

B.A. Rozenfel'd :

Kap. 2 : Der elliptische Raum , S. 70 - 78:

§ 4 SPHÄREN UND POLYEDER

2.4.1. Sphären. Im Raum S_n kann man Sphären definieren als geometrische Örter von Punkten, die von einem Punkt - dem Mittelpunk t der Sphäre - in einer und derselben Entfernung liegen, auf dem Radius der Sphäre. Da die Entfernung vom Mittelpunkt der Sphäre zur Polarebene dieses Mittelpunkts gleich $\frac{1}{2} \varrho$ ist, wobei ϱ - der Krümmungsradius des Raumes ist, liegen alle Punkte der Sphäre auch von dieser Ebene in einer konstanten Entfernung, die den Radius der Sphäre bis $\frac{1}{2} \varrho$ ergänzt. Daher heißt die Sphäre des Raumes S_n gleichzeitig die äquidistante Ebene ; diese Ebene heißt Basis der Sphäre, und der Abstand von den Punkten der Sphäre bis zu ihrer Basis heißt der Parameter der Sphäre.

Die Sphäre des Raumes S_n ist senkrecht zu allen Geraden, die durch ihren Mittelpunkt verlaufen und folglich ist sie senkrecht zu ihrer Basis. In der Tat geht die Sphäre bei Spiegelung an jeder dieser Geraden in sich selbst über, woraus folgt, daß jeder der Winkel - die von dieser Geraden mit den Tangenten zur Sphäre in ihren Schnittpunkten mit dieser Geraden gebildet werden - gleich seinem Nebenwinkel ist, d.h. ein rechter Winkel ist.

Die Sphäre mit dem Radius R des Raumes S_n mit dem Krümmungsradius ϱ ist isometrisch zur Sphäre des Raumes R_n mit dem Radius $\varrho \sin \frac{R}{\varrho}$. In der Tat ist die Sphäre des Radius R im Raum S_n mit dem Krümmungsradius ϱ isometrisch zur $(n - 1)$ -Sphäre desselben Radius R auf der n -Sphäre des Radius ϱ im Raum R_{n+1} ; diese $(n - 1)$ -Sphäre ist jedoch der Schnittpunkt dieser Sphäre mit einer Ebene, die der Raum R_n ist; der Radius der $(n - 1)$ -Sphäre ist in diesem Raum gleich der Kathete $O'X$ des rechtwinkligen Dreiecks

$OO'X$, wobei O - der Mittelpunkt der n -Sphäre, O' - der Mittelpunkt der $(n - 1)$ -Sphäre, X - einer der Punkte der $(n - 1)$ -Sphäre ist (Zeichnung 2.6.). Die Hypotenuse OX dieses Dreiecks ist gleich dem Radius ρ der n -Sphäre, die Kathete $O'X$ liegt gegenüber dem Winkel $O'OX$, der gleich $\frac{R}{\rho}$ ist. Daher ist der Radius der $(n - 1)$ -Sphäre des Raumes R_n gleich $\rho \sin \frac{R}{\rho}$.

Wenn wir in den in I, 6.2.11 gefundenen Ausdrücken für das Sphärenvolumen mit dem Radius r des Raumes R_n den Radius r durch $\rho \sin \frac{R}{\rho}$ ersetzen, dann finden wir, daß das Volumen \sum_n der Sphäre des Radius R des Raumes S_n bei geradem und ungeradem n jeweils gleich

(2.58)

ist.

Die Formel (2.58) liefert bei $n = 2$ (unter der Annahme $O' = 1$), 3, 4 und 5 jeweils:

(2.59)

Hierbei ist \sum_2 - der Kreisumfang der Ebene S_2 . Da die Länge $C(\varphi)$ des Kreisbogens, der dem Zentralwinkel φ entspricht, sich zur Länge \sum_2 des Gesamtkreises wie φ zu 2π verhält, erhalten wir

(2.60)

2.4.2. Kugeln. Eine Sphäre teilt den Raum S_n in zwei Bereiche. Jener Teil, der den Mittelpunkt der Sphäre enthält, heißt Kugel e_1 . Wenn wir das Volumen der Sphäre mit dem Radius R mit $\sum_n(R)$ bezeichnen, wird das Volumen V_n der Kugel mit dem Radius R des Raumes S_n durch das Integral

(2.61)

ausgedrückt, d.h. bei geradem und ungeradem n jeweils:

(2.62)

Die Ausrechnung der Integrale (2.62) erfolgt mittels der Rekursionsformel

(2.63)

Daher erhalten wir insbesondere bei $n = 2, 3, 4$ und 5 :

(2.64)

2.4.3. Simplexe. Wenn $m + 1$ Punkte $A_0(x_0), A_1(x_1), \dots, A_m(x_m)$ des Raumes S_n vorgegeben sind, die nicht in einer $(m - 1)$ -Ebene liegen, dann bilden die durch die Vektoren

(2.65)

- wobei die Parameter t^a nicht negativ sind -

bestimmten Punkte des Raumes das m -Simplex $A_0 A_1 \dots A_m$ mit den Eckpunkten A_0, A_1, \dots, A_m . Bei $m = 1$ ist das m -Simplex eine Strecke, bei $m = 2$ - ein Dreieck, bei $m = 3$ - ein Tetraeder. Wir bemerken hierzu, daß das m -Simplex des Raumes S_n bei Identifizierung der diametral entgegengesetzten Punkte der n -Sphäre des Raumes R_{n+1} aus dem sphärischen m -Simplex (s. I, 6.3.1) dieser n -Sphäre gewonnen wird. Wenn in der Gleichung (2.65) einer der Indizes t^a gleich 0 ist, erhalten wir das $(m - 1)$ -Simplex, das Seitenfläche des m -Simplexes genannt wird. Die Seitenflächen dieser $(m - 1)$ -Simplexe sind $(m - 2)$ -Simplexe und heißen $(m - 2)$ -Seitenflächen usw. Somit besitzt das m -Simplex p -Seitenflächen, wobei p Werte von 0 bis $n - 1$ annimmt. Die 0-Seitenflächen fallen mit den Ecken des m -Simplexes zusammen; die 1-Seitenflächen heißen seine Kanten. Aus der Übereinstimmung zwischen dem m -Simplex des Raumes S_n und dem sphärischen m -Simplex des Raumes R_{n+1} folgt, daß ein m -Simplex $\binom{m+1}{p+1} p$ -Seitenflächen besitzt und insbesondere $m+1$ -Ecken und $m+1(m-1)$ -Seitenflächen (s. I, 6.3.2). Mit jeder p -Seitenfläche des m -Simplexes bei $p = m - 1$ sind sich an sie anschließende $(m - 1)$ -Seitenflächen verbunden, deren Anzahl, wie aus den Eigenschaften des sphärischen m -Simplexes folgt (s. I, 6.3.3), gleich $m - p$ ist. Daher bilden die $(m - 1)$ -Seitenflächen des m -Simplexes, die sich an die p -Seitenfläche anschließen, den $(m - p)$ -Flächenwinkel, bei $m - p = 2$ - den Zweiflächenwinkel bei der $(m - 2)$ -Seitenfläche des m -Simplexes. Wir messen den $(m - p)$ -Flächenwinkel bei der p -Seitenfläche des m -Simplexes durch das Verhältnis des Volumens eines Teils des Raumes S_n , der durch die $(m - 1)$ -Ebenen der $(m - 1)$ -Seitenflächen dieses $(m - p)$ -Flächenwinkels begrenzt ist, zum Volumen des Gesamtraumes S_n . Wir nennen dieses Verhältnis den "Winkel bei der p -Seitenfläche" und bezeichnen den Winkel bei der p -Seitenfläche $A_0 A_1 \dots A_p$ des m -Simplexes $A_0 A_1 \dots A_m$ durch das Symbol $\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p}$. Aus den Eigenschaften des sphärischen m -Simplexes (s. I, 6.3.4) folgt, daß die alternierte Winkelsumme bei p -Seitenflächen des m -Simplexes

