ů/57

Doklady Akademii nauk SSSR
1955, Bd. 101, No 4, S. 589/592

Mathematik

Vacher, F.S.:

ÜBER EINE SCHAUDERBASIS IM RAUM STETIGER FUNKTIONEN MIT KOMPAKTEM METRISCHEM DEFINITIONSBEREICH

(Vorgelegt von dem Akademiemitglied A.N. Kolmogorov am 7. 1. 1955)

Eine Basis im Raum stetiger Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall des R_1 definiert sind, wurde von Schauder konstruiert [1]. Im vorliegenden Artikel wird die Existenz einer Basis im Raum $C(Q)$ stetiger Funktionen bewiesen, die auf einem beliebigen Kompaktum Q definiert sind; für einige Räume $C(Q)$, insbesondere für den Raum $C(K)$, wo K der Hilbert-Würfel ist, wird die Konstruktion einer Basis explizit angegeben.

§ 1. Es sei H der Hilbertsche Folgen-Raum; die Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ eine orthogonale Basis in H; $F_1, F_2, \ldots, F_n \ldots$ eine Folge linearer Funktionale der Art, daß $F_k(x_i) = 0$ ist für $i \neq k$, $F_k(x_k) = 1$; K der Hilbert-Würfel im Raum H.

Wir führen folgende Definitionen und Bezeichnungen ein.

Als Hyperebene werden wir eine Punktmenge bezeichnen, für die die Beziehung $F(x) = c$ erfüllt ist.

Die Hyperebene, die durch die Gleichung $F_n(x) = c$ definiert wird, bezeichnen wir als die zu x_n senkrechte Hyperebene.

Die Menge der Punkte $x \in H$, die die Ungleichung $b_1 \leq F_n(x) \leq b_2$ erfüllen, nennen wir den zu x_n orthogonalen Streifen und bezeichnen ihn mit E^n. Die Zahl $\alpha_n = |b_2 - b_1|$ werden wir die Breite des Streifens E^n nennen.

Den Durchschnitt der zu $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ orthogonalen Streifen nennen wir das Parallelepiped $n$ter Ordnung und ihn mit $H^{(n)}$ bezeichnen. Die Zahl $\alpha = \max\limits_n \alpha_n$ werden wir die Größe des Parallelepipeds $H^{(n)}$ nennen und mit $r\ (H^{(n)})$ bezeichnen.

Die Menge $L \subset H$ werden wir nach dem Index n beschränkt nennen, wenn L in einem Parallelepiped n-ter Ordnung enthalten ist.

Die nach dem Index n beschränkte Menge, die eine Kugel des Raumes H enthält und der Durchschnitt einer endlichen Zahl abgeschlossener Halbräume $\overline{H}_i$ der Form: $\overline{H}_i = E[\alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) \leq c^i$ (oder $\geqslant c^i$)] ist, werden wir eine Figur n-ter Ordnung nennen und mit $\square^n$ bezeichnen.

Den Durchschnitt von k Hyperebenen $G_1, \ldots\ldots, G_k$, wobei

$$\langle a \rangle$$

ist und das System $\alpha_1^t F_1(x) + \ldots + \alpha_n^t F_n(x) = c^t$, $t = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, linear unabhängig ist, werden wir die Hyperebene k-ter Ordnung nach dem Index n nennen.

Den Teil der Hyperebene k-ter Ordnung nach dem Index n, der die Figur $\square^{(n)}$ begrenzt, werden wir die Seite k-ter Ordnung der Figur $\square^{(n)}$ nennen.

Eine Seite n-ter Ordnung der Figur $\square^{(n)}$ nennen wir eine ⟨ihre⟩ Ecke ⟨Spitze⟩.

Die Figur n-ter Ordnung, die $n + 1$ Ecken hat, nennen wir die Elementarfigur n-ter Ordnung und bezeichnen sie mit $\triangle^{(n)}$.

§ 2. <u>Lemma 1.</u> Angenommen, das Parallelepiped $H^{(n)}$ lasse die Zerlegung

$$(1)$$

zu, die folgende Eigenschaft besitzt: zwei Figuren aus der Zerlegung (1) schneiden sich entweder überhaupt nicht, oder ihr Schnitt ist eine gemeinsame Seite (die erwähnte Eigenschaft werden wir die Eigenschaft (e) nennen).

