

# **Nichtlineare Optimierung regionaler Gravitationsfeldmodelle aus SST-Daten**

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie  
der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

**Markus Antoni**

aus Bobingen

Hauptberichter: Prof. Dr. sc. techn. W. Keller

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. J. Flury

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 2011

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

2012



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
<b>II. Abstract</b>	<b>7</b>
<b>III. Abkürzungen und Symbole</b>	<b>9</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1. Notationen . . . . .	17
2.2. Koordinatensysteme . . . . .	19
2.2.1. Koordinatentransformationen . . . . .	22
2.3. Himmelsmechanik . . . . .	23
2.3.1. Ideales Zweikörperproblem . . . . .	23
2.3.2. Orbitintegration . . . . .	25
2.3.3. SST-Beobachtungen . . . . .	27
<b>3. Spezielle Funktionen</b>	<b>31</b>
3.1. Potentialtheorie . . . . .	31
3.1.1. Potential einer Punktmasse – Legendrepolynome . . . . .	31
3.1.2. Laplace-Differentialgleichung . . . . .	33
3.1.3. Legendre- und Kugelflächenfunktionen . . . . .	35
3.1.4. Potential der Erde . . . . .	40
3.2. Rotation der Kugelflächenfunktionen . . . . .	42
3.2.1. Klassische Lösung: Drehung des Koordinatensystems . . . . .	42
3.2.2. Alternative Transformation: Linearkombination . . . . .	42
3.3. Wigner-D-Funktionen . . . . .	43
<b>4. Radiale Basisfunktionen</b>	<b>55</b>
4.1. Approximation im euklidischen Raum . . . . .	55
4.2. Sphärische radiale Basisfunktionen . . . . .	62
4.2.1. Rotation der Basisfunktion . . . . .	62
4.2.2. Potential im Außenraum . . . . .	64
4.2.3. Analyse der Radialen Basisfunktionen . . . . .	64
4.2.4. Modelle der Legendre-Koeffizienten . . . . .	65
<b>5. In-situ Beobachtungen</b>	<b>77</b>
5.1. Potential im Orbit . . . . .	77
5.1.1. Energieintegral . . . . .	77
5.1.2. Potential der Basisfunktionen . . . . .	81
5.2. Line-of-Sight Gradiometrie . . . . .	87
5.2.1. Messprinzip . . . . .	87
5.2.2. Along-track Gradiometrie radialer Basisfunktionen . . . . .	89

<b>6. Range-Rate Beobachtungen</b>	<b>99</b>
6.1. Linearisierung der Range-Rate . . . . .	99
6.1.1. Variationsgleichungen . . . . .	100
6.1.2. Referenzbahn-Ansatz . . . . .	103
6.2. Hill-Theorie . . . . .	105
6.2.1. Homogene Lösung . . . . .	108
6.2.2. Inhomogene Hill-Differentialgleichungen . . . . .	112
6.2.3. Diskussion der inhomogenen Lösung . . . . .	119
6.3. Range-Rate . . . . .	125
6.3.1. Koordinatentransformation . . . . .	125
6.3.2. Ableitung der Range-Rate . . . . .	126
<b>7. Optimierung der Parameter</b>	<b>129</b>
7.1. Problemstellung . . . . .	129
7.2. Lineare Ausgleichung . . . . .	132
7.3. Nichtlineare Optimierung . . . . .	135
7.3.1. Globale Optimierung: Genetische Algorithmen . . . . .	136
7.3.2. Lokale Optimierung: Trust-Region-Verfahren . . . . .	139
<b>8. Numerische Experimente</b>	<b>151</b>
8.1. Vergleich der partiellen Ableitungen . . . . .	151
8.2. Simulationen . . . . .	164
8.2.1. Closed-Loop-Simulation . . . . .	165
8.2.2. Analyse eines globalen Störfeldes . . . . .	173
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>191</b>
<b>A. Wigner-Darstellung</b>	<b>193</b>
A.1. Produkte der Legendre- und Wigner-d-Funktionen . . . . .	193
A.2. Umsetzung der Wigner-Darstellung . . . . .	195
<b>B. Programme</b>	<b>201</b>
B.1. Grafische Benutzeroberfläche . . . . .	201
B.2. Liste der Programme . . . . .	203
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>215</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>217</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>219</b>

# I. Zusammenfassung

Die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde ist noch immer eine große Herausforderung in der Geodäsie. Die globalen Modelle basieren insbesondere auf der Beobachtung von Satelliten. In der üblichen Analyse durch Kugelflächenfunktionen werden oft nicht alle Informationen erfasst, da die dafür notwendige gleichmäßige Verteilung der Daten nicht realisierbar ist. Um die vernachlässigten lokalen Details zu erfassen, kann man eine Verbesserung der Lösung durch lokale Basisfunktionen bestimmen. In der Analyse spaltet man das Signal und das Modell in einen globalen und einen residualen Anteil auf.

Die Modellierung des globalen Feldes erfolgt dabei durch Kugelflächenfunktionen mit bekannten sphärisch-harmonischen Koeffizienten, während das verbleibende Signal in dieser Arbeit durch optimierte radiale Basisfunktionen approximiert wird. Radiale Basisfunktionen werden in vielen Disziplinen zur Modellierung von Daten mit unregelmäßiger Verteilung verwendet, wobei die Lösung durch die Wahl der Zentren, die Skalierungsfaktoren und die Form der Basisfunktionen beeinflusst wird. Auf der Kugel lässt sich jede (sphärische) radiale Basisfunktion durch eine Reihenentwicklung nach den Legendrepolynomen darstellen. Die Form wird durch die Zahlenfolge der Legendre-Koeffizienten modelliert, die häufig auf einen skalaren Formparameter zurückgeführt werden.

Als (Pseudo-)Beobachtungen werden die Potentialwerte entlang des Orbits, die Line-of-Sight Gradienten und die Range-Rate behandelt, wobei die letzten beiden Signale vor allem auf die geodätische GRACE-Mission abzielen. Das Potential im Orbit wird durch das Energieintegral für einen einzelnen Satelliten berechnet, während die Line-of-Sight Gradiometrie aus den Abstandsmessungen der GRACE-Mission die zweite Ableitung des gravitativen Potentials in Flugrichtung approximiert. Beide Beobachtungen können als in-situ Messungen aufgefasst werden, deren Signale nur von den Positionen im Schwerefeld, nicht aber von den früheren Potentialwerten beeinflusst werden. Das residuale Signal wird jeweils durch eine Summe aus radialen Basisfunktionen modelliert, deren Reihenentwicklung nach den Legendrepolynomen im Weiteren als Legendre-Darstellung bezeichnet wird. In dieser Arbeit wird die sogenannte Wigner-Darstellung (der Basisfunktionen) für Kreisbahnen entwickelt, die auf einer Parametrisierung des Potentials durch die Keplerelemente und die Verwendung der Wigner-d-Funktionen basiert. Diese Variante vereinfacht die partiellen Ableitungen nach den Keplerelementen und den Basisparametern sowie deren Implementierung. Für die nichtlineare Optimierung werden beide Darstellungen des Potentials und der Line-of-Sight Gradienten nach den Parametern der Basisfunktionen differenziert.

Mit der Range-Rate wird auch die eigentliche Messung der GRACE-Mission durch eine Überlagerung des Referenzfeldes und einen residualen Anteil aus radialen Basisfunktionen modelliert. Durch die Orbitintegration enthält diese Beobachtung Informationen über frühere Zustände des Schwerefeldes in der Form von Positionen und Geschwindigkeiten der Satelliten und kann daher nicht mehr als in-situ Messung betrachtet werden. Die Ableitungen der Range-Rate nach den gesuchten Parametern werden üblicherweise durch die Lösung der Variationsgleichungen bestimmt. Durch die Approximationen der Hill-Theorie und die Wigner-Darstellung erhält man eine geschlossene Formel, die direkt nach den Parametern der Basisfunktionen differenziert werden kann. Die Differenz zwischen den beiden Lösungen lässt sich auf die unterschiedlichen Näherungen in den Ansätzen zurückführen.

Die Analyse eines Signals durch ein vorgegebenes System an Basisfunktionen lässt sich als ein Optimierungsproblem der Parameter auffassen. In der (residualen) Analyse von Satellitenbeobachtungen werden die Zentren und Formparameter der radialen Basisfunktionen häufig fixiert, was die Aufgabe auf die Bestimmung der linearen Skalierungsfaktoren reduziert. Um viele lokale Details zu erfassen, ist eventuell eine große Anzahl an Basisfunktionen notwendig. Dies kann zu einer Überparametrisierung und damit zu numerischen Problemen in der Lösung führen. In dieser Arbeit wird eine Alternative entwickelt, die die Signale durch eine minimale Anzahl an Basisfunktionen modelliert. Für eine bessere Approximation des Signals werden neben der Skalierung auch die Zentren und die Formparameter in einer nichtlinearen Optimierung aus den Daten geschätzt.

Für die Analyse werden globale und lokale Optimierungsverfahren diskutiert und jeweils exemplarisch ein Ansatz implementiert. Da die Lösungen in den (globalen) genetischen Algorithmen nicht reproduzierbar sind, wird ein lokales Verfahren bevorzugt. Der Ansatz bestimmt geeignete Startwerte der Basisparameter aus den Daten und optimiert diese Werte iterativ durch ein Trust-Region-Verfahren. Die Methode erlaubt eine Einschränkung der Parameter auf ein vorgegebenes Intervall und führt in der Regel zu einer Konvergenz in der Nähe der Startwerte.

Die Optimierung wird an den Daten einer simulierten GRACE-Mission getestet. Die Range-Rate erweist sich für den entwickelten Algorithmus als nicht geeignet für die nichtlineare Optimierung der Basisparameter aus einem komplexeren Schwerefeld. In einem vereinfachten Modell lassen sich bei geeigneten Startwerten vor allem die Positionen der Zentren aus der Range-Rate verbessern. Dagegen ist die Analyse der behandelten in-situ Beobachtungen durch radiale Basisfunktionen erfolgreich und approximiert das Signal im Orbit in einer hohen Qualität. Bereits mit relativ wenigen Basisfunktionen erreicht man eine Korrelation zwischen dem Signal und der Approximation im Orbit von 90 – 100 %, wobei die statistischen Größen der Differenz mindestens um eine Größenordnung reduziert werden.

In der Rekonstruktion des Potentials aus der regionalen Line-of-Sight Gradiometrie erkennt man Strukturen, welche sich aus der Mehrdeutigkeit der Beobachtung erklären lassen. Das Energieintegral ist bereits für die Auswertung realer Datensätze anwendbar, in der Line-of-Sight Gradiometrie ist allerdings noch das Problem der Mehrdeutigkeit zu lösen.

## II. Abstract

The determination of the Earth's gravity field is still a big challenge in geodesy. Global models are especially based on satellite observations. The complete information cannot be recovered in the analysis by spherical harmonics due to the inhomogeneous data distribution. An improvement can be achieved by modeling these hidden details by localizing basis functions. In the analysis, the signal and the model are separated into a global and a residual part.

In this study, the global field is modeled by spherical harmonics and a set of known spherical harmonic coefficients, while the remaining signal is approximated by optimized radial basis functions. Radial basis functions are used in many disciplines to model data with an inhomogeneous distribution, where the approximation depends significantly on the chosen centers, the scaling factors and the shape of the basis functions. On the sphere, each (spherical) radial basis function is realized by a series of Legendre polynomials. The shape is modeled by a sequence of Legendre coefficients, which are often traced back to a scalar shape parameter.

The potential along the orbit, the line-of-sight gradient and the range-rate are used as (pseudo-)observations, where the last two types of signals are applicable to the GRACE-Mission. The potential along the orbit is determined by the energy balance approach for a single satellite, while the line-of-sight gradiometry approximates the second derivative of the gravity potential in the flight direction from the ranging observations of GRACE. Both observations can be seen as in-situ measurements, where the signals depend only on the positions in the gravity field, but not on the earlier potential values. The residual signals are modeled by superposition of radial basis functions, where the series of Legendre polynomials is denoted as Legendre-representation. In this study, the so called Wigner-representation (of the radial basis functions) is developed for circular orbits, which is based on the parameterisation by Keplerian elements and the use of the Wigner-d-functions. The new representation simplifies the differentiation w.r.t. the orbit elements and the parameters of the basis functions, but also their implementation. The nonlinear optimization is prepared by differentiating both representations of the potential and the line-of-sight gradient with respect to the basis parameters.

The range-rate of the GRACE mission is also analyzed by a superposition of the reference field and a residual part of the radial basis functions. Due to the orbit integration, the observations contain information about the prior status of the gravity field in form of positions and velocities of the satellites, which inhibits the treatment as an in-situ measurement. Usually the partial derivatives of the range-rate are generated by the numerical solution of the variational equations. By using the approximations of the Hill theory and the Wigner-representation a closed formula is developed, which can be differentiated w.r.t. the parameters of the radial basis functions. The differences of both methods are caused by the unequal approximations.

The analysis of a signal by selected basis functions can always be seen as an optimization problem of the parameters. The centers and the shape of the radial basis functions are usually fixed in the analysis of (residual) satellite observations, to reduce the estimation to a linear problem of the scale factors. In this case, many basis functions might be necessary to determine the local details, which leads to overparameterization and numerical problems in the solution. In this study, a concept is developed for modeling the signals by a minimal number of basis functions. In addition to the scale factors, the shape and the center of each basis function are determined from the data by a nonlinear optimization to achieve a better approximation of the signal.

Global and local optimization methods are discussed and an example of each is implemented. The solutions of the (global) genetic algorithm are not reproducible, so that a local method is preferred. The method determines initial parameters from the signal and improves them iteratively by a trust region algorithm. The algorithm permits a restriction of the parameters to a chosen interval and leads usually to a convergence near the initial values.

The optimization is tested in a simulated GRACE-mission. The range-rate turns out to be unsuitable for the estimation of the parameters in a more complex gravity field by the developed algorithm. In a simplified model and for adequate initial values, it is possible to improve the positions of the basis functions from the range-rate.

The analysis of the presented in-situ measurements approximates the signal in the orbit very well. A small number of optimized radial basis functions is already sufficient to achieve a correlation of 90 – 100 % between the signal and the approximation in the orbit, while the statistical values of the differences are reduced by at least one order of magnitude.

Some remaining structures are visible in the reconstruction of the potential from the regional line-of-sight gradiometry, which can be explained by an ambiguity of the observation technique. The energy balance approach can already be used for real data sets, but in the gradiometry the problem of the ambiguity still has to be solved.



### III. Abkürzungen und Symbole

CHAMP	CHALLENGING Minisatellite Payload (Satellitenmission)	27
CSR	Center for Space Resarch, The University of Texas at Austin	28
GFZ	Deutsches GeoForschungsZentrum	27
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment (Satellitenmission)	28
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (Satellitenmission)	28
LOS	Basislinie (Line-of-Sight) einer Messung, z.B. zwischen zwei Satelliten	87
SST	Satellite-to-Satellite Tracking	27
<b>A</b>	Matrix	21
$\vec{x}$	Vektor	17
$\ \vec{x}\ $	(euklidische) Norm eines Vektors	18
$\hat{x}$	Einheitsvektor	18
$a$	große Halbachse der (oskulierenden) Keplerellipse	23
$\vec{a}$	Beschleunigung aufgrund der Kraft $\vec{F}$ (im Inertialsystem)	26
$b$	- kleine Halbachse der (oskulierenden) Keplerellipse - Index bzw. Nummer einer Basisfunktion	23 55
$c, c_b$	Formparameter der Basisfunktionen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$	56
$c_{km}^{nx}, c_{km}^{ny}$	Koeffizienten zur Darstellung des Gradienten im Orbit	114
$c_{km}^{nc}, c_{km}^{ns}$	Koeffizienten zur Darstellung des Gradienten im Orbit	114
$d_{km}^n(\beta)$	Wigner-d-Funktion	48
$e$	numerische Exzentrizität der (oskulierenden) Keplerellipse	23
$h_{nm}$	Umrechnungsfaktor zwischen der reellen und der komplexen Normierung der Kugelflächenfunktionen	39
$i$	Nummer der Iteration, i.d.R. als (geklammerter) Exponent <sup>[i]</sup>	130
$\ell$	Index für ein einzelnes Element einer Zeitreihe/eines Vektors	17
$\bar{n}$	mittlere Bewegung eines Satelliten	24

$n_0$	minimaler Grad der Reihenentwicklung (der Basisfunktionen)	64
$\vec{p}$	Parameter der Optimierung	100
$\vec{p}^{[i]}$	Parameter der Optimierung in der i. Iteration	100
$q_{km}$	Hilfsgröße im Range-Rate-Ansatz	116
$r$	Bahnradius einer Satellitenbahn	24
$s$	komplexe Variable der Laplace-Transformation	109
$t$	Zeit	19
$u$	Argument der Breite der (oskulierenden) Keplerellipse	24
$v_0$	„Perigäumsabstand“ einer Kreisbahn für die Laplace-Transformation	113
$A_n$	Zahlenfolge zur Definition der sphärischen Splines	
$B_{km}^n(\psi_b)$	Hilfsfunktion zur Beschreibung der Schwerefunktionale im Orbit	86
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma)$	Wigner-D-Funktion	43
$E$	exzentrische Anomalie der (oskulierenden) Keplerellipse	24
$\vec{F}$	Summe aller wirksamen Kräfte (im Inertialsystem)	25
$G$	Gravitationskonstante	23
$\mathbb{H}()$	allgemeiner Hilbert-Raum, z.B. für reproduzierende Kerne	72
$\mathbf{H}$	Matrix aus der Hill-Differentialgleichung für die Laplace-Transformation	110
$I$	Inklination der (oskulierenden) Keplerellipse	24
$L$	Anzahl der Elemente einer Zeitreihe oder eines Vektors	17
$M$	- mittlere Anomalie der (oskulierenden) Keplerellipse	24
	- Masse des Zentralkörpers (bzw. der Erde)	23
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$P_n(\cos \vartheta)$	Legendrepolynome	32
$P_{nm}(\cos \vartheta)$	unnormierte zugeordnete Legendrefunktionen (erster Art)	34
$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$	zugeordnete Legendrefunktionen in „geodätischer“ Normierung	36
$\hat{P}_{nm}(\cos \vartheta)$	zugeordnete Legendrefunktionen in „komplexer“ Normierung	38
$Q_{nm}(\cos \vartheta)$	unnormierte zugeordnete Legendrefunktionen (zweiter Art)	34
$R$	Radius der sphärischen Approximation der Erde	35
$\mathbf{R}$	Rotationsmatrix	22
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	

$S_{km}^n(r, I)$	Hilfsfunktion zur Beschreibung der Schwerefunktionale im Orbit	86
$T_{ref}$	Potential eines Referenzfeldes	41
$V$	wahres Schwerepotential der Erde	40
$Z$	Zentrifugalpotential	77
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\alpha$	1. Drehung einer Eulerrotation	43
$\beta$	2. Drehung einer Eulerrotation	43
$\gamma$	3. Drehung einer Eulerrotation	43
$\delta\vec{a}$	Beschleunigung (des Satelliten) aufgrund nicht-gravitativer Effekte	25
$\delta T$	residuales Potential nach der Subtraktion eines Referenzfeldes $T_{ref}$	64
$\zeta, \zeta_b$	Kosinus des sphärischen Abstands bzw. Argument der Legendrepolynome	32
$\eta_b$	Skalierungsfaktor der radialen Basisfunktion	64
$\vartheta$	Kobweite (sphärische Koordinate)	21
$\vartheta_b$	Kobweite des Basiszentrums	62
$\lambda$	Länge (sphärische Koordinate)	21
$\lambda_b$	Länge des Basiszentrums	62
$\mu$	- Dilatationsparameter der sphärischen Wavelets - Parameter des Trust-Region-Verfahrens	68 147
$\nu$	wahre Anomalie	24
$\xi$	Hilfsgröße, deren Bedeutung dem jeweiligen Abschnitt zu entnehmen ist	
$\varpi, \varpi_b$	sphärischer Abstand zwischen zwei Punkten	32
$\rho$	Abstand zwischen zwei Objekten/Satelliten	55
$\dot{\rho}$	zeitliche Änderung des Abstands, Range-Rate	87
$\dot{\rho}_o$	aus den Modellen berechnete Range-Rate	100
$\varrho$	Parameter der Tikhonov-Phillips Regularisierung	134
$\varrho^{[i]}$	„Radius“ im Trust-Region-Verfahren in der i. Iteration	146
$\sigma_b(n)$	Legendre-Koeffizienten einer radialen Basisfunktion	62
$\sigma_b$	skalärer Formparameter zur Berechnung der Legendre-Koeffizienten	62
$\zeta_n^2$	Gradvarianzen	73
$\tau$	Zeit pro Bahnbogen	109
$\phi_b$	radiale Basisfunktion im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$	55

$\vec{\varphi}$	bekannte Parameter eines Modells	100
$\chi_{\mu, \mathfrak{K}}$	sphärische Waveletfunktion	68
$\psi_b$	- Parameter der radialen Basisfunktion (zum Index $b$ )	64
	- radiale Basisfunktion auf der Einheitskugel (zum Index $b$ )	62
$\omega$	Perigäumsabstand der (oskulierenden) Keplerellipse	24
$\Delta$	- Differenzgröße zwischen dem wahren Wert und einer Näherung	103
	- Laplace-Operator	21
$\Delta_{\lambda\vartheta}$	Laplace-Beltrami-Operator auf der Kugeloberfläche	33
$\Theta$	Sternzeit Greenwich	20
$\Xi(\vec{p})$	Zielfunktion der Optimierung für die Parameter $\vec{p}$	130
$\Psi_b(..)$	Potential einer radialen Basisfunktion im Orbit	64
$\Omega$	Rektaszension des aufsteigenden Knotens	24
$\mathcal{F}\{..\}$	Funktional einer anderen Funktion, z.B. eine Richtungsableitung	129
$\Im\{..\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe	17
$i$	imaginäre Einheit	17
$\mathfrak{K}$	Koordinatentransformation auf der Kugel = Rotation	22
$\mathcal{L}\{f\}$	Laplace-Transformation der Funktion $f$	109
$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	inverse Laplace-Transformation der Funktion $f$	109
$\mathfrak{W}\{f\}(\mu, \mathfrak{K})$	(sphärische) Wavelettransformation der Funktion $f$	68
$\vec{\nabla}f$	Gradient der skalaren Größe $f$	21
$\nabla^2 f$	Tensor/Hesse-Matrix der zweiten Ableitung der skalaren Größe $f$	21
$\Re\{..\}$	Realteil einer komplexen Größe	17
$\bigwedge_{r \geq R}$	(harmonische) Fortsetzung einer Funktion in den Außenraum	35

# 1. Einleitung

Die Geodäsie beschäftigt sich mit der Geometrie, dem Schwerefeld und der Orientierung der Erde. Eine genaue Kenntnis des Schwerefeldes ist in vielen wissenschaftlichen Bereichen unabdingbar, zumal die Messungen (indirekt) durch die Gravitation beeinflusst werden (z.B. Horizontierung der Instrumente). Einerseits werden in der Geodäsie diese Informationen für ein globales Höhensystem oder die Bestimmung von physikalischen Höhen aus GPS-Messungen eingesetzt. Andererseits benötigt man ein möglichst genaues Schwerefeld auch in der Geophysik, der Hydrologie oder der Klimaforschung, um globale oder regionale Massenverlagerungen in der Erde oder den Ozeanen zu erfassen. Weitere Anwendungen ergeben sich in der Bestimmung und Vorhersage der Satellitenbahnen, welche ihrerseits als Daten in der Geodäsie genutzt werden.

Für die Analyse des Schwerefeldes werden terrestrische Messungen, Fluggravimetrie oder die Beobachtungen von Satelliten eingesetzt. Im Gegensatz zu den anderen Methoden erzeugen Satellitenbeobachtungen annähernd globale und homogene Datensätze mit hoher zeitlicher und räumlicher Auflösung, weshalb diese Messungen in der globalen Modellierung eine sehr wichtige Rolle spielen. Als Beobachtung lässt sich die Bewegung des Satelliten im Schwerefeld verwenden, welche z.B. durch das Energieintegral in Potentialwerte im Orbit umgerechnet werden kann. Daneben können durch geeignete Instrumente an Bord auch weitere Funktionale des Schwerefeldes gemessen werden, was oft eine höhere Auflösung ermöglicht. Insbesondere liefert die Gradiometrie der GOCE-Mission die zweiten Ableitungen des Potentials in drei orthogonalen Richtungen, während die GRACE-Mission den Abstand und dessen zeitliche Änderung zwischen zwei Satelliten bestimmt, woraus sich mit verschiedenen Ansätzen Informationen über das gravitative Feld herleiten lassen.

Die Modellierung des Schwerefeldes aus Satellitendaten erfolgt meist in einer Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen mit sphärisch-harmonischen Koeffizienten. Dieses System an Basisfunktionen weist einige Vorteile (Orthogonalität, Vollständigkeit, stabile Rekursionen, einfache Synthese und Analyse, ...) auf und lässt sich als (Fourier-)Analyse des Signals in verschiedenen Wellenlängen interpretieren. Auf der anderen Seite ist es mit dem System der Kugelflächenfunktionen bei einer unregelmäßigen Verteilung der Messungen nicht möglich, den Informationsgehalt der Signale völlig auszuschöpfen oder eine lokale Verbesserung zu erreichen, die nicht alle Koeffizienten des Modells verändert.

## Regionale Modellierung

In den Beobachtungen des Schwerefeldes durch die Satelliten sind eventuell noch Informationen enthalten, die durch eine globale Analyse mit Kugelflächenfunktionen nicht erfasst werden. Um diese Komponenten zu bestimmen, wird das Signal und das Modell des Schwerefeldes in einen globalen und einen residualen Anteil aufgeteilt, wobei das globale Verhalten durch Kugelflächenfunktionen modelliert wird. Der residuale Anteil wird durch ein zweites System von Basisfunktionen approximiert, wobei unter anderem sphärische Splines, Wavelets oder Punktmassen zum Einsatz kommen (Barthelmes, 1986, Windheuser, 1995, Schmidt, 2007, Eicker, 2008, Wittwer, 2009). Beschränkt man sich auf rotationssymmetrische Basisfunktionen, so lassen sich diese unter dem Begriff der radialen Basisfunktionen zusammenfassen.

Radiale Basisfunktionen bilden ein weit verbreitetes Hilfsmittel zur Approximation einer „Fläche“ aus unregelmäßig verteilten Daten in einem vorgegebenen „Raum“ (Ebene, Kugel, ...). Diese Funktionen sind jeweils symmetrisch in Bezug auf ein Basiszentrum und können auf der Kugel durch eine Reihenentwicklung nach Legendrepolyomen dargestellt werden. Die Basisfunktionen variieren in den Koordinaten ihres Zentrums, den Skalierungsfaktoren und ihren Formen, wobei Letztere im sphärischen Fall durch die Legendre-Koeffizienten der Reihe modelliert werden. Da die Anzahl, die Verteilung der Basiszentren und die Form der Basisfunktionen das Ergebnis (erheblich) beeinflussen, existieren zahlreiche Vorschläge für eine optimale Lösung.

In den linearen Ansätzen werden die Zentren und die Form der Basisfunktionen in der Analyse vorgegeben, und die Modellierung erfolgt durch die Anpassung der Skalierungsfaktoren an die Beobachtungen. Mögliche Verteilungen der Basisfunktionen auf der Kugel werden in Eicker (2008) für sphärische Splines untersucht,

während die Legendre-Koeffizienten aus dem Verhalten des globalen Signals bzw. aus einem Modell der Gradvarianzen extrapoliert werden. In der Modellierung durch Wavelets sind die Form und die Zentren der Basisfunktionen durch den Algorithmus vorgegeben (Fengler, 2004, Schmidt, 2007). Für eine hohe räumliche Auflösung sind in dem linearen Ansatz sehr viele Basisfunktionen notwendig, um die lokalen Details erfassen zu können. Die große Anzahl der Parameter und die oft ähnliche Wirkung von räumlich benachbarten Basisfunktionen führen zu einer Überparametrisierung und damit zu numerischen Problemen in der Bestimmung der Skalierungsfaktoren. Zur Stabilisierung der Lösung wird häufig eine Regularisierung eingeführt, welche auf der Grundlage anderer Informationen oder geeigneter Annahmen ein realistisches Modell des Schwerefeldes erzwingt.

Eine Alternative besteht in der Verwendung optimierter radialer Basisfunktionen, welche die Signale durch eine minimale Anzahl an Basisfunktionen approximieren. Dabei werden neben den Skalierungsfaktoren entweder die Zentren oder die Form oder aber beide Komponenten aus den Daten bestimmt, um die Modellierung zu verbessern. Bereits in Barthelmes (1986) findet sich dazu ein Algorithmus für Punktmassen, der die Position der nächsten Basisfunktion mit dem Extremwert des aktuellen Restsignals initialisiert und das Zentrum zusammen mit der Skalierung in einem iterativen Prozess verbessert. Wittwer (2009) erweitert diese Idee auf andere radiale Basisfunktionen, wobei jeweils die Form (bzw. die Tiefe) der nächsten Basisfunktion durch eine General Cross Validation optimiert wird. Eine umgekehrte iterative Suche wird in Klees (2008) vorgestellt, in welcher aus den vorhandenen Zentren alle als nicht notwendig klassifizierten Positionen eliminiert werden.

In der Analyse werden die Signale durch eine Überlagerung aller radialen Basisfunktionen approximiert. Die Parameter beeinflussen sich dabei gegenseitig, da eine Optimierung eines Wertes das residuale Signal für die folgenden Parameter (im nächsten Schritt) ändert. Um diese Beeinflussung besser zu berücksichtigen, kann man alle gesuchten Parameter gemeinsam verbessern, was allerdings ein aufwendiges nichtlineares Problem darstellt.

Für die Lösung eines nichtlinearen Problems sind lokale und globale Optimierungsverfahren denkbar. Die lokalen Methoden verbessern die Startwerte der Parameter durch einen iterativen Algorithmus und erfordern häufig die partiellen Ableitungen nach den gesuchten Werten. Globale Verfahren benötigen dagegen keine Startwerte und nur selten Ableitungen, was die Implementierung vereinfacht. Ein bekanntes globales Verfahren stellen die genetischen Algorithmen dar, welche z.B. von Sharifi (2006) und Raizner (2008) – in einer anderen Anwendung der radialen Basisfunktionen – für die Optimierung der Form eingesetzt werden. Auf die Beobachtungen der GRACE-Mission und die Optimierung aller Parameter wird der genetische Algorithmus in einer Studie von Keller (2007) eingesetzt, die auch den Ausgangspunkt dieser Arbeit darstellt.

## Gliederung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Analyse von Satellitendaten durch optimierte radiale Basisfunktionen, wobei globale und lokale Optimierungsverfahren untersucht werden. Die notwendigen Startwerte sind idealerweise aus den Daten zu bestimmen, um eine willkürliche Beeinflussung der Lösung durch den Nutzer zu vermeiden. Kapitel 2 beschreibt die Notation, die kartesischen und sphärischen Koordinatensysteme und deren Transformation. Außerdem werden in diesem Abschnitt das ungestörte Keplerproblem und die Orbitintegration für einen realen Satelliten skizziert. Den Abschluss bildet eine Zusammenfassung über die (aktuellen) geodätischen Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE.

Als Grundlage der Potentialtheorie werden die Legendrepolynome sowie die Legendre- und Kugelflächenfunktionen im Kapitel 3 eingeführt. Diese werden unter anderem dazu genutzt, um das Potential der Erde in einem erdfesten Koordinatensystem zu modellieren. Anschließend wird die Repräsentation von Kugelflächenfunktion in einem gedrehten Koordinatensystem behandelt. Neben einer Transformation der Argumente kann die Rotation auch durch eine Linearkombination erreicht werden, deren Koeffizienten sich aus den Wigner-d-Funktionen berechnen lassen.

Das Kapitel 4 liefert einen Überblick über die Approximation durch radiale Basisfunktionen im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  und auf der Kugel. An einem zweidimensionalen Beispiel wird die Abhängigkeit der Lösung von der Form und den Zentren der Basisfunktionen gezeigt. Nach der Zusammenstellung einiger Verfahren zur Optimierung der Zentren werden die (sphärischen) radialen Basisfunktionen auf der Kugel vorgestellt. Diese können durch eine Reihe aus Legendrepolynomen repräsentiert werden, deren Legendre-Koeffizienten die

Funktion als Spline, Wavelet oder Punktmasse charakterisieren.

Im Kapitel 5 werden zwei in-situ Satellitenbeobachtungen (Energieintegral und Line-of-Sight Gradiometrie) im Orbit diskutiert. Um die Anzahl der Parameter zu verringern, wird aus einem Referenzfeld eine synthetische Beobachtung ermittelt und nur das residuale Signal durch radiale Basisfunktionen modelliert. Neben der Reihendarstellung durch Legendrepolynome wird für Kreisbahnen die sogenannte Wigner-Darstellung entwickelt, was einer Parametrisierung der Beobachtungen durch Keplerelemente entspricht. Zur Vorbereitung der nichtlinearen Optimierung werden diese Funktionale nach den Parametern der radialen Basisfunktionen differenziert.

Die eigentliche Messgröße der GRACE-Mission ist die Range-Rate, deren Ableitungen nach den Parametern eines residualen Feldes im Kapitel 6 behandelt werden. Eine Möglichkeit basiert auf der numerischen Lösung der Variationsgleichungen, die sich durch Differentiation der Bewegungsgleichung ergeben. Außerdem wird mit einigen Approximationen eine geschlossene Formel entwickelt, die auf den Bahnabweichungen in einem rotierenden Koordinatensystem, der Wigner-Darstellung des Potentials und der Hill-Differentialgleichung basiert. Nach der Transformation in das Inertialsystem lassen sich so die partiellen Ableitungen der Range-Rate in Abhängigkeit von den Basisparametern beschreiben. Damit steht neben der bekannten numerischen Lösung auch eine geschlossene Formel zur Berechnung der partiellen Ableitungen zur Verfügung.

Das Kapitel 7 beschreibt die Bestimmung der linearen und nichtlinearen Parameter der radialen Basisfunktionen aus den Satellitendaten. Im linearen Ansatz werden nur die Skalierungsfaktoren geschätzt und die Position und Form der Funktionen anderweitig festgelegt. Um möglichst viele Details des Signals wiederzugeben, werden sehr viele Parameter bzw. Basisfunktionen benötigt. Diese Überparametrisierung macht oft eine Regularisierung notwendig, welche Zusatzinformationen oder geeignete Annahmen über das Schwerfeld erfordert. Alternativ können mit einer nichtlinearen Optimierung die Parameter für wenige Basisfunktionen an die Daten im Orbit angepasst werden. In der nichtlinearen Optimierung unterscheidet man globale und lokale Verfahren, wobei die lokalen Methoden geeignete Startwerte für alle Unbekannten und häufig die partiellen Ableitungen nach diesen erfordern. Als globale Methode wird ein genetischer Algorithmus implementiert und in einer Simulation getestet. Als lokale Methode wird das Trust-Region-Verfahren eingeführt, da es im Gegensatz zu den üblichen iterativen Verfahren eine Beschränkung der Parameter auf ein zulässiges Intervall ermöglicht.

Die Modellierung der Signale im Orbit und die entwickelten Algorithmen werden im Kapitel 8 für das Potential, die Line-of-Sight Gradienten und die Range-Rate getestet. Zunächst wird gezeigt, dass die Legendre- und die Wigner-Darstellungen des Energieintegrals und der LOS-Gradiometrie für Kreisbahnen numerisch identisch sind, allerdings ist die Legendre-Darstellung effizienter in der Berechnung. Die Ableitungen der Range-Rate werden durch eine Implementierung der Variationsgleichungen bestätigt, wobei die Differenzen auf die unterschiedlichen Näherungen zurückzuführen sind. Abschließend wird eine Analyse der simulierten Satellitendaten durch die optimierten radialen Basisfunktionen durchgeführt. Während die Range-Rate nur in einem vereinfachten Modell eine Verbesserung der vorgegebenen Parameter ermöglicht, sind die Optimierungen der in-situ Beobachtungen sehr erfolgreich. In den Testgebieten werden zwischen Signal und Approximation Korrelationen von über 90 % erreicht, während sich die statistischen Maße der Differenzen um mindestens eine Größenordnung reduzieren.

Im Anhang A wird die Wigner-Darstellung näher analysiert und die Anzahl der Summanden durch Symmetriebeziehungen reduziert. Außerdem werden die Dimensionen der Faktoren für eine Implementierung durch Matrix-Vektor-Operationen abgeschätzt und die Umsetzung als Pseudocode vorgestellt. Der letzte Abschnitt B widmet sich der Umsetzung in MATLAB und den entwickelten Programmen.





## 2. Grundlagen

### 2.1. Notationen

Die Variablen dieser Arbeit stammen aus der Grundmenge der natürlichen, der ganzen, der reellen oder komplexen Zahlen, welche durch  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  symbolisiert werden. Skalare Größen werden ohne weitere Kennzeichnung durch kursive, möglichst eindeutige Symbole ( $a, b, \dots, A, B, \dots$ ) notiert und gegebenenfalls durch Indizes, Exponenten etc. näher spezifiziert. Einen Sonderfall stellen die (Hilfs-)Variablen  $\xi$  und  $f$  dar, die vor allem für Zwischenschritte und Erklärungen verwendet werden und deren aktuelle Bedeutung dem jeweiligen Kontext zu entnehmen ist.

Eine komplexe Zahl  $z$  lässt sich mit der imaginären Einheit  $\imath$  in der kartesischen Form

$$z = x + \imath y$$

darstellen, wobei  $x$  den Real- und  $y$  den Imaginärteil bezeichnet. Jeder komplexen Zahl lässt sich die konjugiert-komplexe Zahl

$$z^* = x - \imath y$$

zuordnen, so dass man die beiden Komponenten mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} x = \Re\{z\} &= \frac{z + z^*}{2} \\ y = \Im\{z\} &= \frac{z - z^*}{2\imath} \end{aligned}$$

bestimmen kann. Außerdem sei bereits an dieser Stelle auf die Eulerformeln

$$\begin{aligned} \exp(\imath x) &= \cos x + \imath \sin x \\ \cos x &= \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} \\ \sin x &= \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2\imath} \end{aligned}$$

hingewiesen, die zur Vereinfachung einiger Formeln verwendet werden.

Wird eine Gruppe von  $L$  reellen oder komplexen Zahlen zu einem Vektor  $\vec{x}$  zusammengefasst, so geschieht dies in der Regel durch Spaltenvektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix}$$

oder in seltenen Fällen durch Zeilenvektoren

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_L).$$

Die Anzahl  $L$  der Elemente wird auch als Dimension des Vektors bezeichnet, während das Element der  $\ell$ -ten Zeile bzw. Spalte durch  $x_\ell$  mit  $1 \leq \ell \leq L$  notiert wird. Um in der Darstellung zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren zu wechseln, werden diese durch den Operator  $^\top$  transponiert, welcher die Elemente der Zeilen und

Spalten von Vektoren (und Matrizen) vertauscht. Der Betrag bzw. die Länge eines Vektors ergibt sich durch die euklidische Norm:

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_L^2} = \sqrt{\sum_{\ell=1}^L x_\ell^2}.$$

Jeder Vektor – außer dem Nullvektor  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^\top$  – lässt sich durch die Division

$$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

zu einem Einheitsvektor normieren, der dieselbe Richtung und die Länge  $\|\hat{x}\| = 1$  besitzt, was durch die andere Notation betont werden soll.

Zwischen zwei Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  mit der gleichen Anzahl von Elementen wird durch die Beziehung

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^\top \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_L y_L = \sum_{\ell=1}^L x_\ell y_\ell$$

ein Skalarprodukt definiert. Aus diesem ergibt sich zum einen eine alternative Darstellung der Norm

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

und zum anderen eine verallgemeinerte Möglichkeit der Winkelberechnung

$$\cos \varpi := \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle,$$

wobei  $\varpi$  den kleinsten Winkel zwischen den Vektoren – gemessen in der gemeinsam aufgespannten Ebene – bezeichnet. Insbesondere gelten zwei Vektoren mit der Dimension  $L$  als orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

Mehrere Vektoren mit geeigneten Dimensionen können zu einer Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten zusammengefasst werden, wobei auf die explizite Angabe der Dimensionen meist verzichtet wird. Ein einzelnes Element  $a_{ij}$  mit  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  aus der Matrix wird durch eine doppelte Indizierung und häufig durch die entsprechenden Kleinbuchstaben notiert. Besondere Matrizen sind die (nicht notwendigerweise quadratischen) Einheitsmatrizen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

in denen nur Diagonalelemente  $e_{\ell\ell} = 1$  von Null verschieden sind.

Neben der Vektor- und Matrizenrechnung der linearen Algebra werden auch einige (nichtlineare) Funktionen genutzt, wobei die „Standardfunktionen“ in aufrechter Notation und die speziellen Funktionen (aus dem Kapitel 3) in kursiver Schreibweise dargestellt werden. Hängt eine Funktion  $f(x)$  nur von einem Argument  $x$  ab, so wird die erste, zweite und dritte Ableitung durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= f^{(1)}(x) = \frac{df(x)}{dx} \\ f''(x) &= f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ f'''(x) &= f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \end{aligned}$$

bezeichnet, wobei für höhere Ableitungen vor allem die Notation auf der rechten Seite Verwendung findet. Besitzt eine Funktionen dagegen mehrere Argumente (und Parameter) oder wird nicht nach dem eigentlichen Argument differenziert, so wird die Darstellung

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell}$$

genutzt, um die partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach einem Argument  $x_\ell$  wiederzugeben, während alle anderen Werte festgehalten werden. Höhere Ableitungen werden entsprechend durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}\end{aligned}$$

dargestellt, wobei in der zweiten Zeile die Reihenfolge der Ableitungen (hier erst  $x_j$ , dann  $x_k$ ) nach dem Satz von Schwarz für zweimal stetig differenzierbare Funktionen unerheblich ist (Bartsch, 1999). Insbesondere für die Differentiation nach der Zeit  $t$  wird in Analogie zur Schreibweise in der Physik auch die Notation

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{df(t)}{dt} \\ \frac{\partial f(t, \vec{x}, \dots)}{\partial t} \end{array} \right. \\ \ddot{f}(t) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 f(t, \vec{x}, \dots)}{\partial t^2} \end{array} \right.\end{aligned}$$

verwendet. Handelt es sich bei der Größe  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  um eine Position, so ergibt die erste Ableitung nach der Zeit die Geschwindigkeit und die zweite die Beschleunigung (im jeweiligen Koordinatensystem).

Für eine kompaktere Schreibweise wird außerdem die Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} = \frac{\partial f}{\partial (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \end{pmatrix}$$

definiert, durch welche mehrere partielle Ableitungen einer Funktion  $f$  nach den Argumenten  $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  in einer Gleichung zusammengefasst werden.

## 2.2. Koordinatensysteme

Um Positionen oder Bewegungen zu beschreiben, benötigt man ein Koordinatensystem, auf welches sich die Angaben der Vektoren beziehen. Dabei ist zu beachten, dass viele Probleme durch die Wahl eines geeigneten Systems vereinfacht werden können. Für ein Objekt im dreidimensionalen euklidischen Raum bietet sich meist ein kartesisches Koordinatensystem (allgemeines Symbol:  $K$ ) an, welches durch drei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren ( $\hat{e}_{K=1}, \hat{e}_{K=2}, \hat{e}_{K=3}$ ) und einen Ursprung definiert wird.

Abgesehen von den Beschreibungen des Abschnitts 4.1 beziehen sich die meisten Größen in dieser Arbeit auf die Figur der Erde. Zur Vereinfachung wird daher der Ursprung für alle globalen Koordinatensysteme in das Massenzentrum der Erde platziert und das jeweilige geozentrische System durch Indizes der Vektoren gekennzeichnet. Verwendet werden insbesondere die folgenden Systeme:

1. Das inertielle (= raumfeste) Koordinatensystem (Bezeichnung: „i“), dessen  $\hat{e}_{i=1}$ -Achse in Richtung Frühlingspunkt zeigt und dessen  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse zum Himmelspol orientiert ist, während die  $\hat{e}_{i=2}$ -Achse das Rechtssystem ergänzt.

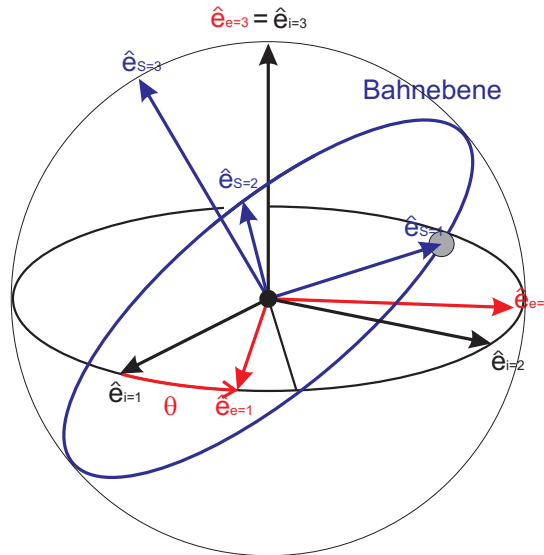


Abbildung 2.1.: Repräsentation des inertialen, des erdfesten und des Satellitensystems durch die Angabe der Einheitsvektoren, wobei die Transformation zwischen dem inertialen und dem erdfesten System nur durch die Rotation um die  $\hat{e}_{e=3} = \hat{e}_{i=3}$ -Achse und die Sternzeit  $\Theta$  realisiert wird

2. Das erdfeste Koordinatensystem (Notation: „e“) ist ebenfalls ein Rechtssystem, wobei die  $\hat{e}_{e=1}$ -Achse durch den Schnitt der Äquatorebene und den Meridian durch Greenwich vorgegeben ist und die  $\hat{e}_{e=3}$ -Achse in Richtung Nordpol zeigt.
3. Ein rotierendes (Satelliten-)System (Symbol: „S“), dessen  $\hat{e}_{S=1}$ -Achse radial nach außen zum Satelliten zeigt und dessen  $\hat{e}_{S=3}$ -Richtung orthogonal zur Ebene der Bewegung ist, während die  $\hat{e}_{S=2}$ -Achse parallel zur Tangente der Bahn (in Flugrichtung) orientiert ist und das Rechtssystem ergänzt.
4. Weitere Koordinatensysteme, welche z.B. zur Beschreibung einer Satellitenbahn dienen, werden an gegebener Stelle erläutert und sind nicht Teil dieser Vorbereitung.

Streng genommen existieren nach Rummel (2002) mehrere (Quasi-)Inertialsysteme, wobei insbesondere das vereinbarte Inertialsystem zur Bezugsepoche, das mittlere Inertialsystem und das wahre Inertialsystem zu nennen sind. In der Himmelsmechanik wird außerdem oft der Schwerpunkt des Sonnensystems als Ursprung verwendet, was zu den sogenannten baryzentrischen Systemen führt. Um vom wahren (geozentrischen) Inertialsystem ins vereinbarte Inertialsystem zu wechseln, sind die Koordinaten durch die Nutation und die Präzession zu korrigieren, worauf hier ebenso wie auf die Translation des Ursprungs verzichtet werden soll. Auch für das erdfeste Koordinatensystem existiert eine Unterscheidung zwischen dem vereinbarten terrestrischen System und dem wahren terrestrischen System. Der Übergang vom vereinbarten terrestrischen Koordinatensystem – mit zeitlich konstanten Stationskoordinaten – ins wahre terrestrische System erfolgt durch die Berücksichtigung der Polbewegung und der Tageslängenschwankungen, was aber in dieser Arbeit aufgrund der sehr kleinen Effekte vernachlässigt wird.

Unter Vernachlässigung von Präzession, Nutation und Polbewegung erfolgt die Transformation vom inertialen zum erdfesten Koordinatensystem durch die Rotation um die gemeinsame dritte Achse  $\hat{e}_{i=3} = \hat{e}_{e=3}$  mit der Sternzeit  $\Theta$  als Drehwinkel, was in der Abbildung 2.1 dargestellt ist.

Bezüglich der Bezeichnungen sei hier noch angemerkt, dass für Größen des Inertialsystems (z.B. Kräfte  $\vec{F}$ , deren Beschleunigungen  $\vec{a}$ , oder die Keplerelemente) sowie für skalare Beobachtungen (Abstände, Potentialwerte, ...) mitunter auf die explizite Angabe des Koordinatensystems verzichtet wird, um eine kompaktere Notation zu erreichen. Die  $j$ -te Komponente eines Vektors  $\vec{x}_K$  lässt sich durch das Skalarprodukt mit dem

Einheitsvektor in der gewünschten Richtung

$$x_{K=j} = \langle \vec{x}_K, \hat{e}_{K=j} \rangle \quad (2.1)$$

bestimmen, weshalb im Weiteren durch die Schreibweise  $x_{K=j}$  die Komponente und das System wiedergegeben wird.

Nach der Wahl eines Koordinatensystems können auch die Differentialoperatoren zur Beschreibung physikalischer Effekte definiert werden. Um einer skalaren Funktion  $f$  ihre Ableitungen in Richtung der Achsen des kartesischen Koordinatensystems zuzuordnen, verwendet man den Gradienten

$$\vec{\nabla} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{K=1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{K=2}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{K=3}} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{K=1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{K=2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{K=3}} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

wobei der Vektorpfeil auf dem Operator  $\vec{\nabla}$  die Dimensionen des Ergebnisses betonen soll. Handelt es sich bei der skalaren Funktion um ein gravitatives Potential, so liefert der Gradient die Komponenten der Beschleunigung im Schwerfeld.

Durch das Skalarprodukt des Operators mit dem Gradienten einer skalaren Funktion

$$\Delta f := \langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=2}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=3}^2} \quad (2.3)$$

erhält man den Laplace-Operator. Wendet man dagegen den Operator auf einen (transponierten) Gradienten an

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &:= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f)^\top = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=1}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=1}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=1}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=2}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=2}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=3}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=3}} & \frac{\partial^2}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=3}} \end{pmatrix} f = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=1} \partial x_{K=3}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=2} \partial x_{K=3}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{K=3} \partial x_{K=3}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

so ist das Ergebnis die (Hesse-)Matrix der zweiten Ableitungen, welche im Zusammenhang mit dem Schwerfeld auch als Tensor des Feldes bezeichnet wird.

Da die Erde annähernd die Form einer Kugel hat, werden oft auch sphärische Koordinaten  $(\lambda, \vartheta, r)$  für das erdfeste System verwendet. Den Winkel zwischen dem Meridian durch Greenwich und dem Meridian der aktuellen Position, gemessen in der durch  $\hat{e}_{e=1}$  und  $\hat{e}_{e=2}$  aufgespannten Äquatorebene, bezeichnet man als Länge  $\lambda$ . Die Kobreite  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen der  $\hat{e}_{e=3}$ -Achse und dem Vektor zum Berechnungspunkt in der Meridianebene, während der Radius  $r$  die Entfernung zum Koordinatenursprung bezeichnet (vgl. Abbildung 2.2).

Zwischen den kartesischen und den sphärischen Koordinaten gelten die Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} \vec{x}_e &= \begin{pmatrix} x_{e=1} \\ x_{e=2} \\ x_{e=3} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \lambda \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ r &= \sqrt{x_{e=1}^2 + x_{e=2}^2 + x_{e=3}^2} = \|\vec{x}_e\| \\ \lambda &= \begin{cases} \arccos \left( \frac{x_{e=1}}{\sqrt{x_{e=1}^2 + x_{e=2}^2}} \right) & \text{für } x_{e=2} > 0 \\ 2\pi - \arccos \left( \frac{x_{e=1}}{\sqrt{x_{e=1}^2 + x_{e=2}^2}} \right) & \text{für } x_{e=2} < 0 \end{cases} \\ \vartheta &= \arccos \frac{x_{e=3}}{r}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

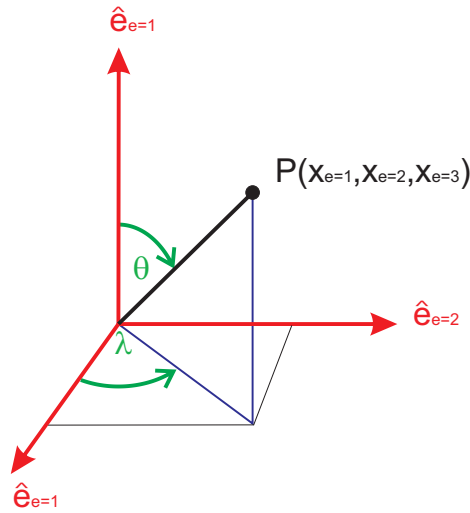


Abbildung 2.2.: Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Koordinaten im erdfesten System

wobei die Fallunterscheidung in der  $\lambda$ -Berechnung für den korrekten Quadranten des Winkels sorgt. Die Differentialoperatoren lassen sich auch in sphärischen Koordinaten darstellen, wobei für den Gradienten

$$\vec{\nabla} f(\lambda, \vartheta, r) = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^\top \quad (2.6)$$

gilt.

### 2.2.1. Koordinatentransformationen

Der Übergang zwischen zwei Koordinatensystemen erfolgt durch eine Transformation der Positionen (und Geschwindigkeiten). Da die Systeme gemäß der obigen Vereinbarung einen gemeinsamen Ursprung im Massenzentrum der Erde aufweisen, beinhaltet dieser Übergang nur Rotationen. In dieser Arbeit soll zur allgemeinen Notation dazu der Operator  $\mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  genutzt werden, wobei das Symbol „ $\mathfrak{R}$ “ die Koordinatentransformationen auf der Kugel und  $\xi_k$  mit  $k = 1, 2, \dots$  die Parameter der Rotation bezeichnet. Damit wird ein beliebiger Vektor vom Koordinatensystem  $K$  formal durch

$$\vec{x}_{K'} = \mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots) \left\{ \vec{x}_K \right\} \quad (2.7)$$

in ein System  $K'$  transformiert.

Arbeitet man mit dreidimensionalen, kartesischen Koordinaten, so lässt sich die Transformation eines Vektors durch eine Matrizenmultiplikation mit einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  realisieren. Diese ergibt sich aus dem Produkt der elementaren Rotationsmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_2(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_3(\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

welche die Drehung um die erste, zweite beziehungsweise dritte Achse des momentanen Koordinatensystems bewirken.

Jede Rotation lässt sich theoretisch aus maximal drei Drehungen mit diesen Matrizen erzeugen, auch wenn aus historischen Gründen z.B. für die Transformation vom inertialen ins erdfeste System mehr Parameter verwendet werden. Dabei unterscheidet man zwischen Kardan-Drehungen, in denen jede Achse einmal verwendet wird, und der Parametrisierung nach Eulerwinkeln, wobei die erste und die letzte Drehung um die gleiche Achse erfolgen.

## 2.3. Himmelsmechanik

### 2.3.1. Ideales Zweikörperproblem

Im idealen Zweikörperproblem der Himmelsmechanik werden nur zwei Punktmassen betrachtet, von denen eine als Zentralkörper und eine als Satellit bezeichnet wird. Dabei ist die Masse  $M$  des Zentralkörpers wesentlich größer als die Masse  $m$  des Satelliten, weshalb die Bewegung der erstgenannten vernachlässigt werden kann. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Ursache der Bewegung die (gegenseitige) Anziehungskraft

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\|\vec{x}_i\|^3}\vec{x}_i, \quad (2.9)$$

wobei  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  die Gravitationskonstante und  $\vec{x}_i$  die Position im Inertialsystem bezeichnet, dessen Ursprung mit dem Zentrum der Zentralmasse zusammenfällt. Dividiert man die Formel durch die Masse des Satelliten, so erhält man für die Beschleunigung  $\ddot{\vec{x}}_i$  die Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{\|\vec{x}_i\|^3}\vec{x}_i. \quad (2.10)$$

Diese Bewegungsgleichung wird für vorgegebene Anfangsbedingungen im Allgemeinen durch einen Kegelschnitt (Ellipse, Hyperbel oder Parabel) erfüllt. Betrachtet man nur den Fall einer geschlossenen Bahn, so gelten folgende drei Gesetze von Johannes Kepler (1571 – 1630):

1. Die Bewegung des Satelliten folgt einer Ellipse (im Spezialfall einem Kreis), wobei die Zentralmasse in einem der Brennpunkte fixiert ist.
2. In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl (d.h. der Vektor zwischen dem Zentralkörper und dem Satelliten) die gleiche Fläche.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Satelliten eines Zentralkörpers verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.

Die Lösung der Differentialgleichung (2.10) beinhaltet 6 Parameter, wofür in der Regel die folgenden Kepler-elemente verwendet werden (Kahmen, 1997, Kaula, 2000, Seeber, 2003, Rothacher, 2004):

Um die Form der Ellipse innerhalb der Bahnebene – in welcher die Bewegung des Satelliten stattfindet – festzulegen, genügen als Parameter die große Halbachse  $a$  und die kleine Halbachse  $b$  (vgl. Abbildung 2.3). Anstelle der kleinen Halbachse wird häufig die numerische Exzentrizität

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

mit  $0 \leq e < 1$  angegeben. In einer echten Ellipse ( $e > 0$ ) wird der Punkt der Bahn mit der kleinsten Entfernung zum Zentralkörper häufig mit einem eigenen Namen versehen, welcher für die Erde „Perigäum“ und für die Sonne „Perihel“ lautet. Mit diesen Größen wird ein Koordinatensystem  $(\hat{e}_{B=1}, \hat{e}_{B=2}, \hat{e}_{B=3})$  der Bahnebene definiert, dessen  $\hat{e}_{B=1}$ -Achse zum Perigäum zeigt, dessen  $\hat{e}_{B=2}$ -Achse die Richtung der kleinen Halbachse wiedergibt und dessen  $\hat{e}_{B=3}$ -Achse senkrecht zur Bahnebene ist.

Außerdem benötigt man noch eine Zusatzinformation, um die Position des Satelliten innerhalb der Bahnebene zu beschreiben. Dies kann durch eine Angabe des Zeitpunktes eines Perigäumsdurchgangs oder die (wahre,

exzentrische oder mittlere) Anomalie erfolgen. Die wahre Anomalie  $\nu$  ist der Winkel zwischen der  $\hat{e}_{B=1}$ -Achse der Bahnebene und dem Vektor zum Satelliten, wobei der Scheitel im Brennpunkt lokalisiert ist. In der Bestimmung der exzentrischen Anomalie  $E$  wird der Winkel zwischen der  $\hat{e}_{B=1}$ -Achse und der Projektion der Satellitenposition auf eine Kreisbahn mit dem Radius  $a$  im geometrischen Mittelpunkt der Ellipse gemessen. Aus dem 3. Gesetz von Kepler gewinnt man die mittlere Bewegung

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (2.11)$$

und daraus die (lineare) mittlere Anomalie

$$M = \bar{n}(t - t_0), \quad (2.12)$$

wobei  $t$  die Zeit und  $t_0$  den Zeitpunkt der ersten Beobachtung bezeichnet. Zwischen den drei Anomalien gelten unter anderem die Beziehungen

$$M = E - e \sin E \quad (\text{Keplergleichung}) \quad (2.13)$$

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (2.14)$$

weshalb für eine Kreisbahn mit  $e = 0$  alle Anomalien identisch sind. In der Bahnebene kann die Bewegung mit dem Radius

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (2.15)$$

durch den Vektor

$$\vec{x}_B = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

dargestellt werden. Um die Orientierung der Bahnebene im raumfesten Koordinatensystem wiederzugeben, sind drei Lageparameter notwendig. Dazu verwendet man in der Regel

- den Perigäumsabstand  $\omega$ , also den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Richtung zum Perigäum,
- die Inklination  $I$ , also die Neigung der Bahnebene gegenüber der Äquatorebene
- und die Rektaszension  $\Omega$  des aufsteigenden Bahnknotens, d.h. den Winkel zwischen der inertialen  $\hat{e}_{i=1}$ -Achse und dem Schnittpunkt der Bahnebene mit der Äquatorebene.

Verwendet man die zweite Darstellung des Bahnvektors (2.16) und rotiert diesen durch die Lageparameter in das Inertialsystem, so erhält man

$$\vec{x}_i = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-I)\mathbf{R}_3(-\omega)\vec{x}_B = r \begin{pmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \cos I \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \cos I \\ \sin I \sin(\omega + \nu) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

In dieser Formel erscheint nur die Summe aus dem Perigäumsabstand  $\omega$  und der wahren Anomalie  $\nu$

$$u = \omega + \nu, \quad (2.18)$$

welche auch als Argument der Breite bezeichnet wird. Für Satellitenbahnen mit sehr kleiner Exzentrizität ersetzt diese außerdem die Angabe der Anomalien, da eine Trennung der beiden Größen numerisch instabil wird. Berücksichtigt man für die Transformation zwischen dem inertialen und dem erdfesten Koordinatensystem nur die Rotation um die  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse bzgl. der Sternzeit  $\Theta$ , so wird die Position des Satelliten durch

$$\vec{x}_e = \mathbf{R}_3(\Theta)\vec{x}_i = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \Omega) \cos u + \sin(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ -\sin(\Theta - \Omega) \cos u + \cos(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ \sin I \sin u \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

dargestellt.



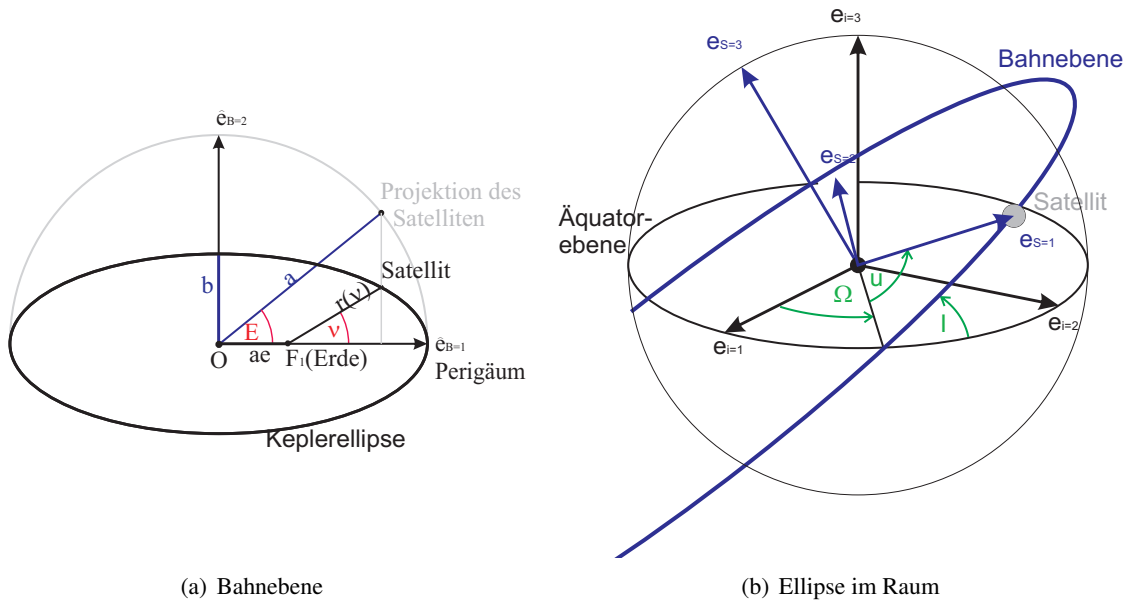


Abbildung 2.3.: Bahnelemente des idealen Keplerproblems in der Bahnebene und im Inertialsystem

### 2.3.2. Orbitintegration

Die tatsächliche Bahn eines Körpers weicht von der idealen Keplerellipse ab, da die Bewegung von der inhomogenen Massenverteilung der Erde, den direkten Gezeiten aufgrund der anderen Himmelskörper (Sonne, Mond, Planeten, ...), deren Effekt auf die Erde (indirekte Gezeiten) und nicht-gravitativen Einflüssen wie dem Strahlungsdruck der Sonne, der Reibung der Restatmosphäre oder dem Albedo der Erde beeinflusst wird. Die Bestimmung der inertialen Positionen  $\vec{x}_i(t)$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_i(t)$  erfolgt bereits in der Vorprozessierung zu dieser Arbeit und ist nicht Teil der entwickelten Programme, weshalb die Idee hier nur kurz skizziert werden soll.

Zunächst stellt man die erweiterte Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = \frac{d(m\dot{\vec{x}}_i)}{dt} = m \frac{d\dot{\vec{x}}_i}{dt} + \dot{\vec{x}}_i \frac{dm}{dt} = m\ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{x}}_i \frac{dm}{dt} \quad (2.20)$$

in einem Inertialsystem auf, wobei  $m$  die Masse,  $\dot{\vec{x}}_i$  die Geschwindigkeit,  $\ddot{\vec{x}}_i$  die Beschleunigung und  $\vec{F}$  die Summe aller wirksamen Kräfte bezeichnet (Rothacher, 2004, Sneeuw, 2006, Weigelt, 2007).

Auf der einen Seite kann die Massenänderung des Satelliten  $\frac{dm}{dt}$  meist vernachlässigt werden, andererseits ist die Kraft  $\vec{F}$  im Allgemeinen abhängig von der Position  $\vec{x}_i$ , der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}_i$ , der Zeit  $t$  und eventuell weiteren Parametern  $\vec{P}$  (Dichte der Atmosphäre, Strahlungsdruck der Sonne, usw.). Definiert man die Beschleunigung  $\vec{a}$  als Quotient der Kraft im Inertialsystem durch die Masse, so folgt daraus die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, \vec{P}) =: m\vec{a}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, \vec{P}). \quad (2.21)$$

Indem man durch die Masse dividiert und die Gesamtbeschleunigung in einzelne Beiträge aufteilt, erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{a}_E + \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) = \underbrace{-\frac{GM}{\|\vec{x}_i\|^3} \vec{x}_i}_{\text{ideales Problem}} + \underbrace{\left( \vec{a}_E + \frac{GM}{\|\vec{x}_i\|^3} \vec{x}_i \right) + \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t)}_{\text{„Störung“}} =: \vec{a} \quad (2.22)$$

der **Orbitintegration**, deren numerische Lösung eine bessere Approximation der beobachteten Satellitenbahn ergibt (vgl. Seeber (2003)). Dabei bezeichnen die Größen

- $\vec{a}_E$  die Beschleunigung aufgrund des statischen Schwerfeldes der Erde,
- $\delta\vec{a}$  die Wirkung der nicht-gravitativen Effekte, z.B. durch die Reibung der Atmosphäre oder den Strahlungsdruck der Sonne,
- $\vec{a}_{\delta m}(t)$  die zeitlich veränderlichen Terme, welche durch die Gravitation der anderen Himmelskörper, deren indirekten Effekt auf die Erde und die sonstigen Massenverlagerungen im System Erde hervorgerufen werden,
- $\left(\vec{a}_E + \frac{GM}{\|\vec{x}_i\|^3}\vec{x}_i\right)$  den statischen Beitrag der inhomogenen Massenverteilung der Erde
- und  $\vec{a}$  die Beschleunigung aufgrund aller wirksamen Kräfte.

Aus den verbleibenden Abweichungen zwischen der berechneten Satellitenbahn und der wahren Position, welche durch geeignete Messverfahren (z.B. GPS oder Lasermessungen) bestimmt wird, sowie den Instrumenten an Bord werden anschließend die Modelle des Erdsystems verbessert, wobei in dieser Arbeit nur die Parameter des Schwerfeldes und damit die inhomogene Massenverteilung behandelt werden.

In den folgenden Kapiteln werden in der Regel die Satellitenbahnen  $\{\vec{x}_i(t), \dot{\vec{x}}_i(t)\}$  aus einer vorherigen Orbitintegration festgehalten und die momentanen (oskulierenden) Keplerelemente ( $a = a(t)$ ,  $e = e(t)$ , ...) je Zeitpunkt in den Berechnungen verwendet. Um die oskulierenden Keplerlemente aus der Bahn zu berechnen, bildet man nach Kaula (2000), Seeber (2003) oder Rothacher (2004) zuerst mit dem Kreuzprodukt der beiden Größen einen Hilfsvektor

$$\vec{x}_i(t) \times \dot{\vec{x}}_i(t) = \vec{\xi}_i = (\xi_{i=1}, \xi_{i=2}, \xi_{i=3})^\top,$$

der parallel zum Vektor des Drehimpulses ist. Aus diesem bestimmt man mit  $r = \|\vec{x}_i(t)\|$  die Form der Ellipse:

$$a = \frac{GM \cdot r}{2GM - r\|\dot{\vec{x}}_i(t)\|^2} \quad (2.23)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{\|\vec{\xi}_i\|^2}{a \cdot GM}}. \quad (2.24)$$

Speziell für Kreisbahnen gilt  $r = a$  und  $\|\vec{\xi}_i\| = r^2\bar{n} = r^2\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ , so dass die Exzentrizität

$$e\Big|_{r=a} = \sqrt{1 - \frac{r^4 GM}{r^3 GM}} = 0$$

verschwindet, allerdings können aus numerischen Gründen durch das Radizieren komplexe Werte entstehen. Mit einer quadrantenrichtigen Umkehrfunktion der Tangensfunktion (in Programmiersprachen häufig „atan2“) lassen sich zwei der Lageparameter

$$\Omega = \arctan \frac{\xi_{i=1}}{-\xi_{i=2}} \quad (2.25)$$

$$I = \arctan \frac{\sqrt{\xi_{i=1}^2 + \xi_{i=2}^2}}{\xi_{i=3}} \quad (2.26)$$

berechnen. Mit diesen Werten dreht man die Position in die Bahnebene

$$\vec{x}_{B'} = \mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\Omega)\vec{x}_i,$$

wobei die erhaltene  $\hat{e}_{B'=1}$ -Achse noch nicht zum Perigäum, sondern in Richtung der Schnittgeraden der beiden Ebenen zeigt. In diesem System B' ist das Argument der Breite durch

$$u = \arctan \frac{x_{B'=2}}{x_{B'=1}} \quad (2.27)$$

gegeben, während für die exzentrische Anomalie

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}$$

gilt. Für die Bestimmung des korrekten Quadranten wird die Berechnung allerdings durch

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\langle \vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i \rangle}{r} \\ \sin E &= \frac{r \dot{r}}{e \sqrt{GMa}} \\ E &= \arctan \frac{\sin E}{\cos E} \end{aligned} \quad (2.28)$$

realisiert. Indem man jeweils die ersten beiden Komponenten der Formel (2.16) dividiert und den Arkustangens bildet, erhält man für die wahre Anomalie

$$\nu = \arctan \frac{\sin \nu}{\cos \nu} = \arctan \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e}. \quad (2.29)$$

Durch Subtraktion ergibt sich der Perigäumsabstand

$$\omega = u - \nu, \quad (2.30)$$

wodurch alle Keplerelemente aus der Position und der Geschwindigkeit bestimmt sind. In vielen Satellitenmissionen strebt man aus verschiedenen Gründen nahezu kreisförmige Bahnen mit einer Exzentrizität  $e \approx 0$  an. Dadurch ergeben sich numerische Probleme in der Berechnung der Anomalien  $\nu$ ,  $E$  und des Perigäumsabstands  $\omega$ , weshalb das Argument der Breite  $u$  in den weiteren Formeln als Variable vorzuziehen ist.

### 2.3.3. SST-Beobachtungen

Die ersten Messungen zu künstlichen Satelliten wurden von Stationen auf der Erdoberfläche durchgeführt und lieferten punktweise Beobachtungen oder Daten entlang kurzer Bahnbögen. Dabei werden z.B. Distanzen (Laser- oder Mikrowellen), Abstandsänderungen (Interferometrie), relative Geschwindigkeiten (Dopplereffekt der gesendeten Signale) oder Richtungen (Satellitentriangulation aus fotografischen Aufnahmen) gemessen.

Mit der zunehmenden Anzahl an Satelliten – insbesondere der Satellitensysteme zur Navigation (GLONASS, GPS, ...) – entstand die Idee, die Bewegungen zusätzlich durch **Satellite-to-Satellite-Tracking** (SST) zu verfolgen. Unter diesem Begriff werden alle Techniken zusammengefasst, welche die Distanzen oder deren Änderungen zwischen zwei oder mehr Satelliten erfassen, wobei in der Regel globale Datensätze mit einer hohen räumlichen und zeitlichen Auflösung erreicht werden. In Abhängigkeit von den Orbithöhen der beteiligten Satelliten wird zwischen den Varianten low-low-SST (beide Satelliten in ähnlicher, niedriger Flughöhe) und high-low-SST (deutlicher Unterschied in der Flughöhe) unterschieden. Seit der vollen Einsatzfähigkeit des GPS-Systems besitzen viele niedrig fliegende Satelliten standardmäßig GPS-Antennen für die Bahnbestimmung im high-low-SST Verfahren (Seeber, 2003, Torge, 2002).

Für die Analyse des Schwerefeldes werden heute insbesondere die Messungen der geodätischen Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE eingesetzt, die hier skizziert werden sollen:

#### CHAMP

Die Satellitenmission CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) des GFZ (Deutsches GeoForschungsZentrum: <http://op.gfz-potsdam.de/champ/>) lieferte in den Jahren 2000 – 2010 Beobachtungen, durch welche das Schwerefeld, das Magnetfeld und die Atmosphäre bzw. die Ionosphäre erfasst wurden. Der Satellit transportierte unter anderem

- einen Blackjack GPS-Empfänger mit 16 Kanälen und 4 Antennen zur Beobachtung der Bahn im high-low-SST Verfahren (und für die Analyse der Atmosphäre durch Okkultationsmessungen),

- einen dreiachsigen Beschleunigungssensor im Massenzentrum für die Messung der nicht-gravitativen Beschleunigungen,
- Sternkameras zur Bestimmung der Orientierung,
- einen Laser-Reflektor für die Entfernungsmessungen der terrestrischen Stationen,
- Fluxgate- und Overhauser-Magnetometer zur Bestimmung der skalaren und vektoriellen Werte des Erdmagnetfeldes
- und ein Ionendriftmeter, um die auftreffenden Ionen und damit das elektrische Feld in Flugrichtung zu bestimmen.

Durch die Inklination von  $I \approx 87^\circ$  und die fast kreisförmige Bahn ( $e \approx 0.004$ ) ergibt sich eine annähernd globale Überdeckung der Messungen. Die Flughöhe  $h$  reduzierte sich im Laufe der Mission von ursprünglich 454 km auf 150 km (vgl. Seeber (2003), Torge (2002), Reigber (2006), Mayer-Gürr (2006), Eicker (2008)).

### GRACE

Die Mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) wurde von der NASA/JPL (National Aeronautics and Space Administration/Jet Propulsion Laboratory) in Zusammenarbeit mit dem DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt) entwickelt. Seit dem Jahr 2002 fliegen zwei baugleiche Satelliten in einem Abstand von etwa 220 km auf nahezu kreisförmigen Bahnen ( $e < 0.005$ ) hintereinander her. Zu den Instrumenten an Bord der beiden Satelliten zählen jeweils

- ein GPS-Empfangssystem mit drei Antennen zur Bestimmung der Bahn im high-low-SST Verfahren und für Profilbeobachtungen der Iono- und Troposphäre,
- ein dreiachsiger Beschleunigungssensor zur Messung der nicht-gravitativen Beschleunigungen,
- je 2 Sternkameras zur Bestimmung der Orientierung
- und ein K-Band Ranging-System (KBR) zur Bestimmung der Abstände.

Für die Modellierung des Schwerefeldes werden insbesondere der Abstand  $\rho$  und dessen zeitliche Änderung  $\dot{\rho}$  – die sogenannte Range-Rate – zwischen den beiden Satelliten verwendet. Die Messungen erfolgen im low-low-SST Verfahren mit Mikrowellen im K- und Ka-Band (24 und 32 GHz), wobei die Genauigkeiten nominell mit  $1 - 10 \mu\text{m}$  bzw.  $1 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$  angegeben werden. Die ursprüngliche Flughöhe von 550 km wird während der Mission auf etwa 330 km absinken, was zu einer räumlichen Auflösung von etwa 300 km großen Strukturen im Schwerefeld führt (Torge, 2002, Seeber, 2003, Tapley, 2004, Mayer-Gürr, 2006, Eicker, 2008).

Nähere Informationen finden sich unter anderem in den Internetauftritten der auswertenden Institute wie dem CSR (Center for Space Resarch: <http://www.csr.utexas.edu/grace/>) und dem GFZ (<http://www.gfz-potsdam.de/portal/gfz/Struktur/Departments/Department+1/sec12/projects/grace>).

### GOCE

Der Satellit GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) wurde 2009 im Rahmen des Living Planet Programms der ESA gestartet. An Bord befinden sich unter anderem

- ein GPS-Empfangssystem mit 12 Kanälen zur Bestimmung der Bahn im high-low-SST Verfahren,
- ein dreiachsiges Gradiometer zur Bestimmung des Tensors des Schwerefeldes,
- Sternkameras für die Orientierung im Raum,
- ein dreiachsiges Magnetometer zur Erfassung des Erdmagnetfeldes
- und Magnetic Torquers zur Lageregelung (bzgl. des Magnetfeldes).

Durch ein Ionentriebwerk und die Magnetic Torquers erfolgt eine sehr genaue Ausrichtung und Steuerung, so dass die Bahn trotz der niedrigen Flughöhe von  $h \approx 240$  km als reibungsfrei betrachtet werden kann. Während die Position des Satelliten als Grundlage für ein globales langwelliges Schwerefeldmodell dient, werden durch das Gradiometer eine räumliche Auflösung bis zu einer Wellenlänge von 140 km erwartet. (Torge, 2002, Seeber, 2003, Drinkwater, 2003, Eicker, 2008, Rummel, 2009). Für aktuelle Informationen sei insbesondere auf das GOCE-Projektbüro (<http://www.goce-projektbuero.de/goce.html>) hingewiesen.

In dieser Arbeit werden drei Ansätze zur Analyse der SST-Daten (Energieintegral, Line-of-Sight Gradiometrie, Range-Rate) in den Kapiteln 5 und 6 behandelt. Das Energieintegral basiert auf der Auswertung des high-low-SST und kann für jede der genannten Missionen (und auch einige andere Satelliten) eingesetzt werden. Die beiden anderen Verfahren sind auf die GRACE Mission ausgerichtet, allerdings kann eine Komponente der GOCE-Daten als Line-of-Sight Gradient aufgefasst und mit der beschriebenen Methode analysiert werden.



## 3. Spezielle Funktionen

In diesem Kapitel werden die Legendrepolynome und die Kugelflächenfunktionen vorgestellt, die traditionell eine wichtige Rolle in der Modellierung des Potentials in sphärischen Koordinaten spielen. Die Legendrepolynome lassen sich aus der Reihenentwicklung des inversen Abstands zweier Punktmassen definieren. Für ausgedehnte Objekte ist eine Beschreibung (des Potentials) durch Legendre- bzw. Kugelflächenfunktionen vorteilhaft, da diese im Außenraum eine harmonische Lösung garantieren und ein vollständiges und orthogonales Basissystem auf der Kugel bilden.

In einem gedrehten Koordinatensystem lässt sich das Potential (und dessen Funktionale) darstellen, indem man zunächst die Koordinaten transformiert und diese anschließend in die Reihenentwicklung einsetzt. Aufgrund der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen lässt sich diese Transformation auch durch eine Linearkombination der originalen Funktionen mit geeigneten Koeffizienten realisieren. Für spezielle Darstellungen der Rotationen existieren geschlossene Formeln für die Koeffizienten, wobei hier die Wigner-D-Funktionen für die Drehung um die drei Eulerwinkel  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  genutzt werden.

### 3.1. Potentialtheorie

Die folgenden Abschnitte fassen die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften der „klassischen“ Potentialtheorie zusammen, wobei in der Regel auf die entsprechenden Beweise verzichtet wird. Eine Ausnahme bildet eine selten verwendete Rekursion der Kugelflächenfunktionen in der komplexen Normierung, die für die spätere Herleitung der Wigner-D-Funktionen genutzt wird.

#### 3.1.1. Potential einer Punktmasse – Legendrepolynome

Zwischen zwei (Punkt-)Massen  $P$  und  $Q$  wirkt jeweils eine Anziehungskraft, welche von den Massen  $m_P$  bzw.  $m_Q$ , der Gravitationskonstante  $G$  sowie dem Abstand der beiden Schwerpunkte ( $\vec{x}_P, \vec{x}_Q$ ) abhängt. Analog zum Abschnitt 2.3 kann die Anziehung durch eine Variante des Gravitationsgesetzes (2.9) formuliert werden

$$\vec{F} = -\frac{Gm_P m_Q}{\|\vec{x}_P - \vec{x}_Q\|^3} (\vec{x}_P - \vec{x}_Q),$$

was nach einer Division durch die Masse  $m_P$  auf die Beschleunigungen

$$\frac{\vec{F}}{m_P} = -\frac{Gm_Q}{\|\vec{x}_Q - \vec{x}_P\|^3} (\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$$

führt.

In einer anderen Betrachtungsweise erzeugt jede Masse um sich ein Vektorfeld (der Beschleunigungen), welches auf andere Körper eine Anziehung bewirkt. Da es sich um ein konservatives Vektorfeld handelt, kann diesem in jedem Punkt des Raumes ein skalares Potential  $V_0(\vec{x})$  zugeordnet werden, dessen Gradient  $\vec{\nabla}V_0(\vec{x})$  wieder das Vektorfeld ergibt. Betrachtet man das Feld um die Punktmasse  $m_Q$  und einen Berechnungspunkt  $\vec{x} \neq \vec{x}_Q$ , so ist das Potential  $V_0(\vec{x})$  durch

$$V_0(\vec{x}) = \frac{Gm_Q}{\|\vec{x}_Q - \vec{x}\|} = \frac{Gm_Q}{\sqrt{(x_{Q,i=1} - x_{i=1})^2 + (x_{Q,i=2} - x_{i=2})^2 + (x_{Q,i=3} - x_{i=3})^2}} \quad (3.1)$$

gegeben, dessen Gradient die Voraussetzung

$$\vec{\nabla}V_0(\vec{x}) = -\frac{Gm_Q}{\sqrt{(x_{Q,i=1} - x_{i=1})^2 + (x_{Q,i=2} - x_{i=2})^2 + (x_{Q,i=3} - x_{i=3})^2}^3} \begin{pmatrix} x_{Q,i=1} - x_{i=1} \\ x_{Q,i=2} - x_{i=2} \\ x_{Q,i=3} - x_{i=3} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

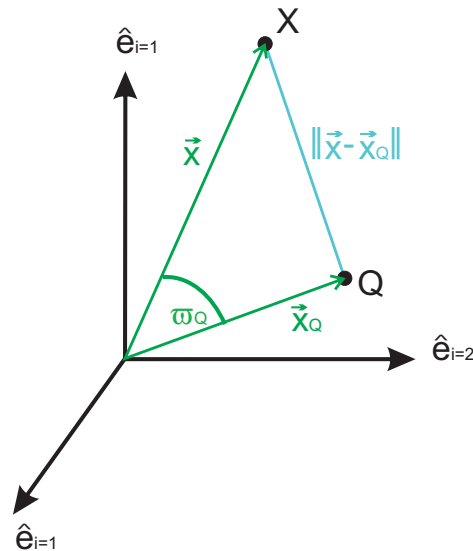


Abbildung 3.1.: Abstand zweier Punktmassen in „polaren“ Koordinaten  $\{r, r_Q, \varpi_Q\}$

erfüllt.

Zur Vorbereitung für inhomogene ausgedehnte Körper kann man den inversen Abstand in einer Reihe entwickeln (Sigl, 1973, Torge, 2002, Rummel, 2002). Dazu betrachtet man das Problem in „polaren“ Koordinaten, welche durch die Abstände  $r = \|\vec{x}\|$  und  $r_Q = \|\vec{x}_Q\|$  zum Ursprung und durch den Winkel  $\varpi_Q$  zwischen den beiden Vektoren definiert werden (vgl. Abbildung 3.1).

Mit diesen Größen kann man den (inversen) Abstand der Punkte durch den Kosinussatz

$$\frac{1}{\|\vec{x}_Q - \vec{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_Q^2 - 2rr_Q \cos \varpi_Q}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\frac{r_Q}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r_Q}{r}\right) \cos \varpi_Q}} \quad (3.3)$$

darstellen. Die rechte Seite ist auch als die erzeugende Funktion der Legendrepolynome  $P_n(\cdot)$  bekannt und es gilt für  $r > r_Q$  die äquivalente Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{\|\vec{x}_Q - \vec{x}\|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_Q}{r}\right)^n P_n(\cos \varpi_Q). \quad (3.4)$$

Der Index  $n$  der Funktion  $P_n(\cos \varpi)$  gibt jeweils den Grad der Legendrepolynome wieder, während für das Argument in dieser Arbeit auch die Notation

$$\zeta = \cos \vartheta \quad (3.5)$$

verwendet wird. Nach einer Multiplikation mit  $Gm_Q$  erhält man das Potential einer Punktmasse

$$V_0(\vec{r}) = \frac{Gm_Q}{\|\vec{x}_Q - \vec{x}\|} = \frac{Gm_Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_Q}{r}\right)^n P_n(\cos \varpi_Q) \quad \text{für } r > r_Q \quad (3.6)$$

in der Darstellung durch die Legendrepolynome. Diese lassen sich sowohl durch die Rekursion

$$\begin{aligned} P_0(\zeta) &= 1 \\ P_1(\zeta) &= \zeta \\ P_{n+1}(\zeta) &= \frac{2n+1}{n+1} \zeta P_n(\zeta) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\zeta) \quad n > 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$



als auch durch die differentielle Formel von Rodriguez

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\zeta^2 - 1)^n}{d\zeta^n} \quad (3.8)$$

bestimmen. Außerdem stellen sie aufgrund der Integrale

$$\int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta = \int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (3.9)$$

ein (vollständiges) orthogonales System im Intervall  $\zeta \in [-1, 1]$  bzw.  $\vartheta \in [0, \vartheta]$  dar, weshalb (fast) jede andere Funktion durch eine Reihenentwicklung

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\zeta) \quad (3.10)$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\zeta) P_n(\zeta) d\zeta \quad (3.11)$$

approximiert werden kann. In Analogie zur Fouriertransformation bezeichnet man die Darstellung (3.10) auch als **Synthese** im Spektralbereich und die Formel (3.11) als **Analyse**. Für die Analyse verwendet Windheuser (1995) – mit einer anderen Normierung – auch den Begriff Legendre-Transformation<sup>1</sup>, während für die Zahlenfolge  $c_n$  die Bezeichnung Legendre-Koeffizienten üblich ist (Schmidt, 2007, Tenzer, 2008, Klees, 2008).

### 3.1.2. Laplace-Differentialgleichung

Während für Punktmassen die Verwendung der Legendrepolynome nur eine optionale Darstellung (des inversen Abstands) liefert, erfordern ausgedehnte (inhomogene) Körper in der Regel eine Reihenentwicklung für die Beschreibung des Potentials. Außerhalb der Massen soll jedes Potential  $\Phi$  eines gravitativen Feldes harmonisch sein und damit die Laplacegleichung

$$\Delta \Phi(\vec{x}_K) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{K=1}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{K=2}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{K=3}^2} = 0 \quad (3.12)$$

erfüllen (Sigl, 1973, Torge, 2002, Rummel, 2002).

In Abhängigkeit von der Form des Körpers sucht man daher geeignete (harmonische) Basisfunktionen und stellt das Potential durch diese dar. Da die Gestalt der Erde näherungsweise einer Kugel entspricht, wählt man sphärische (erdfeste) Koordinaten für das Potential  $\Phi = \Phi(r, \lambda, \vartheta)$  und erhält als Laplace-Differentialgleichung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (3.13)$$

Indem man den Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta_{\lambda\vartheta} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right\} \quad (3.14)$$

für die Ableitungen nach den Winkeln  $(\lambda, \vartheta)$  einführt und die Differentialgleichung mit  $r^2$  multipliziert, folgt daraus

<sup>1</sup>Diese Bezeichnung ist allerdings mit Vorsicht zu verwenden, da der Name „Legendre-Transformation“ auch für eine Variablentransformation in der Lösung von Differentialgleichungen genutzt wird.

$$r^2 \Delta \Phi = r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Delta_{\lambda \vartheta} \Phi = 0. \quad (3.15)$$

Zur Lösung verwendet man den Separationsansatz und stellt das Potential als ein Produkt  $\Phi = f(r) \cdot Y(\lambda, \vartheta)$  dar:

$$r^2 \Delta \Phi = r^2 Y(\lambda, \vartheta) \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r Y(\lambda, \vartheta) \frac{df(r)}{dr} + f(r) \Delta_{\lambda \vartheta} Y(\lambda, \vartheta) = 0. \quad (3.16)$$

Nach einer Division durch  $\Phi = (f(r)Y(\lambda, \vartheta))$  sind die ersten beiden Summanden nur von  $r$ , die letzten nur von  $\{\lambda, \vartheta\}$  abhängig. Damit die Differentialgleichung für alle Werte erfüllt ist, müssen beide Komponenten konstant sein. Im Vorgriff auf die angestrebte periodische Lösung sind hier nur die Konstanten  $\pm n(n+1)$  möglich, wobei die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  als Grad bezeichnet wird:

$$\frac{1}{f(r)} \left( r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} \right) = n(n+1)$$

$$\frac{1}{Y(\lambda, \vartheta)} \Delta_{\lambda \vartheta} Y(\lambda, \vartheta) = -n(n+1).$$

Indem man die Gleichungen jeweils mit dem Nenner multipliziert, folgt daraus

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} = n(n+1)f(r) \quad (3.17)$$

$$\Delta_{\lambda \vartheta} Y(\lambda, \vartheta) = -n(n+1)Y(\lambda, \vartheta), \quad (3.18)$$

weshalb in Analogie zur linearen Algebra die Terme  $\pm n(n+1)$  auch als Eigenwerte bezeichnet werden.

Die Differentialgleichung (3.17) hat die beiden Lösungen  $f_1(r) = r^n$  und  $f_2(r) = r^{-(n+1)}$ , wie man durch Einsetzen bestätigen kann. Anschließend setzt man in die Gleichung (3.18) das Produkt  $Y(\lambda, \vartheta) = g(\vartheta)h(\lambda)$  ein

$$\overbrace{\frac{\partial^2 (g(\vartheta)h(\lambda))}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial (g(\vartheta)h(\lambda))}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 (g(\vartheta)h(\lambda))}{\partial \lambda^2}}^{(3.14)} = -n(n+1)(g(\vartheta)h(\lambda)) \quad (3.19)$$

und multipliziert mit  $\frac{\sin^2 \vartheta}{g(\vartheta)h(\lambda)}$ :

$$\frac{1}{g(\vartheta)} \left( \sin^2 \vartheta \frac{d^2 g(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \sin^2 \vartheta \frac{dg(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + n(n+1) \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{h(\lambda)} \frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2}. \quad (3.20)$$

Setzt man die linke Seite gleich einer Konstanten  $m^2$  und multipliziert mit  $\frac{g(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta}$  bzw.  $h(\lambda)$ , so kann man die Gleichung ebenfalls separieren:

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 g(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dg(\vartheta)}{d\vartheta} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) g(\vartheta) = 0. \quad (3.22)$$

Die Größe  $m$  wird dabei als Ordnung bezeichnet und beinhaltet die ganzzahligen Werte  $m \in \mathbb{Z}$ , die entweder durch  $0 \leq m \leq n$  oder  $-n \leq m \leq n$  beschränkt sind.

Eine Lösung der Differentialgleichung (3.21) bilden die trigonometrischen Funktionen  $h_1(\lambda) = \sin m\lambda$  und  $h_2(\lambda) = \cos m\lambda$  oder die Exponentialfunktionen  $h_{1/2} = \exp(\pm im\lambda)$ . Die Gleichung (3.22) wird auch als Legendre-Differentialgleichung bezeichnet und durch die zugeordneten (= assoziierten) Legendrefunktionen erster Art  $g_1(\vartheta) = P_{nm}(\cos \vartheta)$  – welche im folgenden Abschnitt noch näher erläutert werden – und die Legendrefunktionen zweiter Art  $g_2(\vartheta) = Q_{nm}(\cos \vartheta)$  erfüllt.

Jede Funktion, die die Laplace-Differentialgleichungen in sphärischen Koordinaten erfüllt, lässt sich somit durch die Linearkombination

$$\Phi(\lambda, \vartheta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \xi_{nm} \left\{ \begin{array}{l} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin m\lambda \\ \cos m\lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_{nm}(\cos \vartheta) \\ Q_{nm}(\cos \vartheta) \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

mit den sphärisch-harmonischen Koeffizienten  $\xi_{nm}$  darstellen. Dabei ist jeweils eine Funktion aus jeder Klammer zu wählen und mit den anderen zu multiplizieren, um eine Basis der Reihenentwicklung zu erhalten. Fordert man z.B. für das gravitative Potential, dass die Funktionswerte mit zunehmender Entfernung zur (Erd-) Kugel (bzw. der Masse) abnehmen und im „Unendlichen“ verschwinden, so entfällt der Term  $r^n$ . Andererseits sind die Legendrefunktionen zweiter Art auf der Kugeloberfläche nicht beschränkt, weshalb diese hier keine Verwendung finden.

Die bisher behandelte Lösung der Laplace-Differentialgleichung bezieht sich auf die Einheitskugel mit  $r = 1$  und deren Außenraum  $r > 1$ . Um die Reihe auf eine sphärische Fläche mit dem Radius  $R$  zu beziehen, skaliert man die radiale Komponente durch die Substitution  $\frac{r}{R}$

$$\Phi(\lambda, \vartheta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_{nm}(\cos \vartheta) [s_{nm} \sin m\lambda + c_{nm} \cos m], \quad (3.24)$$

während die anderen Terme unverändert bleiben. Die **sphärisch-harmonischen Koeffizienten**  $\{c_{nm}, s_{nm}\}$  bilden eine Teilmenge der Werte  $\xi_{nm}$  aus der Reihe (3.23), welche nach der Reduktion auf die zulässigen Basisfunktionen übrig bleiben.

Führt man noch das Symbol

$$\bigwedge_{r \geq R} \left\{ \dots \right\} \quad (3.25)$$

ein, um die Skalierung und die harmonische Fortsetzung in den Außenraum zu beschreiben, so kann man die Reihenentwicklung durch

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \vartheta, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_{nm}(\cos \vartheta) [s_{nm} \sin m\lambda + c_{nm} \cos m] = \\ &= \bigwedge_{r \geq R} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos \vartheta) [s_{nm} \sin m\lambda + c_{nm} \cos m] \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

darstellen.

### 3.1.3. Legendre- und Kugelflächenfunktionen

Die zugeordneten Legendrefunktionen  $P_{nm}(\zeta)$  mit  $\zeta = \cos \vartheta$  stellen eine Weiterentwicklung der Legendrepolynome dar und lassen sich aus der Formel

$$P_{nm}(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d\zeta^m} = (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(\zeta^2 - 1)^n}{d\zeta^{n+m}} \quad (3.27)$$

von Rodriguez berechnen (Sigl, 1973, Torge, 2002, Rummel, 2002). Bezüglich der Notation sei angemerkt, dass der Grad  $n$  und die Ordnung  $m$  der Funktion als Indizes angegeben werden, welche mitunter zur Verdeutlichung durch ein Komma getrennt werden.

Die Legendrefunktionen variieren bereits für einen kleinen Grad  $n$  und die zulässigen Ordnungen  $0 \leq m \leq n$  sehr stark in der Größenordnung. Aus diesem Grund werden die Funktionen üblicherweise normiert verwendet, wobei sich in der Geodäsie die Vorfaktoren

$$H_{nm} := \begin{cases} \sqrt{2n+1} & m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & m > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) &= P_{nm}(\cos \vartheta) H_{nm} \\ \bar{c}_{nm} &= \frac{c_{nm}}{H_{nm}} \\ \bar{s}_{nm} &= \frac{s_{nm}}{H_{nm}}\end{aligned}\quad (3.29)$$

durchgesetzt haben. Sowohl die normierten als auch die unnormierten Funktionen können durch eine Drei-Term-Rekursion bestimmt werden. Für erstere gelten nach Scheinert (1996) und Torge (2002) die Rekursionen

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nn}(\cos \vartheta) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \sin \vartheta \bar{P}_{n-1, n-1}(\cos \vartheta) \quad n > 1 \\ \bar{P}_{n, n-1}(\cos \vartheta) &= \sqrt{2n+1} \cos \vartheta \bar{P}_{n-1, n-1}(\cos \vartheta) \\ \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}} \left( \cos \vartheta \bar{P}_{n-1, m}(\cos \vartheta) - \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(2n-1)}} \bar{P}_{n-2, m}(\cos \vartheta) \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

mit den Startwerten

$$\begin{aligned}\bar{P}_{00} &= 1 \\ \bar{P}_{10} &= \sqrt{3} \cos \vartheta \\ \bar{P}_{11} &= \sqrt{3} \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Nach Sigl (1973) wird jede Funktion als Kugelflächenfunktion bezeichnet, die die Differentialgleichung (3.18) bzgl. der Winkel  $(\lambda, \vartheta)$  erfüllt. Dies gilt insbesondere für das Produkt aus den Legendrefunktionen und den trigonometrischen Termen, welche als (Legendre-) Kugelflächenfunktion bezeichnet werden und die sich zum Beispiel durch die Konvention

$$\bar{Y}_{n, m}(\lambda, \vartheta) := \begin{cases} \bar{P}_{n, m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda & \text{für } m \geq 0 \\ \bar{P}_{n, |m|}(\cos \vartheta) \sin m\lambda & \text{für } m < 0 \end{cases}\quad (3.31)$$

zusammenfassen lassen. Für die Reihenentwicklung vereinbart man eine ähnliche Darstellung für die Koeffizienten

$$\bar{c}_{nm}^{\pm} := \begin{cases} \bar{c}_{nm} & \text{für } m \geq 0 \\ \bar{s}_{nm} & \text{für } m < 0, \end{cases}\quad (3.32)$$

wobei die unüblichen Vorzeichen auf der linken Seite die Erweiterung der ursprünglichen Definition verdeutlichen sollen. Zusammen mit der Normierung wird dadurch die Reihe (3.26) durch

$$\Phi(\lambda, \vartheta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) [\bar{s}_{nm} \sin m\lambda + \bar{c}_{nm} \cos m\lambda] = \bigwedge_{r \geq R} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \bar{c}_{nm}^{\pm} \right\}\quad (3.33)$$

ersetzt. In Abhängigkeit von Grad und Ordnung unterscheidet man zonale ( $m = 0$ ), sektorielle ( $m = \pm n$ ) und tesserale Kugelflächenfunktionen (Sigl, 1973, Rummel, 2002). In der Abbildung 3.2 werden die Kugelflächenfunktionen für den Kosinusanteil und den Grad  $n = 4$  gezeigt. Betrachtet man die positiven und negativen Bereiche bzw. die Verteilung der Nullstellen, so sind die zonalen Funktionen rotationssymmetrisch um den Pol und unabhängig von der Länge  $\lambda$ . Die positiven und negativen Bereiche der sektoriellen Funktionen bilden näherungsweise Kugelzweiecke, während die tesseralen Funktionen eine Art Schachbrettmuster in Längen- und Breitenrichtung erzeugen.

Die Legendrefunktionen erfüllen nach Rummel (2002) die Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\int_{-1}^1 \bar{P}_{n, m}(\zeta) \bar{P}_{k, m}(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 2 & \text{für } n = k \text{ und } m = 0 \\ 4 & \text{für } n = k \text{ und } m \neq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq k. \end{cases}\quad (3.34)$$

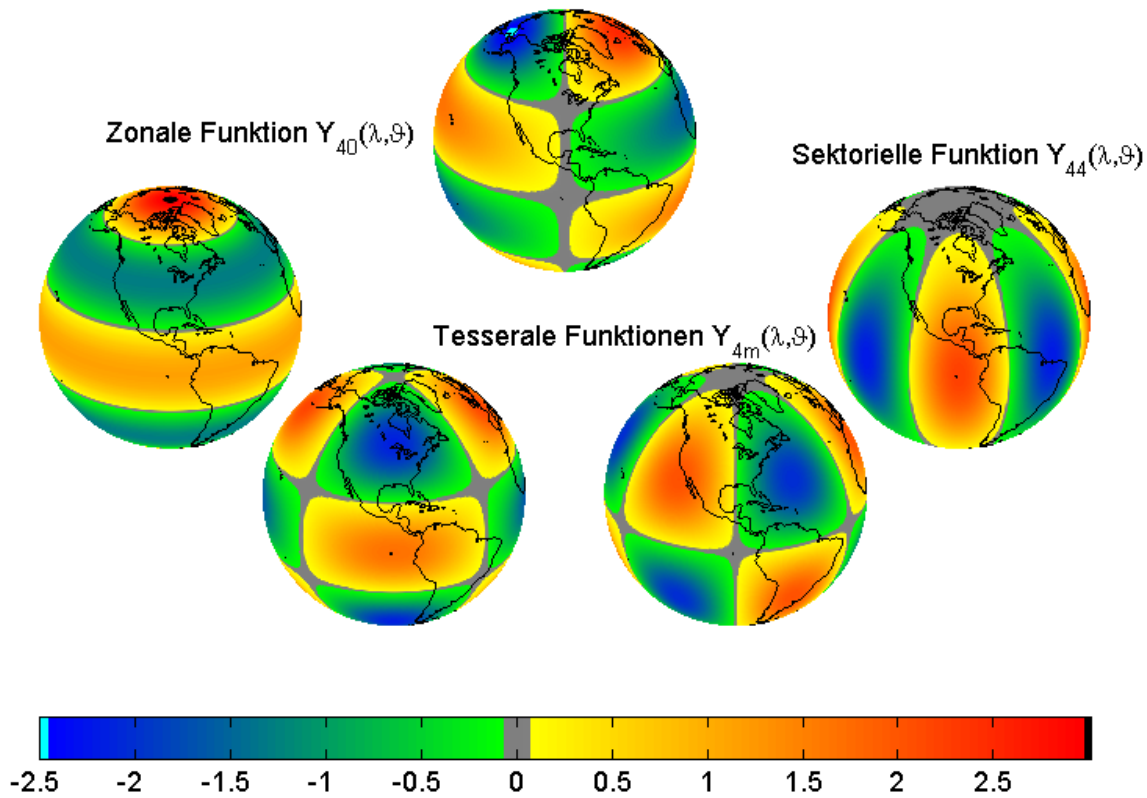


Abbildung 3.2.: Zonale, sektorische und tesserales Kugelflächenfunktionen  $\bar{Y}_{4,m}(\lambda, \vartheta) = \bar{P}_{4,m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$

Kombiniert man diese mit der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \bar{Y}_{kl}(\lambda, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \text{ und } m = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Aufgrund der Orthogonalität (und der Vollständigkeit des Systems) lassen sich für eine Funktion  $f(\lambda, \vartheta)$  auf der Kugeloberfläche die sphärisch-harmonischen Koeffizienten durch die Integrale

$$\begin{aligned} \bar{c}_{nm} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\lambda, \vartheta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ \bar{s}_{nm} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\lambda, \vartheta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \end{aligned} \quad (3.36)$$

bestimmen.

