Ü/65

Uspechi matematičeskich nauk
11 (1956) 5, S. 203/206

Pogorelov, A.V.:

EINE ALLGEMEINE CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFT DER KUGEL

T h e o r e m 1. Eine geschlossene konvexe Fläche F ist entweder eine Kugel oder ein Kreiszylinder, der durch zwei Halbkugeln ergänzt wird, oder läßt mit sich selbst eine starke innere Berührung zu, d.h. es gibt eine Lage ⟨von⟩ F' der Fläche F, bei der die Flächen F und F' einen gemeinsamen Punkt und die gemeinsame äußere Normale n_o in diesem Punkt haben, und für die Stützfunktionen dieser Flächen ist in der Umgebung des Punktes n_o der Einheitssphäre die Ungleichung

(1)

erfüllt, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

Für eine zweimal differenzierbare Fläche bedeutet dies, daß auf F zwei Punkte existieren, die so beschaffen sind, daß man die Indikatrix der Krümmung in einem von ihnen im wesentlichen in das Innere der Indikatrix der Krümmung des anderen anordnen kann, oder – was das gleiche ist –, daß die Hauptkrümmungen in dem einen Punkt entsprechend kleiner sind als in dem anderen.

Aus diesem Theorem wird als Folgerung das Theorem von A.D. Aleksandrov gewonnen.

T h e o r e m 2. Wenn auf einer konvexen, regulären Fläche F die Hauptkrümmungen k_1 und k_2 die Bedingung $f(k_1, k_2) = \text{const}$ erfüllen, wobei f eine monotone Funktion in bezug auf beide Veränderliche ist, dann ist die Fläche F eine Kugel.

Dieses Theorem wurde von A.D. Aleksandrov für eine zweimal stetig differenzierbare Fläche F und die Funktion f mit den Ableitungen $\frac{df}{dk_1}$, $\frac{df}{dk_2}$, die größer Null sind, aufgestellt. Aus dem Theorem 1 folgt das Theorem 2 ohne irgendwelche zusätzlichen Annahmen für die Funktion f, abgesehen von der Monotonie.

In der Tat: angenommen, F ist keine Kugel, dann existiert eine starke Innenberührung (eine Kugel, durch einen Zylinder ergänzt, kann es nicht sein, da dies keine reguläre Fläche ist). Angenommen, es existiere in dem Punkt X eine starke Innenberührung. In der Umgebung des Punktes X haben die Flächen F und F' nur einen gemeinsamen Punkt - das ist der Punkt X. Sonst wird für eine Näherung der Werte n gegen n_0 $H(n) - H'(n) = 0$, was unmöglich ist. Somit ist entweder F in F' in der Nähe von X enthalten, oder F' in F. Und da $|H(n) - H'(n)| \geqslant c\,|n - n_0|^2$ ist, sind die Hauptkrümmungen der einen Fläche geringer als die Hauptkrümmungen der anderen. Das aber ist aufgrund der Monotonie von $F(k_1, k_2)$ unmöglich.

<u>B e w e i s d e s T h e o r e m s 1.</u> Wir führen in einem Raum willkürlich die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y und z ein. Es sei $H(x, y, z)$ die Stützfunktion der Fläche F. Wir betrachten die Fläche Φ, die durch die Gleichung

(2)

vorgegeben ist.
Wir zeigen, daß wenn die Fläche F keine starke Innenberührung in dem erwähnten Sinne zuläßt, die Fläche Φ eine Fläche einer verallgemeinerten negativen Krümmung in dem Sinne ist, daß jedes beliebige Teil, in das eine beliebige Ebene Φ zerlegt, unendlich ist. Wir nehmen an, die Behauptung sei nicht gültig und eine bestimmte Ebene $\alpha : z = ax + by + c$ schneidet von der Fläche Φ den endlichen Teil $\bar{\Phi}$ ab.