Dann ist eine neue Zerlegung folgender Art möglich:

$$, \quad (2)$$

die ebenfalls die Eigenschaft (e) besitzt, wobei jede Elementarfigur der Zerlegung (2) in einer beliebigen Figur der ursprünglichen Zerlegung (1) enthalten ist.

Der Beweis für diese Tatsache wird mittels einer Abbildung P des Raumes H auf einen n-dimensionalen Euklidischen Raum geführt. Bei dieser Abbildung ist die Gestalt des Parallelepipeds $H^{(n)}$ der Körper S eines Polyederkomplexes R. Folglich ist S auch ein Körper einer gewissen Triangulation T, die eine baryzentrische Unterteilung des Komplexes R ist. Die Elemente der Zerlegung (2) sind Urbilder der Elemente der Triangulation T; insbesondere ist die Elementarfigur n-ter Ordnung das Urbild eines n-dimensionalen Simplexes. Alle Eigenschaften der Triangulation T werden bei der Abbildung P^{-1} auf die Zerlegung (2) übertragen, woraus Lemma 1 folgt.

Die Ecken aller Elementarfiguren der Zerlegung (2) nennen wir die Ecken dieser Zerlegung.

§ 3. Wir konstruieren uns nur spezielle Funktionen, die sich im folgenden als eine Basis erweisen werden. Zunächst bestimmen wir Elementarfunktionen in folgender Weise: $\Delta^{(n)}$ sei eine Elementarfigur n-ter Ordnung, $G_i^{(n)}$ eine ⟨ihre⟩ Ecke ⟨Spitze⟩, G_i die Seite 1-er Ordnung zur gegenüberliegenden Ecke $G_i^{(n)}$, und $F_k(x) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sei die Gleichung der Ecke $G_i^{(n)}$; ferner $F^i(x) = \alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) = a$ die Gleichung der Hyperebene G_i, die die Seite $\overline{G_i}$ enthält.

Die Funktion $\varphi_i(x) = \dfrac{F^i(x) - \alpha}{b - a}$ (mit $b = \alpha_1^i a_1 + \ldots + \alpha_n^i a_n$) nennen wir die Elementarfunktion der Figur $\Delta^{(n)}$ mit dem Zentrum in der Ecke $G_i^{(n)}$.

Angenommen, eine (geeignete) ⟨richtige⟩ Zerlegung des Parallelepipeds $H^{(n)}$ liege vor, $G_i^{(n)}$ sei eine der Ecken dieser Zerlegung, $\triangle_1^{(n)}$, $\triangle_2^{(n)}, \ldots, \triangle_r^{(n)}$ die Elementarfiguren der Zerlegung, die die Ecke $G_i^{(n)}$ enthalten, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ die Elementarfunktionen, die den genannten Elementarfiguren mit dem Zentrum in der Ecke $G_i^{(n)}$ entsprechen. Die Funktion

⟨b⟩

nennen wir die spezielle Funktion n-ter Ordnung mit dem Zentrum in der Ecke $G_i^{(n)}$.

<u>L e m m a 2</u>. Die spezielle Funktion n-ter Ordnung ist stetig und identisch mit dem Parallelepiped $H^{(n)}$.

§ 4. Es sei Q ein beliebiges Kompaktum. Wir stützen uns auf den Urysohnschen Satz und betten das Kompaktum Q in den Hilbert-Würfel K des Hilbertschen Folgen-Raumes H ein.

Wir sagen, die Hyperebene G berühre das Kompaktum Q , wenn das Kompaktum ganz auf einer Seite von G gelegen ist und $Q \cap G$ nicht leer ist.

Wir sagen weiter, das Kompaktum Q sei in das Parallelepiped n-ter Ordnung einbeschrieben, wenn je zwei zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ senkrechte Hyperebenen Q tangieren.

Wir führen folgende Konstruktionen durch: wir beschreiben das Kompaktum Q in den zu x_1 orthogonalen Streifen E' ein (E' ist die Elementarfigur 1-ter Ordnung; die Tangenten der Hyperebene G_1' und G_2' sind ihre Ecken). In jeder Ecke in G_1' und G_2' wählen wir je einen Punkt des Hilbert-Würfels: $x_1' \in G_1' \cap K$, $x_2' \cap G_2' \cap K$ und nennen sie die zentralen Punkte 1-ter Ordnung; jedem zentralen Punkt 1-ter Ordnung ordnen wir eine Spezialfunktion 1-ter Ordnung mit dem Zentrum in der entsprechenden Ecke zu. Die bezeichnete Konstruktion nennen wir die 1-te Brechung (?).

