Pelčin'skij, A.:

ÜBER DIE UNIVERSALITÄT EINIGER BANACH-RÄUME

Vestnik leningradskogo universiteta. Serija matematiki, mechaniki i astronomii. Leningrad, 1962, Nr 13, S. 22-29.
[Russ.: Ob universal'nosti nekotorych banachovych prostranstv.]

(22) Der Raum X vom Typ B heißt isomorph (isometrisch) universell für separable Banach-Räume, wenn ein beliebiger separabler Raum isomorph * (isometrisch) auf einen bestimmten Unterraum des Raumes X abgebildet werden kann.

Nach dem Banach-Mazur-Theorem ([1], S.157) ist der Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall I isometrisch, und folglich auch isomorph universell für separable Räume. Wir wollen zeigen, daß die Eigenschaft der isomorphen Universalität auch andere Funktionen-Räume besitzen, z.B. der Raum H_c^∞ aller Funktionen x, die innerhalb des Kreises $|z|<1$ regulär und innerhalb des Kreises $|z|\leqslant 1$ mit der Norm $\|x\|=\sup\limits_{|z|\leqslant 1}|x(z)|$ stetig sind.

Außer dem Raum H_c^∞ werden wir auch folgende Räume untersuchen:

$C(Q)$ - aller komplexwertigen Funktionen x, die auf dem metrischen kompakten Raum Q mit der Norm $\|x\|=\sup\limits_{q\in Q}|x(q)|$ stetig sind;

$C^{(n)}(D)$ - aller komplexwertigen Funktionen x, die in einer beschränkten offenen Menge D des k-dimensionalen euklidischen Raumes E_k definiert sind und in D gleichmäßig stetige partielle Ableitungen der Reihen $1, 2, \ldots, m,$ haben, mit den Ordnungen

$$\|x\|=\sum_{\alpha=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k\leqslant n}\ \sup_{t\in D}\left|\frac{\partial^\alpha x}{\partial t_1^{\mu_1}\partial t_2^{\mu_2}\ldots\partial t_k^{\mu_k}}(t)\right|,$$

$$t=(t_1, t_2, \ldots, t_k)\in E_k.$$

<u>1. Satz.</u> Es sei X ein Banach-Raum. Folgende Bedingungen sind gleichwertig:

a) X ist isomorph (isometrisch) universell für separable Räume;

b) X enthält einen Unterraum, der isomorph (isometrisch) ist zum Raum $C(C)$ aller stetigen Funktionen

---

* Man spricht davon, daß der Raum E isomorph (isometrisch) abbildbar ist auf den Raum F, wenn ein linearer Operator T von E auf F vorhanden ist, der eine homeomorphe (isometrische) Abbildung von E auf F liefert.

auf dem Cantorschen Diskontinuum C;

c) X enthält einen Unterraum, der isomorph (isometrisch) ist zum Raum $C(I)$;

d) X enthält ein System aus den Elementen $\{x_{nk}\}$, $n=0, 1, \ldots;\ k=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1$, so daß:

(23) 1) $x_{nk}=x_{n+1,2k}+x_{n+1,2k+1}$;

2) positive Konstanten C_1 und C_2 ($C_1=C_2=1$ im Falle einer Isometrie) derart vorhanden sind, daß für die beliebigen Skalare $t_0, t_1, \ldots, t_{2^n-1}$ und $n=0, 1, \ldots$ die Ungleichung

$$C_1\left\|\sum_{k=0}^{2^n-1} t_k x_{nk}\right\| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant 2^n-1} |t_k| \leqslant C_2\left\|\sum_{k=0}^{2^n-1} t_k x_{nk}\right\|$$

erfüllt ist.

B e w e i s. Es ist offensichtlich, daß b) aus a) folgt, c) aus b), weil der Raum $C(C)$ einen Unterraum enthält, der isometrisch ist zum Raum $C(I)$. Ein solcher Raum ist zum Beispiel die Menge aller Funktionen aus $C(C)$, die eine Fortsetzung bis zu den Funktionen gestatten, die im Intervall $[0,1]$ stetig und in allen Intervallen der Menge $[0,1]\setminus C$ konstant sind. Nach dem Banach-Mazur-Theorem folgt a) aus c).

