

# **Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung**

von

**Tanja Pohl**

Bericht Nr. 62

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2014



© Tanja Pohl

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-046608-3

# **Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Tanja Pohl**

aus Villingen-Schwenningen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm, Stuttgart  
Mitberichter: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc., Prag  
Tag der mündlichen Prüfung: 7. Februar 2014

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2014





## Kurzfassung

Bis heute stellt die Ermittlung statischer Gleichgewichtspfade für komplexe Strukturen und stark nichtlineares Strukturverhalten eine Herausforderung dar und kann zu einer Reihe von kontrollbedingten Versagensmechanismen führen. Stabilitätsprobleme mit nahe beieinander liegenden Pfadabschnitten oder sprödes, entfestigendes Materialverhalten sind Beispiele für diese strukturmechanischen Probleme.

Seit den 1970er Jahren wurde eine Reihe von Verfahren entwickelt, die in Kraft und Verschiebung rückläufige Pfadabschnitte abbilden können. Diese Bogenlängenverfahren wurden in den darauffolgenden Jahren modifiziert und weiterentwickelt. Typische kontrollbedingte, algorithmische Probleme sind der Verlust der Konvergenz, die Verringerung der Schrittweite bis zur Rechengenauigkeit oder ein Umkehren des Algorithmus mit gleichzeitiger Entlastung der Struktur. In einigen Fällen werden Bogenlängenverfahren für Analysen unter entfestigendem Strukturverhalten eingesetzt. Im nachkritischen Bereich des Gleichgewichtspfad können sie zu künstlichem Entlasten nach Schädigungsbeginn führen. Bei der Verwendung des konsistent linearisierten Bogenlängenverfahrens konnte beispielsweise künstliches Entlasten im Fall entfestigenden Strukturverhaltens gezeigt werden. Einige Finite-Elemente-Programme erfordern zudem einen Eingriff des Nutzers in den Berechnungsablauf, um bei fehlender Konvergenz beispielsweise von einer statischen Analyse auf eine dynamische Berechnung umzuschalten. Speziell für entfestigendes Strukturverhalten werden in der Literatur Verfahren vorgestellt, die teilweise direkt auf den Schädigungsprozess Einfluss nehmen. Diese Methoden sind in der Regel rechenintensiv.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung selbst-adaptierender, robuster und effizienter Pfadverfolgungsalgorithmen für elastisches, im Besonderen aber für entfestigendes Strukturverhalten mit der Finite-Elemente-Methode. Diese Kontrollmethoden werden aus den Eigenschaften der Gleichgewichtspfade abgeleitet. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt deshalb auf zwei Teilen: Zuerst werden die Charakteristika von Gleichgewichtspfaden elastischer und entfestigender Strukturen identifiziert. Anschließend werden aus diesen Eigenschaften Ansätze für die Pfadverfolgung entwickelt, die durch die Wahl geeigneter Kontrollparameter umgesetzt werden. Benutzereingriffe sollen nicht vorgenommen werden müssen. Für elastisches Strukturverhalten werden adaptive Kriterien vorgestellt, die relevante Freiheitsgrade der zylindrischen Bogenlängengleichung selektieren und kontrollieren. Im Hinblick auf entfestigendes Strukturverhalten wird die Vermeidung einer künstlichen Entlastung folgendermaßen beschrieben: entweder muss die elastische oder die dissipative Energie zunehmen. Um diese Entlastungen zu umgehen, wird eine aktive Prozesszone als Kontrollregion ausgewählt, in der die Kontrollgröße ausgewertet wird. Die Identifikation der Prozesszone basiert auf Materialparametern und wird hier anhand lokal formulierter, verzerrungsbasierter Kontinuumsschädigung diskutiert.

Um inkrementell iterative Pfadverfolgungsmethoden tiefergehend diskutieren zu können, erfolgt zunächst eine unterteilende Beschreibung von Belastung und Kontrollpa-

parameter. Der Lastfall steht bereits bei der Modellierung der Struktur fest und ist Teil der Problembeschreibung. Die Kontrollmethode soll den Gleichgewichtspfad möglichst vollständig abbilden können und ist unabhängig von der Modellierung des Problems.

Beim Vergleich der Kontrollmethoden realer und numerischer Experimente wird deutlich, dass das Versagen einer Kontrollmethode in der Regel aus denselben Gründen auftritt. Es ergibt sich entweder aus der Rückläufigkeit der Kontrollgröße oder der Mehrdeutigkeit von Kontrollvorschrift und Gleichgewichtszustand. Die Form des Kontrollversagens ist nicht davon abhängig, ob es sich um ein reales oder um ein numerisches Experiment handelt. Im Rahmen einer statischen, numerischen Analyse können sich keine dynamischen Effekte einstellen. Anstelle einer Schwingungsentwicklung nach Durchschlagen tritt Konvergenzverlust auf. Unerwünschte Phänomene aus Kontrollverfahren werden zusammenfassend in drei Mechanismen gegliedert: Konvergenzverlust beziehungsweise dynamisches Durchschlagen, Umkehren auf dem elastischen, ungeschädigten Pfad und künstliche Entlastung unter Sekantensteifigkeit nach Schädigungsbeginn. Eine weitere Gemeinsamkeit beider Experimentformen ist die Trennbarkeit von Lastfall und Kontrollparameter. Voraussetzung hierfür ist im realen Experiment die Verwendung einer geregelten Prüfmaschine.

Stetig wachsende Kontrollparameter mit physikalischer Bedeutung können Deformations- und Schädigungsprozesse vollständig abbilden. Wie bei komplexen Problemen mit elastischem Materialverhalten ist es auch für Entfestigung häufig nicht möglich, monoton wachsende Parameter zu identifizieren. Anstelle einer festgelegten Kontrollgröße werden dann ständig angepasste Parameter in einem adaptiven Verfahren ausgewählt. Im Rahmen der Beschreibung von Gleichgewichtspfaden von Strukturen mit elastischem Materialverhalten werden drei modifizierte, zylindrische Bogenlängenverfahren vorgestellt. Hierfür werden aus der Bogenlängengleichung Verschiebungsinkremente als Kontrollparameter ausgewählt. Als effizientestes Verfahren hat sich die adaptive Verschiebungskontrolle mit dem Adaptivitätskriterium *Maximum* herausgestellt. In diesem Kontrollverfahren geht das maximale Verschiebungsinkrement des vorangehenden Lastschritts als einzelner Kontrollparameter quadratisch in die Zusatzgleichung ein. Für elastisches Strukturverhalten ist diese Methode effizient und zuverlässig. Im Zusammenhang mit Entfestigung konnte aber in einigen Beispielen künstliches Entlasten beobachtet werden. Alternative Verfahren zur Pfadermittlung bei elastischem Strukturverhalten stellen die Berechnung stabiler statischer Gleichgewichtspunkte über die Minimierung der potentiellen Energie oder eine dynamische Analyse mit Be- und Entlastungsvorgang dar. Einschlüsse zwischen Be- und Entlastungskurve der dynamischen Berechnung können als in Schwingungsdämpfung umgesetzte Energie verstanden werden.

Um auch entfestigende Prozesse zuverlässig kontrollieren zu können, werden zunächst die Eigenschaften der Gleichgewichtspfade untersucht. Die Unterdrückung künstlichen Entlastens ist eine Hauptanforderung an die verwendeten Pfadverfolgungsmethoden. Aus den Verläufen der elastischen und dissipativen Energien kann bei fortschreitender Schädigung beobachtet werden, dass entweder die elastische oder die dissipative Energie über die Lastschritte zunimmt. Bei der Beobachtung künstlichen Entlastens

nehmen beide Anteile ab. Die Vermeidung künstlicher Entlastung wird über die Auswertung der Kontrollgrößen in der Kontrollregion umgesetzt. Die Kontrollregion wird über die Prozesszone identifiziert, indem die äquivalenten Verzerrungen aller Gaußpunkte überwacht und mit Auswahlkriterien abgeglichen werden. Der Gaußpunkt, der alle Kriterien erfüllt, legt die Kontrollregion fest. Aufbauend auf dieser Überlegung werden drei Methoden entwickelt, die eine Kontrollregion identifizieren. Zunächst wird ein Bogenlängenverfahren mit dem Inkrement der äquivalenten Verzerrungen multipliziert, welches am Gaußpunkt der Kontrollregion ausgewertet wird. Damit wird künstliches Entlasten vermieden, indem der Schnittbereich aus Bogenlängengleichung und Gleichgewichtspunkten auf einen Punkt eingeschränkt wird. Das Verfahren weist aber in den untersuchten Beispielen große Empfindlichkeit in den Schrittweiten auf und ist weit rechenintensiver als die folgenden Verfahren. Aufbauend auf dieser adaptiv eingeschränkten Bogenlängenkontrolle wird eine adaptive Verzerrungskontrolle auf Basis der in der Literatur beschriebenen Total Strain Control weiterentwickelt. Sie kontrolliert das Verzerrungsinkrement am Gaußpunkt der Kontrollregion im zugehörigen Lastschritt. Dieses Verfahren benötigte für Beispielprobleme aus der Literatur in der Regel eine deutlich geringere Inkrementzahl als die dort verwendeten Verfahren. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Kontrollvorschrift für elastische und dissipative Pfadabschnitte nicht verändert werden muss, da über die Verzerrungsinkremente beide Bereiche kontrolliert werden können. Zuletzt wird mit der adaptiven Verschiebungskontrolle in der Prozesszone die Trennung zwischen der Kontrollgröße und dem Parameter zur Identifikation der Kontrollregion vorgenommen. Ist die Kontrollregion ermittelt, wird am zugehörigen Element das betragsmäßig maximale Inkrement eines Elementfreiheitsgrads in Deformationsrichtung des letzten auskonvergierten Zustands vorgeschrieben. So ist die Zusatzgleichung von der Wahl der äquivalenten Verzerrungen entkoppelt. Zur Einordnung der vorgestellten und bestehenden Verfahren werden diese bezüglich ihrer Eignung für strukturmechanische Problemtypen eingeschätzt. Hierfür wird eine Gliederung dieser Problemtypen in Klassen vorgenommen, die ähnlichen Eigenschaften hinsichtlich der Pfadverfolgung aufweisen. Zu jeder Kategorie werden Empfehlungen zur Lösung mit verschiedenen Kontrollmethoden ausgesprochen. Zusammenfassend präsentieren sich sowohl die adaptive Verzerrungskontrolle als auch die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone in den Auswertungen der numerischen Beispiele als robuste und effiziente Verfahren.

## Abstract

Until now, the determination of equilibrium paths of complex structures with strongly nonlinear behavior is a challenge for path-following schemes. Structural problems with close path sections or structures exhibiting brittle softening behavior may lead to experiment failure due to control type properties.

From the early seventies, a range of methods have been developed, that are able to trace a path with snap-backs and snap-throughs in load and displacement. These arc-length methods have been modified and enhanced since then. Typical problems arising from this kind of constraint equations are loss of convergence, bisectioning while reducing step size to computer precision and unloading until reaching the undeformed state of the structure – either purely elastic or with secant stiffness due to softening behavior. In the past, arc-length methods have been applied to trace softening problems. However, they are not reliable in the post-critical range due to potential artificial unloading. For a consistently linearized cylindrical arc-length method, artificial unloading could be seen for softening behavior in several examples. Some applications of finite element programs require user intervention after computation has been started. For example, when static analysis does not converge, it has to be manually switched to a dynamic analysis. Particularly for softening behavior, a variety of methods have been developed that directly influence the softening process. Often, these methods turn out to be computationally intensive.

The aim of this work is to develop a self-adapting, robust and efficient path-following technique for elastic and in particular for softening structural behavior, based on the finite element method. These control methods are derived from properties of the equilibrium path. Therefore, the main focus of this work is split into two parts: first, characteristic properties of equilibrium paths of elastic and softening behavior are identified. Second, control methods arising from these properties are developed by choosing appropriate control parameters. User intervention is not required.

For elastic structural behavior, adaptivity criteria are presented choosing and controlling relevant degrees of freedom of the cylindrical arc-length equation. To avoid artificial unloading of softening problems, the phenomenon has first to be described: if both, elastic and dissipative energy decrease, artificial unloading can be detected. As a strategy to prevent artificial unloading, an active process zone is selected as the control region. Control parameters are evaluated in this control region. The identification of the control region is based on material parameters. A locally formulated, strain-based continuum damage model is used here for discussion.

In order to be able to describe path-following methods in detail, it is necessary to distinguish between load case and control parameter. The load case is connected with the modelled structure. The control parameter is chosen independently and should be able to assess the full path.

Comparing numerical and real experiments, it becomes obvious, that failure of the control method for both types arises from the same reasons: either the control quantity decreases or the combination of control directive and equilibrium state is not unique. The form of collapse of a control method does not rely on the fact of whether the experiment is realized in reality or numerically. Decisive is the possibility of developing dynamic effects. In case of a static numerical analysis, oscillations cannot develop and the computation will not converge. Undesirable phenomena arising from failure of the control method are grouped into three kinds of mechanisms: First, dynamical snap-through or loss of convergence respectively. Second, elastic unloading on the elastic loading path and third, unloading with secant stiffness, if softening has started. Another similarity of numerical and real experiments is the distinction between load case and control quantity. A prerequisite for this is a controlled testing machine.

Continuously growing control parameters with physical meaning can trace full path until a desired deformation or damage state is reached. For complex structures with elastic or even softening behavior it is often not possible to detect suitable control parameters in advance. In adaptive schemes, constantly changing increments are therefore controlled instead of monotonically growing quantities. In this work, three adaptively modified cylindrical arc-length equations are presented. The adaptivity criterion *Maximum* has turned out to be the most efficient of those three. The maximum displacement increment of the previous load step enters the constraint equation quadratically. For elastic structural behavior, this method has proven to be efficient, but has shown artificial unloading in the context of softening. Alternatively, equilibrium points can be computed with an optimization algorithm or with a dynamic analysis with loading and unloading branches. The area between these branches can be understood as the energy absorbed by damping.

In order to be able to reliably control the damage process of a structure, it is necessary to avoid artificial unloading. If the damage process progresses, energy plots show increasing elastic or dissipative energy. If both energies decrease, artificial unloading is detected. To avoid unloading, the control quantities are evaluated in the control region. The control region is identified in the process zone by monitoring equivalent strains of all gauss points. The Gauss point fulfilling all requirements identifying the process zone, defines the control region. Starting from this idea, three control methods for softening behavior are proposed: The first implementation restricts all possible solution points of a cylindrical arc-length method by multiplying the increment of equivalent strains of the gauss point defining the process zone. As this method is very step size sensitive and computationally intensive it will not be found in all numerical examples. The second method is based on this constrained arc-length method, just eliminating the arc-length part of the constraint equation. Only the increment of equivalent strains is prescribed in the equation. This method requires only a small number of steps compared with the methods proposed in other publications. An advantage of this adaptive strain control is the ability to trace dissipative as well as elastic parts of the equilibrium path without necessitating a switch in control types. The last proposal separates the control quantity and the parameter identifying the control region. When the control region is determined,

the maximum displacement increment of the related element is chosen as the control parameter. This increment is measured as the change of a displacement in the direction of the same degree of freedom in the last converged step. Within this adaptive displacement control in process zone, the constraint equation and its linearizations have become decoupled from the choice of the equivalent strain measure. Finally, the performance of methods from other publications and the methods proposed here are predicted in relation to specific structural problems. In order to do this, structural problem types are grouped into compounds with similar properties regarding their demands on path-following schemes. For each of these categories a recommendation is given, regarding which control methods are expected to be suitable. In conclusion, the adaptive strain control as well as the adaptive displacement control in process zone have proven to be effective and robust path-following techniques in the context of softening.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Ich möchte hier die Gelegenheit nutzen, meinen Dank all jenen auszusprechen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein herzlichster Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff. Seine motivierende Betreuung und das positive Arbeitsumfeld am Institut haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Für seine fortwährende persönliche Unterstützung und sein Vertrauen möchte ich mich ganz besonders bedanken. Ich werde die Zeit am Institut für Baustatik und Baudynamik immer in bester Erinnerung behalten.

Des Weiteren möchte ich mich sehr bei Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm für sein Interesse an dieser Arbeit und die hilfreichen Diskussionen bedanken. Ihm und auch Herrn Professor Ing. Milan Jirásek, DrSc. danke ich außerdem für die Übernahme des Mitberichts.

Meinen Kolleginnen Martina Matzen, Annika Sorg, Veronika Effinger und Anne-Kathrin Schäuble und meinen Kollegen Bastian Oesterle, Christoph Wilking, Malte von Scheven und Anton Tkachuk danke ich für die Durchsicht einzelner Kapitel. Weiterer Dank geht an Malte von Scheven, der mit Rat und Tat bei allen technischen Fragen half. Den ehemaligen Studenten Max Hübner und Benedikt Zeisner danke ich für Ihre Unterstützung durch die Anfertigung ihrer Abschlussarbeiten auf dem Gebiet der Pfadverfolgung.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei allen Institutsmitgliedern, die ich in meiner Zeit am Institut kennen lernen durfte, für die freundschaftliche Atmosphäre und die vielen schönen Momente abseits der Forschung.

Der Rückhalt, den mir meine Familie geboten hat, war nicht nur für diese Arbeit von unschätzbarem Wert. Meiner Mutter Marga Dollansky bin ich zutiefst dankbar für ihr Vertrauen und ihre bedingungslose und tatkräftige Unterstützung, mit der sie mir neben der Promotion so Vieles abgenommen hat.

Von ganzem Herzen danke ich meinem Mann Christian für das mehrfache Korrekturlesen der Arbeit und die vielen Diskussionen über den Aufbau der Dissertation. Vor allem aber danke ich ihm für die liebevolle und motivierende Unterstützung, mit der er das Projekt Doktorarbeit ohne wenn und aber mitgetragen und mir den Rücken gestärkt hat.

Stuttgart, im August 2014

Tanja Pohl





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xix</b>
<b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Zielsetzung . . . . .	2
1.2 Gliederung der Arbeit . . . . .	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . . .	7
2.1.1 Kinematik finiter Deformationen . . . . .	8
2.1.2 Spannungen . . . . .	9
2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik . . . . .	10
2.2 Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	11
2.3 Linearisierung des Randwertproblems . . . . .	12
2.4 Verwendete Konstitutivgesetze . . . . .	14
2.4.1 Hyperelastizität – Neo-Hooke Material . . . . .	14
2.4.2 Isotrope Elastoschädigung . . . . .	15
<b>3 Gleichgewichtspfade und Grundlagen der Pfadverfolgung</b>	<b>21</b>
3.1 Stabilität statischer Gleichgewichtspfade . . . . .	22
3.2 Statisches und dynamisches Gleichgewicht . . . . .	26
3.3 Lastfall und Kontrollparameter . . . . .	28

3.4	Aufbau von Pfadverfolgungsmethoden . . . . .	30
3.4.1	Prädiktor . . . . .	31
3.4.2	Korrektorverfahren . . . . .	32
3.4.3	Kontrollgleichung . . . . .	33
3.4.4	Konsistent linearisierte Zusatzgleichung im Korrektorverfahren . .	34
3.5	Kraft- und Verschiebungskontrolle an einem Beispiel . . . . .	37
3.5.1	Kraftkontrollierter Kraftlastfall . . . . .	39
3.5.2	Verschiebungskontrollierter Kraftlastfall . . . . .	40
3.5.3	Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Tangentenprädiktor .	43
3.5.4	Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Sekantenprädiktor . .	46
3.5.5	Verschiebungskontrollierter Verschiebungslastfall . . . . .	49
3.6	Zusammenfassung . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Kontrollmethoden realer und numerischer Experimente</b>	<b>53</b>
4.1	Kontrollmethoden realer Experimente . . . . .	54
4.2	Numerische Pfadverfolgungsmethoden . . . . .	58
4.3	Unerwünschte Phänomene aus Kontrollversagen . . . . .	66
4.4	Zusammenfassung . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Ermittlung von Gleichgewichtspfaden bei elastischem Strukturverhalten</b>	<b>71</b>
5.1	Statische Gleichgewichtspfade und Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	72
5.2	Adaptive Verfahren und Kontrollrichtung . . . . .	74
5.3	Modifikation des Bogenlängenverfahrens: Adaptive Verschiebungskontrolle	76
5.4	Schrittweitensteuerung . . . . .	80
5.5	Alternative Methoden zur Ermittlung statischer Gleichgewichtspfade . .	81
5.6	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Ermittlung von Gleichgewichtspfaden bei entfestigendem Strukturverhalten</b>	<b>87</b>
6.1	Eigenschaften von Gleichgewichtspfaden bei entfestigendem Strukturver-	
	halten . . . . .	87
6.2	Künstliche Entlastung und Kontrollrichtung . . . . .	90
6.3	Stand der Technik . . . . .	95
6.3.1	Literaturübersicht . . . . .	96
6.3.2	Kommerzielle Finite-Elemente-Programme . . . . .	101
6.4	Entwicklung adaptiver Verfahren für Entfestigung . . . . .	102
6.4.1	Adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle . . . . .	103
6.4.2	Adaptive Verzerrungskontrolle . . . . .	104
6.4.3	Adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone – Trennung	
	von Kontrollregion und Kontrollparameter . . . . .	108
6.5	Zusammenfassung . . . . .	113

<b>7 Numerische Beispiele</b>	<b>115</b>
7.1 L-förmige Scheibe . . . . .	116
7.2 Perforierter Kragarm . . . . .	120
7.3 Scheibe mit diagonalem Lochband . . . . .	129
7.4 Scheibe mit exzentrischem Loch . . . . .	132
7.5 Kategorisierung von strukturmechanischen Beispielen und Bewertung der Kontrollmethoden . . . . .	135
7.5.1 Einteilung in Problemklassen . . . . .	136
7.5.2 Vergleich der Methoden: Konvergenzgeschwindigkeit und Konver- genzeigenschaften . . . . .	140
<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>147</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	147
8.2 Ausblick . . . . .	149
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>
<b>Index</b>	<b>161</b>



---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Kinematik und Verschiebungsfeld des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ . . . . .	8
2.2	Einaxiales Schädigungsmodell nach KRAJČINOVIC (1996). . . . .	15
2.3	Spannungs-Dehnungs- und Schädigungs-Dehnungsbeziehung am Gaußpunkt. . . . .	18
2.4	Eindimensionale Darstellung der Spannungs-Dehnungsbeziehung. . . . .	18
3.1	Systemskizze und Gleichgewichtspfad eines Zwei-Freiheitsgrad-Systems. .	22
3.2	Projektionen des Gleichgewichtspfads aus Abbildung 3.1. . . . .	22
3.3	Liapunov Stabilität. Links stabil, rechts instabil. . . . .	23
3.4	Stabilität des Gleichgewichtspunktes. Links: stabile Gleichgewichtslage, rechts: instabile Gleichgewichtslage. . . . .	24
3.5	Die Federkraft $N_F$ bewirkt eine Rückstellung der gestörten Gleichgewichtslage (rechts) in seinen Ursprungszustand (links) nach Abklingen der Störung $F_\delta$ . . . . .	24
3.6	Verzweigungs-, Durchschlags- und Traglastpunkte nach MANG UND HOFSTETTER (2000) entsprechend der Koiter'schen Klassifikation kritischer Punkte. . . . .	25
3.7	Dynamisches Durchschlagen unter Kraft- und Verschiebungskontrolle. . .	27
3.8	Lastfallbeispiele. Links: Kraftlastfall, rechts: Verschiebungslastfall. . . .	28
3.9	Kontrollendpunkte: Versagenspunkte bei Kraft- und Verschiebungskontrolle aus BISCHOFF UND RAMM (2012). . . . .	29
3.10	Prädiktor als Tangente oder Sekante. . . . .	31

3.11	Eindimensionale Darstellung des Newton-Raphson-Verfahrens in a.) und des modifizierten Newton-Verfahrens in b.) am Beispiel eines Inkrements unter Kraftkontrolle. . . . .	32
3.12	Geometrie und Freiheitsgrade ( $d_1 - d_4$ lokal, $D_1$ und $D_2$ global) des Beispiels Dreigelenktragwerk. . . . .	37
3.13	Verschiebungslastfall am Dreigelenktragwerk. . . . .	38
3.14	Kraftlastfall am Dreigelenktragwerk. . . . .	39
3.15	Kraftkontrollierter Kraftlastfall mit Tangentenprädiktor. . . . .	40
3.16	Verschiebungskontrollierter Kraftlastfall mit Sekantenprädiktor. . . . .	42
3.17	Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Tangentenprädiktor. . . . .	44
3.18	Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Sekantenprädiktor. . . . .	48
3.19	Verschiebungskontrollierter Verschiebungslastfall. . . . .	49
4.1	Prüfmaschine nach VAN MIER (1997). . . . .	56
4.2	Versagen von Gestein unter einaxialem Druck nach WAWERSIK (1968). . . . .	56
4.3	Rotiertes Bezugskordinatensystem zur Vermeidung von Rückläufigkeiten im Kontrollparameter. . . . .	58
4.4	Konstantes Bogenlängenverfahren nach Riks/Wempner: Iteration im Inkrement $i$ im Kraft-Verschiebungsraum. . . . .	60
4.5	Updated-Normal-Plane-Method (links), Iteration auf Kugeloberfläche (rechts) im Inkrement $i$ nach RAMM (1981) in eindimensionaler Darstellung. . . . .	61
4.6	sphärische (links) und zylindrische (rechts) Bogenlängenmethode nach CRISFIELD (1981). . . . .	62
4.7	Lösungspunkte der sphärischen (links) und zylindrischen (rechts) Bogenlängengleichung und die Winkel zur Identifikation des gewünschten Gleichgewichtspunktes. . . . .	63
4.8	Berechnungsablauf mit konsistent linearisierter Zusatzgleichung am Beispiel eines Kraftlastfalls und zylindrischer Bogenlängenkontrolle. . . . .	65
4.9	Algorithmische Versagensmechanismen: links als Konvergenzverlust, mittig als Umkehr des Algorithmus, rechts als künstliche Entlastung bei Entfestigung. . . . .	67
5.1	Gleichgewichtspfad eines axialbelasteten Zylinders mit kleiner Imperfektion nach ASMOLOVSKIY U. A. (2013). . . . .	73
5.2	Systemskizze der Zylinderschale aus ASMOLOVSKIY U. A. (2013) zum Gleichgewichtspfad in Abbildung 5.1. . . . .	73
5.3	Links: Beullast einer Zylinderschale bei unterschiedlichen Einzellastimperfektionen aus HÜHNE U. A. (2008), rechts: Gleichgewichtspfad eines Zylinders (schematisch). . . . .	74

5.4	Kissen nach REESE U. A. (1999) mit hyperelastischem Stoffgesetz nach Abschnitt 2.4.1 und bilinearen, vollintegrierten Scheibenelementen. . . . .	78
5.5	Gleichgewichtspfade der Struktur aus Abbildung 5.4 nach HÜBNER (2010). . . . .	79
5.6	Deformationsfiguren zu Abbildung 5.5. . . . .	80
5.7	Systemskizze des Dreigelenkbogens aus SPRENG (2010) mit den Deformationszuständen $A$ , $B$ und $C$ . . . . .	82
5.8	Potential und Kraftniveau eines Durchschlagsproblems aus SPRENG (2010). . . . .	82
5.9	Abschätzung des statischen Gleichgewichtspfad durch Be- und Entlastung in der dynamischen Berechnung. . . . .	83
5.10	Experimentelle Kraft-Stauchungskurve nach ESSLINGER UND GEIER (1975). . . . .	84
6.1	Gleichgewichtspfad unter elastischem Materialverhalten: überall gilt $d = 0$ und $\dot{d} = 0$ . . . . .	88
6.2	Gleichgewichtspfad unter entfestigendem Materialverhalten mit elastischen und dissipativen Abschnitten. . . . .	89
6.3	Mögliche Lösungspunkte eines Mehrfreiheitsgradsystems (links) und eines Einfreiheitsgradsystems (rechts) bei schädigendem Materialverhalten unter Bogenlängenkontrolle. . . . .	90
6.4	Energieverläufe der L-Scheibe bei fortschreitender Schädigung. . . . .	92
6.5	Gleichgewichtspfad der L-Scheibe unter fortschreitender Schädigung. . . . .	92
6.6	Energieverlauf der L-Scheibe bei künstlicher Entlastung. . . . .	93
6.7	Gleichgewichtspfad der L-Scheibe in rot bei künstlicher Entlastung. Schwarz: fortschreitende Schädigung. . . . .	93
6.8	Berechnung der elastischen und dissipativen Energiedichte am Gaußpunkt. . . . .	94
6.9	Scheibe mit unsymmetrischem Loch (Abmessungen in mm). . . . .	98
6.10	Äquivalente Verzerrungen der ersten sieben Elemente rechts des Lochs. Nummerierung von links nach rechts. . . . .	98
6.11	Sequentiell lineares Sägezahnmodell nach ROTS UND INVERNIZZI (2004). . . . .	101
6.12	Identifikation der Kontrollregion. . . . .	104
6.13	Verkürztes Ablaufdiagramm der Verzerrungskontrolle. . . . .	106
6.14	Auswahl des größten Verschiebungsinkrements der Kontrollregion. . . . .	109
6.15	Verkürztes Ablaufdiagramm der adaptiven Verschiebungskontrolle in der Prozesszone. . . . .	111
6.16	Verschiebungsermittlung zur Prädiktorskalierung. . . . .	112
7.1	Systemskizze L-Scheibe, Elementgröße 500 x 500 beziehungsweise 100 x 100 mm. . . . .	117
7.2	Verschiebungen $D_1$ und $D_2$ der groben (links) und feinen (rechts) Diskretisierung in $m$ . Ermittlung der Kurven: ASC. . . . .	118

7.3	Deformierte L-Scheibe. Deformationszustand entspricht dem Ende der Last-Verschiebungskurven in 7.2. . . . . .	118
7.4	Rissbild der sehr fein diskretisierten L-Scheibe. . . . .	119
7.5	Rissbild (links) und Gleichgewichtspfad (rechts) unter einem Lastwinkel von $45^\circ$ der fein diskretisierten L-förmigen Scheibe. . . . .	119
7.6	Konvergenzverlust und künstliche Entlastung unter zylindrischer Bogenlängenkontrolle. . . . .	120
7.7	Systemskizze des perforierten Kragarms. Maße in mm. . . . .	121
7.8	Berechnung des Gleichgewichtspfades mit verschiedenen Kontrollmethoden. Referenzkurve ASC oder ADC-PZ. . . . .	122
7.9	Dissipative und rein elastische Abschnitte des Gleichgewichtspfades. . . . .	123
7.10	Verlauf der dissipativen, elastischen und inneren Gesamtenergie des perforierten Kragarms. . . . .	123
7.11	Gleichgewichtspunkte zu den Deformationsfiguren. . . . .	124
7.12	Deformationsstadien des perforierten Kragarms entsprechend den markierten Gleichgewichtspunkten aus Abbildung 7.11. . . . .	124
7.13	Kontrollregion wandert mit der Prozesszone. . . . .	126
7.14	Äquivalente Verzerrungen (bis zum Versagen des dritten Verbindungssegments) jeweils eines repräsentativen Gaußpunktes in den Elementen A, B und C. . . . .	127
7.15	Dynamischer Berechnung des perforierten Kragarms. Aufgetragene Knotenkraft am belasteten Knoten in Verschiebungsrichtung. Zeitschritt: $\Delta t = 0,0001$ . . . . .	128
7.16	Viskos gedämpfte dynamische Kraft-Verschiebungskurven des perforierten Kragarms im Vergleich zum statischen Gleichgewichtspfad. . . . .	129
7.17	Systemskizze der Scheibe mit diagonalem Lochband (Abmessungen in mm). . . . .	130
7.18	Gleichgewichtskurve der Scheibe mit diagonalem Lochband: sprödes Materialverhalten. . . . .	131
7.19	Gleichgewichtskurve der Scheibe mit diagonalem Lochband: duktileres Materialverhalten. . . . .	131
7.20	Gleichgewichtspunkte zu den Deformationsfiguren aus Abbildung 7.21. . . . .	132
7.21	Deformationsstadien der Scheibe mit Lochband zu den Gleichgewichtspunkten A bis I aus Abbildung 7.20. . . . .	133
7.22	Scheibe mit unsymmetrischem Loch (Maße in mm). . . . .	134
7.23	Randlast $\lambda q$ aufgetragen über die Differenzverschiebung $P_1 - P_2$ . . . . .	134
7.24	Deformationsstadien der Scheibe mit unsymmetrischem Loch zu den Gleichgewichtspunkten aus Abbildung 7.23. . . . .	135
7.25	Einteilung in Problemklassen für die Behandlung mit unterschiedlichen Pfadverfolgungsmethoden. . . . .	137



---

7.26	Entfestigung in Verbindung mit elastischen Pfadabschnitten. . . . .	139
7.27	Problematik bei der Identifikation der Kontrollregion nach Tabelle 6.1. .	140
7.28	Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 1338 Schritte. In Rot: links ADC-PZ in einem Schritt, rechts ASC mit 37 Schritten. . . . .	142
7.29	Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 1338 Schritte. In Rot: links ADC mit Schrittweite 0,0004, rechts: ADC mit Schrittweite 0,0001. . . . .	142
7.30	Ausschnitte aus Abbildung 7.29. . . . .	143
7.31	Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 49 Schritte. In Rot: ADC-PZ mit 5 Schritten, rechts: ASC mit 9 Schritten. . . . .	144
7.32	Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 49 Schritte. In Rot: links ADC mit 8 Schritten, rechts: ASC mit 31 Schritten. . . . .	145



---

# Tabellenverzeichnis

5.1	Auswahl des größten Verschiebungsinkrements. . . . .	77
5.2	Auswahl der über drei Lastschritte wachsenden Gesamtverschiebung. . .	78
5.3	Auswahl der Verschiebungsinkremente, die größer sind, als der Mittelwert aller Inkremente. . . . .	79
6.1	Identifikation der Kontrollregion. . . . .	109
7.1	Perforierter Kragarm, Anzahl der Inkremente (Summe der Iterationsschritte) verschiedener Kontrollmethoden. . . . .	141
7.2	Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, sprödes Material ( $\kappa_m = 0,0009$ ). Möglichst wenige Lastschritte. . . . .	141
7.3	Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, sprödes Material ( $\kappa_m = 0,0009$ ). Beliebige große Anzahl an Lastschritten. Schrittweite zur Darstellung detaillierter Pfade gewählt. . . . .	143
7.4	Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, duktiler Material ( $\kappa_m = 0,005$ ). Möglichst wenige Lastschritte. . . . .	144
7.5	Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, duktiler Material ( $\kappa_m = 0,005$ ). Beliebige große Anzahl an Lastschritten. Schrittweite zur Darstellung detaillierter Pfade gewählt. . . . .	145



---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

Im Folgenden bezeichnen fettgedruckte Buchstaben Vektoren, Tensoren und Matrizen. Ob es sich um einen Tensor oder eine Matrix handelt, ist dem jeweiligen Kontext zu entnehmen. Auf folgende Bezeichnungen und Abkürzungen wird mehrfach Bezug genommen:

## Abkürzungen

ADC	Adaptive Verschiebungskontrolle (adaptive displacement control)
ADC-PZ	Adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (adaptive displacement control in process zone)
ASC	Adaptive Verzerrungskontrolle (adaptive strain control)
AC	Bogenlängenkontrolle (arc-length control)
CMOD	Rissöffnungsverschiebung (crack mouth opening displacement)
CMSD	Verschiebung in der Rissöffnung durch Gleiten (crack mouth sliding displacement)
DRC	Dissipationsratenkontrolle (rate of dissipation control)
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
MW	Mittelwert

## Symbole und Bezeichnungen

$(\cdot)_{,\lambda}$	partielle Ableitung nach $\lambda$
$\partial$	Operator für partielle Ableitung
$\hat{(\cdot)}$	vorgeschriebene Größe
$\forall$	für alle
$:=$	Zuweisung im Algorithmus
$\&\&$	Vergleichsoperator im Algorithmus
$a$	Konstante zur Abminderung des Elastizitätsmoduls (Abschnitt 6.3.1)
$A$	Ausgangsquerschnitt des Faserbündels
$\bar{A}$	geschädigter Restquerschnitt des Faserbündels
$A_d$	Flächenanteil bereits geschädigter Fasern
$b$	Bahnparameter in Kapitel 3
$\hat{\mathbf{b}}$	vorgeschriebene Volumenkräfte der aktuellen Konfiguration
$\hat{\mathbf{B}}$	vorgeschriebene Volumenkräfte der Referenzkonfiguration
$\mathbf{B}$	in Abschnitt 2.1.3 Volumenkräfte, sonst B-Operatormatrix
$\mathcal{B}$	materieller Körper
$\mathbb{C}^{\text{ed}}$	Elasto-Schädigungstangente
$\mathbb{C}^{\text{el}}$	elastischer Materialtensor
$\mathbb{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}}$	Materialsekante
$c$	Dämpfungsfaktor
$\mathbf{C}$	rechter Cauchy-Green Tensor
$\chi$	Bewegungsabbildung
$d$	skalare Schädigungsvariable
$\mathbf{d}$	Vektor der Elementknotenverschiebungen
$\mathbf{D}$	globaler Knotenverschiebungsvektor
$\delta$	Abschnitt 3.1: Störung
$\delta(\cdot)$	Kapitel 2.1 und 2.2: Variation einer Größe, in allen anderen Kapiteln: Änderung der Größe während eines Iterationsschritts
$\delta \mathbf{u}$	virtuelles Verschiebungsfeld
$\delta W$	virtuelle Arbeit
$\delta W_{\text{ext}}$	äußere virtuelle Arbeit
$\delta W_{\text{int}}$	innere virtuelle Arbeit
$\text{div } \mathbf{A}$	Divergenz von $\mathbf{A}$ bezogen auf die aktuelle Konfiguration
$\text{Div } \mathbf{A}$	Divergenz von $\mathbf{A}$ bezogen auf die Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linielement in der aktuellen Konfiguration
$d\mathbf{X}$	Linielement in der Referenzkonfiguration
$E$	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}_{\text{GL}}$	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor

$\varepsilon$	Toleranz
$\tilde{\varepsilon}$	äquivalente Verzerrung
$\mathcal{E}_{\text{dis}}$	dissipative Energiedichte
$\mathcal{E}_{\text{el}}$	elastische Energiedichte
$f$	Bezeichnung der Zusatzgleichung
$\tilde{f}$	Schädigungsfunktion
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$F_{\delta}$	Störkraft
$\mathbf{f}_{\text{ext}}^e$	Vektor der äußeren Kräfte am Element
$\mathbf{f}_{\text{int}}^e$	Vektor der inneren Kräfte am Element
$f_t$	Zugfestigkeit
$\mathbf{F}_{\text{damp}}$	globaler Vektor der Dämpfungskräfte
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	globaler Vektor der äußeren Kräfte
$\mathbf{F}_{\text{int}}$	globaler Vektor der inneren Kräfte
$G_f$	Bruchenergie der diskretisierten Struktur
$\bar{G}_f$	Bruchenergie der realen Struktur
$\Gamma$	Rand des Gebiets $\Omega$
$\Gamma_0$	Rand des Gebiets $\Omega_0$
$\Gamma_s$	Schnittfläche des Körpers $\mathcal{B}$
$\Gamma_t$	Spannungsrand von $\Omega$
$\Gamma_{0t}$	Spannungsrand von $\Omega_0$
$\Gamma_u$	Verschiebungsrand von $\Omega$
$h$	Elementgröße
$\mathbf{I}$	Einheitstensor
$\mathbf{K}_e$	elastische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_g$	geometrische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_L$	Laststeifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_T$	Tangentensteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_u$	Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
$\kappa$	maximale, bisher erreichte Vergleichsverzerrung
$\kappa_m$	Schwellwert der Vergleichsverzerrung der diskretisierten Struktur, bei der vollständige Schädigung eintritt
$\bar{\kappa}_m$	Schwellwert der Vergleichsverzerrung der realen Struktur, bei der vollständige Schädigung eintritt
$\kappa_0$	Schwellwert der Vergleichsverzerrung, bei der Schädigung einsetzt
$\lambda$	Kapitel 2.4.1 : Lamé-Konstante, sonst: Steigerungsfaktor oder Pseudozeit
$\mu$	Lamé-Konstante
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$\mathbf{n}$	Einheitsnormalenvektor
$\mathbf{N}$	Matrix der Ansatzfunktionen

$n_{\text{ele}}$	Anzahl der Elemente
$n_{\text{eledof}}$	Anzahl der Elementfreiheitsgrade
$n_{\text{GP}}$	Anzahl der Gaußpunkte
$N_{\text{F}}$	Rückstellkraft
$n_{\text{konv}}$	Iterationszahl des letzten konvergierten Inkrements
NumPro	Finite-Elemente-Programm des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart
$n_{\text{w}}$	gewünschte Iterationszahl
$\nabla$	Gradientenoperator
$\nu$	Querkontraktions- oder Poissonzahl
$\Omega$	Gebiet in der aktuellen Konfiguration
$\Omega_e$	Gebiet des Elements $e$
$\Omega_0$	Gebiet in der Referenzkonfiguration
$P$	Materialpunkt
$\mathbf{P}$	erster Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\Phi$	Nulleigenvektor
$\Psi$	Potential des Neo-Hooke Materials
$\mathbf{R}$	Residuum oder Ungleichgewichtskräfte
$S$	skalare aktuelle Spannung am Gaußpunkt
$S_{\kappa}$	skalare Spannung am Gaußpunkt aus bislang maximalen Verzerrungen
$S_0$	skalare Maximalspannung am Gaußpunkt Verzerrungen
$\mathbf{S}$	zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor, in Abschnitt 2.4.2 Nominalspannung
$\bar{\mathbf{S}}$	in Abschnitt 2.4.2 effektive Spannung
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy Spannungstensor
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor der aktuellen Konfiguration
$\mathbf{T}$	Spannungsvektor der Referenzkonfiguration
$tol$	Abbruchtoleranz der Iterationsschleife
$\mathbf{u}$	Verschiebungsfeld
$\mathbf{v}$	Vektor der Knotengeschwindigkeiten
$w$	Rissbandbreite
$\mathbf{x}$	Ortsvektor der aktuellen Konfiguration
$\mathbf{X}$	Ortsvektor der Referenzkonfiguration







# 1

---

## Einleitung

Die mechanische Antwort einer Struktur auf eine Belastungssituation kann in Form eines Gleichgewichtspfades beschrieben und festgehalten werden. Der Gleichgewichtspfad besteht aus einer Aneinanderreihung unendlich vieler Gleichgewichtspunkte. Das sind Zustände, in denen sich das System im Gleichgewicht befindet. Ein Gleichgewichtspfad, auch Gleichgewichtskurve genannt, verbindet das Deformationsverhalten und den Belastungszustand dieser Struktur. Umgekehrt kann er ein Schlüssel zur Beurteilung ihres Tragverhaltens sein. Gleichgewichtspfade enthalten Informationen über Stabilität, Imperfektionsempfindlichkeit, Duktilität und Robustheit der Struktur. Die Bedeutung der Kenntnis von Gleichgewichtspfaden bis in den überkritischen Zustand hinein steigt durch moderne Konstruktionsprinzipien. In der Gegenwart werden Tragwerke und Bauteile unter dem Druck einer ressourcensparenden Bauweise immer schlanker ausgeführt. Das geringe Eigengewicht der Strukturen führt bei Fehleinschätzungen der Verkehrslasten im Verhältnis zu großen prozentualen Abweichungen. Daher wird das Versagensmuster einer Struktur besonders relevant. Ob dies gutmütig oder schlagartig ausfällt, kann aus dem nachkritischen Bereich des Gleichgewichtspfades abgelesen werden.

Übliche Belastungsmechanismen treten als äußere Kraftlasten, aufgezwungene Deformationen oder Umwelteinflüsse wie Temperatur- oder Feuchteeinwirkung auf. Kraftlasten können durch Eigengewicht oder Verkehrslasten ins Tragwerk eingebracht werden. Zwangsdeformationen sind unter anderem an Übergängen unterschiedlich steifer Bauteile zu beobachten, wenn steifere Bauteile weicheren Tragwerksteilen Verschiebungen aufzwingen.

In den Ingenieurdisziplinen ist es üblich, Gleichgewichtspfade in zweidimensionalen Kraft-Verschiebungdiagrammen festzuhalten. Ein solches Diagramm stellt meist eine resultierende Kraft über einem Verschiebungsfreiheitsgrad dar. Gleichgewichtspfade und Kraft-

Verschiebungsdiagramme sind dann identisch, wenn die Belastung quasistatisch aufgebracht wurde, keine dynamischen Effekte enthalten sind und der vollständige Pfad dargestellt ist.

### 1.1 Motivation und Zielsetzung

Geometrisch oder materiell nichtlineare Probleme erfordern spezielle Verfahren zur inkrementellen Lastaufbringung. Besonders anspruchsvoll ist für diese Verfahren der nachkritische Bereich einer Gleichgewichtskurve. Dieser Bereich bezeichnet die Pfadabschnitte nach Erreichen der Traglast. Die Mehrzahl der Analysemethoden für nichtlineare Gleichgewichtspfade im Rahmen der Finite-Elemente-Methode erfolgt inkrementell iterativ. Auf jeden Lastschritt folgt die iterative Berechnung des Gleichgewichtspunktes. Diese Analysen erfordern Methoden zur Kontrolle des Deformationsprozesses unter dem gegebenen Lastfall. Von den für diese Kontrollverfahren gewählten Parametern hängen die Konvergenzeigenschaften der Pfadverfolgungsalgorithmen, Robustheit und Effizienz, ab.

Mit den kommerziellen Finite-Elemente-Programmen stehen mächtige Werkzeuge zur Strukturanalyse zur Verfügung. Obwohl diese Programme in vielen Bereichen sehr weit gereift sind, existieren für einige Anwendungen keine zuverlässigen Lösungsstrategien zur Pfadverfolgung. Dies gilt für die Ermittlung stark nichtlinearer statischer Pfade, aber auch für Probleme mit entfestigendem Strukturverhalten. Häufig kann für Berechnungen unter entfestigendem Materialverhalten neben der Kontrolle einer Verschiebungskomponente nur eine dynamische Analyse gewählt werden. Eine Knotenverschiebung als Kontrollparameter zu verwenden ist zweifelsohne sehr effizient. Häufig ist eine stetig wachsende Kontrollverschiebung aber nicht a priori identifizierbar. In diesem Kontext sollen Verfahren abgeleitet werden, die dann angewandt werden können, wenn keine Knotenkraft oder Knotenverschiebung den Deformationsprozess kontrollieren kann.

In der Vergangenheit wurde bereits intensiv an den Kontrollparametern für numerische Analysen geforscht. Inkrementell iterative Pfadverfolgungsmethoden, die Traglastpunkte überwinden können, sind schon seit Mitte der 1960er Jahre bekannt. Nach der Veröffentlichung einer Verschiebungskontrolle durch ARGYRIS (1965) folgten die konstanten Bogenlängenkontrollen nach WEMPNER (1971), RIKS (1972) und RIKS (1979) mit den Weiterentwicklungen durch die sphärische oder zylindrische Bogenlängengleichung nach CRISFIELD (1981) und der Iteration auf der aktualisierten Normalenebene nach RAMM (1981). Diese Verfahren sind in der Lage, in Kraft und Verschiebung rückläufige Pfadabschnitte abzubilden und werden auch in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen häufig für in Kraft und Verschiebung rückläufige Probleme eingesetzt.

SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) stellen eine konsistent linearisierte Variante der Bogenlängengleichung vor, die die Wahl aus zwei möglichen Lösungen der bislang quadratischen Kontrollgleichung umgeht. In der Zwischenzeit wurde eine Vielzahl von Modifikationen dieser Bogenlängenkontrolle veröffentlicht. Einen Überblick geben unter anderem SCHWEIZERHOF (1990), WRIGGERS (2001) GEERS (1999a), RITTO-CORREÂ UND CAMOTIM (2008) sowie JORABCHI UND SURESH (2011). Diese Verfahren eignen sich sehr gut für geometrisch nichtlineare, glatte Problemstellungen. Bei der Ermittlung stark nichtlinearer Gleichgewichtspfade können diese weit entwickelten Verfahren dennoch versagen. Typische Phänomene sind der Verlust der Konvergenz, die Verringerung der Schrittweite bis kein Fortschreiten auf der Gleichgewichtskurve mehr erfolgt oder ein Umkehren des Algorithmus mit gleichzeitiger Entlastung der Struktur. In einigen Fällen werden diese Verfahren für Analysen unter entfestigendem Strukturverhalten eingesetzt. Im nachkritischen Bereich des Gleichgewichtspfades können diese Kontrollarten auch zu künstlichem Entlasten nach Schädigungsbeginn führen. Einige Finite-Elemente-Programme erfordern außerdem einen Eingriff des Nutzers in den Berechnungsablauf, um bei fehlender Konvergenz beispielsweise von einer statischen Analyse auf eine dynamische Berechnung umzuschalten.

Diese unerwünschte künstliche Entlastung tritt bei entfestigendem Materialverhalten wie Plastizität oder Schädigung bedingt durch den gewählten Kontrollparameter auf. Für die Kontrolle von entfestigendem Strukturverhalten wurden deshalb spezielle Pfadverfolgungsmethoden entwickelt. DE BORST (1987) stellt für schädigendes Materialverhalten eine indirekte Verschiebungskontrolle vor, bei der die Kontrollverschiebung zu Beginn des Versuchs festgelegt wird. In den Arbeiten von GEERS (1999a) beziehungsweise GEERS (1999b) werden adaptive Bogenlängenverfahren vorgestellt, die ähnlich zum vorangehenden Verfahren relevante Freiheitsgrade für die Versuchskontrolle identifizieren. CHEN UND SCHREYER (1991) kontrollieren den deviatorischen Anteil der gesamten Verzerrung des am stärksten verzerrten Elements. Eine Konsequenz aus diesem Vorgehen ist der Verlust der Konvergenz, wenn dieses Element entlastet. LORENTZ UND BADEL (2004), GUTIÉRREZ (2004) und VERHOOSSEL U. A. (2009) unterscheiden in ihren Verfahren zwischen elastischen und dissipativen Gleichgewichtspunkten. Während die skalare Kontrollgleichung von LORENTZ UND BADEL (2004) auf dem Maximalwert des elastischen Prädiktors der Fließfunktion basiert, kontrollieren GUTIÉRREZ (2004) und VERHOOSSEL U. A. (2009) die Dissipationsrate in Form einer veränderten Bogenlängengleichung. Daneben existiert eine Reihe weiterer Verfahren wie das Sägezahnmodell nach ROTS UND INVERNIZZI (2004) oder das implizit-explicite Integrationschema von OLIVER U. A. (2008), die bei Entfestigung eingesetzt werden. Die genannten Verfahren bedeuten in der Regel einen hohen Rechenaufwand und sind sehr spezifisch.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung adaptiver, robuster und effizienter Pfadverfolgungsalgorithmen für elastisches, im Besonderen aber für entfestigendes Strukturver-

halten. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt deshalb im Wesentlichen auf zwei Teilen: Zuerst werden die Charakteristika von Gleichgewichtspfaden elastischer und entfestigender Strukturen identifiziert. Anschließend werden aus diesen Eigenschaften Ansätze für die Pfadverfolgung entwickelt, die durch die Wahl geeigneter Kontrollparameter umgesetzt werden. Alle Verfahren beruhen dabei auf Adaptivitätskriterien, die in jedem inkrementellen Schritt die Kontrollgrößen beziehungsweise den Ort ihrer Auswertung festlegen. Benutzereingriffe während der Analyse sind nicht erforderlich.

Im Hinblick auf entfestigendes Strukturverhalten wird die Vermeidung von künstlichen Entlastungen als zentrales Thema hervorgehoben. Um diese Entlastungen zu umgehen, wird eine aktive Prozesszone als Kontrollregion ausgewählt, in der die Kontrollgröße ausgewertet wird. Die Identifikation der Prozesszone basiert auf Materialparametern und wird hier anhand lokal formulierter, verzerrungsbasierter Kontinuumsschädigung diskutiert.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

Die Gliederung der Arbeit erfolgt nach Anwendungsgebieten, weshalb der Stand der Technik nicht in einem einzelnen Kapitel dargestellt, sondern im zugehörigen Kontext betrachtet wird. Kapitel 2 und 3 liefern die Grundlagen für alle folgenden Themen. Die Methoden zur Pfadverfolgung werden, wenn möglich, nach ihrer Eignung zur Kontrolle von elastischem oder entfestigendem Strukturverhalten unterteilt. Übergeordnete Pfadverfolgungsmethoden, die nicht eindeutig zugeordnet werden können, sind Kapitel 4 zu entnehmen. Bestehende und neue Methoden, die für elastisches Materialverhalten oder Entfestigung herangezogen werden, werden in Kapiteln 5 und 6 diskutiert und anhand numerischer Beispiele in Kapitel 7 getestet. Im Folgenden werden die einzelnen Kapitelinhalte nochmals kurz dargestellt.

In Kapitel 2 werden zunächst die zur Modellierung der Struktur erforderlichen kontinuumsmechanischen Grundgleichungen eingeführt. Darauf folgt die Formulierung des Randwertproblems als Basis der numerischen Diskretisierung mit finiten Elementen. An dieser Stelle wird auf die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Konstitutivgesetze sowie eine Regularisierungstechnik für die isotrope Elastoschädigung eingegangen.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit den Eigenschaften statischer Gleichgewichtspfade. Dies umfasst die Diskussion von Stabilitätskriterien für Prozesse und Gleichgewichtspunkte sowie die Klassifizierung kritischer Punkte. Es folgt eine Begriffsbestimmung von Belastung und Kontrollparameter und eine Erläuterung der Grundgedanken inkrementell iterativer Pfadverfolgungsmethoden. Abschließend wird die algorithmische Umsetzung

von Kraft- und Verschiebungskontrolle unter Kraft- und Verschiebungslastfällen an einem Beispiel beschrieben.

Mit einer Übersicht über Kontrollmethoden realer Experimente und numerischer Simulation beginnt Kapitel 4. Das Versagen der jeweiligen Kontrollmechanismen wird daraufhin gegenübergestellt.

Kapitel 5 setzt sich im Wesentlichen mit Gleichgewichtspfaden aus elastischem Strukturverhalten auseinander. Zuerst wird die Ablesbarkeit der Imperfektionsempfindlichkeit einer Struktur aus ihrem Gleichgewichtspfad behandelt. Im Folgenden werden Adaptivitätskriterien für eine veränderte Bogenlängenkontrolle in Form der adaptiven Verschiebungskontrolle vorgestellt und alternative Methoden zur Ermittlung von elastischen Gleichgewichtspunkten aufgezeigt.

Im Fokus von Kapitel 6 stehen der Begriff der künstlichen Entlastung und Pfadverfolgungsmethoden für entfestigendes Strukturverhalten. Auf die Analyse der Pfadeigenschaften unter Entfestigung folgt ein Literaturüberblick über bestehende Methoden. Unter dem Aspekt der Vermeidung künstlicher Entlastungen werden drei Verfahren zur Pfadverfolgung vorgestellt. Anschließend erfolgt die Beschreibung der numerischen Umsetzung dieser Verfahren.

Kapitel 7 dokumentiert numerische Beispiele unter Entfestigung. Das Potential der vorgestellten Methoden wird durch den Vergleich mit Verfahren aus der Literatur aufgezeigt und anhand der dort beschriebenen Strukturprobleme verifiziert. Im Rahmen dieses Kapitels werden strukturmechanische Beispiele für die Anwendung geeigneter Kontrollverfahren in Klassen eingeteilt und Empfehlungen für Lösungsmethoden ausgesprochen.

Abschließend werden die Ergebnisse der Arbeit in Kapitel 8 zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Untersuchungsfelder gegeben.





# 2

---

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden Begriffe und Definitionen kontinuumsmechanischer Grundlagen und der Finite-Elemente-Methode dargestellt, die in den Folgekapiteln verwendet werden. Der Inhalt dieses Kapitels ist an die Standardwerke HOLZAPFEL (2000), FELIPPA (2012), ALTENBACH UND ALTENBACH (1994) und BELYTSCHKO U. A. (2006) angelehnt. Eine ausführliche Diskussion der Finite-Elemente-Methode findet sich darüber hinaus in HUGHES (2000) oder ZIENKIEWICZ U. A. (2005).

Die räumliche Bewegung der Struktur wird in der vorliegenden Arbeit in Lagrange'scher Betrachtungsweise beschrieben. Dabei bewegt sich der Betrachter mit dem Materialpunkt  $P$  der Struktur durch den Raum. Die Veränderungen der Eigenschaften an diesem Materialpunkt werden hierbei festgehalten. Dem entgegen steht die Euler'sche Betrachtungsweise, die Bezug auf eine Raumkoordinate nimmt. Der Beobachter befindet sich an dieser Raumkoordinate und beobachtet die zeitlich veränderlichen Größen der Materialpunkte, die diese Koordinate passieren.

### 2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Beschreibung der kontinuumsmechanischen Grundlagen dient der Einführung der in der weiteren Arbeit verwendeten Spannungs- und Verzerrungsmaße. Weiterhin liefern die beschriebenen Grundlagen die Basis für die Diskretisierung mit finiten Elementen.

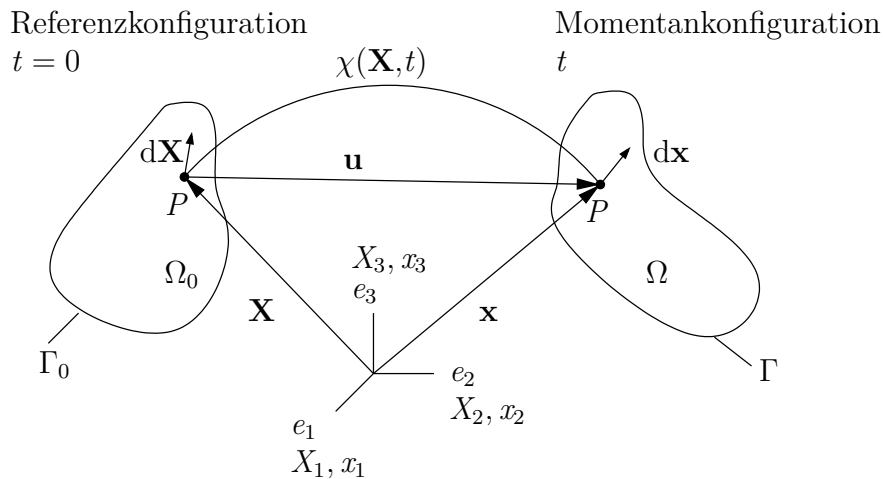


Abbildung 2.1: Kinematik und Verschiebungsfeld des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$ .

### 2.1.1 Kinematik finiter Deformationen

Zur Beschreibung der Deformation eines Körpers  $\mathcal{B}$  dient die Betrachtung der Ortsvektoren eines Materialpunktes  $P$  und die Veränderung eines eingepprägten, infinitesimalen Linienelements auf diesem Körper. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Körper als undeformiert angenommen. Der dann von ihm eingenommene Raum  $\Omega_0$  wird als Referenz- oder materielle Konfiguration bezeichnet.  $\mathbf{X}$  ist der Ortsvektor zum Punkt  $P$  des undeformierten Körpers. Das eingepprägte Linienelement auf  $\mathcal{B}$  wird mit  $d\mathbf{X}$  bezeichnet. Der Körper wird deformiert und zum Zeitpunkt  $t$  betrachtet. Der nun eingenommene Raum  $\Omega$  wird aktuelle oder auch Momentankonfiguration genannt.

Der neue Ortsvektor zum Punkt  $P$  auf dem deformierten Körper soll  $\mathbf{x}$  heißen, das deformierte, infinitesimale Linienelement  $d\mathbf{x}$ . Die Abbildung der Bewegung des Körpers  $\mathcal{B}$  erfolgt über das Vektorfeld  $\chi$ .  $\chi$  bestimmt den Ort  $\mathbf{x}$  des Materialpunktes  $P$  zur Zeit  $t$ , der sich zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $\mathbf{X}$  befunden hatte durch

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  eines Körpers  $\mathcal{B}$  wird durch die Differenz der Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{X}$  des Materialpunktes  $P$  auf  $\mathcal{B}$  zur Zeit  $t$  beschrieben. In Abbildung 2.1 wird dieses Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

von der undeformierten zur deformierten Konfiguration skizzenhaft dargestellt.

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  überführt das materielle Linienelement  $d\mathbf{X}$  durch

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{beziehungsweise} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

in ein räumliches Linienelement  $d\mathbf{x}$ , wobei  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{x}$  gilt.

Für weitere Betrachtungen soll der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_{\text{GL}}$  herangezogen werden. Er beschreibt die Verzerrung in Richtung des materiellen Linienelements in  $\Omega_0$ .  $\mathbf{E}_{\text{GL}}$  ist definiert über

$$\mathbf{E}_{\text{GL}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.4)$$

mit dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  und ist ein rein materielles und objektives Verzerrungsmaß. Für Starrkörperbewegungen gilt daher  $\mathbf{E}_{\text{GL}} \equiv \mathbf{0}$ .

## 2.1.2 Spannungen

Im Deformationsprozess werden Spannungen als mechanische Beanspruchung des Körpers aktiviert. Sie entstehen durch wechselseitige Beeinflussung von Materialpunkten und benachbarten Materialpunkten. Die Cauchy-Spannungen, die aufgrund ihres Bezugs zur Momentankonfiguration auch als wahre Spannungen bezeichnet werden, können mithilfe des Deformationsgradienten in den ersten und zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{S}$ , überführt werden. Letzter bezieht sich auf die Referenzkonfiguration und stellt das energetisch konjugierte Spannungsmaß zu den in dieser Arbeit verwendeten Green-Lagrange-Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\text{GL}}$  dar. Aus dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls folgen die Symmetrieeigenschaften des Cauchy-Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{in } \Omega. \quad (2.5)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  der aktuellen Konfiguration ist über das Cauchy-Theorem mit dem Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche  $\Gamma_s$  des Körpers  $\mathcal{B}$  verbunden.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_s. \quad (2.6)$$

Die zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen können als Funktion der Cauchy-Spannungen und des Deformationsgradienten beschrieben werden und folgen zu

$$\mathbf{S} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik

Ausgehend von der lokalen Impulsbilanz und unter Vernachlässigung der Trägheitsterme bei quasistatischem Strukturverhalten steht

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (2.8)$$

für die starke Form des Randwertproblems. Diese Gleichung wird auch als lokale Gleichgewichtsbedingung bezeichnet. Für die Referenzkonfiguration wird die starke Form in den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen  $\mathbf{P}$  und den Volumenkräften  $\mathbf{B}$  des undeformierten Körpers formuliert und ergibt sich zu

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0. \quad (2.9)$$

Der Rand  $\Gamma$  des Körpers  $\mathcal{B}$  wird in Bereiche unterteilt, auf denen Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben sind:  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$  mit  $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ . Auf den Neumannrand  $\Gamma_t$  wirken Neumann- oder auch Spannungsrandbedingungen

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_t. \quad (2.10)$$

Über die Abbildung der Normalen über die Nanson-Formel mit

$$\mathbf{n} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \quad (2.11)$$

kann das Verhältnis der infinitesimalen Bezugsflächen  $da$  der Momentankonfiguration zur Fläche  $dA$  der Referenzkonfiguration hergestellt werden:

$$da = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} dA \quad (2.12)$$

Der Bezug des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  auf die Referenzkonfiguration kann dann über

$$\hat{\mathbf{t}} da = \hat{\mathbf{T}} dA \quad (2.13)$$

beschrieben werden.

Auf dem Dirichletrand werden Dirichlet- oder auch Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u. \quad (2.14)$$

Die Unterteilung der Randgebiete gilt für die Referenz- und die Momentankonfiguration. Auf die entsprechende Indizierung wird hier verzichtet.

Die Gleichungen (2.8), (2.10) und (2.14) werden zusammen als Randwertproblem der Elastostatik bezeichnet. Da die analytische Lösung der starken Form nur für Sonderfälle möglich ist, werden häufig approximative Lösungsverfahren wie die Finite-Elemente-Methode herangezogen. Das zugrunde liegende Variationsprinzip wandelt die starke Form des Randwertproblems in eine schwache Form um, die die Gleichgewichtsbedingung nicht mehr punktweise, sondern nur integral über den Körper erfüllt.