Wir stützen uns auf die Ergebnisse des § 2 und konstruieren - unter der Annahme, daß die k-te Brechung für alle $k \leq n$ schon konstruiert sei - die $(n + 1)$-te Brechung folgendermaßen: das Kompaktum Q beschreiben wir in das Parallelepiped $(n + 1)$-ter Ordnung $H^{(n + 1)}$ ein und führen die Zerlegung des Parallelepipeds

(3)

in der Art durch, daß : 1) jede Elementarfigur der Zerlegung (3) in iregendeinem Parallelepiped $(n + 1)$-ter Ordnung enthalten ist, dessen Größe $\frac{1}{2^n}$ nicht überschreitet, 2) jede Elementarfigur der Zerlegung in einer Elementarfigur n-ter Brechung enthalten ist, 3) die Zerlegung (3) die Eigenschaft (e) besitzt.

Weiter legen wir alle Ecken der Zerlegung (3) fest, die mindestens einer Elementarfigur angehören, deren Inneres Punkte des Kompaktums Q enthält. In jeder festgelegten Ecke, die kein zentraler Punkt 1-ter, ..., n-ter Ordnung ist, wählen wir je einen Punkt des Hilbert-Würfels. Die gewählten Punkte nennen wir die zentralen Punkte $(n + 1)$ -ter Ordnung. Jedem zentralen Punkt $(n + 1)$-ter Ordnung ordnen wir eine Spezialfunktion $(n + 1)$-ter Ordnung mit dem Zentrum in der entsprechenden Ecke zu.

So fortfahrend konstruieren wir eine abzählbare Folge von Spezialfunktionen

, (4)

und entsprechend greifen wir die abzählbare Folge der zentralen Punkte heraus:

. (5)

Unter den Punkten (5) können auch solche sein, die nicht dem Kompaktum Q angehören; wir nennen sie Q-assoziierte Punkte.

Lemma 3. Die Menge $Q = \overline{Q} \cup F$ (wobei F die Menge der Q - assoziierten Punkte ist) ist ein Kompaktum.

Zum Beweis von Lemma 3 zeigt man, daß alle Punkte von F isolierte Punkte von $\overline{Q}$ sind.

Die Spezialfunktionen der Folge (4) induzieren im Kompaktum $\overline{Q}$ die Funktionen

. (6)

Man kann sich unschwer davon überzeugen, daß die Funktionen (6) auf $\overline{Q}$ stetig sind.

§ 5. **Theorem 1.** Die Folge (6) ist eine Basis im Raum $C(\overline{Q})$.

Folgerung: Wenn $Q = \overline{Q}$, insbesondere wenn $Q = K$ ist, dann ist die Folge (6) eine Basis im Raum $C(Q)$.

§ 6. Wir sagen, die Mengen Q_1 und Q_2 sind fast kongruent, wenn die Menge $Q_2 \setminus Q_1$ aus isolierten Punkten der Menge Q_2 besteht.

Theorem 2. Wenn die Kompakta Q_1 und Q_2 fast kongruent sind, so sind die Räume $C(Q_2)$ und $C(Q_1) \times (c)$ isomorph (wobei $C(Q_1) \times (c)$ das topologische Produkt des Raumes $C(Q_1)$ mit dem Raum der konvergenten Folgen (c) ist).

Theorem 3. Die Räume $C(Q_1)$ und $C(Q_1) \times (c)$ sind isomorph.

1. Aus den Sätzen 2 und 3 folgt, daß eine hinreichende Bedingung für die Isomorphie des Raumes $C(Q_1)$ und $C(Q_2)$ die Fast-Kongruenz der Kompakta Q_1 und Q_2 ist. Daraus folgt insbesondere die Isomorphie der Räume $C(\overline{Q})$ und $C(Q)$.

2. Aus der Bemerkung 1 und dem Theorem 1 folgt die Existenz einer Basis im Raum $C(Q)$.

3. Man kann sich unschwer davon überzeugen, daß im Raum $C^i(Q)$ stetiger komplexer Funktionen über dem Kompaktum Q ebenfalls eine Basis existiert.

<u>F o l g e r u n g</u>: R sei ein separabler normierter kommutativer symmetrischer Ring; R' ein Ring von Funktionen der Form $x(M)$, die definiert sind auf der Menge der maximalen Ideale des Rings R und durch die Elemente des Rings erzeugt werden. Wir stützen uns auf den Satz von I.M. Gel'fand [2] und folgern: wenn aus der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $x(M)$ die Konvergenz der entsprechenden Elemente des Rings R in der Norm folgt, so existiert im Ring R eine Basis.

Nach M.Š. Al'tman [3], der einen analogen Satz für einen normierten Ring mit einem erzeugenden Element bewies, kann man die Bedingungen für die Existenz einer Basis in R etwas abschwächen: wenn aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{1,\infty}^{i} \alpha_i x_i(M)$ gegen die Funktion $x(M)$ die schwache Konvergenz der Reihe $\sum_{1,\infty}^{i} \alpha_i x_i$ gegen das Element x folgt, so existiert im Ring R eine Basis.

Staatliche Universität
Zentralasien

Eingegangen am
14. 3. 1952

Zitierte Literatur

1. S c h a u d e r , J. — Math. Zs. 26, 47 (1927)

2. G e l ' f a n d, I.M.
   R a j k o v, D.A.
   Š i l o v , G.E. — Usp. matem. nauk, 1, v. 2, 48 (1946)

3. A l ' t m a n , M.Š. — O β-kol'cach ⟨Über die β-Ringe⟩, Kandidatsk. dissertacija ⟨Kandidaten-diss.⟩, Sredneaziatsk. gos. univ. ⟨Staatl. Univ. Zentralasien⟩

Anmerkung des Übersetzers

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um die wörtliche Übersetzung.

Stuttgart, den 21.10.1969

i.A.

Monika Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

Ф. С. ВАХЕР

О БАЗИСЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА КОМПАКТЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 I 1955)

Базис в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке числовой прямой, был построен Шаудером ([1]). В настоящей статье доказывается существование базиса в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на произвольном компакте Q; для некоторых пространств $C(Q)$, в частности, когда Q — гильбертов кирпич, дается непосредственное построение базиса.

§ 1. Пусть H — гильбертово пространство; последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортогональный базис в H; $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ — последовательность линейных функционалов такая, что $F_k(x_i) = 0$ для $i \neq k$, $F_k(x_k) = 1$; K — гильбертов кирпич пространства H.

Введем следующие определения и обозначения.

Гиперплоскостью будем называть множество точек, для которых выполняется $F(x) = c$.

Гиперплоскость, определенную уравнением $F_n(x)=c$, будем называть гиперплоскостью n-го направления.

Множество точек $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $b_1 \leqslant F_n(x) \leqslant b_2$, будем называть полосой n-го направления и обозначать E^n. Число $\alpha_n = |b_2 - b_1|$ будем называть шириной полосы E^n.

Пересечение полос 1-го, ..., n-го направлений будем называть параллелепипедом n-го порядка и обозначать $H^{(n)}$. Число $\alpha = \max\limits_n \alpha_n$ будем называть размером параллелепипеда $H^{(n)}$ и обозначать $r(H^{(n)})$.

Множество $L \subset H$ будем называть ограниченным по индексу n, если L содержится в некотором параллелепипеде n-го порядка.

Ограниченное по индексу n множество, содержащее сферу пространства H и являющееся пересечением конечного числа замкнутых полупространств $\overline{H}_i$ вида: $\overline{H}_i = E\,[\alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) \leqslant c^i$ (или $\geqslant c^i$)] будем называть фигурой n-го порядка и обозначать $\square^n$.

Пересечение k гиперплоскостей $G_1, \ldots, G_k$, где

$$G_t = E\,[\alpha_1^t F_1(x) + \alpha_2^t F_2(x) + \ldots + \alpha_n^t F_n(x) = c^t]$$

и система $\alpha_1^t F_1(x) + \ldots + \alpha_n^t F_n(x) = c^t$, $t = 1, 2, \ldots, k$, линейно независима, будем называть гиперплоскостью k-го порядка по индексу n.

Часть гиперплоскости k-го порядка по индексу n, ограничивающую фигуру $\square^{(n)}$, будем называть гранью k-го порядка фигуры $\square^{(n)}$.

Грань n-го порядка фигуры $\square^{(n)}$ будем называть ее вершиной.

Фигуру n-го порядка, имеющую $n+1$ вершину, будем называть элементарной фигурой n-го порядка и обозначать $\triangle^{(n)}$.

