Ü/121

Safaeva, K.:

LÖSUNG EINES DREIDIMENSIONALEN TRANSPORTPROBLEMS MIT DER POTENTIALMETHODE

Übersetzung aus:

Voprosy vyčislitel'noj matematiki i techniki. Kiev; 1964, S. 129 - 143.

Russ.: РЕШЕНИЕ ТРЕХИНДЕКСНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Rešenie trechindeksnoj transportnoj zadači metodom potentialov.

Wir stellen uns vor, daß in jedem der Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ z verschiedene Produkte erzeugt werden, die in den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_m$ benötigt werden. Die Produktionsmengen des k-ten Produkts in den Punkten A_i sind vorgegeben und gleich a_{ik}, die Bedarfsmengen desselben Produkts in den Bedarfspunkten B_j sind gleich b_{jk}. Wir nehmen weiter an, daß vom Punkt A_i nach B_j nicht mehr als d_{ij} Produkteinheiten (unabhängig von der Art des Produkts) transportiert werden können. Die Transportkosten der Einheit des k-ten Produkts aus A_i nach B_j betragen C_{ijk} Geldeinheiten.

Gesucht ist dann ein Transportplan derart, daß in den Erzeugungspunkten keine Produkte übrigbleiben, die Bedarfspunkte völlig versorgt sind, daß von A_i nach B_j insgesamt nicht mehr transportiert wird als zulässig und daß die gesamten Transportkosten minimal bleiben.

X_{ijk} soll die Menge des k-ten Produkts bezeichnen, die aus A_i nach B_j transportiert wird. Dann reduziert sich die formulierte Aufgabe auf die Minimierung der linearen Form

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{z} C_{ijk} X_{ijk} \qquad (1)$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ijk} = a_{ik} , \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ijk} = b_{jk} , \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{z} X_{ijk} \leqslant d_{ij} , \qquad (4)$$

$$X_{ijk} \geqslant d_{ij} , \qquad (5)$$

$$(i=1, 2, \ldots n; \ j=1, 2, \ldots m; \ k=1, 2, \ldots z).$$

Es sei hinzugefügt, daß man bei Einführung eines zusätzlichen fiktiven Produkts die Ungleichung (4) durch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{z} X_{ijk} = d_{ij} \qquad (4')$$

ersetzen kann.

Notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (1, 2, 3, 4', 5) sind die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} b_{jk} \\ \sum_{k=1}^{z} a_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \\ \sum_{k=1}^{z} b_{jk} &= \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Bekanntlich ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend, damit eine Lösung einer zu untersuchenden Aufgabe, welche keine umgekehrten Transporte enthält, vorkommt. Die Lösung eines dreidimensionalen Problems, welches keine umgekehrten Transporte enthält, nennen wir zulässige* Basislösung.

Es ist ebenfalls bekannt, daß für ein zweidimensionales Transportproblem immer eine zulässige Basislösung existiert, für ein dreidimensionales Problem braucht sie jedoch nicht vorhanden zu sein. Eine Lösung, die nmz-(n-1) (m-1) (z-1) nicht verschwindende Variablen enthält und alle Bedingungen erfüllt, außer der Nichtnegativitätsbedingung, ist hingegen immer vorhanden. Eine solche Lösung nennen wir mögliche*. Die mögliche Lösung des zu untersuchenden Problems ist jedoch keine zulässige Basislösung. Auf den Algorithmus, der die mögliche Lösung in eine zulässige Basislösung transformiert, und die zulässige Basislösung in eine optimale, kommen wir unten zurück.

Das mehrdimensionale Problem, insbesondere das dreidimensionale (1, 2, 3, 4', 5), wurde von B.S. Verchovskij [1] auf der Grundlage des Verfahrens der Planverbesserung gelöst. Um die zulässige Basislösung zu finden, wurde von ihm die sogenannte Methode der frontalen Matrix angewandt.

In der ausländischen Literatur wurde auf einen Algorithmus des dreidimensionalen Problems hingewiesen, der auf der Methode der Planverbesserung beruht. Um die mögliche Lösung zu finden, wurde die "Nord-West-Eckenregel" angewandt [2].

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Algorithmus detailliert dargelegt und ein neues Verfahren zur Ermittlung der möglichen Lösung aufgezeigt, das es im Unterschied zu den bekannten Verfahren ermöglicht, die Rechnung zu vereinfachen und die Gesamtzahl der Iterationen, welche zur Lösung von dreidimensionalen Transportproblemen notwendig sind, zu verringern. Analog zur Potentialmethode bei der Lösung eines gewöhnlichen Transportproblems wird das dreidimensionale Problem auf folgende Weise gelöst:

*Entgegen der üblichen Terminologie vertauscht der Verfasser die Ausdrücke "möglich" und "zulässig" in seinem Originalbeitrag. Dies wurde in der Übersetzung berücksichtigt. -(Anmerkung des Übersetzers.)

a) Wir finden die zulässige Basislösung, die alle Bedingungen des Problems erfüllt, doch die Zielfunktion (1) nicht minimiert. Wenn die Aufgabe nicht entartet ist, dann enthält die Lösung nmz-(n-1) (m-1) (z-1) nicht verschwindende Werte X_{ijk};

b) wir errechnen die Potentiale U_{jk}, V_{ik}, W_{ij} für alle nicht verschwindenden Variblen X_{ijk} nach Formel

$$U_{jk} + V_{ik} + W_{ij} = C_{ijk} .$$

Insgesamt existieren nm+nz+mz Potentiale und nm+nz+mz-m-n-z+1 zugehörige Bedingungen, sodaß genau n+m+z-1 Potentiale gleich Null gesetzt werden können;

c) nachdem die Potentiale für alle $X_{ijk} \neq 0$ gefunden worden sind, errechnen wir die Werte

$$q_{rst} = U_{st} + V_{tr} + W_{rs} - C_{rst}$$

für alle $X_{rst}=0$;

d) wenn q_{rst} für alle $X_{rst}=0$ nicht positiv ist, dann ist die mögliche Lösung des Problems optimal, andernfalls kommt in die Zelle, die dem positivsten q_{rst} entspricht, θ hinein, danach wird θ (oder ein Vielfaches davon) von den nicht verschwindenden X_{ijk} so subtrahiert oder hinzuaddiert, daß die Bedingungen (2, 3, 4') nicht verletzt werden;

e) wir errechnen θ nach Formel

$$\theta = \min \frac{X_{ijk}}{n_{ijk}},$$

wobei n_{ijk} - ganzzahliges Vielfaches von θ ist. In einem gewöhnlichen Transportproblem ist n_{ijk} immer gleich $\bar{1}$. Die Schritte b) - e) werden solange wiederholt, bis alle $q_{rst} \leq 0$.

ERMITTLUNG DER MÖGLICHEN LÖSUNG

Zur Berechnung der möglichen Lösung, d.h. für eine der nmz-(n-1) (m-1) (z-1) nicht verschwindenden Positionen, ordnen wir das Problem (1-3, 4', 5) so an, wie es Tab. 1 zeigt.

T a b e l l e   1

x_{111} x_{112} … d_{11} x_{11z}	x_{121} x_{122} … d_{12} x_{12z}	…	x_{1m1} x_{1m2} … d_{1m} x_{1mz}	a_{11} a_{12} … a_{1z}
x_{211} x_{212} … d_{21} x_{21z}	x_{221} x_{222} … d_{22} x_{22z}	…	x_{2m1} x_{2m2} … d_{2m} x_{2mz}	a_{21} a_{22} … a_{2z}
…	…	…	…	…
x_{n11} x_{n12} … d_{n1} x_{n1z}	x_{n21} x_{n22} … d_{n2} x_{n2z}	…	x_{nm1} x_{nm2} … d_{nm} x_{nmz}	a_{n1} a_{n2} … a_{nz}
b_{11} b_{12} … b_{1z}	b_{21} b_{22} … b_{2z}	…	b_{m1} b_{m2} … b_{mz}	

Wir wollen zwei Verfahren zur Ermittlung der möglichen Lösung aufzeigen.

1. Verfahren. Die mögliche Lösung ermittelt man ähnlich der "Nord-West-Eckenregel". Zuerst errechnen wir

$$x_{111} = \min(a_{11},\ b_{11},\ d_{11}).$$

Wenn a_{11} (oder b_{11}) minimal ist, dann kann man weiter für die Variablen $x_{121}, \ldots, x_{1m1}$ (oder $x_{211}, x_{311}, \ldots x_{n11}$) annehmen, daß sie gleich Null sind. Danach bestimmen wir $x_{112} = \min(a_{12}, b_{12}, d_{11} - x_{111})$ und sofort solange, bis $d_{11} - \sum_{k=1}^{q} x_{11k} = 0 (1 \leqslant q \leqslant z)$. Wir untersuchen die folgenden in Frage kommende Zelle der ersten Reihe. Wenn alle Zellen der ersten Reihe abgearbeitet sind, dann gehen wir zur ersten Zelle der zweiten Reihe* über u.s.w. Dieser Vorgang wird solange fortgesetzt, bis alle Zellen behandelt worden sind. Zum Schluß erhalten wir nmz-(n-1) (m-1) (z-1) nicht verschwindende Elemente. Wenn alle Elemente positiv sind, dann ist die Lösung eine zulässige Basislösung, wenn es unter ihnen ein negatives Element gibt, dann wiederholen wir die Schritte d) und e), um dies zu beseitigen.

In Tab. 2 wurde die mögliche Lösung nach dem 1. Verfahren gefunden. In diesem Beispiel ist m=3, n=3, z=4.

T a b e l l e 2

I3 - - I3 -	7 - - 7 -	I2 4 7 33 I0	32 4 7 I0
I6 I5 - 3I -	2 I 4 I2 5	2 3 8 I4 I	20 I9 I2 6
- I4 I7 49 I8	- - - 8 8	6 5 9 3I II	6 I9 26 37
29 29 I7 I8	9 I 4 I3	20 I2 24 22	

Diese mögliche Lösung enthält 3·3·4 - 2·2·3 = 24 positive nicht verschwindende Elemente, folglich ist diese Lösung zulässige Basislösung.

2. Verfahren. Wie es der Versuch zeigte, liefert die "Nord-West-Eckenregel" bei der Lösung eines dreidimensionalen Transportproblems wie auch bei der Lösung eines gewöhnlichen Transportproblems eine mögliche Lösung, die von der optimalen weit

---

*Unter einer Reihe wird hier die Gesamtheit aller Positionen ijk für ein festes j verstanden; sie besteht somit in den Tabellen aus jeweils z Spalten. -(Anmerkung des Übersetzers.)

entfernt ist. Das zu untersuchende Verfahren zur Ermittlung der möglichen Lösung eines dreidimensionalen Transportproblems verkleinert die Gesamtzahl der Iterationen. Dieses Verfahren ist dem Verfahren "Spaltenminimum" ähnlich (Tab. 3).

T a b e l l e 3

c_{111} c_{112} … d_{11} c_{11z}	c_{121} c_{122} … d_{12} c_{12z}	…	c_{1m1} c_{1m2} … d_{1m} c_{1mz}	a_{11} a_{12} … a_{1z}
c_{211} c_{212} … d_{21} c_{21z}	c_{221} c_{222} … d_{22} c_{22z}	…	c_{2m1} c_{2m2} … d_{2m} c_{2mz}	a_{21} a_{22} … a_{2z}
…	…	…	…	…
c_{n11} c_{n12} … d_{n1} c_{n1z}	c_{n21} c_{n22} … d_{n2} c_{n2z}	…	c_{nm1} c_{nm2} … d_{nm} c_{nmz}	a_{n1} a_{n2} … a_{nz}
b_{11} b_{12} … b_{1z}	b_{21} b_{22} … b_{2z}	…	b_{m1} b_{m2} … b_{mz}	

Unter den Elementen der ersten Spalte der ersten Reihe finden wir ein kleinstes. Es sei gleich c_{s11}. Dann bestimmen wir

$$x_{s11} = \min(a_{s1}, b_{11}, d_{s1}).$$

Ist a_{s1} (oder d_{s1}) das Minimum, dann setzen wir die restlichen Elemente der s-ten Zeile (oder die Elemente der Zelle sl) gleich Null und suchen das nächste kleinste Element in der betrachteteten Spalte u.s.w. solange, bis

$$b_{11} - \sum_{s=1}^{q} x_{s11} = 0, \qquad 1 \leqslant q \leqslant n.$$

Dann gehen wir zur zweiten Spalte der ersten Reihe über u.s.w., bis alle Spalten aller Reihen untersucht sind.

In Tab. 4 ist eine mögliche Lösung des oben untersuchten Beispiels dargestellt, welche nach dem zweiten Verfahren gefunden wurde. Um von der möglichen Lösung zur optimalen Lösung zu gelangen, muß man die Schritte b) - e) insgesamt zweimal wiederholen, während man diese Schritte dafür mit der nach dem ersten Verfahren gefundenen möglichen Lösung siebenmal wiederholen muß.

T a b e l l e 4

I3 - - I3 -	- I - 7 6	I9 3 7 33 4	32 4 7 I0
I0 I9 - 3I 2	9 - 3 I2 -	I - 9 I4 4	20 I9 I2 6
6 I0 I7 49 I6	- - I 8 7	- 9 8 3I I4	6 I9 26 37
29 29 I7 I8	9 I 4 I3	20 I2 24 22	

In Tab. 5 ist die Kostenmatrix angegeben.

ERMITTLUNG DER POTENTIALE. Zur Ermittlung der Konstanten U_{jk}, V_{ik}, W_{ij} oder der sogenannten Potentiale schreiben wir die mögliche Lösung in Form der Tab. 6, 7, 8 an.

Zuerst berechnen wir die Anzahl der nicht verschwindenden Variablen für k=1. Wenn sie n+m-1 beträgt, dann nehmen wir für alle Zellen, die den nicht verschwindenden Variablen entsprechen, $W_{ij}=0$, $U_{11}=0$ (oder $V_{11}=0$) an. Danach bestimmen wir alle U_{j1}, V_{i1} für alle $X_{ij1}\neq 0$.

Wenn die Anzahl der nicht verschwindenden Variablen ungleich n+m-1 ist, dann sind zwei Fälle möglich.

Tabelle 5

2 5 4 I3 6	5 I 5 7 3	2 I 2 33 5	32 4 7 I0
6 2 6 3I 3	I 3 2 I2 I	3 4 6 I4 4	20 I9 I2 6
3 4 6 49 6	5 5 4 8 4	2 I 3 3I I	6 I9 26 37
29 29 I7 I8	9 I 4 I3	20 I2 24 22	

1. Die Anzahl der nicht verschwindenden Variablen ist kleiner als n+m-1. In diesem Fall nehmen wir für alle W_{ij}, die $X_{ij1} \neq 0$ entsprechen, Null an sowie $U_{11}=0$ (oder $V_{11}=0$). Doch können wir dann nicht den Wert sämtlicher U_{j1}, V_{i1} und W_{ij} für alle $X_{ij1} \neq 0$ bestimmen.

Gehen wir zu Tab. 7 über. Angenommen, es sei $U_{12}=0$ (oder $V_{12}=0$). Wir verwenden die aus Tab. 6 bekannten W_{ij} und finden den Wert aller U_{j2}, V_{i2} und W_{ij} für $X_{ij2} \neq 0$. Wenn sie auf diese Weise nicht bestimmt werden können, dann gehen wir zur Tabelle für k=3 u.s.w. über; wenn wir alle Tabellen überprüft haben, kehren wir zu Tab. 5 zurück.

2. Die Anzahl der nicht verschwindenden Variablen ist größer als n+m-1. Wir nehmen für n+m-1 dieser Zellen, die $X_{ij1} \neq 0$ entsprechen, W_{ij}, U_{11} (oder V_{11}) Null an. Wenn wir die Werte aller W_{ij}, U_{j2}, V_{i2} für $X_{ij2} \neq 0$ bestimmt haben, gehen wir

zu Tab. 7 über. Wenn man die Werte aller W_{ij}, U_{j2}, V_{i2} für $X_{ij2} \neq 0$ nicht bestimmen kann, dann gehen wir zu Tab. 6 u.s.w. über. Wenn wir auf diese Weise von einer Tabelle zur anderen übergehen, finden wir alle Werte U_{jk}, V_{ik}, W_{ij} für $X_{ijk} \neq 0$ wie auch für $X_{ijk}=0$. Insgesamt sind n+m+z-1 Potentiale gleich Null.

Tabelle 6

$i \backslash j$	U_{11}	U_{21}	...	U_{m1}
V_{11}	X_{111} W_{11} C_{111}	X_{121} W_{12} C_{121}	...	X_{1m1} W_{1m} C_{1m1}
V_{12}	X_{211} W_{21} C_{211}	X_{221} W_{22} C_{221}	...	X_{2m1} W_{2m} C_{2m1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
V_{1n}	X_{n11} W_{n1} C_{n11}	X_{n21} W_{n2} C_{n21}	...	X_{nm1} W_{nm} C_{nm1}

$k=1$

Tabelle 7

$i \backslash j$	U_{12}	U_{22}	...	U_{m2}
V_{21}	X_{112} W_{11} C_{112}	X_{122} W_{12} C_{122}	...	X_{1m2} W_{1m} C_{1m2}
V_{22}	X_{212} W_{21} C_{212}	X_{222} W_{22} C_{222}	...	X_{2m2} W_{2m} C_{2m2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
V_{2n}	X_{n12} W_{n1} C_{n12}	X_{n22} W_{n2} C_{n22}	...	X_{nm2} W_{nm} C_{nm2}

$k=2$

T a b e l l e   8

$i \backslash j$	U_{1z}	U_{2z}	. . .	U_{mz}
V_{z1}	X_{11z} W_{11} C_{11z}	X_{12z} W_{12} C_{12z}	. . .	X_{1mz} W_{1m} C_{1mz}
V_{z2}	X_{21z} W_{21} C_{21z}	X_{22z} W_{22} C_{22z}	. . .	X_{2mz} W_{2m} C_{2mz}
⋮	⋮	⋮	. . .	⋮
V_{zn}	X_{n1z} W_{n1} C_{n1z}	X_{n2z} W_{n2} C_{n2z}	. . .	X_{nmz} W_{nm} C_{nmz}

$k=2$

Wir wollen das Ermitteln der Potentiale an dem oben angeführten Beispiel demonstrieren. Die in Tab. 4 angeführte mögliche Lösung schreiben wir in Form der Tab. 9-12.

T a b e l l e   9

$\rightarrow j$

$V_{1i} \backslash U_{1i}$	2	-3	2
0	13 0 2	$\boxed{-8}$ 0 5	19 0 2
4	10 0 6	9 0 1	1 -3 3
1	6 0 3	$\boxed{-11}$ -4 5	$\boxed{-8}$ -9 2

$k=1$

Tabelle 10

V_{i2} \ U_{j2}	-5	1	1
0	$\boxed{-10}$ 0 5	$1-\theta$ 0 1	$3+\theta$ 0 1
7	$19-\theta$ 0 2	$\boxed{5}$ θ 0 3	$\boxed{1}$ -3 4
9	$10+\theta$ 0 4	$\boxed{1}$ -4 5	$9-\theta$ -9 1

$K=2$

Tabelle 11

V_{i3} \ U_{j3}	-4	-5	2
0	$\boxed{-8}$ 0 4	$\boxed{-10}$ 0 5	7 0 2
7	$\boxed{-9}$ 0 6	$3-\theta$ 0 2	$9+\theta$ -3 6
10	17 0 6	$1+\theta$ -4 4	$8+\theta$ -9 3

$K=3$

Tabelle 12

V_{i4} \ U_{j4}	1	3	5
0	$\boxed{-5}$ 0 6	$5+\theta$ 0 3	$4-\theta$ 0 5
2	$2+\theta$ 0 3	$\boxed{4}$ 0 1	$4-\theta$ -3 4
5	$16-\theta$ 0 6	$7-\theta$ -4 4	$14+20$ -9 1

$K=4$

In den rechten oberen Ecken der einzelnen Zellen sind die Werte q_{rst} angegeben. Wie man sehen kann, ist der größte von ihnen $q_{222}=5$. In diese Zelle geben wir θ. In diesem Fall ist $\theta=1$.

Und auf diese Weise haben wir die zulässige Basislösung erzielt, die, verglichen mit den vorhergehenden, besser ist (Tab. 13-16).

Tabelle 13

$j \longrightarrow$, $i \downarrow$

v_{i1} \ u_{j1}	2	-3	2
0	13; 0 / 2	$\boxed{-4}$; 4 / 5	19; 0 / 2
4	10; 0 / 6	9; 0 / 1	1; -3 / 3
1	6; 0 / 3	$\boxed{-7}$; 0 / 5	$\boxed{-5}$; -9 / 2

$k=1$

Tabelle 14

v_{i2} \ u_{j2}	-5	-4	1
0	$\boxed{-10}$; 0 / 5	$\boxed{-1}$; 4 / 1	1; 0 / 1
7	$18-\theta$; 0 / 2	1; 0 / 3	$\boxed{1}$; θ; -3 / 4
9	$11+\theta$; 0 / 4	$\boxed{0}$; 0 / 5	$8-\theta$; -9 / 1

$k=2$

Tabelle 15

v_{i3} \ u_{j3}	-4	-5	2
0	$\boxed{-8}$; 0 / 4	$\boxed{-6}$; 4 / 5	7; 0 / 2
7	$\boxed{-3}$; 0 / 6	2; 0 / 2	10; -3 / 6
10	17; 0 / 6	2; 0 / 4	7; -9 / 3

$k=3$

Tabelle 16

v_{4i} \ u_{j4}	1	-1	5
0	$\boxed{-5}$; 0 / 6	7; 4 / 3	3; 0 / 5
2	$3+\theta$; 0 / 3	$\boxed{0}$; 0 / 1	$3-\theta$; -3 / 4
5	$15-\theta$; 0 / 6	6; 0 / 4	$16+\theta$; -9 / 1

$k=4$

Wir geben θ in die Zellen (2, 3, 2). In diesem Fall ist $\theta=3$. Die erzielte Lösung ist optimal, da alle $q_{rst} \leqslant 0$.

L i t e r a t u r

I. Верховский Б.С. Симметричные многоиндексные задачи. В сб. "Проблемы оптимального планирования,проектирования и управления производством". Труды теоретической конференции, состоявшейся на экономическом факультете МГУ в марте 1962 г., М., Изд-во МГУ, 1963.

Verchovskij, B.S.: Simmetričnye mnogoindeksnye zadači. In: "Problemy optimal'nogo planirovanija, proektirovanija i urpavlenija proizvodstvom". Trudy teoretičeskoj konferencii, sostojavšejsja na êkonomičeskom fakul'tete Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta v marte 1962 g. Moskva: Verlag "MGU", 1963, S. 482 - 498.

⟨Symmetrische mehrdimensionale Probleme.⟩

2. Haley, K.B.: The solid transportation problem. - Operations research. Baltimore, 10 (1962), Nr 4, S. 448 bis 463.

Stuttgart, den 27. April 1976

Übersetzung von

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer