

STUTTGARTER BEITRÄGE ZUR PRODUKTIONSFORSCHUNG

CHRISTIAN CONNETTE

Kinematische Modellierung und Regelung omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke



Universität Stuttgart



Fraunhofer

IPA

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Bauernhansl

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Alexander Verl

Univ.-Prof. em. Dr.-Ing. Prof. e.h. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Engelbert Westkämper

Christian Connette

**Kinematische Modellierung und Regelung
omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke**

Kontaktadresse:

Fraunhofer-Institut für Produktionstechnik und Automatisierung IPA, Stuttgart
Nobelstraße 12, 70569 Stuttgart
Telefon 07 11 9 70-00, Telefax 07 11 9 70-13 99
info@ipa.fraunhofer.de, www.ipa.fraunhofer.de

STUTTGARTER BEITRÄGE ZUR PRODUKTIONSFORSCHUNG**Herausgeber:**

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Bauernhansl
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Alexander Verl
Univ.-Prof. em. Dr.-Ing. Prof. e.h. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Engelbert Westkämper

Fraunhofer-Institut für Produktionstechnik und Automatisierung IPA, Stuttgart
Institut für Industrielle Fertigung und Fabrikbetrieb (IFF) der Universität Stuttgart
Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen (ISW)
der Universität Stuttgart

Bildquelle: MEV-Verlag

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISSN: 2195-2892

ISBN: 978-3-8396-0564-6

D 93

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2013

Druck: Mediendienstleistungen des Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB, Stuttgart
Für den Druck des Buches wurde chlor- und säurefreies Papier verwendet.

© by **FRAUNHOFER VERLAG**, 2013

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB
Postfach 80 04 69, 70504 Stuttgart
Nobelstraße 12, 70569 Stuttgart
Telefon 07 11 9 70-25 00
Telefax 07 11 9 70-25 08
E-Mail verlag@fraunhofer.de
URL <http://verlag.fraunhofer.de>

Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die über die engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes hinausgeht, ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Speicherung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen und Handelsnamen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Bezeichnungen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und deshalb von jedermann benutzt werden dürften. Soweit in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden ist, kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen.

GELEITWORT DER HERAUSGEBER

Produktionswissenschaftliche Forschungsfragen entstehen in der Regel im Anwendungszusammenhang, die Produktionsforschung ist also weitgehend erfahrungsbasiert. Der wissenschaftliche Anspruch der „Stuttgarter Beiträge zur Produktionsforschung“ liegt unter anderem darin, Dissertation für Dissertation ein übergreifendes ganzheitliches Theoriegebäude der Produktion zu erstellen.

Die Herausgeber dieser Dissertations-Reihe leiten gemeinsam das Fraunhofer-Institut für Produktionstechnik und Automatisierung IPA und jeweils ein Institut der Fakultät für Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik an der Universität Stuttgart.

Die von ihnen betreuten Dissertationen sind der marktorientierten Nachhaltigkeit verpflichtet, ihr Ansatz ist systemisch und interdisziplinär. Die Autoren bearbeiten anspruchsvolle Forschungsfragen im Spannungsfeld zwischen theoretischen Grundlagen und industrieller Anwendung.

Die „Stuttgarter Beiträge zur Produktionsforschung“ ersetzt die Reihen „IPA-IAO Forschung und Praxis“ (Hrsg. H.J. Warnecke / H.-J. Bullinger / E. Westkämper / D. Spath) bzw. ISW Forschung und Praxis (Hrsg. G. Stute / G. Pritschow / A. Verl). In den vergangenen Jahrzehnten sind darin über 800 Dissertationen erschienen.

Der Strukturwandel in den Industrien unseres Landes muss auch in der Forschung in einen globalen Zusammenhang gestellt werden. Der reine Fokus auf Erkenntnisgewinn ist zu eindimensional. Die „Stuttgarter Beiträge zur Produktionsforschung“ zielen also darauf ab, mittelfristig Lösungen für den Markt anzubieten. Daher konzentrieren sich die Stuttgarter produktionstechnischen Institute auf das Thema ganzheitliche Produktion in den Kernindustrien Deutschlands. Die leitende Forschungsfrage der Arbeiten ist: Wie können wir nachhaltig mit einem hohen Wertschöpfungsanteil in Deutschland für einen globalen Markt produzieren?

Wir wünschen den Autoren, dass ihre „Stuttgarter Beiträge zur Produktionsforschung“ in der breiten Fachwelt als substanziell wahrgenommen werden und so die Produktionsforschung weltweit voranbringen.

Alexander Verl

Thomas Bauernhansl

Engelbert Westkämper

**Kinematische Modellierung und Regelung
omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke**

**Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung**

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Christian Pascal Connette

aus Saarbrücken

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. mult. Alexander Verl
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Amos Albert

Tag der mündlichen Prüfung: 6. März 2013

Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen
und Fertigungseinrichtungen der Universität Stuttgart

2013

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Arbeit entstand in Stuttgart, während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Produktionstechnik und Automatisierung der Fraunhofer Gesellschaft. Mein besonderer Dank gilt Herr Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Alexander Verl für die Unterstützung meiner wissenschaftlichen Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts. Herrn Prof. Dr.-Ing. Amos Albert danke ich für die gute Zusammenarbeit im Rahmen unserer gemeinsamen Projekte, sowie für die Übernahme des Mitberichts zu dieser Arbeit.

Ich danke meinen Kollegen für die gute Zusammenarbeit und die angeregten und konstruktiven Diskussionen während der Entstehung meiner Arbeit. Insbesondere danke ich Maik Siee, für die Unterstützung bei der Gestaltung des Titelblatts zu dieser Arbeit. Luzia Schumacher möchte ich für die Unterstützung bei der abschließenden Durchsicht der Arbeit danken. Des Weiteren danke ich den von mir betreuten Studenten, die im Laufe von fünf Jahren in Form von Praktika, Studien- und Diplomarbeiten teils kleinere, teils größere Stücke zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonderer Dank gilt hier Phillip Köhler und Andreas Kisch, die durch stets sehr gute, motivierte und verlässliche Arbeit erheblich dazu beigetragen haben, dass die diversen, in den letzten Jahren aufgebauten, mobilen Plattformen meist betriebsbereit waren und für Experimente bereit standen.

Drei Personen aus meinem beruflichen Umfeld gilt besonderer Dank. Ich danke Herrn Martin Hägele, Leiter der Abteilung Robotersysteme. Ohne ihn wäre ich nicht am IPA und hätte kaum meine Arbeit am Fahrwerk des Care-O-bot® 3 aufgenommen. Ohne ihn würde es diese Arbeit nicht geben. Ich danke Herrn Kai Pfeiffer, Leiter der Gruppe industrielle und gewerbliche Servicerobotik, in welcher diese Arbeit angefertigt wurde, für die Leitung und Motivation, die er mir in den letzten sechs Jahren gegeben hat. Herr Pfeiffer versteht es wie kaum ein anderer in schwierigen Phasen Kraft und in allzu beschwingten Phasen Bodenhaftung zu geben. Er ist mir Vorgesetzter, Vorbild und Freund. Insbesondere danke ich Herrn Dr.-Ing. Andreas Pott für die kritische, wissenschaftliche Begleitung meiner Arbeit, für die anregenden Diskussionen und die bohrenden Fragen. Von meiner ersten Publikation bis zur Anfertigung dieser Arbeit haben mich seine konstruktiven Ratschläge und Ermahnungen geleitet. Ein guter Teil der Entstehung dieser Arbeit, ein guter Teil der Art und Weise in welcher diese Arbeit entstanden ist, ist ihm zu verdanken.

Bei Vorträgen wie bei wissenschaftlichen Arbeiten gilt bekanntlich: „Der Anfang prägt. Der Schluss bleibt haften“. Daher möchte ich an dieser Stelle meiner Frau Melanie danken: Für die Unterstützung und Kraft, die sie mir gewährt hat und für das Verständnis das sie trotz vieler langer Abende, Wochenenden und Urlaubswochen am Schreibtisch und im Labor gezeigt hat. Ganz besonders danke ich ihr für die Entlastung und die Freiräume, die sie mir gerade auch nach der Geburt unserer Tochter Sophia in der Endphase dieser Arbeit geschaffen hat. Ich liebe dich. Dir ist diese Arbeit gewidmet.

Zusammenfassung

In den letzten Jahren verlassen Roboter mehr und mehr ihren Platz hinter Zäunen und Schutzeinrichtungen. Sie werden Teil des menschlichen Arbeitsumfeldes und Alltagsumfeldes. Zukünftige mobile Roboter müssen daher hinsichtlich Flexibilität, Manövrierbarkeit und Robustheit an die Anforderungen von Alltagsumgebungen angepasst sein. Von zentraler Bedeutung ist dabei der Bewegungsapparat der Roboter. Nicht-holonome, omnidirektionale Fahrwerke, die aus unabhängig gelenkten und unabhängig angetriebenen Standardrädern aufgebaut sind, bieten mittelfristig einen soliden Kompromiss zwischen diesen Anforderungen. Aufgrund der für solche Kinematiken typischen nicht-holonomen Bindungen und den daraus erwachsenden Zwangsbedingungen, kommt der koordinierten Ansteuerung der Aktoren bei solchen Fahrwerken eine besondere Bedeutung zu.

Diese Arbeit behandelt die kinematische Modellierung und Regelung der Klasse nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke. Ausgehend von den grundlegenden Arbeiten Campions und Thuilots wird eine Zustandsraumdarstellung entwickelt, welche die aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Zwangsbedingungen implizit abbildet. Es wird gezeigt, dass die Repräsentation des Twistes in sphärischen Koordinaten die Basis eines solchen Zustandsraums bildet. Dazu wird gezeigt, dass der sphärische Twist ein lokaler Diffeomorphismus des Momentanpols ist. Es wird ferner gezeigt, dass sich die diesem Zustandsraum inhärenten Singularitäten in hebbare und wesentliche Singularitäten unterteilen lassen. Die hebbaren Singularitäten werden anschließend durch Erweiterung des Zustandsraums und den Entwurf eines Beobachters aufgelöst.

Zur Behandlung der wesentlichen Singularitäten werden drei alternative Verfahren entwickelt. So wird ein potentialfeldbasierter und ein modellprädiktiver Regler entwickelt, welche die Vermeidung singulärer Konfigurationen sicher stellen sollen. Dazu wird durch die Formulierung eines geeigneten Gütemaßes die Lage der Singularitäten in das Regelgesetz mit einbezogen. Diese Verfahren implizieren jedoch eine Reduktion des zulässigen Arbeitsraums und damit eine Reduktion der Flexibilität des Systems. Um diese Einschränkungen zu vermeiden, wird ein dritter Ansatz auf Basis einer Reglerumschaltung entwickelt. Dazu wird zunächst gezeigt, dass es möglich ist, durch geeignete Koordinatentransformationen aus dem erweiterten Zustandsraum einen Atlas des vollständigen, zulässigen Konfigurationsraums abzuleiten. Dabei ist dieser Atlas lokal singularitätsfrei. Mit diesem Ansatz ist es erstmals möglich, die volle Flexibilität solcher nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zu nutzen.

Die drei vorgeschlagenen Verfahren werden hinsichtlich ihrer Stabilität bzw. der Lösbarkeit der zugrunde liegenden Optimierungsprobleme diskutiert. Abschließend erfolgt ein qualitativer und quantitativer Vergleich der Verfahren untereinander, sowie der Vergleich mit einem weiteren Referenzregler. Der Referenzregler ist dabei so ausgelegt, dass er die Einregelzeiten bzw. die Flexibilität der Plattform optimiert, wobei er eine Verletzung der nicht-holonomen Bindungen in Kauf nimmt. Um die Reproduzierbarkeit und Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, werden alle Ansätze in einer gemeinsamen Simulationsumgebung implementiert. Als Zielsystem wird das Fahrwerk des bei Fraunhofer IPA entwickelten Serviceroboters Care-O-bot[®] 3 verwendet.

Die Ergebnisse zeigen, dass alle drei Verfahren dem Referenzregler hinsichtlich Koordination der Aktoren und Einhaltung der aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Zwangsbedingungen deutlich überlegen sind. Erwartungsgemäß zeigt sich ebenfalls, dass das Verfahren auf Basis der Reglerumschaltung das Passieren der singulären Bereiche ohne Verletzung der aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Zwangsbedingungen ermöglicht. Damit erlaubt es die volle Flexibilität des Fahrwerks zu nutzen. Erwartungsgemäß zeigt das Verfahren auf Basis der Reglerumschaltung das schnellste Einregelverhalten und kommt dem Referenzregler hier am Nächsten. Damit bietet dieses Verfahren die unter Einhaltung der Zwangsbedingungen höchstmögliche Flexibilität.

Abstract

In recent years robots have been moving from their places within cages and from behind safety curtains closer to the workspace of humans. Robots are up to become part of people's workspace. Robots are up to become part of our every day live. Therefore, future mobile robots need to be suited for operation in every day environments with regard to flexibility, maneuverability and robustness. In this context a central role is taken by the motion-apparatus of a robot. Non-holonomic, omnidirectional undercarriages composed by steered standardwheels promise to provide a solid compromise between these requirements. In this context, due to the actuator coupling via the non-holonomic bindings, exact coordination of all actuators emerges as especially important.

Within this work the kinematic modeling and control of this class of non-holonomic, omnidirectional undercarriages are addressed. Grounded on the seminal works by Campion and Thuilot a state-space-representation that implicitly represents the constraints emerging from the non-holonomic bindings is developed. It will be shown that the spherical coordinate representation of the twist forms a basis of such a state-space. In fact, it will be shown that the spherical coordinate representation of the twist is a local diffeomorphism to the instantaneous center of motion. Furthermore, it will be shown that the singularities which are inherent to this state-space can be divided into removable and physical singularities. The removable singularities will be resolved by providing an expanded state-space formulation and designing an appropriate observer.

To tackle the problems associated to the physical singularities three different approaches are devised. A potential-field based and a model predictive control approach to avoid the singular regions are developed. Therefore, the fitness criterias of the controllers are adapted such that the singularities are taken into account within the applied control sequence. However, these approaches imply constraining the accessible workspace and thus a reduction of the systems flexibility. To resolve these drawbacks a third approach is devised based on controller switching. This approach is grounded in the fact, that it can be shown that a set of appropriately transformed state-spaces can form an atlas of the entire valid configuration space. This Atlas is free of singularities. With this approach it is for the first time possible to use the full flexibility of these non-holonomic, omnidirectional undercarriages without violating the non-holonomic bindings.

The three proposed approaches are discussed with respect to stability and solvability of the underlying optimization problem. Finally, the approaches are qualitatively and quantitatively compared to each other and a further reference-controller. The reference controller is designed to optimize control time under violation the non-holonomic bindings if necessary. To ensure reproducibility and comparability al controllers are integrated into a common simulation environment. The simulated test-system is the undercarriage of the Care-O-bot[®] 3 developed at Fraunhofer IPA.

The obtained results show that all three approaches outperform the reference-controller with respect to actuator-coordination and adherence to the non-holonomic bindings. It also becomes apparent that the approach via controller switching does in fact allow passing through the singular regions of the system. Thus the switching based controller provides the shortest control times except for the reference-controller and the highest possible flexibility that is possible when adhering to the non-holonomic bindings.

Inhaltsverzeichnis

I	Analyse & Synthese	21
1	Einführung	23
1.1	Motivation und Ziel der Arbeit	23
1.2	Einordnung und Abgrenzung der Arbeit	25
1.3	Ausrichtung und Aufbau der Arbeit	27
2	Grundlagen	29
2.1	Konzepte und Konventionen	29
2.1.1	Antriebskonzepte und Einsatzbereiche mobiler Roboter	29
2.1.2	Konventionen der Parametrierung von Fahrwerkskinematiken	33
2.2	Kinematische Beschreibung	38
2.2.1	Kinematik der idealen Rollbewegung	38
2.2.2	Klassifizierung und Modellierung von Fahrwerkskinematiken	40
2.2.3	Geometrische Interpretation der ebenen Bewegung	44
3	Topologische Analyse nicht-holonomer Fahrwerkskinematiken	49
3.1	Vollständige Parametrierung des zulässigen Konfigurationsraums $N[C_{1,S}]$	49
3.1.1	Topologie des Twists	49
3.1.2	Der Momentanpol unter Projektion auf die Riemannsche Sphäre	51
3.1.3	Der Twist als stetige Fortsetzung des projizierten Momentanpols	54
3.1.4	Der sphärische Twist als Analogie des projizierten Momentanpols	58
3.2	Formulierung der Inversen Kinematik	61
3.2.1	Die Inverse Kinematik als Verkettung von Abbildungen	61
3.2.2	Abbildung des Twists in den Konfigurationsraum eines Rades	62
3.2.3	Abbildung des Twists in translatorisch verschobene Bezugssysteme	64
3.2.4	Eigenschaften der inversen Kinematik	68
3.3	Formulierung der direkten Kinematik	71
3.3.1	Abbildung in ein beliebiges Koordinatensystem	71
3.3.2	Abbildung in ein radbezogenes Koordinatensystem	73
4	Strukturelle Eigenschaften des resultierenden Zustandsraums	75
4.1	Struktur des Zustandsraums außerhalb der kinematischen Singularitäten	75
4.1.1	Überbestimmtheit und Mehrdeutigkeiten	75
4.1.2	Steuerbarkeit und Manipulierbarkeit in der Umgebung der Singularitäten	80
4.1.3	Beobachtbarkeit in der Umgebung der Pole	84
4.2	Generelle Struktur des Zustandsraums	87
4.2.1	Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit bei radzentrierten Bezugssystemen	87
4.2.2	Generalisierte Form des Zustandsraums	90

5	Strukturoptimale Regelung omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke	93
5.1	Regelungstechnische Formulierung des Problems	94
5.1.1	Entkopplung von ebener Bewegung und Rekonfiguration	94
5.1.2	Singularitäten und Stellgrößenbeschränkungen	98
5.2	Reglersynthese über virtuelle Potentialfelder	100
5.2.1	Gütekriterium und Superpositionsprinzip	100
5.2.2	Singularitätsvermeidung durch vollständige Zustandsrückführung	102
5.2.3	Eigenschaften potentialfeldbasierter Regler	108
5.3	Reglersynthese über Modellprädiktion	111
5.3.1	Modellprädiktive Regelung – Struktur und Eigenschaften	111
5.3.2	Gütekriterium und Stabilität des modellprädiktiven Reglers	114
5.3.3	Optimierung nach Pontryagin	119
5.4	Reglersynthese bei Reglerumschaltung	122
5.4.1	Auflösung von Singularitäten durch Wechsel der Koordinatenbasis	122
5.4.2	Stabilität und spezielle Moden des resultierenden Reglers	124
II	Implementierung & Evaluierung	127
6	Implementierung und Versuchsdurchführung	129
6.1	Aufbau und Eigenschaften des Versuchsträgers	129
6.1.1	Konzeption der Experimente	129
6.1.2	Hardwarespezifikation	131
6.1.3	Strukturierung der Softwaremodule	132
6.1.4	Auslegung des Referenzreglers	134
6.2	Versuchsdurchführung am Beispiel des Referenzreglers	135
6.2.1	Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte	135
6.2.2	Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie	141
6.2.3	Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel	143
7	Evaluierung der Versuchsergebnisse	149
7.1	Charakterisierung des Potentialfeld-Reglers	149
7.1.1	Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte	149
7.1.2	Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie	152
7.1.3	Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel	157
7.2	Charakterisierung des modellprädiktiven Reglers	160
7.2.1	Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte	160
7.2.2	Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie	162
7.2.3	Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel	164
7.3	Charakterisierung des Reglers mit Reglerumschaltung	167
7.3.1	Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte	167
7.3.2	Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie	170
7.3.3	Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel	172
8	Abschließende Betrachtung	175
8.1	Vergleich der Regelungsansätze und Einordnung in den Anwendungskontext	175
8.2	Zusammenfassung und Ergebnis der Arbeit	178

III Anhang	181
A Erläuterungen zu Modellierung und Einsatz quasi-omnidirektionaler Fahrwerke	183
A.1 Modellierung als Parallelkinematik	183
A.2 Modellierung nach Descartes' Prinzip der Bewegung starrer Körper	183
A.3 Modellierung auf Basis der kinematischen Bindungen	184
A.4 Modellierung zur Entkopplung von Fahrwerks- und Roboterregelung	185
A.5 Überblick und Anforderungen an die Regelung quasi-omnidirektionaler Fahrwerke . . .	186
A.6 Einsatzbereiche quasi-omnidirektionaler Fahrwerke	188
B Herleitung der Rollbedingung und non-slipping Bedingung	191
B.1 Gelenktes und ungelinktes Standardrad (S)	191
B.2 Castor-Rad (SO)	192
B.3 Mecanum- und Kugelrad (Me)	194
C Erläuterungen zur topologischen Analyse des Parameterraums	197
C.1 Der Momentanpol als Funktion der Fahrwerkskonfiguration	197
C.2 Momentanpol und resultierende Freiheitsgrade	203
C.3 Stetige Fortsetzung des Momentanpols auf der Einheitskugel	204
C.4 Analogie von Momentanpol und Twist	208
D Erläuterungen zur Stabilitätsbetrachtung (MPC)	211
D.1 Stabilität bei Zustandsrückführung ohne Singularitätsvermeidung	211
D.2 Stabilität bei Zustandsrückführung mit Singularitätsvermeidung	215
E Optimierung – analytische und numerische Ansätze	227
E.1 Pontryagin-Minimum-Prinzip	227
E.2 Potentialfeldansatz und Gradientenabstieg	228
E.3 Gradientenabstieg für Singularitätsvermeidung	231
F Tabellen Messdaten	235
F.1 Regelung über virtuelle Potentialfelder	235
F.2 Regelung über Modellprädiktion	237
F.3 Regelung über Reglerumschaltung	239
Literaturverzeichnis	241

Abkürzungsverzeichnis

CNC	Computer Numerical Control
COb	Care-O-bot [®]
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
EDV	Elektronische Datenverarbeitung
ETZ	Einfach toroidaler Zustandsraum
FHG	Fraunhofer Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V.
FTF	Fahrerloses Transportfahrzeug
FTS	Fahrerloses Transportsystem
ICM	Instantaneous Center of Motion (Momentanpol)
ICR	Instantaneous Center of Rotation (Momentanpol)
IFR	International Federation of Robotics
IPA	Institut für Produktionstechnik und Automatisierung
Me	Mecanum-Wheel
MPC	Model Predictive Control
MTZ	Multi-Basis toroidaler Zustandsraum
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NC	Numerical Control
PF	Potentialfeld
PFC	Potential Field Control
PMP	Pontryagin Minimum Prinzip
PR2	Personal Robot 2
S	Standardwheel
SO	Orientable Standardwheel with Castor-Offset (Castor-Wheel)
So	Orientable Standardwheel
SOB	Secur-O-bot [®]
UNECE	United Nations Economic Commission for Europe

Abbildungsverzeichnis

1.1	Anwendungen mit hohen Mobilitätsanforderungen	24
2.1	Einsatzdomänen mobiler Autonomer Systeme	30
2.2	Charakteristika von Laufmaschinen und Rädern	31
2.3	Basistypen von Rädern	31
2.4	Roboter- und Weltkoordinatensystem	33
2.5	Roboter- und Weltkoordinatensystem – vereinfachte Darstellung	34
2.6	Koordinaten der Antriebsmodule nach Denavit-Hartenberg	35
2.7	Wahl der internen Konfigurationsvariablen	36
2.8	Beispiele für holonome und nicht-holonome Beschränkungen	39
2.9	Parameter unterschiedlicher Radtypen	41
2.10	Momentanpol für Typ 1 quasi-omnidirektionale Kinematik	46
2.11	Verhalten des Momentanpols bei gegebener Trajektorie des Roboters	47
3.1	Wechselseitige Abhängigkeit der Transformation des Zustandsraums	51
3.2	Homogene Koordinaten und Riemannsche Zahlensphäre	52
3.3	Domänen der Polarkoordinaten auf der Einheitskugel	53
3.4	Abbildung der kombinierten Polarkoordinaten auf die Einheitskugel	55
3.5	Inverse Kinematik als Verkettung von Abbildungen	61
3.6	Zusammenhang zwischen Twist und Konfiguration eines Rades	62
3.7	Momentanpol in unterschiedlichen Bezugssystemen	64
4.1	Regeldifferenz bei Beschränkung auf eine Lösungsdomäne	76
4.2	Resultierende Pfade im Konfigurationsraum	77
4.3	Regeldifferenz für beide Lösungen auf der Kugel	78
4.4	Regeldifferenz beider Lösungen bei Abbildung in den euklidischen Raum	79
4.5	Pfade mit Poldurchgang in Fahrwerksebene und Kugeloberfläche	81
4.6	Regeldifferenzen beider Lösungen im euklidischen Raum mit Poldurchgängen	82
4.7	Kinematischen Singularitäten bei Abbildung auf Kugel und Zustandsraum	84
4.8	Varianz der Parameter beim Poldurchgang	87
4.9	Resultierende Pfade im Konfigurationsraum	89
4.10	Resultierende Pfade im Konfigurationsraum	91
5.1	Abschätzung der Energie bei gegebener Änderung des sphärischen Twists	99
5.2	Blockschaltbild einer Potentialfeld-Regelung	101
5.3	Blockschaltbild des Systems mit nichtlinearer Zustandsrückführung	103
5.4	Nichtlineare Zustandsrückführung: resultierende Potentialfelder	104
5.5	Höhenlinien der gesamten Lyapunov-Funktion	107
5.6	Lyapunov-Funktion mit lokalen Minima	109
5.7	Qualitative Darstellung der Systemtrajektorien für PFC und MPC	112
5.8	Schematische Darstellung eines modellprädiktiven Reglers	113
5.9	Erste Ableitung des Gütekriteriums über (φ, θ)	117

5.10	Niveaulinien zu $J_H(\cdot)$ und $\Phi(\cdot)$ für eine kritische Konfigurationen	118
5.11	Resultierender Bereich asymptotischer Stabilität für den MP-Regler	119
5.12	Kritische Systemtrajektorien bei Optimierung nach Pontryagin	122
5.13	Schaltgrenzen und Koordinatenraster nach Basiswechsel	123
5.14	Schaltfreie, global asymptotisch stabile Einzugsbereiche	125
5.15	Systemtrajektorien in der Nähe der Schaltgrenze	126
6.1	Versuchsträger und Care-O-bot [®] 3	130
6.2	Schematische Darstellung von mobiler Basis und Radmodulen	131
6.3	Überblick Steuerungsstruktur des Care-O-bot [®] 3	132
6.4	Blockschaltbild der Regelung auf Fahrwerksebene	133
6.5	Blockschaltbild der Regelung auf Radmodulebene	135
6.6	Sprungantwort des Radmodulreglers bei Einheitssprung in $v_{wr,x}^r$	136
6.7	Sprungantwort des Radmodulreglers bei Einheitssprung in $v_{wr,y}^r$	137
6.8	Trajektorie des geregelten Systems	138
6.9	Sprungantwort des Radmodulreglers bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	139
6.10	Rekonfiguration über invalide Trajektorie	140
6.11	Trajektorie des geregelten Systems und Ausmaß der Verletzung der n.h. Bindungen	141
6.12	Verhalten des Radmodulreglers bei kritischer Trajektorie	142
6.13	Trajektorie des geregelten Systems und Ausmaß der Verletzung der n.h. Bindungen	143
6.14	Sollwerte und resultierende Trajektorie des geregelten Systems im toroidalen Z-Raum	144
6.15	Histogramme charakteristischer Werte über vollständige Grundgesamtheit	145
6.16	Histogramme charakteristischer Werte – Intervallbezogen	146
6.17	Box-Whisker Diagramm der charakteristischen Größen für den Radmodulregler	147
7.1	Sprungantwort des potentialfeldbasierten Reglers (PFC) bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	150
7.2	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	151
7.3	Trajektorien des PF-Reglers bei kritischer Sollwertfolge	152
7.4	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei kritischer Sollwertfolge	153
7.5	Streuung des Momentanpols bei kritischer Sollwertfolge	154
7.6	Trajektorien des PF-Reglers im toroidalen Zustandsraum bei kritischer Sollwertfolge	155
7.7	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei kritischer Sollwertfolge	156
7.8	Trajektorie der geregelten Systeme (PFC, Descartes) im toroidalen Zustandsraum	158
7.9	Box-Whisker Diagramme für PFC und Referenzregler	159
7.10	Sprungantwort des modellprädiktiven Reglers (MPC) bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	161
7.11	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	161
7.12	Trajektorien des MP-Reglers bei kritischer Sollwertfolge	163
7.13	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei kritischer Sollwertfolge (MPC)	163
7.14	Streuung des Momentanpols bei kritischer Sollwertfolge (MPC)	164
7.15	Trajektorie der geregelten Systeme (MPC, Descartes) im toroidalen Zustandsraum	165
7.16	Box-Whisker Diagramme für MPC und Referenzregler	166
7.17	Sprungantwort des modellprädiktiven Reglers mit Basiswechsel bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	168
7.18	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Einheitssprung in ω_{wr}^r	169
7.19	Trajektorien des MP-Reglers mit Basiswechsel bei kritischer Sollwertfolge	171
7.20	Verlauf der Konfigurationsvariablen bei kritischer Sollwertfolge (MPC mit Basiswechsel)	171
7.21	Streuung des Momentanpols bei kritischer Sollwertfolge (MPC mit Basiswechsel)	172
7.22	Trajektorie des geregelten Systems (MPC mit Basiswechsel) im toroid. Z-Raum	173
7.23	Box-Whisker Diagramme für MPC mit Basiswechsel und Referenzregler	174

8.1	Box-Whisker Diagramme der vier Regelungskonzepte	176
8.2	Anwendungsbeispiele – Teleoperation und mobile Manipulation mit Care-O-bot [®] 3	178
A.1	NASA Marsrover (1997 bis 2011)	188
A.2	Beispiele für Offroadfahrzeuge mit unabhängig gelenkten Rädern	189
A.3	Serviceroboter für das private Umfeld mit unabhängig gelenkten Rädern	190
B.1	Robotertwist im Bezugssystem des Standardrades	192
B.2	Aus Rotation resultierende Geschwindigkeiten im Bezugssystem des Castor-Rades	193
B.3	Geschwindigkeitsvektoren für das Mecanum-Rad	194
C.1	Lösungsdomänen des Momentanpols	198
C.2	Momentanpol für Ackermann- und Differentialkinematik	203
C.3	Momentanpol für omni- und Typ 2 quasi-omnidirektionale Kinematik	204
D.1	Regionen unterschiedlicher Konvergenz in der (φ, θ) -Ebene	219
D.2	Niveaulinien zu $\dot{J}_{II}(\cdot)$ für zwei kritische Beispielfiguren	221
D.3	Bestrafung des Endzustandes im Einzugsbereich des MP-Reglers	222

Tabellenverzeichnis

2.1	Fahrwerkstypen: Vorteile, Nachteile und Einsatzbereiche	32
2.2	Beschreibung des Fahrwerks: Variablen	37
2.3	Beschreibung des Fahrwerks: Parameter	37
2.4	Kinematische Fahrwerksklassen	43
6.1	Kenngrößen des Referenzreglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung	139
6.2	Kenngrößen des Referenzreglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung	142
6.3	Statistische Kenngrößen des Referenzreglers bei Dauerbetrieb	148
7.1	Potentialfeldbasierter Regler: Untersuchte Parametersets	149
7.2	Kenngrößen des PF-Reglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung	151
7.3	Kenngrößen des PF-Reglers bei kritischem Sollwertverlauf in primärer Lösungsdomäne	153
7.4	Kenngrößen des PF-Reglers bei kritischem Sollwertverlauf im vollständigen Konf.-Raum	156
7.5	Kenngrößen des MP-Reglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung	160
7.6	Kenngrößen des MP-Reglers bei kritischem Sollwertverlauf	162
7.7	Modellprädiktiver Regler mit Basiswechsel: Untersuchte Parametersets	167
7.8	Kenngrößen des MP-Reglers mit Basiswechsel bei Beaufschlagung mit Einheitssprung	169
7.9	Kenngrößen des MP-Reglers mit Basiswechsel bei kritischem Sollwertverlauf	170
8.1	Charakteristik der untersuchten Regelungskonzepte	175
A.1	Ausgewählte Ansätze zur Modellierung und Regelung von Roboterfahrwerke	187
C.1	Analogie zwischen Momentanpol und Twist: Fallunterscheidungen	210
F.1	Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 1) bei Dauerbetrieb	235
F.2	Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 2) bei Dauerbetrieb	235
F.3	Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 3) bei Dauerbetrieb	236
F.4	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC, Set 1	237
F.5	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC, Set 2	237
F.6	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC, Set 3	238
F.7	Modellprädiktiver Regler: Untersuchte Parametersets	238
F.8	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC mit Basiswechsel, Set 1	239
F.9	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC mit Basiswechsel, Set 2	239
F.10	Statistische Kenngrößen bei Dauerbetrieb – MPC mit Basiswechsel, Set 3	240

Teil I

Analyse & Synthese

1 Einführung

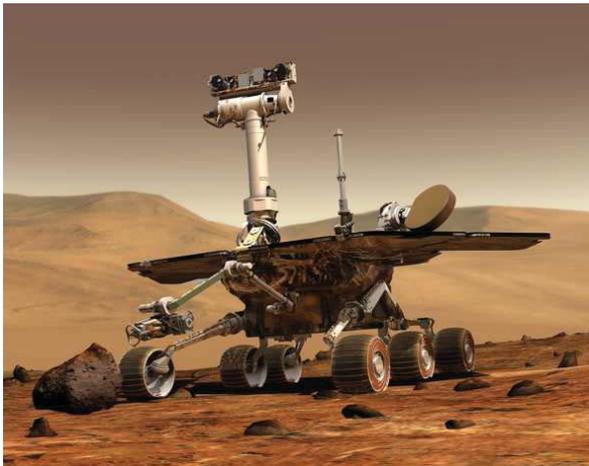
1.1 Motivation und Ziel der Arbeit

Mitte des letzten Jahrhunderts erreichte die industrielle Automatisierung eine neue Dimension. Die Erfindung des Transistors 1947 und der damit einhergehende sprunghafte Anstieg günstig verfügbarer Rechenkapazität machte die elektronische Verwaltung enormer Datenmengen sowie die Konstruktion intelligenter, mechatronischer Systeme möglich. In gleicher Weise wie sich Verwaltungsprozesse durch die aufkommende elektronische Datenverarbeitung (EDV) stark veränderten, revolutionierte die Einführung von NC- und CNC-Maschinen in den 50er Jahren die Fabrikautomatisierung (World-Information.org). Einen frühen Höhepunkt dieser Entwicklungen stellte das Aufkommen der ersten Industrieroboter dar. In den folgenden Jahrzehnten gewannen Roboter in der industriellen Produktion schnell an Bedeutung. Kontinuierliche Weiterentwicklung ließ die Systeme schneller, stärker, genauer und günstiger werden.

Derzeit befindet sich die Robotik, angesichts geringer Wachstumszahlen in den letzten Jahren (Hägele 2009), jedoch in einem weitreichenden Wandlungsprozess. Während Roboter bisher meist in separaten Zellen, getrennt von menschlichen Arbeitskräften ihren Dienst verrichten, sollen zukünftige Systeme eng mit dem Menschen zusammenarbeiten. Statt menschliche Arbeitskraft zu ersetzen sollen Roboter in Zukunft den Menschen unterstützen. Die Entwicklung geht aber noch weiter: Roboter verlassen ihre Montagezellen und werden Teil unseres alltäglichen Lebens (Schraft u. a. 2004). So werden bereits heute auf Messen oder in Museen Roboter als Lotse oder Attraktion eingesetzt (Thrun u. a. 2000; Graf u. a. 2000; Siegart u. a. 2003). Auch die Studie World Robotics 2009 (Hägele 2009) des IFR statistical department prognostiziert, dass der Markt für Serviceroboter entgegen dem Trend bei Industrierobotern weiter wächst.

Solche Serviceroboter teilen sich ihren Arbeitsraum unmittelbar mit dem Menschen und müssen sich dementsprechend, im Gegensatz zu Industrierobotern, an menschliche Gewohnheiten anpassen und in Alltagsumgebungen einfügen. Daraus ergeben sich hohe Anforderungen an die Autonomie, Robustheit und Flexibilität solcher Systeme (Graf u. a. 2004). Darüber hinaus spielt die Akzeptanz des Roboters bei den mit ihm interagierenden Personen eine entscheidende Bedeutung. Hier kommt sowohl der Gestaltung von Form, Funktion und Bedienung des Roboters (Kawamura u. a. 1995; Oestreicher und Sverinson Eklundh 2006; Heerink u. a. 2006) als auch der unterbewussten Wahrnehmung des Roboters durch den Menschen (Nomura u. a. 2006; Ho u. a. 2008) erhebliche Bedeutung zu. Neben diversen anderen Punkten, wie dem Design der äußeren Hülle, den Ein- und Ausgabemodalitäten, etc. spielt die Mobilität des Roboters und damit seine Fähigkeit, sich menschlichen Bewegungsmustern anzupassen, eine wesentliche Rolle.

Vor diesem Hintergrund erscheint die Flexibilität und Mobilität bisheriger, meist auf Differential- oder Ackermann-Kinematik basierender Roboterfahrwerke unzureichend. Neben der mangelnden Anpassungsfähigkeit solcher Systeme an menschliche Bewegungsmuster (Connette u. a. 2008a) erweist sich die geringe Manövrierbarkeit insbesondere bei Manipulationsaufgaben, welche eine Bewegung des gesamten Roboters erfordern, wie z.B. das Öffnen einer Tür, als nachteilig (Holmberg und Khatib 2000). Ebenso leidet die Manövrierbarkeit der Systeme in engen Umgebungen, wie zum Beispiel einem unaufgeräumten Kinderzimmer. Langfristig versprechen nur anthropomorphe oder aus der Tierwelt entlehnte Bewegungsapparate, wie Honda's Asimo (Sakagami u. a. 2002) oder Boston Dynamic's BigDog (Raibert u. a. 2008), das notwendige hohe Maß an Flexibilität und Mobilität zu bieten. Derzeit überwiegen allerdings die Nachteile dieser Systeme hinsichtlich Energieeffizienz, Traglast und Robustheit bzw. technischem Aufwand (Abschnitt 2.1.1), sodass solche System für praktische Anwendungen derzeit nicht infrage kommen.



(a) Künstlerische Darstellung des Opportunity Mars Exploration Rover (NASA Jet Propulsion Laboratory 2003).



(b) Demonstration des Greifens einer Flasche durch Care-O-bot[®] 3 im Labor des Fraunhofer IPA.

Abbildung 1.1: Serviceroboter in verschiedene Anwendungen mit hohen Anforderungen an die Mobilität der Systeme

Ein mittelfristig gangbarer Weg ist der Einsatz komplexer Fahrwerkskinematiken oder spezieller Räder, wie Mecanum-Räder (Ilon 1972). Solche, häufig holonome, omnidirektionale Systeme verbinden große Flexibilität und Mobilität bei ebener Bewegung mit einem hohen Maß an Robustheit und Betriebssicherheit. Bei Anwendung in unwegsamem Gelände mit unebenem Untergrund oder im Privathaushalt mit Teppichen oder Türschwellen erweisen sich spezielle Räder allerdings als ungeeignet (Holmberg und Khatib 2000). Aktuelle Serviceroboter, die auf solche Anwendungen ausgelegt sind, verfügen daher meist über nicht-holonome, omnidirektionale Fahrwerke mit unabhängig gelenkten und unabhängig angetriebenen Rädern. Beispiele dafür sind die von der NASA zur Erkundung des Mars entwickelten Explorationssysteme (Bickler 1998; Erickson 2006) Sojourner, Spirit und Opportunity (Abb. 1.1(a)) oder die Serviceroboter Rollin' Justin (Fuchs u. a. 2009), PR2 (Wyrobek u. a. 2008) sowie der im Rahmen dieser Arbeit betrachtete, am Fraunhofer IPA entwickelte (Reiser u. a. 2009) Care-O-bot[®] 3 (Abb. 1.1(b)).

Solche nicht-holonome, omnidirektionale oder quasi-omnidirektionale Fahrwerke erlauben die weitgehend freie Überlagerung und Kombination der elementaren Bewegungen „Vorwärts“, „Seitwärts“, „Rotation“ und bieten damit eine hohe Flexibilität. Sie sind allerdings durch das Auftreten von singulären Konfigurationen gekennzeichnet (Thuilot u. a. 1996; Lauria u. a. 2006b; Connette u. a. 2008b). Zudem sind solche Systeme inhärent überaktuiert, wobei ihre Aktoren gekoppelt sind. Das macht eine exakte Koordination unabdingbar (Reister und Unseren 1993). Dies geht in den meisten Fällen mit einer engen Kopplung von Bahnplanung und -regelung einher (Thuilot u. a. 1996; Robuffo Giordano u. a. 2009). Ob in diesem Kontext die volle Flexibilität des Fahrwerks dann ausgenutzt werden kann, hängt letztlich stark von der Modellierung des Konfigurationsraums bzw. der Regelung des resultierenden Systems ab.

Im Rahmen dieser Arbeit werden mehrere Ansätze zur kinematischen Modellierung und Regelung nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke entwickelt und untersucht. Vorrangige Ziele sind dabei zum einen die Nutzung eines möglichst großen Anteils des zulässigen Konfigurationsraums und damit die Ausnutzung der Flexibilität nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke. Zum anderen soll eine möglichst weitgehende Unabhängigkeit von der übergeordneten Bahnplanung bzw. Bahnregelung erzielt werden. Dieser Punkt ist insbesondere im Kontext der modularen Integration in ein komplexes, funktionales Gesamtsystem relevant.

1.2 Einordnung und Abgrenzung der Arbeit

Erste formalisierte Methoden zur Modellierung und Klassifizierung der Kinematik sowie zur Regelung mobiler Roboter wurden Ende der 80'er (Muir und Neuman 1986; Alexander und Maddocks 1989) entwickelt. Dabei wurde in (Muir und Neuman 1986) und später in (Kim u. a. 2004) das Fahrwerk als parallele Kinematik modelliert, während (Alexander und Maddocks 1989) direkt Descartes' Prinzip der Festkörperbewegung einsetzte. Das Ziel war die Formulierung einer inversen Kinematik, die eine unmittelbare Abbildung von Geschwindigkeitskommandos auf den Konfigurationsraum des Fahrwerks erlaubt. Diesen Ansätzen ist allerdings zu eigen, dass sie die nicht-holonomen Bindungen und deren Nullraum – der eng mit der Lenkung des Fahrwerks verknüpft ist – nur unzureichend abbilden können. Erst durch Entwicklung dynamischer Modelle (Moore und Flann 2000) und Einbeziehung der Effekte im Rad-Boden-Kontakt, wie in der Automobilindustrie üblich (Grip u. a. 2009; Macek u. a. 2007; Economou u. a. 2003) wird die Formulierung einer solchen inversen Kinematik unmittelbar möglich. Der Preis dafür ist die implizite Hin-nahme der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen. Das ist zwar für Offroad- und Outdoor-Fahrzeuge mit hohen Massen und Geschwindigkeiten ein sinnvoller, für die Modellierung von Servicerobotern aber eher ungeeigneter Ansatz. Hier sollen die nicht-holonomen Bindungen so gut wie möglich eingehalten werden, um eine hohe Laufruhe und geringen Verschleiß zu gewährleisten.

Mitte der 90'er legten Campion und Andere in einer Reihe grundlegender Arbeiten (Campion u. a. 1993; Betourne und Campion 1996; Campion u. a. 1996; Hashimoto u. a. 1999) unter expliziter Einbeziehung der nicht-holonomen Bindungen die Basis für eine systematische, formalisierte Beschreibung der Kinematik mobiler Roboter. Ein Ergebnis dieser Systematik ist die Aufteilung der Freiheitsgrade des Fahrwerks in Freiheitsgrade der Lenk- bzw. Nullraumbewegung und Freiheitsgrade der Rekonfiguration in Weltkoordinaten. Alle sinnvollen, steifen Fahrwerke lassen sich anhand dieser Freiheitsgrade in fünf Klassen (Abschnitt 2.2.2) einteilen. Mit gewissen Adaptionen lassen sich in ähnlicher Weise auch Fahrwerke mit speziellen Rädern (Lauria u. a. 2006a), unteraktuierte Fahrwerke (Mori u. a. 2002) oder Fahrwerke mit variablem Radstand (Robuffo Giordano u. a. 2009) modellieren.

Die Modellierung nach Campion legt dabei die physikalische Interpretation der Zustandsvariablen von nicht-holonomen, omnidirektionalen Fahrwerken noch nicht eindeutig fest. Eine intuitive Wahl für die Zustandsvariablen ist der Momentanpol der ebenen Bewegung (Abschnitt 2.2.3), repräsentiert durch kartesische oder sphärische bzw. polare Koordinaten (Reister und Unseren 1993; Betourne und Campion 1996). Varianten dieser Repräsentation sind die Darstellung über homogene Koordinaten (Brandstötter 2007; Ferland u. a. 2010) oder die Verwendung des ebenen Twists in sphärischen Koordinaten (Connette u. a. 2008b). Eine verwandte, topologisch jedoch leicht verschiedene Variante ist die Zuordnung dieser Zustandsvariablen zu zwei sogenannten "Master-Wheels" (Burke und Durrant-Whyte 1993). Allen diesen Darstellungen sind allerdings eine Reihe von wesentlichen und parameterabhängigen Singularitäten zu eigen (D'Andréa-Novel u. a. 1995; Robuffo Giordano u. a. 2009; Connette u. a. 2009). Eine Möglichkeit, diese Singularitäten zu vermeiden, ist, die betroffenen Bereiche des Geschwindigkeitsraums bereits während der Bahnplanung auszusparen (Thuilot u. a. 1996; Brandstötter 2007; Robuffo Giordano u. a. 2009). Dieser Ansatz hat jedoch zwei entscheidende Nachteile. Zum einen wird damit die Flexibilität des Fahrwerks eingeschränkt. Das erscheint besonders ungünstig, da die größere Flexibilität ja der Hauptgrund ist, für welchen die höhere Komplexität des Fahrwerks in Kauf genommen wird. Zum anderen wird die Ansteuerung des Fahrwerks damit strikt der Navigation untergeordnet.

Vor dem Hintergrund der Servicerobotik, insbesondere der Integration der Fahrwerksregelung in einen komplexen Roboter mit Manipulationsfähigkeiten, wie den Care-O-bot[®] 3, kann sich eine solch feste Einbindung allerdings als Nachteil erweisen. Im Gegensatz zu mobilen Systemen, welche reine Transportaufgaben übernehmen, muss es bei Servicerobotern möglich sein, die Fahrwerkskinematik im Kontext unterschiedlicher Aufgaben und damit unterschiedlicher funktionaler Komponenten zu nutzen. Daher ist

es wünschenswert, Softwarekomponenten und Regler als möglichst kleine, in sich abgeschlossene Module zu organisieren, die in verschiedenen funktionalen Komponenten integriert werden können. Dies kann adressiert werden, indem man eine Entkopplung der Fahrwerkskomponente von der Navigation durch Einführung eines unterlagerten Regelkreises (Connette u. a. 2010b; Dietrich u. a. 2011) ermöglicht. Damit ist je nach Regelungsverfahren in gewissem Maße auch eine Vergrößerung des verwendbaren Konfigurationsraums und damit der Flexibilität des Fahrwerks möglich.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zum einen solche kaskadierten Ansätze entwickelt und untersucht, die eine Modularisierung der Software erlauben. Dazu wird die Zustandsraumbeschreibung auf Basis des sphärischen Twists (Connette u. a. 2008b) auf ein solides Fundament gestellt und dergestalt erweitert, dass die rein parameterabhängigen Singularitäten aufgelöst werden. Dies betrifft insbesondere die Formulierung der direkten Kinematik (Clavien u. a. 2010). Dann werden Techniken aus dem Bereich der reaktiven Navigation auf die Problematik der Singularitätsvermeidung im unterlagerten Regelkreis übertragen. Untersucht wird in diesem Kontext insbesondere der Entwurf eines potentialfeldbasierten (PF) sowie eines modellprädiktiven Reglers (MPC) zur Vermeidung der Singularitäten. Motiviert wird dieses Vorgehen durch die Analogie der hier auftretenden unzulässigen Zonen im Arbeitsraum des Systems zu dem Auftreten von Hindernissen im Kontext der kollisionsfreien Bahnplanung für Manipulatoren und mobile Roboter (Latombe 2003; Laumond 1998).

Besonders interessant ist vor diesem Hintergrund der von Khatib in (Khatib 1986) entwickelte Potentialfeld-Ansatz (PF), da dieser globale Planung und reaktive Bahnanpassung verbindet. Mittlerweile ist eine Reihe von Arbeiten entstanden, die sich mit Einschränkungen (Koren und Borenstein 1991), Erweiterungen (Singh u. a. 1996) bzw. der Implementierung (Rimon und Koditschek 1992; Shimoda u. a. 2005) dieses Ansatzes beschäftigen.

Ein anderer Bereich, der sich mit ähnlichen Problemen befasst, ist die Regelung stark nichtlinearer, diversen Stellgrößenbeschränkungen unterliegender Systeme, wie sie z.B. häufig in der Verfahrenstechnik, bei der Regelung chemischer Reaktionen vorliegen. Vor diesem Hintergrund hat sich die Technik der modellprädiktiven Regelung (MPC) (Cutler und Ramaker 1980; Rawlings 2000; Findeisen und Allgöwer 2002; Camacho und Bordons 2007) entwickelt. Derzeit werden diese Verfahren verstärkt auch vor dem Hintergrund der Regelung mobiler Roboter untersucht. Ein interessantes Anwendungsfeld sind dabei Probleme aus dem Bereich der Schwarmrobotik (Xi und Baras 2007). Weitere Arbeiten untersuchen MPC-Ansätze vor dem Hintergrund der Hindernisvermeidung (Brooks u. a. 2009) und Bahnregelung (Klancar und Skrjanc 2007). Dennoch impliziert die Vermeidung der singulären Bereiche durch PF- oder MPC-Ansätze weiterhin eine Einschränkung der Flexibilität des Fahrwerks. Auch hier ist nicht der gesamte zulässige Arbeitsraum nutzbar.

Im Rahmen dieser Arbeit wird daher zum anderen eine erweiterte Zustandsraumdarstellung entwickelt und untersucht. Diese basiert auf der Bildung eines Atlas (Choset u. a. 2005) des vollständigen Konfigurationsraums durch lokal diffeomorphen Wechsel der Bezugssysteme. Den Ausgangspunkt für die Entwicklung dieser vollständigen Zustandsraumdarstellung bildet dabei die Darstellung der Roboterkonfiguration über den zuvor adaptierten, sphärischen Twist. Die entwickelte Zustandsraumdarstellung ist lokal diffeomorph zu den bisher eingeführten Zustandsraumdarstellungen, erlaubt aber erstmals die Beschreibung des gesamten zulässigen Konfigurationsraums. Umgesetzt wird dieser Ansatz durch Implementierung eines Reglers mit Reglerumschaltung (Liberzon 2003). So wird es möglich, alle zulässigen Zustände inklusive der singulären Bereiche aktiv anzusteuern und die volle Flexibilität des Systems zu nutzen.

1.3 Ausrichtung und Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in einem starken Anwendungskontext entstanden. So ist die Arbeit zu einem guten Teil durch die Erfahrungen (Connette u. a. 2008a) mit mobilen Robotern des Fraunhofer IPA motiviert. Bei der Durchführung von Feldversuchen zum Einsatz mobiler Roboter in Alltagsumgebungen zeichnete sich ab, dass Mobilität und Flexibilität im Rahmen der Mensch-Maschine-Interaktion eine erhebliche Bedeutung zukommen. Den technischen Rahmen bilden die Arbeiten an der Navigation und insbesondere der Regelung des nicht-holonomen, omnidirektionalen Fahrwerks des Care-O-bot[®] 3. Hier wurde im Laufe der letzten Jahre eine Reihe unterschiedlicher Ansätze getestet. So lehnte sich der erste für Care-O-bot[®] 3 entworfene Regler, mit dem dieser auf der Automatica 2008 vorgestellt wurde, stark an den in (Alexander und Maddocks 1989) geschilderten Ansatz, der auf Descartes' Prinzipien der Festkörperbewegung beruht, an. Im Laufe der Weiterentwicklung des Care-O-bot[®] 3 und dabei insbesondere der Umstellung auf ROS, welche eine stärkere Modularität der Steuerungssoftware nötig machte, wurden die an die Arbeiten von Campion (Campion u. a. 1996) angelehnten kaskadierten Verfahren (Connette u. a. 2009, 2010a, b) entworfen. Um die Flexibilität der Plattform gerade vor dem Hintergrund komplexer werdender Szenarien weiter zu steigern, wurden schließlich Ansätze entwickelt, die durch Reglerumschaltung den gesamten Arbeitsraum ausnutzen können.

Die vorliegende Arbeit ist bewusst komplementär zu den erwähnten Veröffentlichungen ausgerichtet. Während die bisherigen Veröffentlichungen einen starken experimentellen und in ihrer Auswertung empirischen Charakter haben, ist es das Ziel dieser Arbeit, die dort implementierten Ansätze auf ein solides theoretisches Fundament zu stellen und zu verallgemeinern. Dabei werden nicht nur die zugrunde liegenden Annahmen hergeleitet, sondern auch die resultierenden Gleichungen wie z.B. inverse und direkte Kinematik sowie deren Eigenschaften diskutiert. Dies geschieht in Form mathematischer Herleitungen. Auf die rigide Form mathematischer Beweise wird verzichtet. Dabei versucht die Arbeit, den Bogen zwischen Abstraktion und Verallgemeinerung sowie expliziter Angabe der resultierenden Gleichungen und exemplarischer Lösung zu schlagen. Es soll dem Leser ermöglicht werden, die untersuchten Ansätze mit geringem Aufwand auf beliebige nicht-holonome, omnidirektionale Fahrwerke zu übertragen.

Den Kern der Abhandlung bilden dementsprechend die eher theoretisch ausgerichteten Kapitel 3, 4 und 5. Dabei widmet sich Kapitel 3 den topologischen Eigenschaften der Abbildungen zwischen Konfigurationsraum, Geschwindigkeitsraum und dem für die Regelung verwandten Zustandsraum. Im Zentrum steht dabei die Untersuchung der Abbildungen auf stetige Differenzierbarkeit bzw. Diffeomorphie. Schritt für Schritt wird dazu die sphärische Repräsentation des ebenen Twists so adaptiert und erweitert, bis sie den Anforderungen einer Zustandsraumdarstellung nach Campion entspricht. Die resultierenden Gleichungen für inverse und direkte Kinematik werden anschließend so zerlegt, dass sie sich in singularitätsfreie, diffeomorphe Abbildungen und singularitätsbehaftete, lediglich lokal diffeomorphe Abbildungen einteilen lassen.

Kapitel 4 diskutiert auf Basis dieser Eigenschaften die Implikation für die Regelung. Das System wird auf Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit untersucht. Es wird gezeigt, wie durch den Entwurf eines geeigneten Beobachters der Einfluss der parameterabhängigen Singularitäten beseitigt werden kann. Schließlich wird gezeigt, dass sich durch Umschaltung zwischen Zustandsräumen, die bezüglich geeignet verschobener Koordinatensysteme definiert sind, ein Atlas des vollständigen Konfigurationsraums bilden lässt. Dies ist Voraussetzung für die Einbeziehung der singularären Bereiche in den Reglerentwurf.

Kapitel 5 diskutiert schließlich den Entwurf der Regler auf Basis von PF- und MPC-Ansätzen. Dabei werden die Ansätze weiterhin abstrakt für allgemeine Fahrwerks-Geometrien – beliebig viele lenkbare Räder an beliebigen Montagepunkten – untersucht. Für den potentialfeldbasierten Ansatz wird globale asymptotische Stabilität für Sollwerte außerhalb der singularären Bereiche bewiesen bzw. gezeigt, unter welchen

Voraussetzungen Stabilität im Kontext mit der Vermeidung der singulären Bereiche möglich ist. Für den modellprädiktiven Regler werden die Einzugsbereiche diskutiert bzw. der Einfluss der Singularitäten bzw. der verbotenen Bereiche auf diese Einzugsbereiche erläutert. Zusätzlich wird der Entwurf eines Reglers mittels Reglerumschaltung für den erweiterten Zustandsraum skizziert.

Die Kapitel 2 und 7 bilden den Rahmen für die theoretischen Betrachtungen. So erläutert Kapitel 2 detailliert Anforderungen und Eigenschaften unterschiedlicher Mobilitätskonzepte. Des Weiteren werden Bedeutung und Implikationen von nicht-holonomen Bindungen rekapituliert, die im Folgenden verwandte Notation definiert und der Momentanpol als eine mögliche geometrische Interpretation solcher Zwangsbedingungen eingeführt. Darüber hinaus gibt Kapitel 2 einen tieferen Einblick in die Modellierung und Klassifizierung nach Campion, die den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet. Kapitel 7 verknüpft die vorliegende Arbeit schließlich mit den zuvor erwähnten Veröffentlichungen zur Regelung von Care-O-bot[®] 3. Hier werden die zuvor diskutierten Verfahren für die konkrete Kinematik des Care-O-bot[®] 3 implementiert. Da die zuvor implementierten Regler über einen langen Zeitraum entwickelt und evaluiert wurden – mit Wechsel von Framework und Software-Struktur – wurden dazu die bestehenden Ansätze neu implementiert. Des Weiteren wurde eine Simulations-Umgebung erstellt, welche die Durchführung reproduzierbarer Versuche ermöglicht und einen qualitativen und quantitativen Vergleich der unterschiedlichen Ansätze erlaubt.

Ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit ist der Anhang. Hier werden zum einen ergänzende Informationen zu den unterschiedlichen Kapiteln bereitgestellt, die dem Leser das Nachschlagen wichtiger Sekundärliteratur ersparen sollen. Zum anderen sind hier viele Herleitungen und rechnerische Zwischenschritte zu finden, welche die Lesbarkeit des Haupttextes zu stark beeinträchtigt hätten oder zu stark von der wesentlichen Kernaussage abgelenkt hätten. So findet sich z.B. in Anhang A eine detaillierte Auflistung und Klassifizierung der im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Ansätze zur Modellierung von Fahrwerkskinematiken.

Ebenso wurde zur Verbesserung der Lesbarkeit vielen Kapiteln eine kurze Zusammenfassung ähnlich einem Abstract voran gestellt. Wesentliche Zwischenergebnisse oder Resultate eines Abschnittes werden zusätzlich durch farbige Unterlegung hervorgehoben.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen radbasierter Antriebskonzepte zusammengefasst. Abschnitt 2.1 gibt zunächst einen kleinen Überblick über die Vielzahl unterschiedlicher Antriebskonzepte für mobile Roboter und erläutert knapp die wesentlichen Unterschiede zwischen radbasierten und biomimetischen Antriebskonzepten (Abschnitt 2.1.1). Dann werden die im Folgenden verwendeten Konventionen hinsichtlich der Benennung der verwendeten Koordinatensysteme und relevanten Parameter für quasi-omnidirektionale Systeme eingeführt (Abschnitt 2.1.2).

Der zweite Teil des Kapitels (Abschnitt 2.2) widmet sich den mathematischen Grundlagen der kinematischen Beschreibung von Fahrwerken. Zunächst wird knapp auf nicht-holonome Bindungen in Abgrenzung zu holonomen Bindungen im Allgemeinen eingegangen (Abschnitt 2.2.1). Dabei wird insbesondere die mathematisch formale Beschreibung dieser Zwangsbedingungen eingeführt. Darauf aufbauend werden die Arbeiten von Campion zur Modellierung und Klassifizierung von Fahrwerkskinematiken wiederholt (Abschnitt 2.2.2). Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Modellierung nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke. Einige grundlegende Herleitungen zu den Zwangsbedingungen sind im Detail in Anhang B wiedergegeben. Abschließend wird die Bedeutung des Momentanpols als geometrische Interpretation der nicht-holonomen Bindungen erläutert (Abschnitt 2.2.3). Dieser Abschnitt bildet Grundlage und Überleitung zum nächsten Kapitel 3, in welchem die topologischen Eigenschaften der momentanpol- bzw. twistbasierten Zustandsraumdarstellung diskutiert werden.

2.1 Konzepte und Konventionen

2.1.1 Antriebskonzepte und Einsatzbereiche mobiler Roboter

Mobile autonome Systeme sind mittlerweile in die unterschiedlichsten Umgebungen vorgedrungen. Die Anwendungen reichen von Tauchrobotern für die Inspektion von Ölpipelines oder Schiffswracks über turbinengetriebene Luftfahrzeuge für die militärische Aufklärung bis hin zu Systemen für die Inspektion von Abwasserrohren (Fig. 2.1). Entsprechend vielfältig sind auch die über die letzten Jahrzehnte entwickelten Antriebskonzepte. So sind Düsentriebwerke, mehrrotorige Helikopter, kleine Zeppeline oder die Natur imitierende, zentimetergroße, insektenartige Flugroboter nur einige Beispiele. Bei landbasierten Systemen reichen die Ansätze von Rad- oder Kettenfahrwerken bis hin zu biomimetischen Systemen, wie kriechenden, raupenartigen bzw. schlangenähnlichen Robotern und menschenähnlichen Laufmaschinen (Siegwart und Nourbakhsh 2004).

Dabei sind Radfahrwerke – wegen ihres effizienten und robusten Betriebs – und Laufmaschinen – wegen ihrer Flexibilität – von besonderer Bedeutung. So ist z.B. das Überwinden eines schmalen, aber tiefen Grabens oder das Erklettern eines kleinen Hindernisses für einen Menschen in der Regel kein Problem. Andererseits zeigt Todd in (Todd 1985), dass die Effizienz von Radfahrwerken auf ebenem und festem Untergrund um ein bis zwei Größenordnungen höher ist als die von Laufmaschinen. Auf weichem Untergrund sind radbasierte Fahrwerke dagegen ähnlich effizient wie Laufmaschinen (Fig. 2.2(b)). Interessant

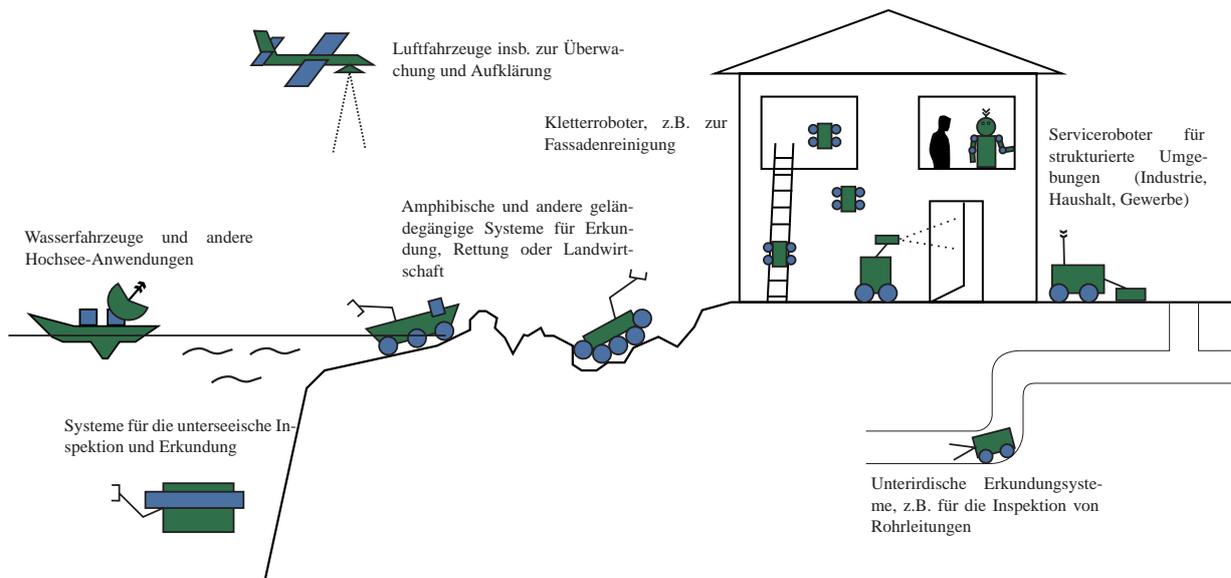


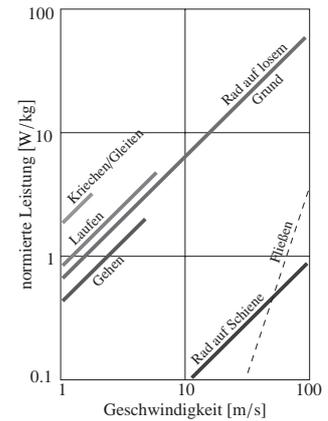
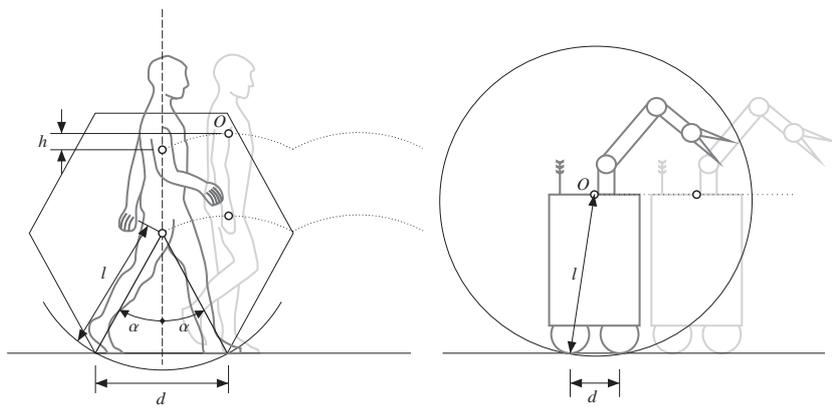
Abbildung 2.1: Einsatzdomänen mobiler autonomer Systeme nach Hägele (Hägele 2008); Anwendungen reichen von unterseeischer Exploration bis zu fliegenden Überwachungssystemen

ist in diesem Zusammenhang die Beobachtung, dass der zweibeinige Gang als Abrollen eines Polygons beschrieben werden kann (Fig. 2.2(a)), also mit dem Abrollen eines Rades verwandt ist. Siegart und Nourbakhsh bringen die Effizienz von Laufmaschinen und Radfahrwerken auf eine einfache Formel.

„In effect, the efficiency of wheeled locomotion depends greatly on environmental qualities, [...], while the efficiency of legged locomotion depends on the leg mass and body mass, both of which the robot must support at various points in a legged gait.“ (Siegwart und Nourbakhsh 2004)

Neben der höheren Effizienz bei Bewegung in strukturierter Umgebung weisen Radfahrwerke noch einige weitere praktische Vorteile auf: Sie sind mechanisch weniger komplex und damit in der Regel günstiger in Herstellung und Wartung; sie sind – bis auf wenige Ausnahmen wie z.B. die Mobilitätshilfe Segway (Kühn und Grabolle 2009) – intrinsisch stabil und verbrauchen daher in Ruhe keine Energie; das ist auch einer der Gründe für die vergleichsweise günstige Skalierung des Energieverbrauchs bei wachsendem Gewicht. Gerade in der Nähe des Menschen und den von ihm geschaffenen Strukturen wie Gebäuden und Straßen haben radbasierte Antriebskonzepte damit erhebliche Vorteile. Darüber hinaus überwiegen insbesondere in industriellen und gewerblichen Umgebungen – aus Gründen der barrierefreien Zugänglichkeit oder einfacheren Bewirtschaftung mit Flurförderzeugen – ebene Böden bzw. befahrbare Rampen oder Aufzüge. Entsprechend kommen auch in nahezu allen kommerziell eingesetzten Systemen, wie zum Beispiel fahrerlosen Transportsystemen (FTS) bzw. fahrerlosen Transportfahrzeugen (FTF) radbasierte Fahrwerke zum Einsatz. Ein Beispiel für eine Ausnahme und einen Überblick über spezielle Fahrwerke, die auch das Befahren von Treppen erlauben, gibt Staab in (Staab 2009). Und obwohl im privaten Umfeld durch die Notwendigkeit Treppen zu steigen wohl langfristig der Einsatz von Laufmaschinen unumgänglich ist, überwiegen die technischen Vorteile von Radfahrwerken derzeit noch so stark, dass auch hier mittelfristig nur radbasierte mobile Roboter infrage kommen.

Angesichts der Vielzahl unterschiedlicher Anwendungen von Flurförderzeugen und mobilen Robotern hat sich auch eine große Zahl unterschiedlicher Fahrwerksvarianten entwickelt. Dabei basieren alle diese Varianten im Wesentlichen auf der Kombination von 4 grundlegenden Radtypen (Abb. 2.3): Standardräder, Castor-Räder, Mecanum-Räder oder Kugelräder. Wenn nicht explizit anders erwähnt, sind im Folgenden



(a) Geometrischer Vergleich von zweibeinigem Gang und Fahr-/Rollbewegung nach Siegart und Nourbakhsh (Siegwart und Nourbakhsh 2004)

(b) Effizienz unterschiedlicher Antriebskonzepte (Todd 1985)

Abbildung 2.2: Charakteristische Unterschiede und Ähnlichkeiten von Laufmaschinen und radbasierten Fahrwerken (links: geom. Interpretation; rechts: Energieeffizienz)

mit Räder immer Standardräder gemeint. Durch Verwendung von Kombinationen dieser Radtypen als aktive Lenk- oder Antriebsräder sowie passive Stützrollen lassen sich im Prinzip unbegrenzt viele unterschiedliche Fahrwerke konstruieren. Jedoch lassen sich nach (Campion u. a. 1996) alle diese Fahrwerke, anhand ihrer kinematischen Eigenschaften, fünf Basistypen zuordnen. Man unterscheidet dabei nach dem Grad der Lenkbarkeit (degree of steerability, δ_s) und dem Grad der Mobilität (degree of mobility, δ_m) zwischen Ackermann-Kinematik, wie sie in PKWs eingesetzt wird, Differentialantrieb, wie er bei der überwiegenden Mehrheit mobiler Roboter zum Einsatz kommt, quasi-omnidirektionalen Fahrwerken von Typ 1 und Typ 2 sowie omnidirektionalem Fahrwerk. Dabei sind Bezeichnungen für die einzelnen Fahrwerkstypen teilweise domänenspezifisch. So subsumiert man z.B. im Zusammenhang mit fahrerlosen Transportsystemen die letzten drei Typen häufig unter dem Begriff „flächenbewegliche Fahrwerke“, während in (Siegwart und Nourbakhsh 2004) von „Two-Steer“, „Omni-Steer“ und „Omnidirectional“ gesprochen wird. Im Rahmen dieser Arbeit sollen die oben eingeführten Begriffe gelten. Eine detaillierte Analyse der kinematischen Eigenschaften sowie Definitionen der Kenngrößen δ_s und δ_m sind in Abschnitt 2.2.2 gegeben. Als Faustformel gilt, dass ein Fahrwerk – kinematisch betrachtet – umso flexibler ist, je höher der Grad der Manövrierbarkeit (degree of maneuverability, $\delta_M = \delta_m + \delta_s$).

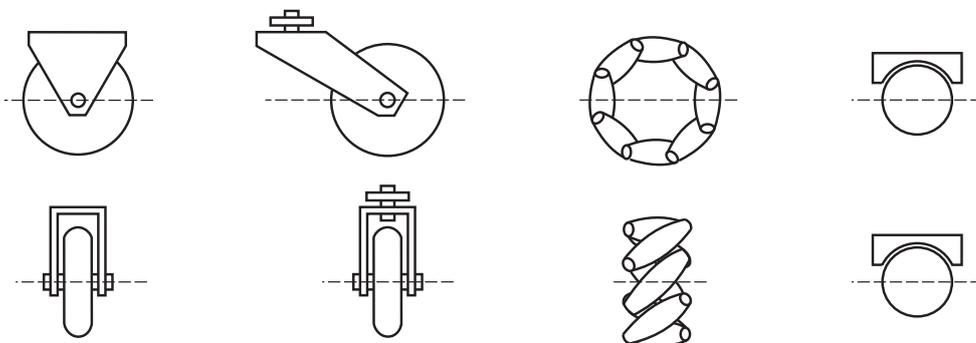


Abbildung 2.3: Basistypen von Rädern (Siegwart und Nourbakhsh 2004), welche kinematisch grundlegend verschieden sind. Von links nach rechts: Standardrad (im Folgenden Rad), Castor-Rad, Mecanum-Rad, Kugelrad

Für die Anwendbarkeit eines Fahrwerks in einem bestimmten Umfeld spielen neben den kinematischen noch eine Reihe weiterer technischer und mechanischer Eigenschaften eine Rolle. So verfügt z.B. die klassische, in nahezu allen Automobilen zum Einsatz kommende Ackermann-Kinematik zwar über die geringste Flexibilität aller Fahrwerke, weist aber die besten Eigenschaften hinsichtlich Spurtreue bei hohen Geschwindigkeiten und Lasten auf. Mecanum-Räder hingegen bieten höchstmögliche Flexibilität bei einer geringen Zahl von Motoren, setzen jedoch festen und ebenen Boden voraus (Holmberg und Khatib 2000). Damit verbietet sich z.B. ein Einsatz im Gelände. Aber auch Türschwellen oder Bordsteine geringer Höhe stellen für die umlaufend montierten Rollen schon große Hindernisse dar. Im privaten Bereich stellen locker auf dem Boden liegende Teppiche oder Läufer ein weiteres Problem dar. Unter ähnlichen Einschränkungen leiden auch die Castor-Räder. Für Anwendungen, in denen eine hohe Manövrierbarkeit gefragt ist und bei denen die Bodenbeschaffenheit variieren kann – z.B. in Privathaushalten, aber auch für den Einsatz im Gelände – eignet sich daher insbesondere das quasi-omnidirektionale Fahrwerk vom Typ 1, wie es auch bei Care-O-bot® 3 eingesetzt wird. Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die unterschiedlichen Fahrwerkskonzepte, ihre kinematischen Eigenschaften sowie Eignung für unterschiedliche Einsatzbereiche. Anhang A.6 gibt einen Überblick über Einsatzbereiche von Robotern mit Typ 1 quasi-omnidirektionalem Fahrwerk und einige Beispiele für aktuelle Systeme. Die folgenden Abschnitte legen die im weiteren Verlauf der Abhandlung gültige Notation fest und erläutern die mathematischen Grundlagen der kinematischen Modellierung radbasierter Fahrwerke.

	<i>Ackermann-Kinematik</i>	<i>Differential-Kinematik</i>	<i>nicht-holonom, omnidirektional Typ 1</i>	<i>nicht-holonom, omnidirektional Typ 2</i>	<i>holonom, omnidirektional</i>
Radtypen	fixe Räder & gelenkte Räder	fixe Räder	gelenkte Räder	gelenktes Rad & Mecanum-, Castor-Räder, Kugelräder	Mecanum-, Castor-Räder, Kugelräder
Einsatz	Indoor, Outdoor, Offroad, (FTS, PKW, ...)	Indoor (kleine Roboter)	Indoor (Serviceroboter) Offroad (Expl.-Roboter)	Indoor, bei ebenen Böden	Indoor, bei ebenen Böden (Schwerlast-FTS)
Manövrierbarkeit	–	o	+	+	+
Schnelle Fahrt	+	o	o	–	–
Weicher Untergrund	+	o	+	–	–
Uebener Untergrund	+	o	+	–	–
Kosten (Motoren)	+	+	–	o/–	o/–
Hohe Last	+	o	o	o/–	o/–
δ_m	1	2	1	2	3
δ_s	1	0	2	1	0

Tabelle 2.1: Fahrwerkstypen: Vorteile (+), Nachteile (-) und Einsatzbereiche

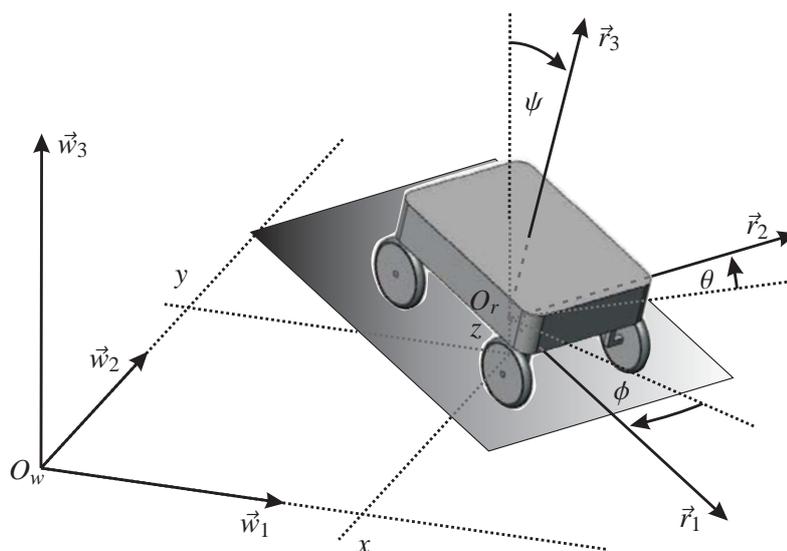


Abbildung 2.4: Vollständige Darstellung der 3-dimensionalen Lagebeziehung zwischen Roboter- und Weltkoordinatensystem.

2.1.2 Konventionen der Parametrierung von Fahrwerkskinematiken

Im Folgenden werden die wichtigsten Begriffe und Konventionen hinsichtlich der verwendeten Formelzeichen, Koordinatensystemen und Operationen eingeführt. Eine Reihe weiterer Fachbegriffe, die weniger wesentlich für die mathematische Ausarbeitung sind, können im Glossar gefunden werden.

Die Beschreibung der internen Konfiguration des mobilen Roboters orientiert sich an der für Manipulatoren üblichen Denavit-Hartenberg Konvention (Siciliano u. a. 2009). Die Beschreibung der externen Konfiguration, gegeben durch Pose und Bewegung sowie Beschleunigung des mobilen Roboters relativ zu einem festen Weltkoordinatensystem, orientiert sich – in Analogie zu der Begriffswelt fahrerloser Transportsysteme – an den durch die Luftfahrt im Bereich der Navigation geprägten Konventionen (Titterton und Weston 2004). Aus praktischen Gründen werden die entsprechenden Begriffe teilweise leicht angepasst und wo möglich vereinfacht. Im Rahmen dieser Arbeit gelten immer, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, die im Folgenden gegebenen Begriffe und Konventionen.

Skalare Größen werden durch Kleinbuchstaben (a, σ, \dots) gekennzeichnet. Dabei wird keine symbolische Unterscheidung zwischen ganzzahligen Indexvariablen und reellwertigen oder imaginären Zahlen vorgenommen. Vektoren werden durch Kleinbuchstaben mit Vektorpfeil gekennzeichnet ($\vec{a}, \vec{\sigma}, \dots$). Matrizen werden durch Großbuchstaben in Fettdruck ($\mathbf{A}, \mathbf{\Sigma}, \dots$) und Tensoren höherer Ordnung durch kursive lateinische Großbuchstaben (A, B, \dots) gekennzeichnet. Vektoren und Matrizen, welche relative Beziehungen zwischen unterschiedlichen Koordinatensystemen ausdrücken, werden darüber hinaus nach ihren Bezugssystemen indiziert. So bezeichnet z.B. \vec{v}_{ab}^c die Geschwindigkeit des Koordinatensystems b relativ zu Koordinatensystem a ausgedrückt bezüglich des Koordinatensystems c . Ω_{ab}^c bezeichnet die Rotation von Koordinatensystem b relativ zu Koordinatensystem a ausgedrückt bezüglich des Koordinatensystems c und C_b^a eine Transformation (z. B. Rotation) von Koordinatensystem b nach Koordinatensystem a .

Die Pose des Roboters wird durch die relative Position und Orientierung eines beliebig wählbaren, körperfesten Koordinatensystems zu einem beliebig wählbaren, ortsfesten Koordinatensystem beschrieben (Abb. 2.4). Das ortsfeste Koordinatensystem wird im Folgenden als Weltkoordinatensystem bezeichnet. Es wird durch die orthonormale Basis $\{O_w, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ beschrieben und bilde o.B.d.A. ein Rechtssystem, wobei die dritte Achse \vec{w}_3 in entgegengesetzte Richtung parallel zum Vektor der Erdbeschleunigung zei-

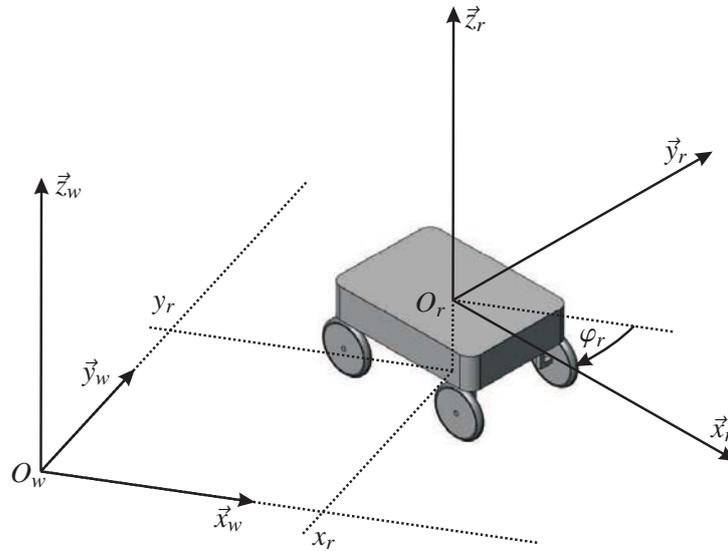


Abbildung 2.5: Vereinfachte Darstellung der Beziehung zwischen Roboter- und Weltkoordinatensystem. Lediglich die Geschwindigkeitskomponenten der ebenen Bewegung werden betrachtet.

ge. Das körperfeste Koordinatensystem wird im folgenden als Roboterkoordinatensystem bezeichnet. Es wird durch die orthonormale Basis $\{O_r, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ beschrieben. Der Ursprung des Roboterkoordinatensystems liege in der Projektion des Flächenschwerpunktes des Roboters (i.d.R. der Mitte des Roboters) in die Ebene der Rad-Boden-Kontakte aller Räder (Abb. 2.4). Dabei werde der Roboter als starrer Körper angenommen, so dass bei einer beliebigen Anzahl von Rädern alle Rad-Boden-Kontakte in einer Ebene liegen. Die erste Achse \vec{r}_1 des Roboterkoordinatensystems liege o.B.d.A. in Vorzugsrichtung der Roboterbewegung (i.d.R. vorwärts) und die dritte Achse \vec{r}_3 des Roboterkoordinatensystems zeige vom Ursprung zum Flächenschwerpunkt des Roboters. Die Pose des Roboters setzt sich zusammen aus dem Ortsvektor $\vec{x}_{wr}^w = (x, y, z)^T$ sowie dem durch die Eulerwinkel gebildeten Lagevektor $\vec{\varphi}_{wr}^r = (\phi, \theta, \psi)^T$. Dabei sind x , y und z die Koordinaten des Ursprungs des Roboterkoordinatensystems im Weltkoordinatensystem

$$O_w \vec{O}_r = x \cdot \vec{w}_1 + y \cdot \vec{w}_2 + z \cdot \vec{w}_3$$

und ϕ die Rotation um die \vec{w}_1 -Achse (Rollen/Roll), θ die Rotation um die neue \vec{w}_2 -Achse (Nicken/Pitch) und ψ die Rotation um die neue \vec{w}_3 -Achse (Gieren/Yaw). Die zugehörige Transformation von Welt- in Roboterkoordinaten wird gebildet durch hintereinander Ausführen der Rotation um die jeweiligen Winkel

$$\mathbf{R}_r^w(\vec{\varphi}_{wr}^r) = \mathbf{R}_r^w(\phi) \mathbf{R}_r^w(\theta) \mathbf{R}_r^w(\psi) .$$

Für die Beschreibung der Bewegung mobiler radbasierter Roboter lassen sich gerade für Indoorumgebungen (Fabrikhallen, Krankenhäuser, Wohnungen) einige Vereinfachungen vornehmen. Da die Bewegung fast ausschließlich auf ebenen Flächen stattfindet, welche meist über Rampen oder Hebevorrichtungen wie Aufzüge miteinander verbunden sind, kann in der Regel auf zwei der drei Rotationsfreiheitsgrade verzichtet werden. Auch die Höhe z kann häufig ganz weggelassen oder auf eine Indexvariable (z.B. Stockwerknummer) reduziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher die bei Fahrerlosen Transportfahrzeugen übliche Notation verwendet. Das Weltkoordinatensystem wird durch die Basis $\{O_w, \vec{x}_w, \vec{y}_w, \vec{z}_w\} = \{O_w, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, das Roboterkoordinatensystem durch die Basis $\{O_r, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r\} = \{O_r, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ gebildet. Die Pose $\vec{p}_{wr}^w = (x_r, y_r, \varphi_r)^T$ des Roboters in Weltkoordinaten ist durch den 2-dimensionalen Ortsvektor

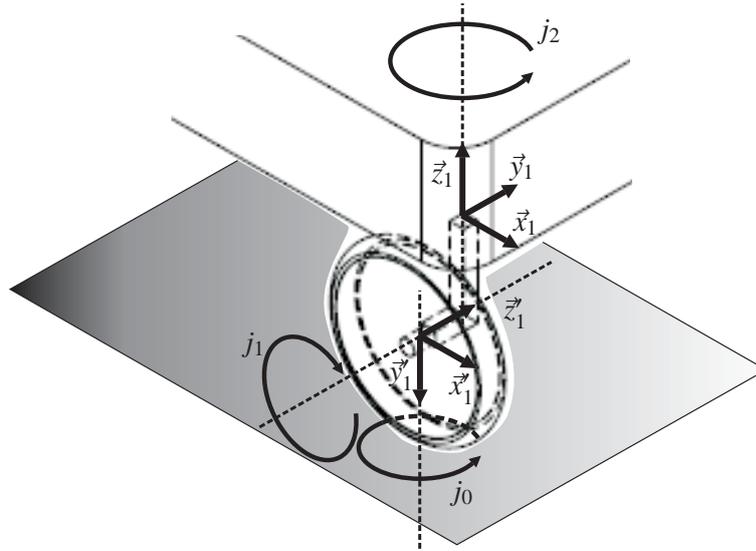


Abbildung 2.6: Wahl der Gelenkkoordinatensysteme für ein Antriebsmodul in Anlehnung an die Denavit-Hartenberg Konvention. Der Rad-Boden-Kontakt wird dazu als rotatorische Gelenk interpretiert.