§ 2. Лемма 1. *Пусть параллелепипед $H^{(n)}$ допускает разбиение*

$$H^{(n)} = \square_1^{(n)} \cup \square_2^{(n)} \cup \ldots \cup \square_k^{(n)}, \tag{1}$$

Производим следующие построения: зажимаем компакт Q в полосу 1-го направления E' (E' — элементарная фигура 1-го порядка, касательные гиперплоскости G_1' и G_2' — ее вершины). В каждой из вершин G_1' и G_2' выбираем по одной точке кирпича: $x_1' \in G_1' \cap K$, $x_2' \cap G_2' \cap K$, и называем их центральными точками 1-го порядка; каждой центральной точке 1-го порядка приводим в соответствие специальную функцию 1-го порядка с центром в соответствующей вершине. Указанное построение называем 1-м дроблением.

Опираясь на результаты § 2, в предположении, что k-е дробление для всех $k \leqslant n$ уже построено, строим $(n+1)$-е дробление следующим образом: компакт Q зажимаем в параллелепипед $(n+1)$-го порядка $H^{(n+1)}$, совершаем разбиение параллелепипеда

$$H^{(n+1)} = \triangle_1^{(n+1)} \cup \triangle_2^{(n+1)} \cup \ldots \cup \triangle_i^{(n+1)} \qquad (3)$$

такое, что: 1) каждая элементарная фигура разбиения (3) содержится в каком-нибудь из параллелепипедов $(n+1)$-го порядка, размер которого не превосходит $\frac{1}{2^n}$; 2) каждая элементарная фигура разбиения содержится в одной из элементарных фигур n-го дробления; 3) разбиение (3) обладает свойством (e).

Далее фиксируем все вершины разбиения (3), принадлежащие по крайней мере одной элементарной фигуре, внутренность которой содержит точки компакта Q. В каждой зафиксированной вершине, не содержащей центральных точек 1-го, ..., n-го порядков, выбираем по одной точке кирпича. Выбранные точки называем центральными точками $(n+1)$-го порядка. Каждой центральной точке $(n+1)$-го порядка приводим в соответствие специальную функцию $(n+1)$-го порядка с центром в соответствующей вершине.

Продолжая построения указанным способом, построим счетную последовательность специальных функций

$$\varphi_1^1(x), \ldots, \varphi_1^k(x), \ldots, \varphi_{n_k}^k(x), \ldots \qquad (4)$$

и, соответственно, выделим счетную последовательность центральных точек

$$x_1^1, \; x_2^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k, \ldots \qquad (5)$$

Среди точек (5) могут быть и точки, не принадлежащие компакту Q, назовем их присоединенными.

Лемма 3. *Множество $\overline{Q} = Q \cup F$ (где F — множество присоединенных точек) является компактом.*

В ходе доказательства леммы 3 выясняется, что все точки F — изолированные в $\overline{Q}$.

Специальные функции ряда (4) индуцируют на компакте $\overline{Q}$ функции

$$\tilde{\varphi}_1^1(x), \ldots, \tilde{\varphi}_i^k(x), \ldots \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться, что функции (6) непрерывны на $\overline{Q}$.

§ 5. Теорема 1. *Последовательность* (6) *есть базис в пространстве* $C(\overline{Q})$.

Следствие. Если $Q = \overline{Q}$, в частности, когда $Q = K$, то последовательность (6) есть базис в пространстве $C(Q)$.

§ 6. Будем говорить, что множества Q_1 и Q_2 почти совпадают, если множество $Q_2 \setminus Q_1$ состоит из изолированных точек множества Q_2.

обладающее следующим свойством: две фигуры из разбиения (1) *либо вовсе не пересекаются, либо их пересечение является гранью каждой из них (указанное свойство будем называть свойством* (е)).

Тогда возможно новое разбиение

$$H^{(n)} = \Delta_1^{(n)} \cup \Delta_2^{(n)} \cup \ldots \cup \Delta_l^{(n)}, \qquad (2)$$

также обладающее свойством (е), *причем каждая элементарная фигура разбиения* (2) *содержится в какой-нибудь из фигур первоначального разбиения* (1).

Доказательство этого факта производится при помощи отображения P пространства H на n-мерное евклидово пространство. При этом отображении образом параллелепипеда $H^{(n)}$ является тело S полиэдрального комплекса R. Следовательно, S есть также тело некоторой триангуляции T, являющейся барицентрическим подразделением комплекса R. Элементы разбиения (2) являются прообразами элементов триангуляции T, в частности, элементарная фигура n-го порядка есть прообраз n-мерного симплекса. Все свойства триангуляции T при отображении P^{-1} переносятся на разбиение (2), откуда следует лемма 1.