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten beziehungsweise mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird Gleichung (2.8) beziehungsweise Gleichung (2.9) mit einer beliebigen Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  beziehungsweise  $\Omega_0$  des Körpers integriert. Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  als Primärvariable des Randwertproblems dient zur punktwisen Beschreibung der Verzerrungen und Spannungen in den kinematischen Gleichungen und dem Konstitutivgesetz. Das im mathematischen Sinn als Testfunktion bezeichnete Feld  $\delta \mathbf{u}$  kann aus der Energiebetrachtung heraus auch als virtuelles Verschiebungsfeld identifiziert werden und muss  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_u$  erfüllen. Damit ergibt sich aus Gleichung (2.9) mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\text{Div } \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}}) dV + \int_{\Gamma_{0t}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}} dA = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{u}. \quad (2.15)$$

Die Volumenkräfte  $\hat{\mathbf{B}}$  werden im Folgenden nicht betrachtet. Gleichung (2.15) führt durch partielle Integration, die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes und durch Einbringen von Kinematik, Konstitutivbeziehungen und Randbedingungen auf den Ausdruck der virtuellen Arbeiten

$$\delta W = \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E}_{\text{GL}} : \mathbf{S} dV}_{\delta W_{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Gamma_{0t}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}} dA}_{-\delta W_{\text{ext}}} = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

der auch als schwache Form des Randwertproblems bezeichnet wird. Es sei an dieser Stelle bereits erwähnt, dass in dieser Arbeit die aufgebrachten äußeren Spannungen  $\hat{\mathbf{T}}$  nicht vom Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  abhängen.

## 2.2 Finite-Elemente-Diskretisierung

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) stellt die wohl am häufigsten angewandte Diskretisierungstechnik der Strukturmechanik dar. Dabei wird das Gebiet  $\Omega$  des Körpers  $\mathcal{B}$  durch eine endliche Zahl von Elementen  $n_{\text{ele}}$  der Größe  $\Omega_e$  beschrieben.

Die Freiheitsgrade des Systems, also die Werte des Primärvariablenfeldes, werden dadurch auf eine finite Zahl reduziert. Diese Reduktion wird als Diskretisierung bezeichnet. Die Freiheitsgrade, diskrete Knotenverschiebungen, sind an den Elementknoten der Struktur angesiedelt. Auf Elementebene werden sie mit  $\mathbf{d}$  und global mit  $\mathbf{D}$  bezeichnet. Der Verschiebungsverlauf wird mithilfe von Formfunktionen aus den diskreten Knotenverschiebungen interpoliert. Dieser approximative Ansatz gilt auch für die virtuellen Verschiebungen. Das interpolierte Verschiebungsfeld lässt sich durch

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad \delta\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\delta\mathbf{d} \quad (2.17)$$

ausdrücken. Der Index  $h$  des interpolierten Feldes entfällt bei späteren Ausführungen.

Über das Elementgebiet  $\Omega_e$  wird die schwache Form des Randwertproblems (2.16) unter Berücksichtigung der Ansätze aus Gleichung (2.17) numerisch integriert:

$$\delta W_h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \delta\mathbf{d}^T \left[ \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{S}} \, dV}_{\mathbf{f}_{\text{int}}^e} - \underbrace{\int_{\Gamma_{0t}^e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{T}} \, dA}_{-\mathbf{f}_{\text{ext}}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{d}. \quad (2.18)$$

Die Matrizen  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{F}}$  enthalten in besonderer Anordnung die Komponenten von  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{F}$ . Aus der Operatormatrix räumlicher Ableitungen angewandt auf die Formfunktionen  $\mathbf{N}$  ergibt sich der B-Operator  $\mathbf{B}$ .

Die sich aus Gleichung (2.18) ergebenden internen und externen Kräfte  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  werden zu globalen Systemgrößen  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  assembliert. Dieser Vorgang wird durch das Symbol  $\bigcup$  angezeigt. Das Gleichgewicht aus äußeren und inneren Arbeiten aus Gleichung (2.18) kann in eine Kraftformulierung überführt werden:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

## 2.3 Linearisierung des Randwertproblems

Aufgrund der in dieser Arbeit betrachteten geometrischen und materiellen Nichtlinearität wird ein Iterationsverfahren erforderlich, aus dem sich die Ungleichgewichtskräfte zu Null ergeben sollen. Für das angewandte Newton-Raphson-Verfahren wird eine Taylorreihenentwicklung durchgeführt, die nach dem linearen Term abgebrochen wird. Hierfür ergibt sich im Sinne einer Linearisierung aus

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = 0 \quad (2.20)$$

die linearisierte Form des Residuums mit  $\delta \mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{D}^{i+1} - \mathbf{D}^i$  und  $\delta \lambda^{i+1} = \lambda^{i+1} - \lambda^i$  zu

$$\text{LIN } \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \mathbf{D}^i} \delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \lambda^i} \delta \lambda^{i+1}. \quad (2.21)$$

$\delta$  bezeichnet hier keine Variation, sondern die iterativen Änderungen einer Größe. Da mitgehende Lasten in dieser Arbeit nicht betrachtet werden, ergibt sich für den Vektor der äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  keine Abhängigkeit von den Verschiebungen. Verschiebungsabhängige Drucklasten werden aber zum Beispiel in SCHWEIZERHOF UND RAMM (1984) behandelt. Der Steigerungsfaktor  $\lambda$ , auch Pseudozeit genannt, taucht hier als zusätzliche Unbekannte im Zuge der nichtlinearen Berechnung auf. Er geht wie der Vektor der globalen Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  in die Linearisierung ein.

Der Index  $i$  bezeichnet den Iterationsschritt, aus dem die noch unbekannt Lösung des Iterationsschritts  $i + 1$  ermittelt wird. Üblicherweise wird in der Darstellung der linearisierten Form des Residuums davon ausgegangen, dass  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$  gilt, also  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{int}} - \lambda \mathbf{F}_{\text{ext}}$ . Da damit nur Kraftlastfälle Berücksichtigung finden, wird hier die allgemeinere Form  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda}$  in der Linearisierung gewählt. Aus der Ableitung

$$\mathbf{R}_{,\mathbf{D}} = \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{D}} - \mathbf{F}_{\text{ext},\mathbf{D}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \left[ \int_{\tilde{\Omega}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{S}}_{,\mathbf{d}} + (\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}})_{,\mathbf{d}} \tilde{\mathbf{S}} \, dV \right] - \mathbf{F}_{\text{ext},\mathbf{D}} \quad (2.22)$$

$$= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_L = \mathbf{K}_T \quad (2.23)$$

geht die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  mit den Anteilen

$$\mathbf{K}_{\text{eu}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{\tilde{\Omega}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{S}}_{,\mathbf{d}} \, dV \quad (2.24)$$

$$\mathbf{K}_g = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{\tilde{\Omega}_e} (\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}})_{,\mathbf{d}} \tilde{\mathbf{S}} \, dV \quad (2.25)$$

hervor (siehe hierzu BISCHOFF UND RAMM (2012)). Die Laststeifigkeit  $\mathbf{K}_L$  entfällt, da  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  hier nicht von  $\mathbf{D}$  abhängt. Die elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  entspricht der Steifigkeit der undeformierten Struktur und ist unabhängig von Verschiebungs- und Spannungszustand. Für den betrachteten Fall der Total Lagrange Beschreibung bleibt  $\mathbf{K}_e$  während des gesamten Deformationsprozesses konstant.  $\mathbf{K}_u$  bezeichnet die Anfangsverschiebungssteifigkeit und beinhaltet direkt das Verschiebungsfeld der Struktur.  $\mathbf{K}_e$  und  $\mathbf{K}_u$  werden in Gleichung (2.25) zu  $\mathbf{K}_{\text{eu}}$  zusammengefasst.  $\mathbf{K}_g$  wird geometrische Steifigkeitsmatrix oder auch Anfangsspannungsmatrix genannt. Sie enthält Spannungsterme, die vom aktuellen Verschiebungsfeld abhängen. Dadurch wird die Änderung des inneren Spannungs- oder Kraftzustandes berücksichtigt, der sich durch die Deformation

ergibt. Die gesamte Tangentensteifigkeitsmatrix setzt sich aus der Summe der einzelnen Komponenten zu  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g$  zusammen. Zur Aufspaltung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix sei hier auf HIBBITT U. A. (1970) verwiesen. In dieser Veröffentlichung wird bezüglich des Begriffs der Anfangsverschiebungssteifigkeit die Arbeit von MARCAL (1967) genannt.

## 2.4 Verwendete Konstitutivgesetze

Im Folgenden werden zwei Konstitutivgesetze vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit angewendet werden. Das hyperelastische Neo-Hooke Materialmodell wird für Untersuchungen elastischen Strukturverhaltens bei großen Deformationen herangezogen. Alle Beschreibungen entfestigenden Materialverhaltens erfolgen am Beispiel der isotropen Elastoschädigung.

### 2.4.1 Hyperelastizität – Neo-Hooke Material

In der Reihe der hyperelastischen Materialien stellt das Neo-Hooke Materialmodell eine Erweiterung des Hooke'schen Gesetzes auf große Verzerrungen dar. Hyperelastische Materialmodelle weisen keine Pfadabhängigkeit auf. Charakteristisch ist die Existenz eines Potentials aus Verzerrungsenergie

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(\text{tr}\mathbf{C} - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \quad (2.26)$$

mit  $J = \det \mathbf{F}$ , dem rechten Cauchy-Green Tensor  $\mathbf{C}$  und den Lamé-Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$ . (Es sei darauf hingewiesen, dass  $\lambda$  nur in diesem Abschnitt als Lamé-Konstante verwendet wird.):

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.27)$$

Die Spannungen werden aus der partiellen Ableitung des Potentials nach den energetisch konjugierten Verzerrungen berechnet und ergeben sich zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_{\text{GL}}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda (\ln J) \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.28)$$



Mit der Abkürzung  $\bar{\mu} = \mu - \lambda \ln J$  lässt sich der Tangentenmodul  $\mathbb{C}$  in Komponentenschreibweise folgendermaßen formulieren:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + \bar{\mu} (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{kj}^{-1}). \quad (2.29)$$

Die Formulierung des Potentials, der Ableitungen und des Tangentenmoduls kann auch BELYTSCHKO U. A. (2006) und BONET UND WOOD (2008) entnommen werden.

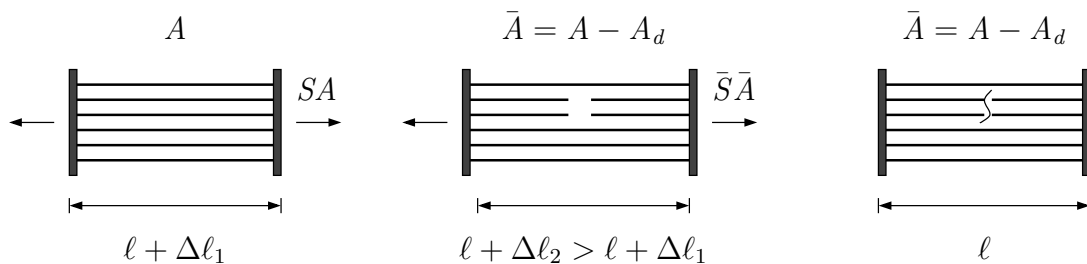
## 2.4.2 Isotrope Elastoschädigung

Materielle Instabilität wird meist mit lokal anwachsenden Deformationen in Verbindung gebracht. Dieser Lokalisierungsprozess äußert sich in der Natur unter bestimmten Spannungszuständen oft durch die Ausbildung schmaler Schubänder, beispielsweise in Metall, Boden oder Fels.

Durch die Entstehung von Mikrorissen, -poren und ähnlichen Defekten, deren Wachstum und Zusammenschluss wird die Materialsteifigkeit zunehmend reduziert. Dieser Schädigungsmechanismus wird in der Kontinuumschädigungsmechanik durch die Abminderung elastischer Materialparameter erfasst und basiert auf den phänomenologischen Beschreibungen von KACHANOV (1986). Das von RABOTNOV (1963) eingeführte Konzept der effektiven Spannungen beschreibt die hier für den eindimensionalen Fall dargestellte Äquivalenz der Produkte aus nominaler Spannung  $S$  multipliziert mit dem Ausgangsquerschnitt  $A$  und der effektiven Spannung  $\bar{S}$  multipliziert mit dem geschädigten Querschnitt  $\bar{A} = A - A_d$ .

$$SA = \bar{S}\bar{A} \quad (2.30)$$

Dabei wird die aufgebrachte Kraft nur über noch intakte Querschnittsfläche übertragen.  $A_d$  ist der Flächenanteil der bereits gerissenen Fasern. Abbildung 2.2 zeigt die Darstellung dieser Flächen als Faserbündel.



**Abbildung 2.2:** Einaxiales Schädigungsmodell nach KRAJČINOVIC (1996).

Die Arbeiten von LEMAÎTRE (1983), KRAJČINOVIC (1983), LEMAÎTRE (1984), KACHANOV (1986) und CHABOCHE (1988) werden in der Literatur als Grundlage des Konzepts der isotropen Kontinuumschädigungsmechanik im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse genannt. Ein Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Kontinuumschädigungsmechanik wird beispielsweise von KUHL (2000) gegeben.

Die isotrope Elastoschädigung erweitert das einaxiale Kontinuumschädigungsmodell auf den Fall multiaxialer Beanspruchung unter der Annahme isotropen Steifigkeitsverlustes. Es handelt sich hierbei um ein pfadabhängiges Materialmodell mit Geschichtsvariablen, die den aktuellen Schädigungszustand erfassen.

Das verwendete 1-Parameter-Schädigungsmodell führt die skalare Schädigungsvariable  $d = \frac{A_d}{A}$  als Geschichtsvariable ein. Dieses Schädigungsmodell ist ratenfrei formuliert, die Schädigungsvariable wird explizit berechnet.  $d$  nimmt Werte zwischen 0 im ungeschädigten Zustand und 1 im Fall vollständiger Schädigung, also  $A_d = A$ , ein. Die Schädigungszunahme ist verzerrungsbasiert. Das Modell geht von perfekt elastischem Verhalten des Materialpunktes bis zum Erreichen einer Grenzverzerrung  $\kappa_0$  aus, bei der Schädigung einsetzt. Bei zunehmender Dehnung schädigt das Material weiter bis vollständige Schädigung bei Erreichens des Schwellwertes  $\kappa_m$  eintritt. Im Gegensatz zum allgemeinen, isotropen Schädigungsmodell wird nur der Elastizitätsmodul abgemindert. Die Querkontraktionszahl bleibt bei diesem Modell von der Reduktion unberührt und wird als unabhängig vom Schädigungsprozess betrachtet. Entlastung führt im Spannungs-Dehnungsdiagramm zum Ursprung zurück. Dabei bleiben keine irreversiblen Dehnungen im System enthalten.

Mit den effektiven Spannungen

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbb{C}^{\text{el}} \mathbf{E}_{\text{GL}}, \quad (2.31)$$

die den elastischen Materialtensor  $\mathbb{C}^{\text{el}}$  enthalten, ergeben sich die Nominalspannungen mit Gleichung (2.30) zu

$$\mathbf{S} = \underbrace{(1 - d) \mathbb{C}^{\text{el}}}_{\mathbb{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}}} \mathbf{E}_{\text{GL}}. \quad (2.32)$$

Der Schädigungsparameter  $d = g(\kappa)$  ist eine Funktion der Verzerrungen. Dabei hängt der Schädigungsgrad von der maximalen bisher erreichten Verzerrung  $\kappa(t) = \max_{\tau \leq t} \tilde{\varepsilon}(\tau)$  ab. Die äquivalente Vergleichsverzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  ist eine skalare Größe, die in mehrdimensionalen Problemstellungen aus dem Verzerrungsfeld berechnet wird. Am Gaußpunkt wird die äquivalente Verzerrung wie in Abbildung 2.3 mit den Schwellwerten  $\kappa_0$  und  $\kappa_m$  verglichen. Dabei steht  $\kappa_0$  für den Schädigungsbeginn ( $d = 0$ ) und  $\kappa_m$  für vollständige Schädigung ( $d = 1$ ) am Gaußpunkt.

Die Berechnung der äquivalenten Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  aus den Green-Lagrange-Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\text{GL}}$  bestimmt, ob das Modell assoziiert und die Materialtangente symmetrisch ist. Als Beispiele für assoziierte Schädigung werden in CAROL U. A. (1994) die Modelle von SIMO UND JU (1987) und JU (1989) angegeben. Die Wahl ihrer äquivalenten Verzerrung entspricht  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{E}_{\text{GL}} : \mathbb{C}^{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{GL}}}$  beziehungsweise  $\tilde{\varepsilon} = 1/2 \cdot \sqrt{\mathbf{E}_{\text{GL}} : \mathbb{C}^{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{GL}}}$ . Als Beispiel für nicht assoziierte Schädigung wird das Modell von MAZARS UND LEMAITRE (1984) mit den äquivalenten Verzerrungen  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{E}_{\text{GL}} : \mathbf{E}_{\text{GL}}}$  genannt. Im Allgemeinen wird ein Modell in Anlehnung an Plastizitätsmodelle als assoziiert bezeichnet, wenn die Normale auf die Schädigungsfläche  $\partial d / \partial \mathbf{E}_{\text{GL}}$  parallel zur effektiven Spannung  $\mathbf{S}$  ist. Einen Überblick über verschiedene äquivalente Verzerrungen sowie das isotrope Schädigungsmodell liefert JIRÁSEK (2012). Für diese Arbeit wurde die Energienorm der Verzerrungen mit

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}_{\text{GL}} : \mathbb{C}^{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{GL}}}{E}} \quad (2.33)$$

gewählt. Die Assoziiertheit des Schädigungsmodells und die Symmetrie der Materialtangente ist dadurch gewährleistet. Durch die Skalierung mit dem Elastizitätsmodul  $E$  behält  $\tilde{\varepsilon}$  den Charakter einer Verzerrung.

Mit der Wahl dieser äquivalenten Verzerrungen als Energienorm geht allerdings einher, dass Dehnungen im Zug- und Druckbereich gleichermaßen zu Schädigung führen. Die Formulierung der Schädigungsfunktion

$$\tilde{f}(\mathbf{E}_{\text{GL}}, \kappa) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{E}_{\text{GL}}) - \kappa \quad (2.34)$$

bedingt den verzerrungsbasierten Charakter des Modells. Der Schädigungsfortschritt wird anhand der Schädigungsfunktion  $\tilde{f}$  überprüft:

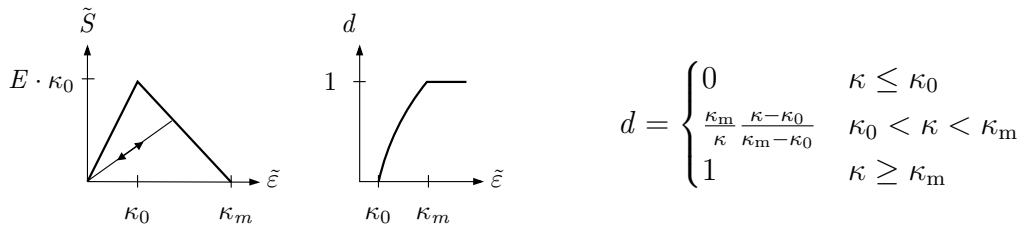
$$\begin{aligned} \tilde{f} < 0 &\Rightarrow \dot{d} = 0 && \text{Schädigung stagniert,} \\ \tilde{f} = 0 &\Rightarrow \dot{d} > 0 && \text{Schädigungsfortschritt.} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Für Be- und Entlastung gelten die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\tilde{f} \leq 0 \qquad \dot{\kappa} \geq 0 \qquad \tilde{f} \dot{\kappa} = 0. \quad (2.36)$$

Für den eindimensionalen Fall kann die lineare Spannungs-Dehnungsbeziehung wie in Abbildungen 2.3 und 2.4 für den Materialpunkt und eine eindimensionale Struktur dargestellt werden. Für den mehrdimensionalen Fall wird die Materialekante durch

$$\mathbb{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} = (1 - d)\mathbb{C}^{\text{el}} \quad (2.37)$$



**Abbildung 2.3:** Spannungs-Dehnungs- und Schädigungs-Dehnungsbeziehung am Gaußpunkt.

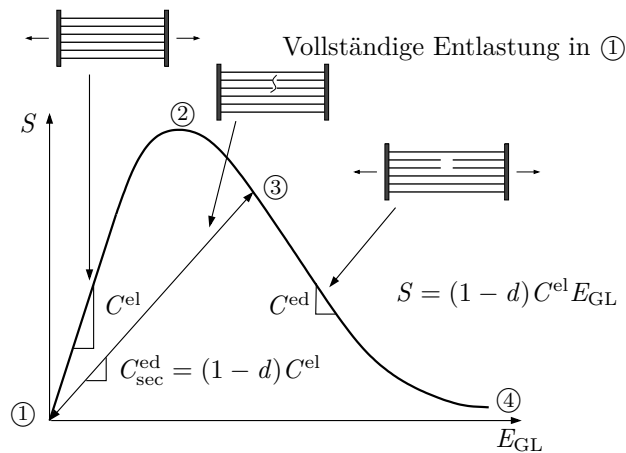
beschrieben. Sie kann aus dem Konzept der Verzerrungsäquivalenz von LEMAITRE (1996) mit

$$\mathbf{E}_{\text{GL}} = (\mathbb{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}})^{-1} : \mathbf{S} = (\mathbb{C}^{\text{el}})^{-1} : \bar{\mathbf{S}} \quad (2.38)$$

und dem Konzept der effektiven Spannungen aus Gleichung (2.33) hergeleitet werden. Die Materialsekante verbindet die Nominalspannungen  $\mathbf{S}$  mit dem Verzerrungszustand  $\mathbf{E}_{\text{GL}}$

$$\mathbf{S} = (1 - d)\mathbb{C}^{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{GL}} = \mathbb{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} : \mathbf{E}_{\text{GL}}. \quad (2.39)$$

Befindet sich der Materialpunkt in einem Entlastungs- oder Wiederbelastungszustand, also  $\tilde{f} < 0$ , entspricht die Materialsekante der Materialtangente. Die Formulierung der Elasto-Schädigungs-Tangente  $\mathbb{C}^{\text{ed}}$  folgt aus der Beziehung von Spannungs- und Dehnr-



**Abbildung 2.4:** Eindimensionale Darstellung der Spannungs-Dehnungsbeziehung.

ten

$$\dot{\mathbf{S}} = (1 - d)\mathbb{C}^{\text{el}} : \dot{\mathbf{E}}_{\text{GL}} - \mathbb{C}^{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{GL}} \dot{d} = (1 - d)\mathbb{C}^{\text{el}} : \dot{\mathbf{E}}_{\text{GL}} - \underbrace{\bar{\mathbf{S}} \left( \frac{dg}{d\kappa} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{E}_{\text{GL}}} : \dot{\mathbf{E}}_{\text{GL}} \right)}_d \quad (2.40)$$

und kann durch

$$\mathbb{C}^{\text{ed}} = (1 - d)\mathbb{C}^{\text{el}} - \frac{dg}{d\kappa} \bar{\mathbf{S}} \otimes \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{E}_{\text{GL}}} \quad (2.41)$$

beschrieben werden. Für die gewählte Energienorm der äquivalenten Verzerrungen vereinfacht sich  $\bar{\mathbf{S}} \otimes \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{E}_{\text{GL}}}$  zu  $\bar{\mathbf{S}} \otimes \bar{\mathbf{S}}$  und die Materialtangente bleibt symmetrisch. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich alle Aussagen bezüglich des Schädigungsverhaltens von Strukturen und der Bewertung von Kontrollverfahren auf die Annahme lokalisierter Rissentwicklung beziehen. Diffuse Rissbilder und Verzweigung werden in diesem Zusammenhang nicht diskutiert.

Verbunden mit Entfestigung und Schädigung tritt die Problematik der Lokalisierung auf. Lokal formulierte, entfestigende Stoffgesetze führen im kontinuumsmechanischen Modell zu numerischer Instabilität, wie dies unter anderem in BAŽANT (1976), SLUYS (1992) und DE BORST (1986) beschrieben wird. Diese Instabilität tritt für quasistatische Probleme beim Übergang einer elliptischen in eine hyperbolische Differentialgleichung auf. Hyperbolische Differentialgleichungen entsprechen im quasistatischen Fall schlecht gestellten Randwertproblemen. Der Übergang von elliptischem zu hyperbolischem Verhalten, der im betrachteten quasistatischen Fall den Stabilitätsverlust bedingt, wird als Lokalisierung bezeichnet. Er führt zu einer lokalen Konzentration der Verzerrungen in einer Prozesszone, wobei Teile der übrigen Struktur elastische Entlastungen aufweisen können. Die Breite dieses Schädigungsbandes ist in Realität werkstoffabhängig. Diese Werkstoffabhängigkeit gilt auch für die Bruchenergie, die in der Entfestigungszone während des Schädigungsprozesses freigesetzt wird (siehe SLUYS (1992)). BAŽANT (1976) beschreibt bereits die Diskretisierungsabhängigkeit der Ergebnisse im nachkritischen Bereich. Durch Lokalisierungsprozesse in der FEM kann sich bei zunehmender Netzverfeinerung Schädigung in beliebig schmalen Elementbändern manifestieren. Dabei beträgt die Breite der Schädigungszone stets eine Elementbreite.

Am Modellproblem eines Zugstabes stellt DE BORST (1986) die Abhängigkeit von Bruchenergie und Elementanzahl analog zur Beschreibung von HILLERBORG U. A. (1976) dar. Nach HILLERBORG U. A. (1976) entspricht sie der Energie, die zur Erzeugung eines Risses mit der Rissbandbreite  $w$  erforderlich ist. Zur Diskussion dieses Beispiels im Hinblick auf Lokalisierung und Netzsensitivität wird zusätzlich zu DE BORST (1986) auf KUHLE (2000) und HUND (2007) verwiesen. Die Beschreibung der Bruchenergie über

die gemittelte Materialtangente mit

$$G_f = \int S du = \frac{1}{2n} E w \kappa_0 \kappa_m \quad (2.42)$$

zeigt, dass die Bruchenergie für zunehmende Netzverfeinerung nicht konstant bleibt, sondern mit steigender Elementzahl  $n$  gegen Null strebt. Dadurch bekommt das Strukturverhalten einen zunehmend spröden Charakter. Die Beobachtung, dass die Maximallast für  $n \rightarrow \infty$  beziehungsweise Elementgröße  $h \rightarrow 0$  unkorrekterweise gegen Null strebt, wird auch in BAŽANT UND OH (1983) erläutert.

Regularisierungsmethoden, die durch Modellerweiterungen die Gutgestelltheit der Differentialgleichung im nachkritischen Bereich aufrecht erhalten sollen, ermöglichen eine netzunabhängige Systemantwort. Da in dieser Arbeit nur auf die angewandte Methode des netzadaptiven Entfestigungsmoduls eingegangen wird, sei für einen Überblick an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen (z.B. KUHL (2000), JIRÁSEK (2012)). In PIETRUSZCZAK UND MRÓZ (1981) wird mit dem Konzept verschmierter Scherbänder die Scherbandbreite für die Modellierung mit der FEM in Abhängigkeit der Elementabmessung formuliert und dadurch eine diskretisierungsunabhängige Lösung erreicht. In den Arbeiten von BAŽANT UND OH (1983) und WILLAM (1984) (Rissbandmethode, Methode des netzadaptiven Entfestigungsmoduls) wird die Bruchenergie als konstant angenommen. Die Interpretation dieser Energie als Fläche unter dem Spannungs-Dehnungsdiagramm und die Annahme eines gleichförmigen Dehnungszustandes ermöglicht die Formulierung der Bruchdehnung in Abhängigkeit der Elementanzahl (siehe hierzu auch HUND (2007)). Aus der Forderung konstanter Bruchenergie der realen Struktur  $\bar{G}_f$  (Rissbandbreite  $w$ ) und der diskretisierten Struktur  $G_f$  (Elementbreite  $h$ )  $G_f = \bar{G}_f$  ergibt sich die Bruchdehnung  $\kappa_m$  für den diskretisierten Materialpunkt aus

$$G_f = \frac{1}{2} \kappa_m E \kappa_0 h = \frac{1}{2} \bar{\kappa}_m E \kappa_0 w = \bar{G}_f \quad (2.43)$$

zu

$$\kappa_m = \frac{2\bar{G}_f}{E\kappa_0 h} = \bar{\kappa}_m \frac{w}{h}. \quad (2.44)$$

Für alle folgenden schädigungsbasierten Beispiele wurde die Bruchdehnung  $\kappa_m$  entsprechend Gleichung 2.44 in Abhängigkeit der Diskretisierung ermittelt.

# 3

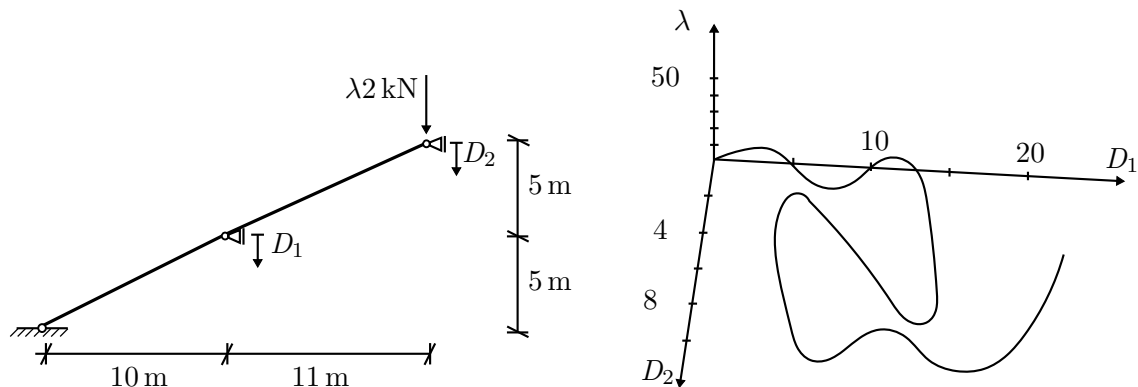
---

## Gleichgewichtspfade und Grundlagen der Pfadverfolgung

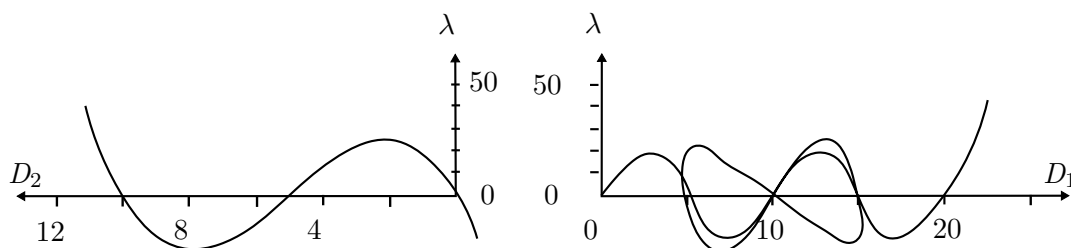
Deformationsvorgänge werden üblicherweise in Kraft-Verschiebungsdiagrammen dargestellt. Diese Kraft-Verschiebungsdiagramme enthalten Gleichgewichtspunkte, die durch ihren Kraft- und Deformationszustand gekennzeichnet sind. In der Regel startet eine nichtlineare Berechnung der Gleichgewichtspunkte mit einem undeforuierten Körper in der Referenzkonfiguration im Ursprung des Kraft-Verschiebungsdiagramms. Jeder inkrementelle Schritt liefert einen Gleichgewichtspunkt einer Momentankonfiguration. Durch Aneinanderreihung unendlich vieler Gleichgewichtspunkte entsteht ein Gleichgewichtspfad. Der Gleichgewichtspfad ist die Darstellung aller Punkte, die als Gleichgewichtslagen des Systems zu bestimmten Belastungs- und Deformationszuständen möglich sind. Dieser Gleichgewichtspfad beziehungsweise die Gleichgewichtspunkte liefern unter anderem die Basis für Stabilitätsbeurteilungen.

Die Visualisierung von Kraft-Verschiebungsdiagrammen für Mehrfreiheitsgradsysteme erfolgt in der Regel über eine Projektion der  $n + 1$ -dimensionalen Kurve auf eine zweidimensionale Darstellung durch eine Kraft- und eine Verschiebungskomponente. Der Verlauf dieser Kraft-Verschiebungs-Kurve hängt von der Wahl des dargestellten Verschiebungsfreiheitsgrades ab. Als Beispiel wird der Gleichgewichtspfad eines Zwei-Freiheitsgrad-Systems mit seinen Projektionen in zwei Ebenen in den Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt. Aus einem solchen Pfad können wesentliche Informationen über das Strukturverhalten ausgelesen werden.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Eigenschaften statischer Gleichgewichtspfade. Dies erfordert die Diskussion von Stabilitätskriterien für Prozesse und Gleichgewichtspunkte, was zusammen mit der Klassifizierung kritischer Punkte in Abschnitt 3.1 er-



**Abbildung 3.1:** Systemskizze und Gleichgewichtspfad eines Zwei-Freiheitsgrad-Systems.



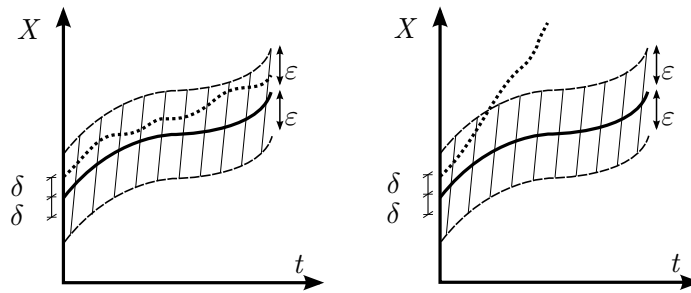
**Abbildung 3.2:** Projektionen des Gleichgewichtspfads aus Abbildung 3.1.

folgt. Welche dynamischen Effekte aus statischen Gleichgewichtspfaden für bestimmte Kontrollmethoden vorhergesagt werden können und wie dynamisch Pfadabschnitte des statischen Gleichgewichtspfad ermittelt werden können beschreibt Abschnitt 3.2. Für die spätere Beschreibung der Kontrollmethoden bei der Pfadverfolgung, werden die Begriffe Lastfall und Kontrollparameter in Abschnitt 3.3 eingeführt und erläutert. Das grundsätzliche Vorgehen von Prädiktor-Korrektor-Verfahren zur Pfadverfolgung wird in Abschnitt 3.4 beschrieben. Abschließend werden an einem Beispiel in Abschnitt 3.5 die Kraft- und die Verschiebungskontrolle unter verschiedenen Lastfällen demonstriert. Der Begriff der Stabilität im Kontext von Berechnungen wird von der Wahl des Kontrollparameters bestimmt, während die Stabilität des Gleichgewichtspunkt vom Lastfall abhängt. Im Folgenden soll zunächst die Stabilität von Gleichgewichtspfaden betrachtet werden.

## 3.1 Stabilität statischer Gleichgewichtspfade

Eine allgemeine, dynamische Definition des Begriffs der Stabilität wird durch LIAPUNOV (1892) gegeben. Sie wird unter anderem auch in BAŽANT UND CEDOLIN (1991) und BELYTSCHKO U. A. (2006) beschrieben. Diese allgemeine Betrachtungsweise wird neben der Strukturmechanik auch in vielen weiteren mathematischen Analysen angewandt.





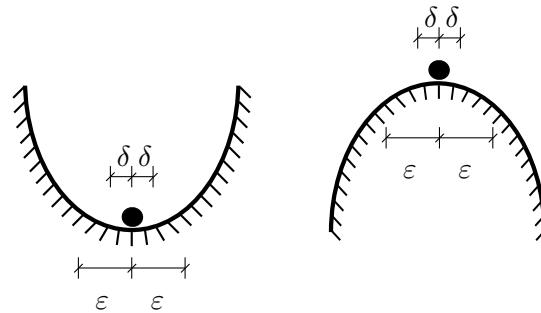
**Abbildung 3.3:** Liapunov Stabilität. Links stabil, rechts instabil.

Bei der Beurteilung der Stabilität wird zwischen der Stabilität von Prozessen und Gleichgewichtspunkten unterschieden. Nach Liapunovs dynamischer Stabilitätsdefinition ist ein Prozess dann stabil, wenn sich die Lösung eines ungestörten und eines gestörten Systems im Verlauf des betrachteten Zeitintervalls um weniger als eine Toleranz  $\varepsilon$  unterscheiden. Eine geringfügige Störungen  $\delta < \varepsilon$  wird zu Anfang auf das System aufgebracht. Ist die Störung zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  nicht nur temporär oder begrenzt angewachsen, gilt das System als instabil, andernfalls als stabil.

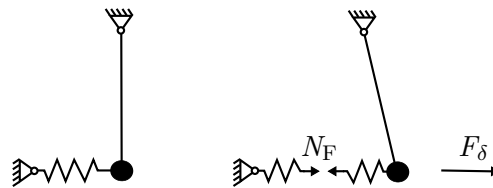
In Abbildung 3.3 links führt eine Störung  $\delta$  der Anfangsbedingung zu einer Lösung zum Zeitpunkt  $t$ , deren Abweichung  $< \varepsilon$  ist. Der Prozess ist stabil. Instabilität liegt in Abbildung 3.3 rechts vor, wo die durch die Störung  $\delta$  verursachte Systemantwort anwächst und die Lösungsumgebung  $2\varepsilon$  verlässt. Ein Gleichgewichtspunkt ist stabil, wenn sich der durch eine Störung verursachte Prozess nicht aus der Umgebung  $2\varepsilon$  um den Gleichgewichtspunkt bewegt. THOMPSON UND HUNT (1984) fassen diese dynamische Beurteilung der Stabilität folgendermaßen zusammen:

- *Wenn eine ausreichend kleine Störbewegung aus einer Gleichgewichtslage stets hinreichend klein bleibt, gilt die Gleichgewichtslage als stabil.*
- *Führt die Störung aus einer Gleichgewichtslage zurück zur ursprünglichen Gleichgewichtslage, gilt die Gleichgewichtslage als asymptotisch stabil.*
- *Wächst die Störbewegung aus einer Gleichgewichtslage, so gilt die Gleichgewichtslage als instabil.*

Die Liapunov'sche Stabilitätsdefinition kann sowohl für elastisches als auch für inelastisches Materialverhalten herangezogen werden. BELYTSCHKO U. A. (2006) beschreibt die materielle Stabilität durch ein Anwachsen einer Störung als Indikator für Instabilität herangezogen wird. Er verweist auf die Arbeit von HILL (1962), in der von einem Körper unendlicher Ausdehnung ausgegangen wird, welcher sich in einem homogenen Zustand von Spannung und Deformation befindet. Nach dem Aufbringen einer kleinen Störung, wird die Entwicklung der Störung betrachtet. Wächst sie an, ist das Material instabil.



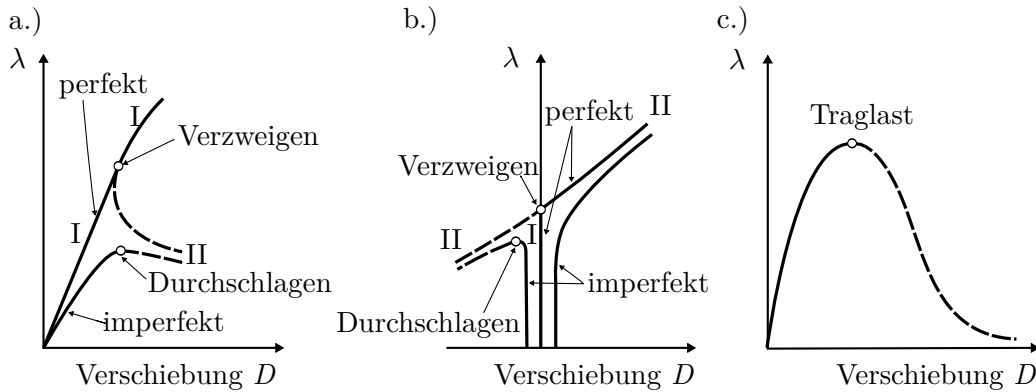
**Abbildung 3.4:** Stabilität des Gleichgewichtspunktes. Links: stabile Gleichgewichtslage, rechts: instabile Gleichgewichtslage.



**Abbildung 3.5:** Die Federkraft  $N_F$  bewirkt eine Rückstellung der gestörten Gleichgewichtslage (rechts) in seinen Ursprungszustand (links) nach Abklingen der Störung  $F_\delta$ .

Am Beispiel einer Kugel in einer Senke oder auf einer Erhebung (Abbildung 3.4) wird häufig die Stabilität eines Zustands erläutert, wie auch in BELYTSCHKO U. A. (2006). Die Kugel in der Senke in Abbildung 3.4 links wird trotz Störung  $\delta$  in ihren Ursprungszustand im Minimum der Senke zurückkehren. Die rechte Kugel hingegen wird bei jeder Störung  $\delta$  den definierten Grenzabstand  $\varepsilon$  verlassen. Wie klein die Störung  $\delta$  dabei gewählt wird, hat keinen Einfluss. Die Stabilität des Zustandes wird häufig mit Rückstellkräften erklärt. Sie bezeichnen diejenigen Kräfte, die ein System nach einer Störung in seinen Ursprungszustand zurückversetzen. In Abbildung 3.4 links übernimmt die Gravitation diese Aufgabe. Im rechten Bild hingegen wirkt sie nicht rückstellend sondern abtreibend, was zum Stabilitätsverlust führen kann. Die in Abbildung 3.5 dargestellten Rückstellkraft  $N_F$  bringt den durch die Störung  $F_\delta$  ausgelenkten Stab nach Abklingen der Störung zurück in seine Ursprungslage.

Unter anderem in MANG UND HOFSTETTER (2000) wird Stabilitätsverlust in drei Kategorien gegliedert: das Verzweigen des Gleichgewichts, Durchschlagen und das Errei-



**Abbildung 3.6:** Verzweigungs-, Durchschlags- und Traglastpunkte nach MANG UND HOFSTETTER (2000) entsprechend der Koiter'schen Klassifikation kritischer Punkte.

chen der Traglast. Dabei haben alle diese Instabilitätspunkte gemein, dass die Zuordnung von Verformungs- und Belastungszustand mehrdeutig ist. Abbildung 3.6 zeigt Verzweigungs- und Durchschlags- beziehungsweise Traglastpunkte an drei Gleichgewichtspfaden. Durchschlagspunkte bezeichnen dabei lokale und Traglastpunkte globale Maxima in der Kraft-Verschiebungskurve. Der Durchschlagspunkt wird als Punkt verstanden, an dem eine dynamische Analyse unter Kraftkontrolle auf den nächstmöglichen Gleichgewichtspunkt durchschlägt. Ob ein Traglastpunkt oder ein Durchschlagspunkt vorliegt, wird in der Regel nicht unterschieden. Der Begriff des Durchschlagspunkt wird vielmehr für alle Punkte mit horizontaler Tangente verwendet und zur Abgrenzung von Verzweigungspunkten herangezogen. Im Bezug auf Pfadverfolgung werden Durchschlags- und Traglastpunkte numerisch gleich behandelt. In Abbildung 3.6 wird deutlich, dass Verzweigungspunkte des perfekten Systems durch Aufbringen von Imperfektionen in Durchschlagspunkte des imperfekten System verwandelt werden, wenn dabei ein lokales oder globales Maximum im Kraft-Verschiebungspfad auftritt. Rechnerisch lassen sich Durchschlags- und Verzweigungspunkte über eine horizontale Tangente oder die Existenz eines infinitesimal benachbarten Punktes unterscheiden. Über die Ableitung der Ungleichgewichtskräfte nach dem Bahnparameter  $b$  und der Multiplikation dieses Ausdrucks mit der Transponierten des Nulleigenvektors  $\Phi$  des Systems wird folgende Gleichung generiert:

$$\Phi^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b} = \Phi^T \underbrace{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}}}_{\mathbf{K}_T} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial b} + \Phi^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0 \quad (3.1)$$

Da für alle Durchschlag- und Verzweigungspunkte  $\Phi^T \mathbf{K}_T = \mathbf{0}$  gilt, muss für den zweiten Term  $\Phi^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0$  gelten. Für Kraftlastfälle kann  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$  geschrieben werden und

Gleichung (3.1) verkürzt sich zu

$$\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0 \quad (3.2)$$

Gilt  $\frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0$ , liegt eine horizontale Tangente vor und es handelt sich um einen Durchschlagspunkt. Für  $\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$  existiert einen infinitesimal benachbarter Gleichgewichtspunkt auf einem Sekundärast, was einen Verzweigungspunkt charakterisiert.

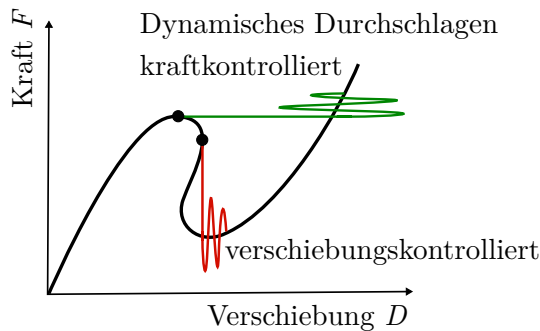
In der Literatur sind die unter Kraftkontrolle instabilen Pfadabschnitte häufig markiert und deshalb in Abbildung 3.6 gestrichelt dargestellt. In den Skizzen a.) und b.) findet der Übergang vom Primärpfad (I) zum Sekundärpfad (II) am Verzweigungspunkt statt. Ob das System dabei instabil wird, hängt von den Stabilitätseigenschaften des Sekundärpfades ab. Dies kennzeichnet auch einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Strukturverhalten an Durchschlags- und Verzweigungspunkten. Nach Erreichen eines Durchschlags- oder Traglastpunktes nimmt die Systemsteifigkeit wie in Skizze c.) in jedem Fall ab. Bei Verzweigungspunkten kann sie zu- oder abnehmen oder ihr Niveau beibehalten.

Kritische Punkte im Kontext materieller Instabilität werden BAŽANT UND CEDOLIN (1991) beschrieben. Sie beziehen sich dabei auf diejenigen Punkte, die kritische Stabilitätszustände und Verzweigungspunkte darstellen und die Eigenschaft  $\det \mathbf{K}_T = 0$  besitzen. Dabei besteht ein stabiler Gleichgewichtspfad nach BAŽANT UND CEDOLIN (1991) ausschließlich aus stabilen Gleichgewichtspunkten.

## 3.2 Statisches und dynamisches Gleichgewicht

In der Strukturmechanik wird zwischen (quasi-)statischem und dynamischem Systemverhalten unterschieden. Dynamische Probleme sind explizit zeitabhängig formuliert, da die Trägheitskräfte Zeitableitungen enthalten. Trotz der Vernachlässigung von Trägheitseffekten für statische oder quasistatische Probleme, können diese zeitabhängig sein und zeitähnliche Parameter erfordern. Dieser Zusammenhang wird unter anderem in FELIPPA (2001) beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird auf den Steigerungsfaktor  $\lambda$  zurückgegriffen, der mit der jeweiligen Belastung multipliziert wird. Ein solcher Parameter reguliert die Zuordnung der Systemantwort zum Belastungszustand.

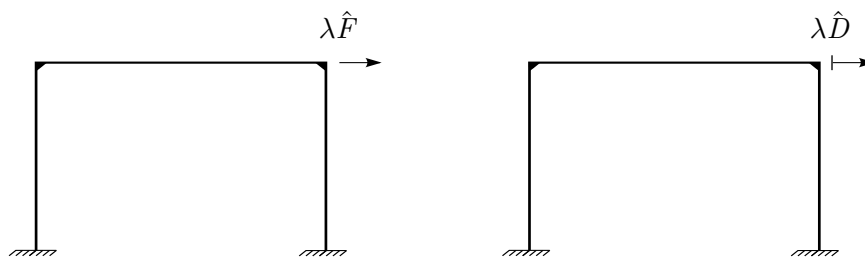
Während bei statischem Gleichgewicht die inneren mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein müssen, kommen in der Dynamik die Trägheits- und gegebenenfalls Dämpfungskräfte hinzu, die sich mit den inneren und äußeren Kräften in Summe zu Null addieren. Ob dabei die inneren mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen, hängt also vom Anteil der Trägheits- und Dämpfungsterme ab. Die Berücksichtigung von Träg-



**Abbildung 3.7:** Dynamisches Durchschlagen unter Kraft- und Verschiebungskontrolle.

heitseffekten beeinflusst das Verhalten von Struktur und Berechnungsalgorithmus grundlegend. Bisweilen wird versucht, den statischen Gleichgewichtspfad mit einer stark gedämpften dynamischen Berechnung näherungsweise zu ermitteln, wenn die Analyse mit statischen Verfahren nicht bis zum gewünschten Gleichgewichtspunkt durchgeführt werden kann. Das Systemverhalten wird durch die stark gedämpfte dynamische Analyse jedoch verändert. Zudem können instabile Gleichgewichtszustände von der dynamischen Analyse nicht abgebildet werden. Das bedeutet, dass Teile des Pfades bei diesem Vorgehen nicht sichtbar werden. Umgekehrt kann aus einem statischen Gleichgewichtspfad aber auf die Entwicklung dynamischer Effekte und das Verhalten diverser Kontrollmethoden eines Experiments geschlossen werden.

Abhängig von der Kontrollmethode kann sich auch ein quasistatisches Experiment bei Erreichen eines Durchschlagpunktes hochdynamisch verhalten. Dieses Phänomen wird in Abbildung 3.7 deutlich. Schlagartig setzt für die dargestellten verschiebungs- und kraftkontrollierten Experimente bei Erreichen des zugehörigen Kontrollendpunktes (jeweils gekennzeichnet durch einen Punkt auf dem Gleichgewichtspfad) dynamisches Verhalten ein. Abhängig davon, wie weit der nächste erreichbare Gleichgewichtspunkt entfernt liegt und wie sehr sich die Gleichgewichtspunkte in ihrem Deformations- und Belastungszustand voneinander unterscheiden, entwickelt sich eine mehr oder weniger dynamische Systemantwort. Je größer diese Differenz ausfällt, desto explosionsartiger schlägt das System durch. Dadurch werden entsprechend starke Schwingungen um die Gleichgewichtslage provoziert. Reale Experimente zeigen dieses Verhalten immer dann, wenn nach dem Kontrollendpunkt ein weiterer Gleichgewichtspunkt nach Durchschlagen erreichbar ist. Numerisch können dynamische Effekte nur durch dynamische Analysen abgebildet werden.



**Abbildung 3.8:** Lastfallbeispiele. Links: Kraftlastfall, rechts: Verschiebungslastfall.

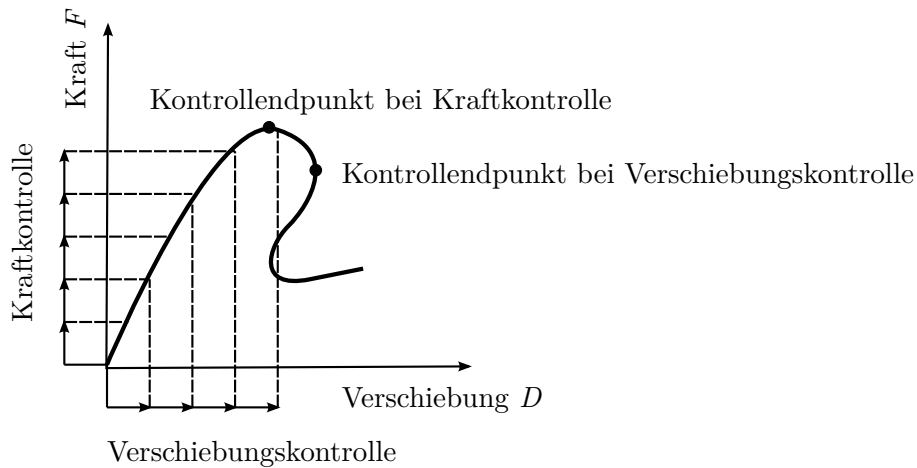
## 3.3 Lastfall und Kontrollparameter

In einigen Veröffentlichungen wird nicht zwischen Lastfall und Kontrollvariable unterschieden. So bleibt offen, ob der Lastfall kontrolliert wird oder ob eine vom Lastfall abweichende Größe vorgeschrieben wird. Um diese Unterscheidung in den Berechnungsverfahren in Kapitel 5 und 6 vornehmen zu können, ist vorab eine genaue Differenzierung der beiden Begriffe erforderlich. Der Lastfall steht dabei bereits bei der Modellierung der Struktur fest und ist Teil der Problembeschreibung. Die Kontrollmethode soll den Gleichgewichtspfad möglichst vollständig abbilden und ist unabhängig von der Modellierung des Problems. Generell kann in der Abbildung strukturmechanischer Probleme die Kontrollgröße vom aufgebrachtem Lastfall abweichen. In realen Experimenten müssen hierfür allerdings bestimmte Prüfmaschinentypen zur Verfügung stehen.

Die mechanische Antwort statisch belasteter Systeme wird zumeist durch äußere Kraftlasten, vorgeschriebene Verschiebungen oder Umgebungsbedingungen hervorgerufen. Typischerweise wird das Verhalten großer Strukturen maßgebend durch Kraftlastfälle wie Eigengewicht und Verkehrslasten bestimmt. Kleinere, weichere Bauteile hingegen hängen häufig von den Verschiebungen angrenzender, großer steifer Bauteile ab. Durch diese Zwangslastfälle können weiche Tragwerksteile deutlich vor dem Kollaps der Gesamtstruktur lokal versagen.

Im Folgenden wird beispielhaft zwischen Kraft- und Verschiebungslastfall unterschieden. In vielen nichtlinearen Analysen wird vereinfachend die Annahme getroffen, dass das bestehende Lastkollektiv einer Struktur linear mit einem einzigen skalaren Steigerungsfaktor gesteigert wird. Die Belastung wird dabei wie in Abbildung 3.8 mit dem Steigerungsfaktor  $\lambda$  multipliziert. Alle numerischen Beispiele sind mit einem linear gesteigerten Lastkollektiv belegt, generell können aber viele unabhängige Steigerungsfaktoren verwendet werden, die dann in den Linearisierungen berücksichtigt werden müssen.

In Abschnitt 3.1 wird die kritische Kraft der Struktur unter einem Kraftlastfall an einem eindimensionalen Beispiel mit  $\lambda_{\text{krit}} F$  beschrieben. Diese Darstellung charakteristischer



**Abbildung 3.9:** Kontrollendpunkte: Versagenspunkte bei Kraft- und Verschiebungskontrolle aus BISCHOFF UND RAMM (2012).

Punkte wird üblicherweise in der Literatur verwendet. Dabei wird häufig der Steigerungsfaktor selbst als kritisch bezeichnet.

Die Kontrolle des Belastungsprozesses erfolgt über vorgeschriebene Parameter, die in die Zusatzgleichung  $f = 0$  eingehen. Diese Kontrollparameter unterliegen bestimmten Erfordernissen. Sie müssen in jedem Inkrement Werte annehmen können, die die Erfüllung der Zusatzgleichung zulassen. Gleichgewichtspunkte, über die hinaus Kontrollgleichungen nicht mehr erfüllt werden können, werden im Folgenden als Kontrollendpunkte bezeichnet und sind in Abbildung 3.9 für Kraft- und Verschiebungskontrolle dargestellt. Das Inkrementieren des Steigerungsfaktors entspricht der Kontrolle des Lastfalls. Unter einem Verschiebungslastfall entspricht dies einer Verschiebungskontrolle, unter einem Kraftlastfall wird sie als Kraftkontrolle bezeichnet. In der Literatur wird an manchen Stellen von einer Lastkontrolle anstelle einer Kraftkontrolle gesprochen. Implizit setzt das voraus, dass ein Kraftlastfall gesteigert wird.

Statische Gleichgewichtspfade hängen von der Beschaffenheit der Struktur, den Randbedingungen und dem Lastfall ab. Welche Gleichgewichtspunkte daraus über eine Berechnung identifiziert und sichtbar gemacht werden können, wird durch die Kontrollmethode festgelegt. Wie oben bereits erwähnt, kann ein stetiges Verfolgen des Pfades nur über eine Methode gewährleistet werden, die den Pfad vollständig abbilden kann. Bezüglich der Darstellung von Verschiebungslastfällen in Kraft-Verschiebungsdiagrammen sei erwähnt, dass das Auftragen von  $\lambda$  über dem belasteten Freiheitsgrad nur die Abhängigkeit des Freiheitsgrades vom Steigerungsfaktor darstellt. Hier eignet sich das Auftragen einer bestimmten Knotenkraft anstelle von  $\lambda$  über einen Freiheitsgrad. Die Visualisierung von Gleichgewichtskurven kann als eine Form von Postprocessing verstanden werden.

Die Unterscheidung von Kontroll- und Belastungsgröße ist häufig nicht ganz einfach. Als abschließendes Beispiel soll ein Ballon betrachtet werden, in den pro Zeiteinheit ein bestimmtes Gasvolumen eingefüllt wird. Es könnte davon ausgegangen werden, dass sich Druck- und Volumenkontrolle an diesem Experiment in ihrer Eignung nicht unterscheiden. Da die Steifigkeit der Ballonhaut ab einer bestimmten Dehnung aber abnimmt, bleibt der Druck im Ballon während des Versuchs nicht proportional zum eingefüllten Gasvolumen. Folglich unterscheiden sich die beiden Kontrollmechanismen in diesem Beispiel deutlich.

## 3.4 Aufbau von Pfadverfolgungsmethoden

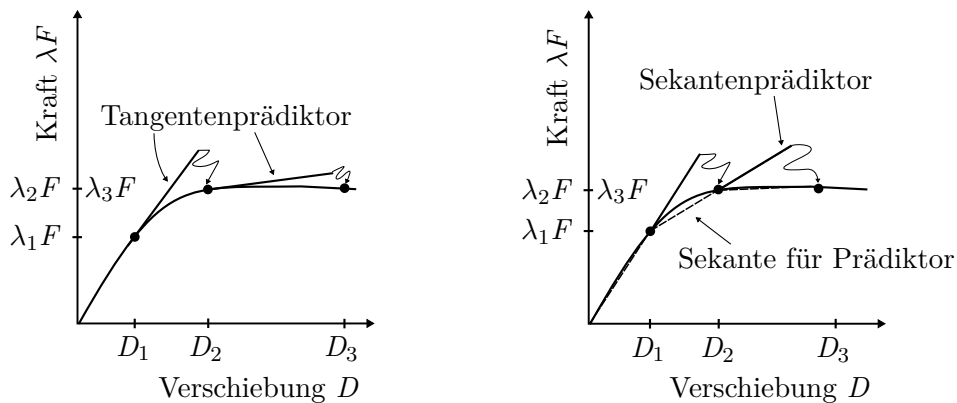
Für die Berechnung nichtlinearer statischer Gleichgewichtspfade werden in der Regel Prädiktor-Korrektor-Verfahren verwendet. Eine direkte Berechnung von Gleichgewichtspunkten beliebiger Deformationszustände ist für elastisches Materialverhalten möglich. Werden dabei die Ungleichgewichtskräfte zu groß, konvergiert das Lösungsverfahren nicht. Da die Berechnung eines einzelnen Gleichgewichtspunktes besonders im nachkritischen Bereich nicht zur Beurteilung des Tragverhaltens ausreicht, werden für stark nichtlineare Probleme in den meisten Fällen inkrementell iterative Pfadverfolgungsmethoden eingesetzt. Pfadabhängiges Verhalten erfordert in jedem Fall eine inkrementelle Lastaufbringung, sodass sich inkrementell iterativen Verfahren für die Berechnung des statischen Gleichgewichtspfades dieser Probleme durchgesetzt haben. Der Steigerungsfaktor  $\lambda$  adaptiert dabei die Belastung der Struktur. Eine Beschreibung der Strukturbelastung und die Abgrenzung zum Kontrollparameter findet sich in Abschnitt 3.3. Die folgende Einführung soll einen Überblick über inkrementell iterative Vorgehen geben, wie sie auch im Rahmen dieser Arbeit entwickelt werden.

Die Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{R}$ , auch als Residuum bezeichnet, berechnen sich aus der Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (2.19). Die Gleichgewichtsbedingung umfasst  $n$  Gleichungen

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = 0, \quad (3.3)$$

die hier in Vektorschreibweise für verschiebungsunabhängige Lasten zusammengefasst sind. Aus dem inkrementell iterativen Vorgehen der nichtlinearen Analyse ergibt sich zusätzlich zu den  $n$  Systemfreiheitsgraden der Steigerungsfaktor  $\lambda$  als Unbekannte. Somit stehen  $n + 1$  unbekannte Freiheitsgrade einem System von  $n$  Gleichgewichtsgleichungen gegenüber. Um ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten, wird die skalare Zusatzgleichung  $f = 0$  eingeführt. Diese Zusatzgleichung wird auch als Kontrollglei-





**Abbildung 3.10:** Prädiktor als Tangente oder Sekante.

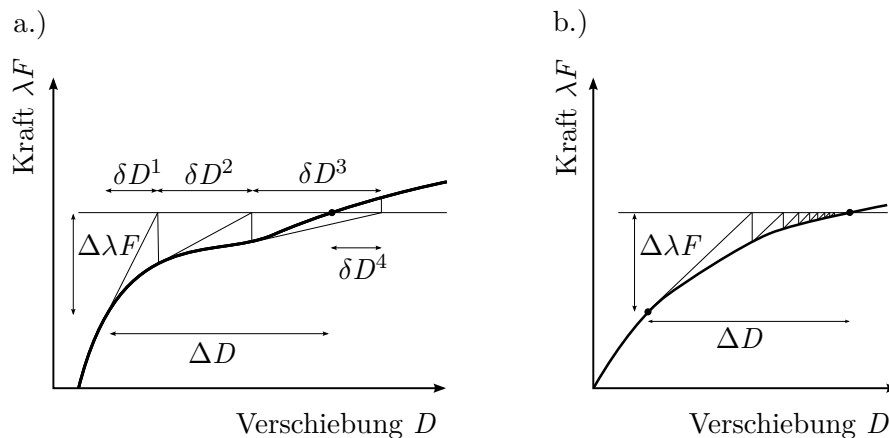
chung bezeichnet, da in dieser Gleichung diejenige Größe vorgeschrieben wird, die den Prozess im aktuellen Inkrement kontrolliert.

Prädiktor-Korrektor-Verfahren bestehen aus einer Schätzung des nächsten Gleichgewichtspunktes, dem Prädiktor, und einem iterativen Korrektorverfahren zur Ermittlung des Gleichgewichtspunktes, der die Zusatzgleichung erfüllt.

### 3.4.1 Prädiktor

Der Prädiktor hat die Funktion, eine Vorhersage über die Lage des folgenden Gleichgewichtspunktes zu treffen. Idealerweise liegt der geschätzte Lösungspunkt bereits sehr nahe am Gleichgewichtspfad. Über ein Iterationsverfahren wird dann der gewünschte Gleichgewichtspunkt ermittelt. Prädiktoren gibt es in vielfältiger Ausführung: Beispielsweise als lineare Tangente an den Gleichgewichtspfad im aktuellen Gleichgewichtspunkt, als extrapolierte Sekante oder als höherwertige Funktion. Die Berechnung eines quadratischen Prädiktors wird in WAGNER (1991) beschrieben. REITINGER (1994) bewertet den numerischen Aufwand zur Berechnung höherer Pfadableitungen als gering, sodass Prädiktoren höherer Ordnung durchaus Vorzüge gegenüber ihren linearen Verwandten aufweisen. Skizzen des Tangenten- und Sekantenprädiktors sind in Abbildung 3.10 dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird zu Beginn der nichtlinearen Analyse am unverformten System ein Prädiktorschritt in Form einer Tangente an die Gleichgewichtskurve vorgenommen. Über die Lösung der linearen Gleichung  $\mathbf{D} = \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{F}_{\text{ext}}$  wird die inkrementelle Änderung des Deformationszustandes ermittelt. Anschließend wird der Prädiktor auf die gewünschte Schrittweite mit Bezug auf die inkrementierte Größe skaliert.



**Abbildung 3.11:** Eindimensionale Darstellung des Newton-Raphson-Verfahrens in a.) und des modifizierten Newton-Verfahrens in b.) am Beispiel eines Inkrements unter Kraftkontrolle.

Folgende Prädiktorschritte werden als Extrapolation der Sekante zwischen den Gleichgewichtspunkten der inkrementellen Schritte  $m - 1$  und  $m$  ermittelt. Damit erfüllt der Prädiktor automatisch die Schrittweitevorgabe und die Kontrollgleichung, da die ermittelte Sekante in Richtung und Länge als Schätzung für den nächsten Gleichgewichtspunkt verwendet wird. In jedem inkrementellen Schritt folgt ein Newton-Raphson-Korrekturverfahren. Prädiktoren, die als Sekante ausgeführt werden, sind in Abbildung 3.10 rechts dargestellt.