$\vec{x}_{wr}^w = (x_r, y_r)^T$ und die Orientierung in der Ebene, den Winkel φ_r zwischen der x-Achse des Weltkoordinatensystems und x-Achse des Roboterkoordinatensystems gegeben (Abb. 2.5). Weiterhin bezeichnet $\vec{v}_{wr}^w = \dot{\vec{x}} = (\dot{x}_r, \dot{y}_r)^T$ die ebene translatorische Bewegung des Roboters in Weltkoordinaten und $\vec{\omega}_{wr}^w = \dot{\varphi}_r \cdot \vec{z}_w$ die rotatorische Bewegung um die z-Achse des Roboters. Der Drehwinder oder Twist $\vec{t}_{wr}^w = (\vec{v}_{wr}^w, \vec{\omega}_{wr}^w)^T$ wird durch die Kombination aus rotatorischer Bewegung um die z-Achse und translatorischer Bewegung in der (\vec{x}_w, \vec{y}_w) -Ebene gebildet:

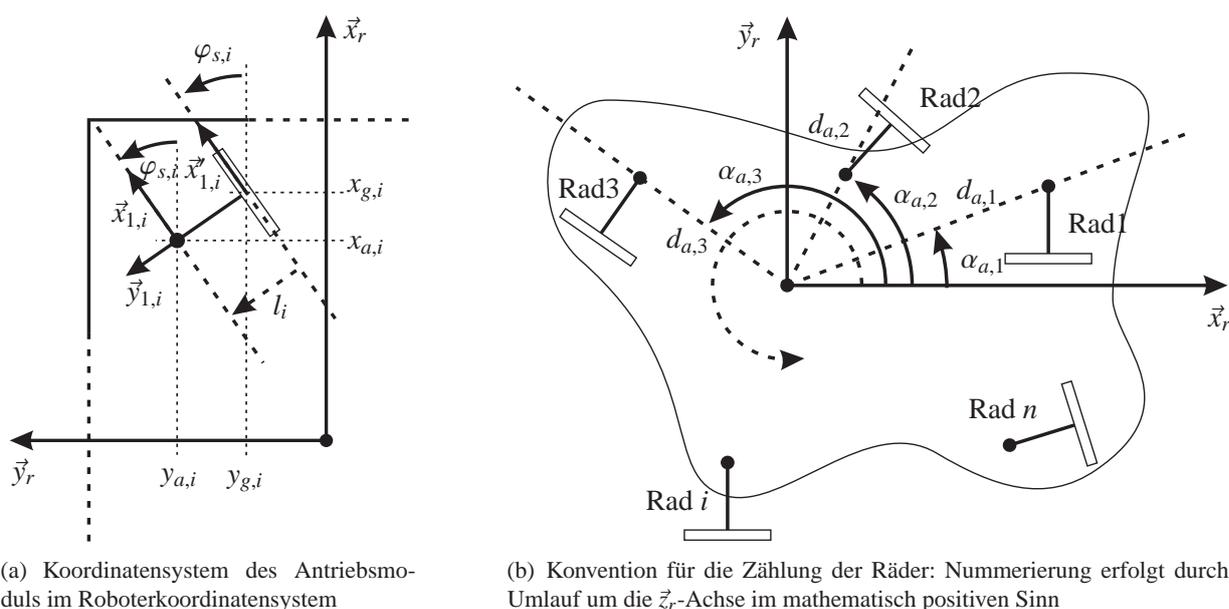
$$\vec{t}_{wr}^w = \dot{x}_r \cdot \vec{x}_w + \dot{y}_r \cdot \vec{y}_w + \dot{\varphi}_r \cdot \vec{z}_w.$$

Die translatorische Geschwindigkeit \vec{v}_{wr}^r , rotatorische Geschwindigkeit $\vec{\omega}_{wr}^r$ sowie der Twist \vec{t}_{wr}^r des Roboters in Roboterkoordinaten ergeben sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \vec{t}_{wr}^r &= \mathbf{R}_w^r(\varphi_r) \cdot \vec{t}_{wr}^w \\ &= (\vec{v}_{wr}^r, \vec{\omega}_{wr}^r)^T \\ &= v_{x,wr}^r \cdot \vec{x}_r + v_{y,wr}^r \cdot \vec{y}_r + \dot{\varphi}_r \cdot \vec{z}_r, \text{ mit} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{R}_w^r(\varphi_r) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_r) & -\sin(\varphi_r) & 0 \\ \sin(\varphi_r) & \cos(\varphi_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wahl der internen Konfigurationsvariablen orientiert sich an der Denavit-Hartenberg Konvention nach (Siciliano u. a. 2009). Abbildung 2.6 zeigt die Wahl exemplarisch für ein gelenktes und angetriebenes Rad, wie es bei Care-O-bot[®] 3 verwendet wird. Dabei wird der Rad-Boden-Kontakt als nulltes, rotatorisches Gelenk j_0 interpretiert. Achse j_1 ist die Achse des für den Vortrieb verantwortlichen Gelenkes und Achse j_2 die Achse des für die Lenkung verantwortlichen Gelenkes. Die z-Achse der jeweiligen Koordinatensysteme ist dabei so gewählt, dass sie entlang der Rotationsachse des zugehörigen Gelenkes in Richtung des jeweils nächsten Gelenkes zeigt, also z.B. von j_1 nach j_2 . Da sich im hier dargestellten Fall alle Achsen senkrecht schneiden, können nach Denavit-Hartenberg x- und y-Achse sowie der Ursprung der jeweiligen Koordinatensysteme frei gewählt werden. In Abbildung 2.6 sind die beiden zu dem Rad und Roboterbasis



(a) Koordinatensystem des Antriebsmoduls im Roboterkoordinatensystem

(b) Konvention für die Zählung der Räder: Nummerierung erfolgt durch Umlauf um die \vec{z}_r -Achse im mathematisch positiven Sinn

Abbildung 2.7: Konvention für die Festlegung und Benennung der internen Konfigurationsvariablen. In Abbildung 2.7(a) ist die Position von Rad- und Radachse in kartesischen Koordinaten, in Abbildung 2.7(b) in Polarkoordinaten gegeben.

verbindenden Bindeglied l_1 gehörenden Koordinatensysteme dargestellt. Die y-Achse \vec{y}_1 ist parallel zur Rad-Achse gewählt. Die zweite y-Achse \vec{y}'_1 liegt parallel zur Achse durch den Rad-Boden-Kontakt. Damit sind die zugehörigen x-Achsen \vec{x}_1 und \vec{x}'_1 parallel. Sie legen die Vorwärtsrichtung des Rades fest.

Unter Kenntnis der Roboterpose \vec{p}_{wr}^w ist damit die Konfiguration eines Antriebsmoduls vollständig durch die beiden zu den Gelenken j_1 und j_2 gehörenden Gelenkwinkel φ_1 und φ_2 bestimmt. Dabei ist φ_1 der Gelenkwinkel zwischen \vec{x}'_1 und \vec{x}_0 . Er ist ein Maß für die seit dem Start des Roboters zurückgelegte Strecke bzw. Umdrehung des Rades und wird im Folgenden mit $\varphi_{d,i}$ bezeichnet. Der Index i steht dabei für die Nummer des Rades. Mit φ_2 wird der Gelenkwinkel zwischen \vec{x}_1 und \vec{x}_r (Abb. 2.7(a)) bezeichnet. Er ist der Lenkwinkel des betrachteten Antriebsmoduls bzw. der Winkel zwischen Vorwärtsrichtung des Rades und Vorwärtsrichtung des Roboters und wird im Folgenden mit $\varphi_{s,i}$ bezeichnet. Die Position der Lenkachse des i ten Rades in Roboterkoordinaten ist durch $(x_{a,i}, y_{a,i})$ gegeben. Die Position des zugehörigen Rad-Boden-Kontakts ist durch $(x_{g,i}, y_{g,i})$ gegeben. Die Abzählung der Räder erfolgt dabei durch Umlauf um die \vec{z}_r -Achse in mathematisch positiver Richtung ausgehend von der \vec{x}_r -Achse (Abb. 2.7(b)). Die Radnummern werden nach Reihenfolge der überstrichenen Lenkachsen vergeben, also nach aufsteigendem Winkel α_i bei der Darstellung in Polarkoordinaten $(d_{a,i}, \alpha_{a,i})$.

Damit ist die Konfiguration des Roboters vollständig beschrieben durch die drei externen Variablen (x_r, y_r, φ_r) , welche die relative Lage von Roboter- und Weltkoordinatensystem zueinander beschreiben sowie die $2 \times N$ Gelenkwinkelkoordinaten $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$ der N Räder, welche zusammen mit den Parametern $(\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{l}, \vec{r})$ die Konfiguration der Antriebsmodule beschreiben. Dabei sind (\vec{x}_a, \vec{y}_a) die kartesischen Koordinaten der Radachsen aller N Räder, \vec{l} die zugehörigen Offsets zwischen Lenkachse und jeweiligem Rad-Boden-Kontakt und \vec{r} die Radien aller Räder. Betrachtet man ein Fahrwerk, welches zusätzlich noch über Castor- oder Mecanum-Räder verfügt, treten wie im Anhang beschrieben zusätzlich noch die Parameter $(\vec{l}, \vec{\gamma})$ auf. Tabelle 2.2 gibt einen Überblick über die wichtigsten Variablen und Tabelle 2.3 einen Überblick über die wichtigsten Parameter, welche die Konfiguration des Fahrwerks beschreiben.

Größe	Elemente	Einheit	Beschreibung
\vec{p}_{wr}^w	$(\vec{x}_{wr}^w, \varphi_{wr}^w)$		Pose des Roboters in Weltkoordinaten – Relative Lage des Roboter- zum Weltkoordinatensystem
\vec{x}_{wr}^w	(x_r, y_r)	m	Kartesische Koordinaten des Roboters im Weltkoordinatensystem
φ_{wr}^w	φ_r	rad	Orientierung des Roboters – Winkel zwischen x-Achse des Welt- und x-Achse des Roboterkoordinatensystems
\vec{t}_{wr}	$(\dot{\vec{x}}_{wr}^w, \dot{\varphi}_{wr}^w)$		Twist oder Drehwinder des Roboters – Bewegung des Roboter- relativ zum Weltkoordinatensystem
$\dot{\vec{x}}_{wr}^w$	$(v_{x,w}, v_{y,w})$	m/s	Kartesische Geschwindigkeit des Roboters in Weltkoordinaten
$\dot{\varphi}_{wr}^w$	ω_r	rad/s	Rotatorische Geschwindigkeit des Roboters in Weltkoordinaten
$\varphi_{s,i}$		rad	Lenkwinkel des <i>iten</i> Rades
$\varphi_{d,i}$		rad	Drehung des <i>iten</i> Rades seit dem Start

Tabelle 2.2: Für die Beschreibung des Fahrwerks wesentliche Variablen

Größe	Elemente	Einheit	Beschreibung
N			Anzahl der Räder des mobilen Roboters
$\vec{x}_{i,ra}^r$	$(x_{a,i}, y_{a,i})$	m	Kartesische Koordinaten der Lenkachse des <i>iten</i> Rades in Roboterkoordinaten
$d_{a,i}$		m	Abstand der Lenkachse des <i>iten</i> Rades vom Ursprung des Roboterkoordinatensystems
$\alpha_{a,i}$		rad	Winkel zwischen Verbindender vom Ursprung des Roboterkoordinatensystems zur Lenkachse des <i>iten</i> Rades und \vec{x}_r -Achse
\vec{l}_{i,j_1,j_2}^j	(l_i, l'_i)	m	Lenkoffset – Koordinaten des Gelenks j_2 in der $(\vec{z}_{j_1}, \vec{x}_{j_1})$ -Ebene des <i>iten</i> Rades
l_i		m	Abstand zwischen Gelenk j_1 und Gelenk j_2 parallel zur Radachse
l'_i		m	Abstand zwischen Gelenk j_1 und Gelenk j_2 senkrecht zur Radachse
r_i		m	Radius des <i>iten</i> Rades
γ_i		rad	Relative Stellung der Rollen des <i>iten</i> Rades (bei Mecanum-Rädern)

Tabelle 2.3: Für die Beschreibung des Fahrwerks wesentliche Parameter

2.2 Kinematische Beschreibung

2.2.1 Kinematik der idealen Rollbewegung

Mobile Roboter mit radbasierten Fahrwerken, insbesondere solche mit gelenkten Standardrädern wie Care-O-bot[®] 3, sind durch nicht-holonome Bindungen charakterisiert. Als nicht-holonome Bindungen bezeichnet man dabei nicht-integrierte, kinematische Beschränkungen eines Körpers. In der Regel sind das Beschränkungen der möglichen Bewegungsrichtungen bzw. Geschwindigkeiten eines Körpers, die sich *nicht* auf eine Beschränkung der Konfiguration oder Position des Körpers zurückführen lassen. Sie lassen sich als mathematische Bedingung der Form

$$g(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0$$

schreiben. Dabei bezeichnet \vec{q} den Vektor der Konfigurationsvariablen oder generalisierten Koordinaten des Systems, $\dot{\vec{q}}$ den zugehörigen Geschwindigkeitsvektor und t eine mögliche Zeitabhängigkeit. Holonome Bindungen sind dagegen Einschränkungen des möglichen Konfigurationsraums. Sie können auf die Form

$$g(\vec{q}, t) = 0$$

gebracht werden und sind damit unabhängig von den Ableitungen der generalisierten Koordinaten.

Ein Alltagsbeispiel für eine nicht-holonome Bindung ist die Bewegung eines PKWs. Zwar kann ein gewöhnlicher PKW nicht seitwärts fahren, dennoch kann er alle Bereiche in der Ebene, die nicht durch Hindernisse versperrt sind, erreichen. So ist zum Beispiel seitliches Einparken in eine ausreichend große Parklücke durch das wiederholte Ausführen von Rangiermanövern möglich (Abb. 2.8(b)).

Ein anschauliches Beispiel für eine holonome, also integrierbare Bindung ist dagegen der für einen sitzenden Menschen erreichbare Raum. Dieser ist in erster Näherung begrenzt durch die Reichweite seiner ausgestreckten Arme. Ist der Arm vollständig ausgestreckt, ist keine Bewegung der Hand in Richtung entlang des Armes mehr möglich (Abb. 2.8(a)). Diese Beschränkung der Bewegungsmöglichkeiten ist holonom. Sie kann durch Integration auf eine Beschränkung des Konfigurationsraums zurückgeführt werden. Was außerhalb der Reichweite der Arme liegt, kann nicht gegriffen werden.

Ein einfaches Beispiel für ein nicht-holonomes System, welches im Folgenden von Bedeutung ist, ist die rollende Scheibe bzw. das abrollende Rad. Das einzelne abrollende Rad ist vollständig durch die generalisierten Koordinaten

$$\vec{q} = (x, y, \varphi_s, \varphi_d)^T$$

beschrieben. Dabei bezeichnen (x, y) die Position des Rades im kartesischen Bezugssystem, φ_s die Orientierung des Rades im entsprechenden Koordinatensystem bzw. den „Lenkwinkel“ und φ_d die Umdrehung des Rades um die horizontale Achse senkrecht zur Radebene bzw. den „Fahr-“ oder „Rollwinkel“ (Abb. 2.7(a)).

Die Darstellung der nicht-holonomen Bindungen als Funktion der generalisierten Koordinaten

$$\dot{x} = r \cos(\varphi_s) \dot{\varphi}_d \quad (2.2)$$

$$\dot{y} = r \sin(\varphi_s) \dot{\varphi}_d, \quad (2.3)$$

wobei r hier den Radius des Rades bezeichnet, ergibt sich aus folgender Anforderung (Bloch und Bailieul 2003): Ein beliebiger, aber fester Punkt P_0 auf dem Radumfang muss, wenn er Kontaktpunkt zum Untergrund wird, unbeweglich sein.

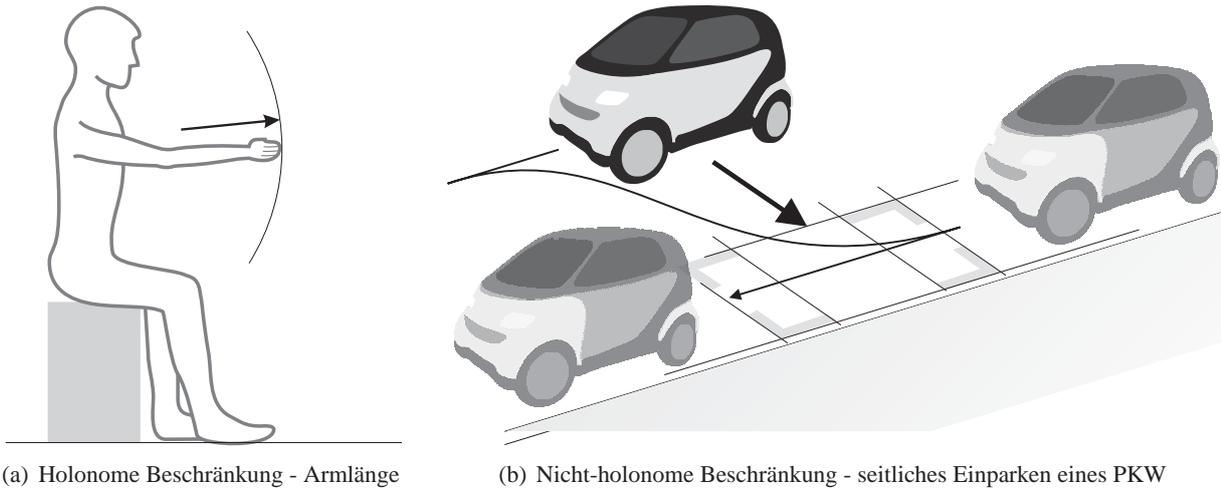


Abbildung 2.8: Links (Abb. 2.8(a)): Eine sitzende Person mit ausgestrecktem Arm ist durch holonome Beschränkungen – die Reichweite des Armes – gekennzeichnet. Rechts (Abb. 2.8(b)): Ein Auto kann nicht seitwärts fahren, aber durch Rangiermanöver dennoch in eine Parklücke einfahren. Die Unfähigkeit eines Fahrzeugs, seitwärts zu fahren, führt also nicht zu einer Beschränkung des Arbeitsraums. Es handelt sich um eine nicht-holonome Bindung.

Um den Einfluss der nicht-holonomen Bindungen analytisch mit Methoden der linearen Algebra zu untersuchen, formuliert man die Gleichungen (2.2, 2.3) um, zu

$$\begin{aligned} \dot{x} - r \cos(\varphi_s) \dot{\varphi}_d &= 0 \\ \dot{y} - r \sin(\varphi_s) \dot{\varphi}_d &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Form lassen sich die nicht-holonomen Bindungen als Vektormultiplikation

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^T \cdot \dot{\vec{q}} &= 0 \\ \vec{g}_2^T \cdot \dot{\vec{q}} &= 0, \text{ mit} \\ \vec{g}_1 &= (1, 0, 0, -r \cos(\varphi_s))^T & (2.4) \\ \vec{g}_2 &= (0, 1, 0, -r \sin(\varphi_s))^T & (2.5) \end{aligned}$$

darstellen. Wobei die Vektoren (\vec{g}_1, \vec{g}_2) jetzt gerade den Unterraum des Geschwindigkeitsraums von $(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}})$ aufspannen, der einer Verletzung der nicht-holonomen Bindungen entspricht.

Durch Umstellen der Gleichungen (2.2, 2.3) zu

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} - r(\cos(\varphi_s) + \sin(\varphi_s)) \dot{\varphi}_d &= 0 \\ \cos(\varphi_s) \dot{y} - \sin(\varphi_s) \dot{x} &= 0, \end{aligned}$$

ergibt sich eine alternative Darstellung

$$\tilde{\vec{g}}_1 = (1, 1, 0, -r(\cos(\varphi_s) + \sin(\varphi_s)))^T \quad (2.6)$$

$$\tilde{\vec{g}}_2 = (-\sin(\varphi_s), +\cos(\varphi_s), 0, 0)^T. \quad (2.7)$$

Dabei wird Vektor $\tilde{\vec{g}}_2$ (2.7) häufig als die „non-slipping“ Bedingung bezeichnet. Dieser Vektor liegt in der Ebene der kartesischen Bewegung und ist orthogonal zur erlaubten Fahrtrichtung gerichtet.

Der Lösungsraum für das nicht-holonome System bzw. der Raum der erlaubten Stellgrößen, wird durch den zu (2.4), (2.5) bzw. (2.6), (2.7) zugehörigen Nullraum gebildet. Die Basisvektoren dieses Nullraums

$$\vec{b}_1 = (r \cos(\varphi_s), r \sin(\varphi_s), 0, 1)^T, \quad (2.8)$$

$$\vec{b}_2 = (0, 0, 1, 0)^T \quad (2.9)$$

lassen sich z.B. unter Verwendung der Lie-Algebra analytisch berechnen (Bloch und Baillieul 2003). Sie bilden gemeinsam mit den Vektoren \vec{g}_1, \vec{g}_2 bzw. $\tilde{\vec{g}}_1, \tilde{\vec{g}}_2$ eine Basis des vollständigen Geschwindigkeitsraums. Eine zulässige Entwicklung des Systems bzw. Definition valider Stellgrößen ist durch

$$\dot{\vec{q}} = \vec{b}_1^T \cdot u_1 + \vec{b}_2^T \cdot u_2,$$

$$\dot{\vec{q}} = \mathbf{B}\vec{u}$$

gegeben. Dabei ist u_1 der Lenkbewegung $\dot{\varphi}_s$ des Rades und u_2 der Fahrbewegung $\dot{\varphi}_d$ des Rades zugeordnet. Der Zustandsraum spaltet sich damit in einen Satz direkt steuerbarer Konfigurationsvariablen (φ_s, φ_d) und einen Satz indirekt steuerbarer Variablen (x, y) auf. Die Vektoren \vec{b}_1, \vec{b}_2 bilden ein maximales Set unabhängiger Vektorfelder.

Eine weitere Möglichkeit (Abschnitt 2.2.2), die kinematischen Bindungen eines einzelnen Rades zu formulieren, besteht in der Aufstellung der Rollbedingung und non-slipping Bedingung (vgl. Appendix B). Diese beiden Bedingungen drücken die nicht-holonomen Bindungen bzw. den Einfluss der Steuergrößen des Rades bzgl. der ebenen Bewegung im Radkoordinatensystem in Rollrichtung und orthogonal dazu aus. Für das einzelne Standardrad sind Roll- und non-slipping Bedingung identisch mit \vec{b}_1 (2.8) und \vec{g}_2 (2.7). Führt man den Basiswechsel $\varphi_d \rightarrow s_d = r\varphi_d$ durch, so bilden die entstehenden Vektoren

$$\tilde{\vec{b}}_1 = (\cos(\varphi_s), \sin(\varphi_s), 0, 1)^T, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\vec{g}}_2 = (-\sin(\varphi_s), \cos(\varphi_s), 0, 0)^T \quad (2.11)$$

eine orthonormales Basissystem ($\tilde{\vec{b}}_1 \parallel \vec{x}_1', \tilde{\vec{g}}_2 \parallel \vec{z}_1'$) bzgl. der ebenen Bewegung des Rades in (x, y) . Diese Beschreibung der nicht-holonomen Bindungen wird im folgenden Abschnitt genutzt, um die Klassifizierung von Fahrwerkskinematiken nach Campion einzuführen.

2.2.2 Klassifizierung und Modellierung von Fahrwerkskinematiken

Die kinematischen Eigenschaften eines Fahrwerks sind durch die Gesamtheit der durch alle Räder eingetragten kinematischen Bedingungen bestimmt. Campion et al. haben in (Campion u. a. 1996) gezeigt, wie eine analytische Bestimmung der kinematischen Eigenschaften durchgeführt werden kann. Dazu werden Rollbedingung und non-slipping Bedingung für jedes Rad einzeln aufgestellt und anschließend das für das gesamte Fahrwerk entstehende Gleichungssystem analysiert.

Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, ist der Konfigurationsraum eines Fahrwerks mit N beliebigen Rädern durch die Koordinaten des körperfesten Bezugssystems $\vec{p}_{wr}^w = (x_r, y_r, \varphi_r)^T$ (s. Abb. 2.5) sowie die generalisierten Koordinaten (φ_s, φ_d) aller Räder bestimmt:

$$\vec{q} = (x_{wr}^w, y_{wr}^w, \varphi_{wr}^w, \varphi_{r(s,1)}^r, \varphi_{r(d,1)}^r, \dots, \varphi_{r(s,N)}^r, \varphi_{r(d,N)}^r)^T, \text{ bzw.}$$

$$\vec{q} = (x_r, y_r, \varphi_r, \varphi_{s,1}, \varphi_{d,1}, \dots, \varphi_{s,N}, \varphi_{d,N})^T.$$

Dazu treten je nach Radtyp eine Reihe zusätzlicher fester Parameter (vgl. Tab. 2.3 und Abb. 2.9).

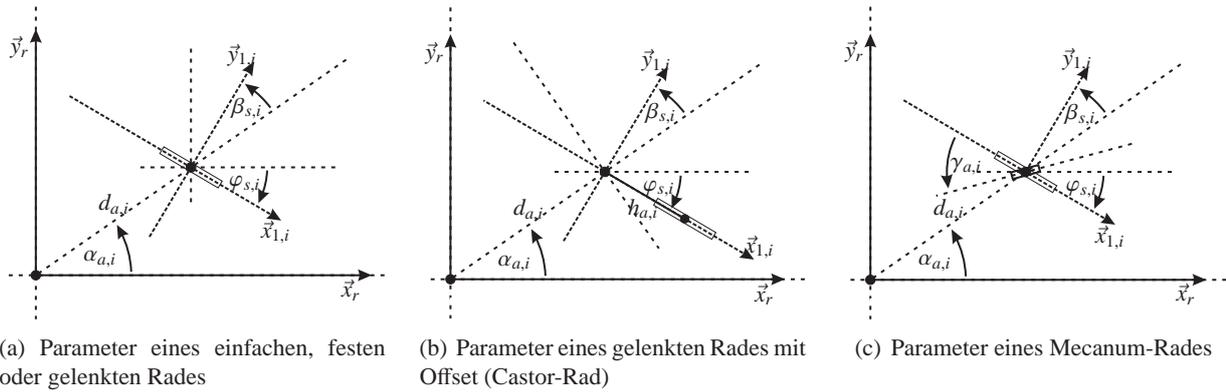


Abbildung 2.9: Parameter für (v.l.n.r.) Standard- (S), Castor- (SO) und Mecanum-Räder (Me). Es bezeichnen $(d_{a,i}, \alpha_{a,i})$ die Polarkoordinaten und $(x_{a,i}, y_{a,i})$ die zugehörigen kartesischen Koordinaten des Rades im körperfesten Koordinatensystem (vgl. Abb. 2.7(b)), $h_{a,i}$ den Castor-Offset eines Castor-Rades und $\gamma_{a,i}$ den Winkel zwischen umlaufend montierten Rollen und eigentlichem Rad bei einem Mecanum-Rad. Die Variable $\beta_{s,i}$ ist eine von $\varphi_{s,i}$ abgeleitete Hilfsgröße, die das Aufstellen der Roll- und non-slipping Bedingung erleichtert (Anhang B). Für feste Standardräder und Mecanum-Räder ist $\beta_{s,i}$ bzw. $\varphi_{s,i}$ in der Regel konstant.

Die Konfiguration eines einzelnen Rades im körperfesten Bezugssystem lässt sich durch die generalisierten Koordinaten

$$\vec{q} = (x_r, y_r, \varphi_r, \varphi_{s,i}, \varphi_{d,i})$$

beschreiben. Anhang B beschreibt die Herleitung der Roll- und non-slipping Bedingung im körperfesten Koordinatensystem für gelenkte und un gelenkte Standardräder, Castor-Räder sowie Mecanum- bzw. Kugelräder. Für ein einzelnes, gelenktes oder un gelenktes Standardrad ergeben sich Roll- und non-slipping Bedingung zu:

$$(-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w + r_i \cdot \dot{\varphi}_{d,i} = 0, \quad (2.12)$$

$$(-\sin(\varphi_{s,i}), \cos(\varphi_{s,i}), d_{a,i} \cos(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w = 0. \quad (2.13)$$

Dabei ist zu beachten, dass insbesondere die Rollbedingung hier nicht länger identisch zu \vec{b}_1 bzw. \vec{b}_2 aus Abschnitt 2.2.1 ist. Tatsächlich lässt sich für dieses System der Steuervektor nicht länger direkt aus der Rollbedingung eines einzelnen Rades ableiten. Das System ist in diesem Fall unterbestimmt. Rollbedingung und non-slipping Bedingung für ein Castor-Rad ergeben sich zu:

$$(-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w + r_i \cdot \dot{\varphi}_{d,i} = 0, \quad (2.14)$$

$$(-\sin(\varphi_{s,i}), \cos(\varphi_{s,i}), h_{a,i} + d_{a,i} \cos(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w + h_{a,i} \cdot \dot{\varphi}_{s,i} = 0. \quad (2.15)$$

Das Auftreten von $\dot{\varphi}_{s,i}$ hat dabei wesentlichen Einfluss auf die kinematischen Eigenschaften des Systems. Hier ermöglicht eine Stellbewegung eine Kompensation einer eventuell nötigen Seitwärtsbewegung. Damit wird die Geschwindigkeitskomponente orthogonal zur Rollrichtung des Rades steuerbar und die nicht-holonomen Zwangsbedingungen werden aufgelöst. Das Hinzufügen eines Castor-Rades in ein Roboterfahrwerk führt daher nicht zu zusätzlichen kinematischen Zwangsbedingungen. Für Mecanum- und Kugelräder entfällt die non-slipping Bedingung, da diese Räder über einen zusätzlichen, in der Regel passiven, Freiheitsgrad verfügen. Beim Mecanum-Rad wird dieser zum Beispiel über umlaufend montierte, frei drehende Rollen realisiert. Damit verursachen auch diese Räder keine zusätzlichen kinematischen

Zwangsbedingungen bei Integration in ein Fahrwerk. Die Rollbedingung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & (-\cos(\varphi_{s,i} + \gamma_{a,i}), -\sin(\varphi_{s,i} + \gamma_{a,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i} + \gamma_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w \\ & \dots + r_i \cdot \dot{\varphi}_{d,i} \cos(\gamma_{a,i}) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Um Fahrwerke mit beliebig kombinierten Rädern zu klassifizieren, fassen Campion et al. diese Bedingung für das Gesamtsystem zusammen:

$$\mathbf{J}_1(\vec{\varphi}_{s,S}, \vec{\varphi}_{s,SO}) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w + \mathbf{J}_2 \dot{\varphi}_{d,i} = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C}_1(\vec{\varphi}_{s,S}, \vec{\varphi}_{s,SO}) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w + \mathbf{C}_2 \dot{\vec{\varphi}}_{s,SO} = 0. \quad (2.18)$$

Dabei werden J_1 und J_2 aus den Rollbedingungen (2.12), (2.14) und (2.16) gebildet

$$\mathbf{J}_1(\vec{\varphi}_{s,S}, \vec{\varphi}_{s,SO}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{1,S}(\vec{\varphi}_{s,S}) \\ \mathbf{J}_{1,SO}(\vec{\varphi}_{s,SO}) \\ \mathbf{J}_{1,Me} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \text{diag}_N(\vec{r}),$$

wobei $\vec{\varphi}_{s,S}$ die Lenkwinkel der gelenkten und ungelenkten Standardräder (S) bezeichnet und $\vec{\varphi}_{s,SO}$ die Lenkwinkel der Castor-Räder (SO - Steered Offset). \mathbf{J}_2 ist eine Diagonalmatrix, wobei die Elemente der Diagonalen durch die Radien der einzelnen Räder gegeben sind. Analog werden \mathbf{C}_1 und \mathbf{C}_2 aus den non-slipping Bedingungen (2.13) und (2.15)

$$\mathbf{C}_1(\vec{\varphi}_{s,S}, \vec{\varphi}_{s,SO}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1,S}(\vec{\varphi}_{s,S}) \\ \mathbf{C}_{1,SO}(\vec{\varphi}_{s,SO}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{2,SO} \end{pmatrix}$$

abgeleitet. Dabei ist $\mathbf{C}_{2,SO}$ eine Diagonalmatrix, deren Elemente durch die Castor-Offsets $h_{a,i}$ der einzelnen Castor-Räder gegeben sind.

Ein Fahrwerk lässt sich dann anhand der resultierenden kinematischen Bindungen charakterisieren. Da, wie eingangs erläutert, Castor- und Mecanum-Räder keine Zwangsbedingungen in die Fahrwerke einbringen, genügt zur Charakterisierung die Auswertung der Matrix $\mathbf{C}_{1,S}$. Die ebene Bewegung des Roboters \vec{r}_{wr}^w muss Teil des Nullraums der nicht-holonomen Bindungen $\mathbf{C}_{1,S}$ sein. Basierend auf der Analyse der Matrix $\mathbf{C}_{1,S}$ führen Campion et al. den „Grad der Mobilität“ („degree of mobility“)

$$\delta_m = \dim(N[\mathbf{C}_{1,S}]) = 3 - \text{rank}[\mathbf{C}_{1,S}], \quad (2.19)$$

den „Grad der Lenkbarkeit“ („degree of steerability“)

$$\delta_s = \text{rank}[\mathbf{C}_{1,S}] \quad (2.20)$$

sowie den „Grad der Manövrierbarkeit“ („degree of maneuverability“)

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s \quad (2.21)$$

eines Fahrwerkes ein. Dabei ist der Grad der Mobilität δ_m ein Maß für die Agilität des Fahrwerks. Er ist den instantan realisierbaren Freiheitsgraden (dDoF) der ebenen Bewegung zugeordnet. Ein Fahrwerk mit $\delta_m = 3$, wie z.B. ein rein aus Mecanum- oder Castor-Rädern aufgebautes Fahrwerk, kann zu jedem Zeitpunkt alle drei Freiheitsgrade der ebenen Bewegung realisieren. Der Grad der Lenkbarkeit δ_s ist der Anzahl der internen Konfigurationsvariablen zugeordnet. Anhand dieser zwei bzw. drei Kenngrößen (δ_m, δ_s) lassen sich beliebige Fahrwerkskinematiken in fünf kinematische Klassen unterteilen (Abschnitt 2.1.1).

	Formelzeichen	Dreirad- und Ackermann- Kinematik	Differential- Kinematik	Quasi-omnidirek- tionale Kinematik (Typ 1)	Quasi-omnidirek- tionale Kinematik (Typ 2)	Omnidirektionale Kinematik
Grad der Mobilität	δ_m	1	2	1	2	3
Grad der Lenkbarkeit	δ_s	1	0	2	1	0
Grad der Manövrierbarkeit	δ_M	2	2	3	3	3

Tabelle 2.4: Grad der Mobilität δ_m , Grad der Lenkbarkeit δ_s und Grad der Manövrierbarkeit δ_M für die fünf kinematischen Basisklassen von Fahrwerken.

Die im Folgenden näher betrachtete Kinematik des Care-O-bot[®] 3 ist dabei „Typ 1 nicht-holonom, omnidirektional“. Das heißt, Care-O-bot[®] 3 kann alle Freiheitsgrade $\vec{t}_{w,r}^r$ der ebenen Bewegung erzielen, muss dazu jedoch vorher rekonfiguriert werden. Des Weiteren folgt daraus, dass ein Fahrwerk vom Typ (1,2) mit mehr als zwei Rädern, wie z.B. Care-O-bot[®] 3 mit vier voll gelenkten und gesteuerten Rädern überaktuiert ist und durch das Risiko von Aktorkonflikten charakterisiert ist. Da die kinematischen Ketten über die nicht-holonomen Bindungen geschlossen werden arbeiten die Motoren gegeneinander, wenn ihre Ansteuerung nicht exakt koordiniert wird.

Die aus $\mathbf{C}_{1,S}$ erwachsenden Zwangsbedingungen bilden des Weiteren auch den Rahmen für das grundlegende kinematische Modell des betrachteten Systems. In Analogie zu den Eingangsvektoren \vec{b}_1 (2.8) und \vec{b}_2 (2.9) für das einzelne, ideale Rad aus Abschnitt 2.2.1 ergibt sich die vorläufige Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}(\vec{\varphi}_{s,S})$ aus den Basisvektoren des Nullraums der nicht-holonomen Bindungen $N[\mathbf{C}_{1,S}]$. Das heißt $\tilde{\mathbf{B}}(\vec{\varphi}_{s,S})$ bildet eine Eingangsgröße \vec{u}_{δ_m} so auf die ebene Bewegung \vec{t}_{wr}^r bzw. $\mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w)\vec{t}_{wr}^w$ des Roboters ab, dass die nicht-holonomen Bindungen nicht verletzt werden:

$$\vec{t}_{wr}^w = \mathbf{R}_w^{rT}(\varphi_{wr}^w)\tilde{\mathbf{B}}(\vec{\varphi}_{s,S})\vec{u}_{\delta_m}. \quad (2.22)$$

Dabei entspricht die Dimension von $\tilde{\mathbf{B}}$ bzw. die Anzahl der Komponenten von \vec{u}_{δ_m} gerade dem Grad der Mobilität δ_m des betrachteten Fahrwerks. Um den Unterraum der bei Bewegung des Roboters $\vec{t}_{wr}^r \neq \vec{0}$ zulässigen Konfigurationen des Fahrwerks \vec{q} sowie deren Entwicklung $\dot{\vec{q}}$ vollständig zu beschreiben, werden dementsprechend δ_s weitere Zustandsgrößen \vec{q}_{δ_s} benötigt. Damit ergibt sich das „Posture Kinematic Model“ nach Campion zu

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} t_{wr}^w \\ \vec{q}_{\delta_s} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_w^{rT}(\varphi_{wr}^w)\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0}_{3 \times \delta_s} \\ \mathbf{0}_{\delta_s \times \delta_m} & \mathbf{I}_{\delta_s \times \delta_s} \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{\delta_m} \\ \vec{u}_{\delta_s} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Diese Darstellung erlaubt die Repräsentation der kinematischen Eigenschaften und ihrer Entwicklung und eignet sich für Bahnplanung und Regelung. Um Konfiguration und Entwicklung des vollständigen Systems auf Basis der generalisierten Koordinaten \vec{q} darzustellen, was das Aufstellen der inversen bzw. Vorwärtskinematik impliziert, muss der Zustandsvektor $\dot{\vec{q}}$ entsprechend zu \vec{q} erweitert werden. Die Elemente von \vec{u}_{δ_s} können dabei mit den Lenkwinkeln $\varphi_{s,i}$ beliebiger, orientierbarer Räder des Fahrwerks assoziiert werden. Da die DoF bezüglich der Konfiguration des Fahrwerks durch (\vec{u}_{δ_s}) gegeben sind, ergibt sich die Entwicklung der übrigen generalisierten Koordinaten ($\varphi_{s,i}, \varphi_{d,i}$) direkt als nichtlineare Funktion

$\mathbf{D}_{N_1 \times \delta_s}(\vec{q}_{\delta_s})$, $\mathbf{E}_{N_2 \times \delta_m}(\vec{q}_{\delta_s})$ dieser Eingangsgrößen und der zugehörigen Zustandsvariablen \vec{q}_{δ_s} ,

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \varphi_{wr}^w \\ \vec{\varphi}_s \\ \vec{\varphi}_d \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_w^{rT}(\varphi_{wr}^w) \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0}_{3 \times \delta_s} \\ \mathbf{0}_{\delta_s \times \delta_m} & \mathbf{I}_{\delta_s \times \delta_s} \\ \mathbf{0}_{N_1 \times \delta_m} & \mathbf{D}_{N_1 \times \delta_s}(\vec{q}_{\delta_s}) \\ \mathbf{E}_{N_2 \times \delta_m} & \mathbf{0}_{N_2 \times \delta_s} \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{\delta_m} \\ \vec{u}_{\delta_s} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Dabei ist $N_1 = N_{S_o} + N_{S_O} - \delta_s$ und $N_2 = N_S + N_{S_O} + N_{M_e}$, wobei N_S , N_{S_O} und N_{M_e} jeweils die Anzahl der Standardräder, Castor-Räder sowie Mecanum-Räder des betrachteten Fahrwerks bezeichnen. Weiterhin bezeichnet N_{S_o} ausschließlich die lenkbaren Standardräder. Dieses Modell ist strukturell äquivalent dem Modell, wie es für das ideale einzelne Rad aus Abschnitt 2.2.1 hergeleitet wurde.

Sowohl Posture Kinematic Model (2.23) als auch Configuration Kinematic Model (2.24) stellen durch die Abbildung der Eingangsgrößen \vec{u} über \mathbf{B} implizit sicher, dass die nicht-holonomen Bindungen der einzelnen Räder erfüllt werden. Dabei gilt die Annahme, dass sich das Fahrwerk von Anfang an in einer Konfiguration befindet, welche eine Bewegung in Übereinstimmung mit den nicht-holonomen Bindungen erlaubt, und dass das Fahrwerk nie durch äußere Störeinflüsse in eine unerlaubte Konfiguration gebracht wird. Darüber hinaus berücksichtigen die Modelle (2.23), (2.24) keine Stellgrößenbeschränkungen. So weist der zulässige Konfigurationsraum z.B. Bereiche auf, in denen $\mathbf{D}_{\delta_s \times N_1}(\vec{q}_{\delta_s})$ singulär wird und die Stellgrößen $\varphi_{s,i}$ gegen unendlich streben. Der Umgang mit diesen Eigenschaften ist Gegenstand der Kapitel zur Regelung des Fahrwerks.

2.2.3 Geometrische Interpretation der ebenen Bewegung

In Abschnitt 2.2.2 wurden zwei Ansätze für Fahrwerksmodelle (2.23), (2.24) auf Basis der algebraischen Eigenschaften der non-slipping Bedingung für Standardräder $C_{1,S}$ (2.13), (2.18) hergeleitet. Eine geometrische Interpretation von $C_{1,S}$ bzw. (2.13) führt zur Einführung des Momentanpols (ICM - Instantaneous Centre of Motion). Ist der Betrag der Geschwindigkeit eines Rades für den Anteil orthogonal zur Radenebene (Ebene normal zur horizontalen Radachse \vec{z}_1^r) gleich 0, so bewegt sich dieses Rad auf einer verallgemeinerten Kreisbahn, deren Mittelpunkt auf der Radachse liegt ($\vec{v} = \vec{v} \times \vec{r}$). Soll dies gleichermaßen, für weitere Räder gelten, die instantan als starr mit dem ersten Rad gekoppelt betrachtet werden können, so muss der Mittelpunkt der jeweiligen Kreisbahn mit dem Mittelpunkt der Kreisbahn des ersten Rades zusammen fallen. Dies ist ebenfalls offensichtlich, da die zusätzlichen Freiheitsgrade des neuen Rades (x_k, y_k, φ_k) bei instantan starrer Kopplung einhergehen mit ebenso vielen holonomen Zwangsbedingungen $(\Delta x_{ok}, \Delta y_{ok}, \Delta \varphi_{ok}) = \text{const.}$ Die geometrische Interpretation von $C_{1,S}$ (2.13) entspricht damit gerade dem Prinzip der Festkörperbewegung. Dadurch ergibt sich ein fester Zusammenhang zwischen der Orientierung $\vec{\varphi}_s$ bzw. der Lenkbewegung $\dot{\vec{\varphi}}_s$ der einzelnen Räder und der Position $(x_{\text{ICM}}^r, y_{\text{ICM}}^r)$ bzw. Bewegung $(\dot{x}_{\text{ICM}}^r, \dot{y}_{\text{ICM}}^r)$ des ICM im körperfesten Koordinatensystem (vgl. Abb. C.2(a)):

$$\vec{\varphi}_s = \vec{f}_{s,\vec{k}}(x_{\text{ICM}}, y_{\text{ICM}}) \quad (2.25)$$

$$\dot{\vec{\varphi}}_s = \nabla \vec{f}_{s,\vec{k}} \cdot (\dot{x}_{\text{ICM}}, \dot{y}_{\text{ICM}})^T \quad (2.26)$$

$$= \mathbf{J}_{s,\vec{k}}(x_{\text{ICM}}, y_{\text{ICM}}) \cdot (\dot{x}_{\text{ICM}}, \dot{y}_{\text{ICM}})^T. \quad (2.27)$$

Dabei ist \vec{k} ein N -dimensionaler Vektor, wobei N der Anzahl der lenkbaren Standardräder des Fahrwerks entspricht, der die Ausgangssituation des Fahrwerks charakterisiert. Unterliegen die Räder keinen Lenkwinkelbeschränkungen, so sind jeweils zwei Konfigurationen möglich: Der Vektor parallel zur horizontalen Radachse \vec{z}_1^r zeigt in Richtung des ICM und das Rad rollt „vorwärts“ ab oder \vec{z}_1^r zeigt weg vom

ICM und das Rad rollt „rückwärts“ ab. Es gibt also zu jedem ICM 2^N valide Konfigurationen des Fahrwerks. Für jede Konfiguration ist dann jedoch die Lenkbewegung $\vec{\varphi}_s$ für eine gegebene Bewegung des ICM $(\dot{x}_{\text{ICM}}^r, \dot{y}_{\text{ICM}}^r)$ fest definiert. Ebenso ergibt sich die Rollbewegung $\vec{\varphi}_d$ der Räder über die Rotation ρ_{ICM} des Roboters um den ICM zu

$$\dot{\vec{\varphi}}_d = \vec{f}_{d,k}^r(x_{\text{ICM}}, y_{\text{ICM}}, \rho_{\text{ICM}}). \quad (2.28)$$

Da Fahrwerke häufig kinematisch überbestimmt sind – z.B. bei einem Automobil zwei gelenkte und angetriebene Räder, also vier DoF bzgl. der internen Konfiguration gegenüber den drei DoF der ebenen Bewegung – lassen sich die Gleichungen (2.25) bis (2.28) im Allgemeinen nicht direkt invertieren. Der gegenwärtige Momentanpol kann aber für alle validen Paare von Standardrädern jeweils separat über den Schnittpunkt der jeweiligen Achsen (Abb. C.2(a), Abb. 2.10) bestimmt werden (Anhang C.1):

$$\vec{x}_{\text{ICM}} = \vec{g}_{k_i, k_j}(\varphi_{s_i}, \varphi_{s_j}). \quad (2.29)$$

Unter der Annahme, dass die nicht-holonomen Bindungen ideal erfüllt sind und sich alle Radachsen exakt schneiden, lässt sich für ein Fahrzeug mit drei oder mehr Standardrädern der Momentanpol im Allgemeinen durch Berechnung für ein geeignetes Paar bestimmen.

In der Praxis werden die Ergebnisse bezüglich unterschiedlicher Radpaare für gewöhnlich nicht identisch sein. Befindet sich das Fahrwerk allerdings in einer validen Konfiguration, sollten die Abweichungen so klein sein, dass sich der gegenwärtige Momentanpol des Systems als Schätzwert über alle Paare

$$\hat{\vec{x}}_{\text{ICM}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_{i,j} g(\varphi_{s_i}, \varphi_{s_j}) \quad (2.30)$$

bestimmen lässt. Dabei ist N die Anzahl der Standardräder des Systems und $\alpha_{i,j}$ das Gewicht, mit dem das Paar aus Rad i und Rad j in die Schätzung eingeht. Im einfachsten Fall für Mittelung über alle validen Paare gilt:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \forall g(\varphi_{s_i}, \varphi_{s_j}) \text{ nicht valide} \\ 1/M & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei steht M für die Anzahl aller validen Paare. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden inverse und direkte Kinematik detailliert hergeleitet sowie deren Eigenschaften wie Überbestimmtheit und Singularitäten diskutiert.

Gleichzeitig ergibt sich der ICM als Zentrum der Rotation aller Punkte des festen Körpers aus der Relativbewegung von körperfestem Koordinatensystem und Weltkoordinatensystem zu

$$x_{\text{ICM}}^w = -\frac{\dot{y}_{w,r}^w}{\omega_{w,r}^w} \quad x_{\text{ICM}}^r = -\frac{\dot{y}_{w,r}^r}{\omega_{w,r}^r} \quad (2.31)$$

$$y_{\text{ICM}}^w = \frac{\dot{x}_{w,r}^w}{\omega_{w,r}^w} \quad y_{\text{ICM}}^r = \frac{\dot{x}_{w,r}^r}{\omega_{w,r}^r}, \quad (2.32)$$

wobei $(x_{\text{ICM}}^w, y_{\text{ICM}}^w)$ die Lage des ICM in Weltkoordinaten und $(x_{\text{ICM}}^r, y_{\text{ICM}}^r)$ die Lage im körperfesten Koordinatensystem bezeichnen. Analog ergibt sich die Darstellung des ICM in Polarkoordinaten zu

$$r_{\text{ICM}}^w = \sqrt{(x_{\text{ICM}}^w)^2 + (y_{\text{ICM}}^w)^2} \quad r_{\text{ICM}}^r = \sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2} \quad (2.33)$$

$$\varphi_{\text{ICM}}^w = \arctan_2(y_{\text{ICM}}^w, x_{\text{ICM}}^w) \quad \varphi_{\text{ICM}}^r = \arctan_2(y_{\text{ICM}}^r, x_{\text{ICM}}^r). \quad (2.34)$$

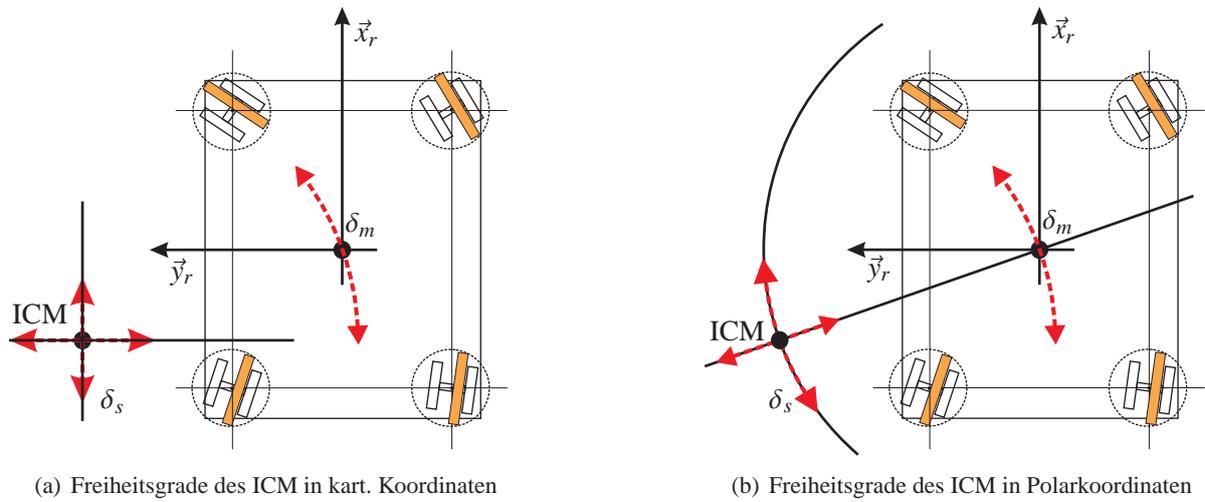


Abbildung 2.10: Momentanpol (ICM) mit Freiheitsgraden für Typ 1 nicht-holonome, omnidirektionale Kinematik bei kartesischer Parametrierung (2.10(a)) und bei Parametrierung über Polarkoordinaten (2.10(b)). Die roten Pfeile mit unterbrochener Linie bei ICM und Koordinatenursprung zeigen die möglichen Freiheitsgrade des Systems bzw. des ICM. Die orangenen Rechtecke mit Umkreis stehen für lenkbare Standardräder, Rechtecke ohne Umkreis für feste Standardräder.

Die Bewegung des Roboters ist dann jeweils durch die Lage des ICM (x_{ICM}, y_{ICM}) bzw. (r_{ICM}, φ_{ICM}) und einen zusätzlichen Parameter ρ_{ICM} , der Betrag und Vorzeichen der Rotationsbewegung um den ICM spezifiziert, gegeben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{wr}^r \\ \dot{y}_{wr}^r \\ \dot{\varphi}_{wr}^r \\ \varphi_{ICM}^r \\ r_{ICM}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi_{ICM}^r) & 0 & 0 \\ -\cos(\varphi_{ICM}^r) & 0 & 0 \\ 1/r_{ICM}^r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{ICM} \\ u_\varphi \\ u_r \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Die dem Degree of Steerability zugeordneten δ_s Freiheitsgrade (u_φ, u_r) des Fahrwerks können dann der Rekonfiguration des ICM zugeordnet werden. Die dem Degree of Mobility zugeordneten δ_m Freiheitsgrade (ρ_{ICM}) können entsprechend direkt der ebenen Bewegung bzw. der Rotation des Roboters um den ICM zugeordnet werden.

Während man mit den dem Degree of Mobility δ_m zugeordneten Freiheitsgraden die Rotationsgeschwindigkeit des Roboters um den ICM beeinflusst, steuern die dem Degree of Steerability δ_s zugeordneten Freiheitsgrade das Verhältnis zwischen den Freiheitsgraden der ebenen Bewegung. Besonders deutlich wird das bei der Darstellung in Polarkoordinaten. Dabei reguliert der Abstand zum Ursprung r_{ICM} das Verhältnis zwischen translatorischer und rotatorischer Geschwindigkeit. Die zugehörige Winkelkoordinate φ_{ICM} bestimmt das Verhältnis zwischen den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors ($\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r$).

Abbildung 2.10 stellt die Freiheitsgrade des ICM für das im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachtete quasi-omnidirektionale Fahrwerk vom Typ 1 dar. Dargestellt ist die Bewegung des ICM in kartesischen (Abb. 2.10(a)) bzw. in Polarkoordinaten (Abb. 2.10(b)). Durch Rekonfiguration des Fahrwerks – Lenken der Standardräder – kann der ICM in jedem beliebigen Punkt der (\vec{x}_w, \vec{y}_w) -Ebene positioniert werden ($\delta_s = 2$). Dabei bewegt sich der ICM auf kontinuierlichen Trajektorien. Die Rotationsgeschwindigkeit des Roboters um den ICM kann unmittelbar angepasst werden ($\delta_m = 1$). Eine Veranschaulichung der Freiheitsgrade des ICM für die übrigen Fahrwerksklassen ist in Anhang C.2 gegeben.

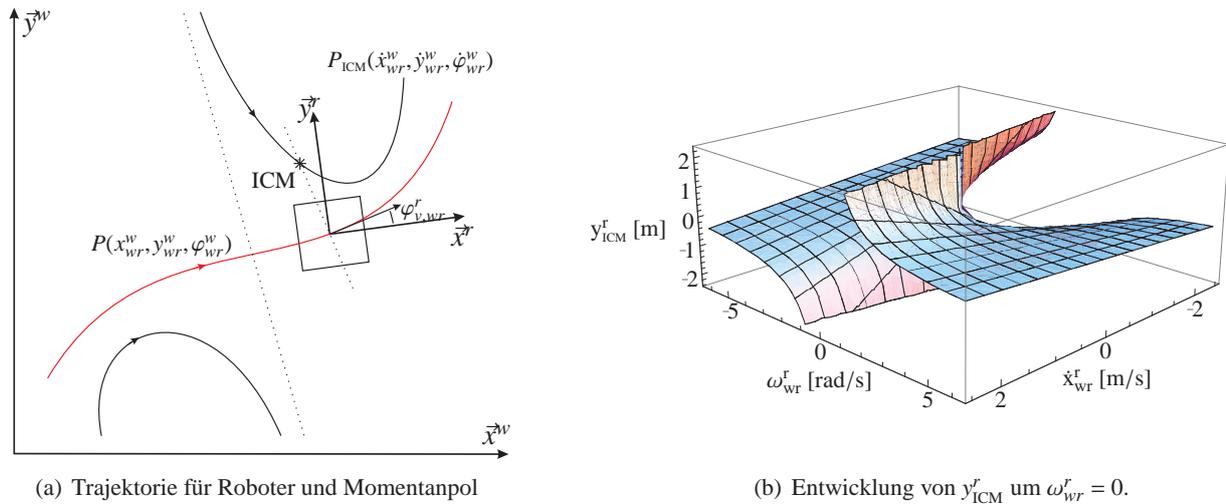


Abbildung 2.11: Abbildung 2.11(a) zeigt die Entwicklung des Momentanpols (ICM) beim Übergang des Roboters von einer Rechts- in eine Linkskurve. Dabei bezeichnet P die Trajektorie des Roboters und P_{ICM} die resultierende Trajektorie des ICM. Der Winkel zwischen körperfestem Koordinatensystem (\vec{x}^r, \vec{y}^r) und Richtung der translatorischen Geschwindigkeit des Roboters ist mit $\varphi^r_{v,wr}$ bezeichnet. Abbildung 2.11(b) zeigt das entsprechende Verhalten der y -Koordinate des ICM im körperfesten Koordinatensystem für die kritische Situation des Nulldurchgangs von ω^r_{wr} .

Der ICM bietet damit eine elegante Möglichkeit, die aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsene Kopplung der einzelnen Räder geometrisch zu beschreiben. Die den ICM beschreibenden Parameter bilden analog dem „Posture Kinematic Model“ (2.23) eine minimale Beschreibung des Fahrwerks. Vorteilhaft ist dabei gegenüber dem Posture Kinematic bzw. dem Configuration Kinematic Model insbesondere die anschauliche Darstellung der gegenwärtigen Konfiguration bzw. die direkte geometrische Ableitung der singulären Bereiche im Arbeitsraum. Diese Eigenschaft ist die Grundlage der in Kapitel 5 entwickelten Ansätze zur Regelung quasi-omnidirektionaler Fahrwerke. Als nachteilig erweist sich hingegen, dass die Zustandsvariablen des ICM z.B. für rein translatorische Bewegung gegen unendlich streben. Bei einem Wechsel zwischen einer Links- und einer Rechtskurve strebt der ICM gegen $-\infty$ und kehrt von $+\infty$ zurück (Abb 2.11(a)). Abbildung 2.11(b) zeigt das entsprechende Verhalten für die y -Koordinate des ICM in der Umgebung von $(\dot{x}^r_{wr}, \dot{\varphi}^r_{wr}) = \vec{0}$. Man erkennt, dass die Funktion unstetig ist und darüber hinaus kein gemeinsamer Grenzwert für die linksseitige $\dot{\varphi}^r_{wr} \rightarrow 0^-$ und die rechtsseitige $\dot{\varphi}^r_{wr} \rightarrow 0^+$ Annäherung existiert. Das ist bei der Ableitung der Stellgrößen bzgl. der Rekonfiguration des ICM bzw. beim Aufstellen eines geeigneten Regelungskonzeptes nachteilig. Um dieses Problem zu umgehen, schlägt (Brandstötter 2007) eine Parametrierung über homogene Koordinaten vor. Analog verwenden Thuilot et al. (Thuilot u. a. 1996) eine modifizierte Darstellung des ICM über die Curvature, dem invertierten Kurvenradius des Systems, welche die Freiheitsgrade des ICM auf eine Kugeloberfläche projiziert.

In dieser Arbeit wird eine Zustandsraumdarstellung erarbeitet, welche unmittelbar den Geschwindigkeitsvektor des Roboters bzw. den Robotertwist $t^r_{wr} = (\dot{x}^r_{wr}, \dot{y}^r_{wr}, \dot{\omega}^r_{wr})$ verwendet. In Anlehnung an die Darstellung nach Thuilot wird der Twist dazu in sphärischen Koordinaten $t^r_{wr} = (\rho^r_{wr}, \varphi^r_{wr}, \theta^r_{wr})$ dargestellt. In Kapitel 3.1 wird gezeigt, dass die Parametrierung des Robotertwists über sphärische Koordinaten einer diffeomorphen Transformation des konkatenierten Vektors aus Momentanpol und dem verbleibenden Freiheitsgrad ω_{ICM} bzw. ρ_{ICM} entspricht. Dies ist Voraussetzung für die Existenz einer stetig differenzierbaren Formulierung von inverser und direkter Kinematik.

3 Topologische Analyse nicht-holonomer Fahrwerkskinematiken

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften und Beziehungen zwischen den im vorigen Kapitel knapp eingeführten Parameterräumen von Configuration Kinematic Model, Momentanpol und sphärischem Twist sowie von Konfigurationsraum des Fahrwerks und Geschwindigkeitsraum der ebenen Bewegung (Abb. 3.1) untersucht.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst der durch Kugelkoordinaten beschriebene Momentanpol eingeführt (Abschnitt 3.1.2). Dieser wird dann durch stetige Fortsetzung (Abschnitt 3.1.3) so erweitert, dass er topologisch dem Configuration Kinematic Model analog ist. Schließlich wird gezeigt (Abschnitt 3.1.4), dass diese erweiterte Darstellung äquivalent zum sphärischen Twist ist. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Nachweis von Diffeomorphie bzw. lokaler Diffeomorphie aller wesentlichen Umformungen. Aus der Diffeomorphie der Transformation folgt unmittelbar, dass stetig differenzierbare Trajektorien im Parameterraum des Twists in stetig differenzierbare Trajektorien im zulässigen Konfigurationsraum $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ abgebildet werden.

Ein Zwischenergebnis dieser Umformungen ist eine vorläufige Formulierung für inverse und direkte Kinematik. Diese werden in den Abschnitten 3.2 und 3.3 abstrahiert und verallgemeinert. Durch eine Zerlegung der inversen Kinematik in verkettete Teilkomponenten werden die singulären Bereiche isoliert. Die Eigenschaften von singularitätsfreier (Abschnitt 3.2.2) und singularitätsbehafteter Abbildung (Abschnitt 3.2.3) werden separat untersucht. Analog wird für die direkte Kinematik vorgegangen. Diese Zerlegung erlaubt es für die Singularitäten und ihre Umgebung, Surjektivität und in eine Richtung stetige Differenzierbarkeit zu zeigen. Dies ist die Grundlage für die Bildung eines Atlases auf Basis des sphärischen Twists (Abschnitt 3.3.2), der anders als Momentanpol und Configuration Kinematic Model den vollständigen, zulässigen Konfigurationsraum umfasst.

Auf Basis dieser Ergebnisse werden anschließend in Kapitel 4 zwei mögliche Definitionen des Zustandsraums entwickelt und das resultierende System auf Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit untersucht.

3.1 Vollständige Parametrierung des zulässigen Konfigurationsraums $N[\mathbf{C}_{1,S}]$

3.1.1 Topologie des Twists

Wie in Abschnitt 2.2.3 erläutert, kann die kinematische Modellierung und Regelung der Geschwindigkeit des Systems nicht direkt auf Basis des in kartesischen Koordinaten parametrisierten Twists $\vec{t}_{wr,c}$ erfolgen. Besser geeignet ist zum Beispiel eine Parametrierung über den Momentanpol. Dieser geht zum einen unter lokal diffeomorpher Abbildung (2.25 - 2.29) aus dem Unterraum $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ des Konfigurationsraums $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$, hervor (Abb. 3.1). Dabei war $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ gerade der Nullraum der nicht-holonomen Bindungen, also die Menge der Konfigurationen, welche die nicht-holonomen Bindungen (2.18) erfüllen. Zum anderen ist auch eine Transformation (2.31 - 2.34) aus dem Geschwindigkeitsraum in den Momentanpolraum möglich (Abb. 3.1). Allerdings ergeben sich auch hier für manche Konfigurationen problematische Konstellationen. So liegt der Momentanpol bei Geradeausfahrt im Unendlichen. Das führt spätestens bei der konkreten Implementierung eines Reglers zu Problemen.

In diesem Abschnitt wird ein Basissystem für die im Folgenden verwendete Zustandsraumdarstellung entwickelt, welches diese Probleme beseitigt. Dazu wird gezeigt, dass die Darstellung des Twistvektors in sphärischen Koordinaten einer lokal diffeomorphen Abbildung des validen Konfigurationsraums $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ entspricht (Abb. 3.1). Da bei diffeomorpher bzw. lokal diffeomorpher Abbildung stetig differenzierbare Trajektorien in der Ursprungsmenge bzw. einer offenen Umgebung innerhalb der Ursprungsmenge in stetig differenzierbare Trajektorien in der Bildmenge abgebildet werden, kann der Reglerentwurf dann auf Basis der sphärischen Parametrierung des Twists erfolgen.

Die Parametrierung des Twists in Kugelkoordinaten lehnt sich dabei an die in der Navigation von Schiffen und Flugzeugen gebräuchlichen geographischen Koordinaten (Titterton und Weston 2004) an:

$$t_{wr}^r = \begin{pmatrix} \rho_{wr}^r \\ \varphi_{wr}^r \\ \theta_{wr}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (d_{max} \cdot \dot{\omega}_{wr}^r)^2} \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) \\ \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \dot{\omega}_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

wobei \arctan_2 den in vier Quadranten definierten Arcustangens bezeichnet. Damit liegt φ_{wr}^r im Intervall $[-\pi, \pi)$ und θ_{wr}^r im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$. Die Rücktransformation ergibt sich entsprechend zu:

$$t_{wr,c}^r = \begin{pmatrix} \dot{x}_{wr}^r \\ \dot{y}_{wr}^r \\ \omega_{wr}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{wr}^r) \cdot \cos(\varphi_{wr}^r) \\ \rho_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{wr}^r) \cdot \sin(\varphi_{wr}^r) \\ \rho_{wr}^r \cdot \sin(\theta_{wr}^r) \cdot 1/d_{max} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Der konstante Faktor d_{max} ermöglicht dabei, die Rotationsrate ω_{wr}^r in eine Pseudogeschwindigkeit umzuformen und so konsistent zu SI-Einheiten zu bleiben. Wird der Faktor als Distanz $d_{a,i}$ zwischen Koordinatenursprung und dem am weitesten entfernten Rad i gewählt, so ergibt sich ρ_{wr}^r als Maximum der Rad-Boden-Geschwindigkeiten. Damit ist ρ_{wr}^r ein Maß der für diese Bewegung maximal benötigten Drehrate $\dot{\varphi}_{d,max}$ über alle Räder. Wird d_{max} wie in Kapitel 5 vorgeschlagen gewählt, lassen sich Rekonfiguration und Repositionierung näherungsweise energetisch entkoppeln.

Der Nachweis des Diffeomorphismus für die Abbildung von $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ in den Raum des sphärischen Twists gliedert sich in drei Schritte. Ausgangspunkt ist dabei der über kartesischen Koordinaten definierte Momentanpol, der nach Abschnitt 2.2.3 gerade der geometrischen Interpretation des nicht-trivialen Anteils von $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ entspricht. Der erste Schritt (Abschnitt 3.1.2) umfasst im Wesentlichen die stereografische Projektion des Momentanpols aus der (\vec{x}_r, \vec{y}_r) -Ebene auf eine Einheitskugel (Abb. 3.2). Grundlage sind die Gesetzmäßigkeiten der projektiven Geometrie nach Riemann bzw. Möbius (vgl. Kap. 3 S. 84 ff. in (Fischer und Lieb 2010)). Dabei wird gezeigt, dass sich der Momentanpol von seiner Darstellung in Polarkoordinaten lokal diffeomorph auf Kugelkoordinaten bzgl. der oberen (Abb. 3.3(a)) bzw. unteren Halbkugel (Abb. 3.3(b)) der Einheitskugel abbilden lässt. Im zweiten Schritt (Abschnitt 3.1.3) wird eine erweiterte Definition der Polarkoordinaten eingeführt, die eine stetige und letztlich diffeomorphe Fortsetzung des Momentanpols auf der gesamten Kugeloberfläche, mit Ausnahme der Pole, erlaubt (Abb. 3.4). Dabei wird gezeigt, dass diese erweiterte Parametrierung eine diffeomorphe Abbildung von $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ in der Umgebung von $|\vec{x}_{ICM}| = \infty$ erlaubt. Um die Bijektivität, welche neben der stetigen Differenzierbarkeit Voraussetzung für Diffeomorphismus ist, der Abbildung zu erhalten, werden zwei Lösungsdomänen eingeführt. Im letzten Schritt (Abschnitt 3.1.4) wird gezeigt, dass diese Darstellung durch einige einfache Operationen in den Twist t_{wr}^r nach (3.1) umgeformt werden kann. Die Konsequenzen, die sich aus der Aufspaltung in zwei Lösungsdomänen ergeben sowie die damit zusammenhängende Rolle des verbleibenden Parameters ρ_{wr}^r werden dann in Kapitel 4 diskutiert.

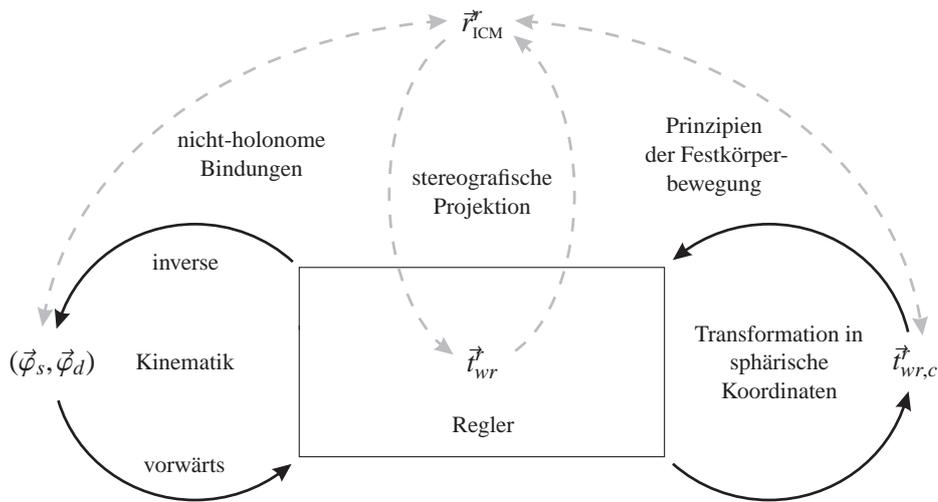


Abbildung 3.1: Der Konfigurationsraum des Momentanpols $\vec{r}_{ICM}^r = (r_{ICM}, \varphi_{ICM})$ entspricht dem Unterraum $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ des Konfigurationsraums $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$, in welchem die aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Zwangsbedingungen immer erfüllt sind. Der Momentanpol kann wiederum durch stereografische Projektion und einige weitere einfache Umformungen lokal diffeomorph auf die Darstellung \vec{t}_{wr} des Twistvektors in Kugelkoordinaten abgebildet werden.

3.1.2 Der Momentanpol unter Projektion auf die Riemannsche Sphäre

Bernhard Riemann hat durch die Einführung der Riemannschen Sphäre die Menge der komplexen Zahlen um die Unendlichkeitsstelle erweitert. Auf der Riemannschen Sphäre lassen sich damit Funktionen im Unendlichen untersuchen. Des Weiteren sind auf der Riemannschen Sphäre Operationen wie die Division durch Null für Dividenten ungleich Null wohl definiert. Dazu projiziert Riemann die komplexe Ebene auf eine Einheitskugel, beschreibt Punkte auf der zweidimensionalen Ebene also nun durch drei Koordinaten und eine Zwangsbedingung. Die homogenen Koordinaten nach Möbius (vgl. (Fischer und Lieb 2010)) verallgemeinern dieses Prinzip und übertragen es auf reelle Zahlen (Abb. 3.2).

Durch Einbettung in diesen höher dimensionalen Raum und stereografische Projektion auf die Einheitskugel lassen sich Geraden singularitätsfrei als Kreisbögen darstellen. Eine im Folgenden wichtige Eigenschaft der Projektionen auf die Einheitskugel ist, dass solche Kreisbögen unter Möbiustransformationen wieder auf Kreisbögen auf der Einheitskugel abgebildet werden. Damit ist die Inversion im reellen $(\bullet)^{-1}$ als Ausprägung der Möbiustransformation über den ganzen Raum inklusive des Fernpunkts definiert.

Im Kontext der Regelung hat die Parametrierung auf Basis von homogenen Koordinaten jedoch einen entscheidenden Nachteil. Die Kreisbögen bzw. die Oberfläche der Kugel K werden hier durch drei Parameter (ξ_1, ξ_2, ξ_3) sowie die Zwangsbedingungen

$$K := \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 = 1 \right\} \quad (3.3)$$

definiert. Bei der Regelung müssten daher neben den dynamischen Eigenschaften des Systems noch weitere Bedingungen z.B. in Form von Zwangskräften eingeführt werden. Durch Wahl einer geeigneten zweidimensionalen Parametrierung des Oberfläche der Einheitskugel kann diese Zwangsbedingung implizit berücksichtigt werden. Eine solche Darstellung ist zum Beispiel durch Parametrierung mittels der sphärischen Koordinaten (φ, θ) gegeben. Dabei wird in Kauf genommen, dass in den Polen der Kugel eine Singularität entsteht (Titterton und Weston 2004). An dieser Stelle ist die Abbildung von dreidimensiona-

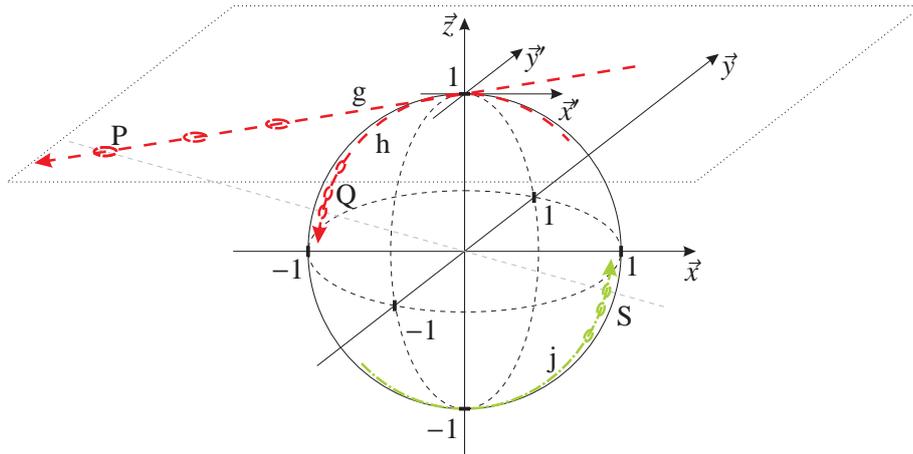


Abbildung 3.2: Der Punkt P wird durch Projektion auf die Einheitskugel in die Punkte Q und S abgebildet. Analog ergeben sich die Kreisbögen h und j aus der Projektion von g auf die Einheitskugel. Interpretiert man die durch (\vec{x}', \vec{y}') gebildete Ebene als die Ebene, in der sich der Roboter bewegt bzw. die Ebene, in der der Momentanpol definiert ist, so erhält man durch Projektion die Bahn des Momentanpols als Kreisbogen auf der Einheitskugel.

len kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten bekanntlich nicht strukturhaltend und damit nicht diffeomorph. Die damit verbundenen, praktischen Konsequenzen werden in Kapitel 4 im Zusammenhang mit System- und Reglerentwurf diskutiert. Es zeigt sich, dass sich diese Singularität vergleichsweise gut handhaben lässt. Abgesehen von dieser Singularität kann gezeigt werden, dass diese Abbildung diffeomorph zur ursprünglichen Repräsentation des Momentanpols und damit ein valider Arbeitsraum ist.

Ausgangspunkt dieser Betrachtungen ist dabei wieder die Darstellung des Momentanpols in Polarkoordinaten. Dabei ist zu beachten, dass eine Gerade durch den Ursprung (g in Abb. 3.2) sich in der üblichen Polarkoordinatendarstellung nicht vollständig wiedergeben lässt. Der Punkt $(0,0)$ lässt sich nicht eindeutig von der kartesischen Darstellung in die polare Darstellung umrechnen. Dies fällt zusammen mit der erwähnten Singularität im Pol der Einheitskugel. Darüber hinaus muss der Mehrdeutigkeit der Abbildung auf die Einheitskugel Rechnung getragen werden. Sonst ließe sich die Gerade nur auf die obere Halbkugel abbilden (Abb. 3.3(a)) und die Abbildung wäre damit nicht länger kontinuierlich während des Durchgangs durch den Fernpunkt. Daher werden die Polarkoordinaten im Folgenden zusätzlich zu der in (2.33, 2.34) gegebenen Form durch eine duale Parametrierung

$$\varphi_{\text{ICM},d2}^r = \arctan_2(y_{\text{ICM}}^r, x_{\text{ICM}}^r) + \pi \quad (3.4)$$

$$r_{\text{ICM},d2}^r = -\sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2} \quad (3.5)$$

ausgedrückt, welche dem Kreisbogen auf der unteren Halbkugel (Abb. 3.3(b)) zugeordnet ist. In Abbildung 3.3 ist zu erkennen, dass für beide Domänen (Abb. 3.3(a) und Abb. 3.3(b)) der zur Projektion gehörige, in der $(\vec{x}_{wr}', \vec{y}_{wr}')$ -Ebene liegende Winkel φ identisch zum Winkel φ_{ICM}^r der polaren Darstellung des ICM ist. Des Weiteren ergibt sich der Azimuth θ direkt aus der Anwendung des Arcustangens auf das Inverse des Radius r_{ICM}^r (Anhang C.1). Damit ergeben sich die Koordinaten der Projektion des Momentanpols auf der Einheitskugel als Funktion

$$\vec{s}_{\text{ICM}} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{ICM}}^r \\ \arctan\left(\frac{1}{r_{\text{ICM}}^r}\right) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

der ursprünglichen Polarkoordinaten. Dabei wurden die Domänenbezeichnungen hier ausgelassen.

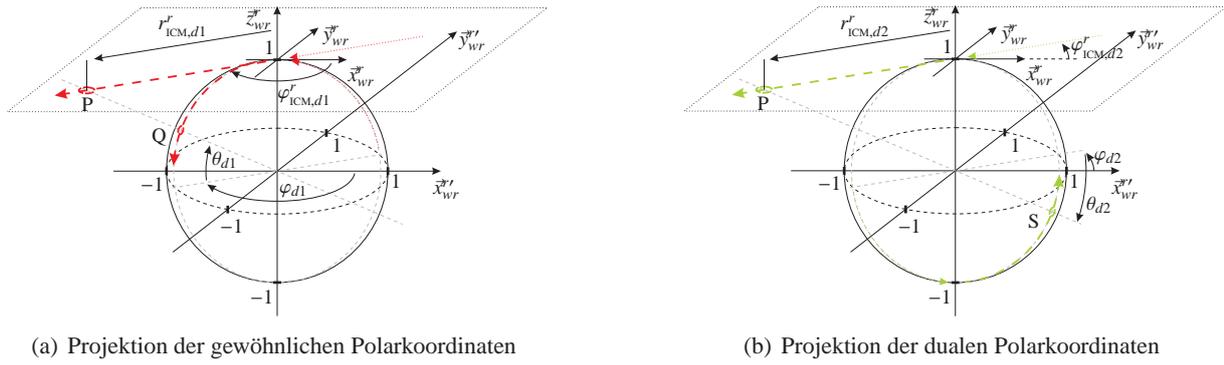


Abbildung 3.3: Abbildung 3.3(a) zeigt die Projektion der gewöhnlichen Polarkoordinatendarstellung (2.33, 2.34) auf die Einheitskugel, Abbildung 3.3(b) die duale Darstellung (3.5, 3.4) mit negativem r_{ICM} . Die beiden Abschnitte der Geraden (links: unterbrochener Strich; rechts: Linie von Punkten) werden dabei auf die obere bzw. untere Halbkugel abgebildet und sind sowohl im Pol $(x_{\text{ICM}}^r, y_{\text{ICM}}^r) = \vec{0}$ wie auch für $r_{\text{ICM}} \rightarrow \infty$ unterbrochen.

Um diese Darstellung als Basis des Zustandsraums, in welchem die Regelung entworfen wird, verwenden zu können, müssen die Umformungen von (2.33, 2.34) bzw. (3.5, 3.4) nach (3.6) diffeomorph sein. Dann folgt unmittelbar, dass stetig differenzierbare Trajektorien im Parameterraum des Twists in stetig differenzierbare Trajektorien im Parameterraum des Momentanpols bzw. im Konfigurationsraum abgebildet werden. Dabei ist eine Abbildung ϕ dann diffeomorph, wenn ϕ bijektiv ist und sowohl ϕ wie auch ihre Umkehrung ϕ^{-1} beliebig oft stetig differenzierbar sind. Man kann erkennen, dass dies für die beiden Operationen, Inversion und Bildung des Vier-Quadranten-Arcustangens gilt. So ist die Inversion

$$\begin{aligned} \Phi &= (\bullet)^{-1} : S^+ \rightarrow S^- & \Phi &: S^- \rightarrow S^+ \\ S^+ &:= \{s | s \in (0, \infty)\} & S^- &:= \{s | s \in (-\infty, 0)\} \end{aligned}$$

in S^+ bzw. S^- sowohl bijektiv als auch beliebig oft stetig differenzierbar. Alternativ kann man die Inversion auch als den trivialen Fall der Möbiustransformation interpretieren. Da es gerade eine Eigenschaft der Riemannschen Sphäre war, dass Kreisbögen auf ihrer Oberfläche unter einer Möbiustransformation wieder in Kreisbögen auf der Oberfläche abgebildet werden, ist die Inversion hier sogar über den gesamten Wertebereich definiert und diffeomorph. Ebenso ist

$$\begin{aligned} \Psi &= \arctan(\bullet) : \mathbb{R} \rightarrow T \\ T &:= \{t | t \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

eine diffeomorphe Abbildung, da der Arcustangens innerhalb der hier definierten Domänen bijektiv und sowohl Arcustangens wie auch Tangens beliebig oft stetig differenzierbar sind. Die Domänen wurden eingeführt, um eben diese Eigenschaft sicherzustellen. Da S^+ und S^- jeweils Teilmengen von \mathbb{R} sind, ist damit die Abbildung $\Psi : S \rightarrow T^+$ mit $T^+ = \{t | t \in (0, +\pi/2)\}$ bzw. $\Psi : S^- \rightarrow T^-$ mit $T^- = \{t | t \in (-\pi/2, 0)\}$ ebenfalls diffeomorph. Damit folgt, dass auch die Verkettung $\Theta = \Psi \circ \Phi$ eine diffeomorphe Abbildung $S \rightarrow T^+$ bzw. $S^- \rightarrow T^-$ ist. Damit ist gezeigt, dass sich die Darstellung des Momentanpols innerhalb eines Quadranten der um φ rotierten $(\vec{x}_{wr}, \vec{z}_{wr})$ -Ebene diffeomorph abbilden lässt.

Aus dieser Diffeomorphie folgt, dass der Parameterraum des sphärischen Momentanpols eine sinnvolle Basis für eine Zustandsraumdarstellung des zu regelnden Systems ist. Ein Regelungsgesetz, welches in einem solchen Zustandsraum auf stetig differenzierbare Systemtrajektorien führt, führt unmittelbar auch auf stetig differenzierbare Systemtrajektorien im Konfigurationsraum.

3.1.3 Der Twist als stetige Fortsetzung des projizierten Momentanpols

Um die Abbildung des Momentanpols über die gesamte Einheitskugel stetig fortzusetzen, müssen die Intervallgrenzen der Quadranten aus Abschnitt 3.1.2 gesondert untersucht werden. Aufgrund der Rotationsymmetrie des betrachteten Raums müssen dazu nur zwei Regionen untersucht werden: Die Pole der Kugel und der Übergang zwischen der oberen und unteren Halbkugel.

In den Polen ist eine stetige Fortsetzung zunächst nicht möglich. Das ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Darstellung in Kugelkoordinaten bzw. Polarkoordinaten. Schon die Transformation des Momentanpols von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist an der Stelle $(x_{\text{ICM}}^r, y_{\text{ICM}}^r) = \vec{0}$ nicht definiert. Die jeweiligen Grenzwerte für linksseitige und rechtsseitige Annäherung weisen einen Sprung in der Koordinate φ_{ICM}^r auf. Damit ist die Abbildung in diesem Punkt nicht diffeomorph. Da das Gleiche für die Darstellung des Twists in Kugelkoordinaten gilt – es wird im Folgenden gezeigt, dass diese Pole aufeinander abgebildet werden – ist der Bruch der Diffeomorphie an dieser Stelle allerdings unproblematisch. Die Implikationen, die sich aus diesem Bruch der Diffeomorphie für die Regelung ergeben, werden in den folgenden Abschnitten im Kontext zur Formulierung von inverser Kinematik und Vorwärtskinematik detailliert diskutiert.

Ähnlich wie für den Pol $(x_{\text{ICM}}^r, y_{\text{ICM}}^r) = \vec{0}$ liegt in der Polarkoordinatendarstellung und der zugehörigen Darstellung in Kugelkoordinaten (Abb. 3.3(a) bzw. Abb. 3.3(b)) beim Durchgang durch die Unendlichkeitsstelle ebenfalls ein Sprung des Parameters φ_{ICM}^r um π vor, obwohl sich die Konfiguration $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$ kontinuierlich ändert. Um die Projektion des Momentanpols an der Grenze zwischen oberer und unterer Halbkugel, welche dem Durchgang des Momentanpols durch Unendlich entspricht, stetig fortzusetzen (Abb. 3.4), wird eine erweiterte Definition der Polarkoordinaten eingeführt. Dazu werden die duale Darstellung (3.5, 3.4) und die ursprüngliche Darstellung (2.33, 2.34) im Fernpunkt überlagert

$$\begin{pmatrix} r_{\text{ICM},d1}^r \\ \varphi_{\text{ICM},d1}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2} \\ \arctan_2(y_{\text{ICM}}^r, x_{\text{ICM}}^r) \end{pmatrix} \quad \forall \frac{k_k}{\lambda_k} \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} r_{\text{ICM},d1}^r \\ \varphi_{\text{ICM},d1}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2} \\ \arctan_2(y_{\text{ICM}}^r, x_{\text{ICM}}^r) + \pi \end{pmatrix} \quad \forall \frac{k_k}{\lambda_k} < 0, \quad (3.9)$$

so dass sich eine über den gesamten Wertebereich stetige Funktion ergibt. Dabei ist λ_k der in Anhang C.1 eingeführte vorzeichenbehaftete Abstand des Momentanpols von einem beliebigen, nach C.1 geeigneten Rad k . Der in Anhang C.1 eingeführte Parameter $k_k \in \{-1, 1\}$ erlaubt die Auflösung der mit einem beliebigen Rad k verbundenen Mehrdeutigkeiten bzgl. der kinematischen Entwicklung des Systems. Der Parameter wechselt sein Vorzeichen gerade dann, wenn der Momentanpol sich durch die Lenkachse des Rades k bewegt, ist also in der Umgebung des Fernpunktes konstant.