(2.66)

ist und das Verhältnis I_m des Volumens des jeweiligen m -Simplexes zum Volumen des Raumes S_n bei geradem m durch die Beziehung

(2.67)

verbunden ist und bei ungeradem m durch

(2.68)

Die Formel (2.67) ermöglicht es, das Volumen des m -Simplexes des Raumes S_n bei geradem m durch seine alternierte Winkelsumme auszudrücken: da infolge (2.12) das Volumen V_m des Raumes S_m bei geradem m gleich

$\frac{2^{\frac{m}{2}} \pi^{\frac{m}{2}}}{(m-1)!!} \rho^m$ ist, kann das Volumen V_m des m -Simplexes, das gleich dem Produkt aus I_m und dem Volumen des Raumes S_m ist, in der Form

(2.69)

geschrieben werden.

Insbesondere liefert die Formel (2.69) bei $m = 2$

; <a>

da aber für das Dreieck ABC $W_2 = \frac{A+B+C}{2\pi}$ gilt, fällt diese Formel mit der Formel (2.7) zusammen.

Da das Volumen V_m immer positiv ist, folgt aus der Formel (2.69), daß für das m -Simplex des Raumes S_n bei geradem m

(2.70)

gilt.

Im Falle eines selbstpolaren m -Simplexes, d.h. eines m -Simplexes, dessen jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche ist, gilt $I_m = \frac{1}{2^m}$, und der $(m-p)$ -Seitenflächenwinkel besteht aus 2^p solcher m -Simplexe; jeder der Winkel bei der p -Seitenfläche eines m -Simplexes ist gleich $\frac{2^p}{2^m} = \frac{1}{2^{m-p}}$. Daher ist in diesem Fall (b) und folglich

(c)

und es gilt

, (d)

woraus wir bei geradem m die Formel (2.67) bei $I_m = \frac{1}{2^m}$ erhalten und bei ungeradem m - die Formel (2.68).

2.4.4. Regelmäßige Waben (?). Im Raum S_n kann man m -Vielfläche definieren, d.h. Figuren, die aus m -Simplexen bestehen, die sich an den $(m-1)$ -Seitenflächen aneinander anschließen, und insbesondere regelmäßige m -Vielfläche. Ebenso wie im Raum R_n (s. I, 5.5.2) werden die regelmäßigen n -Vielfläche des Raumes S_n durch Induktion als konvexe n -Vielfläche definiert, deren $(n-1)$ -Seitenflächen und Eck- $(n-1)$ -Beine (die Eckpunkte letzterer sind die Mitten der Kanten, die an eine Ecke des n -Vielflachs anschließen) jeweils kongruente regelmäßige $(n-1)$ -Vielfläche sind. Im Raum S_n kann man ebenso regelmäßige n -Waben definieren, d.h. Einteilungen des Raumes in kongruente regelmäßige n -Vielfläche,

die regelmäßige Eck-n-Vielfläche besitzen. Im Unterschied zu den regelmäßigen n-Waben des Raumes R_n (s. I, 5.5.13) bestehen sie aus einer endlichen Zahl regelmäßiger n-Wabenfläche. Offensichtlich entspricht den regelmäßigen n-Waben ein regelmäßiges $(n + 1)$ -Vielflach des Raumes R_{n+1} , das zentralsymmetrisch ist; wenn wir das regelmäßige $(n + 1)$ -Vielflach aus seinem Zentrum auf eine in seiner Nähe beschriebene n-Sphäre projizieren, erhalten wir regelmäßige n-Waben; und damit die regelmäßigen n-Waben auf der n-Sphäre in regelmäßige n-Waben des Raumes S_n übergehen, ist es notwendig und hinreichend, daß das $(n + 1)$ -Vielflach in sich selbst übergeht bei Spiegelung am Mittelpunkt der n-Sphäre.

Von den drei regelmäßigen n-Vielflächen des Raumes R_n bei $n > 4$ - dem n-Simplex $\{3, 3, \dots, 3\}$, dem n-Würfel $\{4, 3, \dots, 3\}$ und dem n-Kreuz $\langle ? \rangle \{3, 3, \dots, 3, 4\}$ (s. I, 5.5.5) - sind der n-Würfel und das n-Kreuz zentralsymmetrisch. Dem Fall des $(n + 1)$ -Kreuzes des Raumes R_{n+1} entsprechen regelmäßige n-Waben des Raumes S_n , die aus 2^n selbstpolaren n-Simplexen bestehen. Dem Fall des $(n + 1)$ -Würfels des Raumes R_{n+1} entsprechen regelmäßige n-Waben des Raumes S_n , die aus $2n$ Waben - n - Würfeln bestehen.

Von den 5 regelmäßigen Vielflächen des Raumes R_3 - Tetraeder $\{3, 3\}$, Oktaeder $\{3, 4\}$, Würfel $\{4, 3\}$, Ikosaeder $\{3, 5\}$, und Dodekaeder $\{5, 3\}$ (s. I, 5.5.1) - sind der Würfel, das Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder zentralsymmetrisch. Diesen Vielflächen entsprechen regelmäßige Waben der Ebene S_2 , die jeweils aus 4 Polardreiecken, 3 Wabenquadraten, 6 Wabenfünfecken und 10 Wabendreiecken bestehen.

Wir bezeichnen die Waben der Ebene S_2 , die aus regelmäßigen p-Ecken bestehen, die sich an jede Ecke an \langle durch \rangle q anschließen, ebenso wie die entsprechenden regelmäßigen Vielfläche des Raumes R_3 durch das Symbol $\{p, q\}$.

