Ü/63

Izvestija Akademii nauk SSSR
Serija matematičeskaja
14 (1950), S. 537/548

Gurevič, A.A. und Rochlin, V.A.:

APPROXIMATIONSSÄTZE FÜR MESSBARE STRÖMUNGEN
(Vorgelegt von dem Akademiemitglied A.N. Kolmogorov)

In der Arbeit wird die Möglichkeit einer sehr genauen Approximation einer beliebigen meßbaren Strömung durch periodische Strömungen festgestellt. Mittels einer solchen Approximation wird die Dichte der wichtigsten Klassen meßbarer Strömungen untersucht.

Die vorliegende Arbeit ist einer Untersuchung der Anordnung der wichtigsten Klassen meßbarer Strömungen im Raum aller meßbaren Strömungen gewidmet. Die Ergebnisse sind in vieler Hinsicht analog zu schon bekannten Resultaten, die einzelne Transformationen mit invariantem Maß betreffen. (s. [1], § 1 und § 4). Die Analogie ist jedoch nicht vollständig: während im Falle einzelner Transformationen mit invariantem Maß die Untersuchung in zwei vollständig unterschiedlichen Topologien durchgeführt werden kann, gelingt es im Raum meßbarer Strömungen lediglich, eine natürliche Topologie einzuführen.

Hinsichtlich der in der Arbeit verwendeten Begriffe der Maßtheorie (Lebesguescher Raum, Lebesguesches Maß, Isomorphismus usw.) s. [2], §§ 1 und 2.

Die Hauptresultate dieser Arbeit waren in [3] veröffentlicht worden.

§ 1. Die wichtigsten Definitionen. Darstellungssatz

In diesem Paragraphen werden wir die im folgenden notwendigen Definitionen und Fakten der Theorie meßbarer Strömungen in Kürze darlegen. Eine detaillierte Darstellung findet sich in [1], §§ 5 und 6.

Man sagt, in dem Lebesgueschen Raum M mit dem Maß μ sei die

Strömung $\{S_t\}$ vorgegeben, wenn jeder reellen Zahl t ein bestimmter Automorphismus des Raumes M (d.h. eine isomorphe Abbildung des Raumes M auf ganz M) S_t so zugeordnet ist, daß für einen beliebigen Punkt $x \in M$ und beliebige Werte s, t

⟨a⟩

gilt.

Eine ⟨die⟩ Strömung wird *meßbar* genannt, wenn - wie auch immer die meßbare Menge $A \subset M$ geartet ist - die Menge derjenigen Punkte (x, t) des mengentheoretischen Produkts $M \times (t)$ der Menge M mit der Zahlengeraden (t), für die $S_t x \in A$ gilt, meßbar ist in bezug auf das Maß, das natürlich entsteht in $M \times (t)$ aus dem Maß μ in M und dem gewöhnlichen Lebesgueschen Maß in (t).

Die Menge der Punkte $S_t x$ $(-\infty < t < +\infty)$ wird die *Trajektorie* des Punktes $x \in M$ genannt. Die Mengen, die aus ganzen Trajektorien bestehen, heißen *invariant*. Der Punkt x wird *Fixpunkt* genannt, wenn alle Punkte $S_t x$ miteinander identisch sind; er heißt *Punkt der Aperiodizität*, wenn alle Punkte $S_t x$ voneinander verschieden sind; er heißt *Periodenpunkt* ⟨*Punkt der Periodizität*⟩ *mit der Periode* $p = p(x)$, wenn bei $0 \leq t < p$ alle Punkte $S_t x$ voneinander verschieden sind und bei $q \equiv r \pmod{p}$ immer $S_q x = S_r x$ ist. Für eine meßbare Strömung sind alle drei Mengen - die Menge der Fixpunkte, die Menge der Aperiodizitätspunkte und die Menge der Periodizitätspunkte - meßbar und bedecken zusammen fast den ganzen Raum M. Die Funktion $p(x)$ ist ebenfalls meßbar. Die angeführten drei Mengen sind natürlich invariant. Auf der ersten von ihnen lohnt die Strömung nicht eine Untersuchung. Die Struktur der Strömung auf der zweiten und dritten Menge wird durch den in der Hauptsache von V. Ambroz und S. Kakutan⟨i⟩ aufgestellten *Satz über die Darstellung* ⟨*Darstellungssatz*⟩ sehr deutlich gemacht. Wir führen diesen Satz in einer etwas verstärkten Formulierung an, dabei getrennt für überall aperiodische - oder, wie wir einfach sagen, *aperiodische* - Strömungen und getrennt für überall periodische Strömungen.

Wir kommen überein, ein Maß, das sich vom Lebesgueschen Maß nur durch einen numerischen Multiplikator unterscheidet, der nicht gleich Eins ist, als n i c h t n o r m i e r t e s Lebesgueschеs Maß zu bezeichnen und nehmen an, daß vorgegeben sei:

der Raum Y mit dem normierten oder nichtnormierten Lebesgueschen Maß ν ;

der Automorphismus T des Raumes Y ;

die meßbare reelle Funktion F des Punktes $y \in Y$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

. ⟨b⟩

Wir kommen überein, mit u die reelle Veränderliche zu bezeichnen, mit $Y \times (u)$ - das mit dem natürlichen Maß $\hat{\nu}$ versehene Produkt des Raumes Y mit der Zahlengeraden (u) , mit $\hat{Y}$ - den Unterraum des Raumes $Y \times (u)$, der aus denjenigen Punkten (y, u) besteht, für die $0 \leq u < F(y)$, und nehmen an:

(1)

Offensichtlich ist $\hat{Y}$ ein Lebesguescher Raum (mit dem normierten Maß: $\hat{\nu}\hat{Y} = 1$) und es läßt sich leicht zeigen, daß $\{T_t\}$ eine meßbare Strömung in $\hat{Y}$ ist. Sie wird eine s p e z i e l l e S t r ö m u n g , k o n s t r u i e r t n a c h d e m A u t o m o r p h i s m u s T u n d d e r F u n k t i o n F , genannt. Sie ist dann und nur dann aperiodisch, wenn der Automorphismus T aperiodisch ist, d.h. wenn für jeden Punkt $y \in Y$ alle Punkte $T^n y (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ untereinander verschieden sind. Es ist ebenfalls offensichtlich, daß die Perioden der Strömung $\{T_t\}$ in allen Punkten nach unten durch ein und dieselbe positive Zahl beschränkt sind. Der Satz über die Darstellung ⟨Darstellungssatz⟩ lautet:

a) Jede aperiodische Strömung ist isomorph zu einer bestimmten speziellen Strömung.

Letztere kann man immer so wählen, daß die Funktion F - nach der sie konstruiert ist - beschränkt ist und sogar die Ungleichung der Form

(2)

erfüllt, wobei τ - eine positive Zahl ist.

b) Jede Strömung, die in allen Punkten des Raumes M periodisch ist und Perioden hat, die nach unten durch ein und dieselbe Zahl beschränkt sind, ist isomorph zu einer speziellen Strömung. Letztere kann man immer so wählen, daß der Automorphismus, nach dem sie konstruiert ist, eine identische Transformation ist.

Die zweite dieser Aussagen liefert eine erschöpfende Charakteristik einer beliebigen überall periodischen Strömung. Besonders einfach ist der Fall, wenn die Strömung einfach p e r i o d i s c h i s t , d.h. in allen Punkten ein und dieselbe Periode p hat. In diesem Fall ist die Funktion F, nach der die im Theorem b) aufgezeigte spezielle Strömung (1) konstruiert ist, identisch gleich p , sodaß die Struktur der Strömung gänzlich durch die Struktur des Raumes Y bestimmt ist. Wenn insbesondere die Strömung keine Trajektorien mit positivem Maß besitzt, dann besitzt der Raum Y keine Punkte mit positivem Maß, und sein metrischer Typ - und gleichzeitig damit auch der metrische Typ der Strömung - wird durch die Zahl p bestimmt. Die periodischen Strömungen, deren Trajektorien alle das Maß Null haben, nennen wir S t a n d a r d - Strömungen. Aus dem Dargelegten folgt, daß

alle Standardströmungen mit einer gegebenen Periode p zueinander isomorph sind.

§ 2. Umformung der speziellen Strömung

Wenn der A u t o m o r p h i s m u s T des Lebesgueschen Raumes M aperiodisch ist, existiert für jede natürliche Zahl n und jede positive Zahl ε eine meßbare Menge $X \subset M$, die sich mit keinem ihrer Bilder $TX, T^2X, \ldots, T^{n-1}X$ schneidet und ein Maß besitzt, das größer als $\frac{1-\varepsilon}{n}$ ist. Diesen Satz, dessen Beweis sich in [1] (s. [1], § 1, Pt. 7) findet, wollen wir in diesem Abschnitt auf aperiodische S t r ö m u n g e n übertragen.

Wir kommen überein, zu sagen, daß die spezielle Strömung (1) d i e E i g e n s c h a f t (p, ε) b e s i t z t, wenn das Integral der Funktion F nach der Menge derjenigen Punkte $y \in Y$, in denen $F(y) \neq p$, kleiner ε ist. Unser Theorem behauptet, daß

> für jede aperiodische Strömung $\{S_t\}$ bei beliebigen positiven p und ε eine zu ihre isomorphe spezielle Strömung existiert, die die Bedingung (p, ε) erfüllt.

B e w e i s. Angenommen, (1) sei irgendeine spezielle Strömung, die isomorph zur Strömung $\{S_t\}$ ist und die Bedingung (2) erfüllt. Wir gestalten die Strömung (1) um in eine neue spezielle Strömung $\{T'_t\}$, die isomorph zur Strömung (1) ist und die Bedingung (p, ε) erfüllt.

Wir nehmen an

. ⟨o⟩

Aufgrund des Ergodensatzes konvergiert die Folge der Funktionen $\frac{1}{n} f_n$ im Mittel gegen eine bestimmte, bezüglich T meßbare Funktion f. Infolge von (2) haben wir

. (3)

Wir wählen irgendeine natürliche Zahl m, die die Ungleichung

(4)

erfüllt, nehmen an

(5)

und bezeichnen mit Y_i die Menge derjenigen Punkte $y \in Y$, in denen

(6)

gilt.

Da aus der Konvergenz der Folge $\frac{1}{n} f_n$ im Mittel ihre Konvergenz hinsichtlich des Maßes folgt, existiert ein so großes N, daß bei $n > N$ in allen Punkten $y \in Y$, die nicht zu einer bestimmten ausschließlichen Menge E gehören, für die

, (7)

die Ungleichung gilt:

. (8)

Haben wir ein solches N, dann wählen wir eine so große natürliche Zahl q, daß die Ungleichung

(9)

gilt. Offensichtlich können wir zurecht annehmen, daß $\varepsilon < 6$ und daß folglich $\tau_i - \frac{\varepsilon\tau}{6} > 0$. Y_i sind paarweise fremde und Y überdeckende, invariante meßbare Mengen, und die in ihnen durch den Automorphismus T induzierten Automorphismen sind aperiodisch. Somit ist auf sie der zu Anfang dieses Paragraphen formulierte Satz anwendbar: es existiert die meßbare Menge $X_i \subset Y_i$ mit dem Maß

, (10)

die sich mit keiner der Mengen

(11)

schneidet. Dabei nehmen wir zurecht an, daß

; (12)

denn wenn die Ungleichung (12) für die Menge X_i nicht erfüllt ist, dann ist sie - infolge von (7) - unbedingt für eine der Mengen (11) erfüllt und X_i kann man durch eine beliebige Menge daraus ersetzen.

Wir nehmen an $A_i = X_i - E \cdot X_i$. Die Mengen A_i spielen in unserem Aufbau die Hauptrolle. Wir behaupten, daß auf A_i

(13)

gilt. Tatsächlich ist

, (14)

wobei - aufgrund der Ungleichung $n_i > N$ (s. [9]) und der Wahl der Zahl N (s. [8])

(15)

gilt, aufgrund von (4)

(16)

(s. [5] und [6]) und aufgrund von (9)

. (17)

Aus (14), (15), (16) und (17) folgt (13).

Jetzt können wir die für uns nötige spezielle Strömung $\{T'_t\}$

konstruieren. Wir wählen $q+1$ der Exemplare

$$\langle d \rangle$$

der Menge A_i, die in zyklischer Ordnung durch irgendwelche isomorphen Abbildungen $R_i^{(1)}$ verbunden sind:

$$\langle e \rangle$$

und nehmen an:

$$, \langle f \rangle$$

$$. \langle g \rangle$$

Wir sagen, daß jede der Mengen A_i^1, B_i, C_i in der Menge Y' mit ihrem natürlichen Maß enthalten ist. Genau dadurch entsteht in Y' ein bestimmtes Maß ν'. Angenommen, es gilt:

$$\langle h \rangle$$

und

$$\langle i \rangle$$

Aus dem Aufbau ist ersichtlich, daß T' ein Automorphismus des Raumes Y' mit dem Maß ν' ist, daß die Funktion F' die Bedingungen

$$\langle k \rangle$$

erfüllt (s. die erste der Ungleichungen (13)) und daß die spezielle Strömung $\{T'_t\}$ - konstruiert nach dem Automorphismus T' und der Funktion F' - isomorph zu der Strömung (1) ist. Wir zeigen -

und damit wird der Beweis abgeschlossen sein - daß

. (18)

Da die Mengen A_i, TA_i ..., $T^{n_i-1}A_i$ paarweise fremd sind, die gleichen Maße haben und in Y_i enthalten sind, ist $n_i \cdot \nu A_i \leq \nu Y_i$ und - aufgrund von (13) - gilt

. (19)

Weiter gilt - infolge (12) und (10)

⟨1⟩

und folglich

. (20)

Aus (19) und (20) erhalten wir

. (21)

Aufgrund von (2) gilt jedoch:

, ⟨m⟩

so daß aus (21) (18) folgt.

§ 3. Approximationssatz

Angenommen, $\{S_t\}$ und $\{T_t\}$ seien zwei meßbare Strömungen, die in einem und demselben Lebesgueschen Raum M definiert sind. Wir bezeichnen mit $D(\{S_t\}, \{T_t\})$ die Menge derjenigen Punkte $x \in M$, für die $S_t x \neq T_t x$

wenigstens bei einem Wert in dem Bereich

$0 < t \leq 1$.

Einfache Beispiele zeigen, daß diese Menge nicht-meßbar sein kann; wir bezeichnen ihr äußeres Maß $\mu_e D(\{S_t\}, \{T_t\})$ mit $d(\{S_t\}, \{T_t\})$. Offensichtlich gilt

. $\langle n \rangle$

Weiter gilt - wie auch immer die meßbare Strömung $\{R_t\}$ sein mag -

, $\langle o \rangle$

denn

. $\langle p \rangle$

Endlich ist es nicht schwer zu prüfen, daß wenn $d(\{S_t\}, \{T_t\}) = 0$ ist, die Strömungen $\{S_t\}$ und $\{T_t\}$ zu einer und derselben metrischen Klasse gehören, d.h. sich nur auf einer (in bezug auf sie beide invarianten) Menge mit dem Maß Null voneinander unterscheiden können. Somit bestimmt die Funktion d in der Menge $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(M)$ der Klassen aller in M definierten meßbaren Strömungen die M e t r i k , d.h. sie verwandelt $\mathfrak{S}$ in einen metrischen Raum. Dieser Raum ist vollständig (der Beweis ist analog zum Beweis des entsprechenden Satzes über Automorphismen : s. [1], § 1, Punkt 5), jedoch i n s e p a r a b e l . Eine wesentliche, wenn auch ganz offensichtliche Eigenschaft der Metrik d ist ihre I n v a r i a n z: Wie auch immer der Automorphismus R und die Strömungen $\{S_t\}$ und $\{T_t\}$ sind, gilt

. $\langle q \rangle$

<u>A p p r o x i m a t i o n s s a t z</u>. Wie auch immer die aperiodische Strömung $\{T_t\}$ und die positiven Zahlen p und ε sind, es existiert eine solche Standardströmung $\{P_t\}$ mit der Periode p, daß $d(\{T_t\}, \{P_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon$ ist.