Um zu zeigen, daß d) aus b) folgt, untersuchen wir in $C(C)$ die Folge der Funktionen $\{\chi_{nk}\}$, die folgendermaßen bestimmt sind:

$$\chi_{00}\equiv 1,$$

χ_{nk} - charakteristische Funktion der Menge $\Delta_{nk}\cap C$,

$$\Delta_{nk}=\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2\varepsilon_i(k)}{3^{i+1}},\quad \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2\varepsilon_i(k)}{3^{i+1}}+\frac{1}{3^n}\right],$$

wobei $\varepsilon_i=0$ oder 1 durch die Gleichung

$$k=\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i(k)\,2^i \quad (k=0, 1, \ldots, 2^n-1;\quad n=1, 2, \ldots)$$

bestimmt wird.

Der Operator T^{-1} soll $C(C)$ in X isomorph abbilden. Es ist leicht zu beweisen, daß die Elementenfolge $x_{nk}=T^{-1}(\chi_{nk})$ die Bedingungen 1) und 2) erfüllt.

Jetzt beweisen wir, daß b) aus d) folgt. Wir bezeichnen mit E_n den 2^n-dimensionalen Raum, der von den Vektoren $x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{n,2^n-1}$ aufgespannt wird. Infolge 1) gilt $E_0\subset E_1\subset\ldots$ Für $x=\sum_{k=0}^{2^n-1} t_k x_{nk}\in E_n$ setzen wir $T_n(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1} t_k\chi_{nk}$ ($n=0, 1, \ldots$). Es ist leicht zu erkennen, daß der Operator T_n E_n isomorph in $C(C)$ abbildet, wobei der Operator T_{n+1} eine Erweiterung des Operators T_n ($n=0, 1, \ldots$) ist. $\widetilde{T}$ sei die gemeinsame Erweiterung der Operatoren T_n auf $\bigcup_n E_n$. Infolge 2) erhalten wir:

$$C_1\|x\| \leqslant \|\widetilde{T}x\| \leqslant C_2\|x\| \quad \text{für } x \in \bigcup_n E_n. \tag{1}$$

Hieraus folgt, daß der Operator $\widetilde{T}$ (auf eindeutige Weise) zu einem Operator T auf $\overline{\bigcup E_n}$ in $C(C)$ erweitert werden kann. Infolge (1) erhalten wir:

$$C_1\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant C_2\|x\| \quad \text{für} \quad x \in \overline{\bigcup_n E_n}.$$

Weil die Menge $\widetilde{T}\left(\bigcup_n E_n\right)$ überall dicht ist in $C(C)$, so bildet T den Unterraum $\overline{\bigcup_n E_n}$ auf $C(C)$ isomorph ab. Der Satz ist damit bewiesen.

1. Folgerung. Q sei ein metrischer kompakter Raum. Wenn $\overline{\overline{Q}} > \aleph_0$, dann ist $C(Q)$ isometrisch universell für die separablen Räume vom Typ B.

(24) Wenn $\overline{\overline{Q}} \leqslant \aleph_0$, dann ist $C(Q)$ nicht isomorph universell.

B e w e i s. Wenn $\overline{\overline{Q}} > \aleph_0$, dann enthält Q eine abgeschlossene Untermenge, die zum Cantorschen Diskontinuum C homeomorph ist, und infolge eines Borsik-Theorems [4] (siehe auch [3], S.60) enthält $C(Q)$ einen Unterraum, der zu $C(C)$ isometrisch ist, d.h. infolge Satz 1 ist $C(Q)$ isometrisch universell.

Wenn $\overline{\overline{Q}} \leqslant \aleph_0$, dann ist der Dualraum von $C(Q)$ separabel [5]. Hieraus folgt, daß auch der Dualraum eines beliebigen Unterraumes von $C(Q)$ ebenfalls separabel ist. Das heißt, $C(Q)$ enthält keinen Unterraum, der isomorph zum Raum $C(I)$ ist.

2. Folgerung. Ein beliebiger Raum $C^{(n)}(D)$ ist isomorph universell für separable Räume vom Typ B.

B e w e i s. Es sei $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) \in D$. Weil D eine offene Menge ist, enthält der Schnittpunkt der Geraden $R_1 = \{t \in E_k \colon t_i = t_i^0$ für $i = 2, 3, \ldots, k\}$ mit der Menge D das abgeschlossene Intervall I_1. Wir untersuchen die Menge Y, die aus allen Funktionen besteht, die zu $C^{(n)}(D)$ gehören und auf allen Hyperebenen $t_i = \text{const}$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$ konstant sind und gleich Null in den Punkten $R_1 \cap D$, die nicht zu I_1 gehören. Es ist leicht zu beweisen, daß Y ein abgeschlossener Unterraum des Raumes $C^{(n)}(D)$ ist, der isomorph ist zum Raum $C_0^{(n)}$ aller n-dimensionalen stetig differenzierbaren Funktionen im Intervall [0,1], die gleich Null und deren n erste Ableitungen in den Punkten 0 und 1 sind. X_{2n} sei ein beliebiger $2n$-dimensionaler Unterraum von $C^{(n)}(D)$, sodaß $X_{2n} \cap Y = \{0\}$ (einen solchen Unterraum gibt es offensichtlich); X sei die lineare Hülle der Unterräume X_{2n} und Y. Da X_{2n} endlich-dimensional ist, so ist X offensichtlich isomorph zum direkten Produkt $X_{2n}\times Y$. Doch der Raum $X_{2n}\times C_0^{(n)}$ ist isomorph zum Raum $C^{(n)}$ aller n-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall [0,1]. Wie bekannt ist ([1], S.156), ist der Raum $C^{(n)}$ isomorph zum Raum $C(I)$ und folglich ist auch E isomorph zu $C(I)$.

2. Satz. Es sei Q ein metrischer kompakter Raum. X sei Unterraum von $C(Q)$ derart, daß (*) eine nicht leere Menge $Q_0\subset Q$ vorhanden ist, deren abgeschlossene Hülle perfekt ist, welche wiederum so beschaffen ist, daß für einen beliebigen Punkt $q_0\in Q_0$ die Folge der Elemente $\{x_n\}$ aus X existiert, die die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} x_n(q)=\begin{cases}0 & \text{für } q\neq q_0\\ 1 & \text{für } q=q_0\end{cases};\ \|x_n\|\leqslant 1,\ n=1,2,\ldots \tag{2}$$

erfüllen. Dann ist X isomorph universell für alle separablen Banach-Räume.

1. Hilfssatz. Für ein bestimmtes $q_0\in Q$ soll die Folge $\{x_n\}$ der Elemente von $C(Q)$ die Bedingung (2) erfüllen. Dann existiert für ein beliebiges $\varepsilon>0$ und ein beliebiges komplexes $w\neq 0$ die lineare Kombination $y=\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i$ in der Art, daß

$$|w-y(q_0)|<\varepsilon, \tag{3}$$

$$|y(q)|<\varepsilon \text{ für } \rho(q,q_0)\geqslant\varepsilon, \tag{4}$$

($\rho(q,q_0)$ - Abstand zwischen den Punkten q und q_0), wenn

$$|y(q)|>\varepsilon, \text{ dann } |y(q)|+|w-y(q)|<|w|+\varepsilon.^* \tag{5}$$

(25) Beweis. Wir wählen η so, daß $0<\eta<\frac{\varepsilon}{|w|}$ und

$$|z|+|1-z|<1+\frac{\varepsilon}{|w|}, \text{ wenn } 1\geqslant|z|>\frac{\varepsilon}{|w|}, \tag{6}$$
$$|\operatorname{Im} z|<\eta,\ \operatorname{Re} z>-\eta.$$

O.B.d.A. kann infolge (2) angenommen werden, daß

$$|1-x_n(q_0)|<\frac{\varepsilon}{|w|} \text{ für } n=1,2,\ldots \tag{7}$$

Es sei $Q_1=\{q\in Q:\rho(q,q_0)\geqslant\varepsilon\}$. Wir betrachten den Raum $E=C(Q_1)\times C(Q)\times C(Q)$ mit der Norm

$$\|e\|=\max\left(\|e^1\|_{C(Q_1)},\ \|e^2\|_{C(Q)},\ \|e^3\|_{C(Q)}\right),$$

wobei $e=(e^1,e^2,e^3)\in E$.