#### 3.4.2 Korrekturverfahren

An den Prädiktorschritt schließt sich das iterative Korrekturverfahren an. In Abbildung 3.11 sind das Newton-Raphson-Verfahren und das modifizierte Newton-Verfahren als Beispiele gängiger Iterationsmethoden dargestellt. Das Newton-Raphson-Verfahren wird in der Strukturmechanik unter anderem zur Nullstellensuche nichtlinearer Funktionen eingesetzt. Die Grundlage liefert eine Taylorreihenentwicklung, die nach dem linearen Term abgebrochen wird. Für ein konsistent linearisiertes Gleichungssystem weist das Verfahren die oben genannten quadratischen Konvergenzeigenschaften auf. Dabei beschreibt der Begriff der quadratischen Konvergenz die quadratische Abnahme der Fehlernorm. SCHWEIZERHOF (1990) bewertet die Effizienz dieses Verfahrens unter numerischen Gesichtspunkten als „häufig fraglich“. Die Schrittweiten für die Berechnung der Kraft-Verschiebungskurve müssen ausreichend klein gewählt werden, um quadratische Konvergenz zu erhalten. Zusätzlich muss in jedem Iterationsschritt die Systemsteifigkeitsmatrix neu berechnet werden, was erheblichen Rechenaufwand bedeutet. Das mo-

difizierte Newton Verfahren stellt die Steifigkeitsmatrix nur einmal für jedes Inkrement auf. Die Iterationsschritte im Inkrement werden dann alle mit der gleichen, unveränderten Matrix ausgeführt. Die Konvergenz für quadratische Funktionale ist dann nur noch linear. In SCHWEIZERHOF (1990) werden diverse Varianten des modifizierten Newton Verfahren diskutiert, die hier nicht weiter betrachtet werden.

Numerische Lösungsmethoden für die linearisierten Gleichungssysteme teilen sich in direkte und iterative Verfahren auf. Nicht alle Lösungsverfahren eignen sich auch für unsymmetrische Matrizen. Auch wenn die numerische Effizienz der Pfadverfolgungsmethoden von den Eigenschaften der Matrixlöser beeinflusst wird, wird in dieser Arbeit nicht auf Lösungsverfahren oder Vorkonditionierung bei iterativen Gleichungslösern eingegangen. Eine umfangreiche Diskussion dieser Themengebiete findet sich unter anderem in ARGYRIS UND MLEJNEK (1986), GOLUB UND VAN LOAN (1996), MEISTER (2005) oder VON SCHEVEN (2009).

### 3.4.3 Kontrollgleichung

Konvergenzeigenschaften und Zuverlässigkeit von Pfadverfolgungsmethoden beruhen im Wesentlichen auf der Wahl der Zusatzgleichung beziehungsweise ihrer Kontrollparameter. Auch die Ausführung des Prädiktorschritts, das Korrektorverfahren und die Schrittweitenregulierung beeinflussen diese Eigenschaften.

Durch die Wahl einer geeigneten Nebenbedingung in Form einer Kontrollgleichung werden diejenigen Gleichgewichtspunkte herausgefiltert und berechnet, die diese Zusatzgleichung erfüllen. Als allgemeinste Form der Zusatzgleichung soll die Kontrollgröße  $\Delta c$  inkrementiert werden:

$$f = \Delta c - \Delta \hat{c} = 0. \quad (3.4)$$

Beispielhaft kann für die vorgeschriebene Kontrollgröße  $\Delta \hat{c}$  in Gleichung (3.4) ein Verschiebungsinkremente  $\Delta D_c$  für Verschiebungskontrolle, ein Kraftinkrement  $\Delta F$  im Fall von Kraftkontrolle oder ein Bogenlängeninkrement  $\Delta s$  für Bogenlängenkontrolle eingesetzt werden.  $\Delta \hat{c}$  steht dann für die entsprechenden vorgegebenen Schrittweiten  $\Delta \hat{D}$ ,  $\Delta \hat{F}$  oder  $\Delta \hat{s}$ . Das Inkrementieren von  $\Delta \lambda$  bei einer Kraftkontrolle  $\Delta \lambda \mathbf{F}_{\text{ext}}$  würde in dieser Schreibweise bedeuten, dass ein Kraftlastfall vorliegt. Die Kontrollgleichung könnte dann auch durch  $f = \Delta \lambda - \Delta \hat{\lambda}$  beschrieben werden.

Jedes Inkrement wird von einer bestimmten Größe in der Zusatzgleichung kontrolliert. Diese Größe kann für jedes Inkrement neu ausgewählt werden und folglich im Verlauf der Berechnung variieren. Für  $m$  Inkremente ergeben sich damit  $m$  verschiedene Kontrollmöglichkeiten. Genau genommen kann sogar in jedem Iterationsschritt eine neue

Zusatzgleichung gewählt werden (LORENTZ UND BADEL (2004)), was jedoch das Konvergenzverhalten des Iterationsprozesses entscheidend beeinflusst und gegebenenfalls zum Verlust quadratischer Konvergenz in der näheren Umgebung der Lösung führen kann. Die Funktion der Zusatzgleichung sei an dieser Stelle an Beispielen erklärt: Für die Verschiebungskontrolle  $f = \Delta D_c - \Delta \hat{D} = 0$  werden Gleichgewichtspunkte aus dem Gleichgewichtspfad gefiltert, die im Abstand  $\Delta \hat{D}$  vom letzten Gleichgewichtspunkt liegen. Damit die Zusatzgleichung erfüllt werden kann, muss das Inkrement  $\Delta D_c$  positiv sein und die kontrollierte Größe  $D_c$  somit zunehmen.

Die Zusatzgleichung  $f = \Delta \lambda - \Delta \hat{\lambda}$ , die den Steigerungsfaktor  $\lambda$  inkrementiert, stellt einen Sonderfall dar. Über die Zusatzgleichung wird es möglich, die  $n + 1$ te Unbekannte  $\lambda$  auszuwerten. Da  $\Delta \lambda$  vorgeschrieben ist und  $\lambda$  damit nicht mehr unbekannt ist, braucht die Zusatzgleichung im Gleichungssystem nicht aufzutauchen.

Zusatzgleichungen können direkt oder iterativ erfüllt werden. In den grundlegenden Arbeiten von RAMM (1981) und CRISFIELD (1981) wird die Zusatzgleichung zum Beispiel direkt erfüllt. Das heißt, dass nur das Residuum für das Newton-Raphson-Verfahren linearisiert wird, die Zusatzgleichung  $f = 0$  wird dann in einem nachfolgenden Rechenschritt gelöst. Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Zusatzgleichung zusammen mit den Gleichgewichtsgleichungen konsistent zu linearisieren und iterativ zu erfüllen. Für das Bogenlängenverfahren wird dieses Verfahren in SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) erläutert. Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit für jedes vorgestellte Prädiktor-Korrektor-Verfahren angewandt. Eine tiefer gehende Beschreibung dieser konsistenten Linearisierung der Zusatzgleichung erfolgt im anschließenden Abschnitt 3.4.4.

#### 3.4.4 Konsistent linearisierte Zusatzgleichung im Korrektorverfahren

Zusätzlich zur Linearisierung der Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{R}$  kann für das Newton-Raphson-Verfahren auch die Kontrollgleichung nach SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) konsistent linearisiert und in das Gleichungssystem aufgenommen werden. Die im weiteren Verlauf entwickelten Verfahren beruhen alle auf diesem Vorgehen.

Die Linearisierung erfolgt für alle Unbekannten: die Freiheitsgrade  $\mathbf{D}$  und den Steigerungsfaktor  $\lambda$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{LIN } \mathbf{R} &= \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \mathbf{D}^i} \delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \lambda^i} \delta \lambda^{i+1} \\ \text{LIN } f &= f(\mathbf{D}^i, \lambda^i) + \frac{\partial f(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \mathbf{D}^i} \delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial f(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \lambda^i} \delta \lambda^{i+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Bezeichnung  $\delta \mathbf{D}^i = \mathbf{D}^i - \mathbf{D}^{i-1}$  beschreibt die aktuellen iterativen Änderungen des Verschiebungsvektors und  $\delta \lambda^i = \lambda^i - \lambda^{i-1}$  diejenigen des Steigerungsfaktors im Iterationsschritt  $i$ . Das Inkrement  $\Delta \mathbf{D}^m = \Delta \mathbf{D}^{m-1} + \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{D}^i$  setzt sich dann aus dem Prädiktor  $\Delta \mathbf{D}^{m-1}$  und den korrigierenden iterativen Änderungen  $\sum_{i=1}^m \delta \mathbf{D}^i$  zusammen. Ein Verschiebungsincrement mit den zugehörigen Iterationen ist in Abbildung 3.11 skizziert. In dieser Darstellung, die sich auf das Newton-Raphson-Verfahren bezieht, ist der Prädiktorschritt nicht explizit markiert.  $\delta \mathbf{D}^{m-1}$  entspricht der dort angetragenen Verschiebungsänderung  $\delta \mathbf{D}^1$ .  $\delta$  hat in diesem Abschnitt und in allen folgenden Kapiteln keinen Bezug zur Variationsrechnung sondern bezeichnet die iterativen Änderungen einer Größe.

Die Ableitung nach den Inkrementen der Verschiebungen  $\Delta \mathbf{D}$  oder den iterativen Änderungen  $\delta \mathbf{D}$  entspricht der Ableitung nach der Verschiebung  $\mathbf{D}$  selbst. Das gilt auch für den Steigerungsfaktor  $\lambda$ . Das Differenzieren erfolgt nach dem aktuellen Wert (inkrementeller Schritt  $m$ , Iterationsindex  $i$ ) von  $\mathbf{D}$  oder  $\lambda$ . Sowohl die Inkrementanteile  $\Delta \mathbf{D}^m = \mathbf{D}^{m,i} - \mathbf{D}^{m-1}$  und  $\Delta \lambda^m = \lambda^{m,i} - \lambda^{m-1}$  als auch die iterativen Änderungen im Inkrementenschritt  $m$ ,  $\delta \mathbf{D}^i = \mathbf{D}^i - \mathbf{D}^{i-1}$  respektive  $\delta \lambda^i = \lambda^i - \lambda^{i-1}$ , hängen von den aktuellen Werten  $\mathbf{D}^{m,i}$  beziehungsweise  $\lambda^{m,i}$  ab. Folglich ergibt sich aus der Kettenregel beispielhaft für Verschiebungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{D}} \frac{\partial \Delta \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{D}}, \quad (3.6)$$

weil der Term  $\frac{\partial \Delta \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}}$  sich zu Eins ergibt.

Eine verkürzte Matrixschreibweise von Gleichung (3.5) lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{R}_{,\lambda} \\ f_{,\mathbf{D}} & f_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{D} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ f \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Ableitung von  $f$  nach dem Steigerungsfaktor  $\lambda$  hängt von der Zusatzgleichung und vom Lastfall ab. Damit ist  $\partial f / \partial \lambda = \partial f / \partial \mathbf{D} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial \lambda \neq 0$  für Verschiebungslastfälle, wie beispielsweise Stützensenkung. Die Verschiebung wird dabei mit dem Steigerungsfaktor  $\lambda$  inkrementiert. Besteht diese Abhängigkeit nicht, folgt  $\partial \mathbf{D} / \partial \lambda = \mathbf{0}$  und  $\partial f / \partial \lambda = 0$ .

Das unsymmetrische Gleichungssystem (3.7) kann am Stück mit Hilfe eines Gleichungslösers für unsymmetrische Gleichungssysteme gelöst werden. Mit diesem Vorgehen verliert das Gleichungssystem seine Bandstruktur aufgrund der zusätzlichen Zeile und Spalte. Eine elegante Alternative wird in RAMM (1981) und CRISFIELD (1981) aufgezeigt. Das ursprünglich von BATOZ UND DHATT (1979) vorgeschlagene Verfahren löst das Gleichungssystem in zwei Schritten und kann damit die Symmetrie der Tangentenstei-

figkeitsmatrix wieder ausnutzen. Zunächst wird die obere Zeile aus Gleichung (3.7) umgestellt. Daraus ergeben sich für

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{D} = -\mathbf{R} - \delta \lambda \mathbf{R}_{,\lambda} \quad (3.8)$$

zwei Terme auf der rechten Seite. Die iterativen Änderungen  $\delta \mathbf{D}$  des Verschiebungsfeldes werden anschließend aufgeteilt:

$$\delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{D}_R + \delta \lambda \delta \mathbf{D}_F. \quad (3.9)$$

Das Einsetzen von Gleichung (3.9) in Gleichung (3.8) führt letztendlich zu einer Darstellung, die sich in zwei getrennte Gleichungen aufteilen lässt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{D}_R &= -\mathbf{R} \\ \mathbf{K}_T \delta \mathbf{D}_F &= -\delta \lambda \mathbf{R}_{,\lambda}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

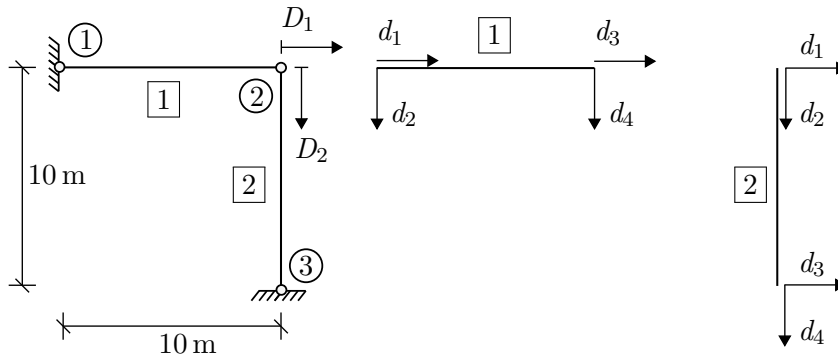
Zunächst erfolgt die Berechnung von  $\delta \mathbf{D}_R$  und  $\delta \mathbf{D}_F$  aus Gleichung (3.10). Die Ergebnisse werden in Gleichung (3.9) eingesetzt und Gleichung (3.9) dann wiederum in die zweite Zeile von Gleichung (3.7). Das Auflösen dieser zweiten Zeile aus Gleichung (3.7) nach  $\delta \lambda$  führt dann schlussendlich auf

$$\delta \lambda = -\frac{f + f_{,\mathbf{D}} \delta \mathbf{D}_R}{f_{,\mathbf{D}} \delta \mathbf{D}_F + f_{,\lambda}}. \quad (3.11)$$

Über diese Gleichung werden die iterativen Änderungen  $\delta \lambda$  des Steigerungsfaktors und des Verschiebungsinkrements  $\delta \mathbf{D}$  ausgewertet. Die Auswertung von  $\delta \lambda$  ist der Schlüssel zur Lösung für den jeweiligen Iterationsschritt und des damit zusammenhängenden Inkrements.

Auf den Ablauf des inkrementell iterativen Prozesses wird im folgenden Abschnitt am Beispiel eines Dreigelenktragwerks genauer eingegangen. Das Tragwerk wird unter einem Kraft- und unter einem Verschiebungslastfall mit Kraft- und Verschiebungskontrolle berechnet. In dieser algorithmischen Umsetzungen zu Lastfall und Kontrollgröße wird eine zusätzliche Unbekannte, die gesteuerte Auflagerkraft, eingeführt. Sie wird nicht in Abhängigkeit der Verschiebung dargestellt, um ein anschauliches Beispiel zu generieren. Folglich treten in diesem Zusammenhang auch Ableitungen nach dieser zusätzlichen Unbekannten auf.

Für den Fall der konsistent linearisierten Zusatzgleichung wird in Abschnitt 3.5 auch gezeigt, dass die Kontrollgleichung bei gleich bleibendem Lastfall ausgetauscht werden kann, ohne dass sich am algorithmischen Ablauf etwas verändert. Dennoch bleibt zu



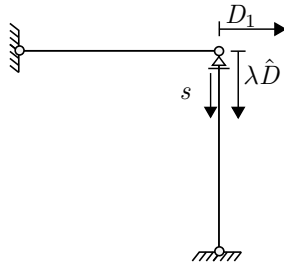
**Abbildung 3.12:** Geometrie und Freiheitsgrade ( $d_1 - d_4$  lokal,  $D_1$  und  $D_2$  global) des Beispiels Dreigelenktragwerk.

beachten, dass eine ungeschickt gewählte Zusatzgleichung zum Versagen des Algorithmus führen kann.

### 3.5 Kraft- und Verschiebungskontrolle an einem Beispiel

An einem einfachen Beispiel aus elastischen Fachwerkstäben mit vier Freiheitsgraden je Stab wird der Ablauf des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens mit konsistent linearisierter Zusatzgleichung dargestellt. Um die Begriffe Lastfall und Kontrolle zu verdeutlichen, werden hier Verschiebungs- und Kraftlastfälle mit Kraft- und Verschiebungskontrolle berechnet. Dabei kommen dabei sowohl Tangenten- als auch Sekantenprädiktoren zum Einsatz.

In Abbildung 3.12 sind Geometrie und Freiheitsgrade des Beispiels „Dreigelenktragwerk“ dargestellt.  $F = 1$  entspricht der Einheitslast eines Kraftlastfalls und wird mit dem Steigerungsfaktor  $\lambda$  multipliziert. Das gleiche gilt für die Einheitsverschiebung  $\hat{D} = 1$  beim Verschiebungslastfall. Die Elementnummern stehen in Kästchen, die Knotennummern sind umkreist. An Element 1 sind die lokalen Elementfreiheitsgrade  $d_1$  und  $d_2$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen belegt. An Element 2 betrifft dies die lokalen Elementfreiheitsgrade  $d_3$  und  $d_4$ . Bezüglich der globalen Ausdrücke sind diese Freiheitsgrade Null, sodass nur am Knoten 2 die Verschiebungen  $D_1$  und  $D_2$  berücksichtigt werden. Diese Problemstellung mit allen enthaltenen Angaben soll für die folgenden Unterkapitel gelten.



**Abbildung 3.13:** Verschiebungslastfall am Dreigelenktragwerk.

Die unterschiedlichen Kontrollmethoden führen im Wesentlichen nur zu einer Veränderung der Zusatzgleichung, des Residuums und ihren Linearisierungen. Diese werden direkt oder indirekt für die Berechnung von  $\delta\lambda$  benötigt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird bei nur einem oder zwei Freiheitsgraden anstelle der Zweischrittlösung, die schließlich zu Gleichung (3.11) führt, ein unsymmetrisches Gleichungssystem gelöst.

In allen Beispielen sind äußere Kraftlasten unabhängig vom Verschiebungszustand. Die zugehörige Ableitung ist damit  $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{0}$ , vergleiche Gleichung (3.3). Die Auflagerkraft  $s$  aus Abbildung 3.13, die für diese Verschiebungskontrolle der Stabkraft im Element 2 entspricht, wird in den Abschnitten 3.5.3 und 3.5.4 als Kontrollgröße verwendet. Sie wird hier als Unbekannte mitgeführt, nach der, zusätzlich zu  $\lambda$  und  $\mathbf{D}$ , differenziert wird.

Die Ableitungen des Residuums werden als Ableitung der Komponenten  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  berechnet und ausgewertet. Aus der Beziehung  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}}$  ergibt sich für die Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{D}}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial s}. \quad (3.12)$$

Durch differenzieren der internen Kräfte nach den globalen Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{D}$  ergibt sich die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ . Bei Verschiebungslastfällen wie in Abbildung 3.13 hängen Verschiebungsfreiheitsgrade vom Steigerungsfaktor  $\lambda$  ab. Detailliert wird dies an den Beispielen in den Abschnitten 3.5.3 und 3.5.4 diskutiert. Zusammenfassend gilt für die Ableitungen von  $\mathbf{F}_{\text{int}}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{K}_T, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} = \overbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}}}^{\mathbf{K}_T} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \lambda}. \quad (3.13)$$



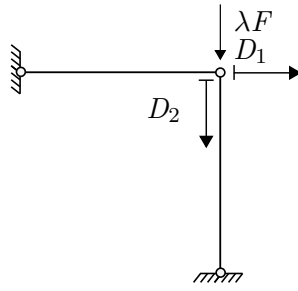


Abbildung 3.14: Kraftlastfall am Dreigelenktragwerk.

### 3.5.1 Kraftkontrollierter Kraftlastfall

Ein kraftkontrollierter Kraftlastfall kann algorithmisch sehr einfach dargestellt werden, da die kontrollierte Größe der inkrementierten entspricht. In der Zusatzgleichung

$$f = \Delta\lambda - \Delta\hat{\lambda} = 0 \quad (3.14)$$

wird  $\Delta\lambda$  als Kontrollgröße vorgeschrieben. Damit entfällt  $\lambda$  als Unbekannte und in den Algorithmus geht die Zusatzgleichung nur indirekt durch die Inkrementierung des Steigerungsfaktors  $\lambda$  ein. Die Problemstellung für den kraftkontrollierten Kraftlastfall kann Abbildung 3.14 entnommen werden.

Knoten 2 ist hier in Richtung des globalen Freiheitsgrades  $D_2$  durch die Einzellast  $\lambda F$  belastet. Daraus ergibt sich der Vektor der äußeren Lasten und seine Ableitungen zu

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} F_{\text{ext}1} \\ F_{\text{ext}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda F \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Da die Verschiebungsfreiheitsgrade für einen Kraftlastfall nicht vom Steigerungsfaktor abhängen, ergibt sich die Ableitung der inneren Kräfte nach  $\lambda$  zu

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \lambda} = \mathbf{K}_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Abbildung 3.15 zeigt das inkrementell iterative Berechnungsverfahren für den Kraftlastfall unter Kraftkontrolle. In jedem der  $m$  Schritte der Inkrementschleife ist die inkrementelle Erhöhung der Kraft  $\lambda F$  über  $\lambda := \lambda + \Delta\lambda$  durch die Kontrollgleichung mit  $\Delta\lambda = \Delta\hat{\lambda}$  vorgeschrieben. Der Zuordnungsoperator  $:=$  soll dabei die algorithmische Umsetzung kennzeichnen und steht nicht für die mathematische Definition. Da somit die Kraft vorgeschrieben ist, die in jedem Lastschritt aufgebracht wird, wird diese Kontrolle als Kraftkontrolle bezeichnet. Genau genommen wird nur der Steigerungsfaktor inkrementiert, was zur Folge hat, dass sich die Kontrollgröße auf den aufgebrauchten Lastfall

$f = \Delta\lambda - \Delta\hat{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\lambda = \Delta\hat{\lambda}$ vorgeschrieben	
Initialisierung	$D_1 := 0 \quad D_2 := 0 \quad \lambda := 0$ $\Delta D_1 := 0 \quad \Delta D_2 := 0 \quad \Delta\lambda := \Delta\hat{\lambda}$ $\delta D_1 := 0 \quad \delta D_2 := 0$
Schleife über alle Inkremente	
Update	$\lambda := \lambda + \Delta\lambda$
Prädiktor	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\text{ext } 1} \\ F_{\text{ext } 2} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \end{bmatrix}$
Update	$\mathbf{D} := \mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}$
Berechne	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda)$ und $\mathbf{K}_T$
Löse	$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{D} = -\mathbf{R} \quad \rightarrow \quad \delta\mathbf{D}$
Update	$\mathbf{D} := \mathbf{D} + \delta\mathbf{D}$
Auswertung	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda)$
Iterationsschleife	
Konvergenztest $\ \mathbf{R}\  < tol \quad \&\& \quad \ \delta\mathbf{D}\  < tol \quad \rightarrow$ Abbruch der Iteration	

**Abbildung 3.15:** Kraftkontrollierter Kraftlastfall mit Tangentenprädiktor.

bezieht. Durch die Aktualisierung der inkrementierten und damit bekannten Größe  $\lambda$ , wird iterativ nur der Verschiebungszustand der Struktur ermittelt.

Der Iterationsabbruch erfolgt, wenn die Norm der iterativen Änderungen der Unbekannten und der Ungleichgewichtskräfte einen Toleranzwert unterschreiten. In anderen Worten: Der Abbruch erfolgt, wenn die Norm der iterativen Änderungen  $\delta\mathbf{D}$  und die normative Abweichung der inneren Kräfte von den äußeren Kräften geringer ausfallen als die Toleranz  $tol$ .

### 3.5.2 Verschiebungskontrollierter Kraftlastfall

In diesem Abschnitt hat sich an der Belastung und den Randbedingungen der obigen Problemstellung nichts verändert. Beim verschiebungskontrollierten Kraftlastfall wird jedoch nicht der Steigerungsfaktor  $\lambda$  inkrementiert, sondern die Verschiebung des Kno-

tens 2 in Richtung des globalen Freiheitsgrades  $D_2$  mit der Schrittweite  $\Delta\hat{D}$ .  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  und die Ableitungen  $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda}$  und  $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda}$  können dem vorangehenden Abschnitt entnommen werden. Der Gleichgewichtspfad, dessen Gleichgewichtspunkte durch die Zusatzgleichung gefiltert und ermittelt werden, ist also identisch zum Gleichgewichtspfad des vorangehenden Abschnitts. Dennoch kann bei identischer Schrittweite  $\Delta\hat{D} = \Delta\hat{\lambda}$  nicht garantiert werden, dass bei den beiden Berechnungen dieselben Gleichgewichtspunkte des Pfades berechnet werden. Der in Abbildung 3.16 dargestellte Berechnungsablauf unterscheidet sich vom vorangehenden zunächst durch das explizite Auftauchen der Zusatzgleichung im Gleichungssystem der Iteration. Für dieses Gleichungssystem werden zusätzlich die Ableitungen von  $f = \Delta D_2 - \Delta\hat{D}$  benötigt:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial D_1} \\ \frac{\partial f}{\partial D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.17)$$

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass sich die Ableitung nach  $D_2$  nicht von der Ableitung nach  $\Delta D_2$  unterscheidet (siehe Abschnitt 3.4.4). Da für die Lastschrittschleife das Sekantenprädiktorverfahren gewählt wurde, folgt nach der Initialisierung ein Tangentenprädiktor mit  $\lambda = 1$  außerhalb der Lastschrittschleife. Das System ist zu diesem Zeitpunkt noch undeformiert und die Steifigkeitsmatrix zur Ermittlung von  $\Delta D_1$  und  $\Delta D_2$  entspricht der elastischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$ . Skaliert wird dieser erste Prädiktor so, dass die Zusatzgleichung erfüllt ist und  $\Delta D_2 = \Delta\hat{D}$  gilt. In der Iterationsschleife wird, wie in allen Beispielen des Unterkapitels 3.5, das unsymmetrische Gleichungssystem  $\mathbf{K}_{\text{total}} \delta \mathbf{D}_{\text{total}} = -\mathbf{R}_{\text{total}}$  gelöst. Die Matrix  $\mathbf{K}_{\text{total}}$  ist mit darin enthaltenen Ableitungen von Zusatzgleichung und Residuum allgemein dargestellt.

In dieser Darstellung wird deutlich, dass der Algorithmus sich von demjenigen in Abbildung 3.15 insofern unterscheidet, als letzterer wesentliche Vereinfachungen enthält. Nach dem Durchlaufen der Iterationsschleife und der Aktualisierung der Variablen wird der neue Prädiktor in Form der extrapolierten Sekante zwischen letztem und aktuellem auskonvergierten Gleichgewichtspunkt berechnet. Dieser Sekantenprädiktor erfüllt damit automatisch die Schrittweitevorgabe aus der Zusatzgleichung.

### 3 Gleichgewichtspfade und Grundlagen der Pfadverfolgung

$f = \Delta D_2 - \Delta \hat{D} = 0 \rightarrow \Delta D_2 = \Delta \hat{D}$ vorgeschrieben	
Initialisierung:	$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{D}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda := 0 \quad \Delta \lambda := 0 \quad \delta \lambda := 0$ $\mathbf{D}_{\text{alt}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_{\text{alt}} := 0$
Prädiktor mit $\lambda = 1$	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \rightarrow \Delta \mathbf{D}$
Skalierung Prädiktor:	$\Delta D_1 := \Delta D_1 \Delta \hat{D} / \Delta D_2$ $\Delta D_2 := \Delta D_2 \Delta \hat{D} / \Delta D_2$ $\Delta \lambda := \Delta \hat{D} / \Delta D_2$
Update:	$D_1 := D_1 + \Delta D_1 \quad \lambda := \lambda + \Delta \lambda$ $D_2 := D_2 + \Delta D_2$
Inkrementalschleife über alle Schritte	
Berechne	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda), \mathbf{K}_{\text{T}}, \mathbf{R}_{,\lambda}, f, f_{,\mathbf{D}} \text{ und } f_{,\lambda}$
$\mathbf{K}_{\text{total}} :=$	$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{T}} & \mathbf{R}_{,\lambda} \\ f_{,\mathbf{D}} & f_{,\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & -F \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ f \end{bmatrix}$
Löse	$\mathbf{K}_{\text{total}} \delta \mathbf{D}_{\text{total}} = -\mathbf{R}_{\text{total}} \rightarrow \delta \mathbf{D}_{\text{total}}$
Update	$D_1 := D_1 + \delta D_{\text{total} 1}$ $D_2 := D_2 + \delta D_{\text{total} 2}$ $\lambda := \lambda + \delta D_{\text{total} 3}$
Auswertung	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda)$
Iterationsschleife	
Konvergenztest $\ \mathbf{R}_{\text{total}}\  < \text{tol} \ \&\& \ \ \delta \mathbf{D}_{\text{total}}\  < \text{tol} \rightarrow$ Iterationsabbruch	
Update	$\Delta D_1 := D_1 - D_{\text{alt} 1} \quad D_{\text{alt} 1} := D_1$ $\Delta D_2 := D_2 - D_{\text{alt} 2} \quad D_{\text{alt} 2} := D_2$ $\Delta \lambda := \lambda - \lambda_{\text{alt}} \quad \lambda_{\text{alt}} := \lambda$
Sekantenprädiktor	$D_1 := D_1 + \Delta D_1$ $D_2 := D_2 + \Delta D_2$ $\lambda := \lambda + \Delta \lambda$

**Abbildung 3.16:** Verschiebungskontrollierter Kraftlastfall mit Sekantenprädiktor.

### 3.5.3 Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Tangentenprädiktor

In den vorangehenden Abschnitten 3.5.1 und 3.5.2 wurden einfache Kraftlastfallalgorithmen vorgestellt. Weitere Abhängigkeiten von inneren und äußeren Kräften ergeben sich für Verschiebungslastfälle, die in den bereits beschriebenen Algorithmen vernachlässigt werden konnten. Die Unterschiede zur algorithmischen Behandlung von Kraftlastfällen werden hier anhand eines kraftkontrollierten Verschiebungslastfalls diskutiert. Entsprechend der Darstellung in Abbildung 3.13 ist ein Verschiebungslastfall mit  $\lambda \hat{D}$  an Knoten 2 des Dreigelenktragwerks in Richtung des globalen Freiheitsgrades  $D_2$  aufgebracht. Ein Verschiebungslastfall entspricht einer in jedem Lastschritt auftretenden, nicht konstanten Auflagerverschiebung. Daher ist in Abbildung 3.13 am Knoten 2 ein Auflager mit der unbekanntem Auflagerkraft  $s$  eingezeichnet. Die unbekanntem Größen im System sind damit die Verschiebung  $D_1$ , der Steigerungsfaktor  $\lambda$  und die Auflagerkraft  $s$ . Eine Darstellung des algorithmischen Ablaufs befindet sich in Abbildung 3.17. Die Auflagerkraft tritt im Vektor der äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  auf und wird zusätzlich zu  $D_2$  und  $\lambda$  in den Ableitungen berücksichtigt:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} F_{\text{ext}1} \\ F_{\text{ext}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Da  $D_2$  nicht mehr als unabhängiger Freiheitsgrad auftritt, entfällt der ihm zugeordnete Teil der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ . Somit kann die Linearisierung des Residuums bezüglich  $D_1$  und der Auflagerkraft  $s$  mit

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial D_1} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = -\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

beschrieben werden.

Die äußeren Kräfte  $\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}$  hängen nun nicht mehr vom Steigerungsfaktor ab. Damit ergibt sich  $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda}$  zu Null. Da nun aber die Verschiebung in globaler  $D_2$ -Richtung mit  $\lambda \hat{D}$  bestimmt wird, hängen die lokalen Freiheitsgrade  $d_4$  von Element 1 und  $d_2$  von Element 2 von  $\lambda$  ab. Diese Verschiebungen gehen in die Berechnung der inneren Kräfte ein. Deshalb muss diese Abhängigkeit von  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  von  $\lambda$  in der vollständigen Linearisierung des Residuums mit

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda} \quad (3.20)$$

berücksichtigt werden. Für größere Systeme bietet es sich an,  $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda}$  elementweise zu berechnen und anschließend zusammen mit  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{K}_T$  zur Systemgröße zu assemblieren.

### 3 Gleichgewichtspfade und Grundlagen der Pfadverfolgung

$f = -s - \hat{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Auflagerkraft } s = -\hat{s} \text{ vorgegeschrieben}$
Initialisierung: $\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{\text{alt}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{D}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda := 0 \quad \Delta \lambda := 0 \quad \delta \lambda := 0 \quad \lambda_{\text{alt}} := 0$ $s := 0 \quad \Delta s := 0 \quad \delta s := 0 \quad s_{\text{alt}} := 0$
Schleife über alle Inkremente
Berechne $\mathbf{K}_T(\mathbf{D})$
Prädiktor (Dirichlet-Kräfte in jedem inkrementellen Schritt): $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \lambda \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s} \end{bmatrix}; \quad \Delta \lambda = \frac{K_{11}}{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})\hat{D}} \hat{s} \quad ; \quad \Delta D_1 = -\frac{K_{12}}{K_{11}} \Delta \lambda \hat{D}$
Update: $D_1 := D_1 + \Delta D_1 \quad \lambda := \lambda + \Delta \lambda$
Berechne $\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda), \mathbf{R}_{,D}, \mathbf{R}_{,\lambda}, \mathbf{R}_{,s}, f, f_{,D}, f_{,\lambda}$ und $f_{,s}$
$\mathbf{K}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,D} & \mathbf{R}_{,\lambda} & \mathbf{R}_{,s} \\ f_{,D} & f_{,\lambda} & f_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{F}_{\text{int } 1, \lambda} & 0 \\ K_{21} & \mathbf{F}_{\text{int } 2, \lambda} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{R}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ f \end{bmatrix}$
Löse $\mathbf{K}_{\text{total}} \delta \mathbf{D}_{\text{total}} = -\mathbf{R}_{\text{total}} \quad \rightarrow \quad \delta \mathbf{D}_{\text{total}}$
Update $D_1 := D_1 + \delta D_{\text{total } 1} \quad \lambda := \lambda + \delta D_{\text{total } 2} \quad s := s + \delta D_{\text{total } 3}$
Auswertung $\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda)$
Iterationsschleife Konvergenztest $\ \mathbf{R}_{\text{total}}\  < \text{tol} \ \&\& \ \ \delta \mathbf{D}_{\text{total}}\  < \text{tol} \rightarrow \text{Iterationsabbruch}$

**Abbildung 3.17:** Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Tangentenprädiktor.

Für Element 1 kann  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^1}{\partial \lambda}$  folgendermaßen berechnet werden:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^1}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^1}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \lambda} = \mathbf{k}_{\text{ele}}^1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial d_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial d_4}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{\text{ele}}^1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{D} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$\mathbf{d}$  steht hierbei für den Vektor der lokalen Verschiebungen am Element 1. Analog folgt für das Element 2

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^2}{\partial \lambda} = \mathbf{k}_{\text{ele}}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Abbildung 3.17 enthält nun im Prädiktorschritt eine rechte Seite, in der eine Unbekannte auftritt. Die Prädiktorgleichung

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \lambda \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

enthält in dieser Darstellung also zwei Gleichungen und drei Unbekannte. Ein möglicher Lösungsansatz ist die Wahl von  $\Delta \lambda = 1$  und die anschließende Skalierung des Prädiktorschritts. Üblicherweise wird bei Verschiebungslastfällen das Gleichungssystem kondensiert, indem die bekannten Auflagerverschiebungen multipliziert mit den zugehörigen Einträgen der Steifigkeitsmatrix auf die rechte (Last-)Seite gebracht werden. Die obere Zeile aus Gleichung (3.23) kann für  $\Delta \lambda = 1$  dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$K_{11} \Delta D_1 = 0 - K_{12} \Delta \hat{D}. \quad (3.24)$$

Der Ausdruck  $K_{12} \Delta \hat{D}$ , der auf die rechte Seite gebracht wurde, wird als Dirichlet-Kraft bezeichnet.

Aufgrund der geringen Anzahl von Freiheitsgraden wird hier anstelle einer Prädiktorskalierung  $\Delta \lambda$  weiterhin als Unbekannte geführt und über die vorgeschriebene Auflagerkraft berechnet. Ausgehend von der Forderung, dass die Zusatzgleichung  $f = -s + \hat{s}$  erfüllt sein muss, wird die unbekannte Auflagerkraft  $s$  im Prädiktorschritt von Abbildung 3.17 durch das vorgeschriebenen Inkrement der Lagerkraft  $\hat{s}$  ersetzt. Damit enthält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} K_{11} \Delta D_1 + K_{12} \Delta \lambda \hat{D} &= 0, \\ K_{12} \Delta D_1 + K_{22} \Delta \lambda \hat{D} &= \hat{s} \end{aligned} \quad (3.25)$$

bei zwei Gleichungen nur noch zwei Unbekannte. Beide Gleichungen können nach  $\Delta D_1$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}\Delta D_1 &= -\frac{K_{12}}{K_{11}} \Delta \lambda \hat{D}, \\ \Delta D_1 &= \frac{1}{K_{21}} (\hat{s} - K_{22} \Delta \lambda \hat{D}).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Gleichsetzen der oberen und unteren Zeile von (3.26) liefert den Ausdruck

$$\Delta \lambda = \frac{K_{11}}{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})} \hat{s}.\tag{3.27}$$

Einsetzen von Gleichung (3.27) in Gleichung (3.26) führt schließlich auf

$$\Delta D_1 = -\frac{K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \hat{s}.\tag{3.28}$$

$\Delta D_2 = \Delta \lambda \hat{D}$  folgt dann zu

$$\Delta D_2 = \frac{K_{11}}{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})} \hat{s}.\tag{3.29}$$

Die Auswertung des Prädiktors und damit auch die Berechnung der Dirichlet-Kräfte erfolgt in dieser Prozedur in jedem inkrementellen Schritt. Die Iterationsschleife mit den in Abbildung 3.17 angegebenen Komponenten von  $\mathbf{K}_{\text{total}}$  und  $\mathbf{R}_{\text{total}}$  und den entsprechenden Abbruchkriterien bei Konvergenz erfolgt analog zum vorangehenden Algorithmus. In diesem Abschnitt wird jeder Prädiktor in der Inkrementenschleife als Tangentenprädiktor ausgeführt. Daher folgt auf das Ende der Iterationsschleife keine Aktualisierung der Variablen für den nächsten Schritt, wie es für Sekantenprädiktoren erforderlich ist. Auf die auskonvergierte Iterationsschleife folgt der nächste Schritt der Inkrementenschleife über die Berechnung des folgenden Tangentenprädiktors.

#### 3.5.4 Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Sekantenprädiktor

Der Berechnungsablauf des kraftkontrollierten Verschiebungslastfalls mit Sekantenprädiktor aus Abbildung 3.18 unterscheidet sich vom vorangehenden Algorithmus nur durch die Ausführung des Prädiktors. Während in Abbildung 3.17 das lineare Gleichungssystem in jedem Inkrementenschritt gelöst wird, kommt die Berechnung mit Sekantenprädiktoren mit nur einem Tangentenprädiktor am Anfang der Rechnung aus. Anschließend wird, wie zuvor bereits beschrieben, die Differenz der Lösung zwischen dem letzten und



dem aktuellen auskonvergierten inkrementellen Schritt extrapoliert. Dadurch ist eine neuerliche Lösung von  $\mathbf{K}_T \mathbf{D} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$  nicht erforderlich. Außerdem entfällt auch die Skalierung des Prädiktors und die Berechnung der Dirichlet-Kräfte in jedem Folgeinkrement.

### 3 Gleichgewichtspfade und Grundlagen der Pfadverfolgung

$f = -s - \hat{s} = 0 \rightarrow$ Auflagerkraft $s = -\hat{s}$ vorgeschrieben	
Initialisierung:	
$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\Delta \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{D}_{\text{alt}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\delta \mathbf{D}_{\text{total}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\lambda := 0$	$\Delta \lambda := 0$
$s := 0$	$\Delta s := 0$
$\delta \lambda := 0$	$\delta s := 0$
$\lambda_{\text{alt}} := 0$	$s_{\text{alt}} := 0$
Prädiktor (Dirichlet-Kräfte):	
$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \lambda \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s} \end{bmatrix} \rightarrow \Delta \lambda = \frac{K_{11}}{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})\hat{D}} \hat{s} \rightarrow \Delta D_1 = -\frac{K_{12}}{K_{11}} \Delta \lambda \hat{D}$	
Update: $D_1 := D_1 + \Delta D_1$ $\lambda := \lambda + \Delta \lambda$	
Schleife über alle Inkremente	
Berechne	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda), \mathbf{R}_{,D}, \mathbf{R}_{,\lambda}, \mathbf{R}_{,s}, f, f_{,D}, f_{,\lambda}$ und $f_{,s}$
$\mathbf{K}_{\text{total}} :=$	$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,D} & \mathbf{R}_{,\lambda} & \mathbf{R}_{,s} \\ f_{,D} & f_{,\lambda} & f_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{F}_{\text{int } 1, \lambda} & 0 \\ K_{21} & \mathbf{F}_{\text{int } 2, \lambda} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{R}_{\text{total}} :=$	$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ f \end{bmatrix}$
Löse	$\mathbf{K}_{\text{total}} \delta \mathbf{D}_{\text{total}} = -\mathbf{R}_{\text{total}} \rightarrow \delta \mathbf{D}_{\text{total}}$
Update	$D_1 := D_1 + \delta D_{\text{total } 1}$ $\lambda := \lambda + \delta D_{\text{total } 2}$ $s := s + \delta D_{\text{total } 3}$
Auswertung	$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda)$
Iterationsschleife	
Konvergenztest $\ \mathbf{R}_{\text{total}}\  < \text{tol} \ \&\& \ \ \delta \mathbf{D}_{\text{total}}\  < \text{tol} \rightarrow$ Iterationsabbruch	
Update	$\Delta D_1 := D_1 - D_{1 \text{ alt}}$ $D_{\text{alt } 1} := D_1$ $\Delta \lambda := \lambda - \lambda_{\text{alt}}$ $\lambda_{\text{alt}} := \lambda$ $s := s - s_{\text{alt}}$ $s_{\text{alt}} := s$
Sekantenprädiktor	$D_1 := D_1 + \Delta D_1$ $\lambda := \lambda + \Delta \lambda$ $s := s + \Delta s$

**Abbildung 3.18:** Kraftkontrollierter Verschiebungslastfall mit Sekantenprädiktor.

### 3.5.5 Verschiebungskontrollierter Verschiebungslastfall

In diesem Abschnitt wird der verschiebungskontrollierte Verschiebungslastfall vorgestellt, der dem kraftkontrollierten Kraftlastfall im Aufbau des Berechnungsablauf sehr ähnlich ist. Hier ist die Struktur nicht durch äußere Kraftlasten beaufschlagt. Weil Freiheitsgrad  $D_2 = \lambda \hat{D}$  vorgeschrieben und deshalb nicht mitgeführt wird, ergibt sich für den äußeren Kraftvektor und seine Ableitung nach  $\lambda$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = [0] \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \lambda} = [0]. \quad (3.30)$$

Abbildung 3.19 stellt die algorithmische Umsetzung des Berechnungsablaufs dar. Die Zusatzgleichung in der ersten Zeile des Struktogramms kann auch vereinfacht über

$f = \Delta \lambda \hat{D} - \Delta \hat{\lambda} \hat{D} = 0 \rightarrow \Delta \lambda = \Delta \hat{\lambda}$ vorgeschrieben	
Initialisierung:	$D_1 := 0$ $\Delta D_1 := 0$ $\delta D_1 := 0$
Schleife über alle Inkremente	
Update	$\lambda := \lambda + \Delta \lambda$
Berechne	$K_{11}$ und $K_{12}$
Prädiktor ( $D_1$ ist die einzige Unbekannte, $D_2 = \lambda \hat{D}$ )	
$K_{11} \Delta D_1 + \underbrace{K_{12} \Delta \lambda \hat{D}}_{\text{Dirichlet-Kraft}} = 0 \rightarrow \Delta D_1 = -\frac{K_{12}}{K_{11}} \Delta \lambda \hat{D}$	
Update	$D_1 := D_1 + \Delta D_1$
Berechne	$R(D_1, \lambda) = F_{\text{int}} - F_{\text{ext}}$ und $K_{11}$
Löse	$K_{11} \delta D = -R \rightarrow \delta D_1$
Update	$D_1 := D_1 + \delta D_1$
Auswertung	$R(D_1, \lambda)$
Iterationsschleife	
Konvergenztest $\ R_{\text{total}}\  < \text{tol} \ \&\& \ \ \delta D_1\  < \text{tol} \rightarrow$ Iterationsabbruch	

**Abbildung 3.19:** Verschiebungskontrollierter Verschiebungslastfall.

$f = \Delta\lambda - \Delta\hat{\lambda} = 0$  beschrieben werden. Der Unterschied zu dem in Abschnitt 3.5.1 erläuterten kraftkontrollierten Kraftlastfall beläuft sich auf wenige Punkte. Zuerst erfolgt die Reduktion auf einen Freiheitsgrad  $D_1$  beim verschiebungskontrollierten Verschiebungslastfall, da bei bekanntem  $\lambda$  die Verschiebung in  $D_2$ -Richtung über  $\lambda\hat{D}$  auch bekannt ist. Somit ergibt sich die rechte Seite, also der Lastvektor des Prädiktorschritts, für den verschiebungskontrollierten Verschiebungslastfall aus der Berechnung der Dirichlet-Kräfte und nicht aus äußeren Kraftlasten (siehe hierzu die Prädiktorberechnung in Abbildung 3.19). Als Unbekannte wird hier also nur  $D_1$  mitgeführt. Der weitere Ablauf kann Abbildung 3.19 entnommen werden.

Aus dem Vergleich aller dargestellten Algorithmen wird deutlich, dass sich der Ablauf stark vereinfacht und verkürzt, wenn  $\lambda$  inkrementiert wird und somit bekannt ist. Die Steuerung von  $\lambda$  bedeutet nichts Anderes als die Kontrolle des jeweiligen Lastfalls. Die Fragestellung, welche Kontrollmethoden im realen Experiment auftreten und welcher Zusammenhang sich zur numerischen Berechnung herstellen lässt, soll im nächsten Kapitel diskutiert werden. In diesem Zusammenhang wird auch eine Auswahl numerischer Kontrollmechanismen aus der Literatur beschrieben.

## 3.6 Zusammenfassung

In den vorangehenden Abschnitten wurde zunächst die Stabilität von Gleichgewichtspfaden diskutiert. Die Liapunov'sche, dynamische Beschreibung der Stabilität ist für elastisches wie für entfestigendes Materialverhalten gültig. Für die Beurteilung von Stabilität werden Gleichgewichtspunkte oder Gleichgewichtspfade betrachtet und durch den Vergleich mit dem gestörten System bewertet. Üblicherweise wird in der Stabilitätsanalyse elastisches Materialverhalten und damit das Vorliegen eines Potentials angenommen. Mit dem Gedankenmodell einer Kugel in einer Schüssel oder auf einem Berg werden Gleichgewichtspunkte als stabil oder instabil klassifiziert. In diesem Kontext tritt die Beschreibung kritischer Punkte auf, die für die Kontrollmechanismen von Bedeutung sind, weil dort Kontrollendpunkte auftreten können. Ein Traglastpunkt ist beispielsweise ein Kontrollendpunkt für die Kraftkontrolle.

Ist statisch kein Gleichgewicht erreichbar, kann die Berechnung über eine dynamische Analyse weitergeführt werden. Damit können Teile des statischen Gleichgewichtspfads abgebildet werden. Zu große Oszillationen können über das Einbringen von Dämpfung geglättet werden. An einem statischen Gleichgewichtspfad hingegen kann abgelesen werden, wie verschiedene Kontrollmethoden in einem Experiment ablaufen. Dies bezieht sich zum Beispiel auf die Entwicklung dynamischer Effekte.

Eine übliche Pfadverfolgungsstrategie für nichtlineare Probleme ist die Verwendung von Prädiktor-Korrektor-Verfahren. Anhand des Beispiels eines Dreigelenktragwerks wurde für Kraft- und Verschiebungslastfälle die algorithmische Umsetzung von Kraft- und Verschiebungskontrolle gezeigt. In Abschnitt 3.5 wurden sämtliche Kombinationen von Lastfall und Kontrolle mit den verwendeten Prädiktortypen, dem Sekanten- und dem Tangentenprädiktor, dargestellt. Damit hängt auch die Berechnung der Dirichlet-Kräfte bei Verschiebungslastfällen zusammen. Wird in jedem Lastschritt ein Tangentenprädiktor verwendet, werden auch in jedem Prädiktorschritt diese Dirichlet-Kräfte berücksichtigt. Im folgenden Kapitel wird auf grundlegende Verfahren zur Ermittlung von Gleichgewichtspfaden eingegangen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Kontrollmethoden werden für reale und numerische Experimente diskutiert. Kontrollversagen für beide Experimentkategorien wird ebenso beleuchtet wie die jeweiligen Kontrollmethoden für diese Experimente.



# 4

---

## Kontrollmethoden realer und numerischer Experimente

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Gemeinsamkeiten von und Unterschieden zwischen realen und numerischen Experimenten. In diesem Kontext werden Kontrollmethoden für das reale und anschließend für das numerische Experiment beschrieben. Aus diesen Kontrollmethoden lässt sich das Versagensverhalten der jeweiligen Kontrollmechanismen ableiten, welches abschließend diskutiert wird.

Reale wie auch numerische Experimente liefern zusätzlich zur Einsicht in das Deformationsverhalten der Struktur entsprechende Kraft-Verformungskurven. Wann diese Kurven als Gleichgewichtspfade bezeichnet werden können, wird in Kapitel 1 beschrieben. In der Realität werden diese Experimente mit Prüfmaschinen beispielsweise zur Ermittlung mechanischer Materialkennlinien für Zug-, Druck- und Scherfestigkeit durchgeführt. Auch Ermüdungsversuche durch zyklische Belastung, Rissentwicklung in Beton, Tragfähigkeitsuntersuchungen von Materialien und Bauteilen oder Dübelauszugversuche stellen eine Auswahl möglicher Anwendungen dar. Ein weiterer Zweck dieser Experimente, welcher auch in Kapitel 5 nochmals aufgegriffen wird, ist die Strukturanalyse zur Untersuchung von Imperfektionsempfindlichkeit.

Bei der Durchführung von realen und numerischen Experimenten gibt es viele Übereinstimmungen, aber auch manche Unterschiede. Als Gemeinsamkeiten sind die Umsetzung von Lastfall und Kontrolle, aber auch die Modellierung der Randbedingungen des durchzuführenden Experiments zu nennen. Die Wahl der Kontrollmethode gibt vor, welche Teile des Gleichgewichtspfades abgebildet werden, wo dynamische Effekte auftreten können und wann die Kontrollmethode versagt.

Reale Experimente können dynamisch verlaufen, auch wenn die Belastung quasistatisch aufgebracht wird. Erst wenn sich dynamische Effekte einstellen, weicht die Kraft-Verformungskurve vom statischen Gleichgewichtspfad ab. Durchschlagen führt teilweise zu starken dynamischen Effekten beziehungsweise Oszillationen. Durchschlagen kann dann auftreten, wenn weitere Gleichgewichtspunkte auf dem Niveau der Kontrollgröße oder darüber existieren. Anderenfalls versagen Prüfkörper in realen Experimente vollständig und es werden keine weiteren Gleichgewichtspunkte in Kraft-Verformungskurven abgebildet.

Numerische Experimente können dynamisch oder statisch durchgeführt werden. Versagt ein Kontrollverfahren in der statischen, numerischen Analyse, konvergiert die Berechnung nicht zu einem Gleichgewichtszustand. Dynamische, numerische Analysen sind zwar aufgrund von Trägheits- und Dämpfungstermen robuster als statische Verfahren, sie konvergieren aber nicht in jedem Fall. Der Vorteil numerischer Simulationen erschließt sich neben der Zeit- und Kostenersparnis auch aus der Möglichkeit, jeden beliebigen, an der Analyse beteiligten, Parameter auszuwerten. Zudem können vorangehende Gleichgewichtspunkte wiederhergestellt und Lastschritte wiederholt werden, wenn zuvor keine Konvergenz erreicht wurde. In realen Experimenten herrscht immer Gleichgewicht.

Der folgende Abschnitt beschreibt Kontrollmethoden realer Experimente und geht auf Besonderheiten der realen Pfadverfolgung bei Entfestigung ein.

### 4.1 Kontrollmethoden realer Experimente

Versuche zur Ermittlung von Werkstoffkennlinien oder dem Tragverhalten von Bauteilen von erfolgen in der Regel über die Kontrolle vorgegebener äußerer Kraftlasten oder ausgewählter kinematischer Variablen. Letztere können beispielsweise charakteristische Verschiebungen oder Verzerrungen sein. Wird ein Versuch zur Ermittlung der Tragfähigkeit eines Probekörpers kraftkontrolliert unter einem Kraftlastfall durchgeführt, versagt dieser Probekörper bei Erreichen der maximal aufnehmbaren Last. Der nachkritische Bereich der Kurve kann dann nicht erfasst werden.

Ein Beispiel kinematischer Kontrollvariablen ist die Längenänderung eines Prüfkörpers. Besteht dieser Prüfkörper aus einem spröden Material wie Beton, Stein oder Keramik, führt die Kontrolle der Stauchung oder Längung zu unkontrolliertem, explosionsartigem Versagen. Der Grund hierfür ist die Rückläufigkeit der Verschiebungen in Gleichgewichtskurven dieser Materialklasse. Bei stetiger Steigerung der charakteristischen Verschiebung liegt nach dem Erreichen der Maximalverschiebung kein weiterer erreichbarer Gleichgewichtspunkt mehr vor. Zur gezielten Kontrolle von Entfestigungsprozessen verwendet DE BORST (1987) daher die Rissöffnungsverschiebung. Für numerische Experimente wird



CMOD (crack mouth opening displacement) oder CMSD (crack mouth sliding displacement) vorgeschlagen.

Darüber hinaus existieren weitere Kontrollmethoden wie beispielsweise Volumen- oder Druckkontrolle, die bei Hohlkörpern verwendet werden können. Ähnlich zum Bogenlängenverfahren verhält sich die Kontrolle einer kombinierten Größe aus Kraft- und Verschiebungskomponenten nach ROKUGO U. A. (1986) und GLAVIND UND STANG (1991).

Wie auch in numerischen Experimenten ist es im realen Versuch deutlich einfacher, die Lastgröße zu inkrementieren und damit den Lastfall zu kontrollieren. Dies geschieht über eine Belastung pro Zeiteinheit, zum Beispiel über die Angabe N/s oder mm/s. Die zu ermittelnde Größe wird ausgelesen und aufgezeichnet. Unterscheiden sich Lastfall und Kontrollgröße, wird der erforderliche Prüfmaschinenaufbau deutlich komplexer und das Management anfallender Datenmengen wird relevant. Während für die Kontrolle der Belastungsgröße konventionelle Prüfmaschinen herangezogen werden können, erfordert die Kontrolle einer von der Belastung verschiedenen Größe eine servo-geregelte Prüfmaschine.

Da sich bei konventionellen Prüfmaschinen nur der Lastfall auf den Versuchsablauf auswirkt, kann hier von einer Steuerung gesprochen werden. Die Regelung von Prüfmaschinen wird für die Kontrolle einer vom Lastfall abweichenden Größe benötigt. Erläuternd soll die Definition von Steuerung und Regelung gegeben werden:

- Steuerung: Nach DIN 19226 ist der offene Wirkungsweg ein Kennzeichen für eine Steuerung: es gibt keine Rückkopplung zwischen Ergebnisgröße und Eingangsgröße.
- Regelung: Eine Regelung ist nach DIN 19226 folgendermaßen definiert: *„Das Regeln, die Regelung, ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe (Regelgröße), fortlaufend erfasst, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und abhängig vom Ergebnis dieses Vergleichs im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungskreislauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst.“*

Geregelte Prüfmaschinen beinhalten einen Regelkreis entsprechend Abbildung 4.1. Ein Feedback-Signal der gemessenen Größe wird durch den Sensor aufgenommen und vom Regler verarbeitet. Über das Ölventil wird durch Zu- oder Abfuhr von Öl in den Aktorkolben die Verschiebung geregelt. Komplexe Experimente sind auf eine kurze Regelstrecke angewiesen. Hierfür ist eine schnelle Verarbeitung der Sensordaten durch den Regler erforderlich. Ebenso rasch muss der Aktor die Ergebnisse umsetzen. Die algorithmische Berechnung einer Kraft-Verschiebungskurve kommt somit einer Regelung nahe. Die Eingangsgrößen werden in einer (geschlossenen) Iterationsschleife durch die Ab-

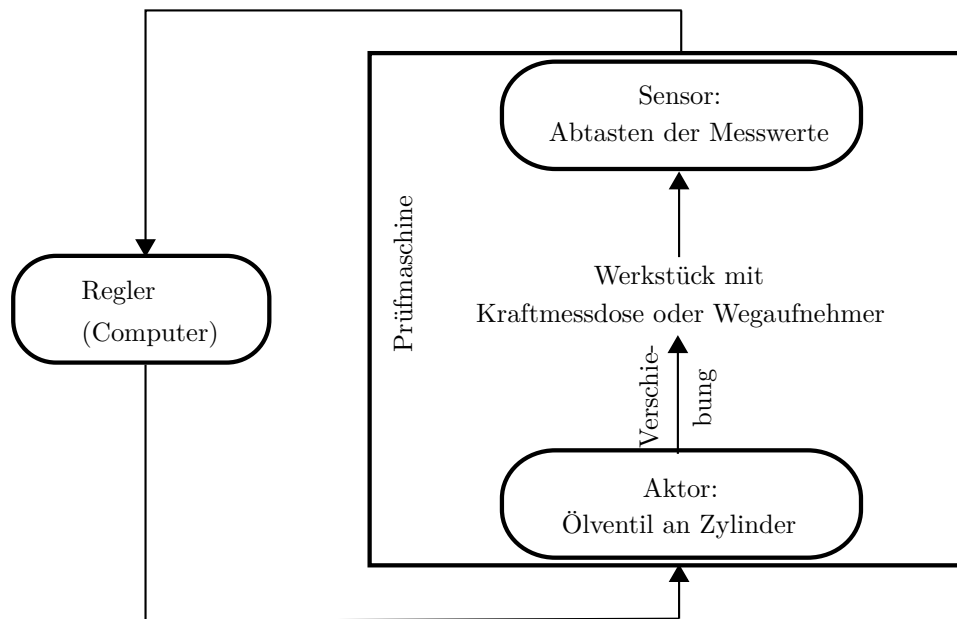


Abbildung 4.1: Prüfmaschine nach VAN MIER (1997).

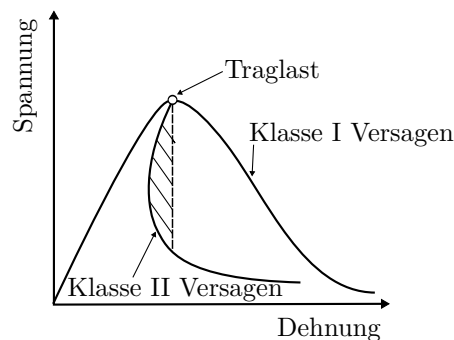


Abbildung 4.2: Versagen von Gestein unter einaxialem Druck nach WAWERSIK (1968).

weichung von Gleichgewichtszustand und Zusatzgleichung so verändert, dass am Ende sowohl Gleichgewicht als auch Kontrollgleichung erfüllt sind.

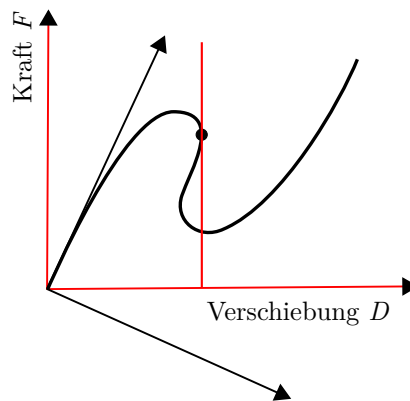
WAWERSIK UND FAIRHURST (1970) beschreiben einen manuell durchgeführten Versuch, in dem die oben beschriebene Form der Rückkopplung über einen beobachtenden Experimentator umgesetzt wird. Es handelt sich dabei um Experimente mit druckbelasteten Gesteinsproben, in denen Spannungs-Dehnungsdiagramme der Klasse II gewonnen werden. Klasse II- Versagen wird in Abbildung 4.2 dargestellt und ist durch Rückläufigkeit von Spannungen und Dehnungen in bestimmten Bereichen des Gleichgewichtspfad charakterisiert. Granit weist diese Eigenschaft beispielsweise häufig auf (WAWERSIK UND BRACE (1971)). Laut WAWERSIK (1968) verläuft das Versagen von Gestein stabil, wenn Energie zum Versuch hinzugefügt werden muss. Instabilität liegt dann vor, wenn Energie abgeführt werden muss, um ein schlagartiges Versagen zu verhindern.

Die von WAWERSIK UND FAIRHURST (1970) beschriebenen Experimente sind durch einen Kraftlastfall beaufschlagt. Ab Erreichen der Traglast wird vom Experimentator manuell Last vom System genommen, sobald Schädigung auftritt. Beim Entlastungsvorgang tritt dabei auch ungewollte elastische Entlastung auf. Die Entlastungskurve verläuft dann mit der Reststeifigkeit des geschädigten Materials analog zur Sekantensteifigkeit zwischen den Punkten 1 und 3 aus Abbildung 2.4. Bei Auftreten elastischer Entlastung wird die Kraft wieder gesteigert, bis die Dachkurve des Spannungs-Dehnungsdiagramms erreicht ist und die Schädigung fortschreitet. Durch die beschriebenen Be- und Entlastungszyklen kann mit konventionellen Versuchsmaschinen sprödes Verhalten mit rückläufigen Spannungen und Dehnungen (Klasse II) abgebildet werden. Wichtig ist, dass an jedem Instabilitätspunkt der Kraftkontrolle rasch entlastet wird.

Eine automatisierte Form dieses Vorgehens wird von HUDSON U. A. (1972) beschrieben. Anstelle des Experimentators wird die Belastung nach Abgleich eines Rückmeldesignals automatisch über die servo-geregelten Prüfmaschinen adaptiert. Aus der Rückkopplung einer Ergebnisgröße wird die Last als Eingangsgröße angepasst. Generell sollte die Kontrollvariable so ausgesucht werden, dass sie während des Belastungsprozesses kontinuierlich zu- oder abnimmt.

VAN MIER (1997) beschreibt eine Vorgehensvariante, die die kritische Kontrollverschiebung aus einer Reihe am Versuchskörper angebrachter Wegaufnehmer in jedem Schritt identifiziert. Im Zuge dieses adaptiven Verfahrens werden alle Wegaufnehmer ständig überwacht. Der größte gemessene Wert wird weitergemeldet und mit der vorgegebenen Verschiebung abgeglichen. Die Belastung wird daraufhin so angepasst, dass die Kontrollgröße der Vorgabe entspricht. Belastung, Feedbacksignal und Adaption der Belastung bilden, wie bereits beschrieben, einen geschlossenen Regelkreis, wie er auch in numerischen Algorithmen wiedergefunden werden kann.

Als weitere mögliche Feedback-Variablen benennen HUDSON U. A. (1972) Querdehnung, Mikroseismik, volumetrische Verzerrung oder vom Probekörper verrichtete Arbeit. Variablen, die zur Kontrolle des Versuchs herangezogen werden, können aber auch kombinierte oder gemittelte Größen sein. VAN MIER (1997) nennt die Arbeiten von ROKUGO U. A. (1986) und GLAVIND UND STANG (1991), die eine Kombination aus Kraft- und Verschiebungskomponenten zu einer Kontrollgröße vereinen. Analog dazu ist die Rotation des Bezugskordinatensystems bei rückläufigen Kraft- und Verschiebungskomponenten in VAN MIER (1997) und VAN MIER U. A. (1997) beschrieben. Dieses Verfahren ist in Abbildung 4.3 skizziert und zeigt die Rotation eines rot dargestellten Ursprungskordinatensystems. Damit soll die durch die rote Linie gekennzeichnete Rückläufigkeit in Kraft- und Verschiebung eliminiert werden. Der Gleichgewichtspfad weist im neuen, rotierten Bezugssystem keinen Rückschlag mehr auf. In diesem Fall treten anstelle von Kraft und Verschiebung gemischte Größen zur Achsenbeschriftung des neuen, gedrehten



**Abbildung 4.3:** Rotiertes Bezugssystem zur Vermeidung von Rückläufigkeiten im Kontrollparameter.

Koordinatensystems auf. Eine Kombination der Kontrollgröße aus Kraft und Verschiebung weist große Ähnlichkeit zu Bogenlängenverfahren auf.

Neben der Kombination von Parametern zu einer Kontrollgröße ist auch die Mittelung von Variablen für die Kontrolle von Versuchen erforderlich. In VAN MIER (1997) wird beschrieben, wie ein zweiseitig eingekerbter Balken (DEN beam) einem Vierpunkt-Biegeversuch ausgesetzt wird. Numerisch wird dieser Versuch unter anderem in GEERS U. A. (2000) untersucht und diskutiert. Kontrollvariablen für das reale Experiment sind gemittelte Verschiebungen aus CMOD (crack mouth opening displacement) und CMSD (crack mouth sliding displacement). Ohne die Mittelung der einzelnen Kontrollverschiebungen war der Versuch nicht bis zum Durchbruch fahrbar.

## 4.2 Numerische Pfadverfolgungsmethoden

Eine wichtige Eigenschaft von Pfadverfolgungsmethoden für nichtlineare Gleichgewichtspfade ist die Fähigkeit, den nachkritischen Bereich der Kurve abbilden zu können. Kritische Punkte, die den Übergang in diesen Bereich kennzeichnen und darüber hinaus auftreten können, wurden in Abschnitt 3.1 beschrieben. Darunter zählen unter anderem Durchschlags- und Umkehrpunkte, die sich infolge verschiedener Systemeigenschaften ergeben. Diese kritischen Punkte führen zum Versagen von kraft- oder verschiebungskontrollierten Verfahren, wenn die kontrollierte Kraft- oder Verschiebungskomponente rückläufig wird. In solchen Fällen können weiterführende Methoden wie das Bogenlängenverfahren für die Pfadverfolgung herangezogen werden. Für eine Übersicht über eine Vielzahl von Verfahren und auch zur zeitlichen Einordnung sei unter anderem auf die Arbeiten von RAMM (1981), SCHWEIZERHOF (1990), GEERS (1999a), RITTO-CORREÂ

UND CAMOTIM (2008) sowie JORABCHI UND SURESH (2011) verwiesen. Eine Reihe von Methoden soll hier beispielhaft vorgestellt werden.

BERGAN (1978) und WRIGHT UND GAYLORD (1968) schlagen Ansätze vor, die die Schlechtgestelltheit der Steifigkeitsmatrix in der Nähe von Durchschlagspunkten behandeln. Über das Einbringen fiktiver Federn wird das System stabilisiert und die Korrektureiterationen in der Umgebung dieser kritischen Punkte unterdrückt. Eine zusammenfassende Beschreibung beider Verfahren ist beispielsweise in RAMM (1981) enthalten. Beschreibungen der Manipulationen der Steifigkeitsmatrix in der nahen Umgebung von kritischen Punkten wurden in der Zwischenzeit in Vielzahl veröffentlicht. Dieses Thema soll hier nur erwähnt sein und wird im Folgenden nicht weiter diskutiert.

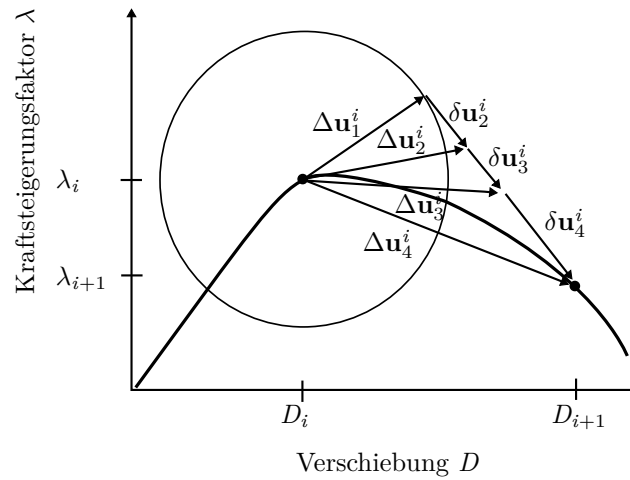
Abschnitt 3.5 nahm bereits die Kraft- und die Verschiebungskontrolle vorweg. Die algorithmische Umsetzung wurde dort anhand von Kraft- und Verschiebungslastfällen skizziert. Die Kontrolle einer vorab ausgewählten Knotenverschiebung geht auf ARGYRIS (1965) zurück. Das darin vorgestellte Verschiebungsverfahren schreibt eine Komponente des vollständigen Knotenverschiebungsvektors vor. Der zugehörige unbekannte Kraftsteigerungsfaktor  $\lambda$  wird in der Lösung ausgewertet. In diesem Vorgehen werden abhängige und unabhängige Variablen ausgetauscht (siehe hierzu auch RAMM (1981)). Für ein Zwei-Freiheitsgradsystem unter einem Kraftlastfall kann die Gleichung

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \hat{D} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \Delta \lambda \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

bei einer vorgeschriebenen Verschiebung  $\Delta D_2 = \Delta \hat{D}$  zu

$$\begin{bmatrix} K_{11} & -F_1 \\ K_{21} & -F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} - \Delta \hat{D} \begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

umgeformt werden. Eine direkte Veränderung der Steifigkeitsmatrix wird nicht vorgenommen. Das Gleichungssystem (4.1) verliert durch den Austausch der Variablen  $\Delta \lambda$  und  $\Delta \hat{D}$  in Gleichung (4.2) seine Bandstruktur. Durch die Vereinfachung von BATOZ UND DHATT (1979) kann das Gleichungssystem wie in Abschnitt 3.4.4 in zwei Schritten gelöst und das unsymmetrische Gleichungssystem (4.2) umgangen werden. Die Steifigkeitsmatrix wird bei diesem Vorgehen an kritischen Punkten singular. Die Autoren weisen aber darauf hin, dass es unwahrscheinlich sei, bei der Berechnung genau auf einen singulären Punkt zu treffen. Diese Verschiebungskontrolle wurde von vielen Autoren angewandt und modifiziert, weil sie in der Lage ist, Durchschlagspunkte zu überwinden. Wird die gewählte Kontrollverschiebung rückläufig, wie im Fall von Umkehrpunkten, scheitert das Berechnungsverfahren, wie oben bereits beschrieben wurde. In einigen Fällen ist es zudem nicht möglich, einen stetig wachsenden Verschiebungsfreiheitsgrad



**Abbildung 4.4:** Konstantes Bogenlängenverfahren nach Riks/Wempner: Iteration im Inkrement  $i$  im Kraft-Verschiebungsraum.

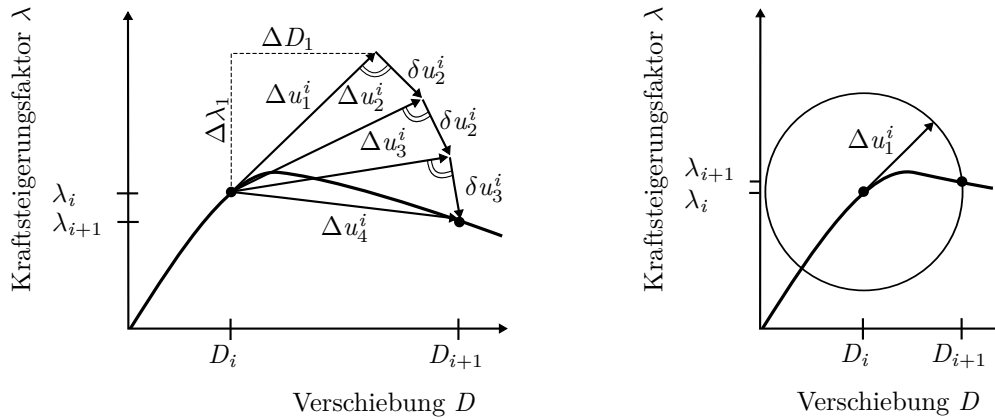
zu identifizieren (siehe beispielsweise VERHOOSSEL (2009) oder LORENTZ UND BADEL (2004)).

In der Ingenieurliteratur sind die ersten Verfahren der Bogenlängenkontrolle in den Arbeiten von WEMPNER (1971), RIKS (1972) und RIKS (1979) beschrieben. Bogenlängenverfahren werden üblicherweise über eine Gleichung beschreiben, die mindestens eine Komponente des Vektors aller Verschiebungssinkremente und gegebenenfalls das Inkrement des Steigerungsfaktors enthält. Damit wird eine gemischte Größe aus Kraft und Verschiebung kontrolliert, die die Länge eines Pfadabschnitts für den Lastschritt vorgibt. Der Steigerungsfaktor hat hierbei dann die Identität des Vorfaktors eines Kraftlastkollektivs. In Abbildung 4.4 sind die Iterationsschritte des konstanten Bogenlängenverfahrens nach WEMPNER (1971), RIKS (1972) und RIKS (1979) in einem Inkrement dargestellt. In der ersten Iteration, die den Prädiktor beschreibt, ist die Länge der Tangente an den Gleichgewichtspfad im aktuellen Gleichgewichtspunkt durch

$$(\Delta \mathbf{u}_1^i)^T \Delta \mathbf{u}_1^i = \Delta s^2. \quad (4.3)$$

vorgeschrieben.  $\Delta s$  bezeichnet dabei die Bogenlänge und den Radius des Kreises um den aktuellen Gleichgewichtspunkt. In den Folgeiterationen  $j$  des Inkrements sollen alle iterativen Änderungen  $\delta \mathbf{u}_j^i$  senkrecht auf den Prädiktor  $\Delta \mathbf{u}_1^i$  stehen:

$$\Delta \mathbf{u}_1^i \delta \mathbf{u}_j^i = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$



**Abbildung 4.5:** Updated-Normal-Plane-Method (links), Iteration auf Kugeloberfläche (rechts) im Inkrement  $i$  nach RAMM (1981) in eindimensionaler Darstellung.

Basierend auf dem algorithmischen Ablauf einer Verschiebungskontrolle, wie sie in BATOZ UND DHATT (1979) beschreiben wird, verwendet RAMM (1981) eine veränderte Iterationsvorschrift zur Riks/Wempner-Methode. Anstatt zu fordern, dass alle iterativen Änderungen zum Prädiktor senkrecht sein sollen, führt die stete Korrektur des Inkrements  $\Delta \mathbf{u}_j^i$  zur Zusatzgleichung

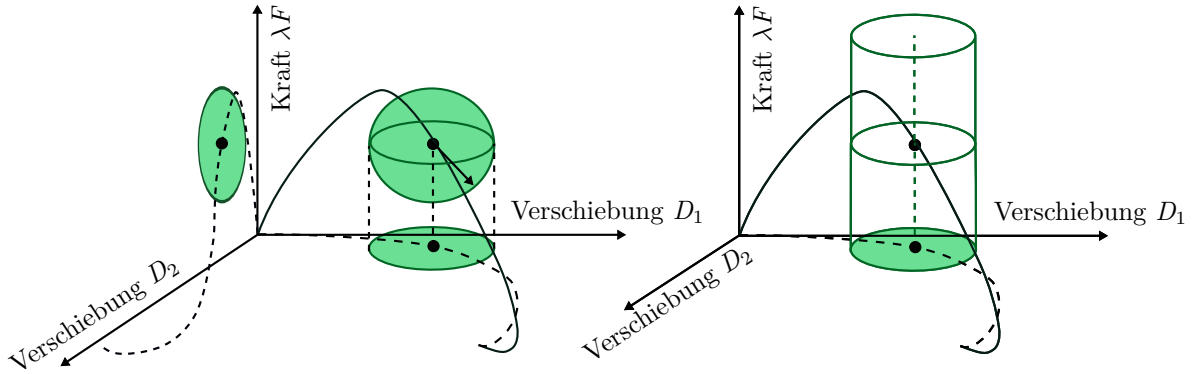
$$\Delta \mathbf{u}_j^i \delta \mathbf{u}_j^i = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

die für alle auf den Prädiktor folgenden Iterationen gilt. Damit sind die iterativen Änderungen immer senkrecht zum aktuellen Inkrement. Diese Vorschrift ist in Abbildung 4.5 links skizziert. Diese Updated-Normal-Plane-Method unterscheidet sich von der Verschiebungskontrolle im Wesentlichen in der Auswertung des Steigerungsfaktors  $\delta \lambda$  beziehungsweise  $\Delta \lambda$ , siehe RAMM (1981). Zusätzlich zur Iteration auf der stets aktualisierten Normalenebene schlägt auch RAMM (1981) vor, wie in Abbildung 4.5 rechts auf einem Kreisbogen beziehungsweise einer Kugeloberfläche zu iterieren. Das sich ergebende, unsymmetrische Gleichungssystem wird analog zum Vorgehen von BATOZ UND DHATT (1979) in zwei Schritten gelöst.

In der Veröffentlichung von CRISFIELD (1981) ist das sphärische Bogenlängenverfahren beschrieben. Die quadratische Zusatzgleichung

$$f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D} + \Psi \Delta \lambda^2} - \Delta \hat{s} = 0. \quad (4.6)$$

für diese Iterationsvorschrift enthält den Verschiebungskrementvektor  $\Delta \mathbf{D}$ , das Inkrement des Steigerungsfaktors  $\Delta \lambda$  und einen Ausgleichsfaktor  $\Psi$ . Das Inkrement des



**Abbildung 4.6:** sphärische (links) und zylindrische (rechts) Bogenlängenmethode nach CRISFIELD (1981).

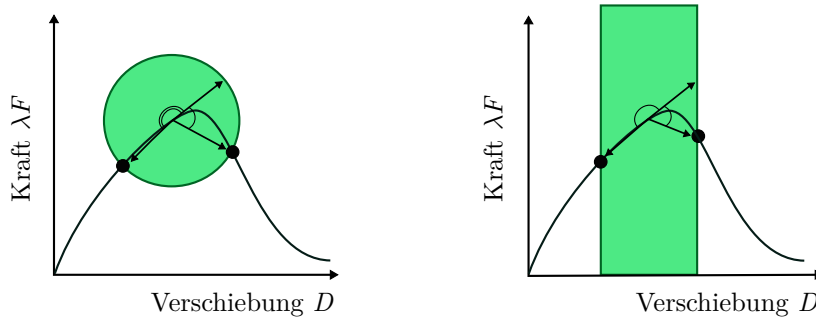
Verschiebungsvektors  $\Delta \mathbf{D}$  wird für die Lösung analog zu Gleichung 3.9 zerlegt.  $\Psi$  gewichtet die unterschiedlichen Einflüsse aus Verschiebungsvektor und Steigerungsfaktor. Die Grenzfälle für die Wahl von  $\Psi$  führen für  $\Psi \rightarrow \infty$  zu einer Kraftkontrolle (bei Kraftlastfällen) und für  $\Psi \rightarrow 0$  zu einer zylindrischen Bogenlängenkontrolle. Geometrisch interpretiert bildet die Zusatzgleichung eine Hyperkugel mit dem Radius  $\Delta s$ , auf deren Oberfläche der zu ermittelnde Gleichgewichtspunkt liegt.

Neben der sphärischen Bogenlängenkontrolle schlägt CRISFIELD (1981) das zylindrische Bogenlängenverfahren vor. Es schreibt anstelle einer Hyperkugel die Iteration auf einem Hyperzylinder vor. Für den eindimensionalen Fall mit nur einem relevanten Verschiebungsfreiheitsgrad folgt daraus eine Verschiebungskontrolle. Abbildung 4.6 zeigt die geometrische Beschreibung des sphärischen und zylindrischen Bogenlängenverfahrens für zwei Verschiebungsfreiheitsgrade. Die Kugel links stellt die Hyperkugel der Zusatzgleichung des sphärischen Bogenlängenverfahrens dar. Rechts wird der Zylinder des zylindrischen Bogenlängenverfahrens gezeigt.

Nichtlineare Zusatzgleichungen können direkt oder iterativ erfüllt werden. Bogenlängengleichungen nach CRISFIELD (1981) und RAMM (1981) erfüllen diese direkt. Für das zylindrische Bogenlängenverfahren mit  $f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}} - \Delta \hat{s} = 0$  ergibt sich für die  $j$ te Iteration die Änderung des Steigerungsfaktors  $\delta \lambda$  aus der Lösung der Gleichung  $a_1 \delta \lambda^2 + a_2 \delta \lambda + a_3 = 0$ . Die Faktoren  $a_1$  bis  $a_3$  setzen sich folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \delta \mathbf{D}_F^T \delta \mathbf{D}_F \\
 a_2 &= 2\delta \mathbf{D}_F (\Delta \mathbf{D}_0 + \delta \mathbf{D}_R) \\
 a_3 &= (\Delta \mathbf{D}_0 + \delta \mathbf{D}_R)^T (\Delta \mathbf{D}_0 + \delta \mathbf{D}_R) - \Delta \hat{s}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$





**Abbildung 4.7:** Lösungspunkte der sphärischen (links) und zylindrischen (rechts) Bogenlängengleichung und die Winkel zur Identifikation des gewünschten Gleichgewichtspunktes.

Die Faktoren aus Gleichung (4.7) enthalten das Verschiebungskrement des Prädiktors  $\Delta \mathbf{D}_0$ , die iterativen Änderungen der Verschiebungen  $\delta \mathbf{D}_F = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , die iterativen Verschiebungsänderungen  $\delta \mathbf{D}_R = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}$ , siehe Gleichung (3.10), und den Einheitsvektor der äußeren Kraftlasten  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ .

Für diese quadratischen Zusatzgleichungen ergeben sich bei Elastizität zwei mögliche Lösungen  $\delta \lambda_{1/2}$ . Die Wahl des korrekten Lösungspunktes wird von CRISFIELD (1983) und HELLWEG UND CRISFIELD (1998) diskutiert. Anschaulich sind diese Lösungspunkte in Abbildung 4.7 als Schnittpunkt der Zusatzgleichung mit dem Gleichgewichtspfad dargestellt. Eine Lösung von  $\delta \lambda$  liegt auf einem bereits überwundenen Abschnitt des Gleichgewichtspfades, die andere Lösung ist der gewünschte Gleichgewichtspunkt. Zur Identifikation des zu berechnenden Punktes vergleicht CRISFIELD (1981) den Winkel zwischen dem inkrementellen Verschiebungsvektor vor und nach der Iteration. Der kleinere Winkel führt zur korrekten Wahl von  $\delta \lambda$ .

Wird die Zusatzgleichung wie in Abschnitt 3.4.4 linearisiert, entfällt diese Wahl des Gleichgewichtspunktes. Das Gleichungssystem liefert nur eine mögliche Lösung für  $\delta \lambda$ . Eine Konsequenz der iterativen Erfüllung durch Linearisierung ist, dass nur die Prädiktorlösung und der auskonvergierte Lösungspunkt die Zusatzgleichung exakt erfüllen. Für alle dazwischenliegenden Lösungen während der Iteration ist dies nicht zwangsweise der Fall. Für die sphärische und die zylindrische Bogenlängengleichung, die in Abbildung 4.6 dargestellt ist, bedeutet das, dass die Lösungen im Verlauf der Iteration nicht unbedingt auf der Oberfläche der Kugel oder des Zylinders zu liegen kommen. Eine Bewertung und Beschreibung einiger Pfadverfolgungsmethoden wurde von CARRERA (1994) durchgeführt. Effizienz und Anwendbarkeit dieser Verfahren werden anhand von Beispielen mit besonderen Charakteristika diskutiert.

Die in dieser Arbeit zu numerischen Vergleichen herangezogenen linearisierten Bogenlängengleichungen aus der Veröffentlichung von SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986)

werden für Kraft- oder Verschiebungslastfälle beschrieben. Die Zusatzgleichungen

$$f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D} + \Psi \Delta \lambda^2} - \Delta \hat{s} = 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad (4.8)$$

$$f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}} - \Delta \hat{s} = 0 \quad (4.9)$$

für das sphärische und das zylindrisches Bogenlängenverfahren werden in allen unabhängigen Lösungsgrößen linearisiert. Für die sphärische Bogenlängenkontrolle ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial D_i} = \frac{\Delta D_i}{\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D} + \Psi \Delta \lambda^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\Psi \Delta \lambda}{\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D} + \Psi \Delta \lambda^2}}. \quad (4.10)$$

Beim zylindrischen Bogenlängenverfahren entfallen alle Terme, die den Steigerungsfaktor  $\lambda$  enthalten:

$$\frac{\partial f}{\partial D_i} = \frac{\Delta D_i}{\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}}} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0. \quad (4.11)$$

Der Ablauf zur Ermittlung des Gleichgewichtspfades mit Hilfe des linearisierten zylindrischen Bogenlängenverfahrens ist in Abbildung 4.8 am Beispiel eines Kraftlastfalls dargestellt.

Der erste Prädiktor wird in den vorgestellten Berechnungen als Tangentenprädiktor ausgeführt, alle folgenden Prädiktoren als Sekante zwischen dem letzten und dem aktuellen Gleichgewichtspunkt. Die Skalierung des Tangentenprädiktors erfolgt über den Quotienten der vorgegebenen Schrittweite zur aktuellen Bogenlänge  $\Delta s$ . Im Iterationsprozess, in den die konsistent linearisierte Zusatzbedingung eingeht, wird zur Symmetriehaltung das Gleichungssystem in zwei Schritten entsprechend Gleichungen (3.10) und (3.11) nach BATOZ UND DHATT (1979) gelöst. Dieses Verfahren verwenden auch CRISFIELD (1981) und RAMM (1981). Beide Autoren empfehlen außerdem, den Steigerungsfaktor  $\lambda$  in der Zusatzgleichung zu vernachlässigen, da sich durch diesen Parameter numerisch kein Stabilitätsgewinn ergibt. Die modifizierten Bogenlängengleichungen, wie sie in dieser Arbeit beschrieben und angewandt werden, verzichten daher auf den Anteil des Steigerungsfaktors in der Zusatzgleichung. Als Iterationsverfahren dient in allen vorgestellten Algorithmen die Newton-Raphson-Methode.

Bogenlängenverfahren werden in vielen Veröffentlichungen zusammen mit Line-Search-Methoden verwendet. Unter Annahme der korrekten Suchrichtung wird über Line-Search-Verfahren die Schrittweite zur Ermittlung des nächsten Gleichgewichtspunktes angepasst. Dies erfolgt bei elastischen Problemen über die Minimierung der potentielle Energie des zugehörigen Lastschritt entlang einer vorgegebenen Suchrichtung.

$f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}} - \Delta \hat{s} = 0 \rightarrow$ Bogenlänge $\Delta s = \Delta \hat{s}$ wird vorgeschrieben		
Initialisierung		
Prädiktor	$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{D} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \rightarrow \Delta \mathbf{D}$	$\Delta s = \Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}$
Skalierung des Prädiktors	$\Delta \lambda = \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta s}$	$\Delta \mathbf{D} := \Delta \mathbf{D} \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta s}$
Update:	$\mathbf{D} := \mathbf{D} + \Delta \mathbf{D}$	$\lambda := \lambda + \Delta \lambda$
Schleife über alle Inkremente $j = 1..n_{\text{incr}}$		
Zwei-Schritt-Lösung		
	$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{D}_F = -\mathbf{F}_{\text{ext}} \rightarrow \delta \mathbf{D}_F$	
	$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{D}_R = -\mathbf{R} \rightarrow \delta \mathbf{D}_R$	
	$\delta \lambda = -\frac{f + f_{,\mathbf{D}} \delta \mathbf{D}_R}{f_{,\mathbf{D}} \delta \mathbf{D}_F + f_{,\lambda}}$	$\delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{D}_R + \delta \lambda \delta \mathbf{D}_F$
Update	$\mathbf{D} := \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}$	$\lambda := \lambda + \delta \lambda$
Auswertung $\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda)$		
Iterationsschleife		
Konvergenztest $\ \mathbf{R}\  < \text{tol} \quad \&\& \quad \ \delta \mathbf{D}\  < \text{tol} \quad \&\& \quad  f  < \text{tol}$		
Update	$\Delta \mathbf{D} := \mathbf{D} - \mathbf{D}_{\text{alt}}$	$\mathbf{D}_{\text{alt}} := \mathbf{D}$
	$\Delta \lambda := \lambda - \lambda_{\text{alt}}$	$\lambda_{\text{alt}} := \lambda$
Sekantenprädiktor	$\mathbf{D} := \mathbf{D} + \Delta \mathbf{D}$	$\lambda := \lambda + \Delta \lambda$

**Abbildung 4.8:** Berechnungsablauf mit konsistent linearisierter Zusatzgleichung am Beispiel eines Kraftlastfalls und zylindrischer Bogenlängenkontrolle.

Die Methode verallgemeinerter Verschiebungen (generalized displacement control – GDC) nach CARDOSO UND FONSECA (2007) stellt eine alternative Formulierung zu den genannten Bogenlängengleichung dar. Es wird als orthogonales Bogenlängenverfahren bezeichnet. Durch die Auswertung eines generalisierten Steifigkeitsparameters (GSP), in den steifigkeitsabhängige Größen eingehen, wird die Zunahme (GSP > 1) und Abnahme

( $GSP < 1$ ) des Lastinkrements bestimmt. Bei der Überschreitung von Durchschlagspunkten liefert der GSP negative Werte und das Lastinkrement wird negativ.

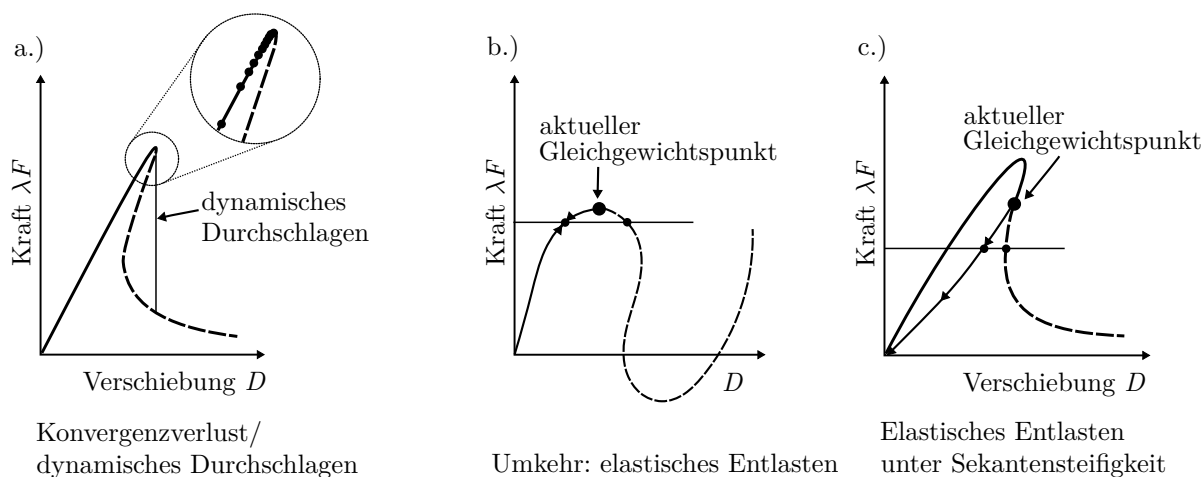
In den Arbeiten von GEERS (1999a) und GEERS (1999b) werden adaptive Bogenlängenverfahren vorgestellt und als subplane control approach bezeichnet. Die inkrementelle Prädiktorlösung wird zur Auswahl der in die Kontrollgleichung eingehenden Freiheitsgrade herangezogen. Anstelle der Freiheitsgrade schlägt GEERS (1999a) auch Funktionen von Freiheitsgraden vor. Zwei mögliche Varianten einer Zusatzgleichung werden für die Verschiebungen oder deren Funktionen (beispielsweise Verzerrungen) diskutiert: Es wird entweder nur eine Variable zur Kontrolle herangezogen, deren Wert im aktuellen Prädiktorschritt betragsmäßig maximal ist oder die einzelnen Variablen werden mit den zugehörigen Einträgen aus der Prädiktorlösung gewichtet.

In diesem Abschnitt wurden einige Methoden zur Pfadverfolgung von statischen Gleichgewichtspfaden betrachtet. Der Fokus lag auf Methoden, die Rückläufigkeiten in Kraft- und Verschiebungskomponenten abbilden können. Diese Methoden werden häufig für Probleme angewandt, für deren Kontrolle vorab keine stetig wachsenden Verschiebungsfreiheitsgrade oder Kräfte bekannt sind. Welche Phänomene beim Versagen solcher und anderer Kontrollen auftreten und wie ihre Entsprechung bei realen Experimenten ausfällt, wird im Folgeabschnitt beleuchtet. Dies geschieht auf Basis von Besonderheiten im Gleichgewichtspfad.

### 4.3 Unerwünschte Phänomene aus Kontrollversagen

Abhängig von der Wahl der Kontrollmethode für die Pfadverfolgung bis in den nachkritischen Bereich können sich kontrollbedingte Versagensphänomene einstellen. Häufig sind Kontrollendpunkte der Grund für Phänomene wie dynamisches Durchschlagen, schlagartiges Versagen oder Konvergenzverlust. Die in Abbildung 4.9 dargestellten, kontrollbedingten Phänomene können sich sowohl für reale als auch für numerische Experimente einstellen. Sie sollen hier in drei Kategorien unterteilt werden: Konvergenzverlust oder dynamisches Durchschlagen, elastisches Entlasten auf dem Belastungspfad und Entlastung mit Reststeifigkeit nach Schädigungsbeginn. Im Folgenden sollen Erklärungsansätze für die unterschiedlichen Phänomene gegeben werden, die im Berechnungsablauf nicht erwünscht sind. Die genannten Phänomene sind in Abbildung 4.9 zusammengefasst und graphisch dargestellt.

Abbildung 4.9 a.) zeigt einen starken Abfall der Kraft-Verschiebungskurve nach Erreichen der ersten Maximallast. Für diverse Pfadverfolgungsmethoden stellt dies ein Problem dar. Im realen Versuch würde unter einer Verschiebungssteuerung dynamisches Durchschlagen auftreten und die rückläufigen Pfadabschnitte blieben unsichtbar. Kraft-



**Abbildung 4.9:** Algorithmische Versagensmechanismen: links als Konvergenzverlust, mittig als Umkehr des Algorithmus, rechts als künstliche Entlastung bei Entfestigung.

kontrolliert endet dieser Versuch mit Erreichen der Maximallast. Die beschriebenen Bogenlängenverfahren haben mit solchen Gleichgewichtspfaden häufig Probleme. Gründe hierfür liegen in der abrupten Richtungsänderung der Gleichgewichtskurve. Die Richtung des Prädiktors wird hier relevant. Ergeben sich große Ungleichgewichtskräfte, reagiert der Algorithmus in der Regel durch Konvergenzverlust und die Wiederholung des Lastschritts mit kleinerer Schrittweite. Dadurch verändert sich aber nicht die Richtung des Prädiktors und die Ungleichgewichtskräfte verringern sich möglicherweise kaum. Durch diese Bisektionen werden immer näher beieinander liegende Gleichgewichtspunkte berechnet. Der Knick wird dabei aber nicht zwangsweise überschritten. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.9 a.) in der Ausschnittsvergrößerung dargestellt und gleicht einem Stagnieren. Dieser Effekt kann auch bei anderen Kontrollmethoden beobachtet werden. Konvergenzverlust führt in manchen Fällen durch zu große Ungleichgewichtskräfte zu numerischen Problemen, die den Abbruch der Berechnung zur Folge haben.

Abbildung 4.9 b.) zeigt eine nicht eindeutig formulierte Kontrollvorschrift am Beispiel eines vorgegebenen Kraftniveaus bei elastischem Materialverhalten. Enthält die Kontrollvorschrift keine zusätzlichen Informationen über die gewünschte Pfadverfolgungsrichtung, stehen mehrere Gleichgewichtspunkte als Lösungen zur Verfügung. Wird der bereits passierte Gleichgewichtspunkt als Lösungspunkt gewählt, wird der Pfad zurück zum Ursprung der Kraft-Verschiebungskurve verfolgt – der Algorithmus „kehrt um“. Dabei entlastet die Struktur elastisch. Eine graphische Erklärung dafür wurde im Kontext der Bogenlängenverfahren in Abschnitt 4.2 diskutiert. Unter Kenntnis der Kraft-Verschiebungskurve soll nun dieselbe Struktur im realen Experiment in einer Prüfmaschine unter einem Kraftlastfall kraftkontrolliert bis zum Durchschlagspunkt belastet werden. Kennt der Experimentator den Gleichgewichtspfad, entlastet er bei Erreichen

des Durchschlagpunktes. Theoretisch liegen nun zwei Gleichgewichtspunkte auf demselben Kraftniveau vor. Auch in diesem Experiment kann „Umkehren“ auftreten.

Liegt entfestigendes Materialverhalten vor, kann die Struktur unter Sekantensteifigkeit ungewollt elastisch entlasten. Dieses Phänomen wird im Folgenden als *künstliche Entlastung* bezeichnet. Abbildung 4.9 c.) zeigt diese künstliche Entlastung anhand von elasto-schädigendem Material. Bei Erreichen des aktuellen Gleichgewichtspunkts hat die Schädigung bereits eingesetzt. Abhängig von der Kontrollmethode ergeben sich mehrere Schnittpunkte des Gleichgewichtspfad mit der Kontrollvorschrift und das System entlastet mit der vorhandenen Reststeifigkeit. Künstliche Entlastung wird im Kontext des sphärischen Bogenlängenverfahrens in Abschnitt 6.2 genauer diskutiert.

Generell funktionieren algorithmische und reale Kontrollmethoden bei quasistatischen Experimenten aus den gleichen Gründen nicht. Beispielsweise ist die implementierte Verschiebungssteuerung nicht robuster oder sensibler als diejenige, die in einer Prüfmaschine verwendet wird.

Zusammenfassend kann ein Vergleich zwischen realen und numerischen Experimenten angestellt werden. Grundlegende Unterschiede zur Simulation ergeben sich im Bezug auf Gleichgewicht und die Erfüllung der Kontrollvorschrift. Gleichgewicht stellt sich im realen Experiment von selbst ein. Treten dynamische Effekte auf, erweitern zusätzliche Trägheits- und gegebenenfalls Dämpfungsterme die Gleichgewichtsbedingungen. Algorithmisch werden die Gleichgewichtsbedingungen iterativ korrigiert. Ferner enthalten reale Bauteile natürliche Imperfektionen, die in numerischen Experimenten durch Störungen des perfekten Systems eingebracht werden können. Gemeinsamkeiten der Experimenttypen zeigen sich unter anderem in der Einhaltung der Kontrollgleichung. Die Anpassung der Kontrollgröße im realen Experiment kann direkt durch die Kontrolle des Lastfalls oder indirekt über die Kommunikation zwischen Steuergerät und Aktor geschehen. Im numerischen Experiment wird die Kontrollvorschrift über eine Zusatzgleichung eingebracht, die direkt oder auch iterativ erfüllt wird. Zudem ist es möglich, in einer Simulation einen Lastschritt mit verminderter Schrittweite zu wiederholen und den vorangehenden Zustand dabei wieder herzustellen.

### 4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Gemeinsamkeiten und Unterschiede realer und numerischer Experimente diskutiert. Kontrollmethoden beider Experimenttypen wurden in diesem Rahmen besprochen. Im Besonderen wurde auf die Kontrolle entfestigender Prozesse unter sprödem Materialverhalten bei realen Experimenten eingegangen. Kontrollbedingte Phänomene und das Versagensverhalten in realen und numerischen Experimenten wur-

den in drei Kategorien unterteilt: Konvergenzverlust oder dynamisches Durchschlagen, elastisches Entlasten auf dem Belastungspfad und Entlastung mit Reststeifigkeit nach Schädigungsbeginn. Das Versagen einer Kontrollmethode für reale wie numerische Experimente tritt in der Regel aus denselben Gründen auf. Es ergibt sich entweder aus der Rückläufigkeit der Kontrollgröße oder aus der Mehrdeutigkeit von Kontrollvorschrift und Gleichgewichtszustand. Die numerische Verschiebungskontrolle ist beispielsweise nicht besser oder schlechter als ihre reale Entsprechung. Während sich beim Durchschlagen nach Erreichen eines Kontrollendpunktes in realen Experimenten immer dynamische Effekte einstellen können, müssen numerische Berechnungen hierfür dynamisch durchgeführt werden. Abhängig von der Schrittweite und der Größe der Ungleichgewichtskräfte konvergiert die statische Analyse nach Erreichen eines Kontrollendpunktes nicht mehr.

Eine Gemeinsamkeit beider Experimenttypen ist die Trennbarkeit von Lastfall und Kontrollparameter. Geregelte Prüfmaschinen ermöglichen es, in Experimenten eine vom Lastfall abweichende Größe zu kontrollieren. Voraussetzung für die Durchführung besonders anspruchsvoller Beispiele sind schnelle Datenverarbeitung, steife Prüfmaschinen sowie dynamische Sensoren und Aktoren.

Da das Gewicht dieser Arbeit auf einer Klasse von Verfahren beruht, die zur Lösung nichtlinearer, strukturmechanischer Probleme erweiterte Gleichungssysteme verwenden, wurde eine Auswahl grundlegender algorithmischer Kontrollmethoden dieses Typs aufgezeigt. Besondere Bedeutung haben in diesem Zusammenhang die Bogenlängenverfahren, deren Funktionsweise genauer diskutiert wurde. Die genannten Verfahren können nicht eindeutig der Kontrolle elastischen oder entfestigenden Strukturverhaltens zugewiesen werden und sind daher in diesem übergeordneten Kapitel dargestellt. Diese Methoden sind sehr gut geeignet für glatte geometrisch nichtlineare Probleme. Im folgenden Kapitel, in dem die Ermittlung elastischer Gleichgewichtspfade besprochen wird, können diese Verfahren deshalb in den meisten Fällen erfolgreich eingesetzt werden.





---

## Ermittlung von Gleichgewichtspfaden bei elastischem Strukturverhalten

Gleichgewichtspunkte elastischer Strukturen sind von Beginn der Analyse an existent und werden im Verlauf einer nichtlinearen Berechnung Schritt für Schritt ermittelt. Von der Kontrollmethode hängt ab, welche Pfadabschnitte dargestellt werden können. Bei elastischem Materialverhalten ist es im Gegensatz zu pfadabhängigem Materialverhalten möglich, durch die Wahl eines geeigneten Prädiktors nahe genug an den gewünschten Gleichgewichtspunkt zu gelangen und diesen Punkt aus dem undeformierten Zustand in einem Inkrement zu berechnen. Dennoch versagen auch weiter entwickelte Methoden wie das Bogenlängenverfahren bei der Ermittlung besonders komplexer elastischer Gleichgewichtspfade. Als Beispiel können Stabilitätsprobleme wie Zylinderbeulen genannt werden. Durch die Verwendung adaptiv ausgewählter Kontrollgrößen sollen Robustheit und Effizienz der Pfadverfolgungsmethoden und des Bogenlängenverfahrens im Speziellen erhöht werden. Vorschläge zu Auswahl oder Gewichtung von Freiheitsgraden in der Bogenlängengleichung wurden bereits veröffentlicht. Die Arbeit von GEERS (1999a) wird im Folgenden für Vergleiche herangezogen.

Zunächst wird in diesem Kapitel die Ablesbarkeit der Imperfektionsempfindlichkeit einer Struktur aus ihrem Gleichgewichtspfad beschrieben. Es folgt die Diskussion einer Festlegung der Kontrollrichtung für die Pfadverfolgung. Das Ziel der Vorgabe der Kontrollrichtung am Beispiel des Bogenlängenverfahrens ist die Vermeidung elastischer Entlastungen, die im vorangehenden Kapitel unter Kontrollversagen beschrieben wurde. Zu diesem Zweck sollen Adaptivitätskriterien zur Steigerung der Zuverlässigkeit der Pfadverfolgung entwickelt werden, die Freiheitsgrade für eine adaptiv veränderte Bogenlängenkontrolle auswählen. An einem Beispiel werden Effizienz und Zuverlässigkeit der vorgestellten Adaptivitätskriterien besprochen. Nach einer Erläuterung der verwendeten Schrittwei-

tenregulierung folgen alternative Methoden zur Ermittlung von Gleichgewichtspunkten. Beispielhaft werden dabei die Berechnung stabiler Gleichgewichtspunkte über Potentialoptimierung und die Eingrenzung des Gleichgewichtspfades durch Be- und Entlastung im Rahmen einer dynamischen Analyse erläutert.

### 5.1 Statische Gleichgewichtspfade und Imperfektionsempfindlichkeit

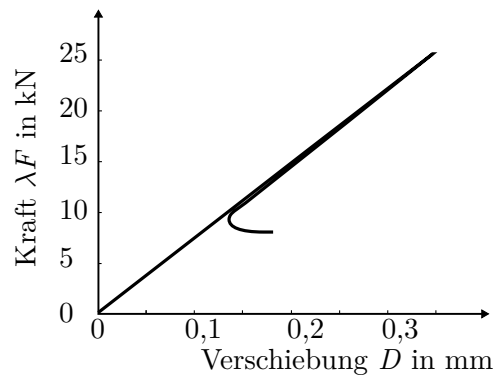
Bis heute ist die numerische Simulation von Beulvorgängen bei Schalen eine besondere Herausforderung. Die Weiterentwicklung von Pfadverfolgungsalgorithmen für die Ermittlung des Nachbeulpfades für diese Problemstellungen ist daher weiterhin essentiell.

Imperfektionsempfindlichkeit wird häufig über eine Vielzahl einzelner, mit unterschiedlichen Imperfektionen belegter Versuche abgeschätzt. Die kleinste Beullast eines Systems ist hierbei von großem Interesse für die Bemessung. Anstelle der Durchführung vieler Einzelversuche können einige Informationen bezüglich der Imperfektionsempfindlichkeit aus dem Gleichgewichtspfad abgeschätzt werden.

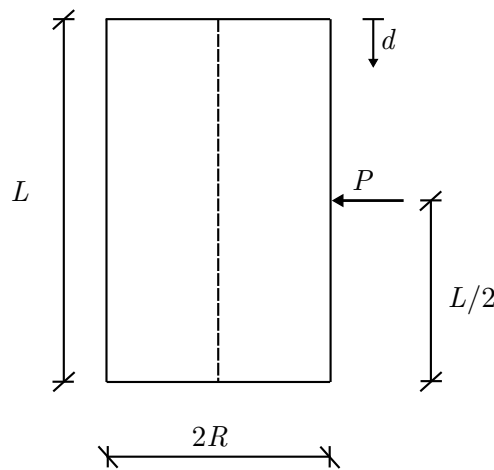
Die Imperfektionsempfindlichkeit bei Verzweigungsproblemen beschreibt, wie stark die ideale Beullast von derjenigen des durch Imperfektionen gestörten Systems abweicht. Typische Verzweigungsprobleme sind Stabilitätsfälle wie das Ausknicken des Eulerstabs oder Zylinderbeulen.

Das Aufbringen einer Imperfektion führt zu einer Umwandlung des Verzweigungspunktes des perfekten in einen Durchschlagspunkt des imperfekten Systems. Es wird im Folgenden dennoch als Verzweigen bezeichnet. Dieses Vorgehen stellt für numerische Berechnungen eine Möglichkeit zur Verfolgung eines Verzweigungspfades dar, da das modellierte System keine natürlichen Imperfektionen enthält.

Liegen die Pfadabschnitte eines aufsteigenden und eines abfallenden Pfadabschnitts wie in Abbildung 5.1 nahe beieinander, versagen viele Algorithmen bei der statischen Analyse an diesem Verzweigungspunkt. Solche Kraft-Verschiebungskurven stellen bis heute eine große Herausforderung für die Pfadverfolgung dar. Als Beispiel soll hier die Ermittlung des Gleichgewichtspfades aus Abbildung 5.1 genannt werden. Er gehört zu einer axial gestauchten, schlanken Zylinderschale aus ASMOLOVSKIY U. A. (2013), deren Knotenkraft am oberen Rand über die Axialverschiebung aufgetragen ist. Die Schalenhöhe  $L$  beträgt 510 mm, der innere Radius  $R$  250 mm und die Schalendicke 1 mm. Unter einem Verschiebungslastfall mit der Verschiebung  $d$  wurde eine Störkraft von  $P = 2$  N aufgebracht. Weitere Angaben können ASMOLOVSKIY U. A. (2013) entnommen werden. Der Pfad wurde mit dem FE-Programm Abaqus mithilfe des Bogenlängenverfahrens ermit-



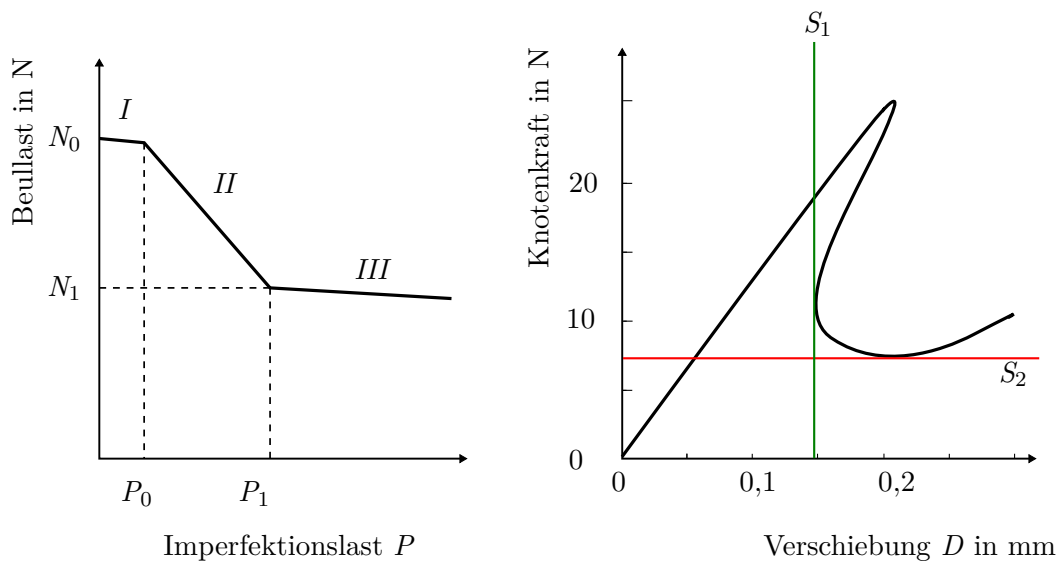
**Abbildung 5.1:** Gleichgewichtspfad eines axialbelasteten Zylinders mit kleiner Imperfektion nach ASMOLOVSKIY U. A. (2013).



**Abbildung 5.2:** Systemskizze der Zylinderschale aus ASMOLOVSKIY U. A. (2013) zum Gleichgewichtspfad in Abbildung 5.1.

telt. Abaqus verfolgte dabei aufeinander folgende Punkte nicht kontinuierlich, sondern sprang immer wieder vom ansteigenden auf den absteigenden Ast und umgekehrt.

In vielen Untersuchungen wird die kritische Beullast, wie oben bereits erwähnt, durch ein Reihe von Analysen mit unterschiedlichen Imperfektionen ermittelt. Daraus ergeben sich Diagramme, die die Störempfindlichkeit der Struktur darstellen. Abbildung 5.3 links zeigt die unter einem Verschiebungslastfall ermittelte Störempfindlichkeit für eine axialbelastete Zylinderschale nach HÜHNE U. A. (2008). Eine Abschätzung der kritischen Beullast kann anhand des statischen Gleichgewichtspfades erfolgen. Nach den Energiekriterien von TSIEN (1942) und TSIEN (1947) gibt es zwei Möglichkeiten, die untere Beullast einzustufen: das einfache und das verschärfte Energiekriterium. Für genauere Ausführungen zu diesen und weiteren Stabilitätskriterien wird auf die Arbeit von BRENDEL (1979) verwiesen. Nach dem einfachen Energiekriterium tritt unter einer Störung Versagen ein, wenn Gleichheit der potentiellen Energie vor und nach dem Beulen herrscht.



**Abbildung 5.3:** Links: Beullast einer Zylinderschale bei unterschiedlichen Einzellastimperfektionen aus HÜHNE U. A. (2008), rechts: Gleichgewichtspfad eines Zylinders (schematisch).

Die kritische Beullast kann über Flächenäquivalenz aus dem Gleichgewichtspfad für Kraft- oder Verschiebungskontrolle ermittelt werden. Das verschärfte Energiekriterium ist rigoroser und sagt Versagen voraus, wenn für ein Kraft- oder Verschiebungsniveau mehrere Gleichgewichtszustände existieren. Beide Kriterien sind in BRENDDEL (1979) für Eigengewicht und axiale Stauchung graphisch dargestellt. Abbildung 5.3 rechts zeigt für Kraft- und Verschiebungskontrolle in den Schnitten  $S_2$  (Axiallast, kraftkontrolliert) und  $S_1$  (Stauchung, verschiebungskontrolliert) die kritischen Zustände. Nach dem verschärften Kriterium nach TSIEN (1947) kann bei Erreichen des jeweiligen Schnitts  $S_1$  bei Verschiebungskontrolle oder  $S_2$  bei Kraftkontrolle Versagen auftreten, wenn das System eine Störung erfährt.

Auch große Schrittweiten in der Pfadverfolgung können zu Abflachungen in Kurven wie in Abbildung 5.3 rechts führen. In manchen Fällen kann beobachtet werden, dass die Kontrollmethode die Spitze der Kurve vom aufsteigenden zum absteigenden Pfadabschnitt abschneidet. Daraus können sich abweichende Beullasten ergeben.

## 5.2 Adaptive Verfahren und Kontrollrichtung

Bei elastischem Strukturverhalten werden idealerweise dieselben Gleichgewichtspfade in Be- und Entlastungsvorgang verfolgt. Es hängt von der Kontrollmethode ab, ob dabei auf möglicherweise existierende, andere Pfadabschnitte gewechselt wird, wie sie beispielsweise in Form benachbarter Sekundärpfade vorliegen. Damit der Algorithmus infolge

einer Kontrollvorschrift an einem charakteristischen Punkt nicht von der Be- auf die Entlastungsrichtung wechselt, muss die gewünschte Richtung in der Kontrollvorschrift festgehalten werden. Diese Richtungszuweisung sei hier folgendermaßen definiert: wird vom Anwender nicht ausdrücklich zu Beginn der Analyse eine Entlastung vorgeschrieben, soll die elastische Energie maximiert werden. Dies erfolgt durch das Fortschreiten des Deformationprozesses in der Struktur.

In den meisten Anwendungen werden deshalb Zusatzgleichungen mit monoton anwachsenden Kontrollparametern verwendet. Mit dieser Wahl kann die kontinuierliche Verfolgung des Pfades sichergestellt werden. Häufig sind zu Beginn der Analyse keine Parameter bekannt, der während des zu durchlaufenden Belastungs- und Deformationsprozesses ständig anwachsen. Daher ist die Wahl einer kombinierten Kontrollmethode wie des Bogenlängenverfahrens naheliegend. Die Vorschrift von Bogenlängeninkrementen stellt eine Kontrollgröße dar, die Kombination aus Verschiebungsinkrementen und teilweise auch Lastinkrementen beinhaltet. Unter den beteiligten Verschiebungs- und Kraftinkrementen befinden sich zumeist auch anwachsende Einträge. Daher ist die Bogenlängengleichung die Grundlage einer Vielzahl von Varianten dieser Methode. In kommerziellen FE-Programmen ist das Bogenlängenverfahren meist die einzige Möglichkeit, Kurven mit rückläufigen Kraft- und Verschiebungskomponenten zu ermitteln.

Trotzdem führen Besonderheiten wie scharfe Gradienten zwischen Kurventeilen (siehe Abbildung 5.1) häufig zum Verlust der Konvergenz oder zum Stehenbleiben des Algorithmus (siehe Abbildung 4.9), obwohl die Bogenlänge fortlaufend positiv inkrementiert werden kann. Negative Inkremente gehen quadratisch zum Beispiel in die Bogenlängengleichung  $f = \sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}} - \Delta \hat{s} = 0$  ein. Aufgrund ihrer quadratischen Form kann die Zusatzgleichung nicht zwischen Be- und Entlastung unterscheiden. Dadurch ergeben sich an bestimmten Punkten Richtungswechsel, die zum Umkehren des Algorithmus und dadurch zur vollständigen Entlastung der Struktur führen (siehe Abbildung 4.9 b.)).

Nach Meinung einiger Autoren spielt der Einfluss der vielen Verschiebungsfreiheitsgrade in der Bogenlängengleichung sowohl für die Verfolgungsrichtung als auch für die Effizienz des Algorithmus eine Rolle. Dem einzelnen, möglicherweise relevanten Freiheitsgrad wird in der Summe aller Freiheitsgradinkremente weniger Gewicht gegeben, als dies für eine fortlaufende Berechnung erforderlich wäre. Manche Autoren, wie zum Beispiel GEERS (1999a), richten ihr Augenmerk also auf zweckmäßig ausgewählte Kontrollparameter und wählen diese in Abhängigkeit der Analyseergebnisse in jedem Schritt adaptiv aus. Die Größen nach der Auswahl von GEERS (1999a) richten sich nach den Eigenschaften der Prädiktorlösung am aktuellen Gleichgewichtspunkt. Richtungsinformation aus dem vorangehenden Schritt bleiben nicht erhalten. Die Prädiktorlösung kann einen dominanten Freiheitsgrad identifizieren, der die Berechnung im aktuellen Schritt voranbringt. Das gleiche gilt für die Gewichtung der Inkremente für die Zusatzgleichung durch die Prä-

diktorklösung  $\Delta \mathbf{D}_{\text{pr}}$ . Für Verschiebungsinkremente kann die Zusatzgleichung von GEERS (1999a) folgendermaßen dargestellt werden:

$$f = \sqrt{(\Delta \mathbf{D}_{\text{pr}}^T \Delta \mathbf{D})^2} - \hat{s} = 0. \quad (5.1)$$

Die Wahl der Kontrollgröße beeinflusst die Konvergenzeigenschaften der Berechnung. Um eine Methode durch Adaptivitätskriterien robuster und/oder wirtschaftlicher zu gestalten, wählen diese Kriterien die Kontrollgrößen nach bestimmten Eigenschaften aus. Basierend auf den Vorschlägen von GEERS (1999a) werden im folgenden Abschnitt Auswahlkriterien für Freiheitsgrade vorgestellt und erläutert, die in Verbindung mit dem zylindrischen Bogenlängenverfahren verwendet werden.

### 5.3 Modifikation des Bogenlängenverfahrens: Adaptive Verschiebungskontrolle

Die adaptive Verschiebungskontrolle basiert auf der Formulierung des zylindrischen Bogenlängenverfahrens. Sie wird im Folgenden nach der englischen Bezeichnung Adaptive Displacement Control mit ACD abgekürzt. Zur Effizienzsteigerung werden hier diverse Auswahlkriterien der Freiheitsgrade für die Zusatzgleichung vorgestellt. Im Folgenden bezeichnet  $m$  das aktuelle Inkrement,  $m-1$  das vorangehende,  $m+1$  das folgende und so weiter.  $\Delta \mathbf{D}_{m+1}$  entspricht also dem iterativ zu korrigierenden Verschiebungsinkrement des aktuellen Iterationszyklus nach dem Prädiktorschritt.

Im Folgenden werden nun drei Varianten von Auswahlkriterien für Kontrollfreiheitsgrade vorgestellt. Hierfür wird ein Wichtungsvektor  $\mathbf{w}$  als Spaltenmatrix eingeführt. Der Vektor  $\mathbf{w}$  hat die Länge der Anzahl der Freiheitsgrade der Struktur und enthält zugeordnet zu den entsprechenden Freiheitsgraden die Einträge 1 oder 0. In  $\mathbf{w}$  ist also die Information über Erfüllung oder Nichterfüllung des Auswahlkriteriums für jeden einzelnen Freiheitsgrad gespeichert. Über das Produkt  $\Delta \mathbf{D}_{m+1}^T \mathbf{w}$  gehen dann die durch  $\mathbf{w}$  ausgewählten Freiheitsgrade in die Zusatzgleichung

$$f = \sqrt{(\Delta \mathbf{D}_{m+1}^T \mathbf{w})^2} - \hat{s} = 0. \quad (5.2)$$

ein. Die Zusatzgleichung entspricht einem gewichteten zylindrischen Bogenlängenverfahren. Für alle drei Auswahlverfahren gilt jeweils dieselbe Iterationsvorschrift. In den folgenden Beispielen für Filterkriterien *Maximum*, *wachsende Gesamtverschiebung* und *Mittelwert* werden die relevanten Freiheitsgrade erfasst, die sich im Deformationsverlauf als dominant hervorheben.

Durch das Auswahlverfahren *Maximum* aus Tabelle 5.1 wird das Verschiebungsincre-

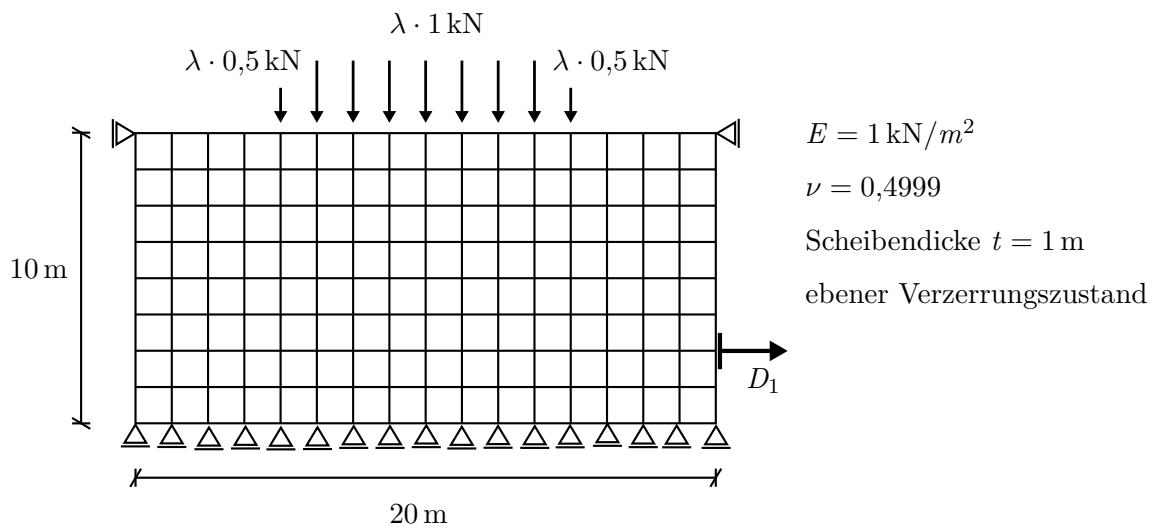
Maximum	
Auswahl	Initialisiere $\mathbf{w}$ $max :=  \Delta \mathbf{D}_m[0] $ $index := 0$ for ( $l := 1 < \text{Anzahl Freiheitsgrade} < l + +$ ) if ( $ \Delta \mathbf{D}_m[l]  > max$ ) $max :=  \Delta \mathbf{D}_m[l] $ $index := l$ $\mathbf{w}[index] := 1$
Beschreibung	Das betragsmäßig maximale Verschiebungsinkrement aus dem letzten auskonvergierten Lastschritt wird als Kontrollinkrement ausgewählt.

**Tabelle 5.1:** Auswahl des größten Verschiebungsinkrements.

ment des Freiheitsgrades als Kontrollparameter für den bevorstehenden Lastschritt ausgewählt, dessen Wert im auskonvergierten Lastschritt maximal war. Generell ist dieses Verfahren angelehnt an die von GEERS (1999a) als „active subplane“ vorgestellte Idee. Anstelle der Auswertung des aktuellen Tangentenprädiktors bei GEERS (1999a) wird hier für die Auswahl des Kontrollinkrements *Maximum* der vorangehende auskonvergierte Lastschritt in Form des Sekantenprädiktors ausgewertet. Würde im vorliegenden Berechnungsalgorithmus ein Tangentenprädiktor verwendet, entsprächen sich die beiden Verfahren.

Hinsichtlich der Datenbasis für die Auswahlverfahren ist zu bemerken, dass sich bei abrupten Veränderungen im Deformationsverhalten der Struktur das Verhalten der Freiheitsgrade oder ihrer Inkremente nicht zwangsweise aus dem bisherigen Verhalten extrapolieren lässt. Daher ist es in einigen Fällen sicherlich geeigneter, die Auswahl des Kontrollfreiheitsgrads auf den von GEERS (1999a) gewählten Tangentenprädiktor zu stützen, als auf den extrapolierten Sekantenprädiktor.

Tabelle 5.2 zeigt das Auswahlverfahren *wachsende Gesamtverschiebung*, durch welches ein über drei Schritte anwachsender Verschiebungsfreiheitsgrad als Kontrollgröße gewählt wird. Während sich wachsende Inkremente nicht in jedem Lastschritt finden, ist eine über mehrere Schritte zunehmende Gesamtverschiebung ein recht zuverlässiger Indikator für das Verhalten eines Freiheitsgrades im folgenden Inkrement. Eine Ausnahme stellt auch hier die abrupte Veränderung des Strukturverhaltens dar.



**Abbildung 5.4:** Kissen nach REESE U. A. (1999) mit hyperelastischem Stoffgesetz nach Abschnitt 2.4.1 und bilinearen, vollintegrierten Scheibenelementen.

Die Auswahl aller Freiheitsgrade, die betragsmäßig größer sind als der Mittelwert aus allen Verschiebungsinkrementen wird im Auswahlkriterium *Mittelwert* in Tabelle 5.3 dargestellt. In diesem Adaptivitätskriterium sollen alle Freiheitsgrade den Deformationsprozess kontrollieren, die sich durch ihr Inkrement als dominant gegenüber den übrigen Freiheitsgraden herausgestellt haben.

Ein Vergleich von Robustheit und Effizienz dieser Verfahren ist in der Auswertung von HÜBNER (2010) zu finden. Anhand eines Beispiels aus REESE U. A. (1999), welches in Abbildung 5.4 dargestellt ist, werden die modifizierten Bogenlängenverfahren auf Anwendbarkeit und Effektivität getestet. Geometrie und Lagerung folgen dem Beispiel aus REESE U. A. (1999). In diese Bogenlängengleichungen gehen die nach Tabellen 5.1 bis 5.3 ausgewählten Verschiebungsinkremente ein. Die Gleichgewichtspfade des perfek-

---

Wachsende Gesamtverschiebung

---

Auswahl

Initialisiere  $\mathbf{w}$

for ( $l := 0 < \text{Anzahl Freiheitsgrade} < l + +$ )

if ( $|\mathbf{D}_m[l]| > |\mathbf{D}_{m-1}[l]| > |\mathbf{D}_{m-2}[l]|$ )

$\mathbf{w}[l] := 1$

---

Beschreibung

Die Eins-Einträge in  $\mathbf{w}$  erfassen alle Freiheitsgrade, die in drei aufeinander folgenden Lastschritten zunehmen.

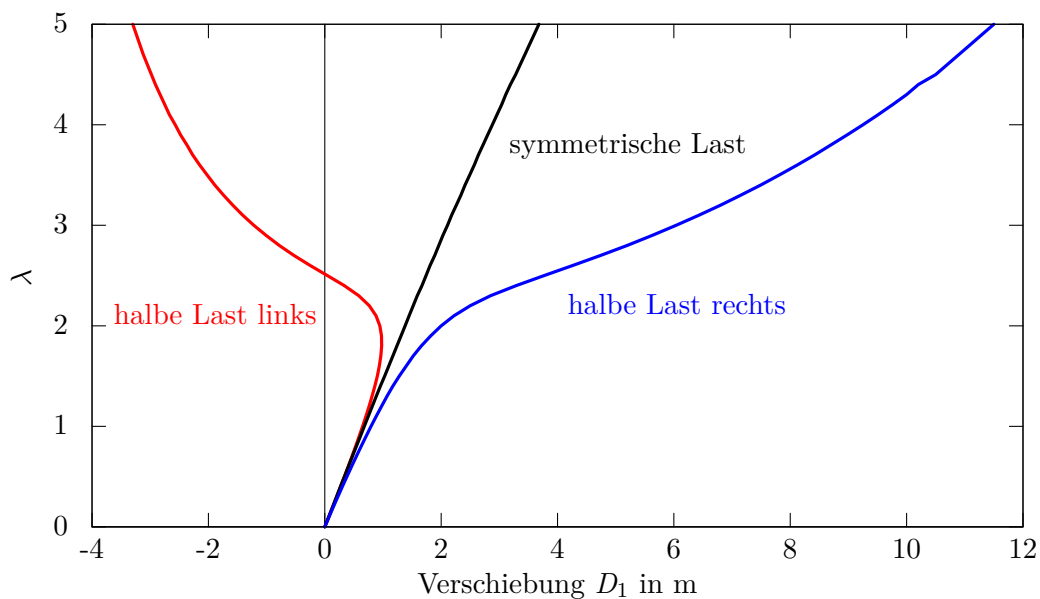
---

**Tabelle 5.2:** Auswahl der über drei Lastschritte wachsenden Gesamtverschiebung.



Mittelwert (MW)	
Auswahl	Anzahl der Freiheitsgrade: $n_{\text{dof}}$ Initialisiere $\mathbf{w}$ $\Delta D_{\text{MW}} = 1/n_{\text{dof}} \cdot \ \Delta \mathbf{D}_m\ $ for ( $l := 0 < n_{\text{dof}} < l++$ ) if ( $ \Delta \mathbf{D}[l]  > \Delta D_{\text{MW}}$ ) $\mathbf{w}[l] := 1$
Beschreibung	Freiheitsgrade, die betragsmäßig über dem Mittelwert der Verschiebungsincremente des vorangehenden Inkrements liegen, gehen in die Zusatzgleichung ein.

**Tabelle 5.3:** Auswahl der Verschiebungsincremente, die größer sind, als der Mittelwert aller Inkremente.



**Abbildung 5.5:** Gleichgewichtspfade der Struktur aus Abbildung 5.4 nach HÜBNER (2010).

ten und der beiden imperfekten Systeme sowie die Deformationsfiguren werden in den Abbildungen 5.5 und 5.6 dargestellt. Der Steigerungsfaktor  $\lambda$  ist dabei über die Horizontalverschiebung  $D_1$  am rechten Rand der Struktur für das perfekte und die beiden imperfekten Systeme angetragen. Die imperfekten Systeme werden durch eine unsymmetrische Lastaufbringung am oberen Rand erzeugt. Eine der außen liegenden Einzelkräfte  $\frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \text{ kN}$  wird dann durch  $\lambda \cdot 1 \text{ kN}$  ersetzt.

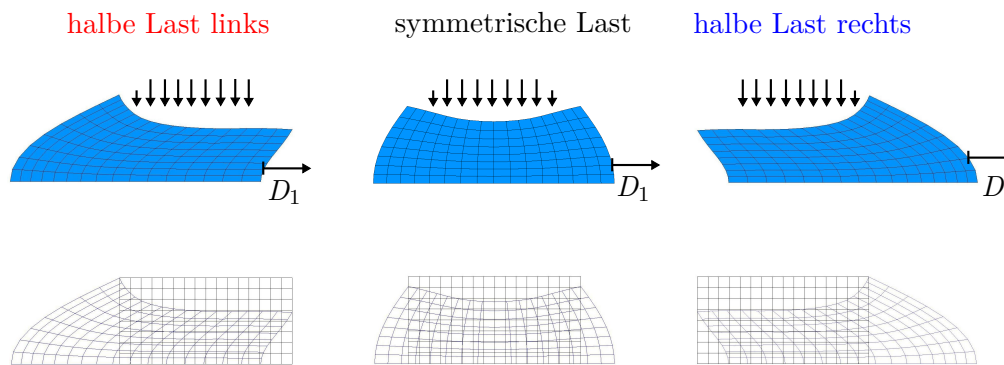


Abbildung 5.6: Deformationsfiguren zu Abbildung 5.5.

HÜBNER (2010) vergleicht in einer Parameterstudie unter anderem die oben genannten modifizierten Bogenlängengleichungen mit dem zylindrischen Bogenlängenverfahren und der Verschiebungskontrolle. Dabei wird die Eignung der Verfahren zur Pfadverfolgung bis zum Erreichen eines gewählten Gleichgewichtspunktes beurteilt. Im Einzelnen wird untersucht, ob das jeweilige Verfahren diesen Gleichgewichtspunkt erreicht und gegebenenfalls die erforderliche Iterationszahl festgestellt. Seine Auswertung ergibt, dass die oben aufgezeigten Auswahlmethoden mit einer geringeren Anzahl an Iterationen den ersten signifikanten Punkt des Gleichgewichtspfades erreichen, als die Verschiebungssteuerung oder das Bogenlängenverfahren. *Mittelwert* benötigt circa die Hälfte der für das zylindrische Bogenlängenverfahren erforderlichen Schritte. *Maximum* erreicht diesen Punkt nach 76% und *Wachsende Gesamtverschiebung* nach 88% der für das ungewichtete Bogenlängenverfahren erforderlichen Iterationszahl. Den Endpunkt des zugrunde liegenden Gleichgewichtspfades erreichen nur das zylindrische Bogenlängenverfahren, *Mittelwert* und *Maximum*. Hier schneiden *Mittelwert* und das zylindrische Bogenlängenverfahren mit 6600 und 6700 Iterationen ungefähr gleich ab. *Maximum* liegt mit 9600 Iterationen deutlich darüber. Es bleibt hier zu untersuchen, ob die Auswahl des Freiheitsgrades nach GEERS (1999a) eine geringere Anzahl an Iterationen liefert. Zur Steigerung der Wirtschaftlichkeit jedes Kontrollalgorithmus trägt in jedem Fall eine adaptive Schrittweitensteuerung bei. Die in dieser Arbeit verwendete Schrittweitenregulierung wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

## 5.4 Schrittweitensteuerung

Mit konstanter Schrittweite werden häufig äquidistante Gleichgewichtspunkte auf Abszisse oder Ordinate im Kraft-Verschiebungs-Diagramm assoziiert. Da bei der Verwendung von Bogenlängenverfahren viele Freiheitsgrade in die Schrittweite  $\Delta s$  einfließen, wird in den projizierten Darstellungen des Gleichgewichtspfades nicht jeder Gleichge-

wichtspunkt denselben Abstand zum vorangehenden Punkt aufweisen. Unter der adaptiven Verschiebungskontrolle tritt dasselbe Phänomen auf, da die kontrollierten Freiheitsgrade von Lastschritt zu Lastschritt wechseln können. Die projizierte Darstellung des Gleichgewichtspfades erfolgt aber üblicherweise für einen Freiheitsgrad, der die Gleichgewichtskurve nicht über Punkte gleichen Abstands abbildet. Die Anpassung der Schrittweite für einen raschen Rechenfortschritt wird entsprechend der Arbeit von RAMM (1981) vorgenommen. In Abhängigkeit der gewünschten Iterationszahl pro Lastschritt  $n_w$  und der Iterationszahl des vorangehenden auskonvergierten Lastschritts  $n_{konv}$  wird die Schrittweite über

$$\Delta \hat{s}_{neu} = \sqrt{n_w/n_{konv}} \cdot \Delta \hat{s}_{alt} \quad (5.3)$$

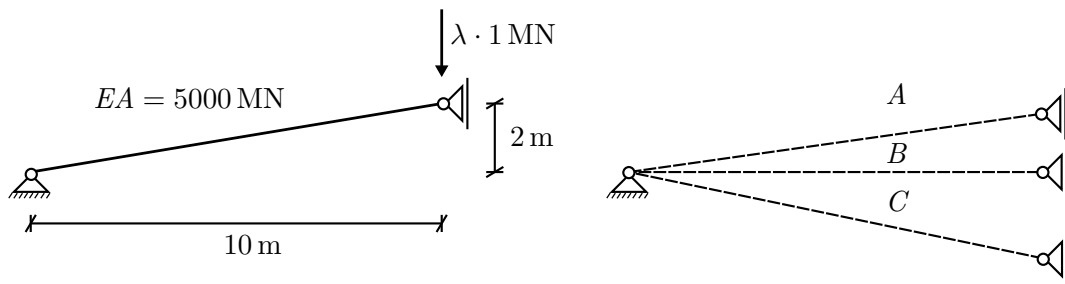
reguliert.

Neben den bereits vorgestellten Berechnungsverfahren statischer Gleichgewichtspfade existieren mehrere weitere Möglichkeiten, Gleichgewichtspunkte und -pfade auszuwerten. Alternative Methoden zur Pfadverfolgung, wie die Ermittlung stabiler Gleichgewichtspunkte über Optimierung oder die dynamische Berechnung durch gezielte Be- und Entlastungszyklen, werden im Folgenden vorgestellt.

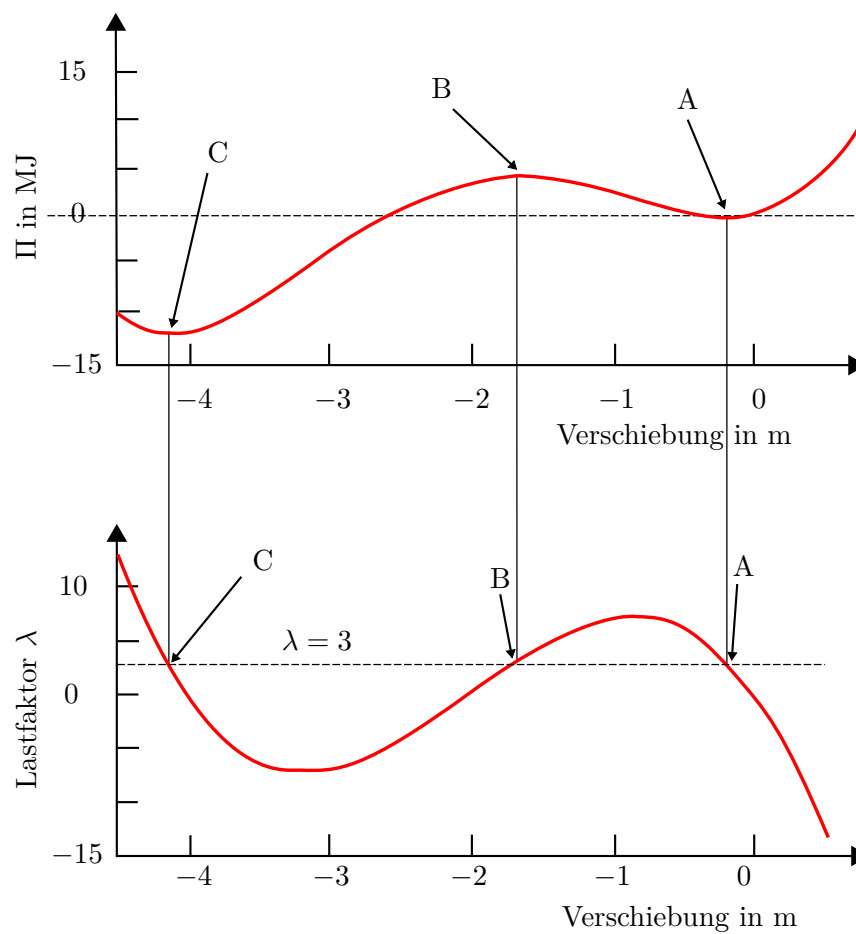
## 5.5 Alternative Methoden zur Ermittlung statischer Gleichgewichtspfade

Bei elastischem Materialverhalten wird zur Beurteilung des Systemverhaltens meist die potentielle Energie eines Deformationszustandes untersucht. Über ein Minimum der potentiellen Energie können Potentialoptimierungsverfahren statische Gleichgewichtspunkte ermitteln. Auch Gleichgewichtspunkten auf isolierten Pfaden können so dargestellt werden. In SPRENG (2010) ist die Ermittlung von Gleichgewichtspunkten unter Vorgabe eines Kraftniveaus durch die Verwendung einer Partikel-Schwarm-Optimierung beschrieben. Als Beispiel für ein solches Verfahren wird ein Durchschlagproblem an einem Dreigelenkbogen untersucht. Hierfür ergibt sich ein Gleichgewichtspfad wie in Abbildung 5.8. Aus dem darüber angeordneten Verlauf des Potentials des Durchschlagproblems über die charakteristische Verschiebung sollen Extremalpunkte klassifiziert werden.

Die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  in Abbildung 5.8 oben kennzeichnen das Potential der Deformationszustände  $A$ ,  $B$  und  $C$  Abbildung 5.7 für ein Kraftniveau (Kraftlastfall) von  $\lambda = 3$ . In der darunter angeordneten Zeichnung sind diese Deformationszustände dem Gleichgewichtspfad zugeordnet. Aus Abbildung 5.8 oben geht hervor, dass  $A$  und  $C$  Minima und  $B$  ein Maximum der potentiellen Energie darstellen. Damit sind  $A$  und

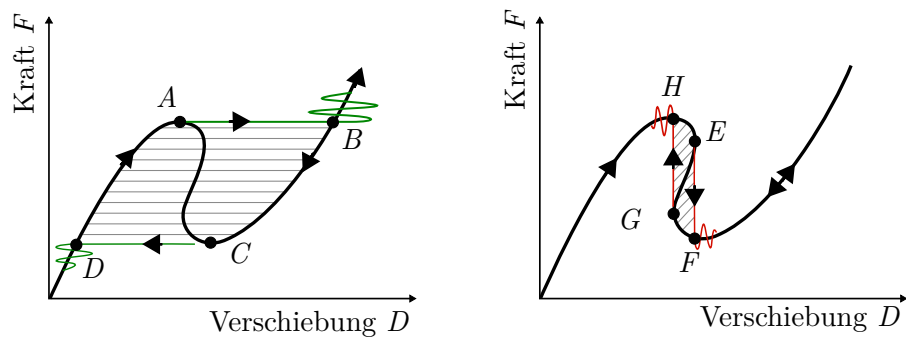


**Abbildung 5.7:** Systemskizze des Dreigelenkbogens aus SPRENG (2010) mit den Deformationszuständen A, B und C.



**Abbildung 5.8:** Potential und Kraftniveau eines Durchschlagsproblems aus SPRENG (2010).

C Gleichgewichtspunkte, die über das Optimierungsverfahren ermittelt werden können. Für B liegt hingegen ein Maximum in der potentiellen Energie vor. Dieser Punkt kann über Potentialoptimierung nicht dargestellt werden.



**Abbildung 5.9:** Abschätzung des statischen Gleichgewichtspfad durch Be- und Entlastung in der dynamischen Berechnung.

Generell kann der statische Gleichgewichtspfad auch mit dynamischen Berechnungen abschnittsweise abgebildet werden. Die Nutzung der d'Alembert'schen Trägheitskräfte führt zu einem sehr robusten aber rechenintensiven Verfahren. Explizite Zeitintegrationsverfahren sind bedingt stabil und erfordern aufgrund der Limitierung des Zeitschritts viele Schritte. Kraft-Verschiebungskurven von quasistatischen Experimente entsprechen bis zum Erreichen eines Durchschlags- oder Umkehrpunktes dem statischen Gleichgewichtspfad. Danach tritt dynamisches Durchschlagen ein und die Trägheitskräfte werden aktiviert. Bestimmte Pfadteile können infolge dieser dynamischen Effekte nicht visualisiert werden. Durch Be- und Entlastung können bei elastischem Materialverhalten Gleichgewichtspunkte abgebildet werden, die den Gleichgewichtspfad im Bereich von Durchschlags- und Umkehrpunkten wie in Abbildung 5.9 eingrenzen.

Abbildung 5.9 zeigt links kraft- und rechts verschiebungskontrolliert eine dynamische Berechnung, bei der die Struktur durchschlägt. Häufig unterscheiden sich die Punkte für die Aktivierung dieses dynamischen Verhaltens bei Be- und Entlastung. So aktiviert in Abbildung 5.9 links der Punkt *A* das Durchschlagen im Belastungsvorgang, während der Punkt *C* dies für die Entlastung übernimmt. Analog verhält es sich mit den Punkten *E* und *G* in Abbildung 5.9 rechts. Die Pfadabschnitte zwischen den Punkten *A-B-C-D* beziehungsweise *E-F-G-H* bilden einen schraffierten Einschluss, der als Hysterese bezeichnet wird. In dieser Hysterese wird Energie dissipiert, die in Form von Dämpfung die durch dynamische Effekte entstandene Schwingung dämpft.

Versuchsaufzeichnungen zu elastischem Zylinderbeulen sind unter anderem von ESSLINGER UND GEIER (1975) bekannt. In der Kraft-Stauchungskurve des sich rein elastisch verhaltenden Zylinders unter Axialdruck aus Abbildung 5.10 ergeben sich Differenzen zwischen Be- und Entlastungspfad. Im Bereich zwischen 0 mm und 0.25 mm der Axialstauchung ist ein Einschluss zwischen Be- und Entlastungskurve, also Hysterese, zu erkennen.

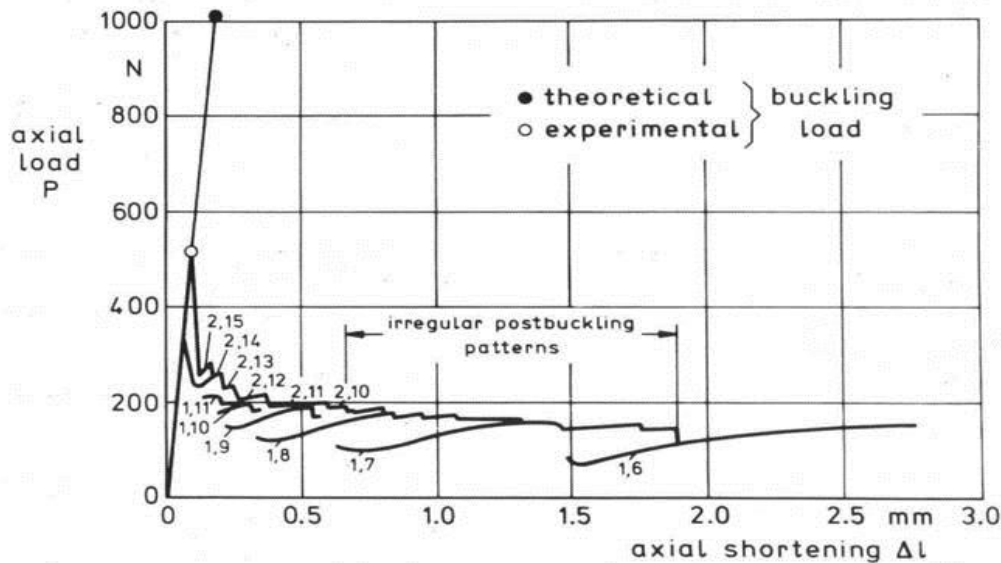


Abbildung 5.10: Experimentelle Kraft-Stauchungskurve nach ESSLINGER UND GEIER (1975).

Liegt entfestigendes Materialverhalten vor, verläuft die Entlastungskurve mit der abgeminderten Reststeifigkeit auf direktem Wege zurück zum Ursprung. Das bedeutet, dass sich der Gleichgewichtspfad nicht so gut eingrenzen oder abschätzen lässt, wie für elastische Probleme.

## 5.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Ablesbarkeit der Imperfektionsempfindlichkeit einer Struktur aus ihrem Gleichgewichtspfad nach den Energiekriterien nach TSIEN (1942) und TSIEN (1947) als Motivation zur Anwendung statischer Gleichgewichtspfade beschrieben. Abschnitt 5.1 diskutiert die Imperfektionsempfindlichkeit eines Verzweigungsproblems durch Einzellasten. Ergeben sich aus der horizontalen oder vertikalen Tangente an einen Gleichgewichtspunkt weitere Schnittpunkte mit dem Pfad, muss bei einer Störung mit dem Versagen der Struktur gerechnet werden. Diese horizontale beziehungsweise vertikale Tangente kann zur Berechnung der kritischen Beullast für Kraft- respektive Verschiebungskontrolle herangezogen werden.

Die Zuverlässigkeit von Pfadverfolgungsmethoden hängt davon ab, ob die Kontrollvorschrift die Verfolgung des Pfad in Be- oder Entlastungsrichtung angibt. Umkehren des Algorithmus und vollständiges Entlasten der Struktur bedingt durch die Formulierung der Zusatzgleichung soll vermieden werden. Für die Umsetzung dieser Anforderung wer-

den Adaptivitätskriterien zur Steigerung von Effizienz und Robustheit von zylindrischen Bogenlängenverfahren vorgestellt. Dabei werden einzelne oder eine Reihe von Verschiebungsfreiheitsgraden für den bevorstehenden Inkrementschritt als Kontrollparameter ausgewählt. Drei Kriterien zur Auswahl dieser Kontrollparameter wurden durch die Methoden *Maximum*, *wachsende Gesamtverschiebung* und *Mittelwert* vorgestellt. Das Verfahren *Maximum* ermittelt das betragsmäßig maximale Verschiebungsinkrement des vorangehenden Lastschritts und identifiziert es als Kontrollgröße. Diese Methode ist angelehnt an ein von GEERS (1999a) vorgestelltes Verfahren. *Wachsende Gesamtverschiebung* selektiert die Inkremente des Freiheitsgrads, die in drei aufeinanderfolgenden Lastschritten angewachsen sind. In *Mittelwert* werden die Inkremente in der Kontrollgleichung berücksichtigt, die betragsmäßig über dem Mittelwert aller Inkremente des vorangehenden Lastschritts liegen. An einem Beispiel wurden diese Methoden getestet und ihre Anwendbarkeit und Effizienz festgehalten. Bis zum ersten charakteristischen Punkt des Gleichgewichtspfades benötigen die Methoden mit adaptiv gewählten Freiheitsgraden eine geringere Anzahl an Iterationen als das zylindrische Bogenlängenverfahren. Bei Betrachtung eines längeren Pfadabschnitts relativiert sich der Vorteil der Auswahlmethoden gegenüber dem Bogenlängenverfahren wieder. Ob diese Auswertung bezüglich der Effizienz dieser Methoden auch für andere Beispiele mit abweichenden Charakteristika aussagekräftig ist, bleibt zu hinterfragen. Im Kontext der Effizienz der Methoden wird auch die adaptive Schrittweitenregulierung nach RAMM (1981) in Abschnitt 5.4 beschrieben.

Neben den genannten Pfadverfolgungsmethoden können Optimierungsverfahren oder dynamische Berechnungen zur Ermittlung von Gleichgewichtspfaden herangezogen werden. Dieses Vorgehen bietet die Möglichkeit, auch isolierte Pfade aufzuspüren und den Pfad mit inkrementell iterativen Methoden weiterzuverfolgen. Über die Be- und Entlastung im Rahmen einer dynamischen Analyse kann der statische Gleichgewichtspfad eingegrenzt werden. Einschlüsse zwischen Be- und Entlastungspfad ergeben sich aufgrund der Durchschlags- beziehungsweise Kontrollendpunkte der jeweiligen Kontrolle. Die eingeschlossenen Flächen entsprechen der Energie, die zur Dämpfung der Schwingungen aus den dynamischen Effekten in Wärme umgewandelt wird.

Im folgenden Kapitel werden die für elastische Strukturen relevanten Fragestellungen für entfestigendes Materialverhalten diskutiert. Die Eigenschaften der Gleichgewichtspfade entfestigender Strukturen und die Methoden zur Pfadverfolgung stehen dabei im Fokus.





# 6

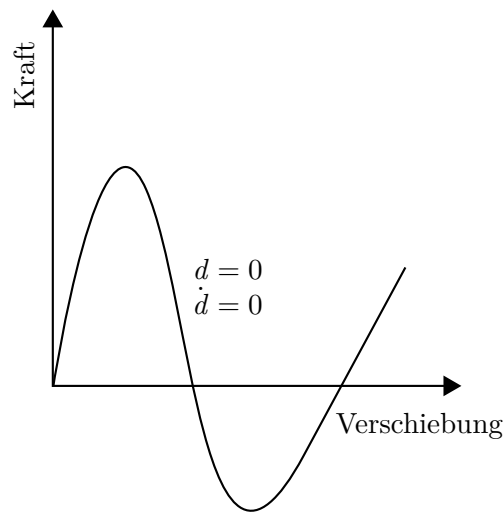
---

## **Ermittlung von Gleichgewichtspfaden bei entfestigendem Strukturverhalten**

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften von Gleichgewichtskurven entfestigender Materialien und die erforderlichen Kontrollmethoden zum Umgang mit diesen Charakteristika beschrieben. Der Begriff der künstlichen Entlastung, der bereits an einigen Stellen verwendet wurde, wird im Folgenden graphisch dargestellt und der phänomenologische Zusammenhang zur Entwicklung der elastischen und der dissipativen Energie hergestellt. Im Anschluss wird ein Überblick über bestehende Pfadverfolgungsmethoden für entfestigendes Materialverhalten in der Strukturmechanik gegeben. In diesem Zusammenhang soll auch der Umgang kommerzieller FE-Programme mit instabilen Pfaden, wie sie beispielsweise im Kontext der Entfestigung auftreten, betrachtet werden. Abschließend werden drei Kontrollmethoden zur Pfadverfolgung vorgestellt, die kein Eingreifen des Nutzers erfordern und künstliche Entlastungen vermeiden.

### **6.1 Eigenschaften von Gleichgewichtspfaden bei entfestigendem Strukturverhalten**

Abhängig von der Duktilität eines entfestigenden Werkstoffs kann bei verzerrungsbasierter Schädigung durch die Spannungsumlagerung eine größere Energiemenge freigesetzt werden, als durch Dissipation in der Schädigungszone. Dadurch ergeben sich rückläufige Abschnitte auf dem Gleichgewichtspfad, die zu Problemen in der Pfadverfolgung bei Kraft- oder Verschiebungskontrolle führen.



**Abbildung 6.1:** Gleichgewichtspfad unter elastischem Materialverhalten: überall gilt  $d = 0$  und  $\dot{d} = 0$ .

Zur Untersuchung von Stabilitätsproblemen bei Entfestigung werden die Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  herangezogen. Für symmetrische Steifigkeitsmatrizen wird

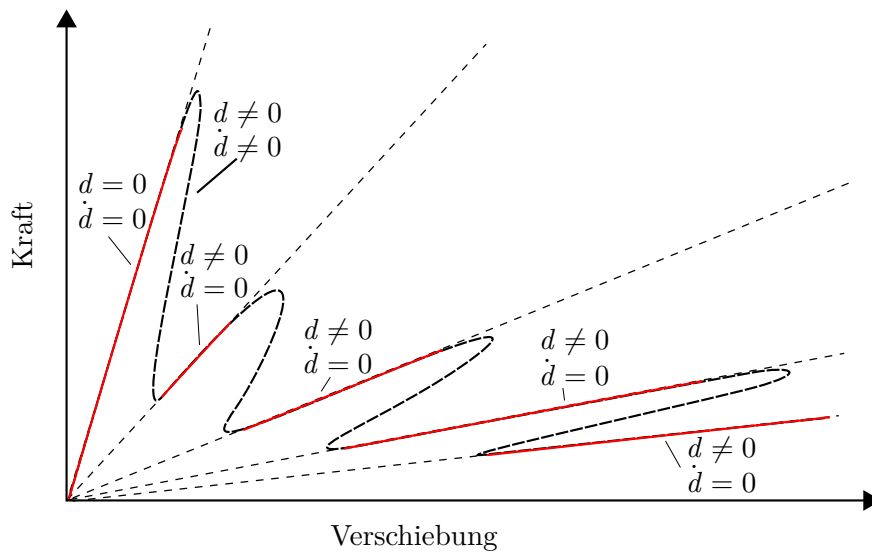
$$\det \mathbf{K}_T = 0 \quad (6.1)$$

als Stabilitätskriterium ausgewertet. Die Steifigkeitsmatrix ist unsymmetrisch, wenn die Materialtangente bedingt durch schädigendes Materialverhalten unsymmetrisch ist. In der Berechnung der Elasto-Schädigungstangente (Gleichung (2.41)) entscheidet der letzte Term  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{E}_{GL}}$  über die Symmetrie der Materialmatrix. In der vorliegenden Arbeit werden die äquivalenten Verzerrungen über die Energienorm der Green-Lagrange-Verzerrungen berechnet. Dadurch bleiben Material- und Steifigkeitsmatrix symmetrisch (siehe Abschnitt 2.4.2). Für die Beurteilung von Stabilitätsgrenzen bei unsymmetrischen Materialmatrizen muss der symmetrische Anteil der Steifigkeitsmatrix herangezogen werden (siehe hierzu BAŽANT UND CEDOLIN (1991) (S. 670 – 673)). Damit ist

$$\det \hat{\mathbf{K}}_T = \det(\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_T^T) = 0 \quad (6.2)$$

das allgemeinere Kriterium für Stabilität unter Entfestigung.

Gleichgewichtspfade entfestigender Strukturen weisen andere Eigenschaften auf als Gleichgewichtspfade von Strukturen mit elastischem Materialverhalten. Während im vorangehenden Kapitel die Aussage getroffen wurde, dass die Gleichgewichtspfade zur Interpretation des Strukturverhaltens herangezogen werden können, müssen bei Entfestigung weitere Charakteristika bedacht werden.

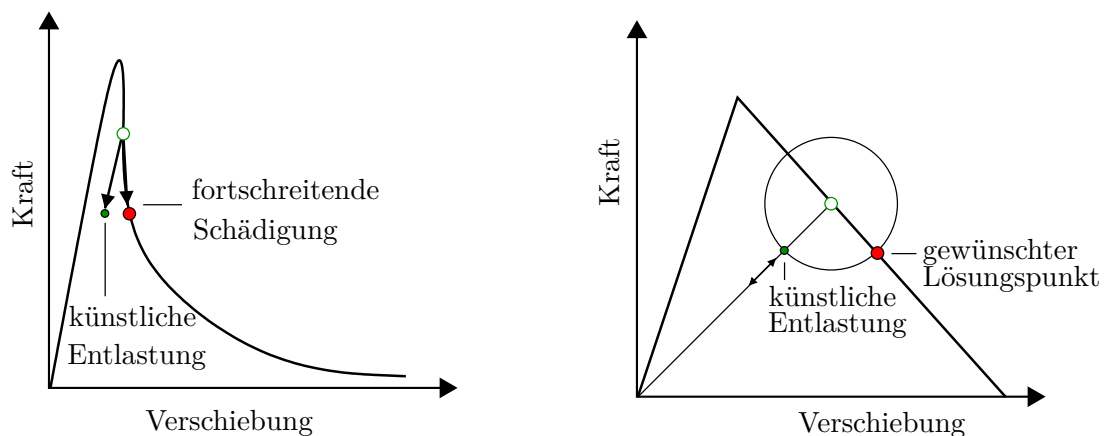


**Abbildung 6.2:** Gleichgewichtspfad unter entfestigendem Materialverhalten mit elastischen und dissipativen Abschnitten.

Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die Kraft-Verschiebungskurven eines rein elastischen und eines elasto-schädigenden Beispiels. Die Kurven sollen verdeutlichen, dass zusätzlich zur Betrachtung der Gleichgewichtskurven auch das Materialverhalten erfasst werden muss, um Aussagen über das Verhalten der Struktur treffen zu können.

Systeme mit entfestigendem Materialverhalten können wie in Abbildung 6.2 elastische und dissipative Pfadabschnitte enthalten. Ob der abfallende Pfadabschnitt sich wie in Abbildung 6.1 aus geometrischen Effekten wie Durchschlagen ergibt, oder ob Entfestigung vorliegt, muss gesondert festgestellt werden. Dies kann an diesem Beispiel am Schädigungsparameter  $d$  selbst und an dessen Änderung  $\dot{d}$  festgemacht werden.

Die Wahl der Kontrollmethode für ein Experiment sollte an den Eigenschaften des Gleichgewichtspfades festgemacht werden. Wenn vor Beginn der Berechnung beispielsweise eine stetig anwachsende Verschiebung vorhergesagt werden kann, ist eine direkte Verschiebungskontrolle eine naheliegende Lösung. Kann eine solche Vorhersage nicht gemacht werden, müssen Kontrollalgorithmen gefunden werden, die den Charakteristika von Strukturen mit entfestigendem Materialverhalten Rechnung tragen. Einige Autoren (beispielsweise LORENTZ UND BADEL (2004), GUTIÉRREZ (2004) oder VERHOOSSEL U. A. (2009)) unterscheiden zwischen elastischen und dissipativen Lösungen. Dass dies nicht nur im Belastungs-, sondern auch im Entlastungsverhalten der Struktur von Belang ist, soll der folgende Abschnitt veranschaulichen.



**Abbildung 6.3:** Mögliche Lösungspunkte eines Mehrfreiheitsgradsystems (links) und eines Einfeldsystems (rechts) bei schädigendem Materialverhalten unter Bogenlängenkontrolle.

## 6.2 Künstliche Entlastung und Kontrollrichtung

Vollständige Gleichgewichtspfade bis in den nachkritischen Bereich können in realen Experimenten kraft- oder verschiebungskontrolliert aufgrund dynamischer Effekte häufig nicht realisiert werden. Die Gründe hierfür sind zumeist Rück- oder Durchschlagsphänomene des statischen Gleichgewichtspfades, die im gewählten Versuchsaufbau nicht statisch kontrolliert werden können. Entfestigende Materialien mit sprödem Versagenscharakter weisen im realen Versuch Besonderheiten auf, die unter anderem in Kapitel 4 zusammen mit den angewandten Kontrollmethoden beschrieben wurden.

Auch einige numerische Kontrollmethoden weisen im Umgang mit Entfestigung Eigenschaften auf, aufgrund derer sie als unzuverlässig eingestuft werden können. Unter anderem bei Bogenlängenverfahren können im numerischen Experiment künstliche Entlastungen auftreten, die physikalisch nicht gerechtfertigt sind. Sie resultieren allein aus der Formulierung der Zusatzgleichung und der Anordnung möglicher Gleichgewichtspunkte.

Unter Schädigung entstehen Gleichgewichtspunkte auf dem Entlastungspfad. Dieser verlässt die Einhüllende aller Gleichgewichtspunkte, die zu jedem Verschiebungszustand die maximale Knotenkraft beziehungsweise den maximalen Steigerungsfaktor  $\lambda$  enthält. Das Verlassen dieser Einhüllenden ohne Vorgabe einer Entlastung wird im Folgenden als künstliche Entlastung bezeichnet.

Der Grund für diese künstliche Entlastung ist in Abbildung 6.3 beispielhaft skizziert und liegt in der Schnittmenge aus Zusatzgleichung und Gleichgewichtspunkten. Links in der Abbildung bezeichnet die schwarze Kurve den Gleichgewichtspfad eines Mehrfreiheitsgradsystems unter fortschreitender Schädigung. Auf den aktuellen Gleichgewichtspunkt,

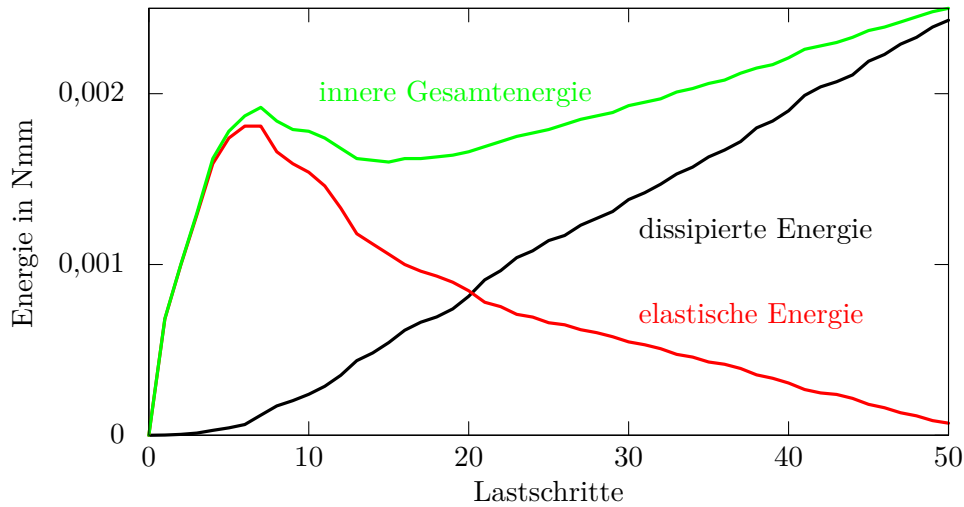
dargestellt mit einem grünen Kreis, kann vom Algorithmus anstelle des gewünschten roten Gleichgewichtspunktes der entlastende grüne, gefüllte Gleichgewichtspunkt aufgefunden werden.

Zur Vereinfachung der Darstellung künstlicher Entlastung ist im rechten Diagramm das Verhalten eines Einfreiheitsgradsystems skizziert. Es entspricht im Wesentlichen der Darstellung des Materialverhaltens am Gaußpunkt und kann mit den Erläuterungen aus Abschnitt 2.4.2 verglichen werden. Durch die Formulierung der sphärischen Bogenlängengleichung ergibt sich im eindimensionalen System ein Kreis um den aktuellen Gleichgewichtspunkt. Besitzt das Materialverhalten der Struktur schädigende Eigenschaften, liegen auf dem Entlastungspfad weitere erreichbare Gleichgewichtspunkte. So ergeben sich mehrere Schnittpunkte der Zusatzgleichung mit den Gleichgewichtspunkten, wie dies in Abbildung 6.3 rechts dargestellt ist. Diese Schnittpunkte erfüllen sowohl die Gleichgewichtsbedingung auch die Zusatzgleichung. Damit ist ein ermittelter, entlastender Gleichgewichtspunkt formal korrekt, wenn auch unerwünscht. Die Struktur entlastet elastisch und kehrt zur undeformierten und spannungsfreien Ausgangslage zurück. Die bei der Entlastung vorhandene Sekantensteifigkeit hängt vom aktuellen Schädigungszustand ab, welcher während der Entlastung konstant bleibt.

Eine durch die Kontrollroutine ausgelöste, künstliche Entlastung wird auch in den Energieausdrücken deutlich. Der zu Abbildungen 6.4 und 6.5 gehörende Versuch wie auch derjenige zu Abbildungen 6.5 und 6.7 wurde unter Bogenlängenkontrolle durchgeführt. Es handelt sich dabei um eine L-förmige Scheibe, wie sie in den numerischen Experimenten in Abbildung 7.1 rechts dargestellt ist. Beide Berechnungen für die genannten Abbildungen unterscheiden sich nur in der Schrittweite der Bogenlängenkontrolle. Für keinen der beiden Versuche wird eine Entlastung vorgegeben.

Abbildungen 6.4, 6.5, 6.6 und 6.7 zeigen für eine L-förmige Scheibe, die im Beispielkapitel betrachtet wird, fortschreitende Schädigung und künstliche Entlastung. Aufgetragen sind jeweils die Verläufe der dissipativen und elastischen Energien sowie die Entwicklung der Gesamtenergie im System und die zugehörigen Gleichgewichtspfade. Der in Abbildung 6.5 dargestellte Gleichgewichtspfad bildet den gesamten Deformations- und Schädigungsprozess der Struktur ab. Abbildung 6.4 zeigt die dazu gehörenden Verläufe der elastischen und dissipativen Energie sowie der inneren Gesamtenergie.

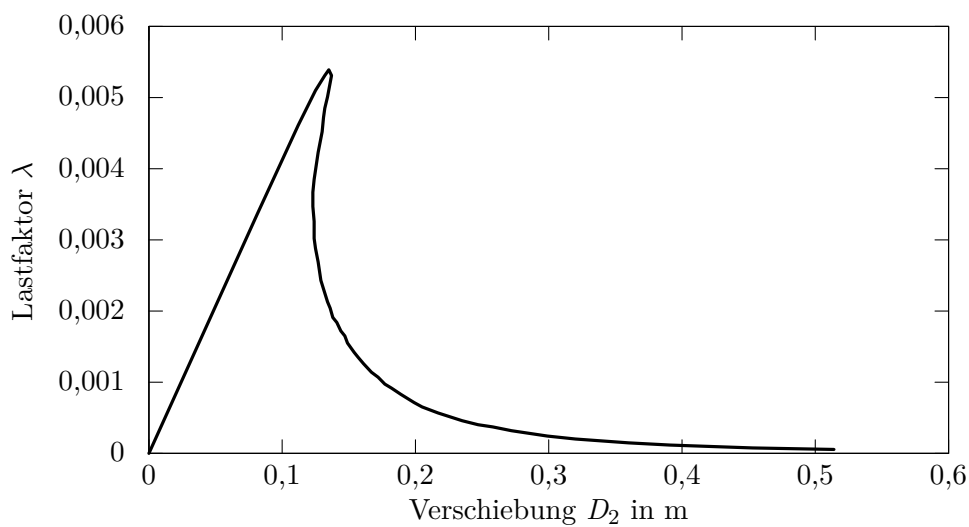
Aus Abbildung 6.7 geht hervor, wie sich die künstliche Entlastung im Kraft-Verschiebungsdiagramm niederschlägt. Neben dem aufsteigenden Belastungsast folgt die rote Linie aus Gleichgewichtspunkten einem mit Sekantensteifigkeit zum Ursprung zurücklaufenden Entlastungsast. Ein Vergleich der Abbildungen 6.4 und 6.6 zeigt, dass sich durch die künstliche Entlastung Unterschiede im Verlauf der dissipativen Energie und damit auch in der Gesamtenergie ergeben. Während fortschreitende Schädigung in Abbildungen 6.4 zu kontinuierlich anwachsender Dissipation führt, bleibt diese in Ab-



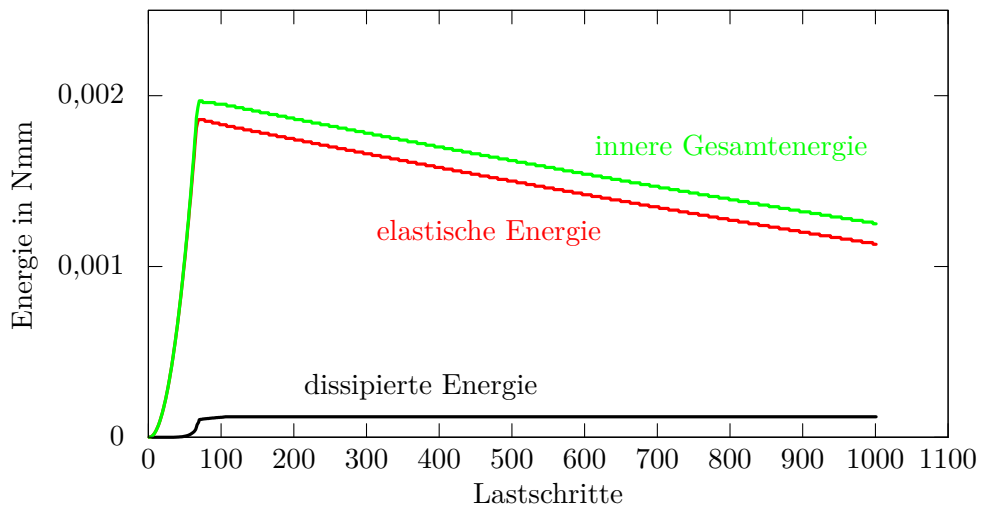
**Abbildung 6.4:** Energieverläufe der L-Scheibe bei fortschreitender Schädigung.

bildung 6.6 konstant, wenn die Schädigung stagniert und das System elastisch entlastet. Die elastische Energie in Abbildung 6.6 verläuft im Fall elastischer Entlastung linear mit negativer Steigung. Die Gesamtenergie im System nimmt bei fortschreitende Schädigung zu, während sie bei elastischer Entlastung abnimmt. Ein solches Ergebnis wird als Resultat eines Experiments erwartet, welches gezieltes Be- und Entlasten vorsieht.

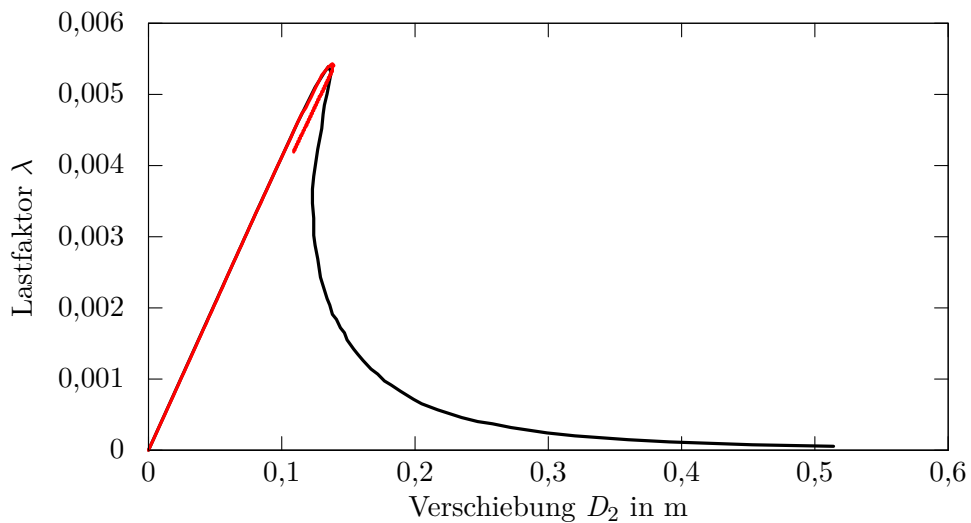
Für die Energiedarstellungen wurde zur Vereinfachung nur die elastische und dissipative Energie berücksichtigt. Die innere Gesamtenergie, als Summe aus elastischen und



**Abbildung 6.5:** Gleichgewichtspfad der L-Scheibe unter fortschreitender Schädigung.



**Abbildung 6.6:** Energieverlauf der L-Scheibe bei künstlicher Entlastung.



**Abbildung 6.7:** Gleichgewichtspfad der L-Scheibe in rot bei künstlicher Entlastung. Schwarz: fortschreitende Schädigung.

dissipativen Energieanteilen,

$$E_{\text{int}} = E_{\text{el}} + E_{\text{dis}}, \quad (6.3)$$

ist dabei mit der äußeren Energie im Gleichgewicht. Die innere und äußere Arbeit wird nach BELYTSCHKO U. A. (2006) für den Lastschritt  $m + 1$  folgendermaßen berechnet:

$$A_{\text{ext}, m+1} = E_{\text{ext}, m} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{D}^T (\mathbf{F}_{\text{ext}, m} + \mathbf{F}_{\text{ext}, m+1}) \quad (6.4)$$

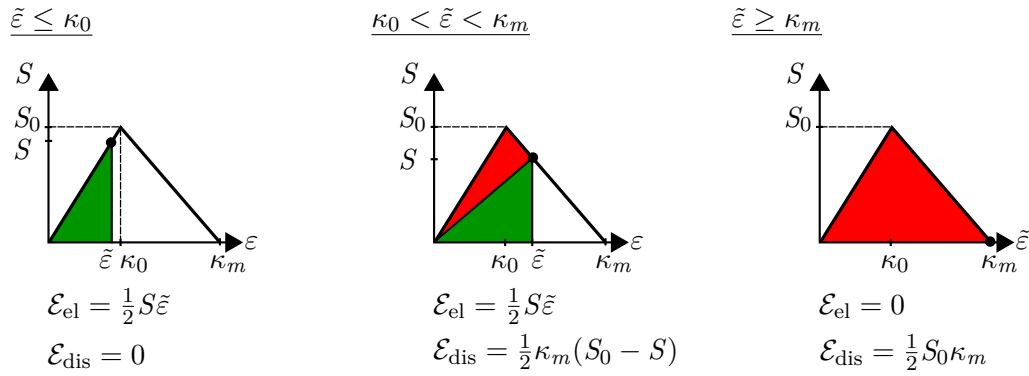
$$A_{\text{int}, m+1} = E_{\text{int}, m} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{D}^T (\mathbf{F}_{\text{int}, m} + \mathbf{F}_{\text{int}, m+1}). \quad (6.5)$$

Die äußere Arbeit

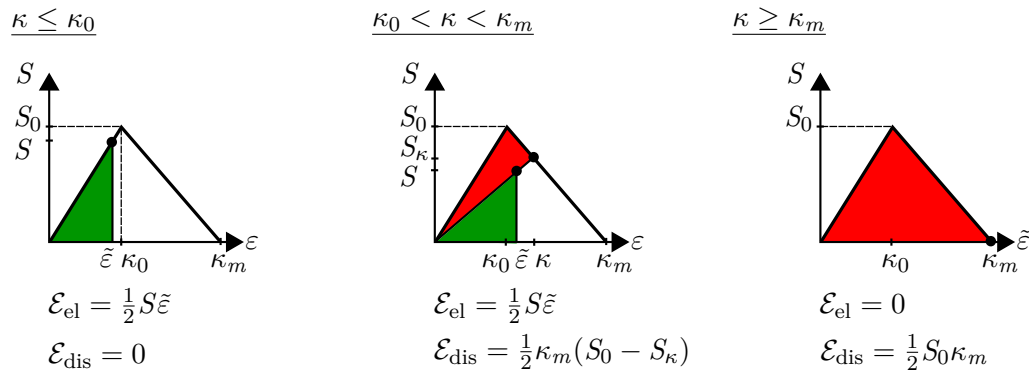
$$A_{\text{ext}} = A_{\text{int}} \quad (6.6)$$

entspricht der Summe der inneren Arbeiten. Die elastische und dissipative Energiedichte

Belastung:  $\tilde{\varepsilon} \geq \kappa$ :



Entlastung:  $\tilde{\varepsilon} < \kappa$ :



**Abbildung 6.8:** Berechnung der elastischen und dissipativen Energiedichte am Gaußpunkt.

$\mathcal{E}_{\text{el}}$  und  $\mathcal{E}_{\text{dis}}$  werden für die Berechnung der inneren Energie an jedem Gaußpunkt entspre-



chend Abbildung 6.8 ausgewertet und über das ganze Gebiet integriert:

$$E_{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_{\text{dis}} \, d\Omega. \quad (6.7)$$

In einer Schleife über alle Elemente  $n_{\text{ele}}$  und Gaußpunkte  $n_{\text{gp}}$  werden  $\mathcal{E}_{\text{el}}$  und  $\mathcal{E}_{\text{dis}}$  mittels numerischer Integration aufsummiert.

In Abbildung 6.8 taucht die Wiederbelastung als zu unterscheidender Fall nicht auf. Sie ist analog zur Entlastung zu betrachten, solange  $\tilde{\varepsilon} < \kappa$  gilt. Beim Überschreiten von  $\kappa$  wird der Fall Belastung wieder aktiv. Einmal im System vorhandene, dissipierte Energie bleibt in dieser Betrachtung bestehen. Konstante dissipative Energie deutet also auf ein Stagnieren der Schädigung hin.

Die für die Berechnung der Energiedichte verwendeten Spannungsgrößen, wie die aktuelle Spannung  $S$ , die Maximalspannung  $S_0$  und die aus eingepprägter Verzerrung berechnete Spannung  $S_{\kappa}$  werden über

$$S_0 = E\kappa_0, \quad S = (1 - d)E\tilde{\varepsilon}, \quad S_{\kappa} = (1 - d)E\kappa \quad (6.8)$$

ermittelt.

Aus Abbildung 6.4 geht außerdem hervor, dass die Gesamtenergie im System keine günstige Kontrollgröße darstellt. Da sie selbst bei kontinuierlich fortschreitender Schädigung keinen monoton ansteigenden Verlauf aufweist, kann sie nicht in jedem Lastschritt inkrementell vorgeschrieben werden.

Um künstliches Entlasten zu vermeiden, muss Folgendes gelten: Entweder tritt Dissipation auf und die dissipative Energie steigt an oder der Zustand ist rein elastisch und die elastische Energie muss zunehmen. Elastische Zustände bei abnehmender elastischer Energie weisen auf künstliches Entlasten hin. Elastische Entlastungen müssen vorgegeben werden, anderenfalls werden sie als künstlich bezeichnet. Über diese Definition soll künstliche Entlastung entdeckt und das Entlasten selbst sowohl mit Ausgangs- als auch mit Sekantensteifigkeit vermieden werden. In den folgenden Abschnitten wird zuerst der Stand der Technik zur Pfadverfolgung aufgezeigt, anschließend werden Verfahren zur Vermeidung künstlicher Entlastung vorgestellt.

## 6.3 Stand der Technik

In diesem Abschnitt werden einige Verfahren aus der Literatur beschrieben, die speziell für entfestigendes Strukturverhalten entwickelt wurden. Ein Teil dieser Verfahren nimmt

direkt auf den Schädigungsprozess Einfluss. Des weiteren wird der Umgang einiger kommerzieller Programme mit instabilen Problemen wie Entfestigung angerissen.

### 6.3.1 Literaturübersicht

Die in Kapitel 3 genannten Pfadverfolgungsmethoden von WEMPNER (1971), RIKS (1972), RIKS (1979), RAMM (1981), CRISFIELD (1981) und SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) liefern für geometrisch nichtlineare Probleme sehr gute Lösungen. Der vorangehende Abschnitt zeigt jedoch, dass diese Methoden unter bestimmten Bedingungen, wie sprödem Schädigungsverhalten, nicht zuverlässig sind. Dass auch das von HELLWEG UND CRISFIELD (1998) vorgestellte Verfahren künstliche Entlastungen nicht vermeiden kann, wird in LORENTZ UND BADEL (2004) demonstriert. Daher sollen hier einige Methoden genannt werden, die speziell für entfestigendes Materialverhalten entwickelt wurden. Diese Beschreibung erhebt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Charakteristisch für die folgenden Verfahren ist der Bezug der Kontrollgleichung auf den Entfestigungsprozess. So sollen unerwünschte Effekte wie beispielsweise künstliches Entlasten oder ein Abbruch der Berechnung vermieden werden. Einige dieser Ansätze verwenden Adaptivitätskriterien zur Auswahl einer geeigneten Kontrollgröße. Generell ist es im Hinblick auf die Pfadverfolgung sinnvoll, zwischen duktilem und sprödem Materialverhalten zu unterscheiden. Gleichgewichtspfade unter duktiler Schädigung können mit einer Reihe von Methoden berechnet werden. Hingegen ist sprödes Materialversagen nur von wenigen Methoden darstellbar.

CARPINTERI UND COLOMBO (1989) beschreiben die Problematik eines instabilen Prozesses bei der Rissentwicklung unter extrem sprödem Materialverhalten. Wenn langsames und kontrolliertes Risswachstum durch eine Kontrollmethode erzielt werden kann, werden Rückläufigkeit von Kraft und Verschiebung in der Gleichgewichtskurve sichtbar. Um dies zu erreichen, wählen CARPINTERI UND COLOMBO (1989) für die numerische Analyse eines gekerbten Balkens im Biegeversuch die Länge des entstehenden Risses als Kontrollparameter.

Ein implizit-explizites Integrationsschema wird von OLIVER U. A. (2008) vorgestellt. Die Spannungen werden bei diesem Vorgehen im Materialmodell implizit berechnet und interne Variablen explizit extrapoliert. Es wird beschrieben, dass das Verfahren robuster sei, als die üblichen impliziten Verfahren. Diese Robustheit geht einher mit einer gegenüber impliziten Verfahren erhöhten Anzahl an Last- beziehungsweise Zeitschritten. Nach Angabe der Autoren benötigt die Methode dennoch geringere Inkrementzahlen als übliche explizite Verfahren.

In der von DE BORST (1986) beziehungsweise DE BORST (1987) vorgestellten indirekten Verschiebungskontrolle wird beispielsweise an einem gekerbten Balken die „crack mouth sliding“-Verschiebung kontrolliert. Damit wird diejenige Verschiebung bezeichnet, die sich durch Gleiten der Rissflächen zusätzlich zur Rissöffnung ergibt. Diese Rissöffnungsverschiebung, bekannt als „crack mouth opening displacement“, wird neben den oben genannten Veröffentlichungen auch in ROTS (1988) als Kontrollparameter beschrieben und verwendet. Diese Verschiebungskontrollen sind zuverlässig und effektiv, setzen allerdings voraus, dass das Strukturverhalten vorab bekannt ist und die zu kontrollierende Verschiebung vor Beginn der Simulation festgelegt werden kann.

CHEN UND SCHREYER (1990) verwenden für die Kontrolle entfestigender Prozesse die von ihnen beschriebene „total strain control“. Generell sei es sinnvoll, die Kontrollgleichung auf das maximal verzerrte Element anzuwenden. In jedem Lastschritt wird bei der vorgeschlagenen Methode das Inkrement eines Verzerrungsmaßes vorgeschrieben. Wo diese Verzerrung ausgewertet wird, wird in jedem Lastschritt aufs Neue festgelegt. Für entfestigende Stoffgesetze schlagen sie vor, die Verzerrungen desjenigen Elements zu kontrollieren, welches sich am nächsten am Grenzzustand der Schädigung befindet. Dabei wird davon ausgegangen, dass das ausgewählte Element in den Folgeschritten weiterhin kritisch bleibt und am stärksten schädigt.

Eine verallgemeinerte Methode, die die „total strain control“ beinhaltet, wird in CHEN UND SCHREYER (1991) beschrieben. Sie ist mit einem stetig wachsenden Kontrollinkrement verbunden, das sowohl vom Schädigungsmechanismus als auch vom Element mit maximaler Schädigungsvariable abhängt. Der Kontrollparameter der Zusatzgleichung berechnet sich über  $\eta = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{krit, dev}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{krit, dev}}$  aus den deviatorischen Anteilen der Verzerrung am kritischen Element. Hieraus lässt sich direkt der zugehörige Steigerungsfaktor  $\lambda$  auswerten. Da die Erfüllung der Inkrementierungsvorschrift  $\eta := \eta + \Delta\eta$  ein stetes Anwachsen der kritischen Verzerrungen voraussetzt, darf ein solches kritisches Element nicht entlasten. Vorbehalte bezüglich des steten Anwachsens der Verzerrungen im so ausgewählten Element werden neben der folgenden Erörterung auch in GEERS (1999a) geäußert.

An einem Beispiel, welches in Kapitel 7 nochmals genauer beschrieben wird, soll das stete Anwachsen von Verzerrungen diskutiert werden. Abbildung 6.9 zeigt die Systemskizze dieses Beispiels. Die rot gekennzeichnete Elementreihe weist den geringsten Schwellwert für Schädigung  $\kappa_0$  auf. Zunächst entsteht auf beiden Seiten des Lochs im vorgegebenen Elementband ein Riss. Nach wenigen Schritten kommt der linke Riss zum Stehen. Auf der rechten Seite des Lochs bildet sich unter zunehmender Belastung zuerst ein vollständiger Riss aus, bevor Schädigung im linken Verbindungsstück reaktiviert wird. Daher entstehen auf der rechten Seite die maximalen äquivalenten Verzerrungen.

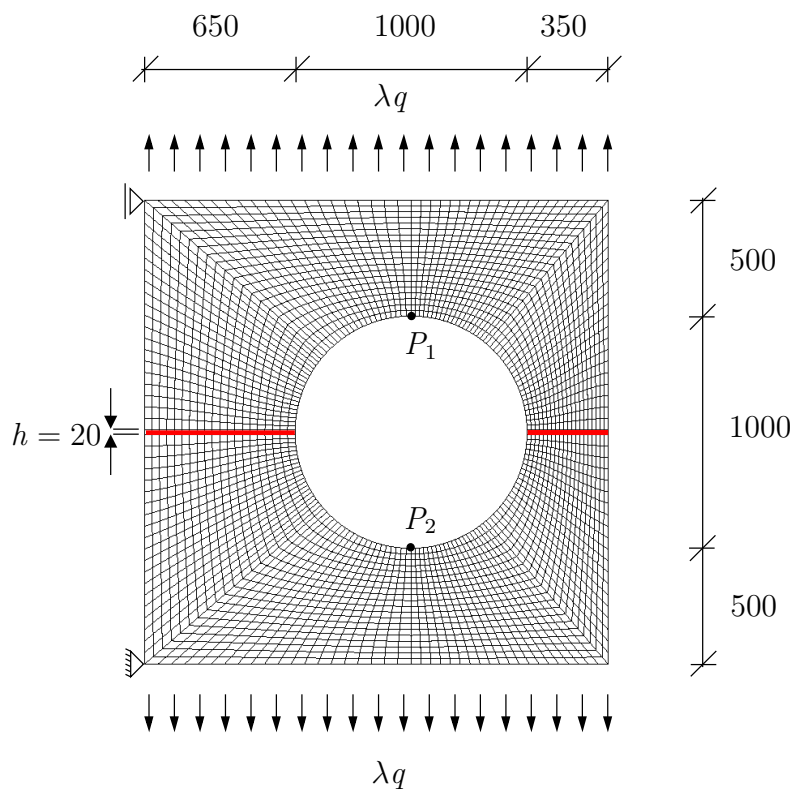


Abbildung 6.9: Scheibe mit unsymmetrischem Loch (Abmessungen in mm).

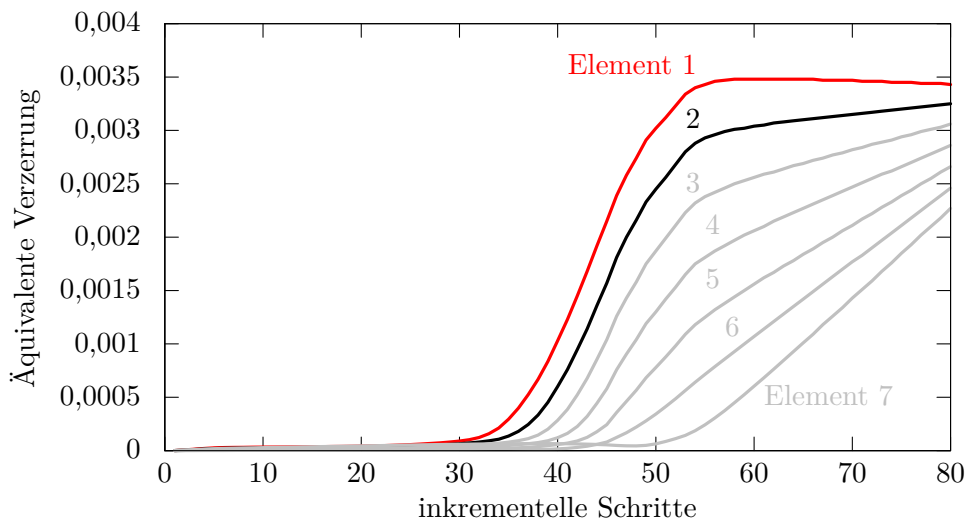


Abbildung 6.10: Äquivalente Verzerrungen der ersten sieben Elemente rechts des Lochs. Nummerierung von links nach rechts.

Die Verzerrungen der relevanten Gaußpunkte einiger signifikanter Elemente rechts des Lochs sind in Abbildung 6.10 für 80 Lastschritte dargestellt. Sie beschreiben die Risentwicklung in der Scheibe rechts des Lochs vor der vollständigen Ausbildung dieses

Risses und sind über die zugehörigen Lastschritte aufgetragen. Hierbei ist deutlich zu erkennen, dass die maximale äquivalente Verzerrung (rote Kurve) circa zwischen den Lastschritten 54 und 80 abnimmt. Die Wahl jeder darunter liegenden (beispielsweise der schwarz gekennzeichneten) Elementverzerrung wäre für die Vorschrift eines Verzerrungsinkrementes ab Schritt 51 oder 52 sinnvoller und zielführender. Die Kontrolle der Maximalverzerrung führt zu Konvergenzverlust oder stagnierender Schädigung. Diese Beobachtung ist wesentlich für die Entwicklung einer adaptiven Verzerrungskontrolle, wie sie in einem folgenden Abschnitt 6.4 erläutert wird.

Das von GEERS (1999a) diskutierte Verfahren der Gewichtung der in die Bogenlängengleichung eingehenden Inkremente wurde bereits in Abschnitt 4.2 betrachtet. Da sich die Veröffentlichung aber mit Entfestigung beschäftigt, soll dieses Verfahren hier nochmals beleuchtet werden. Der Autor legt sich bezüglich der Kontrollgröße nicht fest und schlägt Verschiebungsinkremente oder auch Funktionen der Verschiebungen vor. Dies kann unter anderem zu einer Methode führen, wie sie in CHEN UND SCHREYER (1991) beschrieben ist. Dort kommt auch ein Kontrollvektor  $\mathbf{c}$  zum Einsatz, der, multipliziert mit den zu ermittelnden Verschiebungen und dem Steigerungsfaktor, den inkrementierten Kontrollparameter über  $\eta = \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{c}$  ergibt. Durch Umstellen der Gleichung kann durch  $\lambda = \frac{\eta}{\mathbf{D}^T \mathbf{c}}$  direkt der Steigerungsfaktor ausgewertet werden. Die Zusatzgleichung im Inkrementenschritt  $j$  folgt zu  $\eta_j = \eta_{j-1} + \Delta \eta_j$ .

GEERS (1999a) beschreibt die Verallgemeinerung der Idee der Verzerrungskontrolle nach CHEN UND SCHREYER (1990) beziehungsweise CHEN UND SCHREYER (1991), bei der nach Maßgabe der aktuellen Prädiktorergebnisse der Vektor von Kontrollgrößen gewichtet oder der Kontrollparameter aus diesem Vektor ausgewählt wird.

Eine Methode, die explizit zwischen elastisch entlastenden und dissipativen Gleichgewichtspunkten unterscheidet, wird von LORENTZ UND BADEL (2004) vorgeschlagen. Die Umsetzung der Kontrollfunktion ist hierbei an Materialparameter gebunden. Das Verfolgen des dissipativen Gleichgewichtspfades wird in dieser Veröffentlichung über die Auswertung des elastischen Prädiktors der Fließfunktion vorgenommen. Weil die Dissipation die Integration des Materialgesetzes erfordert, schlagen die Autoren ein einfacheres Vorgehen vor. Sie bedienen sich der Tatsache, dass ein Gleichgewichtspunkt dann auf dem dissipativen Pfadabschnitt liegt, wenn die schädigungsbezogenen Geschichtsvariablen irgendwo in der Struktur ansteigen. Dies ist der Fall, wenn der der Grenzwert der Geschichtsvariable im elastischen Prädiktor überschritten wird. Die skalare Zusatzgleichung wird an demjenigen Gaußpunkt ausgewertet, an dem das Maximum aller elastischen Prädiktoren der Fließfunktion vorliegt. Der elastische Prädiktor ist beschrieben als Wert der Fließfunktion am Gaußpunkt bezogen auf die elastische Materialantwort im Inkrement. Nachteilig ist die Beschränkung dieser Methode auf Materialmodelle mit Fließfunktion. Ein weiterer Vorschlag von LORENTZ UND BADEL (2004) bezieht sich auf

die Kontrolle des maximalen Verzerrungsinkrements aller Gaußpunkte. Es soll in diesem Zusammenhang auf die Einschränkung hingewiesen werden, dass künstliche Entlastung unter dieser Kontrollfunktion nicht ausgeschlossen werden kann. In dieser Veröffentlichung wird kein reines Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Die Auswertung der Zusatzgleichung erfolgt in jeder Iteration an der jeweils ermittelten Stelle der Struktur, sie ist also während eines Inkrements nicht konstant. Damit werden Kontrollendpunkte in einem Inkrement vermieden, was bedeutet, dass die Kontrollgröße während der Iterationsschleife nicht rückläufig werden kann.

Eine im Hinblick auf die Maximierung der Gesamtenergie konsequent umgesetzte Methode ist die „energy release control“ nach GUTIÉRREZ (2004), in der die Rate der Dissipationsenergie in einer Bogenlängengleichung formuliert wurde. VERHOOSSEL U. A. (2009) erweitern diesen Ansatz auf geometrisch nichtlineare Schädigung, welche auch in VERHOOSSEL (2009) ausführlich beschrieben und mit Beispielen belegt ist. Die Schädigungsevolution geht über die Energiedissipationsrate in die Zusatzgleichung ein. Diese ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik stets positiv und eignet sich daher als Pfadparameter für Schädigungsprozesse. Die Dissipationsenergie  $G$  ist hier definiert als Differenz von erbrachter Leistung  $P$  und der Rate der elastischen Energie  $\dot{U}$ :

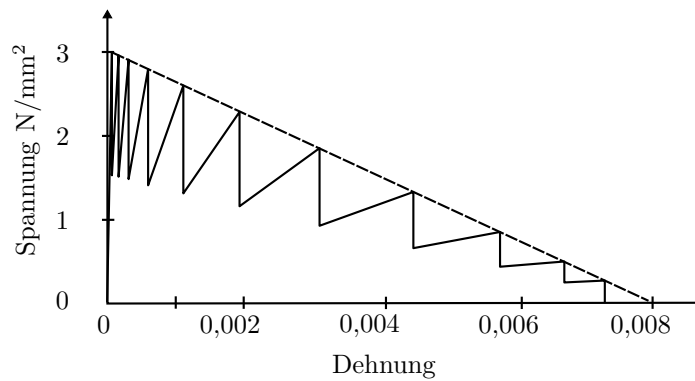
$$G = P - \dot{U}. \quad (6.9)$$

Formuliert in Verschiebungsfreiheitsgraden und Steigerungsfaktor (Kraftlastfall) wird eine dissipationsbasierte Bogenlängengleichung generiert. Über eine „forward Euler“ Zeitdiskretisierung wird sie über

$$f = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{D} (\lambda \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}^*) - \hat{s} \quad (6.10)$$

für Schädigung dargestellt. Für Erläuterungen zum zusätzlichen Kraftvektor  $\mathbf{F}^*$ , der für lineare Elastizität den internen Kräften  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  entspricht, sei hier auf VERHOOSSEL (2009) verwiesen. Treten während des Belastungsvorgangs elastische Pfadabschnitte auf, muss eine andere Zusatzgleichung die Berechnung kontrollieren. VERHOOSSEL (2009) schaltet zwischen Dissipations- und Kraftkontrolle um, wenn das kontrollierte Inkrement einen Grenzwert unterschreitet. Große Schrittweiten sind in den Übergangsbereichen der Kontrollmethoden nicht möglich. Dies wirkt sich auf die Schrittweiten der gesamten Rechnung aus, da die Übergänge vorab nicht bekannt sind.

Das Sägezahnmodell nach ROTS UND INVERNIZZI (2004) aus Abbildung 6.11 wandelt ein nichtlineares Schädigungsmodell in eine Aneinanderreihung linearer Analysen mit abgeminderter Restzugfestigkeit  $f_t$  und reduziertem Elastizitätsmodul  $E$  um. Die Identifikation eines kritischen Elements wird erforderlich und erfolgt über einen Vergleich



**Abbildung 6.11:** Sequentiell lineares Sägezahnmodell nach ROTS UND INVERNIZZI (2004).

der kleinsten Differenz von Zugfestigkeit und Hauptzugspannung. Anschließend wird die kritische globale Kraft als Produkt von Einheitslast und dem Quotienten  $\frac{f_t}{\sigma_{\text{krit}}}$  der Zugfestigkeit  $f_t$  und der Zugspannung im kritischen Element  $\sigma_{\text{krit}}$  berechnet. Für die Abminderung von Elastizitätsmodul und aktueller Zugfestigkeit wird zu Beginn der Berechnung festgelegt, in wie vielen Schritten  $n$  die Zugfestigkeit eines kritischen Elements um den Faktor  $a$  reduziert werden soll. Für Abbildung 6.11 wurde  $n = 10$  gewählt. Der Elastizitätsmodul für jede Abminderung  $i$  (von 1 bis  $n$ ) kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$E_i = \frac{E_{i-1}}{a}. \quad (6.11)$$

$i$  bezeichnet dabei den aktuellen Schritt im Sägezahndiagramm,  $i - 1$  den vorangehenden. Ein  $n$ -mal als kritisch identifiziertes Element wird entfernt. Die Approximation des Gleichgewichtspfades über Sekanten mit abgeminderter Steifigkeit ersetzt den Entfestigungsbereich durch lineare Analysen und umgeht damit die Problematik negativer Tangentensteifigkeiten. Die Einhüllende als Verbindung der Kraftmaxima der einzelnen Sägezähne (kritische Kraft) gibt dann den genäherten Gleichgewichtspfad wieder. Damit unterscheidet sich die Ermittlung der Gleichgewichtspunkte wesentlich von den in Abschnitt 3.5 beschriebenen Prädiktor-Korrektor-Verfahren. Diese Methode erfordert sehr viele lineare Rechenschritte. Eine Diskretisierungsabhängigkeit wird in ROTS UND INVERNIZZI (2004) durch Regularisierungsmethoden beseitigt.

### 6.3.2 Kommerzielle Finite-Elemente-Programme

Wie dies bereits im Verlauf der Arbeit angesprochen wurde, ist es in manchen Fällen nicht möglich, den nachkritischen Bereich der statischen Gleichgewichtskurve bei instabilen Problemen wie entfestigendem Materialverhalten mit kommerziellen Programmen

abzubilden. Häufig ist die Berechnung dieser Gleichgewichtspfade nur dynamisch möglich. Abaqus zum Beispiel lässt bei der Wahl bestimmter entfestigender Materialmodelle die Möglichkeit zu statischen Lösungsverfahren gar nicht zu.

Es stellt sich die Frage, ob statische Gleichgewichtskurven nicht erforderlich und dynamische Berechnungen völlig ausreichend sind. Es treten bei stark dynamischen Beispielen aber gegebenenfalls so starke Oszillationen auf, dass sich die Interpretation der Ergebnisse schwierig gestaltet. Natürlich können die meisten Oszillationen durch Dämpfungsterme reduziert oder durch kritische Dämpfung eliminiert werden. Dennoch existieren Problemstellungen wie beispielsweise das Ablösen von Geckfüßen von einer Wand, die auch dynamisch nicht zu lösen sind, obwohl explizite Dynamik extrem robuste Algorithmen hervorbringt.

Eine weitere Möglichkeit, eine statische oder quasistatische Berechnung auch für instabile Zustände zugänglich zu machen, ist das im ABAQUS (2011) beschriebene Einbringen von zusätzlichen Dämpfungstermen. Die globalen Gleichgewichtsbedingungen werden dadurch mit masseproportionalen Dämpfungskräften  $\mathbf{F}_{\text{damp}} = c\mathbf{M}\mathbf{v}$  auf

$$\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{damp}} = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

erweitert. Zur Berechnung dieser viskosen Dämpfungskraft wird die künstliche Massenmatrix  $\mathbf{M}$  über eine Einheitsdichte berechnet, ein Dämpfungsfaktor  $c$  eingeführt und der Vektor der Knotengeschwindigkeiten  $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{D}/\Delta\lambda$  mit Hilfe des Pseudozeitinkrements  $\Delta\lambda$  ausgewertet.

Generell sei der Anteil der viskosen Kräfte durch die geringe dissipierte viskose Energie klein, obwohl das Berechnungsmodell sich stabil verhalte. Der Einfluss dieser Dämpfung muss für besonders instabile oder singuläre Fälle, zum Beispiel Starrkörperverschiebungen, erhöht werden, damit sich der gewünschte stabilisierende Effekt einstellt. Ein zu hoch gewählter Dämpfungsfaktor beeinflusst aber auch das Ergebnis. Daher wird im ABAQUS (2011) empfohlen, die durch viskose Dämpfung dissipierte Energie mit der Gesamtverzerrungsenergie zu vergleichen.

### 6.4 Entwicklung adaptiver Verfahren für Entfestigung

Voranehend wurde bereits beschrieben, dass sich bei der Verfolgung von Gleichgewichtspfaden materiell nichtlinearer Strukturen besonders durch sprödes Versagen algorithmische Probleme im nachkritischen Bereich ergeben können. Meist werden monoton wachsende Parameter für die Kontrolle des Deformationsprozesses einer Struktur verwendet. In vielen Fällen ist es, wie bereits mehrfach erwähnt, nicht möglich, einen solchen



Parameter im Voraus zu identifizieren. Häufig versagen auch Methoden wie das Bogenlängenverfahren, das alle Freiheitsgradinkremente der Struktur in die Kontrollgleichung einbindet, bei der Kontrolle des Schädigungsprozesses. Das Strukturverhalten wird beim Rissfortschritt lokalisierter, einzelner Risse von wenigen Freiheitsgraden dominiert.

Einige Pfadverfolgungsmethoden kontrollieren deshalb Inkremente wechselnder Kontrollparameter, lassen dabei aber (beispielsweise GEERS (1999a)) die Evolution dieses Parameters außen vor und betrachten nur das aktuelle Verhalten (zum Beispiel des aktuellen Prädiktors). In diesem Fall ist es schwierig, die Richtung des Deformationsprozesses zu kontrollieren und künstliches Entlasten auszuschließen.

Im Folgenden werden Verfahren vorgestellt, deren Zusatzgleichungen einen mit dem Schädigungsprozess verbundenen Parameter beinhalten. Damit sollen Gleichgewichtspunkte ausgewählt werden, die die Gesamtenergie maximieren. Dieser Kontrollparameter soll in der Lage sein, sowohl elastisch belastende als auch dissipative Pfadabschnitte darzustellen. Die Verwendung mehrerer Kontrollgleichungen in einer Simulation soll damit vermieden werden. Die folgenden Methodenbeschreibungen wurden bereits in POHL U. A. (2013) veröffentlicht.

### 6.4.1 Adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle

In dieser Methode soll die Menge möglicher Schnittpunkte einer konventionellen Bogenlängengleichung mit den erreichbaren Gleichgewichtspunkten eingeschränkt werden. In Abbildung 6.3 würden damit alle Punkte entfallen, die künstlich entlasten und nicht zu weiterer Schädigung führen. Dies soll erreicht werden, indem die Zusatzgleichung eines zylindrischen Bogenlängenverfahrens mit dem Inkrement einer äquivalenten Verzerrung multipliziert wird. Die aktuelle äquivalente Verzerrung dieses Inkrements muss hierfür die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\tilde{\varepsilon} > \kappa$ : Schädigung am betrachteten Gaußpunkt schreitet fort.
- $\kappa_m - \tilde{\varepsilon} \geq 0$ : vollständig geschädigte Gaußpunkte sollen nicht in die Kontrollgleichung eingehen.
- $\kappa_m - \tilde{\varepsilon} \rightarrow \min$ : Gaußpunkt, der sich am nächsten an der Vollschädigung befindet.

Die einzelnen Kriterien sind nochmals in Abbildung 6.12 zusammengefasst. Dieser mit Schädigung verbundene Parameter soll die bislang nicht richtungsgebundene Kontrollgleichung zu fortschreitender Schädigung zwingen. Die Zusatzgleichung

$$f = (\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}}) \Delta \tilde{\varepsilon} - \Delta \hat{s} = 0 \quad (6.13)$$

ist nur dann erfüllbar, wenn  $\Delta \tilde{\varepsilon}$  und damit  $\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}} \Delta \tilde{\varepsilon}$  positiv ist. Diese Zwangsbe-

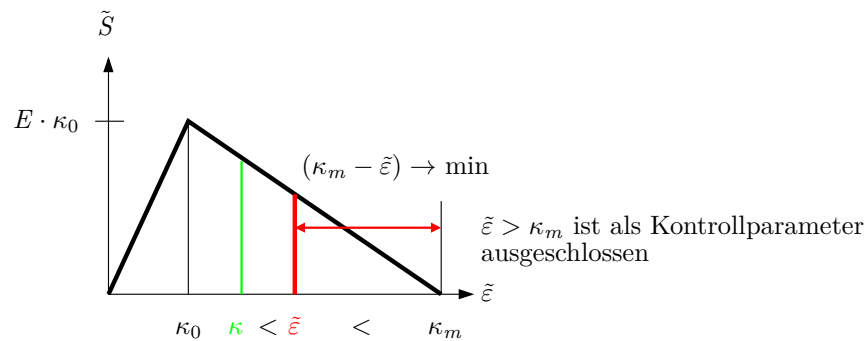


Abbildung 6.12: Identifikation der Kontrollregion.

dingung, die der Bogenlängengleichung auferlegt wurde, führt zur Vermeidung künstlichen Entlastens und gibt der Methode ihren Namen.

Eine Kombination dieses oben genannten Verfahrens mit der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Methode *Maximum*, schränkt die Zusatzgleichung weiter ein. Daraus ergibt sich die Zusatzgleichung zu  $f = (\sqrt{\Delta D_c \Delta D_c}) \Delta \tilde{\epsilon} - \Delta \hat{s} = 0$ . Es wird nur derjenige Verschiebungsfreiheitsgrad unter der Wurzel verwendet, der im Sekantenprädiktor den maximalen Eintrag aufweist.

In den numerischen Experimenten reagierten diese Ansätze sehr sensibel auf Änderungen in der Schrittweite und benötigten stets sehr kleine und damit viele Schritte. Die Methode wird daher in den Beispielen des folgenden Kapitels nicht weiter berücksichtigt. Es soll lediglich die Idee beschrieben werden, wie Bogenlängenverfahren zur Vermeidung künstlichen Entlastens eingeschränkt werden können. Beim Testen dieser Methode ergab sich die Überlegung, den Bogenlängenteil  $\sqrt{\Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{D}}$  beziehungsweise  $\sqrt{\Delta D_c \Delta D_c}$  wegzulassen. Dieser Ansatz führt zur im Folgenden beschriebenen adaptiven Verzerrungskontrolle.

## 6.4.2 Adaptive Verzerrungskontrolle

Die Kontrolle der Verzerrungen, wie sie bereits von CHEN UND SCHREYER (1990) und CHEN UND SCHREYER (1991) verwendet wurde, ist bereits bekannt. Auch GEERS (1999a) greift dieses Vorgehen auf und gewichtet die Verzerrungskomponenten der Struktur. In der hier vorgestellten adaptiven Methode werden auch Verzerrungsinckremente vorgeschrieben. Es handelt sich dabei um Inkremente der äquivalenten Verzerrungen, welche in das verwendete Stoffgesetz eingehen und dort den verzerrungsbasierten Schädigungsfortschritt bedingen. Das zugehörige Materialmodell wurde in Abschnitt 2.4.2 beschrieben. Die Methode wird entsprechend ihrer englischen Bezeichnung (Adaptive Strain Control) mit ADC abgekürzt. Die für die Kontrollgleichung der adaptiven Verzerrungskontrolle verwendeten äquivalenten Verzerrungen dienen sowohl zur Auswahl der

Kontrollregion als auch als Kontrollparameter. Um diese Kontrollregion zu identifizieren, muss die am jeweiligen Gaußpunkt ausgewertete äquivalente Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  die drei im vorangehenden Abschnitt 6.4.1 genannten Bedingungen erfüllen. Die so ermittelte äquivalente Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  am Gaußpunkt  $i$ , der sich im Element  $e$  befindet, geht also in ausgewerteten Inkrement in die Zusatzgleichung  $f$  ein.

Die Umsetzung des Berechnungsablaufs unter Verzerrungskontrolle ist in Kurzform in Abbildung 6.13 wiedergegeben und soll hier erläutert werden:

Nach dem Anlegen und Initialisieren aller erforderlichen Größen folgt die Auswertung des Prädiktorschritts. Anschließend werden der berechnete Inkrementverschiebungsvektor  $\Delta \mathbf{D}$  und der zugehörige Steigerungsfaktor  $\Delta \lambda$  skaliert. Um im ersten Inkrement die Schrittweite nicht zu sehr zu über- oder unterschätzen, wird die Skalierung in Anlehnung an die Zusatzgleichung vorgenommen. Hierfür wird in einer Schleife über alle Gaußpunkte der Struktur das maximale Inkrement der äquivalenten Verzerrungen ermittelt. Die Multiplikation mit dem Quotienten aus vorgegebener Schrittweite und maximaler äquivalenter Verzerrung  $\frac{\Delta \hat{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}_{\max}}$  skaliert den Verschiebungsincrementvektor und auch den Steigerungsfaktor (der bisher 1 war). Infolge des Verschiebungs- beziehungsweise Belastungszustands ist die Zusatzgleichung am kontrollierten Gaußpunkt damit erfüllt.

In der folgenden Inkrementenschleife wird zunächst die Kontrollregion (hier ist das ein Gaußpunkt) identifiziert und gleichzeitig die kontrollierende äquivalente Verzerrung berechnet. Die Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  geht dann in die Zusatzgleichung ein, wenn sie die in Abschnitt 6.4.1 aufgelisteten Kriterien erfüllt. Die Kriterien bedingen zunehmende Schädigung, ermitteln die geringste Differenz zu Vollschädigung und schließen vollständig geschädigte Gaußpunkte aus.

Die Iterationsschleife, die sich an dieser Stelle anschließt, wertet zunächst die Terme  $\Delta \mathbf{D}_R$  und  $\Delta \mathbf{D}_F$  aus Gleichung (3.10) aus.

Zur Berechnung von  $\delta \lambda$  nach Gleichung (3.11) ist zusätzlich zur Zusatzgleichung auch die Auswertung ihrer Ableitungen erforderlich. Aus

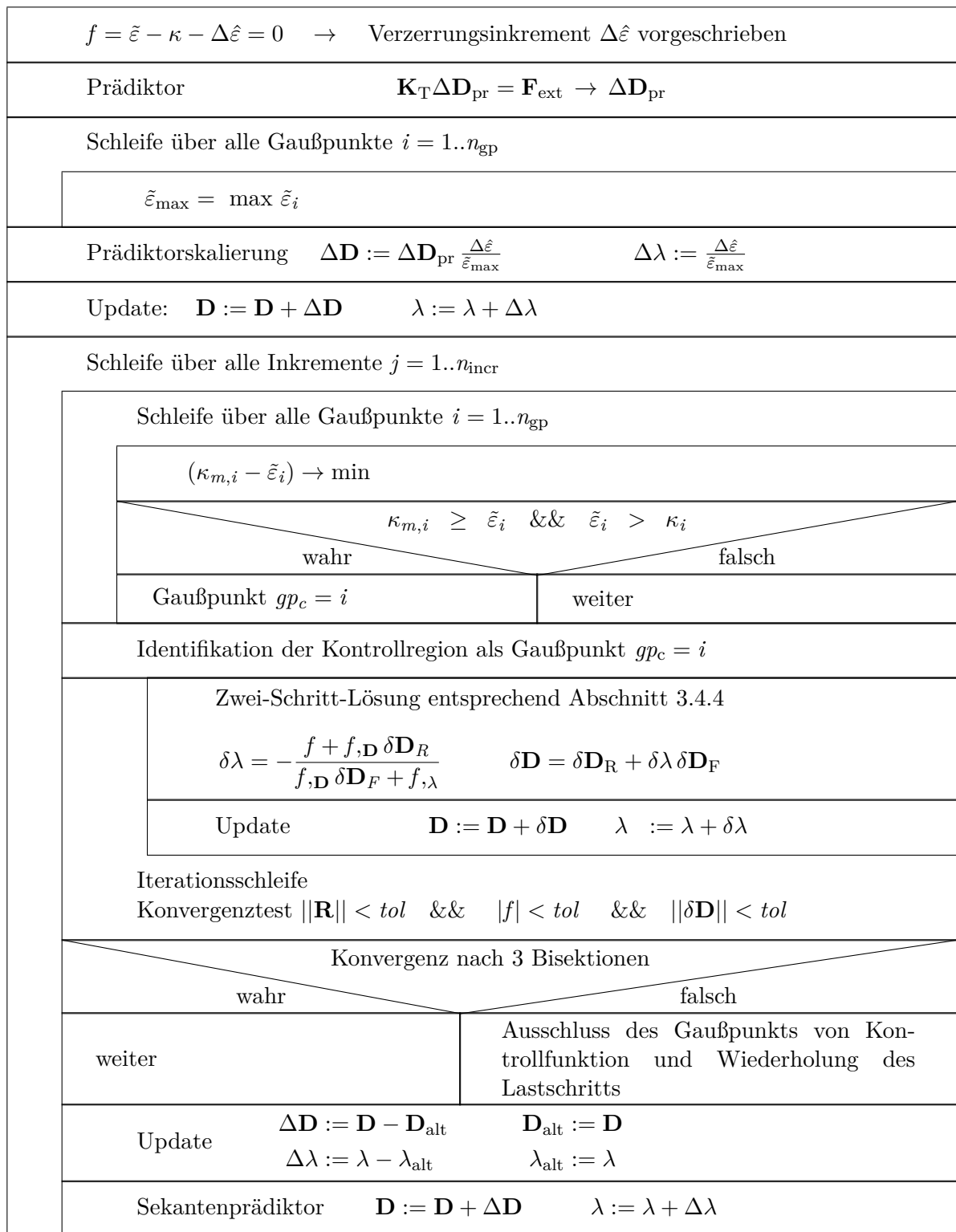
$$f = \tilde{\varepsilon} - \kappa - \Delta \hat{\varepsilon} = 0 \quad (6.14)$$

ergibt sich für die Ableitung der Zusatzgleichung nach den globalen Verschiebungen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{D}}. \quad (6.15)$$

Da die äquivalente Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  an einem Gaußpunkt in einem Element ausgewertet wird, hängt  $\tilde{\varepsilon}$  nur von den zugehörigen Elementfreiheitsgraden ab. Daher kann vereinfacht die Ableitung nach den lokalen Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{d}$  erfolgen. Für äquivalente Verzerrungen, die wie in Abschnitt 2.4.2 als Energienorm der Green-Lagrange-

## 6 Ermittlung von Gleichgewichtspfaden bei entfestigendem Strukturverhalten



**Abbildung 6.13:** Verkürztes Ablaufdiagramm der Verzerrungskontrolle.

Verzerrungen formuliert wurden, folgt diese Ableitung zu

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \sqrt{\frac{E}{\mathbf{E}_{\text{GL}} \mathbf{S} E}} \frac{1}{E} (\mathbf{B} \mathbf{S}), \quad (6.16)$$

welche dann durch Assemblierung wieder den globalen Freiheitsgraden  $\mathbf{D}$  zugewiesen wird.  $\mathbf{B}$  steht dabei für den nichtlinearen B-Operator, der sich aus  $\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{GL}}}{\partial \mathbf{d}}$  ergibt.

Terme aus der Ableitung  $\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \lambda}$  ergeben sich dann, wenn in

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \lambda} \frac{1}{E} (\mathbf{B} \mathbf{S}). \quad (6.17)$$

Abhängigkeiten der lokalen Verschiebungsfreiheitsgrade vom Steigerungsfaktor  $\lambda$  auftauchen. Dies ist in Abschnitt 3.4.4 beschrieben.

Anschließend werden die iterativen Änderungen  $\delta \mathbf{D}$  und  $\delta \lambda$  auf die Gesamtgrößen adaptiert. Die Iterationsschleife wird solange ausgeführt, bis die Norm von Residuum und iterativen Verschiebungsänderungen und der Betrag der Zusatzgleichung kleiner als die vorgegebene Toleranz sind. Diese liegt in allen Beispielen entweder bei  $10^{-6}$  oder  $10^{-7}$ . Konvergiert die Berechnung nach drei erfolglosen Bisektionen nicht, wird die kontrollierende Verzerrung am entsprechenden Gaußpunkt verworfen und die neue Kontrollregion für die Wiederholung des Rechenschritts identifiziert. Die oben genannte Bisektion wiederholt einen nicht konvergierten, inkrementellen Schritt und halbiert dabei die Schrittweite. Dieses Vorgehen wird deshalb angewandt, weil der Verlauf der äquivalenten Verzerrungen, wie in Abbildung 6.10 gezeigt wurde, über die Lastschritte rückläufig werden kann. Dargestellt sind hier die äquivalenten Verzerrungen einiger repräsentativer Gaußpunkte. Die roten äquivalenten Verzerrungen befinden sich am nächsten an der Vollschädigung, nehmen aber etwa von Lastschritt 54 ab. Abhängig von der Schrittweite des Prädiktors kann es sein, dass der Algorithmus nicht die schwarz dargestellten äquivalenten Verzerrungen zur Kontrolle verwendet, sondern versucht, die rot markierten äquivalenten Verzerrungen zu inkrementieren. Damit stagniert der Schädigungsfortschritt, weil die Kontrollgröße im Lastschritt nicht ansteigt. Durch sich wiederholende Bisektionen geht die Schrittweite gegen Null.

Zum Schluss werden Verschiebungen und Steigerungsfaktor aktualisiert. Das ausiterierte Inkrement beider Größen wird als Sekantenprädiktor für das gegebenenfalls folgende Inkrement verwendet.

Als Randbemerkung sei hinsichtlich der Schrittweite erwähnt, dass bei konstanter Schrittweite in der Verzerrungskontrolle die Abstände der ermittelten Gleichgewichtspunkte im Kraft-Verschiebungsraum nicht äquidistant verteilt sind. Auch die Kontrollgleichung selbst ist hinsichtlich ihrer Schrittweite abhängig von der Diskretisierung, da die Verzer-

rungsinkremente in einem Gaußpunkt vorgeschrieben sind. Sind also die Elemente klein, wird ihre Differenzverschiebung für ein vorgeschriebenes  $\Delta\tilde{\varepsilon}$  kleiner sein, als diejenige eines großen Elements.

In der vorliegenden Ausführung hängen sowohl die Zusatzgleichung, als auch deren Ableitungen  $f_{,\mathbf{D}}$  und  $f_{,\lambda}$  von der Wahl der äquivalenten Verzerrungen ab. Die Robustheit und die einfachen Ableitungen einer Verschiebungskontrolle sollen im folgenden Abschnitt mit der Auswertung der Größen in der Kontrollregion kombiniert werden.

### 6.4.3 Adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone – Trennung von Kontrollregion und Kontrollparameter

Eine Alternative zur vorangehend beschriebenen adaptiven Verzerrungskontrolle stellt die adaptive Verschiebungskontrolle in der Kontrollregion dar. Mit Bezug auf die Veröffentlichung POHL U. A. (2013) wird diese Methode im Folgenden nach ihrer englischen Bezeichnung „adaptive displacement control in process zone“, kurz ADC-PZ benannt. Sie schlägt den Bogen zwischen der Verzerrungskontrolle und der Kontrolle einzelner Verschiebungen. Eine Verschiebungskontrolle ist, sofern ein monoton ansteigender Freiheitsgrad für die Zusatzgleichung bekannt ist, robust und effizient.

Die hier vorgestellte Methode weist eine Besonderheit gegenüber den oben genannten Verfahren auf, was die Auswahl der Kontrollparameter angeht. ADC-PZ soll für die Analyse von Strukturen anwendbar sein, deren Verhalten keine Vorhersage geeigneter Kontrollfreiheitsgrade zulässt. Außerdem soll auch diese Methode künstliches Entlasten vermeiden, wie es in Abschnitt 6.2 beschrieben ist. Aus diesem Grund wird auch für dieses Verfahren nach den bereits aufgeführten Kriterien eine Kontrollregion identifiziert, in der dann ein geeignetes Verschiebungsinkrement ausgewählt wird. Die Auswahl von Kontrollregion und Kontrollparameter erfolgt dabei getrennt nach unterschiedlichen Kriterien.

Die *Kontrollregion* ist der Bereich, ein Gaußpunkt oder ein Element, in dem der Kontrollparameter ausgewertet werden soll. Diese Region hat in der vorliegenden Arbeit die Eigenschaft, dem Rissfortschritt zu folgen. Etwas genereller gehalten kann dies auch ein Bereich sein, in dem „viel passiert“ – der Ansatz muss daher nicht auf Schädigung beschränkt sein. Die Kontrollregion wird hier so identifiziert, wie die äquivalenten Verzerrungen für die Verzerrungskontrolle und die adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle. In einer Schleife über alle Gaußpunkte aller Elemente wird derjenige Gaußpunkt gespeichert, dessen äquivalente Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}$  sich am nächsten zum vollgeschädigten Zustand befindet, dessen Schädigung fortschreitet und dessen Schädigungsvariable  $d < 1$  ist. Damit sind vollgeschädigte Elemente, die eigentlich nicht mehr existieren, aus der

Kontrollregion eliminiert. Diese Forderungen lassen sich nochmals wie in Tabelle 6.1 zusammenfassen.

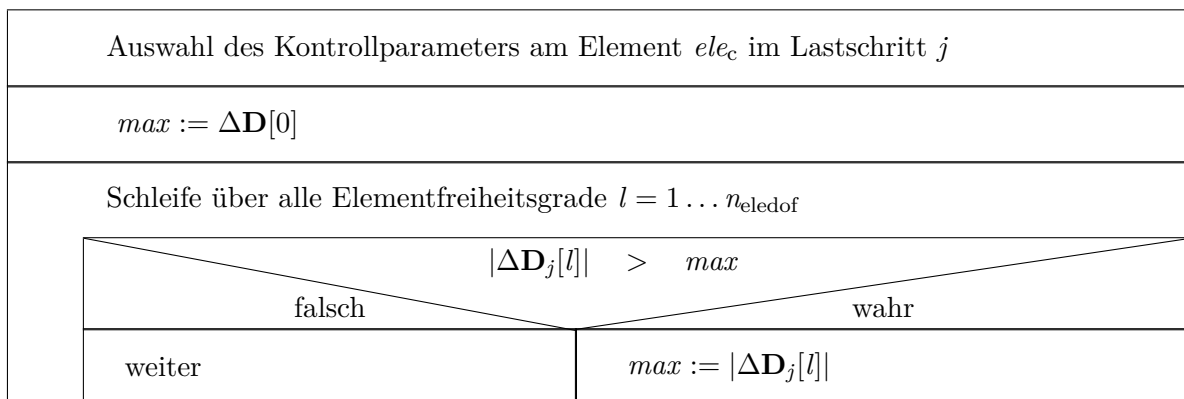
Kontrollregion	
Gaußpunktschleife	$\kappa_m - \tilde{\varepsilon} \rightarrow \min:$ Gaußpunkt, der sich am nächsten an der Vollschädigung befindet.
	$\tilde{\varepsilon} > \kappa:$ Schädigung am betrachteten Gaußpunkt schreitet fort.
	$\kappa_m - \tilde{\varepsilon} \geq 0:$ vollständig geschädigte Gaußpunkte sollen nicht in die Kontrollgleichung eingehen.

**Tabelle 6.1:** Identifikation der Kontrollregion.

Der so ermittelte Gaußpunkt wird seinem zugehörigen Element zugeordnet und dieses Element  $ele_c$  dient dann als Kontrollregion, in der der Kontrollparameter ausgewertet werden soll.

Am ermittelten Element  $ele_c$  werden nun alle Verschiebungsinkremente auf ihre Tauglichkeit als *Kontrollparameter* hin untersucht. Ein Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{D}$  ermittelt sich dabei als Differenz eines Verschiebungsfreiheitsgrades vom letzten zum aktuellen ausiterierten Gleichgewichtszustand. Diese Inkremente werden dann berücksichtigt, wenn sich der Freiheitsgrad vom letzten zum aktuellen Schritt in die gleiche Richtung entwickelt hat.

Für alle Auswertungen in dieser Arbeit ist dasjenige Verschiebungsinkrement am Element  $ele_c$  der Kontrollregion als Kontrollparameter ausgewählt, das den maximalen Wert aufweist. Die algorithmische Umsetzung dieser Auswahlroutine ist in Abbildung 6.14 dargestellt.



**Abbildung 6.14:** Auswahl des größten Verschiebungsinkrements der Kontrollregion.

Kontrollparameter können neben Verschiebungsinkrementen aber auch Verzerrungsin-kremente (Verzerrungskontrolle) oder andere Systemgrößen sein, die mit dem Schädigungsprozess oder der Kontrollregion verbunden sind. Ein solcher Parameter kann wei-tere Eigenschaften aufweisen, die sich im Hinblick auf die Kontrolle eines Prozesses posi-tiv auswirken und zu einem stabilen Algorithmus führen. Geschickt gewählt vereinfacht die Kontrollgröße die Formulierung der Kontrollgleichung und ihrer Ableitungen gegen-über der Verzerrungssteuerung. Letztere hat, wie bereits erwähnt, den Nachteil, dass die Zusatzgleichung von der Wahl der äquivalenten Verzerrungen und vom Schädigungsmech-anismus abhängt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich aufgrund ver-schiedener Starrkörperverschiebungen der Zusammenhang zwischen Verschiebungsfeld und Verzerrungszustand nicht in beide Richtungen eindeutig verhält.

Die Zusatzgleichung für ADC-PZ stellt, wie bereits beschrieben, eine Verschiebungs-steuerung dar:

$$f = \sqrt{\Delta D_c \Delta D_c} - \Delta \hat{D} = 0. \quad (6.18)$$

Das Kontrollverschiebungsincrement  $\Delta D_c$  wird nach der vorangehenden Beschreibung ermittelt. Die Kontrollgleichung selbst hängt also nicht vom Schädigungsmechanismus oder der Wahl der äquivalenten Verzerrungen ab. Daraus ergeben sich einfache Ablei-tungen nach den globalen Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{D}$  und dem Steigerungsfaktor  $\lambda$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}[i]} = \begin{cases} \frac{\Delta D_c}{\sqrt{\Delta D_c \Delta D_c}} & \text{wenn } \Delta \mathbf{D}[i] \text{ der Kontrollfreiheitsgrad ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.19)$$

Terme aus der Ableitung der Zusatzgleichung nach  $\lambda$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \lambda} \quad (6.20)$$

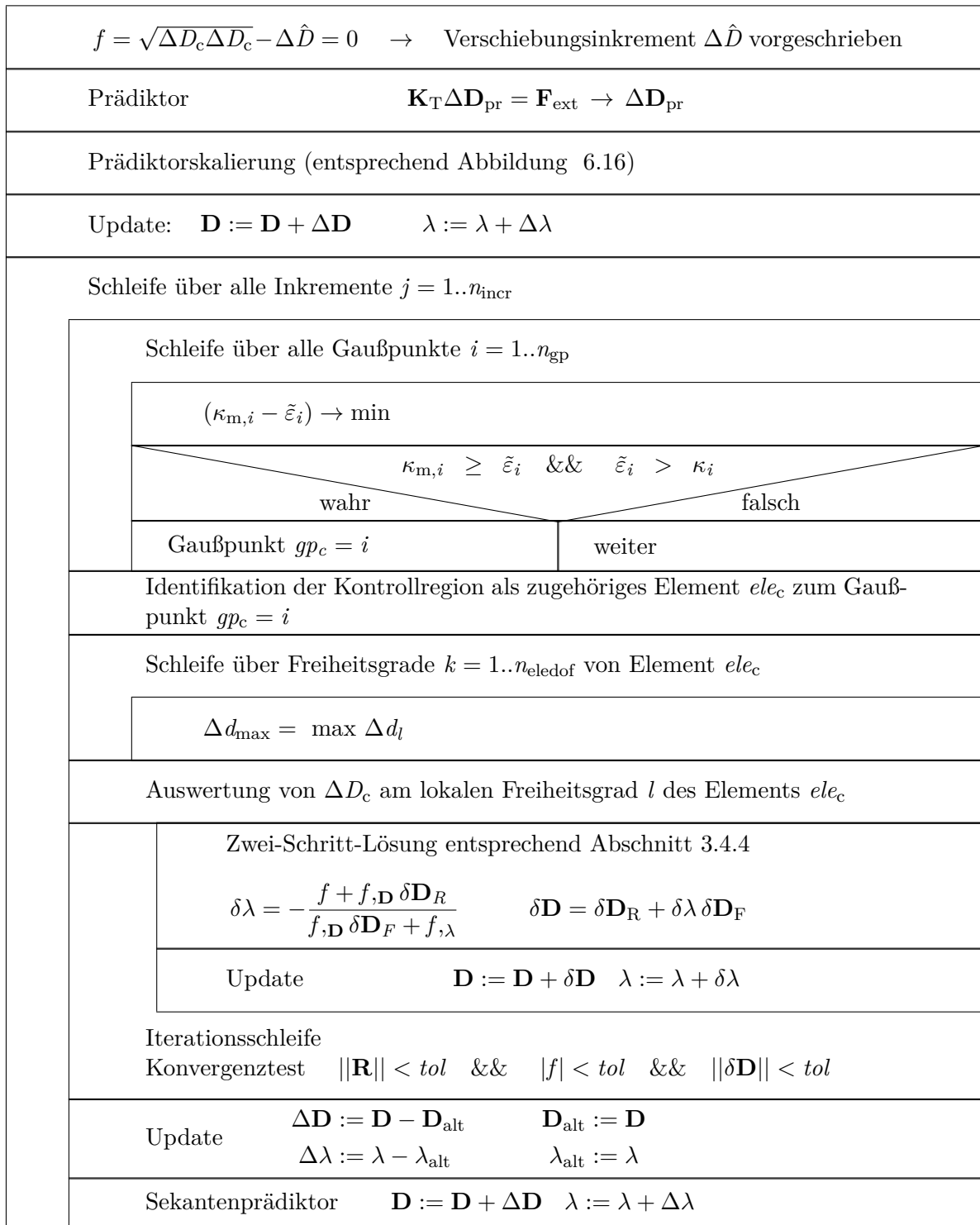
treten dann auf, wenn Verschiebungsfreiheitsgrade vom Steigerungsfaktor abhängen, wie dies bei Verschiebungslastfällen vorkommt. Ansonsten ergibt sich  $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$ .

Eine verkürzte Übersicht über einen Programmablauf der ADC-PZ ist in Abbildung 6.15 dargestellt und gleicht bis auf wenige Punkte der adaptiven Verzerrungskontrolle.

Nach der linearen Lösung im Prädiktorschritt folgt die Prädiktorskalierung durch

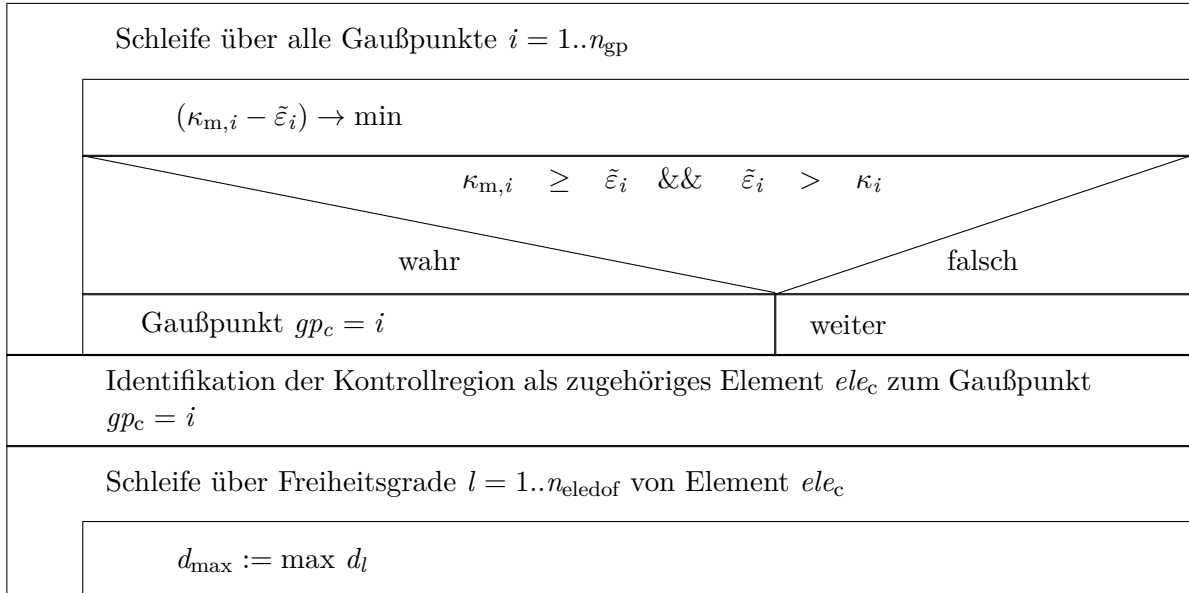
$$\Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{D}_{\text{pr}} \frac{\Delta \hat{D}}{d_{\text{max}}} \quad \Delta \lambda = \frac{\Delta \hat{D}}{d_{\text{max}}}. \quad (6.21)$$





**Abbildung 6.15:** Verkürztes Ablaufdiagramm der adaptiven Verschiebungskontrolle in der Prozesszone.

$\Delta \mathbf{D}_{\text{pr}}$  ist dabei der Vektor der Verschiebungsinkremente aus der Prädiktorlösung.  $\Delta \lambda$  hatte im Prädiktorschritt den Wert 1.



**Abbildung 6.16:** Verschiebungsermittlung zur Prädiktorskalierung.

Die Ermittlung von  $d_{\text{max}}$  erfolgt nach dem Vorgehen in Abbildung 6.16.  $\max d_l$  bezeichnet den Elementfreiheitsgrad mit dem maximalen Inkrement in Deformationsrichtung des letzten auskonvergierten Zustands. Verschiebungsvektor und Steigerungsfaktor werden dann mit den Prädiktorwerten aktualisiert. Unter dem neuen Deformationszustand wird in einer Schleife über alle Gaußpunkte derjenige Gaußpunkt ermittelt, der die Bedingungen für die Kontrollregion erfüllt. Das dem Gaußpunkt  $gp_c$  zugeordnete Element  $ele_c$  stellt die Kontrollregion dar. An diesem Element wird nun in einer Schleife über alle Elementfreiheitsgrade das betragsmäßig größte Verschiebungsinkrement ermittelt und als Kontrollparameter gespeichert.

In der folgenden Iterationsschleife werden dann jeweils die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ , die inneren und äußeren Kräfte, die Zusatzgleichung und ihre Ableitungen ermittelt. Die Anteile der iterativen Verschiebungen  $\delta \mathbf{D}_R$  und  $\delta \mathbf{D}_F$  werden dann nach Gleichung (3.10) ausgewertet.  $\delta \lambda$  berechnet sich aus Gleichung (3.11). Verschiebungsvektor und Steigerungsfaktor werden aktualisiert und das Abbruchkriterium für das Erfüllen von Gleichgewicht und Zusatzgleichung geprüft. Die Abbruchtoleranz liegt hier bei  $tol = 10^{-7}$ . Konvergiert die Iteration nicht, wird der ermittelte Kontrollfreiheitsgrad analog zu Abbildung 6.13 für den aktuellen Lastschritt von der Kontrollfunktion ausgeschlossen und der Lastschritt wird wiederholt. Um den Berechnungsablauf verkürzt darstellen zu können, entfällt dieser Punkt im Struktogramm. Als Sekantenprädiktor für das nächste

Inkrement werden die Differenzen aus Verschiebungsvektor und Steigerungsfaktor des letzten und des aktuellen Gleichgewichtspunktes berechnet und übergeben.

Wie auch bei der adaptiven Verzerrungskontrolle erfolgt die Auswertung der Verschiebungsinkremente der ADC-PZ in der Prozesszone in der Nähe der Rissfront. Dadurch kann die Kontrollgröße den Rissfortschritt in der nahen Umgebung beeinflussen. Zudem weist das größte Verschiebungsinkrement am kontrollierten Element günstige Eigenschaften im Hinblick auf robuste algorithmische Prozesskontrolle auf. Die beschriebene Methode weist eine Reihe positiver Eigenschaften auf, die sie der adaptiven Verzerrungskontrolle voraus hat: Im Gegensatz zu den Ergebnissen, die sich aus der Kontrolle äquivalenter Verzerrungen ergeben, kann sich der Anwender Deformationsverhalten und Schrittweite aus diskreten Verschiebungsinkrementen vorstellen. Die Zusatzgleichung und die zugehörigen Ableitungen sind einfach zu formulieren und zu implementieren.

Die Unabhängigkeit des Kontrollparameters vom Schädigungsmechanismus, was hier der Formulierung der äquivalenten Verzerrung entspricht, ist der Grund für die genannten Vereinfachungen. Dennoch erfolgt die Auswahl der Kontrollregion über die äquivalenten Verzerrungen. Weiterer Handlungsbedarf besteht also in einer vom Schädigungsmechanismus unabhängigen Identifikation dieser Kontrollregion.

## 6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Begriff der künstlichen Entlastung definiert. Anhand von Auswertungen der Kraft-Verschiebungskurven und Energiedarstellungen konnte dieses Phänomen über die Abnahme der elastischen Energie und konstant bleibender dissipativer Energie verdeutlicht werden.

Auswertungen im Energieverlauf lassen die These zu, dass es nicht möglich ist, die Summe aus elastischer und dissipativer Energie zu kontrollieren. Es ist also nicht möglich, die Gesamtenergie zu kontrollieren, da sie nicht stetig ansteigt.

Die Kontrolle des Deformations- und Schädigungsprozesses soll die Fläche unter der Gesamtenergiekurve maximieren. Bezogen auf die Beschreibung der künstlichen Entlastung in Abschnitt 6.2 bedeutet dies konkret, dass für fortschreitende Schädigung entweder die innere elastische Energie oder die dissipative Energie zunehmen muss. Als erster Ansatz zur Vermeidung künstlicher Entlastung bei Bogenlängenverfahren wurde die adaptive Einschränkung der Bogenlängengleichung vorgestellt. Durch die Multiplikation mit dem Inkrement der äquivalenten Verzerrungen der Kontrollregion wird die Schnittmenge aus Zusatzgleichung und Gleichgewichtspunkten auf einen Schnittpunkt mit fortschreitender Schädigung eingeschränkt. Darauf aufbauend wurde die Implementierung der adaptiven Verzerrungskontrolle (ASC) beschrieben. Das Inkrement der äquivalenten Verzerrungen

am kontrollierenden Gaußpunkt wird in der Zusatzgleichung vorgeschrieben. Die Identifikation der Kontrollregion kann Tabelle 6.1 entnommen werden.

Als Weiterentwicklung der adaptiven Verzerrungskontrolle wurde die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ) vorgestellt und ihre Vorzüge gegenüber der Verschiebungskontrolle diskutiert. Bei dieser Methode wird das betragsmäßig maximale Verschiebungsinkrement des Elements der Kontrollregion vorgeschrieben, welches sich vom vorangehenden zum aktuellen Lastschritt in dieselbe Richtung entwickelt hat. Die Verschiebung wird in der Prozesszone in der Nähe der Rissspitze ausgewertet – also dort, wo „viel passiert“. Die Vereinfachungen von ADC-PZ gegenüber der adaptiven Verzerrungskontrolle führen zu drei wesentlichen Vorteilen:

- Schrittweite und Deformationsverhalten sind einfacher zu interpretieren, da der Kontrollparameter durch eine fassbare Größe repräsentiert wird.
- Die Zusatzgleichung wird unabhängig von den gewählten äquivalenten Verzerrungen und natürlich auch vom Schädigungsmechanismus.
- Die Zusatzgleichung, ihre Ableitungen und auch die Implementierung der Methode vereinfachen sich.

Die adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle, ASC und ADC-PZ stellen Verfahren dar, die inkrementell und adaptiv formuliert sind. Durch die Auswertung der Inkremente an adaptiv ausgewählten Stellen in der Struktur bleibt die Kontrollmethode unabhängig vom monotonen Ansteigen der Größe selbst.

Die numerischen Auswertungen ergeben, dass beide Verfahren ASC und ADC-PZ sehr robust und effizient sind. Ein wesentlicher Aspekt sei zum Schluss noch genannt: Ein Eingreifen des Nutzers in die Kontrolle des Deformationsprozesses ist nicht erforderlich. Neben der Wahl der Kontrollmethode bleibt ihm nur das Festschreiben der Schrittweite überlassen.

---

## Numerische Beispiele

Im vorangehenden Kapitel wurden verschiedene Pfadverfolgungsmethoden für entfestigendes Materialverhalten diskutiert. Auch Methoden wie das Bogenlängenverfahren aus Abschnitt 4.2 oder die an GEERS (1999a) angelehnte adaptive Verschiebungskontrolle aus Abschnitt 5.3, können für die Analyse von Strukturen mit Entfestigung herangezogen werden. Diese Verfahren erweisen sich aber bei entfestigendem Materialverhalten unter bestimmten Bedingungen als unzuverlässig.

In diesem Kapitel werden Strukturen mit entfestigendem Materialverhalten untersucht. Die diskutierten Beispiele lassen keine a priori Identifikation von ansteigenden Knotenkräften oder Verschiebungsfreiheitsgraden zu. Zusatzgleichungen für Kraft- oder Verschiebungskontrolle werden hier deshalb nicht aufgeführt. Anhand der Beispiele werden das zylindrische und das sphärische Bogenlängenverfahren, die adaptive Verzerrungskontrolle (ASC), die adaptive Verschiebungskontrolle (ADC *Maximum*) und die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ) getestet. Im Rahmen dieser Analysen werden die Eigenschaften der Kontrollmethoden auf Eignung und Effizienz untersucht. Im letzten Abschnitt erfolgt eine Einteilung in Problemklassen und eine Empfehlung zur Wahl der Kontrollmethode wird ausgesprochen. Hier werden Auswertungen zu Konvergenzeigenschaften und Konvergenzgeschwindigkeit diskutiert.

Die betrachteten Beispiele gliedern sich in drei Gruppen: die L-förmige Scheibe steht für Systeme, die kontinuierliche Schädigung aufweisen und in denen die Schädigungszone nicht vorgeschrieben ist. Die zweite Gruppe ist durch den perforierten Kragarm vertreten. Pfadabschnitte mit elastischem und dissipativem Charakter ergeben sich aus der Unterbrechung der sonst kontinuierlichen Systeme mit Löchern. Die Scheibe mit diagonalem Lochband zählt ebenso zu dieser Gruppe. Dieses Beispiel wurde aufgrund der veränderten Anforderungen an den Versagensmechanismus in der vorgegebenen Schädigung

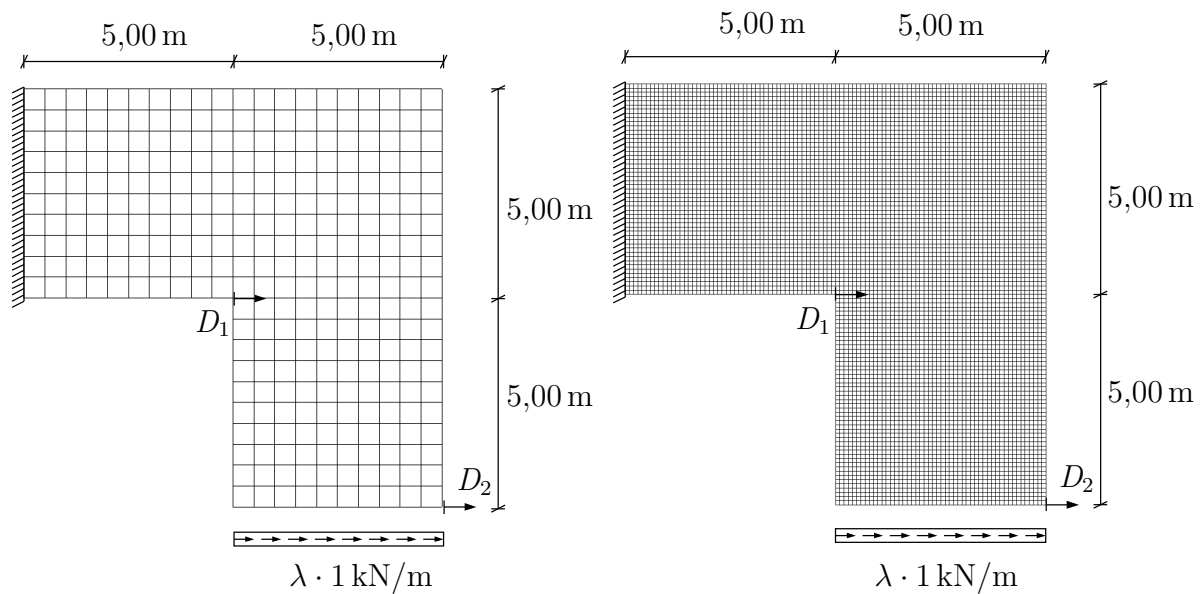
gungszone gewählt. Gruppe drei, vertreten durch die Scheibe mit unsymmetrisch angeordnetem Loch, weist die Besonderheit auf, dass sich zwei Risse gleichzeitig entwickeln, einer stehen bleibt und zu einem späteren Zeitpunkt wieder aktiviert wird. Auch in diesem Beispiel ist die Schädigungszone vorgeschrieben.

Alle in diesem Kapitel befindlichen numerischen Beispiele wurden mit dem in Abschnitt 2.4.2 beschriebenen isotropen Elasto-Schädigungs-Material modelliert. Um eine Entsprechung zur Literatur herzustellen, ist in einigen Beispielen eine Schädigungszone vorgegeben. Elemente außerhalb dieser Schädigungszone sind mit elastischem St. Venant-Kirchhoff-Material belegt. Im Beispiel der L-förmigen Scheibe ist jedoch jedes Element schädigungsfähig; die Prozesszone wird nicht vorgegeben. Bei Anwendung des isotropen Schädigungsgesetzes wurde die in Abschnitt 2.4.2 erläuterte elementgrößenbasierte Regularisierungstechnik angewandt. Für alle Beispiele wurde ein ebener Spannungszustand angenommen. Die Diskretisierung erfolgte mit bilinearen, vollintegrierten Q1-Elementen.

Im vorangehenden und in diesem Kapitel finden sich keine Beispiele zum Thema physikalische Stabilität. Aktuell existieren noch keine Schalenelemente im Finite-Elemente-Programm NumPro, in welchem alle vorgeschlagenen Kontrollalgorithmen (adaptive Verschiebungskontrolle, adaptiv eingeschränktes Bogenlängenverfahren, Verzerrungskontrolle und ADC-PZ) implementiert wurden. Für alle Berechnungen wird in dieser Arbeit dennoch die vollständig nichtlineare Tangentensteifigkeitsmatrix  $K_T$  (siehe hierzu Abschnitt 2.3) verwendet.

### 7.1 L-förmige Scheibe

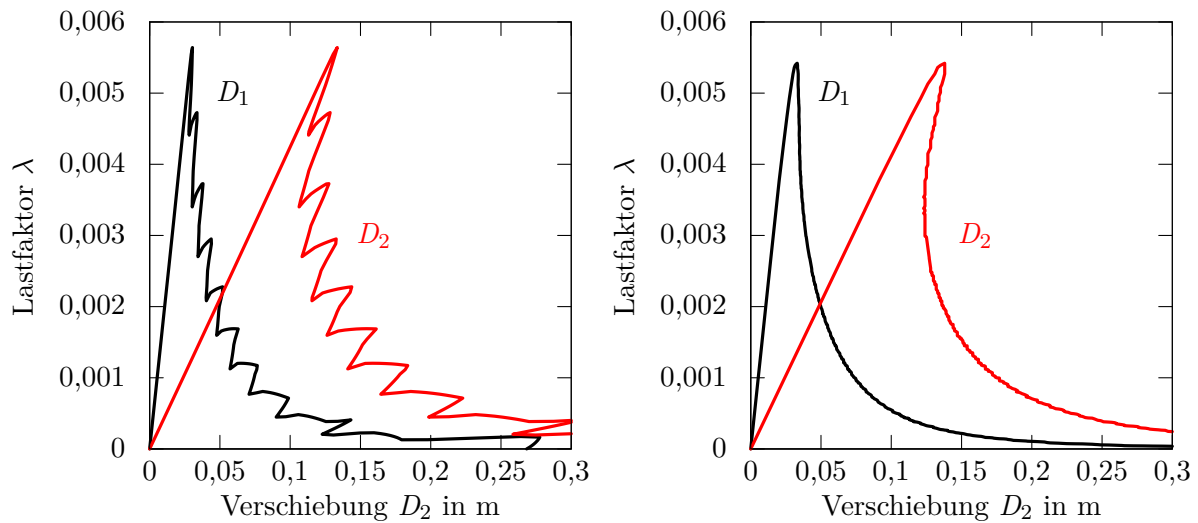
Am Beispiel der L-förmigen Scheibe wird eine Struktur untersucht, die an jeder beliebigen Stelle schädigen kann. Die Struktur wird mit zwei unterschiedlich feinen Netzen diskretisiert, wodurch sich unterschiedliche Antworten im Kraft-Verschiebungsdiagramm ergeben können. Die Belastungswinkel werden variiert, um zu verdeutlichen, dass keine Vorgaben bezüglich der Schädigungszone gemacht werden und sich das Schädigungsbild nach der Strukturbelastung richtet. Abbildung 7.1 zeigt Lagerung, Maße, Belastung und die unterschiedlichen Diskretisierungen der L-Scheibe. Am linken Ende jeweils eingespannt, sind die Scheiben am rechten unteren Rand durch einen Kraftlastfall in Form einer Streckenlast von  $\lambda \cdot 1 \text{ kN/m}$  belastet. Die im Folgenden relevanten Freiheitsgrade  $D_1$  und  $D_2$  sind ebenfalls dieser Darstellung zu entnehmen. Die Elementgröße beträgt für das grobe Netz  $500 \times 500 \text{ mm}$ , das feinere Netz wurde mit Elementen der Größe  $100 \times 100 \text{ mm}$  diskretisiert.



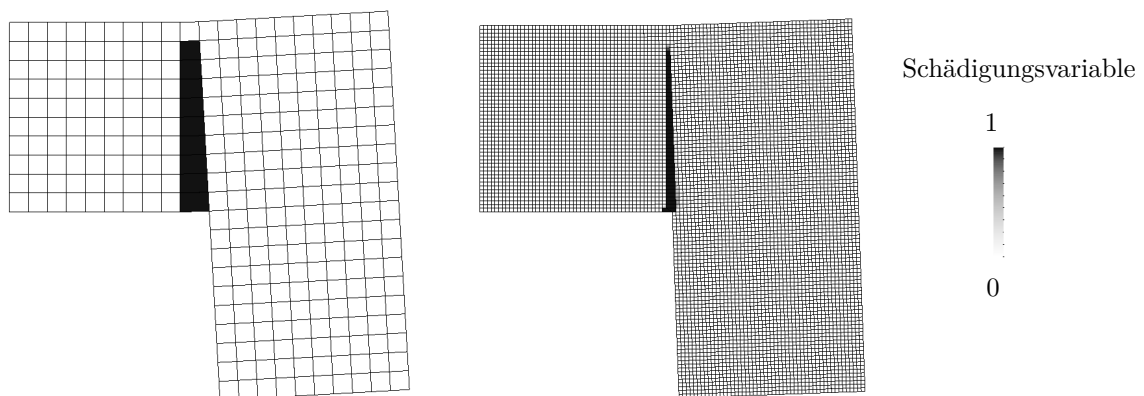
**Abbildung 7.1:** Systemskizze L-Scheibe, Elementgröße 500 x 500 beziehungsweise 100 x 100 mm.

Der Elastizitätsmodul der L-Scheibe ist mit einem akademischen Wert von  $E = 10 \text{ kN/m}^2$  belegt. Die Poissonzahl beträgt  $\nu = 0$  und der Initialwert der Schädigung  $\kappa_0 = 0,01$ . Aufgrund der elementgrößenbasierten Regularisierungstechnik ergeben sich für unterschiedliche Diskretisierungen unterschiedliche Werte  $\kappa_m$  für Vollschädigung an einem Gaußpunkt. Für die kleinen Elemente wurde  $\kappa_m = 0,05$  und für das grobe Netz  $\kappa_m = 0,02$  gesetzt. Für die Bruchenergie bedeutet dies  $G_f = 2,5 \cdot 10^{-4}$  für die feine Diskretisierung,  $G_f = 5 \cdot 10^{-4}$  für die grobe. Die Materialparameter wurden so gewählt, dass sich sprödes Materialverhalten einstellt und sich ein möglichst anspruchsvolles Beispiel für die Pfadverfolgung ergibt. Die Bruchenergie unterscheidet sich hier für die beiden Diskretisierungen.

Eine funktionierende Wahl der Kontrollmethode ist für die L-Scheibe nicht so offensichtlich, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheint. Aufgrund des entfestigenden Materialmodells kann der Lastfaktor  $\lambda$  nicht kontrolliert werden. Während der Rissausbildung vermindert sich die aufnehmbare Kraft in der Struktur. Die Verschiebungsfreiheitsgrade  $D_1$  und  $D_2$  erscheinen als Kontrollparameter geeignet. Die Vermutung liegt nahe, dass diese Freiheitsgrade stetig anwachsen. Aufgrund seiner exponierten Lage am Ende des Kragarms bietet sich  $D_2$  intuitiv als Kontrollparameter für den gesamten Prozess an. Bei der Betrachtung der Gleichgewichtskurven des fein diskretisierten Systems in Abbildung 7.2 rechts wird aber deutlich, dass beide Freiheitsgrade sich nicht als Kontrollparameter eignen.  $D_2$  wird nach Erreichen der Traglast rückläufig und  $D_1$  fällt stark ab. Die hier abgebildeten Gleichgewichtskurven wurden daher mit der adaptiven Verzerrungskontrolle ermittelt.



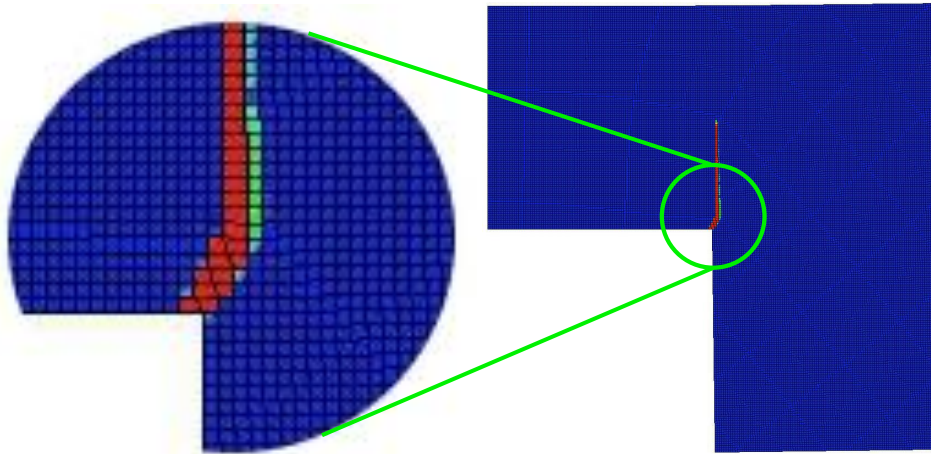
**Abbildung 7.2:** Verschiebungen  $D_1$  und  $D_2$  der groben (links) und feinen (rechts) Diskretisierung in m. Ermittlung der Kurven: ASC.



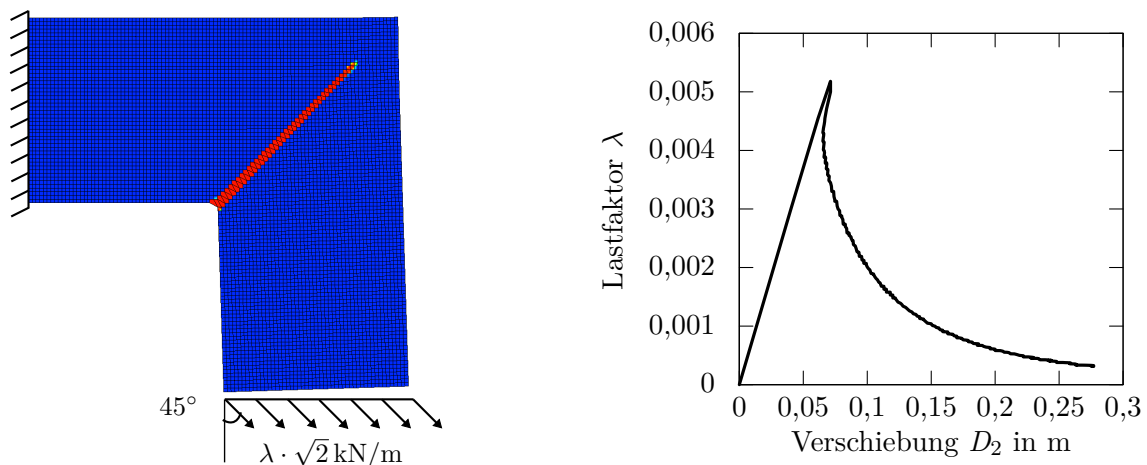
**Abbildung 7.3:** Deformierte L-Scheibe. Deformationszustand entspricht dem Ende der Last-Verschiebungskurven in 7.2.

Die links in Abbildung 7.2 auftretenden Stufen im Kraft-Verschiebungsdiagramm sind in diesem Beispiel auf die grobe Diskretisierung zurückzuführen. Die lokalen Rückläufigkeiten in  $D_1$  und  $D_2$  führen bei einer Kontrolle dieser Freiheitsgrade wegen lokaler Kontrollendpunkte zu algorithmischem Versagen. In realen Experimenten kann die Ausbildung solcher Stufen bedingt durch Inhomogenitäten im Material auftreten. Dies kann beispielsweise durch die Verwendung von Stahlbeton oder von mit Stahlfasern bewehrtem Beton hervorgerufen werden. Der Deformations- und Schädigungszustand zu den Kurven in Abbildung 7.2 ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Während sich die Schädigung in der groben Diskretisierung links in einer Elementreihe senkrecht nach oben ausbreitet, beginnt sich die Schädigungszone in der feiner diskretisierten Scheibe zuerst im  $45^\circ$





**Abbildung 7.4:** Rissbild der sehr fein diskretisierten L-Scheibe.

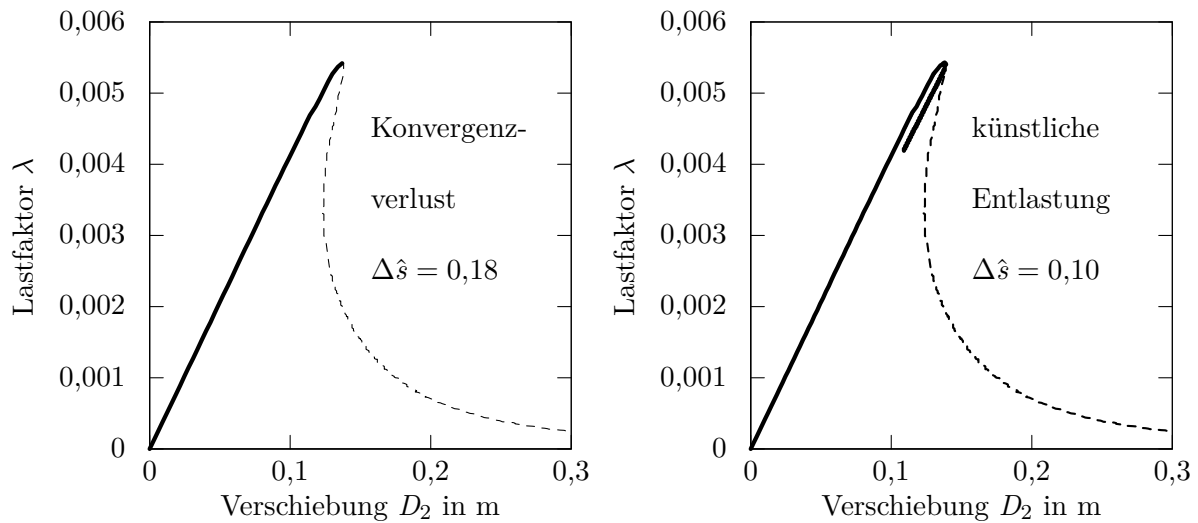


**Abbildung 7.5:** Rissbild (links) und Gleichgewichtspfad (rechts) unter einem Lastwinkel von  $45^\circ$  der fein diskretisierten L-förmigen Scheibe.

Winkel nach rechts oben auszubilden. Schließlich schreitet der Riss aber auch in einer Elementreihe nach oben fort.

In diesem Beispiel ist die Schädigungszone nicht vorgeschrieben und kann sich in der ganzen Struktur ausbilden. Dies zeigt der Rissverlauf einer noch feineren Diskretisierung in Abbildung 7.4. Die Elementgröße dieser sehr feinen Diskretisierung liegt bei  $50 \times 50$  mm.  $\kappa_m$  beträgt hier 0,1.

Völlig andere Deformationsbilder ergeben sich, wenn die fein diskretisierte L-Scheibe aus Abbildung 7.1 anderen Lasteinwirkungswinkeln ausgesetzt wird. Abbildung 7.5 zeigt das sich ergebende Rissbild aus einer Streckenlast unter  $45^\circ$  und das zugehörige Kraft-Verformungsdiagramm.

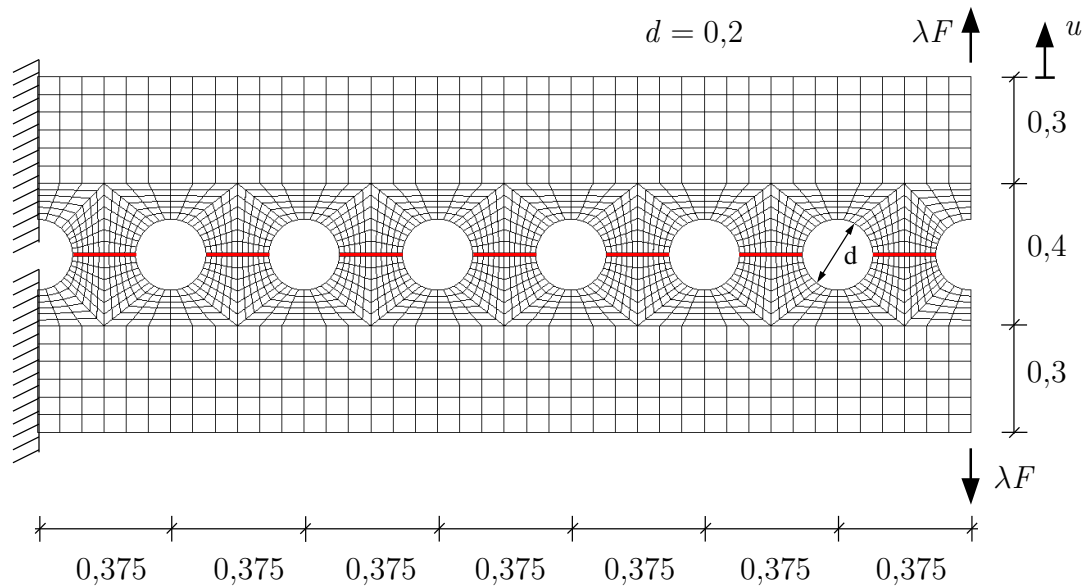


**Abbildung 7.6:** Konvergenzverlust und künstliche Entlastung unter zylindrischer Bogenlängenkontrolle.

Da bei Pfaden mit rückläufigen Kraft- und Verschiebungskomponenten das Bogenlängenverfahren häufig als Kontrollmethode angewandt wird, soll dieses Verfahren auch hier zum Einsatz kommen. Abbildung 7.6 zeigt den Gleichgewichtspfad der feinen Diskretisierung aus Abbildung 7.1 für den Freiheitsgrad  $D_2$ . Die mit der adaptiven Verzerrungskontrolle ermittelte Referenzkurve ist schwarz gestrichelt dargestellt. Als schwarze, durchgehende Linie ist der Verlauf unter zylindrischem Bogenlängenverfahren mit unterschiedlichen Schrittweiten zu sehen. Links, mit der Schrittweite  $\Delta\hat{s} = 0,18$  bricht die Berechnung aufgrund von Konvergenzverlust bei Erreichen der Traglast ab. Rechts ist deutlich eine künstliche Entlastung zu beobachten, die bei einer Schrittweite von  $\Delta\hat{s} = 0,10$  eintritt. Die künstliche elastische Entlastung beginnt erst nach Eintritt der Schädigung und verläuft auf einem vom Belastungspfad unterschiedlichen Pfad in Richtung des Ursprungs zurück.

## 7.2 Perforierter Kragarm

Das Beispiel des perforierten Kragarms beinhaltet die Vorgabe einer Schädigungszone und wurde dem in VERHOOSSEL (2009) untersuchten System in verkürzter Systemlänge nachgebildet. Der Systemaufbau ist in Abbildung 7.7 dargestellt. Es handelt sich dabei um einen Kragarm, der an seinem freien Ende mit zwei Punktlasten  $\lambda F$  belastet wird. Auf der Längsachse des Kragarms befinden sich Löcher jeweils mit einem Abstand von 0,375 mm von Mittelpunkt zu Mittelpunkt. Der Lochdurchmesser beträgt  $d = 0,2$  mm. Das jeweils zwischen den Löchern befindliche Material des Kragarms wird im Folgenden



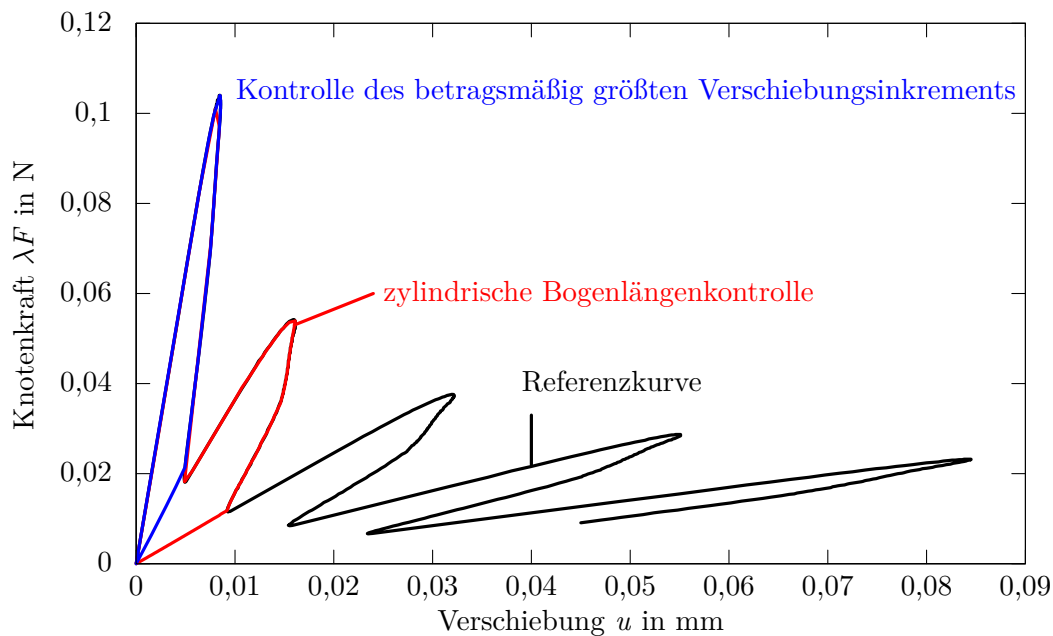
**Abbildung 7.7:** Systemskizze des perforierten Kragarms. Maße in mm.

als Verbindungssegment bezeichnet. Innerhalb dieser Verbindungssegmente ist auf der Längsachse des Kragarms eine Elementschicht mit schädigenden Materialeigenschaften entsprechend Abschnitt 2.4.2 vorgegeben. Die übrigen Elemente des Kragarms sind mit elastischem St. Venant-Kirchhoff-Material belegt. Die vorgegebene Schädigungszone ist in der Systemskizze in rot markiert.

VERHOUSEL (2009) bildet die Schädigungszone durch Interface-Elemente ab, deren Schädigung mit einer Grenzspannung assoziiert ist. Im vorliegenden Beispiel wird, wie bereits beschrieben, ein Kontinuumschädigungsmodell verwendet. Durch die Regularisierung nach BAŽANT UND OH (1983) mit der Annahme konstanter Bruchenergie bei beliebiger Elementgröße, vermindert sich der Unterschied zwischen den beiden Schädigungsmechanismen.

Die Materialparameter für den Kragarm wurden analog zu VERHOUSEL (2009) mit dem Elastizitätsmodul  $E = 100 \text{ N/mm}^2$  und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  gewählt. Die schädigende Elementreihe erhält zusätzlich die Verzerrungsangaben für die Initialisierung der Schädigung bei  $\kappa_0 = 0,01$  und das Eintreten der Vollschädigung bei  $\kappa_m = 0,5$ .

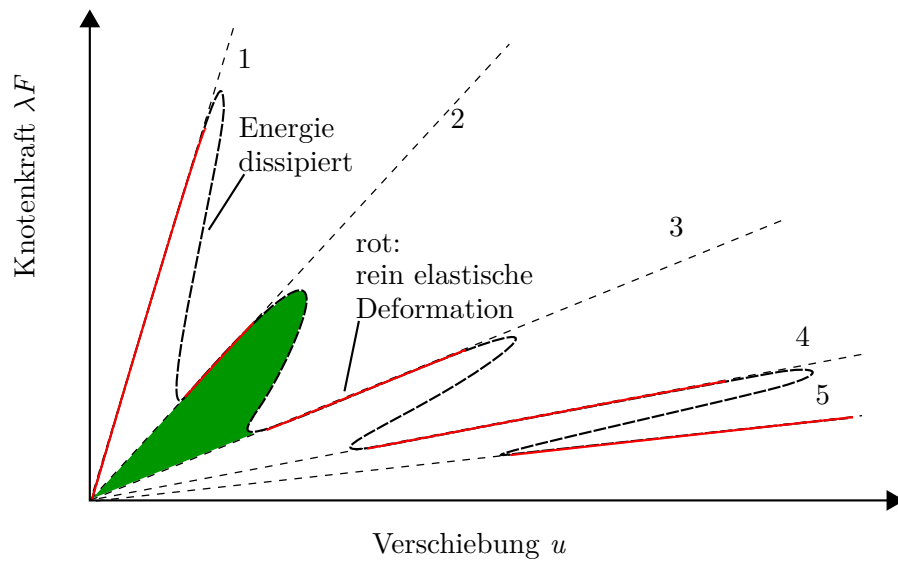
Verschiedene Pfadverfolgungsmethoden wurden anhand dieses Beispiels getestet. Ihr Verhalten ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Die adaptive Verzerrungskontrolle liefert die Referenzkurve, während das zylindrische Bogenlängenverfahren nach dem zweiten Finger der Kurve entlastet. Die Kontrolle des betragsmäßig maximalen Verschiebungsincrements (ADC in der Variante *Maximum*) entlastet bereits nach dem ersten Finger künstlich.



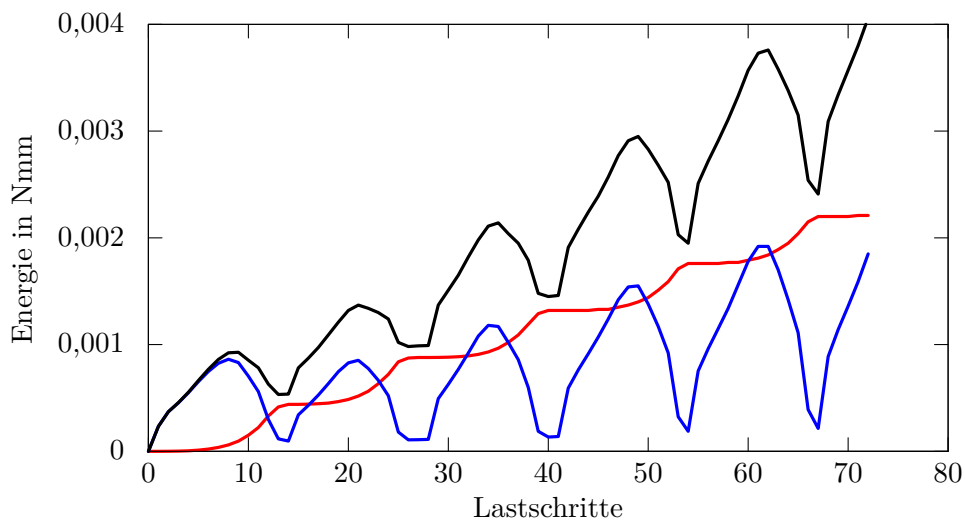
**Abbildung 7.8:** Berechnung des Gleichgewichtspfades mit verschiedenen Kontrollmethoden. Referenzkurve ASC oder ADC-PZ.

Vergleiche mit GUTIÉRREZ (2004) und VERHOOSSEL U. A. (2009) zeigen, dass die Kontrolle der Dissipationsrate auch nicht allgemeingültig anwendbar ist. Die Dissipationsrate ist nie negativ und daher eine geeignete Kontrollgröße für dissipative Kurvenabschnitte. Treten allerdings während des Deformationsprozesses Phasen mit rein elastischem Verformungsverhalten auf, muss auf eine andere geeignete Kontrollgleichung zurückgegriffen werden. Da die dissipative Energie in den elastischen Bereichen der Gleichgewichtskurve konstant bleibt und sich folglich nicht ändert, ist eine Kontrolle dieser Größe hier nicht möglich. Die Auswertungen von VERHOOSSEL (2009) zeigen, dass die größtmögliche Schrittweite bei der Kontrolle der Dissipationsrate relativ klein ausfällt.

In welchen Bereichen des Gleichgewichtspfades des perforierten Kragarms die dissipativen und rein elastischen Deformationen stattfinden, wird in Abbildung 7.9 deutlich. Die gestrichelten Tangenten eins bis fünf kennzeichnen das elastische Aufweiten der Löcher bei Erreichen des Risses des jeweiligen Lochs im Kragarm vom freien Ende aus gezählt. Die Kurvenabschnitte, die auf den Tangenten liegen, weisen rein elastisches Verhalten auf und sind rot markiert. Hier bleibt die Dissipation konstant. Die gestrichelten, schwarzen Abschnitte, die die Tangenten verbinden, haben dissipativen Charakter. Der Verlauf der dissipativen, elastischen und die inneren Gesamtenergie ist in Abbildung 7.10 über die Lastschrittzahl angetragen. Es wird dabei deutlich, dass in Bereichen, in denen die elastische Energie ansteigt, die dissipative Energie konstant bleibt. Dort ist eine Kontrolle der Dissipationsrate, wie sie in VERHOOSSEL (2009) vorgestellt wird, nicht möglich. In



**Abbildung 7.9:** Dissipative und rein elastische Abschnitte des Gleichgewichtspfades.



**Abbildung 7.10:** Verlauf der dissipativen, elastischen und inneren Gesamtenergie des perforierten Kragarms.

VERHOUSEL (2009) werden daher die Pfadabschnitte entsprechend der Anwendung von Kraft- oder Dissipationskontrolle markiert. Es sei darauf hingewiesen, dass die Anzahl der Lastschritte und die Schrittweite zu Abbildung 7.10 und VERHOUSEL (2009) nicht übereinstimmen. Analog zu Abbildung 7.10 verdeutlicht Abbildung 7.9 die Dissipationsenergie in Gleichgewichtspfad, die bei vollständiger Schädigung des Verbindungssegment zwischen dem zweiten und dritten Loch von rechts entsteht.

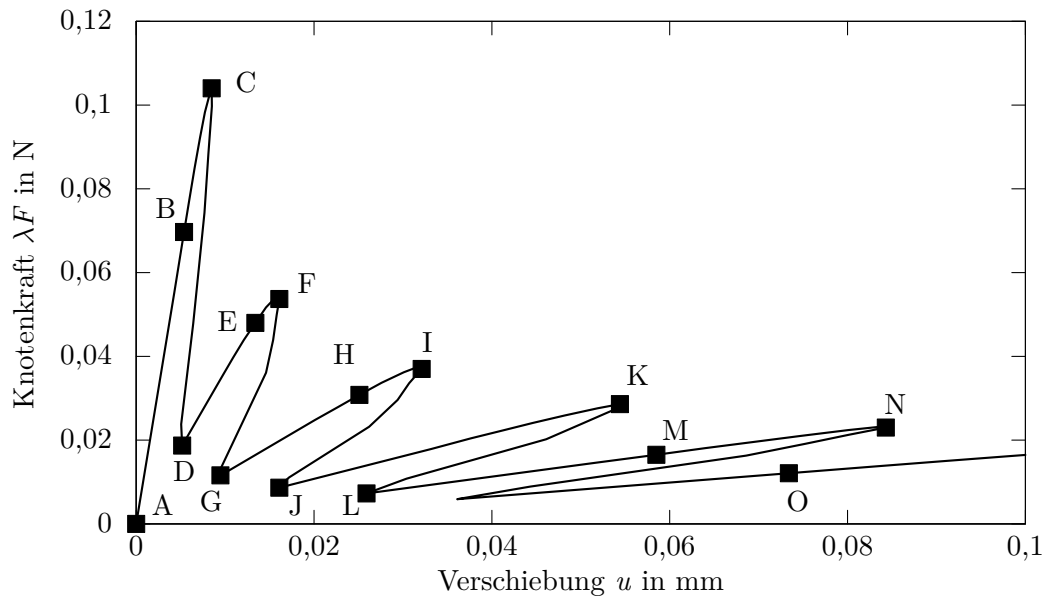


Abbildung 7.11: Gleichgewichtspunkte zu den Deformationsfiguren.

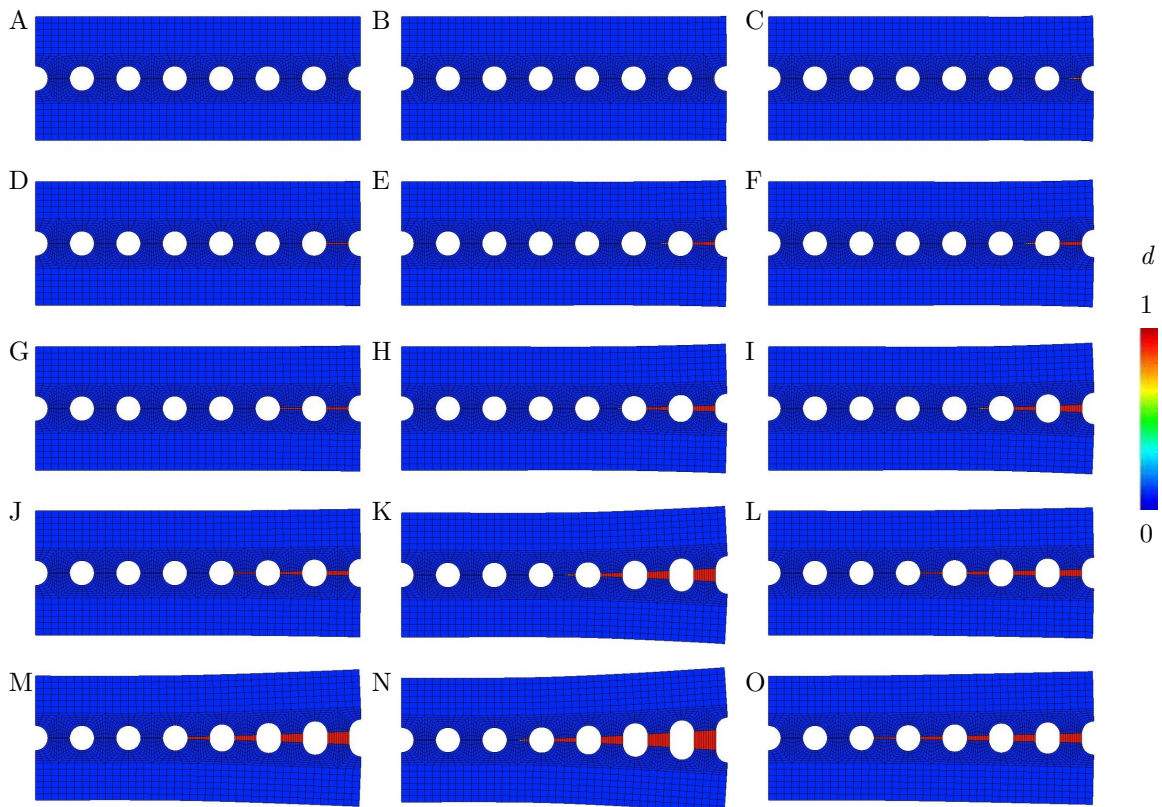


Abbildung 7.12: Deformationsstadien des perforierten Kragarms entsprechend den markierten Gleichgewichtspunkten aus Abbildung 7.11.

Abbildungen 7.11 und 7.12 sollen das Deformationsverhalten des Kragarms verdeutlichen. Die Systemdarstellungen in Abbildung 7.12 sind entsprechend ihrer Markierung den mit den Buchstaben A bis O gekennzeichneten Gleichgewichtspunkten zugeordnet. Die Systemdarstellungen weisen beim Auftreten von Schädigung eine mit roter Farbe markierte Schädigungszone auf.

Abbildung 7.13 zeigt die räumliche Veränderung der Kontrollregion, die sich stetig mit der Prozesszone fortbewegt. Der Kragarm ist aus Gründen der Darstellung gespiegelt. Die Kurven des Diagramms stellen die äquivalenten Verzerrungen des jeweils maßgebenden Gaußpunktes der Elemente 1 bis 11 dar, aufgetragen über die inkrementellen Lastschritte.

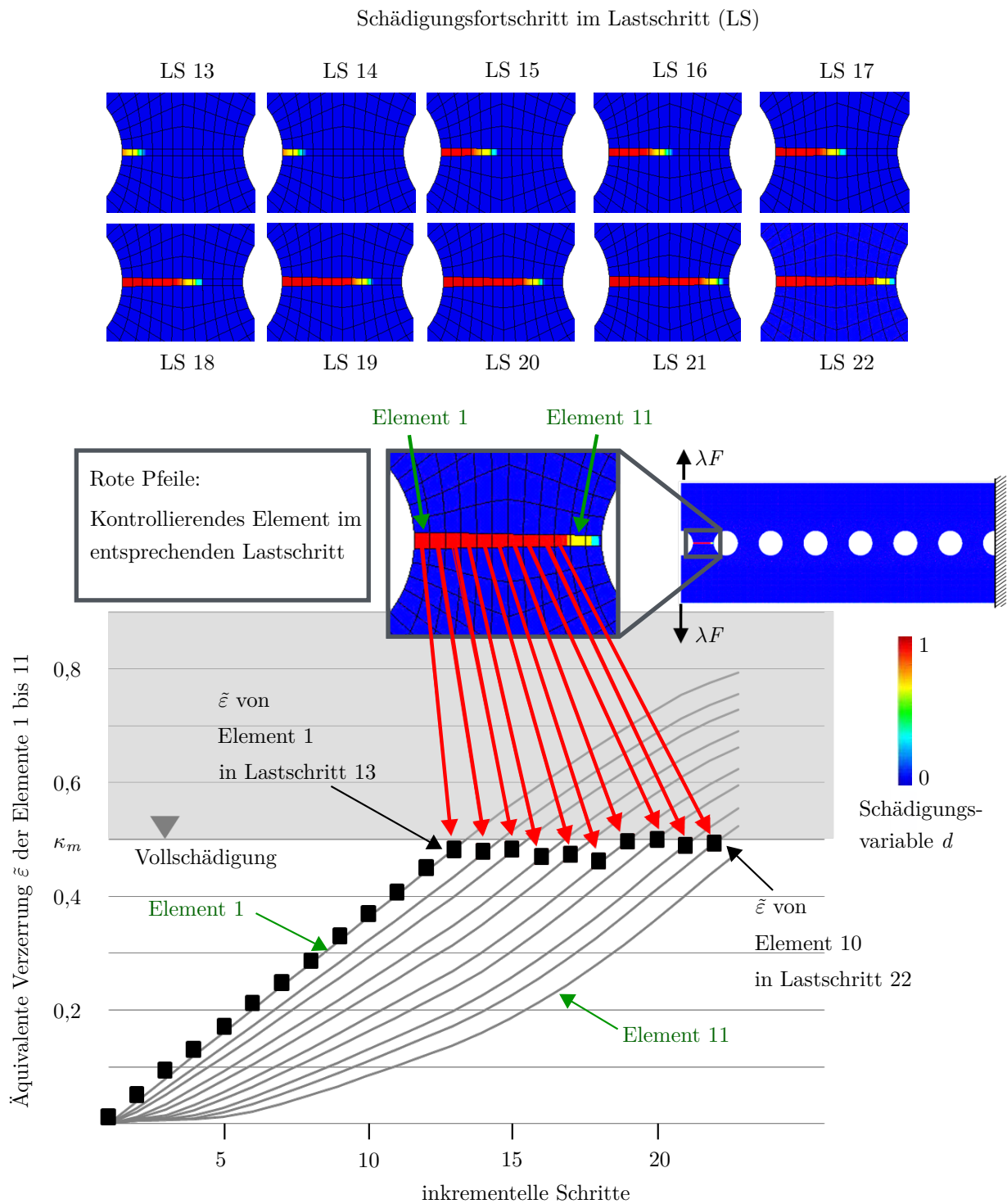
Die Elemente sind in der Vergrößerung von links nach rechts beginnend mit 1 durchnummeriert. Die Inkrementschritte der Berechnung sind mit schwarzen Rechtecken auf den Kurven markiert. Der grau hinterlegte Bereich kennzeichnet die Verzerrungsgrenze  $\kappa_m = 0,5$ , ab welcher die Gaußpunkte vollgeschädigt sind und nicht mehr in die Kontrollgleichung eingehen.

Bis einschließlich Lastschritt 13 stellt Element 1 die Kontrollverzerrung  $\tilde{\varepsilon}$ . Dieses Element liegt direkt am ersten Halbloch und ist solange maßgebend für die Vorgabe des Kontrollparameters, bis die zulässige Grenzverzerrung  $\kappa_m$  erreicht ist. Danach springt die Kontrolle zum Gaußpunkt des nächstliegenden Elements 2, welches im Lastschritt 14 die kleinste Differenz ( $\kappa_m - \tilde{\varepsilon}$ ) aufweist und  $(\kappa_m - \tilde{\varepsilon}) \geq 0$ , sowie  $\tilde{\varepsilon} > \kappa$  erfüllt. Das Wandern der Kontrollregion mit fortschreitenden Lastschritten ist durch die roten Pfeile gekennzeichnet. Sie weisen vom kontrollierenden Element zur jeweiligen Gaußpunktverzerrung im zugehörigen Inkrementschritt.

In den Systemausschnitten über der Ausschnittsvergrößerung ist der Schädigungsfortschritt der einzelnen Lastschritte dargestellt. Aus Darstellungsgründen zeigen die Pfeile, die das kontrollierende Element und die kontrollierende Verzerrung in den inkrementellen Schritten verbinden, stellvertretend vom umrahmten, vergrößerten Ausschnitt zu den einzelnen Kurven. Der tatsächliche Schädigungsstatus dieses umrahmten Ausschnitts ist in den darüber angeordneten Systemausschnitten im jeweiligen Lastschritt dargestellt. Damit wird im Ablauf der Kontrollroutine deutlich, dass die Kontrollregion mit der Prozesszone mitwandert.

Für das hier gewählte Beispiel erfordert die Berechnung von VERHOUSEL (2009) 200 Lastschritte bis zum Versagen des dritten Verbindungssegments und der elastischen Aufweitung des vierten Lochs. Im Vergleich dazu liegt die Anzahl notwendiger Lastschritte mit der adaptiven Verzerrungskontrolle oder der ADC-PZ bei 40 beziehungsweise 38 Lastschritten bis zum Versagen des fünften Verbindungssegments.

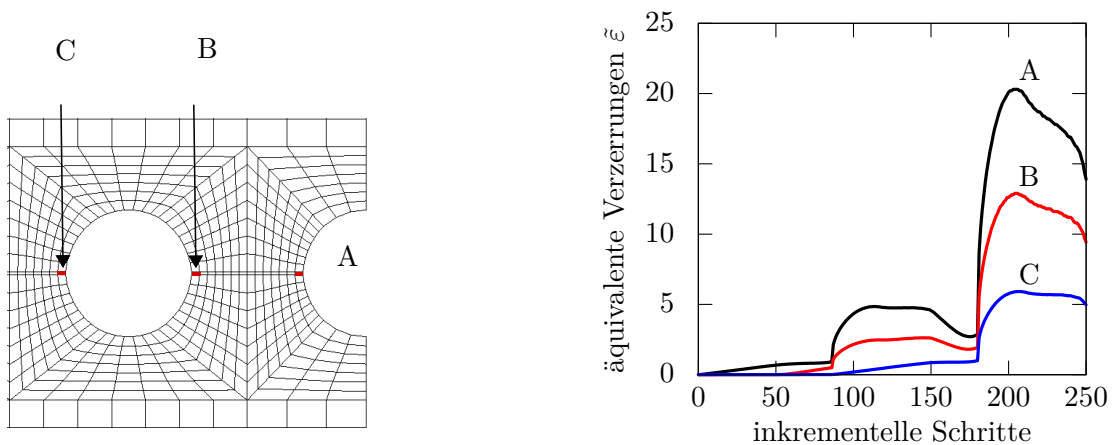




**Abbildung 7.13:** Kontrollregion wandert mit der Prozesszone.

Weshalb sollten nicht immer die größten äquivalenten Verzerrungen den Prozess kontrollieren? Oder die Verzerrungen in einem festgelegten Punkt? Abbildung 7.14 zeigt den Verlauf der äquivalenten Verzerrungen dreier repräsentativer Gaußpunkte in den



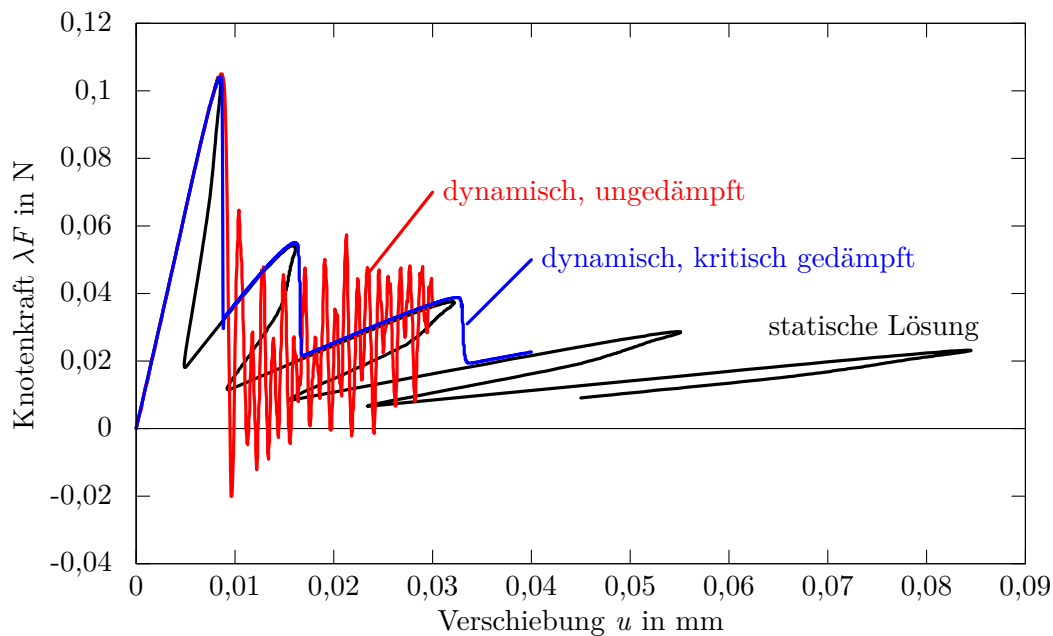


**Abbildung 7.14:** Äquivalente Verzerrungen (bis zum Versagen des dritten Verbindungssegments) jeweils eines repräsentativen Gaußpunktes in den Elementen A, B und C.

Elementen A, B und C. Diese Elemente sind links in einem Ausschnitt aus dem freien Ende des Kragarms rot markiert. Die Verzerrungen im repräsentativen Gaußpunkt von Element A weisen während der dargestellten 250 Lastschritte immer den größten Wert auf. Etwa zwischen den Lastschritten 100 bis 170 und 190 bis 250 eignen sie sich aufgrund ihrer Rückläufigkeit aber nicht als Kontrollparameter. Selbst die Verzerrungen im Element B sind absolut gesehen, wie auch die Verzerrungen aus A, größer als diejenigen von Element C. Dennoch nehmen die äquivalenten Verzerrungen in C während der Lastschritte 100 bis 170 stetig zu und können als Parameter zur Prozesskontrolle herangezogen werden. Ab Inkrementschritt 210 eignen sich allerdings alle dargestellten äquivalenten Verzerrungen nicht mehr als Kontrollparameter. Die Kontrollregion muss für diesen Bereich neu ausgewählt werden.

Eine Alternative zur statischen Berechnung der Gleichgewichtskurven ist die dynamische Ermittlung der Kraft-Verschiebungskurven mit viskoser Dämpfung. Hierfür wird für das Beispiel die Dichte  $\rho = 0,1 \text{ g/mm}^3$  angenommen. Abbildung 7.15 zeigt eine dynamische Analyse, die zusätzlich zu Trägheitseffekten auch Dämpfung berücksichtigt. Um ein Versagen der expliziten dynamischen Berechnung nach Erreichen der Traglast zu vermeiden, werden die beiden Punktlasten am freien Kragarmende durch vorgegebene Verschiebungsinkremente ersetzt. Die Berechnungen erfolgen mit der Zeitschrittweite  $\Delta t = 0,0001 \text{ ms}$ , um unterhalb des kritischen Zeitschritts zu bleiben. Die Verschiebung wird als Rampenlast mit einer Steigung von  $1/100$  aufgebracht. Das entspricht einer Verschiebung von einem Millimeter pro 100 ms.

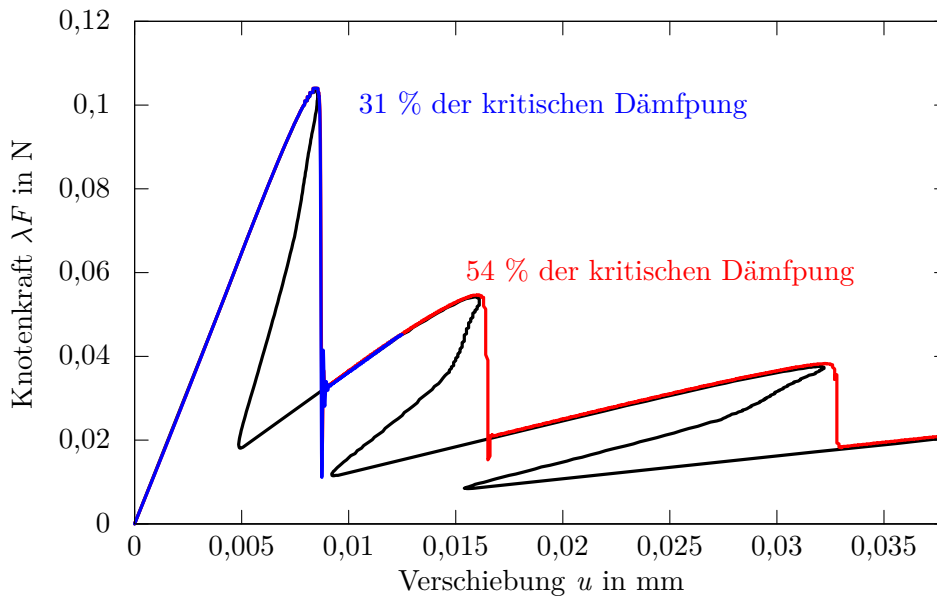
Der schwarze statische Gleichgewichtspfad dient als Referenz für die Kraft-Verschiebungskurven in Abbildung 7.15. In roter Farbe dargestellt ist die ungedämpfte dynamische Lösung. Mit viskoser kritischer Dämpfung wurde die blaue Kurve ermittelt. Of-



**Abbildung 7.15:** Dynamischer Berechnung des perforierten Kragarms. Aufgetragene Knotenkraft am belasteten Knoten in Verschiebungsrichtung. Zeitschritt:  $\Delta t = 0,0001$ .

fensichtlich liefert die ungedämpfte Berechnung Ergebnisse mit starkem, numerischem Rauschen; die Oszillationen um die Gleichgewichtslage nehmen kaum ab. Durch das Aufbringen kritischer Dämpfung werden diese Oszillationen vollständig beseitigt. Erwartungsgemäß kann die explizite dynamische Analyse, gedämpft oder ungedämpft, die in den Verschiebungen rückläufigen Kurventeile nicht abbilden. Unter der ungedämpften Analyse kann der zweite elastische Anstieg der Kurve (zweiter Finger) nicht abgebildet werden. Die dynamische Lösung verbirgt also hier relevante Aussagen über den Gleichgewichtspfad und damit über das Systemverhalten. Abbildung 7.16 zeigt zum Vergleich die Kraft-Verschiebungskurven weiterer Berechnungen, deren Dämpfungsannahmen bei 31 % und 54 % liegen. Die Kurven beginnen wie in den vorangehenden Darstellungen im Ursprung des Koordinatensystems. Eine größere Steigung der Rampenlast führt zum einen zur Überschätzung der Maxima der einzelnen Finger aus der statischen Lösung. Zum anderen überspringen einige Berechnungen, deren Dämpfung unterhalb der kritischen liegt, den Belastungsast des zweiten Fingers und stellen erst den Belastungsast des dritten Fingers wieder dar.

Dynamische Analysen erfordern üblicherweise sehr viele Zeitschritte und sind daher deutlich teurer als statische Berechnungen. Wenngleich dynamische Berechnungen realistische physikalische Ergebnisse liefern, gehen abhängig von der Kontrollmethode einige Informationen über das Systemverhalten verloren.



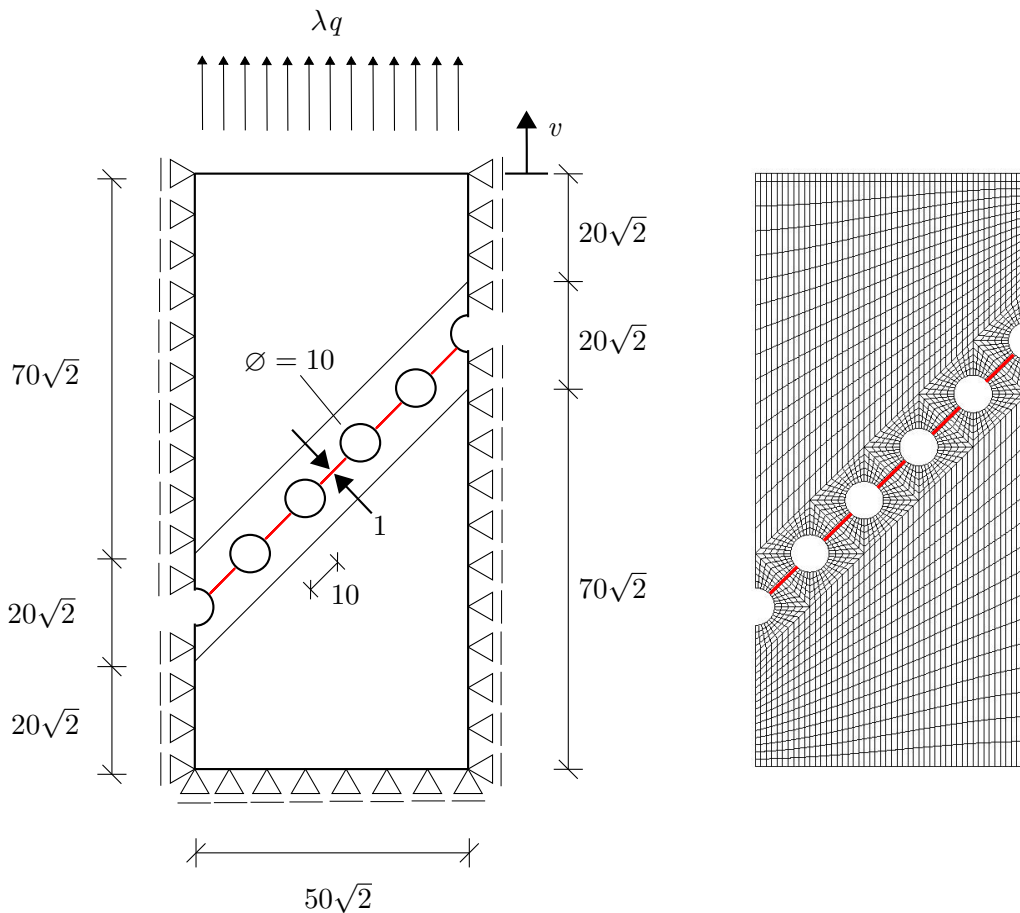
**Abbildung 7.16:** Viskos gedämpfte dynamische Kraft-Verschiebungskurven des perforierten Kragarms im Vergleich zum statischen Gleichgewichtspfad.

## 7.3 Scheibe mit diagonalem Lochband

Ähnlich wie der perforierte Kragarm weist auch die Scheibe mit diagonalem Lochband Löcher über die Breite der Struktur auf. In der Systemskizze in Abbildung 7.17 sind die Abmessungen, die Belastung und die Lagerung der Scheibe angegeben.

Ursprünglich stammt dieses Beispiel aus der Veröffentlichung von NGUYEN (2011), aus dessen Vorlage Geometrie, Elastizitätsmodul  $E = 25000 \text{ N/mm}$  und Querkontraktionszahl  $\nu = 0,2$  übernommen wurden. NGUYEN (2011) verwendet wie auch VERHOOSSEL (2009) Interface-Elemente zur Modellierung einer vorgegebenen Versagensfuge. Diese Schädigungszone wird mit dem in Abschnitt 2.4.2 beschriebenen Elastoschädigungsmaterial modelliert.

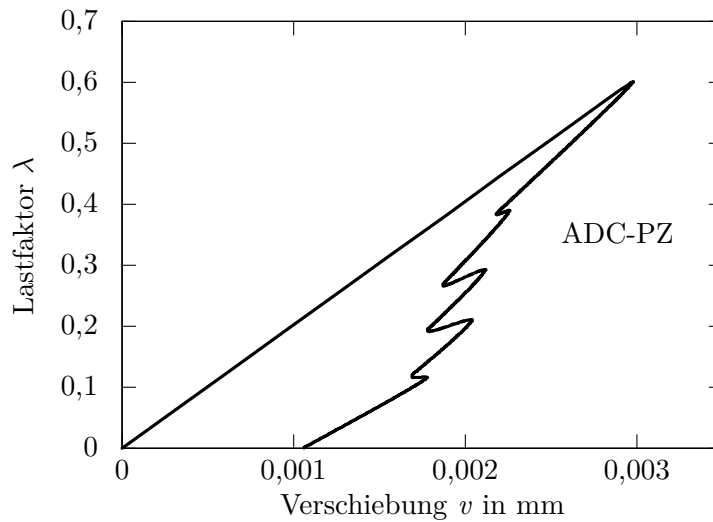
Das Material aus NGUYEN (2011) verhält sich so duktil, dass der Pfad ohne Probleme mit einer Verschiebungskontrolle berechnet werden kann. Ein numerisch anspruchsvolleres Beispiel kann durch spröderes Materialverhalten generiert werden. Aus diesem Grund werden der in Abbildung 7.17 rot markierten Schädigungszone zwei unterschiedlich duktile Materialien zugewiesen. Der Initialwert für Schädigung,  $\kappa_0 = 0,00003$  gilt für beide Varianten. Vollschädigung tritt für das duktilere Material bei  $\kappa_m = 0,005$ , für das sprödere Material bei  $\kappa_m = 0,0009$  ein. Für die übrigen Elemente werden  $\kappa_0 = 2$  und  $\kappa_m = 10$  gewählt. Diese Werte sind so groß, dass dort elastisches Materialverhalten nach St. Venant-Kirchhoff angenommen werden kann. Die Diskretisierung des Systems



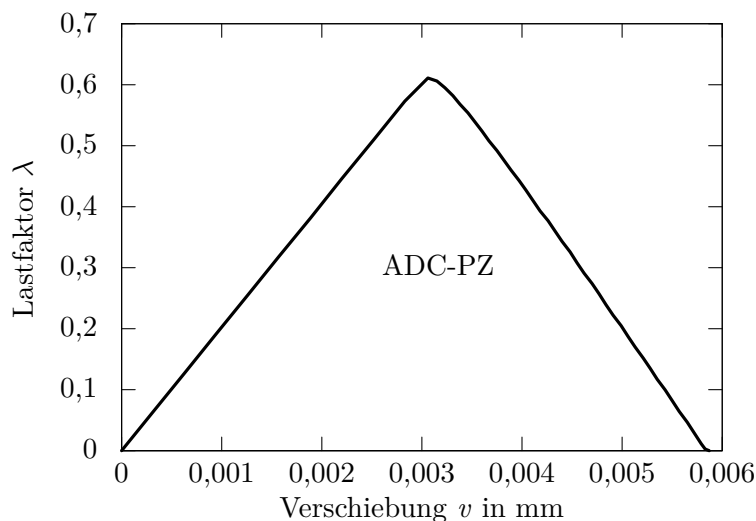
**Abbildung 7.17:** Systemskizze der Scheibe mit diagonalem Lochband (Abmessungen in mm).

erfolgt mit vollintegrierten bilinearen Q1 Verschiebungselementen. Die Elemente der Schädigungsfuge sind  $1 \times 1$  mm groß.

Aus den Gleichgewichtskurven aus den Abbildungen 7.18 und 7.19 geht hervor, dass sich die Eigenschaften der Struktur, besonders im Hinblick auf die Pfadverfolgung, mit der Wahl der Materialparameter stark verändern. Die linear auslaufende Kurve in Abbildung 7.19 ist der linearen Interpolation zwischen zwei berechneten Gleichgewichtspunkten geschuldet. Die Scheibe mit duktilem Material lässt sich problemlos verschiebungskontrolliert zum Versagen führen. Sprödes Verhalten wie in Abbildung 7.18 kann weder kraft- noch verschiebungskontrolliert oder mit einem Bogenlängenverfahren abgebildet werden. Verzerrungskontrolle oder ADC-PZ eignen sich hingegen für die Pfadverfolgung. Der Deformations- und Schädigungsverlauf der Struktur soll anhand von Systemdarstellungen zu den gekennzeichneten Gleichgewichtspunkten aus Abbildung 7.20 nachvollzogen werden. Die einzelnen Systemzustände zu den Gleichgewichtspunkten A bis I können Abbildung 7.21 entnommen werden. Die Farbskala der Schädigung verläuft auch



**Abbildung 7.18:** Gleichgewichtskurve der Scheibe mit diagonalem Lochband: sprödes Materialverhalten.



**Abbildung 7.19:** Gleichgewichtskurve der Scheibe mit diagonalem Lochband: duktileres Materialverhalten.

hier von dunkelblau für die ungeschädigte Struktur bei  $d = 0$  nach rot bei vollständiger Schädigung ( $d = 1$ ).

Das Verhalten der Struktur unterscheidet sich vom vorangehenden Beispiel nur in der Belastung in der Schädigungsfuge. Hier führt Schub zum Versagen und dominiert den Verzerrungsanteil in der Prozesszone. Auf weitere Vergleiche und Darstellungen wird hier aufgrund der Ähnlichkeit der Beispiele verzichtet. Allerdings folgen Auswertungen bezüglich der Anwendbarkeit und Effizienz der untersuchten Kontrollmethoden im

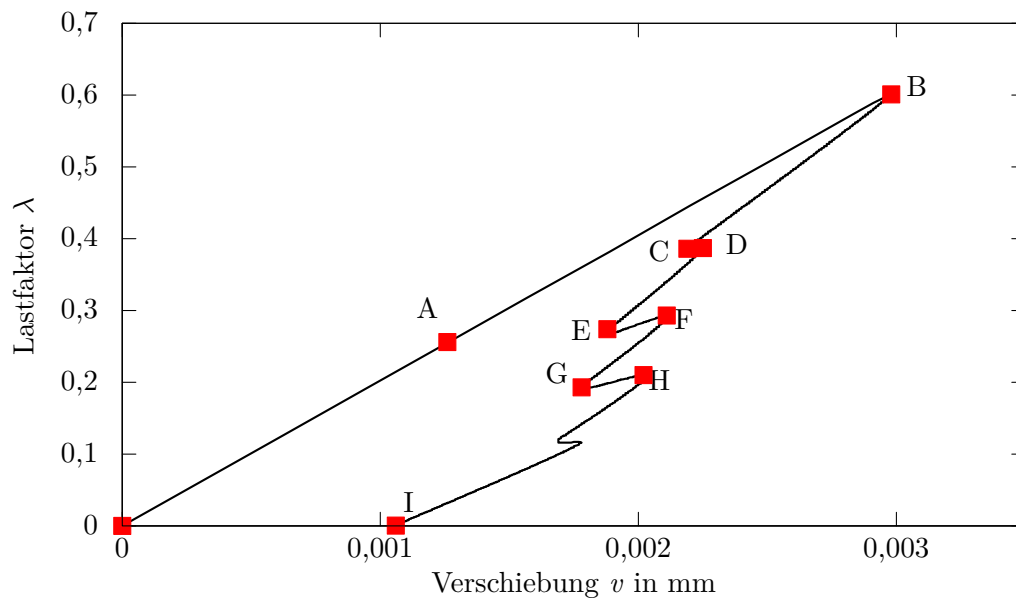


Abbildung 7.20: Gleichgewichtspunkte zu den Deformationsfiguren aus Abbildung 7.21.

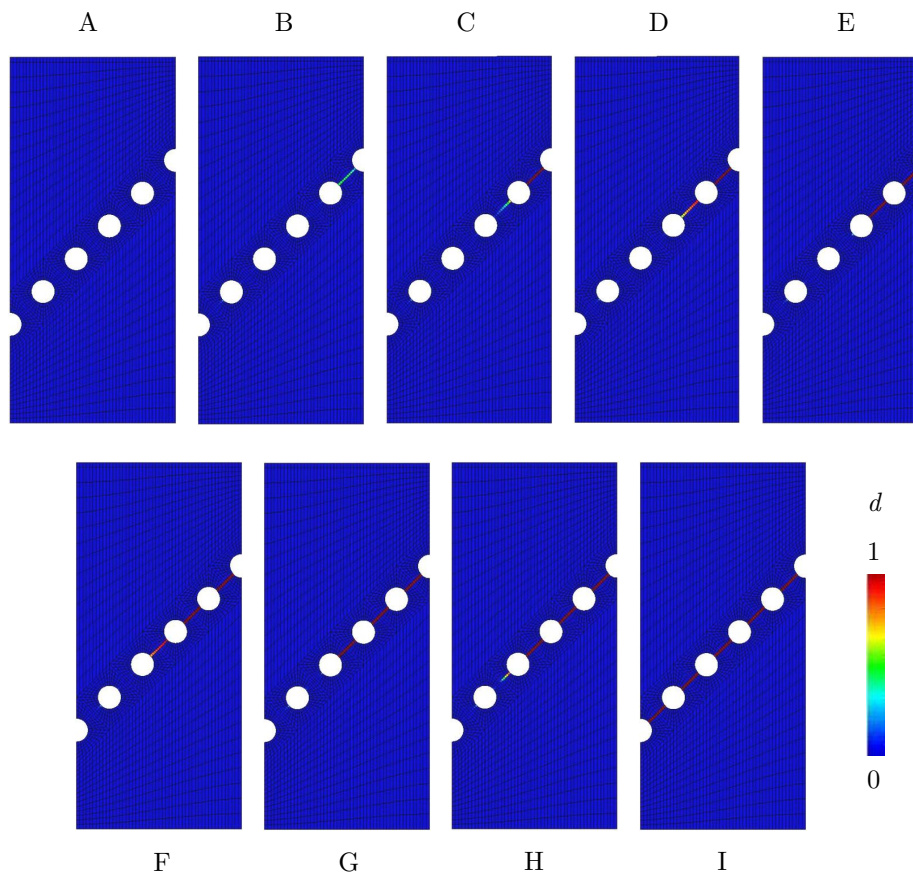
Abschnitt 7.5.2, zu deren Diskussion die Darstellung des Strukturverhaltens und der Gleichgewichtskurven erforderlich sind.

## 7.4 Scheibe mit exzentrischem Loch

In diesem Beispiel wird eine einaxial durch Zug beanspruchte Scheibe mit einem unsymmetrisch platzierten Loch untersucht. Das System wurde bereits von LORENTZ UND BADEL (2004) als Anwendungsbeispiel für den Test ihrer Pfadverfolgungsmethode vorgestellt. Es ist jedoch zu hinterfragen, ob die in dieser Veröffentlichung gewählte Abbruchtoleranz für die Ungleichgewichtskräfte mit  $10^{-2}$  ausreichend genau ist.

Abbildung 7.22 zeigt die Systemskizze des Beispiels mit Lagerung und Belastung durch einen Kraftlastfall. Die Abmessungen und die für spätere Auswertungen erforderlichen Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind hier ebenfalls dargestellt.

Die vertikal belastete Scheibe weist wie das vorangehende Beispiel eine vorgegebene Schädigungszone auf, die LORENTZ UND BADEL (2004) mit kohäsiven Interface-Elementen modellieren. Auch in diesem Beispiel wird das Kontinuumschädigungsmodell nach Abschnitt 2.4.2 verwendet. Für alle Elemente des Systems gilt der Elastizitätsmodul  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$  und die Poissonzahl  $\nu = 0,2$ . Die Schädigungszone soll sich über die in Abbildung 7.22 rot markierte Elementreihe erstrecken. Ausgehend von  $\kappa_0 = 0,00015$  als Initialwert der Schädigung entspricht  $\kappa_m = 0,00357$  einer Bruchenergie



**Abbildung 7.21:** Deformationsstadien der Scheibe mit Lochband zu den Gleichgewichtspunkten A bis I aus Abbildung 7.20.

von  $G_f = 0,1 \text{ N/mm}$ . Die kleinste Elementkante hat dabei die Länge  $h = 17,5 \text{ mm}$ . Die übrigen Elemente können zwar theoretisch schädigen, verhalten sich aber aufgrund der hohen Schädigungswerte  $\kappa_0 = 0,5$  und  $\kappa_m = 1$  elastisch (St. Venant-Kirchhoff-Material).

Auf dem Gleichgewichtspfad der Scheibe mit unsymmetrischem Loch aus Abbildung 7.23 sind die Gleichgewichtspunkte A bis F gekennzeichnet. Die aufgebrachte Kraft  $\lambda q$  ist dabei über die Aufweitung des Lochs mit  $P_1 - P_2$  aufgetragen. Die Gleichgewichtskurve wurde mit ADC-PZ bei einer Schrittweite von  $\Delta \hat{D} = 0,002$  ermittelt. Die zu den gekennzeichneten Gleichgewichtspunkten gehörenden Deformationsstadien der Scheibe sind in Abbildung 7.24 den Buchstaben A bis F zugeordnet.

Bis zum Erreichen des Kraftmaximums in Punkt B entwickeln sich die beiden Risse links und rechts des Lochs symmetrisch. Danach bleibt der linke Riss stehen und nur der rechte entwickelt sich, bis der rechte Rand der Scheibe im Gleichgewichtspunkt C erreicht ist. Wenn alle Elemente der Schädigungszone rechts des Loches vollständig geschädigt sind, weitet sich das geschädigte rechte Rissband auf.



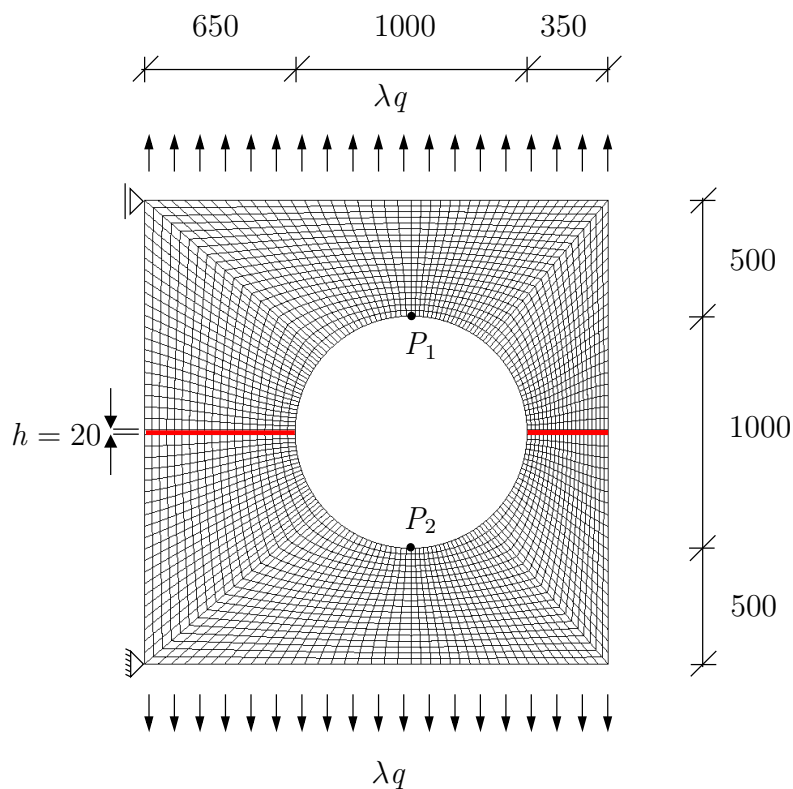


Abbildung 7.22: Scheibe mit unsymmetrischem Loch (Maße in mm).

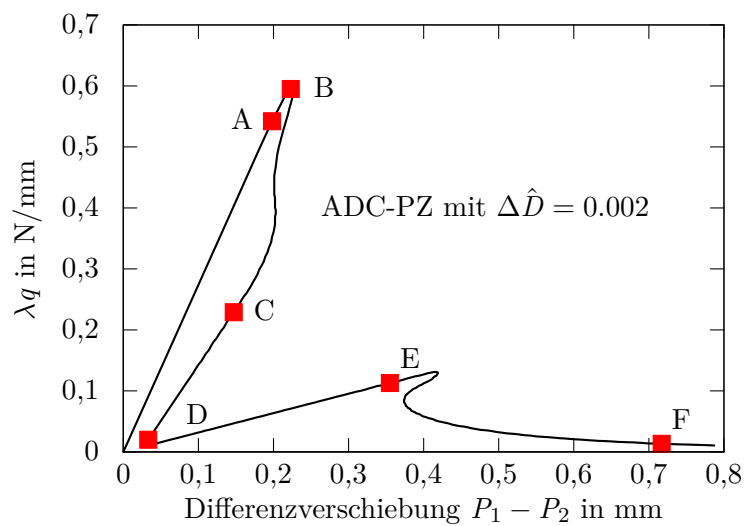
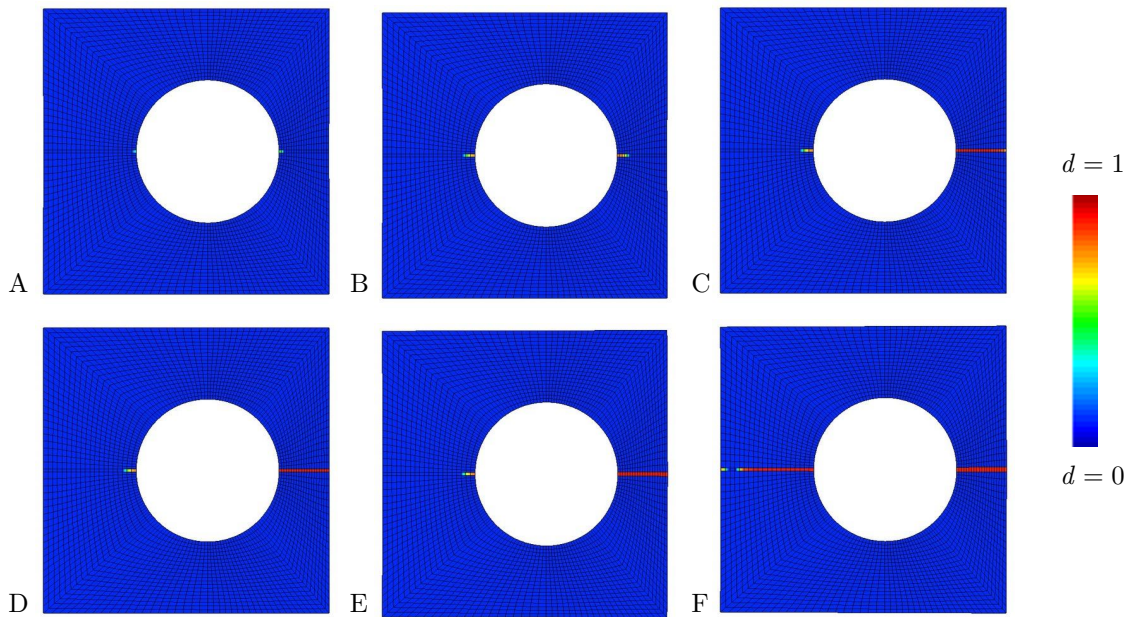


Abbildung 7.23: Randlast  $\lambda q$  aufgetragen über die Differenzverschiebung  $P_1 - P_2$ .

Im darauf folgenden Abschnitt zwischen den Gleichgewichtspunkten D und E findet die elastische Aufweitung des Lochs durch die Zunahme der Differenzverschiebung  $P_1 - P_2$  statt. In diesem Zustand sind alle Elemente des Rissbands rechts des Lochs bereits





**Abbildung 7.24:** Deformationsstadien der Scheibe mit unsymmetrischem Loch zu den Gleichgewichtspunkten aus Abbildung 7.23.

vollgeschädigt, der linke Riss wird aber noch nicht aktiviert. Erst ab Punkt E wandert der Riss durch den linken Flansch der Scheibe zum linken Rand, bis im Punkt F kurz vor dem vollständigen Durchreißen der Struktur die Berechnung abgebrochen wird. LORENTZ UND BADEL (2004) benötigen 841 Inkrementsschritte, um die Kurve bis zum Punkt *E* zu erfassen. Für die Darstellung der glatten Kurve aus Abbildung 7.23 waren unter Verwendung von ADC-PZ 300 Inkremente erforderlich. Die hohe Zahl an Inkrementen ist aber nur dem glatten Verlauf und dem Detaillierungsgrad der Kurve geschuldet. Tatsächlich ist es möglich, den oben dargestellten, vollständigen Pfad mit 54 Inkrementsschritten (Abbruchtoleranz für Konvergenz  $\|\mathbf{R}\| < 10^{-6}$ ) abzubilden. Dadurch gehen allerdings Details des Gleichgewichtspfades verloren, da nur ein Teil der Gleichgewichtspunkte berechnet und dazwischen linear interpoliert wird.

## 7.5 Kategorisierung von strukturmechanischen Beispielen und Bewertung der Kontrollmethoden

In diesem Abschnitt sollen Strukturprobleme für die Anwendung geeigneter Kontrollverfahren in Klassen eingeteilt werden. Für die so identifizierten Problemklassen wird eine Empfehlung passender Pfadverfolgungsmethoden gegeben. Anhand von zwei Beispielen aus dem vorangehenden Abschnitt werden Kontrollmethoden getestet und ihre Effizienz

durch die Anzahl an Lastschritten und Iterationen bewertet. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass viele Strukturen keine a priori bekannten anwachsenden Kraft- oder Verschiebungskomponenten enthalten. Kraft- und Verschiebungskontrolle werden daher in den folgenden Untersuchungen nicht betrachtet.

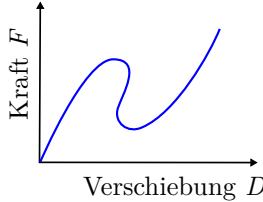
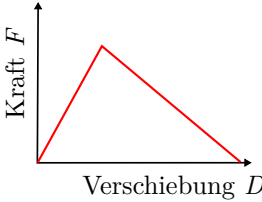
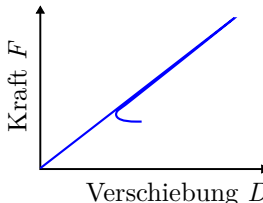
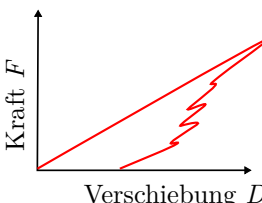
### 7.5.1 Einteilung in Problemklassen

Eine Kategorisierung strukturmechanischer Problemstellungen in Klassen, für die sich bestimmte Pfadverfolgungsmethoden eignen, kann unter verschiedenen Gesichtspunkten geschehen. Häufig wird Strukturverhalten anhand des Verlaufs der Gleichgewichtskurven und des Deformations- beziehungsweise Schädigungsprozesses beurteilt. Daher wird die Klassifizierung hier anhand von Gleichgewichtskurven durchgeführt. Oft weisen Effekte aus elastischem und entfestigendem Materialverhalten ähnliche Eigenschaften im Bezug auf die Pfadverfolgung auf. Aufgrund möglicher elastischer Entlastungen muss der Entfestigung dennoch gesondert Rechnung getragen werden.

Die Untergliederung des elastischen Materialverhaltens soll hier in glatte und nichtglatte Gleichgewichtspfade erfolgen. Diese Eigenschaften ergeben sich aus der Geometrie der untersuchten Struktur. Gemeint sind beispielsweise Pfade, die rückläufige Kraft- und Verschiebungskomponenten oder scharfe Maximalpunkte mit spitzem Winkel zwischen dem aufsteigenden und abfallenden Pfadabschnitt aufweisen. Weitere können Verzweigungspunkte sein, wie sie sich aus dem Beulvorgang von Schalen ergeben.

Phänomene aus entfestigendem Materialverhalten stellen ebenso hohe Anforderungen an die Pfadverfolgung. Im Folgenden wird zwischen duktilem und sprödem Verhalten unterschieden. Gleichgewichtskurven weisen bei duktilem Materialverhalten keine rückläufigen Verschiebung auf. Die Tragfähigkeit nimmt aber ab, was zu Knicken im Gleichgewichtspfad führen kann. Sprödes Materialverhalten kann im Zusammenhang mit Bewehrung oder grober Diskretisierung zu extrem rauen Kurven mit lokalen und globalen Rückläufigkeiten in Kraft und Verschiebung führen. Pfadverfolgungsmethoden verhalten sich im Umgang mit diesen Phänomenen unterschiedlich.

Abbildung 7.25 enthält die Aufteilung in Problemklassen und die grafische Darstellung der Kategorien. Dabei erfolgt die Hauptunterteilung wie bereits beschrieben in elastische und entfestigende Probleme. Elastische Pfade gliedern sich dann in glatte und nichtglatte Kurven, für entfestigende Stoffgesetze wird zwischen duktilem und sprödem Materialverhalten unterschieden. Die Kurven des als duktil eingestuften Materialverhaltens enthalten keine rückläufigen Bereiche – weder lokal noch global. Die Problemklasse des spröden Materialverhaltens kann zusätzlich zu den global rückläufigen Pfadabschnitten gegebenenfalls lokale Rückschläge wie im Beispiel der grob diskretisierten L-Scheibe enthalten.

Elastizität	Kontrollmethoden			Entfestigung
glatter Gleichgewichtspfad (Snap-back) 	✓	AC	✓	duktiles Materialverhalten 
	✓	ADC	✓	
	/	ASC	✓	
	/	ADC-PZ	✓	
	/	DRC	✓	
nicht glatter Gleichgewichtspfad (Verzweigen mit spitzem Winkel) 	n.z.	AC	n.z.	sprödes Materialverhalten 
	✓	ADC	n.z.	
	/	ASC	✓	
	/	ADC-PZ	✓	
	/	DRC	✓	

**Abbildung 7.25:** Einteilung in Problemklassen für die Behandlung mit unterschiedlichen Pfadverfolgungsmethoden.

Diese Klassifizierung wird mit einer Empfehlung zur Wahl der Kontrollmethode in Verbindung gebracht. Diese Empfehlungen haben keinen allgemeingültigen Charakter. Es soll vielmehr eine Einschätzung auf Basis der Erfahrungen des Autors darstellen.

In der Darstellung werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- AC: Bogenlängenkontrolle (arc-length control)
- ADC: Adaptive Verschiebungskontrolle
- ADC-PZ: Adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone
- ASC: Adaptive Verzerrungskontrolle
- DRC: Dissipationsratenkontrolle (rate of dissipation control) (GUTIÉRREZ (2004))

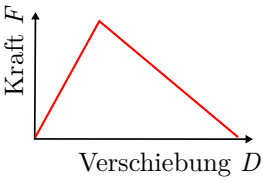

Zur Zeichenerklärung: ein diagonaler Strich bedeutet, dass die Methode nicht konvergieren wird. Die erforderlichen Größen wachsen entweder nicht stetig an, sind in der entsprechenden Berechnung nicht vorhanden oder werden nicht berechnet. Ein Häkchen steht für eine wahrscheinlich zielführende Kontrollgleichung in der zugehörigen Pro-

blemklasse. „n.z.“ ist die Abkürzung für „nicht zuverlässig“. Dies kann bedeuten, dass möglicherweise ab einem kritischen Punkt keine Konvergenz mehr erreicht wird oder sich künstliche Entlastungen ergeben. In den folgenden Absätzen soll nun die Tabelle aus Abbildung 7.25 anhand der Kontrollverfahren erläutert werden.

Die Bogenlängenkontrolle (AC) eignet sich sehr gut für Beispiele, die relativ glatt sind und keine Entlastungen provozieren. Dies trifft zum Beispiel auf elastische Durchschlagprobleme zu. Häufig konvergieren diese Verfahren nicht, wenn sich Maximalpunkte wie Verzweigungsprobleme mit sehr spitzen Winkeln ergeben. Für entfestigendes Materialverhalten ist das Bogenlängenverfahren nicht zuverlässig. Das Bogenlängenverfahren erkennt nicht, ob die ermittelten Gleichgewichtspunkte auf einem Entlastungspfad liegen, was zu künstlichem Entlasten führen kann. Dies wird in Abschnitt 6.2 erläutert und an Beispiel 7.1 gezeigt. In der Regel tritt künstliche Entlastung bei Entfestigung mit lokalen oder globalen Rückläufigkeiten in der Kurve auf. Besonders scharfe Wendungen im Gleichgewichtspfad provozieren dieses Verhalten. Bei sehr duktilem Materialverhalten ohne lokale Rückläufigkeiten kann sich das Bogenlängenverfahren als Kontrollgleichung dennoch gut eignen.

Eine Untergruppe der Bogenlängenverfahren stellen die adaptiven Verschiebungskontrollen dar. Hier gehen einzelne Freiheitsgrade in die Bogenlängengleichung ein, die vorab aufgrund ihrer Inkrementgröße oder ihrer Wachstumseigenschaften oder der Inkrementgröße im Prädiktor ausgewählt werden. Die Methode ist etwas spezifischer als das Bogenlängenverfahren, weil die Kontrollparameter gezielt für den Umgang mit Besonderheiten im Kraft-Verschiebungsdiagramm ausgewählt werden. Dies hängt allerdings stark von den Auswahlkriterien ab. Dennoch gilt für diese Methode im Hinblick auf Entfestigung dieselbe Aussage wie für Bogenlängenverfahren: sie ist nicht immer zuverlässig. Künstliche Entlastung tritt bei eben jenen Methoden auf, die keine Information über die Kontrollrichtung enthalten. Wann be- und entlastende Gleichgewichtspunkte erfasst werden, kann nicht unterschieden werden. Als Beispiel kann eine quadratische Zusatzgleichungen genannt werden, die Entlastungen wie in Abbildung 6.3 hervorruft. Provoziert wird die künstliche Entlastung häufig durch rückläufige Kurvenabschnitte mit abrupten Richtungswechseln. Das Auftreten einer solchen Entlastung hängt mit der Richtung des Prädiktors zusammen. Wenn ein Lastschritt keine Dissipationsenergiezunahme oder die Zunahme der elastischen Energie aufweist, liegt künstliche Entlastung vor. Wird der inkrementelle Schritt mit veränderter Prädiktorrichtung wiederholt, kann wieder ein Gleichgewichtspunkt ermittelt werden, der den Deformationsprozess weiterführt.

Die adaptive Verzerrungskontrolle (ASC) greift auf Geschichtsvariablen zurück, die mit der Wahl eines entfestigenden Stoffgesetzes zusammenhängen. Das Vorgehen ist in Abschnitt 6.4.2 beschrieben. Das Verfahren ist aktuell so implementiert, dass ein entfesti-

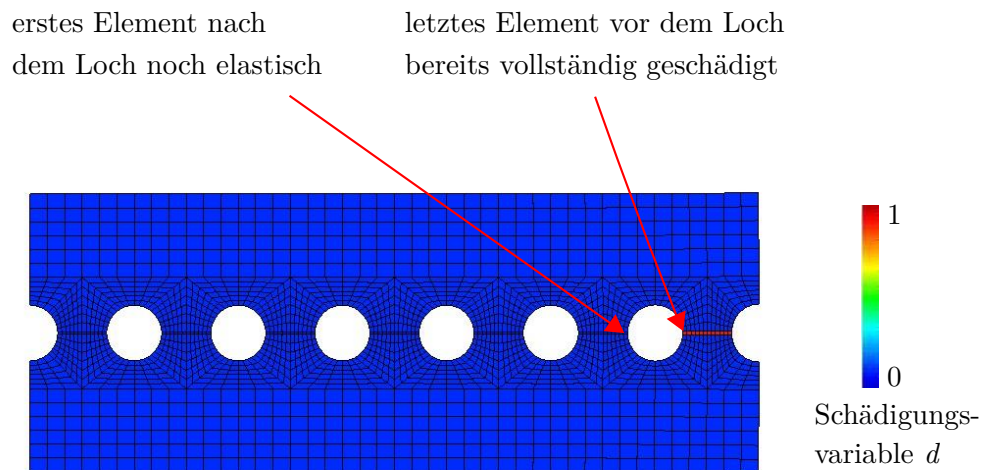
Entfestigung und Elastizität	Kontrollmethoden	
kontinuierliche Schädigung 	DRC	✓
	ASC	✓
	ADC-PZ	✓
dissipative und elastische Pfadabschnitte 	DRC	/
	ASC	✓
	ADC-PZ	✓

**Abbildung 7.26:** Entfestigung in Verbindung mit elastischen Pfadabschnitten.

gendes Stoffgesetz für die Strukturanalyse erforderlich ist. Das gleiche gilt für die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ). Das in jedem Lastschritt von neuem ausgewählte Verschiebungsinkrement wird in der Prozesszone ausgewertet und kann folglich nur für entfestigende Prozesse eingesetzt werden. Ähnlich verhält es sich mit der Dissipationsratenkontrolle nach GUTIÉRREZ (2004). Bei Elastizität liegt keine positive Dissipationsrate vor, also kann für diese Beispielklasse die Dissipationsratenkontrolle (DRC) nicht als Pfadverfolgungsmethode herangezogen werden. Für kontinuierlich schädigende Probleme hingegen eignet sie sich sehr gut.

Entfestigung kann weiterhin in phänomenologisch unterscheidbare Untergruppen aufgeteilt werden. In Abbildung 7.26 werden Gleichgewichtspfade unterschieden, die kontinuierlich schädigen oder neben dissipativen auch rein elastische Pfadabschnitte enthalten. Solche Gleichgewichtspfade können zum Beispiel durch das Einbringen von Löchern in die ansonsten kontinuierlichen Systeme auftreten. Die Aufweitung der Löcher führt in den gezeigten Beispielen zu Pfadabschnitten, in denen die Schädigung im System stagniert und rein elastische Deformationen auftreten. In dieser Übersicht wurden nur Verfahren eingebracht, die Schädigungsprozesse zuverlässig abbilden können. Wie oben bereits beschrieben wurde, ist die Dissipationsratenkontrolle (DRC) für diese elastischen Pfadabschnitte allerdings nicht zielführend. Hierfür sind sowohl die adaptive Verzerungskontrolle (ASC) als auch die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ) geeignet, weil sie sowohl dissipative als auch elastische Deformationen im Kontext eines entfestigenden Stoffgesetzes abdecken können.

Eine Einschränkung dieser Methoden ergibt sich allerdings durch die Größe der elastischen Unterbrechung (hier der Lochdurchmesser im Vergleich zur Elementgröße) in



**Abbildung 7.27:** Problematik bei der Identifikation der Kontrollregion nach Tabelle 6.1.

Kombination mit der Schrittweite der Kontrollgleichung. An einem Beispiel mit vorgegebener Schädigungszone wie in Abbildung 7.27 kann sich das folgende Szenario ergeben: Sind die Elemente vor einem Loch (in Rissrichtung) bereits vollständig geschädigt und die Elemente nach dem Loch noch unverzerrt, wird kein Gaußpunkt für die Auswertung der Kontrollgleichung gefunden. Dies kann jedoch nur unter extrem sprödem Materialverhalten auftreten.

### 7.5.2 Vergleich der Methoden: Konvergenzgeschwindigkeit und Konvergenzeigenschaften

Wie effizient ein Verfahren ist, kann zum Beispiel anhand der erforderlichen Zahl von Inkrementen oder der Summe der Iterationsschritte oder der verbrauchten CPU-Zeit beurteilt werden. In den folgenden Tabellen sind Inkrement- und Iterationszahlen für den perforierten Kragarm (Abschnitt 7.2) und die Scheibe mit diagonalem Lochband (Abschnitt 7.3) angegeben. Der Zusammenhang mit der Abbildbarkeit der Gleichgewichtskurven wird für die Scheibe mit Lochband anschließend diskutiert.

Nach Tabelle 7.1 geht die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ) für das Beispiel des perforierten Kragarms sowohl in der Anzahl der Lastschritte als auch in der Summe aller Iterationsschritte als effizienteste Methode unter den verglichenen Verfahren hervor. Der perforierte Kragarm wurde jeweils bis zur vollständigen Schädigung des dritten Verbindungssegments (von rechts) zwischen den Löchern betrachtet. Die Schrittweite ohne Schrittweitensteuerung wurde so gewählt, dass kein inkrementeller Schritt mit vermindeter Schrittweite aufgrund von Konvergenzproblemen wiederholt werden muss. Für die Rechnungen mit Schrittweitenkontrolle wurden die Schrittwei-

Kontrolltyp	ohne Schrittweitensteuerung	mit Schrittweitensteuerung
ADC	2036 (2901)	keine Konvergenz
Adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle	505 (1155)	keine Konvergenz
ASC	315 (702)	40 (245)
ADC-PZ	192 (540)	38 (239)

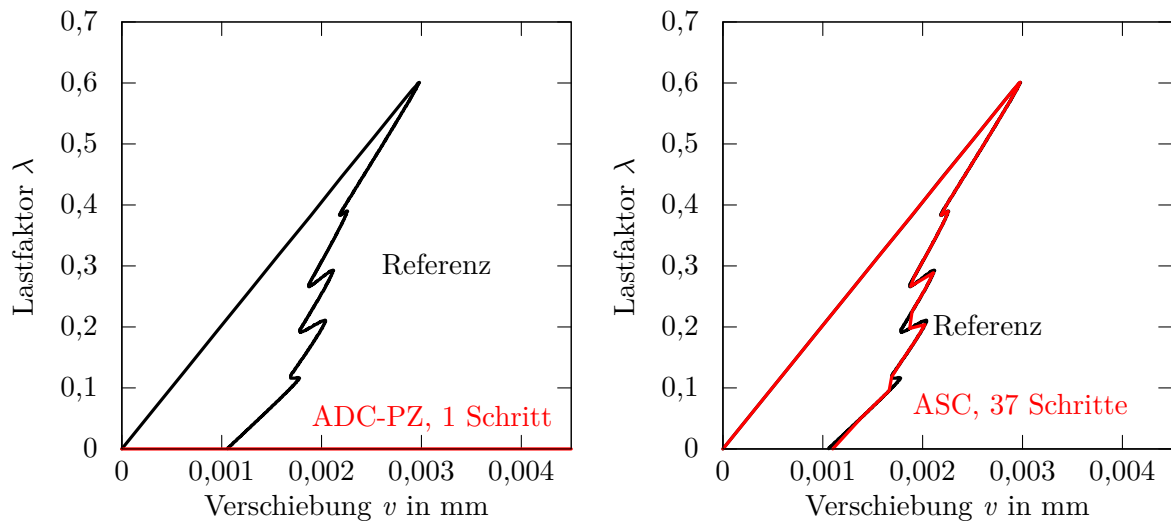
**Tabelle 7.1:** Perforierter Kragarm, Anzahl der Inkremente (Summe der Iterationsschritte) verschiedener Kontrollmethoden.

Kontrolltyp	Iterationen	Inkremente	Schrittweite
ADC-PZ	17	1	0,002
ASC	241	37	0,0001
ADC	63	8	0,0004

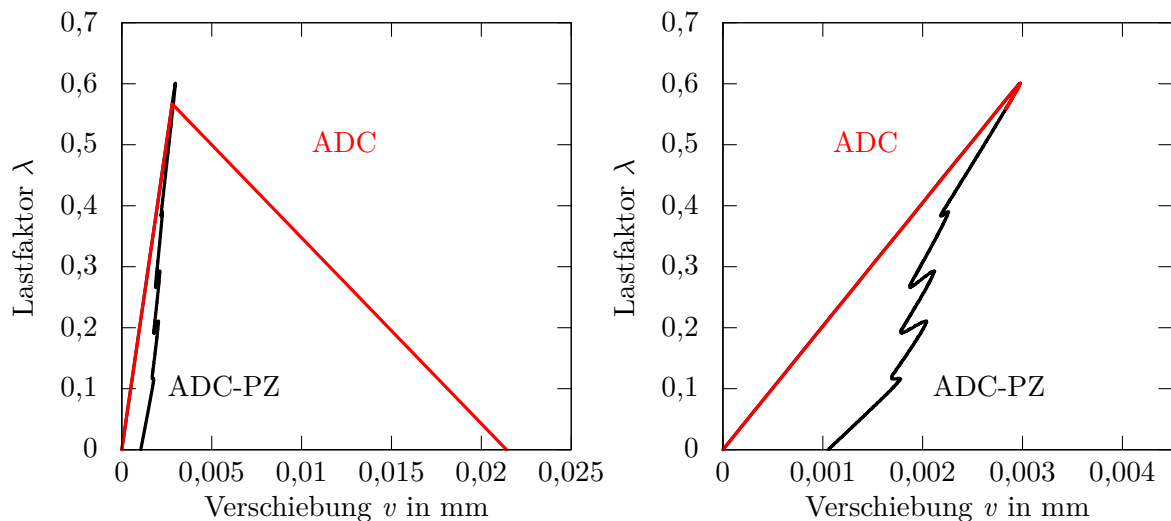
**Tabelle 7.2:** Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, sprödes Material ( $\kappa_m = 0,0009$ ). Möglichst wenige Lastschritte.

ten so gewählt, dass sich möglichst kleine Inkrementzahlen ergeben. Inkrement- und Iterationszahl der adaptiven Verzerrungskontrolle (ASC) mit Schrittweitensteuerung kommen sehr nahe an die Ergebnisse mit ADC-PZ heran. Die im Kapitel 6.4.1 diskutierte adaptiv beschränkte Bogenlängenkontrolle, die bezüglich der Schrittweite sehr empfindlich ist, erreicht ohne Schrittweitensteuerung akzeptable Inkrementzahlen, konvergiert aber mit adaptierter Schrittweite nicht mehr. Selbiges gilt für die adaptive Verschiebungskontrolle. Hinzu kommt, dass die Zahl erforderlicher Inkremente und Iterationen weit über den Vergleichswerten der anderen Methoden liegt.

Im Vergleich zu Tabelle 7.1 gehen aus Tabelle 7.2 für die Scheibe mit diagonalem Lochband deutlich kleinere Iterations- und Inkrementzahlen hervor. Es bleibt dabei aber auch zu erwähnen, dass die Länge des möglichen Schädigungsbereichs hier wesentlich kürzer ist. Die Tendenz der Ergebnisse dieser Tabelle unterstreicht dennoch die aus dem vorangehenden Beispiel gewonnenen Erkenntnisse. Die adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle entfällt in dieser Darstellung aufgrund ihrer Schrittweitempfindlichkeit. Auch in dieser Tabelle ist ADC-PZ sowohl in der Anzahl der Iterationen als auch in den Lastschritten klar an der Spitze. Mit nur einem Inkrement konvergiert das Verfahren zwar, der Gleichgewichtspfad verliert allerdings jede Aussagekraft (siehe hierzu Abbildung 7.28 links). Die Ergebnisse aus der adaptiven Verzerrungskontrolle erfordern zwar deutlich mehr Inkremente und Iterationsschleifen, liefern dafür aber einen sinnvollen Gleichgewichtspfad (Abbildung 7.28 rechts). Das Deformations- und Schädigungsbild, welches sich für das Postprocessing ergibt, ist dennoch in beiden Fällen gleich, nämlich vollständig geschädigt.



**Abbildung 7.28:** Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 1338 Schritte. In Rot: links ADC-PZ in einem Schritt, rechts ASC mit 37 Schritten.



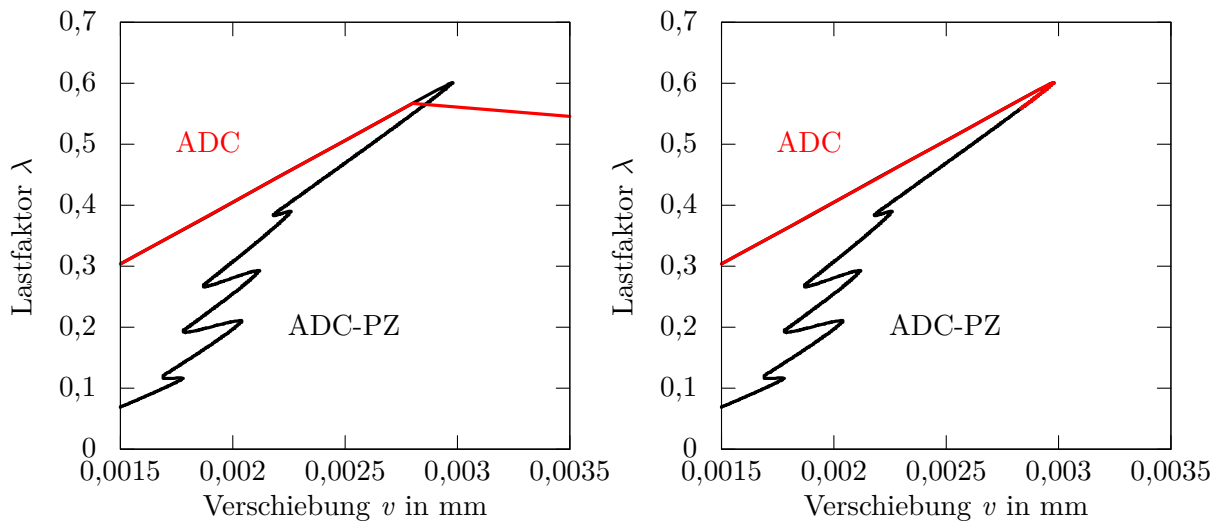
**Abbildung 7.29:** Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 1338 Schritte. In Rot: links ADC mit Schrittweite 0,0004, rechts: ADC mit Schrittweite 0,0001.

Aus dieser Gegenüberstellung kann im Wesentlichen die folgende Erkenntnis gewonnen werden: ADC-PZ lässt zwar zu, in einem Schritt Strukturversagen herbeizuführen, es ist aber fragwürdig, ob dabei dem pfadabhängigen Materialverhalten Rechnung getragen wird. Der Algorithmus ist offenbar nicht an die Effekte in der Struktur gekoppelt und damit in seiner Schrittweite mehr an die Geometrie des Gleichgewichtspfad gebunden als an das tatsächliche Strukturverhalten. Dies trifft allerdings auf einige Pfadverfolgungsmethoden zu.



Kontrolltyp	Iterationen	Inkmente	Schrittweite
ADC-PZ	2847	1338	0,0001
ASC	206	46	$1e^{-9}$
ADC	(1706) Konvergenzverlust	(1338) Konvergenzverlust	0,0001

**Tabelle 7.3:** Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, sprödes Material ( $\kappa_m = 0,0009$ ). Beliebig große Anzahl an Lastschritten. Schrittweite zur Darstellung detaillierter Pfade gewählt.



**Abbildung 7.30:** Ausschnitte aus Abbildung 7.29.

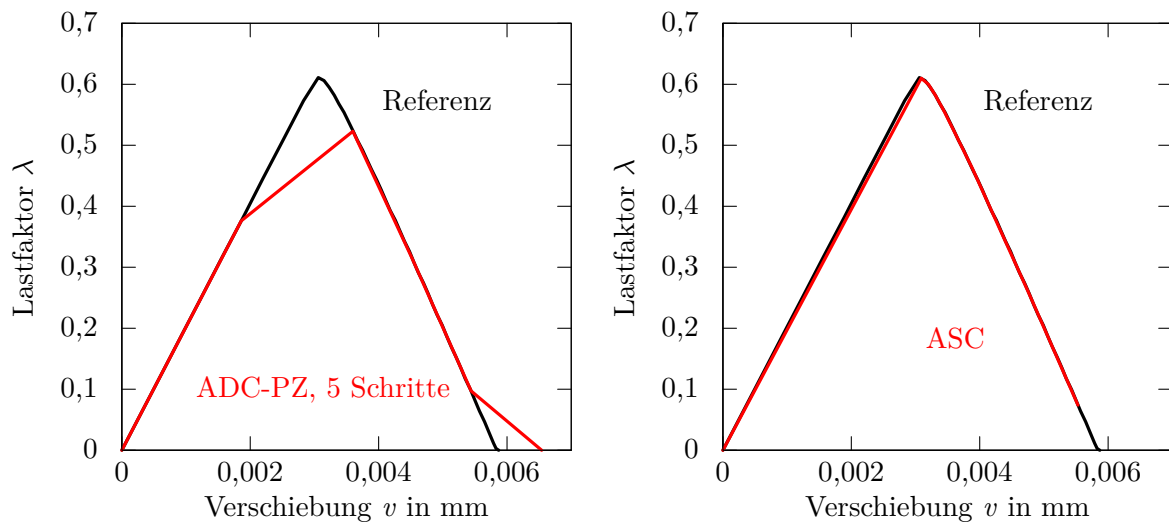
Wie aus Abbildung 7.29 links hervorgeht, lässt sich der Gleichgewichtspfad auch mit der sehr geringen Inkrementzahl der adaptiven Verschiebungskontrolle (ADC) aus Tabelle 7.2 nicht abbilden. Die Erhöhung der Inkrementzahl bei kleinerer Schrittweite von ADC führt zu Konvergenzversagen (Abbildung 7.29 rechts, ADC aus Tabelle 7.3). Detailausschnitte der Kurven aus Abbildung 7.29 sind in Abbildung 7.30 zur Veranschaulichung ergänzt.

Die Werte für ADC-PZ aus Tabelle 7.3 geben die Werte der sehr fein aufgelösten Referenzkurve für das spröde Material an. ASC mit 46 Schritten gibt die Referenzkurve mit hoher Genauigkeit wieder und ist deshalb in keinem Graphen dargestellt. Die Untersuchungen am Beispiel der Scheibe mit diagonalem Lochband für sprödes Materialverhalten zeigen, dass nur wenige Methoden, ASC und ADC-PZ, den Gleichgewichtspfad abbilden können, ohne Schiffbruch zu erleiden. Ein Vergleich der Iterationszahlen zur Beurteilung von Effizienz aller Methoden bleibt hier deshalb aus.

Für das duktile Material sind in Tabelle 7.4 die kleinstmöglichen Inkrementzahlen zusammengefasst. Die Schrittweiten und die Summe der Inkmente aus Tabellen 7.3 und

Kontrolltyp	Iterationen	Inkmente	Schrittweite
ADC-PZ	43	5	0,01
ASC	32	9	0,0001
ADC	30	8	0,001

**Tabelle 7.4:** Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, duktilen Material ( $\kappa_m = 0,005$ ). Möglichst wenige Lastschritte.



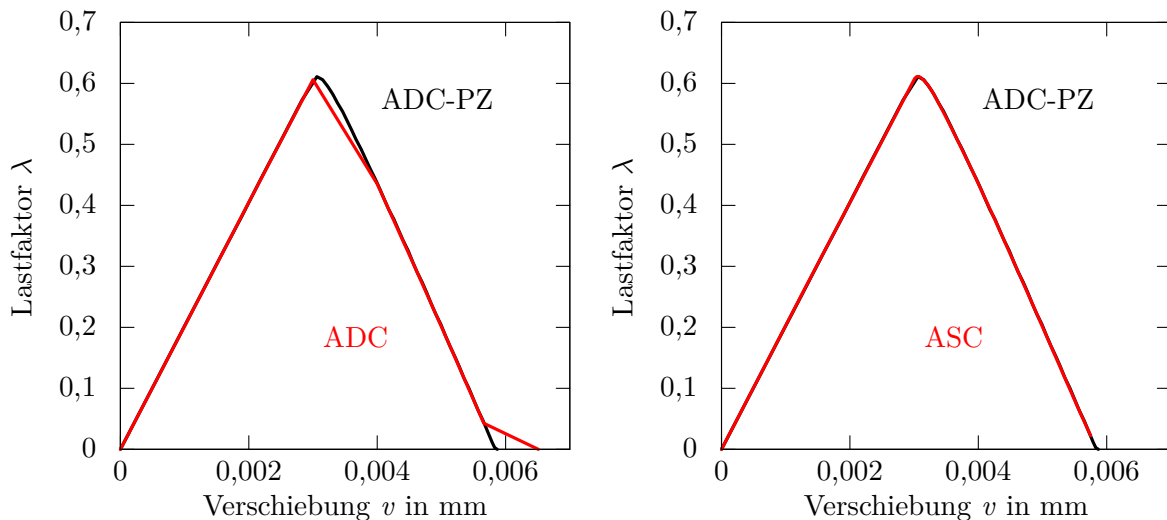
**Abbildung 7.31:** Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 49 Schritte. In Rot: ADC-PZ mit 5 Schritten, rechts: ASC mit 9 Schritten.

7.4 können aufgrund der Andersartigkeit der Kurven des spröden und des duktilen Materials nicht verglichen werden. Die vom stark rückläufige Gleichgewichtspfad unter sprödem Materialverhalten eingenommene Gesamtverschiebung ist deutlich geringer als diejenige des duktilen Materials. Allerdings ist die Erfassung des Pfades unter sprödem Materialverhalten deutlich komplexer.

ADC-PZ aus Tabelle 7.5 liefert einen glatten Gleichgewichtspfad mit 49 Inkrement-schritten, der als Referenzkurve des duktilen Materialverhaltens dient. Obwohl ADC-PZ in Tabelle 7.4 kleinere Inkrementzahlen aufweist als ASC und ADC, ist die Anzahl der Iterationen in Summe größer. ADC-PZ schneidet Teile des Gleichgewichtspfades ab (Abbildung 7.31 links) und gibt ihn nicht genau wieder. Mit nur 9 Inkrementen kann ASC den Pfad besser abbilden (Abbildung 7.31 rechts) und benötigt hierfür auch eine geringere Zahl an Iterationen. Eine zufällig gewählte Verkleinerung der Schrittweite einhergehend mit der Erhöhung der inkrementellen Schritte entsprechend den Angaben aus Tabelle 7.5 führt zu der in Abbildung 7.32 dargestellten Verbesserung der Darstellung des Gleichgewichtspfades.

Kontrolltyp	Iterationen	Inkmente	Schrittweite
ADC-PZ	130	49	0,0001
ASC	107	31	$1e^{-9}$
ADC	160	80	0,0001

**Tabelle 7.5:** Inkrement- und Iterationsanzahl der Scheibe mit diagonalem Lochband, duktiles Material ( $\kappa_m = 0,005$ ). Beliebige Anzahl an Lastschritten. Schrittweite zur Darstellung detaillierter Pfade gewählt.



**Abbildung 7.32:** Schwarze Referenzkurve: ADC-PZ, 49 Schritte. In Rot: links ADC mit 8 Schritten, rechts: ASC mit 31 Schritten.

Im Prinzip unterstreichen auch diese Ergebnisse die Einschätzungen des vorangehenden Abschnitts. Für das Beispiel der Scheibe mit diagonalem Lochband wurden das zylindrische Bogenlängenverfahren und das adaptiv eingeschränkte Bogenlängenverfahren nicht mehr betrachtet, weil beide Verfahren die Gleichgewichtskurve des perforierten Kragarms nicht zuverlässig abbilden konnten. Für das Bogenlängenverfahren war entweder die künstliche Entlastung oder Konvergenzverlust aufgetreten, was auch in anderen Beispielen bereits beobachtet wurde. Das adaptiv eingeschränkte Bogenlängenverfahren erwies sich in an einigen Beispielen als äußerst schrittweitenempfindlich und ineffizient. ADC (*Maximum*) wurde in die aktuelle Untersuchung dennoch aufgenommen, weil es in Verbindung mit Schädigung durch das Verfahren von GEERS (1999a) als Kontrollmethode interessant erscheint. Am Beispiel des perforierten Kragarms erwies es sich durch künstliches Entlasten als unzuverlässig, bei der Scheibe mit diagonalem Lochband mit duktilem Materialverhalten aber als effizient und anwendbar.

Als Résumé der Effizienz- und Anwendbarkeitsstudie kann zudem Folgendes festgehalten werden: ASC und ADC-PZ haben sich als robuste und effiziente Kontrollmethoden

präsentiert. Beide Verfahren bilden Strukturverhalten und Gleichgewichtspfade bis zum gewünschten Schädigungszustand ab. In der Regel liefert eine Berechnung mit ADC-PZ eine etwas geringere Anzahl an Iterationsschritten als ADC. Natürlich gibt es hierfür auch Ausnahmen. Es bleibt zu überlegen, ob eine zu starke Reduktion der Inkrement-schritte im Bezug auf den Detaillierungsgrad des Gleichgewichtspfades sinnvoll ist oder ob zu viele Informationen verloren gehen. Der Umgang mit dieser Frage soll hier den Interessen des Anwenders überlassen bleiben.

---

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Mit dem übergeordneten Ziel, effiziente und robuste Pfadverfolgungsmethoden für entfestigendes Strukturverhalten zu entwickeln, wurden im Rahmen dieser Arbeit Eigenschaften von Gleichgewichtspfaden beschrieben und daraus Kriterien für Kontrollmethoden abgeleitet.

Sowohl für reale Experimente als auch für numerische Simulationen erfolgt eine klare Trennung von Lastfall und Kontrollparameter. Von der Wahl dieser Kontrollparameter hängen die Konvergenzeigenschaften der statischen Analyse und die Entwicklung dynamischer Effekte eines quasistatischen Experiments ab. Bei der Beschreibung der Eigenschaften der Gleichgewichtskurven handelt es sich in erster Linie um die Kennzeichnung der Unterschiede zwischen elastischem und entfestigendem Strukturverhalten. Daraus wird abgeleitet, weshalb manche Methoden für die Kontrolle von Strukturproblemen mit elastischem Verhalten geeignet sind, bei Entfestigung aber versagen. Im Hinblick auf die Pfadverfolgung unterscheidet sich Entfestigung von elastischem Strukturverhalten durch eine unendliche Zahl von möglichen Entlastungszuständen. Sie entstehen durch pfadabhängige Phänomene wie negative Steifigkeiten nach Schädigungsbeginn.

Die durch inkrementell iterative Pfadverfolgungsmethoden ermittelten Schnittpunkte aus Zusatzgleichung und Gleichgewichtspunkten setzen sich zu einem Gleichgewichtspfad zusammen. Unter Entfestigung können dabei ganze Schnittbereiche entstehen. Um die Pfadverfolgungsrichtung festzulegen, muss Eindeutigkeit in diesen Schnittpunkten gewährleistet sein. Eine Kontrollmethode, die eine Menge von Schnittpunkten mit dem Gleichgewichtspfad aufweist, kann zu künstlichen Entlastungen führen. Bei der Verwendung des konsistent linearisierten Bogenlängenverfahrens konnte beispielsweise ein

Umkehren auf dem elastischen Pfad und künstliches Entlasten im Fall entfestigenden Strukturverhaltens beobachtet werden.

Aus der Forderung der Eindeutigkeit folgt die Notwendigkeit einer Formulierung der Richtungsvorgabe der Kontrollmethode für den Deformationsprozess der Struktur. Hierfür soll die Fläche unter der Gleichgewichtskurve maximiert werden. Für elastisches Materialverhalten bedeutet das in jedem Schritt die Maximierung der elastischen Energie. Bei Entfestigung muss entweder die dissipative Energie oder die elastische Energie zunehmen. Künstliche Entlastung resultiert aus der Abnahme der elastischen Energie bei konstant bleibender Dissipationsenergie und stellt ein zentrales Thema in dieser Arbeit dar.

Stetig wachsende Kontrollparameter mit physikalischer Bedeutung können einen Schädigungsprozess vollständig abbilden. Wie bei komplexen Problemen mit elastischem Materialverhalten ist es auch für Entfestigung häufig nicht möglich, monoton wachsende Parameter zu identifizieren. Um diese Problematik zu umgehen, liegt der Fokus der Arbeit auf selbst-adaptierenden Verfahren, die kein Eingreifen des Nutzers erfordern. Stetig wachsende Kontrollparameter mit physikalischer Bedeutung können Deformations- und Schädigungsprozesse vollständig abbilden. Wie bei komplexen Problemen mit elastischem Materialverhalten ist es auch für Entfestigung häufig nicht möglich, monoton wachsende Parameter zu identifizieren. Anstelle einer festgelegten Kontrollgröße werden dann ständig wechselnde Parameter in einem adaptiven Verfahren ausgewählt. Im Rahmen der Beschreibung von Gleichgewichtspfaden von Strukturen mit elastischem Materialverhalten werden drei modifizierte, zylindrische Bogenlängenverfahren vorgestellt. Hierfür werden aus der Bogenlängengleichung Verschiebungsinkremente als Kontrollparameter ausgewählt. Als effizientestes Verfahren hat sich die adaptive Verschiebungskontrolle *Maximum* herausgestellt. In diesem Kontrollverfahren geht das maximale Verschiebungsinkrement des vorangehenden Lastschritts als einzelner Kontrollparameter quadratisch in die Zusatzgleichung ein. Für elastisches Strukturverhalten ist diese Methode effizient und zuverlässig. Im Zusammenhang mit Entfestigung konnte aber in einigen Beispielen künstliches Entlasten beobachtet werden.

Der Schwerpunkt der vorgestellten Methoden bei entfestigendem Strukturverhalten liegt auf der Identifikation einer Kontrollregion in der Prozesszone. Die äquivalenten Verzerrungen aller Gaußpunkte werden überwacht und mit Kriterien zur Bestimmung der Kontrollregion entsprechend den Abschnitten 6.4.1 beziehungsweise 6.4.3 abgeglichen. Der Kontrollparameter wird anschließend in der Kontrollregion ausgewertet.

Eine Einschränkung der zylindrischen Bogenlängengleichung hin zu fortschreitender Schädigung erfolgt über die Multiplikation mit dem Inkrement der äquivalenten Verzerrungen, das im Gaußpunkt der Kontrollregion ausgewertet wird. Diese Methode wird als adaptiv eingeschränkte Bogenlängenkontrolle beschrieben und erfordert hohe Re-

chenzeiten. Die adaptive Verzerrungskontrolle (ASC) hingegen, in der die äquivalenten Verzerrungen am Gaußpunkt der Kontrollregion kontrolliert werden, hat sich in allen Beispielen als sehr zuverlässig und effizient erwiesen. In der adaptiven Verzerrungskontrolle sind Kontrollgröße und der Parameter zur Identifikation der Kontrollregion identisch und direkt mit dem Schädigungsprozess verbunden.

Die adaptive Verschiebungskontrolle in der Prozesszone (ADC-PZ) trennt die Auswahl von Kontrollparameter und Kontrollregion. Die Methode beschreibt eine Verschiebungskontrolle des maximalen Inkrements der Elementverschiebungen in der Kontrollregion. Die Formulierung ist bis auf das Auswahlkriterium der Kontrollregion vom Schädigungsprozess entkoppelt. Daraus ergeben sich zwei wesentliche Vorteile gegenüber ASC: Die Zusatzgleichung selbst und ihre Ableitungen für die Linearisierung sind einfach umzusetzen und sie hängen nicht direkt vom gewählten Schädigungsmechanismus beziehungsweise den äquivalenten Verzerrungen ab.

Beide Verfahren, ASC und ADC-PZ, weisen in den numerischen Beispielen wesentliche Verbesserungen im Bezug auf die Rechengeschwindigkeit gegenüber vergleichbar einsetzfähigen Methoden auf und vermeiden künstliche Entlastung in allen untersuchten Fällen.

## 8.2 Ausblick

Im Folgenden werden mehrere Ansätze für die Weiterentwicklung der bestehenden und vorgestellten Pfadverfolgungsmethoden skizziert. Im Wesentlichen schließt das die Auswahlmethoden für ASC und ADC-PZ und Kombinationsmöglichkeiten mit existierenden Methoden ein.

Aufbauend auf den vorgestellten adaptiven Methoden stellt eine Kombination einer dieser Methoden mit einem Potentialoptimierungsverfahren eine interessante Erweiterung dar. Klassische Pfadverfolgungsmethoden sind, außer durch zufällige Pfadwechsel, nicht in der Lage, isolierte Pfade aufzuspüren. Für elastisches Strukturverhalten können über Optimierungsverfahren, wie es von SPRENG (2010) vorgestellt wurde, stabile Gleichgewichtspunkte ermittelt werden. Ein Startpunkt auf dem isolierten Pfad, der durch ein Optimierungsverfahren ermittelt wurde, kann als Einstieg für die Pfadermittlung durch inkrementell iterative Methoden dienen.

Augenblicklich wird für alle Beispiele die nichtlineare Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  verwendet, ohne Stabilität zu untersuchen. Die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften dünnwandiger Strukturen mit den adaptiven Pfadverfolgungsmethoden könnte Aufschluss über das Verhalten der vorgestellten Methoden im Umgang mit diesen Problem-

stellungen geben. Zusätzlich könnte in Verbindung mit den vorgestellten Algorithmen Stabilität im Zusammenhang mit Schädigung betrachtet werden.

Eine hilfreiche Weiterentwicklung der adaptiven Verfahren für Entfestigung kann durch eine neue Formulierung zur Identifikation der Prozesszone geschaffen werden. Bisher ist die Zusatzgleichung der ASC und auch die Festlegung der Kontrollregion bei ADC-PZ abhängig von der Wahl der äquivalenten Verzerrungen. Eine vom Schädigungsmechanismus unabhängige Festlegung der Kontrollregion würde Strukturanalysen mit ASC und ADC-PZ unter weiteren Schädigungsmodellen zulassen.

Die Vorhersage des Strukturverhaltens als Basis für die Auswahl der Kontrollmethode für den folgenden Lastschritt beruht in den meisten Fällen auf den Beobachtungen der vorangehenden Inkremente. Die Untersuchung der Eigenwerte beziehungsweise der Eigenformen der Struktur im jeweiligen Lastschritt könnte eine zuverlässigere Basis für diese Auswahl bieten. Aus dem gewählten Eigenvektor kann der dominante Freiheitsgrad für das Folgeinkrement unter ADC-PZ beziehungsweise unter einer Verschiebungskontrolle identifiziert werden.



---

# Literaturverzeichnis

- [ABAQUS 2011] ABAQUS, Dassault Systèmes Simulia C.: Abaqus 6.11 documentation., 2011. – URL [http://caedoc.hlr.de/abaqus/Documentation/docs/v6.11/pdf\\_books/ANALYSIS\\_2.pdf](http://caedoc.hlr.de/abaqus/Documentation/docs/v6.11/pdf_books/ANALYSIS_2.pdf)
- [Altenbach und Altenbach 1994] Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994
- [Argyris und Mlejnek 1986] Argyris, J.; Mlejnek, H.-P.: *Die Methode der finiten Elemente*. Bd. Band I. Friedr. Vieweg & Sohn, Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1986
- [Argyris 1965] Argyris, J. H.: *Continua and discontinua*. Wright-Patterson U.S. A.F. Base, Ohio : Opening Address to the International Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, October 1965
- [Asmolovskiy u. a. 2013] Asmolovskiy, N.; Tkachuk, A.; Bischoff, M.: Numerical approaches to stability analysis based on load imperfections. In: *Engineering Computations* eingereicht (2013)
- [Batoz und Dhatt 1979] Batoz, J.-L.; Dhatt, G.: Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), S. 1262–1267
- [Bažant 1976] Bažant, Z. P.: Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. In: *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 102 (1976), S. 331–334
- [Bažant und Cedolin 1991] Bažant, Z. P.; Cedolin, L.: *Inelastic, damage, and fracture theories*. Oxford University Press, New York, USA, 1991

- [Bažant und Oh 1983] Bažant, Z.P.; Oh, B.H.: Crack band theory for fracture of concrete. In: *Materials and Structures* 16 (1983), S. 155–177
- [Belytschko u. a. 2006] Belytschko, T.; L., Wing K.; Moran, B.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2006
- [Bergan 1978] Bergan, P.G.: Solution techniques for non-linear finite element problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), S. 1677–1696
- [Bischoff und Ramm 2012] Bischoff, M.; Ramm, E.: *Vorlesungsmanuskript zu Nichtlineare Finite Elemente*. Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart (Veranst.), 2012
- [Bonet und Wood 2008] Bonet, J.; Wood, R. D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2008
- [Brendel 1979] Brendel, Bernhard: *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1979
- [Cardoso und Fonseca 2007] Cardoso, E. L.; Fonseca, J. S. O.: The GDC method as an orthogonal arc-length method. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 23 (2007), S. 263–271
- [Carol u. a. 1994] Carol, I.; Rizzi, E.; Willam, K. J.: A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. In: *International Journal for Solids and Structures* 31 (1994), S. 2835–2865
- [Carpinteri und Colombo 1989] Carpinteri, A.; Colombo, G.: Numerical Analysis of Catastrophic Softening Behaviour (Snap-Back Instability). In: *Computers and Structures* 31 (1989), S. 607–636
- [Carrera 1994] Carrera, E.: A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. In: *Computers and Structures* 2 (1994), S. 217–229
- [Chaboche 1988] Chaboche, J. L.: Continuum damage mechanics: Part I - general concepts, Part II - Damage growth, crack initiation and crack growth. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 59–72
- [Chen und Schreyer 1990] Chen, Z.; Schreyer, H. L.: A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control. In: *Computers and Structures* 37 (1990), S. 1043–1050

- [Chen und Schreyer 1991] Chen, Z.; Schreyer, H. L.: Secant structural solution strategies under element constraint for incremental damage. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 90 (1991), S. 869–884
- [Crisfield 1981] Crisfield, M. A.: A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. In: *Computers and Structures* 13 (1981), S. 55–62
- [Crisfield 1983] Crisfield, M. A.: An arc-length method including line searches and accelerations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), S. 1269–1289
- [de Borst 1986] de Borst, R.: *Non-linear analysis of frictional materials*, Technische Universität Delft, Niederlande, Dissertation, 1986
- [de Borst 1987] de Borst, R.: Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. In: *Computers and Structures* 25 (1987), S. 211–224
- [Esslinger und Geier 1975] Esslinger, M.; Geier, B.: Überblick über das Beul- und Nachbeulverhalten von dünnwandigen Kreiszyklindern. In: *Vorträge und Diskussionsbeiträge der Schalenbeultagung, Braunschweig, 19. und 20. Juni 1975, Sonderheft der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V. Institut für Flugzeugbau* (1975), S. 9–36
- [Felippa 2001] Felippa, C. A.: *Introduction to finite element methods, lecture notes*. Boulder, Colorado 80309-0429, USA: University of Colorado (Veranst.), 2001
- [Felippa 2012] Felippa, C. A.: *Total Lagrangian, geometrically nonlinear finite elements, lecture notes*. Boulder, Colorado 80309-0429, USA: University of Colorado (Veranst.), 2012
- [Geers 1999a] Geers, M. G. D.: Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part I - The subplane control approach. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), S. 177–204
- [Geers 1999b] Geers, M. G. D.: Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part II - Comparative performance analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), S. 205–230
- [Geers u. a. 2000] Geers, M.G.D.; de Borst, R.; Peerlings, R. H. J.: Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams. In: *Engineering Fracture Mechanics* 65 (2000), S. 247–261
- [Glavind und Stang 1991] Glavind, M.; Stang, H.: Evaluation of the complete compressive stress-strain curve for high strength concrete. In: van Mier, J. G. M.; Rots, J. G.; Bakker, A. (Hrsg.): *Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, 1991, S. 749–761

- [Golub und van Loan 1996] Golub, G. H.; van Loan, C. F.: *Matrix computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996
- [Gutiérrez 2004] Gutiérrez, M. A.: Energy release control for numerical simulations of failure in quasi-brittle solids. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 20 (2004), S. 19–29
- [Hellweg und Crisfield 1998] Hellweg, H.-B.; Crisfield, M. A.: A new arc-length method for handling sharp snap-backs. In: *Computers and Structures* 66 (1998), S. 705–709
- [Hibbitt u. a. 1970] Hibbitt, H. D.; Marcal, P. V.; Rice, J. R.: A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. In: *International Journal for Solids and Structures* 6 (1970), S. 1069–1086
- [Hill 1962] Hill, R.: Acceleration waves in solids. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), S. 1–16
- [Hillerborg u. a. 1976] Hillerborg, A.; Modéer, A. M.; Petersson, P. E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* 6 (1976), S. 773–782
- [Holzapfel 2000] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 2000
- [Hübner 2010] Hübner, M.: *Vergleich und Implementierung von Pfadverfolgungsmethoden*, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2010
- [Hudson u. a. 1972] Hudson, J. A.; Crouch, S. L.; Fairhurst, C.: Soft, stiff and servo-controlled testing machines: a review with reference to rock failure. In: *Engineering Geology* 6 (1972), S. 155–189
- [Hughes 2000] Hughes, T. J. R.: *The finite element method*. Dover Publications, Mineola, 2000
- [Hühne u. a. 2008] Hühne, C.; Rolfes, R.; Breitenbach, E.; Teßmer, J.: Robust design of composite cylindrical shells under axial compression - Simulation and validation. In: *Thin-Walled Structures* 46 (2008), S. 947–962
- [Hund 2007] Hund, A. S.: *Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur*, Dissertation, Bericht Nr. 48, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland, Dissertation, 2007
- [Jirásek 2012] Jirásek, M.: *Modeling of localized inelastic deformation*. Thakurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic: Department of Mechanics, Czech Technical University (Veranst.), 2012

- [Jorabchi und Suresh 2011] Jorabchi, K.; Suresh, K.: A robust continuation method to pass limit-point instability. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (2011), S. 1253–1261
- [Ju 1989] Ju, J. W.: On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. In: *International Journal of Solids and Structures* 25 (1989), S. 803–833
- [Kachanov 1986] Kachanov, L. M.: *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1986
- [Krajcinovic 1983] Krajcinovic, D.: Constitutive equations for damaging materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 50355–360 (1983)
- [Krajcinovic 1996] Krajcinovic, D.: *Damage mechanics*. North-Holland, Amsterdam, 1996
- [Kuhl 2000] Kuhl, E.: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Dissertation, Bericht Nr. 32, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland, Dissertation, 2000
- [Lemaître 1983] Lemaître, J.: A continuous damage mechanics model for ductile fracture. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107 (1983), S. 83–89
- [Lemaître 1984] Lemaître, J.: How to use damage mechanics. In: *Nuclear Engineering and Design* 80 (1984), S. 233–245
- [Lemaître 1996] Lemaître, J.: *A course on damage mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1996
- [Liapunov 1892] Liapunov, A. M.: *The general problem of stability of motion*, Kharkov, Dissertation, 1892. – Übersetzung vom Russischen ins Französische durch Davaux, E., Toulon, Übersetzung vom Französischen ins Englische durch Fuller, A.T., Veröffentlicht in *International Journal of Control*, 1992, 55, 531–773
- [Lorentz und Badel 2004] Lorentz, E.; Badel, P.: A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (2004), S. 499–526
- [Mang und Hofstetter 2000] Mang, H. A.; Hofstetter, G.: *Festigkeitslehre*. Springer-Verlag, Wien, Österreich, 2000
- [Marcal 1967] Marcal, P.V.: *The effect of initial displacements on problems of large deflection and stability*. Brown University, Division of Engineering, ARPA E54 (Veranst.), 1967

- [Mazars und Lemaitre 1984] Mazars, J.; Lemaitre, J.: Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. In: Shah, S. P. (Hrsg.): *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop* Northwestern University (Veranst.), 1984, S. 375–378
- [Meister 2005] Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2005
- [Nguyen 2011] Nguyen, V. P.: *Multiscale failure modelling of quasi-brittle materials*, Technische Universität Delft, Dissertation, 2011
- [Oliver u. a. 2008] Oliver, J.; Huespe, A. E.; Cante, J. C.: An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 197 (2008), S. 1865–1889
- [Pietruszczak und Mróz 1981] Pietruszczak, S.; Mróz, Z.: Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17 (1981), S. 327–334
- [Pohl u. a. 2013] Pohl, T.; Ramm, E.; Bischoff, M.: Adaptive path following schemes for problems with softening. In: *Finite Elements in Analysis and Design* eingereicht (2013)
- [Rabotnov 1963] Rabotnov, Y. N.: On the equation of state of creep. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* Bd. 178-2, 1963, S. 117–122
- [Ramm 1981] Ramm, E.: Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points. In: Wunderlich, W.; Stein; E. Bathe, K.-J. (Hrsg.): *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981, S. 63–89
- [Reese u. a. 1999] Reese, S.; Küssner, M.; Reddy, B. D.: A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44 (1999), S. 1617–1652
- [Reitinger 1994] Reitinger, R.: *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*, Dissertation, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland, Dissertation, 1994
- [Riks 1972] Riks, E.: The application of Newton's method to the problem of elastic stability. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), S. 1060–1065
- [Riks 1979] Riks, E.: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. In: *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), S. 529–551

- [Ritto-Correã und Camotim 2008] Ritto-Correã, M.; Camotim, D.: On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. In: *Computers and Structures* 86 (2008), S. 1353–1368
- [Rokugo u. a. 1986] Rokugo, K.; Ohno, S.; Koyanagi, W.: Automatical measuring system of load-displacement curves including post-failure region of concrete specimens. In: Wittmann, F. H. (Hrsg.): *International Conference on Fracture Mechanics of Concrete*, Elsevier Science Publ., Amsterdam, 1986, S. 403–411
- [Rots 1988] Rots, J. G.: *Computational modeling of concrete fracture.*, Technische Universität Delft, Niederlande, Dissertation, 1988
- [Rots und Invernizzi 2004] Rots, J. G.; Invernizzi, S.: Regularized sequentially linear saw-tooth softening model. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28 (2004), S. 821–856
- [Schweizerhof 1990] Schweizerhof, K. H.: Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik / Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, Schriftenreihe Heft 9. 1990. – Forschungsbericht
- [Schweizerhof und Ramm 1984] Schweizerhof, K. H.; Ramm, E.: Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. In: *Computers and Structures* 18 (1984), S. 1099–1114
- [Schweizerhof und Wriggers 1986] Schweizerhof, K. H.; Wriggers, P.: Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 59 (1986), S. 261–279
- [Simo und Ju 1987] Simo, J. C.; Ju, J. W.: Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation. In: *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), S. 821–840
- [Sluys 1992] Sluys, L. J.: *Wave propagation, localization and dispersion of softening solids*, Ph.D.-Dissertation, Delft University of Technology Press, Dissertation, 1992
- [Spreng 2010] Spreng, S.: *Identification of static equilibria via potential energy optimization*, Institut für Baustatik und Baudynamik und Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, Masterarbeit, 2010
- [Thompson und Hunt 1984] Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W.: *Elastic instability phenomena*. Chichester et al. : John Wiley & Sons, 1984
- [Tsien 1942] Tsien, H. S.: A theory for the buckling of thin shells. In: *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)* 9 (1942), Nr. 10, S. 373–384

- [Tsien 1947] Tsien, H. S.: Lower buckling load in the non-linear buckling theory for thin shells. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 5 (1947), S. 236–237
- [van Mier 1997] van Mier, J. G. M.; Sullivan, Fox (Hrsg.): *Fracture processes of concrete*. CRC Press, Inc. Boca Raton, New York, London, Tokyo, 1997
- [van Mier u. a. 1997] van Mier, J. G. M.; Shah, S. P.; Arnaud, M.; Balayssac, J. P.; Bascoul, A.; Choi, S.; Dasenbrock, D.; Ferrara, G.; French, C.; Gobbi, M. E.; Karihaloo, B. L.; König, G.; Kotsovos, M.; Labuz, J.; Lange-Kornbak, D.; Markeset, G.; Pavlovic, M. N.; Simsch, G.; Thienel, K.-C.; Turatsinze, A.; Ulmer, M.; van Geel, H. J. G. M.; van Vliet, M. R. A.; Zissopoulos, D.: Strain-softening of concrete in uniaxial compression. In: *Materials and Structure* 30 (1997), S. 195–209
- [Verhoosel 2009] Verhoosel, C. V.: *Multiscale and probabilistic modelling of micro electromechanical systems*, Technische Universität Delft, Dissertation, 2009
- [Verhoosel u. a. 2009] Verhoosel, C. V.; Remmers, J. J. C.; Gutiérrez, M. A.: A dissipation-based arc-length method for robust simulation of brittle and ductile failure. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), S. 1290–1321
- [von Scheven 2009] von Scheven, M.: *Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung*, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 52, Dissertation, 2009
- [Wagner 1991] Wagner, W.: A path-following algorithm with quadratic predictor. In: *Computers and Structures* 39 (1991), S. 339–348
- [Wawersik 1968] Wawersik, W. R.: *Detailed analysis of rock failure in laboratory compression tests*, Minneapolis University, Minneapolis, MN, Dissertation, 1968
- [Wawersik und Brace 1971] Wawersik, W. R.; Brace, W. F.: Post-Failure Behavior of a Granite and Diabase. In: *Rock Mechanics* 3 (1971), S. 61–85
- [Wawersik und Fairhurst 1970] Wawersik, W. R.; Fairhurst, C.: A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics* 7 (1970), S. 561–564
- [Wempner 1971] Wempner, G. A.: Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. In: *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971), S. 1581–1599
- [Willam 1984] Willam, K. J.: Experimental and computational aspects of concrete fracture. In: Bićanić, N.; Owen, D.R.J.; Hinton, E. (Hrsg.): *International Conference Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, 1984, S. 33–69



- [Wriggers 2001] Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001. – 153–163 S
- [Wright und Gaylord 1968] Wright, E. W.; Gaylord, E. H.: Analysis of unbraced multi-story steel rigid frames. In: *ASCE, Journal of the Structural Division* 94 (1968), S. 1143–1163
- [Zienkiewicz u. a. 2005] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.: *The finite element method*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005



## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Name: Tanja Evelin Pohl geb. Müller  
Geburtsdatum: 06. November 1981  
Geburtsort: Villingen  
Familienstand: verheiratet

### Schulbildung:

09/1992 - 06/2001 Nellenburg Gymnasium Stockach  
08/1997 - 01/1998 Lycée A. Cournot,  
Gray, Frankreich  
06/2001 Allgemeine Hochschulreife

### Universitäre Ausbildung:

10/2002 - 09/2007 Universität Stuttgart:  
Diplomstudium Bauingenieurwesen  
09/2007 Universität Stuttgart: Diplomingenieurin  
10/2007 - 10/2013 wissenschaftliche Mitarbeiterin am  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
der Universität Stuttgart



---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 
- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haüßer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) **W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) **A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturodynamik.
- 34 (2001) **S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) **A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) **D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturodynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) **H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) **K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) **M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) **V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) **R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) **G.A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.



- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **Ch. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) **C.F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) **I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) **B.J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) **R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) **T. Cichosz:**  
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) **R. Echter:**  
Isogeometric analysis of shells..
- 60 (2013) **A. Tkachuk:**  
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices..
- 61 (2013) **J. Irslinger:**  
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente..