequente als auch langskalige, niederfrequente Wellenausbreitung beschrieben, die in Fortenbach und Munz [13] beschrieben wird. Die Gleichungen fordern das Gleichgewicht zwischen Zeitableitungen und räumlichen Gradienten, die sich um den Faktor  $1/M$  unterscheiden. Diese Bedingung kann zum einen von räumlichen Gradienten der Größenordnung  $O(M)$  erfüllt werden. Das führt zu langskaligen, niederfrequenten Phänomenen. Zum anderen folgen auch Zeitableitungen, die von der Größenordnung  $O(1/M)$  sind, dieser Bedingung. Das führt auf kurzskalige, hochfrequente Wellen.

- Für die Druckstörung in (5.1.30) folgt mit der Annahme  $\nabla \cdot \underline{u}' = O(1)$ :
  - $\Rightarrow p'_t = O(\frac{1}{M})$ , d.h. große Zeitableitung von  $p'$
  - $\Rightarrow$  hochfrequente Druckänderungen
- Für die Geschwindigkeitsstörung in (5.1.29) folgt mit der Annahme  $\underline{u}'_t = O(1)$ :
  - $\Rightarrow \nabla p' = O(M)$ , d.h. kleine Raumableitung von  $p'$
  - $\Rightarrow$  langskalige Druckänderungen

Die Einskalenmodelle dieses Abschnitts lösen das in der Einleitung 1.1 beschriebene Mehrskalenproblem bezüglich der unterschiedlichen Amplituden von Strömung und Akustik. Die schallerzeugende, kompressible Strömung wird aufgespalten in eine inkompressible Strömung und eine kompressible Störung, die als die erzeugte Akustik interpretiert wird. Das ermöglicht die Beschreibung von Strömung und Akustik in verschiedenen Variablen. Durch die Anwendung des skalierten Störungsansatzes nach (5.1.15) - (5.1.17) wird dieser Effekt dadurch begünstigt, dass die unterschiedlichen Größenordnungen der Unbekannten im Ansatz durch die Potenzen der Mach-Zahl  $M$  beachtet werden. Unberücksichtigt bleibt aber die Tatsache, dass sich die Strömungs- und Akustik-Phänomene auf unterschiedlichen Raumskalen abspielen.

## 5.2 Mehrskalenmodellierung

Im vorangegangenen Einskalenmodell wurde das Mehrskalenproblem bezüglich der Unterschiede in den Amplituden von Strömung und Akustik berücksichtigt. Die Skalierung der Variablen und die Aufspaltung in eine inkompressible Strömungslösung und eine kompressible Störung, die als Akustik interpretiert wird, ermöglichen eine geeignete Approximation der unbekanntenen Größen.

Das Mehrskalenproblem in den unterschiedlichen Raumskalen, auf denen Strömungs- und Akustikphänomene existieren, blieb unbeachtet. Dieser Aspekt wird von einer Mehrskalenmodellierung behandelt, die in Abschnitt 5.2.1 eine zweite Raumvariable einführt. In der Mehrskalenmodellierung von aeroakustischen Quellen, die wiederum auf der inkompressiblen Strömungsbetrachtung in Abschnitt 5.2.2 beruht, wird im folgenden unterschieden zwischen thermischen Ursachen für die Schallentstehung in Abschnitt 5.2.3 und einer rein strömungsbedingten Schallerzeugung in Abschnitt 5.2.4.

### 5.2.1 Definition der Raumskalen

Die Unterschiede in den Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Strömung und Akustik sind verantwortlich dafür, dass sowohl kurzskalige als auch langskalige Phänomene existieren. Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten wird durch die Mach-Zahl  $M = u_{ref}/c_{ref}$  ausgedrückt, die in Definition 2.2.6 festgelegt wurde. Es ist naheliegend, die Raumvariable  $\underline{x}$  in eine kurze Skala  $\underline{\eta}$  mit Referenz  $\eta_{ref}$  und eine lange Skala  $\underline{\xi}$  mit Referenz  $\xi_{ref}$  aufzuspalten. Zwischen den Referenzen der Raumskalen gilt der Zusammenhang

$$\eta_{ref} = O(x_{ref}), \quad (5.2.1)$$

$$\xi_{ref} = O\left(\frac{x_{ref}}{M}\right). \quad (5.2.2)$$

Die Referenz  $\eta_{ref}$  ist von der gleichen Größenordnung wie die Referenz der bisher verwendeten Raumvariable  $\underline{x}$  und damit für die Beschreibung von Strömungsphänomenen geeignet. Die Referenz der  $\underline{\xi}$  Skala ist um den Faktor  $1/M$  größer und für die Erfassung von langskaligen Phänomenen bestimmt. Der Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Raumvariablen  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  lautet

$$\underline{\xi} = M\underline{\eta}. \quad (5.2.3)$$

Damit sind zwei Raumskalen vorhanden, auf denen die auftretenden Phänomene beschrieben werden können.

Wird eine von  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  abhängige Funktion nach der Raumrichtung  $\underline{x}$  differenziert, so ergibt sich nach der Kettenregel die Rechenvorschrift

$$\nabla_{\underline{x}} = \nabla_{\underline{\eta}} + M\nabla_{\underline{\xi}}. \quad (5.2.4)$$

Eine Differentiation nach  $\underline{x}$  spaltet sich auf in eine Raumableitung nach  $\underline{\eta}$  und eine mit dem Faktor  $M$  multiplizierte Ableitung, die nach der langen Raumvariable  $\underline{\xi}$  differenziert.

### 5.2.2 Inkompressibler Grenzwert: Mehrskalentwicklung

Analog zur Vorgehensweise im Fall des Einkalenmodells in Abschnitt 5.1.1 wird zunächst der inkompressible Grenzwert einer kompressiblen Strömung beschrieben. Das mathematische Werkzeug ist eine asymptotische Entwicklung in der Mach-Zahl, die im Gegensatz zu Abschnitt 5.1.1 zwei Raumskalen besitzt, auf denen sich die strömungsmechanischen und akustischen Phänomene beschreiben lassen.

Der Ansatz einer Mehrskalentwicklung zur Untersuchung des inkompressiblen Grenzwerts einer kompressiblen Strömung stammt von Klein [24] und wurde von Meister [30] weiterentwickelt.

#### Formale asymptotische Entwicklung

Da der Parameter  $M$  explizit im System der partiellen Differentialgleichungen enthalten ist, geht der asymptotische Ansatz davon aus, dass sich die Lösung des Systems als Entwicklung in Potenzen der Mach-Zahl  $M$  darstellen läßt. Der asymptotische Ansatz

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M\rho^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2\rho^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3), \quad (5.2.5)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M\underline{u}^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2\underline{u}^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3), \quad (5.2.6)$$

$$p(\underline{x}, t) = p^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + Mp^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3), \quad (5.2.7)$$

$$T(\underline{x}, t) = T^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + MT^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2T^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3) \quad (5.2.8)$$

besteht aus den unbekanntenen Funktionen

$$\rho^{(i)}, \underline{u}^{(i)}, p^{(i)}, T^{(i)} \text{ mit } i = 0, 1, 2, \dots,$$

die von zwei unabhängigen Raumvariablen  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  sowie von einer Zeitvariablen  $t$  abhängen.

Der Ansatz wird in die dimensionslosen, kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) und in die Zustandsgleichung (2.2.4) eingesetzt. Die räumliche Differentiation

wird nach der Rechenregel in Gleichung (5.2.4) ausgeführt. Anschließend werden Ausdrücke gleicher Potenz der Mach-Zahl zusammengefaßt und unabhängig voneinander zu Null gesetzt. Diese Vorgehensweise ist im Kapitel 3 über die Asymptotik beschrieben. Daraus resultiert eine Hierarchie von Systemen von asymptotischen Gleichungen, die im folgenden analysiert werden und im Anhang B.2 vollständig aufgeführt sind.

### Analyse der asymptotischen Gleichungen in führender Ordnung

Das Ziel der Mehrskalenanalyse der asymptotischen Gleichungen ist es, Einblicke in den inkompressiblen Grenzwert einer kompressiblen Strömung zu gewinnen. Dabei ist das Verhalten der unbekanntenen Größen auf ihrer Raumskalen  $\eta$  und  $\xi$  von besonderem Interesse.

Die Analyse der Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^{-2})$  bringt eine Eigenschaft der räumlichen Variation von  $p^{(0)}$  zum Ausdruck

$$\nabla_{\eta} p^{(0)} = \underline{0}.$$

Daraus folgt, dass der Druck  $p^{(0)}$  auf der kurzen Raumskala  $\underline{\eta}$  konstant ist und nur auf der langen Raumskala  $\underline{\xi}$  und in der Zeit  $t$  variieren kann,  $p^{(0)} = p^{(0)}(\underline{\xi}, t)$ .

Eine Antwort darauf, ob  $p^{(0)}$  auf der  $\underline{\xi}$ -Skala veränderlich ist, gibt die Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^{-1})$ . Diese lautet

$$\nabla_{\eta} p^{(1)} + \nabla_{\xi} p^{(0)} = \underline{0}$$

und schreibt sich nach einer Integration bezüglich der kurzen Skala  $\underline{\eta}$  über das Rechengebiet  $\Omega$  als

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} p^{(1)} \cdot \underline{n} \, ds + \nabla_{\xi} p^{(0)} = \underline{0}.$$

Dabei wurde die räumliche Konstanz von  $p^{(0)}$  auf der  $\underline{\eta}$  Skala ausgenutzt, der Integralsatz nach Gauß angewendet und anschließend durch die Größe des Rechengebiets  $|\Omega|$  dividiert. Wird nun der Grenzwert  $|\Omega| \rightarrow \infty$  gebildet, so folgt daraus

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} p^{(1)} \cdot \underline{n} \, ds \rightarrow \underline{0},$$

da aus physikalischen Gründen der Gesamtdruck  $p$  nicht unbegrenzt anwachsen kann und somit auch seine Komponenten beschränkt sind. Diese Eigenschaft der physikalischen Größe wird als sublineares Wachstum bezeichnet. Damit verbleibt von der Geschwindigkeitsgleichung

$$\nabla_{\xi} p^{(0)} = \underline{0}.$$

Als Ergebnis läßt sich festhalten, dass der Druck führender Ordnung auf beiden Raumskalen  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  konstant ist und nur zeitlich variiert,  $p^{(0)} = p^{(0)}(t)$ .

Die zeitliche Änderung von  $p^{(0)}$  geht aus der führenden Druckgleichung hervor

$$p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla_{\eta} \cdot \underline{q}^{(0)}$$

mit dem Wärmefluß in führender Ordnung  $\underline{q}^{(0)} = k \nabla_{\eta} T^{(0)}$ . Die Druckgleichung wird bezüglich der kurzen Skala  $\underline{\eta}$  über das Rechengebiet  $\Omega$  integriert und schreibt sich nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes als

$$p_t^{(0)} = \frac{-\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds - \frac{(\gamma - 1)}{|\Omega| Pe} \int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds.$$

Eine Kompression und ein Wärmefluß über den Rand des Strömungsgebiets  $\Omega$  bewirken eine zeitliche Änderung im Druck  $p^{(0)}$ .

Aus der Druckgleichung führender Ordnung ergibt sich eine Divergenzbedingung an das Geschwindigkeitsfeld in führender Ordnung

$$\nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(0)} = \frac{-p_t^{(0)}}{\gamma p^{(0)}} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p^{(0)} Pe} \nabla_{\eta} \cdot \underline{q}^{(0)}.$$

Aus ihr läßt sich zusammen mit der Dichtegleichung

$$\rho_t^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\eta} \rho^{(0)} = -\rho^{(0)} \nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(0)}$$

erschließen, ob Kompressibilitätseffekte führender Ordnung in  $\rho^{(0)}$  existieren. Diese sind vorhanden, wenn eine zeitliche Änderung von  $p^{(0)}$  existiert oder von einem Temperaturgradienten  $\nabla_{\eta} T^{(0)}$  ein Wärmefluß  $\nabla_{\eta} \cdot \underline{q}^{(0)}$  ausgeht. Die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes in führender Ordnung steht dann als Quellterm auf der rechten Seite und verursacht Dichteänderungen.

Sind Druck und Dichte führender Ordnung bekannt, so kann daraus mit Hilfe der Zustandsgleichung führender Ordnung die Temperatur bestimmt werden

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}.$$

Die räumlichen und zeitlichen Abhängigkeiten von Druck und Dichte übertragen sich auf die Temperatur.

Es bleibt die Betrachtung der Geschwindigkeitsgleichung in führender Ordnung, diese lautet

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\eta}) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\eta} p^{(2)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_{\xi} p^{(1)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla_{\eta} \cdot \tau^{(0)}. \quad (5.2.9)$$

Darin sind neben dem kurzskaligen Gradienten von  $p^{(2)}$  auch langskalige Ableitungen von  $p^{(1)}$  enthalten, die das Geschwindigkeitsfeld in führender Ordnung beeinflussen. Die Besonderheit und das Ergebnis der asymptotischen Analyse ist die Sichtbarmachung eines Einflusses von Gradienten von kleinskaligen Druckvariablen, nämlich  $p^{(1)}$  von der Ordnung  $O(M)$  und  $p^{(2)}$  von der Ordnung  $O(M^2)$ , auf die Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(0)}$  in führender Ordnung. Die obige Geschwindigkeitsgleichung setzt die langskaligen Druckgradienten  $p^{(1)}$  und kurzskaligen Änderungen von  $p^{(2)}$  zusammen mit den zeitlichen Änderungen von  $\underline{u}^{(0)}$  ins Gleichgewicht. Wird der inkompressible Grenzwert  $M \rightarrow 0$  gebildet, dann gilt für die langskalige Variable  $\underline{\xi} \rightarrow \infty$  und der langskalige Druckgradient von  $p^{(1)}$  verschwindet aus der schwach kompressiblen, führenden Geschwindigkeitsgleichung.

### Ergebnis: Inkompressibler Grenzwert

Die gewonnenen Erkenntnisse über den inkompressiblen Grenzwert werden wie folgt zusammengefaßt.

$$\rho_t^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta \rho^{(0)} = -\rho^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)}, \quad (5.2.10)$$

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\eta p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla_\eta \cdot \tau^{(0)}, \quad (5.2.11)$$

$$\nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} = \frac{-p_t^{(0)}}{\gamma p^{(0)}} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p^{(0)} Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(0)}, \quad (5.2.12)$$

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}} \quad \text{und} \quad \underline{q}^{(0)} = \nabla T^{(0)}, \quad (5.2.13)$$

$$p_t^{(0)} = \frac{-\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds - \frac{(\gamma - 1)}{|\Omega| Pe} \int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds. \quad (5.2.14)$$

Die Grenzgleichungen werden charakterisiert durch die Dichte  $\rho^{(0)}$  in führender Ordnung, die nach Gleichung (5.2.10) raum- und zeitveränderlich ist. Die Dichtevariation wird angeregt durch ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld in führender Ordnung. Dabei ist nach Gleichung (5.2.12) das Geschwindigkeitsfeld dann divergenzbehaftet, wenn zum einen ein lokaler Wärmefluß im Rechengebiet eine Rolle spielt oder zum anderen nach Gleichung (5.2.14) über den Rand des Rechengebiets Kompressions- oder Wärmeflußeffekte von Bedeutung sind. Die führende Temperatur  $T^{(0)}$  ist aus der Zustandsgleichung (5.2.13) durch den führenden Druck  $p^{(0)}$  und die führende Dichte  $\rho^{(0)}$  bestimmt. Aus diesem Grund wird der Druck führender Ordnung als thermodynamischer Druck bezeichnet, denn er ist für die Einhaltung der Zustandsgleichung verantwortlich. Der Druck zweiter Ordnung tritt in der Zustandsgleichung nicht auf und



hat keinerlei thermodynamische Bedeutung. Er ist aus der Geschwindigkeitsgleichung führender Ordnung bis auf eine additive Konstante bestimmt. Da  $p^{(2)}$  im inkompressiblen Grenzfall als einziger Druckterm in der Geschwindigkeitsgleichung verbleibt, wird er als inkompressibler Druck bezeichnet.

### Ergebnis: Inkompressibler Grenzwert mit Inkompressibilitätsbedingung

Bei erfüllter Inkompressibilitätsbedingung, d.h. unter den Voraussetzungen

- keine Kompression vom Rand:  $\int_{\partial\Omega} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} ds = 0$ ,
- vernachlässigbarer Wärmefluß
  - über den Rand  $\int_{\partial\Omega} \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{n} ds = 0$  und
  - im Innern  $\nabla \cdot \underline{q}^{(0)} = 0$ ,
- konstante Anfangsdichte, d.h.  $\rho^{(0)}(\underline{x}, t = 0) = \text{const.}$

lauten die inkompressiblen Grenzgleichungen

$$\rho^{(0)} = \text{const.}, \quad (5.2.15)$$

$$\underline{u}_t^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\eta p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} Re} \nabla_\eta \cdot \tau^{(0)}, \quad (5.2.16)$$

$$\nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} = 0, \quad (5.2.17)$$

$$p^{(0)} = \text{const.}, \quad (5.2.18)$$

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}} = \text{const.}. \quad (5.2.19)$$

Das sind die klassischen inkompressiblen Gleichungen, mit konstanter Dichte (5.2.15) und konstantem Druck (5.2.18) in führender Ordnung, beide über die Zustandsgleichung (5.2.19) mit der Temperatur verbunden. Das Geschwindigkeitsfeld ist divergenzfrei (5.2.17) und der inkompressible Druck  $p^{(2)}$  aus Gleichung (5.2.16) bleibt im Limit für die Einhaltung der Divergenzbedingung erhalten.

Die Betrachtung des inkompressiblen Grenzwerts einer kompressiblen Strömung wurde von Roller [43] in ein numerisches Verfahren umgesetzt. Dessen Besonderheit ist die Verwendung von mehreren Druckvariablen. Dadurch ist die durchgängige Berechnung von inkompressiblen Strömungen und schwach kompressiblen Strömungen mit einem numerischen Verfahren möglich. Das Verfahren wurde von Park [37], Ratzel [40] und Fortenbach et. al. [44], [17] weiterentwickelt.

### 5.2.3 Mehrskalenmodell der Thermoakustik

Den Einstieg in die Thermoakustik bildet die schwachkompressible Form der Geschwindigkeitsgleichung (5.2.9) in führender Ordnung aus dem vorangegangenen Abschnitt. Der langskalige Druckgradient von  $p^{(1)}$ , der auf die führende Ordnung der Geschwindigkeit einen Einfluß hat, ist Gegenstand der asymptotischen Untersuchung.

Mit der Kenntnis, dass  $p^{(0)}$  auf beiden Raumskalen  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  konstant ist, folgt aus der Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^{-1})$

$$\nabla_{\eta} p^{(1)} = \underline{0}.$$

Der Druckterm erster Ordnung besitzt damit lediglich eine Abhängigkeit auf der langskaligen Raumvariablen  $\underline{\xi}$  und in der Zeit  $t$ ,  $p^{(1)} = p^{(1)}(\underline{\xi}, t)$ .

Die zeitliche Abhängigkeit ist aus der Druckgleichung erster Ordnung zu entnehmen. Sie lautet

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} (\nabla_{\eta} \cdot \underline{q}^{(1)} + \nabla_{\xi} \cdot \underline{q}^{(0)})$$

und hat auf der rechten Seite Quellterme, die aus einem Wärmefluß erster Ordnung  $q^{(1)} = \nabla_{\eta} T^{(1)} + \nabla_{\xi} T^{(0)}$  und führender Ordnung  $q^{(0)} = \nabla_{\eta} T^{(0)}$  definiert sind. Um den langskaligen Charakter von  $p^{(1)}$  zu untersuchen, wird obige Druckgleichung über eine akustische Zelle integriert. Es wird verwendet, dass weder  $p^{(0)}$  noch  $p^{(1)}$  auf  $\underline{\eta}$  variieren. Dadurch kann der Gaußsche Integralsatz angewendet werden. Nach Division durch die Größe einer akustischen Zellen  $|\Omega_{ak}|$  bleibt

$$\begin{aligned} p_t^{(1)} + \frac{\gamma p^{(1)}}{|\Omega_{ak}|} \int_{\partial\Omega_{ak}} \underline{u}^{(0)} \cdot \underline{n} \, ds + \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega_{ak}|} \int_{\partial\Omega_{ak}} \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{n} \, ds + \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega_{ak}|} \nabla_{\xi} \cdot \int_{\Omega_{ak}} \underline{u}^{(0)} \, d\Omega_{ak} \\ = -\frac{(\gamma - 1)}{|\Omega_{ak}| Pe} \int_{\partial\Omega_{ak}} \underline{q}^{(1)} \cdot \underline{n} \, ds - \frac{(\gamma - 1)}{|\Omega_{ak}| Pe} \int_{\partial\Omega_{ak}} (\nabla_{\xi} T^{(0)}) \cdot \underline{n} \, ds. \end{aligned}$$

Im zweiten Integral auf der rechten Seite mit Integrand  $\nabla_{\xi} \cdot q^{(0)}$  wurde für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes die Reihenfolge der Differentiation nach der Regel von Schwarz vertauscht. So wird eine langskalige Wärmeflußdivergenz infolge eines kurzskaligen Temperaturgradienten umgewandelt in eine kurzskalige Wärmeflußdivergenz infolge eines langskaligen Temperaturgradienten

$$\nabla_{\xi} \cdot q^{(0)} = \nabla_{\xi} \cdot (\nabla_{\eta} T^{(0)}) = \nabla_{\eta} \cdot (\nabla_{\xi} T^{(0)}).$$

Für die Grenzwertbildung  $M \rightarrow 0$  wird sublineares Wachstum der physikalischen Größen in den Integranden vorausgesetzt, so dass die Randintegrale gegen Null gehen. Der Mittelwert von  $\underline{u}^{(0)}$  über eine akustische Zelle, der als langskaliger Anteil interpretiert wird,

ist durch

$$\underline{\bar{u}}^{(0)} := \frac{1}{|\Omega_{ac}|} \int_{\Omega} \underline{u}^{(0)} d\Omega_{ac}$$

definiert. Er verbleibt in der Druckgleichung erster Ordnung

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \underline{\bar{u}}^{(0)} = 0.$$

Die Quellterme auf der rechten Gleichungsseite verschwinden zu Null und es bleiben die langskaligen Anteile der Divergenz der führenden Geschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsfeld in führender Ordnung ist bezüglich der  $\underline{\xi}$  Skala divergenzbehaftet und wechselwirkt auf diese Weise mit den langskaligen Druckänderungen in  $p^{(1)}$ .

Nun wird die zeitliche Evolution der langskaligen Geschwindigkeitsanteile führender Ordnung untersucht. Die Mittelung über eine akustische Zelle  $\Omega_{ak}$  der führenden Geschwindigkeitsgleichung ergibt

$$\overline{(\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)})_t} + \nabla_{\xi} p^{(1)} = 0.$$

Allerdings beschreibt die obige Gleichung nur den Zusammenhang zwischen  $p^{(1)}$  und dem gemittelten Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit führender Ordnung. Dieses Produkt kann nicht getrennt werden, so dass kein geschlossenes System für die Unbekannten  $p^{(1)}$  und  $\underline{\bar{u}}^{(0)}$  angegeben werden kann. Deshalb werden die führenden Ordnungen von Druck und Geschwindigkeit als eine Summe aus einem gemittelten und einem flukturierenden Anteil angesetzt. Der gemittelte Anteil wird durch einen Überstrich dargestellt und die Fluktuation ist durch eine gestrichene Größe repräsentiert

$$\rho^{(0)} = \overline{\rho}^{(0)} + \rho'^{(0)}, \quad (5.2.20)$$

$$\underline{u}^{(0)} = \underline{\bar{u}}^{(0)} + \underline{u}'^{(0)}. \quad (5.2.21)$$

Dabei wird angenommen, dass die Mittelung über eine Fluktuation Null ergibt.

### Ergebnis: Evolutionsgleichungen der Thermoakustik

Wird obiger Ansatz (5.2.20) und (5.2.21) in die Evolutionsgleichungen für  $p^{(1)}$  und  $\overline{\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)}}$  eingesetzt, so resultiert daraus das System

$$\underline{\bar{u}}_t^{(0)} + \frac{1}{\overline{\rho}^{(0)}} \nabla_{\xi} p^{(1)} = -\overline{(\rho'^{(0)} \underline{u}'^{(0)})_t}, \quad (5.2.22)$$

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \underline{\bar{u}}^{(0)} = 0. \quad (5.2.23)$$

Eine langskalige Druckänderung in  $p^{(1)}$  wird aus den Fluktuationen in führender Dichte und Geschwindigkeit erzeugt. Deren räumlich gemittelte, zeitliche Ableitung steht als Quellterm auf der rechten Seite. Die Fluktuationen in der Dichte führender Ordnung wurden ausführlich in (5.2.10) untersucht. Die Ursachen sind thermische Einflüsse und eine Kompression über den Rand des Rechengebiets. Damit sind es im wesentlichen thermische Effekte, die einen langskaligen Druck  $p^{(1)}$  erzeugen, der mit den gemittelten Geschwindigkeiten führender Ordnung im Gleichgewicht steht.

### Ergebnis: Thermoakustik mit Inkompressibilitätsbedingung

Trifft die Annahme einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung zu, wird die führende Dichte konstant in Raum und Zeit. Das System von akustischen Gleichungen in (5.2.22) - (5.2.23) zur Beschreibung der Thermoakustik vereinfacht sich zu den homogenen Gleichungen

$$\overline{\underline{u}}_t^{(0)} + \frac{1}{\overline{\rho}^{(0)}} \nabla_\xi p^{(1)} = \underline{0}, \quad (5.2.24)$$

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \overline{\underline{u}}^{(0)} = 0. \quad (5.2.25)$$

Die Quellterme aus den Fluktuationen verschwinden zu Null und eine Wellengleichung für  $p^{(1)}$  kann hergeleitet werden mit

$$p_{tt}^{(1)} - \frac{\gamma p^{(0)}}{\rho^{(0)}} \Delta_\xi p^{(1)} = 0.$$

Im Fall einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung gibt es keine Quellterme, die eine langskalige Druckänderung in  $p^{(1)}$  erzeugen. Der Druckterm erster Ordnung ist eine Konstante. Allerdings tritt aus der Wellengleichung die Ausbreitungsgeschwindigkeit hervor, mit der sich Änderungen in  $p^{(1)}$  ausbreiten. Durch  $c_0 := \sqrt{\gamma p^{(0)} / \rho^{(0)}}$  wird auf der langskaligen Raumvariable  $\underline{\xi}$  eine Ausbreitung mit Schallgeschwindigkeit beschrieben.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass in den Variablen  $(p^{(1)}, \overline{\underline{u}}^{(0)})$  langskalige Thermoakustik erfaßt wird. Im Fall einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung und daraus resultierender konstanter Dichte in führender Ordnung ist  $p^{(1)}$  eine Konstante und die langskalige Geschwindigkeit  $\overline{\underline{u}}^{(0)}$  ist divergenzfrei.

#### 5.2.4 Mehrskalenmodell der Strömungsakustik

Den Einstieg in die Strömungsakustik liefert die vorangegangene, erfüllte Inkompressibilitätsbedingung. Durch diese folgt in der Beschreibung der Thermoakustik in den

Gleichungen (5.2.24) und (5.2.25), dass eine akustische Druckvariation in  $p^{(1)}$  nicht auftritt.

Im Folgenden werden die Mechanismen untersucht, die im Fall einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung Akustik erzeugen. Damit wird eine Akustik beschrieben, die aus rein strömungsdynamischen Ursachen erzeugt wird. Ausgehend von einer erfüllten Inkompressibilitätsbedingung und den Ergebnissen aus der Untersuchung der Thermoakustik wird der folgende Ansatz gewählt

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho^{(0)} + M^2 \rho^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^3 \rho^{(3)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^4), \quad (5.2.26)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M \underline{u}^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2 \underline{u}^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^3 \underline{u}^{(3)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^4), \quad (5.2.27)$$

$$p(\underline{x}, t) = p^{(0)} + M^2 p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^3 p^{(3)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^4), \quad (5.2.28)$$

$$T(\underline{x}, t) = T^{(0)} + M^2 T^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^3 T^{(3)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^4). \quad (5.2.29)$$

Die Ergebnisse der Untersuchung des inkompressiblen Grenzwerts einer kompressiblen Strömung in Abschnitt 5.2.2 erlauben,  $\rho^{(0)}$ ,  $p^{(0)}$  und  $T^{(0)}$  als raumkonstant auf der  $\underline{\eta}$ - und  $\underline{\xi}$ -Skala und konstant in der Zeit  $t$  anzunehmen. Diese thermodynamischen Größen sind über die Zustandsgleichung (5.2.19) miteinander verknüpft.

Im Ansatz (5.2.26) - (5.2.29) ist der Druckterm erster Ordnung  $p^{(1)}$  nicht enthalten. Nach den Erkenntnissen aus dem vorangegangenen Abschnitt über die Thermoakustik bei erfüllter Inkompressibilitätsbedingung, Gleichungen (5.2.24) und (5.2.25), ist in  $p^{(1)}$  keine Akustik vorhanden. Aus demselben Grund wird auf die Dichte  $\rho^{(1)}$  im Ansatz (5.2.26) - (5.2.29) verzichtet. Das Geschwindigkeitsfeld führender Ordnung ist nach (5.2.17) bezüglich der  $\underline{\eta}$  Skala divergenzfrei und genügt der Evolutionsgleichung in (5.2.16).

Der Ansatz (5.2.26) - (5.2.29) wird in die kompressiblen, dimensionslosen Euler Gleichungen (2.3.1) - (2.3.3) eingesetzt, da für die Terme höherer Ordnung der Reibungseinfluß als vernachlässigbar angenommen wird.

Die Druckgleichung erster Ordnung reduziert sich auf die Gleichung

$$\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{u}^{(1)} + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{u}^{(0)} = 0.$$

Diese wird über eine akustische Zelle integriert und gemittelt und schreibt sich anschließend in ihrer langskaligen Form als

$$\frac{1}{|\Omega_{ak}|} \int_{\partial\Omega_{ak}} \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{n} \, ds + \frac{1}{|\Omega_{ak}|} \nabla_{\xi} \cdot \int_{\Omega_{ak}} \underline{u}^{(0)} \, ds = 0.$$

Aus der Grenzwertbetrachtung  $M \rightarrow 0$  folgt unter der Annahme der Sublinearität von  $\underline{u}^{(1)}$ , dass das Randintegral in der obigen Gleichung verschwindet. Damit kann gefolgert werden

$$\nabla_{\xi} \cdot \underline{\bar{u}}^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\xi} \cdot \underline{u}^{(0)} = 0.$$

Die Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(0)}$  ist auf beiden Raumskalen  $\underline{\eta}$  und  $\underline{\xi}$  divergenzfrei. Somit kann von der Geschwindigkeit führender Ordnung weder eine kurzskalige noch eine langskalige Dichteänderung ausgehen.

Weiter folgt aus diesem Ergebnis durch Wiedereinsetzen in die Druckgleichung, dass

$$\nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(1)} = 0$$

gilt. Die Geschwindigkeit erster Ordnung  $\underline{u}^{(1)}$  hat bezüglich der kurzen Skala  $\underline{\eta}$  die gleiche divergenzfreie Eigenschaft wie die Geschwindigkeit führender Ordnung.

Das Verhalten der Geschwindigkeit erster Ordnung in der langskaligen Variable  $\underline{\xi}$  ist Gegenstand der folgenden Untersuchung. Um eine Aussage darüber zu erhalten, wird die Druckgleichung der Ordnung  $O(M^2)$  betrachtet. Diese lautet

$$p_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\eta} p^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\eta} \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \underline{u}^{(1)} = 0$$

und schreibt sich in ihrer integrierten und über eine akustische Zelle gemittelten Form als

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega_{ak}|} \int_{\Omega_{ak}} p_t^{(2)} \, d\Omega_{ak} + \frac{1}{|\Omega_{ak}|} \int_{\Omega_{ak}} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\eta} p^{(2)} \, d\Omega_{ak} \\ + \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega_{ak}|} \int_{\partial\Omega_{ak}} \underline{u}^{(2)} \cdot \underline{n} \, ds + \frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega_{ak}|} \nabla_{\xi} \cdot \int_{\Omega_{ak}} \underline{u}^{(1)} \, d\Omega_{ak} = 0. \end{aligned}$$

Auf sie wird die Grenzwertbildung  $M \rightarrow 0$  angewendet, so dass

$$\bar{p}_t^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \underline{\bar{u}}^{(1)} = 0$$

verbleibt. Daraus ist ersichtlich, dass die Geschwindigkeit erster Ordnung bezüglich der Raumskala  $\underline{\xi}$  divergenzbehaftet ist und damit eine langskalige Druckänderung in  $\bar{p}^{(2)}$  erzeugt. Die Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(1)}$  ist als eine Korrektur an die vollständig inkompressible Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(0)}$  zu betrachten. Keine der Geschwindigkeiten  $\underline{u}^{(0)}$  und  $\underline{u}^{(1)}$  vermag

bei erfüllter Inkompressibilitätsbedingung eine Kompression auf der  $\underline{\eta}$  Skala zu erzeugen. Im Gegensatz zu  $\underline{u}^{(0)}$  ist die Geschwindigkeit erster Ordnung  $\underline{u}^{(1)}$  bezüglich der langskaligen Raumvariable divergenzbehaftet und erzeugt damit langskalige Druckänderungen in  $\bar{p}^{(2)}$ .

Durch eine analoge Vorgehensweise folgt aus der Dichtegleichung der Ordnung  $O(M^2)$

$$\rho_t^{(2)} + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla_\xi \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)}) = 0$$

durch Integration und Mittelung über eine akustische Zelle die Gleichung

$$\bar{\rho}_t^{(2)} + \rho^{(0)} \nabla_\xi \cdot \bar{\underline{u}}^{(1)} = 0.$$

Darin verbleibt die Evolutionsgleichung für die langskaligen Änderungen in  $\underline{u}^{(1)}$ , die in der Geschwindigkeitsgleichung erster Ordnung beschrieben werden

$$\underline{u}_t^{(1)} + (\underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} (\nabla_\eta p^{(3)} + \nabla_\xi p^{(2)}) = \underline{0}.$$

Die Integration über eine akustische Zelle wird durchgeführt, was die Gleichung

$$\bar{\underline{u}}_t^{(1)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi \bar{p}^{(2)} = -\nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}^{(0)} \circ \underline{u}^{(0)}})$$

ergibt.

Die entwickelten Gleichungen werden zusammengefaßt. Die an die führende Ordnung anschließenden Gleichungen schreiben sich in ihrer langskaligen Form als

$$\bar{\rho}_t^{(2)} + \rho^{(0)} \nabla_\xi \cdot \bar{\underline{u}}^{(1)} = 0, \quad (5.2.30)$$

$$\bar{\underline{u}}_t^{(1)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi \bar{p}^{(2)} = -\nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}^{(0)} \circ \underline{u}^{(0)}}), \quad (5.2.31)$$

$$\bar{p}_t^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \bar{\underline{u}}^{(1)} = 0. \quad (5.2.32)$$

Um den hydrodynamischen Anteil der Größen  $\bar{\rho}^{(2)}$  und  $\bar{p}^{(2)}$  zu eliminieren, werden diese in eine akustische Störgröße und einen hydrodynamischen Anteil aufgespalten

$$\bar{\rho}^{(2)} = \bar{\rho}^{(2),hyd} + \bar{\rho}', \quad (5.2.33)$$

$$\bar{\underline{u}}^{(1)} = \bar{\underline{u}}', \quad (5.2.34)$$

$$\bar{p}^{(2)} = \bar{p}^{(2),hyd} + \bar{p}'. \quad (5.2.35)$$

Der akustische Anteil ist durch eine gestrichene Störung gekennzeichnet und der hydrodynamische Anteil, der sich aus der gemittelten Strömungslösung berechnet, trägt

den Index *hyd*. Die Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(1)}$  wird nicht aufgespalten, da sie keine hydrodynamischen Anteile enthält. Aus Gründen einer einheitlichen Schreibweise wird auch die Geschwindigkeit  $\underline{u}^{(1)}$  durch eine gestrichene Größe ersetzt.

### Ergebnis: Evolutionsgleichungen der Strömungsakustik

Aus der Aufspaltung (5.2.33) - (5.2.35), die in die Gleichungen (5.2.30) - (5.2.32) eingesetzt wird, resultieren die Evolutionsgleichungen der Strömungsakustik

$$\bar{\rho}'_t + \rho^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}' = -\bar{\rho}_t^{(2),hyd}, \quad (5.2.36)$$

$$\underline{u}'_t + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi \bar{p}' = -\nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}^{(0)} \circ \underline{u}^{(0)}}) - \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi \bar{p}^{(2),hyd}, \quad (5.2.37)$$

$$\bar{p}'_t + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}' = -\bar{p}_t^{(2),hyd}. \quad (5.2.38)$$

Es sind lineare Ausbreitungsgleichungen mit der Schallgeschwindigkeit  $c_0 := \sqrt{\gamma p^{(0)}/\rho^{(0)}}$ . Die Anregung erfolgt durch Quellterme, die aus der gemittelten, inkompressiblen Strömungslösung gebildet werden [12], [15], [16]. Die Dichtegleichung (5.2.36) und die Druckgleichung (5.2.38) entsprechen sich, da sowohl für die akustische Störung als auch für die Quellterme der Zusammenhang über die Schallgeschwindigkeit  $c_o$  gilt.

### Ergebnis: Konvektionseinfluß auf die Strömungsakustik

Eine Konvektion durch die Hintergrundströmung drückt sich in den Gleichungen der nächsthöheren Ordnung aus. Die Dichte- und Druckgleichung der Ordnung  $O(M^3)$  sowie die Geschwindigkeitsgleichung der Ordnung  $O(M^2)$  werden dafür in ihrer integrierten und gemittelten Form betrachtet. Die Korrekturen an die akustischen Störungen werden durch die zweimal gestrichene Schreibweise

$$\bar{\rho}^{(3)} = \bar{\rho}'', \quad (5.2.39)$$

$$\underline{u}^{(2)} = \underline{u}'', \quad (5.2.40)$$

$$\bar{p}^{(3)} = \bar{p}'' \quad (5.2.41)$$

dargestellt. Ihre Evolutionsgleichungen lauten

$$\bar{\rho}''_t + \rho^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}'' = -\nabla_\xi \cdot (\overline{\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}}), \quad (5.2.42)$$

$$\underline{u}''_t + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi \bar{p}'' = -\frac{1}{\rho^{(0)}} (\overline{\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}})_t - \nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}^{(0)} \circ \underline{u}''}) - \nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}'' \circ \underline{u}^{(0)}}), \quad (5.2.43)$$

$$\bar{p}''_t + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}'' = -\nabla_\xi \cdot (\overline{\underline{u}^{(0)} p^{(2)}}) \quad (5.2.44)$$



und stellen ein lineares System von Ausbreitungsgleichungen dar. Die Quellterme auf der rechten Seite bestehen aus den gemittelten Strömungsgrößen und den akustischen Störungen.

Die beiden letzten Ergebnisse stellen ein mathematisches Modell dar, das sich für die Beschreibung der Aeroakustik im Fall schwachkompressibler Strömungen eignet. Die Störungen  $(\bar{\rho}', \bar{\underline{u}}', \bar{p}')$  beschreiben die langskalige Akustik, die sich durch das lineare System von Gleichungen (5.2.36)-(5.2.38) ausbreitet. Angeregt werden die Evolutionsgleichungen durch Quellterme, die durch die langskalige Mittelung der Strömungsgrößen und deren langskalige Raum- und Zeitableitungen definiert sind. Der Konvektionseinfluß der Strömung auf die Ausbreitung der Akustik wird von den Störungen der nächsten Ordnung  $(\bar{\rho}'', \bar{\underline{u}}'', \bar{p}'')$  beschrieben. Diese folgen ebenfalls einem System von linearen Ausbreitungsgleichungen und werden sowohl von Strömungs als auch Störungsgrößen erster Ordnung angeregt.



## 6 Numerische Verfahren

Das Kapitel über die numerischen Verfahren gliedert sich in drei Abschnitte und beginnt in Abschnitt 6.1 mit einem Verfahren von Wandler [55] und Fortenbach [11]. Das analytische Verfahren ist auf die integrierten Gleichungen der akustischen Analogie von Lighthill und die Erweiterungen von Ffwoos-Williams und Hawkings aus Abschnitt 4.1 anwendbar.

Der zweite Abschnitt behandelt das Finite-Differenzen Verfahren von Tam [50]. Es ist für die Ausbreitung von akustischen Wellen optimiert, falls diese als Feldproblem berechnet werden. Damit lassen sich die aeroakustischen Modelle von Hardin und Pope aus Abschnitt 4.2 und die der Mehrskalmodellierung aus Kapitel 5 simulieren.

Der letzte Abschnitt geht auf die Koppelung von Strömung und Akustik ein, wie sie bei hybriden aeroakustischen Modellen zum Einsatz kommt.

### 6.1 Analytische Integrationsmethode

Die Integrationsmethode von Ffwoos-Williams und Hawkings resultiert in einer inhomogenen Wellengleichung für den Druck. Durch die Wellengleichung wird die Ausbreitung des Schalls mit konstanter Schallgeschwindigkeit  $c_\infty$  beschrieben. Die Schallerzeugung wird in einem Quellterm modelliert, der aus der Lösung einer Strömungssimulation bekannt ist. Für die Lösung der inhomogenen Wellengleichung wird auf die Werkzeuge der klassischen Akustik zurückgegriffen: die Greenschen Funktionen. Sie erlauben eine direkte Integration der partiellen Differentialgleichung. Die verwendete Technik der Greenschen Funktionen ist nicht auf akustische Anwendungen beschränkt, sondern allgemein anwendbar für den Fall der Ausbreitung eines skalaren Potentials. Eine detaillierte Dokumentation zur Herleitung und Verwendung der Greenschen Funktionen findet sich in Goldstein [18].

Der akustische Druck  $p$  stellt sich nach Gleichung (4.1.9) als eine Summe aus Oberflächen- und Volumenintegralen über das Strömungsgebiet dar

$$p(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{M^2}{R} T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) dV - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{1}{R} f_j(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) dS.$$

Die räumliche Dimension der Integrale repräsentiert unterschiedliche, akustische Quellterme. Die Oberflächenintegrale, die die Strömungslösung an der Oberfläche eines umströmten Körpers auswerten, haben den Charakter von Dipol-Schallquellen. Dagegen besitzen die Volumenintegrale, denen Quellterme im gesamten Strömungsgebiet zugrunde liegen, den Charakter von akustischen Quadrupolen.

### Numerische Vorgehensweise der analytischen Integrationsmethode

Die praktische Berechnung der räumlichen Differentiationen aus obiger Gleichung in der Integrationsmethode wird dargestellt. Die Integrationsgebiete  $V = V(\underline{y})$  und  $S = S(\underline{y})$  besitzen keine Abhängigkeit von  $\underline{x}$ , so dass die Differentiation und die Integration vertauscht werden dürfen. Die einzige Abhängigkeit der Integranden von  $\underline{x}$  steckt im Abstand  $R$ . Es bietet sich an, die Ableitungen nach  $x_i$  und  $x_j$  als Ableitungen nach  $R$  auszudrücken. Das führt auf die Rechenregeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial R} = \frac{(x_i - y_i)}{R} \frac{\partial}{\partial R} \quad \text{und} \quad (6.1.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right). \quad (6.1.2)$$

Damit kommen im Integranden lediglich Ableitungen nach  $R$  bis zur Ordnung 2 von Ausdrücken  $T_{ij}/R$  im Volumenintegral oder  $f_j/R$  im Fall des Oberflächenintegrals vor. Diese Ableitungen berechnen sich nach der Kettenregel zu

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) \right) = -\frac{M}{c_\infty R} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} - \frac{1}{R^2} T_{ij} \quad \text{und} \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left( \frac{1}{R} T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) \right) = \frac{M^2}{c_\infty^2 R} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial \tau^2} + \frac{2M}{c_\infty R^2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} + \frac{2}{R^3} T_{ij}. \quad (6.1.4)$$

Die Raumableitungen lassen sich auf diese Weise in Zeitableitungen umschreiben. Das erleichtert die praktische Berechnung, da sich Zeitableitungen wegen ihrer Eindimensionalität numerisch leichter berechnen lassen als Raumableitungen. Eine analoge Rechenregel läßt sich für den Integranden ( $f_j/R$ ) im Oberflächenintegral herleiten. Wegen des linearen Zusammenhangs der beiden Zeitvariablen  $t$  und  $\tau$  gilt für die Zeitableitungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau = \frac{\partial}{\partial t} \left( t - M \frac{R}{c_\infty} \right) = 1, \quad (6.1.5)$$

so dass sich die Ableitung nach der retardierten Zeit  $\tau$  durch die Ableitung nach  $t$  ersetzen lässt. Die Lösung  $p(\underline{x}, t)$  der inhomogenen Wellengleichung unter Anwendung obiger Rechenregeln bestimmt werden zu

$$\begin{aligned}
p(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{M^4}{c_\infty^2 R} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{R^2} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{M^3}{c_\infty R^2} \left(-\delta_{ij} + 3 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{R^2}\right) \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{M^2}{R^3} \left(-\delta_{ij} + 3 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{R^2}\right) T_{ij} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{M}{c_\infty R} \frac{(x_j - y_j)}{R} \frac{\partial f_j}{\partial t} dS \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{R^2} \frac{(x_j - y_j)}{R} f_j dS.
\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Sowohl die Oberflächen- als auch die Volumenintegrale besitzen Anteile, die in verschiedenen Potenzen von  $1/R$  räumlich abklingen, wobei  $R$  die Entfernung zwischen Beobachter und Schallquelle bezeichnet. So kann eine Unterscheidung in Nahfeld- und Fernfeldquellterme vorgenommen werden. Die ersten drei Volumenintegrale beschreiben den Quadrupol-Charakter der Lösung. Sie besitzen nach ihrer Reihenfolge in (6.1.6) das räumliche Abklingverhalten  $O(1/R)$ ,  $O(1/R^2)$  und  $O(1/R^3)$  bei gleichzeitiger Abhängigkeit  $O(M^4)$ ,  $O(M^3)$  und  $O(M^2)$  von der Mach-Zahl. Neben dem Abstand  $R$  zwischen Beobachtungspunkt  $\underline{x}$  und Quellpunkt  $\underline{y}$  wird der Lighthill Tensor  $T_{ij}$  und dessen Zeitableitungen der Ordnung 2, 1 und 0 zum retardierten Zeitpunkt ausgewertet und über das Quellgebiet  $V(\underline{y})$  integriert.

Die zwei folgenden Flächenintegrale beinhalten den Dipol-Charakter der Lösung. Sie besitzen nach ihrem Vorkommen in (6.1.6) das räumliche Abklingverhalten  $O(1/R)$  und  $O(1/R^2)$  sowie die Abhängigkeit  $O(M)$  und  $O(1)$  von der Mach Zahl. Im Integranden wird der Abstand  $R$  zwischen Beobachtungspunkt  $\underline{x}$  und Quellpunkt  $\underline{y}$  ausgewertet. Die Kraft  $f_j$  und deren Zeitableitung zum retardierten Zeitpunkt wird ausgewertet und über das Quellgebiet  $S$  integriert. Die Integranden werden in den Mittelpunkten der Zellen des Quellgebiets als bekannt vorausgesetzt. Die Integration wird daher als Summation über alle Zellen des Quellgebiets ausgeführt. Für jede Zelle des Quellgebiets geht der Abstand zum Beobachtungspunkt und der Flächen- bzw. der Rauminhalt der Zelle ein. Die zeitlichen Ableitungen erster Ordnung der Integranden werden durch einseitige Rückwärts-Differenzen mit erster Ordnung berechnet. Die zweite zeitliche Ableitung wird durch eine zentrale Differenz mit der Ordnung zwei bestimmt. Die Zeitableitungen im ersten bzw. letzten Zeitpunkt werden immer erster Ordnung berechnet.

## Reflektiertes Schallfeld

Die Berechnung des reflektierten Schallfeldes basiert auf den Beschleunigungsrandbedingungen an den Oberflächen der passiven Hindernisse. Mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor der passiven Hindernisse  $\underline{n}^R$  definieren sich diese nach Gleichung (4.1.14) durch

$$\underline{n}^R \underline{a}^R = \frac{\nabla p(\underline{x}, t) \underline{n}^R}{\rho}.$$

Um auf der rechten Seite den Gradienten von  $p$  zu berechnen, muss die Lösung aus der Gleichung (6.1.6) nochmals nach der Raumvariablen  $\underline{x}$  differenziert werden. Dazu ist eine Erweiterung der Rechenregeln (6.1.1) und (6.1.2), die die Differenzierung nach der Raumvariable  $\underline{x}$  durch eine Differenzierung nach dem Abstand  $R$  ersetzt, notwendig. Sie lautet

$$\frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\delta_{ij}(x_k - y_k)}{R^2} + \frac{\delta_{ik}(x_j - y_j)}{R^2} + \frac{\delta_{jk}(x_i - y_i)}{R^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \quad (6.1.7)$$

$$+ \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^3} \left( \frac{\partial^3}{\partial R^3} - \frac{3}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{3}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \right). \quad (6.1.8)$$

Darin kommen die Ableitungen dritter Ordnung nach  $R$  vor. Werden die Ableitungen auf die Integranden in Gleichung (6.1.6) angewendet, ist eine Erweiterung der Ableitungsregeln (6.1.3) und (6.1.4) erforderlich

$$\frac{\partial^3}{\partial R^3} \left( \frac{1}{R} T_{ij}(\underline{y}, t - M \frac{R}{c_\infty}) \right) = -\frac{M^3}{c_\infty^3 R} \frac{\partial^3 T_{ij}}{\partial t^3} - \frac{3M^2}{c_\infty^2 R^2} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} - \frac{4M}{c_\infty R^3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} - \frac{6}{R^4} T_{ij}. \quad (6.1.9)$$

Die Rechenregel kann analog auf die Oberflächenintegrale  $(\frac{f_j}{r})$  übertragen werden. Da-

mit lassen sich die Beschleunigungsrandbedingungen berechnen, sie lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla p \underline{n}^R}{\rho} &= \frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{M^5}{c_\infty^3 R} \left( -\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^3} \right) n_k^R \frac{\partial^3 T_{ij}}{\partial t^3} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{M^4}{c_\infty^2 R^2} \left( -6 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta_{ij}(x_k - y_k) + \delta_{ik}(x_j - y_j) + \delta_{jk}(x_i - y_i)}{R} \right) n_k^R \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{M^3}{c_\infty R^3} \left( -13 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^3} \right. \\
&\quad \left. + 3 \frac{\delta_{ij}(x_k - y_k) + \delta_{ik}(x_j - y_j) + \delta_{jk}(x_i - y_i)}{R} \right) n_k^R \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} dV \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho} \int_V \frac{M^2}{R^4} \left( -15 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^3} \right. \\
&\quad \left. + 3 \frac{\delta_{ij}(x_k - y_k) + \delta_{ik}(x_j - y_j) + \delta_{jk}(x_i - y_i)}{R} \right) n_k^R T_{ij} dV \\
&- \frac{1}{4\pi\rho} \int_S \frac{M^2}{c_\infty^2 R} \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^2} n_k^R \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} dS \\
&- \frac{1}{4\pi\rho} \int_S \frac{M}{c_\infty R^2} \left( \frac{3(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^2} - \delta_{ij} \right) n_k^R \frac{\partial f_j}{\partial t} dS \\
&- \frac{1}{4\pi\rho} \int_S \frac{1}{R^3} \left( \frac{3(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{R^2} - \delta_{ij} \right) n_k^R f_j dS. \tag{6.1.10}
\end{aligned}$$

## 6.2 Optimiertes Finite-Differenzen Verfahren

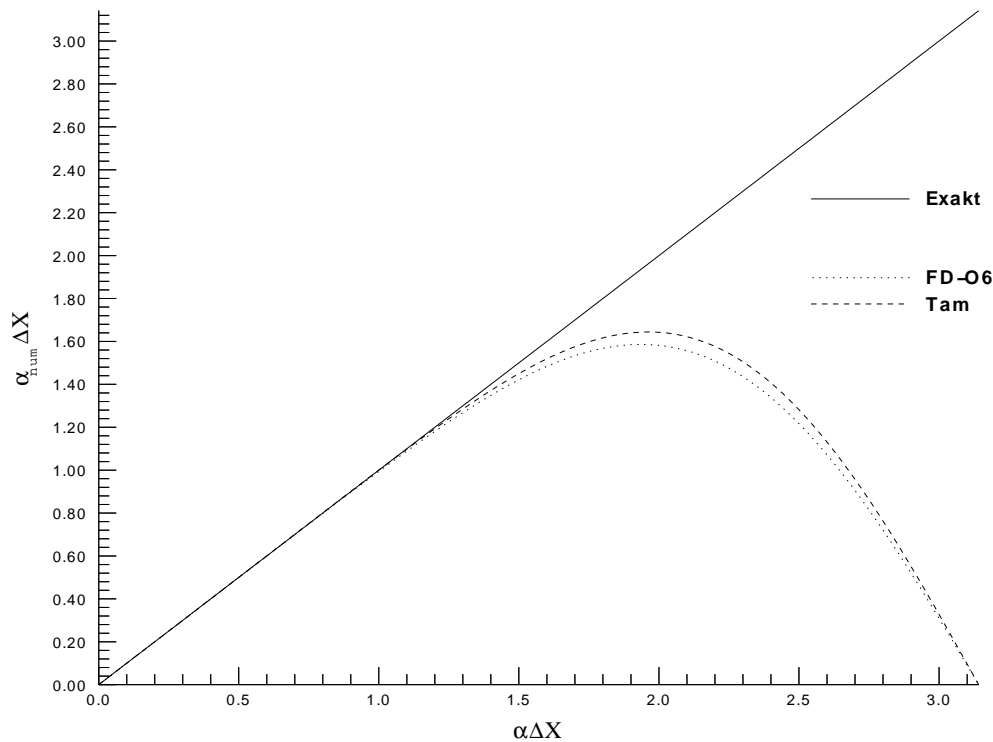
Das *DRP*, *Dispersion Relation Preserving Verfahren* von Tam [50] ist ein Finite-Differenzen (FD) Verfahren mit *Runge-Kutta*- oder *Adams-Bashforth*-Zeitintegration, das bezüglich seiner spektralen Eigenschaften in Raum und Zeit optimiert wurde. Im folgenden wird auf die Raumdiskretisierung, die Zeitintegration nach *Adams-Bashforth*, eine künstliche Dämpfung und die Randbedingungen eingegangen.

### Raumdiskretisierung

Die Koeffizienten  $a_i$  eines Finite-Differenzen Verfahrens mit  $(2N + 1)$  Stützstellen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j \cdot f(x + j \cdot \Delta x) \tag{6.2.1}$$

werden gewöhnlich durch einen Taylorreihenabgleich bestimmt, so dass eine möglichst hohe Abbruchfehlerordnung erreicht wird. Die Idee des *DRP*-Verfahrens ist, nicht alle Koeffizienten des 7-Punkte-Sterns (6.2.1) aus dem Taylorreihenabgleich zu bestimmen.



**Abbildung 6.2.1:** Vergleich der exakten mit der numerischen Wellenzahl.

Dadurch bleibt ein Koeffizient unbestimmt, so dass sich das Verfahren hinsichtlich seiner spektralen Eigenschaften optimieren lässt. Die Koeffizienten des numerischen Verfahrens gehen direkt in die Bestimmung der numerisch abgebildeten Wellenzahl  $\alpha_{num}$  ein. Dadurch können die Dispersionsrelationen aus den Gleichungen (2.3.8) - (2.3.11) in Abschnitt 2.3 im kurzwelligen Bereich besser erfüllt werden. Durch ein Fehlerintegral der Form

$$E(\lambda) = \int_{-\zeta}^{\zeta} (\alpha \Delta x - \alpha_{num} \Delta x)^2 d(\alpha \Delta x) \stackrel{!}{=} \text{Min.}, \quad (6.2.2)$$

das die numerisch abgebildete Wellenzahl  $\alpha_{num}$  mit

$$\alpha_{num} = \frac{2}{\Delta x} \sum_{j=1}^N a_j \cdot \sin(j \alpha \Delta x) \quad (6.2.3)$$



und die analytische Wellenzahl  $\alpha$  vergleicht, lassen sich die dissipativen und disperiven Eigenschaften des Finite-Differenzen-Verfahrens modifizieren. Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= -a_{-1} = 0.7708823805, \\ a_2 &= -a_{-2} = -0.1667059044, \\ a_3 &= -a_{-3} = 0.0208431428 \end{aligned}$$

stellen ein *DRP*-Verfahren der Ordnung 4 dar und wurden in Tam [50] für das Intervall  $\zeta = 1.1$  angegeben. Die spektralen Eigenschaften des optimierten *DRP*-Verfahrens sind in Abbildung 6.2.1 mit denen eines gewöhnlichen Finite-Differenzen-Verfahrens der Ordnung 6 verglichen.

### Zeitintegration

Eine analoge Vorgehensweise ist für die Zeitintegration möglich. Ein Mehrstellenintegrationsverfahren für die Unbekannte  $f$  mit  $k$  Stützstellen hat die Form

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} b_j \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{n-j}. \quad (6.2.4)$$

Für ein Adams-Bashforth Verfahren lassen sich die Koeffizienten optimieren, so dass verbesserte Eigenschaften hinsichtlich der Wellenausbreitung erzielt werden. Analog zur *DRP*-Raumdiskretisierung wird das Fehlerintegral

$$E = \int_0^\zeta (\sigma(\omega\Delta t - \Re(\omega_{num}\Delta t))^2 + (1 - \sigma) \Im(\omega_{num}\Delta t)^2) d(\omega\Delta t) \quad (6.2.5)$$

minimiert, das eine Beziehung zwischen der analytischen Frequenz  $\omega$  und der numerisch abgebildeten Frequenz

$$\omega_{num} = \frac{i(e^{-i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t \sum_{j=0}^{k-1} b_j e^{-i\omega j \Delta t}} \quad (6.2.6)$$

herstellt. Das führt auf die Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_0 &= 2.3025580888, \\ b_1 &= -2.4910075998, \\ b_2 &= 1.5743409332, \\ b_3 &= -0.3858914222, \end{aligned}$$

die in Tam [50] für die Parameter  $\sigma = 0.36$  und  $\zeta = 0.5$  bestimmt wurden.

### Künstliche Dämpfung

Für die Implementierung einer künstlichen Dämpfung zur effektiven Filterung von hochfrequenten Lösungsanteilen wurde die von Tam in [50] entwickelte Formulierung verwendet. Diese lässt niederfrequente Anteile in der Lösung nahezu unberührt. Auf der rechten Seite der linearisierten Evolutionsgleichungen wird ein Viskositätsterm der Form

$$-\frac{D}{c_\infty \Delta x} \sum_{j=-3}^3 d_j \underline{f}_{i+j} \quad (6.2.7)$$

eingeführt. Darin stellt  $c_\infty$  die Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung und  $D$  einen wählbaren Dämpfungsfaktor dar ( $D = 7.0$ ). Die Koeffizienten  $d_j$ , die mit der gesuchten Lösung im Punkt  $\underline{f}_{i+j}$  multipliziert werden, lassen sich durch eine Optimierung im Frequenzraum - ähnlich zum Vorgehen bei der *DRP*-Optimierung - herleiten. Sie lauten

$$d_0 = 0.3276986608,$$

$$d_1 = d_{-1} = -0.235718815,$$

$$d_2 = d_{-2} = 0.0861506696,$$

$$d_3 = d_{-3} = -0.0142811847.$$

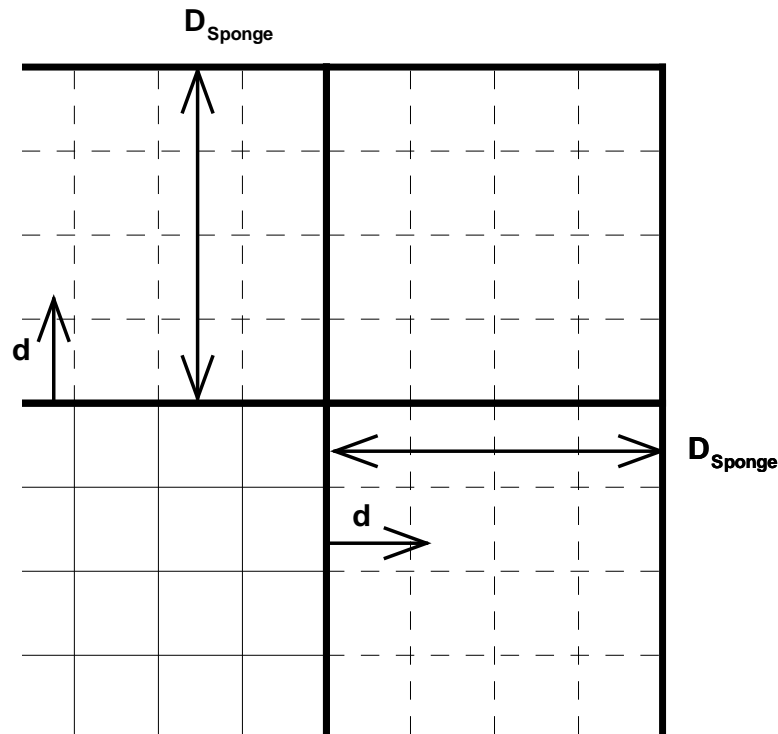
und sind aus Tam [50] entnommen.

### Randbedingungen

Die Randbedingungen bei aeroakustischen Problemstellungen haben oftmals die Aufgabe, die reflektionsfreie Abstrahlung der Lösung in das Fernfeld zu garantieren. Das ist notwendig, da das numerische Rechengebiet keine unendliche Ausdehnung haben kann und der Anwender an möglichst kleinen Rechengebieten interessiert ist.

Um das zu erreichen, werden die berechneten Lösungen in einem Bereich vor dem Rand des Rechengebiets, der als *Sponge-Layer* bezeichnet wird, vollständig abgesaugt, siehe Abbildung 6.2.2. Die Reflektionsfreiheit wird nicht erzeugt, in dem das Fernfeld simuliert wird, sondern wird durch langsames Ausblenden der Lösung erreicht. Die Absaugung erfolgt auf einer Schicht an der Innenseite des Gebietsrandes, die sich über mehrere Punkte ausdehnt und die als *Sponge-Layer* bezeichnet wird. In ihr werden auf geeignete

Weise Senken zur Absaugung definiert. Die Ausbreitungsgleichungen werden so um einen negativen Quellterm erweitert, der nur im Bereich des *Sponge-Layers* von Null verschieden ist. Die Absaugung ist direkt proportional zum Zustandswert der Lösung.



**Abbildung 6.2.2:** Sponge-Layer für reflektionsfreie Randbedingungen.

Ein Faktor  $\sigma$ , der im Bereich des *Sponge-Layers* langsam ansteigt, sorgt dafür, dass die Absaugung behutsam eingeleitet wird. Der Verlauf von  $\sigma$  wurde mit einer Parabel 6. Ordnung

$$\sigma = \left(\frac{d}{D_{Sponge}}\right)^6$$

definiert. Die Variable  $d$  gibt an, wie weit ein Punkt im *Sponge-Layer* der Breite  $D_{Sponge}$  liegt.

Das *Sponge-Layer* Konzept stellt eine Abwandlung des von Hesthaven [20] und [22] vorgestellten *PML*-Konzepts (*PML*, *Perfectly Matched Layer*) dar. Nachteilig auf die Qualität der Randbedingungen wirkt sich allerdings aus, dass die auslaufenden Schallwellen

in Bereichen, in denen sie nicht senkrecht auf die Ränder treffen auch eine Dämpfung tangential zur Ausbreitungsrichtung erfahren. Für Reflektionsfreiheit wäre jedoch eine Dämpfung, die nur normal zur Wellenfront wirkt, nötig. Dies wird beim *PML*-Konzept berücksichtigt, ist aber deutlich aufwendiger.

Eine Übersicht über weitere Konzepte von reflektionsfreien bzw. aeroakustischen Randbedingungen geben Tam in [51] und Lele in [25].

### 6.3 Koppelung von Strömung und Akustik

Die aeroakustischen Modelle aus den Kapiteln 4 und 5 teilen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie in der aeroakustischen Simulation eine Trennung von Strömung und Akustik durch eine vorausgehende Strömungsberechnung und eine anschließende Akustiksimulation vorschreiben.

Daraus resultiert der folgende schematische Ablauf einer hybriden, aeroakustischen Simulation. Die Details der einzelnen Schritte hängen dabei wesentlich von der verwendeten aeroakustischen Modellierung ab:

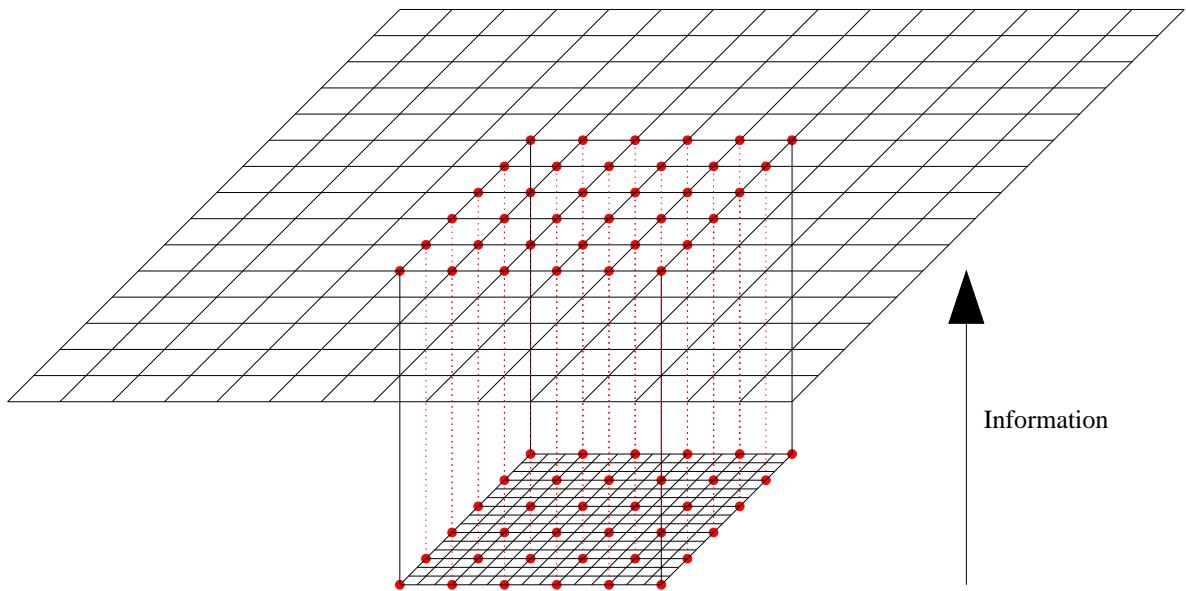
1. Durchführung einer Strömungssimulation  
⇒ Schallerzeugung
2. Berechnung der akustischen Quellterme  
⇒ Modellierung der Schallerzeugung
3. Durchführung der Akustiksimulation  
⇒ Ausbreitung in das Fernfeld

Die akustische Analogie von Lighthill und deren Erweiterung von Ffwooc-Williams und Hawkings aus Abschnitt 4.1 basieren im ersten Schritt auf einer kompressiblen Strömungssimulation. Vom Grad der Vereinfachung des Modells bzw. der zugrunde liegenden Strömung hängt ab, ob eine inkompressible Strömungssimulation Verwendung findet. Nach der Vorschrift der Autoren werden anschließend die Quellterme im Strömungsgebiet berechnet. Durch die analytische Integration der Gleichung für die akustische Ausbreitung, schließt sich ein Randwertverfahren, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, an. Das Verfahren ist sehr effizient, da neben der Strömungssimulation kein weiteres Feldproblem gelöst werden muß.

Im Fall der Einskalen- und Mehrskalenmodellierung im Kapitel 5 und des aeroakustischen Modells von Hardin und Pope in Abschnitt 4.2 ist im ersten Schritt einer aeroakustischen Simulation eine inkompressible Strömungssimulation durchzuführen. Anschließend werden im zweiten Schritt ebenfalls die Quellterme der entsprechenden Modellierung be-

rechnet. Da die akustische Ausbreitung ebenfalls als Feldproblem gelöst wird, existiert für die Akustiksimulation ein weiteres Rechengebiet.

Zu beachten ist, dass nach Abbildung 6.3.1 das Rechengebiet der Strömungssimulation in das Rechengebiet der Akustiksimulation eingebettet ist. Der Informationstransfer findet über die Quellterme des zweiten Schritts unidirektional von der Strömung zur Akustik statt. Daraus folgt, dass eine Rückkoppelung der Akustik auf die Strömung durch die hybride Modellierung nicht beschrieben wird. Schließlich wird die akustische Ausbreitung mit einem Verfahren hoher Ordnung nach Abschnitt 6.2 berechnet.



**Abbildung 6.3.1:** Koppelung über eingebettete Rechengebiete.

Einzig die aeroakustische Mehrskalenmodellierung aus Abschnitt 5.2.4 geht explizit auf die Unterschiedlichkeit der Rechengebiete und der numerischen Diskretisierungen für die Strömungssimulation in Schritt 1 und die Akustiksimulation in Schritt 3 ein. Das stellt einen wesentlichen Aspekt in der Berechnung der Quellterme in Schritt 2 dar. Die Quellterme liegen im Strömungsgebiet vor, werden aber im Akustikgebiet benötigt. Durch die Verwendung von unterschiedlichen Raumskalen in der Strömungssimulation und der Akustiksimulation, ermöglicht die Mehrskalenmodellierung eine Unterscheidung. Die Mehrskalenmodellierung schreibt explizit vor, die Quellterme bei der Transformation vom Strömungsgebiet zum Akustikgebiet zu mitteln.



## 7 Numerische Ergebnisse

Im ersten Abschnitt 7.1 werden die numerischen Verfahren der vorangegangenen Abschnitte 6.1 und 6.2 validiert. Dafür werden analytische Testfälle mit bekannter Lösung herangezogen. Nachdem die Verwendbarkeit der Numerik für aeroakustische Problemstellungen nachgewiesen wurde, untersucht der zweite Abschnitt 7.2 die aeroakustischen Modelle aus den Kapiteln 4 und 5. Diese werden anhand des rotierenden Wirbelpaars getestet. Auch für diesen aeroakustischen Testfall existiert eine analytische Lösung, so dass eine Verifizierung möglich ist.

### 7.1 Validierung der Numerischen Verfahren

Die Validierung der numerischen Verfahren hat zum Ziel, die Eignung der numerischen Methoden für die aeroakustische Simulation zu garantieren. Besonderer Wert wird in Punkt 7.1.2 auf die spektralen Eigenschaften des Finite-Differenzen Verfahrens aus Abschnitt 6.2 gelegt.

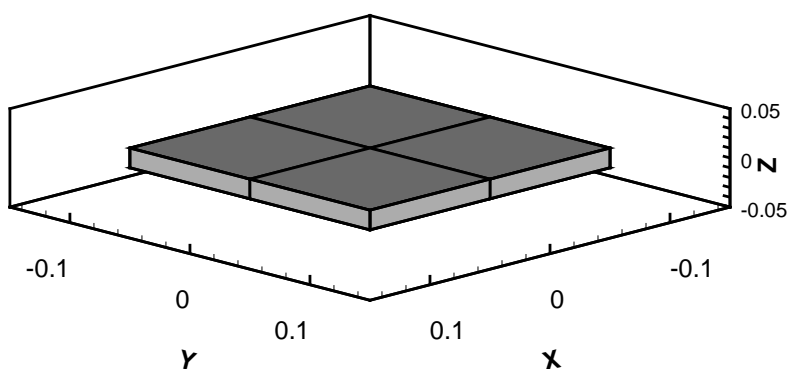
#### 7.1.1 Validierung der analytischen Integrationsmethode

Nacheinander werden mit Hilfe von analytischen Beispielen die Dipol-Quellterme und die Quadrupol-Quellterme der Integrationsmethode validiert. Durch die Verwendung von Testfällen mit einer analytisch integrierbaren Lösung ist eine Überprüfung möglich.

#### Validierung der Dipol-Quellterme am Beispiel einer ebenen Platte

Zur Validierung der Dipol-Quellen wird das Beispiel einer ebenen Platte von Wandinger [55] verwendet. Da für dieses konstruierte Beispiel die Lösungen für das Schallfeld nach Gleichung (6.1.6) analytisch berechnet werden können, eignet es sich zur Vali-

dierung des numerischen Verfahrens. Das Beispiel hat keinen strömungsphysikalischen Hintergrund. Bei dem umströmten Körper handelt es sich um eine ebene Platte, deren Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die quadratische Platte hat eine Kantenlänge von 0.2 und eine Dicke von 0.02. Die Plattenober- und unterseite ist parallel zur  $xy$ -Ebene und jeweils mit vier Gitterzellen diskretisiert.



**Abbildung 7.1.1:** Ebene Platte mit Diskretisierung.

Auf der Oberseite wird der Druck  $p_O$  vorgegeben durch

$$p_O = \begin{cases} \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{für } T < t \leq 2T \end{cases}$$

und auf der Unterseite ist der Druck  $p_U = -p_O$  vorgeschrieben. Die Impulsdauer  $T$  beträgt 0.01 und der Druck auf den Seitenflächen ist Null. Das ungestörte Medium, in dem sich der Schall mit  $c_\infty = 340$  ausbreitet, hat die Dichte  $\rho = 1.21$ . Analog zur Vorgehensweise in [55] wird der zeitliche Verlauf des Schalldrucks in einem Beobachtungspunkt  $\underline{x}_B$  berechnet. Dieser befindet sich in einem Abstand von 0.34 über dem Mittelpunkt der Platte, die in Abbildung 7.1.1 dargestellt ist, und hat die Koordinaten  $\underline{x}_B = (0, 0, z_B = 0.34)$ .



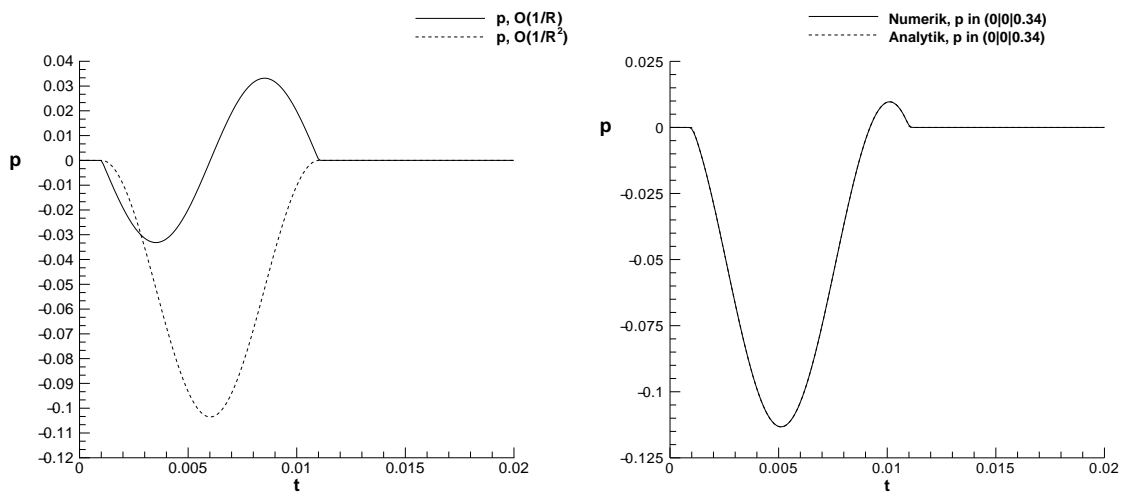
Die numerischen Resultate werden mit einer analytische Lösung verglichen, die im folgenden hergeleitet wird. Dabei wird angenommen, dass

- die Diskretisierung der Plattenoberseite durch einen Referenzpunkt in  $\underline{y}_O = (0, 0, z_O)$  mit nach außen gerichtetem Normalenvektor  $\underline{n}_O = (0, 0, 1)$  vereinfacht dargestellt wird,
- die Diskretisierung der Plattenunterseite durch einen Referenzpunkt in  $\underline{y}_U = (0, 0, z_U)$  mit nach außen gerichtetem Normalenvektor  $\underline{n}_U = (0, 0, -1)$  vereinfacht dargestellt wird,
- die Plattendicke zwischen Plattenoberseite  $z_O$  und Plattenunterseite  $z_U$  als klein im Vergleich zum Abstand des Betrachters in  $\underline{x}_B$  angenommen werden kann, d.h.  $z_B - z_O \approx z_B$  und  $z_B - z_U \approx z_B$ ,
- wodurch sich der Abstand zwischen Beobachter und Quelle mit  $R_O = |z_B - z_O| \approx |z_B| = R$  und analog für  $R_U = |z_B - z_U| \approx |z_B| = R$  berechnet,
- was für die Auswertung der Strömungslösung zu den retardierten Zeitpunkten bedeutet, dass sich  $\tau_O = t - R_O/c_\infty \approx t - R/c_\infty = \tau$  und analog  $\tau_U = t - R_U/c_\infty \approx t - R/c_\infty = \tau$  ergeben.

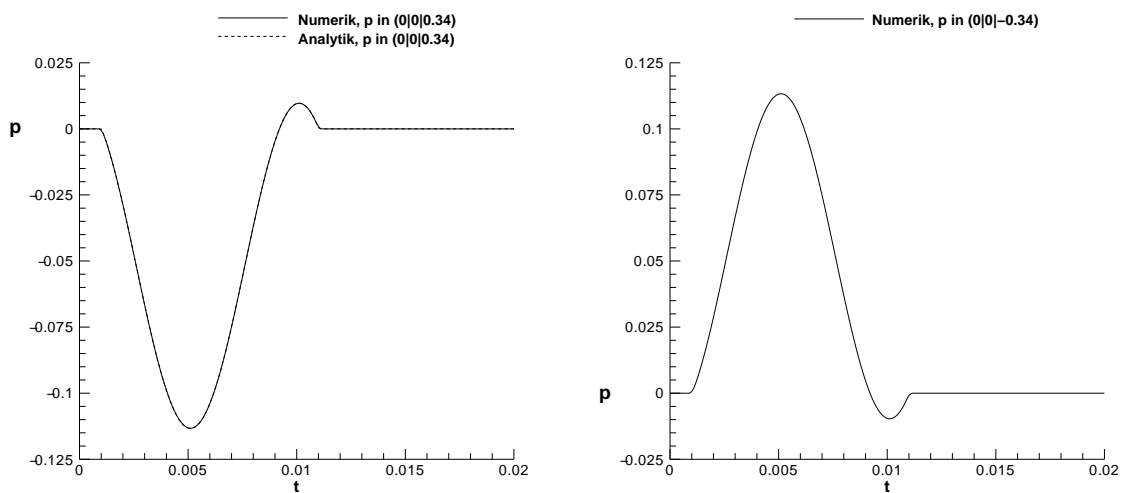
Ist  $S$  der Flächeninhalt der Plattenober- bzw. unterseite, so berechnen sich aus Gleichung (6.1.6) die Dipol-Anteile der Lösung zu

$$p(\underline{x}, t) \approx -\frac{S}{c_\infty T} \frac{z_B}{R^2} \sin(2\pi \frac{\tau}{T}) + \frac{S}{2\pi} \frac{z_B}{R^3} (\cos(2\pi \frac{\tau}{T}) - 1). \quad (7.1.1)$$

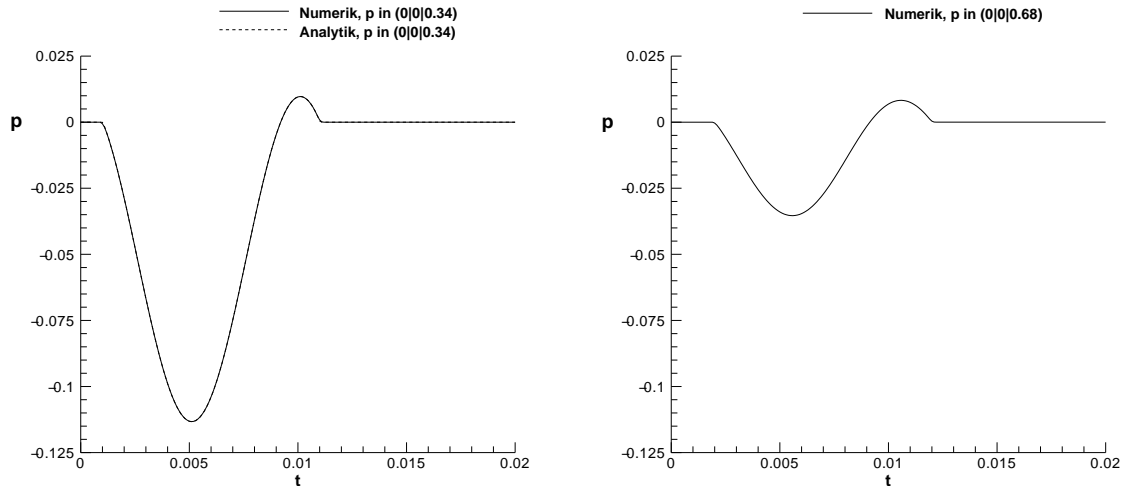
Die analytische Näherungslösung des Schallfeldes in Abbildung 7.1.2 (links) stellt die Anteile  $O(1/R)$  und  $O(1/R^2)$  mit einer durchgezogenen und einer gestrichelten Linie dar. Der mit der Integrationsmethode von Ffowcs-Williams und Hawkings berechnete Verlauf des Schalldrucks (durchgezogen) und der Vergleich mit der analytischen Näherungslösung (gestrichelt) sind in Abbildung 7.1.2 (rechts) dargestellt. Die Kurven für den Schalldruck aus der Integrationsmethode und der analytischen Näherung liegen aufeinander, sie stimmen sehr gut überein.



**Abbildung 7.1.2:** Analytische Lösungsanteile des akustischen Drucks (links) und Vergleich von analytischem und numerischem Gesamtdruck (rechts).



**Abbildung 7.1.3:** Akustischer Druck in gleicher Entfernung über der Platte (links) und unter der Platte (rechts).



**Abbildung 7.1.4:** Akustischer Druck über der Platte in einfacher Entfernung (links) und doppelter Entfernung (rechts).

Als nächstes wird der Schalldruck im gespiegelten Punkt  $\underline{x}_B = (0, 0, z_B = -0.34)$  unter der Platte und in einem doppelt so weit von der Platte entfernten Beobachtungspunkt  $\underline{x}_B = (0, 0, z_B = 0.68)$  mit der Integrationsmethode berechnet. Durch einen Vergleich mit der analytischen Näherung kann das Amplitudenverhalten überprüft werden. Die Berechnungsergebnisse sind in Abbildung 7.1.3 für den Punkt unterhalb der Platte dargestellt. Die Umkehrung des Vorzeichens wird korrekt wiedergegeben. Die verringerte Amplitude im doppelt so weit entfernten Punkt ist in Abbildung 7.1.4 deutlich zu erkennen. Die akustische Welle kommt nach der doppelten Zeit im Beobachtungspunkt an. Alle Merkmale werden von der Integrationsmethode von Ffwoes-Williams und Hawkings korrekt wiedergegeben.

### Validierung der Quadrupol-Quellterme am Beispiel der Diagonalströmung

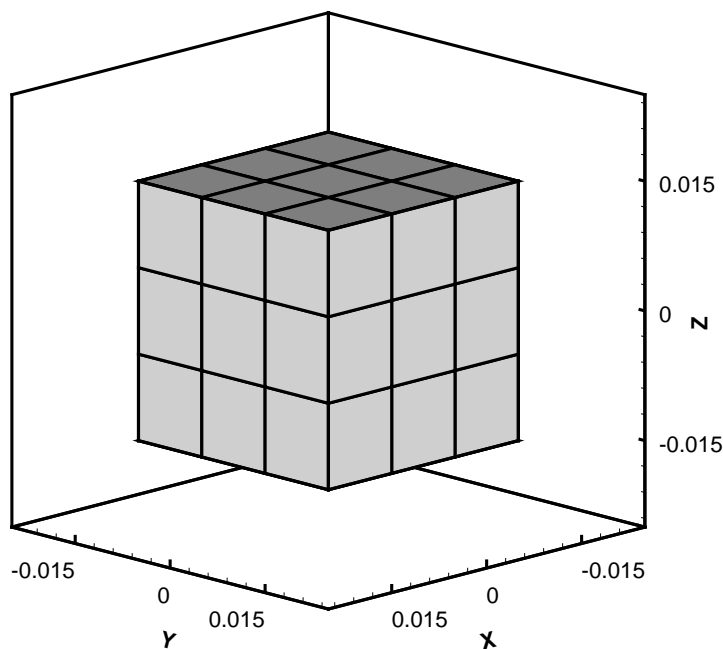
Zur Validierung der Quadrupol-Quellterme wird ebenfalls ein konstruierter Testfall aus [11] verwendet, dessen Lösungen für den Schalldruck aus (6.1.6) analytisch integriert werden können. Das Beispiel hat zwar keinen strömungsphysikalischen Hintergrund, eignet sich aber sehr gut zur Validierung.

Das Beispiel Diagonalströmung wird in einem würfelförmigen Rechengebiet mit Kantenlänge 0.03 berechnet, siehe Abbildung 7.1.5. Der Schwerpunkt des Würfels befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems. Das Rechengebiet reicht damit von  $-0.015$  bis  $0.015$  in jede Koordinatenrichtung. Mit einer Gitterschrittweite von  $dx = dy = dz = 0.01$  wird jede Richtung mit drei Gitterzellen aufgelöst. Das ergibt eine Gesamtgitter-

zellenanzahl von  $3^3 = 27$ . Im Rechengebiet wird die Dichte mit  $\rho = 1.21$  als konstant angenommen, die Strömungsgeschwindigkeiten  $\underline{u}$  sind durch die Vorschrift

$$u = v = w = \begin{cases} \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{für } T < t \leq 2T \end{cases}$$

gegeben. Die Strömungsgeschwindigkeiten werden in jede Koordinatenrichtung durch die gleiche Vorschrift definiert. Das erklärt die Bezeichnung Diagonalströmung für das Beispiel. Mit  $T$  wird die Zeitdauer bezeichnet, in der die Geschwindigkeiten zeitlich variieren und Schall erzeugen. Für das ungestörte Medium wird eine Schallgeschwindigkeit von  $c_\infty = 340$  angenommen. Analog zur Validierung der Dipol-Quellterme, wird der zeitliche Verlauf des Schalldrucks in einem Beobachtungspunkt berechnet. Er hat die Koordinaten  $\underline{x}_B = (x_B = 0.34, 0.34, 0.34)$ .



**Abbildung 7.1.5:** Beispiel Diagonalströmung mit Diskretisierung.

Damit der Schalldruck aus den Quadrupol-Quellen validiert werden kann, muss eine vereinfachte analytische Lösung hergeleitet werden. Um das zu erreichen, werden die folgenden Annahmen gemacht:

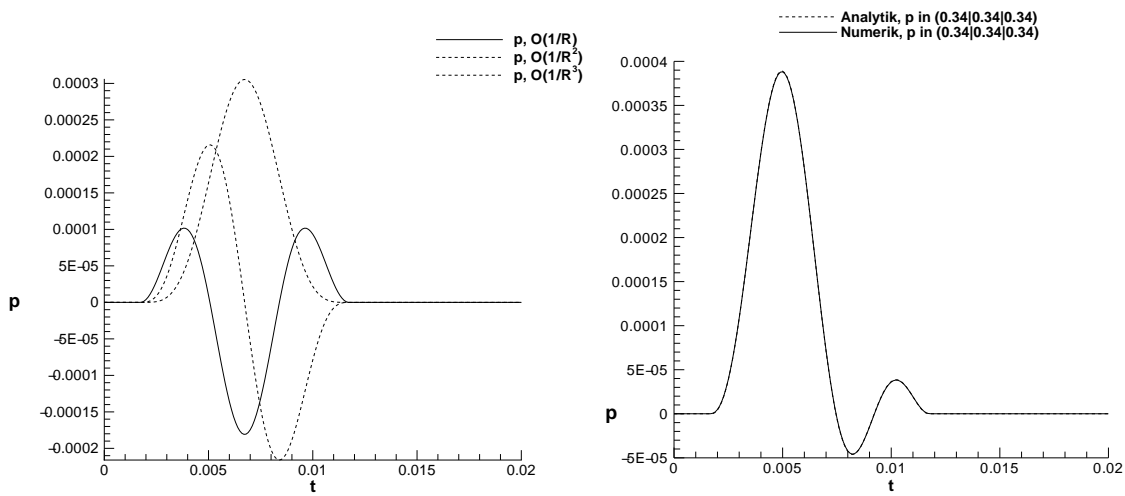
- das Rechengebiet durch einen Referenzpunkt  $\underline{y} = (0, 0, 0)$  dargestellt wird,
- die Abmessungen des Rechengebiets klein gegenüber dem Abstand zum Betrachter sind,
- wodurch sich der Abstand  $R$  zwischen Beobachter und Quelle für alle Quellpunkte als konstant  $R = \sqrt{(3)}|x_B|$  ergibt,
- was für die Auswertung der Strömungslösung zu den retardierten Zeitpunkten bedeutet, dass  $\tau = r - R/c_\infty$  ebenfalls für alle Quellpunkte eine Konstante ist.

Ist  $V$  das Volumen des Rechengebiets, so berechnen sich aus Gleichung (6.1.6) die Quadrupol-Anteile des akustischen Drucks zu

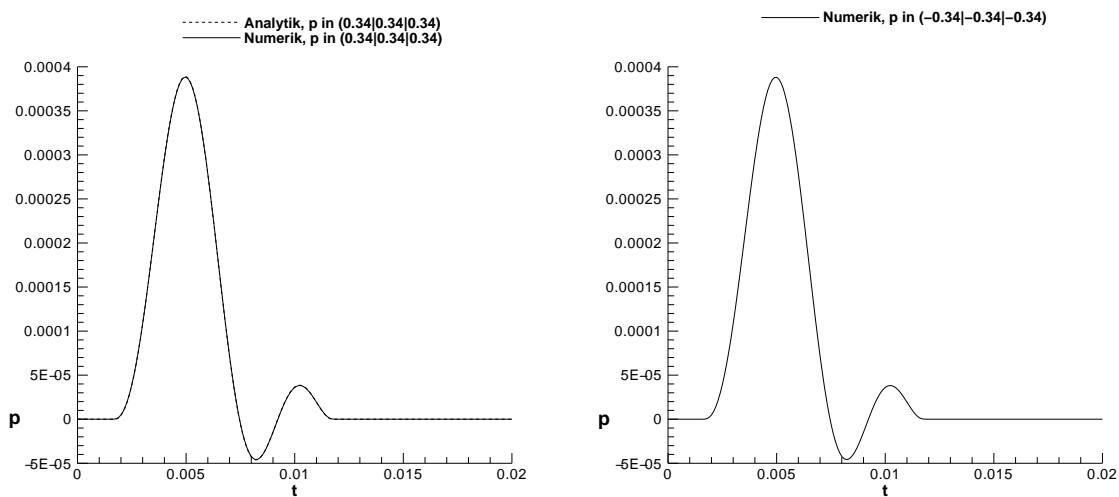
$$\begin{aligned}
 p(\underline{x}, t) \approx & -\frac{2\rho\pi V}{c_\infty^2 T^2} \frac{x_B^2}{R^3} \left( \sin^2\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) - \cos\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) \left(\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) - 1\right) \right) \\
 & + \frac{-6\rho V}{c_\infty T} \frac{1}{R^2} \sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) \left(\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) - 1\right) + \frac{3\rho V}{2\pi} \frac{1}{R^3} \left(\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) - 1\right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{7.1.2}$$

Die analytische Näherungslösung für den akustischen Druck ist in der Abbildung 7.1.6 (links) dargestellt. Den Lösungsanteilen der Ordnungen  $O(1/R)$  bis  $O(1/R^3)$  sind die Linienarten durchgezogen, gestrichelt und punktgestrichelt zugeordnet. Die mit der Integrationsmethode berechneten Druckverläufe (durchgezogen) und ihr Vergleich mit der analytischen Näherungslösung (gestrichelt) sind in der Abbildung 7.1.6 (rechts) dargestellt. Die Kurven für die Lösung der Integrationsmethode und der analytischen Näherung stimmen sehr gut überein.

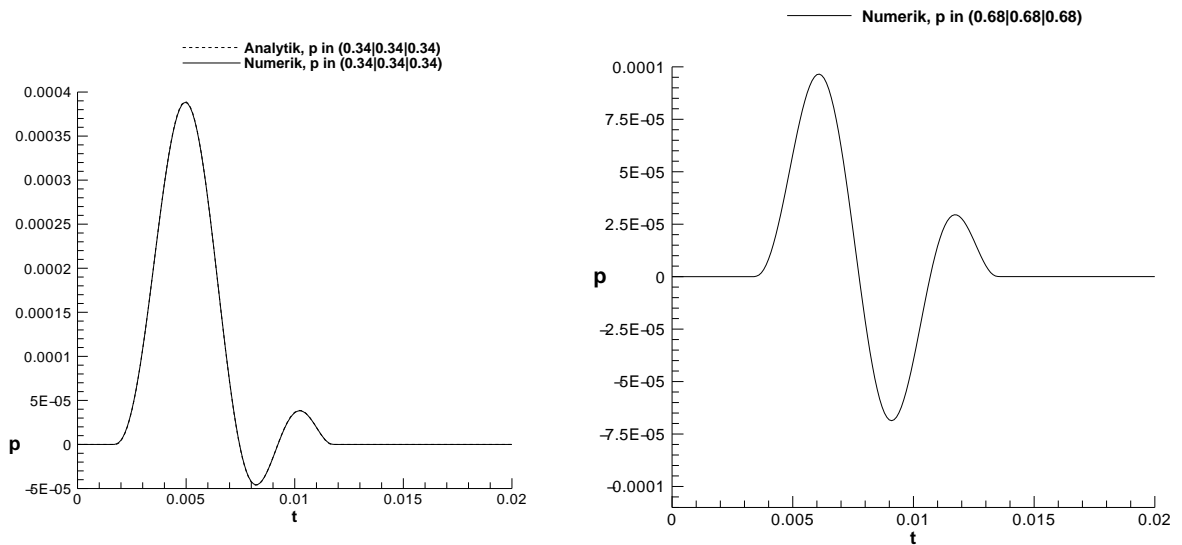
Als nächstes wird der Druck im gespiegelten Punkt  $\underline{x}_B = (x_B = -0.34, -0.34, -0.34)$  mit der Integrationsmethode von Ffwoes-Williams und Hawkings berechnet. Aus der Abbildung 7.1.7 für die analytische Näherungslösung geht hervor, dass der Druck unverändert im Beobachtungspunkt ankommt. Dieses Verhalten wird von der Integrationsmethode korrekt wiedergegeben, siehe Abbildung 7.1.8. Zum Abschluss der Untersuchung wird ein doppelt soweit vom Koordinatenursprung entfernter Beobachtungspunkt in  $\underline{x}_B = (x_B = 0.68, 0, 68, 0.68)$  mit der Integrationsmethode berechnet. Sowohl die verringerte Amplitude als auch die spätere Ankunft des Signals im Beobachtungspunkt werden korrekt berechnet, vgl. Abbildung 7.1.8.



**Abbildung 7.1.6:** Analytische Lösungsanteile des akustischen Drucks (links) und Vergleich von analytischem und numerischem Gesamtdruck (rechts).



**Abbildung 7.1.7:** Akustischer Druck im Originalpunkt (links) und im gespiegelten Punkt (rechts).



**Abbildung 7.1.8:** Akustischer Druck in einfacher Entfernung (links) und doppelter Entfernung (rechts).

### 7.1.2 Validierung des optimierten Finite-Differenzen Verfahrens

Dem numerischen Verfahren für die Ausbreitungsberechnung der akustischen Wellen kommt besondere Bedeutung zu. Es sind die spektralen Eigenschaften Dissipation und Dispersion, die zu beachten sind und die im folgenden genauer untersucht werden. Dazu werden die spektralen Auflösungseigenschaften, die in Abschnitt 6.2 theoretisch durch eine Fouriertransformation ermittelt wurden, anhand von praktischen Testfällen veranschaulicht.

Anhand des ersten Testfalls, der stehenden Welle, lässt sich beurteilen, wie gut das numerische Verfahren akustische Wellen mit fester Wellenzahl transportiert. Im zweiten Testfall, der Ausbreitung eines Gaußpulses, werden Wellenpakete mit einem Spektrum von Wellenzahlen, berechnet. Da für beide Testfälle eine analytische Lösung existiert, können die numerischen Ergebnisse validiert werden. Zusätzlich werden Vergleiche mit anderen hochauflösenden Verfahren wie den gewöhnlichen Finite-Differenzen, den Kompakten Differenzen oder den ENO/WENO (essentially non oscillatory/weighted essentially non oscillatory) Verfahren dargestellt.

#### Monofrequente, stehende Welle

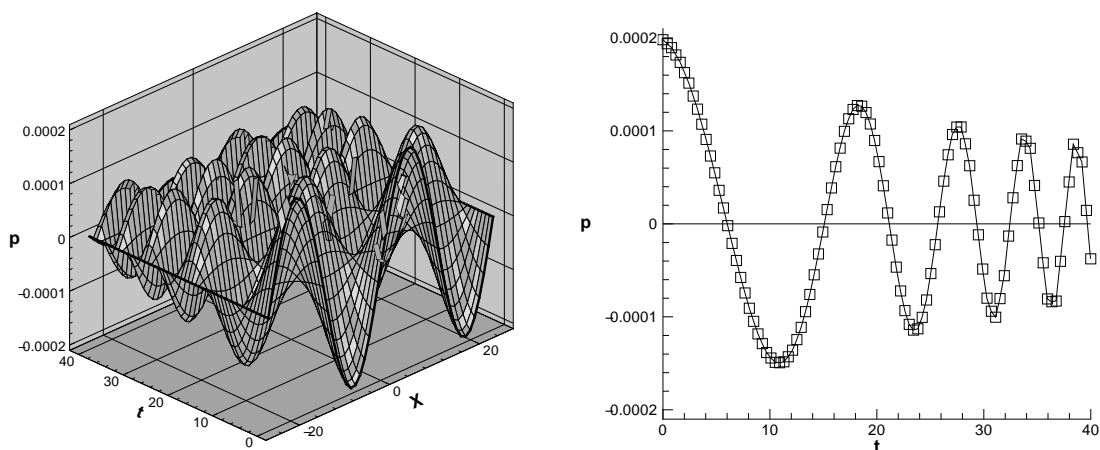
Der 1D-Testfall der stehenden Welle aus Alber [1] beruht auf der Ausbreitung einer Anfangsverteilung im Druck mit sinusförmigem Verlauf. Als analytische Lösung stellt sich

eine stehende Welle, d.h. eine Schwingungsform mit räumlich konstanten Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen der Form

$$p(x, t) = p_{max} \cos(\omega t) \sin(kx)$$

ein. Dabei ist  $p_{max}$  die konstante Amplitude der Anfangsverteilung,  $\omega$  die Frequenz und  $k$  die Wellenzahl, welche über die Beziehung  $c = \frac{\omega}{k}$  mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  verknüpft sind. Das Rechengebiet ist gerade so gewählt, dass sich ein ganzzahliges Vielfaches der betrachteten Wellenlänge ergibt. Zusammen mit periodischen Randbedingungen lässt sich damit auf einem begrenzten Rechengebiet eine weite Ausbreitung simulieren.

Wegen der Linearität der betrachteten Differentialgleichung und der Linearität des *DRP*-Verfahrens ist eine Dekomposition und Superposition des Lösungsverlaufes möglich. So kann aus den Eigenschaften, die in diesem Testfall für eine einzelne monofrequente Welle ermittelt werden, auf die Ausbreitung beliebiger Wellenpakete geschlossen werden. Die obige Gleichung gibt die exakte Lösung für die Schwankungen in der Druckvariable an. Die Schwankungen der Geschwindigkeit sind entsprechend um ein Viertel der Wellenlänge räumlich verschoben. Für die Beurteilung der Ergebnisse wird nur der Druck betrachtet.



**Abbildung 7.1.9:** Stehende Welle im Raum-Zeit-Diagramm (links) und im Schnitt an einer Stelle  $x=\text{const.}$  (rechts).

Die Abbildung 7.1.9 (links) zeigt exemplarisch eine zeitliche und räumliche Entwicklung der stehenden Welle, wie sie sich für ein numerisches Verfahren, das sowohl Dissipationsfehler als auch Dispersionsfehler einführt, ergibt. In 7.1.9 (rechts) ist ein Schnitt an einer



beliebigen Stelle  $x = \text{const.}$  des Raum-Zeit-Diagramms zu sehen. Es sind Dissipations-effekte zu erkennen, die sich in einer abnehmenden Amplitude darstellen. Gleichzeitig treten Dispersionsfehler auf, die eine Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit der Schwingungsdauer und der Frequenz bewirken.

Das Kriterium für den Fehler in der Amplitude

$$\text{AmpErr} = \frac{p_{max} - p_{num}}{p_{max}} \quad (7.1.3)$$

ist so definiert, dass ein Amplitudenfehler von Null eine unveränderte Amplitude bezeichnet. Ein positiver Amplitudenfehler weist auf eine verkleinerte Amplitude hin, wobei ein Fehler von Eins bedeutet, dass die Amplitude nicht mehr vorhanden ist. Ein negativer Amplitudenfehler bezeichnet eine anwachsende Amplitude und damit ein instabiles Verhalten des numerischen Verfahrens.

Das Kriterium, um eine veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit zu beschreiben, ist der Phasenfehler

$$\text{PhErr} = \frac{c_{num} - c}{c}. \quad (7.1.4)$$

Dabei wird die Schwingungsdauer  $T$  aus den Nullstellen des zeitlichen Drucksignals abgelesen und daraus über  $c = \frac{1}{T_k}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit ermittelt. Ein positiver bzw. ein negativer Phasenfehler deutet auf eine zu schnelle bzw. eine zu langsame Ausbreitung hin.

Da die räumliche Wellenlänge fest vorgegeben ist und sich während der numerischen Simulation nicht ändert, erlaubt dieser Testfall eine getrennte Beurteilung darüber, wie Amplitude und Wellengeschwindigkeit von einem numerischen Verfahren wiedergegeben werden. Untersucht werden Wellen mit unterschiedlichen räumlichen Auflösungen, vorzugsweise im kurzwelligen Bereich des Spektrums, für den die hochauflösenden Verfahren verbesserte Eigenschaften versprechen. Als Maß für die Auflösung einer Welle wird die Anzahl der auf eine Wellenlänge verteilten Gitterpunkte PPW (Points Per Wavelength) angegeben. Die Mindestauflösung wird dabei mit 4 PPW angesetzt. Die Ausbreitung der akustischen Wellen wurde auf einer Länge von 100 Perioden simuliert.

Die Abbildung 7.1.10, die den Dissipationsfehler darstellt, zeigt deutlich, dass die Verfahren aus der Strömungsmechanik ENO und WENO sich nicht für die Ausbreitungsrechnung von akustischen Wellen eignen. Der große Amplitudenfehler dieser Verfahren ist nur durch eine sehr hohe Auflösung der akustischen Welle (PPW größer als 15) zu kompensieren.

Mit deutlich kleinerer PPW-Zahl und damit deutlich weniger Rechenaufwand kommen die optimierten Finite-Differenzen Verfahren aus. Sie ermöglichen die Darstellung einer akustischen Wellenlänge mit acht Punkten pro Wellenlänge. Die Kompakten Differenzen Verfahren verhalten sich bezüglich des Amplitudenfehlers noch besser, denn ihnen genügt eine PPW-Zahl von sechs, um auf einen Amplitudenfehler kleiner als zwei Prozent zu kommen.

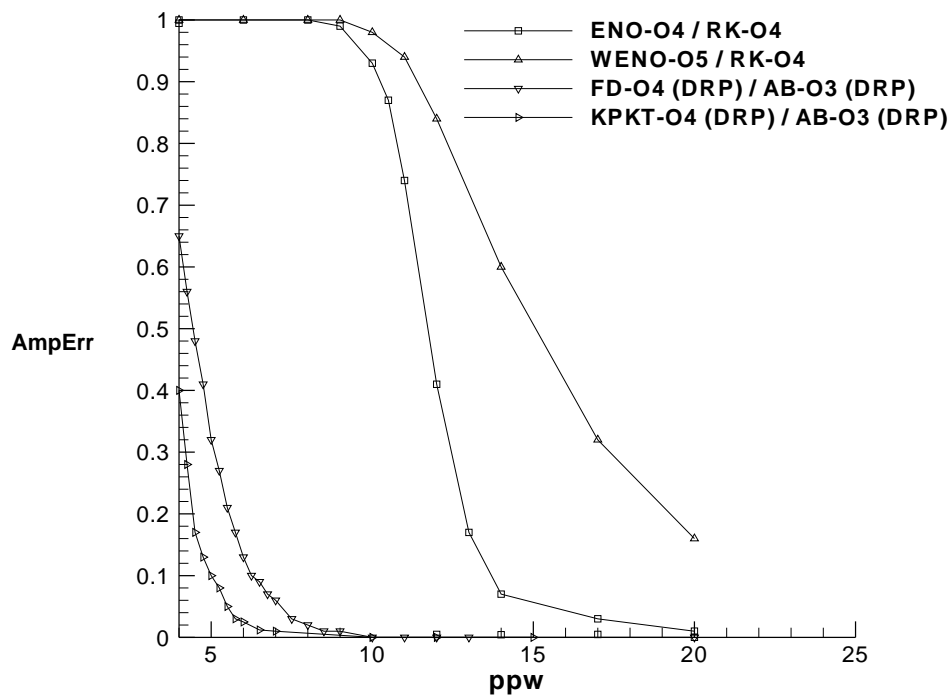


Abbildung 7.1.10: Amplitudenfehler der numerischen Verfahren.

In Abbildung 7.1.11 ist der Dispersionsfehler dargestellt, der Abweichungen in der Ausbreitungsgeschwindigkeit beschreibt. Einen positiven Phasenfehler besitzen die ENO- und WENO-Verfahren. Die Ausbreitung der akustischen Welle ist bei ihnen zu langsam. Einen negativen Phasenfehler weisen aufgrund des optimierten Zeitintegrationsverfahrens sowohl die Kompakten Finiten-Differenzen als auch die von Tam optimierten Finiten-Differenzen auf. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Bereich, der durch eine waagrechte Tangente an die Phasenfehlerkurve gekennzeichnet ist. Dort ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur geringfügig, falls Wellen mit leicht modifizierter Wellenzahl auftreten. Diese Eigenschaft wird als die Wiedergabe der Gruppengeschwindigkeit bezeichnet. Sie liegt bei den optimierten Finiten-Differenzen von Tam genau bei acht PPW, also derjenigen Auflösung, die einen geringen Amplitudenfehler besitzt.

Bei den Kompakten Finite-Differenzen wird ein optimaler Phasenfehler bei fünf PPW erreicht. Das ist nicht in Übereinstimmung mit einem optimalen Amplitudenfehler.

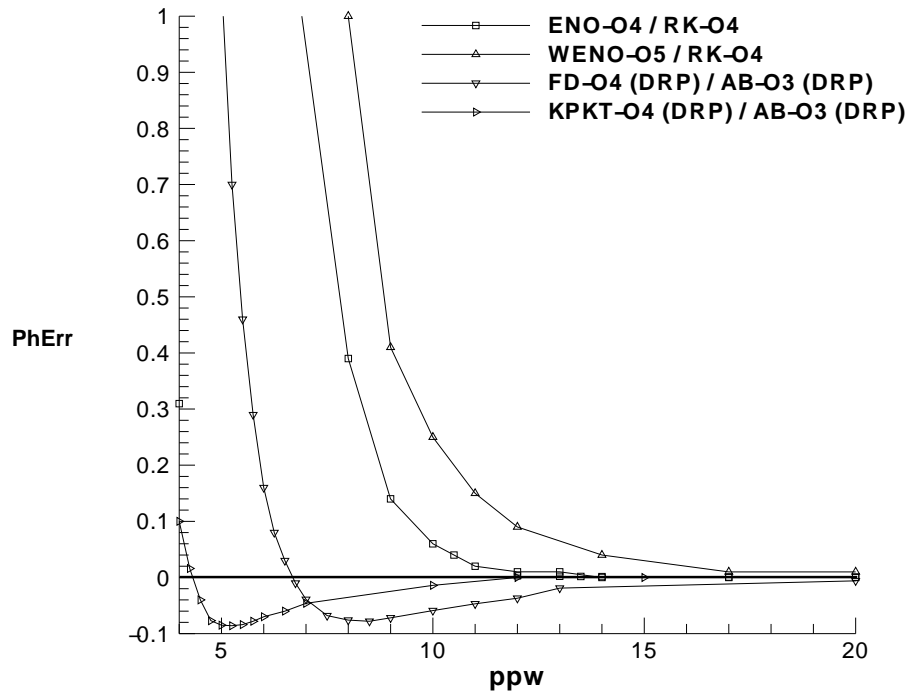


Abbildung 7.1.11: Phasenfehler der numerischen Verfahren.

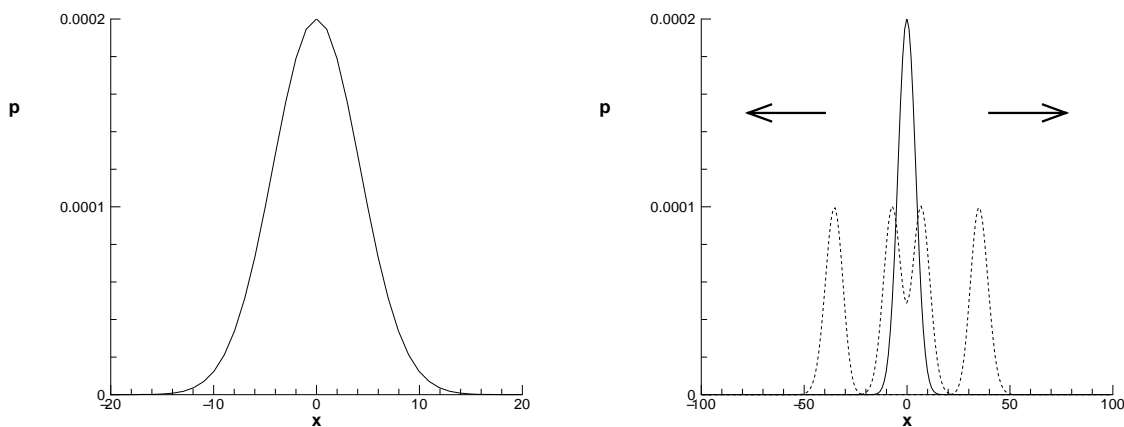
### Multifrequenter Gaußpuls

Der zweite 1D-Testfall [1] betrachtet die Ausbreitung einer Druckstörung in den Anfangsdaten, die durch eine Gaußverteilung mit Amplitude  $p_{max}$  und Halbwertsbreite  $b$  definiert wird

$$p(x, t) = p_{max} e^{-\ln(2)\left(\frac{|x|}{b^2}\right)}.$$

Sowohl die Dichte als auch die Strömungsgeschwindigkeit bleiben ungestört. Die Abbildung 7.1.12 (links) zeigt die Anfangsverteilung im Druck. Die rechte Grafik von 7.1.12 stellt schematisch dar, wie sich der Anfangsimpuls in zwei gegenläufige Wellenpakete aufteilt. Dabei entsprechen die beiden Teile jeweils wieder der anfänglichen Gauß-Verteilung mit halbiertes Amplitude.

Das Rechengebiet besitzt periodische Randbedingungen. Dadurch lassen sich die akustischen Wellen mit einem begrenzten Rechengebiet über eine große Ausbreitungsstrecke verfolgen.



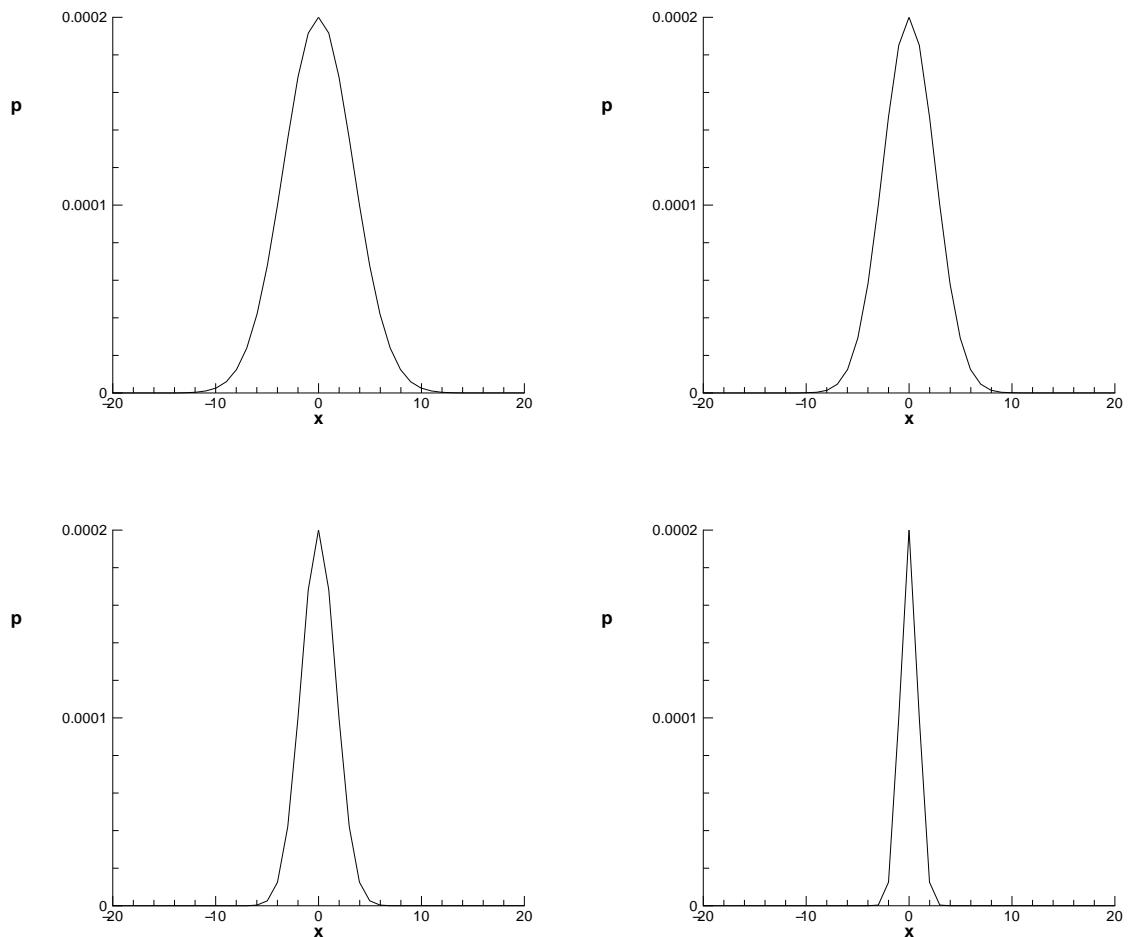
**Abbildung 7.1.12:** Anfangsverteilung (links) und Ausbreitung (rechts) einer Druckstörung mit Gaußverteilung.

In diesem Testbeispiel wird nun nicht mehr eine einzelne Welle mit vorgegebener Wellenlänge betrachtet, sondern ein ganzes Wellenpaket, das sich aus verschiedenen Teilwellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen und Frequenzen zusammensetzt. So lassen sich nicht mehr wie bei der monofrequenten, stehenden Welle getrennte Aussagen über die Dissipations- und Dispersionseigenschaften des Verfahrens machen.

Die sich verringerende Amplitude des Gaußpulses begründet sich nicht mehr nur aus dissipativen Effekten, sondern auch durch einen Phasenfehler in den einzelnen Teilwellen. Dies wird bei der Zusammensetzung der Teilwellen nach einem Durchlauf anhand der Amplitude der Resultierenden erkennbar. Die Auswirkung eines Phasenfehlers wird zusätzlich durch vor- bzw. nachlaufende Wellen sichtbar. Da Teilwellen mit positivem und negativem Phasenfehler auftreten, sind sowohl vorlaufende als auch nachlaufende Wellen zu erwarten.

Die Halbwertsbreite  $b$  in der Gaußschen Anfangsverteilung für den Druck ist ein Maß dafür, wie gut die räumliche Diskretisierung den Gaußpuls erfaßt. Die Abbildung 7.1.13 zeigt die Anfangsverteilung für unterschiedliche Halbwertsbreiten von  $b = 4 \Delta x$  bis  $b = 1 \Delta x$  (von oben links nach unten rechts). Daraus wird ersichtlich, dass sich steiler werdende Flanken des Gaußpulses ergeben, je gröber eine Anfangsverteilung aufgelöst ist.

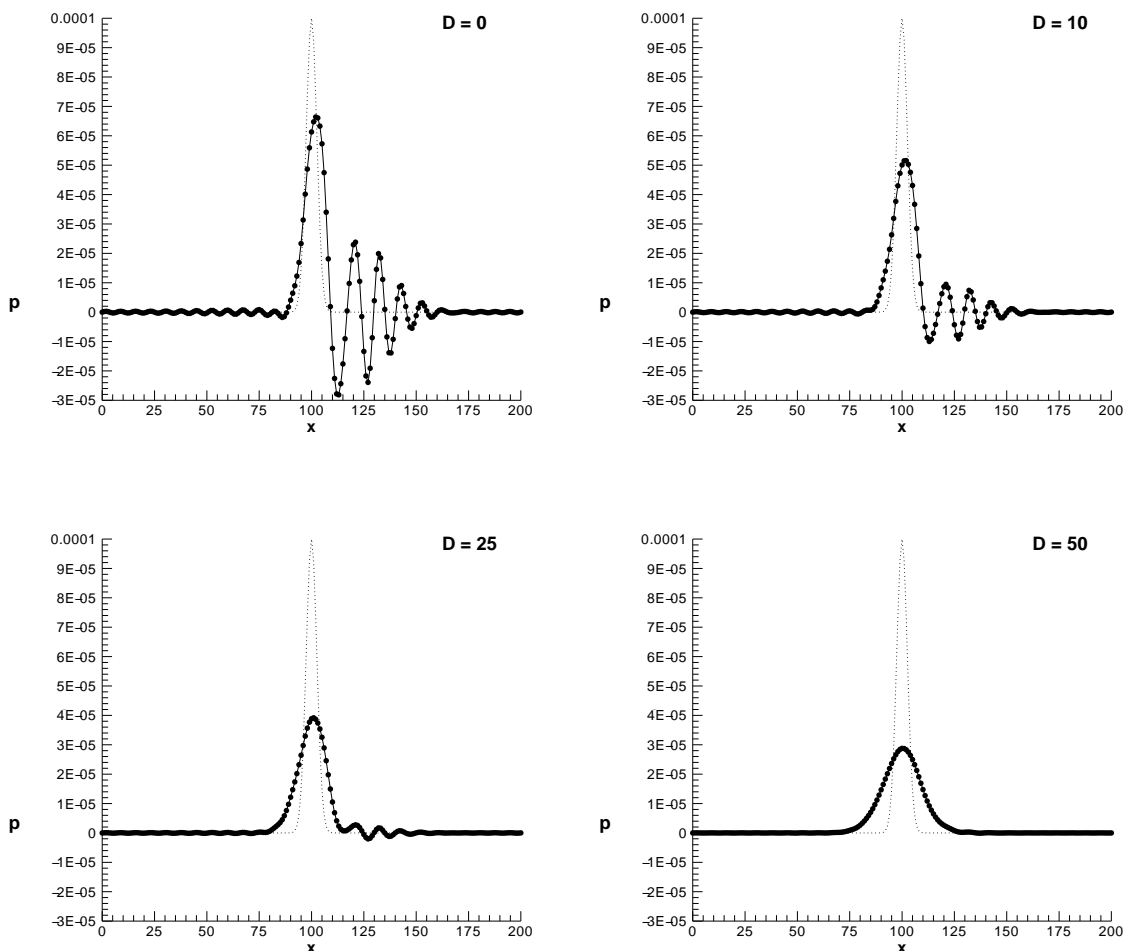
Eine steile Flanke bedeutet einen höheren Anteil an Wellen im kurzwelligen Bereich. Gerade die Ausbreitung der Wellen mit großer Wellenzahl macht den Unterschied zwischen einem hochauflösenden Verfahren gegenüber einem Verfahren niedrigerer Ordnung deutlich.



**Abbildung 7.1.13:** Gaußverteilung im Druck mit unterschiedlichen Halbwertsbreiten von  $b = 4 \Delta x$  bis  $b = 1 \Delta x$  (von oben links nach unten rechts).

Jede Simulation breitet den Gaußpuls 100 mal durch das Rechengebiet aus, dabei wird das einmalige Durchlaufen des Rechengebiets als eine Periode bezeichnet. Die Ergebnisse sind für das *DRP*-Verfahren dargestellt. Dabei wurde ein Gaußpuls mit der Halbwertsbreite  $b = 3 \Delta x$  untersucht.

Die Abbildung 7.1.14 zeigt, dass die Amplitude des Gaußpulses relativ gut erhalten bleibt. Allerdings sind nachlaufende und vor allem vorauslaufende Wellen erkennbar, die durch das numerische Verfahren erzeugt werden.



**Abbildung 7.1.14:** Ausbreitung eines Monopuls der Halbwertsbreite  $b = 3 \Delta x$ , *DRP*-Verfahren mit künstlicher Dämpfung  $D$ .

Diese können durch die Verwendung einer künstlichen Dämpfung unterdrückt werden. Das wirkt sich allerdings negativ auf die Erhaltung der Amplituden aus. Der Gaußpuls mit der Halbwertsbreite  $b = \Delta x$  stellt die schwierigsten Testbedingungen dar. Die Ergebnisse in Abbildung 7.1.15 zeigen deutlich, dass die Amplituden stärker gedämpft werden als im Fall  $b = 3 \Delta x$ .

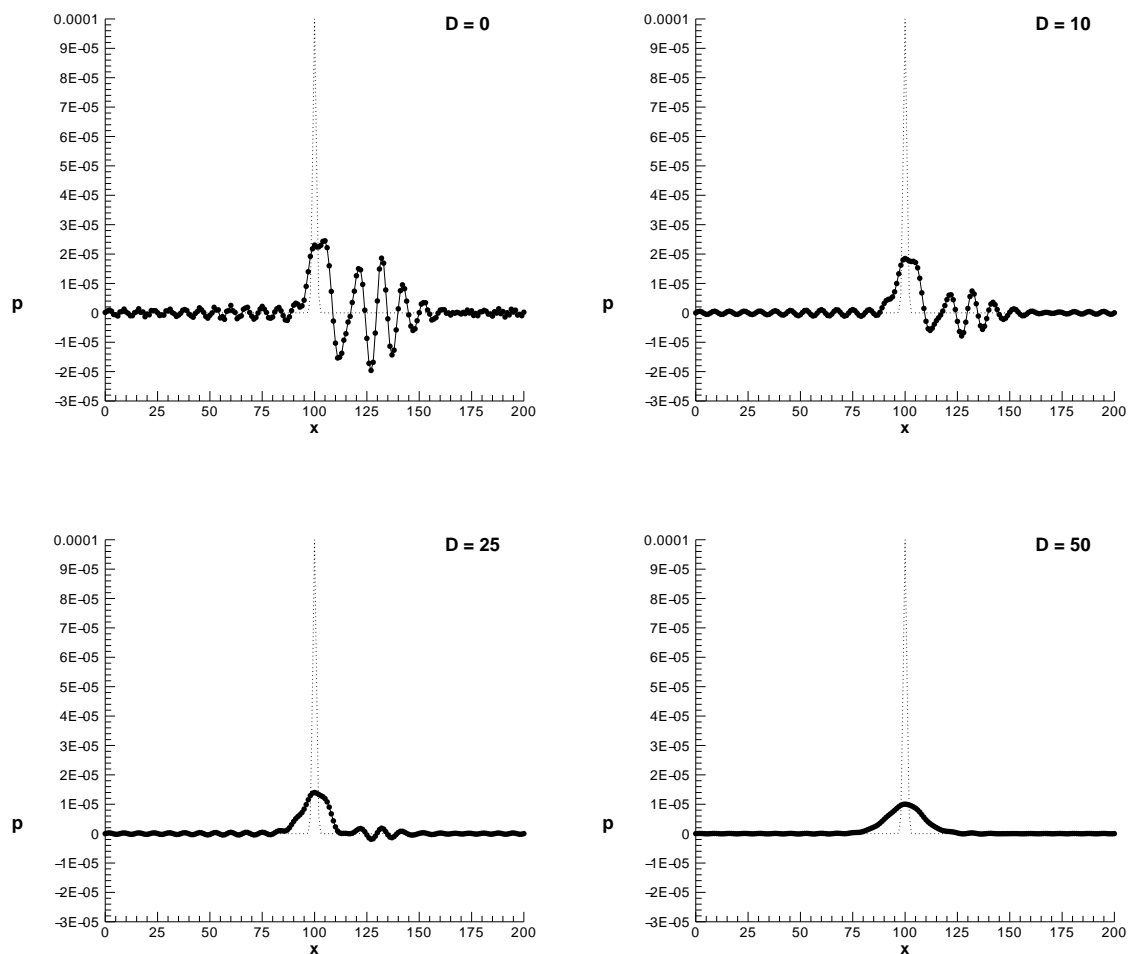


Abbildung 7.1.15: Ausbreitung eines Monopuls mit Halbwertsbreite  $b = 1 \Delta x$ , *DRP*-Verfahren mit künstlicher Dämpfung  $D$ .

## 7.2 Aeroakustischer Testfall: Rotierendes Wirbelpaar

Die aeroakustischen Modelle aus den Kapiteln 4 und 5 werden am Beispiel des rotierenden Wirbelpaares getestet. Das Beispiel hat in Müller und Obermeier [33] seinen Ursprung und bietet den Vorteil, dass durch seine Einfachheit der Mehrskalencharakter von Strömung und Akustik deutlich zum Ausdruck kommt. Das rotierende Wirbelpaar wird in der Literatur von Pao und Anderson [36], Hardin und Pope [19], Dahl [6] und Slimon et. al. [49], Ottosson [35] und Ewert [9] zur Validierung von aeroakustischen Verfahren verwendet.

Das Beispiel beschreibt zwei Potentialwirbel, die auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_0 = 1$  rotieren. Deren instationäres Strömungsfeld erzeugt spiralförmige, akustische Wellen mit einer Wellenlänge  $\lambda \approx 37.16$ , siehe Abbildung 7.2.1. Es stellt sehr deutlich den Mehrskalencharakter in den Raumskalen und den Amplituden von Strömungs- und Akustikgrößen dar.

Eine wertvolle Eigenschaft des rotierenden Wirbelpaares ist die Existenz einer analytischen, geschlossenen Lösung der induzierten Akustik im Fernfeld. Diese leitet sich aus einer angepassten asymptotischen Entwicklung (*MAE*, *Matched Asymptotic Expansion*) her und erlaubt eine Validierung der aeroakustischen Modelle.

Zudem existiert eine potentialtheoretische Lösung für die inkompressible und reibungsfreie Beschreibung der Strömung des rotierenden Wirbelpaares, auf die in Abschnitt 7.2.1 ausführlich eingegangen wird. Diese wird in Abschnitt 7.2.2 als Basis zur Berechnung der aeroakustischen Quellterme verwendet.

### 7.2.1 Konfiguration und Analytische Lösung

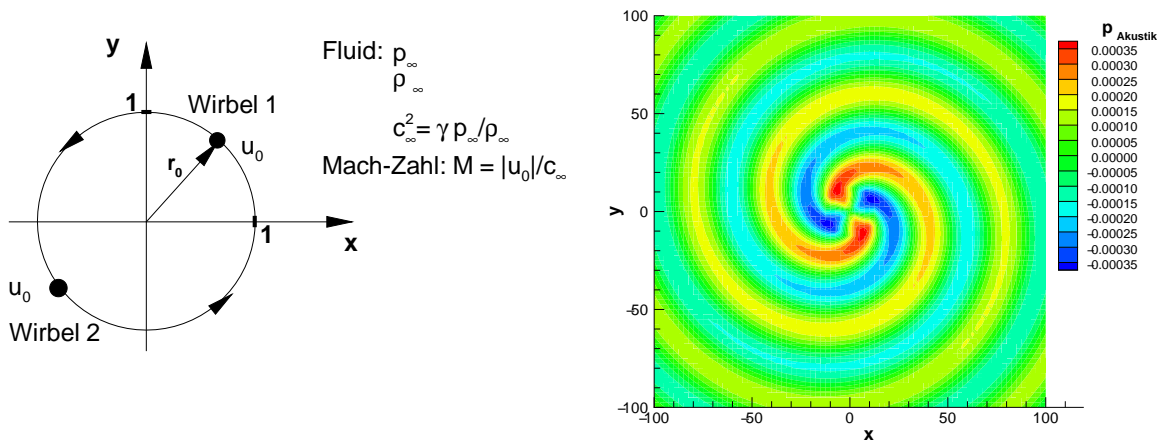
#### Konfiguration

Die dimensionsbehaftete Formulierung des rotierenden Wirbelpaares besteht aus zwei Potentialwirbeln von denen jeder die Stärke  $\tilde{\kappa} = \tilde{\Gamma}/(2\pi)$  mit der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}$  besitzt, siehe Abbildung 7.2.1. Die dimensionsbehafteten Größen sind dabei wie in Abschnitt 2 durch eine Tilde gekennzeichnet. Die Wirbelzentren befinden sich zu Beginn der Betrachtung in den Punkten  $(\tilde{r}_0, 0)$  und  $(-\tilde{r}_0, 0)$ . Jeder Wirbel definiert ein Geschwindigkeitsfeld, das aus tangentialen Geschwindigkeitskomponenten an konzentrischen Kreisen um das Wirbelzentrum besteht. Die radialen Geschwindigkeitsanteile sind gleich Null.

Die Wirbel wechselwirken miteinander und jeder Wirbel induziert auf den anderen eine Geschwindigkeit, die in dessen Zentrum den Betrag  $|\tilde{u}_0| = \tilde{\Gamma}/(4\pi\tilde{r}_0)$  aufweist. Das hat zur Folge, dass sich die Wirbel auf einer Kreisbahn mit Radius  $\tilde{r}_0$  umeinander bewe-



gen. Die Zeit für einen Umlauf beträgt  $\tilde{T}_0 = 2\pi\tilde{r}_0/|\tilde{u}_0|$  und die sich daraus ergebende Winkelgeschwindigkeit ist  $\tilde{\omega} = 2\pi/\tilde{T}_0$ . Die Potentialwirbel befinden sich in einem ruhenden Fluid mit Hintergrundsdruck  $\tilde{p}_\infty$  und Hintergrundsichte  $\tilde{\rho}_\infty$ , dessen ungestörte Schallgeschwindigkeit sich aus  $\tilde{c}_\infty^2 = \gamma\tilde{p}_\infty/\tilde{\rho}_\infty$  berechnet.



**Abbildung 7.2.1:** Konfiguration des rotierenden Wirbelpaares (links) und spiralförmige, akustische Wellen im Druck (rechts).

Die charakteristischen Größen für das rotierende Wirbelpaar sind

- im Raum der halbe Wirbelabstand  $\tilde{r}_0$ ,
- im Druck der Hintergrundwert  $\tilde{p}_\infty$ ,
- in der Dichte der Hintergrundwert  $\tilde{\rho}_\infty$ ,
- in der Strömungsgeschwindigkeit die induzierte Geschwindigkeit im Wirbelzentrum  $|\tilde{u}_0| = \tilde{\Gamma} / (4\pi\tilde{r}_0)$ .

Diese werden für die Entdimensionalisierung nach Abschnitt 2.2 verwendet und sind in der Tabelle 7.2.1 zusammengefasst. Durch die Entdimensionalisierung wird die globale Mach-Zahl  $M = u_{ref}/c_{ref}$  aus dem Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit eines Wirbels und der ungestörten Schallgeschwindigkeit definiert. Das rotierende Wirbelpaar wird berechnet für eine Mach-Zahl  $M = 0.08\sqrt{1.4} \approx 0.095$ .

### Inkompressible Strömungslösung

Die inkompressible und reibungsfreie Strömungslösung für das rotierende Wirbelpaar

	Physikalisch	Referenz	Modell, dimensionslos
Länge	$\tilde{r}_0$	$x_{ref} = \tilde{r}_0$	$r_0 = 1$
Druck	$\tilde{p}_\infty$	$p_{ref} = \tilde{p}_\infty$	$p_\infty = 1$
Dichte	$\tilde{\rho}_\infty$	$\rho_{ref} = \tilde{\rho}_\infty$	$\rho_\infty = 1$
Strömungs- geschwindigkeit	$\tilde{u}_0 =  \tilde{u}(2\tilde{r}_0) $	$u_{ref} = \tilde{u}_0$	$u_0 =  u(2r_0)  = 1$
Schall- geschwindigkeit	$\tilde{c}_\infty = \sqrt{\gamma \frac{\tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho}_\infty}}$	$c_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}}$	$c_\infty = \sqrt{\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}} = \sqrt{1.4}$
Zeit	$\tilde{T}_0 = \frac{2\pi\tilde{r}_0}{\tilde{u}_0}$	$t_{ref} = \frac{x_{ref}}{u_{ref}}$	$T_0 = \frac{2\pi r_0}{u_0} = 2\pi$
Wellenlänge	$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} \tilde{T}_0 \tilde{c}_\infty$	$x_{ref} = \tilde{r}_0$	$\lambda = \frac{1}{2} \frac{T c_\infty}{M} = \frac{\pi \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}}{M}$

**Tabelle 7.2.1:** Entdimensionalisierung des Wirbelpaares mit charakteristischen Referenzen.

wird aus der Potentialtheorie hergeleitet. Die komplexe Potentialfunktion  $w(z, t)$ , die das Wirbelpaar beschreibt, ist die Summe aus den komplexen Potentialfunktionen der einzelnen Wirbel

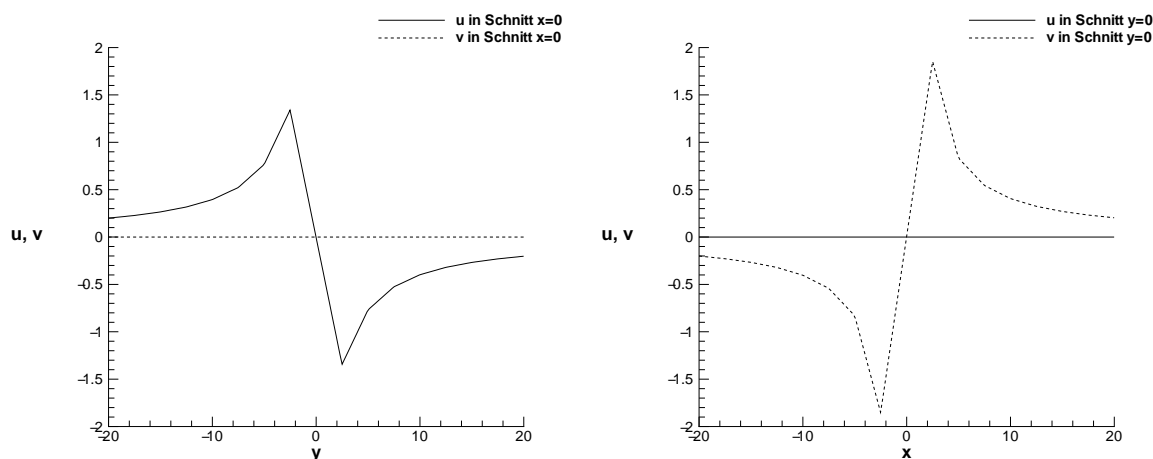
$$w(z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + b) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - b) \quad (7.2.1)$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z^2 - b^2) \quad (7.2.2)$$

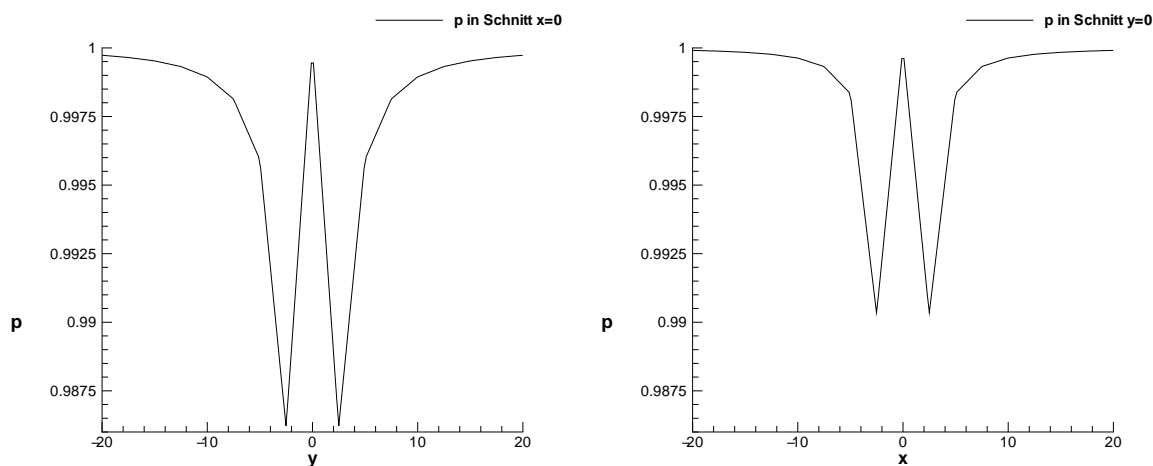
mit  $z = x + iy$  zur Beschreibung der Lage im Raum und mit  $b = r_0 e^{i\omega t}$  zur Beschreibung der Kreisbahn, auf der die Wirbel rotieren. Die komplexe Potentialfunktion wird als Summe  $w = \Phi + i\Psi$  aus dem reellen Geschwindigkeitspotential  $\Phi = \Phi(x, y)$  und der reellen Stromfunktion  $\Psi = \Psi(x, y)$  gebildet. Aufgrund der Holomorphie der komplexen Potentialfunktion, d.h. sie ist in jedem Punkt  $z \neq b$  komplex differenzierbar, erfüllen  $\Phi$  und  $\Psi$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\Phi_x = \Psi_y, \quad \text{und} \quad \Phi_y = -\Psi_x.$$

Die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten  $u = u(x, y) = \Phi_x(x, y)$  und  $v = v(x, y) = \Phi_y(x, y)$  sind über die Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  definiert und in der Abbildung 7.2.2 zum Zeitpunkt  $t = 0$  dargestellt.



**Abbildung 7.2.2:** Inkompressible Geschwindigkeitskomponenten  $(u, v)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Schnitt  $x = 0$  (links) und  $y = 0$  (rechts).



**Abbildung 7.2.3:** Inkompressibler Druck  $p$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Schnitt  $x = 0$  (links) und  $y = 0$  (rechts).

Aus der Differentiation nach  $z$  der komplexen Potentialfunktion  $w(z, t)$  folgt

$$\begin{aligned} w_z &= \frac{1}{2}(w_x - iw_y) = \frac{1}{2}((\Phi_x + i\Psi_x) - i(\Phi_y + i\Psi_y)) = \Phi_x - i\Phi_y \\ &= u - iv \\ &= \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{z}{(z^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Die kartesischen Geschwindigkeiten berechnen sich aus dem Real- und Imaginärteil von  $w$  aus der Gleichung (7.2.3) zu

$$u = \Re(w_z), \quad (7.2.4)$$

$$v = -\Im(w_z). \quad (7.2.5)$$

Die Druckverteilung in der Abbildung 7.2.3 mit Hintergrundsdruck  $p_\infty = 1.0$  und veränderlichem Anteil der Größenordnung  $O(M^2)$  folgt aus der instationären Bernoulli Gleichung zu

$$p = p_\infty - M^2 \rho_\infty \left( \Phi_t + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (7.2.6)$$

### Quelltermberechnung aus inkompressibler Strömungslösung

Damit die in den Kapiteln 4 und 5 auftauchenden Quellterme für das rotierende Wirbelpaar berechnet werden können, ist es notwendig, neben der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung auch deren Raum- und Zeitableitungen zu kennen. Wiederum lassen sich die Raumableitungen der kartesischen Geschwindigkeiten durch erneutes Differenzieren berechnen.

Mit der zweiten Ableitung von  $w(z, t)$  nach  $z$  ergibt sich

$$\begin{aligned} w_{zz} &= \frac{1}{2}((w_x - iw_y)_z) = \frac{1}{2}(w_z)_x - i(w_z)_y = \Phi_{xx} - i\Phi_{xy}, \\ &= u_x - iv_x, \\ &= -\frac{\Gamma}{\pi i} \frac{z^2 + b^2}{(z^2 - b^2)^2}, \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

$$u_x = \Re(w_{zz}) = -v_y, \quad (7.2.8)$$

$$v_x = -\Im(w_{zz}) = u_y. \quad (7.2.9)$$

Die zweiten Raumableitungen von  $u$  und  $v$  berechnen sich aus der nächsten Differentiationsordnung, es folgt

$$\begin{aligned} w_{zzz} &= \frac{1}{2}((w_x - iw_y)_{zz}) = \frac{1}{2}(w_{zz})_x - i(w_{zz})_y = \Phi_{xxx} - i\Phi_{xyy}, \\ &= u_{xx} - iv_{xx}, \\ &= \frac{2\Gamma}{\pi i} \frac{z^3 + 3zb^2}{(z^2 - b^2)^3}, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

$$u_{xx} = \Re(w_{zzz}) = -v_{xy} = -u_{yy}, \quad (7.2.11)$$

$$v_{xx} = -\Im(w_{zzz}) = u_{xy} = -v_{yy}. \quad (7.2.12)$$

Die zeitliche Variation der Geschwindigkeiten wird aus der zeitlichen Differentiation der komplexen Potentialfunktion berechnet

$$\begin{aligned} w_{zt} &= u_t - iv_t \\ &= \frac{2\omega\Gamma}{\pi} \frac{zb^2}{(z^2 - b^2)^2} \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

$$u_t = \Re(w_{zt}), \quad (7.2.14)$$

$$v_t = -\Im(w_{zt}). \quad (7.2.15)$$

Damit ist die Geschwindigkeitsverteilung des rotierenden Wirbelpaares und dessen Raum- und Zeitableitungen bestimmt.

Die Ableitungen der ersten Ordnung für den Druck schreiben sich als

$$p_t = -M^2\rho_\infty(\Phi_{tt} + uu_t + vv_t), \quad (7.2.16)$$

$$p_x = -M^2\rho_\infty(u_t + uu_x + vv_x), \quad (7.2.17)$$

$$p_y = -M^2\rho_\infty(v_t + uu_y + vv_y) \quad (7.2.18)$$

und die zweiten Ableitungen ergeben sich zu

$$p_{tt} = -M^2\rho_\infty(\Phi_{ttt} + u_t^2 + uu_{tt} + v_t^2 + vv_{tt}), \quad (7.2.19)$$

$$p_{xx} = -M^2\rho_\infty(u_{xt} + u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}), \quad (7.2.20)$$

$$p_{yy} = -M^2\rho_\infty(v_{yt} + v_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy}) \quad (7.2.21)$$

mit den gemischten Ableitungen

$$p_{xy} = -M^2 \rho_\infty (u_{ty} + u_x u_y + u u_{xy} + v_x v_y + v v_{xy}), \quad (7.2.22)$$

$$p_{tx} = -M^2 \rho_\infty (u_{tt} + u_x u_t + u u_{tx} + v_x v_t + v v_{tx}), \quad (7.2.23)$$

$$p_{ty} = -M^2 \rho_\infty (v_{tt} + u_y u_t + u u_{ty} + v_y v_t + v v_{ty}). \quad (7.2.24)$$

Das für die Berechnung der Druckterme notwendige Geschwindigkeitspotential und seine Zeitableitungen schreiben sich wie folgt

$$\Phi = \Re\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z^2 - b^2)\right), \quad (7.2.25)$$

$$\Phi_t = \Re\left(\frac{-\omega\Gamma}{\pi} \frac{b^2}{z^2 - b^2}\right), \quad (7.2.26)$$

$$\Phi_{tt} = \Re\left(\frac{2\omega^2\Gamma}{\pi i} \frac{z^2 b^2}{(z^2 - b^2)^2}\right), \quad (7.2.27)$$

$$\Phi_{ttt} = \Re\left(\frac{4\omega^3\Gamma}{\pi} \frac{z^2 b^2 (z^2 + b^2)}{(z^2 - b^2)^3}\right). \quad (7.2.28)$$

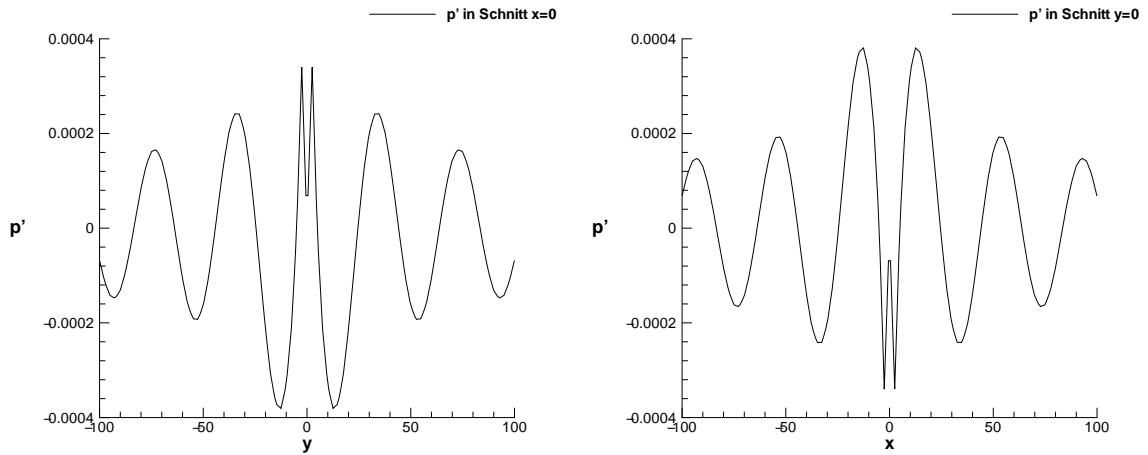
### Akustischer Druck des Wirbelpaares

Aus einer angepaßten asymptotischen Entwicklung berechnet sich der akustische Druck des rotierenden Wirbelpaares, der in Abbildung 7.2.1 (rechts) dargestellt ist. Die führende Ordnung der Entwicklung für den Schall im Fernfeldpunkt  $(r, \theta)$  zum Zeitpunkt  $t$  ist gegeben durch

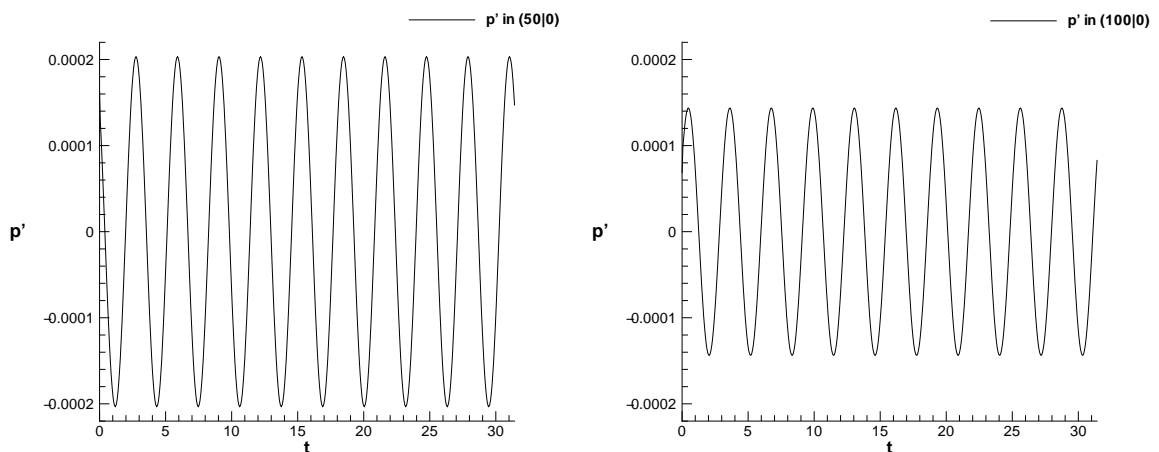
$$p'(r, \theta, t) = \Re\left(-iM^4 \frac{\rho_\infty \Gamma^4}{64\pi^3 r_0^4 c_\infty^2} H_2^{(2)}(kr) e^{i2(\omega t - \theta)}\right) \quad (7.2.29)$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\theta = \arctan(y/x)$ . Darin ist  $H_2^{(2)}$  die Hankel Funktion zweiter Ordnung und erster Art, die definiert ist durch  $H_2^{(2)} = J_2 - iY_2$  mit den Bessel Funktionen  $J_2$  zweiter Ordnung und erster Art und  $Y_2$  zweiter Ordnung und erster Art. Die Hankel Funktion wird ausgewertet im Argument  $kr$  mit  $k = 2\omega/c_\infty$ . Aus der dimensionslosen Betrachtung geht hervor, dass die akustischen Druckschwankungen der Größenordnung  $O(M^4)$  sind.

Die Wellenlänge des akustischen Drucks ist in der Abbildung 7.2.4 zu erkennen. Sie zeigt einen Schnitt durch das Rechengebiet für  $x = 0$  (links) und für  $y = 0$  (rechts). Den Druckverlauf über der Zeit in einem festen Punkt gibt die Abbildung 7.2.5 wieder. Darin ist der Druck im Punkt  $(50, 0)$  (links) und im weiter entfernten Punkt  $(100, 0)$  (rechts) dargestellt.



**Abbildung 7.2.4:** Akustischer Druck  $p'$  im Schnitt  $x = 0$  (links) und  $y = 0$  (rechts).



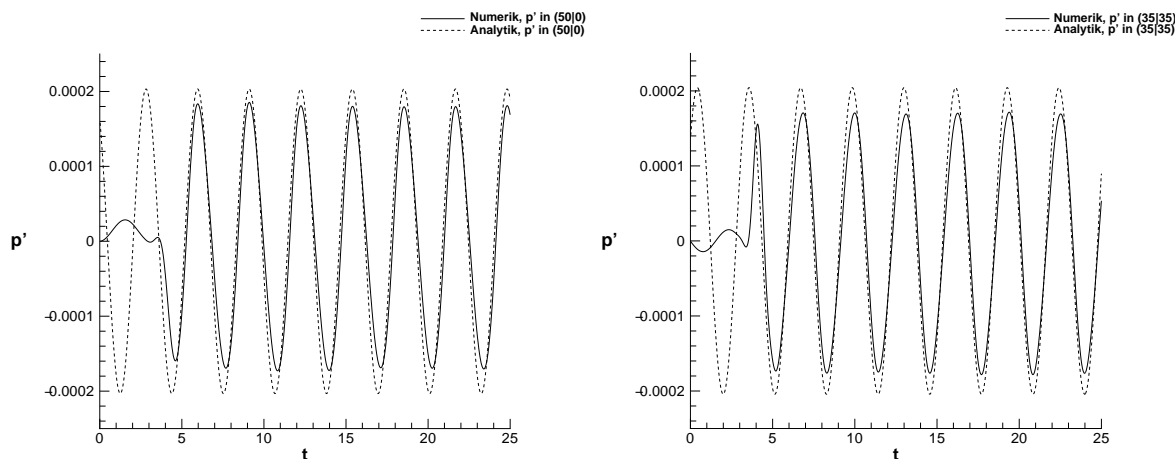
**Abbildung 7.2.5:** Akustischer Druck  $p'$  über der Zeit im Fernfeldpunkt  $(50, 0)$  (links) und  $(100, 0)$  (rechts).

## 7.2.2 Aeroakustische Modellierungen

Die aeroakustischen Modelle aus den Kapiteln 4 und 5 werden in diesem Abschnitt am Beispiel des rotierenden Wirbelpaares getestet. Dazu wird die im vorangegangenen Abschnitt 7.2.1 vorgestellte Konfiguration des Wirbelpaares verwendet. Die für die Akustikberechnung notwendige Strömungslösung zur Berechnung der akustischen Quellterme wird aus der analytischen, potentialtheoretischen Lösung gewonnen.

## Akustische Analogie nach Lighthill

Als erstes wird die akustische Analogie nach Lighthill aus dem Kapitel 4.1 in ihrer Formulierung im Druck nach Gleichung 4.1.8 betrachtet. Durch die Verwendung der Druckformulierung lassen sich die Ergebnisse leichter mit denen der anderen aeroakustischen Formulierungen vergleichen.



**Abbildung 7.2.6:** Vergleich des akustischen Drucks der analytischen und numerischen Lösung in den Punkten  $(50, 0)$  (links) und  $(35, 35)$  (rechts).

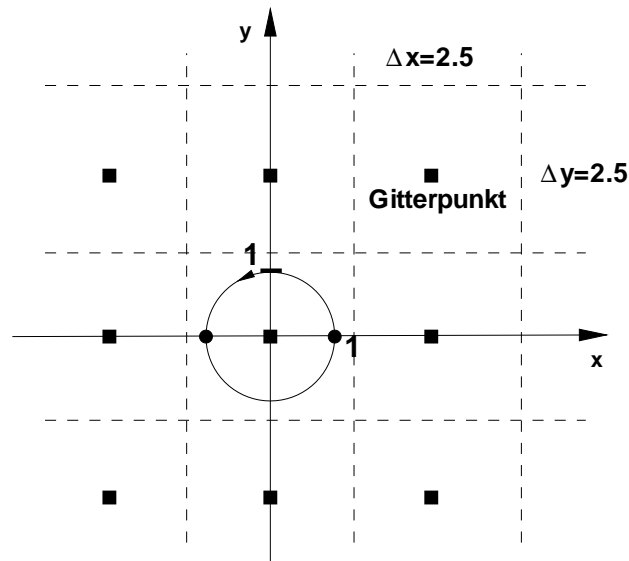
Die Abbildung 7.2.6 zeigt den akustischen Druck in einem festen Punkt über der Zeit. Die Akustik wird in der linken Darstellung in einem Fernfeldpunkt  $(50, 0)$  auf der Hauptachse ausgewertet. Die Frequenz der Akustik wird korrekt wiedergegeben. Ein Amplitudenfehler ist zu erkennen, so dass lediglich 86.0 % der analytischen Amplitude erreicht werden. Daneben in Abbildung 7.2.6 (rechts) wird der Punkt  $(35, 35)$  auf der Diagonalen betrachtet. Auch hier werden 86.0 % der analytischen Amplitude erreicht, so dass kein Unterschied zwischen der Auswertung auf der Hauptachse und auf der Diagonalen festzustellen ist. Der Fehler in der Amplitude kann auf die Auswertung der Quellterme an diskreten Punkten und deren Lage zum Lage zum Wirbelpaar zurückgeführt werden.

Das numerische Rechengebiet auf dem die Quellterme ausgewertet werden reicht bis an die betrachteten Punkte heran und besitzt eine Gitterschrittweite von  $\Delta x = 2.5$ . Im Koordinatenursprung  $(0, 0)$  befindet sich ein Gitterpunkt. Die Verfahren aus Abschnitt 6.1 besitzen aufgrund ihrer analytischen Integration keine numerische Dissipation.



### Einskalenmodell *Scaled Perturbation Ansatz (SPA)*

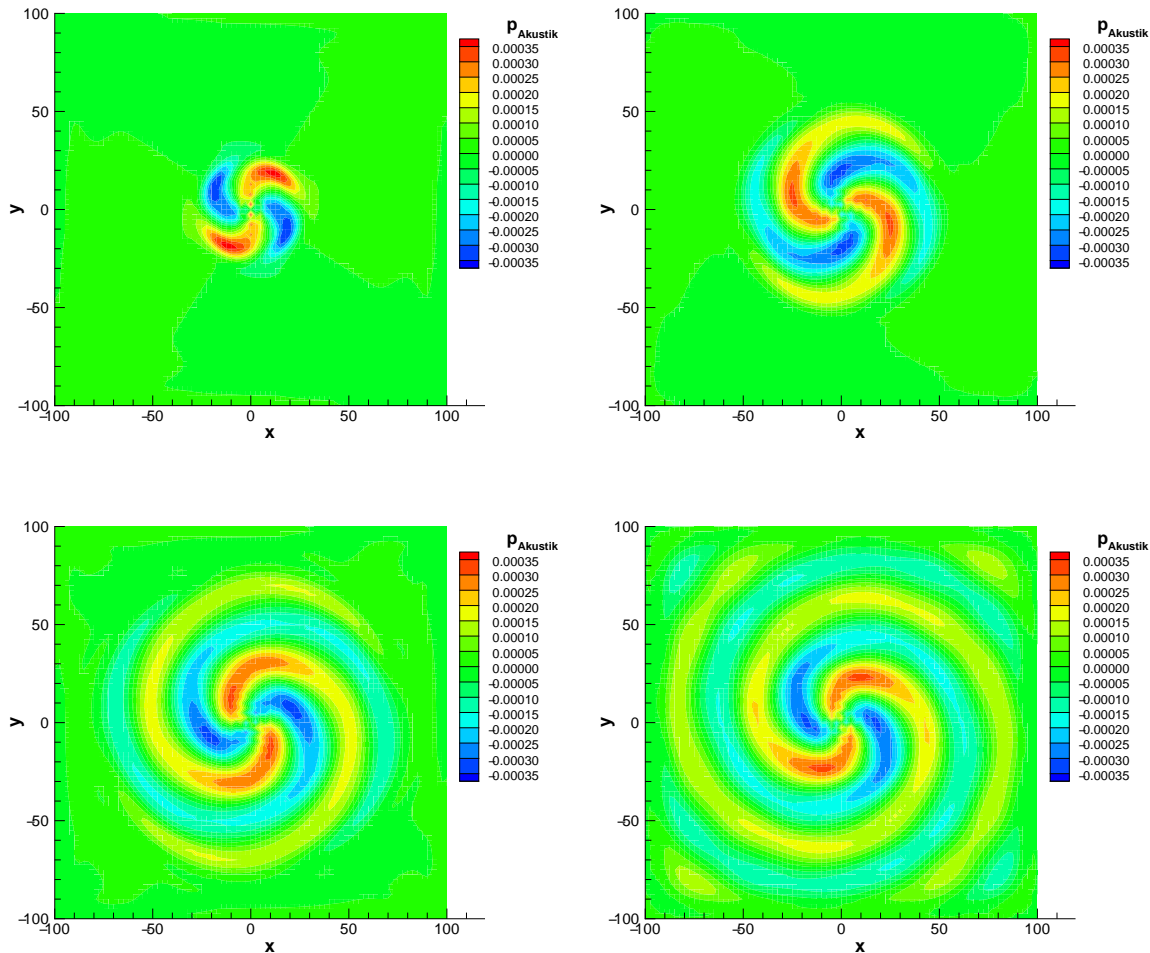
Als nächstes wird das Einskalenmodell aus dem Kapitel 5 getestet. Dabei werden die vereinfachenden Annahmen der Linearisierung und der gültigen Inkompressibilitätsbedingung angenommen, was auf die Formulierung in den Gleichungen (4.2.11) - (4.2.11) führt. Die Gültigkeit der Vereinfachungen für das Beispiel des rotierenden Wirbelpaars in seiner Konfiguration aus dem vorangegangenen Abschnitt wurde überprüft. Eine aeroakustische Simulation mit den in (4.2.11) - (4.2.11) vernachlässigten Terme führte zu Änderungen im berechneten akustischen Druck, die um Größenordnungen kleiner als die Druckamplitude waren.



**Abbildung 7.2.7:** Konfiguration Wirbelpaar und Position der Gitterpunkte.

Die Strömungslösung für das rotierende Wirbelpaar wird in einem Rechengebiet mit den Abmessungen  $[-101.25, 101.25]$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung ausgewertet. Die Gitterschrittweite ist  $\Delta x = 2.5$ , was einer Auflösung mit  $81 \times 81$  Punkten entspricht. Das Gitter und seine Lage zum rotierenden Wirbelpaar ist in der Abbildung 7.2.7 dargestellt. Die zu den Wirbelzentren auf der Kreisbahn mit Radius  $r_0 = 1$  nächsten Gitterpunkte befinden sich im Koordinatenursprung mit Abstand 1 und auf den Hauptachsen in einem Abstand von 1.5. Damit ist sichergestellt, dass die Entfernung zu den Singularitäten in den Wirbelzentren genügend groß gewählt ist. Die akustische Lösung für das rotierende Wirbelpaar wird auf demselben Gitter berechnet. Das erlaubt die aeroakustische Formulierung des Einskalenmodells, da es die Strömungslösung von der Akustiklösung trennt und über Quellterme koppelt. Im Fall des Wirbelpaares ist das Gitter mit der Gitterschrittweite  $\Delta x = 2.5$  der Akustik angepasst. Da sich die Wellenlänge  $\lambda$  der Akustik aus der Tabelle 7.2.1 für die Mach-Zahl  $M \approx 0.095$  zu  $\lambda \approx 39.1$  berechnet, entspricht das

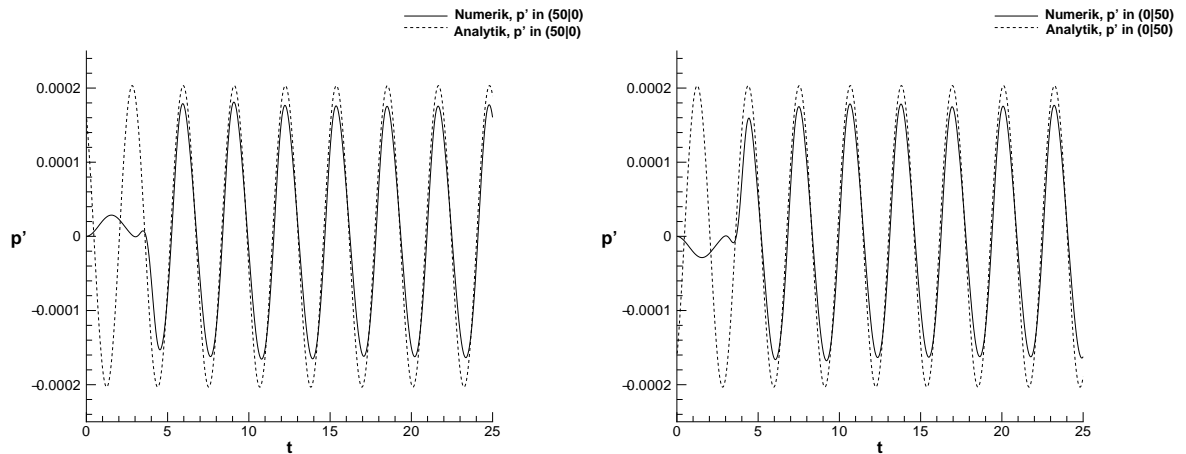
einer PPW von 15. Damit ist das verwendete Finite-Differenzen Verfahren nach Tam aus Abschnitt 6.2 mit genügender Genauigkeit einsetzbar, was aus der Validierung des numerischen Verfahrens in Abschnitt 7.1.2 und der Darstellung des Amplitudenfehlers in Abbildung 7.1.10 und des Phasenfehlers in 7.1.11 folgt.



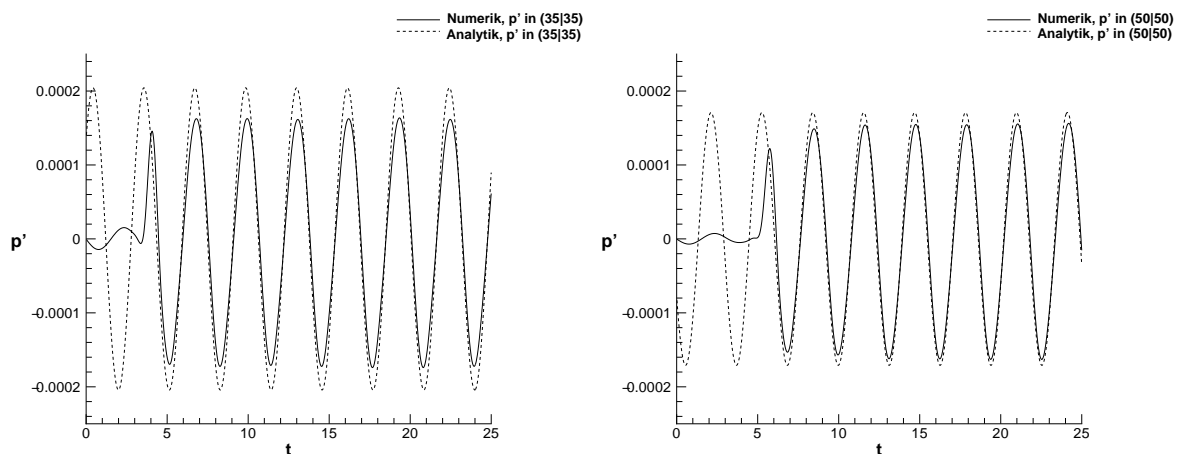
**Abbildung 7.2.8:** Spiralförmige Ausbreitung des akustischen Drucks nach 100, 200, 300 und 2000 Zeitschritten (von links oben nach rechts unten).

Der Zeitschritt des numerischen Verfahrens ist  $\Delta t = 0.02$  und eine künstliche Dämpfung von  $D = 7.0$  wird verwendet. Das ist nötig, da durch die Quellterme an diskreten Punkten auch hochfrequente Anteile in der akustischen Lösung enthalten sind. Durch die Verwendung der künstlichen Dämpfung lassen sich diese effektiv entfernen, ohne signifikant die Amplitude der Akustik zu beeinflussen. Der Wert von  $D = 7.0$  wurde durch Austesten ermittelt.

Die Ausbreitung des akustischen Drucks im Rechengebiet ist in Abbildung 7.2.8 dargestellt. Diese zeigt von links oben nach rechts unten den spiralförmigen akustischen Druck nach 100, 200, 300 und 2000 Zeitschritten. Das entspricht bei einem Zeitschritt von  $\Delta t = 0.02$  den Zeitpunkten  $t = 2$ ,  $t = 4$ ,  $t = 6$  und  $t = 40$ . Die Zeitpunkte lassen sich ebenfalls in Umläufen des Wirbelpaars ausdrücken. Dabei entspricht der letzte betrachtete Zeitpunkt nach 2000 Zeitschritten ungefähr 6.4 Rotationen des Wirbelpaars.



**Abbildung 7.2.9:** Akustischer Druck der analytischen und numerischen Lösung in den Punkten  $(50, 0)$  (links) und  $(0, 50)$  (rechts).



**Abbildung 7.2.10:** Akustischer Druck der analytischen und numerischen Lösung in den Punkten  $(35, 35)$  (links) und  $(50, 50)$  (rechts).

Die Auswertung des akustischen Drucks in einem festen Punkt über der Zeit ist in den Abbildungen 7.2.9 und 7.2.10 dargestellt. In dieser Darstellung läßt sich die numerische Lösung leichter mit der analytischen Lösung bezüglich Amplitude und Frequenz vergleichen.

Sowohl auf der Hauptachse in den Punkten  $(50, 0)$  (links) und  $(0, 50)$  (rechts) in Abbildung 7.2.9 als auch auf der Diagonalen in den Punkten  $(35, 35)$  (links) und  $(50, 50)$  (rechts) in Abbildung 7.2.10 wird der akustische Druck korrekt wiedergegeben. Die Frequenz der numerischen Lösung stimmt mit der des analytischen Drucks überein. Der Fehler in der Amplitude beträgt 16 % auf der Hauptachse und reduziert sich auf 9 % in den Punkten auf der Diagonalen. Das ist erstaunlich, denn die numerische Auflösung in  $PPW$  ist auf der Diagonalen geringer als in Richtung der Hauptachsen.

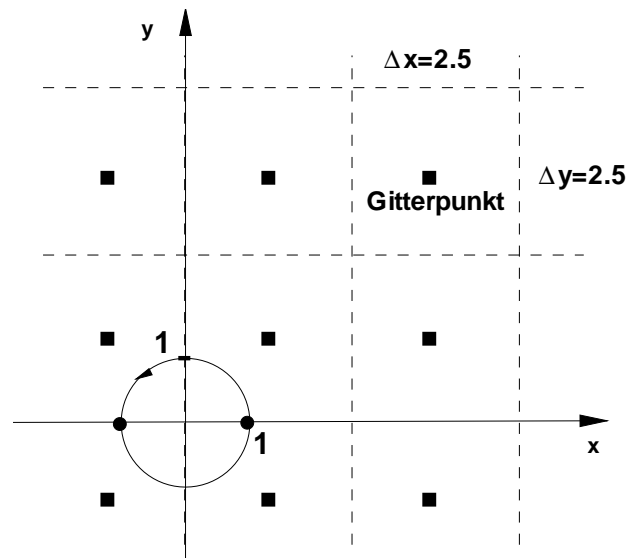
Die Fehler in Amplitude und Phase sind einerseits durch die Dissipation und Dispersion des numerischen Verfahrens begründet, andererseits hat die Wahl der diskreten Gitterpunkte, in denen die analytische Strömungslösung ausgewertet und die Quellterme gebildet werden, einen Einfluß auf das Ergebnis.

### **Einskalenmodell (*SPA*) mit verschobenem Gitter**

Wie in den vorangegangenen Abschnitten zu beobachten war, hat die Lage der Gitterpunkte einen Einfluß auf die Lösung der aeroakustischen Modellierung. Um dieses Verhalten zu erläutern, wird die Lösung auf einem verschobenen Gitter berechnet. Waren zuvor die Gitterpunkte auf den Hauptachsen und parallel dazu im Abstand von  $\Delta x = 2.5$  gelegen, so kommt jetzt ein dazu verschobenes Gitter zum Einsatz, siehe Abbildung 7.2.11.

Dabei bedeutet verschobenes Gitter, dass die Gitterpunkte, in denen die Strömungslösung berechnet und die Quellterme gebildet werden, um eine halbe Gitterschrittweite  $\Delta x/2$  verschoben sind. Es ist zu erkennen, dass die den Wirbelzentren nächsten Gitterpunkte auf den Diagonalen liegen und einen geringeren Abstand zu den Wirbelzentren aufweisen als in der Gitterkonfiguration 7.2.7.

Die Strömungslösung besitzt in der Nähe der Wirbelzentren starke Änderungen in Geschwindigkeit und Druck. Das führt zu veränderten Quelltermen, da diese im Wesentlichen durch die Gradienten an die Strömungslösung gebildet werden.



**Abbildung 7.2.11:** Gitterkonfiguration mit  $\Delta x/2$  verschobenen Gitterpunkten.

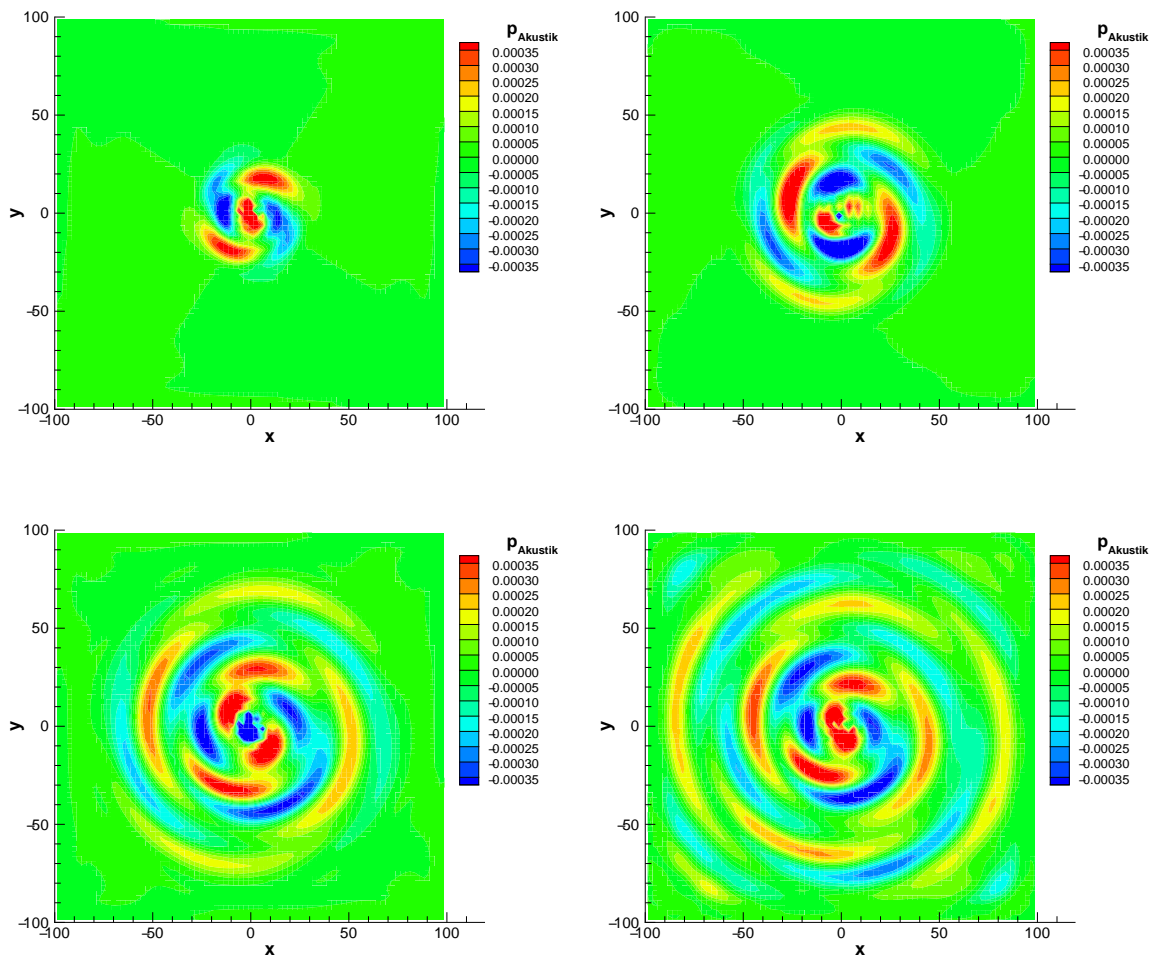
Die Darstellung der zeitlichen Entwicklung des akustischen Drucks ist in Abbildung 7.2.12 von links oben nach rechts unten nach 100, 200, 300 und 2000 Zeitschritten gewählt. Es wird deutlich, dass sich keine spiralförmigen Druckwellen ausbilden. Ein akustischer Druck, der die Form von konzentrischen Halbkreisen mit der doppelten Frequenz hat, ist zu erkennen. Das dokumentieren auch die Aufzeichnungen des akustischen Drucks in einem festen Punkt über der Zeit.

Die Abbildung 7.2.13 zeigt dieses Verhalten für die Punkte (51.25, 1.25) (links) und (1.25, 51.25) (rechts) nahe den Hauptachsen und die Abbildung 7.2.14 dokumentiert die Verhältnisse nahe der Diagonalen in den Punkten (36.25, 36.25) (links) und (51.25, 51.25) (rechts). Durch die Verwendung des verschobenen Gitters ist es nicht möglich, genau dieselben Punkte wie im vorangegangenen Abschnitt auszuwerten. Daher werden die nächstgelegenen Gitterpunkte für die Auswertung verwendet.

Die erhöhte Amplitude ist ebenso wie die Überlagerung durch eine weitere Druckschwankung durch die Annäherung der Gitterpunkte an die Wirbelzentren zu erklären und stimmt nicht mehr mit der vorgegebenen analytischen Lösung überein.

Das gleiche und damit falsche Lösungsverhalten zeigt sich ebenfalls, wenn die Analogie nach Lighthill aus dem vorangegangenen Abschnitt verwendet wird. Auch darin hat die Lage der diskreten Gitterpunkte, in denen die Strömungslösung ausgewertet die Quellterme gebildet werden, einen signifikanten Einfluß auf die Lösung.

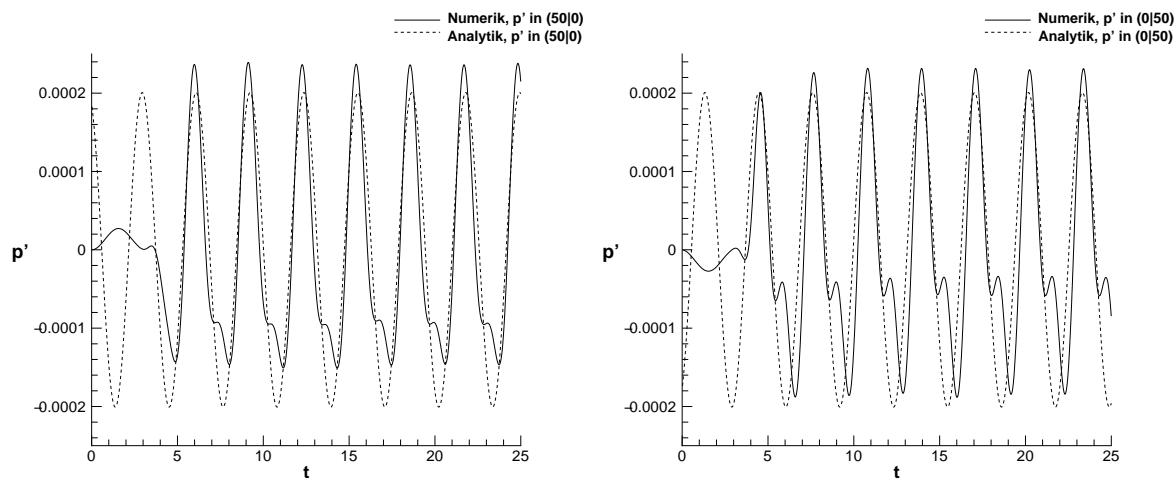
Die Wahl des Gitters und die Lage der Gitterpunkte unterliegt einer gewissen Freiheit des Anwenders. Im Fall des rotierenden Wirbelpaares orientiert sich das Gitter und dessen Schrittweite an der zu berechnenden Akustik. Die Gitterschrittweite von  $\Delta x = 2.5$  ist zu grob, um lokale Strömungsphänomene immer richtig zu beschreiben. Hinzu kommt, dass die Auswertung der Quellterme durch die lokalen Werte der exakten Lösung an den Gitterpunkten vorgenommen wird.



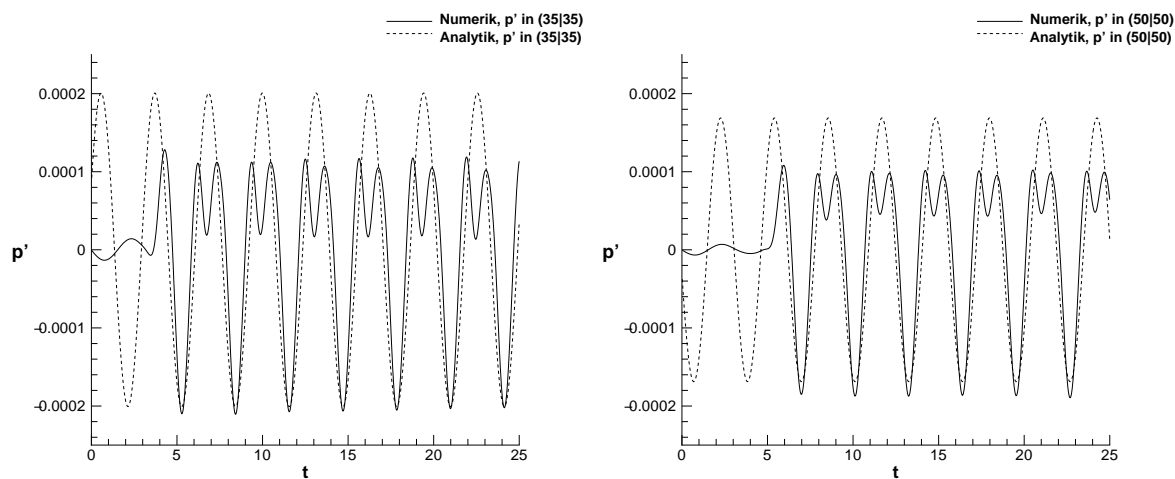
**Abbildung 7.2.12:** Akustischer Druck auf einem verschobenen Gitter nach 100, 200, 300 und 2000 Zeitschritten (von links oben nach rechts unten).

Aus diesen Gründen ist es zu erwarten, dass die berechnete numerische Lösung von der Gitterwahl abhängig ist. Sinnvoll wäre in diesem Fall, eine Mittelung der Strömungslösung über eine Gitterzellen vorzunehmen und daraus die Quellterme zu berechnen. Das genau

ist es, was den Mehrskalenansatz auszeichnet, da er diesen Aspekt schon von Beginn der Modellierung in sich trägt.



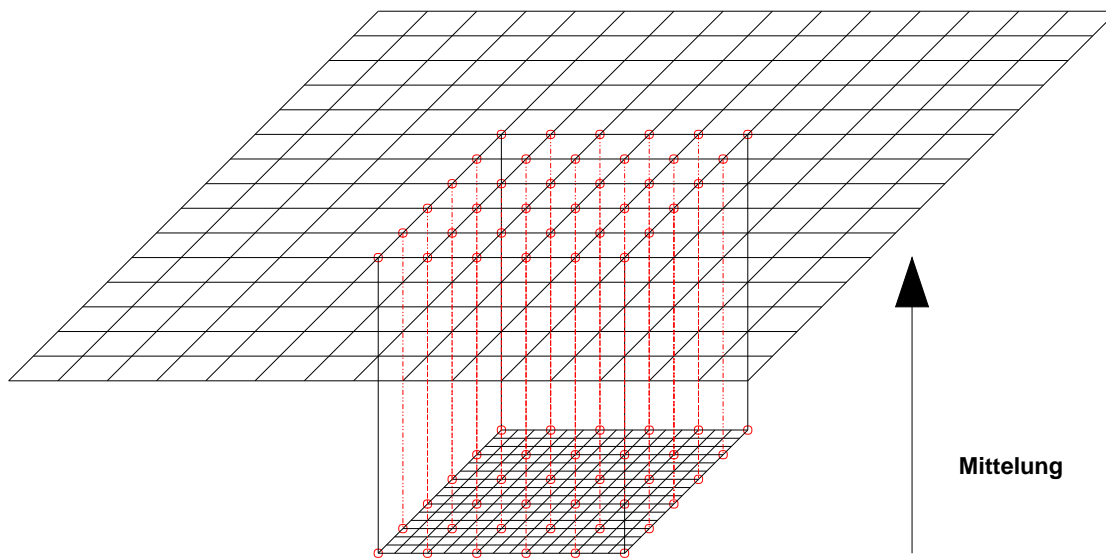
**Abbildung 7.2.13:** Akustischer Druck auf einem verschobenen Gitter aus der analytischen und numerischen Lösung in den Punkten (51.25, 1.25) (links) und (1.25, 51.25) (rechts).



**Abbildung 7.2.14:** Akustischer Druck auf einem verschobenen Gitter der analytischen und numerischen Lösung in den Punkten (36.25, 36.25) (links) und (51.25, 51.25) (rechts).

## Mehrskalenmodell

An dieser Stelle treten die Vorteile der Mehrskalmodellierung hervor. Hier gibt es eigene Raumskalen  $\eta$  und  $\xi$  für die Strömung und die Akustik. Die Evolutionsgleichungen (5.2.36) - (5.2.38) beschreiben nicht nur die Ausbreitung der Akustik und die Quellterme, sie schreiben auch explizit vor, wie die Quellterme auf dem Akustikgitter zu bilden sind.



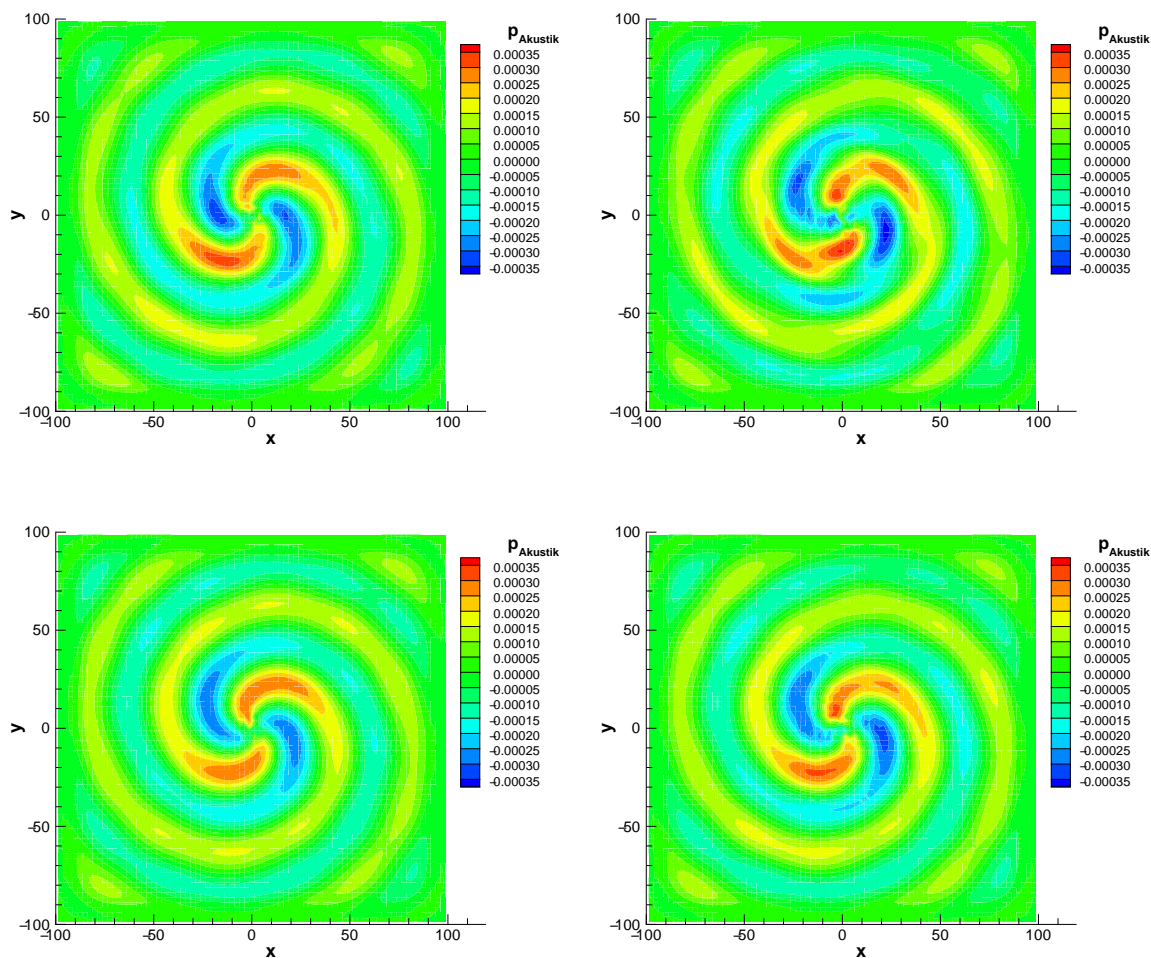
**Abbildung 7.2.15:** Grob- und Feingitter für die Strömung-Akustik Koppelung.

Durch eine Mittelung auf der kleinen Raumskala  $\eta$  der Strömung werden die Quellterme auf die lange Skala  $\xi$  der Akustik übertragen. Neben der Information, dass die Strömungs- und die Akustiklösung auf unterschiedlichen Gittern berechnet werden, ist darin auch eine Vorschrift enthalten, wie Daten der Strömung auf das Akustikgitter übertragen werden.

Eine Grobgitterzelle der Schrittweite  $\Delta x = 2.5$  wird in mehrere Feingitterzellen unterteilt. Die Verfeinerungsstufe gibt an, in wieviele Zellen pro Koordinatenrichtung die Schrittweite  $\Delta x$  unterteilt wird. Für eine Verfeinerungsstufe von 3 enthält eine Grobgitterzelle 9 Feingitterzellen, siehe Abbildung 7.2.15. Analog ergibt sich für die Verfeinerungsstufen von 2, 4, 5 und 6 die Anzahl der Feingitterzellen pro Grobgitterzelle zu 4, 16, 25 und 36.



Für die Ermittlung des Quellterms in einer Grobgitterzelle wird der Quellterm in allen darin enthaltenen Feingitterzellen berechnet und anschließend eine Mittelung durchgeführt. Um bei der Gitterverfeinerung den Wirbelzentren nicht zu nahe zu kommen, werden alle diejenigen Quellterme zu Null gesetzt, die in einem Kreis mit Radius 1.5 um den Ursprung liegen.

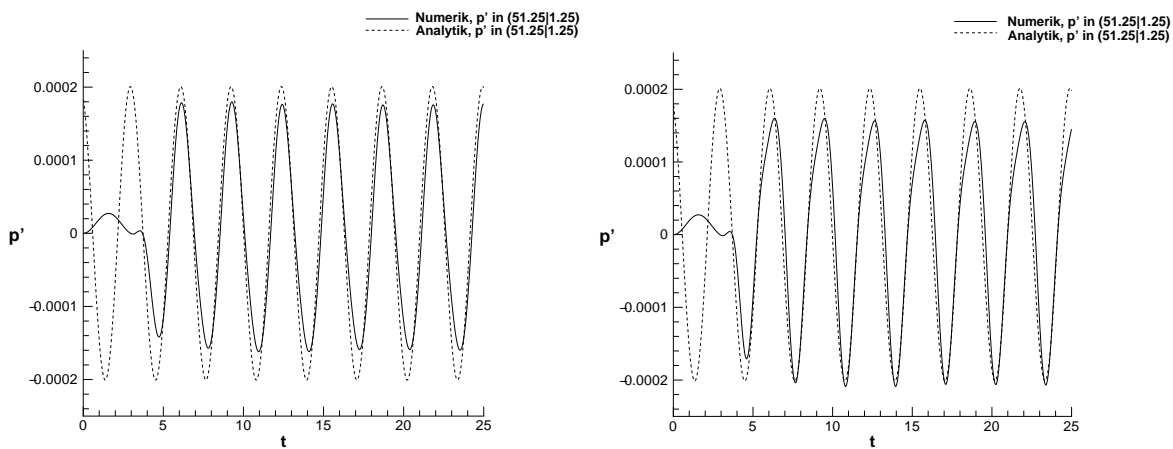


**Abbildung 7.2.16:** Akustischer Druck auf einem verschobenen Gitter nach 2000 Zeitschritten mit dem Mehrskalenmodell und den Gitterverfeinerungsstufen 3 bis 6 (von links oben nach rechts unten).

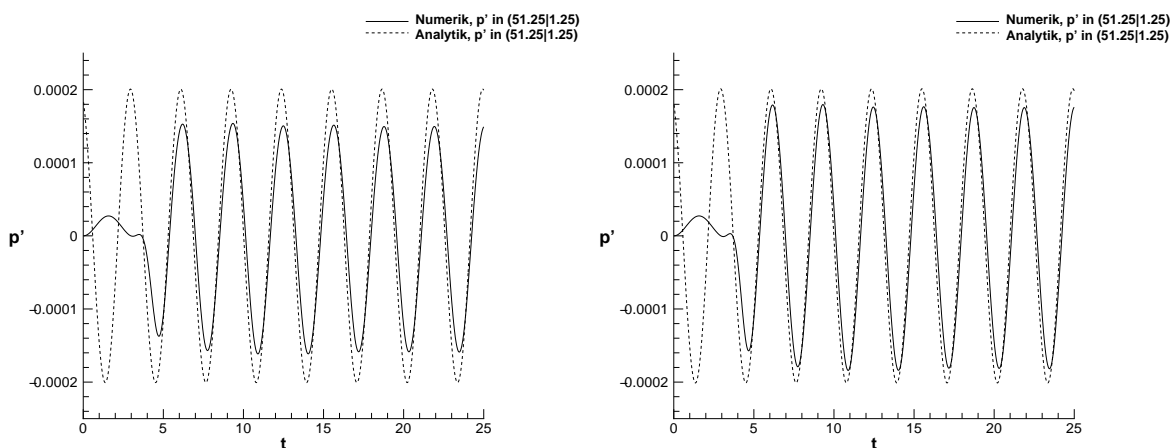
Die aeroakustischen Berechnungen mit der Mehrskalenmodellierung verwenden für die Akustik das verschobene Gitter, das sich im vorangegangenen Abschnitt zusammen mit dem Einskalenmodell als kritisch herausgestellt hat.

Die Abbildung 7.2.16 zeigt von links oben nach rechts unten den akustischen Druck im Rechengebiet nach 2000 Zeitschritten für die Verfeinerungsstufen 3, 4, 5, und 6. Durch die Mittelung der Strömungslösung und der Quellterme bilden sich spiralförmige Druckwellen aus wie sie die analytische Lösung des Problems vorschreibt.

Die Auswertung der numerischen Lösung des akustischen Drucks in einem festen Punkt (51.25, 1.25) über die Zeit ergibt ebenfalls eine Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Die Abbildung 7.2.17 zeigt das Ergebnis für die Verfeinerungsstufen 3 (links) und 4 (rechts), die Abbildung 7.2.18 stellt die Verfeinerungsstufen 5 (links) und 6 (rechts) dar.



**Abbildung 7.2.17:** Akustischer Druck des Mehrskalensmodells und den Gitterverfeinerungsstufen 3 (links) und 4 (rechts).

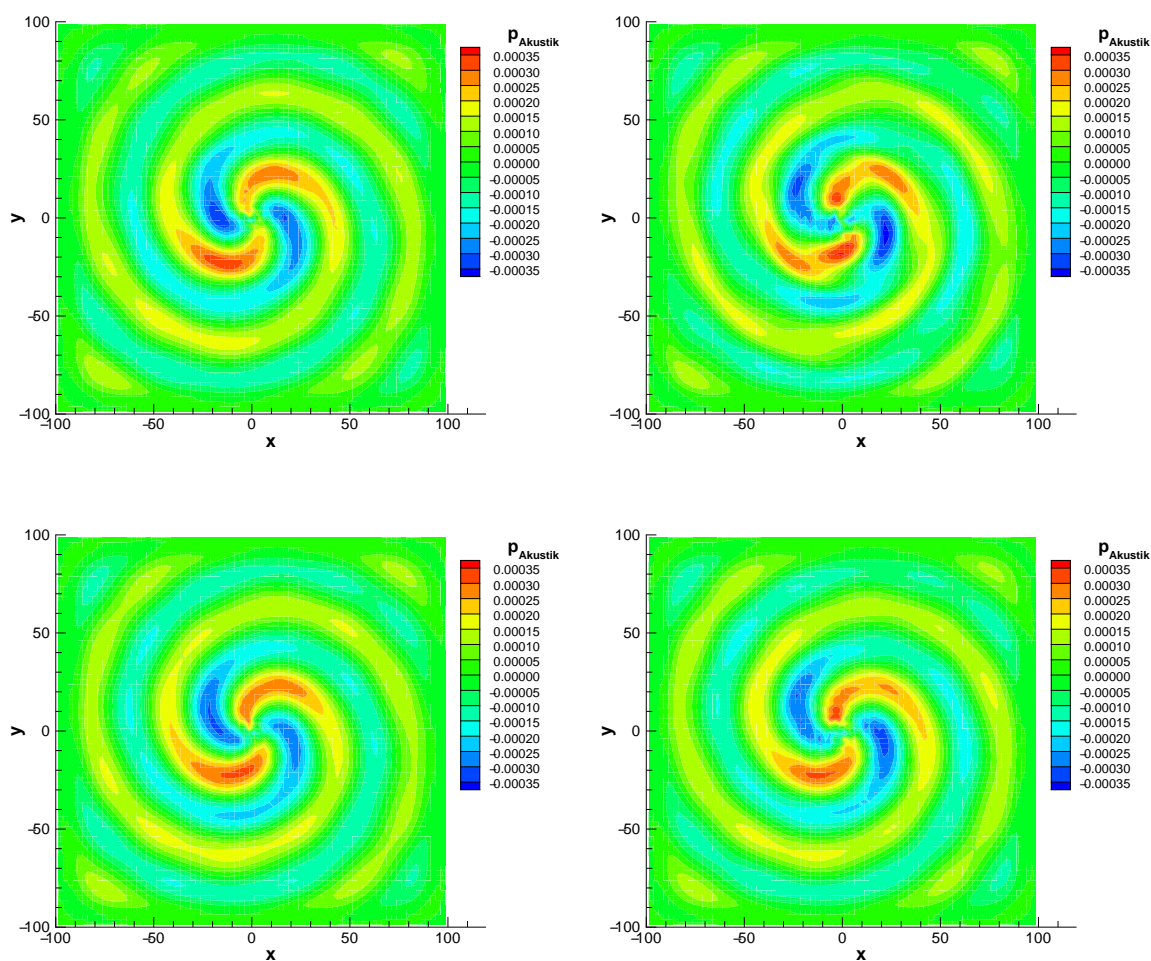


**Abbildung 7.2.18:** Akustischer Druck des Mehrskalensmodells und den Gitterverfeinerungsstufen 5 (links) und 6 (rechts).

Mit zunehmender Verfeinerungsstufe stellen sich die Nulllage und Amplitude der Druckwellen ein. Im Fall der Verfeinerungsstufe 6 werden 88.2 % der analytischen Amplitude erreicht.

### Mehrskalenmodell mit Konvektion

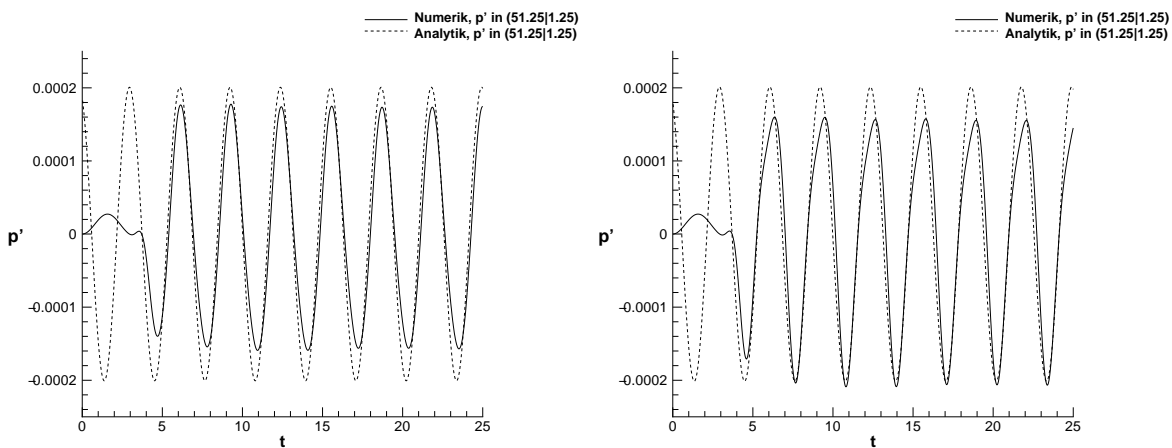
Zuletzt wird die Konvektion in die Mehrskalmodellierung aufgenommen und anhand des rotierenden Wirbelpaars getestet.



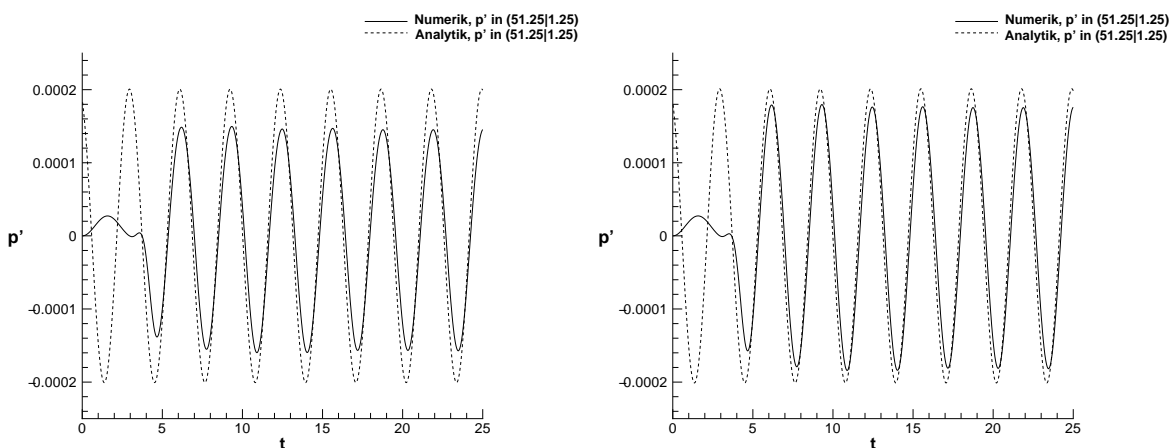
**Abbildung 7.2.19:** Akustischer Druck auf einem verschobenen Gitter nach 2000 Zeitschritten mit dem Mehrskalmodell mit Konvektionseinfluß und den Gitterverfeinerungsstufen 3 bis 6 (von links oben nach rechts unten).

Deren Einfluß wird durch die Evolutionsgleichungen (5.2.39) - (5.2.41) der nächst höheren Ordnung bestimmt. Die Abbildung 7.2.19 zeigt die akustische Lösung nach 2000 Zeitschritten für die Gitterverfeinerungsstufen 3 bis 6 (von links oben nach rechts unten).

Die Auswirkungen auf die Lösung durch Hinzunahme der Konvektionskorrektur fallen gering aus. Das ist für das Beispiel des rotierenden Wirbelpaars nicht anders zu erwarten, denn es besitzt keine ausgeprägte Konvektion in eine Richtung. Die Strömungsgeschwindigkeiten bilden nahezu konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung, siehe Abbildung 7.2.2. Die Abbildungen 7.2.20 und 7.2.21 geben den akustischen Druck in einem festen Punkt über die Zeit aufgetragen an.



**Abbildung 7.2.20:** Akustischer Druck mit dem Mehrskalmodell mit Konvektionseinfluß, Gitterverfeinerungsstufe 3 (links) und 4 (rechts).



**Abbildung 7.2.21:** Akustischer Druck mit dem Mehrskalmodell mit Konvektionseinfluß, Gitterverfeinerungsstufe 5 (links) und 6 (rechts).

## 8 Zusammenfassung

Das Mehrskalenproblem der Aeroakustik im Regime kleiner Mach-Zahlen erfordert eine geeignete Modellierung der um Größenordnungen variierenden Skalen im Raum und in der Energie von Strömung und Akustik.

Die vorliegende Arbeit leitet einen Ansatz zur aeroakustischen Mehrskalenmodellierung her, der alle Aspekte des Mehrskalenproblems berücksichtigt. Ein Störungsansatz, der auf den inkompressiblen Strömungsgleichungen basiert, modelliert sowohl die Schallerzeugung als auch ihre Ausbreitung. Die Grundlage dafür bildet die Grenzwertbetrachtung beim Übergang von einer kompressiblen zu einer inkompressiblen Strömung. Deren Ergebnisse motivieren eine Skalierung der Terme im Ansatz. Dadurch treten die physikalisch relevanten Terme hervor, was praktisch an der Potenz der Mach-Zahl des jeweiligen Ausdrucks abgelesen werden kann.

Die Betrachtung auf einer Raumskala und einer Zeitskala führt auf das Einskalenmodell *SPA*, das im Vergleich zum Ansatz von Hardin und Pope eine deutlich allgemeinere Beschreibung der schallerzeugenden, inkompressiblen Strömung erlaubt.

Durch die Mehrskalenmodellierung wird eine zweite, langskalige Raumvariable eingeführt. Die aus diesem Ansatz resultierenden Störungsgleichungen beinhalten Gradienten der physikalischen Größen, die sich sowohl auf die kurze wie auf die lange Raumskala beziehen. Die Eigenschaften der langskaligen Anteile werden über einen Mittelungsprozeß extrahiert, was in einer inhomogenen Wellengleichung für die akustische Ausbreitung resultiert. Die Quellterme der rechten Seite sind durch die Strömungslösung definiert und modellieren die Schallerzeugung. Der konvektive Einfluß der Strömung auf die akustische Ausbreitung wird in den Störungen der nächst höheren Ordnung beschrieben.

Die aeroakustische Mehrskalenmodellierung wird durch ein analytisches Beispiel mit bekannter Lösung getestet. Zwei Potentialwirbel, die auf einer Kreisbahn rotieren, definieren ein instationäres Strömungsfeld, das spiralförmige, akustische Wellen erzeugt. Der Mehrskalencharakter im Raum und in den Amplituden von Strömung und Akustik kommt durch das Beispiel sehr gut zum Ausdruck. Die analytische Potentiallösung der Wirbel wird auf einem feinen Rechengitter diskretisiert, um die kleinen räumlichen Strukturen abzubilden. Dieses ist eingebettet in ein deutlich gröber aufgelöstes Rechengitter, auf dem die akustische Ausbreitung simuliert und das den langskaligen akustischen Wellen angepaßt ist. Die beiden Rechengebiete für die Strömung und die Akustik kommunizieren über akustische Quellterme. Diese sind durch die schallerzeugende Strömung auf dem feinen Gitter definiert und regen auf dem groben CAA-Rechengitter die Akustik an. Die Vorschrift für den Transfer der Quellterme zwischen den Rechen-

gebieten wird von der Mehrskalenmodellierung explizit durch einen Mittelungsprozeß geliefert. Die Notwendigkeit zur Mittelung der Quellterme wird durch die numerischen Ergebnisse für das rotierende Wirbelpaar dokumentiert und betont.

## Literatur

- [1] R. Alber, *Implementierung und Test von hochauflösenden Verfahren für die Numerische Aeroakustik*, Studienarbeit, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2000).
- [2] C. Bailly, C. Bogey, and D. Juvé, *Computation of flow noise using source terms in Linearized Euler Equations*, AIAA Journal (2000), no. 2000-2047, 12.
- [3] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, (1967).
- [4] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé, *Computation of the sound radiated by a 3-d jet using Large Eddy simulation*, AIAA Journal (2000), no. 2000-2009, 11.
- [5] N. Curle, *The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound*, Proceedings of the Royal Society London **231** (1955), 506–514.
- [6] K.S. Dahl, *Aeroacoustic computation of low Mach number flow*, Tech. Report RISO R-947, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, (1996).
- [7] F. Durst and R. Lerch, *Kolloquium Strömungsinduzierter Lärm*, Tech. report, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, (2001).
- [8] M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Annotated Edition, Parabolic Press, (1975).
- [9] R. Ewert, *A hybrid computational aeroacoustics method to simulate airframe noise*, Shaker Verlag, Aachen, (2003).
- [10] J. E. Ffowcs-Williams and D. L. Hawkings, *Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion*, Philosophical Transactions of Royal Society London. **264** (1969), 321–342.
- [11] R. Fortenbach, *Erweiterung des Programms Flownoise um die Nahfeld- und Quadrupolquellterme*, Abschlußbericht, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2003).
- [12] R. Fortenbach, E. Frénod, R. Klein, C.-D. Munz, and E. Sonnendrücker, *Multiple scale considerations for sound generation in low Mach number flow*, Numerical Flow Simulation III (E.H. Hirschel, ed.), Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, vol. 82, Springer Verlag, (2001).
- [13] R. Fortenbach and C.-D. Munz, *Erzeugung und Ausbreitung von unphysikalischen Wellen in CFD-Lösern*, DGLR-Fachausschuss ((2001)).

- [14] ———, *A contribution to the flow decomposition debate*, Proceedings of the SWING Workshop, (2002).
- [15] ———, *Multiscale considerations for sound generation in low Mach number flows*, Proceedings of the GAMM Jahrestagung, (2002).
- [16] R. Fortenbach, C.-D. Munz, and M. Dumbser, *Multi-scale modelling of acoustic sources in low Mach-number flow*, Proceedings of the Euromech Conference: CAA: From acoustic source modeling to far-field radiated noise prediction, (2003).
- [17] R. Fortenbach, S. Roller, and C.-D. Munz, *The Multiple Pressure Variables approach to calculate acoustic waves at low Mach numbers*, Proceedings of the ECCOMAS Conference, (2000).
- [18] M.-E. Goldstein, *Aeroacoustics*, McGraw-Hill, New York, (1976).
- [19] J. Hardin and D.S. Pope, *An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics **6** (1994), 323–340.
- [20] J.S. Hesthaven, *The analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations*, ICASE Report (1997), no. 97-49.
- [21] M.S. Howe, *Contribution to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and the theory of the flute*, Journal of Fluid Mechanics **71** (1975), 625–673.
- [22] F.Q. Hu, *On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer*, ICASE Report **70** (1995), no. 95.
- [23] S. Klainermann and A. Majda, *Compressible and incompressible fluids*, Communications on Pure and Applied Mathematics **35** (1982), 629–651.
- [24] R. Klein, *Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I: One dimensional flow*, Journal of Computational Physics **121** (1995), 213–237.
- [25] S. Lele, *Computational aeroacoustics, a review*, AIAA Paper (1997), no. 97-0018.
- [26] M.J. Lighthill, *On sound generated aerodynamically I. General theory*, Proceedings of the Royal Society London **211** (1952), 565–587.
- [27] ———, *On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound*, Proceedings of the Royal Society London **222** (1954), 1–32.
- [28] G.M. Lilley, *On the noise from jets, Noise mechanisms*, AGARD **CP-131** (1974), 13.1–13.12.



- [29] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Springer Verlag, (1981).
- [30] A. Meister, *Asymptotic single and multiple scale expansions in the low Mach-number limit*, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg, (1997).
- [31] ———, *Asymptotische Entwicklungen und ihre Anwendungen in technischen Problemstellungen*, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg, (1997).
- [32] B. Mitchell, S. Lele, and P. Moin, *Direct computation of the sound from a co-rotating vortex pair*, Journal of Fluid Dynamics (1995), no. 285, 181–202.
- [33] E.A. Müller and F. Obermeier, *The spinning vortices as a source of sound*, AGARD CP-22 (1967), 177–195.
- [34] J. Ostertag, G. Guidati, and S. Wagner, *Prediction of trailing edge noise using space-time correlations of turbulence and tailored Green’s function*, Proceedings of the 7th International Congress on Sound and Vibrations (2000), 1291–1298.
- [35] C. Ottosson, *A comparison of acoustic analogies in computational aeroacoustics*, Diplomarbeit, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2002).
- [36] K. Pao and C.R. Anderson, *Computations of flow noise in two dimensions*, Tech. Report LA-UR-94-1354, Los Alamos National Laboratory, (1994).
- [37] J.H. Park, *Ein konservatives MPV-Verfahren zur Simulation der Strömungen in allen Machzahlbereichen*, Dissertation, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2003).
- [38] O.M. Phillips, *On the generation of sound by supersonic turbulent shear flows*, Journal of Fluid Mechanics **9** (1960), 1–28.
- [39] A. Powell, *Theory of vortex sound*, Journal of the Acoustical Society of America **36** (1964), 177–195.
- [40] M. Ratzel, *Die Simulation von schwach kompressiblen Strömungen auf körperangepaßten, strukturierten Gittern*, Dissertation, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2002).
- [41] H.S. Ribner, *New theory of jet noise generation, directivity and spectra*, Journal of the Acoustical Society of America **31** (1959), 245–246.
- [42] M. Roger, *The Acoustic Analogy some theoretical background*, Lecture Series 2000-02, Noise in Turbomachines, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, (2000).

- [43] S. Roller, *Ein numerisches Verfahren zur Simulation schwach kompressibler Strömungen*, Dissertation, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (2003).
- [44] T. Schneider, R. Klein, R. Fortenbach, and C.-D. Munz, *Numerical methods for weakly compressible reactive flows*, Notes on Numerical Fluid Dynamics, Vieweg Verlag, (2000).
- [45] W. Schneider, *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, (1978).
- [46] W. Z. Shen and J. N. Sørensen, *Aeroacoustic modelling of low-speed flows*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics **13** (1999), 271–289.
- [47] ———, *Comment on the aeroacoustic formulation of Hardin and Pope*, AIAA Journal **37** (1999), no. 1, 141–143.
- [48] S.A. Slimon, M.C. Soteriou, and D.W. Davis, *Computational aeroacoustic simulations using the expansion about incompressible flow approach*, AIAA Journal **37** (1999), no. 4, 409–416.
- [49] ———, *Development of computational aeroacoustics equations for subsonic flows using a Mach number expansion approach*, Journal of Computational Physics **159** (2000), 377–406.
- [50] C.K.W. Tam, *Numerical methods in computational aeroacoustics*, Lecture Series 1996-04, Applied Aeroacoustics-Prediction Methods, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, (1996).
- [51] ———, *Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics*, AIAA Paper (1997), 97–1774.
- [52] L. Ting and M.J. Miksis, *On vortical flow and sound generation*, SIAM Journal of Applied Mathematics **50** (1990), no. 2, 521–536.
- [53] H. Viviand, *Étude des écoulements instationnaires a faible nombre de Mach avec application au bruit aérodynamique*, Journal de Mécanique **9** (1970), no. 4, 573–599.
- [54] S. Wagner, *Vorlesung Strömungslehre*, Vorlesungsskript, Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart, (1995).
- [55] J. Wandinger, *Flownoise - Ein Programm zur Berechnung strömungsakustischer Probleme nach der Methode von Ffowcs-Williams Hawkings*, Abschlussbericht B-TA-3650, IABG, (1998).

## A Grundgleichungen

### A.1 Navier-Stokes Gleichungen in konservativen und primitiven Variablen

Die Erhaltungsgleichungen für die Impulsdichte und die Energie werden umgeformt in Evolutionsgleichungen für die primitiven Variablen Geschwindigkeit und Druck. Die Gleichung für die Massenerhaltung ist identisch mit einer Evolutionsgleichung für die Dichte.

#### Umformung der Impulserhaltung in Geschwindigkeits-Evolutionsgleichung

$$(\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}})_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}} \circ \underline{\tilde{u}}) + \tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

$$(\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}})_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}})\underline{\tilde{u}} + ((\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}) \cdot \tilde{\nabla})\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

$$\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}_{\tilde{t}} + \tilde{\rho}_{\tilde{t}}\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}})\underline{\tilde{u}} + ((\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}) \cdot \tilde{\nabla})\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

$$\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}_{\tilde{t}} + (-\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}))\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}})\underline{\tilde{u}} + ((\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}) \cdot \tilde{\nabla})\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

$$\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}_{\tilde{t}} + ((\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}) \cdot \tilde{\nabla})\underline{\tilde{u}} + \tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

$$\underline{\tilde{u}}_{\tilde{t}} + (\underline{\tilde{u}} \cdot \tilde{\nabla})\underline{\tilde{u}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{\tau}}$$

#### Umformung der Energieerhaltung in Druck-Evolutionsgleichung

$$\tilde{e}_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\tilde{u}}(\tilde{e} + \tilde{p})) = \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\tilde{\tau}}\underline{\tilde{u}}) - \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{q}}$$

$$\left( \frac{\tilde{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}^2 \right)_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \left( \underline{\tilde{u}} \left( \frac{\tilde{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}^2 + \tilde{p} \right) \right) = \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\tilde{\tau}}\underline{\tilde{u}}) - \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{q}}$$

$$\frac{\tilde{p}_{\tilde{t}}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{\tilde{t}}\underline{\tilde{u}}^2 + \tilde{\rho}\underline{\tilde{u}} \cdot \underline{\tilde{u}}_{\tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \left( \underline{\tilde{u}} \left( \frac{\tilde{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\underline{\tilde{u}}^2 + \tilde{p} \right) \right) = \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\tilde{\tau}}\underline{\tilde{u}}) - \tilde{\nabla} \cdot \underline{\tilde{q}}$$



$$\frac{\tilde{p}_t}{\gamma - 1} + \frac{1}{\gamma - 1} \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{\underline{\tau}}} \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}}$$

$$\tilde{p}_t + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = (\gamma - 1) (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}})$$

$$\tilde{p}_t + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = (\gamma - 1) (\tilde{\Phi} - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}})$$

## A.2 Entdimensionalisierung der Navier-Stokes Gleichungen

Die dimensionsbehafteten Größen tragen eine Tilde, Referenzen sind gekennzeichnet durch das Subskript  $ref$  und dimensionslose Größen tragen keinerlei Indizierung. Für die Entdimensionalisierung wird der funktionale Zusammenhang

$$f = \frac{\tilde{f}}{f_{ref}} \quad \text{und} \quad \tilde{f} = f \cdot f_{ref}$$

zwischen dimensionslosen und dimensionsbehafteten Variablen sowie Referenzgrößen verwendet. Wird dieser Zusammenhang in die Navier-Stokes Gleichungen eingesetzt, so lassen sich Gleichungen für die dimensionsbehafteten und die dimensionslosen Variablen herleiten. In den dimensionslosen Gleichungen können globale Parameter, die aus Referenzgrößen gebildet werden, auftreten.

### Entdimensionalisierung der Massenerhaltung

$$\tilde{\rho}_t + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\underline{u}}) = 0$$

$$\rho_t \frac{\rho_{ref}}{t_{ref}} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} = 0$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{\rho_{ref}} = 0$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} \frac{x_{ref}}{\rho_{ref} u_{ref}} = 0$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

### Entdimensionalisierung der Impulserhaltung

$$(\tilde{\rho} \tilde{\underline{u}})_t + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\underline{u}} \circ \tilde{\underline{u}}) + \tilde{\nabla} \tilde{p} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\tau}}$$

$$(\rho \underline{u})_t \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{t_{ref}} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}} + \nabla p \frac{p_{ref}}{x_{ref}} = \nabla \cdot \underline{\tau} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{x_{ref}^2}$$

$$(\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{\rho_{ref} u_{ref}} + \nabla p \frac{p_{ref}}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{\rho_{ref} u_{ref}} = \nabla \cdot \underline{\tau} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{\rho_{ref} u_{ref}}$$

$$(\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref} \rho_{ref} u_{ref}^2} + \nabla p \frac{p_{ref}}{x_{ref} \rho_{ref} u_{ref}^2} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{\rho_{ref} u_{ref}^2}$$

$$(\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \nabla p \underbrace{\frac{p_{ref}/\rho_{ref}}{u_{ref}^2}}_{=\frac{1}{M^2}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{x_{ref} \rho_{ref} u_{ref}}}_{=\frac{1}{Re}}$$

$$(\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \frac{1}{M^2} \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

### Entdimensionalisierung der Energieerhaltung

$$\tilde{e}_t + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\underline{u}}(\tilde{e} + \tilde{p})) = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}\tilde{\underline{u}}) - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}}$$

$$e_t \frac{p_{ref}}{t_{ref}} + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref} p_{ref}} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{p_{ref}}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{x_{ref} p_{ref}} - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{x_{ref} u_{ref} \rho_{ref}}}_{=\frac{1}{Re}} \underbrace{\frac{u_{ref}^2}{p_{ref}/\rho_{ref}}}_{=M^2} - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} Re}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref}}{x_{ref} u_{ref} \rho_{ref} Re}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\tau} \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{q} \frac{\mu_{ref}}{x_{ref} u_{ref} \rho_{ref}} \frac{k_{ref}/\rho_{ref}}{\mu_{ref}/\rho_{ref} Re_{ref}}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\tau} \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{q} \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{x_{ref} u_{ref} \rho_{ref}}}_{=\frac{1}{Re}} \underbrace{\frac{k_{ref}/(\rho_{ref} \tilde{c}_P)}{\mu_{ref}/\rho_{ref}}}_{=\frac{1}{Pr}} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\tau} \underline{u}) - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot \underline{q}$$

$$e_t + \nabla \cdot (\underline{u}(e + p)) = \frac{M^2}{Re} \nabla \cdot (\underline{\tau} \underline{u}) - \frac{1}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}$$

### Entdimensionalisierung der Geschwindigkeits-Evolutionsgleichung

$$\tilde{\underline{u}}_t + (\tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\underline{u}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\tau}}$$

$$\frac{\underline{u}_t}{t_{ref}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \frac{u_{ref}^2}{x_{ref}} + \frac{1}{\rho} \nabla p \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\tau} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}^2}$$

$$\frac{\underline{u}_t}{t_{ref}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \frac{u_{ref}^2}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{u_{ref}} + \frac{1}{\rho} \nabla p \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}} \frac{t_{ref}}{u_{ref}} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\tau} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{u_{ref}}$$

$$\frac{\underline{u}_t}{t_{ref}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \frac{u_{ref}^2}{x_{ref}} \frac{x_{ref}}{u_{ref}^2} + \frac{1}{\rho} \nabla p \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}} \frac{x_{ref}}{u_{ref}^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\tau} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{u_{ref}^2}$$

$$\frac{\underline{u}_t}{t_{ref}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p \underbrace{\frac{p_{ref}/\rho_{ref}}{u_{ref}^2}}_{=\frac{1}{M^2}} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\tau} \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref} x_{ref} u_{ref}}}_{=\frac{1}{Re}}$$

$$\frac{\underline{u}_t}{t_{ref}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \frac{1}{\rho M^2} \nabla p = \frac{1}{\rho Re} \nabla \cdot \underline{\tau}$$



## Entdimensionalisierung der Druck-Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_t + \tilde{\underline{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \gamma \tilde{p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} &= (\gamma - 1) \tilde{\underline{\tau}} \tilde{\nabla} \tilde{\underline{u}} - (\gamma - 1) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}} \\
p_t \frac{p_{ref}}{t_{ref}} + \underline{u} \cdot \nabla p \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref}} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} \frac{p_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} &= (\gamma - 1) \underline{\tau} \nabla \underline{u} \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} \frac{p_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} &= (\gamma - 1) \underline{\tau} \nabla \underline{u} \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{t_{ref}}{p_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p \frac{u_{ref} p_{ref}}{x_{ref}} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} \frac{p_{ref} u_{ref}}{x_{ref}} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} &= (\gamma - 1) \underline{\tau} \nabla \underline{u} \frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}^2} \frac{x_{ref}}{u_{ref} p_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \underline{\tau} \nabla \underline{u} \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{x_{ref} p_{ref}} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \underline{\tau} \nabla \underline{u} \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{x_{ref} \rho_{ref} u_{ref}}}_{=\frac{1}{Re}} \underbrace{\frac{u_{ref}^2}{p_{ref} / \rho_{ref}}}_{=M^2} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{k_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} R_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - (\gamma - 1) \nabla \cdot \underline{q} \frac{\mu_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}} \frac{k_{ref}}{\mu_{ref} R_{ref}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - \gamma \nabla \cdot \underline{q} \underbrace{\frac{\mu_{ref}}{x_{ref} u_{ref} p_{ref}}}_{\frac{1}{Re}} \underbrace{\frac{k_{ref} / (\rho_{ref} \tilde{c}_P)}{\mu_{ref} / \rho_{ref}}}_{\frac{1}{Pr}} \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - \frac{\gamma}{Re Pr} \nabla \cdot \underline{q} \quad | \quad Pe = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Re Pr \\
p_t + \underline{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \underline{u} &= (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \underline{\tau} \nabla \underline{u} - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}
\end{aligned}$$

### A.3 Transformation in den Wellenzahl-Frequenz-Raum

Für die Transformation der linearisierten Euler Gleichungen von der Raum-Zeit Beschreibung in die Wellenzahl-Frequenz Beschreibung werden die Transformations-Theoreme über die Ableitung und die Verschiebung angewendet. Sie sind an dieser Stelle als Rechenregel dargestellt. Darin bezeichnet  $\hat{f}$  eine in die Wellenzahl-Frequenz Beschreibung transformierte Größe und  $f$  beschreibt die ursprüngliche Größe in der Raum-Zeit Beschreibung. Die unabhängige Variable ist in der Raum-Zeit Beschreibung mit  $x$  und in der Wellenzahl-Frequenz Beschreibung mit  $\alpha$  bezeichnet. Zwischen  $f$  und  $\hat{f}$  gilt der Zusammenhang

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

#### Ableitungssatz

Die Fouriertransformierte einer partiellen Ableitung von  $f$  nach  $x$  ist gleich dem  $i\alpha$ -fachen der fouriertransformierten Funktion  $\hat{f}$ .

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x} f(x)} = i\alpha \hat{f}(\alpha)$$

#### Verschiebungssatz

Die Fouriertransformierte einer Funktion, die an der Stelle  $x + \delta x$  ausgewertet wird, ist gleich dem  $e^{i\alpha\delta x}$ -fachen der transformierten Funktion  $\hat{f}$  an der Stelle  $\alpha$ .

$$\widehat{f(x + \delta x)} = e^{i\alpha\delta x} \hat{f}(\alpha)$$

## B Asymptotische Gleichungen

### B.1 Entwicklung auf einer Raumskala und einer Zeitskala

Die asymptotische Einskalen-Entwicklung

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho^{(0)}(\underline{x}, t) + M\rho^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2\rho^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3),$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{(0)}(\underline{x}, t) + M\underline{u}^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2\underline{u}^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3),$$

$$p(\underline{x}, t) = p^{(0)}(\underline{x}, t) + Mp^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2p^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3),$$

$$T(\underline{x}, t) = T^{(0)}(\underline{x}, t) + MT^{(1)}(\underline{x}, t) + M^2T^{(2)}(\underline{x}, t) + O(M^3)$$

mit der Raumskala  $\underline{x}$  und der Zeitskala  $t$  wird in die dimensionslosen kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) und die Zustandsgleichung (2.2.4) eingesetzt. Die globale Mach-Zahl  $M$  wird aus Referenzgrößen gebildet. Daraus ergeben sich die folgenden asymptotischen Gleichungen in Dichte, Geschwindigkeit, Druck und Temperatur.

#### Asymptotische Gleichungen für die Dichte $\rho$

**Führende Ordnung:**

$$\rho_t^{(0)} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)}) = 0$$

**Erste Ordnung:**

$$\rho_t^{(1)} + \nabla \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)}) = 0$$

**Zweite Ordnung:**

$$\rho_t^{(2)} + \nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)}) = 0$$

**Dritte Ordnung:**

$$\rho_t^{(3)} + \nabla \cdot (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)}) = 0$$

**Vierte Ordnung:**

$$\rho_t^{(4)} + \nabla \cdot (\rho^{(4)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(3)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(3)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(4)}) = 0$$

**Asymptotische Gleichung für die Geschwindigkeit  $\underline{u}$**

**Ordnung  $O(M^{-2})$ :**

$$\nabla p^{(0)} = \underline{0}$$

**Ordnung  $O(M^{-1})$ :**

$$\nabla p^{(1)} = \underline{0}$$

**Führende Ordnung:**

$$\rho^{(0)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + \nabla p^{(2)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\tau}^{(0)}$$

**Erste Ordnung:**

$$\begin{aligned} & \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} \\ & + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + \nabla p^{(3)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\tau}^{(1)} \end{aligned}$$

**Zweite Ordnung:**

$$\begin{aligned} & \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(2)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(0)} \\ & + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} \\ & + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(2)} + \nabla p^{(4)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\tau}^{(2)} \end{aligned}$$

**Dritte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
& \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(3)} \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(2)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(3)} \underline{u}_t^{(0)} \\
& + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(3)} + \nabla p^{(5)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(3)}
\end{aligned}$$

**Vierte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
& \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(4)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(3)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(2)} + \rho^{(3)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(4)} \underline{u}_t^{(0)} \\
& + (\rho^{(4)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(3)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(4)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(3)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla) \underline{u}^{(4)} + \nabla p^{(6)} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(4)}
\end{aligned}$$

**Asymptotische Gleichung für den Druck  $p$** **Führende Ordnung:**

$$p_t^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(0)}$$

**Erste Ordnung:**

$$p_t^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(1)} = -\frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(1)}$$

**Zweite Ordnung:**

$$\begin{aligned}
 p_t^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(2)} \\
 + \gamma p^{(2)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(1)} \nabla \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(2)} &= (\gamma - 1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(0)} \nabla \underline{u}^{(0)}) \\
 &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(2)}
 \end{aligned}$$

**Dritte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
 p_t^{(3)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(3)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla p^{(2)} + \gamma p^{(3)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} \\
 + \gamma p^{(2)} \nabla \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(3)} &= (\gamma - 1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(0)} \nabla \underline{u}^{(1)} + \underline{\tau}^{(1)} \nabla \underline{u}^{(0)}) \\
 &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(3)}
 \end{aligned}$$

**Vierte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
 p_t^{(4)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla p^{(4)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla p^{(3)} \\
 + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla p^{(2)} + \gamma p^{(4)} \nabla \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(3)} \nabla \cdot \underline{u}^{(1)} \\
 + \gamma p^{(2)} \nabla \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(1)} \nabla \cdot \underline{u}^{(3)} + \gamma p^{(0)} \nabla \cdot \underline{u}^{(4)} &= (\gamma - 1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(0)} \nabla \underline{u}^{(2)} + \underline{\tau}^{(1)} \nabla \underline{u}^{(1)} + \underline{\tau}^{(2)} \nabla \underline{u}^{(0)}) \\
 &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot \underline{q}^{(4)}
 \end{aligned}$$

**Asymptotische Gleichungen für die Temperatur  $T$**

**Führende Ordnung:**

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}$$

**Erste Ordnung:**

$$T^{(1)} = \frac{p^{(1)} - \rho^{(1)} T^{(0)}}{\rho^{(0)}}$$

**Zweite Ordnung:**

$$T^{(2)} = \frac{p^{(2)} - \rho^{(2)}T^{(0)} - \rho^{(1)}T^{(1)}}{\rho^{(0)}}$$

**Dritte Ordnung:**

$$T^{(3)} = \frac{p^{(3)} - \rho^{(3)}T^{(0)} - \rho^{(2)}T^{(1)} - \rho^{(1)}T^{(2)}}{\rho^{(0)}}$$

**Vierte Ordnung:**

$$T^{(4)} = \frac{p^{(4)} - \rho^{(4)}T^{(0)} - \rho^{(3)}T^{(1)} - \rho^{(2)}T^{(2)} - \rho^{(1)}T^{(3)}}{\rho^{(0)}}$$

## B.2 Entwicklung auf zwei Raumskalen und einer Zeitskala

Die asymptotische Mehrskalen-Entwicklung

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M\rho^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2\rho^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3),$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M\underline{u}^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2\underline{u}^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3),$$

$$p(\underline{x}, t) = p^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + Mp^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3),$$

$$T(\underline{x}, t) = T^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + MT^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + M^2T^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) + O(M^3)$$

mit den Raumskalen  $\underline{\eta} = O(\underline{x})$  und  $\underline{\xi} = O(M\underline{x})$  und der Zeitskala  $t$  wird in die dimensionslosen kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.2.1) - (2.2.3) und die Zustandsgleichung (2.2.4) eingesetzt. Die globale Mach-Zahl  $M$  wird aus Referenzgrößen gebildet. Daraus ergeben sich die folgenden asymptotischen Gleichungen in Dichte, Geschwindigkeit, Druck und Temperatur.

### Asymptotische Gleichungen für die Dichte $\rho$

**Führende Ordnung:**

$$\rho_t^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)}) = 0$$

**Erste Ordnung:**

$$\rho_t^{(1)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)}) = 0$$

**Zweite Ordnung:**

$$\begin{aligned} \rho_t^{(2)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)}) \\ + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)}) = 0 \end{aligned}$$

**Dritte Ordnung:**

$$\begin{aligned} \rho_t^{(3)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)}) \\ + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)}) = 0 \end{aligned}$$



**Vierte Ordnung:**

$$\begin{aligned} \rho_t^{(4)} + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(4)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(3)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(3)}) + \nabla_\eta \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(4)}) \\ + \nabla_\xi \cdot (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)}) + \nabla_\xi \cdot (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)}) + \nabla_\xi \cdot (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)}) + \nabla_\xi \cdot (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)}) = 0 \end{aligned}$$

**Asymptotische Gleichung für die Geschwindigkeit  $\underline{u}$** **Ordnung  $O(M^{-2})$ :**

$$\nabla_\eta p^{(0)} = \underline{0}$$

**Ordnung  $O(M^{-1})$ :**

$$\nabla_\eta p^{(1)} + \nabla_\xi p^{(0)} = \underline{0}$$

**Führende Ordnung:**

$$\rho^{(0)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + \nabla_\eta p^{(2)} + \nabla_\xi p^{(1)} = \frac{1}{Re} \nabla_\eta \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(0)}$$

**Erste Ordnung:**

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\ + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + \nabla_\eta p^{(3)} + \nabla_\xi p^{(2)} = \frac{1}{Re} \nabla_\eta \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(1)} + \frac{1}{Re} \nabla_\xi \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(0)} \end{aligned}$$

**Zweite Ordnung:**

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(2)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(0)} \\ + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} \\ + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} \\ + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} \\ + \nabla_\eta p^{(4)} + \nabla_\xi p^{(3)} = \frac{1}{Re} \nabla_\eta \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(2)} + \frac{1}{Re} \nabla_\xi \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(1)} \end{aligned}$$

**Dritte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
& \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(3)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(2)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(3)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(3)} \\
& + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(2)} \\
& + \nabla_\eta p^{(5)} + \nabla_\xi p^{(4)} = \frac{1}{Re} \nabla_\eta \cdot \underline{\tau}^{(3)} + \frac{1}{Re} \nabla_\xi \cdot \underline{\tau}^{(2)}
\end{aligned}$$

**Vierte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
& \rho^{(0)} \underline{u}_t^{(4)} + \rho^{(1)} \underline{u}_t^{(3)} + \rho^{(2)} \underline{u}_t^{(2)} \\
& + \rho^{(3)} \underline{u}_t^{(1)} + \rho^{(4)} \underline{u}_t^{(0)} + (\rho^{(4)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(3)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(4)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(3)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta) \underline{u}^{(4)} + (\rho^{(3)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} \\
& + (\rho^{(2)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(1)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(0)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(1)} \\
& + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(2)} + (\rho^{(0)} \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi) \underline{u}^{(3)} + \nabla_\eta p^{(6)} + \nabla_\xi p^{(5)} = \frac{1}{Re} \nabla_\eta \cdot \underline{\tau}^{(4)} + \frac{1}{Re} \nabla_\xi \cdot \underline{\tau}^{(3)}
\end{aligned}$$

**Asymptotische Gleichung für den Druck  $p$** **Führende Ordnung:**

$$p_t^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta p^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(0)}$$

**Erste Ordnung:**

$$\begin{aligned} p_t^{(1)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta p^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta p^{(1)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi p^{(0)} \\ + \gamma p^{(1)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(0)} = -\frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(1)} - \frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\xi \cdot \underline{q}^{(0)} \end{aligned}$$

**Zweite Ordnung:**

$$\begin{aligned} p_t^{(2)} + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta p^{(0)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta p^{(1)} \\ + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta p^{(2)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi p^{(0)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi p^{(1)} + \gamma p^{(2)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} \\ + \gamma p^{(1)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(1)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(1)} = (\gamma-1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(0)} \nabla_\eta \underline{u}^{(0)}) \\ - \frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(2)} \\ - \frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\xi \cdot \underline{q}^{(1)} \end{aligned}$$

**Dritte Ordnung:**

$$\begin{aligned} p_t^{(3)} + \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\eta p^{(0)} + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta p^{(1)} \\ + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta p^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta p^{(3)} + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\xi p^{(0)} \\ + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi p^{(1)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi p^{(2)} + \gamma p^{(3)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} \\ + \gamma p^{(2)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(3)} \\ + \gamma p^{(2)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(1)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(2)} = (\gamma-1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(1)} \nabla_\eta \underline{u}^{(0)} + \underline{\tau}^{(0)} \nabla_\eta \underline{u}^{(1)}) \\ + \underline{\tau}^{(0)} \nabla_\xi \underline{u}^{(0)} \\ - \frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(3)} - \frac{(\gamma-1)}{Pe} \nabla_\xi \cdot \underline{q}^{(2)} \end{aligned}$$

**Vierte Ordnung:**

$$\begin{aligned}
& p_t^{(4)} \\
& + \underline{u}^{(4)} \cdot \nabla_\eta p^{(0)} + \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\eta p^{(1)} + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\eta p^{(2)} \\
& + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\eta p^{(3)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\eta p^{(4)} + \underline{u}^{(3)} \cdot \nabla_\xi p^{(0)} \\
& + \underline{u}^{(2)} \cdot \nabla_\xi p^{(1)} + \underline{u}^{(1)} \cdot \nabla_\xi p^{(2)} + \underline{u}^{(0)} \cdot \nabla_\xi p^{(3)} \\
& + \gamma p^{(4)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(0)} + \gamma p^{(3)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(2)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(2)} \\
& + \gamma p^{(1)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(3)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\eta \cdot \underline{u}^{(4)} + \gamma p^{(3)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(0)} \\
& + \gamma p^{(2)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(1)} + \gamma p^{(1)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(2)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \underline{u}^{(3)} = (\gamma - 1) \frac{1}{Re} (\underline{\tau}^{(2)} \nabla_\eta \underline{u}^{(0)} + \underline{\tau}^{(1)} \nabla_\eta \underline{u}^{(1)} \\
& \quad + \underline{\tau}^{(0)} \nabla_\eta \underline{u}^{(2)} + \underline{\tau}^{(1)} \nabla_\xi \underline{u}^{(0)} + \underline{\tau}^{(0)} \nabla_\xi \underline{u}^{(1)}) \\
& \quad - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla_\eta \cdot \underline{q}^{(4)} - \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla_\xi \cdot \underline{q}^{(3)}
\end{aligned}$$

**Asymptotische Gleichungen für die Temperatur  $T$** **Führende Ordnung:**

$$T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}$$

**Erste Ordnung:**

$$T^{(1)} = \frac{p^{(1)} - \rho^{(1)} T^{(0)}}{\rho^{(0)}}$$

**Zweite Ordnung:**

$$T^{(2)} = \frac{p^{(2)} - \rho^{(2)} T^{(0)} - \rho^{(1)} T^{(1)}}{\rho^{(0)}}$$

**Dritte Ordnung:**

$$T^{(3)} = \frac{p^{(3)} - \rho^{(3)} T^{(0)} - \rho^{(2)} T^{(1)} - \rho^{(1)} T^{(2)}}{\rho^{(0)}}$$

**Vierte Ordnung:**

$$T^{(4)} = \frac{p^{(4)} - \rho^{(4)}T^{(0)} - \rho^{(3)}T^{(1)} - \rho^{(2)}T^{(2)} - \rho^{(1)}T^{(3)}}{\rho^{(0)}}$$



## C Lebenslauf

### Person

Name Roland Fortenbach  
Geboren 25. Oktober 1970 in Bräunlingen, Schwarzwald-Baar Kreis  
Familienstand Verheiratet, eine Tochter

### Schule

1977 - 1981 Grundschule Bräunlingen  
1981 - 1990 Fürstenberg-Gymnasium Donaueschingen  
Abschluss: Abitur

### Wehrdienst

1990 - 1991 Instandsetzung, Stetten a.k.M. und Immendingen

### Hochschule

WS 1991/92 - SS 1997 Studium der Technomathematik, Universität Karlsruhe  
Diplomarbeit: *Simulation der Festigkeit von Verzahnungen mit der Finite-Elemente Methode*  
Abschluss: Diplom-Technomathematiker

### Beruf

01.10.1997 - 14.05.1999 Entwicklung, IMS Morat Söhne GmbH, Donaueschingen  
17.05.1999 - 30.09.2003 Institut für Aero- und Gasdynamik, Universität Stuttgart  
01.10.2003 - 31.12.2004 Entwicklung Berechnung Simulation, Metabo GmbH, Nürtingen  
seit 01.01.2005 Technische Berechnung, Robert Bosch AG, Hallein, Österreich