Вершины всех элементарных фигур разбиения (2) называем вершинами этого разбиения.

§ 3. Производим построение специальных функций, из которых в дальнейшем строится базис. Предварительно определяем элементарные функции следующим образом: пусть $\Delta^{(n)}$ — элементарная фигура n-го порядка; $G_i^{(n)}$ — ее вершина; G_i — грань 1-го порядка, противоположная вершина $G_i^{(n)}$, и пусть $F_k(x) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — уравнение вершины $G_i^{(n)}$; $F^i(x) = \alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) = a$ — уравнение гиперплоскости G_i, содержащей грань $\overline{G}_i$.

Функцию $\varphi_i(x) = \dfrac{F^i(x) - \alpha}{b - a}$ (где $b = \alpha_1^i a_1 + \ldots + \alpha_n^i a_n$) назовем элементарной функцией фигуры $\Delta^{(n)}$ с центром в вершине $G_i^{(n)}$.

Пусть произведено правильное разбиение параллелепипеда $H^{(n)}$; $G_i^{(n)}$ — одна из вершин этого разбиения; $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \ldots, \Delta_r^{(n)}$ — элементарные фигуры разбиения, содержащие вершину $G_i^{(n)}$; $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ — элементарные функции, соответствующие указанным элементарным фигурам с центром в вершине $G_i^{(n)}$. Функцию

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{для } x \in \Delta_1^{(n)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_r(x) & \text{для } x \in \Delta_r^{(n)}; \\ 0 & \text{для } x \in H \setminus (\Delta_1^{(n)} \cup \ldots \cup \Delta_r^{(n)}) \end{cases}$$

будем называть специальной функцией n-го порядка с центром в вершине $G_i^{(n)}$.

Лемма 2. *Специальная функция n-го порядка непрерывна и однозначна на параллелепипеде* $H^{(n)}$.

§ 4. Q — произвольный компакт. Опираясь на теорему Урысона, погружаем компакт Q в гильбертов кирпич K пространства Гильберта H.

Будем говорить, что гиперплоскость G касается компакта Q, если компакт Q весь расположен по одну сторону от G и $Q \cap G$ непусто.

Будем говорить, что компакт Q зажат в параллелепипед n-го порядка, если к Q проведено по 2 касательных гиперплоскости 1-го, ..., n-го направлений.

Теорема 2. *Если компакты Q_1 и Q_2 почти совпадают, то пространства $C(Q_2)$ и $C(Q_1)\times(c)$ изоморфны (где $C(Q_1)\times(c)$ — топологическое произведение пространства $C(Q_1)$ на пространство сходящихся последовательностей (c)).*

Теорема 3. *Пространства $C(Q_1)$ и $C(Q_1)\times(c)$ изоморфны.*

1. Из теорем 2 и 3 следует, что достаточным условием изоморфизма пространства $C(Q_1)$ и $C(Q_2)$ является почти совпадением компактов Q_1 и Q_2. Отсюда, в частности, следует изоморфизм пространств $C(\overline{Q})$ и $C(Q)$.

2. Из утверждения 1 и теоремы 1 следует существование базиса в пространстве $C(Q)$.

3. Нетрудно убедиться, что в пространстве $C^i(Q)$ непрерывных комплексных функций, определенных на компакте, также существует базис.

Следствие. Пусть R — сепарабельное нормированное коммутативное симметричное кольцо; R' — кольцо функций $x(M)$, определенных на множестве максимальных идеалов кольца R и порождаемых элементами кольца. Опираясь на теорему И. М. Гельфанда [2], заключаем: если из равномерной сходимости функций $x(M)$ следует сходимость соответствующих элементов кольца R по норме, то в кольце R существует базис.

Следуя М. Ш. Альтману [3], доказавшему аналогичную теорему для нормированного кольца с одной образующей, можно несколько ослабить условия существования базиса в R: если из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{1,\infty}^{i}\alpha_i x_i(M)$ к функции $x(M)$ следует слабая сходимость ряда $\sum\limits_{1,\infty}^{i}\alpha_i x_i$ к элементу x, то в кольце R существует базис.

Среднеазиатский государственный
университет

Поступило
14 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schauder, Math. Zs., 26, 47 (1927). [2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 1, в. 2, 48 (1946). [3] М. Ш. Альтман, О β-кольцах, Кандидатск. диссертация, Среднеазиатск. гос. унив.