Der auf die Einheitskugel projizierte Momentanpol nach (3.6) schreibt sich für diese erweiterte Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{ICM}}^{r*} \\ \arctan\left(\frac{1}{r_{\text{ICM}}^{r*}}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \arctan_2(y_{\text{ICM}}, x_{\text{ICM}}) + \pi \sigma\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right) - \langle \delta\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \rangle \\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2}} \cdot \text{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right)\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

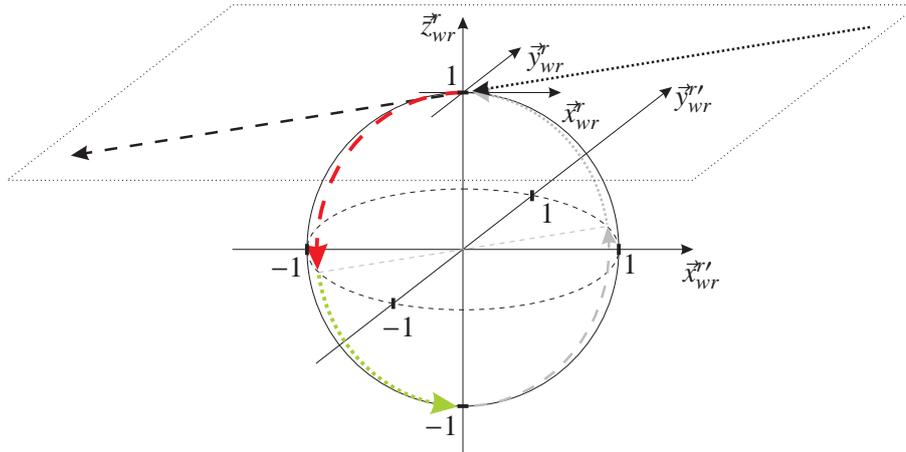


Abbildung 3.4: Abbildung der kombinierten Polarkoordinaten auf die Einheitskugel.

Dabei bezeichnet $\sigma(a)$ die über den Arcustangens definierte Heaviside-Funktion

$$\sigma(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{a}{\epsilon}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sigma(a) = \begin{cases} +1 & \forall a > 0 \\ 1/2 & a = 0 \\ 0 & \forall a < 0 \end{cases},$$

$\text{sgn}(a)$ die über die Heaviside-Funktion definierte Signum-Funktion

$$\text{sgn}(a) = 2 \cdot \left(\sigma(a) - \frac{1}{2} \right) \quad (3.11)$$

und $\langle \delta(a), f(a) \rangle$ die Auswertung der Funktion f an der Stelle $a = 0$ durch Faltung mit der Dirac-Distribution bzw. Bildung des Skalarproduktes (vgl. (Cohen-Tannoudji u. a. 1999) S.98 ff.) mit der um a verschobenen Dirac-Distribution

$$\langle \delta(a), f \rangle = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \delta(x-a) f(x) dx. \quad (3.12)$$

Diese Darstellung (3.10) ist genau dann eine valide Repräsentation des zulässigen Konfigurationsraums $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ des Fahrwerkes bzw. eines Unterraums von $N[\mathbf{C}_{1,S}]$, wenn (3.10) eine diffeomorphe bzw. lokal diffeomorphe Abbildung $\Phi : N[\mathbf{C}_{1,S}] \rightarrow S = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ ist. Dabei ist die Abbildung Φ genau dann diffeomorph, wenn sie bijektiv und sowohl Φ als auch ihre Umkehrabbildung Φ^{-1} beliebig oft stetig differenzierbar (C^∞) sind. Um das zu zeigen, wird (3.10) in der Umgebung des Fernpunktes als Funktion der Lenkwinkel $\vec{\varphi}_s$ des Fahrwerkes ausgedrückt.

Nach einigen Umformungen (Anhang C.3) lassen sich die Parameter (φ, θ) aus (3.6) bzw. (3.10) auch in der Umgebung des Fernpunktes $r_{\text{ICM}}^{r*} \rightarrow \infty$ direkt als Funktion

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{\varphi}_s) = \begin{pmatrix} \varphi_{s,k} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma(-k_k) \\ k_k \cdot \arctan\left(\frac{\sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})}\right) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

der Konfiguration des Roboters $\vec{\varphi}_s$ bzw. der Lenkwinkel $(\varphi_{s,i}, \varphi_{s,k})$ eines nach Anhang C.1 geeigneten Radpaares schreiben. Diese Repräsentation entspricht, bis auf den später noch relevanten Parameter k , dem Configuration Kinematic Model.

Ebenso lässt sich eine geschlossene Formulierung für die Konfiguration der Räder als Funktion

$$\begin{aligned}\varphi_{s,k} &= \arctan_2(\sin(\varphi) - y_{a,k} \tan(\theta), \cos(\varphi) - x_{a,k} \tan(\theta)) - \pi/2 - \pi\sigma(-k_k) \\ \varphi_{s,i} &= \arctan_2(\sin(\varphi) - y_{a,i} \tan(\theta), \cos(\varphi) - x_{a,i} \tan(\theta)) - \pi/2 - \pi\sigma(-k_i) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (3.14)$$

der sphärischen Koordinaten nach (3.13) und der Konfiguration des Fahrwerks $(\vec{x}_{a,k}, k_k)$ herleiten (C.3). Die Gleichungen (3.14) stellen damit eine erste vorläufige Formulierung der inversen Kinematik dar. Man kann erkennen, dass die Gleichungen (3.14) für $\theta = 0$ identisch sind zum ersten Term in (3.13). Dabei sind (3.14) immer definiert, solange

$$\sin(\varphi) - y_{a,k} \tan(\theta) \neq 0 \quad \vee \quad \cos(\varphi) - x_{a,k} \tan(\theta) \neq 0 \quad (3.15)$$

gilt. Dies ist nur dann nicht erfüllt, wenn der Momentanpol auf der Lenkachse des Rades k liegt. Aus den Bedingungen (3.15) ergeben sich die wesentlichen Singularitäten. Für die Umgebung des Fernpunktes $\theta \rightarrow 0$ ist dieser Fall also unkritisch.

Mit (3.13) und (3.14) sind damit Abbildung und Umkehrabbildung zwischen zulässigem Konfigurationsraum und dem neu definierten Momentanpol in Kugelkoordinaten in der Umgebung des Fernpunktes gegeben. Um zu zeigen, dass diese Abbildung diffeomorph im Fernpunkt ist, muss gezeigt werden, dass Abbildung (3.13) und Umkehrabbildung (3.14) bijektiv und stetig differenzierbar in der Umgebung des Fernpunktes sind. Nach Anhang (C.1) ist k_k in der Umgebung des Fernpunktes konstant. Dieser Parameter ändert sich nur bei Durchgang des Momentanpols durch die Lenkachse des k -ten Rades, also in der Nähe des Pols bzw. Ursprungs. Damit folgt unmittelbar, dass die Terme in (3.14) für $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $\theta \in (0 - \gamma, 0 + \gamma)$ mit $\gamma \rightarrow 0$ bijektiv sind. Das Gleiche gilt offensichtlich auch für den oberen Term in (3.13). Der zweite Term in (3.13) ist hingegen in der Umgebung von $\sin(\Delta\varphi_{ik}) \rightarrow +/-0$ nur unter der Bedingung

$$\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i}) \neq 0 \quad (3.16)$$

eindeutig definiert. Das schließt die Situation aus, in der die Achsen des Radpaares sowohl zueinander parallel als auch parallel zum Vektor $\Delta\vec{x}$, der von einer Radachse zur anderen zeigt, sind. Dies ist die Voraussetzung für ein geeignetes „Radpaar“ nach Anhang C.1. Das begrenzt die Ursprungsmenge auf

$$\varphi_{s,i} \in (-\pi, \pi] \left\{ \varphi_p, \varphi_p + \pi \right\} \quad (3.17)$$

$$\varphi_p = \arctan\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right). \quad (3.18)$$

Unter Beachtung der 2π -Periodizität in φ bzw. $\varphi_{s,i}$ ergeben sich die Ursprungsmengen

$$U = \left\{ \varphi_{s,k} \in (\varphi_p + \epsilon, \varphi_p + \pi - \epsilon) \wedge \varphi_{s,i} \in (\varphi_p, \varphi_p + \pi) \right\} \quad (3.19)$$

$$U^* = \left\{ \varphi_{s,k} \in (\varphi_p + \pi + \epsilon, \varphi_p - \epsilon) \wedge \varphi_{s,i} \in (\varphi_p + \pi, \varphi_p) \right\} \text{ mit} \quad (3.20)$$

$$\epsilon = |\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i}| \geq 0, \quad (3.21)$$

die in der Umgebung von $\epsilon \rightarrow 0$ durch (3.13) bzw. (3.14) bijektiv abgebildet werden auf die Bildmengen

$$Z = \left\{ \varphi \in (\varphi_p + \epsilon + \pi/2 + \pi\sigma(-k_k), \varphi_p - \epsilon + 3/2\pi + \pi\sigma(-k_k)) \wedge \theta \in (0 - \gamma, 0 + \gamma) \right\} \quad (3.22)$$

$$Z^* = \left\{ \varphi \in (\varphi_p + \epsilon + 3/2\pi + \pi\sigma(-k_k), \varphi_p - \epsilon + \pi/2 + \pi\sigma(-k_k)) \wedge \theta \in (0 - \gamma, 0 + \gamma) \right\}. \quad (3.23)$$

Dabei ist für beliebige, aber feste $\varphi_{s,k}$ der Wert von γ eine Funktion von $\varphi_{s,i}$. Das bedeutet, jedes bildbare Radpaar lässt sich immer nur auf eine Teilmenge des gesamten Definitionsbereichs abbilden. Existieren allerdings mindestens drei Räder, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, so lässt sich durch geeignete Wahl des jeweiligen Paares die Bildmenge auf die gesamte Definitionsmenge $D = \{\varphi \in (-\pi, \pi] \wedge \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ erweitern.

Damit ist die Abbildung $\Phi : (\varphi, \theta) \rightarrow N[C_{1,s}]$ genau dann diffeomorph, wenn (3.13) und (3.14) beliebig oft stetig differenzierbar (C^∞) sind. Durch partielle Ableitung von (3.13)

$$\nabla \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{s,i}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{s,k}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{s,i}} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{s,k}} \end{pmatrix}$$

ergibt sich bezüglich der φ -Komponente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{s,i}} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{s,k}} = 1 . \quad (3.24)$$

Dies ist trivial C^∞ . Bezüglich der θ -Komponente ergeben sich:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{s,i}} = \frac{k_k}{1 + \left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{ik})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})} \right)^2} \cdot \frac{\Delta y \sin(\varphi_{s,k} - 2\varphi_{s,i}) - \Delta x \cos(\varphi_{s,k} - 2\varphi_{s,i})}{(\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i}))^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{s,k}} = \frac{k_k}{1 + \left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{ik})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})} \right)^2} \cdot \cos(\Delta\varphi_{ik}) . \quad (3.26)$$

Diese Terme sind genau dann stetig und C^∞ , wenn Bedingung (3.16) erfüllt ist.

Um (3.14) auf stetige Differenzierbarkeit zu untersuchen, wird die Definition des Arcustangens über den Hauptwert des komplexen Logarithmus genutzt. Damit lassen sich die Terme in (3.14) schreiben als

$$\vec{\varphi}_s = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{1}{i} \ln \frac{a_i + ib_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} - \pi/2 - \pi\sigma(-k_i) \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ mit} \quad (3.27)$$

$$a = \cos(\varphi) - x_{a,i} \tan(\theta) \quad (3.28)$$

$$b = \sin(\varphi) - y_{a,i} \tan(\theta) . \quad (3.29)$$

Voraussetzung für die Existenz des komplexen Logarithmus in (3.27) ist dabei gerade, dass

$$a^2 + b^2 \neq 0 .$$

Das ist identisch mit Bedingung (3.15). Die Ableitung von (3.14) bzw. (3.27) ergibt sich analog durch partielle Ableitung des i -ten Elements zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial \theta} . \end{aligned}$$

Für die Ableitung nach φ ergibt sich dann durch Anwendung auf (3.27)

$$\frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial \varphi} = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{a+ib} - \frac{a}{a^2+b^2} \right) \cdot (-\sin(\varphi)) + \frac{1}{i} \left(\frac{i}{a+ib} - \frac{b}{a^2+b^2} \right) \cdot \cos(\varphi). \quad (3.30)$$

Man kann erkennen, dass mit Bedingung (3.15)

$$\sin(\varphi) - y_{a,i} \tan(\theta) \neq 0 \quad \vee \quad \cos(\varphi) - x_{a,i} \tan(\theta) \neq 0$$

Gleichung (3.30) sowohl stetig, wie auch C^∞ ist. Analog ergibt sich für den zweiten Term

$$\frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial \theta} = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{a+ib} - \frac{a}{a^2+b^2} \right) \cdot \frac{-x_{a,i}}{\cos^2(\theta)} + \frac{1}{i} \left(\frac{i}{a+ib} - \frac{b}{a^2+b^2} \right) \cdot \frac{-y_{a,i}}{\cos^2(\theta)}. \quad (3.31)$$

In der Umgebung des Fernpunktes $\theta \rightarrow 0$ ist dieser Term ebenfalls stetig bzw. beliebig oft stetig differenzierbar. Damit ist

$$\Phi : N[C_{1,s}]_{\vec{\varphi}_s} \rightarrow \vec{s}$$

wie in (3.13) und (3.14) definiert ein lokaler Diffeomorphismus bzw. sind \vec{s} und $N[C_{1,s}]_{\vec{\varphi}_s}$ lokal diffeomorph zueinander. Ausgenommen sind gerade die durch (3.15) definierten Punkte des Parameterraums, in welchen die inverse Kinematik singulär wird. Die hier eingeführte stetige Fortsetzung des Momentanpols im Fernpunkt ist damit ein valider Arbeitsraum.

3.1.4 Der sphärische Twist als Analogie des projizierten Momentanpols

Um die Gültigkeit der in Abbildung 3.1 dargestellten Transformationen abschließend zu begründen, wird nun die Analogie zwischen der Darstellung des Twists in Kugelkoordinaten (3.1) und der stetig fortgesetzten Projektion des Momentanpols auf die Einheitskugel (3.10) gezeigt. Dabei wird im Folgenden vorausgesetzt, dass sich der Roboter bewege ($\vec{r}_{wr} \neq \vec{0}$). Diese Annahme ist notwendig, da die Darstellung des Twists in Kugelkoordinaten nach (3.1) andernfalls nicht definiert ist. Diese Voraussetzung ist keine wesentliche Einschränkung, da sie sich bei der praktischen Implementierung z.B. durch Speichern des letzten Zustands leicht handhaben lässt.

Unter der Voraussetzung, dass sich der Roboter bewegt ($\vec{r}_{wr} \neq \vec{0}$), gibt es mindestens ein Rad i , das auf dem Untergrund abrollt ($\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$). Nach der Definition des Momentanpols über die Gesetze der Festkörperbewegung und unter Einhaltung der aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Rollbedingung (2.17) lässt sich die Rotationsrate ω_{wr}^r damit als Funktion

$$\omega_{wr}^r = \frac{\dot{\varphi}_{d,i} \cdot r_i}{\lambda_i} \quad (3.32)$$

der Rotation $\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$ sowie des Radius r_i des Rades (Tabelle 2.3) und des Parameters $\lambda_i \neq 0$ schreiben. Dabei ist λ_i gerade der in Anhang C.1 eingeführte, vorzeichenbehaftete Abstand zwischen Lenkachse bzw. Rad-Boden-Kontakt des Rades i und Momentanpol. Für $\lambda_i = 0$ liegt der Momentanpol also gerade auf der Lenkachse des Rades i . Bei einem sich bewegenden Roboter mit mindestens zwei gelenkten Rädern existiert also immer ein Rad, für welches die Voraussetzungen $\dot{\varphi}_d \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ erfüllt sind.

Damit lässt sich das Vorzeichen von ω_{wr}^r als Funktion

$$\text{sgn}(\omega_{wr}^r) = \text{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \cdot \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \quad (3.33)$$

der Rotationsrate $\dot{\varphi}_{d,i}$ sowie des vorzeichenbehafteten Abstands zwischen Momentanpol und Lenkachse bzw. Rad-Boden-Kontakt des Rades i schreiben. Dies lässt sich verwenden, um den auf die Einheitskugel projizierten Momentanpol nach (3.10) als Funktion des Twists $\vec{t} = (\rho, \varphi, \theta)^T$ auszudrücken.

Unter Verwendung des über die Prinzipien der Festkörperbewegung definierten Momentanpols (2.31, 2.32) lässt sich der projizierte Momentanpol (3.10) als Funktion

$$\begin{aligned} \vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\text{ICM}}^{r*} \\ \arctan\left(\frac{1}{\rho_{\text{ICM}}^{r*}}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \arctan_2(y_{\text{ICM}}, x_{\text{ICM}}) + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \rangle \\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(x_{\text{ICM}}^r)^2 + (y_{\text{ICM}}^r)^2}} \cdot \text{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \arctan_2\left(\frac{\dot{x}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}, -\frac{\dot{y}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right) + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \rangle \\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{\dot{y}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right)^2}} \cdot \text{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

des kartesischen Twists $\vec{t} = (\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r, \omega_{wr}^r)^T$ sowie den von der gegenwärtige Konfiguration abhängigen Variablen k_i, λ_i schreiben. Um dies als Funktion des Twists in Kugelkoordinaten zu schreiben, müssen zunächst die Abhängigkeiten von der Konfiguration des Roboters, insbesondere seinen Lenkwinkeln $\vec{\varphi}_s$, in den Gleichungen für beide Komponenten (φ, θ) aufgelöst werden.

Zunächst werden wieder ausschließlich die der Fahrwerkskonfiguration zugeordneten Parameter (φ, θ) , die dem auf die Einheitskugel projizierten, erweiterten Momentanpol (3.10) zugeordnet sind, untersucht. Nach einigen Umformungen (Anhang C.4) lassen sich diese Parameter als Funktion der kartesischen Geschwindigkeit schreiben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sigma(-k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})) \\ \arctan\left(\frac{\omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \cdot k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Es ist zu beachten, dass im Rahmen der in Anhang C.4 ausgeführten Herleitung einige Fallunterscheidungen vorgenommen wurden, welche Stillstand des Roboters und die Pole der Darstellung in Kugelkoordinaten ausschließen. Diese Fälle werden in den folgenden Abschnitten knapp erläutert. Bei der praktischen Implementierung eines Regelungsgesetzes sind beide Situationen im Prinzip leicht zu handhaben. Wird eine rein rotatorische Bewegung oder Stillstand kommandiert, so können die jeweils nicht definierten Parameter z.B. konstant gehalten werden.

Bisher wurden lediglich die Parameter φ und θ betrachtet, da diese die Konfiguration des Fahrwerks \vec{q}_s repräsentieren und wesentlich bezüglich der Einhaltung der „non-slipping“ Bedingung (Absatz 2.2.2) sind. Um die Analogie dieser Darstellung zum Twist in sphärischen Koordinaten aufzuzeigen, sei nun zusätzlich der Parameter

$$\rho_{wr}^r = \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})^2} \cdot k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \quad (3.36)$$

definiert. Definiert man des Weiteren

$$\varphi_{wr}^r := \varphi - \frac{\pi}{2} \quad (3.37)$$

$$\theta_{wr}^r := \arctan(d_{max} \cdot \tan(\theta)), \quad (3.38)$$

wobei $d_{max} > 0$ ein beliebiger, aber fester Parameter sei, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{t}_{wr} &= \begin{pmatrix} \rho_{wr}^r \\ \varphi_{wr}^r \\ \theta_{wr}^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})} \cdot k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \\ \varphi - \frac{\pi}{2} \\ \arctan(d_{max} \cdot \tan(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})} \cdot k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \pi \cdot \sigma(-k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})) \\ \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \cdot k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Beschränkt man sich nun auf die Lösungen, bei denen sich die Räder alle im mathematisch positiven Sinn um ihre Rotationsachse drehen ($k_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, N\}$), ergibt sich die Definition der Kugelkoordinaten des Twists zu:

$$\vec{t}_{wr} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})^2} \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) \\ \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Genauso lässt sich der projizierte Momentanpol als Funktion des Twists in Kugelkoordinaten schreiben

$$\vec{s}_p = \begin{pmatrix} \rho_{wr}^r \\ \varphi_{wr}^r + \frac{\pi}{2} \\ \arctan\left(\frac{\tan(\theta_{wr}^r)}{d_{max}}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Es ist ohne Weiteres zu erkennen, dass die Darstellung des Twists nach (3.40) eine diffeomorphe Abbildung des projizierten Momentanpols nach (3.39) ist. Momentanpol und Twist lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion einer Konstanten sowie Multiplikation bzw. Division mit einer positiven Konstanten aufeinander abbilden. Da, wie in Abschnitt 3.1.2 bis Abschnitt 3.1.3 gezeigt, der projizierte Momentanpol eine lokal diffeomorphe Abbildung des Nullraums der nicht-holonomen Bindungen ist und eine Verkettung diffeomorpher Abbildungen selbst wiederum eine diffeomorphe Abbildung ist, ist damit auch der in Kugelkoordinaten dargestellte Twist eine diffeomorphe Abbildung des Nullraums der nicht-holonomen Bindungen. Die Darstellung des Twists in Kugelkoordinaten ist damit ein geeignetes Basissystem für die Formulierung eines Regelungsansatzes.

Es sei hier nochmals erwähnt, dass die Darstellung des Twists in kartesischen Koordinaten kein Diffeomorphismus der Darstellung des Twists in Kugelkoordinaten ist. Zum einen ist die zur Umformung von (C.49) nach (C.51) vorgenommene Substitution nicht stetig differenzierbar. Zum anderen sind die Kugelkoordinaten nach (3.40) für $(\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r)^T = \vec{0}$ bzw. $(\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r, \omega_{wr}^r)^T = \vec{0}$ nicht eindeutig definiert. In diesen Fällen ist eine bijektiv, stetig differenzierbare Abbildung auf die $(\varphi_{wr}^r, \theta_{wr}^r)$ -Koordinaten nicht möglich. Tatsächlich zeigt die kinematische Modellierung radbasierter, mobiler Roboter nach Campion, dass der Nullraum der nicht-holonomen Bindungen für Fahrwerke mit lenkbaren Rädern im Gegensatz zu Differentialantrieben nicht diffeomorph auf die Darstellung des Twists in kartesischen Koordinaten abgebildet werden kann. Damit ist die Formulierung eines kinematisch korrekten Regelungsansatzes in diesem Raum nicht möglich.

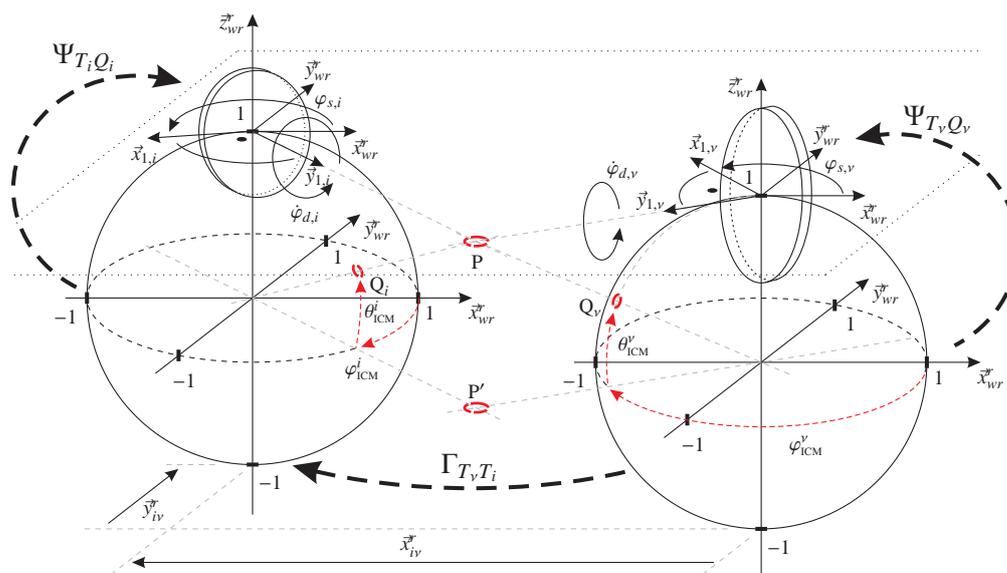


Abbildung 3.5: Dargestellt sind zwei Räder i und v , die um den gleichen Momentanpol P bzw. P' (rot, gestrichelter Kreis) rotieren. Die Koordinaten $(\varphi_{ICM,1}^i, \theta_{ICM,1}^i)$ und $(\varphi_{ICM,1}^v, \theta_{ICM,1}^v)$ des projizierten Momentanpols (rot gestrichelte Linien) sind in den zugehörigen Koordinatensystemen $\{O_i, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r\}$ bzw. $\{O_v, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r\}$ dargestellt.

3.2 Formulierung der Inversen Kinematik

3.2.1 Die Inverse Kinematik als Verkettung von Abbildungen

Zur Herleitung des Basissystems in Abschnitt 3.1 wurde der sphärische Momentanpol bereits als Funktion der Lenkwinkel der einzelnen Räder ausgedrückt. Ebenso wurde in (3.14) die inverse Formulierung dieses Zusammenhangs verwendet. Eine anschauliche Herleitung dieser vorläufigen Formulierung der direkten und inversen Kinematik ist in Abschnitt C.1 gegeben. Dabei ist die derart gegebene Formulierung der direkten und inversen Kinematik eng mit dem Konfigurationsraum des Fahrwerks verknüpft. Sie ergibt sich unmittelbar aus den Lenkwinkeln der einzelnen Räder. Das war zweckmäßig, um den Diffeomorphismus zwischen Twist in Kugelkoordinaten und dem zulässigen Konfigurationsraum des Fahrwerks abzuleiten.

Um in den folgenden Abschnitten die Eigenschaften des gewählten Basissystems und der damit verbundenen inversen Kinematik möglichst unabhängig von der spezifischen Fahrwerkskonfiguration untersuchen zu können, wird in diesem Abschnitt eine stärker abstrahierte Formulierung der inversen Kinematik abgeleitet. Das Vorgehen gliedert sich dabei in zwei Schritte. Zunächst wird die Formulierung der inversen Kinematik als Abbildung $\Psi_{T_v Q_v}$ des sphärischen Twists \vec{t}_{wr}^v in den Konfigurationsraum eines einzelnen Rades abgeleitet, dessen Lenkachse auf der \vec{z}_v Achse des gewählten Koordinatensystems liegt. Im zweiten Schritt wird die Abbildung $\Gamma_{T_v T_i}$ des sphärischen Twists zwischen translatorisch verschobenen Koordinatensystemen, die sich im gleichen Inertialsystem befinden, abgeleitet.

Die gesamte inverse Kinematik, welche Twist und Ableitungen des Twists in die entsprechende Konfiguration aller Räder bzw. deren Ableitungen abbildet, ergibt sich dann als Verkettung der einzelnen Abbildungen $\Psi_{T_i Q_i} \bullet \Gamma_{T_v T_i}$ (Abb. 3.5). Dabei wird verwendet, dass die Verkettung surjektiver, beliebig oft stetig differenzierbarer (C^∞) Abbildungen wiederum eine surjektive, beliebig oft stetig differenzierbare Abbildung ist.

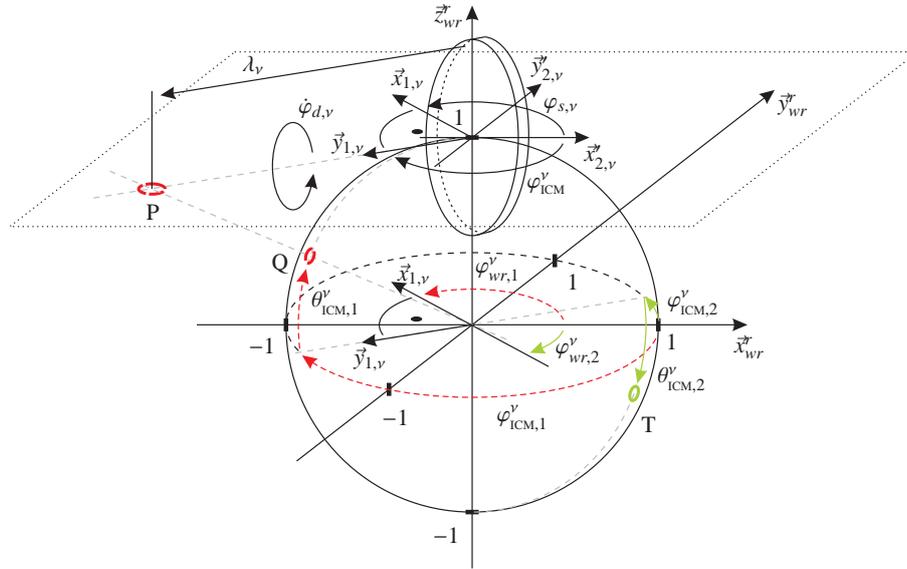


Abbildung 3.6: Die Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen den Parametern des Twists in Kugelkoordinaten und der Konfiguration eines Rades. Man sieht wiederum die Riemannsche Sphäre, auf die der gegenwärtige Momentanpol P abgebildet wird. Es ergeben sich zwei Lösungen, Q (rot, gestrichelter Kreis) in der ersten Domäne des nach (3.10) projizierten Momentanpols und T (grüner Kreis) in der zweiten Domäne des projizierten Momentanpols. Die zugehörigen Winkelkoordinaten $(\varphi_{ICM,1}^v, \theta_{ICM,1}^v)$ sowie $(\varphi_{ICM,2}^v, \theta_{ICM,2}^v)$ sind entsprechend als rot gestrichelte Linien bzw. grüne Linien dargestellt. Ebenfalls dargestellt (rot gestrichelt bzw. grün) sind die zugehörigen Winkelkoordinaten $\varphi_{wr,1}^v$ und $\varphi_{wr,2}^v$ des zugehörigen sphärischen Twists. Im oberen Pol der Einheitskugel ist das Rad v mit seinen Konfigurationsvariablen $\varphi_{s,v}$ und $\varphi_{d,v}$ bzw. λ_v dargestellt. Dabei ist $\varphi_{s,v}$ der Lenkwinkel des Rades v , welcher gerade dem Winkel zwischen der mit dem Rad rotierenden $\vec{x}_{1,v}$ -Achse und der körperfesten $\vec{x}_{2,v}$ - bzw. \vec{x}_{wr} -Achse entspricht. Definitionsgemäß liegt die $\vec{x}_{1,v}$ -Achse dabei auf der den Momentanpol und die Lenkachse verbindenden Geraden (grau gestrichelt). Man kann erkennen, dass in diesem Fall der Lenkwinkel $\varphi_{s,v}$ des Rades gerade identisch zum Winkel $\varphi_{wr,1}^v$ der ersten Domäne ist. Der Winkel $\varphi_{wr,2}^v$ der zweiten Domäne ergibt sich durch Addition von π .

3.2.2 Abbildung des Twists in den Konfigurationsraum eines Rades

In diesem Abschnitt wird die erste Komponente der verketteten Abbildung untersucht, welche die inverse Kinematik bildet. Dazu wird die Abbildung des sphärischen Twists in den Konfigurationsraum eines Rades formuliert, das im Ursprung des Koordinatensystems liegt, bezüglich welchem der Twist definiert ist.

Der Twist sei dazu bezüglich des parallel entlang \vec{z}_r verschobenen, körperfesten Koordinatensystems $\nu = \{O_\nu, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r\}$ gegeben. Dabei geht $\{O_\nu, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r\}$ durch translatorische Verschiebung des Ursprungs auf die Lenkachse des Rades ν aus dem Roboterkoordinatensystem hervor. Dieses verschobene Koordinatensystem entspricht dem nach der Denavit-Hartenberg Konvention (Abb. 2.6) definierten System $\{O_\nu, \vec{x}_{2,\nu}, \vec{y}_{2,\nu}, \vec{z}_{2,\nu}\}$. Das Koordinatensystem sei dann entlang der \vec{z}_r -Achse gerade so weit verschoben, dass der Pol der Einheitskugel bei $z_\nu = 1$ in der Achse des Rades bezüglich der Rollbewegung liegt. Im Folgenden wird dieses Koordinatensystem durch den Index ν bezeichnet. Abbildung 3.6 zeigt das so definierte Koordinatensystem zusammen mit dem ν -ten Rad und dem Twist $\vec{i}_{wr,\nu}^v$, der die Relativbewegung von Roboterkoordinatensystem zu Weltkoordinatensystem in sphärischen Koordinaten bezüglich des Referenzkoordinatensystems ν ausdrückt.

Betrachtet man den Lenkwinkel $\varphi_{s,v}$ sowie die Lösung für die $\varphi_{wr,1}^v$ -Variable des Twists bezüglich seiner ersten Domäne, so kann man erkennen, dass für den Fall, in welchem die nicht-holonomen Bindungen erfüllt sind, diese Winkel identisch sind. Das ergibt sich als direkte Konsequenz der Definition des Mo-

mentanpols als dem Punkt, in welchem sich alle Radachsen schneiden. Bewegt sich der Momentanpol durch seinen Fernpunkt $\theta_{icm,1}^v = 0$, so wechselt das Vorzeichen von λ_v . Lenkwinkel $\varphi_{s,v}$ und Winkel $\varphi_{wr,1}^v$ des sphärischen Twists bleiben konstant. Analog ergibt sich der Winkel $\varphi_{wr,2}^v$ aus dem Lenkwinkel durch Addition von π . Damit lässt sich die Transformationsvorschrift bzgl. des Lenkwinkels als

$$\varphi_{s,v} := \varphi_{wr}^v + \pi \cdot \sigma(-k_v) \quad (3.42)$$

ausdrücken. Dabei bezeichnet φ_{wr}^v , wie im vorigen Abschnitt hergeleitet, den Winkel der translatorischen Geschwindigkeit des Roboters zur \vec{x}_{wr}^v -Achse des körperfesten Koordinatensystems. Es ist $k_v = 1$, falls man sich in der ersten Lösungsdomäne befindet bzw. $k_v = -1$ für die zweite Lösungsdomäne.

Ebenso lässt sich λ_v als Funktion des Azimuts $\theta_{icm,1}^v$ definieren. Betrachtet man Abbildung 3.6, so erkennt man, dass sich λ_v wie zuvor (vergleiche Abbildung 3.3 und Gleichung (3.6)) direkt aus dem Azimut berechnen lässt. Dabei ergibt sich die Lösung der zweiten Domäne gerade als der mit -1 multiplizierte Wert der ersten Domäne. Die Transformationsvorschrift lässt sich analog zu (3.42) als

$$\begin{aligned} \lambda_v &:= \frac{d_{max}}{\tan(\text{sgn}(k_v) \cdot \theta_{wr}^v)} \\ &= d_{max} \cdot \cot(\theta_{wr}^v) \cdot k_v \end{aligned} \quad (3.43)$$

ausdrücken. Dabei ist θ_{wr}^v wiederum der Azimut des sphärischen Twists ohne Berücksichtigung der Domäne.

Damit lässt sich die dem Abrollen des Rades zugeordnete Rotationsrate $\dot{\varphi}_{d,v}$ als Funktion

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{d,v} \cdot r_{d,v} &= \lambda_v \cdot \omega_{wr}^v \\ &= d_{max} \cdot \cot(\theta_{wr}^v) \cdot k_v \cdot \frac{\rho_{wr}^v \cdot \sin(\theta_{wr}^v)}{d_{max}} \\ &= k_v \cdot \cos(\theta_{wr}^v) \cdot \rho_{wr}^v \end{aligned} \quad (3.44)$$

des Radius $r_{d,v}$ des Rades v sowie der Distanz λ_v zwischen Rad und Momentanpol und der Rotation um den Momentanpol ω_{wr}^v berechnen.

Betrachtet man die Gleichungen (3.42) und (3.44), so erkennt man, dass die Abbildung $\Psi : T \rightarrow Q_v$ des sphärischen Twists in den Konfigurationsraum des Rades v für jedes $\vec{r}_{wr}^v \in \mathbb{R}^3$ wohldefiniert ist. Sie ist beschränkt, surjektiv und beliebig oft stetig differenzierbar (C^∞). Das gilt insbesondere auch in den, bei der Herleitung des Twists ausgeschlossenen, Polen der Riemannschen Sphäre. Damit lässt sich die kinematische Konfiguration $(\varphi_{s,v}, \varphi_{d,v})^T$ eines Rades v durch die kontinuierlichen Parameter des Twists $(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)^T$ sowie einen weiteren diskreten Parameter k_v eindeutig beschreiben. Die Ableitungen lassen sich über die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{TQ}^v = \nabla_{\vec{r}_{wr}^v} \begin{pmatrix} \varphi_{s,v}(\vec{r}_{wr}^v, k_v) \\ \dot{\varphi}_{d,v}(\vec{r}_{wr}^v, k_v) \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

deren Elemente alle beschränkt bleiben, berechnen. Dabei wird k_v vorläufig als fester Parameter behandelt.

Es ist zu beachten, dass diese Abbildung zwar surjektiv, aber nicht injektiv und damit auch nicht invertierbar oder diffeomorph ist. So lässt sich aus Gleichung (3.44) für ein einzelnes Radpaar nicht auf den Azimut bzw. den Betrag des Twists zurückschließen. Das deckt sich mit der Definition des Momentanpols als Schnittpunkt der Achsen mindestens zweier Räder.

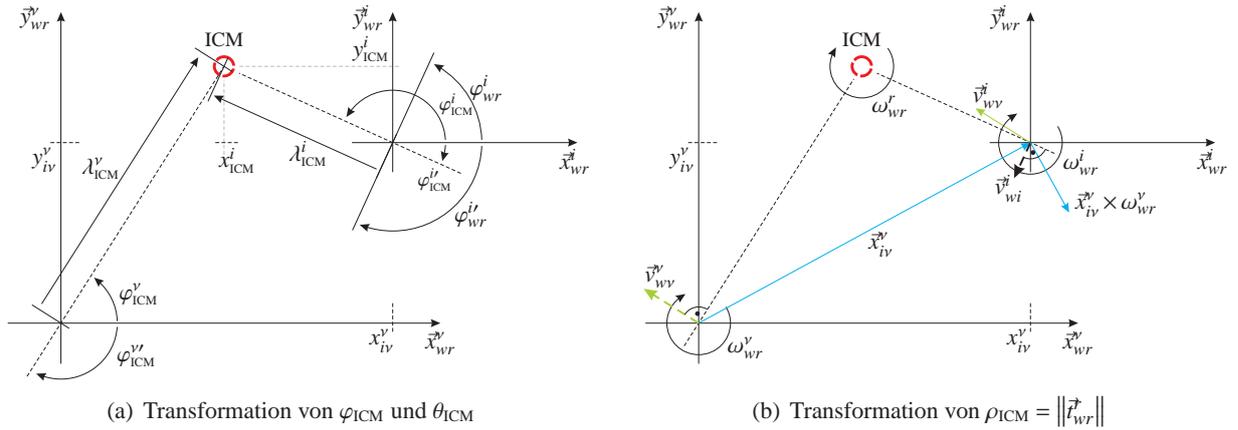


Abbildung 3.7: Die Abbildungen zeigen eine Projektion von Abbildung 3.5 in die $(\vec{x}_{wr}, \vec{y}_{wr})$ -Ebene. Abbildung 3.7(a) veranschaulicht die Umrechnung der $(\varphi_{ICM}, \theta_{ICM})$ Parameter über den Momentanpol. Für die erste Lösungsdomäne gilt dabei $\lambda_{ICM} > 0$ und φ_{ICM} zeigt direkt auf den Momentanpol. Abbildung 3.7(b) zeigt den Zusammenhang zwischen dem bezüglich ν und i ausgedrückten Twist $\vec{r}_{wr} = (\vec{v}_{wr}, \omega_{wr})^T$.

3.2.3 Abbildung des Twists in translatorisch verschobene Bezugssysteme

In diesem Abschnitt wird die Abbildung des Twists in ein rein translatorisch verschobenes Bezugssystem untersucht. Durch Transformation in ein translatorisch verschobenes Bezugssystem, in dessen Ursprung ein Rad liegt und anschließende Transformation in den Konfigurationsraum dieses Rades kann der Twist also auf beliebig viele Räder an beliebiger Montageposition abgebildet werden.

Im Folgenden sei i das translatorisch um \vec{x}_i zu Bezugssystem ν verschobene Koordinatensystem. Weiterhin seien i und ν Darstellungen des gleichen Inertialsystems, d.h. $\dot{\vec{x}}_i = \vec{0}$ und $\ddot{\vec{x}}_i = \vec{0}$. Dann lässt sich die ebene Bewegung des Koordinatensystems i bzw. aller in ihm ausgedrückten festen Bezugspunkte sowie die Bewegung des Koordinatensystems ν bzw. aller in ihm ausgedrückten festen Bezugspunkte als verallgemeinerte Rotation um einen gemeinsamen Momentanpol darstellen. Der Twist \vec{r}_{wr}^i bzw. \vec{r}_{wr}^ν ist damit nach Abschnitt 3.1 eine diffeomorphe Abbildung des in den Koordinaten des jeweiligen Bezugssystems beschriebenen Momentanpols.

Um den Twist \vec{r}_{wr}^i im translatorisch zu Bezugssystem ν verschobenen Bezugssystem i als Funktion des Twists \vec{r}_{wr}^ν darzustellen, wird zunächst der Momentanpol bezogen auf Koordinatensystem i als Funktion des Momentanpols bezogen auf Koordinatensystem ν ausgedrückt. Abbildung 3.7 stellt eine 2-dimensionale Projektion dieser in Abbildung 3.6 dargestellten Verknüpfung von \vec{r}_{wr}^i und \vec{r}_{wr}^ν über den gemeinsamen Momentanpol dar.

Die Position des Momentanpols in Koordinaten des Bezugssystems i ergibt sich zu

$$x_{ICM}^i = \cot(\theta_{ICM}^\nu) \cdot \cos(\varphi_{ICM}^\nu) - x_{iv}^\nu \quad (3.46)$$

$$y_{ICM}^i = \cot(\theta_{ICM}^\nu) \cdot \sin(\varphi_{ICM}^\nu) - y_{iv}^\nu, \quad (3.47)$$

wobei die Substitution $\lambda_{ICM}^\nu = \cot(\theta_{ICM}^\nu)$ verwandt wurde. Um die Mehrdeutigkeit bezüglich der Darstellung des Momentanpols in Kugelkoordinaten $((\varphi_{ICM}^i, \theta_{ICM}^i), (\varphi_{ICM}^i + \pi, -\theta_{ICM}^i))$ aufzulösen, sei das Vorzeichen von θ_{ICM}^i im Folgenden definiert durch

$$\text{sgn}(\theta_{ICM}^i) = \text{sgn}(\theta_{ICM}^\nu).$$

Damit lassen sich die Parameter φ_{ICM}^i bzw. θ_{ICM}^i für $\vec{x}_{\text{ICM}}^i \in \mathbb{R}^2 / \{\vec{0}\}$ als Funktion der Koordinaten des Momentanpols im Bezugssystem i sowie des Parameters θ_{ICM}^v schreiben:

$$\varphi_{\text{ICM}}^i = \arctan_2(y_{\text{ICM}}^i, x_{\text{ICM}}^i) + \pi \cdot \sigma(-\theta_{\text{ICM}}^v) - \langle \delta(-\theta_{\text{ICM}}^v), \frac{\pi}{2} \rangle \quad (3.48)$$

$$\theta_{\text{ICM}}^i = \text{sgn}(\theta_{\text{ICM}}^v) \cdot \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{x_{\text{ICM}}^i{}^2 + y_{\text{ICM}}^i{}^2}} \right). \quad (3.49)$$

Um Singularitäten bei der Abbildung des Parameters ρ_{ICM}^v zu vermeiden, wird hier der Umweg über die kartesischen Geschwindigkeiten gewählt. Unter Verwendung des Prinzips der Festkörperbewegung lässt sich der Twist \vec{t}_{wr}^i des Roboterkoordinatensystems relativ zum Weltkoordinatensystem ausgedrückt bezüglich des Koordinatensystems i als Funktion

$$\vec{t}_{wr}^i = \vec{t}_{wr}^v + \vec{\omega}_{wr}^v \times \vec{x}_{iv}^v \quad (3.50)$$

schreiben. Dabei wurde hier angenommen, dass i bezüglich v rein translatorisch verschoben ist. Es ist $\vec{\omega}_{wr}^v = (0, 0, \omega_{wr}^v)^T$ die Rotation des Roboters um seine Hochachse und $\vec{x}_{iv}^v = (x_{iv}^v, y_{iv}^v, 0)^T$ die bezüglich dem dreidimensionalen System ausgedrückte ebene Verschiebung der Koordinatensysteme i und v zueinander. Der Betrag der verallgemeinerten Rotation um den Momentanpol ergibt sich dann zu

$$\rho_{\text{ICM}}^i = \text{sgn}(\rho_{\text{ICM}}^v) \cdot \|\vec{t}_{wr}^i\|. \quad (3.51)$$

Dabei wurde das Vorzeichen von ρ_{ICM}^i wiederum fest definiert, um die möglichen Mehrdeutigkeiten aufzulösen. Es ist zu beachten, dass dieser Ansatz nicht zur Berechnung der Parameter $(\varphi_{\text{ICM}}^i, \theta_{\text{ICM}}^i)$ genutzt werden kann, da die Umformung des Twists von sphärischer in kartesische Darstellung und zurück, wie in Abschnitt 3.1.4 erläutert, nicht diffeomorph ist. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass dies bezüglich des Parameters ρ_{ICM}^i kein Probleme darstellt.

Um letztlich den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^i im Bezugssystem i als Funktion des sphärischen Twists \vec{t}_{wr}^v auszudrücken, werden nun (3.46) und (3.47) in den Gleichungen (3.48) bis (3.51) substituiert. Zudem wird der Zusammenhang

$$\tan(\theta_{wr}) = \tan(\theta_{\text{ICM}}) \cdot d_{\text{max}} \quad (3.52)$$

$$\varphi_{wr} = \varphi_{\text{ICM}} - \frac{\pi}{2} \quad (3.53)$$

zwischen projiziertem Momentanpol \vec{s} und sphärischem Twist \vec{t}_{wr}^v verwandt. Damit ergibt sich die Koordinate φ_{wr}^i des Twists bezogen auf Koordinatensystem i zu

$$\begin{aligned} \varphi_{wr}^i &= \varphi_{\text{ICM}}^i - \frac{\pi}{2} \\ &= \arctan_2 \left(\frac{d_{\text{max}}}{\tan(\theta_{wr}^v)} \sin \left(\varphi_{wr}^v + \frac{\pi}{2} \right) - y_{iv}^v, \frac{d_{\text{max}}}{\tan(\theta_{wr}^v)} \cos \left(\varphi_{wr}^v + \frac{\pi}{2} \right) - x_{iv}^v \right) + \dots \\ &\quad \dots + \pi \sigma(-\theta_{wr}^v) - \langle \delta(-\theta_{wr}^v), \frac{\pi}{2} \rangle - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Betrachtet man Gleichung (3.54), so kann man erkennen, dass die Transformation sowohl für den Durchgang durch den Fernpunkt ($\tan(\theta_{wr}^v) \rightarrow 0$) als durch den Pol bezüglich des Koordinatensystems v ($\tan(\theta_{wr}^v) \rightarrow +/\infty$) definiert ist. Allerdings führen die Berechnungen in diesen Regionen mit Zwischenergebnissen im Bereich von $+/\infty$ zu numerischen Problemen.

Vereinfacht man (3.54) durch Umschreiben des Tangens und Anwendung von (C.14) zu

$$\begin{aligned}
 \varphi_{wr}^i &= \arctan_2 \left(d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v, d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) (-\sin(\varphi_{wr}^v)) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v \right) + \dots \\
 &\quad \dots + \pi \sigma(-\sin(\theta_{wr}^v)) - \langle \delta(-\sin(\theta_{wr}^v)), \frac{\pi}{2} \rangle + \pi \sigma(-\theta_{wr}^v) - \langle \delta(-\theta_{wr}^v), \frac{\pi}{2} \rangle - \frac{\pi}{2} \\
 &\text{mit } \text{sgn}(\sin(x)) = \text{sgn}(x) \text{ und } \text{mod}_{2\pi} \\
 &= \arctan_2 \left(\underbrace{d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v}_{\text{I}}, \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \underbrace{d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v}_{\text{II}} \right) - \frac{\pi}{2}, \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

lassen sich diese Probleme vermeiden. Gleichung (3.55) ist auch bei Durchgang durch den Fernpunkt bzw. den Pol bezüglich v wohldefiniert und numerisch unkritisch. Es ist aber zu beachten, dass sowohl Gleichung (3.54) wie auch (3.55) nicht definiert sind, wenn beide Terme innerhalb des Arcustangens gleichzeitig 0 sind. Das entspricht gerade dem Fall $(x_{iCM}^i, y_{iCM}^i) = 0$, also dem Durchgang durch den Pol des Bezugssystem i , in welchem bereits (3.48) und (3.49) eine Singularität aufweisen.

Analog zu (3.54) lässt sich θ_{wr}^i unter Verwendung von (3.52) und Einsetzen von (3.49) berechnen

$$\begin{aligned}
 \theta_{wr}^i &= \arctan(d_{max} \cdot \theta_{iCM}^i) \\
 &= \text{sgn}(\theta_{wr}^v) \cdot \arctan \left(\frac{d_{max}}{\sqrt{\left(\frac{d_{max}}{\tan(\theta_{wr}^v)} \sin(\varphi_{wr}^v + \frac{\pi}{2}) - y_{iv}^v\right)^2 + \left(\frac{d_{max}}{\tan(\theta_{wr}^v)} \cos(\varphi_{wr}^v + \frac{\pi}{2}) - x_{iv}^v\right)^2}} \right), \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\tan(\text{sgn}(a) \cdot x) = \text{sgn}(a) \cdot \tan(x)$ ist und das $\text{sgn}(\theta_{wr}^i) = \text{sgn}(\theta_{iCM}^i)$. Um numerische Probleme zu vermeiden, wird analog zu (3.55) der Tangens wieder durch den Quotienten von Sinus und Cosinus ausgedrückt. Durch Faktorisieren lässt sich (3.56) dann zu

$$\begin{aligned}
 \theta_{wr}^i &= \text{sgn}(\theta_{wr}^v) \cdot \arctan \left(d_{max} \cdot |\sin(\theta_{wr}^v)| \cdot \left((d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v)^2 + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \dots + (-d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v)^2 \right)^{-1/2} \right) \\
 &= \arctan \left(\underbrace{d_{max} \cdot \sin(\theta_{wr}^v)}_{\text{III}} \cdot \left(\underbrace{(d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v)^2}_{\text{I}} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \dots + \underbrace{(-d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v)^2}_{\text{II}} \right)^{-1/2} \right) \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

vereinfachen. Man kann erkennen, dass auch (3.57) wieder in den gleichen Regionen wie zuvor (3.55) Singularitäten aufweist bzw. in den selben Punkten $(\varphi_{wr,S_i}^v, \theta_{wr,S_i}^v)$ nicht definiert ist.

Die Bedingung, unter welcher diese Singularität in (3.49) durchlaufen wird, lässt sich durch Umformen von Term I und II als lineares Gleichungssystem darstellen:

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi_{wr,S_i}^v) - \tan(\theta_{wr,S_i}^v) \frac{y_{iv}^v}{d_{max}} &= 0 \\
 -\sin(\varphi_{wr,S_i}^v) - \tan(\theta_{wr,S_i}^v) \frac{x_{iv}^v}{d_{max}} &= 0.
 \end{aligned}$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man dann die Koordinaten

$$\varphi_{wr,S_i}^v = \arctan_2(y_{iv}^v, x_{iv}^v) - \frac{\pi}{2} + \pi\sigma(-\theta_{wr,S_i}^v) \quad (3.58)$$

$$\theta_{wr,S_i}^v = +/- \arctan \left(\frac{d_{max}}{\sqrt{y_{iv}^{v2} + x_{iv}^{v2}}} \right) \quad (3.59)$$

des sphärischen Twists \vec{t}_{wr}^v im Bezugssystem v , unter welchem die inverse Kinematik bezüglich des Systems i eine Singularität aufweist. Dabei entspricht (3.58), (3.59) gerade der Abbildung der Position der Lenkachse des Rades i in die beiden Lösungsdomänen des projizierten Momentanpols bezüglich des Koordinatensystems v .

Das Aufstellen der Transformationsvorschrift für ρ_{wr}^i ist letztlich vergleichsweise einfach. Durch Einsetzen von (3.50) in (3.51) erhält man

$$\begin{aligned} \rho_{wr}^i &= \text{sgn}(\rho_{wr}^v) \cdot |\vec{t}_{wr}^v + \vec{\omega}_{wr}^v \times \vec{x}_{iv}^v| \\ &= \text{sgn}(\rho_{wr}^v) \cdot \left(\left(\rho_{wr}^v \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \rho_{wr}^v \sin(\theta_{wr}^v) \frac{y_{iv}^v}{d_{max}} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\rho_{wr}^v \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) + \rho_{wr}^v \sin(\theta_{wr}^v) \frac{x_{iv}^v}{d_{max}} \right)^2 + \left(\rho_{wr}^v \sin(\theta_{wr}^v) \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Dies lässt sich wie zuvor (3.57) unter Verwendung der Definition der Betragsfunktion über die Signumfunktion $\|x\| = x \cdot \text{sgn}(x)$ als

$$\begin{aligned} \rho_{wr}^i &= \frac{\rho_{wr}^v}{d_{max}} \cdot \left(\underbrace{\left(d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) y_{iv}^v \right)^2}_{\text{I}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \underbrace{\left(d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) + \sin(\theta_{wr}^v) x_{iv}^v \right)^2}_{\text{II}} + \underbrace{\left(d_{max} \sin(\theta_{wr}^v) \right)^2}_{\text{III}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

schreiben.

Fasst man die Gleichungen (3.55), (3.57), (3.61) zusammen, lassen sich die Koordinaten des Twists \vec{t}_{wr}^i im Bezugssystem i schließlich als Funktion

$$\vec{t}_{wr}^i = \vec{f}_{iv}(\vec{t}_{wr}^v) \quad (3.62)$$

der Koordinaten des Twists \vec{t}_{wr}^v im Bezugssystem v schreiben. Dabei ist \vec{f}_{iv} , wie in Abschnitt 3.2.4 gezeigt wird, eine surjektive und in einer offenen Umgebung der Singularitäten C^∞ Funktion. In dieser offenen Umgebung sind also auch die Ableitungen von \vec{f}_{iv} bzw. insbesondere die zugehörige Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{T_v T_i} = \nabla \begin{pmatrix} \varphi_{wr}^i(\vec{t}_{wr}^v) \\ \theta_{wr}^i(\vec{t}_{wr}^v) \\ \rho_{wr}^i(\vec{t}_{wr}^v) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

wohl definiert. In einer geschlossenen Umgebung der Singularitäten sind \vec{f}_{iv} und die zugehörigen Ableitungen zusätzlich beschränkt.

3.2.4 Eigenschaften der inversen Kinematik

Die vollständige Formulierung der inversen Kinematik, welche die gegenwärtige Konfiguration des Twists sowie seine Änderung auf die Konfiguration bzw. Änderung der Konfiguration der Räder abbildet, ergibt sich aus der Konkatenation

$$\Xi_{TQ} = \begin{pmatrix} \Psi_{T_1 Q_1} \bullet \Gamma_{T_v T_1} \\ \vdots \\ \Psi_{T_N Q_N} \bullet \Gamma_{T_v T_N} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

der verketteten Abbildung über alle N Räder. Dabei waren $\Psi_{T_i Q_i}$ und $\Gamma_{T_v T_i}$ die Abbildungen des Twists auf ein Rad im Ursprung bzw. des Twists in ein translatorisch verschobenes Koordinatensystem. Die Abbildung $\Gamma_{T_v T_v} = \mathbf{1}$ ist der triviale Fall eines nicht verschobenen Bezugssystems.

Nach Abschnitt 3.2.2 gilt dabei, dass $\Psi_{T_i Q_i}$ über den gesamten Definitionsbereich von T_i surjektiv und C^∞ , aber nicht injektiv und damit weder bijektiv noch diffeomorph ist. Ferner gilt nach Abschnitt 3.2.3, dass $\Gamma_{T_v T_i}$ den gesamten Definitionsbereich von T_v unter Ausschluss der Singularitäten $(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)$ surjektiv und C^∞ auf den Definitionsbereich von T_i abbildet. Aufgrund der Definition von Ξ über die Konkatenation der Verkettung von $\Psi_{T_i Q_i}$ und $\Gamma_{T_v T_i}$ über alle Räder gilt damit, dass Ξ den gesamten Definitionsbereich von T_v unter Ausschluss der Singularitäten bezüglich aller Räder

$$S_v\{(\varphi_{wr, S_1}^v, \theta_{wr, S_1}^v), \dots, (\varphi_{wr, S_N}^v, \theta_{wr, S_N}^v)\} \quad (3.65)$$

surjektiv und C^∞ auf den zulässigen Konfigurationsraum Q abbildet.

Die Surjektivität und stetige Differenzierbarkeit der Abbildung $\Psi_{T_i Q_i}$ wurde bereits in Abschnitt 3.2.2 hinreichend erläutert. Im Folgenden werden die Eigenschaften der Abbildung $\Gamma_{T_v T_i}$ detailliert diskutiert. Zunächst wird gezeigt, dass die Abbildung, wie bereits zu Ende von Abschnitt 3.2.3 erwähnt, surjektiv und C^∞ ist. Anschließend wird zum einen gezeigt, dass aus dieser Eigenschaft bei geeigneter Definition einer inversen Abbildung für einen beschränkten Definitionsbereich Diffeomorphismus für $\Gamma_{T_v T_i}$ folgt. Zum anderen wird gezeigt, dass Surjektivität und C^∞ aber nicht Injektivität auch für einen erweiterten Definitionsbereich des Twists gilt.

Wie bereits in Abschnitt 3.1.3 gezeigt, ist der in vier Quadranten definierte Arcustangens eine surjektive und bei Definition über den komplexen Logarithmus C^∞ Abbildung

$$\arctan_2(\bullet, \bullet) : \mathbb{R}^2 / \{\vec{0}\} \rightarrow (-\pi, \pi] . \quad (3.66)$$

Die Surjektivität bezüglich der Bildmenge $(-\pi, \pi]$ ist dabei gerade dann gegeben, wenn die Elemente der Ursprungsmenge X den Ursprung des Bezugssystems „umringen“

$$X = \vec{x} \in \{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < c | x_o, y_o, c \in \mathbb{R} \wedge (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \{\vec{0}\}\} . \quad (3.67)$$

Aus der Definition der Singularitäten $(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)$ (3.58), (3.59) ergibt sich gerade, dass die Koordinaten $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ des auf v bezogenen Twists in einer offenen Umgebung um die Singularität $(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v) \in (\varphi_{wr, S_i}^v - \delta, \varphi_{wr, S_i}^v + \delta) \times (\theta_{wr, S_i}^v - \delta, \theta_{wr, S_i}^v + \delta)$ surjektiv und C^∞ auf eine offene Umgebung X' , welche das Element $\vec{0}$ beinhaltet, abgebildet werden. Es gilt

$$\forall \delta > 0 \exists c > 0 | (I(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v), II(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)) \in \{X \cup \{\vec{0}\}\} . \quad (3.68)$$

Ferner gilt für den hier betrachteten, nicht-trivialen Fall $\vec{x}_{iv}^v \neq 0$, dass $(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi]$.

Damit folgt aus den Eigenschaften des Arcustangens bezüglich Surjektivität und Differenzierbarkeit, dass (3.55) die Ursprungsmenge $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \in \Phi$ surjektiv und C^∞ auf die Bildmenge $\varphi_{wr}^i \in (-\pi, \pi]$ abbildet. Dabei sei die Ursprungsmenge Φ gerade durch die Definitionsmenge für $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ unter Ausschluss der Singularitäten gebildet

$$\Phi = (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi] / \{(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)\} . \quad (3.69)$$

Tatsächlich lässt sich die Aussage bezüglich Surjektivität und Differenzierbarkeit noch auf eine größere Ursprungsmenge Φ' ausweiten. Betrachtet man die Terme I und II, so erkennt man, dass diese nicht nur bezüglich Φ , sondern auch bezüglich

$$\Phi' = (-\pi, \pi]^2 / \{(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)\} \quad (3.70)$$

beliebig oft stetig differenzierbar sind. Surjektivität folgt direkt aus der Tatsache, dass Φ eine Teilmenge von Φ' ist. Die Abbildung (3.55) ist damit sowohl bezüglich Φ als auch bezüglich Φ' surjektiv und C^∞ .

Analog, lässt sich erkennen, dass Gleichung (3.57) die Koordinaten $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ surjektiv und C^∞ auf $\theta_{wr}^i \in (-\pi/2, \pi/2)$ abbildet. Die Terme I und II bilden wie bereits erläutert $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ in einer offenen Umgebung der Singularitäten surjektiv und C^∞ in eine offene Umgebung um 0 ab. Ebenso kann man direkt erkennen, dass Term III $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ surjektiv und C^∞ auf das Intervall $(-d_{max}, d_{max})$ abbildet. Für praktisch relevante Fahrwerke gilt weiterhin $\|\vec{x}_{iv}^v\| \neq \infty$, sonst wäre das Fahrwerk unendlich ausgedehnt. Damit liegen die Nullstellen von Term III an anderer Stelle, als die gemeinsamen Nullstellen für Term I und II und der Quotient in (3.57) ist damit immer wohl definiert. Durch Bildung des Quotienten von Term III und der quadrierten Summe aus Term I und II werden $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ schließlich auf das offene Intervall $(-\infty, \infty)$ abgebildet. Dabei wird die Umgebung der Singularitäten gerade in die Umgebung von $\pm\infty$ und der Fernpunkt $\theta_{wr}^v = 0$ wieder in 0 abgebildet. Die Singularitäten, an welchen der Quotient aus (3.57) nicht stetig differenzierbar ist, fallen also mit den bereits bekannten Singularitäten $(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)$ zusammen. Damit ist auch (3.57) eine bezüglich der Ursprungsmenge Φ surjektive und C^∞ Abbildung nach $\theta_{wr}^i \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ebenso gilt, wie für die Abbildung nach $\varphi_{wr}^v \in (-\pi, \pi]$ (3.59), dass (3.57) auch bezüglich Φ' surjektiv und C^∞ ist. Das folgt direkt aus der Eigenschaft des Sinus in Term III, der in diesem Intervall surjektiv und C^∞ ist.

Die Abbildung von $\rho_{wr}^v \in \mathbb{R}$ nach $\rho_{wr}^i \in \mathbb{R}$ (3.61) ist letztlich surjektiv und C^∞ über den gesamten Definitionsbereich von $(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ inklusive der Singularitäten. Die Terme I bis III bilden, wie bereits erläutert, $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ surjektiv und C^∞ nach \mathbb{R} in eine Umgebung von 0 ab. Des Weiteren gilt, dass Term I, II und III keine gemeinsamen Nullstellen haben. Damit entspricht Gleichung (3.61) einer Abbildung von ρ_{wr}^v nach ρ_{wr}^i durch Multiplikation mit einem positiven reellwertigen Faktor und ist somit surjektiv und C^∞ in \mathbb{R} . Damit lassen sich die Eigenschaften von Ξ, Ψ, Γ wie folgt zusammenfassen. Es seien folgende Mengen

$$T = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2) , \quad T^+ = \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2) , \quad T' = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]^2 \quad (3.71)$$

als Definitionsmengen des Twists \vec{t}_{wr} definiert. Dabei entspricht T^+ gerade der bisherigen Definition des Twists, für welche in Abschnitt 3.1 Diffeomorphismus bezüglich des Momentanpols gezeigt wurde. Ferner seien die folgenden Mengen

$$S^v = \{(\varphi_{wr, S_1}^v, \theta_{wr, S_1}^v), \dots, (\varphi_{wr, S_N}^v, \theta_{wr, S_N}^v)\} , \quad S_i^v = S^v / \{(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)\} \quad (3.72)$$

$$S^{v'} = S^v \cup \{\mathbb{R} \times (\pi, \pi] \times -\pi/2\} \cup \{\mathbb{R} \times (\pi, \pi] \times \pi/2\} , \quad S_i^{v'} = S^{v'} / \{(\varphi_{wr, S_i}^v, \theta_{wr, S_i}^v)\} \quad (3.73)$$

bezüglich der singulären Bereiche in T definiert. Dabei erlaubt $S^{v'}$ die Einbeziehung von Bezugssystemen, welche gerade nicht mit einem Rad, also einer Singularität, zusammenfallen.

Damit kann das Bezugssystem, in welchem \vec{t}_{wr} ausgedrückt wird, frei gewählt werden. Dann gilt, dass wie oben erläutert

$$\Gamma : T^+/S^v \rightarrow T^+/S_v^{i'} \quad \Gamma : T/S^v \rightarrow T/S_v^{i'} \quad \Gamma : T'/S^v \rightarrow T/S_v^{i'} \quad (3.74)$$

jeweils surjektiv und C^∞ sind. Definiert man des Weiteren die Menge

$$Q = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] , \quad (3.75)$$

die den Konfigurationsraum eines einzelnen Rades beschreibt, so gilt nach Abschnitt 3.2.2, dass ebenso

$$\Psi : T \rightarrow Q , \quad \Psi : T^+ \rightarrow Q , \quad \Psi : T' \rightarrow Q \quad (3.76)$$

surjektiv und C^∞ ist. Damit gilt schließlich, dass die in (3.64) durch Konkatenation von Γ und Ψ für alle Räder gebildete Abbildung

$$\Xi : T/S_v^v \rightarrow Q^N , \quad \Xi : T^+/S_v^v \rightarrow Q^N , \quad \Xi : T'/S_v^v \rightarrow Q^N \quad (3.77)$$

surjektiv und C^∞ sind. Das heißt, die in den vorhergehenden Abschnitten hergeleitete inverse Kinematik ist – außer in den Singularitäten, welche nicht mit dem Ursprung des gewählten Bezugssystems zusammen fallen – über die gesamte Definitionsmenge von \vec{t}_{wr} wohl definiert. Beschränkt man die Betrachtungen bezüglich Γ vorläufig auf den Bereich $T/S^{v'}$ und definiert man die Umkehrfunktion zu Γ_{vi} über

$$\Gamma_{vi}^{-1} := \Gamma_{iv} \quad (3.78)$$

also gerade als die Abbildung von \vec{t}_{wr}^i nach \vec{t}_{wr}^v , dann folgt aus der Surjektivität und stetigen Differenzierbarkeit der jeweiligen Abbildungen

$$\Gamma_{vi} : T/S^{v'} \rightarrow T/S^{i'} \quad \text{surjektiv und } C^\infty \quad (3.79)$$

$$\Gamma_{vi}^{-1} := \Gamma_{iv} : T/S^{i'} \rightarrow T/S^{v'} \quad \text{surjektiv und } C^\infty \quad (3.80)$$

unmittelbar, dass Γ_{vi} sowohl surjektiv als auch injektiv und damit bijektiv ist. Da sowohl Γ_{vi} , als auch $\Gamma_{vi}^{-1} = \Gamma_{iv}$ auf den jeweiligen Definitionsmengen zusätzlich C^∞ sind, folgt damit direkt, dass Γ_{vi} die Mengen $T/S^{v'}$ und $T/S^{i'}$ diffeomorph ineinander abbildet.

Außerhalb der Singularitäten lässt sich der Twist also diffeomorph in die einzelnen Bezugssysteme abbilden. Des Weiteren lässt sich der Twist außerhalb der Singularitäten und zusätzlich in der Singularität, welche im Ursprung des gegenwärtigen Bezugssystems liegt, surjektiv und C^∞ auf den Konfigurationsraum der Räder abbilden. Das bedeutet einerseits, dass es bei der gewählten Parametrierung über den Momentanpol bzw. den sphärischen Twist nicht möglich ist, eine einzige Darstellung für den zulässigen Konfigurationsraum des Fahrwerkes anzugeben. Andererseits deckt die Gesamtheit der Repräsentationen bezüglich der in die Radachsen verschobenen Bezugssysteme

$$U = \bigcup_{i=1, \dots, N} T/S_v^v \quad (3.81)$$

den zulässigen Konfigurationsraum vollständig ab. Diesbezüglich wurde gezeigt, dass außerhalb der Singularitäten eine diffeomorphe Abbildung zwischen diesen Darstellungen existiert. Es kann also immer eine geeignete Darstellung gewählt werden, für welche die inverse Kinematik wohl definiert ist, und es ist möglich, zwischen diesen Darstellungen zu wechseln. Es bildet U einen Atlas des vollständigen, zulässigen Konfigurationsraums.

3.3 Formulierung der direkten Kinematik

3.3.1 Abbildung in ein beliebiges Koordinatensystem

In diesem Abschnitt wird die in Anhang C.1 abgeleitete, vorläufige Formulierung der direkten Kinematik, wie sie in Abschnitt 3.1.1 verwendet wurde, hinsichtlich ihrer Eigenschaften analysiert und modifiziert. Ziel ist zum einen eine Formulierung, welche eine direkte Berechnung des sphärischen Twists erlaubt und dabei die mit dem Momentanpol verbundenen, in der Umgebung des Fernpunktes auftretenden, numerischen Probleme vermeidet. Zum anderen wird in Abschnitt 3.3.2 eine adaptierte Formulierung hergeleitet, welche für den Fall, dass der Ursprung des Koordinatensystems mit der Lenkachse eines Rades zusammenfällt, die exakte Kenntnis über den φ_{wr} -Parameter des Twists ausnutzt.

Wie in Anhang C.1 erläutert, ist nach (C.6) die Existenz mindestens eines Radpaares ik , für welches $\vec{y}_{1,i}$, $\vec{y}_{1,k}$ und $\Delta\vec{x}_{ik}$ nicht kollinear sind, die grundlegende Voraussetzung für die direkte Bestimmung des Momentanpols auf Basis der Lenkwinkel $\vec{\varphi}_s$. Für Fahrwerke mit drei oder mehr Standardrädern, deren Lenkachsen nicht alle auf einer einzigen gemeinsamen Geraden liegen, lassen sich immer mindestens 2 solcher Paare bilden. Damit können die Gleichungen für die direkte Kinematik immer aufgestellt werden.

Ohne Einschränkung des Bezugssystems lassen sich aus (C.33) und (C.36) mit (3.41) die Parameter des sphärischen Twists ($\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v$) für jedes geeignete Radpaar errechnen. Im Folgenden bezeichne v das beliebige, aber feste Bezugssystem, in welchem die Parameter des sphärischen Twists ausgedrückt werden. Die der Konfiguration des Fahrwerks zugeordneten Parameter ergeben sich zu

$$\varphi_{wr}^v = \arctan_2(y_{a,k} + \lambda_k \cos(\varphi_{s,k}), x_{a,k} - \lambda_k \sin(\varphi_{s,k})) + \pi \sigma \left(-\frac{k_k}{\lambda_k} \right) - \left\langle \delta \left(-\frac{k_k}{\lambda_k} \right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \frac{\pi}{2} \quad (3.82)$$

$$\theta_{wr}^v = \arctan \left(\frac{d_{max}}{\sqrt{(x_{a,k} + \lambda_k (-\sin(\varphi_{s,k})))^2 + (y_{a,k} + \lambda_k \cos(\varphi_{s,k}))^2}} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{k_k}{\lambda_k} \right) \right). \quad (3.83)$$

Es ist zu beachten, dass (3.82) und (3.83) Funktionen von $\varphi_{s,k}$ und $\varphi_{s,i}$ sind. Zwar tritt explizit nur der Index k auf, λ_k ist aber eine Funktion (C.9) von $\varphi_{s,k}$ und $\varphi_{s,i}$.

Der verbleibende Parameter ρ_{wr}^v kann nun durch Ausnutzen der Gesetze der Festkörperbewegung $\omega_{wr}^k = \omega_{wr}^v$ durch Einsetzen des Ergebnisses von (3.83) in (3.44) berechnet werden

$$\rho_{wr}^v = \frac{\dot{\varphi}_{d,k} \cdot r_k \cdot d_{max}}{\lambda_k \cdot \sin(\theta_{wr}^v)}. \quad (3.84)$$

Dabei wurde angenommen, dass für Rad k $\vec{x}_{ICM}^k \neq 0$ gelte. Unter der Voraussetzung, dass ik ein valides Radpaar sei und ein physikalisch sinnvolles Fahrwerk betrachtet wird, also $\Delta\vec{x}_{ik} \neq 0$ gilt, ist diese Annahme immer für eines der Räder i, k erfüllt.

Gleichungen (3.82) bis (3.84) erlauben die Berechnung des sphärischen Twists auf Basis eines einzelnen validen Radpaares. Da bei einem Fahrwerk mit mehr als zwei Rädern in der Regel mehr als ein valides Radpaar existiert, bildet die direkte Kinematik bezüglich des gesamten Fahrwerks ein überbestimmtes Gleichungssystem. Der tatsächliche Twist kann z.B. über die Ergebnisse für alle validen Radpaare abgeschätzt werden. Eine Möglichkeit dazu ist die Bildung des Mittelwerts

$$\vec{t}_{wr}^v = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \delta(i,k) \cdot \vec{t}_{wr}^v(i,k)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \delta(i,k)} \quad (3.85)$$

über die Ergebnisse für alle Radpaare $\vec{t}_{wr}^v(i,k)$, welche aus den N Rädern des Fahrwerks gebildet werden

können. Dabei „wählt“ $\delta(i, k)$ gerade die validen Radpaare aus:

$$\delta(i, k) = \begin{cases} 0 & \forall (\vec{y}_{1,i} \parallel \vec{y}_{1,k}) \wedge (\vec{y}_{1,i} \parallel \Delta \vec{x}_{ik}) \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (3.86)$$

Prinzipiell ist die direkte Kinematik damit bereits vollständig angegeben. In der so angegebenen Form sind die Gleichungen (3.82) bis (3.84) allerdings teilweise numerisch problematisch. So strebt λ_k zum Beispiel in der Umgebung des Fernpunktes gegen Unendlich. Des Weiteren ist der Arcustangens in Gleichung (3.82) nicht definiert für $\vec{x}_{ICM}^y = 0$, wenn also der Momentanpol im Ursprung des Bezugssystems liegt.

Eine bessere numerische Konditionierung hinsichtlich des Fernpunkts kann durch einige einfache Umformungen erreicht werden. Wendet man (C.14) zweimal auf (3.82) an, so lässt sich (3.82) unter der Voraussetzung $\lambda_k \neq 0$ zu

$$\begin{aligned} \varphi_{wr}^y &= \arctan_2 \left(\frac{y_{a,k}}{\lambda_k} + \cos(\varphi_{s,k}), \frac{x_{a,k}}{\lambda_k} - \sin(\varphi_{s,k}) \right) + \pi \sigma(-k_k) - \frac{\pi}{2} \\ &= \arctan_2 \left(\frac{y_{a,k} \cdot \sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{\Delta x_{ik} \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y_{ik} \sin(\varphi_{s,i})} + \cos(\varphi_{s,k}), \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{x_{a,k} \cdot \sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{\underbrace{\Delta x_{ik} \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y_{ik} \sin(\varphi_{s,i})}_I} - \sin(\varphi_{s,k}) \right) + \pi \sigma(-k_k) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

umformen. Dabei ist (3.87) gerade dann wohl konditioniert, wenn Term I nicht 0 wird. Wie man durch Berechnung der Nullstelle erkennen kann, ist das gerade dann der Fall, wenn die Radachse von Rad i nicht parallel zu dem die Lenkachsen verbindenden Vektor $\Delta \vec{x}_{ik} = \vec{x}_{a,k} - \vec{x}_{a,i}$ ist. Das entspricht gerade der Bedingung, dass weder die Achsen und der Verbindungsvektor kollinear sind noch $\lambda_k = 0$ ist. Wie zuvor gezeigt, existiert für jedes valide Radpaar mindestens ein Rad, welches diese Bedingungen erfüllt.

Unter Verwendung der Definition des Betrages über die Signum-Funktion und unter der Annahme, dass $\lambda_k \neq 0$ gelte, lässt sich (3.83) analog umformen zu

$$\begin{aligned} \theta_{wr}^y &= \arctan \left(\frac{d_{max} \cdot k_k}{\lambda_k \sqrt{\left(\frac{x_{a,k}}{\lambda_k} - \sin(\varphi_{s,k}) \right)^2 + \left(\frac{y_{a,k}}{\lambda_k} + \cos(\varphi_{s,k}) \right)^2}} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{k_k \cdot d_{max} \cdot \sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{I \sqrt{\left(\frac{x_{a,k} \cdot \sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{I} - \sin(\varphi_{s,k}) \right)^2 + \left(\frac{y_{a,k} \cdot \sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{I} + \cos(\varphi_{s,k}) \right)^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

wobei I für den entsprechenden Term aus (3.87) steht. Damit gelten auch für (3.88) die gleichen aus dem Term I erwachsenden Bedingungen wie für (3.87).

Zur Berechnung des verbliebenen Parameters ρ kann eine Näherungslösung angegeben werden. In der Umgebung des Fernpunktes, also für $\lambda_v \rightarrow \infty$, gilt näherungsweise

$$|\lambda_v| \approx |\lambda_k|.$$

Verwendet man zusätzlich (C.31), so lässt sich (3.44) näherungsweise als

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{d,k} &= \frac{\lambda_k}{r_k} \cdot \frac{\rho_{wr}^v \sin(\theta_{wr}^v)}{d_{max}} \\ &\approx \frac{k_k k_v \lambda_v}{r_k} \cdot \frac{\rho_{wr}^v \sin(\theta_{wr}^v)}{d_{max}}\end{aligned}$$

schreiben. Es ist zu beachten, dass der hier auftretende zusätzliche Parameter k_v sich nicht unmittelbar berechnen lässt. Er spezifiziert die Anfangskonfiguration des Fahrwerks und ändert sich nur, wenn der Momentanpol durch den Ursprung des Koordinatensystems wandert. In Bezugssystemen, die nicht direkt mit einem Rad in Verbindung stehen, ist er keine direkt messbare Größe. Substituiert man nun λ_v nach (3.43) und nutzt, dass $k_v \in \{1, -1\}$ ist, so lässt sich (3.84) in der Umgebung des Fernpunktes näherungsweise schreiben als

$$\rho_{wr}^v \approx \frac{\dot{\varphi}_{d,k} \cdot r_k \cdot k_k}{\cos(\theta_{wr}^v)}. \quad (3.89)$$

Wie man erkennen kann, tritt der zuvor eingeführte Parameter k_v in dieser Darstellung nicht mehr auf. Auch für die Lösung der übrigen zur direkten Kinematik gehörenden Gleichungen (3.87), (3.88) ist er nicht notwendig.

Die numerischen Probleme in der Umgebung des Fernpunktes werden damit durch (3.87), (3.88) und (3.89) umgangen. Das zweite numerische Problem, welches sowohl in (3.82) als auch in (3.87) für $\vec{x}_{ICM}^v = 0$ auftritt, lässt sich nicht durch Umformung der Gleichungen beseitigen. Es ist unmittelbar mit der gewählten Parametrisierung über Kugelkoordinaten verknüpft und fällt mit dem bisher ausgeschlossen kritischen Punkt im Pol der Kugel zusammen. Kapitel 4 diskutiert die Implikation dieser Problematik vor dem Hintergrund des Systementwurfs. Es wird aufgezeigt, dass das angesprochene Problem durch Entwurf eines einfachen Beobachters umgangen werden kann. Eine Alternative dazu ist die Formulierung der direkten Kinematik mit Bezug auf den Konfigurationsraum eines Rades, wie er in 3.3.2 eingeführt wurde. Im folgenden Abschnitt wird die Form der direkten Kinematik vor diesem Hintergrund diskutiert.

3.3.2 Abbildung in ein radbezogenes Koordinatensystem

Betrachtet man den sphärischen Twist in einem Bezugssystem v , in dessen Zentrum das Rad v liege, so lässt sich die direkte Kinematik erheblich vereinfachen. Darüber hinaus ist es möglich, die verbliebenen numerischen Probleme bzgl. der Berechnung des Arcustangens in (3.82) bzw. (3.87) oder der nur näherungsweise möglichen Berechnung von ρ_{wr}^v im Fernpunkt (3.89) zu lösen.

Aus der Annahme, dass die nicht-holonomen Bindungen ideal erfüllt sind – das war gerade Voraussetzung für die Existenz des Momentanpols als Schnittpunkt aller Radachsen – folgt, dass der Momentanpol auf der Achse des Rades v liegen muss. Damit lässt sich (3.82) stark vereinfachen. Aus der Inversion von (3.42) ergibt sich unmittelbar

$$\varphi_{wr}^v = \varphi_{s,v} - \pi \cdot \sigma(-k_v). \quad (3.90)$$

Interpretiert man k_v zunächst als festen Parameter, welcher die Konfiguration des Fahrwerks beschreibt, ist der Parameter φ_{wr}^v also jederzeit direkt aus dem zugehörigen Lenkwinkel $\varphi_{s,v}$ errechenbar.

Ähnlich lässt sich (3.88) für $\lambda_\nu \neq 0$ zu

$$\theta_{wr}^\nu = \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot k_\nu}{\lambda_\nu}\right) \quad (3.91)$$

vereinfachen. In der Umgebung des Fernpunkts lässt sich dies analog zu (3.88) in eine numerisch unproblematische Form bringen. Für $\lambda_\nu = 0$ ist der Parameter θ_{wr}^ν weiterhin über (3.83) gegeben.

Der verbliebene Parameter ρ_{wr}^ν ergibt sich in der Umgebung des Fernpunktes $\cos(\theta_{wr}^\nu) \rightarrow 1$ durch Umformen von (3.44) zu

$$\rho_{wr}^\nu = \frac{\dot{\varphi}_{d,\nu} \cdot r_{d,\nu}}{k_\nu \cdot \cos(\theta_{wr}^\nu)}. \quad (3.92)$$

Für den Fall, dass $\cos(\theta_{wr}^\nu) \rightarrow +/-0$ strebt, der Momentanpol also im Ursprung des Bezugssystems ν liegt, kann ρ_{wr}^ν wie bisher über (3.84) exakt errechnet werden. Eine näherungsweise Lösung ist in keinem der Fälle nötig.

Unter der Annahme, dass i, k ein valides Radpaar ist, dass die Parameter \vec{k} für alle Räder bekannt sind, die nicht-holonomen Bindungen ideal erfüllt sind und ferner alle Lenkwinkel φ_s auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ begrenzt sind, bildet die Abbildung Φ , welche durch die Gleichungen (3.90) bis (3.92) gegeben ist, den Konfigurationsraum Q^N surjektiv auf $T \cup S''$ ab. Des Weiteren bildet Φ unter der Voraussetzung, dass $\lambda_\nu \neq 0$ gelte, den entsprechenden Unterraum $Q^{N'}$ von Q^N zusätzlich surjektiv und C^∞ auf T ab:

$$\Phi : Q^N \rightarrow T \cup S'' \quad \text{surjektiv} \quad (3.93)$$

$$\Phi : Q^{N'} \rightarrow T \quad \text{surjektiv \& } C^\infty. \quad (3.94)$$

Im Gegensatz zu der bisherigen Formulierung (3.82) bis (3.84) tritt in den Gleichungen (3.90) bis (3.92) nun zusätzlich der Faktor k_ν auf. Dieser war in Anhang C.1 über (C.29) eingeführt worden und charakterisiert die gemeinsame Lösungsdomäne eines Radpaares. Bisher wurde k_ν als fester, die Konfiguration des Fahrwerks charakterisierender Faktor interpretiert. Lässt man aber, wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben, das Durchlaufen der kritischen Bereiche zu, so ändert sich der Parameter k des Rades, dessen kritischer Bereich durchlaufen wurde. Ein Wechsel des Parameters k_ν kennzeichnet damit einen Wechsel zwischen den Lösungsdomänen des Momentanpols bezüglich dieses Rades ν . Damit wird k_ν Bestandteil des das Rad ν charakterisierenden Zustands

$$\vec{x}_\nu = \left(\vec{i}_{wr}^{\nu T}, k_\nu\right)^T. \quad (3.95)$$

Anders als die Parameter des Twists \vec{i}_{wr}^ν lässt sich k_ν allerdings nicht direkt errechnen, da er lediglich relativ (C.31) zu den übrigen Parametern definiert ist

$$k_\nu \cdot \text{sgn}(\lambda_\nu) = k_k \cdot \text{sgn}(\lambda_k).$$

Er ergibt sich aus der Entwicklung bzw. Historie und dem konkreten Pfad im Zustandsraum. Diese Entwicklung lässt sich mittels eines Beobachters verfolgen. Kapitel 4 diskutiert die Implikationen die sich ergeben, wenn ein Wechsel der Lösungsdomänen gestattet wird und skizziert einen möglichen Beobachterentwurf.

4 Strukturelle Eigenschaften des resultierenden Zustandsraums

Dieses Kapitel entwirft eine geeignete Zustandsraumdarstellung für die Regelung nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke. Ausgangspunkt ist dabei der in Kapitel 3 eingeführte Parameterraum des erweiterten, sphärischen Twists.

In Abschnitt 4.1 werden zunächst die Implikationen der Topologie dieses Raums und der damit zusammenhängenden Eigenschaften von inverser und direkter Kinematik vor regelungstechnischem Hintergrund untersucht. Abschnitt 4.1.1 diskutiert die systemimmanenten Mehrdeutigkeiten. Abschnitt 4.1.2 und 4.1.3 untersuchen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, insbesondere in der Umgebung der Singularitäten. Abschnitt 4.1.3 skizziert des Weiteren einen Beobachterentwurf zur Behandlung der Singularitäten in der direkten Kinematik.

Abschnitt 4.2 erweitert die in Abschnitt 4.1 eingeführte Zustandsraumdarstellung so, dass ein Durchlaufen der kinematischen Singularitäten möglich wird. Dazu werden in Abschnitt 4.2.1 zunächst Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit für den Spezialfall eines „radzentrierten“ Bezugssystems (vgl. Abschnitt 3.2.1) untersucht. Dann wird die Zustandsraumdarstellung so erweitert, dass sie toroidale Topologie annimmt und volle Steuerbarkeit des Systems auch in der durch das zentrale Rad verursachten Singularität sicherstellt. Abschnitt 4.2.2 argumentiert schließlich unter Verwendung der Ergebnisse von Abschnitt 3.2.2 und 3.3.2, dass durch eine Kombination solcher Bezugssysteme ein Zustandsraum entsteht, der einen ATLAS des vollständigen, nicht-trivialen, zulässigen Konfigurationsraums $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ bildet.

Die beiden in diesem Abschnitt entworfenen Zustandsraumdarstellungen, mit und ohne Kombination mehrerer Bezugssysteme, bilden die Grundlage für den Entwurf der Regelungsansätze in Kapitel 5.

4.1 Struktur des Zustandsraums außerhalb der kinematischen Singularitäten

4.1.1 Überbestimmtheit und Mehrdeutigkeiten

Wie bereits in Abschnitt 2.2 und Anhang C.1 erläutert, ist die Abbildung des kartesischen Twists auf den Konfigurationsraum des Fahrwerks nicht eindeutig. Verwendet man z.B. das Prinzip der Festkörperbewegung nach Descartes, so erhält man für jedes Rad lediglich einen Geschwindigkeitsvektor mit dem Ursprung in der Lenkachse des jeweiligen Rades. Für jedes Rad gibt es dann zwei Lösungen $(\varphi_{s,i}, \dot{\varphi}_{d,i})$ bzw. $(\varphi_{s,i} + \pi, -\dot{\varphi}_{d,i})$, welche zu dem gewünschten Geschwindigkeitsvektor führen. Analog verhält es sich bei Beschreibung der Fahrwerkskonfiguration über den Momentanpol. Abbildung C.1 stellt eine Reihe möglicher Konfigurationen dar. Dabei ist der Übergang zwischen diesen Konfigurationen gerade durch das Durchlaufen einer Singularität gekennzeichnet.

Um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen und eine eindeutige, im Fernpunkt stetig differenzierbare Kinematik aufstellen zu können, wurde zum einen der sphärische Twist in (3.10) als Überlagerung der beiden Lösungsdomänen des Momentanpols bei Projektion auf die Kugel definiert. Zum anderen wurden die zusätzlichen Parameter \vec{k} eingeführt.

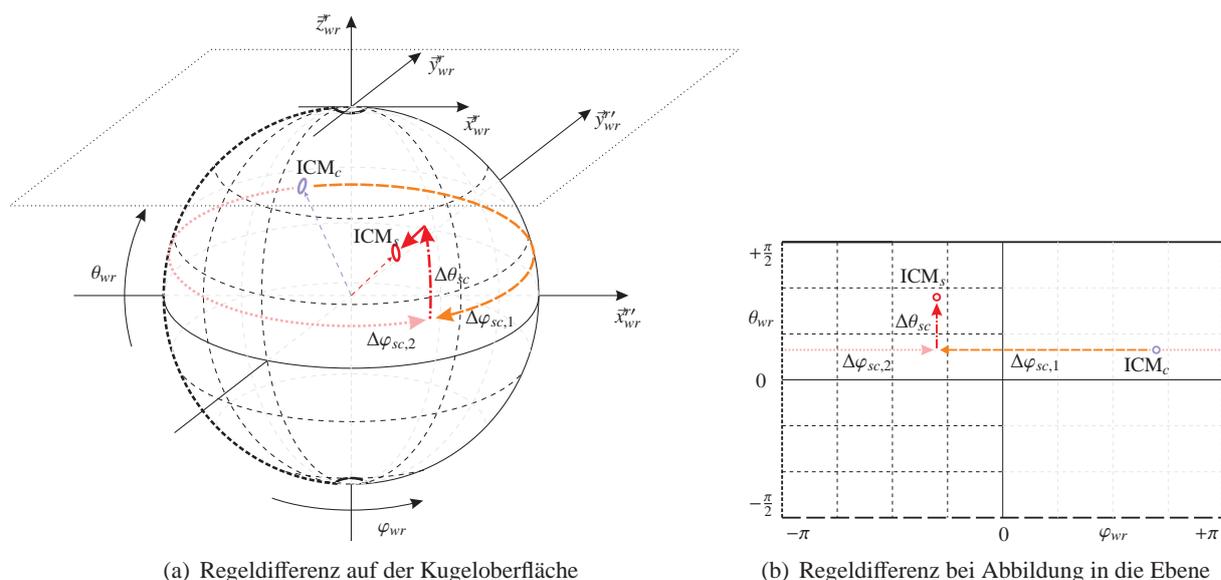


Abbildung 4.1: Bei Aussparung der Pole (Abb. 4.1(a)) bildet sich eine Zylindertopologie. Die Oberfläche des Zylinders kann nach Auftrennen in die \mathbb{R}^2 -Ebene abgebildet werden (Abb.4.1(b)). Dabei entspricht der mit kurzen Strichen dargestellte Rand der $(\varphi_{wr}, \theta_{wr})$ -Ebene in Abb. 4.1(b) gerade der Grenzlinie in $\pm\pi$ aus Abb. 4.1(a). Der durchgezogene bzw. mit langen Strichen dargestellte Rand in Abb. 4.1(b) entspricht den entsprechenden Kreisen um die Pole in Abb. 4.1(a), wenn diese auf einen infinitesimalen Radius reduziert werden. Der mit ICM_c gekennzeichnete lila Kreis stellt die gegenwärtige Konfiguration dar. Der mit ICM_s gekennzeichnete rote Kreis stellt die Sollkonfiguration dar. Durch Anwendung der $\text{mod}(2\pi)$ -Arithmetik kann die Regeldifferenz für beide Pfade – rosa gepunkteter Pfeil und orange gestrichelter Pfeil – über die $\pm\pi$ hinaus errechnet werden. Eine Überquerung der Pole ist zunächst nicht möglich. Die Differenz in θ (roter gestrichpunkteter Pfeil) und ρ (lila Pfeil in Abb. 4.1(a)) ist daher eindeutig.

In diesem Abschnitt wird zunächst der Zusammenhang zwischen Mehrdeutigkeiten und der Struktur des Zustandsraums diskutiert. Dabei wird ausgehend von der auf eine Lösungsdomäne beschränkten Definition des sphärischen Twists nach (3.40) der Zustandsraum sukzessive erweitert, bis er schließlich den vollständigen Nullraum der nicht-trivialen Lösungen der nicht-holonomen Bindungen umfasst. In diesem Zusammenhang wird insbesondere auf die, mit der Abbildung auf die Kugel zusammenhängenden, $\text{mod } 2\pi$ -Arithmetik eingegangen. In den folgenden Kapiteln wird dann auf die Struktur des Zustandsraums in den Singularitäten bezüglich der inversen (kinematische Singularitäten) und der Vorwärtskinematik (parametrierungsabhängige Singularitäten) eingegangen. Bezüglich der direkten Kinematik wird eine Untersuchung der Beobachtbarkeit bzw. ein Beobachterentwurf durchgeführt.

Bildet man die kartesische Darstellung des Twists nach (3.40) auf Kugelkoordinaten ab

$$\vec{t}_{wr} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})^2} \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) \\ \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \end{pmatrix}$$

und gilt die Voraussetzung, dass \vec{k} ein Satz fester Parameter ist, welcher die Anfangskonfiguration des Fahrwerks charakterisiert, so bildet die inverse Kinematik nach Abschnitt 3.2 den Twist eindeutig auf eine einzige Lösungsdomäne des Konfigurationsraums ab. Dabei stehen die den Winkeln zugeordneten Parameter $\varphi_{wr}^r, \theta_{wr}^r$ im Zusammenhang zu den „non-slipping“ Bedingungen, welche sich aus den nicht-holonomen Bindungen ableiten lassen. Sie werden über die inverse Kinematik auf die Lenkwinkel abge-

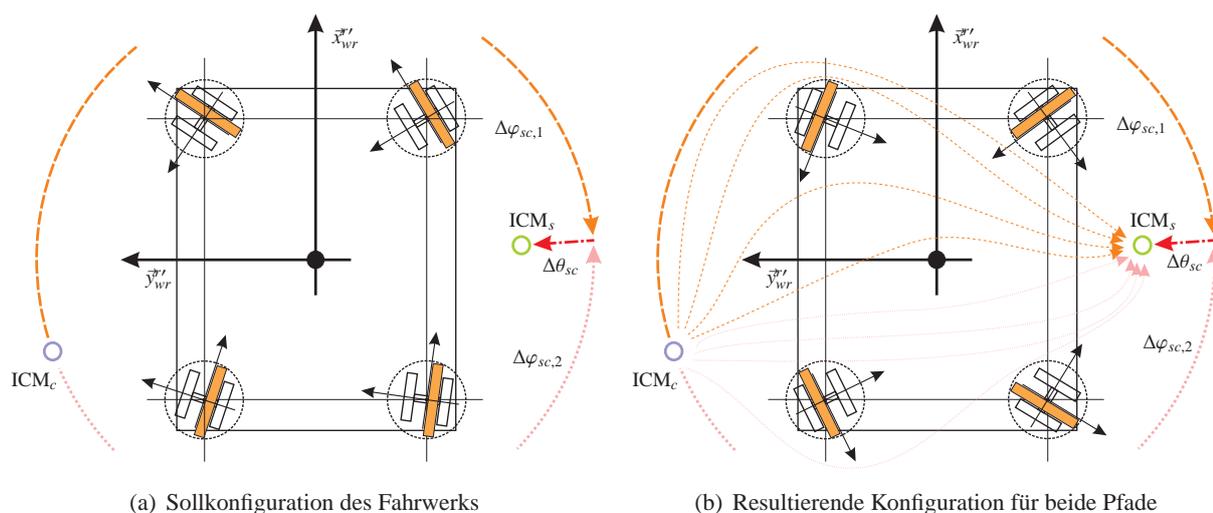


Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt die aus den beiden Wegen resultierenden Pfade in der Fahrwerksebene. Die zusätzlichen dünn gestrichelten Pfade sind Pfade, welche zur ersten Abweichung gehören $\Delta\varphi_{wr,1}$. Die zusätzlichen, rosa gepunkteten Pfade sind dem zweiten Weg zugeordnet $\Delta\varphi_{wr,2}$. Alle Pfade haben gemeinsam, dass sie keine Singularitäten (weder den Fernpunkt, noch eine der Radachsen) passieren und auf die gleiche Konfiguration führen.

bildet. Der dem „Radius der Kugel“ zugeordnete Parameter ρ_{wr}^r steht im Zusammenhang zu den „pure-rolling“ Bedingungen und wird auf die Rotationsrate der Räder abgebildet. Vernachlässigt man etwaige Kopplungen von Fahr- und Lenkbewegung über das Getriebe bzw. bei exzentrisch montierten Rädern dynamische Rückwirkungen aufgrund des Hebelarms, so können Fahr- und Lenkbewegungen unabhängig voneinander angesteuert werden. In Abschnitt 5.1.1 wird gezeigt, dass die Teilsysteme für Fahr- und Lenkbewegung in erster Näherung als energetisch entkoppelt betrachtet werden können.

Die Abbildung des Momentanpols auf die Kugel führt unter Aussparung der Pole (Abb. 4.1(a)) zu einem zylinderförmigen Arbeitsraum der Struktur $S^1 \times \mathbb{R}$, wobei \mathbb{R} hier auf den Bereich $(-\pi/2, \pi/2)$ begrenzt ist. Das bedeutet, dass, während θ direkt auf \mathbb{R} abgebildet werden kann, bezüglich φ der Übergang über die π bzw. $-\pi$ Schwelle betrachtet werden muss. Prinzipiell existieren immer zwei mögliche Wege (Abb. 4.1), von denen einer ausgewählt werden muss. Die jeweils kleinste Regeldifferenz des Parameters φ , entlang des kürzeren der beiden Wege, ergibt sich aus der euklidischen Differenz zwischen Soll- und Istkonfiguration modulo π .

Die Beschränkung auf eine Lösungsdomäne bewirkt dabei eine eindeutige Zuordnung zwischen Fahrwerkskonfiguration, Momentanpol bzw. sphärischem Twist und kartesischem Twist. Daher wird die Sollvorgabe des kartesischen Twists auf genau einen Punkt (grüner Kreis in Abb. 4.2(a) bzw. Abb. 4.2(b)) im Raum des sphärischen Twists bzw. projizierten Momentanpols abgebildet. Gleiches gilt für die Fahrwerkskonfiguration. Obwohl die Zielkonfiguration auf unterschiedlichen Pfaden erreicht (rosa gepunkteter und oranger Pfeil in Abb. 4.1 und Abb. 4.2) werden kann, ist die resultierende Konfiguration eindeutig. Für $\vec{k} \equiv \vec{1}$ ist sie auf die Lösung für $\dot{\varphi}_{d,i} \geq 0$ für alle Räder beschränkt.

Es ist offensichtlich, dass eine solche Einschränkung nachteilig ist. Betrachtet man z.B. den Fall eines zunächst vorwärts, dann rückwärts fahrenden Fahrzeugs müssten alle Räder um 180° gedreht werden, anstatt einfach die Rotationsrichtung der Räder umzukehren. Ähnliches gilt für eine Rotation auf der Stelle. Der Momentanpol müsste einmal über den Fernpunkt wandern, um dann wieder im Zentrum des Koordinatensystems zum liegen zu kommen.

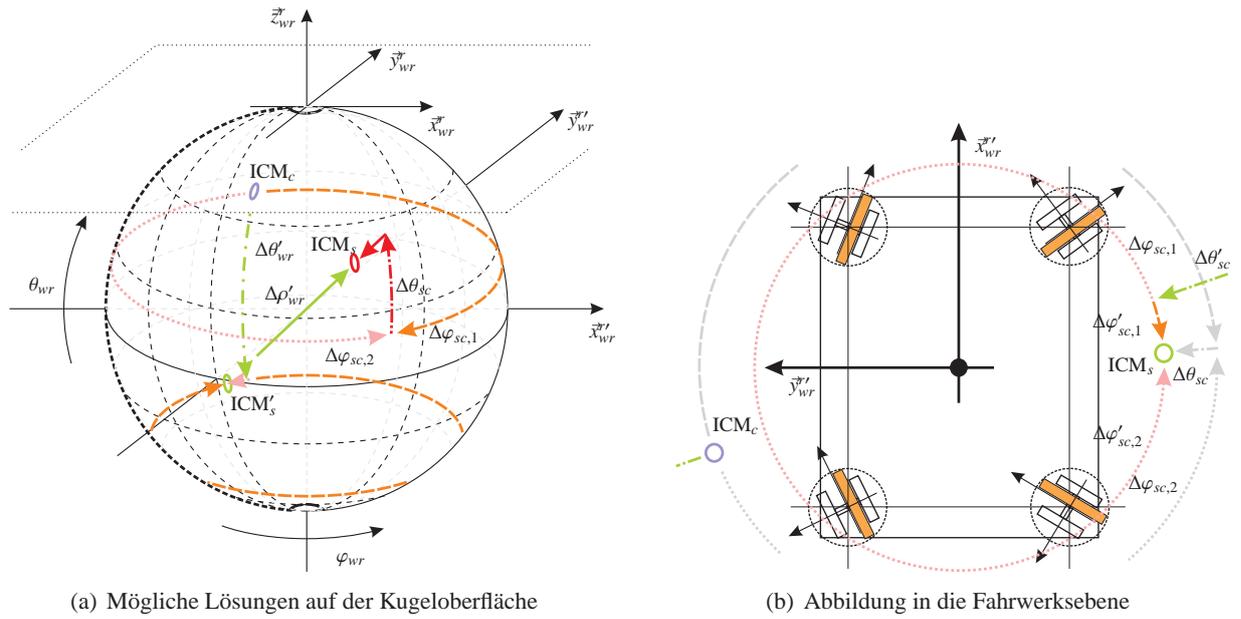


Abbildung 4.3: Abbildung 4.3(a) zeigt beide zulässigen Lösungen auf der Kugel. Abbildung 4.3(b) zeigt die Lösungen in der Bewegungsebene des Roboters. Der grün gestrichelpunktete Pfeil stellt den alternativen Weg über den Fernpunkt dar. Der grüne Pfeil geht durch den Ursprung und stellt die Differenz in ρ_{wr} für die zweite Lösung dar. In der (\bar{x}^r, \bar{y}^r) -Ebene fallen die beiden Lösungen zusammen. Sie resultieren allerdings in unterschiedlichen Fahrwerkskonfigurationen.

Diese Reduktion auf eine Lösungsdomäne hat ihren Ursprung bei der in Abschnitt 3.1.4 vorgenommenen Vereinfachung von Gleichung (3.39) zu oben dargestellter Gleichung (3.40). Formt man (3.39) statt dessen mit $\kappa \in \{-1, 1\}$ um

$$\vec{t}_{wr}^r = \begin{pmatrix} \kappa \cdot \sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})} \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \pi \cdot \sigma(-\rho_{wr}^r) \\ \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \cdot \text{sgn}(\rho_{wr}^r) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

so kann man erkennen, dass damit im Wesentlichen die Lösungen auf positive ρ_{wr}^r beschränkt wurden. Das ist die Voraussetzung dafür, den erweitert definierten, projizierten Momentanpol als Darstellung des Twists in sphärischen Koordinaten eindeutig angeben zu können.

Lässt man für ρ , entgegen der üblichen Norm, auch negative Werte zu, so ergibt sich folgende alternative Lösung

$$\vec{t}_{wr}^r = \begin{pmatrix} -\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2 + (\omega_{wr}^r d_{max})} \\ \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \pi \\ -\arctan\left(\frac{d_{max} \cdot \omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Dies entspricht für $\vec{k} \equiv \vec{1}$ gerade der Lösung, bei der für alle Räder $\varphi_{d,i} \leq 0$ gilt (Abb. 4.3(b)). Bezüglich der Darstellung in Kugelkoordinaten kann man sich vorstellen, dass man zunächst auf der Oberfläch der Kugel zu dem der Zielkonfiguration gegenüberliegenden Punkt wandert und dann durch die Mitte der Kugel hindurch auf die andere Seite (Abb. 4.3(a)).

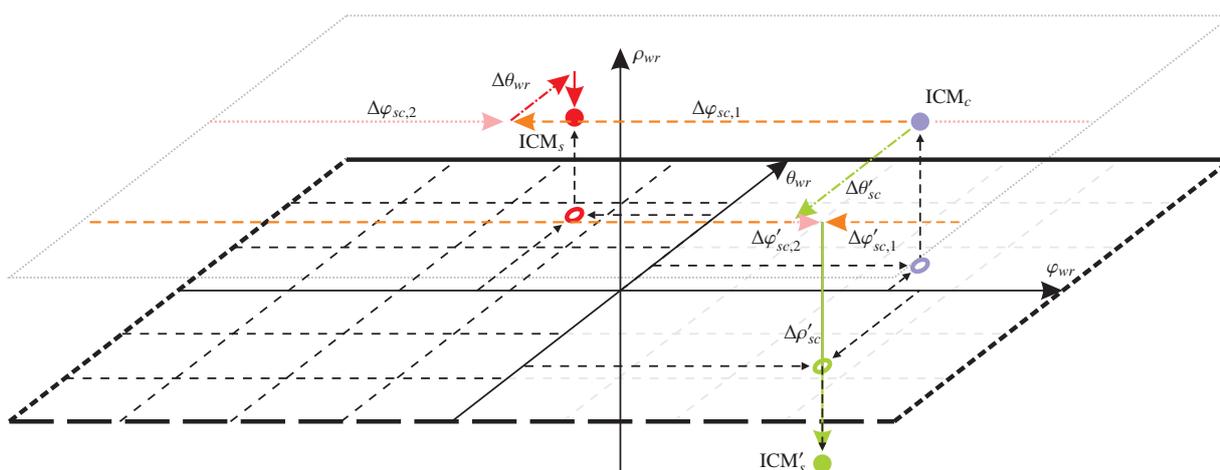


Abbildung 4.4: Die Abbildung zeigt beide zulässigen Lösungen bzw. Regeldifferenzen nach Abbildung in den euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Dabei wird auf die Differenz $\Delta\varphi_{wr}$ wieder die $\text{mod}(2\pi)$ -Arithmetik angewandt. Der grün gestrichpunktete Pfeil stellt den alternativen Weg über den Fernpunkt dar. Der grüne Pfeil geht durch den Ursprung und stellt die Differenz in ρ_{wr} für die zweite Lösung dar.

In Abschnitt 3.2.4 wurde gezeigt, dass die inverse Kinematik nicht nur für $\rho \geq 0$, sondern für alle $\rho \in \mathbb{R}$ surjektiv und C^∞ ist (3.77, 1.). Genauso wurde in Abschnitt 3.3 gezeigt, dass die direkte Kinematik den Konfigurationsraum des Fahrwerks, unter der Voraussetzung, dass die nicht-holonomen Bindungen erfüllt sind, surjektiv und C^∞ auf

$$T = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$$

abbildet. Dabei war T gerade die Darstellung der Kugel im Euklidischen Raum unter Aussparung der Pole, aber für $\rho \in \mathbb{R}$ (Abb. 4.4). Damit kann die Regelung im gesamten Raum T durchgeführt werden. Beide Lösungen sind valide und sowohl inverse als auch direkte Kinematik sind in diesem Bereich wohldefiniert. Eine Sonderstellung nehmen die Umgebungen der Pole ein. Diese werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

Abbildung 4.3 stellt die zulässigen Lösungen für den Twist auf der Kugeloberfläche sowie für den Momentanpol in der Fahrwerksebene dar. Während auf der Kugeloberfläche bzw. im zugehörigen \mathbb{R}^3 Raum (Abb. 4.4) die Lösungen eindeutig zu unterscheiden sind (roter Kreis für erste Lösung, grüner Kreis für alternative Lösung mit $\rho < 0$), fallen die Lösungen in der Fahrwerksebene zusammen. Es ist aber zu erkennen, dass die in Abbildung 4.3(b) dargestellte Fahrwerkskonfiguration sich von der in Abbildung 4.2(b) dargestellten Konfiguration unterscheidet. In obigem Fall zeigen die Radachsen in Richtung des Momentanpols. Im nun betrachteten Fall zeigen die Radachsen weg von der Position des Momentanpols. Das liegt daran, dass der Weg über den Fernpunkt durch eine (zulässige) Singularität führt und das Fahrwerk in eine andere Konfiguration überführt (vgl. Abschnitt C.1). Den unterschiedlichen Lösungen auf der Kugel sind unterschiedliche Lösungen im Konfigurationsraum des Fahrwerks zugeordnet.

Bei der Implementierung eines Reglers muss also zwischen den möglichen Wegen bzw. Lösungen ausgewählt werden. Die Möglichkeiten, eine solche Auswahl zu treffen, sind vielfältig. Sie reichen von der simplen Wahl der nächsten Lösung über die Implementierung eines Hystereseverhaltens, um häufiges Wechseln zwischen den Sollwerten zu vermeiden, bis hin zur Lösung eines entsprechenden Optimierungsproblems, in welchem z.B. gegenwärtige Bewegungsrichtungen bzw. gegebenenfalls nötige Beschleunigungen berücksichtigt werden können.

4.1.2 Steuerbarkeit und Manipulierbarkeit in der Umgebung der Singularitäten

Neben den vorhandenen Mehrdeutigkeiten spielt der Einfluss der Singularitäten eine erhebliche Rolle bei der Auslegung der Regelung. So stehen die bei nicht-holonomen, omnidirektionalen Fahrwerken auftretenden Singularitäten in enger Beziehung zu Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen Singularitäten, welche eine Folge der gewählten Parametrierung sind, und intrinsischen, kinematischen Singularitäten, welche mit einer Einschränkung der Beweglichkeit des betrachteten Systems einhergehen. So war z.B. bereits bei der Herleitung der Parametrierung in Abschnitt 3.1.1 eine infinitesimale Umgebung der Pole ausgeklammert worden. Das war nötig, da die sphärischen Koordinaten, insbesondere der Parameter φ_{wr}^v in diesem Punkt nicht eindeutig definiert sind. Diffeomorphismus gilt daher nur in einer offenen Umgebung, welche die Pole ausschließt. Des Weiteren waren die Punkte des Parameterraums, auf welche die Lenkachsen der Räder abgebildet werden (3.58), (3.59), während der Herleitung der inversen Kinematik ausgeschlossen worden. Damit wurde gewährleistet, dass die inverse Kinematik über den gesamten Definitionsbereich surjektiv und C^∞ ist.

In diesem Abschnitt wird der Einfluss dieser Singularitäten hinsichtlich Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit untersucht. Die Diskussion der Eigenschaften der inversen Kinematik in Abschnitt 3.2.4 zeigt, dass die Umgebung der Pole unkritisch bezüglich der Abbildung des Twists bzw. seiner Ableitungen in den Konfigurationsraum des Fahrwerks ist. Es handelt sich bei den Polen um Singularitäten aufgrund der Parametrierung. Es wird im Folgenden gezeigt, dass diese im hier vorliegenden Fall keine Einschränkung bezüglich eines Reglerentwurfes darstellen.

Veranschaulicht man sich die Entwicklung der Lenkachsen bei einem Durchgang des Momentanpols durch den Ursprung des Koordinatensystems (Abb. 4.5(b)) wird offensichtlich, dass dabei keine kritische Situation bezüglich der inversen Kinematik vorliegt, solange sich kein Rad im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Die Lenkwinkel sind weiterhin wohl definiert und ihre Ableitungen bleiben beschränkt, solange die Änderung des ICM beschränkt ist. Das deckt sich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 (3.77, r.), wonach die über den Momentanpol abgeleitete inverse Kinematik auch in den Polen eine surjektive und C^∞ Abbildung des sphärischen Twists auf den Konfigurationsraum des Fahrwerks erlaubt. Allerdings ist die Abbildung nicht diffeomorph. Betrachtet man die Gleichungen (3.55), (3.57) und (3.61)

$$\begin{aligned} \rho_{wr}^i &= \frac{\rho_{wr}^v}{d_{max}} \cdot \left((d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) + \sin(\theta_{wr}^v) x_{iv}^v)^2 + (d_{max} \sin(\theta_{wr}^v))^2 \right)^{1/2} \\ \varphi_{wr}^i &= \arctan_2 \left(d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v \right) - \frac{\pi}{2} \\ \theta_{wr}^i &= \arctan \left(d_{max} \cdot \sin(\theta_{wr}^v) \cdot \left((d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \cos(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot y_{iv}^v)^2 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + (-d_{max} \cos(\theta_{wr}^v) \sin(\varphi_{wr}^v) - \sin(\theta_{wr}^v) \cdot x_{iv}^v)^2 \right)^{-1/2} \right) \end{aligned}$$

welche den sphärischen Twist in translatorisch verschobene Bezugssysteme abbilden, erkennt man, dass für $\theta_{wr}^v \rightarrow +/\!-\pi/2$ die entsprechenden Cosinus-Terme gegen Null streben. Im Pol hat φ_{wr}^v daher keinen Einfluss auf den sphärischen Twist im translatorisch verschobenen Bezugssystem. Entsprechend wird die Ableitung des transformierten Twists \vec{t}_{wr}^i bezüglich des φ_{wr}^v -Parameters in den Polen zu Null. Es folgt unmittelbar, dass eine Berechnung des Parameters φ_{wr}^v in diesem Fall ebenfalls nicht möglich ist. Es lässt sich also in diesem Zusammenhang keine direkte Kinematik formulieren. Die Abbildung ist im Pol nicht bijektiv und daher nicht diffeomorph.

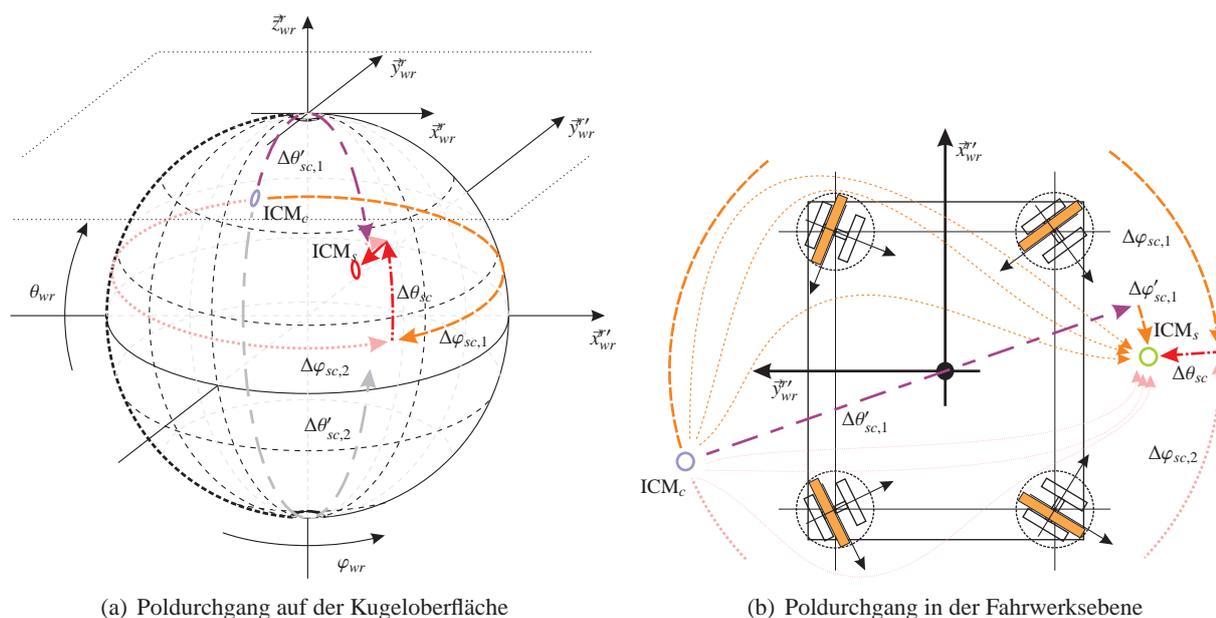


Abbildung 4.5: Abb. 4.5(a) zeigt alternative Pfade (lila gestrichelt und grau gestrichelt), welche die Pole der Kugel kreuzen. Abb. 4.5(b) zeigt den zum ersten alternativen Pfad (lila gestrichelt) gehörenden Pfad in der Fahrwerksebene (lila gestrichelt).

Aus regelungstechnischer Sicht ist die Einbeziehung der Pole valide, wenn das entstehende System weiterhin steuerbar und beobachtbar sowie die entsprechende Abbildung der Regelgrößen \vec{u} in den Konfigurationsraum surjektiv und C^∞ sind. Für den folgenden Reglerentwurf sei der Zustandsraum durch den Definitionsbereich des sphärischen Twists inklusive der Pole gegeben

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \vec{t}_{wr}^s, \text{ mit}$$

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in (-\pi, \pi], \quad x_3 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bei rein kinematischer Betrachtung folgt, dass die einzelnen Zustandsgrößen unabhängig voneinander steuerbar sind:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u}, \text{ mit}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_{3 \times 3}.$$

Es ist unmittelbar klar, dass aufgrund der Diagonalform von \mathbf{B} , dieses System vollständig steuerbar ist. Die Steuerbarkeitsmatrix (vgl. (Föllinger und Dörrscheidt 1994)) ergibt sich zu

$$\mathbf{Q}_s = (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$$

$$= (\mathbf{1}_{3 \times 3} \mathbf{0}_{3 \times 6}),$$

wobei $n = 3$ die Anzahl der Zustandsvariablen ist. Es folgt unmittelbar, dass $\text{Rang}[\mathbf{Q}_s] = \text{Rang}[\mathbf{B}] = 3$, also die Steuerbarkeitsmatrix Höchststrang hat und das System damit vollständig steuerbar ist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass diese Systemdarstellung stark abstrahiert ist. Betrachtet man die Gleichungen der inversen Kinematik (3.55), (3.57) und (3.61), erkennt man wie zuvor erwähnt, dass eine Änderung des Parameters φ_{wr}^v nicht zu einer Änderung der Fahrwerkskonfiguration führt.

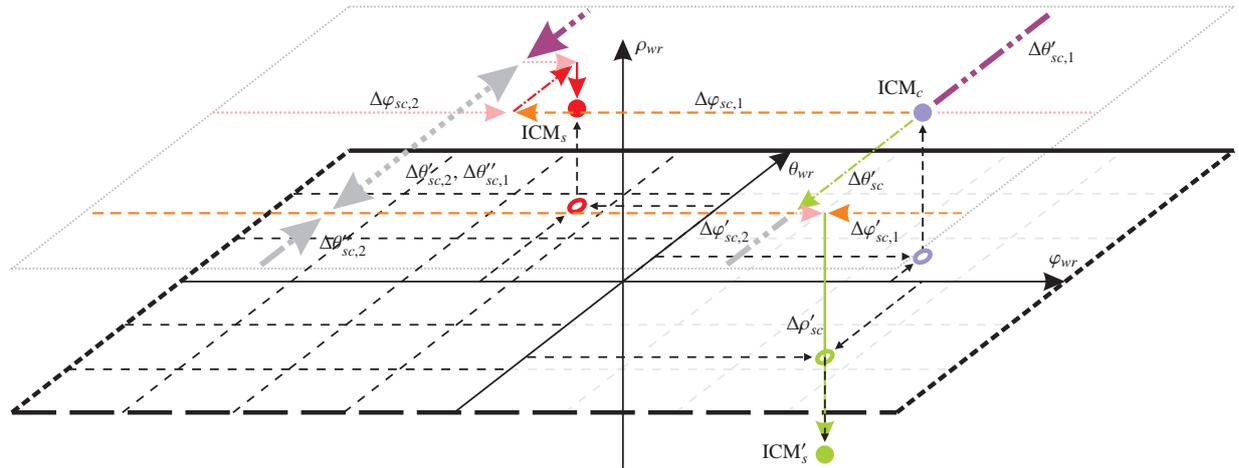


Abbildung 4.6: Die Abbildung zeigt die für beide zulässigen Lösungen entstehenden Pfade im ursprünglichen Raum, wenn zusätzlich Poldurchgänge zugelassen werden. Die entsprechenden Pfade sind fett dargestellt. Der in Abbildung 4.5 dargestellte Pfad ist zusätzlich lila gestrichelt dargestellt.

Um diese in den Polen surjektive und C^∞ Abbildung des Parameterraums auf den zulässigen Konfigurationsraum des Fahrwerks herzuleiten, ist es notwendig, den Definitionsbereich des sphärischen Twists bezüglich θ_{wr}^v auf $(-\pi, \pi]$ zu erweitern. Damit ist es möglich, eine Lösung s_1 auf zwei unterschiedliche Arten zu parametrieren

$$\begin{aligned}\vec{t}_{wr,s_1}^v &= (\rho_{wr,s_1}^v, \varphi_{wr,s_1}^v, \theta_{wr,s_1}^v)^T \\ \vec{t}_{wr,s_1}^{v'} &= (\rho_{wr,s_1}^v, \pi + \varphi_{wr,s_1}^v, \pi - \theta_{wr,s_1}^v)^T,\end{aligned}$$

wobei beide Parametrierungen zunächst dem gleichen Punkt im Konfigurationsraum Q_N zugeordnet sind. Das erlaubt sowohl die Berechnung einer alternativen Darstellung für den Sollwert als auch für den Istwert des Zustands \vec{x} , welche sich beim Durchgang durch den Pol kontinuierlich ändert (Abb. 4.5(a)). Damit ist auch die Berechnung einer weiteren Regeldifferenz, welche sich beim Durchgang durch den Pol kontinuierlich ändert, möglich. Gleichzeitig ist damit die Abbildung zwischen Konfigurationsraum und Parameterraum des sphärischen Twists nicht länger eindeutig. Die Abbildung

$$\Xi : T'/S_v^v \rightarrow Q^N,$$

wobei $T' = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]^2$, ist damit kein Diffeomorphismus des zulässigen Konfigurationsraums. Es ist jedoch jederzeit möglich, zwischen den gewählten Parametrierungen zu wechseln. Führt man, analog zu den Parametern \vec{k} , einen zusätzlichen virtuellen Parameter k'_v ein, so lässt sich eine eindeutige Rücktransformation

$$\vec{t}_{wr,s}^v = \begin{cases} (\rho_{wr,s_1}^v, \varphi_{wr,s_1}^v, \theta_{wr,s_1}^v)^T & \forall k_v = 1 \\ (\rho_{wr,s_1}^v, -\pi + \varphi_{wr,s_1}^v, \pi - \theta_{wr,s_1}^v)^T & \forall k_v = -1 \end{cases} \quad (4.3)$$

definieren. Wie man unmittelbar erkennt, ist diese Abbildung $\Gamma'_{v'v}$ für ein gegebenes k_v surjektiv und C^∞ :

$$\begin{aligned}\Gamma'_{v'v} : T'/S_{v'}^v &\rightarrow T/S_v^v, \text{ mit} \\ T' &= \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]^2.\end{aligned} \quad (4.4)$$

Damit bildet Γ' beschränkte Regeldifferenzen und Stellgrößen aus dem alternativen Parameterraum T' auf beschränkte Regeldifferenzen und Stellgrößen im ursprünglichen Parameterraum T inklusive der Pole ab (Abb. 4.6). Da nach Abschnitt 3.2.4 die Abbildung aus diesem Parameterraum auf den zulässigen Konfigurationsraum ebenfalls surjektiv und C^∞ ist (3.77, l.), (3.77, r.), kann ein Reglerentwurf bezüglich des erweiterten Konfigurationsraums T erfolgen. Anschaulich treten zu den möglichen Pfaden nach Abschnitt 4.1.1 nun die Pfade durch die Pole hinzu. Das betrachtete System ist damit auch in den Polen vollständig steuerbar.

Für jede Lösung existieren nun vier unterschiedliche Pfade (Abb. 4.6) mit jeweils unterschiedlichen Regeldifferenzen. Das der Auswahl des Pfades zugrunde liegende Optimierungsproblem erweitert sich damit um einen zusätzlichen Freiheitsgrad. Dabei bleibt zu beachten, dass alle Pfade zu einer Lösung, welche keine Singularität durchlaufen, auf eine identische Konfiguration führen.

Um den Einfluss der wesentlichen, kinematischen Singularitäten nach (3.58), (3.59) zu untersuchen, wird die Manipulierbarkeit m_i (vgl. (Ott u. a. 2005), S. 39 ff.) des sphärischen Twists \vec{t}_{wr}^y analysiert:

$$m_i = \sqrt{\det(\mathbf{J}_f(\vec{q}_i)\mathbf{J}_f^T(\vec{q}_i))} \quad (4.5)$$

$$= \sqrt{\det(\mathbf{J}_{iv}\mathbf{J}_i(\vec{q}_i)\mathbf{J}_i^T(\vec{q}_i)\mathbf{J}_{iv}^T)} \quad (4.6)$$

Dabei repräsentiert die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_f(\vec{q}_i)$ die Möglichkeit eines Rades, den sphärischen Twist \vec{t} und damit die Geschwindigkeit des Roboters zu beeinflussen. Sie lässt sich nach Abschnitt 3.2 als Verkettung

$$\mathbf{J}_f(\vec{q}_i) = \mathbf{J}_{iv,3 \times 3} \mathbf{J}_{i,3 \times 2}(\vec{q}_i) \quad (4.7)$$

schreiben. Dabei ist \mathbf{J}_{iv} die der Abbildung $\Gamma_{T_i T_v}$ des Twists von Bezugssystem i nach v zugeordnete Jacobi-Matrix und $\mathbf{J}_i(\vec{q}_i)$ die Jacobi-Matrix, welche der Abbildung $\Psi_{Q_i T_i}$ der Konfiguration eines einzelnen Rades auf den Twist bzgl. des radzentrierten Koordinatensystems zugeordnet ist. Vertauscht man in den oben wiederholten Gleichungen (3.55), (3.57) und (3.61) die Indizes i und v , so erhält man die Abbildung $\Gamma_{T_i T_v}$. Betrachtet man die resultierenden Gleichungen für $\cos(\theta_{wr}^i) = 0$, also im Ursprung des Koordinatensystems i , erkennt man, dass die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{iv} = \nabla \Gamma_{T_i T_v} \quad (4.8)$$

keinen vollen Rang hat. Mit $\cos(\theta_{wr}^i) = 0$ hat φ_{wr}^i keinen Einfluss auf den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^y .

Die zugehörige Spalte der Jacobi-Matrix ist ein Nullvektor. Damit ist unabhängig von $\mathbf{J}_i(\vec{q}_i)$ auch die entsprechende Spalte von $\mathbf{J}_f(\vec{q}_i)$ und die Determinante in (4.5) bzw. die Manipulierbarkeit m_i null

$$m_i = 0 \quad \forall (\varphi_{wr}^i, \theta_{wr}^i) \in S \quad (4.9)$$

innerhalb der Singularitäten. Umgekehrt bedeutet das, dass infinitesimale Änderungen in \vec{t}_{wr}^y zu unbeschränkten Änderungen in \vec{t}_{wr}^l führen können. Damit liegt in den durch (3.58), (3.59) definierten Punkten eine wesentliche Einschränkung der Bewegung des Systems vor. Es handelt sich um eine kinematische Singularität, die bei der Regelung vermieden werden muss.

Abbildung 4.7 stellt diese Singularitäten für das hier exemplarisch betrachtete Fahrwerk bezüglich der Kugeldarstellung bzw. der ebenen Darstellung des Parameterraums T dar. In Abschnitt 5.2 und 5.3 werden Regler auf Basis der hier vorgestellten Zustandsraumdarstellung entworfen, welche gerade diese Singularität vermeiden.

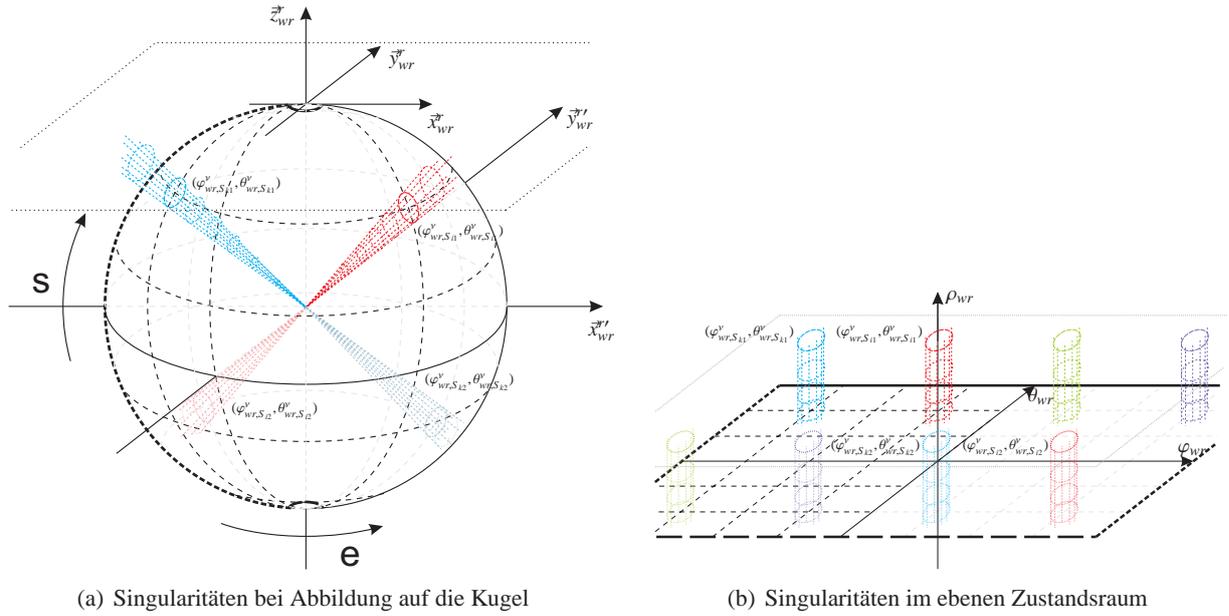


Abbildung 4.7: Abbildung 4.7(a) stellt die zwei Rädern i und k zugeordneten kinematischen Singularitäten bzw. deren Umgebung auf der Kugel dar. Abbildung 4.7(b) stellt die entsprechenden Singularitäten bzw. deren Umgebung im Zustandsraum T dar. Zusätzlich werden Singularitäten für zwei weitere Räder dargestellt. Die Verteilung der Singularitäten entspricht einem Fahrwerk mit vier Standardrädern ähnlich Abbildung 4.2. Es ist zu beobachten, dass jedes Rad aufgrund der Mehrdeutigkeiten in T auf zwei Singularitäten abgebildet wird (gestrichelter und gepunkteter Kreis gleicher Farbe).

4.1.3 Beobachtbarkeit in der Umgebung der Pole

Um einen Reglerentwurf praktisch umsetzen zu können, bedarf es neben der Steuerbarkeit des Systems und der stetigen Differenzierbarkeit der inversen Kinematik im Arbeitsraum des Systems auch der Beobachtbarkeit der Zustandsgrößen \vec{x} . Wie zuvor erläutert, ist der Parameterraum unter Einbeziehung der Pole nicht länger diffeomorph. In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen diesem Bruch der Diffeomorphie und der Beobachtbarkeit der Zustandsgröße φ_{wr}^v in den Polen diskutiert.

Dem Bruch der Diffeomorphie in den Polen liegen die bekannten Einschränkungen bezüglich der Parametrierung von Positionen und Bewegungen auf einer Kugel zugrunde. Es ist im Allgemeinen im Pol nicht möglich, den Winkelparameter φ_{wr}^v zu berechnen. Der Arcustangens ist in diesem Fall nicht eindeutig definiert. Betrachtet man die allgemeine Formulierung der direkten Kinematik nach (3.82) bis (3.84)

$$\begin{aligned} \varphi_{wr}^v &= \arctan_2(y_{a,k} + \lambda_k \cos(\varphi_{s,k}), x_{a,k} - \lambda_k \sin(\varphi_{s,k})) + \pi\sigma\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \frac{\pi}{2} \\ \theta_{wr}^v &= \arctan\left(\frac{d_{max}}{\sqrt{(x_{a,k} + \lambda_k(-\sin(\varphi_{s,k})))^2 + (y_{a,k} + \lambda_k \cos(\varphi_{s,k}))^2}} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right)\right) \\ \rho_{wr}^v &= \frac{\dot{\varphi}_{d,k} \cdot r_k \cdot d_{max}}{\lambda_k \cdot \sin(\theta_{wr}^v)}, \end{aligned}$$

so ist zu erkennen, dass die Parameter ρ_{wr}^v und θ_{wr}^v im Pol eindeutig definiert sind, während die Gleichung bezüglich φ_{wr}^v (3.82) nicht definiert ist. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die direkte Kinematik für Koordinatensysteme, in deren Zentrum sich ein Rad befindet, eindeutig lösbar ist. Dieser Fall wird in Abschnitt 4.2.1 ausführlich behandelt und soll hier zunächst ausgeklammert sein.

Verwendet man, dass im Pol und nur im Pol per Definition $\cos(\theta_{wr}^v) = 0$ gilt, so lässt sich die Messgleichung für das in Abschnitt 4.1.2 eingeführte System bezüglich des Zustandsvektors \vec{x} unabhängig von der zugrunde liegenden Konfiguration ausdrücken

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{D}\vec{u}, \text{ wobei} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 - \langle \delta(\cos(\theta_{wr}^v)), 1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dabei ist \mathbf{D} gerade eine 3×3 Nullmatrix und \mathbf{C} eine 3×3 Diagonalmatrix, welche außerhalb der Pole den vollen Rang 3 und in den Polen den Rang 2 hat. Die Beobachtbarkeit des Systems muss also für die Pole und den übrigen Zustandsraum getrennt untersucht werden.

Außerhalb der Pole ergibt sich nach (Föllinger und Dörrscheidt 1994) die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{aligned} Q_b &= \left(\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \right) \\ &= (\mathbf{1}_{3 \times 3} \mathbf{0}_{3 \times 6}), \end{aligned}$$

wobei $n = 3$ die Anzahl der Zustandsvariablen ist. Es folgt unmittelbar, dass $\text{Rang}[Q_b] = \text{Rang}[C] = 3$, also die Beobachtbarkeitsmatrix Höchststang hat und das System damit vollständig beobachtbar ist. Analog ergibt sich in den Polen $\text{Rang}[Q_b] = \text{Rang}[C] = 2$. Das bedeutet, das System ist nicht vollständig beobachtbar. Der Wert für den Parameter φ_{wr}^v kann nicht ermittelt werden.

Neben der Beobachtbarkeit in den Polen ist gerade hinsichtlich der praktischen Implementierung noch eine weitere Eigenschaft der direkten Kinematik von Interesse. Veranschaulicht man sich die Bedeutung der Gleichungen (3.82) bis (3.84), so erkennt man, dass das System nicht erst in den Polen nicht mehr beobachtbar ist. Vielmehr degeneriert die direkte Kinematik schon früh, bei Annäherung an die Pole. Drückt man den Arcustangens, wie in Abschnitt 3.1.3, über den komplexen Logarithmus aus (3.27) und bildet die Ableitungen von (3.82) bis (3.84) bzgl. der Lenkwinkel eines geeigneten Radpaares (s. Anhang C)

$$\dot{\vec{t}}_{wr}^v = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial \rho_{wr}^v / \partial \varphi_{s,i} & \partial \rho_{wr}^v / \partial \varphi_{s,k} \\ \partial \varphi_{wr}^v / \partial \varphi_{s,i} & \partial \varphi_{wr}^v / \partial \varphi_{s,k} \\ \partial \theta_{wr}^v / \partial \varphi_{s,i} & \partial \theta_{wr}^v / \partial \varphi_{s,k} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_{d,ik}} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{s,i} \\ \dot{\varphi}_{s,k} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

so erkennt man, dass in der Umgebung der Pole infinitesimale Fehler in der Messung der Lenkwinkel zu einer breiten Streuung der Ergebnisse über den gesamten Wertebereich für φ_{wr}^v führen. Das bedeutet, dass die „Messung“ des Parameters φ schon bei Annäherung an die Pole nicht mehr zuverlässig ist. Sie weist eine erhebliche Varianz auf.

Unter Berücksichtigung der jedem Messprozess zugrunde liegenden stochastischen Prozesse ergeben sich die gemessenen Lenkwinkel $\vec{\varphi}_s$ als Zufallsvariable der eigentlichen Lenkwinkel $\vec{\tilde{\varphi}}_s$ und des Rauschens $\vec{\xi}$

$$\vec{\varphi}_s = \vec{\tilde{\varphi}}_s + \vec{\xi}, \quad (4.12)$$

wobei die Annahme gelte, dass $\vec{\xi}$ ein mittelwertfreies gaußsches Rauschen sei. Damit sind die Parameter $\dot{\vec{t}}_{wr}^v$ Funktionen von Zufallsvariablen und somit selbst Zufallsvariablen. Die zugehörige Varianz \vec{P}_r lässt sich über eine Taylorreihenentwicklung errechnen (vgl. (Jondral und Wiesler 2002)).

Näherungsweise ergibt sich durch Abbruch nach dem ersten Term und Linearisierung um den geschätzten Mittelwert, die Varianz der geschätzten Parameter in Abhängigkeit von der Varianz $\sigma(\varphi_{s,i}, \varphi_{s,i})$ der ursprünglichen Messgrößen:

$$\mathbf{P}_{\vec{r}} = \mathbf{J}_{d,ik} \mathbf{P}_{ik} \mathbf{J}_{d,ik}^T \quad (4.13)$$

$$\mathbf{P}_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma(\varphi_{s,i}, \varphi_{s,i}) & \sigma(\varphi_{s,i}, \varphi_{s,k}) \\ \sigma(\varphi_{s,k}, \varphi_{s,i}) & \sigma(\varphi_{s,k}, \varphi_{s,k}) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Berücksichtigt man, dass die Ableitung des φ_{wr}^v -Parameters nach den Lenkwinkeln, in der Nähe der Pole gegen unendlich strebt, erkennt man, dass die resultierende Varianz $P_{\vec{r}}$ der abgeleiteten Größe ebenfalls gegen unendlich strebt. Das gilt auch für sehr kleine Messfehler $\xi_{s,i}$ bzw. $\xi_{s,k}$. Aufgrund der periodischen Struktur des betrachteten Raums $\varphi_{wr}^v \in (-\pi, \pi)$ nähert sich dies schnell einer Gleichverteilung der Variable φ_{wr}^v über den gesamten Definitionsbereich an. Der Parameter φ_{wr}^v ist also bereits in einer nicht-infinitesimalen Umgebung der Pole nicht messbar. Die Ausdehnung dieser Umgebung hängt letztlich von der Genauigkeit bzw. Ungenauigkeit der Messungen bzgl. der Lenkwinkel ab. Abbildung 4.8 veranschaulicht den Zusammenhang durch Darstellung des resultierenden Momentanpols in kartesischen Koordinaten (Abb. 4.8(a)) bzw. in sphärischen Koordinaten (Abb. 4.8(b)). Ein Kalman-Filter als Beobachter erlaubt, in solchen Fällen die Entwicklung der Zustände zu verfolgen.

Grundlegende Voraussetzung für die Anwendung eines Kalman-Filters ist, dass ein lineares System vorliegt, System- und Messrauschen als weißes gaußsches Rauschen modelliert werden können und System- und Messrauschen wechselseitig unkorreliert sind (vgl. (Thrun u. a. 2005)). Diese Eigenschaften sind hier näherungsweise erfüllt. Der Entwurf findet bezüglich des zeitlich diskretisierten Systems statt:

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \vec{x}_k + \mathbf{B}_k \vec{u}_k \quad \vec{y}_k = \mathbf{C}_k \vec{x}_k + \mathbf{D}_k \vec{u}_k, \text{ mit} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_{3 \times 3} \quad \mathbf{C} = \mathbf{1}_{3 \times 3} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{1}_{3 \times 3} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{3 \times 3}. \quad (4.17)$$

Konfigurationen, in denen das System nicht beobachtbar ist, werden dabei nicht durch eine Änderung der Messmatrix \mathbf{C} beschrieben, sondern durch eine Anpassung des Messrauschens,

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{J}_{d,ik} \mathbf{P}_{ik} \mathbf{J}_{d,ik}^T \quad (4.18)$$

dargestellt. Dieses System ist offensichtlich linear. Auch die Annahme, dass System- und Messrauschen unkorreliert sind, ist zulässig. Wie oben diskutiert ist das Messrauschen in der Umgebung des Pols zwar eher durch eine Gleichverteilung charakterisiert, dennoch ist die Annahme eines gaußschen Rauschprozesses eine zulässige Näherung, da in diesem Fall auch das gaußsche Rauschen durch eine im Grenzfall unendlich große Kovarianz charakterisiert ist. Zum einen strebt die Dichtefunktion eines solchen gaußschen Rauschens im Grenzfall gegen die Dichtefunktion einer Gleichverteilung, zum anderen wird in diesem Fall die Messung kaum noch in die Berechnung des Schätzwertes eingehen.

Der Kalman-Filter ist damit ein geeigneter Beobachter für das hier betrachtete System und erlaubt die Verfolgung der Zustandsgrößen auch in der Umgebung der Pole. Des Weiteren wurde in Abschnitt 4.1.2 erläutert, wie Regeldifferenz und Eingangsvektor \vec{u} auch in den Polen bzw. für Pfade, welche die Pole queren, berechnet werden kann. Bereits in Abschnitt 4.1.1 wurde aufgezeigt, wie die Sollgrößen bezüglich der beiden Lösungsdomänen für den sphärischen Twist aus den Sollgrößen bezüglich des kartesischen Twists errechnet werden können. Zusammen mit dem hier beschriebenen Beobachter ist damit eine Zustandsraumdarstellung gegeben, welche frei ist von parametrierungsinduzierten Singularitäten und die Regelung des Twists in nicht-radzentrierten Bezugssystemen erlaubt.

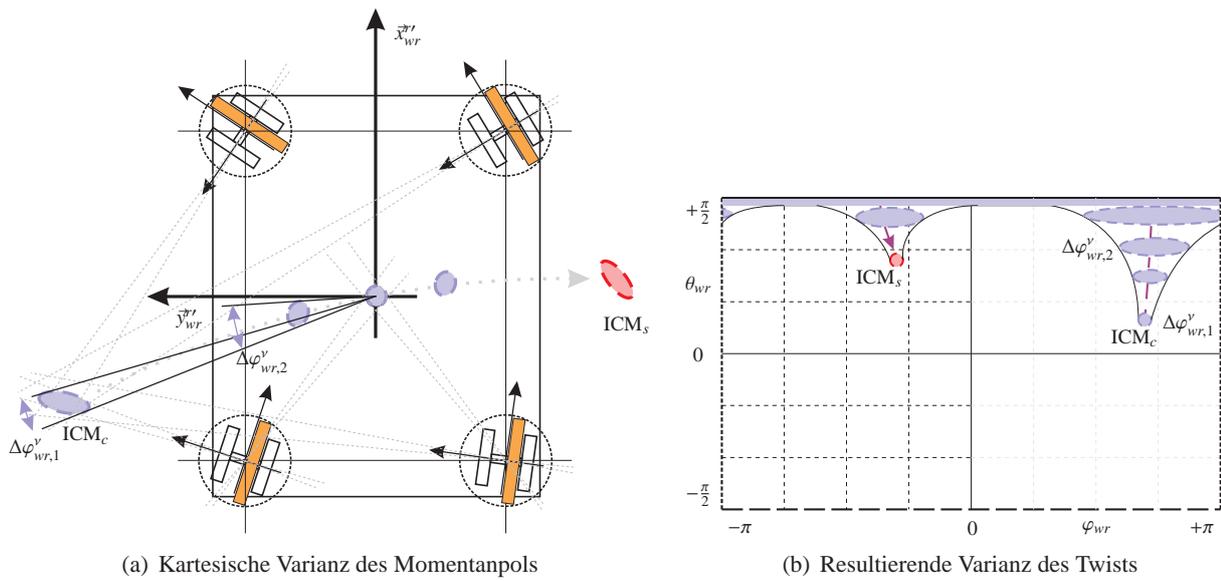


Abbildung 4.8: Abbildung 4.8(a) veranschaulicht die Varianz des Momentanpols in Abhängigkeit von der gegenwärtigen Konfiguration. Die dünn gestrichelten grauen Linien markieren die Grenzen des Fehlerintervalls $\xi_i \in [-2.5, 2.5]$ bezüglich der Lenkwinkelmessung. Die lila dargestellten Doppelpfeile kennzeichnen den zu einer bestimmten Schätzung gehörenden Fehler in φ_{wr}^v . Abbildung 4.8(b) veranschaulicht die entsprechenden Parameter mit ihren Fehlerellipsen im Parameterraum T des sphärischen Twists. Die dünne schwarze Linie (Abb. 4.8(b)) markiert die ungefähre Entwicklung der zu erwartenden Fehler in φ_{wr}^v in Abhängigkeit von θ_{wr}^v .

4.2 Generelle Struktur des Zustandsraums

4.2.1 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit bei radzentrierten Bezugssystemen

Im Folgenden sei der Zustandsraum durch die Parametrierung des Twists in einem radbezogenen Koordinatensystem gegeben. Die Systemgleichungen seien analog zu Abschnitt 4.1.2 und Abschnitt 4.1.3 gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \mathbf{A}_r \vec{x} + \mathbf{B}_r \vec{u} & \vec{y} &= \mathbf{C}_r \vec{x} + \mathbf{D}_r \vec{u}, \text{ mit} & (4.19) \\ \mathbf{A}_r &= \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_r &= \mathbf{diag}(\vec{c}_3(\vec{q}_v)) \\ \mathbf{B}_r &= \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_r &= \mathbf{0}_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Dabei steht $\mathbf{diag}(\vec{c}_3(\vec{q}_v))$ für eine 3×3 Diagonalmatrix. Die Elemente dieser Matrix sollen vorläufig als noch unbekannte Funktion der Konfigurationsvariablen betrachtet werden.

In radzentrierten Bezugssystemen fallen kinematische und parametrierungsinduzierte Singularitäten zusammen. Diese Eigenschaft wird zum Beispiel in (Thuilot u. a. 1996) ausgenutzt, um die Gesamtanzahl aller singulären Bereiche auf die Anzahl der wesentlichen, kinematischen Singularitäten zu reduzieren.

Ziel dieses Abschnitts ist, das zusätzliche Wissen, welches bei radzentrierten Bezugssystemen in die Formulierung der inversen und direkten Kinematik einfließen kann, auszunutzen, um den zulässigen Arbeitsbereich des Systems zu vergrößern. Dabei wird die in Abschnitt 3.3.2 hergeleitete drei-parametrische Beschreibung der zwei-parametrischen Konfiguration eines beliebigen Rades v über den auf dieses Rad zentrierten Twist \vec{r}_{wr}^v verwandt.

Für ein radbezogenes Koordinatensystem ist die direkte Kinematik durch die Gleichungen (3.90) bis (3.92) gegeben:

$$\begin{aligned}\varphi_{wr}^v &= \varphi_{s,v} - \pi \cdot \sigma(-k_v) \\ \theta_{wr}^v &= \arctan\left(\frac{d_{max} \cdot k_v}{\lambda_v}\right) \\ \rho_{wr}^v &= \frac{\dot{\varphi}_{d,v} \cdot r_{d,v}}{k_v \cdot \cos(\theta_{wr}^v)},\end{aligned}$$

wobei Gleichung (3.92) in der Umgebung des Pols durch (3.84) zu ersetzen ist:

$$\rho_{wr}^v = \frac{\dot{\varphi}_{d,k} \cdot r_k \cdot d_{max}}{\lambda_k \cdot \sin(\theta_{wr}^v)}.$$

Dabei ist zu beachten, dass zur Berechnung des Parameters λ_v der Lenkwinkel $\varphi_{s,k}$ mindestens eines weiteren Rades k nötig ist. Während die Gleichungen bezüglich θ_{wr}^v (3.91) bzw. ρ_{wr}^v (3.84), (3.92) im Wesentlichen der bisherigen Formulierung entsprechen, liegt für φ_{wr}^v ein wesentlicher Unterschied vor.

Nach (3.90) ist φ_{wr}^v lediglich von der unmittelbar messbaren Größe $\varphi_{s,v}$ abhängig und damit auch im Pol beobachtbar. Unter der Voraussetzung, dass k_v bekannt ist, wird die Messmatrix \mathbf{C}_r in (4.10) zu einer 3×3 Matrix, deren Diagonalelemente identisch 1 sind

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{1}_{3 \times 3}.$$

Das System ist also vollständig beobachtbar

$$\begin{aligned}Q_b &= \left(\mathbf{C}_r^T, \mathbf{A}_r^T \mathbf{C}_r^T, \dots, (\mathbf{A}_r^T)^{n-1} \mathbf{C}_r^T \right) \\ &= (\mathbf{1}_{3 \times 3} \mathbf{0}_{3 \times 6}).\end{aligned}$$

Bisher war \vec{k} bzw. k_v lediglich ein fester Parameter, welcher die Ursprungsconfiguration des Fahrwerks bestimmt hat. Unter dieser Voraussetzung ist das radzentrierte System vollständig beobachtbar. Bezieht man für radzentrierte Koordinatensysteme Trajektorien des Twists mit ein, welche über den Pol führen, ändert sich nach Abschnitt C.1 der Parameter k_v . Wie in Abbildung C.1 dargestellt, ändert sich die Lösungsdomäne bezüglich des Rades v und damit das Vorzeichen des Parameters k_v , wenn der Momentanpol die Radachse überstreift bzw. wenn die Trajektorie des Twists einen Poldurchgang aufweist.

Dabei ist zu beachten, dass \vec{k} keine absolute Parametrierung des Fahrwerks darstellt, sondern vielmehr die relative Konfiguration der Räder untereinander wiedergibt (C.31). Abbildung 4.9 stellt zwei Pfade des sphärischen Twists bzw. des Momentanpols dar, welche auf eine identische Konfiguration, aber unterschiedliche Werte für \vec{k} führen. Der erste Pfad (grün gestrichpunktet in Abb. 4.9(b)) führt auf die Zielkonfiguration nach Durchgang durch den Fernpunkt, wohin gegen der zweite Pfad (rot gestrichelt in Abb. 4.9(b)) die Zielkonfiguration durch Überstreichen aller Singularitäten erreicht. Analog folgt, dass auch eine Konfiguration, welche nach Überstreichen der Lenkachse des Rades i entsteht ($\vec{k} = (-1, 1, 1, 1)^T$), nicht von einer Konfiguration zu unterscheiden ist, welche durch Überstreichen aller Lenkachsen außer der des Rades i entsteht ($\vec{k} = (1, -1, -1, -1)^T$).

Der Parameter \vec{k} charakterisiert lediglich die relative Konfiguration der Räder zueinander. Dementsprechend ist \vec{k} nicht direkt beobachtbar. Bei bekannter Ausgangskonfiguration \vec{k}_0 und bekannter Trajektorie bzw. Stellgrößen kann \vec{k} jedoch jederzeit errechnet werden. Das kann z.B. im Prädiktionsschritt des Beobachters erfolgen.

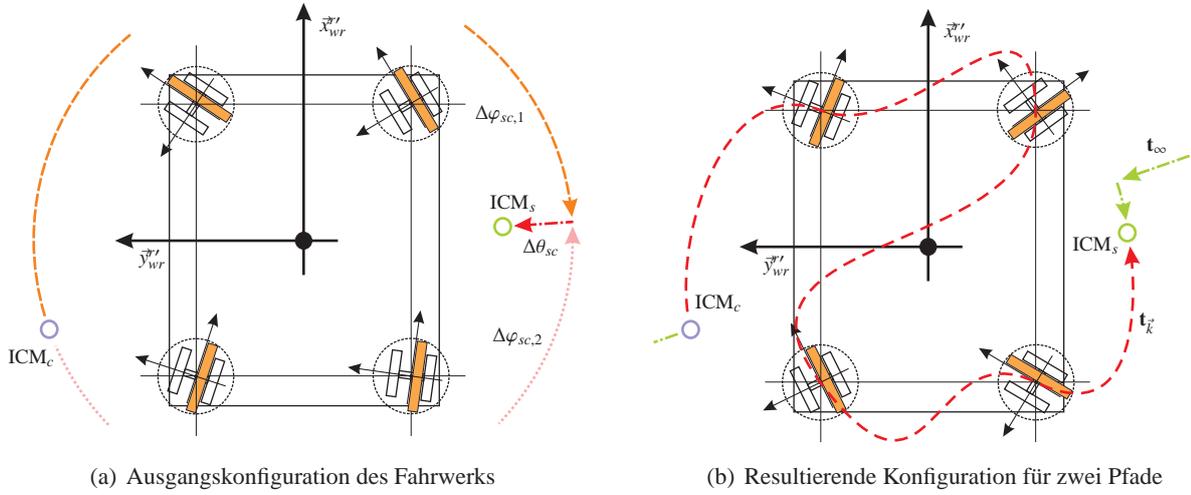


Abbildung 4.9: Die Abbildung zeigt die ursprüngliche Konfiguration (Abb. 4.9(a)) mit Pfaden, welche in der gleichen Lösungsdomäne liegen sowie die resultierende Konfiguration (Abb. 4.9(b)) nach Durchlaufen der Singularitäten. Es bezeichnen t_∞ und t_k die jeweiligen Trajektorien.

Neben der reinen Beobachtbarkeit ist weiterhin die Fehlerfortpflanzung von Interesse. So ist zwar bezüglich φ_{wr}^v der Fehler zunächst über den gesamten Arbeitsbereich auf den Fehler bezüglich der Messgröße $\varphi_{s,v}$ begrenzt. In der Umgebung des Pols führt die Unsicherheit in θ_{wr}^v aber dazu, dass ein zweites mögliches Lösungsintervall $[(\varphi_{s,v} - \pi) - \sigma_\varphi, (\varphi_{s,v} - \pi) + \sigma_\varphi]$ entsteht. Dies ist letztlich mit der Unsicherheit und fehlenden Beobachtbarkeit von k_v verbunden. Das Problem kann behoben werden, indem der Estimationsschritt analog zur Berechnung der Regeldifferenzen im Pol nach Abschnitt 4.1.2 bezüglich des Parameterraums T' anstelle von T durchgeführt wird. Nach Durchführung des Estimationsschrittes kann das Ergebnis über (4.3) wieder nach T abgebildet werden.

Da das oben spezifizierte System im radbezogenen Koordinatensystem bezüglich seiner Systemdynamik (4.19, 1.) analog zu dem in Abschnitt 4.1.2 spezifizierten System ist, ergibt sich unmittelbar vollständige Steuerbarkeit aller Parameter. Betrachtet man die in (3.42), (3.44) gegebene inverse Kinematik

$$\begin{aligned}\varphi_{s,v} &= \varphi_{wr}^v + \pi \cdot \sigma(-k_v) \\ \dot{\varphi}_{d,v} \cdot r_{d,v} &= k_v \cdot \cos(\theta_{wr}^v) \cdot \rho_{wr}^v\end{aligned}$$

bezüglich des Rades v im Zentrum des Koordinatensystems sowie die zugehörige Jacobi-Matrix (3.45)

$$\mathbf{J}_{T_v, Q_v} = \nabla_{\vec{x}_{wr}^v} \begin{pmatrix} \varphi_{s,v}(\vec{x}_{wr}^v, k_v) \\ \dot{\varphi}_{d,v}(\vec{x}_{wr}^v, k_v) \end{pmatrix},$$

so erkennt man, dass die Abbildung surjektiv und C^∞ ist bzw. die Elemente der Jacobi-Matrix beschränkt sind. Definiert man die „Umgebung der Pole“ bezüglich Rad v als die Menge aller Punkte

$$P = \{\vec{x} \in T \mid \|\vec{x} - \vec{x}_{S,v}\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_{S,i}\| \quad \forall \vec{x}_{S,i} \in \{S / \vec{x}_{S,v}\}\} \quad (4.20)$$

welche dichter am Pol des Bezugssystems als an irgendeiner anderen Singularität liegen, so folgt aus (3.55), (3.57) und (3.61) bzw. der Steuerbarkeit in beliebigen Bezugssystemen (Abschnitt 4.1.2) unmittelbar, dass auch die Abbildung auf die übrigen radzentrierten Bezugssysteme surjektiv und C^∞ ist.

Es ist offensichtlich, dass der mit drei Parametern dargestellte Twist über die zwei Konfigurationsvariablen $(\varphi_{s,v}, \dot{\varphi}_{wr}^v)$ bzw. $(q_{1,v}, q_{2,v})$ eines einzelnen Rades nicht vollständig manipulierbar ist. Relevant ist aber insbesondere die Manipulierbarkeit der Winkelparameter, die den zwei Freiheitsgraden der „Lenkbarkeit“ zugeordnet sind und welche die Konfiguration des Systems bestimmen. Formt man die Gleichungen für die inverse Kinematik entsprechend um

$$\varphi_{wr}^v = \varphi_{s,v} - \pi\sigma(-k_v) \quad (4.21)$$

$$\theta_{wr}^v = \arccos\left(\underbrace{\frac{r_{d,v}}{k_v \rho_{wr}^v}}_a \cdot \dot{\varphi}_{wr}^v\right) \quad (4.22)$$

und bildet die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_v(\vec{q}_v) = \nabla_{\vec{q}_v} \begin{pmatrix} \varphi_{wr}^v \\ \theta_{wr}^v \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-a}{\sqrt{1-(a q_{2,v})^2}} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

so erkennt man, dass der Index für die Manipulierbarkeit

$$m_v = \sqrt{\det(\mathbf{J}_v(\vec{q}_v) \mathbf{J}_v^T(\vec{q}_v))}$$

für $a \neq 0$ ebenfalls ungleich Null ist. Das heißt, so lange Rad v einen von Null verschiedenen Radius $r_{d,v}$ hat, ist das System manipulierbar. Je kleiner die verallgemeinerte Geschwindigkeit, desto größer ist dabei die Manipulierbarkeit. Analog zur Beobachtbarkeit gilt in der Umgebung der Pole des radbezogenen Systems damit auch die uneingeschränkte Manipulierbarkeit durch die jeweils anderen Räder.

Die kinematischen Singularitäten in der Umgebung eines Rades können damit regelungstechnisch umgangen werden, in dem der Reglerentwurf in einem radbezogenen Koordinatensystem erfolgt. Es ist dabei zu beachten, dass diese Koordinatentransformation nicht die kinematischen Eigenschaften des Systems beeinflusst. Bezüglich des in Roboterkoordinaten ausgedrückten Twists besteht weiterhin eine Reduktion der Freiheitsgrade. Allerdings erlaubt die Koordinatentransformation die volle Ausnutzung der verbliebenen Freiheitsgrade, während ein Reglerentwurf im globalen Bezugssystem die Singularitäten von vorneherein hätte vermeiden müssen. Damit lässt sich durch einen geeigneten Wechsel der Koordinatensysteme der volle Arbeitsraum des Fahrwerks ausnutzen. Ein Ausschluss kritischer Bereiche ist nicht länger notwendig.

4.2.2 Generalisierte Form des Zustandsraums

Betrachtet man die strukturellen Eigenschaften bezüglich des Zustandsraums für Koordinatensysteme ohne Rad im Zentrum und für radzentrierte Koordinatensysteme, so erkennt man erhebliche Unterschiede. Anders als bei beliebigen Koordinatensystemen markiert der Durchgang durch den Pol bei radzentrierten Koordinatensystemen eine wesentliche Änderung der Konfiguration.

Obwohl beide Zustandsräume in Übereinstimmung mit den Analysen Campions (Campion u. a. 1993) einen Freiheitsgrad ρ_{wr}^v bezüglich der ebenen Bewegung ($\delta_m = 1$) und zwei Freiheitsgrade $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ bezüglich der Konfiguration ($\delta_s = 2$) des Fahrwerks aufweisen, sind sie topologisch verschieden. Der Zustandsraum radzentrierter Koordinatensysteme zeigt bezüglich der Winkelkoordinaten eine toroidale Topologie (Abb. 4.10), während der nicht-radzentrierte Zustandsraum durch eine sphärische Topologie

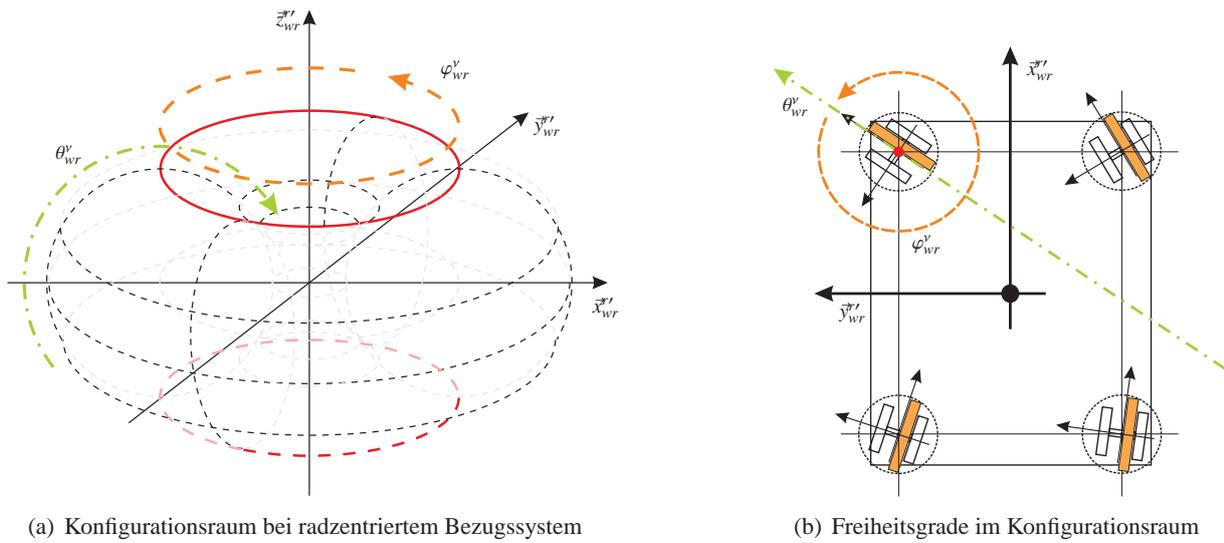


Abbildung 4.10: Die Abbildung zeigt die Struktur des Zustandsraums bei Abbildung auf radzentrierte Bezugssysteme. Abbildung 4.10(a) zeigt den Zustandsraum mit den Freiheitsgraden bzgl. φ_{wr}^v (orange, gestrichelt) und θ_{wr}^v (grün, gestrichpunktet). Die Pole der Kugel entsprechen den Scheitellinien (rote bzw. rot gestrichelte Linie) des Torus. Abbildung 4.10(b) zeigt die Freiheitsgrade ($\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v$) bzw. die Pole (roter Punkt) bezüglich der Fahrwerkskonfiguration.

gekennzeichnet ist. Das ist konsistent mit der in Abschnitt 3.2.3 diskutierten Singularität bezüglich der inversen Kinematik. Ein sphärischer Raum kann nicht diffeomorph auf einen Raum mit toroidaler Topologie abgebildet werden. Dieser Unterschied der Topologie spiegelt sich ebenfalls in der Parametrierung des Zustandsraums wider. Während bei radzentrierten Bezugssystemen zusätzlich der Parameter k_v beobachtet werden muss, kann dieser für sonstige Bezugssysteme ausgelassen werden.

Im Sinne des Reglerentwurfes bzw. einer praktischen Implementierung und Portierbarkeit ist es jedoch sinnvoll, eine einzige Zustandsraumdarstellung unabhängig vom Bezugssystem zu verwenden. In Abschnitt 4.1.2 (4.3) wurde zum Beispiel der Parameter k_v als zusätzlicher „virtueller“ Parameter zur Unterscheidung der Pfade eingeführt.

Die Einführung des diskreten Parameters k_v hat allerdings mehrere Nachteile. Zum einen wird das resultierende System so zu einem hybriden System aus kontinuierlichen und diskreten Zuständen. Solche Systeme erfordern eigens angepasste Ansätze bezüglich des Entwurfs von Reglern, Stabilitätsbeweisen und ähnlichem. Des Weiteren ist es umständlich, den diskreten Parameter in die Formulierung von Gütekriterien aufzunehmen, wenn ein optimaler Pfad bestimmt werden soll. Letztlich ist es auch, wie im vorigen Abschnitt 4.2.1 erläutert, für den Entwurf eines Beobachters vorteilhaft, wenn alle Parameter kontinuierlich sind.

Statt zusätzlich den Parameter k einzuführen, ist es daher günstiger den Definitionsbereich des Zustandsraums zu erweitern und den Parameter aus der gegenwärtigen Konfiguration zu errechnen. In den folgenden Kapiteln sei der Zustandsraum daher durch die Parameter

$$\vec{x} = (\rho_{wr}, \varphi_{wr}, \theta_{wr})^T \quad (4.25)$$

definiert, wobei gelte

$$\vec{x} \in T' = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] = \mathbb{R} \times S^1. \quad (4.26)$$

Der Reglerentwurf wird im Folgenden bezüglich dieses Definitionsbereichs durchgeführt werden. Die Rücktransformation in den bisherigen Zustandsraum ist dann über

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_{wr}^v \\ k_v \end{pmatrix} = \begin{cases} (\vec{x}^T, 1)^T & \forall \frac{-\pi}{2} \leq \theta_{wr} \leq \frac{\pi}{2} \\ (x_1, x_2 - \pi, \pi - x_3, -1)^T & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\dot{\vec{i}}_{wr}^v = \begin{cases} \dot{\vec{x}} & \forall \frac{-\pi}{2} \leq x_3 \leq \frac{\pi}{2} \\ (\dot{x}_1, \dot{x}_2, -\dot{x}_3)^T & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.28)$$

gegeben. Wie bereits zuvor erläutert, ist diese Abbildung unkritisch bezüglich der inversen Kinematik, die über T' surjektiv und C^∞ ist. Für den Beobachterentwurf ist zu beachten, dass das Ergebnis der direkten Kinematik nun in beide Domänen abgebildet werden muss

$$\vec{y}_1 = \vec{i}_{wr,d}^v = \vec{c}(\vec{q}_n) \quad (4.29)$$

$$\vec{y}_2 = (y_{11}, y_{21} - \pi, \pi - y_{31})^T, \quad (4.30)$$

wobei jedoch nur eine der Lösungen korrekt ist. Um die korrekte Lösung zu ermitteln, kann z.B. über die Errechnung der Mahalanobis-Distanz eine Datenassoziation zwischen Vorhersage auf Basis des gegenwärtigen Zustands und den beiden möglichen Lösungen durchgeführt werden. Der ausgewählte Wert kann dann wie bisher im Beobachter verarbeitet werden.

Während des Entwurfs der Regelung bzw. des Aufstellens eines entsprechenden Gütekriteriums ist zu beachten, dass sich durch die Erweiterung des Definitionsbereichs auch die Anzahl der Singularitäten verdoppelt. Zu den bisherigen Singularitäten treten nun noch ihre jeweiligen Gegenstücke in der zusätzlichen Lösungsdomäne

$$S_2^{v'} = S^{v'} \bigcup_{i=1}^{2N} (\varphi_{wr,S_i}^v - \pi, \pi - \theta_{wr,S_i}^v). \quad (4.31)$$

Des Weiteren sei erwähnt, dass die Transformation in ein radzentriertes Koordinatensystem nicht die Singularitäten der übrigen Räder auflöst. Hier gilt weiterhin, dass die Abbildung in den zugehörigen Radachsen nicht diffeomorph ist bzw. Singularitäten aufweist. Außerhalb dieser Singularitäten ist die Transformation jedoch immer lokal diffeomorph. Das gilt ebenfalls für die Abbildung auf die Kugeloberfläche.

Der gesamte zulässige Konfigurationsraum ist damit als die Gesamtheit der torusförmigen Topologien für die radzentrierten Koordinatensysteme gegeben. Außerhalb der Gesamtheit aller Pole können diese Räume lokal diffeomorph aufeinander abgebildet werden. Damit bildet die Gesamtheit der Zustandsräume über alle radzentrierten Koordinatensysteme einen Atlas des zulässigen Konfigurationsraums.

Im Folgenden werden bezüglich beider Zustandsraummodelle Regler entworfen. Um einfacher zwischen den beiden Modellen unterscheiden zu können, wird das durch (4.25) und (4.26) gegebene einfache Modell mit toroidaler Topologie und ohne Basiswechsel als „Einfach toroidaler Zustandsraum“ (ETZ) bezeichnet. Das durch Basiswechsel und Verknüpfung der Einfach toroidalen Zustandsräume entstehende Zustandsraummodell wird als „Multi-Basis toroidaler Zustandsraum“ (MTZ) bezeichnet.

5 Strukturoptimale Regelung omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke

Das vorliegende Kapitel widmet sich dem Entwurf von Regelungsansätzen für nicht-holonome, omnidirektionale Fahrwerke. Untersucht werden dabei beide in Abschnitt 4.2.2 eingeführten Zustandsraummodelle. Es werden zwei Regler bezüglich des „Einfach toroidalen Zustandsraums“ (ETZ) entworfen. Hier ist eine Vermeidung der singulären Bereiche notwendig. Der Entwurf eines weiteren Reglers bezüglich des „Multi-Basis toroidalen Zustandsraums“ (MTZ) auf Basis einer Reglerumschaltung wird skizziert. Hier können die Singularitäten in den Arbeitsraum mit einbezogen werden.

Bevor mit dem Entwurf der Regler begonnen wird, wird in Abschnitt 5.1 die regelungstechnische Problemstellung analytisch formuliert. Zunächst wird in Abschnitt 5.1.1 die Energiebilanz des Systems untersucht. Diese Untersuchungen sind zum einen die Grundlage für die Stabilitätsbeweise in den folgenden Abschnitten. Zum anderen wird anhand der Energiebilanz gezeigt, dass sich das Gesamtsystem näherungsweise in zwei unabhängige Teilsysteme zerlegen lässt. Das eine Teilsystem ist den Freiheitsgraden der Mobilität zugeordnet und frei von Singularitäten. Das andere Teilsystem ist den Freiheitsgraden der Lenkbarkeit zugeordnet und gerade durch die in den voran gegangenen Abschnitten diskutierten Singularitäten geprägt. Die anschließenden Diskussionen konzentrieren sich daher auf das zweite Teilsystem. In Abschnitt 5.1.2 wird auf Basis der Energiebilanz bzw. der Untersuchung der Manipulierbarkeit die analytische Formulierung eines Gütekriteriums abgeleitet, welches die Einbeziehung der singulären Bereiche in die Regelung erlaubt.

In Abschnitt 5.2 und 5.3 werden ein potentialfeldbasierter und ein modellprädiktiver Regler bezüglich des ETZ entwickelt. Dabei werden jeweils zunächst die generellen Eigenschaften dieser Regler diskutiert. Anschließend wird die Rückführung zur Singularitätsvermeidung entworfen und jeweils auf Stabilität geprüft. Im Falle des modellprädiktiven Reglers wird in Abschnitt 5.3.3 zusätzlich die prinzipielle Lösbarkeit des zugrunde liegenden Optimierungsproblems bei Anwendung des Pontryagin Minimum Prinzips (PMP) untersucht. Abschließend werden jeweils knapp Modifikationen im Zuge der Implementierung diskutiert. Beim potentialfeldbasierten Regler betrifft das insbesondere die Umsetzung des Reglers in einem zeitdiskreten System. Anschaulich werden Eigenschaften und Verhalten des geregelten Systems am Beispiel des Care-O-bot[®] 3-Fahrwerks diskutiert.

Abschnitt 5.4 skizziert den Entwurf eines Reglers für den MTZ. Dazu wird bezüglich der einzelnen toroidalen Basisräume der zuvor entworfene modellprädiktive Regler angesetzt. Zwischen den Basisräumen wird dann durch Reglerumschaltung gewechselt. Stabilität wird in diesem Fall nicht analytisch bewiesen, sondern auf Basis der Struktur des MTZ und der resultierenden Systemtrajektorien argumentiert.

5.1 Regelungstechnische Formulierung des Problems

5.1.1 Entkopplung von ebener Bewegung und Rekonfiguration

Die dem hier betrachteten Regelungsproblem zugrunde liegende Aufgabenstellung ist die Erzielung eines gegebenen kartesischen Twists

$$\vec{t}_{c,wr} = \vec{c}(\vec{x}) \quad (5.1)$$

$$\vec{x} = (\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \quad (5.2)$$

unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen (2.12), (2.13)

$$\begin{aligned} (-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w + r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} &= 0 \\ (-\sin(\varphi_{s,i}), \cos(\varphi_{s,i}), d_{a,i} \cos(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist die Roboterkonfiguration \vec{q} gerade durch die Lenkwinkel $\vec{\varphi}_s$ bzw. Rotationsrate $\dot{\vec{\varphi}}_d$ aller Räder gegeben. Das zugrunde liegende System ist dann unter Einbeziehung der Umgebung (wechselnder Untergrund, Steigungen, ...) zunächst nichtlinear und zeitvariant

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \\ \vec{y} &= \vec{c}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t). \end{aligned}$$

wobei \vec{u} den in die aktiven Gelenke über die Motoren eingebrachten Drehmomenten $\vec{\tau}$ und \vec{y} gerade dem kartesischen Twist $\vec{t}_{c,wr}^w$ entspricht.

Unter der Annahme unterlagerter, hinreichend schneller Regelkreise (vgl. Abschnitt 6.1.3), welche eine hinreichend exakte und schnelle Ausregelung von Störungen der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\vec{\varphi}}_s$ gewährleisten, können die äußeren Einflüsse der Umgebung auf die Dynamik des Systems vernachlässigt werden. Die regelungstechnische Aufgabenstellung lässt sich daher in erster Näherung als zeitinvariantes Problem beschreiben, welches im Wesentlichen durch die nicht-holonomen Bindungen, also einer nichtlinearen Verknüpfung der Zustandsgrößen, charakterisiert ist.

In den vorangegangenen Kapiteln 3 und 4 wurde dieses System in eine reduzierte Darstellung überführt, die Modalform aufweist und soweit möglich entkoppelt ist. In dieser Darstellung sind die nichtlinearen, kinematischen Verknüpfungen aufgelöst bzw. nicht mehr explizit vorhanden. Dazu wurde eine minimale Parametrierung des Nullraums der nicht-holonomen Bindungen entwickelt.

Die Diskussion der Topologie des Parameterraums solcher Systeme in Abschnitt 3.1 wurde zunächst allgemeingültig über den Momentanpol geführt. Die Ergebnisse treffen damit sowohl für quasi-omnidirektionale Fahrwerke des Typs 1 ($\delta_m = 1, \delta_s = 2$) als auch auf Dreirad- und Ackermann-Kinematik ($\delta_m = 1, \delta_s = 1$) zu (Tab. 2.1). Sie können ebenfalls unmittelbar auf holonome, omnidirektionale Fahrwerke ($\delta_m = 3, \delta_s = 0$), wie auch quasi-omnidirektionale Fahrwerke des Typs 2 ($\delta_m = 2, \delta_s = 1$) bzw. Differentialkinematiken ($\delta_m = 2, \delta_s = 0$) erweitert werden. In diesem Fall impliziert die Modellierung über den sphärischen Twist allerdings eine Einschränkung der Freiheitsgrade der Mobilität δ_m bzw. ein Einprägen nicht notwendiger Stetigkeitsbedingungen hinsichtlich der Position des Momentanpols.

Der auf Basis dieser Untersuchungen in Abschnitt 4.2 (4.19, l.), (4.19, r.) eingeführte Zustandsraum

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \mathbf{A}_r \vec{x} + \mathbf{B}_r \vec{u} & \vec{y} &= \mathbf{C}_r \vec{x} + \mathbf{D}_r \vec{u}, \text{ mit} \\ \mathbf{A}_r &= \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_r &= \mathbf{diag}(\vec{c}_3(\vec{q}_v)) \\ \mathbf{B}_r &= \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_r &= \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

ist eine minimale Darstellung dieses Systems in Modalform. Das zentrale Problem beim Entwurf eines Reglers für dieses System ist der Umgang mit den Singularitäten. Um die anschließenden Ausführungen hinsichtlich des Reglerentwurfes bzw. des Umgangs mit den Singularitäten zu vereinfachen und auf das Wesentliche zu beschränken, wird dieses System in zwei Teilsysteme zerlegt. Das eine Teilsystem, welches den Freiheitsgraden der Mobilität δ_m zugeordnet ist und durch den Parameter ρ_{wr}^v repräsentiert wird, ist frei von Singularitäten. Das verbleibende Teilsystem, welches den Freiheitsgraden der Lenkbarkeit δ_s zugeordnet ist, ist hingegen durch das Auftreten der Singularitäten nach Abschnitt 3.2.4 gekennzeichnet. Die Diskussion wird sich daher im Folgenden auf das zweite, durch $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ repräsentierte Teilsystem konzentrieren. Bevor mit dem Reglerentwurf fortgefahren wird, wird zunächst die Validität dieser Aufteilung diskutiert und nachgewiesen.

Bei der Aufteilung in die Teilsysteme wird ausgenutzt, dass die Zustände des Systems bezüglich des sphärischen Twists $\vec{t}_{wr}^v = \vec{y}$ in kinematischer Hinsicht entkoppelt sind. So trennt diese Zustandsraumdarstellung die Freiheitsgrade bezüglich der Lenkbarkeit δ_s von denen der Mobilität δ_m . So sind $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ gerade der Lenkbarkeit oder Konfiguration des Systems zugeordnet, während ρ_{wr}^v der Mobilität, also der ebenen Bewegung zugeordnet ist.

Diese strukturelle, kinematische Entkopplung ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Auftrennung in zwei Teilsysteme. Vor dem Hintergrund des Reglerentwurfes bzw. der zugehörigen Stabilitätsuntersuchungen ist es notwendig, eventuelle dynamische bzw. energetische Wechselwirkungen mit einzubeziehen. Die Stabilitätsbetrachtungen in den folgenden Abschnitten werden sich insbesondere auf die Passivität der Teilsysteme bzw. die Lyapunov-Theorie stützen. Diese Konzepte sind eng mit der Energiebilanz eines Systems verbunden. In diesem Abschnitt wird eine obere Grenze für die Energie der beiden Teilsysteme abgeschätzt. Diese obere Grenze bildet bei den anschließenden Stabilitätsbetrachtungen die Grundlage für die Formulierung einer Lyapunov-Funktion (vgl. (Föllinger und Dörrscheidt 1994)). Des Weiteren wird gezeigt, dass sich die Energiebilanz des Systems bei Abschätzung durch eine solche obere Grenze für die beiden Teilsysteme ρ_{wr}^v bzw. $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ separat aufstellen lässt. Damit können die Teilsysteme näherungsweise als energetisch entkoppelt betrachtet werden.

Bei der folgenden Betrachtung wird näherungsweise angenommen, dass der Ursprung des Bezugssystems mit dem Schwerpunkt des Fahrwerks bzw. des Roboters zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich, unter Vernachlässigung der in der Rotation der Räder gespeicherten Energie, die kinetische Energie der ebenen Bewegung zu

$$E_{kin,b} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (5.3)$$

wobei m die Masse des Roboters und I hier das skalare Trägheitsmoment des Roboters bezogen auf die \vec{z}_{wr} -Achse im Bezugssystem v , im Folgenden als I^v geschrieben, bezeichnet. Durch Substitution der kartesischen Geschwindigkeitskomponenten durch den sphärischen Twist ergibt sich

$$E_{kin,b} = \frac{1}{2}m\rho_{wr}^v{}^2 \cos^2(\theta_{wr}^v) + \frac{1}{2}I^v \frac{\rho_{wr}^v{}^2 \sin^2(\theta_{wr}^v)}{d_{max}^2}. \quad (5.4)$$

In Abschnitt 3.1.1 war der Parameter d_{max} eingeführt worden. Dort war d_{max} vorläufig als der Abstand zwischen Ursprung und dem am weitesten entfernten Rad gewählt worden. Definiert man nun d_{max} über (5.4)

$$d_{max}^v := \sqrt{\frac{I^v}{m}}, \quad (5.5)$$

so ist es möglich, die kinetische Energie ausschließlich in Abhängigkeit der die ebene Bewegung charakterisierenden Variable ρ_{wr}^v zu schreiben

$$E_{kin,b} = \frac{1}{2} m \rho_{wr}^{v2}. \quad (5.6)$$

Damit ist die kinetische Energie des Systems bezüglich der ebenen Bewegung unabhängig von der gegenwärtigen Fahrwerkskonfiguration. Der Parameter d_{max}^v hat weiterhin die Einheit einer Länge. Es sei aber erwähnt, dass d_{max}^v aufgrund des Auftretens des Trägheitstensors I^v in (5.5) abhängig vom gerade gewählten Bezugssystem ist.

Die physikalische Interpretation von (5.6) ist, dass das Lenken des Fahrzeugs keine Energie kostet bzw. keiner Arbeit bedarf. Unter der Voraussetzung, dass die nicht-holonomen Bindungen ideal erfüllt sind, ist diese Aussage physikalisch korrekt. In diesem Fall wirkt die durch die Lenkung bzw. Radstellung aufgebrachte Kraft immer orthogonal zur Fahrtrichtung und bewirkt damit lediglich eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit. Es gibt keine Verluste im Rad-Boden-Kontakt. Es wird keine Arbeit verrichtet.

Diese Annahme ist offensichtlich idealisiert. In dem Umfeld der Servicerobotik, in welchem die vorliegende Arbeit angesiedelt ist, kann aber davon ausgegangen werden, dass das tatsächliche Verhalten hinreichend gut durch diese Annahme wiedergegeben wird. Bei der Anwendung von Servicerobotern oder Fahrerlosen Transportsystemen in öffentlichen Gebäuden oder Fabriken ist eher selten mit scharfen Kurvenfahrten zu rechnen. Ein Driften um Kurven bzw. die Anregung zusätzlicher Bewegungsmodi, wie Nicken und Wanken können daher aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Auch die Walkarbeit in den Rädern ist bei den hier in der Regel eingesetzten harten Vollgummirädern vernachlässigbar.

In dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Umfeld der mobilen Serviceroboter und Fahrerlosen Transportsysteme für Anwendungen in Innenräumen kann aber in der Regel davon ausgegangen werden, dass solche dynamischen Extremsituationen nicht auftreten und Gleichung (5.6) die der ebenen Bewegung zugeordnete, kinetische Energie hinreichend genau wieder gibt.

Die kinetische Energie auf Gelenkwinkelenebene ist gegeben durch

$$E_{kin,q} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}}_d^T \mathbf{I}_d \dot{\vec{\varphi}}_d + \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}}_s^T \mathbf{I}_s \dot{\vec{\varphi}}_s, \quad (5.7)$$

wobei \mathbf{I}_d und \mathbf{I}_s Diagonalmatrizen sind, deren Elemente das Trägheitsmoment der Räder bzw. Radmodule bezüglich der jeweiligen Achse beinhalten. Für un gelenkte Standardräder und Standardräder ohne Seitwärtsoffset und getriebeseitige Kopplung von Lenk- und Fahrbewegung kann man die in Abschnitt 3.2 als Abbildung Ξ von $(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)^T$ nach $(\vec{\varphi}_s^T, \vec{\varphi}_d^T)^T$ eingeführte inverse Kinematik

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_s \\ \dot{\vec{\varphi}}_d \end{pmatrix} &= \vec{h}(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_s \\ \dot{\vec{\varphi}}_d \end{pmatrix} &= \mathbf{J}_\Xi(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \begin{pmatrix} \rho_{wr}^v \\ \varphi_{wr}^v \\ \theta_{wr}^v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

in einen Term bezüglich $\vec{\varphi}_d$ und einen Term bezüglich $\vec{\varphi}_s$

$$\dot{\vec{\varphi}}_d' = \vec{h}_d(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \quad (5.9)$$

$$\vec{\varphi}_s = \vec{h}_s(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \quad (5.10)$$

zerlegen. Es bezeichnet dabei \mathbf{J}_Ξ die Jacobi-Matrix bezüglich der in Abschnitt 3.2 eingeführten Abbildung Ξ . Bezieht man Standardräder mit Seitwärtsoffset bzw. getriebeseitiger Kopplung mit ein, so ergibt sich die resultierende Rotationsrate

$$\dot{\vec{\varphi}}_d = \dot{\vec{\varphi}}_d' + \mathbf{K}_c \cdot \dot{\vec{\varphi}}_s, \quad (5.11)$$

wobei \mathbf{K}_c eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Kopplungsfaktoren $k_{c,i}$ für das i -te Rad sind. Für Räder ohne Seitwärtsoffset bzw. getriebeseitige Kopplung ist $k_{c,i} = 0$. Damit lässt sich die kinetische Energie auf Gelenkwinkel Ebene umformen zu

$$\begin{aligned} E_{kin,q} = & \overbrace{\frac{1}{2} \rho_{wr}^v \cdot \vec{h}_d'^T(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \mathbf{I}_d \cdot \vec{h}_d'(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \rho_{wr}^v}^{\text{I}} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \mathbf{K}_c^T \cdot \mathbf{I}_d \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \mathbf{I}_s \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dabei wurde verwendet, dass ρ_{wr}^v nur durch Multiplikation in (5.9) eingeht. Es bezeichnet $\mathbf{J}_{\Xi,s}$ die Jacobi-Matrix zu \vec{h}_s . Diese entspricht der Teilmatrix in \mathbf{J}_Ξ , welche der Abbildung von $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ auf die Lenkwinkel $\vec{\varphi}_s$ zugeordnet ist.

Um die Energiebilanz für das gesamte System aufzustellen, wird neben der der Gelenkwinkelgeschwindigkeit zugeordneten kinetischen Energie noch die potentiellen Energie benötigt. Diese setzt sich zum einen aus der Lageenergie des Systems, zum anderen aus der in der Elastizität der im Getriebe gespeicherten Energie zusammen. Es kann in guter Näherung angenommen werden, dass die Getriebe hinreichend steif sind, so dass der Einfluss ihrer Elastizität und damit die in ihnen gespeicherte Energie vernachlässigt werden kann. Des Weiteren sei in erster Näherung angenommen, dass sich das System in der Ebene bewege. Damit ist die potentielle Energie des Systems konstant und unabhängig von den Zustandsgrößen $(\rho_{wr}^v, \varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)^T$ des Systems. Im Kontext dieses Systementwurfs kann das Fahren auf einer geneigten Oberfläche als Zeitvarianz innerhalb des Systems oder externe Störung aufgefasst werden. Dies kann dann im zuvor erwähnten vergleichsweise schnellen, unterlagerten Regelkreis ausgeglichen werden.

Damit ergibt sich die Gesamtenergie des Systems als Summe der kinetischen Energie der Teilsysteme:

$$\begin{aligned} E = & E_{kin,b} + E_{kin,q} \\ = & \frac{1}{2} m \cdot \rho_{wr}^{v2} + \overbrace{\frac{1}{2} m'(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \rho_{wr}^{v2}}^{\text{I}} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_c^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_c) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dabei sind die Freiheitsgrade der ebenen Bewegung ρ_{wr}^v und die Freiheitsgrade der Lenkbarkeit $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ über den von der Konfiguration abhängigen Faktor m' in Term I (5.12), (5.13) gekoppelt.

Anschaulich beschreibt Term I die in der Rotation der Räder gespeicherte Energie. Fällt der Momentanpol für ein gegebenes ρ_{wr}^v mit dem Rad-Boden-Kontakt des Rades i zusammen, so rollt dieses Rad nicht ab. Damit ist auch keine kinetische Energie in ihm gespeichert. Aus der Anschauung oder Analyse der inversen Kinematik kann man erkennen, dass für ein gegebenes ρ_{wr}^v diese Energie als Summe über alle Räder maximal wird, wenn sich der Momentanpol im Fernpunkt befindet. Damit kann eine Abschätzung für die obere Grenze der Gesamtenergie des Systems

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}(m + \tilde{m}') \cdot \rho_{wr}^v{}^2 + \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{matrix} \right)^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_c^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_c) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

vorgenommen werden. Wobei sich \tilde{m}' als Summe des Produkts der Trägheitsmomente aller Räder mit dem maximalen Wert für die Abbildung \vec{h}'_d ergibt

$$\tilde{m}' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{1}{r_i} m_i \cdot r_i^2 \frac{1}{r_i} . \quad (5.15)$$

Mit dieser Abschätzung lassen sich Rekonfiguration des Fahrwerks bzw. Fahrt energetisch entkoppelt betrachten. Die Energie des Systems zerfällt in einen Term bezüglich der Freiheitsgrade der ebenen Bewegung und einen Term bezüglich der Freiheitsgrade der Konfiguration

$$E_{\delta_m} = \frac{1}{2}(m + \tilde{m}') \cdot \rho_{wr}^v{}^2 \quad (5.16)$$

$$E_{\delta_s} = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{matrix} \right)^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_c^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_c) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix} . \quad (5.17)$$

Rekonfiguration und ebene Bewegung können damit als zwei unabhängige Systeme analysiert werden. Da auf Fahrwerksebene der Entwurf einer Regelung bezüglich des Parameters ρ_{wr}^v vergleichsweise einfach ist, konzentriert sich die Diskussion der Regelung im Folgenden auf das den Freiheitsgraden der Lenkbarkeit zugeordnete Teilsystem.

5.1.2 Singularitäten und Stellgrößenbeschränkungen

Bereits in Abschnitt 3.2 und 4.1.2 waren die Singularitäten des Systems bezüglich der inversen Kinematik diskutiert worden. Die Aufstellung der Energiebilanz für die entkoppelten Systeme nach Abschnitt 5.1.1 ergibt für das Teilsystem, welches die Konfiguration des Fahrwerks bzw. die Lenkung beschreibt

$$E_{\delta_s} = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{matrix} \right)^T \cdot \underbrace{\mathbf{J}_{\Xi,s}^T \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_c^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_c) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}}_{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix} .$$

In der Umgebung der Singularitäten $(\varphi_{wr,S_i}^v, \theta_{wr,S_i}^v)$ bildet $\mathbf{J}_{\Xi,s}$ die Stellgrößen $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)$ auf im Grenzfall unendlich große Stellgrößen $\vec{\varphi}_s$ ab. Damit wächst die kinetische Energie des Systems bereits für infinitesimale Stellraten $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)$ unbegrenzt. Es ist offensichtlich, dass damit die möglichen Stellgrößen bezüglich $\vec{\varphi}_s$ bzw. $\vec{\varphi}_d$ in der Umgebung der Singularitäten immer überschritten werden. Die Ausdehnung dieser Umgebung hängt dabei von den kommandierten Parameteränderungen bzw. den Stellgrößenbeschränkungen ab.

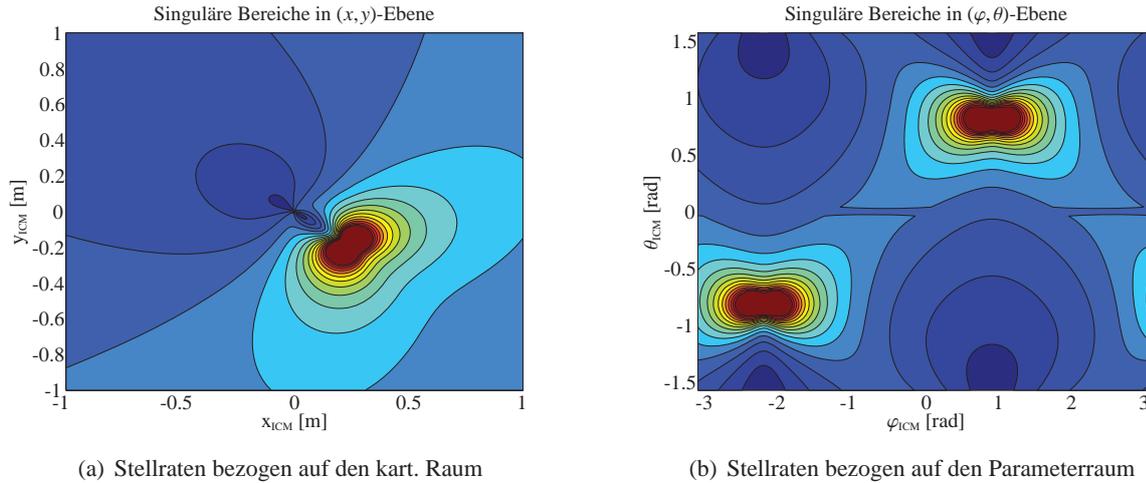


Abbildung 5.1: Abschätzung der maximal nötigen Stellraten für eine Bewegung des Momentanpols im Parameterraum mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag von 1.5π rad/s. Dunkelrote Regionen zeigen Regionen an, in denen die benötigte Stellrate 8π rad/s übersteigt.

Alternativ lässt sich Term II als konfigurationsabhängiges Trägheitsmoment interpretieren:

$$\mathbf{I}'_{\delta_s} = \mathbf{J}_{\Xi,s}^T \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_C^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_C) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s} \cdot \quad (5.18)$$

In der Umgebung der Singularitäten wächst das Trägheitsmoment \mathbf{I}'_{δ_s} gegen Unendlich und immobilisiert das System so bei Zuführung begrenzter Mengen an Energie. Für ein gegebenes $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)$ ist Term II ein Maß für die Energie des Systems.

Abbildung 5.1 zeigt eine Abschätzung der Energie bzw. der resultierenden Stellraten für einen gegebenen Wert $\|(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)\|$. Abbildung 5.1(a) stellt die Abschätzung in der Ebene der Fahrwerksbewegung dar, Abbildung 5.1(b) im zulässigen Konfigurationsraum des Fahrwerks bzw. im Parameterraum $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$.

Ein Entwurfsziel des Reglers muss notwendigerweise die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen sein. Da die Lenkwinkelstellung und Rotationsraten der einzelnen Räder über die nicht-holonomen Bindungen miteinander gekoppelt sind, kann diese Beschränkung nicht direkt durch Begrenzung einzelner Stellraten $\dot{\varphi}_s$ bzw. $\dot{\varphi}_d$ erreicht werden. Die Stellgrößen müssen bereits bei der Bestimmung der Parameteränderung $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)$ berücksichtigt werden. Dies wird dadurch erschwert, dass die Abbildung $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v) \rightarrow (\dot{\varphi}_s, \dot{\varphi}_d)$ stark nicht-linear ist und von der gegenwärtigen Konfiguration abhängt.

Ein Gütekriterium, welches die Vermeidung dieser Singularitäten ermöglicht, ist die durch (5.17) gegebene Energie bzw. als Maß für diese, das durch (5.18) gegebene, lediglich von der Konfiguration abhängige, Trägheitsmoment \mathbf{I}'_{δ_s} . Ein solches, die Energie des Gesamtsystems reduzierendes Gütekriterium hat zusätzlich den Vorteil, dass es stabilisierend auf das System einwirkt. Die in Abschnitt 5.2 und 5.3 vorgestellten Regler basieren auf der Grundidee, die Energie (5.17) des Systems zu reduzieren und verwenden (5.18) in ihrem Gütefunktional.

5.2 Reglersynthese über virtuelle Potentialfelder

5.2.1 Gütekriterium und Superpositionsprinzip

Eine Möglichkeit, solche Singularitäten im Entwurf der Regelung in intuitiver Weise zu berücksichtigen, ist die Methode der potentialfeldbasierten Regelung nach Khatib (Khatib 1986). Die Regelung auf Basis von künstlichen Potentialfeldern wurde von Khatib eingeführt, um in komplexen Arbeitsräumen Elemente der Bahnplanung und Bahnoptimierung in regelungstechnische Strukturen integrieren zu können. Sie geht einher mit der Einführung der kartesischen Arbeitsraumformulierung für Manipulatoren (Khatib 1987) und basiert auf dem Gedanken, die Energie eines gegebenen Systems zu minimieren.

Das betrachtete System wird dabei als Teilchen in seinem Zustandsraum interpretiert, dessen Position durch seinen jeweils aktuellen Zustand beschrieben ist. In Abhängigkeit seines Zustandes kann diesem Teilchen dann sowohl eine kinetische als auch potentielle Energie zugeordnet werden. Um zusätzliche Randbedingungen in die Problemstellung zu integrieren, werden diese neben den tatsächlich physikalisch motivierten Potentialen $U_{p,l}(\vec{x})$ – z.B. Wirkung der Gravitation auf den Endeffektor eines Manipulators – als zusätzliche künstliche Potentialfelder $U_{a,j}(\vec{x})$ in die Energiebilanz des Systems aufgenommen

$$U(\vec{x}) = \sum_{l=1}^L U_{p,l}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^J U_{a,j}(\vec{x}) . \quad (5.19)$$

Der Regler wird dann gerade so entworfen, dass er die Energie dieses Systems minimiert. Dazu wird die Stellgröße durch Ermittlung des Gradienten des Potentialfelds im gegenwärtigen Zustand errechnet

$$\vec{F}_{cmd} = -\nabla U(\vec{x}) . \quad (5.20)$$

Sie weist damit eine Analogie zu physikalischen Kräften auf. Fügt man zusätzlich einen dissipativen Kraftanteil hinzu, welcher die kinetische Energie des Systems reduziert

$$\begin{aligned} \vec{F}_{dis} &= -\nabla E_{kin} \text{ bzw.} \\ &= -k_v \cdot \dot{\vec{x}} , \end{aligned} \quad (5.21)$$

lässt sich ein entsprechend entworfener Regler bei Bedarf zusätzlich stabilisieren.

In Analogie zur physikalischen Anschauung können unterschiedliche Randbedingungen und Zielgrößen durch Superposition der entsprechenden Potentiale in die Problemstellung integriert werden. Das Verfahren ist durch seine Darstellung von Randbedingungen in Form von Potentialen bzw. der Optimierung des Systemverhaltens über die Gesamtenergie des Systems den Methoden aus dem Bereich der struktureutralen Regelung verwandt. So liegt auch dem im folgenden Abschnitt 5.3 verwandten Pontryagin-Minimum-Prinzip (PMP) die Optimierung des Systemverhaltens auf Basis der hamiltonschen Darstellung (vgl. (Kirk 2004), Kapitel 5) zugrunde. Diese Darstellung eines Gütekriteriums nach Hamilton ist zwar nicht vollständig identisch zum Aufstellen der Energiebilanz eines physikalischen Systems nach Hamilton, diesem aber sehr ähnlich.

Neben der Möglichkeit, unterschiedliche Randbedingungen durch Superposition in die Problemstellung aufzunehmen, besticht der Potentialfeldansatz nach Khatib insbesondere durch seine schlichte Eleganz. Im Gegensatz zum Aufstellen und Lösen der kanonischen Gleichungen eines Systems nach Hamilton ist die Formulierung geeigneter Potentiale und Berechnung der zugehörigen Gradienten recht anschaulich. Gerade für Probleme in echten Bezugssystemen ist der Entwurf sehr intuitiv. So wird das Prinzip der potentialfeldbasierten Regelung gerade im Bereich der Navigation mobiler Roboter, bei der Umgebung

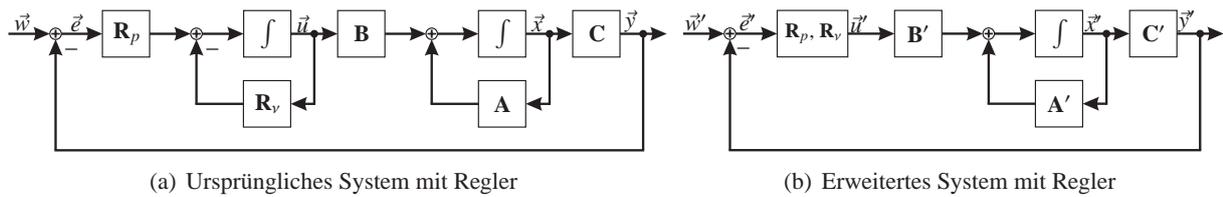


Abbildung 5.2: Blockschaltbilder für ein System mit einfachem Potentialfeld-Regler. Abbildung 5.2(a) zeigt die Darstellung mit internen Reglerzuständen. Abbildung 5.2(b) zeigt das gleiche System mit erweiterter Systemformulierung. Die internen Zustände des Reglers werden dabei der Strecke zugeschlagen.

und physikalisch-dynamische Eigenschaften des mobilen Systems gleichermaßen berücksichtigt werden müssen, häufig angewendet (Rimon und Koditschek 1992; Chengqing u. a. 2000; Shimoda u. a. 2005).

In ihrer einfachsten Form, ohne repulsive Potentiale, lässt sich die potentialfeldbasierte Regelung auf den Entwurf eines I-Reglers mit Anti-Wind-Up zurückführen. Dementsprechend ist ein potentialfeldbasierter Regler vergleichsweise langsam, hat aber den Vorteil, dass er auf weiche Stellgrößen führt und damit die Belastung der mechanischen Komponenten gering hält. Die Stellgröße setzt sich in diesem einfachen Fall aus einer attraktiven Kraft (I-Anteil) und einer dissipativen Kraft (Anti-Wind-Up) zusammen

$$\vec{F}_{att} = -\nabla U_{att}(\vec{x}) \quad \vec{F}_{dis} = -k_v(\dot{\vec{x}} - \vec{0}) . \quad (5.22)$$

$$= -k_p(\vec{x} - \vec{x}_d) \quad (5.23)$$

Dabei bezeichnet \vec{x}_d die Sollkonfiguration des Systems (Abb. 5.2(a)). Im Folgenden wird angenommen, dass $\vec{x}_d = 0$ gelte. Nimmt man die erste Ableitung der Zustandsgrößen bzw. den integrierten Regelfehler zum Zustandsvektor \vec{x} hinzu

$$\vec{x}' = (\vec{x}^T, \dot{\vec{x}}^T)^T \quad (5.24)$$

und lässt in Analogie zur Physik die Kräfte auf die zweite Ableitung der Zustandsgrößen wirken, so ergibt sich das System (Abb. 5.2(b))

$$\dot{\vec{x}}' = \mathbf{A}' \vec{x}' + \mathbf{B}' \vec{u} , \quad \text{mit} \quad \vec{u} = \vec{F}_{att} + \vec{F}_{dis} , \quad (5.25)$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} . \quad (5.26)$$

Dabei entspricht die Wahl von \vec{u} gerade einer vollständigen Zustandsrückführung.

Die Dynamik des geregelten Systems ergibt sich damit zu

$$\dot{\vec{x}}' = \mathbf{A}'_r \vec{x}' , \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}'_r = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_v \end{pmatrix} , \quad (5.28)$$

wobei \mathbf{K}_p und \mathbf{K}_v Diagonalmatrizen sind, deren Diagonalelemente alle identisch k_p bzw. k_v sind. Aus der Berechnung der Polstellen des charakteristischen Polynoms zu \mathbf{A}'_r folgt unmittelbar die Stabilität des geregelten Systems, wenn die Diagonalelemente von \mathbf{K}_p bzw. \mathbf{K}_v positiv sind. Des Weiteren folgt aus der Diagonalform der Untermatrizen, dass die Dynamik der einzelnen Zustandsgrößen unabhängig betrachtet und eingestellt werden kann. Das System entspricht einem mehrdimensionalen, entkoppelten, gedämpften harmonischen Oszillator.

5.2.2 Singularitätsvermeidung durch vollständige Zustandsrückführung

Um das Prinzip der repulsiven Potentiale auch auf durch die Kinematik implizierte Einschränkungen des Arbeitsraums anzuwenden, superponiert Ott ((Ott u. a. 2005), S. 38 ff) einen Impedanzregler mit einem Potentialfeld. Basis für die Definition des repulsiven Potentials ist dabei das Maß der Manipulierbarkeit (Yoshikawa 1990), welches durch Ableiten nach den Konfigurationsvariablen eine Stellgröße liefert, die die Manipulierbarkeit maximiert. Ähnlich lässt sich auf Basis der Energie des Systems bezüglich der Freiheitsgrade der Lenkbarkeit (5.17) ein Potential im Zustandsraum ableiten, welches die singulären Bereiche der Fahrwerkskinematik in die Regelung mit einbezieht (Connette u. a. 2009).

Durch Einführen einer nicht-linearen Zustandsrückführung kann die Dynamik des Systems \mathbf{A}' so beeinflusst werden, dass die singulären Bereiche implizit vermieden werden. Die Rückführung wird dabei gerade so entworfen, dass sie die Energie des Systems bzw. eine die Energie approximierende Funktion minimiert. Betrachtet man Gleichung (5.17) so erkennt man, dass diese die Zustandsgrößen sowie deren erste Ableitung in der Umgebung der Singularitäten nichtlinear miteinander verbindet. In Abschnitt 5.1.2 wurde bereits gezeigt, dass der Term, welcher die Trägheitsmomente der Radmodule auf den Zustandsraum abbildet, für eine gegebene Änderungsrate des Momentanpols analog einer Energie ist. Die Energie in der Umgebung der Singularitäten lässt sich damit zu

$$E_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s}^T \cdot (\mathbf{I}_s + \mathbf{K}_c^T \mathbf{I}_d \mathbf{K}_c) \cdot \mathbf{J}_{\Xi,s} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

abschätzen, wobei $\dot{\varphi}_c$ und $\dot{\theta}_c$ beliebig zu wählende, aber feste Winkelgeschwindigkeiten sind. Verwendet man weiterhin, dass der Term innerhalb der Klammer auf eine Matrix mit Diagonalform führt, so lässt sich (5.29) als Produkt der kinetischen Energie der einzelnen Radmodule schreiben

$$E_S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix}^T \mathbf{J}_{\Xi,si}^T (I_{s,i} + k_{c,i}^2 I_{d,i}) \mathbf{J}_{\Xi,si} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_c \\ \dot{\theta}_c \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Dabei sind $I_{s,i}$, $k_{c,i}$ und $I_{d,i}$ Skalare, welche die Trägheit des Rades i spezifizieren. Genauso lässt sich die mit der Ableitung des Momentanpols verbundene untere Grenze der kinetischen Energie in der Umgebung des Fernpunktes zu

$$E_F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix}^T \cdot \mathbf{I}_c \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{wr}^v \\ \dot{\theta}_{wr}^v \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

abschätzen, wobei \mathbf{I}_c eine beliebig zu wählende, aber feste Trägheitsmatrix ist.

Betrachtet man Gleichungen (5.30) und (5.31), so erkennt man, dass diese nun nur noch von den Zustandsgrößen $(\dot{\varphi}_{wr}^v, \dot{\theta}_{wr}^v)$ bzw. $(\varphi_{wr}^v, \theta_{wr}^v)$ abhängen. Gleichung (5.31) ist damit analog zur kinetischen Energie eines Teilchens im Zustandsraum (vgl. Abschnitt 5.2.1). Die dissipative Kraft nach (5.21) wird diese Energie kontinuierlich reduzieren.

Eine genauere Analyse von (5.30) zeigt, dass die Summanden hinsichtlich ihrer jeweils größten Eigenwerte radialsymmetrisch bezüglich der Singularitäten sind (Abb. 5.1). Näherungsweise lässt sich also in der Umgebung der Singularitäten ein radialsymmetrisches Potential definieren, welches die Energie nach (5.30) approximiert.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein solches Potential zu wählen. In (Connette u. a. 2009) wurde zum Beispiel ein hyperbelförmiges Potential gewählt, welches die Form der ursprünglichen Gleichung hinsichtlich der Energie gut approximiert. Alternativen sind kubische oder quadratische Potentiale wie in

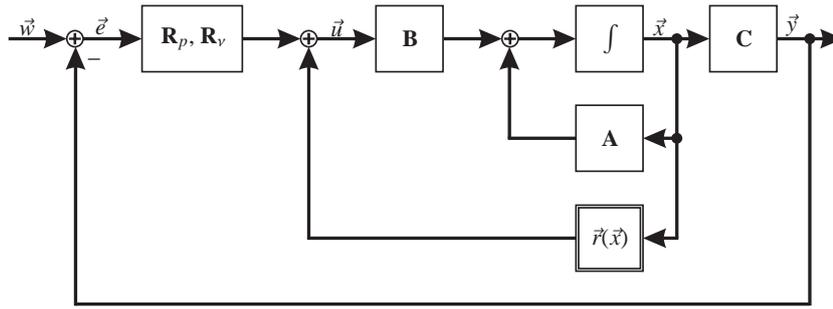


Abbildung 5.3: Blockschaltbild des Systems mit Singularitätenvermeidung durch vollständige, nichtlineare Zustandsrückführung über einen Potentialfeld-Regler. Zu den bisherigen Elementen tritt die nichtlineare Rückführung $\vec{r}(\vec{x})$ hinzu. Dies kann als nichtlinearer Kennfeld-Regler interpretiert werden.

(Dietrich u. a. 2011) vorgeschlagen. Die Entwicklung der Zustandsrückführung wird im Folgenden auf quadratischen Potentialen aufbauen, da dies eine Stabilitätsbetrachtung erheblich erleichtert. Die Energie nach (5.30) sei im Folgenden durch das Potential

$$U_s(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N U_{s,i}(\vec{x}), \quad (5.32)$$

$$U_{s,i}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_{r,i}(d_i(\vec{x}) - d_{0,i})^2 & \forall d_i(\vec{x}) \leq d_{0,i} \\ 0 & \forall d_i(\vec{x}) > d_{0,i} \end{cases} \quad (5.33)$$

approximiert, wobei $d_i(\vec{x})$ ein ellipsoides Entfernungsmaß zwischen gegenwärtigem Zustand und der Singularität sei

$$d_i(\vec{x}) = \frac{(\varphi_{wr,S_i}^v - \varphi_{wr}^v)^2}{a^2} + \frac{(\theta_{wr,S_i}^v - \theta_{wr}^v)^2}{b^2} \quad (5.34)$$

$$= \frac{(x_{1,S_i} - x_1)^2}{a^2} + \frac{(x_{2,S_i} - x_2)^2}{b^2}, \quad (5.35)$$

in welchem a und b die Länge der Hauptachsen der Ellipse darstellen. Der Einfachheit halber gelte vorläufig $a = b$. Die Höhenlinien der Potentiale haben damit Kreisform. Der Parameter $d_{0,i}$ begrenzt den Einflussbereich des repulsiven Potentials. In einem hinreichend großen Abstand zu den Singularitäten wird die Regelung damit nicht durch die repulsiven Potentiale beeinflusst. Die Dynamik des geregelten Systems entspricht dann gerade dem in Abschnitt 5.2.1 diskutierten System.

Die zugehörige Zustandsrückführung ergibt sich durch Berechnung des Gradienten bezüglich der gegenwärtigen Konfiguration im Zustandsraum

$$\vec{r}(\vec{x}) = (0, 0, -\sum_{i=1}^N k_{r,i} \frac{d_i(\vec{x}) - d_{0,i}}{d_i(\vec{x})} (x_1 - x_{1,S_i}), -\sum_{i=1}^N k_{r,i} \frac{d_i(\vec{x}) - d_{0,i}}{d_i(\vec{x})} (x_2 - x_{2,S_i}))^T. \quad (5.36)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Rückführung bezüglich x_3 und x_4 über den Term, welcher den Abstand von der Singularität beinhaltet, gekoppelt ist.

Abbildung 5.3 zeigt das Blockschaltbild des Systems, das sich aus der Superposition der Zustandsrückführung nach (5.36) sowie dem in Abschnitt 5.2 skizzierten Folgeregler ergibt. Abbildung 5.4 zeigt das resultierende, superponierte Potential in der (φ, θ) -Ebene (Abb. 5.4(a)) bzw. Fahrwerksebene (Abb. 5.4(b)).

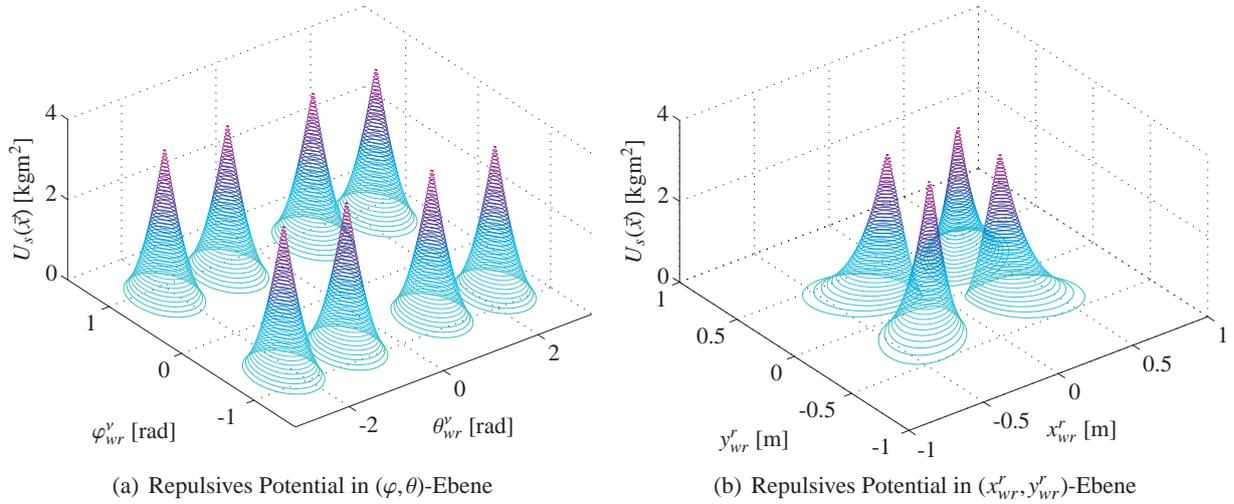


Abbildung 5.4: Kennfelder in (φ, θ) -Ebene (Abb. 5.4(a)) und (x_{wr}^r, y_{wr}^r) -Ebene (Abb. 5.4(b)) für die nichtlineare Zustandsrückführung des Potentialfeld-Reglers. Das Kennfeld stellt das repulsive Potential $U_s(\vec{x})$ über der (φ, θ) -Ebene exemplarisch für ein Fahrwerk mit vier Rädern dar. Durch die Mehrdeutigkeit im sphärischen Zustandsraum entstehen acht repulsive Potentiale. Der Einflussbereich der Potentiale d_0 beträgt 1.4 rad^2 . Die Feldkonstante k_r beträgt 4 kgm^2 . Die Potentiale haben leicht elliptische Form $(a, b) = (0.5 \text{ rad}, 0.35 \text{ rad})$.

Um sicherzustellen, dass diese Zustandsrückführung zulässig ist, wird im Folgenden die Stabilität des so geregelten Systems untersucht. Diese Untersuchung kann für den resultierenden, nicht-linearen Regelkreis über das Theorem von Lyapunov erfolgen (vgl. (Föllinger und Dörrscheidt 1994)). Verkürzt sagt dieses Theorem aus, dass ein System in einer Ruhelage gerade dann stabil bzw. asymptotisch stabil ist, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $V(\vec{x})$ existiert, für die folgende Aussagen gelten: Diese Funktion ist in der Umgebung der Ruhelage positiv definit. Sie ist in der Ruhelage identisch 0. Und ihre erste Ableitung ist in der Umgebung der Ruhelage negativ definit.

Um den Schreibaufwand zu reduzieren wird im Folgenden lediglich eine Singularität einbezogen. Aus dem gleichen Grund sei im Folgenden der Sollwert $\vec{x}_d \equiv \vec{0}$. Zunächst soll die Stabilität des Regelkreises ohne repulsive Potentiale untersucht werden. Mit $\vec{x}_d \equiv \vec{0}$ lässt sich das System (5.27) in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}) \\ &= (x_3, x_4, -\frac{k_p}{m}x_1 - \frac{k_v}{m}x_3, -\frac{k_p}{m}x_2 - \frac{k_v}{m}x_4)^T \end{aligned} \quad (5.37)$$

schreiben. Es sei m eine positive Konstante, die hier in Vorgriff auf folgende Diskussionen des auf Potentialfeldern basierenden Ansatzes eingeführt wird. Damit ist $\vec{x}_r \equiv \vec{0}$ eine Ruhelage des Systems ($\dot{\vec{x}} \equiv \vec{0}$). Es sei weiterhin folgende Lyapunov-Funktion definiert

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}\lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 x_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 x_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 x_4^2, \quad (5.38)$$

wobei die Parameter λ_j noch zu bestimmende Konstanten sind. Man erkennt unmittelbar, dass gilt:

$$\begin{aligned} V(\vec{x}_r) &= V(\vec{0}) = 0, \\ V(\vec{x}) &\geq 0 \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Ableitung der Lyapunov-Funktion ergibt sich unter Verwendung von (5.37) zu

$$\begin{aligned}\dot{V}(\vec{x}) &= \lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 x_3 \dot{x}_3 + \lambda_4 x_4 \dot{x}_4 \\ &= \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 + \lambda_3 x_3 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3\right) + \lambda_4 x_4 \left(-\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4\right).\end{aligned}\quad (5.40)$$

Man kann erkennen, dass sich $\dot{V}(\vec{x})$ damit in einen Term bezüglich (x_1, x_3) und einen zweiten von dem ersten unabhängigen Term bezüglich (x_2, x_4) zerlegen lässt. Zunächst soll der Term $\dot{V}(x_1, x_3)$ bezüglich (x_1, x_3) untersucht werden. Durch Ausmultiplizieren und Faktorisieren lässt sich dieser Term zu

$$\dot{V}(x_1, x_3) = \underbrace{x_1 x_3 (\lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m})}_I - \underbrace{x_3^2 \lambda_3 \frac{k_v}{m}}_II \quad (5.41)$$

umformen. Man kann unmittelbar erkennen, dass unter der Voraussetzung $\lambda_3 > 0$ (5.39) und $m > 0$ Term II in der Umgebung der Ruhelage genau dann positiv definit ist, wenn gilt $k_v > 0$. Wählt man nun λ_1 so, dass Term I verschwindet

$$\lambda_1 = \lambda_3 \frac{k_p}{m} > 0, \quad (5.42)$$

so folgt unmittelbar, dass $\dot{V}(x_1, x_3)$ in der Umgebung der Ruhelage negativ definit ist. Die Untersuchung für $\dot{V}(x_2, x_4)$ führt auf analoge Bedingungen für λ_2 und λ_4 , unter denen $\dot{V}(x_2, x_4)$ ebenfalls negativ definit ist.

Damit ist auch $\dot{V}(\vec{x})$ als Summe zweier negativ definiten Funktionen selbst negativ definit. Die Ruhelage $\vec{x}_r \equiv 0$ ist also, wie bereits in Abschnitt 5.2.1 erwähnt, asymptotisch stabil. Unter Anwendung des Barbashin-Krasovskii-Theorems folgt mit $V(\vec{x}) \rightarrow \infty$ für $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ zusätzlich unmittelbar globale asymptotische Stabilität für die Ruhelage \vec{x}_r .

Diese Stabilitätseigenschaften sind implizit durch den Grundgedanken der Potentialfeld-Methode gegeben. Wählt man λ_3 bzw. λ_4 als m , so ergibt sich λ_1 bzw. λ_2 zu k_p . Setzt man dies in (5.38) ein

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} k_p x_1^2 + \frac{1}{2} k_p x_2^2 + \frac{1}{2} m x_3^2 + \frac{1}{2} m x_4^2, \quad (5.43)$$

so erkennt man, dass die resultierende Lyapunov-Funktion gerade identisch dem Potential ist, aus welchem die Stellgrößen abgeleitet werden. Die Wahl eines geeigneten Potentials führt also unmittelbar auf eine Lyapunov-Funktion, welche per Definition durch die Dynamik des resultierenden Systems minimiert wird.

Für das System mit Singularitätenvermeidung über vollständige Zustandsrückführung ergibt sich, für den hier betrachteten, vereinfachten Fall mit nur einer Singularität, die Dynamik des Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{cases} (x_3, x_4, -\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x})-d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,S}), -\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x})-d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,S}))^T & \forall d(\vec{x}) \leq d_0 \\ (x_3, x_4, -\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3, -\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4)^T & \forall d(\vec{x}) > d_0 \end{cases} \quad (5.44)$$

und die zugehörige Lyapunov-Funktion

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 x_3^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 x_4^2 + \frac{1}{2} \lambda_r (d(\vec{x}) - d_0)^2 & \forall d(\vec{x}) \leq d_0 \\ \frac{1}{2} \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 x_3^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 x_4^2 & \forall d(\vec{x}) > d_0 \end{cases} \quad (5.45)$$

Es soll zunächst gelten, dass die Ruhelage außerhalb des Einflussbereichs der repulsiven Potentiale $d(\vec{x}_r) > d_0$ liegt. Liegt die Ruhelage des Systems ohne Zustandsrückführung im Einflussbereich der Potentiale, so gilt $V(\vec{x}_r) = 0$ nicht länger. Faktisch kommt es zu einer Verschiebung der Ruhelage auf die Position \vec{x}_r^* . Für diese neue Ruhelage gilt wiederum $V(\vec{x}_r^*) = 0$. Diese Eigenschaft wird in Abschnitt 5.2.3 näher erläutert.

Es ist zu beachten, dass $V(\vec{x})$ nicht im gesamten Zustandsraum eine geeignete Lyapunov-Funktion darstellt. Voraussetzung dafür war, dass $V(\vec{x})$ stetig differenzierbar ist. Diesbezüglich müssen hier zwei kritische Bereiche untersucht werden. Zum einen die Grenze des Einflussbereichs der repulsiven Potentiale, also die Menge aller Punkte für die gilt $d(\vec{x}) = d_0$, und zum anderen die Singularität selbst. Man kann unmittelbar erkennen, dass $V(\vec{x})$ im gesamten Zustandsraum stetig ist. Bildet man die Ableitung von $V(\vec{x})$, so lässt sich aus einer Grenzwertbetrachtung des Weiteren ablesen, dass die Ableitung bezüglich der Menge $d(\vec{x}) = d_0$ sowohl existiert als auch selbst wieder stetig ist. In den Singularitäten existiert die Ableitung hingegen nicht. Die Stabilitätsbetrachtung ist daher auf eine offene Menge, welche die Singularitäten ausschließt, beschränkt. Da das Ziel des Reglerentwurfs gerade die Vermeidung der Singularitäten war, ist dies eine zulässige und sinnvolle Beschränkung.

Für die Situation $d(\vec{x}) > d_0$ ist das System (5.44) identisch zu dem zuvor betrachteten System ohne Singularitätenvermeidung. Da die Lyapunov-Funktion im Übergang der Systeme stetig differenzierbar ist, genügt es hier das System innerhalb und auf der Grenze zu den repulsiven Potentialen zu betrachten. In diesem Bereich muss $V(\vec{x})$ positiv definit und $\dot{V}(\vec{x})$ negativ definit sein.

Aus der quadratischen Form von (5.45) folgt unmittelbar, dass $\lambda_r > 0$ zusammen mit (5.39) ein hinreichendes Kriterium für die positive Definitheit von $V(\vec{x})$ ist. Die Ableitung der Lyapunov-Funktion (5.45) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{V}(\vec{x}) &= \lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 x_3 \dot{x}_3 + \lambda_4 x_4 \dot{x}_4 + \lambda_r \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} ((x_1 - x_{1,S}) \dot{x}_1 + (x_2 - x_{2,S}) \dot{x}_2) \\ &= \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_3 x_3 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,S}) \right) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_2 x_2 x_4 + \lambda_4 x_4 \left(-\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,S}) \right) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_r \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,S}) x_3 + \lambda_r \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,S}) x_4 . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Dies lässt sich wie schon zuvor in einen Term, in welchem nur x_1 und x_3 explizit auftreten, und einen Term, in welchem nur x_2 und x_4 explizit auftreten, zerlegen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass diese beiden Terme durch den Kreuzterm $d(\vec{x})$ weiterhin gekoppelt sind. Der erste Term ergibt sich zu

$$\dot{V}(x_1, x_3) = x_1 x_3 \left(\lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m} \right) - x_3^2 \lambda_3 \frac{k_v}{m} + x_3 (x_1 - x_{1,S}) \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \underbrace{\left(\lambda_r - \lambda_3 \frac{k_r}{m} \right)}_{\text{III}} . \quad (5.47)$$

Wählt man λ_r so, dass der Kreuzterm III unterdrückt wird

$$\lambda_r = \lambda_3 \frac{k_r}{m} , \quad (5.48)$$

wobei für $k_r > 0$ damit unmittelbar auch die Forderung $\lambda_r > 0$ erfüllt ist, so ergibt sich aus der vorangegangenen Betrachtung für (5.41) direkt die negative Definitheit von $\dot{V}(x_1, x_3)$ bzw. $\dot{V}(x_2, x_4)$ und damit $\dot{V}(\vec{x})$ nach (5.46). Damit ist eine beliebige Ruhelage, welche außerhalb des Einflussbereichs der repulsiven Potentiale liegt, asymptotisch stabil.

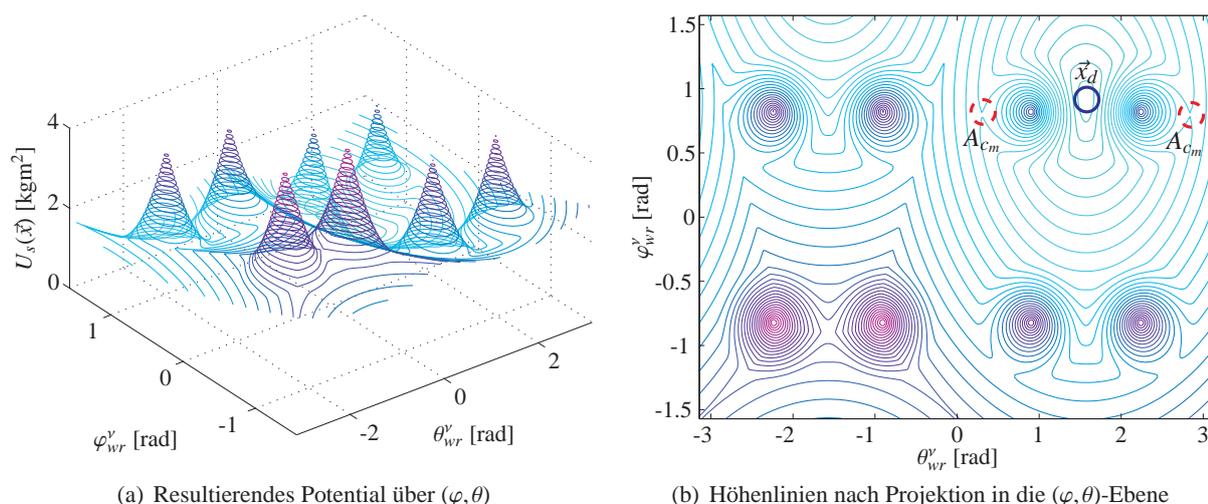


Abbildung 5.5: Potential und zugehörige Höhenlinien in (φ, θ) -Ebene für den geschlossenen Regelkreis bzw. die zugehörige Lyapunov-Funktion. Die fett gestrichelt dargestellten roten Kreise markieren zwei der Regionen A_{c_m} , in denen es zu einem Abschnüren der Potentiale bzw. Höhenlinien kommt. Der fett dargestellte blaue Kreis markiert die Zielkonfiguration \vec{x}_d für das hier berechnete attraktive Potential. Parameter für attraktives Potential: $k_p = 2 \text{ kgm}^2$, $\vec{x}_d = (\pi/2 \text{ rad}, \pi/3.5 \text{ rad})^T$. Parameter für repulsives Potential $k_r = 2.5$, $d_0 = 1.4 \text{ rad}^2$, $(a, b) = (0.5 \text{ rad}, 0.35 \text{ rad})$.

Da die hier verwendete Lyapunov-Funktion (5.45) nicht im gesamten Definitionsbereich stetig differenzierbar ist, kann das Barbashin-Krasovskii-Theorem nicht angewandt werden, um auf globale asymptotische Stabilität zu schließen. Es ist aber möglich, über das „Kriterium für Stabilität im Großen“ nach Föllinger einen Einzugsbereich der Ruhelage zu definieren. Beschränkt man die Stabilitätsbetrachtung auf eine zusammenhängende geschlossene Menge, welche die Singularitäten ausschließt, so bilden die „zusammenhängenden“ Höhenlinien der Lyapunov-Funktion (5.45) die Umrandung eines Gebietes

$$D_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R} \mid V(\vec{x}) \leq c\}, \quad (5.49)$$

in welchem das System bezüglich der Ruhelage \vec{x}_r asymptotisch stabil ist. Abbildung 5.5 zeigt den auf die (φ, θ) -Ebene projizierten Zustandsraum mit Höhenlinien für $\vec{x}_r \equiv \vec{0}$. Die rot-gestrichelt umrandeten Regionen (Abb. 5.5(b)) zeigen die zwei, der Ruhelage am nächsten liegenden Bereiche, in welchen die Höhenlinien abgeschnürt werden. Die der Ruhelage näher liegenden Höhenlinien bilden noch geschlossene Kurven, wohingegen die übrigen Höhenlinien zu nicht-zusammenhängenden Gebieten gehören. Der Bereich, in welchem die Ruhelage asymptotisch stabil ist, ist durch das größte Gebiet D_{c_m} gegeben, zu dem gerade noch eine geschlossene Umrandung c_m existiert.

Es ist anzumerken, dass der Stabilitätsbeweis nach Lyapunov ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium für Stabilität ist. Tatsächlich ist die hier entworfene Regelung in einem größeren Bereich als D_{c_m} asymptotisch stabil. Allerdings existieren außerhalb D_{c_m} neben den Singularitäten noch weitere isolierte kritische Stellen bzw. Bereiche, sodass das System nicht asymptotisch stabil ist.

Die in (5.44) entworfene Zustandsrückführung ist damit ein valider Regelungsansatz, welcher die Singularitäten vermeidet und damit für eine Begrenzung der resultierenden Stellraten sorgt. Bevor in Abschnitt 5.3 ein modellprädiktiver Regler entworfen wird bzw. in Kapitel 7 näher auf Implementierung und Evaluierung der entworfenen Regler eingegangen wird, soll im Folgenden (Abschnitt 5.2.3) noch knapp gerade auch vor dem Hintergrund der praktischen Implementierung auf einige Besonderheiten und Einschränkungen potentialfeldbasierter Ansätze eingegangen werden.

5.2.3 Eigenschaften potentialfeldbasierter Regler

Aus der Form der Lyapunov-Funktion bzw. aus der Analogie zu physikalischen Potentialfeldern lassen sich einige charakteristische Eigenschaften potentialfeldbasierter Regler ablesen. Diese motivieren einige Anpassungen bei der Implementierung des Reglers.

So wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, dass in (5.45) $V(\vec{0}) \neq 0$ gelten wird, wenn sich die ursprüngliche Ruhelage innerhalb der repulsiven Potentiale befindet. Durch die Überlagerung der Potentiale kommt es zu einer Verschiebung der Ruhelage in den Punkt, in welchem gerade ein Kräftegleichgewicht zwischen anziehender und abstoßender Kraft erreicht wird. Die neue Ruhelage \vec{x}_r kann mit der Forderung $\dot{\vec{x}} = 0$ aus (5.44) errechnet werden. Das physikalische Analogon sind z.B. geladene Teilchen, welche gleichzeitig einem Gravitationsfeld und einem elektrischen Feld ausgesetzt sind.

Für das Verhalten des geregelten Systems bedeutet das, dass für Sollwerte in der Nähe der Singularitäten eine Regeldifferenz verbleiben wird. Die Größe dieser Regeldifferenz hängt im Wesentlichen von dem Verhältnis zwischen der Konstanten k_p , die das attraktive Potential charakterisiert, und der Konstanten k_r , die das repulsive Potential charakterisiert, ab. Ob bzw. in welcher Größe eine solche Abweichung zulässig ist, ist im Wesentlichen eine Designentscheidung, die von System zu System unterschiedlich ausfallen kann.

Eine weitere Charakteristik dieses Ansatzes ist, dass der resultierende Regler nicht global asymptotisch stabil ist. So ergeben sich durch die Überlagerung der Potentiale weitere Ruhelagen, also Punkte, in welchen die Ableitung des Zustands (5.44) zu Null wird. Diese Ruhelagen lassen sich in zwei Kategorien unterteilen. Instabile Ruhelagen, welche durch Sattelpunkte im resultierenden Potential (vgl. Regionen A_{c_m} in Abb. 5.5) gekennzeichnet sind bzw. stabile Ruhelagen, welche durch lokale Minima des resultierenden Potentials (vgl. Regionen A_e in Abb. 5.6) gekennzeichnet sind. Dabei liegen Sattelpunkte immer vor, wenn ausreichend starke repulsive Potentiale existieren, sodass diese lokale Maxima im resultierenden Potential ausbilden. Das war gerade Voraussetzung zur Vermeidung kritischer Bereiche. Die Sattelpunkte liegen dann auf der gemeinsamen Verbindungslinie von Ruhelage und lokalem Maximum, jeweils auf der der Ruhelage abgewandten Seite des Potentials. Die Existenz lokaler Minima hängt von der Topologie des Raums bzw. des Problems ab. Einzelne konvexe Hindernisse erzeugen Sattelpunkte, während konkave oder die Überlagerung mehrerer konvexer Hindernisse lokale Minima erzeugen können. Die Beschränkung des Einzugsbereichs der Ruhelage \vec{x}_r über Föllingers Kriterium für Stabilität im Großen in Abschnitt 5.2.2 führt gerade zu einem Ausschluss dieser lokalen Minima bzw. Sattelpunkte.

Die Existenz insbesondere der lokalen Minima ist die wesentlichste Einschränkung der Potentialfeld-Methode nach Khatib. Diese Einschränkung ist letztlich der Grund, warum sich potentialfeldbasierte Ansätze nicht für eine globale Bahnplanung, sondern lediglich für eine lokale Optimierung eignen. Neben Verfahren für die globale Planung von Trajektorien existieren einige von den Potentialfeldern abgeleitete Ansätze, welche die mit diesen lokalen Minima verbundenen Probleme umgehen. Neben weiteren physikalisch motivierten Ansätzen, die z.B. die Regeln für die Superposition elektro-magnetischer Felder zur Grundlage haben, bietet insbesondere die Methode der „Navigationfunctions“ einen Weg, geeignete Felder ohne lokale Extremwerte zu definieren. Die Ableitung dieser Funktionen ist allerdings deutlich komplexer und rechenintensiver.

Für das hier betrachtete Problem wird eine Definition des Regelungsgesetzes auf Basis der Potentialfeld-Methode nach Khatib in aller Regel ausreichen. Die zu vermeidenden Singularitäten sind isolierte Punkte im Zustandsraum und die zugehörigen repulsiven Potentiale sind dementsprechend konvex. Des Weiteren kann angenommen werden, dass die Singularitäten meist ausreichend weit voneinander entfernt sein werden bzw. der Einflussbereich der Potentiale sich hinreichend einschränken lässt, so dass es nicht zu einer Überlagerung ihrer Potentiale kommt.

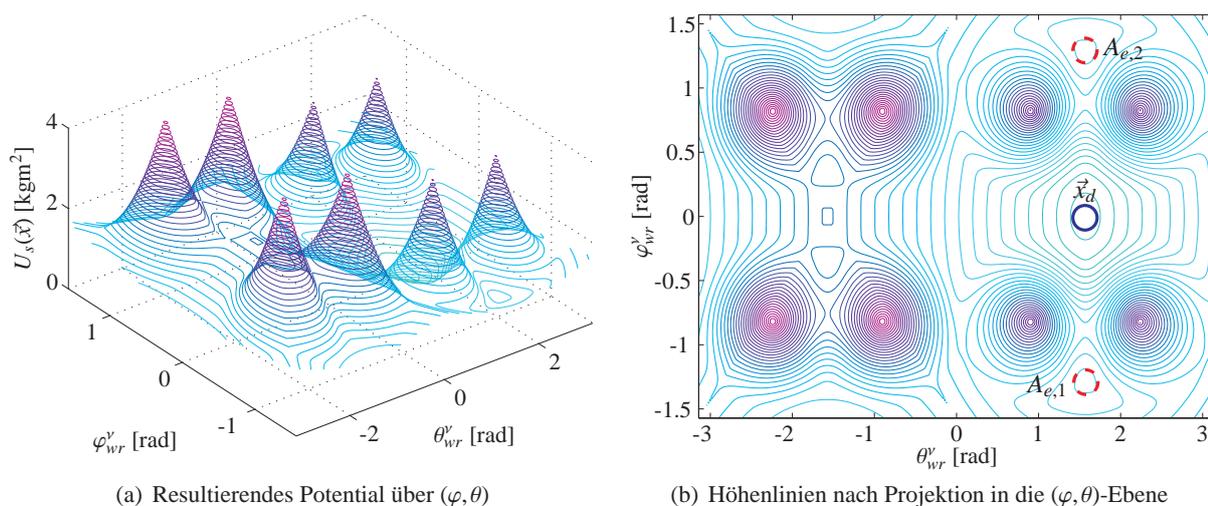


Abbildung 5.6: Potential und zugehörige Höhenlinien in (φ, θ) -Ebene für den geschlossenen Regelkreis bzw. die zugehörige Lyapunov-Funktion. Die fett gestrichelt dargestellten roten Kreise markieren zwei der Regionen A_e , in denen es zu lokalen Minima der Potentiale bzw. Lyapunov-Funktion kommt. Der fett dargestellte blaue Kreis markiert die Zielkonfiguration \vec{x}_d für das hier berechnete attraktive Potential. Parameter für attraktives Potential: $k_p = 1.5 \text{ kgm}^2$, $\vec{x}_d = (\pi/2 \text{ rad}, 0 \text{ rad})^T$. Parameter für repulsives Potential $k_r = 1.5$, $d_0 = 2 \text{ rad}^2$, $(a, b) = (0.5 \text{ rad}, 0.35 \text{ rad})$.

Damit verbleiben die Sattelpunkte als einzige Extremwerte. Diese bilden lediglich instabile Ruhelagen. Vor dem Hintergrund der Anwendung in einem realen, technischen System kann immer von kleinen Störungen ausgegangen werden. Das System wird daher nicht dauerhaft in einer instabilen Ruhelage verharren. Durch die Einführung einer zufallsbasierten kleinen Störung im Stellgrößenvektor ist es z.B. möglich, dieses Verhalten weiter zu verstärken bzw. unabhängig von äußeren Einflüssen zu garantieren.

Neben diesen prinzipbedingten Eigenschaften gibt es noch einige weitere Charakteristika potentialfeldbasierte Ansätze, die in engem Zusammenhang mit der Implementierung des Reglers stehen. Die wichtigsten sollen hier kurz vor dem Hintergrund der Stabilität des geregelten Systems umrissen werden. Das zuvor gewählte Potential bestraft zwar hohe Stellraten, setzt diesen allerdings keine feste Grenze. Khatib hat bereits in seiner grundlegenden Arbeit zu potentialfeldbasierten Reglern (Khatib 1986) eine einfache Methode zur Umsetzung einer solchen Begrenzung, welche zum Grundgedanken des Potentialfeldansatzes passt, vorgeschlagen. Betrachtet man das Regelungsgesetz (5.44), so erkennt man, dass die erste Ableitung (x_3, x_4) der ursprünglichen Zustandsgrößen (x_1, x_2) umso größer werden wird, je weiter der Weg von Anfangsposition zu Ruhelage ist. Das Maximum der erreichten Geschwindigkeit ergibt sich dabei aus dem Verhältnis von „Federkonstante“ k_p zu „Reibungskoeffizient“ k_v . Der exakte Verlauf ließe sich durch Lösen der durch (5.28) gegebenen linearen Differentialgleichung errechnen. Dieses Maximum bzw. dieser ideale Wert, in welchem das System in einem Kräftegleichgewicht ist, lässt sich ausnutzen, um den Term bezüglich der attraktiven bzw. dissipativen Kräfte in (5.44) in Form einer Geschwindigkeitsregelung zu formulieren

$$\begin{aligned} \vec{u}_{x_3} &= -k_v(x_3 - x_{3,d}) \\ x_{3,d} &= \frac{k_p}{k_v}(x_{1,r} - x_1) . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Setzt man $x_{3,d}$ in die obere Gleichung ein und geht man für x_4 bzw. x_2 analog vor, erhält man unmittelbar die ursprüngliche Formulierung der Rückführung ohne Singularitätsvermeidung. Um die Geschwindigkeit

nun zu begrenzen, lässt sich folgende angepasste Rückführung formulieren

$$\vec{u} = -k_v(\dot{\vec{x}}_{\text{ICM}} - v\dot{\vec{x}}_{\text{ICM},d}) \quad (5.51)$$

$$v = \min\left(1, \frac{v_{\text{max}}}{|\dot{\vec{x}}_{\text{ICM},d}|}\right), \quad (5.52)$$

wobei zur Vereinfachung $(x_3, x_4)^T$ als $\dot{\vec{x}}_{\text{ICM}}$ geschrieben wurde. Betrachtet man Gleichung (5.51) und (5.52), so erkennt man, dass die Anpassung der virtuellen Sollgröße $\dot{\vec{x}}_{\text{ICM},d}$ in (5.52) einer relativen Erhöhung der Konstanten k_v bzw. einer Reduktion der Proportionalitätskonstanten k_p entspricht. Das bedeutet, dem System wird zusätzliche Energie entzogen. Die angepasste Rückführung (5.51), (5.52) wirkt sich damit nicht destabilisierend auf das System aus.

Dieser Ansatz lässt sich mit leichten Anpassungen auf das System mit Zustandsrückführung zur Singularitätenvermeidung erweitern. Definiert man die Gleichgewichtsgeschwindigkeit über die Summe aller attraktiver und repulsiver Kräfte, ergibt sich für $x_{3,d}$ bzw. analog für $x_{4,d}$

$$x_{3,d} = \frac{k_p}{k_v}(x_{1,r} - x_1) - \frac{k_r}{k_v} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})}(x_{1,s} - x_1), \quad (5.53)$$

$$x_{4,d} = \frac{k_p}{k_v}(x_{2,r} - x_2) - \frac{k_r}{k_v} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})}(x_{2,s} - x_2). \quad (5.54)$$

Bei der Anpassung der Rückführung ergeben sich Abweichungen im Detail. Da der Ansatz nach (5.52) die Proportionalitätskonstanten reduziert, kann die Systemtrajektorie tiefer in ein repulsives Potential eindringen als vorgesehen. Möglichkeiten, dieses Problem zu mindern, sind in Anhang E.2 erläutert.

Neben der Begrenzung der Änderung der Konfiguration des sphärischen Twists mindert dieser Ansatz auch einige der Probleme vor dem Hintergrund der Diskretisierung des Reglers bei Implementierung als rechnerausführbares Programm. Bisher wurde das System zeitkontinuierlich betrachtet. Bei der Implementierung auf einem Mikrocontroller oder PC wird die Regelung aber immer in diskreten Zeitschritten ausgeführt werden. Hier kann es bei Potentialen, die einen sehr hohen Gradienten aufweisen, sei es dass die Potentiale sehr eng begrenzt sind oder schlicht sehr stark ausgeprägt sind, zu Problemen kommen. So kann die in Schritt t_k – in welchem das System ggf. außerhalb der repulsiven Potentiale war – abgeleitete Stellgröße z.B. zu einem tieferen Eintauchen in das Potential führen, als eigentlich auf Basis der Energiebilanz möglich. Das bedeutet, die Energie des Systems nimmt zu. Es wird destabilisiert. Dies kann, gerade in der Nähe von Sattelpunkten zu Oszillationen an den Grenzen der repulsiven Potentiale führen. Im Extremfall kann es sogar zu einem „Durchbrechen“ der Maxima in den Potentialen kommen.

Probleme solcher Art sind charakteristisch für viele Typen diskreter Systeme, z.B. im Bereich der Simulation oder Regelung von Kontaktkräften. Dementsprechend existiert eine Vielzahl von möglichen Herangehensweisen, mit diesen Situationen umzugehen. Die Ansätze reichen von einer feineren Diskretisierung der Zeitauflösung (insbesondere bei Simulation), über die Berechnung von Gleichgewichtslagen und Nulldurchgängen (wie gerade für die Geschwindigkeit geschehen) bis hin zur Prädiktion der Zustände über einen gewissen Vorhersagehorizont und entsprechender Anpassung der Stellgrößen.

Die zuvor diskutierte Begrenzung der Geschwindigkeit stellt im Wesentlichen gerade eine dieser Methoden zur Handhabung der Diskretisierung dar. Sie entspricht der Berechnung von Gleichgewichtslagen bzw. Nulldurchgängen bezüglich der auf das „Teilchen“ wirkenden „Kraft“. Im nächsten Abschnitt wird vor dem Hintergrund einer diskreten Regelung zusätzlich der Entwurf eines modellprädiktiven Reglers untersucht. Eines Reglers also, welcher die erwartete, zukünftige Entwicklung des Systems in die Bestimmung der gegenwärtigen Regelgröße mit einbezieht. Grundlage für die Wahl eines geeigneten Gütekriteriums werden dabei die im Rahmen dieses Abschnittes entwickelten Potentialfelder sein.

5.3 Reglersynthese über Modellprädiktion

5.3.1 Modellprädiktive Regelung – Struktur und Eigenschaften

Im vorangegangenen Abschnitt 5.2 wurde der Entwurf eines Reglers auf Basis der Methode der virtuellen Potentiale nach Khatib diskutiert. Dazu wurde eine Augmentierung des Zustandsraums durchgeführt und Randbedingungen, wie die singulären Bereiche in Form von Potentialen in das Gütekriterium mit einbezogen. Durch Ableitung des Potentials wird eine – die Energie des Systems minimierende – Regelgröße bestimmt. Dieses Vorgehen führt zu einer lokalen Optimierung des Systems.

Der zuvor vorgestellte potentialfeldbasierte Regler bezieht allerdings nicht die zukünftige Entwicklung des Systems mit ein. So wirken sich die repulsiven Potentiale erst dann auf die Trajektorie des geregelten Systems aus, wenn der Zustand innerhalb des Einflussbereichs der Potentiale liegt (Abb. 5.7(a) grün gestrichelter Pfad). Es kann jedoch vor dem Hintergrund kleinerer Stellgrößen bzw. weicherer Systemtrajektorien durchaus sinnvoll sein, frühzeitig einer Singularität auszuweichen, auch wenn dadurch kurzfristig ein lokal energiereicherer Zustand angenommen wird (Abb. 5.7(a) orange gepunkteter Pfad).

In diesem Abschnitt wird der Entwurf eines modellprädiktiven Reglers (MPC) skizziert. Dies erlaubt gerade diese Einbeziehung der zukünftigen Entwicklung des geregelten Systems. Grundlage der modellprädiktiven Regelung sind die Prinzipien der strukturoptimalen Regelung bzw. „Optimal Control“.

Im Bereich der „optimalen Regelung“ (Kirk 2004) existiert eine Vielzahl von Methoden, die diese Problemstellung behandeln. Prominente Beispiele sind die Methode des „Dynamic Programming“ nach R. E. Bellmann (Bellmann und Dreyfus 1962; Bellmann und Kalaba 1965) bzw. das auf der Variationsrechnung beruhende „Pontryagin-Minimum-Prinzip“ (Pontryagin u. a. 1962). Beide Ansätze erlauben bei geeigneter Definition des Gütekriteriums

$$J = \Phi(\vec{x}(t_f)) + \int_{t=t_0}^{t_f} \mathcal{L}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt, \quad (5.55)$$

wobei $\Phi(\vec{x}(t_f))$ die Bestrafung des Endzustands und $\mathcal{L}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$ das Gütekriterium bezüglich der geregelten Trajektorie beschreibt, sowie bei bekannter Systemdynamik

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (5.56)$$

die Berechnung eines global optimalen Regelgesetzes \mathbf{K}^* bzw. der optimalen Regelgröße \vec{u}^* . Dabei kann das Regelgesetz je nach Form des Gütekriteriums, des Systems oder der Endbedingungen linear, nicht-linear, zeitvariant oder zeit-invariant sein.

Beide Ansätze beruhen auf der Idee, das Optimierungsproblem „rückwärts“ zu lösen und führen auf ein System gekoppelter partieller, gegebenenfalls nicht-linearer Differentialgleichungen. Diese Differentialgleichungen müssen zur Ableitung des Regelungsgesetzes für ein gegebenes Optimierungsproblem $O(J(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t), \vec{a}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t), \mathbf{X}_{t_f})$ analytisch oder numerisch gelöst werden. Dabei ist zu beachten, dass die Endbedingungen \mathbf{X}_{t_f} selbst eine Funktion mehrerer Zustandsvariablen und oder der Zeit t sein können. Dabei wird implizit angenommen, dass die Randbedingungen wie Gütekriterium, Systemdynamik, gewünschter Endzustand sich für eine gewisse Zeit nicht ändern bzw. diese Änderung bekannt und analytisch beschreibbar ist. Typische Beispiele für einen sich ändernden Endzustand sind z.B. das Landen auf einem Flugzeugträger oder das Abfangen einer Rakete mit bekannter Flugbahn ((Kirk 2004), S. 44 ff.). In solchen Fällen kann das optimale Regelgesetz vorab offline berechnet werden. Solange die Randbedingungen, bezüglich derer die Optimierung durchgeführt wurde, noch gelten, kann die Regelgröße \vec{u} dann durch vollständige Zustandsrückführung über das zuvor ermittelte Regelgesetz bestimmt werden.

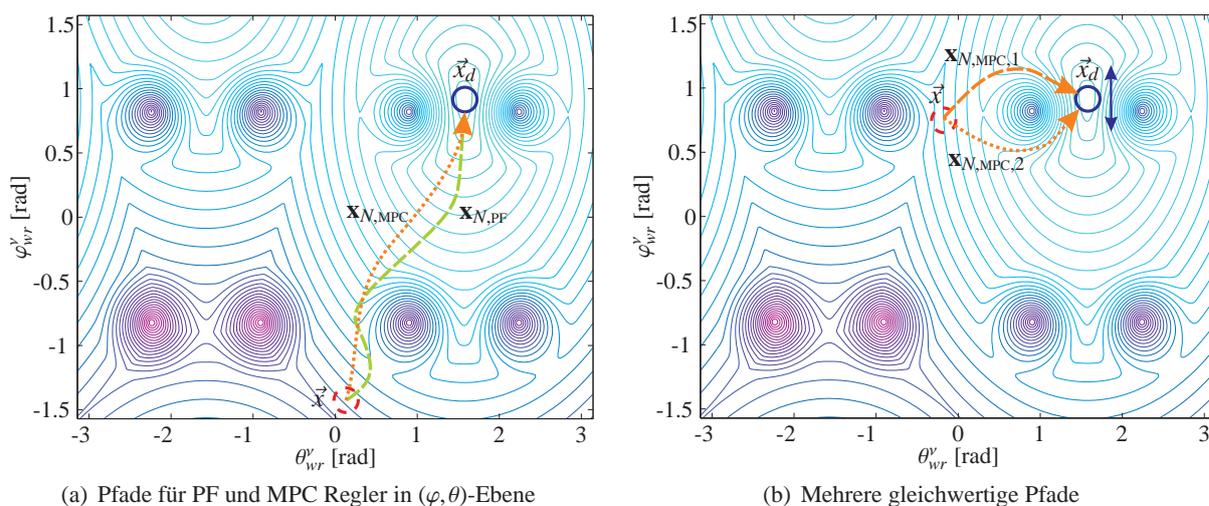


Abbildung 5.7: Die Abbildung zeigt das bereits in Abbildung 5.5 diskutierte Gütekriterium bzw. Potential zusammen mit qualitativen Skizzen für die zu erwartenden Pfade bei Verwendung eines potentialfeldbasierten (PF) bzw. modellprädiktiven Reglers (MPC). Die zugehörige Sollgröße \vec{x}_d ist durch einen blauen Kreis gekennzeichnet, die Istgröße \vec{x} durch einen roten gestrichelten Kreis. Abbildung 5.7(a) stellt die qualitativen Unterschiede zwischen den resultierenden Pfaden für einen PF (gestrichelt, grün) und einen MPC (gepunktet, orange) Ansatz dar. Es ist zu erwarten, dass der PF Ansatz den Höhenlinien dichter folgt, dafür aber evtl. einen längeren Pfad bzw. höhere Stellgrößen in Kauf nimmt. Abbildung 5.7(b) stellt eine Situation dar, in welcher mehrere gleichwertige Lösungen (Pfeile, orange) für das Optimierungsproblem existieren.

Ändern sich die Randbedingungen der Optimierung hingegen schnell und sind diese Änderungen vorab nicht zu erfassen oder weist das Gütekriterium bzw. die Systemdynamik starke Nichtlinearitäten auf, so muss das Regelgesetz im Extremfall in jedem Zeitschritt neu berechnet werden. Diese Durchführung einer online Optimierung während jedes Zeitschrittes zeichnet gerade die modellprädiktive Regelung (MPC) aus. Dabei wird auf Basis des gegenwärtigen Zustands unter Kenntnis der Systemdynamik das Optimierungsproblem für einen finiten Zeithorizont gelöst. Das Ergebnis ist ein optimaler Stellgrößenvektor \vec{u}^* , von dem der jeweils aktuelle Wert als Regelgröße an das System kommandiert wird. Im nächsten Zeitschritt wird das Optimierungsproblem erneut für den um einen Schritt verschobenen Zeithorizont gelöst, daher auch die Bezeichnung Receding Horizon Control (RHC) (Rawlings 2000). Die wesentlichen Komponenten des modellprädiktiven Reglers sind dabei das gegebenenfalls zustandsabhängige, zeitvariable Gütekriterium, das Systemmodell, welches die Vorhersage der Zustandsentwicklung über den betrachteten Horizont erlaubt, sowie der zur Optimierung verwandte Ansatz (Abb. 5.8).

Das hier betrachtete System ist bei Einbeziehung der Singularitäten dadurch gekennzeichnet, dass der zulässige Zustandsraum bzw. das aus der Superposition mit den repulsiven Potentialen resultierende Gütekriterium nicht konvex ist. Es existieren verbotene Bereiche, die von zulässigen Bereichen umschlossen sind, nicht umgekehrt. Da zusätzlich der angestrebte Endwert $\vec{x}(t_f)$ sich in jedem Zeitschritt ändern kann und diese Änderung, insbesondere vor dem Hintergrund von Teleoperation bzw. Mensch-Maschine-Interaktion, nicht a priori bekannt ist, muss die Optimierung in jedem Zeitschritt erneut durchgeführt werden. Abbildung 5.7(b) zeigt ein Optimierungsproblem für zwei dicht beieinander liegende Sollwerte $\vec{x}_1(t_f)$ und $\vec{x}_2(t_f)$ der Fahrwerkskonfiguration. Obwohl beide Werte vergleichsweise dicht beieinander liegen, unterscheiden sich die jeweils optimalen Regelgesetze und zugehörigen Systemtrajektorien stark.

Die folgenden Abschnitte diskutieren den Entwurf eines entsprechenden modellprädiktiven Reglers für die Regelung von Fahrwerkskinematiken unter dem Blickwinkel der Singularitätenvermeidung. Zunächst wird in Abschnitt 5.3.2 ein geeignetes Gütekriterium vorgestellt und die damit verbundenen Eigenschaf-

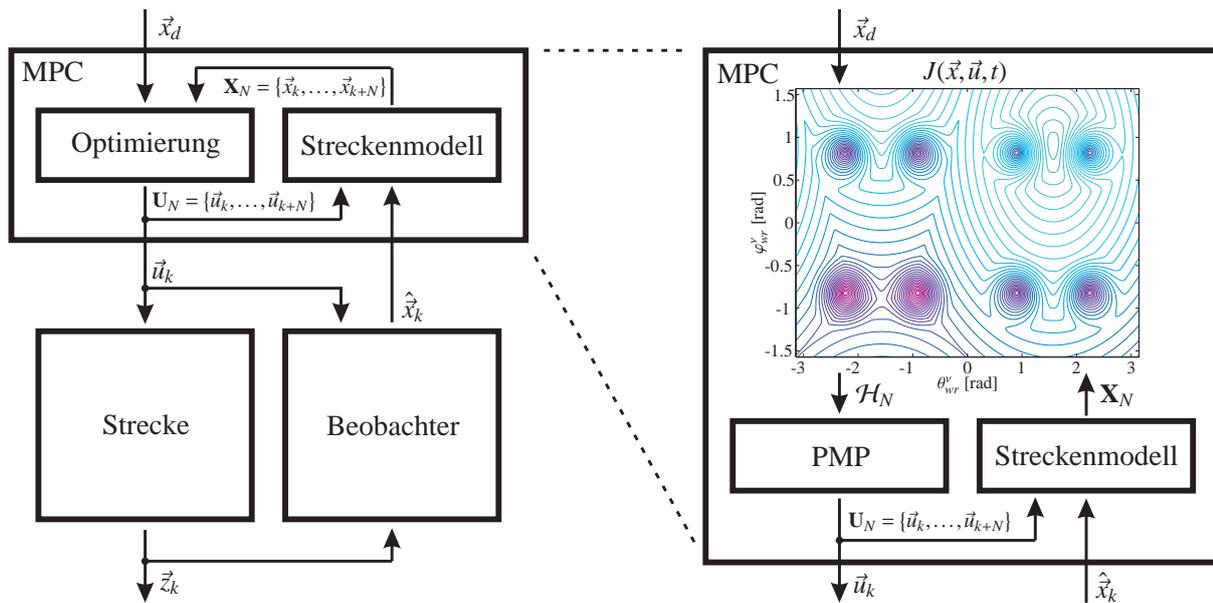


Abbildung 5.8: Schematische Darstellung eines modellprädiktiven Reglers: Zur Durchführung der Optimierung wird hier exemplarisch das Pontryagin-Minimum-Prinzip (PMP) eingesetzt. Es bezeichnen \mathbf{U}_N bzw. \mathbf{X}_N die Serie der optimalen Stellgrößen bzw. resultierenden, prädizierten Zustandsvektoren und \mathcal{H}_N die aus dem Gütekriterium J abgeleitete Hamilton-Funktion.

ten des Reglers hinsichtlich Stabilität diskutiert. Abschnitt 5.3.3 beschäftigt sich mit dem eigentlichen Optimierungsproblem bzw. der numerischen Durchführung der Optimierung.

Bevor der Entwurf des Gütekriteriums und die zugehörigen Stabilitätsbetrachtungen weiter ausgeführt werden, wird knapp die Struktur des betrachteten Systems diskutiert. Ob überhaupt ein einzelnes globales Minimum existiert und ob dieses, falls es existiert, durch die Ansätze der optimalen Regelung zu ermitteln ist, hängt gerade von dieser Struktur des Systems ab. Eine detaillierte Einführung in die Anwendung und Konzepte unterschiedlicher modellprädiktiver Regler sowie deren spezifischer Stabilitätseigenschaften findet sich in (Rawlings 2000) bzw. (Mayne und Michalska 1990; Michalska und Mayne 1993).

Für die Existenz eines einzelnen ausgezeichneten Minimums wird hier zum einen gefordert, dass Systemdynamik \vec{d} sowie das Gütekriterium \mathcal{L} entlang der Trajektorie im Zustandsraum und das Gütekriterium $\Phi(\vec{x}(t_f))$ bzgl. des Endzustands stetig seien. Die in Abschnitt 5.2 definierte Lyapunov-Funktion, die im Folgenden die Vorlage für \mathcal{L} bzw. $\Phi(\vec{x}(t_f))$ bildet, erfüllt diese Stetigkeitsbedingung im gesamten Zustandsraum und aufgrund ihrer Zeitinvarianz für alle Zeiten t . Auch die Systemdynamik

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{d}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \\ &= (x_3, x_4, \frac{u_1}{m}, \frac{u_2}{m})^T \end{aligned} \quad (5.57)$$

erfüllt unter Beachtung der 2π -Periodizität die Stetigkeitsbedingung.

Die zweite Forderung ist, dass zum einen die Menge der zulässigen Regelgrößen \mathbb{U} kompakt sei. Das ist für das augmentierte System auch unter Einbeziehung etwaiger zusätzlicher Stellgrößenbeschränkungen erfüllt. Zum anderen muss der zulässige Konfigurationsraum \mathbb{X} bzw. die Menge zulässiger Endzustände $\mathbf{X}(t_f)$ abgeschlossen sein. Für die Menge zulässiger Endzustände $\mathbf{X}(t_f)$ kann diese Forderung als erfüllt angenommen werden. Im hier betrachteten Kontext wird der gewünschte Endzustand als einzelner Punkt gegeben sein und damit diese Forderung trivial erfüllen. Allerdings erfüllt der Zustandsraum nach Ab-

schnitt 4 die geforderten Eigenschaften aufgrund seiner Periodizität nicht. Wie in den vorangegangenen Abschnitten erläutert, sind aufgrund der Mehrdeutigkeiten drei unterschiedliche, topologisch verschiedene Pfade von gegebener Konfiguration zu Zielkonfiguration möglich. Je nach Situation ist es prinzipiell möglich, dass mehrere oder alle dieser Pfade gleichermaßen geeignet sind.

Für jeden der drei möglichen Pfade lässt sich jedoch durch „Auftrennen“ des Zustandsraums und Abbildung der Zielkonfiguration in die entstehende Lösungsdomäne ein separates Optimierungsproblem formulieren. Für dieses Optimierungsproblem kann der aufgetrennte Zustandsraum \mathbb{X}' dann in \mathbb{R}^3 eingebettet werden und hat eine konvexe Form. Genauer gesagt: Der aufgetrennte Zustandsraum lässt sich als geschlossene Einbettung in \mathbb{R}^3 darstellen.

Ein mögliches Vorgehen wäre das Optimierungsproblem für die drei Lösungsdomänen getrennt zu lösen und anschließend die gefundene Lösung $\vec{\mathbf{u}}_1(x(\vec{t}), t)$, $\vec{\mathbf{u}}_2(x(\vec{t}), t)$, $\vec{\mathbf{u}}_3(x(\vec{t}), t)$ in das Gütekriterium einzusetzen. Diejenige Lösung, für welche J den kleinsten Wert annimmt, ist dann die global optimale Lösung. Das würde allerdings einen hohen Rechenaufwand mit sich bringen. Zudem müsste zum Vergleich der Lösungen ein hinreichend großer Prädiktionshorizont gewählt werden, da weiter entfernte repulsive Potentiale während der ersten Schritte gegebenenfalls nicht in das Gütekriterium eingehen. Daher wurde, wie im Abschnitt zur Implementierung näher erläutert, ein Ansatz gewählt, der auf Basis empirischer Regeln eine Vorauswahl zwischen den drei möglichen Pfaden trifft. Das System wird dann auf eine für die ausgewählte Lösung geeignete Einbettung des Zustandsraums in \mathbb{R}^3 abgebildet und das Optimierungsproblem wird bezüglich dieser Einbettung gelöst.

Das Vorgehen bzw. die Eigenschaften des resultierenden Optimierungsproblems, wie Stabilität bzw. Möglichkeit der Ermittlung der optimalen Lösung, sind dabei bei allen drei Einbettungen identisch. Zur Vereinfachung sei dabei die jeweilige Einbettung des Zustandsraums so gewählt, dass die Zielkonfiguration im Ursprung des entstehenden Raums zu liegen kommt. Im Folgenden wird das Gütekriterium beziehungsweise der resultierende modellprädiktive Regler bezüglich eines so definierten Zustandsraums untersucht.

5.3.2 Gütekriterium und Stabilität des modellprädiktiven Reglers

Als Ausgangspunkt für den Entwurf des Gütekriteriums dient der in Abschnitt 5.2 entworfene Regler auf Basis des Potentialfeld-Ansatzes. Es wurde bereits gezeigt, dass sich aus der Superposition attraktiver, dissipativer und repulsiver Potentiale ein Gütekriterium ergibt, das sowohl die Vermeidung der kritischen Bereiche erlaubt, als auch auf ein nach Lyapunov asymptotisch stabiles System führt.

Die Güte des Endzustands $\Phi(\vec{\mathbf{x}}(t_f))$ sei durch die in Gleichung (5.45) definierte Lyapunov-Funktion gegeben. In Matrixnotation lässt sich dieser Term schreiben als

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{x}}(t_f)) &= U_p(\vec{\mathbf{x}}) + U_d(\vec{\mathbf{x}}) + U_s(\vec{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_p(t_f) \vec{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \vec{\xi}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_s(\vec{\mathbf{x}}, t_f) \vec{\xi}(\vec{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (5.58)$$

wobei $U_s(\vec{\mathbf{x}})$ gerade die repulsiven Potentiale nach Gleichung (5.33) und $\vec{\xi}(\vec{\mathbf{x}})$ die Differenz zwischen euklidischem Abstand des gegenwärtigen Zustands und den N Singularitäten und dem Wirkungsbereich des Potentials bezeichnet

$$\vec{\xi}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{d}_0 - \vec{d}(\vec{\mathbf{x}}). \quad (5.59)$$

Die Proportionalitätsfaktoren bezüglich der attraktiven und der dissipativen Kraft sind in $\mathbf{Q}_p(t_f)$ zusammengefasst. Dabei soll die Abhängigkeit von t_f keine Zeitvarianz anzeigen, sondern lediglich darauf hinweisen, dass es sich um die Güte bezüglich des Endzustandes handelt. Die Steigung und der Einfluss-

bereich der repulsiven Potentiale wird durch die Matrix $\mathbf{Q}_s(\vec{x}, t_f)$ bestimmt, die dadurch implizit vom Zustand \vec{x} abhängt:

$$\mathbf{Q}_s(\vec{x}, t_f) = \text{diag}(k_{r,1}(\sigma(\xi_1) - \langle \delta(\xi_1), \frac{1}{2} \rangle), \dots, k_{r,N}(\sigma(\xi_N) - \langle \delta(\xi_N), \frac{1}{2} \rangle)). \quad (5.60)$$

Das Gütekriterium entlang der Zustands- bzw. Regeltrajektorie lässt sich in Anlehnung an (5.58) wählen

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, t) = \frac{1}{2} \vec{x}^T \mathbf{Q}'_p \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{\xi}(\vec{x})^T \mathbf{Q}'_s(\vec{x}) \vec{\xi}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{u}^T \mathbf{R} \vec{u}, \quad (5.61)$$

wobei eine zusätzliche Bestrafung \mathbf{R} der Stellgrößen eingeführt wurde. Diese Bestrafung verhindert, dass die Optimierung auf unendlich große Stellgrößen führt. Es bezeichnen \mathbf{Q}'_p und $\mathbf{Q}'_s(\vec{x})$ die Matrizen, welche die attraktiven, dissipativen und repulsiven Kräfte spezifizieren.

Es existiert eine Vielzahl von Ansätzen, Stabilität für modellprädiktive Regler zu zeigen. Ein sehr umfassender Überblick ist in (Mayne und Michalska 1990) gegeben. Dort werden die unterschiedlichen Ansätze auf zwei wesentliche Prinzipien zurückgeführt: Zum einen die „Direkte Methode“ nach Lyapunov, zum anderen über Monotoniekriterien für die Lyapunov-Funktion. Da bereits im vorangegangenen Abschnitt eine Untersuchung nach Lyapunov durchgeführt wurde, bietet sich dieser Ansatz auch für den entworfenen modellprädiktiven Regler an.

Nach Mayne werden die Stabilitätseigenschaften eines modellprädiktiven Reglers durch drei wesentliche Elemente bestimmt: Die Gesamtheit X_f der zulässigen finalen Zustände bei Erreichen des finiten Horizonts, der Regelgröße $\vec{u}(t_f)$ bzw. dem Regelgesetz $\vec{k}_{t_f}(\vec{x})$ für den letzten Zeitpunkt sowie die Bestrafung des Endzustands $\Phi(\vec{x}(t_f))$. Dabei wird angenommen, dass nach Erreichen der Endzone auf einen stabilisierenden Regler \vec{k}_{t_f} umgeschaltet werden kann. Unter der Annahme, dass der modellprädiktive Anteil den Zustand innerhalb des Horizonts in diesen Endbereich überführen kann, ist dann der gesamte modellprädiktive Regler stabil, wenn die charakteristischen Elemente X_f , $\mathbf{K}(t_f)$ und $\Phi(\cdot)$ die folgenden Forderungen erfüllen:

1. X_f ist Teil der Menge aller zulässigen Zustände \mathbb{X} ($X_f \in \mathbb{X}$), wobei gilt, X_f ist abgeschlossen und beinhaltet den Ursprung (bzw. die Ruhelage des geregelten Systems),
2. innerhalb der Menge aller zulässigen Endzustände X_f ist die Regelgröße $\vec{u}(t_f)$ Element der zulässigen Regelgrößen \mathbb{U} ($\vec{u}(t_f) \in \mathbb{U} \forall \vec{x} \in X_f$),
3. X_f ist positiv invariant unter $\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f)$,
4. $\Phi(\vec{x}(t_f)) + \mathcal{L}(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f) \leq 0, \forall \vec{x} \in X_f$.

Dabei muss $\Phi(\cdot)$ eine gültige Lyapunov-Funktion sein. Unter der Voraussetzung, dass X_f eine Niveaumenge bzw. Subniveaumenge von $\Phi(\cdot)$ ist – das heißt, die Grenze von X_f beschreibt eine geschlossene Höhenlinie bezüglich $\Phi(\cdot)$ – ist nach Mayne die vierte Forderung eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der dritten Forderung.

Die detaillierte Durchführung der Stabilitätsbetrachtung findet sich in in Anhang D. Dort wird in Abschnitt D.1 zunächst der Fall des linearen Systems ohne Singularitätsvermeidung exemplarisch betrachtet. Dann wird in Abschnitt D.2 der Fall des Systems mit Singularitätsvermeidung und dem damit einhergehenden nicht-konvexen Gütekriterium diskutiert. Als Regelgesetz für den finalen Zustand nach Erreichen des Horizonts wurde dabei im ersten Fall der lineare, im zweiten Fall der nicht-lineare potentialfeldbasierte Regler angesetzt.

Die Ergebnisse führen auf ein leicht verändertes Gütekriterium, in welchem nun auch nicht-diagonale

Elemente auftreten

$$\mathbf{Q}_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_{13} & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_{24} \\ \lambda_{13} & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_{24} & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}'_p = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \lambda'_{13} & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 & \lambda'_{24} \\ \lambda'_{13} & 0 & \lambda'_3 & 0 \\ 0 & \lambda'_{24} & 0 & \lambda'_4 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Mit diesem Gütekriterium folgt bei geeigneter Wahl der Parameter nach Abschnitt D.1 für den Ansatz des linearen Regelgesetzes globale asymptotische Stabilität des modellprädiktiven Reglers. Für den nicht-linearen Ansatz mit Singularitätsvermeidung kann gezeigt werden, dass Forderung 4 in einem begrenzten Bereich des Zustandsraums D_ψ erfüllt ist. Dabei ist D_ψ gerade die Menge aller Zustände, welche die Ungleichung (D.37)

$$0 \geq \frac{1}{2} r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r + \frac{\|\vec{x}\|^2}{|d(\vec{x}) - d_0|^2} \left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right) - \cos(\psi) \frac{\|\vec{x}\|}{|d(\vec{x}) - d_0|} \left(-\lambda_{13} \frac{k_r}{m} + r_1 \frac{k_p k_r}{m^2} \right) \quad (5.64)$$

für alle Singularitäten erfüllen. Berechnet man die Höhenlinien zu der Funktion auf der rechten Seite von (5.64), so findet man, dass diese geschlossene Kurven um die Singularität bilden, in deren Wirkungsbe-
reich sich der Zustand \vec{x} befindet. Abbildung 5.9 stellt die resultierenden Höhenlinien für eine Beispiel-
parametrierung dar. Der Sollzustand wurde dabei in den Ursprung gelegt. Dargestellt sind lediglich die
negativen Anteile der Ableitung, welche die Ungleichung (5.64) erfüllen. Man kann erkennen, dass der
Bereich zwischen Ursprung und Singularität (blaue Sterne in Abbildung 5.9(b)) zulässig ist, während sich
im „Rücken“ der Singularität ein unzulässiger Bereich ergibt.

Für Sollzustände, welche sehr dicht an der Grenze der Wirkungsbereiche der Singularitäten (schwarze
Kreise in Abbildung 5.9(b)) liegen, wachsen die unzulässigen Bereiche stark an. Bei entsprechender Wahl
der Parametrierung lässt sich jedoch auch in diesen Fällen eine konservative Abschätzung $D_{\psi,i}$ der zuläs-
sigen Bereiche vornehmen. Abbildung 5.10(a) stellt die resultierenden Höhenlinien für eine Beispielpara-
metrierung und eine einzelne Singularität dar. Gezeigt ist der explizite Verlauf der Höhenlinien für eine
konkrete Sollkonfiguration sowie eine konservative Abschätzung für beliebige Sollkonfigurationen (rot
gestrichelter Kreis in Abbildung 5.10(a) bzw. 5.10(b)). Dabei soll wie zuvor gelten, dass die Sollkonfi-
guration selbst außerhalb der Wirkbereiche der repulsiven Potentiale liegt. Der Bereich $D_{\psi,i}$ wird gerade
durch die zum Niveau Null gehörende Subniveaumenge bezüglich der Singularität i gebildet. Das sind
alle Zustände, die von der Singularität i aus betrachtet jenseits der Niveaulinie zu Niveau Null liegen. Der
Bereich D_ψ ergibt sich dann als Schnittmenge aller Mengen $D_{\psi,i}$.

In diesem Bereich D_ψ gilt, wie in Anhang D.2 gezeigt, des Weiteren, dass $\Phi(\cdot)$ alle Eigenschaften einer
Lyapunov-Funktion besitzt. Wählt man also X_f als eine Subniveaumenge D_c zu J (5.55), die Teilmenge
der Menge D_ψ ist

$$X_f = \{D_c | D_c \in D_\psi\}, \quad (5.65)$$

so ist Forderung 3 implizit durch Forderung 4 erfüllt. Ist D_c gleichzeitig eine zusammenhängende Men-
ge, so ist zusätzlich auch die erste Forderung erfüllt. Dabei ist D_c gerade dann eine zusammenhängende
Menge, wenn eine geschlossene Niveaulinie zu D_c existiert. Diese Forderung war schon zuvor bei der Dis-
kussion des nichtlinearen potentialfeldbasierten Reglers untersucht worden. Auch für das hier verwandte

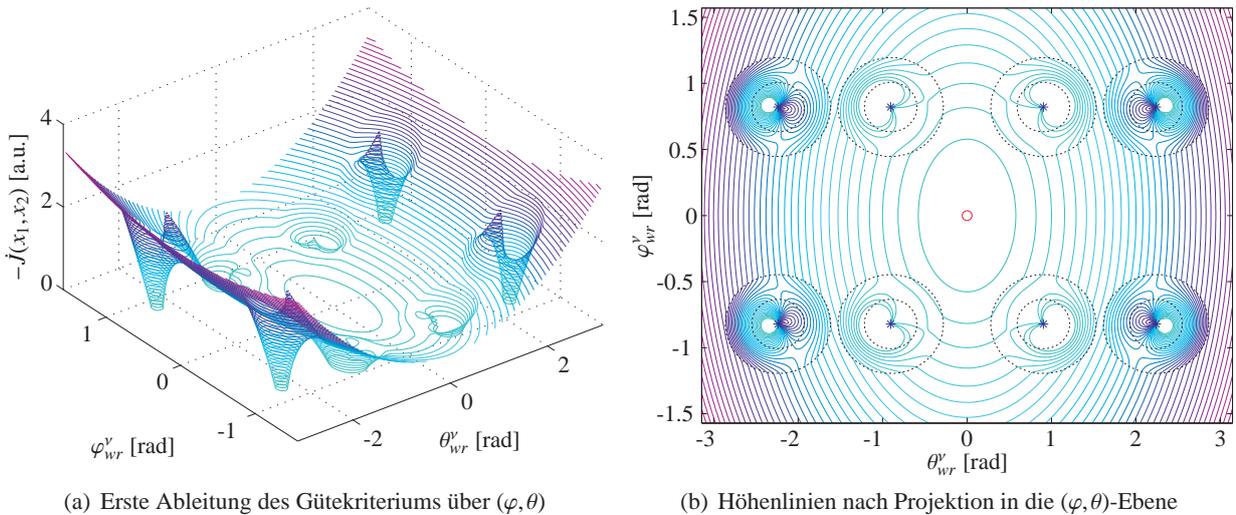


Abbildung 5.9: Darstellung der ersten Ableitung des Gütekriteriums für $(x_3, x_4) \equiv \vec{0}$. Dargestellt sind lediglich die Höhenlinien bezüglich des negativen Bereichs, in welchem die Ungleichung (5.64) für die gegebene Zielgröße (roter Kreis im Ursprung von Abbildung 5.9(b)) erfüllt sind. Die blauen Sterne in Abbildung 5.9(b) kennzeichnen die Lage der Singularitäten, die schwarzen gestrichelten Kreise die zugehörigen Wirkungsbereiche. Parametrierung (einheitenlos): $k_p = 1.0$, $\vec{x}_d = (0, 0)^T$, $k_r = 4.0$, $d_0 = 1.25$, $(a, b) = (0.5, 0.35)$, $m = 1.75$, $\lambda'_1 = 1.0$, $\lambda'_r = 4.0$, $r_1 = 1.0$, $\lambda_{13} = 5.0$.

Gütekriterium lassen sich ganz analog Bereiche finden, in denen diese Forderung und damit auch die Forderung 1 erfüllt ist. Da bis auf Weiteres angenommen werden soll, dass die Regelgröße unbeschränkt sei, ist Forderung 2 trivial erfüllt. Der modellprädiktive Regler zur Singularitätenvermeidung ist damit asymptotisch stabil in X_f . Abbildung 5.10(b) zeigt die zweidimensionale Projektion einer zulässigen Menge X_f für eine Beispielparmetrierung des Gütekriteriums.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich die asymptotische Stabilität des modellprädiktiven Reglers in X_f nicht für beliebige Wahl der Parametrierung über die direkte Methode nach Lyapunov zeigen lässt. Der zulässige Parameterraum ist durch ein System von insgesamt 15 Ungleichungen und 5 Gleichungen (D.48) bis (D.56) gegeben. Wie in Anhang D.2 gezeigt, existiert aber bei „vernünftiger“ Wahl der Reglerparameter (D.57) immer eine Parametrierung des Gütekriteriums, für welche der modellprädiktive Regler in einem Einzugsbereich X_f asymptotisch stabil ist.

Der tatsächliche Einzugsbereich eines modellprädiktiven Reglers ist nach Bestimmung des Endbereichs X_f durch den Bereich X_N gegeben. Dabei ist X_N gerade der Bereich, von welchem aus X_f innerhalb der N prädizierten Schritte erreicht werden kann. Betrachtet man Abbildung 5.10(b) bzw. Abbildung 5.5 hinsichtlich des Gütekriteriums und Einzugsbereichs des potentialfeldbasierten Reglers, so erkennt man, dass bei der Singularitätsvermeidung je nach der relativen Lage des Sollzustands zu den Singularitäten nur ein verhältnismäßig kleiner Bereich des Zustandsraums zu dem Bereich X_f gehört. Damit wird für ein gegebenes N auch X_N vergleichsmäßig klein sein.

Ruft man sich ins Gedächtnis, dass am Rande der Wirkungsbereiche der repulsiven Potentiale das Gütekriterium bzw. der Regler bezüglich des Endzustandes gegen den linearen potentialfeldbasierten Regler bzw. das zugehörige Gütekriterium konvergiert, so lässt sich die Wahl eines vergrößerten Einzugsbereichs X_f argumentieren. In Anhang D.1 war gezeigt worden, dass der modellprädiktive Regler in Verbindung mit dem linearen Potentialfeld-Regler global asymptotisch stabil ist. Befindet sich das geregelte System in einem Zustand, für welchen die Systemtrajektorien nicht in die Wirkungsbereiche eines repulsiven Potentials führen, so führt der lineare Regler das System von diesen Zuständen aus in endlicher Zeit auf den

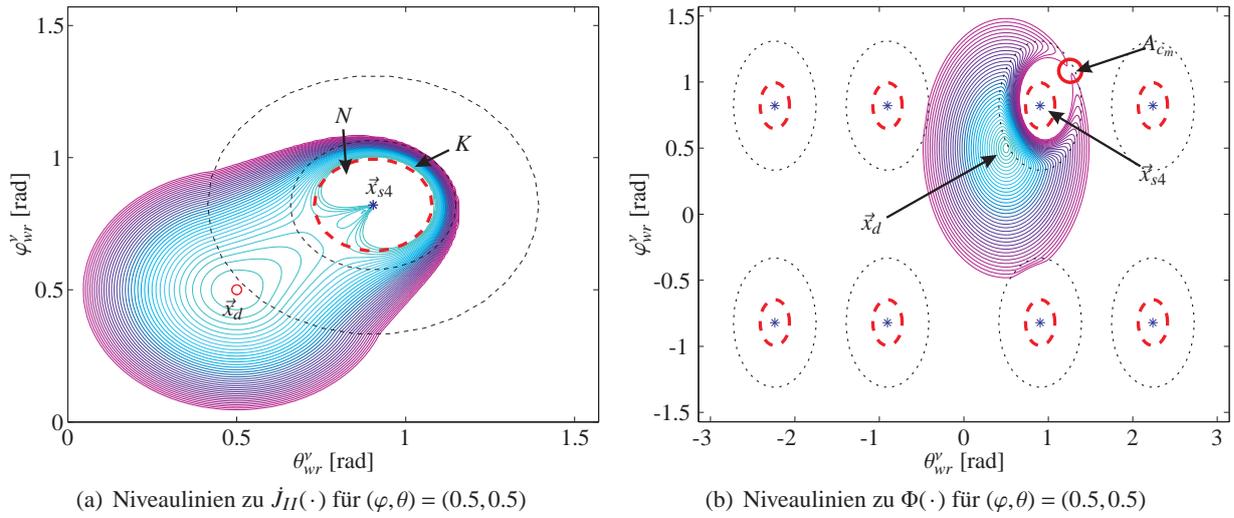


Abbildung 5.10: Darstellung 5.10(a) veranschaulicht die Niveaulinien in der Umgebung einer Singularität bzw. in der gesamten (φ, θ) -Ebene (Abb. 5.10(b)). Die rot gestrichelten Kreise stellen eine konservative Grenze K dar, außerhalb der die Ungleichung (5.64) erfüllt ist. Es ist \vec{x}_d der Sollwert und \vec{x}_{s4} die nächstgelegene Singularität. Die größeren schwarz gestrichelten Kreise beschreiben den Wirkungsbereich der Potentiale. Der rote Kreis kennzeichnet die Region A_{c_m} , in welcher der erste Sattelpunkt des Potentials auftritt. (Parametrierung s. Abb. D.1 und D.2)

Ursprung des Systems. Das geregelte System ist in diesen Bereichen asymptotisch stabil. Der Einzugsbereich X_f kann um diese Bereiche $X_{f,l}$ erweitert werden. Nimmt man an, dass für den Ausgangszustand x_3, x_4 gerade Null sind, so ergibt sich aus der Anschauung (Abb. 5.11(a)), dass diese Bereiche gerade durch die vom Ursprung ausgehenden Geraden, welche tangential zu den Wirkungsbereichen der Potentiale laufen, begrenzt sind.

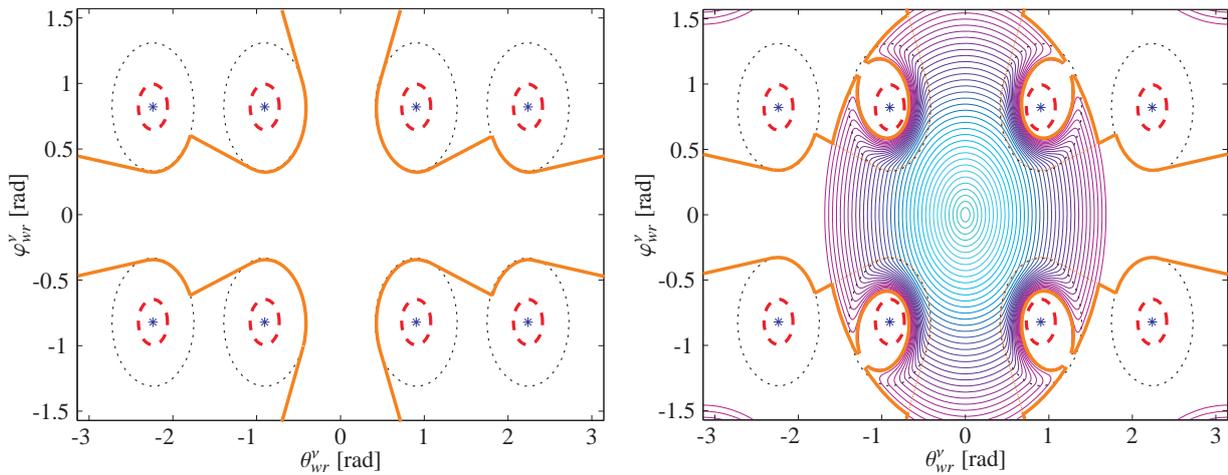
Die Gesamtheit der Bereiche $X_{f,l}$ zusammen mit dem ursprünglichen Einzugsbereich X_f ergibt einen erweiterten Einzugsbereich (Abb. 5.11(b))

$$\tilde{X}_f = X_f \cup X_{f,l}. \quad (5.66)$$

Der Einzugsbereich X_N ist damit durch alle Zustände gekennzeichnet, die in endlicher Zeit N auf diesen Bereich \tilde{X}_f überführt werden können.

Es ist des Weiteren zu beachten, dass wie zuvor die Forderungen 1 bis 4 hinreichende, aber keine notwendigen Bedingungen für asymptotische Stabilität sind. Das bedeutet, die in Anhang D errechneten Parameterräume bzw. Niveaumengen X_f sind konservative Abschätzungen. Tatsächlich ist asymptotische Stabilität in einem größeren Bereich zu erwarten.

Vergegenwärtigt man sich die Trajektorienverläufe des geregelten Systems aus Abschnitt 5.2.2, so erkennt man, dass der dort vorgeschlagene Regler das System immer zur Ruhelage führen wird, außer für Startkonfigurationen, die auf einer gemeinsamen Geraden g_i mit der Sollkonfiguration und einer der Singularitäten liegen. Dies sind, wie im Folgenden gezeigt wird, gerade auch die Bereiche, in denen das Optimierungsproblem nicht auf eine eindeutige Lösung führt. Rechtsseitiges oder linksseitiges Umfahren der Singularität ist in diesem Fall gleichermaßen gut.



(a) Regionen, in denen alle Zustandstrajektorien die Umgebung der Singularitäten meiden (b) Vereinigung von Regionen asymptotischer Stabilität und Regionen außerhalb des Einflusses der Singularitäten

Abbildung 5.11: Darstellung 5.11(a) zeigt die Grenze (dicke orange Linie) der Zustände, welche für $(x_{3,0}, x_{4,0}) \equiv \vec{0}$ auf eine Systemtrajektorie führen, die nie in den Wirkungsbereich der repulsiven Potentiale führt. Darstellung 5.11(b) veranschaulicht den resultierenden Bereich, nach Vereinigung des Bereiches aus Abb. 5.11(a) mit dem Gebiet asymptotischer Stabilität des modellprädiktiven Reglers.

5.3.3 Optimierung nach Pontryagin

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass für das gewählte Gütekriterium ein das System stabilisierender Regler existiert. Es wurde argumentiert, dass das geregelte System in einem hinreichend großen Endbereich \tilde{X}_f asymptotisch stabil ist und der zugehörige Einzugsbereich X_N sich über den gesamten Zustandsraum mit Ausnahme der Ursprungsgeraden g_i , welche durch Singularitäten führen, erstreckt. In diesem Abschnitt wird die Struktur des zugrunde liegenden Optimierungsproblems untersucht. Konkret wird geprüft, ob das durch das gewählte Gütekriterium gestellte Optimierungsproblem mit der Methode nach Pontryagin (Pontryagin u. a. 1962) lösbar ist.

Der Grundgedanke des Pontryagin Minimum Prinzips (PMP) ist, wie in Anhang E.1 erläutert, dass eine optimale Stellgröße \vec{u}^* folgende Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}(t), t) = \mathcal{L}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) + \vec{p}^T(t) \vec{a}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (5.67)$$

minimiert

$$\mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t) \leq \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}(t), \vec{p}^*(t), t) . \quad (5.68)$$

Dabei wird $\vec{p}(t)$ als der Costate-Vector bzw. als Lagrange-Multiplikator bezeichnet. Die Einführung der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt es, eine theoretische Abweichung der Systemdynamik \vec{a} gegen die Minimierung des Gütemaßes bezüglich der Systemtrajektorie \mathcal{L} abzuwägen.

Aus Forderung (5.68) bezüglich der Hamiltonfunktion ergibt sich, dass \vec{u}^* auf ein Extremum der Hamiltonfunktion führen muss. Zusätzlich leitet Pontryagin Forderungen bzgl. der zeitlichen Entwicklung von Zustandsvektor und Costate-Vector (Kozustandsvektor) ab. Unter der Annahme, dass Zustandsraum und Raum der zulässigen Stellgrößen nicht beschränkt sind, führt (5.68), wie in Anhang E.1 erläutert, auf die

Bedingungen

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{p}} \quad (5.69)$$

$$\dot{\vec{p}}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{x}} \quad (5.70)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}} . \quad (5.71)$$

Dazu treten je nach Randbedingungen des Problems noch weitere Forderungen. So ist, für das hier betrachtete Problem der Endzeitpunkt der Optimierung durch den Horizont N fest vorgegeben. Der finale Zustand selbst ist dagegen frei. Abweichungen vom Sollzustand werden zwar im Gütekriterium bestraft, sind zum Ende des Horizonts aber prinzipiell zulässig. Für diese Randbedingungen erwächst nach Kirk ((Kirk 2004), Tabelle S. 200 f) folgende weitere Forderung aus der Bestrafung der Abweichung des Endzustandes im Gütekriterium

$$\vec{p}^*(t_f) = \frac{\partial \Phi(\vec{x}^*(t_f))}{\partial \vec{x}} . \quad (5.72)$$

Das Pontryagin Minimum Prinzip garantiert nun, dass alle Stellgrößenvektoren bzw. Eingangsvektoren \vec{u}^* , welche die Gleichungen (5.68) - (5.72) gleichzeitig erfüllen, auf ein Extremum des Optimierungsproblems führen. Gilt zusätzlich, dass die Matrix

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}^2} \quad (5.73)$$

positiv definit ist, so ist \vec{u}^* ein lokales Minimum.

Für das hier gewählte Gütekriterium mit (5.58) und (5.61) ergibt sich bei partieller Ableitung

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}^2} = \mathbf{R} \quad (5.74)$$

Da die Matrix \mathbf{R} , wie in Abschnitt D.2 erläutert, gerade so gewählt wurde, dass sie positiv definit ist, ist (5.73) für das hier gewählte Gütekriterium immer positiv definit und die Erfüllung von (5.69) bis (5.72) ist eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum. Gemeinsam bilden (5.69) bis (5.72) ein Anfangs- bzw. Endwertproblem bezüglich $2k$ Differentialgleichungen erster Ordnung und m algebraischer Gleichungen. Dabei ist k die Anzahl der Zustandsvariablen und m die Anzahl der Stellgrößen.

Eine weitere Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Pontryagin Minimum Prinzips (PMP) ist nach Kirk, dass die erste Ableitung des Gütekriteriums stetig ist. Für den Anteil des Gütekriteriums bezüglich des Endzustands $\Phi(\cdot)$ muss gelten, dass die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig oder zumindest symmetrisch sind

$$\frac{\partial^2 \Phi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_i} . \quad (5.75)$$

Diese Forderungen sind für die konvexen, quadratischen Terme in J (5.55) aufgrund ihrer symmetrischen Struktur (5.62), (5.63) unmittelbar erfüllt. Zu prüfen ist der Term $\Phi_r(\cdot)$ bezüglich der repulsiven Potentiale. Hier existieren zwei kritische Bereiche: Zum einen die singulären Punkte \vec{x}_s selbst, zum anderen die Grenze $d(\vec{x}) = d_0$ des Wirkungsbereichs der repulsiven Potentiale.

Für die singulären Punkte selbst ist unmittelbar zu erkennen, dass die Forderung nach stetiger Differen-

zierbarkeit nicht erfüllt ist. Diese Bereiche waren aber bereits zuvor ausgeschlossen worden. Unter der Annahme, dass der Anfangszustand valide ist und zur Initialisierung des numerischen Prozesses eine valide Trajektorie gewählt wird, können diese Bereiche auch hier wieder aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Eine Optimierung der Trajektorie wird das System bei einer validen Anfangssituation immer von den singulären Bereichen fort bewegen. Ein valider Anfangszustand ist dabei jeder Zustand, der einen nicht-infinitesimalen Abstand von den singulären Punkten hat und für welchen die Trajektorie des unregulierten Systems nicht über die Singularitäten führt. Eine valide Trajektorie ist jede Trajektorie, die ausschließlich aus validen Zuständen besteht. Das gilt für jede Trajektorie, die nicht auf einer der Ursprungsgeraden g_i durch die Singularitäten liegt.

An den Grenzen der Wirkungsbereiche lässt sich die Erfüllung der Forderung nach Kirk zeigen. Da bereits gezeigt wurde, dass $\Phi(\cdot)$ eine valide Lyapunov-Funktion ist und da $\mathcal{L}(\cdot)$ strukturell analog zu $\Phi(\cdot)$ gewählt wurde, folgt die Erfüllung der ersten Forderung für diese beiden Komponenten unmittelbar. Stetige Differenzierbarkeit ist eine Anforderung an eine Lyapunov-Funktion. Durch zweifache partielle Ableitung lässt sich des Weiteren zeigen, dass die zweite Ableitung an der Grenze des Wirkungsbereichs zwar im Allgemeinen nicht stetig, aber symmetrisch ist

$$\frac{\partial^2 \Phi_r(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi_R(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\lambda_r}{ab} (x_1 - x_{1,s})(x_2 - x_{2,s}) \frac{1 - \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})}}{d^2(\vec{x})}. \quad (5.76)$$

Dabei wurde $d(\vec{x})$ als verallgemeinerte elliptische Abstandsfunktion angenommen. Es sind a und b die zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten. Die Struktur des gewählten Gütekriteriums erfüllt damit alle Anforderungen für die Anwendung des Pontryagin Minimum Prinzips. Diese Eigenschaften garantieren allerdings noch nicht die Lösbarkeit des Optimierungsproblems.

Ist die Systemdynamik \mathbf{A} singular, was hier der Fall ist, so kann das Optimierungsproblem singular sein. Singularität bedeutet dabei, dass Zustände existieren, in welchen die Hamilton-Funktion keine Informationen bezüglich der Beziehung zwischen \vec{x} , \vec{u} und \vec{p} bereit stellt. Die Singularität des Optimierungsproblems ist mit der Existenz von mehreren gleichwertigen Lösungen verbunden. Ohne Beweis lässt sich aus der Anschauung erkennen (Abb. 5.12), dass eine solche singuläre Situation gerade für den Sattelpunkt, welchen repulsive und attraktive Potentiale bilden, bzw. für die Gesamtheit aller Ursprungsgeraden g_i durch die Singularitäten vorliegt. Ist die Geschwindigkeitskomponente orthogonal zu der Gerade g_i gerade Null, so bewegt sich der Zustand nur noch entlang dieser Geraden. Er pendelt um den Sattelpunkt, bis auch die Geschwindigkeit entlang der Geraden und damit letztlich die Stellgröße \vec{u} zu Null wird. Diese Singularität entspricht letztlich gerade dem Zustand, in welchem ein Umfahren links um die Singularität gleichermaßen günstig wie ein Umfahren rechts um die Singularität ist.

Wie zuvor kann man für praktische Systeme annehmen, dass ein Zustand in der Regel nicht lange exakt auf einer der Geraden g_i verharren wird. Die Singularität führt wiederum auf eine instabile Ruhelage. Es ist allerdings zu beachten, dass die Verwendung eines modellprädiktiven Reglers in Verbindung mit dem Pontryagin Minimum Prinzip die Problematik dieser instabilen Ruhelage nicht per se beseitigt.

Wie bereits angedeutet, wird sich das Optimierungsproblem im Allgemeinen nicht analytisch lösen lassen. Bei der Implementierung des Verfahrens wird man auf numerische Ansätze zur Lösung des Optimierungsproblems zurückgreifen müssen. Kirk gibt einen eingängigen Überblick zu unterschiedlichen Optimierungsmethoden. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Gradientenabstiegsverfahren verwendet. Das bietet sich gerade hinsichtlich der Analogie mit dem zuvor entworfenen Potentialfeld-Regler an. Wie zuvor sind dabei einige Details hinsichtlich der Diskretisierung und der damit verbundenen Integrationsfehler zu beachten. Anhang E.3 skizziert das implementierte Verfahren knapp und erläutert einige teils heuristische Modifikationen.

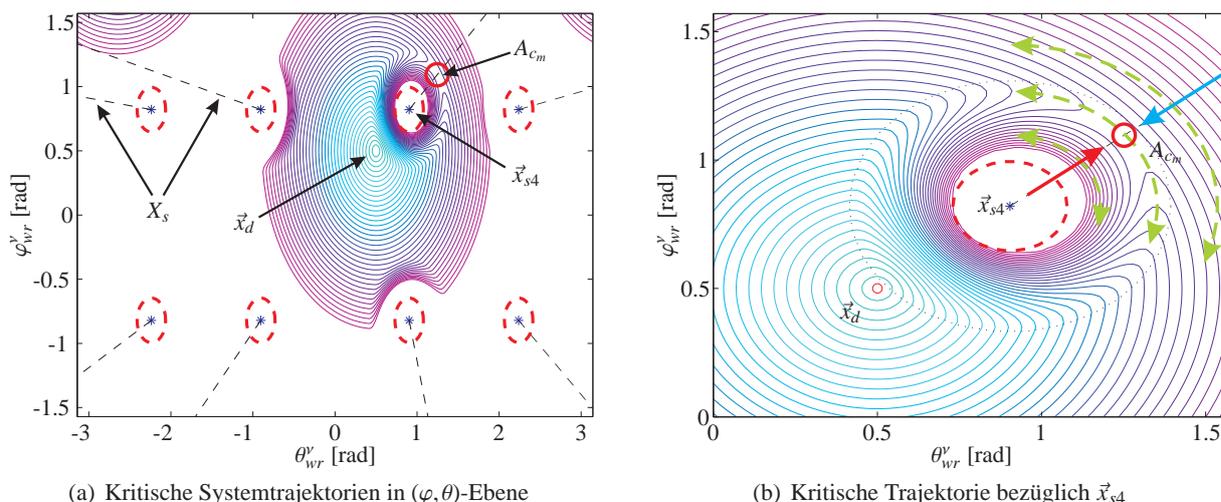


Abbildung 5.12: Darstellung 5.12(a) zeigt die kritischen Systemtrajektorien (schwarz gestrichelte Linien) bei Optimierung nach Pontryagin für einen Sollwert \vec{x}_d . Die rot gestrichelten Kreise markieren die Grenze des zulässigen Zustandsraums. Der rote Kreis markiert die Region, in welcher sich der Sattelpunkt des Gütekriteriums befindet. Darstellung 5.12(b) zeigt die kritische Trajektorie in der Umgebung der Singularität \vec{x}_{s4} sowie die resultierenden „Kräfte“ in der Nähe Singularität (roter Pfeil) sowie außerhalb der Singularität (blauer Pfeil). Die grün gestrichelten Pfeile stellen gleichermaßen optimale Pfade dar. Systemtrajektorien, welche auf der kritischen Linie (schwarz gestrichelt) beginnen, führen immer auf den Sattelpunkt. (Parametrierung s. Abb. D.1 und D.2)

5.4 Reglersynthese bei Reglerumschaltung

5.4.1 Auflösung von Singularitäten durch Wechsel der Koordinatenbasis

Die topologische Analyse und Diskussion der inversen Kinematik in Abschnitt 3.2 zeigte, dass der resultierende Zustandsraum, der nicht-triviale Nullraum der nicht-holonomen Bindungen, durch das Auftreten mehrerer Singularitäten geprägt ist. In den vorangegangenen Abschnitten 5.2 und 5.3 wurden Regler entworfen, welche dieses Problem durch explizites Vermeiden dieser singulären Bereiche lösen. Dabei wurden Techniken aus dem Bereich der strukturoptimalen Regelung eingesetzt, um einen möglichst großen Bereich des zulässigen Konfigurationsraums zugänglich zu machen. Dennoch impliziert das Vermeiden der singulären Bereiche immer eine selbst auferlegte Beschränkung des zulässigen Konfigurationsraums, welche die Flexibilität des Gesamtsystems reduziert.

In diesem Abschnitt wird ein regelungstechnischer Ansatz auf Grundlage eines Basiswechsels durch Reglerumschaltung skizziert. Damit ist es möglich, durch lokale Auflösung der Singularitäten einen Regler für den gesamten zulässigen Konfigurationsraum des Systems zu entwerfen.

Dabei wird verwendet, dass sich nach Abschnitt 3.2.2 die inverse Kinematik bezüglich der Räder, welche im Koordinatenursprung des gegenwärtigen Bezugssystems liegen, stark vereinfacht, so dass diese Räder keine Singularitäten verursachen. Des Weiteren wurde in Abschnitt 3.2.3 bzw. 3.2.4 gezeigt, dass sich solche radzentrierten Bezugssysteme in allen Umgebungen, welche weder den Ursprung noch eine Singularität beinhalten, lokal diffeomorph ineinander überführen lassen. Damit ist es möglich, Stellgrößen und Zustände von System und Regler in den singularitätsfreien Bereichen stetig differenzierbar zwischen den Bezugssystemen zu transformieren. Durch geeignete Definition der Schaltgrenzen lässt sich die Regelung damit immer in einem lokal singularitätsfreien Bezugssystem formulieren.

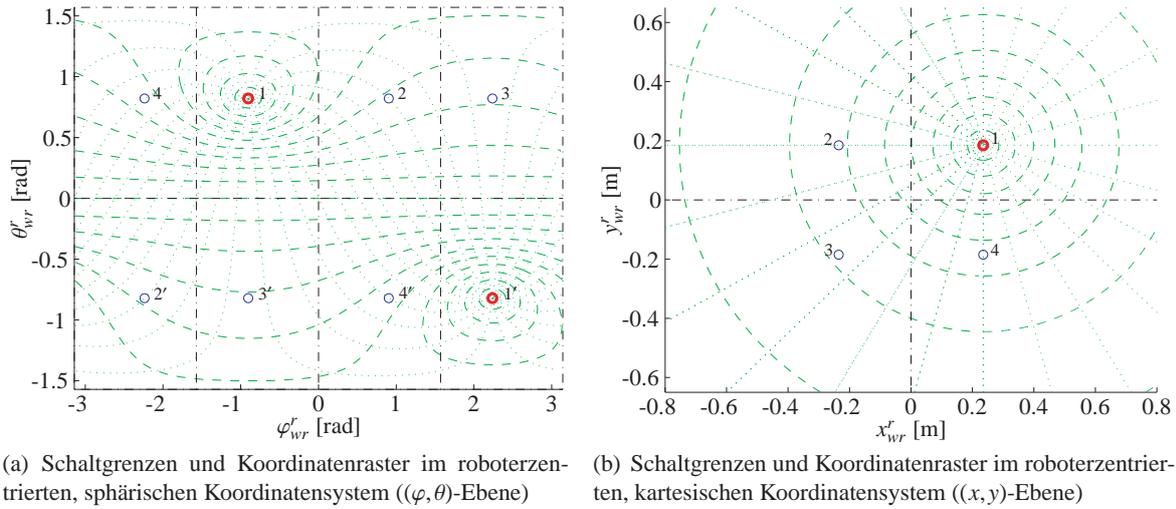


Abbildung 5.13: Die beiden Abbildungen zeigen die Schaltgrenzen (dicke, schwarz gestrichelpunktete Linien), welche sich aus dem Voronoi-Graphen des bisher immer beispielhaft betrachteten Fahrwerks mit 4 Rädern (kleine Kreise) ergeben. Die Schaltgrenzen sind bezüglich des sich für den sphärischen (Abb. 5.13(a)) bzw. kartesischen (Abb. 5.13(b)) Twist ergebenden Koordinatensystems dargestellt. Als Bezugssystem für die Definition der Twistkoordinaten dient dabei das Roboterkoordinatensystem r . Zusätzlich ist das Koordinatenraster (dünne, grün gepunktete bzw. gestrichelte Linien) dargestellt, welches sich durch Transformation des sphärischen Koordinatensystems T_{wr}^1 bezüglich des Rades 1 (dicke rote Kreise) in das sphärische (Abb. 5.13(a)) bzw. kartesische (Abb. 5.13(b)) roboterzentrierte Koordinatensystem ergibt. Die dünnen, grün gestrichelten Linien (Kreise in Abbildung 5.13(b)) entsprechen dabei den Trajektorien, die sich ergeben, wenn man sich parallel zur φ -Achse des radzentrierten Koordinatensystems T_{wr}^1 bewegt. Die dünnen, grün gepunkteten Linien (Strahlen in Abbildung 5.13(b)) entsprechen den Trajektorien, die sich ergeben, wenn man sich parallel zur θ -Achse des radzentrierten Koordinatensystems T_{wr}^1 bewegt.

Eine nahe liegende Wahl für diese Schaltlinien ist zum Beispiel der Voronoi-Graph bzw. das Voronoi-Diagramm (vgl. (Choset u. a. 2005), S. 117 ff), welcher sich ergibt, wenn man die Singularitäten als Hindernisse betrachtet. Für das bisher immer beispielhaft betrachtete System mit vier symmetrisch angeordneten Rädern entspricht dieser Voronoi-Graph gerade den achsparallelen Geraden, welche im bisherigen Bezugssystem mittig zwischen den singulären Punkten liegen (Abb. 5.13(a)). Abbildung 5.13(b) zeigt die entsprechenden Schaltlinien bezogen auf das kartesische Roboterkoordinatensystem.

Ein Vorteil dieser Wahl ist, dass die Bedingungen, unter welchen umgeschaltet wird, sehr effizient innerhalb der radzentrierten Bezugssysteme berechnet werden können, ohne dass eine Transformation in ein globales Referenzsystem notwendig wird. Der Abstand von der Singularität ist direkt proportional zur Differenz zwischen gegenwärtigem Wert des Parameters θ und den Polen. Die Umschaltung an den Kanten des Voronoi-Graphs entspricht dann schlicht der Wahl des Bezugssystems p , in welchem der Abstand von den Polen den betragsmäßig kleinsten Wert annimmt:

$$p = \arg \max \left\{ \left| \theta_{wr}^i - \frac{\pi}{2} \pmod{\frac{\pi}{2}} \right| : i \in \mathcal{P} \right\}. \quad (5.77)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{P} die Menge der N radzentrierten Bezugssysteme mit ihrem jeweils zugeordneten Regler. In Anlehnung an Liberzon (vgl. (Liberzon 2003) S. 6, Gleichung (1.2)) ergibt sich die Dynamik des resultierenden, geregelten Systems zu

$$\dot{x}_p = f_p(x_p), \quad p \in \mathcal{P} \quad \mathcal{P} = \{1, \dots, N\}. \quad (5.78)$$

5.4.2 Stabilität und spezielle Moden des resultierenden Reglers

Für den Ansatz mit Reglerumschaltung wird im Folgenden kein analytischer Stabilitätsbeweis geführt. Vielmehr wird die Stabilität argumentativ diskutiert. Grundlage ist dabei wieder die Betrachtung der Struktur des zugrunde liegenden Zustandsraums sowie der zu erwartenden Systemtrajektorien.

Zur Diskussion der Stabilität wird das betrachtete System wieder in zwei entkoppelte Teilsysteme (5.16, 5.17) zerlegt. Das erste System beschreibt die Dynamik des Roboters bzw. Fahrwerks hinsichtlich seiner ebenen Bewegung. Das zweite System charakterisiert die Dynamik der internen Konfiguration des Fahrwerks bzw. der „Lenkung“. Dieses zweite System war durch das Auftreten von Singularitäten geprägt. Die Vermeidung dieser Singularitäten war das Ziel der zuvor entworfenen Regler. Dabei beeinflussten diese Singularitäten insbesondere die Manipulierbarkeit eines gegebenen Zustandes, aber nicht die Systemdynamik. In erster Näherung war das System als dynamikfrei modelliert worden. Zur Formulierung geeigneter Regler war der Zustand um die erste Ableitung der zuvor ermittelten Zustandsgrößen augmentiert worden. Sowohl bei den Zustandsgrößen als auch bei deren erster Ableitung handelt es sich damit um abstrakte Größen. Erst die inverse Kinematik bildet diese in physikalisch bedeutsame Größen ab. Die Dynamik ist damit in erster Näherung unabhängig vom jeweils gewählten Bezugssystem.

Damit lassen sich die geregelten Systeme in den radzentrierten Bezugssystemen analog zu (5.25, 5.26) beschreiben

$$\dot{\vec{x}}_p = \mathbf{A}'_p \vec{x}_p + \mathbf{B}'_p \vec{u}_p, \text{ mit} \quad (5.79)$$

$$\mathbf{A}'_p = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_p = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Damit lässt sich, wie in Abschnitt 5.2.2 und D.1 gezeigt, jedes dieser Systeme bei Vernachlässigung der singulären Bereiche bzw. Verzicht auf die Einführung eines repulsiven Potentials, durch die zuvor entworfenen potentialfeldbasierten bzw. modellprädiktiven Regler global asymptotisch stabilisieren.

Es ist bekannt, dass Stabilität der Teilsysteme nicht genügt, um auf Stabilität des Gesamtsystems mit Umschaltung zu schließen. Liberzon skizziert in (Liberzon 2003) eine Reihe von Stabilitätskriterien, welche auf Systeme mit Reglerumschaltung angewandt werden können. Die dort skizzierten Verfahren lassen sich aber auf das hier betrachtete System nicht oder nur schlecht anwenden. Für andere Verfahren ist die Anwendung sehr aufwändig. Daher soll hier die Stabilität des resultierenden Systems lediglich skizziert und durch Betrachtung der möglichen Systemtrajektorien argumentiert werden.

Verwendet man, dass die geregelten Teilsysteme jeweils asymptotisch stabil sind, so lässt sich für jeden Sollwert $\vec{x}_{d,p}$, der nicht auf einer der Schaltlinien $g_{v_{ik}}$ liegt, ein Einzugsbereich \mathbf{E}

$$\forall \vec{x}_d | \min(\|\vec{x}_d - G_v\|) > 0 \quad \exists \mathbf{E} = \{\vec{x} | \|\vec{x} - \vec{x}_d\| < \epsilon, \epsilon > 0\} \quad (5.81)$$

definieren, in welchem es zu keinem Schaltvorgang kommt (Abb. 5.14(a)). Damit ist dieser Einzugsbereich, gerade auch der Bereich, in welchem das Gesamtsystem asymptotisch stabil ist. Ist das System hinreichend gedämpft und die erste Ableitung des Zustands hinreichend klein, so lässt sich ein erweiterter Bereich (Abb. 5.14(b)) definieren, in welchem alle Systemtrajektorien auf den Einzugsbereich \mathbf{E} führen. Dieser Bereich ist umso größer, je weiter der Sollwert von einer der Schaltgrenzen entfernt ist.

Liegt der Sollwert sehr dicht an oder auf einer der Schaltgrenzen, werden die zuvor skizzierten Einzugsbereiche sehr klein oder verschwinden ganz. In diesem Fall muss davon ausgegangen werden, dass der Zustand die Schaltlinie kreuzt, bevor er den Sollwert erreicht. Die Struktur des Zustandsraums führt dann zur Ausbildung eines „Sliding-Modus“, der Regler schaltet in infinitesimal kleinen Abständen zwischen den beiden Teilsystemen um (vgl. (Liberzon 2003) S. 12 ff). Die resultierende Trajektorie führt dabei auf

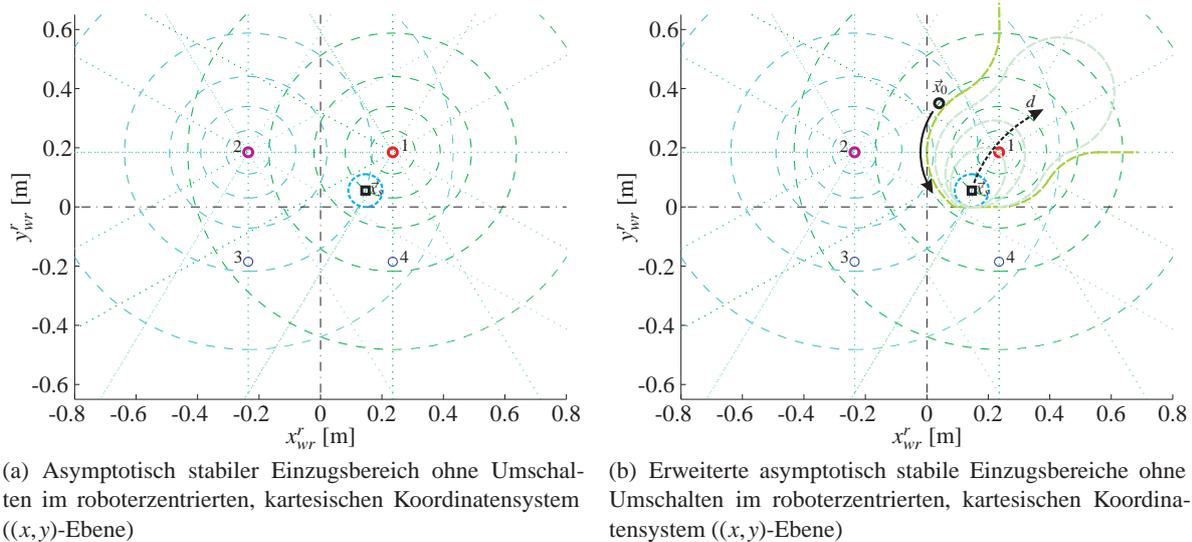


Abbildung 5.14: Die beiden Abbildungen zeigen die Überlagerung der Koordinatenraster für Rad 1 (dicker, roter Kreis; Raster dargestellt durch grün gepunktete und gestrichelte Linien) und Rad 2 (dicker, magenta Kreis; Raster dargestellt durch cyan gepunktete und gestrichelte Linien). Das schwarze Viereck \vec{x}_s markiert die gewünschte Konfiguration. Abbildung 5.14(a) stellt den Einzugsbereich (blau gestrichelter Kreis) um die Sollkonfiguration \vec{x}_s dar, in welchem das System asymptotisch stabil ist. Dabei wird angenommen, dass die einzelnen Regler, zwischen welchen umgeschaltet wird, global asymptotisch stabil sind und dass $\vec{x}_0 \equiv 0$ gelte. Abbildung 5.14(b) skizziert die erweiterten Einzugsbereiche, die sich in Abhängigkeit der Dämpfung des geregelten Systems ergeben. Dabei steigt die Dämpfung d entlang des schwarzen gestrichelten Pfeils. Es markiert \vec{x}_0 ein Beispiel für eine Startkonfiguration, welche auf eine Trajektorie führt (schwarzer Pfeil), der die Schaltgrenze kreuzt. Dabei ist zu beachten, dass die Abbildung die erweiterten Einzugsbereiche lediglich qualitativ skizziert. Die genaue Form der Einzugsbereiche ist von den jeweils eingesetzten Reglern abhängig. Hier wurde zum Beispiel angenommen, dass ab einer bestimmten Regeldifferenz in φ'_{wr} der alternative Weg über den Ursprung bzw. das Rad gewählt wird.

den bzw. in die Umgebung des Sollzustandes (Abb. 5.15(a)). Für den Fall, dass sich der Sollwert exakt auf einer der Schaltgrenzen befindet, lässt sich nach Liberzon sogar asymptotische Stabilität auf Basis mehrerer Lyapunov-Funktionen (vgl. (Liberzon 2003) S. 69 ff) zeigen. Dabei kann hier die Symmetrie des Zustandsraums bzw. des resultierenden Voronoi-Graphen genutzt werden.

Setzt man bezogen auf die beiden Teilsysteme identische Lyapunov-Funktionen an, so werden diese Lyapunov-Funktionen entlang der Schaltgrenze die gleichen Werte annehmen. Aus der asymptotischen Stabilität der Teilsysteme folgt, dass unabhängig vom gerade gewählten Bezugssystem die jeweils aktive Lyapunov-Funktion reduziert werden wird. Das bedeutet, beim nächsten Kreuzen der Schaltgrenzen wird auch die Lyapunov-Funktion des jeweils anderen Systems einen kleineren Wert als zum letzten Schaltvorgang haben. Das heißt auch bei mehrfachem sukzessiven Schalten wird sich der Wert der Lyapunov-Funktion niemals erhöhen, sondern kontinuierlich verringern.

Das bedeutet, dass sich der Zustandsraum letztlich in drei Teilbereiche aufteilen lässt: Den unmittelbaren Einzugsbereich um den Sollwert, die Umgebung der Schaltgrenzen außerhalb dieser Einzugsbereiche, in welchen es zur Ausbildung von „Sliding-Modes“ kommen kann, sowie die Bereiche, welche je nach gegenwärtigem Zustand und Lage des Sollwerts entweder auf die Einzugsbereiche oder auf die Sliding-Modes führen. Da die Sliding-Modes jeweils in die stabilen Einzugsbereiche führen, lässt sich schließlich globale asymptotische Stabilität des resultierenden Systems argumentieren. Abbildung 5.15(b) zeigt mehrere mögliche Trajektorien.

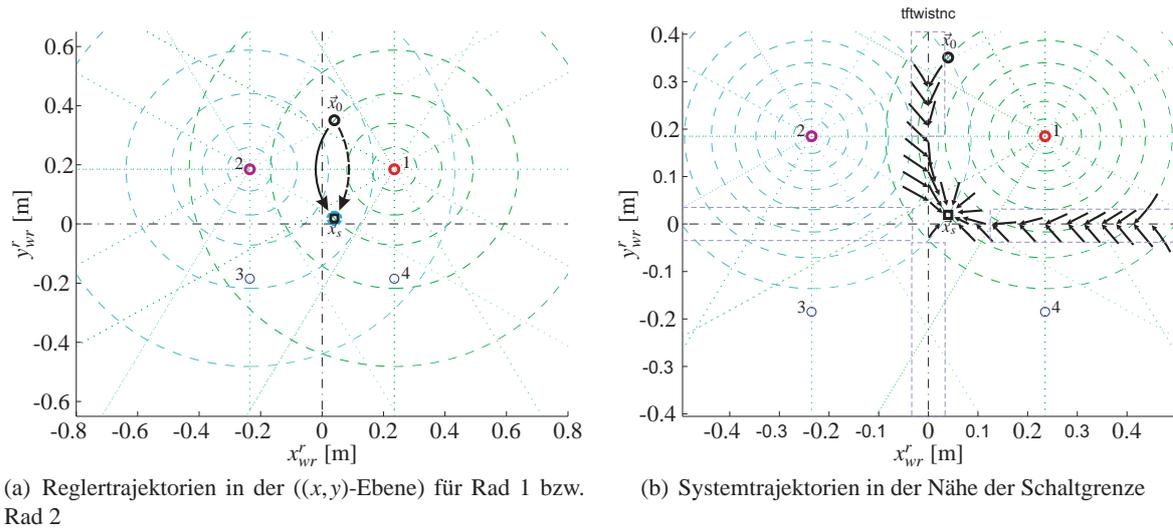


Abbildung 5.15: Die beiden Abbildungen zeigen wieder die Überlagerung der Koordinatenraster für Rad 1 (dicker, roter Kreis; Raster dargestellt durch grün gepunktete und gestrichelte Linien) und Rad 2 (dicker, magenta Kreis; Raster dargestellt durch cyan gepunktete und gestrichelte Linien). Das schwarze Viereck \vec{x}_s markiert die gewünschte Konfiguration. Der schwarze Kreis eine beispielhafte Ausgangskonfiguration \vec{x}_0 . Abbildung 5.15(a) zeigt den Einzugsbereich (blau gestrichelter Kreis), in welchem das System asymptotisch stabil ist und keine Umschaltungen stattfinden. Man kann erkennen, dass dieser Bereich aufgrund der Nähe der Sollkonfiguration zu den Schaltgrenzen sehr klein wird. Des Weiteren sind die Systemtrajektorien dargestellt, welche sich ergeben, wenn der Regler bezüglich Rad 1 (schwarzer Pfeil) bzw. Rad 2 (schwarz, gestrichelter Pfeil) formuliert wird. Diese Trajektorien sind im Wesentlichen unabhängig vom spezifischen, implementierten Regler. Sie ergeben sich aus der Tatsache, dass im dargestellten Fall eine Regeldifferenz jeweils nur bezüglich des φ -Parameters auftritt. Es ist offensichtlich, dass die Trajektorien sich in Abhängigkeit vom jeweils verwandten Bezugssystem unterscheiden werden und es für den dargestellten Fall zu wiederholten Schaltvorgängen kommen wird. Abbildung 5.15(b) skizziert das Vektorfeld, welches sich in der Nähe der Schaltgrenzen ergibt. Man kann erkennen, dass es in mehreren Bereichen (violett gestrichelte Rechtecke) zur Ausbildung von Sliding-Modes kommt. Diese Sliding-Modes führen dabei immer auf Bereiche, in denen das System letztlich asymptotisch stabil ist und keine Umschaltungen mehr vorkommen. Die skizzierten Vektorfelder stellen das System lediglich qualitativ dar. Ihre exakte Ausbildung und die Ausbildung der damit verbundenen Sliding-Modes hängt von der konkreten Implementierung des Reglers ab. Die generelle Ausbildung von Sliding-Modes ist aber eine strukturelle Eigenschaft des Systems bei Basiswechsel und ist in der Transformation zwischen den Bezugssystemen festgelegt.

Teil II

Implementierung & Evaluierung

6 Implementierung und Versuchsdurchführung

Während im vorangegangenen Kapitel Entwurf und Analyse der ausgewählten Regelungsansätze möglichst allgemein gehalten wurden, widmet sich dieses Kapitel der Implementierung der Regler mit Care-O-bot[®] 3 als konkretem Zielsystem und der Beschreibung möglichst aussagekräftiger Versuchs-Szenarien.

Abschnitt 6.1 spezifiziert knapp den Versuchsaufbau. Zunächst wird in Abschnitt 6.1.1 kurz die Auswahl der charakteristischen Größen, die gemessen bzw. simulativ bestimmt werden sollen, erläutert. Dann werden die technischen Eigenschaften des Zielsystems Care-O-bot[®] 3 hinsichtlich Hardware (Abschnitt 6.1.2) und Software-Struktur (Abschnitt 6.1.3) diskutiert. Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse sicherzustellen, findet die quantitative Auswertung auf Basis einer Simulation des Fahrwerks statt. Abschließend wird der Regler auf Radmodulebene spezifiziert. Dieser Regler ist einerseits Teil des unterlagerten Regelkreises, für jeden der entworfenen Fahrwerksregler. Andererseits kann er als Referenz zur Bewertung der anderen Regler dienen.

In Abschnitt 6.2 werden dann die zuvor spezifizierten Versuche exemplarisch für den Referenzregler durchgeführt. Untersucht wird das Verhalten bei Einheitsprung, entlang einer kritischen Trajektorie und für zufällig wechselnde Sollwerte. Bei der Diskussion der Ergebnisse wird, zur Vorbereitung des folgenden Kapitels, der anschaulichen Erläuterung der gemessenen Größen sowie der gewählten statistischen bzw. graphischen Darstellung viel Raum eingeräumt.

6.1 Aufbau und Eigenschaften des Versuchsträgers

6.1.1 Konzeption der Experimente

Ziel der Untersuchungen ist neben qualitativen Aussagen bezüglich der generellen Validität der Regelungsansätze insbesondere ein quantitativer Vergleich der Regler. Von Interesse sind dabei insbesondere folgende Kenngrößen:

1. Das Verhältnis zwischen gesamtem Arbeitsraum und tatsächlich nutzbarem Arbeitsraum: Das ist ein Maß, in wie weit die Flächenbeweglichkeit des Fahrwerks in der Anwendung später tatsächlich nutzbar gemacht werden kann.
2. Die Einregel- bzw. Ausregelzeit: Das ist ein Maß für den zu erwartenden Trajektorienfehler in übergeordnete Anwendungen. Dabei wird davon ausgegangen, dass übergeordneten Anwendungen einen kartesischen oder sphärischen Twist kommandieren. Ist die Einregelzeit hinreichend schnell, kann der Einfluss der Fahrwerksregelung dort vernachlässigt werden.
3. Die resultierenden Stellgrößen bzw. kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten: Je geringer diese sind, desto ökonomischer ist der Regler und desto geringer wird die Materialbelastung sein. Zusätzlich ist die gemeinsame Einhaltung der Beschränkungen Voraussetzung für eine koordinierte Bewegung aller Räder.



(a) Serviceroboter Care-O-bot® 3



(b) Fahrwerk des Care-O-bot® 3 ohne weitere Aufbauten

Abbildung 6.1: Abbildung 6.1(a) zeigt Care-O-bot® 3 mit allen wesentlichen Komponenten, wie er zur Evaluierung der Regelung im Gesamtsystem eingesetzt wurde. Abbildung 6.1(b) zeigt die quasi-omnidirektionale Plattform des Care-O-bot® 3 als separate Einheit. Man kann die vier aktiv gelenkten und angetriebenen Radmodule erkennen.

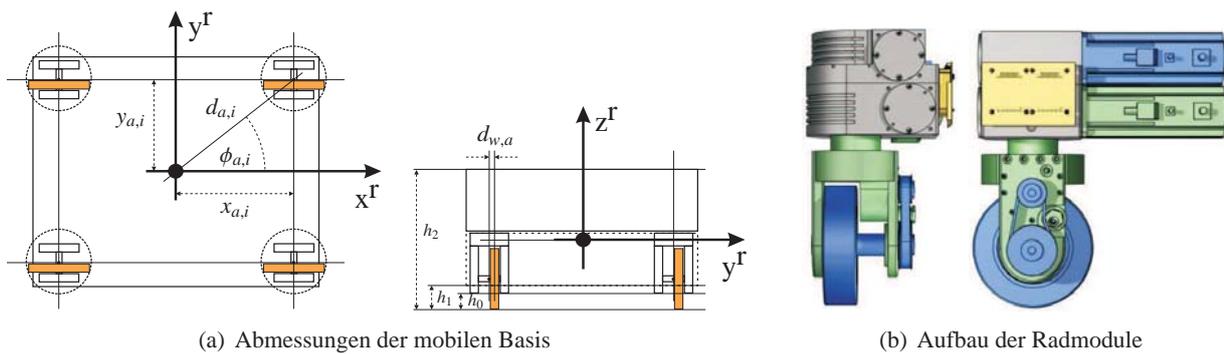
4. Die Abweichung der Lenkwinkel von ihrer „nächstgelegenen zulässigen Konfiguration“ bzw. die Varianz des gemessenen Momentanpols in Relation zur absoluten Position in der Fahrwerksebene: Dies ist ein Maß für die Güte der Koordination bzw. Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen während der Rekonfiguration des Fahrwerks. Mittelbar lässt dies Rückschlüsse auf die Materialbelastung durch innere Verspannungen bzw. auf die Güte der Fahrbewegung zu.

Zur Untersuchung der entworfenen Regler bezüglich dieser Kriterien und um die Aussagen hinsichtlich Einzugsbereich und Stabilität zu verifizieren, wurden die Regler hinsichtlich der Kinematik des Care-O-bot® 3 (Abb. 6.1(a)) ausgelegt und implementiert. Abschnitt 6.1.2 beschreibt die mobile Basis (Abb. 6.1(b)) des Care-O-bot® 3 knapp und erläutert die mechanischen und elektronischen Eigenschaften des Versuchsaufbaus, soweit sie zur Bewertung der Versuchsergebnisse relevant sind.

Zur quantitativen Bewertung der unterschiedlichen Konzepte wurde das Fahrwerk des Care-O-bot® 3 in Matlab/Simulink modelliert. Das erlaubt zum einen den Test von kritischen Fahrsituationen, wie zum Beispiel dem Start bei invaliden Anfangszuständen, zum anderen kann so die Vergleichbarkeit der Resultate verbessert werden, da äußere Störungen ausgeschlossen sind.

In Abschnitt 8.1 werden die diskutierten Konzepte schließlich qualitativ im Kontext übergeordneter Anwendungen bewertet. Insbesondere wird das Zusammenspiel von Fahrwerksregelung und autonomer Navigation bzw. Teleoperation und mobiler Manipulation diskutiert. Als Anschauungsobjekt dient dabei wieder die Serviceroboterplattform Care-O-bot® 3 (Abb. 6.1(a)). Abschnitt 6.1.3 diskutiert knapp das entsprechende Softwareframework sowie die Integration der Softwaremodule, welche den Regler bilden.

Zur besseren Einordnung der erzielten Ergebnisse wird der zum unterlagerten Regelkreis gehörende Radmodulregler einzeln untersucht. In Zuge dieser Versuche werden die Sollwerte nach Descartes' Prinzip der Festkörperbewegung abgeleitet. Der Radmodulregler nutzt den gesamten Konfigurationsraum des Fahrwerks und führt auf eine minimale Einregelzeit. Dabei vernachlässigt er die nicht-holonomen Bindungen und verzichtet auf eine Koordination der Räder. Die Versuche mittels des Referenzreglers werden daher auf die Simulation beschränkt. Abschnitt 6.1.4 diskutiert knapp die Auslegung dieses Reglers.



(a) Abmessungen der mobilen Basis

(b) Aufbau der Radmodule

Abbildung 6.2: Abbildung 6.2(a) zeigt eine schematische Darstellung der mobilen Basis mit den zugehörigen Abmessungen. Abbildung 6.2(b) zeigt den Aufbau eines Radmoduls. Die zueinander gehörende Antriebs- und Abtriebsseite ist jeweils in der gleichen Farbe dargestellt (grün: Lenkung; blau: Antrieb).

6.1.2 Hardwarespezifikation

Als Versuchsträger wird die mobile Basis des Care-O-bot[®] 3 eingesetzt. Diese setzt sich im Wesentlichen aus den vier Fahrdrehmodulen, der Leistungselektronik, einem PC sowie zwei Laserscannern als exterozeptionen Sensoren zusammen. Der PC stellt die zentrale Steuereinheit des Systems dar. Hier laufen sowohl die später relevanten Routinen der autonomen Navigation als auch die Regler auf Fahrwerksebene. Die Laserscanner sind über RS422 bei 500 kBaud an den PC angebunden, die Fahrdrehmodule über einen gemeinsamen CAN-Bus bei 1MBaud. Der PC wird unter Linux (Ubuntu) betrieben.

Der Versuchsträger Care-O-bot[®] 3 hat ein Gesamtgewicht von 180 kg. Davon entfallen etwa 120 kg auf die mobile Basis und hier wiederum ein Großteil auf den verwendeten Lithium-Ionen Akku. Die Plattform hat damit einen sehr tiefen Schwerpunkt und ist entsprechend kippsicher. Der Lithium-Ionen Akku stellt 60 Ah bei 48 V bereit. Die Abmessungen des Versuchsaufbaus in Länge, Breite und Höhe betragen ohne die flexiblen Hüllen 75/55/145 cm (Abb. 6.2(a)).

Die Radmodule sind punktsymmetrisch um den Ursprung des Fahrzeugkoordinatensystems angeordnet. Die vertikale Rotationsachse des ersten Radmoduls durchstößt die Fahrwerksebene in Punkt $(x_{a,1}, y_{a,1}) = (0.235, 0.185)$. Die Lage der übrigen Radmodule ergibt sich entsprechend aus der Symmetrie. Dabei wurde das nach Kapitel 2 definierte Koordinatensystem als Bezug gewählt. Die Radmodule sind nach der in Abschnitt 2.1.2 gegebenen Konvention nummeriert.

Alle Radmodule sind vollständig aktuiert. Für Fahr- und Lenkbewegung werden die gleichen Antriebe (Mecapion APM SB03AAK3-9) verwendet. Die Motoren stellen eine Nenndrehzahl von 3000 min^{-1} , eine maximale Drehzahl von 5000 min^{-1} und ein Nennmoment von 0.95 Nm bzw. ein maximales Drehmoment von 2.85 Nm bereit. In die Motoren sind Relativencodern mit einer antriebsseitigen Auflösung von 1.53 mrad , also 4096 Pulsen pro Umdrehung integriert. Die Lenkmodule verfügen zusätzlich über einen optischen Taster, der eine absolute Referenzierung während der Initialisierung des Systems erlaubt.

Zur Anbindung von Lenkachse und Motor wird ein Schneckengetriebe mit einer Übersetzung von $12.6 : 1$ verwendet. Rad und Antriebsmotor sind über eine Kombination von Schneckengetriebe, Kegelrad und Zahnriemen mit einem resultierenden Übersetzungsverhältnis von $30 : 1$ angebunden. Dabei wird eine Getriebedurchführung verwendet, so dass der Antriebsmotor zusammen mit dem Lenkmotor steif auf dem Roboterkörper montiert werden kann. Durch diese Durchführung kommt es zu einer getriebezeitigen Kopplung von Lenk- und Fahrbewegungen. Der Koppelungsfaktor beträgt 0.5 . Das bedeutet: wird die Orientierung des Rades um $2\pi \text{ rad}$ geändert, wird gleichzeitig eine Rollbewegung ausgelöst. Das Rad wird

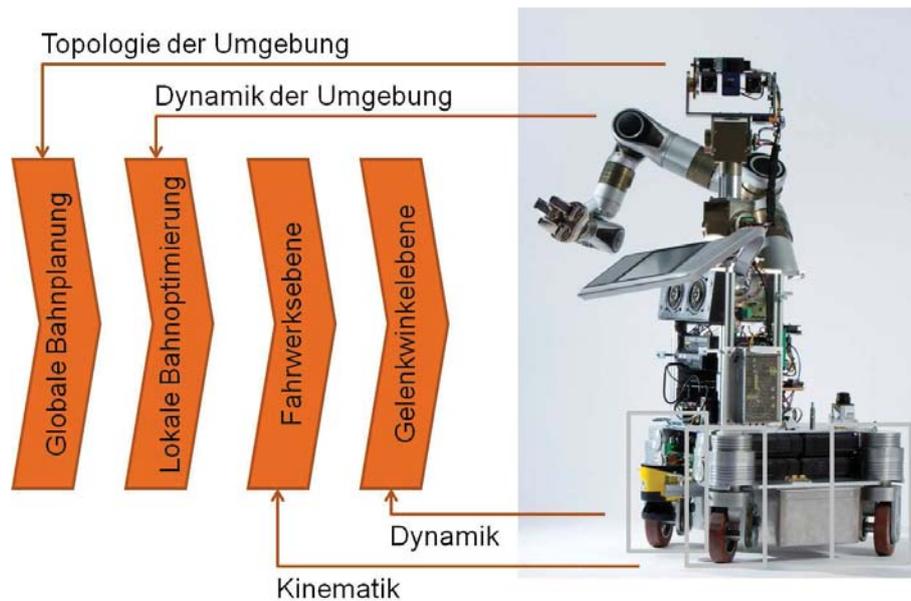


Abbildung 6.3: Grobstruktur der Steuerungs- bzw. Navigationssoftware des Care-O-bot® 3. Die Darstellung ist auf die wesentlichen algorithmischen Elemente im Zusammenhang mit der Ansteuerung des Fahrwerks reduziert.

dabei um einen Winkel von π rad bewegt. Die Räder selbst haben einen Durchmesser von 0.15 m. Der Offset seitwärts zur Lenkachse beträgt 22 mm. Daraus ergibt sich eine weitere Koppelung. Die Rotationsrate muss in Abhängigkeit von der Lenkrate um den Faktor 0.146 korrigiert werden, damit das Rad bei einer Änderung seiner Orientierung sauber auf dem Boden abrollt.

Zur Ansteuerung der Motoren werden Elmo Whistle-Dou (WHI-10/60) Motorcontroller verwendet. Die Controller werden im Geschwindigkeitsmodus betrieben. Die übergeordneten Regelkreise setzen also Sollwerte für die Geschwindigkeit der Gelenkwinkel, die Motorcontroller bilden Strom- bzw. Kraftregelkreis. Die Taktrate der Controller beträgt bis zu 350 Hz für den Geschwindigkeitsregelkreis und bis zu 2.5 kHz für den unterlagerten Stromregelkreis. Die Regelkreise wurden so eingestellt, dass sie PT2-Verhalten zeigen. Befindet sich das System aus Motor und Controller nicht bereits am Rande seines Arbeitsbereiches (hohe Geschwindigkeit, große Beschleunigung), ist das Verhalten hinreichend schnell zur Ausregelung kleiner Störungen. Einflüsse von Bodenunebenheiten und kleine Störungen wie Türschwellen können in den überlagerten Regelkreisen ignoriert werden.

6.1.3 Strukturierung der Softwaremodule

Die Softwarekomponenten des Navigationsmoduls lassen sich grob in globale Bahnplanung, lokale Bahnoptimierung, Bahninterpolation und Bahnregelung sowie Regelung auf Fahrwerksebene und Gelenkwinkel Ebene unterteilen (Abb. 6.3). Für die globale Bahnplanung wurde ein probabilistischer Planer auf Basis der „Probabilistic Roadmap Method“ (PRM) nach (Kavraki u. a. 1996) implementiert, der alle Freiheitsgrade des Roboter ansteuern kann und dabei seine Geometrie berücksichtigt. Die Optimierung wird nach der Methode der „Elastic Bands“ (Quinlan und Khatib 1993) durchgeführt, welche an die Anforderungen einer omnidirektionalen Plattform angepasst wurden. Dabei wurde die Plattform jeweils als holonom, omnidirektional behandelt. Bahninterpolation und Bahnregelung wurden ebenfalls dahin gehend vereinfacht, dass sie die Plattform als holonom, omnidirektional behandeln.

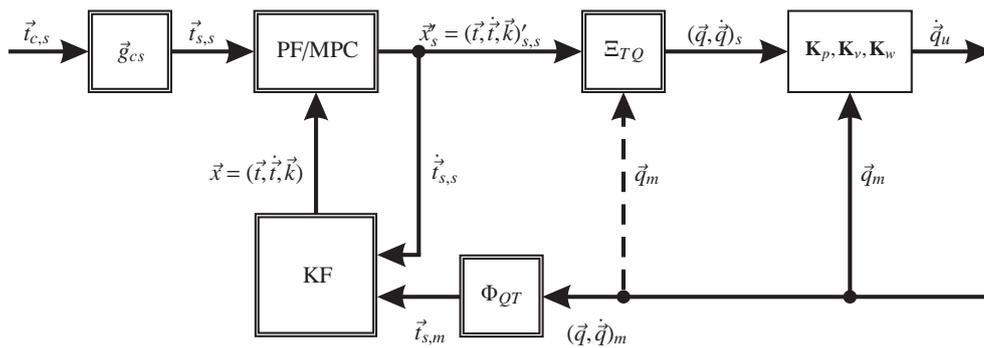


Abbildung 6.4: Dargestellt ist das Blockschaltbild der implementierten Regelung auf Fahrwerksebene (PF/MPC) zusammen mit den Komponenten Beobachter (KF), inverser (Ξ_{TQ}) und direkter (Φ_{QT}) Kinematik und den unterlagerten Regelkreisen (K_p, K_v, K_w). Eine detaillierte Darstellung des unterlagerten Regelkreises auf Radmodulebene ist in Abbildung 6.5 zu sehen.

Hinsichtlich der Implementierung lässt sich das System grob in drei Ebenen zerlegen. Die unterste, dynamische Ebene hinsichtlich der einzelnen Gelenke, die in Form der Elmo Motorcontroller „hardwareseitig“ implementiert ist. Eingangsgrößen dieser Ebene sind die Sollwerte für die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten. Ausgangs- bzw. Messgrößen sind die tatsächlichen bzw. gemessenen Werte bezüglich Gelenkwinkel und Gelenkwinkelgeschwindigkeit, also die interne Konfiguration des Fahrwerks. Die übergeordnete, abstrakte Ebene, welche im Falle der Navigation durch die am Fraunhofer IPA entwickelte Navigationssoftware gegeben ist, aber auch durch eine beliebige, applikationsspezifische Software ersetzt werden kann. Die Schnittstelle zur Fahrwerksebene erlaubt das Setzen von kartesischen Geschwindigkeitskommandos bzw. Auslesen der gegenwärtigen Geschwindigkeit sowie der relativen Positionsänderung bezüglich des Weltkoordinatensystems seit dem letzten Aufruf. Die Interaktion findet dabei über das Softwareframework ROS (Cousins u. a. 2010) statt.

Auf Ebene der Fahrwerksregelung muss damit die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen bzw. die Koordination der Radmodule sichergestellt werden. Zudem muss die Regelung auf Fahrwerksebene hinreichend schnell sein, um den Trajektorienfehler aufgrund der Vereinfachung bei Bahnplanung und -optimierung gering zu halten. Hier war das Fahrwerk als holonom modelliert worden. Auf unterster Ebene werden die einzelnen Radmodule ausgeregelt. Diese Regelung lässt sich nochmals grob in eine „kinematische“ Ebene und eine „dynamische“ Ebene unterteilen.

Die „dynamische“ Ebene ist durch die bereits erwähnten, kommerziellen Motorcontroller gegeben. Die kinematische Ebene besteht im Wesentlichen aus einem PI-Regler, der die Aufintegration von Gelenkwinkel Fehlern vermeiden soll. Das ist notwendig, da die Fahrwerksregelung selbst nur noch auf der reduzierten Zustandsraumdarstellung, dem Momentanpol bzw. sphärischen Twist und dessen erster Ableitung beruht. Fehlstellungen einzelner Räder, welche die nicht-holonomen Bindungen verletzen und damit nicht im Zustandsraum abgebildet werden, müssen daher in einem unterlagerten Regler korrigiert werden (Abb. 6.4).

Das Softwaremodul, das den Regler auf Fahrwerksebene implementiert, setzt sich aus folgenden Komponenten (Abb. 6.4) zusammen: Den Modulen, welche die inverse Kinematik Ξ_{TQ} und die direkte Kinematik Φ_{QT} rechnen, sowie dem Modul, das die Abbildung von gesamtem Konfigurationsraum in den kartesischen Geschwindigkeitsraum und die Odometrie rechnet. Des Weiteren existiert ein Modul \vec{g}_{cs} (Abb. 6.4), das die Abbildung von kartesischem Geschwindigkeitsraum in den erweiterten Twistraum rechnet und den vorteilhaftesten Sollwert aus der Menge der möglichen Sollwerte auswählt. Darüber hinaus ist der in Abschnitt 4.1.3 skizzierte Beobachter Teil des Softwaremoduls, das den Regler auf Fahrwerksebene implementiert. Schließlich stellen der eigentliche Fahrwerksregler sowie die Regler für die einzelnen Radmodule eigenständige Module dar.

6.1.4 Auslegung des Referenzreglers

Um eine Referenz für die Geschwindigkeit des Reglers bzw. die mit der Regelabweichung einhergehende Trajektorienabweichung zu erhalten, wird der Regler auf Radmodulebene (Abb. 6.5) als eigenständiger Regler integriert. Dazu entfällt die Vorsteuerung über den im Regler für den sphärischen Twist abgeleiteten Sollwert der Gelenkwinkelgeschwindigkeit (gestrichelt in Abbildung 6.5)

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{wq} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{we} &= \mathbf{1} .\end{aligned}$$

Der Regler auf Radmodulebene entspricht damit einem linearen, potentialfeldbasierten Regler nach Abschnitt 5.2 bzw. einem I-Regler mit Stellgrößenbeschränkung und Anti-Wind-Up. Die Rückführung der integrierten Stellgröße (\mathbf{K}_v -Block in Abb. 6.5) realisiert dabei das Anti-Wind-Up.

Um die Sollgröße \vec{q}_s bezüglich der Gelenkwinkelstellungen zu errechnen, wird die vektorielle Geschwindigkeit in den Lenkachsen nach Descartes' Prinzip der Festkörperbewegung direkt aus dem kartesischen Twist \vec{t}_{wr} berechnet (Alexander und Maddocks 1989). Aus der kartesischen Geschwindigkeit in der Radachse ergibt sich dann der Sollwert für den zugehörigen Lenkwinkel $\varphi_{s,i}$, damit der Punkt des Rad-Boden-Kontaktes und dann letztlich die notwendige Rotationsrate $\dot{\varphi}_{d,i}$ für das Rad. Diese Berechnung liefert aufgrund der Mehrdeutigkeiten zwei Lösungen für jedes der Räder. Um eine Lösung auszuwählen, wird ein Gütemaß

$$J_{Lsg_i} = k_1 \cdot \Delta\varphi_m + k_2 \cdot \Delta\varphi_{k-1}$$

ausgewertet, welches die Abweichung $\Delta\varphi_m$ zwischen Lösung und aktuellem Lenkwinkel sowie die Abweichung $\Delta\varphi_{k-1}$ zwischen Lösung und letztem Sollwert des Lenkwinkels gewichtet. Diese Auswahl wird für jedes einzelne Rad unabhängig von den anderen Rädern durchgeführt. Die Gewichtung des letzten Sollwerts verhindert dabei ein andauerndes Umschalten zwischen den beiden Lösungsdomänen, das auftreten kann, wenn die Lösungen zu den jeweiligen Domänen ähnlich weit vom gegenwärtigen Zustand entfernt sind. Das ist z.B. der Fall, wenn nach einer Fahrt in Vorwärtsrichtung eine Fahrt in Seitwärtsrichtung kommandiert wird.

Diese Bestimmung der Sollgrößen führt letztlich auf den Punkt im Konfigurationsraum, welcher den geforderten Sollwert für den Twist repräsentiert und den geringsten Abstand von dem Punkt im Konfigurationsraum hat, welcher die gegenwärtige Konfiguration repräsentiert. Diese beiden Punkte liegen im Allgemeinen nicht in der gleichen Lösungsdomäne. Daraus folgen zwei Eigenschaften dieses Reglers. Einerseits wählt der vorgeschlagene Regler immer den kürzesten Weg zur Sollkonfiguration und stellt damit bei geeigneter Auslegung ein zeitoptimales Regelungsgesetz dar. Andererseits impliziert eine Überführung des Zustandes durch lineare Interpolation zwischen diesen Punkten, ob für alle Achsen gemeinsam oder jede Achse für sich, im Allgemeinen eine Verletzung der nicht-holonomen Bindungen aufgrund des Domänenwechsels.

In praktischen Versuchen zeigt sich, dass der Referenzansatz eine gute Performance liefert, solange Soll- und Istwert dicht beieinander liegen. In diesem Fall findet in der Regel kein Domänenwechsel statt und die Lenkwinkel weichen nur leicht von jenen ab, welche mit den nicht-holonomen Bindungen konform sind. Allerdings kommt es sporadisch, insbesondere nach Stopps und erneutem Anfahren in eine andere Richtung, zu einem unruhigen Fahrverhalten. Für die experimentelle Auswertung und den Vergleich der Ergebnisse ist diese Performance hinreichend.

6.2 Versuchsdurchführung am Beispiel des Referenzreglers

6.2.1 Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte

Um im Folgenden die diskutierten regelungstechnischen Ansätze zu validieren und qualitativ miteinander zu vergleichen, werden die Systeme jeweils mit einer Sprungantwort bezüglich jedes der drei Freiheitsgrade der ebenen Bewegung sowie mit einer „kritischen Trajektorie“ und einer langen „Zufallsfahrt“ beaufschlagt. Die kritische Trajektorie ist dabei so gewählt, dass einige Sollwerte direkt in der Nähe von Singularitäten liegen bzw. bei einer direkten Überführung des Systems von einem zum anderen Sollwert singuläre Bereiche des Arbeitsraums gequert würden. Bei der Zufallsfahrt werden im Sekundentakt Sollwerte für den Twist generiert. Diese sind über den gesamten Zustandsraum, einschließlich der singulären Bereiche, gleich verteilt.

Bevor die in Kapitel 5 entworfenen Regler evaluiert werden, werden die Versuche exemplarisch für den zuvor eingeführten Referenzregler auf Radmodulebene durchgeführt. Im Zuge dieser Untersuchung werden die im Folgenden zur Quantifizierung der Regelungsgüte verwandten Messgrößen eingeführt und ihre Bedeutung anschaulich diskutiert. Die erzielten Ergebnisse dienen als Benchmark zur Bewertung der anschließend in Kapitel 7 evaluierten Verfahren. Insbesondere hinsichtlich der gemessenen Einregelzeit wird der Referenzregler auf Radmodulebene auf eine untere, optimale Grenze führen. Da dieser Regler den gesamten Konfigurationsraum inklusive der unzulässigen Bereiche nutzt, kann er immer die kürzeste, direkte Verbindung zwischen zwei Konfigurationen abfahren. Diese Eigenschaft zeigt sich deutlich bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung bezüglich der Rotation des Roboters ω_{wr}^r . Zunächst sollen jedoch noch die Einheitssprünge bzgl. der translatorischen Geschwindigkeit ($v_{wr,x}^r, v_{wr,y}^r$) untersucht werden.

Abbildung 6.6 zeigt die Sprungantwort des Referenzregler bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung der translatorischen Geschwindigkeit $v_{wr,x}^r$ in x-Richtung bezogen auf das Roboterkoordinatensystem. Die Einregelzeit in das $[-10\%, +10\%]$ -Intervall um den Sollwert beträgt 0.16 s. Die kommandierte Rotation der Räder $\dot{\varphi}_d$ (Abb. 6.6(c), mittlerer Plot) ist ein Einheitssprung auf 6.667 rad/s. Die Einregelzeit ist maßgeblich durch die Einregelzeit bzgl. des Betrags ρ_{wr}^r der verallgemeinerten Geschwindigkeit und nicht durch Rekonfiguration des Fahrwerks bestimmt. Da in der Ausgangskonfiguration des Fahrwerks alle Räder nach vorne zeigen, ist im vorliegenden Fall kein Lenken nötig (Abb. 6.6(c), mittlerer Plot). Das Fahrwerk kann unmittelbar in die vorgegebene Richtung beschleunigen (Abb. 6.6(a)). Ebenso sind die nicht-holonomen Bindungen trivial erfüllt, keine der Lenkachsen weicht von der zulässigen Konfiguration ab (Abb. 6.6(c), unterer Plot).

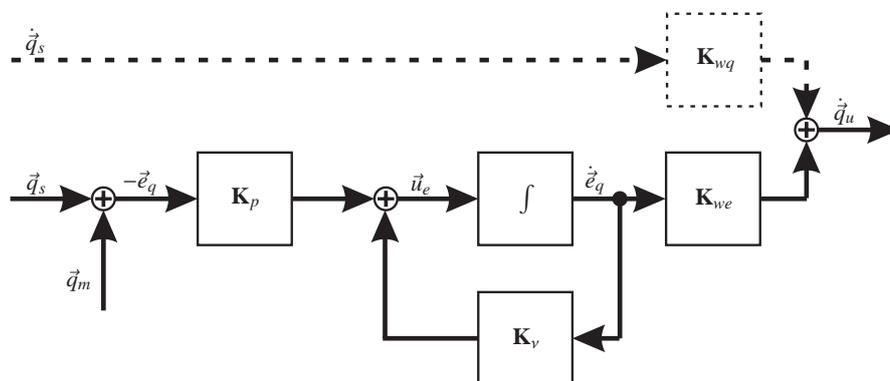


Abbildung 6.5: Dargestellt ist das Blockschaltbild des Reglers auf Radmodulebene. Der gestrichelt dargestellte Weg entspricht der Vorsteuerung bei Verwendung des Reglers in Zusammenhang mit dem in Abbildung 6.4 dargestellten Fahrwerksregler.

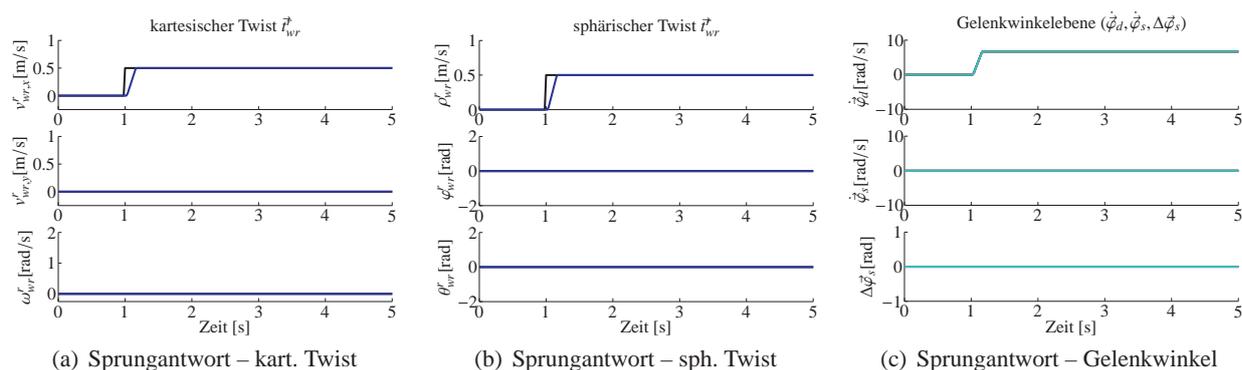


Abbildung 6.6: Sprungantwort des Radmodulreglers bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung in $v_{wr,x}^r$. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Abbildung 6.6(c) zeigt v.o.n.u. die zugehörigen kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler, jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel.

Abbildung 6.7 zeigt die Sprungantwort des geregelten Systems bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung der translatorischen Geschwindigkeit $v_{wr,y}^r$ in y-Richtung bezogen auf das Roboterkoordinatensystem. Die Einregelzeit beträgt in diesem Fall 0.3 s. Es ist zu erkennen (rot gestrichelter Kreis in Abb. 6.7(a)), wie es durch die nötige Umorientierung zu einer Störung der $v_{wr,x}^r$ -Komponenten kommt. Dies liegt an der Kopplung der Freiheitsgrade über die nicht-holonomen Bindungen. Bezüglich der sphärischen Darstellung des Twists (Abb. 6.7(b)) tritt diese Störung nicht auf. Hier wird die Bewegung in die beiden unabhängigen Freiheitsgrade ρ_{wr}^r und φ_{wr}^r zerlegt.

Die im Vergleich zum Einheitsprung in $v_{wr,x}^r$ längere Einregelzeit ist maßgeblich durch die Lenkbewegung bestimmt. Alle Räder müssen gleichermaßen um 90° rotiert werden (Abb. 6.8). Dies ist die für diesen Ansatz maximale Regeldifferenz. Die maximale Stellrate der Lenkwinkel beträgt in diesem Fall 6.468 rad/s. Da in diesem Fall die Regeldifferenz für alle Radmodule identisch ist, ergibt sich in der Simulation ein identischer Verlauf der kommandierten Geschwindigkeit. Aus dem gleichen Grund sind die Räder in diesem Fall synchron, obwohl die Regelung der Radmodule nicht explizit koordiniert wird. Die Abweichung der Lenkwinkel der Räder von dem Lenkwinkel, unter welchem der gemeinsame Schnittpunkt liegt (letzter Graph in Abb. 6.7(c)), ist für alle Räder identisch Null. Der zusätzliche Anstieg und anschließende Abfall der Rotation des Rades nach dem Einheitsprung (erster Graph in Abb. 6.7(c)) ist durch die Kopplung der beiden Gelenke eines Radmoduls bedingt. Aufgrund des Versatzes der Räder zur Lenkachse beim hier simulierten System (vgl. Abschnitt 6.1.2) ist das Aufschalten einer Ausgleichsbewegung nötig.

Wie man in Abbildung 6.8(d) erkennen kann, bildet die Systemtrajektorie eine Gerade von Ausgangskonfiguration \vec{t}_0 zu Zielkonfiguration \vec{t}_e . Hier wurde auf die Darstellung der alternativen Lösungen verzichtet. Die Konfiguration des Fahrwerks ist zu jedem Zeitpunkt wohl definiert.

Abbildung 6.9 zeigt die Sprungantwort des geregelten Systems bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung der rotatorischen Geschwindigkeit ω_{wr}^r . Die Einregelzeit beträgt in diesem Fall 0.26 s. Sie ist wiederum maßgeblich durch die Dauer der Rekonfiguration geprägt und fällt etwas kürzer aus als für den Einheitsprung bzgl. $v_{wr,y}^r$, da der zu stellende maximale Lenkwinkel kleiner ist. Wieder ist zu erkennen (rot gestrichelter Kreis in Abb. 6.9(a)), wie es durch die nötige Umorientierung zu einer Störung der $v_{wr,x}^r$ - und der $v_{wr,y}^r$ -Komponente kommt. Während die Störung in $v_{wr,x}^r$ wieder auf die Kopplung der Freiheitsgrade über die nicht-holonomen Bindungen zurückzuführen ist, steht die Störung in $v_{wr,y}^r$ mit der

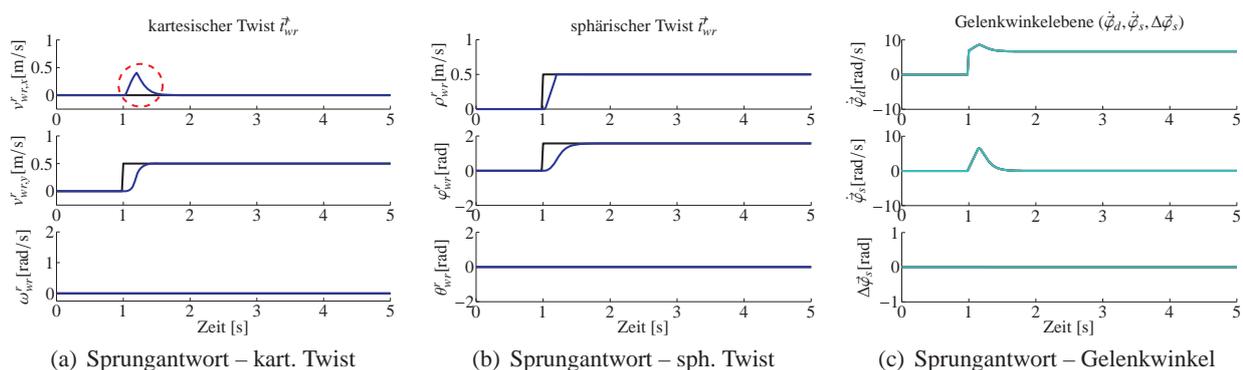


Abbildung 6.7: Sprungantwort des Radmodulreglers bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in v_{wry}^r . Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Abbildung 6.7(c) zeigt v.o.n.u. die zugehörigen kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler, jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel.

Verletzung der nicht-holonomen Bindungen in Zusammenhang. Darauf ist auch der unstetige Verlauf der ω_{wr}^r -Komponente (unterster Graph in Abb.6.9(a)) zurückzuführen.

Dieser Übergang von einer validen Konfiguration in eine andere valide Konfiguration über eine invalide Systemtrajektorie ist in Abbildung 6.10 exemplarisch dargestellt. So sind in Abbildung 6.10(b) und Abbildung 6.10(c) jeweils die Radpaare 24 und 13 parallel zueinander, während die übrigen Paarungen Schnittpunkte (kleine blaue bzw. rote Kreise) in der Nähe des Ursprungs des Roboterkoordinatensystems bilden. Die Räder arbeiten damit gegeneinander. Die nicht-holonomen Bindungen werden verletzt. Man kann erkennen, dass in der in Abbildung 6.10(c) dargestellten Übergangskonfiguration die Räder 2 und 4 annähernd senkrecht zu den Rädern 1 und 3 stehen. Ein Abrollen der Räder verursacht damit ein Schieben quer zu den jeweils anderen Rädern. Ein unruhiges Fahrverhalten und eine ggf. starke Belastung von Motoren und Untergrund ist die Folge.

Diese Abweichung der einzelnen Räder von der idealen Konfiguration ist in Abbildung 6.9(c) (unterer Graph) quantifiziert. Der Lenkwinkelfehler $\Delta\varphi_s$ beschreibt die Abweichung jedes einzelnen Rades von dem Lenkwinkel, welcher der geschätzten gegenwärtigen Momentanpolposition zugeordnet wäre. Der maximale Fehler beträgt 0.62 rad bzw. $35,5^\circ$. Als relevant kann im Allgemeinen ein Fehler von ca. 10° angesehen werden. In den folgenden Betrachtungen gilt als konservative Grenze für einen relevanten Fehler der Wert von 0.1 rad. Das entspricht ca. $5,73^\circ$. Der maximale Fehler liegt im hier betrachteten Fall für die Dauer von 0.25 s über dieser Grenze.

Weitere Maße, welche eine Quantifizierung der Asynchronität der Radmodule bzw. der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen erlauben, sind die Varianz über alle signifikanten Achsschnittpunkte sowie der Median bzw. der Maximalwert der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols (Abb. 6.11(b)). Im Wesentlichen können diese Maße als Abstandsmaß zwischen der gegenwärtigen Konfiguration und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[\mathbf{C}_{1,s}]$, der einen Unterraum des Konfigurationsraums darstellt, interpretiert werden. Auch hier ergibt sich für die Dauer von 0.24 s ein signifikantes Abstandsmaß. In der Systemtrajektorie zeigt sich diese Verletzung der nicht-holonomen Bindungen in Form starker Sprünge der Kurve (Bereich innerhalb der rot gestrichelten Ellipse in Abbildung 6.11(b)) sowie dadurch, dass keine geradlinige Bahn zwischen Sollkonfiguration \vec{t}_e und Ausgangskonfiguration \vec{t}_0 abgefahren wird.

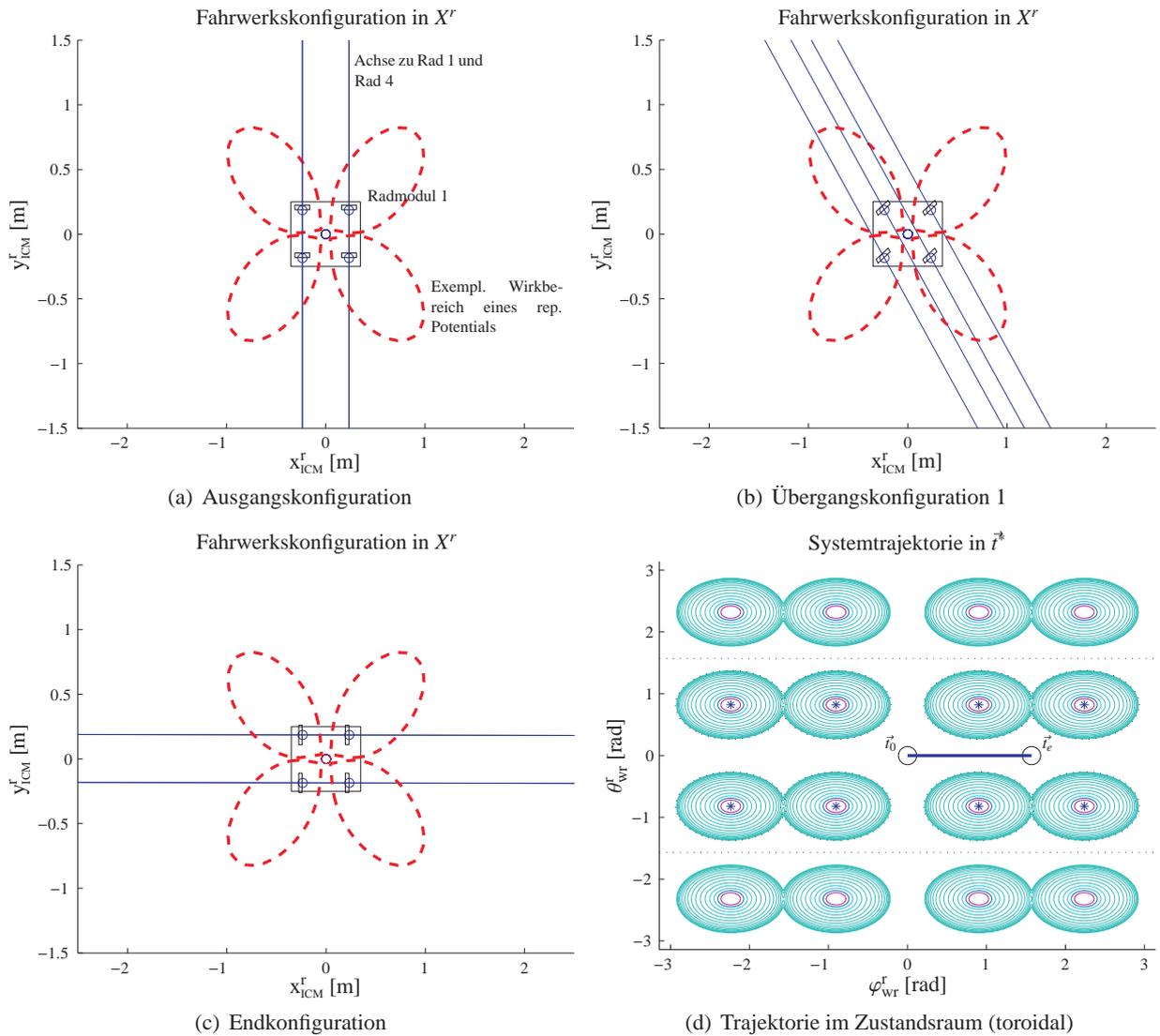


Abbildung 6.8: Abbildung 6.8(a) bis 6.8(c) visualisieren die Änderung der Konfiguration während des Lenkvorgangs. Dargestellt ist das Fahrwerk (großes schwarzes Rechteck) mit allen Radmodulen (kleine schwarze Rechtecke kennzeichnen das Rad, Kreise kennzeichnen die Position der zugehörigen Lenkachse) sowie die Achsgeraden durch alle Räder (blaue Linien). Die rot gestrichelten Kurven stellen exemplarisch die Wirkbereiche von repulsiven Potentials dar. Abbildung 6.8(d) zeigt den Verlauf der Systemtrajektorie im Zustandsraum. Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen (Abb. 6.8(a)) bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gepunkteten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert. Die Systemtrajektorie ist als breite blaue Linie zwischen Startkonfiguration \vec{t}_0 und Zielkonfiguration \vec{t}_e (schwarze Kreise) dargestellt.

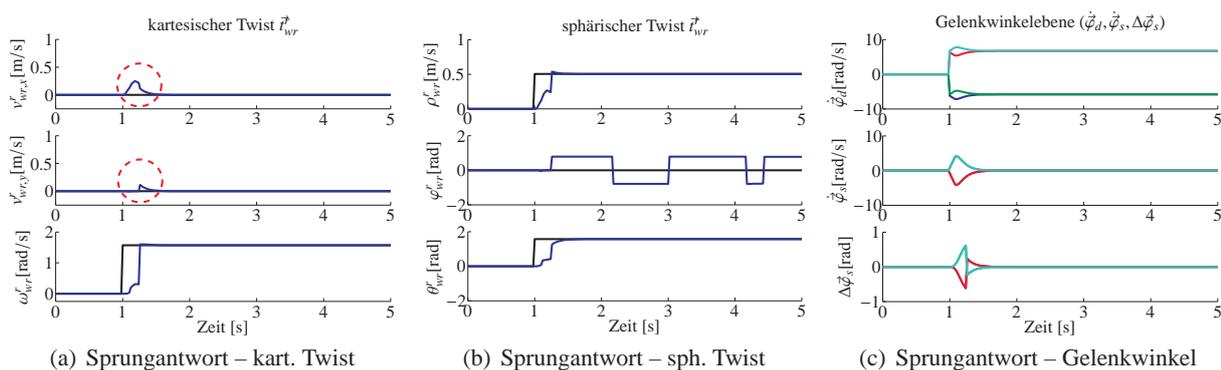


Abbildung 6.9: Sprungantwort des Radmodulreglers bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Abbildung 6.9(c) zeigt v.o.n.u. die zugehörigen kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler, jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel.

In Anbetracht von Größe und Dauer der Störungen bzw. in Anbetracht des Ausmaßes der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen ist also für den hier betrachteten Fall mit Störungen im Laufverhalten des Systems zu rechnen. Dabei spielt der Untergrund bzw. der Reibkoeffizient zwischen Rad und Boden eine erhebliche Rolle. Bei einem geringen Reibkoeffizient, wie z.B. auf verschmutztem Parkett können die Räder leicht durchrutschen. Das „Schieben“ über die Räder wird kaschiert.

Neben den sprunghaften Änderungen in ω_{wr}^r bzw. θ_{wr}^r aufgrund der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen und dem damit nicht eindeutig definierten Momentanpol weist die Sprungantwort eine weitere auffällige Charakteristik auf. Im mittleren Graph von Abbildung 6.9(a) bzw. in dem von der grün gestrichelten Ellipse umgebenen Bereich der Trajektorie in Abbildung 6.11(a) kann man erkennen, wie der Parameter φ_{wr}^r mehrfach sprunghaft seinen Wert ändert. Anders als beim un stetigen Verlauf von ω_{wr}^r bzw. θ_{wr}^r liegt diesen Unstetigkeiten aber keine Verletzung der nicht-holonomen Bindungen zugrunde. Sie sind die Folge der in Abschnitt 4.1 bereits analytisch abgeleiteten Nicht-Beobachtbarkeit des Parameters φ in den Polen der Riemannschen Sphäre bzw. die Nicht-Definitheit der Polarkoordinaten des Momentanpols, wenn dieser im Ursprung des Referenzsystems liegt. Diese Unstetigkeiten können wie in Abschnitt 4.1.3 gezeigt durch den Entwurf eines Beobachters behandelt werden. Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über die charakteristischen Kenngrößen für den Referenzregler auf Radmodulebene bei Aufschaltung der verschiedenen Sprungantworten.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IP _s $\max(d_{IP,ICM})$ [m]	Streuung IP _s $\text{med}(d_{IP,ICM})$ [m]	Streuung IP _s $\sigma(\tilde{x}_{IP})$ [m]
Sprungantwort $v_{wr,x}^r$	0.16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Sprungantwort $v_{wr,y}^r$	0.3	6.468	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Sprungantwort ω_{wr}^r	0.26	4.138	0.62	0.25	2.918	1.0	0.577

Tabelle 6.1: Kenngrößen des Referenzreglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung

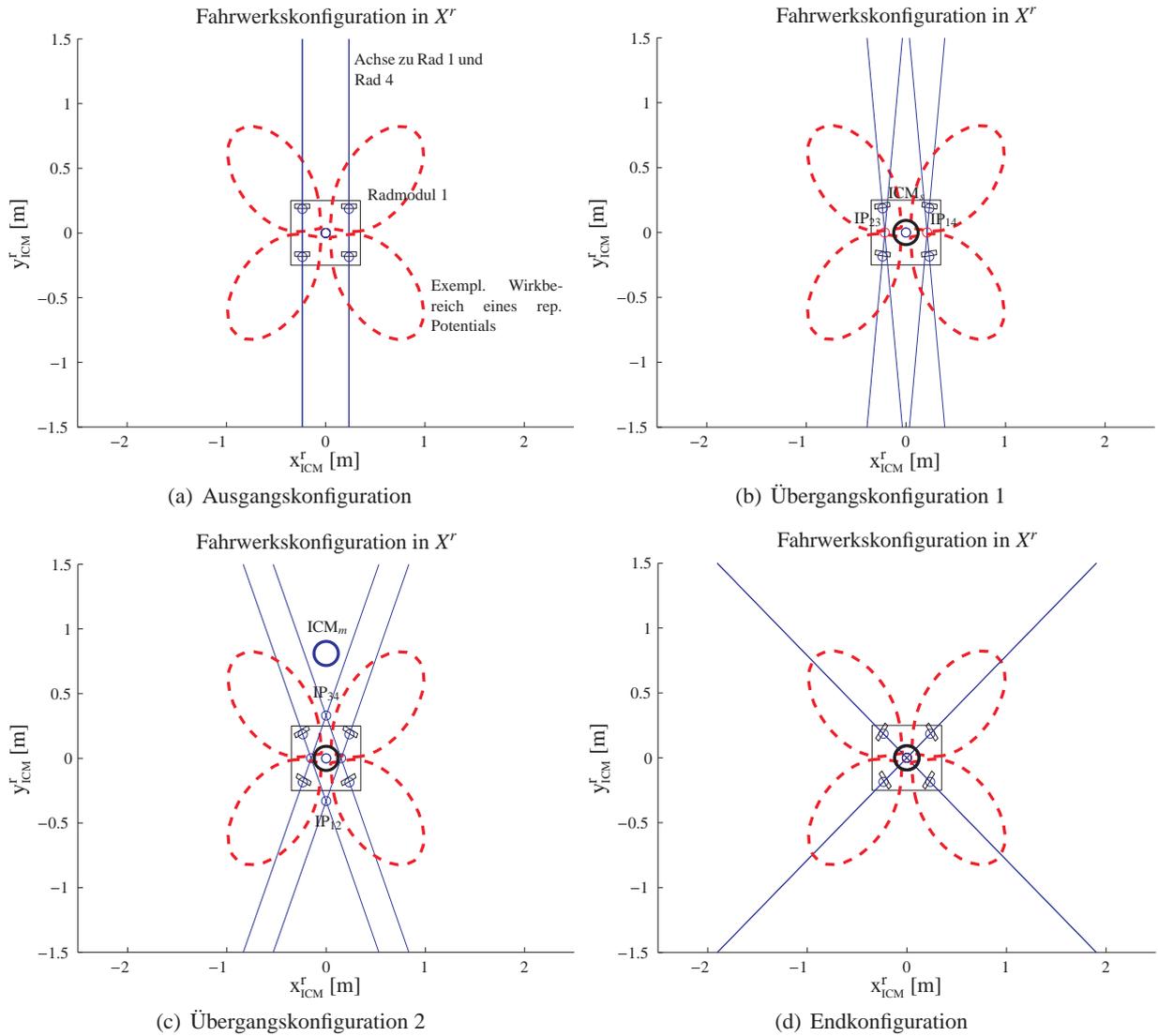


Abbildung 6.10: Abbildung 6.10(a) bis 6.10(d) visualisieren die Änderung der Konfiguration während des Lenkvorgangs. Dargestellt ist das Fahrwerk (großes schwarzes Rechteck) mit allen Radmodulen (kleine schwarze Rechtecke kennzeichnen das Rad, Kreise kennzeichnen die Position der zugehörigen Lenkachse) sowie die Achsgeraden durch alle Räder (blaue Linien). Die rot gestrichelten Kurven stellen exemplarisch die Wirkbereiche von repulsiven Potentials dar. Die gegenwärtige Sollposition des Momentanpols $\vec{x}_{ICM,s}$ wird als großer schwarzer Kreis (Abb. 6.10(b), ff.), die tatsächlich geschätzte Position des Momentanpols $\vec{x}_{ICM,m}$ als großer blauer Kreis (Abb. 6.10(c), f.) dargestellt. Des Weiteren sind die signifikanten Achsschnittpunkte (kleine blaue Kreise, vgl. IP₁₂ und IP₃₄) in Abb. 6.10(c) und die insignifikanten Achsschnittpunkte (kleine rote Kreise, vgl. IP₁₂ und IP₃₄) in Abb. 6.10(b) dargestellt. Als insignifikante Achsschnittpunkte werden Schnittpunkte fast paralleler Achsen bezeichnet.

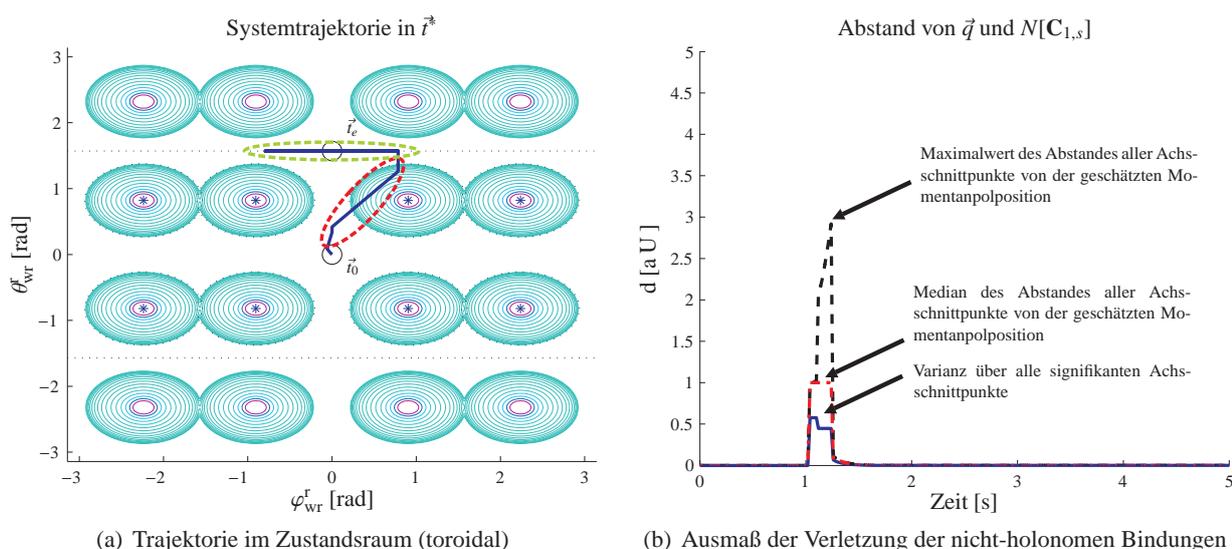


Abbildung 6.11: Abbildung 6.11(a) zeigt den Verlauf der Systemtrajektorie im Zustandsraum. Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen (Abb. 6.8(a)) bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gepunkteten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert. Die Systemtrajektorie ist als breite blaue Linie zwischen Startkonfiguration \vec{r}_0 und Zielkonfiguration \vec{r}_e (schwarze Kreise) dargestellt. Abbildung 6.11(b) stellt ein Abstandsmaß zwischen gegenwärtiger Konfiguration \vec{q} und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[C_{1,s}]$ dar. Das Ausmaß der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen wird hier beschrieben durch die Standardabweichung entlang der Hauptachse der Kovarianzmatrix über alle signifikanten Achsschnittpunkte (blaue Linie) sowie den Median (rot gestrichelt) bzw. den Maximalwert (schwarz gestrichelt) der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols.

6.2.2 Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie

Um das Verhalten des Reglers in der Umgebung der Singularitäten zu untersuchen, wird das System mit einer Sequenz von Sollgrößen \mathbf{T} beaufschlagt, welche bei linearer Interpolation durch die Singularitäten bzw. dicht an den Singularitäten vorbei führen. Die Kommandierung der kritischen Trajektorie erfolgt durch Vorgabe der Sollgrößen für den Twist \vec{r}_{wr}^r in sphärischer Repräsentation (Abb. 6.12(b)). Insbesondere kritisch ist dabei die Überführung des Zustandsvektors von der ersten Sollwertvorgabe $\vec{r}_{s,1}$ zur zweiten $\vec{r}_{s,2}$ bzw. von der zweiten zur dritten Sollwertvorgabe $\vec{r}_{s,3}$. In Abbildung 6.13 kann man erkennen, dass die lineare Interpolation zwischen diesen Konfigurationen über die singulären Bereiche führt.

Die längste Einregelzeit sowie der größte Winkelfehler, damit ist die größte Abweichung der Lenkwinkel von den unter Berücksichtigung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Winkel gemeint, tritt erwartungsgemäß während eines der kritischen Sollwertwechsel auf. Nach Kommandierung des zweiten Ziels beträgt die Einregelzeit 0.34 s und die Stellrate steigt auf 6.917 rad. Ein signifikanter Winkelfehler ($\Delta\varphi_s \geq 0.1$ rad) wird für die Dauer von 0.26 s gemessen. Dabei wächst der Winkelfehler $\Delta\varphi_s$ in diesem Trajektorien-Abschnitt auf einen Maximalwert von 1.299 rad bzw. 74.43° an.

Betrachtet man die Systemtrajektorie (Abb. 6.13(a)), so kann man erkennen, dass sich der geschätzte Momentanpol hier annähernd unmittelbar über eine Singularität, hier die Lenkachse des zweiten Rades, bewegt. Das impliziert, dass das zweite Rad eine erheblich größere Winkeldifferenz zu stellen hat bzw. die Stellgrößen erheblich höher sein müssten als bei den übrigen Rädern. Durch die Begrenzung der Stellgrößen kommt es zu einem „Nachlaufen“ des zweiten Rades bzw. einer Aufintegration des Fehlers.

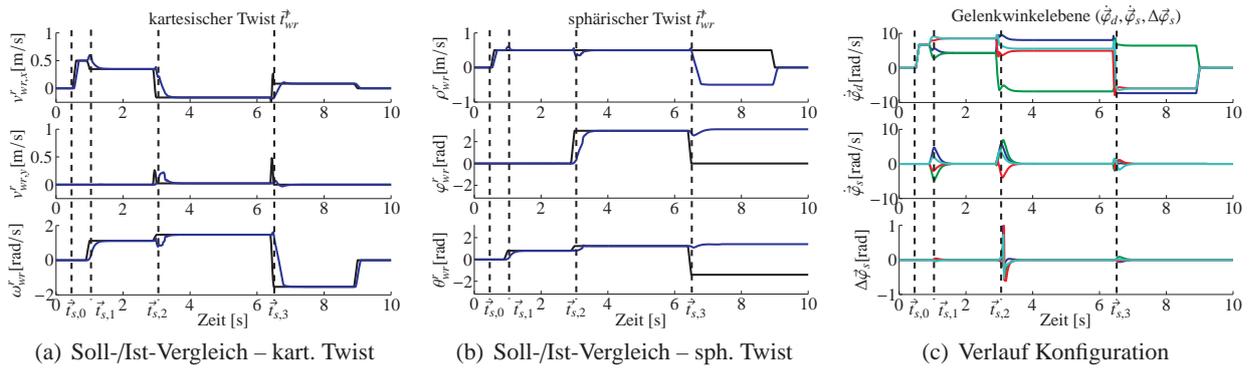


Abbildung 6.12: Verhalten des Radmodulreglers bei Beaufschlagung mit einer kritischen Trajektorie. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. den Verlauf des Twists bei kartesischer Darstellung sowie bei Darstellung in sphärischen Koordinaten. Abbildung 6.12(c) zeigt v.o.n.u. die zugehörigen kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler, jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Die senkrechten Linien (schwarz gestrichelt) markieren den Zeitpunkt der Aufschaltung eines neuen Sollwertes für den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^* .

Der enorme Fehler von knapp 75° muss etwas relativiert werden. Betrachtet man die Streuung der Achsschnittpunkte, so kann man erkennen, dass die wesentlichen Kenngrößen (Abb. 6.13(b)), das sind Standardabweichung, Median und Maximum der Abstände zum geschätzten Momentanpol, alle einen kleineren Wert annehmen als beim Einheitsprung bezüglich der Rotation ω_{wr}^r (Tab. 6.1, Abb. 6.11(b)). Die Schnittpunkte liegen also vergleichsweise dicht beieinander, hier in der Nähe der Achse des zweiten Rades. Es steht also zu erwarten, dass sich der Winkelfehler weniger stark auswirkt als zum Beispiel ein bei Geradeaus-Fahrt quer stehendes Rad. Dennoch wird eine derart erhebliche Abweichung je nach Bodenbeschaffenheit zu einem unruhigen Laufverhalten bzw. einer stärkeren Belastung der Mechanik führen.

Es ist auffällig, dass bei dem zweiten kritischen Sollwertwechsel von $\vec{t}_{s,2}$ nach $\vec{t}_{s,3}$ weder besonders große Stellraten bzw. Einregelzeiten noch erhebliche Winkelfehler auftreten (Abb. 6.12). Betrachtet man sich den Verlauf der Trajektorie (Abb. 6.13(a)), so erkennt man jedoch, dass hier das Abfahren der kritische Trajektorie nicht nötig ist. Die Radmodule regeln unabhängig voneinander auf eine Konfiguration ein, welche einer Lösung $\vec{t}_{s,3}^*$ in einer der alternativen Lösungsdomänen entspricht. Tabelle 6.2 fasst die Ergebnisse für die unterschiedlichen Abschnitte der Trajektorie zusammen.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_d [s]	Streuung IP_s $\max(d_{ip;ICM})$ [m]	Streuung IP_s $\text{med}(d_{ip;ICM})$ [m]	Streuung IP_s $\sigma(\hat{x}_{ip})$ [m]
Abschnitt $\vec{t}_{s,0} \rightarrow \vec{t}_{s,1}$	0.28	4.708	0.041	0.0	0.270	0.187	0.116
Abschnitt $\vec{t}_{s,1} \rightarrow \vec{t}_{s,2}$	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198
Abschnitt $\vec{t}_{s,2} \rightarrow \vec{t}_{s,3}$	0.3	1.938	0.090	0.0	0.068	0.040	0.003
Gesamte Trajektorie	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198

Tabelle 6.2: Kenngrößen des Referenzreglers bei Beaufschlagung mit Einheitsprung

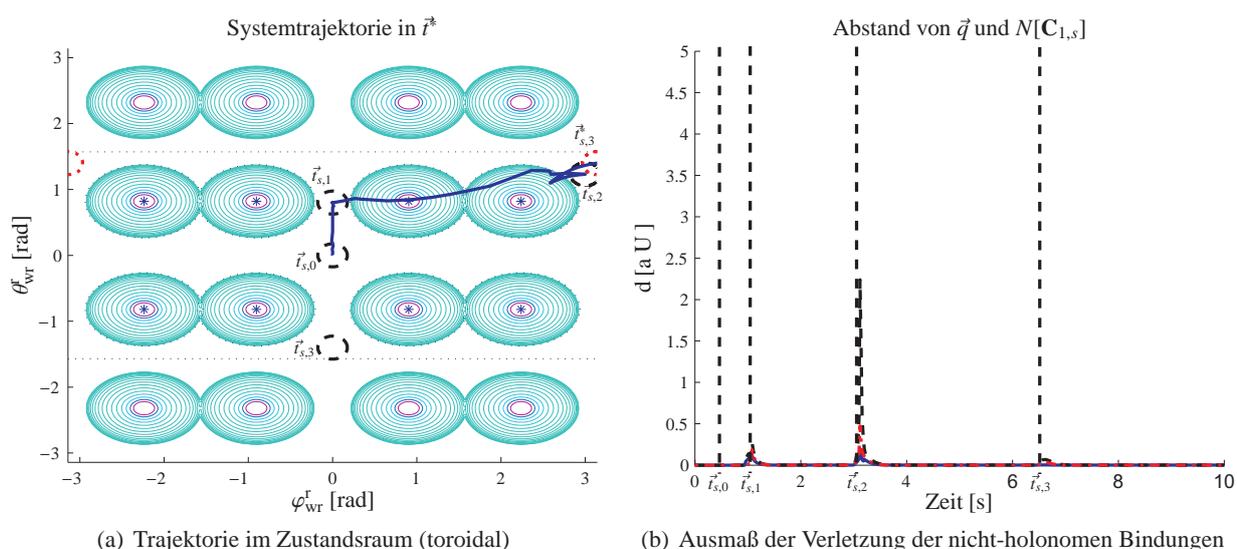


Abbildung 6.13: Abbildung 6.13(a) zeigt den Verlauf der Systemtrajektorie im Zustandsraum. Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gepunkteten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert. Die Systemtrajektorie ist als breite blaue Linie zwischen Startkonfiguration \vec{t}_0 und Zielkonfiguration \vec{t}_k (schwarze, gestrichelte Kreise) dargestellt. Alternative Zielkonfigurationen \vec{t}_k^* sind soweit relevant durch rote gepunktete Kreise markiert. Abbildung 6.13(b) stellt ein Abstandsmaß zwischen gegenwärtiger Konfiguration \vec{q} und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[C_{1,s}]$ dar. Das Ausmaß der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen wird hier beschrieben durch die Standardabweichung entlang der Hauptachse der Kovarianzmatrix über alle signifikanten Achsschnittpunkte (blaue Linie) sowie den Median (rot gestrichelt) bzw. den Maximalwert (schwarz gestrichelt) der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols.

6.2.3 Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel

Die vollständige Charakterisierung des Reglers anhand einzelner Trajektorien ist aufgrund der hohen Zahl von Mehrdeutigkeiten in der Lösungsmenge hier praktisch nicht durchführbar. Zu jeder Sollwertvorgabe existieren 2^N Lösungen. Für das hier betrachtete System mit N gleich vier Radmodulen existieren also 16 Lösungen zu jeder Sollwertvorgabe. Auf welche dieser Lösungen eingeregelt wird, hängt dabei von der gegenwärtigen Systemkonfiguration, den aktuellen Gelenkwinkeln und Gelenkwinkelgeschwindigkeiten ab. Das heißt, dass bereits für die zuvor kommandierte einfache Sequenz von vier Sollwerten theoretisch insgesamt 16^4 also 65,536 mögliche Trajektorien existieren. Dieser Lösungsraum lässt sich nicht mit sinnvollem Aufwand vollständig abdecken.

Um dennoch eine gute quantitative Charakterisierung der Regler zu ermöglichen, wird in diesem Abschnitt eine statistische Bewertung des Verhaltens des geregelten Systems vorgenommen. Dazu wird der Regler im Rahmen eines einständigen simulierten Testlaufs jede Sekunde mit neuen, zufällig generierten Sollwertvorgaben (Abb. 6.14(a)) beaufschlagt. Die resultierende Trajektorie (Abb. 6.14(b)) sowie die zuvor eingeführten charakteristischen Größen werden dann für diesen Testlauf statistisch ausgewertet.

Die Beaufschlagung mit zufälligen Einheitssprüngen ist im Wesentlichen mit der Situation bei Teleoperation in engen Umgebungen zu vergleichen. Bei autonomer Fahrt können Trajektorien in der Regel so gewählt werden, dass sie einen weicheren Verlauf annehmen. Um die Simulation besser einordnen zu können, sei angemerkt, dass ein realistischer Wert für die Frequenz der Sollwertwechsel bzw. Dauer einer

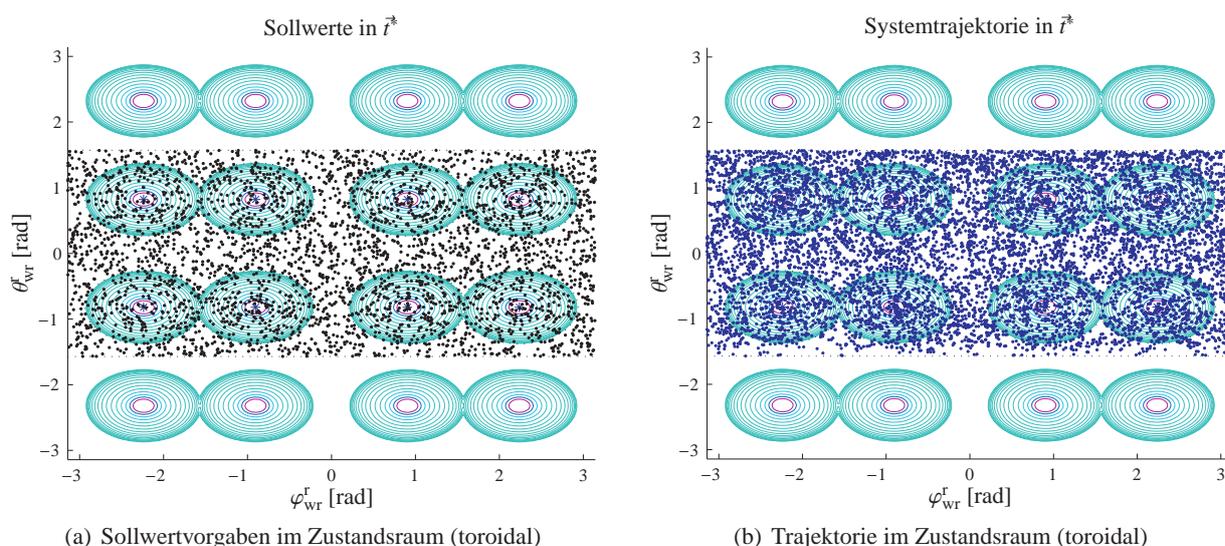


Abbildung 6.14: Abbildung 6.14(a) zeigt die Sollwertvorgaben, Abbildung 6.14(b) den Verlauf der Systemtrajektorie im Zustandsraum. Dargestellt ist die Projektion von Sollwertvorgaben und Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gestrichelten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert. Die vom System entlang der abgefahrenen Trajektorie angenommenen Zustände sind als blaue Punkte, die kommandierten Sollwerte als schwarze Punkte eingezeichnet.

Sollwertvorgabe bei Teleoperation im Labor-Betrieb bei etwa drei bis fünf Sekunden liegen dürfte. Des Weiteren ist zu beachten, dass zwischen einzelnen Fahrten immer wieder längere Pausen liegen, in welchen der Roboter Manipulationsaufgaben verrichtet. Dies einbezogen dürften die 3600 kommandierten, teilweise starken Sollwertsprünge bei „normalem“ Betrieb im Haushalt, einer Betriebsdauer von deutlich über einem Tag entsprechen. Dabei wurde ein Tag mit 12 Betriebsstunden angesetzt.

Abbildung 6.14 stellt die kommandierten Sollwerte sowie einen Auszug aus den resultierenden Trajektorien dar. Um die Größe des Datensatzes zu reduzieren, wurde nur jeder zwanzigste Wert einer Trajektorie in das Bild aufgenommen, die statistische Auswertung erfolgt auf dem gesamten Datensatz. Der zufälligen Generierung der Sollwerte (Abb. 6.14(a)) liegt eine Gleichverteilung zugrunde. Da der untersuchte Algorithmus keiner Einschränkung bezüglich des Arbeitsbereiches unterliegt, sind auch die den Trajektorien zugeordneten Punkte (Abb. 6.14(b)) näherungsweise gleichverteilt. Die Singularitäten werden also regelmäßig überstrichen. Man kann erkennen, dass sich in den Punkten, welche den Trajektorien des geregelten Systems zugeordnet sind, eine leichte Bevorzugung des oberen Polbereichs ($\theta_{wr}^r = \pi/2$) herausbildet. Dies liegt im Rahmen der erwarteten Zustandsabhängigkeit der Trajektorien aufgrund der Mehrdeutigkeiten. Ein Testlauf über 2 Stunden mit einer dementsprechend doppelt so großen Stichprobengesamtheit zeigt eine gleichmäßigere Verteilung. Bei der statistischen Evaluierung beider Testläufe zeigten sich jedoch keine wesentlichen qualitativen Unterschiede. Daher wurde aus praktischen Gründen die Betrachtung auf die Testfahrt von einer Stunde beschränkt.

Die Histogramme in Abbildung 6.15 zeigen die Verteilung einiger der charakteristischen Größen über das gesamte Experiment. Die Grundgesamtheit der betrachteten Stichprobenmenge entspricht hier der Anzahl der im Rahmen der Abtastrate von 0.02 s vornehmbaren Messungen. Für den 1-stündigen Testlauf sind das 180,000 Messungen.

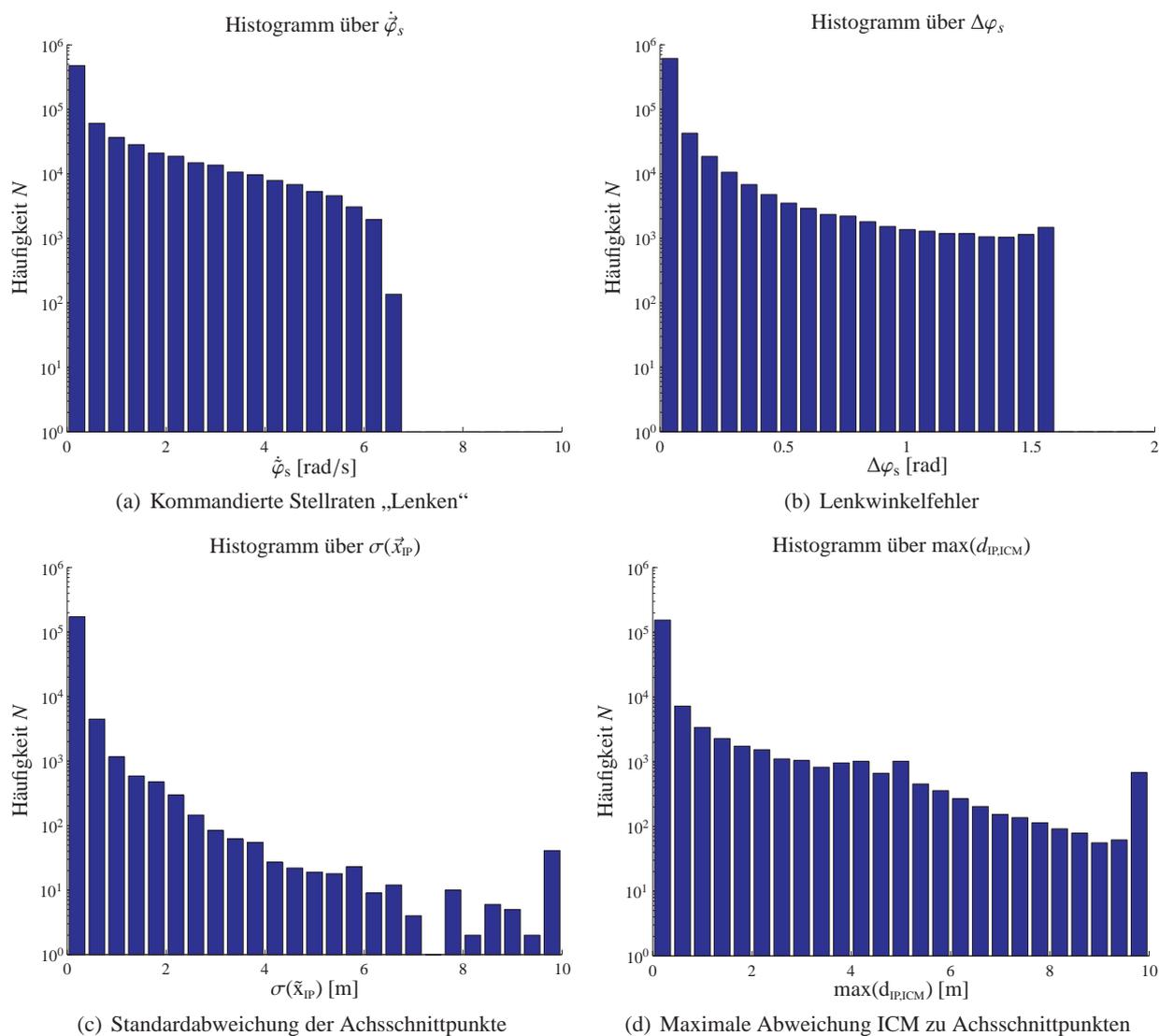


Abbildung 6.15: Abbildung 6.15(a) bis 6.15(d) stellen die Verteilung einiger charakteristischer Werte – Stellrate bzgl. der Lenkachsen $\dot{\varphi}_s$, Abweichung zwischen Gelenkwinkel und zulässigem Lenkwinkel bei Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen $\Delta\varphi_s$, die Standardabweichung über alle validen Achsschnittpunkte $\sigma(\vec{x}_{IP})$ sowie die jeweils größte Abweichung eines validen Achsschnittpunktes vom geschätzten Momentanpol $\max(d_{IP,ICM})$ – über ihren Wertebereich bezüglich der vollständigen Grundgesamtheit von 180,000 Messungen als Histogramme dar. Die Auftretenshäufigkeit ist dabei logarithmisch über den Wertebereich der charakteristischen Größen aufgetragen.

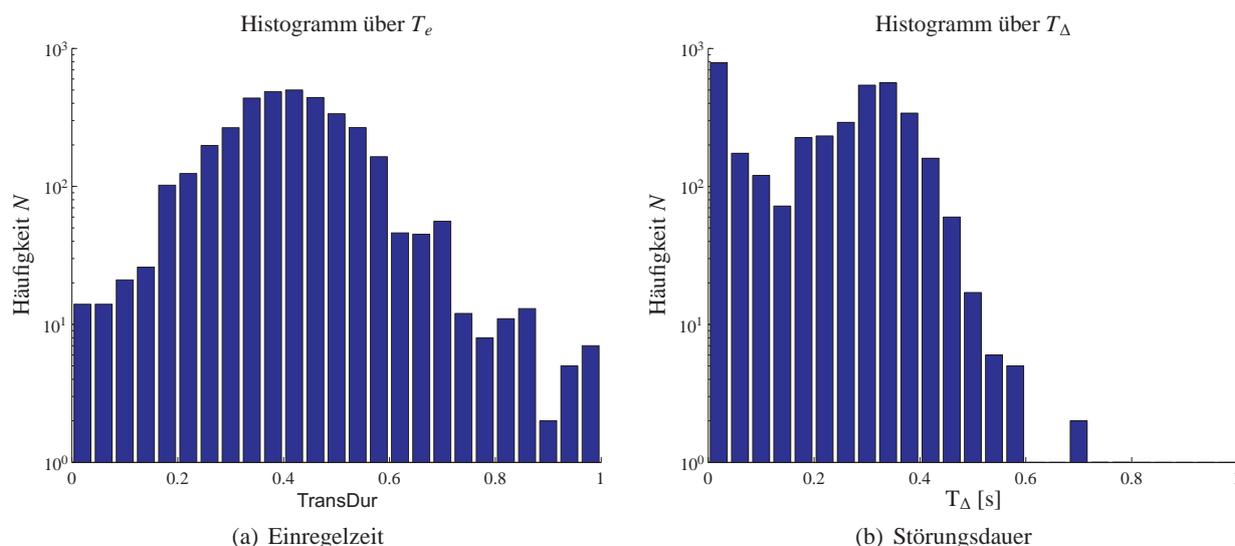


Abbildung 6.16: Abbildung 6.16(a) und 6.16(b) stellen die Verteilung von Einregelzeit T_e und Dauer einer Störung T_Δ bezüglich der Trajektorienabschnitte nach Sollwertsprung dar. Ausgewertet wurden jeweils die signifikantesten, in der Regel die maximale Werte innerhalb eines Intervallabschnittes. Die Stichprobenmenge beträgt 3600 Elemente für jeden charakteristischen Wert. Das entspricht der Anzahl der kommandierten Sollwertsprünge. Die Auftretenshäufigkeit ist dabei logarithmisch über den Wertebereich der charakteristischen Größen aufgetragen.

Man kann erkennen, dass die Stellrate (Abb. 6.15(a)) auf den zulässigen Bereich, hier etwa 2π rad/s, beschränkt bleibt. Das war zu erwarten, da bei unabhängiger Behandlung der Radmodule die Systemkonfiguration keinen Einfluss auf die Stellrate hat. Hier wirkt sich lediglich die Regelabweichung aus. Welche, wie schon bei der Untersuchung der Sprungantwort erläutert, unter Ausnutzung des vollen Lösungsraums für ein einzelnes Radmodul nicht größer als $\pi/2$ rad werden kann.

Genauso zeigen die Histogramme, dass erhebliche Fehler in den Lenkwinkeln (Abb. 6.15(b)), die einer Verletzung der nicht-holonomen Bindungen entsprechen (Abb. 6.15(c), Abb. 6.15(d)), immer wieder auftreten und nicht nur auf Einzelfälle beschränkt bleiben. Zwar weist das Histogramm hinsichtlich der Winkelfehler (Abb. 6.15(b)) eine exponentielle Abnahme des Auftretens großer Fehler auf, dennoch treten in etwa 1% der Fälle Fehler zwischen 1 rad und $\pi/2$ rad auf. Bei solchen Fehlern ist eine erhebliche Störung des Laufverhaltens zu erwarten. Wie stark die Störung des Laufverhaltens tatsächlich ausfällt, hängt allerdings von weiteren Faktoren wie der Dauer der Störung bzw. der Streuung der Achsschnittpunkte ab.

Trägt man die Auftretenshäufigkeit von Konfiguration in Abhängigkeit zur Varianz der Achsschnittpunkte (Abb. 6.15(c)) bzw. des maximalen Abstands zwischen geschätztem Momentanpol und den Achsschnittpunkten auf (Abb. 6.15(d)), so erkennt man einen noch deutlich stärkeren exponentiellen Abfall. So liegt schon die relative Häufigkeit des Auftretens einer Standardabweichung von mehr als einem Meter bei nur noch etwa 1%. Dieses Verhalten entspricht der Erwartung. Es kann wiederum auf die Tatsache zurückgeführt werden, dass besonders große Winkelfehler in der Regel bei Überstreifen der Singularitäten auftreten werden. In einer solchen Situation führt ein großer Winkelfehler, wie in Abschnitt 6.2.2 erläutert, in der Regel aber lediglich zu einer schwachen Streuung der Achsschnittpunkte. Nichtsdestotrotz macht die statistische Auswertung deutlich, dass bei Regelung auf Radmodulebene mit wiederholten starken Störungen des Laufverhaltens zu rechnen ist.

Die Histogramme in Abbildung 6.15 sind zur vollständigen Charakterisierung des Reglers nur begrenzt verwendbar. Zum einen verfälscht das relativ häufige Auftreten von Werten für den eingeregelter Zustand

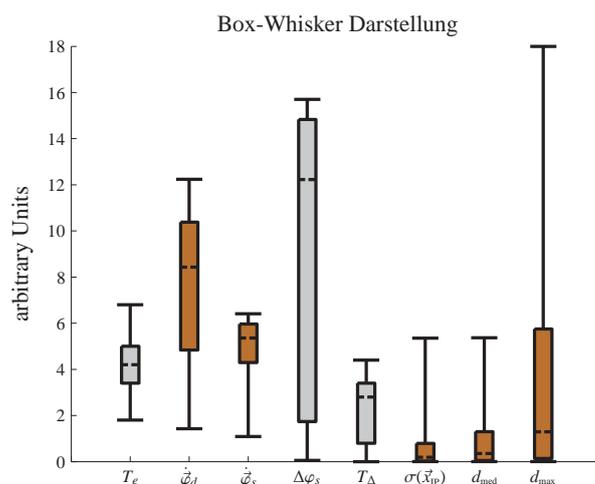


Abbildung 6.17: Die Abbildung zeigt das Box-Whisker Diagramm der charakteristischen Größen für den Radmodulregler. Die horizontalen schwarzen Linien (Whiskers) grenzen den Wertebereich einer Größe ein. Sie geben, nach Filterung der Outlier, die Lage der Minima und Maxima einer Verteilung an. Als Outlier werden hier jeweils die obersten und untersten 3% der Werte zu einer Kenngröße betrachtet. Die Rechtecke (Boxes) geben den Wertebereich zwischen 25tem und 75tem Perzentil, also die Lage der „mittleren“ 50% einer Verteilung, an. Der gestrichelte Balken innerhalb der Boxes gibt die Lage des Median im Wertebereich an. Bei den charakteristischen Größen, deren Boxes grau hinterlegt sind, wurde der Wertebereich zur besseren Darstellung aller Größen in einem gemeinsamen Plot mit dem Faktor 10 skaliert. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischen Größen auf das Intervall $[0; 18]$ begrenzt. Die dem Diagramm zugrunde liegende Stichprobenmenge umfasst für jeden der dargestellten Werte 3600 Elemente.

die Häufigkeitsverteilung. Zum anderen fehlen wesentliche Aussagen zu Einregelzeit bzw. Dauer einer signifikanten Störung in den Lenkwinkeln bzw. Dauer der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen. Um eine bessere Bewertung des Reglers anhand der in den vorhergehenden Abschnitten eingeführten charakteristischen Größen zu ermöglichen, wird daher die Simulation in ihre 3600 Teiltrajektorien aufgeteilt. Für jeden dieser Trajektorienabschnitte werden die charakteristischen Kenngrößen berechnet. Anschließend wird die Häufigkeitsverteilung bezüglich der jeweils auftretenden Extremalwerte analysiert. Die sich ergebenden Häufigkeitsverteilungen für Einregelzeit (Abb. 6.16(a)) bzw. Dauer einer signifikanten Störung (Abb. 6.16(b)) sind wiederum als Histogramm (Abb. 6.16) dargestellt.

Man kann erkennen, dass diese Werte im Vergleich zu den vorher dargestellten Werten eher einer Normal- bzw. im Fall der Störungsdauer einer Überlagerung aus Normal- und Exponentialverteilung folgen. Die mittlere Einregelzeit beträgt hier also etwa 0.4 s. Die mittlere Dauer einer Störung liegt etwa bei 0.3 s, bildet aber einen Peak bei 0.4 s aus. Während die mittlere Einregelzeit also in einem vernünftigen Bereich liegt, ist die mittlere Dauer einer Störung zumindest vor dem Hintergrund andauernder Sollwertwechsel kritisch. Bei der hier untersuchten, sicherlich extremen Beanspruchung würde das System ca. 30% der Zeit in einem kritischen Zustand betrieben, welcher Struktur und Elektronik erheblich belasten würde.

Abbildung 6.17 stellt die Häufigkeits-Verteilung für alle charakteristischen Größen als Box-Whisker Diagramm dar. Dabei wurden die oberen 3% sowie die unteren 3% der Messwerte jeweils als Ausreißer behandelt und in der Darstellung unterdrückt. Die hellgrau unterlegten Balken wurden mit Faktor 10 skaliert, um alle Daten in einem gemeinsamen Diagramm darstellen zu können. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischen Größen auf das Intervall $[0, 18]$ begrenzt. Betroffen ist davon in Abbildung 6.17 lediglich die Verteilung des maximalen Abstandes. Tabelle 6.3 gibt einen Überblick über weitere statistische Kenngrößen auf Basis der unveränderten Stichprobenmenge. Hier wurde auf die Entfernung von Ausreißern verzichtet.

Man kann erkennen, dass jene Größen deren Auftretenshäufigkeit einer Normalverteilung gleichen (T_e , T_Δ), auf eher symmetrische Box-Whisker Diagramme führen, während die Größen, die eher einer Exponentialverteilung ähnelten ($\check{\varphi}_s$, $\sigma(\vec{x}_{IP})$, $\max(d_{IP,ICM})$) eine starke Asymmetrie aufweisen. Auffällig ist des Weiteren, dass während die Abstandsmaße $\sigma(\vec{x}_{IP})$, $\text{med}(d_{IP,ICM})$ und $\max(d_{IP,ICM})$ eine den Histogrammen aus Abbildung 6.15 sehr ähnliche Charakteristik aufweisen, sich der Schwerpunkt der Verteilungen für $\check{\varphi}_s$ und $\Delta\varphi_s$ stark zu höheren Werten verschoben hat. Das ist damit zu begründen, dass für die Box-Whisker Diagramme nur jeweils der Maximalwert dieser Größen einbezogen wurde. Die Einbeziehung der Werte im eingeregelteten Zustand hat diese Kenngrößen zuvor also offensichtlich stark verfälscht.

Die Darstellung der charakteristischen Größen über die Box-Whisker Diagramme liefert nach Betrachtung der Histogramme keine wesentlich neuen Erkenntnisse. Die Diagramme eignen sich aber besonders gut für die stark komprimierte, übersichtliche Darstellung der Charakteristik des betrachteten Reglers und damit für den später folgenden Vergleich unterschiedlicher Regler.

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum \min_x	Maximum \max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.421	0.130	0.420	0.340	0.500	0.020	1.000	3600
$\check{\varphi}_d$	7.569	3.403	8.429	4.604	10.499	0.0	13.629	3600
$\check{\varphi}_s$	4.863	1.504	5.360	4.206	6.004	0.0	6.467	3600
$\Delta\varphi_s$	0.913	0.626	1.223	0.157	1.490	0.0	1.571	3600
T_Δ	0.228	0.152	0.280	0.060	0.340	0.0	0.780	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	2.987	72.742	0.190	0.022	0.878	0.0	3,461.8	3600
d_{med}	4.300	136.21	0.351	0.043	1.357	0.0	6,023.9	3600
d_{max}	12.162	183.7	1.294	0.123	5.952	0.0	6,025.3	3600

Tabelle 6.3: Statistische Kenngrößen des Referenzreglers unter wechselnder Sollwertvorgabe

7 Evaluierung der Versuchsergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der in Kapitel 6 skizzierten Versuche für den potentialfeldbasierten Regler (Abschnitt 7.1), den modellprädiktiven Regler (Abschnitt 7.2) und den Regler auf Basis der Reglerumschaltung (Abschnitt 7.3) evaluiert. Die Bedeutung der Ergebnisse für Fahrverhalten und überlagerte Regelkreise wird für jeden Ansatz diskutiert.

Diese Untersuchungen bilden die Grundlage für den abschließenden Vergleich der entworfenen Konzepte zu Modellierung und Regelung der nicht-holonomen, omnidirektionalen Fahrwerke in Kapitel 8.

7.1 Charakterisierung des Potentialfeld-Reglers

7.1.1 Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte

Zur Charakterisierung des potentialfeldbasierten Ansatzes werden drei unterschiedliche Parametersets (Tabelle 7.1) jeweils bei Ausnutzung bzw. Nichtnutzung der erweiterten Lösungsmenge bzw. Mehrdeutigkeiten evaluiert. Die Parametersets unterscheiden sich im Wesentlichen durch die maximal zulässige erste Ableitung der sphärischen bzw. toroidalen Twistkoordinaten ($\dot{\varphi}, \dot{\theta}$) sowie der dadurch bedingten Änderungen. So bedingen höhere erste Ableitungen z.B. insbesondere eine größere Ausdehnung bzw. stärkere Ausbildung der repulsiven Potentiale.

Wie zuvor der Referenzregler wird der potentialfeldbasierte Regler bezüglich seiner Reaktion auf Einheitssprünge sowie entlang der zuvor eingeführten kritischen Trajektorie (Abschnitt 6.2.2) und bei dauerhafter Beaufschlagung mit zufälligen Sollwertsprüngen untersucht. Zunächst beschränken sich die Betrachtungen dabei auf das Verhalten ohne Ausnutzung der erweiterten Lösungsmenge, da hier charakteristische Werte wie Einregelzeit bzw. maximale Stellrate besser reproduziert werden können.

Wie in Abschnitt 6.2.1 aufgezeigt, ist insbesondere der Einheitssprung bezüglich der Rotation des Roboters $\sigma(\omega_{wr}^r)$ für das betrachtete Problem charakteristisch. Hier ist im Gegensatz zu den Einheitssprüngen $\sigma(v_{wr,x}^r)$ bzw. $\sigma(v_{wr,y}^r)$ eine Koordination der Radmodule notwendig. Daher beschränkt sich die Analyse des potentialfeldbasierten Reglers in diesem Abschnitt auf die Untersuchung des Einheitssprungs $\sigma(\omega_{wr}^r)$.

	Obere Grenze erste Ableitung	Steigung att. Potential	Steigung rep. Potentiale	Ausdehnung rep. Potentiale	Hauptkomp. φ rep. Potentiale	Hauptkomp. θ rep. Potentiale	Integrationsk. inv. virt. Masse	Dämpfung
Set 1	$1/2\pi$	16	30	1.4	0.5	0.4	4.0	3.25
Set 2	π	16	36	1.75	0.5	0.4	5.0	3.25
Set 3	$3/2\pi$	16	40	1.75	0.5	0.4	5.0	3.0

Tabelle 7.1: Potentialfeldbasierter Regler: Untersuchte Parametersets

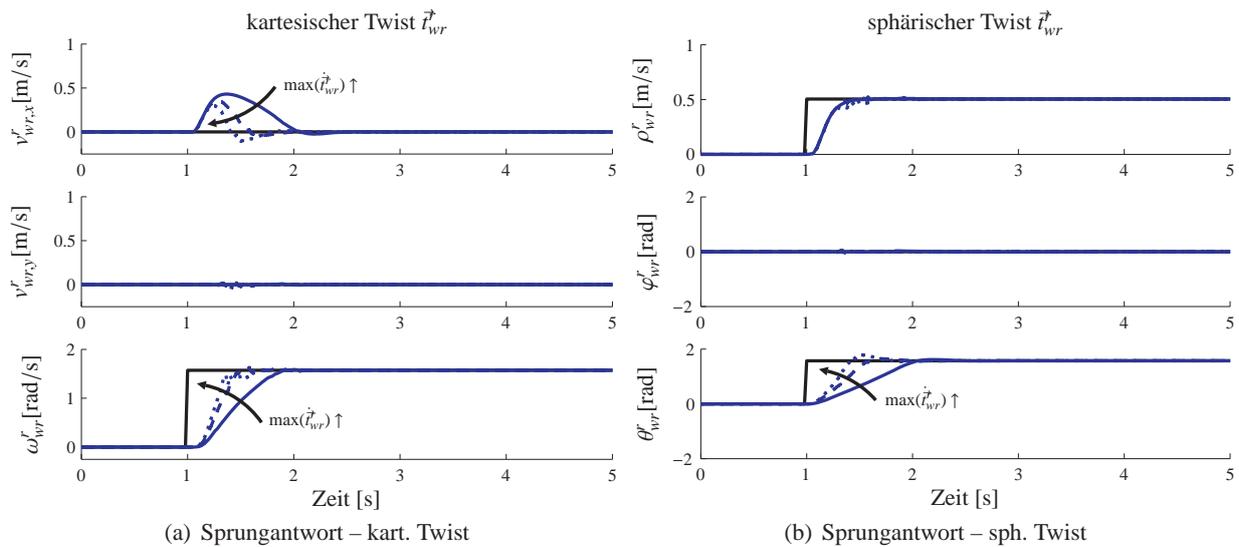


Abbildung 7.1: Sprungantwort des potentialfeldbasierten Reglers (PFC) bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau, gestrichelte Linie; Set 3: blau, gepunktete Linie). Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

Abbildung 7.1 stellt den Verlauf der geregelten Größen für die drei Parametersets gemeinsam dar. Abbildung 7.2 zeigt den zugehörigen Verlauf der Konfigurationsvariablen für jedes Parameterset einzeln. Tabelle 7.2 gibt einen Überblick über die charakteristischen Größen hinsichtlich der Sprungantwort der einzelnen Parametersets sowie der Sprungantwort des zuvor evaluierten Referenzreglers.

Man kann erkennen (Abb. 7.1(b)), dass der Regler für Set 1 und Set 2 ein erheblich langsames Folgeverhalten zeigt als der Referenzregler auf Modulebene. Erst für Set 3 wird ein ähnlich schnelles Folgeverhalten erzielt. Tabelle 7.2 weist zwar auch für diesen Regler eine höhere Einregelzeit aus, das liegt allerdings daran, dass der Regler bei der hier gewählten Parametrierung im aperiodischen Grenzfall betrieben wird. Er verlässt aufgrund des ersten Überschwingens das Zielintervall nochmals. Der erstmalige Eintritt erfolgt bereits nach 0.4 s. Zum Vergleich: der Referenzregler benötigte hier 0.26 s (Tabelle 7.2 bzw. Tabelle 6.1).

Des Weiteren kann man erkennen, dass zur Erreichung eines ähnlich schnellen Folgeverhaltens erheblich höhere Stellraten (mittlerer Graph Abb. 7.2(a) bis 7.2(c)) bezüglich der Gelenkwinkel benötigt werden. Lediglich für den langsamen Regler (Set 1), der eine um den Faktor 4 längere Einregelzeit als der Referenzregler aufweist, liegen die Stellraten in der Nähe der Stellraten des Referenzreglers.

Diese Beobachtung ist wenig überraschend, da der Referenzregler auf Radmodulebene den zu stellenden Lenkwinkel unter Verletzung der nicht-holonomen Bindungen minimierte. So betrug der dort maximal zu stellende Lenkwinkel etwa 45° , während unter Berücksichtigung der nicht-holonomen Bindungen für zwei der vier Räder etwa 145° zu stellen sind. Die Verbindung zwischen Start- und zulässiger Zielkonfiguration, welche im Nullraum der nicht-holonomen Bindungen liegt, ist damit etwa um den Faktor 3 länger als die direkte Verbindung zur nächstgelegenen Lösungskonfiguration. Dafür weist der Konfigurationsverlauf bei Verwendung des potentialfeldbasierten Reglers erheblich geringere Lenkwinkelfehler (unterer Graph Abb. 7.2(a) bis 7.2(c)) und eine erheblich schwächere, für die hier betrachtete Trajektorie praktisch vernachlässigbare, Verletzung der nicht-holonomen Bindungen auf.

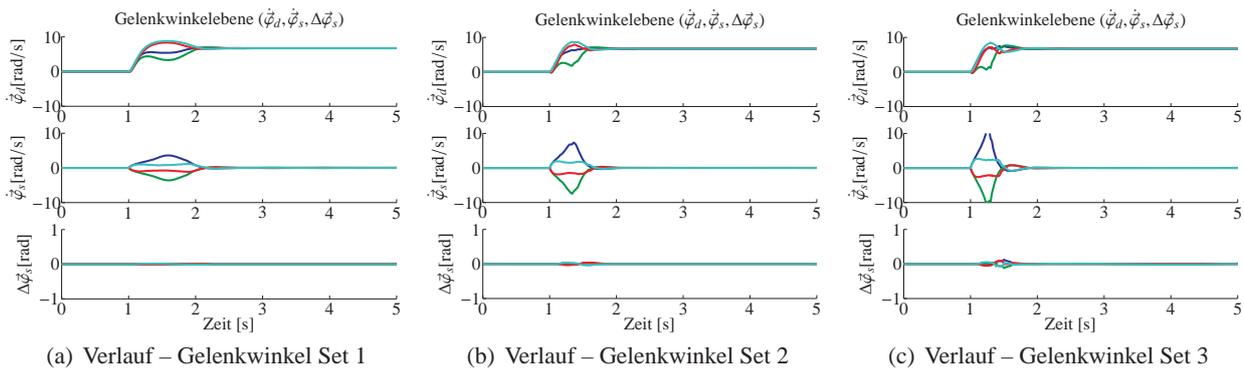


Abbildung 7.2: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des potentialfeldbasierten Reglers (PFC) mit einem Einheitsprung in ω_{wp}^r . Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

Für Parameterset 1 und Parameterset 2 liegt der maximale Winkelfehler $\Delta\varphi_s$ um den Faktor 20 unter dem maximalen Fehler des Referenzreglers. Zu keiner Zeit übersteigt der maximale Winkelfehler die Grenze von 0.1 rad, ab der ein Fehler als signifikant betrachtet werden kann. Für Parameterset 3 wird diese Grenze sehr knapp $\Delta\varphi_s = 0.12$ rad für eine sehr kurze Zeit $T_\Delta = 0.04$ s überschritten. Auch die Maße für die Streuung des Momentanpols und damit den Grad der Verletzung der nicht-holonomen Bindungen bleiben sehr gering. So liegt für Set 1 die Standard-Abweichung der Achsschnittpunkte gerade einmal bei 3.7 cm. Der maximale Abstand zwischen geschätztem Momentanpol und den Achsschnittpunkten beträgt 11.8 cm zum Zeitpunkt des maximalen Winkelfehlers von 0.019 rad bzw. 1.1° . Diese Abweichungen liegen in der Größenordnung, welche vor dem Hintergrund der Linearisierung der inversen Kinematik um den jeweiligen Arbeitspunkt bzw. angesichts des Einflusses der unterlagerten Regelkreise zu erwarten war.

Betrachtet man diese Ergebnisse, so kann man bereits erahnen, dass der potentialfeldbasierte Regler sehr gut dazu geeignet ist, die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen sicherzustellen. Allerdings wird die Einregelzeit vor dem Hintergrund überlagerter Regelkreise voraussichtlich problematisch sein.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IPs $\max(d_{ip,cvt})$ [m]	Streuung IPs $\text{med}(d_{ip,cvt})$ [m]	Streuung IPs $\sigma(\hat{x}_{ip})$ [m]
Sprungantwort Set 1	0.94	3.624	0.019	0.0	0.118	0.068	0.037
Sprungantwort Set 2	0.54	7.431	0.036	0.0	0.237	0.134	0.071
Sprungantwort Set 3	0.62	11.36	0.124	0.04	0.294	0.166	0.088
Referenz-Regler	0.26	4.138	0.62	0.25	2.918	1.0	0.577

Tabelle 7.2: Kenngrößen des PF-Reglers bei Beaufschlagung mit Einheitsprung

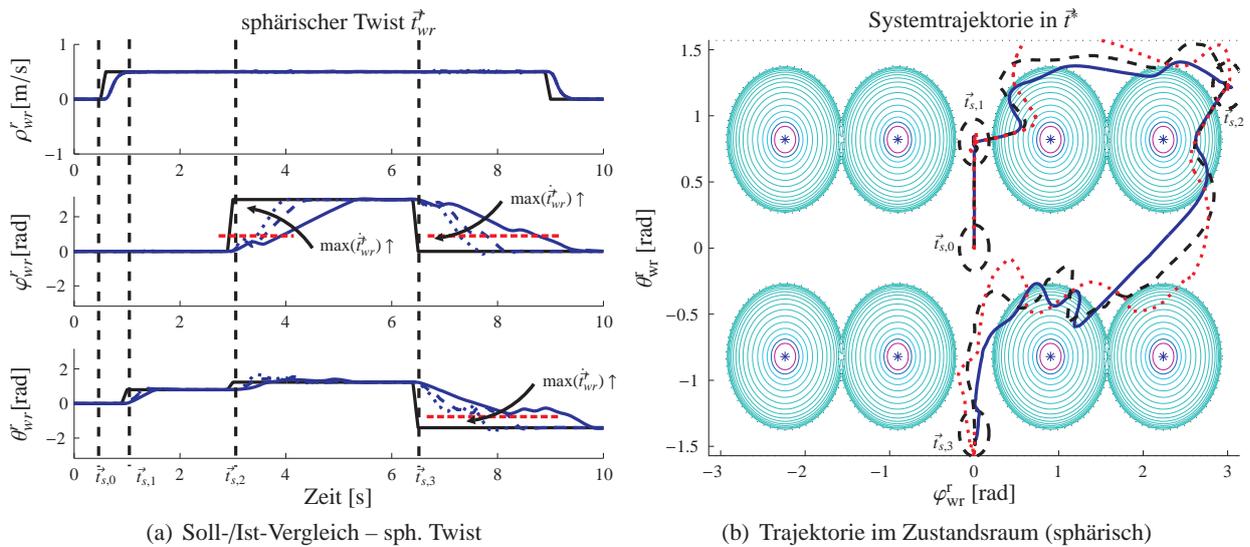


Abbildung 7.3: Trajektorien des PF-Reglers bei Beaufschlagung mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. das Folgeverhalten bezüglich der einzelnen Parameter des Twists in sphärischen Koordinaten sowie die Projektion der zugehörigen Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf sphärische Topologie begrenzten Zustandsraums. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau (bzw. schwarz), gestrichelte Linie; Set 3: blau (bzw. rot), gepunktete Linie). Die senkrechten Linien (schwarz gestrichelt in Abb. 7.3(a)) markieren den Zeitpunkt der Aufschaltung eines neuen Sollwertes (schwarz gestrichelte Kreise in Abb. 7.3(b)) für den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^* . Die rot gestrichelten Linien in Abb. 7.3(a) markieren die Lage einiger ausgewählter Singularitäten. In Abb. 7.3(b) stellen die konzentrischen Ellipsen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden Singularitäten. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

7.1.2 Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie

Der bezüglich der sphärischen Repräsentation des Twists entworfene Potentialfeld-Regler führt bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung anders als der Referenzregler auf Radmodulebene auf eine glatte Übergangskurve im Konfigurationsraum. Wie in den Kapiteln 3 bis 5 hinreichend erläutert, weist die Übertragungsfunktion zwischen sphärischem Twist und Konfigurationsraum allerdings starke Nicht-Linearitäten und singuläre Bereiche auf. Potentialfeld- und modellprädiktiver Regler waren gerade mit dem Ziel entworfen worden, diese singulären Bereiche zu umgehen.

Bei der zuvor eingeführten kritischen Trajektorie sind die Sollwertsprünge so gewählt, dass sie das System bei linearer Interpolation unmittelbar in diese singulären Bereiche führen würden. Im Folgenden wird das Verhalten des potentialfeldbasierten Reglers für die drei in Tabelle 7.1 aufgeführten Parametersets bei Beaufschlagung mit dieser kritischen Sollwertfolge untersucht. Dabei wird zunächst nur der primäre Lösungsraum, anschließend der erweiterte Lösungsraum (toroidale Topologie ohne Umschaltung) zugelassen.

Abbildung 7.3(a) stellt das Folgeverhalten der Regler bezüglich der Parameter (ρ, φ, θ) dar. Die resultierende Trajektorie nach Projektion auf die Oberfläche der sphärischen Repräsentation des Twists ist in Abbildung 7.3(b) dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Verläufe für die drei Parametersets gemeinsam dargestellt. Abbildung 7.4 stellt die zugehörigen Verläufe der Konfigurationsvariablen und Abbildung 7.5 die Kenngrößen für die Bewertung der Streuung des Momentanpols dar. Tabelle 7.3 fasst die Ergebnisse für die drei Parametersets zusammen.

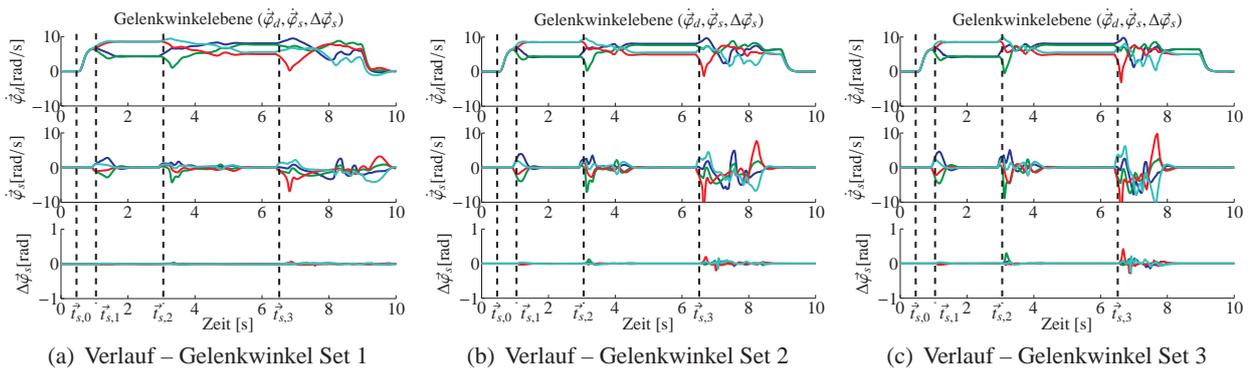


Abbildung 7.4: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des potentialfeldbasierten Reglers (PFC) mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

Man kann den Einfluss der repulsiven Potentiale auf die Trajektorie des geregelten Systems in Abbildung 7.3 klar erkennen. So werden die Trajektorien (Abb. 7.3(b)) der drei Regler auf den Intervallen von $[\vec{t}_{s,1}, \vec{t}_{s,2}]$ und $[\vec{t}_{s,2}, \vec{t}_{s,3}]$ deutlich erkennbar abgelenkt und um die singulären Bereichen herumgeführt. Diese Ablenkung zeigt sich bei separater Darstellung der Zustandsvariablen (Abb. 7.3(a)) als Stagnation an einem bestimmten Grenzwert (rot gestrichelte Linien). Man kann deutlich erkennen (Abb. 7.3(a), mittlerer Graph), dass nach Aufschaltung des Sollwertes $\vec{t}_{s,2}$ der Wert des Parameters φ_{wr}^r zunächst wächst, dann bei etwa 0.7 rad kurzzeitig absinkt, um anschließend, nach Umfahren der Singularität in θ_{wr}^r -Richtung (Abb. 7.3(b)), weiter zu steigen.

Es ist zu erkennen (Abb. 7.4), dass auch entlang der kritischen Trajektorie die Lenkwinkelfehler gegenüber dem Referenzregler auf Radmodulebene (Tab. 7.3) erheblich reduziert sind. Insbesondere für den langsamen PF-Regler (Set 1) ist der Fehler zu keinem Zeitpunkt signifikant. Der maximale Fehler ist wieder um etwa Faktor 20 geringer als bei Verwendung des Referenzreglers.

