

vi/78

B.A. Rozenfel'd:

Kap. 4 : Hyperbolische Räume , S. 242 - 247

§ 6 DER SYMPLEKTISCHE RAUM

4.6.1. Der symplektische $(2n + 1)$ -Raum. Wenn wir den Raum 1S_n als einen Raum P_n definiert haben, in dem die nichtausgearbeitete Quadrik mit dem Index 1 vorgegeben ist und folglich die polare Transformation bezüglich dieser Quadrik, dann erhalten wir - wenn wir in dem ungerade-dimensionalen Raum P_{2n+1} die andere Form der involutorischen Korrelation - ein Nullsystem vorgegeben haben (s. I, 9.5.12) - den symplektischen $(2n + 1)$ -Raum ${}^4Sp_{2n+1}$ (Nullsysteme sind nur in ungerade-dimensionalen Räumen möglich).

Das Nullsystem kann in der Form (4.54)

geschrieben werden, wobei die Matrix a_{ij} schiefssymmetrisch ist, d.h.

(4.55)

oder - in Vektorform -

(4.56)

wobei A - der \langle ein \rangle schiefssymmetrische(r) Operator ist, d.h.

(4.57)

Wir nennen das Nullsystem (4.54) das absolute Nullsystem des Raumes Sp_{2n+1} .

In I, 8.2.5 haben wir gesehen, daß man den schiefssymmetrischen

Operator auf die kanonische Form bringen kann, woraus folgt, daß im Raum P_{2n+1} eine Basis gewählt werden kann, derart, daß die Matrix (a_{IJ}) das folgende Aussehen annimmt:

(4.58)

In diesem Fall sieht das absolute Nullsystem (4.54) folgendermaßen aus:

(4.59)

Das Nullsystem (4.54) bestimmt die Bilinearform

(4.60)

die - wenn das Nullsystem auf die Form (4.59) gebracht ist - das Aussehen

(4.61)

annimmt.

4.6.2. Symplektische Transformationen. Wir nennen die Kollineationen des Raumes Sp_{2n+1} , die mit seinem absoluten Nullsystem vertauschbar sind, s y m p l e k t i s c h e T r a n s f o r m a t i o n e n. Wir fordern, daß die Kollineation $'x = Ux$ vertauschbar sei mit der Korrelation (4.56) und erhalten die Bedingung

(4.62)

Der Operator U , der die Bedingung (4.62) mit dem schief-symmetrischen Operator A erfüllt, heißt **s y m p l e k t i s c h e r O p e r a t o r**. Wenn die Matrix des Operators A das Aussehen (4.58) hat, kann die Bedingung (4.62) in der Form

(4.63)

geschrieben werden.

Die Matrix $(2n + 2)$ -ter Ordnung, die die Bedingungen (4.63) erfüllt, heißt **s y m p l e k t i s c h e M a t r i x** $(2n + 2)$ -ter Ordnung.

Da sich die Bedingungen (4.63) als $\frac{(2n + 2)(2n + 1)}{2} = (n + 1)(2n + 1)$ Bedingungen darstellen, hängen die symplektischen Matrizen $(2n + 2)$ -ter Ordnung und folglich die symplektischen Transformationen des Raumes P_{2n+1} von $(2n + 2)^2 - (n + 1)(2n + 1) = (n + 1)(2n + 3)$ reellen Parametern ab.

Wir bemerken hierzu, daß die Determinante der symplektischen Matrix gleich $+1$ ist.

Ebenso wie im Falle der Bewegungen der Räume S_n und 1S_n wird bewiesen, daß die symplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1} eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist.

4.6.3. Null - m - Ebenen. Aus der Schiefsymmetrie des Operators A folgt, daß

, (4.64)

d.h. jeder Punkt des Raumes Sp_{2n+1} liegt in einer Ebene, die ihm im absoluten Nullsystem entspricht. Im Unterschied zu den Punkten liegt nicht jede m - Ebene in der \langle einer \rangle $(2n - m)$ -Ebene, die ihr im absoluten Nullsystem entspricht. Wenn die m -Ebene diese Eigenschaft besitzt, heißt sie **N u l l - m - E b e n e** des Raumes Sp_{2n+1} .

Aus dem in I, 9.5.13 Bewiesenen folgt, daß die Mannigfaltigkeit der Null- m -Ebenen des Raumes Sp_{2n+1} abhängt von

reellen Parametern. Bei $m = 0$ ist die Zahl $N_{2n+1,0}$ gleich $2n + 1$, d.h. gleich der Dimension des Raumes P_{2n+1} . Bei $m = 1$ ist die Zahl $N_{2n+1,1}$ gleich $4n - 1$, d.h. da die Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes P_{2n+1} von $4n$ reellen Parametern abhängt (s. I, 3.3.17), ist diese Zahl nur um 1 kleiner als die Dimension der Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes.

