

**Numerische Simulation inkompressibler
turbulenter Strömungen mit Mehrgitterverfahren
auf unstrukturierten Gittern**

Von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von Bernhard Hurdeman aus Stuttgart

Hauptberichter : Prof. Dr.-Ing. Siegfried Wagner
Mitberichter : Prof. Dr. rer. nat. Gabriel Wittum
Tag der mündlichen Prüfung : 24. September 1999

Institut für Computeranwendungen der Universität Stuttgart

1999

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Computeranwendungen der Universität Stuttgart. Weitreichende Umstrukturierungen und entscheidende personelle Änderungen am Institut etwa zur Hälfte der Beschäftigungszeit machten eine neue Ausrichtung der Arbeit notwendig.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. G. Wittum, der mir es ermöglicht hat in seiner Arbeitsgruppe mitzuarbeiten und mir wertvolle Hilfen zum Gelingen dieser Arbeit gegeben hat. Ebenso möchte ich mich für die Übernahme des Mitberichtes bei ihm bedanken.

Besonders herzlich möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Wagner bedanken, der den Hauptbericht übernommen hat sowie Initiator und Projektleiter des interessanten EU Projektes DRAW war, in dessen Rahmen ein Großteil der vorliegenden Arbeit entstanden ist.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei allen Kollegen bedanken, die mich bei meiner Arbeit hilfreich unterstützt haben. Es war mir eine Freude in einem Team mit so großartiger Dynamik und Kollegialität mitarbeiten zu können.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, auf welche Art und Weise lineare Mehrgitterverfahren, beschränkt auf zwei Raumdimensionen, zur Berechnung inkompressibler turbulenter Strömungen eingesetzt werden können. Besonders berücksichtigt werden dabei die Möglichkeiten einer lokal adaptiven Gitterverfeinerung, die die Verwendung von hybriden Gittern erfordert.

Diskretisiert werden die Navier-Stokes- und Turbulenztransportgleichungen mit einem dualen Finite-Volumen Verfahren, bei dem alle Größen auf den Knotenpunkten des Gitters gelöst werden. Die Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen führt dabei auf ein gekoppeltes Gleichungssystem für Druck und Geschwindigkeit. Als Turbulenzmodelle werden eine Reihe von Low-Reynolds Zweigleichungs-Turbulenzmodellen eingesetzt und als Testfälle eine Hügelströmung und eine Tragflügelumströmung betrachtet.

Es werden unterschiedliche Ein- und Mehrgitterverfahren zur Lösung der beiden linearisierten Gleichungssysteme verglichen. Dabei erwies sich eine Kombination aus linearem Mehrgitterverfahren zur Vorkonditionierung und dem Krylov Unterraum Lösungsverfahren BiCGSTAB als sehr robustes und schnell konvergierendes Verfahren. Als Glätter für die Mehrgitterverfahren bzw. als Vorkonditionierer für die Eingitterverfahren werden modifizierte ILU Verfahren eingesetzt, die eine deutliche Verbesserung gegenüber SSOR Iterationen ergeben. Zur Lösung des Strömungsgleichungssystems war bei Gittern mit ca. 80.000 Knotenpunkten mit Eingitterverfahren ungefähr die 15 fache Rechenzeit gegenüber den Mehrgitterverfahren nötig. Beim sehr viel einfacher zu lösenden Turbulenzgleichungssystem dagegen konnte mit Mehrgitterverfahren nur eine Halbierung der Rechenzeit erreicht werden.

Um die für Low-Reynolds Turbulenzmodelle erforderlichen zur Wand hin stark verfeinerten Grenzschichtgitter zu erstellen, wurde ein spezieller Gitterverfeinerungsalgorithmus entwickelt. Ausgehend von einem Grobgitter wird dabei durch sukzessive, uniforme oder lokale Verfeinerung die Mehrgitterhierarchie aufgebaut. Die lokal adaptive Verfeinerung des Gitters wird über einfache Gradientenindikatoren gesteuert. Werden Strömungs- und Turbulenzgrößen als Steuergrößen berücksichtigt, reichten bei den untersuchten Testfällen 30 % der Gitterpunkte aus, um die gleiche Genauigkeit der Lösung, verglichen mit einem uniform verfeinerten Gitter, zu erhalten.

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die Untersuchung der Konvergenzverbesserung des nichtlinearen Systems mit Hilfe eines Newton-Verfahrens. Die Jacobi-Matrix wird jedoch nicht analytisch, sondern über eine numerische Differentiation bestimmt. Es wird eine Gewichtung zwischen Fixpunkt- und Newton-Iteration vorgenommen, die über den Defekt gesteuert wird, um ein Divergieren der nichtlinearen Iteration zu verhindern. Für stationäre laminare Strömungen reduzierten sich bei diesem Verfahren, im Vergleich zu einer Fixpunktiteration, die Anzahl der Iterationsschritte um zwei Drittel. Bei der Simulation turbulenter Strömungen konnten jedoch nur 30 % der Rechenzeit eingespart werden.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
1 Einleitung	1
1.1 Einführung	1
1.2 Einordnung der Arbeit	2
1.2.1 Turbulenzmodellierung	2
1.2.2 Diskretisierung	3
1.2.3 Lösungsverfahren	4
1.2.4 Gittergenerierung und Adaptivität	6
1.3 Ziel der Arbeit	7
1.4 Aufbau	7
2 Modellierung turbulenter Strömungen	9
2.1 Übersicht	9
2.2 Die zeitlich gemittelten inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen	10
2.3 Übersicht über die Turbulenzmodelle	11
2.3.1 Algebraische Turbulenzmodelle	12
2.3.2 Eingleichungs-Turbulenzmodelle	12
2.3.3 Zweigleichungs-Turbulenzmodelle	14
2.3.4 Nichtlineare Zweigleichungsmodelle	15
2.3.5 Algebraische Reynolds-Spannungs-Modelle	16
2.3.6 Reynolds-Spannungs-Modelle	16
2.4 Modellierung des wandnahen Bereichs	17
2.4.1 Dimensionslose Beschreibung der Grenzschicht	18
2.4.2 Wandfunktionen	19
2.4.3 Low-Reynolds Turbulenzmodelle	20
2.4.3.1 k - ε Modelle mit Dämpfungsfunktionen	21

2.4.3.2	Zwei-Schichten k - ε Modelle	21
2.4.3.3	Low-Reynolds k - ω Modell	23
2.4.3.4	SST k - ω Modell	23
3	Diskretisierung	27
3.1	Übersicht über die Diskretisierungsverfahren	27
3.2	Die knotenbasierte Finite Volumen Methode	28
3.2.1	Näherung einer Größe am Integrationspunkt	30
3.2.2	Näherung eines Gradienten am Integrationspunkt	31
3.2.3	Näherung des Massenterms und der Quellterme	31
3.2.4	Reduktion der Matrixeinträge	31
3.2.5	Näherung eines Gradienten am Knotenpunkt	32
3.3	Aufwindverfahren	32
3.3.1	Schiefe Aufwindverfahren	34
3.3.1.1	LPS-Aufwindverfahren	35
3.3.1.2	MWS-Aufwindverfahren	35
3.3.2	Berücksichtigung der lokalen Peclet Zahl	35
3.4	Diskretisierung der Massenerhaltung	36
3.5	Randbedingungen	38
3.5.1	Einlaßrandbedingung	38
3.5.2	Haftrandbedingung	39
3.5.3	Auslaßrandbedingung	39
3.5.4	Turbulenzrandbedingungen an einer Wand	40
3.5.4.1	Randbedingung für ω	41
3.5.4.2	Randbedingung für ϵ	41
3.6	Aufstellen des Gleichungssystems	41
3.7	Zeitdiskretisierung	42
4	Lösungsverfahren	43
4.1	Lineare Iterationsverfahren	44
4.1.1	Eigenschaften von M-Matrizen	45
4.1.2	Gauß-Seidel Verfahren	45
4.1.3	Unvollständige Dreieckszerlegung	46
4.2	Verfahren der konjugierten Gradienten	47
4.3	Mehrgitterverfahren	51

4.3.1	Komponenten des Mehrgitterverfahrens	51
4.3.2	Grobgitterkorrektur	52
4.3.3	Lineares Mehrgitterverfahren	53
4.3.4	Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer für konjugierte Gradientenverfahren	55
4.3.5	Newton Mehrgitterverfahren	56
4.3.6	Nichtlineares Mehrgitterverfahren	57
4.4	Berechnung der Jacobi-Matrix	58
4.4.1	Linearisierung der Turbulenzgleichungen	58
4.4.2	Linearisierung der Impulsgleichung	60
4.4.3	Newton-Verfahren mit Numerischer Differentiation	61
5	Gittergenerierung und Adaptivität	67
5.1	Hierarchische Mehrgitter	67
5.2	Definitionen	68
5.3	Lokaler Gitterverfeinerungsalgorithmus	68
5.3.1	Zusätzliche „orthogonale“ Randverfeinerung	71
5.3.2	Verfeinerung adaptiver Gitter	73
5.4	Steuerung der Adaptivität	76
5.5	Berechnung des Wandabstandes	77
6	Numerische Experimente	81
6.1	Beschreibung des Lösungsverfahrens	81
6.1.1	Lösung der nichtlinearen Gleichungen	81
6.1.2	Lösung der linearisierten Gleichungen	83
6.2	Simulation turbulenter Strömungen mit der Fixpunktiteration	84
6.2.1	Turbulente Strömung über ein 2D-Hügelmodell	84
6.2.1.1	Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle	85
6.2.1.2	Vergleich verschiedener Lösungsverfahren	88
6.2.1.3	Adaptive Gitterverfeinerung	90
6.2.2	Turbulente Strömung um ein Tragflügelprofil	95
6.2.2.1	Gittergenerierung	96
6.2.2.2	Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle	96
6.2.2.3	Rechenzeiten auf verschiedenen Gittern	99

6.2.2.4	Einfluß des Zeitschritts und anderer Parameter auf das Konvergenzverhalten	100
6.2.2.5	Vergleich verschiedener Lösungsverfahren	105
7	Simulation mit einem Newton-Verfahren	109
7.1	Laminare Strömungen	109
7.1.1	Stufe mit $Re = 300$	110
7.1.2	Stufe mit $Re = 1000$	111
7.1.2.1	Gewichtungsfunktion für Fixpunkt- und Newton-Iteration	112
7.1.2.2	Vergleich für stationäre und instationäre Navier-Stokes Gleichungen	112
7.1.2.3	Newton-Verfahren mit geschachtelter Iteration	113
7.2	Turbulente Strömungen	115
7.2.1	Newton-Verfahren für die Turbulenztransportgleichungen	116
7.2.2	Newton-Verfahren für Navier-Stokes und Turbulenzgleichungen	119
8	Zusammenfassung	123
A	Zweigleichungs-Turbulenzmodelle	127
A.1	Chien $k-\varepsilon$ Modell	127
A.2	Das Chen-Patel Zweischichten $k-\varepsilon$ Modell	128
A.3	Das Wilcox $k-\omega$ Modell	129
A.4	Das Baseline Modell von Menter	130
A.5	Modifiziertes Baseline Modell	131
A.6	Das SST-Modell	131
A.7	Das Kalitzin-Gould $k-\tau$ Modell	131
B	BiCGSTAB und BiCGSTAB(l)	133
B.1	Vorkonditioniertes BiCGSTAB Verfahren	133
B.2	Vorkonditioniertes BiCGSTAB(l) Verfahren	134
	Literaturverzeichnis	137

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

\mathbf{a}	Vektor mit den Komponenten a_i
\mathbf{A}	Matrix mit den Komponenten A_{ij} oder a_{ij}
\mathbf{d}	Defekt
h	Gitterweite oder Höhe
k	turbulente kinetische Energie
l	Länge
\dot{m}	Massenstrom
N_i	finite Element Formfunktion
\mathbf{n}	Normalenvektor
p	Prolongationsoperator
p	reduzierter Druck p_{stat}/ρ
p_{stat}	statischer Druck
P_k	Produktion der turbulenten kinetischen Energie
Q	Quellterm
r	Restriktionsoperator
\mathbf{r}	Residuum ($\mathbf{r} = -\mathbf{d}$)
R	Euklidnorm von \mathbf{r} ($R = \ \mathbf{r}\ _2$)
\mathbf{S}	Hauptspannungs-Tensor
S	Rand eines Gebiets Ω
\mathbf{S}	Normalenvektor auf S
t	Zeit
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit $\sqrt{\tau_w/\rho}$
u'	Geschwindigkeitsfluktuation
x_i	kartesische Koordinate
y	Wandabstand

Griechische Symbole

Γ	Diffusionskoeffizient in skalarer Gleichung
δ	Grenzschichtdicke

δ_{ij}	Kroneckersymbol
ε	turbulente Dissipation
ϵ	sehr kleine Größe
κ	van Karman Konstante
λ	Relaxationsfaktor
λ	Gewichtungsparameter zwischen Fixpunkt- und Newtoniteration
μ	dynamische Viskosität
ρ	Dichte
σ_i	meist Konstanten in Diffusionskoeffizienten
$\boldsymbol{\tau}$	Reynolds-Spannungs-Tensor
τ_{ij}	Komponenten des Reynolds-Spannungs-Tensors $\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}$
τ	turbulente Zeitskala
τ_w	Wandschubspannung $\mu(\frac{\partial U}{\partial y})_w$
ν	kinematische Viskosität μ/ρ
ν_t	turbulente Viskosität
Φ	skalare Größe
ω	spezifische Dissipation
ω	Dämpfungsfaktor
Ω	Wirbelstärke
Ω	Gebiet

Dimensionslose Kennzahlen

Pe	Pecletzahl
Re	Reynoldszahl
R_t	turbulente Reynoldszahl $k^2/\varepsilon\nu$
R_y	turbulente Reynoldszahl \sqrt{ky}/ν

Abkürzungen

cg	conjugate gradient
DNS	direkte numerische Simulation
ip	Integrationspunkt
KP	Knotenpunkt
KV	Kontrollvolumen
LPS	linear profile skewed
MWS	mass weighted skewed
PAC	physical advection correction
rip	Randintegrationspunkt
RKP	Randknotenpunkt
TKV	Teilkontrollvolumen
UDS	upwind difference scheme

1 Einleitung

1.1 Einführung

Turbulente Strömungen spielen in vielen Bereichen der Technik eine wichtige Rolle. Beispiele findet man von der Luftkühlung in der Mikroelektronik bis hin zu Turbinenströmungen in Generatoren oder Umströmungen von Fahrzeugen und Flugzeugen. Meist sind dabei Geschwindigkeitsverteilungen oder Transportprozesse von Bedeutung, in einigen Fällen werden aber auch andere Bereiche der Physik, wie zum Beispiel Verbrennung oder Akustik, durch die Turbulenz nachhaltig beeinflusst. In der Industrie besteht somit großer Bedarf an einer umfassenden Beschreibung der turbulenten Strömung, die oftmals nur mit Hilfe teurer und zeitaufwendiger Experimente zu erhalten ist. Aus vielfältigen Gründen ist es manchmal sogar unmöglich, an den Stellen Messungen vorzunehmen, die entscheidenden Einfluß auf das Gesamtverhalten einer Apparatur haben. Um das Verhalten turbulenter Strömungen besser zu verstehen und um die Zahl der Experimente verringern zu können, ist es daher unumgänglich, geeignete numerische Simulationen durchführen zu können. In einigen Fällen können dabei auch starke Vereinfachungen oder Ausschnitte des zu simulierenden komplexen Strömungsfeldes hilfreiche Informationen liefern, meist wird jedoch eine volle dreidimensionale Simulation komplexer Geometrien notwendig sein, um eine entscheidende Beschleunigung des Entwicklungsprozesses zu ermöglichen. Wie „gut“ wiederum eine numerische Simulation die Realität wiedergibt, hängt von der Aufstellung der Konfiguration inklusive der „richtigen“ Randbedingungen, der Wahl des Turbulenzmodells und nicht zuletzt von einer adäquaten Gitterauflösung des Rechengebietes ab.

Um jedoch eine dreidimensionale realitätsnahe Simulation einer turbulenten Strömung in angemessener Zeit und mit ausreichender Genauigkeit durchführen zu können, müssen drei wichtige Voraussetzungen erfüllt sein. Erstens wird nur der Einsatz von Parallelrechnern in den nächsten Jahren die Notwendigkeit von hoher Rechenleistung und großem Speicherbedarf befriedigen können. Zweitens kann nur mit einer adaptiven Gitterverfeinerung eine ausreichende Gitterunabhängigkeit der Lösung erreicht werden, ohne eine Vielzahl von überflüssigen Gitterknoten mitberechnen zu müssen. Und drittens müssen Lösungsverfahren eingesetzt werden, die eine effiziente Lösung der hierbei auftretenden Gleichungssysteme mit mehreren Millionen Unbekannten erlauben. Anstrebenswert für die Lösung dieser großen, schwachbesetzten Gleichungssysteme ist eine $O(N)$ Komplexität, d.h. die Lösungszeit soll linear mit der Zahl der Unbekannten ansteigen. Dies kann nur mit einem Mehrskalenansatz erreicht werden, auf dem auch die sogenannten Mehrgitterverfahren basieren.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, welche Möglichkeiten sich durch den Einsatz von Mehrgitterverfahren und Adaptivität bei der Simulation inkompressibler turbulenter Strö-

mungen, beschränkt auf zwei Raumdimensionen, ergeben. Die dabei gewonnenen Erfahrungen werden hoffentlich einen Beitrag auf dem Weg zur Realisierung komplexer 3D Simulationen leisten.

1.2 Einordnung der Arbeit

1.2.1 Turbulenzmodellierung

Betrachtet man die Momentaufnahme einer turbulenten Strömung, so wird man eine Vielzahl von kleinen und großen Wirbeln erkennen, deren Verteilung auf ein stark ungeordnetes Strömungsverhalten schließen läßt [1]. Sollen alle Strukturen einer turbulenten Strömung mit der numerischen Simulation erfaßt werden — dies ist notwendig, um die physikalischen Prozesse genau wiedergeben zu können — ist eine Auflösung des Rechengebietes erforderlich, die unterhalb der kleinsten Wirbelgröße (Kolmogorov Länge) liegt. Die mathematische Beschreibung einer viskosen Strömung liefern die Navier-Stokes Gleichungen, und eine instationäre Berechnung aller auftretenden Turbulenzstrukturen wird als direkte numerische Simulation (DNS) bezeichnet. Der Rechenaufwand einer DNS ist jedoch enorm und wird sich daher auch in nächster Zukunft nur auf einfache Geometrien und niedrige Reynoldszahlen beschränken können [2, 3, 4, 5]. In gewisser Hinsicht eine Vereinfachung der DNS stellt die Grobstruktursimulation (engl. Large Eddy Simulation LES) dar, da hier auf einem deutlich gröberen Gitter gerechnet wird und für die Turbulenzstrukturen, die kleiner als die Gitterweite sind, wird eine Modellierung der resultierenden Viskosität vorgenommen. Die LES gewinnt allmählich auch für industriennahe Anwendungen immer mehr an Bedeutung [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Lange Rechenzeiten und große zu verarbeitende Datenmengen sind aber noch ein Hinderungsgrund für eine weitere Verbreitung. Aus diesem Grund kommen für die Simulation technisch relevanter Strömungen momentan nur die zeitlich gemittelten Navier-Stokes Gleichungen in Frage, die man durch einen Mittelungsprozess über alle Turbulenzskalen erhält. Hierbei entstehende Terme müssen jedoch modelliert werden. Die entsprechenden Modelle werden als statistische Turbulenzmodelle bezeichnet.

Üblicherweise kommen heutzutage sogenannte Zweigleichungs-Turbulenzmodelle zum Einsatz, bei denen zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls noch zwei skalare Transportgleichungen für turbulenzbeschreibende Größen gelöst werden. Betrachtet man wandgebundene Strömungen, muß wiederum unterschieden werden zwischen Turbulenzmodellen mit Wandfunktionen, die den viskosen wandnahen Bereich der Grenzschicht stark vereinfachen, und den Low-Reynolds¹ Turbulenzmodellen, bei denen die wandnahe Schicht vollständig diskretisiert wird. Letztere erfordern zwar eine feinere Auflösung der Grenzschicht, aber physikalische Vorgänge wie Ablösung und Wiederaanlegen einer Grenzschichtströmung können nur mit diesen Modellen einigermaßen genau bestimmt werden [12]. In dieser Arbeit werden daher ausschließlich Low-Reynolds Zweigleichungs-Turbulenzmodelle betrachtet. Von Nachteil bei den Zweigleichungs-Turbulenzmodellen ist jedoch, daß sie von einer isotropen Verteilung der fluktuierenden

¹auf eine Übersetzung dieses Begriffs wurde hier verzichtet

Geschwindigkeitsschwankungen ausgehen. Besonders bei dreidimensionalen Strömungen stimmt dies nicht mehr mit der Wirklichkeit überein und kann zu teilweise falschen Lösungen führen. Eine Verbesserung kann von nichtlinearen Zweigleichungs-Turbulenzmodellen [13, 14] und vor allem von den Reynolds-Spannungs-Modellen erwartet werden [15, 16, 17]. Letztere führen jedoch auf ein schwerer zu lösendes Gleichungssystem von fünf (3-D: sieben) Transportgleichungen. Möglicherweise können aber die in dieser Arbeit eingesetzten Lösungsverfahren den Einsatz von Reynolds-Spannungs-Modellen für größere Strömungsprobleme vereinfachen.

1.2.2 Diskretisierung

Zur Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen und der Turbulenztransportgleichungen auf dem Rechengitter werden meistens Finite Elemente oder Finite Volumen Verfahren eingesetzt [18]. Die Anwendung der einfacher zu implementierenden Finite Differenzen Verfahren muß sich eher auf einfache Geometrien und strukturierte Gitter beschränken. Die Vorteile der Finite Element Verfahren liegen darin, daß diese a priori für unstrukturierte Gitter eingesetzt werden können und unterschiedliche Ansatzfunktionen für die zu lösenden Unbekannten verwendet werden können. Die Finite Volumen Methoden zeichnen sich vor allem dadurch aus, daß sie *lokal* massenerhaltend sind, während Finite Element Verfahren nur *globale* Massenerhaltung gewährleisten können. Verwendet man, wie in der vorliegenden Arbeit, ein *duales* Finite Volumen Verfahren, das auf einem Finite Element Gitter basiert, so können auch unstrukturierte Gitter ohne Schwierigkeiten eingesetzt werden.

Im Gegensatz zu kompressiblen Strömungen, bei denen der Druck über die Energiegleichung und Zustandsgleichung bestimmt wird, muß bei inkompressiblen Strömungen ein spezieller Ansatz zur Druckberechnung verwendet werden, um eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit zu vermeiden [19]. Bei Finite Element Methoden kann dies durch unterschiedliche Ansatzfunktionen für Druck und Geschwindigkeit erreicht werden [20]. Eine ähnliche Idee steckt auch hinter den sogenannten gestaffelten Gittern, die eine Kopplung von Druck und Geschwindigkeit bei Finite Volumen Verfahren ermöglichen. Hier werden unterschiedliche Kontrollvolumina für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck angesetzt [21]. Eine auf unstrukturierte Gitter anwendbare Formulierung für gestaffelte Gitter ist nur schwierig zu erhalten, daher ist eine Finite Volumen Diskretisierung mit knotenbasierten Variablen besser geeignet. Bei diesen Verfahren wird eine Kopplung von Druck und Geschwindigkeit über eine elementweise, lokale Approximation der Navier-Stokes Gleichungen ermöglicht [22]. Für eine solche Approximation gibt es mehrere Ansätze [23, 24, 25, 26], eine leicht modifizierte Version von [26] wurde im Rahmen dieser Arbeit implementiert. Herauszuheben bei dieser Methode, wie auch bei [23], ist die voll gekoppelte Lösung von Druck und Geschwindigkeit. Der Umweg über eine Druckkorrekturgleichung, wie beim bekannten SIMPLE Algorithmus [19], wird somit umgangen. Dadurch können sehr große Zeitschritte eingesetzt werden, die Lösung des resultierenden Gleichungssystems erfordert jedoch einen größeren Aufwand als bei den zwei entkoppelten Gleichungssystemen für Druck und Geschwindigkeit. Unter den knotenbasierten Verfahren sind noch die *pseudokompressiblen* Verfahren zu erwähnen, die aus einer

Erweiterung kompressibler Methoden für niedrige Machzahlen resultieren [27, 28]. Schwierigkeiten bereitet dort aber eine exakte Massenerhaltung, wenn zeitabhängige Probleme simuliert werden sollen.

Sowohl bei den Navier-Stokes Gleichungen als auch bei den Turbulenztransportgleichungen handelt es sich um nichtlineare Gleichungssysteme, die linearisiert werden müssen, damit diese mit Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme gelöst werden können. Da im Rahmen dieser Arbeit nur die Simulation *stationärer* Strömungen ausgeführt wurden, war keine Zeitintegration höherer Ordnung notwendig und das einfache und stabile implizite Eulerverfahren konnte somit eingesetzt werden. Die Linearisierung der weiteren Terme erfolgt normalerweise dadurch, daß in die nichtlinearen Terme teilweise die Werte aus dem vorhergehenden Iterationsschritt eingesetzt werden. Dies führt somit auf eine Fixpunktiteration, die auch als Quasi-Newton Verfahren bezeichnet werden kann. Ein echtes Newton-Verfahren, das zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems eingesetzt werden kann, erhält man, indem man die Jacobi-Matrix aufstellt, die aus den Ableitungen der Gleichungen nach den einzelnen Strömungsgrößen gebildet wird. Daraus resultiert dann wiederum ein lineares Gleichungssystem, das mit den später beschriebenen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme gelöst werden kann. Newton-Verfahren werden für inkompressible Strömungen nur sehr selten eingesetzt [27], mehr Anwendungen sind im Bereich kompressibler Strömungen zu finden. Der Einsatz von Newton-Verfahren für die Navier-Stokes Gleichungen ist jedoch kritisch zu betrachten, da eine dadurch erreichte Verringerung der nichtlinearen Iterationen (hier: Zeitschritte) mit einem etwas erhöhten Aufwand für die Assemblierung und mit zum Teil schwieriger zu lösenden linearen Gleichungssystemen erkauft wird. Gegenüber einer Fixpunktiteration sollte daher eine Reduktion der notwendigen Zeitschritte prozentual deutlich höher sein als der Mehraufwand pro Zeitschritt. Das Aufstellen der Jacobi-Matrix ist sowohl für die Navier-Stokes Gleichungen als auch für die Turbulenzgleichungen keineswegs trivial, und abhängig von der jeweiligen Diskretisierung müssen entsprechende Vereinfachungen vorgenommen werden, um die notwendigen Ableitungen bilden zu können. Während üblicherweise eine analytische Form für die Ableitungen gefunden werden muß, wird in dieser Arbeit eine numerische Differentiation eingesetzt. Diese hat gegenüber analytischen Methoden den Vorteil, daß das nichtlineare *diskretisierte* Gleichungssystem differenziert wird und nicht die partiellen Differentialgleichungen in analytischer Form. Ein Vorteil ganz anderer Art ist darin zu sehen, daß die Prozedur für die numerische Differentiation nur einmal implementiert werden muß und damit sowohl verschiedene Diskretisierungen als auch unterschiedliche Turbulenzmodelle ohne größeren zusätzlichen Aufwand korrekt differenziert werden können. Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen sollen Anhaltspunkte für einen Einsatz von Newton-Verfahren für die Lösung turbulenter inkompressibler Strömungen geben.

1.2.3 Lösungsverfahren

Aus der Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen und der Turbulenztransportgleichungen resultieren sowohl für die Fixpunktiteration als auch für das Newton-Verfahren *schwachbesetzte* lineare Gleichungssysteme, die aufgrund ihrer Größe mit einem iterativen Verfahren gelöst werden müssen. Zur Lösung dieser *nichtsymmetrischen* Gleichungen

wurden in den letzten 15 Jahren mehrere Varianten der für symmetrische Matrizen konzipierten konjugierten Gradienten Verfahren [29] entwickelt. Bekannte Vertreter dieser auch Krylov-Unterraum Verfahren genannten Lösungsmethoden sind GMRES [30], BiCG [29] und BiCGSTAB [31]. In Verbindung mit Vorkonditionierungsverfahren wie SSOR oder ILU [32] wurden diese Verfahren erfolgreich für Matrizen moderater Größe eingesetzt. Ein Vergleich von Krylov-Unterraum Verfahren angewandt auf kompressible Strömungen findet man in [33]. Ein Nachteil dieser robusten und meist recht gut konvergierenden Verfahren besteht jedoch darin, daß der Aufwand zur Lösung der Gleichungssysteme mit der Zahl der Unbekannten ansteigt. Für symmetrische Matrizen ergibt sich etwa ein Aufwand von $O(N^{5/4})$ oder $O(N^{9/8})$ für zwei- bzw. dreidimensionale Anwendungen [34]. Für nichtsymmetrische Gleichungssysteme können nur schwer entsprechende Abschätzungen gemacht werden. Um eine anzustrebende optimale Komplexität von $O(N)$ zu erhalten, ist ein Mehrskalenansatz notwendig, da Eingitterverfahren, wie die oben aufgeführten, dies nicht erreichen können [32]. Das erste Mehrgitterverfahren wurde von [35] beschrieben und von [36] und [37] später weiterentwickelt. Erste Anwendungen und Konvergenzbetrachtungen für die Navier-Stokes Gleichungen findet man bei [38]. Seit den achtziger Jahren werden Mehrgitterverfahren in vielen Simulationsprogrammen für laminare Strömungen eingesetzt [39, 40, 41], und in neuerer Zeit gewinnen Mehrgitterverfahren auch bei der Berechnung von turbulenten Strömungen immer mehr an Bedeutung [42, 43, 44, 45].

Bei den *linearen* Mehrgitterverfahren, die zur Lösung linearer Gleichungssysteme eingesetzt werden, muß noch zwischen geometrischen und algebraischen Mehrgitterverfahren unterschieden werden. Bei den geometrischen Mehrgitterverfahren wird eine Hierarchie von Gittern benötigt, während bei den algebraischen Mehrgitterverfahren nur ein feines Gitter existiert und die Grobgittermatrizen über das zu lösende Problem erstellt werden. Algebraische Mehrgitter erfordern einen vergleichsweise großen Aufwand zur Berechnung der Gitterhierarchie, haben aber den Vorteil, daß sie ohne große Veränderungen in einem existierenden Eingitter-Code implementiert werden können. Beispiele hierzu finden sich in [46, 47]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden algebraische Mehrgitterverfahren nicht eingesetzt. Weitere interessante Varianten der Mehrgitterverfahren sind die *nichtlinearen* Mehrgitterverfahren. Diese lösen nicht die linearen bzw. linearisierten Gleichungssysteme, sondern werden direkt auf das nichtlineare Problem angewandt. Unterschieden wird bei diesen Verfahren zwischen dem FAS (full approximation scheme) Verfahren von Brandt [48] und dem seltener eingesetzten Verfahren von Hackbusch [49]. Werden Mehrgitterverfahren für kompressible Strömungen oder turbulente Strömungen verwendet, so sind dies meist FAS-Mehrgitterverfahren [42, 43]. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß auch lineare Mehrgitterverfahren durchaus geeignet für die Simulation turbulenter Strömungen sind, obgleich ein Vergleich zwischen beiden Verfahren hier leider nicht gezeigt werden kann.

Ein häufig anzutreffendes Problem bei linearen Mehrgitterverfahren ist die Sensitivität des Konvergenzverhaltens auf die Qualität der Startlösung. In manchen Fällen kann dies sogar zur Divergenz des Iterationsverfahrens führen. Dies kann entweder an einer ungünstigen Einstellung der Glättungsiteration liegen oder auch an starken Störungen an wenigen Knotenpunkten im Rechengebiet. Divergenz aufgrund solcher punktueller Störungen kann in den meisten Fällen verhindert werden, wenn das lineare Mehrgitterverfahren nicht

als Lösungsverfahren, sondern zur Vorkonditionierung für eines der oben beschriebenen Krylov-Unterraum Verfahren eingesetzt wird [34].

Neben der Untersuchung verschiedener Lösungsverfahren ist als zweiter Schwerpunkt dieser Arbeit die Anwendung einer adaptiven lokalen Verfeinerung auf die Berechnung turbulenter Strömungen zu sehen. Adaptive Gitterverfeinerung wird seit den achtziger Jahren hauptsächlich für stark kompressible viskose und nichtviskose Strömungen eingesetzt, bei denen im Bereich von Stoßwellen eine sehr hohe Gitterfeinheit notwendig ist [50, 51]. Da eine adaptive Gitterverfeinerung vor allem dann sinnvoll ist, wenn ein kleiner Bereich des Rechengebiets eine besonders hohe Auflösung erfordert, gibt es relativ wenig Anwendungen für laminare isotherme inkompressible Strömungen. Attraktiv wird die Adaptivität jedoch für laminare reagierende Strömungen, da im Flammenbereich wiederum sehr genau aufgelöst werden sollte [52]. Bei turbulenten Strömungen sind es vor allem Grenz- oder Scherschichten, in deren Bereich eine adaptive Gitterverfeinerung sinnvoll eingesetzt werden kann. Beispiele hierzu sind in [53] gegeben. Die ersten Beispiele für Anwendungen von Mehrgitterverfahren für lokal verfeinerte Gitter — man spricht hier auch von *lokalen* Mehrgitterverfahren — wurde in [54] und mit optimaler Komplexität in [55] beschrieben. Letzteres Verfahren in etwas modifizierter Version wird auch in dem in dieser Arbeit eingesetzten Programmcode *UG* verwendet [56]. Wie diese Methoden auch für turbulente Strömungen eingesetzt werden können, wird in dieser Arbeit untersucht.

1.2.4 Gittergenerierung und Adaptivität

Bis noch vor wenigen Jahren wurden in den meisten kommerziellen Strömungspaketen blockstrukturierte Gitter eingesetzt. Diese Gitter sind zwar für den Lösungsprozess günstig, die Erstellung der Gitter erfordert jedoch bei komplexen Geometrien sehr viel Arbeitszeit, die meist deutlich über der Simulationszeit liegt. Mittlerweile kommen immer mehr kommerzielle Gittergenerierungspakete auf den Markt, die eine mehr oder weniger automatische Gittergenerierung ermöglichen. Zusätzliche Tools sind jedoch notwendig, um Gebiete, die eine besonders feine Auflösung erfordern (z.B. Grenzschichten), feiner zu vernetzen als es der Gittergenerator im ersten Durchgang getan hat. Solche zusätzlichen Gitterverbesserungen erfordern in einigen Fällen *hybride* Gitter, in zwei Raumdimensionen könnten dies zum Beispiel Viereckselemente innerhalb einer Grenzschicht und Dreieckselemente im übrigen Bereich (3D: Prismen oder Hexaeder in Grenzschichten, sonst Tetraeder) sein.

Die Anwendung geometrischer Mehrgitterverfahren erfordert wie schon erwähnt eine Hierarchie von unterschiedlich feinen Gittern. In vielen Codes wird von einem meist strukturierten feinen Gitter ausgegangen und die gröberen Gitter entstehen durch Entfernen von Knoten des feinen Gitters. Diese Vorgehensweise ist weniger geeignet bei unstrukturierten und adaptiv verfeinerbaren Gitter. In *UG* wird daher von einem konsistenten² groben Gitter ausgegangen und durch Verfeinerung mehrerer oder aller Element werden sukzessiv feinere Gitter erstellt. Weisen die Elemente auf dem groben Gitter dabei starke Größenunterschiede auf, so ergeben sich nach mehrmaligem Verfeinern Gebiete mit gleich

²konsistent heißt hier, daß das gesamte Rechengebiet ohne Überlappung bedeckt ist

großen Elementen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine vor allem für Grenzschichten geeignete Glättungsstrategie entwickelt, die zum einen glatte Übergänge bezüglich der Elementgröße ermöglicht und zum anderen eine auf dem Grobgitter vorgegebene Verfeinerungsrichtung auch auf den verfeinerten Gittern beibehält. Hierbei entstehen Gitter, die zum Teil Gebiete ähnlich eines blockstrukturierten Gitters haben und zum Teil unstrukturiert sein können. Dieses Verfahrens ist somit auch für adaptive Gitterverfeinerungen anwendbar, was an einigen Beispielen demonstriert wird.

1.3 Ziel der Arbeit

In dieser Arbeit sollen Methoden untersucht und weiterentwickelt werden, die eine effiziente Berechnung inkompressibler turbulenter Strömungen, basierend auf *linearen* Mehrgitterverfahren, ermöglichen. Die verwendete Finite Volumen Diskretisierung führt auf ein gekoppeltes Gleichungssystem für den Druck und die Geschwindigkeit. Diese Diskretisierung erlaubt zwar sehr große Zeitschritte, das zu lösende Gleichungssystem erfordert jedoch sehr gute Lösungsverfahren. Es soll daher untersucht werden, welche Auswirkungen die Glättungsverfahren und die Mehrgitterstrategie, sowie eine Beschleunigung der Mehrgitteriteration mit Krylov-Unterraum Lösungsverfahren haben.

Nach der Untersuchung der Lösungsverfahren soll ein zweiter Schwerpunkt der Einsatz von lokal verfeinerten Gittern sein. Zum einen interessiert dabei der Einfluß einer lokal verfeinerten Mehrgitterhierarchie auf das Lösungsverhalten gegenüber uniform verfeinerten Gittern. Zum anderen soll untersucht werden, welche Größen zur Steuerung der adaptiven Gitterverfeinerung geeignet sind. Voraussetzung für all diese Untersuchungen sind Gitter, die eine zu Wänden hin gerichtete starke Verfeinerung haben, um den Anforderungen der eingesetzten Low-Reynolds Turbulenzmodelle zu genügen. Eine Methode zur Generierung einer dafür geeigneten Mehrgitterhierarchie auch für lokal verfeinerte Gitter soll hier entwickelt werden.

Ein weiterer Ansatzpunkt zur Konvergenzbeschleunigung des Gesamtverfahrens stellt eine Verbesserung der Linearisierung der nichtlinearen Gleichungssysteme für die Strömungs- und Turbulenzgrößen dar. Mit Hilfe numerischer Differentiation soll ein Newton-Verfahren implementiert und Einsatzmöglichkeiten getestet werden.

1.4 Aufbau

Im folgenden Kapitel werden die Grundgleichungen für inkompressible turbulente Strömungen aufgeführt und ein Überblick über die Turbulenzmodellierung gegeben. Etwas genauer wird dabei auf die Low-Reynolds Zweigleichungsmodelle eingegangen, die bei den in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Experimenten eingesetzt wurden. Für eine detaillierte Beschreibung dieser Turbulenzmodelle wird auf den Anhang A verwiesen.

In Kapitel 3 wird die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Finite Volumen Diskretisierung der Navier-Stokes und Turbulenzgleichungen für zwei Raumdimensionen beschrieben.

Im Kapitel Lösungsverfahren wird zuerst eine Einführung der klassischen Iterationsverfahren gegeben und anschließend werden die Komponenten eines Mehrgitterverfahrens erläutert. Zusätzlich wird noch auf die Verfahren der konjugierten Gradienten eingegangen, die in dieser Arbeit in Kombination mit Mehrgitterverfahren eingesetzt werden. Im letzten Teil dieses Kapitels werden Möglichkeiten zur Linearisierung der Gleichungen vorgestellt und die Berechnung der Jacobi-Matrix mit Hilfe einer numerischen Differentiation beschrieben.

Eine Erläuterung der Gittergenerierung in *UG* und die speziell für Grenzschichtströmungen entwickelte Gitterverfeinerung erfolgt dann in Kapitel 5. Die Anwendung für adaptiv verfeinerte Gitter wird beschrieben, sowie eine Wandabstandsberechnung basierend auf hierarchischen Gitter. Im zweiten Teil des Kapitels wird auf die Steuerung der Adaptivität eingegangen.

Im sechsten und siebten Kapitel werden die Ergebnisse der numerischen Experimente vorgestellt. Als Beispiele dienen dazu eine Hügelströmung und eine Tragflügelumströmung bei großem Anstellwinkel. Im sechsten Kapitel werden Einflüsse der Turbulenzmodelle, der Einstellung verschiedener Komponenten des Mehrgitterverfahrens und der Zeitschrittsteuerung auf das Konvergenzverhalten der stationären Lösung untersucht. Im siebten Kapitel werden zuerst für laminare und dann für turbulente Strömungen verschiedene Varianten eines Newton-Verfahrens mit numerischer Differentiation getestet.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen sind Gegenstand des letzten Kapitels.

2 Modellierung turbulenter Strömungen

2.1 Übersicht

Eine Definition für Turbulenz wird in Hinze [1] gegeben: „Die turbulente Bewegung eines Fluides ist ein unregelmäßiger Strömungszustand in dem die verschiedenen Größen einer zufälligen Veränderung in Zeit- und Ortskoordinaten unterliegen, so daß aber statistisch gesehen Durchschnittswerte unterschieden werden können.“ Das bedeutet, daß trotz unregelmäßigen Verhaltens der Strömung immer wiederkehrende ähnliche Strukturen auftreten; dieses gilt sowohl für ein Fortschreiten in der Zeit als auch im Raum. Um die Größen dieser ähnlichen Strukturen zu kennzeichnen werden turbulente Längen- und Zeitskalen eingeführt. Die turbulenten Längenskalen reichen von der sogenannten Kolmogorov-Länge¹, die zwar deutlich über den molekularen Längenskalen liegt (mittlere freie Weglänge) aber trotzdem noch äußerst klein ist, bis zu Längen, die in der Größenordnung der umströmten Objekte liegen. Die Größenordnung des oberen Bereichs der Zeitskala wird charakterisiert durch das Verhältnis der Gebietsgröße zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Das unter Ende der Skala liegt um einige Größenordnungen über den Werten, die man aus den molekularen Kollisionsfrequenzen erhalten würde.

Um eine genaue numerische Simulation einer zeitabhängigen dreidimensionalen Strömung durchzuführen, ist es notwendig, alle physikalisch relevanten Skalen ausreichend aufzulösen. Prinzipiell kann dies mit Hilfe der Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt werden, die zur Simulation laminarer Strömungen verwendet werden. Eine solche Simulation turbulenter Strömungen wird als direkte numerische Simulation (DNS) bezeichnet und erfordert einen immensen Aufwand an Rechenzeit sowie sehr große Arbeitsspeicher. Da das Verhältnis von großen zu kleinen Längenskalen mit steigender Reynoldszahl sehr schnell wächst, ist eine solche Simulation heutzutage nur für Strömungen mit niedrigen Reynoldszahlen und auf einfachen Geometrien möglich [57, 58, 59]. Um die kleinsten Turbulenzballen auflösen zu können ist eine Gittergröße von $h \approx \nu^{3/4}$ nötig; bei einem Einheitswürfel sind das $N = \nu^{-9/4}$ Gitterpunkte und würde bei einer Reynoldszahl von 10^4 auf etwa 10^9 Gitterpunkte führen. Solche Größenordnungen von Gitterpunkten werden in nicht allzu ferner Zukunft sicherlich berechenbar sein, technisch relevante Probleme mit Reynoldszahlen $> 10^5$ erfordern aber noch weitaus größere Rechengitter. Auch wenn der Anwendungsbereich der DNS noch sehr beschränkt ist, so können die Resultate von DNS

¹Die Kolmogorov-Länge ist definiert durch $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, wobei ν die kinematische Viskosität und ε die turbulente Dissipation sind

Rechnungen sehr gute Dienste zum besseren Verständnis turbulenter Strömungsvorgänge und zum Testen und Entwickeln von Turbulenzmodellen leisten (z.B. [60, 61]).

Ein etwas einfacherer Ansatz die turbulenten Schwankungen in einem Strömungsfeld zu beschreiben wird bei der *Grobstruktursimulation* (engl.: large eddy simulation LES) verwendet. Es wird angenommen, daß die sehr kleinen Turbulenzstrukturen relativ einfachen molekulardynamischen Gesetzen gehorchen und ihr Einfluß auf die größeren Strukturen mit physikalischen Modellen beschrieben werden können. Die kleinen Turbulenzstrukturen müssen daher nicht mit dem Rechengitter aufgelöst werden und es können im Vergleich zur direkten Simulation deutlich gröbere Gitter verwendet werden. Anwendung findet die LES zum Beispiel bei der Simulation von geophysikalischen Strömungen oder bei Umströmungen einfacher Körper [62, 63, 64, 10, 65]. Aufgrund langer Rechenzeiten sind Grobstruktursimulationen für die meisten technische Anwendungen momentan nur bedingt einsetzbar. Wegen der deutlich besseren Repräsentation der physikalischen Prozesse gegenüber den nachfolgend beschriebenen *statistischen Turbulenzmodellen* wird die LES in nächster Zukunft mit steigender Rechnerleistung sicherlich immer weitere Verbreitung finden.

Wie am Anfang des Kapitels erwähnt wurde, ist es möglich, die zufälligen Schwankungen der verschiedenen Strömungsgrößen statistisch zu behandeln. Dazu bedient man sich der schon 1895 von Reynolds [66] vorgeschlagenen Aufteilung aller Größen in einen gemittelten und einen fluktuierenden Anteil

$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi' \quad . \quad (2.1)$$

Bei der Durchführung des Mittelungsprozesses muß man nun verschiedene Zeitintervalle unterscheiden. Zum einen muß die zeitliche Mittelung der turbulenten Schwankungen ausreichend lange durchgeführt werden um statistisch aussagekräftige Werte für Mittelwert und Varianz der Schwankungen zu erhalten, zum anderen dürfen zeitliche Änderungen der nicht stationären Strömung, die zum Beispiel aufgrund von instationären Druckgradienten hervorgerufen werden, nicht in den Mittelungsprozess einbezogen werden. Sind nun T_1 die turbulente Zeitskala und T_2 die Größenordnung der zeitlichen Veränderungen im Strömungsfeld, die nicht zur Turbulenz gezählt werden sollen, so kann man mit

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi \, dt \quad (2.2)$$

einen Mittelwert definieren, wenn gilt $T_1 \ll T \ll T_2$. Wendet man diese Art von Mittelwertbildung nun auf Produkte zweier Größen an, so erhält man die Beziehung

$$\overline{\Phi\Psi} = \overline{\Phi} \overline{\Psi} + \overline{\Phi'\Psi'} \quad . \quad (2.3)$$

2.2 Die zeitlich gemittelten inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Da sich diese Arbeit nur mit Strömungen unveränderter Dichte

befäßt, wird die Energiegleichung hier nicht benötigt und die inkompressible Form der Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

im weiteren verwendet. Hierbei sind \mathbf{u} , p und ν der Geschwindigkeitsvektor, der reduzierte Druck² und die kinematische Viskosität. Äußere Kräfte wurden hier nicht berücksichtigt. Wendet man nun Gleichung (2.3) auf obige Erhaltungsgleichungen an, indem man $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ setzt, so erhält man die zeitlich gemittelte Form der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen³

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.7)$$

Der durch den Mittelungsprozess entstandene Term $\boldsymbol{\tau} = -\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ ist der sogenannte Reynolds-Spannungs-Tensor mit den Komponenten $\tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$. Wegen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ handelt es sich um einen symmetrischen Tensor mit vier Komponenten in zwei Raumdimensionen bzw. sechs Komponenten in drei Raumdimensionen. Um das Gleichungssystem lösen zu können, müssen daher vier bzw. sechs neue Gleichungen gefunden werden. Dazu werden die Momente der Impulsgleichung bestimmt, indem man (2.7) mit den Schwankungsgrößen der Geschwindigkeit \mathbf{u}' multipliziert und das Produkt zeitlich mittelt. Dies führt dann zu den Reynolds-Spannungs-Transportgleichungen, die im dreidimensionalen Fall 22 neue Unbekannte enthalten [12]. Bedingt durch die Nichtlinearität der Navier-Stokes Gleichungen, wird man bei der Bestimmung immer höherer Momente immer wieder zusätzliche Unbekannte erhalten. Um das Gleichungssystem schließen zu können, müssen daher geeignete Näherungen für diese Unbekannten in Abhängigkeit der bereits bekannten Strömungsgrößen gefunden werden. Das ist nun die Aufgabe der Turbulenzmodellierung. Seit den Anfängen der Turbulenzmodellierung Ende des letzten Jahrhunderts sind bis heute eine sehr große Anzahl von Turbulenzmodellen von sehr unterschiedlicher Komplexität und für verschiedene Anwendungsbereiche entwickelt worden. Im folgenden Abschnitt soll ein grober Überblick über das Gebiet der Turbulenzmodellierung gegeben werden.

2.3 Übersicht über die Turbulenzmodelle

Abgesehen von den komplexen Reynolds-Spannungs-Turbulenzmodellen, bei denen die Komponenten des Reynolds-Spannungs-Tensors $\boldsymbol{\tau}$ mit Hilfe von Transportgleichungen

²Da in dieser Arbeit nur isotherme inkompressible Strömungen behandelt werden, wird mit p der reduzierte Druck $p = p_{\text{stat}}/\rho$ und nicht der statische Druck p_{stat} bezeichnet.

³Korrektweise entsprechen die Navier-Stokes Gleichungen der Impulsgleichung. In der CFD Literatur hat es sich jedoch eingebürgert, das gesamte Gleichungssystem bestehend aus Kontinuitätsgleichung, Impulsgleichung und eventuell Energiegleichung als Navier-Stokes Gleichungen zu bezeichnen.

gelöst werden, wird üblicherweise die Boussinesq Approximation

$$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij} \quad (2.8)$$

oder eine davon abgeleitete Form angewandt, um die Reynolds-Spannungen in Abhängigkeit einer turbulenten Viskosität ν_t und dem mittleren Hauptspannungstensor \mathbf{S} mit den Komponenten $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i})$ zu berechnen.

2.3.1 Algebraische Turbulenzmodelle

Setzt man nun Gleichung (2.8) in die zeitlich gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (2.7) ein, so erfordert nur noch die turbulente Viskosität eine Modellierung in Abhängigkeit der bekannten Strömungsgrößen. Hierzu führte Prandtl 1925 [67], analog zur mittleren freien Weglänge in einem Gas, die Mischungslänge l_{mix} ein und bestimmte die turbulente Viskosität für eine Grenzschichtströmung mit

$$\nu_t = l_{mix}^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|. \quad (2.9)$$

Einen sehr einfachen Ansatz für die Mischungslänge in einer Grenzschicht erhält man mit

$$l_{mix} = \begin{cases} \kappa y & : y < \kappa \delta \\ \kappa \delta & : y \geq \kappa \delta \end{cases}. \quad (2.10)$$

Diese Vereinfachungen spiegeln zwar keinesfalls die Komplexität der physikalischen Prozesse in einer turbulente Strömung wieder, es gibt aber doch eine Reihe von Anwendungen, in denen weiterentwickelte Varianten obiger Ansätze zur Berechnung der Mischungslänge und der daraus abgeleiteten turbulenten Viskosität durchaus akzeptable Ergebnisse liefern. Zu erwähnen sind hierbei das Cebeci-Smith Modell [68], das Baldwin-Lomax Modell [69] und das Johnson-King 1/2-Gleichungsmodell, das vor allem bei einfacheren kompressiblen Strömungen recht erfolgreich eingesetzt wird [70].

2.3.2 Eingleichungs-Turbulenzmodelle

Anstatt eine turbulente Geschwindigkeitsskala entsprechend (2.9) über die einfache Beziehung $v_{mix} \sim l_{mix} |\partial U / \partial y|$ zu bestimmen, schlug Prandtl 1945 [71] vor, die turbulente kinetische Energie⁴

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (2.11)$$

als dazu geeignete Größe zu nehmen. Die turbulente Viskosität erhält man dann mit

$$\nu_t = \text{const.} \cdot k^{1/2} l. \quad (2.12)$$

⁴Üblicherweise ist damit die *spezifische* turbulente kinetische Energie gemeint, also Energie pro Masse mit der Einheit m^2/s^2 .

In Abschnitt 2.2 wurde kurz erwähnt, auf welche Weise die Differentialgleichungen für die Reynolds-Spannungen hergeleitet werden können. Nimmt man die Spur der Reynolds-Spannungs-Transportgleichungen und addiert die Gleichungen entsprechend Gleichung (2.11) so erhält man die Transportgleichung für die kinetische turbulente Energie k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_k} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} \right) . \quad (2.13)$$

Hierbei ist ε die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie und ist durch

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (2.14)$$

definiert und bestimmt den Betrag der turbulenten kinetischen Energie, der pro Zeiteinheit in interne thermische Energie umgewandelt wird. Der erste Term auf der rechten Seite von (2.13) wird als Produktionsterm bezeichnet, da dieser den Energietransfer vom gemittelten Strömungsfeld zu den turbulenten Strukturen repräsentiert. Der Term mit $\frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial k}{\partial x_j}$ wird als molekulare Diffusion bezeichnet und ist der Anteil von k , der durch die vom Strömungsmedium abhängigen molekularen Transportprozesse bestimmt wird. Außer für sehr schwach turbulente Gebiete der Strömung, z.B. der wandnahe Bereich (siehe Abschnitt 2.4), spielt dieser Term eine untergeordnete Rolle. Der Anteil der turbulenten kinetischen Energie, der durch die turbulenten Schwankungsbewegungen transportiert wird, wird durch den turbulenten Transportterm $\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_i u'_j}$ bestimmt. Der letzte Term in (2.13) wird als Druck-Diffusions Term bezeichnet und ergibt sich aus Korrelationen von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen. Abgesehen vom Zeitterm und dem Konvektionsterm auf der linken Seite von (2.13) sowie dem molekularen Diffusionsterm, enthalten alle Terme aus dem Mittelungsprozess entstandene unbekannte Korrelationen, die mit Hilfe geeigneter Ansätze modelliert werden müssen.

Wie schon für die algebraischen Turbulenzmodelle, wird auch für die Transportgleichung von k , ausgehend von der Boussinesq Approximation (2.8), der Reynolds-Spannungs-Tensor modelliert. Man erhält mit der zusätzlichen Forderung, daß die Spur des Reynolds-Spannungs-Tensor sich entsprechend Gleichung (2.11) verhalten muß

$$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} . \quad (2.15)$$

Die beiden letzten Terme aus (2.13) werden meist zusammengefaßt und mit einem Gradienten-Diffusions Ansatz analog zu molekularen Transportprozessen ($\nu \partial \Phi / \partial x_i$) modelliert. Diese führt zu

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} , \quad (2.16)$$

wobei σ_k eine noch zu bestimmende Modellkonstante ist. Für den verbleibenden Term ε gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Über eine reine Dimensionsbetrachtung erhält man $\varepsilon \sim k^{3/2} / l$ und muß dann wiederum die turbulente Längenskala l bestimmen. Nimmt man für die Längenskala ähnliche Beziehungen wie in (2.10), so erhält man eine geschlossene

Form für (2.13) und muß diese partielle Differentialgleichung zusätzlich zu den Navier-Stokes Gleichungen lösen. Bekannte Vertreter dieses Typs von Eingleichungsmodellen sind die Modelle von Wolfshtein [72] und Goldberg [73]. Einen zweiter Typ von Eingleichungsmodellen wurde in den letzten Jahren wieder verstärkt untersucht. Es handelte sich hierbei um Eingleichungsmodelle basierend auf einer Transportgleichung für die turbulente Viskosität oder einer vergleichbaren Größe. Wie auch bei den k -Transportmodellen müssen auch hier geeignete Annahmen für die Bestimmung der turbulenten Längenskala getroffen werden. Zu erwähnen sind hier die Modelle von Baldwin und Barth [74] und von Spalart und Allmaras [75].

Der Anwendungsbereich dieser Modelle geht aber trotzdem nicht sehr weit über den Bereich hinaus, in dem auch die algebraischen Modelle noch relativ gute Ergebnisse liefern. Für Strömungen mit Ablösungen sind beide Modellklassen nur sehr beschränkt geeignet, wobei aber die Eingleichungsmodelle sicherlich ein größeres Potential besitzen, um auch für diese Strömungen eingesetzt werden zu können. Auch der Übergang von Grenzschichtströmungen zu freien Scherströmungen ist sehr schwierig zu handhaben.

2.3.3 Zweigleichungs-Turbulenzmodelle

Sicherlich den größte Anteil an Untersuchungen und Entwicklungen in der Turbulenzmodellierung erfuhren in den letzten 25 Jahren die Zweigleichungs-Turbulenzmodelle. Diese Modelle basieren nicht nur auf die Berechnung der turbulenten kinetischen Energie k , sondern auch auf die Berechnung einer turbulenten Längenskala oder einer davon abgeleiteten Größe. Weitere Informationen über die Turbulenzstrukturen der zu simulierenden Strömung sind daher nicht erforderlich. Die Vorgehensweise führt im Gegensatz zu den algebraischen oder Eingleichungs-Turbulenzmodellen zu einem „kompletten“ Turbulenzmodell. Allen Zweigleichungs-Turbulenzmodellen gemeinsam ist eine Transportgleichung für k (2.13) und eine Näherung für den Reynolds-Spannungs-Tensor ähnlich (2.15). Für die Gleichung zur Bestimmung der turbulenten Längenskala gibt es jedoch mehrere Ansätze. Abgesehen von Modellen für die Dissipation ε , die die größte Verbreitung gefunden haben, und für die spezifische Dissipationsrate ω , gibt es noch Modelle die auf der turbulenten Längenskala l oder der turbulenten Dissipationszeit τ basieren. Aus Dimensionsbetrachtungen heraus können folgende Beziehungen zwischen diesen Größen hergestellt werden:

$$\varepsilon \sim \omega k \sim k^{3/2}/l \sim k/\tau \quad (2.17)$$

$$\nu_t \sim k^2/\varepsilon \sim k/\omega \sim k^{1/2}/l \sim k\tau \quad (2.18)$$

Die bekanntesten Vertreter der Zweigleichungsmodelle sind die sogenannten k - ε und k - ω Modelle, die jeweils aus zwei Transportgleichungen und einer Gleichung für die turbulente

Viskosität ν_t bestehen. Diese können in folgender Form geschrieben werden:

k - ε Modell

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.20)$$

$$\nu_t = c_\nu k^2 / \varepsilon \quad (2.21)$$

k - ω Modell

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (2.23)$$

$$\nu_t = \alpha^* k / \omega \quad (2.24)$$

Auf die Modellkonstanten und diverse Erweiterungen obiger Gleichungen wird in den nachfolgenden Abschnitten sowie im Anhang A näher eingegangen.

