

# Optische korrelationsbasierte Messtechnik mittels zufälliger Punktemuster

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

Vorgelegt von

**Frederik Blumrich**

aus Filderstadt

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Fritsch

Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. habil. Andreas Dillmann

Tag der mündlichen Prüfung: 10. März 2009

Institut für Photogrammetrie  
der Universität Stuttgart

**2009**



# Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	5
Abstract	7
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	9
Abbildungsverzeichnis	15
Tabellenverzeichnis	19
<b>1 Einleitung</b>	<b>21</b>
1.1 Motivation . . . . .	21
1.2 Stand der Forschung . . . . .	22
1.3 Ziel der Arbeit . . . . .	24
1.4 Gliederung . . . . .	25
<b>2 Messverfahren</b>	<b>27</b>
2.1 Particle Image Velocimetry . . . . .	27
2.2 Hintergrund-Schlieren-Verfahren . . . . .	34
2.3 Digitale Bildkorrelation . . . . .	38
2.4 Projected Pattern Correlation . . . . .	41
2.5 Reflected Pattern Correlation . . . . .	45
<b>3 Auswertetechniken</b>	<b>49</b>
3.1 Perspektivische Entzerrung . . . . .	49
3.1.1 Scheimpflug-Bedingung . . . . .	51
3.2 Kreuzkorrelation . . . . .	54
3.2.1 Schnelle Fourier-Transformation . . . . .	58
3.2.2 Iterativer Korrelationsansatz unter Nutzung der Bilddeformation . . . . .	59
3.2.3 Ensemble-Korrelation . . . . .	61
3.2.4 Alternative Methoden . . . . .	64
3.3 Sub-Pixel-Detektoren . . . . .	66
3.3.1 Eindimensionale Algorithmen . . . . .	67
3.3.1.1 Drei-Punkt-Schätzer . . . . .	67
3.3.1.2 Blais-Rioux-Methode . . . . .	69

3.3.2	Zweidimensionale Algorithmen . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Weiterentwicklungen</b>	<b>73</b>
4.1	Allgemeine eindimensionale lineare Gaußsche Regression . . . . .	73
4.2	Allgemeine zweidimensionale lineare Gaußsche Regression . . . . .	76
4.3	Systematische Fehler beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen . . . . .	80
4.3.1	Analytische Beschreibung des systematischen Fehlers . . . . .	81
4.3.2	Verifikation mittels einer numerischen Simulation . . . . .	90
4.4	Single-Pixel-Ensemble-Korrelation . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>107</b>
<b>Anhang</b>		<b>109</b>
A.1	Ausgleichsrechnung . . . . .	109
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>117</b>
<b>Danksagung</b>		<b>127</b>
<b>Lebenslauf</b>		<b>129</b>

# Kurzfassung

Die grundlegende Idee der optischen korrelationsbasierten Messtechnik besteht darin, die lokale Kreuzkorrelation zur Lösung des Korrespondenzproblems anzuwenden. Dazu wird ein zufälliges, und dadurch eindeutig zu korrelierendes, Punktemuster in zwei unterschiedlichen Zuständen mittels einer digitalen Kamera aufgenommen. Je nach Anwendungsfall können die beiden Zustände durch unterschiedliche Zeitpunkte, Perspektiven, Oberflächenformen oder Dichtegradienten gegeben sein. Die Auswertung des so gewonnenen Bildpaares erfolgt mit Hilfe von Kreuzkorrelationsalgorithmen auf Basis von räumlichen Auswertefenstern. Dieser Ansatz zur Lösung des Korrespondenzproblems ist schnell, eindeutig und robust. Es wird keine Abfolge von Bildern benötigt, wie dies z.B. bei der Streifenprojektion der Fall ist. Daher ist auch eine Messung von dynamischen Vorgängen möglich.

Im Vergleich zur klassischen Photogrammetrie entfällt das explizite Signalisieren einzelner Messpunkte. Die kleinen Punkte des zufälligen Musters können, unter Berücksichtigung ihrer Umgebung, als sehr dichtes, zufällig verteiltes Feld von photogrammetrischen Messmarken angesehen werden. Aufgrund der fehlenden Kodierung der einzelnen Punkte erfolgt die Auswertung daher mittels lokaler Auswertefenster, die jeweils mehrere Punkte des Musters enthalten und somit eindeutig zugeordnet werden können.

Durch die Verwendung von lokalen Auswertefenstern zur Lösung des Korrespondenzproblems reduziert sich allerdings die räumliche Auflösung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher der Ansatz der Ensemble-Korrelation angewendet. Dabei wird durch den Einsatz mehrerer verschiedener zufälliger Punktemuster im Falle stationärer oder periodischer Vorgänge entweder eine Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR) der Kreuzkorrelationsfunktion oder eine Verbesserung der räumlichen Auflösung erreicht. Es wird eine Implementierung der Single-Pixel-Ensemble-Korrelation vorgestellt, mit der die räumliche Auflösung um einen Faktor von bis zu 1024 verbessert werden kann.

Neben der geometrischen Kalibrierung des Messsystems hängt die Genauigkeit der optischen korrelationsbasierten Messtechnik insbesondere von der Genauigkeit der Kreuzkorrelationsalgorithmen ab, die zur Lösung des Korrespondenzproblems verwendet werden. Die Kreuzkorrelationsalgorithmen selbst erlauben eine Messgenauigkeit im Sub-Pixel-Bereich. Dies ist mittels spezieller Sub-Pixel-Detektoren unter Berücksichtigung der lokalen Umgebung des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion möglich. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit ein Schwerpunkt auf die Untersuchung der Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion gelegt.

Es wird gezeigt, dass die bisherigen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle elliptischer Korrelationsmaxima einen systematischen Fehler besitzen, der die normalerweise zu erwartende Messgenauigkeit deutlich übersteigt. Zusätzlich ist eine Herleitung der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers Teil dieser Arbeit. Durch die Anwendung eines allgemeinen zweidimensionalen Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion, der in dieser Arbeit entwickelt, ausführlich dargestellt und getestet wird, kann dieser systematische Fehler vollständig eliminiert werden.

Die analytische Beschreibung des systematischen Fehlers und der allgemeine zweidimensionale Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion werden im Rahmen einer Simulation untersucht und mit den Ergebnissen verglichen, die man beim Einsatz kommerzieller Kreuzkorrelationsalgorithmen erhält.

Da es sehr einfach möglich ist, den verbesserten Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion mit der neuen Implementierung der Single-Pixel-Ensemble-Korrelation zu kombinieren, wird insgesamt eine deutliche Verbesserung der Genauigkeit und der räumlichen Auflösung für sämtliche optischen korrelationsbasierten Messtechniken erreicht.

# Abstract

The fundamental idea of the optical correlation-based measurement technique is to solve the correspondence problem by means of local cross-correlation. Therefore a random dot pattern is imaged under two different conditions using a digital camera. Due to its random character, the dot pattern can be correlated unambiguously. Depending on different applications of this measurement technique, the two conditions can be given by means of different instances of time, viewing directions, shapes of the surface and density gradients. The image pair obtained is evaluated using spatial interrogation windows and cross-correlation algorithms. This approach for solving the correspondence problem is fast, unambiguous and robust. There is no need to record a sequence of images as it is, for instance, the case in the fringe projection technique. Thus, it is even possible to measure high dynamic scenes.

Compared to classic photogrammetric applications, there is no explicit signaling of individual measurement points. The small dots of the random pattern together with their local surroundings can be considered as a dense field of small signaled points. Due to the missing coding, the evaluation is done using spatial interrogation windows, which include several small dots each. Thus, the correspondence problem can be solved unambiguously.

Using spatial interrogation windows will lead to a reduced spatial resolution. Within this work, the so called ensemble correlation is applied. This technique consists in using several different random dot patterns in the case of stationary or periodic scenes and leads either to an increased signal-to-noise ratio (SNR) of the cross-correlation function or to an improved spatial resolution. An implementation of the single pixel ensemble correlation (SPEC) will be presented, which improves the spatial resolution by a factor of up to 1024.

Besides the geometric calibration of the measurement system, the accuracy of the optical correlation-based measurement technique depends strongly on the accuracy of the cross-correlation algorithms used to solve the correspondence problem. The cross-correlation algorithms provide accuracy in the sub-pixel domain. This is done using special algorithms for sub-pixel displacement estimation. Therefore, the main focus within this work is on the investigation of the algorithms used for sub-pixel displacement estimation.

It will be shown that previous algorithms for sub-pixel displacement estimation will be biased in case of elliptically shaped correlation peaks. This bias error considerably exceeds the expected accuracy of the cross-correlation algorithms. Additionally, an analytical derivation of the bias error is also included in this work. Using a general two-dimensional algorithm for

sub-pixel displacement estimation, which is developed, described and tested in detail within this work, the bias errors will completely vanish.

The analytical description of the bias error and the general two-dimensional algorithm for sub-pixel displacement estimation will be investigated by means of a numerical simulation. Additionally, the results of this simulation will be compared with the result obtained using commercial algorithms for cross-correlation and sub-pixel displacement estimation.

Since it is possible to combine the improved algorithms for sub-pixel displacement estimation with the new implementation of the SPEC method very easily, a considerable improvement of the accuracy and of the spatial resolution will be obtained for all optical correlation-based measurement techniques.



# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

BLUE	Best Linear Unbiased Estimator
BOS	Background Oriented Schlieren
CAD	Computer Aided Design
CCD	Charge Coupled Device
CMOS	Complementary Metal Oxide Semiconductor
DEHS	Di-Ethyl-Hexyl-Sebacat
DGM	Digitales Geländemodell
DIC	Digital Image Correlation
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite Impulse Response
GLONASS	Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema
GPS	Global Positioning System
ICP	Iterative Closest Point
IPCT	Image Pattern Correlation Technique
LGS	Lineares Gleichungssystem
LSE	Least Squares Estimation
LSM	Least Squares Matching

LSV	Laser Speckle Velocimetry
MdkQ	Methode der kleinsten Quadrate
MTF	Modulation Transfer Function
PDF	Probability Density Function
PIV	Particle Image Velocimetry
PROPAC	Projected Pattern Correlation
PSF	Point Spread Function
PTV	Particle Tracking Velocimetry
REPAC	Reflected Pattern Correlation
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SPEC	Single Pixel Ensemble Correlation
TPT	Tangent-Plane-Test

## Symbole

$\alpha$	Drehwinkel zwischen den Hauptachsen der Ellipse und den Koordinatenachsen
$\bar{I}$	Mittlere Intensität
$\beta$	Maß für den Drehwinkel der Hauptachsen der Ellipse relativ zu den Koordinatenachsen
$\Delta d$	Bildversatz in der Kamera
$\Delta t$	Zeitintervall (z.B. zwischen zwei Bildaufnahmen)
$\Delta x, \Delta y$	Künstlich vorgegebener Bildversatz
$\delta_r, \delta_c$	Eindimensionale Sub-Pixel-Verschiebung entlang der Zeilen- bzw. Spaltenrichtung
$\epsilon$	Ablenkwinkel
$\gamma$	Scheimpflugwinkel

$\lambda$	Wellenlänge des Lichts
$\bar{\mathbf{x}}$	Punkt auf der Referenzoberfläche
$\hat{\mathbf{x}}$	Vektor der geschätzten Parameter im Ausgleichungsmodell
$\Sigma_{ll}$	Kovarianzmatrix der Beobachtungen im Ausgleichungsmodell
$\Sigma_{xx}$	Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter im Ausgleichungsmodell
$\tilde{\mathbf{x}}$	Punkt auf der deformierten Oberfläche
$\mathbf{A}$	Design- oder Koeffizientenmatrix im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{a}^c$	Normierter Richtungsvektor vom Projektionszentrum der Kamera zum jeweiligen Punkt der Referenzoberfläche
$\mathbf{a}^p$	Normierter Richtungsvektor vom Projektionszentrum des Projektors zum jeweiligen Punkt der Referenzoberfläche
$\mathbf{d}$	Der tatsächliche Verschiebungsvektor des Punktemusters im Raum
$\mathbf{d}_r$	Systematischer Verschiebungsvektor
$\mathbf{d}_r^{ana}$	Systematischer Fehler gemäß der analytischen Beschreibung
$\mathbf{d}_r^{sim}$	Systematischer Fehler gemäß der numerischen Simulation
$\mathbf{I}_n$	Einheitsmatrix der Größe $n$
$\mathbf{L}^0$	Näherungswert des Beobachtungsvektors im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{L}$	Beobachtungsvektor im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{l}$	Verkürzter Beobachtungsvektor im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{n}$	Normaleneinheitsvektor
$\mathbf{P}$	Gewichtsmatrix im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{s}(\mathbf{x})$	Verschiebungsvektorfeld
$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	Geschwindigkeitsvektorfeld
$\mathbf{V}$	Gemessene Verschiebung auf der Referenzoberfläche
$\mathbf{v}$	Verbesserungsvektor im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{X}^0$	Näherungswert des Parametervektors im Ausgleichungsmodell

$\mathbf{X}$	Vektor der unbekannt Parameter im Ausgleichungsmodell
$\mathbf{x}$	Verkürzter Vektor der unbekannt Parameter im Ausgleichungsmodell
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation
$\mu$	Erwartungswert
$\partial$	Partieller Ableitungsoperator
$\pi$	Kreiszahl
$\rho_{ij}$	Korrelation zwischen den Größen $i$ und $j$
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma^2$	Varianz
$\tilde{R}_{r,c}$	Diskrete Ensemble-Kreuzkorrelationsfunktion
$\varepsilon$	Numerische Exzentrizität
$\varrho$	Dichte
$a_{ij}$	Transformationskoeffizienten
$a_k$	Koeffizienten eines Polynoms zweiten Grades
$BR_r^i(s), BR_c^i(s)$	Resultierendes Signal in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung, das durch Faltung mit der Blais-Rioux-Filtermaske der $i$ -ten Ordnung entsteht
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
$c_m$	Lichtgeschwindigkeit im Material $m$
$ck$	Kamerakonstante
$D$	Durchmesser der Linse bzw. der Blende
$d$	Bildversatz im Objektraum
$d_{Airy}$	Durchmesser des Airy-Scheibchens
$f$	Brennweite der Linse
$f(t), g(t)$	Signale im Ortsraum
$F_A, F_B$	Projektionszentren der Kameras $A$ und $B$

$G(\lambda)$	Gladstone-Dale Konstante
$G(x), G(x, y)$	Allgemeine ein- bzw. zweidimensionale Darstellung der Gauß-Funktion
$hp$	Bildhauptpunkt
$I_A, I_B$	Intensitätsbilder
$L$	Beobachtung im Ausgleichungsmodell
$M$	Abbildungsmaßstab
$N$	Anzahl der für die (Single Pixel) Ensemble-Korrelation verwendeten Bildpaare
$n$	Brechungsindex
$p, q$	Zu bestimmende skalare Größen
$P_A, P_B$	Beobachteter Punkt auf der Musterebene
$Q$	Dreidimensionaler Rasterpunkt
$r, c$	Bild- bzw. Pixelkoordinaten
$R_{0,0}$	Maximaler Kreuzkorrelationskoeffizient
$R_{r,c}$	Diskrete Kreuzkorrelationsfunktion
$u$	Große Halbachse der Ellipse
$U, V, W$	Koeffizienten
$v$	Kleine Halbachse der Ellipse
$v_i$	Verbesserung des $i$ -ten Parameters im Ausgleichungsmodell
$w, w^*$	Beliebige Konstanten
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten
$x_c$	Sub-Pixel genaue Position des Maximums der eindimensionalen Gauß-Funktion
$x_e, y_e$	Mittelpunkt der Schar konzentrischer Ellipsen
$x_e, y_e$	Sub-Pixel genaue Position des elliptischen Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion

$X_i$	Unbekannte Parameter im Ausgleichungsmodell
$x_p, y_p$	Mittels eindimensionaler Algorithmen gewonnene Sub-Pixel-Position
$Z_B$	Abstand des Projektionszentrums vom Hintergrund
$Z_D$	Abstand des Dichtegradienten vom Hintergrund
$z_i$	Abstand des Projektionszentrums von der Sensorebene

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Prinzipielle Messanordnung für die PIV-Technik in einem Windkanal nach Raffel u. a. (2007). . . . .	28
2.2	Übergang der kontinuierlichen Intensitätsverteilung des an den Partikeln gestreuten Lichts auf ein bandlimitiertes diskretes Signal aus Kähler (2004): (a) kontinuierliche Intensitätsverteilung in der Bildebene, (b) Integration der registrierten Photonen in den sensitiven Bereichen des Bildsensors, (c) diskretisierte Intensitätsverteilung des Bildes. . . . .	32
2.3	Experimentelle Realisierung des BOS-Messaufbaus. . . . .	35
2.4	Prinzipskizze des Messaufbaus für die BOS-Technik nach Goldhahn und Seume (2007). . . . .	36
2.5	Ablenkwinkel $\epsilon$ aufgrund der Dichteänderung in der Objektebene. . . . .	37
2.6	Prinzip der stereoskopischen Messanordnung für die digitale Bildkorrelation. . . . .	39
2.7	Messanordnung für die PROPAC-Technik. . . . .	42
2.8	Deformationsmessung mittels der PROPAC-Technik im Detail. . . . .	43
2.9	Messanordnung für die REPAC-Technik. . . . .	45
2.10	Tangent-Plane-Test (TPT) Algorithmus zur Rekonstruktion der Höhe und Neigung von spiegelnden Oberflächen. . . . .	47
2.11	Betrag des Rekonstruktionsfehlers des TPT-Algorithmus: (a) Standard Implementierung nach Heinemeyer u. a. (2005), (b) Iterative Implementierung nach Rau (2009). . . . .	48
3.1	Perspektivische Entzerrung: (a) Kalibriergitter mit regelmäßigen parallelen Linien, (b) perspektivische Projektion des Gitters auf die Bildebene der Kamera, (c) Entzerrtes Gitter durch Anwendung der inversen Projektivtransformation. . . . .	51
3.2	Scharfe Abbildung einer relativ zur Kamerablickrichtung schiefen Ebene: (a) mittels Parallelanordnung, (b) mittels Scheimpfluganordnung . . . . .	52
3.3	Realisierung der Scheimpflug-Bedingung: (a) Drehachse des Scheimpflugwinkels liegt im Sensormittelpunkt, (b) Drehachse des Scheimpflugwinkels liegt im Projektionszentrum . . . . .	53
3.4	Anschauliche Darstellung der Bestimmung der Verschiebung zweier Bilder zufälliger Punktemuster aus Staack (2008). . . . .	54
3.5	Veranschaulichung der robusten Filterwirkung der Kreuzkorrelation: (a) Auswertefenster des Bildes A, (b) Auswertefenster des Bildes B, (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion. . . . .	55

3.6	Formerhaltung der Kreuzkorrelation: (a) Bildausschnitt $I_A$ , (b) Bildausschnitt $I_B$ , (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion. . . . .	57
3.7	Iterative Korrelationsmethode mit Bilddeformation aus Scarano (2002). . . . .	60
3.8	Veranschaulichung der Ensemble-Korrelation: Durch das Aufsummieren einzelner Kreuzkorrelationsfunktionen wird das wahre Signal verstärkt und das Rauschen unterdrückt. . . . .	62
3.9	Um den Mittelwert bereinigtes und mittels Ensemble-Korrelation berechnetes Verschiebungsfeld aus Blumrich (2008c): (a) 1 Ensemble, (b) 2 Ensemble, (c) 16 Ensemble, (d) 2048 Ensemble. . . . .	64
3.10	Darstellung der Sub-Pixel genauen Suche der Maximums in der Kreuzkorrelationsfunktion unter Nutzung von: (a) eindimensionaler Algorithmen bzw. einer 4er-Nachbarschaft, (b) zweidimensionaler Algorithmen bzw. einer 8er-Nachbarschaft. . . . .	66
3.11	Prinzip des drei-Punkt-Schätzers zur Sub-Pixel genauen Bestimmung der Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion. . . . .	68
3.12	Prinzip des Blais-Rioux-Operators zur Sub-Pixel genauen Bestimmung der Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion und der dabei entstehende Fehler der linearen Interpolation nach Gühring (2002). . . . .	71
4.1	Veranschaulichung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle eines allgemeinen ellipsenförmigen Korrelationsmaxima. . . . .	82
4.2	Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei $x_e = y_e = 0,25$ Pixel, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0,866$ (d.h. $u = 2v$ ) und der Drehwinkel: (a) $\alpha = 0^\circ$ , (b) $\alpha = 15^\circ$ , (c) $\alpha = 30^\circ$ , (d) $\alpha = 45^\circ$ . . . . .	83
4.3	Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei $x_e = y_e = 0,5$ Pixel, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0,866$ (d.h. $u = 2v$ ) und der Drehwinkel: (a) $\alpha = 0^\circ$ , (b) $\alpha = 15^\circ$ , (c) $\alpha = 30^\circ$ , (d) $\alpha = 45^\circ$ . . . . .	84
4.4	Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei $x_e = y_e = 0,5$ Pixel, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0,9428$ (d.h. $u = 3v$ ) und der Drehwinkel: (a) $\alpha = 30^\circ$ , (b) $\alpha = 45^\circ$ . . . . .	85
4.5	Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a) $x_e = 0,5$ , $y_e = 0,5$ , (b) $x_e = 0,0$ , $y_e = 0,5$ . . . . .	86



4.6	Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a) $x_e = 0,5$ , $y_e = 0,25$ , (b) $x_e = 0,25$ , $y_e = 0,0$ . . . . .	87
4.7	Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a) $x_e = 0,25$ , $y_e = 0,25$ , (b) $x_e = 0,5$ , $y_e = 0,0$ . . . . .	88
4.8	Kreuzkorrelation mittels eines simulierten Bildpaares bekannter Verschiebung: (a) künstliches zufälliges Punktemuster, (b) künstliches zufälliges Punktemuster um $\Delta x$ und $\Delta y$ verschoben, (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion. .	90
4.9	Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der eindimensionalen linearen Gaußschen Regression (nach Gl. (4.10)) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,866$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung. . . . .	91
4.10	Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels des Blais-Rioux-Operators vierter Ordnung (nach Gl. (3.16) bzw. (3.18)) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,866$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung. . . . .	92
4.11	Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression (siehe Abschnitt 4.2, Fenstergröße $3 \times 3$ Pixel) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,866$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung. . . . .	93
4.12	Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,866$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ bei zusätzlichem Rauschen (SNR 10): (a) eindimensionale lineare Gaußsche Regression, (b) Blais-Rioux-Operator vierter Ordnung, zweidimensionale lineare Gaußsche Regression: (c) $3 \times 3$ Pixel, (d) $9 \times 9$ Pixel. . . . .	94
4.13	Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression verschiedener Fenstergrößen im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,9428$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ : (a) $5 \times 5$ Pixel, (b) $7 \times 7$ Pixel, (c) $9 \times 9$ Pixel, (d) $11 \times 11$ Pixel. . . . .	95
4.14	Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression verschiedener Fenstergrößen im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit $\varepsilon = 0,9428$ und variablem Drehwinkel $\alpha$ bei zusätzlichem Rauschen (SNR 50): (a) $3 \times 3$ Pixel, (b) $5 \times 5$ Pixel, (c) $7 \times 7$ Pixel, (d) $9 \times 9$ Pixel. . . . .	96

4.15	Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei Nutzung der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression zur Sub-Pixel-Detektion mit einer Fenstergröße von $3 \times 3$ Pixel im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit variablem Drehwinkel $\alpha$ und verschiedenen numerischen Exzentrizitäten: (a) $\varepsilon = 0,7454$ , (b) $\varepsilon = 0,866$ , (c) $\varepsilon = 0,9428$ , (d) $\varepsilon = 0,9682$ . . . . .	97
4.16	Standardabweichung des radialen Fehlers (in Pixel) gegenüber einem vorgegebenen Verschiebungsfeld für den optimierten SPEC-Algorithmus mit $N = 2^k$ Bildpaaren. . . . .	103
4.17	Ergebnisse aus Westerweel u. a. (2004) mittels der SPEC-Methode für: (a) 8 Bildpaare, (b) 16 Bildpaare, (c) 128 Bildpaare, (d) 512 Bildpaare, (e) 1024 Bildpaare, (f) 8192 Bildpaare. . . . .	105
4.18	Ergebnis mittels des optimierten SPEC-Algorithmus für: (a) 8 Bildpaare, (b) 16 Bildpaare, (c) 128 Bildpaare, (d) 512 Bildpaare, (e) 1024 Bildpaare, (f) 8192 Bildpaare. . . . .	106
A.1	Darstellung der drei Ausgleichungsszenarien: Eindeutigkeit, Überbestimmung und Unterbestimmung. . . . .	110
A.2	Mengendarstellung der Ausgleichungsaufgabe nach Niemeier (2002). . . . .	111

# Tabellenverzeichnis

2.1	Übersicht der unterschiedlichen aktuellen Varianten der PIV-Messtechnik in Luftströmungen und deren typischer Parameter. . . . .	33
3.1	Vergleich der mittels Kreuzkorrelation bestimmter Verschiebung des Auswertefensters in Pixel mit der mittleren Verschiebung der einzelnen Partikel. . .	56
4.1	Übersicht des maximalen systematischen Fehlerbetrages (in Pixel) beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle beliebig verdrehter elliptischer Korrelationsmaxima. . . . .	98
4.2	Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels des drei-Punkt-Schätzers auf Basis der Gauß-Funktion der beiden kommerziellen PIV-Softwarepakete † und ‡ mit der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers. Der simulierte Bildversatz betrug dabei $\Delta x = \Delta y = 0,5$ Pixel. . . . .	99
4.3	Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels verschiedener Algorithmen des kommerziellen PIV-Softwarepakets † mit der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers. Der simulierte Bildversatz betrug dabei $\Delta x = \Delta y = 0,5$ Pixel. . . . .	100
4.4	Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der in Abschnitt 4.2 vorgestellten zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression mit dem iterativen nichtlinearen Ansatz von Ronneberger u. a. (1998) und der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen. Der simulierte Bildversatz betrug dabei $\Delta x = \Delta y = 0,5$ Pixel. . . . .	101



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Von Seiten der Industrie werden seit einigen Jahren vermehrt optische Messsysteme nachgefragt, die eine Qualitätskontrolle innerhalb der vorgegebenen Taktzeit des jeweiligen Prozesses ermöglichen. Das oberste Ziel der produzierenden Industrie ist es dabei, eine 100-Prozent-Kontrolle im Produktionstakt durchführen zu können. Dies bedeutet, dass das System mit einer sehr kurzen Messdauer, z.B. einer einzelnen Bildaufnahme, auskommen muss, da das Messobjekt direkt während des laufenden Prozesses erfasst werden muss.

Herkömmliche optische Messverfahren, wie Streifenprojektion oder klassische Photogrammetrie auf Basis von Messmarken, kommen somit nicht in Frage, da sie entweder eine Vorbereitung des Messobjektes (Anbringen der Messmarken im Fall der klassischen Photogrammetrie) oder eine längere Messdauer aufgrund von mehreren Aufnahmen der unterschiedlichen applizierten Muster zur Lösung des Korrespondenzproblems (Streifenprojektion) benötigen.

Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit werden daher verschiedene optische korrelationsbasierte Messverfahren auf Basis zufälliger Punktemuster näher betrachtet, die alle die lokale Kreuzkorrelation zur direkten Lösung des Korrespondenzproblems aus einem Bildpaar anwenden. Zufällige Punktemuster haben die Eigenschaft, dass ein Ausschnitt dieses Musters in dem verschobenen bzw. deformierten Muster eindeutig wieder gefunden werden kann. Zur Berechnung der Kreuzkorrelation wird ein Bildpaar benötigt. Für die Qualitätskontrolle bietet sich daher an, ein Bild des zufälligen Punktemusters auf der Soll- und der Ist-Oberfläche aufzunehmen. Wird immer der gleiche Objekttyp gemessen, benötigt man für jede neue Messung nur ein weiteres Messbild der Ist-Oberfläche, da das Bild des Punktemusters auf der Soll-Oberfläche jeweils gleich bleibt.

Zur Berechnung der Kreuzkorrelation kann auf hoch entwickelte, kommerzielle Algorithmen zurück gegriffen werden. Diese werden im Bereich der Particle Image Velocimetry (PIV) bereits seit mehr als 15 Jahren erfolgreich eingesetzt. Die Lösung des Korrespondenzproblems mittels Kreuzkorrelation zufälliger Punktemuster hat sich dabei als eindeutig, robust und schnell erwiesen.

Die Messung in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik erfolgt immer relativ zwischen den beiden Zuständen des für die Kreuzkorrelation verwendeten Bildpaares. Der große Vorteil im Falle der Messung der Soll- und der Ist-Oberfläche liegt darin, dass direkt die

Abweichung gegenüber der Soll-Oberfläche gemessen wird. Würde ein absolut messendes Verfahren, wie z.B. die Streifenprojektion, zum Einsatz kommen, so läge als Messergebnis eine Punktwolke für die gemessene Oberfläche vor. Diese müsste dann zunächst gegenüber der Punktwolke der Soll-Fläche (z.B. aus CAD Daten) mittels Koordinatentransformationen so angepasst werden, dass die Abstände der einzelnen Messpunkte minimal werden. Dieses Verfahren, das in der Praxis meist mittels so genannter *Iterative Closest Point* (ICP) Algorithmen realisiert wird, wird bei der korrelationsbasierten Messtechnik nicht benötigt, da in diesem Fall die Abweichung direkt gemessen werden kann.

Die optische korrelationsbasierte Messtechnik auf Basis zufälliger Punktemuster ist zusätzlich sehr flexibel. Sie lässt sich für folgende unterschiedliche Messaufgaben anwenden:

- Erfassung momentaner Geschwindigkeitsvektorfelder in einer Strömung,
- Sichtbarmachung von Dichte- bzw. Brechungsindexgradienten in Gasen oder Flüssigkeiten,
- Bestimmung der flächenhaften Form sowie der dreidimensionalen Verschiebung von Oberflächen,
- Bestimmung von Deformationen auf diffus reflektierenden Oberflächen und
- Bestimmung von Höhe und Neigung auf spiegelnden Oberflächen.

## 1.2 Stand der Forschung

Seit über 25 Jahren sind optische korrelationsbasierte Messtechniken Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. In den frühen 80er Jahren setzte eine Gruppe von Wissenschaftlern der Universität Stuttgart (siehe Förstner (1982, 1984) und Ackermann (1983, 1984)) die digitale Bildkorrelation (englisch: *Digital Image Correlation*, DIC) im Bereich der Photogrammetrie und der Fernerkundung mit einer Genauigkeit von bis zu 0,01 Pixel ein. Die mittels DIC erzielbare Genauigkeit erlaubt es, dieses Verfahren zur automatischen Messung von Verknüpfungspunkten, zur Bestimmung der relativen Orientierung und zur Berechnung von digitalen Geländemodellen (DGM) anzuwenden. Der Ansatz dieser Gruppe bestand darin, lokale Ausschnitte der Bilder zweidimensional zu korrelieren, ohne dabei explizit die Epipolargeometrie zur Nutzen (siehe Ackermann (1983)). Im Gegensatz zu der meist angewandten Methode der Maximierung des Kreuzkorrelationskoeffizienten wendete diese Gruppe eine Transformation an, die die Grauwertdifferenzen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) minimiert (siehe Ackermann (1984)).

Zur selben Zeit setzten Wissenschaftler der Universität von South Carolina als erste die DIC-Methode zur Messung von Deformationen ein (siehe Peters und Ranson (1982)). Dazu

brachten sie ein zufälliges Punktemuster auf die zu messende Oberfläche auf und nahmen mittels einer Kamera Bilder des Objektes sowohl im Referenzzustand als auch im deformierten Zustand auf. Durch die Anwendung der Kreuzkorrelation erhielten sie damit ein Maß für die Deformation der Oberfläche. Bei der Verwendung von vielen kleinen Auswertefenstern bei der Berechnung der Kreuzkorrelation erhält man ein flächenhaftes Deformations- bzw. Verschiebungsfeld.

Heutzutage wird die DIC-Technik mittels eines Stereo Kamerasystems auch zur Bestimmung der dreidimensionalen Form sowie der dreidimensionalen Verschiebung von Oberflächen genutzt. Durch den Einsatz von Hochgeschwindigkeitskameras können auch hochdynamische Vorgänge, wie z.B. das Entfalten eines Airbags, aufgelöst werden (siehe Siebert u. a. (2007) oder Lichtenberger und Schreier (2002)). Neben der DIC-Methode existieren verschiedene andere optische korrelationsbasierte Messverfahren, wie z.B. die PIV-Technik (siehe Willert und Gharib (1991), Westerweel (1997), Scarano (2002), Raffel u. a. (2007)) und Schröder u. a. (2007)), die Projected Pattern Correlation (PROPAC) Technik (siehe Konrath u. a. (2004) und Blumrich u. a. (2007)) oder das Hintergrund-Schlieren-Verfahren (siehe Richard und Raffel (2001) oder Kindler u. a. (2007)). Im Rahmen dieser Arbeit wird der Fokus insbesondere auf das PROPAC-Verfahren gelegt, da es in der Lage ist, die von der Industrie gewünschte prozessintegrierte 100-Prozent-Kontrolle, also eine lückenlose Qualitätskontrolle zur Überprüfung der Oberflächenform zu ermöglichen.

Alle diese Messtechniken haben eine Gemeinsamkeit: ihre Genauigkeit hängt sowohl von der Genauigkeit der geometrischen Kalibrierung des Systems als auch von der Genauigkeit der Auswertung der Verschiebung mittels Kreuzkorrelation ab (siehe Siebert u. a. (2007)). Die Genauigkeit der Verschiebungsmessung mittels Kreuzkorrelation liegt im Sub-Pixel-Bereich und wird unter Berücksichtigung der lokalen Umgebung des maximalen Wertes der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion durch den Einsatz von speziellen Detektoren zur Sub-Pixel genauen Suche des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion erzielt (Bing u. a. (2006)). Gemäß Raffel u. a. (2007) können wir bei der Kreuzkorrelation mit einer Sub-Pixel-Messgenauigkeit zwischen 0,1 und 0,05 Pixel rechnen. Ungenauigkeiten in der korrelationsbasierten Messtechnik können nach Chen und Katz (2005) aufgrund von Messrauschen in den Bilddaten oder aufgrund von systematischen Fehlern bei der Kreuzkorrelation oder der anschließenden Sub-Pixel genauen Detektion des Maximums in der Korrelationsfunktion auftreten.

Zur Sub-Pixel genauen Detektion des Maximums der Korrelationsfunktion existieren verschiedene Algorithmen. Meist bestehen sie aus zwei eindimensionalen Rechenschritten, die neben dem höchsten Wert der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion jeweils nur dessen zwei direkte Nachbarn in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung berücksichtigen (siehe Willert und Gharib (1991), Fisher und Naidu (1996), Westerweel (1997) und Raffel u. a. (2007)). Mit gewissen Einschränkungen existieren auch zweidimensionale Ansätze zur Sub-Pixel-Detektion (siehe Nobach und Honkanen (2005) und Ronneberger u. a. (1998)). Arbeiten zum Vergleich verschiedener Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion wurden von Fisher und Naidu (1996), Davis

und Freemann (1997), Trucco u. a. (1998), Gühring (2002) und Bing u. a. (2006) durchgeführt.

Liegen stationäre oder periodische Vorgänge vor, so ist es möglich, mehrere Bildpaare von jeweils unterschiedlichen zufälligen Punktemustern aufzunehmen, denen aber jeweils das gleiche Verschiebungsfeld zugrunde liegt. In diesem Fall kann die so genannte Ensemble-Korrelation zum Einsatz kommen. Anstatt der Mittelung der einzelnen Verschiebungsfelder werden dabei die Kreuzkorrelationsfunktionen selbst gemittelt und anschließend einmal die Sub-Pixel genaue Suche des Maximums durchgeführt. In der Arbeit von Meinhart u. a. (2000) konnte gezeigt werden, dass dies eine ideale und sehr robuste Methode der Mittelung darstellt. Über Anwendungen der Ensemble-Korrelation wird in Delnoij u. a. (1999) und Wereley u. a. (2002) berichtet. In Westerweel u. a. (2002, 2004) wird ein Ansatz der Ensemble-Korrelation vorgestellt, mit dem eine deutliche Verbesserung der räumlichen Auflösung erreicht werden kann.

### 1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zunächst, die verschiedenen optischen korrelationsbasierten Messtechniken und die dabei zur Anwendung kommenden Auswertetechniken zu beschreiben, um anschließend Probleme und Limitierungen der Messtechniken aufzeigen und analysieren sowie die bisherige Literatur in diesem Bereich kritisch hinterfragen zu können. Es wird versucht, eine Verbindung zwischen Anwendungen in der Aerodynamik bzw. der PIV-Messtechnik zu der Photogrammetrie bzw. der PROPAC-Messtechnik herzustellen.

Der Fokus liegt auf der Weiterentwicklung der optischen korrelationsbasierten Messtechnik zur prozessintegrierten Qualitätskontrolle von Bauteilen. Aufgrund der direkten Lösung des Korrespondenzproblems mittels zufälliger Punktemuster ist das PROPAC-Verfahren prinzipiell in der Lage, diese Qualitätskontrolle im Produktionstakt durchführen zu können. Probleme bzw. Einschränkungen bestehen aber insbesondere bei den Sub-Pixel-Dektoren und durch die aufgrund der lokalen Auswertefenster reduzierten räumlichen Auflösung. Der wesentliche wissenschaftliche Beitrag dieser Arbeit besteht also darin, die Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion zu verbessern sowie Auswerteverfahren zur Erhöhung der räumlichen Auflösung zu entwickeln und anzuwenden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst untersucht, welcher systematische Fehler bei der Verschiebungsmessung mittels Kreuzkorrelation auftreten kann, wenn die bisher gebräuchlichen eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion angewendet werden. Zusätzlich soll der systematische Fehler beschrieben und sowohl das Auftreten dieses Fehlers als auch seine analytische Beschreibung mittels einer numerischen Simulation verifiziert werden.



Da es sich bei dem PROPAC-Verfahren um ein neues, am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) entwickeltes Messverfahren handelt, sind herkömmliche, bisher für die PIV-Messtechnik eingesetzte, Sub-Pixel-Detektoren bisher nicht hinsichtlich dieser Messtechnik optimiert worden. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, einen allgemeinen zweidimensionalen Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion zu entwickeln, der in der Lage ist, mit den aufgrund der PROPAC-Messanordnung entstehenden verzerrten Punktemustern fehlerfrei umzugehen. Dieser neue Algorithmus soll im Rahmen der numerischen Simulation ebenfalls getestet werden.

Zur Verbesserung der räumlichen Auflösung soll der von Westerweel u. a. (2004) vorgestellte Ansatz der *single pixel ensemble correlation* weiter verfolgt werden. Damit sollte sich die räumliche Auflösung aller optischen korrelationsbasierten Messtechniken deutlich steigern lassen.

## 1.4 Gliederung

In Kapitel 2 werden die unterschiedlichen optischen korrelationsbasierten Messtechniken auf der Basis von zufälligen Punktemustern vorgestellt. Im Einzelnen sind das Messverfahren zur flächenhaften quantitativen Bestimmung von Geschwindigkeiten, Dichte- bzw. Brechungsindexgradienten, Form und Deformation.

Die speziellen Auswertetechniken, die in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik standardmäßig zur Anwendung kommen, sind Inhalt von Kapitel 3. Neben der perspektivischen Entzerrung und der Kreuzkorrelation liegt der Fokus dieses Kapitels insbesondere auf den Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Es wird zunächst prinzipiell zwischen ein- und zweidimensionalen Algorithmen unterschieden und anschließend werden die bisherigen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion einzeln vorgestellt.

Die wesentlichen wissenschaftlichen Weiterentwicklungen für die optische korrelationsbasierte Messtechnik, die im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit entstanden sind, werden in Kapitel 4 behandelt. Es wird zunächst ein allgemeiner eindimensionaler linearer Ansatz zur Gaußschen Regression beschrieben und dieser dann auf das Zweidimensionale übertragen. Es folgt eine analytische Beschreibung des systematischen Fehlers, der auftritt, wenn eindimensionale Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle elliptischer Korrelationsmaxima angewendet werden. Im Rahmen einer numerischen Simulation werden die Sub-Pixel-Detektoren sowie die analytische Beschreibung des systematischen Fehlers der eindimensionalen Algorithmen miteinander verglichen und verifiziert. Außerdem wird eine verbesserte Implementierung der Single-Pixel-Ensemble-Korrelation vorgestellt und erfolgreich angewendet.



## 2 Messverfahren

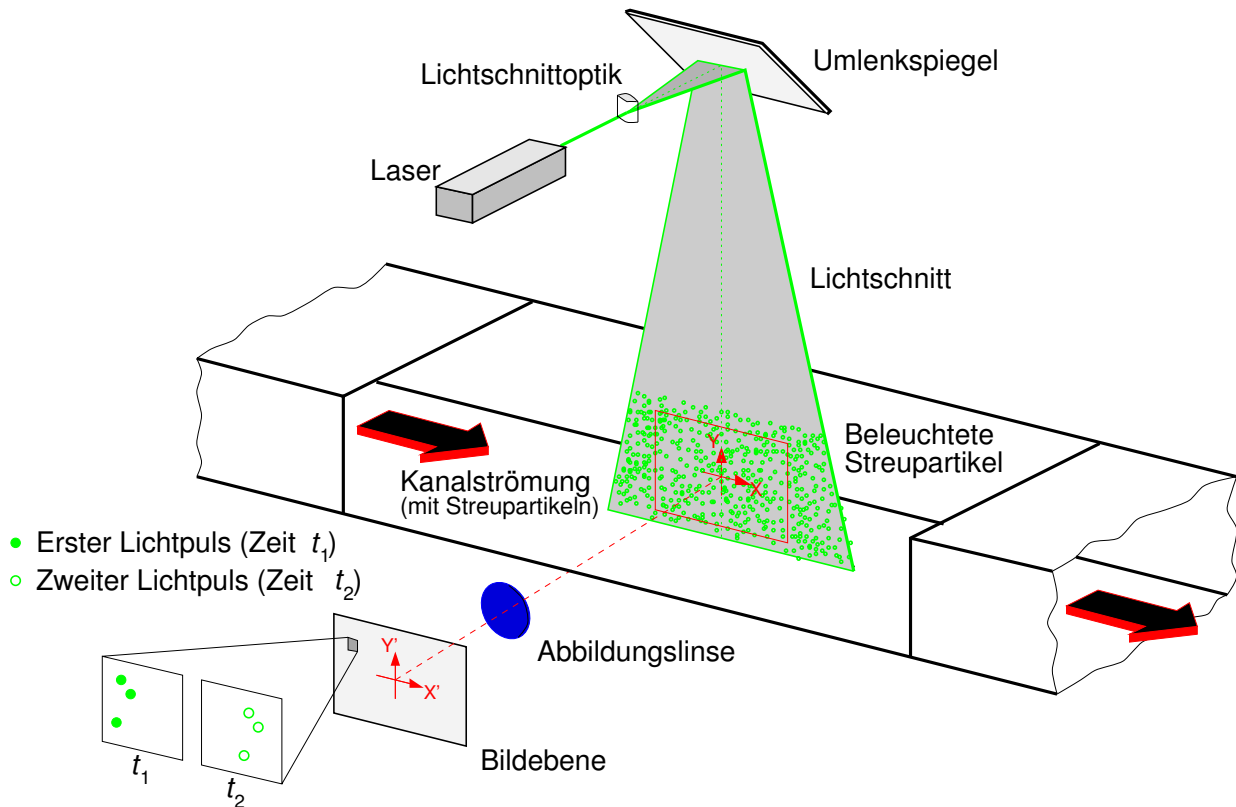
In diesem Kapitel sollen unterschiedliche optische korrelationsbasierte Messtechniken auf der Basis von zufälligen Punktemustern im Einzelnen genauer erläutert und Anwendungen aufgezeigt werden. Diese Übersicht erhebt allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Details zu den Auswertetechniken mittels Kreuzkorrelationsalgorithmen finden sich in Kapitel 3.

Analog zur Photogrammetrie werden auch in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik Punktkorrespondenzen zur Lösung der Messaufgabe benötigt. Die Punktkorrespondenzen erhält man durch den Einsatz von feinen zufälligen Punktemustern, die auf einem äquidistanten Gitter jeweils lokal mittels Kreuzkorrelationsalgorithmen ausgewertet werden. Ein explizites Signalisieren einzelner Messpunkte entfällt somit. Die kleinen Musterpunkte bzw. Partikel können unter Berücksichtigung ihrer Umgebung als sehr dichtes zufällig verteiltes Feld von photogrammetrischen Messmarken angesehen werden. Da ihnen allerdings eine Kodierung fehlt, erfolgt die Lösung des Korrespondenzproblems über lokale Auswertefenster, die mehrere Punkte enthalten. Zufällige Punktemuster haben somit den Vorteil, dass kleine Ausschnitte des Musters jeweils einzigartig sind und sich dadurch die Punktkorrespondenzen ohne Mehrdeutigkeiten mittels lokaler Kreuzkorrelation ergeben.

### 2.1 Particle Image Velocimetry

Die Particle Image Velocimetry (PIV) ist ein berührungsloses optisches Messverfahren, das es erlaubt, momentane zweidimensionale Geschwindigkeitsvektorfelder in einer Ebene der zu untersuchenden Strömung quantitativ zu bestimmen. Dazu wird die Strömung zunächst, falls nicht bereits auf natürlichem Wege vorhanden, mit kleinen Streupartikeln versehen. Nach Westerweel (1993) sollen diese Streupartikel idealerweise der Strömung exakt folgen, nicht selbst miteinander interagieren und die Strömung in keiner Weise beeinflussen. Mittels eines Pulslasers wird die zu untersuchende Ebene der Strömung zu zwei zeitlich genau bekannten Zeitpunkten beleuchtet. Typischerweise liegt der zeitliche Abstand der beiden Laserpulse im Bereich einiger Mikrosekunden und die Pulslänge jeweils zwischen 6 und 10 Nanosekunden (siehe Schröder (2001)). Eine Kamera nimmt das an den Partikeln gestreute Laserlicht zu beiden Zeitpunkten der Beleuchtung auf. Mit Hilfe von Auswertealgorithmen auf Basis der lokalen Kreuzkorrelation (diese werden später in Kapitel 3 genauer vorgestellt), lässt sich der Versatz der Partikelbilder zwischen beiden Zeitpunkten bestimmen. Ist zusätzlich der

Abbildungsmaßstab zwischen der Bildebene der Kamera und der beleuchteten Messebene in der Strömung bekannt, lässt sich mit Hilfe der bekannten Zeitdifferenz der Aufnahme bzw. der Beleuchtungszeitpunkte ein momentanes zweidimensionales Geschwindigkeitsvektorfeld für die beleuchtete Strömungsebene berechnen. Aus dem Geschwindigkeitsvektorfeld lassen sich wiederum andere für die Strömungsmechanik relevante Größen wie z.B. die Wirbelstärke berechnen. Das Messprinzip der PIV-Technik ist nochmals in Abb. 2.1 veranschaulicht.



Abbildungung 2.1: Prinzipielle Messanordnung für die PIV-Technik in einem Windkanal nach Raffel u. a. (2007).

Der Begriff *Particle Image Velocimetry* wurde im Jahr 1984 von R. J. Adrian vorgeschlagen. Erste PIV-Untersuchungen wurden stark von der Methode der Laser Speckle Messtechnik beeinflusst, die ursprünglich in der Festkörpermechanik zum Einsatz kommt. Daher findet man in älterer Literatur über die PIV-Technik auch häufig noch den Begriff *Laser Speckle Velocimetry (LSV)*. Weitere Synonyme für die PIV-Technik sind nach Westerweel (1993) unter anderem:

- digital image velocimetry,

- double-pulsed velocimetry,
- pulsed light velocimetry,
- particle image displacement velocimetry.

Seit mehr als zwei Jahrzehnten hat sich die PIV-Technik zu einer genauen und flächenhaft quantitativen Messtechnik in der Strömungsmechanik entwickelt. Der Übersichtsartikel *Twenty years of particle image velocimetry* von Adrian (2005) fasst die wesentlichen Entwicklungen und den aktuellen Stand der PIV nach gut 20 Jahren zusammen. Das Buch *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide* (Raffel u. a. (1998)) erschien erstmalig 1998 und geht neben sämtlichen Grundlagen auch detailliert auf verschiedene aktuelle Anwendungen ein. Inzwischen ist mit Raffel u. a. (2007) bereits die zweite überarbeitete Ausgabe erschienen. Die wesentlichen theoretischen Grundlagen der digitalen PIV-Auswertemethoden wurden von Westerweel (1993) im Rahmen seiner Dissertation mit dem Titel *Digital Particle Image Velocimetry - Theory and Application* veröffentlicht. Eine Übersicht über aktuelle Entwicklungen und Anwendungen der PIV-Technik findet sich in Schröder und Willert (2008).

Zum Verständnis eines gesamten PIV-Messsystems sollen hier zunächst die einzelnen Systemkomponenten genauer betrachtet werden. Als Streupartikel kommen je nach Art des Fluids, dessen Strömung untersucht werden soll, mehrere Materialien in Frage. Wie bereits erwähnt sollten die Streupartikel der Strömung exakt folgen, nicht interagieren und die Strömung nicht selbst beeinflussen. Für Experimente in Wasser haben sich beschichtete hohle Glaskugeln mit einem ungefähren Durchmesser von  $10\ \mu\text{m}$  als geeignet erwiesen. Für Strömungen in Gasen (wie z.B. Luft) bieten sich Öl- oder Di-Ethyl-Hexyl-Sebacat-Tropfen (DEHS) mit einem Durchmesser von ca.  $1\ \mu\text{m}$  an. Um kontrastreiche Partikelbilder aufnehmen zu können, müssen die der Strömung zugeführten Partikel das Licht möglichst optimal streuen. Im Falle kugelförmiger Partikel mit einem Durchmesser etwa in der Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten Laserlichts, kann die Mie<sup>1</sup>-Streuung als physikalisches Modell für die Streuung des Lichts an den Partikeln verwendet werden. Ist der Durchmesser der Streupartikel allerdings deutlich kleiner als die verwendete Wellenlänge, tritt die Rayleigh<sup>2</sup>-Streuung auf, was zu starken Einschränkungen bei der Aufnahme von Partikelbildern führt. Dieser Fall tritt ein, wenn sehr kleine Messbereiche untersucht werden sollen. Dann müssen sehr kleine Streupartikel verwendet werden, damit diese nicht die Strömung beeinflussen und interagieren. Für weitere Details bezüglich alternativer Materialien für Streupartikel, deren Eigenschaften und Erzeugung, sei auf die Standardliteratur (z.B. Raffel u. a. (2007)) verwiesen.

Zur Beleuchtung der Streupartikel in einer Ebene der Strömung wird, wie bereits erwähnt,

---

<sup>1</sup>Gustav Mie: Geboren am 29. September 1868 in Rostock, gestorben am 13. Februar 1957 in Freiburg im Breisgau, deutscher Physiker.

<sup>2</sup>John William Strutt, 3. Baron Rayleigh: Geboren am 12. November 1842 in Langford Grove, gestorben am 30. Juni 1919 in Terlins Place. Erhielt im Jahr 1904 für die Entdeckung des Elements Argon den Nobelpreis in Physik.

ein Pulslaser verwendet. Um unverschmierte Abbildungen der sich mit der Strömung mit bewegendem Streupartikel zu erhalten, sind sehr kurze Belichtungszeiten der Kamera notwendig. Nur ein starker Pulslaser als Lichtquelle ermöglicht es, in dieser kurzen Zeit Bilder mit ausreichendem Kontrast zu erzeugen. Der Pulslaser übernimmt somit quasi die Aufgabe des Blitzlichtes bei der normalen Photographie. Zusätzlich lässt sich der Laserstrahl sehr einfach mit einer entsprechenden Optik in einer Richtung aufweiten, so dass, wie benötigt, eine Ebene der Strömung beleuchtet wird. Am gebräuchlichsten ist zur Zeit der Einsatz eines Nd:YAG Lasers mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 532 \text{ nm}$  und einer Pulsenergie im Bereich von einigen hundert mJ.

Für die Abbildung der beleuchteten Streupartikel in der Strömung müssen Beugungseffekte berücksichtigt werden. Ein entfernter Lichtpunkt, der von einer kreisförmigen Linse oder einer Öffnung (z.B. der Blende einer Kamera) endlicher Größe abgebildet wird, erscheint in der Bildebene aufgrund der Beugung als so genanntes Airy<sup>3</sup>-Scheibchen, umgeben von konzentrischen Beugungsringen abnehmender Intensität. Dabei ist der Blendendurchmesser umgekehrt proportional zur Größe des Airy-Scheibchens. Die Airy-Funktion entspricht der Impulsantwort bzw. der *Point Spread Function* (PSF) einer idealen Linse. Der Durchmesser des Airy-Scheibchens ergibt sich zu

$$d_{\text{Airy}} = 2,44 \frac{f}{D} \lambda, \quad (2.1)$$

wobei  $f$  die Brennweite der Linse,  $D$  der Durchmesser der Linse bzw. der Blende und  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichts ist. In der Praxis wird die Airy-Funktion aus Vereinfachungsgründen häufig durch eine geeignet skalierte Gauß<sup>4</sup>-Funktion approximiert.

Die Aufnahme und Auswertung der Messbilder in der PIV-Technik erfolgt heutzutage vollständig digital. Der Schritt in das digitale Zeitalter stellt eine wesentliche Veränderung in der Entwicklung der PIV-Technik dar (siehe Adrian (2005)). Aufgrund dessen, dass für eine Messung zwei Bilder der Strömung mit einer sehr kurzen Zeitdifferenz aufgenommen werden müssen, musste bei analoger Bildaufnahme der Film zweimal hintereinander belichtet werden, da ein Filmtransport in der kurzen Zeit meist nicht möglich war. Das doppelt belichtete Bild wurde dann mittels Autokorrelation ausgewertet, wobei allerdings die Eindeutigkeit der Strömungsrichtung verloren ging. Dieser Nachteil entfiel, als CCD-Kameras (*Charge Coupled Device*) mit dem so genannten *interline transfer* auf den Markt kamen. Bei dieser Technologie steht jedem Pixel<sup>5</sup> ein eigenes abgedunkeltes Transferregister zur Verfügung, in das die

---

<sup>3</sup>George Biddell Airy: Geboren am 27. Juli 1801 in Alnwick, gestorben am 2. Januar 1892 in Greenwich, englischer Mathematiker und Astronom.

<sup>4</sup>Carl Friedrich Gauß: Geboren am 30. April 1777 in Braunschweig, gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen. Deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker; gilt als einer der größten Gelehrten seiner Zeit.

<sup>5</sup>Die sowohl im Deutschen als auch im Englischen verwendete Kurzform "Pixel" steht für *picture element* und wurde von Billingsley (1965) vermutlich zum ersten Mal verwendet.

gesammelten Ladungen direkt nach dem Ende der Belichtung verschoben werden können. Von dort erfolgt dann das Auslesen, während der lichtempfindliche Bereich bereits wieder neue Ladungen registrieren kann. Somit ist es erstmals möglich, jede der beiden zeitlich sehr nah beieinander liegenden Belichtungen als eigenes Bild zu speichern und dadurch die Eindeutigkeit der Strömungsrichtung zu erhalten. Der Nachteil der *interline transfer* Technik ist die geringe lichtempfindliche Fläche im Verhältnis zur Gesamtfläche des Chips. Nach Luhmann u. a. (2006) beträgt diese auch als Füllfaktor bezeichnete Größe nur ungefähr 25%. Damit sind Bildsensoren mit *interline transfer* Technik deutlich weniger lichtempfindlich. Um dennoch eine ausreichende Lichtempfindlichkeit bzw. einen höheren effektiven Füllfaktor zu erreichen, werden typischerweise Mikro-Sammellinsen über jedem Pixel angebracht. Heutzutage werden in der PIV-Messtechnik CCD-Kameras mit bis zu 11 Megapixel eingesetzt, was im Prinzip einem Auflösungsvermögen von 100 Linien/mm bei 35 mm Film entspricht (siehe Adrian (2005)).

Für Hochgeschwindigkeitskameras kommt meist die CMOS-Technologie (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) zum Einsatz. Da hier jeder einzelne Pixel einen Ausleseverstärker besitzt, kann der Sensor sehr schnell parallel ausgelesen werden. Durch die einfache Adressierbarkeit einzelner Pixel können auch nur bestimmte Bereiche des Sensors ausgelesen werden, wodurch sich dann direkt die maximale Bildaufnahme Frequenz entsprechend erhöht. Hochgeschwindigkeitskameras mit CMOS-Technologie kommen nach Raffel u. a. (2007) auf Bildwiederholraten von 3000 Bildern/s bei voller Megapixel Auflösung. Aktuelle Systeme kommen bei voller Megapixel Auflösung heute bereits auf Bildwiederholraten von 5000 Bildern/s. Aufgrund der dabei entstehenden enormen Datenraten werden interne Speicher in der Kamera verwendet und eine Übertragung der Bilddaten auf den Computer erst nach der Messung durchgeführt.

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Geschwindigkeitsmessung mittels PIV auf der einen Seite eine direkte Bestimmung der beiden fundamentalen Größen für die Geschwindigkeit, nämlich der Wegstrecke und der Zeit, beinhaltet. Auf der anderen Seite aber handelt es sich um eine indirekte Geschwindigkeitsmessung, da anstatt der eigentlich gesuchten Geschwindigkeit der Strömung die Geschwindigkeit der Streupartikel gemessen wird. Zusätzlich handelt es sich bei der so bestimmten Geschwindigkeit um eine zeitliche Mittelung über das Zeitintervall  $\Delta t$  oder anders formuliert um den Differenzenquotient

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{M\Delta t}. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  das mittels Kreuzkorrelation aus den beiden Aufnahmen bestimmte Verschiebungsvektorfeld in Pixel,  $M$  der Abbildungsmaßstab und  $\Delta t$  das Zeitintervall zwischen den beiden Aufnahmen.

Da heutzutage in der PIV-Messtechnik, analog zur Photogrammetrie, die Bildaufnahme und die Auswertung der Bilder jeweils digital erfolgt, macht es Sinn, den Vorgang der Digitalisierung, also die Abtastung des ursprünglich analogen Signals, genauer zu betrachten. Die Partikel in der Strömung streuen das Laserlicht, wie bereits erwähnt, nach der Mie-Theorie.

Ein Teil dieses Lichts wird von der Optik der Kamera eingefangen und als kontinuierliches Intensitätssignal auf die Bildebene abgebildet (siehe Abb. 2.2 (a)). Der sensitive Bereich der Bildebene integriert die ankommenden Photonen pixelweise über die Belichtungszeit und wandelt sie in Ladungen um (Abb. 2.2 (b)). Die Ladungen wiederum werden diskretisiert und als Intensitätsverteilung in Form eines digitalen Bildes abgespeichert (Abb. 2.2 (c)).

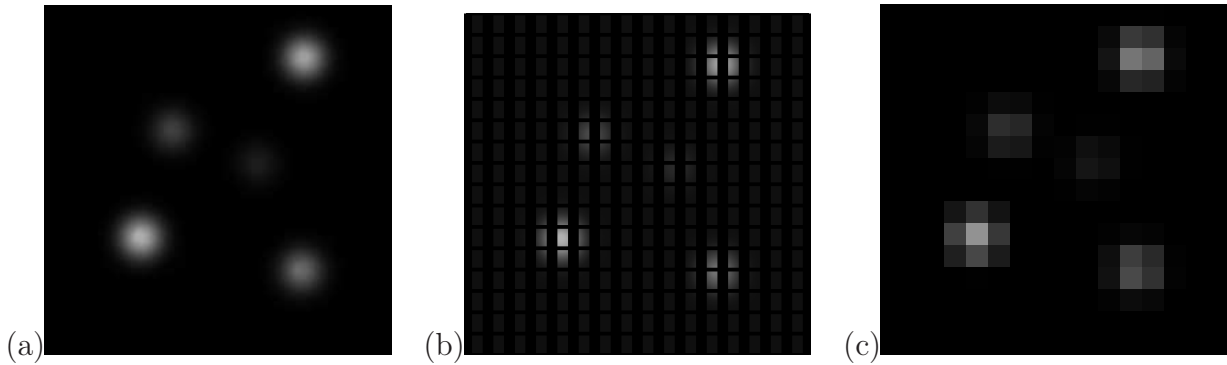


Abbildung 2.2: Übergang der kontinuierlichen Intensitätsverteilung des an den Partikeln gestreuten Lichts auf ein bandlimitiertes diskretes Signal aus Kähler (2004): (a) kontinuierliche Intensitätsverteilung in der Bildebene, (b) Integration der registrierten Photonen in den sensitiven Bereichen des Bildsensors, (c) diskretisierte Intensitätsverteilung des Bildes.

Bis heute haben sich viele unterschiedliche Varianten der PIV-Messtechnik entwickelt, die in Tab. 2.1 übersichtsartig dargestellt sind. Zu Beginn dieses Abschnitts wurde anhand von Abb. 2.1 das Standard PIV-Verfahren erklärt. Da bei diesem Ansatz ein zweikomponentiges Vektorfeld in einem zweidimensionalen Raum (nämlich der durch den Laser beleuchteten Ebene) gemessen wird, findet sich für diese Variante auch die Bezeichnung 2C-2D PIV. Dieser Ansatz lässt sich durch die Hinzunahme einer weiteren Kamera erweitern und wird dann als 3C-2D Stereo-PIV (siehe Willert (1997)) bezeichnet. Dabei nehmen zwei Kameras aus unterschiedlichen Richtungen jeweils ein zweikomponentiges Geschwindigkeitsvektorfeld in der Messebene auf. Mittels Triangulation lassen sich somit die drei Geschwindigkeitskomponenten in der Messebene rekonstruieren. Durch den Einsatz von Hochgeschwindigkeitskameras lässt sich die Stereo-PIV-Technik auch um die Zeitaufösung erweitern. Eine andere Variation der Stereo-PIV wurde von Kähler und Kompenhans (2000) eingeführt: die so genannte Mehrebenen-Stereo-PIV-Technik. Dabei wird mittels geeignet polarisiertem Licht und durch den Einsatz von entsprechenden Strahlteilern eine gleichzeitige Erfassung der drei Geschwindigkeitskomponenten in zwei räumlich bzw. zeitlich voneinander getrennten Ebenen ermöglicht. Der Übergang auf die Messung von drei Geschwindigkeitskomponenten in einem drei-



dimensionalen Messvolumen (3C-3D) ist durch die holographische PIV (siehe Hinsch (2002), Konrath u. a. (2002) und Meng u. a. (2004)) und die tomographische PIV (siehe Elsinga u. a. (2006)) gegeben. Der bisher neueste und gleichzeitig technisch aufwendigste PIV-Ansatz ist die zeitaufgelöste tomographische PIV und geht auf Schröder u. a. (2007) zurück. Es kommen vier Hochgeschwindigkeitskameras auf CMOS Basis zum Einsatz, die mit einer Bildaufnahme rate von  $f = 5$  kHz synchron betrieben werden. Damit ist es erstmals möglich komplexe dreidimensionale strömungsmechanische Zusammenhänge räumlich und zeitlich hochauflösend zu erfassen.

Tabelle 2.1: Übersicht der unterschiedlichen aktuellen Varianten der PIV-Messtechnik in Luftströmungen und deren typischer Parameter.

PIV-Variante (Komponenten(C)-Dimensionen(D))	zeitliche Auflösung	Messbereich
Standard-PIV (2C-2D)	$f = 10$ Hz	$40 \times 40$ cm <sup>2</sup>
Stereo-PIV (3C-2D)	$f = 10$ Hz	$40 \times 40$ cm <sup>2</sup>
Zeitaufgelöste Stereo-PIV (3C-2D( $t$ ))	$f = 3$ kHz	$10 \times 10$ cm <sup>2</sup>
Mehrebenen-Stereo-PIV (3C-2D pro Ebene)	$f = 10$ Hz	$40 \times 40$ cm <sup>2</sup>
Analoge holographische PIV (3C-3D)	$f = 0$ Hz	$5 \times 5 \times 5$ cm <sup>3</sup>
Digitale holographische PIV (3C-3D)	$f = 10$ Hz	$1 \times 1 \times 1$ cm <sup>3</sup>
Tomographische PIV (3C-3D)	$f = 10$ Hz	$6 \times 6 \times 1,5$ cm <sup>3</sup>
Zeitaufgelöste tomographische PIV (3C-3D( $t$ ))	$f = 5$ kHz	$3 \times 3 \times 1$ cm <sup>3</sup>

Aus diesen PIV-Varianten ergeben sich Anwendungen in den verschiedensten Gebieten von der Grundlagenforschung bis hin zu industrienahen Auftragsmessungen. Der klassische Fall hierbei ist die Anwendung der PIV-Technik im Windkanal. Dabei kann der Messbereich zwischen  $1 \times 1$  mm<sup>2</sup> und  $10 \times 10$  m<sup>2</sup> liegen (siehe Raffel u. a. (2007)) und es kommen Windkanäle von Unter- bis Überschall zum Einsatz. In den Bereichen Chemie, Biologie und Biochemie kommen miniaturisierte strömungstechnische Apparate, auch als *laboratory-on-a-chip* bezeichnet, zu verschiedenen Analyse Zwecken zum Einsatz. Hierfür wurde die Mikro-PIV ( $\mu$ PIV) als passende Messtechnik entwickelt. Meist wird dabei ein Fluoreszenzmikroskop verwendet, um die mittels fluoreszierenden Partikeln angereicherte Strömung abzubilden (siehe Wereley u. a. (2002) und Lindken u. a. (2005)). Kähler u. a. (2006) setzen stattdessen einfach eine spezielle Abbildungsoptik, ein so genanntes *long-distance microscope*, ein, mit dem ebenfalls ein Messbereich in der Millimeter-Größenordnung realisierbar ist. Aufgrund des

derzeit sehr hohen Ölpreises<sup>6</sup> stellt die Untersuchung von Propellerströmungen, wie z.B. von Roosenboom u. a. (2007), eine wichtige aktuelle Forschungsaufgabe dar. Denn Propeller sind im Gegensatz zu Strahltriebwerken deutlich effizienter hinsichtlich des Treibstoffverbrauches. In Staack (2008) wird eine Untersuchung des turbulenten Freistrahls mit Hilfe der tomographischen PIV durchgeführt.

Eine wesentliche Eigenschaft der PIV ist es, dass die Dichte der abgebildeten Streupartikel so hoch ist, dass eine eindeutige Zuordnung einzelner Partikel in dem aufgenommenen Bildpaar nicht mehr möglich ist. Daher wird der Partikelversatz fensterweise mittels Kreuzkorrelation berechnet. Wählt man allerdings die Partikelkonzentration so gering, dass einzelne Partikel identifiziert und in dem Bildpaar zugeordnet werden können, spricht man von *Particle Tracking Velocimetry*, kurz PTV (siehe Maas (1992, 1997) und Schimpf und Kallweit (2004)). Das bedeutet, dass bei PTV die durchschnittliche Entfernung zwischen einzelnen Streupartikeln im Bild im Durchschnitt größer als deren Verschiebung ist (siehe Westerweel (1993)).

## 2.2 Hintergrund-Schlieren-Verfahren

Der Hintergrund-Schlieren-Methode (*Background Oriented Schlieren*, kurz BOS) liegt die 1864 von A. Toepler<sup>7</sup> vorgestellte Schlierenphotographie zugrunde. Dieses Verfahren dient der Sichtbarmachung von Dichte- bzw. Brechungsindexgradienten in Gasen oder Flüssigkeiten und nutzt dazu die Ablenkung eines Lichtstrahls aufgrund von Brechungsindexgradienten in transparenten Medien. Dieses physikalische Phänomen tritt z.B. über heißem Asphalt auf: Die Luft beginnt zu flimmern bzw. der Hintergrund gerät scheinbar in Bewegung. Die erstmals von Raffel u. a. (2000), Richard u. a. (2000) und Loose u. a. (2000) vorgestellte BOS-Technik erlaubt eine qualitative Bestimmung von Dichtegradienten. Dabei kann sowohl auf die Bildaufnahmesysteme als auch auf die Auswertelgorithmen der PIV-Technik zurück gegriffen werden.

Der Messaufbau der BOS-Technik gestaltet sich sehr einfach: es werden nur eine Kamera und ein zufälliges Hintergrundmuster benötigt (siehe Abb. 2.3). Im Gegensatz zur herkömmlichen Schlieren-Messtechnik wird für BOS weißes, divergentes Licht eingesetzt. Das zufällige Punktemuster wird von der Kamera fokussiert und sowohl mit als auch ohne Dichtegradienten entlang der Sichtstrahlen aufgenommen. Aus dem so gewonnenen Bildpaar lässt sich der Versatz, analog zu PIV, mittels Kreuzkorrelation fensterweise berechnen. Dabei wird der Bildversatz, wie in Abb. 2.4 dargestellt, durch das Integral des Dichtegradienten senkrecht

---

<sup>6</sup>Zum Zeitpunkt der Anfertigung dieses Kapitels betrug der Preis für ein Barrel Rohöl 134 US-Dollar.

<sup>7</sup>August Joseph Ignaz Toepler: Geboren am 7. September 1836 in Brühl, gestorben am 6. März 1912 in Dresden. Deutscher Physiker und Chemiker, der die Schlierenphotographie entwickelt hat.

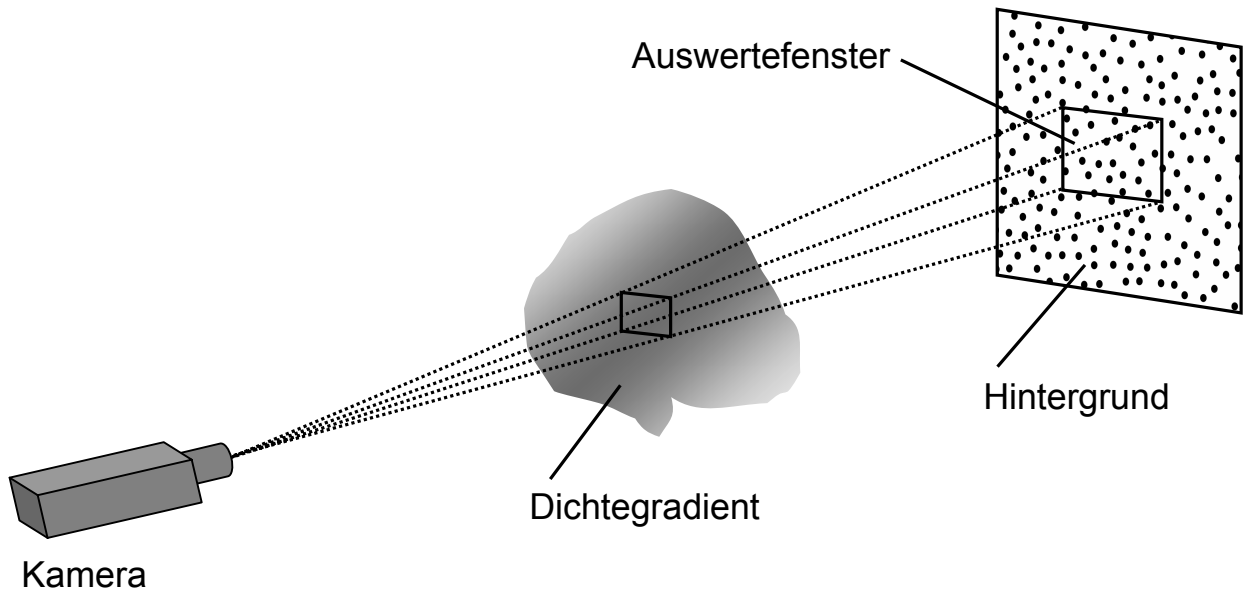


Abbildung 2.3: Experimentelle Realisierung des BOS-Messaufbaus.

zur Sichtlinie bestimmt.

Der Brechungsindex  $n$  eines Materials ist definiert als

$$n = \frac{c_0}{c_m}, \quad (2.3)$$

wobei  $c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{m/s}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $c_m$  die Lichtgeschwindigkeit innerhalb des entsprechenden Materials ist. Der Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex  $n$  eines Gases und seiner Dichte  $\rho$ , ist durch die Gladstone-Dale Gleichung

$$n - 1 = \rho \cdot G(\lambda) \quad (2.4)$$

gegeben (siehe Merzkirch (1974)). Die Gladstone-Dale Konstante  $G(\lambda)$  ist eine Materialkonstante, die zusätzlich von der Wellenlänge  $\lambda$  abhängt. Sie ermöglicht somit eine direkte Umrechnung von Brechungsindex zu Dichte und vice versa. Ändert sich der Brechungsindex senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts, so ändert sich ebenfalls die Geschwindigkeit und die Richtung der Lichtausbreitung. In Abb. 2.5 ist dieser Zusammenhang dargestellt, wobei die Lichtbrechung aus Gründen der Vereinfachung nur an einer Ebene stattfindet und

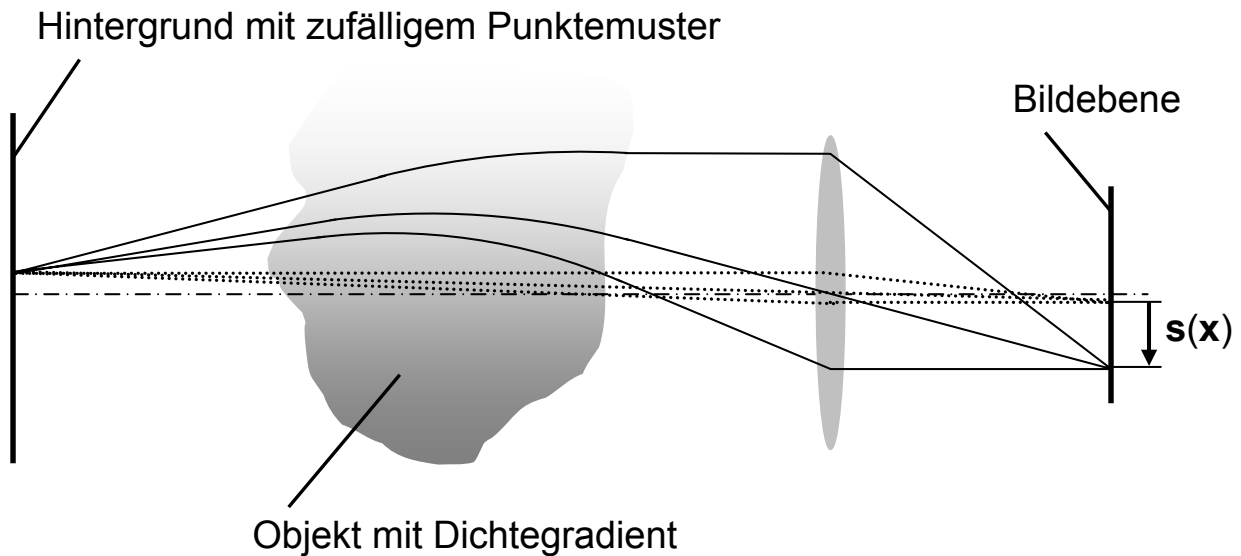


Abbildung 2.4: Prinzipskizze des Messaufbaus für die BOS-Technik nach Goldhahn und Seume (2007).

nicht kontinuierlich über das gesamte Volumen des Brechungsindexgradienten. Unter der Annahme einer Parallelprojektion ergibt sich für den Ablenkwinkel  $\epsilon$  nach Merzkirch (1974):

$$\tan(\epsilon) \approx \frac{d}{Z_D} \quad (2.5)$$

$$\tan(\epsilon) \approx \Delta d \cdot \frac{Z_B}{z_i \cdot Z_D} \quad (2.6)$$

$$\tan(\epsilon) \approx \int \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz. \quad (2.7)$$

Damit lässt sich dem gemessenen Bildversatz  $\Delta d$  bei bekanntem Abbildungsmaßstab  $M = z_i/Z_B$  und bekanntem Abstand  $Z_D$  des Dichtegradienten vom Hintergrund der Ablenkwinkel  $\epsilon$  und das Integral des Brechungsindexgradienten senkrecht zur Sichtlinie zuordnen. Mittels der fensterweisen Kreuzkorrelation wird aus dem aufgenommenem Bildpaar ein komplettes Verschiebungsvektorfeld bestimmt, das mit Gl. (2.6)-(2.7) zunächst in ein Brechungsindexgradientenfeld und schließlich mit Hilfe der Gladstone-Dale Gleichung (2.4) in das gesuchte Dichtegradientenfeld umgerechnet wird. Damit ist eine berührungslose flächenhafte Messung von Dichtegradienten quantitativ möglich.

Da die Zentrifugalkräfte bei einem Wirbel in einem Fluid dazu führen, dass dieser im Mittelpunkt eine geringere Dichte aufweist, lässt sich aus der gemessenen Dichteverteilung sowohl auf die Wirbelstärke als auch auf dessen Position schließen (siehe Klinge (2003)). Aufgrund dessen, dass auch kein aufwändiger optischer Aufbau inklusive Laser notwendig ist, lassen

sich mit der BOS-Technik auch aerodynamische Experimente an Modellen in Originalgröße oder im Freiflug realisieren. Richard u. a. (2000) und Richard und Raffel (2001) wenden das BOS-Messprinzip zur Untersuchung der Wirbel an den Blattspitzen eines Helikopters im Freiflug an. Eine vergleichende Untersuchung zwischen Dichtemessungen einer Strömung mittels BOS und aus PIV-Daten abgeleiteten Dichtewerten wurde von Elsinga u. a. (2004) durchgeführt und zeigte ähnliche Ergebnisse.

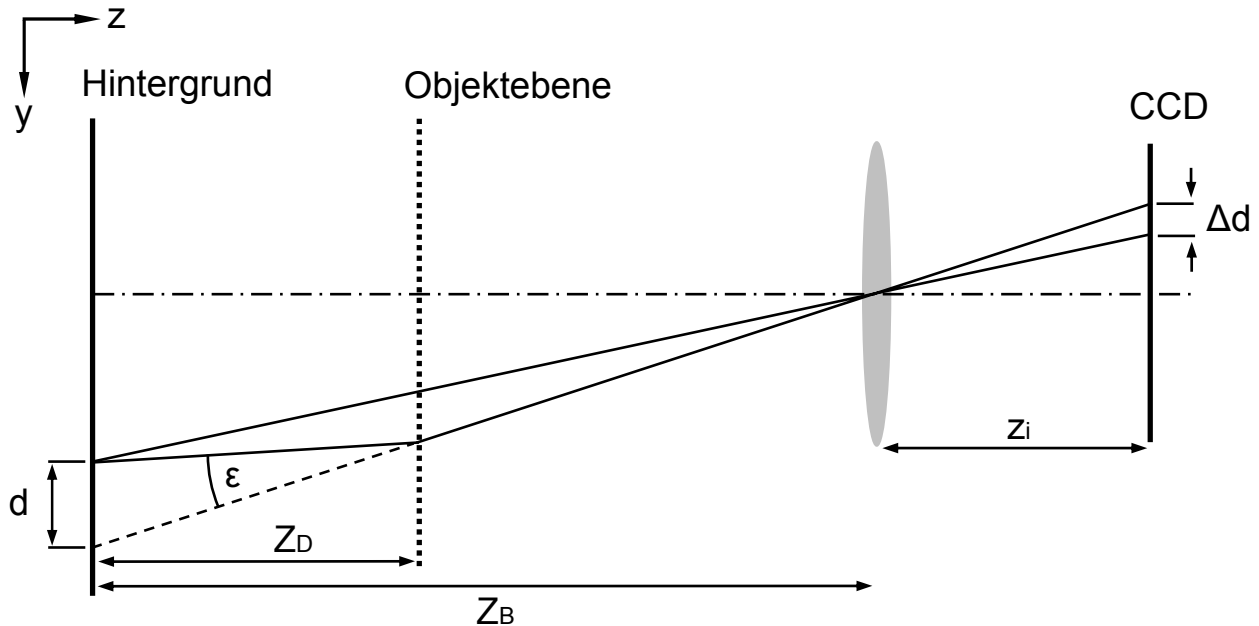


Abbildung 2.5: Ablenkwinkel  $\epsilon$  aufgrund der Dichteänderung in der Objektebene.

Im Allgemeinen ist die Dichte  $\rho$  eine Funktion aller drei Raumkoordinaten  $x, y, z$  und es geht dadurch aufgrund der Integration entlang der Sichtlinie bei der bisher besprochenen Methode Information verloren. Eine tomographische Rekonstruktion ist mittels einzelner Bilder aus unterschiedlichen Richtungen, auch als Projektionen bezeichnet, möglich. Die gemessene Lichtablenkung aus jeder Projektionsrichtung kann als Radon<sup>8</sup>-Transformation des Dichtegradientenfeldes bezüglich der jeweiligen Sichtlinie aufgefasst werden (siehe Kindler u. a. (2007)). Die tomographische Rekonstruktion der dreidimensionalen Dichteverteilung mittels der inversen Radon-Transformation kann über den von Liu u. a. (1989) beschriebenen Ansatz der gefilterten Rückprojektion gelöst werden. Die dazu notwendigen mathematischen

<sup>8</sup>Johann Radon: Geboren am 16. Dezember 1867 in Tetschen a. d. Elbe, gestorben am 25. Mai 1956 in Wien. Österreichischer Mathematiker, der die nach ihm benannte Radon-Transformation entwickelt hat.

Grundlagen werden ausführlich in Over (2007) hergeleitet. Eine Anwendung dieses Rekonstruktionsansatzes auf einen Freistrahler wurde von Goldhahn und Seume (2007) durchgeführt.

## 2.3 Digitale Bildkorrelation

Heutzutage gehört die flächenhafte dreidimensionale Erfassung von beliebigen Freiformflächen zu den Standard Anwendungsfällen der optischen Messtechnik. Am Markt für solche Messtechniken haben sich dabei bisher insbesondere Systeme auf Basis der Streifenprojektion durchgesetzt. Da die Streifenprojektion allerdings für die Aufnahme einer einzelnen dreidimensionalen Szene verschiedene Muster nacheinander auf die Oberfläche projizieren muss, wird eine während dieser Zeit unbewegte Objektoberfläche benötigt. Für hochdynamische Vorgänge, oder wenn während der Messung Vibrationen auftreten können, eignen sich daher ausschließlich Systeme, die für die Aufnahme einer Szene nur ein einzelnes Kamerabild benötigen. Diese Voraussetzung ist durch die im Folgenden beschriebene Messtechnik gegeben.

Die digitale Bildkorrelation, im Englischen als *Digital Image Correlation* oder kurz mit DIC bezeichnet, ist ein berührungsloses optisches Messverfahren zur Bestimmung der flächenhaften Form sowie der dreidimensionalen Verschiebung oder Deformation von Oberflächen. Da dieses Verfahren Punktkorrespondenzen mittels Korrelation herstellt, wird es manchmal auch als *Image Pattern Correlation Technique* (IPCT) bezeichnet.

Seit nunmehr über 25 Jahren wird die digitale Bildkorrelation in der Forschung, aber auch in verschiedensten anderen Gebieten, angewendet. Bereits in den frühen 80er Jahren wendete eine Gruppe von Wissenschaftlern der Universität Stuttgart (siehe Förstner (1982, 1984) und Ackermann (1983, 1984)) DIC zum Auffinden von homologen Bildbereichen in der Photogrammetrie und Fernerkundung mit einer Genauigkeit von bis zu 0,01 Pixel an. Damit wurde DIC zu einem mächtigen Werkzeug für verschiedenste photogrammetrische Anwendungen wie z.B. automatische Suche von Verknüpfungspunkten in der Aerotriangulation, Erstellung von digitalen Geländemodellen (DGM) oder die Berechnung der relativen Orientierung. Der grundlegende Ansatz dieser Gruppe von Wissenschaftlern besteht darin, lokale Bildbereiche zweidimensional zu korrelieren, ohne dabei explizit die Epipolargeometrie zu benutzen (siehe Ackermann (1983)). Im Gegensatz zu dem meist genutzten Vorgehen der Maximierung des Kreuzkorrelationskoeffizienten, kommt hier eine Transformation mit dem Ziel der Minimierung von Grauwertdifferenzen im Least Squares Sinne zum Einsatz. Der Einsatz dieser Transformation, die sowohl geometrische als auch radiometrische Parameter beinhaltet, für die Suche von homologen Bildbereichen wird auch als *Least Squares Matching* (LSM) bezeichnet und wurde von Förstner (1982) vorgestellt. Zur gleichen Zeit wurde von den Wissenschaftlern Peters und Ranson (1982) der Universität von South Carolina zum ersten Mal die zweidimensionale DIC zur Deformationsmessung eingesetzt. Dazu brachten sie ein zufälliges Punktemuster auf die Oberfläche an, um dieses mittels Korrelation auswertbare

Struktur zu verleihen, und nahmen dieses Muster sowohl in einem Referenzzustand als auch im deformierten Zustand des Objektes auf.

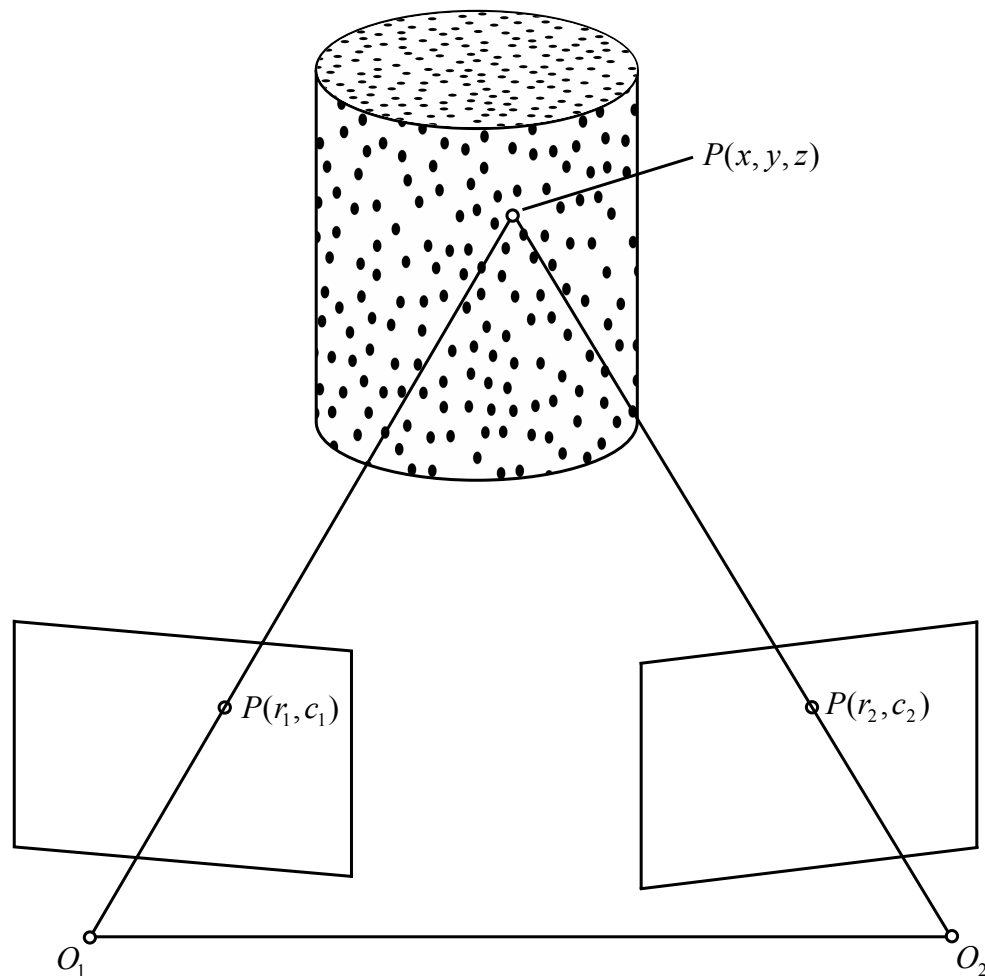


Abbildung 2.6: Prinzip der stereoskopischen Messanordnung für die digitale Bildkorrelation.

Heutzutage wird die DIC mittels eines stereoskopischen Messaufbaus für die dreidimensionale Form- und Deformationsmessung eingesetzt (siehe Helm u. a. (1996) und Sutton u. a. (2007)). Durch den Einsatz von synchronisierten Hochgeschwindigkeitskameras wird auch die Messung von hochdynamischen Objekten, wie von Siebert u. a. (2007) gezeigt, möglich. Luhmann u. a. (2008) beschreiben ein Verfahren zur dynamischen Erfassung von dreidimensionalen Oberflächen, das sowohl die Kreuzkorrelation unter Berücksichtigung der Epipolargeometrie als auch die LSM-Technik zur Korrespondenzanalyse verwendet. Dabei wird für das Least Squares Matching statt der meist verwendeten Affintransformation auf eine Pro-

ektivtransformation zurück gegriffen. Über den Einsatz der DIC im Flugversuch und damit verbundene Randbedingungen, wie eingeschränkte optische Zugänge und schlechte geometrische Schnittbedingungen, berichtet Boden (2008).

In Abb. 2.6 ist die stereoskopische Messanordnung für die digitale Bildkorrelation schematisch dargestellt. Das zu messende Objekt wird vor der Messung mit einem zufälligen Punktemuster versehen, falls es nicht von Natur aus eine hinreichende Textur besitzt. Da für die spätere Auswertung auf Kreuzkorrelationsalgorithmen, wie sie aus der PIV-Technik bekannt sind, zurück gegriffen wird, kann auch auf das Wissen aus diesem Bereich darüber, wie das zufällige Punktemuster idealerweise beschaffen sein soll, verwendet werden. Aus mindestens zwei unterschiedlichen Positionen werden konvergente Aufnahmen des Objektes im Referenzzustand erzeugt. Im Falle eines Stereokamerasystems und bei bekannter innerer und äußerer Orientierung ist damit bereits die dreidimensionale Bestimmung der Oberflächenform möglich. Dazu werden Punktkorrespondenzen jeweils für kleine Auswertefenster zwischen beiden Kameras hergestellt und mittels Triangulation der zugehörige Oberflächenpunkt berechnet. Der wesentliche Unterschied zur standardmäßigen Stereophotogrammetrie besteht darin, dass die zu messenden Objektpunkte nicht einzeln explizit mittels Messmarken gekennzeichnet werden müssen.

Soll zusätzlich die Deformation des Objektes unter Belastung oder eine hochdynamische Bewegung erfasst werden, wird eine Sequenz von synchronisierten Bildern beider Kameras während dieses Vorgangs aufgenommen. Für jeden einzelnen Zeitschritt kann, wie bereits beschrieben, die dreidimensionale Form bestimmt werden. Zusätzlich kann für jede Kamera auch eine Korrespondenzanalyse zwischen Bildern einzelner Zeitschritte erfolgen. Die zweidimensionalen Deformationsfelder, die so in jeder Kamera zwischen den einzelnen Zeitschritten messbar sind, lassen sich per Triangulation jeweils in ein dreidimensionales Deformationsfeld umrechnen. Als Messergebnis steht somit über die komplette zeitliche Sequenz die dreidimensionale Form und Deformation des Objektes zur Verfügung. Es muss beachtet werden, dass hierbei Form und Deformation unabhängig voneinander bestimmt werden. Da das zufällige Punktemuster fest mit der Objekt Oberfläche verbunden ist, kann auch eine Verschiebung der Punkte entlang der Oberfläche bestimmt werden, ohne dass sich die Form des Objektes ändert.

Aus den mittels DIC gemessenen Daten lassen sich ebenfalls Dehnungsverteilungen berechnen und auf der dreidimensionalen Oberfläche visualisieren. Daher wird dieses Verfahren für verschiedenste Material- und Belastungstests eingesetzt. In der Automobilindustrie bietet sich DIC zur Messung von hochdynamischen Prozessen wie z.B. bei Crashversuchen oder beim Entfaltungsvorgang eines Airbags an.