Wir bemerken hierzu, daß die Winkel der Vielecken der Waben $\{p, q\}$ gleich $\frac{2\pi}{q}$ sind; insbesondere sind die Winkel des Wabenquadrats und Wabenfünfecks gleich $\frac{2\pi}{3}$ (wir erhalten daher, wenn wir die Mit- ten zweier gegenüberliegender Seiten eines Wabenquadrats durch eine Gerade verbinden, zwei Chajam-Vierecke (s. 1.2.3), in denen die Hypot-e-

se des stumpfen Winkels erfüllt ist), die Winkel des Polardreiecks sind gleich $\frac{\pi}{2}$, und die Winkel des Wabendreiecks sind gleich $\frac{2\pi}{5}$. Wir zeigen, daß die Seite a der Wabenvielecke $\{p, q\}$ völlig durch die Zahlen p und q bestimmt wird. In der Tat, verbinden wir die Ecken eines der p -Waben-Ecken $\{p, q\}$ mit dem Mittelpunkt O des in seiner Nähe beschriebenen Kreises. In einem der gefundenen gleichschenkligen Dreiecke OAB (Zeichnung 2.7) ist der Winkel O gleich $\frac{2\pi}{p}$, und jeder der Winkel A und B ist gleich dem halben Winkel $\frac{2\pi}{q}$, d.h. $\frac{\pi}{q}$. Wenn wir $AB = a$ bezeichnen, dann ist infolge des dualen Kosinussatzes (2.5)

, <e>

d.h.

. <f>

Daher gilt

, <g>

woraus wir - wenn wir durch 2 kürzen und die Quadratwurzel ziehen -

(2.71)

erhalten.

Da $\cos \frac{\pi}{2q} < 1$ ist, ist es für die Existenz der Waben $\{p, q\}$ notwendig, daß die Ungleichung

<h>

erfüllt ist, die äquivalent der Ungleichung

<i>

ist, d.h. der Ungleichung

. (2.72)

Diese Ungleichung erfüllen nur diejenigen Werte p und q , die regelmäßigen Vielflachen des Raumes R_3 entsprechen. Dem Fall $p = q = 3$, der einem regelmäßigen Tetraeder entspricht, entsprechen - wie wir sahen - keine Waben, da das Tetraeder nicht zentral-symmetrisch ist und die gleichseitigen Dreiecke mit der Seite a , definiert durch das Verhältnis (2.71) bei $p = q = 3$, d.h. $\cos \frac{a}{2\varrho} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, sich decken. Im Falle eines Wabenquadrats ist das Verhältnis (2.71) äquivalent der einfacheren Beziehung

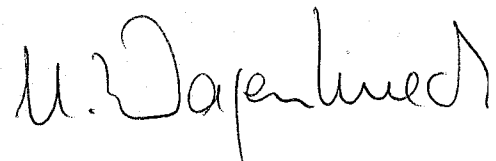
. (2.73)

In Zeichnung 2.7, a ist die Einteilung der Ebene S_2 in die drei Wabenquadrate ABCD, ABDC und ADCB dargestellt; das zweite hiervon ist teils über, teils unter dem ersten dargestellt und das dritte - teils links und teils rechts davon; in den Zeichnungen 2.7 b und 2.7 c sind eins der Wabendreiecke und eins der Wabenfünfecke dargestellt.

Von den 6 regelmäßigen 4-Vielflachen des Raumes R_4 $\{3, 3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4, 4\}$, $\{4, 3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5, 5\}$, und $\{5, 3, 3, 5\}$ (s. I, 5.5.11) sind die fünf letztgenannten zentral-symmetrisch. Ihnen entsprechen die regelmäßigen 3-Waben des Raumes S_3 , die jeweils aus 8 Polartetraedern, 6 Wabenwürfeln, 12 Wabenoktaedern, 300 Wabentetraedern und 60 Wabendodekaedern⁶ bestehen. -

Stuttgart, den 17.2.1971

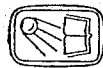
i.A.



(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

72

518
Р 64
УДК 513.8

FB 5910

Неевклидовы пространства. Розенфельд Б. А.

Книга представляет собой систематическое изложение как классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана любого числа измерений, так и новых проективных метрик. Изложение классических геометрий начинается с обзора доказательств V постулата Евклида с учетом новых исследований в этой области. Изучаются группы движений неевклидовых пространств, геометрия многомерных плоскостей, сфер, эквидистант, орисфер и квадрик общего вида, различные интерпретации этих пространств и основы их дифференциальной геометрии. В последней главе изучаются образы симметрии неевклидовых пространств, образующие модели симметрических пространств, группами движений которых являются простые группы Ли или группы Ли, получаемые из простых предельными переходами. В книге изложено много новых результатов, полученных советскими и зарубежными математиками за последние годы.

Эта книга является продолжением книги «Многомерные пространства» (М., «Наука», 1966) того же автора, вместе с которой она охватывает содержание двух третей «Неевклидовых геометрий» (М., Гостехиздат, 1955); оставшаяся треть последней книги войдет в заключительную книгу этой серии «Геометрии групп Ли».

Книга рассчитана на научных работников, специалистов по геометрии, а также на студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Страниц 548. Таблиц 13. Иллюстраций 99. Библиографий 227.

Nicht-euklidische Räume

TECHNISCHE
INFORMATIONSBIBLIOTHEK
HANNOVER

2-2-3
70-68

Оглавление

Предисловие	8
Глава первая. Евклидова геометрия и предистория неевклидовой геометрии	13
§ 1. Евклидово пространство	13
1.1. Евклидово n -пространство (13). 1.1.2. Расстояния (15). 1.1.3. Непрерывность (16). 1.1.4. Движения (23). 1.1.5. Топологические группы и группы Ли (23). 1.1.6. Однородные пространства (29). 1.1.7. Аксиомы Евклида (31). 1.1.8. Аксиомы Гильберта (33). 1.1.9. Структура геометрии (36).	
§ 2. Предистория неевклидовой геометрии	37
1.2.1. V постулат Евклида (37). 1.2.2. Параллельные линии в школе Архимеда (38). 1.2.3. Сумма углов треугольника и четырехугольника (40). 1.2.4. Неявные предположения, эквивалентные V постулату (43). 1.2.5. V постулат Лобачева (45). 1.2.6. Открытие неевклидовой геометрии (46).	
Глава вторая. Эллиптическое пространство	49
§ 1. Эллиптическая геометрия как геометрия сферы с однородными точками	49
2.1.1. Эллиптическое n -пространство (49). 2.1.2. Расстояния (51). 2.1.3. Тригонометрия и площадь треугольника (51). 2.1.4. Координаты (52).	
§ 2. Проективная интерпретация	54
2.2.1. Проективное n -пространство (54). 2.2.2. Проективная интерпретация эллиптического пространства (56). 2.2.3. Плоскости (57). 2.2.4. Угол между линиями (59). 2.2.6. Принцип двойственности (60).	
§ 3. Геометрия m -плоскостей	61
2.3.1. Операторные координаты m -плоскостей (61). 2.3.2. Полярные m -плоскости и $(n-m-1)$ -плоскости (63). 2.3.3. Перпендикуляр, опущенный из перпендикуляра двух m -плоскостей (66). 2.3.5. Общие плоскости и прямые (69).	
§ 4. Сферы и многогранники	70
2.4.1. Сферы (70). 2.4.2. Шары (72). 2.4.3. Симплексы (73). 2.4.4. Правильные соты (75).	
§ 5. Движения	78
2.5.1. Группа движений (78). 2.5.2. Классификация движений (81). 2.5.3. Парадактические сдвиги (84). 2.5.4. Движения 2 -плоскости и 3 -пространства (85). 2.5.5. Односторонность и двусторонность пространства (88).	
§ 6. Квадрики	89
2.6.1. Квадрики (89). 2.6.2. Эквидистанты m -плоскостей (91). 2.6.3. Поверхности Клиффорда (93). 2.6.4. Обобщение поверхности Клиффорда (96).	
§ 7. Конформная интерпретация	100
2.7.1. Конформное n -пространство (100). 2.7.2. Конформные преобразования эллиптического пространства (101). 2.7.3. Конформная интерпретация эллиптического пространства (101). 2.7.4. Выражение расстояний в конформной интерпретации (105).	