Für die Definition sei $\bar{\Phi}$ über der Ebene α gelegen. Die Fläche $\bar{\Phi}$ befindet sich zusammen mit ihrer Grenze innerhalb des Paraboloids $z = A - x^2 - y^2$ wenn A hinreichend groß ist. Wir werden dieses Paraboloid in bezug auf die Ebene α affin zusammendrücken. Dann berührt das Paraboloid in einem bestimmten Moment die Fläche in einem bestimmten Punkt S. Die Tangentialebene des Paraboloids in dem Punkt S ist eine Stützebene von $\bar{\Phi}$. Wenn x_o, y_o die Koordinaten der Projektion des Punktes S auf die xy-Ebene sind, dann ist bei kleinem $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$ offensichtlich die Ungleichung

(3)

erfüllt, wobei

; (a)

dabei sind $z = a'x + b'y + c'$ die Gleichungen der Stützebene und $k > 0$ eine Konstante. Wir bezeichnen mit n den Einheitsvektor der Richtung $(x : y : 1)$. Dann gilt

, (b)

wobei $H(n)$ - die Stützfunktion von F ist und $H'(n)$ die Stützfunktion der Fläche F' ist, die man durch Spiegelung von F an der xy-Ebene und durch eine Parallelverschiebung um den Vektor (a', b', c') gewonnen hat. Da die Größen $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$ und $|n - n_o|^2$ von derselben Ordnung sind, erhält man aus der Beziehung (3)

; (4)

das bedeutet: die Fläche F läßt eine starke innere Berührung zu.

Also ist, wenn die Fläche F keine starke Innenberührung zuläßt, die Fläche Φ die Fläche einer verallgemeinerten negativen Krümmung. Wenn die Fläche F ein Stück der Ebene enthält, so läßt sie offensichtlich eine starke Innenberührung zu. Es genügt, die Fläche F in eine

Sphäre mit kleinstem Radius einzuschließen und dann einen Punkt der Sphäre und der Fläche so zusammenzulegen mit irgendeinem inneren Punkt Q des ebenen Stücks, daß die Tangentialebene der Sphäre mit der Ebene des Stücks zusammenfällt und die Fläche F' (die Fläche F in der neuen Lage) von ⟨auf⟩ der gleichen Seite von der Ebene des Stücks ist wie auch F. Eine derartige Lage der Flächen F und F' entspricht einer starken Innenberührung im Punkt Q. Wenn die Fläche F also keine starke Innenberührung zuläßt, so enthält sie keine ebenen Stücke.

Wir zeigen jetzt, daß wenn die Fläche F eine Gerade ⟨geradlinigen Abschnitt, Strecke⟩ enthält, aber keine starke Innenberührung zuläßt und folglich keine ebenen Bereiche ⟨Gebiete⟩ enthält, sie ein Kreiszylinder ist, der durch zwei Halbkugeln ergänzt ist. Angenommen, g sei eine Gerade ⟨Strecke⟩ auf F. Wir zeichnen die Stützebene α der Fläche F, die die Gerade g enthält. Offensichtlich enthält die Ebene α abgesehen von den Punkten von g keine anderen Punkte der Fläche, da es auf der Fläche keine ebenen Bereiche ⟨Gebiete⟩ gibt. Wir wählen jetzt die z-Achse so, daß der die Fläche F in der Richtung z projizierende Zylinder keine gemeinsamen Bereiche mit der Fläche hat und daß alle Stützebenen des Zylinders - abgesehen vielleicht von der Menge der Ebenen des Winkelmaßes Null - nur je einen Punkt der Fläche F enthalten. Offensichtlich besitzen fast alle zur Ebene α parallelen Richtungen diese Eigenschaft. Die x-Achse richten wir nach der äußeren Normalen der Ebene α.

Wir betrachten die oben eingeführte Fläche (2). Da F keine starke Innenberührung zuläßt, ist Φ eine Fläche einer verallgemeinerten negativen Krümmung. Bei $x^2 + y^2 \to \infty$ bleibt die Größe $H(x, y, 1) - H(x, y, -1)$ begrenzt. Genauer gesagt: wenn die Stützebene mit der äußeren Normalen $n(\xi, \eta, 0)$ mit der Fläche F nur einen gemeinsamen Punkt P hat und $z(P)$ ihre z-Koordinate ist, dann ist $H(x, y, 1) - H(x, y, -1) \to 2z(P)$, wenn sich der Punkt (x, y) ins Unendliche bewegt in der Richtung $(\xi : \eta)$. Wenn jedoch die Stützebene mit der Fläche die gemeinsame Gerade ⟨Strecke⟩ PQ hat, dann ist $H(x, y, 1) - H(x, y, -1) \to z(P) + z(Q)$. In der Tat, angenommen, die Stützebene mit der äußeren Normalen $(\xi, \eta, 0)$ hat nur einen gemeinsamen Punkt mit der Fläche - den Punkt P. Wir nehmen an:

. ⟨c⟩

Wir haben:

. ⟨d⟩

Wenn die Stützebene mit der Fläche eine gemeinsame Gerade hat, wird die Behauptung analog bewiesen.

Aus der bis ins Unendliche reichenden Beschränktheit von $H(x, y, 1) - H(x, y, -1)$ folgt nach einem Theorem von S.N. Bernštejn - von G.M. Adel'son-Vel'skij und A.S. Kronrod auf Flächen ⟨mit⟩ einer verallgemeinerten negativen Krümmung erweitert - , daß Φ (d.h. die Fläche (2)) ein Zylinder ist mit Erzeugenden, die parallel zur xy-Ebene sind.

Wir nehmen an, daß die Gerade g, von der wir ausgingen, als wir die z-Achse wählten, nicht parallel zur xy-Ebene ist. Wir bestimmen ⟨definieren⟩ die Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ eines Punktes auf dem Einheitskreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$ durch die Bedingung $\varphi(\xi, \eta) = \lim (H(x, y, 1) - H(x, y, -1))$ bei $x^2 + y^2 \to \infty$ und $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \xi$, $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \eta$.

Da Φ eine Zylinderfläche mit zur xy-Ebene parallelen Erzeugenden ist, teilt der Durchmesser, der parallel zu den Erzeugenden des Zylinders ist, den Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$ in zwei Halbkreise, auf denen φ konstant ist. Man kann leicht sehen, daß dieser Durchmesser die x-Achse ist, da aus der Tatsache, daß die Gerade g nicht parallel zur xy-Ebene ist, folgt, daß φ in dem Punkt $(1, 0)$ unstetig ist. Denn bei $(\xi, \eta) \to (1, 0)$ und $\eta > 0$ ist die Grenze von $\varphi(\xi, \eta)$ gleich der doppelten z-Koordinate des einen Endes der Gerade g und bei $\eta < 0$ - des anderen.

Wir zeichnen den Zylinder Z, der die Fläche F in Richtung der z-Achse projiziert. Es sei Z_1 der Teil des Zylinders, dessen sphärische

Abbildung der Halbkreis $\eta > 0$ ist, und Z_2 der Teil des Zylinders, dessen sphärische Abbildung der Halbkreis $\eta < 0$ ist. Angenommen, zur Definition läge das Ende P der Geraden g auf der Grenze von Z_1 und das Ende Q - auf der Grenze von Z_2. Dann gibt es auf jeder Erzeugenden des Zylinders Z_1 einen Punkt der Fläche F, für den $z = z(P)$, und auf jeder Erzeugenden von Z_2 einen Punkt, für den $z = z(Q)$ ist. Daraus folgt, daß die Kurve γ, auf der dieser Zylinder die Ebene schneidet, die durch den Punkt P senkrecht zu den Erzeugenden des Zylinders Z_1 verläuft, gänzlich auf der Fläche F liegt.

Wir ziehen durch den Mittelpunkt der Einheitssphäre ω eine Gerade, die parallel zu der Gerade (Strecke) g ist. Sie schneidet die Sphäre in den zwei Punkten $\bar{P}$ und $\bar{Q}$. Angenommen, zur Definition falle die Richtung aus $\bar{P}$ in $\bar{Q}$ mit der Richtung aus P in Q zusammen. Wir bezeichnen die Halbkugel mit dem Pol in $\bar{P}$ durch ω_1 und die Halbkugel mit dem Pol in $\bar{Q}$ durch ω_2. Es sei S der Punkt auf ω, der der äußeren Normalen der Stützebene α entspricht, die die Strecke g enthält. Offensichtlich liegt S auf der Grenze jeder der Halbkugeln ω_1 und ω_2. Nach dem soeben Bewiesenen entspricht fast jedem Großkreis auf ω_1, der von S ausgeht, auf der Fläche F eine ebene Kurve, die durch P verläuft, wobei die Ebene dieser Kurve parallel zur Kreisebene ist, und die sphärische Abbildung der Punktmenge dieser Kurve auf der Fläche diesen Kreis enthält. Nach der Stetigkeit gilt diese Eigenschaft für alle Großkreise, die von S auf ω_1 ausgehen. Daraus folgt, daß der Teil F_1 der Fläche F, dessen sphärische Abbildung die offene Halbkugel ω_1 ist, eine Rotationsfläche ist, wobei die Rotationsachse die Normale zur Ebene α - der Stützebene - ist, die die Strecke g enthält. Dieser Teil der Fläche wird von der Fläche F durch eine Ebene abgetrennt, die durch den Punkt P senkrecht zur Strecke g verläuft. Analog wird der Teil F_2 der Fläche F bestimmt, der als sphärische Abbildung die offene Halbkugel ω_2 hat.

Zwischen den Teilen F_1 und F_2 der Fläche F liegt der verbleibende Teil der Fläche F. Wir bezeichnen ihn mit F_{12}. Dieser Teil der Fläche F hat als seine sphärische Abbildung einen Großkreis, der die Halbkugeln ω_1 und ω_2 begrenzt, und ist folglich ein Zylinder.

Wenn als Strecke g eine beliebige andere Erzeugende des Zylinders F_{12} gewählt wird, kommen wir durch analoge Überlegung zu dem Schluß, daß die Flächen F_1 und F_2 Rotationsflächen mit einer anderen Achse sind. Und daraus folgt, daß jede Fläche F_1 und F_2 eine Halbkugel ist und F_{12} - ein Kreiszylinder. Somit ist, wenn die Fläche F eine Gerade ⟨Strecke⟩ ⟨geradlinigen Abschnitt⟩ enthält und keine starke Innenberührung zuläßt, sie ein durch zwei Halbkugeln ergänzter Kreiszylinder.

Wenn die Fläche F im wesentlichen konvex ist, d.h. keine Geraden ⟨Strecken⟩ ⟨geradlinigen Abschnitte⟩ enthält, ist die Betrachtung analog, jedoch wesentlich vereinfacht, und wir kommen zu dem Schluß, daß F eine Sphäre ist. -

Eingegangen in der Redaktion am 23. September 1955

Anmerkung des Übersetzers:

Bei den Termini in ⟨ ⟩ handelt es sich um eine Übersetzungsvariante.

Stuttgart, den 13.5.1970

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

1956 г. сентябрь—октябрь *т. XI, вып. 5 (71)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОДНО ОБЩЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ШАРА

А. В. Погорелов

Теорема 1. *Замкнутая выпуклая поверхность F есть либо шар, либо круговой цилиндр, дополненный двумя полушариями, либо допускает сама с собой сильное внутреннее касание, т. е. существует такое положение F' поверхности F, при котором поверхности F и F' имеют общую точку, общую внешнюю нормаль n_0 в этой точке и для опорных функций этих поверхностей в окрестности точки n_0 единичной сферы выполняется неравенство*

$$|H(n)-H'(n)| \geqslant c\,|n-n_0|^2, \qquad (1)$$

где $c>0$ — постоянная.

Для дважды дифференцируемой поверхности это значит, что существуют на F такие две точки, что индикатрису кривизны в одной из них можно поместить существенно внутрь индикатрисы кривизны другой, или, что то же самое, главные кривизны в одной точке соответственно меньше, чем в другой.

Из этой теоремы как следствие получается теорема А. Д. Александрова.

Теорема 2. *Если на выпуклой регулярной поверхности F главные кривизны k_1 и k_2 удовлетворяют условию $f(k_1, k_2)=\text{const}$, где f — монотонная функция по обеим переменным, то поверхность F — шар.*

Эта теорема установлена А. Д. Александровым для дважды непрерывно дифференцируемой поверхности F и функции f с производными $\frac{\partial f}{\partial k_1}$, $\frac{\partial f}{\partial k_2}$, большими нуля. Из теоремы 1 теорема 2 следует без каких-либо дополнительных предположений о функции f, кроме монотонности.

Действительно, пусть F не шар, тогда есть сильное внутреннее касание (шара, дополненного цилиндром, не может быть, так как это не регулярная поверхность). Пусть в точке X сильное внутреннее касание. В окрестности точки X поверхности F и F' имеют только одну общую точку — это точка X. Иначе для близких значений n к n_0 будет $H(n)-H'(n)=0$, что невозможно. Таким образом, либо F содержится в F' вблизи X, либо F' в F. И так как $|H(n)-H'(n)| \geqslant c\,|n-n_0|^2$, то главные кривизны одной поверхности меньше главных кривизн другой. А это невозможно в силу монотонности $f(k_1, k_2)$.

Доказательство теоремы 1. Введём в пространстве произвольным образом прямоугольные декартовы координаты x, y, z. Пусть

$H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F. Рассмотрим поверхность Φ, заданную уравнением

$$z = H(x, y, 1) - H(x, y, -1). \qquad (2)$$

Покажем, что если поверхность F не допускает сильного внутреннего касания в указанном смысле, то поверхность Φ является поверхностью обобщённой отрицательной кривизны в том смысле, что любая из частей, на которые разбивает Φ произвольная плоскость, бесконечна. Допустим, утверждение неверно и некоторая плоскость α: $z = ax + by + c$ отсекает от поверхности Φ конечную часть $\overline{\Phi}$. Пусть для определённости $\overline{\Phi}$ расположена над плоскостью α. Поверхность $\overline{\Phi}$ вместе с её границей находится внутри параболоида $z = A - x^2 - y^2$, если достаточно велико A. Будем аффинно сжимать этот параболоид относительно плоскости α. Тогда в некоторый момент параболоид коснётся поверхности $\overline{\Phi}$ в некоторой точке S. Касательная плоскость параболоида в точке S является опорной плоскостью $\overline{\Phi}$. Если x_0, y_0 — координаты проекции точки S на плоскость xy, то, очевидно, при малом $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ выполняется неравенство

$$|h(x, y) - h'(x, y)| \geq k((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \qquad (3)$$

где

$$h(x, y) = H(x, y, 1); \quad h'(x, y) = H(x, y, -1) + a'x + b'y + c',$$

причём $z = a'x + b'y + c'$ — уравнения опорной плоскости, а $k > 0$ — постоянная. Обозначим n единичный вектор направления $(x : y : 1)$. Тогда

$$h(x, y) = H(n)\sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad h'(x, y) = H'(n)\sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

где $H(n)$ — опорная функция F, а $H'(n)$ — опорная функция поверхности F', полученной зеркальным отображением F в плоскости xy и параллельным переносом на вектор (a', b', c'). Так как величины $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ и $|n - n_0|^2$ одного порядка, то из соотношения (3) получается:

$$|H(n) - H'(n)| \geq K' |n - n_0|^2, \qquad (4)$$

значит, поверхность F допускает сильное внутреннее касание.

Итак, если поверхность F не допускает сильного внутреннего касания, то поверхность Φ является поверхностью обобщённой отрицательной кривизны. Если поверхность F содержит кусок плоскости, то она, очевидно, допускает сильное внутреннее касание. Достаточно поверхность F заключить внутрь сферы наименьшего радиуса, а затем совместить точку, общую сфере и поверхности, с какой-нибудь внутренней точкой Q плоского куска так, чтобы касательная плоскость сферы совпала с плоскостью куска и поверхность F' (поверхность F в новом расположении) была с той же стороны от плоскости куска, что и F. Такое расположение поверхностей F и F' соответствует сильному внутреннему касанию в точке Q. Итак, если поверхность F не допускает сильного внутреннего касания, то она не содержит плоских кусков.

Покажем теперь, что если поверхность F содержит прямолинейный отрезок, но не допускает сильного внутреннего касания и, следовательно, не содержит плоских областей, то она представляет собой круговой цилиндр, дополненный двумя полусферами. Пусть g — прямолинейный отрезок на F. Проведём опорную плоскость α поверхности F, содержащую отрезок g. Очевидно, других точек поверхности, кроме точек g, плоскость α не содержит, так как на поверхности нет плоских областей. Возьмём теперь ось z так, чтобы проектирующий поверхность F в направлении z цилиндр не имел общих областей с поверхностью и чтобы все опорные плоскости цилиндра, кроме, может быть, множества плоскостей угловой меры нуль, содержали только по одной точке поверхности F. Очевидно, почти все направления, параллельные плоскости α, обладают этим свойством. Ось x направим по внешней нормали плоскости α.

Рассмотрим введённую выше поверхность (2). [Так как F не допускает сильного внутреннего касания, то Φ является поверхностью обобщённой отрицательной кривизны. При $x^2+y^2 \to \infty$ величина $H(x, y, 1)-H(x, y, -1)$ остаётся ограниченной. Более точно, если опорная плоскость с внешней нормалью $n(\xi, \eta, 0)$ имеет с поверхностью F только одну общую точку P и $z(P)$ — её координата z, то $H(x, y, 1)-H(x, y, -1) \to 2z(P)$, когда точка (x, y) удаляется в бесконечность в направлении $(\xi:\eta)$. Если же опорная плоскость имеет с поверхностью общий отрезок PQ, то $(H(x, y, 1)-$ $-H(x, y, -1)) \to z(P)+z(Q)$. Действительно, пусть опорная плоскость с внешней нормалью $(\xi, \eta, 0)$ имеет только одну общую точку с поверхностью — точку P. Положим:

$$x'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad y'=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad z'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Имеем:

$$H(x, y, 1)-H(x, y, -1)=\frac{H(x', y', z')-H(x', y', -z')}{z'} \to 2H_z(\xi, \eta, 0)=2z(P).$$

В случае, когда опорная плоскость имеет с поверхностью общий отрезок, утверждение доказывается аналогично.