Im Vergleich zu den algebraischen Turbulenzmodellen und den Eingleichungsturbulenzmodellen ist der Anwendungsbereich dieser Modelle deutlich größer zu sehen. Die Boussinesq Approximation (2.8) oder deren Erweiterung (2.15), die allen bisher beschriebenen Modellen zugrunde liegt, ist aber nur gültig, wenn es einen linearen Zusammenhang zwischen τ_{ij} und S_{ij} gibt. Dies ist aber zum Beispiel für Strömungen, in denen extreme Änderungen des Hauptspannungstensors \mathbf{S} auftreten oder bei starker Stromlinienkrümmung nicht mehr erfüllt und führt zu ungleichen Reynolds-Normalspannungen ($\overline{u_i' u_i'}$). Beispiele hierzu sind Strömungen über gekrümmte Oberflächen, Strömungen mit Grenzschichtablösung, drallbehaftete Strömungen und dreidimensionale Strömungen. Sowohl für die k - ε als auch für die k - ω Modelle gibt es nun viele Korrekturterme, die für einen oder mehreren dieser Strömungstypen verbesserte Simulationsergebnisse ermöglichen. Korrekturen für Strömungen über gekrümmte Wände enthalten beispielsweise Zusatzterme in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsgradienten in der Grenzschicht und dem Krümmungsradius [76, 77, 78]. Die Anwendung solcher für bestimmte Strömungen angepaßter Modelle sollte aber mit äußerster Vorsicht durchgeführt werden und immer auf Ergebnisse geeigneter Experimente gestützt sein.

2.3.4 Nichtlineare Zweigleichungsmodelle

Eine Möglichkeit eine allgemeinere Bestimmung des Reynolds-Spannungs-Tensors zu erhalten besteht darin, die Boussinesq Approximation als den ersten Term einer Funktionenreihe anzusehen. Saffman [79] zeigte, daß für inkompressible Strömungen eine solche Erweiterung die Form

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_t S_{ij} - C \frac{k^3}{\varepsilon^2} (S_{ik} \Omega_{kj} + S_{jk} \Omega_{ki}) \quad (2.25)$$

haben sollte ($\Omega_{ki} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i})$ ist die Wirbelstärke). Turbulenzmodelle, die eine solche oder ähnliche Erweiterung der Boussinesq Approximation beinhalten, werden als nichtlineare Zweigleichungsmodelle bezeichnet. Beispiele für nichtlineare k - ε Modelle findet man in [80, 13, 14] und für ein nichtlineares k - ω Modell in [81].

2.3.5 Algebraische Reynolds-Spannungs-Modelle

Bildet man die Differenz zwischen dem konvektiven Term und dem turbulenten Transportterm der Reynolds-Spannungs-Transportgleichungen erhält man nach einigen Vereinfachungen eine nichtlineare algebraische Gleichung, aus der der Reynolds-Spannungstensor bestimmt werden kann [82]. Eine häufig verwendete Form dieser algebraischen Gleichung ist

$$\frac{\tau_{ij}}{k} \left(\tau_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \varepsilon \right) = -\tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\tau_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) . \quad (2.26)$$

Es werden hier also auch weiterhin zwei Transportgleichungen verwendet (für k und ε), und zur Berechnung des Reynolds-Spannungstensors muß ein lineares Gleichungssystem für die Terme τ_{ij} gelöst werden. Wie aus (2.26) zu erkennen ist, werden die Koeffizienten für dieses Gleichungssystem aus k , ε und den Geschwindigkeitsgradienten bestimmt. Modelle dieser Art werden als algebraische Reynolds-Spannungs-Modelle bezeichnet. Für Strömungen mit Stromlinienkrümmung können mit diesen Modellen oftmals deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden, als mit den linearen und nichtlinearen Zweigleichungsmodellen [83, 84].

2.3.6 Reynolds-Spannungs-Modelle

Wie aus den bisherigen Abschnitten zu erkennen ist, kann die Boussinesq Approximation bei weitem nicht für alle Strömungsfälle sinnvoll eingesetzt werden, und auch Erweiterungen dieser Approximation werden sicher niemals universellen Charakter haben können. Wie schon in Abschnitt 2.2 erwähnt wurde, kann man Momente der Navier-Stokes Gleichung bestimmen, indem man die Navier-Stokes Gleichungen mit einer fluktuierenden Größe multipliziert und davon den zeitlichen Mittelwert bildet. Durch geeignete Umformungen kommt man somit auf die exakte Form der Transportgleichung für die Reynolds-Spannungen

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right) , \quad (2.27)$$

$$\text{mit} \quad \Pi_{ij} = \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} , \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (2.29)$$

$$\text{und} \quad C_{ijk} = \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} . \quad (2.30)$$

Dadurch, daß Terme für Konvektion und Diffusion in einer solchen Transportgleichung enthalten sind, werden Effekte der Strömungshistorie bezüglich der einzelnen Reynolds-Spannungs-Komponenten mit einem solchen Modell erfaßt. Qualitativ werden auch Effekte wie zum Beispiel Stromlinienkrümmung und Drall durch die Konvektions- bzw. Produktionsterme berücksichtigt. Mit Hilfe der Reynolds-Spannungs-Modelle können somit die Effekte auch komplexer Strömungen qualitativ wiedergegeben werden. Eine im Vergleich zu den Zweigleichungsmodellen noch größere Zahl an Modellfunktionen und -konstanten erfordert noch intensive Untersuchungen, um in Richtung eines „universellen“ Reynolds-Spannungs-Modells zu gelangen. Einen guten Überblick über die physikalischen Aspekte der einzelnen Terme in (2.27) findet man in [16] und Beispiele für Anwendungen und Modellentwicklungen in [15, 85, 17, 86].

Um eine physikalisch realistische Simulation komplexer Strömungen durchzuführen, wird man nicht an den Reynolds-Spannungs-Modellen vorbeikommen können. Vor allem dann, wenn nicht die Möglichkeit besteht, anhand von vergleichbaren Experimenten eine Feineinstellung der Konstanten und Funktionen der Zweigleichungsmodelle vorzunehmen, ist es wichtig ein einigermaßen universelles Turbulenzmodell zu verwenden. Die Reynolds-Spannungs Modelle sind jedoch aufwendiger zu implementieren, und das entstehende Gleichungssystem ist schwerer lösbar als das eines Zweigleichungsmodells.

2.4 Modellierung des wandnahen Bereichs

Will man die Bereiche klassifizieren, in denen Turbulenz entsteht, so wird man diese meist in *freie* und in *wandgebundene* turbulente Scherströmungen einteilen. Zu den freien turbulenten Scherströmungen zählt man die Strahlströmungen und die Nachlaufströmungen. Turbulenz entsteht hierbei durch Geschwindigkeitsgradienten, bedingt durch aneinander stoßende Stoffströme mit sehr unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten, und den daraus resultierenden mittleren Schubspannungen. Die im Abschnitt (2.3.3) beschriebenen Zweigleichungs-Turbulenzmodelle können in dieser Form für freie turbulente Strömungen angewandt werden. Es handelt sich hierbei um sogenannte Turbulenzmodelle für hohe Reynoldszahlen (high Reynolds turbulence models).

Bei den wandgebundenen turbulenten Strömungen wird die Turbulenzstruktur dagegen direkt durch das Vorhandensein einer Wand beeinflusst. Man kann hierbei wiederum zwei Gruppen von wandgebundenen Strömungen unterscheiden, *externe* und *interne* Strömungen. Externe Strömungen werden als die Strömungen bezeichnet, die um feste Körper fließen und nach außen hin keine räumliche Beschränkung erfahren. Entlang dieser Körper bilden sich in Stromrichtung ansteigende turbulente Grenzschichten und außerhalb der Grenzschicht liegt die ungestörte freie Strömung vor. Bei internen Strömungen dagegen kann die Grenzschicht nur soweit anwachsen, wie es die begrenzenden Wände erlauben. Hat man eine bereits entwickelte turbulente Strömung als Einströmprofil, so herrschen meist im gesamten Rechengbiet Grenzschichtbedingungen.

Bei turbulenten Strömungen entlang einer glatten Wand wird die Turbulenz durch viskose Spannungen, die im nahen Wandbereich auftreten, beeinflusst. Weiter entfernt von der Wand hat die molekulare Viskosität, vorausgesetzt die Reynoldszahl ist ausreichend groß,

auf das Strömungsverhalten und die großen Turbulenzstrukturen einen vernachlässigbaren Einfluß. Das Turbulenzverhalten ist dann vergleichbar mit dem einer freien Strömung. Betrachtet man den äußeren Bereich einer turbulenten Grenzschicht, so wird man Ähnlichkeiten zum Beispiel mit einer Strahlströmung erkennen können.

Es ist daher sinnvoll, bei turbulenten Strömungen entlang festen Körpern zwei Bereiche zu unterscheiden. Ein *wandnahes* Gebiet, in dem die Strömung direkt durch die Zustände an der Wand bestimmt wird — im Fall einer glatten Wand durch die Wandschubspannung und molekulare Viskosität — und ein *äußeres* Gebiet, in dem die Strömung nur noch indirekt durch die Wandschubspannung beeinflusst wird. Die Ausdehnung des wandnahen Gebiets beträgt ungefähr 15 % der gesamten Grenzschichtdicke.

Den wandnahen Bereich kann man wiederum in drei Bereiche unterteilen. In einer sehr dünnen Schicht direkt an der Wand ist die Strömung hauptsächlich viskos. Diese Schicht wird daher auch als *viskose Unterschicht* bezeichnet (engl.: viscous sublayer). Außerhalb dieser Schicht verschwindet der Einfluß der molekularen Viskosität mehr und mehr und „Trägheitseffekte“ der Turbulenzballen beeinflussen die Hauptströmung fast ausschließlich. Dieser Bereich wird der *voll turbulente Bereich* genannt (engl.: fully turbulent region) und zwischen diesem Gebiet und der viskosen Unterschicht liegt der *Übergangsbereich* (engl.: buffer layer).

2.4.1 Dimensionslose Beschreibung der Grenzschicht

Da die Strömung im wandnahen Gebiet definitionsgemäß von der Wandschubspannung abhängt⁵, kann man die Annahme treffen, daß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} durch den Abstand y von der Wand, der dynamischen Viskosität $\mu = \rho\nu$ und der Wandschubspannung $\tau_w = \mu dU/dy$ bestimmt wird [1]. Hierbei ist es sinnvoll eine die Geschwindigkeit bestimmende Größe, die sogenannte Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \quad (2.31)$$

einzuführen. Aus Dimensionsbetrachtungen heraus kann man nun dimensionslose Größen für die Geschwindigkeit u parallel zur Wand und den Wandabstand y mit

$$u^+ = u/u_\tau \quad \text{und} \quad y^+ = yu_\tau/\nu \quad (2.32)$$

definieren. Mit der Annahme $\mu\partial u_x/\partial y = \tau_{xy} \simeq \tau_w$ ergibt sich dann

$$u^+ = y^+ \quad (2.33)$$

für die viskose Unterschicht. Wenn man davon ausgeht, daß die Größe der Turbulenzballen, die ja die turbulente Viskosität bestimmt, in der wandnahen Schicht linear mit dem Wandabstand ansteigt ($\nu_t = \kappa u_\tau y$), erhält man die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung im voll turbulenten Gebiet mit der Gleichung⁶

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (2.34)$$

⁵Dabei wird vorausgesetzt, daß es sich um eine glatte Wand handelt, ansonsten spielt die Wandrauhigkeit noch eine wichtige Rolle.

⁶Aus den Gleichungen des Prandtl'schen Mischungslängenansatzes $\tau_{xy} = l_{mix}^2 \frac{d^2 u}{dy^2}$ und $l_{mix} = \kappa y$ erhält man das selbe Ergebnis.

Wegen (2.34) wird das voll turbulente Gebiet oftmals auch als das logarithmische Gebiet bezeichnet. Will man eine Näherung für das Geschwindigkeitsprofil im Übergangsbereich erhalten, so sollten zum einen die physikalischen Effekte berücksichtigt werden und zum anderen ein glatter Übergang zu den Gleichungen (2.33) und (2.34) gewährleistet sein. Hierzu gibt es mehrere Vorschläge, eine recht einfache Form erhält man mit

$$u^+ = \frac{1}{\kappa_1} \tanh(\kappa_1 y^+) \quad (2.35)$$

mit $\kappa_1 = 0.0688$.

Für den äußeren Bereich kann Gleichung (2.34) nicht mehr eingesetzt werden, da die dafür getroffenen Annahmen in diesem Bereich nicht mehr gültig sind. Experimentell konnte jedoch gezeigt werden, daß eine Gleichung in der Form

$$\frac{u - u_\infty}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (2.36)$$

für diesen Bereich eine dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung erlauben sollte. Gleichungen dieser Form werden als Geschwindigkeits-Defekt-Gesetz bezeichnet und beschreiben den gesamten turbulenten Bereich der Grenzschicht, d.h. sowohl den voll turbulenten Bereich des wandnahen Bereichs als auch den äußeren Bereich. Ähnlich (2.34) beschreiben auch die Gleichungen für das Geschwindigkeits-Defekt-Gesetz ein logarithmisches Verhalten

$$u_\infty^+ - u^+ = -A \ln \frac{y}{\delta} + B \quad (2.37)$$

Auch die Turbulenzgrößen können mit Hilfe der Wandschubspannung dimensionslos betrachtet werden. Daraus ergeben sich folgende Normierungen:

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}, \quad \overline{u'_i u'_j}^+ = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{u_\tau^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon \nu}{u_\tau^4} \quad (2.38)$$

Wie die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb einer Grenzschicht aus (2.33)-(2.36) beschrieben werden kann, ist in Abb. 2.1 dargestellt.

2.4.2 Wandfunktionen

Wendet man ein Turbulenzmodell für hohe Reynoldszahlen ohne grenzschichtabhängige Korrekturen zur Simulation einer turbulente Grenzschichtströmung an, so erhält man mit Ausnahme der k - ω Modelle eine sehr stark von (2.33) und (2.34) abweichende Geschwindigkeitsverteilung. Es sind daher Dämpfungsfunktionen notwendig, die eine korrekte Integration der viskosen Unterschicht erlauben. Die Wahl dieser Dämpfungsfunktionen hängt jedoch von vielen Parametern ab und hat einen großen Einfluß auf die Berechnung der gesamten Grenzschicht. Eine Möglichkeit, die Berechnung und somit Auflösung der viskosen Unterschicht zu umgehen, besteht darin, das Rechengitter erst gar nicht bis in die viskose Unterschicht hineinreichen zu lassen und geeignete Randbedingungen für einen sich

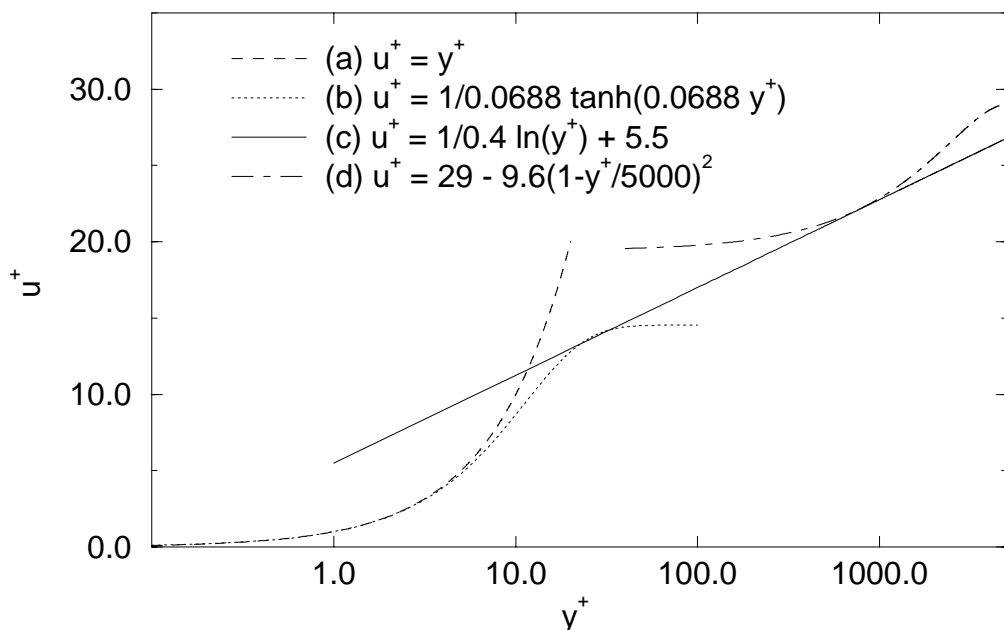


Abbildung 2.1. Näherungsfunktionen für die Geschwindigkeitsverteilung einer Grenzschicht in dimensionslosen Koordinaten: (a) viskose Unterschicht; (b) viskose Unterschicht und Übergangsbereich; (c) voll turbulente Zone; (d) äußerer Bereich (für $u_{max}^+ = 5000$).

noch in der logarithmischen Zone befindlichen Punkt zu finden. Die Randbedingungen für die Geschwindigkeit und die Turbulenzgrößen am wandnächsten Knotenpunkt oder dem wandnächsten Kontrollvolumen erhält man, indem man aus Strömungszuständen in Wandnähe die Wandschubspannung u_τ bestimmt und dann mit Näherungsfunktionen, ähnlich den in Abschnitt 2.4.1 beschriebenen, die Randbedingungen berechnet. Diese Näherungsfunktionen werden als *Wandfunktionen* bezeichnet [87].

Da die oben beschriebenen Näherungsfunktionen eigentlich nur für einfache Grenzschichtströmungen ohne ausgeprägte Druckgradienten oder Ablösung gültig sind, ist der Einsatz von Wandfunktionen für komplexe Geometrien und Strömungsverhältnisse nur bedingt zu empfehlen. Andererseits vereinfachen Wandfunktionen die numerische Simulation wandgebundener Strömungen erheblich, und trotz zum Teil unzulässiger Vereinfachungen erhält man oftmals akzeptable Ergebnisse.

2.4.3 Low-Reynolds Turbulenzmodelle

In der vorliegenden Arbeit wurden ausschließlich Low-Reynolds Turbulenzmodelle untersucht, die eine Berechnung der gesamten Grenzschicht bis in die viskose Unterschicht hinein erlauben. Deshalb soll hier etwas ausführlicher auf diese Modelle eingegangen werden.

2.4.3.1 k - ε Modelle mit Dämpfungsfunktionen

Da das k - ε Modell in der Form für hohe Reynoldszahlen eine unrealistisch hohe Turbulenzproduktion in der viskosen Unterschicht und der daran anschließenden Übergangsschicht bewirkt, wurde versucht mit Hilfe von geeigneten Dämpfungsfunktionen das Modellverhalten in diesem Bereich zu verbessern. Die ersten Modifikationen für das k - ε Modell von Launder und Spalding [87] wurden von Jones und Launder [16] vorgeschlagen. Weite Verbreitung haben auch die Modelle von Launder und Sharma [88], Lam und Bremhorst [89], Chien [90], Yang und Shih [91] gefunden. Diese Aufzählung ist jedoch bei weitem nicht vollständig. Als Variablen zur Steuerung der Dämpfungsfunktionen, die hier mit f_1 , f_2 , f_ν , ε^0 und E bezeichnet werden, werden in den meisten Fällen der normierte Wandabstand y^+ oder die dimensionslosen turbulenten Reynoldszahlen

$$R_t = \frac{k^2}{\varepsilon \nu} \quad \text{und} \quad R_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu} \quad (2.39)$$

verwendet. Die Transportgleichungen für k und ε (2.19) und (2.20) können in allgemeiner Form mit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (\varepsilon^0 + \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.41)$$

dargestellt werden und die turbulente Viskosität aus (2.21) berechnet sich dann mit

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon \quad . \quad (2.42)$$

Die Dämpfungsfunktionen des Chien k - ε Modells sind im Anhang A.1 gegeben. Ein gut dokumentierter Vergleich von acht verschiedenen Zweigleichungs-Turbulenzmodellen wurde in [92] durchgeführt. Es zeigte sich, daß die k - ε Turbulenzmodelle mit Dämpfungsfunktionen zwar einen mehr oder wenig korrekten Wert für B in Gleichung (2.34) liefern, aber keinen Einfluß auf das schlechte Verhalten bei Strömungen mit stark verzögerten Grenzschichten (engl.: adverse pressure gradient flows) haben. Kritisch zu betrachten sind aber auch alle Dämpfungsfunktionen, die Funktionen von y^+ oder R_y sind, da diese den Wandabstand benötigen und eine Berechnung des Wandabstandes für komplexe Geometrien aufwendig sein kann.

2.4.3.2 Zwei-Schichten k - ε Modelle

Wie im vorhergehenden Abschnitt zu sehen war, werden die Dämpfungsfunktionen vor allem für die Transportgleichung der Dissipation benötigt. Desweiteren haben die Dämpfungsfunktionen die Aufgabe, eine Balance zwischen Turbulenzproduktion und Dissipation zu schaffen, so daß im voll turbulenten Bereich eine Geschwindigkeitsverteilung entsprechend Gleichung (2.34) gewährleistet ist. Anstatt nun Dämpfungsfunktionen zu verwenden, um die Transportgleichung für ε geeignet zu modifizieren, wird bei den Zwei-Schichten

k - ε Modellen in der wandnahen Schicht eine Berechnung mit der ε -Transportgleichung vermieden, indem empirische Gleichungen zur Bestimmung der Verteilung der turbulenten Dissipation eingesetzt werden. Während also im Gebiet hoher Reynoldszahlen — in dem die molekulare Viskosität keine Rolle mehr spielt — die Standard-Gleichungen für k und ε (2.19) und (2.20) eingesetzt werden, wird im wandnahen Bereich die Gleichung für die kinetische turbulente Energie unverändert verwendet und für die turbulente Dissipation werden algebraische Gleichungen eingesetzt. Da die turbulente Dissipation im wandnahen Bereich sich um mehrere Größenordnungen verändert, erfordert die Berechnung der ε -Transportgleichungen eine sehr feine Diskretisierung in diesem Bereich. Mit algebraischen Ansätzen für die turbulente Dissipation ist eine solche Gitterauflösung nicht notwendig. Dies hat darüberhinaus auch einen positiven Einfluß auf das Konvergenzverhalten und die Stabilität der Simulation.

Bei den meisten Zwei-Schichten k - ε Modellen wird der lokale Turbulenzzustand in der wandnahen Schicht durch die Geschwindigkeitsskala $k^{1/2}$ und die Längenskala l bestimmt. Die turbulente Viskosität und die turbulente Dissipation werden mit

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2} l_\mu \quad \text{und} \quad (2.43)$$

$$\varepsilon = k^{3/2} / l_\varepsilon \quad (2.44)$$

ermittelt, wobei die Längenskalen l_μ und l_ε , die sich nur sehr nahe an der Wand unterscheiden, mit den empirischen Formeln

$$l_\mu = c_l y (1 - \exp(-R_y / A_\mu)) \quad \text{und} \quad (2.45)$$

$$l_\varepsilon = c_l y (1 - \exp(-R_y / A_\varepsilon)) \quad (2.46)$$

abhängig vom Wandabstand y und von der turbulenten Reynoldszahl $R_y = k^{1/2} y / \nu$ bestimmt werden. Die Berechnung dieser Längenskala, ähnlich den van Driest Dämpfungsfunktionen [1], basieren auf dem Eingleichungs-Turbulenzmodell von Wolfshtein [72]. Der Übergang vom Eingleichungsmodell zum Zweigleichungsmodell für hohe Reynoldszahlen sollte im Bereich $150 < R_y < 250$ liegen, um einen glatten Verlauf von ε und ν_t zu gewährleisten. Dies entspricht für Grenzschichtströmungen einem Wandabstand von $y^+ \approx 80$ und einem Verhältnis von turbulenter zur molekularer Viskosität von ungefähr 20 bis 40. Bekannte Turbulenzmodelle von diesem Typ sind die Modelle von Chen und Patel [93] und Rodi [94].

Nach Durbin [95] entfällt die Notwendigkeit von Dämpfungsfunktionen, wenn man anstatt $k^{1/2}$ die Normalschwankungen $(\overline{v'^2})^{1/2}$ als Geschwindigkeitsskala verwendet. Beim Zweischichten-Modell von Rodi et al. [61] wird dadurch vor allem im Bereich sehr nahe der Wand eine deutlich bessere Repräsentation der turbulenten Dissipation ε ermöglicht. Zusätzlich wird ein besseres Konvergenzverhalten konstatiert. Die Normalschwankung $\overline{v'^2}$ ist hierbei durch die Beziehung

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = 4.65 \cdot 10^{-5} R_y^2 + 4.00 \cdot 10^{-4} R_y \quad (2.47)$$

gegeben, die durch Anpassung an DNS Daten erhalten wurde.

2.4.3.3 Low-Reynolds k - ω Modell

Ein großer Vorteil der k - ω Modelle gegenüber den k - ε Modellen besteht darin, daß das k - ω Modell für hohe Reynoldszahlen im Gegensatz zum k - ε Modell bis zur Wand hin integriert werden kann, ohne daß man Dämpfungsfunktionen benötigt, die die Lösung des Gesamtsystems deutlich erschweren können. Um jedoch Effekte niedriger Reynoldszahlen, wie zum Beispiel Transition, besser zu reproduzieren, schlug Wilcox [96] eine Abhängigkeit der Modellkonstanten in (2.22-2.24) von der turbulenten Reynoldszahl $R_t = k/\omega\nu$ vor. Dadurch wird eine recht genaue Vorhersage des Transitionspunkts ermöglicht. Bei den meisten k - ε Modellen hingegen wird die Transition bei Reynoldszahlen vorhergesagt, die um mindestens eine Größenordnung zu niedrig ist [97].

2.4.3.4 SST k - ω Modell

Eine sehr interessante Modellfamilie, die die Vorteile des k - ω Modells und des k - ε Modells beinhalten soll, wurde von Menter [98] vorgeschlagen. Da das k - ω Modell vor allem im Hinblick auf numerische Stabilität im Bereich der viskosen Unterschicht dem k - ε Modell vorzuziehen ist, wird es bei allen Modellvarianten in diesem Bereich eingesetzt. Obwohl einige k - ε Modelle und auch das Low-Reynolds k - ω Modell eine eher den DNS Daten entsprechende Verteilung der turbulenten kinetischen Energie im wandnahen Bereich aufweisen, so führt dies jedoch nicht zwangsläufig zu einer verbesserten Verteilung der turbulenten Viskosität und somit der mittleren Geschwindigkeit. In der voll turbulenten Zone sind die Simulationsergebnisse für kompressible Strömungen oder Strömungen mit verzögerten Grenzschichten⁷ mit einem k - ω Modell meist besser als mit k - ε Modellen [99].

Im äußeren Bereich der Grenzschicht zeigt sich beim k - ω Modell jedoch eine sehr starke Abhängigkeit der turbulenten Viskosität vom Fernfeldwert von ω außerhalb der Grenzschicht. Sowohl für Grenzschichtströmungen als auch für freie Scherströmungen konnte gezeigt werden, daß die turbulente Viskosität sich um über 100 % verändern kann, indem einfach der Fernfeldwert von ω herabgesetzt wird [100]. Dieses unerwünschte Verhalten tritt beim k - ε Modell nicht auf, es wird deshalb im äußeren Bereich und außerhalb der Grenzschicht eingesetzt. Da anhand der Gleichungen nicht zu erkennen ist, ob ein Modell eine starke Abhängigkeit vom Fernfeldwert aufweist, wird in [98] empfohlen jedes Turbulenzmodell auf diese Eigenschaft hin zu untersuchen.

Verwendet man für die viskose Unterschicht und die voll turbulente Zone das k - ω Modell und für den äußeren Bereich das k - ε Modell, so erhält man das sogenannte Baseline Modell [98]. Hierzu muß das k - ε Modell in eine k - ω Formulierung transformiert werden

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\sigma \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (2.49)$$

⁷engl.: adverse pressure gradient

wobei die Konstanten zum Teil vom k - ω Modell abweichende Werte aufweisen. Der letzte Term in Gleichung 2.49 wird als Kreuzdiffusionsterm bezeichnet. Ein bei der Transformation zusätzlich entstehender Diffusionsterm kann vernachlässigt werden. Es wird nun eine Funktion F_1 eingeführt, die eine Gewichtung für das k - ε und das k - ω Modell derart beschreibt, daß für $F_1 = 0$ die k - ε Gleichungen und für $F_1 = 1$ die k - ω Gleichungen gelten. Somit müssen (2.22) u. (2.23) mit F_1 und (2.48) u. (2.49) mit $(1 - F_1)$ multipliziert und dann addiert werden. Setzt man noch $\gamma/\nu_t = \alpha\omega/k$, so erhält man das Baseline Modell mit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} &= \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ &+ 2(1 - F_1) \sigma_{k-\varepsilon} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad , \end{aligned} \quad (2.51)$$

wobei alle Konstanten noch jeweils abhängig von F_1 sind. Wenn $C_{k-\varepsilon}$ bzw. $C_{k-\omega}$ jeweils einer Konstanten des k - ε bzw. des k - ω Modells entsprechen (z.B. β , σ_k usw.), so erhält man C für das Baseline Modell aus $C = F_1 C_{k-\omega} + (1 - F_1) C_{k-\varepsilon}$.

Bei der Simulation turbulenter, stark verzögerter Grenzschichtströmungen ist jedoch nicht nur das Modellverhalten in der voll turbulenten Zone ausschlaggebend, sondern auch die Wiedergabe der korrekten turbulenten Viskosität im Nachlaufgebiet. Solche Konfigurationen, die zu Ablösung und Wiederaanlegen der Strömung führen, treten zum Beispiel bei Tragflügelumströmungen mit hohem Anstellwinkel oder in Diffusoren auf. In [70] konnte gezeigt werden, daß mit dem Johnson-King Modell für solche Strömungen deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden können, als mit anderen algebraischen Turbulenzmodellen, da dieses eine deutlich geringere turbulente Viskosität im Nachlaufbereich vorhersagt. Hinter dem Johnson-King Modell steckt Bradshaws Annahme, die turbulente Viskosität so zu bestimmen, daß die Scherspannung τ sich in einer Grenzschicht linear zur turbulenten kinetischen Energie verhält

$$\tau = ak \quad . \quad (2.52)$$

Bei den meisten Zweigleichungsmodellen erhält man aber die Scherspannung mit

$$\tau = \nu_t \Omega \quad , \quad (2.53)$$

die nach [101] in

$$\tau = \sqrt{\frac{\text{Produktion}_k}{\text{Dissipation}_k}} ak \quad (2.54)$$

umgeformt werden kann. Soll Bradshaws Annahme gelten, so müßten Produktion und Dissipation von k ungefähr gleich sein, dies ist aber bei Strömungen mit stark verzögerten

Grenzschichten nicht der Fall, da dort die Produktion von k deutlich größer sein kann als die Dissipation. Dies führt dann zu übermäßig hohen Werten für τ . Um Gleichung 2.52 zu erfüllen, wird beim sogenannten *shear stress transport (SST)* Modell von Menter [98] die turbulente Viskosität durch

$$\nu_t = \frac{ak}{\max(a\omega; \Omega F_2)} \quad (2.55)$$

bestimmt. Die Funktion F_2 sorgt dafür, daß bei freien Scherströmungen die dort ungültige Bradshaw-Annahme ausgeblendet wird ($F_2 = 0 \rightarrow \nu_t = k/\omega$). Die Transportgleichungen für das SST-Modell entsprechen den Gleichungen (2.50) u. (2.51) des Baseline-Modells. Die Konstanten und die Funktionen F_1 und F_2 sowohl für das Baseline Modell als auch für das SST-Modell sind im Anhang A gegeben.

Über Variationen von F_1 und F_2 ergeben sich nun eine Reihe von Möglichkeiten. Für freie Scherströmungen erhält man wegen $F_1 = F_2 = 0$ praktisch das auf die $k-\omega$ Formulierung transformierte $k-\varepsilon$ Modell für hohe Reynoldszahlen. Setzt man $F_2 = 0$ wird Bradshaws Annahme außer Kraft gesetzt, es ergibt sich also damit das Baseline-Modell. Da die Funktion F_1 den Übergang von $k-\omega$ Modell zu $k-\varepsilon$ Modell bestimmt, kann durch Veränderung von F_1 der Übergang anstatt zwischen voll turbulenter Zone und äußerer Schicht auch zwischen viskoser Unterschicht und voll turbulenter Zone stattfinden. Daraus resultiert dann ein $k-\varepsilon$ Modell, das für die viskose Unterschicht anstatt von Dämpfungsfunktionen (siehe Abschnitt 2.4.3.1) das $k-\omega$ Modell mit seinen besseren numerischen Eigenschaften verwendet (s. Anhang A.5).

3 Diskretisierung

3.1 Übersicht über die Diskretisierungsverfahren

Die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Transportgleichungen für die Reynolds gemittelten inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2.6)-(2.7) und die Turbulenzgleichungen für ein Zweigleichungs-Turbulenzmodell, z.B. (2.40) und (2.41), können vereinfacht mit folgenden drei Erhaltungsgleichungen dargestellt werden:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla(\nu_t \nabla \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi - \nabla(\Gamma_{\text{eff}} \nabla \Phi) = \mathbf{Q} \quad (3.3)$$

Hierbei ist Φ der Vektor der skalaren Transportgrößen — z.B. $\Phi = (k, \varepsilon)$ beim k - ε Modell — und Γ_{eff} und \mathbf{Q} repräsentieren die Diffusionskoeffizienten und Quellterme. Der Diffusionskoeffizient Γ_{eff} ergibt sich aus einem laminaren und turbulenten Anteil $\Gamma_{\text{eff}_i} = \nu + \nu_t/\sigma_i$. Da für dieses System partieller Differentialgleichungen keine analytische Lösung möglich ist, muß das Gleichungssystem numerisch gelöst werden; d.h. es wird eine Lösung auf diskreten Punkten, den Gitterpunkten, gesucht. Das gesamte Rechengebiet wird daher mit einem geeigneten Gitter überzogen, und es wird ein Gleichungssystem für die abhängigen Variablen \mathbf{u} , p und Φ in den Gitterpunkten aufgestellt. Die Darstellung analytischer Gleichungen auf den Gitterpunkten wird Diskretisierung genannt. Man unterscheidet in der Strömungsmechanik im allgemeinen zwischen Finite Differenzen, Finite Elemente und Finite Volumen Diskretisierungen. Sehr anschauliche Einführungen dieser Methoden für strömungsmechanische Probleme werden in [18] und [102] gegeben. Die Finite Differenzen Methode ist die sicherlich am weitesten verbreitete Diskretisierungsmethode in der Strömungsmechanik. Sie ist selbst für Raumdiskretisierungen höherer Ordnung einfach zu implementieren, erfordert aber ein strukturiertes Gitter. Die Finite Element Methode hat ihren Ursprung zwar in der Strukturmechanik, wird aber seit den 70er Jahren auch in der Strömungsmechanik eingesetzt. Allgemeine Einführungen dazu finden sich in [103] und [104]. Lösungsverfahren der Navier-Stokes Gleichung basierend auf der Finite Element Methode werden zum Beispiel in [105, 106, 107, 20] vorgestellt.

Bei den Grundgleichungen der Strömungsmechanik handelt es sich um Gleichungen, die die Erhaltung von Masse, Impuls und skalaren Größen in einem von einer geschlossenen Fläche umgebenden Volumen ausdrücken. Die Diskretisierung dieser Gleichungen in Integralform ist somit die natürlichste Methode die Erhaltung dieser Größen zu gewährleisten,

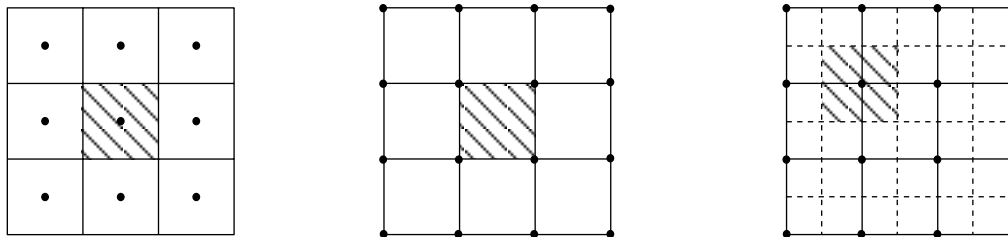


Abbildung 3.1. Verschiedene Finite Volumen Ansätze. (a) Zellen-zentrierte Finite Volumen; (b) Zell-Knoten Finite Volumen; (c) knotenbasierte Finite Volumen.

da dabei die Erhaltung in jedem diskretisiertem Teilgebiet implizit gefordert wird. Darauf basiert die Methode der Finite Volumen.

Wenn Ω das betrachtete Volumen ist und S die das Volumen umschließende Fläche mit dem Normalenvektor \mathbf{S} ist, so erhalten die Gleichungen (3.1)-(3.3) in Integralform geschrieben folgende Form:

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega + \oint_S (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) d\mathbf{S} + \oint_S p d\mathbf{S} - \nu \oint_S (\nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} - \oint_S (\nu_t \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \oint_S (\mathbf{u} \cdot \Phi) \cdot d\mathbf{S} - \oint_S (\Gamma_{\text{eff}} \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \quad (3.6)$$

Das gesamte Rechengebiet wird nun in sogenannte Kontrollvolumen aufgeteilt. Es gibt hierbei mehrere Möglichkeiten, wie man diese Kontrollvolumen den Knotenpunkten zuordnen kann [102]. Einige übliche FV-Diskretisierungen sind in Abb. 3.1 dargestellt. Von links nach rechts handelt es sich um Zellen-zentrierte, Zell-Knoten und knotenbasierte Finite Volumen. Bei der Zellen-zentrierten Methode kann nur eine stückweise konstante Interpolation eingesetzt werden, während die beiden anderen Verfahren stückweise lineare oder bilineare Interpolationen erlauben. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Diskretisierung handelt es sich um eine *knotenbasierte* Finite Volumen Methode. Gegenüber den Zell-Knoten Verfahren zeichnet sie sich vor allem durch eine einfachere Behandlung der Aufwind-Diskretisierung aus, die teilweise von den Finiten Differenzen Verfahren übernommen werden kann. Dadurch daß die Finite Volumen Zellen aus einem Finite Element Gitter bestimmt werden, aber nicht wie bei der Zell-Knoten Methode identisch mit den Elementen sind, spricht man hier auch von einem *dualen Boxgitter* bzw. von einem *dualen Finite Volumen Verfahren*.

3.2 Die knotenbasierte Finite Volumen Methode

Die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Finite Volumen Diskretisierung für die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen basiert auf der Arbeit von Raw et al. [26]. Dabei

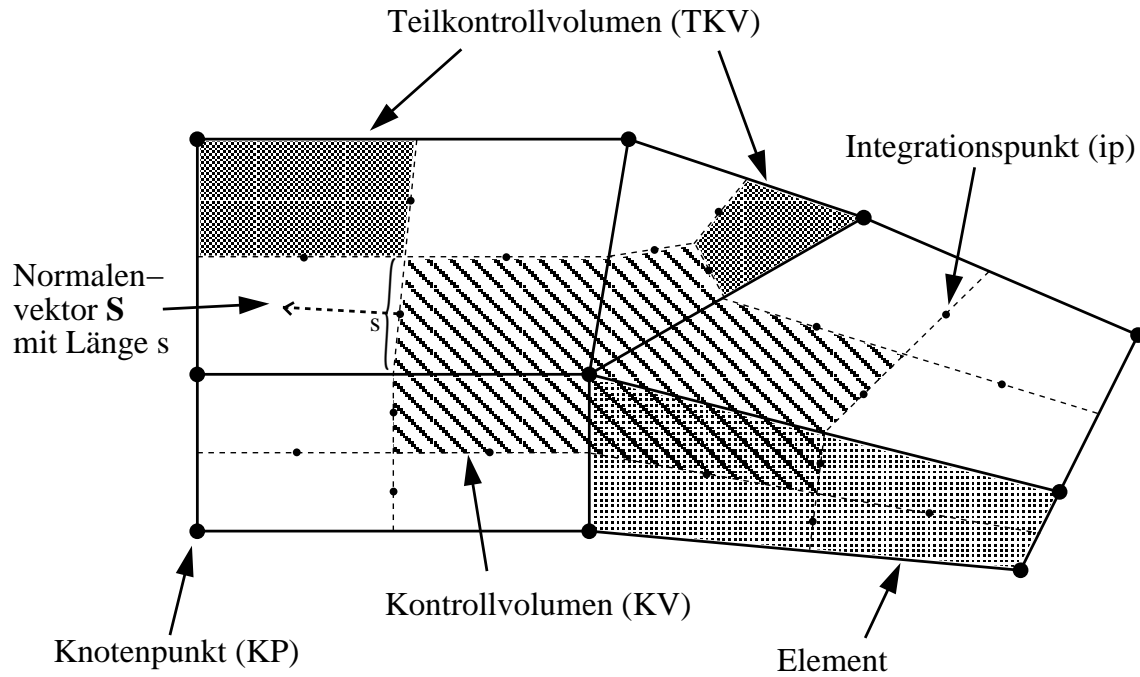


Abbildung 3.2. Darstellung eines Kontrollvolumens

konnte ein großer Teil der von Rentz-Reichert [108] in das Programmsystem *UG* implementierten Diskretisierung von [23, 109] übernommen werden.

Da in dieser Arbeit nur zweidimensionale Strömungen behandelt wurden, beschränkt sich die Zerlegung des Rechengebiets in Dreiecks- und Viereckselemente. Die diskreten Werte der zu bestimmenden Größen \mathbf{u} , p und Φ befinden sich auf den Gitterpunkten. Jedem Gitterpunkt ist ein Kontrollvolumen zugeordnet, welches man erhält, indem man die Seitenmitten der Elemente mit ihrem Schwerpunkt verbindet. Ein Element besitzt somit für jeden seiner Knotenpunkte ein viereckiges sogenanntes Teilkontrollvolumen (TKV). Alle an einem Knotenpunkt angrenzenden TKV bilden dann zusammen das dem Knotenpunkt zugeordnete Kontrollvolumen KV (siehe Abb. 3.2). Die Seitenmittelpunkte der Kontrollvolumen werden als Integrationspunkte (*ip*) bezeichnet, da an diesen die Flüsse in das Kontrollvolumen bestimmt werden. In Abbildung 3.2 ist die Aufteilung der Elemente in TKV und die Lage der Integrationspunkte dargestellt.

Die Assemblierung erfolgt in einer bei Finiten Elementen üblichen Form. Es werden alle Elemente durchlaufen und die im Element lokal bestimmten Flüsse den entsprechenden Kontrollvolumen zugeordnet. Ein an einem Integrationspunkt berechneter Fluß wird daher mit verändertem Vorzeichen jeweils zwei Knotenpunkten, bzw. Kontrollvolumen, zugeordnet. Dadurch wird die Flußerhaltung numerisch exakt erfüllt. Eventuell auftretende Quellterme werden bei der Assemblierung entweder auf Elementebene in den Mittelpunkten der TKV bestimmt oder an den Knotenpunkten direkt ermittelt.

Bei Elementen, die sich auf dem Rand des Rechengebietes befinden, müssen noch zusätzliche auf dem Rand liegende Integrationspunkte eingeführt werden, an denen die Flüsse

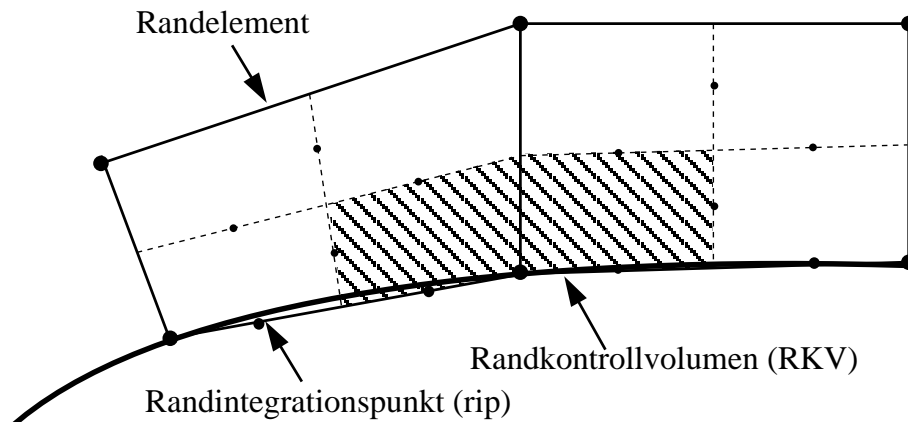


Abbildung 3.3. Darstellung eines Randkontrollvolumens

in oder aus dem Gebiet berechnet werden können. Wie in Abbildung 3.3 zu sehen ist, begrenzen die auf diesen Randintegrationspunkten liegenden Elementseiten ein Randkontrollvolumen.

Die diskrete Form der Integralgleichungen (3.4) - (3.6) bezüglich eines Kontrollvolumens erhält man, indem man die Oberflächenintegrale als Summe der Integrale der Teilflächen des Kontrollvolumens bestimmt und die aus den Quelltermen resultierenden Volumenintegrale als Summe der Integrale der Teilkontrollvolumina ermittelt:

$$\sum_{ip} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u})|_{ip} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{|KV|}{\Delta t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)|_{KP} + \sum_{ip} (\underbrace{\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}}_{\dot{m}}) \mathbf{u}|_{ip} + \sum_{ip} (p \mathbf{S})|_{ip} - \sum_{ip} (\nu_{\text{eff}} (\mathbf{S} \cdot \nabla) \mathbf{u})|_{ip} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{|KV|}{\Delta t} (\Phi - \Phi^0)|_{KP} + \sum_{ip} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \Phi|_{ip} - \sum_{ip} (\Gamma_{\text{eff}} (\mathbf{S} \cdot \nabla) \Phi)|_{ip} - \sum_{TKV} |TKV| \mathbf{Q}|_{TKV} = 0 \quad (3.9)$$

Hierbei sind in zwei Raumdimensionen $|KV|$, $|TKV|$ und \mathbf{S} die Fläche des Kontrollvolumens, die Fläche eines am Knotenpunkt angrenzenden Teilkontrollvolumens und der aus dem TKV gerichtete Normalenvektor mit $|\mathbf{S}| = \text{Länge der Seite}$. Mit \mathbf{u}^0 und Φ^0 werden die Größen des alten Zeitschritts bezeichnet. Der molekulare und turbulente Anteil der Viskosität ist mit $\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t$ zusammengefaßt worden.

In den folgenden Abschnitten werden die hier verwendeten Approximationen der einzelnen Terme aus (3.7)-(3.9) beschrieben.

3.2.1 Näherung einer Größe am Integrationspunkt

Für die Konvektionsterme in (3.8) und (3.9), den Druckgradienten in (3.8) sowie für die Diffusionskoeffizienten ν_{eff} und Γ_{eff} werden Näherungswerte für \mathbf{u} , p und Φ an den Integrationspunkten benötigt. Eine Näherung mit $O(h^2)$ Genauigkeit erhält man mit der

bilinearen Interpolation

$$\Phi|_{ip} = \sum_{i=1}^n N_i|_{ip} \Phi_i \quad (3.10)$$

innerhalb des Elementes. $N_i|_{ip}$ sind die entsprechenden Finite Element Formfunktionen für die n Knotenwerte bezüglich des Integrationspunktes ip . Der Wert am Integrationspunkt wird somit von allen Elementknotenpunkten beeinflusst. Bei einem strukturierten Vierecksgitter wird dementsprechend der Fluß durch das Kontrollvolumen an acht Integrationspunkten bestimmt, und es ergibt sich ein 9-Punkt Stern für die Matrixeinträge des Knotenpunktes.

3.2.2 Näherung eines Gradienten am Integrationspunkt

Die Ableitung einer Größe am Integrationspunkt wird für die Diffusionsterme in (3.8) und (3.9) benötigt und kann mit Hilfe der Ableitungen der bilinearen Formfunktionen $N_i|_{ip}$ des Elements bezüglich der Knotenwerte bestimmt werden (siehe z.B. [110])

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Phi|_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x_k} |_{ip} \Phi_i \quad (3.11)$$

Diese Näherung ist für beliebige Gitter $O(h)$ und für ein orthogonales Gitter $O(h^2)$.

3.2.3 Näherung des Massenterms und der Quellterme

Der Zeitterm $\partial\Phi/\partial t$ wird mit einer einfachen rückwärts Euler Näherung erster Ordnung diskretisiert. Man erhält also

$$\int_{\text{KV}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx |\text{KV}| (\Phi - \Phi^0)|_{\text{KP}} \quad (3.12)$$

Die Quellterme werden im Gegensatz zum Zeitterm in den Mittelpunkten der Teilkontrollvolumina ausgewertet. Die Berechnung an diesen Punkten erfolgt mit entsprechenden Interpolationsfunktionen ähnlich (3.10) und (3.11). Dann können die Beiträge aller TKV eines Knotenpunktes aufaddiert werden.

$$\int_{\text{KV}} Q_\Phi = \sum_{i=1}^{ntkv} |\text{TKV}_i| Q_\Phi|_{\text{TKV}_i} \quad (3.13)$$

3.2.4 Reduktion der Matrixeinträge

Die Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.13) führen bei einem strukturierten Vierecksgitter jeweils zu einem 9-Punkt Stern. Ein etwas weniger genaues aber dafür einfacher zu lösendes Gleichungssystem erhält man durch folgende Reduktion auf einen 5-Punkt Stern [26].

Anstatt mit (3.10) kann man den Wert am Integrationspunkt aus dem Mittelwert der beiden benachbarten Knotenpunkte bestimmen. Somit werden die Teilflüsse durch das Kontrollvolumen nur noch an den Mittelpunkten der durch das Kontrollvolumen führenden Elementkanten ausgewertet und mit der Fläche der daran anschließenden zwei Teilflächen multipliziert.

Wertet man zur Berechnung der Gradienten der Diffusionsterme (3.11) nicht an den Integrationspunkten sondern an den Mittelpunkten der zu den Integrationspunkten benachbarten Elementseiten aus, wird eine Reduktion der Matrixeinträge und somit die Erhöhung der Diagonaldominanz erreicht.

Dasselbe gilt für die Berechnung der Quellterme direkt an den Knotenpunkten mit

$$\int_{\Omega} Q_{\Phi} = |\text{KV}| Q_{\Phi}|_{\text{KP}} . \quad (3.14)$$

Dies verringert zusätzlich den Assemblierungsaufwand, erfordert jedoch eine vorherige Berechnung der Gradienten an den Knotenpunkten.

Für die in Kapitel 6 beschriebenen numerischen Experimente wurden diese Varianten der Formfunktionen nicht eingesetzt, da sie zu einem Verlust an Genauigkeit führen, ohne große Vorteile bei der Gleichungslösung zu haben. Es ist jedoch zu erwarten, daß diese vereinfachten Formfunktionen vor allem bei dreidimensionalen Strömungssimulationen eine Erhöhung der Stabilität bewirken.

3.2.5 Näherung eines Gradienten am Knotenpunkt

Sowohl bei der in einem späteren Abschnitt beschriebenen Berechnung der Massenerhaltung als auch bei der Berechnung von Quelltermen, die am Knotenpunkt ausgewertet werden, ist es notwendig, Gradienten am Knotenpunkt zu bestimmen. Im Rahmen des Finite-Volumen Kontexts kann man dies besonders einfach für ein beliebiges Kontrollvolumen mit dem Divergenztheorem

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi d\Omega = \oint_S \Phi dS \quad (3.15)$$

durchführen. Wie bei der Assemblierung der Flußterme in (3.8) und (3.9) durchläuft man eine Elementschleife zur Berechnung der Flüsse durch die Teilkontrollvolumina und addiert an den Knotenpunkten die Beiträge der jeweiligen Kontrollvolumenseiten auf

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Phi|_{\text{KP}} = \frac{\sum_{ip} (S_{x_k} \Phi)|_{ip}}{|\text{KV}|} . \quad (3.16)$$

3.3 Aufwindverfahren

Wird der diffusive Transport gegenüber dem konvektiven Transport sehr viel kleiner, so geht die Diagonaldominanz des Gleichungssystems verloren, wenn die Interpolationsfunktionen gemäß (3.10) für die konvektiven Terme eingesetzt werden. Als Maß für das

Verhältnis Konvektion zur Diffusion nimmt man die Pecletzahl $Pe = LU/\alpha$. Es sind dabei L , U und α eine charakteristische Länge, eine Geschwindigkeit und ein Diffusionskoeffizient. Für $Pe > 1$ führt obige Interpolationsfunktion zu sehr starken unphysikalischen Oszillationen der Lösung, und das Gleichungssystem ist nur noch schwer lösbar.

Es müssen daher Näherungen gefunden werden, die den Transportcharakter der konvektiven Terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ bzw. $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Phi$ besser wiedergeben können. Bei der Berechnung von \mathbf{u} und Φ am Integrationspunkt entspricht, physikalisch betrachtet, eine gleiche Gewichtung der *in Strömungsrichtung* liegenden Knoten und der *entgegen der Strömungsrichtung* liegenden Knoten nicht dem richtigen Einfluß dieser Knoten. Die Methoden, die eine stärkere Gewichtung der stromauf liegenden Knoten erlauben, werden als *Aufwindverfahren* bezeichnet.

Das einfachste und numerisch stabilste Aufwindverfahren erhält man, indem man für den Wert am Integrationspunkt den Wert des in Strömungsrichtung liegenden Kontrollvolumens, bzw. des dazugehörenden Knotenpunktes, annimmt. In Abb. 3.4 wird somit für die konvektierte Größe am Integrationspunkt ip_0 der Knotenwert dieser Größe an KP_0 angenommen. Dieser als *volles Aufwindverfahren* bezeichnete Ansatz ist von erster Ordnung und aufgrund des großen Anteils an falscher numerischer Diffusion sehr ungenau. Betrachtet man wieder Abb. 3.4 und erweitert $\Phi_{ip_0} = \Phi_{KP_0}$ noch mit einer Korrektur, die die Veränderung von Φ zwischen KP_0 und KP_1 berücksichtigt, erhält man die allgemeine Gleichung

$$\Phi_{ip_0} = \Phi_{KP_0} + \Delta\Phi_{ip_0} \quad . \quad (3.17)$$

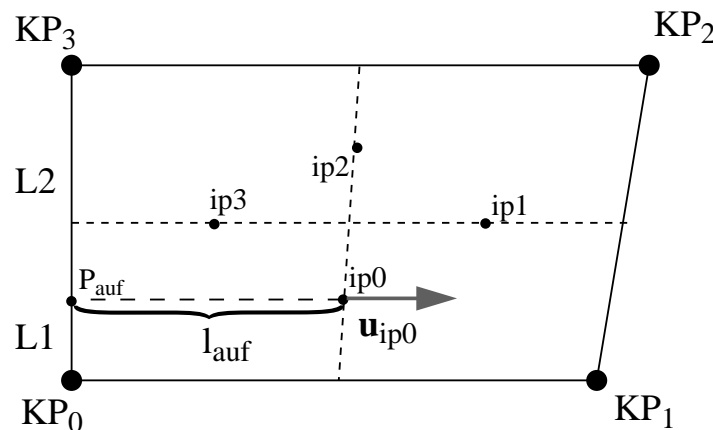


Abbildung 3.4. Bestimmung des Aufwindpunktes: Beim vollen Aufwindverfahren wird als Aufwindwert für den Integrationspunkt ip_0 der Wert am Knotenpunkt KP_0 des stromauf liegenden Teilkontrollvolumens TKV_0 genommen. Beim schiefen Aufwindverfahren wird der Geschwindigkeitsvektor in entgegengesetzter Richtung bis zur nächsten Elementkante (P_{auf}) zurückverfolgt. Die Gewichtung der Werte an den beiden Knotenpunkten KP_0 und KP_3 erfolgt über das Längenverhältnis $L2/L1$ und ergeben den Aufwindwert für den Integrationspunkt ip_0 .

Eine Möglichkeit die Korrektur $\Delta\Phi_{ip_0}$ zu bestimmen besteht darin, mit Finite Differenzenformeln die Knotenwerte um den Integrationspunkt mit unterschiedlichen Gewichtungen

zu berücksichtigen. Bekannte Vertreter sind das Aufwindverfahren zweiter Ordnung und das QUICK Verfahren [111]. Eine Verbesserung des QUICK Verfahrens, die auch die Berechnung der turbulenten Transportgleichungen erlaubt, wird in [112] beschrieben. Für unstrukturierte Gitter sind diese Verfahren jedoch schwierig zu implementieren, da Informationen außerhalb des Elements benötigt werden, um ein Verfahren zweiter Ordnung zu erhalten.

3.3.1 Schiefe Aufwindverfahren

Besser geeignet sind die von Raithby [113] erstmals vorgeschlagenen *schiefen* Aufwindverfahren (engl.: skewed upwinding), bei denen die physikalischen Transporteigenschaften in der Umgebung des Integrationspunkts berücksichtigt werden. Man erhält bei diesem Verfahren als Näherung für den Wert am Integrationspunkt

$$\Phi_{ip} = \Phi_{auf} + \Delta\Phi_{ip} \quad , \quad (3.18)$$

wobei Φ_{auf} der Wert an einem stromaufwärts liegenden Punkt und $\Delta\Phi_{ip}$ die angenäherte Änderung von Φ zwischen dem Aufwindpunkt und dem Integrationspunkt ist. Der im weiteren als PAC (physical advection correction) Term bezeichnete Term $\Delta\Phi_{ip}$ wird aus den nicht konvektiven Anteilen der entsprechenden Transportgleichungen (3.8) und (3.9) bestimmt. Der Abstand zwischen dem Aufwindpunkt und dem Integrationspunkt soll mit l_{auf} bezeichnet werden und die Geschwindigkeit am Integrationspunkt mit u_{auf} . Wenn s die Koordinate in Geschwindigkeitsrichtung ist, kann man den Konvektionsterm am Integrationspunkt mit

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = u_{auf} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (3.19)$$

vereinfachen. Setzt man (3.19) in eine skalare Transportgleichung ein, z.B. in(3.3), so ergibt sich unter Vernachlässigung des Zeitterms eine Näherung für den PAC Term mit

$$\Delta\Phi_{ip} \approx l_{auf} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{l_{auf}}{u_{auf}} (Q_{\Phi} + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi)) \quad . \quad (3.20)$$

Um $\Delta\Phi_{ip}$ an den Integrationspunkten bestimmen zu können, wird der Term $Q_{\Phi} + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi)$ vor der Assemblierung an den Knotenpunkten ermittelt. Dies geschieht ähnlich der Assemblierung der Druck- und Diffusionsterme mit einer Integration über die Kontrollvolumina. Bei der Assemblierung der Impulsgleichungen ist dieser Term dann auf den Elementknoten bekannt und kann entweder über eine bilineare oder eine gewichtete harmonische Interpolation an den Integrationspunkten bestimmt werden. Letztere ist zwar etwas ungenauer als die bilineare Interpolation, stabilisiert die Rechnung aber vor allem bei relativ groben Gittern deutlich. Die gewichtete harmonische Interpolation hat hier die Form

$$\text{PAC}_{ip} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{\text{KP}} (N_{\text{KP}|ip} / \text{PAC}_{\text{KP}})} & \text{PAC}_{\text{KP}} > 0 \quad \vee \quad \text{PAC}_{\text{KP}} < 0 \quad \forall \quad \text{KP} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.21)$$

Um ein Aufwindverfahren zweiter Ordnung zu bekommen, d.h. der Fehler ist abhängig von h^2 , muß $\Delta\Phi_{ip}$ mindestens eine Genauigkeit erster Ordnung haben und Φ_{auf} von zweiter Ordnung genau sein [114]. Zwei Varianten, Φ_{auf} zu bestimmen, sind in den folgenden Abschnitten aufgeführt.