Wir untersuchen in E die Folge

$$e_n=\left(\tilde{x}_n,\ \operatorname{Im} x_n,\ \tfrac{1}{2}(|\operatorname{Re} x_n|-\operatorname{Re} x_n)\right),\quad n=1,2,\ldots,$$

mit $\tilde{x}_n(q)=x_n(q)$ für $q\in Q_1$. Da $\|e_n\|\leqslant\|x_n\|\leqslant 1$ $(n=1,2,\ldots)$ und $\lim_n \tilde{x}_n(q)=0$ für $q\in Q_1$ $\lim_n \operatorname{Im} x_n(q)=\lim_n \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} x_n(q)|-\operatorname{Re} x_n(q))=0$ für $q\in Q$ ist, so konvergiert die Folge $\{e_n\}$ schwach

* Der geometrische Sinn der Bedingung (5) läuft darauf hinaus, daß, wenn $|y(q)|>\varepsilon$, dann $\arg y(q)$ "nahe" an $\arg w$ ist.

gegen Null im Raum E (siehe [1], S. 19o). Demnach existiert nach dem Mazur-Theorem die lineare Kombination $e_0=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e_i$ in dër Art, daß

$$\|e_0\|<\eta;\ \lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\ldots,N);\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1. \tag{8}$$

Es sei $u=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i\in \mathrm{C}(Q)$. Infolge (2), (7), (8) der Definition der Norm in E und der Definition von Q_1 erhalten wir:

$$|1-u(q_0)|<\frac{\varepsilon}{|w|}, \tag{3'}$$

$$|u(q)|\leqslant\|e_0^1\|<\eta \text{ für } \rho(q,q_0)\geqslant\varepsilon; \tag{4'}$$

$$\|\operatorname{Im} u\|=\|e_0^2\|<\eta, \tag{5'}$$

$$\operatorname{Re} u(q)>-\eta \text{ für } q\in Q, \tag{5''}$$

$$\Bigl(\text{da } |\operatorname{Re} u(q)|-\operatorname{Re} u(q)=\Bigl|\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k x_k(q)\Bigr|-$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k x_k(q)\leqslant\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(|\operatorname{Re} x_k(q)|-\operatorname{Re} x_k(q)\right)\leqslant 2\|e_0^3\|<\eta\Bigr).$$

Es sei $y=wu$. Weil $\eta<\frac{\varepsilon}{|w|}$, so folgt aus (3'), (4'), (5'), (5"), (6), (7) und (8), daß die Funktion y die Bedingungen (3), (4), (5) erfüllt.

<u>2. Hilfssatz.</u> X sei Unterraum von $\mathrm{C}(Q)$, der die Bedingung (*) des 2. Satzes erfüllt; $x_0', x_1', \ldots, x_M'$ seien beliebige Elemente aus X, und $q_0', q_1', \ldots, q_M'$ unter sich verschiedene Punkte von Q_0. Dann existieren für ein beliebiges $\delta>0$ Funktionen $x_0, x_1, \ldots, x_{2M-1}$ aus X und Punkte $q_0, q_1, \ldots, q_{2M-1}$ aus Q_0 ($q_i\neq q_j$ für $i\neq j$) derart, daß:

$$x_{2i+1}=x_i'-x_{2i}; \tag{9}$$

(26) $$|x_i'(q_i')-x_j(q_j)|<\frac{\delta}{2M} \text{ für } j=2i, 2i+1, i=0,1,\ldots,M-1; \tag{10}$$

$$\left|\sum_{i=0}^{M-1}|x_i'(q)|-\sum_{j=0}^{2M-1}|x_j(q)|\right|<\delta \text{ für } q\in Q; \tag{11}$$

$$\left|\sum_{\substack{h=0\\h\neq i}}^{M-1}|x_h'(q_i')|-\sum_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{2M-1}|x_l(q_j)|\right|<\delta \text{ für } j=2i, 2i+1, i=0,1,\ldots,M-1. \tag{12}$$

B e w e i s. Wir nehmen an $q_{2i}=q_i'$ $(i=0,1,\ldots,M-1)$. Als Punkte q_{2l+1} $(i=0,1,\ldots,M)$ wählen wir beliebige unter sich verschiedene Punkte aus Q_0, die sich von den Punkten q_{2l} $(l=0,\ldots,M)$ unterscheiden und derart sind, daß

$$\sum_{h=0}^{M-1}|x_h'(q_{2l})-x_h'(q_{2l+1})|<\frac{\delta}{4M} \text{ für } l=0,1,\ldots,M-1 \tag{13}$$

(diese Punkte existieren, da x'_k $(k=0, 1, \ldots, M-1)$ stetige Funktionen, $q_{2l}=q'_l \in Q_0$ $(l=0, 1, \ldots, M-1)$ und $\overline{Q_0}$ vollständig ist.

Es sei $d=\min\limits_{l \neq k} \rho(q_l, q_k)$. Wir wählen $\varepsilon>0$ so, daß

$$\varepsilon < \min\left(d, \frac{\delta}{4M}\right), \tag{14}$$

wenn $\rho(q, q_{2l})<\varepsilon$, dann ist $|x'_k(q)-x'_k(q_{2l})|<\frac{\delta}{4M}$ für $k, l=0, 1, \ldots, M-1$. (15)

Infolge der Bedingung (*) und des 1. Hilfssatzes existieren die Funktionen x_{2k} $(k=0, 1, \ldots, M-1)$ so, daß

$$|x_{2k}(q_{2k})-x'_k(q_{2k})|<\varepsilon, \tag{16}$$

$$|x_{2k}(q)|<\varepsilon \text{ für } \rho(q, q_{2k}) \geqslant \varepsilon, \tag{17}$$

wenn $|x_{2k}(q)|>\varepsilon$, dann $|x_{2k}(q)|+|x'_k(q_{2k})-x_{2k}(q)|<\varepsilon+|x'_k(q_{2k})|$. (18)

Wir bestimmen x_{2k+1} $(k=0, 1, \ldots, M-1)$ nach Formel (9). Wir verifizieren, daß die so bestimmten Elemente x_j $(j=0, 1, \ldots, 2M-1)$ die Bedingungen (10), (11), (12) und den 2. Hilfssatz erfüllen.

B e d i n g u n g (10). Wenn $j=2i$, dann ist $q_j=q'_i$, und weil $\varepsilon<\frac{\delta}{4M}$, so ist die Ungleichung (10) in diesem Fall unmittelbare Folge der Ungleichung (16). Wenn $j=2i+1$, dann erhalten wir infolge (9), (13) und (15) (unter Berücksichtigung, daß $\rho(q_{2i}, q_{2i+1}) \geqslant d>\varepsilon$)

$$|x'_i(q'_i)-x_j(q_j)|=|x'_i(q_{2i})-x_{2i+1}(q_{2i+1})| \leqslant |x'_i(q_{2i})-x'_i(q_{2i+1})|+ \\ +|x'_i(q_{2i+1})-x_{2i+1}(q_{2i+1})|<\frac{\delta}{4M}+|x_{2i}(q_{2i+1})|<\frac{\delta}{4M}+\varepsilon<\frac{\delta}{2M}.$$

B e d i n g u n g (11). Wir wollen vor allem beweisen, daß

$$|x_{2k}(q)|+|x_{2k+1}(q)|=|x_{2k}(q)|+|x_{2k}(q)-x'_k(q)|<|x'_k(q)|+ \\ +\frac{\delta}{M} \text{ für } q \in Q, \ k=0, 1, \ldots, M=1. \tag{19}$$

Wir untersuchen zwei Fälle:

I. $|x_{2k}(q)|<\varepsilon$; dann ist $|x_{2k}(q)|+|x_{2k}(q)-x'_k(q)| \leqslant |x'_k(q)|+$ $+2|x_{2k}(q)|<|x'_k(q)|+2\varepsilon<|x'_k(q)|+\frac{\delta}{M}$.