Из ограниченности $H(x, y, 1)-H(x, y, -1)$ на бесконечности по теореме С. Н. Бернштейна, распространённой на случай поверхностей обобщённой отрицательной кривизны Г. М. Адельсоном-Вельским и А. С. Кронродом, следует, что Φ (т. е. поверхность (2)) есть цилиндр с образующими, параллельными плоскости xy.

Предположим, что отрезок g, от которого мы отправлялись, выбирая ось z, не параллелен плоскости xy. Определим функцию $\varphi(\xi, \eta)$ точки на единичном круге $\xi^2+\eta^2=1$ условием $\varphi(\xi, \eta)=\lim(H(x, y, 1)-H(x, y, -1))$ при $x^2+y^2 \to \infty$ и $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\xi$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\eta$. Так как Φ — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными плоскости xy, то диаметр, параллельный образующим цилиндра, разбивает окружность $\xi^2+\eta^2=1$ на две полуокружности, на каждой из которых φ постоянна. Легко видеть, что этот диаметр есть ось x, так как из того, что отрезок g не параллелен плоскости xy, следует, что φ разрывна в точке $(1, 0)$. Именно, при $(\xi, \eta) \to (1, 0)$ и $\eta > 0$ предел $\varphi(\xi, \eta)$ равен удвоенной координате z одного конца отрезка g, а при $\eta < 0$ — другого.

Проведём цилиндр Z, проектирующий поверхность F в направлении оси z. Пусть Z_1 — часть цилиндра, сферическое изображение которой есть полуокружность $\eta > 0$, а Z_2 — часть цилиндра, сферическое изображение которой — полуокружность $\eta < 0$. Пусть для определённости конец P отрезка g лежит на границе Z_1, а конец Q — на границе Z_2. Тогда на каждой образующей цилиндра Z_1 есть точка поверхности F, для которой $z = z(P)$, а на каждой образующей Z_2 есть точка, для которой $z = z(Q)$. Отсюда следует, что кривая γ, по которой пересекает этот цилиндр плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно к образующим цилиндра Z_1, вся лежит на поверхности F.

Проведём через центр единичной сферы ω прямую, параллельную отрезку g. Она пересечёт сферу в двух точках $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Пусть для определённости направление из $\overline{P}$ в $\overline{Q}$ совпадает с направлением из P в Q. Обозначим полусферу с полюсом в $\overline{P}$ через ω_1, а полусферу с полюсом в $\overline{Q}$ через ω_2. Пусть S — точка на ω, соответствующая внешней нормали опорной плоскости α, содержащей отрезок g. Очевидно, S лежит на границе каждой из полусфер ω_1 и ω_2. По доказанному только что почти каждому большому кругу на ω_1, исходящему из S, на поверхности F соответствует плоская кривая, проходящая через P, причём плоскость этой кривой параллельна плоскости круга, а сферическое изображение множества точек этой кривой на поверхности содержит этот круг. По непрерывности это свойство имеет место для всех больших кругов, исходящих из S на ω_1. Отсюда следует, что часть F_1 поверхности F, сферическое изображение которой — открытая полусфера ω_1, есть поверхность вращения, причём осью вращения является нормаль к плоскости α — опорной плоскости, содержащей отрезок g. Эта часть поверхности отсекается от поверхности F плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно к отрезку g. Аналогично определяется часть F_2 поверхности F, имеющая сферическим изображением открытую полусферу ω_2.

Между частями F_1 и F_2 поверхности F располагается оставшаяся часть поверхности F. Обозначим её F_{12}. Эта часть поверхности F имеет своим сферическим изображением большой круг, ограничивающий полусферы ω_1 и ω_2, а следовательно, представляет собой цилиндр.

Если взять в качестве отрезка g любую другую образующую цилиндра F_{12}, то мы аналогичным рассуждением приходим к выводу, что поверхности F_1 и F_2 суть поверхности вращения с другой осью. А отсюда следует, что каждая поверхность F_1 и F_2 есть полусфера, а F_{12} — круговой цилиндр. Итак, если поверхность F содержит прямолинейный отрезок и не допускает сильного внутреннего касания, то она есть круговой цилиндр, дополненный двумя полусферами.

В случае, если поверхность F существенно выпукла, т. е. не содержит прямолинейных отрезков, рассмотрение аналогичное, но существенно упрощается, и мы приходим к заключению, что F — сфера.

Поступило в редакцию 23 сентября 1955 г.