3.3.1.1 LPS-Aufwindverfahren

Den Aufwindpunkt P_{auf} an dem Φ_{auf} ausgewertet wird, erhält man beim LPS-Aufwindverfahren (linear profile skewed), indem der Geschwindigkeitsvektor am Integrationspunkt ip_0 in Abb. 3.4 zurückverfolgt wird, bis er eine Elementkante schneidet. Dieser Schnittpunkt ist dann P_{auf} , und Φ_{auf} wird über die bilinearen Formfunktionen des Elements (3.10) an P_{auf} bestimmt.

Dieses Verfahren ist von zweiter Ordnung und hat in Verbindung mit dem PAC-Term schon bei relativ groben Gittern eine sehr hohe Genauigkeit. Die M-Matrix Eigenschaften (s. Abschnitt 4.1.1) des konvektiven Anteils der Steifigkeitsmatrix gehen jedoch im Gegensatz zum vollen Aufwindverfahren verloren.

3.3.1.2 MWS-Aufwindverfahren

Das von Schneider und Raw [109] vorgeschlagene MWS-Aufwindverfahren (mass weighted skewed) erzeugt weitaus weniger künstliche Diffusion als das volle Aufwindverfahren, behält aber dennoch die Eigenschaften einer M-Matrix bei. Betrachtet man die Massenflüsse durch alle Teilkontrollvolumenseiten und durch die Elementkantenhälften (s. Abb. 3.5) so können folgende Annahmen getroffen werden. Ist der Massenstrom am Integrationspunkt n ($\dot{m} = \mathbf{S}\mathbf{u}|_{ip_n}$) nach außen gerichtet (also in Richtung Teilkontrollvolumen $n+1$) und fließt der Massenstrom am Integrationspunkt $n-1$ in das TKV n hinein, so gilt im 2D-Fall für den Aufwindwert am Integrationspunkt n die Beziehung

$$\Phi_{ip_n} = \left[1 - \frac{\dot{m}_{ip_{n-1}}}{\dot{m}_{ip_n}} \right] \Phi_{KP_n} + \left[\frac{\dot{m}_{ip_{n-1}}}{\dot{m}_{ip_n}} \right] \Phi_{ip_{n-1}} \quad . \quad (3.22)$$

Hierbei ist $[]$ ein Abschneideoperator, der nur Werte zwischen 0 und 1 erlaubt. Fließt der Massenstrom am Integrationspunkt $n-1$ aus dem TKV n (also $\dot{m}_{ip_{n-1}} < 0$) heraus, so gilt daher $\Phi_{ip_n} = \Phi_{KP_n}$. Dadurch wird erreicht, daß eine *aus* einem TKV strömende Größe (hier: Φ_{ip_n}) nur durch eine *in* das TKV strömende Größe bestimmt wird. In (3.22) muß nun noch der Wert am Integrationspunkt $n-1$ ($\Phi_{ip_{n-1}}$) bestimmt werden. Dies geschieht analog zu (3.22). Der dann benötigte Wert für $\Phi_{ip_{n-2}}$ wird näherungsweise gleich Φ_{KP_n} gesetzt. Somit ist der Aufwindwert eines Integrationspunkts nur von den beiden Knotenpunkten an der in Aufwindrichtung liegenden Elementkante abhängig.

3.3.2 Berücksichtigung der lokalen Peclet Zahl

Für den Fall, daß der Einfluß des konvektiven Anteils in der selben Größenordnung wie der diffusive Anteil liegt, ist es von Vorteil einen mehr oder weniger großen Anteil von Φ_{ip}

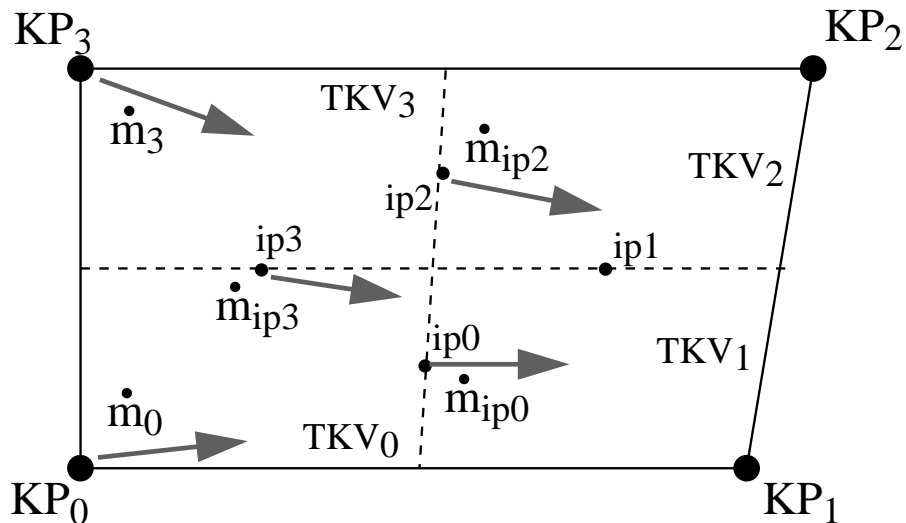


Abbildung 3.5. Beispiel für MWS-Aufwindverfahren am Integrationspunkt ip_0 : Der Massstrom \dot{m}_{ip_0} fließt aus TKV₀ hinaus. Die an TKV₀ zu untersuchenden Ströme \dot{m}_0 und \dot{m}_{ip_3} fließen in dieses hinein, werden also berücksichtigt. Daher muß Gleichung (3.22) an ip_3 ausgewertet werden. Hier fließt nur \dot{m}_3 in TKV₃, für \dot{m}_{ip_2} wird also keine Näherung benötigt. Insgesamt wird ip_0 von den Knoten KP₀ und KP₃ beeinflusst.

über zentrale Differenzen (s. Abschnitt 3.2.1) zu bestimmen. Dies kann man nach [115] über die Funktion

$$\omega = \frac{Pe^2}{Pe^2 + 5} \quad (3.23)$$

in Abhängigkeit von der lokalen Pecletzahl am Integrationspunkt $Pe = l|\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_{ip}|/\nu$ steuern (l ist die Länge der Seite auf der ip liegt). Φ_{ip} wird dann durch

$$\Phi_{ip} = \omega(\Phi_{auf} + \Delta\Phi_{ip}) + (1 - \omega) \sum_i N_i|_{ip} \Phi_i \quad (3.24)$$

bestimmt.

3.4 Diskretisierung der Massenerhaltung

Bei den Navier-Stokes Gleichungen für kompressible Strömungen wird eine Verbindung zwischen Impulsgleichung und Kontinuitätsgleichung über die Zustandsgleichung $p = f(\rho, T)$ hergestellt. Im Bereich sehr kleiner Machzahlen ($Ma < 0.2$) ist aber die Dichteänderung durch den Druck so gering, daß bei einem kompressiblen Verfahren sehr schlechte Konvergenzeigenschaften resultieren. Bei den sogenannten pseudo-kompressiblen Verfahren wird die Struktur eines kompressiblen Verfahrens beibehalten, es können damit aber dennoch praktisch inkompressible Strömungen berechnet werden. Bei diesen Verfahren wird die Kontinuitätsgleichung (2.6) um den Term $\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ erweitert, wobei β eine

pseudo-Schallgeschwindigkeit repräsentiert. Die Anwendung für instationäre Strömungen erfordert jedoch zusätzliche Bedingungen. Beispiele zu *pseudo*-kompressiblen Verfahren findet man in [116]. Die sicherlich am weitesten verbreitete Klasse von Verfahren für inkompressible Strömungen sind die Druckkorrektur- und Projektionsmethoden. Im ersten Schritt werden die Impulsgleichungen mit dem alten Druckfeld und im zweiten Schritt eine Poisson-Gleichung für den Druck gelöst, um die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes zu gewährleisten. Daraus resultieren dann Geschwindigkeits- und Druckkorrektur. Die numerische Berechnung dieser Poisson-Gleichung ist dabei entscheidend für die Konvergenz des Gesamtverfahrens. Die ersten Druckkorrekturmethode wurden von Patankar und Spalding [117] entwickelt und vielfach eingesetzt [107, 24]. Detaillierte Untersuchungen von Projektionsmethoden findet man in [118] und [119].

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren für inkompressible Strömungen verwendet bei dem das Geschwindigkeitsfeld und das Druckfeld gekoppelt gelöst werden. Dadurch entfällt die Lösung eines bei den Druckkorrekturverfahren entstehenden Mehrschrittssystems, was wiederum die Zahl der Iterationsschritte zur Lösung des Gesamtsystems reduziert. Von Nachteil ist sicherlich der deutlich höhere Speicherbedarf der Systemmatrix.

Sowohl bei den Druckkorrekturverfahren als auch bei gekoppelten Verfahren kann eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit auftreten, wenn die *transportierenden* und *transportierten*¹ Geschwindigkeiten auf die gleiche Weise bestimmt werden [19]. Bei Finiten Element Verfahren werden daher Ansatzfunktionen unterschiedlicher Ordnung für Druck und Geschwindigkeit verwendet. Bei Finiten Volumen Verfahren kann die Entkopplung umgangen werden, wenn gestaffelte Gitter (eng.: *staggered grids*) verwendet werden. Für den Druck und für die Geschwindigkeiten werden hierbei unterschiedliche Kontrollvolumen verwendet, eine Entkopplung der beiden Größen ist somit nicht möglich. Gestaffelte Gitter erfordern aber einen recht großen Verwaltungsaufwand und können effektiv nur auf strukturierten Gittern angewandt werden. Es ist daher wünschenswert sogenannte *kolokierte* Gitter zu verwenden, bei denen alle Größen an den selben Knotenpunkten ausgewertet werden. Nach Rhie und Chow [22] kann eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit verhindert werden, wenn die *transportierende* Geschwindigkeit über eine der Impulsgleichung ähnlichen Gleichung bestimmt wird. Das im Rahmen dieser Arbeit implementierte Verfahren zur Berechnung der Massenerhaltung basiert auf den Arbeiten von [22] und [26] und wird nachfolgend kurz beschrieben.

Die inkompressible Kontinuitätsgleichung (2.6) kann für ein beliebiges Kontrollvolumen mit

$$\sum_{ip} \mathbf{u}_{ip} \cdot \mathbf{S}_{ip} = 0 \quad (3.25)$$

diskretisiert werden. Es muß nun eine Darstellung der Geschwindigkeiten an den Integrationspunkten gefunden werden, die eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit verhindert. Stellt man die Impulsgleichung der Geschwindigkeitskomponente u in diskreter Form sowohl an einem Knotenpunkt, als auch an einem Integrationspunkt auf, so

¹die transportierende Geschwindigkeit wird zur Bestimmung des Massenflusses verwendet, die transportierte Geschwindigkeit (oder skalare Größen) ist die Größe die durch den Massenfluß angetrieben wird

erhält man mit einigen Vereinfachungen eine Gleichung für u_{ip} in der Form [26]

$$u_{ip} = \bar{u} + \frac{d_{ip}}{1 - c_{ip}d_{ip}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{ip} \right] - \frac{c_{ip}d_{ip}}{1 - c_{ip}d_{ip}} (u_{ip}^0 - \bar{u}_{ip}^0) . \quad (3.26)$$

Die überstrichenen Werte deuten eine bilineare Interpolation am Integrationspunkt durch die umliegenden Knotenwerte an (z.B. $\bar{u} = \sum_{\text{KP}} N_{\text{KP}}|_{ip} u_{\text{KP}}$), und die Werte vom vorhergehenden Zeitschritt sind mit dem Index 0 gekennzeichnet. Um $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{ip}$ am Integrationspunkt zu bestimmen, müssen die Druckgradienten an den Knotenpunkten bekannt sein. Dazu wird vor der Assemblierung eine Schleife über alle Elemente durchlaufen, um die Gradienten entsprechend Abschnitt 3.2.5 an den Knotenpunkten zu berechnen. Die Darstellungen von c_{ip} und d_{ip} resultieren aus einer Vereinfachung der Impulsgleichung und sind mit

$$c_{ip} = \frac{1}{\Delta t} \quad (3.27)$$

$$d_{ip} = \frac{A_{\text{Element}}}{\sum_{ip} |\dot{m}_{ip}| + 8\mu_{\text{eff}}D} \quad (3.28)$$

gegeben. Dabei ist A_{Element} die Fläche des Elements, $\sum_{ip} |\dot{m}_{ip}|$ die Summe der Massenflüsse durch die Integrationspunkte eines Elements und D das Verhältnis des Quadrats der am Integrationspunkt liegenden Teilkontrollvolumenseite zur Fläche der am Integrationspunkt liegenden Teilkontrollvolumen. Um die diskrete Gleichung für den Druck zu erhalten, muß man (3.26) in (3.25) einsetzen und nach dem Druck in den Knotenpunkten auflösen. Diese Werte sind in dem Term $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)$ über die Gradientenansatzfunktionen (3.11) zu bestimmen. Zusätzlich werden die Integrationspunktgeschwindigkeiten aus (3.26) zur Berechnung von $n \cdot u$ im Konvektionsterm aus (3.8) herangezogen.

3.5 Randbedingungen

Bei den am Gebietsrand anliegenden Elementen müssen zusätzlich zu den Flüssen an den inneren Integrationspunkten auch noch die Flüsse am Gebietsrand bestimmt werden, um die Integration über die Randkontrollvolumina zu schließen. Ein solches Randkontrollvolumen ist in Abbildung 3.3 skizziert.

3.5.1 Einlaßrandbedingung

In den hier untersuchten Fällen wurden am Einströmrand der Geschwindigkeitsvektor und die Turbulenzgrößen als Dirichletwerte an den Knotenpunkten vorgegeben. Für die Kontinuitätsgleichung wird der Massenfluß durch den Einströmrand an den Randintegrationspunkten (rip) mit

$$\dot{m}_{rip} = \mathbf{u}_{rip} \cdot \mathbf{S}_{rip} \quad (3.29)$$

bestimmt, wobei \mathbf{u}_{rip} über eine Randbedingungsfunktion bestimmt wird.

3.5.2 Haftrandbedingung

Diese Randbedingung wird für feste Wände eingesetzt und wird auf die gleiche Weise wie die Einlaßrandbedingung implementiert. Für nicht bewegliche Wände entfällt (3.29) aber wegen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Auf die Ermittlung der Dirichletwerte für die Turbulenzgrößen wird in Abschnitt 3.5.4 noch ausführlich eingegangen.

3.5.3 Auslaßrandbedingung

Als Auslaßrandbedingung wird von einer näherungsweise voll entwickelten Strömung ausgegangen. Daher wird für die Impulsgleichung die viskose Kraft in Normalenrichtung des Ausströmrandes zu Null gesetzt und bei den Turbulenztransportgleichungen der diffusive Anteil ganz vernachlässigt. Als Druckrandbedingung wird entweder ein konstanter Druck am gesamten Ausströmrand oder ein fester Druckwert an einer Teilkontrollvolumenkante eingesetzt.

Impulsrandbedingung

Der Impulsstrom aus dem Gebiet heraus setzt sich aus den Anteilen von Konvektion, Diffusion und Druckgradient zusammen. Für den konvektiven Anteil $\dot{m}_{rip} \Phi_{rip}$ müssen Massenstrom und Φ am Rand bestimmt werden. Je nach Aufwindverfahren wird Φ_{rip} entweder mit dem Wert des nächsten Randknotenpunktes angenähert (UDS, MWS), oder linear aus den Nachbarrandknoten interpoliert (LPS, zentrale Differenzen). Der Massenstrom $\dot{m}_{rip} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_{rip}$ wird analog zu den inneren Teilkontrollvolumenkanten mit (3.26) bestimmt, wobei nur die Knotenwerte am Rand eingesetzt werden. Wird der PAC Term für das Aufwindverfahren benötigt, so erhält man den Term $Q_\Phi + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi)$ aus (3.20) durch eine lineare oder harmonische Interpolation aus den beiden Randknotenwerten und den Term $\frac{l_{auf}}{u_{auf}}$ über eine gewichtete Interpolation aus den Werten der benachbarten inneren Integrationspunkten.

Die viskose Kraft erhält man über das Tensorprodukt von Schubspannungstensor τ_{ij} mit dem Randflächenvektor \mathbf{S}

$$F_i|_{ip} = S_j \tau_{ij} = S_j \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) |_{ip} . \quad (3.30)$$

Setzt man nun die Normalkomponente von \mathbf{F} auf Null, so erhält man näherungsweise für die Tangentialkomponente

$$F_i^t|_{ip} = F_i - (F_j S_j) S_i |_{ip} , \quad (3.31)$$

wobei \mathbf{S} die Normalenrichtung der Teilkontrollvolumenkante am Ausströmrand ist.

Der Druckanteil berechnet sich aus $p_{rip} \mathbf{S}$. Wird am Ausströmrand ein konstanter Druck oder eine feste Druckverteilung vorgegeben, wird p_{rip} über diese Randbedingung bestimmt. Ist der Druck jedoch nur an einer Randelementkante am Ausströmrand festgelegt,

muß die momentane Abweichung des Drucks vom festgelegten Druck an dieser Elementkante auch an den restlichen Elementkanten am Ausströmrand berücksichtigt werden. Die Abweichung p_{diff} erhält man aus

$$p_{diff} = p_{const} - \sum_{\text{RKP}} N_{\text{RKP}} p_{\text{RKP}} \quad , \quad (3.32)$$

wobei mit RKP die beiden Knoten (in 2D) an dieser Elementkante bezeichnet werden. An dieser Elementkante gilt dann

$$p_{rip} = p_{const} \quad (3.33)$$

und an den übrigen Elementkanten am Ausströmrand erhält man den Druck am Randintegrationspunkt mit

$$p_{rip} = \sum_{\text{RKP}} N_{\text{RKP}} p_{\text{RKP}} + p_{diff} \quad . \quad (3.34)$$

Da die Reihenfolge der Elemente bei der Assemblierung beliebig sein kann, muß die momentane Druckdifferenz an der Elementkante mit festgelegtem Druck p_{diff} vor der Assemblierung aus der aktuellen Lösung bestimmt werden.

Druckrandbedingung

Ist der Druck am gesamten Ausströmrand festgelegt, so kann eine Dirichletbedingung für den Druck eingesetzt werden. Im Falle, daß der Druck nur an einer Elementkante spezifiziert wird, muß für alle Randintegrationspunkte ein Beitrag zur Massenbilanz bestimmt werden. Dies geschieht analog zu (3.26) und (3.25) für innere Integrationspunkte.

Randbedingung für Turbulenzgrößen

Es wird hier nur der konvektive Anteil am Ausströmrand $\dot{m}_{rip} \Phi_{rip}$ berücksichtigt, der sich, wie für die Impulsrandbedingung beschrieben, in Abhängigkeit vom gewählten Aufwindverfahren über die Nachbarknoten bestimmen läßt.

3.5.4 Turbulenzrandbedingungen an einer Wand

Da es sich bei den in dieser Arbeit untersuchten Turbulenzmodellen ausschließlich um Low-Reynolds Turbulenzmodelle handelt, ist die Randbedingung für die turbulente kinetische Energie k an einer festen Wand mit $k = 0$ für alle Modelle gleich und als Dirichletrandbedingung (s. Abschnitt 3.5.1) einfach zu implementieren. Die Randbedingungen für die zweite Turbulenzgröße, dies können die turbulente Dissipation ε , die spezifische Dissipation ω oder die Zeitskala τ sein, sind je nach Turbulenzmodell unterschiedlich zu realisieren. In den folgenden Abschnitten wird kurz auf die Implementation dieser Randbedingungen eingegangen.

3.5.4.1 Randbedingung für ω

Geht man von dem Fall einer glatten Wand aus, so kam man die Annahme treffen, daß die molekulare Diffusion gleich der Dissipation ist. Daraus folgt nach [120]

$$\omega \rightarrow \frac{6\nu}{\beta y^2} \quad \text{für } y \rightarrow 0 . \quad (3.35)$$

Um dieses asymptotische Verhalten für ω durch eine Dirichletbedingung beschreiben zu können, wird folgende Näherung für $y = 0$ angenommen

$$\omega_{wand} = 7 \frac{6\nu}{\beta(\Delta y)^2} . \quad (3.36)$$

Δy ist dabei der Abstand des wandnächsten Knotenpunktes senkrecht zur Wand und β eine Modellkonstante.

3.5.4.2 Randbedingung für ϵ

Bei einigen k - ϵ Modellen wird eine Transportgleichung für die modifizierte Dissipation $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_0$ gelöst. Dabei wird ϵ_0 so gewählt, daß an der Wand $\tilde{\epsilon} = 0$ gilt. Die Implementation einer Dirichletbedingung ist somit einfach zu realisieren.

Für die Zwei-Schichten k - ϵ Modelle werden Dirichletbedingungen für ϵ nicht nur an der Wand, sondern auch im wandnahen Bereich eingesetzt. Die algebraischen Gleichungen für ϵ sind vom Wandabstand und den lokalen Turbulenzgrößen abhängig (s. (2.44) u. (2.46)). Da diese Gleichungen nicht für $y = 0$ definiert sind, wird der Wert von ϵ an der Wand gleich dem Wert eines im Strömungsgebiet liegenden benachbarten Knotenpunktes genommen.

3.6 Aufstellen des Gleichungssystems

Fügt man nun alle in den vorgehenden Abschnitten beschriebenen Terme in die Transportgleichungen (3.7)-(3.9) ein, so erhält man insgesamt fünf² algebraische Gleichungen an jedem Knotenpunkt. Dabei bilden die Gleichungen für die Massenerhaltung und Impulserhaltung ein gekoppeltes Gleichungssystem und die Turbulenztransportgleichungen ein zweites davon unabhängiges Gleichungssystem. Für eine skalare Größe Φ erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{|KV|}{\Delta t} + \sum_{NKP} A_{NKP} \right) \Phi_{KP} - \sum_{NKP} B_{NKP} \Phi_{NKP} = \frac{|KV|}{\Delta t} \Phi_{KP}^0 + C_{KP} \quad (3.37)$$

Der Index NKP bezieht sich auf die Nachbarknoten des Knotens KP. Mit A und B werden die Einträge in die Matrix und mit C die Einträge in den RHS-Vektor des entstehenden

²Massenerhaltung, Impulserhaltung (2D), 2 Turbulenztransportgleichungen

Gleichungssystems bezeichnet. Φ_{KP} und Φ_{NKP} sind Komponenten des Lösungsvektors. Wenn (3.37) an allen Knotenpunkten ausgewertet wurde, erhält man ein schwachbesetztes Gleichungssystem, welches mit einem der in Kapitel 4 beschriebenen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

3.7 Zeitdiskretisierung

Im Rahmen dieser Arbeit soll ausschließlich auf die Lösung stationärer Probleme eingegangen werden. Daher könnte auch der Zeitterm in (3.5) und (3.6) weggelassen werden und eine Diskretisierung des stationären Problems durchgeführt werden. Das bei der Diskretisierung des stationären Problems entstehende Gleichungssystem ist aber vor allem bei stark nichtlinearen Problemen schwierig zu lösen und hat zum Teil sehr schlechte Konvergenzeigenschaften. Daher werden stationäre Strömungen meist mit zeitabhängigen Lösungsverfahren berechnet. Hierbei muß natürlich das Augenmerk auf einer geeigneten Wahl des Zeitschritts liegen. Da eine zeitgenaue Beschreibung der Lösungsentwicklung hierbei nicht notwendig ist, wird die Beschränkung des Zeitschritts allein durch die Stabilität des Lösungsverfahrens bestimmt. In den meisten Fällen wird daher das rückwärts Euler Verfahren, das eine Genauigkeit erster Ordnung in Zeitrichtung aufweist, eingesetzt. Dieses auch hier verwendete Verfahren kann mit

$$\Phi^{n+1} - \Phi^n = \Delta t \mathcal{L}(\Phi)^{n+1} \quad (3.38)$$

vereinfacht dargestellt werden. $\mathcal{L}(\Phi)^{n+1}$ ergibt sich hierbei aus der Diskretisierung der nicht zeitabhängigen Terme in (3.5) oder (3.6).

4 Lösungsverfahren

Die Diskretisierung der in Kapitel 2 beschriebenen partiellen Differentialgleichungen führt auf ein System algebraischer Gleichungen. Die Unbekannten dieses Gleichungssystems sind die Knotenwerte der durch die Transportgleichungen beschriebenen Größen, die sogenannten Freiheitsgrade des Gleichungssystems. Solche algebraischen Gleichungssysteme erhält man sowohl aus der Diskretisierung der stationären Differentialgleichungen, als auch aus der impliziten Zeitschrittformulierung der instationären Gleichungen.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen zwei Typen von Verfahren zur Lösung von linearen algebraischen Gleichungssystemen, den direkten und den iterativen Lösungsverfahren. Direkte Lösungsverfahren führen mit einer endlichen Anzahl von Operationen auf die exakte Lösung des Gleichungssystems. Die praktische Anwendung solcher Verfahren beschränkt sich aber auf Gleichungssysteme mit maximal wenigen tausend Freiheitsgraden, da die Anzahl der Operationen mit mindestens $O(N^2)$ ansteigt ($N =$ Anzahl der Freiheitsgrade). Größere Gleichungssysteme werden daher mit iterativen Lösungsverfahren gelöst. Bei diesen Verfahren wird die Lösung theoretisch erst nach unendlich vielen Schritten erreicht, eine relativ gute Näherung kann jedoch, je nach Gleichungssystem und Lösungsverfahren, schon nach wenigen Iterationsschritten erreicht werden.

Üblicherweise entsteht bei der Diskretisierung von Gleichungssystemen für Strömungsprobleme eine schwachbesetzte Matrix¹, da sich an den einzelnen Knoten meist nur Abhängigkeiten von den direkt benachbarten Knoten ergeben (Ausnahme: Strahlungsberechnung). Mehrere moderne direkte Lösungsverfahren nutzen diese Matrixstruktur (engl. sparse matrix) und ermöglichen so eine effiziente Berechnung kleinerer Gleichungssysteme. Die Mehrzahl der technisch relevanten Strömungsprobleme ergeben jedoch Gleichungssysteme, die einen Einsatz direkter Lösungsverfahren nicht mehr erlauben. Nicht zuletzt wegen der rasanten Entwicklung in den letzten 20 Jahren bezüglich Rechenleistung und Arbeitsspeicher der Computer, die erst das Speichern und Lösen sehr großer Gleichungssysteme ermöglichen, wurde ein Großteil der Entwicklung von effizienten Lösungsverfahren in die Entwicklung von iterativen Lösungsverfahren gesteckt. Da es sich bei den Matrizen dieser Gleichungssysteme um schwachbesetzte Matrizen handelt, steigt die Komplexität der Gleichungen, also die Anzahl der von Null verschiedenen Matrixeinträge, somit *linear* mit der Zahl der Freiheitsgrade an. Man ist daher daran interessiert Lösungsverfahren zu entwickeln, bei denen die Zahl der Operationen auch möglichst linear mit der Zahl der Freiheitsgrade ansteigt. Diese Eigenschaft kann nur mit einem Mehrskalenansatz erhalten werden. Die am weitesten verbreiteten Verfahren, die auf einem solchen Ansatz basieren, sind die sogenannten Mehrgitterverfahren. Im folgenden sollen einige bekannte Iterati-

¹Eine $N \times N$ Matrix heißt schwachbesetzt, wenn die Anzahl der Nichtnullelemente sehr viel kleiner als N^2 ist

onsverfahren kurz vorgestellt werden und anschließend näher auf die Mehrgitterverfahren eingegangen werden. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden dann die verwendeten Linearisierungen der Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen beschrieben, die notwendig sind, um lineare Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme anzuwenden.

4.1 Lineare Iterationsverfahren

Gelöst werden soll das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.1)$$

mit den Matrixeinträgen a_{ij} , den Unbekannten (Freiheitsgraden) x_i und den Vektoreinträgen der rechten Seite b_i . Die Matrix \mathbf{A} kann man nun mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad (4.2)$$

zerlegen, wobei \mathbf{M} eine reguläre Matrix ist, d.h. sie muß invertierbar sein. Ein lineares Iterationsverfahren erhält man dann mit

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}^m + \mathbf{b} \quad (4.3)$$

und mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1} \quad (4.4)$$

kann man (4.3) auf die sogenannte erste Normalform des Iterationsverfahrens

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{S}\mathbf{x}^m + \mathbf{T}\mathbf{b} \quad (4.5)$$

bringen. Wenn gilt $\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}$ (konsistente lineare Iteration) und außerdem \mathbf{A} regulär ist, erhält man die zweite Normalform

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m - \mathbf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}^m - \mathbf{b}) \quad (4.6)$$

Die dritte Normalform einer Iteration schreibt man mit

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m+1}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^m - \mathbf{b} \quad (4.7)$$

die im folgenden mit

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{d} \quad (4.8)$$

vereinfacht dargestellt wird. \mathbf{W} , $\boldsymbol{\delta}$ und \mathbf{d} werden auch als Matrix der dritten Normalform, Korrektur und Defekt bezeichnet [32]. Die Iterationsmatrix \mathbf{W} sollte eine möglichst gute Näherung der Matrix \mathbf{A} darstellen und dennoch eine „einfache“ Lösung von (4.8) erlauben.

4.1.1 Eigenschaften von M-Matrizen

Wenn man die Matrix \mathbf{A} gemäß (4.2) zerlegt und elementweise $\mathbf{M}^{-1} \geq 0$ und $\mathbf{N} \geq 0$ gilt, spricht man von einer regulären Zerlegung. Wenn weiter gilt, daß \mathbf{A} nicht singulär ist und $a_{ij} \leq 0$ sind für alle i, j mit $i \neq j$ und elementweise $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$ ist, ist \mathbf{A} eine M-Matrix. Unter diesen Voraussetzungen kann man das Theorem von Varga [121] anwenden, welches besagt, daß eine reguläre Zerlegung einer M-Matrix konvergent ist, d.h. (4.3) konvergiert. Eine etwas einfacher zu überprüfende Bedingung für die M-Matrix Eigenschaft einer Matrix ergibt sich über die Definition einer K-Matrix. Die Matrix \mathbf{A} ist eine K-Matrix wenn gilt:

$$\begin{aligned} a_{ii} &> 0, \quad \forall i, \\ a_{ij} &\leq 0, \quad \forall i, j \quad \text{mit } i \neq j \\ \text{und } \sum_j a_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, \end{aligned}$$

mit $\sum_j a_{ij} > 0$ für mindestens ein i . Wenn eine K-Matrix nicht reduzierbar ist², so ist sie auch eine M-Matrix.

Man wird daher immer bestrebt sein, die Diskretisierung so durchzuführen, daß die entstehende Steifigkeitsmatrix möglichst die Struktur einer M-Matrix erhält. Bei der Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen und der Turbulenztransportgleichungen hat vor allem die Wahl der Aufwindverfahren und die Zerlegung der Quellterme in einen positiven und negativen Anteil einen entscheidenden Einfluß auf die M-Matrix-Eigenschaft der Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} .

4.1.2 Gauß-Seidel Verfahren

Die Matrix \mathbf{A} aus Gleichung 4.1 kann man eindeutig in die Summe

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} \quad (4.9)$$

zerlegen, wenn \mathbf{D} , \mathbf{L} und \mathbf{U} die Diagonalmatrix, die strikte untere Dreiecksmatrix und die strikte obere Dreiecksmatrix sind. Mit dieser Zerlegung erhält man die erste Normalform der Gleichung

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (4.10)$$

mit

$$\mathbf{x}^{m+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^m + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.11)$$

Aus der komponentenweisen Darstellung für die Indizes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i^{m+1} = x_i^m - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^m - b_i \right) / a_{ii} \quad (4.12)$$

²Eine Matrix ist nicht reduzierbar, wenn man aus $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kein unabhängig zu lösendes Untersystem aufstellen kann

kann man erkennen, daß die Anordnung der Indizes beim Gauß-Seidel Verfahren das Lösungsverhalten beeinflussen kann. Von Vorteil ist jedoch, daß im Gegensatz zu vielen anderen Iterationsverfahren, die Werte von x_i^m nicht zwischengespeichert werden, sondern sofort von den neuen Werten x_i^{m+1} überschrieben werden können.

Betrachtet man den rechten Term in Gleichung 4.12 als Korrektur des Iterationswertes x_i^m und multipliziert diesen mit dem Faktor ω , so erhält man das Überrelaxationsverfahren oder SOR-Verfahren (engl. **s**uccessive **o**verrelaxation **m**ethod)

$$x_i^{m+1} = x_i^m - \omega \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^m - b_i \right) / a_{ii} , \quad (4.13)$$

wobei ω Werte zwischen 1 und 2 annehmen kann. Dieses Verfahren konvergiert für viele Fälle weitaus besser als das Gauß-Seidel Verfahren [32]. Eine weniger starke Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit von der Wahl des Parameters ω ergibt sich beim symmetrischen SOR Verfahren, das zusätzlich zu (4.13) eine weitere Iterationsvorschrift besitzt, die von n bis 1 läuft. Dieses mit SSOR abgekürzte Verfahren gehört neben den im folgenden Abschnitt beschriebenen ILU Verfahren zu den gebräuchlichsten einfachen Iterationsverfahren.

4.1.3 Unvollständige Dreieckszerlegung

Ein direktes Lösungsverfahren für die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ basiert auf der multiplikativen Zerlegung von \mathbf{A} in eine untere und obere Dreiecksmatrix, für die $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ gilt. Für schwachbesetzte Matrizen entstehen bei diesem Verfahren jedoch weit mehr Nichtnullelemente in den Dreiecksmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{U} als in der Ausgangsmatrix \mathbf{A} vorhanden sind. Die Komponenten von \mathbf{L} und \mathbf{U} kann man über

$$l_{ii} = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.14)$$

und

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} u_{jk} = a_{ik} \quad \text{für} \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (4.15)$$

bestimmen. Es müssen also n^2 Gleichungen gelöst werden, um alle Komponenten der beiden Dreiecksmatrizen zu erhalten. Die *unvollständige* LU-Zerlegung besteht nun darin, daß man während dieses Eliminationsprozesses nicht mehr alle Matrixeinträge von \mathbf{A} eliminiert, um eine Auffüllung der Dreiecksmatrizen zu vermeiden. Die dadurch erfolgte Aufspaltung der Matrix \mathbf{A} kann mit Hilfe der Restmatrix \mathbf{R} mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{R} \quad (4.16)$$

beschrieben werden. Es wird nun ein Graph \mathcal{G} definiert, der die Paare (i, j) enthält, für die die Koeffizienten l_{ij} und u_{ij} ungleich Null sein dürfen. Die Paare (i, i) müssen selbstverständlich in \mathcal{G} enthalten sein und das Muster der Matrix \mathbf{A} sollte eine Teilmenge von \mathcal{G}

sein. Gleichung (4.15) folgend werden somit soviele Gleichungen wie die Zahl der Elemente in \mathcal{G} gelöst:

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} u_{jk} = a_{ik} \quad \text{für } (i, k) \in \mathcal{G} \quad (4.17)$$

Einen Beweis für die Existenz und die numerische Stabilität der ILU-Zerlegung (ILU = incomplete lower upper) wurde von Meijerink und Van der Vorst [122] und Hackbusch [32] durchgeführt. Sowohl die Zerlegung der Matrix \mathbf{A} als auch die Lösung des daraus resultierenden Gleichungssystems $(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $(\mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ basieren auf sequentiellen Algorithmen. Um einen effizienten Einsatz auf Vektor- oder Parallelrechner zu ermöglichen, wurden daher geeignete iterative Verfahren zur unvollständigen LU-Zerlegung entwickelt. Beispiele hierzu findet man in [123] und [124].

Ähnlich dem Überrelaxationsparameter ω , der in vielen Fällen eine Konvergenzbeschleunigung des SOR-Verfahrens gegenüber dem Gauß-Seidel Verfahren ergibt, indem die Diagonale der Iterationsmatrix abgeschwächt wird, kann man eine Modifikation für die ILU-Zerlegung einführen [125]. Matrixeinträge a_{ij} die außerhalb von \mathcal{G} liegen werden mit dem Faktor β (man spricht daher auch von einer ILU $_{\beta}$ -Zerlegung) multipliziert und über

$$r_{ii} = \beta \sum_{i \neq j} |r_{ij}| \quad (4.18)$$

auf die Diagonale der Restmatrix \mathbf{R} addiert. Eine Schwächung der Diagonalen und damit eine Verbesserung der Konditionszahl erhält man mit $\beta = -1$. Für $\beta > 0$ ergibt sich dagegen eine Dämpfung des Iterationsverfahrens und somit bessere Stabilitätseigenschaften [126, 127, 128, 129].

4.2 Verfahren der konjugierten Gradienten

Bevor auf die Mehrgitterverfahren eingegangen wird, die die oben aufgeführten Iterationsverfahren als sogenannte Glätter verwenden und die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Verfahren entscheidend beschleunigen, sollen noch die Verfahren der konjugierten Gradienten erwähnt werden, die auf dem Gebiet der Strömungsmechanik eine weit verbreitete Anwendung gefunden haben.

Betrachtet man das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und nimmt an, daß die Matrix \mathbf{A} positiv definit³ ist, so kann man diesem Gleichungssystem die Funktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \quad (4.19)$$

zuordnen⁴. Die Ableitung dieser Funktion

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \quad (4.20)$$

³eine Matrix ist positiv definit, wenn sie symmetrisch ist und alle Eigenwerte größer Null sind

⁴ $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ ist das Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{A} und \mathbf{B}

ist dann wiederum der Defekt des linearen Gleichungssystems. Ist dieser Defekt gleich Null so nimmt die Funktion \mathbf{F} ein Minimum an. Findet man nun ein \mathbf{x} , für das die Funktion \mathbf{F} ein Minimum hat, dann ist auch das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ erfüllt. Die Idee bei den Verfahren der konjugierten Gradienten besteht nun darin, daß man \mathbf{F} hinsichtlich einer bestimmten (eindimensionalen) Suchrichtung \mathbf{p} minimiert. Die Wahl von \mathbf{p} hat demzufolge einen entscheidenden Einfluß auf die Qualität der Iteration. Als erste Näherung könnte man die Richtung des steilsten Abstiegs, also das Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$, verwenden. Dieses als Gradientenverfahren bezeichnete Verfahren hat aber den Nachteil, daß es viele Iterationsschritte benötigt, da sich die nach einer Iteration gewonnene Verbesserung von \mathbf{x} in die Richtung \mathbf{p}^m bei der folgenden Iteration in Richtung \mathbf{p}^{m+1} wieder bezüglich \mathbf{p}^m verschlechtern kann. Um dies zu verhindern muß eine Suchrichtung gefunden werden, die orthogonal zu (allen) vorhergegangenen Suchrichtungen ist. Man fordert also, daß $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{q}$ bezüglich \mathbf{p} optimal bleibt, wenn \mathbf{x} optimal bezüglich \mathbf{p} ist. Dies ist erfüllt, wenn die beiden Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} konjugiert sind und somit $\mathbf{Aq} \perp \mathbf{p}$ gilt. Mit dieser Bedingung kann man die Suchrichtung \mathbf{p}^m mit

$$\mathbf{p}^m := \mathbf{r}^m - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\langle \mathbf{Ar}^m, \mathbf{p}^l \rangle}{\langle \mathbf{Ap}^l, \mathbf{p}^l \rangle} \mathbf{p}^l \quad (4.21)$$

bestimmen. Die optimale Länge des Vektors \mathbf{p} erhält man über die eindimensionale Minimierungsaufgabe

$$f(\lambda) := \mathbf{F}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{p}) = \min , \quad (4.22)$$

deren Lösung mit

$$\lambda_{opt} = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{Ap}, \mathbf{p} \rangle} \quad (4.23)$$

gegeben wird. Die neuen Iterierten des Lösungsvektors und des Residuums erhält man dann mit

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m + \lambda_{opt}\mathbf{p}^m \quad (4.24)$$

$$\text{und } \mathbf{r}^{m+1} = \mathbf{r}^m - \lambda_{opt}\mathbf{Ap}^m . \quad (4.25)$$

Wegen $\langle \mathbf{Ar}^m, \mathbf{p}^l \rangle = 0$ für alle $0 \leq l \leq m-2$ vereinfachen sich (4.21) und (4.23) deutlich und können mit

$$\lambda_{opt} = \frac{\langle \mathbf{r}^m, \mathbf{r}^m \rangle}{\langle \mathbf{Ap}^m, \mathbf{p}^m \rangle} \quad (4.26)$$

$$\text{und } \mathbf{p}^{m+1} = \mathbf{r}^{m+1} + \frac{\langle \mathbf{r}^{m+1}, \mathbf{r}^{m+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}^m, \mathbf{r}^m \rangle} \mathbf{p}^m \quad (4.27)$$

formuliert werden [32].

Eine in den meisten Fällen deutliche Verbesserung des Konvergenzverhaltens des konjugierten Gradientenverfahrens wird dadurch ermöglicht, daß man eine der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Basisiterationen als Vorkonditionierer für die Berechnung der Suchrichtung

```

Berechne  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0$  mit dem Startwert  $\mathbf{x}^0$ 
for  $i = 1, 2, \dots$ 
  löse  $\mathbf{M}\mathbf{z}^{i-1} = \mathbf{r}^{i-1}$  (Vorkonditionierung)
   $\rho_{i-1} = (\mathbf{r}^{i-1})^T \mathbf{z}^{i-1}$ 
  if  $i = 1$ 
     $\mathbf{p}^1 = \mathbf{z}^0$ 
  else
     $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
     $\mathbf{p}^i = \mathbf{z}^{i-1} + \beta_{i-1} \mathbf{p}^{i-1}$ 
  endif
   $\mathbf{q}^i = \mathbf{A}\mathbf{p}^i$ 
   $\alpha_i = \rho_{i-1} / ((\mathbf{p}^i)^T \mathbf{q}^i)$ 
   $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}^i$ 
   $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}^{i-1} - \alpha_i \mathbf{q}^i$ 
  Breche Schleife ab, falls Konvergenzkriterium erfüllt
end

```

Abbildung 4.1. Vorkonditioniertes konjugiertes Gradientenverfahren

\mathbf{p} einsetzt. Betrachtet man die dritte Normalform einer Iteration (4.8), so erhält man eine vorkonditionierte Suchrichtung \mathbf{z} , indem man das Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (4.28)$$

mit einem linearen Iterationsverfahren löst. M ist dabei die Vorkonditionierungsmatrix⁵. In Abbildung 4.1 ist eine Darstellung des vorkonditionierten konjugierten Gradientenverfahrens in Pseudocode gegeben. Setzt man $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ erhält man das Verfahren ohne Vorkonditionierung.

Diese kurze Beschreibung des konjugierten Gradientenverfahrens soll einen Einblick in den grundsätzlichen Aufbau solcher Verfahren geben. Zur Berechnung der Gleichungssysteme, die bei der Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen entstehen, kann das bisher beschriebene Verfahren jedoch nicht eingesetzt werden, da es positiv definite Matrizen \mathbf{A} voraussetzt. Anstatt den Fehler in der Energienorm zu minimieren, kann man auch das Residuum in der L_2 -Norm minimieren. Dies führt auf das auch mit MINRES bezeichnete Verfahren der konjugierten Residuen und kann auch für indefinite Matrizen eingesetzt werden [130]. Ähnliche Eigenschaften hat auch das von Paige und Saunders als SYMMLQ benannte Verfahren [131], das auf dem Verfahren der orthogonalen Richtungen aufbaut.

Ist die Matrix \mathbf{A} jedoch nichtsymmetrisch, so kann sie nicht mehr auf Tridiagonalform gebracht werden und die Annahmen, die auf (4.27) führten, sind nicht mehr gültig [32]. Man kann sich dadurch behelfen, indem man eine Orthogonalisierung vergleichbar mit (4.21)

⁵Es sei M eine Vorkonditionierungsmatrix, so ist das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ äquivalent zu $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$.

durchführt, was aber das Speichern aller \mathbf{p}^l notwendig macht. Um diesen sehr hohen Speicheraufwand zu vermindern, ist es möglich, nur die letzten Richtungen zu berücksichtigen oder nach einer bestimmten Zahl von Iterationen einen Neustart durchzuführen. Letzteres wird im GMRES Verfahren von Saad und Shultz [30] angewandt, das eine Erweiterung des MINRES Verfahrens auf nichtsymmetrische Matrizen darstellt. Die grundsätzliche Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt darin, eine geeignete Abschätzung für die Zahl der Iterationen bis zu einem Neustart des Verfahrens zu finden, es sei denn das System konvergiert schon nach wenigen Iterationen.

Ein anderer Weg Gleichungssysteme mit nichtsymmetrischen Matrizen zu lösen wird bei den sogenannten BiCG-Verfahren eingeschlagen [29]. Anstatt *eine* Folge von orthogonalen Residuen zu verwenden, werden hier *zwei* Folgen konstruiert, die auf die Matrix \mathbf{A} und deren Transponierte \mathbf{A}^T angewandt werden. Man erhält somit zwei Bedingungen für die Residuen

$$\mathbf{r}^m = \mathbf{r}^{m-1} - \alpha_m \mathbf{A} \mathbf{p}^m \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{r}}^m = \tilde{\mathbf{r}}^{m-1} - \alpha_m \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{p}}^m \quad (4.29)$$

und für die Suchrichtungen

$$\mathbf{p}^m = \mathbf{p}^{m-1} + \beta_{m-1} \mathbf{A} \mathbf{p}^{m-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{p}}^m = \tilde{\mathbf{p}}^{m-1} + \beta_{m-1} \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{p}}^{m-1} . \quad (4.30)$$

Eine geeignete Wahl der α_m und β_m gewährleistet dann die Bi-Orthogonalität

$$(\tilde{\mathbf{r}}^i)^T \mathbf{r}^j = 0 \quad \text{für } i \neq j . \quad (4.31)$$

Eine Minimierung in Suchrichtung analog zu (4.23) ist bei diesem Verfahren jedoch nicht mehr möglich. Eine Modifikation dieses Verfahrens, bei dem die Transponierte \mathbf{A}^T nicht benötigt wird, das CGS (conjugate gradient squared) Verfahren, wird in [132] beschrieben.

Ein weiteres Verfahren, das zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in den letzten Jahren vermehrt eingesetzt wurde, ist das von van der Vorst [31] vorgeschlagene BiCGSTAB Verfahren, das eine stabilisierte Version des BiCG-Verfahrens darstellt. Man kann dieses Verfahren auch als Kombination aus dem BiCG-Verfahren und einem GMRES-Verfahren mit nur einem Iterationsschritt ansehen. Die durch den GMRES Einfluß bedingte (lokale) Minimierung des Residuums ermöglicht ein deutlich glatteres Konvergenzverhalten als beim reinen BiCG-Verfahren. Einige BiCGSTAB Varianten werden in [133] und [134] vorgeschlagen. Wie der BiCGSTAB und der BiCGSTAB(l) Algorithmus von [134] mit Vorkonditionierung aussehen kann, ist im Anhang B beschrieben.

Wie dieser kurze Überblick über die sogenannten Krylov Unterraummethoden zeigt, gibt es eine Vielzahl von Ansätzen und Varianten, die konjugierten Gradientenverfahren auch für nichtsymmetrische Matrizen anzuwenden. Es gibt jedoch kein deutlich herausragendes allgemein anwendbares Verfahren. Daher muß für jede Problemklasse von Gleichungssystemen ein geeignetes Verfahren gefunden werden. Eine gute Übersicht über die Anwendungsbereiche verschiedener konjugierter Gradientenverfahren findet man in [135], einen Vergleich verschiedener Krylov-Unterraumverfahren zur Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in [33].

4.3 Mehrgitterverfahren

Betrachtet man das Frequenzspektrum des Fehlers $e^m = x^m - x$ auf einem Gitter G und teilt diesen mit $e^m = e_g^m + e_o^m$ in einen glatten und einen stark oszillierenden Anteil auf, so kann nachgewiesen werden, daß der Anteil e_o^m mit den in Abschnitt 4.1 beschriebenen Iterationsverfahren während der Iteration sehr schnell abnimmt, während der glatte Anteil e_g^m sich nur sehr langsam verringert (siehe z.B. [32]). Das bedeutet, daß das Verhältnis e_o^m/e_g^m mit größerem m deutlich abnimmt und somit der Gesamtfehler e^{m+1} glatter als e^m ist, aber nur langsam kleiner wird. Iterationsverfahren, die diese Eigenschaft haben, werden als Glätter bezeichnet. Damit nun der Gesamtfehler e_m reduziert wird, muß ein Iterationsverfahren gefunden werden, das für den glatten Fehleranteil e_g^m gute Konvergenzeigenschaften hat, dafür aber den oszillierenden Anteil e_o^m unberücksichtigt lassen kann. Ein solches Iterationsverfahren existiert nicht für das Gitter G . Konstruiert man jedoch ein grobes Gitter \hat{G} , das die mehrfache Maschenweite von G besitzt und betrachtet die Fehlerverteilung e_m des feinen Gitters G auf dem groben Gitter \hat{G} , so kann man folgendes beobachten. Der Fehleranteil e_o^m von G wird auf dem groben Gitter nicht mehr aufgelöst und der auf dem feinen Gitter glatte Fehleranteil erscheint auf dem groben Gitter als ein oszillierender Fehler ($e_g^m \approx \hat{e}_o^m$). Dieser auf des grobe Gitter bezogene hochfrequente Fehler, kann wiederum mit einem glättenden Iterationsverfahren auf dem groben Gitter effektiv reduziert werden. Anschließend muß die auf dem groben Gitter erreichte Fehlerreduktion des oszillativen Anteils \hat{e}_o^m im glatten Fehleranteil des feinen Gitters e_g^m berücksichtigt werden. Der „Umweg“ über ein grobes Gitter ermöglicht es somit, auch den glatten Fehleranteil e_g^m schnell zu reduzieren und erlaubt in Verbindung mit einem glättenden Iterationsverfahren eine im Vergleich mit den Basisiterationsverfahren hohe Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich des Gesamtfehlers e^m . Für die praktische Anwendung eines solchen Verfahrens werden meistens nicht nur zwei Gitter, sondern eine Hierarchie von Gittern eingesetzt. Typischerweise reichen 4-6 Gitter aus, um das gesamte Fehlerspektrum auf dem jeweils geeigneten Gitter zu reduzieren. In den folgenden Abschnitten sollen die Komponenten dieses als Mehrgitterverfahren bezeichneten Iterationsverfahrens im einzelnen kurz beschrieben werden, sowie verschiedene Möglichkeiten zur Strukturierung und zum Ablauf eines Mehrgitterverfahrens vorgestellt werden.

4.3.1 Komponenten des Mehrgitterverfahrens

Ausgangspunkt für die Konstruktion eines Mehrgitterverfahrens ist eine *Hierarchie von Gleichungssystemen*

$$\mathbf{A}_l \mathbf{x}_l = \mathbf{b}_l \quad \text{mit } l = 0, 1, \dots, l_{max} \quad , \quad (4.32)$$

die den Gittern G_l zugeordnet werden können, welche mit wachsendem l immer feiner werden. Als einen Spezialfall kann man sich eine Folge von Gittern auf dem Einheitsquadrat so vorstellen, daß für die Maschenweite h_l des Gitters G_l gilt

$$h_l = h_0/2^l \quad \text{mit } l \geq 0 \text{ und } h_0 \geq 1/2 \quad . \quad (4.33)$$

Die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Einheitsquadrat und somit die Dimension des Gleichungssystems beträgt dann $n_l = (1/h_l + 1)^2$. Die Lösung der Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erhält man auf dem feinsten Gitter $G_{l_{max}}$ unter Verwendung aller Gleichungen $\mathbf{A}_l\mathbf{x}_l = \mathbf{b}_l$.

Zur Beschreibung des Datenaustausches der Knotenwerte zwischen den einzelnen Gittern werden geeignete Transferoperatoren benötigt. Als *Prolongation* p wird der Gittertransfer vom groben zum feinen Gitter bezeichnet und als *Restriktion* r der Transfer vom feinen zum groben Gitter. Für die Vektoren \mathbf{x}_l und \mathbf{b}_l aus den Vektorräumen $\mathbb{X}_l \cong \mathbb{R}^{n_l}$ können diese Operationen formal als die linearen Abbildungen

$$p : \mathbb{X}_l \rightarrow \mathbb{X}_{l+1} \quad \text{und} \quad r : \mathbb{X}_{l+1} \rightarrow \mathbb{X}_l \quad \text{für } l \geq 0 \quad (4.34)$$

dargestellt werden. Eine bei knotenzentrierten Gittern mögliche Restriktion, die auch als Injektion bezeichnet wird, besteht darin, daß man die Knotenwerte für das grobe Gitter einfach von den darüberliegenden Feingitterknoten übernimmt. Dieses Verfahren führt aber oftmals zu Instabilitäten, deshalb wird im allgemeinen ein gewichteter Mittelwert aus den umliegenden Knoten berechnet. Bei einem zweidimensionalen regulären Gitter erhält der Restriktionsoperator demnach die Form

$$r = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Der Prolongationsoperator kann aus dem Restriktionsoperator abgeleitet werden und ist bestimmt durch

$$p = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.36)$$

Gemäß diesem Operator werden die Knotenwerte aller Knoten auf dem groben Gitter auf das feine Gitter verteilt. Die Werte auf dem feinen Gitter ergeben sich dann durch Addition aller vom groben Gitter zugewiesenen anteiligen Knotenwerten.

4.3.2 Grobgitterkorrektur

Nach einigen Glättungsiterationen auf dem feinen Gitter erhält man für das lineare Gleichungssystem den Defekt $\mathbf{d}_l = \mathbf{A}_l\mathbf{x}_l - \mathbf{b}_l$. Bezeichnet man \mathbf{e}_l als den Fehler des Lösungsvektors \mathbf{x}_l auf dem feinen Gitter, so kann der Defekt mit

$$\mathbf{A}_l\mathbf{e}_l = \mathbf{d}_l \quad (4.37)$$

ausgedrückt werden. Wenn man davon ausgeht, daß nach den Glättungsiterationen der Fehler \mathbf{e}_l auf dem feinen Gitter glatt ist, so kann der Fehler auch ohne großen Verlust an Genauigkeit aus dem Fehler \mathbf{e}_{l-1} des groben Gitters mit

$$\mathbf{e}_l \approx p\mathbf{e}_{l-1} \quad (4.38)$$

dargestellt werden. Anschließend wird der Defekt mit $\mathbf{d}_{l-1} = r\mathbf{d}_l$ auf das grobe Gitter restringiert und der Fehler auf dem groben Gitter wird mit

$$\mathbf{A}_{l-1}\mathbf{e}_{l-1} = \mathbf{d}_{l-1} \quad (4.39)$$

berechnet. Voraussetzung hierzu ist jedoch, daß (4.39) exakt lösbar ist. Die neue Lösung ergibt sich dann über die sogenannte Grobgitterkorrektur zu

$$\mathbf{x}_l^{korr} = \mathbf{x}_l - p\mathbf{e}_{l-1} \quad (4.40)$$

Ist die Zahl der Freiheitsgrade auf dem Gitter $l - 1$ jedoch noch zu groß, um (4.39) exakt oder durch ein geeignetes iteratives Lösungsverfahren zu lösen, so wird wiederum eine Grobgitterkorrektur auf dem Gitter $l - 2$ durchgeführt. Hierbei ist dann die exakte Lösung von \mathbf{e}_{l-2} erforderlich.

4.3.3 Lineares Mehrgitterverfahren

Verbindet man die Grobgitterkorrektur mit einem in Abschnitt 4.1 beschriebenen linearen Iterationsverfahren als Glättungsiteration und wendet diese auf die Hierarchie von Gleichungssystemen (4.32) an, die durch die Diskretisierung auf den Gittern G_0 bis $G_{l_{max}}$ entstanden ist, so kann der in Abbildung 4.2 beschriebene rekursive Mehrgitteralgorithmus aufgestellt werden.

```

function LMG ( $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, l$ )

if  $l = 0$ 
     $\mathbf{x} = \mathbf{A}_l^{-1}\mathbf{b}$                                 exakt lösen
else
     $S_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \nu_1, l)$                 vorglätten
     $\mathbf{d}_{l-1} = r(\mathbf{A}_l\mathbf{x}_l - \mathbf{b}_l)$             Defekt restringieren
     $\mathbf{e}_{l-1} = 0$                                 Grobgitterfehler initialisieren
    for  $i = 1, \gamma$ 
        LMG ( $\hat{\mathbf{e}}_{l-1}, \mathbf{e}_{l-1}, \mathbf{d}_{l-1}, l - 1$ )    rekursiver Aufruf von LMG
         $\hat{\mathbf{e}}_{l-1} = \mathbf{e}_{l-1}$                     Fehler aktualisieren
    end
     $\mathbf{x}_l = \hat{\mathbf{x}}_l - p\mathbf{e}_{l-1}$                     Grobgitterkorrektur
     $S_2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \nu_2, l)$             nachglätten
end

```

Abbildung 4.2. Algorithmus für lineares Mehrgitterverfahren

Die in diesem Algorithmus eingesetzten Funktionen S_1 und S_2 sind die Vor- und Nachglättungsiterationen, die aus der Startlösung $\hat{\mathbf{x}}$ nach ν_1 bzw. ν_2 Iterationen die geglättete

Lösung \mathbf{x} liefern. Die Operatoren r und p bezeichnen die in Abschnitt 4.3.1 beschriebene Restriktion und Prolongation.

Der Parameter γ bestimmt die Art des Mehrgitterzyklus. In der Praxis werden jedoch nur die Werte $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ angenommen, die dem sogenannten V-Zyklus bzw. dem W-Zyklus entsprechen. In Abbildung 4.3 ist die Mehrgitterstrategie für diese beiden Varianten dargestellt.