Wählt man auf der Kugeloberfläche einen Bezugspunkt mit den Koordinaten  $(\lambda_Q, \vartheta_Q)$  und einen allgemeinen Berechnungspunkt  $(\lambda, \vartheta)$ , so gilt das **Additionstheorem der Legendrefunktionen**:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \varpi_Q) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) [\cos m\lambda \cos m\lambda_Q + \sin m\lambda \sin m\lambda_Q] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \bar{Y}_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dabei bezeichnet  $\varpi_Q$  den (minimalen) sphärischen Abstand der beiden Punkte  $(\lambda_Q, \vartheta_Q)$  und  $(\lambda, \vartheta)$  auf der Einheitskugel.

In einigen Anwendungen werden die Formeln wesentlich eleganter, wenn man die Kugelflächenfunktionen in einer komplexen Schreibweise darstellt. Um Fallunterscheidungen für  $m = 0$  zu vermeiden, wird dabei meist eine andere Normierung gewählt, für welche verschiedene Konventionen existieren. In dieser Arbeit wird die Normierung aus der Quantenmechanik (Varshalovich, 1988) und der Software MATHEMATICA eingesetzt, welche für  $m \geq 0$  durch

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta) \exp(im\lambda) \quad (3.38)$$

gegeben ist<sup>2</sup>. Durch die Definition

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

werden hier alle Faktoren den Legendrefunktionen zugeordnet, um die Normierung  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  der Exponentialfunktion bei einer Aufspaltung des Produkts (3.38) zu vermeiden.

Die Differentialgleichung der Legendrefunktionen enthält nur den Wert  $m^2$ , weshalb auch die Ordnung  $(-m)$  eine Lösung liefert. Überträgt man dies auf die Formel von Rodriguez, so erhält man

$$\widehat{P}_{n,-m}(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m}}. \quad (3.40)$$

Die Darstellungen sind für  $m = 0$  offensichtlich identisch, während für die Ordnungen  $m = \pm n$

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{nn}(\cos \vartheta) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-n)!}{(n+n)!}} (1-\zeta^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{n+n}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+n}} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{(2n)!}} (1-\zeta^2)^{\frac{n}{2}} (2n)! = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} (2n)! (1-\zeta^2)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n,-n}(\cos \vartheta) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+n)!}{(n-n)!}} (1-\zeta^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^{n-n}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-n}} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(2n)!}{1}} (1-\zeta^2)^{-\frac{n}{2}} (\zeta^2-1)^n = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} (2n)! \frac{(1-\zeta^2)^n (-1)^n}{(1-\zeta^2)^{\frac{n}{2}}} = (-1)^n \widehat{P}_{nn}(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

gilt. Für die anderen Ordnungen  $0 < |m| < n$  ergibt sich die Symmetrie

$$\widehat{P}_{n,-|m|}(\cos \vartheta) = (-1)^m \widehat{P}_{n,|m|}(\cos \vartheta), \quad (3.41)$$

welche man für einzelne Funktionen leicht nachrechnen kann. Kombiniert man diese Aussagen, so erhält man zwei äquivalente Darstellungen der Formel von Rodriguez

$$\widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m}} \\ \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m}} \end{cases} \quad (3.42)$$

<sup>2</sup>Der Term  $(-1)^m$  ist in MATHEMATICA bereits in der Definition der Legendrefunktionen enthalten.

für die Ordnungen  $m \geq 0$ , während für negative Ordnungen die Symmetrie (3.41) genutzt werden kann. Die Umrechnung zwischen den Normierungen der Legendrefunktionen erfolgt für die Ordnungen  $-n \leq m \leq n$  durch das Produkt

$$\widehat{P}_{n,m}(\cos \vartheta) = h_{nm} \overline{P}_{n,|m|}(\cos \vartheta),$$

wobei der Faktor

$$h_{nm} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{2\pi}} & m > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & m = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & m < 0, \end{cases} \quad (3.43)$$

durch das Programm *LeNorm.m* implementiert wird (vgl. Liste der Programme im Anhang B.2).

Für die Kugelflächenfunktionen in der komplexen Normierung gelten dann die Rechenregeln

$$\widehat{Y}_{n,\pm m}(\vartheta, \lambda) = \widehat{P}_{n,\pm m}(\cos \vartheta) \exp(\pm im\lambda) \quad (3.44)$$

$$\widehat{Y}_{n,-|m|}(\lambda, \vartheta) = (-1)^m \widehat{Y}_{n,|m|}(-\lambda, \vartheta) = (-1)^m \widehat{Y}_{n,|m|}^*(\lambda, \vartheta) \quad (3.45)$$

sowie die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \widehat{Y}_{kl}(\lambda, \vartheta) \sin \vartheta d\lambda d\vartheta = \begin{cases} 1 & n = k \text{ und } m = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.46)$$

und das Additionstheorem

$$P_n(\cos \varpi_Q) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \widehat{Y}_{n,m}^*(\vartheta, \lambda) \widehat{Y}_{n,m}(\vartheta_Q, \lambda_Q). \quad (3.47)$$

Auch lässt sich die Ableitung einer Kugelflächenfunktion stets durch eine Linearkombination der ursprünglichen Funktionen darstellen. Diese Eigenschaft wird im Weiteren für die komplexe Normierung benötigt und lässt sich nach Nikiforov (1988) aus den Rodriguez-Formeln (3.42) herleiten. Aus der ersten Darstellung folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \overbrace{\frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}^{=: \xi} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m}} \right\} = \\ &= \xi \left( \frac{m}{2} (-2\zeta) (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}-1} \frac{d^{n+m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m}} + (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m+1}} \right) = \\ &= \xi \left( \frac{-m\zeta}{1-\zeta^2} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m}} + (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m+1}} \right) = \\ &= \frac{-m\zeta}{1-\zeta^2} \widehat{P}_{nm} + \frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m+1}}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand kann als ein Vielfaches von  $\widehat{P}_{n,m+1}(\zeta)$  ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^m}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^n n! (-1)} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n-(m+1))!}{(n+m+1)!} (n+m+1)(n-m) \frac{(1-\zeta^2)^{\frac{m+1}{2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{d^{n+m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n+m+1}} = \\ &= (-1) \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{1-\zeta^2}} \widehat{P}_{n,m+1}(\zeta) = (-1) \sqrt{\frac{n(n+1)-m(m+1)}{1-\zeta^2}} \widehat{P}_{n,m+1}(\zeta), \end{aligned}$$

was schließlich auf

$$\frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta} = \frac{-m\zeta}{1-\zeta^2}\widehat{P}_{nm}(\zeta) - \sqrt{\frac{n(n+1)-m(m+1)}{1-\zeta^2}}\widehat{P}_{n,m+1}(\zeta)$$

führt. Die analogen Rechenschritte für die zweite Darstellung ergeben

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta} &= \frac{\partial}{\partial\zeta} \left\{ \overbrace{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}^{=: \xi} (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m}} \right\} = \\ &= \xi \left( \left( \frac{-m}{2} \right) (-2\zeta)(1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}-1} \frac{d^{n-m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m}} + (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m+1}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m+1}} \right) = \\ &= \xi \left( \frac{m\zeta}{1-\zeta^2} (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-m}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-m}} + (1-\zeta^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{n-(m-1)}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-(m-1)}} \right) = \\ &= \frac{m\zeta}{1-\zeta^2} \widehat{P}_{nm} + \frac{(1-\zeta^2)^{-\frac{m-1}{2}}}{2^n n!} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)!}{4\pi(n-(m-1))!}} (n+m)(n-m+1) \frac{d^{n-(m-1)}(\zeta^2-1)^n}{d\zeta^{n-(m-1)}} = \\ &= \frac{m\zeta}{1-\zeta^2} \widehat{P}_{nm}(\zeta) + \sqrt{\frac{n(n+1)-m(m-1)}{1-\zeta^2}} \widehat{P}_{n,m-1}(\zeta). \end{aligned}$$

Die beiden Ableitungen lassen sich somit für die Ordnungen  $m \geq 0$  durch

$$\frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta} = \mp \frac{m\zeta}{1-\zeta^2} \widehat{P}_{nm}(\zeta) \mp \sqrt{\frac{n(n+1)-m(m \pm 1)}{1-\zeta^2}} \widehat{P}_{n,m \pm 1}(\zeta)$$

zusammenfassen, was nach einer Multiplikation mit  $\sqrt{1-\zeta^2}$  die Beziehung

$$\sqrt{1-\zeta^2} \frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\mp m\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \widehat{P}_{nm} \mp \sqrt{n(n+1)-m(m \pm 1)} \widehat{P}_{n,m \pm 1}$$

zur Folge hat. Durch die Substitution  $\zeta = \cos \vartheta$  und die Multiplikation mit  $\exp(\iota(m \pm 1)\lambda)$  ergibt sich für die Legendrefunktionen

$$\begin{aligned} \exp(\iota(m \pm 1)\lambda) \left( \overbrace{\frac{d\widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta)}{d\vartheta}}^{=: \frac{d\widehat{P}_{nm}(\zeta)}{d\zeta}} \sin \vartheta \pm m \cot \vartheta \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta) \right) &= \\ &= \mp \sqrt{n(n+1)-m(m \pm 1)} \widehat{P}_{n,m \pm 1}(\cos \vartheta) \exp(\iota(m \pm 1)\lambda) \end{aligned}$$

und für die Kugelflächenfunktionen

$$\exp(\pm \iota\lambda) \left( -\frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} \pm m \cot \vartheta \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right) = \mp \sqrt{n(n+1)-m(m \pm 1)} \widehat{Y}_{n,m \pm 1}(\lambda, \vartheta). \quad (3.48)$$

### 3.1.4. Potential der Erde

In der Geodäsie ist es üblich, die sphärisch-harmonischen Koeffizienten ohne Einheiten zu verwenden und diese Information in einem gemeinsamen Faktor der Reihe (3.33) darzustellen. Dazu dividiert man alle Koeffizienten durch das Potential einer homogenen Kugel mit gleicher Masse, was dem Term  $\frac{GM}{R}$  entspricht.

So gilt z.B. für das wahre (gravitative) Potential der Erde

$$V(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (3.49)$$



mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{C}_{nm} &= \frac{R}{GM} \bar{c}_{nm} = \frac{R}{GM} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\lambda, \vartheta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ \bar{S}_{nm} &= \frac{R}{GM} \bar{s}_{nm} = \frac{R}{GM} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\lambda, \vartheta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Laut Torge (2002) und Rummel (2002) existiert für die ersten Koeffizienten der Reihenentwicklung jeweils eine physikalische Interpretation:

- Der Term  $\bar{C}_{00}$  liefert Informationen über die Masse der Erde (bzw. des untersuchten Himmelskörpers). Nach der Division durch  $\frac{GM}{R}$  ist der Koeffizient in der Regel zu Eins normiert, Abweichungen geben eine eventuelle Massenänderung wieder.
- Die Werte  $\{\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}\}$  beschreiben den Schwerpunkt der inhomogenen Massenverteilung und können durch die Wahl des Koordinatenursprungs im Massenzentrum zu Null gesetzt werden.
- Die Koeffizienten  $\{\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{C}_{22}, \bar{S}_{21}, \bar{S}_{22}\}$  enthalten Informationen über den Trägheitstensor und damit die idealen Achsen des Koordinatensystems.

Aus numerischen Gründen muss die Reihenentwicklung nach einem endlichen Grad  $N$  abgebrochen werden, zumal nur eine begrenzte Anzahl an (fehlerhaften) Koeffizienten  $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$  aus anderen Auswertungen bekannt ist.

In vielen Berechnungen ist es günstiger, das Potential in ein Referenzfeld  $T_{ref}$  und ein Störpotential (bzw. ein residuales Potential)  $\delta T$  aufzuspalten:

$$V(\lambda, \vartheta, r) = T_{ref}(\lambda, \vartheta, r) + \delta T(\lambda, \vartheta, r) + \varepsilon. \quad (3.51)$$

Die Größe  $\varepsilon$  bezeichnet alle nicht-modellierten Anteile, die sich unter anderem aus den Fehlern der Koeffizienten, den vernachlässigten Informationen der höheren Entwicklungsgrade  $n > N$  oder den numerischen Fehlern der Berechnung zusammensetzen.

Eine Darstellung des Referenzfeldes in Kugelflächenfunktionen erhält man durch die Linearkombination

$$T_{ref}(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda), \quad (3.52)$$

deren Koeffizienten  $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$  aus einer anderen Auswertung festgehalten werden. Ein spezielles Referenzfeld bildet das rotationssymmetrische Normalfeld

$$U(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{N_U} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \bar{C}_{n,0} \quad (3.53)$$

mit den Koeffizienten  $\{\bar{C}_{0,0}, \bar{C}_{2,0}, \bar{C}_{4,0}, \dots\}$ , welche zusammen mit den Parametern  $\{GM, R, \dots\}$  in einem geodätischen Modell der Erde definiert werden.

Für das Störpotential wird entweder eine analoge Reihendarstellung

$$\delta T(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (3.54)$$

oder ein zweites System an Basisfunktionen auf der Kugel verwendet.

## 3.2. Rotation der Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen stellen das Schwerfeld der Erde in einem erdfesten Koordinatensystem dar, dessen  $\hat{e}_{e=3}$ -Achse – abgesehen von der Polbewegung – mit der Rotationsachse zusammenfällt und dessen  $\hat{e}_{e=1}$ -Achse durch den Schnittpunkt aus der Äquatorebene und dem Meridian von Greenwich definiert ist. Je nach Auswertemethode können andere Systeme für die Beschreibung geeigneter sein, z.B. ein Inertialsystem für die Orbitintegration oder ein rotierendes System, dessen  $\hat{e}_{S=1}$ -Achse stets zum Messinstrument zeigt.

Für die Beschreibung in einem transformierten Koordinatensystem  $(\vartheta', \lambda')$  benötigt man eine Darstellung der Kugelflächenfunktionen

$$\hat{Y}_{nm}(\vartheta', \lambda') = \mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \left\{ \hat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda) \right\} \quad (3.55)$$

in Abhängigkeit von den Parametern  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  der Rotationen.

Anstatt eine Funktion zu berechnen und ihre Werte in einem geänderten Koordinatensystem abzulesen, kann man die inverse Transformation auch auf die Argumente anwenden, also

$$\mathfrak{R} \left\{ f(\vec{x}) \right\} = f \left( \mathfrak{R}^{-1} \left\{ \vec{x} \right\} \right) \quad (3.56)$$

bzw. für die Kugelflächenfunktionen

$$\mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \left\{ \hat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda) \right\} = \hat{Y}_{nm}(\mathfrak{R}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \{ \lambda \}, \mathfrak{R}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \{ \vartheta \}). \quad (3.57)$$

### 3.2.1. Klassische Lösung: Drehung des Koordinatensystems

Die einfachste Lösung transformiert die sphärischen Koordinaten  $(\lambda, \vartheta, r)$  zunächst in den kartesischen Vektor

$$\vec{x}_e = \begin{pmatrix} x_{e=1} \\ x_{e=2} \\ x_{e=3} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \lambda \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

und dreht diesen mit der entsprechenden Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$

$$\vec{x}_K = \mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \left\{ \vec{x}_e \right\} = \mathbf{R} \vec{x}_e.$$

Abschließend berechnet man die Koordinaten  $(\lambda', \vartheta', r)$  im transformierten System  $K$

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x_{K=1}^2 + x_{K=2}^2 + x_{K=3}^2} = r \\ \lambda' &= \begin{cases} \arccos \left( \frac{x_{K=1}}{\sqrt{x_{K=1}^2 + x_{K=2}^2}} \right) & \text{für } x_{e=2} > 0 \\ 2\pi - \arccos \left( \frac{x_{K=1}}{\sqrt{x_{K=1}^2 + x_{K=2}^2}} \right) & \text{für } x_{e=2} < 0 \end{cases} \\ \vartheta' &= \arccos \frac{x_{K=3}}{r} \end{aligned}$$

und verwendet diese als Argumente der Kugelflächenfunktionen, um die Funktionswerte im neuen System zu bestimmen.

### 3.2.2. Alternative Transformation: Linearkombination

Anstelle der Transformation des Koordinatensystems kann man sich überlegen, dass die gedrehte Funktion wegen der Vollständigkeit des Basissystems auch durch eine Linearkombination der originalen Funktionen

darstellbar ist. Es existieren daher für jede Transformation geeignete Koeffizienten  $a_{jk}(\mathfrak{R}, n, m)$ , die von der Drehung und von Grad und Ordnung der zu rotierenden Funktion abhängen, so dass die Gleichung

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \mathfrak{R}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j a_{jk}(\mathfrak{R}, n, m) \widehat{Y}_{jk}(\lambda, \vartheta) \quad (3.58)$$

erfüllt ist. Die Anzahl der Summanden wird deutlich reduziert, wenn man beachtet, dass alle Kugelflächenfunktionen vom Grad  $n$  auch in der komplexen Normierung die Differentialgleichung (3.18) erfüllen:

$$\frac{\partial^2 \widehat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{\partial \lambda^2} = -n(n+1) \widehat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda). \quad (3.59)$$

Diese Differentialgleichung gilt auch nach der Drehung mit den neuen Koordinaten  $(\lambda', \vartheta')$ , weshalb bei der Transformation der Eigenwert  $-n(n+1)$  und damit der Grad  $n$  der Polynome erhalten bleibt. Aus diesem Grund reduziert sich die Linearkombination (3.58) auf die Summe

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \sum_{k=-n}^n a_{nk}(\mathfrak{R}, n, m) \widehat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta), \quad (3.60)$$

da nur Funktionen und Koeffizienten mit dem Grad  $j = n$  auftreten können.

Jede beliebige Rotation lässt sich durch drei Eulerwinkel  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  parametrisieren, wobei die erste und dritte Drehung um die gleiche Achse erfolgen. Für den weiteren Verlauf wählt man eine spezielle Transformation, welche zweimal die  $\widehat{e}_{e=3}$ -Achse und einmal die  $\widehat{e}_{e=2}$ -Achse verwendet:

$$\vec{x}' = \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \vec{x} \right\} = \mathbf{R}_3(\gamma) \mathbf{R}_2(\beta) \mathbf{R}_3(\alpha) \vec{x}. \quad (3.61)$$

In diesem Fall findet man z.B. in Varshalovich (1988) oder Kostelec (2003a,b) die Darstellung<sup>3</sup>

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right\} = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta), \quad (3.62)$$

deren Koeffizienten  $D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma)$  als **Wigner-D-Funktionen** bekannt sind. In Analogie zu den Legendrefunktionen werden auch hier die ganzzahlige Größe  $n$  als Grad und die Indizes  $k$  und  $m$  mit  $-n \leq k, m \leq n$  als Ordnungen bezeichnet.

### 3.3. Wigner-D-Funktionen

Betrachtet man nur eine Drehung um die  $\widehat{e}_{e=3}$ -Achse, so bleiben die Kobreite  $\vartheta = \vartheta'$  und der Radius  $r = r'$  in der Transformation erhalten. Durch die Rotation ändert sich nur die Koordinate der Länge, wobei sich für die Kugelflächenfunktion

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \mathfrak{R}(\xi) \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right\} = \widehat{Y}_{nm}(\lambda - \xi, \vartheta) = \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \exp(-im\xi) \quad (3.63)$$

ergibt. Daraus folgt, dass auch die Wigner-D-Funktion durch ein Produkt aus Exponentialfunktionen mit einer noch unbekanntem **Wigner-d-Funktion**  $d_{km}^n(\beta)$  dargestellt werden kann:

$$D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-ik\alpha) d_{km}^n(\beta) \exp(-im\gamma). \quad (3.64)$$

<sup>3</sup>Die Rotation einer Kugelflächenfunktionen kann – aufgrund der zahlreichen Symmetriebeziehungen – auch durch die Linearkombination

$$\widetilde{Y}_{nk}(\lambda', \vartheta') = \sum_{m=-n}^n D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widetilde{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$$

dargestellt werden, wobei in Nikiforov (1988) eine andere Normierung der Legendrefunktionen angegeben wird.

Zu deren Bestimmung wird in der Regel auf die Methoden der Gruppentheorie zurückgegriffen, welche hier nur kurz skizziert werden sollen. In Talman (1968) oder Wawrzynczyk (1984) werden jeweils die Merkmale einer Gruppe sowie deren Repräsentation, die Reduzierbarkeit der Darstellung etc. ausführlich behandelt. Die Darstellung der  $\mathfrak{so}_3$ -Gruppe, welche eine Rotation der homogenen Polynome im dreidimensionalen Raum beschreibt, wird dort über die spezielle unitäre Gruppe  $\mathfrak{su}_2$  hergeleitet. Diese bewirkt eine Transformation im zweidimensionalen komplexen Raum, aus der man die Drehung im dreidimensionalen Raum um die  $\hat{e}_{e=2}$ -Achse und damit die Wigner-d-Funktionen bestimmt.

Eine andere Möglichkeit wird in Nikiforov (1988) gezeigt, welche mit wenigen (elementaren) Tricks eine direkte Herleitung aus den Kugelflächenfunktionen ermöglicht. Diese wird im Folgenden mit der gewählten Normierung  $\hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$  wiedergegeben, weshalb die Formeln an einigen Stellen von der Originalarbeit abweichen. Zur Vereinfachung betrachtet man nur die Drehung einer Kugelflächenfunktion

$$\hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(\beta) \hat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) \quad (3.65)$$

um die  $\hat{e}_{e=2}$ -Achse und den Winkel  $0 \leq \beta \leq \pi$ . Für die Koordinaten gilt mit der Drehmatrix  $\mathbf{R}_2(-\beta)$  in kartesischer Darstellung

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta + z \sin \beta \\ y' &= y \\ z' &= -x \sin \beta + z \cos \beta \end{aligned} \quad (3.66)$$

beziehungsweise mit sphärischen Koordinaten

$$\sin \vartheta' \cos \lambda' = \sin \vartheta \cos \lambda \cos \beta + \cos \vartheta \sin \beta \quad (3.67a)$$

$$\sin \vartheta' \sin \lambda' = \sin \vartheta \sin \lambda \quad (3.67b)$$

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \cos \lambda \sin \beta. \quad (3.67c)$$

Zunächst stellt man die differentielle Änderung der Funktionswerte durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \beta} &= \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} \frac{\partial \vartheta'}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} \frac{\partial \vartheta'}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (3.68)$$

dar und bestimmt die partiellen Ableitungen aus den Gleichungen (3.67a) bis (3.67c). Betrachtet man die neuen Koordinaten jeweils als Funktionen der ursprünglichen Werte sowie des Drehwinkels und differenziert die Gleichung (3.67c) implizit, so erhält man für  $\frac{\partial \vartheta'}{\partial \beta}$

$$-\sin \vartheta' \frac{\partial \vartheta'}{\partial \beta} = -\cos \vartheta \sin \beta - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \beta \stackrel{(3.67a)}{=} -(\sin \vartheta' \cos \lambda')$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial \beta} = \cos \lambda'. \quad (3.69)$$

Ebenfalls aus der Gleichung (3.67c) gewinnt man die Beziehung

$$-\sin \vartheta' \frac{\partial \vartheta'}{\partial \lambda} = +\sin \vartheta \sin \lambda \sin \beta \stackrel{(3.67b)}{=} (\sin \vartheta' \sin \lambda') \sin \beta$$

und damit

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial \lambda} = -\sin \lambda' \sin \beta. \quad (3.70)$$

Die Ableitung  $\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}$  erhält man aus der Gleichung (3.67a)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' \underbrace{\frac{\partial \vartheta'}{\partial \lambda}}_{(3.70)} \cos \lambda' - \sin \vartheta' \sin \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} &= - \underbrace{\sin \vartheta \sin \lambda \cos \beta}_{(3.67b)} \\ - \sin \vartheta' \sin \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} + \cos \vartheta' (-\sin \lambda' \sin \beta) \cos \lambda' &= -\sin \vartheta' \sin \lambda' \cos \beta, \end{aligned}$$

was auf die Formel

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} = -\cot \vartheta' \sin \beta \cos \lambda' + \cos \beta \quad (3.71)$$

führt. Um die Größe  $\frac{\partial \lambda'}{\partial \beta}$  zu bestimmen, differenziert man die Gleichung (3.67a) und verwendet das Ergebnis (3.69):

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' \underbrace{\frac{\partial \vartheta'}{\partial \beta}}_{(3.69)} \cos \lambda' - \sin \vartheta' \sin \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial \beta} &= \underbrace{-\sin \vartheta \cos \lambda \sin \beta + \cos \vartheta \cos \beta}_{(3.67c)} \\ \cos \vartheta' \cos^2 \lambda' - \sin \vartheta' \sin \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial \beta} &= \cos \vartheta', \end{aligned}$$

was schließlich

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \beta} = \frac{\cos \vartheta' (1 - \cos^2 \lambda')}{-\sin \vartheta' \sin \lambda'} = -\cot \vartheta' \sin \lambda' \quad (3.72)$$

zur Folge hat. Werden die partiellen Ableitungen zusammen mit der Beziehung  $\frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda'} = m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')$  in die Gleichungen (3.68) eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \beta} &= \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} \cos \lambda' - \cot \vartheta' \sin \lambda' m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') \\ \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda} &= -\sin \lambda' \sin \beta \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} + m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') (-\cot \vartheta' \sin \beta \cos \lambda' + \cos \beta). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Aus den beiden Ableitungen bildet man die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \beta} \mp \frac{\iota}{\sin \beta} \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \lambda} &= \left[ \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} \cos \lambda' - \cot \vartheta' \sin \lambda' m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') \right] \\ &\mp \iota \left[ -\sin \lambda' \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} + m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') (-\cot \vartheta' \cos \lambda' + \cot \beta) \right] = \\ &= \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} (\cos \lambda' \pm \iota \sin \lambda') \mp m \cot \vartheta' \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') (\iota \sin \lambda' \mp \iota^2 \cos \lambda') \mp \iota^2 m \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') \cot \beta = \\ &= \exp(\pm \iota \lambda') \left[ \frac{\partial \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')}{\partial \vartheta'} \mp m \cot \vartheta' \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') \right] \pm m \cot \beta \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \\ &= -(\mp \sqrt{n(n+1)} - m(m \pm 1)) \widehat{Y}_{n, m \pm 1}(\lambda', \vartheta') \pm m \cot \beta \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta'), \end{aligned} \quad (3.74)$$

wobei in der letzten Zeile die Rekursion (3.48) der Kugelflächenfunktionen verwendet wird.

Anschließend ersetzt man mit der Beziehung (3.65) die Koordinaten des neuen Systems  $(\lambda', \vartheta')$  durch die ursprünglichen Werte  $\{\lambda, \vartheta\}$  und den Drehwinkel  $\beta$  und erhält so für jede Ordnung  $k$  eine Differentialgleichung

$$\frac{d d_{km}^n(\beta)}{d\beta} \mp \frac{\iota}{\sin \beta} \iota k d_{km}^n(\beta) = \pm \sqrt{n(n+1) - k(k \pm 1)} d_{k \pm 1, m}^n(\beta) \pm m \cot \beta d_{km}^n(\beta), \quad (3.75)$$

die in der Form

$$\frac{d d_{km}^n(\beta)}{d\beta} \pm \frac{m - k \cos \beta}{\sin \beta} d_{km}^n(\beta) = \pm \sqrt{n(n+1) - k(k \pm 1)} d_{k \pm 1, m}^n(\beta) \quad (3.76)$$

auch zur Kontrolle der Wigner-d-Funktionen und deren Ableitung verwendet werden kann.

Für das weitere Vorgehen definiert man das Integral

$$f(\beta) := \exp \left( \pm \int \frac{m - k \cos \beta}{\sin \beta} d\beta \right), \quad (3.77)$$

welches sich durch elementare Funktionen und einige trigonometrische Identitäten aus Bartsch (1999) lösen lässt:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \exp \left( \pm \int \frac{m - k \cos \beta}{\sin \beta} d\beta \right) = \exp \left( \pm m \int \frac{1}{\sin \beta} d\beta \right) \exp \left( \mp k \int \cot \beta d\beta \right) = \\ &= \exp \left( \pm m \ln \left( \tan \frac{\beta}{2} \right) \right) \exp \left( \mp k \ln \sin \beta \right) = \left( \tan \frac{\beta}{2} \right)^{\pm m} (\sin \beta)^{\mp k} = \\ &= \left( \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} \right)^{\pm \frac{m}{2}} (1 - \cos^2 \beta)^{\mp \frac{k}{2}} = (1 - \cos \beta)^{\pm \frac{m}{2}} (1 + \cos \beta)^{\mp \frac{m}{2}} ((1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta))^{\mp \frac{k}{2}} = \\ &= (1 - \cos \beta)^{\pm \frac{m-k}{2}} (1 + \cos \beta)^{\mp \frac{m+k}{2}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Multipliziert man die Gleichung (3.76) mit der Funktion  $f$ , so folgt aus

$$\underbrace{\frac{d d_{km}^n(\beta)}{d\beta} f(\beta) \pm f(\beta) \cdot \left( \pm \frac{m - k \cos \beta}{\sin \beta} \right) d_{km}^n(\beta)}_{\frac{d}{d\beta} \{d_{km}^n(\beta) f(\beta)\}} = \pm \sqrt{n(n+1) - k(k \pm 1)} d_{k \pm 1, m}^n(\beta) f(\beta) \quad (3.79)$$

die differentielle Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left\{ d_{km}^n(\beta) (1 - \cos \beta)^{\pm \frac{m-k}{2}} (1 + \cos \beta)^{\mp \frac{m+k}{2}} \right\} &= \\ &= \pm \sqrt{n(n+1) - k(k \pm 1)} d_{k \pm 1, m}^n(\beta) (1 - \cos \beta)^{\pm \frac{m-k}{2}} (1 + \cos \beta)^{\mp \frac{m+k}{2}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Im nächsten Schritt wählt man jeweils das obere Vorzeichen und die Ordnung  $k = n$ , wodurch auf der rechten Seite die Wurzel und damit der gesamte Ausdruck verschwindet. Dies führt auf die differentielle Beziehung

$$\frac{d}{d\beta} \left\{ d_{nm}^n(\beta) (1 - \cos \beta)^{\frac{m-n}{2}} (1 + \cos \beta)^{-\frac{m+n}{2}} \right\} = 0,$$

weshalb das Produkt konstant sein muss. Wird nach der Wigner-d-Funktion aufgelöst, so erhält man für  $k = n$  die Darstellung

$$d_{nm}^n(\beta) = c_m^n (1 - \cos \beta)^{-\frac{m-n}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{m+n}{2}} = c_m^n (1 - \cos \beta)^{\frac{n-m}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{n+m}{2}} \quad (3.81)$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten  $c_m^n$ .

Anschließend wird die Variable (teilweise) durch  $x = \cos \beta$  substituiert und die Funktion

$$v_{km}(x) := (1 - x)^{\frac{k-m}{2}} (1 + x)^{\frac{k+m}{2}} \cdot d_{km}^n(\beta) \quad (3.82)$$

eingeführt. Insbesondere folgt aus den beiden letztgenannten Beziehungen für  $k = n$

$$v_{nm}(x) = (1 - x)^{\frac{n-m}{2}} (1 + x)^{\frac{n+m}{2}} \underbrace{c_m^n (1 - x)^{\frac{n-m}{2}} (1 + x)^{\frac{n+m}{2}}}_{(3.81)} = c_m^n (1 - x)^{n-m} (1 + x)^{n+m}. \quad (3.83)$$

Verwendet man das untere Vorzeichen in der Gleichung (3.80) und erweitert die Exponenten der rechten Seite, so liefert dies

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left\{ d_{km}^n(\beta) (1 - \cos \beta)^{-\frac{m-k}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{m+k}{2}} \right\} &= \frac{dv_{km}}{dx} \frac{dx}{d\beta} = \\ &= -\sqrt{n(n+1) - k(k-1)} \underbrace{d_{k-1,m}^n(\beta) (1 - \cos \beta)^{\frac{(k-1)+1-m}{2}} (1 + \cos \beta)^{\frac{m+(k-1)+1}{2}}}_{v_{k-1,m}(x) \cdot \sqrt{1-\cos \beta} \sqrt{1+\cos \beta}}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Wegen  $\frac{dx}{d\beta} = -\sin \beta = -(\sqrt{1 - \cos \beta} \sqrt{1 + \cos \beta})$  resultiert daraus die Rekursion

$$\frac{dv_{km}}{dx} \cdot (-\sin \beta) = -\sqrt{n(n+1) - k(k-1)} v_{k-1,m}(x) \cdot (\sin \beta)$$

beziehungsweise

$$v_{k-1,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1) - k(k-1)}} \frac{dv_{km}(x)}{dx}. \quad (3.85)$$

Indem man die Rekursion auf den Wert  $k = n$  zurückführt, erhält man

$$v_{km} = \prod_{s=k+1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1) - s(s-1)}} \frac{d^{n-k} v_{nm}}{dx^{n-k}}. \quad (3.86)$$

Der Nenner des Vorfaktors lässt sich durch eine geschlossene Formel darstellen, wenn die Identität

$$\prod_{s=k+1}^n (n(n+1) - s(s-1)) = \prod_{s=k+1}^n ((n+s)(n-s+1)) = \frac{(2n)!}{(n+k)!} (n-k)!$$

berücksichtigt wird. Kombiniert man dies mit der Rekursion (3.86) und dem Startwert (3.83), so ergibt sich für die Hilfsfunktion

$$v_{km}(x) = \sqrt{\frac{(n+k)!}{(2n)!(n-k)!}} \frac{d^{n-k} \{c_m^n (1-x)^{n-m} (1+x)^{n+m}\}}{dx^{n-k}}, \quad (3.87)$$

was gemäß der Definition (3.82) auf die Wigner-d-Funktion

$$d_{km}^n(\beta) = c_m^n \sqrt{\frac{(n+k)!}{(2n)!(n-k)!}} (1-x)^{\frac{m-k}{2}} (1+x)^{-\frac{k+m}{2}} \frac{d^{n-k} (1-x)^{n-m} (1+x)^{n+m}}{dx^{n-k}} \Big|_{x=\cos \beta} \quad (3.88)$$

führt. Um den Wert der Konstanten  $c_m^n$  zu bestimmen, nutzt man eine „Drehung“ um den Winkel  $\beta = 0$ . Aus der Gleichung (3.65) kann unmittelbar

$$\widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(0) \widehat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) = \widehat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) \Big|_{k=m} \quad (3.89)$$

und damit  $d_{mm}^n(0) = 1$  abgelesen werden, was auf die Bedingung

$$\begin{aligned} d_{mm}^n(0) &= c_m^n \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n)!(n-m)!}} \overbrace{(1-x)^{\frac{m-m}{2}}}^{(1-x)^0} \overbrace{(1+x)^{-\frac{m+m}{2}}}^{(1+x)^{-m}} \frac{d^{n-m} (1-x)^{n-m} (1+x)^{n+m}}{dx^{n-m}} \Big|_{x=\cos 0} = \\ &= c_m^n \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n)!(n-m)!}} 2^{-m} \frac{d^{n-m} (1-x)^{n-m} (1+x)^{n+m}}{dx^{n-m}} \Big|_{x=1} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

führt. Den Wert der Ableitungen für  $x = 1$  kann man mit der Leibniz-Produkt-Regel der Differentiation aus Bartsch (1999) bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-m}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-m}} &= \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \frac{d^j(1-x)^{n-m}}{dx^j} \cdot \frac{d^{n-m-j}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-m-j}} = \\ &= \binom{n-m}{n-m} \frac{d^{n-m}(1-x)^{n-m}}{dx^{n-m}} \cdot \frac{d^{n-m-(n-m)}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-m-(n-m)}} = (-1)^{n-m}(n-m)!2^{n+m}. \end{aligned}$$

Dabei wird insbesondere berücksichtigt, dass der Faktor  $\frac{d^j(1-x)^{n-m}}{dx^j}$  an der Stelle  $x = 1$  für alle Werte  $j \neq n - m$  verschwindet, was die Summe auf eben diesen Term reduziert. Setzt man dies in die Forderung ein, so erhält man

$$d_{mm}^n(0) = c_m^n \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n)!(n-m)!}} 2^{-m} (-1)^{n-m} (n-m)! 2^{n+m} = 1$$

beziehungsweise

$$c_m^n = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}}. \quad (3.90)$$

Mit dieser Konstanten und der Formel (3.88) ergibt sich schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned} d_{km}^n(\beta) &= \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-m)!(n+m)!(n-k)!}} (1-x)^{-\frac{k-m}{2}} (1+x)^{-\frac{k+m}{2}} \\ &\quad \cdot \left. \frac{d^{n-k}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-k}} \right|_{x=\cos\beta} \end{aligned} \quad (3.91)$$

der Wigner-d-Funktionen, wie sie auch in Kostelec (2003a) zu finden ist.

Wenn man die positiven Ordnungen  $k \geq 0$  und  $m = 0$  einsetzt

$$\begin{aligned} d_{k,0}^n(\beta) \Big|_{x=\cos\beta} &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sqrt{\frac{(n+k)!}{n! \cdot n!(n-k)!}} \overbrace{(1-x)^{-\frac{k}{2}} (1+x)^{-\frac{k}{2}}}^{(1-x^2)^{-\frac{k}{2}}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left\{ \overbrace{[-(x-1)](x+1)^n}^{(-1)^n(x^2-1)^n} \right\} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-k)!}} (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left\{ (x^2-1)^n \right\} \stackrel{(3.42)}{=} \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} \widehat{P}_{nk}(\cos\beta), \end{aligned} \quad (3.92)$$

so erkennt man, dass die Legendrefunktionen – abgesehen von der Normierung – einen Spezialfall der Wigner-d-Funktionen darstellen.

Um die Wurzeln  $(1 \pm x)^{-\frac{k \pm m}{2}} = (\sqrt{1 \pm \cos\beta})^{-k \mp m}$  in der Formel (3.91) zu vermeiden, kann man die Halbwinkelsätze aus Bartsch (1999)

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{1 - \cos\beta} &= \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ \pm \sqrt{1 + \cos\beta} &= \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

benützen. Da der Winkel im Allgemeinen auf das Intervall  $0 \leq \beta \leq \pi$  beschränkt ist, wird nur das positive Vorzeichen benötigt. Damit erhält man für den Spezialfall  $k = n$  mit der Formel (3.81)



$$\begin{aligned}
 d_{nm}^n(\beta) &= \overbrace{\frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}}}_{(3.90)} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2}\right)^{n-m} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2}\right)^{n+m} = \\
 &= \sqrt{\frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{n-m} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{n+m}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

und für die allgemeinen Wigner-d-Funktionen

$$\begin{aligned}
 d_{km}^n(\beta) &= \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-m)!(n+m)!(n-k)!}} 2^{-k} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{m-k} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{-k-m} \\
 &\quad \cdot \left. \frac{d^{n-k}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-k}} \right|_{x=\cos \beta}.
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Weitere Formeln finden sich zum Beispiel in Varshalovich (1988), wobei insbesondere die Ableitungen des Produkts durch andere Darstellungen – zum Beispiel durch die Jacobi-Polynome – ersetzt werden.

k \ m	1	0	-1
1	$\frac{1+\cos \beta}{2}$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-\cos \beta}{2}$
0	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\cos \beta$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$
-1	$\frac{1-\cos \beta}{2}$	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\cos \beta}{2}$

Tabelle 3.1.: Wigner-d-Funktionen  $d_{km}^n(\beta)$  zum Grad  $n = 1$  aus Varshalovich (1988)

	2	1	0	-1	-2
2	$\frac{(1+\cos \beta)^2}{4}$	$-\frac{\sin \beta(1+\cos \beta)}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sin^2 \beta}{2}$	$-\frac{\sin \beta(1-\cos \beta)}{2}$	$\frac{(1-\cos \beta)^2}{4}$
1	$\frac{\sin \beta(1+\cos \beta)}{2}$	$\frac{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$-\frac{2 \cos^2 \beta - \cos \beta - 1}{2}$	$-\frac{\sin \beta(1-\cos \beta)}{2}$
0	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sin^2 \beta}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\frac{3 \cos^2 \beta - 1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sin^2 \beta}{2}$
-1	$\frac{\sin \beta(1-\cos \beta)}{2}$	$-\frac{2 \cos^2 \beta - \cos \beta - 1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$	$\frac{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1}{2}$	$-\frac{\sin \beta(1+\cos \beta)}{2}$
-2	$\frac{(1-\cos \beta)^2}{4}$	$\frac{\sin \beta(1-\cos \beta)}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sin^2 \beta}{2}$	$\frac{\sin \beta(1+\cos \beta)}{2}$	$\frac{(1+\cos \beta)^2}{4}$

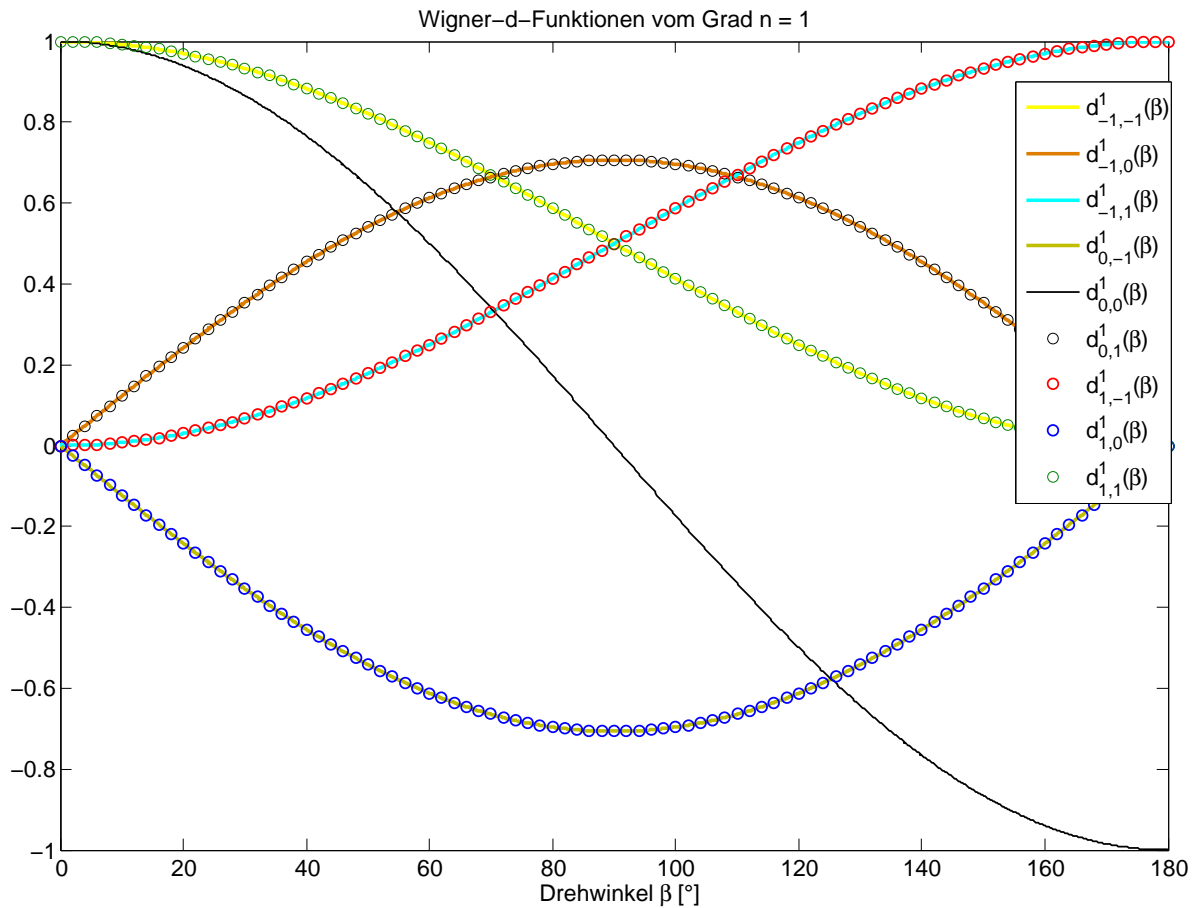
Tabelle 3.2.: Wigner-d-Funktionen  $d_{km}^n(\beta)$  zum Grad  $n = 2$  aus Varshalovich (1988)

Die Grafik 3.3 und die Tabellen 3.1 und 3.2 zeigen die ersten Wigner-d-Funktionen für das Argument  $\beta$  und die Grade  $n = 1, 2$ . Aus diesen lassen sich gewisse Symmetrien erahnen, die allerdings hier nicht explizit nachgerechnet werden sollen. So gilt nach Varshalovich (1988, S. 79) für die Wigner-d-Funktionen

$$d_{km}^n(\beta) = (-1)^{k-m} d_{-k,-m}^n(\beta) = (-1)^{k-m} d_{mk}^n(\beta) = d_{-m,-k}^n(\beta) \tag{3.95a}$$

$$d_{km}^n(-\beta) = (-1)^{k-m} d_{km}^n(\beta) = d_{mk}^n(\beta) \tag{3.95b}$$

$$d_{km}^n(\pi - \beta) = (-1)^{n-m} d_{-k,m}^n(\beta) = (-1)^{n+k} d_{k,-m}^n(\beta). \tag{3.95c}$$

Abbildung 3.3.: Wigner-d-Funktionen zum Grad  $n = 1$ 

Will man das Differenzieren vermeiden, kann man nach Sneeuw (2000) und Meyer (2005) die einzelnen Wigner-d-Funktion mittels der Summendarstellung

$$d_{km}^n(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+k)!(n-k)!}} \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{n+k}{t} \binom{n-k}{n-m-t} (-1)^t \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2n-a} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^a \quad (3.96)$$

mit  $a = k - m + 2t$ ,  $t_1 = \max(0, k - m)$  und  $t_2 = \min(n - m, n + k)$  bestimmen, auf deren Herleitung verzichtet werden soll. Ein entsprechendes Programm kann vergleichsweise einfach erstellt werden, allerdings erschwert die Abhängigkeit des Index  $t$  von Grad und Ordnung eine gleichzeitige Berechnung mehrerer Funktionen.

Die Tatsache, dass die Legendrefunktionen einen Sonderfall der Wigner-d-Funktionen darstellen, legt eine rekursive Berechnung nahe. Eine solche findet sich in Kostelec (2003a,b), wobei für hohe Entwicklungsgrade die normierten Wigner-d-Funktionen

$$\tilde{d}_{km}^n(\beta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} d_{km}^n(\beta) \quad (3.97)$$

behandelt werden.

Um die Funktion  $\tilde{d}_{km}^n(\beta)$  für die Ordnungen  $(k, m)$  bis zum Grad  $n$  zu bestimmen, wählt man die nicht-negative Zahl  $J = \max(|k|, |m|)$  und berechnet damit den Startwert der Rekursion:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{J,m}^J(\beta) &= \sqrt{\frac{2J+1}{2}} \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+m} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-m} \\
\tilde{d}_{-J,m}^J(\beta) &= \sqrt{\frac{2J+1}{2}} \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+m)!(J-m)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-m} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+m} \\
\tilde{d}_{k,J}^J(\beta) &= \sqrt{\frac{2J+1}{2}} \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+k)!(J-k)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+k} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-k} \\
\tilde{d}_{k,-J}^J(\beta) &= \sqrt{\frac{2J+1}{2}} \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+k)!(J-k)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-k} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+k}.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Mit dem zusätzlichen Wert  $\tilde{d}_{km}^{J-1}(\beta) = 0$  und der Beziehung

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{km}^{n+1}(\beta) &= \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} \frac{(n+1)(2n+1)}{\sqrt{((n+1)^2 - k^2)((n+1)^2 - m^2)}} \left(\cos \beta - \frac{km}{n(n+1)}\right) \tilde{d}_{km}^n(\beta) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}} \frac{\sqrt{(n^2 - k^2)(n^2 - m^2)}}{\sqrt{((n+1)^2 - k^2)((n+1)^2 - m^2)}} \frac{n+1}{n} \tilde{d}_{km}^{n-1}(\beta)
\end{aligned} \tag{3.99}$$

lassen sich alle Wigner-d-Funktionen mit  $n = J, J+1, \dots$  für die (festen) Ordnungen  $(k, m)$  bestimmen. Da sich die Rekursion – abgesehen vom Produkt  $km$  – für positive und negative Ordnungen nicht ändert, können durch eine Modifikation der Programme jeweils die Werte für  $(\pm k, \pm m)$  gemeinsam berechnet werden.

Zur Kontrolle der Wigner-d-Funktionen können unter anderem folgende Eigenschaften aus der Herleitung genutzt werden:

- Für die Ordnung  $k = n$  und  $m$  beliebig kann die geschlossene Formel (3.93) eingesetzt werden, die allerdings in der Rekursion bereits als Startwert dient.
- Nach der Gleichung (3.92) entsprechen die Wigner-d-Funktionen mit  $k < 0$  und  $m = 0$  bis auf eine Normierung den Legendrefunktionen.
- Aus der Darstellung (3.91) kann durch mehrmaliges Differenzieren eine geschlossene Formel für das Argument  $x = \cos \beta$  bestimmt werden, wobei für höhere Grade oder Ordnungen ein Computeralgebra-system eingesetzt werden sollte.
- Durch die Symmetrien können aus bereits berechneten Wigner-d-Funktionen die entsprechenden Werte für weitere Ordnungen bestimmt werden.
- Für die „Nulldrehung“ ist nur eine Wigner-d-Funktion von Null verschieden und es gilt

$$d_{km}^n(0) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.100}$$

- Da für einige Anwendungen auch die Ableitungen der Wigner-d-Funktionen benötigt werden, kann man die Beziehung (3.76) als Test implementieren.
- Eine numerische Überprüfung bietet die erwähnte Summendarstellung (3.96), die allerdings für jede Kombination aus Grad und Ordnungen eine neue Berechnung erfordert.

Die eigentliche Idee zur Einführung der Wigner-d-Funktionen ist jedoch die Berechnung einer rotierten Kugelflächenfunktion über eine Linearkombination der ursprünglichen Funktionswerte. Fasst man die Gleichungen (3.62) und (3.64) zusammen, so ergibt sich die fundamentale Beziehung

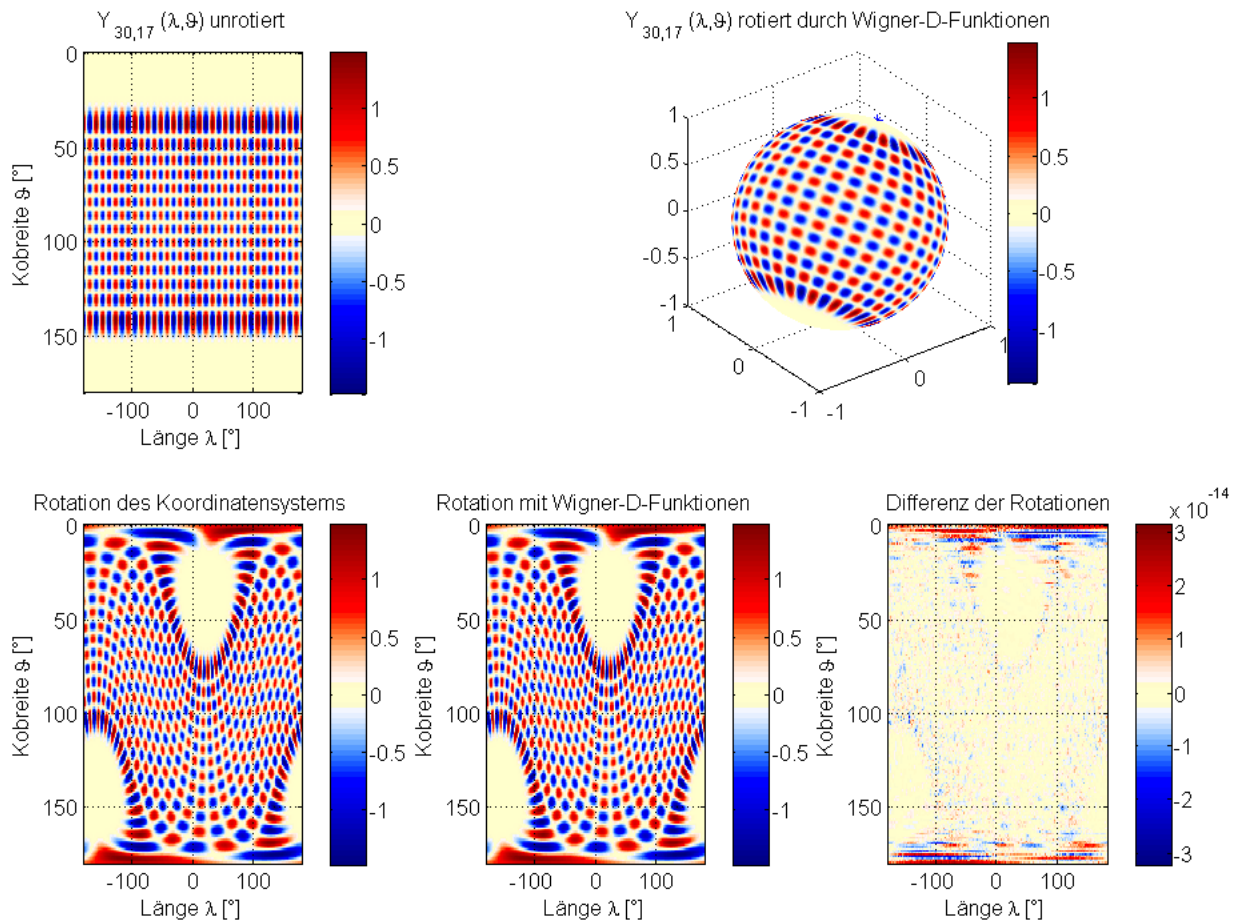


Abbildung 3.4.: Rotation der Kugelflächenfunktion  $\hat{Y}_{30,17}(\lambda, \vartheta)$  um die drei Eulerwinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$  durch eine Drehung des Koordinatensystems und als Linearkombination mit den Wigner-D-Funktionen als Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') &= \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right\} = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \hat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) = \\
 &= \sum_{k=-n}^n \exp(-ik\alpha) d_{km}^n(\beta) \exp(-im\gamma) \hat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) = \exp(-im\gamma) \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(\beta) \hat{Y}_{nk}(\lambda - \alpha, \vartheta).
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Dabei bezeichnen  $(\lambda, \vartheta)$  und  $\vec{x}$  die ursprünglichen Koordinaten,  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  die drei Eulerwinkel um die dritte, erste und dritte Achse

$$\vec{x}' = \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma) \left\{ \vec{x} \right\} = \mathbf{R}_3(\gamma) \mathbf{R}_2(\beta) \mathbf{R}_3(\alpha) \vec{x}$$

und  $(\lambda', \vartheta')$  bzw.  $\vec{x}'$  die transformierten Positionen.

In der Abbildung 3.4 wird die Kugelflächenfunktion  $\hat{Y}_{30,17}(\lambda, \vartheta)$  mit den Wigner-D-Funktionen um die drei Eulerwinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$  und  $\gamma = 60^\circ$  rotiert und anschließend der Realteil visualisiert. Zum Vergleich wird eine zweite Berechnung durchgeführt, in welcher zuerst die Koordinaten transformiert und die Funktion an der gedrehten Position berechnet wird. Aus dem Bild der Differenzen kann man erkennen, dass die beiden Ergebnisse im Rahmen der Rechengenauigkeit (in MATLAB ca. 16 Stellen) übereinstimmen.

Abschließend ist zu klären, wie sich eine inverse Rotation durch die Wigner-D-Funktionen beschreiben lässt. Dazu betrachtet man die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  um die drei Eulerwinkel. Die Rotation in die Gegenrichtung erhält man, indem man die Matrix transponiert:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\top} = (\mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_3(\alpha))^{\top} = \mathbf{R}_3(-\alpha)\mathbf{R}_2(-\beta)\mathbf{R}_3(-\gamma). \quad (3.102)$$

Daher ergibt sich die inverse Transformation  $\mathfrak{K}^{-1}$  durch Wigner-D-Funktionen, indem man die Vorzeichen und die Reihenfolge der Winkel vertauscht

$$D_{km}^n(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \exp(ik\gamma)d_{km}^n(-\beta)\exp(im\alpha), \quad (3.103)$$

was auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) &= \mathfrak{K}^{-1}\left\{\hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta')\right\} = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(-\gamma, -\beta, -\alpha)\hat{Y}_{nk}(\lambda', \vartheta') = \\ &= \exp(im\alpha) \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(-\beta)\hat{Y}_{nk}(\lambda' + \gamma, \vartheta') \end{aligned} \quad (3.104)$$

für die Drehung der Kugelflächenfunktionen führt.

### Zusammenfassung

Die ersten Abschnitte befassen sich mit den Legendrepolyomen, dem inversen Abstand und den zugeordneten Legendre- und Kugelflächenfunktionen. Letztere bilden ein bekanntes Basissystem zur Darstellung des Erdschwerefeldes in Form eines Potentials

$$V(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)(\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda). \quad (3.49)$$

In manchen Anwendungen wird eine Beschreibung in einem anderen Koordinatensystem benötigt, welches sich durch eine Rotation von dem ursprünglichen System unterscheidet. Die Rotation einer Kugelflächenfunktion um die drei Eulerwinkel  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  lässt sich durch eine Linearkombination mit den Wigner-D-Funktionen als Koeffizienten realisieren:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') &= \mathfrak{K}(\alpha, \beta, \gamma)\left\{\hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)\right\} = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma)\hat{Y}_{nk}(\lambda, \vartheta) = \\ &= \exp(-im\gamma) \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(\beta)\hat{Y}_{nk}(\lambda - \alpha, \vartheta). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Eine allgemeine Darstellung der Wigner-d-Funktionen liefert die differentielle Formel

$$d_{km}^n(\beta) = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-m)!(n+m)!(n-k)!}} (1-x)^{-\frac{k-m}{2}} (1+x)^{-\frac{k+m}{2}} \left. \frac{d^{n-k}(1-x)^{n-m}(1+x)^{n+m}}{dx^{n-k}} \right|_{x=\cos \beta}, \quad (3.91)$$

während die Berechnung in der Regel durch andere (rekursive) Ansätze erfolgt.

Die inverse Transformation einer Kugelflächenfunktion ergibt sich, indem man die Reihenfolge und die Vorzeichen der Winkel vertauscht:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) &= \mathfrak{K}^{-1} \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') \right\} = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(-\gamma, -\beta, -\alpha) \widehat{Y}_{nk}(\lambda', \vartheta') = \\ &= \exp(im\alpha) \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(-\beta) \widehat{Y}_{nk}(\lambda' + \gamma, \vartheta'). \end{aligned} \tag{3.104}$$

## 4. Radiale Basisfunktionen

In diesem Kapitel wird die Modellierung inhomogen verteilter Daten durch radiale Basisfunktionen vorgestellt. Die Approximation hängt insbesondere von der Wahl der Basiszentren und der Formparameter ab, weshalb diese sorgfältig aufeinander abzustimmen sind. Um bei einer konstanten bzw. minimalen Anzahl an Parametern die Lösung zu verbessern, werden die Positionen oder die Formparameter der Basisfunktionen auf der Grundlage der Daten (iterativ) optimiert, wofür in der Literatur sowohl in der Ebene als auch auf der Kugel verschiedene Ansätze vorgeschlagen werden.

Zur Behandlung von Satellitendaten wird das Konzept der radialen Basisfunktionen auf die Kugel übertragen, wobei jede Basis durch eine Reihenentwicklung nach Legendrepolyomen und die Zahlenfolge der Legendre-Koeffizienten dargestellt wird. Die Approximation beliebiger Daten erfolgt durch die Linearkombination rotierter Basisfunktionen. Die Kombination mit einem globalen (Schwere-)Feld wird durch die Repräsentation der Basisfunktionen durch ihre sphärisch-harmonischen Koeffizienten erleichtert, welche durch eine geschlossene Formel bestimmt werden. Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem Modell der Legendre-Koeffizienten, durch welches die Funktionen als Punktmassen, Splines und sphärisches Wavelets charakterisiert werden.

### 4.1. Approximation im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$

In vielen Disziplinen ist es für die weitere Analyse notwendig, aus Beobachtungen eine realistische Fläche eines Objekts abzuleiten. Neben den lokalen Verfahren, die meist auf einer Dreiecksvermaschung der Daten basieren, oder der Approximation durch global definierte Funktionen (z.B. ausgleichende Polynome), werden oft Linearkombinationen geeigneter Basisfunktionen verwendet.

Dabei wird die gesuchte Fläche  $f$  durch eine gewichtete Summe vorgegebener Basisfunktionen  $\phi_b$  approximiert und die Koeffizienten  $a_b$  aus den Beobachtungen geschätzt:

$$f \approx \sum_{b=1}^B a_b \phi_b. \quad (4.1)$$

Die Approximation wird häufig vereinfacht, indem man sich auf radiale Basisfunktionen beschränkt.

**Definition 1** Als radiale Basisfunktion bezeichnet man jede Funktion  $\phi_b$ , deren Funktionswert nur von dem Abstand  $\rho = |\vec{x} - \vec{z}_b|$  zwischen dem Zentrum  $\vec{z}_b$  der Basis und einem Berechnungspunkt  $\vec{x}$  – nicht aber von der absoluten Lage der Punkte – abhängt:

$$\phi_b(\vec{z}_b, \vec{x}) = \phi_b(|\vec{x} - \vec{z}_b|) = \phi_b(\rho). \quad (4.2)$$

Für den auch als Radius bezeichneten Abstand wird oft die euklidische Norm verwendet, es sind aber auch andere Distanzen (z.B. Projektion auf eine Tangentialebene, sphärischer Abstand auf der Kugel, ...) denkbar (Sharifi, 2006, du Toit, 2008).

Eine der ersten (geodätischen) Veröffentlichungen zu den radialen Basisfunktionen findet sich in einem Artikel von Hardy (1971), der diese zur Interpolation von Geländemodellen aus ungleichmäßig verteilten Höhenmessungen verwendet. Inzwischen haben sich neben der Interpolation bzw. Approximation von Oberflächen oder Volumen (Hardy, 1971, Carr, 2001, du Toit, 2008) noch weitere Anwendungen ergeben, wie zum Beispiel die Reduktion von Satellitenbeobachtungen auf ein Gitter mittlerer Orbithöhe (Sharifi, 2006), die Analyse des (residualen) Schwerefeldes (Schmidt, 2007, Eicker, 2008, Klees, 2008, Wittwer, 2009), die Aktivierungsfunktion neuronaler Netze (Artusi, 2001, Chun-tao, 2007) oder die Beleuchtung in Computersimulationen (Tsai, 2006).

(Engl.) Bezeichnung	Formel
Gaussians	$\exp(-(c_b\rho)^2)$
Hardy's Multiquadratic	$\sqrt{\rho^2 + c_b^2}$
Inverse Multiquadratic	$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + c_b^2}}$
Inverse Quadratic	$\frac{1}{\rho^2 + c_b^2}$
Thin-Plate Spline	$\rho^2 \log \rho$
Linear	$\rho$
Cubic	$\rho^3$

Tabelle 4.1.: Häufig verwendete radiale Basisfunktionen für den Abstand  $\rho$ , mit einem zusätzlichen Formparameter  $c_b > 0$  nach Sharifi (2006)

Aus den Anwendungen folgen weitere wünschenswerte Eigenschaften, die häufig nicht explizit behandelt werden. Für eine glatte Interpolation sollten die Basisfunktionen zum Beispiel stetig und differenzierbar sein, während der betragsmäßig größte Funktionswert in den meisten Fällen für die Distanz  $\rho = 0$  angenommen wird. Daneben wird gelegentlich noch der Begriff der Lokalisierung verwendet, um eine Basisfunktion zu charakterisieren. In der Interpolation oder Approximation wird eine Funktion als „gut lokalisierend“ bezeichnet, wenn eine Änderung einer Basis bzw. des zugehörigen Koeffizienten nur in einer kleinen Umgebung erkennbare Folgen hat und die anderen Gebiete weitgehend unbeeinflusst bleiben. Um dies zu ermöglichen, muss die Basisfunktion ein klares Extremum im Zentrum haben und für größere Abstände  $\rho$  schnell gegen Null konvergieren, wobei ein monotonen Verhalten zu bevorzugen ist. Einige der klassischen radialen Basisfunktionen zur Approximation im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  sind in der Tabelle 4.1 zusammengefasst und in der Grafik 4.1 visualisiert.

Die meisten Basisfunktionen können so formuliert werden, dass ihr Verlauf durch einen zusätzlichen Formparameter  $c_b$  gesteuert werden kann, was auf die erweiterte Notation

$$\phi_b(\rho, c_b) = \phi_b(|\vec{x} - \vec{z}_b|, c_b) \quad (4.3)$$

führt. Handelt es sich zum Beispiel bei der gesuchten Fläche um eine Interpolation diskreter Höhenmessungen, so kann es sinnvoll sein für Gebirge, Hügellandschaften und Ebenen verschiedene Formen der Basisfunktionen zu verwenden, wenn die ungefähre Lage der Geländeformen bekannt ist.

Nimmt man an, dass die Formparameter  $c_b$  und die Lage der Basisfunktionen  $\vec{z}_b$  gegeben sind, so wird die Approximation  $\tilde{f}(\vec{x})$  eines Signals  $f(\vec{x})$  durch die Linearkombination

$$\tilde{f}(\vec{x}) \approx \sum_{b=1}^B a_b \phi_b(|\vec{x} - \vec{z}_b|, c_b) \quad (4.4)$$

mit den Koeffizienten  $a_b$  berechnet. Zur deren Bestimmung verwendet man die Messungen  $y_\ell$  in den Positionen  $\vec{x}_\ell$  und setzt die analoge Gleichung

$$y_\ell \approx f(\vec{x}_\ell) = \sum_{b=1}^B a_b \phi_b(|\vec{x}_\ell - \vec{z}_b|, c_b) \quad (4.5)$$

für  $B$  Basisfunktionen und die Beobachtungen ( $\ell = 1, 2, \dots, L$ ) an. Die Aufgabe kann mit den Vektoren  $\vec{z} = (a_1, a_2, \dots, a_B)^\top$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_L)^\top$  sowie einer Matrix der Dimension  $L \times B$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi_1(|\vec{x}_1 - \vec{z}_1|, c_1) & \phi_2(|\vec{x}_1 - \vec{z}_2|, c_2) & \dots & \phi_B(|\vec{x}_1 - \vec{z}_B|, c_B) \\ \phi_1(|\vec{x}_2 - \vec{z}_1|, c_1) & \phi_2(|\vec{x}_2 - \vec{z}_2|, c_2) & \dots & \phi_B(|\vec{x}_2 - \vec{z}_B|, c_B) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(|\vec{x}_L - \vec{z}_1|, c_1) & \phi_2(|\vec{x}_L - \vec{z}_2|, c_2) & \dots & \phi_B(|\vec{x}_L - \vec{z}_B|, c_B) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

als ein lineares Gleichungssystem dargestellt werden:

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{z}. \quad (4.7)$$



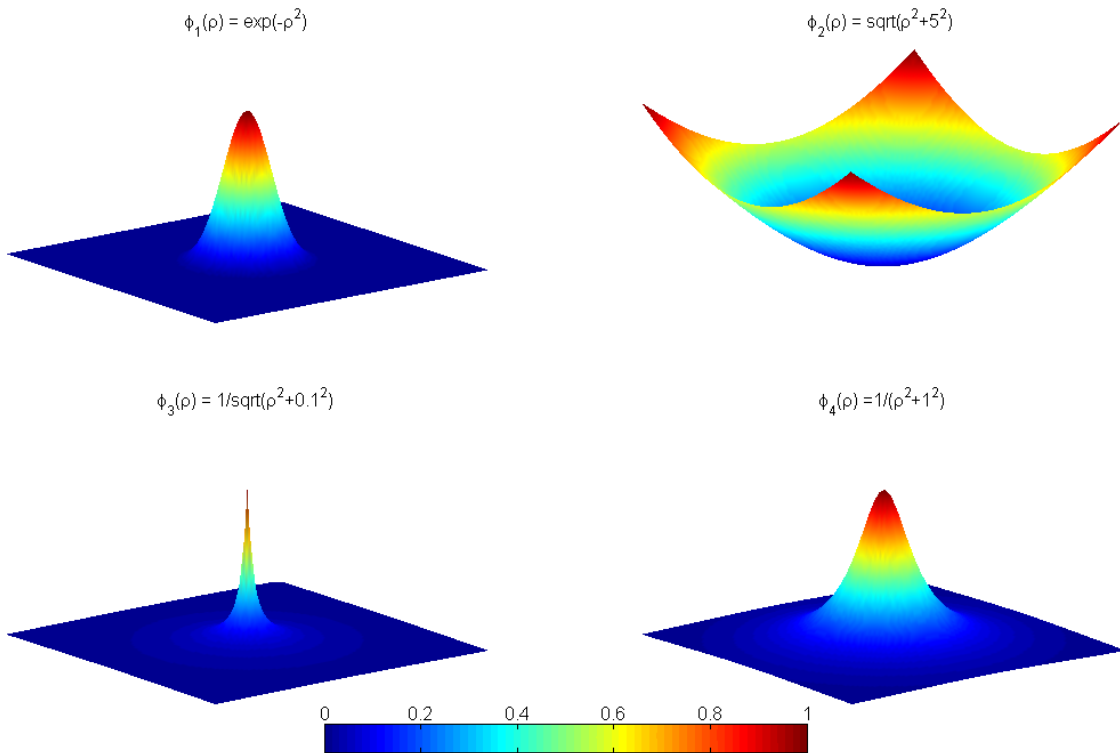


Abbildung 4.1.: Beispiele radialer Basisfunktionen für den zweidimensionalen Fall, wobei die Werte auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert werden

Die Koeffizienten erhält man aus der Lösung des Gleichungssystems, welches für  $L > n$  als Minimierungsproblem

$$\Xi(a_1, a_2, \dots, a_B) = \left\| y_\ell - \sum_{b=1}^B a_b \phi_b(|\vec{x}_\ell - \vec{z}_b|, c_b) \right\|^2 \rightarrow \min \quad (4.8)$$

aufgefasst wird. Die Minimierung der Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt in der klassischen Ausgleichsrechnung (vgl. Abschnitt 7.2) durch eine Matrixinversion

$$\vec{z} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \vec{y}. \quad (4.9)$$

Die hier verwendete Software (MATLAB) kennt außerdem die sogenannte Linksdivision

$$\vec{z} = \mathbf{A} \setminus \vec{y} \quad (4.10)$$

zur effizienteren Lösung linearer Gleichungssysteme, deren Umsetzung intern von der Dimension und der Struktur der Matrix  $\mathbf{A}$  abhängt.

Einen großen Einfluss auf die Qualität der Approximation hat die Bestimmung der Formparameter und die Wahl der Zentren der radialen Basisfunktionen (Sharifi, 2006, Klees, 2008, Wittwer, 2009). Zu viele Basisfunktionen bzw. ein zu dichtes Netz an Zentren führen zu einer Überparametrisierung des Problems, wodurch die Bestimmung der Koeffizienten  $\{a_1, a_2, \dots, a_B\}$  gegenüber numerischen Störungen sensibilisiert wird. Zum Teil kann dem durch eine Regularisierung der Matrix begegnet werden, indem man Zusatzinformationen oder zumindest geeignete Annahmen benützt, um die Ausgleichung zu stabilisieren. Andererseits wird durch eine schlechte Verteilung der Basisfunktionen oder eine zu geringe Anzahl derselben nicht das ganze Gebiet abgedeckt und man erhält eine Pseudo-Lösung, die nur in der Nähe der gewählten Zentren eine sinnvolle Approximation liefert.

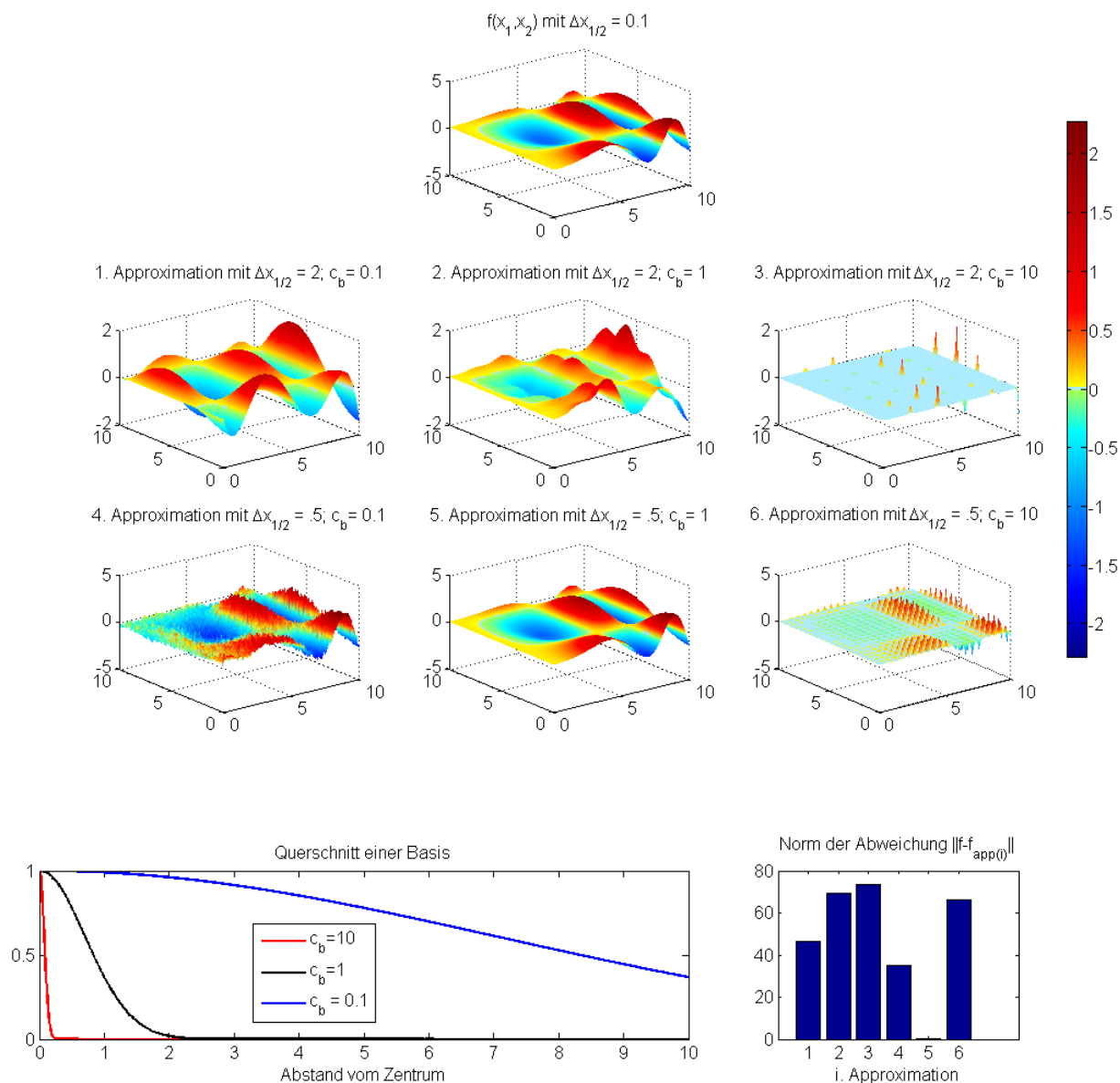


Abbildung 4.2.: Approximation von  $f(x_1, x_2) = \sin \frac{x_1^2}{10} \cos \frac{x_2}{2} \exp \frac{x_1^2 + x_2}{100} + 0.0630$ . Die Zentren der Basisfunktionen  $\phi_b(r) = \exp(-c_b r^2)$  liegen auf einem regelmäßigen Gitter mit dem angegebenen Abstand  $\Delta x_{1/2}$ , während für die Formparameter die Werte  $c_b \in \{0.1, 1, 10\}$  genutzt werden

In der Abbildung 4.2 wird die Abhängigkeit der Approximation von den Parametern am Beispiel der zweidimensionalen Funktion

$$f(x_1, x_2) = \sin \frac{x_1^2}{10} \cos \frac{x_2}{2} \exp \frac{x_1^2 + x_2}{100} + 0.0630$$

für den Definitionsbereich  $\mathbb{D} = [0, 10] \times [0, 10]$  untersucht, wobei die Kontrollpunkte auf einem regelmäßigen Gitter mit der Maschenweite  $\Delta x = 0.1$  vorliegen. In der Modellierung werden die radialen Basisfunktionen  $\phi_b(r) = \exp(-c_b \rho^2)$  mit dem Radius  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und den Formparametern  $c_b \in \{0.1, 1, 10\}$  eingesetzt und die Approximation für zwei regelmäßige Verteilungen der Zentren bestimmt. Betrachtet man die Norm der Restfehler in den Kontrollpunkten als einziges Kriterium, so ergibt sich die beste Lösung – die in der Abbildung durch die Nummer [5] notiert wird – für den Formparameter  $c_b = 1$  und einen Abstand der Zentren von  $\Delta x_{1/2} = 0.5$ , wobei die Basis innerhalb dieser Distanz auf ca. 70 % des Maximalwerts abfällt. Trotz des langsamen Abklingens der Basisfunktion für  $c_b = 0.1$  stellen die Lösungen [4] bzw. [1] die zweit- bzw. drittbeste Annäherung dar, wobei letztere vor allem am Rand von den wahren Werten abweicht. In beiden Fällen ist für diesen Formparameter die Anzahl der Basisfunktionen im Gebiet eigentlich zu groß und das Problem überparametrisiert, weshalb die guten Ergebnisse auf eine interne Regularisierung bei der Linksdivision zurückzuführen sind. Auf der anderen Seite erhält man durch die Formparameter  $c_b = 10$  sehr lokalisierende Basisfunktionen, so dass die Approximationen [3] und [6] nur vereinzelte Punkte richtig modellieren und dazwischen eine sehr unruhige Fläche erzeugen.

Um eine gute Approximation durch radiale Basisfunktionen zu erreichen, ist daher eine geeignete Kombination aus Zentren und Formparametern zu bestimmen. Für die Wahl der Basiszentren existieren verschiedene Ansätze (und auch Bezeichnungen), von denen einige hier skizziert werden sollen:

1. Die einfachste Möglichkeit ist die Verwendung der Positionen aller Messwerte als Zentren (vgl. Hardy (1971)). Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die Messungen selbst bereits eine geeignete räumliche Verteilung aufweisen und die Anzahl der Beobachtungen nicht zu groß ist. In der Auswertung von Satellitenbeobachtungen ist zu beachten, dass die Messungen nicht auf der interessierenden Fläche, sondern im Orbit stattfinden und die Anzahl der Beobachtungen in der Regel sehr groß ist.
2. Man kann die Positionen vor der Approximation festlegen und ein gleichmäßiges Gitter oder eine an das Problem oder die Beobachtungen angepasste Verteilung wählen, wie es in Sharifi (2006) für die Transformation auf eine mittlere Orbithöhe gemacht wird. Diese Methode wird für die Analyse durch sphärische Splines oder Wavelets in der regionalen oder globalen Schwerfeldmodellierung aus Satellitendaten bevorzugt (Fengler, 2004, Schmidt, 2007, Eicker, 2008). In der Regel werden deutlich weniger Basisfunktionen als Beobachtungen verwendet, so dass die Lösung durch die Ausgleichung auch geglättet wird. Obwohl man durch eine geeignete Verteilung der Zentren die Berechnung stabilisiert, ist insbesondere für hochauflösende Felder noch eine zusätzliche Regularisierung notwendig.
3. Bei den Selektionsmethoden wird eine große Anzahl möglicher Zentren vorgegeben, welche aus den Positionen der Messpunkte, einer gleichmäßigen Verteilung im Raum oder einer Kombination beider Ansätze generiert werden. Nach bestimmten Kriterien werden wenige Basisfunktionen ausgewählt, die einerseits eine bestmögliche Approximation und andererseits eine stabile Lösung ermöglichen.
  - In der additiven Variante startet man mit einer (willkürlichen) Auswahl an Zentren und ergänzt weitere Basisfunktionen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist oder alle Positionen verwendet sind. Carr (2001) bezeichnet dies als Greedy-Algorithmus und modelliert so eine dreidimensionale, gescannte Oberfläche. Als mögliche Zentren werden dabei die Messpunkte genutzt und die nächste Basisfunktion wird an die Stelle der maximalen Restabweichung zwischen Approximation und Daten platziert.
  - In der Analyse von Schweredaten wird der additive Ansatz durch Wittwer (2009) für die sphärischen radialen Basisfunktionen modifiziert und als „local refinement“ bezeichnet. Zunächst wird ein grobes Gitter mit vorgegebenen Zentren und Formparametern verwendet und eine erste Lösung berechnet. Aus der Differenz zu den Beobachtungen erhält man ein Residualfeld, wobei die Position der größten Abweichung als Zentrum einer neuen Basis definiert wird. Bei festgehaltenen Positionen

und Formparametern der „alten“ Basisfunktionen wird die Form bzw. Tiefe der neuen Basis optimiert und anschließend deren Skalierungsfaktor geschätzt. Nach der Subtraktion der Lösung werden die Schritte für das neue Residualfeld wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit (oder ein anderes Abbruchkriterium) erreicht wird.

- Die subtraktive Version nutzt eine Menge an vorgegebenen Basiszentren und eliminiert iterativ diejenigen, die als nicht notwendig klassifiziert werden. Im DAND-Algorithmus („data-adaptive network design“) von Klees (2008) wird so ein regionales Schwerefeld aus simulierten Beobachtungen mit verschiedenen Verteilungen der Basisfunktionen modelliert. Als Selektionskriterium wird zunächst die Anzahl der Beobachtungen in der Umgebung eines Zentrums verwendet, wobei Positionen mit zu wenig Informationen entfernt werden. Nach einer individuellen Anpassung der Formparameter an das jeweilige Interessensgebiet einer Basis werden außerdem alle Zentren entfernt, deren Wirkung nicht signifikant zum Schwerefeldmodell beiträgt.
- Im hierarchischen Ansatz von du Toit (2008) werden für die höchste Auflösung alle Datenpunkte als Zentren verwendet, für die einfacheren Approximationen des gescannten Objekts werden analog zur subtraktiven Variante schrittweise Basisfunktionen entfernt, um das Ergebnis zu glätten.

4. Um die Anzahl der Parameter zu verringern und gleichzeitig die Lösung zu verbessern, wird die Idee der optimierten radialen Basisfunktionen entwickelt. Im Gegensatz zu den anderen Ansätzen werden die Positionen der Basisfunktionen dabei nach ihrer ersten Bestimmung nicht festgehalten, sondern noch iterativ korrigiert. Zur Lösung des nichtlinearen Problems werden unter anderem die folgenden Methoden vorgeschlagen:

- Eine der ersten geodätischen Arbeiten zu den optimierten radialen Basisfunktionen bildet die Dissertation von Barthelmes (1986). In dieser werden die Ableitungen des damaligen Potentialmodells GEM-10 bis Grad und Ordnung 20 für ca. 2600 Punkte auf der Kugel berechnet und ein Normalfeld subtrahiert. In jeder Iteration werden die Störbeschleunigungen und deren Betrag für das aktuelle Residualfeld in den Punkten berechnet. Die sphärischen Koordinaten der betragsmäßig größten Beschleunigung werden zusammen mit einer empirisch bestimmten Tiefe als Startwerte für die nächste Punktmasse verwendet und alle bisher erreichten Basisfunktionen bzgl. Positionen und Massen nach der Methode der kleinsten Quadrate verbessert. Anschließend wird das Potential der optimierten Basisfunktionen vom Signal subtrahiert und die Berechnung für weitere Punktmassen wiederholt. Vor allem aus technischen Gründen wird der Algorithmus so modifiziert, dass nur die Punktmassen und Beobachtungen in der Umgebung der aktuellen Werte berücksichtigt werden. Zuletzt werden die Massen und gegebenenfalls auch die Positionen in einer gemeinsamen Ausgleichung verbessert.
- In einer Studie von Keller (2007) werden die Positionen, die Skalierungen und die Formparameter der radialen Basisfunktionen durch einen genetischen Algorithmus aus simulierten (residualen) GRACE-Beobachtungen gemeinsam optimiert. Dabei wird aus einer Menge individueller Lösungen („Elterngeneration“) durch Selektion, Mutation, Kombination etc. jeweils eine neue Generation erzeugt und am Ende die beste Lösung ausgewählt. Der genetische Algorithmus wird zusammen mit einem einfachen Testszenario im Kapitel 7 behandelt.
- Chun-tao (2007) bestimmt die Zentren der Basisfunktionen in einem neuronalen Netzwerk durch eine „ant colony optimization“ (Ameisen-Kolonie-Optimierung). Es handelt sich dabei um eine Variante der Schwarmintelligenz, bei der im Gegensatz zu den genetischen Algorithmen für jeden Versuch („Individuum“) ein „Gedächtnis“ modelliert wird, welches die bisher beste individuelle oder gemeinsame Lösung berücksichtigt. In der Optimierung geschieht dies, indem die Wahrscheinlichkeit für eine Lösung durch die vorangegangenen Versuche beeinflusst wird.
- Im Rahmen dieser Arbeit und den dabei entstandenen Veröffentlichungen (Antoni (2008, 2009a,b) oder Weigelt (2010)) wird eine Variante der Methode der kleinsten Quadrate verwendet, um Position, Skalierung und Formparameter der sphärischen radialen Basisfunktionen zu verbessern. Dazu wird der Ansatz von Barthelmes (1986) für verschiedene Beobachtungstypen der geodätischen Satelliten-

missionen weiterentwickelt und die dortigen Einschränkungen bzgl. der Anzahl der optimierten Basisfunktionen überwunden sowie deren Form an die Daten angepasst.

Analog zu den Positionen der Zentren können auch die Formparameter auf verschiedene Arten bestimmt werden. Die einfachen Methoden basieren entweder auf einer rein empirischen Wahl oder auf der Geometrie der Basisfunktionen und des Gebiets. In Sharifi (2006) werden für die geometrischen Ansätze unter anderem

$$c^2 = \left(0.815 \frac{D}{\sqrt{2}B}\right)^2 \quad (4.11)$$

$$c^2 = \left(1.25 \frac{D}{B}\right)^2 \quad (4.12)$$

vorgeschlagen, wobei  $D$  den Durchmesser des Gebiets und  $B$  dessen gleichmäßige Unterteilung bzw. die Anzahl der Basisfunktionen bezeichnet. Daneben wird für die Multiquadriken  $\phi_b(\rho, c_b) = \sqrt{\rho^2 + c_b^2}$  ein Mittel der Abstände  $\rho_{ik}$  der Zentren

$$c^2 = \frac{1}{B(B-1)} \sum_{i=1}^B \sum_{k=1}^B \rho_{ik} \quad (4.13)$$

erwähnt. Das grundsätzliche Problem dieser Ansätze ist es, dass alle Funktionen den gleichen Formparameter erhalten, unabhängig von den Daten, der Verteilung oder der Wahl der Basisfunktionen. Eine Möglichkeit zur Verbesserung bietet eine individuelle Anpassung an die räumliche Verteilung, wobei für die Multiquadriken der minimale Abstand zum nächsten Zentrum  $c_b = \min\{\rho_{ik}\}$  empfohlen wird.

In der regionalen oder globalen Modellierung von Schwerefeldern werden noch weitere Ansätze verwendet, die auf

- einem Modell des gesuchten Feldes,
- dem Algorithmus,
- oder den Daten

basieren.

Eicker (2008) verwendet eine bekannte Abschätzung für das globale Schweresignal, um daraus das lokale Verhalten zu extrapolieren, was im Abschnitt 4.2.4 näher erläutert wird. Zu den Algorithmus-basierten Verfahren gehört insbesondere die Analyse durch Wavelets, in welcher die Form der Basisfunktionen durch das Zusammenspiel der gewünschten Auflösung (bzw. Skala) und der Waveletfunktion bereits festgelegt ist (Schmidt, 2007).

Andererseits kann man bei einer ausreichender Anzahl an Daten – was für moderne Satellitenmissionen in der Regel der Fall ist – auch die Formparameter durch ein nichtlineares Optimierungsverfahren aus den Beobachtungen bestimmen. So verwendet Sharifi (2006) einen genetischen Algorithmus, um die optimale Form für die Basisfunktionen zu erhalten, mit denen die Daten auf eine konstante Orbithöhe transformiert werden.

In den Arbeiten von Klees (2008), Tenzer (2008) oder Wittwer (2009) werden radiale Basisfunktionen verwendet, deren Formparameter in eine Tiefe unterhalb der Erdoberfläche umrechenbar ist. Dies führt zu einer Einschränkung der zulässigen Werte, welche durch eine „General Cross Validation“ (GCV) aus den Daten bestimmt werden. In diesem Verfahren werden in jedem Schritt einzelne Beobachtungen als Kontrollpunkte aus der Analyse ausgenommen und deren Wert aus den anderen Messungen und verschiedenen Formparametern geschätzt. Anschließend wählt man für die neue Basis den Formparameter, der die kleinste Abweichung in den Kontrollpunkten erzeugt.

Bei festgehaltenen Formparametern  $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_B)$  führen die Methoden 1–3 der Zentrenbestimmung auf ein lineares Gleichungssystem (4.7), dessen stabile Lösung im Wesentlichen von der Matrix  $\mathbf{A}$  abhängt. Werden dagegen Formparameter oder Positionen aus den Daten optimiert, so erhält man ein nichtlineares Problem, dessen Lösung zusammen mit einigen der erwähnten Optimierungsmethoden im Kapitel 7 näher behandelt wird.

## 4.2. Sphärische radiale Basisfunktionen

In dieser Arbeit soll die Idee der optimierten radialen Basisfunktionen auf globale oder regionale Schwerefunktionale angewendet werden, wobei die Skalierung, die Position und die Form jeder Basis als Unbekannte betrachtet werden. Da die Erde näherungsweise die Gestalt einer Kugel aufweist, nutzt man für die Approximation **sphärische radiale Basisfunktionen**. Um den Unterschied zu verdeutlichen, werden diese zunächst durch  $\psi_b$  notiert, wobei durch die andere Bezeichnung und die Verwendung von sphärischen Koordinaten die zusätzliche Angabe „sphärisch“ entfallen kann.

Gemäss ihrer Definition hängen die Funktionswerte einer radialen Basisfunktion im wesentlichen vom sphärischen Abstand zwischen dem Berechnungspunkt  $(\lambda, \vartheta)$  und einem Basiszentrum  $(\lambda_b, \vartheta_b)$ , nicht aber von der absoluten Lage der Punkte ab. Um eine allgemeine Darstellung herzuleiten, beginnt man mit einer Funktion  $\psi_b(\vartheta)$ , deren Zentrum mit dem (Nord-)Pol des Koordinatensystems zusammenfällt, so dass die Abhängigkeit der Werte von der Länge  $\lambda$  entfällt. Aufgrund der Symmetrie lassen sich diese Funktionen zum Beispiel durch zonale Kugelflächenfunktionen  $\widehat{Y}_{n,0}(\lambda, \vartheta)$  oder (unnormierte) Legendrepolynome  $P_n(\cos \vartheta)$  mit der **Syntheseformel**

$$\psi_b(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) P_n(\cos \vartheta) \quad (4.14)$$

darstellen<sup>1</sup>. Alternativ kann man die radiale Basisfunktion auch als eine eindimensionale Funktion – in Form einer Reihenentwicklung (3.10) nach Legendrepolynomen – betrachten, welche um die  $\hat{e}_{e=3}$ -Achse rotiert wird. Ist die Funktion auf der Kugeloberfläche bekannt, so lassen sich die Legendre-Koeffizienten durch die **Analyseformel**

$$\sigma_b(n) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \psi_b(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.15)$$

berechnen. Häufig wird der Term  $\frac{2n+1}{2}$  oder Varianten desselben als ein Faktor  $\xi_n$  in der Syntheseformel (4.14) angebracht, was auf die alternative Darstellung

$$\psi_b(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \sigma_b(n) P_n(\cos \vartheta) \quad (4.16)$$

der radialen Basisfunktionen führt (vgl. z.B. Windheuser (1995), Kusche (2002), Schmidt (2007), Tenzer (2008) oder Eicker (2008)).

In der Modellierung durch radiale Basisfunktionen wird meistens auf die Anwendung der Analyseformel verzichtet. Stattdessen wird ein einfaches mathematisches Modell für die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n)$  gewählt, welches seinerseits von einem skalaren (oder vektoriellen) Formparameter  $\sigma_b$  je Basis abhängt. Einige Modelle werden im Abschnitt 4.2.4 näher erläutert.

Die lokalisierende Eigenschaft einer sphärischen Basisfunktion lässt sich am einfachsten durch die Untersuchung ihrer Legendre-Koeffizienten beschreiben. Je größer die Beträge der Koeffizienten für die niedrigen Werte von  $n$  im Vergleich zu den anderen sind, desto breiter wird die Basis, was zu einer schlechteren Analyse lokaler Details führt (Wittwer, 2009).

### 4.2.1. Rotation der Basisfunktion

Um mit den radialen Basisfunktionen ein Signal  $f(\lambda, \vartheta)$  auf der Einheitskugel darzustellen, müssen diese für die Linearkombination (4.1) an verschiedene Positionen rotiert werden. Dazu wendet man den Operator

<sup>1</sup>Für spezielle Basisfunktionen existieren auch effizientere Formeln ohne Reihenentwicklungen (vgl. z.B. Tenzer (2008), Wittwer (2009)), die hier nicht näher behandelt werden.

$\mathfrak{K}(\lambda_b, \vartheta_b)$  auf eine einzelne Basis an, der das neue Zentrum an die Stelle  $(\lambda_b, \vartheta_b)$  transformiert<sup>2</sup>.

$$\mathfrak{K}(\lambda_b, \vartheta_b) \left\{ \psi_b(\vartheta) \right\} = \mathfrak{K}(\lambda_b, \vartheta_b) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) P_n(\cos \vartheta) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b). \quad (4.17)$$

Die Transformation betrifft dabei nur das Argument der Legendrepolynome, welches durch den Kosinus des sphärischen Abstands  $\varpi_b$  zwischen dem Zentrum  $\hat{z}_b$  der Basis und einem Berechnungspunkt  $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$  ersetzt wird. Der Wert von  $\cos \varpi_b$  ergibt sich mit den Mitteln der linearen Algebra aus dem Skalarprodukt der Einheitsvektoren. Verwendet man erdfeste Koordinaten, so kann das Basiszentrum durch zwei Rotationen des Einheitsvektors  $\hat{e}_{e=3} = (0, 0, 1)^\top$  dargestellt werden:

$$\hat{z}_b = \mathbf{R}_2(\vartheta_b) \mathbf{R}_3(\lambda_b) \hat{e}_{e=3} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_b \cos \lambda_b \\ \sin \vartheta_b \sin \lambda_b \\ \cos \vartheta_b \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Für den Berechnungspunkt gilt dagegen in sphärischen bzw. kartesischen Koordinaten

$$\hat{x} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} (x_1, x_2, x_3)^\top = (\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta)^\top, \quad (4.19)$$

so dass das Argument der Legendrepolynome durch

$$\begin{aligned} \cos \varpi_b &= \langle \hat{x}, \mathbf{R}_2(\vartheta_b) \mathbf{R}_3(\lambda_b) \hat{e}_{e=3} \rangle = \langle \hat{x}, \hat{z}_b \rangle = \cos \lambda_b \sin \vartheta_b \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} + \sin \lambda_b \sin \vartheta_b \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} + \cos \vartheta_b \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} = \\ &= \sin \vartheta_b \sin \vartheta \cos(\lambda - \lambda_b) + \cos \vartheta_b \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.20)$$

gegeben ist. Jede rotierte radiale Basisfunktion lässt sich somit durch

$$\mathfrak{K}(\lambda_b, \vartheta_b) \left\{ \psi_b(\vartheta) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) P_n(\sin \vartheta_b \sin \vartheta \cos(\lambda - \lambda_b) + \cos \vartheta_b \cos \vartheta) \quad (4.21)$$

darstellen, wobei  $(\lambda, \vartheta)$  den Berechnungspunkt und  $(\lambda_b, \vartheta_b)$  das Basiszentrum in erdfesten Koordinaten bezeichnet.

Andererseits ist das Skalarprodukt von zwei Vektoren invariant gegenüber orthogonalen Transformationen und es gilt für eine beliebige Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$

$$\cos \varpi_b = \langle \hat{x}, \mathbf{R}_2(\vartheta_b) \mathbf{R}_3(\lambda_b) \hat{e}_{e=3} \rangle = \langle \mathbf{R} \hat{x}, \mathbf{R} \mathbf{R}_2(\vartheta_b) \mathbf{R}_3(\lambda_b) \hat{e}_{e=3} \rangle. \quad (4.22)$$

Die Berechnung nach der Formel (4.21) kann somit auch in anderen Koordinatensystemen durchgeführt werden, wobei insbesondere für Orbitintegrationen das inertielle System zu erwähnen ist. In der Regel sind nach der Transformation sowohl die Koordinaten der Basiszentren als auch die Berechnungspunkte zeitabhängig, zumal sich letztere in dieser Arbeit oft aus den Positionen eines Satelliten ergeben.

Eher von theoretischem Interesse ist die Wahl von

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_2(\vartheta_b) \mathbf{R}_3(\lambda_b))^{-1} = \mathbf{R}_3(-\lambda_b) \mathbf{R}_2(-\vartheta_b),$$

was es ermöglicht, die Zentren aller Basisfunktionen am Pol zu belassen und dafür die Berechnungspunkte in gedrehten Systemen zu betrachten. Geometrisch wird dadurch für jede Basis am Pol eine eigene rotierte Bahn der Beobachtungspunkte (bzw. ein eigener fiktiver Satellit) eingeführt, was für längere Zeitreihen unbrauchbar erscheint.

<sup>2</sup>Die dritte Drehung ändert aufgrund der Symmetrie der radialen Basisfunktion nichts an den Funktionswerten, weshalb ohne Einschränkung  $\gamma = 0$  gesetzt werden kann.

### 4.2.2. Potential im Außenraum

Da in der Geodäsie die Messungen nicht auf einer Einheitskugel stattfinden, ist der Abstand auf die Dimension der Erde (mit dem Radius  $R$ ) zu skalieren und die radiale Basisfunktion nach außen (oder innen) fortzusetzen. Für eine eindeutige Lösung im Außenraum mit  $r \geq R$  fordert man in der Geodäsie, dass die Basisfunktionen dort harmonisch sind und somit die Laplacegleichung erfüllen. Um dies zu ermöglichen, wird analog zur sphärisch-harmonischen Synthese aus dem Abschnitt 3.1.2 die Basisfunktion um den Dämpfungsterm  $(R/r)^{n+1}$  ergänzt:

$$\bigwedge_{r \geq R} \left\{ \mathfrak{R}(\lambda_b, \vartheta_b) \{ \psi_b(\vartheta) \} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \varpi_b). \quad (4.23)$$

Eine beliebige harmonische Funktion – wie zum Beispiel das residuale Potential  $\delta T$  – wird anschließend durch die Linearkombination

$$\delta T = \bigwedge_{r \geq R} \left\{ \sum_{b=1}^B a_b \mathfrak{R}(\lambda_b, \vartheta_b) \{ \psi_b(\vartheta) \} \right\} = \sum_{b=1}^B \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.24)$$

modelliert, wobei die Gewichte  $a_b$  in einen Skalierungsfaktor  $\eta_b$  und den Vorfaktor  $\frac{GM}{R}$  des Zentralfeldes aufgespalten werden.

Beschränkt man sich aus technischen Gründen auf eine endliche Summation mit den Elementen

$$n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, \tilde{N}\}$$

und bezeichnet die Berechnungspunkte im erdfesten System durch  $\vec{x}_e$ , so erhält man die „Potentialfunktion“

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.25)$$

einer Basis im Orbit. Der Term  $\psi_b = \{\lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b, \eta_b\}$  beschreibt – im Widerspruch zu der früheren Definition – die (freien) Parameter der radialen Basisfunktion. Aufgrund der angestrebten gemeinsamen Optimierung von Position, Form und Größe je Basis wird hier der Skalierungsfaktor  $\eta_b$  als Teil der Potentialfunktion betrachtet, was zu der Darstellung

$$\delta T = \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) \quad (4.26)$$

des Residualpotentials führt.

### 4.2.3. Analyse der Radialen Basisfunktionen

In manchen Anwendungen ist eine Darstellung der Basisfunktionen durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen wünschenswert. Dies trifft unter anderem für die Orbitintegration über das kombinierte Schwerfeld aus Referenz- und Residualmodell zu, für welche man die Beschleunigungen (also den Gradienten des Potentials) und gegebenenfalls die Matrix der zweiten Ableitungen der beiden Komponenten des Potentialmodells benötigt. Anstelle zusätzlicher partieller Ableitungen zerlegt man die Basis in ihre Koeffizienten und verwendet die Standardroutinen für die Summe der Felder. Um die Addition zu ermöglichen, muss man die radiale Basisfunktion  $\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)$  durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen in der reellen Normierung darstellen

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{S}_{nm}(\psi_b) \sin m\lambda + \bar{C}_{nm}(\psi_b) \cos m\lambda), \quad (4.27)$$



wobei die Koeffizienten  $(\bar{S}_{nm}(\psi_b), \bar{C}_{nm}(\psi_b))$  von den Basisparametern abhängen. Die klassische Bestimmung der sphärisch-harmonischen Koeffizienten erfordert nach dem Abschnitt 3.1.4 eine Fortsetzung nach unten auf die Kugeloberfläche

$$\Psi_b \left( R \frac{\vec{x}_e}{r}, \psi_b \right) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{S}_{nm}(\psi_b) \sin m\lambda + \bar{C}_{nm}(\psi_b) \cos m\lambda)$$

sowie die Auswertung der Analyseformeln

$$\begin{aligned} \bar{S}_{nm}(\psi_b) &= \frac{R}{GM} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_b \left( \frac{R\vec{x}_e}{r}, \psi_b \right) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ \bar{C}_{nm}(\psi_b) &= \frac{R}{GM} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_b \left( \frac{R\vec{x}_e}{r}, \psi_b \right) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Im Allgemeinen sind Integrale über die Kugeloberfläche nicht geschlossen lösbar und erfordern eine sorgfältige Wahl der Berechnungspunkte für eine numerische Integration.

Für radiale Basisfunktionen kann dagegen auf die Integration verzichtet werden, da sich die Koeffizienten durch das Additionstheorem (3.37) der Legendrepolynome herleiten lassen (Wittwer, 2009). Setzt man das Additionstheorem in das Potential einer Basis ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \eta_b \sigma_b(n) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) [\cos m\lambda_b \cos m\lambda + \sin m\lambda_b \sin m\lambda]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ein Vergleich liefert für die Grade  $n_0 \leq n \leq \tilde{N}$  die sphärisch-harmonischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \bar{S}_{nm}(\psi) &= \eta_b \sigma_b(n) \frac{1}{2n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \sin m\lambda_b \\ \bar{C}_{nm}(\psi) &= \eta_b \sigma_b(n) \frac{1}{2n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \cos m\lambda_b. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Mit diesen Formeln lässt sich jede radiale Basisfunktion ohne eine Integration in eine Linearkombination sphärisch-harmonischer Funktionen zerlegen, deren Koeffizienten von den Parametern  $\psi_b = \{\eta_b, \lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b\}$  abhängen. Falls die Parameter der radialen Basisfunktionen aus einer Analyse regionaler Daten bestimmt werden, sollten auch deren sphärisch-harmonische Koeffizienten  $\{\bar{C}_{nm}(\psi), \bar{S}_{nm}(\psi)\}$  nur für dieses Gebiet eingesetzt werden, um eine globale Veränderung des Schwerefeldmodells – durch langsam abklingende Basisfunktionen – zu vermeiden!

#### 4.2.4. Modelle der Legendre-Koeffizienten

Die Formeln (4.21) bzw. (4.25) beschreiben alle radialen Basisfunktionen auf der Kugel und im Außenraum. Die sphärischen radialen Basisfunktionen beinhalten insbesondere

- die Punktmassen bzw. eine numerische Approximation derselben,
- die sphärischen Wavelets
- und die harmonischen Splines auf der Kugel.

Die Unterscheidung dieser Funktionen beruht vor allem auf den Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n)$  – die ihrerseits aus einem oder mehreren Formparametern  $\sigma_b$  je Basis berechnet werden – und zum Teil auch auf der Auswertemethode.

In der Regel betrachtet man Approximationsprobleme innerhalb eines linearen Vektorraums, der durch die Existenz eines Skalarprodukts zu einem Prä-Hilbertraum wird. Um ein endliches Skalarprodukt zu erhalten, ist es notwendig, sich auf die quadratisch-integrierbaren Funktionen zu beschränken. Eine (unrotierte) radiale Basisfunktion muss dann auf der Kugeloberfläche die Bedingung

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\psi_b(\vartheta))^2 \sin \vartheta d\lambda d\vartheta < \infty \quad (4.31)$$

erfüllen. Ersetzt man die Basis durch ihre Reihendarstellung (4.14) und vertauscht die Reihenfolge von Summation und Integration, so erhält man unter Berücksichtigung der Orthogonalität (3.9) eine Bedingung für die Summe der Legendre-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi_b(\vartheta)^2 \sin \vartheta d\lambda d\vartheta &= 2\pi \int_0^\pi \left( \sum_{n=0}^\infty \sigma_b(n) P_n(\cos \vartheta) \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^\infty \sigma_b^2(n) \int_0^\pi (P_n(\cos \vartheta))^2 \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \sum_{n=0}^\infty \sigma_b^2(n) \cdot \frac{2}{2n+1} < \infty. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tsai (2006) verwendet noch zwei (strengere) Forderungen

$$\sigma_b(n) \geq 0 \quad (4.33)$$

$$\sum_{n=0}^\infty \sigma_b(n) < \infty, \quad (4.34)$$

die von den meisten der hier behandelten radialen Basisfunktionen ebenfalls erfüllt werden.

Der Vorteil der letztgenannten Forderungen ist es, dass diese den maximalen Wert im Basiszentrum mit dem sphärischen Abstand  $\varpi_b = \varpi_b(\lambda_b, \vartheta_b, \vec{x}_e) = 0$  garantieren. Da die Legendrepolynome im Intervall  $\zeta_b \in [-1, 1]$  bzw.  $\varpi \in [0, \pi]$  durch die Werte  $-1 \leq P_n(\cdot) \leq 1$  beschränkt sind, folgt für  $\sigma_b(n) \geq 0$  zunächst:

$$\sup \left\{ \sum_{n=0}^\infty \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \right\} \leq \sum_{n=0}^\infty \sigma_b(n) \sup \{ P_n(\cos \varpi_b) \} \leq \sum_{n=0}^\infty \sigma_b(n) \stackrel{(4.34)}{<} \infty, \quad (4.35)$$

weshalb auch die Funktionswerte der radialen Basisfunktionen endlich sind. Außerdem erreichen die Legendrepolynome ihre extremen Funktionswerte nur an den Intervallgrenzen mit

$$\begin{aligned} P_n(1) &= P_n(\cos 0) = 1 \\ P_n(-1) &= P_n(\cos \pi) = (-1)^n, \end{aligned}$$

so dass der Maximalwert der Basisfunktionen stets im Zentrum mit  $\varpi_b = 0$  angenommen wird.

In der Abbildung 4.3 sind einige radiale Basisfunktionen auf der Kugel für die Entwicklungsgrade  $n_0 = 0$  bis  $\tilde{N} = 100$  mit dem Basiszentrum  $\lambda_b = \vartheta_b = 0$  dargestellt, die im Folgenden diskutiert werden. Für einen besseren Vergleich sind die maximalen Funktionswerte jeweils durch eine Division mit dem Maximalwert (an der Stelle  $\vartheta = 0$ ) normiert

$$\psi_b^{norm}(\vartheta) = \frac{1}{\psi_b(0)} \sum_{n=0}^{100} \sigma_b(n) P_n(\cos \vartheta)$$

und die Farbskala ist so modifiziert, dass insbesondere der Vorzeichenwechsel deutlich wird.

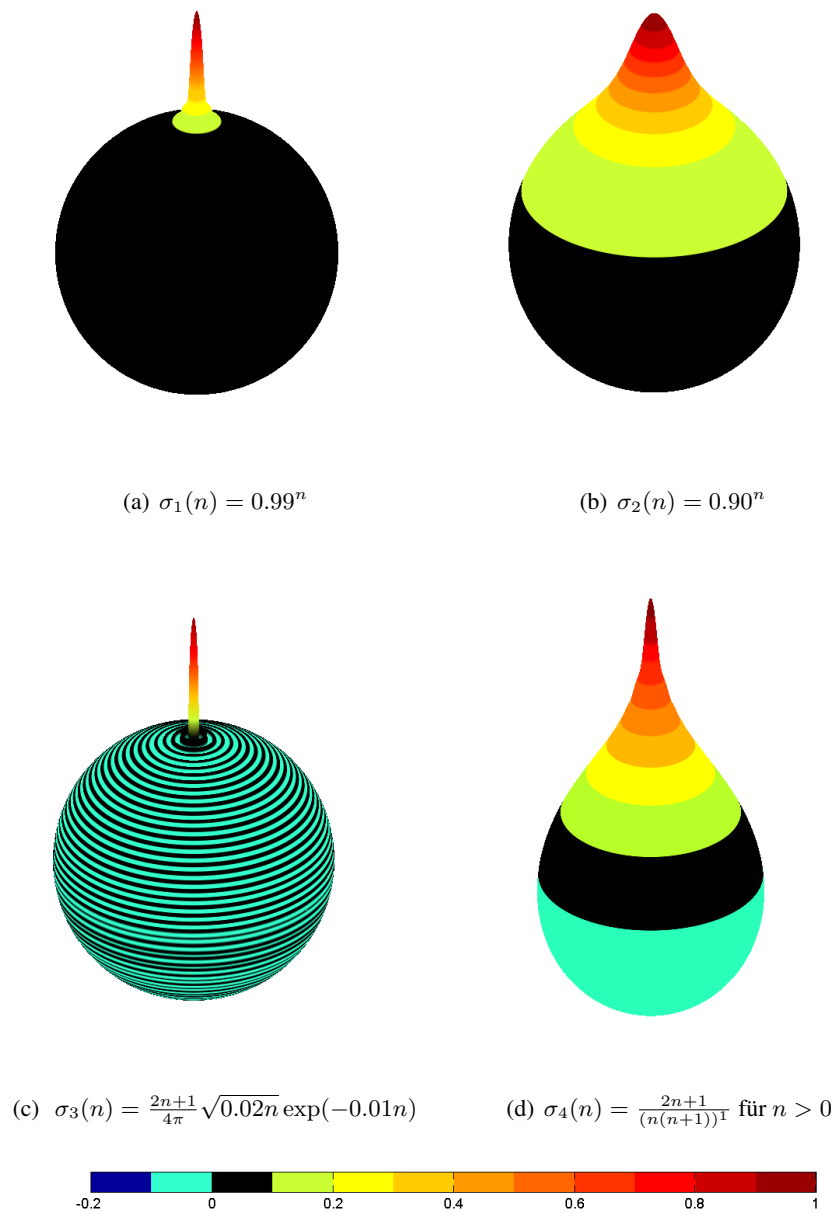


Abbildung 4.3.: Beispiele für sphärische radiale Basisfunktionen auf der Einheitskugel mit den angegebenen Legendre-Koeffizienten und einer Reihenentwicklung von  $n_0 = 0$  bis  $\hat{N} = 100$ . Für einen besseren Vergleich werden die Funktionswerte durch eine Division mit dem Maximalwert (an der Stelle  $\vartheta = 0$ ) normiert

## Punktmassen

Betrachtet man einen punktförmigen „Störkörper“ in der Position  $\vec{r}_P$  und mit der Masse  $m_p = (M\eta_b)$ , so kann dessen Wirkung in jedem Punkt  $\vec{r} \neq \vec{r}_P$  durch ein Potential  $V_0(\vec{r})$  beschrieben werden. Das Potential lässt sich – unter der Voraussetzung  $r = \|\vec{r}\| > \|\vec{r}_P\| = r_P$  – analog zu der Gleichung (3.6) in einer Reihe von Legendrepolyomen entwickeln:

$$V_0(\vec{r}) = \frac{GM\eta_b}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = \frac{GM}{r}\eta_b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_P}{r}\right)^n P_n(\cos \varpi_b), \quad \text{für } r > r_P. \quad (4.36)$$

Liegt der Ursprung des Koordinatensystems im Massenzentrum der Erde und die Störmasse innerhalb der Kugel mit dem Radius  $R$ , so kann deren Entfernung vom Ursprung durch einen Faktor  $0 \leq \sigma_b \leq 1$  dargestellt werden:

$$r_P = \sigma_b \cdot R. \quad (4.37)$$

Setzt man dies in die Reihendarstellung ein und erweitert mit  $\frac{R}{R}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} V_0(\vec{r}) &= \frac{GM}{r}\eta_b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_b R}{r}\right)^n P_n(\cos \varpi_b) = GM\eta_b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_b^n R^n \cdot R}{r^{n+1} R}\right) P_n(\cos \varpi_b) = \\ &= \frac{GM}{R}\eta_b \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_b^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \varpi_b). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Potentialfunktion  $\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)$  in der Darstellung (4.25), so erkennt man die Legendre-Koeffizienten

$$\sigma_b(n) = \sigma_b^n. \quad (4.39)$$

Wählt man neben dem skalaren Formparameter  $0 \leq \sigma_b \leq 1$  noch die Summationsgrenzen  $n_0 = 0$  und den Grenzwert  $\tilde{N} \rightarrow \infty$ , so entsteht eine Approximation des Potentials einer Punktmasse:

$$V_0(\vec{r}) = \frac{GM\eta_b}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = \lim_{\tilde{N} \rightarrow \infty} \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b^n P_n(\cos \varpi_b) = \lim_{\tilde{N} \rightarrow \infty} \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b). \quad (4.40)$$

Für diese Art der Basisfunktionen kann der skalare Wert  $\sigma_b$  auch als Tiefe unter der Erdoberfläche interpretiert werden.

Aus den Abbildungen 4.3(a) und 4.3(b) auf der Kugeloberfläche und dem eindimensionalen Schnitt in Grafik 4.4 ist ersichtlich, dass die Basisfunktionen für größere Werte von  $\sigma_b$  schmaler und damit besser lokalisierend werden. Für die Analyse eines regionalen Feldes scheint es sinnvoll, die untere Grenze des Parameters besser abzuschätzen, da bereits durch die Wahl  $\sigma_b = 0.9$  sehr breite Strukturen entstehen, die erst in einem sphärischen Abstand von ca.  $15^\circ$  auf die Hälfte des Funktionswertes im Zentrum abklingen.

Andererseits bewirkt eine Erhöhung des maximalen Entwicklungsgrades  $\tilde{N}$  von 90 auf 150 in der Summation nur eine kleine Änderung der Form, die sich vor allem an der oberen Grenze des Parameters ( $\sigma_b \rightarrow 1$ ) bemerkbar macht. Aus numerischen Gründen zeigen diese Basisfunktionen bereits erste Schwingungen, was nach der Theorie erst für  $\sigma_b > 1$  auftreten sollte.

## Wavelets

In der (sphärischen) Wavelettransformation analysiert man ein Signal  $f(\lambda, \vartheta)$  auf der Kugeloberfläche durch eine rotierte und gestreckte Version  $\chi_{\mu, \mathfrak{R}}(\lambda, \vartheta)$  eines „Mutterwavelets“  $\chi(\lambda, \vartheta)$ , mit dem Dilatationsparameter  $\mu$  und der Rotation  $\mathfrak{R}$ . Die kontinuierliche Transformation wird durch das Integral

$$\mathfrak{W}\{f\}(\mu, \mathfrak{R}) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\lambda, \vartheta) \chi_{\mu, \mathfrak{R}}(\lambda, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \quad (4.41)$$

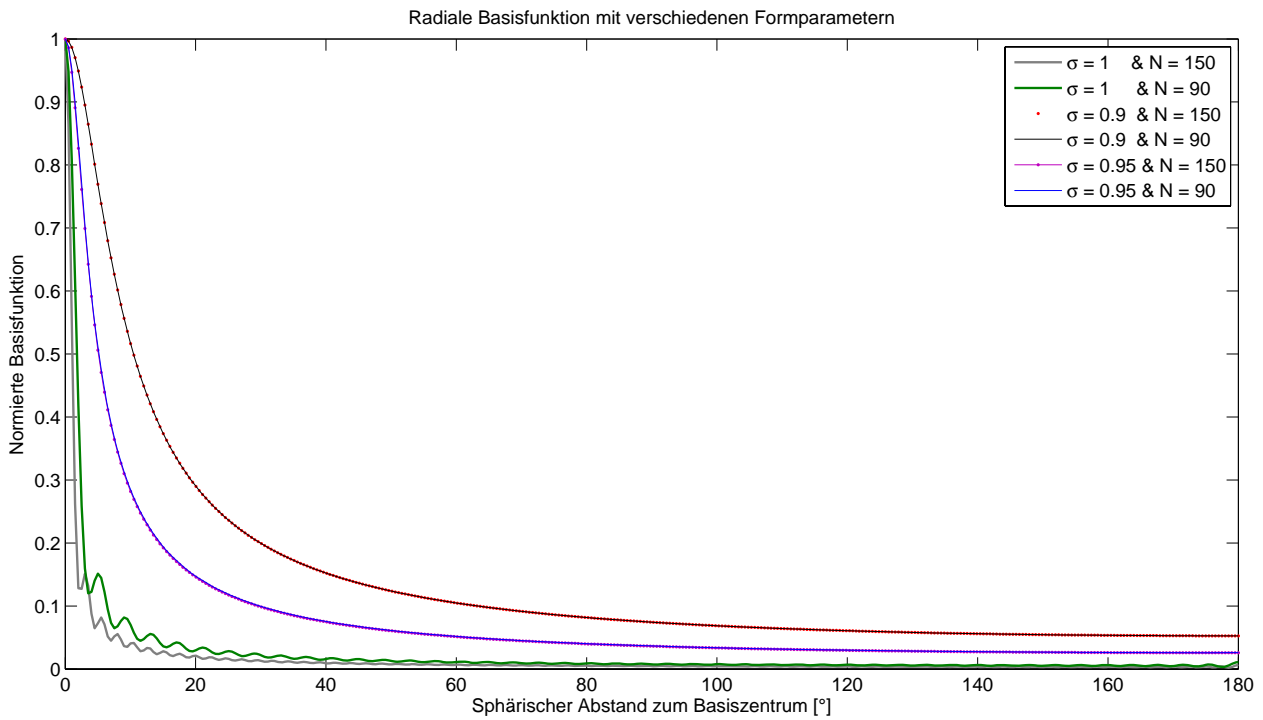


Abbildung 4.4.: Eindimensionale Darstellung der radialen Basisfunktionen für die Legendre-Koeffizienten  $\sigma(n) \in \{0.90^n, 0.95^n, 0.99^n\}$  und die maximalen Entwicklungsgrade  $\tilde{N} \in \{90, 150\}$

realisiert. Beschränkt man sich auf die symmetrischen Waveletfunktionen, so können diese analog zu der Gleichung (4.14) als rotierte, radiale Basisfunktionen

$$\chi_{\mu, \mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\lambda_b, \vartheta_b, 0) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^\chi(n, \mu) P_n(\cos \vartheta) \right\} \quad (4.42)$$

dargestellt werden, wobei die Legendre-Koeffizienten  $\sigma^\chi(n, \mu)$  von dem kontinuierlichen Dilationsparameter  $0 < \mu < \infty$  abhängen. Für die Eigenschaften der Wavelets spielt deren Position auf der Kugel keine Rolle, weshalb bei der folgenden Untersuchung auf die Rotation und auch den Index  $\mathfrak{R}$  verzichtet wird.

Integriert man das Produkt einer nicht-rotierten Waveletfunktion mit den Legendrepolyomen  $P_n(\cdot)$  auf der gesamten Kugeloberfläche – was bis auf die Normierung einer Analyse des Wavelets in sphärisch-harmonische Koeffizienten mit der Ordnung  $m = 0$  entspricht –, so entfällt in dieser Lage die Abhängigkeit von der Länge  $\lambda$ . Für eine Waveletfunktion  $\chi_\mu(\vartheta) = \chi_{\mu, \mathfrak{R}}(\lambda, \vartheta)$  ergeben sich daher die Koeffizienten

$$\hat{\chi}_\mu(n) := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_\mu(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \stackrel{\zeta = \cos \vartheta}{=} 2\pi \int_{-1}^1 \chi_\mu(\zeta) P_n(\zeta) d\zeta. \quad (4.43)$$

Diese müssen nach Windheuser (1995) mindestens die beiden Forderungen

$$\hat{\chi}_\mu(0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } 0 < \mu < \infty, \quad (4.44)$$

$$\int_0^\infty (\hat{\chi}_\mu(n))^2 \frac{d\mu}{\mu} \stackrel{!}{=} 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.45)$$

erfüllen, wobei für die inverse Transformation noch weitere Bedingungen erforderlich sind. Aus der Forderung (4.44) erklärt sich die Bezeichnung als „kleine Welle“, da mit dem Integral

$$\hat{\chi}_\mu(0) = 2\pi \int_{-1}^1 \chi_\mu(\zeta) \underbrace{P_0(\zeta)}_{=1} d\zeta \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.46)$$

der Mittelwert der Waveletfunktion  $\chi_\mu(\zeta)$  im Intervall  $\zeta \in [-1, 1]$  verschwinden muss (Schmidt, 2001). Nutzt man eine nicht-rotierte radiale Basisfunktion auf der Einheitskugel als Mutterwavelet, so lassen sich in der Berechnung der Koeffizienten Integration und Summation vertauschen:

$$\hat{\chi}_\mu(n') = 2\pi \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^\chi(n, \mu) P_n(\zeta) \right) P_{n'}(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^\chi(n, \mu) 2\pi \int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_{n'}(\zeta) d\zeta. \quad (4.47)$$

Durch die Orthogonalität (3.9) der Legendrepolynome entfallen alle Integrale mit  $n \neq n'$ . Für die Bedingung (4.44) liefert diese Formel

$$\hat{\chi}_\mu(0) = \sigma^\chi(0, \mu) 2\pi \int_{-1}^1 P_0(\zeta) P_0(\zeta) d\zeta \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.48)$$

weshalb für alle sphärischen Waveletfunktionen der Wert der Legendre-Koeffizienten für  $n = 0$  den Wert Null annehmen muss:

$$\sigma_b(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sigma^\chi(n, \mu) & n > 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Wenn man die erste Bedingung in die zweite Forderung (4.45) einsetzt, ergibt sich ein Widerspruch

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^{\infty} (\hat{\chi}_\mu(n))^2 \frac{d\mu}{\mu} \Big|_{n=0} = \int_0^{\infty} \underbrace{(\hat{\chi}_\mu(0))^2}_{=0} \frac{d\mu}{\mu},$$

weshalb nicht beide für den Grad  $n = 0$  gelten können.

Damit das Integral für  $n > 0$  einen endlichen Wert annimmt, muss außerdem der Grenzwert des Integranden

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{(\hat{\chi}_\mu(n))^2}{\mu} \quad (4.50)$$

beschränkt sein. Dies impliziert für den Dilatationsparameter  $\mu$  an der untere Grenze die zusätzliche Forderung

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \hat{\chi}_\mu(n) = 0. \quad (4.51)$$

In Windheuser (1995) werden als typische Basisfunktionen zur kontinuierlichen Analyse das Abel-Poisson-Wavelet mit den Legendre-Koeffizienten

$$\sigma^{AP}(n, \mu) = \frac{2n+1}{4\pi} \sqrt{2\mu n} \exp(-n\mu) \quad (4.52)$$

oder das Gauß-Weierstraß-Wavelet mit

$$\sigma^{GW}(n, \mu) = \frac{2n+1}{4\pi} \sqrt{2\mu n(n+1)} \exp(-n(n+1)\mu) \quad (4.53)$$

vorgestellt. Die erstgenannte Funktion ist in der Grafik 4.3(c) auf Seite 67 visualisiert, wobei die Waveletbedingungen für die Oszillationen der positiven und negativen Werte verantwortlich sind, deren Verteilung durch den Dilatationsparameter (hier:  $\mu = 0.01$ ) gesteuert wird.

Für die numerische Umsetzung muss die kontinuierliche Transformation modifiziert werden, was nach Windheuser (1995) durch die Diskretisierung der Skala  $\mu$ , die Sphärische Multiresolutionsanalyse oder die sphärische D-Wavelettransformation erfolgt. In den drei Varianten spielt neben der Waveletfunktion auch die sogenannte Skalierungsfunktion eine wichtige Rolle, welche die Symmetrien der jeweiligen Waveletfunktion übernimmt. Die Waveletanalyse kann als eine Zerlegung in Detailsignale und eine geglättete Version der Daten betrachtet werden.

## Splines und reproduzierende Kerne

Neben radialen Basisfunktionen werden oft auch sogenannte Splines verwendet, um eine möglichst glatte Approximation der Messdaten in den Positionen  $\vec{x}_\ell$  mit  $\ell = 1, 2, \dots, L$  zu erzeugen. Weit verbreitet sind dabei die Basis-Splines  $\tilde{\phi}_b$ , welche nur in einem begrenzten Gebiet deutlich von Null verschieden sind. Im Allgemeinen sind Splines nicht rotationssymmetrisch zu einem Zentrum, was während der Herleitung durch die Notation mit der Tilde betont werden soll. Analog zu den radialen Basisfunktionen wird die gesuchte Fläche durch eine Linearkombination approximiert, deren Koeffizienten aus dem Gleichungssystem

$$y_\ell \approx \tilde{f}_S(\vec{x}_\ell) = \sum_{b=1}^B a_b \tilde{\phi}_b(\vec{x}_\ell) \quad (4.54)$$

zu bestimmen sind. Eine glatte Lösung wird erreicht, indem man die Approximationsbedingung (4.8) für die Bestimmung der Funktion  $\tilde{f}_S$  modifiziert:

$$\tilde{f}_S = \left\{ \tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (y_\ell - \tilde{f}(\vec{x}_\ell))^2}_{= \left\| y_\ell - \sum_{b=1}^B a_b \tilde{\phi}_b(\vec{x}_\ell) \right\|^2} + \xi J(\tilde{f}) \rightarrow \min \right\}. \quad (4.55)$$

Der zweite Term enthält einen zusätzlichen Parameter  $\xi$  zur Gewichtung und das Integral der quadrierten  $k$ -ten Ableitung<sup>3</sup>

$$J(\tilde{f}_S) := \int \left( \frac{d^k \tilde{f}_S(x)}{dx^k} \right)^2 dx, \quad (4.56)$$

wodurch in der Minimierung (4.55) ein Maß für die „Krümmung“ berücksichtigt wird (Wahba, 1981, 1984, Schwarz, 2006, Eicker, 2008).

Nach einer Zusammenstellung von Jekeli (2005) können Splines auf der Kugel durch regionale oder globale Basisfunktionen realisiert werden, wobei erstere nur in einem Teilgebiet und letztere auf der ganzen Oberfläche definiert sind. Die globalen Basisfunktionen tendieren in der Regel außerhalb eines gewissen „Einflussbereichs“ möglichst rasch gegen Null, um eine lokale Anpassung an die Daten zu vereinfachen.

Die Grundidee der globalen Splines ist es, das Integral (4.56) auf der Kugeloberfläche für  $k \geq 1$  durch

$$J(\tilde{f}_S) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \Delta_{\lambda\vartheta}^{k/2} f \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda & k \text{ gerade} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \Delta_{\lambda\vartheta}^{(k-1)/2} f \} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \{ \Delta_{\lambda\vartheta}^{(k-1)/2} f \} \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.57)$$

zu ersetzen (Wahba, 1981), auch wenn dadurch streng genommen nicht mehr ein Maß für die Krümmung minimiert wird. Dabei bezeichnet

$$\Delta_{\lambda\vartheta} f = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right\} \quad (3.14)$$

den bekannten Laplace-Beltrami-Operator auf der Kugeloberfläche, welcher für  $k > 1$  iterativ auf die Funktion  $f$  anzuwenden ist. Die Berechnung kann nach Wahba (1981, 1984) im Spektralbereich vereinfacht werden, da sich das Integral durch die Doppelsumme

$$J(\tilde{f}_S) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\tilde{f}_{nm}^\pm}{\Lambda_{nm}} \quad (4.58)$$

<sup>3</sup>Die ursprüngliche praktische Anwendung der Splines als biegsame „Lineale“ im Schiffsbau basiert auf der Minimierung der Gesamtenergie, was der Ableitung für  $k = 2$  entspricht.

mit den sphärisch-harmonischen Koeffizienten<sup>4</sup>

$$\bar{f}_{nm}^{\pm} = \begin{cases} \bar{C}_{n,m} & m \geq 0 \\ \bar{S}_{n,|m|} & m < 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

und den nicht-negativen Zahlen  $\Lambda_{nm}$  realisieren lässt. Aus dem iterierten Differentialoperator folgt zunächst, dass das Integral (4.57) durch die Wahl

$$\Lambda_{nm} = \frac{1}{(n(n+1))^k} \quad (4.60)$$

minimiert wird. Aus den Werten  $\Lambda_{nm}$  lassen sich – bis auf die Skalierung – die Legendre-Koeffizienten

$$\tilde{\sigma}_b(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{2n+1}{(n(n+1))^k} & \text{für } n > 1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.61)$$

ableiten. Da diese nicht von der Ordnung  $m$  abhängen, erhält man wieder eine radial-symmetrische Basisfunktion

$$\psi_b = \tilde{\psi}_b = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n(n+1))^k} P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.62)$$

als globale Splinefunktion auf der Kugeloberfläche (Wahba, 1981).

In der Abbildung 4.3(d) wird die normierte Splinefunktion für  $k = 1$  visualisiert. Im Gegensatz zu den Punkt-massenmodellen erkennt man hier eine Aufteilung in einen positiven und einen negativen Bereich auf der Kugel, allerdings ohne die Oszillationen der Waveletfunktionen.

In Jekeli (2005) oder Eicker (2008) wird dieser Ansatz weiter generalisiert, indem man eine beliebige (reelle) Folge  $A_n^2 \neq 0$  verwendet und die Splines über **reproduzierende Kerne in einem Hilbertraum**  $\mathbb{H}(A_n)$  definiert. Dazu betrachtet man die konvergenten Reihenentwicklungen der Funktionen

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{f}_{nm}^{\pm} \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \\ g &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{g}_{nm}^{\pm} \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \end{aligned}$$

und definiert durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}(A_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \sum_{m=-n}^n \bar{f}_{nm}^{\pm} \bar{g}_{nm}^{\pm} \quad (4.63)$$

ein gewichtetes Skalarprodukt. Zu den Koeffizienten  $A_n^2$  existiert eine zugehörige radiale Basisfunktion

$$\psi_b^{A_n}(\lambda, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{A_n^2}}_{=\sigma_b(n)} P_n(\cos \varpi(\lambda, \vartheta, \lambda_b, \vartheta_b)), \quad (4.64)$$

die in diesem Zusammenhang auch als reproduzierender Kern bezeichnet wird. Die reproduzierende Eigenschaft lässt sich nachweisen, indem man das Additionstheorem (3.37) der Legendrefunktionen (in der reellen Normierung) in die Darstellung der Basis einsetzt:

$$\begin{aligned} \psi_b^{A_n}(\lambda, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{A_n^2} P_n(\cos \varpi(\lambda, \vartheta, \lambda_b, \vartheta_b)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{A_n^2} \left( \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\lambda_b, \vartheta_b) \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{A_n^2} \bar{Y}_{nm}(\lambda_b, \vartheta_b) \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta). \end{aligned} \quad (4.65)$$

<sup>4</sup>Der Grad  $n = 0$  wird in den Artikeln weitgehend ausgeklammert, da dieser letztendlich nur einen Mittelwert der Funktion beschreibt.



Verwendet man diese Formel innerhalb des gewichteten Skalarprodukts (4.63), so folgt daraus

$$\langle f, \psi_b^{A_n} \rangle_{\mathbb{H}(A_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \sum_{m=-n}^n \bar{f}_{nm}^{\pm} \frac{1}{A_n^2} \bar{Y}_{nm}(\lambda_b, \vartheta_b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{f}_{nm}^{\pm} \bar{Y}_{nm}(\lambda_b, \vartheta_b) = f(\lambda_b, \vartheta_b).$$

Jede Splinefunktion ergibt sich dabei durch eine Linearkombination reproduzierender Kerne

$$\tilde{f}_S(\lambda, \vartheta) = \sum_{b=1}^B a_b \psi_b^{A_n}(\lambda, \vartheta) \quad (4.66)$$

mit den Zentren  $(\lambda_b, \vartheta_b)$ , wobei weitere Details der Arbeit von Eicker (2008) zu entnehmen sind.

In der Analyse des Schwerefeldes wird der Ansatz dort anschließend wieder spezifiziert, indem man ein ähnliches Verhalten für den globalen und den residualen Anteil des Feldes fordert. Modelliert man das globale Feld durch eine sphärisch-harmonische Synthese, so lässt sich der Signalgehalt im Spektralbereich durch die Gradvarianzen

$$\varsigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{S}_{nm}^2 + \bar{C}_{nm}^2) \quad (4.67)$$

beschreiben. In der Analyse des vollständigen Signals kann die Größenordnung z.B. durch die empirische Kaula-Regel

$$\varsigma_n^2 = 1.6 \cdot \frac{10^{-10}}{n^3} \quad (4.68)$$

abgeschätzt werden, während in der residualen Analyse die Gradvarianzen aus den formalen Fehlern der sphärisch-harmonischen Koeffizienten berechnet werden (Kaula, 2000, Eicker, 2008). Daraus wird in Eicker (2008, S. 31) die harmonische Splinefunktion

$$\psi_b^{\varsigma_n}(\lambda, \vartheta) = \sum_{n=2}^{\tilde{N}} \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{\varsigma_n^2}{2n+1}} (\sqrt{2n+1} P_n(\cos \varpi_b)) = \sum_{n=2}^{\tilde{N}} \sqrt{2n+1} \cdot \varsigma_n \cdot P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.69)$$

hergeleitet<sup>5</sup>, wobei für Gradvarianzen des vollständigen Schwerefeldes aus der Kaula-Regel die Abschätzung

$$\sqrt{\frac{\varsigma_n^2}{2n+1}} \approx \pm \frac{10^{-5}}{n^2} \quad (4.70)$$

genutzt werden kann (Kaula, 2000).

Sowohl in der Definition durch den iterierten Laplace-Beltrami-Operator als auch in der Version der reproduzierenden Kerne werden zur Berechnung der (globalen) sphärischen Splines nur Basisfunktionen mit identischer Form verwendet, deren Legendre-Koeffizienten durch die Werte  $\Lambda_{nm}$  bzw. die Folge  $A_n^2$  eindeutig festgelegt sind. Da dies der beabsichtigten Optimierung der Formparameter zuwiderläuft, werden diese Ansätze hier nicht weiter behandelt.

## Optimierte Formparameter

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Parameter der Basisfunktionen optimal an die Daten anzupassen, wobei eine identische oder eine individuelle Form aller Funktionen möglich ist. Aufgrund der einfachen und differenzierbaren Formel und der Interpretation als approximierter Punktmasse werden für die Optimierung oft die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = (\sigma_b)^n$  gewählt. Da eine regionale Verbesserung des Schwerefeldes angestrebt wird, sollten die Basisfunktionen gut lokalisierend sein, weshalb man den Formparameter auf das Intervall  $0.9 < \sigma_b < 1$  einschränken kann.

<sup>5</sup>Diese Darstellung unterscheidet sich von der originalen Arbeit durch einen Faktor  $\sqrt{2n+1}$ , da die Basisfunktionen hier durch unnormierte Legendrepolynome beschrieben werden.

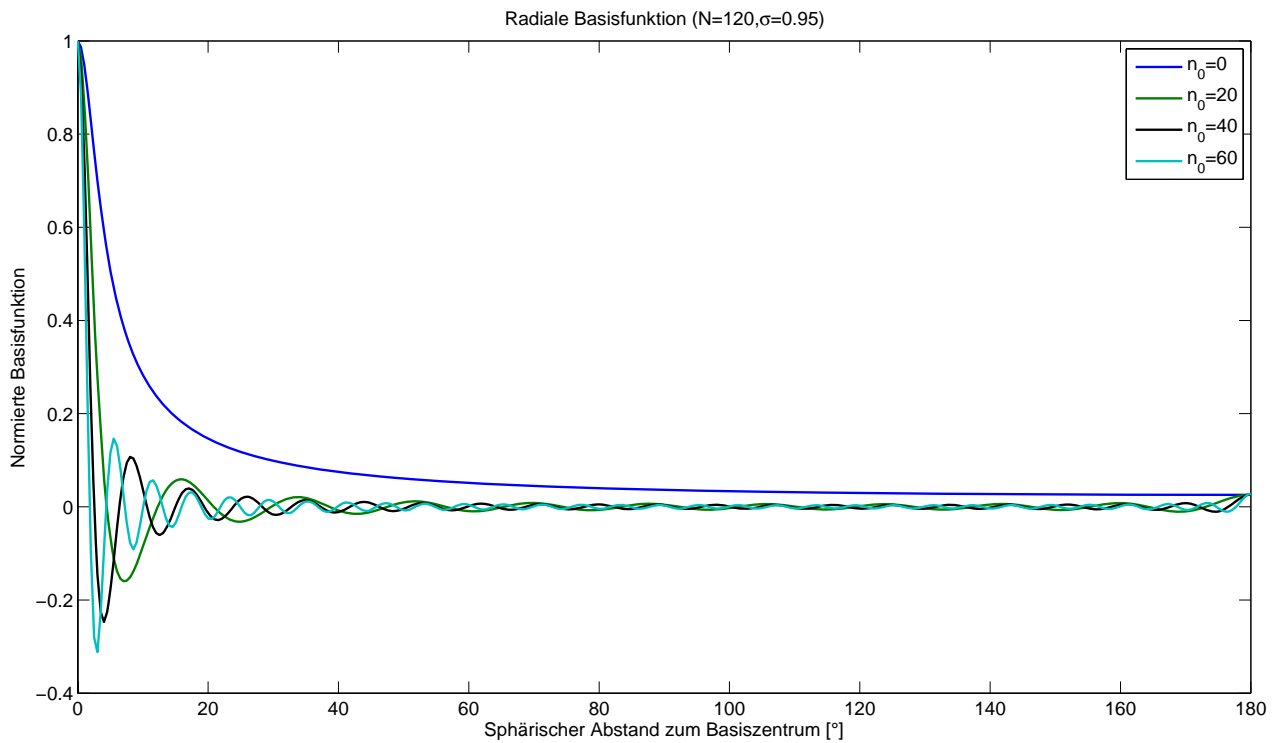


Abbildung 4.5.: Eindimensionale Darstellung der radialen Basisfunktionen für die Legendre-Koeffizienten  $\sigma(n) = 0.95^n$  mit dem maximalen Grad  $\tilde{N} = 120$  für verschiedene minimale Grade  $n_0 \in \{0, 20, 40, 60\}$

Um nach einer Analyse in sphärisch-harmonische Koeffizienten und der Addition zum Referenzfeld  $T^N$  die Gesamtmasse, den Schwerpunkt und die Trägheitsmomente des Erdmodells (Grad  $n = 0, 1, 2$  des Modells) nicht zu beeinflussen, liegt es nahe, die Reihenentwicklung der Basisfunktionen erst ab dem Grad  $n_0 = 3$  zu beginnen. Andererseits wird durch ein Referenzfeld ein langwelliger Anteil bis zum Grad  $N$  aus den Daten subtrahiert, weshalb ein größerer minimaler Grad  $n_0$  sinnvoll ist, der jedoch bisher nur empirisch festgelegt wird. Insgesamt erhält man aus diesen Überlegungen das **erweiterte exponentielle Modell**

$$\sigma_b(n) = \begin{cases} \sigma_b^n & n_0 \leq n \leq \tilde{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.71)$$

welches im Folgenden für die Legendre-Koeffizienten verwendet wird. Diese Festsetzung erfüllt für  $n_0 > 0$  die Waveletbedingung (4.49), allerdings wird die Wavelettransformation mittels Rotation und Dilatation durch eine Optimierung der Zentren und der Form der Basisfunktionen ersetzt.

Die Wirkung einer beidseitigen Beschränkung der Reihenentwicklung durch einen minimalen und maximalen Entwicklungsgrad  $(n_0, \tilde{N})$  ist in den Grafiken 4.5 und 4.6 für die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  und verschiedene Werte von  $n_0$  gezeigt. Mit zunehmendem Grad  $n_0$  wird das erste Maximum im Zentrum besser lokalisierend, allerdings treten jeweils zusätzliche Extremwerte auf, deren Amplitude ebenfalls ansteigt. Durch das Fehlen der niedrigen Grade bzw. die Unstetigkeit in der Folge der Legendre-Koeffizienten entstehen in diesem Modell auch negative Funktionswerte, die sich mit den positiven Bereichen abwechseln.

Sowohl der weitere Text als auch die bisherigen Tests verwenden in der Regel das erweiterte exponentielle Modell. Für eine alternative Basisfunktion ist jedoch nur das Programm *shapeParameter.m* zur Berechnung der Legendre-Koeffizienten und deren Ableitung (nach den Formparametern) zu modifizieren und auf die Übergabe einer eindeutigen Bezeichnung durch den Algorithmus zu achten (vgl. Liste der Programme im Anhang B.2). Optional kann für die in-situ Beobachtungen (Potential und Gradiometrie im Orbit) auch die Optimierung der Form ausgeschaltet werden, so dass nur die Basiszentren und die Skalierungsfaktoren geschätzt werden.

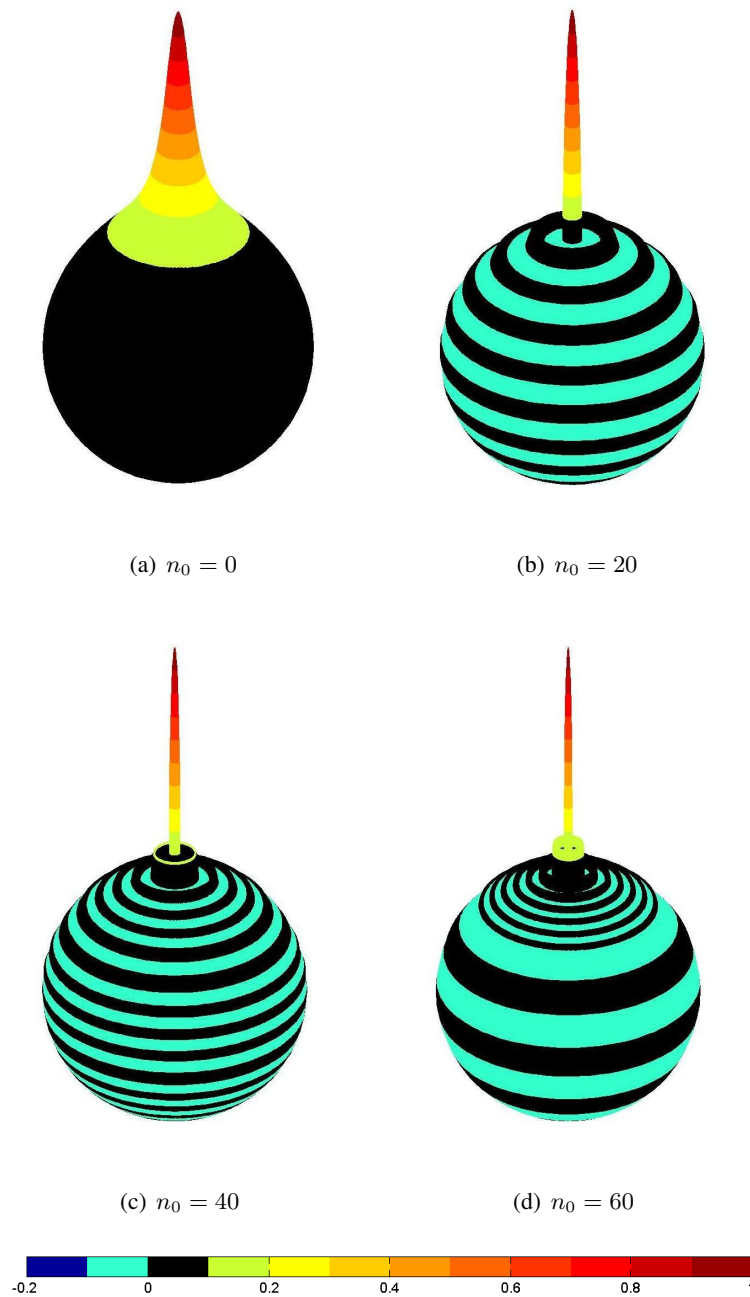


Abbildung 4.6.: Darstellung der radialen Basisfunktionen für die Legendre-Koeffizienten  $\sigma(n) = 0.95^n$  mit dem maximalen Grad  $\tilde{N} = 120$  für verschiedene minimale Grade  $n_0 \in \{0, 20, 40, 60\}$  auf der Kugel

## Zusammenfassung

Radiale Basisfunktionen werden in verschiedenen Disziplinen insbesondere zur Interpolation oder Approximation verteilter Messdaten eingesetzt. Die jeweilige Lösung wird durch die Anzahl, die Form und die Verteilung der Basiszentren beeinflusst, weshalb diese Parameter im Idealfall aus den Daten bestimmt werden.

Für die Analyse der Satellitendaten werden sphärische radiale Basisfunktionen eingeführt, welche im Außenraum harmonisch fortgesetzt werden. Das Potential einer Basis im Außenraum wird durch die Funktion

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad \text{für } r \geq R \quad (4.25)$$

dargestellt, wobei  $\eta_b$  den Skalierungsfaktor,  $\sigma_b(n)$  die Legendre-Koeffizienten und  $\varpi_b$  den sphärischen Abstand zum Zentrum ( $\lambda_b, \vartheta_b$ ) bezeichnet.

Durch das Additionstheorem der Legendre-Funktionen ist es möglich, eine radiale Basisfunktion ohne eine (numerische) Integration in sphärisch-harmonische Koeffizienten zu zerlegen:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{nm}(\psi) &= \eta_b \sigma_b(n) \frac{1}{2n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \sin m\lambda_b \\ \bar{C}_{nm}(\psi) &= \eta_b \sigma_b(n) \frac{1}{2n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \cos m\lambda_b. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem mathematischen Modell der Legendre-Koeffizienten für einen skalaren Formparameter je Basisfunktion. Diese lässt sich durch das gewählte Modell als Spline, Wavelet, Punktmasse etc. spezifizieren. Aufgrund der einfachen Modellierung wird hier das erweiterte exponentielle Modell

$$\sigma_b(n) = \begin{cases} \sigma_b^n & n_0 \leq n \leq \tilde{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.71)$$

bevorzugt. Wählt man für die Grenzen der Reihenentwicklung  $n_0 = 0$  und  $\tilde{N} \rightarrow \infty$ , so approximiert die zugehörige radiale Basisfunktion jeweils eine Punktmasse in der Erde.

## 5. In-situ Beobachtungen

Eine Grundidee dieser Arbeit ist es, die Modellierung des Schwerefeldes aus Satellitendaten in einen globalen und einen residualen Anteil aufzuspalten. Die langwelligen Strukturen werden durch die synthetischen Beobachtungen aus einem bekannten Referenzfeld berechnet und von den Messungen subtrahiert. Das Residualsignal enthält neben verschiedenen Störungen noch einen gravitativen Anteil, welcher in der Analyse durch radiale Basisfunktionen im Orbit modelliert wird.

Dafür werden die Grundlagen von zwei (Pseudo-)Beobachtungen der geodätischen Satellitenmissionen – nämlich das Energieintegral und die Line-of-Sight Gradiometrie – behandelt. Beide Methoden fixieren einen vorher bestimmten Orbit und können als in-situ bzw. punktweise Messungen betrachtet werden, welche nur von den Positionen im Gravitationsfeld, nicht aber den Potentialwerten der anderen Zeitpunkte abhängen.

Das zu analysierende Signal im Orbit kann als eine Funktion der Bahnelemente und der Parameter der Basisfunktionen aufgefasst werden. Für die Optimierung der Basisparameter werden die partiellen Ableitungen der Beobachtungen hergeleitet, was durch eine Parametrisierung des Signals durch die Keplerelemente wesentlich erleichtert wird.

Nach dem gravitativen Potential wird auch dessen zweite Ableitung in Flugrichtung untersucht, die in der GRACE-Mission durch die Line-of-Sight Gradiometrie approximiert werden kann. Es zeigt sich, dass bei der Repräsentation durch Keplerelemente zwei elementare Ableitungen genügen, um diese Komponente des Schwerefeldes durch radiale Basisfunktionen zu modellieren. Für einen allgemeinen Orbit und eine höhere Rechengeschwindigkeit wird auch hier eine geschlossene Formel für die Darstellung durch die Legendrepolynome bestimmt und ebenfalls nach den Basisparametern differenziert.

### 5.1. Potential im Orbit

#### 5.1.1. Energieintegral

Das Energieintegral basiert auf dem Prinzip der Energieerhaltung und der Bewegungsgleichung nach Newton

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{x}_i)}{dt} = m \frac{d\vec{x}_i}{dt} + \dot{x}_i \frac{dm}{dt} = m\ddot{x}_i + \dot{x}_i \frac{dm}{dt} \quad (2.20)$$

in einem Inertialsystem. Obwohl die Masse  $m$  des Satelliten aufgrund des Treibstoffverbrauchs zeitlich nicht konstant ist, kann dieser Effekt nach Mayer-Gürr (2006) im Vergleich zur Gesamtmasse vernachlässigt werden. Da sich die Erde gegenüber einem Inertialsystem bewegt, liegt es nahe, die Bewegungsgleichung auch in einem erdfesten System darzustellen. Betrachtet man nur die Rotation der Erde um die (zeitlich variable) Polachse, so sind in dem bewegten Koordinatensystem die Zentrifugalbeschleunigung, der Coriolis- und der Euler-Term als Scheinkräfte zu berücksichtigen (Rothacher, 2004, Sneeuw, 2006, Weigelt, 2007):

$$m\ddot{x}_e = \vec{F} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_e)}_{\text{Zentrifugalterm}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{x}_e}_{\text{Coriolissterm}} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_e}_{\text{Eulerterm}}. \quad (5.1)$$

In der Gleichung bezeichnet der Term  $\vec{x}_e$  die Position,  $\dot{x}_e$  die Geschwindigkeit und  $\ddot{x}_e$  die Beschleunigung des Testkörpers im rotierenden (erdfesten) System, während  $\vec{\omega}$  die Rotation des erdfesten Systems und  $\dot{\vec{\omega}}$  die zeitliche Änderung der Rotation gegenüber dem inertialen System beschreibt.

Die folgende Herleitung des Energieintegrals orientiert sich an Sneeuw (2006) und Weigelt (2007), wonach der Eulerterm vernachlässigt werden kann. Diese Vereinfachung ist dadurch gerechtfertigt, dass im Fall der Erde die zeitliche Änderung eine Größenordnung von  $10^{-16} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$  erreicht, während die mittlere Geschwindigkeit  $\|\dot{\vec{\omega}}\| \approx \frac{2\pi}{86400\text{s}} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  beträgt.

Analog zum Abschnitt 2.3 dividiert man die Bewegungsgleichung durch die Masse des Testkörpers und ersetzt die Beschleunigungen durch eine Summe

$$\ddot{\vec{x}}_e = \overbrace{\left( \vec{a}_E + \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right)}^{\frac{(2.22) \vec{F}}{m}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_e) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_e. \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet  $\delta\vec{a}$  die nicht-gravitativen Beschleunigungen,  $\vec{a}_E$  den statischen Anteil des Erdschwerefeldes und  $\vec{a}_{\delta m}(t)$  die zeitabhängigen gravitativen Terme, welche sich aus den Effekten dritter Körper (direkte und indirekte Gezeiten) oder anderen Massenverlagerungen im System Erde (Atmosphäre, Hydrologie, ...) ergeben. Die Beschleunigung  $\vec{a}_E$  eines (zeitlich konstanten) Erdschwerefeldes lässt sich durch den Gradienten eines Potentials  $V = V(\lambda, \vartheta, r)$  ausdrücken, wobei auf die Angabe der Koordinaten für eine kompaktere Notation verzichtet wird. Auch für den Zentrifugalterm kann ein zugehöriges Zentrifugalpotential  $Z$  definiert werden, welches für die Rotationsachse  $\hat{e}_i = \hat{e}_3$  die Form  $Z = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}\|^2 r^2 \sin^2 \vartheta$  annimmt:

$$\ddot{\vec{x}}_e = \left( \vec{\nabla}V + \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) + \vec{\nabla}Z - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_e. \quad (5.3)$$

Multipliziert man die Gleichung skalar mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}_e$ , so entfällt der Coriolisterm, da dessen Vektor orthogonal zur Geschwindigkeit ist:

$$\left\langle \dot{\vec{x}}_e, \ddot{\vec{x}}_e \right\rangle = \left\langle \dot{\vec{x}}_e, \vec{\nabla}V \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{x}}_e, \vec{\nabla}Z \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{x}}_e, \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) \right\rangle. \quad (5.4)$$

Die Skalarprodukte dieser Gleichung können als (partielle) Ableitungen nach der Zeit dargestellt werden. Dazu wählt man für das Produkt aus Geschwindigkeit und Beschleunigung den Ansatz

$$\frac{1}{2} \frac{d\|\dot{\vec{x}}_e\|^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}_{e=1}^2 + \dot{x}_{e=2}^2 + \dot{x}_{e=3}^2)}{dt} = \dot{x}_{e=1}\ddot{x}_{e=1} + \dot{x}_{e=2}\ddot{x}_{e=2} + \dot{x}_{e=3}\ddot{x}_{e=3} = \left\langle \dot{\vec{x}}_e, \ddot{\vec{x}}_e \right\rangle. \quad (5.5)$$

Differenziert man dagegen ein beliebiges Potential  $\Phi(\vec{x}_e, t)$ , das im Allgemeinen von der Position und der Zeit abhängt, so folgt daraus die Beziehung

$$\frac{d\Phi(\vec{x}_e, t)}{dt} = \left\langle \frac{\partial\Phi(\vec{x}_e, t)}{\partial\vec{x}_e}, \frac{d\vec{x}_e}{dt} \right\rangle + \frac{\partial\Phi(\vec{x}_e, t)}{\partial t} = \left\langle \vec{\nabla}\Phi, \dot{\vec{x}}_e \right\rangle + \frac{\partial\Phi(\vec{x}_e, t)}{\partial t}. \quad (5.6)$$

Nach den Voraussetzungen sind jedoch die Potentiale  $V$  und  $Z$  für den untersuchten Zeitraum jeweils zeitlich konstante Feldgrößen, was die Formel zu

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\nabla}V, \dot{\vec{x}}_e \right\rangle &= \frac{dV}{dt} \\ \left\langle \vec{\nabla}Z, \dot{\vec{x}}_e \right\rangle &= \frac{dZ}{dt} \end{aligned}$$

reduziert. Die Gleichung (5.4) kann daher durch die Ableitungen

$$\frac{1}{2} \frac{d\|\dot{\vec{x}}_e\|^2}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \left\langle \dot{\vec{x}}_e, \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) \right\rangle \quad (5.7)$$

ausgedrückt werden. Integriert man das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit und Beschleunigungen, so entsteht mit der Abkürzung  $\vec{f} = \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t)$  ein Wegintegral

$$\int \left\langle \vec{f}, \dot{\vec{x}}_e \right\rangle dt = \int \left\langle \vec{f}, \frac{d\vec{x}_e}{dt} \right\rangle dt = \int \vec{f} d\vec{x}_e.$$

Unter Berücksichtigung einer Integrationskonstanten  $c$  erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{1}{2} \|\dot{\vec{x}}_e\|^2 = c + V + Z + \int \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) d\vec{x}_e. \quad (5.8)$$

Diese Formel beschreibt für einen Körper mit der Masse 1 kg den Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie  $\frac{1}{2} \|\dot{\vec{x}}_e\|^2$  und der potentiellen Energie, wobei sich die Letztgenannte aus dem gravitativen Potential  $V$ , dem Zentrifugalpotential  $Z$  und dem Wegintegral über die Beschleunigungen der zeitlich variablen Massen zusammensetzt. Außerdem ist ein Störterm aufgrund der nicht-gravitativen Effekte und die unbekannte Konstante  $c$  der Integration zu berücksichtigen.

In der Analyse kann es sinnvoll sein, das Potential  $V$  mit der Darstellung  $V = U + T$  in ein Normalpotential  $U$  und ein Störpotential  $T$  aufzuspalten, wodurch man das eigentliche **Energieintegral**

$$T + c = E_{kin} - U - Z - \int \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) d\vec{x}_e \quad (5.9)$$

erhält (Sneeuw, 2006, Weigelt, 2007). Dabei existieren für das Normal- und Zentrifugalpotential Modelle, die zur Berechnung die Position des Satelliten erfordern. Die nicht-gravitativen Störterme  $\delta\vec{a}$  werden insbesondere in den geodätischen Missionen durch die Beschleunigungssensoren direkt gemessen und numerisch entlang des Orbits integriert. Für die für die zeitabhängigen gravitativen Effekte wie z.B. die direkten und indirekten Gezeiten oder Hydrologie und Atmosphäre kann auf Modelle zurückgegriffen werden, die als Eingangsgröße die (relative) Position des Messinstruments nutzen. Neben ungenauen Modellen und der numerischen Integration ist vor allem die Berechnung der kinetische Energie kritisch, da diese eine numerischen Differentiation der GPS-Positionen – oder eine möglichst präzise Orbitintegration – und eine Transformation in das erdfeste System erfordert.

In der Grafik 5.1 sind die kinetische Energie ( $E^{kin} = E_{kin}$ ), das Normal- ( $E^{norm} = U$ ), das Zentrifugalpotential ( $E^{cent} = Z$ ) und das Wegintegral über die nicht-gravitativen Beschleunigungen und die Gezeiten für zwei Umläufe des CHAMP-Satelliten am 1. Januar 2004 visualisiert. Aus der Abbildung kann man erkennen, dass sich die kinetische Energie, das Zentrifugalpotential und das Normalpotential annähernd periodisch je Umlauf verhalten, wobei die ersten beiden Effekte eine Größenordnung von  $30 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$  bzw.  $60 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$  erreichen. Die nicht-konservativen Effekte und das verbleibende Störpotential sind um 2 bis 3 Größenordnungen kleiner und zeigen keine erkennbare Periode innerhalb der zwei Umläufe.

Für die Modellierung der Beobachtung durch radiale Basisfunktionen wird das Energieintegral noch modifiziert, indem man das Signal um möglichst viele langwellige Informationen reduziert. Dazu spaltet man das Störpotential in ein Potential  $T^N$  und ein Residualpotential  $\delta T$  zweiter Ordnung auf

$$T = T^N + \delta T \quad (5.10)$$

und erreicht damit ein **residuales Energieintegral**

$$\delta T + c = E_{kin} - U - T^N - Z - \int \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) d\vec{x}_e.$$

Führt man das Referenzpotential  $T_{ref} = U + T^N$  ein, so folgt daraus die Darstellung

$$\delta T + c = E_{kin} - T_{ref} - Z - \int \left( \delta\vec{a} + \sum_{\delta m} \vec{a}_{\delta m}(t) \right) d\vec{x}_e. \quad (5.11)$$

Das Referenzpotential lässt sich durch eine sphärisch-harmonische Synthese eines bekannten Schwerefeldmodells bis Grad und Ordnung  $N$  berechnen:

$$T_{ref} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda). \quad (5.12)$$

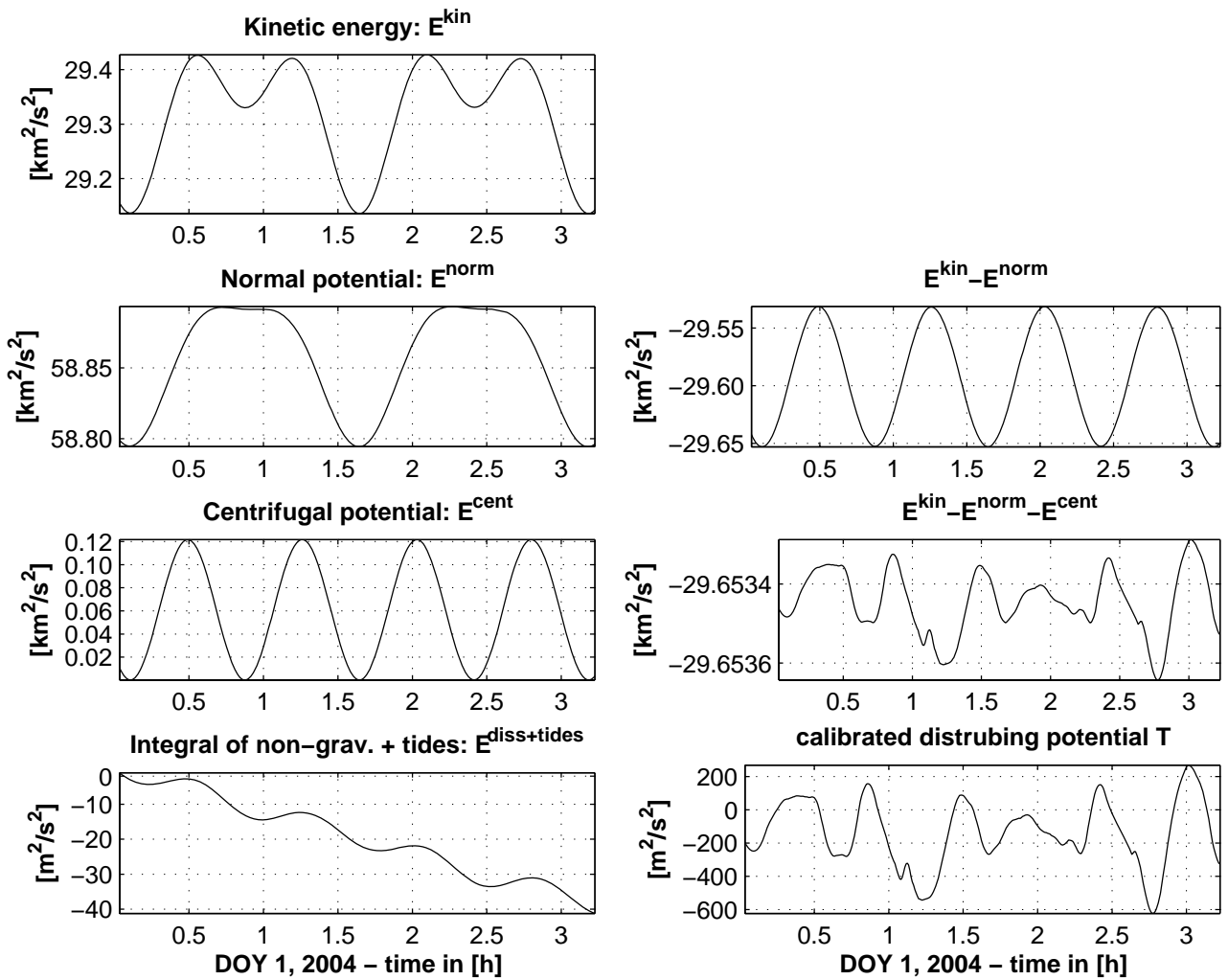


Abbildung 5.1.: Beiträge zum Energieintegral und deren Differenz zur kinetischen Energie aus Weigelt (2007). Zu beachten ist der Wechsel der Einheiten zwischen dem Zentrifugalterm (3. Zeile) und dem Wegintegral bzw. dem verbleibenden Störpotential (4. Zeile)

Numerische Fehler, die Unsicherheiten der Koeffizienten und der Abbruchfehler des Modells werden damit Teil des Restsignals, wodurch auch das Rauschen  $\varepsilon$  verstärkt wird. Durch eine residuale Analyse wird ein gravitatives Signal im Restsignal modelliert, wobei der Signalgehalt vom verwendeten Referenzfeld abhängt. Ist der Offset  $c$  durch eine Vorprozessierung der Daten eliminiert, so kann das residuale gravitative Signal in den Positionen  $\vec{x}_e$  durch eine Überlagerung von (radialen) Basisfunktionen

$$\delta T = \varepsilon(T_{\text{ref}}, \psi_1, \dots, \psi_B) + \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) \quad (5.13)$$

modelliert werden, indem man durch eine geeignete Wahl der Parameter  $\psi_b$  den Restfehler  $\varepsilon(T_{\text{ref}}, \psi_1, \dots, \psi_B)$  minimiert.

Aufgrund der Vorverarbeitung – z.B. einer Orbitintegration für kurze Bahnbögen – kann es sinnvoll sein, für kleinere Zeitintervalle jeweils einen eigenen Offset  $c_{\text{arc}}(t)$  zu bestimmen. Wird das Energieintegral mit unkalibrierten Werten verwendet, so ergeben sich zusätzliche Offsetparameter

$$\delta T = \varepsilon(T_{\text{ref}}, \psi_1, \dots, \psi_B) + c_{\text{arc}}(t) + \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b), \quad (5.14)$$

welche aus den Beobachtungen zu schätzen sind.



### 5.1.2. Potential der Basisfunktionen

In der Modellierung des Restsignals  $\delta T$  nach den Formeln (5.13) oder (5.14) werden die radialen Basisfunktionen aus dem Kapitel 4 verwendet. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, das Potential der Basisfunktionen auf verschiedene Arten zu parametrisieren und für eine spätere Optimierung auch nach den Basisparametern zu differenzieren.

Das Potential einer einzelnen Basisfunktion lässt sich im Außenraum  $r \geq R$  durch die Formel

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.25)$$

beschreiben. Dabei bezeichnet  $\vec{x}_e$  die Positionen der Berechnungspunkte (bzw. des Satelliten) in einem erdfesten Koordinatensystem,  $r = \|\vec{x}_e\|$  den Bahnradius und  $\psi_b = \{\eta_b, \lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b(n)\}$  die Parameter der Basisfunktion mit einer Reihenentwicklung für die Grade  $n_0 \leq n \leq \tilde{N}$ . Das Argument der Legendrepolynome  $\cos \varpi_b$  berechnet sich aus dem Skalarprodukt des normierten Vektors  $\hat{x}_e = \frac{\vec{x}_e}{\|\vec{x}_e\|}$  und dem Einheitsvektor zum Basiszentrum

$$\hat{z}_e^b = (\cos \lambda_b \sin \vartheta_b, \sin \lambda_b \sin \vartheta_b, \cos \vartheta_b)^\top. \quad (5.15)$$

In der Abbildung 5.2 wird das Residualpotential einer Basisfunktion, die am Boden eine maximale Potentialänderung von  $\Delta T = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  bewirkt, für eine ungestörte Kreisbahn mit  $r = 6850$  km visualisiert, während die Grafik 5.3 die Dämpfung der Beobachtungen für unterschiedliche Bahnradien zeigt. In beiden Grafiken werden jeweils ideale Kreisbahnen mit den Keplerelementen  $e = 0$  und  $I = 89^\circ$  verwendet und für die Basisfunktion werden die Parameter  $\eta_b \approx 8.0459 \cdot 10^{-10}$ ,  $\lambda_b \approx 109.28^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 66.33^\circ$  und die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  mit den Grenzen  $n_0 = 0$  und  $\tilde{N} = 100$  festgelegt. Aus den Abbildungen kann man entnehmen, dass bereits ein Bahnradius von  $r = 6850$  km – also eine Flughöhe von ca. 470 km, wie sie für geodätische Satelliten typisch ist – das Signal auf 30 % des Maximalwerts am Boden reduziert. Außerdem stellt man fest, dass das Maximum des Potentials beim direkten Überflug über das Zentrum der Basis angenommen wird, was im weiteren Verlauf für die Positionssuche aus den Daten genutzt werden kann.

Für geschlossene Formeln und partielle Ableitungen ist oft eine Parametrisierung durch Keplerelemente besser geeignet. Dazu kann entweder der Orbit oder die Beobachtung selbst durch die Bahnelemente ausgedrückt werden. In der ersten Variante verwendet man die Darstellung des Orbits aus dem Abschnitt 2.3

$$\vec{x}_e = \mathbf{R}_3(\Theta) \vec{x}_i = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \Omega) \cos u + \sin(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ -\sin(\Theta - \Omega) \cos u + \cos(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ \sin I \sin u \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

wobei Präzession, Nutation und Polbewegung vernachlässigt werden. Aus dem Skalarprodukt<sup>1</sup> der Einheitsvektoren folgt für das Argument der Legendrepolynome

$$\begin{aligned} \cos \varpi_b &= \left\langle \frac{\vec{x}_e}{\|\vec{x}_e\|}, \hat{z}_e^b \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \Omega) \cos u + \sin(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ -\sin(\Theta - \Omega) \cos u + \cos(\Theta - \Omega) \cos I \sin u \\ \sin I \sin u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \lambda_b \sin \vartheta_b \\ \sin \lambda_b \sin \vartheta_b \\ \cos \vartheta_b \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \sin \vartheta_b \cos u [\cos(\Theta - \Omega) \cos \lambda_b - \sin(\Theta - \Omega) \sin \lambda_b] + \\ &\quad + \cos I \sin u \sin \vartheta_b [\sin(\Theta - \Omega) \cos \lambda_b + \cos(\Theta - \Omega) \sin \lambda_b] + \sin I \sin u \cos \vartheta_b = \\ &= \cos u \sin \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin u [\cos I \sin \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin I \cos \vartheta_b]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist die Optimierung der (nichtlinearen) Parameter der Basisfunktionen, welche im Kapitel 7 näher erläutert wird. Um diese effektiver umzusetzen, benötigt man häufig die partiellen

<sup>1</sup>Berechnet man das Skalarprodukt direkt aus den Vektoren ohne eine Parametrisierung durch Keplerelemente, so enthält das Argument auch die exakte Transformation der Koordinatensysteme.

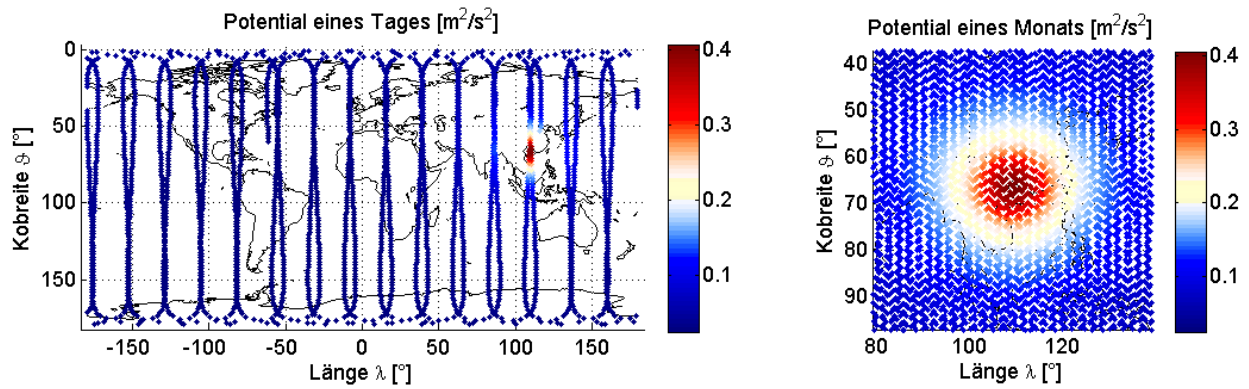


Abbildung 5.2.: Residualpotential einer radialen Basisfunktion mit den Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  für die Entwicklungsgrade  $n = 0, \dots, 100$  in der durch  $\diamond$  markierten Position ( $\lambda_b \approx 109.28^\circ$  und  $\vartheta_b \approx 66.33^\circ$ ,  $\eta_b \approx 8.0459 \cdot 10^{-10}$ ). Für die Berechnung wird eine Kreisbahn mit  $I = 89^\circ$ ,  $e = 0$  und dem Radius  $r = a = 6850$  km verwendet

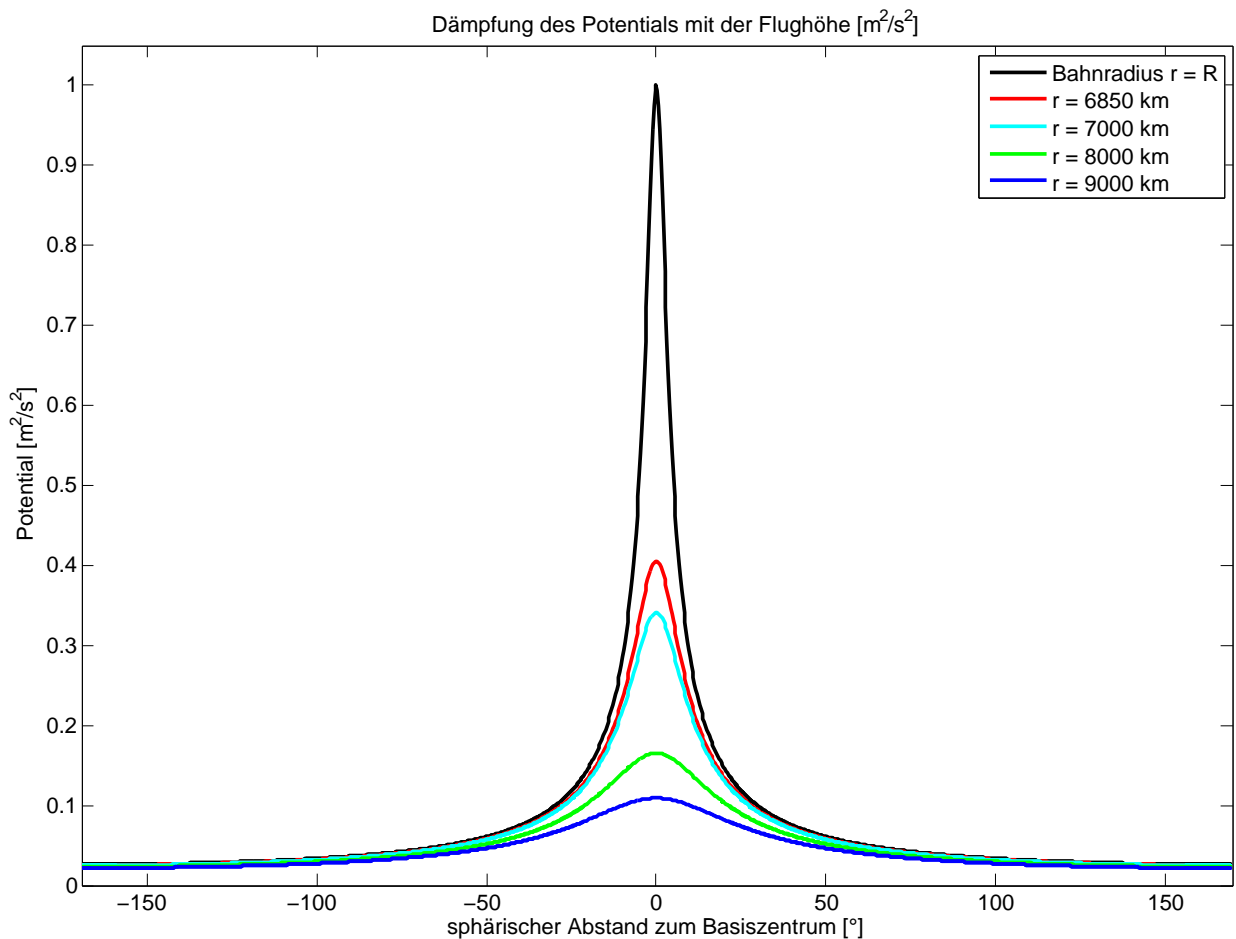


Abbildung 5.3.: Abklingen des Residualpotentials einer Basisfunktion beim direkten Überflug für verschiedene Bahnradien. Für einen negativen sphärischen Abstand fliegt der Satellit auf die Basis zu, bei positiver Distanz verlässt er deren Umgebung

Ableitungen nach den gesuchten Parametern in geschlossener Form. Aufgrund der Linearität erhält man für den Skalierungsfaktor einer Basisfunktion

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial \eta_b} = \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b). \quad (5.17)$$

Die Differentiation nach der Position des Zentrums ergibt mit der Abkürzung

$$\zeta_b := \cos \varpi_b \quad (5.18)$$

und unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{\partial P_n(\cos \varpi_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \underbrace{\frac{dP_n(\zeta_b)}{d\zeta_b}}_{P'_n(\zeta_b)} \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)}. \quad (5.19)$$

Als partielle Ableitungen des Arguments  $\zeta_b = \cos \varpi_b$  erhält man aus der Formel (5.16) die Terme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_b}{\partial \lambda_b} &= -\cos u \sin \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin u [\cos I \sin \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b)] \\ \frac{\partial \zeta_b}{\partial \vartheta_b} &= \cos u \cos \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin u [\cos I \cos \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) - \sin I \sin \vartheta_b]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Führt man die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n)$  auf einen skalaren Formparameter  $\sigma_b$  zurück, so kann die Ableitung durch

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial \sigma_b} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} P_n(\cos \varpi_b) \quad (5.21)$$

berechnet werden. Für das erweiterte exponentielle Modell

$$\sigma_b(n) = \begin{cases} \sigma_b^n & n_0 \leq n \leq \tilde{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.71)$$

aus dem Abschnitt 4.2.4 gilt dabei

$$\frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} = \begin{cases} n \sigma_b^{n-1} & n_0 \leq n \leq \tilde{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.22)$$

Die Formeln und deren Ableitungen werden wesentlich eleganter, wenn man anstelle der Position bereits das Potential durch Keplerelemente parametrisiert. Darstellungen dieser Art werden nach Koop (1993), Kaula (2000), Sneeuw (2000) oder Meyer (2005) bisher nur für die sphärisch-harmonische Synthese des Potentials im Orbit genutzt, indem man die Inklinationsfunktion  $F_{lmp}(I)$  und gegebenenfalls eine Exzentrizitätsfunktion  $G_{plq}(e)$  in die Berechnung einführt. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es, auch das residuale Potential einer radialen Basisfunktion durch Keplerelemente auszudrücken, wofür in der Literatur – abgesehen von Veröffentlichungen, die während der Vorbereitung dieser Arbeit entstanden sind (Keller, 2006, 2007) – bislang kein Beispiel bekannt ist.

Zunächst spaltet man das Potential (4.25) mit dem Additionstheorem (3.47) der Kugelflächenfunktionen (in der komplexen Normierung) so auf, dass die Position der Basis  $(\lambda_b, \vartheta_b)$  und die Bahn des Satelliten getrennt werden:

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \hat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b) \hat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda). \quad (5.23)$$

Für eine Satellitenbahn mit kleiner Exzentrizität  $e$  oder für kurze Bahnbögen kann der Orbit durch eine Kreisbahn mit einem mittleren Radius approximiert werden, weshalb auf eine Exzentrizitätsfunktion verzichtet wird. Anschließend definiert man ein rotierendes Koordinatensystem  $S$  mit dem Massenzentrum der Erde als Ursprung, dessen  $\hat{e}_{S=1}$ -Achse in Richtung des Satelliten zeigt und dessen  $\hat{e}_{S=3}$ -Achse orthogonal zur Bahnebene ist. In diesem System lässt sich die Position durch  $\vec{x}_S = (r, 0, 0)$  bzw. in sphärischen Koordinaten durch  $(\lambda_S = 0, \vartheta_S = \frac{\pi}{2}, r_S = r)$  beschreiben.

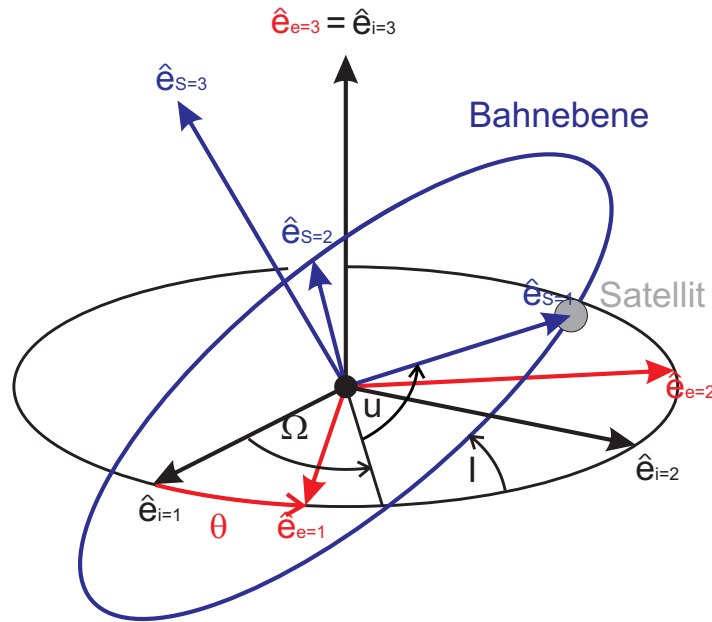


Abbildung 5.4.: Satellitenbahn und Keplerelemente für eine Kreisbahn, dargestellt im vereinfachten erdfesten System (rot), im raumfesten System (schwarz) und im rotierenden Koordinatensystem der Bahnebene (blau)

Der Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen und den Keplerelementen einer Kreisbahn ist in Abbildung 5.4 – für eine vereinfachte Erdrotation um die  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse – veranschaulicht. Demnach kann man den Bahnvektor  $\vec{x}_S$  durch drei Drehungen im erdfesten Koordinatensystem darstellen, indem man analog zur Herleitung der Keplerelemente aus den Positionen (im Abschnitt 2.3) die Rotationen

$$\vec{x}_e = \mathbf{R}_3(-[\Omega - \Theta])\mathbf{R}_1(-I)\mathbf{R}_3(-u)\vec{x}_S \quad (5.24)$$

verwendet. Da die zweite Drehung in der Beschreibung durch die Wigner-d-Funktionen um die (transformierte)  $\hat{e}_2$ -Achse erfolgen muss, wird die erste Rotation um  $+\frac{\pi}{2}$  „zu weit“ durchgeführt und in der letzten Drehung wieder durch den Term  $-\frac{\pi}{2}$  korrigiert:

$$\vec{x}_e = \underbrace{\mathbf{R}_3\left(-\left[\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2}\right]\right)\mathbf{R}_2(-I)\mathbf{R}_3\left(-\left[u + \frac{\pi}{2}\right]\right)}_{=:\mathcal{R}^{-1}}\vec{x}_S. \quad (5.25)$$

Um eine Kugelflächenfunktion im erdfesten System an der Position  $(\vartheta, \lambda)$  auszuwerten, ist nach den Formeln (3.104) die inverse Drehung des rotierenden Systems erforderlich

$$\hat{Y}_{nm}(\vartheta, \lambda) = \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(-\gamma, -\beta, -\alpha)\hat{Y}_{nk}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=-n}^n \exp(ik\gamma)d_{km}^n(-\beta)\exp(im\alpha)\hat{Y}_{nk}\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.26)$$

Die Werte der Eulerwinkel kann man aus der Abbildung 5.4 und der Gleichung (5.25) entnehmen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} \\ \beta &= I \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} + u.\end{aligned}\tag{5.27}$$

Das Einsetzen der Winkel in das Potential (5.23) liefert

$$\begin{aligned}\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \hat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b) \\ &\cdot \sum_{k=-n}^n \exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) d_{km}^n(-I) \exp\left(ik\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) \hat{Y}_{nk}\left(0, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Berücksichtigt man zusätzlich noch für die Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{nk}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= \hat{P}_{nk}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \exp(0 \cdot ik) = \hat{P}_{nk}(0) \\ \hat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b) &= \hat{P}_{nm}(\cos\vartheta_b) \exp(-im\lambda_b),\end{aligned}$$

so ergibt sich schließlich für das Potential einer Basisfunktion

$$\begin{aligned}\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{4\pi}{2n+1} \\ &\cdot \sum_{m=-n}^n \hat{P}_{nm}(\cos\vartheta_b) \exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b\right)\right) \\ &\cdot \sum_{k=-n}^n \exp\left(ik\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) d_{km}^n(-I) \hat{P}_{nk}(0).\end{aligned}\tag{5.28}$$

Mit diesem Ergebnis ist das Potential einer radialen Basisfunktion durch Keplerelemente parametrisiert, wobei der Term  $\left(d_{km}^n(-I) \hat{P}_{nk}(0)\right)$  bis auf eine mögliche Normierung und das Vorzeichen des Arguments  $I$  der Inklinationsfunktion  $F_{lmp}(I)$  aus Kaula (2000) und Sneeuw (2000) entspricht.

Im Weiteren werden die Formeln der radialen Basisfunktionen vom Typ (4.25) – also eine Entwicklung durch Legendrepolynome – als **Legendre-Darstellung** bezeichnet. Für die Version (5.28) und deren Varianten wird zur Unterscheidung die Bezeichnung **Wigner-Darstellung** eingeführt, obwohl diese neben den Wigner-d-Funktionen  $d_{km}^n(-I)$  auch die Legendrefunktionen beinhalten.

Die Wigner-Darstellung (5.28) wird nun noch auf zwei Arten modifiziert. Zum einen ist es für die Programmierung günstig, die Anzahl der Summanden aufgrund von Symmetrien zu reduzieren und zum anderen wird nach einer kompakteren Notation gesucht.

Verwendet man die Symmetrien der Legendre- und Wigner-d-Funktionen, so können in der Wigner-Darstellung alle Terme mit  $m < 0$  durch den zweifachen Realteil der anderen Summanden ersetzt werden, wenn man den Sonderfall  $m = k = 0$  durch einen Faktor halbiert (vgl. Anhang A.1):

$$\begin{aligned}\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= 2\Re\left\{ \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{4\pi}{2n+1} \right. \\ &\cdot \sum_{m=0}^n \hat{P}_{nm}(\cos\vartheta_b) \exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b\right)\right) \\ &\cdot \left. \sum_{k=-n}^n \exp\left(ik\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) d_{km}^n(-I) \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \hat{P}_{nk}(0) \right\}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Varianten dieser Darstellung werden in den Programmen genutzt, wobei für eine effiziente Berechnung jeweils Matrizenmultiplikationen für die Summationen eingesetzt werden. Eine genauere Beschreibung findet sich im Abschnitt A.2, wonach es genügt die Inklination  $I$  (zeitlich) zu mitteln, während die anderen Keplerelemente – unter Vernachlässigung der Exzentrizität – direkt aus der Orbitintegration übernommen werden. Eine kompakte Schreibweise erhält man, indem man zuerst die Faktoren umordnet:

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) \exp\left(ik\frac{\pi}{2} - im\left(\frac{\pi}{2} + \lambda_b\right)\right) \cdot \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I). \quad (5.30)$$

In dieser Darstellung ist die erste Zeile unabhängig von der Satellitenbahn, weshalb man zweckmäßigerweise eine Hilfsfunktion

$$B_{km}^n(\psi_b) := \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) \underbrace{\exp\left(ik\frac{\pi}{2} - im\frac{\pi}{2}\right)}_{i^{k-m}} \exp(-im\lambda_b) \quad (5.31)$$

eingführt, welche neben allen Parametern der radialen Basisfunktionen  $\{\lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b, \eta_b\}$  nur die Konstanten  $GM$  und  $R$ , den Grad  $n$  und die Ordnungen  $(m, k)$  der Summationen beinhaltet. Um die Notation weiter zu vereinfachen, kann man die Abkürzung

$$S_{km}^n(r, I) := \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I) \quad (5.32)$$

festlegen, zumal die Inklination und der Bahnradius für kurze Bahnbögen (annähernd) konstante Größen darstellen. Das Einsetzen der Definitionen liefert die **Kurzschreibweise**

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)), \quad (5.33)$$

die im weiteren Text insbesondere für die partiellen Ableitungen verwendet wird. Um die Beobachtungen nach den Basisparametern  $\{\lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b, \eta_b\}$  zu differenzieren, genügt es in der Wigner-Darstellung die Hilfsfunktionen  $B_{km}^n(\psi_b)$  abzuleiten

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \eta_b} &= \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \lambda_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) (-im) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \vartheta_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \frac{d\hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b)}{d\vartheta_b} \hat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \sigma_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \end{aligned} \quad (5.34)$$

und das Ergebnis jeweils in die Dreifachsumme einzusetzen. Die Beschreibung (5.33) bietet eine kompakte Notation mit einfachen partiellen Ableitungen, die außerdem für eine Kreisbahn mit einer konstanten Inklination als eine zweidimensionale Fourierreihe (in den Argumenten  $(u, \Omega - \Theta)$ ) interpretierbar ist. Dennoch wird in den Programmen die Darstellung vom Typ (5.29) mit einer zeitlich gemittelten Inklination verwendet und durch Matrizenmultiplikationen umgesetzt, da sonst für jede Hilfsfunktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  das Produkt aus einer Basisfunktion und den  $\hat{P}_{nk}(0)$ -Termen gespeichert werden müsste.

Bei einer geeigneten Umsetzung auf einem leistungsfähigeren Rechner (z.B. Parallel- oder Hochleistungscomputer) könnte die Formel jedoch eine interessante Alternative bieten, zumal sich viele partielle Ableitungen durch Differenzieren der einfachen Faktoren ergeben. Ist der nötige Speicherplatz vorhanden, so genügt es oft die Ableitungen – z.B. nach den Basisparametern – einmal zu bilden, da diese auch für weitere Beobachtungen verwendet werden können.

## 5.2. Line-of-Sight Gradiometrie

### 5.2.1. Messprinzip

Als Gradiometrie bezeichnet man eine (rechnerische) Kombination der Messgrößen zu einem eindimensionalen Signal, welches die Ableitung bzw. die Änderung des Schwerefeldes entlang einer Basislinie approximiert. In den GRACE-ähnlichen Missionen entspricht die Basislinie gerade der geometrischen Verbindung zwischen den beiden Satelliten, weshalb die Messung als Line-of-Sight Gradiometrie (kurz: LOS-Gradiometrie) bezeichnet wird. Durch die Bestimmung der LOS-Gradienten im Orbit sollen vor allem die mittleren und kurzen Wellenlängen besser erfasst werden.

Einer der ersten theoretischen Ansätze basiert auf dem Betrag der Relativgeschwindigkeiten zwischen zwei Satelliten, durch dessen Analyse die gesuchten Schwerefeldparameter verbessert werden (Rummel, 1978).

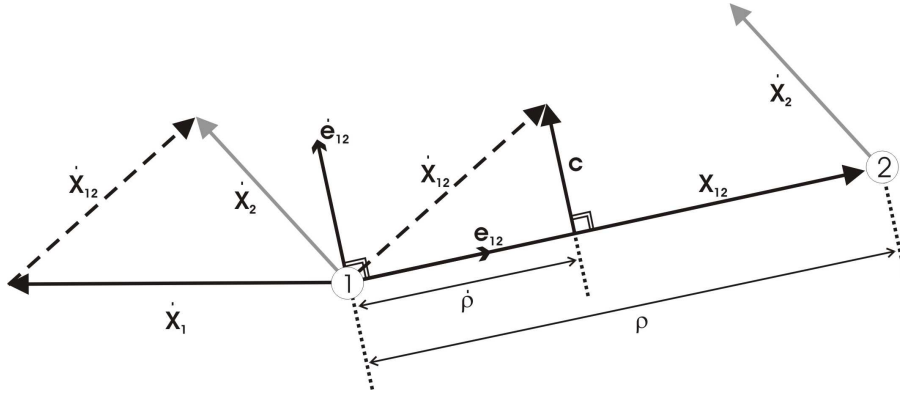


Abbildung 5.5.: Messprinzip der Line-of-Sight Gradiometrie aus Weigelt (2010), basierend auf den Grundlagen von Rummel (1978)

In der LOS-Gradiometrie verwendet man zwei Satelliten mit den Positionen<sup>2</sup>  $(\vec{x}(t), \vec{y}(t))$  und den Geschwindigkeiten  $(\dot{\vec{x}}(t), \dot{\vec{y}}(t))$ , zwischen denen der geometrische Abstand

$$\rho := \|\vec{y}(t) - \vec{x}(t)\| \quad (5.35)$$

und dessen zeitliche Änderung durch low-low Satellite-to-Satellite-Tracking gemessen wird.

Definiert man die relative Position  $\vec{X}_{LOS} = \vec{y}(t) - \vec{x}(t)$  und den Einheitsvektor

$$\hat{e}_{LOS} = \frac{\vec{y}(t) - \vec{x}(t)}{\|\vec{y}(t) - \vec{x}(t)\|} = \frac{\vec{X}_{LOS}}{\rho}, \quad (5.36)$$

der die Richtung der Basislinie zwischen den Satelliten beschreibt, so kann der Abstand durch das Skalarprodukt

$$\rho = \langle \vec{X}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \rangle \quad (5.37)$$

berechnet werden (Mayer-Gürr, 2006, Sneeuw, 2006). Aus der Normierung  $\langle \hat{e}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \rangle = 1$  folgt mit

$$\frac{d \langle \hat{e}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \rangle}{dt} = 2 \langle \hat{e}_{LOS}, \dot{\hat{e}}_{LOS} \rangle = 0 \quad (5.38)$$

die Orthogonalität der Vektoren<sup>3</sup>  $\hat{e}_{LOS}$  und  $\dot{\hat{e}}_{LOS}$ . Leitet man den Abstand nach der Zeit  $t$  ab, erhält man die Änderung der Entfernung bzw. die **Range-Rate**

$$\dot{\rho} = \langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \rangle + \langle \vec{X}_{LOS}, \dot{\hat{e}}_{LOS} \rangle = \langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \rangle, \quad (5.39)$$

<sup>2</sup>Wegen der skalaren Beobachtungsgröße spielt das gewählte Koordinatensystem keine Rolle, so dass auf eine Indizierung verzichtet werden kann.

<sup>3</sup>Nach der Differentiation ist der Vektor nicht mehr notwendigerweise normiert, weshalb auf die allgemeine Notation gewechselt wird.

wobei der zweite Summand wegen der Orthogonalität von  $\vec{X}_{LOS} = \rho \hat{e}_{LOS}$  und  $\dot{\vec{e}}_{LOS}$  entfällt. Durch nochmaliges Ableiten des Abstands folgt mit

$$\dot{\vec{e}}_{LOS} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{X}_{LOS}}{\rho} \right\} = \frac{\rho \dot{\vec{X}}_{LOS} - \vec{X}_{LOS} \dot{\rho}}{\rho^2} \quad (5.40)$$

schließlich nach Rummel (1978) und Seeber (2003) die Beziehung

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \left\langle \ddot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \dot{\vec{e}}_{LOS} \right\rangle = \left\langle \ddot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \frac{\rho \dot{\vec{X}}_{LOS} - \vec{X}_{LOS} \dot{\rho}}{\rho^2} \right\rangle = \\ &= \left\langle \ddot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle + \frac{1}{\rho} \left\langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \dot{\vec{X}}_{LOS} \right\rangle - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \underbrace{\left\langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \frac{\vec{X}_{LOS}}{\rho} \right\rangle}_{\dot{\rho} \text{ nach (5.39)}} = \\ &= \left\langle \ddot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle + \frac{1}{\rho} \|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2 - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \dot{\rho}, \end{aligned}$$

wobei die Änderung der Range-Rate  $\dot{\rho}$  durch numerisches Differenzieren zu bestimmen ist. Trennt man die (geometrischen) Beobachtungen des Messsystems und die Relativgeschwindigkeit von der Beschleunigung

$$\left\langle \ddot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho}, \quad (5.41)$$

so steht auf der linken Seite der Gleichung die Relativbeschleunigung  $\ddot{\vec{X}}_{LOS}$  projiziert auf die Verbindungslinie (Sharifi, 2004, 2006, Keller, 2005b).

Vernachlässigt man für die Herleitung vorläufig die Beschleunigungen, welche sich aus den nicht-gravitativen Effekten, dem Einfluss dritter Körper und den zeitlich variablen Anteilen des Schwerefeldes ergeben, so kann die Relativbeschleunigung auch als Differenz der gravitativen Beschleunigungen aufgrund des Potentials  $V$  dargestellt werden. Nach einer Division durch den Abstand  $\rho$  erhält man die Beobachtungsgleichung

$$\frac{1}{\rho} \left\langle \left( \vec{\nabla} V(\vec{y}) - \vec{\nabla} V(\vec{x}) \right), \hat{e}_{LOS} \right\rangle \approx \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho^2}. \quad (5.42)$$

Eine alternative Darstellung erhält man, indem man die Beobachtung auf den Massenmittelpunkt der beiden Satelliten (= Baryzentrum)

$$\vec{r} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2} \quad (5.43)$$

bezieht (Keller, 2005b). In diesem System haben die Satelliten die relativen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x} - \vec{r} &= -\frac{\Delta \vec{r}}{2} \\ \vec{y} - \vec{r} &= \frac{\Delta \vec{r}}{2}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

während eine Taylor-Entwicklung des Potentials

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= V\left(\vec{r} - \frac{\Delta \vec{r}}{2}\right) = V(\vec{r}) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta r^2}{2}\right) \\ V(\vec{y}) &= V\left(\vec{r} + \frac{\Delta \vec{r}}{2}\right) = V(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}\left(-\frac{\Delta r^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

liefert. Bildet man für die Relativbeschleunigung die Gradienten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} V(\vec{x}) &= \vec{\nabla} V(\vec{r}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \right) \Delta \vec{r} + \dots \\ \vec{\nabla} V(\vec{y}) &= \vec{\nabla} V(\vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \right) \Delta \vec{r} + \dots \end{aligned} \quad (5.46)$$



und subtrahiert diese, so erhält man bezogen auf das Baryzentrum die Approximation

$$\vec{\nabla}V(\vec{y}) - \vec{\nabla}V(\vec{x}) \approx \vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\right) \Delta\vec{r} = \nabla^2V \cdot \vec{r}. \quad (5.47)$$

Aus diesem Ergebnis, der Identität  $\hat{e}_{LOS} = \frac{\Delta\vec{r}}{\rho}$  sowie der Gleichung (5.42) folgt daher die Darstellung

$$\frac{1}{\rho} \langle \nabla^2V \cdot \vec{r}, \hat{e}_{LOS} \rangle = \hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2V) \hat{e}_{LOS} \approx \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho^2}. \quad (5.48)$$

Diese Form der Beobachtung bildet eine lineare Approximation für die zweite Ableitung des Potentials in Richtung der Line-of-Sight und entspricht der „Messung“ eines eindimensionalen Gradiometers mit der Basislänge  $\rho$  (Sharifi, 2004, Keller, 2005b). In diesen Arbeiten wird ebenfalls gezeigt, dass der Abbruchfehler der Taylorreihe für die Auswertung zu groß ist. Als Ausweg werden entweder eine kubische Approximation oder eine technisch einfachere, residuale Analyse vorgeschlagen. Für die zweite Methode spaltet man das Potential  $V$  wieder in ein Referenz- und Residualfeld auf

$$\hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2T_{ref} + \nabla^2\delta T) \hat{e}_{LOS} \approx \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho^2} \quad (5.49)$$

und löst die Gleichung nach der residualen Größe auf:

$$\hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2\delta T) \hat{e}_{LOS} \approx \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho^2} - \hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2T_{ref}) \hat{e}_{LOS}. \quad (5.50)$$

Der projizierte Tensor des Referenzfeldes wird anschließend wieder durch die Projektion des Gradienten ersetzt:

$$\hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2T_{ref}) \hat{e}_{LOS} = \frac{1}{\rho} \left\langle \left( \vec{\nabla}T_{ref}(\vec{y}) - \vec{\nabla}T_{ref}(\vec{x}) \right), \vec{e}_{LOS} \right\rangle. \quad (5.51)$$

Um die Gleichung zu vervollständigen, müssen die bisher vernachlässigten Beschleunigungen – also die nicht-gravitativen Effekte  $\delta\vec{a}$ , der Einfluss dritter Körper und auch die zeitlich variablen Anteile des Schwerefeldes  $\vec{a}_{\delta m}$  – durch Modelle oder Messungen berücksichtigt werden. Indem man die Differenzen  $\vec{a}_{LOS}^j$  der Beschleunigungen auf die Line-of-Sight abbildet und durch den Abstand  $\rho$  dividiert, erhält man als Beobachtungsgleichung:

$$\hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2\delta T) \hat{e}_{LOS} = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - \frac{\|\dot{\vec{X}}_{LOS}\|^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \left\langle \left( \vec{\nabla}T_{ref}(\vec{y}) - \vec{\nabla}T_{ref}(\vec{x}) \right), \vec{e}_{LOS} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^J \left\langle \vec{a}_{LOS}^j, \vec{e}_{LOS} \right\rangle. \quad (5.52)$$

Im Weiteren wird die residuale Beobachtung als Line-of-Sight Gradient (LOS-Gradient) bezeichnet und auf die Indizes verzichtet. Das Signal

$$\hat{e}^\top (\nabla^2\delta T) \hat{e} := \hat{e}_{LOS}^\top (\nabla^2\delta T) \hat{e}_{LOS} \quad (5.53)$$

bezieht sich in der Auswertung auf die Position des Baryzentrums der beiden Satelliten. Für eine regionale Analyse wird im nächsten Abschnitt der Line-of-Sight Gradient einer einzelnen Basis sowie die Ableitung nach den Basisparametern behandelt.

### 5.2.2. Along-track Gradiometrie radialer Basisfunktionen

Da das Messprinzip der Line-of-Sight Gradiometrie zur Zeit nur durch GRACE realisiert wird, beziehen sich die folgenden Ausführungen zu den radialen Basisfunktionen auf diese Mission. Die beiden Satelliten fliegen in nahezu identischen Bahnen mit einem mittleren Abstand von ca. 220 km hintereinander her, während die Messungen – unter Vernachlässigung kleiner Abweichungen – in Flugrichtung (also „along track“) erfolgen. Auch in der GOCE-Mission stimmt eine Achse des Gradiometers fast mit der Flugrichtung überein, so dass trotz einer anderen Datenbehandlung die hier gezeigte residuale Analyse verwendet werden kann.

In der Arbeit von Koop (1993) werden die ersten und zweiten Ableitungen eines beliebigen (gravitativen) Potentials  $\Phi$  in unterschiedlichen Koordinatensystemen und Richtungen behandelt. Unter anderem wird gezeigt, dass die zweite Ableitung in Flugrichtung  $Y$  eines Satelliten durch den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \Phi(\lambda, \vartheta, r)}{\partial Y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi(\lambda, \vartheta, r)}{\partial u^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi(\lambda, \vartheta, r)}{\partial r} \quad (5.54)$$

gegeben ist, wobei  $\{a, r, u\}$  die Keplerelemente der Bahn darstellen. In einer residualen Analyse ist das allgemeine Potential durch die Summe der radialen Basisfunktionen  $\delta T$  zu ersetzen und das Differential

$$\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial r} \quad (5.55)$$

zu bestimmen. Um die Formel nach dem Bahnradius  $r$  abzuleiten, genügt es in der Wigner-Darstellung den radialen Dämpfungsterm  $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$  aus der Hilfsfunktion  $S_{km}^n(r, I)$  zu behandeln:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} = R^{n+1} \frac{dr^{-(n+1)}}{dr} = R^{n+1} (-n-1) r^{-n-2} = \frac{-(n+1)}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \quad (5.56)$$

Der große Vorteil der Wigner-Darstellung zeigt sich jedoch beim Differenzieren nach dem Argument der Breite, wobei die Berechnung auf die zweite Ableitung einer Exponentialfunktion zurückgeführt wird:

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) i^2 k^2 \exp(iku + im(\Omega - \Theta)).$$

Setzt man die Terme zusammen, so ergibt sich der Line-of-Sight Gradient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial r} = \\ &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

In der Abbildung 5.6 wird der LOS-Gradient für eine Kreisbahn mit der Inklination  $I = 89^\circ$  gezeigt, während die Grafik 5.7 die Dämpfung des Signals mit der Höhe wiedergibt. In beiden Grafiken werden die Parameter der Basisfunktion mit  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  in den Grenzen  $n_0 = 0$  und  $\tilde{N} = 100$ ,  $\eta_b \approx 8.0459 \cdot 10^{-10}$ ,  $\lambda_b \approx 109.28^\circ$  und  $\vartheta_b \approx 66.33^\circ$  so festgelegt, dass diese eine Potentialänderung von  $\Delta T = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  am Boden bewirken (vgl. Abbildung 5.2). In der Line-of-Sight Gradiometrie erzeugt dies ein Signal von  $\hat{e}^{-1} (\nabla^2 \delta T) \hat{e} \approx -6 \cdot 10^{-13} \frac{1}{\text{s}^2}$  im Orbit (mit dem Radius  $r = 6850$  km), wobei einer positiven Potentialänderung ein Minimum im LOS-Gradienten gegenübersteht. Neben dem Minimum treten bei niedrigen Flughöhen noch zwei positive Nebenmaxima auf, deren Beträge deutlich kleinere Werte annehmen.

Der Line-of-Sight Gradient wird nach den Parametern einer Basisfunktion differenziert, indem man analog zum Potential die Ableitungen der Hilfsfunktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  aus (5.34) in die Dreifachsumme einsetzt.

Da diese Berechnung sehr aufwendig und streng genommen nur für eine Kreisbahn gültig ist, wird die Herleitung nun für die Legendre-Darstellung durchgeführt. Zur Differentiation nach dem Bahnradius  $r$  kann der Term aus Gleichung (5.56) übernommen werden, während die Ableitung nach dem Argument der Breite  $u$  mehr Aufwand erfordert. Zunächst stellt man fest, dass der Bahnradius und das Argument  $\zeta_b = \cos \varpi_b$  implizit von  $u$  abhängen. Eine formale Differentiation liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u} &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) R^{n+1} \left[ \frac{\partial r^{-(n+1)}}{\partial u} P_n(\cos \varpi_b) + \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n(\cos \varpi_b)}{\partial u} \right] = \\ &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) R^{n+1} \left[ \frac{\partial r^{-(n+1)}}{\partial u} P_n(\cos \varpi_b) + \frac{1}{r^{n+1}} \underbrace{\frac{dP_n(\zeta_b)}{d\zeta_b}}_{P'_n(\zeta_b)} \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right] \end{aligned}$$

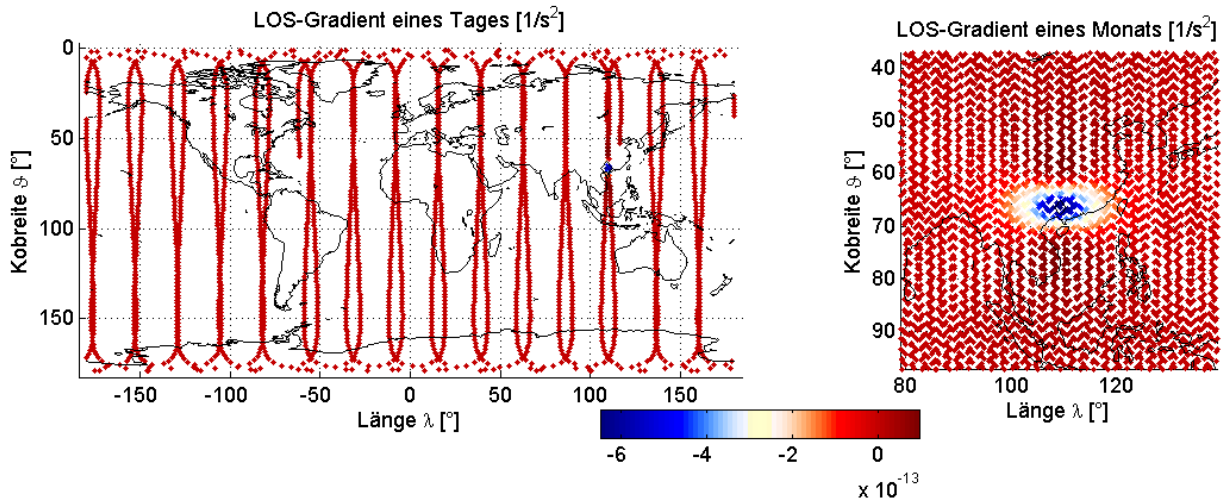


Abbildung 5.6.: Residualer LOS-Gradient in Flugrichtung eines Keplerorbits mit  $I = 89^\circ$  und  $e = 0$ , wobei das Signal durch eine radiale Basisfunktion in der Position  $\diamond$  erzeugt wird

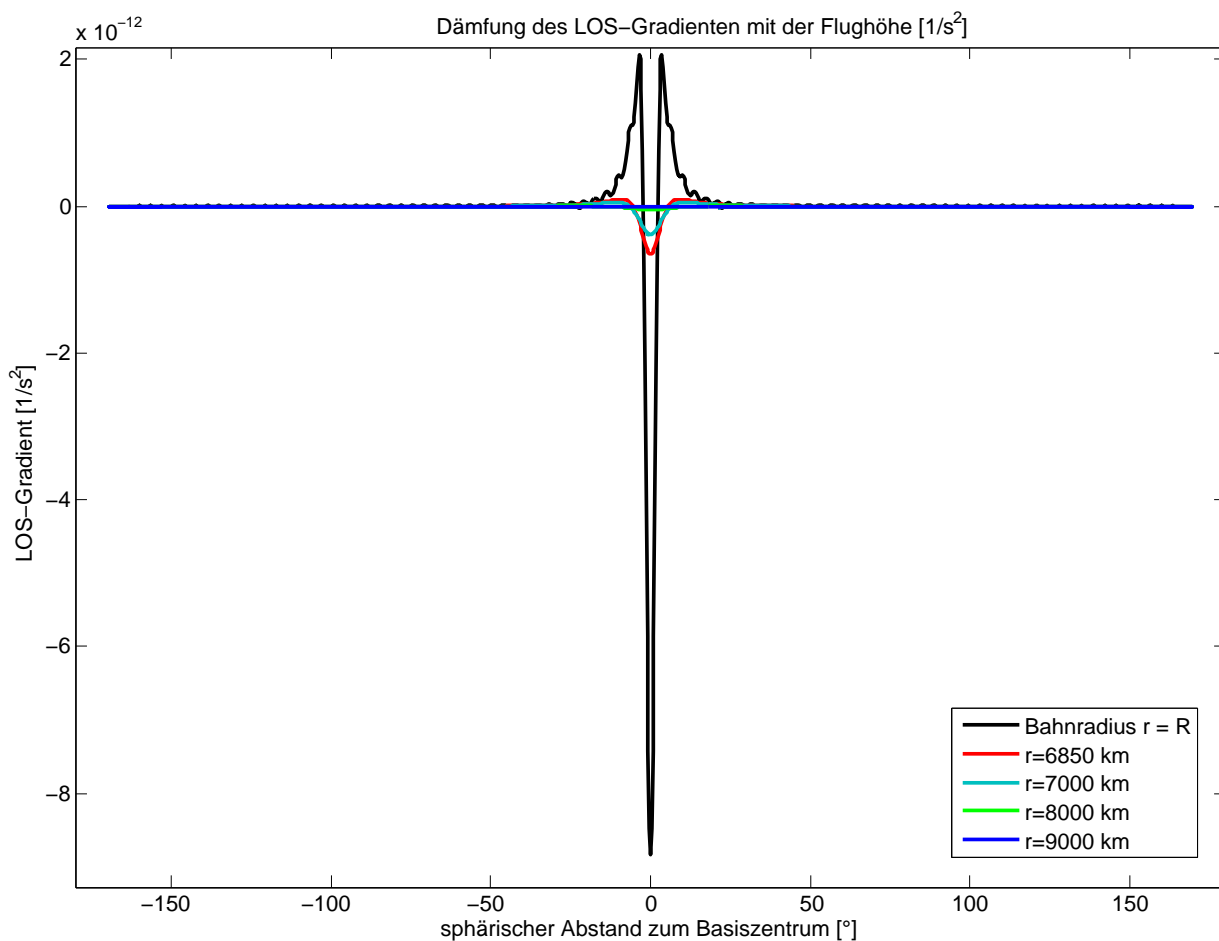


Abbildung 5.7.: Abklingen des LOS-Gradienten in Flugrichtung beim direkten Überflug der Basisfunktion. Für einen negativen sphärischen Abstand fliegt der Satellit auf die Basis zu, bei positiver Distanz verlässt er diese

mit der partiellen Ableitung<sup>4</sup>

$$\frac{\partial \zeta_b}{\partial u} = -\sin u \sin \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \cos u [\cos I \sin \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin I \cos \vartheta_b]. \quad (5.58)$$

Der Bahnradius  $r$  lässt sich mit der Gleichung

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (2.15)$$

nach der wahren Anomalie  $\nu$  und damit nach  $u$  differenzieren, allerdings ist die Anomalie mit den Formeln aus Kaula (2000) für kleine Exzentrizitäten nur schwer vom Perigäumsabstand  $\omega$  zu trennen. Aus diesem Grund wählt man einen Umweg über die exzentrische Anomalie  $E$ , die aus der mittleren Anomalie  $M$ , der Exzentrizität  $e$  und der Keplergleichung

$$M = E - e \sin E \quad (2.13)$$

iterativ berechnet werden kann. Zur Umrechnung in die wahre Anomalie könnte man nach Rothacher (2004) die Formel

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.14)$$

benutzen, stattdessen wird der LOS-Gradient in den Programmen durch die exzentrische Anomalie ausgedrückt. Dazu löst man die Formel nach der wahren Anomalie  $\nu$  auf und erhält

$$\nu = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right). \quad (5.59)$$

Verwendet man die trigonometrischen Halbwinkelsätze

$$\tan \frac{E}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}} \quad (5.60)$$

$$\cos \frac{E}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos E}{2}} \quad (5.61)$$

aus Bartsch (1999), so folgt für die Differentiation der wahren nach der exzentrischen Anomalie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial E} &= 2 \frac{1}{1 + \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E}{2}} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e} \frac{(1-e)+(1+e) \tan^2 \frac{E}{2}}{1-e} \cos^2 \frac{E}{2}} = \frac{\sqrt{1+e} \sqrt{1-e}}{\left[ (1-e) + (1+e) \frac{1-\cos E}{1+\cos E} \right] \left( \frac{1+\cos E}{2} \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\left( \frac{(1-e)(1+\cos E) + (1+e)(1-\cos E)}{1+\cos E} \right) \left( \frac{1+\cos E}{2} \right)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Mit dem Bahnradius  $r = a(1 - e \cos E)$  lässt sich dies weiter vereinfachen

$$\frac{\partial \nu}{\partial E} = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2}, \quad (5.63)$$

weshalb für die Potenzen die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^{-(n+1)}}{\partial u} &= -(n+1) r^{-(n+1)-1} \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{-(n+1)}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial u} = \\ &= \frac{-(n+1)}{r^{n+2}} (ae \sin E) \cdot \frac{r}{a \sqrt{1-e^2}} \cdot 1 = \frac{-(n+1)}{r^{n+1}} \frac{e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \quad (5.64)$$

<sup>4</sup>Im Gegensatz zu der Berechnung des Arguments  $\zeta_b$  (aus dem Skalarprodukt) wirkt sich in dessen Ableitung nach den Keplerelementen die ungenaue Modellierung der Erdrotation aus.

gilt. Die erste Ableitung des Potentials nach dem Argument der Breite lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u} &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) R^{n+1} \left[ \frac{-(n+1)e \sin E}{r^{n+1} \sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + \frac{1}{r^{n+1}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right] = \\ &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Differenziert man dies nochmals nach dem Argument der Breite, so folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} &= \\ &= \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) R^{n+1} \frac{\partial \{r^{-n+1}\}}{\partial u} \cdot \left[ \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + P'_n(\zeta_b) \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right] + \\ &+ \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{\left\{ \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + P'_n(\zeta_b) \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\}}_{=:\xi}. \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung  $\frac{\partial r^{-(n+1)}}{\partial u}$  kann wieder die Formel (5.64) verwendet werden, während für die Hilfsgröße  $\xi$  mehrmals die Kettenregel benötigt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + P'_n(\zeta_b) \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} = \\ &= \frac{-(n+1)e}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) \frac{\partial \sin E}{\partial u} + \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial P_n(\zeta_b)}{\partial u} + \frac{\partial P'_n(\zeta_b)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} = \\ &= \frac{-(n+1)e}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) \frac{\partial \sin E}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{dP'_n(\zeta_b)}{d\zeta_b} \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} = \\ &= \frac{-(n+1)e}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) \cos E \cdot \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} + \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + \\ &\quad + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} = \\ &= -\frac{(n+1)re \cos E}{a(1-e^2)} P_n(\zeta_b) - \frac{(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Wenn man die partiellen Ableitungen nach dem Radius und dem Argument der Breite zusammensetzt, erhält

man für den LOS-Gradienten einer einzelnen Basisfunktion:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial r} \right] + \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} \right] = \\
&= \frac{1}{a} \left[ \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{-(n+1)}{r} P_n(\zeta_b) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{a^2} \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\
&\quad \cdot \underbrace{\left[ \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{-(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n(\zeta_b) + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)}_{\text{Hilfsgröße } \xi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+1)re \cos E}{a(1-e^2)} P_n(\zeta_b) - \frac{(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} \right] = \quad (5.67) \\
&\quad \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial a}}_{\text{aus (5.66)}} \\
&= \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ \frac{-a(n+1)}{r} P_n(\zeta_b) + \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} P_n(\zeta_b) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - \frac{r(n+1)e \cos E}{a(1-e^2)} P_n(\zeta_b) + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} \right] = \\
&= \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re}{a(1-e^2)} \cos E - \frac{a}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Für die vereinfachte Erdrotation um die  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse gilt außerdem  $\frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial u^2} = -\zeta_b = -\cos \varpi$  und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\
&\quad \cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right]. \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Wählt man analog zu der Wigner-Darstellung einen kreisförmigen Orbit mit  $r = a$  und  $e = 0$ , so vereinfacht sich die Formel folgendermaßen:

$$\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} = \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ -(n+1) P_n(\zeta_b) + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b \right]. \quad (5.69)$$

Man kann durch die Einschränkung auf eine Kreisbahn weder die Ableitung der Legendrepolynome noch die Differentiation des Arguments  $\zeta_b$  umgehen, weshalb im Weiteren auf diese Bedingung verzichtet wird.

Für die nichtlineare Optimierung sind wieder die Ableitungen nach den Basisparametern zu bilden. Analog zu

den Formeln (5.17) und (5.21) des Potentials erhält man für den Skalierungsfaktor

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta_b} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} \right\} &= \frac{1}{a^2} \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\ &\cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

bzw. für den Formparameter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_b} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} \right\} &= \frac{\eta_b}{a^2} \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\ &\cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Das Differenzieren nach dem Zentrum der Basisfunktion wird dadurch erschwert, dass diese Werte in dem Argument  $\zeta_b$  und dessen Ableitungen auftreten. Indem man die Ketten- und Produktregel auf den Line-of-Sight Gradienten (5.68) anwendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} \right\} &= \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ (n+1) \frac{\partial P_n(\zeta_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} - \frac{\partial \{ P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b \}}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} + \frac{\partial \left\{ P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right\}}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Dabei lassen sich die partiellen Ableitungen folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n(\zeta_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} &= \frac{dP_n(\zeta_b)}{d\zeta_b} \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \\ \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} &= \frac{dP'_n(\zeta_b)}{d\zeta_b} \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} = \\ &= P''_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \cdot \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} \\ \frac{\partial \{ P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b \}}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} &= \frac{dP'_n(\zeta_b)}{d\zeta_b} \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \cdot \zeta_b + P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = (P''_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P'_n(\zeta_b)) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \\ \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ P''_n(\zeta_b) \cdot \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right\} &= \frac{dP''_n(\zeta_b)}{d\zeta_b} \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 + P''_n(\zeta_b) 2 \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} = \\ &= \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right) \left[ P'''_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right) + 2P''_n(\zeta_b) \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Um den LOS-Gradienten bzw. dessen partielle Ableitungen berechnen zu können, benötigt man insbesondere für kleine Argumente eine stabile Rekursion bis zur dritten Ableitung der Legendrepolynome. Dazu wird die Rekursion der Legendrepolynome

$$P_{n+1}(\zeta) = \frac{2n+1}{n+1} \zeta P_n(\zeta) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\zeta) \quad n \geq 2 \quad (3.7)$$

mehrmals differenziert:

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(\zeta) &= \frac{2n+1}{n+1} [P_n(\zeta) + \zeta P'_n(\zeta)] - \frac{n}{n+1} P'_{n-1}(\zeta) & n \geq 3 \\ P''_{n+1}(\zeta) &= \frac{2n+1}{n+1} [2P'_n(\zeta) + \zeta P''_n(\zeta)] - \frac{n}{n+1} P''_{n-1}(\zeta) & n \geq 4 \\ P'''_{n+1}(\zeta) &= \frac{2n+1}{n+1} [3P''_n(\zeta) + \zeta P'''_n(\zeta)] - \frac{n}{n+1} P'''_{n-1}(\zeta) & n \geq 5. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Aus der Auswertung der Rekursion (3.7) und einer anschließenden Differentiation ergeben sich die Startwerte

$$\begin{aligned} P'_1(\zeta) &= 1 & P'_2(\zeta) &= 3\zeta \\ P''_2(\zeta) &= 3 & P''_3(\zeta) &= 15\zeta \\ P'''_3(\zeta) &= 15 & P'''_4(\zeta) &= 105\zeta. \end{aligned} \quad (5.75)$$

### Zusammenfassung

Sowohl für das Potential als auch die Line-of-Sight Gradiometrie in Flugrichtung ist es möglich, den Einfluss einer einzelnen Basisfunktion oder deren Überlagerung geschlossen durch die Legendre-Darstellung

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \\ &\cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

und die Wigner-Darstellung

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right] \quad (5.57)$$

zu beschreiben, weshalb beide Versionen in der Software implementiert sind. Dabei bezeichnen

$$\zeta_b = \cos u \sin \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin u [\cos I \sin \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin I \cos \vartheta_b] \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \zeta_b}{\partial u} = -\sin u \sin \vartheta_b \cos(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \cos u [\cos I \sin \vartheta_b \sin(\Theta - \Omega + \lambda_b) + \sin I \cos \vartheta_b] \quad (5.58)$$



das Argument der Legendrefunktionen bzw. dessen Ableitung nach dem Argument der Breite und

$$B_{km}^n(\psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \widehat{P}_{nk}(0) i^{k-m} e^{-im\lambda_b} \quad (5.31)$$

$$S_{km}^n(r, I) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I) \quad (5.32)$$

zwei Hilfsfunktionen, welche die Interpretation als Fourierreihe verdeutlichen.

Für die Legendre-Darstellung ist aufgrund der geringeren Anzahl an Summanden eine deutlich kürzere Rechenzeit zu erwarten, wobei ein entsprechender Test im Kapitel 8 durchgeführt wird. Ein weiterer Vorteil ist die Verwendung eines beliebigen Orbits, zumal sich das Argument der Legendrepolynome  $\cos \varpi$  ohne Kenntnis der Keplerelemente aus dem Skalarprodukt zweier Positionsvektoren berechnen lässt. Dieser Vorteil geht zwar bei der Berechnung des LOS-Gradienten und dessen Ableitungen nach den Basisparametern verloren, trotzdem ist man weniger eingeschränkt als in der Wigner-Darstellung, in der eine exakte Kreisbahn erforderlich ist.

Auf der anderen Seite sind die partiellen Ableitungen sowohl nach den Parametern der Basisfunktion als auch nach den Bahnelementen wesentlich einfacher in der Wigner-Darstellung zu bilden, da die Formel in ein Produkt einfacher, differenzierbarer Funktionen aufgespalten wird. Für den Line-of-Sight Gradienten im GRACE-Szenario genügt es zum Beispiel eine Exponentialfunktion und eine Potenz von  $r$  zu differenzieren, während in der Legendre-Darstellung die Ableitungen deutlich aufwendiger zu bestimmen sind. Ebenso elegant erhält man in der Wigner-Darstellung für alle Beobachtungen die Ableitung nach den Parametern der Basis, indem man die Terme

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \eta_b} &= \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \widehat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \lambda_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \widehat{P}_{nk}(0) (-im) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \vartheta_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \frac{d\widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b)}{d\vartheta_b} \widehat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \\ \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial \sigma_b} &= \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \widehat{P}_{nk}(0) i^{k-m} \exp(-im\lambda_b) \end{aligned} \quad (5.34)$$

in die Dreifachsummen einsetzt. Die entsprechenden Ableitungen der Legendre-Darstellung sind dagegen von der gewählten Beobachtung abhängig und die Berechnung erfordert mehrmals die Produkt- und Kettenregel zur Differentiation. Zur Veranschaulichung seien hier nochmal die Ableitungen bezüglich der Positionen

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} \right\} = \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a^2} \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[ (n+1) \frac{\partial P_n(\zeta_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \left\{ P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right\} - \frac{\partial \{ P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b \}}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} + \frac{\partial \left\{ P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right\}}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \right] \end{aligned}$$

gezeigt und auf die Formeln (5.20) bzw. (5.58) und (5.73) verwiesen.



## 6. Range-Rate Beobachtungen

Die wichtigste Messgröße der GRACE-Mission ist die Range-Rate, also die zeitliche Veränderung des Abstands zwischen den zwei Satelliten. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Zusammenhang zwischen den residualen Schwerefeldparametern und den Messungen herzustellen, ohne auf Pseudobeobachtungen wie das Energieintegral oder die LOS-Gradiometrie zurückzugreifen. Im Gegensatz zu den letztgenannten Ansätzen kann die Range-Rate nicht mehr als eine in-situ Messung des aktuellen Potentials zu einem Zeitpunkt aufgefasst werden, da die Potentialwerte der vorangegangenen Zeitpunkte jeweils durch die verursachte Störung des Orbits in die Beobachtung einfließen.

Um die Bahnänderungen in Abhängigkeit von den Parametern der radialen Basisfunktionen zu beschreiben, werden in der Regel Variationsgleichungen gelöst. Dabei muss in jeder Iteration der (geplanten) Optimierung und für jeden Parameter eine numerische Integration eines Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung durchgeführt werden.

Die vielen Integrationen können durch eine geschlossene Lösung vermieden werden, die allerdings zusätzliche Annahmen erforderlich macht. Betrachtet man einen Satelliten in einem rotierenden Koordinatensystem, so kann die Bahnänderung durch eine residuale Störkraft mit der Hill-Differentialgleichung beschrieben werden. Für die Lösung werden die relativen Abweichungen bezüglich einer Referenzbahn durch eine Laplace-Transformation für den homogenen und den inhomogenen Anteil bestimmt. Durch die Laplace-Transformation der Wigner-Darstellung entsteht eine geschlossene Lösung der Bahnstörungen in Abhängigkeit von den Parametern der Basis und des Orbits. Nach der analogen Berechnung für den zweiten Satelliten erhält man durch eine Transformation in ein gemeinsames Koordinatensystem und die Bildung der Differenzen eine Approximation der Range-Rate. Diese kann nach den Parametern aller Basisfunktionen differenziert werden, indem man in die Koeffizienten der Formel die Ableitung der Hilfsfunktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  einsetzt.

### 6.1. Linearisierung der Range-Rate

In der GRACE-Mission fliegen zwei Satelliten auf sehr ähnlichen, fast kreisförmigen Bahnen ( $e < 0.005$ ) hintereinander her, wobei durch die Inklinationen von  $I \approx 89^\circ$  eine nahezu globale Überdeckung der Bodenspuren gewährleistet wird. Zwischen den Satelliten existiert ein Messsystem, das den Abstand  $\rho$  und dessen zeitliche Änderung  $\dot{\rho}$ , also die Range-Rate, mit Hilfe von Mikrowellen des K-Bands in einer sehr hohen zeitlichen Auflösung bestimmt (vgl. Abbildung 6.1). Im Weiteren wird als Beobachtungsgröße nur die genauere Range-Rate behandelt und zur leichteren Unterscheidung die Positionen der Satelliten mit  $\vec{x}_i = (x_{i=1}, x_{i=2}, x_{i=3})$  und  $\vec{y}_i = (y_{i=1}, y_{i=2}, y_{i=3})$  bezeichnet. Die Range-Rate ist eine geometrische Größe aus beiden Satellitenbahnen, welche gemäß der Formel (5.39) durch das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left\langle \dot{\vec{X}}_{LOS}, \hat{e}_{LOS} \right\rangle = \left( \dot{\vec{y}}_i - \dot{\vec{x}}_i \right)^\top \frac{(\vec{y}_i - \vec{x}_i)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|} = \\ &= \frac{(\dot{y}_{i=1} - \dot{x}_{i=1})(y_{i=1} - x_{i=1}) + (\dot{y}_{i=2} - \dot{x}_{i=2})(y_{i=2} - x_{i=2}) + (\dot{y}_{i=3} - \dot{x}_{i=3})(y_{i=3} - x_{i=3})}{\sqrt{(y_{i=1} - x_{i=1})^2 + (y_{i=2} - x_{i=2})^2 + (y_{i=3} - x_{i=3})^2}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

berechnet werden kann. Um Schreibarbeit zu vermeiden, wird im weiteren Verlauf nur der Satellit mit der Position  $\vec{x}_i$  betrachtet, solange die jeweiligen Gleichungen für den zweiten Körper identisch sind. Die Bewegungsgleichung des Satelliten wird nach Newton durch die Differentialgleichung

$$\vec{F} = \frac{d(m\dot{\vec{x}}_i)}{dt} = m \frac{d\dot{\vec{x}}_i}{dt} + \dot{\vec{x}}_i \frac{dm}{dt} \approx m\ddot{\vec{x}}_i \quad (2.20)$$

beschrieben. Vernachlässigt man die Massenänderung und beachtet, dass die Kraft  $\vec{F}$  im Allgemeinen von der Position  $\vec{x}$ , der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}$ , der Zeit  $t$ , sowie weiteren Parametern  $\vec{P} = (\vec{\varphi}, \vec{p})$  abhängen kann, so ergibt

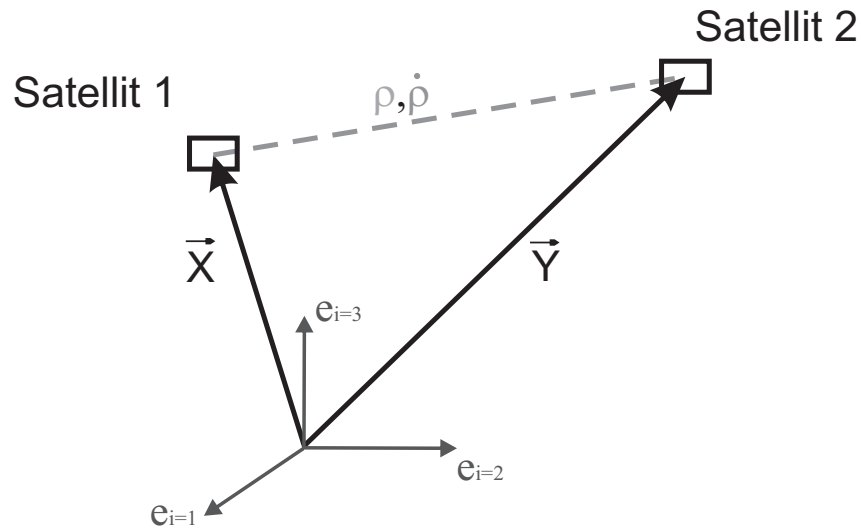


Abbildung 6.1.: Beobachtungsmodell von GRACE

sich die neue Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, \vec{P}) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, (\vec{\varphi}, \vec{p})). \quad (6.2)$$

Die Parameter  $\vec{P}$  beinhalten unter anderem ein Modell des Erdschwerefeldes, z.B. in der Form einer sphärisch-harmonischen Reihenentwicklung, die direkten und indirekten Gezeiten oder die Atmosphäre. In den Berechnungen wird ein Teil der Parameter als bekannt vorausgesetzt und mit der Abkürzung  $\vec{\varphi}$  bezeichnet, während die Werte von  $\vec{p} = \{p_1, p_2, \dots\}$  gesucht werden. Linearisiert man das Modell mit den Näherungswerten  $\vec{p}^{[i]}$  in einer Taylorreihe, wobei  $i = 0, 1, 2, \dots$  die jeweilige Iteration der Optimierung angibt, so erhält man formal

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]}) + \frac{\partial \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta \vec{p}^{[i]} + \mathcal{O}((\Delta \vec{p})^2)$$

beziehungsweise nach einem Abbruch nach dem linearen Term

$$\Delta \dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]}) \approx \frac{\partial \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta \vec{p}^{[i]}. \quad (6.3)$$

Dabei ergibt sich die Range-Rate  $\dot{\rho}$  direkt aus der (kalibrierten) Messung des K-Bands und  $\dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})$  aus einer Orbitintegration mit dem besten Modell aller berücksichtigten gravitativen und nicht-gravitativen Effekte inklusive der Näherungswerte von  $\vec{p}^{[i]}$ .

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist die Bestimmung der partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}}$  bezüglich der Parameter der radialen Basisfunktionen

- entweder durch die numerische Lösung der sogenannten Variationsgleichungen
- oder durch eine neu entwickelte, geschlossene Lösung, welche auf der Idee von Referenzbahnen und der Hill-Differentialgleichung beruht.

### 6.1.1. Variationsgleichungen

Für die Ableitung der Range-Rate differenziert man formal die Darstellung (6.1) nach einem beliebigen Para-

meter  $p_\ell^{[i]}$  des (residualen) Modells:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} = \frac{\left( \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)^\top (\vec{y}_i - \vec{x}_i) + \left( \dot{y}_i - \dot{x}_i \right)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|} - \dot{\rho} \frac{(\vec{y}_i - \vec{x}_i)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|^2}. \quad (6.4)$$

Um die Positionen bzw. deren partielle Ableitungen (nach der Zeit und nach den Parametern) zu erhalten, sind für beide Satelliten jeweils Differentialgleichungen nach dem Vorbild (6.2) zu lösen, deren dominierender Term der Gradient des Schwerfeldes  $V$  der Erde ist:

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, \vec{P}) \approx \vec{\nabla} V(\vec{x}_i, (\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})). \quad (6.5)$$

Aufgrund des konservativen Kraftfeldes und der Beschränkung auf ein zeitlich konstantes Potential entfallen dabei die Abhängigkeiten von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}_i$  und der Zeit  $t$ . In der residualen Analyse wird das Potential  $V$  wieder in ein Referenzfeld  $T_{ref}(\vec{x}_i, \vec{\varphi})$  und eine residuale Größe  $\delta T(\vec{x}_i, \vec{p}^{[i]})$  aufgespalten

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{\nabla} T_{ref}(\vec{x}_i, \vec{\varphi}) + \vec{\nabla} \delta T(\vec{x}_i, \vec{p}^{[i]}). \quad (6.6)$$

Differenziert man die Gleichung nach einem Parameter  $p_\ell^{[i]}$ , so folgt daraus mit der Kettenregel

$$\frac{\partial \ddot{\vec{x}}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} = \frac{\partial \vec{\nabla} T_{ref}(\vec{x}_i, \vec{\varphi})}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} + \frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{x}_i, \vec{p}^{[i]})}{\partial p_\ell^{[i]}}.$$

Indem man die Reihenfolge der Ableitungen im ersten Summanden vertauscht und in dem Term

$$\frac{\partial \vec{\nabla} T_{ref}}{\partial \vec{x}_i} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} T_{ref}) = \nabla^2 T_{ref}$$

den Tensor des Referenzfeldes erkennt, erhält man die **Variationsgleichung**

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}}}{\partial t^2} = \nabla^2 T_{ref}(\vec{x}_i, \vec{\varphi}) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} + \frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{x}_i, \vec{p}^{[i]})}{\partial p_\ell^{[i]}}. \quad (6.7)$$

Im Unterschied zu den üblichen Variationsgleichungen aus Ballani (1988), Scheinert (1996) oder Beutler (2005) wird hier für das Residualfeld auch eine direkte Ableitung nach den Parametern  $\frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{x}, \vec{p}^{[i]})}{\partial p_\ell^{[i]}}$  verwendet. Der Tensor  $\nabla^2 T_{ref}$  hängt dabei nicht von den Parametern  $\vec{p}^{[i]}$  ab und ist im (kartesischen) Inertialsystem durch den Operator

$$\nabla^2 T_{ref}(\vec{x}, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} \end{pmatrix} T_{ref}(\vec{x}, \vec{\varphi}) \quad (6.8)$$

gegeben. Stellt man das (Referenz-)Potential durch eine sphärisch-harmonische Synthese

$$T(\lambda, \vartheta, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (3.52)$$

dar, so erhält man den Tensor

$$(\nabla^2 T)_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} & \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda \partial \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta \partial \lambda} - \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

in einem lokalen Koordinatensystem. Die  $\hat{e}_{l=1}$ -Achse des Systems zeigt dabei radial nach außen zum Satelliten, die  $\hat{e}_{l=2}$ -Achse weist tangential in  $\vartheta$ -Richtung und die dritte Komponente ist orthogonal zu den anderen in  $\lambda$ -Richtung orientiert (Scheinert, 1996, Meyer, 2005).

Für die Lösung der Variationsgleichung muss der Tensor in das raumfeste Koordinatensystem transformiert werden, was durch eine beidseitige Multiplikation mit einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  geschieht

$$(\nabla^2 T_{ref}) = \mathbf{R}^\top (\nabla^2 T)_l \mathbf{R}. \quad (6.10)$$

Unter Vernachlässigung von Polbewegung, Nutation und Präzession kann die Drehung durch die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_1(\pi) \mathbf{R}_3\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \mathbf{R}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}_3(\lambda) \mathbf{R}_3(\Theta) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \cos(\lambda + \Theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \sin(\lambda + \Theta) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \cos(\lambda + \Theta) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \sin(\lambda + \Theta) & -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ -\sin(\lambda + \Theta) & \cos(\lambda + \Theta) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.11)$$

realisiert werden (Meyer, 2005).

Die Variationsgleichungen (6.7) stellen für jeden Parameter  $p_\ell^{[i]}$  ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für die Variable  $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}}$  dar, welches mit geeigneten Startwerten analog zu einer Orbitintegration numerisch gelöst werden kann.

Nach Beutler (2005) wird in den Variationsgleichungen der Himmelsmechanik zwischen dynamischen und nicht-dynamischen Parametern unterschieden. Für alle dynamischen Parameter – wie z.B. die Koeffizienten eines Schwerefeldes ( $\Delta \bar{S}_{nm}, \Delta \bar{C}_{nm}$ ), die Massen der Planeten oder die Parameter eines Residualfeldes – werden die Nullvektoren

$$\left( \frac{\partial \vec{x}_i(t_0)}{\partial p_\ell^{[i]}}, \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i(t_0)}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)^\top = \vec{0} \quad (6.12)$$

als Startwerte verwendet. In der Analyse von Orbitbeobachtungen durch radiale Basisfunktionen folgt daraus, dass die approximierten Ableitungen mit einer falschen „Richtungsinformation“ starten, wenn die Basis am Bogenanfang lokalisiert ist. Durch viele (kurze) Bahnbögen in auf- und absteigender Richtung wird dieser Fehler zum Teil kompensiert, es empfiehlt sich jedoch ein zusätzliches Randgebiet ohne Basisfunktionen für die Integrationen einzuführen, in dem die partiellen Ableitungen jeweils näherungsweise verschwinden.

Die Variationsgleichungen bilden die klassische Methode zur Parameterbestimmung, erfordern aber für die beabsichtigte nichtlineare Optimierung sehr viele numerische Integrationen. Der Grund dafür ist die Notwendigkeit,

- in jedem Iterationsschritt
- für jeden Parameter
- und für jeden Bogen

ein Differentialgleichungssystem zu lösen, wobei wegen den unterschiedlichen Größenordnungen und für eine stabile Lösung eine getrennte Integration zu empfehlen ist.

Durch die MATLAB-internen Integratoren (*ode23*, *ode45*, *ode113*, ...) mit ihrer adaptiven Schrittweite wird der Rechenaufwand weiter erhöht, da der Tensor  $\nabla^2 T_{ref}$  und damit auch die Legendrefunktionen bis Grad und Ordnung  $N$  für jeden Parameter  $p_\ell^{[i]}$  neu berechnet werden, obwohl es sich immer um die Terme des gleichen Referenzfeldes handelt.

Nach Beutler (2005) existiert noch eine alternative Möglichkeit zur Lösung der Gleichung (6.7), welche durch eine numerische Umsetzung der „Variation der Konstanten“ realisiert wird. Dabei wird in jeder Iteration ein Differentialgleichungssystem je Bogen gelöst, während die unterschiedlichen Parameter durch die numerisch effizientere Quadratur umgesetzt werden. Beide Ansätze werden als Projektarbeit von Heng Zhu implementiert und im Kapitel 8 mit dem geschlossenen Ansatz verglichen.

### 6.1.2. Referenzbahn-Ansatz

Um den Aufwand der numerischen Integration zu vermeiden, werden die partiellen Ableitungen durch eine geschlossene Formel approximiert. Dazu führt man für beide Satelliten jeweils eine Referenzbahn  $(\vec{X}_i, \dot{\vec{X}}_i)$  bzw.  $(\vec{Y}_i, \dot{\vec{Y}}_i)$  ein, welche ohne die gesuchten Parameter des residualen Feldes bestimmt werden. Entwickelt man die Range-Rate aus der Darstellung (6.1) in einer Taylorreihe, so erhält man

$$\dot{\rho} \approx \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{Y}_i} \right)^\top \Delta \vec{y}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{X}_i} \right)^\top \Delta \vec{x}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{y}}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{x}}_i + \dots \quad (6.13)$$

Dabei stellen die Größen  $\Delta \vec{x}_i := (\vec{x}_i - \vec{X}_i)$ ,  $\Delta \dot{\vec{x}}_i := (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}}_i)$  usw. die die Differenzen zwischen der jeweiligen Referenzbahn und einer „wahren“ Bahn dar, wobei nur der letztgenannte Orbit mit den Parametern  $\vec{p}^{[1]}$  berechnet wird. Die Vektoren der Differenzen und deren Komponenten werden im Weiteren auch als **Bahnstörungen** oder **Bahnabweichungen** bezeichnet.

Zur Berechnung der Ableitungen verwendet man die Darstellung (6.1) – wobei die Orbitalelemente durch ihre Näherung ersetzt werden – und differenziert nach den ersten Komponenten der Positionen und Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=1}} = \frac{(\dot{Y}_{i=1} - \dot{X}_{i=1})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^3} (Y_{i=1} - X_{i=1}) \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Y}_{i=1}} = \frac{(Y_{i=1} - X_{i=1})}{\sqrt{(Y_{i=1} - X_{i=1})^2 + (Y_{i=2} - X_{i=2})^2 + (Y_{i=3} - X_{i=3})^2}} = \frac{(Y_{i=1} - X_{i=1})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \quad (6.14b)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X_{i=1}} = - \left( \frac{(\dot{Y}_{i=1} - \dot{X}_{i=1})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^3} (Y_{i=1} - X_{i=1}) \right) = - \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=1}} \quad (6.14c)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{X}_{i=1}} = - \frac{(Y_{i=1} - X_{i=1})}{\sqrt{(Y_{i=1} - X_{i=1})^2 + (Y_{i=2} - X_{i=2})^2 + (Y_{i=3} - X_{i=3})^2}} = - \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Y}_{i=1}}. \quad (6.14d)$$

Die zweiten und dritten Komponenten ergeben sich analog, weshalb auf deren Angabe verzichtet werden soll. Kombiniert man die Ableitungen nach den Positionen  $(Y_{i=1}, Y_{i=2}, Y_{i=3})$  zu einem Vektor, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=1}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=2}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=3}} \right] &= \begin{pmatrix} \frac{(\dot{Y}_{i=1} - \dot{X}_{i=1})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^3} (Y_{i=1} - X_{i=1}) \\ \frac{(\dot{Y}_{i=2} - \dot{X}_{i=2})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^3} (Y_{i=2} - X_{i=2}) \\ \frac{(\dot{Y}_{i=3} - \dot{X}_{i=3})}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^3} (Y_{i=3} - X_{i=3}) \end{pmatrix}^\top = \\ &= \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} - \left( \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\| \|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \begin{pmatrix} Y_{i=1} - X_{i=1} \\ Y_{i=2} - X_{i=2} \\ Y_{i=3} - X_{i=3} \end{pmatrix}^\top = \\ &= \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_{3 \times 3}$  und dem dyadischen Produkt der Differenzvektoren

$$\begin{aligned} (\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top &= \\ &= \begin{pmatrix} (Y_{i=1} - X_{i=1})(Y_{i=1} - X_{i=1}) & (Y_{i=1} - X_{i=1})(Y_{i=2} - X_{i=2}) & (Y_{i=1} - X_{i=1})(Y_{i=3} - X_{i=3}) \\ (Y_{i=2} - X_{i=2})(Y_{i=1} - X_{i=1}) & (Y_{i=2} - X_{i=2})(Y_{i=2} - X_{i=2}) & (Y_{i=2} - X_{i=2})(Y_{i=3} - X_{i=3}) \\ (Y_{i=3} - X_{i=3})(Y_{i=1} - X_{i=1}) & (Y_{i=3} - X_{i=3})(Y_{i=2} - X_{i=2}) & (Y_{i=3} - X_{i=3})(Y_{i=3} - X_{i=3}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Berechnung für den zweiten Satelliten ergibt aufgrund der Symmetrie

$$\left[ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X_{i=1}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X_{i=2}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X_{i=3}} \right] = - \left[ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=1}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=2}}, \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_{i=3}} \right]. \quad (6.17)$$

Für die Ableitungen nach den Geschwindigkeiten erhält man mit den Gleichungen (6.14c) und (6.14d) die Vektoren:

$$\left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial Y_{i=1}}, \frac{\partial \rho}{\partial Y_{i=2}}, \frac{\partial \rho}{\partial Y_{i=3}} \right] = \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \quad (6.18)$$

$$\left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top = - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} = - \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top. \quad (6.19)$$

Setzt man die Differentiale in die Taylorreihe (6.13) und bricht nach dem linearen Glied ab, so folgt daraus für die Range-Rate

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &\approx \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{y}}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{x}}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{y}}_i + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{x}}_i = \\ &= \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{y}}_i - \underbrace{\left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{x}}_i}_{(6.17)} + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{y}}_i - \underbrace{\left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{X}}_i} \right)^\top \Delta \dot{\vec{x}}_i}_{(6.19)} = \\ &= \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i) + \left( \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\vec{Y}}_i} \right)^\top (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i) = \\ &= \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i) \\ &\quad + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Da die beiden Referenzbahnen  $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i)$  aus einer Orbitintegration im Referenzfeld ohne die residualen Parameter  $p^{[i]}$  berechnet werden, ergeben sich die partiellen Ableitungen, indem man die Abweichungen  $(\Delta \dot{\vec{x}}_i, \Delta \dot{\vec{y}}_i)$  differenziert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} &= \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \frac{\partial (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}} \\ &\quad + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \frac{\partial (\Delta \dot{\vec{y}}_i - \Delta \dot{\vec{x}}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Bestimmung der Bahnabweichungen als Funktion der Zentren, Formparameter und Skalierungsfaktoren der radialen Basisfunktionen, also

$$p_\ell^{[i]} \in \{\eta_1^{[i]}, \lambda_1^{[i]}, \vartheta_1^{[i]}, \sigma_1^{[i]}, \eta_2^{[i]}, \lambda_2^{[i]}, \dots, \vartheta_B^{[i]}, \sigma_B^{[i]}\},$$

wobei alle anderen Ursachen der Bahnstörungen vernachlässigt werden. Dazu wird der Satellitenorbit in einem rotierenden Koordinatensystem betrachtet, welches im nächsten Schritt diskutiert werden soll.



## 6.2. Hill-Theorie

Für die Bahnänderungen durch residuale Störkräfte wurde von George William Hill (1838–1914) die **Hill-Theorie** entwickelt, deren ursprüngliche Anwendung die Beschreibung der Mondbahn darstellt (Meyer, 2005). Dabei wird die inhomogene, nichtlineare Differentialgleichung der Bewegung (6.2)

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t, \vec{P}) \quad (6.6)$$

durch geeignete Näherungen so linearisiert, dass eine geschlossene Lösung möglich ist.

Die in der Literatur aufgeführten Herleitungen der Hill-Differentialgleichungen unterscheiden sich in der gewählten Motivation und der Reihenfolge der einzelnen Näherungen. Hier soll die Methode von Scheinert (1996) vorgestellt werden, in welcher die mathematisch-physikalischen Approximationen jeweils nachträglich mit einer geometrischen Interpretation versehen werden, wobei der Ansatz erst am Ende auf den sphärischen Fall reduziert wird.

Analog zu der Gleichung (5.1) kann eine Bewegungsgleichung in jedem rotierenden System mit dem (zeitlich variablen) Rotationsvektor  $\vec{\omega}_H = \vec{\omega}_H(t)$  und unter Berücksichtigung der Scheinkräfte dargestellt werden:

$$\ddot{\vec{x}}_H = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_H, \dot{\vec{x}}_H, t, \vec{P}) - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times \vec{x}_H) - 2\vec{\omega}_H \times \dot{\vec{x}}_H - \dot{\vec{\omega}}_H \times \vec{x}_H. \quad (6.22)$$

Im Ansatz von Hill wird der Ursprung ins Massenzentrum der Erde gelegt, die  $\hat{e}_{H=1}$ -Achse zeigt radial zum Satelliten, die  $\hat{e}_{H=3}$ -Achse ist senkrecht zur Bahnebene und die  $\hat{e}_{H=2}$ -Achse ergänzt das Rechtssystem und ist ungefähr parallel zur Flugrichtung<sup>1</sup>. Dieses Koordinatensystem entspricht dem bisherigen Satellitensystem „S“, die abweichende Notation „H“ wird erst durch die Einführung einer Referenzbahn im weiteren Verlauf begründet.

Die Formel (6.22) beschreibt eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die im Allgemeinen zeitlich variable Koeffizienten aufweist. Beschränkt man sich auf die Störkraft eines zeitlich konstanten Schwerfeldes, so lässt sich die Beschleunigung durch den Gradienten

$$\frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}_H, \dot{\vec{x}}_H, t, \vec{P}) = \vec{\nabla} V(\vec{x}_H, (\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})) \quad (6.23)$$

darstellen, welcher aufgrund seiner Definition weder von der Geschwindigkeit noch von der Zeit abhängt. Für eine Linearisierung entwickelt man die die Beschleunigung mit den Näherungswerten  $\{\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]}\}$  – ohne die Angabe der Parameter  $\vec{\varphi}$  des Referenzfeldes – in einer Taylorreihe

$$\vec{\nabla} V(\vec{x}_H, \vec{p}) = \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]}) + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{X}_H} (\vec{x}_H - \vec{X}_H) + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} (\vec{p} - \vec{p}^{[i]}) + \dots \quad (6.24)$$

und setzt die linearen Anteile in die Bewegungsgleichung ein. Erweitert man die Position bzw. die Geschwindigkeit in den Beschleunigungen der Scheinkräfte durch den Term  $\vec{x}_H = (\vec{x}_H - \vec{X}_H + \vec{X}_H)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}}_H = & \left( \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]}) + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{X}_H} (\vec{x}_H - \vec{X}_H) + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} (\vec{p} - \vec{p}^{[i]}) \right) \\ & - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times (\vec{x}_H - \vec{X}_H + \vec{X}_H)) - 2\vec{\omega}_H \times (\dot{\vec{x}}_H - \dot{\vec{X}}_H + \dot{\vec{X}}_H) - \dot{\vec{\omega}}_H \times (\vec{x}_H - \vec{X}_H + \vec{X}_H). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Durch Umordnen der Terme folgt daraus

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}}_H = & \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]}) - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times \vec{X}_H) - 2\vec{\omega}_H \times \dot{\vec{X}}_H - \dot{\vec{\omega}}_H \times \vec{X}_H \\ & + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{X}_H} (\vec{x}_H - \vec{X}_H) + \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} (\vec{p} - \vec{p}^{[i]}) \\ & - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times (\vec{x}_H - \vec{X}_H)) - 2\vec{\omega}_H \times (\dot{\vec{x}}_H - \dot{\vec{X}}_H) - \dot{\vec{\omega}}_H \times (\vec{x}_H - \vec{X}_H). \end{aligned} \quad (6.26)$$

<sup>1</sup>In Meyer (2005) wird das Koordinatensystem dagegen so gewählt, das die  $\hat{e}_{H=3}$ -Achse in Richtung des Satelliten und die  $\hat{e}_{H=1}$ -Achse in Flugrichtung zeigt, was zu einer zyklischen Vertauschung aller Komponenten führt.

Die erste Zeile der Differentialgleichung entspricht der ursprünglichen Bewegungsgleichung, allerdings dargestellt für den Referenzorbit, und kann daher durch die linke Seite von

$$\ddot{\vec{X}}_H = \vec{\nabla}V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]}) - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times \vec{X}_H) - 2\vec{\omega}_H \times \dot{\vec{X}}_H - \dot{\vec{\omega}}_H \times \vec{X}_H \quad (6.27)$$

ersetzt werden. Verwendet man außerdem für alle Differenzen der beiden Bahnen die Schreibweise  $\Delta\xi$ , so vereinfacht sich die Formel zu

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\vec{x}}_H = \ddot{\vec{x}}_H - \ddot{\vec{X}}_H = & \frac{\partial\vec{\nabla}V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial\vec{X}_H} \Delta\vec{x}_H + \frac{\partial\vec{\nabla}V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial\vec{p}^{[i]}} \Delta\vec{p}^{[i]} \\ & - \vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times \Delta\vec{x}_H) - 2\vec{\omega}_H \times \Delta\dot{\vec{x}}_H - \dot{\vec{\omega}}_H \times \Delta\vec{x}_H. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Um in der Differentialgleichung konstante Koeffizienten zu erhalten, beschränkt man sich auf Referenzbahnen mit vernachlässigbarer Exzentrizität. In diesem Fall ergibt sich ein konstanter Rotationsvektor  $\vec{\omega}_H$

$$\vec{\omega}_H = (0, 0, \bar{n})^\top, \quad (6.29)$$

der mit der mittleren Bewegung  $\bar{n}$  eines fiktiven Satelliten in der Position  $\vec{X}_H$  dargestellt werden kann. Geometrisch bedeutet dies, dass der Vektor  $\vec{\omega}_H$  eine zeitlich konstante Bahnebene für die Referenzbahn definiert. Üblicherweise identifiziert man die Position  $\vec{X}_H$  mit einer der Achsen des rotierenden Koordinatensystems, wobei in dieser Arbeit die  $\hat{e}_{H=1}$ -Achse gewählt wird. Der Rotationsvektor ist entsprechend parallel zu der  $\hat{e}_{H=3}$ -Achse, wodurch die Referenzbahn automatisch zu einer Kreisbahn vereinfacht wird (vgl. Grafik 6.2). Die Komponenten der Bahnstörung  $\Delta\vec{x}_H = (\Delta\vec{x}_{H=1}, \Delta\vec{x}_{H=2}, \Delta\vec{x}_{H=3})^\top$  im rotierenden Hill-System geben zu jedem Zeitpunkt die Abweichung zwischen dem wahren Orbit und der Position  $\vec{X}_H$  des fiktiven Satelliten auf der Referenzbahn wieder.

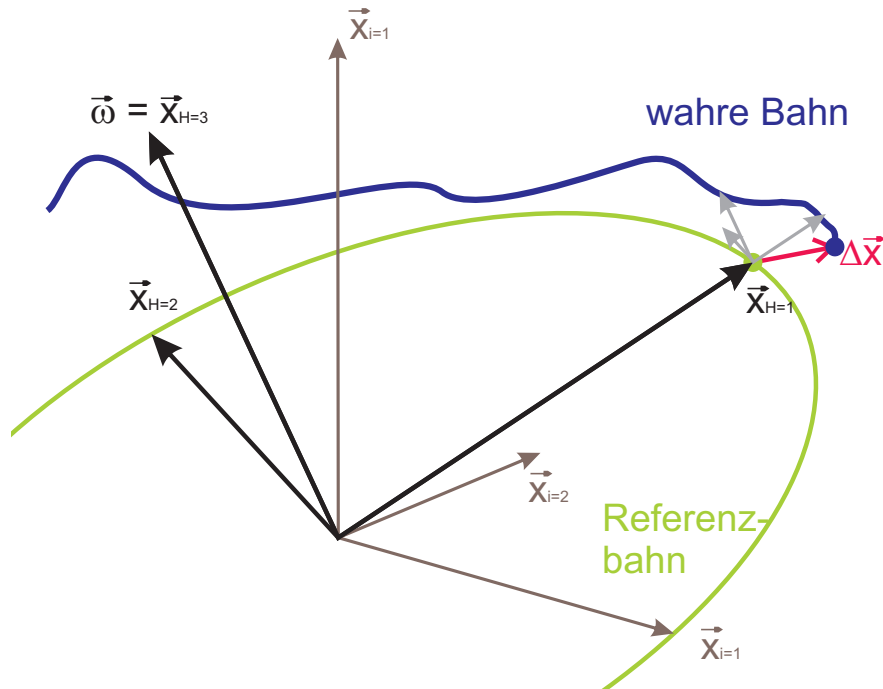


Abbildung 6.2.: Schematische Darstellung des Hill-Systems mit dem rotierenden Koordinatensystem  $(\vec{x}_{H=1}, \vec{x}_{H=2}, \vec{x}_{H=3})$  und dem Inertialsystem  $(\vec{x}_{i=1}, \vec{x}_{i=2}, \vec{x}_{i=3})$

Bildet man die Produkte der Bahnstörung mit dem Rotationsvektor, so erhält man für die Beschleunigung der

Scheinkräfte:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}}_H \times \Delta \vec{x}_H &= \vec{0} \\
-\vec{\omega}_H \times (\vec{\omega}_H \times \Delta \vec{x}_H) &= \bar{n}^2 \begin{pmatrix} \Delta x_{H=1} \\ \Delta x_{H=2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
-2(\vec{\omega}_H \times \Delta \dot{\vec{x}}_H) &= 2\bar{n} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_{H=2} \\ -\Delta \dot{x}_{H=1} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Neben dem konstanten Rotationsvektor und der kreisförmigen Referenzbahn werden noch zwei zusätzliche Approximationen angebracht, um die geschlossene Lösung zu ermöglichen. Zunächst ersetzt man den Tensor des wahren Schwerfeldes  $\nabla^2 V = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = \frac{\partial \vec{\nabla}V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{X}_H}$  durch eine sphärische Näherung, also eine Punktmasse im Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned}
V_0(\vec{X}_H) &= \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{(X_{H=1} - 0)^2 + (X_{H=2} - 0)^2 + (X_{H=3} - 0)^2}} \\
\vec{\nabla}V_0(\vec{X}_H) &= -\frac{GM}{\sqrt{X_{H=1}^2 + X_{H=2}^2 + X_{H=3}^2}^3} \begin{pmatrix} X_{H=1} \\ X_{H=2} \\ X_{H=3} \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \vec{\nabla}V_0(\vec{X}_H)}{\partial \vec{X}_H} &= \frac{GM}{r^5} \begin{pmatrix} 3X_{H=1}^2 - r^2, & 3X_{H=1}X_{H=2}, & 3X_{H=1}X_{H=3} \\ 3X_{H=2}X_{H=1}, & 3X_{H=2}^2 - r^2, & 3X_{H=2}X_{H=3} \\ 3X_{H=3}X_{H=1}, & 3X_{H=3}X_{H=2}, & 3X_{H=3}^2 - r^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Im rotierenden Koordinatensystem gilt dann  $X_{H=2} = X_{H=3} = 0$  und  $X_{H=1} = r$  und  $\bar{n} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ , weshalb sich der Tensor des Referenzfeldes zu

$$\frac{\partial \vec{\nabla}V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{X}_H} \approx \vec{\nabla}(\vec{\nabla}V_0(\vec{X}_H)) = \bar{n}^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

vereinfacht. Die letzte fehlende Größe der Gleichung (6.28) ist die Ableitung des Modellpotentials nach den gesuchten Parametern. Aufgrund der Aufteilung in ein Referenz- und ein Residualpotential, wobei nur letzteres von den Parametern  $\vec{p}^{[i]}$  abhängt, kann man das Differential durch

$$\frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta \vec{p}^{[i]} = \frac{\partial \vec{\nabla} V(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta \vec{p}^{[i]} \tag{6.33}$$

ersetzen. Betrachtet man nur die linearen Parameter – also z.B. die sphärisch-harmonischen Koeffizienten  $(\bar{S}_{nm}, \bar{C}_{nm})$  oder die Skalierungsfaktoren  $\eta_b$  –, so entspricht dies gerade den Beschleunigungen, die durch das Potential der untersuchten Koeffizienten erzeugt werden:

$$\frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta \vec{p}^{[i]} = \left( \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial X_{H=1}}, \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial X_{H=2}}, \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial X_{H=3}} \right)^\top = \vec{\nabla}(\delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})). \tag{6.34}$$

Setzt man den sphärischen Tensor, die Störbeschleunigung und die Beschleunigungen der Scheinkräfte in die

linearisierte Bewegungsgleichung (6.28) ein, so folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x}_{H=1} \\ \Delta \ddot{x}_{H=2} \\ \Delta \ddot{x}_{H=3} \end{pmatrix} &= \overbrace{\bar{n}^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{(6.32)} \begin{pmatrix} \Delta \vec{x}_{H=1} \\ \Delta \vec{x}_{H=2} \\ \Delta \vec{x}_{H=3} \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial x_{H=1}} \\ \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial x_{H=2}} \\ \frac{\partial \delta T(\vec{X}_H, \vec{p}^{[i]})}{\partial x_{H=3}} \end{pmatrix}}^{(6.34)} \\
 &\quad + \underbrace{\bar{n}^2 \begin{pmatrix} \Delta x_{H=1} \\ \Delta x_{H=2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2\bar{n} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_{H=2} \\ -\Delta \dot{x}_{H=1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(6.30)}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

oder in der komponentenweisen (und umgeordneten) Darstellung

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{x}_{H=1} - 2\bar{n}\Delta \dot{x}_{H=2} - 3\bar{n}^2 \Delta x_{H=1} &= \frac{\partial \delta T}{\partial x_{H=1}} \\
 \Delta \ddot{x}_{H=2} + 2\bar{n}\Delta \dot{x}_{H=1} &= \frac{\partial \delta T}{\partial x_{H=2}} \\
 \Delta \ddot{x}_{H=3} + \bar{n}^2 \Delta x_{H=3} &= \frac{\partial \delta T}{\partial x_{H=3}}.
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Die Hill-Differentialgleichung (6.36) beschreibt die Bahnabweichungen bzgl. einer kreisförmigen Referenzbahn  $\vec{X}_H$  in einem rotierenden Koordinatensystem. Um die Gültigkeit der Gleichungen zu gewährleisten, sollte auch die wahre Bahn des Satelliten annähernd kreisförmig sein und die Störkraft im Vergleich zum Zentralfeld nur einen vernachlässigbaren Effekt bewirken.

Das Differentialgleichungssystem wird hier durch die Methode der Laplace-Transformation gelöst, wobei sich die Gesamtlösung – in einer modifizierten Schreibweise – aus einem homogenen und einem inhomogenen Anteil zusammensetzt:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{H=1} &= x_{H,hom} + x_{H,inh} \\
 \Delta x_{H=2} &= y_{H,hom} + y_{H,inh} \\
 \Delta x_{H=3} &= z_{H,hom} + z_{H,inh}.
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Da in den Formeln einer Kreisbahn keine Exzentrizität auftreten kann, wird zur besseren Lesbarkeit auch die Exponentialfunktion durch  $\exp(\xi) = e^\xi$  ersetzt.

### 6.2.1. Homogene Lösung

Mit den neuen Bezeichnungen erhält man für den homogenen Anteil der Differentialgleichung (6.36) das System

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_{H,hom} - 2\bar{n}\dot{y}_{H,hom} - 3\bar{n}^2 x_{H,hom} &= 0 \\
 \ddot{y}_{H,hom} + 2\bar{n}\dot{x}_{H,hom} &= 0 \\
 \ddot{z}_{H,hom} + \bar{n}^2 z_{H,hom} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Die Lösungen kann man z.B. aus Scheinert (1996) oder Meyer (2005) entnehmen, trotzdem soll deren Bestimmung exemplarisch mit der Laplace-Transformation vorgeführt werden. Dasselbe Verfahren kommt auch im inhomogenen Fall zum Einsatz, wird aber von dem Computeralgebrasystem MATHEMATICA übernommen. Betrachtet man die Differentialgleichungen genauer, so stellt man fest, dass die ersten beiden gekoppelt sind, während die dritte Zeile unabhängig von diesen einen harmonischen Oszillator mit der allgemeinen Lösung

$$z_{H,hom}(t) = A \cos(\bar{n}t) + B \sin(\bar{n}t) \tag{6.39}$$

beschreibt. Die Konstanten  $A$  und  $B$  lassen sich durch Einsetzen der Lösung in die Differentialgleichung und einen Koeffizientenvergleich bestimmen, sollen hier aber ebenfalls durch eine Laplace-Transformation unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen berechnet werden.

$f(t)$	$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Bemerkung
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Tabelle 6.1.: Laplace-Transformationen für einige elementare Funktionen, in Abhängigkeit von einem zusätzlichen Parameter  $a$  aus Doetsch (1956)

**Definition 2** Als Laplace-Transformation bezeichnet man die Zuordnung einer Funktion  $f(t)$  im Zeitbereich  $t \geq 0$  zu einer Bildfunktion  $\mathcal{F}(s)$  im komplexen Bildbereich  $s$  durch die Integraltransformation

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt. \quad (6.40)$$

Die inverse Abbildung lässt sich mit Mitteln der Funktionentheorie durch das Wegintegral

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathcal{F}(s) \exp(st) ds = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

berechnen. Dabei ist zu beachten, dass das Integral im Normalfall nur in einer Halbebene  $x \geq s_0$  gegen die ursprüngliche Funktion konvergiert (Doetsch, 1956, Bartsch, 1999).

Die Laplace-Transformation ist ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, da sie Differentialgleichungen aufgrund des **Differentiationsatzes**

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{F}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1} \quad (6.42)$$

in algebraische Gleichungen in der Variablen  $s$  überführt, was die Lösung oft erleichtert (Doetsch, 1956, Bartsch, 1999). Löst man – unüblicherweise – die homogene und die inhomogene Differentialgleichung getrennt, so entfallen in der inhomogenen Lösung alle Ableitungen im Zeitbereich  $f^{(k)}(0)$ . Nachdem man die Differentialgleichung im Bildbereich gelöst hat, benötigt man eine Rücktransformation in den Zeitbereich. Zur Vereinfachung des Rechenweges versucht man dabei die resultierende Bildfunktion – zum Beispiel durch eine Partialbruchzerlegung – auf eine bekannte Form zurückzuführen, von denen einige in der Tabelle 6.1 aufgelistet sind.

Um die Laplace-Transformation auf die Hill-Differentialgleichung anwenden zu können, ist die Zeit so zu modifizieren, dass jeder Bahnbogen mit dem Wert Null beginnt. Dazu subtrahiert man den Zeitpunkt  $t_0$  der ersten Beobachtung der Bahn und erhält mit

$$\tau = t - t_0 \quad (6.43)$$

gewissermaßen eine „Zeit pro Bogen“, die diese Bedingung erfüllt.

Außerdem sind für den Ansatz eine Referenzbahn, die mittlere Bewegung  $\bar{n}$  des Systems und die initialen Bahnabweichungen<sup>2</sup>  $\vec{x}_H = (x_H(0), y_H(0), z_H(0))$  und  $\dot{\vec{x}}_H = (\dot{x}_H(0), \dot{y}_H(0), \dot{z}_H(0))$  zu bestimmen. Dazu wählt man entweder eine mittlere Approximation des Orbits oder eine Bahn, die zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  mit der wahren Position identisch ist. Letzteres hat insbesondere den Vorteil, dass die initialen Bahnabweichungen

<sup>2</sup>Für eine übersichtlichere Darstellung werden die Indizes der Anfangsbedingungen abgekürzt.

zumindest für die Positionen  $\vec{x}_H = \vec{0}$  verschwinden, was allerdings für die Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{\vec{x}}_H = \vec{0}$  nicht notwendigerweise erfüllt ist.

Zunächst wendet man den Differentiationssatz (6.42) auf die Hill-Differentialgleichung (6.38) an und erhält

$$\begin{aligned} (s^2 \mathcal{X}_{H,hom} - s x_H(0) - \dot{x}_H(0)) - 2\bar{n}(s \mathcal{Y}_{H,hom} - y_H(0)) - 3\bar{n}^2 \mathcal{X}_{H,hom} &= 0 \\ (s^2 \mathcal{Y}_{H,hom} - s y_H(0) - \dot{y}_H(0)) + 2\bar{n}(s \mathcal{X}_{H,hom} - x_H(0)) &= 0 \\ (s^2 \mathcal{Z}_{H,hom} - s z_H(0) - \dot{z}_H(0)) &+ n^2 \mathcal{Z}_{H,hom} = 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Sortiert man die Terme nach Zeit- und Bildbereich und beachtet die Unabhängigkeit der  $z_H$ -Komponente, so erhält man zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} s^2 - 3\bar{n}^2 & -2\bar{n}s \\ 2\bar{n}s & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,hom} \\ \mathcal{Y}_{H,hom} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s x_H(0) + \dot{x}_H(0) - 2\bar{n} y_H(0) \\ s y_H(0) + \dot{y}_H(0) + 2\bar{n} x_H(0) \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

$$(s^2 + \bar{n}^2) \mathcal{Z}_{H,hom} = s z_H(0) + \dot{z}_H(0).$$

Um die erste Gleichung nach den Bildfunktionen  $(\mathcal{X}_{H,hom}, \mathcal{Y}_{H,hom})$  aufzulösen, benötigt man die Inverse der Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} s^2 - 3\bar{n}^2 & -2\bar{n}s \\ 2\bar{n}s & s^2 \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

für welche sich nach kurzer Rechnung

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{s^2(s^2 + \bar{n}^2)} \begin{pmatrix} s^2 & 2\bar{n}s \\ -2\bar{n}s & s^2 - 3\bar{n}^2 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

ergibt. Damit lässt sich die homogene Lösung der Hill-Differentialgleichung durch das System

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,hom} \\ \mathcal{Y}_{H,hom} \end{pmatrix} &= \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s x_H(0) + \dot{x}_H(0) - 2\bar{n} y_H(0) \\ s y_H(0) + \dot{y}_H(0) + 2\bar{n} x_H(0) \end{pmatrix} \\ \mathcal{Z}_{H,hom} &= \frac{s}{s^2 + \bar{n}^2} z_H(0) + \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \dot{z}_H(0) \end{aligned} \quad (6.48)$$

im Bildbereich darstellen. Für die Lösung der  $z_H$ -Komponente erweitert man den 2. Summanden

$$\mathcal{Z}_{H,hom} = \frac{s}{s^2 + \bar{n}^2} z_H(0) + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\bar{n}}{s^2 + \bar{n}^2} \dot{z}_H(0)$$

und kann aus der Tabelle 6.1 direkt die Lösung

$$z_{H,hom}(\tau) = \mathfrak{L}^{-1}\{\mathcal{Z}_{H,hom}\} = \cos(\bar{n}\tau) z_H(0) + \frac{1}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) \dot{z}_H(0) \quad (6.49)$$

ablesen. Für die ersten beiden Komponenten erhält man durch Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{H,hom} &= \frac{s}{(s^2 + \bar{n}^2)} x_H(0) + \frac{1}{(s^2 + \bar{n}^2)} \dot{x}_H(0) - 2\bar{n} \frac{1}{(s^2 + \bar{n}^2)} y_H(0) \\ &\quad + \frac{2\bar{n}}{(s^2 + \bar{n}^2)} y_H(0) + \frac{2n}{s(s^2 + \bar{n}^2)} \dot{y}_H(0) + 2n \frac{2n}{s(s^2 + \bar{n}^2)} x_H(0) \\ \mathcal{Y}_{H,hom} &= \frac{-2\bar{n}}{s^2 + \bar{n}^2} x_H(0) + \frac{-2\bar{n}}{s(s^2 + \bar{n}^2)} \dot{x}_H(0) - 2\bar{n} \frac{-2n}{s(s^2 + \bar{n}^2)} y_H(0) \\ &\quad + \left( \frac{s}{s^2 + \bar{n}^2} - \frac{3\bar{n}^2}{s(s^2 + \bar{n}^2)} \right) y_H(0) + \left( \frac{1}{(s^2 + \bar{n}^2)} - \frac{3\bar{n}^2}{s^2(s^2 + \bar{n}^2)} \right) \dot{y}_H(0) \\ &\quad + 2\bar{n} \left( \frac{1}{(s^2 + \bar{n}^2)} - \frac{3\bar{n}^2}{s^2(s^2 + \bar{n}^2)} \right) x_H(0). \end{aligned}$$

Um die Tabelle nutzen zu können, formt man die Quotienten durch Partialbruchzerlegungen um:

$$\frac{1}{s(s^2 + \bar{n}^2)} = \frac{1}{\bar{n}^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \bar{n}^2} \right)$$

$$\frac{1}{s^2(\bar{n}^2 + s^2)} = \frac{1}{\bar{n}^2} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \right).$$

Setzt man die inversen Transformationen in die Summen ein und erweitert entsprechend, so ergibt sich – unter Berücksichtigung von  $\sigma(\tau) = 1$  für  $\tau \geq 0$  – für die  $x_H$ -Komponente

$$\begin{aligned} x_{H,hom} &= \cos(\bar{n}\tau)x_H(0) + \frac{1}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau)\dot{x}_H(0) - 2 \sin(\bar{n}\tau)y_H(0) + 2 \sin(\bar{n}\tau)y_H(0) \\ &\quad + \frac{1}{\bar{n}} \left( 2\sigma(\tau) - 2 \cos(\bar{n}\tau) \right) \dot{y}_H(0) + 2\bar{n} \frac{1}{\bar{n}} \left( 2\sigma(\tau) - 2 \cos(\bar{n}\tau) \right) x_H(0) = \\ &= \left( x_H(0) - \frac{2}{\bar{n}} \dot{y}_H(0) - 4x_H(0) \right) \cos(\bar{n}\tau) + \left( \frac{\dot{x}_H(0)}{\bar{n}} - 2y_H(0) + 2y_H(0) \right) \sin(\bar{n}\tau) \quad (6.50) \\ &\quad + \left( \frac{2\sigma(\tau)\dot{y}_H(0)}{\bar{n}} + 4\sigma(\tau)x_H(0) \right) = \\ &= - \left( \frac{2}{\bar{n}} \dot{y}_H(0) + 3x_H(0) \right) \cos(\bar{n}\tau) + \frac{\dot{x}_H(0)}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) + \frac{2\dot{y}_H(0)}{\bar{n}} + 4x_H(0). \end{aligned}$$

Die analoge Rechnung für die  $y_H$ -Komponente führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} y_{H,hom} &= -2 \sin(\bar{n}\tau)x_H(0) - \frac{1}{\bar{n}} (2\sigma(\tau) - 2 \cos(\bar{n}\tau)) \dot{x}_H(0) + 2n \frac{1}{\bar{n}} (2\sigma(\tau) - 2 \cos(\bar{n}\tau)) y_H(0) \\ &\quad + (\cos(\bar{n}\tau) - 3\sigma(\tau) + 3 \cos(\bar{n}\tau)) y_H(0) + \left( \frac{1}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) - 3t + \frac{3}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) \right) \dot{y}_H(0) \\ &\quad + 2\bar{n} \left( \frac{1}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) - 3t + \frac{3}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau) \right) x_H(0) = \quad (6.51) \\ &= \left( \frac{4}{\bar{n}} \dot{y}_H(0) + 6x_H(0) \right) \sin(\bar{n}\tau) + \left( \frac{2}{\bar{n}} \dot{x}_H(0) \right) \cos(\bar{n}\tau) - \left( 3\dot{y}_H(0) + 6\bar{n}x_H(0) \right) \tau \\ &\quad - \frac{2}{\bar{n}} \dot{x}_H(0) + y_H(0). \end{aligned}$$

Die homogene Lösung der Hill-Differentialgleichung kann durch

$$\begin{aligned} x_{H,hom}(\tau) &= - \left( \frac{2}{\bar{n}} \dot{y}_H(0) + 3x_H(0) \right) \cos(\bar{n}\tau) + \left( \frac{\dot{x}_H(0)}{\bar{n}} \right) \sin(\bar{n}\tau) + \left( \frac{2\dot{y}_H(0)}{\bar{n}} + 4x_H(0) \right) \\ y_{H,hom}(\tau) &= \left( \frac{4}{\bar{n}} \dot{y}_H(0) + 6x_H(0) \right) \sin(\bar{n}\tau) + \left( \frac{2}{\bar{n}} \dot{x}_H(0) \right) \cos(\bar{n}\tau) - \left( 3\dot{y}_H(0) + 6\bar{n}x_H(0) \right) \tau \quad (6.52) \\ &\quad + \left( y_H(0) - \frac{2}{\bar{n}} \dot{x}_H(0) \right) \\ z_{H,hom}(\tau) &= \cos(\bar{n}\tau)z_H(0) + \frac{1}{\bar{n}} \sin(\bar{n}\tau)\dot{z}_H(0) \end{aligned}$$

zusammengefasst werden, was auch in Scheinert (1996), Meyer (2005) oder Keller (2005a) verwendet wird. In diesem Ergebnis fällt auf, dass in allen Komponenten eine Schwingung mit der Frequenz  $\bar{n}$  der mittleren Bewegung des Referenzsatelliten auftritt. Die  $z_H$ -Komponente beschreibt eine harmonische Oszillation um die Bahnebene, deren Phasenlage von den Anfangsbedingungen in dieser Richtung abhängt. Die beiden anderen Bewegungen sind analog zu der Differentialgleichung gekoppelt, d.h. die Phase hängt von den Bahnstörungen in Flugrichtung und in radialer Richtung zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  ab. Außerdem weisen beide Komponenten noch einen Offset gegenüber dem Referenzorbit auf, der im Fall der Flugrichtung  $y_H$  um einen linearen Trend ergänzt wird.

### 6.2.2. Inhomogene Hill-Differentialgleichungen

Für die inhomogene Lösung muss das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{H,inh} - 2\bar{n}\dot{y}_{H,inh} - 3\bar{n}^2 x_{H,inh} &= a_x \\ \ddot{y}_{H,inh} + 2\bar{n}\dot{x}_{H,inh} &= a_y \\ \ddot{z}_{H,inh} + \bar{n}^2 z_{H,inh} &= a_z \end{aligned} \quad (6.53)$$

mit der Störbeschleunigung  $\vec{a}_H = (a_x, a_y, a_z)^\top$  gelöst werden. Betrachtet man die Störung, die durch das Residualfeld einer einzelnen, radialen Basisfunktion hervorgerufen wird, so lässt sich die Beschleunigung durch den Gradienten  $\vec{a}_H = \vec{\nabla}_H \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)$  des Potentials ermitteln. Diesen erhält man im rotierenden System, indem man den Operator durch die Keplerelemente parametrisiert

$$\vec{\nabla}_H = \left( \frac{\partial}{\partial a}, \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{a \sin u} \frac{\partial}{\partial I} \right)^\top \quad (6.54)$$

und auf das Potential anwendet (Koop, 1993, Balmino, 1996, Sneeuw, 2000). In der Wigner-Darstellung folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial r} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) e^{iku+im(\Omega-\Theta)} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} d_{km}^n(-I) \frac{-(n+1)}{r} \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) e^{iku+im(\Omega-\Theta)} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} d_{km}^n(-I) \frac{ik}{a} \\ \frac{1}{a \sin u} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial I} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) e^{iku+im(\Omega-\Theta)} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{a \sin u} \frac{\partial d_{km}^n(-I)}{\partial I} \end{aligned} \quad (6.55)$$

mit der Hilfsfunktion

$$B_{km}^n(\psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \hat{P}_{nk}(0) i^{k-m} e^{-im\lambda_b}. \quad (5.31)$$

In der  $z_H$ -Komponente des Gradienten bereitet der Term  $(\sin u)^{-1}$  Schwierigkeiten, da dieser einerseits in jedem Umlauf zweimal singularär wird und andererseits keine (elementare) Laplace-Transformation besitzt. Nach Balmino (1996) oder Sneeuw (2000) kann man diese partielle Ableitung durch

$$\frac{1}{a \sin u} \frac{\partial}{\partial I} = \frac{1}{a} \left[ \sin u \frac{\partial}{\partial I} + \frac{\cos u}{\sin I} \left( \cos I \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \Omega} \right) \right] \quad (6.56)$$

ersetzen, was für  $I \neq 0$  die Probleme vermeidet. Daraus ergibt sich für die  $z_H$ -Komponente

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \sin u} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial I} &= \frac{1}{a} \left[ \sin u \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial I} + \frac{\cos u}{\sin I} \left( \cos I \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial \Omega} \right) \right] = \\ &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} e^{iku+im(\Omega-\Theta)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{a} \left( \sin u \frac{\partial d_{km}^n(-I)}{\partial I} + ik \cos u \cot I d_{km}^n(-I) - im \frac{\cos u}{\sin I} d_{km}^n(-I) \right) \end{aligned}$$

und für den Gradienten der Basisfunktion

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_H \Psi &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n e^{im\Omega} B_{km}^n(\psi_b) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} e^{iku-im\Theta} \\ &\quad \cdot \left[ d_{km}^n(-I) \begin{pmatrix} \frac{-(n+1)}{r} \\ \frac{ik}{a} \\ \frac{1}{a} \left( k \cot I - \frac{m}{\sin I} \right) \cos u \end{pmatrix} + \frac{1}{a} \frac{\partial d_{km}^n(-I)}{\partial I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin u \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (6.57)$$



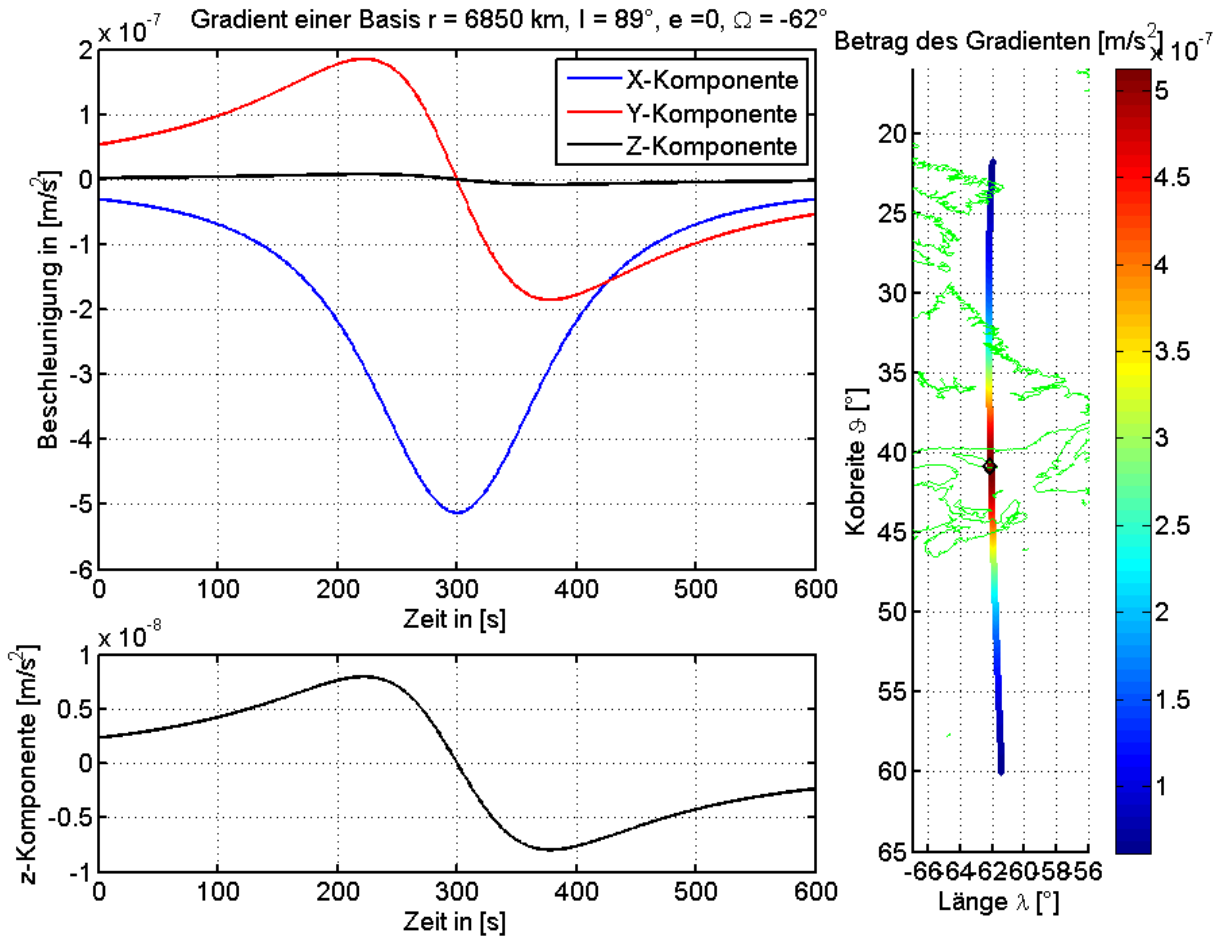


Abbildung 6.3.: Gradient einer radialen Basisfunktion für eine GRACE-ähnliche Kreisbahn ( $I = 89^\circ$ ,  $r = a = 6850$  km), wobei die Bahnänderung durch die Kraft nicht berücksichtigt wird. Für die Basis werden die Parameter  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  und  $\lambda_b \approx -62.09^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 40.86^\circ$  gewählt, so dass das Zentrum in der Mitte des Bogens lokalisiert ist

Für einen kurzen Bahnbogen mit GRACE-ähnlichen Orbitalelementen ( $I = 89^\circ$ ,  $\Omega = -62^\circ$  und  $e = 0$ ) sind die Komponenten des Gradienten (6.57) im Orbit in der Abbildung 6.3 dargestellt. Die Basis wird mit den Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  mit einem Entwicklungsgrad von  $n_0 = 0$  bis  $\tilde{N} = 100$  und dem Skalierungsfaktor  $\eta_b \approx 8.0459 \cdot 10^{-10}$  so modelliert, dass die Funktion eine maximale Potentialänderung von  $\Delta T = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  am Boden bewirkt. In dem Beispiel liegt das Zentrum in der Mitte des Bogens, was der Position  $\lambda_b \approx -62.09^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 40.86^\circ$  bzw. dem Zeitpunkt  $t = 300$  s entspricht. Neben der dominierenden  $x_H$ -Komponente in Richtung Erdmittelpunkt ist auch die jeweilige Anziehung in der  $y_H$ -Komponente (Flugrichtung) zu bemerken, welche den Satelliten zuerst zum Basiszentrum hin beschleunigt und diesen nach dem Überqueren abbremst. Die  $z_H$ -Komponente ist fast um eine Größenordnung kleiner und verursacht eine Störung, die den Satelliten aus der Bahnebene herausbewegt.

Neben den Parametern der Basis sind in guter Näherung auch die Inklination  $I$  und die Rektaszension  $\Omega$  zumindest für kurze Orbitbögen konstant, so dass sich nur die Größen  $u$ ,  $\Theta$  zeitlich ändern. Um eine Laplace-Transformation durchführen zu können, sind diese Werte durch eine gemeinsame Variable zu parametrisieren, welche für jeden Bogen mit dem Wert Null beginnt. Dies wird durch die Verwendung der „Zeit pro Bogen“  $\tau$  sowie die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} u &= v_0 + \bar{n}\tau \\ \Theta &= \dot{\Theta}\tau + \Delta\Theta \end{aligned} \quad (6.58)$$

erreicht. Die erste Gleichung beschreibt die Satellitenbewegung in der Bahnebene über einen linearen Zusammenhang zwischen der (mittleren) Anomalie  $M = \bar{n}t$  und dem Argument der Breite<sup>3</sup>  $u$ , wobei  $\bar{n}$  die gleichmäßige mittlere Bewegung des Satelliten und  $v_0$  einen „Perigäumsabstand“ für die Kreisbahn bezeichnet. Die zweite Gleichung entspricht der Forderung einer gleichmäßigen Rotation der Erde während eines Sterntages mit

$$\dot{\Theta} \approx \frac{2\pi}{86400s - 240s} \quad (6.59)$$

und dem Offset  $\Delta\Theta$ . Für eine bessere Anpassung an die wahre Bahn können die Größen  $v_0$ ,  $\bar{n}$  und  $\Delta\Theta$  je Bogen oder je Zeitpunkt bestimmt werden.

Berücksichtigt man die Kreisbahn (mit  $r = a$ ) und die Rechenregeln der Exponentialfunktion

$$e^{iku-im\Theta} = e^{ikv_0-im\Delta\Theta} e^{ik\bar{n}\tau-im\dot{\Theta}\tau},$$

so lassen sich für jeden Bahnbogen die konstanten Terme des Gradienten (6.57) durch die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{km}^{nx} &= -\frac{1}{r} B_{km}^n(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I)(n+1) e^{im(\Omega-\Delta\Theta)} e^{ikv_0} \\ c_{km}^{ny} &= \frac{1}{r} B_{km}^n(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I) i k e^{im(\Omega-\Delta\Theta)} e^{ikv_0} \\ c_{km}^{ns} &= \frac{1}{r} B_{km}^n(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{\partial d_{km}^n(-I)}{\partial I} e^{im(\Omega-\Delta\Theta)} e^{ikv_0} \\ c_{km}^{nc} &= \frac{1}{r} B_{km}^n(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I) \left[ k \cot I - \frac{m}{\sin I} \right] e^{im(\Omega-\Delta\Theta)} e^{ikv_0} \end{aligned} \quad (6.60)$$

beschreiben. Daraus ergibt sich für den Gradienten einer Basisfunktion

$$\vec{\nabla}_H \Psi = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \\ c_{km}^{ny} e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \\ c_{km}^{ns} \sin(v_0 + \bar{n}\tau) e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} + i c_{km}^{nc} \cos(v_0 + \bar{n}\tau) e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \end{pmatrix}, \quad (6.61)$$

während die Differentialgleichung die Form

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{H,inh} - 2\bar{n}\dot{y}_{H,inh} - 3\bar{n}^2 x_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{km}^{nx} e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \\ \ddot{y}_{H,inh} + 2\bar{n}\dot{x}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{km}^{ny} e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \\ \ddot{z}_{H,inh} + \bar{n}^2 z_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n (c_{km}^{ns} \sin(v_0 + \bar{n}\tau) + i c_{km}^{nc} \cos(v_0 + \bar{n}\tau)) e^{i(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau} \end{aligned} \quad (6.62)$$

annimmt. Transformiert man diese Gleichung in den Bildbereich so erhält man – unter Vernachlässigung der Ableitungen im Zeitbereich aus der homogenen Lösung – das Gleichungssystem:

<sup>3</sup>Eigentlich gilt der entsprechende Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie und dem Argument der Breite, aber für eine Kreisbahn sind alle Anomalien identisch.

$$\begin{aligned}
(s^2 \mathcal{X}_{H,inh}) - 2\bar{n}(s\mathcal{Y}_{H,inh}) - 3\bar{n}^2 \mathcal{X}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{km}^{nx} \mathfrak{L}\left\{e^{\iota(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau}\right\} \\
(s^2 \mathcal{Y}_{H,inh}) + 2\bar{n}(s\mathcal{X}_{H,inh}) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{km}^{ny} \mathfrak{L}\left\{e^{\iota(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau}\right\} \\
(s^2 \mathcal{Z}_{H,inh}) + n^2 \mathcal{Z}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathfrak{L}\left\{(c_{km}^{ns} \sin(v_0 + \bar{n}\tau) + \iota c_{km}^{nc} \cos(v_0 + \bar{n}\tau)) e^{\iota(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau}\right\}.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Mit den Rechenschritten der homogenen Lösung (6.48) kann man auch dieses System nach den Bildfunktionen auflösen:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,inh} \\ \mathcal{Y}_{H,inh} \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \cdot \left[ \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathfrak{L}\left\{e^{-\iota(im\dot{\Theta}-k\bar{n})\tau}\right\} \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} \\ c_{km}^{ny} \\ c_{km} \end{pmatrix} \right] \tag{6.64}$$

$$\mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m} = \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathfrak{L}\left\{(c_{km}^{ns} \sin(v_0 + \bar{n}\tau) + \iota c_{km}^{nc} \cos(v_0 + \bar{n}\tau)) e^{\iota(k\bar{n}-m\dot{\Theta})\tau}\right\} \tag{6.65}$$

Um die Dreifachsummen in der weiteren Herleitung zu vermeiden, spaltet man die Funktionen im Zeitbereich  $(x_{H,inh}, y_{H,inh}, z_{H,inh})$  bzw. deren Laplace-Transformationen  $(\mathcal{X}_{H,inh}, \mathcal{Y}_{H,inh}, \mathcal{Z}_{H,inh})$  in Abhängigkeit von Grad und Ordnungen auf, und betrachtet immer nur eine Lösung zu dem Zahlentripel  $(n, k, m)$ . Sind diese Teillösungen bestimmt, so gilt aufgrund der Linearität der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathcal{X}_{H,inh}^{n,k,m} \\
\mathcal{Y}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathcal{Y}_{H,inh}^{n,k,m} \\
\mathcal{Z}_{H,inh} &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m}
\end{aligned}$$

bzw. nach der inversen Abbildung

$$\begin{aligned}
x_{H,inh}(\tau) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n x_{H,inh}^{n,k,m} \\
y_{H,inh}(\tau) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n y_{H,inh}^{n,k,m} \\
z_{H,inh}(\tau) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n z_{H,inh}^{n,k,m}.
\end{aligned}$$

### a) allgemeine Lösung der $x_H$ - und $y_H$ -Komponenten

Für die gekoppelten  $x_H$ - und  $y_H$ -Komponenten erhält man aus dem System (6.64) die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,inh}^{n,k,m} \\ \mathcal{Y}_{H,inh}^{n,k,m} \end{pmatrix} = \frac{\underbrace{1}_{= \mathcal{L}\{e^{-\iota(m\dot{\Theta} - k\bar{n})\tau}\}}}{s + \iota(m\dot{\Theta} - k\bar{n})} \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} \\ c_{km}^{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\bar{n}c_{km}^{ny} + sc_{km}^{nx}}{s(\bar{n}^2 + s^2)(s + \iota(m\dot{\Theta} - k\bar{n}))} \\ \frac{-2\bar{n}sc_{km}^{nx} + c_{km}^{ny}(-3\bar{n}^2 + s^2)}{s^2(\bar{n}^2 + s^2)(s + \iota(m\dot{\Theta} - k\bar{n}))} \end{pmatrix}. \quad (6.66)$$

Zur Lösung wird das Softwarepaket MATHEMATICA verwendet, welches nach der Rücktransformation der Gleichung (6.66) die folgenden Ergebnisse angibt:

$$\begin{aligned} x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(c_{km}^{nx} - 2\iota c_{km}^{ny})e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}((k-1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} - \frac{(c_{km}^{nx} + 2\iota c_{km}^{ny})e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}((k+1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e^{\iota\tau(k\bar{n} - m\dot{\Theta})}(2\bar{n}c_{km}^{ny} - c_{km}^{nx}(k\bar{n} - m\dot{\Theta}))}{((k-1)\bar{n} - m\dot{\Theta})(k\bar{n} - m\dot{\Theta})(k+1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} + \frac{4\iota c_{km}^{ny}}{\bar{n}(k\bar{n} - m\dot{\Theta})} \right] \\ y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \left[ \frac{(\iota c_{km}^{nx} + 2c_{km}^{ny})e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}((k-1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} + \frac{\iota(c_{km}^{nx} + 2\iota c_{km}^{ny})e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}((k+1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\iota\tau(k\bar{n} - m\dot{\Theta})}(2\iota c_{km}^{nx} \bar{n}(k\bar{n} - m\dot{\Theta}) + c_{km}^{ny}[(3 + k^2)\bar{n}^2 - 2km\bar{n}\dot{\Theta} + m^2\dot{\Theta}^2])}{((k-1)\bar{n} - m\dot{\Theta})(k\bar{n} - m\dot{\Theta})^2((k+1)\bar{n} - m\dot{\Theta})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\iota c_{km}^{ny}\tau}{-(k\bar{n} - m\dot{\Theta})} + \frac{-3c_{km}^{ny}\bar{n} - 2\iota c_{km}^{nx}(k\bar{n} - m\dot{\Theta})}{\bar{n}(k\bar{n} - m\dot{\Theta})^2} \right]. \end{aligned}$$

Die Formeln gelten für alle Kombinationen  $(k, m, n)$ , deren Nenner nicht verschwinden. Für eine schönere Darstellung führt man die Abkürzung

$$q_{km} = k\bar{n} - m\dot{\Theta} \quad (6.67)$$

und damit

$$(k \pm 1)\bar{n} - m\dot{\Theta} = q_{km} \pm \bar{n}$$

ein und sortiert die Terme nach den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} - \bar{n})} - \frac{e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} + \bar{n})} - \frac{2e^{\iota\tau}q_{km}}{(q_{km} - \bar{n})(q_{km} + \bar{n})} \right] c_{km}^{nx} \\ &\quad + \iota \left[ -\frac{e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} - \bar{n})} - \frac{e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} + \bar{n})} + \frac{2\bar{n}e^{\iota\tau}q_{km}}{(q_{km} - \bar{n})q_{km}(q_{km} + \bar{n})} + \frac{2}{\bar{n}q_{km}} \right] c_{km}^{ny}. \quad (6.68) \end{aligned}$$

Analog verfährt man mit der  $y_H$ -Komponente und erhält

$$\begin{aligned} y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \iota \left[ \frac{e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} - \bar{n})} + \frac{e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} + \bar{n})} - \frac{2\bar{n}e^{\iota\tau}q_{km}}{(q_{km} - \bar{n})q_{km}(q_{km} + \bar{n})} - \frac{2}{\bar{n}q_{km}} \right] c_{km}^{nx} \\ &\quad + \left[ \frac{2e^{\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} - \bar{n})} - \frac{2e^{-\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km} + \bar{n})} - \frac{e^{\iota\tau}q_{km}(3\bar{n}^2 + q_{km}^2)}{(q_{km} - \bar{n})q_{km}^2(q_{km} + \bar{n})} - \frac{3\iota\tau}{q_{km}} - \frac{3}{q_{km}^2} \right] c_{km}^{ny}. \quad (6.69) \end{aligned}$$

In den Formeln fällt auf, dass die  $c_{km}^{ny}$ -Komponente von  $x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau)$  bis auf das Vorzeichen jeweils mit der  $c_{km}^{nx}$ -Komponente von  $y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau)$  übereinstimmt, was sich aus der Symmetrie der Matrix  $\mathbf{H}$  ergibt.

### b) Resonanzen der $x_H$ - und $y_H$ -Komponenten

Da die Darstellungen (6.68) und (6.69) für  $q_{km} = 0$  oder  $q_{km} = \pm\bar{n}$  wegen der Division durch Null nicht auswertbar sind, müssen diese Fälle getrennt behandelt werden. Zunächst stellt man fest, dass die Probleme nur dann auftreten können, wenn entweder die Satellitenumlaufzeit und die Tageslänge in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen oder für die Ordnungen  $k = 0$  und  $m = \{-1, 0, 1\}$  automatisch die Bedingungen  $q_{km} = \pm\bar{n}$  bzw.  $q_{km} = 0$  erfüllt sind. Der erstgenannte Fall wird in der Satellitengeodäsie häufig als Resonanz bezeichnet, was hier auch für die anderen Sonderfälle als Bezeichnung verwendet werden soll.

Für  $q_{km} = 0$  ist in der Gleichung (6.64)  $\mathfrak{L}\{e^{iq_{km}\tau}\}$  durch  $\mathfrak{L}\{1\}$  zu ersetzen:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,inh}^{n,k,m} \\ \mathcal{Y}_{H,inh}^{n,k,m} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{=\mathfrak{L}\{1\}} \frac{1}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} \\ c_{km}^{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2\bar{n}c_{km}^{ny} + sc_{km}^{nx})}{s^2(\bar{n}^2 + s^2)} \\ \frac{(-2\bar{n}sc_{km}^{nx} + c_{km}^{ny}(-3\bar{n}^2 + s^2))}{s^3(\bar{n}^2 + s^2)} \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Die inverse Transformation in den Zeitbereich liefert die Lösungen

$$x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = \left( \frac{1 - \cos \bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} + 2 \left( \frac{\bar{n}\tau - \sin \bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny} \quad (6.71)$$

$$y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = -2 \left( \frac{\bar{n}\tau - \sin \bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} - \left( \frac{-8 + 3\bar{n}^2\tau^2 + 8 \cos \bar{n}\tau}{2\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny}. \quad (6.72)$$

Im Fall  $q_{km} = -\bar{n}$  (bzw.  $(k+1)\bar{n} = m\dot{\Theta}$ ) gilt für die Komponenten im Bildbereich

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,inh}^{n,k,m} \\ \mathcal{Y}_{H,inh}^{n,k,m} \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{L}\{\exp(-i\bar{n}\tau)\}}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} \\ c_{km}^{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\bar{n}c_{km}^{ny} + sc_{km}^{nx}}{s(-i\bar{n}+s)(i\bar{n}+s)^2} \\ \frac{i(3\bar{n}^2c_{km}^{ny} + 2\bar{n}sc_{km}^{nx} - s^2c_{km}^{ny})}{(\bar{n}-is)^2(\bar{n}+is)s^2} \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

und im Zeitbereich

$$x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = \left( \frac{e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} + 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} + \left( \frac{3ie^{-i\bar{n}\tau} - 4i + ie^{i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny}$$

$$y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = \left( \frac{-3ie^{-i\bar{n}\tau} - ie^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} + 4i}{2\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} + \left( \frac{4e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} + 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} - 3 + 3i\bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny}.$$

Der letzte Fall betrifft  $q_{km} = \bar{n}$  beziehungsweise  $(k-1)\bar{n} = m\dot{\Theta}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{H,inh}^{n,k,m} \\ \mathcal{Y}_{H,inh}^{n,k,m} \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{L}\{\exp(i\bar{n}\tau)\}}{s^2 + \bar{n}^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\bar{n}}{s} \\ -\frac{2\bar{n}}{s} & 1 - \frac{3\bar{n}^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{km}^{nx} \\ c_{km}^{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\bar{n}c_{km}^{ny} + sc_{km}^{nx}}{s(-i\bar{n}+s)^2(i\bar{n}+s)} \\ -\frac{i(3\bar{n}^2c_{km}^{ny} + 2\bar{n}sc_{km}^{nx} - s^2c_{km}^{ny})}{(\bar{n}-is)(\bar{n}+is)s^2} \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

mit der inversen Transformation

$$x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = \left( \frac{e^{i\bar{n}\tau} - e^{-i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} + \left( \frac{-3ie^{i\bar{n}\tau} + 4i - ie^{-i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny} \quad (6.75)$$

$$y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) = \left( \frac{ie^{-i\bar{n}\tau} + 3ie^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau} - 4i}{2\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nx} + \left( \frac{-e^{-i\bar{n}\tau} + 4e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau} - 3 - 3i\bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ny}. \quad (6.76)$$

### c) allgemeine Lösung der $z_H$ -Komponente

Die Bildfunktionen der  $z_H$ -Komponente (für ein Zahlentripel  $(n, k, m)$ ) ist durch die Formel (6.65) gegeben:

$$\mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m} = \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \mathfrak{L} \left\{ \sin(v_0 + \bar{n}\tau) e^{ik\bar{n}\tau - im\dot{\Theta}\tau} \right\} + ic_{km}^{nc} \mathfrak{L} \left\{ \cos(v_0 + \bar{n}\tau) e^{ik\bar{n}\tau - im\dot{\Theta}\tau} \right\} \right]. \quad (6.77)$$

Für die Laplace-Transformation benötigt man daher die Terme

$$\mathfrak{L} \left\{ \sin(v_0 + \bar{n}\tau) e^{ik\bar{n}\tau - im\dot{\Theta}\tau} \right\} = \frac{1}{2} e^{-v_0} \left( \frac{e^{2iv_0}}{\bar{n} + k\bar{n} + is - m\dot{\Theta}} + \frac{1}{\bar{n} - k\bar{n} - is + m\dot{\Theta}} \right) \quad (6.78)$$

$$\mathfrak{L} \left\{ \cos(v_0 + \bar{n}\tau) e^{ik\bar{n}\tau - im\dot{\Theta}\tau} \right\} = -\frac{1}{2} e^{-v_0} \left( \frac{e^{2iv_0}}{\bar{n} + k\bar{n} + is - m\dot{\Theta}} - \frac{1}{\bar{n} - k\bar{n} - is + m\dot{\Theta}} \right), \quad (6.79)$$

was nach der Rücktransformation auf die Darstellung

$$\begin{aligned} z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \frac{1}{4} i e^{-v_0} \left( -\frac{2e^{i\tau((k-1)\bar{n}-m\dot{\Theta})}}{((k-2)\bar{n}-m\dot{\Theta})(k\bar{n}-m\dot{\Theta})} + \frac{2e^{i\tau((k+1)\bar{n}-m\dot{\Theta})} e^{2iv_0}}{((k+2)\bar{n}-m\dot{\Theta})(k\bar{n}-m\dot{\Theta})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{(k-2)\bar{n}-m\dot{\Theta}} - \frac{e^{2iv_0}}{k\bar{n}-m\dot{\Theta}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2iv_0}}{(k+2)\bar{n}-m\dot{\Theta}} - \frac{1}{k\bar{n}-m\dot{\Theta}} \right)}{\bar{n}} \right) c_{km}^{ns} \\ &\quad - \frac{1}{4} i e^{-v_0} \left( \frac{2e^{i\tau((k-1)\bar{n}-m\dot{\Theta})}}{((k-2)\bar{n}-m\dot{\Theta})(k\bar{n}-m\dot{\Theta})} + \frac{2e^{i\tau((k+1)\bar{n}-m\dot{\Theta})} e^{2iv_0}}{((k+2)\bar{n}-m\dot{\Theta})(k\bar{n}-m\dot{\Theta})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2iv_0}}{(k+2)\bar{n}-m\dot{\Theta}} + \frac{1}{k\bar{n}-m\dot{\Theta}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{(k-2)\bar{n}-m\dot{\Theta}} - \frac{-e^{2iv_0}}{k\bar{n}-m\dot{\Theta}} \right)}{\bar{n}} \right) c_{km}^{nc} \end{aligned}$$

führt. Verwendet man hier ebenfalls die Abkürzung  $q_{km}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \frac{1}{4} i e^{-v_0} \left( -\frac{2e^{i\tau(q_{km}-\bar{n})}}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2e^{i\tau(q_{km}+\bar{n})} e^{2iv_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2iv_0}}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2iv_0}}{q_{km}+2\bar{n}} - \frac{1}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} \right) c_{km}^{ns} \\ &\quad - \frac{1}{4} i e^{-v_0} \left( \frac{2e^{i\tau(q_{km}-\bar{n})}}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2e^{i\tau(q_{km}+\bar{n})} e^{2iv_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2iv_0}}{q_{km}+2\bar{n}} + \frac{1}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( -\frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2iv_0}}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} \right) c_{km}^{nc}. \quad (6.80) \end{aligned}$$

Da die mittlere Bewegung  $\bar{n} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$  stets ungleich Null ist, treten die Probleme (bzw. die Resonanzen) in der  $z_H$ -Komponente nur für  $q_{km} = 0$  und  $q_{km} = \pm 2\bar{n}$  auf.

### d) Resonanzfälle der $z_H$ -Komponente

Im Bildbereich erhält man für  $q_{km} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m} &= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \mathfrak{L} \left\{ \sin(v_0 + \bar{n}\tau) \right\} + ic_{km}^{nc} \mathfrak{L} \left\{ \cos(v_0 + \bar{n}\tau) \right\} \right] = \\ &= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \frac{\bar{n} \cos v_0 + s \sin v_0}{s^2 + \bar{n}^2} c_{km}^{ns} + \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} i \frac{s \cos v_0 - \bar{n} \sin v_0}{\bar{n}^2 + s^2} c_{km}^{nc} \quad (6.81) \end{aligned}$$

und im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= -\frac{\bar{n}\tau \cos \bar{n}\tau \cos v_0 - \sin \bar{n}\tau (\cos v_0 + \bar{n}\tau \sin v_0)}{2\bar{n}^2} c_{km}^{ns} + \\
&+ i \frac{\bar{n}\tau \cos v_0 \sin \bar{n}\tau + (\bar{n}\tau \cos \bar{n}\tau - \sin \bar{n}\tau) \sin v_0}{2\bar{n}^2} c_{km}^{nc} = \\
&= -\frac{\bar{n}\tau \cos(\bar{n}\tau + v_0) - \sin \bar{n}\tau \cos v_0}{2\bar{n}^2} c_{km}^{ns} + i \frac{\bar{n}\tau \sin(\bar{n}\tau + v_0) - \sin \bar{n}\tau \sin v_0}{2\bar{n}^2} c_{km}^{nc}.
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Der Resonanzfall  $q_{km} = 2\bar{n}$  (bzw.  $(k-2)\bar{n} = m\bar{\Theta}$ ) entspricht der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m}(s) &= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \mathfrak{L}\{\sin(v_0 + \bar{n}\tau)e^{2i\bar{n}\tau}\} + i c_{km}^{nc} \mathfrak{L}\{\cos(v_0 + \bar{n}\tau)e^{2i\bar{n}\tau}\} \right] = \\
&= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \left( -\frac{\bar{n} \cos v_0 + (-2i\bar{n} + s) \sin v_0}{3\bar{n}^2 + 4i\bar{n}s - s^2} \right) + i c_{km}^{nc} \left( \frac{(2i\bar{n} - s) \cos v_0 + \bar{n} \sin v_0}{3\bar{n}^2 + 4i\bar{n}s - s^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.83}$$

und damit

$$\begin{aligned}
z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \left( e^{-i\bar{n}\tau} e^{-w_0} \frac{i e^{2w_0} (-1 + e^{2i\bar{n}\tau})^2 + 2(-i + e^{2i\bar{n}\tau}(i + 2\bar{n}\tau))}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ns} \\
&+ \left( e^{-i\bar{n}\tau} e^{-w_0} \frac{-i e^{2w_0} (-1 + e^{2i\bar{n}\tau})^2 + 2(-i + e^{2i\bar{n}\tau}(i + 2\bar{n}\tau))}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nc} = \\
&= \left( \frac{i e^{w_0} (e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{i\bar{n}\tau} + e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-w_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ns} \\
&+ \left( \frac{-i e^{w_0} (e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{i\bar{n}\tau} + e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-w_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nc}.
\end{aligned} \tag{6.84}$$

Für  $q_{km} = -2\bar{n}$  ergibt die Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{H,inh}^{n,k,m}(s) &= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \mathfrak{L}\{\sin(v_0 + \bar{n}\tau)e^{-2i\bar{n}\tau}\} + i c_{km}^{nc} \mathfrak{L}\{\cos(v_0 + \bar{n}\tau)e^{-2i\bar{n}\tau}\} \right] = \\
&= \frac{1}{\bar{n}^2 + s^2} \left[ c_{km}^{ns} \left( -\frac{\bar{n} \cos v_0 + (2i\bar{n} + s) \sin v_0}{3\bar{n}^2 - 4i\bar{n}s - s^2} \right) + i c_{km}^{nc} \left( \frac{(2\bar{n} - is) \cos v_0 + i\bar{n} \sin v_0}{3\bar{n}^2 - 4i\bar{n}s - s^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.85}$$

und die Rücktransformation

$$\begin{aligned}
z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau) &= \left( e^{-3i\bar{n}\tau} \frac{-i e^{-w_0} (-1 + e^{2i\bar{n}\tau})^2 + 2e^{2i\bar{n}\tau + w_0} (-i + i e^{2i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau)}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ns} \\
&+ \left( e^{-3i\bar{n}\tau} \frac{-i e^{-w_0} (-1 + e^{2i\bar{n}\tau})^2 - 2e^{2i\bar{n}\tau + w_0} (-i + i e^{2i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau)}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nc} = \\
&= \left( \frac{-i e^{-w_0} (e^{-3i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) + 2e^{w_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{ns} \\
&+ \left( \frac{-i e^{-w_0} (e^{-3i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) - 2e^{w_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} \right) c_{km}^{nc}.
\end{aligned} \tag{6.86}$$

### 6.2.3. Diskussion der inhomogenen Lösung

Aufgrund der umfangreichen Herleitungen werden die Ergebnisse  $(x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau), y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau), z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau))$  auf den folgenden Seiten noch einmal zusammengefasst und um die Ableitung nach der Zeit erweitert.

Bei der Analyse fällt auf, dass auf eine Überprüfung der Resonanzfälle nicht verzichtet werden kann, da diese mindestens einmal in jeder Berechnung für die Kombinationen der speziellen Ordnungen  $k = 0$  und

$m = \{0, \pm 1, \pm 2\}$  auftreten. Die allgemeine Möglichkeit der numerischen Übereinstimmung zwischen einem Vielfachen der mittleren Bewegung des Satelliten  $\bar{n}$  und der Drehrate der Erde  $\dot{\Theta}$  erscheint eher unwahrscheinlich, weshalb auf eine punktweise Kontrolle bisher verzichtet wird.

Für die Programmierung folgt daraus, dass die bisherige Implementierung (vgl. Anhang A.2) wegen der notwendigen Fallunterscheidungen bezüglich der Ordnungen nicht ohne zusätzlichen Aufwand verwendbar ist. Die neue Umsetzung basiert deshalb auf einer zweifachen Schleife über die Ordnungen  $(k, m)$  und berechnet die inversen Laplace-Transformationen und die entstehenden Positionsänderungen für alle Zeitpunkte, Parameter und Entwicklungsgrade.

Aus der Symmetrie der Matrix  $\mathbf{H}$  bzw. den gefundenen Lösungen erkennt man, dass die  $c_{km}^{ny}$ -Komponente der  $x_H$ -Koordinaten in allen Fällen bis auf das Vorzeichen mit der  $c_{km}^{nx}$ -Komponente des  $y_H$ -Wertes übereinstimmt. Obwohl es durch die Formeln nicht sofort erkennbar ist, müssen die Änderungen in den Positionen – sowie alle partiellen Ableitungen nach der Zeit oder den Parametern – jeweils reelle Größen sein. Diese Bedingung wird nach der Berechnung aller Werte überprüft, bevor durch die Verwendung des Realteils die numerisch entstandenen imaginären Anteile entfernt werden.

In der Abbildung 6.4 werden die reellen und imaginären Anteile der inhomogenen Lösung für einen kurzen Bahnbogen visualisiert. Die Satellitenbahn ist durch die Keplerelemente  $a = 6850$  km,  $I = 89^\circ$ ,  $e = 0$  definiert, welche bereits in der Grafik 6.3 für den Gradienten verwendet werden. Die Basis mit den Parametern  $\lambda_b \approx -62.09^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 40.86^\circ$  und  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  ist bezüglich der ungestörten Kreisbahn (zeitlich und räumlich) in der Mitte des Bahnbogens von 10 min Länge lokalisiert. Am Ende des Bogens ergibt sich eine maximale Abweichung von etwa 0.8 mm, wobei der größte Anteil auf die  $y_H$ -Komponente (in Flugrichtung) entfällt.

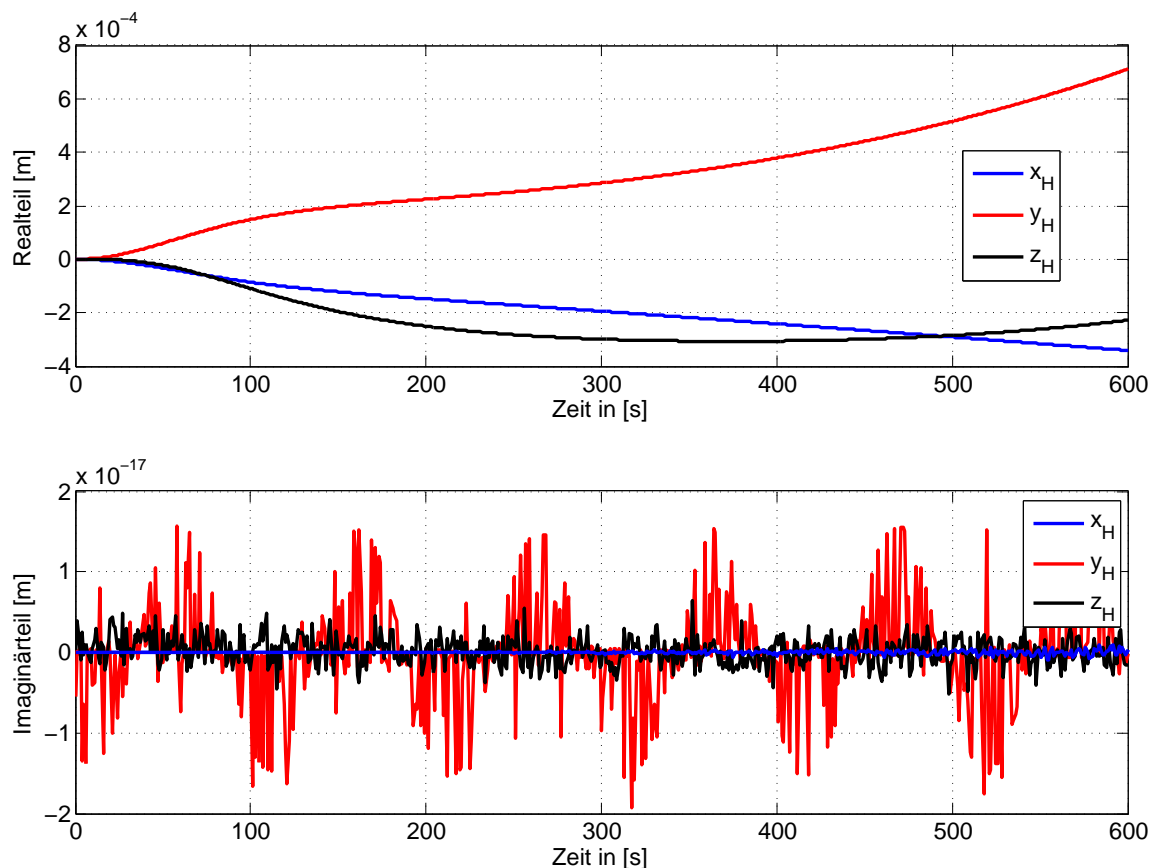


Abbildung 6.4.: Beitrag der inhomogenen Lösung zur Bahnänderung im Hill-System. Die Parameter der Bahn und der Basisfunktion sind identisch zu der Abbildung 6.3

Eine weitere Kontrolle bietet die Tatsache, dass die Überlagerung aller Ordnungen und Grade jeweils für den Beginn des Bogens verschwindet:



$$\begin{aligned}
x_{H,inh}(\tau = 0) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau = 0) \stackrel{!}{=} 0 \\
y_{H,inh}(\tau = 0) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau = 0) \stackrel{!}{=} 0 \\
z_{H,inh}(\tau = 0) &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau = 0) \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned} \tag{6.87}$$

Während in den Variationsgleichungen diese Anfangswerte eine Folge der dynamischen Parameter sind, ergeben sich die Bedingungen in der geschlossenen Lösung dadurch, dass zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  die Kraft noch keine Störung der Bahn bewirkt hat. In beiden Fällen bedeutet dies, dass die partiellen Ableitungen von Basisfunktionen am Rand des Gebiets nicht gut bestimmt werden können, weshalb eine entsprechende Erweiterung der Daten durch eine Zone ohne Basiszentren zu empfehlen ist.

$$x_{H,inh}^{n,k,m} = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}-\bar{n})} - \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}+\bar{n})} - \frac{2e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{nx} \right. \\ \left. + \iota \left[ \frac{-e^{i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}-\bar{n})} - \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}+\bar{n})} + \frac{2\bar{n}e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})q_{km}(q_{km}+\bar{n})} + \frac{2}{\bar{n}q_{km}} \right] C_{km}^{ny} \right] & \text{für } q_{km} = 0 \\ \left[ \frac{1-\cos \bar{n}\tau}{n^2} \right] C_{km}^{nx} + 2 \left[ \frac{\bar{n}\tau - \sin \bar{n}\tau}{n^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = 0 \\ \left[ \frac{-e^{i\bar{n}\tau} + e^{-i\bar{n}\tau} + 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}^2} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{ie^{i\bar{n}\tau} + 3ie^{-i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} - 4i}{2\bar{n}^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = -\bar{n} \\ \left[ \frac{e^{i\bar{n}\tau} - e^{-i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}^2} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{-3ie^{i\bar{n}\tau} + 4i - ie^{-i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = \bar{n} \end{cases} \tag{6.88}$$

$$\dot{x}_{H,inh}^{n,k,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} \iota \left[ \frac{e^{i\bar{n}\tau}}{(q_{km}-\bar{n})} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{(q_{km}+\bar{n})} - \frac{2q_{km}e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{nx} \\ + \left[ \frac{e^{i\bar{n}\tau}}{q_{km}-\bar{n}} - \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{q_{km}+\bar{n}} - \frac{2\bar{n}e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{ny} \\ \left[ \frac{\sin \bar{n}\tau}{\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} + 2 \left[ \frac{1-\cos \bar{n}\tau}{\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = 0 \\ \iota \left[ \frac{e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau ie^{-i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = -\bar{n} \\ \iota \left[ \frac{e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{4\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{-e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau} - 2\tau i\bar{n}e^{i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = \bar{n} \end{cases} \tag{6.89}$$

$$y_{H,inh}^{n,k,m} = \begin{cases} \imath \left[ \frac{e^{i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}-\bar{n})} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}+\bar{n})} - \frac{2\bar{n}e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})q_{km}(q_{km}+\bar{n})} - \frac{2}{\bar{n}q_{km}} \right] C_{km}^{nx} \\ \quad + \left[ \frac{2e^{i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}-\bar{n})} - \frac{2e^{-i\bar{n}\tau}}{\bar{n}(q_{km}+\bar{n})} - \frac{3i\tau}{q_{km}} - \frac{3}{q_{km}^2} - \frac{e^{i\tau}q_{km}(3\bar{n}^2+q_{km}^2)}{(q_{km}-\bar{n})q_{km}^2(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{ny} \\ -2 \left[ \frac{\bar{n}\tau - \sin \bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right] C_{km}^{nx} - \left[ \frac{-8+3\bar{n}^2\tau^2+8\cos \bar{n}\tau}{2\bar{n}^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = 0 \\ - \left[ \frac{3ie^{-i\bar{n}\tau} + ie^{i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} - 4i}{2\bar{n}^2} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{4e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} + 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} - 3 + 3i\bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = -\bar{n} \\ \left[ \frac{ie^{-i\bar{n}\tau} + 3ie^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau} - 4i}{2\bar{n}^2} \right] C_{km}^{nx} + \left[ \frac{-e^{-i\bar{n}\tau} + 4e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau} - 3 - 3i\bar{n}\tau}{\bar{n}^2} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = \bar{n} \end{cases} \quad (6.90)$$

$$\dot{y}_{H,inh}^{n,k,m} = \begin{cases} \left[ \frac{-e^{i\bar{n}\tau}}{q_{km}-\bar{n}} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau}}{q_{km}+\bar{n}} + \frac{2\bar{n}e^{i\tau}q_{km}}{(q_{km}-\bar{n})(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{nx} \\ \quad + \imath \left[ \frac{2e^{i\bar{n}\tau}}{q_{km}-\bar{n}} + \frac{2e^{-i\bar{n}\tau}}{q_{km}+\bar{n}} - \frac{3}{q_{km}} - \frac{e^{i\tau}q_{km}(3\bar{n}^2+q_{km}^2)}{(q_{km}-\bar{n})q_{km}(q_{km}+\bar{n})} \right] C_{km}^{ny} \\ -2 \left[ \frac{1-\cos \bar{n}\tau}{\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} - \left[ \frac{3\bar{n}\tau - 4\sin \bar{n}\tau}{\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = 0 \\ - \left[ \frac{e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} + \imath \left[ \frac{-2e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau} + 3}{\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = -\bar{n} \\ - \left[ \frac{-e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau}}{2\bar{n}} \right] C_{km}^{nx} + \imath \left[ \frac{e^{-i\bar{n}\tau} + 2e^{i\bar{n}\tau} - 2i\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau} - 3}{\bar{n}} \right] C_{km}^{ny} & \text{für } q_{km} = \bar{n} \end{cases} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} i e^{-i v_0} \left[ -\frac{2e^{i\tau}(q_{km}-\bar{n})}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2e^{i\tau}(q_{km}+\bar{n})e^{2i v_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}+2\bar{n}} - \frac{1}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} \right] C_{k m}^{n s} \\ & - \frac{1}{4} i e^{-i v_0} \left[ \frac{2e^{i\tau}(q_{km}-\bar{n})}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2e^{i\tau}(q_{km}+\bar{n})e^{2i v_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} + \frac{e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}+2\bar{n}} + \frac{1}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} + \frac{e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}} \right)}{\bar{n}} \right] C_{k m}^{n c} \end{aligned} \right. \\
& \left. = z_{H,inh}^{n,k,m} = \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\bar{n}\tau \cos(\bar{n}\tau + v_0) - \sin \bar{n}\tau \cos v_0}{2\bar{n}^2} C_{k m}^{n s} + i \left[ \frac{\bar{n}\tau \sin(\bar{n}\tau + v_0) - \sin \bar{n}\tau \sin v_0}{2\bar{n}^2} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = 0 \\ & \left[ \frac{i e^{i v_0} (e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-i v_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} C_{k m}^{n s} + \left[ \frac{-i e^{i v_0} (e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-i v_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = 2\bar{n} \\ & \left[ \frac{-i e^{-i v_0} (e^{-3i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) + 2e^{i v_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} C_{k m}^{n s} + \left[ \frac{-i e^{-i v_0} (e^{-3i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) - 2e^{i v_0} (-i e^{-i\bar{n}\tau} + i e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}^2} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = -2\bar{n} \end{aligned} \right. \quad (6.92) \\
& \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{4} e^{-i v_0} \left[ -\frac{2(q_{km}-\bar{n})e^{i\tau}(q_{km}-\bar{n})}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2(q_{km}+\bar{n})e^{i\tau}(q_{km}+\bar{n})e^{2i v_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} + e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}} \right) - e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}+2\bar{n}} - \frac{1}{q_{km}} \right) \right] C_{k m}^{n s} \\ & \frac{1}{4} e^{-i v_0} \left[ \frac{2(q_{km}-\bar{n})e^{i\tau}(q_{km}-\bar{n})}{(q_{km}-2\bar{n})q_{km}} + \frac{2(q_{km}+\bar{n})e^{i\tau}(q_{km}+\bar{n})e^{2i v_0}}{(q_{km}+2\bar{n})q_{km}} - e^{-i\bar{n}\tau} \left( \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}+2\bar{n}} + \frac{1}{q_{km}} \right) + e^{i\bar{n}\tau} \left( \frac{1}{q_{km}-2\bar{n}} - \frac{e^{2i v_0}}{q_{km}} \right) \right] C_{k m}^{n c} \end{aligned} \right. \\
& \left. = z_{H,inh}^{n,k,m} = \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\cos(\bar{n}\tau + v_0) - \bar{n}\tau \sin(\bar{n}\tau + v_0) - \cos \bar{n}\tau \cos v_0}{2\bar{n}} C_{k m}^{n s} + i \left[ \frac{\sin(\bar{n}\tau + v_0) + \bar{n}\tau \cos(\bar{n}\tau + v_0) - \cos \bar{n}\tau \sin v_0}{2\bar{n}} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = 0 \\ & \left[ \frac{-e^{i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + 3e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}} C_{k m}^{n s} + \left[ \frac{e^{i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} - 2e^{-i\bar{n}\tau} + 3e^{3i\bar{n}\tau}) + 2e^{-i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau} + 2\bar{n}\tau e^{i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = 2\bar{n} \\ & \left[ \frac{e^{-i v_0} (-3e^{-3i\bar{n}\tau} + 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) + 2e^{i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}} C_{k m}^{n s} + \left[ \frac{e^{-i v_0} (-3e^{-3i\bar{n}\tau} + 2e^{-i\bar{n}\tau} + e^{i\bar{n}\tau}) - 2e^{i v_0} (-e^{-i\bar{n}\tau} - e^{i\bar{n}\tau} - 2\bar{n}\tau e^{-i\bar{n}\tau})}{16\bar{n}} C_{k m}^{n c} \right] \right] q_{k m} = -2\bar{n} \end{aligned} \right. \quad (6.93)
\end{aligned}$$

Sortiert man die Terme der Lösung in Abhängigkeit von den zeitabhängigen Funktionen, so ergibt sich die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_{H,inh} \\ y_{H,inh} \\ z_{H,inh} \end{pmatrix} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \left( \mathbf{X}_{nkm}^1(\psi_b, \bar{O}) + \mathbf{X}_{nkm}^2(\psi_b, \bar{O})\tau + \mathbf{X}_{nkm}^3(\psi_b, \bar{O})e^{\pm i\bar{n}\tau} \right. \\ \left. + \mathbf{X}_{nkm}^4(\psi_b, \bar{O})e^{iq_{km}\tau} + \mathbf{X}_{nkm}^5(\psi_b, \bar{O})e^{i\tau(q_{km} \pm \bar{n})} + \mathbf{RES}(\psi_b, \bar{O}, \tau) \right). \quad (6.94)$$

Die Einträge der Matrizen  $\mathbf{X}_{nkm}^i(\psi_b, \bar{O})$  mit  $i = 1, 2, \dots, 5$  hängen vom Grad  $n$ , den Ordnungen  $(k, m)$ , den zeitlich konstanten (bzw. gemittelten) Orbitalelementen  $\bar{O} = \{r, a, \bar{n}, I, \Omega, v_0, \Delta\Theta, \dots\}$  sowie den Parametern  $\psi_b$  der Basisfunktion, nicht aber von der Zeit  $\tau$  ab. In der letzten Matrix  $\mathbf{RES}(\psi_b, \bar{O}, \tau)$  sind die Anteile der Resonanzfälle enthalten, welche nicht in das Schema der anderen Funktionen passen, wie zum Beispiel der quadratische Term  $\{-\frac{3}{2}\tau^2\}$  in der  $y_H$ -Komponente für  $q_{km} = 0$ .

Vergleicht man den allgemeinen Anteil der inhomogenen Lösung mit der Diskussion der homogenen Lösung (S. 111), so erkennt man auch hier eine Schwingung, deren Frequenz mit der mittleren Bewegung  $\bar{n}$  übereinstimmt, auch wenn diese nun in der komplexen Form  $\exp(\pm i\bar{n}\tau)$  auftritt. Es zeigt sich ebenfalls der Offset in den  $x_H$ - und  $y_H$ -Komponenten  $\left\{i\frac{2}{\bar{n}q_{km}}\right\}$  bzw.  $\left\{-i\frac{2}{\bar{n}q_{km}}, -\frac{3}{q_{km}^2}\right\}$  sowie in letzterer ein linearer Trend aufgrund des Terms  $\left\{-\frac{3v\tau}{q_{km}}\right\}$ . Daneben enthält die Lösung noch weitere Schwingungen mit den Frequenzen  $q_{km} = k\bar{n} - m\dot{\Theta}$  und  $q_{km} \pm \bar{n}$ , die sowohl von der Satellitenbewegung als auch der (konstanten) Rotation der Erde abhängen.

Auch die Resonanzfälle lassen sich größtenteils als Schwingungen mit den Frequenzen  $\bar{n}$  und  $3\bar{n}$  interpretieren, allerdings werden diese durch Terme der Form  $\tau e^{\pm i\bar{n}\tau}$  und  $3\bar{n}^2\tau^2$  überlagert. Dadurch ist für die inhomogene Lösung der Differentialgleichung ein starkes Driftverhalten zu erwarten, welches aber wegen der Beschränkung der Analyse auf kurze Bahnbögen hier nicht weiter behandelt werden soll.

Um die Bahnabweichungen nach den Parametern  $p_\ell^{[i]} \in \{\eta_1^{[i]}, \lambda_1^{[i]}, \vartheta_1^{[i]}, \sigma_1^{[i]}, \dots, \vartheta_B^{[i]}, \sigma_B^{[i]}\}$  der radialen Basisfunktionen zu differenzieren, nutzt man die Tatsache, dass alle Matrizen die Hilfsfunktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  in den Koeffizienten  $\{c_{km}^{nx}, c_{km}^{ny}, c_{km}^{ns}, c_{km}^{nc}\}$  enthalten. Ersetzt man die Funktion durch die partiellen Ableitungen (5.34), so folgt daraus

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{H,inh}}{\partial p_\ell^{[i]}} \\ \frac{\partial y_{H,inh}}{\partial p_\ell^{[i]}} \\ \frac{\partial z_{H,inh}}{\partial p_\ell^{[i]}} \end{pmatrix} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \left( \frac{\partial \mathbf{X}_{nkm}^1(\psi_b, \bar{O})}{\partial p_\ell^{[i]}} + \frac{\partial \mathbf{X}_{nkm}^2(\psi_b, \bar{O})}{\partial p_\ell^{[i]}}\tau + \frac{\partial \mathbf{X}_{nkm}^3(\psi_b, \bar{O})}{\partial p_\ell^{[i]}}e^{\pm i\bar{n}\tau} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathbf{X}_{nkm}^4(\psi_b, \bar{O})}{\partial p_\ell^{[i]}}e^{iq_{km}\tau} + \frac{\partial \mathbf{X}_{nkm}^5(\psi_b, \bar{O})}{\partial p_\ell^{[i]}}e^{i\tau(q_{km} \pm \bar{n})} + \frac{\partial \mathbf{RES}(\psi_b, \bar{O}, \tau)}{\partial p_\ell^{[i]}} \right). \quad (6.95)$$

Vergleicht man die geschlossene Lösung mit dem Ansatz der Variationsgleichungen, so ist die zweite Variante wesentlich einfacher zu implementieren. Während der Tensor eines sphärisch-harmonischen Referenzfeldes nach der Darstellung (6.9) eine Summation über Grad  $n$  und Ordnung  $m$  benötigt, erfordert die neue Methode eine zusätzliche Addition über eine Ordnung  $k$ , was sich auch in der Rechengeschwindigkeit niederschlägt.

Auf der anderen Seite sind die Variationsgleichungen (im klassischen Ansatz) für jeden Bahnbogen und jeden Parameter der Basis getrennt zu lösen, während in der neuen Methode die Komponenten der inversen Laplace-Transformation  $\left(x_{H,inh}^{n,k,m}(\tau), y_{H,inh}^{n,k,m}(\tau), z_{H,inh}^{n,k,m}(\tau)\right)$  unabhängig von früheren oder späteren Werten sind. Durch eine entsprechende Programmierung ist es daher möglich, die Bahnabweichungen und die partiellen Ableitungen für alle Bögen und Parameter gemeinsam zu bestimmen.

## 6.3. Range-Rate

### 6.3.1. Koordinatentransformation

Aus der Kombination der homogenen Lösung (6.52) und den inhomogenen Beiträgen (6.88) bis (6.93) kann man die Abweichungen von der Referenzbahn bestimmen, die durch eine radiale Basisfunktion erzeugt werden. Insgesamt erhält man für die Bahnänderungen

$$\begin{aligned}\Delta x_{H=1} &= x_{H,hom} + x_{H,inh} \\ \Delta x_{H=2} &= y_{H,hom} + y_{H,inh} \\ \Delta x_{H=3} &= z_{H,hom} + z_{H,inh}\end{aligned}\quad (6.37)$$

bzw. für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_{H=1} &= \dot{x}_{H,hom} + \dot{x}_{H,inh} \\ \Delta \dot{x}_{H=2} &= \dot{y}_{H,hom} + \dot{y}_{H,inh} \\ \Delta \dot{x}_{H=3} &= \dot{z}_{H,hom} + \dot{z}_{H,inh}.\end{aligned}\quad (6.96)$$

Die analogen Formeln gelten auch für den 2. Satelliten mit der Position  $\vec{y}_i$ , allerdings in dessen Koordinatensystem. Vor der Bildung der Differenzen ( $\Delta \vec{x}_i - \Delta \vec{y}_i$ ) ist daher eine Transformation in ein gemeinsames (inertiales) System erforderlich.

Das Hill-System entspricht im Wesentlichen dem rotierenden Satellitensystem, welches in der Herleitung der Wigner-Darstellung im Abschnitt 5.1.2 zum Einsatz kommt.

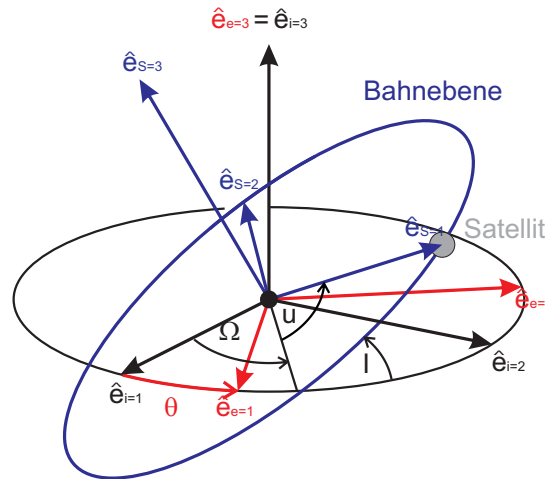


Abbildung 6.5.: Satellitenbahn und Keplerelemente für eine Kreisbahn, vgl. Grafik 5.4

Aus der Grafik 6.5 kann man die Eulerwinkel für das inertielle System, d.h. ohne die Erdrotation um die Sternzeit  $\Theta$ , entnehmen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \Omega - \frac{\pi}{2} \\ \beta &= I \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} + u = \frac{\pi}{2} + (\bar{n}\tau + v_0).\end{aligned}\quad (6.97)$$

Dabei wird das Argument der Breite durch die lineare Transformation (6.58) dargestellt. Bezeichnet man mit der Abkürzung

$$\vec{\xi}_H = \left\{ \vec{x}_{H,hom}(\tau), \quad \vec{x}_{H,inh}(\tau), \quad \frac{\partial \vec{x}_{H,inh}(\tau)}{\partial p_\ell^{[i]}} \right\} \quad (6.98)$$

eine Komponente der Positionsänderung des ersten Satelliten bezüglich der zugehörigen Referenzbahn, also die (in-)homogene Lösung im Hill-System oder deren partielle Ableitung nach den Basisparametern, so transformiert man diese durch die Eulerdrehungen

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_i(\tau) &= \mathbf{R}_3\left(-\left[\Omega - \frac{\pi}{2}\right]\right) \mathbf{R}_2(-I) \mathbf{R}_3\left(-u - \frac{\pi}{2}\right) \vec{\xi}_H(\tau) \\ \dot{\vec{\xi}}_i(\tau) &= \mathbf{R}_3\left(-\left[\Omega - \frac{\pi}{2}\right]\right) \mathbf{R}_2(-I) \cdot \left[ \mathbf{R}_3\left(-u - \frac{\pi}{2}\right) \dot{\vec{\xi}}_H(\tau) + \dot{\mathbf{R}}_3\left(-u - \frac{\pi}{2}\right) \vec{\xi}(\tau)_H \right]\end{aligned}$$

ins Inertialsystem. Für die Ableitung der Drehmatrix ergibt sich mit trigonometrischen Identitäten

$$\dot{\mathbf{R}}_3\left(-(\bar{n}\tau + v_0) - \frac{\pi}{2}\right) = \bar{n} \begin{pmatrix} -\cos(\bar{n}\tau + v_0) & \sin(\bar{n}\tau + v_0) & 0 \\ -\sin(\bar{n}\tau + v_0) & -\cos(\bar{n}\tau + v_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.99)$$

Die gleichen Schritte – also die Berechnung der Bahnabweichungen sowie die partiellen Ableitungen im Hill-System und die Transformation in das inertielle System – sind auch für den zweiten Satelliten durchzuführen, wobei für GRACE-ähnliche Missionen teilweise die Bahnelemente beider Satelliten gemittelt werden können.

### 6.3.2. Ableitung der Range-Rate

Mit den Bahnabweichungen im Hill-System bzw. deren Transformation  $\Delta\vec{x}_i$  und  $\Delta\vec{y}_i$  ins Inertialsystem und den Referenzbahnen  $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i)$  liegen alle Komponenten vor, um die linearisierte Range-Rate nach der Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dot{\rho}(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \dot{\vec{X}}_i, \dot{\vec{Y}}_i) + \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) (\Delta\vec{y}_i - \Delta\vec{x}_i) \\ &\quad + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} (\Delta\dot{\vec{y}}_i - \Delta\dot{\vec{x}}_i)\end{aligned} \quad (6.20)$$

zu berechnen. Werden die Referenzbahnen aus einem Modell ohne die gesuchten Parameter  $p_\ell^{[i]}$  bestimmt, so können diese mit der Formel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} &= \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \frac{\partial (\Delta\vec{y}_i - \Delta\vec{x}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}} \\ &\quad + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \frac{\partial (\Delta\dot{\vec{y}}_i - \Delta\dot{\vec{x}}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}}\end{aligned} \quad (6.21)$$

nach jedem (residualen) Parameter  $p_\ell^{[i]}$  differenziert werden. Die Ableitungen der Position und Geschwindigkeit nach den Basisparametern sind durch die Darstellung (6.95) gegeben, die allerdings noch ins Inertialsystem zu transformieren ist. Da die homogene Lösung des Hill-Systems nicht von den gesuchten Parametern abhängt, entfällt deren Anteil aus der Berechnung, unabhängig von den gewählten Anfangsbedingungen!

Die Ableitungen werden für die nichtlineare Optimierung in die Taylorreihe

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]}) \approx \frac{\partial \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}} \Delta\vec{p}^{[i]} \quad (6.3)$$

eingesetzt, um ein linearisiertes Modell zur Verbesserung der Parameter zu erhalten.

Auf der linken Seite der linearisierten Gleichung steht die residuale Beobachtung, also die Differenz aus der wahren (kalibrierten) Messung und der approximierten Range-Rate  $\dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})$ , die sich aus einer Orbitintegration mit allen berücksichtigten Effekten inklusive der Näherungswerte der Basisfunktionen ergibt.

Die in der Optimierung der Parameter genutzte Matrix mit den Elementen  $\frac{\partial \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}}$  stellt – wenn auch aus anderen Gründen als in der numerischen Lösung der Variationsgleichungen – nur eine Approximation der

partiellen Ableitungen der Range-Rate dar. Die Gründe dafür sind die Approximationen der Hill-Theorie (gleichmäßige Bewegung des Satelliten, konstante Erdrotation, sphärische Näherung des Referenzfeldes, ...) sowie die Berechnung der Bahnabweichung bezüglich einer Kreisbahn. Da in einer iterativen Optimierung die Kenntnis der exakten Gradienten nicht notwendig ist, kann man an einigen Stellen von der „reinen“ Theorie abweichen, wenn dies theoretisch oder praktisch begründbar ist.

Die erste Idee ist es, die kreisförmige Referenzbahn durch eine bessere Approximation des Orbits zu ersetzen. Dazu integriert man eine zusätzliche Referenzbahn ohne die Basisfunktionen, aber mit allen anderen berücksichtigten Effekten und verwendet diese Lösung für alle Iterationen. Die Keplerelemente mit Ausnahme der Exzentrizität entnimmt man dagegen den Näherungsbahnen mit den Basisparametern, die bereits für die Berechnung der residualen Range-Rate bestimmt werden und berechnet daraus die Bahnabweichungen und die Ableitungen der Range-Rate.

Auf der anderen Seite ist die Bahnebene vergleichsweise stabil, was man auch an der vernachlässigbaren  $z_H$ -Komponente des Gradienten in der Grafik 6.3 erkennt. Um die wiederholte Berechnung der Wigner-d-Funktionen zu vermeiden, kann man daher die Inklination in mehreren Schritten mitteln.

Analog zu der Berechnung des Potentials oder der LOS-Gradiometrie in der Wigner-Darstellung verwendet man innerhalb einer Iteration den Mittelwert der Inklination pro Satellit, um die Anzahl der benötigten Faktoren zu reduzieren. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man für die Satelliten in alle Iterationen nur eine Inklination – nämlich den Mittelwert der jeweiligen Referenzbahn ohne die Basisfunktionen – wählt. In der GRACE-Mission kann man wegen der ähnlichen Orbitenelemente auch die Werte der beiden Satelliten zusammenfassen, so dass die Wigner-d-Funktionen insgesamt nur einmal zu bestimmen sind.

## Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird die Range-Rate der GRACE-Mission auf zwei Arten nach den Parametern des residualen Feldes differenziert. In der Methode der Variationsgleichungen wird die Bewegungsgleichung abgeleitet und die Reihenfolge vertauscht:

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}}}{\partial t^2} = \nabla^2 T_{ref}(\vec{x}_i, \vec{\varphi}) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} + \frac{\partial \vec{\nabla} \delta T(\vec{x}_i, \vec{p})}{\partial p_\ell^{[i]}}. \quad (6.7)$$

Durch eine numerische Integration des Differentialgleichungssystems erhält man die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}}$  der Position nach den Parametern. Zusammen mit den Werten des zweiten Satelliten beschreiben diese die Ableitung der Range-Rate durch die Formel

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} = \frac{\left( \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)^\top (\vec{y}_i - \vec{x}_i) + \left( \dot{y}_i - \dot{x}_i \right)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|} - \dot{\rho} \frac{(\vec{y}_i - \vec{x}_i)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|^2}. \quad (6.4)$$

Um die zahlreichen Integrationen zu vermeiden, wird eine geschlossene Lösung entwickelt, welche auf der Abhängigkeit der Bahnabweichungen (bzgl. einer Referenzbahn) von den gesuchten Parametern basiert. Dazu führt man eine kreisförmige Referenzbahn ein und stellt die Bewegung in dem rotierenden Hill-System dar. Die Hill-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{x}_{H=1} - 2\bar{n}\Delta\dot{x}_{H=2} - 3\bar{n}^2\Delta x_{H=1} &= \frac{\partial\delta T}{\partial x_{H=1}} \\
\Delta\ddot{x}_{H=2} + 2\bar{n}\Delta\dot{x}_{H=1} &= \frac{\partial\delta T}{\partial x_{H=2}} \\
\Delta\ddot{x}_{H=3} + \bar{n}^2\Delta x_{H=3} &= \frac{\partial\delta T}{\partial x_{H=3}}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

beschreibt die Bahnabweichung durch den Gradienten eines residualen Feldes. Nach einer exemplarischen Behandlung des homogenen Anteils wird der Gradient der radialen Basisfunktionen in der Wigner-Darstellung modelliert und die inhomogene Lösung durch die Laplace-Transformation berechnet. Bei der inversen Abbildung in den Zeitbereich sind die Resonanzfälle zu berücksichtigen, die insbesondere für die Kombination der Ordnungen  $k = 0$  und  $m = \{0, \pm 1, \pm 2\}$  auftreten.

Sortiert man die zahlreichen Terme der Lösung in Abhängigkeit von den zeitabhängigen Funktionen, so erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{H,inh} \\ y_{H,inh} \\ z_{H,inh} \end{pmatrix} &= \sum_{n=n_0}^{\bar{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \left( \mathbf{X}_{nkm}^1(\psi_b, \bar{O}) + \mathbf{X}_{nkm}^2(\psi_b, \bar{O})\tau + \mathbf{X}_{nkm}^3(\psi_b, \bar{O})e^{\pm i\bar{n}\tau} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{X}_{nkm}^4(\psi_b, \bar{O})e^{iq_{km}\tau} + \mathbf{X}_{nkm}^5(\psi_b, \bar{O})e^{i\tau(q_{km} \pm \bar{n})} + \mathbf{RES}(\psi_b, \bar{O}, \tau) \right),
\end{aligned} \tag{6.94}$$

deren Koeffizienten den Formeln (6.88) bis (6.93) zu entnehmen sind.

Um nach den gesuchten Parametern zu differenzieren, ersetzt man in den Matrizen aus der Darstellung (6.94) die Funktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  jeweils durch ihre Ableitungen und rotiert die Lösung anschließend ins inertielle System. Mit dem linearisierten Modell

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} &= \frac{(\dot{\vec{Y}}_i - \dot{\vec{X}}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \frac{\partial(\Delta\vec{y}_i - \Delta\vec{x}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}} \\
&\quad + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \frac{\partial(\Delta\dot{\vec{y}}_i - \Delta\dot{\vec{x}}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

erhält man eine Approximation der Ableitung der Range-Rate nach einem residualen Parameter  $p_\ell^{[i]}$ .

Ein Vorteil der Variationsgleichungen ist deren Gültigkeit für beliebige Bahnen und Parameter, allerdings müssen entsprechend viele Differentialgleichungen numerisch gelöst werden. Der zweite Ansatz ist auf (fast) kreisförmige Bahnen beschränkt, dafür können durch eine Berechnung die partiellen Ableitungen aller Parameter für jede Bahn gemeinsam bestimmt werden.



## 7. Optimierung der Parameter

In den folgenden Abschnitten wird die Approximation residualer Satellitenbeobachtungen durch radiale Basisfunktionen als ein Optimierungsproblem der Parameter zusammengefasst. Zunächst wird der klassische Ansatz einer linearen Ausgleichung der Skalierungsfaktoren mit festen Positionen und Formparametern behandelt und auf mögliche Probleme hingewiesen.

Um diese zu vermeiden, wird die Anzahl der Parameter reduziert und diese durch eine nichtlineare Optimierung an die Daten angepasst, wofür globale und lokale Verfahren möglich sind. Als Beispiel für die globalen Methoden wird der genetische Algorithmus vorgestellt und zur Bestimmung der optimalen Positionen der Basisfunktionen aus den in-situ-Beobachtungen eingesetzt. Im lokalen Ansatz wird die übliche vermittelnde Ausgleichung durch ein stabileres Trust-Region-Verfahren ersetzt, welches die Beschränkung der Parameter auf ein Intervall erlaubt und deren Änderung in jeder Iteration durch die Schrittweite der Optimierung reguliert. Im Zusammenhang mit der lokalen Optimierung wird auch ein Teil der entwickelten Programme bzw. deren grafische Benutzeroberfläche behandelt, während für eine genauere Beschreibung auf den Anhang B.2 verwiesen wird.

### 7.1. Problemstellung

Eine Analyse des Schwerefeldes aus Satellitenbeobachtungen erfordert die Positionen (und eventuell die Geschwindigkeiten) des Testkörpers und die Umrechnung der originalen Daten in ein gravitatives Signal. Die erste Voraussetzung wird z.B. durch eine numerische Orbitintegration erreicht, in der die Beobachtungen (Positionen, Geschwindigkeitsänderungen, Beschleunigungen, Distanzen, Orientierung im Inertialsystem, ...) und die vorhandenen Modelle (Position der Sonne, des Mondes und der anderen Planeten für die Gezeiten, die Parameter der Erdatmosphäre, ...) in konsistente Zeitreihen von Positionen und Geschwindigkeiten je Satellit umgerechnet werden. Anschließend werden durch geeignete Korrekturen (Pseudo-)Beobachtungen  $\mathcal{F}\{.. \}$  aus den Daten hergeleitet, die eine Funktion des wahren Schwerefeldes  $V$  der Erde darstellen. Diese Schritte erfolgen bereits in einer Vorprozessierung und sind nicht Teil dieser Arbeit oder der entwickelten Programme.

Für die Analyse der in-situ-Beobachtungen (Potential, Line-of-Sight Gradienten) werden die Bahnelemente aus der Orbitintegration festgehalten und sowohl die Modellierung des Feldes als auch das Signal in einen globalen und einen residualen Anteil aufgespalten:

$$V = T_{ref} + \delta T \quad (7.1)$$

$$\mathcal{F}\{V\} = \mathcal{F}\{T_{ref}\} + \mathcal{F}\{\delta T\}. \quad (7.2)$$

Den globalen Anteil  $\mathcal{F}\{T_{ref}\}$  berechnet man aus einem Referenzfeld, welches z.B. durch eine Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen mit den sphärisch-harmonischen Koeffizienten  $\{\Delta\bar{S}_{nm}, \Delta\bar{C}_{nm}\}$  gegeben ist. Das residuale Signal

$$\mathcal{F}\{\delta T\} = \mathcal{F}\{V\} - \mathcal{F}\{T_{ref}\} \quad (7.3)$$

wird durch eine Überlagerung der entsprechenden Funktionale der radialen Basisfunktionen approximiert

$$\mathcal{F}\{\delta T\} = \varepsilon(T_{ref}, \psi_1, \dots, \psi_B) + \sum_{b=1}^B \mathcal{F}\{\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)\}, \quad (7.4)$$

wobei der (Fehler-)Term  $\varepsilon(T_{ref}, \psi_1, \dots, \psi_B)$  die nicht-modellierten Einflüsse, die numerischen Fehler der Vorprozessierung, die Fehler der Koeffizienten beider Modelle und die vernachlässigte zeitliche Änderung des

Schwerefeldes enthält. Verwendet man als globales Referenzfeld das Mittel aus einem längeren Beobachtungszeitraum, so können die optimierten radialen Basisfunktionen auch dazu genutzt werden, die zeitlichen Variationen in einem bestimmten Gebiet (Amazonasbecken, Grönland, ...) zu modellieren.

Eine Analyse des residualen Signals  $\mathcal{F}\{\delta T\}$  ist gleichbedeutend mit der Optimierung der Parameter des Restfeldes, so dass ein gewähltes Fehlermaß minimiert wird. In der weit verbreiteten Methode der kleinsten Quadrate werden die Beobachtungen in einem Vektor  $\vec{f}$  zusammengefasst, dessen Einträge zum Beispiel nach der Zeit  $t$  geordnet werden. Aus der Differenz zur Approximation  $\tilde{f}_B$  mit den gesuchten Parametern  $\vec{p}^{[i]}$  erhält man die Residuen

$$\vec{v} := \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \quad (7.5)$$

und daraus als Fehlermaß die quadrierte (euklidische) Norm:

$$\Xi(\vec{p}^{[i]}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right\|^2 = \vec{v}^\top \vec{v} = \sum_{\ell=1}^L v_\ell^2 \rightarrow \min. \quad (7.6)$$

Das Fehlermaß  $\Xi(\vec{p}^{[i]})$  wird im Allgemeinen als Zielfunktion oder Fitness bzw. in der Geodäsie auch einfach als  $vv$ -Summe bezeichnet, während der geklammerte Exponent – im Vorgriff auf die nichtlineare Optimierung – die Näherungswerte der  $i$ -ten Iteration angibt.

Die Analyse der Potentialwerte im Orbit lässt sich durch das Minimierungsproblem

$$\Xi(\psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots, \psi_B^{[i]}, c_1(t), c_2(t), \dots) = \left\| \left( c_{arc}(t) + \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b^{[i]}) \right) - \delta T \right\|^2 \rightarrow \min \quad (7.7)$$

darstellen, wobei  $\vec{f} := \delta T$  das residuale Potential aus dem Energieintegral in der Position  $\vec{x}_e$  (und zum Zeitpunkt  $t$ ) beschreibt. Die Variable  $\psi_b^{[i]}$  fasst die zu optimierenden Parameter je Basis  $b = 1, 2, \dots, B$  in der aktuellen Iteration  $i = 0, 1, \dots$  zusammen, während die Terme  $c_{arc}(t)$  mit  $arc = 1, 2, \dots$  eventuelle Trendfunktionen – insbesondere die Integrationskonstante des Energieintegrals – für das Zeitintervall  $[t_{arc}, t_{arc+1}]$  bezeichnen. Mögliche Intervalle sind durch die Zeitpunkte der Vorprozessierung begrenzt, in denen eine neue Kalibrierung eines Parameters stattgefunden hat oder die Orbitintegration neu gestartet wurde. Sind diese Informationen nicht vorhanden, so kann man einen globalen Trend oder eine Trendfunktion je Bogen ansetzen, um die Analyse zu verbessern. Sind die Zeitintervalle und die Form der Funktionen (Offset, linearer Trend, quadratischer Trend usw.) bekannt, so kann dieser Anteil separat bestimmt und aus den Daten eliminiert werden, weshalb die Trendfunktionen in der weiteren Diskussion nicht berücksichtigt werden.

Das Potential einer Basisfunktion ist – unter Vernachlässigung der Angabe der Iterationen  $i$  – in der Legendre-Darstellung durch

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.25)$$

beziehungsweise in der Wigner-Darstellung durch

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \quad (5.33)$$

gegeben. Falls die gewählte Optimierungsmethode die partiellen Ableitungen nach den gesuchten Basisparametern benötigt, so lauten diese in der Legendre-Darstellung

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial \eta_b} = \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b)} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial \sigma_b} = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b} P_n(\cos \varpi_b) \quad (5.21)$$

bzw. in der Darstellung durch die Wigner-d-Funktionen

$$\frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial(\eta_b, \vartheta_b, \lambda_b, \sigma_b)} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \frac{\partial B_{km}^n(\psi_b)}{\partial(\eta_b, \vartheta_b, \lambda_b, \sigma_b)} S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta))$$

mit den bekannten Ableitungen der Hilfsfunktion aus dem Kapitel 5.

Das Minimierungsproblem für die Gradiometrie mit der Beobachtung  $\vec{f} := \hat{e}^\top (\nabla^2 \delta T) \hat{e}$  lautet entsprechend

$$\Xi(\psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots, \psi_B^{[i]}) = \left\| \left( \sum_{b=1}^B \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b^{[i]})}{\partial Y^2} \right) - \hat{e}^\top (\nabla^2 \delta T) \hat{e} \right\|^2 \rightarrow \min \quad (7.8)$$

mit den Line-of-Sight Gradienten in der Legendre-Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{\eta_b}{a^2} \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\ &\cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P_n'(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P_n'(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P_n''(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

beziehungsweise in der Wigner-Darstellung

$$\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right]. \quad (5.57)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Basisparametern in der Legendre-Darstellung sind durch die Formeln (5.70), (5.71) und (5.72) im Abschnitt 5.2.2 gegeben, während in der Wigner-Darstellung wieder die Ableitungen der Funktion  $B_{km}^n(\psi_b)$  einzusetzen sind.

Andere Beobachtungen wie z.B. die Range-Rate beschreiben einen Zusammenhang zwischen den Satellitenbahnen und einer „integrierten Größe“ des Schwerfeldes. In diesem Fall ist keine nachträgliche Aufteilung in ein Referenz- und ein Residualsignal möglich und das Signal darf nicht als punktweise Messung behandelt werden. In der Analyse der Range-Rate vergleicht man die (kalibrierte) Messgröße  $\dot{\rho}$  mit einer berechneten Range-Rate  $\dot{\rho}_o$ , die aus einer Orbitintegration über das beste bekannte Feld (mit gravitativen und nicht-gravitativen Parametern  $\vec{\varphi}$ ) inklusive der Näherungswerte der Basisparameter  $\psi_b^{[i]}$  entsteht<sup>1</sup>. Dies führt auf das Minimierungsproblem

$$\Xi(\psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots, \psi_B^{[i]}) = \left\| \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots, \psi_B^{[i]}) - \dot{\rho} \right\|^2 \rightarrow \min, \quad (7.9)$$

welches in jeder Iteration der Optimierung eine Integration für die verbesserten Positionen der Satelliten erfordert.

Die Ableitungen nach den residualen Parametern  $p_\ell^{[i]} \in \{\psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots\}$  können nur näherungsweise bestimmt werden, entweder durch eine Lösung der Variationsgleichungen oder durch die geschlossene Lösung im Hill-System. Erstere nutzen eine numerische Integration einer Differentialgleichung für die einzelnen Parameter, für jeden Bogen und jede Iteration und bestimmen die Ableitungen über die Formel

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} = \frac{\left( \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)^\top (\vec{y}_i - \vec{x}_i) + \left( \dot{y}_i - \dot{x}_i \right)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|} - \dot{\rho} \frac{(\vec{y}_i - \vec{x}_i)^\top \left( \frac{\partial \vec{y}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_\ell^{[i]}} \right)}{\|\vec{y}_i - \vec{x}_i\|^2}. \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Die bisherige Umsetzung zur Analyse der Range-Rate Beobachtungen verwendet nur die sphärisch-harmonischen Koeffizienten des Referenzfeldes, eine gleichmäßige Erdrotation um die  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse und die Parameter der Basisfunktionen und muss für eine Auswertung realer Daten noch ergänzt werden.

Die geschlossene Lösung basiert auf der Bestimmung der Bahnabweichungen  $\{\Delta\vec{x}_H, \Delta\vec{y}_H\}$  bzgl. einer (kreisförmigen) Referenzbahn im rotierenden Koordinatensystem. Nach einer Transformation in das inertielle System erhält man durch Differentiation die Ableitungen der linearisierten Range-Rate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial p_\ell^{[i]}} = & \frac{(\dot{Y}_i - \dot{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \left( \mathbf{E}_{3 \times 3} - \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|^2} \right) \frac{\partial(\Delta\dot{y}_i - \Delta\dot{x}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}} \\ & + \frac{(\vec{Y}_i - \vec{X}_i)^\top}{\|\vec{Y}_i - \vec{X}_i\|} \frac{\partial(\Delta\dot{y}_i - \Delta\dot{x}_i)}{\partial p_\ell^{[i]}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Fasst man jeweils die gesuchten Parameter zu einem Vektor  $\vec{p}^{[i]}$  zusammen, so erfolgt die Analyse eines SST-Signals durch die Minimierung

$$\Xi(\vec{p}^{[i]}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right\|^2 \rightarrow \min \quad (7.10)$$

mit dem (residualen) Signal

$$\vec{f} = \{\delta T, \hat{e}^\top (\nabla^2 \delta T) \hat{e}, \dot{\rho}\}$$

und der Approximation

$$\tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) = \left\{ \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b^{[i]}), \sum_{b=1}^B \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b^{[i]})}{\partial Y^2}, \dot{\rho}_o(\vec{\varphi}, \psi_1^{[i]}, \psi_2^{[i]}, \dots, \psi_B^{[i]}) \right\}$$

durch  $B$  Basisfunktionen im  $i$ -ten Schritt. Abhängig von den gesuchten Parametern ergibt sich ein lineares oder nichtlineares Problem, wobei ersteres nur bei der Beschränkung auf die Skalierungsfaktoren (mit eventuellen Trendfunktionen) möglich ist.

## 7.2. Lineare Ausgleichung

Sehr oft wird die regionale Schwerefeldmodellierung durch radiale Basisfunktionen auf eine Ausgleichung der linearen Parameter eingeschränkt. Dazu werden die Zentren aller Basisfunktionen durch ein (un-)regelmäßiges Gitter an Positionen  $(\lambda_b, \vartheta_b)$  vorab festgelegt (Schmidt, 2007, Eicker, 2008) oder – z.B. durch die Selektionsmethoden aus Klees (2008) oder Wittwer (2009) – aus den Daten bestimmt (vgl. Kapitel 4).

Wird zusätzlich die Form der Basisfunktionen durch ein festes Modell vorgeschrieben oder durch eine andere Methode an die Daten angepasst, so reduziert sich der Vektor der unbekannt Parameter auf die Skalierungsfaktoren  $\vec{p} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_B)$  und man erhält das lineare Optimierungsproblem

$$\Xi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_B) = \left\| \tilde{f}_B(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_B) - \vec{f} \right\|^2 \rightarrow \min.$$

Bezeichnet man die Beobachtungen gemäß der üblichen Notation durch einen Vektor  $\vec{y}$  und ordnet die partiellen Ableitungen nach den Skalierungsfaktoren der einzelnen Basisfunktionen in einer Matrix  $\mathbf{A}$  mit den Elementen

$$a_b(t_\ell) = \left. \frac{\partial \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]})}{\partial \eta_b} \right|_{t_\ell} \quad \text{mit } b = 1, 2, \dots, B \text{ und } \ell = 1, 2, \dots, L$$

an, so lässt sich das Modell durch ein lineares (überbestimmtes) Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_L) \end{pmatrix}}_{=:\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(t_1) & a_2(t_1) & \dots & a_B(t_1) \\ a_1(t_2) & a_2(t_2) & \dots & a_B(t_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1(t_L) & a_2(t_L) & \dots & a_B(t_L) \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_B \end{pmatrix}}_{\vec{p}} \quad (7.11)$$

darstellen. Dabei wird die Matrix  $\mathbf{A}$  als Funktional- oder Designmatrix bezeichnet, da sie den Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten  $\vec{p}$  herstellt (Kahmen, 1997, Gruber, 2000).

Aufgrund der Fehler und Approximationen handelt es sich in der Regel um ein inkonsistentes System, d.h. es existiert kein Lösungsvektor  $\vec{p}$ , der alle Gleichungen vollständig erfüllt. Um dennoch eine Lösung  $\tilde{p}$  zu erhalten, verwendet man eine vermittelnde Ausgleichung nach dem Gauß-Markov Modell, welche die Quadratsumme der Fehler minimiert.

Geht man von unkorrelierten und gleichgenauen Beobachtungen und rein zufälligen Fehlerquellen aus, so erhält man aus dem Vektor der Residuen

$$\vec{v} = \mathbf{A}\vec{p} - \vec{y} \quad (7.12)$$

die Fitnessfunktion

$$\Xi(\vec{p}) = \vec{v}^\top \vec{v} = (\mathbf{A}\vec{p} - \vec{y})^\top (\mathbf{A}\vec{p} - \vec{y}) = \vec{p}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \vec{p} - \vec{p}^\top \mathbf{A}^\top \vec{y} - \vec{y}^\top \mathbf{A} \vec{p} + \vec{y}^\top \vec{y}. \quad (7.13)$$

Für die Minimierung differenziert man die  $vv$ -Summe formal nach den unbekanntem linearen Parametern und erhält

$$\frac{d\Xi(\vec{p})}{d\vec{p}} = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \vec{p} - 2\mathbf{A}^\top \vec{y} \stackrel{!}{=} 0. \quad (7.14)$$

Nach elementaren Umformungen und der Multiplikation mit der Inversen der sogenannten Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  liefert dies die optimale Lösung

$$\tilde{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \vec{y} \quad (7.15)$$

des Gleichungssystems (7.11). Liegen zusätzlich stochastische Informationen über die Korrelationen oder die unterschiedlichen Genauigkeiten der Beobachtungen vor, so werden diese durch eine Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  in das Modell integriert, was zu den Schätzwerten

$$\tilde{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \vec{y} \quad (7.16)$$

der Unbekannten  $\vec{p}$  führt (Kahmen, 1997, Gruber, 2000). Da die gleichgenauen und unkorrelierten Beobachtungen einen Spezialfall der letztgenannten Formel mit der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P} = \mathbf{E}_{L \times L}$  darstellen, wird im weiteren Text für eine allgemeinere Darstellung die gewichtete Version bevorzugt, obwohl diese in den entwickelten Programmen noch nicht umgesetzt ist.

Bei fixierten Basiszentren und Formparametern können die Skalierungsfaktoren für jede Verteilung von radialen Basisfunktionen durch den linearen Ansatz optimiert werden. Allerdings sind dabei folgende Punkte zu beachten:

- Obwohl eine lineare Ausgleichung theoretisch durch eine einmalige Berechnung des Gleichungssystems (7.11) gelöst werden kann, erfordert die große Anzahl an Beobachtungen und Basisfunktionen oft eine iterative Lösung, da die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}$  aus rechentechnischen Gründen nicht direkt invertierbar ist.
- Der Einfluss der Verteilung der Basiszentren auf die Qualität der Lösung ist nur schwer abzuschätzen. In Eicker (2008) werden verschiedene Punktverteilungen auf der Kugel („Reuter-“, „Geographical-“, „Gauss-“, „Driscoll-Healy-“, „Triangle-Center-“, „Triangle-Vertex-“, „Recursive-Quasi-Random-Grid“) untersucht, wobei das „Triangle-Vertex-Grid“ nach den dortigen Kriterien (Gleichmäßigkeit der Verteilung, einfache Addition weiterer Zentren) als bester Ansatz betrachtet wird. Alle vorgeschlagenen Ideen basieren allerdings auf dem rein geometrischen Problem, die Zentren auf der Kugel möglichst gleichmäßig zu verteilen, ohne die tatsächliche Anordnung der Beobachtungen oder die Struktur des (residualen) Signals zu berücksichtigen.
- Modelle mit hoher räumlicher Auflösung erfordern sehr viele, gut lokalisierende Basisfunktionen, welche die Lösung oft instabil gegen numerische Störungen machen. Einen Hinweis für diese Probleme liefern die Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}$  und deren Konditionszahl  $\kappa$ .
- Gegen die numerischen Probleme bei zu vielen oder bei sehr ähnlichen Basisfunktionen hilft eine Regularisierung der Matrix, welche aber auch das Ergebnis stark beeinflussen kann.

## Regularisierung

Eine Regularisierung stellt ein mathematisches Hilfsmittel dar, um die Lösung eines (linearen) Problems zu stabilisieren. Dies ist einerseits erforderlich, wenn die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}$  aufgrund der gewählten Parametrisierung nicht invertierbar ist, was z.B. bei einer zu großen Anzahl an Basisfunktionen möglich ist. Andererseits kann nach Louis (1989) ein Problem prinzipiell schlecht gestellt sein, weil

- die Gleichung  $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{p}$  nicht für jeden Vektor  $\vec{y}$  lösbar ist
- oder die Lösung nicht eindeutig ist
- oder das Ergebnis nicht stetig von den Daten abhängt.

Um dennoch eine (reproduzierbare) Lösung zu erhalten, sind verschiedene Ansätze möglich. In der Geodäsie wird unter anderem die Tikhonov-Phillips Regularisierung eingesetzt, welche einen von den Unbekannten  $\vec{p}$  abhängigen Strafterm  $S(\vec{p})$  zu der Zielfunktion addiert

$$\Xi^\varrho(\vec{p}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}) - \tilde{f} \right\|^2 + \varrho S(\vec{p}), \quad (7.17)$$

wobei  $\varrho$  einen noch zu bestimmenden positiven Parameter bezeichnet (Louis, 1989, Kusche, 2002, Eicker, 2008). Beschränkt man sich auf einen linearen Strafterm, so kann dieser durch eine frei wählbare Norm der Unbekannten in einem Hilbertraum  $\mathbb{H}(\varsigma_n)$  mit der Gewichtung  $\mathbf{L}$  ausgedrückt werden:

$$S(\vec{p}) = \|\mathbf{L}\vec{p}\|_{\mathbb{H}(\varsigma_n)}^2. \quad (7.18)$$

Die neue Zielfunktion  $\Xi^\varrho$  erreicht eine optimale Lösung  $\tilde{p}$ , die einen Kompromiss zwischen der Approximation der Daten und einer gewichteten Norm der Unbekannten darstellt.

Speziell für die radialen Basisfunktionen wird in Eicker (2008) der Ansatz

$$\mathbf{L}\vec{p} = \sum_{b=1}^B \eta_b \psi_b^{s_n}(\lambda, \vartheta) \quad (7.19)$$

mit den Splinefunktionen (4.69) auf der Kugeloberfläche gewählt, was auf die Zielfunktion

$$\Xi^\varrho(\vec{p}) = \underbrace{(\mathbf{A}\vec{p} - \vec{y})^\top}_{(\tilde{f}_B(\vec{p}) - \tilde{f})^\top} \mathbf{P}(\mathbf{A}\vec{p} - \vec{y}) + \varrho \vec{p}^\top \mathbf{R}_\varrho \vec{p} \quad (7.20)$$

führt<sup>2</sup>. Dabei bezeichnet  $\mathbf{P}$  die Gewichtsmatrix,  $\vec{p} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_B)$  die gesuchten Skalierungsfaktoren und die quadratische Matrix  $\mathbf{R}_\varrho$  beinhaltet die Skalarprodukte  $\langle \psi_b^{s_n}, \psi_{b'}^{s_n} \rangle_{\mathbb{H}(\varsigma_n)}$  aller Basisfunktionen im Hilbertraum  $\mathbb{H}(\varsigma_n)$ . Durch die Verwendung der reproduzierenden Kerne vereinfacht sich die Matrix  $\mathbf{R}_\varrho$  zu einer Einheitsmatrix.

Das Optimierungsproblem (7.20) wird durch den Vektor

$$\tilde{p}^\varrho = \left( \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} + \varrho \mathbf{R}_\varrho \right) \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \vec{y} \quad (7.21)$$

gelöst, wobei für den Parameter  $\varrho$  neben rein empirischen Werten z.B. auch das Kriterium der „L-Kurve“ oder eine General Cross Validation verwendet werden kann (Kusche, 2002, Eicker, 2008).

In der häufig verwendeten Methode der L-Kurve berechnet man die Lösung für verschiedene Parameter  $\varrho$ . Anschließend trägt man in einem (doppelloarithmischen) Koordinatensystem die Norm der Residuen  $\sqrt{\vec{v}^\top \mathbf{P} \vec{v}}$  gegen die Norm der Lösung  $\sqrt{(\tilde{p}^\varrho)^\top \mathbf{R}_\varrho \tilde{p}^\varrho}$  auf. Für kleine Regularisierungsparameter  $\varrho$  wird im Wesentlichen die Norm der Residuen minimiert und die entstehende Lösung an das Rauschen (der Daten) angepasst. Große Werte führen dagegen zu einer glatten Lösung, die die Beobachtungen nur unzureichend berücksichtigt. Die entstehende Kurve ähnelt häufig dem Buchstaben „L“ bzw. einer Hyperbel, deren Äste annähernd parallel zu den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet sind (vgl. Abbildung 7.1). Ein optimaler Parameter  $\varrho$  soll zwischen der Anpassung an die Beobachtungen (Norm der Residuen) und einem glatten Modell des Feldes (Norm der Lösung) vermitteln, was dem Knick der Kurve entspricht.

<sup>2</sup>Ignoriert man die Gewichtsmatrix und stellt den ersten Term mit einem Summenzeichen dar, so erkennt man eine Formel, welche sehr der Bedingung (4.55) der eindimensionalen Splines ähnelt und so nachträglich die Gleichsetzung von reproduzierenden Kernen und Splines auf der Kugel erklärt.

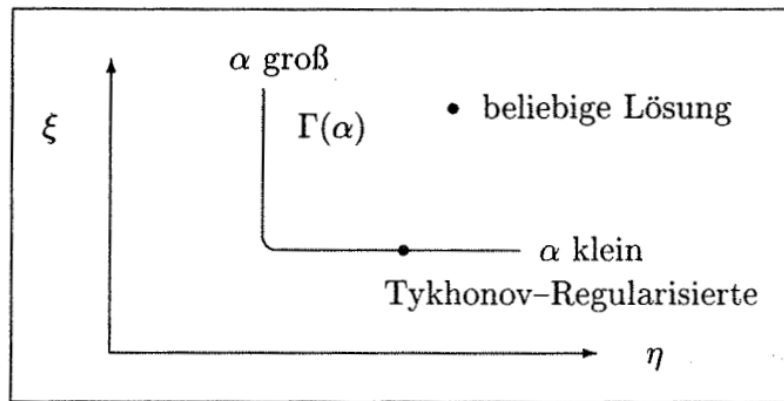


Abbildung 7.1.: Schematische Darstellung einer L-Kurve aus Kusche (2002), wobei  $\xi$  die Norm der Residuen,  $\alpha$  den Regularisierungsparameter und  $\eta$  die Norm der Lösung bezeichnet

### 7.3. Nichtlineare Optimierung

Ein Grund für die notwendige Regularisierung ist die Überparametrisierung des Problems, d.h. es werden für die Gebietsgröße oder die Daten eine zu große Anzahl an Parametern bestimmt. Daher liegt es nahe, die Anzahl der Parameter – bzw. in diesem Fall die Anzahl der Basisfunktionen – stark zu reduzieren.

Um dennoch eine gute Anpassung zu erhalten, kann man – wie bereits im Kapitel 4 angedeutet – die Basiszentren durch eine nichtlineare Optimierung an die vorhandenen Daten anpassen. Dabei werden die Positionen von wenigen, aber „effektiven“ Basisfunktionen aus den Daten initialisiert und zusammen mit weiteren Basisparametern iterativ verbessert. Insbesondere kann auch die Form der einzelnen Basisfunktionen individuell angepasst werden, um die Approximation bei gleich bleibender Anzahl an Basisfunktionen zu optimieren.

Die Lösung eines nichtlinearen Problems beinhaltet insbesondere die folgenden Schritte:

1. Zunächst müssen geeignete Näherungswerte  $\vec{p}^{[0]}$  für alle gesuchten Parameter beschafft werden, welche eine erste Lösung ermöglichen.
2. Aus den zahlreichen Theorien der nichtlinearen Optimierung ist ein geeigneter Algorithmus auszuwählen, der aus den vorherigen Lösungen  $\vec{p}^{[i]}$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$  oder aus zufälligen Werten neue Parameter  $\vec{p}^{[i+1]}$  bestimmt, die eine bessere Lösung erzeugen.
3. Die einzelnen Lösungen müssen durch geeignete Kriterien bewertet werden, deren Gesamtheit als Zielfunktion oder Fitness der Optimierung bezeichnet wird. Durch die Formulierung als Minimierungsproblem bilden absolute (oder relative) Werte der Fitness  $\Xi$  ein erstes Bewertungskriterium, welches z.B. durch statistische Maße (Korrelation zwischen Signal und Approximation, Standardabweichung der Differenz, ...) ergänzt werden kann.
4. Eventuell sind lineare oder nichtlineare Nebenbedingungen in den Algorithmus zu integrieren. Eine einfache Variante ist die Einführung eines Straftermes, der die Bewertung verschlechtert, wenn gewisse Bedingungen nicht erfüllt werden. In einer regionalen Schwerefeldmodellierung liegt es nahe, nur Basiszentren innerhalb des Gebiets der Daten zuzulassen, oder die Formparameter in Abhängigkeit von dem gewählten Modell der Legendre-Koeffizienten auf ein Intervall einzuschränken.
5. Außerdem benötigt der Algorithmus noch Abbruchbedingungen, deren einfachste Wahl der Wert der Zielfunktion, die relativen Änderungen der Parameter oder die Anzahl der Iterationen darstellen.

In den nichtlinearen Optimierungsalgorithmen unterscheidet man in der Regel zwischen lokalen und globalen Verfahren. In den lokalen Methoden geht man von (guten) Startwerten der gesuchten Parameter aus, die mittels kleiner Änderungen verbessert werden. Dieser Ansatz wird oft bzgl. der benötigten Ableitungen unterteilt,

wobei die ableitungsfreien Verfahren (z.B. Downhill-Simplex-Verfahren von Nelder-Mead<sup>3</sup>) für kompliziertere oder nicht differenzierbare Funktionen eingesetzt werden, während die Verfahren mit der ersten Ableitung (vermittelnde Ausgleichung, Quasi-Newton-Verfahren, konjugierten Gradienten, ...) und Ansätze mit der zweiten Ableitung (Newton-, Levenberg-Marquardt-, Trust-Region-Verfahren, ...) die optimale Suchrichtung für die Verbesserungen wählen (Alt, 2002, Nocedal, 2006).

Die globalen Methoden versuchen eine optimale Lösung aus allen Möglichkeiten zu finden, weshalb das Ergebnis oft besser als das der lokalen Verfahren ist. Sehr viele globale Ansätze werden natürlichen Prozessen insbesondere aus der Biologie nachempfunden, wie zum Beispiel die genetischen Algorithmen (vgl. nächster Abschnitt), die Schwarmoptimierung („particle swarm optimization“) und die Ameisen-Kolonie-Optimierung („ant colony optimization“), andere basieren auf physikalischen Vorgängen wie der simulierten Abkühlung („simulated annealing“) von Werkstoffen. Eine Übersicht über die gängigsten Verfahren, deren Implementierung sowie umfangreiche Literaturhinweise kann man in Weise (2009) finden. Zu den Eigenheiten der meisten globalen Verfahren gehört neben dem Verzicht auf die partiellen Ableitungen nach den gesuchten Parametern und der zufälligen Wahl der Startwerte oft die Verwendung von verschiedenen möglichen Lösungsvektoren, welche im nächsten Schritt zu neuen Lösungsvorschlägen kombiniert werden.

Um verschiedene Methoden der nichtlinearen Optimierung zu testen, wird in dieser Arbeit die bereits erwähnte Software MATLAB der Firma „The Mathworks“ (in den Versionen 7.6 R2008a und 7.9 R2009b) verwendet. Die Software beinhaltet sowohl in der Grundausstattung als auch in zusätzlichen Programmpaketen, die meist als „Toolbox“ bezeichnet werden, zahlreiche Verfahren zur Lösung nichtlinearer Probleme. Weitere Vorteile sind die einfache Programmierung, die Möglichkeiten zur Visualisierung oder die teilweise frei verfügbaren Routinen anderer Nutzer im Internet. Insbesondere sei dazu auf die Homepage der Herstellerfirma hingewiesen, auf welcher unter dem Link <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> eine umfangreiche Sammlung von Funktionen zur Verfügung gestellt wird. Im weiteren Text werden die verwendeten *Funktionen* durch eine kursive Schrift hervorgehoben und bei externen Routinen der Ursprung vermerkt, während für die eigenen Entwicklungen auf die Übersicht im Anhang B.2 verwiesen sei.

### 7.3.1. Globale Optimierung: Genetische Algorithmen

Stellvertretend für die globalen Optimierungsverfahren werden hier die genetischen Algorithmen vorgestellt, zumal diese im Zusammenhang mit radialen Basisfunktionen in der Geodäsie bereits erfolgreich eingesetzt werden (Sharifi, 2006, Keller, 2007, Raizner, 2008). In diesem Ansatz werden die möglichen Lösungen jeweils als Individuen interpretiert, deren Fitness durch eine simulierte Evolution verbessert wird.

Während Sharifi (2006) und Raizner (2008) sich auf die Optimierung der Formparameter beschränken, wird in Keller (2007) das Problem für die Position, die Form und die Skalierung gemeinsam gelöst. In dieser Studie werden mit 3 radialen Basisfunktionen die residualen Line-of-Sight Gradienten für 6 Bahnbögen simuliert. Anschließend wird das Signal durch radiale Basisfunktionen modelliert, deren Parameter in der Darstellung dieser Arbeit den Werten  $\{\lambda_b, \vartheta_b, \sigma_b, \eta_b\}$  für  $b = 1, 2, \dots, B$  entsprechen. Als Referenz wird zunächst eine lineare Ausgleichung der Skalierungsfaktoren mit 196 Basisfunktionen mit festgehaltenen Formparametern und Positionen berechnet und auf die problematische Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = 10^{21}$  der Ausgleichung hingewiesen. Die modellierten LOS-Gradienten zeigen praktisch keinerlei Ähnlichkeit mit den wahren Beobachtungen, auch wenn Angaben über die Größenordnungen oder die Statistik dazu fehlen. Mit einem genetischen Algorithmus wird eine Lösung aus 5 Basisfunktionen gefunden, welche nach 200 Iterationen die Fitness von  $\Xi \approx 9.6$  auf  $\Xi \approx 0.6$  reduziert, wodurch in den Grafiken das Signal und die Approximation nicht mehr unterscheidbar sind. Die Arbeitsweise und die Vorteile der genetischen Algorithmen werden hier anhand der in-situ Beobachtungen – am Beispiel der residualen Potentialwerte im Orbit – diskutiert, während zur Vertiefung auf die Literatur (z.B. Goldberg (1989), Haupt (2004)), die online Beschreibung der Toolbox (The MathWorks, 2009) und die Übersicht in Weise (2009) verwiesen wird. Nach Goldberg (1989) gehören die genetischen Algorithmen zu den einfacheren globalen Optimierungsverfahren und können durch die folgenden vier Prinzipien charakterisiert werden:

<sup>3</sup>Im Gegensatz zum bekannteren Simplexverfahren der linearen Optimierung, welches in Bartsch (1999) oder Nocedal (2006) behandelt wird, werden im nichtlinearen Fall die „Ecken“ mit den schlechteren Fitnesswerten solange iterativ verändert, bis sich das Simplex um ein lokales Optimum konzentriert.



1. In der klassischen Implementierung arbeiten genetische Algorithmen nicht mit den gesuchten Parametern, sondern mit einer endlich-dimensionalen Kodierung derselben, welche z.B. auf einer binären Darstellung der Werte beruht.
2. Anstelle der Verbesserung einer einzelnen Lösung (= Individuum) wird in jedem Schritt eine Vielzahl möglicher Lösungen verwendet, deren Gesamtheit als Population bezeichnet wird. Entsprechend dem biologischen Vorbild werden die Populationen von zwei aufeinanderfolgenden Iterationen auch als Eltern- bzw. Kindergeneration bezeichnet.
3. Zur Optimierung wird nur der Wert der Zielfunktion genutzt, Nebenbedingungen oder Zusatzinformationen sind gegebenenfalls in die Fitness zu integrieren.
4. Die Veränderungen der Lösungen erfolgen nach stochastischen Ansätzen, die der natürlichen Vererbung in der Evolution nachempfunden sind (Selektion, Reproduktion, Kombination, Mutation etc.). Die Prozesse enthalten insbesondere keine deterministischen Regeln, so dass sich die Fitnesswerte auch verschlechtern können.

Eine mögliche Erweiterung des Ansatzes bietet die Verwendung mehrdimensionaler Zielfunktionen oder eine hybride Optimierung, welche einen genetischen Algorithmus mit einem lokalen Verfahren kombiniert.

In dieser Arbeit wird auf den genetischen Algorithmus *gam* von MATLAB zurückgegriffen, welcher standardmäßig die Minimierung einer Zielfunktion mit reellen Parametern – also ohne vorherige binäre Kodierung – durchführt. Um aus beobachteten Potentialwerten im Orbit die Parameter der radialen Basisfunktionen zu bestimmen, wird ein hybrides Modell implementiert. Dabei werden in jeder Iteration die Positionen und Formparameter durch das globale Verfahren festgelegt und die Skalierungsfaktoren jeweils durch eine lineare Ausgleichung geschätzt. Dadurch wird zum einen die Anzahl der Variablen in der nichtlinearen Optimierung verringert und zum anderen die Approximation optimal an die Daten angepasst.

Nach der Eingabe einiger Optionen (Anzahl der Iterationen, Anzahl der Parameter, Intervallgrenzen, ...) wird der Algorithmus durch eine größere Anzahl  $G$  möglicher Kandidaten mit zufälligen Parametern  $\vec{p}_g^{[0]}$  für die Individuen  $g = 1, 2, \dots, G$  initialisiert.

Anschließend folgt die Evaluation (durch die Funktionen *PiO4GA3.m* bzw. *LoS4GA3.m*), indem man zu jeder Lösung die zugehörige Fitness aus der Summe der quadrierten Abweichungen von Signal und Approximation berechnet. Durch die zufällige Verteilung der Zentren kann eine lokale Konzentration der Basiszentren nicht ausgeschlossen werden, die dann zu einer schlecht bestimmten Lösung führt. Da in diesem Fall auch eine große Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$  der Normalgleichungsmatrix für das lineare Problem zu erwarten ist, wird ab dem Wert  $\kappa(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = 10^8$  ein empirischer Strafterm zu der Fitness addiert:

$$\Xi^S(\vec{p}_g^{[i]}) = \left\| \vec{f}_B(\vec{p}_g^{[i]}) - \vec{f} \right\|^2 + \begin{cases} \log(\kappa(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})) \cdot \frac{1}{100} \|\vec{f}\|^2 & \kappa > 10^8 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.22)$$

Dieser Strafterm verschlechtert für numerisch problematische Matrizen den Fitnesswert der Lösung um einen Summanden, der proportional zum residualen Signal und der Größenordnung der Konditionszahl ist.

Aus allen Individuen einer Iteration wählt man durch zufällige Prozesse die Kandidaten der nächsten Generation aus, allerdings mit einer gewissen Bevorzugung der Lösungen mit besseren Fitnesswerten (Selektion und Reproduktion). In der MATLAB Variante werden laut Beschreibung (The MathWorks, 2009) zunächst die Individuen nach den Fitnesswerten geordnet und die Werte gegebenenfalls skaliert. Anschließend wird eine Strecke mit vorgegebener Länge durch Intervalle unterteilt, deren Größe proportional zur skalierten Fitness ist. In der Selektion wird die Strecke mit einer festen Schrittweite durchlaufen und aus den Treffern die zugeordneten Individuen ausgewählt. Dadurch wird die neue Generation initialisiert, in welcher die besseren Individuen mit einer erhöhten Wahrscheinlichkeit mehrmals auftreten.

Für die Kombination werden jeweils zwei ausgewählte Individuen zu zwei neuen Lösungsvorschlägen zusammengesetzt, indem einzelne Teile der einen Lösung mit den entsprechenden Stellen des zweiten Partners vertauscht werden. In der binären Version geschieht dies direkt durch das Austauschen einzelner Zeichenketten, in der reellwertigen Variante werden die zu tauschenden Parameter durch einen zufälligen binären Vektor bestimmt, dessen Länge der Anzahl der Unbekannten entspricht.

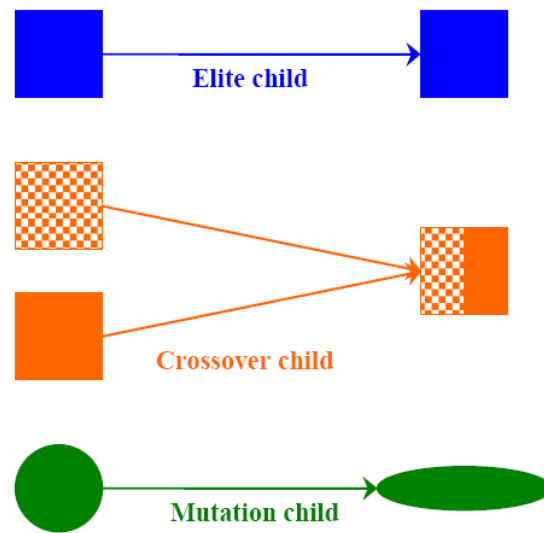


Abbildung 7.2.: Symbolische Darstellung der evolutionären Prinzipien (Reproduktion, Kombination und Mutation) aus Raizner (2008)

Nach Reproduktion und Kombination folgt eine Mutation, wobei mit einer vorgegebenen Häufigkeit einzelne Elemente (der Kodierung) „falsch kopiert“ werden. Dies geschieht in der binären Darstellung durch den Wechsel zwischen Nullen und Einsen und durch die Addition von Zufallszahlen zu einzelnen Parametern in der reellen Version. Abbildung 7.2 zeigt in einer symbolischen Darstellung, wie neue Individuen durch Reproduktion, Kombination und Mutation aus der ursprünglichen Lösung erzeugt werden.

In der MATLAB-Variante *ga.m* wird das Verhältnis von Reproduktion, Mutation und Kombination durch entsprechende Optionen gesteuert. Werden die Standardeinstellungen nicht verändert, so werden die zwei besten Individuen unverändert in die folgende Generation übernommen, 80 % der nächsten Lösungsvorschläge entstehen durch Kombination zweier Individuen. Die übrigen Elemente der Generation werden durch Mutationen mit normalverteilten, skalierten Zufallszahlen erzeugt. Mit der neuen Generation  $p_g^{[i+1]}$  mit  $i = 1, 2, \dots$  werden die Schritte wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erreicht ist.

Die Abbildung 7.3 zeigt links oben ein simuliertes Testfeld mit 3000 Potentialwerten im Orbit, welches durch 5 radiale Basisfunktionen mit den Entwicklungsgraden  $0 \leq n \leq 100$  erzeugt wird. Daneben ist die beste bzw. schlechteste Lösung des genetischen Algorithmus für 10 optimierte radiale Basisfunktionen dargestellt. Wie man der linken Grafik der zweiten Zeile entnehmen kann, reduzieren sich die Fitnesswerte der Individuen sowohl im Mittel als auch für die beste Lösung sehr rasch, wobei der Maximalwert  $\Xi_{max}^S = 0.9879$  und das Minimum  $\Xi_{min}^S = 0.0021$  beträgt. Die verbleibenden Abbildungen illustrieren die Differenz zwischen der Beobachtung und der Approximation der beiden finalen Lösungen. Da die Differenz zwischen der besten Lösung und dem Signal um eine Größenordnung kleiner ist als die Beobachtung, werden ca. 90 % des Signals korrekt wiedergegeben, was auch durch die hohe Korrelation von 0.99 % oder die Standardabweichungen (Signal:  $0.0254 \frac{m^2}{s^2}$ , Differenz:  $0.0008 \frac{m^2}{s^2}$ ) bestätigt wird. Der erwähnte Strafterm kommt in diesem Beispiel nur in der ersten Generation zum Einsatz, weshalb in weiteren Experimenten auch über eine Reduktion der Schranke bezüglich der Konditionszahl nachgedacht werden kann.

Zu den Vorteilen der genetischen Algorithmen zählen die einfache Implementierung, die beliebigen (zufälligen) Startwerte und die mögliche Parallelisierung auf mehreren Rechnern. Da weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit gefordert werden, kann die Methode für eine Vielzahl von Problemen eingesetzt werden. Auf der anderen Seite erfordern insbesondere Aufgaben mit vielen Variablen eine sehr große Anzahl an Auswertungen für die Populationen und die Generationen, was sich natürlich auch in der Geschwindigkeit niederschlägt.

Auch sind die Ergebnisse aufgrund der Verwendung von Zufallsprozessen (für Startwerte, Reproduktion, Kombination und Mutation) nicht reproduzierbar und selbst die gleichen Einstellungen liefern unter Umständen sehr verschiedene Lösungen. Eine mögliche Gegenmaßnahme für das letzte Problem ist eine nachgeschaltete lokale Optimierung, deren Startwerte aus dem gewichteten Mittel der Lösungen aus den genetischen Algorithmen

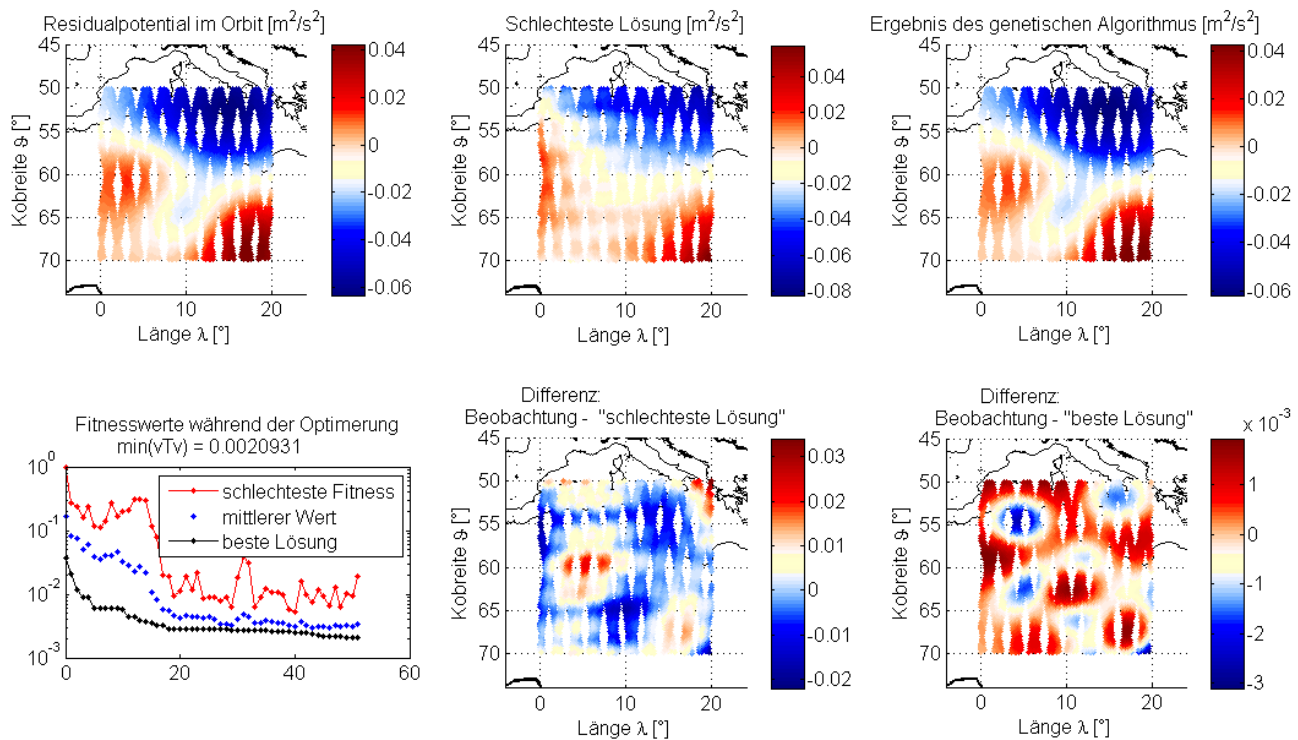


Abbildung 7.3.: Lösung eines Testfeldes durch einen hybriden genetischen Algorithmus

bestimmt werden. Speziell in der Analyse der SST-Daten durch radiale Basisfunktionen ergibt sich noch die zusätzliche Schwierigkeit, dass die Anzahl der Basisfunktionen im genetischen Algorithmus bereits vorher festgelegt werden muss und man daher nicht unbedingt die optimale Anzahl für die Approximation erreicht.

### 7.3.2. Lokale Optimierung: Trust-Region-Verfahren

Wie bereits im Abschnitt 4.1 erläutert, findet sich ein früher geodätischer Ansatz für die Optimierung von Punktmassen in der Dissertation von Barthelmes (1986). Die Grundidee besteht darin, eine neue Punktmasse in der Lage der betragsmäßig größten Störbeschleunigung des jeweiligen Residualfeldes mit einer vorgegebenen Tiefe zu initialisieren und anschließend durch eine Ausgleichung die Lage, die Tiefe und das Gewicht zu verbessern.

Aufgrund der leistungsfähigeren Rechner und einem anderen Optimierungsverfahren konnte diese Methode in einigen Punkten erfolgreich modifiziert werden. Der wichtigste Unterschied ist die Suche mehrerer Basisfunktionen und deren gemeinsame Optimierung, wodurch die gegenseitige Abhängigkeit der Basisparameter und die Nichtlinearität des Problems besser berücksichtigt wird. Auch werden durch die entwickelten Programme nicht nur simulierte Gradienten eines Modells, sondern verschiedene (Pseudo)-Beobachtungen geodätischer Satellitenmissionen verarbeitet. Eine weitere Verallgemeinerung ist die Nutzung unterschiedlicher radialer Basisfunktionen, obgleich die approximierten Punktmassen wegen ihrer Einfachheit auch hier das bevorzugte Modell darstellen. Die damals zur Datenreduktion erfolgte Beschränkung auf die nächstgelegenen Beobachtungen je Basis hat sich für regionale Analysen bislang als nicht notwendig erwiesen, wird aber in Ansätzen durch eine mögliche Dezimierung der Daten während der nichtlinearen Optimierung umgesetzt, wobei die endgültigen Skalierungsfaktoren aus allen Daten bestimmt werden.

Der erste Schritt einer solchen Optimierung ist die Untersuchung, ob die Position einer zusätzlichen Basisfunktion in einem Datensatz detektierbar ist. Die Simulationen aus dem Kapitel 5 zeigen, dass für das Potential und die Line-of-Sight Gradienten die Lage der Extremwerte in den Beobachtungen eine geeignete Näherung für das Basiszentrum liefert. Die Initialisierung wird allerdings beeinträchtigt durch die Überlagerung

der Potentiale der verschiedenen Basisfunktionen, die Variationen in der Orbithöhe, das Rauschen und die unregelmäßige Abtastung, weshalb die gefundenen Zentren noch durch ein nichtlineares Verfahren zu verbessern sind. In der Range-Rate kann eine ähnliche Korrelation mit leicht detektierbaren Funktionswerten nicht nachgewiesen werden, weshalb die Startwerte hier entweder durch ein globales Optimierungsverfahren oder eine vorherige Auswertung einer in-situ Beobachtung beschafft werden müssen.

In Abbildung 7.4 ist der gesamte Ablauf der Optimierung für die in-situ Beobachtungen (Potential und Line-of-Sight Gradient) schematisch dargestellt, welcher in den folgenden Seiten näher erläutert wird.

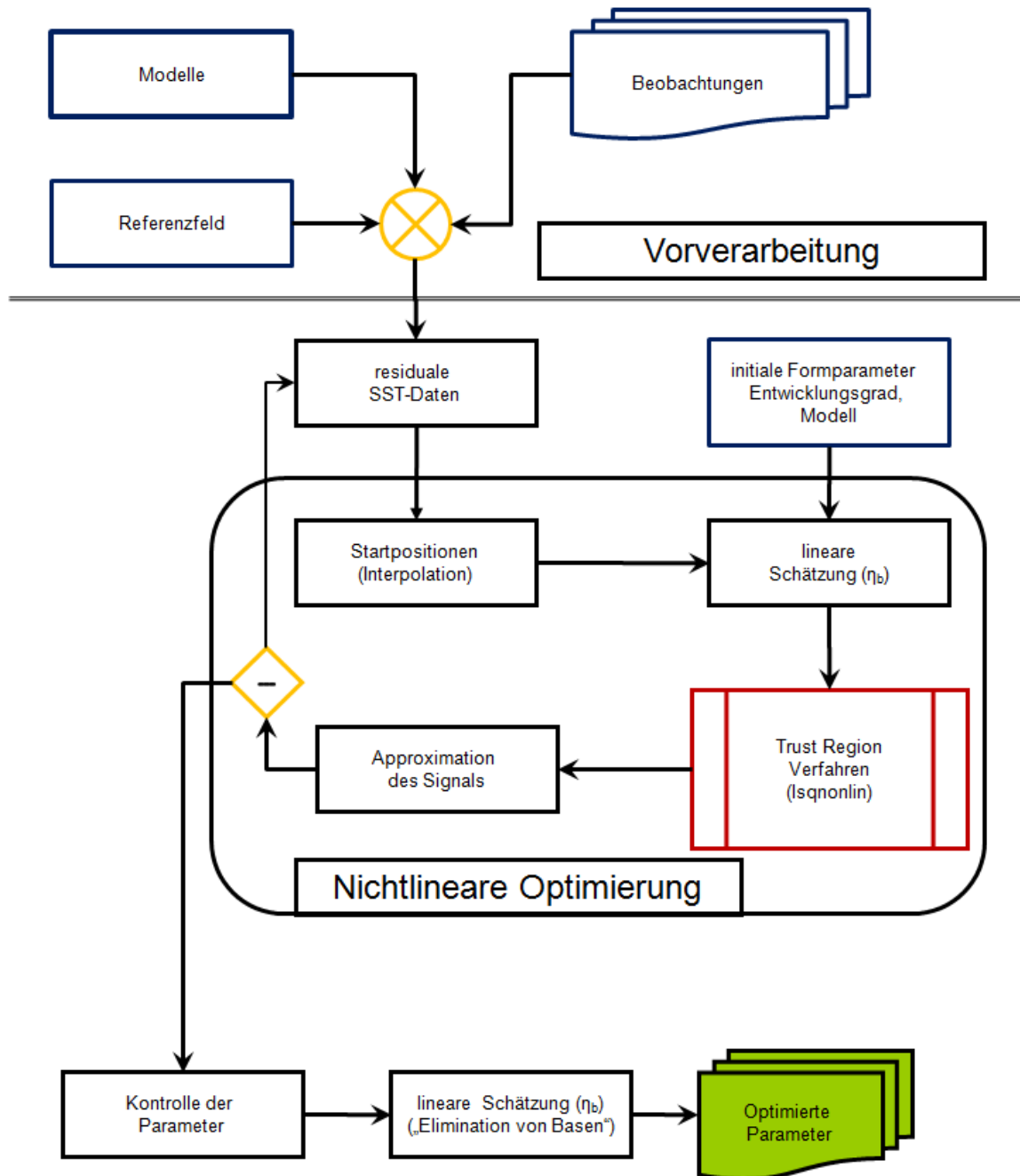


Abbildung 7.4.: Ablauf der Optimierung für die in-situ Beobachtungen (Potential und LOS-Gradient)

### Parametereingabe

Wie viele nichtlineare Optimierungsverfahren können auch die hier entwickelten Methoden durch die Eingabe einiger Optionen gesteuert werden. Um die Nutzung zu erleichtern, wird eine (einfache) grafische Oberfläche

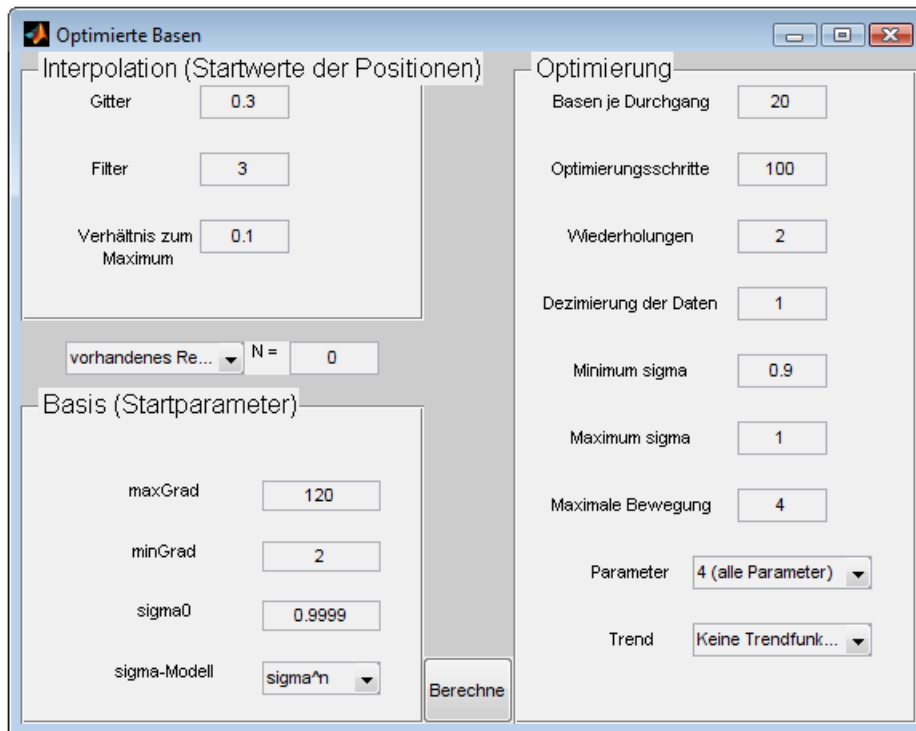


Abbildung 7.5.: Screenshot des neu entwickelten Eingabefensters zur nichtlinearen Optimierung der residualen Potentialwerte im Orbit. Einzugeben sind neben Startwerten und Intervallgrenzen auch zusätzliche Optionen wie die Anzahl der Wiederholungen oder das Referenzfeld

für die Programme zur Verfügung gestellt, mit der alle Analysemethoden aufgerufen werden können. Startet man die Optimierung für das Potential, die LOS-Gradienten oder die Range-Rate, so erscheint eine Variante eines Eingabefensters, das für das Energieintegral in der Abbildung 7.5 dargestellt ist. Das Fenster ist in vier logische Teilbereiche unterteilt, welche die eingerahmten **Eingaben** erfordern:

- Interpolation (Startwerte der Positionen)
  - **Gitter**: Abstand der Interpolationspunkte eines regelmäßigen  $(\lambda, \vartheta)$ -Gitters in Grad
  - **Filter**: Dimension des Binomialfilters zur Glättung der Daten für die initialen Basiszentren
  - **Verhältnis zum Maximum**: „Höhe“ des kleinsten akzeptierten Extremwerts im Vergleich zur größten Anomalie
- Basisfunktion (Startparameter)
  - **maxGrad**: maximaler Grad der Reihenentwicklung der radialen Basisfunktion
  - **minGrad**: untere Grenze der Reihenentwicklung
  - **sigma**: Startwert für den Formparameter
  - **sigma-Modell**: Selektion des Modells der Legendre-Koeffizienten
- Optimierung
  - **Basen je Durchgang**: maximal zulässige Anzahl an Basisfunktionen je Durchgang
  - **Optimierungsschritte**: Anzahl der Iterationen für die nichtlineare Optimierung

- **Wiederholungen**: Anzahl der Optimierungen nach der Subtraktion der bisher approximierten Anteile für weitere Basisfunktionen
  - **Dezimierung der Daten**: optionale Reduzierung der Anzahl der Daten während der nichtlinearen Optimierung
  - **Maximum sigma**: obere Schranke der Formparameter
  - **Minimum sigma**: untere Grenze der Formparameter
  - **Maximale Bewegung**: zulässige Änderung bzgl. der initialen Position der Basiszentren in Grad
  - **Parameter**: Auswahl der Anzahl der Unbekannten je Basisfunktion
  - **Trend**: Mögliche Bestimmung und Eliminierung einer Trendfunktion in den Daten vor der eigentlichen Optimierung
- Referenzfeld
    - Auswahl des Referenzfeldes aus einer Liste vorhandener Modelle
    - maximaler Entwicklungsgrad für das Referenzfeld aus sphärisch-harmonischen Koeffizienten

In Abhängigkeit von der gewählten Beobachtung und der Vorverarbeitung können einzelne Eingaben entfallen. Durch den **Berechne**-Knopf werden die gewählten Optionen mit den Defaultwerten überprüft und für die weitere Anwendung in einer temporären Datei mit dem Namen „GUIDatei.mat“ gespeichert. In seltenen Fällen ist diese Datei auch noch nach der Optimierung vorhanden und sollte dann manuell aus den Ordnern gelöscht werden.

## Referenzfeld

Für eine residuale Auswertung ist die Wahl eines Referenzfeldes  $T_{ref}(\lambda, \vartheta, r)$  – hier in Form von sphärisch-harmonischen Koeffizienten – und die Festlegung des maximalen Entwicklungsgrades  $N$  erforderlich. Die Größenordnung des verbleibenden Signals und dessen gravitativer Anteil hängt dabei insbesondere von dem Referenzfeld und dessen Koeffizienten ab.

Die nachträgliche Änderung des Referenzfeldes ist bislang nur für das Energieintegral implementiert, während alle anderen Beobachtungen das Feld aus der Vorverarbeitung nutzen. Wird die Voreinstellung nicht geändert, so wird das vorhandene Referenzpotential der Datei verwendet, anderenfalls wird die sphärisch-harmonische Synthese bis zum Grad  $N$  an den Positionen des vorher berechneten (und festgehaltenen) Orbits neu berechnet. Die Modellgrößen des Referenzfeldes werden von dem Signal im Orbit subtrahiert, um eine residuale Größe zu erhalten.

## Basisparameter

In der Optimierung müssen für alle Basisfunktionen der gemeinsame minimale und maximale Entwicklungsgrad (**minGrad**:  $n_0$  und **maxGrad**:  $\tilde{N}$ ) sowie ein Modell der Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n)$  eingegeben werden. Falls die Optimierung auch die Form anpassen soll, ist außerdem eine Vorgabe eines initialen Formparameters (**sigma**:  $\sigma_b = \sigma_0$ ) erforderlich, in den anderen Fällen wird der eingegebene Wert ignoriert. Der maximale Entwicklungsgrad  $\tilde{N}$  der radialen Basisfunktionen spielt zumindest in einigen Modellen nur eine untergeordnete Rolle, da die Folge der Legendre-Koeffizienten für die lokalisierende Eigenschaft mit wachsendem Grad (schnell) gegen Null konvergiert. Die mögliche Eingabe eines minimalen Grades  $n_0 > 0$  erscheint sinnvoll, da durch das Referenzfeld bereits der langwellige Anteil des Signals behandelt wird, auch wenn der genaue Zahlenwert bisher nur empirisch abgeschätzt werden kann. Dabei ist zu beachten, dass durch eine Erhöhung des minimalen Grades die Basis im Allgemeinen besser lokalisierend ist. Allerdings beginnen die radialen Basisfunktionen – zumindest in den Beispielen aus dem Abschnitt 4.2.4 – zu oszillieren, wobei die Häufigkeit und die Größenordnung der zusätzlichen Extremwerte mit dem minimalen Grad zunimmt.

## Interpolation

Im Gegensatz zu anderen Analysemethoden dient die Interpolation hier nicht zur Transformation der Daten auf eine gemeinsame Orbithöhe oder auf ein regelmäßiges Gitter, sondern ausschließlich zur Bestimmung der Startwerte der Positionen. Nimmt man eine große Anzahl fehlerfreier in-situ Beobachtungen in konstanter Höhe an, deren Signal durch eine einzelne Basisfunktion erzeugt wird, so ist nach den Überlegungen des Kapitels 5 das Basiszentrum in der Nähe des Maximums bzw. Minimums der Messungen zu suchen.

Für die Bestimmung der Näherungswerte verwendet man die Länge und Breite der Satellitenposition und interpoliert die zugehörigen Beobachtungen mit der internen Routine *griddata.m*. Diese nutzt zunächst eine Dreiecksvermaschung und bildet das Signal dann durch kubische Polynome auf ein regelmäßiges  $(\lambda, \vartheta)$ -Gitter ab, dessen Maschenweite durch die Größe `Gitter` gesteuert wird. Dieser einfache Ansatz ignoriert zwar die unterschiedliche Orbithöhe und die Verteilung der Datenpunkte, hat sich aber in den Simulationen bislang als ausreichend erwiesen.

Durch die Höhenunterschiede in den Satellitenbahnen, numerische Fehler, das Signalausrauschen und die Interpolation entsteht eine sehr unruhige „Fläche“ im Orbit, welche in der rechten oberen Grafik der Abbildung 7.6 gezeigt wird. Trotzdem lassen sich bereits gewisse positive und negative Strukturen in dem Datensatz erahnen, deren Zentren für die Positionen der Basisfunktionen in Frage kommen. Die Strukturen lassen sich verstärken, indem man einige der hochfrequenten Anteile entfernt. Die einfachste Möglichkeit bietet dabei die Glättung der interpolierten Fläche durch die Faltung mit einer Filtermatrix  $\mathbf{F}$ . Aufgrund der bekannten glättenden Wirkung ist besonders der rekursive Binomialfilter  $\mathbf{F}_k$  mit  $k \geq 1$  interessant, der durch die diskrete Faltung  $*$  der vorherigen Matrix mit  $\mathbf{F}_1$  entsteht:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_2 * \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_3 * \mathbf{F}_1 &= \dots
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Die Dimension  $(k+1) \times (k+1)$  der Filtermatrix wird durch die Eingabe `Filter` bestimmt, wobei ein ungerader Wert wegen der besseren Zentrierung auf die Gitterpunkte erforderlich ist.

In der Matrix der interpolierten Beobachtungen wird durch die Funktionen *extrema.m* bzw. *extrema2.m* von Carlos Adrián Vargas Aguilera (Link: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12275>) in Zeilen-, Spalten- und Diagonalrichtung nach Extremwerten gesucht. Aufgrund der drei Suchrichtungen, des unruhigen Residualsignals und der Interpolation auf ein engmaschiges Gitter ergibt sich oft eine große Anzahl möglicher Positionen, die für eine bessere Auswertung noch reduziert werden müssen. Wie die meisten zweidimensionalen Interpolationen liefert auch die in MATLAB implementierte Methode vor allem an den Rändern des Gebiets Artefakte in Form von künstlichen Extremwerten und Lücken der interpolierten Fläche, was durch die einseitigen Informationen bedingt wird. Aus diesem Grund wird um das Interessensgebiet ein Rahmen mit der eineinhalbfachen Gitterweite definiert und alle detektierten Positionen innerhalb des Rahmens ignoriert.

Um die Anzahl weiter zu reduzieren werden noch drei weitere Ideen eingesetzt. Im ersten Schritt wird von den interpolierten Daten der Mittelwert subtrahiert und die Werte der Größe nach geordnet. In der Optimierung werden nur Zentren verwendet, deren interpolierte Größe (im Betrag) mindestens dem Wert  $\xi$  des Maximalwerts entspricht, wobei  $\xi$  durch die Eingabe `Verhältnis zum Maximum` gesteuert wird. Die zweite Einschränkung ist ein Mindestabstand von derzeit  $2^\circ$  zwischen den Zentren, wobei die Position mit dem jeweils kleineren Extremwert aus der Liste entfernt wird. Nach diesen Vorarbeiten wird die Anzahl der verbleibenden Positionen mit der eingegebenen maximalen Anzahl verglichen und gegebenenfalls werden die Zentren mit den kleinsten Extremwerten eliminiert.

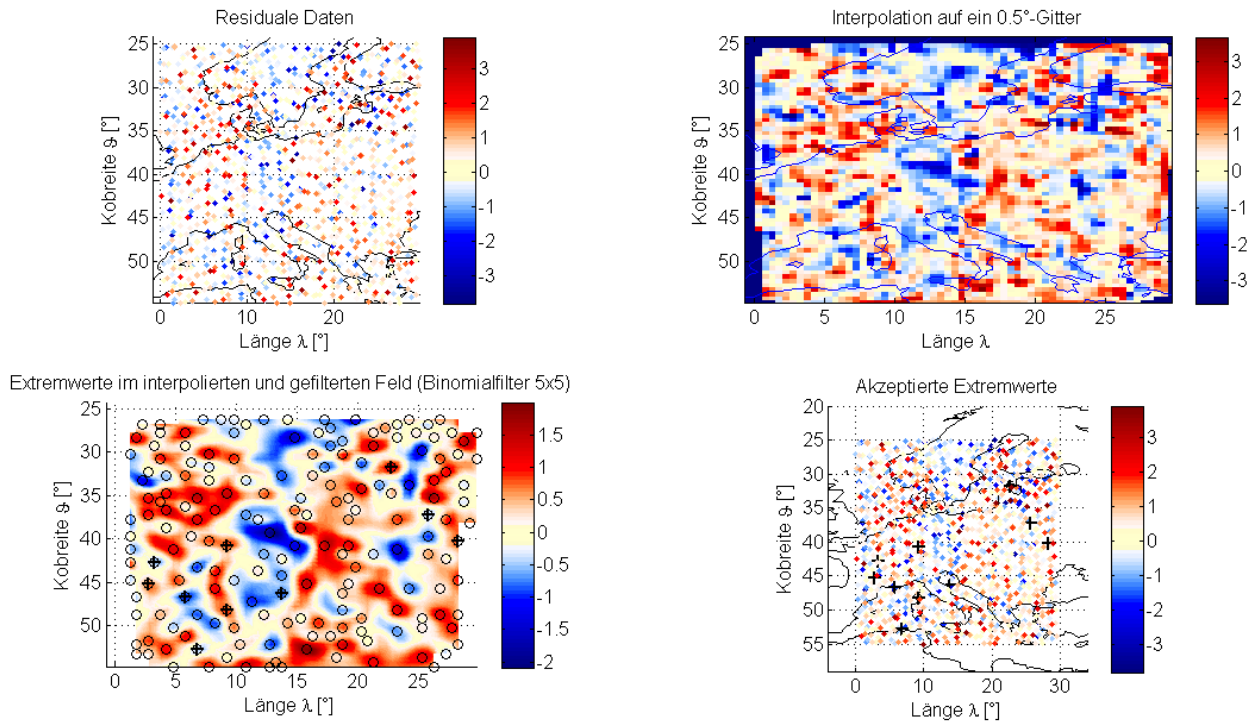


Abbildung 7.6.: Startwerte der Positionen aus der Interpolation der Potentialwerte für einen Monat an CHAMP-Daten mit dem Referenzfeld `itg_champ01s` bis Grad 70. In den unteren Abbildungen geben die Kreise alle gefundenen Extremwerte und die Kreuze die akzeptierten Startwerte für die Optimierung wieder

Abbildung 7.6 veranschaulicht die Interpolation zur Startwertsuche für einen Monat an CHAMP-Daten, wobei das Schwerfeldmodell „`itg_champ01s`“ bis Grad und Ordnung  $N = 70$  als Referenzfeld verwendet wird. In der linken oberen Abbildung sind die residualen Potentialwerte im Orbit visualisiert, wobei die positiven und negativen Bereiche bereits zu erahnen sind. Die rechte obere Grafik zeigt die kubische Interpolation des Signals auf ein  $0.5^\circ$  Gitter. Durch einen Binomialfilter – hier mit der Dimension 5 – werden die Strukturen etwas geglättet, es bleiben allerdings noch zahlreiche als Zentrum klassifizierte Positionen übrig (vgl. Abbildung links unten). Die akzeptierten Startwerte für die Basiszentren sind in der Abbildung zusammen mit den residualen Beobachtungen unten rechts gezeigt. Um zu vermeiden, dass durch die strikten Vorgaben nicht genügend Basisfunktionen berücksichtigt werden, kann nach der Verbesserung der Parameter die Optimierung für das verbleibende Residualfeld wiederholt werden, so dass auch einige der bis jetzt vernachlässigten Zentren noch Verwendung finden.

## Nichtlineare Optimierung

Durch das gewählte Referenzfeld lässt sich das gravitative Signal zu einer residualen Beobachtung im Orbit reduzieren, wobei in der regionalen Analyse eventuell eine Trendfunktion für die nicht erfassten globalen Anteile zu berücksichtigen ist. Für die Basisparameter, die in den Programmen intern als „struct-Variable“ (Erläuterung vgl. Abschnitt B.1) gespeichert werden, werden in der Optimierung ein minimaler und maximaler Grad ( $n_0, \tilde{N}$ ), ein initialer Formparameter  $\sigma_0^{[0]} = \sigma_b^{[0]}$  und ein (gradabhängiges) Modell der Legendre-Koeffizienten vorgegeben. Nach der Interpolation der Daten im Orbit liegen für jede Basisfunktion auch approximative Positionen der Basiszentren  $(\lambda_b^{[0]}, \vartheta_b^{[0]})$  vor. Zur Bestimmung der Skalierungsfaktoren nimmt man alle anderen Parameter als korrekt an und schätzt die Werte in einer linearen Ausgleichung, so dass man einen konsistenten Satz an



Parametern

$$\vec{p}^{[0]} = \left\{ \eta_1^{[0]}, \lambda_1^{[0]}, \vartheta_1^{[0]}, \sigma_1^{[0]}, \eta_2^{[0]}, \lambda_2^{[0]}, \vartheta_2^{[0]}, \sigma_2^{[0]}, \dots, \vartheta_B^{[0]}, \sigma_B^{[0]} \right\}$$

für die erste Iteration erhält.

In manchen Optimierungsverfahren können zusätzlich einige oder alle Parameter auf ein zulässiges Intervall eingeschränkt werden, um die Konvergenz zu verbessern. Für die Parametergrenzen bezüglich der Positionen der Zentren nutzt man aus, dass diese im Interessensgebiet der Beobachtungen liegen. Da die Näherungswerte für ein lokales Verfahren relativ gut sein sollten, kann man diese Bedingung verschärfen. Die Größe Maximale Bewegung legt in dem entwickelten Algorithmus fest, wie weit sich eine Basisfunktion von den zugehörigen Startwerten durch die Optimierung entfernen darf. Abhängig von dem Modell der Legendre-Koeffizienten kann auch der Formparameter beschränkt sein, was durch die Eingaben Minimum sigma und Maximum sigma realisiert wird. Im exponentiellen Modell  $\sigma_b(n) = (\sigma_b)^n$  ist der Formparameter z.B. durch  $0.9 \leq \sigma_b < 1$  zu begrenzen, wobei die untere Schranke die Lokalisierung und die obere die Konvergenz sicherstellt.

In der klassischen (geodätischen) Auswertung wird die vermittelnde Ausgleichung nach dem Gauß-Markov Modell für ein nichtlineares Problem modifiziert und iterativ auf die Parameter angewendet. Zunächst wird die nichtlineare Funktion der Beobachtungen durch eine mehrdimensionale Taylorreihe approximiert

$$f = f(\vec{p}^{[0]}) + \frac{\partial f(\vec{p}^{[0]})}{\partial \vec{p}^{[0]}} \Delta \vec{p}^{[0]} + \mathcal{O}((\Delta \vec{p}^{[0]})^2), \quad (7.24)$$

welche nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Subtrahiert man den Term  $f(\vec{p}^{[0]})$ , so erhält man das linearisierte Modell

$$\underbrace{f - f(\vec{p}^{[0]})}_{\vec{y}^{[0]}} \approx \underbrace{\frac{\partial f(\vec{p}^{[0]})}{\partial \vec{p}^{[i]}}}_{\mathbf{J}} \Delta \vec{p}^{[0]}, \quad (7.25)$$

das mit den Formeln (7.15) bzw. (7.16) gelöst werden kann. Die reduzierte Beobachtung  $\vec{y}^{[0]} = f - f(\vec{p}^{[0]})$  wird als Absolutglied bezeichnet, während für die Matrix  $\mathbf{J}$  der partiellen Ableitungen nach den gesuchten Parametern die Bezeichnung Jacobi-Matrix üblich ist. Aufgrund der Linearisierung erhält man durch den sogenannten Gauß-Newton-Schritt

$$\Delta \vec{p}^{[0]} = (\mathbf{J}^\top \mathbf{P} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{P} \vec{y} \quad (7.26)$$

nicht die komplette Lösung, sondern nur sogenannte Zuschläge, aus denen im nächsten Schritt die verbesserten Parameter  $\vec{p}^{[1]} = \vec{p}^{[0]} + \Delta \vec{p}^{[0]}$  berechnet werden. Mit diesen Werten bestimmt man ein neues Absolutglied  $\vec{y}^{[1]} = f - f(\vec{p}^{[1]})$  und eine neue Jacobi-Matrix. Die Optimierung wird anschließend wiederholt, bis eine vorher festgelegte Bedingung (Größenordnung der Zuschläge, Wert der  $vv$ -Summe, Anzahl der Iterationen, ...) erreicht ist (Kahmen, 1997, Gruber, 2000, Nocedal, 2006, Schwarz, 2006). Im Gegensatz zu einem linearen Problem ist hier die Konvergenz gegen eine optimale Lösung nicht garantiert, was unter anderem an ungünstigen Startwerten oder an zu großen Zuschlägen  $\Delta \vec{p}^{[i]}$  liegen kann, welche die Lösung von dem angestrebten (lokalen) Minimum  $\tilde{p}$  abhalten.

Um die Konvergenz zu verbessern, kann man

- die Schrittweite  $\|\Delta \vec{p}^{[0]}\|$  und damit die Größe der möglichen Zuschläge steuern (Levenberg-Marquardt-, Trust-Region-Verfahren, ...),
- die zweite Ableitung nach den Parametern oder zumindest eine Approximation derselben verwenden (Gauß-Newton-, Trust-Region-, Levenberg-Marquardt-Verfahren, ...)
- oder (einzelne) Parameter auf ein sinnvolles Intervall einschränken (Trust-Region-Verfahren, ...),

wobei die Ideen teilweise kombiniert werden (Nocedal, 2006).

In dieser Studie wird das Programm *lsqnonlin.m* aus der Optimization Toolbox von MATLAB (online Dokumentation: The MathWorks (2010)) verwendet, welches eine Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit nichtlinearen Nebenbedingungen ermöglicht. Dieses Programm beinhaltet ein Gauß-Newton-, ein Levenberg-Marquardt- und ein Trust-Region-(Reflective)-Verfahren, wobei die interne Auswahl von den Optionen und den Nebenbedingungen abhängt. Da von den vorhandenen Algorithmen nur das Trust-Region-Verfahren mit einer Beschränkung der Schrittweite (zur Konvergenzverbesserung) und der Parameter (in der Nähe der Startwerte) arbeitet, wird durch die Vorgaben implizit diese Methode gewählt, um die optimale Lösung zu finden.

Im Trust-Region-Verfahren und in dem sehr ähnlichen Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Lösung innerhalb eines Vertrauensbereichs („trust-region“) um die Startwerte gesucht, in welchem sich die Zielfunktion gut durch ein quadratisches Modell approximieren lässt. Für beide Methoden existieren verschiedene Varianten, wobei das quadratische Modell jeweils durch eine Taylorentwicklung um die vorherige „Lösung“  $\vec{p}^{[i]}$  realisiert wird. In der nichtlinearen Optimierung mit dem Trust-Region-Verfahren wird die bisherige Zielfunktion

$$\Xi(\vec{p}^{[i]}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right\|^2 \rightarrow \min \quad (7.10)$$

um die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]})}{\partial \vec{p}^{[i]}}$  und den Vorfaktor 0.5

$$\Xi(\vec{\xi}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \left( \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) + \mathbf{J}\vec{\xi} \right) - \vec{f} \right\|^2 : \quad \|\mathbf{D}\vec{\xi}\| \leq \varrho^{[i]} \right\} \quad (7.27)$$

modifiziert. Die Zuschläge  $\vec{\xi} := \Delta \vec{p}^{[i]}$  werden für die Nebenbedingungen durch die diagonale Skalierungsmatrix  $\mathbf{D}$  gewichtet und auf den Vertrauensbereich mit dem „Radius“  $\varrho^{[i]}$  eingeschränkt, dessen Größe anschließend angepasst wird (Alt, 2002, Nocedal, 2006).

In einer ausführlicheren Darstellung erhält man die Zielfunktion

$$\begin{aligned} \Xi(\vec{\xi}) &= \frac{1}{2} \left\| \left( \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) + \mathbf{J}\vec{\xi} \right) - \vec{f} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{J}\vec{\xi} + \underbrace{\left( \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right)}_{=\vec{v}} \right\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}\vec{\xi} + \vec{v} \right)^\top \left( \mathbf{J}\vec{\xi} + \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \vec{v}^\top \vec{v} + \vec{\xi}^\top \mathbf{J}^\top \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\xi}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \vec{\xi}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Der Term  $\vec{v}^\top \vec{v}$  entspricht der Fitness  $\Xi$  aus der Formel (7.10) und wird z.B. in den Veröffentlichungen von Branch (1999) und Coleman (1992, 1999) nicht berücksichtigt, da dieser innerhalb einer Iteration unabhängig vom Vektor  $\vec{\xi}$  ist. Abgesehen von den konstanten Vorfaktoren, die in Nocedal (2006) durch die andere Definition der Fitness eliminiert werden, kann man aufgrund der Beziehungen

$$\Xi = \left\| \vec{f} - \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) \right\|^2 = \vec{v}^\top \vec{v} = \sum_{\ell=1}^L v_\ell^2 \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial (\vec{p}^{[i]})} = 2 \sum_{\ell=1}^L \vec{v} \frac{\partial v_\ell}{\partial (\vec{p}^{[i]})} = 2 \sum_{\ell=1}^L \vec{v} \frac{\partial \left( \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right)}{\partial (\vec{p}^{[i]})} = 2 \mathbf{J}^\top \vec{v} \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Xi}{\partial (\vec{p}^{[i]})^2} = 2 \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial \vec{v}}{\partial (\vec{p}^{[i]})} \frac{\partial \vec{v}}{\partial (\vec{p}^{[i]})} + 2 \sum_{\ell=1}^L \vec{v} \frac{\partial^2 v_\ell}{\partial (\vec{p}^{[i]})^2} = 2 \mathbf{J}^\top \mathbf{J} + 2 \sum_{\ell=1}^L \vec{v} \frac{\partial^2 v_\ell}{\partial (\vec{p}^{[i]})^2} \quad (7.31)$$

den Term  $\vec{g} := \mathbf{J}^\top \vec{v}$  als Gradient der Zielfunktion betrachten. Das Produkt  $\mathbf{H} := \mathbf{J}^\top \mathbf{J}$  approximiert die Hesse-Matrix für „gute Startwerte“, für welche die zweiten Ableitungen  $\frac{\partial^2 v_\ell}{\partial (\vec{p}^{[i]})^2}$  der Residuen vernachlässigbar sind. Das Trust-Region-Verfahren enthält nach Alt (2002) und Nocedal (2006) insbesondere die folgenden Schritte:

1. Bestimmung der Näherungswerte und der Intervallgrenzen für die Parameter

## 2. Formulierung des quadratischen Ersatzproblems

$$\bar{\Xi}(\vec{\xi}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \mathbf{J}\vec{\xi} + \vec{v} \right\|^2 = \frac{1}{2} \vec{v}^\top \vec{v} + \vec{\xi}^\top \vec{g} + \frac{1}{2} \vec{\xi}^\top \mathbf{H}\vec{\xi} : \quad \|\mathbf{D}\vec{\xi}\| \leq \varrho^{[i]} \right\} \quad (7.32)$$

oder einer Variante davon

3. Lösung  $\vec{\xi}$  des Ersatzproblems durch eine exakte Methode oder durch ein Näherungsverfahren
4. Kontrolle der Fitness für den Vektor  $\vec{p}^{[i+1]} := \vec{p}^{[i]} + \vec{\xi}$  mit anschließender Akzeptanz oder Ablehnung der neuen Lösung
5. Anpassung der Umgebung  $\varrho^{[i+1]}$  für den nächsten Schritt
6. Wiederholung ab Schritt 3 oder Abbruch des Verfahrens.

Eine exakte Lösung des Ersatzproblems erhält man, indem man dieses in das Gleichungssystem<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \mu \mathbf{D}^2) \vec{\xi} &= \mathbf{J}^\top \vec{v} \\ \mu (\varrho^{[i]} - \|\vec{\xi}\|) &= 0 \\ (\mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \mu \mathbf{D}^2) &\text{ semidefinit} \end{aligned} \quad (7.33)$$

mit einer positiven Zahl  $\mu \geq 0$  transformiert, was äquivalent zu der Aufgabe

$$\bar{\Xi}(\vec{\xi}) = \min \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \sqrt{\mu} \mathbf{D} \end{pmatrix} \vec{\xi} - \begin{pmatrix} \vec{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right\} \quad (7.34)$$

ist (Nocedal, 2006). Die zweite Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn der Vektor  $\vec{\xi}$  auf der „Oberfläche“ der (Hyper-)Kugel mit dem Radius  $\varrho^{[i]}$  liegt, oder wenn für die Werte innerhalb dieser Umgebung  $\mu = 0$  in die Formel eingesetzt wird. Speziell für die inneren Punkte und mit einer invertierbaren Matrix entspricht die Lösung wieder dem Gauß-Newton-Schritt

$$\vec{\xi} = (\mathbf{J}^\top \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \vec{v}. \quad (7.35)$$

Neben den exakten Methoden existieren auch approximative Lösungen wie der „Cauchy point“ und die „dogleg method“ (Alt, 2002, Nocedal, 2006), oder die laut MATLAB-Hilfe dort eingesetzte Reduzierung auf ein zweidimensionales Teilproblem. In der letztgenannten Variante des Trust-Region-Verfahrens wird nach Coleman (1992), Branch (1999) oder Geiger (1999) die Anzahl der Variablen dadurch reduziert, dass man die Lösung in jedem Schritt nur innerhalb eines niederdimensionalen (meist sogar zweidimensionalen) Unterraums  $\mathbb{S}$  sucht:

$$\bar{\Xi}(\vec{\xi}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \mathbf{J}\vec{\xi} + \vec{v} \right\|^2 = \frac{1}{2} \vec{v}^\top \vec{v} + \vec{\xi}^\top \vec{g} + \frac{1}{2} \vec{\xi}^\top \mathbf{H}\vec{\xi} : \quad \|\mathbf{D}\vec{\xi}\| \leq \varrho^{[i]}, \xi \in \mathbb{S} \right\}. \quad (7.36)$$

Im zweidimensionalen Fall wird der Suchraum  $\mathbb{S}$  durch zwei Vektoren  $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$  aufgespannt, von denen der Erste durch die Richtung des Gradienten

$$\vec{q}_1 = \mathbf{J}^\top \vec{v} \quad (7.37)$$

gegeben ist. Für den zweiten Vektor versucht man das Gleichungssystem

$$(\mathbf{J}^\top \mathbf{J}) \vec{q}_2 = -\mathbf{J}^\top \vec{v} \quad (7.38)$$

<sup>4</sup>Das Vorzeichen der Residuen  $v$  wird hier an die geodätische Konvention angepasst und stimmt daher nicht mit der Herleitung in Nocedal (2006) überein

zu lösen und falls dies nicht erfolgreich ist, bestimmt man einen beliebigen Vektor, der die Bedingung

$$(\vec{q}_2)^\top (\mathbf{J}^\top \mathbf{J}) \vec{q}_2 < 0 \quad (7.39)$$

erfüllt. Anschließend bildet man nach Geiger (1999) mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthonormalisierte Vektoren

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= \frac{\vec{q}_1}{\|\vec{q}_1\|} \\ \vec{q}'_2 &= \vec{q}_2 - \hat{q}_1 \langle \hat{q}_1, \vec{q}_2 \rangle \\ \hat{q}_2 &= \frac{\vec{q}'_2}{\|\vec{q}'_2\|}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Setzt man anstelle des Vektors  $\vec{\xi}$  die Linearkombination

$$\vec{\xi} = a_1 \hat{q}_1 + a_2 \hat{q}_2 \quad (7.41)$$

in die Fitnessfunktion des Trust-Region-Verfahrens (7.28) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Orthonormalität

$$\begin{aligned} \Xi(\vec{\xi}) &= \frac{1}{2} \vec{v}^\top \vec{v} + (a_1 \hat{q}_1 + a_2 \hat{q}_2)^\top \mathbf{J}^\top \vec{v} + \frac{1}{2} (a_1 \hat{q}_1 + a_2 \hat{q}_2)^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{J} (a_1 \hat{q}_1 + a_2 \hat{q}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}^\top \vec{v} + (a_1, a_2)^\top \underbrace{(\hat{q}_1, \hat{q}_2)^\top (\mathbf{J}^\top \vec{v})}_{\vec{g}_s} + \frac{1}{2} (a_1, a_2)^\top \underbrace{(\hat{q}_1, \hat{q}_2)^\top (\mathbf{J}^\top \mathbf{J}) (\hat{q}_1, \hat{q}_2)}_{\mathbf{H}_s} (a_1, a_2) \end{aligned} \quad (7.42)$$

eine äquivalente Optimierungsaufgabe für zwei Unbekannte  $(a_1, a_2)$ .

Eine MATLAB-spezifische Eigenheit ist die Verwendung des sogenannten Reflective-Verfahrens, um die Intervallgrenzen der Parameter zu berücksichtigen. Dabei werden die Parameter durch eine geeignete Transformation  $\mathfrak{R}$  auf das gewünschte Intervall abgebildet und die Lösung analog zu einer unbeschränkten Optimierung bestimmt. Ein Beispiel für eine lineare Transformation auf das Intervall  $[0, 1]$  ist in der Grafik 7.7 gezeigt, wobei  $y$  das ursprüngliche Argument und  $x$  den reduzierten Wert bezeichnet.

Anschließend wird die Größe der Umgebung  $\varrho^{[i]}$  für den nächsten Schritt bestimmt. Laut Nocedal (2006, S. 291) bildet man für die Optimierung nach der Methode der kleinsten Quadrate den Quotienten

$$r^{[i]} = \frac{\|\vec{v}(\vec{p}^{[i]})\|^2 - \|\vec{v}(\vec{p}^{[i]} + \vec{\xi})\|^2}{\|\vec{v}(\vec{p}^{[i]})\|^2 - \|\vec{v}(\vec{p}^{[i]} + \mathbf{J}\vec{\xi})\|^2}, \quad (7.43)$$

wobei der Zähler als aktuelle Reduktion („actual reduction“) und der Nenner als vorhergesagte Reduktion („predicted reduction“) bezeichnet wird. Da der zweite Term des Nenners der Minimierungsaufgabe entspricht, ist die Differenz zum ersten Wert entweder Null, was auf ein gefundenes Minimum hinweist und zum Abbruch der Iteration führt, oder aber strikt positiv. Hat der Quotient  $r^{[i]}$  annähernd den Wert 1, wobei die numerischen Abgrenzungen verschieden gewählt werden, so ist das quadratische Modell eine gute lokale Approximation, für größere Werte kann man die Umgebung  $\varrho^{[i]}$  sogar vergrößern. In beiden Fällen reduziert der Zuschlag die Fitness des Problems und der Vektor  $\vec{p}^{[i+1]} := \vec{p}^{[i]} + \vec{\xi}$  wird für den nächsten Schritt als Näherung akzeptiert. Dagegen führen alle anderen Werte des Quotienten zu einer Ablehnung der „Verbesserung“, da entweder ein negativer Zähler – und damit eine Vergrößerung der Zielfunktion – vorliegt, oder das quadratische Modell an dieser Stelle das Problem nicht gut genug approximiert. Wird der Schritt abgelehnt, so wird die Näherung  $\vec{p}^{[i+1]} := \vec{p}^{[i]}$  beibehalten und die Optimierung mit einer kleineren Umgebung wiederholt.

## Kontrolle der Parameter

In dem entwickelten Algorithmus kann die Optimierung in den in-situ Beobachtungen mehrmals wiederholt werden, um das Restsignal weiter zu analysieren. Dabei werden in den weiteren Optimierungen insbesondere

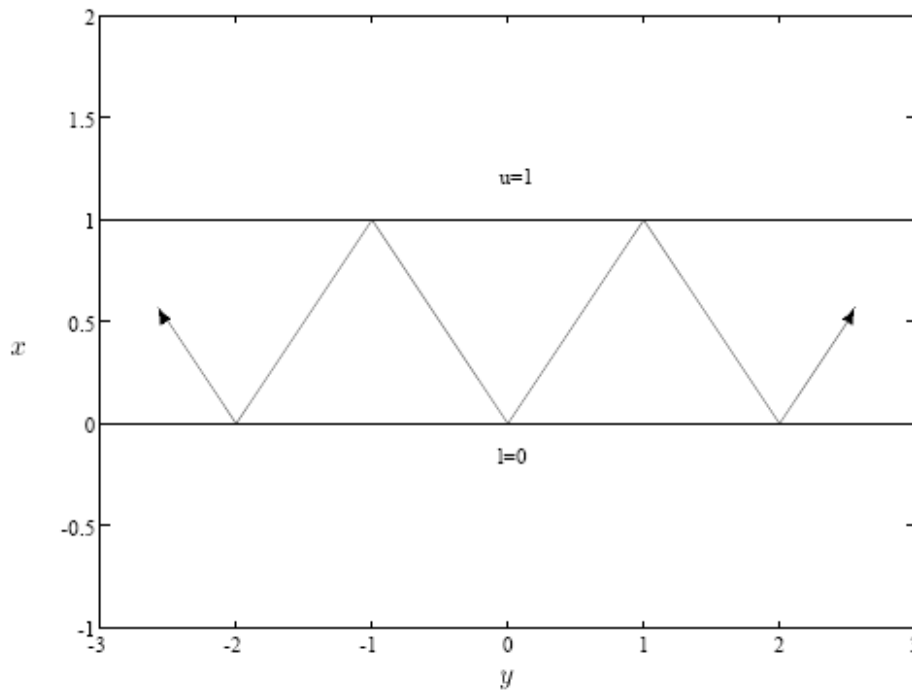


Abbildung 7.7.: Eindimensionale Reflective-Transformation für einen Parameter auf das Intervall  $[0, 1]$  aus Coleman (1992)

neue Basiszentren in der Nähe der alten Positionen detektiert. Nach der Optimierung werden alle Parameter zu einer Lösung zusammengefasst und noch einmal überprüft. In der Kontrolle werden die nichtlinearen Parameter festgehalten und nur die Skalierungsfaktoren durch eine vermittelnde Ausgleichung neu bestimmt. Ist die Standardabweichung größer als der Betrag des jeweiligen Parameters, so ist dieser nur sehr ungenau bestimmt. In diesem Fall wird die Basisfunktion mit der größten Differenz aus Standardabweichung und dem Betrag der Skalierung aus dem Parametersatz komplett entfernt und eine neue lineare Ausgleichung der verbleibenden Unbekannten durchgeführt. Diese empirische Methode soll sicherstellen, dass das Signal durch eine minimale Anzahl an „effektiven“ radialen Basisfunktionen modelliert wird.

### Zusammenfassung

Die Analyse der Parameter eines Modells lässt sich allgemein als ein (iteratives) Minimierungsproblem

$$\Xi(\vec{p}^{[i]}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) - \vec{f} \right\|^2 \rightarrow \min \quad (7.10)$$

darstellen. In Abhängigkeit von dem funktionalen Modell unterscheidet man zwischen linearen und nichtlinearen Optimierungsaufgaben, wobei erstere in der Regel einfacher zu lösen sind.

Im linearen Fall erhält man die optimalen Parameter im Sinne der kleinsten Quadrate aus der Formel

$$\tilde{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \vec{y}. \quad (7.16)$$

Ist die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}$  schlecht konditioniert und damit problematisch zu invertieren, so kann man eine Regularisierung einsetzen. Eine bekannte Methode ist die Tikhonov-Phillips Regularisierung, in welcher das Minimierungsproblem um einen Strafterm  $\varrho S(\vec{p})$  erweitert wird

$$\Xi^{\varrho}(\vec{p}) = \left\| \tilde{f}_B(\vec{p}) - \vec{f} \right\|^2 + \varrho S(\vec{p}). \quad (7.17)$$

Für einen speziellen Strafterm und eine Parametrisierung durch radiale Basisfunktionen entsteht dabei eine Zielfunktion, die – in Analogie zum eindimensionalen Fall – die Bezeichnung als (harmonische) Splines rechtfertigt.

Da die Invertierbarkeit der Normalgleichungsmatrix insbesondere von der Parametrisierung abhängt, lässt sich das Problem auch durch eine Reduktion der Anzahl der Parameter lösen. Um dennoch eine gute Näherung des Signals zu erhalten, werden die wenigen Parameter durch eine nichtlineare Optimierung aus den Daten bestimmt.

Zunächst ist aus der Menge der lokalen und globalen Verfahren ein geeigneter Optimierungsalgorithmus auszuwählen. In dieser Arbeit wird exemplarisch der genetische Algorithmus als globale Methode getestet, welcher zwar gute Ergebnisse liefern kann, die aber weder garantiert noch reproduzierbar sind.

Daher wird eine lokale Methode bevorzugt, die auf dem stabilen Trust-Region-Verfahren basiert. In dem entwickelten Algorithmus werden die Startwerte durch den Nutzer vorgegeben bzw. durch eine Interpolation der Daten geschätzt und anschließend durch eine nichtlineare Optimierung mit der Zielfunktion

$$\bar{\Xi}(\vec{\xi}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \left( \tilde{f}_B(\vec{p}^{[i]}) + \mathbf{J}\vec{\xi} \right) - \vec{f} \right\|^2 : \quad \|\mathbf{D}\vec{\xi}\| \leq \varrho^{[i]} \right\} \quad (7.27)$$

innerhalb der Vertrauensregion mit dem Radius  $\varrho^{[i]}$  verbessert. Durch die Skalierung der Parameter mit der Matrix  $\mathbf{D}$  und die adaptive Anpassung des Radius erfolgt die Konvergenz in der Nähe der Startwerte. In der MATLAB-Implementierung wird die Optimierung auf ein zweidimensionales Problem reduziert und die Beschränkung der Parameter durch eine Reflective-Transformation realisiert. Nach einer Wiederholung der Optimierung für weitere Basisfunktionen werden die optimierten Parameter erneut überprüft, um eine minimale Anzahl zu finden.

## 8. Numerische Experimente

In diesem Kapitel wird die nichtlineare Optimierung in der Analyse simulierter Satellitendaten durch radiale Basisfunktionen eingesetzt. Zunächst werden die partiellen Ableitungen des Energieintegrals und der Line-of-Sight Gradiometrie aus der Legendre- und der Wigner-Darstellung diskutiert. Um die Differentiation der Range-Rate nach den Basisparametern zu überprüfen, wird eine numerische Lösung der Variationsgleichungen verwendet. Für die zahlreichen Iterationen in einer nichtlinearen Optimierung wird jeweils der effektivste Ansatz für jede Beobachtung gewählt.

Die Optimierung der Parameter wird für die drei behandelten Beobachtungstypen in einem Interessensgebiet durch eine Closed-Loop-Simulation getestet und das Ergebnis den bekannten Werten der Basisfunktionen gegenübergestellt. Anschließend wird ein globaler Datensatz an residualen in-situ Beobachtungen erzeugt und für die Optimierung in kleinere Regionen unterteilt. Nach der getrennten Analyse werden die einzelnen Felder zu einer globalen Lösung kombiniert und die Qualität der Approximationen durch statistische Maße untersucht.

### 8.1. Vergleich der partiellen Ableitungen

#### Potential

Im Kapitel 5 werden die Legendre-Darstellung und die Wigner-Darstellung des Potentials im Orbit

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b) \quad (4.25)$$

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \quad (5.33)$$

sowie deren Ableitungen nach den Basisparametern behandelt. Zunächst soll gezeigt werden, dass beide Repräsentationen für Kreisbahnen jeweils das gleiche Funktional eines (residualen) Schwerefeldes beschreiben. Dazu wird ein GRACE-ähnlicher Orbit mit einer zeitlichen Abtastung von  $\Delta t = 10$  s für eine Woche erzeugt. Abgesehen von der Exzentrizität  $e = 0$  approximieren die Keplerelemente ( $I = 89.0169^\circ$ ,  $a = 6867.504$  km,  $\Omega = -23,471^\circ$ ) eine Bahn der GRACE-Mission im August 2002. Bedingt durch die MATLAB Programme wird in den Simulationen die Anfangsposition innerhalb der Bahnebene durch den Perigäumsabstand (hier:  $\omega = 92.861^\circ$ ) angegeben, obwohl für Kreisbahnen das Argument der Breite die formal bessere Wahl wäre. Die Basisfunktion wird durch die Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = 0.95^n$  mit den Grenzen  $n_0 = 0$  und  $\tilde{N} = 100$  simuliert. Das Zentrum stimmt zum Zeitpunkt  $t = 65$  min mit der Satellitenspur überein, was der Position  $\lambda_b \approx -26.73^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 109.24^\circ$  entspricht. Der gewählte Skalierungsfaktor  $\eta_b \approx 8.046 \cdot 10^{-10}$  erzeugt auf der Erdoberfläche eine maximale Potentialänderung von  $\Delta T = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ .

In den Abbildungen 8.1, 8.2 und 8.3 sind die Ableitungen eines residualen Potentials nach den Parametern der Basisfunktion in einer zeitlichen und räumlichen Darstellung visualisiert. In den zeitlichen Darstellungen 8.1 und 8.2 werden jeweils nur 3 Tage gezeigt, um den Verlauf des Signals – insbesondere die „Schwingung“ innerhalb der 95 Minuten eines Umlaufs – zu verdeutlichen. Die Position des Basiszentrums wird in den Abbildungen durch eine grüne Gerade markiert und durch eine Vergrößerung des ersten Bahn Bogens noch einmal hervorgehoben. Die letzte Zeile der Grafik zeigt jeweils den sphärischen Abstand zwischen dem Basiszentrum und der Satellitenspur.

Aus den Grafiken erkennt man, dass die Ableitungen nach dem Skalierungsfaktor und nach dem Formparameter beim direkten Überflug über dem Basiszentrum jeweils ihren größten Wert annehmen, während die anderen Bahnen jeweils ein schwächeres Signal enthalten. In den Ableitungen nach der Kobreite der Basisfunktion

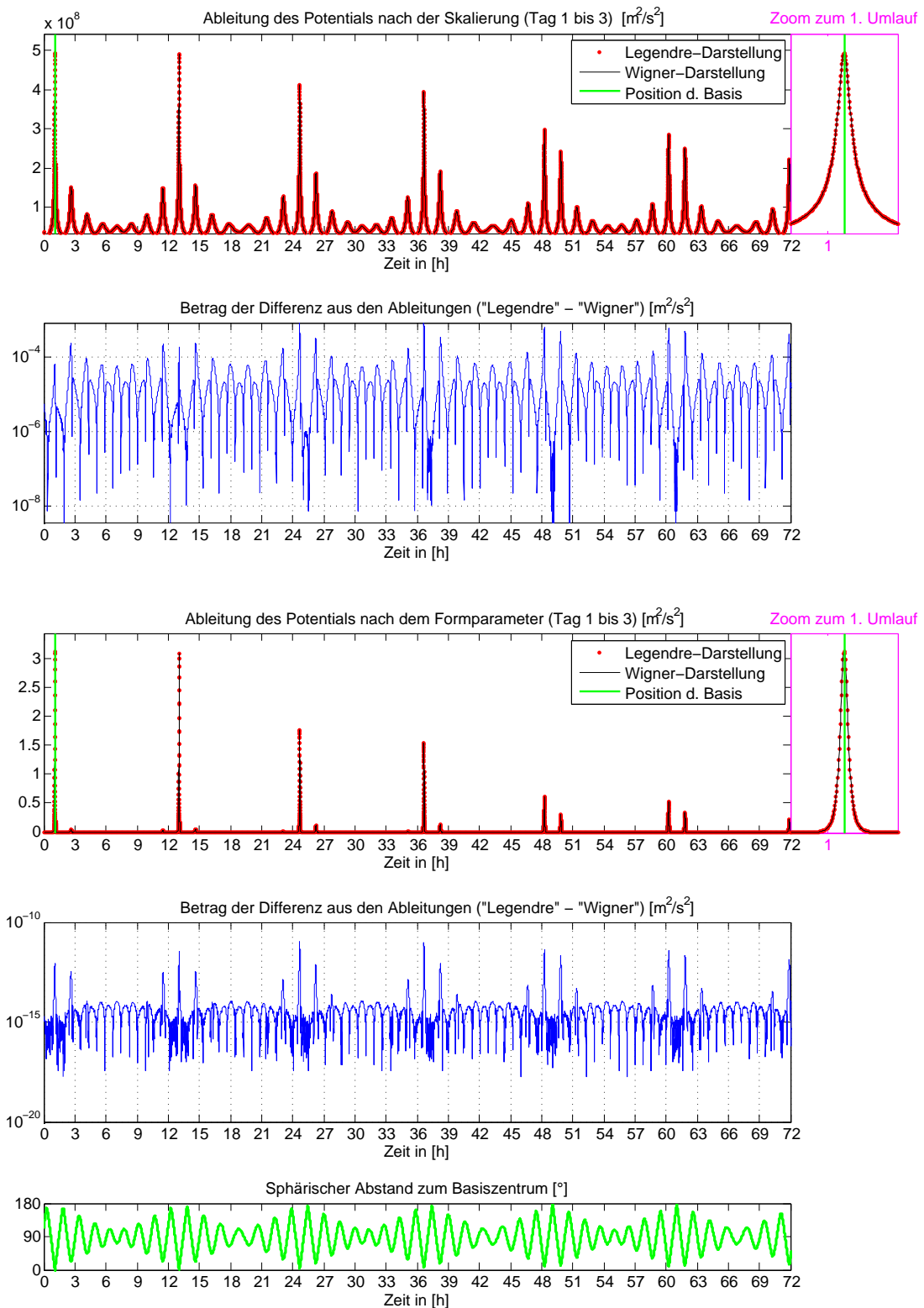


Abbildung 8.1.: Ableitungen des Potentials einer Basisfunktion nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter in der zeitlichen Darstellung



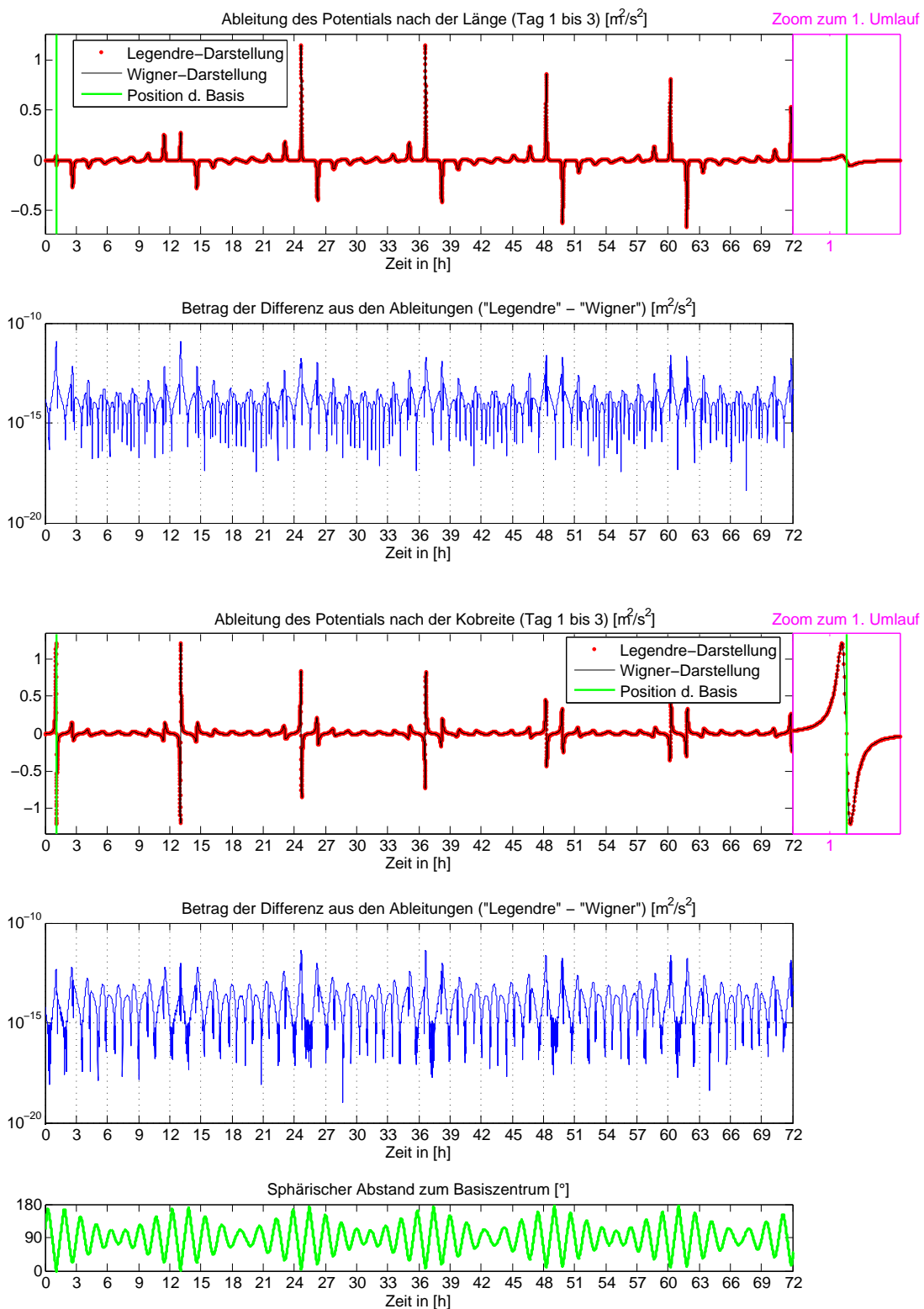


Abbildung 8.2.: Ableitungen des Potentials einer Basisfunktion nach der Länge und der Kobreite des Basiszentrums in der zeitlichen Darstellung

## Ableitung des Potentials

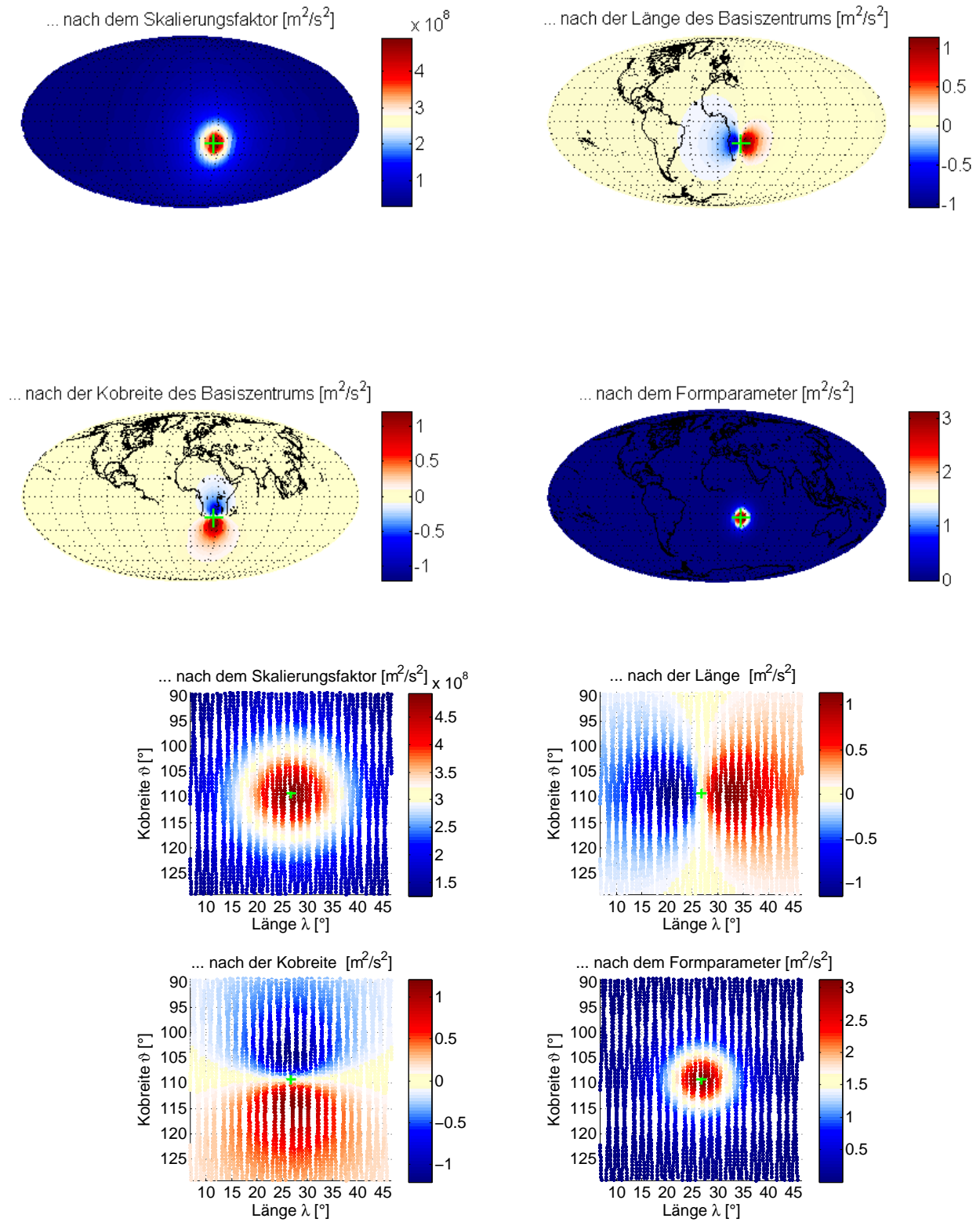


Abbildung 8.3.: Ableitungen des Potentials einer Basisfunktion in der räumlichen Darstellung

	Legendre-Darstellung		Wigner-Darstellung		relative Rechenzeit	
1000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	0.070	0.205	10.607	23.604	1 : 152	1 : 115
$\tilde{N} = 120$	0.083	0.266	23.903	40.396	1 : 288	1 : 152
$\tilde{N} = 150$	0.109	0.510	35.937	67.308	1 : 320	1 : 132
5000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	0.217	1.426	34.476	84.038	1 : 159	1 : 59
$\tilde{N} = 120$	0.281	1.783	53.501	147.905	1 : 190	1 : 83
$\tilde{N} = 150$	0.473	3.854	84.992	242.248	1 : 180	1 : 63
10000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	0.566	4.105	60.491	166.279	1 : 107	1 : 41
$\tilde{N} = 120$	0.767	5.372	102.860	279.553	1 : 134	1 : 52
$\tilde{N} = 150$	0.999	6.807	152.777	444.093	1 : 153	1 : 65
Anzahl Basisfunktionen	1	10	1	10	1	10

Tabelle 8.1.: Rechenzeit in Sekunden bzw. relative Dauer für die Bestimmung des Potentials und der Ableitungen nach den Basisparametern in der Wigner- und Legendre-Darstellung

ergibt sich beim direkten Überflug jeweils eine Kombination aus Maxima, Nullstelle und Minima, welche sich auch in den anderen Bögen gedämpft widerspiegelt. Für die Länge erhält man die Abfolge aus lokalem Maximum, Nullstelle und lokalem Minimum nur im direkten Überflug, während in den anderen Passagen nur positive oder nur negative Werte mit deutlich größeren Extremwerten auftreten.

In allen Fällen ist die Differenz zwischen beiden Berechnungen mit Wigner- und Legendrefunktionen etwa 10 – 13 Größenordnungen kleiner als die zugehörigen Werte, weshalb sich die Unterschiede auf die Rechengenauigkeit von maximal 16 Stellen in MATLAB zurückführen lassen.

In der Grafik 8.3 werden die partiellen Ableitungen in einer Projektion auf die Kugeloberfläche dargestellt, wobei das Zentrum ( $\lambda_b \approx -26.73^\circ$ ,  $\vartheta_b \approx 109.24^\circ$ ) der Basis durch ein grünes Kreuz hervorgehoben wird. Da in diesem Beispiel nur eine Basisfunktion betrachtet wird, entspricht die Ableitung nach der Skalierung bis auf einen Faktor dem Potential und zeigt daher ein Maximum in der Position des Zentrums. Auch die partielle Ableitung des Formparameters weist in der Position des Zentrums ein Maximum – mit geringerer räumlicher Ausdehnung – auf. Dagegen erhält man für die Ableitungen nach der Länge und Kobreite des Basiszentrums einen Nulldurchgang beim direkten Überflug sowie ein benachbartes Maximum und Minimum in der entsprechenden Richtung. Daraus folgt, dass innerhalb dieser Umgebung die partiellen Ableitungen der Positionen und damit die Spalten in der Designmatrix sensitiv gegenüber Änderungen der Werte sind und somit eine (iterative) Verbesserung der Startwerte ermöglichen.

Um die Rechengeschwindigkeit zu testen, werden für die maximalen Entwicklungsgrade  $\tilde{N} \in \{90, 120, 150\}$  und eine Bahn mit 1000, 5000 und 10000 Messungen jeweils eine Bestimmung aller Ableitungen für eine und für zehn Basisfunktionen durchgeführt. Das Ergebnis ist in der Tabelle 8.1 zusammengefasst und für einen besseren Überblick um eine „relative Rechenzeit“ – also den Quotient aus langsamer Lösung dividiert durch den schnelleren Ansatz – ergänzt. Aufgrund der wesentlich kleineren Anzahl an Summanden ist die Legendre-Darstellung in allen Fällen effektiver, wobei das Verhältnis der Rechenzeiten zwischen 1 : 41 (10 Basisfunktionen und 10000 Datenpunkte) und 1 : 320 (1 Basisfunktion und 1000 Beobachtungen) variiert.

Bemerkenswert ist die Verbesserung in der Effektivität der Wigner-Darstellung für längere Datensätze oder mehrere Basisfunktionen, was sich aus der Implementierung erklären lässt. In der Legendre-Darstellung erfolgt die Berechnung durch Matrizenmultiplikationen getrennt für jede Basisfunktion in einer Schleife, wobei die Größe der Matrizen mit der Zahl der Datenpunkte (Anzahl der Spalten) und dem Grad der Polynome wächst. In der Wigner-Darstellung dagegen entspricht der Laufindex der Schleife der Anzahl der Datenpunkte, während die Matrizen ihre Dimensionen nur geringfügig für den Entwicklungsgrad und die Anzahl der Parameter ändern.

	Legendre-Darstellung		Wigner-Darstellung		relative Rechenzeit	
1000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	0.109	0.554	13.932	31.026	1 : 128	1 : 56
$\tilde{N} = 120$	0.125	0.708	25.964	54.612	1 : 208	1 : 77
$\tilde{N} = 150$	0.182	1.368	45.895	94.705	1 : 252	1 : 69
5000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	0.507	4.049	47.274	130.180	1 : 93	1 : 32
$\tilde{N} = 120$	0.706	5.502	78.069	228.965	1 : 111	1 : 42
$\tilde{N} = 150$	0.873	7.228	115.654	319.053	1 : 132	1 : 44
10000 Datenpunkte:						
$\tilde{N} = 90$	1.097	9.137	84.948	249.622	1 : 77	1 : 27
$\tilde{N} = 120$	1.436	12.199	144.003	439.915	1 : 100	1 : 36
$\tilde{N} = 150$	1.778	14.967	210.753	628.494	1 : 119	1 : 42
Anzahl Basisfunktionen	1	10	1	10	1	10

Tabelle 8.2.: Rechenzeit in Sekunden bzw. relative Dauer für die Bestimmung des LOS-Gradienten in der Wigner- und Legendre-Darstellung

### LOS-Gradiometrie

In der Line-of-Sight Gradiometrie sind die Wigner- und die Legendre-Darstellung durch die Formeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{\eta_b GM}{a^2 R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sigma_b(n) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \\ &\cdot \left[ (n+1) P_n(\zeta_b) \left( \frac{(n+1)e^2 \sin^2 E}{1-e^2} - \frac{re \cos E}{a(1-e^2)} - \frac{a}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(n+1)e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} P'_n(\zeta_b) \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} - P'_n(\zeta_b) \cdot \zeta_b + P''_n(\zeta_b) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial u} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right] \quad (5.57)$$

gegeben. Die partiellen Ableitungen und deren Differenzen sind in den Abbildungen 8.4, 8.5 und 8.6 zusammengestellt, wobei die gleichen Bahn- und Basisparameter wie in der Simulation des Potentials verwendet werden. Die Strukturen für die Ableitung nach der Form, der Skalierung und der Kobreite sind invertiert, d.h. einem Maximum des Signals im Potential entspricht ein Minimum in der Line-of-Sight Gradiometrie und umgekehrt. Außerdem können für die Skalierung und den Formparameter in der Umgebung der Extremwerte zwei Nebenmaxima beobachtet werden. Alle Strukturen – insbesondere die Ableitung nach der Skalierung – sind wesentlich enger in der Form als der entsprechende Verlauf im Energieintegral. Daraus folgt für die Position des Basiszentrums, dass in der Optimierung bessere Startwerte notwendig sind. Andererseits kann die Gradiometrie dadurch feinere Strukturen erfassen, wenn die Messungen in der unmittelbaren Umgebung stattfinden. In der räumlichen Darstellung 8.4 erkennt man, dass auch die Ableitung nach der Länge vier schwächere Extremwerte aufweist, die sich symmetrisch um das Zentrum verteilen. Im Vergleich zu den Ableitungen des Energieintegrals sind die Strukturen für die Skalierung und den Formparameter in Nord-Süd-Richtung gestaucht, was auf die Nebenmaxima in Flugrichtung zurückzuführen ist. Auch hier sind die Unterschiede in der Wigner- und Legendre-Darstellung etwa 10 – 15 Größenordnungen kleiner als der entsprechende Wert des Signals, was auf numerische Fehler zurückzuführen ist.

Gemäß der Tabelle 8.2 ist die Legendre-Darstellung auch in der LOS-Gradiometrie die effizientere Methode. Im relativen Vergleich ergibt sich eine zeitliche Verbesserung der Wigner-Darstellung, die auf der unterschiedlichen Anzahl an Summanden – insbesondere in den partiellen Ableitungen nach der Position des Zentrums –

## Ableitung des LOS-Gradienten

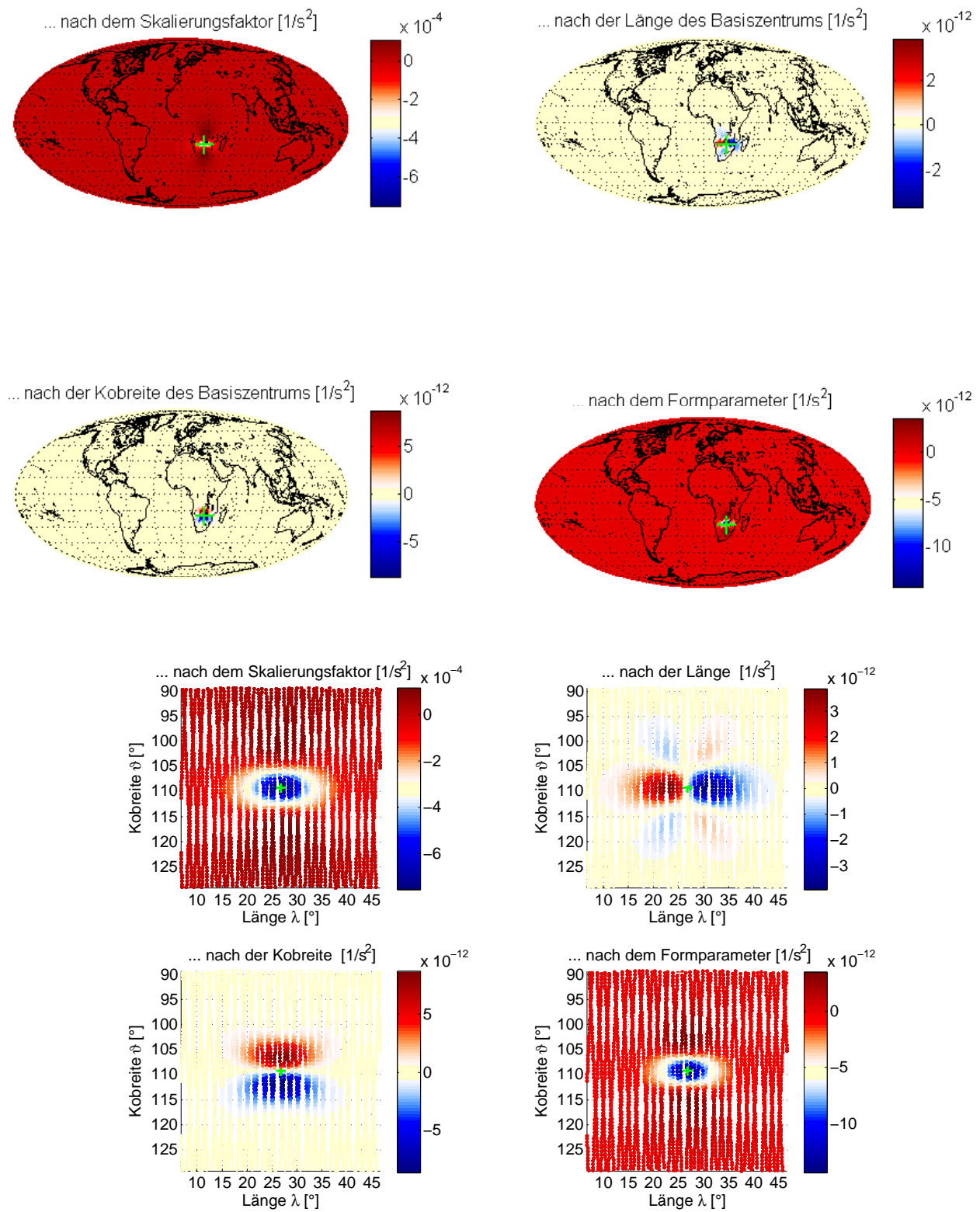


Abbildung 8.4.: Ableitungen des LOS-Gradienten einer Basisfunktion in der räumlichen Darstellung

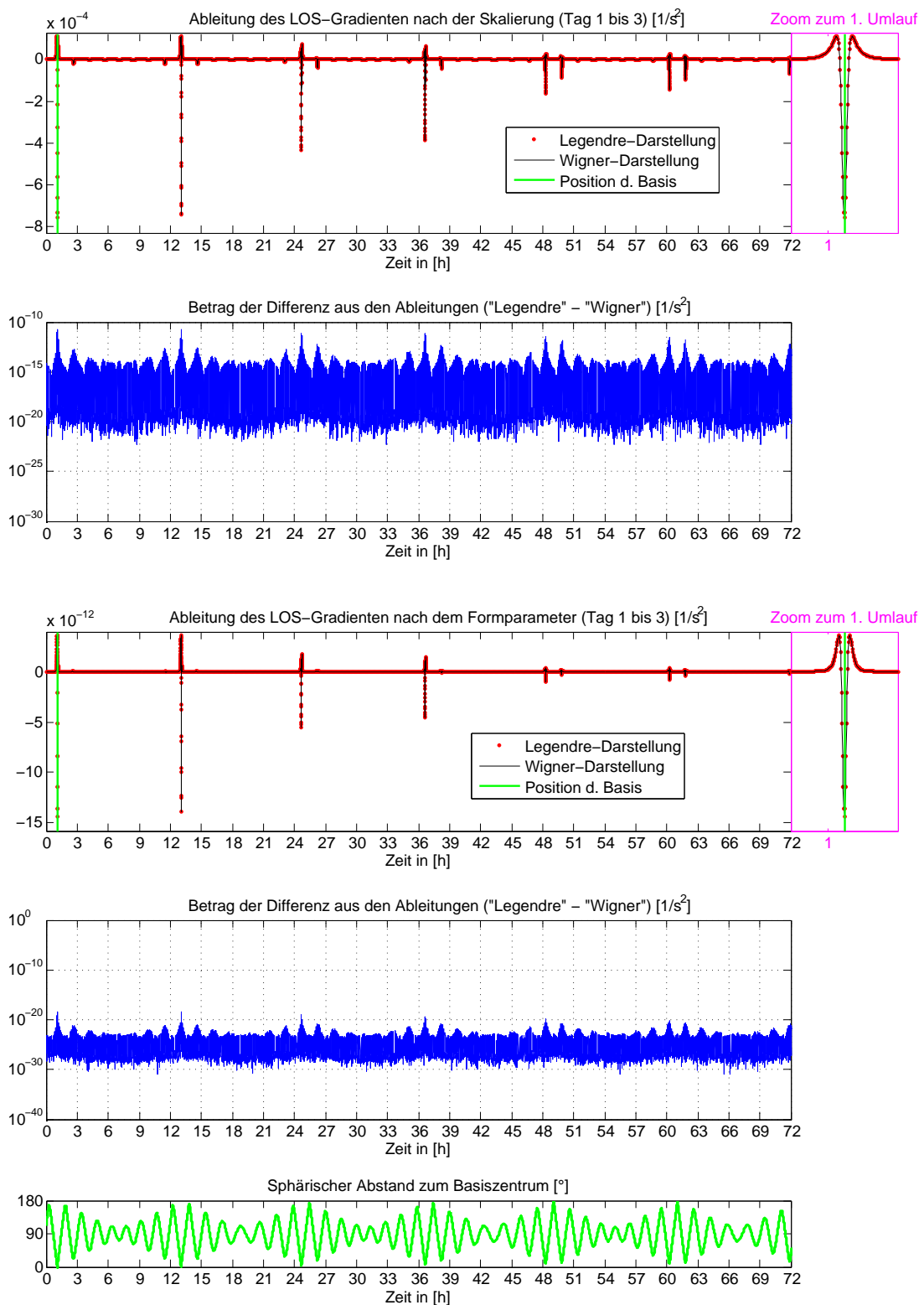


Abbildung 8.5.: Ableitungen des LOS-Gradienten einer Basisfunktion nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter in einer zeitlichen Darstellung

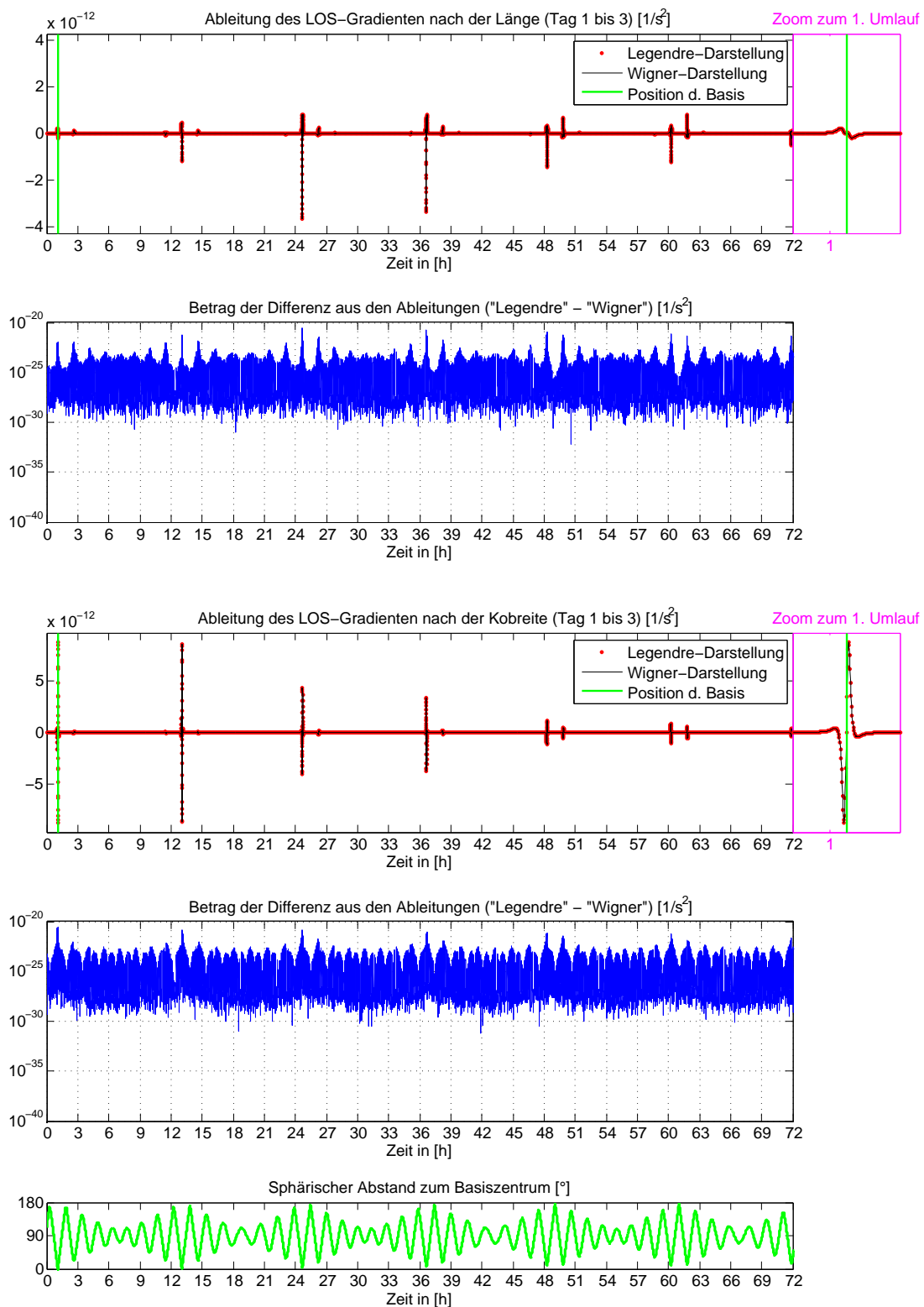


Abbildung 8.6.: Ableitungen des LOS-Gradienten einer Basisfunktion nach der Länge und der Kobreite des Basiszentrums in einer zeitlichen Darstellung

beruht. Der Unterschied in den Rechenzeiten reduziert sich für viele Datenpunkte und mehrere Basisfunktionen, wobei im Beispiel mit 10 Basisfunktionen und 10000 Beobachtungen ein Verhältnis von 1 : 27 erreicht wird. Bei einem Vergleich mit den entsprechenden Zeiten in der Berechnung des Potentials ist die Bestimmung des LOS-Gradienten in der jeweiligen Repräsentation langsamer, was durch die größere Anzahl der Summanden zu begründen ist.

## Range-Rate

Die partiellen Ableitungen der Range-Rate nach den Basisparametern können (bislang) nur mit Hilfe der Wigner-d-Funktionen in einer geschlossenen Formel dargestellt werden. Dabei werden zunächst die Bahnabweichungen aufgrund der radialen Basisfunktionen in einem rotierenden Koordinatensystem bestimmt, was eine kreisförmige Referenzbahn und ein Zentralfeld impliziert. Durch die Rotation ins Inertialsystem und die Differenz der entsprechenden Terme können anschließend die Ableitungen der Range-Rate approximiert werden.

Zur Kontrolle wird eine Implementierung der Variationsgleichungen für die radialen Basisfunktionen von Heng Zhu verwendet. Die klassische Methode löst für jeden Parameter ein Anfangswertproblem, wobei der *ode113.m*-Algorithmus von MATLAB zur Lösung der Differentialgleichung eingesetzt wird. Außerdem existiert eine Umsetzung der (numerischen) Variation der Konstanten gemäß Beutler (2005), welche zunächst die homogene Differentialgleichung löst und die Ableitungen nach den Parametern mit einem linearen Gleichungssystem und einer Integration durch die Trapezregel realisiert.

Im Gegensatz zu den in-situ Beobachtungen ist aufgrund der Integrationen in den Variationsgleichungen bzw. durch die Approximationen der Hill-Theorie eine Aufteilung des Szenarios in kurze (kreisförmige) Bahnbögen erforderlich. Dazu werden aus einem realen Datensatz der GRACE-Mission im August 2002 die Keplerelemente  $a_1 = 6867504 \text{ m}$ ,  $\Omega_1 = -23.471^\circ$ ,  $I_1 = 89.0169^\circ$  für beide Satellitenbahnen verwendet und für die geschlossene Lösung um die Exzentrizität  $e = 0$  ergänzt. Die Anfangspositionen in der Bahnebene werden bedingt durch die Programme wieder über den Perigäumsabstand  $\omega_1 = 92.861^\circ$  bzw.  $\omega_2 = 93.952^\circ$  festgelegt.

Daraus berechnet man zwei Bahnen mit einer Abtastung von  $\Delta t = 2.5 \text{ s}$  und selektiert über einem Testgebiet einige Bahnbögen, welche jeweils aus 180 Datenpunkten bestehen. Aus den Mittelwerten der kartesischen Positionen der Satelliten erhält man das Baryzentrum, auf welches sich die Positionen in den Grafiken beziehen. Die Basis wird mit den Parametern  $\sigma_b(n) = 0.95^n$ ,  $n_0 = 0$  und  $\tilde{N} = 100$  in der Mitte des ersten Bogens platziert, was der Position  $\lambda_b \approx 33.922^\circ$  und  $\vartheta_b \approx 59.175^\circ$  entspricht. Der Skalierungsfaktor  $\eta_b \approx 8.046 \cdot 10^{-10}$  erzeugt wieder eine maximale Potentialänderung von  $\Delta T = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  auf der Erdoberfläche.

In den Abbildungen 8.7, 8.8 und 8.9 sind die Ableitungen der Range-Rate in einer räumlichen und zeitlichen Darstellung zusammengefasst. Die partiellen Ableitungen der Range-Rate verhalten sich grundlegend anders als die in-situ Beobachtungen des Energieintegrals und der LOS-Gradiometrie. Wie bereits in der Herleitung diskutiert, beginnen alle Bögen für alle Parameter mit dem Startwert Null, was für die Bestimmung von Basisfunktionen am Rand des Gebiets problematisch ist.

In den Ableitungen nach der Skalierung, dem Formparameter und der Länge des Zentrums ist die Position der Basisfunktion nicht mit einem signifikanten Wert des Signals (Maxima, Minima oder Nullstelle) korreliert und die größte Änderung des Signals findet sich in den Bahnbögen, welche nicht das Zentrum überfliegen (vgl. zeitliche Darstellungen). Lediglich die Ableitung nach der Kobreite zeigt deutliche Extrema in der Umgebung des Zentrums, wobei ein Wechsel der Vorzeichen auffällt, der eine Abhängigkeit von der Flugrichtung nahelegt. Dies wird durch eine zusätzliche Grafik in der letzten Zeile bestätigt, in der die Differenz zwischen der Kobreite des Baryzentrums der Satelliten und der  $\vartheta_b$ -Koordinate der Basis aufgetragen ist. Beginnt für einen Bahnbogen die Differenz mit einem negativen Wert, so handelt es sich um einen absteigenden, ansonsten um einen aufsteigenden Bahnbogen. Der Verlauf der partiellen Ableitungen legt nahe, dass die Messung vor allem in Flugrichtung bzw. in Richtung der Kobreite sensitiv für die Position des Basiszentrums ist, während die anderen Parameter schlechter zu bestimmen sind.

In allen Parametern unterscheiden sich die drei Berechnungen bereits in der 2. bis 3. Stelle, wobei die Differenzen aufgrund der Integrationen (in den Variationsgleichungen) und der linearisierten Hill-Theorie jeweils zum Ende eines Bahn Bogens zunehmen. Die Größenordnung der Unterschiede lassen sich darauf zurückführen, dass alle drei Methoden eine andere Approximation der partiellen Ableitungen erzeugen.



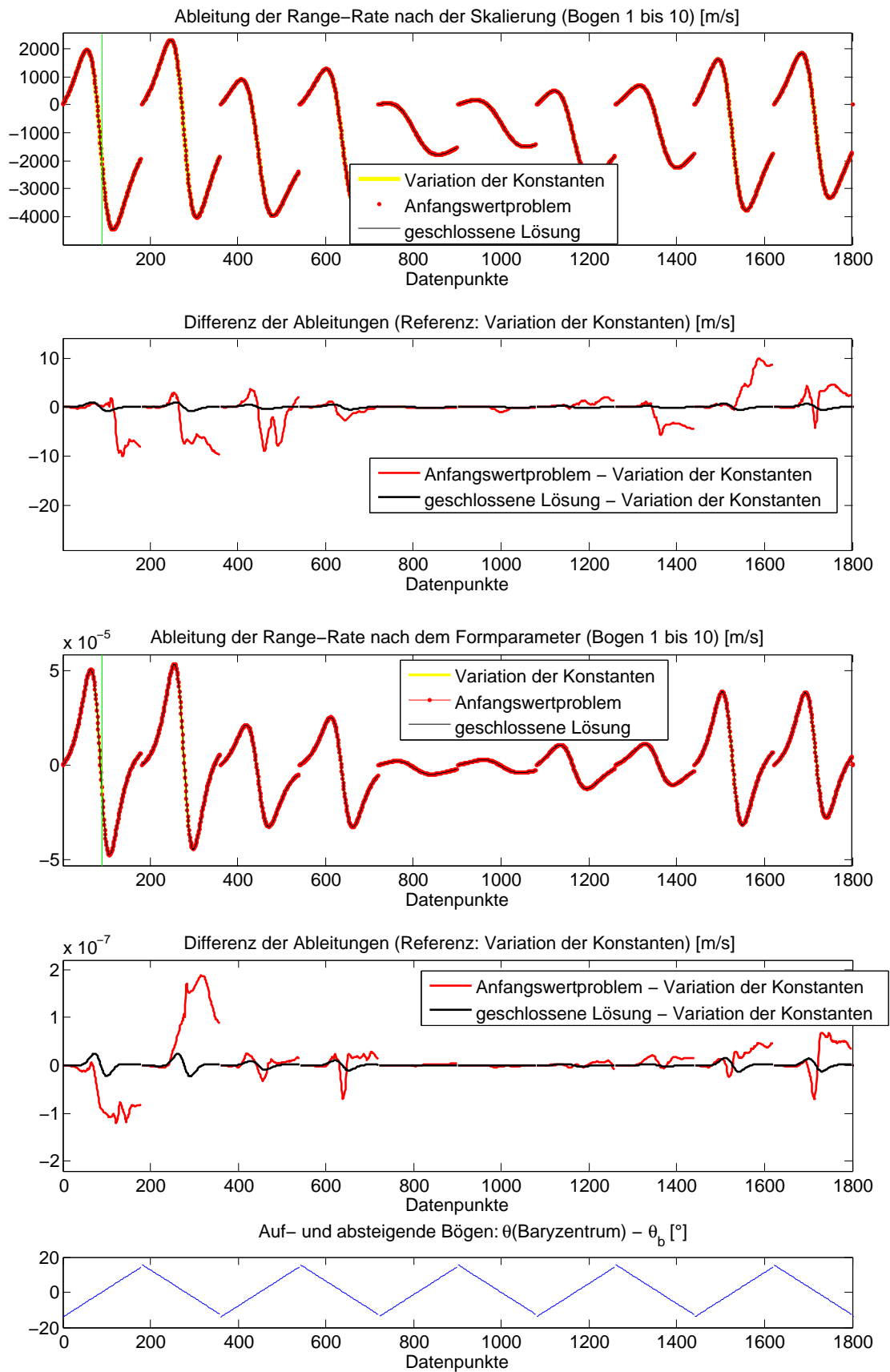


Abbildung 8.7.: Ableitungen der Range-Rate nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter einer Basisfunktion in einer zeitlichen Darstellung

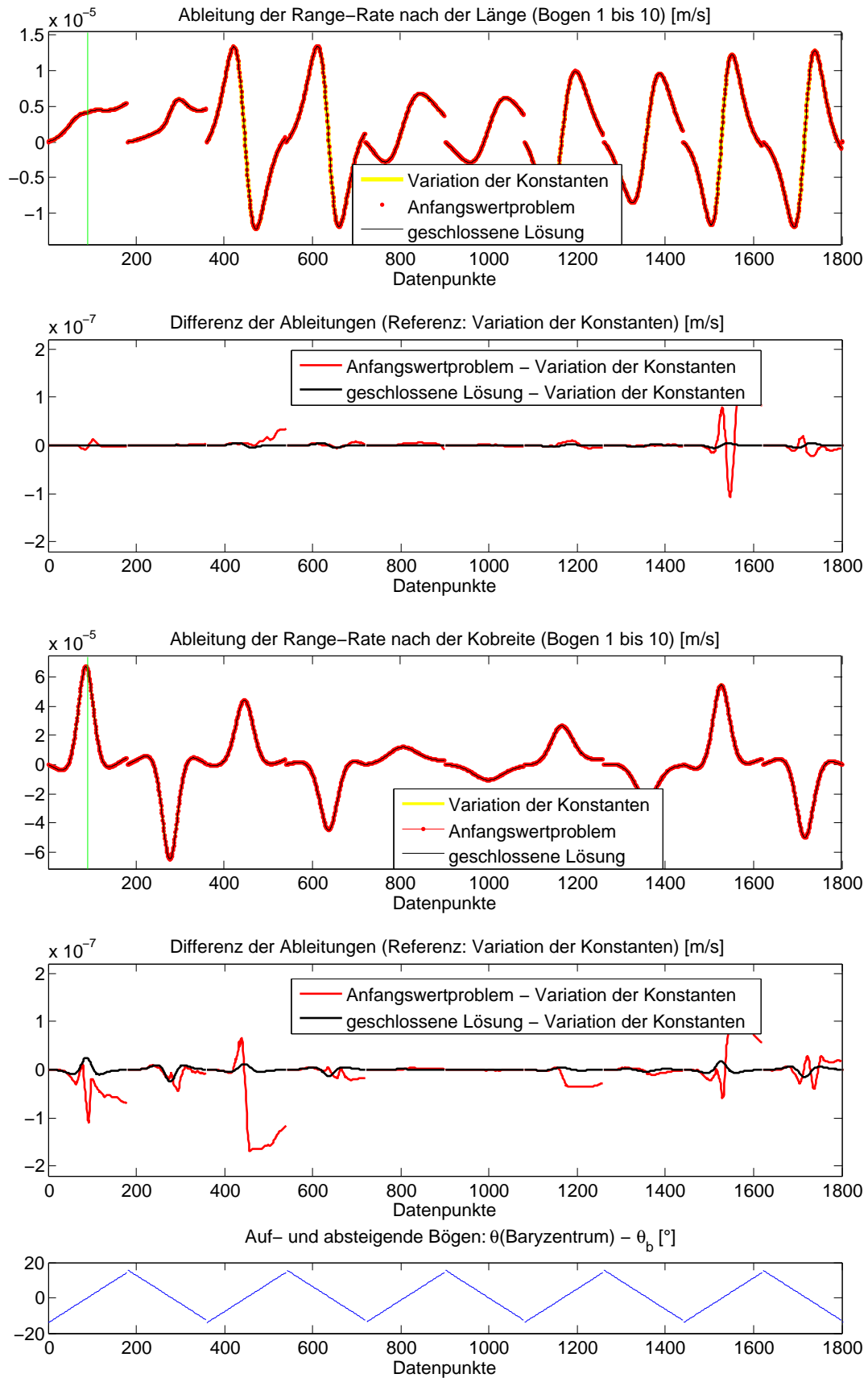


Abbildung 8.8.: Ableitungen der Range-Rate nach der Länge und Kobreite einer Basisfunktion in einer zeitlichen Darstellung

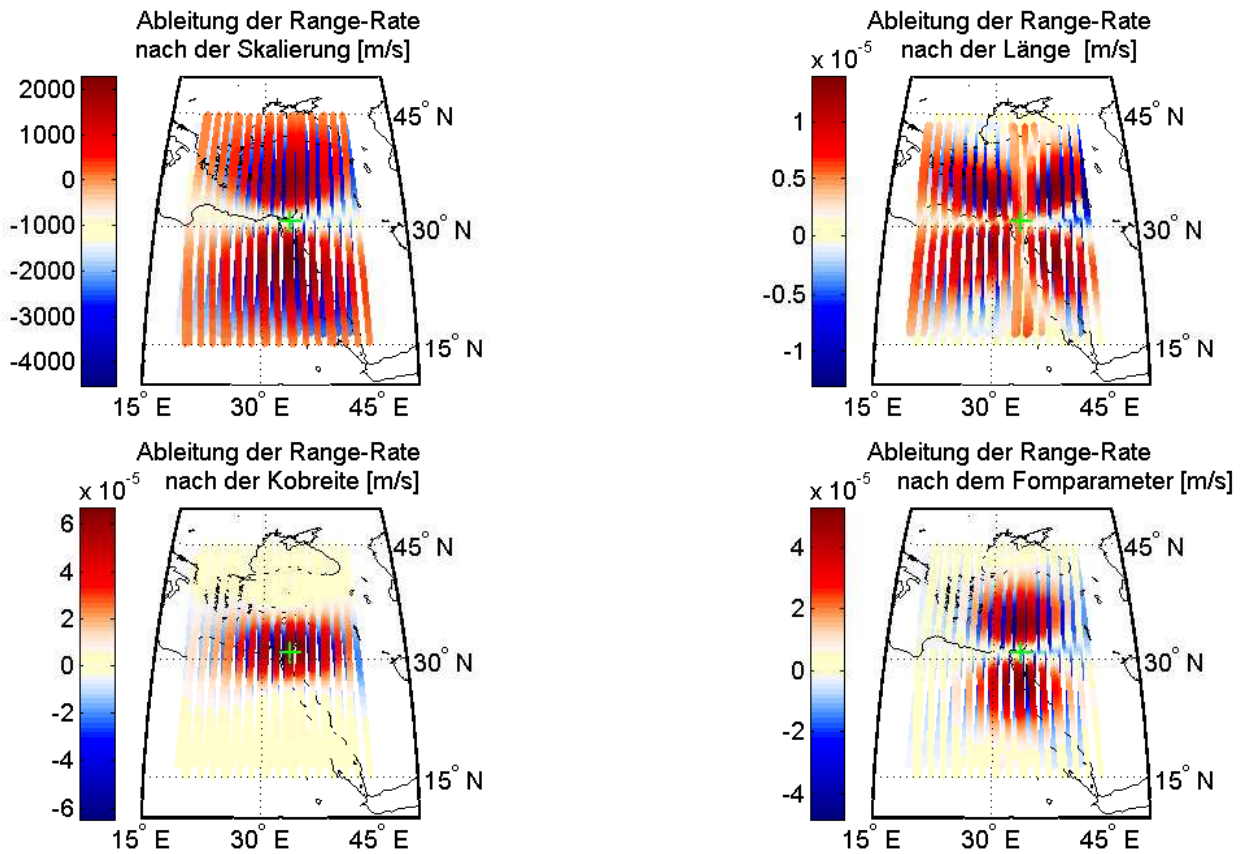


Abbildung 8.9.: Ableitungen der Range-Rate nach den Parametern einer Basisfunktion in einer räumlichen Darstellung

Die geschlossenen Formeln des Hill-Ansatzes basieren auf der Linearisierung der Differentialgleichung (6.24) und der Range-Rate (6.13) bzw. deren Ableitung (6.21) nach einem residualen Parameter. Die Variationsgleichungen verwenden formal die exakte Ableitung der Range-Rate (6.4), allerdings werden die benötigten Differentiale numerisch bestimmt. Im Anfangswertproblem erfolgt dies durch eine numerische Lösung eines Differentialgleichungssystems je Parameter. Die Variation der Konstanten löst nur das homogene System durch eine Integration und bestimmt den inhomogenen Anteil durch ein lineares Gleichungssystem und die Trapezregel. Eine weitere Approximation ergibt sich aus der variablen Schrittweite der MATLAB-Integratoren. Um eine aufwendige Berechnung der Satellitenpositionen in jeder Variationsgleichung zu vermeiden, wird die Bahn zwischen den vorhandenen Positionen interpoliert.

Die Rechenzeiten für die Entwicklungsgrade  $\tilde{N} \in \{90, 120, 150\}$  der Basisfunktionen sind in der Tabelle 8.3 zusammengestellt, wobei die Variation der Konstanten jeweils die schnellste Lösung liefert. In der Variation der Konstanten für einen Bahnbogen wächst die Rechenzeit mit der Anzahl der Parameter und des Entwicklungsgrades nur langsam, wobei für 10 Bahnbögen mit je 180 Datenpunkten gerade einmal eine Verdoppelung der Zeiten für die zehnfache Anzahl an Parametern erreicht wird. Die klassische Lösung der Variationsgleichungen als Anfangswertproblem erfordert eine numerische Integration je Parameter, so dass sich bei der zehnfachen Anzahl an Basisfunktionen auch die Rechenzeiten etwa um diesen Faktor verlängern. Die geschlossene Lösung ermöglicht prinzipiell die gemeinsame Bestimmung der Ableitungen für alle Bögen und Parameter, weshalb sich die Rechenzeit für 10 Basisfunktionen nur geringfügig wegen der Dimension der Matrizen vergrößert. Allerdings liefern die Variationsgleichungen so effiziente Ansätze, dass die geschlossene Lösung in ihrer aktuellen Implementierung für eine begrenzte Anzahl an Parametern keine Alternative darstellt.

Zu den Rechenzeiten der Wigner-Darstellungen ist noch anzumerken, dass für die Range-Rate im Gegensatz zu den skalaren in-situ Beobachtungen für jeden Datenpunkt und jeden Satelliten die 6 Komponenten der Bahnabweichungen (Position und Geschwindigkeit) berechnet werden. Außerdem sind wegen der fehlenden

	Wigner-Darstellung		Variationsgleichungen			
			Anfangswertproblem		Variation der Konstanten	
180 Punkte:						
$\tilde{N} = 90$	410.504	446.249	3.636	37.556	0.463	0.625
$\tilde{N} = 120$	941.680	1027.664	4.145	38.167	0.456	0.643
$\tilde{N} = 150$	1928.434	2061.205	4.385	40.354	0.474	0.805
1800 Punkte:						
$\tilde{N} = 90$	6011.929	6026.361	24.210	208.235	2.838	5.192
$\tilde{N} = 120$	13877.001	13917.757	27.003	252.682	2.934	6.343
$\tilde{N} = 120$	26180.779	26509.813	28.188	267.059	3.098	7.187
Anzahl Basisfunktionen	1	10	1	10	1	10

Tabelle 8.3.: Rechenzeit in Sekunden für die partiellen Ableitungen der Range-Rate nach den Basisparametern mit der geschlossenen Lösung im Hill-Ansatz, der Variation der Konstanten und dem Anfangswertproblem der Variationsgleichungen

Symmetrien alle Ordnungen in den Summationen zu implementieren.

Aufgrund der schnelleren Berechnung wird in der nichtlinearen Optimierung nur die Variation der Konstanten genutzt, welche – im Gegensatz zu der geschlossenen Lösung – auch für eine beliebige Satellitenbahn und ein allgemeines Referenzfeld gültig ist.

## 8.2. Simulationen

Die Analyse von SST-Daten durch optimierte radiale Basisfunktionen soll an einer Simulation der residualen Beobachtungen getestet werden. Dazu werden mit einem Orbit Simulator von Matthias Weigelt zwei Satellitenbahnen in einem GRACE-ähnlichen Szenario für einen Monat bestimmt. In der Integration werden nur das statische Schwerfeld der Erde und die Rotation gemäß den Konventionen des IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) berücksichtigt. Die vorhandenen Korrekturterme beziehen sich auf den August 2002, was dem Beginn der wissenschaftlichen GRACE-Mission nach der Kalibrierungsphase entspricht. Als Startwerte der Integration werden die Positionen und Geschwindigkeiten der beiden GRACE-Satelliten aus einem realen Datensatz verwendet, deren (gerundete) Keplerelemente zum Zeitpunkt  $t = 0$  in der Tabelle 8.4 zusammengestellt sind.

	Satellit 1	Satellit 2
$a$	6867504.400 m	6867000.548 m
$e$	0.003285	0.003305
$I$	89.017°	89.017
$\Omega$	-23.471°	-23.470°
$\omega$	92.861°	93.952°
$M$	48.722°	46.112°

Tabelle 8.4.: Startwerte der GRACE-Simulation aus einem realen Datensatz vom August 2002

Durch die Orbitintegration erhält man zwei Satellitenbahnen, welche durch die Einführung eines Referenzfeldes in die behandelten residualen SST-Beobachtungen umgewandelt werden. Für jeden Satelliten kann man mit dem Energieintegral die Potentialwerte im Orbit berechnen, während eine gemeinsame Auswertung die Line-of-Sight Gradienten und die Range-Rate bezüglich des Baryzenters der Satelliten liefert.

### 8.2.1. Closed-Loop-Simulation

#### Energieintegral und LOS-Gradiometrie

In einem ersten Schritt wird untersucht, wie gut die Parameter eines residualen Feldes mit bekannten Parametern aus den simulierten SST-Daten geschätzt werden können. Dazu wählt man als Referenzfeld das EGM96 bis Grad und Ordnung 120 und addiert zu diesem einige radiale Basisfunktionen in Form ihrer sphärisch-harmonischen Koeffizienten. Über diesem gestörten Feld wird eine Orbitintegration mit den Startwerten aus der Tabelle 8.4 durchgeführt. Anschließend werden für eine regionale Analyse die Beobachtungen aus der Umgebung der versteckten Basisfunktionen selektiert.

Für die Simulation werden 5 radiale Basisfunktionen mit den Grenzen  $n_0 = 10$  und  $\tilde{N} = 120$  gewählt, deren Parameter in der Tabelle 8.5 aufgelistet sind. In der Abbildung 8.10 sind die beiden in-situ Beobachtungen im Orbit zusammen mit den Positionen der Basiszentren dargestellt. Aufgrund der Flughöhe verschmelzen für das Potential drei der Basisfunktionen zu einer gemeinsamen Struktur mit negativen Potentialänderungen (blau), während die anderen jeweils eine räumlich getrennte Struktur mit positiven Werten (rot) erzeugen. In den LOS-Beobachtungen sind die positiven und negativen Bereiche vertauscht und die Strukturen der 5 Basisfunktionen bleiben getrennt, was auf die höhere Auflösung der Gradiometrie zurückzuführen ist.

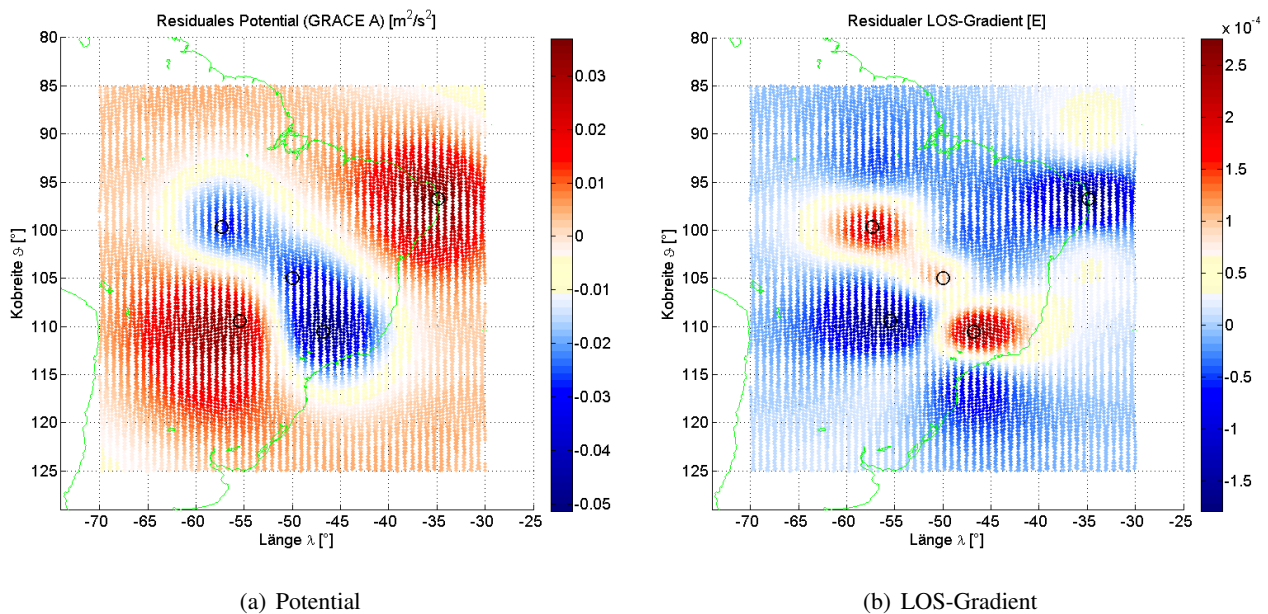


Abbildung 8.10.: In-situ Beobachtungen im Orbit aus einer Closed-Loop-Simulation mit 5 radialen Basisfunktionen, deren Zentrum jeweils durch die Kreise markiert ist

Nummer	$\vartheta_b$ in $^\circ$	$\lambda_b$ in $^\circ$	$\sigma_b$	$\eta_b$
1	96.770	-34.880	0.981	$0.112 \cdot 10^{-9}$
2	99.660	-57.340	0.976	$-0.144 \cdot 10^{-9}$
3	105.000	-50.000	0.991	$-0.070 \cdot 10^{-9}$
4	109.450	-55.440	0.968	$0.156 \cdot 10^{-9}$
5	110.560	-46.780	0.985	$-0.178 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 8.5.: Parameter der versteckten Basisfunktionen in der Closed-Loop-Simulation

Als Parameter der nichtlinearen Optimierung werden neben den Grenzen  $n_0 = 10$  und  $\tilde{N} = 120$  für die Reihenentwicklung die folgenden Einstellungen gewählt:

- In der Startwertsuche werden die residualen Signale im Orbit auf ein Gitter mit dem Abstand  $0.3^\circ$  interpoliert und mit einem Binomialfilter der Dimension 5 geglättet. Akzeptierte „Höhen“ müssen (im Betrag)

mindestens 10 % des größten Wertes erreichen.

- Alle Basisfunktionen werden mit den Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = \sigma_b^n$  bestimmt und mit dem Formparameter  $\sigma_b = 0.9999$  initialisiert.
- Die nichtlineare Optimierung erfolgt mit maximal 50 Iterationen und wird insgesamt zweimal wiederholt, um weitere Details zu erfassen.
- In jedem Durchgang der nichtlinearen Optimierung können maximal 20 Basisfunktionen optimiert werden, deren Parameter am Ende gemeinsam kontrolliert werden.
- Die Formparameter werden auf das Intervall  $[0.9, 1]$  eingeschränkt, während sich die initialen Positionen der Zentren maximal um  $4^\circ$  ändern können.

Neben den erwarteten Positionen in der Umgebung der versteckten Basisfunktionen werden im ersten Durchgang für das Potential 17 und für die LOS-Gradiometrie 16 Basiszentren akzeptiert. Diese lassen sich aus der Überlagerung der einzelnen Potentiale im Nahbereich und den Oszillationen der radialen Basisfunktionen aufgrund des minimalen Grades  $n_0 = 10$  erklären. Der zweite Durchgang verwendet jeweils die maximal zugelassene Anzahl von 20 Basisfunktionen, um feinere Signale zu erkennen und die fehlerhafte Modellierung des vorherigen Schritts zu korrigieren. Die anschließende Kontrolle führt in diesem Fall in beiden Beobachtungen zu 35 Basisfunktionen, deren Positionen zusammen mit einer farblichen Kodierung der Formparameter in der Abbildung 8.11 und in den Tabellen 8.6 und 8.7 dargestellt sind.

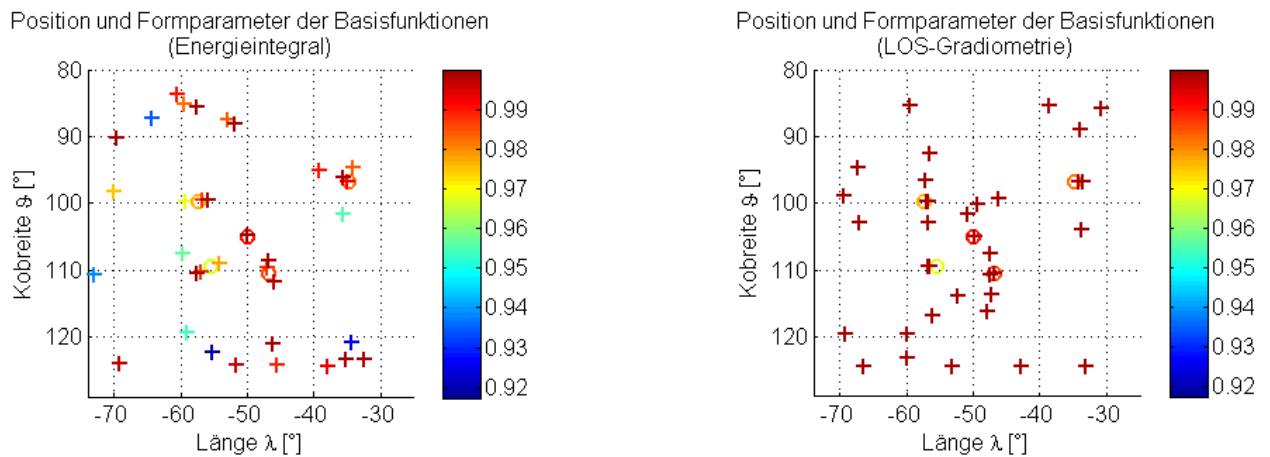


Abbildung 8.11.: Positionen der optimierten radialen Basisfunktionen aus den in-situ Beobachtungen, wobei die Formparameter durch die Farbe dargestellt sind

In der näheren Umgebung jeder versteckten Basisfunktion wird mindestens eine optimierte Position gefunden, wobei die sphärischen Abstände in den letzten 5 Spalten der beiden Tabellen aufgelistet werden, sofern die Distanz weniger als  $10^\circ$  beträgt. In beiden Beobachtungen wird insbesondere die Position der 3. Basisfunktion ( $\lambda_3 = 50^\circ$ ,  $\varphi_3 = 105^\circ$ ) mit einem Restfehler von  $0.2814^\circ$  bzw.  $0.1086^\circ$  sehr gut gefunden, was durch das signifikante Signal aufgrund des großen Formparameters  $\sigma_3 = 0.991$  erklärt werden kann. Am schlechtesten wird jeweils die 4. Basisfunktion ( $\lambda_4 = 109.450^\circ$ ,  $\varphi_4 = -55.440^\circ$ ) detektiert, da deren Formparameter  $\sigma_4 = 0.968$  eine relativ flache Struktur im Signal bewirkt. Größere Abweichungen ergeben sich in den anderen Parametern, da diese sehr stark korreliert sind. Fixiert man zum Beispiel die Parameter der anderen Basisfunktionen und alle Zentren und variiert nur einen Formparameter, so ändert sich in der Optimierung notwendigerweise auch der zugehörige Skalierungsfaktor. Andererseits wird das Signal jeweils durch die Kombination aller Basisfunktionen approximiert, so dass sich die Anzahl und die Restfehler in den optimierten nichtlinearen Parametern direkt auf alle Skalierungsfaktoren auswirken.

Abgesehen von den zusätzlichen Basisfunktionen in der Nähe der versteckten Zentren fällt auch eine Konzentration an den Rändern des Gebiets auf. Diese Basisfunktionen modellieren einerseits einen globalen Anteil, der sich daraus ergibt, dass die Änderung der Potentialwerte durch die Störungen außerhalb des Gebiets

$\vartheta_b$ in [°]	optimierte Parameter			sphärischer Abstand zur Basisfunktion				
	$\lambda_b$ in [°]	$\sigma_b$	$\eta_b$	1	2	3	4	5
96.837	-35.027	0.991	$1.023 \cdot 10^{-10}$	0.1605	-	-	-	-
110.403	-57.039	0.988	$1.017 \cdot 10^{-10}$	-	-	8.6088	1.7799	9.6101
85.543	-57.533	1.000	$1.032 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
123.380	-35.282	1.000	$-1.804 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
87.571	-52.911	0.984	$-2.267 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
109.610	-47.023	0.988	$-1.965 \cdot 10^{-10}$	-	-	5.4147	7.9332	0.9775
99.585	-56.734	0.987	$-1.293 \cdot 10^{-10}$	-	0.6019	8.5191	9.9438	-
124.022	-69.149	0.996	$8.143 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
98.216	-70.003	0.975	$2.761 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
90.267	-69.626	1.000	$2.479 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
124.167	-45.661	0.989	$3.257 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
124.392	-38.001	0.993	$4.202 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
124.275	-51.646	0.997	$1.103 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
123.336	-32.549	1.000	$8.103 \cdot 10^{-14}$	-	-	-	-	-
85.156	-59.592	0.983	$-1.024 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
109.130	-54.235	0.977	$6.383 \cdot 10^{-11}$	-	9.9348	5.7823	1.1817	7.1556
108.715	-46.913	1.000	$4.715 \cdot 10^{-11}$	-	-	4.7462	8.0912	1.8493
99.586	-56.004	1.000	$2.589 \cdot 10^{-11}$	-	1.3192	7.9807	9.8787	-
101.564	-35.690	0.955	$7.341 \cdot 10^{-12}$	4.8599	-	-	-	-
95.103	-39.154	0.991	$5.849 \cdot 10^{-12}$	4.5657	-	-	-	-
110.789	-73.146	0.939	$6.921 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
121.000	-46.267	1.000	$1.347 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
94.738	-34.152	0.984	$1.639 \cdot 10^{-11}$	2.1572	-	-	-	-
119.400	-59.031	0.954	$6.407 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
122.276	-55.231	0.917	$-2.491 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
83.656	-60.539	0.990	$3.361 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
120.772	-34.328	0.925	$3.863 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
107.636	-59.779	0.957	$1.375 \cdot 10^{-11}$	-	8.3204	9.7463	4.4954	-
87.193	-64.476	0.934	$2.158 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
104.719	-49.979	1.000	$-5.059 \cdot 10^{-11}$	-	8.7937	0.2814	7.0435	6.5874
110.625	-57.687	1.000	$-3.858 \cdot 10^{-11}$	-	-	9.2266	2.4155	-
111.828	-45.992	0.998	$-3.016 \cdot 10^{-11}$	-	-	7.8139	9.1538	1.4654
96.188	-35.582	1.000	$-2.326 \cdot 10^{-11}$	0.9086	-	-	-	-
99.773	-59.229	0.968	$-2.821 \cdot 10^{-11}$	-	1.8652	-	-	-
88.124	-51.833	1.000	$2.081 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-

Tabelle 8.6.: Optimierte Parameter in der Closed-Loop-Simulation aus dem Energieintegral, wobei die letzten 5 Spalten den sphärischen Abstand zu den versteckten Basisfunktionen aus der Tabelle 8.5 angeben, sofern dieser weniger als  $10^\circ$  beträgt

$\vartheta_b$ in [°]	optimierte Parameter			sphärischer Abstand zur Basisfunktion				
	$\lambda_b$ in [°]	$\sigma_b$	$\eta_b$	1	2	3	4	5
110.623	-46.903	0.999	$-1.688 \cdot 10^{-10}$	-	-	6.3489	8.1047	0.1313
99.787	-57.036	0.998	$-2.262 \cdot 10^{-10}$	-	0.3250	8.6236	9.7854	-
104.928	-49.916	0.997	$-4.965 \cdot 10^{-11}$	-	8.9622	0.1086	6.9483	6.3744
89.045	-34.061	1.000	$-3.949 \cdot 10^{-12}$	7.7680	-	-	-	-
104.066	-33.755	1.000	$-3.168 \cdot 10^{-12}$	7.3795	-	-	-	-
116.958	-56.252	1.000	$-4.634 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	7.5445	-
113.943	-52.387	0.999	$7.237 \cdot 10^{-12}$	-	-	9.2210	5.3129	6.1936
109.425	-56.498	0.998	$1.743 \cdot 10^{-10}$	-	9.7984	7.6209	0.9982	9.2014
96.839	-34.151	0.998	$1.360 \cdot 10^{-10}$	0.7269	-	-	-	-
116.315	-47.853	1.000	$1.158 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	9.7923	5.8381
92.665	-56.550	1.000	$-7.073 \cdot 10^{-12}$	-	7.0387	-	-	-
99.241	-46.322	0.999	$3.854 \cdot 10^{-12}$	-	-	6.7891	-	-
98.952	-69.440	0.999	$-4.099 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
124.452	-66.451	1.000	$-8.917 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
123.245	-59.850	1.000	$-2.980 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
85.728	-30.755	0.999	$-4.848 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
96.550	-57.150	1.000	$-1.956 \cdot 10^{-11}$	-	3.1157	-	-	-
109.450	-56.850	1.000	$-1.107 \cdot 10^{-10}$	-	9.8014	7.9106	1.3295	9.5257
96.850	-33.450	1.000	$-7.012 \cdot 10^{-11}$	1.4222	-	-	-	-
107.650	-47.550	1.000	$-1.996 \cdot 10^{-11}$	-	-	3.5425	7.6926	2.9996
113.650	-47.250	1.000	$-1.633 \cdot 10^{-11}$	-	-	9.0299	8.6957	3.1205
102.850	-56.850	1.000	$-1.706 \cdot 10^{-11}$	-	3.2260	6.9870	6.7373	-
101.650	-50.850	1.000	$-5.422 \cdot 10^{-12}$	-	6.6809	3.4506	8.9642	9.7283
100.150	-49.350	1.000	$-4.983 \cdot 10^{-12}$	-	7.8859	4.8913	-	-
85.450	-38.550	1.000	$-3.969 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
102.850	-67.050	1.000	$-3.111 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
94.750	-67.350	1.000	$-1.871 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
119.650	-59.850	1.000	$-3.442 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
119.650	-69.150	1.000	$-7.812 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
124.450	-53.250	1.000	$-1.406 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
124.450	-33.150	1.000	$1.974 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
124.450	-42.750	1.000	$1.970 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
85.450	-59.550	1.000	$-1.645 \cdot 10^{-12}$	-	-	-	-	-
99.850	-56.850	1.000	$1.412 \cdot 10^{-10}$	-	0.5189	8.4401	9.6962	-
110.650	-47.550	1.000	$6.160 \cdot 10^{-11}$	-	-	6.1120	7.5075	0.7263

Tabelle 8.7.: Optimierte Parameter in der Closed-Loop-Simulation aus der LOS-Gradiometrie, wobei die letzten 5 Spalten den sphärischen Abstand zu den versteckten Basisfunktionen aus der Tabelle 8.5 angeben, sofern dieser weniger als  $10^0$  beträgt



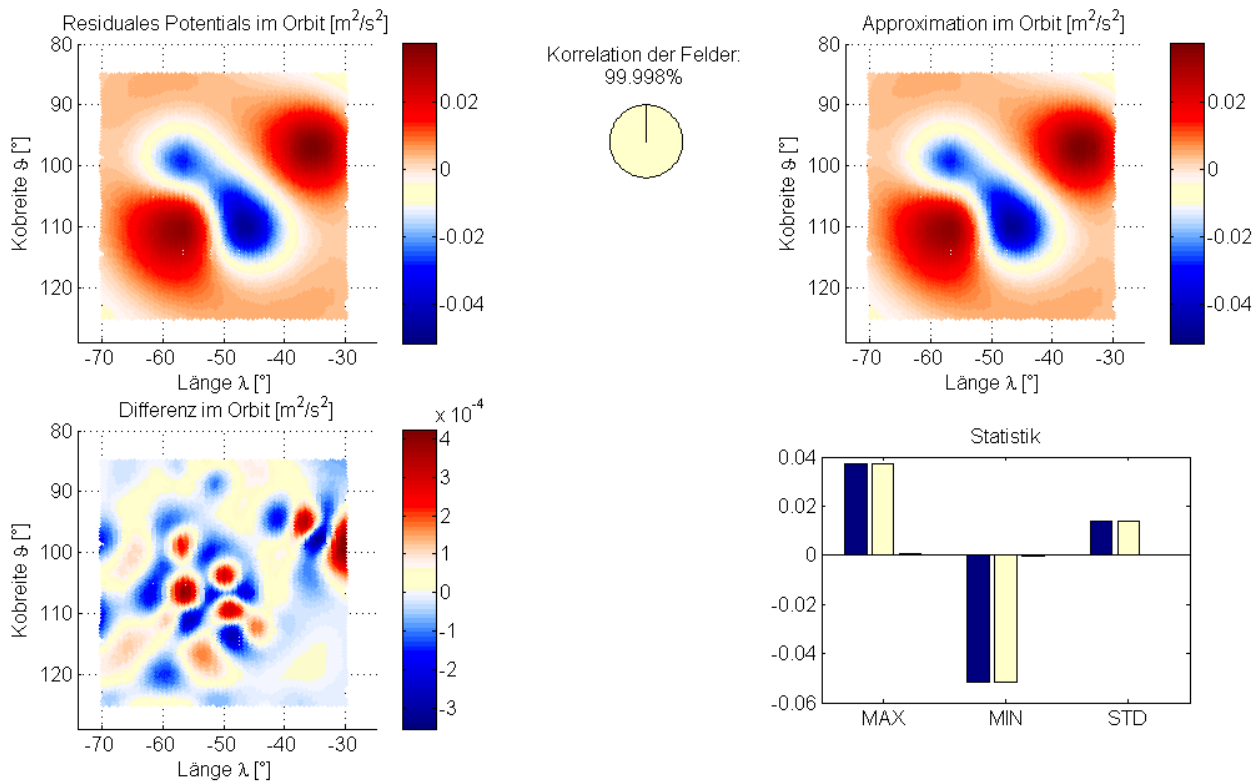


Abbildung 8.12.: Signal, Approximation und Differenz für das Energieintegral in der Closed-Loop-Simulation

nicht vollständig verschwindet. Andererseits sind diese Zentren auch eine Folge der Startwertsuche, da eine zweidimensionale Interpolation (der Orbitdaten) stets Extremwerte am Rand erzeugt, die dann im zweiten Durchlauf durch weitere Basisfunktionen korrigiert werden.

Die residualen Potentialwerte im Orbit (Standardabweichung:  $0.013926 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Maximum:  $0.03700 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Minimum:  $-0.05138 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ), die Approximation durch radiale Basisfunktionen und deren Differenz werden in der Abbildung 8.12 und der Tabelle 8.8 (Fall a)) gezeigt. Die Differenz der Potentialwerte im Orbit ist um 2 Größenordnungen kleiner als das Signal, weshalb deren statistische Maße (Maximum:  $0.00042 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Minimum:  $-0.00035 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Standardabweichung:  $0.000085 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ) im Balkendiagramm nur schwer erkennbar sind. Die Korrelation beider Felder bestätigt mit einem Wert von 99.998 % die hohe Güte der Approximation.

Die Lösung der Line-of-Sight Gradiometrie wird in der Grafik 8.13 visualisiert. Die residuale Beobachtung (Standardabweichung:  $0.051124 \text{ mE}$ ) wird mit einer Korrelation von 99.403 % approximiert. Die Differenz aus Signal und Approximation ist etwa eine Größenordnung kleiner als die Beobachtung und erreicht noch eine Standardabweichung von  $0.005578 \text{ mE}$  (vgl. in der Tabelle 8.8 Fall b)).

Aus den optimierten Parametern der LOS-Gradiometrie lassen sich die zugehörigen Potentialwerte im Baryzentrum berechnen. In der Abbildung 8.14 werden diese mit dem Potential der versteckten Basisfunktionen an der gleichen Position im Orbit verglichen. Das Potential der versteckten Basisfunktionen variiert mit einer Standardabweichung von  $0.013934 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  (Maximum:  $0.03698 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Minimum:  $-0.05149 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ) und wird mit einer Korrelation von 98.565 % approximiert, wobei die Differenz eine Standardabweichung von  $0.002596 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  aufweist (vgl. Fall c) in der Tabelle 8.8).

Vergleicht man die Potentialwerte aus der Analyse mit den zugehörigen Werten aus den ursprünglichen Basisparametern, so stellt man fest, dass das Energieintegral die kleineren Differenzen aufweist und die Restfehler annähernd gleichmäßig verteilt sind (vgl. Abbildung 8.12).

Die Rekonstruktion aus der LOS-Gradiometrie in der Grafik 8.14 hinterlässt größere Abweichungen, die in diesem Fall eine erkennbare Nord-Süd-Struktur aufweisen. Die verbleibende Struktur lässt sich aus der **Mehr-**

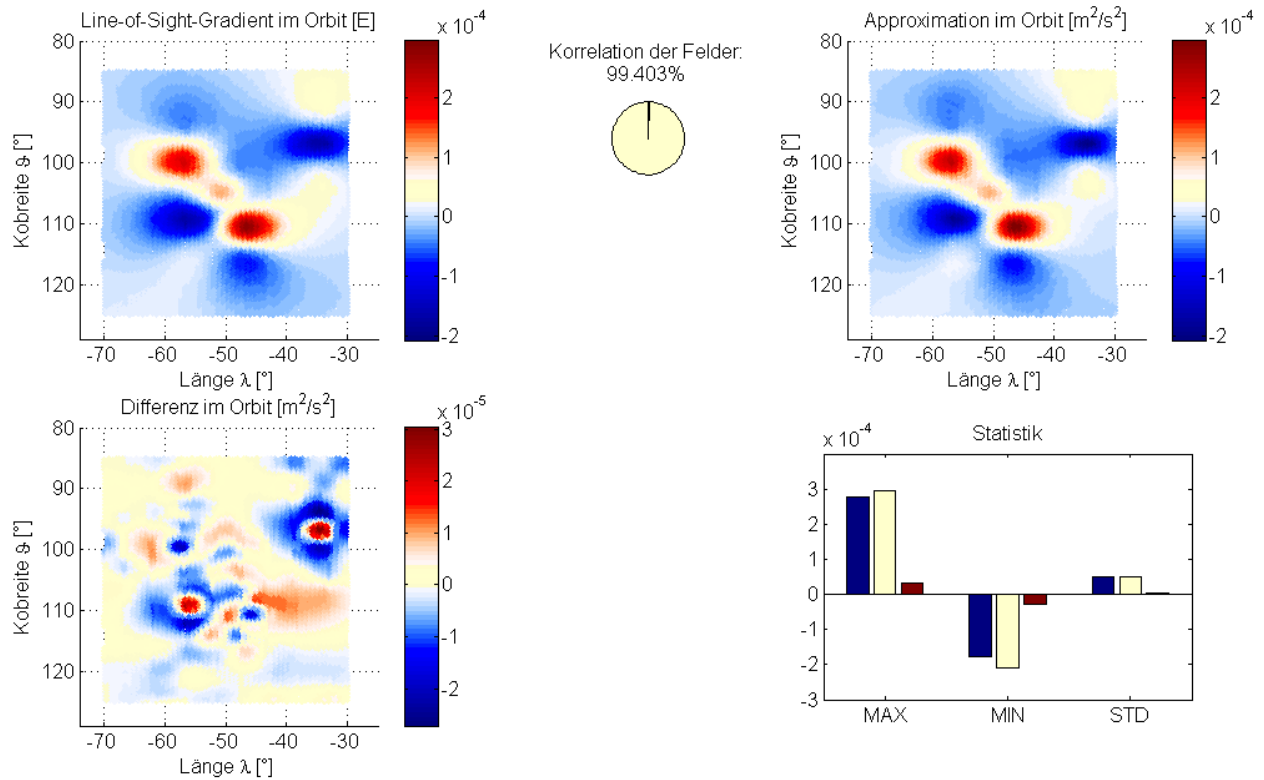


Abbildung 8.13.: Signal, Approximation und Differenz für den LOS-Gradienten in der Closed-Loop-Simulation

**deutigkeit** einer regionalen Line-of-Sight Gradiometrie erklären. Es existiert aufgrund der Auswertemethode ein Nullraum an Funktionen, deren Potential durch die Beobachtung nicht erfasst werden kann!

Indem man in einer planaren Approximation jeden Bahnbogen als eine Gerade auffasst, findet man anschaulich ein erstes Beispiel für diese Funktionen. Die LOS-Gradiometrie approximiert die zweite Ableitung des Potentials in Flugrichtung, weshalb das Signal in diesem Modell keine Informationen über einen Offset und einen linearen Trend in dieser Richtung enthalten kann. Ohne weitere Informationen kann daher zu dem rekonstruierten Potential in jedem Bogen stets eine Gerade an Potentialwerten addiert werden, deren Signal durch die Line-of-Sight Gradiometrie nicht messbar ist.

In sphärischen Koordinaten lässt sich eine lineare Mehrdeutigkeit durch die Formel

$$\delta M_{LOS}(\lambda, \vartheta) = a_0 + a_1 \vartheta + a_2 \lambda \quad (8.1)$$

approximieren. Die drei unbekanntes Koeffizienten lassen sich eventuell über eine Analyse der Kreuzungspunkte oder eine Kombination mit dem Energieintegral bestimmen, was aber noch näher zu untersuchen ist. Außerdem ist in weiteren Arbeiten zu untersuchen, ob der Nullraum auch nichtlineare Potentialfunktionen enthält und ob diese eventuell direkt von den Bahnelementen – insbesondere der Inklination – der beiden Satelliten abhängen.

## Range-Rate

Die Optimierung der Parameter aus den Range-Rate Beobachtungen bildet ein schwierigeres Problem. Die Ursachen sind vor allem in der Art der Beobachtung zu suchen:

- Da es keine in-situ Beobachtung ist, sind in der Messung alle Störungen des Schwerfeldes integriert enthalten. Eine punktweise Trennung in Größen des Referenz- und des Residualfeldes ist nicht vollständig möglich.

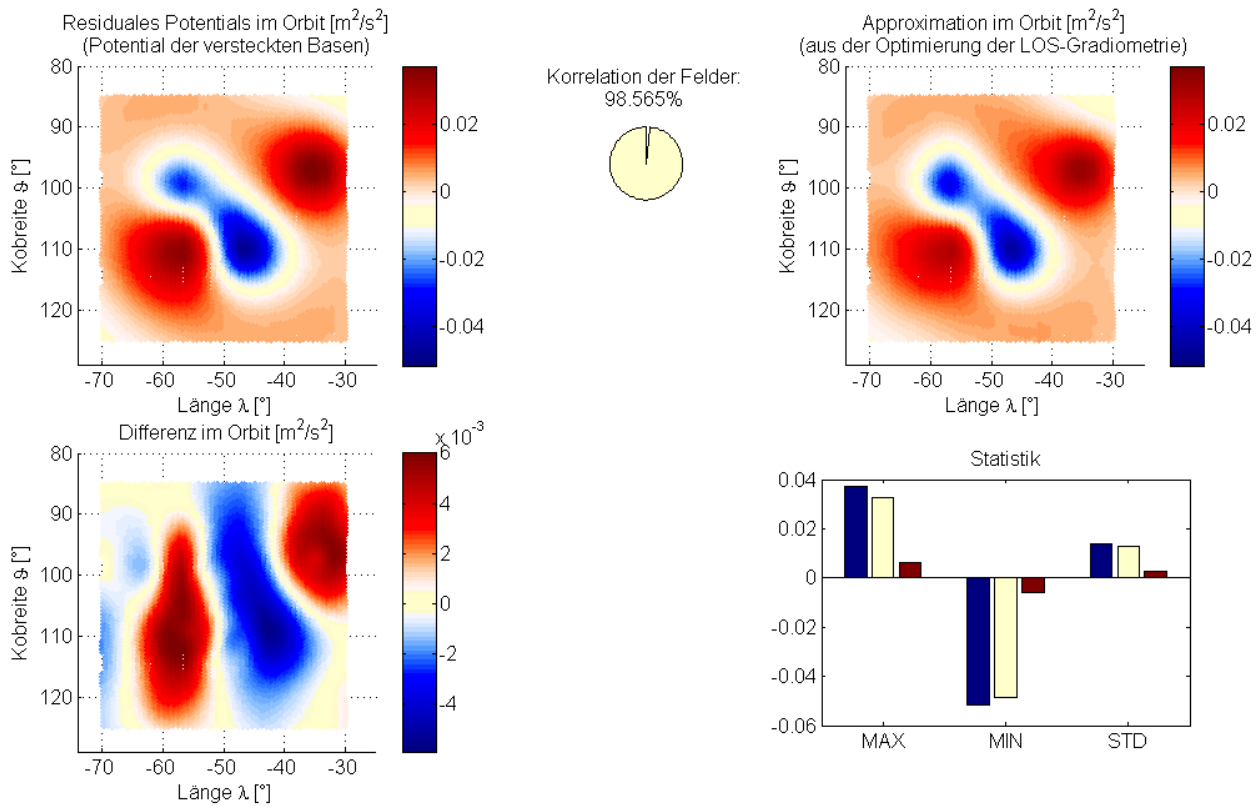


Abbildung 8.14.: Rekonstruktion der Potentialwerte aus der LOS-Gradiometrie in der Closed-Loop-Simulation

	Maximum	Minimum	Std.-abweichung	Korrelation
a) Energieintegral:				99.998 %
Signal [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.03700	-0.05138	0.013926	
Approximation [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.03714	-0.05149	0.013925	
Differenz [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.00042	-0.00035	0.000085	
LOS-Gradiometrie:				
b) LOS-Gradient				99.403 %
Signal [mE]	0.27567	-0.17891	0.051124	
Approximation [mE]	0.29534	-0.20803	0.050831	
Differenz [mE]	0.03050	-0.02719	0.005578	
c) Potential				98.565 %
Berechnung [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.03698	-0.05149	0.013934	
Approximation [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.03285	-0.04880	0.012636	
Differenz [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.00604	-0.00590	0.002596	

Tabelle 8.8.: Statistische Maße der Closed-Loop Simulation für das Energieintegral und den LOS-Gradienten im Orbit

- In der Integration über längere Zeiträume „verschmelzen“ alle Störungen des Zentralfeldes zu einem Signal, während gleichzeitig die (numerischen) Fehler zunehmen.
- Die Startwerte können bislang nicht aus den Beobachtungen bestimmt werden und die gewählten Werte sind daher eventuell für die Optimierung nicht geeignet.
- Eine Analyse der partiellen Ableitungen zeigt, dass die Range-Rate vor allem in Flugrichtung bzw. in Richtung der Kobreite sensitiv gegenüber Änderungen in den Basisparametern ist.

Durch einige Veränderungen in der Simulation kann man zumindest eine einfache Optimierung aus den Range-Rate Messungen testen. Dazu wird als Referenzfeld nur der Zentralterm verwendet und das Potential durch vier radiale Basisfunktionen gestört. Die Parameter sind in der Tabelle 8.9 aufgelistet und die Reihenentwicklung erfolgt für die Grenzen  $n_0 = 10$  bis  $\tilde{N} = 120$  mit den Legendre-Koeffizienten  $\sigma_b(n) = \sigma_b^n$ . Die Orbitintegration wird für 106 kurze Bahnbögen über dem Gebiet durchgeführt, deren erste Positionen jeweils aus den Keplerbahnen mit den Parametern  $a_1 = a_2 = 6867504 \text{ m}$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = -23.471^\circ$ ,  $I_1 = I_2 = 89.0169^\circ$ ,  $e = 0$  gegeben sind.

Größe	wahre Parameter	Startwert	optimierte Werte
$\lambda_b$ in $[\circ]$	-34.8800	-34.3800	-34.8831
	-57.3400	-57.9400	-57.3514
	-55.4400	-54.7400	-55.6081
	-46.7800	-47.5800	-46.9080
$\vartheta_b$ in $[\circ]$	96.7700	98.0700	96.7665
	99.6600	98.4600	99.5896
	109.4500	110.5500	109.5038
	110.5600	109.5600	110.5389
$\sigma_b$	0.98100	0.9800	0.98440
	0.97600	0.9800	0.97760
	0.96800	0.9800	0.97330
	0.98500	0.9800	0.98398
$\eta_b$	$1.12000 \cdot 10^{-9}$	$0.94542 \cdot 10^{-9}$	$1.03993 \cdot 10^{-9}$
	$-1.44000 \cdot 10^{-9}$	$-1.26735 \cdot 10^{-9}$	$-1.39402 \cdot 10^{-9}$
	$1.56000 \cdot 10^{-9}$	$1.24076 \cdot 10^{-9}$	$-1.39401 \cdot 10^{-9}$
	$1.78000 \cdot 10^{-9}$	$1.85144 \cdot 10^{-9}$	$1.36480 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 8.9.: Parameter der Closed-Loop-Simulation für den Range-Rate Ansatz

Die Optimierung erfolgt mit 20 Iterationen und ohne eine Wiederholung, wobei die korrekten Entwicklungsgrade der Basisfunktionen verwendet werden. Für die anderen Parameter werden Näherungswerte erzeugt, indem man zu den Positionen der Zentren maximal  $\pm 1.3^\circ$  addiert und die Formparameter durch  $\sigma_b = 0.98$  initialisiert. Die Skalierungsfaktoren werden durch eine lineare Ausgleichung passend zu den Daten bestimmt. Anschließend werden alle Parameter gemeinsam iterativ verbessert, wobei die partiellen Ableitungen durch die Variation der Konstanten realisiert werden.

In der Abbildung 8.15 werden die Beobachtung, die Approximation und die Differenz visualisiert, während die Werte der optimierten Parameter in der Tabelle 8.9 dargestellt sind. Die simulierte Range-Rate variiert zwischen einem Minimum von  $-1.74946 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und einem Maximum von  $1.61741 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  mit einer Standardabweichung von  $4.959109 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Die Differenz ist um eine Größenordnung kleiner und enthält Werte zwischen  $-2.42835 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $1.65770 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  mit der Standardabweichung von  $1.310771 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Vergleicht man die wahren Parameter mit den optimierten, so fällt vor allem die gute Approximation in den Positionen der Zentren auf. Die Form- und die Skalierungsparameter beeinflussen sich gegenseitig und kompensieren die restlichen Abweichungen in den Positionen, weshalb hier größere Abweichungen zu erwarten sind.

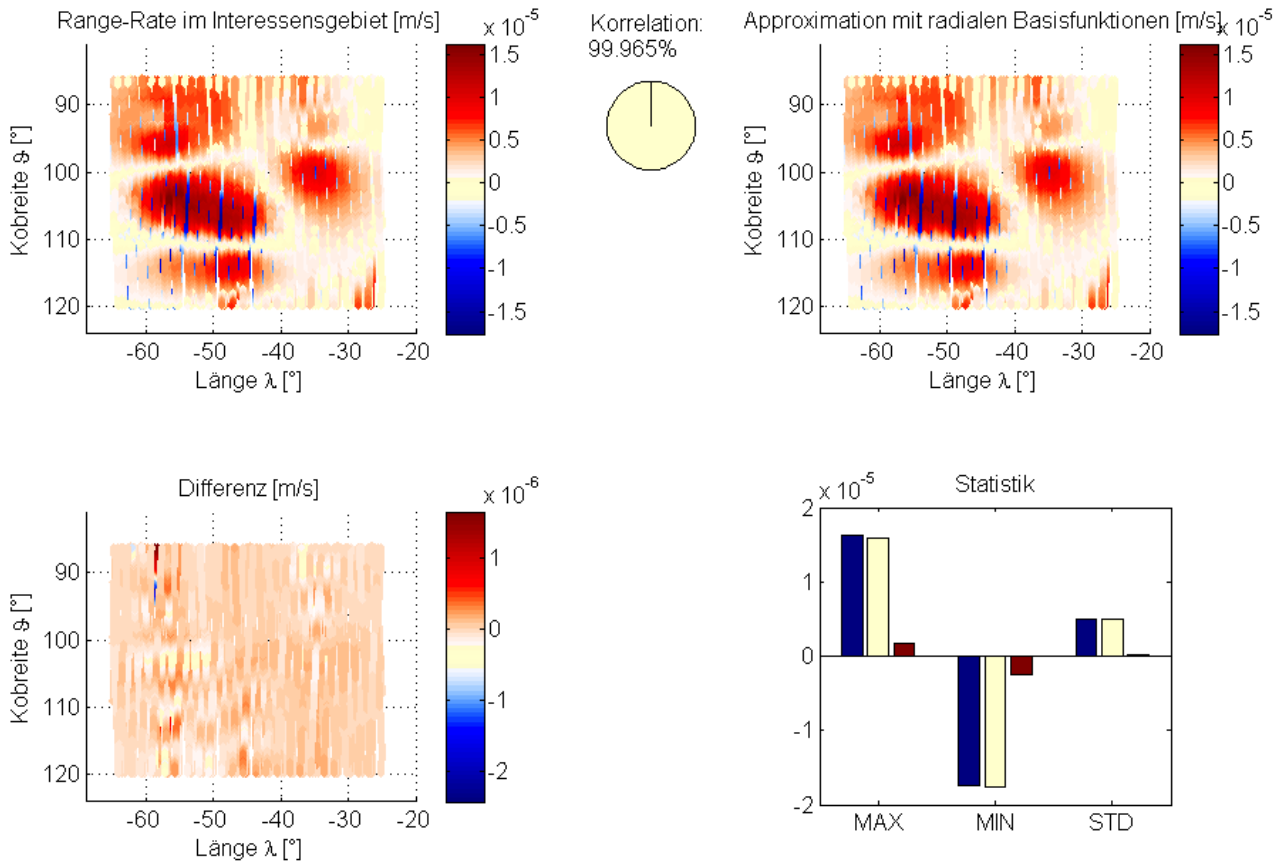


Abbildung 8.15.: Signal, Approximation und Differenz der Range-Rate in der Closed-Loop Simulation

### 8.2.2. Analyse eines globalen Störfeldes

Durch Satellitenmissionen ergeben sich – in Abhängigkeit von dem Orbit – (fast) globale Daten des Schwerefeldes. Um die SST-Beobachtungen zu simulieren, wird erneut ein GRACE-ähnliches Szenario mit den Startwerten vom August 2002 für einen Monat berechnet (vgl. Tabelle 8.4). Das wahre Schwerefeld wird durch das GGM02c des CSR bis Grad und Ordnung 120 repräsentiert, während das EGM96 bis Grad und Ordnung 120 als Referenzfeld dient. Nach der Bestimmung der residualen Signale werden die Daten in Testgebiete unterteilt und durch eine nichtlineare Optimierung der Basisparameter getrennt analysiert.

#### Potentialwerte im Orbit

Zur Vereinfachung wird die Selektion der Gebiete entlang der Breiten- und Längengrade durchgeführt. Für ausreichend große Datensätze wählt man eine Ausdehnung von  $\Delta\lambda = \Delta\vartheta = 30^\circ$  in beide Richtungen, so dass sich 72 Testfelder je Beobachtung ergeben. Die Abbildung 8.16 zeigt für einen Satelliten des Szenarios das residuale Potential aus dem Energieintegral im Orbit und die Unterteilung des globalen Feldes.

Die Reihenentwicklung der Basisfunktionen erfolgt zwischen den Grenzen  $n_0 = 2$  und  $\tilde{N} = 120$ , um den Unterschied der sphärisch-harmonischen Koeffizienten der beiden Felder auch für die niedrigen Grade zu berücksichtigen. Als Parameter der nichtlinearen Optimierung werden wieder die folgenden Einstellungen gewählt:

- Die Interpolation im Orbit erfolgt auf ein  $0.3^\circ$ -Gitter mit einem Binomialfilter der Dimension 5.
- Die Legendre-Koeffizienten sind für alle Basisfunktionen durch  $\sigma_b(n) = \sigma_b^n$  gegeben.
- Es werden 50 Iterationen mit maximal 20 Basisfunktionen und 2 Durchgänge in der Optimierung verwendet.

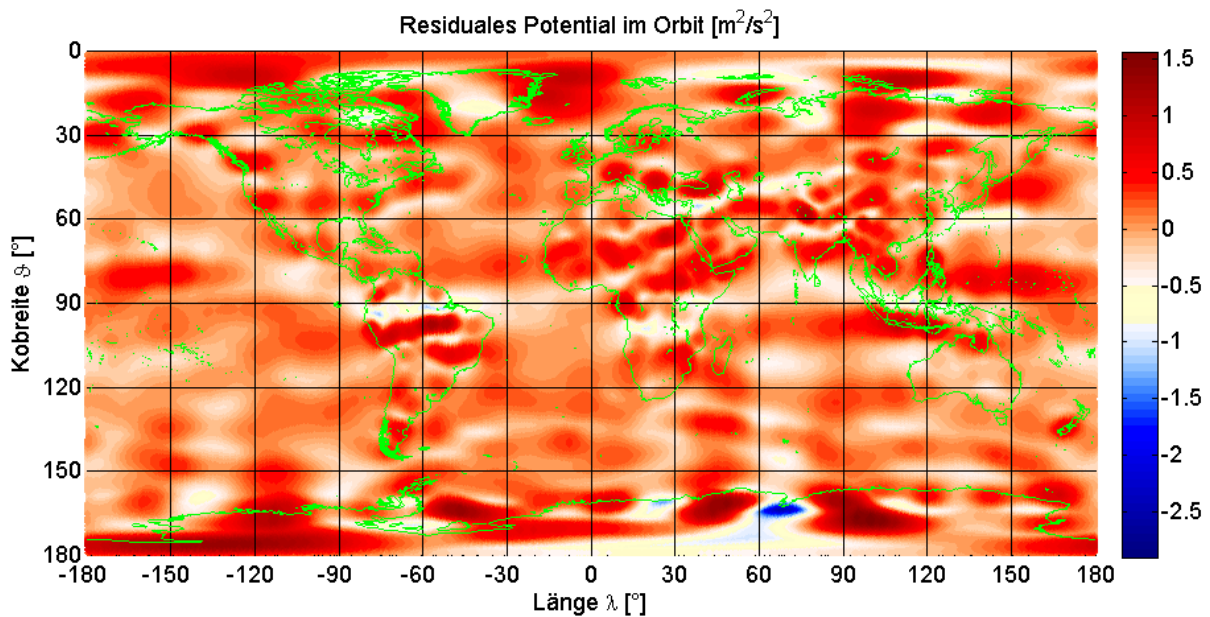


Abbildung 8.16.: Potentialwerte aus dem Energieintegral für einen simulierten GRACE-Satelliten mit den Grenzen der Testgebiete

- Die Formparameter werden mit  $\sigma_b = 0.9999$  initialisiert und auf das Intervall  $[0.9, 1]$  eingeschränkt.
- Die Zentren der Basisfunktionen können sich in der Optimierung maximal um  $4^\circ$  von den Startwerten entfernen.

Kombiniert man nach der Analyse alle Lösungen zu einem globalen Feld, so approximieren diese die Differenz zwischen dem Potential des EGM96 und dem GGM02c im Orbit.

Die Kombination aller Beobachtungen, die Approximation durch radiale Basisfunktionen und deren Differenz ist in der Abbildung 8.17 dargestellt. Das Signal weist eine Standardabweichung von  $0.325273 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , einen Maximalwert von  $1.56807 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  und ein Minimum von  $-2.90663 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  auf. Die Differenz reduziert die Standardabweichung auf  $0.071328 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  (Maximum:  $1.09748 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , Minimum:  $-0.77336 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ) mit einer Korrelation von 97.566 % zwischen dem Signal und der Approximation (Fall a) in der Tabelle 8.10).

Das Bild der Differenzen wird vor allem von den nicht modellierten Anteilen in der Nähe der Pole dominiert. Betrachtet man eine Lösung ohne die 12 nördlichen und südlichen Testfelder, so reduzieren sich die statistischen Maße (Maxima, Minima, Standardabweichungen) der Differenz deutlich, wie der Fall b) in der Tabelle belegt, während die Korrelation auf 99.048 % ansteigt.

Die schlechtere Lösung in den „polaren“ Gebieten lässt sich auf folgende Ursachen zurückführen:

1. In diesen Regionen ist bereits das (residuale) Signal größer, da das Referenzfeld (EGM96) dort auf einer unzureichenden Datenlage beruht.
2. Durch den geforderten Mindestabstand der Basiszentren (in der Startwertsuche) können in jedem Durchgang in der Nähe der Pole weniger Basisfunktionen platziert werden.
3. Im Gegensatz zu den anderen Gebieten sind die Bewegungen der Zentren hier einseitig beschränkt, da der Algorithmus negative Breiten verhindert.

Das Abstandskriterium und die einseitige Beschränkung der Bewegung der Zentren ergeben sich aus dem Algorithmus und können durch entsprechende Modifikationen behoben werden. Die einfachste Lösung ist eine Anpassung der Gebiete, z.B. durch eine größere Ausdehnung in Richtung der Länge und eine Elimination einer kleinen Polarregion. Wählt man für diese Felder eine Ausdehnung von  $\Delta\lambda = 40^\circ$  in Ost-West-Richtung und  $\Delta\vartheta = 25^\circ$  in Nord-Süd-Richtung mit einem minimalen Abstand zu den Polen von  $5^\circ$ , so verbleiben 66 Testfelder für die Analyse.

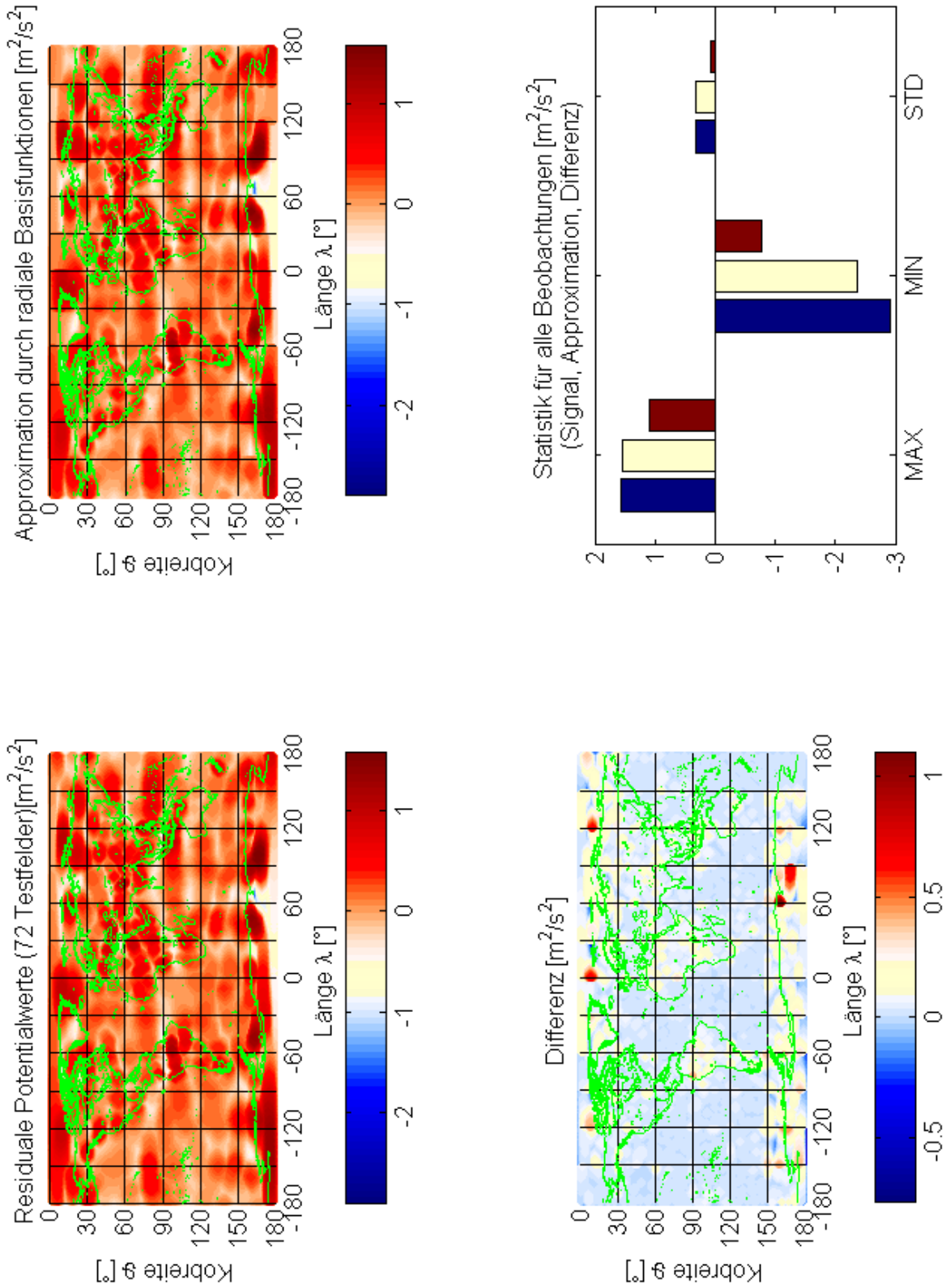


Abbildung 8.17.: Signal, Approximation und deren Differenz nach einer Kombination der 72 Testfelder des Energieintegrals zu einer globalen Lösung

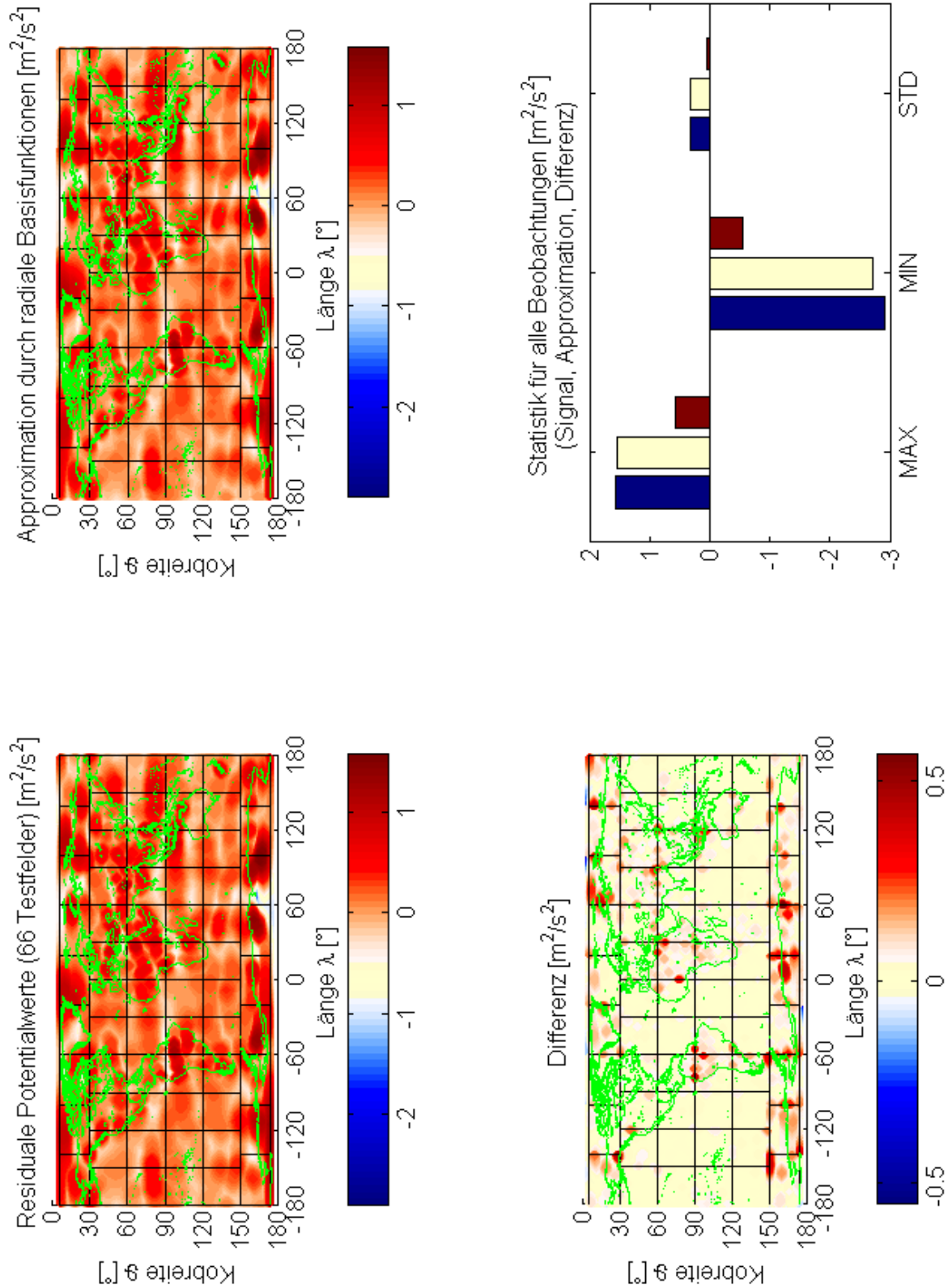


Abbildung 8.18.: Signal, Approximation und deren Differenz nach einer Kombination der 66 Testfelder zu einer Lösung unter Vernachlässigung einer sphärischen Kappe mit einem Radius von  $5^\circ$  um die beiden Pole



	Maximum	Minimum	Std.-abweichung	Korrelation
Energieintegral:				
a) alle Daten				97.566 %
Signal [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.56807	-2.90663	0.325273	
Approximation [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.52861	-2.36126	0.317355	
Differenz [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.09748	-0.77336	0.071328	
b) ohne „Polgebiete“				99.048 %
Signal [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.19302	-1.37826	0.233089	
Approximation [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.24290	-1.32510	0.230871	
Differenz [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.42012	-0.44236	0.032082	
c) angepasste Polarregionen				98.878 %
Signal [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.56807	-2.90663	0.313486	
Approximation [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	1.54404	-2.72188	0.309967	
Differenz [ $\frac{m^2}{s^2}$ ]	0.56401	-0.55554	0.046838	

Tabelle 8.10.: Statistische Werte des Energieintegrals nach einer Kombination der Testfelder zu einer globalen Lösung

Die neue Aufteilung, die Approximation und die Differenz sind in Abbildung 8.18 gezeigt. Bei einer Vernachlässigung aller Daten innerhalb einer sphärischen Kappe von  $5^\circ$  um die beiden Pole bleibt das Intervall  $[-2.90663 \frac{m^2}{s^2}, 1.56807 \frac{m^2}{s^2}]$  des Signals erhalten und die Standardabweichung verringert sich von  $0.325273 \frac{m^2}{s^2}$  auf den Wert  $0.313486 \frac{m^2}{s^2}$ . Approximiert man nur diese Gebiete und kombiniert sie zu einer „globalen“ Lösung, so wird das Restsignal mit einer Korrelation von 98.878 % erfasst, wobei die Differenz noch eine Standardabweichung von  $0.046838 \frac{m^2}{s^2}$  aufweist (Fall c) in der Tabelle 8.10). Abgesehen von den polaren Regionen sind die Restfehler vor allem an den Rändern der Gebiete zu erkennen. Dies ist eine Folge der Einschränkungen der Startwertsuche und der separaten Analyse der Felder. Da keine Bedingung für die Stetigkeit der (optimierten) Potentialwerte im Orbit bekannt ist, bildet eine globale Analyse mit allen Beobachtungen die einzige Alternative, was aber aus rechentechnischen Gründen nicht durchgeführt werden kann.

Die Grafiken 8.19, 8.20 und 8.21 und die Tabellen 8.11 und 8.12 zeigen die statistischen Maße (Standardabweichung, Korrelation Maxima, Minima) für jedes der 66 Testfelder, deren Approximation und die Differenz. In den Abbildungen entspricht jede Zeile einer Zone, welche durch zwei konstante Breitenkreise begrenzt wird. Die 1. Zeile enthält die Regionen mit  $\vartheta \in [5^\circ, 30^\circ]$ , gefolgt von 4 Zonen mit einer Ausdehnung von jeweils  $30^\circ$  in Richtung der Kobreite und die letzte Zeile erfasst die Gebiete mit  $\vartheta \in [150^\circ, 175^\circ]$ . In Spaltenrichtung werden die einzelnen Felder mit der Ausdehnung von  $30^\circ$  bzw.  $40^\circ$  dargestellt, wobei in den polaren Gebieten 9 und ansonsten 12 Felder auftreten.

Selbst in der Umgebung der Pole erreicht man noch eine Korrelation von mindestens 94 % zwischen dem Signal und der Approximation. Abgesehen von den Fällen, in denen die Extremwerte oder die Standardabweichungen bereits im Signal sehr kleine Werte annehmen, reduzieren sich diese in der Differenz deutlich, was die gute Approximation bestätigt.

Für einen besseren Vergleich kann man eine „relative Standardabweichung“ – also den Quotienten aus den Standardabweichungen der Differenz und des Signals – einführen. Diese Größe liefert einen Anhaltspunkt dafür, wie viele Variationen des Signals durch die Approximation erfasst werden. Die relativen Standardabweichungen für die 66 Testfelder sind in dem Histogramm 8.22 dargestellt. Daraus erkennt man, dass sich die Variationen in den Differenzen auf maximal 35 %, in den meisten Fällen aber auf unter 25 % der ursprünglichen Werte reduzieren. Umgekehrt wird somit die Variation des ursprünglichen Signals mit mindestens 65 % durch die radialen Basisfunktionen erfasst, wobei die Approximation insbesondere noch Fehler an den Rändern der Testgebiete beinhaltet.

Insgesamt werden in der Analyse des Energieintegrals 1895 radiale Basisfunktionen verwendet, deren Verteilung auf die einzelnen Testgebiete in der Abbildung 8.23 veranschaulicht wird. Die Anzahl variiert zwischen 8 und 40 Basisfunktionen, wobei die Obergrenze von 40 Zentren durch die Einstellungen vorgegeben ist.

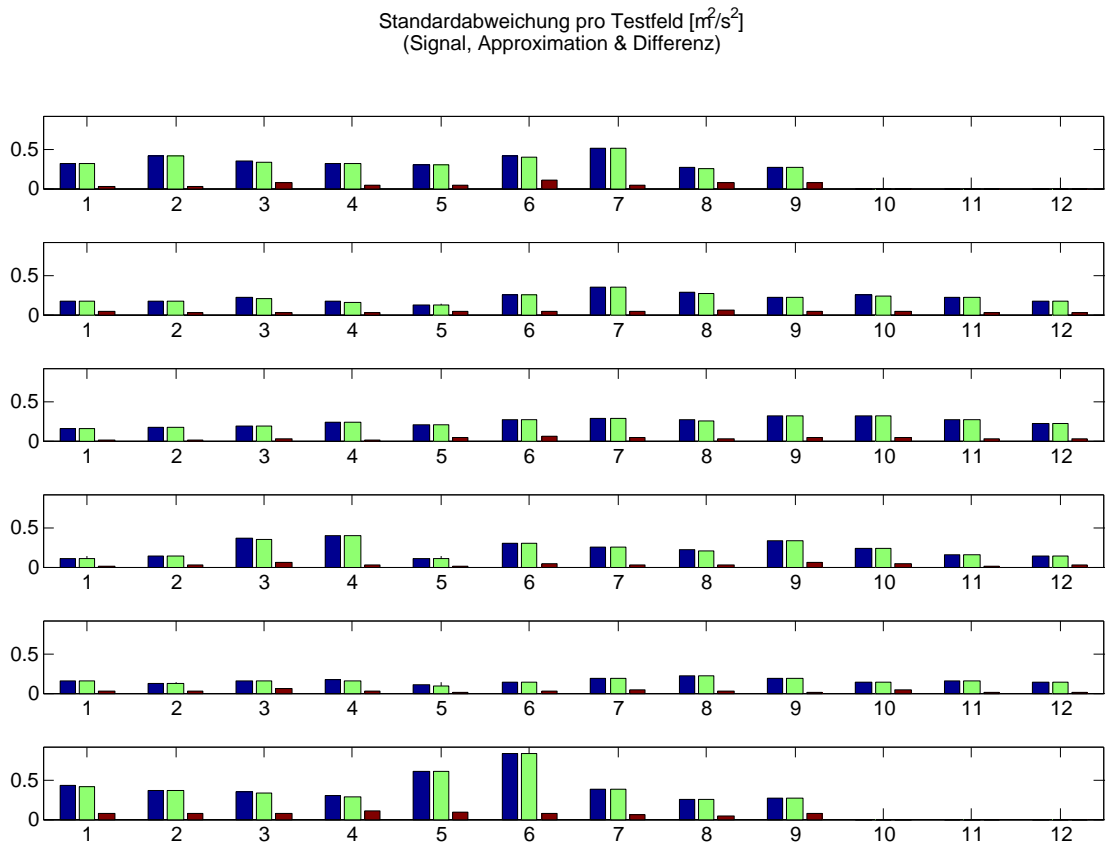


Abbildung 8.19.: Standardabweichungen des Signals, der Approximation durch radiale Basisfunktionen und deren Differenz für die 66 Testfelder des Energieintegrals

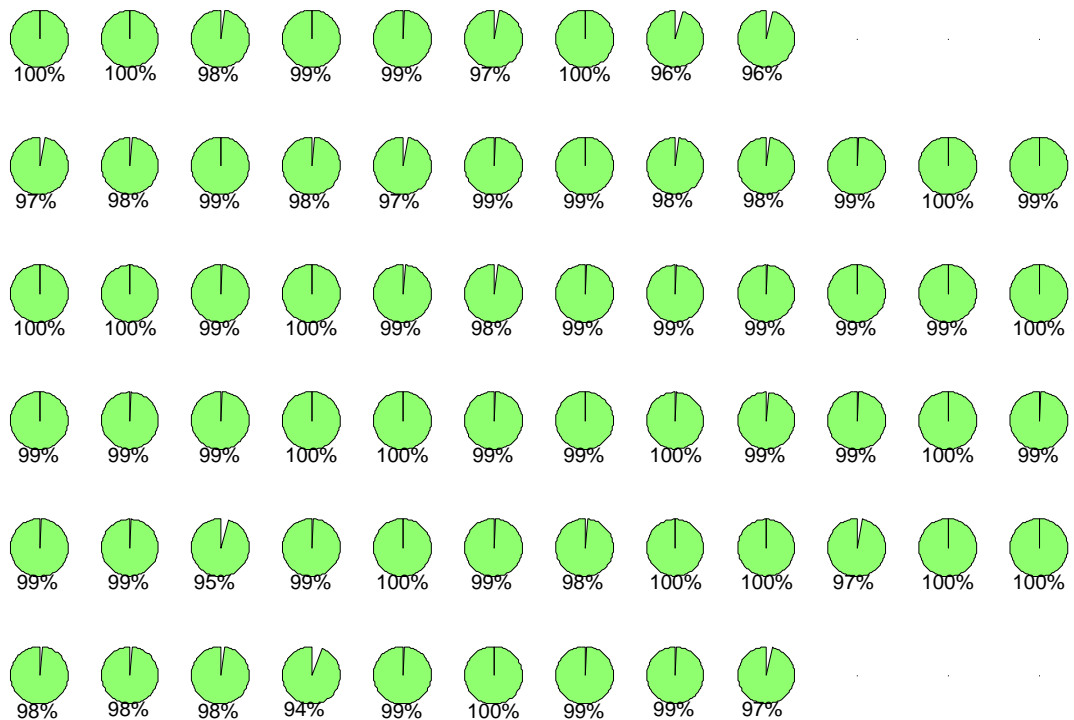


Abbildung 8.20.: Korrelationen der 66 Testfelder des Energieintegrals

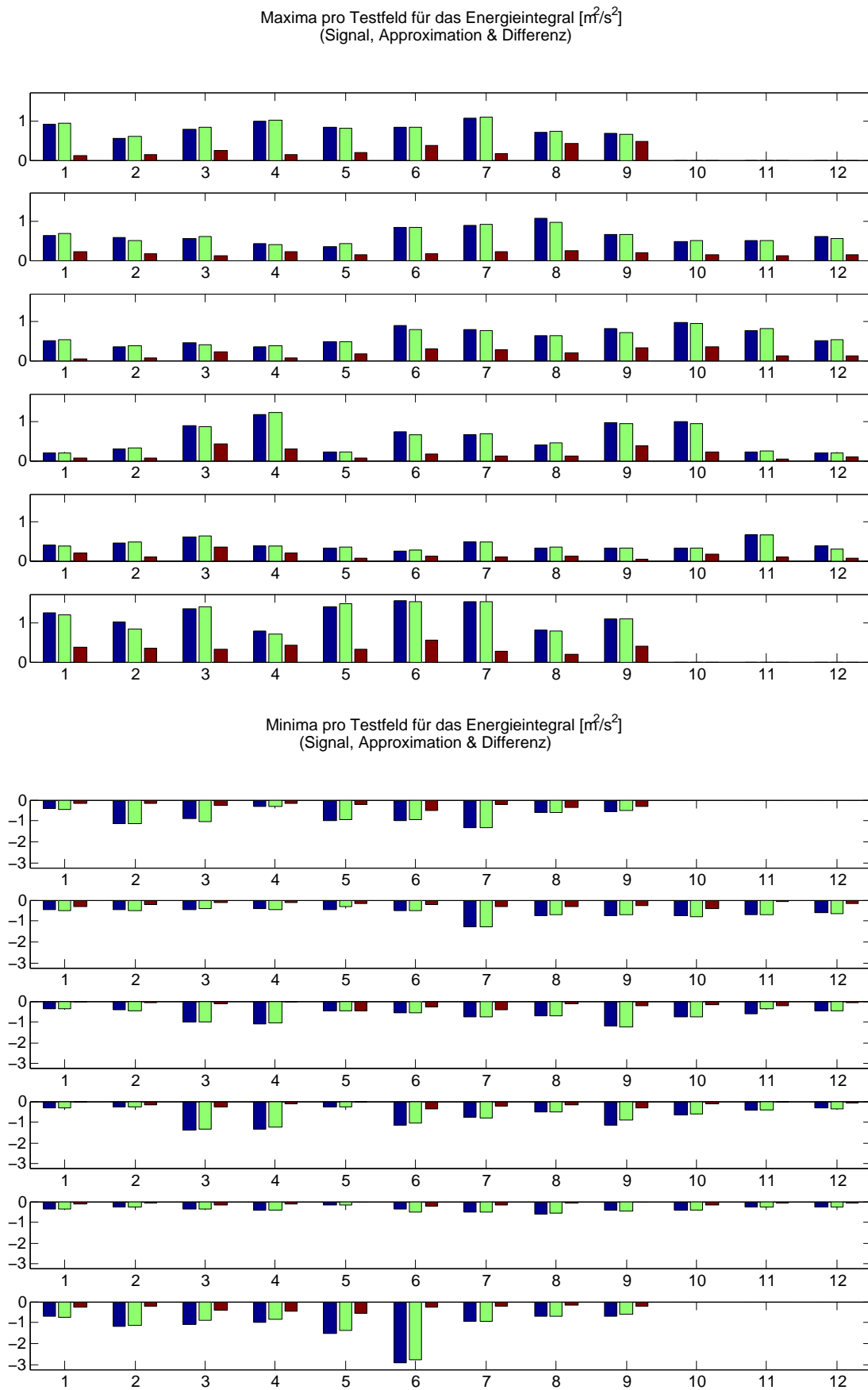


Abbildung 8.21.: Maxima und Minima aus Signal, Approximation und deren Differenz für die 66 Testfelder des Energieintegrals

Zentrum des Gebiets ( $\lambda, \vartheta$ )	Signal			Differenz		
	Max. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Min. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Std. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Max. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Min. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Std. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
(-165, 45)	0.61901	-0.44876	0.180436	0.21894	-0.29857	0.045211
(-165, 75)	0.50994	-0.36741	0.160479	0.04006	-0.03280	0.007933
(-165, 105)	0.18576	-0.33476	0.103463	0.07611	-0.04640	0.012238
(-165, 135)	0.39666	-0.35256	0.152067	0.19876	-0.10331	0.024532
(-135, 45)	0.57401	-0.45298	0.180251	0.17180	-0.20506	0.032676
(-135, 75)	0.36166	-0.43581	0.177461	0.07021	-0.08648	0.014581
(-135, 105)	0.30562	-0.26189	0.143842	0.06827	-0.18749	0.017265
(-135, 135)	0.44456	-0.25013	0.130778	0.07997	-0.09113	0.018328
(-105, 45)	0.55334	-0.43657	0.216830	0.10684	-0.11988	0.024925
(-105, 75)	0.45134	-0.97936	0.194520	0.22047	-0.11755	0.027255
(-105, 105)	0.90570	-1.37827	0.366127	0.42012	-0.28492	0.050173
(-105, 135)	0.61458	-0.36089	0.165128	0.35182	-0.19127	0.050834
(-75, 45)	0.42250	-0.42943	0.166354	0.20715	-0.11753	0.028803
(-75, 75)	0.34257	-1.07104	0.240720	0.05256	-0.04623	0.011198
(-75, 105)	1.19302	-1.31309	0.406907	0.30543	-0.11917	0.032014
(-75, 135)	0.38019	-0.42337	0.166731	0.18689	-0.10001	0.021672
(-45, 45)	0.34430	-0.47664	0.132219	0.13487	-0.18424	0.033777
(-45, 75)	0.48107	-0.43871	0.208391	0.18082	-0.44237	0.035356
(-45, 105)	0.21566	-0.28762	0.106018	0.05452	-0.04394	0.008628
(-45, 135)	0.33745	-0.14667	0.099922	0.07728	-0.03679	0.009770
(-15, 45)	0.83993	-0.51818	0.256188	0.15670	-0.21066	0.033843
(-15, 75)	0.91089	-0.55099	0.282314	0.29864	-0.28649	0.057988
(-15, 105)	0.75522	-1.11593	0.302861	0.18188	-0.36550	0.044704
(-15, 135)	0.25416	-0.38125	0.140009	0.12087	-0.20025	0.022461
(15, 45)	0.89720	-1.27017	0.357727	0.23068	-0.29984	0.040557
(15, 75)	0.79728	-0.74515	0.290590	0.27383	-0.40702	0.044734
(15, 105)	0.66877	-0.73140	0.265455	0.12622	-0.21264	0.031283
(15, 135)	0.48241	-0.50469	0.195894	0.10341	-0.19367	0.034386
(45, 45)	1.06945	-0.75156	0.283255	0.25667	-0.32782	0.054549
(45, 75)	0.63191	-0.68769	0.267423	0.19273	-0.13686	0.030291
(45, 105)	0.40664	-0.48970	0.216514	0.12962	-0.15418	0.019101
(45, 135)	0.32935	-0.58280	0.231112	0.11013	-0.08859	0.019282
(75, 45)	0.66532	-0.71772	0.226767	0.19611	-0.27645	0.049029
(75, 75)	0.81528	-1.18923	0.327266	0.32603	-0.22262	0.043566
(75, 105)	0.97148	-1.14028	0.342752	0.38422	-0.30359	0.057840
(75, 135)	0.31914	-0.43312	0.185838	0.03826	-0.04350	0.011389
(105, 45)	0.48121	-0.76004	0.250489	0.13193	-0.38310	0.040550
(105, 75)	0.96981	-0.74323	0.331189	0.35156	-0.18861	0.035862
(105, 105)	1.01137	-0.64584	0.242078	0.22247	-0.12673	0.034609
(105, 135)	0.33440	-0.43138	0.140132	0.16013	-0.18572	0.035926
(135, 45)	0.50302	-0.69610	0.220329	0.12678	-0.06818	0.019386
(135, 75)	0.77225	-0.60395	0.270080	0.12859	-0.22115	0.029595
(135, 105)	0.22328	-0.38790	0.156735	0.04871	-0.03172	0.008517
(135, 135)	0.66674	-0.27049	0.155247	0.08247	-0.07967	0.012194
(165, 45)	0.60741	-0.58466	0.178047	0.12905	-0.14543	0.017871
(165, 75)	0.51748	-0.45231	0.227334	0.11078	-0.09021	0.017245
(165, 105)	0.20209	-0.33585	0.142555	0.07947	-0.08233	0.019208
(165, 135)	0.36713	-0.28140	0.133713	0.06546	-0.08827	0.010908

Tabelle 8.11.: Statistische Maße des Energieintegrals für „polferne“ Gebiete

Zentrum des Gebiets ( $\lambda, \vartheta$ )	Signal			Differenz		
	Max. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Min. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Std. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Max. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Min. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	Std. $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
(-160, 17.5)	0.91628	-0.42744	0.330008	0.11479	-0.17467	0.029689
(-160, 162.5)	1.24002	-0.67473	0.434165	0.38387	-0.25661	0.081644
(-120, 17.5)	0.54535	-1.09806	0.426464	0.13517	-0.14913	0.027474
(-120, 162.5)	1.00457	-1.17633	0.380131	0.33906	-0.22915	0.067815
(-80, 17.5)	0.79211	-0.89623	0.352059	0.25101	-0.24653	0.075624
(-80, 162.5)	1.35548	-1.05579	0.355958	0.30921	-0.42560	0.074730
(-40, 17.5)	0.98136	-0.32216	0.326631	0.15427	-0.18120	0.038169
(-40, 162.5)	0.78965	-0.96245	0.307675	0.42078	-0.45292	0.109080
(0, 17.5)	0.83551	-0.97495	0.315673	0.19974	-0.20698	0.045164
(0, 162.5)	1.39600	-1.52440	0.625724	0.32820	-0.55554	0.087900
(40, 17.5)	0.84956	-0.97677	0.427558	0.38186	-0.47743	0.111705
(40, 162.5)	1.56807	-2.90663	0.861226	0.56401	-0.27279	0.078907
(80, 17.5)	1.07141	-1.29074	0.522687	0.17838	-0.20736	0.044234
(80, 162.5)	1.53157	-0.95195	0.396371	0.26358	-0.22306	0.059896
(120, 17.5)	0.69591	-0.57846	0.271004	0.41688	-0.34256	0.076435
(120, 162.5)	0.81309	-0.68630	0.259584	0.19539	-0.18238	0.036026
(160, 17.5)	0.68545	-0.56478	0.277549	0.46484	-0.28924	0.074798
(160, 162.5)	1.10514	-0.67171	0.276447	0.38734	-0.20167	0.071655

Tabelle 8.12.: Statistische Maße des Energieintegrals für „polare“ Regionen

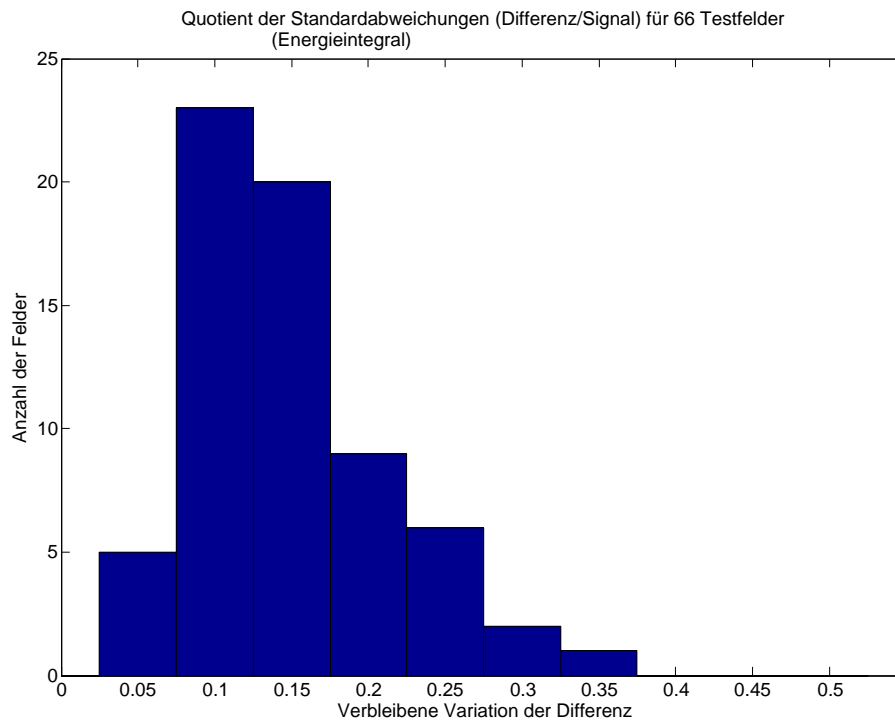


Abbildung 8.22.: Relative Standardabweichungen der 66 Testfelder des Energieintegrals

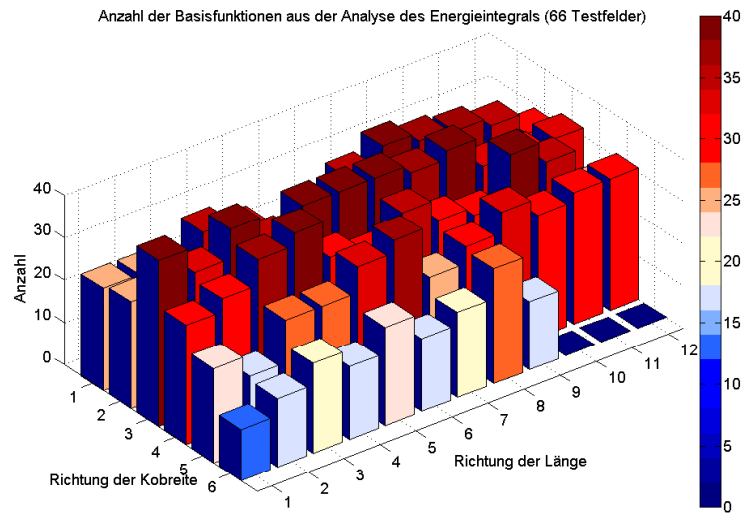


Abbildung 8.23.: Anzahl der Basisfunktionen je Testgebiet für das Energieintegral

### Line-of-Sight Gradiometrie

Die residualen LOS-Gradienten für alle Daten und die ursprüngliche Aufteilung in 72 Testfelder ist in der Abbildung 8.24 visualisiert. Neben dem größeren Signal in den polaren Gebieten fallen noch die Strukturen im Himalaja, dem Kongo-Becken und der Amazonasregion auf, die sich aus der Verbesserung der Daten seit der Veröffentlichung des EGM96 ergeben.

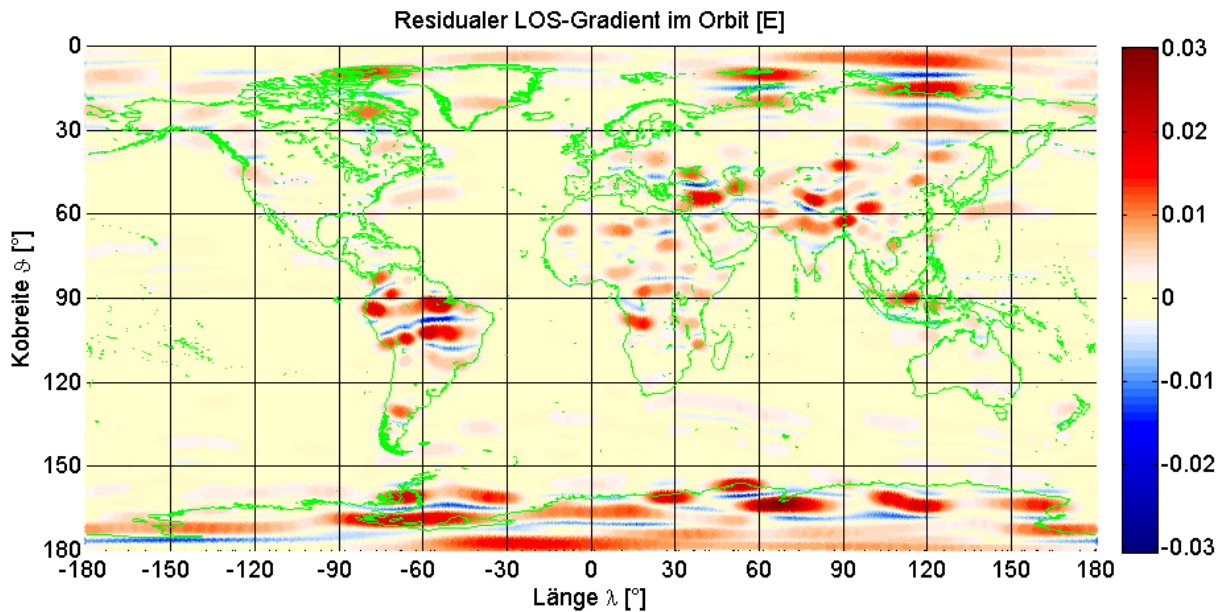


Abbildung 8.24.: LOS-Gradienten aus der Simulation der GRACE-Mission

Die Kombination aller Daten aus 72 Testfeldern ist in der Abbildung 8.25 und der Tabelle 8.13 dargestellt. Auch hier ergeben sich wieder die Probleme der Optimierung in den polaren Regionen (Fall a)).

Nach der Anpassung der Gebiete bleibt das Intervall des Signals (Maximum: 30.2462 mE und Minimum: -28.7200 mE) erhalten, während sich die Standardabweichung von 3.80384 mE auf 3.61389 mE reduziert. Die Kombination der 66 Testfelder erreicht eine Korrelation von 97.981 %. In der Differenz aus Signal und Approximation verringern sich die Extremwerte fast um eine Größenordnung, während die Standardabweichung

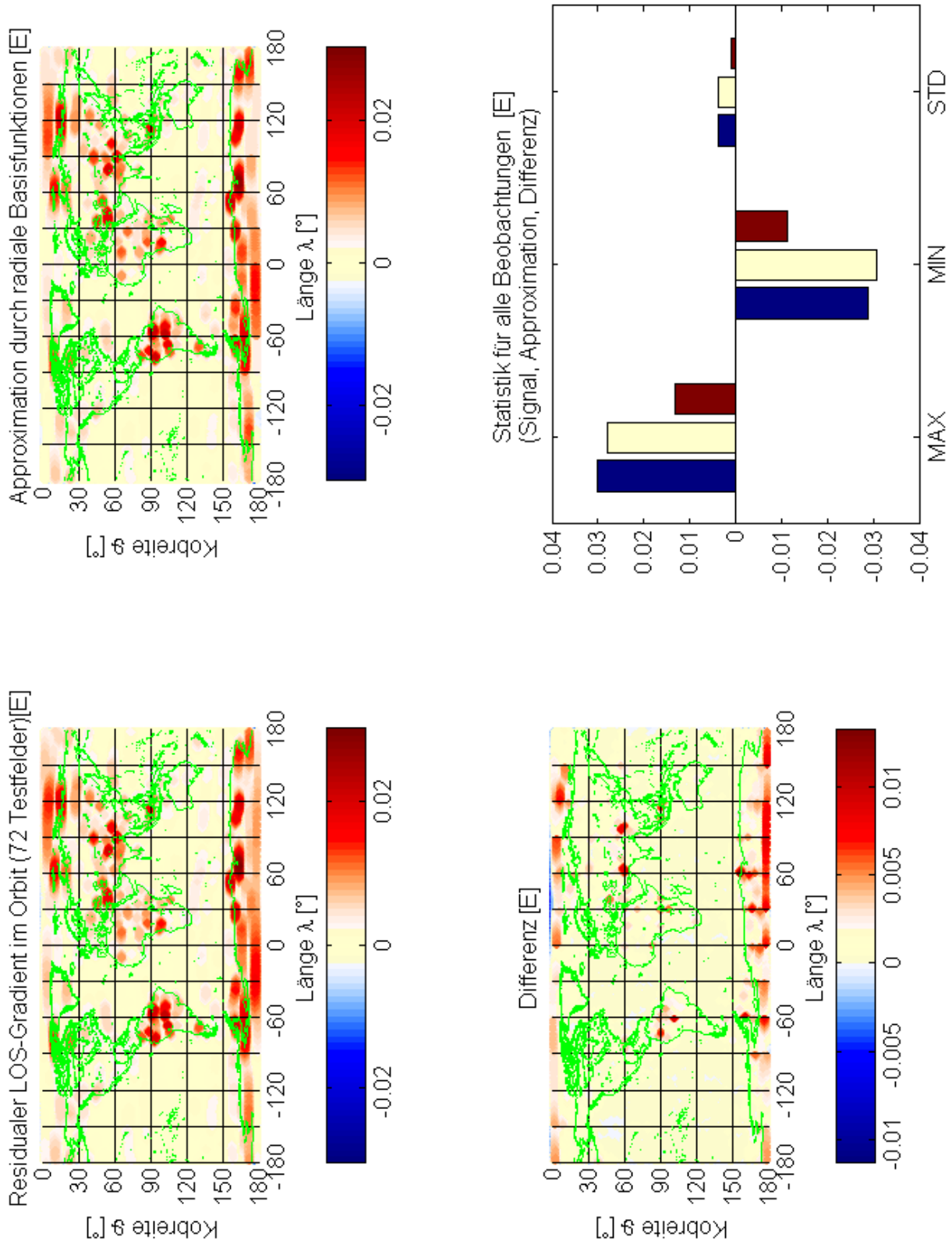


Abbildung 8.25.: Signal, Approximation und deren Differenz nach einer Kombination der 72 Testfelder der LOS-Gradiometrie zu einer globalen Lösung

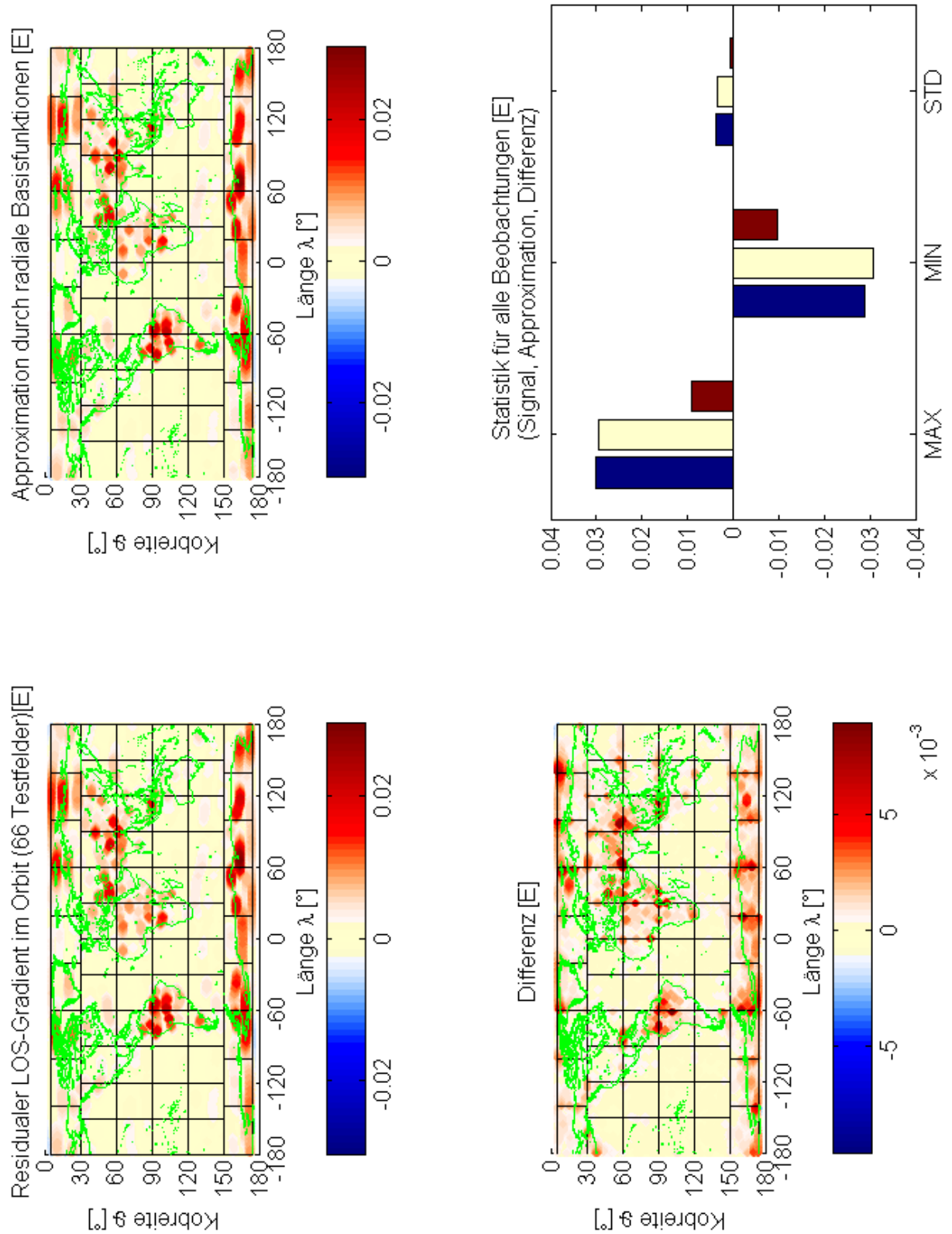


Abbildung 8.26.: Residualer LOS-Gradient, Approximation und deren Differenz nach einer Kombination der 66 Testfelder zu einer Lösung unter Vernachlässigung einer sphärischen Kappe mit einem Radius von  $5^\circ$  um die beiden Pole



	Maximum	Minimum	Std.-abweichung	Korrelation
LOS-Gradiometrie:				
a) alle Daten				96.891 %
Signal [ mE]	30.2462	-28.7200	3.80384	
Approximation [ mE]	27.8989	-30.6029	3.68546	
Differenz [ mE]	13.2649	-11.3484	0.94110	
b) ohne „Polgebiete“				96.878 %
Signal [ mE]	30.2462	-28.7200	3.83593	
Approximation [ mE]	27.8989	-30.6030	3.71599	
Differenz [ mE]	13.2650	-11.3484	0.95094	
c) angepasste Polarregionen				97.981 %
Signal [ mE]	30.2462	-28.7200	3.61389	
Approximation [ mE]	29.5010	-30.6029	3.54088	
Differenz [ mE]	8.9544	-9.7109	0.72248	

Tabelle 8.13.: Statistische Werte der LOS-Gradiometrie nach einer Kombination der Testfelder zu einer globalen Lösung

den Wert 0.72248 mE annimmt. Wie im Energieintegral bleiben auch hier größere Differenzen vor allem in den polaren Gebieten und den Rändern der Regionen erhalten.

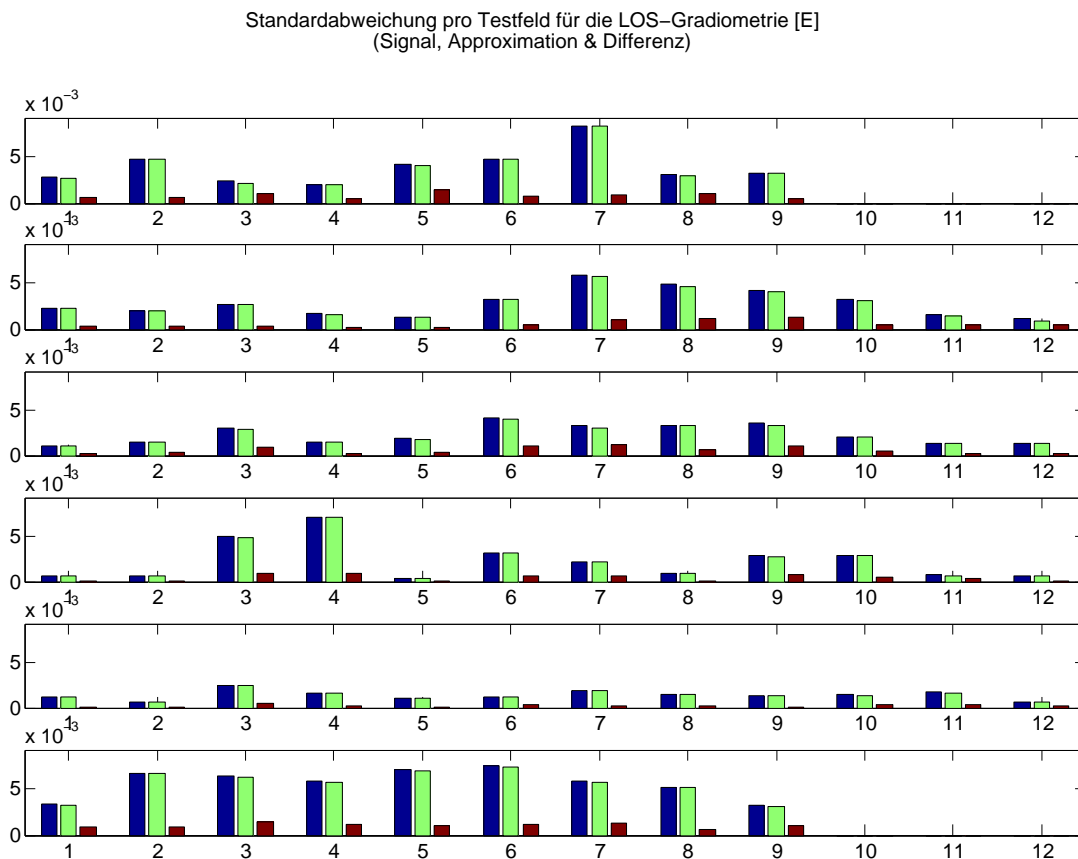


Abbildung 8.27.: Standardabweichungen des Signals, der Approximation durch radiale Basisfunktionen und deren Differenz für die 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie

Die Abbildungen 8.27 und 8.28 zeigen die Standardabweichungen der einzelnen Felder und die relativen Werte in Form eines Histogramms. Abgesehen von drei Feldern erreicht man auch hier eine Reduzierung der Variationen auf maximal 35 %. Die Korrelationen der Signale und deren Approximation für die einzelnen Fel-

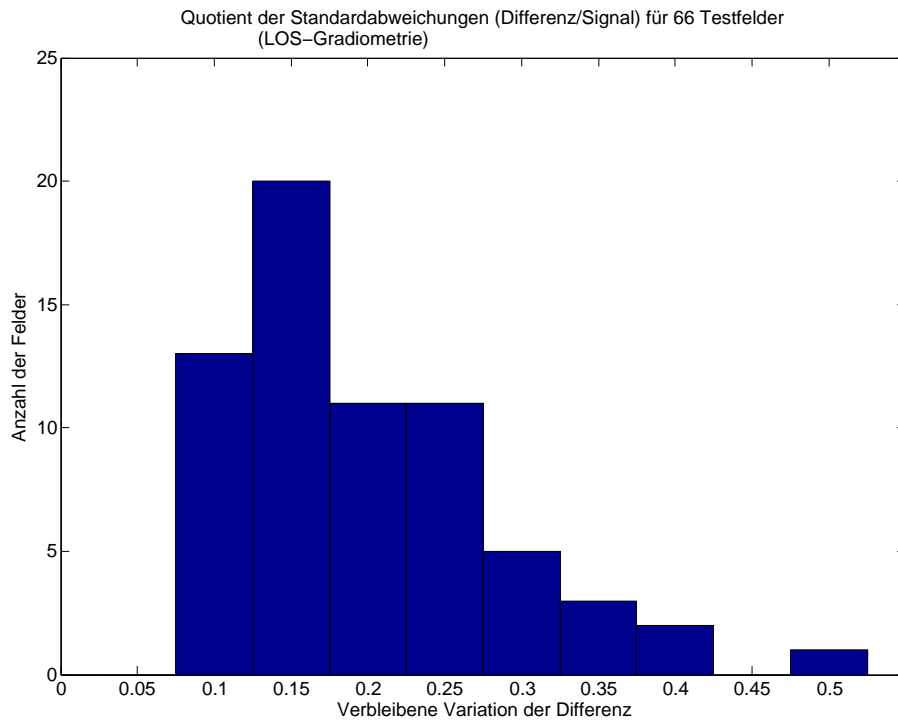


Abbildung 8.28.: Relative Standardabweichungen der 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie

der kann man der Grafik 8.29 entnehmen. Die Werte variieren zwischen 87 % und 100 %, so dass noch immer ein sehr großer Anteil des Signals erfasst werden kann.

Sowohl in den Standardabweichungen und den Korrelationen als auch aus der Darstellung der Extremwerte in der Abbildung 8.30 erkennt man einzelne Maße, die auf eine schlechtere Approximation der jeweiligen Felder hindeuten (vgl. Tabelle 8.14 und 8.15). In einigen polaren Gebieten bleibt die Größenordnung der Extremwerte in der Differenz erhalten, während in anderen Gebieten „nur“ eine Korrelation von 87 % erreicht wird.

Die höhere Auflösung der LOS-Gradiometrie lässt auch im Orbit noch mehr Informationen erkennen, zu deren Erfassung eine größere Anzahl an Basisfunktionen notwendig ist. Mit den gewählten Einstellungen werden insgesamt 2402 Basisfunktionen gefunden, deren Verteilung auf die Testgebiete in der Abbildung 8.31 skizziert wird. Die Anzahl variiert zwischen 23 und 40 Basisfunktionen je Feld, wobei die zweite Zahl der maximal zulässige Wert ist. Für eine bessere Approximation kann man die Form oder die Anzahl der Basisfunktionen noch anpassen. Um die Konvergenz der Methode zu ermöglichen, sollte jedoch nur eine begrenzte Menge an nichtlinearen Parametern optimiert werden.

## Zusammenfassung

Im ersten Teil wird gezeigt, dass für Kreisbahnen die Legendre- und die Wigner-Darstellung der in-situ Beobachtungen im Rahmen der Rechengenauigkeit übereinstimmen. Die Analyse der partiellen Ableitungen bestätigt die Möglichkeit einer nichtlinearen Optimierung für geeignete Startwerte. Die geschlossenen Formeln für die Ableitungen der Range-Rate werden durch die Variationsgleichungen kontrolliert, wobei die Größenordnungen der Differenzen durch die verschiedenen Näherungen erklärt werden können. Für die iterative Verbesserung der Parameter wählt man jeweils die effektivere Lösung, also die Legendre-Darstellung bzw. die Variation der Konstanten.

In einer Closed-Loop-Simulation werden mit 5 radialen Basisfunktionen die behandelten SST-Beobachtungen erzeugt. Der Algorithmus optimiert die Signale durch deutlich mehr Basisfunktionen, wobei die Qualität der Approximation durch die statistischen Maße (Standardabweichung, Korrelation, ...) und die Differenzen bestätigt wird. Vergleicht man das Potential der Simulation mit der Rekonstruktion aus der LOS-Gradiometrie, so verbleibt ein Restsignal im Potential. Dies belegt eine Mehrdeutigkeit der Gradiometrie, welche für die

Zentrum des Gebiets ( $\lambda, \vartheta$ )	Signal			Differenz		
	Max. [mE]	Min. [mE]	Std. [mE]	Max. [mE]	Min. [mE]	Std. [mE]
(-165, 45)	6.902	-10.996	2.3289	2.176	-1.382	0.3321
(-165, 75)	2.128	-3.402	1.1247	1.296	-0.572	0.1439
(-165, 105)	2.018	-1.378	0.5830	0.321	-0.341	0.0751
(-165, 135)	2.657	-4.015	1.2568	0.336	-0.611	0.1261
(-135, 45)	6.046	-9.729	2.0336	2.291	-1.746	0.3154
(-135, 75)	3.683	-5.398	1.4537	1.397	-1.227	0.2848
(-135, 105)	1.410	-1.477	0.6648	0.265	-0.318	0.0760
(-135, 135)	1.399	-1.826	0.6028	0.630	-0.361	0.0850
(-105, 45)	6.677	-7.493	2.7571	2.417	-1.362	0.3850
(-105, 75)	14.567	-16.242	3.0831	4.432	-4.550	0.9480
(-105, 105)	19.296	-19.910	5.0026	8.954	-4.527	0.8774
(-105, 135)	11.694	-11.192	2.4912	3.404	-2.369	0.4735
(-75, 45)	5.365	-5.124	1.6729	1.056	-1.015	0.1955
(-75, 75)	7.953	-12.402	1.4580	2.341	-1.895	0.2436
(-75, 105)	22.094	-28.720	7.1429	4.292	-6.775	0.8539
(-75, 135)	4.932	-3.365	1.5719	1.073	-1.416	0.2180
(-45, 45)	4.765	-3.929	1.3596	1.617	-0.756	0.1720
(-45, 75)	8.875	-8.156	1.8333	3.080	-1.419	0.3037
(-45, 105)	1.017	-1.136	0.3555	0.732	-0.287	0.0903
(-45, 135)	3.240	-2.588	1.0549	0.477	-0.499	0.1236
(-15, 45)	7.981	-12.616	3.3275	2.426	-3.188	0.4988
(-15, 75)	12.445	-16.194	4.2003	4.592	-6.153	1.0910
(-15, 105)	15.244	-9.255	3.1682	4.856	-2.088	0.5762
(-15, 135)	4.179	-3.876	1.2603	1.602	-0.768	0.2895
(15, 45)	17.704	-26.790	5.8527	5.315	-5.517	0.9958
(15, 75)	7.992	-13.686	3.3056	4.402	-6.147	1.2219
(15, 105)	10.394	-10.525	2.2425	5.669	-3.145	0.5960
(15, 135)	4.143	-5.156	1.8744	0.863	-1.252	0.1938
(45, 45)	20.266	-23.439	4.8662	8.015	-3.988	1.2293
(45, 75)	16.249	-9.160	3.3190	8.481	-4.073	0.6770
(45, 105)	1.769	-2.363	0.8697	0.347	-0.502	0.1057
(45, 135)	4.173	-4.678	1.5134	1.040	-1.587	0.1783
(75, 45)	16.321	-11.453	4.2709	8.275	-9.711	1.3020
(75, 75)	17.068	-14.644	3.5305	6.664	-6.090	1.0127
(75, 105)	15.343	-12.843	2.9123	6.299	-5.266	0.8398
(75, 135)	3.696	-4.117	1.4037	0.711	-0.600	0.1245
(105, 45)	9.801	-8.747	3.2056	3.107	-1.722	0.4592
(105, 75)	7.008	-9.214	2.0834	2.619	-2.228	0.5223
(105, 105)	10.215	-15.785	2.8981	2.283	-2.754	0.4922
(105, 135)	4.037	-4.136	1.4302	2.408	-1.705	0.3085
(135, 45)	6.300	-4.169	1.5820	3.499	-1.673	0.4280
(135, 75)	3.008	-3.740	1.3240	0.622	-0.878	0.2004
(135, 105)	2.500	-2.041	0.7147	2.496	-0.686	0.2826
(135, 135)	5.562	-9.753	1.7119	1.881	-0.943	0.3585
(165, 45)	4.660	-4.579	1.1232	3.202	-3.647	0.5515
(165, 75)	3.349	-3.365	1.3341	0.683	-0.601	0.1625
(165, 105)	1.959	-2.669	0.6235	1.180	-0.501	0.1131
(165, 135)	2.347	-2.437	0.6728	0.544	-1.423	0.1599

Tabelle 8.14.: Statistische Maße der LOS-Gradiometrie für „polferne“ Gebiete

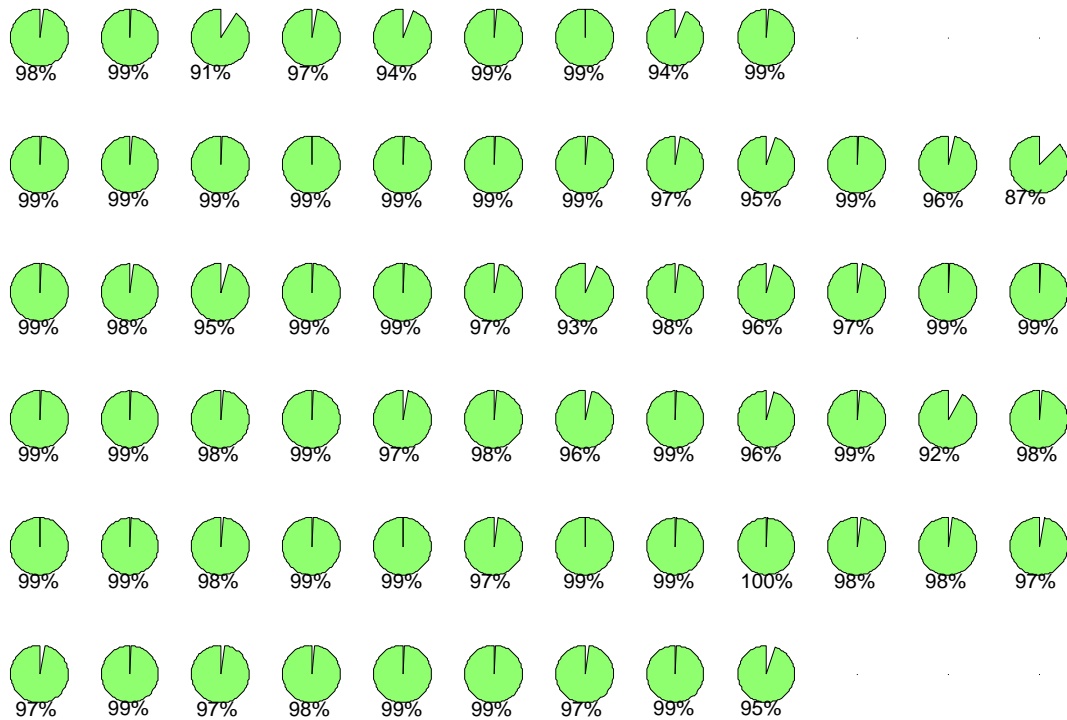


Abbildung 8.29.: Korrelationen der 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie

Zentrum des Gebiets ( $\lambda, \vartheta$ )	Signal			Differenz		
	Max. [mE]	Min. [mE]	Std. [mE]	Max. [mE]	Min. [mE]	Std. [mE]
(-160, 17.5)	5.980	-10.685	2.8243	2.537	-4.339	0.6215
(-160, 162.5)	11.256	-12.626	3.4247	3.260	-4.625	0.8953
(-120, 17.5)	14.062	-10.277	4.8207	2.747	-3.737	0.5630
(-120, 162.5)	19.405	-18.850	6.7950	4.194	-4.653	0.8362
(-80, 17.5)	7.358	-6.243	2.4170	4.950	-5.247	1.0150
(-80, 162.5)	18.233	-20.060	6.5168	7.099	-8.491	1.5195
(-40, 17.5)	3.789	-6.717	2.0527	2.453	-1.814	0.5133
(-40, 162.5)	12.472	-17.104	5.8991	8.726	-4.772	1.1903
(0, 17.5)	15.698	-17.103	4.2908	7.539	-8.590	1.4489
(0, 162.5)	22.396	-26.802	7.1226	4.069	-3.616	1.0116
(40, 17.5)	16.400	-17.386	4.8504	4.599	-4.438	0.8255
(40, 162.5)	30.246	-22.239	7.5276	6.668	-9.082	1.1664
(80, 17.5)	19.480	-21.826	8.4485	4.988	-4.897	0.9234
(80, 162.5)	20.670	-18.188	5.9187	4.125	-7.562	1.3258
(120, 17.5)	8.104	-8.271	3.1199	7.433	-5.207	1.0841
(120, 162.5)	15.028	-13.839	5.1903	2.798	-4.196	0.6516
(160, 17.5)	6.610	-10.808	3.2892	2.501	-2.855	0.5460
(160, 162.5)	11.519	-13.135	3.2996	5.542	-8.222	1.0710

Tabelle 8.15.: Statistische Maße der LOS-Gradiometrie für „polare“ Regionen

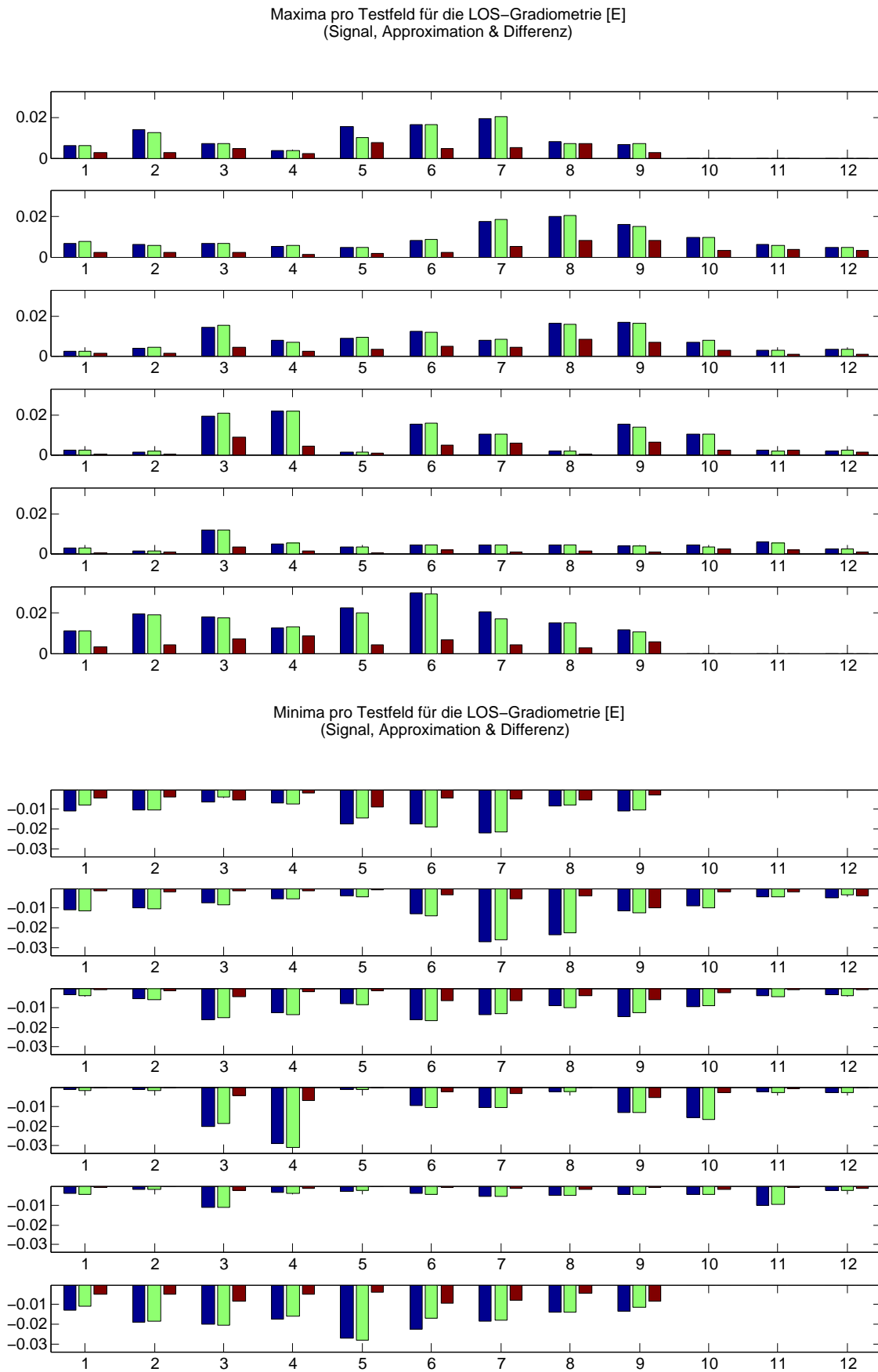


Abbildung 8.30.: Maxima und Minima aus Signal, Approximation und deren Differenz für die 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie

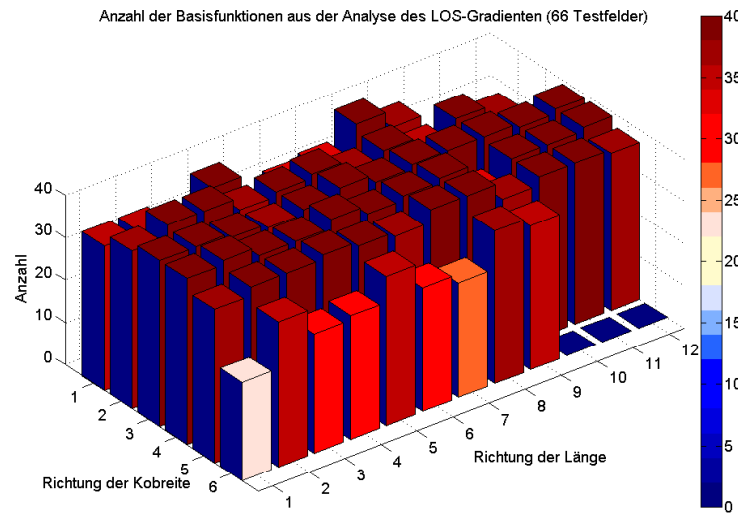


Abbildung 8.31.: Anzahl der Basisfunktionen je Testgebiet für die LOS-Gradiometrie

Auswertung realer Daten noch zu eliminieren ist.

Der Ansatz der Range-Rate erweist sich als problematisch in dem entwickelten Algorithmus der nichtlinearen Optimierung. Zu den Ursachen zählen die geringe Empfindlichkeit (der Ableitungen) gegenüber den gesuchten Basisparametern, das Versagen der aktuellen Startwertsuche aus den Beobachtungen und die Überlagerung aller Störungen in dem „integrierten“ Signal. In einem vereinfachten Szenario – mit vorgegebenen Startwerten und dem Zentralfeld als Referenz – lassen sich vor allem die Zentren der Basisfunktionen optimieren.

Anschließend werden globale SST-Daten für das Energieintegral und die LOS-Gradiometrie simuliert, deren residuales Signal aus der Differenz von zwei bekannten Schwerefeldern erzeugt wird. Der Datensatz wird in kleinere Testgebiete aufgeteilt und durch optimierte radiale Basisfunktionen analysiert. Nach einer Anpassung der Gebiete in den polaren Regionen erreichen sowohl die einzelnen Felder als auch deren globale Kombination eine Korrelation zwischen dem Signal und der Approximation von mindestens 90 %, während die Standardabweichungen in den meisten Fällen auf 25 % des ursprünglichen Wertes reduziert werden.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird die Modellierung des residualen Schwerfeldes durch optimierte radiale Basisfunktionen untersucht. Die (Pseudo-)Beobachtungen werden aus den SST-Daten erzeugt. Verwendet werden das Potential aus dem Energieintegral für einen Satelliten und die Line-of-Sight Gradiometrie und die Range-Rate für GRACE-ähnliche Missionen. Die ersten beiden Ansätze kann man – mit einem vorher bestimmten und fixierten Orbit – als in-situ Messungen betrachten, welche nur von den aktuellen Werten des Potentials abhängen.

Für die Analyse wird zunächst ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Beobachtungsgröße und den Parametern der radialen Basisfunktionen hergeleitet. Dieser wird in der bekannten Darstellung durch Legendrepolynome, aber auch durch die neu entwickelte Wigner-Darstellung der radialen Basisfunktionen im Orbit modelliert. Die Legendre-Darstellungen der verschiedenen Beobachtungen erweisen sich als wesentlich effizienter, weshalb nur diese in den iterativen Algorithmen der Optimierung zum Einsatz kommen. Ein weiterer Vorteil ist die Verwendung beliebiger Satellitenbahnen, während die Beschreibungen durch Wigner-d-Funktionen nur für Kreisbahnen exakt gültig sind. Andererseits bildet die Wigner-Darstellung ein wichtiges Modell dieser Arbeit, da sie die partiellen Ableitungen sowohl in den Formeln als auch in deren numerischen Umsetzungen erheblich erleichtert. Für eine neue Art der Beobachtung ist es somit ratsam, zunächst die Wigner-Darstellung zu bestimmen, welche anschließend als Referenz für eine Umsetzung durch die Legendrepolynome dienen kann. Außerdem können spezielle Beobachtungen wie z.B. die Range-Rate nur mit den Wigner-d-Funktionen in einer geschlossenen Formel beschrieben und nach den Basisparametern differenziert werden.

Die Range-Rate erweist sich für den entwickelten Algorithmus als nicht geeignet zur nichtlinearen Optimierung der Basisparameter aus einem komplexeren Schwerfeld. Zum einen können aus der Beobachtung (bislang) keine Startwerte der Parameter bestimmt werden und zum anderen handelt es sich nicht um eine in-situ Messung, weshalb alle gravitativen und nicht-gravitativen Störungen und die numerischen Fehler im Signal „integriert“ werden. Ein weiteres Problem für die nichtlineare Optimierung aus der Range-Rate ist es, dass die Parameter für die Basisfunktionen am Rand des Gebiets nur schlecht zu bestimmen sind. In einem vereinfachten Szenario mit vorgegebenen Startwerten kann man vor allem die Positionen der Basisfunktionen verbessern.

Dagegen ist die Analyse der behandelten in-situ Beobachtungen durch radiale Basisfunktionen erfolgreich und approximiert das Signal im Orbit in einer hohen Qualität. Sowohl für das Potential als auch die Line-of-Sight Gradiometrie werden in den untersuchten Simulationen in der Regel Korrelationen von mehr als 90 % zwischen dem Signal und der Approximation erreicht. Betrachtet man die relative Standardabweichung, so reduzieren sich in den meisten Gebieten die Variationen des Signals auf maximal 25 % der ursprünglichen Werte, was ebenfalls die gute Anpassung bestätigt.

In der Kombination zu einer globalen Lösung bleiben die einzelnen Testfelder erkennbar, da bislang keine Bedingung implementiert ist, um einen stetigen Übergang zu gewährleisten. Einen Ausweg bietet hier eine nichtlineare Optimierung über den globalen Datensatz, welche aber aufgrund der Rechenkapazitäten nicht durchgeführt werden konnte.

Die nichtlineare Optimierung kann in den Simulationen erfolgreich für die in-situ Beobachtungen eingesetzt werden. Um die Ergebnisse für reale Daten zu verbessern, sind für beide Signale einige Modifikationen des Algorithmus denkbar:

- Für Gebiete in den polaren Regionen ist noch eine Anpassung der Optimierung erforderlich. Dies betrifft die Anzahl und die zulässige Verteilung der Basisfunktionen, da das allgemein formulierte Abstandskriterium hier eventuell zu wenig Basisfunktionen zulässt.
- Die bisherige Umsetzung der Erdrotation beinhaltet in beiden Darstellungen nur Drehungen um die  $\hat{e}_{i=3}$ -Achse um die Sternzeit  $\Theta$ . In der Legendre-Darstellung lässt sich die Modellierung verbessern, indem man die Rotationsparameter gemäß den IERS-Konventionen zu Beginn einmal berechnet und z.B. in der Form einer  $L \times 9$ -Matrix in den Algorithmus integriert.

- Für die Startwerte der Basiszentren in der Auswertung werden die Daten im Orbit auf ein  $(\lambda, \vartheta)$ -Gitter interpoliert. Durch eine Änderung der Interpolation könnte man die Variationen der Bahnhöhe berücksichtigen und die zusätzlichen Extremwerte am Rand des Gebiets reduzieren.
- Da sich die gefundenen Zentren in den Simulationen oft in einigen Bereichen konzentrieren, kann man die Anzahl z.B. durch eine Clusteranalyse verringern, deren Ergebnisse dann als Startwerte einer weiteren Optimierung verwendet werden.

In der Rekonstruktion des Potentials aus der regionalen LOS-Gradiometrie zeigen sich systematische Unterschiede zu den wahren Werten der Simulation, wobei die Strukturen annähernd in Flugrichtung bzw. in Nord-Süd-Richtung orientiert sind. Die Gradiometrie kann somit nicht alle Signalanteile des Potentials erfassen und die Beobachtungsmethode weist einen sogenannten Nullraum auf. Für die Analyse realer Daten ist der Nullraum näher zu analysieren. Da die Beobachtung der zweiten Ableitung des Potentials entspricht, sind gemäß einer planaren Näherung insbesondere ein Offset und ein linearer Trend in Flugrichtung nicht bestimmbar. Ob auch nichtlineare Funktionen zu diesem Nullraum der Gradiometrie gehören und ob diese eventuell von den Bahnparametern abhängen, bedarf weiterer Untersuchungen. Um das Potential dieses Nullraums zu erfassen, kann man eine Kreuzungspunktanalyse der Bahnen oder eine Kombination mit dem Energieintegral – oder einer anderen Beobachtung – in Betracht ziehen.

Basierend auf den Erfahrungen und den vorhandenen Programmen wird eine Implementierung für die GOCE-Mission angestrebt. Da diese mit den Komponenten des Schweretensors und dem Ergebnis des Energieintegrals mehrere in-situ Beobachtungen je Zeitpunkt beinhaltet, ist dabei eine Kombination der Messungen wünschenswert.



## A. Wigner-Darstellung

In diesem Abschnitt wird die Wigner-Darstellung genauer untersucht. Dabei wird zunächst gezeigt, dass aufgrund der Symmetrien die Hälfte der Summanden für die Berechnung nicht notwendig ist, und dass man das gleiche Ergebnis durch den zweifachen Realteil der anderen Terme erhält. Der zweite Teil beschäftigt sich mit zwei möglichen Implementierungen der Darstellung und der effizienten Umsetzung in MATLAB durch Matrizenmultiplikationen.

### A.1. Produkte der Legendre- und Wigner-d-Funktionen

In den Kapiteln 5 und 6 werden einige Funktionale des residualen Schwerefeldes durch eine Linearkombination radialer Basisfunktionen modelliert. Für eine elegantere Darstellung (der Ableitungen) werden die Wigner-D-Funktionen verwendet, deren Argumente  $(\alpha, \beta, \gamma)$  die Bewegung des Satelliten im Orbit beschreiben. Ein Teil der Funktionale lässt sich für eine Basisfunktion durch die Formel

$$\mathcal{F}\{\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)\} = \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \sigma_b(n) \sum_{m=-n}^n \hat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b) \sum_{k=-n}^n D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \hat{Y}_{nk}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) f_{nkm} \quad (\text{A.1})$$

mit den Koeffizienten  $f_{nkm}$  beschreiben, weitere ergeben sich durch die Differentiation der Faktoren. Eine Übersicht der behandelten Funktionale findet sich in der Tabelle A.1, welche für andere Beobachtungsverfahren wie z.B. die across-track-Komponente der GOCE-Mission noch zu ergänzen ist. Der zweite Teil der Liste betrifft die Ableitung der Wigner-Darstellung nach den Basisparametern und kann durch die entsprechende Änderung für alle Funktionale genutzt werden.

Demnach enthalten alle Funktionale des Schwerefeldes eine Summe

$$YDY_n = \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \hat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \hat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) f_{nkm}, \quad (\text{A.2})$$

oder deren partielle Ableitung nach einem der Argumente. Alle Winkel  $(\lambda_1, \vartheta_1, \lambda_2, \vartheta_2, \alpha, \beta, \gamma)$  können in der allgemeinen Darstellung von der Bewegung der Satelliten oder auch dem Zentrum der Basisfunktion abhängen, wobei eventuell die Vorzeichen zu ändern sind.

Funktional	Operator	Faktor $f_{nkm}$	zu ändernder Term
Potential	–	1	–
LOS-Gradient	$\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$	$\left[-\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar}\right]$	–
Gradient ( $\hat{e}_{S=1}$ -Komponente)	$\frac{\partial}{\partial r}$	$-\frac{(n+1)}{r}$	–
Gradient ( $\hat{e}_{S=2}$ -Komponente)	$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{ik}{a}$	–
Gradient ( $\hat{e}_{S=3}$ -Komponente)	$\frac{1}{a \sin u} \frac{\partial}{\partial I}$	$\frac{1}{a \sin u}$	$d_{km}^n(-I) \rightarrow \frac{\partial d_{km}^n(-I)}{\partial I}$
Basisparameter:			
	$\frac{\partial}{\partial \eta_b}$	–	$\eta_b \rightarrow 1$
	$\frac{\partial}{\partial \lambda_b}$	$-im$	–
	$\frac{\partial}{\partial \vartheta_b}$	–	$\hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \rightarrow \hat{P}'_{nm}(\cos \vartheta_b)$
	$\frac{\partial}{\partial \sigma_b}$	–	$\sigma_b(n) \rightarrow \frac{\partial \sigma_b(n)}{\partial \sigma_b}$

Tabelle A.1.: Wigner-Darstellung der Schwerefunktionale im Orbit

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es, durch die Verwendung der Symmetrien

$$\widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta) = \begin{cases} \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta) & m \geq 0 \\ (-1)^m \widehat{P}_{n,|m|}(\cos \vartheta) & m < 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\widehat{Y}_{n,\pm m}(\vartheta, \lambda) = \widehat{P}_{n,\pm m}(\cos \vartheta) \exp(\pm im\lambda) \quad (3.44)$$

und die Beziehungen

$$d_{-k,-m}^n(\beta) = (-1)^{m+k} d_{k,m}^n(\beta) \quad -n \leq k, m \leq n \quad (3.95a)$$

$$D_{k,m}^n(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-ik\alpha) d_{k,m}^n(\beta) \exp(-im\gamma) \quad (3.64)$$

die Anzahl der Summanden so zu verringern, dass die äußere Summation bei  $m = 0$  beginnt. Mit den Abkürzungen  $\Lambda_1 = \lambda_1 - \gamma$ ,  $\Lambda_2 = \lambda_2 - \alpha$ ,  $\zeta_1 = \cos \vartheta_1$  und  $\zeta_2 = \cos \vartheta_2$  und dem Faktor  $f_{nkm} = 1$  lässt sich ein einzelner Summand durch

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) &= \\ &= \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_1) \exp(im\lambda_1) \exp(-ik\alpha) d_{km}^n(\beta) \exp(-im\gamma) \widehat{P}_{nk}(\cos \vartheta_2) \exp(ik\lambda_2) = \\ &= \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_1) \exp(im(\lambda_1 - \gamma)) d_{km}^n(\beta) \widehat{P}_{nk}(\cos \vartheta_2) \exp(ik(\lambda_2 - \alpha)) = \\ &= \widehat{P}_{nm}(\zeta_1) \exp(im\Lambda_1) d_{km}^n(\beta) \widehat{P}_{nk}(\zeta_2) \exp(ik\Lambda_2) \end{aligned} \quad (A.3)$$

beschreiben. In der Doppelsumme (A.2) sind für jeweils einen festen Grad  $n$  drei Fälle zu untersuchen:

1. Beide Ordnungen der Wigner-d-Funktionen haben das gleiche Vorzeichen, und mindestens eine ist von Null verschieden.
2. Die Ordnungen haben verschiedene Vorzeichen und sind beide ungleich Null.
3. Beide Ordnungen sind identisch Null.

Um eine eindeutige Notation zu gewährleisten, werden hier die positiven Ordnungen durch  $K, M \geq 0$  bezeichnet und die negativen Werte entsprechend durch  $-M$  bzw.  $-K$  dargestellt. Im ersten Fall existieren zwei Summanden mit  $(+K, +M)$  und  $(-K, -M)$ , die man auf folgende Weise zusammenfassen kann:

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{nM}(\zeta_1) \exp(iM\Lambda_1) d_{KM}^n(\beta) \widehat{P}_{nK}(\zeta_2) \exp(iK\Lambda_2) \\ &+ \underbrace{\widehat{P}_{n,-M}(\zeta_1)}_{(-1)^M \widehat{P}_{nM}(\zeta_1)} \exp(-iM\Lambda_1) \underbrace{d_{-K,-M}^n(\beta)}_{(-1)^{M+K} d_{KM}^n(\beta)} \underbrace{\widehat{P}_{n,-K}(\zeta_2)}_{(-1)^K \widehat{P}_{nK}(\zeta_2)} \exp(-iK\Lambda_2) = \\ &= \widehat{P}_{nM}(\zeta_1) d_{KM}^n(\beta) \widehat{P}_{nK}(\zeta_2) \cdot \left[ \exp(iM\Lambda_1) \exp(iK\Lambda_2) + \exp(-iM\Lambda_1) \exp(-iK\Lambda_2) \right] = \\ &= \widehat{P}_{nM}(\zeta_1) d_{KM}^n(\beta) \widehat{P}_{nK}(\zeta_2) \cdot 2\Re\left\{ \exp(iM\Lambda_1 + iK\Lambda_2) \right\}. \end{aligned}$$

Auch im zweiten Fall existiert ein Paar von Summanden mit  $(-K, +M)$  und  $(+K, -M)$ :

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{nM}(\zeta_1) \exp(iM\Lambda_1) d_{-K,M}^n(\beta) \underbrace{\widehat{P}_{n,-K}(\zeta_2)}_{(-1)^K \widehat{P}_{nK}(\zeta_2)} \exp(-iK\Lambda_2) \\ &+ \underbrace{\widehat{P}_{n,-M}(\zeta_1)}_{(-1)^M \widehat{P}_{nM}(\zeta_1)} \exp(-iM\Lambda_1) \underbrace{d_{K,-M}^n(\beta)}_{(-1)^{K+M} d_{-K,M}^n(\beta)} \widehat{P}_{nK}(\zeta_2) \exp(iK\Lambda_2) = \\ &= \widehat{P}_{nM}(\zeta_1) d_{-K,M}^n(\beta) (-1)^K \widehat{P}_{nK}(\zeta_2) \cdot \left[ \exp(iM\Lambda_1) \exp(-iK\Lambda_2) + \exp(-iM\Lambda_1) \exp(iK\Lambda_2) \right] = \\ &= \widehat{P}_{nM}(\zeta_1) d_{-K,M}^n(\beta) \widehat{P}_{n,-K}(\zeta_2) \cdot 2\Re\left\{ \exp(iM\Lambda_1 - iK\Lambda_2) \right\}. \end{aligned}$$

Schließlich bleibt die Indexkombination  $K = M = 0$  ohne einen zweiten Partner übrig:

$$\widehat{P}_{n,0}(\cos \vartheta_1) d_{0,0}^n(\beta) \widehat{P}_{n,0}(\cos \vartheta_2) = \widehat{P}_{n,0}(\cos \vartheta_1) d_{0,0}^n(\beta) \widehat{P}_{n,0}(\cos \vartheta_2) \cdot \Re \left\{ \exp(0) \right\}.$$

Für eine Kombination der Ordnungen  $m = \pm M$  und  $k = \pm K$  folgt somit

$$\begin{aligned} & \widehat{Y}_{n,m}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{\pm k, m}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{n, \pm k}(\lambda_2, \vartheta_2) + \left\{ \widehat{Y}_{n, -m}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{\mp k, -m}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{n, \mp k}(\lambda_2, \vartheta_2) \right\}_0 = \\ & = \Re \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{\pm k, m}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{n, \pm k}(\lambda_2, \vartheta_2) \right\} \begin{cases} 2 & \text{für } m^2 + k^2 > 0 \\ 1 & \text{für } m = k = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

weshalb nur die Summanden mit  $m \geq 0$  zu beachten sind. Anstelle der Fallunterscheidung kann man einen zusätzlichen Faktor

$$\xi_{nm} = \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \quad (\text{A.5})$$

eingeführen, der alle Terme mit  $k = m = 0$  halbiert. Damit kann der Spezialfall  $k = m = 0$  formal durch zwei (identische) Summanden mit  $(+M, +K)$  und  $(-M, -K)$  dargestellt werden, und es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{\pm k, m}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{n, \pm k}(\lambda_2, \vartheta_2) + \\ & + \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \widehat{Y}_{n, -m}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{k, -m}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) = \\ & = 2\Re \left\{ \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Sind alle zusätzlichen Faktoren in der Reihe (A.2) reell, so kann zunächst die Summation der komplexen Werte erfolgen, und der Realteil am Ende bestimmt werden:

$$\begin{aligned} YDY_n &= \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) f_{nkm} = \\ & = 2\Re \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_{k=-n}^n \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \widehat{Y}_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) D_{km}^n(\alpha, \beta, \gamma) \widehat{Y}_{nk}(\lambda_2, \vartheta_2) f_{nkm} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Durch die Einführung eines einfachen Faktors für  $k = m = 0$  kann somit auf alle Terme mit negativen Ordnungen  $m = -n, \dots, -1$  verzichtet werden, was den Rechenaufwand der Summation ungefähr halbiert. Außerdem garantiert diese Darstellung, dass auch durch numerische Fehler keine komplexen Größen des Schwerfeldes entstehen können.

Analoge Überlegungen gelten für konjugiert-komplexe Kugelflächenfunktionen  $\widehat{Y}_{nk}^*(\vartheta, \lambda)$  oder eine inverse Rotation, wobei sich die Vorzeichen und Reihenfolge der Winkel entsprechend ändern.

## A.2. Umsetzung der Wigner-Darstellung

Für die Berechnung des Potentials in der Wigner-Darstellung werden aus den inertialen Positionen  $\vec{x}_i$  und Geschwindigkeiten  $\vec{x}_i$  des Satelliten mit den Formeln aus dem Abschnitt 2.3 die momentanen Keplerelemente berechnet. Unter Vernachlässigung der Exzentrizität kann der Effekt einer radialen Basisfunktion in der Wigner-Darstellung durch die Formel

$$\begin{aligned} \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= 2\Re \left\{ \eta_b \frac{GM}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{4\pi}{2n+1} \right. \\ & \quad \cdot \sum_{m=0}^n \widehat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \exp \left( im \left( \Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b \right) \right) \\ & \quad \left. \cdot \sum_{k=-n}^n \exp \left( ik \left( \frac{\pi}{2} + u \right) \right) d_{km}^n(-I) \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \widehat{P}_{nk}(0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{5.29})$$

bzw. in der Kurzform

$$\Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp(iku + im(\Omega - \Theta)) \quad (5.33)$$

beschrieben werden. Als Vorbereitung für eine geeignete Umsetzung kann man zuerst die Anzahl der nötigen Elemente abschätzen. Wählt man zum Beispiel ein Szenario aus  $L = 5000$  Datenpunkte im Testgebiet und modelliert das Signal mit  $B = 10$  Basisfunktionen und dem maximalen Entwicklungsgrad  $\tilde{N} = 100$ , so ergeben sich folgende Größenordnungen:

- $\hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b)$ :  
Aus Grad und Ordnung der Legendrefunktionen erhält man  $\left(\frac{\tilde{N} \cdot (\tilde{N} + 1)}{2} + \tilde{N} + 1\right)$  Elemente je Basisfunktion, also  $\left(\frac{100 \cdot 101}{2} + 101\right) \times B = 5151 \times 10 = 51510$ .
- $\hat{P}_{nk}(0)$ :  
Aufgrund der negativen Ordnungen ist die Anzahl  $\left(\frac{\tilde{N} \cdot (\tilde{N} + 1)}{2} + \tilde{N} + 1\right)$  zu verdoppeln, allerdings ist bei einer exakten Rechnung nur etwa die Hälfte der Werte von Null verschieden, was je nach Speicherung ca. 5000 oder 10000 Einträgen entspricht.
- $\exp\left(ik\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right)$ :  
Aus dem Argument der Breite und der positiven und negativen Ordnung  $k$  folgt für  $L$  Datenpunkte eine Dimension von  $(2\tilde{N} + 1) \times L = 201 \times 5000 \approx 10^6$ .
- $\exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b\right)\right)$ :  
Wegen der Sternzeit  $\Theta$  und der Rektaszension  $\Omega$ , der positiven Ordnung  $m$  und den Basisparametern sind hier  $L \times (\tilde{N} + 1) \times B = 5000 \times 101 \times 10 \approx 5 \cdot 10^6$  Werte zu beachten.
- $d_{km}^n(-I)$ :  
Für einen Zeitpunkt und ohne die Symmetrien lässt sich die Anzahl in Abhängigkeit vom maximalen Grad  $\tilde{N}$  durch

$$\sum_{j=0}^{\tilde{N}} (2 \cdot j + 1)^2 = 1 + 9 + 25 + 49 + \dots = \frac{2\tilde{N} + 3\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3}{6} \approx 1 \cdot 10^6$$

berechnen. Durch die Symmetrie bzgl. der Ordnungen kann dieser Wert ungefähr halbiert werden, während für eine zeitabhängige Inklination  $\frac{2\tilde{N} + 3\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3}{12} \times L \approx 2.5 \cdot 10^9$  Elemente verwendet werden müssen.

- $B_{km}^n(\psi_b)$ :  
Jede Hilfsfunktion besitzt aufgrund der positiven und negativen Ordnungen jeweils  $\frac{2\tilde{N} + 3\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3}{6} \approx 1 \cdot 10^6$  Einträge, was auf  $\frac{2\tilde{N} + 3\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3}{6} \times B \approx 10 \cdot 10^6$  Elemente führt. Die Information der  $\hat{P}_{nk}(0)$ -Funktion ist redundant in allen Hilfsfunktionen enthalten und sorgt so für einen unnötig großen Speicheraufwand.
- $S_{km}^n(r, I)$ :  
Dieser Term hängt einerseits von dem Grad und den Ordnungen der Wigner-d-Funktionen und andererseits von dem zeitlich veränderlichen Bahnradius ab, was – unter Vernachlässigung der Symmetrien – zu  $\frac{2\tilde{N} + 3\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3}{6} \times L \approx 5.0 \cdot 10^9$  Einträgen führt.
- $\exp(iku + im(\Omega - \Theta))$ :  
Da diese Funktion nur von den Ordnungen und der Zeit abhängt, sind bei einer geeigneten Umsetzung  $(2\tilde{N} + 1)^2 \times L \approx 50 \cdot 10^6$  Elemente erforderlich.

Die Dimensionen der Faktoren lassen vermuten, dass eine Berechnung des Potentials über ein Matrix-Vektor-Produkt ohne zusätzliche Annahmen und ohne eine Schleife für beide Methoden problematisch werden kann. Die kritische Größe bilden die Wigner-d-Funktionen der Inklination, zu deren Umsetzung in dem Szenario ca.

$2.5 \cdot 10^9$  bzw.  $5 \cdot 10^9$  Werte benötigt werden. Wählt man jedoch für den untersuchten Zeitraum eine konstante (mittlere) Inklination  $I$ , so reduziert sich die Anzahl auf ca. 500000 bzw.  $1 \cdot 10^6$  Einträge, wobei in der Darstellung (5.33) für eine vergleichbare Reduktion zusätzlich der Radius gemittelt werden muss.

Trotz dieser Annahme ist für eine effiziente Umsetzung eine Schleife anstelle einer Multiplikation angebracht, um die Verwendung (zu) großer Matrizen zu vermeiden. Für die Auswahl über den Laufindex der Schleife ist zu beachten, dass die Anzahl der Basisfunktionen in dieser Arbeit minimiert werden soll und dass der maximale Grad selten eine Größenordnung von  $\tilde{N} = 200$  überschreitet, während die Anzahl der Berechnungspunkte nahezu beliebig variieren kann. Es liegt daher nahe, eine Schleife über die Zeit zu verwenden, und die anderen Summationen über Matrix-Vektor-Multiplikationen mit jeweils leicht handhabbaren Dimensionen durchzuführen.

Für die Auswertung zum Zeitpunkt  $t_\ell$  ordnet man die Faktoren in Gleichung (5.29) um, und unterscheidet zwischen positiven und negativen Werten der Ordnung  $k$ :

$$\begin{aligned} \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) &= \\ &= 2\Re \left\{ \frac{GM\eta_b}{R} \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=0}^n \overbrace{\left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \exp \left( im \left( \Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b \right) \right) \right]}^{\mathbf{v}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\langle \sum_{k=0}^n \underbrace{\left[ d_{km}^n(-I) \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \hat{P}_{nk}(0) \right]}_{\mathbf{W}_p \ (k \geq 0)} \underbrace{\left[ \exp \left( ik \left( \frac{\pi}{2} + u \right) \right) \right]}_{\tilde{y}_p \ (k \geq 0)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=-n}^{-1} \underbrace{\left[ d_{km}^n(-I) \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} \hat{P}_{nk}(0) \right]}_{\mathbf{W}_n \ (k < 0)} \underbrace{\left[ \exp \left( ik \left( \frac{\pi}{2} + u \right) \right) \right]}_{\tilde{y}_n \ (k < 0)} \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Um die gleiche Dimension für die Matrizen  $\mathbf{W}_p$  und  $\mathbf{W}_n$  zu erhalten, ergänzt man in der zweiten Matrix die Einträge mit  $k = 0$  durch den Wert Null. Damit berechnen sich die Einträge durch

$$\begin{aligned} w_{|k|,m}^n &= \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} d_{km}^n(-I) \hat{P}_{nk}(0) \quad k \geq 0 \\ w_{-|k|,m}^n &= \begin{cases} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1 + \text{sign}(m^2 + k^2)}{2} d_{-|k|m}^n(-I) \hat{P}_{n,-|k|}(0) & k < 0 \\ 0 & k = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

wobei die Elemente als Stufenmatrizen mit  $(\tilde{N} + 1)$  Spalten für die Ordnung  $k$  und den  $\left( \frac{\tilde{N} \cdot (\tilde{N} + 1)}{2} + \tilde{N} + 1 \right)$  Zeilen für Grad  $n$  und Ordnung  $m$  gespeichert werden:

$$\mathbf{W}_{p/n} = \begin{pmatrix} w_{\pm 0,0}^0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_{\pm 0,0}^1 & w_{\pm 0,1}^1 & 0 & 0 & & 0 \\ w_{\pm 1,0}^1 & w_{\pm 1,1}^1 & 0 & 0 & & 0 \\ w_{\pm 0,0}^2 & w_{\pm 0,1}^2 & w_{\pm 0,2}^2 & 0 & & 0 \\ w_{\pm 1,0}^2 & w_{\pm 1,1}^2 & w_{\pm 1,2}^2 & 0 & & 0 \\ w_{\pm 2,0}^2 & w_{\pm 2,1}^2 & w_{\pm 2,2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ w_{\pm \tilde{N},0}^{\tilde{N}} & w_{\pm \tilde{N},1}^{\tilde{N}} & & & & w_{\pm \tilde{N},\tilde{N}}^{\tilde{N}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Ist die zeitliche Änderung der Inklination nicht mehr vernachlässigbar, so sind die Matrizen neu zu bestimmen, andernfalls genügt eine einmalige Berechnung mit einer gemittelten Inklination.

Die Summation über die Ordnung  $k$  wird durchgeführt, indem man die Matrizen von links mit den Vektoren  $\vec{y}_p$  bzw.  $\vec{y}_n$  (mit der Dimension  $(\tilde{N} + 1)$ ) multipliziert. Da die Vektoren konjugiert-komplex zueinander sind, ist nur eine Berechnung je Zeitpunkt erforderlich:

$$\vec{y}_p = \left[ \exp\left(i0\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right), \exp\left(i1\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right), \dots, \exp\left(iN\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) \right]^\top. \quad (\text{A.10})$$

Die Doppelsummation über  $n$  und  $m$  kann durch eine Matrix  $\mathbf{V}$  bewirkt werden, die durch

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_0^0(1) & v_0^1(1) & v_1^1(1) & v_0^2(1) & \dots & v_{\tilde{N}-1}^{\tilde{N}}(1) & v_{\tilde{N}}^{\tilde{N}}(1) \\ v_0^0(2) & v_0^1(2) & v_1^1(2) & v_0^2(2) & \dots & v_{\tilde{N}-1}^{\tilde{N}}(2) & v_{\tilde{N}}^{\tilde{N}}(2) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ v_0^0(B) & v_0^1(B) & v_1^1(B) & v_0^2(B) & \dots & v_{\tilde{N}-1}^{\tilde{N}}(B) & v_{\tilde{N}}^{\tilde{N}}(B) \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

mit den Elementen

$$v_m^n(b) := \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b\right)\right) \quad (\text{A.12})$$

definiert ist. Die Matrix besitzt für jede Basisfunktion eine Zeile, während die  $\left(\frac{\tilde{N} \cdot (\tilde{N} + 1)}{2} + \tilde{N} + 1\right)$  Spalten den Grad  $n$  und die Ordnung  $m$  berücksichtigen.

Das Störpotential von  $B$  radialen Basisfunktionen berechnet sich dann mit

$$\delta T = \sum_{b=1}^B \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b) = \sum_{b=1}^B 2\Re\left\{ \eta_b \frac{GM}{R} \mathbf{V} [\mathbf{W}_p \vec{y}_p + \mathbf{W}_n (\vec{y}_p)^*] \right\}, \quad (\text{A.13})$$

wobei der (MATLAB) Pseudocode auf der Seite 199 gezeigt wird.

In der letzten Multiplikation des Pseudocodes ist eigentlich anstelle der Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  ein Spaltenvektor der Skalierungsfaktoren erforderlich, um die Potentialwerte im Orbit zu erhalten. Die hier gewählte Berechnung liefert jedoch sowohl die einzelnen Potentiale je Basisfunktion als auch deren partielle Ableitung nach den Skalierungsfaktoren, wenn man  $\mathbf{D}$  durch die Einheitsmatrix ersetzt.

Analog lässt sich auch die Line-of-Sight Gradiometrie durch Matrizenmultiplikationen darstellen. Gemäss der Herleitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial Y^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial u^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi_b(\vec{x}_e, \psi_b)}{\partial r} = \\ &= \sum_{n=n_0}^{\tilde{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n B_{km}^n(\psi_b) S_{km}^n(r, I) \exp\left(iku + im(\Omega - \Theta)\right) \left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right] \end{aligned} \quad (\text{5.57})$$

ist dabei zusätzlich der Faktor

$$\left[ -\frac{k^2}{a^2} - \frac{n+1}{ar} \right]$$

in den Summationen zu berücksichtigen. In den Programmen wird dieser aufgeteilt, wobei der erste Term auf einen neuen Vektor

$$\vec{z}_p = -\frac{k^2}{a^2} y_p \quad (\text{A.14})$$

führt und der zweite eine Matrix  $\mathbf{X}$  mit den Elementen

$$x_m^n(b) := -\frac{n+1}{ar} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta_b) \exp\left(im\left(\Omega - \Theta - \frac{\pi}{2} - \lambda_b\right)\right) \quad (\text{A.15})$$

erzeugt. Damit berechnet sich der LOS-Gradient durch die Matrixmultiplikationen

$$\frac{\partial^2 \delta T}{\partial^2 Y} = \sum_{b=1}^B 2\Re\left\{ \eta_b \frac{GM}{R} \left( \mathbf{V} [\mathbf{W}_p \vec{y}_p + \mathbf{W}_n (\vec{y}_p)^*] + \mathbf{X} [\mathbf{W}_p \vec{z}_p + \mathbf{W}_n (\vec{z}_p)^*] \right) \right\}. \quad (\text{A.16})$$

---

```

% Vektoren von Grad n und Ordnung m
GRAD = [0,1,1,2,2,2,3,3,3,...]';
ORDNUNG = [0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,...]';
K = (0:maxGrad)';

% Länge der Basisfunktionen in Radiant
lambda = BASIS.lambda*RHO;

% Produkte aus Legendrefunktionen und Legendre-Koeffizienten
PNMrad = Pnm.*shapeparameter(GRAD, sigma)

% Bestimmung der Winkel der Rotation
ialpha = (Omega-GAST-pi/2);
igamma = (pi/2+u);

% Initalisierung der Potentialwerte
PSI = zeros(T,B);
for ll = 1:L
    % Winkel für einen Zeitpunkt
    alphas = ialpha(ll);
    gammas = igamma(ll);

    % Matrix aller "Dämpfungsterme" für einen Zeitpunkt
    Rrn = (R./r(ll)).^(GRAD+1);
    % Vervielfachung für jede Basisfunktion
    Rrn = repmat(Rrn,1,B);

    % Transponierte Matrix V:
    % (Dämpfungsterm & Position Basis & GAST & Omega)
    VT = Rrn.*PNMrad.*exp(i*ORDNUNG*(alphas-lambda));

    % Vektor y:
    yp = exp(i*K*gammas);

    % "Potential" (ohne Skalierungsfaktoren)
    % [Zeile = Zeitpunkt/Spalte = Basisfunktion]
    PSI(ll,:) = VT.'*(Wp * yp + Wn * conj(yp));
end

% Diagonalmatrix der Skalierungsfaktoren
D = GM/R*diag(etal,eta2,...,etaB);

% Matrix der Potentialwerte
psi = 2*real(PSI*D);

```

---

Abbildung A.1.: Pseudocode für die Auswertung der Wigner-Darstellung





## B. Programme

Dieses Kapitel liefert eine Übersicht über die entwickelten Programme. Der erste Abschnitt befasst sich mit der grafischen Benutzeroberfläche und einigen speziellen Variablen, während der zweite Teil die Programme und deren Beschreibung in einer Tabelle auflistet. Um alle Routinen nutzen zu können, sind in die Basisversion der MATLAB-Software (hier in den Versionen 7.6 R2008a und 7.9 R2009b) die offiziellen Pakete zur nichtlinearen Optimierung („Optimization Toolbox“) und für die genetischen Algorithmen („Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox“) einzubinden.

### B.1. Grafische Benutzeroberfläche

In dem Projekt entstanden zahlreiche MATLAB-Funktionen, um die vorprozessierten (residualen) Satellitenbeobachtungen durch radiale Basisfunktionen zu analysieren. Ein Teil der Programme dient der Simulation der Beobachtungen, der Kontrolle – z.B. durch die Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der Wigner- und Legendre-Darstellung –, der Visualisierung oder der Selektion der Daten und ist nicht für die Optimierung erforderlich.

Um auch anderen Nutzern die Handhabung zu erleichtern, kann durch die Eingabe des Befehls „orb“ das Hauptprogramm für die optimierten radialen Basisfunktionen gestartet werden. Dies öffnet eine grafische Benutzeroberfläche, welche in der Abbildung B.1 dargestellt ist<sup>1</sup>. Die Oberfläche ist in die Bereiche **Programm**, **Funktionen**, **Potential**, **LoS-Gradient**, **Gradienten**, **Range-Rate** und **Sonstiges** unterteilt und wird durch den Cursor bedient. In vielen Anwendungen wird eine Sicherung der Ergebnisse angeboten, welche durch die Eingabe eines Dateinamens durch den Nutzer zu bestätigen ist. In den verschiedenen Optimierungen werden die relevanten Daten, die Bilder und ein Protokoll automatisch gespeichert.

In den Programmen und Dateien ist zu beachten, dass MATLAB neben den üblichen numerischen Variablentypen (Skalar, Vektor und Matrix) mit ganzzahligen, reellen, komplexen oder logischen Elementen auch die Typen „struct“ und „cell“ kennt. Beide Arten kombinieren verschiedenartige Einträge (inklusive beschreibender Strings) zu einer Variablen, unterscheiden sich aber bezüglich des Zugriffs. Während die cell-Variablen nur in der Eingabe von numerischen Werten durch den Nutzer Verwendung finden, werden die struct-Variablen häufig genutzt, um die Übersichtlichkeit bei der Parameterübergabe zwischen den Funktionen zu erhöhen. Als Beispiel soll hier die struct-Variable der Parameter der Basisfunktionen vorgestellt werden, die in der Simulation (Bezeichnung: BASIS), der Optimierung (optBASIS) und in der Vorgabe der Startwerte (apBASIS) in den automatisch generierten Dateien auftaucht:

- BASIS.lambda: Position der Basisfunktionen in Längenrichtung in Grad ( $\lambda_b$ ) mit  $b = 1, 2, \dots, B$
- BASIS.theta: Position der Basisfunktionen in Kobreitenrichtung in Grad ( $\vartheta_b$ )
- BASIS.skala: Skalierungsfaktoren ohne den Vorfaktor  $\frac{GM}{R}$  ( $\eta_b$ )
- BASIS.sigma: skalarer Formparameter für jede Basisfunktion ( $\sigma_b$ )
- BASIS.Modell: Bezeichnung des Modells der Legendre-Koeffizienten
- BASIS.maxGrad: maximaler Grad der Reihenentwicklung ( $\tilde{N}$ )
- BASIS.minGrad: minimaler Grad der Reihenentwicklung ( $n_0$ )
- BASIS.basiszahl: Anzahl der Basisfunktion ( $B$ )

<sup>1</sup>Es sei darauf hingewiesen, dass eine grafische Oberfläche nicht das eigentliche Ziel der Arbeit ist und daher mitunter nicht die eleganteste, sondern die einfachste Methode verwendet wird.

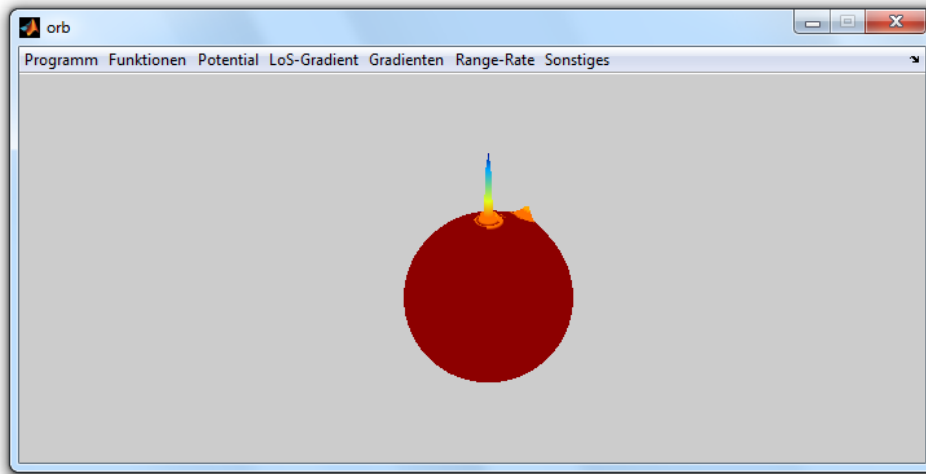


Abbildung B.1.: Grafische Benutzeroberfläche des Hauptprogramms *orb.m* für den Aufruf der Funktionen

- BASIS.ICnm und BASIS.ISnm: (lokale) sphärisch-harmonische Koeffizienten für die Summe aller Basisfunktionen als zwei Vektoren.

Die sphärisch-harmonischen Koeffizienten der Schwerefelder liegen in verschiedenen Formaten vor. In dieser Arbeit werden insbesondere zwei Varianten verwendet. Für die radialen Basisfunktionen wird in der Regel die Darstellung durch zwei Vektoren für den Sinus- und Kosinusanteil gewählt, wobei jeweils zuerst nach dem Grad  $n$  und innerhalb eines Grades nach den Ordnungen  $m$  sortiert wird:

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{00} & \bar{C}_{10} & \bar{C}_{11} & \bar{C}_{20} & \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{30} & \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{00} & \bar{S}_{10} & \bar{S}_{11} & \bar{S}_{20} & \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{30} & \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \dots \end{pmatrix}.$$

Die Sinus-Terme  $\bar{S}_{n0} = 0$  können theoretisch entfallen, werden hier aber für eine gleiche Dimension der Vektoren beibehalten. Eine andere Variante besteht aus zwei Dreiecksmatrizen für den Sinus- und Kosinusanteil, wobei in einer Zeile bzw. Spalte der Grad bzw. die Ordnung konstant ist. Indem man die „Sinus-Matrix“ transponiert und die Ordnung  $m = 0$  entfernt, lassen sich die Koeffizienten in dem  $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format als quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{00} & \bar{S}_{11} & \bar{S}_{21} & \dots & \bar{S}_{N1} \\ \bar{C}_{10} & \bar{C}_{11} & \bar{S}_{22} & \dots & \bar{S}_{N2} \\ \bar{C}_{20} & \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \bar{S}_{NN} \\ \bar{C}_{N0} & \bar{C}_{N1} & \bar{C}_{N2} & & \bar{C}_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq m \leq n \leq N$$

anordnen. Die Darstellung im  $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format wird in dieser Arbeit für die sphärisch-harmonische Synthese und die Referenzfelder bevorzugt. Eine Umwandlung der Formate ist durch die Funktionen *cs2vector.m* und *vector2cs.m* implementiert.

## B.2. Liste der Programme

<i>BASISselect.m</i>	wählt die gewünschten radialen Basisfunktionen aus einer vorhandenen struct-Variablen an Parametern aus.
<i>cart2kepler.m</i>	berechnet die Keplerelemente aus den raumfesten Koordinaten ohne die Anomalien und den Perigäumsabstand.
<i>cs2orbit.m</i>	führt eine Orbitintegration für ein Potential aus sphärisch-harmonischen Koeffizienten im $[\overline{C}_{nm} \setminus \overline{S}_{nm}]$ -Format aus. Es wird nur das gravitative Potential und eine gleichmäßige Erdrotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ um die $z$ -Achse berücksichtigt.
<i>deBias.m</i>	reduziert ein eindimensionales Signal um einen Offset, einen linearen oder einen quadratischen Trend je Bogen, wobei die Parameter durch eine vermittelnde Ausgleichung aus den Daten geschätzt werden.
<i>deleteFile.m</i>	eliminiert eine eventuell vorhandene Datei mit gleichem Namen aus dem aktuellen Ordner.
<i>eulerYnm.m</i>	rotiert eine Kugelflächenfunktion $\widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$ in der komplexen Normierung um die drei Eulerwinkel $(\alpha, \beta, \gamma)$ .
<i>exAnomaly.m</i>	berechnet die exzentrische Anomalie $E$ aus der großen Halbachse, der Exzentrizität und der Zeit. Dazu wird die Keplergleichung $M = E - e \sin E$ unter der Annahme $M = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot t$ iterativ gelöst.
<i>fillBase.m</i>	kontrolliert und ergänzt die struct-Variable der Basisparameter. Unter anderem wird überprüft, ob die Entwicklungsgrade ganzzahlig und positiv sind und ob die Anzahl der Werte für Position, Form und Skalierung übereinstimmt.
<i>greenwich2.m</i>	approximiert die Sternzeit Greenwich $\Theta$ aus der (Tages-)Zeit $t$ und dem Julianischen Datum $JD$ gemäss den Formeln aus dem Orbitintegrator SOPS von Martin Götzelmann.
<i>HilObs2GA.m</i>	analysiert die residualen in-situ Beobachtungen (Potential, LOS-Gradient) durch einen hybriden genetischen Algorithmus. Das Signal wird durch optimierte radiale Basisfunktionen modelliert, deren Form und Position durch stochastische Ansätze bestimmt werden. Für die Skalierungsfaktoren wird ein lineares Ausgleichungsproblem gelöst, dessen Konditionszahl im Penalty-Term verwendet wird. Diese Option ist nur möglich, wenn die „Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox“ von MATLAB vorhanden ist!
<i>isposn.m</i>	kontrolliert, ob ein Wert skalar, reell, positiv und ganzzahlig ist. Falls eine der Bedingungen nicht erfüllt ist, so wird der Wert durch das zweite Argument der Eingabe ersetzt und eine Warnung am Bildschirm ausgegeben.
<i>konstanten.m</i>	lädt die gemeinsamen Konstanten der Programme, insbesondere die Werte des geodätischen Erdmodells $\{GM, R, \dot{\Theta}, \dots\}$ .

<i>matsum.m</i>	addiert zwei Matrizen mit unterschiedlichen Dimensionen, wobei die fehlenden Elemente jeweils durch Null ergänzt werden. Diese Addition wird unter anderem eingesetzt, um die sphärisch-harmonischen Koeffizienten des globalen Feldes mit den residualen Koeffizienten zu kombinieren.
<i>numdiff.m</i>	approximiert die erste und zweite Ableitung eines Signals mit dem zentralen Differenzenquotienten.
<i>orbit2global.m</i>	bereitet die Hilfsgrößen der Wigner-Darstellung inklusive der „Sparse“-Matrizen aus dem Produkt der Legendre- und Wigner-d-Funktionen vor.
<i>radialBase.m</i>	visualisiert die radialen Basisfunktionen dreidimensional nach der Transformation des Koordinatensystems und der Drehung durch die Wigner-d-Funktionen.
<i>radialBase2lnm.m</i>	berechnet die sphärisch-harmonischen Koeffizienten der radialen Basisfunktionen mit einer geschlossenen Formel aus den Basisparametern.
<i>rotmat.m</i>	erstellt eine Rotationsmatrix um die erste, zweite oder dritte Achse des kartesischen dreidimensionalen Raumes.
<i>satellitePosition.m</i>	integriert den Orbit über dem Zentralfeld, dem Referenzfeld und dem kombinierten Feld mit den Basisfunktionen, um die Änderungen der Bahn zu analysieren. Die Orbitintegration berücksichtigt nur das gravitative Potential (der sphärisch-harmonischen Koeffizienten im $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format) und eine gleichmäßige Erdrotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ um die $z$ -Achse.
<i>searchExtrema2.m</i>	sucht die Startwerte für die Analyse der in-situ Beobachtungen. Die Daten werden im Orbit auf ein Gitter interpoliert und eventuell durch einen Binomialfilter geglättet. Anschließend werden durch einen Algorithmus der Bildverarbeitung alle lokalen Extremwerte bestimmt und nach ihrem Betrag sortiert.
<i>shapeParameter.m</i>	berechnet aus dem skalaren Formparameter je Basis, dem Modell und dem Vektor der Grade die reelle Zahlenfolge der Legendre-Koeffizienten $\sigma_b(n)$ und deren Ableitung.
<i>vans.m</i>	schätzt die Parameter mit einer vermittelnden Ausgleichung nach dem Gauß-Markov Modell mit normierten Spalten der Designmatrix $\mathbf{A}$ für eine stabilere Lösung.

---

DATA_SELECTION	– Auswahl des Gebiets, des Referenzfeldes usw.
<i>arcObservation.m</i>	visualisiert die Beobachtungen und das Residualsignal im Orbit.
<i>arcSelect.m</i>	visualisiert die Beobachtungen und das Residualsignal für einzelne Satellitenbahnen und gibt die Keplerelemente am Bildschirm aus.
<i>DataSelect.m</i>	filtert die in-situ Beobachtungen, wobei einzelne Messwerte oder ganze Bögen (manuell) entfernt werden.

<i>findFlags.m</i>	sucht die kritischen Zeitpunkte der Messungen, welche bereits aus der Vorbereitung durch „flags“ markiert sind. Dies betrifft insbesondere die Zeiträume der Kalibrierungen oder der Orbitintegrationen.
<i>getbase.m</i>	liest eine Datei mit a priori Startwerten für die Parameter der radialen Basisfunktionen ein.
<i>getbounds.m</i>	ermöglicht die Eingabe von Grenzen für eine regionale Selektion. Bislang sind ein geographisches Rechteck, eine sphärische Kappe um einen Zentralpunkt oder die Verwendung aller Daten implementiert.
<i>getreference.m</i>	liest die sphärisch-harmonischen Koeffizienten des Referenzfeldes (im $[\overline{C}_{nm} \setminus \overline{S}_{nm}]$ -Format) ein.
<i>regionBaseSelect.m</i>	selektiert aus einer Struktur an vorgegebenen Basisfunktionen alle Zentren im Interessensgebiet.
<i>regionSelect.m</i>	wählt aus einer Datei die Satellitendaten für ein regionales Gebiet aus und ergänzt gegebenenfalls die Werte. Fehlende Keplerelemente werden aus den Positionen und Geschwindigkeiten im Inertialsystem berechnet.
<i>time2index.m</i>	bestimmt die Anzahl der Beobachtungen je Bahnbogen und die dazugehörigen Indizes.

---

GRADIENTEN_BASIS	– Simulation der Gradienten der Basisfunktionen
<i>compareGrad_dnk2Pn.m</i>	vergleicht die Gradienten der Basisfunktionen aus der Wigner-Darstellung ( <i>grad4dbase.m</i> ) mit der Legendre-Darstellung ( <i>grad4dbasePn.m</i> ) in einem rotierenden Koordinatensystem.
<i>compareGradE_Pn2SHS.m</i>	vergleicht die Gradienten der Basisfunktionen aus der sphärisch-harmonischen Synthese ( <i>grad4baseSH.m</i> ) mit der Legendre-Darstellung ( <i>dbasegradient_v.m</i> ) in einem erdfesten (kartesischen) Koordinatensystem.
<i>grad4baseSH.m</i>	berechnet den Gradienten der Basisfunktionen aus der Ableitung der sphärisch-harmonischen Koeffizienten und deren Synthese im erdfesten Koordinatensystem.
<i>grad4dbase.m</i>	berechnet den Gradienten der radialen Basisfunktionen aus der Wigner-Darstellung in einem rotierenden Koordinatensystem.
<i>grad4dbasePn.m</i>	berechnet den Gradienten der Basisfunktionen aus der Legendre-Darstellung in einem rotierenden Koordinatensystem.

---

GUIS	– grafische Benutzeroberfläche, Eingabefenster etc.
<i>cell2num.m</i>	wandelt die Eingaben (eines grafischen Eingabefensters) vom cell-Format in numerische Werte um, wobei die internen Funktionen <i>cell2mat.m</i> und <i>str2num.m</i> verwendet werden.

<i>getGUIestimation.m</i>	kontrolliert die Eingaben für die Optimierung ( <i>GUIoptimize.m</i> und <i>GUIgenetic.m</i> ) und ergänzt diese gegebenenfalls durch Defaultwerte, welche als globale Variablen vorliegen.
<i>GUIoptimize.m</i>	öffnet ein Fenster, in welchem die Optionen der nichtlinearen Optimierung (Iterationen, Interpolation, Startwerte, Anzahl der Parameter je Basis, ...) eingegeben werden.
<i>GUIgenetic.m</i>	öffnet ein Fenster, in welchem die Optionen für den genetischen Algorithmus (Anzahl und Form der Basisfunktionen, Generationen, Größe der Population, ...) eingegeben werden (Variante von <i>GUIoptimize.m</i> ).
<i>GUIreferenz.m</i>	öffnet ein Fenster, in welchem das Feld der sphärisch-harmonischen Koeffizienten, der Entwicklungsgrad und das zu subtrahierende Normalfeld $U$ eingegeben werden können.
<i>inBase.m</i>	öffnet ein Fenster, in welchem die Parameter der Basisfunktionen mit ersten Kontrollen eingegeben werden.
<i>inGrace.m</i>	ermöglicht die Eingabe der Keplerelemente für zwei Satelliten (vgl. <i>inKepler.m</i> ), insbesondere für die GRACE-Mission. Üblicherweise werden skalare Werte je Mission erwartet, so dass jede Bahn eine Keplerellipse beschreibt. Zurzeit erfolgt keine Kontrolle, ob die Bahnen „ähnlich genug“ für eine Range-Rate-Messung sind!
<i>inKepler.m</i>	ermöglicht die Eingabe der skalaren Keplerelemente einer Satellitenmission und berechnet die Keplerellipse. Anschließend wird die Bahn ins erdfeste System transformiert und auf das Interessensgebiet reduziert.
<i>orb.m</i>	<p>erzeugt die grafische Benutzeroberfläche für das <b>Hauptprogramm</b>. Dieses ermöglicht die Auswahl der einzelnen Programme durch den Cursor. Um die Implementierung zu erleichtern, werden die Funktionen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>orb_basegradient.m</i> (Gradient einer Basisfunktion)</li> <li>• <i>orb_estimate.m</i> (Ausgleichung der Skalierungsfaktoren)</li> <li>• <i>orb_extra.m</i> (z.B. Julianisches Datum aus Tag und Monat)</li> <li>• <i>orb_functions.m</i> (spezielle Funktionen)</li> <li>• <i>orb_gradiometry.m</i> (Line-of-Sight Gradient im Orbit)</li> <li>• <i>orb_potential.m</i> (Potential im Orbit)</li> <li>• <i>orb_rangerate.m</i> (Range-Rate zwischen 2 Satelliten)</li> <li>• <i>orb_search.m</i> (initiale Basiszentren aus den Daten)</li> <li>• <i>orbend.m</i> (Ende des Hauptprogramms)</li> </ul> <p>als „Zwischenschicht“ zwischen dem Hauptprogramm und den eigentlichen Aufrufen eingeführt. Diese Routinen können jeweils für mehrere Teilfunktionen gemeinsam verwendet werden und beinhalten z.B. die Eingabe der Parameter oder die Selektion der Daten.</p>
<i>questreference.m</i>	fragt den Benutzer nach dem Namen des Referenzfeldes und dessen Entwicklungsgrad, falls diese Angabe in der Datei bislang nicht vorhanden ist (oder nicht erkannt wird).

---

<i>savedlg.m</i>	überprüft vor dem Speichern, ob eine Datei mit gleichem Namen bereits existiert. In diesem Fall wird nach einem neuen Namen oder der expliziten Bestätigung zum Überschreiben der Daten gefragt.
LEGENDRE_WIGNER	– Legendre- und Wigner-d-Funktionen sowie deren Produkte
<i>aeqleg.m</i>	liefert die Legendrefunktionen $\bar{P}_{nm}(0)$ am Äquator, wobei für ungerade Werte von $(n - m)$ der Wert Null angenommen wird.
<i>cs2vector.m</i>	separiert die sphärisch-harmonischen Koeffizienten aus dem quadratischen $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format und sortiert diese als Vektoren $\bar{C}_{nm} = [\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \dots]^T$ und $\bar{S}_{nm} = [\bar{S}_{00}, \bar{S}_{10}, \bar{S}_{11}, \bar{S}_{20}, \bar{S}_{21}, \dots]^T$ (vgl. <i>vector2cs.m</i> ).
<i>dklegendre0.m</i>	berechnet rekursiv die unnormierten Legendrepolynome $P_n(\cos \vartheta)$ inklusive der ersten bis dritten Ableitung.
<i>legendre_order1.m</i>	bestimmt die zugeordneten Legendrefunktionen $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$ für die Grade $n = 0, 1, \dots, N$ und eine feste Ordnung $m$ .
<i>legendreP.m</i>	berechnet die zugeordneten Legendrefunktionen $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$ sowie deren 1. und 2. Ableitung für alle Grade $n = 0, 1, \dots, N$ und Ordnungen $m = 0, \dots, n$ . Die Funktionen werden als Matrix ausgegeben, wobei die Winkel $\vartheta$ in Spaltenrichtung variieren, während Grad und Ordnung analog zu den Vektoren $\bar{C}_{nm}$ oder $\bar{S}_{nm}$ in Zeilenrichtung sortiert sind.
<i>LeNorm.m</i>	stellt die Faktoren für den Wechsel der Normierungen der Legendrefunktionen $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \rightarrow \hat{P}_{nm}(\cos \vartheta)$ bereit.
<i>PTR.m</i>	bestimmt aus Grad und Ordnung den Index, um ein vorgegebenes Element aus den Legendrefunktionen oder den sphärisch-harmonischen Koeffizienten im Vektorformat auszuwählen.
<i>PW_dwigner4KM.m</i>	variiert die Rekursion der normierten Wigner-d-Funktionen $\tilde{d}_{km}^n(\beta)$ (vgl. <i>wigner.m</i> ), so dass jeweils die vier Kombinationen der Ordnungen $(\pm k, \pm m)$ gemeinsam bestimmt werden. Die Berechnung erfolgt dabei punktweise für einen skalaren Winkel $\beta$ und alle Grade $n = 0, 1, \dots, N$ .
<i>PW_legendre.m</i>	berechnet die zugeordneten normierten Legendrefunktionen $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$ für eine skalare Kobreite $\vartheta$ und alle Grade und Ordnungen als quadratische Matrix. Diese ist analog zum $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format aufgebaut, wobei wegen der Symmetrie nur die untere Dreiecksmatrix verwendet wird.
<i>PW_SHgrad.m</i>	berechnet den Gradienten eines Potentials aus sphärisch-harmonischen Koeffizienten im erdfesten System für einen einzelnen Punkt.

<i>SHS.m</i>	berechnet eine sphärisch-harmonische Synthese für ein globales Gitter. Dabei werden die Legendrefunktionen und die trigonometrischen Basisfunktionen getrennt berechnet und anschließend durch eine Matrizenmultiplikation kombiniert.
<i>SHSc.m</i>	berechnet eine sphärisch-harmonische Synthese für eine Matrix an Positionen (z.B. Satellitenbahn) gemäß einer Methode mit komplexen Basisfunktionen von L. Cunningham.
<i>SHSdenorm</i>	subtrahiert das ellipsoidische Normalfeld $U$ mit den Koeffizienten $\{J_2, J_4, J_6, J_8\}$ von einem anderen Schwerefeld.
<i>vector2cs.m</i>	ordnet die 2 Vektoren $\bar{C}_{nm} = [\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \dots]^T$ und $\bar{S}_{nm} = [\bar{S}_{00}, \bar{S}_{10}, \bar{S}_{11}, \bar{S}_{20}, \dots]^T$ der sphärisch-harmonischen Koeffizienten im quadratischen $[\bar{C}_{nm} \setminus \bar{S}_{nm}]$ -Format an (vgl. <i>cs2vector.m</i> ).
<i>wigner.m</i>	berechnet rekursiv die normierten Wigner-d-Funktionen $\tilde{d}_{km}^n(\beta)$ für die Grade $n = 0, 1, \dots, N$ und die beiden (skalaren) Ordnungen $(k, m)$ .
<i>wignerD.m</i>	visualisiert die Wigner-D-Funktionen (= Produkt aus Wigner-d-Funktion und 2 Exponentialfunktionen) für die Ordnungen $(k, m)$ und den Grad $n$ .

---

LOS_GRADIOMETRIE	– Simulation und Analyse der Line-of-Sight Gradiometrie
<i>compareLOS_dnkm2Pn.m</i>	vergleicht die Line-of-Sight Gradienten und deren Ableitung nach den Basisparametern aus der Wigner-Darstellung ( <i>LoS4dBase.m</i> ) mit der Legendre-Darstellung ( <i>LoS4dBasePn.m</i> ).
<i>LoS4dBase.m</i>	berechnet die LOS-Gradienten und deren Ableitung nach den Basisparametern in der Wigner-Darstellung. Für die Erdrotation wird nur die Drehung um die $z$ -Achse berücksichtigt und die Formel ist nur für Kreisbahnen exakt gültig!
<i>LoS4dBasePn.m</i>	berechnet die Line-of-Sight Gradienten und deren Ableitung nach den Basisparametern in der Legendre-Darstellung. Die Berechnung ist allgemein gültig, allerdings ist – in der Ableitung nach den Positionen des Zentrums – bislang nur eine Rotation der Erde um die $z$ -Achse implementiert.
<i>LoS4estimateSkala.m</i>	schätzt die linearen Skalierungsfaktoren durch eine vermittelnde Ausgleichung. Die Designmatrix mit den Ableitungen wird durch ein anderes Programm ( <i>LoS4GRIDestimation.m</i> , <i>LoS4SOLVestimation.m</i> oder <i>HillObs2GA.m</i> ) vorher bestimmt.
<i>LoS4GA3.m</i>	wertet den Fitnesswert und die Residuen der LOS-Gradiometrie in der Legendre-Darstellung für den hybriden genetischen Algorithmus aus. Die nichtlinearen Parameter (Form und Position) werden durch den genetischen Algorithmus bestimmt, während die Skalierungsfaktoren durch eine lineare Ausgleichung geschätzt werden.



<i>LoS4GRIDestimation.m</i>	generiert die Designmatrix für das lineare Problem der Basisfunktionen mit vorgegebenen Positionen und Formparametern.
<i>LoS4numeric.m</i>	kontrolliert die Line-of-Sight Gradienten durch eine (einfache) numerische Differentiation des Potentials nach den Bahnelementen.
<i>LoS4Residual4.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung aller Parameter aus der Line-of-Sight Gradiometrie.
<i>LoS4Residual3.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Basiszentren und der Skalierung der Basisfunktionen aus der Line-of-Sight Gradiometrie. Für die Formparameter werden die Startwerte der Optimierung festgehalten.
<i>LoS4Residual2.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Formparameter und der Skalierungsfaktoren der Basisfunktionen aus der Line-of-Sight Gradiometrie. Für die Positionen der Basiszentren werden die Startwerte der Optimierung festgehalten.
<i>LoS4Residual1.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Formparameter der Basisfunktionen aus der Line-of-Sight Gradiometrie. Für die Positionen der Basiszentren werden die Startwerte der Optimierung festgehalten, während für die Skalierungsfaktoren in jedem Schritt ein lineares Ausgleichungsproblem gelöst wird.
<i>LoS4SOLVestimation.m</i>	führt eine nichtlineare Optimierung der Basisparameter für die (residualen) Line-of-Sight Gradienten im Orbit durch. Im residualen Signal werden durch einen Algorithmus der Bildverarbeitung ( <i>search-Extrema2.m</i> ) mögliche Positionen gesucht und zusammen mit einem vorgegebenen Startwert für die Formparameter eine Skalierung für jede Basisfunktion geschätzt. Diese Werte werden gemeinsam durch ein iteratives Trust-Region-Verfahren ( <i>lsqnonlin.m</i> ) verbessert und am Ende kontrolliert.
<i>pLoS4SOLVestimation.m</i>	variiert die nichtlineare Optimierung der Basisparameter aus <i>LoS4SOLVestimation.m</i> , indem die a priori Startwerte vorgegeben werden.

---

POTENTIAL_ORBIT	– Simulation und Analyse der Potentialwerte im Orbit
<i>compare_dnk2Pn.m</i>	vergleicht das Potential im Orbit und dessen Ableitung nach den Basisparametern aus der Wigner-Darstellung ( <i>PiO4dBase.m</i> ) mit der Legendre-Darstellung ( <i>PiO4dBasePn.m</i> )
<i>compare_SHS2Pn.m</i>	vergleicht das Potential im Orbit aus der Legendre-Darstellung ( <i>PiO4dBasePn.m</i> ) mit einer sphärisch-harmonischen Synthese des Feldes.

<i>PiO4dBase.m</i>	berechnet das Potential und dessen Ableitungen nach den Basisparametern in der Wigner-Darstellung. Für die Erdrotation wird nur die Drehung um die $z$ -Achse berücksichtigt und die Formel ist nur für Kreisbahnen exakt gültig!
<i>PiO4dBasePn.m</i>	berechnet das Potential und dessen Ableitungen nach den Basisparametern in der Legendre-Darstellung. Die Berechnung ist allgemein gültig, allerdings ist – in der Ableitung nach den Positionen des Zentrums – bislang nur eine Rotation der Erde um die $z$ -Achse implementiert.
<i>PiO4estimateSkala.m</i>	schätzt die linearen Skalierungsfaktoren durch eine vermittelnde Ausgleichung. Die Designmatrix mit den Ableitungen wird durch ein anderes Programm ( <i>PiO4GRIDestimation.m</i> , <i>PiO4SOLVestimation.m</i> oder <i>HillObs2GA.m</i> ) vorher bestimmt.
<i>PiO4GA3.m</i>	wertet den Fitnesswert und die Residuen des Energieintegrals in der Legendre-Darstellung für den hybriden genetischen Algorithmus aus. Die nichtlinearen Parameter (Form und Position) werden durch den genetischen Algorithmus bestimmt, während die Skalierungsfaktoren durch eine lineare Ausgleichung geschätzt werden.
<i>PiO4GRIDestimation.m</i>	generiert die Designmatrix für das lineare Problem der Basisfunktionen mit vorgegebenen Positionen und Formparametern.
<i>PiO4reference.m</i>	berechnet das Potential eines Referenzfeldes entlang der Satellitenpositionen durch eine sphärisch-harmonische Synthese.
<i>PiO4Residual4.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung aller Parameter aus dem Energieintegral.
<i>PiO4Residual3.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Basiszentren und der Skalierung der Basisfunktionen aus dem Energieintegral. Für die Formparameter werden die Startwerte der Optimierung festgehalten.
<i>PiO4Residual2.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Formparameter und der Skalierung der Basisfunktionen aus dem Energieintegral. Für die Positionen der Basiszentren werden die Startwerte der Optimierung festgehalten.
<i>PiO4Residual1.m</i>	berechnet die Residuen und die Jacobi-Matrix in der Legendre-Darstellung für die nichtlineare Optimierung der Formparameter der Basisfunktionen aus dem Energieintegral. Für die Positionen der Basiszentren werden die Startwerte der Optimierung festgehalten, während für die Skalierungsfaktoren in jedem Schritt ein lineares Ausgleichungsproblem gelöst wird.

---

<i>PiO4SOLVestimation.m</i>	führt eine nichtlineare Optimierung der Basisparameter für das (residuale) Potential im Orbit durch. Im residualen Signal werden durch einen Algorithmus der Bildverarbeitung ( <i>searchExtrema2.m</i> ) mögliche Positionen gesucht und zusammen mit einem vorgegebenen Startwert für die Formparameter eine Skalierung für jede Basisfunktion geschätzt. Diese Werte werden gemeinsam durch ein iteratives Trust-Region-Verfahren ( <i>lsqnonlin.m</i> ) verbessert und am Ende kontrolliert.
<hr/>	
<i>RANGE_RATE</i>	– Analyse der Range-Rate mit dem geschlossenen Ansatz
<i>compareRR_dnk2var.m</i>	vergleicht die partiellen Ableitungen der Range-Rate nach den Basisparametern aus der geschlossenen Formel im Hill-System ( <i>RRH4partial.m</i> ) mit der numerischen Variation der Konstanten ( <i>RRvar4Constants.m</i> ) und dem Anfangswertproblem ( <i>varEq_Rangerate4.m</i> ).
<i>dxHILL2dbase.m</i>	differenziert die Positionsänderung aufgrund des residualen Potentials (in der Wigner-Darstellung) nach den Basisparametern. Dabei wird die Hill-Differentialgleichung im rotierenden Koordinatensystem durch eine Laplace-Transformation geschlossen gelöst und die Bahnänderungen ins Inertialsystem übertragen.
<i>iLaplace_Hill.m</i>	berechnet die inverse Laplace-Transformation für den zeitabhängigen Anteil der Bahnabweichungen im Hill-System. Die endgültige Summation bzw. die Berechnung der Range-Rate erfolgt anschließend im Programm <i>dxHILL2dbase.m</i> .
<i>pRRH4solvestimation.m</i>	führt eine nichtlineare Optimierung der Basisparameter aus der Range-Rate durch. Im Gegensatz zu den in-situ Messungen ist hier keine Bestimmung der Startwerte aus den Extremwerten der Daten möglich. Diese müssen daher durch eine andere Beobachtung (Energieintegral, LOS-Gradiometrie, ...) oder eine globale Suchstrategie (z.B. über den genetischen Algorithmus) bestimmt werden. Anschließend werden die Parameter über ein Trust-Region-Verfahren verbessert, wobei im Gegensatz zu den anderen Beobachtungen in jedem Schritt eine Orbitintegration über dem verbesserten Feld durchgeführt wird.
<i>rangerate.m</i>	berechnet aus den relativen Positionen und Geschwindigkeiten der beiden Satelliten im Inertialsystem die Range-Rate sowie eventuell die partielle Ableitung nach einem beliebigen Parameter $p_\ell$ mit der Kettenregel.
<i>RRH4partial.m</i>	approximiert die partiellen Ableitungen der Range-Rate nach den Parametern der Basisfunktionen mit den geschlossenen Formeln des Hill-Systems. Diese beinhalten implizit eine Rotation der Erde mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ und eine kreisförmige Referenzbahn.
<i>RRvarResidual4.m</i>	berechnet die Residuen und die approximierte Jacobi-Matrix für die nichtlineare Optimierung aller Parameter aus der Range-Rate. Die Berechnung erfolgt über die numerische Variation der Konstanten.

---

<i>timePerArc.m</i>	bestimmt die „Zeit pro Bogen“ $\tau$ für die Laplace-Transformation.
<hr/>	
VISUAL	– Visualisierung und Statistik
<i>lambdathetaBox.m</i>	bestimmt ein regionales Gebiet für die 2D-Darstellung, so dass alle Satellitendaten enthalten sind.
<i>NaN2vec.m</i>	detektiert Sprungstellen im Zeitvektor (Annahme: gleiche Abstände) und belegt das letzte Element pro Bogen durch NaN („not a number“), um eine grafische Verbindung der einzelnen Bahnen zu vermeiden.
<i>plotbases.m</i>	stellt die optimierten und die versteckten Basisfunktionen inklusive der Form- und Skalierungsparameter in einer Projektion auf die Erdoberfläche dar.
<i>plotorbitX.m</i>	visualisiert Orbitdaten für mehrere Größen (z.B für Beobachtung, Approximation und Differenz) in einer einheitlichen Projektion auf der Erdoberfläche.
<i>plotsphere2.m</i>	visualisiert den Orbit zusammen mit einem eindimensionalen Signal (Potential, LOS-Gradient, ...) in einem dreidimensionalen Koordinatensystem inklusive der skalierten (Erd-)Kugel.
<i>plotStatistic.m</i>	visualisiert die statistischen Werte von Signal, Approximation und Differenz (Extremwerte, Standardabweichung, Korrelation, ...).
<i>relFehler.m</i>	berechnet den relativen Fehler zweier Größen, wobei sehr kleine Werte aus numerischen Gründen ausgeklammert werden.
<i>shplot1.m</i>	stellt den Betrag der sphärisch-harmonischen Koeffizienten (bzw. deren Logarithmus) dar. Die Koeffizienten werden dabei mit <i>cs2sc.m</i> in Form eines Dreiecks angeordnet.
<i>sphereSystem2.m</i>	wechselt die Darstellungen der Länge zwischen den äquivalenten Systemen $[-180^\circ/180^\circ]$ und $[0^\circ/360^\circ]$ . Die meisten Grafiken benötigen das System $[-180^\circ/180^\circ]$ , in welchem auch die Küstenlinien und ggf. die Gewässer vorliegen.
<i>statistic.m</i>	analysiert ein eindimensionales Signal und gibt die statistischen Werte (Extremwerte, Größe des Intervalls, Mittelwert und Standardabweichung) am Bildschirm aus. Wird ein zweiter Vektor eingegeben, so wird dieser als Approximation des Signals behandelt und auch die Differenz und die Korrelation untersucht.

---

EXTERNE_PROGRAMME	– Programme und Daten anderer Autoren
<i>cart2kep.m</i>	berechnet alle Keplerelemente aus den raumfesten Koordinaten nach den Formeln aus Kaula. Bei geodätischen Missionen wird häufig eine sehr kleine Exzentrizität angestrebt, was zu einer schlechten Trennung von Anomalie und Perigäumsabstand – und im Extremfall auch zu komplexen Winkeln – führen kann. Autor: Nico Sneeuw (1996)
<i>coast3.mat</i>	enthält die Küstenlinien der Kontinente und der großen Inseln.
<i>cs2sc.m</i>	ordnet die sphärisch-harmonischen Koeffizienten im $[\sqrt{S_{nm}} \overline{C_{nm}}\backslash]$ -Format an, was für den maximalen Grad $N$ eine $[N + 1 \times 2N + 1]$ -Matrix liefert. Die Zeilen geben jeweils den Grad (+1) wieder, während die Spalten die verschiedenen Ordnungen – getrennt nach Sinus- und Kosinustermen – beinhalten. Autoren: Nico Sneeuw (1994)/Matthias Weigelt (1999)
<i>date2jul.m</i>	berechnet das Julianische Datum aus Jahr, Monat, Tag und der Uhrzeit. Autor: Christian Gerlach (2003)
<i>extrema.m</i>	bestimmt die lokalen Extremwerte eines eindimensionalen Signals unter der Berücksichtigung von Datenlücken. Autor: Adrián Vargas Aguilera (2007) <a href="http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12275">www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12275</a>
<i>extrema2.m</i>	bestimmt die lokalen Extremwerte in einem zweidimensionalen Signal (auf einem regelmäßigen Gitter). Die Suche wird innerhalb der Matrix der Daten in Zeilen- und Spaltenrichtung, sowie in Richtung der Diagonalen durchgeführt. Autor: Adrián Vargas Aguilera (2007) <a href="http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12275">www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12275</a>
<i>kep2cart.m</i>	bestimmt aus den Keplerelementen die raumfesten Koordinaten. Autor: Nico Sneeuw (1996)
<i>kepler.m</i>	bestimmt iterativ die exzentrische Anomalie aus der Keplergleichung $M = E - e \sin E$ . Autor: Nico Sneeuw (1996)
<i>multmatvek.m</i>	rotiert eine Matrix von Positionen um eine beliebige Achse. Autor: Mattias Weigelt (2004)
<i>plotcol.m</i>	visualisiert mehrdimensionale Signale, wobei die ersten Vektoren als Koordinaten und der letzte Vektor für die Farbcodierung verwendet werden. Autor: Nico Sneeuw (1996)
<i>rot.m</i>	rotiert eine Matrix an Positionen (und Geschwindigkeiten) um eine Achse des Koordinatensystems. Autor: Nico Sneeuw (1996)
<i>sphdist.m</i>	berechnet den sphärischen Abstand und das Azimut zwischen zwei Datensätzen aus sphärischen Koordinaten. Autor: Matthias Weigelt (2005)

---

VariationEquation	– Lösung der Variationsgleichungen von Heng Zhu
<i>dbasegradient.m</i>	differenziert den Gradienten der radialen Basisfunktionen in der Legendre-Darstellung nach einem Parameter $p_\ell$ in einer punktwweisen Implementierung für die Lösung der Variationsgleichungen als Anfangswertproblem (vgl. <i>varEq_Rangerate4.m</i> ).
<i>dbasegradient_v.m</i>	differenziert den Gradienten der radialen Basisfunktionen in der Legendre-Darstellung nach allen Parametern in einer vektorisierten Implementierung für die numerische Variation der Konstanten (vgl. <i>RRvar4Constants.m</i> ).
<i>PW_SHtensor.m</i>	berechnet den Tensor des Referenzfeldes durch eine sphärisch-harmonische Synthese. Die Implementierung erfolgt für die Orbitintegration jeweils für einen Zeitpunkt (punktweise) und verzichtet auf die üblichen Kontrollen. Für kompaktere Formeln wird die Darstellung durch komplexe Kugelflächenfunktionen verwendet.
<i>RRvar4Constants.m</i>	löst die Variationsgleichungen bzgl. der Parameter der Basisfunktionen durch die numerische Variation der Konstanten. Die notwendige Integration ist durch die Trapezregel realisiert, was eine langsame Änderung oder eine hohe Abtastung erforderlich macht.
<i>varEq_Rangerate4.m</i>	löst die Variationsgleichung für einen Parameter $p_\ell$ der radialen Basisfunktionen als Anfangswertproblem.
<i>varEq_Rangerate_homo.m</i>	löst den homogenen Anteil der Variationsgleichung für das Referenzfeld mit den Start-Vektoren $\vec{\zeta}_1$ bis $\vec{\zeta}_6$ .
<i>vector2cis.m</i>	ordnet die Vektoren $\vec{C}_{nm} = [\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \dots]^\top$ und $\vec{S}_{nm} = [\bar{S}_{00}, \bar{S}_{10}, \bar{S}_{11}, \bar{S}_{20}, \bar{S}_{21}, \dots]^\top$ der sphärisch-harmonischen Koeffizienten als komplexe untere Dreiecksmatrix $[\vec{C}_{nm} - i\vec{S}_{nm} \setminus \mathbf{0}]$ an. Die Rechenzeit wird dabei nur unwesentlich verlängert, während die Formeln in der komplexen Darstellungen eleganter zu implementieren sind.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Programme für die Analyse regionaler Daten mit optimierten Basisfunktionen entwickelt wurden. Daraus ergeben sich gewisse Einschränkungen bezüglich der Anzahl der Datenpunkte oder der Basisfunktionen, so dass z.B. für eine globale Anwendung eine Überarbeitung erforderlich sein kann.

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Repräsentation des inertialen, des erdfesten und des Satellitensystems . . . . .	20
2.2.	Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Koordinaten im erdfesten System . . .	22
2.3.	Bahnelemente des idealen Keplerproblems in der Bahnebene und im Inertialsystem . . . . .	25
3.1.	Abstand zweier Punktmassen in „polaren“ Koordinaten $\{r, r_Q, \varpi_Q\}$ . . . . .	32
3.2.	Zonale, sektorielle und tesserale Kugelflächenfunktionen $\bar{Y}_{4,m}(\lambda, \vartheta) = \bar{P}_{4,m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$ .	37
3.3.	Wigner-d-Funktionen zum Grad $n = 1$ . . . . .	50
3.4.	Rotation einer Kugelflächenfunktion durch Wigner-D-Funktionen . . . . .	52
4.1.	Beispiele radialer Basisfunktionen für den zweidimensionalen Fall . . . . .	57
4.2.	Approximation einer zweidimensionalen Funktion durch radiale Basisfunktionen . . . . .	58
4.3.	Beispiele für sphärische radiale Basisfunktionen auf der Einheitskugel . . . . .	67
4.4.	Eindimensionale Darstellung der radialen Basisfunktionen mit $\sigma(n) \in \{0.90^n, 0.95^n, 0.99^n\}$	69
4.5.	Eindimensionale Darstellung der radialen Basisfunktionen für verschiedene minimale Grade $n_0$	74
4.6.	Radiale Basisfunktionen für die Legendre-Koeffizienten $\sigma(n) = 0.95^n$ auf der Einheitskugel .	75
5.1.	Beiträge zum Energieintegral und deren Differenz zur kinetischen Energie aus Weigelt (2007)	80
5.2.	Residualpotential einer radialen Basisfunktion im Orbit . . . . .	82
5.3.	Abklingen des Residualpotentials für verschiedene Bahnradien . . . . .	82
5.4.	Satellitenbahn und Keplerelemente für eine Kreisbahn . . . . .	84
5.5.	Messprinzip der Line-of-Sight Gradiometrie aus Weigelt (2010) . . . . .	87
5.6.	Residualer LOS-Gradient in Flugrichtung . . . . .	91
5.7.	Abklingen des LOS-Gradienten einer Basisfunktion mit der Flughöhe . . . . .	91
6.1.	Beobachtungsmodell von GRACE . . . . .	100
6.2.	Schematische Darstellung des Hill-Systems . . . . .	106
6.3.	Gradient einer radialen Basisfunktion für einen GRACE-ähnlichen Orbit . . . . .	113
6.4.	Beitrag der inhomogenen Lösung zur Bahnänderung im Hill-System . . . . .	120
6.5.	Wiederholung: Keplerelemente einer Kreisbahn . . . . .	125
7.1.	Schematische Darstellung einer L-Kurve aus Kusche (2002) . . . . .	135
7.2.	Symbolische Darstellung der evolutionären Prinzipien aus Raizner (2008) . . . . .	138
7.3.	Lösung eines Testfeldes durch einen hybriden genetischen Algorithmus . . . . .	139
7.4.	Ablauf der Optimierung für die in-situ Beobachtungen (Potential und LOS-Gradient) . . . . .	140
7.5.	Eingabefenster zur nichtlinearen Optimierung . . . . .	141
7.6.	Startwerte der Positionen aus der Interpolation der Potentialwerte . . . . .	144
7.7.	Eindimensionale Reflective-Transformation aus Coleman (1992) . . . . .	149
8.1.	Ableitungen des Potentials nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter . . . . .	152
8.2.	Ableitungen des Potentials nach der Länge und der Kobreite . . . . .	153
8.3.	Ableitungen des Potentials einer Basisfunktion in der räumlichen Darstellung . . . . .	154
8.4.	Ableitungen des LOS-Gradienten in der räumlichen Darstellung . . . . .	157
8.5.	Ableitungen des LOS-Gradienten nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter . . . . .	158
8.6.	Ableitungen des LOS-Gradienten nach der Länge und der Kobreite . . . . .	159
8.7.	Ableitungen der Range-Rate nach dem Skalierungsfaktor und dem Formparameter . . . . .	161
8.8.	Ableitungen der Range-Rate nach der Länge und der Kobreite . . . . .	162

8.9. Ableitungen der Range-Rate in einer räumlichen Darstellung . . . . .	163
8.10. Simulierte in-situ Beobachtungen . . . . .	165
8.11. Positionen und Formparameter der optimierten radialen Basisfunktionen . . . . .	166
8.12. Signal, Approximation und Differenz für das Energieintegral . . . . .	169
8.13. Signal, Approximation und Differenz für den LOS-Gradienten . . . . .	170
8.14. Rekonstruktion der Potentialwerte aus der LOS-Gradiometrie in der Closed-Loop-Simulation .	171
8.15. Signal, Approximation und Differenz der Range-Rate in der Closed-Loop Simulation . . . . .	173
8.16. Potentialwerte aus dem Energieintegral für einen simulierten GRACE-Satelliten . . . . .	174
8.17. Kombination aller Testfelder zu einer globalen Lösung . . . . .	175
8.18. Kombination der Testfelder mit angepassten Gebieten . . . . .	176
8.19. Standardabweichungen für die 66 Testfelder des Energieintegrals . . . . .	178
8.20. Korrelationen der 66 Testfelder des Energieintegrals . . . . .	178
8.21. Maxima und Minima für die 66 Testfelder des Energieintegrals . . . . .	179
8.22. Relative Standardabweichungen der 66 Testfelder des Energieintegrals . . . . .	181
8.23. Anzahl der Basisfunktionen je Testgebiet für das Energieintegral . . . . .	182
8.24. LOS-Gradienten aus der Simulation der GRACE-Mission . . . . .	182
8.25. Kombination aller Testfelder zu einer globalen Lösung . . . . .	183
8.26. Kombination der Testfelder mit angepassten Gebieten . . . . .	184
8.27. Standardabweichungen für die 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie . . . . .	185
8.28. Relative Standardabweichungen der 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie . . . . .	186
8.29. Korrelationen der 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie . . . . .	188
8.30. Maxima und Minima für die 66 Testfelder der LOS-Gradiometrie . . . . .	189
8.31. Anzahl der Basisfunktionen je Testgebiet für die LOS-Gradiometrie . . . . .	190
A.1. Pseudocode für die Auswertung der Wigner-Darstellung . . . . .	199
B.1. Grafische Benutzeroberfläche des Hauptprogramms <i>orb.m</i> für den Aufruf der Funktionen . . . .	202



# Tabellenverzeichnis

3.1. Wigner-d-Funktionen $d_{km}^n(\beta)$ zum Grad $n = 1$ aus Varshalovich (1988) . . . . .	49
3.2. Wigner-d-Funktionen $d_{mk}^n(\beta)$ zum Grad $n = 2$ aus Varshalovich (1988) . . . . .	49
4.1. Bekannte radiale Basisfunktionen im euklidischen Raum . . . . .	56
6.1. Laplace-Transformationen für einige elementare Funktionen . . . . .	109
8.1. Rechenzeiten des Potentials in der Wigner- und Legendre-Darstellung . . . . .	155
8.2. Rechenzeiten des LOS-Gradienten in der Wigner- und Legendre-Darstellung . . . . .	156
8.3. Rechenzeiten für die partiellen Ableitungen der Range-Rate . . . . .	164
8.4. Startwerte der GRACE-Simulation . . . . .	164
8.5. Parameter der versteckten Basisfunktionen in der Closed-Loop-Simulation . . . . .	165
8.6. Optimierte Parameter in der Closed-Loop-Simulation aus dem Energieintegral . . . . .	167
8.7. Optimierte Parameter in der Closed-Loop-Simulation aus der LOS-Gradiometrie . . . . .	168
8.8. Statistische Maße der Closed-Loop-Simulation . . . . .	171
8.9. Parameter der Closed-Loop-Simulation für den Range-Rate Ansatz . . . . .	172
8.10. Statistische Werte des Energieintegrals . . . . .	177
8.11. Statistische Maße des Energieintegrals für „polferne“ Gebiete . . . . .	180
8.12. Statistische Maße des Energieintegrals für „polare“ Regionen . . . . .	181
8.13. Statistische Werte der LOS-Gradiometrie . . . . .	185
8.14. Statistische Maße der LOS-Gradiometrie für „polferne“ Gebiete . . . . .	187
8.15. Statistische Maße der LOS-Gradiometrie für „polare“ Regionen . . . . .	188
A.1. Wigner-Darstellung der Schwerefunktionale im Orbit . . . . .	193



# Literaturverzeichnis

- Alt, W. (2002). *Nichtlineare Optimierung*. Vieweg+Teubner.
- Antoni, M., Borkowski, A., Keller, W., und Owczarek, M. (2009a). Verification of localized GRACE solutions by the Polish quasi-geoid. *Geodezja i Kartografia/Geodesy and Cartography*, 58:89–104. Warszawa.
- Antoni, M., Keller, W., und Weigelt, M. (2008). Regionale Schwerefeldmodellierung durch Slepian- und radiale Basisfunktionen. *ZfV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 133(2):120–129. Wißner Verlag, Augsburg.
- Antoni, M., Keller, W., und Weigelt, M. (2009b). Recovery of residual GRACE observations by radial base functions. VII. Hotine-Marussi Symposium on Theoretical Geodesy, Rom (Italy), 6 – 10 Juli (Poster).
- Artusi, A. und Wilkie, A. (2001). Color Printer Characterization Using Radial Basis Function Networks. In *Proceedings Colour Imaging Conference: Device-Independent Colour, Colour Hardcopy, and Graphics Arts VI, IST&SPIE, Electronic Imaging*, S. 70–80. SPIE.
- Ballani, L. (1988). Partielle Ableitungen und Variationsgleichung zur Modellierung von Satellitenbahnen und Parameterbestimmung. *Vermessungstechnik*, 36:192–194.
- Balmino, G., Schrama, E. J., und Sneeuw, N. (1996). Compatibility of first-order circular orbit perturbations theories; consequences for cross-track inclination functions. *Journal of Geodesy*, 70(9):544–561.
- Barthelmes, F. (1986). *Untersuchungen zur Approximation des äußeren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen*. Dissertation, Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde 92, Potsdam.
- Bartsch, H.-J. (1999). *Taschenbuch Mathematischer Formeln (18. Auflage)*. Fachbuchverlag Leipzig.
- Beutler, G. (2005). *Methods of Celestial Mechanics - Volume 1*. Springer.
- Branch, M. A., Coleman, T., und Li, Y. (1999). A subspace, interior, and conjugate gradient method for large-scale bound-constrained minimization problems. *SIAM J. SCI. COMPUT.*, 21:1–23.
- Carr, J. C., Bearson, R., Cherrie, J. B., Mitchell, T. J., Fright, W. R., McCallum, B. C., und Evans, T. R. (2001). Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'01 Conf. Proc.)*, S. 67–76. Springer.
- Chun-tao, M., Xiao-xia, L., und Li-yong, Z. (2007). Radial Basis Function Neural Network Based on Ant Colony Optimization. *International Conference on Computational Intelligence and Security Workshops*, S. 59–62.
- Coleman, T., Branch, M. A., und Grace, A. (1999). *Optimization Toolbox For Use with MATLAB User's Guide Version 2*. The Mathworks Inc.
- Coleman, T. und Li, Y. (1992). A reflective Newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, 6:1040–1058.
- CSR (2010). Grace – Gravity Recovery And Climate Experiment. <http://www.csr.utexas.edu/grace/> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Doetsch, G. (1956). *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. R. Oldenbourg, München.
- Drinkwater, M. R., Floberghagen, R., Haagmans, R., Muzi, D., und Popescu, A. (2003). GOCE: ESA's first Earth Explorer Core Mission. In Beutler, G., Drinkwater, M. R., Rummel, R., und von Steiger, R., (Hrsg.), *Earth Gravity Field from Space - from Sensors to Earth Science*, Volume 18. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- du Toit, W. (2008). Radial Basis Function Interpolation. Masterarbeit, University of Stellenbosch.
- Eicker, A. (2008). *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- Fengler, M. J., Freedon, W., und Michel, V. (2004). The Kaiserslautern multiscale geopotential model SWITCH-03 from orbit perturbations of the satellite CHAMP and its comparison to the models EGM96, UCPH2002\_02\_0.5, EIGEN-1s and EIGEN-2. *Geophysical Journal International*, 157:499 – 514.
- Geiger, C. und Kanzow, C. (1999). *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin, Heidelberg u.a.
- GFZ (2010a). GFZ German Research Centre for Geosciences – The CHAMP Mission. <http://op.gfz-potsdam.de/champ/> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- GFZ (2010b). The GRACE Mission. <http://www.gfz-potsdam.de/portal/gfz/Struktur/Departments/Department+1/sec12/projects/grace> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- GOCE-Projektbüro (2010). GOCE. <http://www.goce-projektbuero.de/goce.html> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Gruber, F.-J. und Meckenstock, H. J. (2000). *Formelsammlung für das Vermessungswesen*. Dümmler Bonn.
- Hardy, R. L. (1971). Multiquadratic equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76:1905–1915.
- Haupt, R. L. und Haupt, S. E. (2004). *Practical genetic algorithms (2. Edition)*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

- Jekeli, C. (2005). Spline Representation of Functions on a Sphere for Geopotential Modeling. Technical Report 475, Ohio State University, Columbus, Ohio.
- JPL (2010). Grace Tellus - Gravity Recovery And Climate Experiment. <http://grace.jpl.nasa.gov/> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Kahmen, H. (1997). *Vermessungskunde (19. Auflage)*. Walter de Gruyter.
- Kaula, W. M. (2000). *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy (2. Auflage)*. Dover Publ Inc.
- Keller, W. (2005a). Dynamische Satellitengeodäsie. Vorlesungsunterlagen an der Universität Stuttgart.
- Keller, W. (2006). Eine Darstellung des regionalen Schwerefeldes in lokalen Basisfunktionen für die Satellitengradiometrie. Geodätische Woche/Intergeo in München (Germany).
- Keller, W. (2007). Self-adaptive choice of a system of localizing base function for regional gravity field recovery. IUGG XXIV General Assembly (IUGG 2007), Perugia, Italy, 2.-13.7.2007 (Poster).
- Keller, W. und Sharifi, M. A. (2005b). Satellite gradiometry using a satellite pair. *Journal of Geodesy*, 78:544–557.
- Klees, R. und Wittwer, T. (2008). A data-adaptive design of a spherical basis function network for gravity field modelling. In *Dynamic Planet Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools IAG Symposium Cairns, Australia 2005*, S. 322–328.
- Koop, R. (1993). Global gravity modelling using satellite gravity gradiometry. Technical report, Delft.
- Kostelec, P. J. und Rockmore, D. N. (2003a). FFTs on the Rotation Group. <http://www.cs.dartmouth.edu/~geelong/soft/03-11-060.pdf> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Kostelec, P. J. und Rockmore, D. N. (2003b). SOFT: SO(3) Fourier Transforms. [http://www.cs.dartmouth.edu/~geelong/soft/soft20\\_fx.pdf](http://www.cs.dartmouth.edu/~geelong/soft/soft20_fx.pdf) (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Kusche, J. (2002). *Inverse Probleme bei der Gravitationsfeldbestimmung mittels SST- und SGG-Satellitenmissionen*. Habilitation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. DGK, Reihe C, Nr. 548.
- Louis, A. K. (1989). *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. B.G. Teubner Stuttgart.
- Mayer-Gürr, T. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- Meyer, U. (2005). *Möglichkeiten und Grenzen der Hill-Gleichungen für die Schwerefeldbestimmungen*. Dissertation, Technische Universität München.
- Nikiforov, A. F. und Uvarov, V. B. (1988). *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, Basel.
- Nocedal, J. und Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization (2. Edition)*. New York, Springer.
- Raizner, C. (2008). A regional analysis of GNSS-Levelling. Diplomarbeit, Universität Stuttgart.
- Reigber, C., Lühr, H., Grunwaldt, L., Förste, C., König, R., Massmann, H., und Falck, C. (2006). CHAMP Mission 5 Years in Orbit. In Flury, J., Rummel, R., Reigber, C., Rothacher, M., Boedecker, G., und Schreiber, U., (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*, S. 3 – 42. Springer, Berlin.
- Rothacher, M. (2004). Mathematische und physikalische Grundlagen der Erdmessung. Vorlesungsunterlagen an der Technischen Universität München.
- Rummel, R. (2002). Erdmessung. Vorlesungsunterlagen an der Technischen Universität München.
- Rummel, R., Gruber, T., Flury, J., und Schlicht, A. (2009). ESA's Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer GOCE. *zfv - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 134(3):125–130. Wißner Verlag, Augsburg.
- Rummel, R., Reigber, C., und Ilk, K.-H. (1978). The use of satellite to satellite tracking for gravity parameter recovery. In *Proceedings of the European Workshop on Space Oceanography, Navigation and Geodynamics (SONG), ESA SP-137*, S. 153–161.
- Scheinert, M. (1996). *Zur Bahndynamik niedrigfliegender Satelliten*. Dissertation, Universität Stuttgart. DGK, Reihe C, Nr. 435.
- Schmidt, M. (2001). *Grundprinzipien der Wavelet-Analyse und Anwendungen in der Geodäsie*. Shaker Verlag.
- Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sánchez, L., und Han, S.-C. (2007). Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy*, 81:17–38.
- Schwarz, H. R. und Köckler, N. (2006). *Numerische Mathematik (6. Auflage)*. B.G. Teubner Verlag.
- Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy (2. Edition)*. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Sharifi, M. A. (2004). Satellite gradiometry using a satellite pair. Diplomarbeit, Universität Stuttgart.
- Sharifi, M. A. (2006). *Satellite to Satellite Tracking in the Space-wise Approach*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Sigl, R. (1973). *Einführung in die Potentialtheorie*. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe.
- Sneeuw, N. (2000). *A Semi-Analytical Approach to Gravity Field Analysis*. Dissertation, Technische Universität München.
- Sneeuw, N. (2006). Dynamic Satellite Geodesy. Vorlesungsunterlagen an der Universität Stuttgart.
- Talman, J. D. (1968). *Special functions – a group theoretic approach*. W. A. Benjamin.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., und Reigber, C. (2004). The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission Overview and Early Results. *Geophys. Res. Lett.*, 31(9).

- Tenzer, R. und Klees, R. (2008). The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 52:287–304.
- The MathWorks (2009). Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox™ 2 – User’s Guide. [http://www.mathworks.de/help/pdf\\_doc/gads/gads\\_tb.pdf](http://www.mathworks.de/help/pdf_doc/gads/gads_tb.pdf).
- The MathWorks (2010). Optimization Toolbox™ 5 – User’s Guide. [http://www.mathworks.de/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/optim/optim\\_tb.pdf](http://www.mathworks.de/access/helpdesk/help/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf).
- Torge, W. (2002). *Geodäsie*. Gruyter.
- Tsai, Y.-T. und Shih, Z.-C. (2006). All-Frequency Precomputed Radiance Transfer using Spherical Radial Basis Functions and Clustered Tensor Approximation. *ACM Transactions on Graphics, No. 3 (Proceedings of ACM SIGGRAPH 2006)*, 25:967–976.
- Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N., und Khersonskii, V. K. (1988). *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapur.
- Wahba, G. (1981). Spline Interpolation and Smoothing on the Sphere. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 2:5–16.
- Wahba, G. (1984). Surface fitting with scattered noisy data on euclidian d-space and on the sphere. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14:281–299.
- Wawrzynczyk, A. (1984). *Group Representations and Special Functions*. D. Reidel Publishing Company.
- Weigelt, M. (2007). *Global and Local Gravity Field Recovery from Satellite-to-Satellite Tracking*. Dissertation, University of Calgary.
- Weigelt, M., Antoni, M., und Keller, W. (2010). Regional gravity recovery from GRACE using position optimized radial base functions. In Mertikas, S. P., (Hrsg.), *Gravity, Geoid and Earth Observation: IAG Commission 2: Gravity Field, Chania, Crete, Greece, 23-27 June 2008*, Volume 135 of *International Association of Geodesy Symposia*, S. 139–146. Springer, Berlin Heidelberg.
- Weise, T. (2009). *Global Optimization Algorithms – Theory and Application* (ebook). <http://www.it-weise.de/> (letzter Abruf am 12.12.2011).
- Windheuser, U. (1995). *Sphärische Wavelets: Theorie und Anwendung in der Physikalischen Geodäsie*. Dissertation, Universität Kaiserslautern.
- Wittwer, T. (2009). *Regional gravity field modelling with radial basis functions*. Dissertation, Delft University of Technology.



## Lebenslauf

Name	Antoni
Vorname	Markus
Geburtsdatum	24.07.1979
Geburtsort	Bobingen
03/2011 -	Akademischer Mitarbeiter im Rahmen von QUEST am Institut für Erdmessung der Leibniz Universität Hannover Forschungsbereich: Prozessierung von SST-Daten zur Bestimmung von Schwerefeldparametern
12/2010 - 2/2011	Akademischer Mitarbeiter am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart DFG-Projekt: Regionale Schwerefeldlösung aus SST-Beobachtungen
7/2010 - 11/2010	Stipendium der Landesgraduiertenförderung: zweimonatiger Forschungsaufenthalt an der Delft University of Technology (Niederlande)
10/2006 - 6/2010	Akademischer Mitarbeiter am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart DFG-Projekt: Regionale Schwerefeldlösung aus SST-Beobachtungen
10/2001 - 9/2006	Studium an der Technischen Universität München Abschluss: Diplomingenieur für Vermessungswesen Diplomarbeit: Hankeltransformationen und ihre geodätische Anwendung
10/2000 - 7/2001	Studium der Mikrosystemtechnik an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg
8/1999 - 8/2000	Zivildienst in der Geriatriischen Rehabilitationsklinik der Hessing Stiftung in Göggingen
9/1990 - 6/1999	Leonhard-Wagner-Gymnasium in Schwabmünchen Abschluss Abitur
9/1986 - 7/1990	Volksschule Großaitingen

# Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie Prof. Dr. sc. techn. Wolfgang Keller für die Betreuung der Promotion, die zahlreichen Diskussionen und das entgegengebrachte Vertrauen. Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Dr.-Ing. Jakob Flury für die Übernahme des Korreferats und die vielen hilfreichen Kommentare und Anregungen. Weiterhin danke ich allen Kollegen am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart für ihre Unterstützung und die gute Zusammenarbeit. Besonders hervorheben möchte ich dabei Dr. Ing. Matthias Weigelt, der durch Diskussionen und Anregungen meine Arbeit stets förderte, die Vorprozessierung der Daten übernahm und auch einen Teil der Programme zur Verfügung stellte. Außerdem danke ich Heng Zhu für ihre Implementierung der Variationsgleichungen für die Analyse der Range-Rate. Nicht zuletzt möchte ich mich auch ganz herzlich bei Andrea Ilk und Heinz Mayer für die Korrektur des Textes bedanken.