

B.A. Rozenfel'd:

Kap. 5 : Projektive Metriken , S. 366 - 371

§ 9 QUASISYMPLEKTISCHE UND HALBSYMPLEKTISCHE RÄUME

5.9.1. Quasisymplektische Räume . Bei Anwendung des Grenzübergangs auf den symplektischen Raum Sp_{2n+1} (s. 4.6.1) analog dem Übergang von einem elliptischen und hyperbolischen Räumen S_n und 1S_n zu einem elliptischen und zu quasihyperbolischen Räumen, erhalten wir den quasisymplektischen Raum $^{26}Sp_{2n+1}^{2m+1}$. Wenn man den Raum Sp_{2n+1} als einen Raum P_{2n+1} definieren kann, in dem das Nullsystem (4.56) gegeben ist, d.h. eine Korrelation, bestimmbar durch den schiefsymmetrischen Operator $A = -A^T$, die man auch in der Form

(5.249)

schreiben kann, wobei $B = A^{-1}$ ist, dann kann man den Raum Sp_{2n+1}^{2m+1} definieren als einen Raum P_{2n+1} , in dem die Transformationen (4.56) und (5.249) gegeben sind, deren Operatoren A und B schiefsymmetrisch aber nicht-unkehrbar sind ($\text{Det } A = \text{Det } B = 0$); dabei überführt die Transformation (4.56) alle Punkte des Raumes in Ebenen, die durch eine gewisse \langle bestimmte \rangle $(2n - 2m - 1)$ -Ebene T_0 gehen, und die Transformation (5.249) überführt alle Ebenen des Raumes in Punkte derselben Ebene. Wir nennen diese Transformationen absolute Nullsysteme des Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} . Wenn die $(2n - 2m - 1)$ -Ebene T_0 durch die Gleichungen $x^0 = 0$ und $u_1 = 0$ bestimmt wird, dann kann man die absoluten Nullsysteme des Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} in der Form

(5.250)

und

(5.251)

schreiben. Anstelle des absoluten Nullsystems (5.251) kann man das Nullsystem (5.252)

auf der $(2n - 2m - 1)$ -Ebene T_0 definieren \langle bestimmen \rangle .

Wir wählen im Raum P_{2n+1} eine solche Basis, bei der die Matrizen der Operatoren A und B in Übereinstimmung mit dem in I, 8.2.5 Bewiesenen die folgende Form annehmen:

(5.253)

und bringen die absoluten Nullsysteme (5.250) und (5.251) jeweils auf die Form

(5.254)

und

(5.255)

Bei $m = 0$ ist das absolute Nullsystem (5.250) durch die $(2m - 1)$ -Ebene T_0 vorgegeben und besteht darin, daß jedem Punkt eine Ebene entspricht, die die Summe dieses Punktes und der $(2m - 1)$ -Ebene T_0 ist. Bei $m = n - 1$ ist das absolute Nullsystem (5.251) durch eine Gerade von T_0 vorgegeben und besteht darin, daß jeder Ebene ein Schnittpunkt mit der Geraden von T_0 entspricht.

Die absoluten Nullsysteme (5.250) und (5.251) bestimmen die Bilinearformen

, (5.256)

die in dem Fall, wenn die Nullsysteme auf die Form (5.254) und (5.255) gebracht sind, jeweils die Form

(5.257)

annehmen.

Wir nennen *quasisymplektische Transformationen* des Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} die Kollineationen, die die $(2n - 2m - 1)$ -Ebene T_0 in sich selbst überführen und mit den absoluten Nullsystemen (5.250) und (5.251) vertauschbar sind. Diese Transformationen haben das Aussehen (5.87), wobei U_0 und U_1 - symplektische Operatoren sind, die die Bedingungen

(5.258)

erfüllen.

Bei diesen Transformationen bleibt invariant die der symplektischen Invariante (4.66) der durch die Punkte X und Y verlaufenden Geraden a und der durch die Punkte Z und W gehenden Geraden b analoge Invariante eben dieser Geraden, die gleich dem einzigen Eigenwert des Operators des Doppelverhältnisses der zwei Geraden a und b und der zwei $(2n - 1)$ -Ebenen - in die diese Geraden im absoluten Nullsystem ^(5.250) übergehen - ist. Ebenso wie in 4.6.4 wird gezeigt, daß diese Invariante die Form

(5.259)

hat.

Im Falle von Geraden, für die $\omega = 1$ ist, gibt es noch eine *quasisymplektische Invariante* ω . Wenn die Vektoren x, y, z, w, die die Geraden a und b bestimmen, durch die Bedingungen

(5.260)

normiert sind, ist die Invariante ω gleich

(5.261)

Ebenso wie im Falle der Bewegungen des Raumes S_n^m und des Raumes $kl S_n^m$ wird bewiesen, daß die quasisymplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1}^{2m+1} von der gleichen Zahl $(n+1)(2n+3)$ Parametern abhängen, wie auch die symplektischen Transformationen des Raumes Sp_{2n+1} , und eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist.