B e w e i s. Aufgrund der Resultate des § 2 können wir sagen, daß die ~~von~~ uns vorgegebene Strömung $\{T_t\}$ eine spezielle Strömung (1) ist, die die Bedingung (p, ε) erfüllt. Wir bezeichnen mit A die Menge derjenigen Punkte $(y, u) \in \hat{Y}$, für die $F(y) = p$, und mit B die Menge derjenigen Punkte $(y, u) \in A$, für die $u \geq p - 1$; wir konstruieren in der Menge $\hat{Y} - A$ irgendeine Standard-Strömung $\{R_t\}$ mit der Periode p und nehmen an:

. $\langle r \rangle$

$\{P_t\}$ ist eine Standardströmung mit der Periode p, und es ist offensichtlich, daß

. $\langle s \rangle$

Jedoch gilt

, $\langle t \rangle$

folglich ist

. $\langle u \rangle$

Wir bemerken aber sofort, daß der bewiesene Satz nicht verschärft werden kann:

> wie auch immer die aperiodische Strömung $\{S_t\}$ und die periodische Strömung $\{P_t\}$ mit der Periode p beschaffen sind, es gilt die Ungleichung

. $\langle v \rangle$

Mehr noch: angenommen, $\{T_t\}$ sei eine beliebige meßbare Strömung und E_p die Gesamtheit derjenigen Punkte $x \in M$, in denen sie periodisch ist und ihre Periode $p(x)$ die Ungleichung $p(x) \leq p$ erfüllt. Dann gilt für jede aperiodische Strömung $\{S_t\}$

. (22)

B e w e i s. Wir bezeichnen mit C_x die Menge derjenigen Werte t, bei denen $T_t x \in D(\{S_t\}, \{T_t\})$. Wir behaupten, daß wenn $x \in E_p$, dann enthält C_x einen ganzen Zahlenabschnitt mit der Länge 1. Tatsächlich könnten wir sonst die Werte $t = 0$ und $t = p(x)$ durch eine endliche Folge nicht zu C_x gehörender Werte $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = p(x)$ verbinden, in der $t_i - t_{i-1} < 1$ und – umgestellt nach dieser Folge – würden wir

⟨w⟩

finden, was der Aperiodizität der Strömung $\{S_t\}$ widerspricht.

Wir wählen die positive Zahl α und bezeichnen mit E_p^α die (meßbare) Menge jener Punkte $x \in E_p$, in denen $p(x) \geqslant \alpha$. Auf der Basis des Darstellungssatzes (s. § 1) können wir sagen, daß die von der Strömung $\{T_t\}$ in E_p^α induzierte Strömung die spezielle Strömung (1) ist und der Automorphismus T, nach dem diese spezielle Strömung konstruiert ist, eine identische Transformation des Raumes $\hat{Y}$ ist. Die Abschnitte $y = \text{const}$ werden Trajektorien der Strömung, und für die Funktion F werden wir haben: $F(y) = p((y, u)) \leqslant p$. Natürlich hat all dies nur dann Sinn, wenn $\mu E_p^\alpha > 0$, und vorläufig müssen wir das Maß μ, das auf E_p^α untersucht wird, normieren; das bedeutet, daß für jede Menge $A \subset E_p^\alpha = \hat{Y}$ die Gleichung

⟨x⟩

gilt. Wir betrachten in $\hat{Y}$ eine beliebige meßbare Menge $D' \supset D(\{S_t\}, \{T_t\}) \cdot E_p^\alpha$. Angenommen, D'_{y_0} sei der Schnittpunkt der Menge D' mit dem Abschnitt $y = y_0$, und λy_0 – das gewöhnliche Lebesguesche Maß auf diesem Abschnitt. Aufgrund des oben Bewiesenen muß für alle Punkte $y \in Y$ $\lambda_y D'_y \geqslant 1$ sein, und daher gilt

. ⟨y⟩

Somit ist

(z)

und

. (aa)

Gehen wir in dieser Ungleichung zur Grenze bei $\alpha \to 0$ über, so erhalten wir ebenfalls die Ungleichung (22).

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller aperiodischen Strömungen und mit $\mathfrak{P}_p$ - die Menge aller periodischen Strömungen mit der Periode p. Wir haben bewiesen, daß für jede Strömung $\{S_t\} \in \mathfrak{A}$

(23)

und daß diese Gleichung gültig bleibt, wenn man in ihr $\mathfrak{P}_p$ durch eine Menge von nur Standardströmungen mit der Periode p ersetzt. Weiter haben wir bewiesen, daß für jede Strömung $\{T_t\} \in \mathfrak{S}$

. (24)

Aus der Gleichung (24) folgt, daß

die Menge $\mathfrak{A}$ abgeschlossen und somit ein vollständiger metrischer Raum ist.

Weiter folgt aus (23), daß $\mathfrak{A}$

nirgendwo in $\mathfrak{S}$ dicht ist;

im übrigen könnte man letzteres auch erheblich einfacher beweisen. Wir bemerken ⟨hierzu⟩ noch, daß die Menge $\bigcup \mathfrak{P}_t$, wo die Summierung auf eine beliebige kompakte Menge der Werte t ausgedehnt ist, ebenfalls abgeschlossen ist und nirgend dicht in $\mathfrak{S}$; das gleiche trifft auf die Menge $\mathfrak{A} + \bigcup_{-\alpha \leq t \leq +\alpha} \mathfrak{P}_t$ zu. Dafür ist die Menge aller Strömungen, die keine aperiodischen Komponenten haben, überall dicht in $\mathfrak{S}$. Der Beweis ist nicht schwierig.

Wir zeigen abschließend, daß die

Menge der Strömungen, die zu einer beliebigen

Strömung $\{S_t\} \in \mathfrak{M}$ isomorph sind, überall dicht in $\mathfrak{M}$ sind.

Angenommen, $\{T_t\}$ sei eine beliebige Strömung aus $\mathfrak{M}$. Aufgrund unseres Approximationssatzes existieren solche Standardströmungen $\{P_t\}$ und $\{Q_t\}$ mit der Periode p, daß

. ⟨ab⟩

Weiter kann man - da alle Standardströmungen mit der Periode p zueinander isomorph sind - einen solchen Automorphismus R des Raumes M aufzeigen, daß $Q_t = RP_tR^{-1}$. Wir haben:

. ⟨ac⟩

Aufgrund dessen, daß p beliebig sein kann, folgt hieraus, daß die Strömung $\{T_t\}$ die Grenzströmung für eine Menge von Strömungen ist, die isomorph zur Strömung $\{S_t\}$ sind.

§ 4. Vermischungen im Raum $\mathfrak{M}$

Die Strömung $\{S_t\}$ wird V e r m i s c h u n g genannt, wenn für beliebige zwei meßbare Mengen $A, B \subset M$

⟨ad⟩

gilt, und Vermischung im weiteren Sinn, wenn bei beliebigen A, B

⟨ae⟩

(s. [1], § 5, Punkt 9) gilt. Die Menge der Vermischungen im weiteren Sinn bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_0$, die Menge der Vermischungen im eigentlichen Sinn - mit $\mathfrak{M}_1$. Wir haben

. ⟨af⟩

Es ist gut bekannt, daß die Mengen $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_1$ nicht leer sind

(s. z.B. [4], § 10). Aufgrund des letzten Theorems des vorhergehenden Paragraphen folgt hieraus sofort, daß sie beide überall dicht in sind. Wir behaupten, daß

(A) $\mathfrak{M}_0$ G_δ ist, so daß $\mathfrak{N}-\mathfrak{M}_0$ in $\mathfrak{N}$ die erste Kategorie hat;

(B) $\mathfrak{M}_1$ in $\mathfrak{N}$ die erste Kategorie hat.