(27) II. $|x_{2k}(q)|>\varepsilon$; dann erhalten wir infolge (17) $\rho(q, q_{2k})<\varepsilon$ und infolge (18) und (15)

$$|x_{2k}(q)|+|x_{2k}(q)-x'_k(q)| \leqslant |x_{2k}(q)|+|x_{2k}(q)-x'_k(q_{2k})|+ \\ +|x'_k(q_{2k})-x'_k(q)| \leqslant |x'_k(q_{2k})|+\varepsilon+|x'_k(q_{2k})-x'_k(q)| \leqslant |x'_k(q)|+ \\ +\varepsilon+2|x'_k(q_{2k})-x'_k(q)|<|x'_k(q)|+\varepsilon+2\frac{\delta}{4M}<|x'_k(q)|+\frac{\delta}{M}.$$

Infolge (9) und der Ungleichung (19) ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|x'_k(q)| \leqslant \sum_{k=0}^{M-1}|x_{2k}(q)|+|x_{2k+1}(q)| \leqslant \sum_{k=}^{M-1}\left(|x'_k(q)|+\frac{\delta}{M}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{M-1} |x'_k(q)| + \delta.$$

B e d i n g u n g (12). Wenn $j=2i$, da $q_j = q'_i$, dann ergibt sich infolge (9), (19) und (16):

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{M-1} |x'_k(q'_i)| - \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{2M-1} |x_l(q_j)| \right| \leqslant \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}} |x'_k(q_{2i})| - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}} \left(|x_k(q_{2i})| + \frac{\delta}{M} \right) - \right.$$
$$\left. - |x_{2i+1}(q_{2i+1})| \right| \leqslant \frac{(M-1)\delta}{M} + |x_{2i}(q_{2i}) - x'_i(q_{2i})| < \frac{(M-1)\delta}{M} + \frac{\delta}{4M} < \delta.$$

Wenn $j=2i+1$, dann erhalten wir infolge (19), (9), (13) und (17) unter Berücksichtigung, daß $\rho(q_{2i}, q_{2i+1}) \geqslant d > \varepsilon$:

$$\left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{M-1} |x'_k(q'_i)| - \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{2M-1} |x_l(q_j)| \right| \leqslant \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{M-1} |x'_k(q'_i)| - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{M-1} \left(|x'_k(q_{2i+1})| + \frac{\delta}{M} \right) - \right.$$
$$\left. - |x_{2i}(q_{2i+1})| \right| \leqslant \sum_{k=0}^{M-1} |x'_k(q_{2i}) - x'_k(q_{2i+1})| +$$
$$+ (M-1)\frac{\delta}{M} + \frac{\delta}{4M} < \frac{\delta}{4M} + (M-1)\frac{\delta}{M} + \frac{\delta}{4M} < \delta.$$

B e w e i s des 2. Satzes. Es sei $0 < \theta < 1$. Wir nehmen an $\delta_n = \theta/2^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Infolge des 2. Hilfssatzes kann man per Induktion das System der Funktionen (x_{nk}), die zu X gehören, und das System der Punkte (q_{nk}) aus $Q_0 (k = 0, \ldots, 2^n - 1; n = 0, 1, \ldots)$ so bestimmen, daß

$$\|x_{00}\| = x_{00}(q_{00}) = 1, \tag{20}$$

$$x_{n+1,\, 2k+1} = x_{n,\, k} - x_{n+1,\, 2k}, \tag{21}$$

$$x_{nk}(q_{nk}) \geqslant \|x_{00}(q_{00})\| - \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{2^i}, \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |x_{nk}(q)| \leqslant |x_{00}(q)| + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \text{ für beliebiges } q \in Q, \tag{23}$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq l}}^{2^n-1} |x_{nk}(q_{nl})| < \max(|x_{1,0}(q_{11})|, |x_{11}(q_{10})|) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta_i,$$
$$l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1. \tag{24}$$

(28) Es seien $t_0, t_1, \ldots, t_{2^n-1}$ beliebige komplexe Zahlen; es sei $|t_{k_0}| = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant 2^n-1} |t_i|$. Wir verwenden (23) und erhalten

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} t_i x_{ni} \right\| \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^n-1} |t_i| \sup_{q \in Q} \sum_{i=0}^{2^n-1} |x_{ni}(q)| \leqslant (1+\theta) \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^n-1} |t_i|. \tag{25}$$

Andererseits erhalten wir aus (22) und (24)

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} t_i x_{ni} \right\| \geqslant \left| \sum_{i=0}^{2^n-1} x_i(q_{n,k_0}) t_i \right| \geqslant |x_{nk_0}(q_{nk_0})| |t_{k_0}| - \max_i |t_i| \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k_0}}^{2^n-1} |x_i(q_{nk_0})| \geqslant$$
$$\geqslant |t_{k_0}| \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \geqslant (1-\theta) \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^n-1} |t_i|. \tag{26}$$

Aus den Formeln (21), (25) und (26) geht unmittelbar hervor, daß das System (x_{nk}) die Bedingungen 1) und 2) des 1. Satzes (Punkt d) erfüllt. Das heißt, der Raum X ist isomorph universell für separable Räume vom Typ B.

A n m e r k u n g. Der 2. Satz gilt auch dann, wenn in(2) die Bedingung $\sup_n \|x_n\| \leqslant 1$ durch die Bedingung $\sup_n \|x_n\| \leqslant A$ ersetzt wird, wobei A eine Konstante ist, die nicht von der Wahl des Punktes q_0 abhängt. Es ist in diesem Fall jedoch schon nicht mehr möglich, allgemein gesagt, daß die Konstanten C_1 und C_2 (die im Punkt d die Bedingung 2 des 1. Satzes darstellen) beliebig nahe bei Eins sind.

Über die Menge Q_0 genügt es anzunehmen, daß ihr Abschluß überabzählbar ist.

3. Folgerung. Q sei ein metrischer kompakter Raum. R sei ein abgeschlossener Unterring des Ringes $C(Q)$ derart, daß eine nicht-leere Menge Q_0 mit perfektem Abschluß existiert, wobei für einen beliebigen Punkt $q_0 \in Q_0$ eine Funktion $x \in R$ existiert, die so ist, daß (**) $x(q_0) = 1$ und $|x(q)| < 1$ für $q_0 \neq q \in Q$. Dann ist R als Banach-Raum isomorph universell für separable Räume vom Typ B.

Zum Beweis genügt die Bemerkung, daß, wenn x die Bedingung (**) erfüllt, dann die Folge x^n aus $R (n = 1, 2, \ldots)$ die Bedingung (2) erfüllt und man den 2. Satz anwenden kann.

D sei eine beliebige offene nicht-leere Menge, die in der komplexen Ebene Z (d.h. in einer normalen Ebene, zu der noch ein unendlich ferner Punkt hinzugefügt wird) liegt. Wir bezeichnen mit $H_c^\infty(D)$ den Raum aller Funktionen x, die in $\overline{D}$ stetig und in D analytisch sind mit der Norm $\|x\| = \sup_{z \in D} |x(z)|$.

4. Folgerung. Wenn $Z - D$ nicht leer ist (und so $H_c^\infty(D)$ Funktionen enthält, die sich von den Konstanten unterscheiden), dann ist der Raum $H_c^\infty(D)$ isomorph universell für separable Räume vom Typ B.

B e w e i s. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß $\overline{D}$ keinen unendlich fernen Punkt enthält (im entgegengesetzten Falle muß die geeignete gebrochen-lineare Transformation angewendet werden). Wir nehmen an $\Gamma = \overline{D} \cap \overline{Z - \overline{D}}$. Es ist leicht zu verifizieren, daß Γ eine nicht-leere perfekte Menge ist. Es sei $w \in \Gamma$ und $\varepsilon > 0$. Aus der Bestimmung von Γ folgt, daß der Punkt w_1 in der Form existiert, daß $|w - w_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $w_1 \in Z - \overline{D}$. w_0 sei der Punkt aus $\overline{D}$, sodaß $|w_0 - w_1| = \inf_{z \in \overline{D}} |z - w_1|$ (ein solches w_0 existiert, da $\overline{D}$ kompakt

(29) ist; wobei $w_0 \in \Gamma$). Es ist offensichtlich, daß $|w_0 - w_1| \leqslant |w - w_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, und folglich

$$|w - w_0| < \varepsilon. \qquad (27)$$

Wir untersuchen die Funktion

$$x(z) = \frac{w_0 - w_1}{2z - (w_0 + w_1)} \text{ für } z \in \overline{D}.$$

Da $\frac{w_0+w_1}{2}$ nicht $\in \overline{D}$ (falls $\left|w_1-\frac{w_0+w_1}{2}\right|<|w_0-w_1|$), so ist $x\in H_c^\infty(D)$. Da für $z\in\overline{D}$ $|z-w_1|>|w_1-w_0|$, so ist $|x(z)|\leqslant\frac{|w_0-w_1|}{2|z-w_1|-|w_0-w_1|}\leqslant 1$. Wenn dabei $|x(z)=1,$ so ist $2|z-w_1|-|w_0-w_1|=|2z-(w_0+w_1)|$, und $|z-w_1|=|w_0-w_1|$; folglich $z=w_0$, da $z=w_1$ unmöglich $(w_1\overline{\in}\overline{D})$ ist.

Abschließend erhalten wir, daß $|x(z)|<1$ für $w_0\neq z\in\overline{D}$.

Wir untersuchen jetzt die Menge Q_0 aller dieser Punkte $w_0=q_0$ aus Γ, für die die Funktion $x\in H_c^\infty(D)$ existiert, die die Bedingung (**) erfüllt. Aus der angeführten Überlegung ist infolge (27) ersichtlich, daß Q_0 überall dicht ist in Γ. Es bleibt übrig, die 3. Folgerung anzuwenden.

5. Folgerung. Wenn D und $Z-\overline{D}$ nicht leer sind, dann ist der Raum $H_c^\infty(D)$ zu keinem Raum vom Typ B isomorph, der Dualraum irgendeines Raumes vom Typ B ist.

Wenn X isomorph universell ist für separable Räume, dann enthält X tatsächlich einen Unterraum, der zum Raum c_0 (aller Nullfolgen) isomorph ist. Wenn X zu irgendeinem Dualraum eines Banach-Raumes isomorph ist und einen Raum enthält, der zu c_0 isomorph ist, dann enthält X einen Unterraum, der zum Raum m aller beschränkten Folgen isomorph ist; folglich ist X nicht separabel ([2], 4. Theorem). Da der Raum $H_c^\infty(D)$ separabel ist, do folgt aus der 4. Folgerung unsere Bestätigung.

Der Verfasser dankt Herrn Bessaga für die Hilfe beim Abfassen dieses Beitrags.

LITERATUR

1. Banach, S[tefan] S.: Kurs funkcional'nogo analiza ⟨Kurs Funktionalanalyse⟩. Kiiv, 1948.

2. Bessaga, C., Pełczyński, A.: On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. - Studia Mathematica. Warszawa, 17 (1958), S. 151 -164.

3. Bessaga, C., Pełczyński, A.: Spaces of continuous functions (IV). (On isomorphical classification of spaces of continuous functions.) - Studia Mathematica. Warszawa, 19 (1960), S. 53-62.

4. Borsuk, Karol: Über Isomorphie der Funktionalräume. - Bulletin International de l'Académie polonaise des sciences et des lettres. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Série A: Sciences mathématiques. Varsovie, 1933, S. 1-10.

5. Krein, Mark G., Krein, Selim G.: Sur l'espace des fonctions définies sur un bicompact de Hausdorff et

ses sousespaces semiordonnés.
– Matematičeskij sbornik/Recueil mathématique.
Akademija nauk. Novaja serija. Moskva, 13(55), (1943), Nr 1, S. 1-38.

6. Mazur, S.: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen.
– Studia Mathematica. Warszawa, 4 (1933), S. 70-84.

Redaktionseingang: 12.Juni 1961.

Stuttgart, den 10. Juli 1975

i.A.

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer

Berichtigung: Zeile 1 von Seite 4 ist unvollständig. Sie muß richtig lauten:

fensichtlich isomorph zum direkten Produkt $X_{2n} \times Y$,
folglich ist es isomorph zum Raum $X_{2n} \times C_0^{(h)}$. Doch...

(O.P.-18.VII.75)