Ü/78

B.A. Rozenfel'd:

Kap. 4 : Hyperbolische Räume , S. 242 - 247

§ 6 DER SYMPLEKTISCHE RAUM

4.6.1. Der symplektische (2n + 1)-Raum. Wenn wir den Raum ^1S_n als einen Raum P_n definiert haben, in dem die nichtausgeartete Quadrik mit dem Index 1 vorgegeben ist und folglich die polare Transformation bezüglich dieser Quadrik, dann erhalten wir - wenn wir in dem ungerade-dimensionalen Raum P_{2n+1} die andere Form der involutorischen Korrelation - ein Nullsystem vorgegeben haben (s. I, 9.5.12) - den symplektischen (2n + 1)-Raum ^{4} Sp_{2n+1} (Nullsysteme sind nur in ungerade-dimensionalen Räumen möglich).

Das Nullsystem kann in der Form (4.54)

geschrieben werden, wobei die Matrix a_{IJ} schiefsymmetrisch ist, d.h.

(4.55)

oder - in Vektorform -

, (4.56)

wobei A - der ⟨ein⟩ schiefsymmetrische(r) Operator ist, d.h.

. (4.57)

Wir nennen das Nullsystem (4.54) das absolute Nullsystem des Raumes Sp_{2n+1} .

In I, 8.2.5 haben wir gesehen, daß man den schiefsymmetrischen

Operator auf die kanonische Form bringen kann, woraus folgt, daß im Raum P_{2n+1} eine Basis gewählt werden kann, derart, daß die Matrix (a_{IJ}) das folgende Aussehen annimmt:

(4.58)

In diesem Fall sieht das absolute Nullsystem (4.54) folgendermaßen aus:

. (4.59)

Das Nullsystem (4.54) bestimmt die Bilinearform

, (4.60)

die - wenn das Nullsystem auf die Form (4.59) gebracht ist - das Aussehen

(4.61)

annimmt.

4.6.2. <u>Symplektische Transformationen</u>. Wir nennen die Kollineationen des Raumes Sp_{2n+1}, die mit seinem absoluten Nullsystem vertauschbar sind, s y m p l e k t i s c h e T r a n s f o r m a t i o n e n . Wir fordern, daß die Kollineation $'x = Ux$ vertauschbar sei mit der Korrelation (4.56) und erhalten die Bedingung

. (4.62)

Der Operator U, der die Bedingung (4.62) mit dem schiefsymmetrischen Operator A erfüllt, heißt s y m p l e k t i s c h e r O p e r a t o r. Wenn die Matrix des Operators A das Aussehen (4.58) hat, kann die Bedingung (4.62) in der Form

(4.63)

geschrieben werden.

Die Matrix $(2n + 2)$-ter Ordnung, die die Bedingungen (4.63) erfüllt, heißt s y m p l e k t i s c h e M a t r i x $(2n + 2)$-ter Ordnung.

Da sich die Bedingungen (4.63) als $\frac{(2n + 2)(2n + 1)}{2} = (n + 1)(2n + 1)$ Bedingungen darstellen, hängen die symplektischen Matrizen $(2n + 2)$-ter Ordnung und folglich die symplektischen Transformationen des Raumes P_{2n+1} von $(2n + 2)^2 - (n + 1)(2n + 1) = (n + 1)(2n + 3)$ reellen Parametern ab.

Wir bemerken hierzu, daß die Determinante der symplektischen Matrix gleich $+1$ ist.

Ebenso wie im Falle der Bewegungen der Räume S_n und ${}^1S_n$ wird bewiesen, daß die symplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1} eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist.

4.6.3. <u>Null - m - Ebenen.</u> Aus der Schiefsymmetrie des Operators A folgt, daß

, (4.64)

d.h. jeder Punkt des Raumes Sp_{2n+1} liegt in einer Ebene, die ihm im absoluten Nullsystem entspricht. Im Unterschied zu den Punkten liegt nicht jede m - Ebene in der ⟨einer⟩ $(2n - m)$-Ebene, die ihr im absoluten Nullsystem entspricht. Wenn die m-Ebene diese Eigenschaft besitzt, heißt sie N u l l - m - E b e n e des Raumes Sp_{2n+1}.

Aus dem in I, 9.5.13 Bewiesenen folgt, daß die Mannigfaltigkeit der Null-m-Ebenen des Raumes Sp_{2n+1} abhängt von

(4.65)

reellen Parametern. Bei $m = 0$ ist die Zahl $N_{2n+1,0}$ gleich $2n + 1$, d.h. gleich der Dimension des Raumes P_{2n+1}. Bei $m = 1$ ist die Zahl $N_{2n+1,1}$ gleich $4n - 1$, d.h. da die Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes P_{2n+1} von $4n$ reellen Parametern abhängt (s. I, 3.3.17), ist diese Zahl nur um 1 kleiner als die Dimension der Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes.

Die Null- n -Ebenen gehen beim Nullsystem in sich selbst über; die Dimension $N_{2n+1,n}$ der Mannigfaltigkeit der Null - n - Systeme ist gleich $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Die Mannigfaltigkeit der Nullgeraden des Raumes Sp_{2n+1} nennt man einen ⟨den⟩ a b s o l u t e n l i n e a r e n K o m p l e x [5] dieses Raumes.

4.6.4. Die symplektische Invariante zweier Geraden. Aufgrund der Gleichung (4.64) wird das Doppelverhältnis der Punkte $X(x)$ und $Y(y)$ und der Ebenen α und β, die ihnen im Nullsystem entsprechen, unendlich und liefert keine Invariante der Punkte X und Y bezüglich einer Gruppe symplektischer Transformationen. Es läßt sich unschwer nachprüfen, daß man jede zwei Punkte des Raumes Sp_{2n+1} durch symplektische Transformationen in beliebige zwei Punkte dieses Raumes überführen kann.

Wir berechnen den Operator W des Doppelverhältnisses zweier Geraden und zweier $(2n - 1)$-Ebenen, die ihnen im Nullsystem entsprechen (s. I, 9.4.7). Die Gerade a gehe durch die Punkte X und Y, und die Gerade b - durch die Punkte Z und W. Die Matrix der projektiven Operatorkoordinate X der Geraden a (s. I, 9.4.2) besteht aus zwei Spalten, deren Elemente gleich den Koordinaten der Vektoren x und y sind, die die Punkte X und Y darstellen; und die Matrix der projektiven Operatorkoordinate Y der Geraden b besteht aus zwei Spalten, deren Elemente gleich den Koordinaten der entsprechenden Vektoren z und w sind. Beim Nullsystem (4.56) gehen die Punkte X, Y, Z und W in Ebenen über, die durch die Vektoren Ax, Ay, Az und Aw dargestellt werden, und die Geraden a und b - in die $(2n-1)$-Ebenen α und β mit den Matrizen der Operatorkoordinaten U und V, die aus zwei Zeilen bestehen, deren Elemente gleich den Koordinaten der Vektoren Ax, Ay, Az und Aw sind.

Wenn wir die Produkte der Operatoren aufgestellt haben

⟨a⟩

gewinnen wir

, ⟨b⟩

d.h. der Operator W hat das Aussehen ωI, wobei ω die einzige symplektische Invariante der Geraden a und b ist :

. (4.66)

Die Invariante ω hat folgenden geometrischen Sinn: daraus, daß der Operator des Doppelverhältnisses W der Geraden a und b und der $(2n-1)$-Ebenen α und β das Aussehen ωI hat, folgt, daß die Geraden a und b und die $(2n-1)$-Ebenen α und β nicht 2 Transversalen als zwei Geraden und zwei $(2n-1)$-Ebenen des Raumes P_{2n+1} im allgemeinen Fall haben (s. I, 9.4.8); und durch jeden Punkt beider Geraden verläuft die Transversale dieser Geraden und $(2n-1)$-Ebenen, d.h. die 3-Ebene, die die Summe der Geraden a und b ist, schneidet aus den $(2n-1)$-Ebenen α und β die Geraden a' und b' heraus, die zu einer Schar der geradlinigen ⟨?⟩ ⟨Regel- ?⟩ Quadrik gehören. Die vier Punkte, die durch die Geraden a, b, a', b' auf den geradlinigen Erzeugenden der zweiten Schar dieser Quadrik ausgeschnitten werden, sind projektiv, d.h. die Doppelverhältnisse dieser vier Punkte sind gleich. Dieses Doppelverhältnis ist ⟨Als dieses Doppelverhältnis stellt sich dar ...⟩ auch die Invariante ω . -

Stuttgart, den 17.2.1971

i.A.

M. Wagenknecht

(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

78

513
Р 64
УДК 513.8

Неевклидовы пространства. Розенфельд Б. А.

Книга представляет собой систематическое изложение как классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана любого числа измерений, так и любых проективных метрик. Изложение классических геометрий начинается с обзора доказательств V постулата Евклида с учетом новых исследований в этой области. Изучаются группы движений неевклидовых пространств, геометрия многомерных плоскостей, сфер, эквидистант, орисфер и квадрик общего вида, различные интерпретации этих пространств и основы их дифференциальной геометрии. В последней главе изучаются образы симметрии неевклидовых пространств, образующие модели симметрических пространств, группами движений которых являются простые группы Ли или группы Ли, получаемые из простых предельными переходами. В книге изложено много новых результатов, полученных советскими и зарубежными математиками за последние годы.

Эта книга является продолжением книги «Многомерные пространства» (М., «Наука», 1966) того же автора, вместе с которой она охватывает содержание двух третей «Неевклидовых геометрий» (М., Гостехиздат, 1955); оставшаяся треть последней книги войдет в заключительную книгу этой серии «Геометрии групп Ли».

Книга рассчитана на научных работников, специализирующихся по геометрии, а также на студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Страниц 548. Таблиц 13. Иллюстраций 99. Библиографий 227.

Nichteuklidische Räume

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{79\text{-}68}$

Оглавление

пересечения окружности, проходящей через точки Z и W и перпендикулярной к сфере (4.52) и (4.53) по формулам соответственно (2.125) и (3.139).

Если рассматривать плоскость ${}^1C_2$ как расширенную плоскость двойного переменного, на которой круговые преобразования изображаются дробно-линейными преобразованиями, то группы круговых преобразований, которым при стереографической проекции 2-сферы вещественного радиуса пространства ${}^2R_3$ на плоскость ${}^1R_2$ соответствуют вращения 2-сферы, имеют вид (2.120), так как эти преобразования мы получим, выделяя из всех дробно-линейных преобразований плоскости двойного переменного преобразования, переводящие в себя окружность $\bar{\xi}\xi = -1$. Таким образом, мы получили изображение точек плоскости ${}^2S_2$ на плоскости двойного переменного. Так как, как мы видели в **4.1.3**, плоскость ${}^2S_2$ с радиусом кривизны 1 изометрична многообразию прямых плоскости Лобачевского ${}^1S_2$, если считать за расстояние между прямыми угол между ними, то тем самым мы получим изображение многообразия прямых плоскости ${}^1S_2$ на плоскости двойного переменного[3], при котором движения плоскости изображаются преобразованиями (2.120).

§ 6. Симплектическое пространство

4.6.1. Симплектическое $(2n+1)$-пространство. Если пространство ${}^lS_n$ мы определили как пространство P_n, в котором задана невырожденная квадрика индекса l и, следовательно, полярное преобразование относительно этой квадрики, то, задав в нечетномерном пространстве P_{2n+1} другой вид инволюционной корреляции — нуль-систему (см. I, **9.5.12**), мы получим симплектическое $(2n+1)$-пространство[4] Sp_{2n+1} (нуль-системы возможны только в нечетномерных пространствах).

Нуль-систему можно записать в виде

$$u_I = a_{IJ} x^J, \tag{4.54}$$

где матрица a_{IJ} кососимметрична, т. е.

$$a_{IJ} = -a_{JI}, \tag{4.55}$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}\mathbf{A}, \tag{4.56}$$

где $\mathbf{A}$ — кососимметрический оператор, т. е.

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T. \tag{4.57}$$

Будем называть нуль-систему (4.54) *абсолютной нуль-системой пространства* Sp_{2n+1}.

В I, **8.2.5**, мы видели, что кососимметрический оператор можно привести к каноническому виду, откуда следует, что в пространстве P_{2n+1} можно выбрать такой базис, при котором матрица (a_{IJ}) принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & 1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

В этом случае абсолютная нуль-система (4.54) принимает вид

$$u_{2i} = x^{2i+1}, \quad u_{2i+1} = -x^{2i}. \tag{4.59}$$

Нуль-система (4.54) определяет билинейную форму

$$[\mathbf{x}\mathbf{y}] = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} = a_{IJ} x^I y^J, \tag{4.60}$$

которая в случае, когда нуль-система приведена к виду (4.59), принимает вид

$$[\mathbf{x}\mathbf{y}] = \sum_i (x^{2i} y^{2i+1} - x^{2i+1} y^{2i}). \tag{4.61}$$

4.6.2. Симплектические преобразования. Будем называть коллинеации пространства Sp_{2n+1}, перестановочные с его абсолютной нуль-системой, *симплектическими преобразованиями*. Требуя, чтобы коллинеация $'\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x}$ была перестановочна с корреляцией (4.56), мы получим условие

$$U^T AU = A. \tag{4.62}$$

Оператор $\mathbf{U}$, удовлетворяющий условию (4.62) с кососимметрическим оператором $\mathbf{A}$, называется *симплектическим оператором*. В случае, когда матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид (4.58), условие (4.62) может быть записано в виде

$$\sum_i \left(U_J^{2i} U_K^{2i+1} - U_J^{2i+1} U_K^{2i}\right) = \delta_{J,\,K-1} - \delta_{J,\,K+1}. \tag{4.63}$$

Матрица $(2n+2)$-го порядка, удовлетворяющая условиям (4.63), называется *симплектической матрицей* $(2n+2)$-го порядка.

Так как условия (4.63) представляют собой $\frac{(2n+2)(2n+1)}{2} = (n+1)(2n+1)$ условий, симплектические матрицы $(2n+2)$-го порядка и, следовательно, симплектические преобразования пространства P_{2n+1} зависят от $(2n+2)^2 - (n+1)(2n+1) = (n+1)(2n+3)$ вещественных параметров.

Заметим, что определитель симплектической матрицы равен $+1$.

Так же, как в случае движений пространств S_n и ${}^lS_n$, доказывается, что симплектические преобразования пространства Sp_{2n+1}, образуют группу, являющуюся группой Ли.

4.6.3. Нулевые m-плоскости. Из кососимметричности оператора $\mathbf{A}$ следует, что

$$[\mathbf{xx}] = \mathbf{xAx} = -\mathbf{xAx} = 0, \tag{4.64}$$

т. е. всякая точка пространства Sp_{2n+1} лежит в плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. В отличие от точек не всякая m-плоскость лежит в $(2n-m)$-плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. В том случае, когда m-плоскость обладает этим свойством, она называется *нулевой m-плоскостью* пространства Sp_{2n+1}.

Из доказанного в I, **9.5.13**, следует, что многообразие нулевых m-плоскостей пространства Sp_{2n+1} зависит от

$$N_{2n+1,\,m} = \frac{(4n-3m+2)(m+1)}{2} \tag{4.65}$$

вещественных параметров. При $m=0$ число $N_{2n+1,0}$ равно $2n+1$, т. е. размерности пространства P_{2n+1}. При $m=1$ число $N_{2n+1,1}$ равно $4n-1$, т. е., так как многообразие всех прямых пространства P_{2n+1} зависит от $4n$ вещественных параметров (см. I, **3.3.17**), это число только на 1 меньше размерности многообразия всех прямых пространства.

Нулевые n-плоскости переходят при нуль-системе в себя; размерность $N_{2n+1,\,n}$ многообразия нулевых n-систем равна $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Многообразие нулевых прямых пространства Sp_{2n+1} называют *абсолютным линейным комплексом*[5] этого пространства.

4.6.4. Симплектический инвариант двух прямых. В силу равенства (4.64) двойное отношение точек $X(\mathbf{x})$ и $Y(\mathbf{y})$ и плоскостей α и β, соответствующих им в нуль-системе, обращается в бесконечность и не дает инварианта точек X и Y относительно группы симплектических преобразований. Нетрудно проверить, что всякие две точки пространства Sp_{2n+1} можно перевести симплектическим преобразованием в любые две точки этого пространства.

Вычислим оператор $\mathbf{W}$ двойного отношения двух прямых и двух $(2n-1)$-плоскостей, соответствующих им в нуль-системе (см. I, **9.4.7**). Пусть прямая a проходит через точки X и Y, а прямая b — через точки Z и W. Матрица проективной операторной координаты $\mathbf{X}$ прямой a (см. I, **9.4.2**) состоит из двух столбцов, элементы которых равны координатам векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, представляющих точки X и Y, а матрица проективной операторной координаты $\mathbf{Y}$ прямой b состоит из двух столбцов, элементы которых равны координатам соответственных векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$. При нуль-системе (4.56) точки X, Y, Z и W переходят в плоскости, представляемые векторами $\mathbf{Ax}$, $\mathbf{Ay}$, $\mathbf{Az}$ и $\mathbf{Aw}$, а прямые a и b — в $(2n-1)$-плоскости α и β

с матрицами операторных координат $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, состоящими из двух строк, элементы которых равны координатам векторов $\mathbf{Ax}$, $\mathbf{Ay}$, $\mathbf{Az}$ и $\mathbf{Aw}$. Составив произведения операторов

$$\mathbf{VX} = \begin{pmatrix} \mathbf{xAz} & \mathbf{yAz} \\ \mathbf{xAw} & \mathbf{yAw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{xz}] & [\mathbf{yz}] \\ [\mathbf{xw}] & [\mathbf{yw}] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{UY} = \begin{pmatrix} \mathbf{zAx} & \mathbf{wAx} \\ \mathbf{zAy} & \mathbf{wAy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{zx}] & [\mathbf{wx}] \\ [\mathbf{zy}] & [\mathbf{wy}] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{UX} = \begin{pmatrix} [\mathbf{xx}] & [\mathbf{yx}] \\ [\mathbf{xy}] & [\mathbf{yy}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -[\mathbf{xy}] \\ [\mathbf{xy}] & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{VY} = \begin{pmatrix} [\mathbf{zz}] & [\mathbf{wz}] \\ [\mathbf{zw}] & [\mathbf{ww}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -[\mathbf{zw}] \\ [\mathbf{zw}] & 0 \end{pmatrix},$$

получим, что

$$\mathbf{W} = (\mathbf{UX})^{-1}(\mathbf{UY})(\mathbf{VY})^{-1}(\mathbf{VX}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -[\mathbf{xy}] \\ [\mathbf{xy}] & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{zx}] & [\mathbf{wx}] \\ [\mathbf{zy}] & [\mathbf{wy}] \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 0 & -[\mathbf{zw}] \\ [\mathbf{zw}] & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{xz}] & [\mathbf{yz}] \\ [\mathbf{xw}] & [\mathbf{yw}] \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{[\mathbf{xy}]\,[\mathbf{zw}]} \begin{pmatrix} [\mathbf{xz}]\,[\mathbf{yw}] - [\mathbf{xw}]\,[\mathbf{yz}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{xz}]\,[\mathbf{yw}] - [\mathbf{xw}]\,[\mathbf{yz}] \end{pmatrix},$$

т. е. оператор $\mathbf{W}$ имеет вид $\omega\mathbf{I}$, где ω — единственный симплектический инвариант прямых a и b:

$$\omega = \frac{[\mathbf{xz}]\,[\mathbf{yw}] - [\mathbf{xw}]\,[\mathbf{yz}]}{[\mathbf{xy}]\,[\mathbf{zw}]}. \tag{4.66}$$

Инвариант ω имеет следующий геометрический смысл: из того, что оператор двойного отношения $\mathbf{W}$ прямых a и b и $(2n-1)$-плоскостей α и β имеет вид $\omega\mathbf{I}$, вытекает, что прямые a и b и $(2n-1)$-плоскости α и β имеют не 2 трансверсали как две прямые и две $(2n-1)$-плоскости пространства P_{2n+1} в общем случае (см. I, **9.4.8**), а через каждую точку обеих прямых проходит трансверсаль этих прямых и $(2n-1)$-плоскостей, т. е. 3-плоскость, являющаяся суммой прямых a и b, высекает из

$(2n-1)$-плоскостей α и β прямые a' и b', принадлежащие к одному семейству линейчатой квадрики. Четверки точек, высекаемые прямыми a, b, a' и b' на прямолинейных образующих второго семейства этой квадрики, проективны, т. е. двойные отношения этих четверок точек равны. Это двойное отношение и представляет собой инвариант ω.

§ 7. Интерпретации 3-пространств

4.7.1. Интерпретация Плюккера. В I, **12.4.11**, было доказано, что многообразие прямых пространства P_3 взаимно однозначно изображается квадрикой индекса 3 пространства $^3S_5$, причем проективные преобразования пространства P_3 изображаются коллинеациями пространства $^3S_5$, переводящими в себя квадрику; эту интерпретацию, называемую *интерпретацией Плюккера* [6], можно получить, ставя в соответствие прямой с плюккеровыми координатами P^{ij} (см. **2.8.2**) точку пространства P_5 с проективными координатами, численно равными координатам P^{ij}; условие (2.129), связывающее плюккеровы координаты, и является уравнением квадрики индекса 3.

Так как квадрика индекса 3 в пространстве P_5 является абсолютом пространства $^3S_5$, мы получаем, что *многообразие прямых пространства P_3 взаимно однозначно изображается абсолютом пространства $^3S_5$, причем проективные преобразования пространства P_3 изображаются движениями пространства $^3S_5$.*

Из доказанного в I, **12.4.11**, следует, что прямолинейные образующие абсолюта пространства $^3S_5$ изображают плоские пучки прямых пространства P_3; 2-плоские образующие абсолюта, принадлежащие к одному семейству, изображают связки прямых пространства P_3, а 2-плоские образующие абсолюта, принадлежащие ко второму семейству, изображают плоские поля прямых (семейства прямых, лежащие в одной плоскости) пространства P_3.

Сечения абсолюта пространства $^3S_5$ 4-плоскостью

$$a_{ij}P^{ij} = 0 \tag{4.67}$$

изображают 3-параметрические семейства прямых, плюккеровы координаты которых связаны линейным уравне-

Борис Абрамович Розенфельд

Неевклидовы пространства

М., 1969 г., 548 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано к печати 31/I 1969 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 17,125. Условн. печ. л. 28,77. Уч.-изд. л. 29,2. Тираж 7000 экз. Т-02633. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 1334.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.