Der Beweis des Satzes (A) stimmt wörtlich überein mit dem Beweis des entsprechenden Satzes über Automorphismen (s. [1], § 4, Punkt 4) und wird daher an dieser Stelle nicht angeführt. Dem gegenüber wird der Beweis des Theorems (B) für die Strömungen etwas anders durchgeführt als für die Automorphismen (s. [1], § 4, Punkt 5) und wir werden ihn vollständig anführen. Im folgenden wird mit ρ (X, X') der Abstand zwischen den meßbaren Mengen X, X' bezeichnet:

. ⟨ag⟩

L e m m a . Angenommen, E sei eine meßbare Menge in M, p und δ - seien positive Zahlen und Ω_p (E, δ) - sei die Menge derjenigen Strömungen $\{Q_t\} \in \mathfrak{N}$, für die

. (25)

Für jede Strömung $\{T_t\} \in \mathfrak{N}$ gilt

. ⟨ah⟩

B e w e i s . Angenommen, ε sei eine beliebige positive Zahl. Aufgrund der Ergebnisse des § 2 können wir annehmen, daß die uns vorgegebene Strömung $\{T_t\}$ eine spezielle Strömung (1) ist, die die Bedingung (p, ε) erfüllt; wir bezeichnen mit Y' die Menge derjenigen Punkte $y \in Y$, in denen F (y) = p, mit A - die Menge derjenigen Punkte (y, u) $\in \hat{Y}$, für die $y \in Y'$ gilt, und mit B - die Menge derjenigen Punkte (y, u) $\in$ A ,für die u $\geqslant$ p - 1. Aus der Definition des Maßes $\hat{\nu}$ folgt für die Menge E·A die Existenz einer solchen meßbaren Menge H $\subset$ A der Form

, $\langle ai \rangle$

wobei Y_i meßbare (in bezug auf ν), paarweise fremde Mengen in Y' sind und C_i - Untermengen des Bereichs $0 \leq u < p$, daß

$\langle ak \rangle$

gilt.

Angenommen, Q sei irgendein aperiodischer Automorphismus der Menge Y' , der alle Mengen Y_i invariant läßt, und $\{ Q_t \}$ - eine Strömung, die auf der Menge A nach dem Automorphismus Q und der Funktion $F(y) \equiv p \; (y \in Y')$ als spezielle Strömung konstruiert ist und auf der Menge $\hat{Y} - A$ als beliebige aperiodische Strömung definiert ist, die die Menge $E - E \cdot A$ invariant läßt. Offensichtlich gilt

; $\langle al \rangle$

folglich ist $Q_p H = H$ und

. $\langle am \rangle$

Somit gilt $\{ Q_t \} \in \Omega_p(E, \delta)$. Endlich ist

, $\langle an \rangle$

und da

, $\langle ao \rangle$

ist

. $\langle ap \rangle$

<u>Beweis des Satzes (B).</u> Angenommen, E sei ir-

gendeine meßbare Menge in M des Maßes $\frac{1}{2}$, und $\mathfrak{F}_p$ - eine Menge derjenigen Strömungen $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$, für die

. ⟨aq⟩

Wir nehmen an

, ⟨ar⟩

wobei p alle reellen Werte, n aber nur ganzzahlige Werte durchläuft. Offensichtlich* wird der Satz bewiesen sein, wenn wir feststellen, daß $\mathfrak{F}'_n$ nirgend dichte Mengen sind.

Da alle $\mathfrak{F}_p$ abgeschlossen sind, sind auch alle $\mathfrak{F}_n$ abgeschlossen und es braucht nur festgestellt zu werden, daß bei beliebigem n die Ergänzung

⟨as⟩

der Menge $\mathfrak{F}'_n$ überall dicht in $\mathfrak{N}$ ist. Wir bemerken hierzu, daß wenn $\{Q_t\} \in \Omega_p(E, \frac{1}{10})$ ist, aufgrund der Beziehung

⟨at⟩

und der Beziehungen ⟨au⟩

(s. (25)), die Ungleichung

⟨av⟩

gelten muß. Diese Ungleichung zeigt, daß $\Omega_p(E, \frac{1}{10}) \subset \mathfrak{N} - \mathfrak{F}_p$ und daß folglich die Menge

, ⟨aw⟩

die aufgrund des eben bewiesenen Lemmas überall dicht in $\mathfrak{N}$ ist,

* ... ist $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{M}_1$, folglich wird der Satz ...

in $\mathfrak{M} - \mathfrak{E}_n$ enthalten ist. Damit ist das Theorem bewiesen.

Zugleich zeigen die Theoreme (A) und (B), daß
im Raum $\mathfrak{M}$ Vermischungen im weiteren Sinne,
die keine Vermischungen im eigentlichen Sinne
sind, die Hauptmasse von Strömungen ausmachen.

Eingegangen am 13.10.1949

Literatur

1. Rochlin, V.A. — Izbrannye voprosy metričeskoj teorii dinamičeskich sistem ⟨Ausgewählte Fragen der metrischen Theorie dynamischer Systeme⟩, Uspechi matemat. nauk, Bd. IV, Nr. 2 (1949), 57 - 128

2. Rochlin, V.A. — Ob osnovnych ponjatijach teorii mery ⟨Über die Hauptbegriffe der Maßtheorie⟩, Mat. sb., 25 (67): 1 (1949), 107 - 150

3. Gurevič, A. Rochlin, V. — Ob approksimacii neperiodičeskich potokov periodičeskimi ⟨Über die Approximation nichtperiodischer Strömungen durch periodische (Strömungen)⟩, Doklady Nauk SSSR, Bd. XIV, Nr 5 (1949), 619 - 620

4. Hopf, E. — Statistika geodezičeskich linij na mnogoobrazijach otricatel'noj krivizny ⟨Statistik geodätischer Linien auf Mannigfaltigkeiten mit negativer Krümmung⟩, Uspechi matemat. nauk, Bd. iV, Nr 2 (1949), 129 - 170

Stuttgart, den 5.10.1970

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

14 (1950), 537—548

А. А. ГУРЕВИЧ и В. А. РОХЛИН

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ИЗМЕРИМЫХ ПОТОКОВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе устанавливается возможность очень точной аппроксимации произвольного измеримого потока периодическими потоками. С помощью такой аппроксимации исследуется массивность важнейших классов измеримых потоков.

Предлагаемая работа посвящена изучению расположения важнейших классов измеримых потоков в пространстве всех измеримых потоков. Результаты во многом аналогичны уже известным результатам, касающимся отдельных преобразований с инвариантной мерой (см. ([1]), § 1 и § 4). Однако аналогия неполна: в то время как в случае отдельных преобразований с инвариантной мерой исследование может быть проведено в двух существенно различных топологиях, в пространстве измеримых потоков удается ввести только одну естественную топологию.

По поводу используемых в работе понятий теории меры (пространство Лебега, мера Лебега, изоморфизм и т. п.) см. ([2]), §§ 1 и 2.

Основные результаты этой работы были опубликованы в ([3]).

§ 1. Основные определения. Теорема о представлении

В этом параграфе мы кратко изложим необходимые для дальнейшего определения и факты теории измеримых потоков. Подробное изложение читатель найдет в ([1]), §§ 5 и 6.