Die Null- n -Ebenen gehen beim Nullsystem in sich selbst über; die Dimension $N_{2n+1,n}$ der Mannigfaltigkeit der Null - n - Systeme ist gleich $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Die Mannigfaltigkeit

der Nullgeraden des Raumes Sp_{2n+1} nennt man einen \langle den \rangle absoluten linearen Komplex ⁵ dieses Raumes.

4.6.4. Die symplektische Invariante zweier Geraden. Aufgrund der Gleichung (4.64) wird das Doppelverhältnis der Punkte $X(x)$ und $Y(y)$ und der Ebenen α und β , die ihnen im Nullsystem entsprechen, unendlich und liefert keine Invariante der Punkte X und Y bezüglich einer Gruppe symplektischer Transformationen. Es läßt sich unschwer nachprüfen, daß man jede zwei Punkte des Raumes Sp_{2n+1} durch symplektische Transformationen in beliebige zwei Punkte dieses Raumes überführen kann.

Wir berechnen den Operator W des Doppelverhältnisses zweier Geraden und zweier $(2n - 1)$ -Ebenen, die ihnen im Nullsystem entsprechen (s. I, 9.4.7). Die Gerade a gehe durch die Punkte X und Y , und die Gerade b - durch die Punkte Z und W . Die Matrix der projektiven Operatorkoordinate X der Geraden a (s. I, 9.4.2) besteht aus zwei Spalten, deren Elemente gleich den Koordinaten der Vektoren x und y sind, die die Punkte X und Y darstellen; und die Matrix der projektiven Operatorkoordinate Y der Geraden b besteht aus zwei Spalten, deren Elemente gleich den Koordinaten der entsprechenden Vektoren z und w sind. Beim Nullsystem (4.56) gehen die Punkte X, Y, Z und W in Ebenen über, die durch die Vektoren Ax, Ay, Az und Aw dargestellt werden, und die Geraden a und b - in

die $(2n - 1)$ -Ebenen α und β mit den Matrizen der Operatorkoordinaten U und V , die aus zwei Zeilen bestehen, deren Elemente gleich den Koordinaten der Vektoren Ax, Ay, Az und Aw sind.

Wenn wir die Produkte der Operatoren aufgestellt haben

⟨a⟩

gewinnen wir

⟨b⟩

d.h. der Operator W hat das Aussehen ωI , wobei ω die einzige symplektische Invariante der Geraden a und b ist :

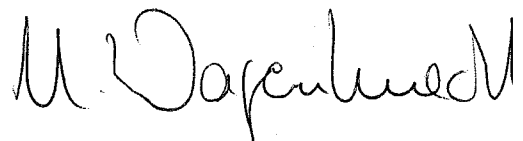
(4.66)

Die Invariante ω hat folgenden geometrischen Sinn: daraus, daß der Operator des Doppelverhältnisses W der Geraden a und b und der $(2n - 1)$ -Ebenen α und β das Aussehen ωI hat, folgt, daß die Geraden a und b und die $(2n - 1)$ -Ebenen α und β nicht 2 Transversalen als zwei Geraden und zwei $(2n-1)$ -Ebenen des Raumes P_{2n+1} im allgemeinen Fall haben (s. I, 9.4.8); und durch jeden Punkt beider Geraden verläuft die Transversale dieser Geraden und $(2n - 1)$ -Ebenen, d.h. die 3-Ebene, die die Summe der Geraden a und b ist, schneidet aus den $(2n - 1)$ -Ebenen α und β die Geraden a' und b' heraus, die zu einer Schar der geradlinigen ⟨?⟩ ⟨Regel- ?⟩ Quadrik gehören. Die vier Punkte, die durch die Geraden a, b, a', b' auf den geradlinigen Erzeugenden der zweiten Schar dieser Quadrik ausgeschnitten werden, sind projektiv, d.h. die Doppelverhältnisse dieser

vier Punkte sind gleich. Dieses Doppelverhältnis ist \langle Als dieses Doppelverhältnis stellt sich dar ... \rangle auch die Invariante ω . -

Stuttgart, den 17.2.1971

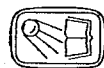
i.A.



(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

78

Б13
Р 64
УДК 513.8

FB 5910

Неевклидова пространства. Розенфельд Б. А.

Книга представляет собой систематическое изложение как классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана любого числа измерений, так и новых проективных метрик. Изложение классических геометрий начинается с обзора доказательств V постулата Евклида с учетом новых исследований в этой области. Изучаются группы движений неевклидовых пространств, геометрия многомерных плоскостей, сфер, эквидистант, орисфер и квадрик общего вида, различные интерпретации этих пространств и основы их дифференциальной геометрии. В последней главе изучаются образы симметрических пространств, образующие модели n -мерных евклидовых пространств, группами движений которых являются простые группы Ли или группы Ли, получающиеся из простых предельными переходами. В книге изложено много новых результатов, полученных советскими и зарубежными математиками за последние годы.

Эта книга является продолжением книги «Многомерные пространства» (М., «Наука», 1966) того же автора, вместе с которой она охватывает содержание двух третей «Неевклидовых геометрий» (М., Гостехиздат, 1955); оставшаяся треть последней книги войдет в заключительную книгу этой серии «Геометрии групп Ли».

Книга рассчитана на научных работников, специалистов по геометрии, а также на студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Страниц 548. Таблиц 13. Иллюстраций 99. Библиографий 227.

Nicht-euklidische Räume

TECHNISCHE
INFORMATIONSBIBLIOTHEK
HANNOVER

2-2-3
79-68

Оглавление

Предисловие	8
Глава первая. Евклидова геометрия и предистория неевклидовой геометрии	13
§ 1. Евклидово пространство	13
1.1.1. Евклидово n -пространство (13). 1.1.2. Расстояния (15). 1.1.3. Непрерывность (16). 1.1.4. Движения (23). 1.1.5. Топологические группы и группы Ли (23). 1.1.6. Однородные пространства (29). 1.1.7. Аксиомы Евклида (31). 1.1.8. Аксиомы Гильберта (33). 1.1.9. Структура геометрии (36).	
§ 2. Предистория неевклидовой геометрии	37
1.2.1. V постулат Евклида (37). 1.2.2. Параллельные линии в школе Аристотеля (38). 1.2.3. Сумма углов треугольника и четырехугольника (40). 1.2.4. Новые предположения, эквивалентные V постулату (43). 1.2.5. Постулат параллели (45). 1.2.6. Открытие неевклидовой геометрии (46).	
Глава вторая. Эллиптическое пространство	49
§ 1. Эллиптическая геометрия как геометрия сферы с отождествленными точками	49
2.1.1. Эллиптическое n -пространство (49). 2.1.2. Расстояния (51). 2.1.3. Тригонометрия и площадь треугольника (51). 2.1.4. Координаты (52). 2.1.5. Объемы (53).	
§ 2. Проективная интерпретация	54
2.2.1. Проективное n -пространство (54). 2.2.2. Проективная интерпретация эллиптического пространства (56). 2.2.3. Плоскости (57). 2.2.4. Угол между плоскостями (58). 2.2.5. Выражение расстояний и углов с помощью абсолюта (59). 2.2.6. Принцип двойственности (60).	
§ 3. Геометрия m -плоскостей	61
2.3.1. Операторные координаты m -плоскостей (61). 2.3.2. Полярные m -плоскости и $(n-m-1)$ -плоскость (63). 2.3.3. Перпендикуляр, опущенный из перпендикуляра двух m -плоскостей (66). 2.3.5. Общие плоскости и прямые (69).	
§ 4. Сферы и многогранники	70
2.4.1. Сферы (70). 2.4.2. Шары (72). 2.4.3. Симплексы (73). 2.4.4. Правильные соты (75).	
§ 5. Движения	78
2.5.1. Группа движений (78). 2.5.2. Классификация движений (81). 2.5.3. Парактактические сдвиги (84). 2.5.4. Движения 2-плоскости и 3-пространства (85). 2.5.5. Односторонность и двусторонность пространства (88).	
§ 6. Квадрики	89
2.6.1. Квадрики (89). 2.6.2. Эквидистанты m -плоскостей (91). 2.6.3. Поверхности Клиффорда (93). 2.6.4. Обобщение поверхности Клиффорда (96).	
§ 7. Конформная интерпретация	100
2.7.1. Конформное n -пространство (100). 2.7.2. Конформные преобразования эллиптического пространства (101). 2.7.3. Конформная интерпретация эллиптического пространства (101). 2.7.4. Выражение расстояний в конформной интерпретации (106).	

§ 8. Интерпретации 3-пространства	108
2.8.1. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (108). 2.8.2. Плоскороверы координаты (110). 2.8.3. Интерпретация Фубини (112).	
Глава третья. Пространство Лобачевского	116
§ 1. Псевдоевклидовы пространства	116
3.1.1. Псевдоевклидовы n -пространства (116). 3.1.2. Расстояния и движения (117). 3.1.3. Прямые, плоскости и сферы (118).	
§ 2. Пространство Лобачевского как полусфера мнимого радиуса и его проективная интерпретация	119
3.2.1. n -пространство Лобачевского (119). 3.2.2. Проективная интерпретация пространства Лобачевского (121). 3.2.3. Аксиомы пространства Лобачевского (122). 3.2.4. Параллельные и расходящиеся прямые (123). 3.2.5. Расстояние (126). 3.2.6. Тригонометрия и угол параллельности (128). 3.2.7. Площадь треугольника (130). 3.2.8. Координаты (134).	
§ 3. Расширенное пространство Лобачевского	136
3.3.1. Абсолют и идеальные точки (136). 3.3.2. Объем расширенного пространства (139). 3.3.3. Плоскости (140). 3.3.4. Выражение расстояний и углов с помощью ассимюта (144).	
§ 4. Геометрия m -плоскостей	146
3.4.1. Операторные координаты m -плоскостей (146). 3.4.2. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (147). 3.4.3. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (148).	
§ 5. Сферы и многогранники	150
3.5.1. Сферы и эквидистанты (150). 3.5.2. Шары (154). 3.5.3. Длина дуги эквидистанты прямой (155). 3.5.4. Орисферы (156). 3.5.5. Симплекс (158). 3.5.6. Правильные соты (164).	
§ 6. Движения	166
3.6.1. Группа движений (166). 3.6.2. Классификация движений (168). 3.6.3. Движения 2-плоскости и 3-пространства (173).	
§ 7. Квадрики	176
3.7.1. Квадрики (176). 3.7.2. Сферы, эквидистанты и орисферы (177). 3.7.3. Классификация квадрик (179). 3.7.4. Эквидистанты m -плоскостей (183). 3.7.5. Эквидистантная бочка (189).	
§ 8. Конформные интерпретации	184
3.8.1. Конформная интерпретация Клейна (184). 3.8.2. Интерпретация Гессе (186). 3.8.3. Обобщения интерпретации Гессе (187). 3.8.4. Конформные преобразования пространства Лобачевского (188). 3.8.5. Конформная интерпретация Пуанкаре (190). 3.8.6. Выражение расстояний в интерпретации Пуанкаре (195). 3.8.7. Конформная интерпретация пространства Лобачевского на его плоскости (198). 3.8.8. Интерпретации, промежуточные между проективными и конформными (199).	
§ 9. Интерпретация 3-пространства	204
3.9.1. Комплексные пространства (204). 3.9.2. Плоскороверы координаты (205). 3.9.3. Интерпретация Котельникова (206).	
Глава четвертая. Гиперболические и симплектические пространства	210
§ 1. Гиперболические пространства	210
4.1.1. Гиперболические n -пространства (210). 4.1.2. Координаты (213). 4.1.3. Плоскости (214). 4.1.4. Классификация эллиптических и гиперболических метрик (215).	
§ 2. Геометрия m -плоскостей	217
4.2.1. Эллиптические m -плоскости (217). 4.2.2. Гиперболические m -плоскости (219). 4.2.3. Паратактичные m -плоскости (221).	

§ 3. Движения	222
4.3.1. Группы движений (222). 4.3.2. Классификация движений (225). 4.3.3. Движения 3-пространства (230).	
§ 4. Квадрики	235
4.4.1. Квадрики (235). 4.4.2. Сферы и орисферы (236). 4.4.3. Эквидистанты m -плоскостей и m -орисферы (238).	
§ 5. Конформные интерпретации	239
4.5.1. Псевдоконформные n -пространства (239). 4.5.2. Конформная интерпретация Клейна (240). 4.5.3. Конформная интерпретация Пуанкаре (240).	
§ 6. Симплектические пространства	242
4.6.1. Симплектическое $(2n+1)$ -пространство (242). 4.6.2. Симплектические преобразования (243). 4.6.3. Нулевые m -плоскости (244). 4.6.4. Симплектический инвариант двух прямых (245).	
§ 7. Интерпретации 3-пространств	247
4.7.1. Интерпретация Плюкера (247). 4.7.2. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (251). 4.7.3. Интерпретация Фубини (254). 4.7.4. Интерпретация симплектического 3-пространства (258).	
Глава пятая. Проективные метрики	262
§ 1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства	262
5.1.1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства как предельные случаи эллиптических и гиперболических (262). 5.1.2. Конформные интерпретации (266). 5.1.3. Проективные интерпретации (266). 5.1.4. Получение абсолютов с помощью предельных переходов (268).	
§ 2. Коевклидовы и копсевдоевклидовы пространства	270
5.2.1. Применение принципа двойственности к евклидову и псевдоевклидовым пространствам (270). 5.2.2. Расстояния между точками (271). 5.2.3. Углы между плоскостями (275). 5.2.4. Тригонометрия (276). 5.2.5. Площадь треугольника (278). 5.2.6. Движения (281).	
§ 3. Квазиэллиптические и квазигиперболические пространства	283
5.3.1. Абсолюты (283). 5.3.2. Расстояния между точками (286). 5.3.3. Углы между плоскостями (288). 5.3.4. Полярная плоскость и полюс (289). 5.3.5. Движения (290). 5.3.6. Коллижания (293).	
§ 4. Галилеево, псевдогалилеевы и флаговое пространства	295
5.4.1. Галилеево и псевдогалилеевы пространства (295). 5.4.2. Флаговое пространство (297). 5.4.3. Движения (298). 5.4.4. Углы между плоскостями и обобщения флагового пространства (301). 5.4.5. Флаговая 2-плоскость (303). 5.4.6. Тригонометрия флаговой 2-плоскости (305). 5.4.7. Площадь треугольника на флаговой 2-плоскости (307).	
§ 5. Общие проективные метрики	308
5.5.1. Абсолюты (308). 5.5.2. Расстояния между точками (312). 5.5.3. Углы между плоскостями (313). 5.5.4. Классификация проективных метрик (315). 5.5.5. Полярная плоскость и полюс (318). 5.5.6. Движения (319). 5.5.7. Коллижания (322).	
§ 6. Квадрики	324
5.6.1. Центры квадрик (324). 5.6.2. Метрические инварианты квадрик (327). 5.6.3. Классификация квадрик (332).	
§ 7. Геометрия m -плоскостей	335
5.7.1. Параболические и непараболические m -плоскости (335). 5.7.2. Операторные координаты (336). 5.7.3. Полярные m -плоскости и $(n-m-1)$ -плоскость (339). 5.7.4. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (339). 5.7.5. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (341). 5.7.6. Параболические общие перпендикуляры двух m -плоскостей (343). 5.7.7. Геометрия m -плоскостей квазиэллиптических и квазигиперболических	

ских пространств (346), 5.7.8. Паратактичные m -плоскости и прямые (348), 5.7.9. Геометрия m -плоскостей флагатного пространства (348).	
§ 8. Циклы и конформные преобразования	353
5.8.1. Сферы (353), 5.8.2. Циклы (355), 5.8.3. Циклы на флаговой плоскости (358), 5.8.4. Степень точки относительно цикла (359), 5.8.5. Конформные преобразования (360), 5.8.6. Инверсия относительно цикла (365).	
§ 9. Квазисимплектические и полусимплектические пространства	366
5.9.1. Квазисимплектические пространства (366), 5.9.2. Полусимплектические пространства (369).	
§ 10. Интерпретации 3-пространств	371
5.10.1. Квазиэллиптическое 3-пространство как группа движений евклидовой 2-плоскости (371), 5.10.2. Паратактические сдвиги 3-пространства (373), 5.10.3. Интерпретация многообразия прямых квазиэллиптического 3-пространства (375), 5.10.4. Отражение от пары попаризованных параболических прямых (377), 5.10.5. Метрические квадраты и нуль-системы (378), 5.10.6. Квазигиперболическое 3-пространство как группа движений параболической кривой (380), 5.10.7. Интерпретация многообразия прямых квазитиперболического 3-пространства на паре 2-плоскостей (382), 5.10.8. Интерпретация многообразия прямых квазитиперболического 3-пространства на комплексной 2-плоскости (384), 5.10.9. Изотропное 3-пространство как группа движений флаговой 2-плоскости (386), 5.10.10. Интерпретация квазисимплектического 3-пространства (388).	
Глава шестая. Дифференциальная геометрия неевклидовых пространств	390
§ 1. Римановы, псевдоримановы и полуримановы пространства	390
6.1.1. Дифференцируемые пространства (390), 6.1.2. Пространства аффинной связности (392), 6.1.3. Римановы и псевдоримановы пространства (394), 6.1.4. Кривизна римановых и псевдоримановых пространств (397), 6.1.5. Полуримановы и квазиримановы пространства (400), 6.1.6. Кривизна полуримановых пространств (402).	
§ 2. Дифференциальная геометрия линий	404
6.2.1. Линии и касательные (404), 6.2.2. Соприкасающаяся m -плоскости (404), 6.2.3. Сопровождающий базис и натуральный параметр (406), 6.2.4. Формулы Френе в эллиптическом пространстве (408), 6.2.5. Формулы Френе в гиперболических пространствах (409), 6.2.6. Формулы Френе в полуэллиптических и полугиперболических пространствах (411).	
§ 3. Дифференциальная геометрия поверхностей	414
6.3.1. Поверхности и касательные плоскости (414), 6.3.2. Первые квадратичные формы поверхности (416), 6.3.3. Нормальная кривизна линии на поверхности (417), 6.3.4. Внешние кривизны поверхности (419), 6.3.5. Римановы и псевдоримановы геометрии на поверхностях эллиптического и гиперболических пространств (421), 6.3.6. Полуриманова геометрия на поверхностях полуэллиптических и полугиперболических пространств (422), 6.3.7. Главные кривизны (426), 6.3.8. Геометрия на m -орбифолах (428).	
Глава седьмая. Простые и квазипростые группы Ли и образы симметрии	431
§ 1. Простые и квазипростые группы Ли	431
7.1.1. Группы Ли как дифференцируемые пространства (431), 7.1.2. Алгебры Ли (433), 7.1.3. Разрешимые и полупростые группы Ли (436), 7.1.4. Компактные простые группы Ли (435), 7.1.5. Некомпактные простые группы Ли (445), 7.1.6. Квазипростые группы Ли (449).	

§ 2. Симметрические пространства	450
7.2.1. Инвариантная аффинная связность в группах Ли (450), 7.2.2. Симметрические пространства аффинной связности (456), 7.2.3. Группы Ли как симметрические пространства (460), 7.2.4. Группы Ли (460), 7.2.5. Инвариантная риманова и псевдориманова метрика в группах Ли (463), 7.2.6. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства (465), 7.2.7. Ранг риманова и псевдориманова симметрических пространств и инварианты их точек (466), 7.2.8. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства нулевой кривизны (467), 7.2.9. Инвариантная квазириманова метрика в группах Ли и квазиримановы симметрические пространства (469).	
§ 3. Образы симметрии	470
7.3.1. Образы симметрии (470), 7.3.2. Образы симметрии евклидовых и псевдоевклидовых пространств (471), 7.3.3. Образы симметрии эллиптических и гиперболических пространств (472), 7.3.4. Образы симметрии и косимметрии проективного пространства (475), 7.3.5. Образы симметрии и симплектического пространства (478), 7.3.6. Образы симметрии и метрии квазиэллиптического и квазитиперболических пространств (479).	
§ 4. Семейства образов симметрии	482
7.4.1. Пространства образов симметрии (482), 7.4.2. Пространства m -плоскостей (485), 7.4.3. Семейства образов симметрии (487), 7.4.4. Конгруэнции m -плоскостей (490).	
Примечания	493
Библиография	513
Именной указатель	528
Предметный указатель	533

пересечения окружности, проходящей через точки Z и W и перпендикулярной к сфере (4.52) и (4.53) по формулам соответственно (2.125) и (3.139).

Если рассматривать плоскость 1C_2 как расширенную плоскость двойного переменного, на которой круговые преобразования изображаются дробно-линейными преобразованиями, то группы круговых преобразований, которых при стереографической проекции 2-сферы вещественного радиуса пространства 2R_3 на плоскость 1R_2 соответствуют вращения 2-сферы, имеют вид (2.120), так как эти преобразования мы получим, выделяя из всех дробно-линейных преобразований плоскости двойного переменного преобразования, переводящие в себя окружность $\xi\xi = -1$. Таким образом, мы получили изображение точек плоскости 2S_2 на плоскости двойного переменного. Так как, как мы видели в 4.1.3, плоскость 2S_2 с радиусом кривизны 1 изометрична многообразию прямых плоскости Лобачевского 1S_2 , если считать за расстояние между прямыми угол между ними, то тем самым мы получим изображение многообразия прямых плоскости 1S_2 на плоскости двойного переменного³, при котором движения плоскости изображаются преобразованиями (2.120).

§ 6. Симплектическое пространство

4.6.1. Симплектическое $(2n+1)$ -пространство. Если пространство 1S_n мы определили как пространство P_n , в котором задана невырожденная квадратика индекса 1 и, следовательно, полярное преобразование относительно этой квадратки, то, задав в нечетномерном пространстве P_{2n+1} другой вид инволюционной корреляции — нуль-систему (см. I, 9.5.12), мы получим симплектическое $(2n+1)$ -пространство ${}^4S_{2n+1}$ (нуль-системы возможны только в нечетномерных пространствах).

Нуль-систему можно записать в виде

$$u_l = a_{lj}x^j, \quad (4.54)$$

где матрица a_{lj} кососимметрична, т. е.

$$a_{lj} = -a_{jl} \quad (4.55)$$

или, в векторной форме,

$$u = \chi A, \quad (4.56)$$

где A — кососимметрический оператор, т. е.

$$A = -A^T. \quad (4.57)$$

Будем называть нуль-систему (4.54) *абсолютной нуль-системой пространства S_{2n+1}* .

В I, 8.2.5, мы видели, что кососимметрический оператор можно привести к каноническому виду, откуда следует, что в пространстве P_{2n+1} можно выбрать такой базис, при котором матрица (a_{lj}) принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

В этом случае абсолютная нуль-система (4.54) принимает вид

$$u_{2i} = x^{2i+1}, \quad u_{2i+1} = -x^{2i}. \quad (4.59)$$

Нуль-система (4.54) определяет билинейную форму

$$[\chi\eta] = \chi A \eta = a_{lj}x^l\eta^j, \quad (4.60)$$

которая в случае, когда нуль-система приведена к виду (4.59), принимает вид

$$[\chi\eta] = \sum_i (x^{2i}\eta^{2i+1} - x^{2i+1}\eta^{2i}). \quad (4.61)$$

4.6.2. Симплектические преобразования. Будем называть коллинеации пространства S_{2n+1} , перестановочные с его абсолютной нуль-системой, *симплектическими преобразованиями*. Требуя, чтобы коллинеация $\chi = U\eta$ была

перестановочна с корреляцией (4.56), мы получим условие

$$U\Lambda U = A. \quad (4.62)$$

Оператор U , удовлетворяющий условию (4.62) с кососимметрическим оператором A , называется *симплектическим оператором*. В случае, когда матрица оператора A имеет вид (4.58), условие (4.62) может быть записано в виде

$$\sum_j (U_j^i U_k^{2i+1} - U_j^{2i+1} U_k^i) = \delta_j, \quad k-1 - \delta_j, \quad k+1. \quad (4.63)$$

Матрица $(2n+2)$ -го порядка, удовлетворяющая условиям (4.63), называется *симплектической матрицей* $(2n+2)$ -го порядка.

Так как условия (4.63) представляют собой $\frac{(2n+2)(2n+1)}{2} = (n+1)(2n+1)$ условий, симплектические матрицы $(2n+2)$ -го порядка и, следовательно, симплектические преобразования пространства P_{2n+1} зависят от $(2n+2)^2 - (n+1)(2n+1) = (n+1)(2n+3)$ вещественных параметров.

Заметим, что определитель симплектической матрицы равен $+1$.

Так же, как в случае движений пространств S_n и S'_n , доказываемся, что симплектические преобразования пространства Sp_{2n+1} образуют группу, являющуюся группой Ли.

4.6.3. Нулевые m -плоскости. Из кососимметричности оператора A следует, что

$$[xx] = xAx = -xAx = 0, \quad (4.64)$$

т. е. всякая точка пространства Sp_{2n+1} лежит в плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. В отличие от точек не всякая m -плоскость лежит в $(2n-m)$ -плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. В том случае, когда m -плоскость обладает этим свойством, она называется *нулевой m -плоскостью* пространства Sp_{2n+1} .

Из доказанного в I, 9.5.13, следует, что многообразия нулевых m -плоскостей пространства Sp_{2n+1} зависят от

$$N_{2n+1, m} = \frac{(4n-3m+2)(m+1)}{2} \quad (4.65)$$

вещественных параметров. При $m=0$ число $N_{2n+1, 0}$ равно $2n+1$, т. е. размерности пространства P_{2n+1} . При $m=1$ число $N_{2n+1, 1}$ равно $4n-1$, т. е., так как многообразия всех прямых пространства P_{2n+1} зависят от $4n$ вещественных параметров (см. I, 3.3.17), это число только на 1 меньше размерности многообразия всех прямых пространства.

Нулевые n -плоскости переходят при нуль-системе в себя; размерность $N_{2n+1, n}$ многообразия нулевых n -систем равна $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Многообразия нулевых прямых пространства Sp_{2n+1} называются *абсолютным линейным комплексом* этого пространства.

4.6.4. Симплектический инвариант двух прямых. В силу равенства (4.64) двойное отношение точек $X(x)$ и $Y(y)$ и плоскостей α и β , соответствующих им в нуль-системе, обращается в бесконечность и не дает инварианта точек X и Y относительно группы симплектических преобразований. Непрудно проверить, что всякие две точки пространства Sp_{2n+1} можно перевести симплектическим преобразованием в любые две точки этого пространства.

Вычислим оператор W двойного отношения двух прямых и двух $(2n-1)$ -плоскостей, соответствующих им в нуль-системе (см. I, 9.4.7). Пусть прямая a проходит через точки X и Y , а прямая b — через точки Z и W . Матрица проективной операторной координаты X прямой a (см. I, 9.4.2) состоит из двух столбцов, элементы которых равны координатам векторов x и y , представляющих точки X и Y , а матрица проективной операторной координаты Y прямой b состоит из двух столбцов, элементы которых равны координатам соответственных векторов z и w . При нуль-системе (4.56) точки X, Y, Z и W переходят в плоскости, представляемые векторами Ax, Ay, Az и Aw , а прямые a и b — в $(2n-1)$ -плоскости α и β

с матрицами операторных координат U и V , состоящими из двух строк, элементы которых равны координатам векторов Ax, Ay, Az и Aw . Составив произведение операторов

$$\begin{aligned} VX &= \begin{pmatrix} xAz & yAz \\ xAw & yAw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xz] & [yz] \\ [xw] & [yw] \end{pmatrix}, \\ UY &= \begin{pmatrix} zAx & wAx \\ zAy & wAy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [zx] & -[wx] \\ [zy] & [wy] \end{pmatrix}, \\ UX &= \begin{pmatrix} [xx] & [yx] \\ [xy] & [yy] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -[xy] \\ [xy] & 0 \end{pmatrix}, \\ VY &= \begin{pmatrix} [zz] & [wz] \\ [zw] & [ww] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -[zw] \\ [zw] & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned} W &= (UX)^{-1}(UY)(VY)^{-1}(VX) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -[xy] \\ [xy] & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [zx] & [wx] \\ [zy] & [wy] \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & -[zw] \\ [zw] & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [xz] & [yz] \\ [xw] & [yw] \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{[xy][zw]} \begin{pmatrix} [xz][yw] - [xw][yz] & 0 \\ 0 & [xz][yw] - [xw][yz] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

т. е. оператор W имеет вид ωI , где ω — единственный симплектический инвариант прямых a и b :

$$\omega = \frac{[xz][yw] - [xw][yz]}{[xy][zw]}. \quad (4.66)$$

Инвариант ω имеет следующий геометрический смысл: из того, что оператор двойного отношения W прямых a и b и $(2n-1)$ -плоскостей α и β имеет вид ωI , вытекает, что прямые a и b и $(2n-1)$ -плоскости α и β имеют не 2 трансверсали как две прямые и две $(2n-1)$ -плоскости пространства P_{2n-1} в общем случае (см. I, 9.4.8), а через каждую точку обеих прямых проходит трансверсаль этих прямых и $(2n-1)$ -плоскостей, т. е. 3-плоскость, являющаяся суммой прямых a и b , высекает из

$(2n-1)$ -плоскостей α и β прямые a' и b' , принадлежащие к одному семейству линейчатой квадрики. Четверки точек, высекаемые прямыми a, b, a' и b' на прямой семейства образующих второго семейства этой квадрики, пропорциональны, т. е. двойные отношения этих четверок точек равны. Это двойное отношение и представляет собой инвариант ω .

§ 7. Интерпретации 3-пространств

4.7.1. Интерпретация Пюккера. В I, 12.4.11, было доказано, что многообразия прямых пространства P_3 взаимно однозначно изображаются квадрикой индекса 3 пространства 3S_5 , причем проективные преобразования пространства P_3 изображаются коллинеациями пространства 3S_5 , переводящими в себя квадрику; эту интерпретацию, называемую *интерпретацией Пюккера*⁶, можно получить, ставя в соответствие прямой с пюккеровыми координатами P_{ij} (см. 2.8.2) точку пространства P_5 с проекттивными координатами, численно равными координатам P_{ij} , условие (2.129), связывающее пюккеровы координаты, и являющееся уравнением квадрики индекса 3.

Так как квадрика индекса 3 в пространстве 3S_5 является абсолютом пространства 3S_5 , мы получаем, что многообразия прямых пространства P_3 взаимно однозначно изображаются абсолютом пространства 3S_5 , причем проективные преобразования пространства P_3 изображаются движениями пространства 3S_5 .

Из доказанного в I, 12.4.11, следует, что проективные образующие абсолют пространства 3S_5 изображают плоские пучки прямых пространства P_3 ; 2-плоские образующие абсолют, принадлежащие к одному семейству, изображают связи прямых пространства P_3 ; а 2-плоские образующие абсолют, принадлежащие ко второму семейству, изображают плоские поля прямых (семейства прямых, лежащие в одной плоскости) пространства P_3 .

Сечения абсолют пространства 3S_5 4-плоскостью

$$a_i p^i = 0 \quad (4.67)$$

изображают 3-параметрические семейства прямых, пюккеровы координаты которых связаны линейным уравне-

Борис Абрамович Розенфельд
Неевклидовы пространства

М., 1969 г., 548 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано к печати 31/I 1969 г. Бумага 84X108^{1/2}. Физ. печ. л. 17,125. Условн. печ. л. 28,77. Уч.-изд. л. 28,2. Тираж 7000 экз. Т-02633. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 1334.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2

имени Евгения Соколовой Главолиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.