5.9.2. Halbsymplektische Räume. Bei Anwendung der Grenzübergänge, analog zu den Übergängen von den Räumen S_n^m und $kl S_n^m$ zu den halb-elliptischen und halbhyperbolischen Räumen $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ und $l_0 l_1 \dots l_r S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, auf den Raum Sp_{2n+1}^{2m+1} erhalten wir den halbsymplektischen Raum $Sp_{2n+1}^{2m+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$. Diesen Raum kann man definieren als einen Raum P_{2n+1} , in dem die $(2n-2m_0-1)$ -Ebene T_0 vorgegeben ist, in dieser die $(2n-2m_1-1)$ -Ebene T_1 , in dieser die $(2n-2m_2-1)$ -Ebene T_2 usw. bis zur $(2n-2m_{r-1}-1)$ -Ebene T_{r-1} . Dabei ist in dem Raum P_{2n+1} ein absolutes Nullsystem vorgegeben, das alle Punkte des Raumes in Ebenen überführt, die durch die $(2n-2m_0-1)$ -Ebene T_0 gehen; in der $(2n-2m_0-1)$ -Ebene T_0 ist ein absolutes Nullsystem vorgegeben, das alle ihre Punkte in $(2n-m_0-2)$ -Ebenen überführt, die in ihr gelegen sind und durch die $(2n-2m_1-1)$ -Ebene T_1 gehen usw. bis zum absoluten Nullsystem in der $(2n-2m_{r-1}-1)$ -Ebene T_{r-1} , (die) das alle ihre Punkte in $(2n-2m_{r-1}-2)$ -Ebenen überführt, die in ihr liegen. Wenn die $(2n-2m_a-1)$ -Ebenen T_a durch die Gleichungen $x^0 = x^1 = \dots = x^a = 0$ bestimmt werden, kann man die absoluten Nullsysteme im ganzen Raum

$Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ in der $(2n-2m_0-1)$ -Ebene T_a und in der $(2n-2m_{r-1}-1)$ -Ebene T_{r-1} in folgender Form schreiben:

(5.262)

(5.263)

und

(5.264)

Wir wählen im Raum P_{2n+1} eine solche Basis, bei der die Matrizen der Operatoren A_{α} das folgende Aussehen annehmen:

(5.265)

und bringen die absoluten Nullsysteme (5.262), (5.263) und (5.264) jeweils auf die Form

(5.266)

(5.267)

und

(5.268)

Die absoluten Nullsysteme (5.262), (5.263) und (5.264) bestimmen die Bilinearformen

(5.269)

die - wenn die Nullsysteme auf die Form (5.266), (5.267) und (5.268) gebracht sind - jeweils die Form

(5.270)

annehmen.

Wir nennen halbsymplektische Transformationen des Raumes $Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ Kollineationen, die die $(2n - 2m_0 - 1)$ -Ebenen T_a in sich selbst überführen, die mit den absoluten Nullsystemen (5.262), (5.263) und (5.264) vertauschbar sind und das Aussehen (5.139) haben, wobei U_a - symplektische Operatoren sind, die die Bedingungen

(5.271)

erfüllen.

Bei diesen Transformationen bleibt invariant der einzige Eigenwert (die einzige Eigenzahl) des Operators des Doppelverhältnisses zweier Geraden und zweier $(2n-1)$ -Ebenen, in die diese Geraden beim absoluten Nullsystem (5.262) übergehen. Diese Invariante hat das Aussehen (5.260).

Im Falle von Geraden, für die $\omega = 1$, existiert eine zweite halbsymplektische Invariante ω , die die Form (5.261) bei der Bedingung (5.260) hat. Im allgemeinen Fall stellen wir die Ausdrücke

(5.272)

auf, und wenn $\omega = \omega' = \dots = \omega^{(a-2)} = 0$, normieren wir die Vektoren x, y, z und w , die zwei Geraden bestimmen, durch die Bedingungen

, (5.273)

und die Invariante der zwei Geraden ist der Ausdruck $\omega^{(a-1)}$.

Ebenso wie im Falle der Bewegungen der Räume $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ und $l_{01} \dots l_{rs}^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ wird bewiesen, daß die halbsymplektischen Transformationen des Raumes $Sp_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ von der gleichen Zahl $(n+1)(2n+3)$ Parameter abhängen, wie auch die Gruppe symplektischer Transformationen des Raumes Sp_{2n+1} , und eine Gruppe bilden, die eine Liesche Gruppe ist. -

Stuttgart, den 17.2.1971

i.A. 
 (Monika Wagenknecht)
 Dipl.-Übersetzerin

79

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

НЕЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

513
Р 64
УДК 513.8

FB 5910

Неевклидовы пространства. Розенфельд Б. А.
Книга представляет собой систематическое изложение как классических неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана любого числа измерений, так и новых проективных метрик. Изложение классических геометрий начинается с обзора доказательств V постулата Евклида с учетом новых исследований в этой области. Изучаются группы движений неевклидовых пространств. Изучаются группы движений неевклидовых пространств, орисфер и квадрики общего вида, различные интерпретации этих пространств и основы их дифференциальной геометрии. В последней главе изучаются образы симметрических пространств, образующие модели неевклидовых пространств, группами движений которых являются простые группы Ли или группы Ли, получаемые из простых предельными переходами. В книге изложено много новых результатов, полученных советскими и зарубежными математиками за последние годы.

Эта книга является продолжением книги «Многомерные пространства» (М., «Наука», 1966) того же автора, вместе с которой она охватывает содержание двух третей «Неевклидовых геометрий» (М., Гостехиздат, 1955), оставшаяся треть последней книги войдет в заключительную книгу этой серии «Геометрии групп Ли».

Книга рассчитана на научных работников, специалистов работающих по геометрии, а также на студентов и аспирантов университетов и пединститутов. Страниц 548. Таблиц 13. Иллюстраций 99. Библиографий 227.

Nicht-euklidische Räume

TECHNISCHE
INFORMATIONSBIBLIOTHEK
HANNOVER

2-2-3
79-68

Оглавление

Предисловие	8
Глава первая. Евклидова геометрия и предистория неевклидовой геометрии	13
§ 1. Евклидово пространство	13
1.1.1. Евклидово n -пространство (13). 1.1.2. Расстояния (15). 1.1.3. Непривязность (16). 1.1.4. Движения (23). 1.1.5. Топологические группы и группы Ли (23). 1.1.6. Однородные пространства (29). 1.1.7. Аксиомы Евклида (31). 1.1.8. Аксиомы Гильберта (33). 1.1.9. Структура геометрии (36).	
§ 2. Предистория неевклидовой геометрии	37
1.2.1. У постулат Евклида (37). 1.2.2. Параллельные линии в школе Архимеда (38). 1.2.3. Сумма углов треугольника и четырехугольника (40). 1.2.4. Неявные предположения, эквивалентные V постулату (43). 1.2.5. Постулат параллельности (45). 1.2.6. Открытие неевклидовой геометрии (46).	
Глава вторая. Эллиптическое пространство	49
§ 1. Эллиптическая геометрия как геометрия сферы с ожесточенными точками	49
2.1.1. Эллиптическое n -пространство (49). 2.1.2. Расстояния (51). 2.1.3. Тригонометрия и площадь треугольника (51). 2.1.4. Координаты (52). 2.1.5. Объемы (53).	
§ 2. Проективная интерпретация	54
2.2.1. Проективное n -пространство (54). 2.2.2. Проективная интерпретация эллиптического пространства (56). 2.2.3. Плоскости (57). 2.2.4. Угол между плоскостями (58). 2.2.5. Выражение расстояний и углов с помощью абсолютной лута (59). 2.2.6. Принцип двойственности (60).	
§ 3. Геометрия m -плоскостей	61
2.3.1. Операторные координаты m -плоскостей (61). 2.3.2. Полярные m -плоскости и $(n-m-1)$ -плоскость (63). 2.3.3. Перпендикуляр, опущенный из перпендикуляра двух m -плоскостей (66). 2.3.5. Общие с плоскостями и прямые (69).	
§ 4. Сферы и многогранники	70
2.4.1. Сферы (70). 2.4.2. Шары (72). 2.4.3. Симплексы (73). 2.4.4. Правильные соты (75).	
§ 5. Движения	78
2.5.1. Группы вращений (78). 2.5.2. Классификация движений (81). 2.5.3. Парадигматические сдвиги (84). 2.5.4. Движения 2-плоскости и 3-пространства (85). 2.5.5. Односторонность и двусторонность пространства (88).	
§ 6. Квадрики	89
2.6.1. Квадрики (89). 2.6.2. Эквилистанты m -плоскостей (91). 2.6.3. Поверхности Клиффорда (93). 2.6.4. Обобщенные поверхности Клиффорда (96).	
§ 7. Конформная интерпретация	100
2.7.1. Конформное n -пространство (100). 2.7.2. Конформные преобразования эллиптического пространства (101). 2.7.3. Конформная интерпретация эллиптического пространства (101). 2.7.4. Выражение расстояний в конформной интерпретации (105).	

§ 8. Интерпретация 3-пространства	108
2.8.1. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (108). 2.8.2. Плоскостные координаты (110). 2.8.3. Интерпретация Фубини (112).	
Глава третья. Пространство Лобачевского	116
§ 1. Псевдоевклидовы пространства	116
3.1.1. Псевдоевклидовы n -пространства (116). 3.1.2. Расстояния и движения (117). 3.1.3. Прямые, плоскости и сферы (118).	
§ 2. Пространство Лобачевского как полусфера мнимого радиуса и его проективная интерпретация	119
3.2.1. n -пространство Лобачевского (119). 3.2.2. Проективная интерпретация пространства Лобачевского (121). 3.2.3. Аксонометрия пространства Лобачевского (122). 3.2.4. Параллельные и расходящиеся прямые (123). 3.2.5. Расстояния (126). 3.2.6. Тригонометрия и угол параллельности (128). 3.2.7. Площадь треугольника (130). 3.2.8. Координаты (134).	
§ 3. Расширенное пространство Лобачевского	136
3.3.1. Абсолют и идеальные точки (136). 3.3.2. Объем расширенного пространства (139). 3.3.3. Плоскости (140). 3.3.4. Выраженные расстояния и углы с помощью абсолюта (144).	
§ 4. Геометрия m -плоскостей	146
3.4.1. Операторные координаты m -плоскостей (146). 3.4.2. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (147). 3.4.3. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (148).	
§ 5. Сферы и многогранники	150
3.5.1. Сферы и эвклидистанты (150). 3.5.2. Шары (154). 3.5.3. Длина дуги эвклидистанты прямой (155). 3.5.4. Орисферы (156). 3.5.5. Симплексы (158). 3.5.6. Правильные соты (160).	
§ 6. Движения	166
3.6.1. Группа движений (166). 3.6.2. Классификация движений (168). 3.6.3. Движения 2-плоскости и 3-пространства (173).	
§ 7. Квадрики	176
3.7.1. Квадрики (176). 3.7.2. Сферы, эвклидистанты и орисферы (177). 3.7.3. Классификация квадрик (179). 3.7.4. Эвклидистанты m -плоскостей (183). 3.7.5. Эвклидистантная бочка (183).	
§ 8. Конформные интерпретации	184
3.8.1. Конформная интерпретация Клейна (184). 3.8.2. Интерпретация Гессе (186). 3.8.3. Обобщенная интерпретация Гессе (187). 3.8.4. Конформные преобразования пространства Лобачевского (188). 3.8.5. Конформная интерпретация Пуанкаре (190). 3.8.6. Выраженные расстояния в интерпретации Пуанкаре (195). 3.8.7. Конформная интерпретация пространства Лобачевского на его плоскости (198). 3.8.8. Интерпретация, промежуточные между проективными и конформными (199).	
§ 9. Интерпретация 3-пространства	204
3.9.1. Комплексные пространства (204). 3.9.2. Плоскостные координаты (205). 3.9.3. Интерпретация Котельникова (206).	
Глава четвертая. Гиперболические и симплектические пространства	210
§ 1. Гиперболические пространства	210
4.1.1. Гиперболические n -пространства (210). 4.1.2. Координаты гиперболических метрик (214). 4.1.4. Классификация эллиптических и гиперболических метрик (215).	
§ 2. Геометрия m -плоскостей	217
4.2.1. Эллиптические m -плоскости (217). 4.2.2. Гиперболические m -плоскости (219). 4.2.3. Парактичные m -плоскости (221).	

§ 3. Движения	222
4.3.1. Группы движений (222). 4.3.2. Классификация движений (225). 4.3.3. Движения 3-пространства (230).	
§ 4. Квадрики	235
4.4.1. Квадрики (235). 4.4.2. Сферы и орисферы (236). 4.4.3. Эвклидистанты m -плоскостей и m -орисферы (238).	
§ 5. Конформные интерпретации	239
4.5.1. Псевдоконформные n -пространства (239). 4.5.2. Конформная интерпретация Клейна (240). 4.5.3. Конформная интерпретация Пуанкаре (240).	
§ 6. Симплектическое пространство	242
4.6.1. Симплектическое $(2l+1)$ -пространство (242). 4.6.2. Симплектические преобразования (243). 4.6.3. Нулевые m -плоскости (244). 4.6.4. Симплектический инвариант двух прямых (245).	
§ 7. Интерпретация 3-пространств	247
4.7.1. Интерпретация Плюкера (247). 4.7.2. 3-пространство как группа движений 2-плоскости (251). 4.7.3. Интерпретация Фубини (254). 4.7.4. Интерпретация симплектического 3-пространства (258).	
Глава пятая. Проективные метрики	262
§ 1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства	262
5.1.1. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства как предельные случаи эллиптических и гиперболических (262). 5.1.2. Конформные интерпретации (266). 5.1.3. Проективные интерпретации (266). 5.1.4. Получение абсолютов с помощью предельных пересечений (268).	
§ 2. Коевклидовы и консевдоевклидовы пространства	270
5.2.1. Применение принципа двойственности к евклидовым и псевдоевклидовым пространствам (270). 5.2.2. Расстояния между точками (271). 5.2.3. Углы между плоскостями (275). 5.2.4. Тригонометрия (276). 5.2.5. Площадь треугольника (278). 5.2.6. Движения (281).	
§ 3. Квазиэллиптические и квазигиперболические пространства	283
5.3.1. Абсолюты (283). 5.3.2. Расстояния между точками (286). 5.3.3. Углы между плоскостями (288). 5.3.4. Полярная плоскость и полюс (289). 5.3.5. Движения (290). 5.3.6. Коллинеация (293).	
§ 4. Галилеево, псевдогалилеево и флаговое пространства	295
5.4.1. Галилеево и псевдогалилеево пространства (295). 5.4.2. Флаговое пространство (297). 5.4.3. Движения (298). 5.4.4. Углы между плоскостями и коллинеация флагового пространства (301). 5.4.5. Флаговая 2-плоскость (303). 5.4.6. Тригонометрия флаговой 2-плоскости (305). 5.4.7. Площадь треугольника на флаговой 2-плоскости (307).	
§ 5. Общие проективные метрики	308
5.5.1. Абсолюты (308). 5.5.2. Расстояния между точками (312). 5.5.3. Углы между плоскостями (313). 5.5.4. Классификация проективных метрик (315). 5.5.5. Полярная плоскость и полюс (318). 5.5.6. Движения (319). 5.5.7. Коллинеация (322).	
§ 6. Квадрики	324
5.6.1. Центры квадрик (324). 5.6.2. Метрические инварианты квадрик (327). 5.6.3. Классификация квадрик (332).	
§ 7. Геометрия m -плоскостей	335
5.7.1. Параболические и непараболические m -плоскости (335). 5.7.2. Операторные координаты (336). 5.7.3. Полярные m -плоскости и $(n-m)$ -плоскости (339). 5.7.4. Перпендикуляр, опущенный из точки на m -плоскость (339). 5.7.5. Общие перпендикуляры двух m -плоскостей (341). 5.7.6. Параболические общие перпендикуляры двух m -плоскостей (341). 5.7.7. Геометрия m -плоскостей квазиэллиптических и квазигиперболических	

ских пространств (346). 5.7.8. Парактичные m -плоскости и прямые (348). 5.7.9. Геометрия m -плоскостей флагового пространства (348).	
§ 8. Циклы и конформные преобразования	353
5.8.1. Сферы (353). 5.8.2. Циклы (355). 5.8.3. Циклы на флаговой плоскости (358). 5.8.4. Степень точки относительно цикла (359). 5.8.5. Конформные преобразования (360). 5.8.6. Инверсия относительно цикла (363).	
§ 9. Квазисимплектические и полусимплектические пространства	366
5.9.1. Квазисимплектические пространства (366). 5.9.2. Полусимплектические пространства (369).	
§ 10. Интерпретации 3-пространств	371
5.10.1. Квазиэллиптическое 3-пространство как группа движений евклидовой 2-плоскости (371). 5.10.2. Парактические слои 3-пространства (373). 5.10.3. Интерпретация многообразия прямых квазиэллиптического 3-пространства (375). 5.10.4. Отражение от пары поляризованных параболических прямых (377). 5.10.5. Метрические квадраты и нуль-системы (378). 5.10.6. Квазигиперболическое 3-пространство как группа движений псевдоевклидовой 2-плоскости (380). 5.10.7. Интерпретация многообразия прямых квазигиперболического 3-пространства на паре 2-плоскостей (382). 5.10.8. Интерпретация многообразия прямых квазигиперболического 3-пространства на комплексной 2-плоскости (384). 5.10.9. Изотропное 3-пространство как группа движений флаговой 2-плоскости (386). 5.10.10. Интерпретация квазисимплектического 3-пространства (388).	
Глава шестая. Дифференциальная геометрия неевклидовых пространств	390
§ 1. Римановы, псевдоримановы и полуримановы пространства	390
6.1.1. Дифференцируемые пространства (390). 6.1.2. Пространства аффинной связности (392). 6.1.3. Римановы и псевдоримановы пространства (394). 6.1.4. Кривизна римановых и псевдоримановых пространств (397). 6.1.5. Полуримановы и квазиримановы пространства (400). 6.1.6. Кривизна полуримановых пространств (402).	
§ 2. Дифференциальная геометрия линий	404
6.2.1. Линии и касательные (404). 6.2.2. Соприкасающиеся m -плоскости (404). 6.2.3. Соприкасающийся базис и натуральный параметр (406). 6.2.4. Формулы Френе в эллиптическом пространстве (408). 6.2.5. Формулы Френе в гиперболических пространствах (409). 6.2.6. Формулы Френе в полугиперболических и полугиперболических пространствах (411).	
§ 3. Дифференциальная геометрия поверхностей	414
6.3.1. Поверхности и касательные плоскости (414). 6.3.2. Первые квадратичные формы поверхностей (416). 6.3.3. Нормальная кривизна линии на поверхности (417). 6.3.4. Внешние кривизны поверхностей (419). 6.3.5. Римановы и псевдоримановы геометрии на поверхностях эллиптического и гиперболических пространств (421). 6.3.6. Полуриманова геометрия на поверхностях полугиперболических и полугиперболических пространств (422). 6.3.7. Главные кривизны (426). 6.3.8. Геометрия на m -орбисферах (428).	
Глава седьмая. Простые и квазипростые группы Ли и образы симметрии	431
§ 1. Простые и квазипростые группы Ли	431
7.1.1. Группы Ли как дифференцируемые пространства (431). 7.1.2. Алгебры Ли (433). 7.1.3. Разрешимые и полупростые группы Ли (436). 7.1.4. Компактные простые группы Ли (433). 7.1.5. Исходные простые группы Ли (445). 7.1.6. Квазипростые группы Ли (446).	

§ 2. Симметрические пространства	450
7.2.1. Инвариантная аффинная связность в группах Ли (450). 7.2.2. Симметрические пространства аффинной связности (456). 7.2.3. Группы Ли как симметрические пространства аффинной связности (456). 7.2.4. Свойства псевдориманова метрика в группах Ли (463). 7.2.5. Инвариантная риманова и псевдориманова метрика в группах Ли (463). 7.2.6. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства (465). 7.2.7. Ранг риманова и псевдориманова симметрических пространств и инварианты их точек (466). 7.2.8. Римановы и псевдоримановы симметрические пространства вдуевой кривизны (467). 7.2.9. Инвариантная квазириманова метрика в группах Ли и квазиримановы симметрические пространства (469).	
§ 3. Образы симметрии	470
7.3.1. Образы симметрии (470). 7.3.2. Образы симметрии евклидовых и псевдоевклидовых пространств (471). 7.3.3. Образы симметрии эллиптических и гиперболических пространств (472). 7.3.4. Образы симметрии и симплектического пространства (475). 7.3.5. Образы симметрии метрических квазиэллиптического и квазигиперболических пространств (479).	
§ 4. Семейства образов симметрии	482
7.4.1. Пространства образов симметрии (482). 7.4.2. Пространства m -плоскостей (485). 7.4.3. Семейства образов симметрии (487). 7.4.4. Конгруэнции m -плоскостей (490).	
Примечания	493
Библиография	513
Именной указатель	528
Предметный указатель	533

Инверсия (5.248) переводит всякую точку X пространства в такую точку X' , что отрезок XX' делится циклом пополам и перпендикулярен циклу (т. е. касательной плоскости к циклу в точке пересечения). На рис. 5.27 изображена инверсия относительно цикла на плоскости F_2 .

§ 9. Квазисимплектические и полусимплектические пространства

5.9.1. Квазисимплектические пространства. Применяя к симплектическому пространству Sp_{2n+1} (см. 4.6.1) предельный переход, аналогичный переходу от эллиптического и гиперболических пространств S_n и S_n к эллиптическому и квазигиперболическим пространствам, мы получим *квазисимплектическое пространство* Sp_{2n+1}^{2m+1} . Если пространство Sp_{2n+1} можно определить как пространство P_{2n+1} , в котором задана нуль-система (4.56), т. е. корреляция, определяемая косымметрическим оператором $A = -A^T$, которую можно записать также в виде

$$x = uB, \quad (5.249)$$

где $B = A^{-1}$, то пространство Sp_{2n+1}^{2m+1} можно определить как пространство P_{2n+1} , в котором заданы преобразования (4.56) и (5.249), операторы A и B которых кососимметрические, но необратимые ($\text{Det } A = \text{Det } B = 0$), причем преобразование (4.56) переводит все точки пространства в плоскости, проходящие через некоторую плоскость $(2n - 2m - 1)$ -плоскости T_0 , а преобразование (5.249) переводит все плоскости пространства в точки той же плоскости. Будем называть эти преобразования *абсолютными нуль-системами* пространства Sp_{2n+1}^{2m+1} . Если $x^0 = 0$ и $u_1 = 0$, то абсолютные нуль-системы пространства Sp_{2n+1}^{2m+1} можно записать в виде

$$u_0 = x^0 A_0, \quad u_1 = 0 \quad (A_0^T = -A_0) \quad (5.250)$$

и

$$x^0 = 0, \quad x^1 = u_1 A_1^{-1} \quad (A_1^T = -A_1). \quad (5.251)$$

Вместо абсолютной нуль-системы (5.251) можно определить нуль-систему

$$u_1 = x^1 A_1 \quad (5.252)$$

на $(2n - 2m - 1)$ -плоскости T_0 .

Выбирая в пространстве P_{2n+1} такой базис, при котором матрицы операторов A и B , в соответствии с доказанным в I, 8.2.5, принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.253)$$

мы приведем абсолютные нуль-системы (5.250) и (5.251) соответственно к виду

$$u_{2i_0} = -x^{2i_0+1}, \quad u_{2i_0+1} = x^{2i_0}, \quad u_{2i_1} = u_{2i_1+1} = 0 \quad (5.254)$$

и

$$x^{2i_0} = x^{2i_0+1} = 0, \quad x^{2i_1} = u_{2i_1+1}, \quad x^{2i_1+1} = -u_{2i_1}. \quad (5.255)$$

При $m=0$ абсолютная нуль-система (5.250) задается одной $(2m-1)$ -плоскостью T_0 и состоит в том, что каждой точке соответствует плоскость, являющаяся суммой этой точки и $(2m-1)$ -плоскости T_0 . При $m=n-1$ абсолютная нуль-система (5.251) задается одной прямой T_0 и состоит в том, что каждой плоскости соответствует точка ее пересечения с прямой T_0 .

Абсолютные нуль-системы (5.250) и (5.251) определяют билинейные формы

$$[xy]_0 = x^0 A_0 y^0, \quad [xy]_1 = x^1 A_1 y^1, \quad (5.256)$$

которые в том случае, когда нуль-системы приведены к виду (5.254) и (5.255), принимают соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} [xy]_0 &= \sum_0^m (x^{2i_0} y^{2i_0+1} - x^{2i_0+1} y^{2i_0}), \\ [xy]_1 &= \sum_1^m (x^{2i_1} y^{2i_1+1} - x^{2i_1+1} y^{2i_1}). \end{aligned} \right\} (5.257)$$

Будем называть *квазисимплектическими преобразованиями* пространство SP_{2n+1}^{2m+1} коллинеации, переводящие в себя $(2n-2m-1)$ -плоскость T_0 и перестановочные с абсолютными нуль-системами (5.250) и (5.251). Эти преобразования имеют вид (5.87), где U_0 и U_1 — симплектические операторы, удовлетворяющие условиям

$$U_0^T A_0 U_0 = A_0, \quad U_1^T A_1 U_1 = A_1. \quad (5.258)$$

При этих преобразованиях остаются инвариантными аналогичный симплектическому инварианту (4.66) прямой a , проходящей через точки X и Y , и прямой b , проходящей через точки Z и W , инвариант таких же прямых, равный единственному собственному числу оператора двойного отношения двух прямых a и b и двух $(2n-1)$ -плоскостей, в которые эти прямые переходят при абсолютной нуль-системе (5.250). Так же, как в 4.6.4, показывается, что этот инвариант имеет вид

$$\omega = \frac{[xz]_0 [yw]_0 - [xw]_0 [yz]_0}{[xy]_0 [zw]_0}. \quad (5.259)$$

В случае прямых, для которых $\omega=1$, имеется еще один квазисимплектический инвариант φ . Если век-

торы x, y, z, w , определяющие прямые a и b , нормированы условиями

$$[xy]_0 = [zw]_0 = \pm 1, \quad (5.260)$$

инвариант φ равен

$$\varphi = [x \cdot z, y \cdot w]_1 = [xy]_1 - [xw]_1 - [zy]_1 + [zw]_1. \quad (5.261)$$

Так же, как в случае движений пространств S_n^m и ${}^k S_n^m$, доказываемся, что квазисимплектические преобразования пространства SP_{2n+1}^{2m+1} зависят от того же числа $(n+1)(2n+3)$ параметров, что и симплектические преобразования пространства SP_{2n+1} , и образуют группу, являющуюся группой Ли.

5.9.2. Полуимплектические пространства. Применяя к пространству SP_{2n+1}^{2m+1} предельные переходы, аналогичные переходам от пространств S_n^m и ${}^k S_n^m$ к полуэллиптическим и полугиперболическим пространствам $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ и ${}^k S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, мы получим *полуимплектическое пространство* $SP_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$. Это пространство можно определить как пространство P_{2n+1} , в котором задана $(2n-2m_0-1)$ -плоскость T_0 , в ней $(2n-2m_1-1)$ -плоскость T_1 , в ней $(2n-2m_2-1)$ -плоскость T_2 и т. д. до $(2n-2m_{r-1}-1)$ -плоскости T_{r-1} , причём в пространстве P_{2n+1} задана абсолютная нуль-система, переводящая все точки пространства в плоскости, проходящие через $(2n-2m_0-1)$ -плоскость T_0 , в $(2n-2m_0-1)$ -плоскости все её точки в $(2n-2m_0-2)$ -плоскости, лежащие в ней и проходящие через $(2n-2m_1-1)$ -плоскость T_1 и т. д. до абсолютной нуль-системы в точке в $(2n-2m_{r-1}-2)$ -плоскости T_{r-1} , переводящей все её точки в $(2n-2m_0-1)$ -плоскости T_0 . Если $(2n-2m_0-1)$ -плоскости T_a определяются уравнениями $x^0 = x^1 = \dots = x^a = 0$, то абсолютные нуль-системы во всем пространстве $SP_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ в $(2n-2m_0-1)$ -плоскости T_a и в $(2n-2m_{r-1}-1)$ -плос-

скости T_{r-1} можно записать в виде

$$u_0 = x^0 A_0, \quad u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0 \quad (A_0^T = -A_0), \quad (5.262)$$

$$u_a = x^a A_a, \quad u_{a+1} = \dots = u_r = 0 \quad (A_a^T = -A_a) \quad (5.263)$$

и
$$u_r = x^r A_r \quad (A_r^T = -A_r). \quad (5.264)$$

Выбирая в пространстве P_{2n+1} такой базис, при котором матрицы операторов A_a принимают вид

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.265)$$

мы приведем абсолютные нуль-системы (5.262), (5.263) и (5.264) соответственно к виду

$$u_{2i_0} = -x^{2i_0+1}, \quad u_{2i_0+1} = x^{2i_0}, \quad (5.266)$$

$$u_{2i_1} = u_{2i_1+1} = \dots = u_{2i_r} = u_{2i_r+1} = 0, \quad (5.267)$$

$$u_{2i_a} = -x^{2i_a+1}, \quad u_{2i_a+1} = x^{2i_a},$$

$$u_{2i_{a+1}} = u_{2i_{a+1}+1} = \dots = u_{2i_r} = u_{2i_r+1} = 0$$

и

$$u_{2i_r} = -x^{2i_r+1}, \quad u_{2i_r+1} = x^{2i_r}. \quad (5.268)$$

Абсолютные нуль-системы (5.262), (5.263) и (5.264) определяют билинейные формы

$$[xy]_0 = x^0 A_0 y^0, \quad [xy]_a = x^a A_a y^a, \quad [xy]_r = x^r A_r y^r, \quad (5.269)$$

которые в том случае, когда нуль-системы приведены к виду (5.266), (5.267) и (5.268), принимают соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} [xy]_0 &= \sum_0^0 (x^{2i_0} y^{2i_0+1} - x^{2i_0+1} y^{2i_0}), \\ [xy]_a &= \sum_a^a (x^{2i_a} y^{2i_a+1} - x^{2i_a+1} y^{2i_a}), \\ [xy]_r &= \sum_r^r (x^{2i_r} y^{2i_r+1} - x^{2i_r+1} y^{2i_r}). \end{aligned} \right\} \quad (5.270)$$

Будем называть *полусимплектическими преобразованиями* пространства $SP_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ коллинеации, переводящие в себя $(2n - 2m_0 - 1)$ -плоскости T_a , перестановочные с абсолютными нуль-системами (5.262), (5.263) и (5.264) и имеющие вид (5.139), где U_a — симплектические операторы, удовлетворяющие условиям

$$U_a^T A_a U_a = A_a. \quad (5.271)$$

При этих преобразованиях остается инвариантным единственное собственное число оператора двойного отношения двух прямых и двух $(2n - 1)$ -плоскостей, в которые эти прямые переходят при абсолютной нуль-системе (5.262). Этот инвариант имеет вид (5.260).

В случае прямых, для которых $\omega = 1$, имеется второй полусимплектический инвариант ω , имеющий вид (5.261) при условии (5.260). В общем случае составим выражения

$$\omega^{(\alpha-1)} = [x - z, y - w]_a = [xy]_a - [xw]_a - [zy]_a + [zw]_a, \quad (5.272)$$

и если $\omega = \omega' = \dots = \omega^{(\alpha-2)} = 0$, нормируем векторы x, y, z и w , определяющие две прямые, условиями

$$[xy]_{a-1} = [zw]_{a-1} = \pm 1, \quad (5.273)$$

и инвариантом двух прямых является выражение $\omega^{(\alpha-1)}$.

Так же, как в случае движений пространств $S_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}$ и $S_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}$, доказывается, что полусимплектические преобразования пространства $SP_{2n+1}^{2m_0+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ зависят от того же числа $(n+1)(2n+3)$ параметров, что и группа симплектических преобразований пространства SP_{2n+1} , и образуют группу, являющуюся группой Ли.

§ 10. Интерпретации 3-пространств

5.10.1. Квазиэллиптическое 3-пространство как группа движений евклидовой 2-плоскости. Всякое движение первого рода плоскости R_2 является или поворотом или переносом. Введем в связную группу движений (группу

Борис Абрамович Розенфельд

Неевклидовы пространства

М., 1969 г., 548 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лалко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано к печати 31/VI 1969 г. Бумага 84×108^{1/8}. Физ. печ. л. 17,125. Условн. печ. л. 28,77. Уч.-изд. л. 29,2. Тираж 7000 экз. Т-02633. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 1334.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главопизграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.