Говорят, что в пространстве Лебега M с мерой μ задан *поток* $\{S_t\}$, если каждому вещественному числу t поставлен в соответствие определенный автоморфизм пространства M (т. е. изоморфное отображение пространства M на все M), S_t, таким образом, что для любой точки $x \in M$ и любых значений s, t

$$S_s S_t x = S_{s+t} x.$$

Поток называется *измеримым*, если, каково бы ни было измеримое множество $A \subset M$, множество тех точек (x, t) теоретико-множественного произведения $M \times (t)$ множества M на числовую прямую (t), для которых $S_t x \in A$, измеримо относительно меры, естественно возникающей в $M \times (t)$ из меры μ в M и обычной меры Лебега в (t).

Множество точек $S_t x \; (-\infty < t < +\infty)$ называется *траекторией* точки $x \in M$. Множества, состоящие из целых траекторий, называются *инвариантными*. Точка x называется *неподвижной*, если все точки $S_t x$ тождественны между собой, *точкой апериодичности*, если все точки $S_t x$ различны между собой, и **точкой периодичности с периодом** $p=p(x)$, если при $0 \leqslant t < p$ все точки $S_t x$ различны между собой, а при $q \equiv r \pmod p$ всегда $S_q x = S_r x$. Для измеримого потока все три множества — множество неподвижных точек, множество точек апериодичности и множество точек периодичности — измеримы и вместе покрывают почти все пространство M. Функция $p(x)$ также измерима. Указанные три множества, конечно, инвариантны. На первом из них поток не заслуживает никакого изучения. Структура потока на втором и третьем множествах весьма глубоко вскрывается принадлежащей в основных чертах В. Амброзе и С. Какутани **теоремой о представлении**. Мы приведем эту теорему в несколько усиленной формулировке, притом отдельно для всюду апериодических, или, как мы будем говорить просто, **апериодических** потоков, и отдельно для всюду периодических потоков.

Условимся называть **ненормированной** мерой Лебега меру, которая отличается от меры Лебега только не равным единице числовым множителем, и предположим, что заданы:

пространство Y с нормированной или ненормированной мерой Лебега ν;

автоморфизм T пространства Y;

измеримая вещественная функция F точки $y \in Y$, удовлетворяющая условиям:

$$\int\limits_Y F(y)\, d\nu = 1, \quad F(y) \geqslant \mathrm{const} > 0.$$

Условимся обозначать через u вещественное переменное, через $Y \times (u)$ — снабженное естественной мерой $\hat{\nu}$ произведение пространства Y на числовую прямую (u), через $\hat{Y}$ — подпространство пространства $Y \times (u)$, состоящее из тех точек (y, u), для которых $0 \leqslant u < F(y)$, и положим:

$$T_t(y,u) = \begin{cases} (y,\ u+t) & \text{при } -u \leqslant t < -u + F(y) \\ (T^n y,\ u+t-F(y)-\cdots-F(T^{n-1}y)) & \\ \quad \text{при} -u+\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(T^k y) \leqslant t < -u + \sum\limits_{k=0}^{n} F(T^k y),\ n=1,2,\ldots & \\ (T^{-n}y,\ u+t+F(T^{-1}y)+\cdots+F(T^{-n}y)) & \\ \quad \text{при} -u-\sum\limits_{k=1}^{n} F(T^{-k}y) \leqslant t < -u-\sum\limits_{k=1}^{n-1} F(T^{-k}y),\ n=1,2,\ldots \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, $\hat{Y}$ есть пространство Лебега (с нормированной мерой: $\hat{\nu}\hat{Y}=1$), и нетрудно показать, что $\{T_t\}$ есть измеримый поток в $\hat{Y}$. Он называется **специальным потоком, построенным по автоморфизму** T **и функции** F. Он апериодичен в том и только в том случае, если апериодичен автоморфизм T, т. е. если для всякой точки $y \in Y$ все точки $T^n y\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ различны между собой. Очевидно также, что периоды потока $\{T_t\}$ во всех точках ограничены снизу одним и тем же положительным числом. Теорема о представлении гласит:

а) *Всякий апериодический поток изоморфен некоторому специальному потоку.* Последний всегда можно выбрать так, чтобы функция F, по-которой он построен, была ограничена и даже удовлетворяла неравенству вида

$$\tau \leqslant F(y) < 2\tau, \tag{2}$$

где τ — положительное число.

b) *Всякий поток, который во всех точках пространства M периодичен и имеет периоды, ограниченные снизу одним и тем же положительным числом, изоморфен специальному потоку. Последний всегда можно выбрать так, чтобы автоморфизм, по которому он построен, был тождественным преобразованием.*

Второе из этих предложений дает исчерпывающую характеристику произвольного всюду периодического потока. Особенно простым является тот случай, когда поток просто **периодичен**, т. е. имеет во всех точках один и тот же период p. В этом случае функция F, по которой построен указанный в теореме b) специальный поток (1), тождественно равна p, так что структура потока всецело определяется структурой пространства Y. Если, в частности, поток не имеет траекторий положительной меры, то пространство Y не имеет точек положительной меры, и его метрический тип, а вместе с ним и метрический тип потока, определяется числом p. Периодические потоки, все траектории которых имеют меру нуль, мы будем называть **стандартными**. Из изложенного следует, что *все стандартные потоки с данным периодом p изоморфны между собой.*

§ 2. Перестройка специального потока

Если **автоморфизм** T пространства Лебега M апериодичен, то для всякого натурального числа n и всякого положительного числа ε существует измеримое множество $X \subset M$, не пересекающееся ни с одним из своих образов $TX, T^2X, \ldots, T^{n-1}X$ и имеющее меру, большую $\frac{1-\varepsilon}{n}$. Эту теорему, доказательство которой читатель найдет в ([1]) [см. ([1]), § 1, п. 7], мы хотим перенести в этом параграфе на апериодические **потоки**.

Условимся говорить, что специальный поток (1) **обладает свойством** (p, ε), если интеграл функции F по множеству тех точек $y \in Y$, в которых $F(y) \neq p$, меньше ε. Наша теорема утверждает, что *для всякого апериодического потока $\{S_t\}$ при любых положительных p и ε существует изоморфный ему специальный поток, удовлетворяющий условию (p, ε).*

Доказательство. Пусть (1) — какой-нибудь специальный поток, изоморфный потоку $\{S_t\}$ и удовлетворяющий условию (2). Мы перестроим поток (1) в новый специальный поток $\{T_t'\}$, изоморфный потоку (1) и удовлетворяющий условию (p, ε).

Положим

$$f_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} F(T^k y).$$

В силу эргодической теоремы, последовательность функций $\frac{1}{n} f_n$ сходится в среднем к некоторой инвариантной относительно T измеримой функции f. В силу (2), мы имеем:

$$\tau \leqslant f(y) < 2\tau. \tag{3}$$

Возьмем какое-нибудь натуральное число m, удовлетворяющее неравенству

$$m > \frac{12}{\varepsilon}, \tag{4}$$

положим

$$\tau_i = \tau + \frac{i}{m}\tau \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{5}$$

и обозначим через Y_i множество тех точек $y \in Y$, в которых

$$\tau_i \leqslant f(y) < \tau_{i+1}. \tag{6}$$

Так как из сходимости последовательности $\frac{1}{n} f_n$ в среднем следует ее сходимость по мере, то существует столь большое N, что при $n > N$ во всех точках $y \in Y$, не принадлежащих к некоторому исключительному множеству E, для которого

$$\nu(E \cdot Y_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \nu Y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{7}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{n} f_n(y) - f(y) \right| < \frac{\varepsilon\tau}{12}. \tag{8}$$

Взяв такое N, выберем столь большое натуральное число q, чтобы имели место неравенства

$$n_i = \left[\frac{pq}{\tau_i - \frac{\varepsilon\tau}{6}} \right] + 1 > \max\left(N, \frac{12}{\varepsilon}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{9}$$

Очевидно, мы вправе считать, что $\varepsilon < 6$ и что, следовательно, $\tau_i - \frac{\varepsilon\tau}{6} > 0$. Y_i суть попарно непересекающиеся и покрывающие Y инвариантные измеримые множества, и автоморфизмы, индуцируемые в них автоморфизмом T, апериодичны. К ним применима, таким образом, теорема, формулированная в начале этого параграфа: существует измеримое множество $X_i \subset Y_i$ с мерой

$$\nu X_i \geqslant \frac{\nu Y_i}{n_i} - \frac{\varepsilon}{12} \cdot \frac{\nu Y_i}{n_i}, \tag{10}$$

не пересекающееся ни с одним из множеств

$$TX_i, \ldots, T^{n_i - 1} X_i. \tag{11}$$

При этом мы вправе считать, что

$$\nu(E \cdot X_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \cdot \frac{\nu Y_i}{n_i}, \tag{12}$$

ибо если неравенство (12) не выполнено для множества X_i, то, в силу (7), оно непременно выполнено для одного из множеств (11), а X_i можно заменить любым из этих множеств.

Положим $A_i = X_i - E\cdot X_i$. Множества A_i будут играть в нашем построении основную роль. Мы утверждаем, что на A_i

$$\frac{\varepsilon\tau}{12} n_i < f_{n_i}(y) - pq < \frac{2\varepsilon\tau}{3} n_i \quad (y_i \in A_i). \tag{13}$$

Действительно,

$$f_{n_i}(y) - pq = (f_{n_i}(y) - n_i f(y)) + (n_i f(y) - n_i \tau_i) + (n_i \tau_i - pq), \tag{14}$$

причем, в силу неравенства $n_i > N$ [см. (9)] и выбора числа N [см. (8)],

$$-\frac{\varepsilon\tau}{12} n_i < f_{n_i}(y) - n_i f(y) < \frac{\varepsilon\tau}{12} n_i \quad (y_i \in A_i), \tag{15}$$

в силу (4),

$$0 \leqslant n_i f(y) - n_i \tau_i < \frac{\tau_i}{m} n_i \leqslant \frac{2\tau}{m} n_i < \frac{\varepsilon\tau}{6} n_i \quad (y \in Y_i) \tag{16}$$

[см. (5) и (6)] и, в силу (9),

$$\frac{\varepsilon\tau}{6} n_i < n_i \tau_i - pq < \frac{\varepsilon\tau}{6} n_i + \tau_i \leqslant \frac{\varepsilon\tau}{6} n_i + 2\tau < 2\,\frac{\varepsilon\tau}{6} n_i. \tag{17}$$

Из (14), (15), (16) и (17) следует (13).

Теперь мы можем построить нужный нам специальный поток $\{T_t'\}$. Возьмем $q+1$ экземпляров

$$A_i^0 = A_i,\ A_i^1, \ldots,\ A_i^{q-1},\ A_i^q$$

множества A_i, связанных в циклическом порядке какими-нибудь изоморфными отображениями $R_i^{(l)}$:

$$A_i^0 \underset{R_i^{(0)}}{\rightarrow} A_i^1 \underset{R_i^{(1)}}{\rightarrow} \cdots \rightarrow A_i^{q-1} \underset{R_i^{(q-1)}}{\rightarrow} A_i^q \underset{R_i^{(q)}}{\rightarrow} A_i$$

и положим

$$B_i = \bigcup_{k=0}^{n_i-1} T^k (E\cdot X_i), \qquad C_i = Y_i - \bigcup_{k=0}^{n_i-1} T^k X_i,$$

$$D = \bigcup_{i=0}^{m-1} (A_i^q + B_i + C_i), \quad Y' = \bigcup_{i=0}^{m-1} \Big(B_i + C_i + \bigcup_{l=0}^{q} A_i^l\Big).$$

Мы будем считать, что каждое из множеств A_i^l, B_i, C_i входит в множество Y' со своей естественной мерой. Тем самым в Y' возникает определенная мера ν'. Пусть

$$T'y' = \begin{cases} R_i^{(l)} y', & \text{если } y' \in A_i^l,\ l = 0, 1, \ldots, q-1; \\ T^{n_i} R_i^{(q)} y', & \text{если } y' \in A_i^q; \\ Ty, & \text{если } y' = y \in B_i + C_i \end{cases}$$

и

$$F'(y')=\begin{cases} p, \text{ если } y'\in A_i^l,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1; \\ f_{n_i}(R_i^{(q)}y')-pq, \text{ если } y'\in A_i^q; \\ F(y), \text{ если } y'=y\in B_i+C_i. \end{cases}$$

Из построения видно, что T' есть автоморфизм пространства Y' с мерой ν', что функция F' удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{Y'} F'(y')\,d\nu'=\int\limits_{Y} F(y)\,d\nu=1, \quad F'(y')\geqslant \text{const}>0$$

[см. первое из неравенств (13)] и что специальный поток $\{T_t'\}$, построенный по автоморфизму T' и функции F', изоморфен потоку (1). Мы покажем — и этим доказательство будет завершено, что

$$\int\limits_{D} F'(y')\,d\nu'<\varepsilon. \tag{18}$$

Так как множества $A_i, TA_i, \ldots, T^{n_i-1}A_i$ попарно не пересекаются, имеют одинаковые меры и содержатся в Y_i, то $n_i\cdot\nu A_i\leqslant \nu Y_i$ и, в силу (13),

$$\int\limits_{A_i^q} F'(y')\,d\nu'=\int\limits_{A_i}(f_{n_i}(y)-pq)\,d\nu<\frac{2\varepsilon\tau}{3}\,n_i\cdot\nu A_i\leqslant\frac{2\varepsilon\tau}{3}\cdot\nu Y_i. \tag{19}$$

Далее, в силу (12) и (10),

$$\nu B_i\leqslant\frac{\varepsilon}{12}\cdot\nu Y_i, \quad \nu C_i\leqslant\frac{\varepsilon}{12}\cdot\nu Y_i$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{B_i+C_i} F'(y')\,d\nu'=\int\limits_{B_i+C_i} F(y)\,d\nu<2\tau\cdot\nu(B_i+C_i)\leqslant\frac{\varepsilon\tau}{3}\cdot\nu Y_i. \tag{20}$$

Из (19) и (20) мы получаем:

$$\int\limits_{D} F'(y')\,d\nu'=\sum_{i=0}^{m-1}\Bigl(\int\limits_{A_i^q} F'(y')\,d\nu'+\int\limits_{B_i+C_i} F'(y')\,d\nu'\Bigr)<$$

$$<\varepsilon\tau\sum_{i=0}^{m-1}\nu Y_i=\varepsilon\tau\cdot\nu Y. \tag{21}$$

Но, в силу (2),

$$\tau\cdot\nu Y\leqslant\int\limits_{Y} F(y)\,d\nu=1,$$

так что из (21) следует (18).

§ 3. Аппроксимационная теорема

Пусть $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ — два измеримых потока, определенных в одном и том же пространстве Лебега M. Обозначим через $D(\{S_t\}, \{T_t\})$ множество тех точек $x\in M$, для которых $S_tx\neq T_tx$ *хотя бы при одном значении* *в интервале* $0 < t \leqslant 1$. Простые примеры показывают, что это множество может быть неизмеримо; обозначим ее внешнюю меру $\mu_e D(\{S_t\}, \{T_t\})$ через $d(\{S_t\}, \{T_t\})$. Очевидно, что

$$d(\{S_t\}, \{T_t\}) = d(\{T_t\}, \{S_t\}).$$

Далее, каков бы ни был измеримый поток $\{R_t\}$,

$$d(\{R_t\}, \{T_t\}) \leqslant d(\{R_t\}, \{S_t\}) + d(\{S_t\}, \{T_t\}),$$

ибо

$$D(\{R_t\}, \{T_t\}) \subset D(\{R_t\}, \{S_t\}) + D(\{S_t\}, \{T_t\}).$$

Наконец, нетрудно проверить, что если $d(\{S_t\}, \{T_t\}) = 0$, то потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ принадлежат к одному и тому же метрическому классу, т. е. могут отличаться друг от друга только на (инвариантном относительно них обоих) множестве меры нуль. Таким образом, функция d определяет в множестве $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(M)$ классов всех определенных в M измеримых потоков метрику, т. е. превращает $\mathfrak{S}$ в метрическое пространство. Это пространство полно (доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы об автоморфизмах: см. ([1]), § 1, п. 5), но несепарабельно. Существенным, хотя и вполне очевидным свойством метрики d является ее инвариантность: каковы бы ни были автоморфизм R и потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$,

$$d(\{RS_tR^{-1}\}, \{RT_tR^{-1}\}) = d(\{S_t\}, \{T_t\}).$$

Аппроксимационная теорема. *Каковы бы ни были апериодический поток $\{T_t\}$ и положительные числа p и ε, существует такой стандартный поток $\{P_t\}$ с периодом p, что* $d(\{T_t\}, \{P_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon$.

Доказательство. В силу результатов § 2, мы можем считать, что заданный нам поток $\{T_t\}$ есть специальный поток (1), удовлетворяющий условию (p, ε). Обозначим через A множество тех точек $(y, u) \in \hat{Y}$, для которых $F(y) = p$, и через B — множество тех точек $(y, u) \in A$, для которых $u \geqslant p - 1$; построим в множестве $\hat{Y} - A$ какой-нибудь стандартный поток $\{R_t\}$ с периодом p и положим:

$$P_t(y, u) = \begin{cases} \left(y, u + t - \left[\frac{u+t}{p}\right] p\right), & \text{если } (y, u) \in A, \\ R_t(y, u), & \text{если } (y, u) \in \hat{Y} - A. \end{cases}$$

$\{P_t\}$ есть стандартный поток с периодом p, и очевидно, что

$$D(\{T_t\}, \{P_t\}) \subset B + (\hat{Y} - A).$$

Но

$$\hat{\nu} B \leqslant \frac{1}{p}, \quad \hat{\nu}(\hat{Y} - A) = \int\limits_{F(y) \neq p} F(y)\, d\nu < \varepsilon,$$

следовательно,

$$d(\{T_t\}, \{P_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon.$$

Заметим сейчас же, что доказанная теорема не может быть усилена: *каковы бы ни были апериодический поток* $\{S_t\}$ *и периодический поток* $\{P_t\}$ *с периодом* p, *имеет место неравенство*

$$d(\{S_t\}, \{P_t\}) \geqslant \frac{1}{p}.$$

Более того: *пусть* $\{T_t\}$ — *произвольный измеримый поток, и* E_p — *совокупность тех точек* $x \in M$, *в которых он периодичен и его период* $p(x)$ *удовлетворяет неравенству* $p(x) \leqslant p$. *Тогда для всякого апериодического потока* $\{S_t\}$

$$d(\{S_t\}, \{T_t\}) \geqslant \frac{\mu E_p}{p}. \tag{22}$$

Доказательство. Обозначим через C_x множество тех значений t, при которых $T_t x \in D(\{S_t\}, \{T_t\})$. Мы утверждаем, что если $x \in E_p$, то C_x содержит целый числовой отрезок длины 1. Действительно, в противном случае мы могли бы соединить значения $t = 0$ и $t = p(x)$ конечной последовательностью не принадлежащих к C_x значений $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = p(x)$, в которой $t_i - t_{i-1} < 1$ и, перемещаясь по этой последовательности, мы нашли бы:

$$S_{t_1} x = T_{t_1} x, \; S_{t_2} x = T_{t_2} x, \ldots, \; S_{p(x)} x = T_{p(x)} x = x,$$

что противоречит апериодичности потока $\{S_t\}$.

Возьмем положительное число α и обозначим через E_p^α (измеримое) множество тех точек $x \in E_p$, в которых $p(x) \geqslant \alpha$. На основании теоремы о представлении (см. § 1) мы можем считать, что поток, индуцируемый потоком $\{T_t\}$ в E_p^α, есть специальный поток (1), а автоморфизм T, по которому этот специальный поток построен, есть тождественное преобразование пространства $\hat{Y}$. Отрезки $y = \mathrm{const}$ будут траекториями потока, и для функции F мы будем иметь: $F(y) = p((y, u)) \leqslant p$. Конечно, все это имеет смысл только в том случае, если $\mu E_p^\alpha > 0$, и предварительно мы должны нормировать меру μ, рассматриваемую на E_p^α; это значит, что для всякого множества $A \subset E_p^\alpha = \hat{Y}$ имеет место равенство

$$\hat{\nu} A = \frac{\mu A}{\mu E_p^\alpha}.$$

Рассмотрим в $\hat{Y}$ произвольное измеримое множество $D' \supset D(\{S_t\}, \{T_t\}) \cdot E_p^\alpha$. Пусть D'_{y_0} — пересечение множества D' с отрезком $y = y_0$, и λ_{y_0} — обычная мера Лебега на этом отрезке. В силу доказанного выше, для всех точек $y \in Y$ должно быть $\lambda_y D'_y \geqslant 1$, и потому

$$\hat{\nu} D' = \int_Y \lambda_y D'_y d\nu \geqslant \int_Y 1 \cdot d\nu \geqslant \frac{1}{p} \int_Y F(y)\, d\nu = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\mu D' = \hat{\nu} D' \cdot \mu E_p^\alpha \geqslant \frac{\mu E_p^\alpha}{p}$$

и

$$\mu_e D(\{S_t\}, \{T_t\}) \geqslant \mu_e (D(\{S_t\}, \{T_t\}) \cdot E_p^\alpha) \geqslant \frac{\mu E_p^\alpha}{p}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0$, мы и получим неравенство (22).

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех апериодических потоков и через $\mathfrak{P}_p$ — множество всех периодических потоков с периодом p. Мы доказали, что для всякого потока $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$

$$d(\{S_t\}, \mathfrak{P}_p) = \frac{1}{p} \tag{23}$$

и что это равенство остается справедливым, если заменить в нем $\mathfrak{P}_p$ множеством одних только стандартных потоков с периодом p. Далее, мы доказали, что для всякого потока $\{T_t\} \in \mathfrak{S}$

$$d(\{T_t\}, \mathfrak{N}) \geqslant \frac{\mu E_p}{p}. \tag{24}$$

Из равенства (24) следует, что *множество $\mathfrak{N}$ замкнуто и является, таким образом, полным метрическим пространством*. Далее, из (23) следует, что $\mathfrak{N}$ *нигде не плотно в* $\mathfrak{S}$; впрочем, последнее можно было бы доказать и значительно проще. Заметим еще, что множество $\bigcup \mathfrak{P}_t$, где суммирование распространено на любое компактное множество значений t, также замкнуто и нигде не плотно в $\mathfrak{S}$, и то же относится к множеству $\mathfrak{N} + \bigcup\limits_{-\infty<t<+\infty} \mathfrak{P}_t$. Зато множество всех потоков, не имеющих апериодической компоненты, всюду плотно в $\mathfrak{S}$. Доказательство не представляет труда.

Покажем в заключение, что *множество потоков, изоморфных любому потоку $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$, всюду плотно в* $\mathfrak{N}$. Пусть $\{T_t\}$ — произвольный поток из $\mathfrak{N}$. В силу нашей аппроксимационной теоремы, существуют такие стандартные потоки $\{P_t\}$ и $\{Q_t\}$ с периодом p, что

$$d(\{S_t\}, \{P_t\}) < \frac{2}{p}, \quad d(\{T_t\}, \{Q_t\}) < \frac{2}{p}.$$

Далее, так как все стандартные потоки с периодом p изоморфны между собой, то можно указать такой автоморфизм R пространства M, что $Q_t = RP_tR^{-1}$. Мы имеем:

$$d(\{RS_tR^{-1}\}, \{T_t\}) \leqslant d(\{RS_tR^{-1}\}, \{RP_tR^{-1}\}) + d(\{RP_tR^{-1}\}, \{T_t\}) =$$
$$= d(\{S_t\}, \{P_t\}) + d(\{Q_t\}, \{T_t\}) < \frac{4}{p}.$$

В силу произвольности p, отсюда следует, что поток $\{T_t\}$ является предельным для множества потоков, изоморфных потоку $\{S_t\}$.

§ 4. Перемешивания в пространстве $\mathfrak{N}$

Поток $\{S_t\}$ называется **перемешиванием**, если для любых двух измеримых множеств $A, B \subset M$

$$\mu(S_tA\cdot B)\to\mu A\cdot\mu B \quad (t\to\infty),$$

и перемешиванием в широком смысле, если при любых A, B

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau (\mu(S_tA\cdot B)-\mu A\cdot\mu B)^2\,dt\to 0 \quad (\tau\to\infty)$$

см. ([1]), § 5, п. 9]. Множество перемешиваний в широком смысле мы обозначим через $\mathfrak{M}_0$, множество перемешиваний в собственном смысле — через $\mathfrak{M}_1$. Мы имеем

$$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{M}_0\supset\mathfrak{M}_1.$$

Хорошо известно, что множества $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ не пусты [см., например, ([4]), § 10]. В силу последней теоремы предыдущего параграфа, отсюда сразу следует, что оба они всюду плотны в $\mathfrak{N}$. Мы утверждаем, что

(A) $\mathfrak{M}_0$ *есть* G_δ, *так что* $\mathfrak{N}-\mathfrak{M}_0$ *имеет в* $\mathfrak{N}$ *первую категорию*;

(B) $\mathfrak{M}_1$ *имеет в* $\mathfrak{N}$ *первую категорию*.

Доказательство теоремы (A) дословно совпадает с доказательством соответствующей теоремы об автоморфизмах [см. ([1]), § 4, п. 4] и потому здесь не приводится. Напротив, доказательство теоремы (B) проводится для потоков несколько иначе, чем для автоморфизмов [см. ([1]), § 4, п. 5], и мы приводим его полностью. В дальнейшем через $\rho(X, X')$ обозначается расстояние между измеримыми множествами X, X':

$$\rho(X, X')=\mu(X+X'-X\cdot X').$$

Лемма. *Пусть* E — *измеримое множество в* M, p *и* δ — *положительные числа, а* $\mathfrak{Q}_p(E,\delta)$ — *множество тех потоков* $\{Q_t\}\in\mathfrak{N}$, *для которых*

$$\rho(Q_pE, E)<\delta. \tag{25}$$

Для всякого потока $\{T_t\}\in\mathfrak{N}$

$$d(\{T_t\}, \mathfrak{Q}_p(E,\delta))\leqslant\frac{1}{p}.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу результатов § 2, мы можем считать, что заданный нам поток $\{T_t\}$ есть специальный поток (1), удовлетворяющий условию (p, ε); обозначим через Y' множество тех точек $y\in Y$, в которых $F(y)=p$, через A — множество тех точек $(y, u)\in\hat{Y}$, для которых $y\in Y'$, и через B — множество тех точек $(y, u)\in A$, для которых $u\geqslant p-1$. Из определения меры $\hat{\nu}$ следует существование для множества $E \cdot A$ такого измеримого множества $H \subset A$ вида

$$H = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i \times C_i,$$

где Y_i — измеримые (относительно ν) попарно не пересекающиеся множества в Y', а C_i — подмножества интервала $0 \leqslant u < p$, что

$$\rho(E \cdot A, H) < \frac{\delta}{2}.$$

Пусть Q — какой-нибудь апериодический автоморфизм множества Y', оставляющий инвариантными все множества Y_i, и $\{Q_t\}$ — поток, который на множестве A строится по автоморфизму Q и функции $F(y) \equiv p$ $(y \in Y')$ как специальный поток, а на множестве $\hat{Y} - A$ определяется как произвольный апериодический поток, оставляющий инвариантным множество $E - E \cdot A$. Очевидно, что

$$Q_p(Y_i \times C_i) = Y_i \times C_i \quad (i = 1, \ldots, r);$$

следовательно, $Q_p H = H$, и

$$\rho(Q_p E, E) = \rho(Q_p(E \cdot A), E \cdot A) \leqslant \rho(Q_p(E \cdot A), Q_p H) + \rho(H, E \cdot A) = $$
$$= 2\rho(E \cdot A, H) < \delta.$$

Таким образом, $\{Q_t\} \in \mathfrak{Q}_p(E, \delta)$. Наконец,

$$D(\{T_t\}, \{Q_t\}) \subset B + (\hat{Y} - A),$$

и так как

$$\hat{\nu} B \leqslant \frac{1}{p}, \quad \hat{\nu}(\hat{Y} - A) = \int\limits_{F(y) \neq p} F(y)\, d\nu < \varepsilon,$$

то

$$d(\{T_t\}, \{Q_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon.$$

Доказательство теоремы (B). Пусть E — какое-нибуь измеримое множество в M меры $\frac{1}{2}$, и $\mathfrak{E}_p$ — множество тех потоков $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$, для которых

$$\left| \mu(S_p E \cdot E) - \frac{1}{4} \right| \leqslant \frac{1}{5}.$$

Положим

$$\mathfrak{E}'_n = \bigcap_{p=n+1}^{\infty} \mathfrak{E}_p, \quad \mathfrak{E}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}'_n,$$

где p пробегает все вещественные, а n — только целочисленные значения. Очевидно, $\mathfrak{E}' \supset \mathfrak{M}_1$; следовательно, теорема будет доказана, если мы обнаружим, что $\mathfrak{E}'_n$ суть нигде не плотные множества.

Так как все $\mathfrak{E}_p$ замкнуты, то и все $\mathfrak{E}_n$ замкнуты, и нужно только установить, что при любом n дополнение

$$\mathfrak{N}-\mathfrak{E}'_n=\bigcup_{p=n+1}^{\infty}(\mathfrak{N}-\mathfrak{E}_p)$$

множества $\mathfrak{E}'_n$ всюду плотно в $\mathfrak{N}$. Заметим для этого, что если $\{Q_t\}\in \in\mathfrak{Q}_p\left(E,\ \frac{1}{10}\right)$, то, в силу соотношения

$$\rho(Q_pE\cdot E)=\mu(Q_pE-Q_pE\cdot E)+\mu(E-E\cdot Q_pE)=2(\mu E-\mu(Q_pE\cdot E))$$

и соотношений

$$\mu E=\frac{1}{2},\quad \rho(Q_pE\cdot E)<\frac{1}{10}$$

[см. (25)], должно иметь место неравенство

$$\mu(Q_pE\cdot E)-\frac{1}{4}>\frac{1}{5}.$$

Это неравенство показывает, что $\mathfrak{Q}_p\ \left(E,\ \frac{1}{10}\right)\subset\mathfrak{N}-\mathfrak{E}_p$ и что, следовательно, множество

$$\mathfrak{Q}'_n=\bigcup_{p=n+1}^{\infty}\mathfrak{Q}_p\left(E,\ \frac{1}{10}\right),$$

которое, в силу только что доказанной леммы, всюду плотно в $\mathfrak{N}$, содержится в $\mathfrak{N}-\mathfrak{E}'_n$. Этим теорема доказана.

Вместе теоремы (A) и (B) показывают, что *в пространстве $\mathfrak{N}$ основную массу потоков составляют перемешивания в широком смысле, не являющиеся перемешиваниями в собственном смысле.*

Поступило
13. X. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рохлин В. А., Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 2 (1949), 57—128.

[2] Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Мат. сб., 25 (67): 1 (1949), 107—150.

[3] Гуревич А. и Рохлин В., Об аппроксимации непериодических потоков периодическими, Доклады Наук СССР, т. XIV, № 5 (1949), 619—620.

[4] Хопф Э., Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 2 (1949) 129—170.