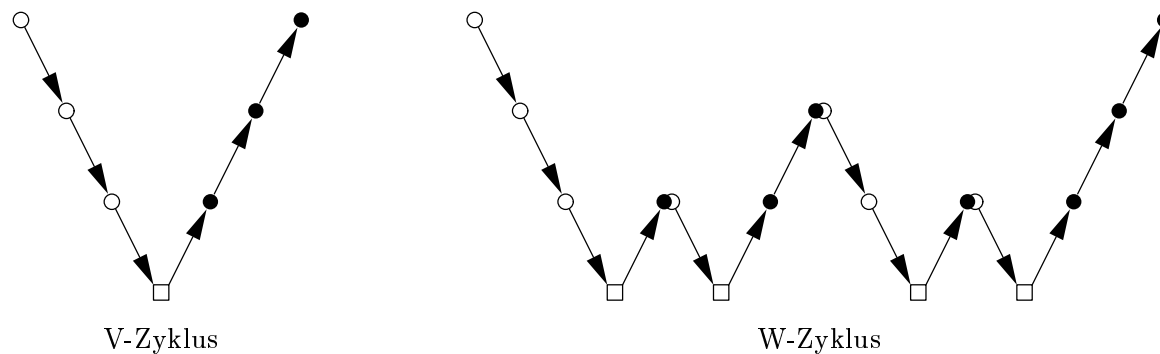


Abbildung 4.3. Mehrgitterverfahren auf vier Gittern mit V- und W-Zyklus: \circ Vorglätten; \bullet Nachglätten; \square exakt Lösen

Zusätzlich kann die Mehrgitterhierarchie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes für $\mathbf{x}_{l_{max}}$ eingesetzt werden. Hat man eine Approximation der Lösung auf dem Gitter $l - 1$, so erhält man den Startwert auf dem Gitter l mit der Prolongation

$$\mathbf{x}_l = p\mathbf{x}_{l-1} \quad , \quad (4.41)$$

wobei p nicht unbedingt mit der Prolongation aus dem Mehrgitterverfahren übereinstimmen muß. Dieses als geschachtelte Iteration bezeichnete Verfahren zur Bestimmung eines Startwertes ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Der Wert m_l gibt die Zahl der Mehrgitterite-

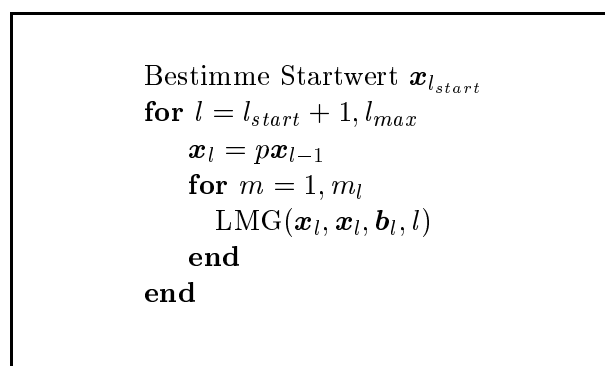


Abbildung 4.4. Geschachtelte Iteration

rationen für das aktuelle feinste Gitter G_l an. Üblicherweise werden auf den Gitterebenen $l < l_{max}$ nur wenige Iterationen durchgeführt und auf Ebene l_{max} dann bis zur geforderten

Genauigkeit iteriert. Welche unterste Gitterebene l_{start} zur Bestimmung des Startwertes gewählt werden soll hängt vom jeweiligen Problem ab. Je kleiner l_{start} gewählt wird (idealerweise $l_{start} = 0$) um so schneller erhält man eine gute Approximation des Startwertes $x_{l_{max}}$. Voraussetzung hierzu ist jedoch, daß auf den unteren Gitterebenen das Verfahren nicht divergiert. Bei den Navier-Stokes Gleichungen stellt dies meist keine Schwierigkeit dar. Die Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen benötigen jedoch abhängig vom jeweiligen Turbulenzmodell eine Mindestauflösung der Grenzschicht.

Die Wahl der glättenden Iterationsverfahren, auch Glätter genannt, spielt für das Gesamtverhalten des Lösungsalgorithmus eine entscheidende Rolle. Die am häufigsten eingesetzten Verfahren sind dabei die Gauß-Seidel Iteration oder dessen gedämpfte Form (SOR) und die unvollständigen Dreieckszerlegungen ILU. Da die ILU Verfahren bei der Lösung der Navier-Stokes Gleichungen deutlich bessere Glättungseigenschaften aufweisen [126] als die Gauß-Seidel Iteration, werden in dieser Arbeit nur die Simulationen mit ILU Verfahren beschrieben. Besondere Berücksichtigung findet hierbei auch der Parameter β der modifizierten ILU-Iteration (siehe Abschnitt 4.1.3). Da die Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte (ν_1 und ν_2 in Abb. 4.2) einen linearen Einfluß auf den Aufwand eines Mehrgitterzyklus hat, ist man bestrebt diese möglichst gering zu halten. In den meisten Fällen wird man auch mit ein oder zwei Vor- bzw. Nachglättungsschritten auskommen können.

Zur Lösung des Gleichungssystems auf dem untersten (groben) Gitter wurde in dieser Arbeit ein direktes, bandweitenoptimiertes Lösungsverfahren eingesetzt. Solange die Zahl der Gitterpunkte auf dieser Gitterebene unter 1000 liegt, ist ein iteratives Verfahren auch nicht notwendig. Bei den hier untersuchten Fällen wurden maximal 500 Gitterpunkte auf dem größten Gitter verwendet. Bei 3-D Berechnungen wird jedoch in vielen Fällen ein iteratives Verfahren zur Lösung des Grobgittergleichungssystems benötigt werden. Dazu könnte zum Beispiel ein konjugiertes Gradientenverfahren eingesetzt werden.

4.3.4 Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer für konjugierte Gradientenverfahren

In Abschnitt 4.2 wurde geschrieben, daß Voraussetzung für gute Konvergenzeigenschaften der Verfahren der konjugierten Gradienten ein geeignetes Vorkonditionierungsverfahren ist (siehe auch [33]). Es bietet sich somit an, ein lineares Mehrgitterverfahren zur Vorkonditionierung des cg-Verfahrens (cg = conjugate gradient) einzusetzen. Daß mit einer Mehrgittervorkonditionierung eine — vor allem bei großen Gleichungssystemen — geringere Zahl an Iterationen als bei einer Eingitter-Vorkonditionierung notwendig ist, liegt auf der Hand. Es stellt sich jedoch die Frage, ob und wann ein Mehrgitter vorkonditioniertes cg-Verfahren Vorteile gegenüber einem Mehrgitterverfahren bieten kann. Die Erfahrung hat gezeigt, daß eine solche Kombination keinen Gewinn gegenüber dem linearen Mehrgitterverfahren ermöglicht, wenn dieses bereits eine sehr hohe Konvergenzgeschwindigkeit aufweist. Der zusätzliche Rechen- und Speicheraufwand, den ein cg-Verfahren erfordert, zahlt sich somit nicht aus. Wenn man ein für das zu berechnende Gleichungssystem optimales Glättungsverfahren einsetzt, sollten die Konvergenzeigenschaften des linearen Mehrgitterverfahrens gut genug sein. In vielen Fällen kann ein solches Glättungsverfahren

jedoch nicht gefunden oder nicht implementiert werden (z. B. wegen schwieriger Parallelisierung oder Vektorisierung). Das schlechte Konvergenzverhalten des Verfahrens liegt aber dann meist nur an der schlechten Konvergenz weniger Eigenmoden. Einige Iterationen mit einem konjugierten Gradienten Verfahren ermöglichen es dann, gerade diese ungünstigen Eigenmoden effizient konvergieren zu lassen. In den Abschnitten 6.2.1.2 und 6.2.2.5 werden einige Vergleiche durchgeführt, die die Vor- und Nachteile eines kombinierten Verfahrens gegenüber einem „reinen“ Mehrgitterverfahren beleuchten sollen.

Der Einsatz von cg-Verfahren als Glätter für Mehrgitterverfahren ist jedoch nur bedingt zu empfehlen [32], da die cg-Verfahren keine ausgeprägten Glättungseigenschaften aufweisen.

4.3.5 Newton Mehrgitterverfahren

Das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene lineare Mehrgitterverfahren liefert die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sowohl die Navier-Stokes Gleichungen als auch die Turbulenztransportgleichungen stellen jedoch ein nichtlineares Gleichungssystem in der Form

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (4.42)$$

dar. Mit Hilfe der Newton-Iteration kann ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Dazu muß die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.43)$$

oder eine Näherung für die Ableitung von $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ aufgestellt werden. Über die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}^{m+1}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}^m) + \mathbf{J}[\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m] = \mathbf{b} \quad (4.44)$$

kann man das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{J}\mathbf{x}' = \mathbf{r} \quad (4.45)$$

ableiten, wobei $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathcal{A}(\mathbf{x}^m)$ das Residuum der alten Lösung ist und \mathbf{x}' die Differenz aus alter und neuer Lösung, also die sogenannte Korrektur ist. Die neue Lösung \mathbf{x}^{m+1} ergibt sich somit aus

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m + \mathbf{x}' \quad (4.46)$$

Zur Stabilisierung des nichtlinearen Lösungsverfahrens wird oftmals noch ein Unterrelaxationsparameter $\lambda < 1$ für die Korrektur \mathbf{x}' eingeführt (s.a. Abb. 4.6). Die neue Lösung wird somit mit

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m + \lambda \mathbf{x}' \quad (4.47)$$

bestimmt. Das lineare Gleichungssystem (4.45) wird dann mit einem in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme gelöst. Wie die Jacobi-Matrizen für die Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen bestimmt werden können, wird in Abschnitt 4.4 beschrieben.

4.3.6 Nichtlineares Mehrgitterverfahren

Um ein *nichtlineares* Gleichungssystem (4.42) zu lösen, wird beim Newton Mehrgitterverfahren ein *lineares* Gleichungssystem (4.45) gelöst und über (4.46) oder (4.47) die Lösung aktualisiert. Mit Hilfe der Mehrgitterhierarchie ist es jedoch möglich durch eine geeignete Konstruktion des Mehrgitteralgorithmus das *nichtlineare* Gleichungssystem direkt zu berechnen. Die bekanntesten Methoden hierzu sind das FAS (full approximation storage) Verfahren von Brandt [48] und das nichtlineare Mehrgitterverfahren von Hackbusch [49]. Der nichtlineare Mehrgitteralgorithmus ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Wählt man $s = 1$ und $\hat{\mathbf{x}}_{l-1} = r\mathbf{x}_l$ so führt dies auf die FAS Methode. Beim Verfahren von Hackbusch wird $\hat{\mathbf{x}}_{l-1}$ aus der vorhergegangenen Iteration auf der Gitterebene $l - 1$ bestimmt. Um dies zu ermöglichen, ist eine geschachtelte Iteration notwendig. Die geschachtelte Iteration dient daher nicht nur wie beim linearen Mehrgitterverfahren zur Verbesserung des Startwertes, sondern ist somit notwendiger Teil des Mehrgitteralgorithmus. Der Wert des Skalierungsfaktors s wird abhängig von der Norm des Defektes \mathbf{d} bestimmt ($s = c/||\mathbf{d}||$, mit c klein).

```

function NLMG ( $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, l$ )

if  $l = 0$ 
     $\mathbf{x} :=$  Näherungslösung von  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}_0$ 
else
     $S_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \nu_1, l)$            vorglätten
     $\mathbf{d}_{l-1} = r(\mathbf{A}_l(\mathbf{x}_l) - \mathbf{b}_l)$        Defekt restringieren
    Wähle geeignetes  $\hat{\mathbf{x}}_{l-1}$  und  $s$ 
     $\mathbf{b}_{l-1} = \mathbf{A}_{l-1}(\hat{\mathbf{x}}_{l-1}) - s\mathbf{d}_{l-1}$    Rechte Seite
     $\mathbf{x}_{l-1} = \hat{\mathbf{x}}_{l-1}$ 
    for  $i = 1, \gamma$ 
        NLMG ( $\hat{\mathbf{x}}_{l-1}, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{b}_{l-1}, l - 1$ )   rekursiver Aufruf von NLMG
    end
     $\mathbf{x}_l = \hat{\mathbf{x}}_l + (1/s)p(\mathbf{x}_{l-1} - \hat{\mathbf{x}}_{l-1})$    Grobgitterkorrektur
     $S_2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \nu_2, l)$            nachglätten
end

```

Abbildung 4.5. Nichtlineares Mehrgitterverfahren

Der bestimmt sehr interessante Vergleich zwischen nichtlinearem Mehrgitterverfahren und Newton-Mehrgitterverfahren bei turbulenten inkompressiblen Strömungen konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Welches Verfahren schneller konvergiert, hängt sicherlich von der Einstellung der einzelnen Komponenten (Zyklus, Zahl der Glättungsiterationen, geschachtelte Iteration, Restriktion, Prolongation) und von der Implementierung ab. Entscheidenden Einfluß hat sicher auch die Wahl des Glättungsverfahrens. Als Glätter für das nichtlineare Mehrgitterverfahren muß übrigens auch eine

nichtlineare Iterationsmethode verwendet werden. In vielen Fällen ist dies ein nichtlineares Gauß-Seidel Verfahren. Ein großer Vorteil für das nichtlineare Mehrgitterverfahren besteht auf jeden Fall darin, daß nicht die volle Matrix \mathbf{A} abgespeichert werden muß, da die Assemblierung nur lokal durchgeführt wird und der Lösungsvektor dabei knotenweise überschrieben wird.

Beispiele für die Anwendung nichtlinearer Mehrgitterverfahren für turbulente Strömungen findet man in [42, 43, 44, 45].

4.4 Berechnung der Jacobi-Matrix

Sowohl bei den Navier-Stokes Gleichungen als auch bei den Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen handelt es sich um nichtlineare Gleichungssysteme, die linearisiert werden müssen, um auf ein lineares Gleichungssystem überführt zu werden. Diese Linearisierung ist Voraussetzung dafür, daß ein lineares Mehrgitterverfahren als Teil einer Newton-Iteration zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems eingesetzt werden kann.

Verschiedene Möglichkeiten der Linearisierung sollen nun anhand der Turbulenzgleichungen dargestellt werden. Anschließend soll noch auf die Linearisierung der Impulsgleichungen eingegangen werden.

4.4.1 Linearisierung der Turbulenzgleichungen

Betrachtet man ein Gleichungssystem von zwei gekoppelten skalaren Gleichungen für Φ_0 und Φ_1 (z.B. die Gleichungen für k und ε), so kann zum Beispiel die Gleichung für die skalare Größe Φ_0 vereinfacht mit

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_0 - \nabla [\Gamma_{\text{eff}_0}(\Phi_0, \Phi_1) \nabla \Phi_0] = Q_0(\Phi_0, \Phi_1) \quad (4.48)$$

dargestellt werden. Es ist zu erkennen, daß die Nichtlinearität der Gleichungen durch die Funktionen für die Diffusionskoeffizienten $\Gamma_{\text{eff}_i}(\Phi_0, \Phi_1)$ und Quellterme $Q_i(\Phi_0, \Phi_1)$ bedingt ist und über diese Funktionen auch eine Kopplung zwischen den beiden Gleichungen entsteht. Die einfachste Form der Linearisierung würde man erhalten, wenn man diese beiden Funktionen aus den alten Werten der Lösung berechnet. Aus Stabilitätsgründen ist dies für die Quellterme Q_i jedoch nicht empfehlenswert. Eine deutliche Verbesserung der M-Matrix Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix erhält man dadurch, daß man die Quellterme mit

$$Q_i = Q_i^+ + Q_i^- \Phi_i \quad (4.49)$$

in einen positiven und einen negativen Anteil aufteilt. Bei der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie (2.19) ist der positive Anteil der Produktionsterm $Q^+ = \tau_{ij} \partial U_i / \partial x_j$ und der negative Anteil der Dissipationsterm $Q^- = -\varepsilon/k$. Der negative Anteil wird auf die linke Seite der Gleichung gebracht und erhöht somit die Diagonaldominanz

des Gleichungssystems. Man kann die entkoppelten und linearisierten skalaren Turbulenzgleichungen daher mit

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_i - \nabla [\Gamma_{\text{eff}_i} \nabla \Phi_i] - Q_i^- \Phi_i = Q_i^+ \quad (4.50)$$

aufstellen. Zur Vereinfachung der Darstellung wird zuerst der stationäre Fall behandelt.

Stationäre Lösung

Läßt man in (4.50) den Zeitterm unberücksichtigt, so erhält man mit

$$\underbrace{[\mathbf{u} \cdot \nabla - \nabla (\Gamma_{\text{eff}} \nabla) - Q^-]}_{\mathbf{A}^n} \underbrace{\Phi^{n+1}}_{\mathbf{x}^{n+1}} = \underbrace{Q^+}_{\mathbf{b}^n} \quad (4.51)$$

die linearisierte Form von (4.48), die im weiteren mit $\mathbf{A}^n \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{b}^n$ abgekürzt wird. Bestimmt man nun das Residuum mit $\mathbf{r}^n = \mathbf{b}^n - \mathbf{A}^n \mathbf{x}^n$ und setzt $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{x}'$ so erhält man ein zu $\mathbf{A}^n \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{b}^n$ äquivalentes Gleichungssystem (s.a. Gl. 4.7)

$$\mathbf{A}^n \mathbf{x}' = \mathbf{r}^n \quad (4.52)$$

Vorteile dieser Darstellung gegenüber $\mathbf{A}^n \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{b}^n$ bestehen darin, daß die Komponenten der Vektoren \mathbf{x}' und \mathbf{r}^n etwa die gleiche Größenordnung haben und die rechte Seite \mathbf{r}^n direkt als Maß für die momentane Genauigkeit der Lösung herangezogen werden kann. Der vollständige Lösungsalgorithmus für Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist in Abb. 4.6 dargestellt.

function NEWTON (\mathbf{x}^0, \mathbf{x})	
$\mathbf{r}^0 = \mathbf{b}^0 - \mathbf{A}^0 \mathbf{x}^0$	bestimme Residuum
$\varepsilon = f(\mathbf{r}^0)$	bestimme Abbruchkriterium
for $i = 0, \text{maxiter}$	
if $\ \mathbf{r}^i\ _2 < \varepsilon$ then Abbruch	
Löse $\mathbf{A}^i \mathbf{x}' = \mathbf{r}^i$	Lösen des linearen Gleichungssystems
$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda \mathbf{x}'$	Aktualisieren der Lösung
Bestimme $\mathbf{A}^{i+1}, \mathbf{r}^{i+1}$ aus \mathbf{x}^{i+1}	Assemblieren
end	
$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{i+1}$	

Abbildung 4.6. Newton Iteration

Mit dem Relaxationsparameter λ in (4.47) bzw. in Abb. 4.6 kann die Stabilität des Verfahrens gesteuert werden. Typischerweise werden Werte für λ zwischen 0.5 und 1 gewählt. Anstatt den Wert für λ fest einzustellen, ist es auch möglich, mit Hilfe der sogenannten Liniensuche einen günstigen Wert zu finden. Liegt die Konvergenzrate (also $\|\mathbf{r}^{n+1}\|_2 / \|\mathbf{r}^n\|_2$)

des Iterationsschrittes über einem gewünschten Wert, so wird λ halbiert und das Residuum für $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda/2 \mathbf{x}'$ berechnet. Dann kann wieder entschieden werden, ob λ weiter verringert wird oder ob zum nächsten Iterationsschritt übergegangen werden kann. Im Gegensatz zur festen Einstellung des Relaxationsparameters kann dadurch flexibel auf Schwankungen im Konvergenzverhalten der Iteration reagiert werden. Da dies aber die Berechnung des Residuums (dies macht eine Assemblierung notwendig) erfordert, sollte die Anzahl der Suchschritte möglichst gering gehalten werden.

Bedingt durch die Linearisierung in (4.50) werden die Anteile Q^+ und Q^- des Quellterms und der Diffusionskoeffizient Γ_t aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschrittes bestimmt. Es handelt sich bei dieser Iteration daher um eine *Fixpunktiteration*.

Instationäre Lösung

Auch wenn man nur an der stationären Lösung eines Problems interessiert ist, so kann ein instationäres Verfahren dennoch der geeignetere oder auch einzige Weg sein, eine stationäre Lösung zu erhalten. Durch Hinzufügen des Zeitterms zur stationären Gleichung wird die Diagonaldominanz des Gleichungssystems gestärkt, vorausgesetzt der Zeitschritt wird klein genug gewählt. Mit

$$\underbrace{(1 + \Delta t[\mathbf{u} \cdot \nabla - \nabla(\nu_t \nabla) - Q^-]}_{A^n} \underbrace{\Phi^{n+1}}_{x^{n+1}} = \underbrace{\Delta t Q^+ + \Phi^{alt}}_{b^n} \quad (4.53)$$

erhält man die entsprechende Linearisierung. Φ^{alt} ist hierbei die Lösung zum Zeitpunkt t und Φ^{n+1} die $(n+1)$ -te Näherung der Lösung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$. Während eines Iterationsprozesses für den jeweiligen Zeitschritt werden, wie auch bei der stationären Lösung, Quellterme und Diffusionskoeffizienten aus der neuen Iterierten Φ^{n+1} bestimmt. Der vollständige Lösungsalgorithmus für das instationäre Lösungsverfahren ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

In diesem Algorithmus ist eine Zeitschrittsteuerung enthalten, die abhängig vom Konvergenzverhalten des nichtlinearen Lösungsverfahrens (hier: NEWTON) den Zeitschritt innerhalb eines vorgegebenen Intervalls erhöht bzw. erniedrigt.

Solange die instationäre Diskretisierung nur zur Stabilisierung des Verfahrens verwendet wird, um eine stationäre Lösung zu erhalten, ist es sinnvoll große Zeitschritte zu verwenden und für die Newton-Iteration nur einen oder maximal zwei Iterationen durchzuführen.

4.4.2 Linearisierung der Impulsgleichung

Betrachtet man die diskrete Form der Impulsgleichung (3.8), so erkennt man, daß allein für den konvektiven Term eine Linearisierung notwendig ist. Vereinfacht kann man daher die Impulsgleichung in der Form

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}(p^0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D}p = \mathbf{A}\mathbf{u}^0 + \mathbf{E} \quad (4.54)$$

schreiben. Die Terme \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} und \mathbf{E} sind hier knotenweise 2×2 Matrizen, deren Einträge von konstanten Größen aus Geometrie, Zeitschritt und Viskosität abhängen. Die

function TIME ($x, \Delta t_0, nts$)	
$\Delta t = \Delta t_0$	Anfangszeitritt
Bestimme $\Delta t_{min}, \Delta t_{max}$	Schranken für Zeitschritt
$x_0 = x$	Startwert
for $i = 0, nts$	Zeitschrittsschleife
NEWTON(x_i, x_{i+1})	Löse nichtlineares Gleichungssystem
if nicht konvergiert	
$\Delta t = \Delta t/2$	reduziere Zeitschritt
if $\Delta t < \Delta t_{min}$ Abbruch	
$i = i - 1$	Schleife zurücksetzen
endif	
if sehr gut konvergiert	
$\Delta t = MIN(2 * \Delta t, \Delta t_{max})$	erhöhe Zeitschritt
endif	
end	

Abbildung 4.7. Zeitschrittverfahren mit Zeitschrittsteuerung

Matrix \mathbf{B} hängt jedoch durch die Gleichung 3.26 zusätzlich noch vom Druck p und der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)$ ab. Eine Linearisierung des konvektiven Terms erhält man somit, indem zur Berechnung der Integrationspunktgeschwindigkeiten in (3.26) die Lösung des vorhergehenden Zeitschritts eingesetzt wird. Wie schon in Abschnitt 4.4.1 wird hier von einer Fixpunktiteration gesprochen.

4.4.3 Newton-Verfahren mit Numerischer Differentiation

In den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.2 wurde die normalerweise übliche Linearisierung der Navier-Stokes und der Turbulenzgleichungen beschrieben. Dazu wird die Jacobi-Matrix (4.43), die die Ableitung von \mathcal{A} nach dem Lösungsvektor \mathbf{x} darstellt, vereinfacht berechnet, indem nur Terme linear abhängig von \mathbf{x} vorkommen dürfen. Dies führt auf die Vereinfachung

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}^{n+1}) \approx \mathbf{A}^n \mathbf{x}^{n+1} \quad (4.55)$$

und die Jacobi-Matrix $\partial \mathcal{A} / \partial \mathbf{x}$ ist somit die Matrix \mathbf{A}^n . Ein besseres Konvergenzverhalten für das nichtlineare Gleichungssystem als mit einer Fixpunktiteration ist mit einem „echten“ Newton-Verfahren zu erwarten. Hierzu muß jedoch die Jacobi-Matrix unvereinfacht mit (4.43) berechnet werden.

Zuerst soll dies für die Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt werden. Der einzige nicht-lineare Term, der aus der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung und der Impulsgleichung entsteht, ist der Konvektionsterm. Der Konvektionsterm für die Impulsgleichung in x-Richtung kann mit

$$conv_x = \dot{m} u + \dot{m} PAC^0 \quad (4.56)$$

vereinfacht dargestellt werden. Hierbei wird der PAC Term entsprechend dem eingesetzten Aufwindverfahren aus der letzten Iteration bestimmt. $\dot{m} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}|_{ip}$ ist der konvektierende Massenstrom, der über (3.26) abhängig von den Geschwindigkeiten, dem Druck und dem Druckgradienten bestimmt wird. Beim instationären Verfahren ist \dot{m} noch zusätzlich von einem im vorhergehenden Zeitschritt berechneten Term abhängig. Die Berechnung des Massenstroms \dot{m} erfolgt über eine Gleichung der Form

$$\dot{m} = \mathbf{B}(\mathbf{u}, p) + \nabla p^0 + d^{alt} \quad , \quad (4.57)$$

wobei ∇p^0 und d^{alt} aus der vorhergehenden Iteration bzw. dem vorhergehenden Zeitschritt berechnet werden. Setzt man (4.57) in (4.56) ein, so führt dies auf

$$conv_x = \mathbf{B}(\mathbf{u}, p) u + (\nabla p^0 + d^{alt}) u + \mathbf{B}(\mathbf{u}, p) PAC^0 + (\nabla p^0 + d^{alt}) PAC^0 \quad . \quad (4.58)$$

Der Konvektionsterm $conv_x$ besteht somit aus nichtlinearen, linearen und von den gesuchten Größen $\mathbf{x} = (u, v, p)$ unabhängigen Termen. Der Anteil der Jacobi-Matrix bezüglich des Konvektionsterms in x-Richtung kann in der Form

$$\mathbf{J}_u = \frac{\partial(\dot{m}(\mathbf{u}, p) u + \dot{m}(\mathbf{u}, p) PAC^0)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.59)$$

geschrieben werden. Für die linearen und konstanten Terme stellt die Berechnung der Jacobi-Matrix keine Schwierigkeit dar, der nichtlineare Term $\mathbf{B}(\mathbf{u}, p) u$ aus (4.58) erfordert jedoch eine genauere Untersuchung. Mit Hilfe der Produktregel könnte man diesen nach den Komponenten von \mathbf{x} — in zwei Raumdimensionen sind das u , v und p — ableiten. Dies muß für die diskretisierte Form von $B(\mathbf{u}, p) a u$ durchgeführt werden und ergibt eine Vielzahl von Termen. Die Berechnung und Programmierung dieser Terme ist aufwendig und muß für Modifikationen in der Diskretisierung jeweils neu gemacht werden. Eine vor allem für komplizierte Funktionen von $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ attraktive Variante zur Berechnung der Jacobi-Matrix ist die *numerische Differentiation*. Die Ableitung einer Funktion nach einer Größe x erhält man hierbei, indem die Funktion sowohl für den alten Iterationswert als auch für einen an einem Knotenpunkt um Δx modifizierten Wert berechnet wird. Die Differenz dieser Berechnung wird wiederum durch Δx dividiert. Um alle Gradienten von $conv_x$ zu berechnen, muß an jedem Knotenpunkt des zu assemblierenden Elements jede Unbekannte variiert werden, um die Auswirkung dieser Variation auf die Fluß- und Volumenbilanzen für alle Unbekannten an allen Knoten des Elements bestimmen zu können. Als Beispiel soll im folgenden für den Term $\mathbf{B}(\mathbf{u}, p)u$ angenommen werden, daß der Druck am Knoten K_2 variiert wird und der Konvektionsterm am Knoten K_1 bestimmt werden soll. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponente u vom Druck erhält man über

$$\left. \frac{\partial B_u u}{\partial p} \right|_{K_1 K_2} = \frac{B_u(p^0 + \Delta p|_{K_2}) u - B_u^0 u}{\Delta p} \quad . \quad (4.60)$$

Ebenso wird für $\left. \frac{\partial B_v u}{\partial p} \right|_{K_1 K_2}$ und $\left. \frac{\partial B_p u}{\partial p} \right|_{K_1 K_2}$ verfahren. Um diese drei Ableitungen nach dem Druck zu bekommen, mußte also das Element zusätzlich einmal mit $p^0 + \Delta p|_{K_2}$ assembliert

werden (um B^0 zu erhalten wurde es ja bereits schon einmal assembliert). Insgesamt muß bei einem Viereckselement 12 mal (Knoten \times Unbekannte) zusätzlich assembliert werden. Um den Mehraufwand in Grenzen zu halten, sollten nur die Teile der Fluß- und Volumenterme neu berechnet werden, die von einer Variation an den Knotenpunkten auch betroffen sind. In 2D hat sich bei der in dieser Arbeit verwendeten Diskretisierung der Aufwand gegenüber der einfachen Assemblierung um etwa 10-15 % erhöht.

Zusätzlich zu (4.60) müssen Gleichungen für Δu und Δv bestimmt werden. Der nichtlineare Anteil des Konvektionsterms geht dann mit

$$\left. \frac{\partial B_u}{\partial u} \right|_{K_1 K_2} u'|_{K_2} + \left. \frac{\partial B_u}{\partial v} \right|_{K_1 K_2} v'|_{K_2} + \left. \frac{\partial B_u}{\partial p} \right|_{K_1 K_2} p'|_{K_2} \quad (4.61)$$

in die linke Seite des Gleichungssystems (4.45) $\mathbf{J}\mathbf{x}' = \mathbf{r}$ ein. Der Einfachheit halber werden die linearen und konstanten Terme von (4.58) auch mit der numerischen Differentiation berechnet.

Das über dieses Newton-Verfahren erhaltene lineare Gleichungssystem führt aufgrund einer stärkeren Kopplung der Unbekannten auf ein teilweise deutlich schwerer zu lösendes Gleichungssystem. Außerdem konvergiert das Newton-Verfahren nur dann, wenn eine ausreichend gute Startlösung zu Beginn der Iteration gefunden wurde. Deshalb wäre es wünschenswert, die Iteration mit einer Fixpunktiteration zu beginnen und erst dann, wenn die iterierte Lösung eine einigermaßen gute Annäherung an die Lösung erreicht hat, auf ein echtes Newton-Verfahren überzugehen. Eine Möglichkeit, einen linearen Übergang zwischen Fixpunktiteration und Newton-Verfahren zu erreichen, kann man durch folgende Überlegung erhalten. Der Unterschied zwischen Fixpunktiteration und Newton-Verfahren liegt allein in der Behandlung des Massenflusses \dot{m} . Beim Newton-Verfahren ist dieser von den gesuchten Größen u , v und p abhängig und bei der Fixpunktiteration wird er aus den alten Werten bestimmt. Es erscheint daher sinnvoll, den Massenstrom \dot{m} mit Hilfe eines Parameters λ in

$$\dot{m}_\lambda = \lambda \dot{m}(\mathbf{u}, p) + (1 - \lambda) \dot{m}^0 \quad (4.62)$$

aufzuspalten und in (4.59) einzusetzen. Der Konvektionsterm für die Geschwindigkeitskomponente u setzt sich somit zusammen aus

$$\begin{aligned} conv_u = & \frac{\dot{m}(u^0 + \lambda \Delta u)[(u^0 + \Delta u) + PAC] - \dot{m}^0[u^0 + PAC]}{\Delta u} u \\ & + \frac{\dot{m}(v^0 + \lambda \Delta v)[u^0 + PAC] - \dot{m}^0[u^0 + PAC]}{\Delta v} v \\ & + \frac{\dot{m}(p^0 + \lambda \Delta p)[u^0 + PAC] - \dot{m}^0[u^0 + PAC]}{\Delta p} p \\ & + (1 - \lambda) \dot{m}^0 PAC \quad . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Für $\lambda = 0$ führt dies mathematisch auf die Form der Fixpunktiteration. Numerisch bedeutet es selbstverständlich einen höheren Assemblierungsaufwand. Für $\lambda = 1$ wird dann der

Konvektionsterm voll nichtlinear behandelt. Weiterhin explizit werden jedoch der PAC-Term und der Term ∇p^0 aus (4.57) behandelt. Diese beiden Terme müssen vor der Assemblierung der Fluß- und Volumenterme bestimmt werden, da sie Informationen benötigen, die über das Element hinausgehen (siehe Abschnitte 3.3.1 und 3.4). Ein Vorschlag zur Berechnung von λ abhängig vom Residuum wird in Abschnitt 7.1.2.1 gegeben.

Die restlichen Terme in den Impulsgleichungen, also Druckgradient, Diffusionsterm und eventuell Zeitterm, sowie die durch die Kontinuitätsgleichung entstehenden Terme für die Massenerhaltung werden beim Assemblierungsprozess auch weiterhin konventionell berechnet.

In den bisherigen Ausführungen wurde noch nicht auf die bei der numerischen Differentiation benötigten differentiellen Terme Δx eingegangen. Die richtige Wahl des Größenordnung von Δx ist Voraussetzung für eine korrekte Repräsentation des gesuchten Terms $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$. Eine naheliegende Formulierung erhält man durch

$$\Delta x = \epsilon |x| + \epsilon_{min} . \quad (4.64)$$

Der erste Term auf der rechten Seite sorgt dafür, daß Δx um einige Größenordnungen kleiner als x ist, um im Einzugsbereich der Funktion $f(x)$ zu sein, in dem

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (4.65)$$

gilt. ϵ muß jedoch groß genug gewählt sein, um keine maschinenabhängigen Fehler zu erhalten. Als geeignet haben sich Werte für ϵ zwischen 10^{-7} und 10^{-4} gezeigt. Liegen die Werte von x jedoch um den Nullpunkt herum (z.B. Geschwindigkeit an der Wand), so wird ein ausreichend großer Wert ϵ_{min} in (4.64) notwendig um eine Division durch eine sehr kleine Zahl zu verhindern. Je größer die Variationen von x im gesamten Strömungsgebiet sind, um so schwieriger gestaltet sich daher auch eine sinnvolle Bestimmung von ϵ_{min} . Als gute Näherung hat sich

$$10^{-10} |x_{max}| < \epsilon_{min} < 10^{-8} |x_{max}| \quad (4.66)$$

erwiesen, wobei $|x_{max}|$ der größte Absolutwert von x im gesamten Rechengebiet sein soll.

Eine etwas genauere Berechnung des Terms $\partial B / \partial x$ könnte man erreichen, wenn der Gradient über die Formel

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (4.67)$$

bestimmt wird. Dadurch würde sich jedoch der Assemblierungsaufwand für den konvektiven Term verdoppeln, während die Auswirkungen auf das Lösungsverhalten des Gesamtsystems nur sehr gering sein dürften.

Nicht nur für die Navier-Stokes Gleichungen, sondern auch für die Transportgleichungen der Turbulenzgrößen ist eine weitergehende Berücksichtigung der Nichtlinearität der Gleichungssysteme wünschenswert, als dies bei der Fixpunktiteration der Fall ist. Im Gegensatz zu den Impulsgleichungen, bei denen der Konvektionsterm die Nichtlinearität enthält,

muß man bei den Turbulenzgleichungen die Quellterme und Diffusionsterme berücksichtigen (siehe (4.48)). Wie in Abschnitt 4.4.1 erwähnt wurde, sieht die übliche und stabile Form der Linearisierung entsprechend (4.50) aus. Ähnlich wie bei den Navier-Stokes Gleichungen soll auch bei den Turbulenzgleichungen mit Hilfe eines Parameters λ eine Gewichtung zwischen Fixpunktiteration und voller nichtlineare Behandlung der Diffusions- und Quellterme ermöglicht werden. Dazu werden diese Terme in einer für alle Zweigleichungs-Turbulenzmodelle gültigen Form geschrieben. Den Diffusionsterm kann man mit

$$\text{diff}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{\text{eff}}(\Phi_1, \Phi_2) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \quad (4.68)$$

und die Quellterme mit

$$\text{quell}_i = Q_i^+(\Phi_1, \Phi_2) - Q_i^-(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_i \quad (4.69)$$

schreiben. Die Diffusionskoeffizienten Γ_i und die Quellterme Q_i^+ und Q_i^- werden im linearisierten Fall jeweils aus der alten Lösung berechnet; es gibt daher keine Kopplung zwischen den beiden Gleichungen. Berechnet man die Jacobi-Matrix mit Hilfe der numerischen Differentiation, so ergibt sich eine sehr starke Kopplung der beiden Transportgleichungen. Die Möglichkeit, einen linearen Übergang zwischen Fixpunktiteration und Newton-Verfahren ähnlich (4.63) im Verlauf der Iteration zu erhalten, ist daher notwendig, um auch bei relativ guten Anfangsbedingungen ein Divergieren der Iteration zu vermeiden.

Gerade für die Turbulenztransportgleichungen erscheint die numerische Differentiation besonders attraktiv, um einen Vergleich von Newton-Verfahren und Fixpunktiteration zu erhalten. Die oftmals sehr komplizierte Berechnung der Diffusionskoeffizienten und Quellterme würde eine analytische Darstellung der Koeffizienten der Jacobi-Matrix sehr aufwendig und fehleranfällig machen. Eine einmal programmierte numerische Differentiationsfunktion kann für verschiedene Turbulenzmodelle ohne Änderungen eingesetzt werden. Die nichtlineare Kopplung beliebiger Terme kann dabei sehr einfach ein- und ausgeschaltet werden.

5 Gittergenerierung und Adaptivität

Voraussetzung für jede numerische Simulation in der Strömungsmechanik ist ein das gesamte Strömungsgebiet bedeckendes Gitter. Die Wahl eines geeigneten Gitters ist mindestens ebenso wichtig für eine korrekte Repräsentation der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen wie die Wahl der Diskretisierungs- und Lösungsmethoden. Robuste Lösungsverfahren und genaue Diskretisierungsmethoden können sicherlich in vielen Fällen auch bei weniger geschickt gewählten Gittern ausreichend genaue Ergebnisse liefern, doch auch hier sind natürlich Grenzen gesetzt. Wenn man bedenkt, daß vor allem bei komplexen technischen Anwendungen die Gittererstellung oftmals weitaus mehr Zeit kostet als die eigentliche Simulation, so kommt der Gittergenerierung eine bedeutende Rolle beim gesamten Simulationsprozess zu. In diesem Kapitel sollen verschiedene Methoden gezeigt werden, wie die für geometrische Mehrgitterverfahren benötigten hierarchischen Gitter eingesetzt werden können. Außerdem soll auf die im Programmpaket *UG* mögliche adaptive Gitterverfeinerung eingegangen werden und verschiedene Steuerungsmechanismen dazu aufgezeigt werden.

5.1 Hierarchische Mehrgitter

Grundvoraussetzung zur Generierung eines Gitters mit *UG* ist eine vollständige Gebietsbeschreibung. D.h. der gesamte Gebietsrand (und eventuell auch innere Ränder für spezielle Teilgebiete) müssen festgelegt werden. Dies geschieht entweder über Parameterfunktionen (standard-domain) oder über Polygonzüge (lgm-domain). In der vorliegenden Arbeit wurden jedoch ausschließlich Parameterfunktionen eingesetzt. Im 2D-Fall wird der Rand durch mehrere aneinanderliegende Teilstrecken beschrieben. Jede dieser Teilstrecken muß über eine stetige Funktion in Abhängigkeit eines Parameters λ beschrieben werden können. Über diese Funktionen können dann die kartesischen Koordinaten der einzelnen Randgitterpunkte bestimmt werden. Jeder dieser Teilstrecken wird eine Randbedingung zugeordnet, die zusätzlich von λ abhängig sein kann.

Ist die Gebietsbeschreibung vollständig, werden anschließend die Randknoten und inneren Knoten bestimmt und danach das Rechengebiet mit Drei- oder Viereckselementen bedeckt, die über die Knoten definiert werden. Somit ist das sogenannte Grobgitter fertiggestellt. Das Grobgitter dient in vielen Fällen jedoch nur dazu das gesamte Rechengebiet zu triangulieren, um davon ausgehend eine Hierarchie von Gittern aufzubauen. Ob dieses Grobgitter dann überhaupt in den Lösungsprozess eingebunden wird, oder ob das

gröbste für den Mehrgitteralgorithmus eingesetzte Gitter schon deutlich feiner ist, kommt dann auf den Einzelfall an. Wie das Grobgitter erstellt wird, hängt sicherlich von der Komplexität des Gebiets ab. Entweder setzt man die Knoten oder Elemente „von Hand“ oder benutzt den in *UG* implementierten Gittergenerator oder einen kommerziellen Gittergenerator mit geeigneter Schnittstelle. Egal welche Variante gewählt wird, es muß auf jeden Fall gewährleistet werden, daß das entstehende Grobgitter grob genug ist, um als größtes Gitter in einer sinnvollerweise mindestens dreistufigen Mehrgitterhierarchie eingesetzt werden zu können. Gegenüber Eingitterverfahren hat man somit den Vorteil, daß bei der Gittergenerierung mit weitaus weniger Gitterknoten gearbeitet wird. Somit können Gitter für komplexe Rechengebiete, die auf Groß- oder Parallelrechner gerechnet werden, auch auf üblichen Tischarbeitsplätzen erstellt werden. Die Gitterverfeinerung wird dann erst während des Rechenlaufs durchgeführt.

5.2 Definitionen

Sowohl in den folgenden Abschnitten als auch im Kapitel 6 werden Bezeichnungen für Elemente und Gitter verwendet, für die es keine allgemeingültigen Begriffe gibt. Diese sollen hier kurz erwähnt werden. Das *Grobgitter* ist auf der *untersten Gitterebene* und wird mit Gitter G_0 bezeichnet. Wird G_0 verfeinert so erhält man das Gitter G_1 und bei weiterer sukzessiver Verfeinerung entsprechend G_2 , G_3 usw. bis das feinste Rechengitter erreicht wird. Werden die Gitter adaptiv verfeinert, so entstehen Gitter, die nicht das gesamte Rechengebiet bedecken. Als *Oberflächengitter* wird dann ein Gitter bezeichnet, das aus dem obersten Gitter und den Elementen aus den unteren Gittern besteht, die nicht mehr verfeinert wurden. Das Oberflächengitter kann somit aus Elementen mehrerer Gitterebenen bestehen und überspannt das gesamte Rechengebiet.

Wird ein Viereckselement *regulär* verfeinert, so entstehen auf der feineren Gitterebene vier Viereckselemente, die als *Sohnelemente* bezeichnet werden und deren gemeinsamer Knotenpunkt der Elementschwerpunkt des *Vaterelements* ist. Analog dazu spricht man auch bei Knotenpunkten, die die gleichen Koordinaten auf zwei benachbarten Gitterebenen haben, von *Vater- und Sohnknotenpunkten*. Eine *irreguläre* Verfeinerung kann zu verschiedenen Kombinationen von Vier- und Dreieckselementen als Sohnelemente führen. Werden alle Elemente eines Gitters regulär verfeinert, wird von *uniformer* Verfeinerung gesprochen, ansonsten von einer *adaptiven* oder *lokalen* Verfeinerung.

Bei einer regulären Verfeinerung eines Viereckselementes entstehen neue Knoten auf dem neuen Gitter, die zu den Sohnelementen des Viereckselementes gehören und aufgrund ihrer Lage bezüglich des Vierecks- bzw. Vatelements als *Eckknoten*, *Mittelpunktsknoten* und *Seitenmittenknoten* bezeichnet werden.

5.3 Lokaler Gitterverfeinerungsalgorithmus

Einen gravierenden Nachteil hat eine Gitterverfeinerung, die auf einer hierarchischen Struktur aufbaut. Wenn es sich nicht gerade um ein Gitter mit Elementen gleicher Größe

handelt — dies ist nur bei einigen akademischen Testfällen der Fall — so muß bei der Verfeinerung dafür gesorgt werden, daß zwei benachbarte Elemente keine allzu unterschiedliche Elementgröße erhalten. Wird aber jedes Grobgitterelement einfach uniform verfeinert, d.h. alle entstehenden Sohnelemente haben die gleiche Größe, so können je nach Anordnung der Elemente auf dem Grobgitter, nach einigen Verfeinerungen große Sprünge in der Elementgröße entstehen, wie in Abbildung 5.1(b) zu erkennen ist. Dies kann wiederum sehr ungünstige Auswirkungen auf die Genauigkeit und die Konvergenz der Lösung haben. Eine Möglichkeit die Größe der Sprünge zu verkleinern besteht darin, über das gesamte Gitter einen Glättungsalgorithmus laufen zu lassen, der für eine gleichmäßigere Verteilung der Elementgröße sorgt. Man muß hierzu jedoch eine geeignete Einstellung finden, um einen Mittelweg zwischen zu starker und ungenügender Glättung zu finden. Solche Gitterglätter sind auch eher für Dreiecke bzw. Tetraeder geeignet und weniger für Vierecke bzw. Hexaeder.

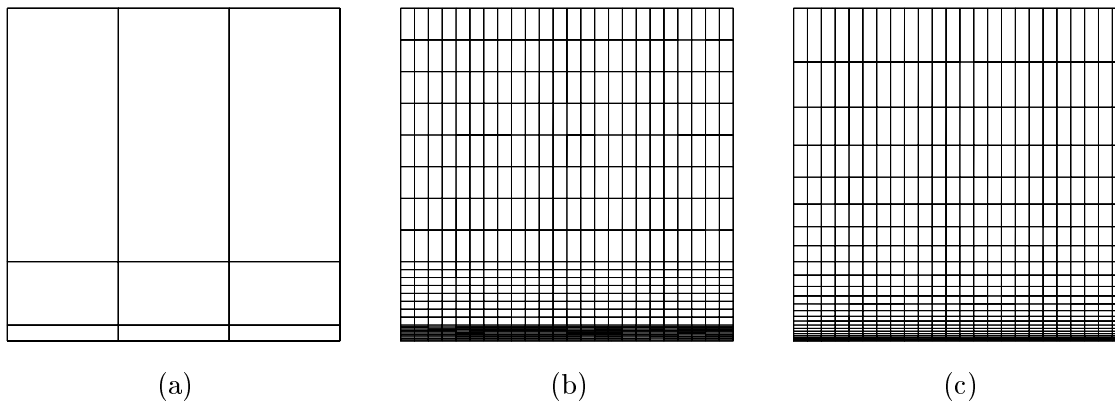


Abbildung 5.1. (a) Grobgitter, (b) reguläre Verfeinerung, (c) gerichtete Verfeinerung

Bei der Simulation turbulenter Strömungen werden in den meisten Fällen sehr langgestreckte Elemente benötigt, da diese Strömungen stark konvektionsdominant sind. Das Verhältnis von Grenzschichtdicke zur Gesamtlänge des Rechengebiets ist oftmals sehr klein (z.B. Tragflügelumströmung bei hohen Reynoldszahlen). Die Gradienten aller relevanten Strömungsgrößen sind weitaus stärker senkrecht zur Hauptströmungsrichtung ausgerichtet als in Strömungsrichtung, entsprechend müssen daher die Elemente gerichtet sein. Setzt man zur Berechnung der turbulenten Grenzschicht die sogenannten Low-Reynolds Turbulenzmodelle ein, dann ist eine extrem feine Auflösung senkrecht zur Wand erforderlich. Bei vielen Gittergeneratoren wird das Rechengebiet in sogenannte Patches aufgeteilt, in denen eine mehr oder weniger flexible Elementverteilung in Patchkoordinaten durchgeführt wird. Bei Grenzschichtströmungen wird dann eine sich zur Wand hin stark verdichtende Elementverteilung eingesetzt. Die Länge der Elementseiten senkrecht zur Wand wird dabei von Element zu Element zur Wand hin kontinuierlich verringert. Um dies auch für die in *UG* benutzte Gittergenerierung zu ermöglichen, wurde ein spezieller Verfeinerungsalgorithmus entwickelt, der zusätzlich auch für adaptiv verfeinerte Gitter verwendet werden kann.

Aufgabe der hier vorgestellten Gitterverfeinerungsmethode ist es, ein grobes Gitter derart

zu verfeinern, daß eine auf dem groben Gitter bestehende „verdichtete“ Elementverteilung in gleicher Weise auf das feine Gitter übertragen wird. Hat man zum Beispiel eine Grenzschicht auf dem groben Gitter mit zwei Elementen senkrecht zur Wand aufgelöst und ist das wandnähere Element $1/10$ so dick¹ wie das wandfernere Element, so möchte man auch nach mehrmaliger Verfeinerung dieser beiden Elemente das selbe Verhältnis der Elementdicken zwischen dem wandnächsten und wandfernsten Element haben. Das Dickenverhältnis zweier benachbarter Elemente innerhalb der Grenzschicht soll dabei möglichst konstant bleiben. Abb. 5.1(b) zeigt ein regulär verfeinertes Grenzschichtgitter und Abb. 5.1(c) ein in einer Richtung verdichtetes Gitter.

Will man eine Grenzschicht mit einer vorher festgelegten Anzahl von Gitterpunkten auflösen, so kann dazu eine geeignete Funktion eingesetzt werden (z.B. $f(n) = (n/N)^3 \cdot \delta$). Sollen nachträglich Knoten hinzugefügt werden, so muß diese Funktion und ihr Gültigkeitsbereich im Rechenggebiet bekannt sein. Da aber bei der Gitterverfeinerung möglichst nur lokale Informationen benötigt werden sollen, wird diese Methode hier nicht in Betracht gezogen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, in einem bestimmten Bereich (hier Grenzschicht) ein konstantes Elementdickenverhältnis zweier benachbarter Elemente vorzugeben. Löst man z.B. eine Grenzschicht der Dicke 1 mit 10 Elementen auf und legt ein Verhältnis von 2:1 fest, so ergibt sich ein Verhältnis von 512:1 für das äußerste und das innerste Element dieser Schicht und das innerste Element hat eine Dicke von 10^{-4} . Da aber das Verhältnis der Elementdicken in der gesamten Schicht gleich ist, kann diese Information lokal an jedem Element erhalten werden. Daraus wird dann entsprechend für die feinere Gitterebene ein neues Elementdickenverhältnis bestimmt, welches wiederum konstant im gesamten Gebiet ist. Es muß also eine geeignete Funktion gefunden werden, die aus dem Elementdickenverhältnis auf dem groben Gitter das Elementdickenverhältnis auf dem feinen Gitter bestimmt. Dazu wird die folgende Konstruktion durchgeführt.

In Abb. 5.2 wird zuerst der eindimensionale Fall betrachtet. Man bestimmt das Größenverhältnis zweier benachbarter Elemente auf dem Grobgitter mit $T = L_2/L_1$ und fordert auf dem feinen Gitter (lokal) ein konstantes Größenverhältnis

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (5.1)$$

und

$$T = \frac{L_2}{L_1} = \frac{N_3}{N_1} \quad (5.2)$$

so erhält man für N_1 und N_2 die Beziehung

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{T} \quad (5.3)$$

und daraus die Längen

$$N_1 = \frac{L_1}{1 + \sqrt{L_2/L_1}} \quad \text{und} \quad N_2 = L_1 - N_1 \quad (5.4)$$

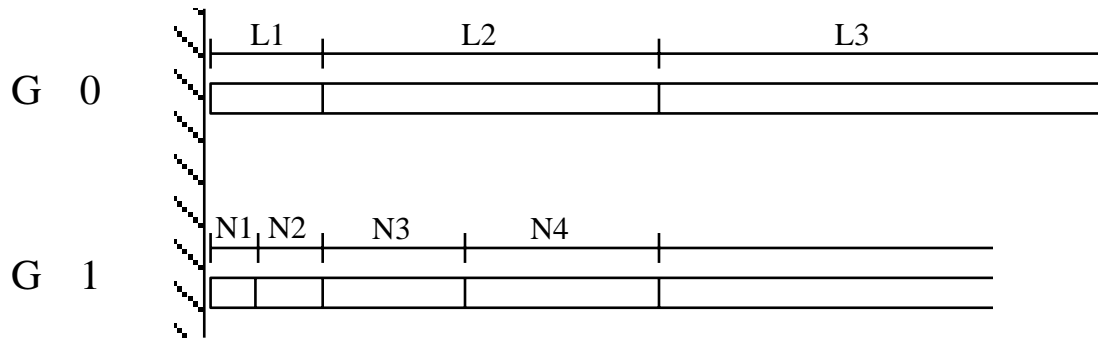


Abbildung 5.2. 1-D Skizze für gerichtete Gitterverfeinerung

Gleichung (5.4) ist in dieser Form nur gültig, wenn das zu verfeinernde Element in Abb. 5.2 am Gebietsrand liegt. Ansonsten hat es zwei Nachbarelemente. In diesem Fall berechnet man bezüglich beider Elementnachbarn die Verhältnisse $T^{(l)}$ und $T^{(r)}$ und berechnet N_1 und N_2 aus dem Mittelwert der sich ergebenden Längen $N_1^{(l)}$, $N_2^{(l)}$, $N_1^{(r)}$ und $N_2^{(r)}$. Liegen die Elemente in einem Gebiet mit durchgehend gleichem Längenverhältnis so folgt $T^{(l)} = T^{(r)}$.

Im zweidimensionalen Fall muß man bei der Verfeinerung zwischen drei Knotentypen unterscheiden. Es gibt die Eckknoten, den Mittelpunktsknoten und die Seitenmittenknoten. Die Eckknoten werden nicht verschoben, da sie Vaterknoten auf dem größeren Gitter besitzen. Die für den 1-D Fall entwickelten Verschiebungsregeln (5.4) werden auf den Mittelpunktsknoten angewandt. Hierbei ist es sinnvoll die Verschiebungen des Knotens in Richtung der lokalen Koordinaten² zu bestimmen. Bei einem strukturierten Vierecksgitter bestimmen jeweils zwei Elemente die Verschiebung in Richtung einer lokalen Koordinate. In Abb. 5.3 bestimmt somit die Größe der Elemente E_0 und E_2 die Verschiebung des Mittelpunktsknoten M_1 des Elements E_1 in ξ -Richtung und die Größe der Elemente E_3 und E_4 die Verschiebung in η -Richtung. Liegt das Element des zu verschiebenden Knotens auf dem Rand, so bestimmt nur ein Element die Verschiebung senkrecht zum Rand. Die Verschiebung der Seitenmittenknoten wird über die neue Lage der angrenzenden Mittelpunktsknoten bestimmt (siehe Abb. 5.3). Dazu wird ein Mittelwert aus den lokalen Koordinaten der benachbarten Mittelpunktsknoten in Elementseitenrichtung bestimmt.

Die Abfolge dieser Gitterverfeinerung ist in Abb. 5.4 dargestellt.

5.3.1 Zusätzliche „orthogonale“ Randverfeinerung

In diesem Abschnitt soll auf eine zusätzliche Methode eingegangen werden, die es erlaubt, in einem bestimmten Bereich in Randnähe die Elemente derart zu verfeinern, daß entlang des Randes mehrere „Schichten“ von Elementen entstehen, die einen konstanten Randabstand haben. In den in Kapitel 6 beschriebenen Konfigurationen wurden mit

¹als „Dicke“ wird hier der Abstand der beiden Elementseiten parallel zur Wand bezeichnet

²In UG befindet sich der Ursprung des lokalen Koordinatensystems eines Elementes in der „linken unteren“ Ecke und die Koordinaten ξ und η laufen jeweils von 0 bis 1.

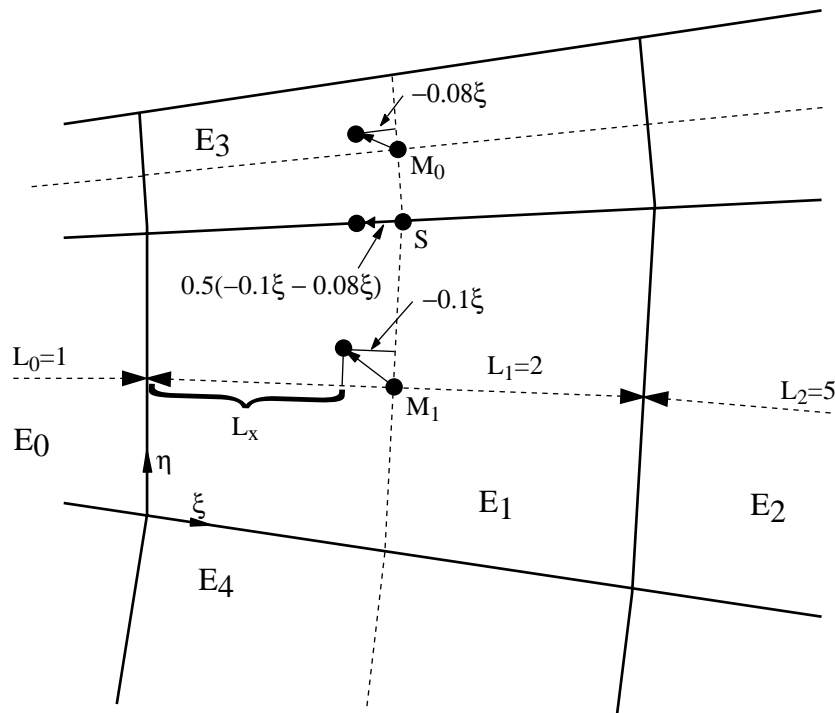


Abbildung 5.3. Berechnung der neuen Position für Mittelpunktsknoten und Seitenmittenknoten für das Viereckselement E_1 : Die mittleren Längen der Elemente E_0 , E_1 und E_2 in ξ -Richtung sind L_0 , L_1 und L_2 . Gleichung (5.4) angewandt auf $E_1 - E_0$ und $E_2 - E_1$ ergibt den Mittelwert $L_x = 0.8$; dies entspricht einer Änderung in lokalen Koordinaten von $\xi = -0.1$. Ebenso wird in η -Richtung verfahren und aus den neuen lokalen Koordinaten für den Mittelpunktsknoten M_1 werden die globalen Koordinaten bestimmt. Das Gleiche führt man für Element E_3 durch und die Verschiebung des Seitenmittenknotens S wird aus dem Mittelwert der ξ -Verschiebung der Mittelpunktsknoten M_1 und M_0 $\Delta\xi = 0.5(-0.1\xi - 0.08\xi)$ berechnet. Danach kann die neue globale Position von S berechnet werden.

dieser Methode alle Elemente, die Sohnelemente von Wandelementen sind, „orthogonal“ und gerichtet geglättet. Eine anschauliche Darstellung ist in Abb. 5.5 gegeben. In (a) ist das Gitter dargestellt wie es nach einer gerichteten Gitterglättung, entsprechend dem oben beschriebenen Algorithmus, aussieht. Die dicken Linien zeigen das Grobgitter, das möglichst schon so gestaltet wurde, daß die vom Rand weglaufenden Gitterlinien orthogonal auf der Randkurve stehen. Zuerst wird der Randknoten R so verschoben, daß die Verbindung RM senkrecht zum Rand steht und auf der Verlängerung dieser Linie steht der Seitenmittenknoten S . Der Abstand SR wird aus dem Mittelwert der Randabstände der Knoten T_2R_2 und T_1R_1 bestimmt und S entsprechend verschoben. Anschließend wird der Mittelpunktsknoten so verschoben, daß das vorher bestimmte Längenverhältnis L_2/L_1 weiterhin gültig ist (d.h. $L_2/L_1 = L_2^*/L_1^*$). Zuletzt werden die Seitenmittenknoten so verschoben, daß für diese der Randabstand gleich dem Mittelwert des Randabstandes der benachbarten Mittelpunktsknoten ist. Bei mehr als einfacher Gitterverfeinerung entstehen Elemente, die Sohnelemente eines Grobgitterrandelements sind und nicht auf dem Rand

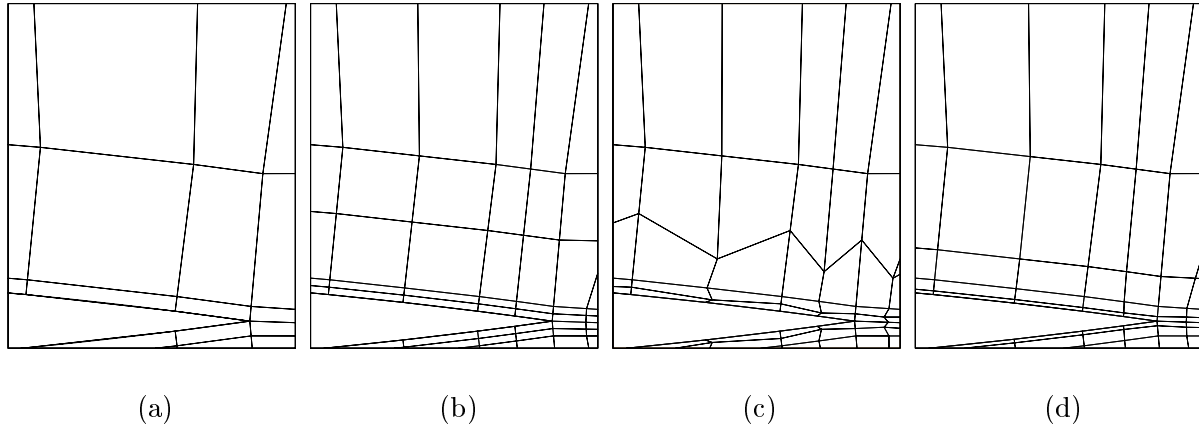


Abbildung 5.4. (a) Grobgitter; (b) das Grobgitter wird uniform verfeinert; (c) alle neu entstanden Mittelpunktsknoten werden entsprechend der Größe der Nachbarelemente verschoben; (d) alle Seitenmittenknoten werden entsprechend der Position der benachbarten Mittelpunktsknoten verschoben

liegen. Die Verschiebung eines solchen Elements ist wiederum in Abb. 5.5(b) dargestellt. Der Abstand S_5R wird aus dem Mittelwert der Abstände T_3R_1 und T_4R_2 berechnet und der Abstand M_1R aus dem Mittelwert der Abstände S_3R_1 und S_4R_2 . Wird das Grobgitter mehrmals verfeinert, so erhält man in einer Schicht, die so breit wie die Randelemente des Grobgitters ist, mehrere Knoten bzw. Elementreihen, auf denen (mindestens lokal) der gleiche Randabstand vorliegt (siehe Abb. 5.6).

Diese „orthogonalen“ Gitterverfeinerung am Rand benötigt nur Vater-Sohn Elementbeziehungen und keine Kenntnis der Elementnachbarschaftsbeziehungen. Am Beispiel eines Gitters für eine Tragflügelumströmung kann gezeigt werden, daß man mit diesem sehr allgemeinen Ansatz zur Gitterverfeinerung, der nur aus lokalen Informationen besteht, ein Gitter generieren kann, das einem sogenannten C-Gitter [136] sehr nahe kommt (siehe Abbildung 6.7 oder 6.9).

5.3.2 Verfeinerung adaptiver Gitter

Das in Abschnitt 5.3 beschriebene Verfahren ist darauf ausgerichtet, eine geeignete Verfeinerung für strukturierte Vierecksgitter (3-D: Hexaedergitter) ähnlich Abbildung 5.3 zu ermöglichen. Um dieses Verfahren jedoch auch für adaptiv verfeinerte Gitter einsetzen zu können, müssen noch Regeln für die Übergänge zwischen Dreiecken und Vierecken erstellt werden. Da bei der Verfeinerung der Dreiecke keine Mittelpunktsknoten entstehen, beschränkt sich die Verfeinerung auf die Seitenmittenknoten.

Die Verschiebung eines Seitenmittenknotens wird bei Vierecken aus dem Mittelwert der lokalen Koordinaten des verschobenen Mittelpunktsknoten der angrenzenden Elemente bestimmt. Dies ist bei Dreiecken aber nicht möglich. Daher wird folgende Hilfskonstruktion durchgeführt (siehe Abb. 5.7). Man berechnet eine Verschiebung des fiktiven Elementmit-

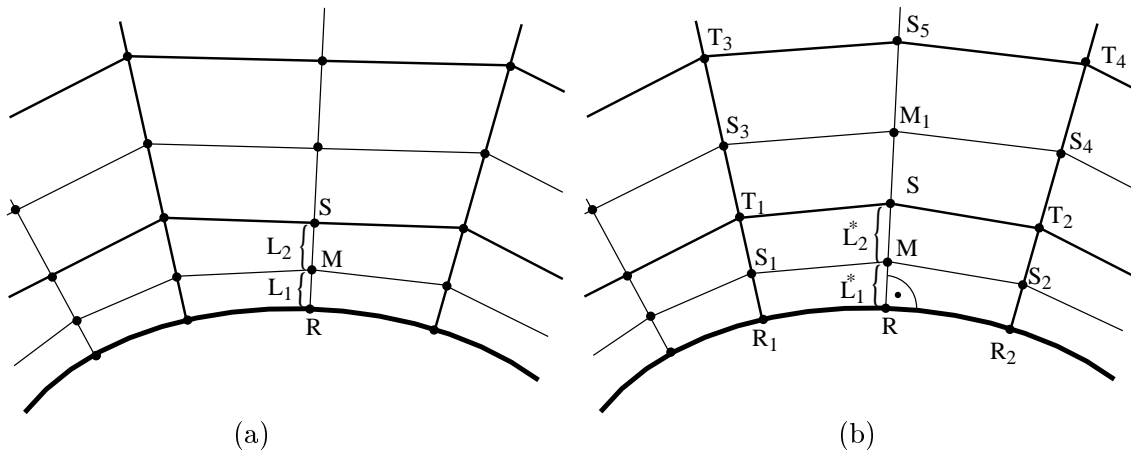


Abbildung 5.5. Gerichtete „orthogonale“ Gitterglättung an gekrümmten Oberflächen: (a) Gitter nach gerichteter Gitterglättung; (b) Die Knoten M, R, und S werden so ausgerichtet, daß sie auf einer Linie senkrecht zur Wand stehen. Zusätzlich muß gelten $\overline{SR} = 0.5(\overline{T_1R_1} + \overline{T_2R_2})$ und $L_2^*/L_1^* = L_2/L_1$. Für ein Element, das nicht direkt an der Wand liegt gilt $\overline{S_5R} = 0.5(\overline{T_3R_1} + \overline{T_4R_2})$ und $\overline{M_1R} = 0.5(\overline{S_3R_1} + \overline{S_4R_2})$.

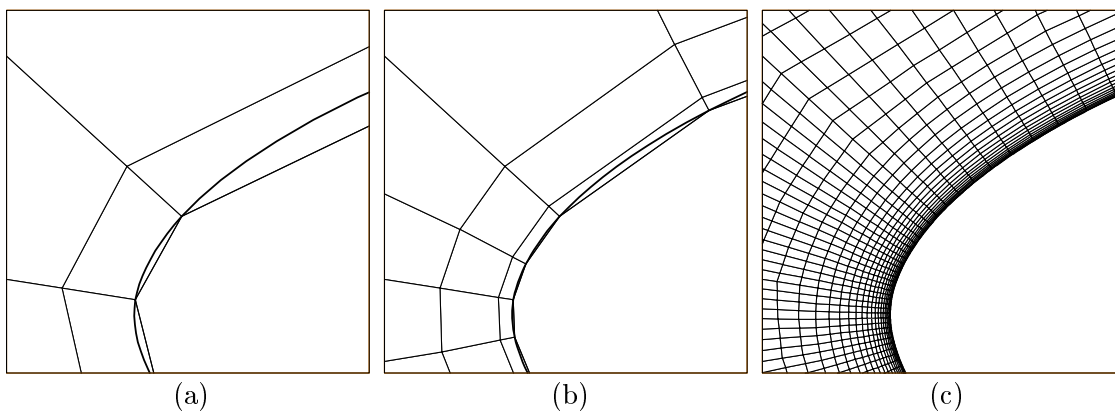


Abbildung 5.6. Gerichtete „orthogonale“ Gitterverfeinerung im Bereich einer Tragflügelspitze: (a) Grobgitter G0; (b) Gitter G1; (c) Gitter G4

telpunktes M_1 , indem man (5.4) auf das System Elementmittelpunkt, Seitenmittelpunkt und Nachbarelementmittelpunkt anwendet. Die daraus berechnete lokale Verschiebung (Werte liegen zwischen -0.5 und 0.5) des Punktes M_1 wird auf den Seitenmittelpunkt S in ξ -Richtung angewandt und die Verschiebung aus dem Mittelwert der Anteile der Elemente E_1 und E_3 bestimmt. In Abbildung 5.8 ist zu erkennen, daß auch für ein reines Dreiecksgitter die Verfeinerungsrichtung des Grobgitters auf den feinen Gittern beibehalten wird.

Ein konstantes Elementdickenverhältnis wie beim Vierecksgitter (siehe Abb. 5.1) kann dadurch jedoch nicht erreicht werden.

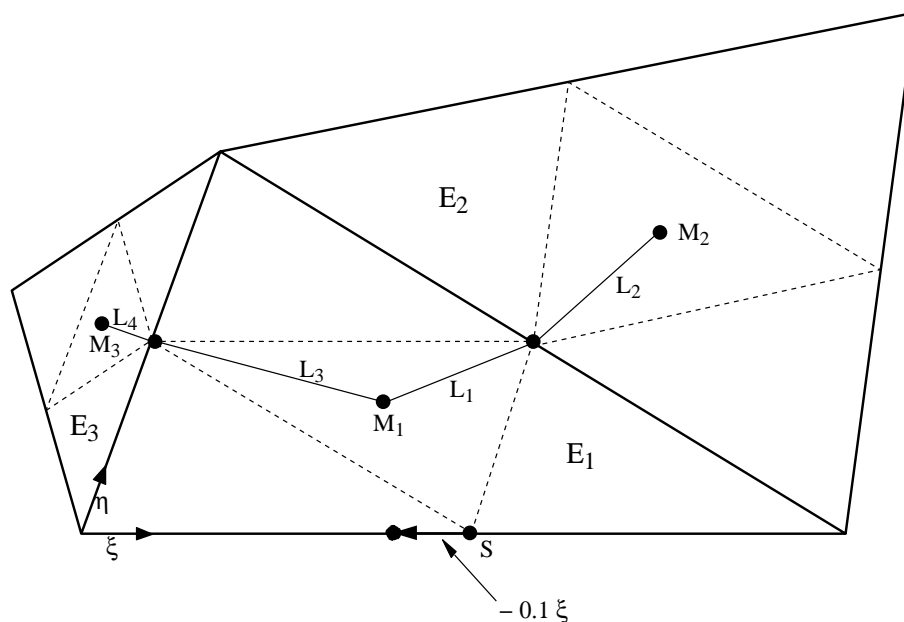


Abbildung 5.7. Verschiebung der Seitenmittelpunkte bei einem Dreieck: Es müssen die Mittelpunkte M_1 , M_2 und M_3 und die Abstände L_1 , L_2 , L_3 und L_4 bestimmt werden. Aus (5.4) ergibt sich in diesem Beispiel eine Verschiebung des Punktes S in ξ -Richtung mit $\xi = 0.5[1/(1 + \sqrt{L_2/L_1}) + 1/(1 + \sqrt{L_3/L_4})] = 0.4$. Der Punkt S wird also aufgrund von Element E_1 und seiner Nachbarelemente E_2 und E_3 um -0.1ξ verschoben.

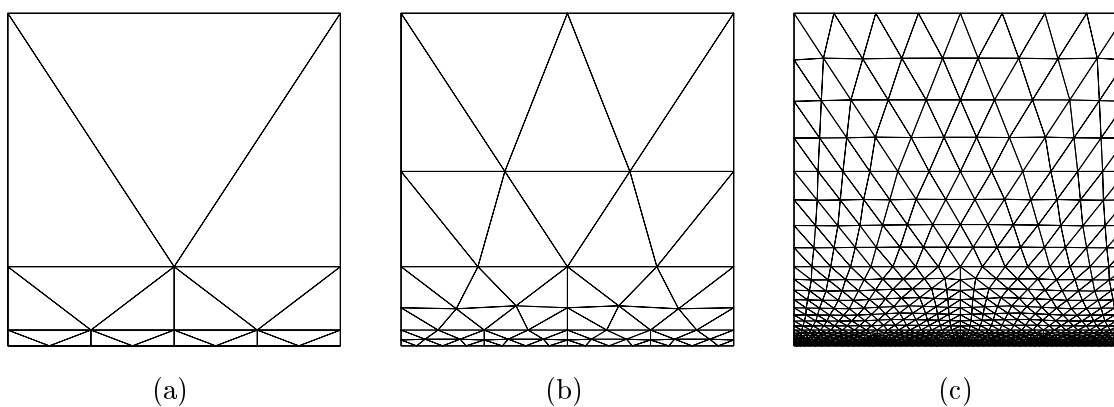


Abbildung 5.8. Gerichtete Gitterverfeinerung für Dreiecke: (a) Grobgitter G_0 ; (b) Gitter G_1 ; (c) Gitter G_3

Bei einem adaptiv verfeinerten Gitter entstehen zusätzlich zu den regulär verfeinerten Vier- und Dreieckselementen verschiedene Typen von Abschlußelementen. Für die bei der

Verfeinerung der Abschlußelemente eventuell entstehenden Mittelpunktsknoten und Seitenmittenknoten genügen die für Vier- und Dreiecke beschriebenen Verschiebungsregeln. Ein Beispiel eines adaptiv verfeinerten Grenzschichtgitters ist in Abb. 5.9 zu sehen.

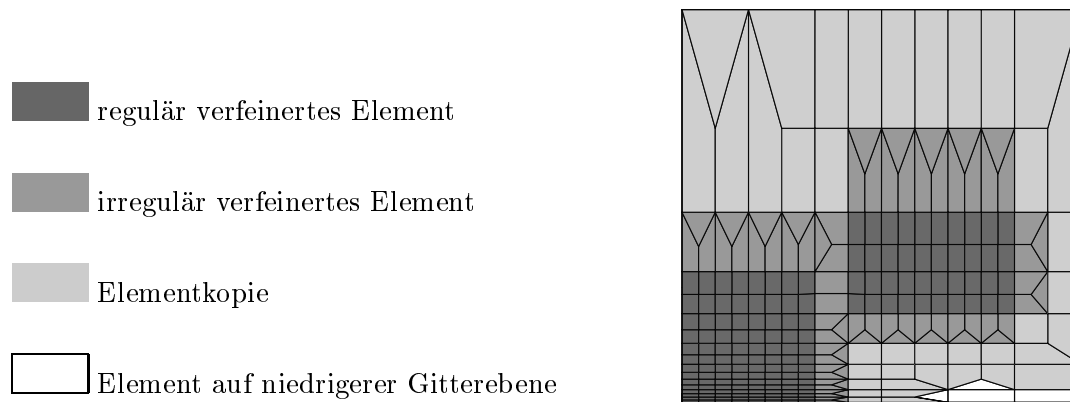


Abbildung 5.9. Adaptiv verfeinertes Gitter mit gerichteter Gitterglättung. Zusätzlich sind die bei lokaler Verfeinerung auftretenden Elementklassen dargestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der hier beschriebene Gitterglättungsalgorithmus nur für 2D-Gitter eingesetzt. Eine Erweiterung auf reine 3D-Hexaedergitter ist mit nicht allzu großem Aufwand möglich. Sollen jedoch hybride³ 3D-Gitter geglättet werden, so müssen eine Reihe von Spezialfällen von Elementnachbarschaftsbeziehungen betrachtet werden, um auch glatte Übergänge zwischen Hexaedern, Tetraedern, Prismen und Pyramiden zu ermöglichen.

5.4 Steuerung der Adaptivität

Im vorhergehenden Abschnitt wurde auch auf eine lokale oder adaptive Gitterverfeinerung eingegangen. Hier sollen nun verschiedene Möglichkeiten gezeigt werden, wie diese Verfeinerung gesteuert werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein einfacher hierarchischer Indikator zur Markierung der zu verfeinernden Elemente eingesetzt, der eine Fehlerschätzung über die Approximation des Gradienten auf zwei „übereinander“ liegenden Gitterebenen liefert. Hierzu werden die Gradienten von einzelnen oder mehreren Strömungsgrößen auf dem Mittelpunkt eines Oberflächenelementes⁴ und auf dem Mittelpunkt seines Vater-elementes berechnet. Der Approximationsfehler e_Φ auf einem Element bezüglich der Größe Φ wird dann mit

$$e_\Phi = \|(\nabla\Phi)_l - (\nabla\Phi)_{l-1}\| A \quad (5.5)$$

³Gitter mit verschiedenen Elementtypen (z.B. Dreiecke und Vierecke)

⁴Element des Oberflächengitters (siehe Abschnitt 5.2)

bestimmt. Dabei bezeichnet l die Gitterebene und A die Elementfläche des Oberflächenelements. Überschreitet der Fehler ϵ_Φ eine vorher festgelegte obere Schranke, wird das Element zum Verfeinern markiert. Ebenso kann über eine untere Schranke eine Vergrößerung markiert werden. Eine Vergrößerung ist vor allem dann sinnvoll, wenn man wandernde Fronten simuliert und Gebiete starker Verfeinerung nach dem Durchgang einer Front wieder vereinfachen möchte. Da bei den hier untersuchten Testfällen nur die stationäre Lösung von Interesse ist, wird auf eine Vergrößerung nicht weiter eingegangen.

Welchen Wert die obere Schranke haben soll, um eine geforderte Genauigkeit zu erhalten, muß für jeden Testfall neu untersucht werden. Als erste Näherung kann man einen Wert annehmen, der ein bis zwei Größenordnungen unter dem Maximalwert von Φ liegt. Auch für die Wahl der Strömungsgrößen, die die Verfeinerung kontrollieren sollen, kann man keine allgemeingültigen Richtlinien anwenden. Betrachtet man laminare inkompressible Strömungen, so wird man zuerst die Strömungsgeschwindigkeit als Indikator heranziehen. Ob man hierbei den Absolutwert der Geschwindigkeit oder die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten einsetzt, kann im Einzelfall entschieden werden. Als nachteilig hat sich jedoch gezeigt, daß vor allem Gebiete mit Rezirkulationszonen oder Sekundärströmungen von diesem Indikator kaum erfaßt werden, da hier meist nur sehr geringe Strömungsgeschwindigkeiten vorliegen und somit der Approximationsfehler im Vergleich zu den Gebieten mit hohen Geschwindigkeiten eher klein ist. Um eine Verfeinerung in Bereichen von Sekundärströmungen zu erhalten, hat sich die Wirbelstärke bezogen auf die lokale Absolutgeschwindigkeit

$$\frac{\nabla \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (5.6)$$

als geeignet erwiesen [137]. Bei turbulenten Strömungen werden zusätzlich als Indikatoren die Turbulenzgrößen eingesetzt. Im Bereich von Scherschichten oder im voll turbulenten Gebiet der turbulenten Grenzschicht weist die turbulente kinetische Energie k sehr ausgeprägte lokale Maxima auf. Die Verwendung von k als Indikator ergibt daher vor allem in diesen Gebieten eine Verfeinerung. Die dissipativen Größen wie ε und ω dagegen sind vor allem im Bereich der viskosen Unterschicht der turbulenten Grenzschicht für eine Verfeinerung einzusetzen, da die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie hauptsächlich in diesem Bereich stattfindet. Der Einsatz dissipativer Größen als Indikator eignet sich daher, wenn Low-Reynolds Turbulenzmodelle verwendet werden und eine Verfeinerung des wandnahen Grenzschichtbereichs notwendig ist. In Abschnitt 6.2.1.3 werden einige numerische Experimente durchgeführt, um Hinweise zu bekommen, welche Größen welche Auswirkungen auf die Genauigkeit der Lösung haben.

5.5 Berechnung des Wandabstandes

Für die Mehrzahl der Low-Reynolds Turbulenzmodelle ist eine Berechnung des Wandabstandes y auf den Knotenpunkten erforderlich. Die einfachste Methode den Wandabstand im gesamten Strömungsgebiet zu bestimmen, besteht darin, eine Liste von Randknoten aufzustellen und dann eine Schleife über alle Knoten laufen zu lassen, wobei für jeden Knoten die Randknotenliste nach dem Knoten mit dem geringsten Wandabstand durchsucht

wird. Da die Randknotenliste eine Länge von mindestens $O(N^{1/2})$ hat (3D: $O(N^{1/3})$), ergibt sich somit ein Gesamtaufwand von $O(N^{3/2})$ (3D: $O(N^{4/3})$).

Eine mögliche Reduktion dieses Aufwands kann nun darin bestehen, die Wandabstands-berechnung nur in einem Teilgebiet durchzuführen. Die im wandnahen Bereich benötigten Dämpfungsfunktionen werden über Größen wie $y^+ = yu_\tau/\nu$ und $R_y = k^{1/2}y/\nu$ gesteuert (s. Abschnitt 2.4.3.1). Obwohl der Einfluß der Dämpfungsfunktionen meist nur auf einen sehr kleinen Bereich des Strömungsgebietes beschränkt ist, werden diese üblicherweise im gesamten Gebiet bestimmt, da der Einflußbereich vor der Simulation nicht ohne weiteres abgeschätzt werden kann. Würde man eine Berechnung des Wandabstandes vor jedem Iterationsschritt durchführen, so könnte man die Knotenpunkte auswählen, die im Einflußbereich der Dämpfungsfunktionen liegen. Im zweidimensionalen Fall hätte man somit $N^{1/2}$ Randknoten und $c \cdot N^{1/2}$ Knoten im wandnahen Bereich. Der Aufwand einer nur in einem Teilgebiet durchgeführten Wandabstands-berechnung wäre in diesem Fall $O(N)$. Nachteilig ist jedoch, daß diese Berechnung für jede Iteration durchgeführt werden muß und geeignete Abschätzungen erforderlich sind, um einen Knotenpunkt dem wandnahen Bereich hinzuzuzählen.

Es kann aber auch die Mehrgitterhierarchie ausgenutzt werden, um den Aufwand der Wandabstands-berechnung für das gesamte Rechengebiet niedrig zu halten. In [45] wird vorgeschlagen die Wandabstands-berechnung auf dem zweitfeinsten Gitter mit dem einfachen $O(N^{3/2})$ Algorithmus durchzuführen und dann auf das feinste Gitter zu interpolieren. Diese Interpolation ist jedoch im wandnahen Bereich stark gekrümmter Oberflächen unter Umständen etwas ungenau. Im folgenden soll nun eine Wandabstands-berechnung vorgestellt werden, die mit einem Aufwand von $O(N)$ zu realisieren ist und auch auf lokal verfeinerte Gitter anwendbar ist. Hierzu wird zuerst auf dem Grobgitter der Wandabstand mit der oben beschriebenen Methode mit Aufwand $O(N_{l=0}^{3/2})$ berechnet. Auf der nächsten Gitterebene wird der wandnächste Knoten für jeden inneren Knoten mit dem in Abb. 5.10 dargestellten Algorithmus gefunden.

Bei solch einem Vorgehen werden zwar einige Wandknoten mehrfach untersucht (s. Abb. 5.11) — pro innerem Knoten werden im 2D-Fall etwa 10 bis 50 Wandabstands-berechnungen durchgeführt — der Gesamtaufwand ist jedoch von $O(N)$. Besonders geeignet ist dieses Verfahren auch für adaptiv verfeinerte Gitter, da fehlende Informationen auf dem obersten Gitter über die unteren Gitter erhalten werden können.

Der Algorithmus in Abb. 5.10 liefert den Wandabstand zwischen einem inneren Knotenpunkt und einem Wandknotenpunkt (y_{min} in Abb. 5.11). Korrekt ist dies jedoch nur für orthogonale Gitter, da bei „schiefen“ Gittern vor allem in Wandnähe ein zu großer Wandabstand ermittelt wird. Um dies zu vermeiden wird die entsprechende benachbarte Elementwandseite zur genauen Abstandsberechnung herangezogen (y_\perp in Abb. 5.11).

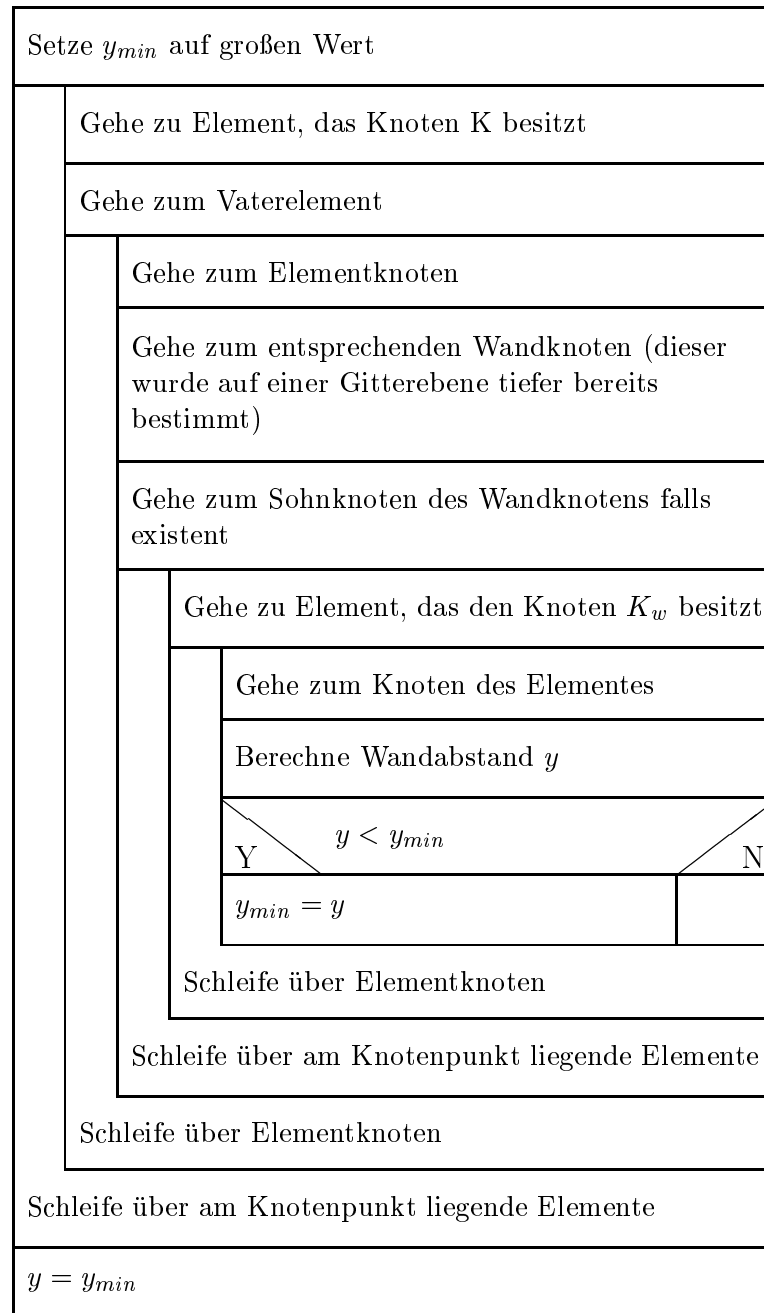


Abbildung 5.10. Berechnung des Wandabstandes auf hierarchischen Gittern mit Aufwand $O(N)$.

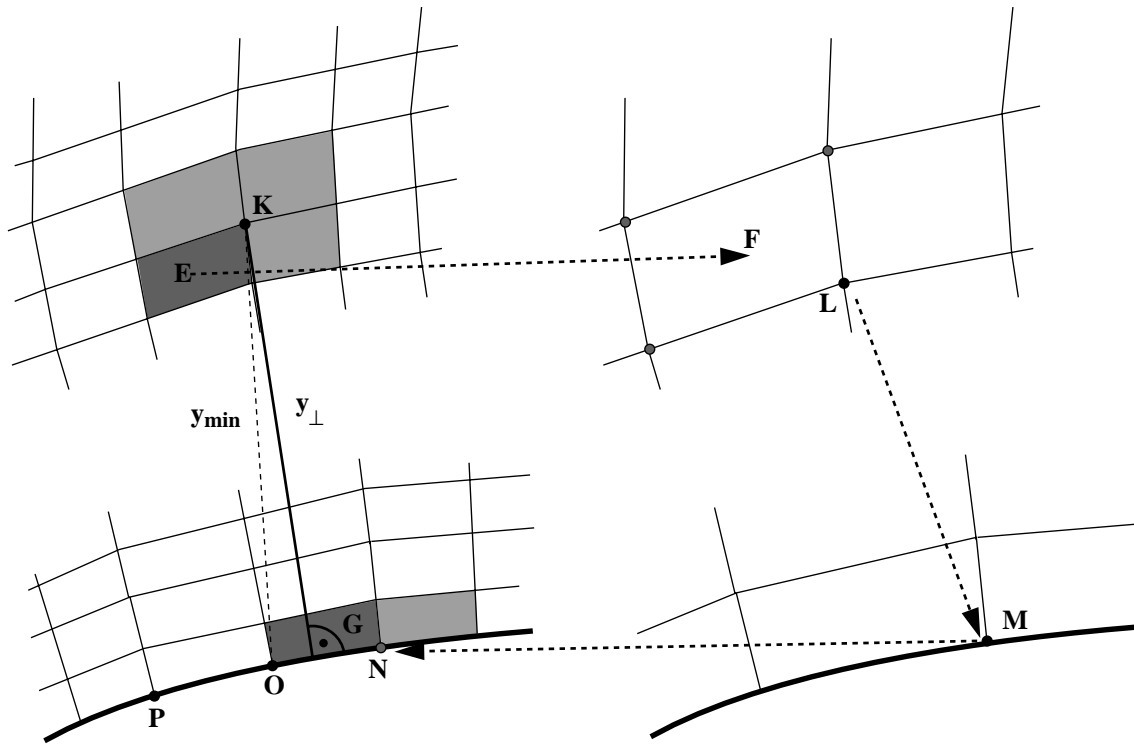


Abbildung 5.11. Berechnung des Wandabstandes für den Knoten K auf dem feinen Gitter, die Wandabstände auf dem groben Gitter sind dabei schon bekannt: 1. Gehe zum Element, das den Knoten K besitzt (Element E); 2. Gehe zum Vatelement von E (Element F); 3. Gehe zum Knoten an Element F (Knoten L); 4. Gehe zum Wandknoten von L (Knoten M); 5. Gehe zum Sohnknoten von M (Knoten N); 6. Gehe zum Element, das am Knoten N liegt (Element G); 7. Gehe zum Wandknoten von Element G (Knoten O); 8. Bestimme Wandabstand. Wenn der Knotenpunkt mit dem kleinsten Wandabstand gefunden wurde, werden die an O anliegenden Elementseiten nach einem eventuell geringeren Wandabstand überprüft (y_{\perp}).

6 Numerische Experimente

In diesem Kapitel sollen anhand mehrerer numerischer Simulationen die Eigenschaften und Möglichkeiten der bisher beschriebenen Verfahren untersucht werden. Da in den vorhergehenden Kapiteln kaum auf Aspekte des Lösungsverfahrens bezüglich des Systems Navier-Stokes Gleichungen und Turbulenzgleichungen eingegangen wurde, wird das Lösungsverfahren zu Beginn dieses Kapitels etwas genauer beschrieben. Der größte Teil des Kapitels beschäftigt sich dann mit den Resultaten mehrerer Simulationen für zwei unterschiedliche Konfigurationen zweidimensionaler turbulenter Strömungen. Dabei wird unter anderem der Einfluß der Turbulenzmodelle, der linearen Lösungsverfahren und der Gitterfeinheit auf das Konvergenzverhalten untersucht. Außerdem werden mehrere einfache Ansätze zur Steuerung der adaptiven Gitterverfeinerung und ihre Auswirkung auf die Genauigkeit der Lösung betrachtet.

6.1 Beschreibung des Lösungsverfahrens

Soweit in den nachfolgenden Abschnitten keine speziellen Angaben gemacht werden, wurden alle numerischen Simulationen mit den in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahren durchgeführt.

6.1.1 Lösung der nichtlinearen Gleichungen

Die instationären (Reynolds-gemittelten) Navier-Stokes Gleichungen und Turbulenzgleichungen werden entsprechend Abb. 6.1 bei jedem Zeitschritt nacheinander gelöst, was man auch als semi-implizites Verfahren bezeichnen kann. Inwieweit ein gekoppeltes Verfahren die Konvergenzeigenschaften verbessern kann, war nicht Gegenstand dieser Untersuchungen. Es ist jedoch zu erwarten, daß nur mit einer sehr geschickten Wahl der Kopplungsterme eine Konvergenzbeschleunigung möglich wird. Obwohl in *UG* eine variable Zeitschrittsteuerung über die Konvergenzrate des letzten Zeitschritts möglich ist (s.a. Abb. 4.7), wird der Zeitschritt hier während der Simulation konstant gehalten, um die Vergleiche transparenter zu gestalten. Da nur die stationäre Lösung betrachtet wird, kann das stabile „rückwärts Euler“ Verfahren erster Ordnung eingesetzt werden; dies erlaubt wiederum bei der hier eingesetzte Diskretisierung sehr große Zeitschritte. Pro Zeitschritt wird sowohl für die Navier-Stokes Gleichungen als auch für die Turbulenzgleichungen ein Fixpunktiterationsschritt (s.a. Abb. 4.6 mit *maxiter* = 1) durchgeführt, wobei für alle Größen ein Relaxationsparameter von $\lambda = 0.4$ – 0.5 verwendet wurde.

Setze Startlösung (konstante Werte oder geschachtelte Iteration)	
	Assembliere Navier-Stokes Gleichungen $\mathbf{A}_{\text{NS}}(\Delta t, \mathbf{x}_{\text{NS}}, \nu_t), \quad \mathbf{r}_{\text{NS}}(\Delta t, \mathbf{x}_{\text{NS}}, \nu_t) = \mathbf{b}_{\text{NS}} - \mathbf{A}_{\text{NS}}\mathbf{x}_{\text{NS}}$
	Löse lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}_{\text{NS}}\mathbf{x}'_{\text{NS}} = \mathbf{r}_{\text{NS}}$
	Aktualisieren der Lösung $\mathbf{x}_{\text{NS}} = \lambda_{\text{NS}}\mathbf{x}'_{\text{NS}} + \mathbf{x}_{\text{NS}}$
	Assembliere Turbulenztransport-Gleichungen $\mathbf{A}_{\text{TU}}(\Delta t, \mathbf{x}_{\text{NS}}, \mathbf{x}_{\text{TU}}), \quad \mathbf{r}_{\text{TU}}(\Delta t, \mathbf{x}_{\text{NS}}, \mathbf{x}_{\text{TU}}) = \mathbf{b}_{\text{TU}} - \mathbf{A}_{\text{TU}}\mathbf{x}_{\text{TU}},$ $\nu_t(\mathbf{x}_{\text{NS}}, \mathbf{x}_{\text{TU}})$
	Löse lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}_{\text{TU}}\mathbf{x}'_{\text{TU}} = \mathbf{r}_{\text{TU}}$
	Aktualisieren der Lösung $\mathbf{x}_{\text{TU}} = \lambda_{\text{TU}}\mathbf{x}'_{\text{TU}} + \mathbf{x}_{\text{TU}}$
Konvergenzkriterium erreicht	

Abbildung 6.1. Zeitschrittsschleife für konstanten Zeitschritt

Eine gute Startlösung für das feinste Gitter wird durch eine geschachtelte Iteration gemäß Abb. 6.2 erhalten. Dazu werden jeweils etwa 20–50 Iterationen (bzw. Zeitschritte) auf den darunterliegenden Gitterebenen durchgeführt. Für die Iterationen auf den zwei untersten Gitterebenen werden aus Stabilitätsgründen das UDS oder das MWS Aufwindverfahren jeweils ohne PAC-Term verwendet. Ab dem dritten Gitter wird auf das LPS Aufwindverfahren für die Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen umgestellt und für die Navier-Stokes Gleichungen wird noch zusätzlich der PAC-Term (s. Abschnitt 3.3.1) bestimmt. Würde man keine geschachtelte Iteration durchführen, so müsste mit sehr kleinen Zeitschritten zu Anfang der Simulation gerechnet werden, um ein Divergieren des Lösungsprozesses zu verhindern. Bei den hier gezeigten Konfigurationen hat sich gezeigt, daß eine schlechte Startlösung (z.B. konstantes Geschwindigkeits- und Turbulenzfeld im gesamten Gebiet) eine Verdoppelung oder Verdreifachung der Rechenzeit gegenüber einer Rechnung mit geschachtelter Iteration erfordert.

Als sehr vorteilhaft hat sich bei der Simulation auf groben Gittern eine knotenweise Beschränkung der Korrektur \mathbf{x}'_{TU} für die Turbulenzgrößen erwiesen. Es wird gefordert, daß

die Korrektur (4.47) nur im Bereich

$$-0.8x < x' < 5x \quad (6.1)$$

liegen darf. Dadurch werden die durch die Quellterme der Turbulenzgleichungen bedingten, oftmals sehr starken Anfangsausschläge ausreichend gedämpft.

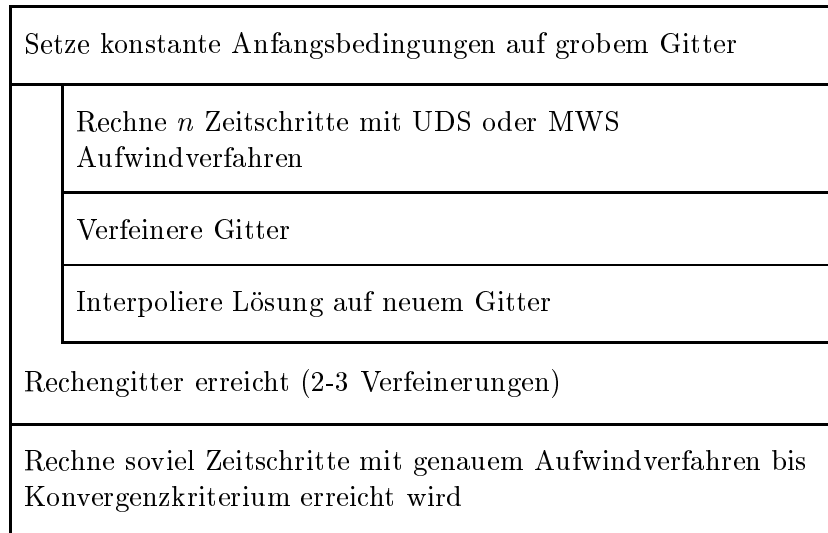


Abbildung 6.2. Geschachtelte Iteration

6.1.2 Lösung der linearisierten Gleichungen

Die beiden aus der Fixpunkt-Linearisierung (4.54) und (4.50) entstandenen linearen Gleichungssysteme für die Navier-Stokes- und die Turbulenzgleichungen werden mit einem linearen Mehrgitterverfahren (s. Abschnitt 4.3.3) gelöst. Als Glätter für die beiden Mehrgitterlöser wird ein ILU-Verfahren verwendet (s. Abschnitt 4.1.3), wobei beim Mehrgitterlöser für die Navier-Stokes Gleichungen die von Wittum [126] vorgeschlagene β -Modifikation (4.18) eingesetzt wird. Vor allem bei langgestreckten Elementen, wie sie in Rechengittern für turbulente Grenzschichten auftreten, kann der Einsatz dieser β -Modifikation eine signifikante Konvergenzbeschleunigung für das Mehrgitterverfahren ermöglichen. Als geeignet erwiesen haben sich für den Druck $\beta = 1$ und für die Geschwindigkeitskomponenten $\beta = 0.2$. Bei besonders langgestreckten Elementen können für die Geschwindigkeitskomponenten noch höhere Werte für β von Vorteil sein. Die Mehrgitteriteration wird mit einem V-Zyklus mit jeweils zwei Vor- und Nachglättungsschritten durchgeführt (s.a. Abb. 4.2).

Eine oftmals deutliche Reduktion der Anzahl der Mehrgitterschritte wird erreicht, wenn man den Mehrgitterlöser als Vorkonditionierer für ein Krylov-Unterraum-Verfahren einsetzt (s. Abschnitt 4.2). Für die Navier-Stokes Gleichungen eignet sich hierbei besonders

der BiCGSTAB Löser von [31]. Nachteilig ist hierbei jedoch, daß für das BiCGSTAB-Verfahren sechs zusätzliche temporäre Knotenvektoren benötigt werden. Da sich dieses Verfahren als äußerst robust bei guten Konvergenzeigenschaften erwiesen hat, wurde es daher bis auf wenige Ausnahmen in allen hier gezeigten Simulationen eingesetzt.

Da eine sehr genaue Lösung der linearen Gleichungssysteme zu keiner Konvergenzbeschleunigung des nichtlinearen Systems führt, kann mit relativ geringer Defektreduktion der linearen Systeme ausgekommen werden. Für die Strömungsgrößen u , v und p ist daher eine Reduktion um eine Größenordnung ausreichend. Für die Turbulenzgrößen wird eine Defektreduktion um vier Größenordnung gefordert, was aber meist mit einem oder zwei Mehrgitterschritten erreicht wird.

Um die Zahl der Mehrgitteriterationen pro Zeitschritt möglichst gering zu halten, ist eine Stromabnumerierung der Knoten sehr empfehlenswert [138]. Da im Rahmen dieser Arbeit recht einfache Strömungskonfigurationen betrachtet wurden, war eine lexikographische Anordnung der Knoten ausreichend.

6.2 Simulation turbulenter Strömungen mit der Fixpunktiteration

Anhand zweier gut dokumentierter Beispiele für turbulente Strömungen sollen die Eigenschaften der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Verfahren untersucht werden. Beim ersten Beispiel handelt es sich um eine turbulente Strömung über ein 2D-Hügelmodell, für das nicht nur ausführliche experimentelle Daten zugänglich sind [139], sondern auch Vergleiche mit anderen numerischen Simulationen möglich sind. Der zweite Testfall ist eine turbulente Strömung um ein NACA-4412 Tragflügelprofil mit einem Anstellwinkel von $\alpha \approx 14^\circ$, bei dem sich im Experiment [140] an der Tragflügelhinterkante eine Ablösung ausbildet. Beim ersten Testfall handelt es sich um eine Innenströmung mit vergleichsweise moderater Reynoldszahl und voll turbulenten Einströmbedingungen und beim zweiten Testfall um eine Außenströmung mit sehr hoher Reynoldszahl und dadurch bedingtem laminar-turbulenten Übergang in der Grenzschicht.

6.2.1 Turbulente Strömung über ein 2D-Hügelmodell

Das hier gewählte Beispiel für eine zweidimensionale turbulente Innenströmung war einer von fünf Testfällen des ERCOFTAC/IAHR Workshops 1995 in Karlsruhe [141]. Es handelt sich hierbei um eine inkompressible Strömung über ein Hügelmodell in einem Kanal, wobei als Einströmbedingung eine voll entwickelte turbulente Kanalströmung angenommen wurde. Die ausführlich dokumentierten Experimente wurden von Almeida et al. [139] beschrieben, und die Maße des verwendeten Rechengebietes sind Abbildung 6.3 zu entnehmen. Die Reynoldszahl bezogen auf die Hügelhöhe h und die mittlere Einströmgeschwindigkeit \bar{u} ist $Re = \bar{u}h/\nu = 60.116$. Stromabwärts vom Hügel bildet sich eine Rezirkulationszone aus, die sich im Experiment von $x/h = 0.43$ bis $x/h = 4.8$ erstreckt.

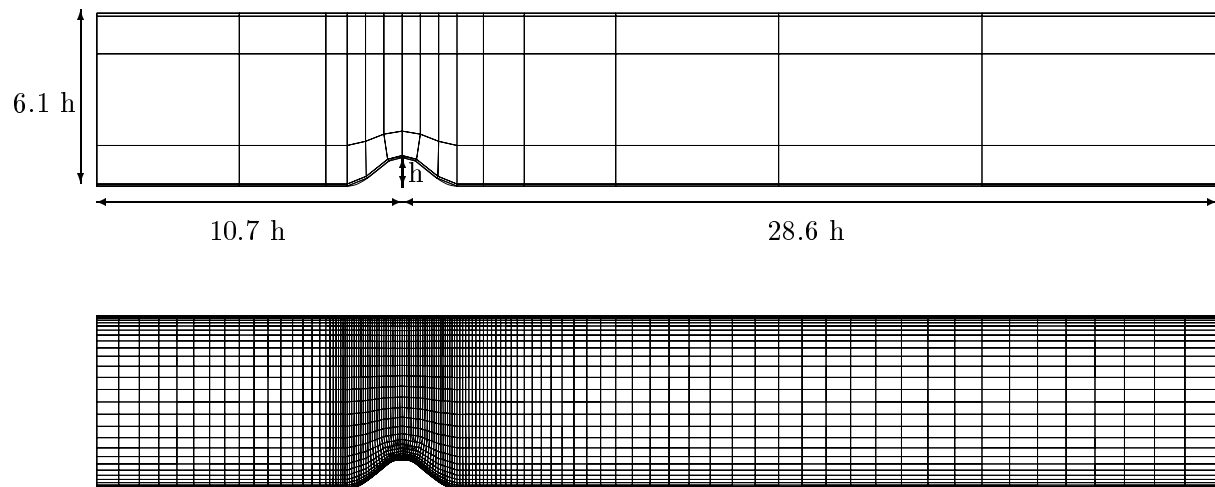


Abbildung 6.3. Rechengebiet für die Strömung über ein Hügelmodell mit Grobgitter (96 Knoten) und dreimal verfeinertem Gitter (4961 Knoten) (h ist die Höhe des Hügels)

Für die hier beschriebene Konfiguration wurden nun mehrere numerische Experimente auf unterschiedlich feinen Gittern und mit verschiedenen Zweigleichungs-Turbulenzmodellen durchgeführt. Die niedrigste Gitterebene, auf der mit dem LPS Aufwindverfahren eine konvergente Lösung erhalten werden kann, ist das Gitter G3 mit ca. 5.000 Knoten, das in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Berechnungen auf den gröberen Gittern werden mit den Aufwindverfahren erster Ordnung durchgeführt. Als Konvergenzkriterium wird gefordert, daß das normierte Residuum der horizontalen Geschwindigkeitskomponente $\|u\|/\Delta t$ einen Wert unterhalb von 10^{-4} erreichen soll.

6.2.1.1 Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle

Mit den folgenden numerischen Experimenten sollen verschiedene Zweigleichungs-Turbulenzmodelle bezüglich Konvergenzverhalten und Gitterabhängigkeit untersucht werden. Es wurden hierzu sechs Turbulenzmodelle ausgewählt, die entweder eine weite Verbreitung gefunden haben oder als erfolversprechende, relativ neue Turbulenzmodelle angesehen werden. Folgende Modelle wurden verglichen:

- Chen-Patel Zweischichten $k-\varepsilon$ -Modell (algebraische Gleichung für ε in Wandnähe)
- Chien $k-\varepsilon$ -Modell (Dämpfungsfunktionen abhängig von y^+)
- Wilcox $k-\omega$ Modell (keine zusätzlichen Terme im wandnahen Bereich)
- Menters Baseline Modell ($k-\omega$ Modell in der viskosen Unterschicht und der voll turbulenten Zone, $k-\varepsilon$ Modell im äußeren Bereich der Grenzschicht und im Fernfeld)
- Modifiziertes Baseline Modell ($k-\omega$ Modell in der viskosen Unterschicht sonst $k-\varepsilon$ Modell)

- Kalitzin $k\text{-}\tau$ Modell (von $k\text{-}\omega$ Modell abgeleitet, kein Wandabstand notwendig)

In Abb. 6.4 sind die mit diesen Turbulenzmodellen berechneten Stromlinien im Bereich der Rezirkulationszone dargestellt. Es wurden Simulationen auf drei unterschiedlich feinen, strukturierten Gittern durchgeführt (G3: 4.961 Knoten, G4: 19.521 Knoten, G5: 77.441 Knoten). Als Zeitschritt wurde $17.8 h/U_m$ gewählt, wobei mit U_m die Maximalgeschwindigkeit am Einströmrand bezeichnet wird. Der Relaxationsparameter λ aus (4.47) wurde für beide Gleichungssysteme auf 0.5 gesetzt. Folgende Aussagen bezüglich Gitterabhängigkeit der Lösung und Konvergenzverhalten können aus diesen Simulationen abgeleitet werden.

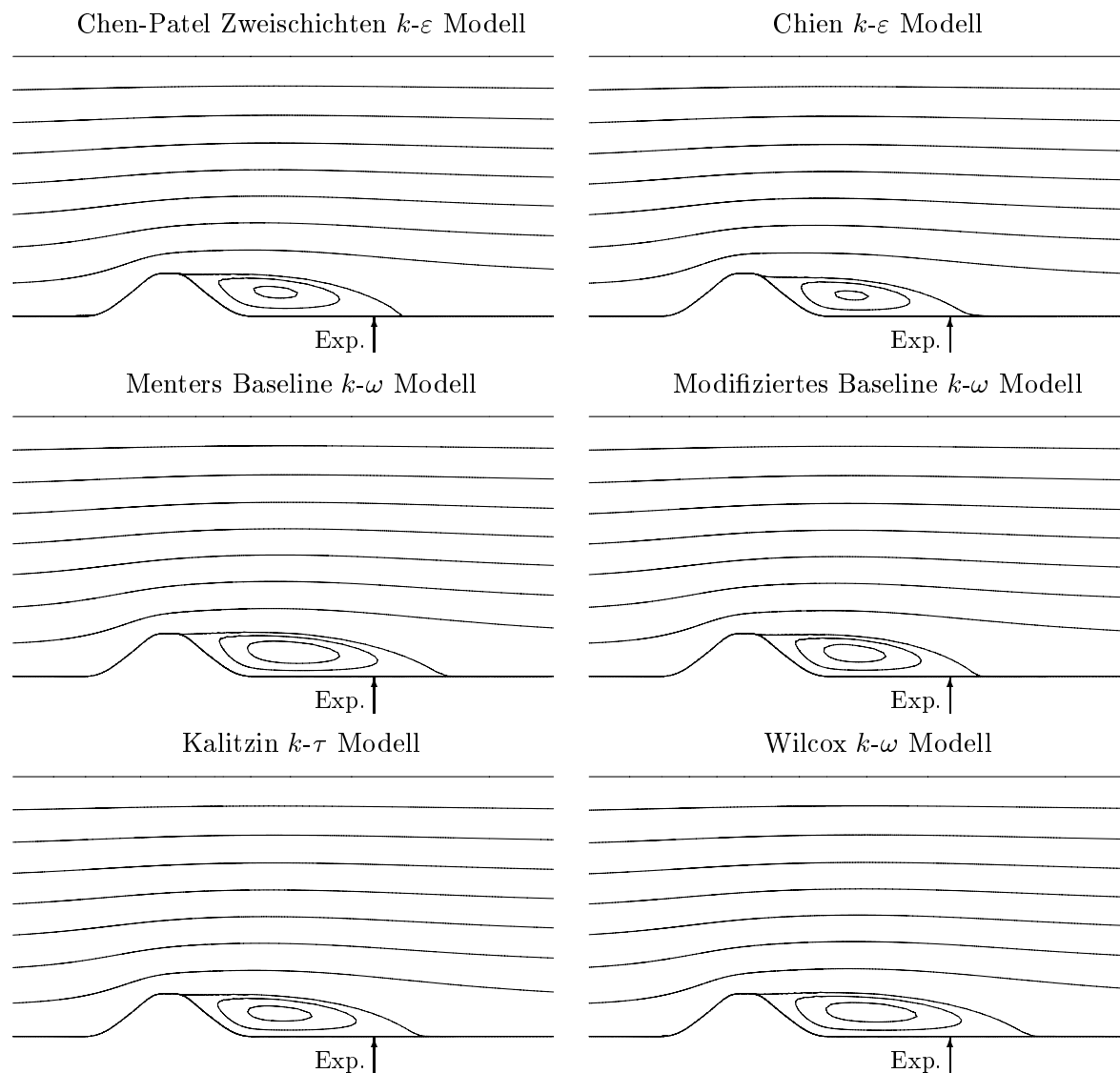


Abbildung 6.4. Stromlinienbilder für verschiedene Turbulenzmodelle gerechnet auf dem Gitter G4 (19.521 Knoten). Der im Experiment [139] bestimmte Wiederanlagepunkt ist mit einem Pfeil gekennzeichnet.

Gitterabhängigkeit

Als ein einfaches und notwendiges Maß, die Gitterunabhängigkeit der Lösung zu überprüfen, kann die Ausdehnung der Rezirkulationszone angesehen werden. Ein weiterer globaler Wert ist der durch das Hindernis entstehende Druckabfall. In Tabelle 6.1 sind daher der Ort des Wiederanlagepunktes der Rezirkulationszone und die Druckdifferenz an der unteren Kanalwand $10h$ vor und $20h$ nach der Höhengipfel (h ist die Höhe des Hügels) abhängig vom Gitter für verschiedene Turbulenzmodelle dargestellt.

Tabelle 6.1. 2D-Hügelströmung: Position des Wiederanlagepunktes x_r (Experiment: $x_r \approx 4.8$) und Druckdifferenz zwischen $-10h$ und $20h$ an der unteren Kanalwand für verschiedene Turbulenzmodelle auf drei verschiedenen Gittern. Die letzte Reihe gibt die Zahl der Zeitschritte n_{iter} bis das Konvergenzkriterium erreicht wurde an und in Klammern die Zahl der Mehrgitter V-Zyklen pro Zeitschritt für die Navier-Stokes Gleichungen.

	$k-\varepsilon$ Chen-Patel	$k-\varepsilon$ Chien	Baseline	mod. Baseline	$k-\tau$	$k-\omega$
x_r						
G3	5.57 h	5.09 h	6.00 h	4.95 h	5.21 h	6.60 h
G4	5.73 h	5.53 h	6.61 h	5.56 h	5.99 h	6.88 h
G5	5.77 h	5.48 h	6.87 h	5.82 h	6.60 h	6.96 h
$\frac{\Delta p}{u_0^2}$						
G3	0.0577	0.0754	0.0654	0.0627	0.0729	0.0621
G4	0.0528	0.0708	0.0654	0.0630	0.0623	0.0610
G5	0.0517	0.0683	0.0645	0.0624	0.0619	0.0600
n_{iter}						
G3	75 (3.3)	97 (3.9)	69 (3.3)	74 (3.8)	68 (4.2)	102 (3.6)
G4	56 (4.4)	160 (2.8)	58 (4.8)	64 (5.2)	77 (4.2)	82 (3.8)
G5	55 (4.3)	197 (3.7)	58 (4.6)	58 (5.8)	77 (5.3)	65 (4.7)

Vergleicht man die verschiedenen Ergebnisse für den Ort des Wiederanlagepunktes auf dem feinsten Gitter mit dem experimentellen Wert $x_r = 4.8h$, so kommen die beiden $k-\varepsilon$ Modelle und das modifizierte Baseline Modell diesem am nächsten. Etwas weiter weg liegt das Ergebnis für das $k-\tau$ Modell. Das $k-\omega$ Modell und das Baseline Modell sind soweit vom experimentellen Wert entfernt, daß sie für diesen Typ von Strömung als ungeeignet erscheinen.

Abgesehen vom $k-\tau$ Modell wurde auf dem Gitter mit 19.521 Knoten (G4) für alle untersuchten Turbulenzmodelle eine weitgehend gitterunabhängige Lösung erhalten. Für das Zweischichten $k-\varepsilon$ Modell von Chen und Patel wurde die Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes sogar schon relativ genau auf dem groben Gitter (G3, 4.961 Knotenpunkte) ermittelt. Solche Eigenschaften sind besonders bei 3D Simulationen mit Low-Reynolds Turbulenzmodellen gefragt, da eine so feine Auflösung wie bei 2D Simulationen wegen Speicherbeschränkungen oftmals nicht möglich ist.

Die ermittelte Druckdifferenz an der unteren Kanalwand scheint nicht allein von der Ausdehnung der Rezirkulationszone abhängig zu sein, sondern wird sicherlich auch durch die

Repräsentation des Druckanstiegs links vom Hügel bestimmt. Zur Gitterabhängigkeit der ermittelten Druckdifferenz sind ähnliche Aussagen wie schon für die Rezirkulationslänge zu machen.

Konvergenzverhalten

Welchen Einfluß die Wahl des Turbulenzmodells auf die Konvergenzgeschwindigkeit des Lösungsverfahrens hat, kann aus der dritten Zeile der Tabelle 6.1 entnommen werden. Abgesehen vom Chien $k-\varepsilon$ Modell wurden für alle Turbulenzmodelle etwa 60 bis 80 Zeitschritte benötigt. Dabei ist bei vier Modellen sogar eine mehr oder weniger starke Abnahme der Zeitschritte bei feineren Gittern zu erkennen. Fast ausnahmslos ist eine Erhöhung der Zahl der Mehrgitterzyklen auf feinen Gittern gegenüber den groben Gittern festzustellen. Im Durchschnitt wurden auf dem Gitter G3 3.6, auf G4 4.2 und auf dem feinsten Gitter G5 4.7 Mehrgitter V-Zyklen pro Zeitschritt benötigt. Eine optimale $O(N)$ Komplexität konnte somit nicht ganz erreicht werden, aber die sehr moderate Zunahme der Mehrgitteriterationen bei einer Vervierfachung der Zahl der Unbekannten ist dennoch zufriedenstellend. Diese Zunahme der Zahl der Iterationen wurde jedoch zum Teil durch eine geringere Zahl der Zeitschritte wettgemacht und bezogen auf die Gesamtrechenzeit (Lösen und Assemblieren) wurde bei vier Turbulenzmodellen ($k-\omega$, Baseline, mod. Baseline und Chen-Patel $k-\varepsilon$) auf dem feinsten Gitter fast exakt viermal soviel Rechenzeit wie auf dem Gitter G4 benötigt.

Eine Ausnahme bildet jedoch das Chien $k-\varepsilon$ Modell, bei dem eine deutliche Zunahme der benötigten Zeitschritte bei feineren Gittern zu verzeichnen ist. Zusätzliche Rechnungen mit diesem Turbulenzmodell ergaben, daß mehr als eine Halbierung der Zahl der Zeitschritte möglich ist, wenn als Startlösung anstatt der ungenauen Lösung von Gitter G2 eine geschachtelte Iteration durchgeführt wird. Dabei muß jedoch auf jeder Gitterebene bis zu einer auskonvergierten Lösung gerechnet werden. Daß das Chien $k-\varepsilon$ Modell so viel schlechter als die anderen Modelle konvergiert, liegt wahrscheinlich daran, daß bei diesem Modell Dämpfungsfunktionen verwendet werden, die zu einer starken Kopplung der Turbulenzgleichungen führen. Wahrscheinlich ist diese Kopplung wiederum die Ursache für im Konvergenzverlauf zu erkennende Oszillationen (s.a. Abb. 7.6).