§ 8. Интерпретации 3-пространства	108
2.8.1. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (108). 2.8.2. Плоскостные координаты (110). 2.8.3. Интерпретация Фурби (112).	
Глава третья. Пространство Лобачевского	116
§ 1. Псевдоевклидовы пространства	116
3.1.1. Псевдоевклидовы n -пространства (116). 3.1.2. Расстояния и движения (117). 3.1.3. Прямые, плоскости и сферы (118).	
§ 2. Пространство Лобачевского как полусфера мнимого радиуса и его проективная интерпретация	119
3.2.1. n -пространство Лобачевского (119). 3.2.2. Проективная интерпретация пространства Лобачевского (121). 3.2.3. Аксономы пространства Лобачевского (122). 3.2.4. Параллельные и расходящиеся прямые (123). 3.2.5. Расстояния (126). 3.2.6. Тригонометрия и угол параллельности (128). 3.2.7. Плоскость треугольника (130). 3.2.8. Координаты (134).	
§ 3. Расширенное пространство Лобачевского	136
3.3.1. Абсолют и идеальные точки (136). 3.3.2. Объем расширенного пространства (139). 3.3.3. Плоскости (140). 3.3.4. Выражение расстояний и углов с помощью абсолюта (144).	
§ 4. Геометрия m -плоскостей	146
3.4.1. Операторные координаты m -плоскости (146). 3.4.2. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (147). 3.4.3. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (148).	
§ 5. Сферы и многогранники	150
3.5.1. Сферы и эквидистанты (150). 3.5.2. Шары (154). 3.5.3. Длина дуги эквидистанты прямой (155). 3.5.4. Орисферы (156). 3.5.5. Симплексы (158). 3.5.6. Правильные соты (164).	
§ 6. Движения	166
3.6.1. Группа движений (166). 3.6.2. Классификация движений (168). 3.6.3. Движения 2-плоскости и 3-пространства (173).	
§ 7. Квадрики	176
3.7.1. Квадрики (176). 3.7.2. Сферы, эквидистанты и орисферы (177). 3.7.3. Классификация квадрик (179). 3.7.4. Эквидистанты m -плоскостей (183). 3.7.5. Эквидистантная бочка (183).	
§ 8. Конформные интерпретации	184
3.8.1. Конформная интерпретация Клейна (184). 3.8.2. Интерпретация Гессе (186). 3.8.3. Обобщения интерпретации Гессе (187). 3.8.4. Конформные преобразования пространства Лобачевского (188). 3.8.5. Конформная интерпретация Пуанкаре (190). 3.8.6. Выражение расстояний в интерпретации Пуанкаре (195). 3.8.7. Конформная интерпретация пространства Лобачевского на его плоскости (198). 3.8.8. Интерпретации, промежуточные между проективными и конформными (199).	
§ 9. Интерпретация 3-пространства	204
3.9.1. Комплексные пространства (204). 3.9.2. Плоскостные координаты (205). 3.9.3. Интерпретация Котельникова (206).	
Глава четвертая. Гиперболические и симплектические пространства	210
§ 1. Гиперболические пространства	210
4.1.1. Гиперболические n -пространства (210). 4.1.2. Координаты (213). 4.1.3. Плоскости (214). 4.1.4. Классификация эллиптических и гиперболических метрик (215).	
§ 2. Геометрия m -плоскостей	217
4.2.1. Эллиптические m -плоскости (217). 4.2.2. Гиперболические m -плоскости (219). 4.2.3. Паратактичные m -плоскости (221).	

§ 3. Движения	222
4.3.1. Группы движений (222). 4.3.2. Классификация движений (225). 4.3.3. Движения 3-пространства (230).	
§ 4. Квадрики	235
4.4.1. Квадрики (235). 4.4.2. Сферы и орисферы (236). 4.4.3. Эквидистанты m -плоскостей и m -орисферы (238).	
§ 5. Конформные интерпретации	239
4.5.1. Псевдоконформные n -пространства (239). 4.5.2. Конформная интерпретация Клейна (240). 4.5.3. Конформная интерпретация Пуанкаре (240).	
§ 6. Симплектическое пространство	242
4.6.1. Симплектическое (2- n)-пространство (242). 4.6.2. Симплектические преобразования (243). 4.6.3. Нулевые m -плоскости (244). 4.6.4. Симплектический инвариант двух прямых (245).	
§ 7. Интерпретации 3-пространств	247
4.7.1. Интерпретация Пюнкера (247). 4.7.2. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (251). 4.7.3. Интерпретация Фурби (254). 4.7.4. Интерпретация симплектического 3-пространства (258).	
Глава пятая. Проективные метрики	262
§ 1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства	262
5.1.1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства как предельные случаи эллиптических и гиперболических (262). 5.1.2. Конформные интерпретации (266). 5.1.3. Проективные интерпретации (266). 5.1.4. Получение абсолютов с помощью предельных переходов (268).	
§ 2. Коевклидовы и копсевдоевклидовы пространства	270
5.2.1. Применение принципа двойственности к евклидову и псевдоевклидовым пространствам (270). 5.2.2. Расстояния между точками (271). 5.2.3. Углы между плоскостями (275). 5.2.4. Тригонометрия (276). 5.2.5. Плоская треугольница (278). 5.2.6. Движения (281).	
§ 3. Квазиэллиптические и квазигиперболические пространства	283
5.3.1. Абсолюты (283). 5.3.2. Расстояния между точками (286). 5.3.3. Углы между плоскостями (288). 5.3.4. Полярная плоскость и полюс (289). 5.3.5. Движения (290). 5.3.6. Коллинеация (293).	
§ 4. Галилеево, псевдогалилеево и флаговое пространства	295
5.4.1. Галилеево и псевдогалилеево пространства (295). 5.4.2. Флаговое пространство (297). 5.4.3. Движения (298). 5.4.4. Углы между плоскостями и коллинеация флагового пространства (301). 5.4.5. Флаговая 2-плоскость (303). 5.4.6. Тригонометрия флаговой 2-плоскости (305). 5.4.7. Площадь треугольника на флаговой 2-плоскости (307).	
§ 5. Общие проективные метрики	308
5.5.1. Абсолюты (308). 5.5.2. Расстояния между точками (312). 5.5.3. Углы между плоскостями (313). 5.5.4. Классификация проективных метрик (315). 5.5.5. Полярная плоскость и полюс (318). 5.5.6. Движения (319). 5.5.7. Коллинеация (322).	
§ 6. Квадрики	324
5.6.1. Центры квадрик (324). 5.6.2. Метрические инварианты квадрик (327). 5.6.3. Классификация квадрик (332).	
§ 7. Геометрия m -плоскостей	335
5.7.1. Параболические и непараболические m -плоскости (335). 5.7.2. Операторные координаты (336). 5.7.3. Полярные m -плоскости и ($n-m$)-плоскости (337). 5.7.4. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (339). 5.7.5. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (341). 5.7.6. Параболические общие перпендикуляры двух m -плоскостей (343). 5.7.7. Геометрия m -плоскостей квазиэллиптических и квазигиперболических	

ских пространств (346), 5.7.8. Паратактичные m -плоскости и прямые (346), 5.7.9. Геометрия m -плоскостей флагового пространства (348).	
§ 8. Циклы и конформные преобразования	353
5.8.1. Сферы (353), 5.8.2. Циклы (355), 5.8.3. Циклы на флаговой плоскости (358), 5.8.4. Степень точки относительно цикла (359), 5.8.5. Конформные преобразования (360), 5.8.6. Инверсия относительно цикла (363).	
§ 9. Квазисимплектические и полусимплектические пространства	366
5.9.1. Квазисимплектические пространства (366), 5.9.2. Полусимплектические пространства (369).	
§ 10. Интерпретации 3-пространств	371
5.10.1. Квазиэллиптическое 3-пространство как группа движений евклидовой 2-плоскости (371), 5.10.2. Паратактические сдвиги 3-пространства (373), 5.10.3. Интерпретация многообразия прямых квазиэллиптического 3-пространства (375), 5.10.4. Отражение от пары поляризованных параболических прямых (377), 5.10.5. Метрические квадрики и нуль-системы (378), 5.10.6. Квазигиперболическое 3-пространство как группа движений псевдоевклидовой 2-плоскости (380), 5.10.7. Интерпретация многообразия прямых квазигиперболического 3-пространства на паре 2-плоскостей (382), 5.10.8. Интерпретация многообразия прямых квазигиперболического 3-пространства на комплексной 2-плоскости (384), 5.10.9. Изогрессионное 3-пространство как группа движений флаговой 2-плоскости (386), 5.10.10. Интерпретация квазисимплектического 3-пространства (388).	
Глава шестая. Дифференциальная геометрия неевклидовых пространств	390
§ 1. Римановы, псевдоримановы и полуримановы пространства	390
6.1.1. Дифференцируемые пространства (390), 6.1.2. Пространства аффинной связности (392), 6.1.3. Римановы и псевдоримановы пространства (394), 6.1.4. Кривизна римановых и псевдоримановых пространств (397), 6.1.5. Полуримановы и квазиримановы пространства (400), 6.1.6. Кривизна полуримановых пространств (402).	
§ 2. Дифференциальная геометрия линий	404
6.2.1. Линии и касательные (404), 6.2.2. Сопррикасающиеся m -плоскости (404), 6.2.3. Сопровождающий базис и натуральный параметр (406), 6.2.4. Формулы Френе в эллиптическом пространстве (408), 6.2.5. Формулы Френе в гиперболических пространствах (409), 6.2.6. Формулы Френе в полуэллиптических и полугиперболических пространствах (411).	
§ 3. Дифференциальная геометрия поверхностей	414
6.3.1. Поверхности и касательные плоскости (414), 6.3.2. Первые квадратичные формы поверхности (416), 6.3.3. Нормальная кривизна линии на поверхности (417), 6.3.4. Внешние кривизны поверхности (419), 6.3.5. Римановы и псевдориманова геометрии на поверхностях эллиптического и гиперболических пространств (421), 6.3.6. Полуриманова геометрия на поверхностях полуэллиптических и полугиперболических пространств (422), 6.3.7. Главные кривизны (426), 6.3.8. Геометрия на m -орисферах (428).	
Глава седьмая. Простые и квазипростые группы Ли и образы симметрии	431
§ 1. Простые и квазипростые группы Ли	431
7.1.1. Группы Ли как дифференцируемые пространства (431), 7.1.2. Алгебры Ли (433), 7.1.3. Разрешимые и полупростые группы Ли (436), 7.1.4. Компактные простые группы Ли (433), 7.1.5. Несокомпактные простые группы Ли (445), 7.1.6. Квазипростые группы Ли (446).	

§ 2. Симметрические пространства	450
7.2.1. Инвариантная аффинная связность в группах Ли (450), 7.2.2. Симметрические пространства аффинной связности (456), 7.2.3. Группы Ли как симметрические пространства аффинной связности (458), 7.2.4. Свойства симметрических пространств (460), 7.2.5. Инвариантная риманова и псевдориманова метрика в группах Ли (463), 7.2.6. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства (465), 7.2.7. Ранг риманова и псевдориманова симметрических пространств и инварианты их точек (466), 7.2.8. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства нулевой кривизны (467), 7.2.9. Инвариантная квазириманова метрика в группах Ли и квазиримановы симметрические пространства (469).	
§ 3. Образы симметрии	470
7.3.1. Образы симметрии (470), 7.3.2. Образы симметрии евклидовых и псевдоевклидовых пространств (471), 7.3.3. Образы симметрии эллиптических и гиперболических пространств (472), 7.3.4. Образы симметрии и косимметрии проективного пространства (475), 7.3.5. Образы симметрии симплектического пространства (478), 7.3.6. Образы симметрии метрии квазиэллиптического и квазигиперболических пространств (479).	
§ 4. Семейства образов симметрии	482
7.4.1. Пространства образов симметрии (482), 7.4.2. Пространства m -плоскостей (485), 7.4.3. Семейства образов симметрии (487), 7.4.4. Конгруэнции m -плоскостей (490).	
Примечания	493
Библиография	513
Именной указатель	528
Предметный указатель	533

точку Z прямой a , полярную основанию Y перпендикуляра, и лежит в полярной перпендикуляру XU ($n-2$)-плоскости. Но все точки этой ($n-2$)-плоскости, находящиеся на расстоянии δ от точки Z , составляют ($n-3$)-сферу, и, соединяя точку X с каждой из этих точек, мы получим прямую, паратактичную прямой a .

В случае пространства S_3 роль полярной ($n-2$)-плоскости играет прямая, и имеются только две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии δ от точки Z , — точки U и V (рис. 2.5). Прямые XU и XV и представляют собой две прямые, проходящие через точку X и паратактичные прямой a . Угол между прямыми XU и XV равен $\frac{2\delta}{\rho}$, так как расстояние между точками U и V сторон угла, полярными его вершине, равное расстоянию между полюсами этих сторон, равно 2δ .

§ 4. Сферы и многогранники

2.4.1. Сферы. В пространстве S_n можно определить сферы — геометрические места точек, отстоящих от одной точки, называемой *центром* сферы, на одном и том же расстоянии, называемом *радиусом* сферы. Так как расстояние от центра сферы до полярной плоскости этого центра равно $\frac{\pi}{2}\rho$, где ρ — радиус кривизны пространства, то все точки сферы отстоят от этой плоскости также на постоянном расстоянии, дополняющем радиус сферы до $\frac{\pi}{2}\rho$. Поэтому сферу пространства S_n называют в то же время *эквилиантой плоскости*; эту плоскость называют *базой* сферы, а расстояние от точек сферы до ее базы называют *параметром* сферы.

Сфера пространства S_n перпендикулярна всем прямым, проходящим через ее центр, и, следовательно, перпендикулярна к ее базе. В самом деле, при отражении от каждой из этих прямых сфера переходит в себя, откуда следует, что каждый из углов, составляемых этой прямой с касательными к сфере в точках ее пересечения с этой прямой, равен углу, смежному с ним, т. е. является прямым углом.

Сфера радиуса R пространства S_n с радиусом кривизны ρ изометрична сфере пространства R_n с радиусом $\rho \sin \frac{R}{\rho}$. В самом деле, сфера радиуса R в пространстве

S_n с радиусом кривизны ρ изометрична ($n-1$)-сфере того же радиуса R на n -сфере радиуса ρ в пространстве R_{n+1} , но эта ($n-1$)-сфера является пересечением этой сферы с плоскостью, являющейся прострством R_n ; радиус ($n-1$)-сферы в этом пространстве равен катету $O'X$ прямоугольного треугольника $OO'X$, где O — центр n -сферы, O' — центр ($n-1$)-сферы, X — одна из точек ($n-1$)-сферы (рис. 2.6). Гипотенуза OX этого треугольника равна радиусу ρ n -сферы, катет $O'X$ лежит против угла $OO'X$, равного $\frac{R}{\rho}$. Поэтому радиус ($n-1$)-сферы пространства R_n равен $\rho \sin \frac{R}{\rho}$.

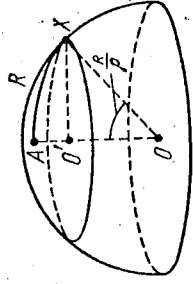


Рис. 2.6.

Заменяя в найденных в I, 6.2.11 выражениях объема сферы радиуса r пространства R_n радиус r на $\rho \sin \frac{R}{\rho}$, мы получим, что объем Σ_n сферы радиуса R пространства S_n при четном и нечетном n соответственно равен

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n &= \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)!!} \rho^{n-1} \sin^{n-1} \frac{R}{\rho}, \\ \Sigma_n &= \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)!!} \rho^{n-1} \sin^{n-1} \frac{R}{\rho}. \end{aligned} \right\} (2.58)$$

Формула (2.58) дает при $n=2$ (считая $0!!=1$), 3, 4 и 5 соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_2 &= 2\pi \rho \sin \frac{R}{\rho}, & \Sigma_3 &= 4\pi \rho^2 \sin^2 \frac{R}{\rho}, \\ \Sigma_4 &= 2\pi^2 \rho^3 \sin^3 \frac{R}{\rho}, & \Sigma_5 &= \frac{8}{3} \pi^2 \rho^4 \sin^4 \frac{R}{\rho}. \end{aligned} \right\} (2.59)$$

Здесь Σ_2 — длина окружности плоскости S_2 . Так как длина $C(\varphi)$ дуги окружности, соответствующей

центральному углу φ , относится к длине Σ_2 всей окружности как φ к 2π , мы получаем, что

$$C(\varphi) = \varphi \sin \frac{R}{\rho}. \quad (2.60)$$

2.4.2. Шары. Сфера делит пространство S_n на две области. Та из этих областей, которая содержит центр сферы, называется шаром. Если мы обозначим объем сферы радиуса R через $\Sigma_n(R)$, то объем V_n шара радиуса R пространства S_n выражается интегралом

$$V_n = \rho \int_0^{\frac{R}{\rho}} \Sigma_n \varphi d\varphi, \quad (2.61)$$

т. е. при четном и нечетном n соответственно

$$\left. \begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)!!} \rho^n \int_0^{\frac{R}{\rho}} \sin^{n-1} \varphi d\varphi, \\ V_n &= \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)!!} \rho^n \int_0^{\frac{R}{\rho}} \sin^{n-1} \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Вычисление интегралов (2.62) производится с помощью рекуррентной формулы

$$\int_0^{\frac{R}{\rho}} \sin^{n-1} \varphi d\varphi = -\frac{1}{n-1} \sin^{n-2} \frac{R}{\rho} \cos \frac{R}{\rho} + \frac{n-2}{n-1} \int_0^{\frac{R}{\rho}} \sin^{n-3} \varphi d\varphi. \quad (2.63)$$

Поэтому, в частности, при $n=2, 3, 4$ и 5 мы получаем

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= 2\pi \rho^2 \left(1 - \cos \frac{R}{\rho}\right) = 4\pi \rho^2 \sin^2 \frac{R}{2\rho}, \\ V_3 &= 4\pi \rho^3 \left(\frac{R}{2\rho} - \frac{1}{4} \sin \frac{2R}{\rho}\right), \\ V_4 &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^4 \left(4 \sin^2 \frac{R}{2\rho} - \frac{1}{2} \sin \frac{2R}{\rho} \sin \frac{R}{\rho}\right), \\ V_5 &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^5 \left(\frac{3R}{2\rho} - \frac{3}{4} \sin \frac{2R}{\rho} - \sin^3 \frac{R}{\rho} \cos \frac{R}{\rho}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

2.4.3. Симплексы. Если заданы $m+1$ точек $A_0(x_0)$, $A_1(x_1)$, ..., $A_m(x_m)$ пространства S_n , не лежащих в одной $(m-1)$ -плоскости, то точки пространства, определяемые векторами

$$x = x_0 t^a, \quad (2.65)$$

где параметры t^a неотрицательны, образуют m -симплекс $A_0 A_1 \dots A_m$ с вершинами A_0, A_1, \dots, A_m . При $m=1$ m -симплекс является отрезком, при $m=2$ — треугольником, при $m=3$ — тетраэдром. Заметим, что m -симплекс пространства S_n получается при отождествлении диаметрально противоположных точек n -сферы пространства R_{n+1} из сферического m -симплекса (см. I, 6.3.1) этой n -сферы. Если в уравнении (2.65) один из индексов t^a равен 0, мы получаем $(m-1)$ -симплекс, называемый гранью m -симплекса. Грани этих $(m-1)$ -симплексов являются $(m-2)$ -симплексами и называются $(m-2)$ -гранями и т. д. Таким образом, m -симплекс обладает p -гранями, где p принимает значения от 0 до $n-1$. 0-границы совпадают с вершинами m -симплекса, 1-границы совпадают с ребрами. Из соответствия между m -симплексом пространства S_n и сферическим m -симплексом пространства R_{n+1} следует, что m -симплекс обладает $\binom{m+1}{p+1}$ p -гранями и, в частности, $m+1$ вершинами и $m+1$ $(m-1)$ -гранями (см. I, 6.3.2). Со всякой p -гранью m -симплекса при $p < m-1$ связаны примыкающие к ней $(m-1)$ -границы, число которых, как следует из свойств сферического m -симплекса (см. I, 6.3.3), равно $m-p$. Поэтому $(m-1)$ -границы m -симплекса, примыкающие к p -границе, образуют $(m-p)$ -гранный угол, при $m-p=2$ — двугранный угол, при $(m-2)$ -границе m -симплекса. Будем измерять $(m-p)$ -гранный угол при p -границе m -симплекса отношением объема части пространства S_n , ограниченной $(m-1)$ -плоскостями $(m-1)$ -граней этого $(m-p)$ -гранного угла, к объему всего пространства S_n . Будем называть это отношение «углом при p -границе» и будем обозначать угол при p -границе $A_0 A_1 \dots A_i \dots A_m$ m -симплекса $A_0 A_1 \dots A_m$ символом $\alpha_{i,0,1,\dots,i,\dots,m}$. Из свойств сферического m -симплекса (см. I, 6.3.4) следует, что

альтернированная сумма углов при p -гранях m -симплекса

$$W_m = \sum \alpha_i - \sum \alpha_{ij} + \sum \alpha_{ijk} - + \dots \\ \dots + (-1)^m \sum \alpha_{i_0 i_1 \dots i_{m-2}} \quad (2.66)$$

и отношение I_m объема данного m -симплекса к объему пространства S_n при четном m связано соотношением

$$I_m = W_m - \frac{m-1}{2}, \quad (2.67)$$

а при нечетном m

$$W_m = -\frac{m-1}{2}. \quad (2.68)$$

Формула (2.67) дает возможность выразить объем m -симплекса пространства S_n при четном m через альтернированную сумму его углов: так как в силу (2.12) объем V_m пространства S_m при четном m равен $\frac{m}{2^2 \pi^2} \rho^m$, объем Υ_m m -симплекса, равный произведению I_m на объем пространства S_m , может быть записан в виде

$$\Upsilon_m = \frac{m}{2^2 \pi^2} \rho^m (m-1)! \rho^m \left(W_m - \frac{m-1}{2} \right). \quad (2.69)$$

В частности, при $m=2$ формула (2.69) дает

$$\Upsilon_2 = 2\rho^2 \left(W_2 - \frac{1}{2} \right),$$

но так как для треугольника ABC $W_2 = \frac{A+B+C}{2\pi}$, эта формула совпадает с формулой (2.7).

Так как объем Υ_m всегда положителен, из формулы (2.69) следует, что для m -симплекса пространства S_n при четном m

$$W_m > \frac{m-1}{2}. \quad (2.70)$$

В случае *автополярного* m -симплекса, т. е. m -симплекса, каждая вершина которого является полюсом противоположной грани, $I_m = \frac{1}{2^m}$, а $(m-\rho)$ -гранный угол

состоит из 2^p таких m -симплексов, каждый из углов при p -грани m -симплекса равен $\frac{2^p}{2^m} = \frac{1}{2^{m-p}}$. Поэтому в этом

случае $\sum \alpha_{i_0 i_1 \dots i_p} = \left(\frac{m+1}{p+1} \right) \frac{1}{2^{m-p}}$ и, следовательно,

$$W_m = (m+1) \frac{1}{2^m} - \left(\frac{m+1}{2} \right) \frac{1}{2^{m-1}} + \dots$$

$$\dots + (-1)^m \left(\frac{m+1}{2} \right) \frac{1}{2^2}$$

и

$$\left(1 - \frac{1}{2} \right)^{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} = 1 - \frac{m+1}{2} +$$

$$+ (-1)^m W_m + (-1)^{m+1} \frac{1}{2^{m+1}}.$$

откуда при четном m получаем формулу (2.67) при $I_m = \frac{1}{2^m}$, а при нечетном m — формулу (2.68).

2.4.4. Правильные соты. В пространстве S_n можно определить *m -многогранники*, т. е. фигуры, состоящие из m -симплексов, примыкающих друг к другу по $(m-1)$ -грамм, и в частности *правильные m -многогранники*. Так же, как в пространстве R_n (см. I, 5.5.2), правильные n -многогранники пространства S_n определяются по индукции как выпуклые n -многогранники, $(n-1)$ -грани и вершинные $(n-1)$ -гранники (вершинами последних являются середины ребер, примыкающих к одной вершине n -многогранника) которых являются соответственно конгруэнтными правильными $(n-1)$ -многогранниками. В пространстве S_n можно определить также *правильные n -соты*, т. е. разбиения пространства на конгруэнтные правильные n -многогранники, обладающие правильными вершинными n -многогранниками. В отличие от правильных n -сот пространства R_n (см. I, 5.5.13) они состоят из конечного числа правильных n -многогранников. Очевидно, что правильным n -сотам соответствует правильный $(n+1)$ -многогранник пространства R_{n+1} , обладающий центральной симметрией: проектируя правильный $(n+1)$ -многогранник из его центра на описанную около него n -сферу, мы получим правильные n -соты на n -сфере, а

для того чтобы правильные n -соты на n -сфере перешли в правильные n -соты пространства S_n , необходимо и достаточно, чтобы $(n+1)$ -многогранник переходил бы в себя при отражении от центра n -сферы.

Из трех правильных n -многогранников пространства R_n при $n > 4$ — n -симплекса $\{3, 3, \dots, 3\}$, n -куба $\{4, 3, \dots, 3\}$ и n -креста $\{3, 3, \dots, 3, 4\}$ (см. I, 5.5.5) — центральной симметрией обладают n -куб и n -крест. Случая $(n+1)$ -креста

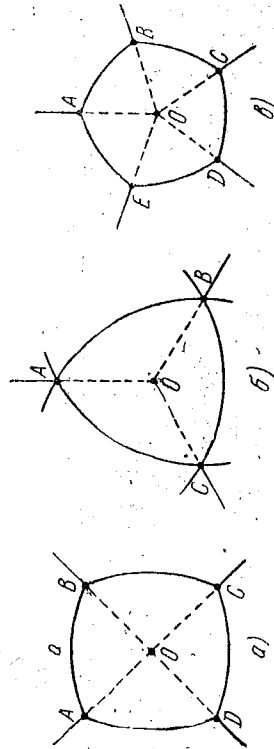


Рис. 27.

пространства R_{n+1} соответствуют правильные n -соты пространства S_n , состоящие из 2^n автополярных n -симплексов. Случаю $(n+1)$ -куба пространства R_{n+1} соответствуют правильные n -соты пространства S_n , состоящие из $2n$ сотовых n -кубов.

Из 5 правильных многогранников пространства R_3 — тетраэдра $\{3, 3\}$, октаэдра $\{3, 4\}$, куба $\{4, 3\}$, икосаэдра $\{3, 5\}$ и додекаэдра $\{5, 3\}$ (см. I, 5.5.1) центральной симметрией обладают куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Этим многогранникам соответствуют правильные соты плоскости S_2 , состоящие соответственно из 4 автополярных треугольников, 3 сотовых квадратов, 6 сотовых пятиугольников и 10 сотовых треугольников.

Будем обозначать соты плоскости S_2 , состоящие из правильных p -угольников, примыкающих к каждой вершине по q , так же как соответственные правильные многогранники пространства R_3 , символом $\{p, q\}$.

Заметим, что углы многоугольников сот $\{p, q\}$ равны $\frac{2\pi}{q}$, в частности, углы сотовых квадрата и пятиугольника

равны $\frac{2\pi}{3}$ (поэтому, соединяя середины двух противоположных сторон сотового квадрата прямой, мы получим два четырехугольника Хайяма (см. 1.2.3), в которых выполняется гипотеза тупого угла), углы автополярного треугольника равны $\frac{\pi}{2}$, а углы сотового треугольника равны $\frac{2\pi}{5}$. Покажем, что сторона a многоугольников сот

$\{p, q\}$ вполне определяется числами p и q . В самом деле, соединим вершины одного из p -угольников сот $\{p, q\}$ с центром O описанной около него окружности. В одном из полученных равнобедренных треугольников OAB (рис. 2.7) угол O равен $\frac{2\pi}{p}$, а каждый из углов A и B равен половине угла $\frac{2\pi}{q}$, т. е. $\frac{\pi}{q}$. Поэтому если мы обозначим $AB = a$, то в силу двойственной теоремы косинусов (2.5)

$$\cos \frac{2\pi}{p} = -\cos^2 \frac{\pi}{q} + \sin^2 \frac{\pi}{q} \cos \frac{a}{\rho},$$

т. е.

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{q}}.$$

Поэтому

$$2 \cos^2 \frac{a}{2\rho} = 1 + \cos \frac{a}{\rho} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{p}}{\sin^2 \frac{\pi}{q}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{q}},$$

откуда, сокращая на 2 и извлекая квадратный корень, мы получим

$$\cos \frac{a}{2\rho} = \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{\sin \frac{\pi}{q}}. \quad (2.71)$$

Так как $\cos \frac{a}{2\rho} < 1$, для существования сот $\{p, q\}$ необходимо выполнение неравенства

$$\cos \frac{\pi}{p} < \sin \frac{\pi}{q} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q} \right),$$

равносильного неравенству

$$\frac{\pi}{p} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}$$

т. е. неравенству

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \quad (2.72)$$

Этому неравенству удовлетворяют только те значения p и q , которые соответствуют правильным многогранникам пространства R_3 . Случаю $p=q=3$, соответствующему правильному тетраэдру, как мы видели, не соответствуют соты, так как тетраэдр не обладает центральной симметрией и равносторонние треугольники со стороны a , определяемой соотношением (2.71) при $p=q=3$, т. е. $\cos \frac{a}{2p} = -\frac{1}{3}$, налагают друг на друга. В случае сотового квадрата соотношение (2.71) равносильно более простому соотношению

$$\cos \frac{a}{p} = -\frac{1}{3}. \quad (2.73)$$

На рис. 2.7, а изображено разбиение плоскости S_2 на три сотовых квадрата $ABCD$, $ABDC$ и $ADBC$, второй из которых изображен частью над и частью под первым, а третий — частью слева и частью справа от первого; на рис. 2.7, б и 2.7, в изображены один из сотовых треугольников и один из сотовых пятиугольников.

Из 6 правильных 4-многогранников пространства R_4 $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$ и $\{5, 3, 3\}$ (см. 1, 5.5.11) центральной симметрией обладают пять последних. Им соответствуют правильные 3-соты пространства S_3 , состоящие соответственно из 8 *автополярных тетраэдров*, 6 *сотовых кубов*, 12 *сотовых октаэдров*, 300 *сотовых тетраэдров* и 60 *сотовых додекаэдров*.

§ 5. Движения

2.5.1. Группа движений. Если рассматривать пространство S_n как сферу пространства R_{n+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками, то всякое движение пространства S_n определяется вращением

сферы. Так как при этом тождественному преобразованию пространства S_n соответствуют два движения — тождественное преобразование пространства R_{n+1} и отражение от центра сферы, — группа движений пространства S_n изоморфна фактор-группе группы вращений пространства R_{n+1} по ее подгруппе, состоящей из тождественного преобразования и отражения от центра сферы.

Так как отражение от точки пространства R_{n+1} является произведением отражений от $n+1$ плоскостей, это отражение принадлежит к той же связанной компоненте группы вращений пространства R_{n+1} , что и тождественное преобразование, при нечетном n и к другой связанной компоненте при четном n . Отсюда следует, что отождествление элементов этой группы происходящее при переходе к фактор-группе, при четном n происходит таким образом, что каждый элемент одной связанной компоненты отождествляется с некоторым элементом другой связанной компоненты, а при нечетном n происходит таким образом, что каждый элемент каждой связанной компоненты отождествляется с другим элементом той же связанной компоненты. Поэтому, так как группа вращений пространства R_{n+1} состоит из двух связанных компонент (см. 1, 4.2.15), *группа движений пространства S_n при четном n связана, а при нечетном n состоит из двух связанных компонент*.

При четном n группа движений пространства S_n изоморфна связанной компоненте группы вращений пространства R_{n+1} .

Поэтому в пространстве S_n при четном n отражение от плоскости может быть получено непрерывным образом из тождественного преобразования, а в пространстве S_n при нечетном n отражение от плоскости не может быть получено таким образом.

Движения пространства S_n , так же как вращения пространства R_{n+1} , можно записать в виде (1.30) или (1.31), где $U = (U_j^i)$ — ортогональный оператор, удовлетворяющий условию (1.24) или (1.32).

При четном n можно считать, что определители матриц (U_j^i) равны $+1$, при нечетном n имеются движения

Борис Абрамович Розенфельд
Неевклидовы пространства

М., 1969 г., 548 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Ланко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано к печати 31/VI 1969 г. Бумага 84x108/32. Физ. печ. л. 17,125. Условн. печ. л. 28,77. Уч.-изд. л. 28,2. Тираж 7000 экз. Г-02633. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 1934.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-74, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главлитграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.