ü/79

B.A. Rozenfel'd:

Kap. 5 : Projektive Metriken , S. 366 - 371

§ 9 QUASISYMPLEKTISCHE UND HALBSYMPLEKTISCHE RÄUME

5.9.1. Quasisymplektische Räume . Bei Anwendung des Grenzübergangs auf den symplektischen Raum Sp_{2n+1} (s. 4.6.1) analog dem Übergang von einem elliptischen und hyperbolischen Räumen S_n und ${}^1S_n$ zu einem elliptischen und zu quasihyperbolischen Räumen, erhalten wir den q u a s i s y m p l e k t i s c h e n R a u m [26] Sp^{2m+1}_{2n+1} . Wenn man den Raum Sp_{2n+1} als einen Raum P_{2n+1} definieren kann, in dem das Nullsystem (4.56) gegeben ist, d.h. eine Korrelation, bestimmbar durch den schiefsymmetrischen Operator $A = -A^T$, die man auch in der Form

(5.249)

schreiben kann, wobei $B = A^{-1}$ ist, dann kann man den Raum Sp^{2m+1}_{2n+1} definieren als einen Raum P_{2n+1} , in dem die Transformationen (4.56) und (5.249) gegeben sind, deren Operatoren A und B schiefsymmetrisch aber nicht-umkehrbar sind (Det A = Det B = 0); dabei überführt die Transformation (4.56) alle Punkte des Raumes in Ebenen, die durch eine gewisse ⟨bestimmte⟩ $(2n - 2m - 1)$-Ebene T_o gehen, und die Transformation (5.249) überführt alle Ebenen des Raumes in Punkte derselben Ebene. Wir nennen diese Transformationen a b s o l u t e N u l l s y s t e m e des Raumes Sp^{2m+1}_{2n+1} . Wenn die $(2n - 2m - 1)$-Ebene T_o durch die Gleichungen $x^o = o$ und $u_1 = o$ bestimmt wird, dann kann man die absoluten Nullsysteme des Raumes Sp^{2m+1}_{2n+1} in der Form

(5.250)

und

(5.251)

schreiben. Anstelle des absoluten Nullsystems (5.251) kann man das Nullsystem (5.252)

auf der $(2n - 2m - 1)$-Ebene T_o definieren ⟨bestimmen⟩.

Wir wählen im Raum P_{2n+1} eine solche Basis, bei der die Matrizen der Operatoren A und B in Übereinstimmung mit dem in I, 8.2.5 Bewiesenen die folgende Form annehmen:

(5.253)

und bringen die absoluten Nullsysteme (5.250) und (5.251) jeweils auf die Form

(5.254)

und

. (5.255)

Bei $m = 0$ ist das absolute Nullsystem (5.25o) durch die $(2m - 1)$-Ebene T_o vorgegeben und besteht darin, daß jedem Punkt eine Ebene entspricht, die die Summe dieses Punktes und der $(2m - 1)$-Ebene T_o ist. Bei $m = n - 1$ ist das absolute Nullsystem (5.251) durch eine Gerade von T_o vorgegeben und besteht darin, daß jeder Ebene ein Schnittpunkt mit der Geraden von T_o entspricht.

Die absoluten Nullsysteme (5.250) und (5.251) bestimmen die Bilinearformen

, (5.256)

die in dem Fall, wenn die Nullsysteme auf die Form (5.254) und (5.255) gebracht sind, jeweils die Form

(5.257)

ann/ehmen.

Wir nennen quasisymplektische Transformationen des Raumes Sp^{2m+1}_{2n+1} die Kollineationen, die die (2n - 2m - 1)-Ebene T_o in sich selbst überführen und mit den absoluten Nullsystemen (5.250) und (5.251) vertauschbar sind. Diese Transformationen haben das Aussehen (5.87), wobei U_o und U_1 - symplektische Operatoren sind, die die Bedingungen

(5.258)

erfüllen.

Bei diesen Transformationen bleibt invariant die der symplektischen Invariante (4.66) der durch die Punkte X und Y verlaufenden Geraden a und der durch die Punkte Z und W gehenden Geraden b analoge Invariante eben dieser Geraden, die gleich dem einzigen Eigenwert des Operators des Doppelverhältnisses der zwei Geraden a und b und der zwei (2n - 1)-Ebenen - in die diese Geraden im absoluten Nullsystem (5.250) übergehen - ist. Ebenso wie in 4.6.4 wird gezeigt, daß diese Invariante die Form

(5.259)

hat.

Im Falle von Geraden, für die $\omega = 1$ ist, gibt es noch eine quasisymplektische Invariante w. Wenn die Vektoren x, y, z, w, die die Geraden a und b bestimmen, durch die Bedingungen

(5.260)

normiert sind, ist die Invariante w gleich

. (5.261)

Ebenso wie im Falle der Bewegungen des Raumes S_n^m und des Raumes ${}^{kl}S_n^m$ wird bewiesen, daß die quasisymplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} von der gleichen Zahl $(n + 1)(2n + 3)$ Parametern abhängen, wie auch die symplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1}, und eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist.

5.9.2. <u>Halbsymplektische Räume</u>. Bei Anwendung der Grenzübergänge, analog zu den Übergängen von den Räumen S_n^m und ${}^{kl}S_n^m$ zu den halbelliptischen und halbhyperbolischen Räumen $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ und ${}^{l_0 l_1 \dots l_r}S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, auf den Raum Sp_{2n+1}^{2m+1} erhalten wir den h a l b s y m p l e k t i s c h e n R a u m $Sp_{2n+1}^{2m+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$. Diesen Raum kann man definieren als einen Raum P_{2n+1}, in dem die $(2n-2m_0-1)$-Ebene T_0 vorgegeben ist, in dieser die $(2n-2m_1-1)$-Ebene T_1, in dieser die $(2n-2m_2-1)$-Ebene T_2 usw. bis zur $(2n-2m_{r-1}-1)$-Ebene T_{r-1}. Dabei ist in dem Raum P_{2n+1} ein absolutes Nullsystem vorgegeben, das alle Punkte des Raumes in Ebenen überführt, die durch die $(2n-2m_0-1)$-Ebene T_0 gehen; in der $(2n-2m_0-1)$-Ebene T_0 ist ein absolutes Nullsystem vorgegeben, das alle ihre Punkte in $(2n - m_0 - 2)$-Ebenen überführt, die in ihr gelegen sind und durch die $(2n-2m_1-1)$-Eben T_1 gehen usw. bis zum absoluten Nullsystem in der $(2n - 2m_{r-1} - 1)$-Ebene T_{r-1}, ⟨die⟩ das alle ihre Punkte in $(2n - 2m_{r-1} - 2)$-Ebenen überführt, die in ihr liegen. Wenn die $(2n-2m_a-1)$-Ebenen T_a durch die Gleichungen $x^0 = x^1 = \dots = x^a = 0$ bestimmt werden, kann man die absoluten Nullsysteme im ganzen Raum $Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ in der $(2n - 2m_0 - 1)$-Ebene T_a und in der $(2n - 2m_{r-1} - 1)$-Ebene T_{r-1} in folgender Form schreiben:

, (5.262)

(5.263)

und

. (5.264)

Wir wählen im Raum P_{2n+1} eine solche Basis, bei der die Matrizen der Operatoren A_a das folgende Aussehen annehmen:

(5.265)

und bringen die absoluten Nullsysteme (5.262), (5.263) und (5.264) jeweils auf die Form

(5.266)

(5.267)

und

. (5.268)

Die absoluten Nullsysteme (5.262), (5.263) und (5.264) bestimmen die Bilinearformen

, (5.269)

die - wenn die Nullsysteme auf die Form (5.266), (5.267) und (5.268) gebracht sind - jeweils die Form

(5.270)

annehmen.

Wir nennen **h a l b s y m p l e k t i s c h e T r a n s f o r m a t i o n e n** des Raumes $Sp_{2n+1}^{2m_0+1,\ldots,2m_{r-1}+1}$ Kollineationen, die die $(2n - 2m_o - 1)$ - Ebenen T_a in sich selbst überführen, die mit den absoluten Nullsystemen (5.262), (5.263) und (5.264) vertauschbar sind und das Aussehen (5.139) haben, wobei U_a - symplektische Operatoren sind, die die Bedingungen

(5.271)

erfüllen.

Bei diesen Transformationen bleibt invariant der einzige Eigenwert ⟨die einzige Eigenzahl⟩ des Operators des Doppelverhältnisses zweier Geraden und zweier (2n-1)-Ebenen, in die diese Geraden beim absoluten Nullsystem (5.262) übergehen. Diese Invariante hat das Aussehen (5.260) .

Im Falle von Geraden, für die $\omega = 1$, existiert eine zweite halbsymplektische Invariante w , die die Form (5.261) bei der Bedingung (5.260) hat. Im allgemeinen Fall stellen wir die Ausdrücke

(5.272)

auf, und wenn $w = w' = \ldots = w^{(a-2)} = 0$, normieren wir die Vektoren x, y, z und w , die zwei Geraden bestimmen, durch die Bedingungen

, (5.273)

und die Invariante der zwei Geraden ist der Ausdruck $w^{(a-1)}$.

Ebenso wie im Falle der Bewegungen der Räume $S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$ und ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$ wird bewiesen, daß die halbsymplektischen Transformationen des Raumes $Sp_{2n+1}^{2m+1, \ldots, 2m_{r-1}+1}$ von der gleichen Zahl (n + 1) (2n + 3) Parameter abhängen, wie auch die Gruppe symplektischer Transformationen des Raumes Sp_{2n+1} , und eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist. -

Stuttgart, den 17.2.1971

i.A. M. Wagenknecht
(Monika Wagenknecht)
Dipl.-Übersetzerin

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

79

513
Р 64
УДК 513.8

Неевклидовы пространства. Розенфельд Б. А.

Книга представляет собой систематическое изложение как классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана любого числа измерений, так и любых проективных метрик. Изложение классических геометрий начинается с обзора доказательств V постулата Евклида с учетом новых исследований в этой области. Изучаются группы движений неевклидовых пространств, геометрия многомерных плоскостей, сфер, эквидистант, орисфер и квадрик общего вида, различные интерпретации этих пространств и основы их дифференциальной геометрии. В последней главе изучаются образы симметрии неевклидовых пространств, образующие модели симметрических пространств, группами движений которых являются простые группы Ли или группы Ли, получаемые из простых предельными переходами. В книге изложено много новых результатов, полученных советскими и зарубежными математиками за последние годы.

Эта книга является продолжением книги «Многомерные пространства» (М., «Наука», 1966) того же автора, вместе с которой она охватывает содержание двух третей «Неевклидовых геометрий» (М., Гостехиздат, 1955); оставшаяся треть последней книги войдет в заключительную книгу этой серии «Геометрии групп Ли».

Книга рассчитана на научных работников, специализирующихся по геометрии, а также на студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Страниц 548. Таблиц 13. Иллюстраций 99. Библиографий 227.

Nichteuklidische Räume

2-2-3
79-68

Оглавление

Инверсия (5.248) переводит всякую точку X пространства в такую точку X', что отрезок XX' делится циклом пополам и перпендикулярен циклу (т. е. касательной плоскости к циклу в точке пересечения). На рис. 5.27 изображена инверсия относительно цикла на плоскости F_2.

§ 9. Квазисимплектические и полусимплектические пространства

5.9.1. Квазисимплектические пространства. Применяя к симплектическому пространству Sp_{2n+1} (см. **4.6.1**) предельный переход, аналогичный переходу от эллиптического и гиперболических пространств S_n и ${}^lS_n$ к эллиптическому и квазигиперболическим пространствам, мы получим *квазисимплектическое пространство*[26] Sp_{2n+1}^{2m+1}. Если пространство Sp_{2n+1} можно определить как пространство P_{2n+1}, в котором задана нуль-система (4.56), т. е. корреляция, определяемая кососимметрическим оператором $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, которую можно записать также в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{B}, \tag{5.249}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, то пространство Sp_{2n+1}^{2m+1} можно определить как пространство P_{2n+1}, в котором заданы преобразования (4.56) и (5.249), операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ которых кососимметрические, но необратимые ($\operatorname{Det}\mathbf{A} = \operatorname{Det}\mathbf{B} = 0$), причем преобразование (4.56) переводит все точки пространства в плоскости, проходящие через некоторую $(2n-2m-1)$-плоскость T_0, а преобразование (5.249) переводит все плоскости пространства в точки той же плоскости. Будем называть эти преобразования *абсолютными нуль-системами* пространства Sp_{2n+1}^{2m+1}. Если $(2n-2m-1)$-плоскость T_0 определяется уравнениями $\mathbf{x}^0 = \mathbf{o}$ и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$, то абсолютные нуль-системы пространства Sp_{2n+1}^{2m+1} можно записать в виде

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}^0\mathbf{A}_0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{o} \qquad (\mathbf{A}_0^T = -\mathbf{A}_0) \tag{5.250}$$

и

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{x}^1 = \mathbf{u}_1\mathbf{A}_1^{-1} \qquad (\mathbf{A}_1^T = -\mathbf{A}_1). \tag{5.251}$$

Вместо абсолютной нуль-системы (5.251) можно определить нуль-систему

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}^1\mathbf{A}_1 \tag{5.252}$$

на $(2n-2m-1)$-плоскости T_0.

Выбирая в пространстве P_{2n+1} такой базис, при котором матрицы операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, в соответствии с доказанным в I, **8.2.5**, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{5.253}$$

мы приведем абсолютные нуль-системы (5.250) и (5.251) соответственно к виду

$$u_{2l_0} = -x^{2l_0+1}, \quad u_{2l_0+1} = x^{2l_0}, \qquad u_{2l_1} = u_{2l_1+1} = 0 \tag{5.254}$$

и

$$x^{2l_0} = x^{2l_0+1} = 0, \quad x^{2l_1} = u_{2l_1+1}, \quad x^{2l_1+1} = -u_{2l_1}. \tag{5.255}$$

При $m=0$ абсолютная нуль-система (5.250) задается одной $(2m-1)$-плоскостью T_0 и состоит в том, что каждой точке соответствует плоскость, являющаяся суммой этой точки и $(2m-1)$-плоскости T_0. При $m=n-1$ абсолютная нуль-система (5.251) задается одной прямой T_0 и состоит в том, что каждой плоскости соответствует точка ее пересечения с прямой T_0.

Абсолютные нуль-системы (5.250) и (5.251) определяют билинейные формы

$$[\mathbf{xy}]_0 = \mathbf{x}^0\mathbf{A}_0\mathbf{y}^0, \qquad [\mathbf{xy}]_1 = \mathbf{x}^1\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1, \tag{5.256}$$

которые в том случае, когда нуль-системы приведены к виду (5.254) и (5.255), принимают соответственно вид

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{xy}]_0 &= \sum_{i_0} (x^{2i_0}y^{2i_0+1} - x^{2i_0+1}y^{2i_0}), \\ [\mathbf{xy}]_1 &= \sum_{i_1} (x^{2i_1}y^{2i_1+1} - x^{2i_1+1}y^{2i_1}). \end{aligned}\right\} \tag{5.257}$$

Будем называть *квазисимплектическими преобразованиями* пространства Sp_{2n+1}^{2m+1} коллинеации, переводящие в себя $(2n-2m-1)$-плоскость T_0 и перестановочные с абсолютными нуль-системами (5.250) и (5.251). Эти преобразования имеют вид (5.87), где $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$ — симплектические операторы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{U}_0^T\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_0, \qquad \mathbf{U}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1. \tag{5.258}$$

При этих преобразованиях остаются инвариантными аналогичный симплектическому инварианту (4.66) прямой a, проходящей через точки X и Y, и прямой b, проходящей через точки Z и W, инвариант таких же прямых, равный единственному собственному числу оператора двойного отношения двух прямых a и b и двух $(2n-1)$-плоскостей, в которые эти прямые переходят при абсолютной нуль-системе (5.250). Так же, как в **4.6.4**, показывается, что этот инвариант имеет вид

$$\omega = \frac{[\mathbf{xz}]_0\,[\mathbf{yw}]_0 - [\mathbf{xw}]_0\,[\mathbf{yz}]_0}{[\mathbf{xy}]_0\,[\mathbf{zw}]_0}. \tag{5.259}$$

В случае прямых, для которых $\omega=1$, имеется еще один квазисимплектический инвариант w. Если векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, определяющие прямые a и b, нормированы условиями

$$[\mathbf{xy}]_0 = [\mathbf{zw}]_0 = \pm 1, \tag{5.260}$$

инвариант w равен

$$w = [\mathbf{x}-\mathbf{z},\ \mathbf{y}-\mathbf{w}]_1 = [\mathbf{xy}]_1 - [\mathbf{xw}]_1 - [\mathbf{zy}]_1 + [\mathbf{zw}]_1. \tag{5.261}$$

Так же, как в случае движений пространств S_n^m и ${}^{kl}S_n^m$, доказывается, что квазисимплектические преобразования пространства Sp_{2n+1}^{2m+1} зависят от того же числа $(n+1)(2n+3)$ параметров, что и симплектические преобразования пространства Sp_{2n+1}, и образуют группу, являющуюся группой Ли.

5.9.2. Полусимплектические пространства. Применяя к пространству Sp_{2n+1}^{2m+1} предельные переходы, аналогичные переходам от пространств S_n^m и ${}^{kl}S_n^m$ к полуэллиптическим и полугиперболическим пространствам $S_n^{m_0m_1\ldots m_{r-1}}$ и ${}^{l_0l_1\ldots l_r}S_n^{m_0m_1\ldots m_{r-1}}$, мы получим *полусимплектическое пространство* $Sp_{2n+1}^{2m_0+1,\ldots,2m_{r-1}+1}$. Это пространство можно определить как пространство P_{2n+1}, в котором задана $(2n-2m_0-1)$-плоскость T_0, в ней $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1, в ней $(2n-2m_2-1)$-плоскость T_2 и т. д. до $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, причем в пространстве P_{2n+1} задана абсолютная нуль-система, переводящая все точки пространства в плоскости, проходящие через $(2n-2m_0-1)$-плоскость T_0, в $(2n-2m_0-1)$-плоскости T_0 задана абсолютная нуль-система, переводящая все ее точки в $(2n-m_0-2)$-плоскости, лежащие в ней и проходящие через $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1 и т. д. до абсолютной нуль-системы в $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, переводящей все ее точки в $(2n-2m_{r-1}-2)$-плоскости, лежащие в ней. Если $(2n-2m_a-1)$-плоскости T_a определяются уравнениями $\mathbf{x}^0=\mathbf{x}^1=\ldots=\mathbf{x}^a=\mathbf{0}$, то абсолютные нуль-системы во всем пространстве $Sp_{2n+1}^{2m_0+1,\ldots,2m_{r-1}+1}$ в $(2n-2m_0-1)$-плоскости T_a и в $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1} можно записать в виде

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}^0\mathbf{A}_0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \ldots = \mathbf{u}_r = \mathbf{o} \quad (\mathbf{A}_0^T = -\mathbf{A}_0), \tag{5.262}$$

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{x}^a\mathbf{A}_a, \quad \mathbf{u}_{a+1} = \ldots = \mathbf{u}_r = \mathbf{o} \quad (\mathbf{A}_a^T = -\mathbf{A}_a) \tag{5.263}$$

и

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{x}^r\mathbf{A}_r \qquad (\mathbf{A}_r^T = -\mathbf{A}_r). \tag{5.264}$$

Выбирая в пространстве P_{2n+1} такой базис, при котором матрицы операторов $\mathbf{A}_a$ принимают вид

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.265}$$

мы приведем абсолютные нуль-системы (5.262), (5.263) и (5.264) соответственно к виду

$$\left.\begin{aligned} u_{2l_0} &= -x^{2l_0+1}, \quad u_{2l_0+1} = x^{2l_0}, \\ u_{2l_1} &= u_{2l_1+1} = \ldots = u_{2l_r} = u_{2l_r+1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.266}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2l_a} &= -x^{2l_a+1}, \quad u_{2l_a+1} = x^{2l_a}, \\ u_{2l_{a+1}} &= u_{2l_{a+1}+1} = \ldots = u_{2l_r} = u_{2l_r+1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.267}$$

и

$$u_{2l_r} = -x^{2l_r+1}, \qquad u_{2l_r+1} = x^{2l_r}. \tag{5.268}$$

Абсолютные нуль-системы (5.262), (5.263) и (5.264) определяют билинейные формы

$$[\mathbf{xy}]_0 = \mathbf{x}^0\mathbf{A}_0\mathbf{y}^0, \quad [\mathbf{xy}]_a = \mathbf{x}^a\mathbf{A}_a\mathbf{y}^a, \quad [\mathbf{xy}]_r = \mathbf{x}^r\mathbf{A}_r\mathbf{y}^r, \tag{5.269}$$

которые в том случае, когда нуль-системы приведены к виду (5.266), (5.267) и (5.268), принимают соответственно вид

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{xy}]_0 &= \sum_{l_0} (x^{2l_0}y^{2l_0+1} - x^{2l_0+1}y^{2l_0}), \\ [\mathbf{xy}]_a &= \sum_{l_a} (x^{2l_a}y^{2l_a+1} - x^{2l_a+1}y^{2l_a}), \\ [\mathbf{xy}]_r &= \sum_{l_r} (x^{2l_r}y^{2l_r+1} - x^{2l_r+1}y^{2l_r}). \end{aligned}\right\} \tag{5.270}$$

Будем называть *полусимплектическими преобразованиями* пространства $Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \ldots, 2m_{r-1}+1}$ коллинеации, переводящие в себя $(2n-2m_0-1)$-плоскости T_a, перестановочные с абсолютными нуль-системами (5.262), (5.263) и (5.264) и имеющие вид (5.139), где $\mathbf{U}_a$ — симплектические операторы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{U}_a^T\mathbf{A}_a\mathbf{U}_a = \mathbf{A}_a. \tag{5.271}$$

При этих преобразованиях остается инвариантным единственное собственное число оператора двойного отношения двух прямых и двух $(2n-1)$-плоскостей, в которые эти прямые переходят при абсолютной нуль-системе (5.262). Этот инвариант имеет вид (5.260).

В случае прямых, для которых $\omega = 1$, имеется второй полусимплектический инвариант w, имеющий вид (5.261) при условии (5.260). В общем случае составим выражения

$$w^{(a-1)} = [\mathbf{x}-\mathbf{z}, \mathbf{y}-\mathbf{w}]_a = [\mathbf{xy}]_a - [\mathbf{xw}]_a - [\mathbf{zy}]_a + [\mathbf{zw}]_a, \tag{5.272}$$

и если $w = w' = \ldots = w^{(a-2)} = 0$, нормируем векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$, определяющие две прямые, условиями

$$[\mathbf{xy}]_{a-1} = [\mathbf{zw}]_{a-1} = \pm 1, \tag{5.273}$$

и инвариантом двух прямых является выражение $w^{(a-1)}$.

Так же, как в случае движений пространств $S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$ и ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$, доказывается, что полусимплектические преобразования пространства $Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \ldots, 2m_{r-1}+1}$ зависят от того же числа $(n+1)(2n+3)$ параметров, что и группа симплектических преобразований пространства Sp_{2n+1}, и образуют группу, являющуюся группой Ли.

§ 10. Интерпретации 3-пространств

5.10.1. Квазиэллиптическое 3-пространство как группа движений евклидовой 2-плоскости. Всякое движение первого рода плоскости R_2 является или поворотом или переносом. Введем в связную группу движений (группу

Борис Абрамович Розенфельд

Неевклидовы пространства

М., 1969 г., 548 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано к печати 31/I 1969 г. Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 17,125. Условн. печ. л. 28,77. Уч.-изд. л. 29,2. Тираж 7000 экз. Т-02633. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 1334.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.