6.2.1.2 Vergleich verschiedener Lösungsverfahren

Mit den folgenden numerischen Experimenten soll untersucht werden, inwieweit das theoretisch optimale Verhalten von Mehrgitterverfahren bei der Simulation turbulenter Strömungen erreicht wird. Zusätzlich wird eine Beschleunigung des Mehrgitterverfahrens mit einem Krylov-Unterraum Löser untersucht und ein Vergleich mit einem Eingitterverfahren durchgeführt.

Als Testfall wurde wiederum die Hügelströmung herangezogen und eine Startlösung auf Gitterebene L2 (1200 Knoten) erstellt. Auf den Gittern L3, L4 und L5 wurden mit dieser Startlösung so viele Zeitschritte gerechnet, bis das Konvergenzkriterium ($\|u\|/\Delta t < 10^{-4}$) erfüllt wurde. Als Turbulenzmodell wurde das $k-\tau$ Modell eingesetzt. Der Zeitschritt von

$10.7h/U_m$ war auf allen Gittern gleich und der Relaxationsparameter λ wurde für beide Gleichungssysteme auf 0.6 gesetzt.

Zur Lösung der linearen Gleichungen wurden drei verschiedene Löser verglichen, ein lineares Mehrgitterverfahren, ein BiCGSTAB-Löser mit einem Mehrgitter Vorkonditionierer und ein BiCGSTAB-Löser mit einem ILU Vorkonditionierer. Bei letzterem handelt es sich um ein in vielen Strömungscodes eingesetztes Eingitterverfahren.

In Tabelle 6.2 sind die Rechenzeiten in Sekunden auf einer HP C100 Workstation aufgeführt und die Anzahl der Zeitschritte, die notwendig waren, um das Konvergenzkriterium zu erfüllen. Wie zu erwarten war, ist die Zahl der Zeitschritte weitgehend unabhängig vom verwendeten Lösungsverfahren. Verglichen mit dem linearen Mehrgitterverfahren (MG) konnte eine Verringerung der Rechenzeit durch den BiCGSTAB Löser (BCGS-MG) nur auf dem groben Gitter erreicht werden, auf den beiden feineren Gittern war das kombinierte Lösungsverfahren sogar langsamer. Wie man aus den Werten in Klammern hinter den Rechenzeiten ersehen kann, die die Erhöhung der Rechenzeit gegenüber dem gröberen Gitter angeben, erreicht das lineare Mehrgitterverfahren mit etwa 4.3 für beide Verfeinerungen beinahe schon den optimalen Wert von 4. Beim BiCGSTAB-Mehrgitterverfahren wird mit 5.0 bzw. 4.7 schon etwas mehr vom optimalen Wert abgewichen. Beim Eingitterverfahren jedoch liegt dieser Faktor nicht nur deutlich über 4 sondern steigt auch noch mit Erhöhung der Gitterfeinheit von 6.7 auf 11.3 an.

Tabelle 6.2. Benötigte Zeitschritte und Rechenzeit für die Hügelströmung, gerechnet mit dem k - τ Turbulenzmodell für verschiedene Lösungsverfahren und Gitter. Die Werte in Klammern geben die Erhöhung der Rechenzeit gegenüber dem nächstgrößeren Gitter an.

Gitter	Löser	MG		BCGS-MG		BCGS-ILU	
G3:	4961 KV	62	911 s	61	844 s	58	1 579 s
G4:	19521 KV	65	3 855 s (\cdot 4.2)	68	4 196 s (\cdot 5.0)	68	10 648 s (\cdot 6.7)
G5:	77441 KV	69	17 871 s (\cdot 4.3)	69	19 779 s (\cdot 4.7)	69	120 410 s (\cdot 11.3)

Da die in Tabelle 6.2 angegebenen Rechenzeiten sich nur auf das Gesamtverfahren beziehen und daher keine Aussagen auf das gitterabhängige Verhalten der einzelnen Komponenten möglich sind, sind in Tabelle 6.3 noch zusätzlich die durchschnittlichen Rechenzeiten pro Zeitschritt für die Assemblierung und die Lösungsverfahren getrennt nach Strömungs- und Turbulenzgleichungen dargestellt. Die in der Tabelle angegebenen Werte beziehen sich auf die Zeit, die zur Assemblierung der Strömungsgleichung auf dem jeweils feinsten Gitter notwendig ist. Die Assemblierungszeit ist daher bei den Mehrgitterverfahren um etwa 30% höher als beim Eingitterverfahren. Betrachtet man nun die Spalten, die die Zeit zum Lösen der Strömungsgleichungen enthalten, so kann man erkennen, daß bei den beiden Mehrgitterverfahren der Aufwand zur Gleichungslösung bei feineren Gittern nur leicht anwächst, während beim Eingitterverfahren eine deutliche Erhöhung (von 8.4 auf 42.3) zu verzeichnen ist. Bei den Turbulenzgleichungen kann man dagegen nur einen

geringen Vorteil der Mehrgitterverfahren gegenüber dem Eingitterverfahren erkennen. Auf dem feinsten Gitter benötigt das Eingitterverfahren etwa doppelt soviel Rechenzeit wie das Mehrgitterverfahren, während es für die Strömungsgleichungen ungefähr das 15fache an Rechenzeit benötigt hat.

Tabelle 6.3. Hügelströmung mit dem k - τ Turbulenzmodell: Rechenzeit pro Zeitschritt bezogen auf die Assemblierungszeit der Strömungsgleichungen

Löser	MG				BCGS-MG				BCGS-ILU			
	Strömung		Turbulenz		Strömung		Turbulenz		Strömung		Turbulenz	
	Lin	Ass	Lin	Ass	Lin	Ass	Lin	Ass	Lin	Ass	Lin	Ass
G3	2.4	1.4	0.9	1.3	2.1	1.4	0.9	1.3	8.4	1.0	1.0	0.9
G4	2.1	1.4	1.3	1.3	2.5	1.3	1.3	1.3	13.5	1.0	1.5	1.0
G5	2.45	1.3	1.8	1.3	3.0	1.3	1.6	1.3	42.3	1.0	3.9	1.0

6.2.1.3 Adaptive Gitterverfeinerung

Aus den in Abschnitt 6.2.1.1 beschriebenen Ergebnissen konnte man erkennen, daß das Gitter G3 noch deutlich zu grob war. Aber auch zwischen den Lösungen auf den Gittern G4 und G5 konnte man bei einigen Turbulenzmodellen zum Beispiel für die Größe der Rezirkulationszone nicht zu vernachlässigende Unterschiede feststellen. Selbst bei dieser relativ einfachen Geometrie kann man nicht davon ausgehen, daß man ein strukturiertes Rechengitter erstellen kann, das eine ausreichende Gitterfeinheit an den zu erwartenden kritischen Stellen hat. Eine für das verwendete Turbulenzmodell ausreichende Gitterfeinheit in Wandnähe zu erreichen, stellt meist keine besonderen Schwierigkeiten dar, da üblicherweise bei der Gittergenerierung eine Grobgitterstruktur (Patches bei Gittergeneratoren) eingesetzt wird, die sich an den Wänden orientiert. Hat man eine Näherung für die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ , so kann der erforderliche Wandabstand für die wandnächsten Knoten bestimmt werden, um unter den für das eingesetzte Turbulenzmodell notwendigen Wert für y^+ zu kommen (bei Low-Reynolds Turbulenzmodellen gilt meist $y_{min}^+ < 1 - 5$). Eine Abschätzung für u_τ kann zum Beispiel aus entsprechenden Experimenten oder Näherungsformeln gewonnen werden. Weitaus schwieriger zu realisieren ist eine ausreichende Gitterfeinheit im Bereich von Scherströmungen, die mitten im Rechengebiet auftreten können. Bei der hier untersuchten Hügelströmung tritt eine solche Scherströmung stromab von der Hügelspitze oberhalb der Rezirkulationszone auf. In diesem Bereich nimmt die turbulente kinetische Energie k Spitzenwerte an und beeinflusst dort maßgeblich das Strömungsfeld und demzufolge auch die Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes. Eine ausreichende Auflösung dieses Bereichs hoher turbulenter Energie ist somit notwendig, um eine genaue Lösung des gesamten Strömungsfeldes zu bekommen. Diese Auflösung ist sicherlich mit Gitter G5 (77.441 Knoten) erreicht worden, dabei wurden jedoch große Teile des Rechengebietes verfeinert, die keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Lösung haben. Von Vorteil ist daher eine adaptive Gitterverfeinerung, die

nur die Bereiche des Rechengebiets verfeinert, die noch nicht ausreichend aufgelöst sind. In diesem Abschnitt sollen daher einige einfache Möglichkeiten zur Steuerung einer adaptiven Gitterverfeinerung betrachtet werden und ihre Auswirkungen auf die Lösung des Strömungsfeldes untersucht werden.

Es ist noch anzumerken, daß für die folgenden Simulationen ein gegenüber Abb. 6.3 etwas modifiziertes Gitter verwendet wurde. Die wandnächsten Punkte für Gitter G3 liegen etwas näher an der Wand ($y_{min}^+ \approx 3$ anstatt $y_{min}^+ \approx 4$) und das Rechengebiet ist etwas kürzer ($-5.3h < x < 17.8h$ statt $-10.7h < x < 28.6h$). Dadurch wurde eine bessere Auflösung des wandnahen Bereichs und des Rezirkulationsbereichs erreicht. Dies hatte aber etwas weniger gute Konvergenzeigenschaften des Lösungsverfahrens zur Folge. Zusätzlich wurden noch hier nicht aufgeführte Simulationen auf einem dritten Gitter durchgeführt, das den Spezifikationen des ERCOFTAC/IAHR Workshops [141] entsprach. Wegen des bei dieser Konfiguration sehr nahe am Hügel befindlichen Einströmrandes ($a=3.57h$) ergeben sich verglichen mit den Simulationen auf den beiden anderen Gittern um etwa 10 bis 20 % kürzere Rezirkulationszonen. Es kann daher nicht davon ausgegangen werden, daß bei $x = -3.57h$ noch eine vom nachfolgenden Hügel ungestörte Kanalströmung vorherrscht. Die in dieser Arbeit eingesetzten Rechengitter mit längeren Einlaufstrecken entsprechen somit dem Experiment besser.

Ein optimales Verfahren zur Steuerung der Gitterverfeinerung würde der elementweise Vergleich mit einer sehr fein diskretisierten Lösung ergeben. Da eine solche Lösung im allgemeinen nicht zu Verfügung steht, müssen daher andere Ansätze eingesetzt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, diejenigen Elemente zu verfeinern, bei denen der lokale Fehler der diskretisierten Gleichungen einen bestimmten Wert überschreitet. Bei dem in dieser Arbeit eingesetzten Verfahren wurde die Mehrgitterhierarchie benutzt, um die Genauigkeit der Diskretisierung zu bestimmen. Es wird die Repräsentation einer Strömungsgröße auf zwei unterschiedlich feinen Gittern verglichen, und es werden diejenigen Elemente auf dem feinen Gitter verfeinert, die die größten Differenzen zum gröberen Gitter aufweisen. Dieses Verfahren wird hier als *Gradientenindikator* bezeichnet und wurde in Abschnitt 5.4 bereits beschrieben.

Welche Strömungsgröße oder Strömungsgrößen mit Hilfe von (5.5) zur Steuerung der Gitterverfeinerung herangezogen werden sollen, ist Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Zuerst wird man sicherlich an die Größen denken, die über die Transportgleichungen gelöst werden, also Geschwindigkeit, Druck, turbulente kinetische Energie und abhängig vom Turbulenzmodell die jeweilige Größe für die turbulente Längenskala ($\varepsilon, \omega \dots$). Ferner kann man Größen heranziehen, die die Turbulenzproduktion beeinflussen und somit einen entscheidenden Einfluß auf das Strömungsfeld haben. Hier bietet sich vor allem die Invariante des Hauptspannungstensors

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.2)$$

oder die Produktion der turbulenten kinetischen Energie

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6.3)$$

an.

Die folgenden numerischen Experimente sollen nun einen Vergleich der oben erwähnten Möglichkeiten zur Steuerung der adaptiven Gitterverfeinerung geben. Als Startlösung für alle Experimente wird eine konvergierte Lösung auf dem Gitter G3 genommen und dann zweimal adaptiv so verfeinert, daß nach jeder Verfeinerung etwa eine Verdopplung der Freiheitsgrade erreicht wird, um etwa die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden wie bei einer einmaligen uniformen Verfeinerung zu erhalten. Wird die Verfeinerungsstrategie richtig gewählt, sollte die Lösung auf dem adaptiv verfeinerten Gitter deutlich näher an der Lösung auf dem Gitter G5 liegen als die Lösung auf dem uniform verfeinerten Gitter G4. Als Fehlerindikatoren wurden gewählt:

Fall 1: die Strömungsgrößen u , v und p über Gradientenindikator (5.5)

Fall 2: die Turbulenzgrößen k und ε über Gradientenindikator (5.5)

Fall 3: alle Strömungsgrößen und k über Gradientenindikator (5.5)

Fall 4: die Strömungsgrößen und die Invariante des Hauptspannungstensors (6.2) bezogen auf die Absolutgeschwindigkeit $S/|\mathbf{u}|$ über Gradientenindikator (5.5)

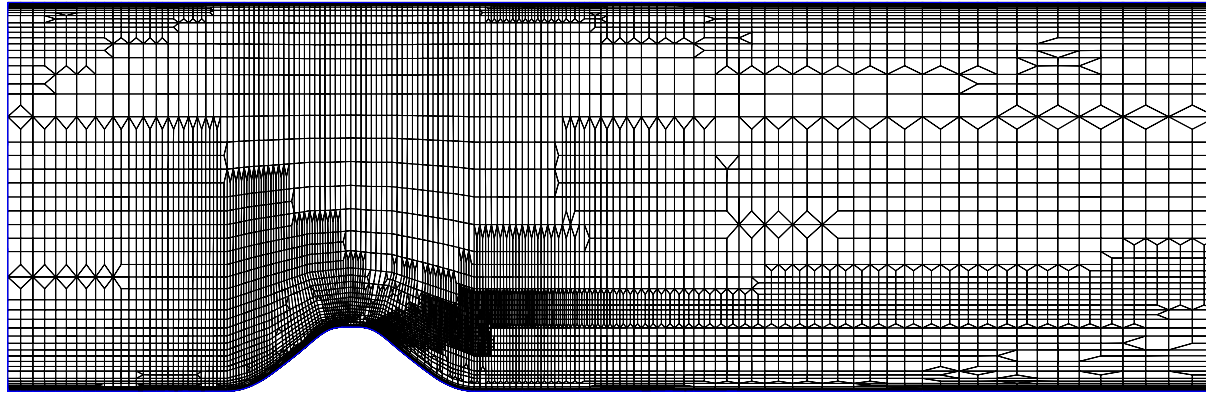
Fall 5: die Residuen der Strömungs- und Turbulenzgrößen

Um die Genauigkeit der Lösungen zu untersuchen wurden folgende Größen miteinander verglichen:

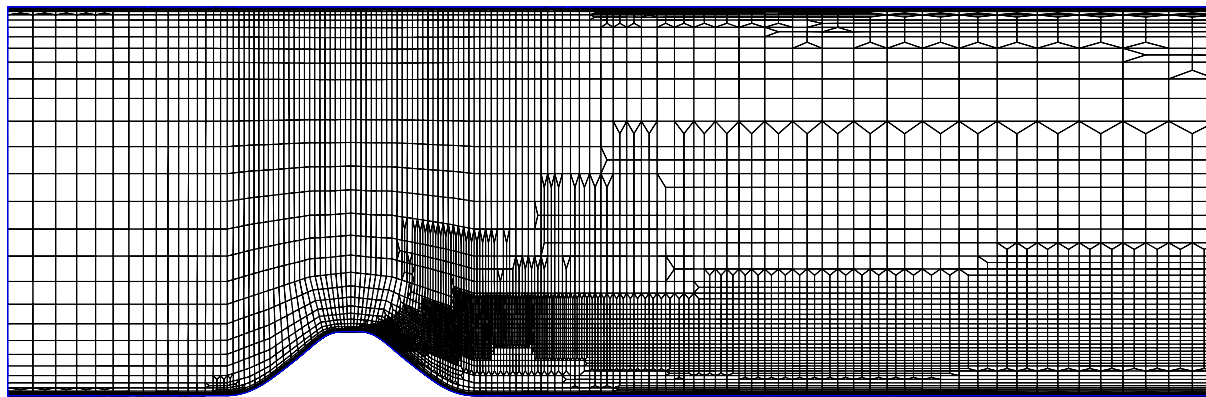
- Beginn x_a und Ende x_b der Rezirkulationszone
- Maximalwert der Geschwindigkeit u_{max} über dem Hügel ($x=0$)
- Maximalwert der turbulenten kinetischen Energie k_{max} im gesamten Rechengebiet
- Druckdifferenz zwischen Ein- und Ausströmrand Δp an der unteren Wand

Zusätzlich wurden noch Rechnungen auf drei uniform verfeinerten Gittern durchgeführt, um eine Bewertung der adaptiv verfeinerten Gitter zu ermöglichen. Die Ergebnisse aller Simulationen sind in Tabelle 6.4 aufgeführt. Vergleicht man die Lösungen der drei uniform verfeinerten Gitter, kann man erkennen, daß zwischen Gitter G3-uni und Gitter G4-uni noch deutliche Unterschiede liegen, eine nochmalige Verfeinerung zu Gitter G5-uni ergibt jedoch keine großen Änderungen mehr. Die Ergebnisse der Berechnungen mit den adaptiv verfeinerten Gittern zeigen, daß eine Berücksichtigung der Strömungsgrößen *und* der Turbulenzgrößen bei der Steuerung der lokalen Verfeinerung notwendig ist. Sowohl für Fall 1 (Abb. 6.5a) als auch für Fall 2 (Abb. 6.5b) sind die Ergebnisse eher etwas schlechter als beim uniform verfeinerten Gitter G4-uni mit vergleichbarer Anzahl von Knotenpunkten. Interessanterweise bringt auch Fall 5, bei dem die Elemente mit den größten Residuen verfeinert wurden, keine Verbesserung gegenüber dem Gitter G4-uni. Die geringsten Abweichungen zur Lösung auf dem feinsten Gitter G5-uni erhält man mit der Verfeinerung von Fall 3 (Abb. 6.5c). Hier kommen die Vorteile einer adaptiven Gitterverfeinerung zum

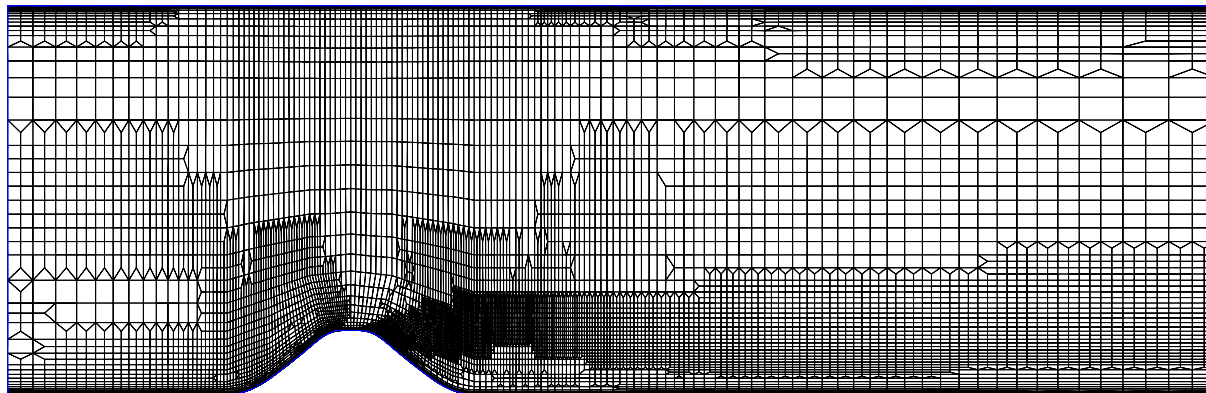
Tragen. Obwohl nur etwa ein Viertel der Knotenpunkte benötigt wurde, wird das Ergebnis des feinsten Gitters fast exakt erreicht. Die Ergebnisse von Fall 4 sind zwar etwas besser als Fall 1, bei dem die Turbulenzgrößen nicht zur Steuerung der Verfeinerung herangezogen wurde. Die turbulente kinetische Energie k (Fall 3) ist bei dem hier untersuchten Beispiel als Indikator jedoch besser geeignet als $S/|\mathbf{u}|$. Die Verteilung der turbulenten Energie im Bereich des Hügels ist in Abb 6.6 dargestellt.



(a) 18.130 Knotenpunkte, Indikator u-v-p



(b) 19.002 Knotenpunkte, Indikator k- ε



(c) 19.607 Knotenpunkte, Indikator u-v-p-k

Abbildung 6.5. Zweimal adaptiv verfeinerte Gitter mit verschiedenen Fehlerindikatoren

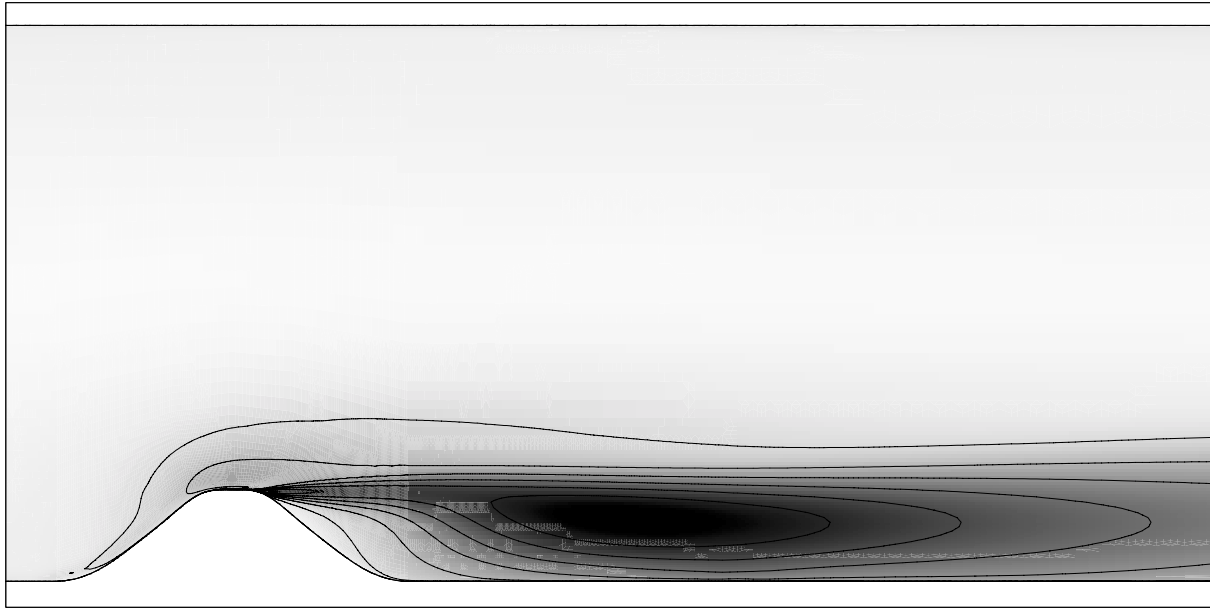


Abbildung 6.6. Verteilung der turbulenten kinetischen Energie berechnet mit dem Chien $k\text{-}\varepsilon$ Modell.

Tabelle 6.4. Hügelströmung mit dem Chien Turbulenzmodell auf verschiedenen uniform oder adaptiv verfeinerten Gittern. Aufgeführt sind Ablöseposition x_a/h und Ende der Rezirkulationszone x_b/h , Maximalgeschwindigkeit über der Hügelspitze u_{max}/u_0 , maximale turbulente kinetische Energie im gesamten Rechengebiet k_{max}/u_0^2 und Druckdifferenz $\Delta p/u_0^2$ an der unteren Kanalwand zwischen Einströmrand ($x/h = -5.3$) und Ausströmrand ($x/h = 17.8$).

Indikator	Gitterpunkte	x_a/h	x_b/h	u_{max}/u_0	k_{max}/u_0^2	$\Delta p/u_0^2$
G3-uni	4633	-0.075	5.22	1.246	0.0752	0.125
G4-uni	18225	0.187	5.46	1.248	0.0728	0.116
G5-uni	72289	0.213	5.49	1.250	0.0720	0.113
u-v-p	18130	0.225	5.40	1.253	0.0722	0.114
k- ε	19002	0.187	5.63	1.245	0.0718	0.117
u-v-p-k	19607	0.216	5.49	1.251	0.0719	0.115
u-v-p- $S/ \mathbf{u} $	17959	0.165	5.49	1.250	0.0723	0.115
Res(uvp)-Res(k ε)	18459	0.206	5.56	1.249	0.0719	0.118

Dieses Beispiel zeigt, daß man auch mit relativ simplen Fehlerindikatoren schon für zweidimensionale Strömungen eine Reduktion der Zahl der Unbekannten um etwa 70 % erreichen kann, wenn man lokale Gitterverfeinerung einsetzt. Für dreidimensionale Strömungen ist daher mit einer Verringerung des Speicher- und Rechenaufwands um etwa eine Größenordnung zu rechnen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß das Strömungsfeld quantitativ bekannt ist und das strukturierte Gitter den Erfordernissen entsprechend erstellt wurde. In welchen Bereichen des Rechengebietes eine sehr gute Auflösung erforderlich ist, ist aber für dreidimensionale Strömungen nicht nur schwieriger vorherzusagen als für zwei-

dimensionale Strömungen, sondern mit Gittergeneratoren für strukturierte Gitter auch schwieriger zu realisieren. In diesem Fall ist sogar eine Reduktion des Rechenaufwands um mehr als eine Größenordnung zu erwarten.

Eine genauere Untersuchung von Fehlerindikatoren oder Fehlerschätzern ist aber auf jeden Fall notwendig, um zuverlässige Aussagen über die Qualität der Lösung bei adaptiver Gitterverfeinerung machen zu können.

6.2.2 Turbulente Strömung um ein Tragflügelprofil

Beim zweiten Beispiel handelt es sich um eine Strömung um ein NACA-4412 Tragflügelprofil bei einer Reynoldszahl von $Re = 1.52 \cdot 10^6$ bezogen auf die Profillänge. Im Gegensatz zur zuvor untersuchten Innenströmung ist hier die turbulente Grenzschicht sehr klein gegenüber der Größe des Rechengebiets, und Transition muß berücksichtigt werden, da in der Tragflügelanströmung praktisch keine Turbulenz auftritt. Der Anstellwinkel des Tragflügels beträgt $\alpha = 13.87^\circ$, für den im Experiment maximaler Auftrieb gemessen wurde [140]. Die Anströmmachzahl beträgt $Ma = 0.15$, somit ist eine Simulation dieser Konfiguration mit einem inkompressiblen Verfahren möglich, da Kompressibilitätseffekte noch keinen nennenswerten Einfluß haben.

Im Experiment wurden auf der Saugseite an Position $x/C = 0.025$ und an der Druckseite an Position $x/C = 0.103$ gezackte Klebestreifen angebracht, um den laminar-turbulenten Umschlag zu fixieren. Die Kenntnis der Transitionsposition ist äußerst vorteilhaft für die numerische Simulation, da man durch einfache Modifikationen an den Turbulenzmodellen den Ort dieser Umschlagspunkte in der Simulation festlegen kann. Verwendet man ein Zweigleichungs-Turbulenzmodell in der Standardformulierung zur Simulation des laminar-turbulenten Umschlags, so wird meistens der Umschlagpunkt viel zu weit vorne, also noch im laminaren Bereich, ermittelt [97]. Unterdrückt man den Produktionsterm $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ in den Transportgleichungen der Turbulenzgrößen (siehe Abschnitt 2.3.3), so verhindert man die Entstehung turbulenter kinetischer Energie und erhält somit auch keine Erhöhung der turbulenten Viskosität ν_t und die Strömung bleibt laminar. Für die hier untersuchte Profilmströmung wurde für den laminaren Bereich

$$P_k = \min\left(\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, c \rho \varepsilon\right) \quad (6.4)$$

mit $c = 1$ gefordert, damit der Quellterm in der k Transportgleichung nicht positiv werden kann. In einem schmalen Bereich (1 % Profiltiefe) um den im Experiment festgelegten Transitionspunkt wird der Parameter c in Gleichung 6.4 linear von 1 bis 20 erhöht. Im Gegensatz zu einer abrupten Erhöhung auf 20 ist dieser lineare Anstieg numerisch weniger problematisch. Das Maximum $c = 20$ dient zur Stabilisierung des Lösungsverfahrens zu Beginn der Iteration.

Wäre aus dem Experiment der genaue Transitionsbereich nicht bekannt, so kann vor allem dann eine falsche Bestimmung dieses Bereichs durch die Simulation einen entscheidenden Einfluß auf das gesamte Strömungsfeld haben, wenn dieser sich nicht sehr nahe an der Tragflügelspitze befindet. Es gibt zwar für die Zweigleichungs-Turbulenzmodelle einige

Ansätze zur Verbesserung der Bestimmung des Transitionspunkts, die jedoch oftmals aufwendig sind und nicht immer befriedigende Ergebnisse liefern [142, 143, 91].

6.2.2.1 Gittergenerierung

Bei der numerischen Simulation von turbulenten Tragflügelumströmungen müssen Grenzschichten aufgelöst werden, die selten eine Grenzschichtdicke δ von mehr als 20 % der Profillänge c erreichen. Um eine ausreichende Diskretisierungsgenauigkeit im Bereich der laminaren Unterschicht zu erhalten, müssen die wandnächsten Gitterpunkte ungefähr bei 0.1 % der Grenzschichtdicke liegen. Andererseits sollte der Rand des Rechengebiets etwa 20–30 Profillängen vom Tragflügel entfernt sein, um einen Einfluß der Ränder auf die Profilmströmung zu vermeiden. Daraus wird deutlich, daß im Rechengebiet Elemente mit sehr unterschiedlichen Größen und Längenverhältnissen auftreten. Bei der Simulation von Tragflügelumströmungen mit Eingitterverfahren werden daher spezielle Methoden für die Gittergenerierung eingesetzt, die dies berücksichtigen und einen glatten Übergang von Bereichen mit hoher Auflösung zu Bereichen mit sehr großen Elementen ermöglichen [144, 145, 146]. Je nach Gitteraufbau werden diese strukturierten Gitter als C-, O- oder H-Gitter bezeichnet. Eine weitere sehr vorteilhafte Eigenschaft dieser Gittertypen ist, daß alle vom Tragflügel wegführenden Gitterlinien in Wandnähe senkrecht zur Wand stehen und die entlang der Wand liegenden Gitterlinien weitgehend parallel zur Profiloberfläche geführt werden. Dies hat einen positiven Einfluß auf das Lösungsverhalten und die Approximation der Lösung, da die sehr langgestreckten Elemente in Stromrichtung ausgerichtet sind. Desweiteren bekommen die Darstellungen von c_p - und c_f -Verteilungen einen glatten Verlauf.

Der Einsatz der oben erwähnten Gittergenerierungsmethoden für Profilmströmungen für die in *UG* vom groben zum feinen Gitter aufgebauten Gitterhierarchien wäre nicht ohne weiteres möglich gewesen und somit immer ein Spezialfall geblieben. Mit dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen Gitterverfeinerungsalgorithmus und der zusätzlichen „orthogonalen“ Randelementverfeinerung (s. Abschnitt 5.3.1) ist es jedoch möglich, annähernd an die Qualität eines mit einem speziellen Gittergenerator erstellten Rechengitters heranzukommen. Auf der linken Seite von Abb. 6.7 ist das aus 108 Viereckselementen bestehende Grobgitter für die NACA 4412 Tragflügelumströmung dargestellt sowie ein Ausschnitt um das Profil. Jeweils rechts davon sieht man das dreimal uniform verfeinerte Gitter mit 6.912 Elementen.

6.2.2.2 Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle

Bei diesem Testfall sollen sowohl die numerischen Eigenschaften verschiedener Turbulenzmodelle untersucht werden, als auch die Simulationsergebnisse mit dem Experiment [140] verglichen werden. Die Startlösung für das Rechengitter mit etwa 28.000 Knoten wurde über eine geschachtelte Iteration mit jeweils 50 Zeitschritten pro Gitterebene berechnet. Als Aufwindverfahren für die Turbulenzgleichungen wurde MWS (s. Abschnitt 3.3.1) eingesetzt. Beim etwas genaueren LPS Aufwindverfahren traten Oszillationen am Grenzschichtrand auf, da dort die Werte der Turbulenzgrößen innerhalb weniger Elemente um

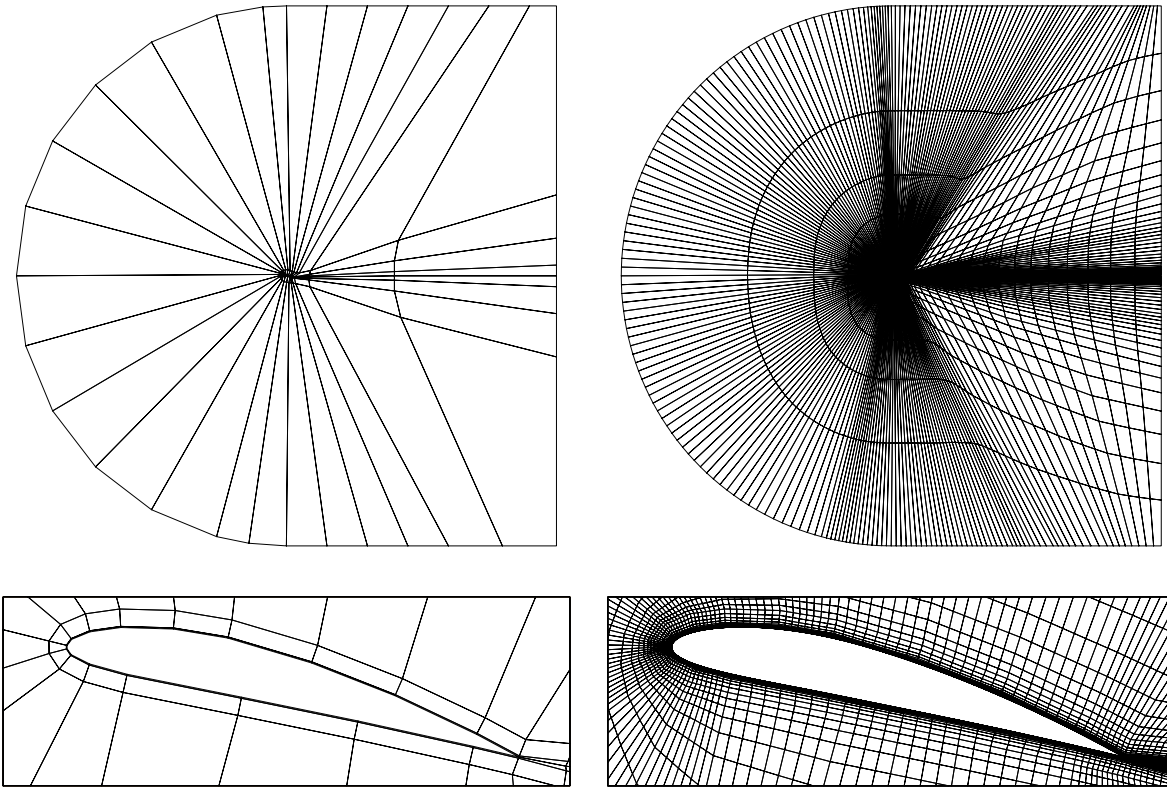


Abbildung 6.7. Grobgitter G0 mit 134 Knoten und Gitter G3 mit 7120 Knoten

mehrere Größenordnungen absinken. Außer für den Verlauf von k und ω am Grenzschicht-
rand wurden jedoch keine nennenswerten Unterschiede zwischen diesen beiden Aufwind-
verfahren festgestellt. Der Zeitschritt wurde konstant auf $\Delta t = 3 \cdot C/u_\infty$ gehalten, und
sowohl für die Turbulenzgleichungen als auch für die Navier-Stokes Gleichungen wurde
der Relaxationsparameter λ auf 0.4 gesetzt. Als Konvergenzkriterium wurde ein Residu-
um von $\|u\|/\Delta t < 10^{-5}$ gefordert. Untersucht wurden das Wilcox $k-\omega$ Modell [120], das
Chien $k-\varepsilon$ Modell [90], das Chen-Patel Zweischichten $k-\varepsilon$ Modell [93] und Menters SST-
 $k-\omega$ Modell [98]. In Tabelle 6.5 sind einige Ergebnisse der Simulationen aufgeführt, und
in Abb. 6.8 sind die Stromlinien um den Tragflügel dargestellt.

Tabelle 6.5. NACA-4412 Tragflügelumströmung: Auftriebsbeiwert c_a (Exp. $c_a \approx 1.66$), Wi-
derstandsbeiwert c_w und Beginn der Ablösung x_l (Exp. $x_l \approx 0.85 C$) für vier verschiedene
Turbulenzmodelle.

Turbulenzmodell	c_a	c_w	x_l	Zeitschritte
Chen-Patel $k-\varepsilon$ Modell	1.763	0.0209	-	132
Chien $k-\varepsilon$	1.735	0.0222	-	147
Wilcox $k-\omega$ Modell	1.791	0.0189	0.97 C	128
SST Modell	1.631	0.0241	0.86 C	133

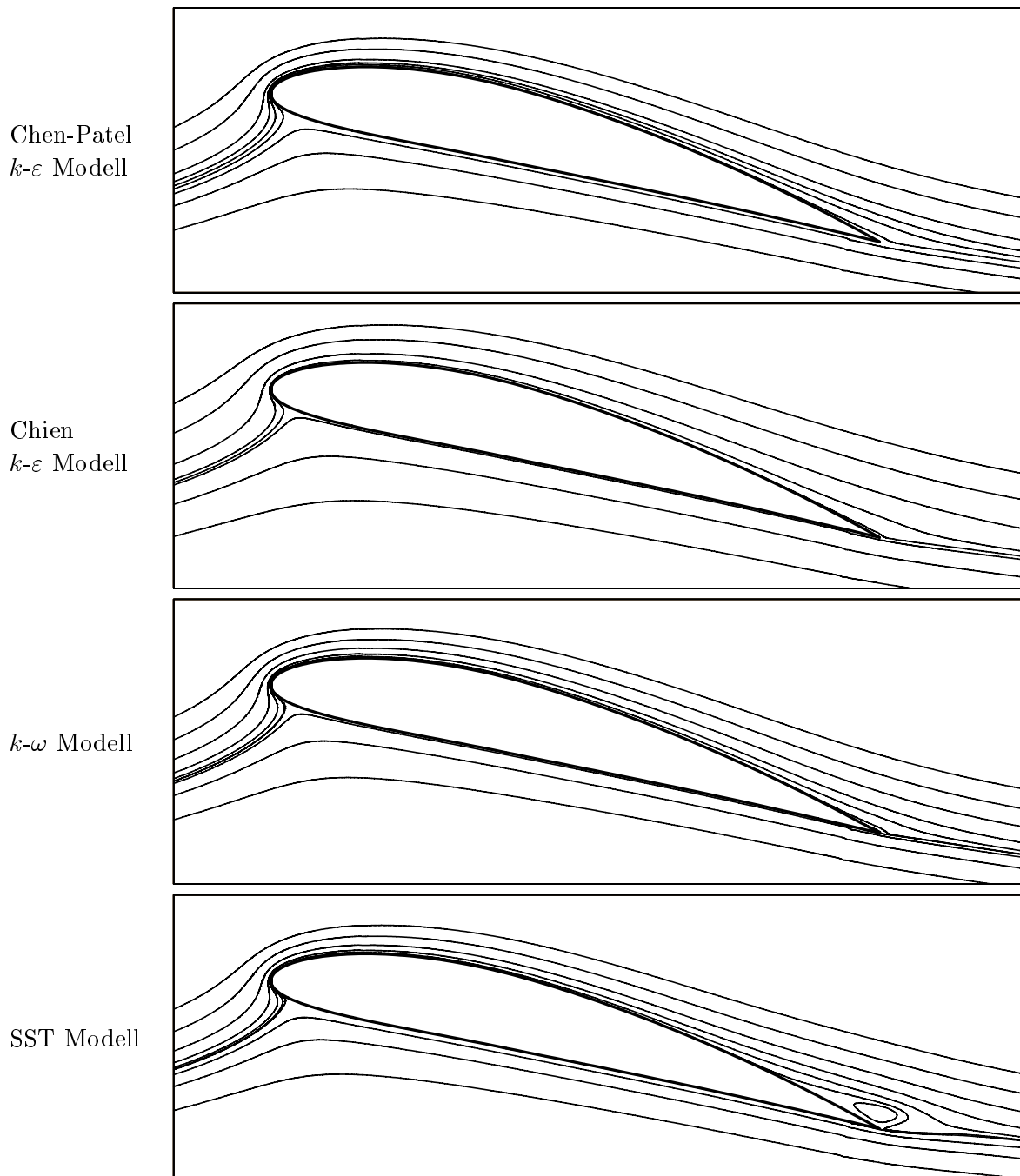


Abbildung 6.8. NACA-4412 Tragflügelumströmung: Stromlinienbilder für verschiedene Turbulenzmodelle gerechnet auf dem Gitter G4 (28.064 Knoten).

Das einzige Modell mit dem die Lage des Ablösepunktes zufriedenstellend bestimmt werden kann ist das SST Modell von Menter. Beim $k-\omega$ Modell tritt eine viel zu kleine Rezirkulationszone auf, und bei den beiden $k-\varepsilon$ Modellen wird überhaupt keine Ablösung simuliert. Auch der Auftriebsbeiwert wird mit dem SST Modell deutlich genauer als mit den anderen Modellen ermittelt. Vergleichbare Ergebnisse haben auch [98, 147, 148] er-

halten. Die Zahl der benötigten Zeitschritte differierten bei den untersuchten Turbulenzmodellen nur gering. Allein das Chien Turbulenzmodell verursachte, wie auch bei der Hügelströmung, Oszillationen im Konvergenzverlauf, die eine größere Zahl an Zeitschritten notwendig machten.

6.2.2.3 Rechenzeiten auf verschiedenen Gittern

Bei diesem Testfall wurde der Einfluß der Gitterfeinheit und die Zahl der Unbekannten auf die Konvergenzgeschwindigkeit untersucht. Es wurde ein uniform verfeinertes Gitter und drei adaptiv verfeinerte Gitter mit 17.000 bis 82.000 Knotenpunkten eingesetzt. Diese Simulationen wurden mit dem SST Turbulenzmodell durchgeführt, und als Zeitschritt wurde $\Delta t = 5 \cdot C/u_\infty$ gewählt. Startlösung war eine auf einem Gitter G3 mit 7.000 Knotenpunkten erhaltene Lösung. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.6 aufgeführt. Gitter G4adap ist aus dem Gitter G3 entstanden, indem alle Elemente zwischen zwei Stromlinien unter- und oberhalb des Tragflügels verfeinert wurden. G4 ist das uniform verfeinerte Gitter G3, G5adap (s. Abb. 6.9) ist das nochmals adaptiv verfeinerte Gitter G4adap, wobei als Indikator die turbulente kinetische Energie k in (5.5) eingesetzt wurde. Die Verteilung von k im Bereich der Hinterkante ist in Abb. 6.10 dargestellt. Das Gitter G5 ist wegen Speicherplatzbeschränkung das nicht vollständig uniform verfeinerte Gitter G4.

Aus den in Tabelle 6.6 aufgeführten Resultaten kann man folgende Aussagen treffen. Die Anzahl der Zeitschritte — also der nichtlinearen Iterationen — ist mit etwa 90 auf allen vier Gittern ungefähr gleich. Vergleicht man die Gesamtzahl der Mehrgitter V-Zyklen zur Lösung der linearen Gleichungssysteme für Navier-Stokes und Turbulenzgleichungen, so kann man unterschiedliches Verhalten feststellen. Bei den Turbulenzgleichungen ist nur eine leichte Erhöhung der Zahl der V-Zyklen abhängig von der Zahl der Unbekannten zu sehen. Dabei werden aber bei den uniform verfeinerten Gittern weniger Iterationen benötigt als bei den adaptiv verfeinerten. Für die Lösung des linearen Systems der Strömungsgleichungen ist jedoch ein deutlicher Anstieg der Iterationszahl zu erkennen. Die beim Einsatz von Mehrgitterverfahren gewünschte lineare Skalierung wird hier somit nicht erreicht. Mit ein Grund hierfür dürfte aber sicherlich auch der auf allen Gittern konstant gehaltene Zeitschritt sein, der bei kleineren Elementen auf ein steiferes Gleichungssystem führt. Dies scheint bei dem gekoppelten System der Navier-Stokes Gleichungen einen größeren Einfluß zu haben als beim ungekoppelten System der Turbulenzgleichungen.

Zu den Konvergenzeigenschaften auf lokal verfeinerten Gittern sollen an dieser Stelle noch einige Bemerkungen gemacht werden. Die in *UG* implementierte Mehrgitterhierarchie basiert auf einem konsistenten Grobgitter und auf durch sukzessive uniforme oder adaptive Verfeinerung entstehende Gitter. Die durch adaptive Verfeinerung entstehenden Gitter bedecken jedoch nicht das ganze Rechengebiet [149]. Da die Glättungseigenschaften des verwendeten ILU Verfahrens von der Reihenfolge abhängt, mit der die Knoten auf dem Gitter durchlaufen werden, verbessert eine den Strömungsverhältnissen angepaßte Knotennumerierung das Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens [138]. Im Rahmen eines Mehrgitter V-Zyklus wird der Defekt, angefangen vom feinsten Gitter, nacheinander auf allen Gittern geglättet. Bei der momentanen Implementierung des lokalen Mehrgitterverfahrens wird dementsprechend zuerst das feinste lokal verfeinerte Gitter

geglättet, das aber nicht das gesamte Rechengebiet abdeckt, und dann das darunterliegende Gitter. Auf diesem Gitter befinden sich wiederum Knoten, die zum Oberflächengitter gehören (s.a. Abschnitt 5.2) und der Defekt dieser Knoten wird somit erst *nach* dem Defekt auf dem feinsten Gitter geglättet. Eine über das *gesamte* Oberflächengitter größtenteils stromab laufende Glättungsiteration ist dabei nicht möglich. Die adaptive Gitterverfeinerung muß daher so gesteuert werden, daß relativ große zusammenhängende Gebiete lokaler Verfeinerung entstehen. Auf diesen Gebieten ist dann eine dem Problem angepaßte Numerierung möglich. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Mehrgitter-Konvergenzraten auf adaptiven Gittern mit wenigen und großen lokal verfeinerten Gebieten annähernd an die von uniform verfeinerten Gebieten herankommen. Gitter mit stark „zerklüfteten“ Gebieten machen dagegen eine Knotennumerierung notwendig, die den Glätter über das vollständige Oberflächengitter laufen läßt. Ansonsten ist der Rechenaufwand zur Lösung des linearen Systems für ein lokal verfeinertes Gitter größer als für ein uniform verfeinertes Gitter mit deutlich mehr Gitterpunkten. Da *UG* keine Knotennumerierung über das ganze Oberflächengitter erlaubt, muß der Verfeinerungsalgorithmus so ausgelegt werden, daß möglichst wenige und große verfeinerte Gebiete entstehen. Um dies zu erreichen wurde die adaptive Gitterverfeinerung bei den hier und in Abschnitt 6.2.1.3 beschriebenen Konfigurationen in zwei Schritten durchgeführt. Zuerst werden die Elemente aufgrund des Gradientenindikators zur Verfeinerung markiert. Anschließend werden die markierten Gebiete soweit vergrößert, daß aus mehreren benachbarten Gebieten ein zusammenhängendes Gebiet entsteht.

Tabelle 6.6. NACA-4412 Tragflügelumströmung: Anzahl der Zeitschritte $n_{\Delta t}$, der Mehrgitter V-Zyklen n_{it} für die Strömungs- und Turbulenzgleichungen und der berechnete Auftriebsbeiwert c_a für vier verschiedene uniform oder adaptiv verfeinerte Gitter.

Gitter	Knotenpunkte	$n_{\Delta t}$	n_{it}		c_a
			NavSt	Turb	
G4adap	17828	90	658	365	1.634
G4	28064	97	769	284	1.631
G5adap	31731	88	1021	441	1.640
G5	82161	84	1773	354	1.643

6.2.2.4 Einfluß des Zeitschritts und anderer Parameter auf das Konvergenzverhalten

Variation des Zeitschritts

Auf dem uniform verfeinerten Gitter G3 mit 7.000 Knotenpunkten wurden mit dem $k-\omega$ Modell Simulationen mit verschiedenen Zeitschritten durchgeführt. Als Konvergenzkriterium wurde gefordert, daß das Residuum für u , v und p kleiner als 10^{-5} sein soll. Die Konvergenzverläufe für Zeitschritte zwischen 1 und 100 sind in Abb. 6.11 einmal in Abhängigkeit der Zahl der Zeitschritte und einmal in Abhängigkeit von der Zahl der benötigten Mehrgitter V-Zyklen aufgetragen. Wie zu erwarten war, gibt es einen Bereich,

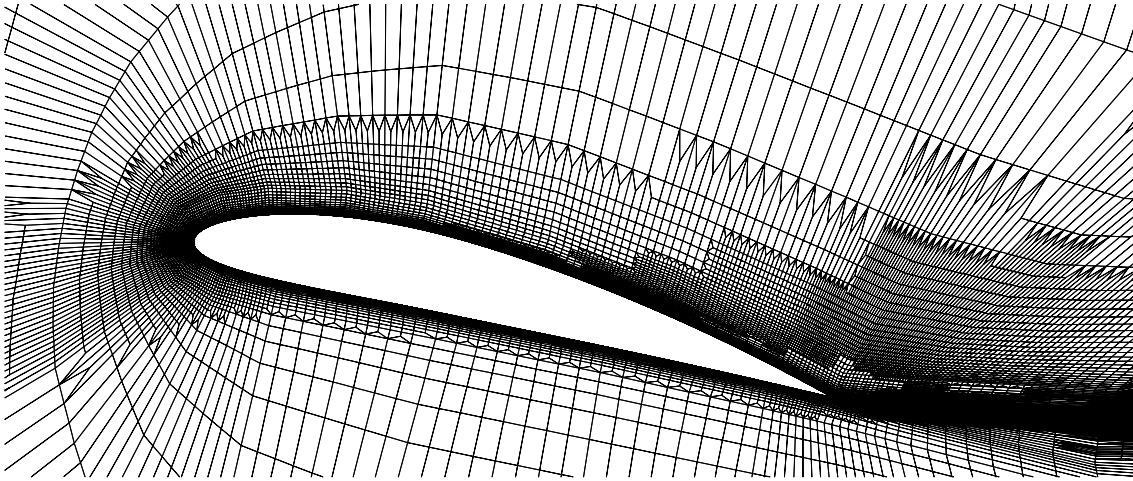


Abbildung 6.9. Ausschnitt des Gitters G5adap mit 31.731 Knoten. Bis Gitterebene 3 wurde uniform verfeinert, auf Gitterebene 4 sind alle Elemente zwischen zwei Stromlinien verfeinert und auf Gitterebene 5 wurden die Elemente bezüglich des Fehlers der turbulenten kinetischen Energie verfeinert.

in dem eine Verdopplung des Zeitschritts eine Halbierung der Zahl der benötigten Zeitschritte bewirkt ($1 < \Delta t < 4$) und einen Bereich bei dem eine starke Erhöhung des Zeitschritts nur eine geringe oder gar keine Verringerung der benötigten Zeitschritte bewirkt ($\Delta t > 10$). Überraschend ist jedoch, daß der Übergangsbereich sehr schmal ist und die Suche nach einem „optimalen“ Zeitschritt dadurch erschwert wird. Ferner ist aus Abb. 6.11 zu erkennen, daß eine Erhöhung des Zeitschritts auch die Zahl der linearen Iterationen pro Zeitschritt erhöht.

Vergleich mit stationärem Verfahren

Zusätzlich zum obigen Vergleich für verschiedene Zeitschritte wurde noch eine Simulation mit den stationären Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt. Die Ergebnisse sind ebenso in Abb. 6.11 aufgeführt und es ist aus den Konvergenzverläufen zu erkennen, daß diese den Konvergenzverläufen für sehr große Zeitschritte ($\Delta t = 100C/U_\infty$) entsprechen. In diesem Fall ist somit ein instationäres einem stationären Verfahren vorzuziehen, da bei der hier betrachteten Konfiguration sehr hohe Zeitschritte einen deutlichen Anstieg der Zahl der linearen Iterationen bewirken, ohne das nichtlineare Konvergenzverhalten zu verbessern. Ein weiterer Vergleich zwischen stationärem und instationärem Verfahren wurde für die Hügelströmung mit dem Chien $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell und dem Gitter G4 durchgeführt (s. Abschnitt 6.2.1.1). Hier zeigte sich, daß die stationäre Rechnung genausoviel nichtlineare Iterationen benötigt wie die instationäre, aber zur Lösung des linearen Systems der Navier-Stokes Gleichungen waren beim stationären Verfahren 30 % weniger Iterationen erforderlich. Ob ein stationäres oder instationäres Verfahren geeigneter zur Lösung des stationären Problems ist, ist sicherlich problemabhängig.

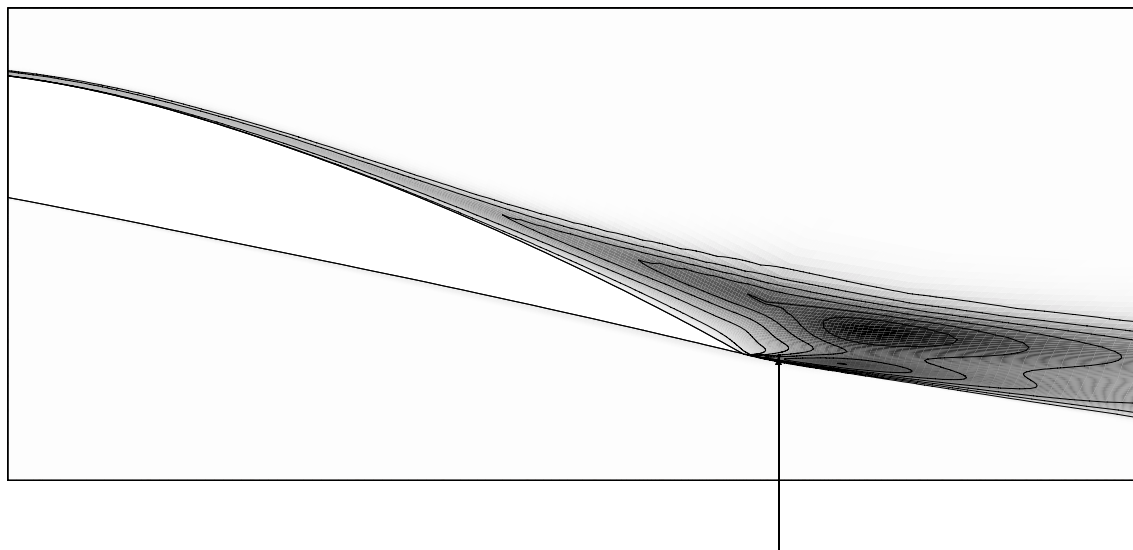


Abbildung 6.10. Turbulente kinetische Energie k im Bereich der Tragflügelhinterkante berechnet mit dem SST Turbulenzmodell. Der Pfeil zeigt die Position von k_{max} , das in Abschnitt 7.2.1 untersucht wird.

Variation von β beim ILU_{β} Glätter und Vergleich mit SSOR

Auf dem Gitter G4 (28.000 Knoten) wurde mit dem k - ω Modell der Einfluß verschiedener Einstellungen von β für den ILU_{β} Glätter (s. Abschnitt 4.1.3) untersucht, der bei der Lösung des gekoppelten Systems der Navier-Stokes Gleichungen eingesetzt wurde. Mehrere Rechnungen mit Variationen von β zwischen 0.4 und 1.0 für die Größen u , v und p ergaben Schwankungen für die Zahl der benötigten Mehrgitterzyklen im Bereich von 10%. Die Einstellung $\beta = 0.6$ für alle drei Größen hat sich mit geringem Abstand als am besten erwiesen. Wird β jedoch kleiner 0.4 gewählt, so geht die Zahl der linearen Iterationen deutlich in die Höhe und bei $\beta < 0.2$ divergierte das Mehrgitterverfahren. Die Einstellung $\beta = 0.2$ für u und v sowie $\beta = 1$ für p — das war die Standardeinstellung für die Hügelströmung — benötigte etwa 50% mehr lineare Iterationen als die eben erwähnten Tests mit $\beta \geq 0.4$.

Einige Testfälle wurden sowohl mit dem ILU Glätter als auch mit einem SSOR Glätter gerechnet. Schon für das Turbulenzgleichungssystem benötigte der SSOR Glätter die drei- bis vierfache Rechenzeit. Für die Navier-Stokes Gleichungen war der Unterschied teilweise noch größer oder es konnte gar keine Konvergenz des linearen Systems erhalten werden, was kleinere Zeitschritte notwendig machte.

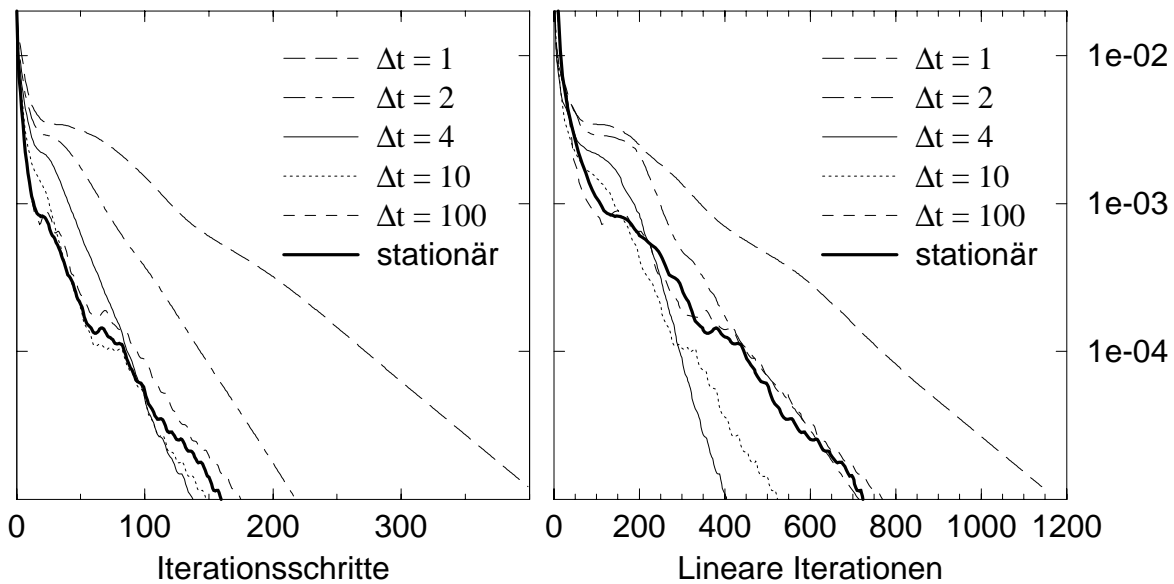


Abbildung 6.11. Konvergenzverläufe für verschiedene Zeitschritte und für die stationäre Diskretisierung abhängig von der Zahl der Iterationen (links) und der Zahl der Mehrgitter V-Zyklen (rechts).

Mehrgitterzyklus und Genauigkeit der linearen Lösung

Abgesehen von der Wahl des Glätters und der Prolongations- und Restriktionsoperationen können noch die Zahl der Vor- und Nachglättungsschritte ν_1 und ν_2 , die Art des Mehrgitterzyklus und die Anzahl der Gitter einen Einfluß auf die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens haben. Ergebnisse einiger Testrechnungen für verschiedene Einstellungen des Mehrgitterverfahrens sind in Abb 6.12 aufgeführt. Als Beispiel wurde wiederum die Tragflügelumströmung mit dem $k-\omega$ Turbulenzmodell auf dem Gitter G4 (28.000 Knoten) genommen.

Für schwer zu lösende lineare Gleichungssysteme kann die Verwendung eines W-Zyklus (s. Abb. 4.3) eine Reduktion der Mehrgitteriterationen bewirken. Bei den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen ist dies jedoch nicht der Fall, und ein W-Zyklus führt daher gegenüber einem V-Zyklus zu einer Erhöhung der Rechenzeit um 30-40 %, ohne jegliche Konvergenzverbesserung zu erreichen (s. Abb 6.12 Kurven A und B).

Die Zahl der Vor- und Nachglättungsiterationen haben direkte Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten des Mehrgitterlösers. Betrachtet man die Kurven A und C in Abb 6.12 so erkennt man, daß für $\nu_1 = \nu_2 = 1$ nur eine Erhöhung der linearen Iterationen um 60 % gegenüber $\nu_1 = \nu_2 = 2$ erfolgt ist. Es werden also 40 % weniger Glättungsiterationen gebraucht, dafür erhöht sich jedoch der Restriktions- und Prolongationsaufwand. In diesem Fall — und das gilt auch für die Turbulenzgleichungen — ist kein Unterschied bezüglich der Rechenzeit für die Gleichungslösung zu sehen. Eine Erhöhung der Glättungsiterationen auf $\nu_1 = \nu_2 = 3$ und mehr führt dagegen zu längeren Rechenzeiten.

Bekanntlich verbessert die Anzahl der Gitter die Konvergenzeigenschaften eines Mehrgitterverfahrens, es ist aber dennoch sinnvoll das größte Gitter nicht größer als erforderlichlich zu wählen. Solange ein direktes Lösungsverfahren mit geringem Rechenaufwand

das Gleichungssystem auf dem größten Gitter löst, führt ein noch größeres Gitter nur zu schlechterem Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens (siehe Kurven A und D in Abb. 6.12). Für 2D Strömungen sind daher Grobgitter mit 300 bis 600 Knotenpunkten eine sinnvolle Wahl.

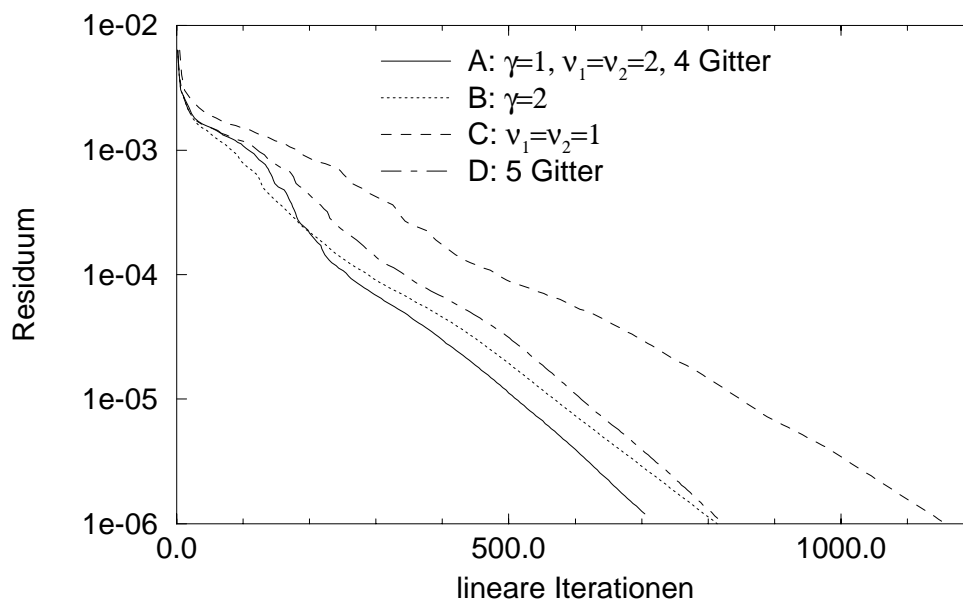


Abbildung 6.12. Konvergenzverläufe für verschiedene Einstellungen des Mehrgitterverfahrens abhängig von der Zahl der Mehrgitterzyklen. ν_1 und ν_2 geben die Zahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte an und γ den Mehrgitterzyklus ($\gamma = 1$ ist V-Zyklus, $\gamma = 2$ ist W-Zyklus).

Unabhängig von der Wahl des linearen Lösungsverfahrens ist der Parameter λ aus (4.47) und die gewünschte Genauigkeit der linearen Lösung. Da diese jedoch einen großen Einfluß auf die Konvergenz des nichtlinearen Systems haben, soll hier kurz darauf eingegangen werden. Da pro Zeitschritt die Navier-Stokes Gleichungen und Turbulenzgleichungen ungekoppelt (nacheinander) gelöst werden, ist eine Unterrelaxation der Korrektur gemäß (4.47) notwendig. Man ist selbstverständlich bestrebt, λ möglichst groß zu halten. Bei zu großen Werten führt dies jedoch zu sehr starken Oszillationen im Konvergenzverlauf. Bei der Tragflügelumströmung hat sich $\lambda = 0.6$ als maximal möglicher Wert herausgestellt. Das geforderte Konvergenzkriterium wurde jedoch mit nur unwesentlich weniger Zeitschritten erreicht als bei $\lambda = 0.4$. Erhöht man die gewünschte Defektreduktion der linearen Iteration, so ist zu erwarten, daß dies einen positiven Einfluß auf die nichtlineare Konvergenz hat. Mehrere Tests haben jedoch gezeigt, daß eine Reduktion des Defektes um eine Größenordnung bei den Navier-Stokes Gleichungen und um zwei Größenordnungen bei den Turbulenzgleichungen ausreichend ist. Der Mehraufwand an linearen Iterationen für größere Defektreduktionen ergibt keine Verringerung der Zeitschritte. In Abb. 6.13 ist die Entwicklung des Auftriebsbeiwertes während der Iteration für verschiedene Fälle dargestellt. Ab Zeitschritt 120 liegen die Kurven A, B und D praktisch übereinander (Rechnung A hat bei Zeitschritt 120 ein Residuum von 10^{-5}), während Kurve C diese Genauigkeit erst bei Zeitschritt 140 erreicht. Ist eine weniger hohe Genauigkeit erwünscht, so

sind die Kurven A und B deutlich besser als C und D. Bei C ist aufgrund der sehr niedrigen Defektreduktion pro linearer Iteration die Lösung noch nicht so weit fortgeschritten, wie bei den anderen Kurven und bei D treten anfangs starke Oszillationen auf.

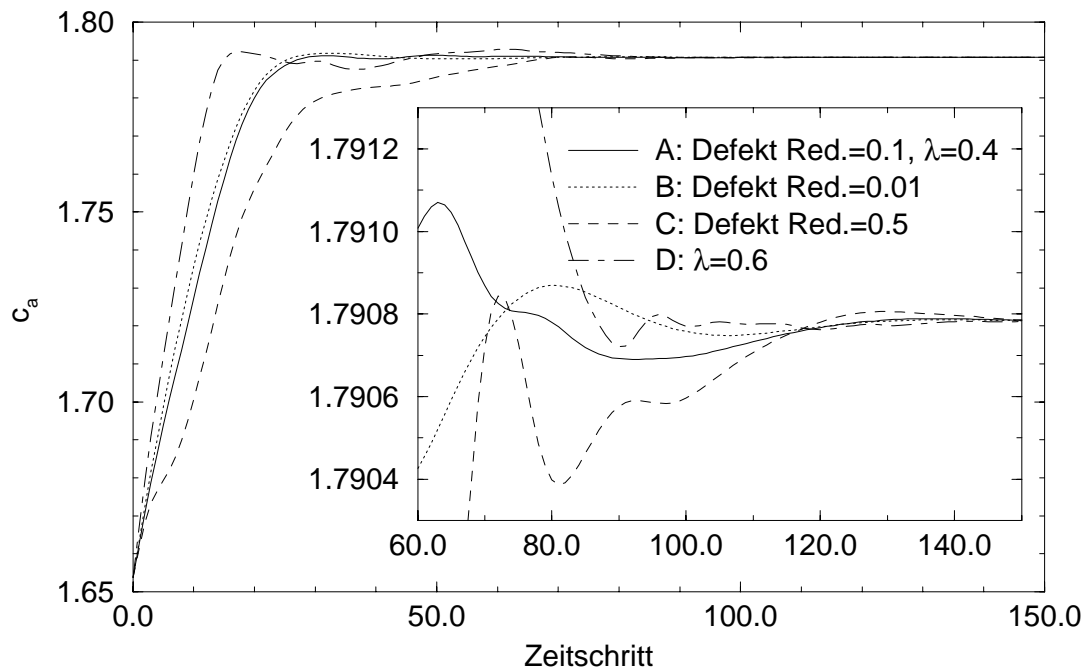


Abbildung 6.13. Zeitabhängige Entwicklung des Auftriebsbeiwertes für unterschiedliche Defektreduktionen des linearen Löser und Relaxationsparameter.

6.2.2.5 Vergleich verschiedener Lösungsverfahren

Bei den bisher beschriebenen numerischen Experimenten wurde als Lösungsverfahren für die linearisierten Gleichungssysteme ein BiCGSTAB Löser mit Mehrgittervorkonditionierung eingesetzt. Im folgenden sollen nun noch zwei andere Krylov-Unterraum Verfahren für nichtsymmetrische Matrizen als Beschleuniger für Mehrgitterverfahren eingesetzt werden. Diese sind das weit verbreitete GMRES-Verfahren [30] und das relativ neue BiCGSTAB(l) Verfahren [134], das man als eine Kombination aus BiCGSTAB und GMRES ansehen kann¹. Zusätzlich werden diese Verfahren noch mit zwei verschiedenen Eingitterverfahren verglichen, die aus BiCGSTAB oder BiCGSTAB(l) Beschleuniger und ILU_β Vorkonditionierer bestehen. Beim ILU_β Vorkonditionierer wurden die gleichen β Werte wie beim ILU_β Glätter im Mehrgitterverfahren verwendet. Alle fünf Lösungsverfahren wurden auf jeweils einem Gitter mit 7.000 und 28.000 Knotenpunkten gerechnet. Als Turbulenzmodell wurde das k - ω Modell gewählt und jeweils 100 Zeitschritte gerechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.7 aufgeführt. Betrachtet man die Zahlen für den Lösungsaufwand der Navier-Stokes Gleichungen, so ist deutlich zu erkennen, daß zum einen die Eingitterverfahren schon auf dem groben Gitter mehr Rechenzeit benötigen und

¹Bei den hier gezeigten Rechnungen wurde $l = 2$ gesetzt, da höhere Werte selbst für das nicht vorkonditionierte Verfahren selten eine Verbesserung bringen.

zum anderen der Anstieg der Rechenzeit bei einer Erhöhung der Zahl der Unbekannten deutlich über einem linearen Verlauf liegt. Bei den Lösungsverfahren mit Mehrgittervorkonditionierung wird zwar keine optimale Komplexität von $O(N)$ erreicht — Faktor vier für die Zahl der Unbekannten ergibt etwa Faktor 5.5 für die Rechenzeit des linearen Löser — aber der Unterschied zu den Eingitterverfahren ist dennoch klar zu erkennen. Bei den Turbulenzgleichungen sind dagegen keine großen Unterschiede zwischen Ein- und Mehrgittervorkonditionierung zu erkennen. Ein Vergleich der Krylov-Unterraum Methoden zeigt, daß in den meisten Fällen das BiCGSTAB-Verfahren etwa 30–40 % weniger Rechenzeit benötigt als GMRES oder BiCGSTAB(2). Nur in einem Fall (feines Gitter, BCGS2-ILU) konnte BiCGSTAB(2) gegenüber dem BiCGSTAB Verfahren zu einer Rechenzeitreduktion von 20 % führen.

Tabelle 6.7. Rechenzeiten zur Lösung der linearen Systeme der Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen für verschiedene Lösungsverfahren bezogen auf die Assemblierungszeit.

Gitter	BCGS-MG		BCGS2-MG		GMRES-MG		BCGS-ILU		BCGS2-ILU	
	NavSt	Turb	NavSt	Turb	NavSt	Turb	NavSt	Turb	NavSt	Turb
7.000 KP	2.2	1.3	3.2	2.2	3.5	1.8	8.5	1.3	8.7	1.6
28.000 KP	3.0	1.7	4.2	2.2	4.3	2.0	27.4	2.5	22.5	2.6

Bei den hier verwendeten relativ großen Zeitschritten konnte mit einem reinen Mehrgitterverfahren keine Lösung erhalten werden, da dieses nach wenigen Zeitschritten divergierte. Um dennoch einen Vergleich zwischen Mehrgitterverfahren und mit einem Krylov-Unterraum Löser beschleunigten Mehrgitterverfahren durchführen zu können, wurde der Zeitschritt auf ein Zehntel reduziert. Die in Tabelle 6.8 aufgeführten Ergebnisse zeigen, daß bei diesem Testfall eine BiCGSTAB Beschleunigung des Mehrgitterverfahrens für die Navier-Stokes Gleichungen etwa 10 % Rechenzeiterparnis zur Lösung der linearen Gleichungssysteme ermöglicht. Für die Turbulenzgleichungen ist keine Verbesserung erreicht worden.

Tabelle 6.8. Rechenzeiten zur Lösung der linearen Systeme der Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen für das lineare Mehrgitterverfahren und das BiCGSTAB beschleunigte Mehrgitterverfahren bezogen auf die Assemblierungszeit (kleine Zeitschritte).

Gitter	BCGS-MG		MG	
	NavSt	Turb	NavSt	Turb
7.000 KP	1.7	1.1	2.0	1.0
28.000 KP	2.3	1.5	2.6	1.4

Aus den hier und in Abschnitt 6.2.1.2 beschriebenen Beispielen und weiteren Vergleichsrechnungen kann man folgende Schlußfolgerungen ziehen. Der Mehraufwand für eine Beschleunigung des linearen Mehrgitterverfahrens mit einem Krylov-Unterraum Lösungsverfahren ist nur dann sinnvoll, wenn das Mehrgitterverfahren schlechte Konvergenzeigenschaften aufweist. Da ein ungünstiges Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens

oftmals nur durch wenige Punkte im Rechengebiet verursacht wird, kann ein Krylov-Unterraum Beschleuniger auch mit wenigen Iterationen schon eine deutliche Verbesserung ergeben. Von den hier untersuchten Krylov-Unterraum Verfahren ist das BiCGSTAB Verfahren [31] als Beschleuniger für ein lineares Mehrgitterverfahren zu empfehlen. Im Vergleich zum GMRES Verfahren [30] ist es auch einfacher zu implementieren. Der Einsatz eines BiCGSTAB(l) Verfahrens [134] hat sich nur bei extrem ungünstigen linearen Gleichungssystemen — wenn zum Beispiel der Zeitschritt zu groß gewählt wurde — als vorteilhaft erwiesen. Bei Eingitter-Vorkonditionierungsmethoden ist bei größeren Knotenzahlen eine Verbesserung gegenüber dem BiCGSTAB Verfahren in einigen Fällen möglich.

Die hier präsentierten Rechnungen und auch [137] zeigen, daß die Zahl der Unbekannten allein nicht dafür ausschlaggebend ist, ob der Einsatz von Mehrgitterverfahren zu geringen oder großen Rechenzeiteinsparungen beim Lösen linearer Gleichungssysteme gegenüber einem Eingitterverfahren führt. Vielmehr ist die Komplexität des Problems dafür verantwortlich, ob ein Mehrgitterverfahren bei zum Beispiel 10.000 oder 100.000 Knotenpunkten deutlich schneller als ein Eingitterverfahren konvergiert.

7 Simulation mit einem Newton-Verfahren

Bei den in Kapitel 6 gezeigten numerischen Simulationen zweier turbulenter Strömungen erfolgte die Linearisierung der beiden nichtlinearen Gleichungssysteme (Strömung und Turbulenz) über ein Quasi-Newton Verfahren, indem die Jacobi-Matrix aus (4.43) mit

$$\frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{A}^0 \cdot \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^0 \quad (7.1)$$

vereinfacht wurde. Wie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben wurde, kann die Jacobi-Matrix $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ mit Hilfe der numerischen Differentiation berechnet werden und somit ein „richtiges“ Newton-Verfahren zur Berechnung der nichtlinearen Gleichungen verwendet werden. Da aber die Strömungs- und Turbulenzgleichungen entkoppelt, also nacheinander, berechnet werden, ist jedoch eine nichtlineare Berechnung des Gesamtsystems Strömung-Turbulenz nicht möglich. Im folgenden soll nun untersucht werden, welche Eigenschaften ein Newton-Verfahren, jeweils angewandt auf die Strömungs- und Turbulenzgleichungen, im Vergleich zu einer Fixpunktiteration hat. Dabei sollen zuerst Untersuchungen an einem laminaren Testfall durchgeführt werden und anschließend die in Abschnitt 6.2 beschriebenen turbulenten Strömungen mit Kombinationen von Newton- und Fixpunktiteration simuliert werden.

7.1 Laminare Strömungen

Anhand der einfachen Konfiguration einer rückwärts gerichteten Stufe (s. Abb. 7.1) soll untersucht werden, welche Konvergenzbeschleunigungen mit Hilfe des in Kapitel 4.4.3 beschriebenen Newton-Verfahrens möglich sind. Zwei Fälle mit den Reynoldszahlen 300 und 1000 sollen berücksichtigt werden. Die Reynoldszahl $Re = \bar{U}D/\nu$ bezieht sich auf den hydraulischen Durchmesser $D = 2h$ des Einlaufes und auf die mittlere Einströmgeschwindigkeit \bar{U} . Für $Re = 300$ bildet sich eine Rezirkulationszone hinter der Stufe aus und für $Re = 1000$ noch zusätzlich eine zweite an der Oberseite des Kanals (s. Abb. 7.1). Experimentelle Untersuchungen von [150] zeigten, daß für diese Konfiguration Transition bei $Re \approx 1200$ beginnt. Als Einlaufprofil wird eine voll entwickelte Kanalströmung mit $U_{max} = 1.5 \bar{U}$ angenommen. Die Länge des Kanals nach der Stufe beträgt $10h$ für $Re = 300$ und $30h$ für $Re = 1000$.

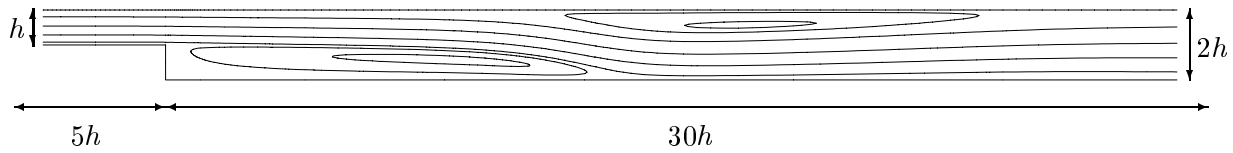


Abbildung 7.1. Ausschnitt des Stromlinienverlaufs für eine rückwärts gerichtete Stufe bei $Re = 1000$. Zusätzlich sind die Maße des Rechengebiets angegeben.

7.1.1 Stufe mit $Re = 300$

Untersucht wurde bei diesem einfachen Testfall der Unterschied zwischen Fixpunktiteration und Newton-Verfahren für die stationäre Navier-Stokes Diskretisierung. Alle Simulationen wurden solange durchgeführt bis das Residuum des Lösungsvektors sich um 5 Größenordnungen gegenüber dem Startresiduum verringert hat. Es wurde ein Gitter mit 6849 Knoten verwendet, das für diese niedrige Reynoldszahl ausreichend fein ist, um eine gitterunabhängige Lösung zu erhalten. Die mit „Diskr. 1“ bezeichneten Kurven in Abbildung 7.2 zeigen den Konvergenzverlauf von u für die in Kapitel 3 vorgestellte Diskretisierung jeweils für die Fixpunkt- und Newton-Iteration. Aus den Ergebnissen kann man erkennen, daß bessere Konvergenzraten beim Newton-Verfahren möglich sind, diese aber erst dann eine spürbare Rechenzeitersparnis bringen, wenn man ein genaues Ergebnis anstrebt (hier: ab Iterationsschritt 5). Für den hier beschriebenen Fall ist ein Rechenzeitgewinn von etwa 50 % erreicht worden.

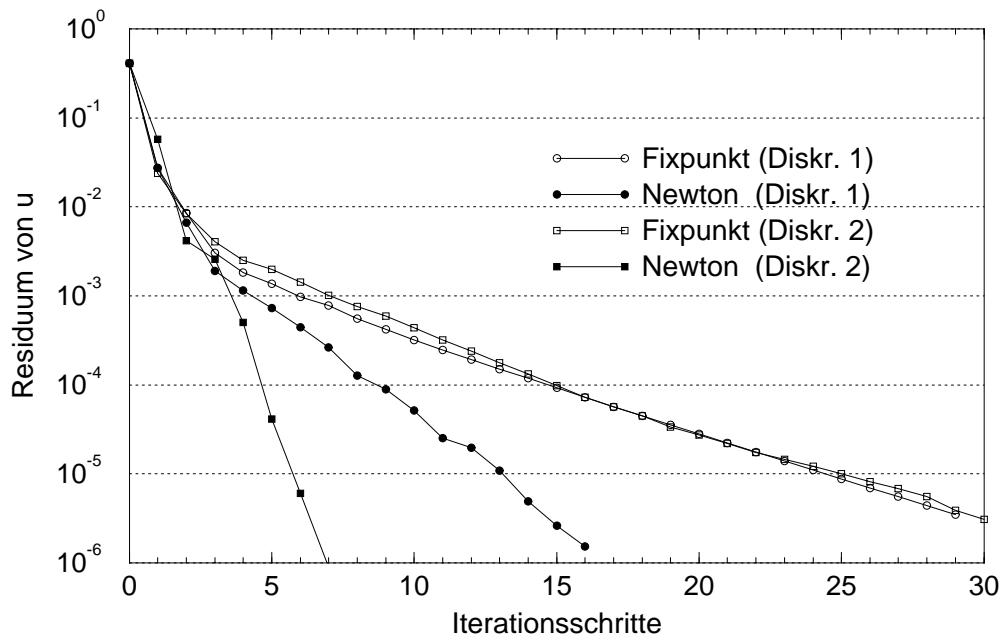


Abbildung 7.2. Stufe mit $Re = 300$: Konvergenzverläufe für Fixpunkt- und Newton-Iteration für zwei unterschiedliche Diskretisierungen.

Wie auch Untersuchungen für andere Testfälle gezeigt haben, sind beim Newton-Verfahren

für die hier verwendete Diskretisierung keine nichtlinearen Konvergenzraten unter 0.5 möglich. Das ist damit zu erklären, daß sowohl für den PAC-Term des Aufwindverfahrens (s. Abschnitt 3.3.1) als auch für den mittleren Druckgradienten $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{ip}^0$ in (3.26) die Lösung des vorangegangenen Iterationsschrittes eingesetzt wird. Somit hat man kein vollständig implizites Verfahren, welches noch bessere Konvergenzraten ergeben könnte. Verwendet man nun eine Diskretisierung, die eine voll implizite Behandlung aller Terme erlaubt, so sollten noch weitaus bessere Konvergenzraten erreichbar sein. Dies wurde anhand einer anderen in *UG* implementierten Diskretisierung untersucht. Diese von [151] vorgeschlagene verbesserte Version der Diskretisierung von [23] beruht — wie auch die in Kapitel 3 beschriebene Diskretisierung — auf einer gekoppelten Behandlung der Navier-Stokes Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung. Die Integrationspunktgeschwindigkeiten werden über eine angenäherte Finite Differenzen Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen innerhalb eines Elementes bestimmt. Hierzu werden pro Element zwei Gleichungssysteme gelöst, die eine Kopplung der Integrationspunktgeschwindigkeiten mit den Strömungsgrößen an den Elementknoten herstellen. Somit werden keine Informationen außerhalb des Elementes benötigt, womit explizite Terme vermieden werden können. Die Konvergenzverläufe, die mit dieser Diskretisierung ermittelt worden sind, sind auch in Abb. 7.2 dargestellt und mit „Diskr. 2“ bezeichnet. Betrachtet man die Konvergenzraten für den Bereich des Residuums von 10^{-3} bis 10^{-6} , so steht der Konvergenzrate für die Fixpunktiteration von 0.8 eine Konvergenzrate von 0.15 für die Newton-Iteration gegenüber. Dies entspricht ungefähr einem Rechenzeitverhältnis von 8:1. Im Vergleich der beiden untersuchten Diskretisierungen erkennt man somit deutlich, daß ein Newton-Verfahren gegenüber einer Fixpunktiteration vor allem bei einer voll impliziten Diskretisierung eine erhebliche Konvergenzbeschleunigung bewirken kann. Es muß jedoch vorausgesetzt werden, daß das Lösen des linearen Gleichungssystems nicht deutlich schwieriger wird.

7.1.2 Stufe mit $Re = 1000$

Dieses zweite Beispiel zeigt deutlich, welchen Einfluß die Reynoldszahl auf das Konvergenzverhalten schon bei einer so simplen Konfiguration wie die rückwärts gerichtete Stufe hat. Dadurch, daß bei einer Reynoldszahl von 1000 zusätzlich zur Rezirkulationszone hinter der Stufe eine zweite kleine Rezirkulationszone an der Kanaloberseite auftritt (s. Abb.7.1), wird das Strömungsfeld gegenüber einer Stufenströmung mit $Re < 400$ etwas aufwendiger. Darüberhinaus bewirkt der höhere Konvektionsanteil in den Navier-Stokes Gleichungen eine stärkere Nichtlinearität des Gleichungssystems. Das verwendete Rechengitter hat 14.129 Knotenpunkte, und es wurde das gleiche Abbruchkriterium wie beim vorhergehenden Beispiel verwendet.

Bei einer Reynoldszahl von 300 war sowohl bei der Fixpunktiteration als auch bei der Newton-Iteration keine Unterrelaxation notwendig, und es konnte nach jeder Iteration die volle Korrektur auf die letzte Iterierte hinzuaddiert werden. Bei $Re = 1000$ führte das aber zur Divergenz des Newton-Verfahrens. Um ein Divergieren des Iterationsverfahrens während der ersten Iterationsschritte zu verhindern, muß eine geeignete Dämpfung gefunden werden. Diese kann nun darin bestehen, daß man entweder bei den ersten oder bei allen Iterationsschritten unterrelaxiert. Im hier beschriebenen Beispiel war ein Relaxati-

onsfaktor von 0.5 notwendig. Wendet man diesen Wert auf die gesamte Iteration an, so hat dies einen ungünstigen Einfluß auf das Gesamtkonvergenzverhalten. Man wird daher bestrebt sein, diesen Wert im Laufe der Iteration auf 1.0 zu setzen. Ab welchem Iterationsschritt der Relaxationsfaktor hochgesetzt werden kann, ist nur durch Ausprobieren zu ermitteln und daher sicher keine empfehlenswerte Vorgehensweise.

7.1.2.1 Gewichtungsfunktion für Fixpunkt- und Newton-Iteration

Es wurde daher ein anderer Ansatz entwickelt. Da das in Abschnitt 4.4.3 beschriebene Newton-Verfahren mit Hilfe des Parameters λ in (4.63) zwischen Fixpunktiteration und Newton-Iteration gewichtet werden kann, bietet es sich an, die Simulation mit der Fixpunktiteration zu beginnen und dann einen möglichst fließenden Übergang zur Newton-Iteration durchzuführen. Eine vom Residuum abhängige Funktion eignet sich hierbei als Steuergröße für den Parameter λ . Die gesuchte Funktion wird also oberhalb eines festzulegenden Residuums den Wert 0 annehmen, darunter im Bereich eines bestimmten Intervalls auf 1 ansteigen und dann diesen Wert beibehalten. Um eine solche Funktion möglichst konfigurationsunabhängig bestimmen zu können, muß eine geeignete Normierungsgröße gefunden werden. Dies könnte zum Beispiel das Residuum R^1 zu Beginn der Simulation sein. Es wird somit folgende Funktion zur Berechnung von λ vorgeschlagen:

$$\lambda(R) = \begin{cases} 0 & : R > \tilde{R} \\ -\frac{1}{C} \lg(R/\tilde{R}) & : 10^{-C} \tilde{R} < R < \tilde{R} \\ 1 & : R < 10^{-C} \tilde{R} \end{cases} \quad (7.2)$$

Die Parameter \tilde{R} und C in (7.2) geben somit den Bereich an, in dem λ zwischen Fixpunktiteration und Newton-Iteration wichtet. Liegt das Residuum R oberhalb von \tilde{R} , wird mit Fixpunktiteration gerechnet, und ist das Residuum um C Größenordnungen kleiner als \tilde{R} wird mit dem vollen Newton-Verfahren gerechnet. In Abbildung 7.3 ist dargestellt wie sich der Einsatz einer solchen Gewichtungsfunktion auswirkt. Kurve (a) zeigt den Konvergenzverlauf für die Fixpunktiteration, Kurve (b) den Verlauf für das Newtonverfahren mit konstantem $\lambda = 0.5$ für die ersten 10 Schritte und mit $\lambda = 1$ für die übrigen Iterationsschritte. In Kurve (c) wurde λ aus (7.2) mit $C = 2.5$ und $\tilde{R} = 0.5R_{start}$ berechnet. Welche Werte hierbei λ annimmt kann Kurve (d) entnommen werden. Es ist dabei deutlich zu erkennen, daß das in Abhängigkeit vom Residuum berechnete λ einen weitaus glatteren Konvergenzverlauf ermöglicht (Kurve c) als eine durch Ausprobieren erhaltene stückweise stetige Funktion (Kurve b; 10 Schritte $\lambda = 0.5$, 20 Schritte $\lambda = 1$).

7.1.2.2 Vergleich für stationäre und instationäre Navier-Stokes Gleichungen

In Abbildung 7.4 sind mehrere Konvergenzverläufe für die Fixpunktiteration und die Newton-Iteration dargestellt. Betrachtet man die Kurven für die Diskretisierung der stationären Navier-Stokes Gleichungen, erkennt man, daß man für die Fixpunktiteration etwa viermal so viel Iterationsschritte benötigt wie für die Newton-Iteration. Interessant ist

¹In diesem Fall ist die Euklidnorm des Residuums gemeint $R = \|\mathbf{r}\|_2$.

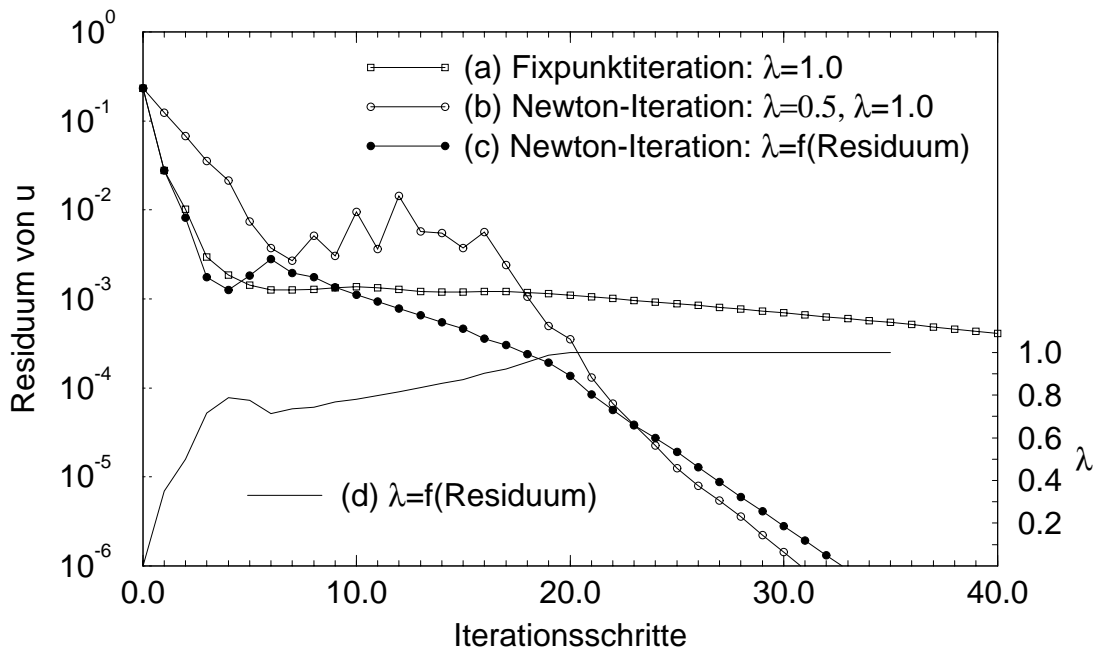


Abbildung 7.3. Stufe mit $Re = 1000$: Konvergenzverläufe für Gitter mit 14.129 Knotenpunkten: (a) Fixpunktiteration, (b) Newton-Iteration mit $\lambda = 0.5$ für Iterationsschritt ≤ 10 und sonst $\lambda = 1$, (c) Newton-Iteration mit $\lambda = \min(1, -\frac{1}{2.5} \lg(R/0.1))$ (d)

hierbei, daß das Newton-Verfahren auf dem feinen Gitter (55.905 KP) besser konvergiert als auf dem Gitter mit 14.129 Knotenpunkten. Wenn man eine mittlere Konvergenzrate für den Bereich des Residuums zwischen 10^{-4} und 10^{-6} berechnet, so ergibt sich auf dem feinen Gitter eine Konvergenzrate von 0.57 und auf dem gröberen 0.7. Bei der Fixpunktiteration erhält man in beiden Fällen eine mittlere Konvergenzrate von 0.94.

Desweiteren wurden Vergleiche für die instationären Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt. Bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 100$ erhält man genau den gleichen Konvergenzverlauf wie für die stationären Gleichungen. Aus den Konvergenzverläufen für einen Zeitschritt von $\Delta t = 10$ (s. Abb. 7.4) wird der höhere Rechenaufwand gegenüber dem stationären Verfahren deutlich. Interessant ist hierbei, daß für die Fixpunktiteration der Aufwand um etwa 20% steigt, beim Newton-Verfahren jedoch um 80%. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der letzte Term in (3.26) bei einem kleineren Zeitschritt mehr an Einfluß gewinnt und somit auch der explizite Anteil in der Druckgleichung (3.25).

7.1.2.3 Newton-Verfahren mit geschachtelter Iteration

Ist man nur an der Lösung eines stationären Strömungsfeldes interessiert, so ist es sinnvoll eine sogenannte geschachtelte Iteration durchzuführen, um eine gute Startlösung auf dem feinsten Gitter zu erhalten. Man beginnt auf einem groben Gitter mit einer einfachen Anfangsbedingung, rechnet darauf einige Iterationen verfeinert dann das Gitter

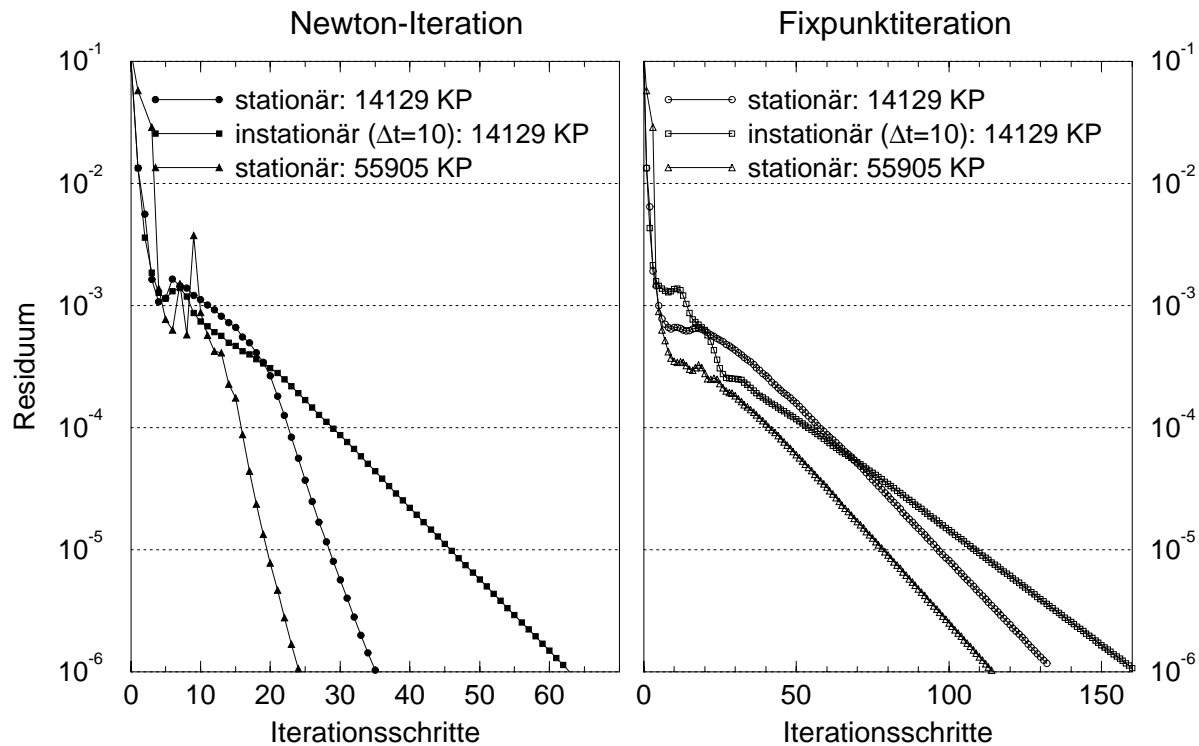


Abbildung 7.4. Stufe mit $Re = 1000$: Konvergenzverläufe für Newton- und Fixpunktiteration.

und interpoliert die Lösung des groben Gitters auf das feine Gitter und erhält somit eine deutlich bessere Startlösung. Diese Vorgehensweise kann sich über mehrere Gitterebenen erstrecken. Je nach Komplexität des Gebietes und Konvergenzverhalten des Iterationsverfahrens ist es sinnvoll auf den unteren Gitterebenen möglichst stabile Aufwindverfahren auf Kosten der Genauigkeit einzusetzen und erst auf den feinsten Gitterebenen Aufwindverfahren höherer Ordnung (LPS mit PAC-Term, s. Abschnitt 3.3.1) zu verwenden.

Die in Abschnitt 7.1.2.1 vorgeschlagene Gewichtungsfunktion ermöglicht nun auch den Einsatz eines Newton-Verfahrens bei einer geschachtelten Iteration. Da das Newton-Verfahren im Vergleich zur Fixpunktiteration vor allem auf groben Gittern weitaus instabiler ist, kann es selbst mit sehr starker Dämpfung der Korrektur in den meisten Fällen auf groben Gittern nicht eingesetzt werden. Mit Hilfe der Gewichtungsfunktion (7.2) kann nun der Newton-Anteil langsam erhöht werden. In Abbildung 7.5 ist ein Vergleich der Konvergenzverläufe der stationären Navier-Stokes Gleichungen für das Newton-Verfahren und die Fixpunktiteration für die schon im vorhergehenden Abschnitt beschriebene rückwärts gerichtete Stufe mit $Re = 1000$ dargestellt. Zusätzlich wird noch der Verlauf von λ gezeigt. Aus dieser Kurve kann man erkennen, daß schon auf der zweiten Gitterebene nach einigen Iterationen das volle Newton-Verfahren eingesetzt werden kann. Die geschachtelte Iteration wurde mit 10 Schritten pro Gitterebene beim Newton-Verfahren durchgeführt und auf dem feinsten Gitter waren dann nur noch 16 Schritte notwendig, um das Abbruchkriterium zu erreichen. Für die Rechnung mit Fixpunktiteration wurden 30 Iterationsschritte auf den unteren Gitterebenen durchgeführt, um eine gute Startlösung auf dem feinsten

Gitter zu erlangen, auf dem dann noch 78 Schritte gerechnet wurden (eine weitere Rechnung mit 40 Iterationsschritten auf den unteren Gitterebenen erforderte noch 43 Schritte auf dem feinsten Gitter). Aus diesen Vergleichen ist zu erkennen, daß auch für die geschachtelte Iteration der Unterschied in der Rechenzeit zwischen Fixpunktiteration und Newton-Verfahren bei einem Faktor von 3-4 liegt. Bei allen hier beschriebenen Rechnungen war der Aufwand zur Lösung der linearen Gleichungssysteme beim Newton-Verfahren nicht mehr als 20% größer als bei der Fixpunktiteration.

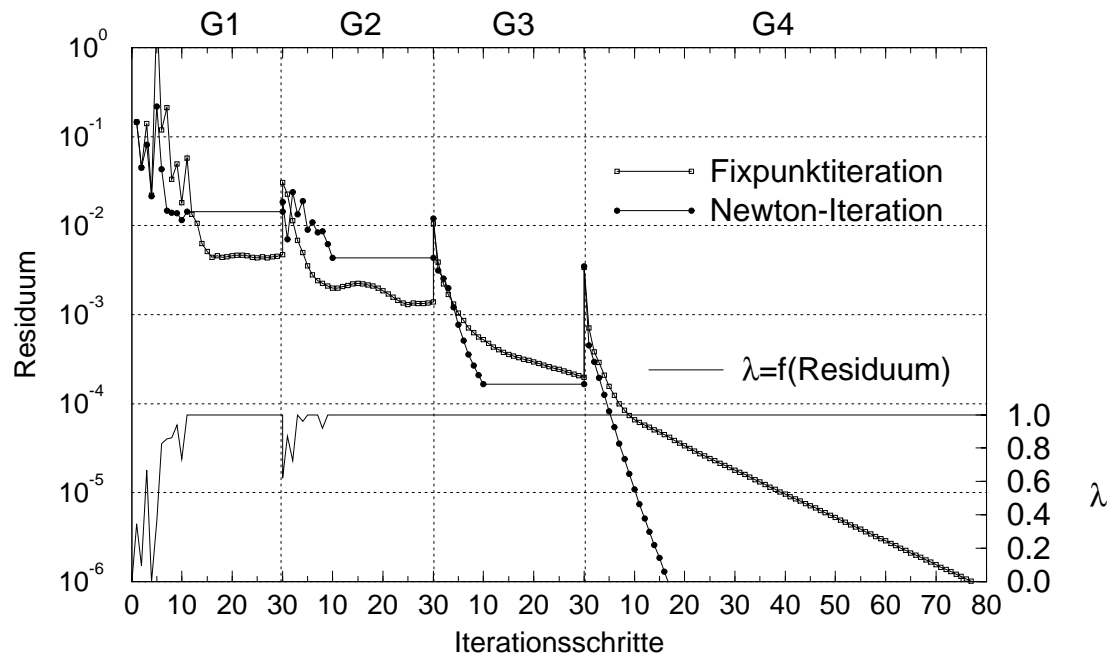


Abbildung 7.5. Stufe mit $Re = 1000$: Konvergenzverläufe für geschachtelte Iteration mit Fixpunkt- und Newton-Iteration. Das oberste Gitter G4 hat 14129 Knotenpunkte.

7.2 Turbulente Strömungen

Im vorangegangenen Abschnitt 7.1 wurde gezeigt, wie ein Newton-Verfahren zur nichtlinearen Iteration der Strömungsgleichungen eingesetzt werden kann. Dies soll nun auch für die Turbulenzgleichungen anhand eines konstruierten Beispiels untersucht werden. Es wird ein konstantes Geschwindigkeitsfeld vorgegeben und allein das Konvergenzverhalten der Turbulenzgleichungen betrachtet. Anschließend werden am Beispiel einiger in Abschnitt 6.2 beschriebener Testfälle Simulationen mit verschiedenen Kombinationen von Newton- und Fixpunktverfahren für die Strömungs- und Turbulenzgleichungen gezeigt.

7.2.1 Newton-Verfahren für die Turbulenztransportgleichungen

Die Linearisierung der Turbulenztransportgleichung wurde durchgeführt, indem die Terme Γ_{eff} , Q^+ und Q^- in (4.50) aus den Werten der vorhergehenden Iteration berechnet wurden. Mit Hilfe der numerischen Differentiation lassen sich für diese Terme verschiedene Möglichkeiten der Linearisierung relativ einfach realisieren. Es soll nun näher untersucht werden, welche Auswirkungen dies auf das Konvergenzverhalten der Turbulenzgleichungen hat. Es wird die Konfiguration von Abschnitt 6.2.1.3 (Gitter G4-uni) für eine 2D Hügelströmung verwendet, indem die konvergierte Lösung des Geschwindigkeitsfeldes während der gesamten Simulation als gegeben betrachtet wird und für die Turbulenzgrößen als Startlösung ein uniformes Turbulenzfeld gesetzt wird. Es werden dann die instationären Turbulenzgleichungen gelöst bis ein bestimmtes Konvergenzkriterium (Residuum von $k < 10^{-5}$) erfüllt ist. Als Turbulenzmodell wird das Chien k - ε Modell eingesetzt, der Zeitschritt beträgt $\Delta t = 10.7h/U_0$ und λ aus (4.47) wird auf 0.5 gesetzt. Folgende Linearisierungen werden untersucht:

Fall 1: Fixpunktiteration

Fall 2: Diffusionsterme gekoppelt, Quellterme linearisiert

Fall 3: Diffusionsterme linearisiert, negative Quellterme gekoppelt

Fall 4: Diffusionsterme gekoppelt, negative Quellterme gekoppelt

Fall 5: Diffusionsterme linearisiert, positive und negative Quellterme gekoppelt

Fall 6: Diffusionsterme gekoppelt, positive und negative Quellterme gekoppelt

Ziel dieser ausführlichen Untersuchung ist es, einen Anhaltspunkt zu bekommen, inwieweit die nichtlineare Behandlung der einzelnen Terme eine Konvergenzverbesserung gegenüber der Fixpunktiteration ergibt und welche Auswirkungen diese Terme auf die Stabilität des Verfahrens haben. Optimal ist Fall 6 (voll gekoppelte Iteration) bei dem die besten Konvergenzeigenschaften zu erwarten sind. In Abb. 7.6 sind die Konvergenzverläufe für die turbulente kinetische Energie k für diese fünf verschiedenen Fälle aufgetragen. Wie zu erwarten war, ist die Konvergenzgeschwindigkeit für das voll gekoppelte Newton-Verfahren deutlich höher als für die Fixpunktiteration. Es fällt auf, daß beim Newton-Verfahren überhaupt keine Oszillationen im Konvergenzverlauf zu erkennen sind, während bei der Fixpunktiteration Oszillationen mit fast konstanter Frequenz zu verzeichnen sind. Bemerkenswert ist die Verdopplung der Konvergenzgeschwindigkeit der Fixpunktiteration, die durch eine nichtlineare Behandlung des Diffusionskoeffizienten erreicht wird (Fall 2). Dahingegen scheint bei einer nichtlinearen Behandlung der Quellterme der Einfluß der Nichtlinearität des Diffusionsterms $\Gamma_{\text{eff}}(k, \varepsilon)$ von untergeordneter Bedeutung zu sein (Fall 5, Fall 6). Als interessante Alternative zur Fixpunktiteration kann Fall 4 angesehen werden, bei dem, wie bei der Fixpunktiteration, die positiven Quellterme auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehen, um möglichst M-Matrix Eigenschaften zu erhalten. Werden die Diffusionsterme dabei jedoch linearisiert (Fall 3), wird die Konvergenzgeschwindigkeit

wieder niedriger. Bei den Fällen 1 bis 4 ist es nicht notwendig gewesen den Gewichtungsparemeter λ , der ähnlich (4.63) zwischen Fixpunktiteration und Newton-Iteration wichtet, am Anfang der Iteration auf einen Wert kleiner eins zu setzen. In den Fällen 5 und 6 (alle Quellterme gekoppelt) wurde er mit $C = 1.5$ und $R = 0.02$ aus (7.2) bestimmt. Der Verlauf von λ im Fall 6 ist auch in Abb. 7.6 dargestellt.

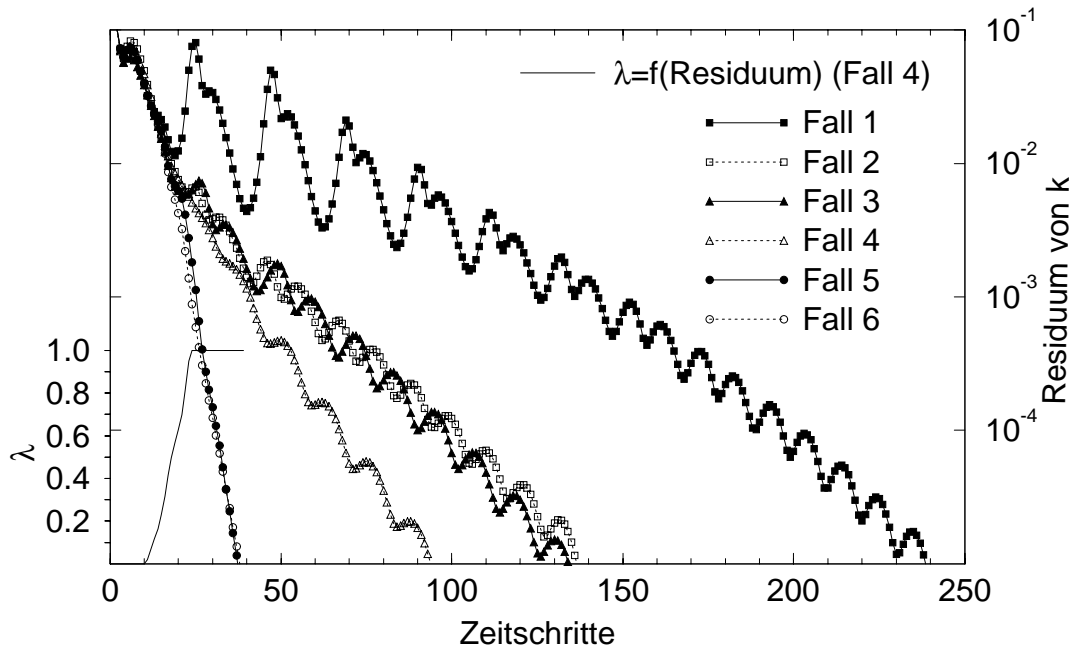


Abbildung 7.6. Konvergenzverläufe für verschiedene Linearisierungsansätze

Für einen zweiten Test wurde die Tragflügelumströmung aus Abschnitt 6.2.2.3 herangezogen. Auf dem Gitter G4 mit etwa 28.000 Knotenpunkten wurde wiederum das Geschwindigkeitsfeld konstant gehalten und nur die zwei Turbulenztransportgleichungen für das SST Turbulenzmodell gelöst. Als Startlösung wurde eine uniforme Turbulenzverteilung angenommen. Um die Entwicklung der Turbulenzgrenzschicht zu beschleunigen, wurde zusätzlich in einem schmalen Band um den Tragflügel ($0 < y < 0.05C$) ein Turbulenzlevel von 1 % gesetzt. Verglichen wurde die Fixpunktiteration mit dem voll gekoppelten Newton Verfahren (Fall 6 auf Seite 116), wobei als Vergleichskriterium der Wert für k an einem festen Punkt in einer stark turbulenten Zone im Nachlauf des Tragflügels herangezogen wurde (s. Abb. 6.10 auf Seite 102). In Abb. 7.7 ist die Entwicklung des Wertes von k an diesem Punkt abhängig von der Zahl der Zeitschritte für beide Verfahren dargestellt. Zusätzlich sind in der Tabelle noch die Anzahl der benötigten Zeitschritte angegeben, die notwendig waren, um eine bestimmte Genauigkeit für diesen Wert zu erhalten. Auch bei dieser Rechnung wurde λ aus (7.2) berechnet und der Verlauf von λ ist auch in Abb. 7.7 dargestellt.

Aus diesen beiden numerischen Experimenten wird ersichtlich, daß die übliche Linearisierung der Turbulenztransportgleichungen, die auf eine Fixpunktiteration führt, gegenüber einem echten Newton-Verfahren ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten aufweist.

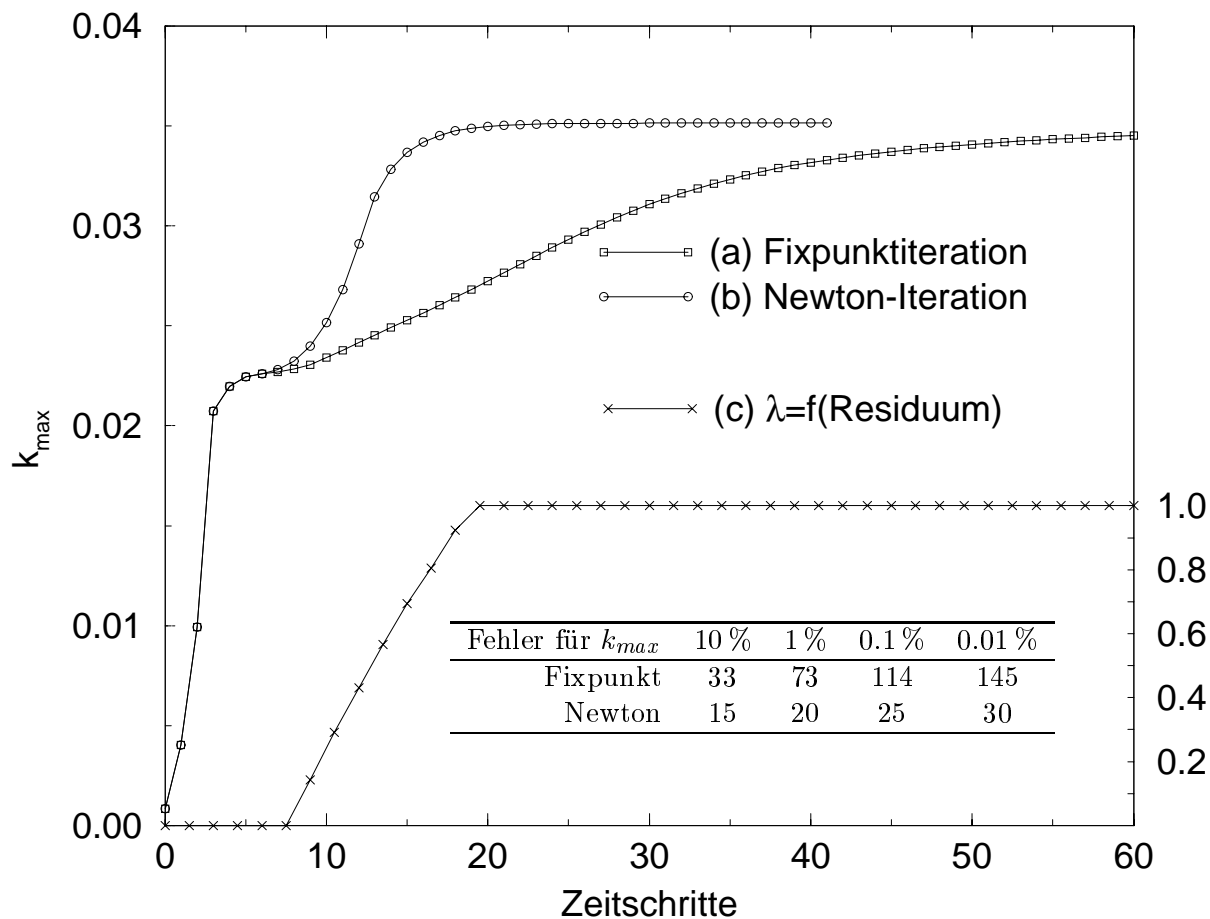


Abbildung 7.7. Entwicklung des Maximalwertes von k bei 1.05 C für Fixpunktiteration (a) und Newton-Iteration (b). Den Verlauf der GewichtungsvARIABLEN λ der Newton-Iteration zeigt Kurve (c). In der Tabelle ist die Zahl der Zeitschritte angegeben, die notwendig waren, um eine bestimmte Genauigkeit von k_{max} zu erreichen.

Schon allein die nichtlineare Behandlung einzelner Terme (z.B. Diffusionsterm) können dabei zu einer Konvergenzbeschleunigung führen. Werden jedoch nur einzelne Terme nichtlinear diskretisiert, so wird die daraus resultierende Konvergenzbeschleunigung sowohl von der Konfiguration als auch vom eingesetzten Turbulenzmodell abhängig sein. Man wird daher sicherlich keine allgemeingültigen Aussagen aus den hier vorgestellten Ergebnissen treffen können. Aber mit Hilfe der numerischen Differentiation ist es möglich, relativ einfach verschiedene Tests durchzuführen und somit den Einfluß verschiedener Linearisierungen für ein bestimmtes Turbulenzmodell zu untersuchen. Als stabile Variante mit deutlich besseren Konvergenzeigenschaften als die Fixpunktiteration hat sich Fall 4 erwiesen, bei dem bis auf die positiven Quellterme, die auf der rechten Seite bleiben, alle Terme voll gekoppelt behandelt werden. Um möglichst optimale Konvergenz zu erhalten,

reicht es, die Quellterme voll gekoppelt mit der numerischen Differentiation zu berechnen. Die Diffusionsterme können dann aus den Größen des letzten Iterationsschrittes bestimmt werden (Fall 5).

Während bei der Fixpunktiteration die beiden Turbulenzgleichungen unabhängig voneinander sind, erhält man durch das Newton-Verfahren ein gekoppeltes Gleichungssystem. Interessanterweise ist jedoch bei allen durchgeführten Rechnungen mit nichtlinearen Ansätzen der Aufwand zur Lösung des linearen Gleichungssystems niemals mehr als 30% höher gewesen als bei der Fixpunktdiskretisierung. Beim voll gekoppelten Fall (Fall 4 und 5) mußte der Gewichtungsparemeter λ jedoch während der ersten Iterationsschritte im Bereich von Null liegen, um ein Divergieren der nichtlinearen Iteration zu vermeiden.

Der Assemblierungsaufwand für die Terme, die mit einer numerischen Differentiation diskretisiert werden, liegt jedoch deutlich über einer konventionellen Diskretisierung, da diese Terme pro Element mehrfach berechnet werden müssen. Bei Vierecken und einem Zweigleichungs-Turbulenzmodell sind das immerhin zusätzlich acht Berechnungen. Bei der Implementierung ist somit darauf zu achten, daß nur *die* Terme oder Teile dieser Terme mehrfach berechnet werden, die sich aufgrund des differentiellen Terms Δx in (4.64) ändern. Beim Produktionsterm wird man zum Beispiel die Geschwindigkeitsgradienten nur einmal berechnen. Zusätzlich sollte man überprüfen, ob man ohne Konvergenzeinbußen auf die mehrmalige Berechnung der oftmals ziemlich rechenintensiven Dämpfungsfunktionen (s. Abschnitt 2.4.3.1) verzichten kann. Je nach Turbulenzmodell und Vereinfachung der nichtlinearen Behandlung einzelner Terme muß man jedoch mit einer Erhöhung des Assemblierungsaufwandes um 30–100 % rechnen.

7.2.2 Newton-Verfahren für Navier-Stokes und Turbulenzgleichungen

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, können Newton-Verfahren gegenüber einer Fixpunktiteration bei den Strömungsgleichungen die Zahl der Zeitschritte auf etwa ein Drittel reduzieren. Bei den Turbulenzgleichungen fällt diese Reduktion sogar noch deutlicher aus. Ob der Einsatz von Newton-Verfahren bei dem Gesamtsystem Navier-Stokes-Turbulenz eine Verbesserung des Konvergenzverhaltens bewirken kann, soll im folgenden untersucht werden. Da die beiden Gleichungssysteme sukzessive gelöst werden, kann daher kein richtiges Newton-Verfahren bezüglich des Gesamtsystems aufgestellt werden, sondern es können die Gleichungssysteme nur einzeln mit einem Newton-Verfahren gelöst werden. Es werden die beiden Konfigurationen aus Abschnitt 7.2.1 untersucht, wobei als Anfangsbedingung für die beiden Gleichungssysteme die Lösung auf dem darunterliegenden Gitter verwendet wird.

Hügelströmung

Folgende vier Simulationen wurden auf dem Gitter mit 18.000 KP und dem Chien $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell durchgeführt: Fixpunktiteration für Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungssystem, Newton-Verfahren nur für Navier-Stokes Gleichungen, Newton-Verfahren

nur für Turbulenzgleichungen und Newton-Verfahren für beide Gleichungssysteme. Die Residuumverläufe für die vier Simulationen in Abhängigkeit von der Zahl der Zeitschritte und der Zahl der linearen Iterationen für die Navier-Stokes Gleichungen sind in Abb. 7.8 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß der Einsatz des Newton-Verfahrens für die Turbulenzgleichungen keine Verbesserung gegenüber einer Fixpunktiteration ergibt. Mit einem Newton-Verfahren für die Navier-Stokes Gleichungen wird in diesem Fall eine Halbierung der benötigten Zeitschritte erreicht. Das Newton-Verfahren führt jedoch zu einem schwerer zu lösenden Gleichungssystem. Dies hat zur Folge, daß doppelt so viele Iterationen pro Zeitschritt notwendig sind wie bei der Fixpunktiteration. Der Lösungsaufwand ist also in beiden Fällen gleich hoch, durch die geringere Zahl der Zeitschritte verringert sich jedoch die Rechenzeit für das Turbulenzgleichungssystem und die Assemblierung. Betrachtet man die Gesamtrechenzeit, so ist in diesem Fall eine Reduktion von etwa 30 % gegenüber der Fixpunktiteration erreicht worden.

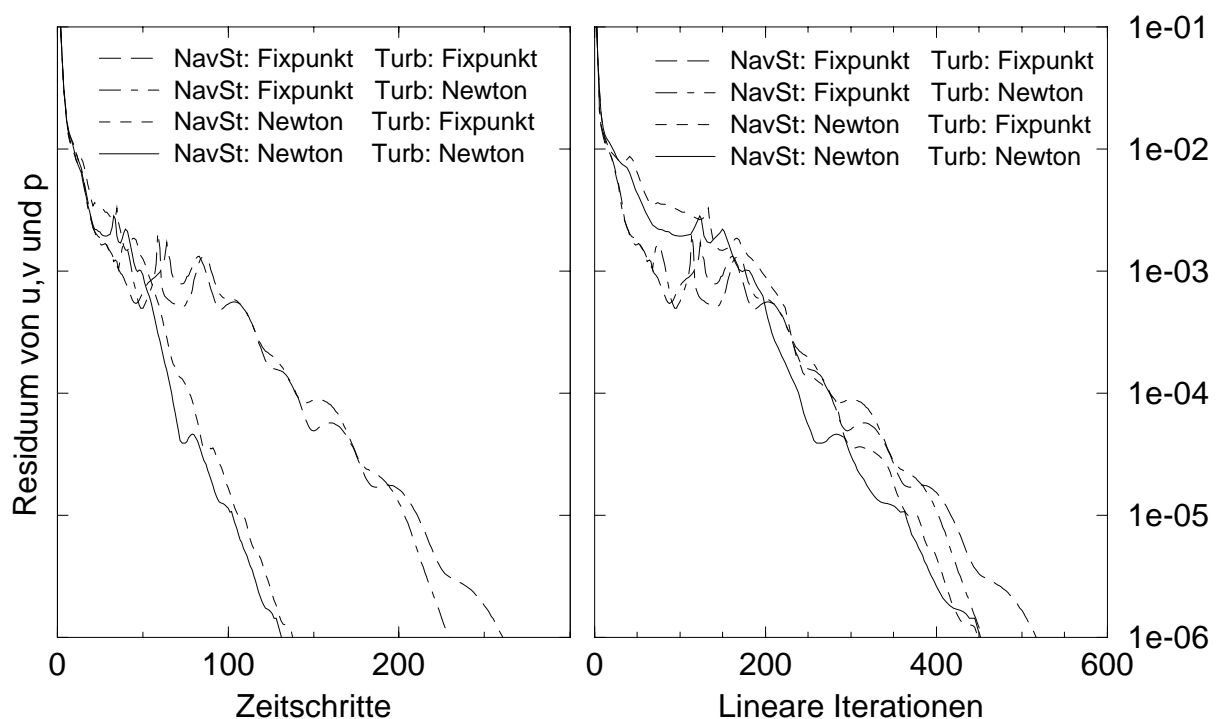


Abbildung 7.8. Konvergenzverläufe für Kombinationen von Fixpunkt- und Newton-Iteration aufgetragen über die Zahl der Zeitschritte und der Mehrgitter V-Zyklen für die Navier-Stokes Gleichungen.

Tragflügelumströmung

Auf dem Gitter G4 mit 28.000 KP wurden mit dem SST Modell die vier Kombinationen für Newtonverfahren und Fixpunktiteration für die beiden Gleichungssysteme untersucht. Die Konvergenzverläufe für das Residuum der Strömungsgrößen sind in Abb. 7.9 oben dargestellt. In Abb. 7.9 unten sind zusätzlich die Verläufe des Auftriebsbeiwertes c_a aufgetragen.

Aus diesen Diagrammen kann man erkennen, daß zum einen ein Newton-Verfahren für die Navier-Stokes Gleichungen etwa eine Halbierung der Zeitschritte gegenüber der Fixpunktiteration bewirkt und zum anderen ein Newton-Verfahren für die Turbulenzgleichungen keinerlei Verbesserung ergibt. Ebenso wie bei der Hügelströmung verdoppelt sich beim Newton-Verfahren der Lösungsaufwand gegenüber der Fixpunktiteration, und es konnte wiederum eine Reduktion der Gesamtrechnzeit um etwa 30 % erreicht werden.

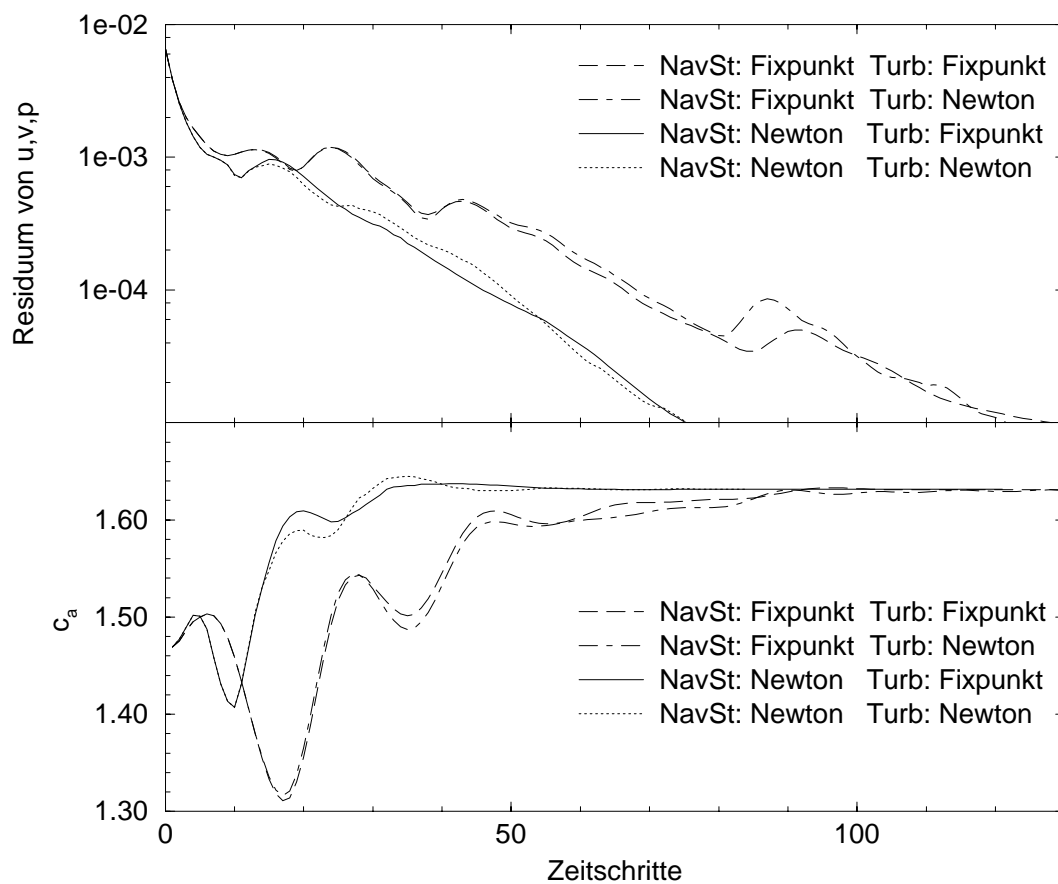


Abbildung 7.9. Oben: Konvergenzverläufe für Kombinationen von Fixpunkt- und Newton-Iteration aufgetragen über die Zahl der Zeitschritte. Unten: Entwicklung des Auftriebsbeiwertes c_a während der Iteration.

8 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Simulationsprogramm zur Berechnung inkompressibler turbulenter Strömungen entwickelt, das auf die speziellen Anforderungen eines lokalen Mehrgitterverfahrens mit adaptiver Gitterverfeinerung ausgerichtet ist. Basis dieses Programms war das am Institut für Computeranwendungen 3 entstandene Programmpaket *UG* (unstrukturierte Gitter), das ein flexibles Simulationswerkzeug zur numerischen Berechnung partieller Differentialgleichungen ist, wobei der Schwerpunkt auf dem Einsatz von Mehrgitterverfahren für unstrukturierte und lokal adaptive Gitter liegt. Welche Möglichkeiten lokale Mehrgitterverfahren bei der Simulation turbulenter Strömungen bieten und welche Voraussetzungen dafür notwendig sind, war Gegenstand der hier beschriebenen Untersuchungen.

Die Navier-Stokes Gleichungen und Turbulenztransportgleichungen werden mit einem dualen Finite Volumen Verfahren diskretisiert, bei dem — basierend auf einem Finite Element Gitter — alle Größen auf den Knotenpunkten des Gitters gelöst werden. Aus den verwendeten stationären und instationären Navier-Stokes Diskretisierungen resultiert ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck. Das zweite, anschließend zu lösende, Gleichungssystem besteht aus zwei ungekoppelten Gleichungen, die die diskretisierten Transportgleichungen verschiedener Low-Reynolds Zweigleichungs-Turbulenzmodelle repräsentieren. Die Untersuchungen wurden anhand zweier bekannter Konfigurationen stationärer zweidimensionaler Strömungen durchgeführt.

Die beiden nichtlinearen Gleichungssysteme wurden über eine Fixpunktiteration mit linearen Mehrgitterverfahren gelöst. Ausführliche Untersuchungen bezüglich der Komponenten und Parametereinstellungen der linearen Mehrgitterverfahren wurden durchgeführt. Dabei hat sich gezeigt, daß im Gegensatz zur Lösung des hier verwendeten gekoppelten Strömungsgleichungssystems, zur Lösung der Turbulenztransportgleichungen keine besonderen Einstellungen des linearen Mehrgitterverfahrens notwendig waren. Als geeignet hat sich ein Mehrgitter V-Zyklus mit jeweils zwei Vor- und Nachglättungsschritten erwiesen, und eine Defektreduktion aller Größen um eine Größenordnung war ausreichend, um gute Konvergenzeigenschaften für das nichtlineare System zu erhalten. Als Glätter wurden ILU Iterationsverfahren eingesetzt, wobei für das Navier-Stokes Gleichungssystem eine Modifikation des Verfahrens nach [126] eine entscheidende Konvergenzverbesserung ermöglicht.

Das ILU Iterationsverfahren und das darauf basierende lineare Mehrgitterverfahren waren die Komponenten einiger hier untersuchter linearer Ein- und Mehrgitter-Lösungsverfahren. Dabei zeigte sich, daß Krylov Unterraumlöser mit linearen Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer sehr attraktive und robuste Lösungsverfahren ergeben. Die Konvergenzeigenschaften dieses kombinierten Verfahrens sind weitaus weniger von der Qualität der

Startlösung und der Einstellung des Glätters abhängig als die der linearen Mehrgitterverfahren. Empfehlenswerte Krylov Unterraum Verfahren sind das BiCGSTAB Verfahren von [31] und für sehr ungünstige Gleichungssysteme das BiCGSTAB(l) Verfahren von [134]. Vergleiche von Ein- und Mehrgitterverfahren für das Strömungsgleichungssystem zeigten schon bei mehr als 10.000 Knotenpunkten einen deutlichen Vorteil der Mehrgitterverfahren gegenüber den Eingitterverfahren. Für die Turbulenzgleichungen dagegen wurde bei den untersuchten Fällen bis 80.000 Knoten nur mäßige Konvergenzbeschleunigung erhalten. Obwohl eine optimale $O(N)$ Komplexität bei den hier untersuchten Testfällen nicht immer erreicht wurde, konnte dennoch deutlich gemacht werden, daß das hier eingesetzte Lösungsverfahren zur Simulation turbulenter Strömungen sowohl auf strukturierten als auch auf lokal adaptiv verfeinerten Gittern sehr gut geeignet ist. Zusätzlich wurde noch der Einfluß des Turbulenzmodells auf die Konvergenzgeschwindigkeit und Gitterabhängigkeit der Lösung untersucht. Als recht attraktiv haben sich dabei die von [98] vorgeschlagenen Kombinationen von k - ε und k - ω Modellen herausgestellt.

Die Simulation turbulenter Grenzschichtströmungen mit Low-Reynolds Turbulenzmodellen erfordert eine sehr feine Auflösung der Grenzschichten in unmittelbarer Wandnähe. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit ein hierarchischer Gitterverfeinerungsalgorithmus entwickelt, mit dem feine Gitter mit annähernd gleicher Qualität üblicher Gittergeneratoren erstellt werden können. Die Verfeinerung wird dabei allein über die Elementverteilung des Grobgitters gesteuert, und da nur lokale Informationen über Elementnachbarschaftsbeziehungen benötigt werden, ist die Anwendung auch auf Mehrgitterhierarchien mit lokaler Gitterverfeinerung möglich. Auch eine Parallelisierung dieses Verfahrens stellt somit keine Schwierigkeit dar. Dasselbe gilt für eine hier beschriebene — für viele Turbulenzmodelle notwendige — Wandabstandsberechnung, die aufgrund der hierarchischen Gitterstruktur mit einem Aufwand von $O(N)$ auskommt.

Bei den gezeigten Testfällen wurde die Steuerung der Adaptivität mit Hilfe von einfachen Gradientenfehlerschätzern vorgenommen und verschiedene Größen als Indikatoren verglichen. Werden Strömungs- *und* Turbulenzgrößen als Steuergrößen berücksichtigt, so reichten, verglichen mit einem strukturierten Gitter, bei den untersuchten zweidimensionalen Konfigurationen 30% der Knoten aus, um annähernd die gleiche Genauigkeit der Lösung zu erhalten. Die Simulationen machten aber auch deutlich, daß die Qualität der Lösung sehr stark vom verwendeten Fehlerschätzer abhängt. Die Entwicklung zuverlässigerer als der hier eingesetzten Fehlerschätzer für das System Navier-Stokes- und Turbulenzgleichungen ist somit erforderlich.

Der letzte Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der Konvergenzverbesserung der nichtlinearen Iteration. Es wurde untersucht, in welcher Form ein Newton-Verfahren zur Lösung der beiden nichtlinearen Gleichungssysteme eingesetzt werden kann. Die Jacobi-Matrix wurde dabei mit Hilfe numerischer Differentiation aufgestellt, die einen Vergleich verschiedener Linearisierungsansätze auf einfache Art und Weise ermöglicht. Um ein Divergieren des Newton-Verfahrens am Anfang der Iteration zu vermeiden, wurde eine über das Residuum gesteuerte Gewichtung von Fixpunkt- und Newton-Iteration implementiert. Angewandt auf laminare Strömungen konnte das Newton-Verfahren gegenüber einer Fixpunktiteration die Zahl der Iterationsschritte um zwei Drittel reduzieren, ohne einen großen Mehraufwand bei der Lösung des linearen Gleichungssystems zu benötigen. Bei

dem fiktiven Fall eines bereits bekannten Geschwindigkeitsfeldes wurde zur Berechnung der Turbulenzgrößen sogar nur 20 % der Rechenzeit der Fixpunktiteration gebraucht. Angewandt auf das Gesamtsystem, Strömungs- und Turbulenzgleichung, wurde mit einem Newton-Verfahren für die Turbulenzgleichungen jedoch keine Konvergenzverbesserung erreicht. Ein Newton-Verfahren für die Navier-Stokes Gleichungen ergab dahingegen immerhin eine Halbierung der Zahl der benötigten Zeitschritte. Da sich dabei aber die Zeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems verdoppelt hatte, konnte nur eine Reduktion der Gesamtrechenzeit von 30 % erreicht werden. Dies kann einen Einsatz des Newton-Verfahrens sicherlich nicht rechtfertigen. Werden Strömungs- und Turbulenzgleichungen jedoch gekoppelt gelöst, gewinnt dieses Verfahren unter Umständen an Attraktivität.

A Zweigleichungs-Turbulenzmodelle

Im folgenden werden alle in dieser Arbeit eingesetzten Turbulenzmodelle aufgeführt. Zusätzlich wird die Aufteilung der Quellterme in explizite und implizite Anteile mit Q^+ und Q^- aus (4.50) gekennzeichnet und eventuelle Abschneideoperatoren werden beschrieben. In allen Transportgleichungen wird die turbulente Produktion P_k mit

$$P_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \quad (\text{A.1})$$

abgekürzt und mit der Variablen y wird der Wandabstand bezeichnet.

A.1 Chien k - ε Modell

Beim Chien k - ε Modell [90] werden die Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und für die modifizierte Dissipation $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{2\nu k}{y^2}$ gelöst. Durch diese Modifikation wird die einfache Randbedingung an einer Wand $\tilde{\varepsilon} = 0$ ermöglicht. Die Transportgleichungen schreiben sich mit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \underbrace{P_k}_{Q^+} - \underbrace{\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{2\nu}{y^2} \right) k}_{Q^-} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] = \underbrace{C_{\tilde{\varepsilon}1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k}_{Q^+} - \underbrace{\left(C_{\tilde{\varepsilon}2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{2\nu}{y^2} e^{-C_4 y^+} \right) \tilde{\varepsilon}}_{Q^-} \quad (\text{A.3})$$

und die turbulente Viskosität berechnet sich aus

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad , \quad (\text{A.4})$$

Die Dämpfungsfunktionen f_μ und f_2 erhält man mit

$$f_\mu = 1 - e^{-C_3 y^+} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{und } f_2 = 1 - 0.22 e^{-(R_t/6)^2} \quad . \quad (\text{A.6})$$

Benötigt werden noch die turbulente Reynoldszahl

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \tilde{\varepsilon}} \quad (\text{A.7})$$

und der dimensionslose Wandabstand (s. Abschnitt 2.4.1)

$$y^+ = u_\tau y / \nu \quad (\text{A.8})$$

Die in obigen Gleichungen auftretenden Konstanten sind:

$$\sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.35, \quad C_2 = 1.8, \quad C_3 = 0.0115 \quad \text{und} \quad C_4 = 0.5. \quad (\text{A.9})$$

Die Randbedingungen an der Wand sind

$$k = \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (\text{A.10})$$

A.2 Das Chen-Patel Zweischichten k - ε Modell

Für den Bereich hoher Reynoldszahlen wird bei diesem Zweischichten Modell [93] die Standardform des k - ε Modells von [87]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \underbrace{P_k}_{Q^+} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{k}}_{Q^-} k \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] = \underbrace{C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k}_{Q^+} - \underbrace{C_2 \frac{\varepsilon}{k}}_{Q^-} \varepsilon \quad (\text{A.12})$$

verwendet und die turbulente Viskosität über

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{A.13})$$

bestimmt. Basierend auf dem Eingleichungsmodell von Wolfshtein [72] wird im wandnahen Bereich nur die Transportgleichung für k gelöst und die Dissipation ε über eine algebraische Gleichung berechnet. Dazu werden die Längenskalen

$$l_\varepsilon = C_l y \left(1 - e^{-R_y/A_\varepsilon} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{und} \quad l_\mu = C_l y \left(1 - e^{-R_y/A_\mu} \right) \quad (\text{A.15})$$

eingeführt und die Dissipation und turbulente Viskosität mit

$$\varepsilon = k^{3/2} / l_\mu \quad (\text{A.16})$$

$$\text{und} \quad \nu_t = C_\mu \sqrt{k} l_\mu \quad (\text{A.17})$$

bestimmt. Die turbulente Reynoldszahl R_y ist mit

$$R_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu} \quad (\text{A.18})$$

definiert und die Konstanten haben die Werte

$$\sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_\mu = 0.09, \kappa = 0.41, c_l = \kappa C_\mu^{-3/4}, A_\mu = 70, \text{ und } A_\varepsilon = 2C_l \quad (\text{A.19})$$

Die Trennung zwischen Zweigleichungs- und Eingleichungsmodell erfolgt bei $R_y \approx 250$ und als Randbedingung wird für die turbulente kinetische Energie $k = 0$ gesetzt und für ε der Wert am wandnächsten Knotenpunkt genommen.

A.3 Das Wilcox k - ω Modell

Die Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipation ω erhält man beim k - ω Modell von Wilcox mit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \underbrace{P_k}_{Q^+} - \underbrace{\beta^* \omega k}_{Q^-} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \underbrace{\alpha \frac{\omega}{k} P_k}_{Q^+} - \underbrace{\beta \omega \omega}_{Q^-} \quad (\text{A.21})$$

und die turbulente Viskosität mit

$$\nu_t = k/\omega \quad . \quad (\text{A.22})$$

Die Konstanten haben die Werte

$$\sigma^* = \sigma = 1/2, \alpha = 5/9, \beta^* = 0.09 \text{ und } \beta = 3/40 \quad . \quad (\text{A.23})$$

Die Randbedingung für die turbulente kinetische Energie ist $k = 0$ und für die spezifische Dissipation wird die asymptotische Bedingung

$$\omega \rightarrow \frac{6\nu}{\beta y^2} \quad \text{für } y \rightarrow 0 \quad (\text{A.24})$$

über

$$\omega = 7 \frac{6\nu}{\beta y_1^2} \quad (\text{A.25})$$

angenähert. y_1 ist dabei der Wandabstand des wandnächsten Punktes.

A.4 Das Baseline Modell von Menter

Das Baseline Modell von Menter [98] ergibt sich aus einer Kombination von k - ε Modell im äußeren Bereich und k - ω Modell im wandnahen Bereich der Grenzschicht. Dazu wird die ε Gleichung auf eine ω Formulierung gebracht und beide Gleichungssysteme mit einer Gewichtungsfunktion F_1 bzw. $(1-F_1)$ multipliziert. Daraus entsteht folgendes Gleichungssystem für die turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipation ω

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \underbrace{P_k}_{Q^+} - \underbrace{\beta^* k \omega}_{Q^-} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \underbrace{\frac{\gamma}{\nu_t} P_k + 2(1-F_1)\sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}}_{Q^+} - \underbrace{\beta \omega \omega}_{Q^-} , \quad (\text{A.27})$$

wobei die turbulente Viskosität wie beim k - ω Modell mit

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (\text{A.28})$$

berechnet wird.

Die Funktion F_1 ist über

$$F_1 = \tanh(\arg^4) , \quad (\text{A.29})$$

$$\arg = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right), \frac{4\rho\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad \text{und} \quad (\text{A.30})$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (\text{A.31})$$

definiert. Die Konstanten setzen sich abhängig von F_1 (A.29) aus einem k - ε Modell Anteil und einem k - ω Modell Anteil zusammen. Die Konstanten des k - ω Modells sind

$$\sigma_1^* = \sigma_1 = 0.5 , \beta_1 = 0.075 , \beta^* = 0.09 , \kappa = 0.41 , \gamma_1 = \beta_1/\beta^* - \sigma_1\kappa^2/\sqrt{\beta^*} \quad (\text{A.32})$$

und die des k - ε Modells sind

$$\sigma_2^* = 1.0 , \sigma_2 = 0.856 , \beta_2 = 0.0828 , \beta^* = 0.09 , \kappa = 0.41 , \gamma_2 = \beta_2/\beta^* - \sigma_2\kappa^2/\sqrt{\beta^*} . \quad (\text{A.33})$$

Mit F_1 erhält man zum Beispiel σ^* durch

$$\sigma^* = F_1\sigma_1^* + (1-F_1)\sigma_2^* . \quad (\text{A.34})$$

Die Randbedingungen entsprechen den Bedingungen des k - ω Modells

$$k = 0 \quad \text{und} \quad \omega = 7 \frac{6\nu}{\beta y_1^2} . \quad (\text{A.35})$$

A.5 Modifiziertes Baseline Modell

Gemäß [98] kann man über eine Modifikation der Funktion F_1 (A.29) den Gültigkeitsbereich des k - ω Anteils auf den viskosen Bereich und die Übergangsschicht beschränken. Daraus resultiert ein Zweisichten k - ε Modell, das anstatt einer algebraischen Gleichung für ε (s. Abschnitt A.2), das k - ω Modell in der wandnahen Schicht benutzt. Die Funktion F_1 wird mit dem modifizierten Argument

$$\arg = \min \left(\frac{500\nu}{y^2\omega}, \frac{4\rho\sigma_2 k}{CD_{k\omega}y^2} \right) \quad (\text{A.36})$$

berechnet.

A.6 Das SST-Modell

Menters shear-stress-transport Modell [98] resultiert aus einer Erweiterung obigen Baseline Modells. Um Bradshaws Annahme — die Schubspannung in einer Grenzschicht muß proportional zur turbulenten kinetischen Energie sein — zu erfüllen, wird für die turbulente Viskosität anstatt (A.28) folgende Gleichung eingesetzt:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1\omega; \Omega F_2)} \quad (\text{A.37})$$

Ω ist dabei der Betrag der Wirbelstärke $\Omega = \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ und F_2 erhält man über

$$F_2 = \tanh(\arg^2) \quad (\text{A.38})$$

und

$$\arg = \min \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) \quad (\text{A.39})$$

Zusätzlich zu den Konstanten des Baseline Modells aus Abschnitt A.4 wird $a_1 = 0.31$ gesetzt und in (A.33) ändert sich der Wert

$$\sigma_1^* = 0.85 \quad (\text{A.40})$$

A.7 Das Kalitzin-Gould k - τ Modell

Beim k - ω Modell hat ω an der Wand ein asymptotisches Verhalten. Wird anstatt von ω die Zeitskala $\tau = 1/(\beta^*\omega)$ gelöst, so hat diese die Randbedingung $\tau = 0$. Transformiert man das Wilcox k - ω Modell auf die Variablen k und τ , so ergeben sich die Transportgleichungen des k - τ Modells von Kalitzin und Gould [152] mit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \underbrace{P_k}_{Q^+} - \underbrace{\frac{\beta^* k}{\nu_t}}_{Q^-} k \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right] &= \underbrace{\frac{\beta k \tau}{\nu_t}}_{Q^+} \\ &- \underbrace{\left(\frac{\beta^* \tau}{\nu_t} P_k + \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau} \right) \frac{2\beta^* k}{\nu_t \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)}_{Q^-} \tau . \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

In diesen Gleichungen wurden bereits die Quellterme, die aus der Transformation resultieren, mit $\beta^* k \tau / \nu_t$ multipliziert. Die turbulente Viskosität muß nach unten limitiert werden, um im Bereich außerhalb der Grenzschicht zu hohe Werte für die Quellterme zu vermeiden. Es gilt somit

$$\nu_t = \max(0.01\nu, \beta^* k \tau) . \quad (\text{A.43})$$

Die erforderlichen Konstanten habe die Werte

$$\sigma_k = \sigma_\tau = 2, \quad \beta = 0.075, \quad \beta^* = 0.09 \text{ und } \alpha = 5/9 . \quad (\text{A.44})$$

Um ein Divergieren der Lösung am Anfang der Iteration zu verhindern, wird in [153] eine Beschränkung für τ mit

$$\tau < l_{\max} / k^{0.5} \quad (\text{A.45})$$

empfohlen. Bei Tragflügelumströmungen wird für die maximale Mischungslänge (2.10) $l_{\max} = 0.1C$ angesetzt (C ist die Profillänge des Tragflügels).

B BiCGSTAB und BiCGSTAB(l)

Eine leicht verständliche Beschreibung und einfach zu implementierende Darstellung einer Vielzahl von iterativen Lösungsverfahren findet man in den *templates* von [154]. Die in *UG* implementierte Version des BiCGSTAB Verfahrens von [31] entstammt den *templates* und ist im folgenden Abschnitt aufgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das BiCGSTAB(l) Verfahren von [134] zusätzlich implementiert und wird im darauffolgenden Abschnitt beschrieben.

B.1 Vorkonditioniertes BiCGSTAB Verfahren

```
Berechne  $r^0 = b - Ax^0$  mit dem Startwert  $x^0$ 
Wähle  $\tilde{r}$ , z.B.  $\tilde{r} = r^0$ 
for  $i = 1, 2, \dots$ 
     $\rho_{i-1} = \tilde{r}^T r^{i-1}$ 
    if  $\rho_{i-1} = 0$  Abbruch, da keine Lösung möglich
    if  $i = 1$ 
         $p^i = r^{i-1}$ 
    else
         $\beta_{i-1} = (\rho_{i-1}/\rho_{i-2})/(\alpha_{i-1}/\omega_{i-1})$ 
         $p^i = r^{i-1} + \beta_{i-1}(p^{i-1} - \omega_{i-1}v^{i-1})$ 
    endif
    löse  $M\hat{p} = p^i$  (Vorkonditionierung)
     $v^i = A\hat{p}$ 
     $\alpha_i = \rho_{i-1}/(\tilde{r}^T v^i)$ 
     $s = r^{i-1} - \alpha_i v^i$ 
    if  $s$  erfüllt das Konvergenzkriterium
        setze  $x^i = x^{i-1} + \alpha_i \hat{p}$  und  $r^i = s$  und beende Iteration
    endif
    löse  $M\hat{s} = s$  (Vorkonditionierung)
     $t = A\hat{s}$ 
     $\omega_i = (t^T s)/(t^T t)$ 
     $x^i = x^{i-1} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$ 
     $r^i = s - \omega_i t$ 
    if  $r^i$  erfüllt das Konvergenzkriterium, beende Iteration
    Setze  $\omega_i \neq 0$  wenn nötig
end
```

B.2 Vorkonditioniertes BiCGSTAB(l) Verfahren

```

Berechne  $r^0 = b - Ax^0$  mit dem Startwert  $x^0$ 
Wähle  $\tilde{r}$ , z.B.  $\tilde{r} = r^0$ 
Setze  $u^0 = 0$  und  $\Delta x = 0$  sowie  $\alpha = 0$ ,  $\rho_0 = 1$  und  $\omega = 1$ 
Bestimme  $l$  von BiCGSTAB( $l$ )
for  $k = 1, 2, \dots$ 
     $\rho_0 = -\omega\rho_0$ 
    for  $j = 0, \dots, l - 1$ 
         $\rho_1 = r^j\tilde{r}$ ,  $\beta = \alpha\rho_1/\rho_0$ ,  $\rho_0 = \rho_1$ 
        for  $i = 0, \dots, j$ 
             $u^i = r^i - \beta u^i$ 
        end
        löse  $Ms = u^j$  (Vorkonditionierung)
         $u^{j+1} = As$ 
         $\gamma = \tilde{r}u^{j+1}$ ,  $\alpha = \rho_0/\gamma$ 
        for  $i = 0, \dots, j$ 
             $r^i = r^i - \alpha u^{i+1}$ 
        end
         $\Delta x = \Delta x + \alpha u^0$ 
        if  $r^0$  erfüllt das Konvergenzkriterium, UPDATE( $x, \Delta x$ )
        löse  $Ms = r^j$  (Vorkonditionierung)
         $r^{j+1} = As$ 
    end
    for  $j = 1, \dots, l$ 
        for  $i = 1, \dots, j - 1$ 
             $\tau_{ij} = r^i r^j / \sigma_i$ ,  $r^j = r^j - \tau_{ij} r^i$ 
        end
         $\sigma_j = r^j r^j$ ,  $\gamma'_j = r^j r^0 / \sigma_j$ 
    end
     $\omega = \gamma_l = \gamma'_l$ 
    for  $j = l - 1, \dots, 1$ 
         $\gamma_j = \gamma'_j - \sum_{i=j+1}^l \tau_{ji} \gamma_i$ 
    end
    for  $j = 1, \dots, l - 1$ 
         $\gamma''_j = \gamma_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{l-1} \tau_{ji} \gamma_{i+1}$ 
    end
     $\Delta x = \Delta x + \gamma_1 r^0$ ,  $r^0 = r^0 - \gamma'_l r^l$  und  $u^0 = u^0 - \gamma_l u^l$ 
    for  $j = 1, \dots, l - 1$ 
         $u^0 = u^0 - \gamma_j u^j$ ,  $\Delta x = \Delta x + \gamma''_j r^j$  und  $r^0 = r^0 - \gamma'_j r^j$ 
    end
    if  $r^0$  erfüllt das Konvergenzkriterium, UPDATE( $x, \Delta x$ )
end

```



```

function UPDATE( $x, \Delta x$ )
  löse  $M s = \Delta x$       (Transformation der Korrektur)
   $x = x + s$ 

```

Anmerkung zur Vorkonditionierung

Sowohl beim BiCGSTAB als auch beim BiCGSTAB(l) Verfahren wurde eine Rechts-Vorkonditionierung vorgenommen. Wenn \mathbf{M} die Vorkonditionierungsmatrix und $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ das zu lösende Gleichungssystem ist, führt dies auf

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} . \quad (\text{B.1})$$

Es wird somit das richtige Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ berechnet. Anstatt der echten Lösung \mathbf{x} erhält man jedoch die Näherung $\tilde{\mathbf{x}}$. Beim BiCGSTAB Algorithmus stellt dies kein Nachteil dar, da die echte Korrektur $\Delta\mathbf{x}$ während der Iteration einfach zu bestimmen ist ($\Delta x^i = \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$ in Abschnitt B.1). Beim BiCGSTAB(l) Algorithmus wird nur die Korrektur $\Delta\tilde{\mathbf{x}}$ berechnet, und um die echte Korrektur zu erhalten muß zusätzlich noch $\mathbf{x} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}$ durchgeführt werden, das den Aufwand eines Vorkonditionierungsschrittes hat. Da das Konvergenzkriterium über das Residuum gesteuert wird und das Fortschreiten der Lösung nicht betrachtet wird, reicht es, diesen Schritt einmal am Ende der Iteration durchzuführen (siehe Funktion **UPDATE**). Aufgrund dieses Mehraufwandes gegenüber dem BiCGSTAB Verfahren ist die Anwendung des BiCGSTAB(l) Verfahrens nur dann sinnvoll, wenn viele Iterationsschritte benötigt werden und die Konvergenzeigenschaften deutlich besser als beim BiCGSTAB Verfahren sind.

Literaturverzeichnis

- [1] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1975.
- [2] G.N. Coleman, J. Kim, and P.R. Spalart. Direct numerical simulation of strained three-dimensional wall-bounded flows. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 13:239–251, 1996.
- [3] U. Rist and H. Fasel. Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 20:211–248, 1995.
- [4] L. Hung, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 330:349–374, 1997.
- [5] J. Komminaho, A. Lundbladh, and A. Johansson. Very large structures in plane turbulent couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 320:259–285, 1996.
- [6] M. Olsson and L. Fuchs. Large eddy simulation of the proximal region of a spatially developing circular jet. *Physics of Fluids*, 8:2125–2137, 1996.
- [7] G. Hoffmann. *Engineering application of large eddy simulation to turbulent free and wall-bounded shear layers*. PhD thesis, Techn. Universität, München, 1996.
- [8] M. Breuer, M. Pourquie, and W. Rodi. Large-eddy simulation of internal and external turbulent flows. *ZAMM*, 76:245–248, 1996.
- [9] T. Kobayashi, N. Taniguchi, and S. Togashi. Feasibility of the les for engineering problems. *Int. J. of Numer. Methods for Heat & Fluid Flow*, 7:236–249, 1996.
- [10] K.S. Yang and J.H. Ferziger. Large-eddy simulation of turbulent obstacle flow using a dynamic subgrid-scale model. *AIAA Journal*, 31:1406, 1993.
- [11] C.G. Speziale. Turbulence modeling for time-dependent rans and vles: a review. *AIAA Journal*, 36:173–84, 1998.
- [12] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1993.
- [13] A. Khodak and Ch. Hirsch. Second order non-linear $k-\epsilon$ models with explicit effect of curvature and rotation. In *ECCOMAS 96*. Wiley, 1996.
- [14] Z. Yang and T.-H. Shih. A Gallilean and tensorial invariant $k-\epsilon$ model for near wall turbulence. *AIAA Paper 93-3105*, 1993.

- [15] M.M. Gibson and B.A. Younis. Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure. *Physics of Fluids*, 29:38–48, 1986.
- [16] B.E. Launder. Second-moment closure: Present ... and future? *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 10:282–300, 1989.
- [17] Y. G. Lai. Computational method of second-moment turbulence closures in complex geometries. *AIAA Journal*, 33:1426–1432, 1995.
- [18] J.F. Wendt. *Computational Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1996.
- [19] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, D.C., 1980.
- [20] M. Buffat. Simulation of two- and three-dimensional internal subsonic flows using a finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12:683–704, 1991.
- [21] M. Zijlema, A. Segal, and P. Wesseling. Finite volume computation of incompressible turbulent flows in general co-ordinates on staggered grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20:621–640, 1995.
- [22] C.M. Rhie and W.L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21(11):1525–1532, 1983.
- [23] G.E. Schneider and M.J. Raw. Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables – 1. Computational procedure. *Numerical Heat Transfer*, 11:363–390, 1987.
- [24] F.S. Lien and M.A. Leschziner. A general non-orthogonal collocated FV algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment closure. Part I: Computational implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 114:123–148, 1994.
- [25] P.J. Coelho and J.C.F. Pereira. Finite volume computation of the turbulent flow over a hill employing 2D or 3D non-orthogonal collocated grid systems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14:423–441, 1992.
- [26] M.J. Raw, P.F. Galpin, B.R. Hutchinson, G.D. Raithby, and J.P. Van Doormaal. An element-based finite-volume method for computing viscous flows. Advanced Scientific Computing Ltd., 1994.
- [27] W.K. Anderson, R.D. Rausch, and D.L. Bonhaus. Implicit/multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 128:391–408, 1996.
- [28] C. Sheng, L.K. Taylor, and D.L. Whitfield. Multigrid algorithm for three-dimensional incompressible high-Reynolds number turbulent flows. *AIAA Journal*, 33:2073–2079, 1995.

-
- [29] R. Fletcher. Conjugate gradient methods for indefinite systems. In *Lecture Notes in Math. 506*, pages 73–89. Springer-Verlag, 1976.
- [30] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual method for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7:856–869, 1986.
- [31] H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13:631–644, 1992.
- [32] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [33] A. Meister. Comparison of different Krylov subspace methods embedded in an implicit finite volume scheme for the computation of viscous and inviscid flow fields on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 140(2):311–345, 1998.
- [34] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. Wiley, 1991.
- [35] R.P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, 4(3):227–235, 1964.
- [36] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Math. Comp.*, 31:333–390, 1977.
- [37] W. Hackbusch. On the convergence of a multi-grid iteration applied to finite element equations. Report 77-8, Universität Köln, 1977.
- [38] P. Wesseling. The rate of convergence of a multiple grid method. In G.A. Watson, editor, *Numerical analysis*, Lecture Notes in Math., pages 164–184. Springer, Berlin, 1980.
- [39] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- [40] G. Wittum. Multi-grid methods for Stokes and Navier-Stokes equations with transforming smoother: algorithms and numerical results. *Numer. Math.*, 54:543–563, 1989.
- [41] C. Becker, J.H. Ferziger, G. Horton, and G. Scheuerer. Finite volume multigrid solutions of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. In *Proc. 4th GAMM Seminar Kiel, 1988*, volume 23 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 34–47. Vieweg Verlag, 1989.
- [42] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Multigrid acceleration for recirculating laminar and turbulent flows computed with a non-orthogonal, collocated finite-volume scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118:351–371, 1994.

- [43] X.-S. Bai and L. Fuchs. Fast multigrid method for 3-D turbulent incompressible flows. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 2(127-137), 1992.
- [44] A.O. Demuren. Multigrid acceleration and turbulence models for computations of 3D turbulent jets in crossflow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35(11):2783–2794, 1992.
- [45] D.J. Mavriplis. Three-dimensional multigrid Reynolds-averaged Navier-Stokes solver for unstructured meshes. *AIAA Journal*, 33(3):445–453, 1995.
- [46] M. Raw. A coupled algebraic multigrid method for the 3D Navier-Stokes equations. In W. Hackbusch, editor, *Fast solvers for flow problems*, volume 49 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 204–215. Vieweg, 1995.
- [47] R. Webster. An algebraic multigrid solver for Navier-Stokes problems in the discrete second-order approximation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11:1103–1123, 1996.
- [48] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Math. Comp.*, 31, 1977.
- [49] W. Hackbusch. Comparison of different multi-grid variants for nonlinear equations. *ZAMM*, 72(2):148–151, 1992.
- [50] Y. Kallinderis and J.R. Baron. A new adaptive algorithm for turbulent flows. *Computers & Fluids*, 21:77–96, 1992.
- [51] R. Tilch, K. Morgan, and N.P. Weatherill. Transient problems with moving boundaries using adaptive unstructured meshes. In *Computational Fluid Dynamics '94*, pages 273–280. Wiley, 1994.
- [52] M. Braack, R. Becker, R. Rannacher, and J. Warnatz. An adaptive finite element method for combustion problems. Universität Heidelberg, SFB 359, Preprint 98-10, 1998.
- [53] O. Bonnin, B. Métivet, G. Nicolas, F. Arnoux-Guisse, and L. De Sousa. Adaptive meshing for N3S fluid mechanics code. In *Computational Fluid Dynamics '94*, pages 201–208. Wiley, 1994.
- [54] R. Bank, T. Dupont, and H. Yserentant. The hierarchical basis multigrid method. *Numer. Math.*, 52:427–458, 1988.
- [55] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, J. Wang, and J. Xu. Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions. *Math. Comp.*, 57:23–45, 1991.
- [56] P. Bastian. *Parallele adaptive Mehrgitterverfahren*. Teubner Skripten zur Numerik. Teubner-Verlag, 1996.
- [57] R. Mittal and S. Balachandar. Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders. *Journal of Computational Physics*, 124:351–367, 1996.

- [58] G.N. Coleman and J.H. Ferziger. Direct numerical simulation of a vigorously heated low Reynolds number convective boundary layer. *Dynamics of Atmospheres & Oceans*, 24:85094, 1996.
- [59] V. De Angelis, P. Lombardi, and S. Banerjee. Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall. *Physics of Fluids*, 9:2429–42, 1997.
- [60] E.W. Miner, T.F. Swean, R.A. Handler, and Leighton R. Examination of wall damping for the k - ϵ turbulence model using direct simulations of turbulent channel flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12:609–624, 1991.
- [61] W. Rodi, N.N. Mansour, and V. Michelassi. One-equation near-wall turbulence modeling with the aid of direct simulation data. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 115:196–205, 1993.
- [62] C. Forkel, O. Bergen, and J. Köngeter. A three-dimensional numerical model for the calculation of complex flow and transport phenomena in reservoirs. In R. Helmig, W. Jäger, W. Kinzelbach, P. Knabner, and G. Wittum, editors, *Modeling and Computation in Environmental Sciences*, volume 59 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 158–169, Braunschweig, 1997. Vieweg.
- [63] R. Guan-Shu and E.M. Agee. Large eddy simulation of turbulent flow in a marine convective boundary layer with snow. *J. of the Atmospheric Sciences*, 53:86–100, 1996.
- [64] T. Durbeck and T. Gerz. Large-eddy simulation of aircraft exhaust plumes in the free atmosphere – effective diffusivities and cross-sections. *Geophysical Research Letters*, 22, 1995.
- [65] K.E. Jansen. Large-eddy simulation of flow around a NACA 4412 airfoil using unstructured grids. In *CTR Annual Research Briefs*, pages 225–232. NASA Ames / Stanford University, 1996.
- [66] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 186:123, 1895.
- [67] L. Prandtl. Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM*, 5:136–139, 1925.
- [68] T. Cebeci and A.M.O. Smith. Analysis of turbulent boundary layers. In *Ser. in Appl. Math. & Mech.*, volume 15. Academic Press, 1974.
- [69] B.S. Baldwin and H. Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper 78-257*, 1978.
- [70] D.A. Johnson and L.S. King. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *1985*, 23(11):1684–1692, AIAA Journal.

- [71] L. Prandtl. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl.* 1945, pages 6–10, 1945.
- [72] M. Wolfshtein. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12:301–318, 1969.
- [73] U.C. Goldberg. Derivation and testing of a one-equation model based on two time scales. *AIAA Journal*, 29(8):1337–1340, 1991.
- [74] B.S. Baldwin and T.J. Barth. A one-equation turbulence model for high Reynolds number wall-bounded flows. *NASA TM-102847*, 1990.
- [75] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper 92-439*, 1992.
- [76] W. Rodi and G. Scheuerer. Calculation of curved shear layers with two-equation turbulence models. *Physics of Fluids*, 26:1422–1436, 1983.
- [77] K.C. Chang, C.S. Chen, and C.I. Uang. A hybrid k - ϵ turbulence model of recirculating flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12:369–382, 1991.
- [78] K.-C. Chang and C.-S. Chen. Development of a hybrid k - ϵ turbulence model for swirling recirculating flows under moderate to strong swirl intensities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16:421–443, 1993.
- [79] P.G. Saffman. Development of a complete model for the calculation of turbulent shear flows. In *Symposium on turbulence and dynamical systems*, 1976.
- [80] C.G. Speziale, S. Sarkar, and T. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227:245–272, 1991.
- [81] D.C. Wilcox and M.W. Rubesin. Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility. *NASA TP-1517*, 1980.
- [82] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating Reynolds stresses. *ZAMM*, 56:219, 1976.
- [83] J. Zhang and B. Lakshminarayana. Computation and turbulence modeling of three-dimensional boundary layers including turbomachinery rotor flows. *AIAA Journal*, pages 1861–1869, 1990.
- [84] A.O. Demuren. Calculation of turbulence-driven secondary motion in ducts with arbitrary cross section. *AIAA Journal*, 29(4):531–537, 1991.
- [85] B.E. Launder and N. Shima. Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application. *AIAA Journal*, 27:1319–1325, 1989.

-
- [86] S. Obi, M. Peric, and G. Scheuerer. Second-moment calculation procedure for turbulent flows with collocated variable arrangement. *AIAA Journal*, 29:585–590, 1991.
- [87] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:269–289, 1974.
- [88] B.E. Launder and B.I. Sharma. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1(2):131–138, 1974.
- [89] C.K.G. Lam and Bremhorst K. A modified form of the k - ϵ model for predicting wall turbulence. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 103:456–460, 1981.
- [90] K.-Y. Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a Low-Reynolds-Number turbulence model. *AIAA Journal*, 20(1):33–38, 1982.
- [91] Z. Yang and T.-H. Shih. A k - ϵ model for turbulent and transitional boundary layers. In R.M.C. So, C.G. Speziale, and B.E. Launder, editors, *Near-Wall Turbulent Flow*. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
- [92] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA Journal*, 23:1308–1319, 1985.
- [93] H.C. Chen and V.C. Patel. Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA Journal*, 26:641–648, 1988.
- [94] W. Rodi. Experience with two-layer models combining the k - ϵ model with a one-equation model near the wall. *AIAA Paper 91-0216*, 1991.
- [95] P.A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without damping functions. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3:1, 1991.
- [96] D.C. Wilcox. The remarkable ability of turbulence model equations to describe transition. In *Fifth Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*. California State Univ., Long Beach, CA, January 1992.
- [97] D.C. Wilcox. Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA Journal*, 32(2):247–255, 1994.
- [98] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [99] D.C. Wilcox. Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient. *AIAA Journal*, 31(8):1414–1421, 1993.
- [100] F.R. Menter. Influence of freestream values on k - ω turbulence model predictions. *AIAA Journal*, 30(6):1657–1659, 1992.
- [101] F.R. Menter. Performance of popular turbulence models for attached and separated adverse pressure gradient flows. *AIAA Journal*, 30(8):2066–2072, 1992.

- [102] Ch. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Wiley, 1988.
- [103] T.J. Chung. *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1983.
- [104] A.J. Baker. *Finite Element Computational Fluid Mechanics*. Hemisphere/McGraw-Hill, New York, 1983.
- [105] Haroutunian, Engelman, and Hasbani. Segregated finite element algorithms for the numerical solution of large-scale incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17, 1993.
- [106] Chabard, Metivet, Pot, and Thomas. An efficient finite element method for the computation of 3D turbulent incompressible flows. *Finite Elements in Fluids*, 8, 1992.
- [107] A.C. Benim. Finite element analysis of confined turbulent swirling flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11:697–717, 1990.
- [108] H. Rentz-Reichert. *Robuste Mehrgitterverfahren zur Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung: Ein Vergleich*. PhD thesis, Inst. für Computeranwendungen, Univ. Stuttgart, 1996.
- [109] G.E. Schneider and M.J. Raw. A skewed, positive influence coefficient upwinding procedure for control-volume-based finite element convection-diffusion computation. *Numerical Heat Transfer*, 8:1–26, 1986.
- [110] K.-J. Bathe. *Finite-Element Methoden*. Springer-Verlag, 1986.
- [111] B.P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19:59–89, 1979.
- [112] J. Zhu and M.A. Leschziner. A local oscillation-damping algorithm for higher-order convection schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67:355–366, 1988.
- [113] G.D. Raithby. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 9:153–164, 1976.
- [114] J.P. van Doormaal, A. Turan, and G.D. Raithby. Evaluation of new techniques for the calculation of internal recirculating flows. *AIAA Paper 87-0059*, 1987.
- [115] G.D. Raithby and K.E. Torrance. Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Computers & Fluids*, 8(12):191–206, 1974.
- [116] S.E. Rogers, D. Kwak, and C. Kiris. Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, 29(4):603–611, 1991.

-
- [117] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [118] P.M. Gresho. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix; part 1: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11:587–620, 1990.
- [119] S. Turek. On discrete projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations: an algorithmical approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143:271–288, 1997.
- [120] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [121] R.S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [122] J.A. Meijerink and H.A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. *Math. Comput.*, 31:148–162, 1977.
- [123] J.J.F.M. Schlichting and H.A. van der Vorst. Solving 3D block bidiagonal linear systems on vector computers. *J. Comput. Appl. Math.*, 27:323–330, 1989.
- [124] P. Bastian and G. Horton. Parallization of robust multi-grid methods: IILU factorization and frequency decomposition method. In *Numerical Treatment of Navier-Stokes Equations*, volume 30 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 34–47. Vieweg Verlag, 1990.
- [125] I. Gustafsson. A class of first order factorization methods. *BIT*, 18:142–156, 1978.
- [126] G. Wittum. On the robustness of ILU smoothing. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10:699–717, 1989.
- [127] G. Wittum. Linear iterations as smoothers in multigrid methods: theory with applications in incomplete decompositions. *Impact Comput. Sci. Eng.*, 1:180–215, 1989.
- [128] K.-D. Oertel and K. Stüben. Multigrid with ILU smoothing: systematic tests and improvements. In W. Hackbusch, editor, *Proc. 4th GAMM Seminar*, volume 23 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 188–199, Braunschweig, 1989. Vieweg.
- [129] M. Khalil. Local mode smoothing analysis of various incomplete factorization iterative methods. In W. Hackbusch, editor, *Proc. 4th GAMM Seminar*, volume 23 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 155–164, Braunschweig, 1989. Vieweg.
- [130] C. Paige, B. Parlett, and H. van der Vorst. Approximate solutions and eigenvalue bounds from Krylov subspaces. *Numer. Lin. Alg. Appls.*, 29:115–134, 1995.

- [131] C.C. Paige and M.A. Saunders. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 12:617–629, 1975.
- [132] P. Sonneveld. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 10:36–52, 1989.
- [133] M.H. Gutknecht. Variants of Bi-CGSTAB for matrices with complex spectrum. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 14:1020–1030, 1993.
- [134] G.L.G. Sleijpen and D.R. Fokkema. BICGSTAB(L) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Elec. Trans. Numer. Anal.*, 1:11–32, 1993.
- [135] N.M. Nachtigal, S.C. Reddy, and L.N. Trefethen. How fast are nonsymmetric matrix iterations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13:778–795, 1992.
- [136] S.E. Rogers, N.L. Wiltberger, and D. Kwak. Efficient simulation of incompressible viscous flow over single and multi-element airfoils. *AIAA Paper 92-0405*, 1992.
- [137] B. Huurdeman, S. Nägele, V. Reichenberger, and H. Rentz-Reichert. Multigrid solution of incompressible Navier-Stokes equations and its application to parallel computers. In *Proceedings of the International FORTWIHR Conference 1998 (to appear)*. Springer Verlag.
- [138] H. Reichert and G. Wittum. Robust multigrid methods for the incompressible Navier-Stokes equations. ICA Bericht N94/2, 1994.
- [139] G.P. Almeida, D.F.G. Durao, and M.V. Heitor. Wake flows behind two-dimensional model hills. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 7:87–101, 1993.
- [140] D. Coles and A.J. Wadcock. Flying-hot-wire study of flow past a NACA 4412 airfoil at maximum lift. *AIAA Journal*, 17(4):321–329, 1979.
- [141] W. Rodi, J.C. Bonnin, T. Buchal, and D. Laurence. Testing of calculation methods for turbulent flows: Workshop results for 5 test cases. Collection de notes internes de la Direction des Etudes et Recherches 98NB00004, EDF, 1998.
- [142] L.D. Dailey, I.K. Jennions, and P.D. Orkwis. Simulation of laminar–turbulent transition with an explicit Navier-Stokes flow solver. *J. of Propulsion and Power*, 11(6):1187–1194, 1995.
- [143] K. Kusunose and H.V. Cao. Prediction of transition location for a 2-D Navier-Stokes solver for multi-element airfoil configurations. *AIAA Paper 94-2376*, 1994.
- [144] S.L. Yang and T.I.-P. Shih. An algebraic grid generation technique for time-varying two-dimensional spatial domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6:291–304, 1986.
- [145] J.Q. Cordova and T.J. Barth. Grid generation for general 2-D regions using hyperbolic equations. *AIAA Paper 88-0520*, 1988.

-
- [146] H.V. Cao and K. Kusunose. Grid generation and Navier-Stokes analysis for multi-element airfoils. *AIAA Paper 94-0748*, 1994.
- [147] E. Guilmineau, J. Piquet, and P. Queutey. Two-dimensional turbulent viscous flow simulation past airfoils at fixed incidence. *Computers & Fluids*, 26(2):135–162, 1997.
- [148] L.D. Kral, M. Mani, and J.A. Ladd. Application of turbulence models for aerodynamic and propulsion flowfields. *AIAA Journal*, 34(11):2291–2298, 1996.
- [149] P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, N. Neuss, H. Rentz-Reichert, and C. Wieners. Ug - a flexible software toolbox for solving partial differential equations. *Computing and Visualization in Science*, 1:27–40, 1997. downloadable from <ftp://ftp.ica3.uni-stuttgart.de/pub/ug/ug-3.6/ugpaper.ps.gz>.
- [150] B.F. Armaly, F.Durst, J.C.F. Pereira, and B. Schönung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127:473–496, 1983.
- [151] S.M.H. Karimian and G.E. Schneider. Pressure-based control-volume finite element method for flow at all speeds. *AIAA Journal*, 33(9):1611–1618, 1995.
- [152] G. Kalitzin, A.R.B. Gould, and J.J. Benton. Application of two-equation turbulence models in aircraft design. *AIAA Paper 96-0327*, 1996.
- [153] W. Haase, E. Chaput, E. Elsholz, M.A. Leschziner, and U.R. Müller. *ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models*, volume 58 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg Verlag, 1997.
- [154] R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst. *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

Lebenslauf

Persönliches:

Name: Bernhard Huurdeman
Geburtsdatum: 27. April 1965
Geburtsort: Stuttgart
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: verheiratet, zwei Kinder
Adresse: Max-Reger-Weg 16, 71691 Freiberg a.N.

Schulbildung:

1971 – 1975 Grundschule
Pestalozzi-Schule Gerlingen
1975 – 1984 Gymnasium Gerlingen
Abschluß: Abitur

Bundeswehr:

7/84 – 9/85 15 Monate Grundwehrdienst in Regensburg und Donauwörth

Studium:

10/85 – 11/91 Universität Stuttgart
Luft- und Raumfahrttechnik, Fachrichtung: Datenverarbeitung
Vordiplom: 09.09.87, Diplom: 18.11.91
4/91 – 9/91 Diplomarbeit an der E.N.S.I.C.A. in Toulouse, Frankreich
Die Diplomarbeit wurde mit einem Hermann Reissner Stipendium der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik gefördert.

Berufstätigkeit:

1/92 – 1/98 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Computeranwendungen, Universität Stuttgart
2/98 – 12/98 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im SFB 359 an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
seit 1/99 Berechnungsingenieur bei MANN+HUMMEL, Ludwigsburg

Stuttgart, den 16.12.1999