## 2.4 Projected Pattern Correlation

Die Projected Pattern Correlation (PROPAC) ist eine optische flächenhafte Messtechnik zur Bestimmung von Deformationen auf diffus reflektierenden Oberflächen. Der grundlegende optische Aufbau besteht dabei, analog zur Streifenprojektion, aus einem Projektor und einer Kamera. Die Lösung des Korrespondenzproblems erfolgt mittels lokaler Kreuzkorrelation des feinen zufälligen Punktemusters, das der Projektor auf die Oberfläche aufbringt. Daher verringert sich gegenüber der Streifenprojektion zwar die räumliche Auflösung, aber es lässt sich mit dem PROPAC-Verfahren eine deutlich höhere zeitliche Auflösung erzielen, da pro Datensatz nur ein Kamerabild aufgenommen werden muss.

Die Technik der Projektion zufälliger Punktemuster wurde bereits in den 80er Jahren zur Vermessung von Karosserieteilen angewendet (siehe Schewe (1988)). Das dafür angewandte System Zeiss Indusurf besteht aus einem Diaprojektor und zwei Kameras in Stereoanordnung. Allerdings dienen die zufälligen Punktemuster hier, analog zur DIC-Technik, nur zur Texturierung der ansonsten homogenen Oberfläche. Der wesentliche Unterschied bei der Projektion der Muster ist aber, dass diese raumfest und nicht wie bei der DIC ortsfest mit der Oberfläche des Messobjektes verbunden sind. Auch die Richtung der Projektion findet im Zeiss Indusurf System keine Berücksichtigung, da der Projektor ja nur für die Texturierung verantwortlich ist. Die Projektion zufälliger Punktemuster für die Deformationsmessung an Windkanal-Modellen wurde erstmals von van der Draai u. a. (1999) angewendet. Sie erreichten dabei eine Auflösung in der Größenordnung von 0,1 mm für die Verschiebung in Richtung des Normalenvektors der Oberfläche.

Für die PROPAC-Technik zur Deformationsmessung wird das zufällige Punktemuster zunächst auf eine Referenz- oder Soll-Oberfläche projiziert und mit der Kamera unter einem Triangulationswinkel abgebildet. Durch eine weitere Aufnahme des identischen Punktemusters auf der deformierten Oberfläche bzw. der Ist-Oberfläche entsteht ein Bildpaar, das sich mittels lokaler Kreuzkorrelation zu einem Verschiebungsfeld berechnen lässt. Das Messprinzip ist also grundsätzlich eine Kombination aus Kreuzkorrelation zur Lösung des Korrespondenzproblems und Triangulation.

Analog zur Streifenprojektion wird der Projektor wie eine zweite Kamera behandelt, die überall eine konstante Nullverschiebung misst. Somit lassen sich aus der Photogrammetrie bekannte Stereoalgorithmen anwenden, um aus der Verschiebung des Punktemusters auf der Oberfläche die Verschiebung der Oberfläche in Normalenrichtung zu berechnen. Dazu muss die innere und äußere Orientierung der Kamera, die Lage der Referenzoberfläche sowie das Projektionszentrum des Projektors bekannt sein. Weitere Parameter des Projektors, wie z.B. Linsenverzeichnungen, werden für diese Technik nicht benötigt.

Aus Abb. 2.7 lässt sich erkennen, dass die Musterprojektion für die PROPAC-Technik, falls die Oberfläche dies zulässt, unter einem möglichst flachen Winkel erfolgen sollte, da dies bei gleichzeitig relativ kleiner Höhenänderung zu einer großen Musterverschiebung führt. Die-

se schräge Projektion der Punktemuster führt allerdings dazu, dass diese auf dem Objekt verzerrt dargestellt sind. Werden beispielsweise, wie in Abb. 2.7 zu sehen, runde Punktemuster projiziert, so entstehen auf dem Objekt elliptische Punktemuster, deren Form und Lage abhängig vom jeweiligen Einfallswinkeln der projizierten Lichtstrahlen abhängig ist.

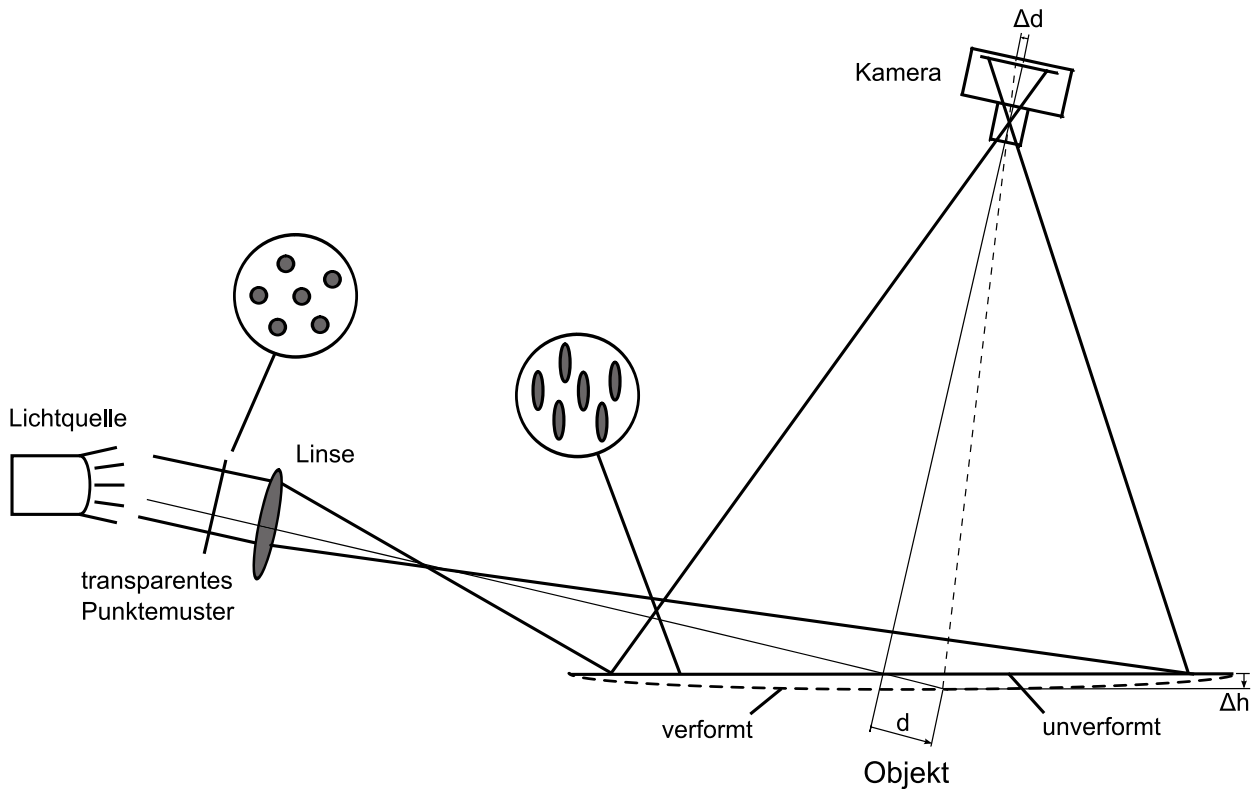


Abbildung 2.7: Messanordnung für die PROPAC-Technik.

Der Triangulationswinkel, also der Winkel zwischen den Projektionsstrahlen und der jeweils korrespondierenden Kamerablickrichtung, sollte idealerweise ca.  $90^\circ$  betragen. Dies führt zu einem unterschiedlichen Abbildungsmaßstab an verschiedenen Bildpositionen. Um die späteren Deformationsinformationen auf einem regelmäßigen Raster zu erhalten und eine leichte Umrechnung des Verschiebungsfeldes von Pixel in metrische Einheiten zu erlauben, werden die aufgenommenen Bilder entzerrt. Dazu wird die projektive Transformation benutzt, die im Abschnitt 3.1 des folgenden Kapitels genauer beschrieben wird.

Sowohl der Projektor als auch die Kamera können durch das Lochkammermodell beschrieben werden. Dieses Modell basiert auf der Annahme, dass alle Strahlen durch einen einzigen Punkt, das so genannte Projektionszentrum, laufen. Für die Durchführung der Kalibrierung

kann auf herkömmliche Verfahren (z.B. siehe Zhang (1999) oder Legarda-Sáenz u. a. (2004)), wie sie für die Streifenprojektion oder die Stereophotogrammetrie eingesetzt werden, zurück gegriffen werden.

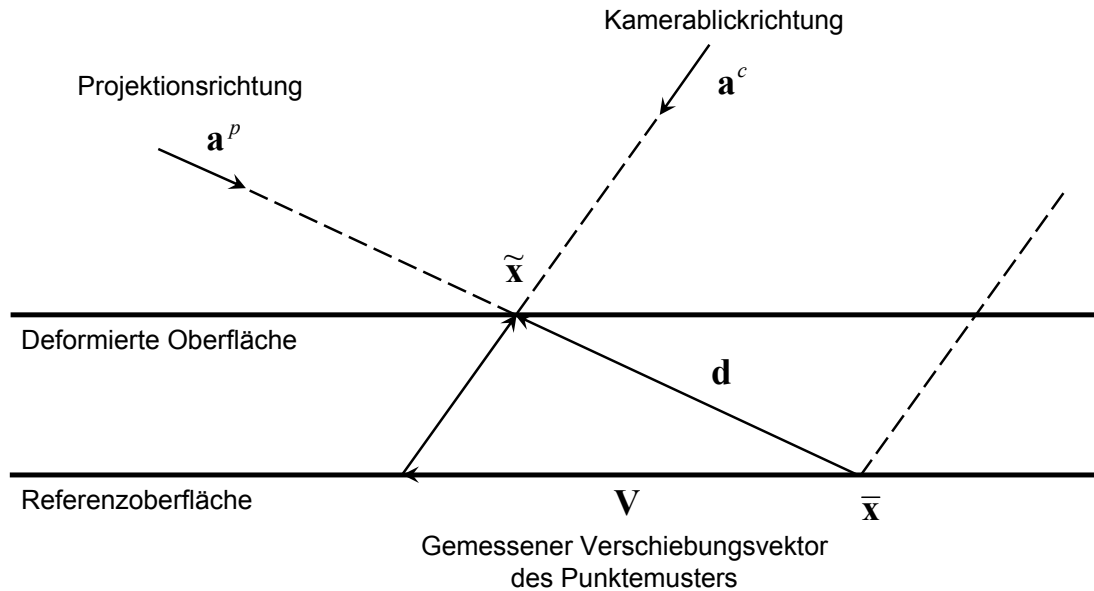


Abbildung 2.8: Deformationsmessung mittels der PROPAC-Technik im Detail.

Aufgrund der Tatsache, dass bei der PROPAC-Technik das zufällige Punktemuster raumfest ist, lassen sich mit dieser Messmethode keine Verschiebungen von festen Objektpunkten entlang der Objektebene messen. Allerdings ist dieses Verfahren sehr sensibel gegenüber Verschiebungen in Richtung des Normalenvektors der Oberfläche. Betrachten wir dazu Abb. 2.8. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  des Punktemusters im Raum ist definiert durch die beiden Schnittpunkte eines einzelnen Lichtstrahls des Projektors mit der Referenzoberfläche und der deformierten Oberfläche:

$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}. \quad (2.8)$$

Von diesem dreidimensionalen Vektor  $\mathbf{d}$  wird aber nur eine zweidimensionale Projektion auf der Sensorebene der Kamera bzw. nach Entzerrung und Anbringen des Maßstabs auf der Referenzoberfläche gemessen. Für den Vektor  $\mathbf{d}$  und seine Projektion auf die Referenzoberfläche  $\mathbf{V}$  gilt folgende Beziehung:

$$p\mathbf{a}^p - q\mathbf{a}^c + \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

wobei  $\mathbf{a}^p$  und  $\mathbf{a}^c$  der normierte Richtungsvektor vom Projektionszentrum des Projektors bzw. der Kamera zum jeweiligen Punkt der Referenzoberfläche und  $p, q$  skalare Größen sind. Für

jeden Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  der Referenzoberfläche und dessen zugehöriger Verschiebung  $\mathbf{V}$  lassen sich bei bekannter geometrischer Anordnung von Kamera und Projektor die Richtungsvektoren  $\mathbf{a}^p$  und  $\mathbf{a}^c$  jeweils punktweise berechnen. Somit kann für jeden Oberflächenpunkt eine Lösung für die Skalare  $p$  und  $q$  aus Gl. (2.9) nach der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) erzielt werden. Damit ergibt sich der räumliche Verschiebungsvektor

$$\mathbf{d} = -p\mathbf{a}^p, \quad (2.10)$$

in dem auch die gesuchte Verschiebung senkrecht zur Referenzoberfläche, also die Deformation der Oberfläche, enthalten ist.

Die erreichbare Genauigkeit der PROPAC-Messtechnik hängt nach Blumrich u. a. (2007) hauptsächlich von folgenden Faktoren ab:

- Anzahl der Kamerapixel,
- Größe des Messbereichs,
- Sub-Pixel-Messgenauigkeit der Auswertalgorithmen auf Basis der Kreuzkorrelation,
- geometrische Messanordnung, dabei insbesondere der Winkel zwischen der Referenzoberfläche und den Projektionsstrahlen.

Die Wahl eines möglichst flachen Projektionswinkel ermöglicht es, eine relative Höhenmessgenauigkeit von besser als  $10^{-5}$  (entspricht z.B.  $10 \mu\text{m}$  bei einem Messbereich von  $1 \text{m}^2$ ) zu erreichen (siehe Blumrich (2007)).

Durch den Vorteil der PROPAC-Technik, nur ein Messbild des Punktemusters pro Zustand der Oberfläche aufnehmen zu müssen, um das Korrespondenzproblem zu lösen, wird es erstmals möglich, dieses Verfahren für die flächenhafte Messung von Geschwindigkeiten bei dynamischen Oberflächen zu erweitern. Dazu müssen nur, analog zur PIV-Technik, zwei Bilder kurz hintereinander und mit bekannter Zeitdifferenz aufgenommen werden. Damit ergibt sich aus dem Verschiebungsfeld zwischen den beiden Bildern ein mittleres Geschwindigkeitsfeld für das Zeitintervall zwischen den beiden Aufnahmezeitpunkten. Die Anwendung der PROPAC-Technik zur Schwingungsmessung wurde erfolgreich von Konrath u. a. (2004) durchgeführt. Um eine hinreichend kurze Belichtungszeit erzielen zu können, wurde ein Laser als Lichtquelle eingesetzt. Durch den Einsatz von Hochgeschwindigkeitskameras ist es auch möglich, nicht-periodische Schwingungen flächenhaft zu erfassen, eine Aufgabe, an der herkömmliche Verfahren zur Schwingungsmessung wie z.B. Laser Vibrometer aufgrund des punktweise scannenden Messprinzips scheitern.

Am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen wird an verschiedenen Weiterentwicklungen (siehe Blumrich u. a. (2007); Blumrich (2008b,c)) der PROPAC-Messtechnik gearbeitet. Das Ziel ist es dabei,

diese Messtechnik aufgrund der hohen zeitlichen Auflösung und der sich daraus ergebenden Echtzeitfähigkeit für die prozessintegrierte Qualitätskontrolle einsetzbar zu machen (siehe Blumrich (2008a)).

## 2.5 Reflected Pattern Correlation

Die Reflected Pattern Correlation (REPAC) Technik stellt eine Erweiterung des Messprinzips auf Basis zufälliger Punktemuster und deren Auswertung mittels Kreuzkorrelation für spiegelnde Oberflächen dar (siehe Blumrich u. a. (2007) und Blumrich (2007)). Die zugehörige Messanordnung ist in Abb. 2.9 dargestellt. Eine Kamera beobachtet indirekt mittels der

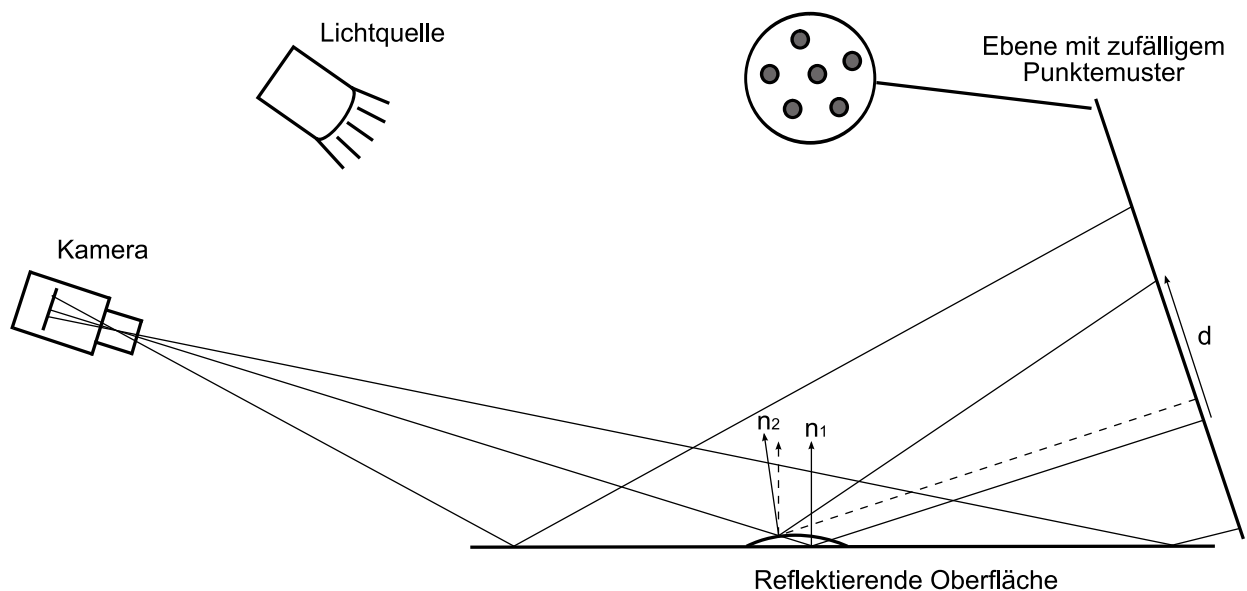


Abbildung 2.9: Messanordnung für die REPAC-Technik.

spiegelnden Oberfläche ein zufälliges Punktemuster auf einer Ebene. Analog zur PROPAC-Messtechnik wird mittels des zu messenden spiegelnden Objekts sowohl im Referenzzustand als auch im deformierten Zustand ein Bild des Punktemusters aufgenommen und mittels Kreuzkorrelation ausgewertet. Der Verschiebungsvektor  $d$  des Musters in der Ebene kann dabei, wie in Abb. 2.9 zu sehen, sowohl durch eine Änderung der Höhe als auch durch eine Änderung der Neigung an der spiegelnden Oberfläche hervorgerufen werden. Im Allgemeinen liegt eine beliebige Kombination von Höhen- und Neigungsänderung vor, was einer Mehrdeutigkeit entspricht. Diese lässt sich mit den vorliegenden Beobachtungen nicht direkt lösen, da

die beiden Parameter nicht separierbar sind. Es werden also zusätzliche Beobachtungen zur eindeutigen Lösung des Problems benötigt, die von einer weiteren eingesetzten Kamera geliefert werden. Die Rekonstruktion der spiegelnden Oberfläche hinsichtlich Höhe und Neigung erfolgt also durch ein Stereokamerasystem, das jeweils ein Verschiebungsfeld beobachtet.

Der Algorithmus, der die Rekonstruktion der spiegelnden Oberfläche aus den von beiden Kameras gemessenen Verschiebungsfeldern ermöglicht, wird als *Tangent-Plane-Test* (TPT) bezeichnet. Er wurde von Heinemeyer u. a. (2005) erstmals vorgestellt. Aus einer vorangegangenen Kalibrierung sind die Projektionszentren der beiden Kameras  $F_A$  und  $F_B$  sowie die Lage der Referenzoberfläche und der Punktemusterebene bekannt. Mit diesen Informationen lassen sich die gemessenen Verschiebungsfelder von beiden Kameras auf die Referenzoberfläche projizieren; sie werden dort als  $\mathbf{V}_A$  und  $\mathbf{V}_B$  bezeichnet. Es wird nun ein dreidimensionales Punkteraster definiert, auf dem der TPT-Algorithmus angewendet und somit die Rekonstruktion der spiegelnden Oberfläche erfolgen soll. Dieses Punkteraster, das den dreidimensionalen Raum abtastet, in dem sich die gesuchte Oberfläche befinden kann, legt die Auflösung der Rekonstruktion bereits an dieser Stelle fest. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann für die weitere Beschreibung und die grafische Darstellung des Algorithmus angenommen werden, dass sich die zu rekonstruierende Oberfläche oberhalb der Referenzoberfläche befindet. Der in Abb. 2.10 dargestellte TPT-Algorithmus umfasst folgende Schritte:

- Für jeden Rasterpunkt  $Q$  werden dessen Projektionen  $Q_A$  und  $Q_B$  auf die Referenzoberfläche aus Sicht der Projektionszentren  $F_A$  und  $F_B$  der beiden Kameras berechnet.
- Anbringen der gemessenen Verschiebungsvektoren  $\mathbf{V}_A$  an den Punkt  $Q_A$  bzw.  $\mathbf{V}_B$  an  $Q_B$ .
- Berechnung des Punktes  $P_A$  bzw.  $P_B$  auf der Musterebene durch Reflexion des an  $Q_A + \mathbf{V}_A$  bzw.  $Q_B + \mathbf{V}_B$  einfallenden Sichtstrahls an der Referenzoberfläche.
- Berechnung der Normaleneinheitsvektoren  $\mathbf{n}_A$  und  $\mathbf{n}_B$  am Rasterpunkt  $Q$  durch die mittels Reflexion  $F_A$  auf  $P_A$  und  $F_B$  auf  $P_B$  abgebildet wird.
- Sind für alle Rasterpunkte  $Q$  die Normaleneinheitsvektoren aus der Sicht jeder Kamera berechnet worden, wird entlang der  $Z$ -Richtung derjenige Rasterpunkt gesucht, bei dem sich die Normaleneinheitsvektoren beider Kameras am ähnlichsten sind.

Durch diesen Rekonstruktionsalgorithmus ergibt sich für jedes  $(X, Y)$  Punktepaar der Referenzoberfläche genau ein Höhenwert. Zusätzlich steht aber an diesem Punkt noch die Neigungsinformation zur Verfügung. Da diese aufgrund der Mittelung der Normaleneinheitsvektoren zustande kommt, und nicht durch numerisches Differenzieren der Höhenwerte, steckt in der Neigung noch zusätzliche Information über die lokale Form der Oberfläche. Die Berechnungszeit für die Rekonstruktion der spiegelnden Oberfläche mittels des TPT-Algorithmus hängt linear von der Anzahl der verwendeten Rasterpunkte und somit von der erzielbaren Auflösung der Oberflächenrekonstruktion ab.

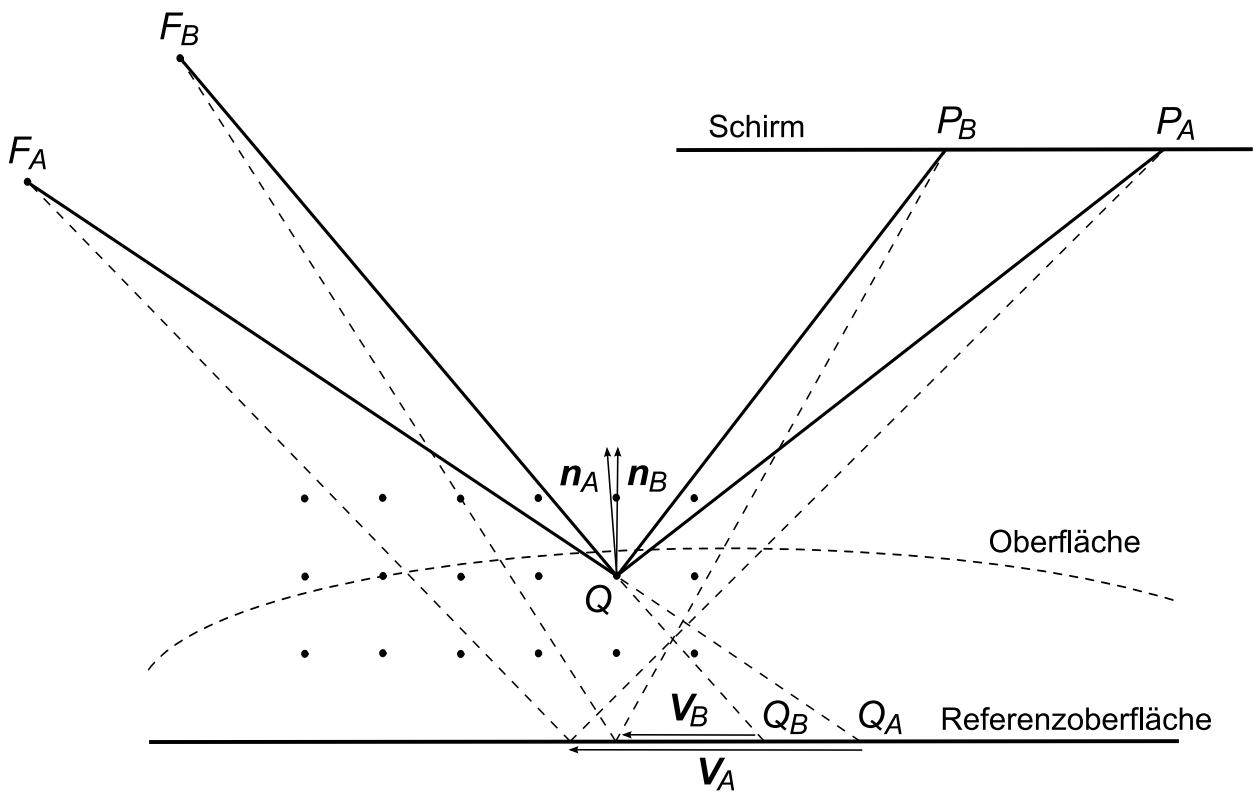


Abbildung 2.10: Tangent-Plane-Test (TPT) Algorithmus zur Rekonstruktion der Höhe und Neigung von spiegelnden Oberflächen.

Die bisherige Implementierung des TPT-Algorithmus von Heinemeyer u. a. (2005) benötigt, wie bereits angesprochen, eine feste vorgegebene Anzahl von Rasterpunkten in Z-Richtung. Der maximale Fehler, der bei dieser Rekonstruktion ohne Berücksichtigung des Messrauschens auftreten kann, liegt bei einer halben Schrittweite in Z-Richtung. In der Studienarbeit von Rau (2009) wird eine verbesserte Implementierung auf Basis eines iterativen Ansatzes vorgestellt. Zunächst wird auf einem groben Raster in Z-Richtung eine erste Lösung erzielt und in den weiteren Schritten jeweils die Z-Schrittweite verkleinert. Diese Iteration wird abgebrochen, sobald sichergestellt werden kann, dass der vorgegebene maximal zulässige Rekonstruktionsfehler nicht überschritten wird. In Abb. 2.11 ist ein Vergleich des Rekonstruktionsfehlers gegenüber einer bekannten analytischen Freiformfläche beider Implementierungen dargestellt. Der maximale Rekonstruktionsfehler konnte in diesem Beispiel um einen Faktor von ca. 30 verbessert werden, wobei zu beachten ist, dass der iterative Ansatz für dieses Beispiel nur unwesentlich langsamer in der Berechnung gewesen ist.

Die REPAC-Technik mittels Kreuzkorrelation zufälliger Punktemuster zur Bestimmung der Form von spiegelnden Freiformflächen besitzt einige Vorteile gegenüber den herkömmlichen

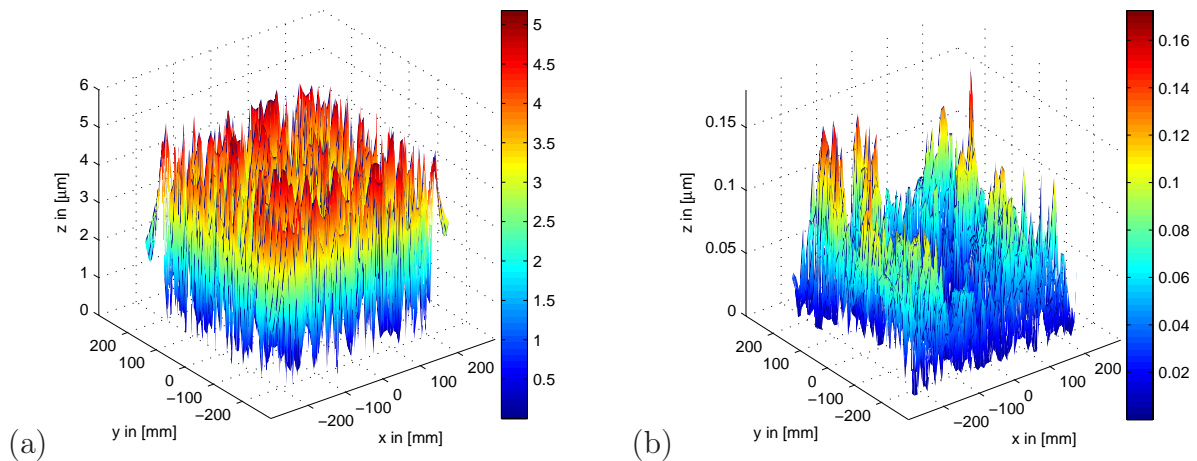


Abbildung 2.11: Betrag des Rekonstruktionsfehlers des TPT-Algorithmus: (a) Standard Implementierung nach Heinemeyer u. a. (2005), (b) Iterative Implementierung nach Rau (2009).

Verfahren für derartige Anwendungen. Auf reflektierenden Oberflächen kommen meist deflektometrische Verfahren auf Basis der Phasenmessung zur Anwendung (siehe Bothe u. a. (2004), Knauer u. a. (2004a,b) und Häusler u. a. (2008)). Zur Lösung des Korrespondenzproblems werden dabei, analog zur Streifenprojektion, Bildsequenzen benötigt. Das macht den Einsatz von aktiven Bildschirmen nötig und beschränkt somit die realisierbaren Messbereiche drastisch. Zusätzlich treten in der phasenmessenden Deflektometrie Probleme auf, wenn sich Reflexionen überlagern, z.B. durch Reflexion an der Ober- und Unterseite von Glasscheiben, da in diesem Fall keine sinnvolle Trennung bzw. Unterscheidung der beiden Informationen möglich ist. Im Gegensatz dazu ist eine Trennung der Reflexion an der Ober- und Unterseite von Glasscheiben mittels der REPAC-Technik problemlos möglich, da in diesem Fall einfach zwei Korrelationsmaxima auftreten und diese gemessen und ausgewertet werden können.



## 3 Auswertetechniken

Im vorangegangenen Kapitel wurden einige optische Messverfahren auf Basis der Kreuzkorrelation von zufälligen Punktemustern vorgestellt. Alle diese Messtechniken haben eine Gemeinsamkeit: ihre Genauigkeit hängt sowohl von der Genauigkeit der geometrischen Kalibrierung des Systems als auch von der Genauigkeit der Auswertung der Verschiebung mittels Kreuzkorrelation ab (siehe Siebert u. a. (2007)). Die Genauigkeit der Verschiebungsmessung mittels Kreuzkorrelation liegt im Sub-Pixel-Bereich und wird durch den Einsatz von speziellen Sub-Pixel-Detektoren zur Suche des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion erzielt (Bing u. a. (2006)). Auf die Kalibrierung von Kameras, Kamerasystemen oder Kamera-Projektor Kombinationen wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Da diese Aufgabe auch sehr häufig außerhalb der optischen korrelationbasierten Messtechnik auftritt, sei an dieser Stelle auf Standardliteratur wie Zhang (1999), Kraus (2004) oder Luhmann u. a. (2006) verwiesen.

In diesem Kapitel werden daher die speziellen Auswertetechniken beschrieben, die bei den bisher vorgestellten Messverfahren standardmäßig zum Einsatz kommen. Im Einzelnen sind das die perspektivische Entzerrung (Abschnitt 3.1), die Kreuzkorrelation (Abschnitt 3.2) und die Sub-Pixel-Detektoren (Abschnitt 3.3).

### 3.1 Perspektivische Entzerrung

Für viele der im letzten Kapitel besprochenen Messtechniken, wie z.B. bei Stereo-PIV oder bei PROPAC, erfolgt eine perspektivische Abbildung einer Ebene im Raum auf die Sensorebene der Kamera. Diese Abbildung, auch als perspektivische Projektion bezeichnet, bildet ein Quadrat im Objektraum mittels Zentralprojektion auf ein beliebiges Viereck im Bildraum ab. Dies führt zu einem Maßstab des aufgenommenen Bildes, der mit der Position im Bild variiert. Angestrebt wird aber ein konstanter Maßstab, d.h. ein entzerrtes Bild. Daher wird zunächst die perspektivische Abbildung bestimmt, um im nächsten Schritt die aufgenommenen Bilder mit Hilfe der inversen Abbildung entzerren zu können. In homogenen Koordinaten lässt sich die perspektivische Projektion wie folgt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} w^* x^* \\ w^* y^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Dabei sind  $w^*$  und  $w$  Konstanten und  $a_{33} = 1$ . In kartesischen Koordinaten umgeschrieben ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y^* &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da  $a_{33} = 1$  gilt, verbleiben acht unbekannte Koeffizienten. Für den speziellen Fall, dass zusätzlich noch  $a_{31} = a_{32} = 0$  gilt, ergibt sich aus Gl. (3.2) die durch sechs Parameter beschriebene Affintransformation, die ein Quadrat auf ein Parallelogramm abbildet.

Da in der Praxis die Abbildung der Ebene im Raum auf die Sensorebene der Kamera zusätzlich noch durch die Verzeichnung des Objektivs beeinflusst wird, bietet es sich an, Gl. (3.2) um eine Ordnung zu erhöhen:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + a_{14}x^2 + a_{15}y^2 + a_{16}xy}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33} + a_{34}x^2 + a_{35}y^2 + a_{36}xy}, \\ y^* &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23} + a_{24}x^2 + a_{25}y^2 + a_{26}xy}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33} + a_{34}x^2 + a_{35}y^2 + a_{36}xy}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dieser Ansatz mittels Abbildungsfunktionen zweiter Ordnung ermöglicht es, Fehler des optischen Systems, wie Kissen- oder Tonnenverzeichnung, zu kompensieren.

Sowohl für Gl. (3.2) als auch für Gl. (3.3) werden die Koeffizienten  $a_{ij}$  der Transformation bestimmt, indem ein Kalibriergitter, z.B. mit äquidistanten parallelen Linien in beiden Richtungen, an der Position der Ebene im Raum aufgenommen wird. Die Kreuzungspunkte der Linien werden zunächst detektiert und anschließend benutzt, um die unbekanntes Transformationsparameter mittels der MdkQ zu schätzen. Es werden mindestens vier (Gl. (3.2)) bzw. mindestens neun (Gl. (3.3)) identische Punkte in beiden Koordinatensystemen der Ebenen benötigt, um die Schätzung der Parameter durchzuführen. Für Details zu der eigentlichen Parameterschätzung sei auf den Anhang A.1 verwiesen.

In Abb. 3.1 ist der prinzipielle Ablauf der perspektivischen Projektion und der Bildentzerrung dargestellt. Das regelmäßige Kalibriergitter im Objektraum (Abb. 3.1 (a)) wird in der Kamera im Allgemeinen perspektivisch verzerrt abgebildet (Abb. 3.1 (b)). Der Abbildungsmaßstab ist an jedem Punkt unterschiedlich und ursprünglich parallele Linien sind nicht mehr parallel. Lassen sich aber mittels hinreichend vieler bekannter Punkte die Koeffizienten  $a_{ij}$  aus Gl. (3.2) bzw. Gl. (3.3) bestimmen, so lässt sich mit Hilfe der inversen Transformation das gemessene Bild, wie in (Abb. 3.1 (c)) dargestellt, perspektivisch entzerren.

Die Genauigkeit der Bestimmung der Koeffizienten der perspektivischen Projektion hängt natürlich davon ab, wie viele und insbesondere wie genau sich die bekannten Punkte des Kalibriergitters im verzerrten Kamerabild messen lassen. Für die automatische Punktmessung im Kamerabild setzt Willert (1997) das so genannte *template matching* ein. Dabei wird

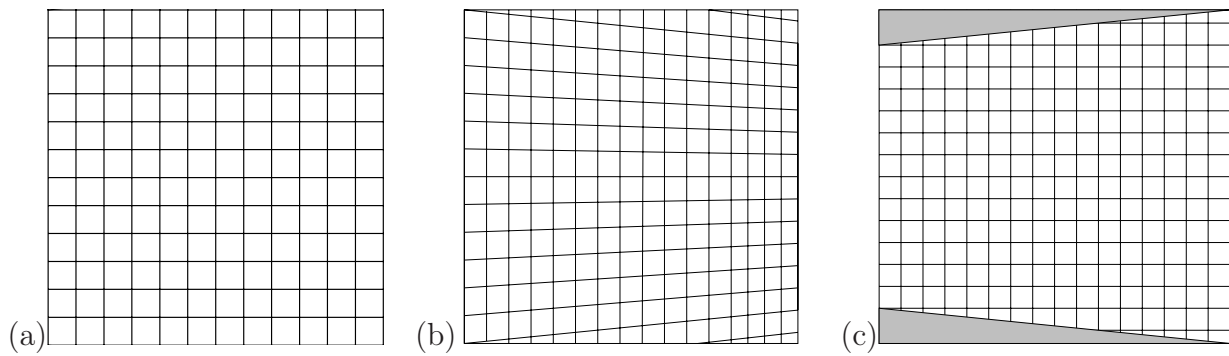


Abbildung 3.1: Perspektivische Entzerrung: (a) Kalibriergitter mit regelmäßigen parallelen Linien, (b) perspektivische Projektion des Gitters auf die Bildebene der Kamera, (c) Entzerrtes Gitter durch Anwendung der inversen Projektivtransformation.

ein künstlich vorgegebenes Grauwertmuster, das *template*, lokal mit dem aufgenommenen Bild korreliert. In diesem Fall ist das *template* ein “+“, also ein Kreuzungspunkt der Linien. Der Vorteil dabei ist, dass auf die Algorithmen der Kreuzkorrelation zurück gegriffen werden kann, die sowieso für die spätere Auswertung benötigt werden. Ein anderer Ansatz zur automatischen Punktmessung wird von Ehrenfried (2002) verfolgt. Hier kommt die Hough-Transformation<sup>1</sup> zur Detektion von Liniensegmenten in kleinen, sich überlappenden Auswertefenstern zum Einsatz. Aus den so gemessenen Liniensegmenten werden die ursprünglichen Linien des Kalibriergitters zusammengesetzt, sortiert und ihnen werden Koordinaten zugeordnet. Die mittels der MdkQ geschätzten Transformationskoeffizienten führen nach Ehrenfried (2002) schließlich zu einem entzerrten Bild mit einer Standardabweichung von ca. 0,1 Pixel. Ist der Abstand der parallelen Linien des verwendeten Kalibriergitters bekannt, so ergibt sich auch die Skalierung, also der Zusammenhang zwischen Pixel und metrischen Einheiten.

### 3.1.1 Scheimpflug-Bedingung

In der Nahbereichsphotogrammetrie wird, im Gegensatz zur Luftbildphotogrammetrie oder der Fernerkundung, auf kürzere Entfernung fokussiert und es muss daher die Tiefenschärfe berücksichtigt werden (siehe Kraus (2004)). Es existieren prinzipiell zwei unterschiedliche Möglichkeiten mittels einer Kamera eine Ebene scharf abzubilden: die Parallelanordnung und die Scheimpfluganordnung. Dies spielt insbesondere dann eine Rolle, wenn mit Hilfe eines Stereokamerasystems eine gemeinsame Ebene, z.B. bei Stereo-PIV der Laserlichtschnitt, jeweils aus unterschiedlichen Richtungen scharf abgebildet werden muss. Das Prinzip der scharfen

<sup>1</sup>Die Hough-Transformation wurde erstmals von Hough (1962) vorgestellt. Eine Beschreibung findet sich in Duda und Hart (1972).

Abbildung einer relativ zur mittleren Kamerablickrichtung schiefen Ebene ist für eine einzelne Kamera in Abb. 3.2 dargestellt. Die darin enthaltene Regel wird als Scheimpflug-Bedingung

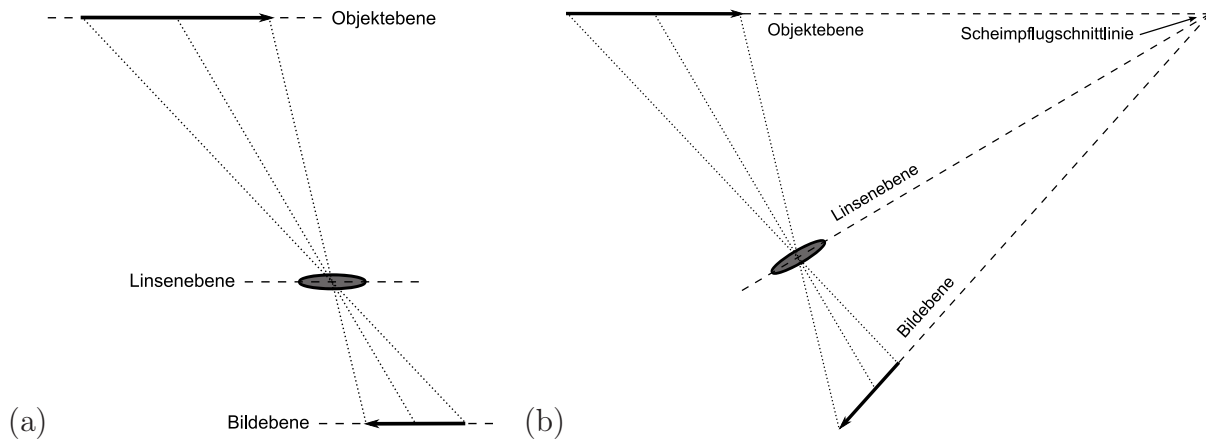


Abbildung 3.2: Scharfe Abbildung einer relativ zur Kamerablickrichtung schiefen Ebene: (a) mittels Parallelanordnung, (b) mittels Scheimpfluganordnung

bezeichnet und geht auf T. Scheimpflug<sup>2</sup> zurück. Sie besagt, dass Bildebene, Linsenebene und Schärfenebene entweder parallel zueinander sein (Abb. 3.2 (a)) oder sich in einer gemeinsamen Linie schneiden müssen (Abb. 3.2 (b)).

Normalerweise sind die Linsenebene und die Bild- bzw. Sensorebene in einer Kamera konstruktionsbedingt parallel. Zusätzlich liegt der so genannte Bildhauptpunkt, der dem Projektionszentrum am nächsten liegende Punkt der Sensorebene, meist in der Nähe des Sensormittelpunktes. Durch ein geeignetes Verschieben des Bildhauptpunktes aus dem Sensormittelpunkt heraus, wird es möglich mittels der so genannten Parallelanordnung eine scharfe Abbildung einer relativ zur mittleren Kamerablickrichtung schiefen Ebene zu erzielen. Diese Anordnung hat aber den Nachteil, dass die Modulationsübertragungsfunktion (*Modulation Transfer Function* MTF) und damit die Qualität der optischen Abbildung in diesem Fall deutlich reduziert wird, da herkömmliche Optiken für Strahlengänge entlang der optischen Achse optimiert sind (siehe Willert (1997) und Raffel u. a. (2007)). Eine zusätzliche Verstärkung der Vignettierung, die in diesem Fall auch nicht mehr in radialsymmetrischer Form auftritt, beschränkt den praktischen Nutzen diese Methode deutlich. Der große Vorteil der Parallelanordnung ist allerdings der Erhalt des konstanten Abbildungsmaßstabes über das gesamte Bild.

<sup>2</sup>Theodor Scheimpflug: Geboren am 7. Oktober 1865 in Wien, gestorben am 22. August 1911 in Vorderbrühl, österreichischer Geodät.

In der Praxis wird daher meist mit der in Abb. 3.2 (b) dargestellten Scheimpfluganordnung gearbeitet, bei der die Sensorebene gegenüber der Linsenebene so verkippt werden muss, dass beide sich mit der Schärfeebene in einer gemeinsamen Linie schneiden. Dies kann, wie in Abb. 3.3 zu sehen ist, sowohl mit einer Drehachse im Sensormittelpunkt als auch mit einer Drehachse im Projektionszentrum realisiert werden. Im ersten Fall, falls die Drehachse im

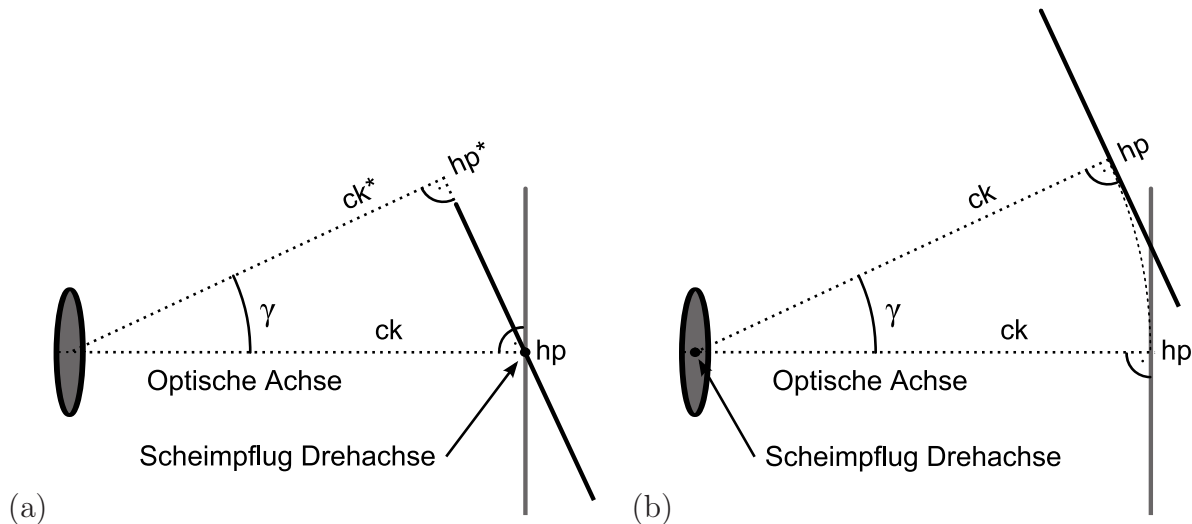


Abbildung 3.3: Realisierung der Scheimpflug-Bedingung: (a) Drehachse des Scheimpflugwinkels liegt im Sensormittelpunkt, (b) Drehachse des Scheimpflugwinkels liegt im Projektionszentrum

Sensormittelpunkt liegt, muss allerdings beachtet werden, dass sich die Lage des Bildhauptpunktes  $hp$  im Sensorkoordinatensystem ändert und ggf. sogar aus dem Sensor wandern kann. Damit ändert sich durch Verstellen des Scheimpflugwinkels  $\gamma$  auch die Entfernung des Bildhauptpunktes vom Projektionszentrum, die so genannte Kamerakonstante  $ck$ . Beides muss beim Kalibrieren der Kamera berücksichtigt werden. Der Vorteil liegt hier darin, dass die Sichtstrahlen ziemlich genau entlang der optischen Achse des Objektivs verlaufen, was, wie bereits angesprochen, die beste Abbildungsqualität der Optik ermöglicht. Wird allerdings gewünscht, dass sich die Lage des Bildhauptpunktes  $hp$  im Sensorkoordinatensystem und die Kamerakonstante  $ck$  nicht mit dem Scheimpflugwinkel  $\gamma$  ändern, so sollte der zweite Fall zur Anwendung kommen, bei dem die Drehachse im Projektionszentrum der Kamera liegt. Hier muss dann allerdings eine Verschlechterung der Abbildungsqualität in Kauf genommen werden, da die Sichtstrahlen nicht mehr entlang der optischen Achse verlaufen. Zudem wandert mit Änderung des Scheimpflugwinkels der Bildbereich. Das erschwert z.B. die gewünschte Deckungsgleichheit zweier Kamerabildbereiche zu erreichen.

## 3.2 Kreuzkorrelation

In der Messtechnik ist die Kreuzkorrelation weit verbreitet. Häufig wird damit der Zeitunterschied zwischen ähnlichen oder gleichen eindimensionalen Signalen gemessen. Dieses Messprinzip kommt beispielsweise bei der Positionsbestimmung mittels Codemessung von GPS, GALILEO oder GLONASS Satelliten zum Einsatz. Dabei wird die Signallaufzeit eines vom Satelliten ausgesandten und im Empfänger detektierten Signals durch Kreuzkorrelation mit einem im Empfänger generierten Signal bestimmt. Die so ermittelte Zeitdifferenz lässt sich durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit in die Entfernung des Satelliten vom Empfänger umrechnen. In der in Abschnitt 2.1 vorgestellten PIV-Technik wird mit Hilfe der Kreuzkorrelation eine Verschiebung, also eine Strecke, gemessen und diese mittels einer bekannten Zeitdifferenz in eine Geschwindigkeit umgerechnet. Für den in dieser Arbeit relevanten Fall der Bestimmung einer Verschiebung von zufälligen Punktemustern in digitalen Bildern bzw. Bildausschnitten, liegt das zu untersuchende Signal immer zweidimensional vor. Wir betrachten daher im Weiteren ausschließlich die zweidimensionale Kreuzkorrelation.

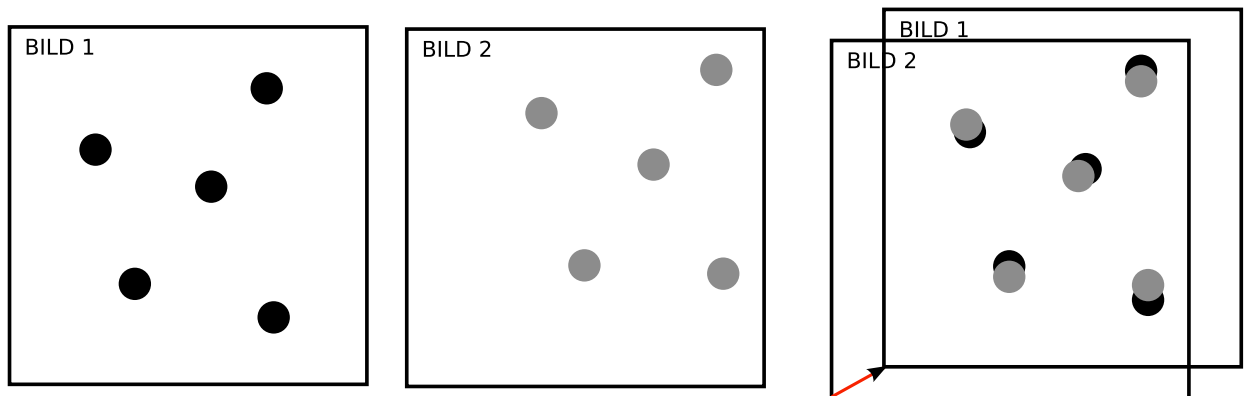


Abbildung 3.4: Anschauliche Darstellung der Bestimmung der Verschiebung zweier Bilder zufälliger Punktemuster aus Staack (2008).

In Abb. 3.4 ist die Verschiebungsbestimmung zweier ähnlicher Bilder anschaulich dargestellt. Dabei wird ein Bildausschnitt gegenüber dem anderen so verschoben, dass die maximale Übereinstimmung bzw. Ähnlichkeit erreicht wird. Mathematisch gesprochen berechnet man die diskrete Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{r,c} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_A[i, j] \cdot I_B[i + r, j + c] \quad (3.4)$$

zwischen den beiden Intensitätsbildern  $I_A$  und  $I_B$ . Der Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{r,c}$  ist selbst eine vierdimensionale Funktion, da er neben der Verschiebung  $r, c$  auch von der Position  $i, j$  der zur Berechnung verwendeten Bildausschnitte abhängt. Die Position des maximalen Kreuzkorrelationskoeffizienten

$$R_{0,0} = \max(R_{r,c}) \quad (3.5)$$

stellt dabei die gesuchte Verschiebung auf integer-Level der Bildausschnitte dar. Wie sich mittels zusätzlicher Berücksichtigung der lokalen Nachbarschaft in der Kreuzkorrelationsfunktion die Verschiebung mit Sub-Pixel-Genauigkeit bestimmen lässt, wird in Abschnitt 3.3 genauer beschrieben.

Bei der Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion wird standardmäßig eine geeignete Normierung verwendet. Diese sorgt dafür, dass der Kreuzkorrelationskoeffizient unabhängig vom Intensitätsniveau und der Größe des verwendeten Bildausschnitts wird. Zusätzlich werden die Intensitäten der Bildausschnitte um ihre Mittelwerte bereinigt, damit das Hintergrundrauschen nicht wesentlich zum Korrelationsergebnis beiträgt. Somit wird anstatt von Gl. (3.4) meist folgende Formel für den normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten verwendet:

$$R_{r,c} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_A[i, j] - \bar{I}_A) \cdot (I_B[i + r, j + c] - \bar{I}_B[r, c])}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_A[i, j] - \bar{I}_A)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_B[i + r, j + c] - \bar{I}_B[r, c])^2}}. \quad (3.6)$$

Dabei bezeichnet  $\bar{I}$  die mittlere Intensität, die im Falle von Bildausschnitt  $A$  nur einmal und für Bildausschnitt  $B$  für jede verwendete Verschiebung neu berechnet werden muss. In Pust (2000) wird berichtet, dass diese Normierung bei der diskreten Berechnung des Kreuzkorrelationskoeffizienten zu einer deutlichen Reduzierung von Ausreißern führt.

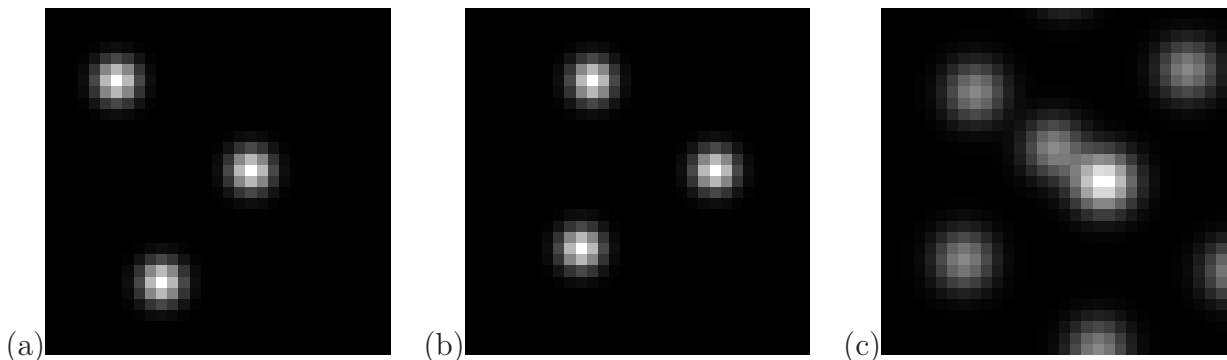


Abbildung 3.5: Veranschaulichung der robusten Filterwirkung der Kreuzkorrelation: (a) Auswertefenster des Bildes A, (b) Auswertefenster des Bildes B, (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion.

Die Kreuzkorrelation stellt durch die Verwendung von kleinen Bildausschnitten, so genannten Auswertefenstern, eine statistische Methode zur Bestimmung der Verschiebung dar. Wie in Abb. 3.4 zu sehen ist, werden nicht die einzelnen Punkte bzw. Musterelemente verfolgt, sondern es wird die bestmögliche Übereinstimmung des Auswertefensters gesucht. Das Auswertefenster wirkt dabei wie ein räumliches Filter. Allerdings wirkt dieses Filter nicht, wie man vielleicht zunächst intuitiv meinen könnte, wie eine räumliche Mittelung, sondern eher wie eine robuste räumliche Optimierung. Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen, wurde künstlich ein Bildpaar mit drei einzelnen Partikeln generiert. Zwei Partikel bewegen sich in die selbe Richtung, in diesem Fall nach rechts, während das andere Partikel dieser Bewegungsrichtung nicht folgt, sondern sich nach oben bewegt. In Abb. 3.5 ist das generierte Bildpaar und die resultierende Kreuzkorrelationsfunktion grafisch dargestellt.

Tabelle 3.1: Vergleich der mittels Kreuzkorrelation bestimmter Verschiebung des Auswertefensters in Pixel mit der mittleren Verschiebung der einzelnen Partikel.

	Verschiebung in Zeilenrichtung	Verschiebung in Spaltenrichtung
Partikel Nr. 1 <sup>3</sup>	0	5
Partikel Nr. 2 <sup>4</sup>	0	4
Partikel Nr. 3 <sup>5</sup>	-3	0
Mittelwert aller Partikel	-1	3
Mittelwert ohne Partikel Nr. 3	0	4,5
Verschiebung mittels Kreuzkorrelation <sup>6</sup>	-0,03	4,47

Zusätzlich finden sich in Tab. 3.1 die numerischen Werte der Verschiebungen der einzelnen Partikel, der Mittelwert aller sowie der ersten beiden Partikel und zum Vergleich die mittels Kreuzkorrelation bestimmte Verschiebung. Letztere entspricht der Sub-Pixel-Position des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion wie sie in Abb. 3.5 (c) grafisch dargestellt ist. Die Sub-Pixel-Genauigkeit wurde in diesem Fall mittels der in Abschnitt 3.3 besprochenen eindimensionalen Sub-Pixel-Detektoren bestimmt. Es fällt auf, dass der Mittelwert der drei einzelnen Partikelverschiebungen nicht zu dem mittels Kreuzkorrelation bestimmten

---

<sup>3</sup>Der linke obere Partikel in Abb. 3.5 (a) bzw. (b).

<sup>4</sup>Der mittlere Partikel in Abb. 3.5 (a) bzw. (b).

<sup>5</sup>Der linke untere Partikel in Abb. 3.5 (a) bzw. (b).

<sup>6</sup>Entspricht der Sub-Pixel-Position des Maximums in Abb. 3.5 (c).



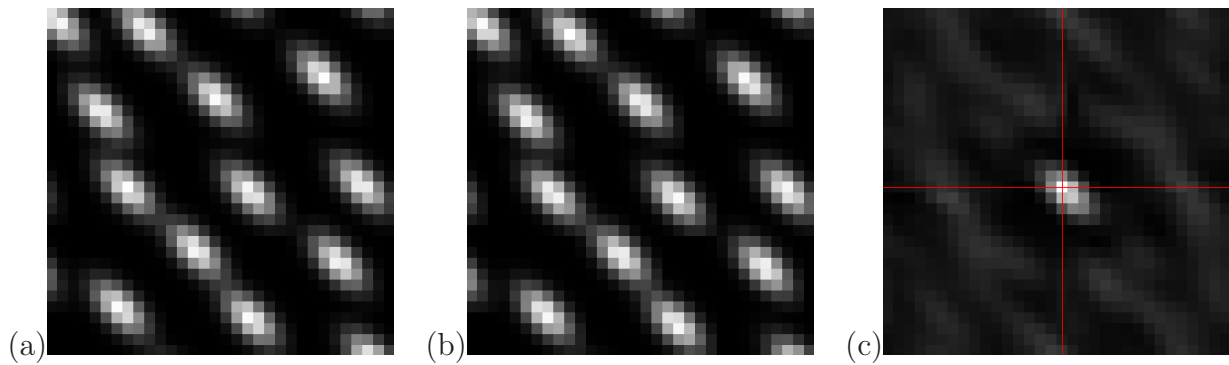


Abbildung 3.6: Formerhaltung der Kreuzkorrelation: (a) Bildausschnitt  $I_A$ , (b) Bildausschnitt  $I_B$ , (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion.

Verschiebungsergebnis passt. Allerdings entspricht das Ergebnis der Kreuzkorrelation fast exakt dem Mittelwert der ersten beiden Partikelverschiebungen. Der Einfluss des Partikels, der nicht der Hauptbewegungsrichtung folgt, ist für das Ergebnis der Kreuzkorrelation sehr gering.

Dieses kleine Beispiel legt daher nahe, dass das Auswertefenster der Kreuzkorrelation nicht wie eine räumliche Mittelung, sondern eher wie eine robuste optimierende räumliche Filterung verstanden werden kann. Daher ist es unverständlich, warum in der PIV-Standardliteratur, z.B. in Willert und Gharib (1991) und Raffel u. a. (2007), angegeben wird, das Auswertefenster bewirke eine räumliche Mittelung.

Allerdings kann mit der Methode der Kreuzkorrelation nur die Verschiebung erster Ordnung, also die lineare Verschiebung bestimmt werden. Liegt eine gekrümmte Trajektorie oder eine beschleunigte Bewegung der Partikel vor, so muss, falls möglich, die Zeitdifferenz zwischen den beiden Bildaufnahmen verringert werden, um die Verschiebung sinnvoll registrieren zu können.

Die Verschiebungsmessung von zufälligen Punktemustern mittels Kreuzkorrelation erfolgt unter der Annahme, dass sich die Punkte innerhalb eines Auswertefensters näherungsweise gleichmäßig bewegen (siehe Raffel u. a. (2007)). Diese Annahme ist allerdings in der Praxis nie exakt erfüllt. Liegen Verschiebungsgradienten innerhalb eines Auswertefensters vor, so führt dies zu einer Aufweitung des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion senkrecht zum Hauptgradienten. Insbesondere in PIV-Anwendungen der Strömungstechnik sind gerade die Fälle interessant, in denen Gradienten des zu untersuchenden Geschwindigkeitsvektorfeldes vorliegen. Daher wird meist versucht möglichst kleine Auswertefenster zu benutzen, um das Aufweiten bzw. Verschmieren des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion durch die vorliegenden Gradienten zu minimieren. Dies führt gleichzeitig zu einer Erhöhung der räumlichen Auflösung, die in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik umgekehrt proportional

zur Auswertefenstergröße ist.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Kreuzkorrelation ist es, dass dabei die Form des Eingangssignal erhalten bleibt. Damit ist gemeint, dass die Kreuzkorrelation beispielsweise zwischen zwei kreisförmigen Signalen selbst ein kreisförmiges Maximum aufweist. In Abb. 3.6 (a) und (b) findet sich ein Beispiel mit elliptischen Punktemustern. Die in Abb. 3.6 (c) mit Hilfe von Grauwerten dargestellte Korrelationsfunktion wurde mit der Software PIVview (siehe PIVTEC (2008)) ausgewertet. Es lässt sich gut erkennen, dass sowohl die Form als auch der Drehwinkel der ellipsenförmigen Punktemuster nach der Kreuzkorrelation erhalten bleiben.

### 3.2.1 Schnelle Fourier-Transformation

In der optischen korrelationsbasierten Messtechnik muss für jeden Messpunkt jeweils eine Kreuzkorrelation durchgeführt werden. Typischerweise werden  $10^4$  oder mehr Datenpunkte aus einem einzelnen Bildpaar berechnet. Der genaue Wert hängt von der Pixelanzahl der Kamera, der Auswertefensterbreite und der Überlappung der Auswertefenster ab. Führt man sich also vor Augen, dass bei einer direkten Implementierung der Kreuzkorrelation Gl. (3.6) für jeden einzelnen Datenpunkt berechnet werden muss, so wird der enorme numerische Aufwand sofort klar. Wir betrachten daher im Folgenden eine Alternative zur direkten Berechnung der Kreuzkorrelation.

Die Fourier<sup>7</sup> Transformation ist das grundlegende Werkzeug der modernen Bild- und Signalverarbeitung. Sie findet aber auch Anwendung in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik. Denn das Korrelationstheorem besagt, dass die Kreuzkorrelation zweier Funktionen äquivalent ist zu der konjugiert komplexen Multiplikation ihrer jeweiligen Fourier-Transformierten, also gilt:

$$f(t) \circ g(t) = \mathcal{F}^*\{f(t)\} \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = F^*(\omega) \cdot G(\omega). \quad (3.7)$$

Dabei sind  $f(t)$  bzw.  $g(t)$  Signale im Ortsraum,  $F(\omega)$  bzw.  $G(\omega)$  die zugehörigen Fourier-Transformierten im Frequenzraum,  $\circ$  bezeichnet die direkte Kreuzkorrelation im Ortsraum und  $*$  steht für die konjugiert komplexe Zahl. Für diskrete Signale kommt in der Praxis fast ausschließlich die so genannte Schnelle Fourier-Transformation, im Englischen als *Fast Fourier Transform* (FFT) bezeichnet, zum Einsatz. Dabei handelt es sich um eine numerisch sehr effiziente Implementierung, die die zur Berechnung notwendigen Operationen von der Ordnung  $N^2$  auf die Ordnung  $N \log_2 N$  reduziert (siehe Brigham (1974)). Die Kreuzkorrelation, wie sie in Gl. (3.4) bzw. Gl. (3.6) dargestellt ist, lässt sich also vereinfacht berechnen, in dem man die Fourier-Transformation der Auswertefenster berechnet, diese dann konjugiert

---

<sup>7</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier: Geboren am 21. März 1768 in Auxerre, gestorben am 16. Mai 1830 in Paris, französischer Mathematiker und Physiker, auf den u.a. die Fourier-Transformation, die Fourierreihe und die Fourieroptik zurückgehen.

komplex multipliziert und darauf dann die inverse Fourier-Transformation anwendet. Da es sich bei den Auswertefenstern um zweidimensionale Signale handelt, reduzieren sich die notwendigen Operationen in diesem Fall sogar von der Ordnung  $N^4$  auf die Ordnung  $N^2 \log_2 N$  (siehe Raffel u. a. (2007)).

Die Implementierung der Kreuzkorrelation mittels FFT führt zu einigen Besonderheiten, die hier im Folgenden kurz beschrieben werden.

- **Wertebereich der Signale:** Die Fourier-Transformation und damit auch das Korrelationstheorem sind für einen unendlichen Wertebereich definiert. Es wird aber in der Praxis nur ein endlicher Bereich, in unserem Fall die Auswertefenstergröße, verwendet. Darin steckt indirekt die Annahme, dass sich das Signal außerhalb des verwendeten Bereichs periodisch fortsetzen lässt.
- **Eindeutigkeitsbereich:** Die Kreuzkorrelationsfunktion, die man mittels FFT basierter Algorithmen unter der Annahme periodischer Eingangsdaten erhält, ist selbst periodisch. Dies wiederum bedeutet, dass nur Signale bestimmt werden können, die kleiner als die halbe Auswertefenstergröße sind. Anderenfalls wird das Abtasttheorem verletzt und das Signal erscheint auf der gegenüberliegenden Seite wieder in der Kreuzkorrelationsfunktion. Für die Praxis empfiehlt es sich nach Keane und Adrian (1990), dass die Verschiebung nur ein Viertel der Auswertefenstergröße beträgt.
- **Größe der Auswertefenster:** Die FFT Implementierung nutzt Symmetrieeigenschaften zwischen geraden und ungeraden Koeffizienten der diskreten Fourier-Transformation (siehe Brigham (1974)). Dies führt dazu, dass die Größe des Eingangssignals auf Zweierpotenzen beschränkt ist; in unserem Fall also meist auf  $16 \times 16$  oder  $32 \times 32$  Pixel große Auswertefenster.

Für die Datenauswertung in der PIV-Messtechnik ist die Implementierung der Kreuzkorrelation mittels FFT so stark verwurzelt, dass, so berichtet Pust (2000), in vielen Quellen bereits davon gesprochen wird, die Daten seien mittels FFT ausgewertet worden.

### 3.2.2 Iterativer Korrelationsansatz unter Nutzung der Bilddeformation

Aufgrund des beschränkten Eindeutigkeitsbereichs der FFT basierten Implementierung der Kreuzkorrelation könnte man bestrebt sein, die Auswertefenster möglichst groß zu wählen, um eine möglichst große Bandbreite an Verschiebungen messen zu können. Auf der anderen Seite würde eine Wahl von möglichst kleinen Auswertefenstern die räumliche Auflösung erhöhen. Der Wunsch, Verschiebungsfelder mit einer hohen Dynamik gleichzeitig mit einer möglichst hohen räumlichen Auflösung zu messen, führt zu einem iterativen Ansatz, der unterschiedliche Auswertefenstergrößen verwendet.

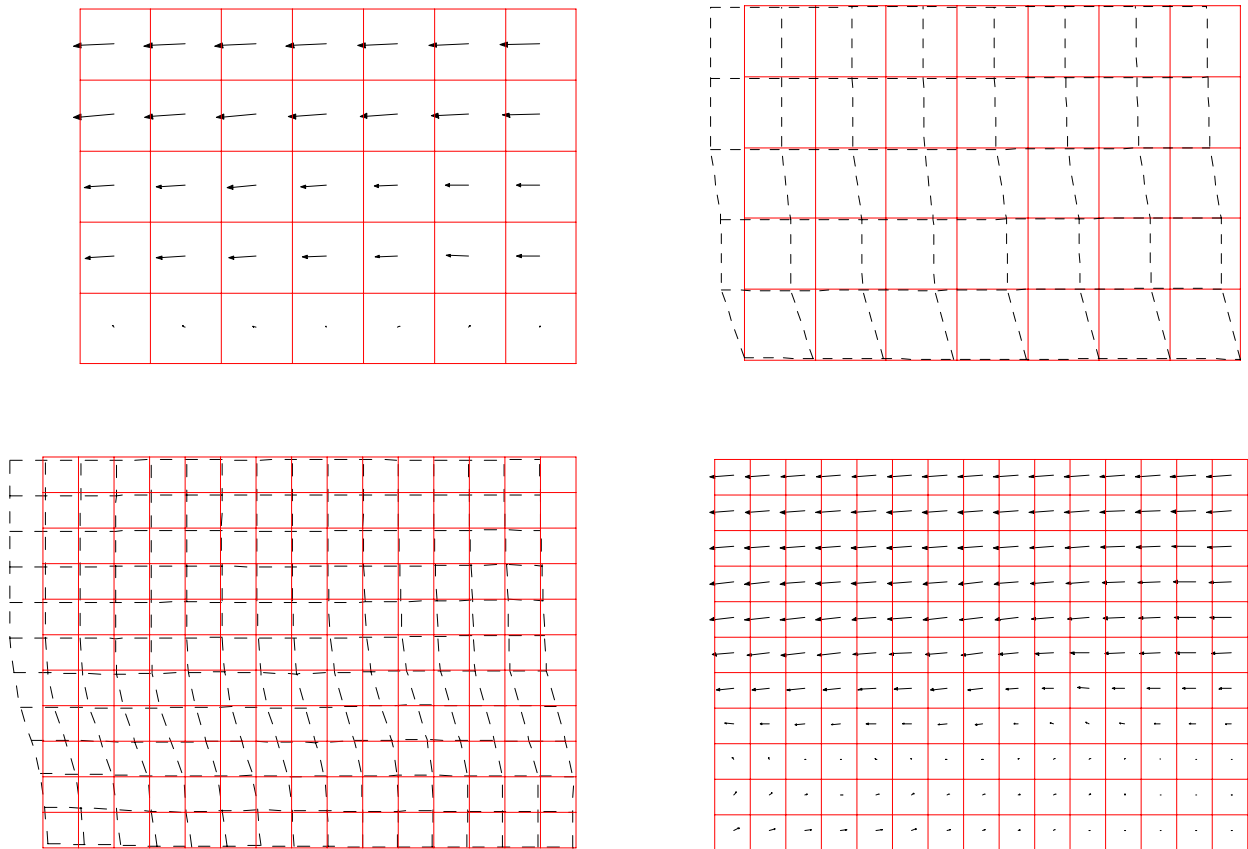


Abbildung 3.7: Iterative Korrelationsmethode mit Bilddeformation aus Scarano (2002).

Zunächst wird das Bildpaar mit einem groben Gitternetz überzogen und mittels der so entstandenen großen Auswertefenster ausgewertet (siehe Abb. 3.7 oben links). Mit dem so gewonnenen Verschiebungsvektorfeld wird das Bild deformiert und anschließend das Gitternetz verfeinert (siehe Abb. 3.7 oben rechts und unten links). Die Auswertung auf dem verzerrten verfeinerten Gitternetz liefert nun noch eine Verbesserung, die auf das bereits grob geschätzte Verschiebungsfeld addiert wird, sowie die gewünschte höhere räumliche Auflösung (siehe Abb. 3.7 unten rechts). Dieses Prinzip kann solange angewendet werden, bis eine zu Beginn festgelegte Größe des Startauswertefensters auf die gewünschte Größe des Zielauswertefensters durch die Iterationen reduziert wurde.

Die Größe des Startauswertefensters der Iteration ist durch die gewünschte Länge der maximal detektierbaren Verschiebung vorgegeben, die Größe des Zielauswertefensters durch die gewünschte und maximal erreichbare räumliche Auflösung des Ergebnisses der Auswertung. Da sich bei einer sehr geringen Verschiebung zwischen einem Bildpaar aufgrund der höheren Überlappung der Bildinformation auch eine höhere Genauigkeit ergibt, ermöglicht diese Korrelationsmethode zusätzlich eine hohe Genauigkeit für die Verschiebungsmessung. Die

Bilddeformation in jedem Iterationsschritt benötigt die Interpolation in den Intensitätsbildern an Sub-Pixel-Positionen. Zusätzlich zu der erhöhten Berechnungszeit können an dieser Stelle systematische Fehler durch ungeeignete Interpolationsverfahren entstehen.

Für weitere Details zu dieser iterativen Methode mittels Bilddeformation sei auf den Übersichtsartikel von Scarano (2002) verwiesen.

### 3.2.3 Ensemble-Korrelation

Jedes optische korrelationsbasierte Messverfahren mittels zufälliger Punktemuster beinhaltet die folgenden drei Schritte

- **Schritt (1):** Aufnahme eines Bildpaares des zufälligen Punktemusters,
- **Schritt (2):** Kreuzkorrelation des Bildpaares und
- **Schritt (3):** Sub-Pixel genaue Suche des Maximums in der Kreuzkorrelationsfunktion.

Für stationäre oder periodische Vorgänge ist es möglich mehrere Bildpaare von jeweils unterschiedlichen zufälligen Punktemustern aufzunehmen, denen aber immer das gleiche Verschiebungsvektorfeld zugrunde liegt. Aufgrund der Eigenschaft der Linearität des Mittelwertoperators kann in diesem Fall nach Meinhart u. a. (2000) eine Mittelbildung nach jedem der drei Schritte erfolgen, ohne dabei die so bestimmte mittlere Verschiebung systematisch zu verzerren. Allerdings ist zu erwarten, dass sich die Qualität der verschiedenen so erzielten Endergebnisse nach der Mittelung durchaus unterscheiden, da die Schritte (2) und (3) nicht-lineare Operationen darstellen.

Die Mittelung der Intensitätsbilder (Mittelbildung nach Schritt (1)) über eine große Anzahl unterschiedlicher Bilder des zufälligen Punktemusters wird z.B. zu einem relativ homogenen mittleren Intensitätsbild und damit zu einem deutlichen Verlust an Dynamik führen. Das aus den gemittelten Intensitätsbildern bestimmte Verschiebungsfeld (falls die Kreuzkorrelation in diesem Fall noch ein sinnvolles Ergebnis zu liefern in der Lage ist) wird von sehr geringer Qualität sein bzw. wird ein sehr geringes und damit ungünstiges Signal-Rausch-Verhältnis (englisch: *Signal-to-Noise Ratio*, SNR) aufweisen. Allerdings führt die Mittelung der Intensitätsbilder nicht zu einer systematischen Verzerrung bei der Bestimmung des Verschiebungsfeldes. In Meinhart u. a. (2000) konnte gezeigt werden, dass die Mittelbildung der  $N$  Kreuzkorrelationsfunktionen

$$\tilde{R}_{r,c} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R[r, c]_k, \quad (3.8)$$

das beste Ergebnis liefert (Mittelbildung nach Schritt (2)).  $\tilde{R}_{r,c}$  bezeichnet dabei die so genannte Ensemble-Korrelationsfunktion, in der dann einmal eine Sub-Pixel genaue Suche des Maximums durchgeführt wird.

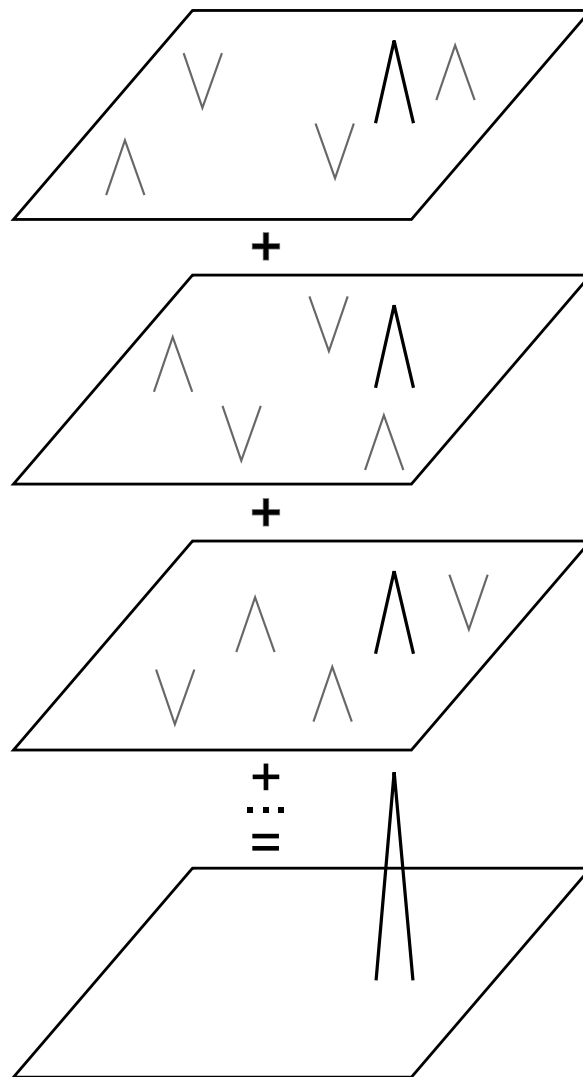


Abbildung 3.8: Veranschaulichung der Ensemble-Korrelation: Durch das Aufsummieren einzelner Kreuzkorrelationsfunktionen wird das wahre Signal verstärkt und das Rauschen unterdrückt.

Die Bezeichnung Ensemble-Korrelation und deren Anwendung für die PIV-Messtechnik wird zum ersten Mal bei Delnoij u. a. (1999) verwendet. Anwenden lässt sich das Verfahren der Ensemble-Korrelation bei hinreichend stationären (zeitliche Mittelbildung) oder periodischen (phasenstarre Mittelbildung) Vorgängen. Die grundlegende Idee der Ensemble-Korrelation ist folgende: Jede einzelne Kreuzkorrelationsfunktion setzt sich aus dem gesuchten wahren Signal und einem zufälligen Rauschanteil zusammen. Bildet man aber wie in Gl. (3.8) beschrieben die Summe über  $N$  Kreuzkorrelationsfunktionen, so addieren sich die Anteile des gesuchten wahren Signals auf, da sie im Falle hinreichend stationärer oder periodischer Vorgänge jeweils

an fast exakt der gleichen Position der Kreuzkorrelationsfunktion auftreten. Gleichzeitig mitteln sich aber die zufälligen Rauschanteile, wie in Abb. 3.8 dargestellt, über eine ausreichend große Anzahl von Kreuzkorrelationsfunktionen heraus (siehe Wereley u. a. (2002)).

Die Ensemble-Korrelation wurde ursprünglich für die Mikro-PIV entwickelt, um das durch die Brownsche<sup>8</sup> Bewegung der Partikel hervorgerufene Rauschen zu unterdrücken. Die Brownsche Bewegung der Partikel führt dazu, dass das Rauschen in der Kreuzkorrelationsfunktion eines einzelnen Bildpaares in Mikro-PIV-Anwendungen in etwa die gleiche Größenordnung besitzen kann wie der wahre Signalanteil. Daher verwundert es nicht, dass sich gemäß einer Mikro-PIV-Auswertung von Delnoij u. a. (1999) für ein mittels einer einzelnen Kreuzkorrelationsfunktion ohne Glättung und Filterung berechnetes Vektorfeld ca. 25 % offensichtlich falsche Verschiebungsvektoren ergeben. Berechnet man das Vektorfeld allerdings mittels einer Ensemble-Korrelation nach Gl. (3.8) aus  $N = 15$  einzelnen Kreuzkorrelationsfunktionen, so sinkt der Anteil offensichtlich falscher Verschiebungsvektoren auf ca. 0,25 % (siehe Delnoij u. a. (1999)). Dies stellt eine Reduzierung des Fehleranteils um den Faktor 100 dar. Eine weitere Reduzierung des Fehleranteils ist prinzipiell möglich, da bei der Ensemble-Korrelation die Anzahl der Terme, die das gewünschte Signal enthalten, linear mit der Anzahl der Ensemble  $N$  ansteigen, ohne dabei den Rauschanteil in gleicher Weise zu erhöhen. Durch die Verwendung der Ensemble-Korrelation lässt sich somit das SNR in der Kreuzkorrelationsfunktion signifikant verbessern.

Das in Abb. 3.9 dargestellte und aus Blumrich (2008c) entnommene mittels Ensemble-Korrelation berechnete Verschiebungsfeld zeigt sehr schön, wie die Qualität und Zuverlässigkeit der Messergebnisse mit steigender Ensemble-Anzahl zunehmen. In Blumrich (2008c) wird auch untersucht, in wie weit sich das SNR und die Sub-Pixel-Messgenauigkeit bei Anwendung der Ensemble-Korrelation verbessern.

Der nächste logische Schritt ist es nun, aufgrund des erhöhten SNR, die Auswertefenster der Kreuzkorrelation zu verkleinern und somit die räumliche Auflösung zu erhöhen. In Westerweel u. a. (2004) wird vorgeschlagen, anstatt eines Fensters mit  $32 \times 32$  Pixel bei  $N = 1$  Bildpaaren einfach zwei einzelne Punkte (d.h. ein Fenster mit  $1 \times 1$  Pixel) bei  $N = 1024$  Bildpaaren miteinander zu korrelieren. Beide Ansätze enthalten in der Theorie den gleichen Informationsgehalt hinsichtlich ausgewerteter Pixel und daher ist in beiden Fällen mit einem ähnlichen Anteil falscher Verschiebungsvektoren zu rechnen, allerdings kann so eine deutlich höhere räumliche Auflösung erreicht werden. Diese Ansätze werden als *two-point ensemble correlation* (Westerweel u. a. (2002)) oder *single-pixel ensemble correlation* (Westerweel u. a. (2004)) bezeichnet.

Eine Kombination der Ensemble-Korrelation und der iterativen Methode mit Bilddeformation ist nicht direkt möglich, da zur Bilddeformation in jedem Iterationsschritt bereits ein

---

<sup>8</sup>Robert Brown: Geboren am 21. Dezember 1773 in Montrose, gestorben am 10. Juni 1858 in London, schottischer Botaniker.



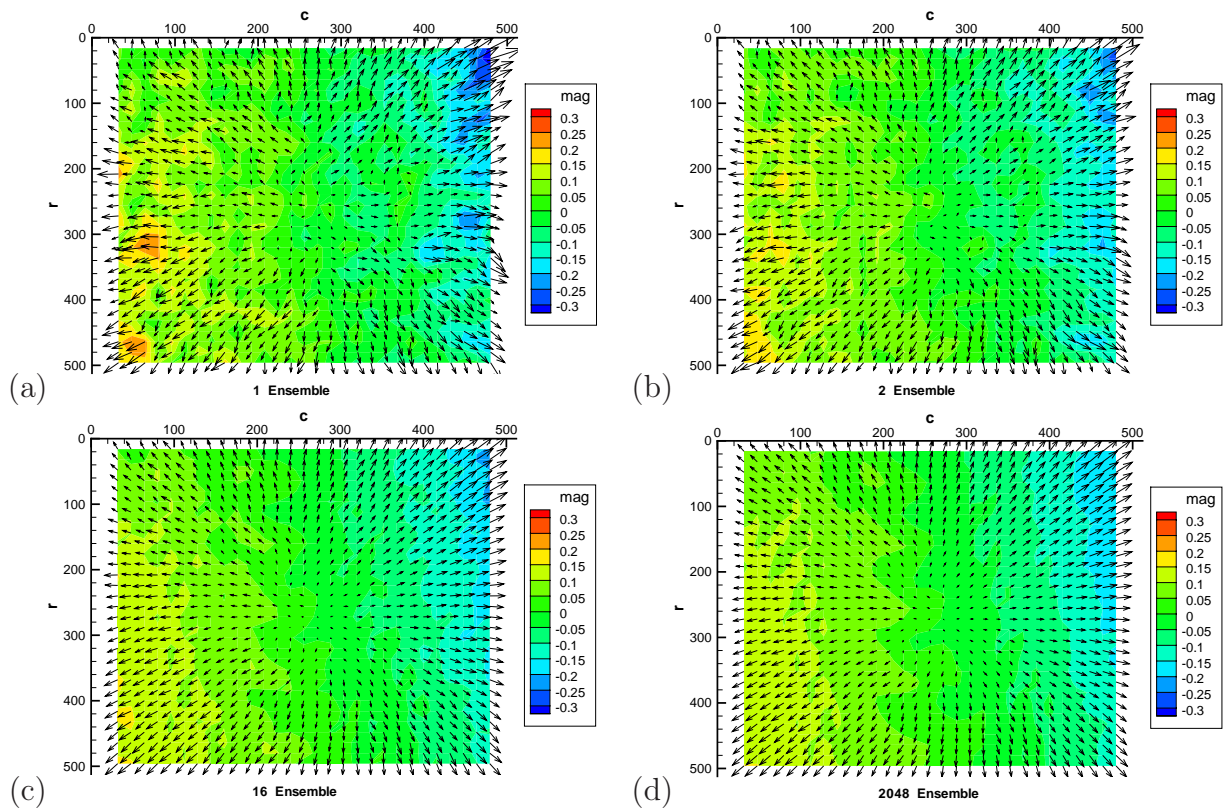


Abbildung 3.9: Um den Mittelwert bereinigtes und mittels Ensemble-Korrelation berechnetes Verschiebungsfeld aus Blumrich (2008c): (a) 1 Ensemble, (b) 2 Ensemble, (c) 16 Ensemble, (d) 2048 Ensemble.

Verschiebungsfeld passender räumlicher Auflösung aus der vorhergegangenen Iteration vorliegen muss.

### 3.2.4 Alternative Methoden

Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit wurde zur Lösung des Korrespondenzproblems ausschließlich die Kreuzkorrelation verwendet. Alternative Verfahren sollen daher hier nur kurz angesprochen und ihre möglichen Vorteile dargestellt werden.

Verzerrungen und bis zu einem gewissen Grad auch Rotationen in dem zu korrelierenden Bildpaar können durch den Einsatz des in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen iterativen Verfahrens mit Bilddeformation kompensiert werden. Treten aber Maßstabs- oder Helligkeitsunterschiede zwischen den Bildausschnitten auf, so kann kein zuverlässiges Ähnlichkeitsmaß mehr mittels der Kreuzkorrelation erzielt werden. Es bietet sich in diesem Falle an, anstatt der Maximierung des Kreuzkorrelationskoeffizienten eine Transformation anzuwenden, die die



Grauwertdifferenzen zwischen zwei Bildausschnitten nach der MdkQ minimiert. Dies wird als *Least Squares Matching* (LSM) (siehe Förstner (1982)) bezeichnet. Das funktionale Modell dieser Ausgleichung beinhaltet sowohl die Parameter einer geometrischen als auch die einer radiometrischen Transformation. Der Nachteil ist sicherlich der hohe numerische Aufwand, da die Minimierung der Grauwertdifferenzen iterativ erfolgt. Der Vorteil der Bestimmung der Verschiebung mittels LSM gegenüber dem korrelationsbasierten Ansatz liegt darin, dass durch die Ausgleichung zusätzlich noch Angaben zur Genauigkeit und Zuverlässigkeit (siehe Anhang A.1) des Ergebnisses möglich sind.

Eine andere Methode um Punktkorrespondenzen bzw. Verschiebungsvektoren zu erhalten, ist durch den so genannten *optischen Fluss* gegeben. Dieses Verfahren wird zur Bewegungsanalyse in Bildsequenzen angewendet. Der *optische Fluss* ist die sichtbare Bewegung in der Bildebene und erscheint bei der Bestimmung aus zwei aufeinanderfolgenden Bildern als Verschiebungsvektor (siehe Jähne (2005)). Unter der Bedingung, dass die Grauwerte während der Bewegung erhalten bleiben, kann eine Transformation zwischen dem Bildpaar berechnet werden. Quénot u. a. (1998) stellen eine Implementierung des *optischen Flusses* vor und wenden diese in der PIV-Messtechnik an. Ihr Verfahren ist in der Lage, für jeden Pixel einen Verschiebungsvektor zu berechnen, besitzt also eine im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren sehr hohe räumlich Auflösung. Im Rahmen der PIV-Challenge<sup>9</sup> wurde festgestellt, dass sich PIV-Algorithmen auf Basis des *optischen Flusses* sehr gut eignen, um Regionen mit großen Geschwindigkeitsgradienten auszuwerten (siehe Stanislas u. a. (2005)).

Der Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{r,c}$  ist eine vierdimensionale Funktion (siehe Abschnitt 3.2) und stellt somit eine aufwendige Rechenoperation dar. Für viele Anwendungen wird die komplette Kreuzkorrelationsfunktion nicht benötigt, sondern das Interesse beschränkt sich auf die Sub-Pixel genaue Lage des Maximums. Das Verfahren zur iterativen direkten Berechnung der Sub-Pixel-Position der Kreuzkorrelationsfunktion ist ausführlich in Bruck u. a. (1989) und Jähne (2005) beschrieben und wird meist als Newton-Raphson Methode bezeichnet. Das zu Grunde liegende Prinzip besteht darin, den Kreuzkorrelationskoeffizienten um das Maximum in eine Taylor<sup>10</sup>-Reihe zweiter Ordnung zu entwickeln. Wir nehmen an, dass die zweiten Ableitungen in der Nähe des Maximums konstant sind und führen die Iteration durch, solange die ersten Ableitungen nicht verschwinden. Ausgehend von einer Näherung ist es damit möglich, die Position des Maximums und damit die gewünschte Verschiebung mittels der ersten und zweiten Ableitungen zu berechnen. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass er die ansonsten notwendigen Einzelschritte, Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion und Finden des Sub-Pixel genauen Maximums, in einem Schritt zusammenfasst. Daher wird die Newton-Raphson Methode auch in der Untersuchung von Bing u. a. (2006) mit anderen Sub-Pixel-Detektoren verglichen.

<sup>9</sup><http://www.pivchallenge.org/>

<sup>10</sup>Brook Taylor: Geboren am 18. August 1685 in Edmonton, gestorben am 29. Dezember 1731 in London, britischer Mathematiker auf den u.a. die Taylorreihe zurück geht.

### 3.3 Sub-Pixel-Detektoren

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, kann die Suche des Maximums der Kreuzkorrelation Sub-Pixel genau erfolgen. Die Bilddaten selbst liegen in diskretisierter Form vor und führen somit ebenfalls zu einer diskreten Kreuzkorrelationsfunktion. Der höchste Wert dieser Funktion legt also die gesuchte Verschiebung bereits mit einer Unsicherheit von  $\pm 1/2$  Pixel fest. Bei der Kreuzkorrelationsfunktion handelt es sich aber um ein statistisches Maß für eine bestmögliche Übereinstimmung (siehe Raffel u. a. (2007)) und daher enthalten auch die anderen Werte der Kreuzkorrelationsfunktion auswertbare Informationen. Die hohe Sub-Pixel-Messgenauigkeit in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik wird also mittels Sub-Pixel-Detektoren erreicht (siehe Bing u. a. (2006)). Gemäß Raffel u. a. (2007) kann man im Falle von  $32 \times 32$  Pixel großer Auswertefenster eines 8 bit Bildes mit einer Sub-Pixel-Messgenauigkeit in der Größenordnung von 0,1 bis 0,05 Pixel rechnen.

Die wohl am weitesten verbreitete Methode zur Sub-Pixel-Detektion besteht darin, durch die gemessenen Werte der Kreuzkorrelation eine Gauß-Funktion zu legen. Der Grund dafür, der bereits in Abschnitt 2.1 angedeutet wurde, ist Folgender: Ein Lichtpunkt erscheint durch die kreisförmige Linse bzw. Blende des optischen Systems auf der Bildebene als Airy-Funktion. Diese kann sehr gut durch eine Gauß-Funktion approximiert werden. Die Kreuzkorrelation zwischen zwei Gauß-Funktionen ist selbst wieder eine Gauß-Funktion (Formerhaltung der Kreuzkorrelation, siehe Abschnitt 3.2).

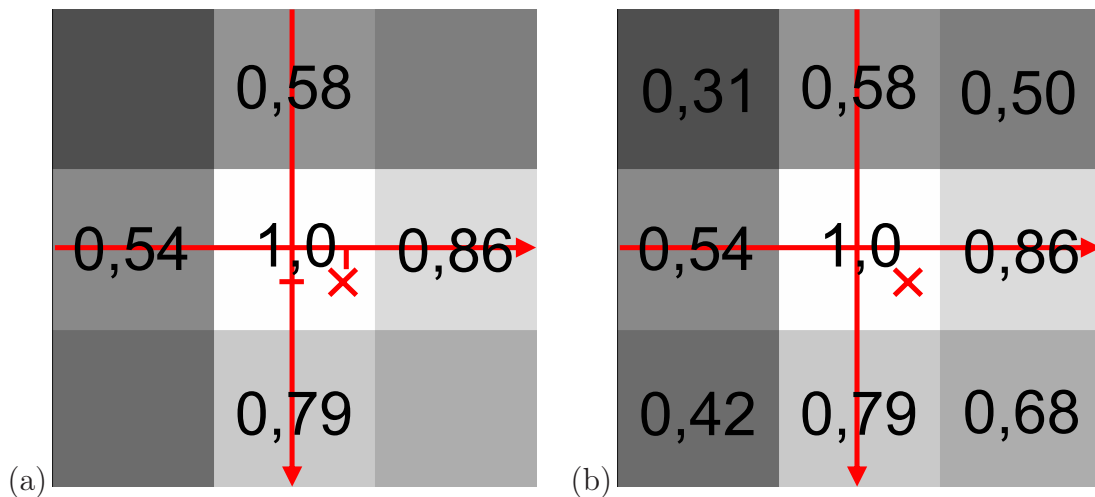


Abbildung 3.10: Darstellung der Sub-Pixel genauen Suche der Maximums in der Kreuzkorrelationsfunktion unter Nutzung von: (a) eindimensionaler Algorithmen bzw. einer 4er-Nachbarschaft, (b) zweidimensionaler Algorithmen bzw. einer 8er-Nachbarschaft.

Es existieren einige Arbeiten, die verschiedene Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion miteinander vergleichen (siehe Fisher und Naidu (1996), Davis und Freeman (1997), Trucco u. a. (1998) und Bing u. a. (2006)), und andere, die die Auswirkungen von systematischen Fehlern während des Prozesses der Kreuzkorrelation und der Sub-Pixel-Detektion untersuchen (siehe Schreier u. a. (2000) und Chen und Katz (2005)).

Für diese Arbeit soll im Weiteren zwischen eindimensionalen und zweidimensionalen Sub-Pixel-Detektoren unterschieden werden. Eindimensionale Algorithmen zerlegen das eigentlich zweidimensionale Problem in zwei eindimensionale Teilprobleme, indem jeweils nur der maximale Wert der Kreuzkorrelationsfunktion und seine horizontalen bzw. vertikalen Nachbarwerte berücksichtigt werden. Zweidimensionale Algorithmen berücksichtigen alle Werte der Kreuzkorrelationsfunktion innerhalb eines vorgegebenen Bereichs um das Maximum. Werden nur die direkten Nachbarn berücksichtigt, wird im eindimensionalen Fall eine Vierer- und im zweidimensionalen Fall eine Achter-Nachbarschaft ausgewertet. Dies ist in Abb. 3.10 grafisch dargestellt.

### 3.3.1 Eindimensionale Algorithmen

#### 3.3.1.1 Drei-Punkt-Schätzer

Eindimensionale Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion, die neben dem maximalen Wert der Kreuzkorrelationsfunktion nur dessen direkte Nachbarn in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung nutzen, werden als drei-Punkt-Schätzer, im Englischen *three-point estimators*, bezeichnet. Diese Bezeichnung wurde vermutlich von Willert und Gharib (1991) das erste Mal benutzt. Drei-Punkt-Schätzer sind schnell und effektiv zu implementieren, aber nur für eine beschränkte Breite des Maximums der Korrelationsfunktion sinnvoll geeignet.

Zunächst wird der maximale Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{0,0}$  (siehe Gl. (3.5) auf Seite 55) und seine vier direkten Nachbarwerte  $R_{-1,0}$ ,  $R_{1,0}$ ,  $R_{0,-1}$  und  $R_{0,1}$  gesucht. Das Prinzip der Lösung des drei-Punkt-Schätzers ist in Abb. 3.11 grafisch dargestellt.

Die wohl einfachste Möglichkeit zur Berechnung der Position des Maximums ist durch den Schwerpunktoperator gegeben. Er wurde von Alexander und Ng (1991) eingesetzt, um die Position von projizierten Linien Sub-Pixel genau zu bestimmen. Wird der Schwerpunktoperator in Form eines drei-Punkt-Schätzers formuliert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta_r &= \frac{R_{1,0} - R_{-1,0}}{R_{-1,0} + R_{0,0} + R_{1,0}}, \\ \delta_c &= \frac{R_{0,1} - R_{0,-1}}{R_{0,-1} + R_{0,0} + R_{0,1}}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

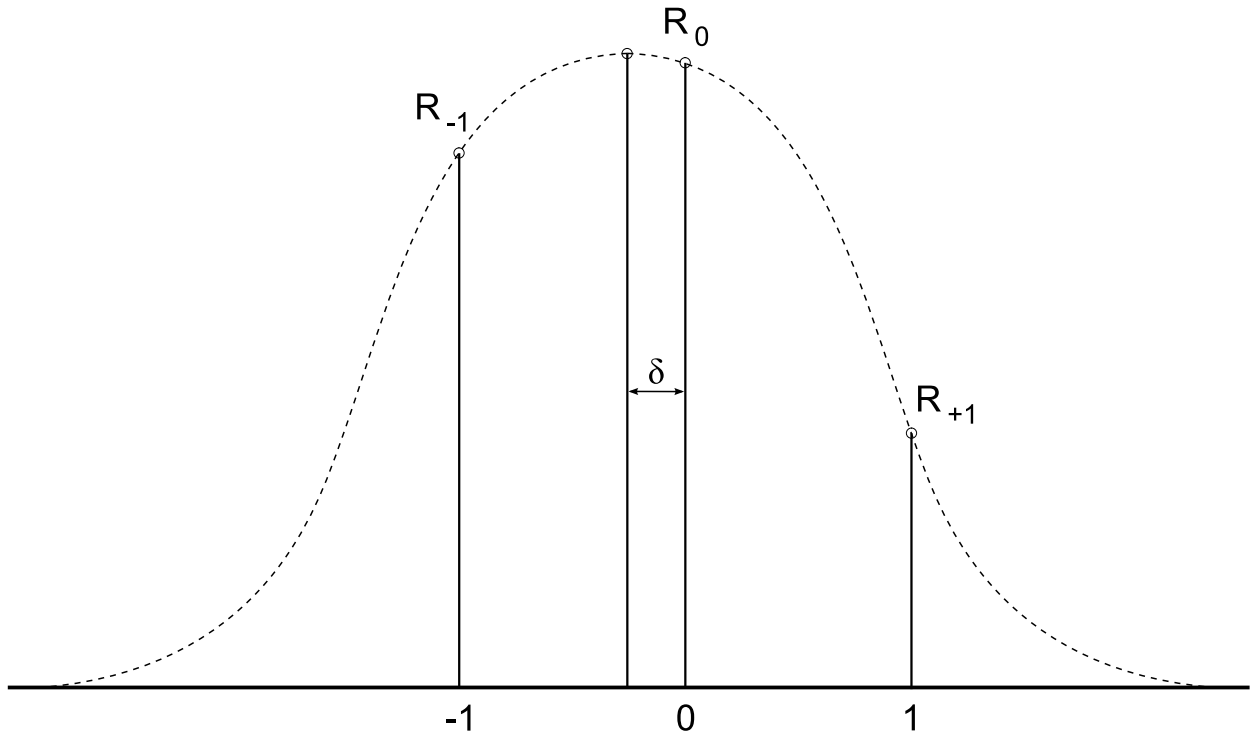


Abbildung 3.11: Prinzip des drei-Punkt-Schätzers zur Sub-Pixel genauen Bestimmung der Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine analytische Funktion durch die gemessenen Kreuzkorrelationskoeffizienten zu schätzen. Im Falle einer Parabel der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.10)$$

müssen drei Unbekannte mittels der drei Kreuzkorrelationskoeffizienten bestimmt werden. Es liegt also keine Überbestimmung vor; die Lösung der Unbekannten kann direkt, also ohne Ausgleichung, mittels

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{R_{-1,0} - R_{1,0}}{2R_{-1,0} - 4R_{0,0} + 2R_{1,0}}, \\ \delta_c &= \frac{R_{0,-1} - R_{0,1}}{2R_{0,-1} - 4R_{0,0} + 2R_{0,1}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

erfolgen (siehe Willert und Gharib (1991), Fisher und Naidu (1996) und Trucco u. a. (1998)).

Wie bereits erwähnt ist mit einem Maximum der Kreuzkorrelation in der Form einer Gauß-Funktion zu rechnen. Daher ist nach Raffel u. a. (2007) der drei-Punkt-Schätzer auf Basis

der eindimensionalen Gauß-Funktion der am häufigsten verwendete Sub-Pixel-Detektor. Für eine Gauß-Funktion des Typs

$$f(x) = a \exp \left[ -\frac{2(x-b)^2}{c^2} \right] \quad (3.12)$$

müssen wiederum drei unbekannte Parameter mittels drei gemessener Werte bestimmt werden. Die ebenfalls direkte Lösung ergibt sich zu (siehe Willert und Gharib (1991) und Fisher und Naidu (1996)):

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\ln R_{-1,0} - \ln R_{1,0}}{2 \ln R_{-1,0} - 4 \ln R_{0,0} + 2 \ln R_{1,0}}, \\ \delta_c &= \frac{\ln R_{0,-1} - \ln R_{0,1}}{2 \ln R_{0,-1} - 4 \ln R_{0,0} + 2 \ln R_{0,1}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die gesuchte Sub-Pixel-Position des Maximums in der zweidimensionalen Kreuzkorrelationsfunktion setzt sich schließlich aus der Position des maximalen Kreuzkorrelationskoeffizienten auf integer-Level und der eindimensionalen Sub-Pixel-Verschiebung  $\delta_r$  bzw.  $\delta_c$  entlang der Zeilen- bzw. Spaltenrichtung zusammen.

### 3.3.1.2 Blais-Rioux-Methode

Die Sub-Pixel-Detektoren, die von Blais und Rioux (1986) entwickelt wurden, waren ursprünglich für Echtzeit Anwendungen mit preiswerten Laser Triangulationssensoren gedacht. Ihr Ansatz basiert auf Filtern mit endlicher Impulsantwort (*Finite Impulse Response filter*, FIR Filter), da sich diese sehr einfach in elektronischen Schaltungen realisieren lassen. Die Blais-Rioux-Operatoren wenden zunächst einen Ableitungsoperator mittels Faltung auf das Signal an; sie können also allgemein als gradientenbasierte Methode verstanden werden. Die von Blais und Rioux (1986) ursprünglich vorgestellten Filtermasken

$$\begin{aligned} BR_r^{(4)}(s) &= -R_{-2,0} - R_{-1,0} + R_{1,0} + R_{2,0}, \\ BR_c^{(4)}(s) &= -R_{0,-2} - R_{0,-1} + R_{0,1} + R_{0,2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

und

$$\begin{aligned} BR_r^{(8)}(s) &= -R_{-4,0} - R_{-3,0} - R_{-2,0} - R_{-1,0} + R_{1,0} + R_{2,0} + R_{3,0} + R_{4,0}, \\ BR_c^{(8)}(s) &= -R_{0,-4} - R_{0,-3} - R_{0,-2} - R_{0,-1} + R_{0,1} + R_{0,2} + R_{0,3} + R_{0,4} \end{aligned} \quad (3.15)$$

werden als Blais-Rioux-Operatoren vierter bzw. achter Ordnung<sup>11</sup> bezeichnet. Beide Filtermasken wirken als Bandpass, sie Glätten das Signal zusätzlich zu der Ableitung. Dadurch

<sup>11</sup>Teilweise wird in der Literatur zur Unterscheidung auch die Breite der Filtermasken, hier fünf und neun, verwendet

sind sie sehr gut für die Auswertung verrauschter Signale geeignet (siehe Blais und Rioux (1986) und Trucco u. a. (1998)). Die Stärke der Glättung kann über die Breite der Filtermaske gesteuert werden. Daher stellen auch

$$\begin{aligned} BR_r^{(2)}(s) &= -R_{-1,0} + R_{1,0}, \\ BR_c^{(2)}(s) &= -R_{0,-1} + R_{0,1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

oder

$$\begin{aligned} BR_r^{(6)}(s) &= -R_{-3,0} - R_{-2,0} - R_{-1,0} + R_{1,0} + R_{2,0} + R_{3,0}, \\ BR_c^{(6)}(s) &= -R_{0,-3} - R_{0,-2} - R_{0,-1} + R_{0,1} + R_{0,2} + R_{0,3} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Alternativen dar.

In jedem Fall hat das resultierende Signal  $BR_r(s)$  bzw.  $BR_c(s)$  genau dort eine Nullstelle, an der  $R_{i,0}$  bzw.  $R_{0,i}$  sein Maximum hat. Der Vorteil liegt nun darin, dass die Krümmung an der Stelle des Maximums näherungsweise konstant und somit der Nulldurchgang der Ableitung näherungsweise linear ist. Daher kann die Sub-Pixel-Verschiebung gegenüber der Position des maximalen Kreuzkorrelationskoeffizienten auf integer-Level wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{BR_r(s_0)}{BR_r(s_0) - BR_r(s_0 + 1)}, \\ \delta_c &= \frac{BR_c(s_0)}{BR_c(s_0) - BR_c(s_0 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dabei muss, wie in Abb. 3.12 zu sehen, jeweils  $BR_r(s_0)$ ,  $BR_c(s_0) \geq 0$  und  $BR_r(s_0 + 1)$ ,  $BR_c(s_0 + 1) < 0$  erfüllt sein. Im Vergleich zu den bisher vorgestellten drei-Punkt-Schätzern ist es mit dieser Methode auch möglich, Kreuzkorrelationskoeffizienten, die mehr als ein Pixel vom Maximum entfernt liegen, für die Sub-Pixel-Detektion zu berücksichtigen.

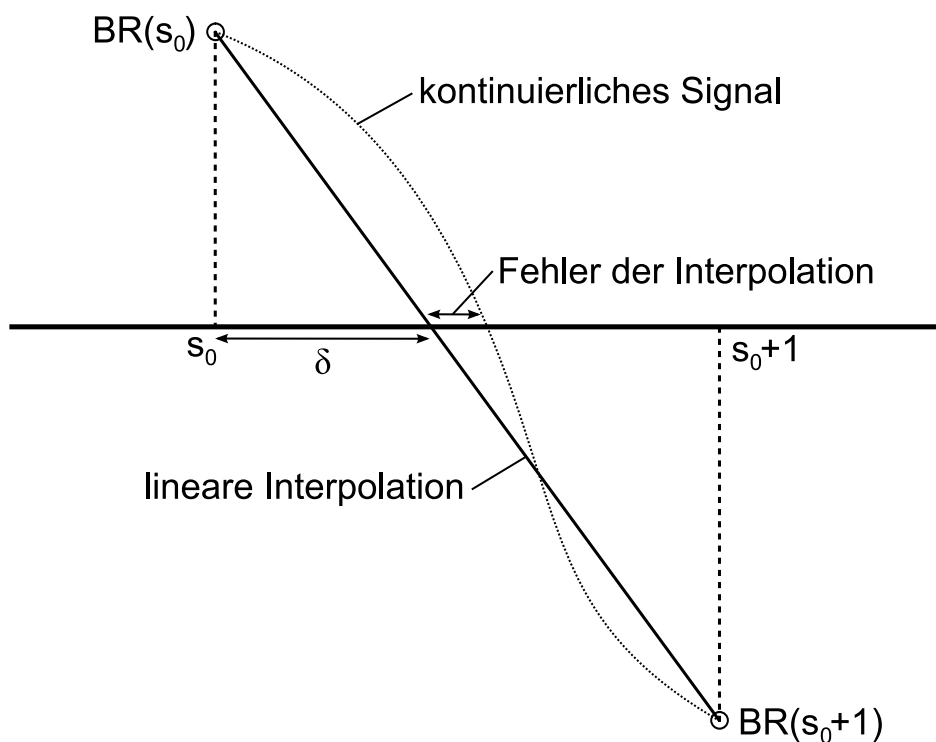


Abbildung 3.12: Prinzip des Blais-Rioux-Operators zur Sub-Pixel genauen Bestimmung der Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion und der dabei entstehende Fehler der linearen Interpolation nach Gühring (2002).

Zur Anwendung der Blais-Rioux-Methode muss keine a priori Annahme über die Form des Maximums in der Kreuzkorrelationsfunktion getroffen werden.

### 3.3.2 Zweidimensionale Algorithmen

Der bereits angesprochene Schwerpunktoperator kann natürlich neben der eindimensionalen Implementierung als drei-Punkt-Schätzer auch als Sub-Pixel-Detektor auf einen beliebigen flächenhaften Ausschnitt der Kreuzkorrelationsfunktion angewendet werden (siehe Alexander und Ng (1991)). Damit ist es auf eine sehr einfache Art möglich, die Position von schmalen und breiten Maxima der Kreuzkorrelationsfunktion, die aufgrund ihrer Ausdehnung für die drei-Punkt-Schätzer ungeeignet sind, sinnvoll zu bestimmen. Diese Methode funktioniert natürlich am besten, wenn möglichst viele Werte, die das eigentliche Signal enthalten, zur Berechnung verwendet werden. Meist wird daher mit einem Schwellwert gearbeitet, der zwischen dem Signal des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion und dem Hintergrundrauschen unterscheiden soll.

Ein anderer Ansatz zur Sub-Pixel-Detektion basiert auf der aus der Signalverarbeitung bekannten sinc-Funktion. Diese dient als idealer Interpolator, da sie es erlaubt, ein kontinuierliches bandlimitiertes Signal mittels diskreter Abtastwerte zu rekonstruieren. Es finden sich auch die Bezeichnungen Whittaker<sup>12</sup>-Rekonstruktion (siehe Raffel u. a. (2007)), Kardinalreihe (siehe Whittaker (1915)) und Whittaker-Shannon Interpolationsformel. Diese Methode ist sehr allgemein und es werden keine Annahmen über die Form des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion benötigt. Sie lässt sich sowohl als eindimensionaler als auch als zweidimensionaler Sub-Pixel-Detektor implementieren. Allerdings wird in Raffel u. a. (2007) angeführt, es würde reichen, die Interpolation jeweils eindimensional in Zeilen- und Spaltenrichtung durch das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion durchzuführen. Die Anwendung dieses idealen Interpolators zur Sub-Pixel-Detektion in der PIV-Messtechnik geht auf Roesgen (2003) zurück. In Over (2008) werden B-Splines erfolgreich zur Sub-Pixel genauen Interpolations des Maximums der Kreuzkorrelation eingesetzt.

Die Schätzung der Parameter einer zweidimensionalen Gauß-Funktion wurde von Condon (1997) erstmals für Anwendungen in der Astronomie vorgestellt. In Ronneberger u. a. (1998) wird ein iterativer nichtlinearer Ansatz auf Basis des Levenberg-Marquardt Algorithmus vorgestellt, der die Parameter einer allgemeinen Gauß-Funktion mittels eines quadratischen Ausschnitts aus der Kreuzkorrelationsfunktion schätzt. Dieser Ansatz ist in der Lage, das Seitenverhältnis und den Drehwinkel von Ellipsen zu detektieren, und eignet sich daher insbesondere für nicht radialsymmetrische Korrelationsmaxima. Für den Fall, dass nur genau  $3 \times 3$  Werte der Kreuzkorrelationsfunktion zur Schätzung der sechs Parameter der allgemeinen zweidimensionalen Gauß-Funktion verwendet werden, bietet sich die in Nobach und Honkanen (2005) aufgezeigte explizite Lösung dieses Problems nach der MdkQ an.

---

<sup>12</sup>Edmund Taylor Whittaker: Geboren am 24. Oktober 1873 in Southport, gestorben am 24. März 1956 in Edinburgh, britischer Mathematiker und Astronom.



## 4 Weiterentwicklungen

Dieses Kapitel behandelt sämtliche im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Weiterentwicklungen für die optische korrelationsbasierte Messtechnik. Teilweise sind die vorgestellten Ergebnisse und dargestellten Abbildungen bereits bei den Arbeiten für das Manuskript Blumrich (2008b) entstanden. Durch die Weiterentwicklung der Sub-Pixel-Detektoren kann die Genauigkeit und die Robustheit und durch die Anwendung der Single-Pixel-Ensemble-Korrelation die räumliche Auflösung der optischen korrelationsbasierten Messtechnik deutlich verbessert werden.

Zunächst wird ein allgemeiner Ansatz zur eindimensionalen Sub-Pixel-Detektion beschrieben (Abschnitt 4.1) und dieser dann im Abschnitt 4.2 auf das Zweidimensionale übertragen. Danach folgt eine analytische Beschreibung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion (Abschnitt 4.3), die durch eine Simulation verifiziert wird. Zuletzt wird in Abschnitt 4.4 die Single-Pixel-Ensemble-Korrelation behandelt.

### 4.1 Allgemeine eindimensionale lineare Gaußsche Regression

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (englisch: *Probability Density Function*, PDF) der Normal- oder Gauß-Verteilung, oft auch als Gauß-Funktion, Gauß-Kurve oder Glockenkurve bezeichnet,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

ist durch die beiden Parameter Standardabweichung  $\sigma$  und Erwartungswert  $\mu$  definiert. Die für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen geltende Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.2)$$

lässt sich nicht anwenden, wenn eine Gauß-Funktion durch die gemessenen Kreuzkorrelationskoeffizienten geschätzt werden soll. Wir verwenden daher die durch drei Parameter charakterisierte Funktion (siehe Curless (1997))

$$G(x) = A \exp \left[ -2 \left( \frac{x - x_c}{\omega} \right)^2 \right], \quad (4.3)$$

die einer Gauß-Funktion mit zusätzlicher Skalierung entspricht.

Durch Anwendung des natürlichen Logarithmus auf Gl. (4.3) erhält man schließlich eine quadratische Funktion.

$$\begin{aligned} \ln\{G(x)\} &= \ln A - 2 \left( \frac{x - x_c}{\omega} \right)^2 \\ &= -\frac{2}{\omega^2} [x^2 - 2xx_c + x_c^2] + \ln A \\ &= -\frac{2}{\omega^2}x^2 + \frac{4x_c}{\omega^2}x + \left( \ln A - \frac{2x_c^2}{\omega^2} \right) \\ &=: a_1x^2 + a_2x + a_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Jetzt können wir die Sub-Pixel genaue Position  $x_c$  des Maximums der Gauß-Funktion finden, indem wir die quadratische Funktion aus Gl. (4.4) in der Scheitelform

$$\ln\{G(x)\} = a_1 \left( x + \frac{a_2}{2a_1} \right)^2 + a_3 \quad (4.5)$$

darstellen und daraus die Koordinaten des Scheitelpunktes

$$S \left( -\frac{a_2}{2a_1}, a_3 \right) \quad (4.6)$$

bzw. die Sub-Pixel-Position des Maximums

$$x_c = -\frac{a_2}{2a_1} \quad (4.7)$$

direkt ablesen können.

Für  $k = 2n + 1$  entlang einer Zeile bzw. Spalte gemessenen Kreuzkorrelationskoeffizienten  $\{R_{-n}, \dots, R_{-1}, R_0, R_1, \dots, R_n\}$  an den diskreten Pixel Positionen  $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$  können wir Gl. (4.4) mittels der MdkQ wie folgt lösen:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{1}, \quad (4.8)$$

wobei

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \ln R_{-n} \\ \vdots \\ \ln R_{-1} \\ \ln R_0 \\ \ln R_1 \\ \vdots \\ \ln R_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} n^2 & -n & 1 \\ (n-1)^2 & -(n-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^2 & n-1 & 1 \\ n^2 & n & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Im Falle von  $k = 3$  können wir eine eindeutige Lösung für Gl. 4.8 erzielen, da das Gleichungssystem in diesem Fall nicht überbestimmt (siehe Anhang A.1) ist:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{1} \\ &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ln R_{-1} \\ \ln R_0 \\ \ln R_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln R_{-1} \\ \ln R_0 \\ \ln R_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ln R_{-1} - 2 \ln R_0 + \ln R_1 \\ -1 \ln R_{-1} + \ln R_1 \\ 2 \ln R_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses von Gl. (4.9) in Gl. (4.7) erhält man die einfach zu handhabende Gleichung

$$x_c^{(3)} = -\frac{a_2}{2a_1} = \frac{\ln R_{-1} - \ln R_1}{2(\ln R_{-1} - 2 \ln R_0 + \ln R_1)}, \quad (4.10)$$

die die direkte Berechnung des Sub-Pixel genauen Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion mittels der drei Korrelationskoeffizienten  $R_{-1}, R_0, R_1$  erlaubt. Ist dabei  $R_0$  der maximale Korrelationskoeffizient und wird Gl. (4.10) sowohl in Zeilen- als auch in Spaltenrichtung angewandt, so entspricht das Ergebnis dem in Gl. (3.12) in Abschnitt 3.3.1.1 vorgestellten drei-Punkt-Schätzer auf Basis der Gauß-Funktion.

Für eine überbestimmte Lösung von Gl. (4.8), z.B. unter Berücksichtigung von  $k = 5$  oder  $k = 7$  Kreuzkorrelationskoeffizienten zur Berechnung der Sub-Pixel-Position des Maximums  $x_c$ , erhält man:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{1}, \quad (4.11)$$

wobei

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

und damit

$$(\mathbf{A}_5^T \mathbf{A}_5)^{-1} \mathbf{A}_5^T = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 10 & -5 & -10 & -5 & 10 \\ -14 & -7 & 0 & 7 & 14 \\ -6 & 24 & 34 & 24 & -6 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}_7^T \mathbf{A}_7)^{-1} \mathbf{A}_7^T = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \\ -9 & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ -8 & 12 & 24 & 28 & 24 & 12 & -8 \end{bmatrix}.$$

Schließlich ergeben sich die Sub-Pixel-Positionen des Maximums zu:

$$x_c^{(5)} = -\frac{a_2}{2a_1} = \frac{7}{10} \cdot \frac{2 \ln R_{-2} + \ln R_{-1} - \ln R_1 - 2 \ln R_2}{2 \ln R_{-2} - \ln R_{-1} - 2 \ln R_0 - \ln R_1 + 2 \ln R_2}, \quad (4.12)$$

$$x_c^{(7)} = -\frac{a_2}{2a_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \ln R_{-3} + 2 \ln R_{-2} + \ln R_{-1} - \ln R_1 - 2 \ln R_2 - 3 \ln R_{-3}}{5 \ln R_{-3} - 3 \ln R_{-1} - 4 \ln R_0 - 3 \ln R_1 + 5 \ln R_3}. \quad (4.13)$$

## 4.2 Allgemeine zweidimensionale lineare Gaußsche Regression

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der zweidimensionalen Gauß-Verteilung

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \cdot \left( \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{2\rho_{xy}(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left( \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right) \right] \quad (4.14)$$

ist durch die Standardabweichungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , die Erwartungswerte  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  und den Korrelationskoeffizienten  $\rho_{xy}$ , also durch fünf Parameter, definiert. Analog zum eindimensionalen Fall

wählen wir eine Beschreibung der Gauß-Funktion mit einem zusätzlichen Parameter, um eine Skalierung zu ermöglichen. Die allgemeine zweidimensionale Darstellung der Gauß-Funktion mittels sechs Parameter nach Condon (1997) ergibt sich zu

$$G(x, y) = A \exp \left[ -\frac{(x - x_e)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta(x - x_e)(y - y_e)}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{(y - y_e)^2}{2\sigma_y^2} \right], \quad (4.15)$$

wobei  $(x_e, y_e)$  die Position des Maximums und  $A$  ein Parameter zur Skalierung ist. Die Höhenlinien dieser Funktion sind im Allgemeinen Ellipsen. Somit kann  $(x_e, y_e)$  auch als der Mittelpunkt einer Ellipse,  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  als die  $1\sigma$ -Längen der beiden Halbachsen und  $\beta$  als ein Maß für den Drehwinkel der Hauptachsen der Ellipse relativ zu den Koordinatenachsen  $(x, y)$  verstanden werden.

Um die sechs Parameter der Funktion einfacher bestimmen zu können, wird Gl. (4.15) zunächst wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \ln\{G(x, y)\} &= \ln A - \frac{(x - x_e)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta(x - x_e)(y - y_e)}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{(y - y_e)^2}{2\sigma_y^2} \\ &= \left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2\sigma_y^2}\right)y^2 + \left(-\frac{\beta}{\sigma_x\sigma_y}\right)xy \\ &\quad + \left(\frac{x_e\sigma_y + \beta y_e\sigma_x}{\sigma_x^2\sigma_y}\right)x + \left(\frac{\beta x_e\sigma_y + y_e\sigma_x}{\sigma_x\sigma_y^2}\right)y \\ &\quad + \left(\ln A - \frac{x_e^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta x_e y_e}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{y_e^2}{2\sigma_y^2}\right) \end{aligned}$$

$$\ln\{G(x, y)\} = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6. \quad (4.16)$$

Wir erhalten also ein Polynom zweiten Grades mit den Koeffizienten:

$$a_1 = -\frac{1}{2\sigma_x^2}, \quad (4.17)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2\sigma_y^2}, \quad (4.18)$$

$$a_3 = -\frac{\beta}{\sigma_x\sigma_y}, \quad (4.19)$$

$$a_4 = \frac{x_e\sigma_y + \beta y_e\sigma_x}{\sigma_x^2\sigma_y}, \quad (4.20)$$

$$a_5 = \frac{\beta x_e\sigma_y + y_e\sigma_x}{\sigma_x\sigma_y^2}, \quad (4.21)$$

$$a_6 = \ln A - \frac{x_e^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta x_e y_e}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{y_e^2}{2\sigma_y^2}. \quad (4.22)$$

Das Polynom aus Gl. (4.16) lässt sich aber auch als lineares Gleichungssystem (LGS) ausdrücken:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (4.23)$$

Dabei ist  $\mathbf{l}$  der Vektor der Beobachtungen

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \ln\{G(x_1, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_1, y_n)\} \\ \ln\{G(x_2, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_2, y_n)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_m, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_m, y_n)\} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$\mathbf{x}$  der Vektor der unbekanntenen Koeffizienten

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

und  $\mathbf{A}$  die Designmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^2 & y_n^2 & x_1 y_n & x_1 & y_n & 1 \\ x_2^2 & y_1^2 & x_2 y_1 & x_2 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^2 & y_n^2 & x_2 y_n & x_2 & y_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & y_1^2 & x_m y_1 & x_m & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & y_n^2 & x_m y_n & x_m & y_n & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Nach dem Satz von Gauß-Markov (siehe Anhang A.1) ergibt sich die Lösung für das überbestimmte LGS aus Gl. (4.23) zu

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (4.27)$$

Für die optische korrelationsbasierte Messtechnik ist insbesondere die Position  $(x_e, y_e)$  des Korrelationsmaxima interessant. Die anderen vier Parameter zur Beschreibung der allgemeinen Form des elliptischen Korrelationsmaxima werden normalerweise für die weitere Auswertung der Daten nicht mehr verwendet. Um eine möglichst einfache Darstellung der Position  $(x_e, y_e)$  des Korrelationsmaxima mittels der aus Gl. (4.27) bekannten Koeffizienten  $a_i$  zu erhalten, betrachten wir zunächst die partiellen Ableitungen von Gl. (4.16):

$$\frac{\partial[\ln\{G(x, y)\}]}{\partial x} = 2a_1x + a_3y + a_4, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial[\ln\{G(x, y)\}]}{\partial y} = 2a_2y + a_3x + a_5. \quad (4.29)$$

Diese beiden Gleichungen müssen an der Position des Maximums jeweils den Wert Null haben, um die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt zu erfüllen. Damit ergibt sich folgendes LGS für die Position des Maximums:

$$\begin{aligned} 2a_1x_e + a_3y_e + a_4 &= 0, \\ a_3x_e + 2a_2y_e + a_5 &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Durch geeignetes Umformen erhält man schließlich für die Sub-Pixel genaue Position  $(x_e, y_e)$  des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion:

$$x_e = \frac{2a_2a_4 - a_3a_5}{a_3^2 - 4a_1a_2}, \quad (4.31)$$

$$y_e = \frac{2a_1a_5 - a_3a_4}{a_3^2 - 4a_1a_2}. \quad (4.32)$$

Eine explizite Lösung der zweidimensionalen Gaußschen Regression für den speziellen Fall, dass nur genau 9 Werte der Kreuzkorrelationsfunktion in einem  $3 \times 3$  Bereich zur Anwendung kommen, findet sich in Nobach und Honkanen (2005). Die hier vorgestellte allgemeine Lösung des Problems ist äquivalent zu der von Nobach und Honkanen (2005), lässt sich aber auf beliebige  $m \times n$  große Bereiche der Kreuzkorrelationsfunktion anwenden. Damit besteht die Möglichkeit, eine Anpassung des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion über einen nicht quadratischen Bereich zu realisieren. Außerdem ist es nun sehr einfach möglich, die Größe und Form des Bereichs für die Parameterschätzung an die zu erwartete Ausdehnung des Korrelationsmaxima anzupassen und damit den größten Nachteil der drei-Punkt-Schätzer (siehe Abschnitt 3.3.1.1) zu vermeiden. Die einzige Bedingung für die Anwendung der allgemeine zweidimensionale lineare Gaußsche Regression ist, dass mindestens sechs Beobachtungen  $l_i$  verwendet werden müssen, da sonst Gl. (4.27) unterbestimmt und dadurch nicht ohne zusätzliche Bedingungen eindeutig lösbar ist.

Der iterative nichtlineare Ansatz von Ronneberger u. a. (1998) (siehe Abschnitt 3.3.2) unterscheidet sich von dem hier vorgestellten linearen Ansatz deutlich. Ronneberger u. a. (1998)

verwenden für die Parameterschätzung direkt Gl. (4.15) und verzichten auf die Umformung mit dem natürlichen Logarithmus, die schließlich auf die Lösung eines LGS führt. Der numerische Aufwand dieses Ansatzes ist dadurch deutlich höher, da er nichtlinear ist. Er wird iterativ gelöst und erfordert daher zusätzlich Startwerte für die Iteration. In Curless (1997) werden eindimensionale Messdaten auf eine Gauß-Funktion gefittet. Dabei wurde sowohl eine direkt Parameterschätzung der Messdaten auf die Gauß-Funktion (siehe Gl. (4.3)) mittels eines iterativen nichtlinearen Levenberg-Marquardt Algorithmus als auch die Anwendung des natürlichen Logarithmus und die anschließende lineare Schätzung der Koeffizienten einer quadratischen Funktion (siehe Gl. (4.4)) angewendet. Es wird berichtet, dass dabei die Ergebnisse der Parameterschätzung im Wesentlichen gleich sind (siehe Curless (1997)). Es ist daher anzunehmen, dass dies auch auf den zweidimensionalen Fall übertragbar ist und daher die Ergebnisse bei Anwendung des hier vorgestellten Ansatzes mit denen, die sich mittels des Ansatzes von Ronneberger u. a. (1998) erzielen lassen, vergleichbar sind. Dies wird Anhand einer numerischen Simulation in Abschnitt 4.3.2 überprüft.

Der hier vorgestellte Ansatz der allgemeinen zweidimensionalen linearen Gaußsche Regression ist eleganter und deutlich einfacher zu implementieren als bisherige Verfahren. Durch die Anwendung des natürlichen Logarithmus auf Gl. (4.15) konnte eine lineare Lösung des Problem erzielt werden, obwohl in Raffel u. a. (2007) nachzulesen ist, dass diese Gleichung nur mittels nichtlinearer Optimierungsverfahren, wie z.B. des Levenberg-Marquardt Algorithmus, zu lösen sei.

### 4.3 Systematische Fehler beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen

Aufgrund der schrägen Projektion von ursprünglich radialsymmetrischen Punkten des zufälligen Musters bei Anwendung der PROPAC-Technik entstehen ellipsenförmige Musterpunkte und damit auch ein Korrelationsmaxima, dessen Höhenlinien selbst wieder Ellipsen darstellen. Die Verzerrung von ursprünglich runden Musterpunkten kann beispielsweise auch durch die Bilddeformation des iterativen Korrelationsansatzes, durch Verschiebungsgradienten innerhalb eines Auswertefensters oder durch schräge Sichtlinien in den Ecken der aufgenommenen Bilder entstehen. Eindimensionale Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion gehen indirekt von ellipsenförmigen Korrelationsmaxima aus, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen des Bildsensors keinen Drehwinkel aufweisen. Daher entsteht im Falle von beliebig ausgerichteten ellipsenförmigen Korrelationsmaxima durch die Nutzung der eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion ein systematische Fehler.

In Raffel u. a. (2007), dem Standardwerk für Grundlagen und praktische Anwendungen der PIV-Messtechnik, geben die Autoren an, dass für nahezu alle in ihrem Buch vorgestellten Bei-



spiele der drei-Punkt-Schätzer auf Basis der Gauß-Funktion zur Anwendung kam. Dies zeigt, dass in der Praxis fast ausschließlich eindimensionale Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion verwendet werden. Im Folgenden soll daher aufgezeigt werden, mit welchen systematischen Fehlern dabei zu rechnen ist. In diesem Abschnitt werden zunächst Gleichungen zur analytischen Beschreibung dieses systematischen Fehlers hergeleitet und diese dann mittels einer numerischen Simulation verifiziert. Zusätzlich zu den eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion kommt im Rahmen der Simulation u.a. auch die in Abschnitt 4.2 vorgestellte allgemeine zweidimensionale Gaußsche Regression zum Einsatz.

### 4.3.1 Analytische Beschreibung des systematischen Fehlers

Eine allgemeine zweidimensionale Gauß-Funktion, wie sie in Gl. (4.15) beschrieben ist, besitzt ellipsenförmige Höhenlinien. Die kontinuierliche Gauß-Funktion kann daher auch als Schar konzentrischer Ellipsen gleicher Ausrichtung aufgefasst werden. Zur Veranschaulichung des systematischen Fehlers bei der Sub-Pixel-Detektion betrachten wir zunächst Abb. 4.1. Das lokale Koordinatensystem  $(x, y)$  hat seinen Ursprung an dem maximalen Wert der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion und die Ausrichtung der Achsen entspricht der Spalten- bzw. Zeilenrichtung des Bildsensors. Das Maximum der kontinuierlichen Gauß-Funktion befindet sich an der Position  $(x_e, y_e)$ , wobei  $|x_e| \leq 0,5$  und  $|y_e| \leq 0,5$  ist, da sonst der maximale Wert der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion nicht im Ursprung läge. Abb. 4.1 zeigt also nur einen Sub-Pixel-Ausschnitt. Die Schar der Ellipsen ist durch den Drehwinkel  $\alpha$  und die numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u} \quad (4.33)$$

beschrieben, wobei  $u$  und  $v$  die große bzw. kleine Halbachse der Ellipse bezeichnen.

Im Sinne dieser Notation entspricht der Einsatz eines eindimensionalen Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion der Suche der Position mit dem maximalen Wert entlang der x- und der y-Achse. Abb. 4.1 ist leicht zu entnehmen, dass diese Position jeweils durch den Berührungspunkt einer Ellipse der Schar mit der x- bzw. y-Achse gegeben ist. Die auf diese Weise mittels eindimensionaler Algorithmen gewonnene Sub-Pixel-Position  $(x_p, y_p)$  besitzt gegenüber dem Ellipsenmittelpunkt  $(x_e, y_e)$ , wie in Abb. 4.1 zu sehen, eine systematische Verschiebung  $\mathbf{d}_r$ . Im Folgenden ist die Herleitung dieses systematischen Fehlers ausführlich beschrieben.

Gesucht sind also zunächst die Berührungspunkte jeweils einer speziellen Ellipse der Schar an die Koordinatenachsen. Wir benutzen die in Merziger u. a. (1996) gegebene Beziehung, dass die Gerade

$$Ux + Vy = W \quad (4.34)$$

genau dann eine Tangente an eine Ellipse ist, wenn

$$U^2 u^2 + V^2 v^2 = W^2 \quad (4.35)$$

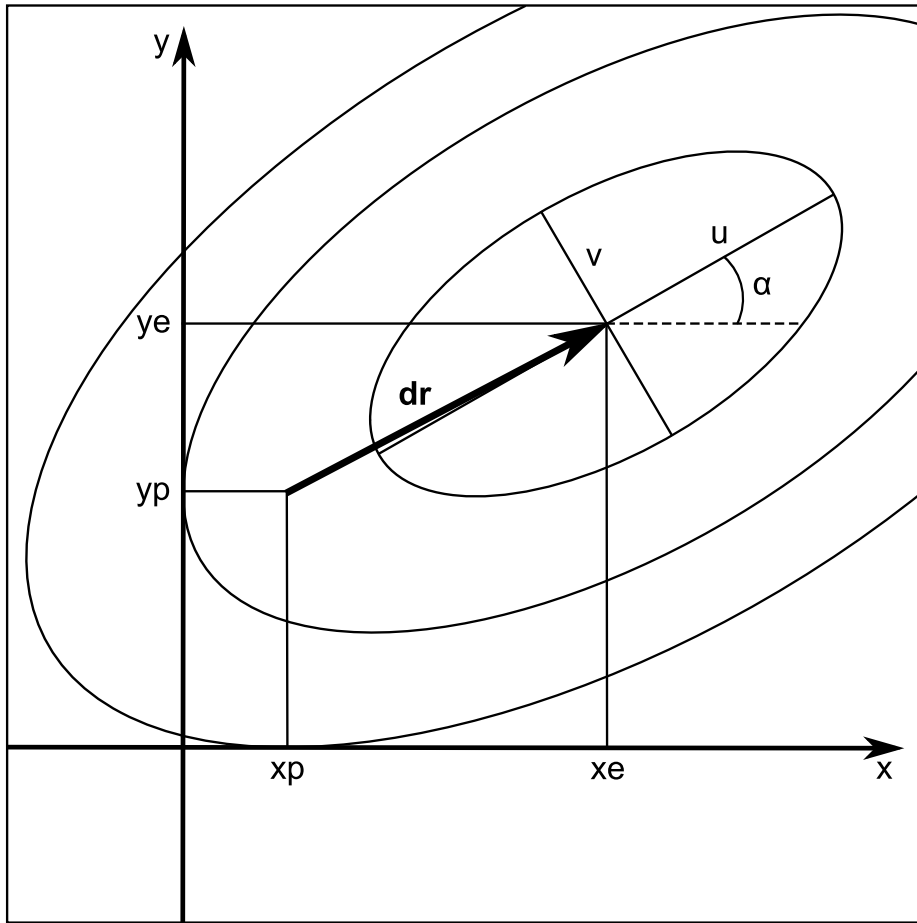


Abbildung 4.1: Veranschaulichung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle eines allgemeinen ellipsenförmigen Korrelationsmaxima.

erfüllt ist. Diese Darstellung geht von einer im Koordinatenursprung gelagerten Ellipse mit Hauptachsen in Richtung der Koordinatenachsen aus. Wir unterscheiden also im Folgenden zwischen dem Koordinatensystem  $(x, y)^{CCD}$  des Bildsensors (siehe Koordinatenachsen in Abb. 4.1) und dem um  $(x_e, y_e)$  verschobenen und um  $\alpha$  gedrehten Koordinatensystem  $(x, y)^{Ell}$ , definiert durch die Ellipsenschar. Die Darstellung der x- bzw. y-Achse im Ellipsenkoordinatensystem lautet:

$$y = -\tan \alpha x - \frac{y_e}{\cos \alpha}, \quad (4.36)$$

$$y = \frac{1}{\tan \alpha} x - \frac{x_e}{\sin \alpha}. \quad (4.37)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten mit Gl. (4.35) ergibt sich im Falle der x-Achse:

$$U = \tan \alpha, \quad V = 1, \quad W = -\frac{y_e}{\cos \alpha} \quad (4.38)$$

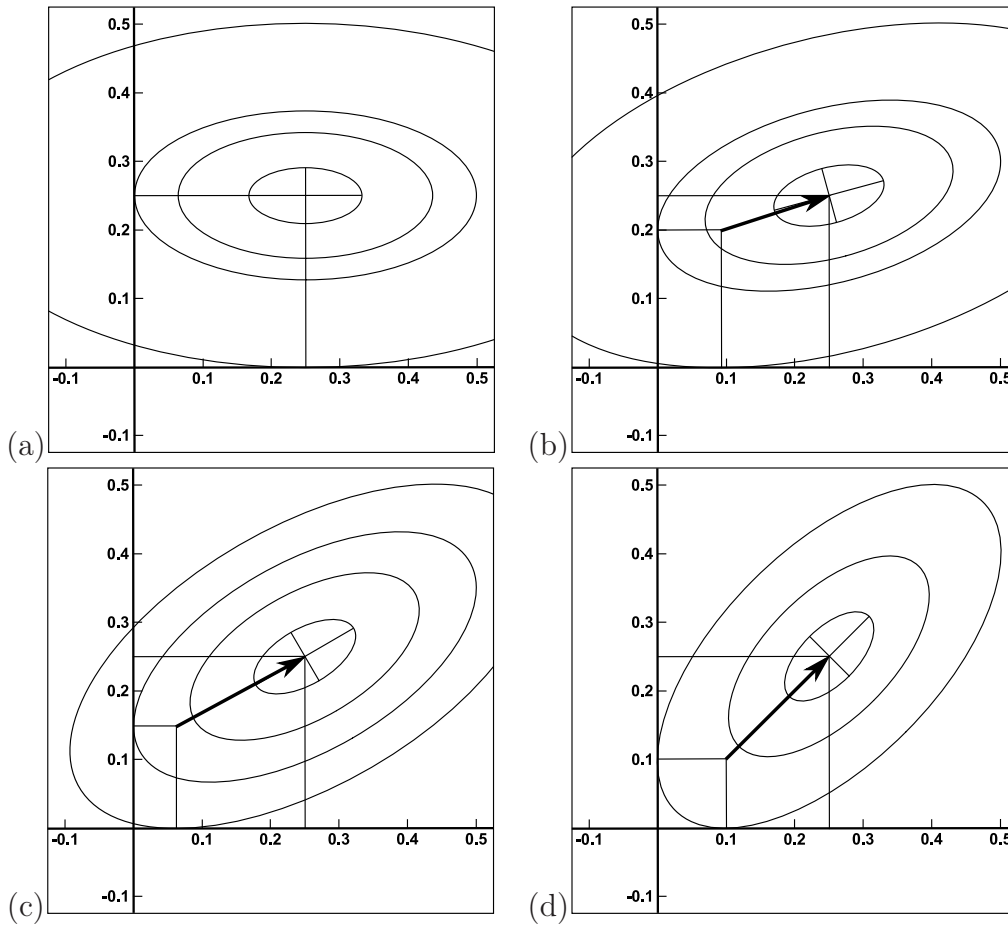


Abbildung 4.2: Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei  $x_e = y_e = 0,25$  Pixel, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = 0,866$  (d.h.  $u = 2v$ ) und der Drehwinkel: (a)  $\alpha = 0^\circ$ , (b)  $\alpha = 15^\circ$ , (c)  $\alpha = 30^\circ$ , (d)  $\alpha = 45^\circ$ .

und im Falle der y-Achse:

$$U = -\frac{1}{\tan \alpha}, \quad V = 1, \quad W = -\frac{x_e}{\sin \alpha}. \quad (4.39)$$

Durch jeweiliges Einsetzen dieser Koeffizienten in Gl. (4.35) und Benutzen des aus Gl. (4.33) abgeleiteten Zusammenhangs

$$v = u\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (4.40)$$

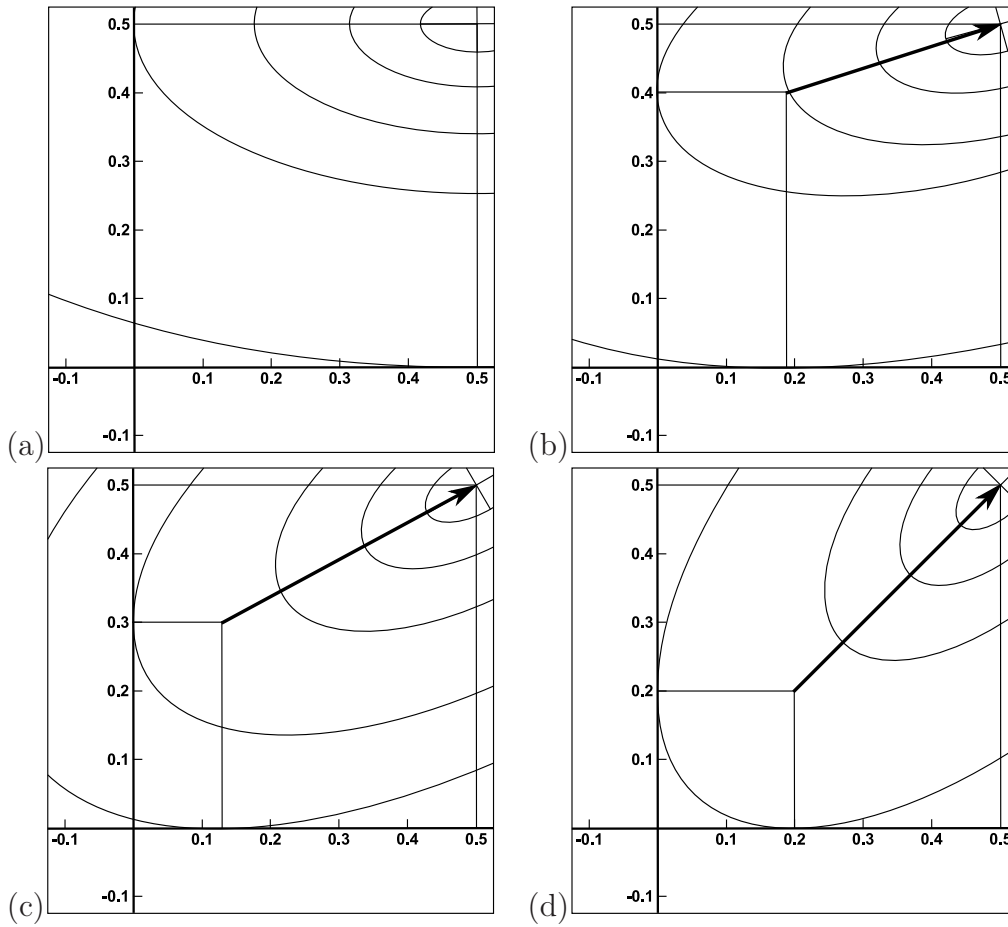


Abbildung 4.3: Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei  $x_e = y_e = 0,5$  Pixel, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = 0,866$  (d.h.  $u = 2v$ ) und der Drehwinkel: (a)  $\alpha = 0^\circ$ , (b)  $\alpha = 15^\circ$ , (c)  $\alpha = 30^\circ$ , (d)  $\alpha = 45^\circ$ .

ergeben sich schließlich die Längen der großen Halbachsen der speziellen Ellipsen der Schar, die die x- bzw. y-Achsen berühren.

$$u_x = \frac{y_e}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (4.41)$$

$$u_y = \frac{x_e}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (4.42)$$

Wir sind nun in der Lage, mittels der allgemeinen Gleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \quad (4.43)$$

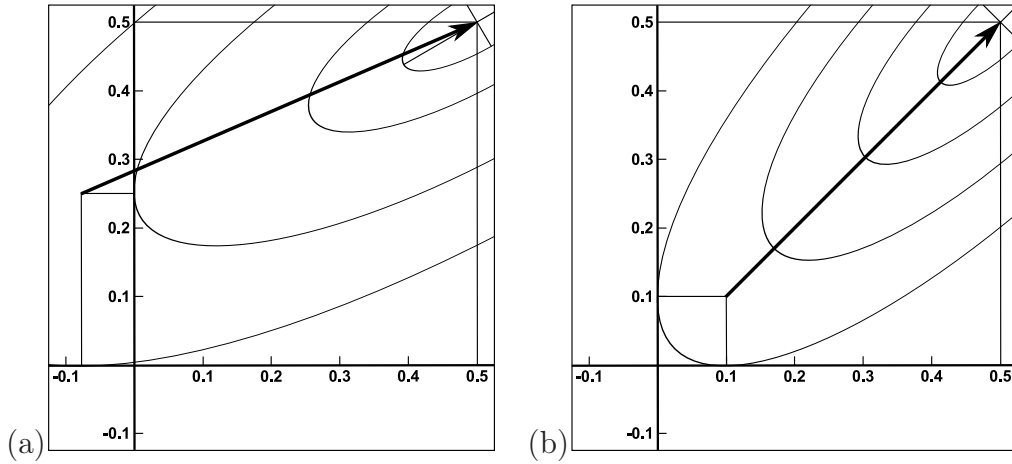


Abbildung 4.4: Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei  $x_e = y_e = 0,5$  Pixel, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = 0,9428$  (d.h.  $u = 3v$ ) und der Drehwinkel: (a)  $\alpha = 30^\circ$ , (b)  $\alpha = 45^\circ$ .

den Berührungspunkt  $P_x^{Ell} (x_x^{Ell}, y_x^{Ell})$  der Ellipse mit der x-Achse zu berechnen. Dazu setzen wir die Geradengleichung der x-Achsen im Ellipsenkoordinatensystem (Gl. (4.36)) sowie die kleine und die große Halbachse der Ellipse, die die x-Achse berührt (Gl. (4.40) und Gl. (4.41)), in die allgemeine Ellipsengleichung ein und erhalten nach Umformen:

$$x_x^{Ell} = -\frac{y_e \sin \alpha}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4.44)$$

Die dazugehörige y-Komponente des Berührungspunktes an die x-Achse ergibt sich durch Einsetzen des Ergebnisses aus Gl. (4.47) in Gl. (4.36) zu:

$$y_x^{Ell} = -\frac{y_e(1 - \varepsilon^2) \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4.45)$$

Analog ergibt sich der Berührungspunkt  $P_y^{Ell} (x_y^{Ell}, y_y^{Ell})$  der Ellipse mit der y-Achse durch Benutzen der Geradengleichung der y-Achsen im Ellipsenkoordinatensystem (Gl. (4.37)) und der zugehörigen Halbachsen (Gl. (4.40) und Gl. (4.42)) zu:

$$x_y^{Ell} = -\frac{x_e \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}, \quad (4.46)$$

$$y_y^{Ell} = -\frac{x_e(1 - \varepsilon^2) \sin \alpha}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}. \quad (4.47)$$

Da die beiden Berührungspunkte der Ellipsen an die Koordinatenachsen im Koordinatensystem des Bildsensors gesucht sind, kommt im letzten Schritt die Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{CCD} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{Ell} + \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

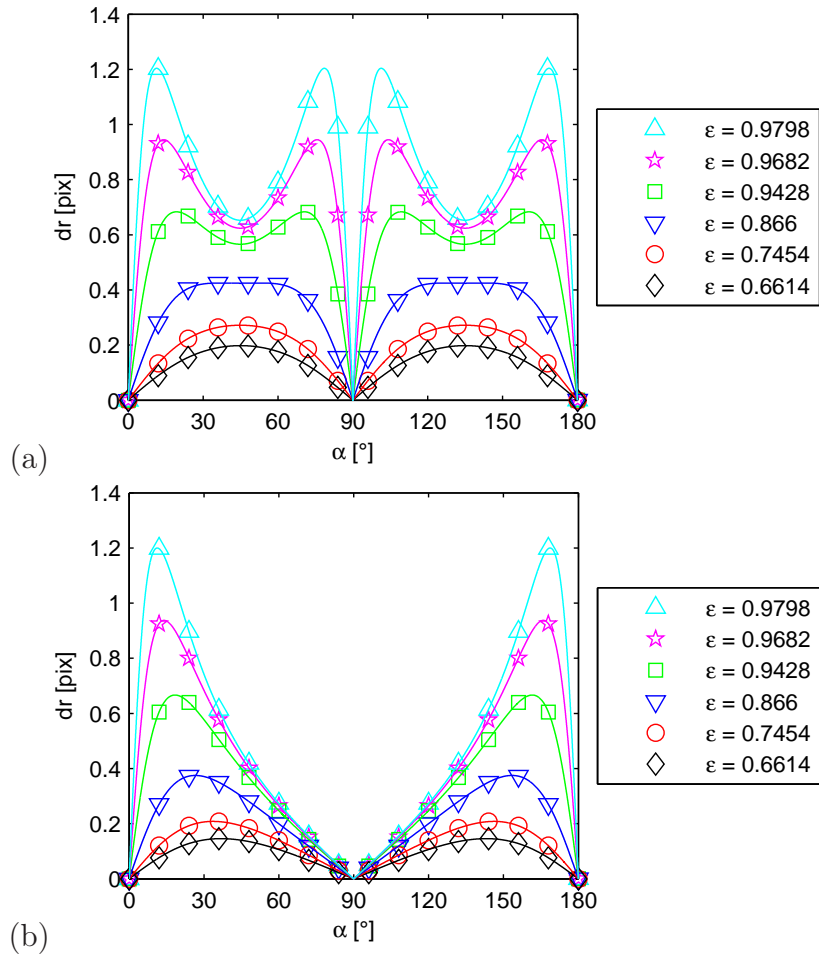


Abbildung 4.5: Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a)  $x_e = 0,5$ ,  $y_e = 0,5$ , (b)  $x_e = 0,0$ ,  $y_e = 0,5$ .

zwischen den beiden Koordinatensystemen zur Anwendung.

Die Berührungspunkte der entsprechenden Ellipsen der Schar mit der x- bzw. y-Achse im Sensorkoordinatensystem haben per Definition jeweils nur eine von Null verschiedene Koordinate. Durch Anwendung der Koordinatentransformation auf den Berührungspunkt  $P_x^{Ell}$  ergibt sich:

$$x_x^{CCD} = x_e - \frac{y_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha} =: x_p, \quad (4.49)$$

$$x_x^{CCD} = 0, \quad (4.50)$$

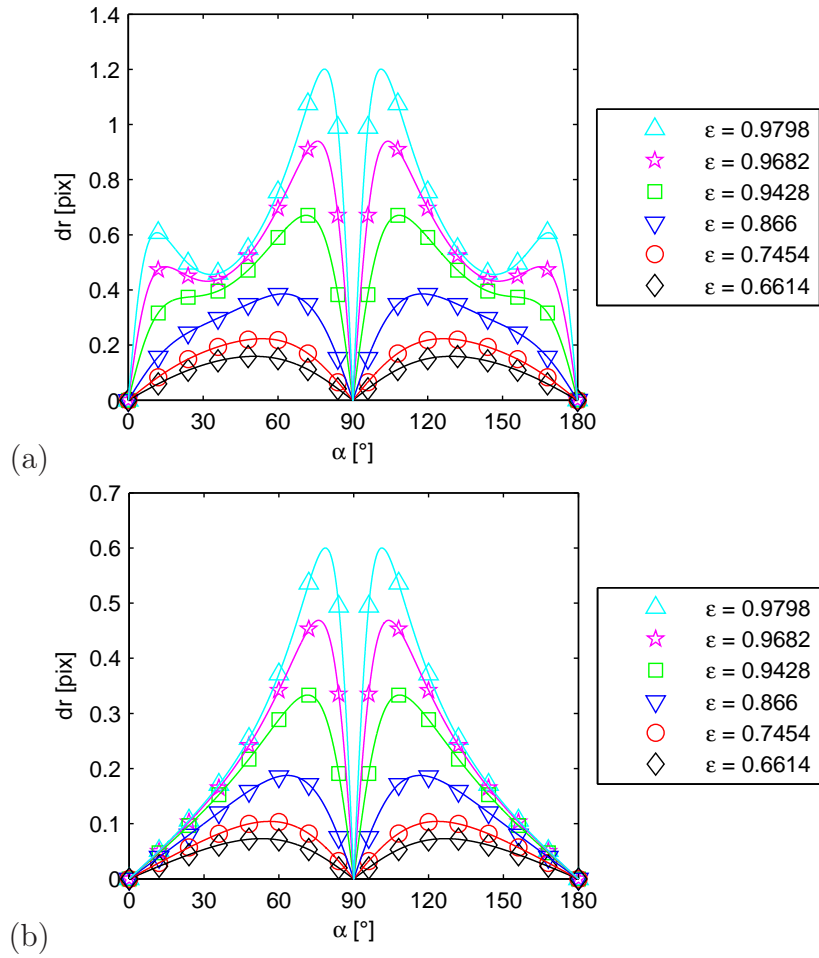


Abbildung 4.6: Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a)  $x_e = 0,5$ ,  $y_e = 0,25$ , (b)  $x_e = 0,25$ ,  $y_e = 0,0$ .

und für den Berührungspunkt  $P_y^{Ell}$  analog

$$x_y^{CCD} = 0, \quad (4.51)$$

$$x_y^{CCD} = y_e - \frac{x_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha} =: y_p. \quad (4.52)$$

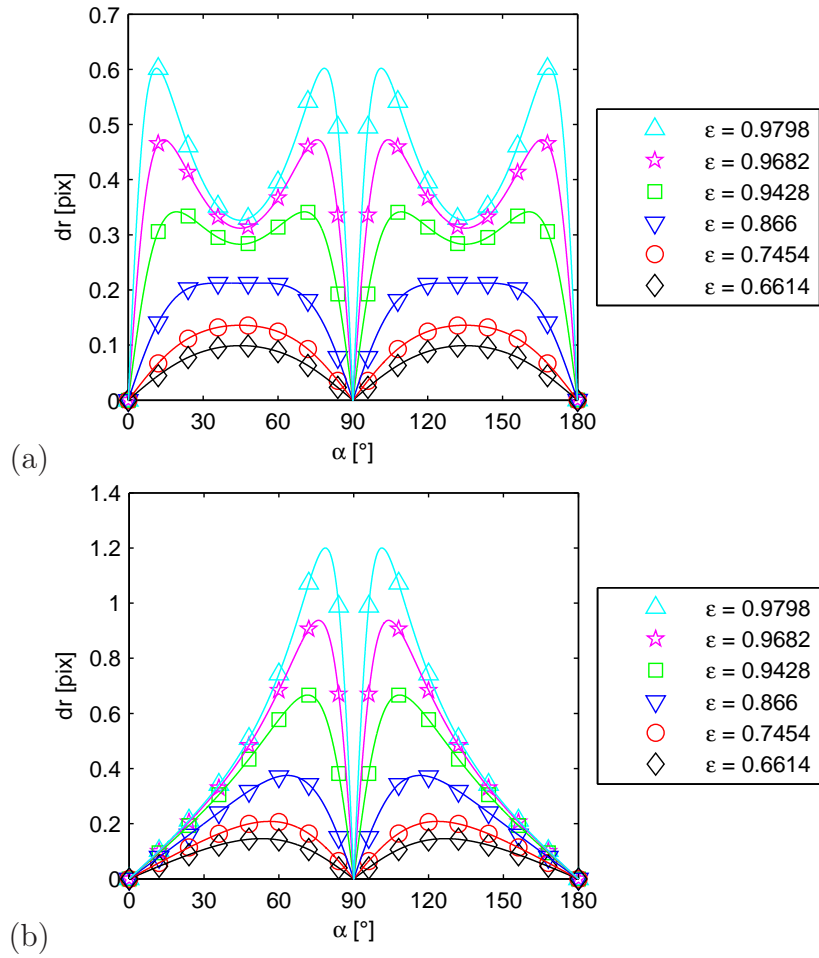


Abbildung 4.7: Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) nach Gl. (4.56) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): (a)  $x_e = 0,25$ ,  $y_e = 0,25$ , (b)  $x_e = 0,5$ ,  $y_e = 0,0$ .

Ein eindimensionaler Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion wird also, auch für den Fall einer idealen Optimierung bzw. Interpolation, zu einer Sub-Pixel-Position des Korrelationsmaxima an der Stelle  $(x_p, y_p)$  mit

$$x_p = x_e - \frac{y_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}, \quad (4.53)$$

$$y_p = y_e - \frac{x_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \quad (4.54)$$

und damit zu einem systematischen Fehler gegenüber der wahren Position des Korrelationsmaxima, dem Mittelpunkt  $(x_e, y_e)$  der Schar konzentrischer Ellipsen, führen. Die Verschie-



bung zwischen diesen beiden Punkten, die auch in Abb. 4.1 grafisch dargestellt ist, ergibt sich zu:

$$\mathbf{d}_r = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -\varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha \begin{bmatrix} \frac{y_e}{1-\varepsilon^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{x_e}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Der Betrag des systematischen Fehlers beträgt:

$$\|\mathbf{d}_r\| = \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{y_e}{1-\varepsilon^2 \cos^2 \alpha}\right)^2 + \left(\frac{x_e}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \alpha}\right)^2}. \quad (4.56)$$

In Abb. 4.2 bis 4.4 finden sich zeichnerische Darstellungen des systematischen Fehlers, der bei Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion auftritt, für verschiedene Typen von Ellipsen und jeweils an verschiedenen Positionen. Dabei ist zu beobachten, dass sich der systematische Fehler bei konstanter Position des Ellipsenmittelpunktes  $(x_e, y_e)$  und konstanter numerischer Exzentrizität  $\varepsilon$  mit dem Drehwinkel  $\alpha$  der Ellipse relativ zu dem Sensorkoordinatensystem ändert. Zusätzlich steigt der systematische Fehler für größere numerische Exzentrizitäten und mit steigender Entfernung des Ellipsenmittelpunktes vom Koordinatenursprung an. Im Falle eines Drehwinkels  $\alpha = 0$  (d.h. die Hauptachsen der Ellipsenschar sind parallel zur den Koordinatenachsen des Bildsensors) oder einer numerischen Exzentrizität  $\varepsilon = 0$  (dies entspricht einem Kreis) verschwindet der systematische Fehler.

Die Änderung des Betrages des systematischen Fehlers  $\|\mathbf{d}_r\|$  für variable Drehwinkel  $\alpha$  ist in Abb. 4.5 bis 4.7 für verschiedene Typen von Ellipsen dargestellt. Auch hier fällt wieder auf, dass der Fehler bei steigenden numerischen Exzentrizitäten anwächst.

Der wichtigste Punkt ist aber, dass in einigen Fällen der Betrag des systematischen Fehlers sogar Werte größer einem Pixel annehmen kann. Dies ist deshalb besonders problematisch, da man durch den höchsten Wert der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion bereits davon ausgeht, die gesuchte Verschiebung mit einer Unsicherheit von  $\pm 1/2$  Pixel zu kennen (siehe Abschnitt 3.3, Seite 66). Die anschließende Sub-Pixel-Detektion sollte daher nur eine zusätzlich Verbesserung der Verschiebung innerhalb der Unsicherheit liefern und nicht einen zusätzlichen systematischen Fehler beinhalten, der deutlich größer sein kann. Im Falle eines systematischen Fehlers bei der Sub-Pixel-Detektion in der Größenordnung von einem Pixel wird das Ergebnis der Verschiebungsmessung daher sogar ungenauer im Vergleich zur Kreuzkorrelation ohne Sub-Pixel-Detektion.

Da Position, Ausrichtung und Form des elliptischen Korrelationsmaxima in der Praxis unbekannt sind, ist von dem Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion dringend abzuraten, da im Sinne einer konservativen Abschätzung immer mit dem maximal möglichen Fehler zu rechnen ist.

### 4.3.2 Verifikation mittels einer numerischen Simulation

Zu Verifikation der bisherigen Ergebnisse wurden im Rahmen einer Simulation künstliche Bildpaare von zufälligen Punktemustern bekannter Verschiebung generiert. Für jeden einzelnen hellen Punkt des Musters wurde dazu eine Intensitätsverteilung mittels der zweidimensionalen Gauß-Funktion (siehe Gl. (4.15)) angesetzt. Dies entspricht in guter Näherung der Abbildung eines entfernten Lichtpunktes durch eine ideale Linse (siehe Abschnitt 2.1, Seite 30). Dadurch ist es möglich, künstlich Bildausschnitte eines zufälligen Punktemusters zu berechnen (siehe Abb. 4.8 (a)), diese dann um einen bekannten Wert  $\Delta x$  und  $\Delta y$  zu verschieben (siehe Abb. 4.8 (b)) und aus dem so gewonnenen Bildpaar mittels Gl. (3.6) die Kreuzkorrelationsfunktion zu berechnen (siehe Abb. 4.8 (c)). Aufgrund der Formerhaltung der Korrelation ist diese selbst wieder wie eine Gauß-Funktion geformt.

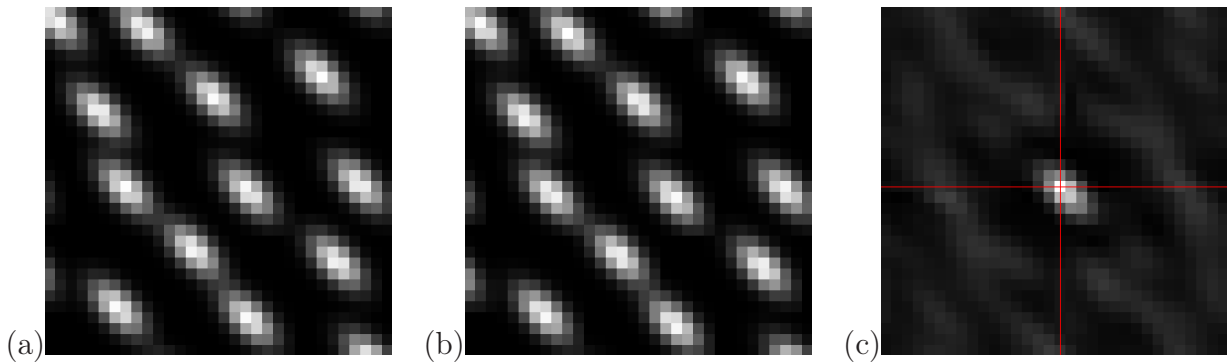


Abbildung 4.8: Kreuzkorrelation mittels eines simulierten Bildpaares bekannter Verschiebung: (a) künstliches zufälliges Punktemuster, (b) künstliches zufälliges Punktemuster um  $\Delta x$  und  $\Delta y$  verschoben, (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion.

In der durchgeführten Simulation wurden elliptische Punktemuster mit verschiedenen Bildversätzen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  verwendet. Der Bildversatz in jede Koordinatenrichtung reicht jeweils von  $-0,5$  bis  $+0,5$  Pixel. Bei einer Schrittweite von  $0,05$  Pixel ergeben sich somit  $441$  verschiedene Kombinationen für den Versatz in der Bildebene. Für alle Bildversätze wurden  $37$  verschiedene Drehwinkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  mit einer Schrittweite von  $2,5^\circ$  und  $121$  verschiedene Sub-Pixel-Positionen für den Mittelpunkt der elliptischen Punkte benutzt. Insgesamt wurde für jede mögliche Kombination aus Bildversatz, Drehwinkel und Sub-Pixel-Positionen des Mittelpunkts die Kreuzkorrelationsfunktion des Bildpaares berechnet und mittels der verschiedenen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion ausgewertet. Es ist nun möglich, die mittels der Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion gemessene Verschiebung  $x_p$  bzw.  $y_p$  mit dem künst-

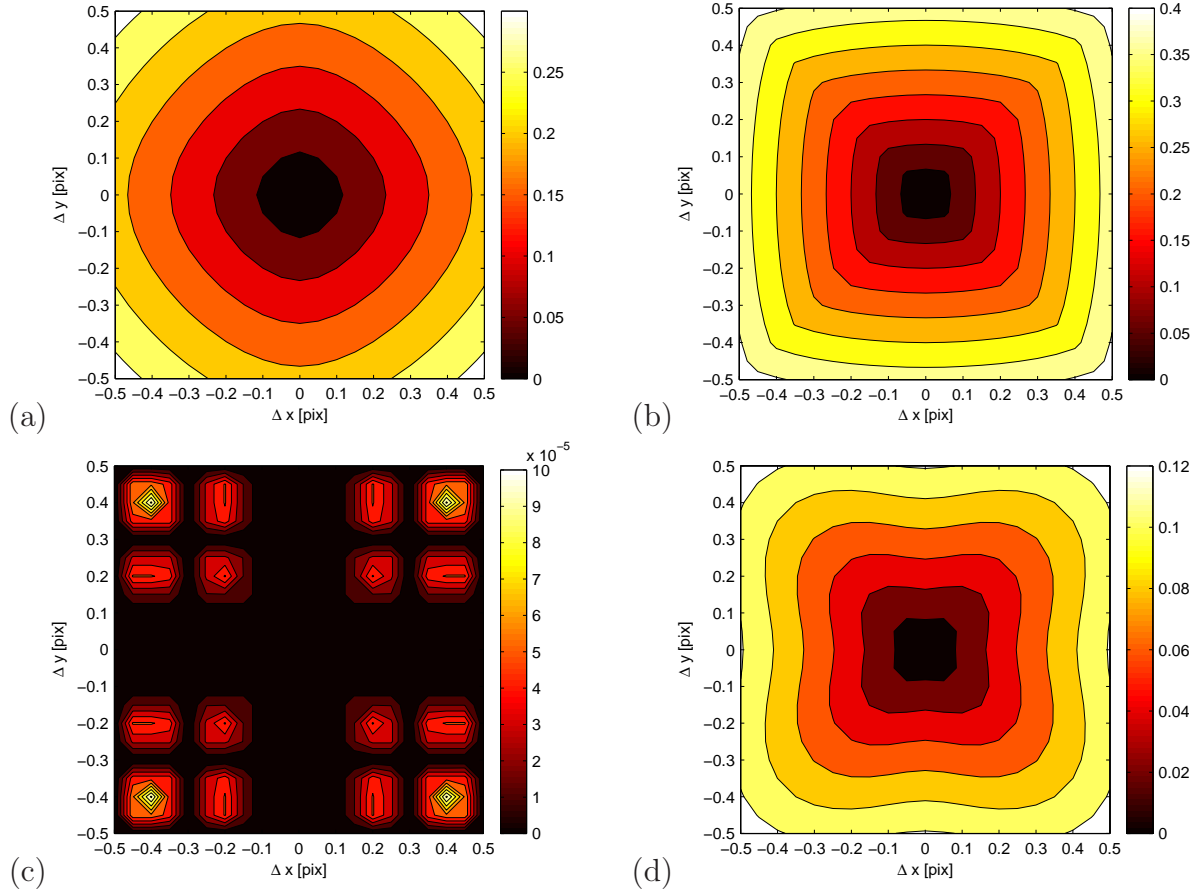


Abbildung 4.9: Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der eindimensionalen linearen Gaußschen Regression (nach Gl. (4.10)) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,866$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung.

lich vorgegebenen Bildversatz  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  zu vergleichen. Damit lässt sich der Fehlerbetrag wie folgt definieren:

$$\|\mathbf{d}_r^{sim}\| = \sqrt{(\Delta x - x_p)^2 + (\Delta y - y_p)^2}. \quad (4.57)$$

Geht man davon aus, dass die Kreuzkorrelation selbst keinen systematischen Fehler besitzt, so sollte im Falle eindimensionaler Algorithmen dieser Fehler der analytischen Beschreibung des systematischen Fehler aus Gl. (4.56) entsprechen, da dann der vorgegebene Bildversatz  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  der Sub-Pixel-Position  $x_e$  bzw.  $y_e$  des elliptischen Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion entsprechen sollte.

Für jeden möglichen Bildversatz wurde der Mittelwert, das Maximum, das Minimum und die Standardabweichung des Fehlerbetrages  $\|\mathbf{d}_r^{sim}\|$  für die unterschiedlichen Drehwinkel und Sub-Pixel-Positionen der Mittelpunkte berechnet. Für eine konservative Abschätzung des

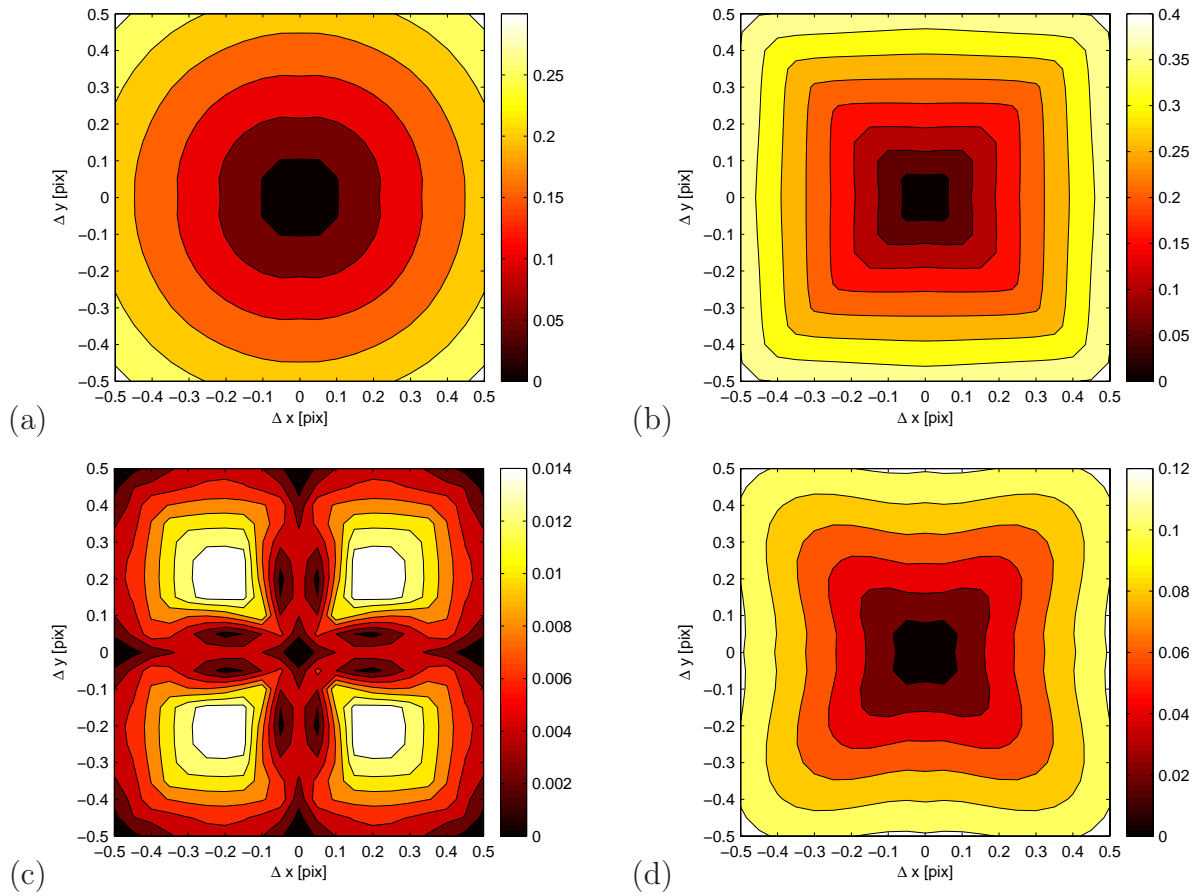


Abbildung 4.10: Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels des Blais-Rioux-Operators vierter Ordnung (nach Gl. (3.16) bzw. (3.18)) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,866$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung.

Fehlers sollte das Maximum verwendet werden, da Drehwinkel und Sub-Pixel-Position der Mittelpunkte der Punktemuster im Falle echter Messdaten normalerweise unbekannt sind.

Das Ergebnis der Simulation für elliptische Punktemuster mit einer numerischen Exzentrizität von  $\varepsilon = 0,866$  ist in Abb. 4.9 bis 4.11 jeweils für verschiedene Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion als farblich codierte Darstellung für die verschiedenen vorgegebenen Bildversätze  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  zu sehen. Es fällt auf, dass die eindimensionale lineare Gaußsche Regression (siehe Abb. 4.9) mittels Gl. (4.10) nahezu das selbe Ergebnis liefert wie der Blais-Rioux-Operator vierter Ordnung (siehe Gl. (3.16) und (3.18)). Der maximale Fehler beträgt in beiden Fällen bis zu ca. 0,4 Pixel, allerdings ist der minimale Fehler bei Nutzung des Blais-Rioux-Operators deutlich höher. Dies ist wohl dem Interpolationsfehler geschuldet, der bei der linearen Interpolation der Blais-Rioux-Methode auftritt. Dagegen ist der minimale Fehler

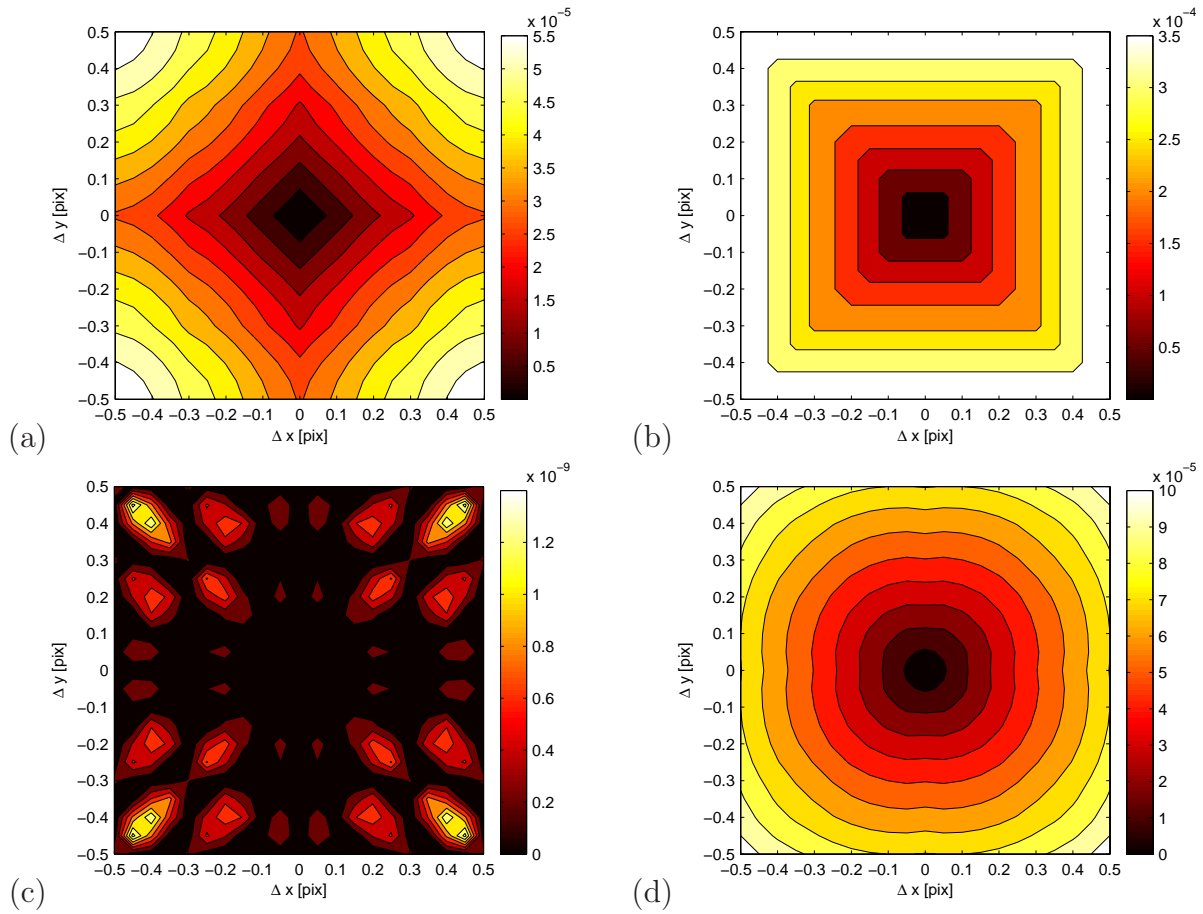


Abbildung 4.11: Betrag des Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zwei-dimensionalen linearen Gaußschen Regression (siehe Abschnitt 4.2, Fenstergröße  $3 \times 3$  Pixel) im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,866$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$ : (a) Mittelwert, (b) Maximum, (c) Minimum, (d) Standardabweichung.

bei der Gaußschen Regression sehr gering, weil sowohl für die Generierung der Punktemuster als auch für die Sub-Pixel-Detektion das selbe Modell, nämlich die Gauß-Funktion, angesetzt wurde. Daher liegt auch der maximale Fehler der zwei-dimensionalen Gaußschen Regression (siehe Abb. 4.11 (b)), der frei von systematischen Fehlern sein sollte, in der Größenordnung der Rechengenauigkeit.

Um thermisches Hintergrundrauschen zu simulieren, wurde in einem zusätzlichen Schritt auf die künstlichen Bilder pixelweise ein additives Gaußsches Rauschen aufgebracht. Obwohl dies eine sehr grobe Modellierung für Rauschen in Bildern darstellt, da andere Quellen des Rauschen unberücksichtigt bleiben, ist damit dennoch eine einfache Möglichkeit gegeben, die Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion auf ihre Robustheit gegenüber Rauschen zu

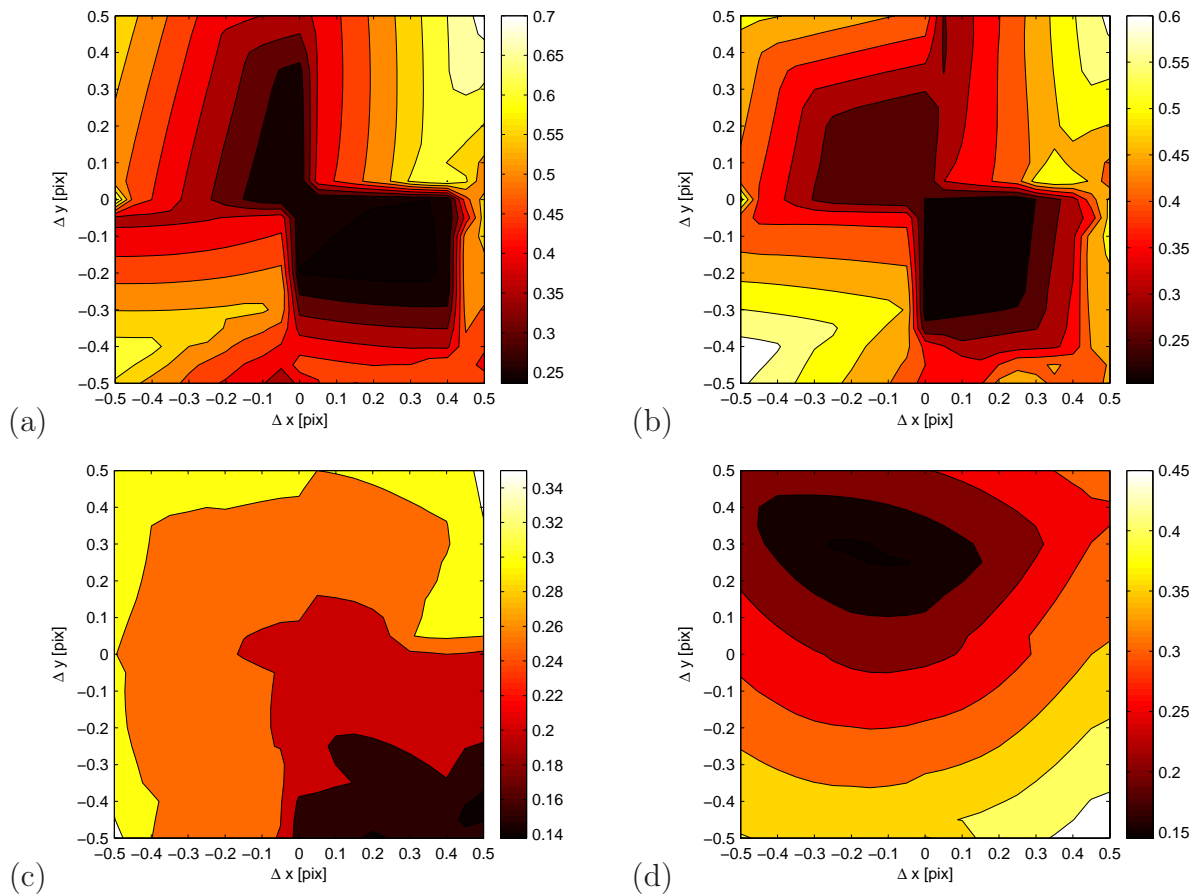


Abbildung 4.12: Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,866$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$  bei zusätzlichem Rauschen (SNR 10): (a) eindimensionale lineare Gaußsche Regression, (b) Blais-Rioux-Operator vierter Ordnung, zweidimensionale lineare Gaußsche Regression: (c)  $3 \times 3$  Pixel, (d)  $9 \times 9$  Pixel.

überprüfen. In Abb. 4.12 ist der maximale Fehlerbetrag für die verschiedenen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle eines starken Rauschens (SNR 10) dargestellt. Es scheint, dass der Blais-Rioux-Operator im Falle von Rauschen der eindimensionalen Gaußschen Regression leicht überlegen ist. Diese Robustheit kann durch die Bandpass-Charakteristik der Blais-Rioux-Methode erklärt werden. Im Falle der zweidimensionalen Gaußschen Regression scheinen kleinere Fenstergrößen im Vorteil zu sein, aber auch hier sind die zweidimensionalen Algorithmen insgesamt überlegen.

Betrachten wir den Fehler bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression für verschiedene numerische Exzentrizitäten und Fenstergrößen im Folgenden etwas genauer. Abb. 4.13 zeigt das Ergebnis für den maximalen Fehler bei

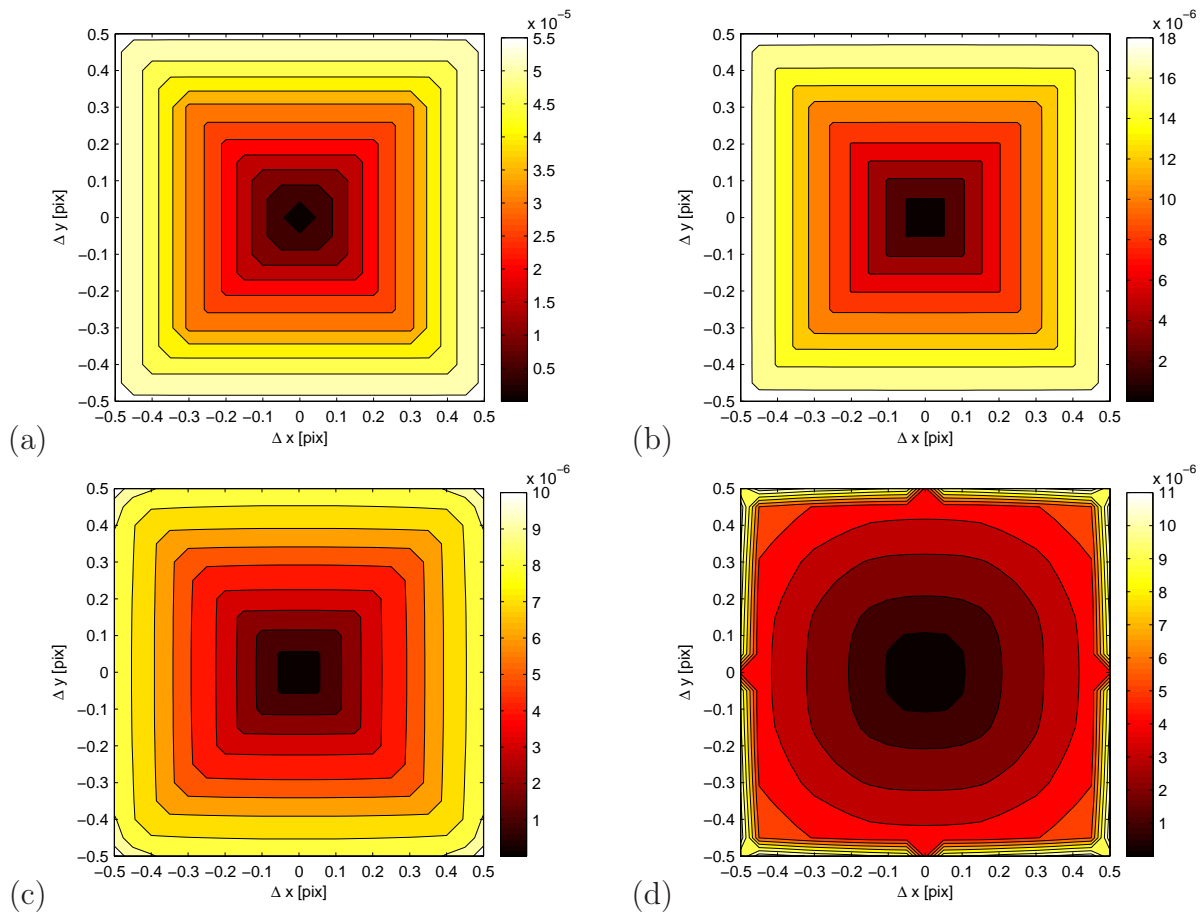


Abbildung 4.13: Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression verschiedener Fenstergrößen im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,9428$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$ : (a)  $5 \times 5$  Pixel, (b)  $7 \times 7$  Pixel, (c)  $9 \times 9$  Pixel, (d)  $11 \times 11$  Pixel.

elliptischen Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,9428$  für verschieden große Fenstergrößen. Der maximale Fehler sinkt leicht für steigende Fenstergrößen. In Abb. 4.14 ist das gleiche Szenario zu sehen, allerdings zusätzlich mit einem additiven Gaußschen Rauschen (SNR 50). Hier beobachtet man einen mit der Fenstergröße ansteigenden maximalen Fehler. Der Grund hierfür liegt wohl darin, dass am Rand der großen Fenster das Signal des Korrelationsmaxima relativ gering gegenüber dem Rauschen ist. In Abb. 4.15 ist schließlich der maximale Fehler für eine Fenstergröße von  $3 \times 3$  Pixel bei unterschiedlichen numerischen Exzentrizitäten  $\varepsilon$  dargestellt. Mit steigendem  $\varepsilon$  steigt auch der Fehler der Sub-Pixel-Detektion an. In allen hier vorgestellten Ergebnissen ist der Fehler bei der Nutzung der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression sehr gering und es existiert keinerlei systematischer Einfluss, wie er bei den eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion auftritt und in diesem Fall

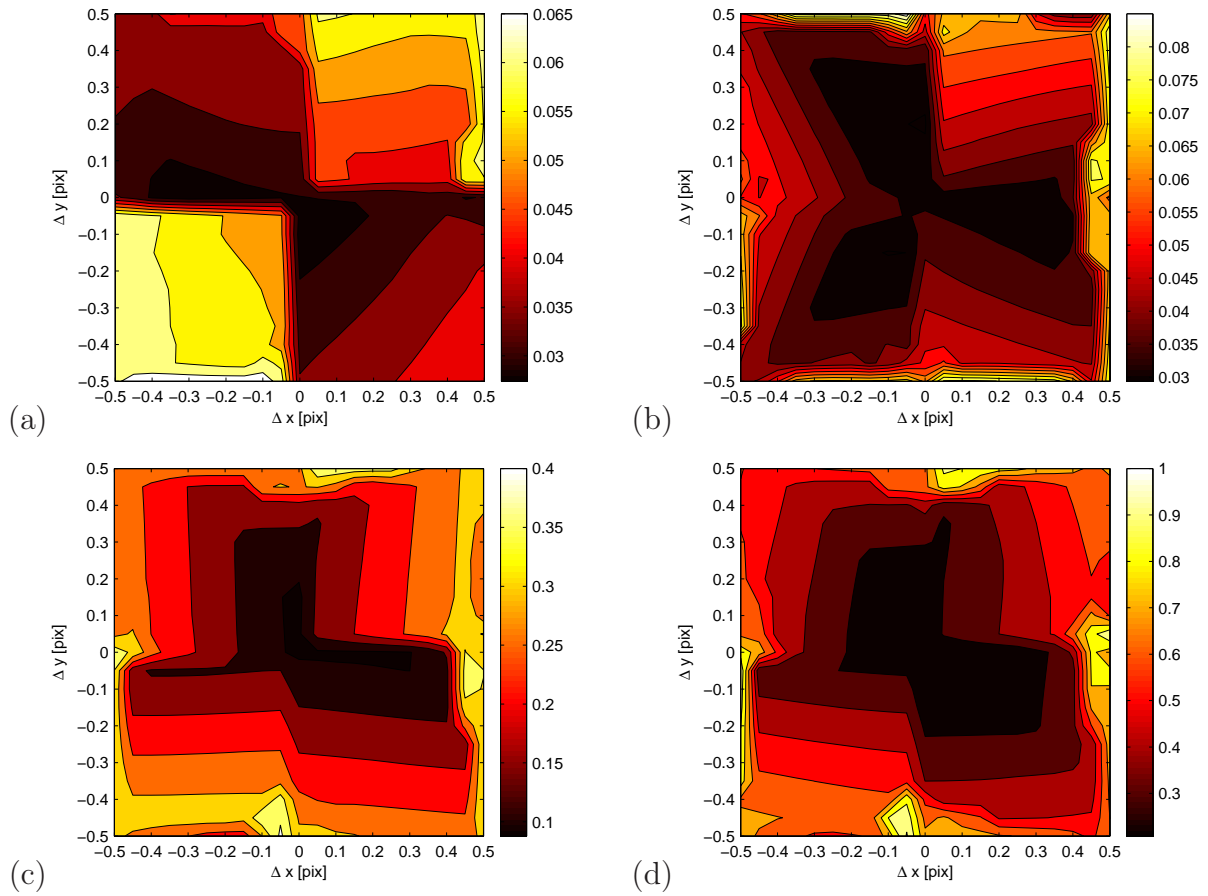


Abbildung 4.14: Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression verschiedener Fenstergrößen im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit  $\varepsilon = 0,9428$  und variablem Drehwinkel  $\alpha$  bei zusätzlichem Rauschen (SNR 50): (a)  $3 \times 3$  Pixel, (b)  $5 \times 5$  Pixel, (c)  $7 \times 7$  Pixel, (d)  $9 \times 9$  Pixel.

durch Gl. (4.56) modelliert werden kann.

In Tab. 4.1 findet sich eine vergleichende Übersicht des maximalen systematischen Fehlerbetrages der eindimensionalen Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion für beliebig verdrehte elliptische Korrelationsmaxima zwischen der Simulation und der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers gemäß Gl. (4.56). Die Ergebnisse mittels der Gaußschen Regression und des Blais-Rioux-Operators passen sowohl sehr gut zueinander als auch zu der analytischen Beschreibung des maximalen Fehlers. Die Differenzen zwischen der numerischen Simulation und der analytischen Beschreibung des Fehlers liegen in der Größenordnung von 0,01 Pixel für die Blais-Rioux-Methode und in der Größenordnung von 0,002 Pixel für die Gaußsche Regression. Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 festgestellt wurde, steigt der Fehler für



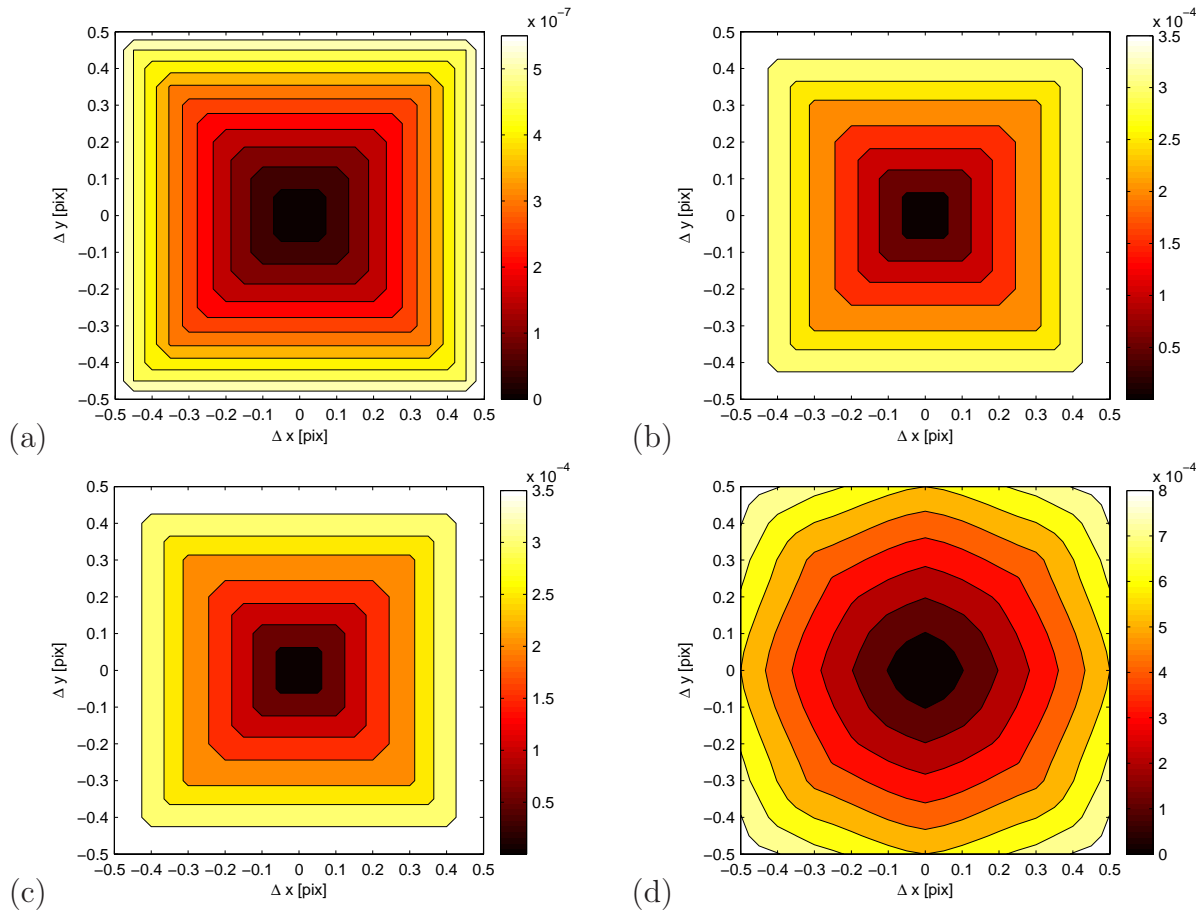


Abbildung 4.15: Maximaler Fehlerbetrag (in Pixel) bei Nutzung der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression zur Sub-Pixel-Detektion mit einer Fenstergröße von  $3 \times 3$  Pixel im Falle elliptischer Korrelationsmaxima mit variablem Drehwinkel  $\alpha$  und verschiedenen numerischen Exzentrizitäten: (a)  $\varepsilon = 0,7454$ , (b)  $\varepsilon = 0,866$ , (c)  $\varepsilon = 0,9428$ , (d)  $\varepsilon = 0,9682$ .

größere numerische Exzentrizitäten  $\varepsilon$  an und kann schließlich bei  $\varepsilon = 0,9682$  nahezu einen Pixel betragen.

Um die bisherigen und in Abb. 4.9 und 4.10 sowie Tab. 4.1 dargestellten Ergebnisse weiter zu verifizieren, wurden die künstlich generierten Bildpaare mit den elliptischen Punktemustern und bekanntem Bildversatz mittels kommerzieller PIV-Softwarepakete ausgewertet. Bei diesen beiden Softwarepaketen, die im Weiteren mit † und ‡ bezeichnet werden, handelt es sich um PIVview (†) der Firma PIVTEC (siehe PIVTEC (2008)) und DaVis StrainMaster (‡) von LaVision<sup>1</sup>. Beide Softwarepakete wurden im Rahmen der PIV-Challenge 2 (siehe Stanislas u. a. (2005)) ausgiebig getestet und haben sich dabei hinsichtlich ihrer Performan-

<sup>1</sup><http://www.lavision.com/>

Tabelle 4.1: Übersicht des maximalen systematischen Fehlerbetrages (in Pixel) beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Falle beliebig verdrehter elliptischer Korrelationsmaxima.

$\Delta x$	$\Delta y$	$\varepsilon$	Blais-Rioux	Gauß (1D)	System. Fehler
			nach Gl. (3.16) bzw. (3.18)	nach Gl. (4.10)	nach Gl. (4.56)
			$\max_{\alpha}(\ \mathbf{d}_r^{ana}\ )$		
0,25	0,0	0,7454	0,1068	0,1041	0,104
0,25	0,25	0,7454	0,1307	0,136	0,1358
0,5	0,5	0,7454	0,2672	0,272	0,2716
0,25	0,0	0,866	0,1958	0,1873	0,1875
0,25	0,25	0,866	0,2016	0,2125	0,2125
0,5	0,5	0,866	0,4112	0,425	0,425
0,25	0,0	0,9428	0,3363	0,3328	0,334
0,25	0,25	0,9428	0,3416	0,3415	0,3423
0,5	0,5	0,9428	0,6851	0,683	0,6846
0,25	0,0	0,9682	0,4682	0,4675	0,4667
0,25	0,25	0,9682	0,4729	0,4717	0,4705
0,5	0,5	0,9682	0,9433	0,9435	0,9409

ce gegenüber den meisten Konkurrenten durchsetzen können. Die eindimensionale Gaußsche Regression wird in der Form des drei-Punkt-Schätzer von beiden kommerziellen Paketen angeboten, da es sich dabei um den im Allgemeinen gebräuchlichsten Sub-Pixel-Detektor handelt. Der in Tab. 4.2 zusammengefasste Vergleich zeigt, dass das mittels des Softwarepakets ‡ erzielte Ergebnis sehr gut mit der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers übereinstimmt. Allerdings scheint das Softwarepaket † für numerische Exzentrizitäten mit  $\varepsilon \leq 0,866$  zu einem überhöhten systematischen Fehler zu führen, während der Fehler für  $\varepsilon = 0,9682$  sogar leicht geringer ist als der Fehler gemäß der analytischen Berechnung. Beide Softwarepakete führen also mittels der eindimensionalen Gaußschen Regression zu einem wesentlichen systematischen Fehler, der ziemlich genau in der Größenordnung der analytischen Beschreibung aus Gl. (4.56) liegt.

In Tab. 4.3 wird ein ähnlicher Vergleich durchgeführt, aber es kommen der Schwerpunkteoperator (siehe Alexander und Ng (1991)) und die sinc-Interpolation (siehe Roesgen (2003)), die zur Sub-Pixel-Detektion im Softwarepaket † angeboten werden, zum Einsatz. Im Falle der sinc-Interpolation ist wiederum der Effekt zu beobachten, dass für numerische Exzentrizitäten mit  $\varepsilon \leq 0,866$  der systematische Fehler überschätzt wird.

Tabelle 4.2: Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels des drei-Punkt-Schätzers auf Basis der Gauß-Funktion der beiden kommerziellen PIV-Softwarepakete † und ‡ mit der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers. Der simulierte Bildversatz betrug dabei  $\Delta x = \Delta y = 0,5$  Pixel.

		Gauß (1D)†	Gauß (1D)‡	System. Fehler
$\varepsilon$	$\alpha$	$\ \mathbf{d}_r^{ana}\ $ nach Gl. (4.56)		
0,7454	10°	0,35	0,1635	0,1138
0,7454	20°	0,3813	0,2203	0,1996
0,7454	45°	0,4154	0,3442	0,272
0,8660	10°	0,4019	0,3025	0,2442
0,8660	20°	0,46	0,4371	0,3805
0,8660	45°	0,4965	0,4951	0,4243
0,9428	10°	0,523	0,5774	0,5566
0,9428	20°	0,6065	0,7182	0,683
0,9428	45°	0,5817	0,5886	0,5657

Das Auftreten eines systematischen Fehlers in dieser Größenordnung bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der idealen sinc-Interpolation führt zu der Annahme, dass die Implementierung der sinc-Interpolation im Softwarepakete † nur eindimensional vorliegt. Dies passt auch zu dem bereits in Abschnitt 3.3.2 auf Seite 72 angesprochenen Hinweis aus Raffel u. a. (2007), es würde reichen, die sinc-Interpolation jeweils eindimensional in Zeilen- und Spaltenrichtung durch das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion durchzuführen. Wie im Rahmen dieser Simulation gezeigt werden konnte, führt diese Vereinfachung zumindest im Falle allgemeiner beliebig verdrehter elliptischer Korrelationsmaxima zu einem wesentlichen systematischen Fehler.

Sowohl die eindimensionalen Implementierungen der Gaußschen Regression beider Softwarepakete als auch die sinc-Interpolation führen für alle untersuchten Fälle zu einem systematischen Fehler, der die zu erwartende Genauigkeit der Kreuzkorrelation inklusive der Sub-Pixel-Detektion von 0,1 bis 0,05 Pixel, wie sie in Raffel u. a. (2007) angegeben ist, deutlich übersteigt. Das insgesamt beste Ergebnis der Sub-Pixel-Detektion mittels der kommerziellen Softwarepakete ist durch den in † angebotenen Schwerpunktoperator mit  $9 \times 9$  Pixel gegeben. In Falle dieses Sub-Pixel-Detektors ist der systematische Fehler immer kleiner als 0,05 Pixel und erfüllt somit auch die Erwartungen an die Genauigkeit nach Raffel u. a. (2007).

Dieses gute Ergebnis, das mittels des Schwerpunktoperators erzielt wird, lässt sich sehr einfach damit erklären, dass es sich dabei um den einzigen zweidimensionalen Algorithmus des

Tabelle 4.3: Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels verschiedener Algorithmen des kommerziellen PIV-Softwarepakets † mit der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers. Der simulierte Bildversatz betrug dabei  $\Delta x = \Delta y = 0,5$  Pixel.

$\varepsilon$	$\alpha$	Schwerpunktoperator	Sinc-Interpolation (siehe Roesgen (2003))	System. Fehler $\ \mathbf{d}_r^{ana}\ $ nach Gl. (4.56)
0,7454	10°	0,0357	0,4239	0,1138
0,7454	20°	0,033	0,4524	0,1996
0,7454	45°	0,0247	0,4881	0,272
0,8660	10°	0,032	0,4421	0,2442
0,8660	20°	0,0413	0,4942	0,3805
0,8660	45°	0,0309	0,5383	0,4243
0,9428	10°	0,0441	0,528	0,5566
0,9428	20°	0,0518	0,6049	0,683
0,9428	45°	0,0276	0,6069	0,5657

Softwarepakets † handelt. Es werden in keiner Form Symmetrien der Korrelationsmaxima angenommen und daher liegt auch kein wesentlicher systematische Fehler bei der Sub-Pixel-Detektion vor. Der Schwerpunktoperator nutzt alle Werte innerhalb des zweidimensionalen Auswertefensters (hier  $9 \times 9$  Pixel) zur Sub-Pixel genauen Bestimmung des Maximums und ist daher in der Lage, auch mit beliebig verdrehten elliptischen Korrelationsmaxima ohne systematischen Einfluss umzugehen.

In Tab. 4.4 findet sich schließlich ein Vergleich des systematischen Fehlers bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der in Abschnitt 4.2 vorgestellten zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression mit dem iterativen nichtlinearen Ansatz von Ronneberger u. a. (1998). Zusätzlich ist noch die analytische Beschreibung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen angegeben, um die deutliche Verbesserung durch den hier vorgestellten Ansatz zu verdeutlichen. Es fällt sofort auf, dass beide Algorithmen in der Lage sind, mit beliebig verdrehten elliptischen Korrelationsmaxima umzugehen, ohne dabei irgendeinen signifikanten systematischen Fehler zu verursachen. Die Nutzung der linearen Gaußschen Regression aus Abschnitt 4.2 führt zu einem maximalen Fehler von 0,015 Pixel. Für den iterativen nichtlinearen Ansatz mittels des Levenberg-Marquardt Algorithmus ist der Fehler in jedem Fall kleiner als 0,04 Pixel und damit etwas höher als für den Fall der linearen Gaußschen Regression.

Für beide Algorithmen ist der systematische Fehler immer deutlich kleiner als die nach

Tabelle 4.4: Vergleich des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Sub-Pixel-Detektion mittels der in Abschnitt 4.2 vorgestellten zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression mit dem iterativen nichtlinearen Ansatz von Ronneberger u. a. (1998) und der analytischen Beschreibung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen. Der simulierte Bildversatz betrug dabei  $\Delta x = \Delta y = 0,5$  Pixel.

$\varepsilon$	$\alpha$	Gauß (2D, linear) (siehe Abschnitt 4.2)	Gauß (2D, nichtlinear)	System. Fehler $\ \mathbf{d}_r^{ana}\ $ nach Gl. (4.56)
0,7454	10°	0,0121	0,019	0,1138
0,7454	20°	0,01	0,0082	0,1996
0,7454	45°	0,0018	0,0093	0,272
0,8660	10°	0,0153	0,0222	0,2442
0,8660	20°	0,0114	0,0263	0,3805
0,8660	45°	0,0008	0,0043	0,4243
0,9428	10°	0,0133	0,0084	0,5566
0,9428	20°	0,011	0,0066	0,683
0,9428	45°	0,0021	0,0392	0,5657

Raffel u. a. (2007) zu erwartende Genauigkeit der Sub-Pixel-Detektion von 0,1 bis 0,05 Pixel. Es konnte also gezeigt werden, dass das Ergebnis der in Abschnitt 4.2 vorgestellten linearen Gaußschen Regression sehr ähnlich zu dem des iterativen Ansatzes von Ronneberger u. a. (1998) ist. Dies entspricht der für den eindimensionalen Fall gemachten Aussage aus Curless (1997), das Ergebnis einer direkten Parameterschätzung der Messdaten auf die Gauß-Funktion mittels eines iterativen Ansatzes sei gleich, verglichen mit dem mittels der Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die Gauß-Funktion und die anschließende lineare Schätzung der Koeffizienten einer so entstandenen quadratischen Funktion (siehe Abschnitt 4.2 auf Seite 80), die hiermit auf den zweidimensionalen Fall erweitert werden konnte.

Da der im Rahmen dieser Arbeit erstmals vorgestellte Ansatz der allgemeinen zweidimensionalen linearen Gaußsche Regression deutlich eleganter und viel einfacher zu implementieren ist als das Verfahren von Ronneberger u. a. (1998) und andere Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion im Allgemeinen zu großen systematischen Fehlern führen, sollte dieser Ansatz sinnvollerweise für sämtliche korrelationsbasierte Anwendungen, in denen ellipsenförmige Korrelationsmaxima nicht ausgeschlossen werden können, zum Einsatz kommen.

## 4.4 Single-Pixel-Ensemble-Korrelation

Im Folgenden soll der Ansatz der Single-Pixel-Ensemble-Korrelation (englisch: *Single Pixel Ensemble Correlation*, SPEC), auf den bereits in Abschnitt 3.2.3 hingewiesen wurde, genauer erläutert werden. Diese neue Korrelationsmethode, die von Westerweel u. a. (2002, 2004) erstmals beschrieben wird, ermöglicht es, Verschiebungsfelder mit einer räumlichen Auflösung von einem Pixel zu berechnen. Für diese deutliche Erhöhung der räumlichen Auflösung werden allerdings mehrere Bildpaare eines zufälligen Punktemusters benötigt, wodurch sich diese Methode, analog zur herkömmlichen Ensemble-Korrelation (siehe Abschnitt 3.2.3), nur auf stationäre oder periodische Vorgänge anwenden lässt. Für Messtechniken wie PIV stellt dies zwar eine deutliche Einschränkung dar, für Form- bzw. Deformationsmesstechniken wie PROPAC oder REPAC sind diese Voraussetzungen allerdings fast immer erfüllt.

Die räumliche Auflösung von einem Pixel ermöglicht es, Verschiebungsfelder mit großen Gradienten räumlich sehr genau und ohne systematischen Fehler aufzulösen. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, entsteht durch die Verschiebungsgradienten innerhalb eines räumlichen Auswertefenster bei der herkömmlichen Korrelationsmethode ein systematischer Fehler. Nach Westerweel u. a. (2004) besteht zwischen dem herkömmlichen Ansatz der Kreuzkorrelation mittels räumlicher Auswertefenster und der SPEC ein fundamentaler Unterschied.

Der Ansatz der SPEC kann nach Westerweel u. a. (2004) als eine extreme Implementierung der herkömmlichen Ensemble-Korrelation verstanden werden, bei der die kleinste Auswertefenstergröße einen Pixel beträgt. Im Gegensatz zur herkömmlichen Korrelationsmethode besteht keine Beschränkung des Eindeutigkeitsbereichs für die gemessene Verschiebung. Das  $1 \times 1$  Pixel große Auswertefenster der SPEC-Methode kann im Prinzip über das gesamte Bild verschoben werden und somit eine entsprechend große Korrelationsfunktion ergeben. In der Praxis bietet es sich natürlich an, den Suchbereich geeignet zu limitieren.

In Westerweel u. a. (2004) wurde eine Untersuchung der Leistungsfähigkeit des SPEC-Ansatzes mittels künstlich erzeugter Bildpaare für unterschiedlich viele Bildpaare durchgeführt. Ziel ist es dabei unter Anderem auch, die These, dass  $1 \times 1$  Pixel große Auswertefenster bei  $N = 1024$  Bildpaaren gleichviel Informationsgehalt besitzen als  $32 \times 32$  Pixel große Auswertefenster bei einem ( $N = 1$ ) Bildpaar, zu überprüfen.

Mittels eines numerischen Experiments wurden insgesamt 8192 Bildpaare eines zufälligen Punktemusters einer Strömung in der Umgebung eines Staupunktes<sup>2</sup> berechnet (siehe Westerweel u. a. (2004)). Die von Westerweel u. a. (2004) mittels der SPEC-Methode berechneten Ergebnisse des Verschiebungsfeldes in der Umgebung des Staupunktes sind in Abb. 4.17 dargestellt. Sofort fällt auf, dass die Qualität und Zuverlässigkeit des Ergebnisses mit steigender

---

<sup>2</sup>Der Staupunkt (englisch: *stagnation point*) ist der Oberflächenpunkt eines angeströmten Körpers, an dem das strömende Fluid senkrecht auftrifft. Im Staupunkt verschwindet die Geschwindigkeit der Strömung und die zugehörige Stromlinie endet dort.

Anzahl der verwendeten Bildpaare zunimmt. Allerdings bleiben die Trajektorien der einzelnen Partikel des Punktemusters in Form von Rillen in jedem in Abb. 4.17 gezeigten Fall sichtbar.

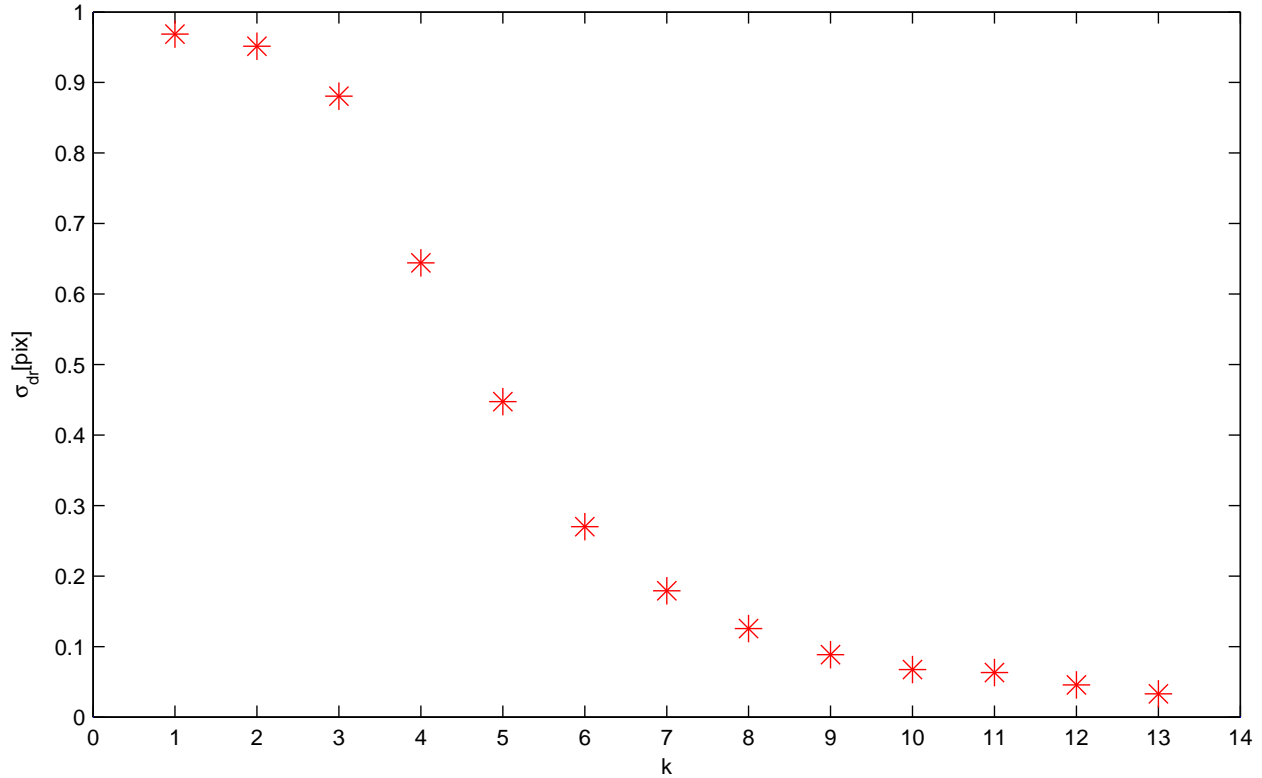


Abbildung 4.16: Standardabweichung des radialen Fehlers (in Pixel) gegenüber einem vorgegebenen Verschiebungsfeld für den optimierten SPEC-Algorithmus mit  $N = 2^k$  Bildpaaren.

Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit entstand eine eigene Implementierung der SPEC-Methode. Das Ziel war es dabei, die räumliche Auflösung in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik zu erhöhen. Geht man von einer Auswertefenstergröße von  $32 \times 32$  Pixel aus, das entspricht bisher dem Standard des herkömmlichen Ansatzes der räumlichen Kreuzkorrelation, so stellt die SPEC-Methode eine Verbesserung der räumlichen Auflösung um den Faktor 1024 dar. Der optimierte SPEC-Algorithmus unterscheidet sich von dem in Westerweel u. a. (2004) vorgestellten Ansatz in zwei wesentlichen Punkten:

- das zufällige Punktemuster jedes Bildpaares ist statistisch unabhängig von allen anderen Bildpaaren des Ensembles,

- die Sub-Pixel-Detektion des Maximums in der Ensemble-Korrelationsfunktion erfolgt mittels der in Abschnitt 4.2 vorgestellten allgemeinen zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression.

Wendet man diesen optimierten SPEC-Algorithmus auf insgesamt 8192 künstliche Bildpaare an, die mittels den in Westerweel u. a. (2004) angegebenen Formeln für das Verschiebungsfeld in der Umgebung des Staupunktes berechnet worden sind, so ergibt sich das in Abb. 4.18 dargestellte Ergebnis. Auch hier steigt natürlich die Qualität und Zuverlässigkeit des Ergebnisses des Verschiebungsfeldes mit steigender Anzahl der verwendeten Bildpaare an. Zwei weitere Dinge fallen aber beim Vergleich von Abb. 4.17 und Abb. 4.18 auf. Die in der Implementierung der SPEC von Westerweel u. a. (2004) aufgetretenen Rillen kommen in dem optimierten SPEC-Algorithmus nicht mehr vor, da statistisch unabhängige Punktemuster zum Einsatz kamen. Außerdem ist, zumindest für 8 bzw. 16 Bildpaare, die Anzahl gültiger Messergebnisse des optimierten SPEC-Algorithmus deutlich höher. Die Vermutung liegt nahe, dass dies aufgrund des allgemeinen zweidimensionalen Ansatzes zur Sub-Pixel-Detektion beruht.

Bisher wurde die Verbesserung von Qualität und Zuverlässigkeit bei steigender Anzahl für die SPEC verwendeter Bildpaare nur auf eine qualitative Weise betrachtet. Wir vergleichen daher nun das mittels des optimierten SPEC-Algorithmus berechnete Verschiebungsfeld in der Umgebung des Staupunktes mit dem vorgegebenen Verschiebungsfeld aufgrund der in Westerweel u. a. (2004) angegebenen Formeln. Da diese Formeln ja auch für die Berechnung der künstlichen Bilder verwendet wurden, sollte die Differenz zwischen beiden Verschiebungsfeldern mit steigender Anzahl verwendeter Bildpaare verschwinden. In Abb. 4.16 findet sich die Standardabweichung dieser Differenz in radialer Richtung unter Berücksichtigung von  $N = 2^k$  Bildpaaren. Die Konvergenz des mittels des optimierten SPEC-Algorithmus erzielten Ergebnisses ist gut zu erkennen. Eine Genauigkeit zwischen 0,1 und 0,05 Pixel, wie sie nach Raffel u. a. (2007) in der PIV-Messtechnik mittels räumlicher Kreuzkorrelation und bei  $32 \times 32$  Pixel großer Auswertefenster erzielbar ist, kann bereits ab  $N = 512$  Bildpaaren erzielt werden. Die zu Beginn dieses Abschnitts angesprochene These, dass  $1 \times 1$  Pixel große Auswertefenster bei einer entsprechenden Anzahl von Bildpaaren gleichviel Informationsgehalt besitzen können wie  $32 \times 32$  Pixel große Auswertefenster bei einem Bildpaar, konnte mit dieser Simulation also bestätigt werden.



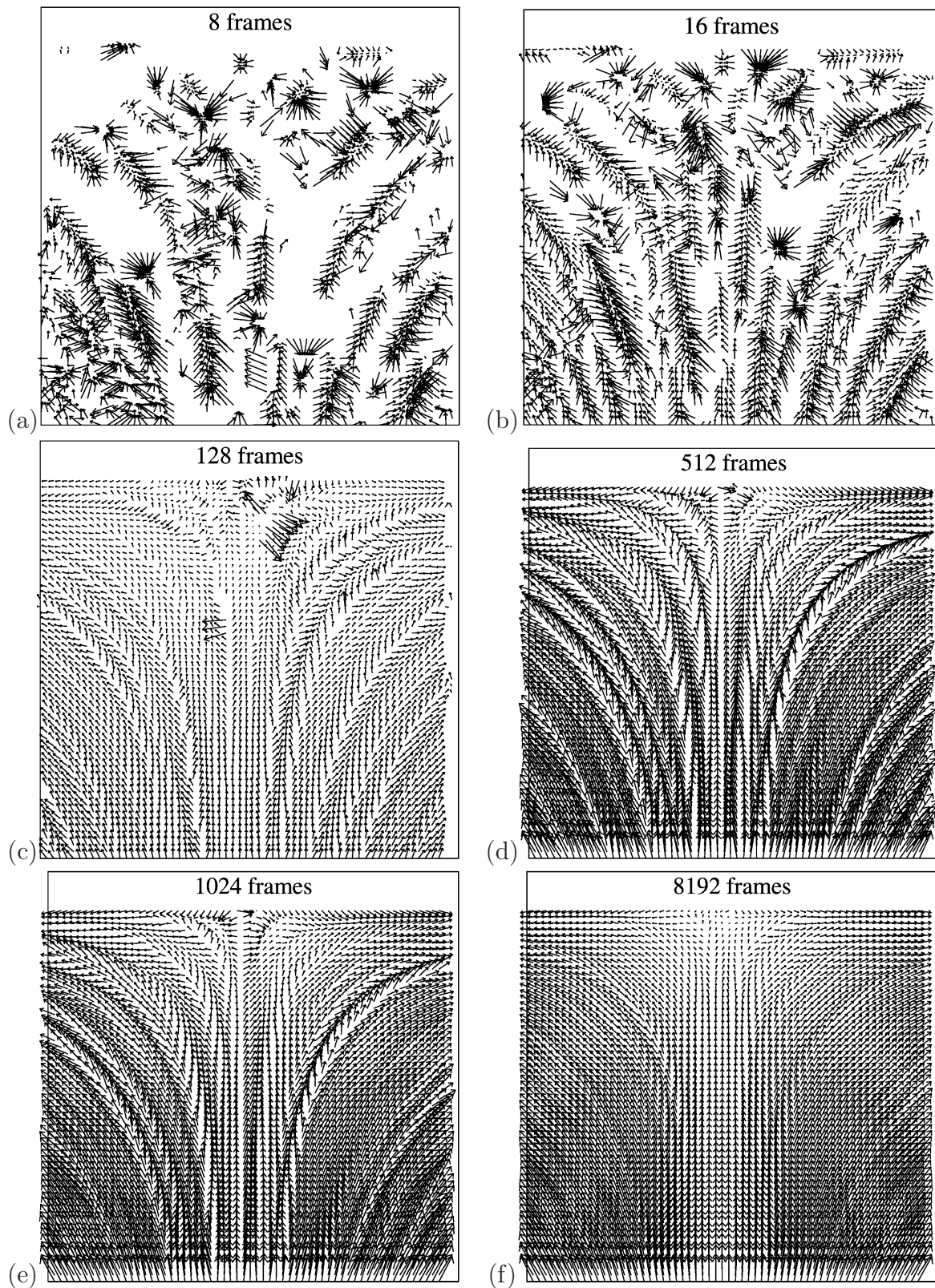


Abbildung 4.17: Ergebnisse aus Westerweel u. a. (2004) mittels der SPEC-Methode für: (a) 8 Bildpaare, (b) 16 Bildpaare, (c) 128 Bildpaare, (d) 512 Bildpaare, (e) 1024 Bildpaare, (f) 8192 Bildpaare.

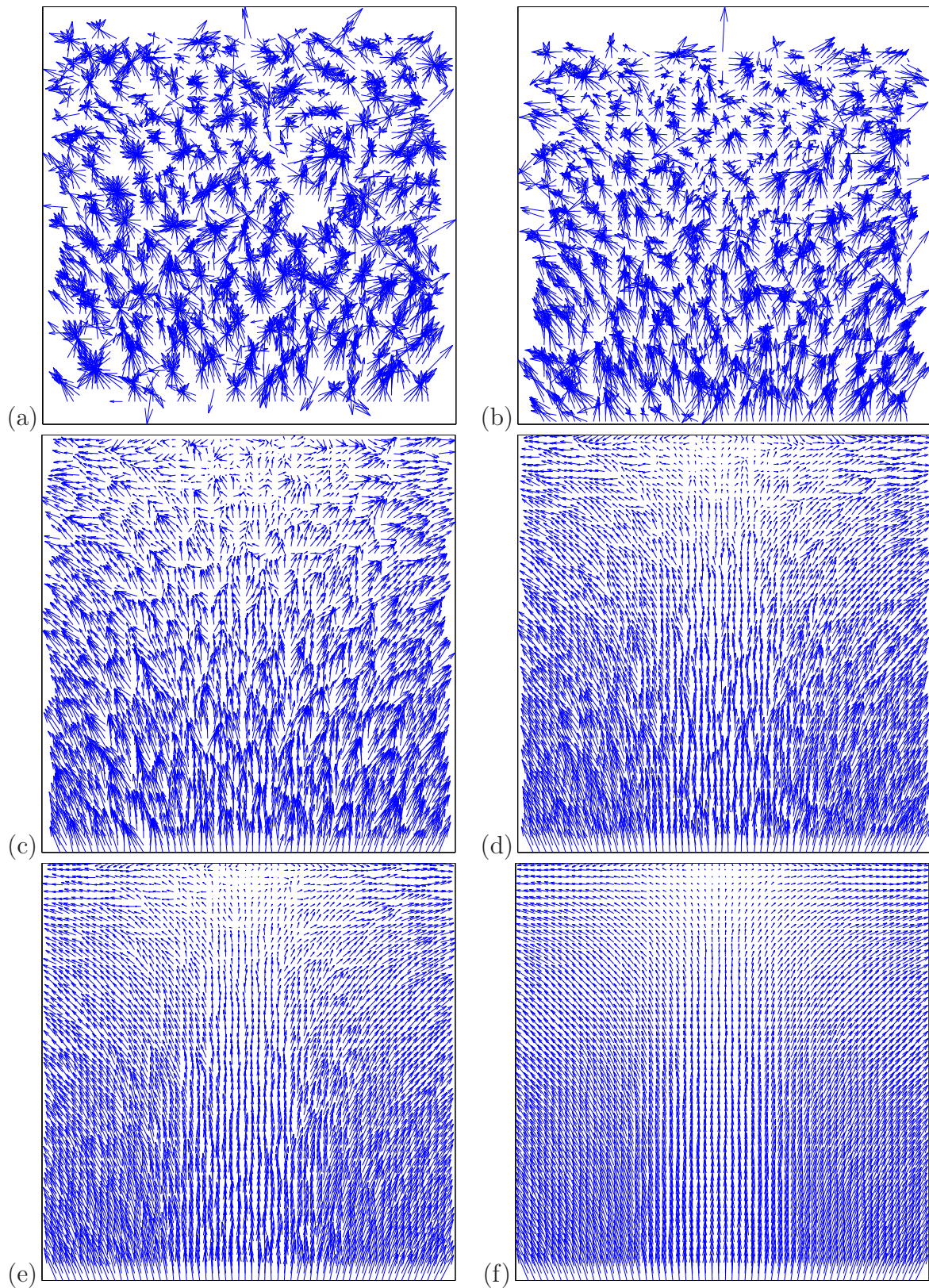


Abbildung 4.18: Ergebnis mittels des optimierten SPEC-Algorithmus für: (a) 8 Bildpaare, (b) 16 Bildpaare, (c) 128 Bildpaare, (d) 512 Bildpaare, (e) 1024 Bildpaare, (f) 8192 Bildpaare.



## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In der hier vorliegenden Arbeit wurden zunächst die verschiedenen optischen korrelationsbasierten Messtechniken beschrieben. Mit dem PROPAC-Verfahren wurde dabei eine Technik zur Vermessung der Deformation von diffus reflektierende Oberflächen vorgestellt, die eine sehr geringe Messdauer von nur einer Bildaufnahme aufweist. Da es sich zusätzlich um eine relative Messung handelt und somit Abweichungen bzw. Deformationen direkt messbar sind, ist dieses Verfahren in der Lage, die Anforderungen der Industrie hinsichtlich einer prozessintegrierten 100-Prozent-Kontrolle zu erfüllen. Auf gerichtet reflektierenden Oberflächen kann dagegen die REPAC-Messtechnik angewendet werden. Diese Messtechnik besitzt gegenüber den sonst eingesetzten deflektometrischen Verfahren den Vorteil, dass die Eindeutigkeit bei der Korrespondenzanalyse auch im Falle von mehrfachen Reflexionen, z.B. an Glasoberflächen, nicht verloren geht. Sowohl die PROPAC als auch die REPAC-Messtechnik wurden am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen entwickelt.

Neben den verschiedenen Messtechniken wurden auch die dabei zur Anwendung kommenden Auswertetechniken beschrieben. Probleme und Limitierungen, die z.B. durch den Einsatz der FFT in den Kreuzkorrelationsalgorithmen entstehen, wurden aufgezeigt. Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass die räumlichen Auswertefenster der Kreuzkorrelation wie eine robuste Filterung wirken und nicht als räumliche Mittelung, wie dies in der Literatur oft angegeben wird.

Im Rahmen der Arbeit wurde auch erklärt, wie die Suche des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion Sub-Pixel genau erfolgen kann. Die Algorithmen, die dies ermöglichen, sind daher der kritische Faktor hinsichtlich der in der optischen korrelationsbasierten Messtechnik erzielbaren Genauigkeit. Typischerweise kann mit einer Sub-Pixel-Messgenauigkeit in der Größenordnung von 0,1 bis 0,05 Pixel gerechnet werden.

Im Bereich der Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion wurde zunächst prinzipiell zwischen ein- und zweidimensionalen Algorithmen unterschieden. Insbesondere durch den hier vorgestellten allgemeinen linearen zweidimensionalen Algorithmus zur Sub-Pixel-Detektion konnte eine deutliche Weiterentwicklung gegenüber den bisher verfügbaren Ansätzen erzielt werden. In bisherigen kommerziellen Softwarepaketen zur Kreuzkorrelation kommen meist eindimensionale Algorithmen zum Einsatz. Da aufgrund der Geometrie bei der PROPAC-Messanordnung elliptische Korrelationsmaxima entstehen, wurde in dieser Arbeit der systematische Fehler der eindimensionalen Algorithmen im Falle elliptischer Korrelationsmaxima genau untersucht.

Es konnte auch eine analytische Beschreibung dieses systematischen Fehlers hergeleitet werden. Im Rahmen einer numerischen Simulation konnte gezeigt werden, dass der hier vorgestellte allgemeine lineare zweidimensionale Algorithmus keinen systematischen Fehler besitzt. Im Falle elliptischer Korrelationsmaxima liefert er eine bis zu 1000 mal höhere Genauigkeit als herkömmliche eindimensionale Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion. Der maximale Fehler des allgemeinen linearen zweidimensionalen Algorithmus betrug nie mehr als 0,015 Pixel. Obwohl die ursprüngliche Motivation zur Weiterentwicklung der Sub-Pixel-Algorithmen in der Geometrie der PROPAC-Messanordnung begründet liegt, lässt sich der allgemeine lineare zweidimensionale Sub-Pixel-Detektor selbstverständlich auch für alle anderen optischen korrelationsbasierten Messtechniken einsetzen.

Durch den Einsatz einer verbesserten Implementierung des SPEC-Algorithmus konnte eine räumliche Auflösung von einem Pixel erzielt werden. Geht man von einer herkömmlichen Berechnung der Kreuzkorrelation mittels  $32 \times 32$  Pixel großer Auswertefenster aus, so entspricht dies einer Verbesserung um den Faktor 1024 im Zweidimensionalen. Diese deutliche Steigerung der räumlichen Auflösung lässt sich allerdings nur für statische oder periodische Vorgänge erzielen.

Insgesamt wurde also die optische korrelationsbasierte Messtechnik hinsichtlich Genauigkeit, Robustheit und räumlicher Auflösung deutlich verbessert.

Zukünftige Untersuchungen könnten das Ziel haben, den Einfluss von Rauschen in den zu korrelierenden Bildern auf die Leistungsfähigkeit der unterschiedlichen Sub-Pixel-Detektoren detailliert zu analysieren. Hinsichtlich einer möglichst vollautomatischen Datenauswertung wären auch Algorithmen zur Sub-Pixel-Detektion wünschenswert, die sich selbst adaptiv an die Breite des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion anpassen und somit nur die signifikanten Werte der Kreuzkorrelationsfunktion zur Berechnung der Sub-Pixel genauen Position des Maximums berücksichtigen.

# Anhang

## A.1 Ausgleichungsrechnung

Nach Grafarend und Schaffrin (1993) versteht man unter Ausgleichungsrechnung die *Schätzung von Parametern in linearen Modellen*. Es gibt zwar im Prinzip drei verschiedene Ansätze der Parameterschätzung, allerdings kann in der Praxis fast immer das hier im Folgenden dargestellte Gauß<sup>1</sup>-Markov<sup>2</sup>-Modell angewendet werden. In sehr speziellen Anwendungen ist es manchmal notwendig, auf den Allgemeinfall der Ausgleichung, das so genannte Gauß-Helmert-Modell, oder auf robuste Schätzverfahren zurückzugreifen. Auf die beiden letzteren Verfahren wird hier nicht weiter eingegangen, sondern auf entsprechende Fachliteratur (z.B. Niemeier (2002)) verwiesen.

Das hier im Folgenden beschriebene Ausgleichungsmodell ist allgemein unter dem Namen Gauß-Markov-Modell bekannt. Es wurde ursprünglich von C. F. Gauß vermutlich im Jahr 1797 entwickelt (Niemeier (2002)), allerdings erst im Jahr 1809 publiziert (Gauß (1809)). Gauß bezeichnete sein Schätzmodell als *Methode der kleinsten Quadrate* (MdkQ). In englischer Literatur findet man meist den Begriff *Least Squares Estimation* (LSE). Diesem Ausgleichungsmodell liegt der nach C. F. Gauß und A. A. Markov benannte Satz, der so genannte Gauß-Markov-Satz, zugrunde. Der Satz besagt, dass die Schätzung nach der MdkQ die *beste, lineare, unverzerrte Schätzung* (englisch: Best Linear Unbiased Estimator, BLUE) darstellt, falls die zufälligen Fehler der Beobachtungen unkorreliert sind und einen Erwartungswert von Null haben. In der Praxis treten bei einer Messung immer Messfehler auf. Diese können sowohl durch die limitierte Präzision des Messgerätes als auch durch subjektive Ables- oder Einstellfehler entstehen. Die Ausgleichungsrechnung erlaubt es, aus diesen fehlerhaften Messwerten Schätzwerte für die zu messenden Größen zu bestimmen und zusätzlich eine Aussage über deren Genauigkeit zu ermöglichen.

Ein sehr einfaches und daher anschauliches Beispiel ist die Bestimmung einer Gerade aus gegebenen Punkten. Dieses Problem ist in Abbildung A.1 dargestellt und tritt zum Beispiel bei der Bestimmung einer linearen Kalibrierfunktion eines Messgerätes auf. Das Vorgehen,

---

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauß: Geboren am 30. April 1777 in Braunschweig, gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen. Deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker; gilt als einer der größten Gelehrten seiner Zeit.

<sup>2</sup>Andrei Andrejewitsch Markov: Geboren am 14. Juni 1856 in Rjasan, gestorben am 20. Juli 1922 in Petrograd, russischer Mathematiker, auf den wesentliche Beiträge in der Statistik u.a. der Markov-Prozess und die Markov-Ketten zurückgehen.

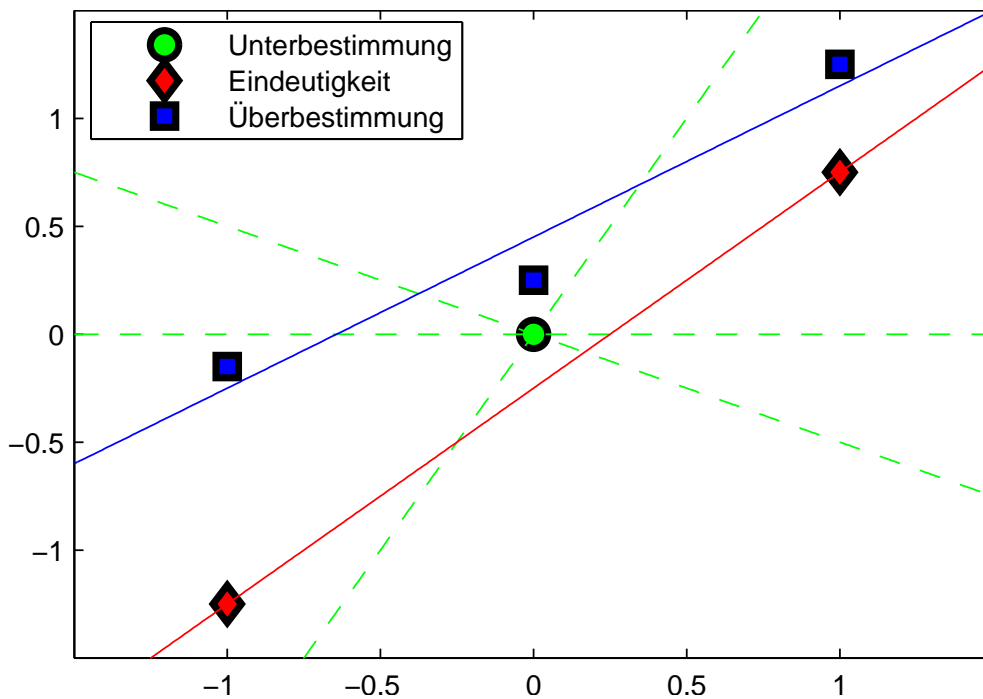


Abbildung A.1: Darstellung der drei Ausgleichsszenarien: Eindeutigkeit, Überbestimmung und Unterbestimmung.

aus gemessenen Daten funktionale Zusammenhänge herzustellen, wird als Regression bezeichnet. In diesem Beispiel werden aus den gegebenen Punkten die funktionalen Parameter einer Geraden bestimmt. Es ist sofort ersichtlich, dass dabei grundsätzlich drei Fälle auftreten können:

- Bei einem einzelnen Punkt gibt es unendlich viele Möglichkeiten, eine Gerade durch diesen Punkt zu bestimmen. Es liegt also eine Unterbestimmung vor, die nur mit Hilfe mindestens einer zusätzlichen Bedingung eindeutig gelöst werden kann.
- Der eindeutig bestimmte Fall, wenn genau zwei Punkte vorliegen. Die Berechnung in diesem Fall ist trivial.
- Es existieren drei oder mehr Punkte, die im Allgemeinen nicht exakt auf einer Geraden liegen. Man spricht von Überbestimmung; die Gerade muss also optimal eingepasst werden. Das ist der Fall, an dem die eigentliche Ausgleichsrechnung ansetzt. Wie genau eine *optimale* Schätzung der Geraden erreicht wird, die dennoch gleichzeitig alle Beobachtungen verwendet, soll im Weiteren noch detailliert erläutert werden.

Wir wollen im Folgenden nur noch den Fall der Überbestimmung betrachten, also wenn mehr Beobachtungen als zu bestimmende Parameter vorliegen. Des Weiteren sollen auch alle Beobachtungen gleichzeitig für die Schätzung verwendet werden. Das Schätzverfahren, das

sich dadurch ergibt, ist eindeutig, statistisch optimal und lässt zusätzlich eine Beurteilung des Endergebnisses hinsichtlich Qualität und Zuverlässigkeit zu.

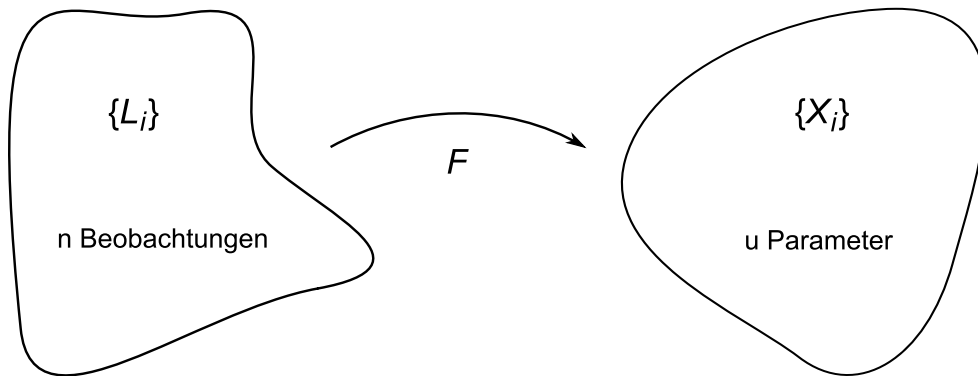


Abbildung A.2: Mengendarstellung der Ausgleichungsaufgabe nach Niemeier (2002).

In Abbildung A.2 ist der funktionale Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den zu schätzenden Parametern in Mengendarstellung zu sehen. Das Prinzip der Ausgleichsrechnung besteht also in der Suche einer Abbildung, die die Menge der Beobachtungen auf die Menge der Parameter abbildet. Dies macht natürlich nur dann Sinn, wenn ein sachlich logischer Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Parametern besteht. Es soll hervorhoben werden, dass sich hierbei die verschiedenen Beobachtungen hinsichtlich ihrer Art und Genauigkeit durchaus voneinander unterscheiden können.

Die funktionale Beziehung der parametrischen Ausgleichung

$$L_i \sim f_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_u) \quad (\text{A.1})$$

stellt jeweils eine Beobachtung  $L_i$  in Beziehung zu allen durch das Modell eingeführten Parametern  $X_i$ . Für diese Parameter sollen im Weiteren optimale Schätzwerte gefunden werden. Da alle Beobachtungen  $L_i$  immer mit einer Messunsicherheit behaftet, also nicht fehlerfrei, sind, ist dieser funktionale Zusammenhang so nicht exakt erfüllt. Daher erhalten die beobachteten Größen im Ausgleichungsmodell eine Verbesserung  $v_i$ , um der Fehlerbehaftung Rechnung zu tragen. Man schreibt also für das funktionale Modell

$$L_i + v_i = f_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_u). \quad (\text{A.2})$$

Für das Beispiel der Geradenbestimmung aus drei Punkten ergibt sich

$$L_i + v_i = a_0 + x_i a_1 \quad , i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.3})$$

wobei  $a_1$  den zu schätzenden Steigungsparameter der Geraden und  $a_0$  den y-Achsen-Abschnitt bezeichnet.

Leider kommen in der Praxis nur selten lineare Beziehungen zwischen Messgrößen und Parametern vor. Zum Beispiel stellt die Berechnung von Strecken und Winkeln aus gemessenen Koordinaten jeweils eine nichtlineare Beziehung dar.

$$s_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\varphi_{ij} = \arctan\left(\frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)}\right) \quad (\text{A.5})$$

Da der hier behandelte Fall der Parameterschätzung lineare Beziehungen voraussetzt, müssen die Beobachtungsgleichungen gegebenenfalls linearisiert werden.

Nach Taylor kann man den Funktionswert  $f$  an einer Stelle  $X_0 + x$  durch eine Reihenentwicklung (Taylorentwicklung) approximieren, falls die Funktion  $f^0$  in  $X_0$  bekannt ist und der Fortschritt  $x$  klein beziehungsweise der Funktionsverlauf hinreichend gleichmäßig ist.

$$f(X_0 + x) = f(X_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} \cdot x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_{X_0} \cdot x^2 + O^3 \quad (\text{A.6})$$

Um eine Linearisierung zu erreichen, muss die Reihenentwicklung auf Glieder 1. Ordnung, also auf die 1. Ableitung, beschränkt werden. Damit der Fehler dieser Approximation nicht zu groß wird, muss  $X_0$  hinreichend nah am wahren Wert  $X$  liegen.

Das funktionale Modell aus Gleichung (A.2) hat nach durchgeführter Linearisierung somit die Form

$$L_i + v_i = f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_u^0) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right|_{X_0} \cdot \hat{x}_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right|_{X_0} \cdot \hat{x}_2 + \dots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_u}\right|_{X_0} \cdot \hat{x}_u. \quad (\text{A.7})$$

Mittels folgender Abkürzung für die partiellen Ableitungen

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{X_0} \quad (\text{A.8})$$

ergibt sich bei  $n$  Beobachtungen und  $u$  zu schätzende Parameter die  $n \times u$ -Design- oder Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Für die Parameter in Vektordarstellung gilt nach der Linearisierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{x}, \quad (\text{A.10})$$



wobei sich die ausgeglichenen Parameter  $\mathbf{X}$  aus den nicht-stochastischen Näherungswerten  $\mathbf{X}^0$  und den eigentlich im linearisierten Ausgleichsmodell bestimmten, stochastischen Koordinatenzuschlägen  $\mathbf{x}$  zusammensetzen. Diese Darstellung gilt analog für die Beobachtungen

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{l}, \quad (\text{A.11})$$

wobei  $\mathbf{l}$  den verkürzten (linearisierten) Beobachtungsvektor bezeichnet. Damit ergibt sich die finale linearisierte Form des funktionalen Modells in Matrixdarstellung

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (\text{A.12})$$

Besteht zwischen den Beobachtungen und den gesuchten Parametern ein linearer Zusammenhang, so wie z.B. bei der linearen Regression, so können die Beobachtungen  $\mathbf{l}$  direkt in Gleichung A.12 eingesetzt und die Gleichung einmalig ausgewertet werden. Ist der Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Parametern nichtlinear, so muss zunächst eine Linearisierung erfolgen und Gleichung (A.12) ist jeweils mit dem verkürzten Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}$  aus Gleichung (A.11) mehrmals iterativ zu durchlaufen.

Die Forderung der MdkQ lautet nun, dass eine optimale Lösung erreicht wird, wenn die Summe der Quadrate der Verbesserungen minimiert wird. Damit ergibt sich die Zielfunktion der MdkQ zu:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} \rightarrow \min. \quad (\text{A.13})$$

Da diese Zielfunktion auch als  $L_2$ -Norm bezeichnet wird, kann die MdkQ auch als Parameterschätzung nach der  $L_2$ -Norm aufgefasst werden. Alternativ sind auch andere Zielfunktionen für die Parameterschätzung möglich, u.a. die  $L_1$ -Norm (führt zu einem robusten Schätzverfahren), die  $L_3$ -Norm oder die  $L_\infty$ -Norm (dann auch als Tschebyschow<sup>3</sup>-Ausgleichung bezeichnet).

Um den optimalen Schätzer nun zu bestimmen, setzt man in die Zielfunktion bzw. die Minimierungsbedingung (Gleichung (A.13)) den Modellansatz (Gleichung (A.12)) ein und erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{l}^T)(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) \rightarrow \min \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{l}^T \mathbf{l} \rightarrow \min \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \mathbf{l} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Da das Minimum von  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  gesucht wird, muss der obige Ausdruck nach der Variablen  $\mathbf{x}$  abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{v}^T \mathbf{v}) &= d\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} - 2d\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\ &= 2d\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - 2d\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\ &= 2d\hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

---

<sup>3</sup>Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow: Geboren am 26. Mai 1821 in Okatowo, gestorben am 8. Dezember 1894 in Sankt Petersburg, russischer Mathematiker.

Diese Ableitung ist nur dann Null, wenn der in Klammern stehende Ausdruck  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{1}$  aus Gleichung (A.15) zu Null wird. Es entsteht also folgender Ausdruck für eine optimale Schätzung von  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{1} \quad (\text{A.17})$$

und schließlich die endgültige Berechnungsformel des geschätzten Parametervektors

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{1}. \quad (\text{A.18})$$

Wichtig ist dabei, dass die Inverse  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$  existieren muss, damit Gleichung (A.18) gelöst werden kann. Dies setzt eine spaltenreguläre Matrix  $\mathbf{A}$  voraus.

In der hier bisher vorgestellten Schätzung der Parameter wurden alle Beobachtungen aus Vereinfachungsgründen als gleich genau angenommen. Sind allerdings für die Beobachtungen Genauigkeitsinformationen und möglicherweise noch Korrelationen bekannt, so lässt sich die  $(n, n)$ -Kovarianzmatrix der Beobachtungen wie folgt aufstellen:

$$\Sigma_{ll} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 & \cdots & \rho_{1n} \sigma_1 \sigma_n \\ \rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n} \sigma_2 \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} \sigma_n \sigma_1 & \rho_{n2} \sigma_n \sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Die Kovarianzmatrix beinhaltet auf ihrer Hauptdiagonalen die Varianzen  $\sigma_i^2$  der Beobachtungen  $l_i$  und auf den Nebendiagonalelementen die Korrelationen  $\rho_{ij}$  zwischen den Beobachtungen  $l_i$  und  $l_j$ .

Diese a priori Informationen sind meist nicht vollständig bekannt, daher kann in den meisten Fällen auf die Korrelationen zwischen den einzelnen Beobachtungen verzichtet werden und die Kovarianzmatrix vereinfacht sich zu folgender Diagonalmatrix:

$$\Sigma_{ll} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Eine weitere Vereinfachung wäre es, für alle Beobachtungen dieselbe Genauigkeit anzunehmen:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2. \quad (\text{A.21})$$

Dieser Ansatz setzt natürlich Beobachtungen vom gleichen Typ, die zusätzlich noch als gleich genau angenommen werden können, voraus. Die Kovarianzmatrix ergibt sich für diesen Fall zu

$$\Sigma_{ll} = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_n, \quad (\text{A.22})$$

wobei  $\mathbf{I}_n$  die Einheitsmatrix der Größe  $n$  ist. Die Erweiterung der oben beschriebenen Parameterschätzung um die bekannten oder angenommenen Kovarianzinformationen erfordert zunächst die Einführung der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \Sigma_{ll}^{-1}. \quad (\text{A.23})$$

Diese dient dazu, Beobachtungen mit einer hohen Genauigkeit, also mit einer niedrigen Varianz, ein hohes Gewicht im Prozess der Parameterschätzung zuzugestehen und umgekehrt. Selbstverständlich kann die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  auch für eine spezielle, nicht direkt an die Genauigkeiten der Beobachtungen angelehnte Gewichtung verwendet werden.

Durch die Einführung einer Gewichtsmatrix ändert sich die Minimierungsbedingung aus Gleichung (A.13) zu

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min, \quad (\text{A.24})$$

und die Gleichung (A.18) für die Schätzung der Parameter lautet nun

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (\text{A.25})$$

Eine Parameterschätzung nach der MdkQ, wie sie hier vorgestellt wurde, lässt sich auf beliebige über- oder gleichbestimmte Probleme anwenden. Es muss keine Aussage über die statistische Verteilung der Beobachtungen gemacht werden. Es wurde aber von R. A. Fisher<sup>4</sup>, vermutlich um das Jahr 1920, gezeigt, dass die MdkQ eine *Maximum Likelihood*-Schätzung darstellt, falls die Beobachtungen normalverteilt sind oder ihre Verteilung nur sehr gering von der Normalverteilung abweicht. Muss damit gerechnet werden, dass die Beobachtungen einer unbekannt, der Normalverteilung nicht ähnlichen Verteilung folgen, so sollten robuste Schätzverfahren verwendet werden, da ein einzelner grober Fehler das Schätzergebnis bei Anwendung der MdkQ sehr stark beeinflussen kann.

Bereits zu Beginn dieses Abschnitt wurde der Vorteil der Ausgleichsrechnung genannt, neben der optimalen Schätzung der Parameter zusätzlich noch deren Qualitätsmaße zur Verfügung zu stellen. In der Statistik wird zur Beschreibung der Genauigkeit einer vektoriellen Größe die Kovarianzmatrix verwendet. Für die mittels der Ausgleichsrechnung geschätzten Parameter erhält man die Kovarianzmatrix  $\Sigma_{xx}$  durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungs-Gesetzes auf Gleichung (A.25)

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Sigma_{ll} \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ \Sigma_{xx} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

---

<sup>4</sup>Ronald Aylmer Fisher: Geboren am 17. Februar 1890 in London, gestorben am 29. Juli 1962 in Adelaide. Bedeutender britischer Statistiker und Biologe. Auf ihn geht das Maximum-Likelihood-Prinzip und die nach ihm benannte F-Verteilung zurück.

Somit stehen die Genauigkeiten und Korrelationen der geschätzten Parameter zur Verfügung. Mittels statistischer Testverfahren, so genannter Hypothesentests, lassen sich auch noch die Zuverlässigkeit beziehungsweise die Signifikanz der geschätzten Parameter bestimmen. Für die Durchführung der Hypothesentests sei auf Standardliteratur wie Witte und Schmidt (2000) oder Niemeier (2002) verwiesen.

# Literaturverzeichnis

- [Ackermann 1983] ACKERMANN, F.: High precision digital image correlation. In: *Proc. 39. Photogrammetrische Woche*. Stuttgart, Germany, 1983
- [Ackermann 1984] ACKERMANN, F.: Digital image correlation: performance and potential applications in photogrammetry. In: *Thompson Symposium*. Birmingham, U.K., 1984
- [Adrian 2005] ADRIAN, R. J.: Twenty years of particle image velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 39 (2005), S. 159–169
- [Alexander und Ng 1991] ALEXANDER, B. F. ; NG, K. C.: Elimination of systematic error in subpixel accuracy centroid estimation. In: *Optical Engineering* 30 (1991), S. 1320–1331
- [Billingsley 1965] BILLINGSLEY, F.: Digital video processing at JPL. In: *Proceedings of SPIE* 3 (1965)
- [Bing u. a. 2006] BING, P. ; HUI-MIN, X. ; BO-QIN, X. ; FU-LONG, D.: Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation. In: *Measurement Science and Technology* 17 (2006), S. 1615–1621
- [Blais und Rioux 1986] BLAIS, F. ; RIOUX, M.: Real-time numerical peak detector. In: *Signal Processing* 11 (1986), S. 145–155
- [Blumrich 2007] BLUMRICH, F.: Korrelationsbasierte optische Messtechnik mittels zufälliger Punktemuster: PROPAC und REPAC. In: *DGaO-Proceedings, 108, A29*. Seebad Heringsdorf, Germany, 2007
- [Blumrich 2008a] BLUMRICH, F.: Beulendetektion für den Fließbetrieb. In: *Inspect* 1/08 (2008), S. 42–43
- [Blumrich 2008b] BLUMRICH, F.: *Bias errors in sub-pixel displacement estimation for optical correlation-based measurement techniques*. 2008. – Eingereicht bei: Optical Engineering
- [Blumrich 2008c] BLUMRICH, F.: Funktionsprinzip und Statistik der Ensemble-Korrelation. In: LUHMANN, T. (Hrsg.) ; MÜLLER, C. (Hrsg.): *Photogrammetrie - Laserscanning - Optische 3D-Messtechnik, Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2008*, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2008, S. 174–185

- [Blumrich u. a. 2007] BLUMRICH, F. ; SCHRÖDER, A. ; KONRATH, R. ; KLINGE, F.: Presentation of two optical correlation-based measurement techniques for surface deformation: PROPAC and REPAC. In: *SENSOR Conference 2007, Proceedings Volume II*. Nürnberg, Germany, 2007, S. 117–123
- [Boden 2008] BODEN, F.: Dynamische Deformationsmessung mittels digitaler Bildkorrelation an Flugzeugstrukturen im Flugversuch. In: LUHMANN, T. (Hrsg.) ; MÜLLER, C. (Hrsg.): *Photogrammetrie - Laserscanning - Optische 3D-Messtechnik, Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2008*, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2008, S. 90–101
- [Bothe u. a. 2004] BOTHE, T. ; LI, W. ; KOPYLOW, C. ; JÜPTNER, W.: High-resolution 3D shape measurement on specular surfaces by fringe reflection, 2004, S. 411–422
- [Brigham 1974] BRIGHAM, E. O.: *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974
- [Bruck u. a. 1989] BRUCK, H. A. ; MCNEILL, S. R. ; SUTTON, M. A. ; PETERS, W. H.: Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction. In: *Experimental Mechanics* 29 (1989), S. 261–267
- [Chen und Katz 2005] CHEN, J. ; KATZ, J.: Elimination of peak-locking error in PIV analysis using the correlation mapping method. In: *Measurement Science and Technology* 16 (2005), S. 1605–1618
- [Condon 1997] CONDON, J. J.: Errors in elliptical gaussian fits. In: *Astronomical Society of the Pacific* 109 (1997), S. 166–172
- [Curless 1997] CURLESS, B. L.: *New methods for surface reconstruction from range images*, Stanford University, Dissertation, 1997
- [Davis und Freemann 1997] DAVIS, C. Q. ; FREEMANN, D. M.: Statistics of subpixel registration algorithms based on spatiotemporal gradients or block matching. In: *Optical Engineering* 37 (1997), S. 1290–1298
- [Delnoij u. a. 1999] DELNOIJ, E. ; WESTERWEEL, J. ; DEEN, N. G. ; KUIPERS, J. A. M. ; SWAAIJ, W. P. M. van: Ensemble correlation PIV applied to bubble plumes rising in a bubble column. In: *Chemical Engineering Science* 54 (1999), S. 5159–5171
- [van der Draai u. a. 1999] DRAAI, R. K. van der ; SCHINKEL, R. P. M. van ; TELESKA, A.: A new approach to measuring model deflection. In: *18th International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities (ICIASF)*. Toulouse, France, 1999, S. 33/1–7
- [Duda und Hart 1972] DUDA, R. O. ; HART, P. E.: Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. In: *Communications of the ACM* 15 (1972), S. 11–15

- [Ehrenfried 2002] EHRENFRIED, K.: Processing calibration-grid images using the Hough transformation. In: *Measurement Science and Technology* 13 (2002), S. 975–983
- [Elsinga u. a. 2006] ELSINGA, G. E. ; SCARANO, F. ; WIENEKE, B. ; VAN OUDHEUSDEN, B. W.: Tomographic particle image velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 41 (2006), S. 933–947
- [Elsinga u. a. 2004] ELSINGA, G. E. ; VAN OUDHEUSDEN, B. W. ; SCARANO, F. ; WATT, D. W.: Assessment and application of quantitative schlieren methods: calibrated color schlieren and background oriented schlieren. In: *Experiments in Fluids* 36 (2004), S. 309–325
- [Fisher und Naidu 1996] FISHER, R. B. ; NAIDU, D. K.: A comparison of algorithms for subpixel peak detection. In: SANZ, J. (Hrsg.): *Advances in Image Processing, Multimedia and Machine Vision*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996
- [Förstner 1982] FÖRSTNER, W.: On the geometric precision of digital correlation. In: *International Archives of Photogrammetry* 24/III (1982), S. 176–189
- [Förstner 1984] FÖRSTNER, W.: Quality assessment of object location and point transfer using digital image correlation techniques. In: *International Archives of Photogrammetry* 25/III (1984), S. 169–191
- [Gauß 1809] GAUSS, C. F.: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburg, 1809
- [Goldhahn und Seume 2007] GOLDHAHN, E. ; SEUME, J.: The background oriented schlieren technique: sensitivity, accuracy, resolution and application to a three-dimensional density field. In: *Experiments in Fluids* 43 (2007), S. 241–249
- [Grafarend und Schaffrin 1993] GRAFAREND, E. W. ; SCHAFFRIN, B.: *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim, 1993
- [Gühring 2002] GÜHRING, J.: *3D-Erfassung und Objektrekonstruktion mittels Streifenprojektion*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2002
- [Häusler u. a. 2008] HÄUSLER, G. ; RICHTER, C. ; LEITZ, K.-H. ; KNAUER, M.: Microdeflectometry - a novel tool to acquire three-dimensional microtopography with nanometer height resolution. In: *Optics Letters* 33 (2008), S. 396–398
- [Heinemeyer u. a. 2005] HEINEMEYER, E. ; SCHULZ, J. ; POTTHAST, R. ; HAUER, K.-H.: Determination of the deformation of a reflecting surface by images of scattered point texture / TomoScience. 2005. – Forschungsbericht

- [Helm u. a. 1996] HELM, J. ; MCNEILL, S. ; SUTTON, M.: Improved 3-D image correlation for surface displacement measurement. In: *Optical Engineering* 35 (1996), S. 1911–1920
- [Hinsch 2002] HINSCH, K. D.: Holographic particle image velocimetry. In: *Measurement Science and Technology* 13 (2002), S. R61–R72
- [Hough 1962] HOUGH, P. V. C.: *Method and means for recognizing complex patterns*. Patent, US 3069654. 1962
- [Jähne 2005] JÄHNE, B.: *Bildverarbeitung*. Springer, Berlin, 2005
- [Kähler 2004] KÄHLER, C. J.: *The significance of coherent flow structures for the turbulent mixing in wall-bounded flows*, Georg-August Universität Göttingen, Dissertation, 2004
- [Kähler und Kompenhans 2000] KÄHLER, C. J. ; KOMPENHANS, J.: Fundamentals of multiple plane stereo particle image velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 29 (2000), S. 70–77
- [Kähler u. a. 2006] KÄHLER, C. J. ; SCHOLZ, U. ; ORTMANN, J.: Wall-shear-stress and near-wall turbulence measurements up to single pixel resolution by means of long-distance micro-PIV. In: *Experiments in Fluids* 41 (2006), S. 327–341
- [Keane und Adrian 1990] KEANE, R. D. ; ADRIAN, R. J.: Optimization of particle image velocimeters. Part I: Double pulsed systems. In: *Measurement Science and Technology* 1 (1990), S. 1202–1215
- [Kindler u. a. 2007] KINDLER, K. ; GOLDHAHN, E. ; LEOPOLD, F. ; RAFFEL, M.: Recent developments in background oriented Schlieren methods for rotor blade tip vortex measurements. In: *Experiments in Fluids* 43 (2007), S. 233–240
- [Klinge 2003] KLINGE, F.: *Vermessung von Wirbeln mit der Hintergrundschlieren-Methode*, Universität Hannover, Dissertation, 2003
- [Knauer u. a. 2004a] KNAUER, M. ; KAMINSKI, J. ; HÄUSLER, G.: Absolute Phasenmessende Deflektometrie. In: *DGaO-Proceedings, 105, A15*. Bad Kreuznach, Germany, 2004
- [Knauer u. a. 2004b] KNAUER, M. ; KAMINSKI, J. ; HÄUSLER, G.: Phase measuring deflectionometry: a new approach to measure specular free-form surfaces. In: *Proceedings of SPIE* 5457 (2004), S. 366–376
- [Konrath u. a. 2004] KONRATH, R. ; KLINGE, F. ; SCHRÖDER, A. ; KOMPENHANS, J. ; FÜLLEKRUG, U.: The projected pattern correlation technique for vibration measurements. In: *6th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques*. Ancona, Italy, 2004



- [Konrath u. a. 2002] KONRATH, R. ; SCHRÖDER, W. ; LIMBERG, W.: Holographic particle image velocimetry applied to the flow within the cylinder of a four-valve internal combustion engine. In: *Experiments in Fluids* 33 (2002), S. 781–793
- [Kraus 2004] KRAUS, K.: *Photogrammetrie*. Bd. 1. 7. Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, 2004
- [Legarda-Sáenz u. a. 2004] LEGARDA-SÁENZ, R. ; BOTHE, T. ; JÜPTNER, W.: Accurate procedure for the calibration of a structured light system. In: *Optical Engineering* 43 (2004), S. 464–471
- [Lichtenberger und Schreier 2002] LICHTENBERGER, R. ; SCHREIER, H.: Non-contacting measurement technology for component safety assessment. In: *6th International Symposium - Airbag 2002*. Karlsruhe, Germany, 2002
- [Lindken u. a. 2005] LINDKEN, R. ; WESTERWEEL, J. ; WIENEKE, B.: Stereo-micro-PIV Messungen zur Bestimmung dreidimensionaler Strömungsstrukturen in Mikromixern. In: *13. GALA-Fachtagung "Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik"*. Cottbus, Germany, 2005
- [Liu u. a. 1989] LIU, T. C. ; MERZKIRCH, W. ; OBESTE-LEHN, K.: Optical tomography applied to speckle photographic measurement of asymmetric flows with variable density. In: *Experiments in Fluids* 7 (1989), S. 157–163
- [Loose u. a. 2000] LOOSE, S. ; RICHARD, H. ; DEWHIRST, T. ; RAFFEL, M.: Background oriented schlieren (BOS) and particle image velocimetry (PIV) for transonic turbine blade investigations. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*. Lissabon, Portugal, 2000
- [Luhmann u. a. 2008] LUHMANN, T. ; BETHMANN, F. ; HERD, B. ; OHM, J.: Photogrammetrische Freiformerfassung aus Bildsequenzen. In: LUHMANN, T. (Hrsg.) ; MÜLLER, C. (Hrsg.): *Photogrammetrie - Laserscanning - Optische 3D-Messtechnik, Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2008*, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2008, S. 43–52
- [Luhmann u. a. 2006] LUHMANN, T. ; ROBSON, S. ; KYLE, S. ; HARLEY, I.: *Close Range Photogrammetry: Principles, Methods and Applications*. Whittles Publishing, 2006
- [Maas 1992] MAAS, H.-G.: *Digitale Photogrammetrie in der dreidimensionalen Strömungsmesstechnik*, ETH Zürich, Dissertation, 1992
- [Maas 1997] MAAS, H.-G.: *Mehrbildtechniken in der digitalen Photogrammetrie*. Habilitationsschrift, Zürich, 1997

- [Meinhart u. a. 2000] MEINHART, C. D. ; WERELEY, S. T. ; SANTIAGO, J. G.: A PIV algorithm for estimating time-averaged velocity fields. In: *Journal of Fluids Engineering* 122 (2000), S. 285–289
- [Meng u. a. 2004] MENG, H. ; PAN, G. ; PU, Y. ; WOODWARD, S.: Holographic particle image velocimetry: from film to digital recording. In: *Measurement Science and Technology* 15 (2004), S. 673–685
- [Merziger u. a. 1996] MERZIGER, G. ; MÜHLBACH, G. ; WILLE, D. ; WIRTH, T.: *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*. 2. Auflage. Binomi Verlag, Springe, 1996
- [Merzkirch 1974] MERZKIRCH, W.: *Flow Visualization*. Academic Press, New York, 1974
- [Niemeier 2002] NIEMEIER, W.: *Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin, 2002
- [Nobach und Honkanen 2005] NOBACH, H. ; HONKANEN, M.: Two-dimensional gaussian regression for sub-pixel displacement estimation in particle image velocimetry or particle position estimation in particle tracking velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 38 (2005), S. 511–515
- [Over 2007] OVER, B.: *Weiterentwicklung der C-Programmbibliothek zur tomographischen Auswertung von Dichtefeldern mit der Hintergrundschlieren-Methode*. Universität Göttingen, Bachelorarbeit, 2007
- [Over 2008] OVER, B.: *Weiterentwicklung und Anwendung der BOS Messtechnik zur Dichtebestimmung der Expansionsströmung einer Mikrodüse*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2008
- [Peters und Ranson 1982] PETERS, W. H. ; RANSON, W. F.: Digital imaging techniques in experimental stress analysis. In: *Optical Engineering* 21 (1982), S. 427–431
- [PIVTEC 2008] PIVTEC: *Homepage PIVTEC GmbH*. Zugriff: 18.02. 2008. – <http://www.pivtec.com/>
- [Pust 2000] PUST, O.: PIV: Direct cross-correlation compared with FFT-based cross-correlation. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*. Lissabon, Portugal, 2000
- [Quénot u. a. 1998] QUÉNOT, G. M. ; PAKLEZA, J. ; KOWALEWSKI, T. A.: Particle image velocimetry with optical flow. In: *Experiments in Fluids* 25 (1998), S. 177–189
- [Raffel u. a. 2000] RAFFEL, M. ; RICHARD, H. ; MAIER, G. E. A.: On the applicability of background oriented optical tomography for large scale aerodynamic investigations. In: *Experiments in Fluids* 28 (2000), S. 477–481

- [Raffel u. a. 1998] RAFFEL, M. ; WILLERT, C. ; KOMPENHANS, J.: *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide*. Springer-Verlag, Berlin, 1998
- [Raffel u. a. 2007] RAFFEL, M. ; WILLERT, C. ; WERELY, S. T. ; KOMPENHANS, J.: *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide*. Sec. Ed. Springer-Verlag, Berlin, 2007
- [Rau 2009] RAU, D.: *Optimierung der Auswertesoftware für die Reflected Pattern Correlation (REPAC)*. Universität Stuttgart, Studienarbeit, 2009
- [Richard und Raffel 2001] RICHARD, H. ; RAFFEL, M.: Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method. In: *Measurement Science and Technology* 12 (2001), S. 1576–1585
- [Richard u. a. 2000] RICHARD, H. ; RAFFEL, M. ; REIN, M. ; KOMPENHANS, J. ; MEIER, G. E. A.: Demonstration of the applicability of a Background Oriented Schlieren (BOS) method. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*. Lissabon, Portugal, 2000
- [Roesgen 2003] ROESGEN, T.: Optimal subpixel interpolation in particle image velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 35 (2003), S. 252–256
- [Ronneberger u. a. 1998] RONNEBERGER, O. ; RAFFEL, M. ; KOMPENHANS, J.: Advanced evaluation algorithms for standard and dual plane particle image velocimetry. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*. Lissabon, Portugal, 1998
- [Roosenboom u. a. 2007] ROOSENBOOM, E. W. M. ; HEIDER, A. ; SCHRÖDER, A.: Propeller Slipstream Development. In: *25th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. Miami, FL, USA, 2007
- [Scarano 2002] SCARANO, F.: Iterative image deformation methods in PIV. In: *Measurement Science and Technology* 13 (2002), S. R1–R19
- [Schewe 1988] SCHEWE, H.: Automatische photogrammetrische Karosserievermessung. In: *Bildmessung und Luftbildwesen* 1/1988 (1988), S. 16–24
- [Schimpf und Kallweit 2004] SCHIMPF, A. ; KALLWEIT, S.: Photogrammetric particle image velocimetry. In: STANISLAS, M. (Hrsg.) ; WESTERWEEL, J. (Hrsg.) ; KOMPENHANS, J. (Hrsg.): *Particle Image Velocimetry: Recent Improvements - Proceedings of the EUROPIV 2 Workshop*. Zaragoza, Spain : Springer, 2004, S. 295–300
- [Schreier u. a. 2000] SCHREIER, H. W. ; BRAASCH, J. R. ; SUTTON, M. A.: Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. In: *Optical Engineering* 39 (2000), S. 2919–2921

- [Schröder 2001] SCHRÖDER, A.: *Untersuchung der Strukturen von künstlich angeregten transitionellen Plattengrenzschichtströmungen mit Hilfe der Stereo und Multiplane Particle Image Velocimetry*, Georg-August Universität Göttingen, Dissertation, 2001
- [Schröder u. a. 2007] SCHRÖDER, A. ; GEISLER, R. ; ELSINGA, G. E. ; SCARANO, F. ; DIERKSHEIDE, U.: Investigation of a turbulent spot and a tripped turbulent boundary layer flow using time-resolved tomographic PIV. In: *Experiments in Fluids* 44 (2007), S. 305–316
- [Schröder und Willert 2008] SCHRÖDER, A. (Hrsg.) ; WILLERT, C. (Hrsg.): *Particle Image Velocimetry - New Developments and Recent Applications*. Bd. 112. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2008
- [Siebert u. a. 2007] SIEBERT, T. ; BECKER, T. ; SPILTTHOF, K. ; NEUMANN, I. ; KRUPKA, R.: High-speed digital image correlation: error estimations and applications. In: *Optical Engineering* 46 (2007), S. 051004/1–7
- [Staack 2008] STAACK, K.: *Untersuchung von kohärenten Strukturen im turbulenten Freistrah mit Hilfe der tomographischen Particle Image Velocimetry*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2008
- [Stanislas u. a. 2005] STANISLAS, M. ; OKAMOTO, K. ; KÄHLER, C. J. ; WESTERWEEL, J.: Main results of the second international PIV challenge. In: *Experiments in Fluids* 39 (2005), S. 170–191
- [Sutton u. a. 2007] SUTTON, M. ; YAN, J. ; DENG, X. ; CHENG, C. S. ; ZAVATTIERI, P.: Three-dimensional digital image correlation to quantify deformation and crack-opening displacement in ductile aluminum under mixed-mode I/III loading. In: *Optical Engineering* 46 (2007), S. 051003/1–17
- [Trucco u. a. 1998] TRUCCO, E. ; FISHER, R. B. ; FITZGIBBON, A. W. ; NAIDU, D. K.: Calibration, data consistency and model acquisition with a 3-D laser stripper. In: *International Journal of Computer Integrated Manufacturing* 11 (1998), S. 292–310
- [Wereley u. a. 2002] WERELEY, S. T. ; GUI, L. ; MEINHART, C. D.: Advanced algorithms for microscale particle image velocimetry. In: *AIAA Journal* 40 (2002), S. 1047–1055
- [Westerweel 1993] WESTERWEEL, J.: *Digital Particle Image Velocimetry - Theory and Application*, Delft University of Technology, Dissertation, 1993
- [Westerweel 1997] WESTERWEEL, J.: Fundamentals of digital particle image velocimetry. In: *Measurement Science and Technology, Special Issue on Particle Image Velocimetry* 8 (1997), S. 1379–1392

- [Westerweel u. a. 2004] WESTERWEEL, J. ; GEELHOED, P. F. ; LINDKEN, R.: Single-pixel resolution ensemble correlation for micro-PIV applications. In: *Experiments in Fluids* 37 (2004), S. 375–384
- [Westerweel u. a. 2002] WESTERWEEL, J. ; POELMA, C. ; LINDKEN, R.: Two-point ensemble correlation for micro-PIV applications. In: *Proceedings of the 11th International Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*. Lissabon, Portugal, 2002
- [Whittaker 1915] WHITTAKER, E. T.: On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. In: *Proceedings of the Royal Society* 35 (1915), S. 181–194
- [Willert 1997] WILLERT, C.: Stereoscopic digital particle image velocimetry for application in wind tunnel flows. In: *Measurement Science and Technology, Special Issue on Particle Image Velocimetry* 8 (1997), S. 1465–1479
- [Willert und Gharib 1991] WILLERT, C. ; GHARIB, M.: Digital particle image velocimetry. In: *Experiments in Fluids* 10 (1991), S. 181–193
- [Witte und Schmidt 2000] WITTE, B. ; SCHMIDT, H.: *Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen*. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 2000
- [Zhang 1999] ZHANG, Z.: Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In: *7th International Conference on Computer Vision*. Korfu, Greece, 1999, S. 666–673



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Experimentelle Verfahren, des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz besonders bei Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Fritsch für die Übernahme der Betreuung dieser Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen bedanken. Durch zahlreiche Anregungen und als regelmäßiger wissenschaftlicher Diskussionspartner stand er mir stets zur Seite. Insbesondere seine Motivation und das Setzen realistischer Zwischenziele haben schlussendlich zu einem zügigen Abschluss dieser Arbeit geführt.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. habil. Andreas Dillmann, meinem Institutsleiter am DLR in Göttingen, für die Übernahme der Tätigkeit des Mitberichters.

Allen Kollegen der Abteilung Experimentelle Verfahren am DLR in Göttingen danke ich für ihre fachliche und freundschaftliche Unterstützung. Besonderer Dank gilt dabei meinem Abteilungsleiter Dr. Jürgen Kompenhans, der meine Arbeit aktiv unterstützt und durch die Infrastruktur der Abteilung erst ermöglicht hat. Großer Dank gebührt auch meinen lieben Kollegen Dr. Andreas Schröder, Benedikt Over, Sebastian Gesemann, André Heider und Fritz Boden für ihre unermüdliche Geduld in unzähligen fachlichen Diskussionen sowie wertvollen Tipps und Anregungen bezüglich der hier vorliegenden Arbeit. Selbstverständlich bin ich auch allen anderen hier nicht namentlich aufgeführten Mitarbeitern des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt sowie der Universität Stuttgart, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben, dankbar.

Bedanken möchte ich mich insbesondere auch bei meinen Eltern, die mich während jeder Phase meiner Promotion immer voll unterstützt haben.

Köln, den 28. April 2009

Frederik Blumrich





# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name	Frederik Blumrich
Geburtsdatum	16.09.1979
Geburtsort	Filderstadt
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

## Schulbildung

08/1986 - 02/1996	Freie Waldorfschule auf den Fildern
02/1996 - 07/2000	Eduard Spranger Gymnasium Filderstadt

## Zivildienst

11/2000 - 10/2001	Kinder- und Jugendhaus Birkach
-------------------	--------------------------------

## Akademische Ausbildung

10/2001 - 06/2006	Studium der Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Stuttgart (Diplom)
-------------------	--

## Arbeitstätigkeit

seit 07/2006	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Experimentelle Verfahren
--------------	---

## Auszeichnungen

2007	Preis der Vereinigung von Freunden der Universität Stuttgart für besondere wissenschaftliche Leistungen
------	---