In scheinbarem Widerspruch dazu stehen die hohen Maxima in den Kenngrößen (Tab. 7.3) für die Streuung des Momentanpols bzw. der Achsschnittpunkte. Hier ist aber zu beachten, dass die stark erhöhten Werte mit dem Passieren des Fernpunkts zusammenfallen. So befindet sich der Momentanpol zum Zeitpunkt, in welchem die Maxima auftreten, in einer Entfernung von ca. 12 m. Bereits im nächsten Zeitschritt,

	Einregelzeit T_e [s]	max. Steilrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IPs $\max(d_{IP;CM})$ [m]	Streuung IPs $\text{med}(d_{IP;CM})$ [m]	Streuung IPs $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Trajektorie Set 1	3.14	6.876	0.063	0.0	5.863	1.114	2.433
Trajektorie Set 2	1.84	11.976	0.200	0.08	6.659	2.702	2.451
Trajektorie Set 3	1.25	17.915	0.422	0.12	7.232	2.882	1.181
Referenz-Regler	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198

Tabelle 7.3: Kenngrößen (Maxima der Teiltrajektorien) des PFC bei kritischem Sollwertverlauf in der primären Lösungsdomäne

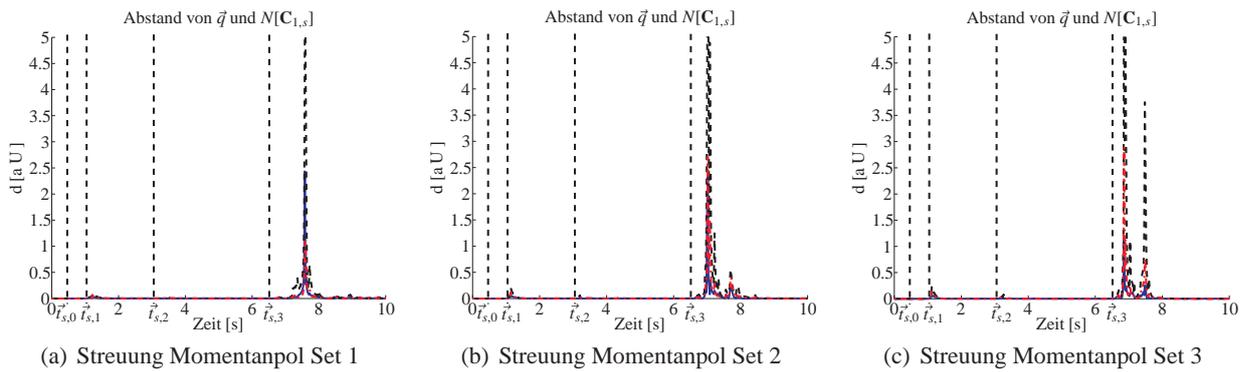


Abbildung 7.5: Die Abbildungen stellen die Streuung des Momentanpols für die Parametersets 1 bis 3 (v.l.n.r.) bei kritischer Sollwertfolge dar. Dargestellt werden unterschiedliche Abstandsmaße für die Distanz zwischen gegenwärtiger Konfiguration \vec{q} und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[C_{1,s}]$. Die verwendeten Kenngrößen dafür sind die Standardabweichung entlang der Hauptachse der Kovarianzmatrix über alle signifikanten Achsschnittpunkte (blaue Linie) sowie der Median (rot gestrichelt) bzw. der Maximalwert (schwarz gestrichelt) der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols.

also nach 0.02 s, hat der Momentanpol den Fernpunkt passiert und sich schon wieder auf ca. 114 m „von der anderen Seite“ angenähert. Einen weiteren Zeitschritt später befindet sich der Momentanpol wieder in einem Abstand von ca. 12 m. Der Durchgang durch den Fernpunkt dauert damit gerade einmal 0.04 s und geht mit verhältnismäßig kleinen Winkeländerungen einher. Die hier verwandten Kenngrößen auf Basis der kartesischen Position des ICM sind in dieser Phase ungeeignet das System zu charakterisieren. Zwar werden diese Kenngrößen bezüglich der Größenordnung des Abstands normiert, allerdings geht dabei nicht ein, dass auch das Verhältnis zwischen den kartesischen Positionen in dieser Situation wenig belastbar ist. Einfach gesprochen: Es spielt für die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen kaum eine Rolle, ob das System um einen Fixpunkt in 100 m, 600 m oder 1000 m Entfernung rotiert bzw. ob die Achsschnittpunkte um eben diesen Betrag streuen. Durch die statistische Bewertung der Streuung im folgenden Abschnitt 7.1.3 kann der Einfluss dieser Übergangsphasen besser bewertet bzw. relativiert werden. Auch die Analyse von Abbildung 7.5 erlaubt eine bessere Aussage. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Streuung der Achsschnittpunkte entlang der übrigen Trajektorie verglichen mit dem Referenzregler sehr gering ist. Lediglich für das schnellste Parameterset (Set 3) nimmt die Streuung nach dem Passieren des Fernpunkts und beim darauf folgenden Eintauchen in das repulsive Potential nochmals kurzfristig Werte an, die in der Größenordnung der Streuung bei Verwendung des Referenzreglers liegen.

Wesentlich kritischer sind die gegenüber dem Referenzregler stark erhöhten Einregelzeiten bzw. die ebenfalls stark erhöhten Stellraten. Die verlängerten Einregelzeiten sind, wie man in Abbildung 7.3(a) erkennen kann, insbesondere auf den Einfluss der repulsiven Potentiale zurückzuführen. Ein Parameter wird praktisch „fest gehalten“, während der andere die Singularität umfährt. Es existieren ganz offensichtlich besser geeignete Trajektorien, die bei entsprechender vorausschauender Planung bzw. globaler Optimierung gefunden werden könnten. Es liegt in der Natur der Potentialfeld-Methode als lokale Optimierung gegebenenfalls auf längere Trajektorien zu führen.

Diese lediglich lokale Optimierung ist im Zusammenspiel mit der zeitdiskreten Implementierung auch ein Grund für die starken Schwingungen an der Wirkgrenzen der Potentiale, die sich in Abbildung 7.3(b) insbesondere für Set 3 als „Schlingern“ der Trajektorie zeigen. Bei schneller Änderung des Twists kann das System unter Umständen tief in die repulsiven Potentiale eindringen, bevor die lokale Optimierung die Bewegung des Twists ausreichend ändert. Dieses tiefe Eintauchen in die repulsiven Potentiale führt zum

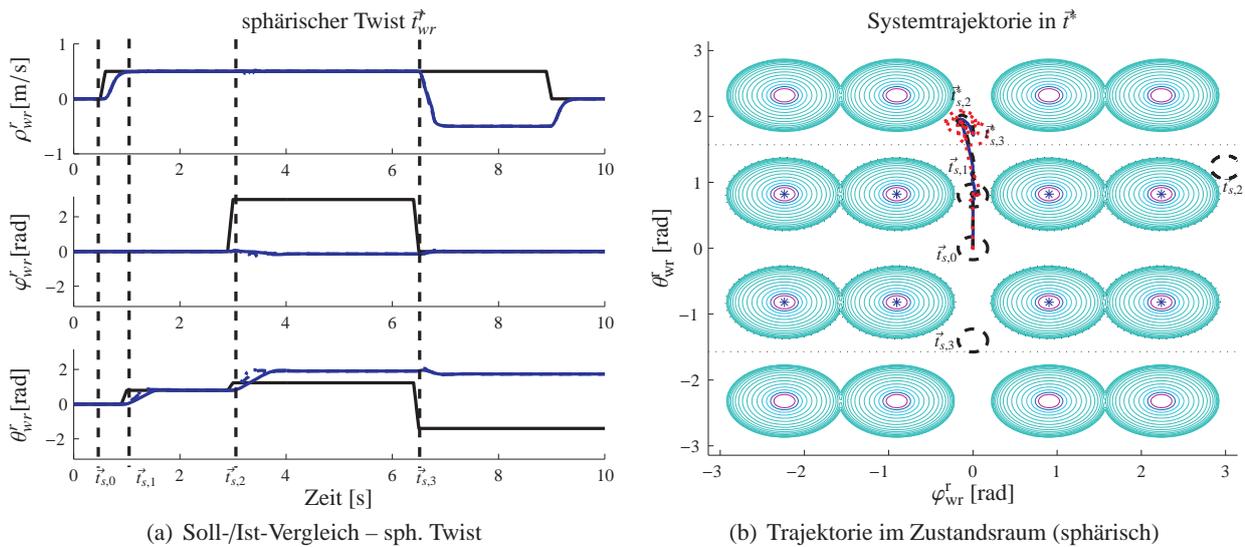


Abbildung 7.6: Trajektorien des PF-Reglers im toroidalen Zustandsraum bei Beaufschlagung mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. das Folgeverhalten bezüglich der einzelnen Parameter des Twists in sphärischen Koordinaten sowie die Projektion der zugehörigen Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die Sprungantworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau (bzw. schwarz), gestrichelte Linie; Set 3: blau (bzw. rot), gepunktete Linie). Die senkrechten Linien (schwarz gestrichelt in Abb. 7.6(a)) markieren den Zeitpunkt der Aufschaltung eines neuen Sollwertes (schwarz gestrichelte bzw. alternative Lösungen als rot gestrichelte Kreise in Abb. 7.6(b)) für den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^* . In Abb. 7.6(b) stellen die konzentrischen Ellipsen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gestrichelten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert.

einen zu unruhigem Laufverhalten und zum anderen zu den teilweise sehr hohen Stellraten, die bei entsprechender Begrenzung wiederum zu Lenkwinkel Fehlern führen. Der im nächsten Abschnitt analysierte modellprädiktive Regler setzt an diesem Punkt an. Zwar basiert das Verfahren weiterhin auf einer lokalen Optimierung, bezieht dabei aber zukünftige Zustände im Rahmen des Vorhersagehorizonts mit ein.

Es ist zu berücksichtigen, dass die zulässige Lösungsmenge für den PF-Regler bisher auf die jeweils primäre Domäne begrenzt wurde. Anschaulich bedeutet das, dass für eine Umkehr der Fahrtrichtung nicht einfach die Rollrichtung der Räder gewechselt werden kann, sondern diese zuerst um 180° umorientiert werden müssen. Um einen belastbaren Vergleich der Regler zu ermöglichen, wird das Folgeverhalten entlang der Trajektorie nochmals unter Einbeziehung der erweiterten Lösungsmenge analysiert. Ebenso wird die statistische Analyse bezüglich des Reglers bei erweiterter Lösungsmenge durchgeführt.

Abbildung 7.6 zeigt das Folgeverhalten (Abb. 7.6(a)) bzw. die resultierende Trajektorie (Abb. 7.6(b)) bei Erweiterung des Zustandsraums auf toroidale Topologie und Ausnutzung der erweiterten Lösungsmenge. Die Trajektorien für die drei Parametersets sind wieder gemeinsam dargestellt. Abbildung 7.7 zeigt die zugehörigen Verläufe der Konfigurationsvariablen. Auf die Darstellung der Streuung der Achsschnittpunkte wird verzichtet. Wie man in Abbildung 7.6(b) erkennen kann, führt die Trajektorie diesmal nicht über den Fernpunkt. Die in Tabelle 7.4 angegebenen Maxima sind daher in diesem Fall aussagekräftig.

Wie man erkennen kann (Abb. 7.6(b)), verkürzt sich die Trajektorie durch Ausnutzung der Mehrdeutigkeiten erheblich. Insbesondere die alternativen Lösungen $\vec{t}_{s,2}^*$ und $\vec{t}_{s,3}^*$ für die zweite und dritte Sollwertvorgabe liegen bei Projektion auf die Oberfläche des toroidalen Zustandsraums dicht beieinander. Die

7 Evaluierung der Versuchsergebnisse

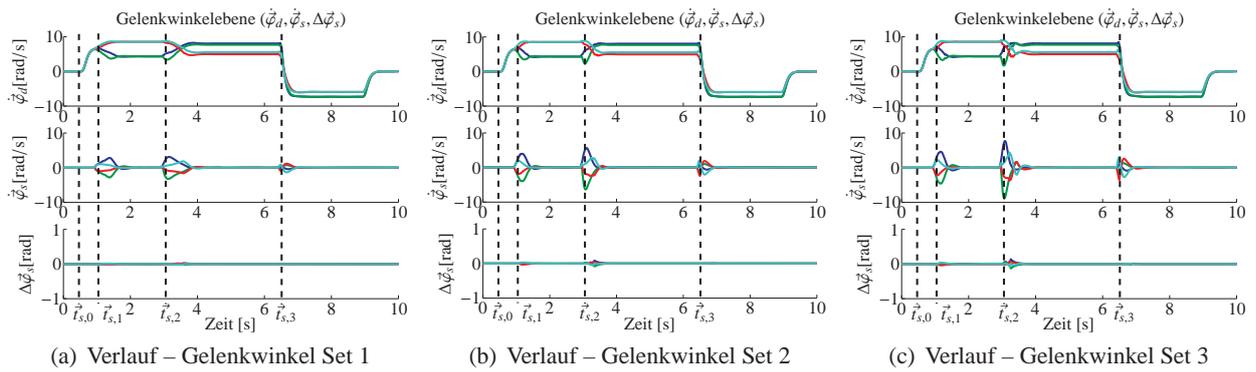


Abbildung 7.7: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des potentialfeldbasierten Reglers (PFC) mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler, jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde der auf toroidale Topologie erweiterte Lösungsraum zugelassen.

kommandierten Sollwertsprünge sind damit de facto erheblich geringer (Abb. 7.6(a)). Dies schlägt sich unmittelbar in den Einregelzeiten (Tab. 7.4) nieder. Für Set 2 und 3 nehmen die Einregelzeiten so stark ab, dass der Maximalwert analog zum Referenzregler nun im Wesentlichen durch die Dauer für die Umkehrung der Rollrichtung (oberer Graph in Abb. 7.6(a)) der Räder auf der Teiltrajektorie $[t_{s,2}^k, t_{s,3}^k]$ geprägt ist. Entsprechend nimmt die Einregelzeit für Set 2, Set 3 und Referenzregler hier den selben Wert an.

Des Weiteren nehmen sowohl die benötigten Stellraten (mittlere Graphen in Abb. 7.7) als auch die Winkelfehler (untere Graphen in Abb. 7.7) erheblich ab. Das gleiche gilt für die Streuung der Achsschnittpunkte (letzte drei Spalten in Tabelle 7.4). Dabei ist hier ein direkter Vergleich mit dem zuvor analysierten Versuch aufgrund der dort wenig aussagekräftigen Ergebnisse nicht möglich. Für die alternative Trajektorie liefert der potentialfeldbasierte Regler also deutlich bessere Ergebnisse als der Referenzregler auf Radmodulebene. Er zeigt ein ähnlich schnelles Folgeverhalten bei deutlich geringeren Fehlern (Set 2). Dennoch genügt diese Betrachtung zur abschließenden Bewertung nicht. So lassen sich Trajektorien konstruieren, die auch bei Ausnutzung der Mehrdeutigkeiten über Singularitäten führen bzw. Sollwertvorgaben stellen, die unmittelbar in der Nähe der Singularitäten liegen. Um diese Situation in die Bewertung des Reglers mit einzubeziehen, wird im folgenden Abschnitt erneut eine statistische Betrachtung über einen längeren Zeitraum durchgeführt.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate $\dot{\varphi}_s$ [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IPs $\max(d_{IP:CM})$ [m]	Streuung IPs $\text{med}(d_{IP:CM})$ [m]	Streuung IPs $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Trajektorie Set 1	0.60	3.243	0.031	0.0	0.111	0.065	0.036
Trajektorie Set 2	0.34	6.393	0.087	0.0	0.209	0.120	0.065
Trajektorie Set 3	0.34	8.869	0.140	0.04	0.244	0.138	0.074
Referenz-Regler	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198

Tabelle 7.4: Kenngrößen (Maxima über alle Teiltrajektorien) des PFC bei kritischem Sollwertverlauf im vollen Konf.-Raum

7.1.3 Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel

Analog zum Vorgehen beim Referenzregler wird in diesem Abschnitt das Verhalten des potentialfeldbasierten Reglers bei Beaufschlagung mit zufälligen Sollwertsprüngen über einen längeren Zeitraum untersucht. Die Zeit zwischen zwei Sollwertvorgaben beträgt wieder eine Sekunde. Das bedeutet, dass nicht damit zu rechnen ist, dass der Regler bei Beaufschlagung mit einem neuen Sollwert bereits eingeschwungen ist. Dadurch wird die Anzahl der untersuchten Ausgangskonfigurationen bei Sollwertsprung hier nochmals stark erhöht, der Zustandsraum besser abgebildet. Abbildung 7.8 zeigt ausgewählte Punkte, über welche die Trajektorien des geregelten Systems verlaufen. Dargestellt sind die Resultate für alle Parametersets (Abb. 7.8(a) bis Abb. 7.8(c)) sowie für den Referenzregler (Abb. 7.8(d) bzw. Abb. 6.14). In Abbildung 7.9 sind die resultierenden Box-Whisker Diagramme für die drei Parametersets (Abb. 7.9(a) bis Abb. 7.9(c)) sowie den Referenzregler dargestellt (Abb. 7.9(d) bzw. Abb. 6.17). Die zugehörigen statistischen Kenngrößen für die einzelnen Parametersets sind in den Tabellen F.1 bis F.3 vollständig angegeben.

Man kann in Abbildung 7.8 deutlich erkennen, dass der potentialfeldbasierte Regler die Zustandstrajektorien um die singulären Bereiche herum führt. Während die angenommenen Zustände beim Referenzregler einigermaßen gleich verteilt sind (Abb. 7.8(d)), werden die zuvor in der Nähe der Singularitäten gelegenen Punkte bei Anwendung des PF-Reglers an die Ränder der Potentiale verschoben.

Es wird auch deutlich, dass bei Ansetzen einer höheren Grenze für die erste Ableitung des Twists, steigend von Set 1 nach Set 3, die angenommenen Zustände stärker in die repulsiven Potentiale einstreuen. In den Box-Whisker Diagrammen ist die Auswirkung dieses Einstreuens quantifiziert. Man kann erkennen, dass für die schnelle Parametrierung (Set 3) hohe Winkelfehler und starke Streuungen der Achsschnittpunkte erheblich häufiger auftreten als bei langsamer Parametrierung (Set 1). Der PF-Regler weist für Parameterset 3 sogar eine leicht stärkere Streuung der Achsschnittpunkte auf als der Referenzregler.

Bei Parametrierung mit Set 1 bzw. Set 2 reduziert der PF-Regler aber sowohl den Winkelfehler als auch die Streuung der Achsschnittpunkte gegenüber dem Referenzregler erheblich. Dabei liegen die benötigten Stellraten in der gleichen Größenordnung wie bei Verwendung des Referenzreglers. Der potentialfeldbasierte Regler ist damit eine effektive Methode, um die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zu erzielen.

Die erhebliche Verbesserung der Synchronisation der einzelnen Radmodule wird durch eine deutlich verlängerte Einregelzeit erkauft. Der potentialfeldbasierte Regler ist erheblich langsamer. Dabei fällt auf, dass die schnellste Parametrierung (Set 3) sogar die tendenziell längste Einregelzeit aufweist. In den vorangehenden Abschnitten waren bereits zwei Effekte bezüglich der Einregelzeit erwähnt worden:

- Die bei Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen teilweise größeren Gelenkwinkeldifferenzen
- Die „Umwege“ bei Umfahrung der Singularitäten durch lokale Optimierung

Bei der statistischen Betrachtung kommt noch ein weiterer Effekt zum Tragen. Die Sollwertvorgaben sind gleich verteilt über die sphärische Lösungsdomäne (Abb. 6.14(a)). Einige Sollwertvorgaben liegen daher im Einflussbereich der repulsiven Potentiale bzw. innerhalb der kritischen Bereiche. Für diese Sollwerte ergibt sich eine, im Rahmen dieses Ansatzes erwünschte, bleibende Sollwertabweichung:

- Der zugängliche Arbeitsraum bzw. die Beweglichkeit des Fahrwerks wird effektiv eingeschränkt

Diese Einschränkung schlägt sich bei statistischer Auswertung als Steigerung der Einregelzeit nieder. Da der Regler bei schneller Parametrierung eine stärkere Einstreuung der Trajektorie in die repulsiven Potentiale zulässt, ist eine Verstärkung und Ausweitung dieser Potentiale (Tab. 7.1) nötig, um im dynamischen Fall die Vermeidung der kritischen Bereiche zu garantieren. Im eingeschwungenen Zustand führt dies zu einer stärkeren Regelabweichung bzw. bei der statistischen Auswertung zu einer längeren Einregelzeit.

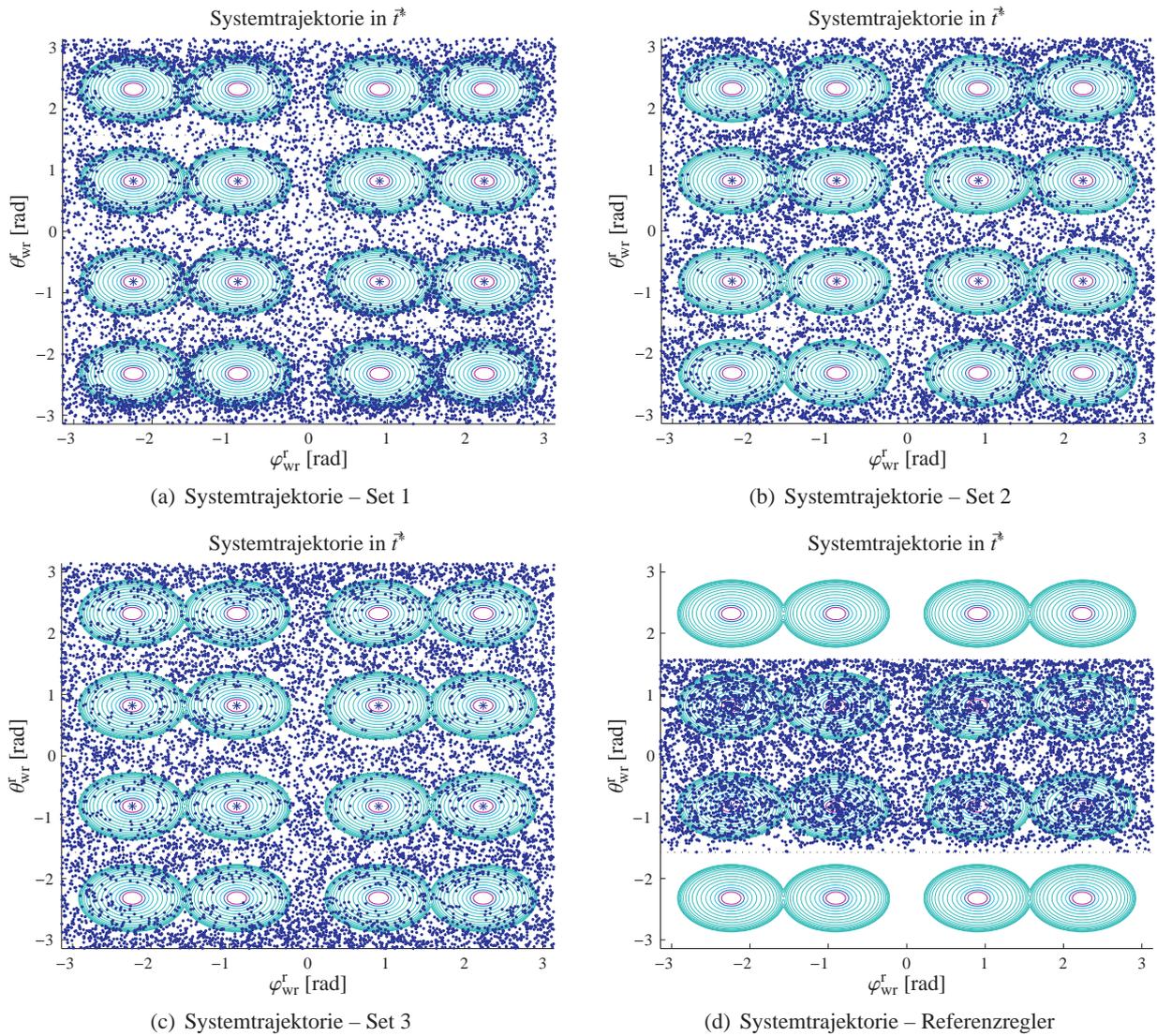


Abbildung 7.8: Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorien von potentialfeldbasiertem Regler (Set 1 bis 3, Abb. 7.8(a) bis 7.8(c)) und Referenzregler (Abb. 7.8(d)) auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gestrichelten Linien eingegrenzten Bereich. Die in diesem Bereich liegenden Singularitäten sind zusätzlich durch blaue Sterne markiert. Die vom System entlang der abgefahrenen Trajektorie angenommenen Zustände sind als blaue Punkte eingezeichnet.

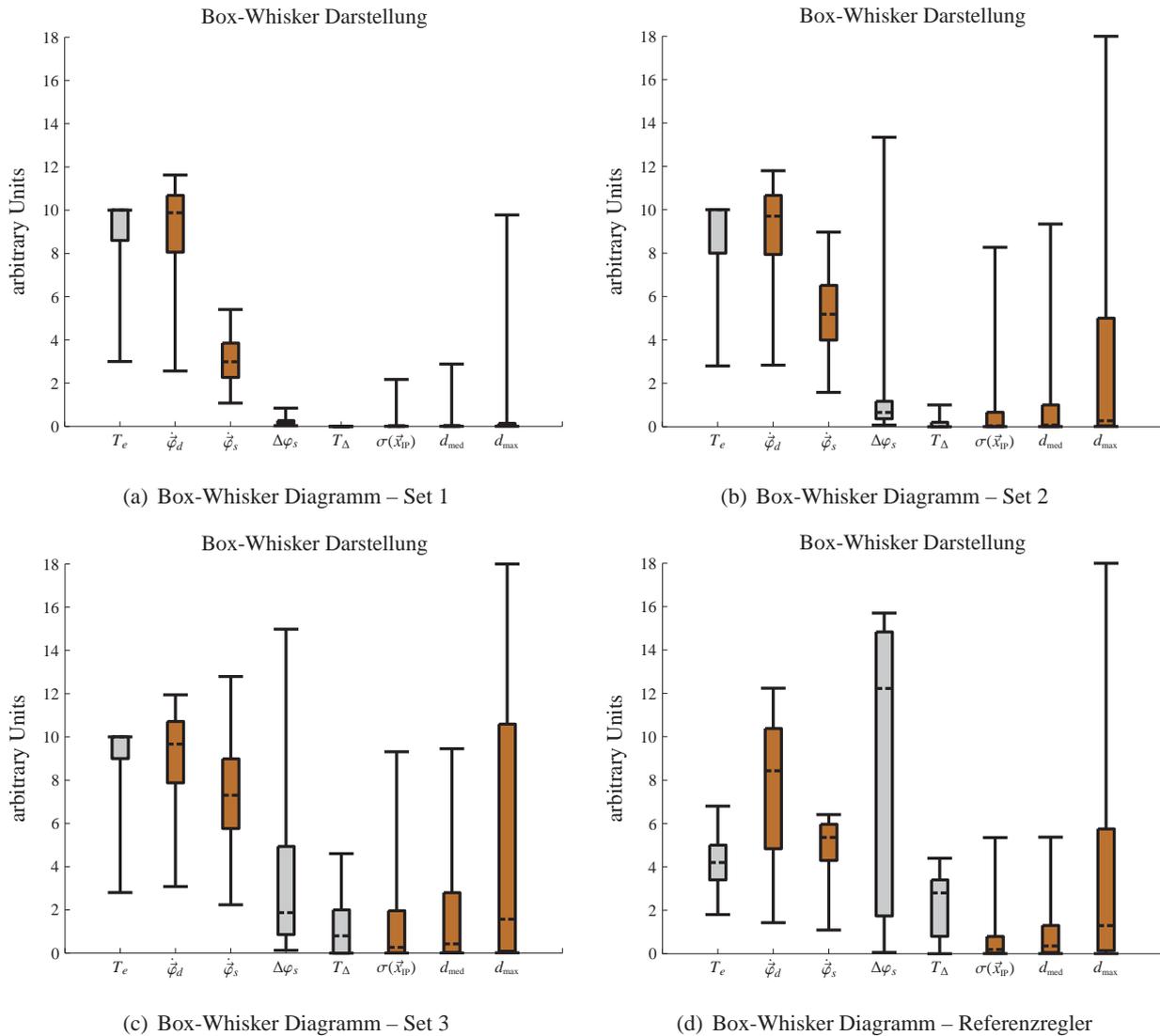


Abbildung 7.9: Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. und v.o.n.u. die Box-Whisker Diagramme der charakteristischen Größen für den potentialfeldbasierten Regler (Set 1 bis 3) sowie den Referenzregler. Die horizontalen schwarzen Linien (Whiskers) grenzen den Wertebereich einer Größe ein. Sie geben, nach Filterung der Outlier, die Lage der Minima und Maxima einer Verteilung an. Als Outlier werden dabei hier jeweils die obersten und untersten 3% der Werte zu einer Kenngröße betrachtet. Die Rechtecke (Boxes) geben den Wertebereich zwischen 25tem und 75tem Perzentil, also die Lage der mittleren 50% einer Verteilung, an. Der gestrichelte Balken innerhalb der Boxes gibt die Lage des Medians im Wertebereich an. Bei den charakteristischen Größen, deren Boxes grau hinterlegt sind, wurde der Wertebereich zur besseren Darstellung aller Größen in einem gemeinsamen Plot mit dem Faktor 10 skaliert. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischen Größen auf das Intervall [0; 18] begrenzt. Die dem Diagramm zugrunde liegende Stichprobenmenge umfasst für jeden der dargestellten Werte 3600 Elemente.

7.2 Charakterisierung des modellprädiktiven Reglers

7.2.1 Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte

Analog zur Untersuchung des potentialfeldbasierten Ansatzes werden auch für den modellprädiktiven Regler wieder drei Parametersets (Tabelle F.7) jeweils bei Ausnutzung bzw. Nichtnutzung der erweiterten Lösungsmenge untersucht. Wie zuvor unterscheiden sich die Parametersets in erster Linie durch die maximal zulässige erste Ableitung der sphärischen bzw. toroidalen Twistkoordinaten $(\dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Im Vergleich zur Parametrierung des potentialfeldbasierten Ansatzes (Tabelle 7.1) wurde hier eine geringere Ausdehnung, zugleich aber erheblich höhere Steigung der repulsiven Potentiale gewählt. Diese schärfere Parametrierung ist aufgrund der Optimierung über den begrenzten Horizont möglich.

Der modellprädiktive Regler wird bezüglich seiner Sprungantwort bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r sowie bei Beaufschlagung mit der zuvor eingeführten kritischen Trajektorie jeweils ohne Ausnutzung des erweiterten Lösungsraums untersucht. Des Weiteren wird der Regler bezüglich seiner Charakteristik bei Beaufschlagung mit beständig wechselnden, zufälligen Sollwerten unter Einbeziehung des erweiterten Lösungsraums untersucht.

Man kann erkennen, dass die Systemtrajektorie (Abb. 7.10) für den modellprädiktiven Regler bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung sehr ähnlich der Trajektorie (Abb. 7.1) des potentialfeldbasierten Reglers ist. Die Einregelzeiten (Tab. 7.5) sind gegenüber dem potentialfeldbasierten Ansatz (Tab. 7.2) leicht erhöht. Dafür fallen die zuvor bei Set 3 aufgetretenen Überschwinger etwas geringer aus, sodass die effektive Einregelzeit für Set 3 sogar leicht sinkt. Des Weiteren fällt insbesondere für Set 3 eine signifikante Reduktion der Lenkwinkelgeschwindigkeiten (Abb. 7.11) auf. Hinsichtlich der Winkelfehler bzw. Verletzung der nicht-holonomen Bindungen verhalten sich MPC und PF-Regler ähnlich. Bei Set 3 ist wiederum eine signifikante Reduktion der Streuung der Achsschnittpunkte (Tab. 7.5) im Vergleich zur Verwendung des potentialfeldbasierten Reglers (Tab. 7.2) zu erkennen.

Modellprädiktiver und potentialfeldbasierter Regler verhalten sich bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r sehr ähnlich. Das ist nicht überraschend, da sich in diesem Fall die repulsiven Potentiale nicht auswirken, die kürzeste Trajektorie führt in ausreichendem Abstand an den singulären Bereichen vorbei, ist das Verhalten des Reglers insbesondere durch die Parametrierung des attraktiven Potentials bestimmt. Dieses war für beide Ansätze annähernd identisch gewählt worden.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate $\dot{\varphi}_s$ [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_{Δ} [s]	Streuung IPs $\max(d_{IP:CM})$ [m]	Streuung IPs $\text{med}(d_{IP:CM})$ [m]	Streuung IPs $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Sprungantwort Set 1	1.04	3.516	0.018	0.0	0.093	0.055	0.030
Sprungantwort Set 2	0.66	6.348	0.038	0.0	0.162	0.092	0.050
Sprungantwort Set 3	0.52	8.999	0.044	0.0	0.254	0.102	0.057
Referenz-Regler	0.26	4.138	0.62	0.25	2.918	1.0	0.577

Tabelle 7.5: Kenngrößen des MP-Reglers bei Beaufschlagung mit Einheitssprung

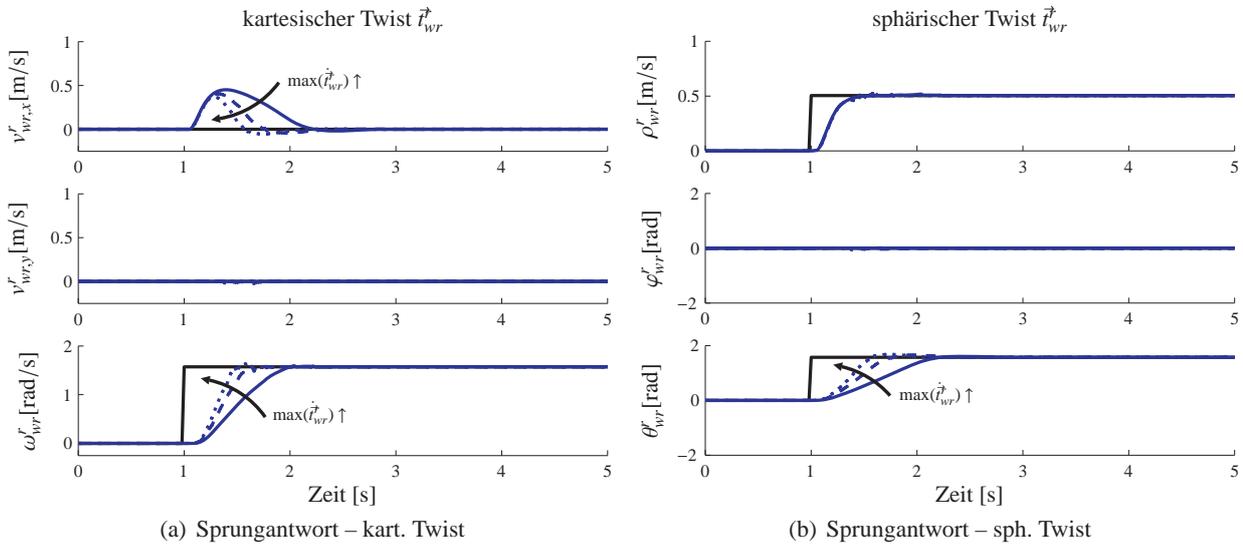


Abbildung 7.10: Sprungantwort des modellprädiktiven Reglers (MPC) bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau, gestrichelte Linie; Set 3: blau, gepunktete Linie). Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

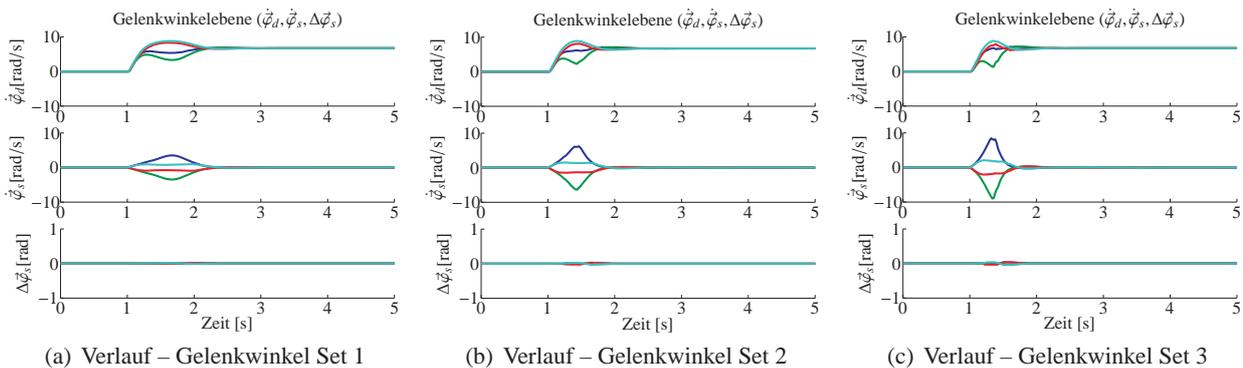


Abbildung 7.11: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des modellprädiktiven Reglers (MPC) mit einem Einheitsprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

7.2.2 Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie

Bei Beaufschlagung mit einer kritischen Trajektorie sind deutliche Unterschiede im Verlauf der Systemtrajektorie (Abb. 7.12) zu erkennen. Zwar zeigen Einregelzeiten (Abb. 7.12(a)), Lenkwinkelfehler (Abb. 7.13) und Streuung der Achsschnittpunkte (Abb. 7.14) einen ähnlichen Verlauf wie beim potentialfeldbasierten Regler, es ist aber deutlich zu erkennen (Abb. 7.12(b)), dass die resultierenden Systemtrajektorien insbesondere für Set 1 (blau durchgezogene Linie) und Set 2 (schwarz gestrichelte Linie) erheblich weichere Verläufe annehmen.

Dieser Verlauf spiegelt sich ebenfalls in den Stellraten $\dot{\varphi}_s$ bezüglich der Lenkwinkel (mittlerer Graph Abb. 7.13) wieder. Die Stellraten zeigen deutlich weichere Verläufe bzw. geringere Beschleunigungen. Auch die absoluten Maxima der Stellraten bei Verwendung des modellprädiktiven Reglers (Tab. 7.6) sind gegenüber dem potentialfeldbasierten Regler (Tab. 7.3) deutlich abgesenkt.

Bei Verwendung der Parametersets 1 bzw. 2 liegt der modellprädiktive Regler damit bei ähnlicher Performance hinsichtlich Einregelzeit und Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen weiter von den Systemgrenzen hinsichtlich Stellraten und Beschleunigungen entfernt als der potentialfeldbasierte Regler. Damit weist dieser Regler eine geringere Empfindlichkeit gegenüber externen Störungen auf und verspricht ein stabileres Systemverhalten. Der modellprädiktive Regler ist damit ein effektiver Ansatz zur Reduzierung der zuvor an den Grenzen der repulsiven Potentiale beobachteten Schwingungen. Zusätzlich konnte gegenüber dem potentialfeldbasierten Regler der Wirkungsbereich der repulsiven Potentiale für Parameterset 2 eingeschränkt werden. Damit ist insgesamt ein verbessertes Folgeverhalten zu erwarten. Der zulässige Arbeitsraum vergrößert sich.

Hinsichtlich der Parametrierung 3 kann man deutlich erkennen, dass der Verlauf der Systemtrajektorie (rot gepunktete Linie in Abb. 7.12(b)) bei Übergang von $\vec{r}_{s,2}$ nach $\vec{r}_{s,3}$ weniger weich ist bzw. deutlich größere Lenkwinkelfehler (Abb. 7.13(c)) auftreten. Hier nähert sich das System den singulären Bereichen stark an. Dennoch ist auch hier die Streuung der Achsschnittpunkte vergleichbar zur Streuung bei Verwendung des potentialfeldbasierten Reglers. Die maximalen Stellraten sind deutlich abgesenkt.

Auf eine Auswertung der resultierenden Systemtrajektorie unter Ausnutzung des erweiterten Lösungsraums wird hier verzichtet. Wie in Abschnitt 7.1.2 bereits gezeigt, existiert eine alternative Trajektorie, welche außerhalb der repulsiven Potentiale liegt. Das Verhalten des modellprädiktiven Reglers ist entlang dieser Trajektorie qualitativ nicht anders als bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung. Die Charakterisierung des modellprädiktiven Reglers unter Ausnutzung des erweiterten Lösungsraums erfolgt im nächsten Abschnitt vor dem Hintergrund dauerhafter zufälliger Sollwertwechsel über einen längeren Zeithorizont.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_d [s]	Streuung IP_s $\max(d_{IP,CM})$ [m]	Streuung IP_s $\text{med}(d_{IP,CM})$ [m]	Streuung IP_s $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Trajektorie Set 1	3.24	5.887	0.033	0.0	4.0	1.0	0.970
Trajektorie Set 2	1.82	10.531	0.333	0.12	7.625	1.496	1.910
Trajektorie Set 3	1.56	13.910	0.615	0.44	7.666	2.031	1.465
Referenz-Regler	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198

Tabelle 7.6: Kenngrößen (Maxima der Teiltrajektorien) des MPC bei kritischem Sollwertverlauf

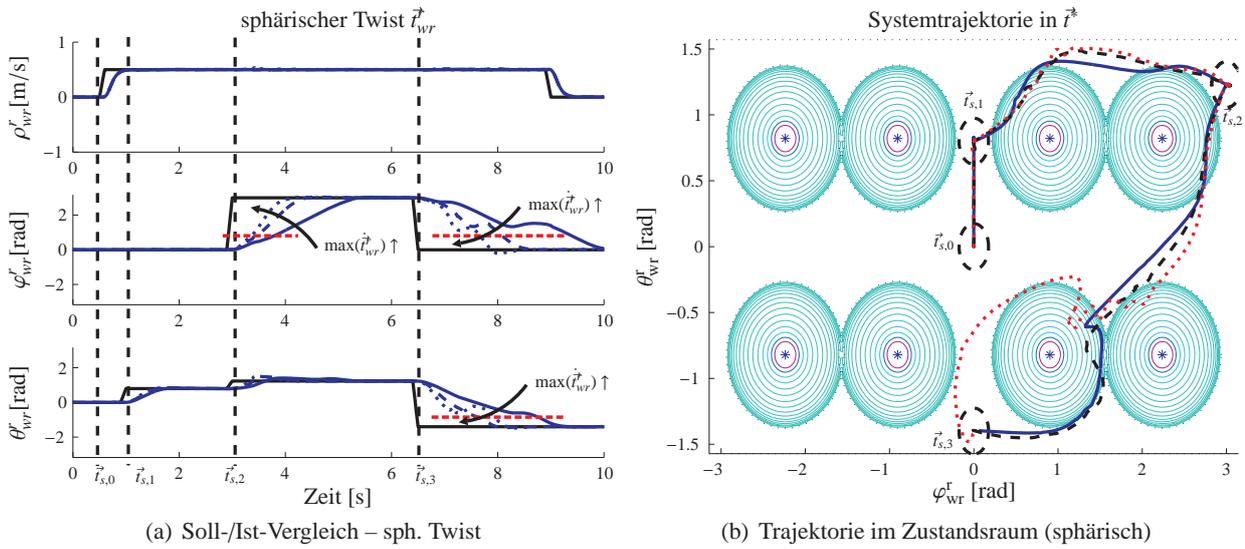


Abbildung 7.12: Trajektorien des MP-Reglers bei Beaufschlagung mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. das Folgeverhalten bezüglich der einzelnen Parameter des Twists in sphärischen Koordinaten sowie die Projektion der zugehörigen Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf sphärische Topologie begrenzten Zustandsraums. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau (bzw. schwarz), gestrichelte Linie; Set 3: blau (bzw. rot), gepunktete Linie). Die senkrechten Linien (schwarz gestrichelt in Abb. 7.12(a)) markieren den Zeitpunkt der Aufschaltung eines neuen Sollwertes (schwarz gestrichelte Kreise in Abb. 7.12(b)) für den sphärischen Twist \vec{r}_{wr}^s . Die rot gestrichelten Linien in Abb. 7.12(a) markieren die Lage einiger ausgewählter Singularitäten. In Abb. 7.12(b) stellen die konzentrischen Ellipsen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden Singularitäten. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

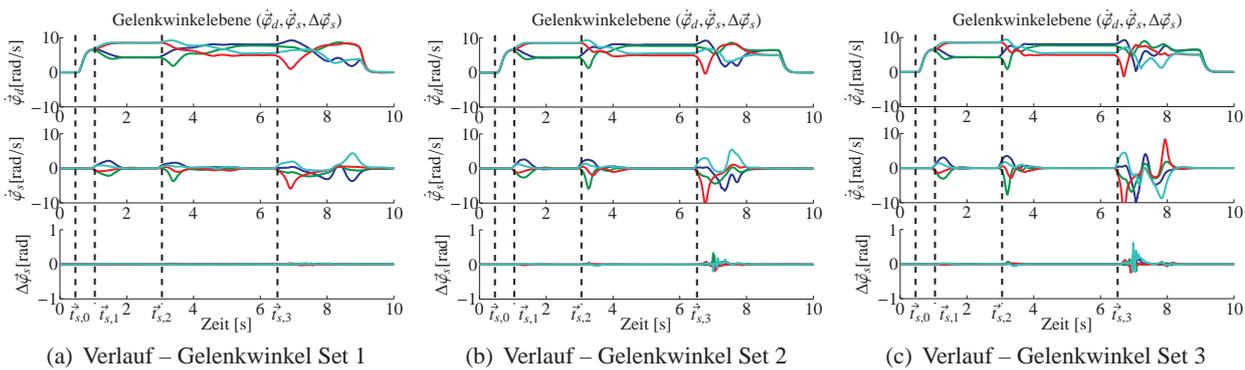


Abbildung 7.13: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des modellprädiktiven Reglers (MPC) mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde lediglich der primäre Lösungsraum zugelassen.

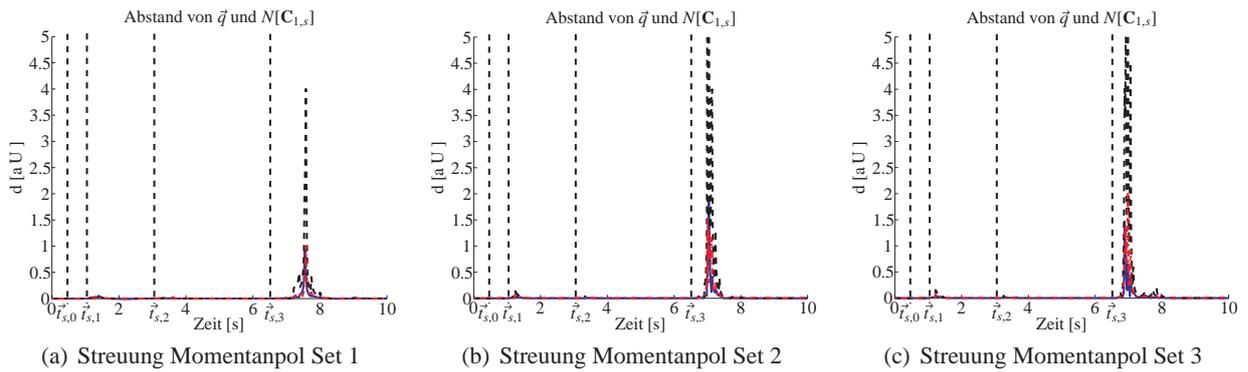


Abbildung 7.14: Die Abbildungen stellen die Streuung des Momentanpols für die Parametersets 1 bis 3 (v.l.n.r.) bei kritischer Sollwertfolge (MPC) dar. Dargestellt werden unterschiedliche Abstandsmaße für die Distanz zwischen gegenwärtiger Konfiguration \vec{q} und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[\mathbf{C}_{1,s}]$. Die verwendeten Kenngrößen dafür sind die Standardabweichung entlang der Hauptachse der Kovarianzmatrix über alle signifikanten Achsschnittpunkte (blaue Linie) sowie der Median (rot gestrichelt) bzw. der Maximalwert (schwarz gestrichelt) der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols.

7.2.3 Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel

Abbildung 7.15 zeigt ausgewählte Punkte, über welche die Trajektorien des geregelten Systems verlaufen. Dargestellt sind die Resultate für alle Parametersets (Abb. 7.15(a) bis Abb. 7.15(c)) sowie für den Referenzregler (Abb. 7.15(d) bzw. Abb. 6.14). In Abbildung 7.16 sind die resultierenden Box-Whisker Diagramme für die drei Parametersets (Abb. 7.16(a) bis Abb. 7.16(c)) sowie den Referenzregler dargestellt (Abb. 7.16(d) bzw. Abb. 6.17). Die zugehörigen statistischen Kenngrößen für die einzelnen Parametersets sind in den Tabellen F.4 bis F.6 vollständig angegeben.

Man kann deutlich erkennen, dass die Systemtrajektorien bei Verwendung des modellprädiktiven Reglers (Abb. 7.15) erheblich weniger in die repulsiven Potentiale einstreuen als bei Verwendung des potentialfeldbasierten Reglers (Abb. 7.8). Das spiegelt sich sowohl in den gegenüber dem potentialfeldbasierten Regler stark reduzierten Stellraten als auch in den insbesondere für Set 2 (Abb. 7.16(b), Tab. F.5) und 3 (Abb. 7.16(c), Tab. F.6) deutlich reduzierten Lenkwinkelfehlern bzw. der deutlich reduzierten Streuung der Achsschnittpunkte wider.

Besonders auffällig ist dieser Unterschied für Set 3. Während der potentialfeldbasierte Regler das System bei diesen Stellraten offensichtlich nicht mehr robust regeln kann, bleiben die Fehler des modellprädiktiven Reglers weiterhin klein. Einschränkend ist dabei zu erwähnen, dass dies offensichtlich nur unter Ausnutzung des erweiterten Lösungsraums gilt. In Abschnitt 7.2.2 führte Set 3 bei Beaufschlagung mit der kritischen Trajektorie zu inakzeptabel hohen Fehlern.

Des Weiteren ist die im Vergleich zum potentialfeldbasierten Regler bei Set 2 und Set 3 stark reduzierte Einregelzeit zu beachten. Dies ist insbesondere darauf zurückzuführen, dass bei Verwendung des modellprädiktiven Reglers der Wirkungsbereich der repulsiven Potentiale für Set 2 und Set 3 erheblich reduziert werden konnte. Zusätzlich kann eine leichte Verkürzung der Trajektorien des geregelten Systems durch die Optimierung über einen begrenzten Vorhersagehorizont eine Rolle spielen. Der Einfluss dieses Effektes scheint aber eher gering zu sein, da sonst auch für Set 1 eine deutliche Reduktion der Einregelzeiten zu erwarten wäre. Das wird jedoch nicht beobachtet.

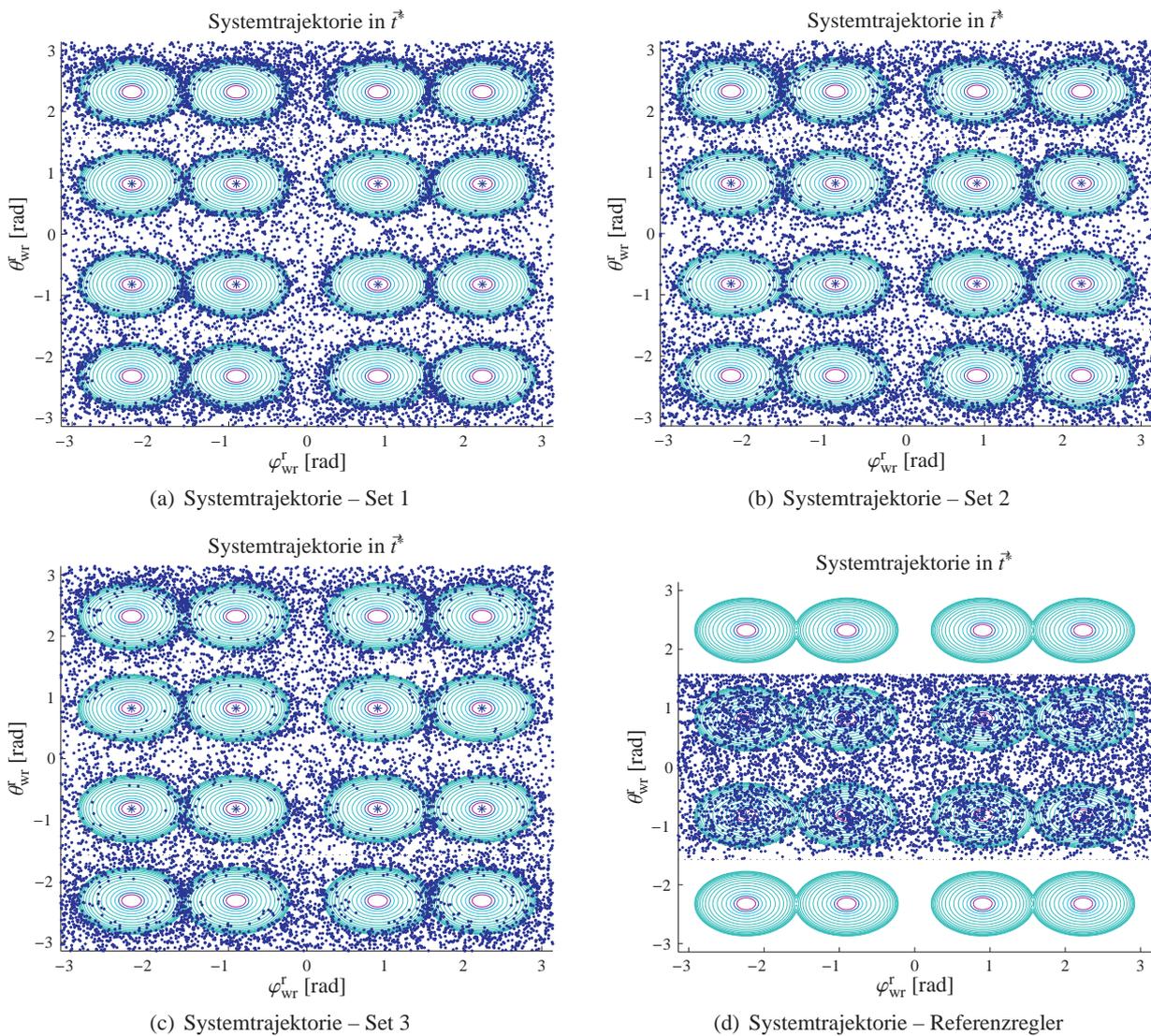
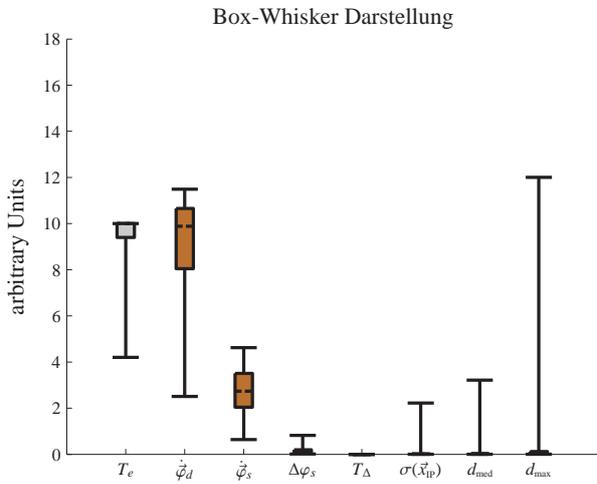
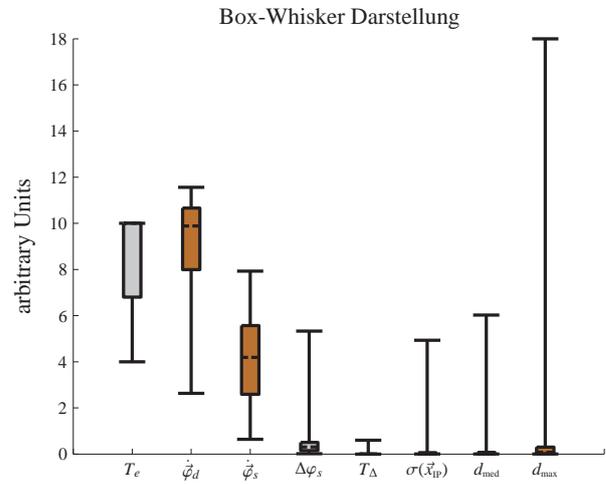


Abbildung 7.15: Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorien von modellprädiktivem Regler (Set 1 bis 3, Abb. 7.15(a) bis 7.15(c)) und Referenzregler (Abb. 7.15(d)) auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gestrichelten Linien eingegrenzten Bereich.

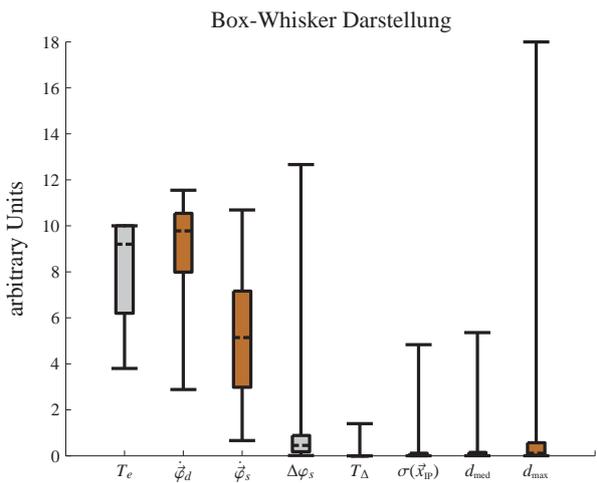
Der Ansatz mittels modellprädiktiver Regelung erlaubt also die Nutzung eines größeren Anteils des zulässigen Zustandsraums als der Ansatz mittels potentialfeldbasierter Regelung. Nichtsdestotrotz schränkt die Vermeidung der singulären Bereiche den nutzbaren Zustandsraum stark ein und führt so – zum einen durch die Notwendigkeit von „Umwegen“, zum anderen durch die schlichte Unzulässigkeit bestimmter Sollwerte – zu langen Einregelzeiten von im Schnitt deutlich über 0.5 s. Solch lange Einregelzeiten sind vor dem Hintergrund einer überlagerten Bahn- bzw. Geschwindigkeitsregelung problematisch. Im folgenden Abschnitt wird untersucht, inwieweit der Ansatz über Reglerumschaltung diese Einregelzeiten reduzieren kann.



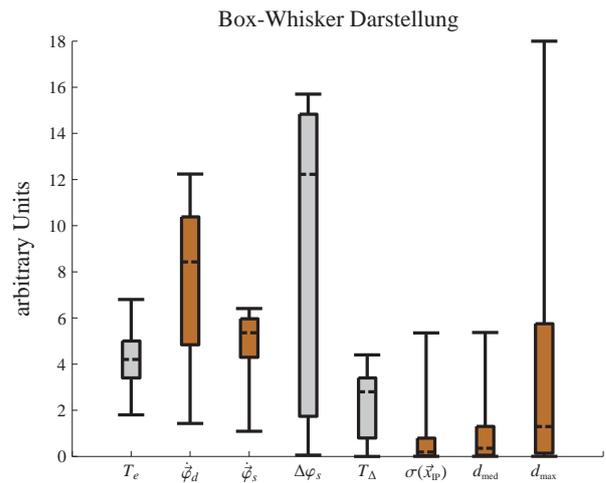
(a) Box-Whisker Diagramm – Set 1



(b) Box-Whisker Diagramm – Set 2



(c) Box-Whisker Diagramm – Set 3



(d) Box-Whisker Diagramm – Referenzregler

Abbildung 7.16: Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. und v.o.n.u. die Box-Whisker Diagramme der charakteristischen Größen für den modellprädiktiven Regler (Set 1 bis 3) sowie den Referenzregler. Die horizontalen schwarzen Linien (Whiskers) grenzen den Wertebereich einer Größe ein. Sie geben, nach Filterung der Outlier, die Lage der Minima und Maxima einer Verteilung an. Als Outlier werden dabei hier jeweils die obersten und untersten 3% der Werte zu einer Kenngröße betrachtet. Die Rechtecke (Boxes) geben den Wertebereich zwischen 25tem und 75tem Perzentil, also die Lage der mittleren 50% einer Verteilung, an. Der gestrichelte Balken innerhalb der Boxes gibt die Lage des Medians im Wertebereich an. Bei den charakteristischen Größen, deren Boxes grau hinterlegt sind, wurde der Wertebereich zur besseren Darstellung aller Größen in einem gemeinsamen Plot mit dem Faktor 10 skaliert. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischen Größen auf das Intervall [0; 18] begrenzt. Die dem Diagramm zugrunde liegende Stichprobenmenge umfasst für jeden der dargestellten Werte 3600 Elemente.

7.3 Charakterisierung des Reglers mit Reglerumschaltung

7.3.1 Verhalten bei Einheitssprung der Sollwerte

Zur Untersuchung des in Abschnitt 5.4 skizzierten Ansatzes mittels Basiswechsel werden vier geregelte Systeme implementiert. Zustandsraum, Stellgrößen sowie direkte und inverse Kinematik werden für jedes Radmodul bezüglich seines jeweiligen Bezugssystems formuliert. Als Regler wird jeweils der zuvor untersuchte modellprädiktive Regler eingesetzt. Alle repulsiven Potentiale werden entfernt. Der Ansatz mittels Umschaltung soll garantieren, dass Kinematik und Regelung immer in einem Bezugssystem definiert sind, für welches in der Umgebung des gegenwärtigen Arbeitspunkt, keine Singularitäten auftreten. Der Zustandsraum für alle Teilsysteme wird auf die toroidale Topologie erweitert. Diese Erweiterung war die Voraussetzung für die Einführung des Ansatzes auf Basis der Reglerumschaltung in Kapitel 5.

Die Schaltschwellen ergeben sich, wie in Abschnitt 5.4 erläutert, durch die Punkte gleichen Abstandes von den Radmodulen. Dies entspricht dem Voronoigraph mit den Lenkachsen der Radmodule als Erzeugenden. Für das hier exemplarisch untersuchte Fahrwerk des Care-O-bot[®] 3 sind die Schaltschwellen durch Abszisse und Ordinate des roboterzentrierten Koordinatensystems sowie den Fernpunkt gegeben.

Das Verhalten des resultierenden Systems wird wiederum bezüglich dreier Parametersets (Tabelle 7.7) für den modellprädiktiven Regler untersucht. Dabei entfallen die Parameter bezüglich der repulsiven Potentiale. Hinzu kommen die Parameter zur Beschreibung der Schaltschwellen. Der Parameter „Schaltschwelle rel. kart.“ beschreibt die Lage der Schaltschwelle zwischen zwei Radmodulen in Prozent des relativen Abstandes zwischen diesen Modulen. Der hier gewählte Wert von 50 % entspricht gerade dem Voronoigraphen. Der Parameter „rel. Hysterese-Korridor“ beschreibt das Ausmaß eines zusätzlich eingeführten Hysterverhaltens, um andauerndes Umschalten unter Sliding-Modes zu vermeiden.

Man kann erkennen, dass sich die drei Parametersets in Tabelle 7.7 stark von den zuvor für den modellprädiktiven Regler gewählten Parametersets (Tabelle F.7) unterscheiden. Insbesondere wurde die zulässige obere Grenze der ersten Ableitung des sphärischen Twists stark erhöht. Dies liegt insbesondere an der geänderten Bedeutung, welche diese Parameter durch die Koordinatentransformation erfahren. So wird unter anderem für das aktive Radmodul Lenkbewegung und Fahrbewegung entkoppelt. Des Weiteren wurden leichte Anpassungen hinsichtlich der Einstellung des unterlagerten Radmodul-Reglers vorgenommen.

Wie zuvor wird der Regler unter Basiswechsel bezüglich seiner Sprungantwort bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r sowie bei Beaufschlagung mit der zuvor eingeführten kritischen Trajektorie und bezüglich seiner Charakteristik bei Beaufschlagung mit beständig wechselnden, zufälligen Sollwerten untersucht. In Abbildung 7.17 ist der Verlauf der geregelten Größen bei kartesischer Repräsentation

	Obere Grenze erste Ableitung	Steigung att. Potential	Integrationsk. inv. virt. Masse	Dämpfung	Gewichtung Stellenergie	Optimierung Gain	Schaltschwelle rel. kart.	rel. Hysterese- Korridor
Set 1	1.75π	16	5.0	3.25	1.0	0.025	50%	12.5%
Set 2	2.75π	18	5.714	2.5	0.5	0.025	50%	12.5%
Set 3	3.25π	25.5	6.061	3.125	0.25	0.025	50%	12.5%

Tabelle 7.7: Modellprädiktiver Regler mit Basiswechsel: Untersuchte Parametersets

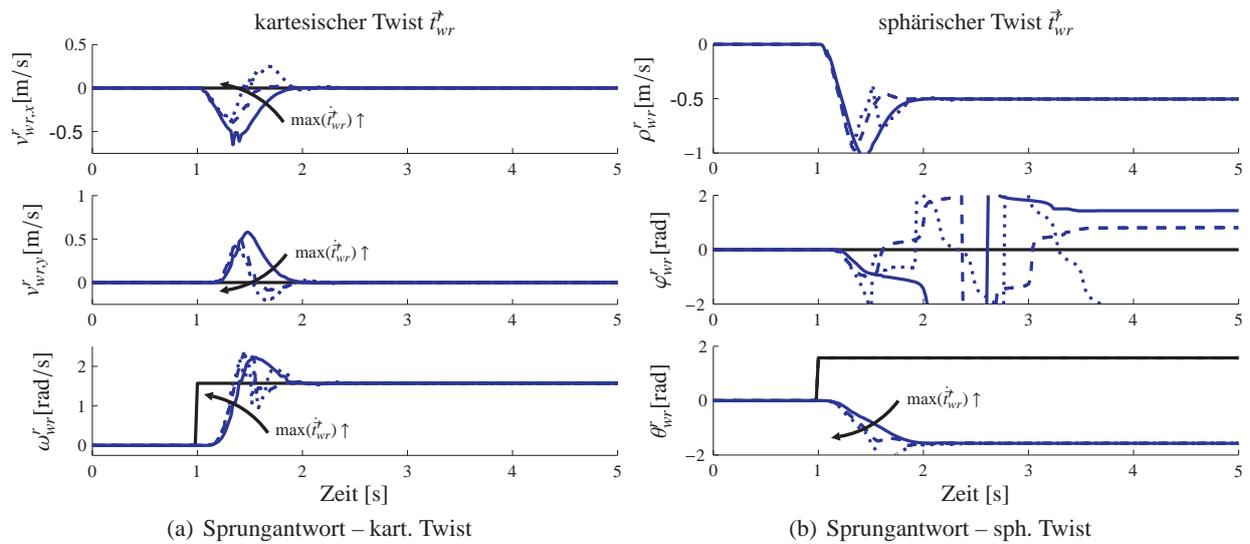


Abbildung 7.17: Sprungantwort des modellprädiktiven Reglers (MPC) mit Basiswechsel bei Beaufschlagung mit einem Einheitssprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. die Antwort bezüglich der kartesischen Darstellung sowie der sphärischen Darstellung des Twists. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau, gestrichelte Linie; Set 3: blau, gepunktete Linie). Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde der vollständige Lösungsraum zugelassen.

(Abb. 7.17(a)) sowie sphärischer Repräsentation (Abb. 7.17(b)) des Twists dargestellt. Das Bezugssystem ist der besseren Vergleichbarkeit wegen wie bisher das körperfeste Roboterkoordinatensystem. Abbildung 7.18 zeigt den zugehörigen Verlauf der Konfigurationsvariablen für die drei Parametersets. Die resultierenden charakteristischen Größen sind in Tabelle 7.8 angegeben.

Abbildung 7.17 zeigt, dass der resultierende Regler für alle Parametersets stationär genau ist. Die Sollwerte werden ähnlich schnell wie zuvor eingeregelt, wobei das System eine von Set 1 nach Set 3 zunehmende Agilität zeigt. Die nach Tabelle 7.8 verhältnismäßig hohen Einregelzeiten von Set 2 und Set 3 liegen an Überschwingern, die nach Einstellung des geregelten Wertes noch einmal aus der nächsten Umgebung des Sollwertes heraus führen.

Im Vergleich mit modellprädiktivem und potentialfeldbasiertem Regler sind deutliche Abweichungen im Verlauf der geregelten Größen festzustellen. Dies betrifft insbesondere den Verlauf der kartesischen Geschwindigkeit $v_{wr,y}^r$ (mittlerer Graph in Abbildung 7.17(a)) sowie den Verlauf des Geschwindigkeitsbetrages ρ_{wr}^r und des Azimuts φ_{wr}^r des sphärischen Twists (oberer und mittlerer Graph in Abbildung 7.17(b)). Die Abweichung bezüglich des Parameters φ_{wr}^r (mittlerer Graph in Abbildung 7.17(b)) ist vor allem ein messtechnisches Problem. Da Kinematik, Regelung und Beobachter in den jeweiligen Referenzsystemen definiert sind, ist der Parameter φ_{wr}^r in der Umgebung des Ursprungs des körperfesten Koordinatensystems nicht beobachtbar bzw. die entsprechende Abbildung singulär. Die Abweichung bezüglich des Verlaufs von $v_{wr,y}^r$, in welchem bisher keine Störungen aufgetreten waren (Abb. 7.1(a), Abb. 7.10(a)), ist vor allem durch die gegenüber den bisherigen Reglern veränderte Systemtrajektorie zu erklären. Für alle Parametersets führt der hier betrachtete Regler den Momentanpol unmittelbar über die Radachse des dritten, hier aktiven, Radmoduls. Das setzt ein kurzfristiges Einlenken und damit eine Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung voraus. Ursache für die Abweichung bezüglich ρ_{wr}^r ist schließlich eine Kombination aus der starken Nichtlinearität der Transformation des Twists in ein anderes Bezugssystem sowie der Abweichung der Trajektorie.

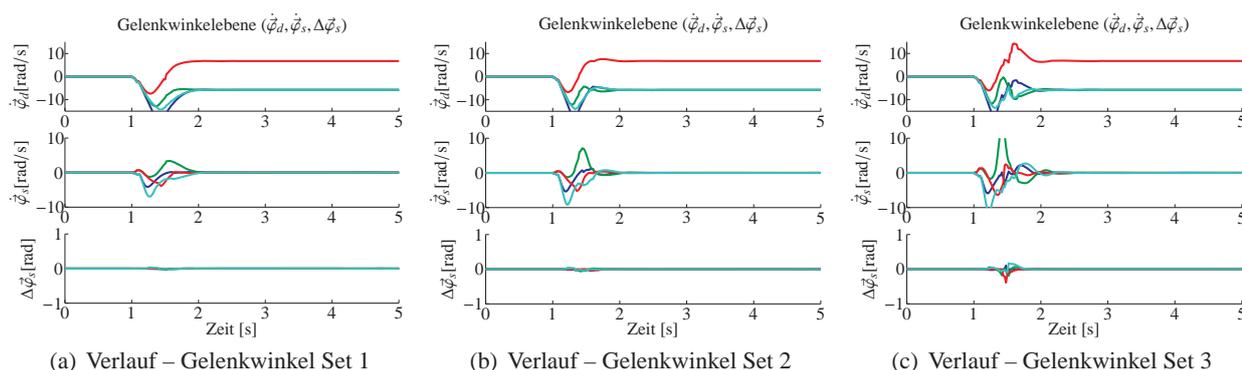


Abbildung 7.18: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des modellprädiktiven Reglers (MPC) mit Basiswechsel mit einem Einheitsprung in ω_{wr}^r . Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde der vollständige Lösungsraum zugelassen.

Für Set 1 und Set 2 zeigen die Konfigurationsgrößen (Abb. 7.18(a), Abb. 7.18(b)) entlang dieser Systemtrajektorie weiche Kurven, die Lenkwinkelgeschwindigkeiten bleiben beschränkt. Unstetigkeiten aufgrund der Umschaltungen sind nicht zu erkennen. Die Lenkwinkelfehler bleiben klein, so dass von guter Synchronisation der Radmodule gesprochen werden kann. Eine Besonderheit ist bezüglich der Drehrate der Räder $\dot{\varphi}_d$ zu erkennen. Anders als bei den zuvor entworfenen Reglern kann man hier (jeweils oberster Graph in Abbildung 7.18(a) bis 7.18(c)) ein Überschwingen erkennen. Dies ist die direkte Folge des Überschwingens des Parameters ρ_{wr}^r (oberster Graph in Abbildung 7.17(b)). Anders stellt sich das Verhalten für das dritte Set dar. Man kann erkennen, dass signifikante Lenkwinkelfehler auftreten. Zusätzlich nehmen die kommandierten Lenkwinkelgeschwindigkeiten vergleichsweise große Werte an und weisen teilweise scharfe Sprünge auf.

Parameterset 1 und 2 liefern damit ähnlich gute Ergebnisse bei Beaufschlagung mit einem Einheitsprung wie Set 1 und 3 des im vorigen Abschnitt untersuchten modellprädiktiven Reglers. Dies war insofern zu erwarten, da für die hier untersuchte Trajektorie keine Singularitäten passiert werden müssen, die Unterschiede zwischen den Reglern also nicht so stark zum Tragen kommen. Set 3 ist offensichtlich zu aggressiv parametrisiert. Das dritte Set ist damit zwar als Parametrierung zum tatsächlichen Betrieb ungeeignet, wird aber als Vergleich in den folgenden Abschnitten ebenfalls evaluiert.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Steilrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IPs $\max(d_{IP;CM})$ [m]	Streuung IPs $\text{med}(d_{IP;CM})$ [m]	Streuung IPs $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Sprungantwort Set 1	0.82	6.975	0.034	0.0	0.283	0.143	0.082
Sprungantwort Set 2	0.76	9.219	0.065	0.0	0.431	0.109	0.028
Sprungantwort Set 3	0.86	12.53	0.388	0.26	0.50	0.124	0.054
Referenz-Regler	0.26	4.138	0.62	0.25	2.918	1.0	0.577

Tabelle 7.8: Kenngrößen des MP-Reglers mit Basiswechsel bei Beaufschlagung mit Einheitsprung

7.3.2 Verhalten entlang einer kritischen Systemtrajektorie

In diesem und dem folgenden Abschnitt wird das Verhalten des Reglers mit Reglerumschaltung im Kontext mit dem Passieren von Regionen, welche bisher der Umgebung der Singularitäten zugeordnet waren, untersucht. Dazu wird das geregelte System zunächst wieder mit der kritischen Solltrajektorie beaufschlagt. Dann wird das Verhalten des geregelten Systems unter andauerndem zufälligem Sollwertwechsel untersucht.

Da für den MPC mit Basiswechsel prinzipbedingt der toroidale Lösungsraum verwandt wird, sind die Ergebnisse für Beaufschlagung mit einer kritischen Trajektorie nur bedingt mit den Ergebnissen der vorherigen Untersuchungen vergleichbar. Der Regler wird hier immer der verkürzten Trajektorie folgen, welche weniger dicht an den kritischen Bereichen vorbei führt. Dennoch soll der Vollständigkeit halber hier knapp darauf eingegangen werden.

Abbildung 7.19(a) zeigt den Verlauf der geregelten Größen bezüglich der sphärischen Repräsentation des Twists für alle Parametersets. Die resultierenden Trajektorien für die geregelten Systeme sind in Abbildung 7.19(b) zu sehen. In Abbildung 7.20 ist der zugehörige Verlauf der Konfigurationsvariablen für die jeweiligen Parametersets dargestellt und in Abbildung 7.21 die Maßgrößen zur Beschreibung der Streuung der Achsschnittpunkte.

In Abbildung 7.19 fallen wieder die Unstetigkeiten bezüglich φ_{wr}^r auf. Auch hier sind diese Unstetigkeiten wieder Resultat der Nicht-Beobachtbarkeit dieser Zustandsgröße in der Nähe der Pole. Des Weiteren lässt sich der Wechsel zwischen den Lösungsdomänen erkennen. Die Sollwerte (schwarze Linien bzw. schwarz gestrichelte Kreise) sind bezüglich der primären Lösungsdomäne dargestellt. Bei Einregelung auf das zweite Ziel $\vec{t}_{s,2}$ kreuzt die Trajektorie für Set 1 und Set 2 den Pol und bewegt sich damit in die sekundäre Lösungstrajektorie. Bei Einregelung auf das dritte Ziel $\vec{t}_{s,3}$ wird zusätzlich der Parameter ρ_{wr}^r invertiert, das entspricht einer Bewegung durch die Kugel hindurch, und das System bewegt sich in die quartäre Lösungsdomäne.

Die Konfigurationsvariablen (Abb. 7.20) zeigen auch hier einen weichen Verlauf. Lenkwinkelgeschwindigkeiten und Lenkwinkelfehler bleiben für alle Parametersets klein. Lediglich das dritte Set überschreitet hinsichtlich des Fehlers kurzzeitig (Tabelle 7.9) die Toleranzgrenze von 0.1 rad. Auch die Streuung der Achsschnittpunkte (Abb. 7.21) ist für alle Parametersets klein. Alle Radmodule sind also hinreichend exakt koordiniert.

	Einregelzeit T_e [s]	max. Stellrate φ_s [rad/s]	max. Fehler $\Delta\varphi_s$ [rad]	max. Dauer Fehler T_Δ [s]	Streuung IP _s $\max(d_{ip,ICM})$ [m]	Streuung IP _s $\text{med}(d_{ip,ICM})$ [m]	Streuung IP _s $\sigma(\hat{x}_{IP})$ [m]
Trajektorie Set 1	0.64	4.014	0.033	0.0	0.143	0.048	0.030
Trajektorie Set 2	0.50	5.651	0.068	0.0	0.199	0.062	0.041
Trajektorie Set 3	0.66	7.112	0.113	0.02	0.231	0.067	0.048
Referenz-Regler	0.34	6.917	1.299	0.26	2.239	0.472	0.198

Tabelle 7.9: Kenngrößen (Maxima der Teiltrajektorien) des MPC mit Basiswechsel bei kritischem Sollwertverlauf

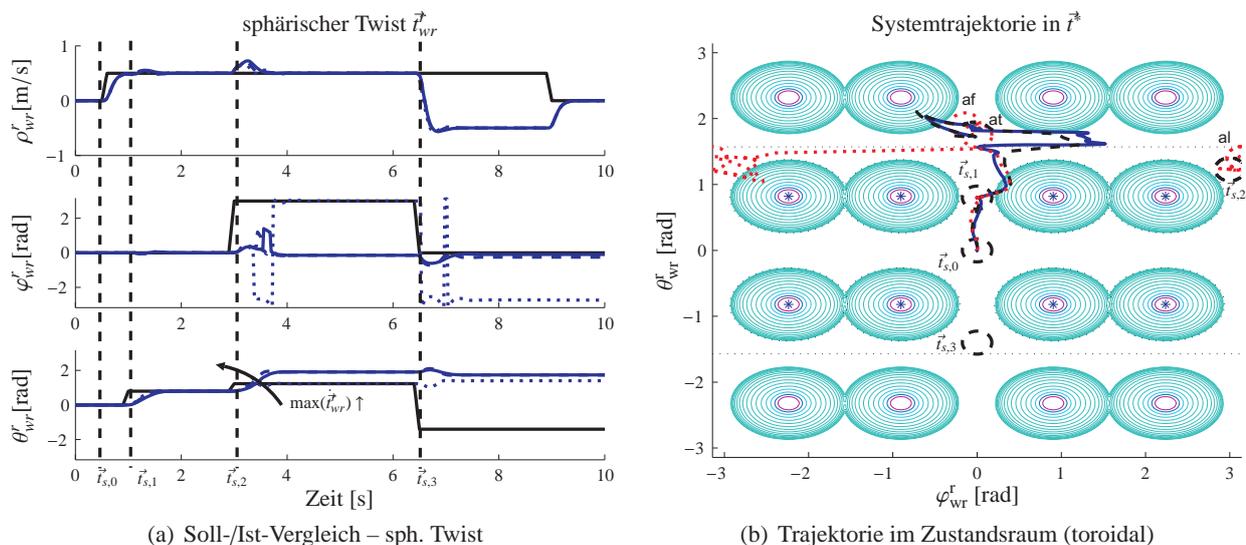


Abbildung 7.19: Trajektorien des MP-Reglers mit Basiswechsel bei Beaufschlagung mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. das Folgeverhalten bezüglich der einzelnen Parameter des Twists in sphärischen Koordinaten sowie die Projektion der zugehörigen Systemtrajektorie auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die Antworten der unterschiedlichen Parametersets sind gemeinsam dargestellt (Set 1: blau, durchgezogene Linie; Set 2: blau (bzw. schwarz), gestrichelte Linie; Set 3: blau (bzw. rot), gepunktete Linie). Die senkrechten Linien (schwarz gestrichelt in Abb. 7.19(a)) markieren den Zeitpunkt der Aufschaltung eines neuen Sollwertes (schwarz gestrichelte Kreise in Abb. 7.19(b)) für den sphärischen Twist \vec{t}_{wr}^r . In Abb. 7.19(b) stellen die konzentrischen Ellipsen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden Singularitäten. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde der vollständige Lösungsraum zugelassen.

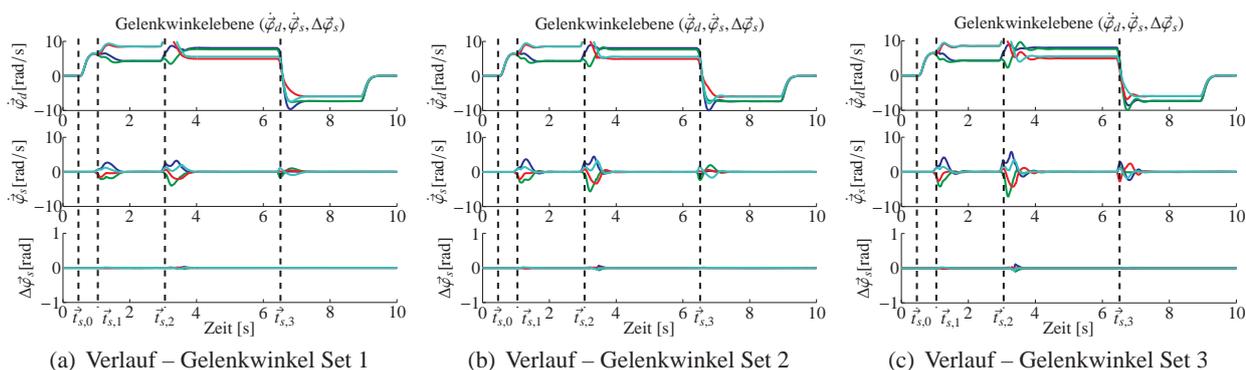


Abbildung 7.20: Verlauf der Konfigurationsvariablen bei Beaufschlagung des modellprädiktiven Reglers (MPC) mit Basiswechsel mit einer kritischen Sollwertfolge. Die Abbildungen zeigen für die drei Parametersets (v.l.n.r. Set 1 bis Set 3) v.o.n.u. die kommandierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten bzgl. der Radachse bzw. Lenkachse sowie den Lenkwinkelfehler jeweils für alle Räder. Dabei bezieht sich der Lenkwinkelfehler auf den unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Lenkwinkel. Für die hier dargestellte Sprungantwort wurde der vollständige Lösungsraum zugelassen.

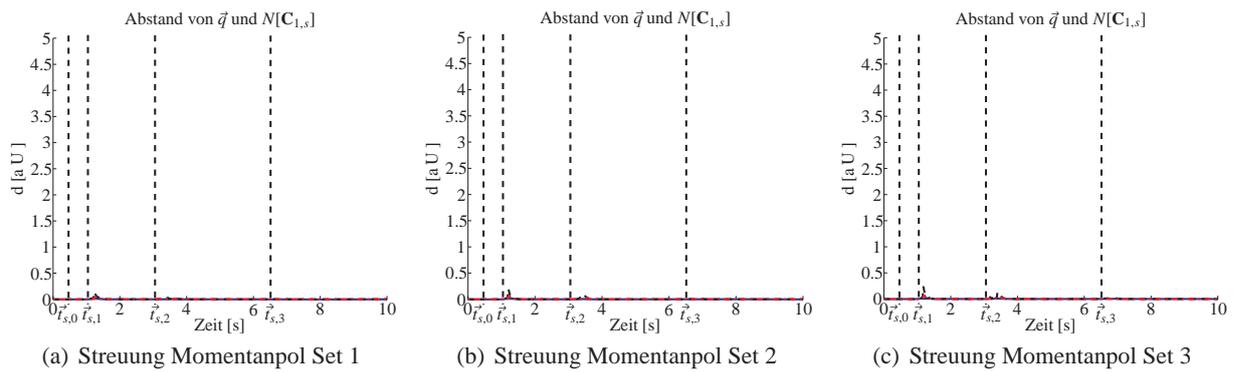


Abbildung 7.21: Die Abbildungen stellen die Streuung des Momentanpols für die Parametersets 1 bis 3 (v.l.n.r.) bei kritischer Sollwertfolge (MPC mit Basiswechsel) dar. Dargestellt werden unterschiedliche Abstandsmaße für die Distanz zwischen gegenwärtiger Konfiguration \vec{q} und dem Nullraum der nicht-holonomen Bindungen $N[C_{1,s}]$. Die verwendeten Kenngrößen dafür sind die Standardabweichung entlang der Hauptachse der Kovarianzmatrix über alle signifikanten Achsschnittpunkte (blaue Linie) sowie der Median (rot gestrichelt) bzw. der Maximalwert (schwarz gestrichelt) der Abweichungen der Achsschnittpunkte von der geschätzten Position des Momentanpols.

7.3.3 Verhalten unter andauerndem Sollwertwechsel

Die statistische Auswertung der Langzeitsimulation macht die Unterschiede im Verhalten des Reglers mit Basiswechsel und der zuvor entworfenen potentialfeldbasierten bzw. modellprädiktiven Regler besonders gut deutlich. So erkennt man in Abbildung 7.22 im Kontrast zu den vorher entwickelten Ansätzen zum Beispiel, dass sich die angenommenen Zustände in der Umgebung der Singularitäten häufen. Dies ist eine Konsequenz aus der Bestrebung des Reglers die nötigen Lenkwinkelkorrekturen des jeweils aktiven Rades zu minimieren. Das ist häufig besonders effizient möglich, indem der Momentanpol gerade über die Achse dieses Rades, also die Singularität bei Repräsentation im ursprünglichen Bezugssystem, geführt wird. Die insbesondere für Parameterset 1 auffällige Häufung der angenommenen Konfigurationen in der oberen Halbebene in Abbildung 7.22(a) ist auf die gegenüber den bisherigen Ansätzen verstärkte Hysterese bei der Umschaltung zwischen den Lösungsdomänen zurückzuführen. Da das jeweils aktive Rad die bezüglich seines Bezugssystems optimale Trajektorie auswählt, war diese vergrößerte Hysterese notwendig, um einen Deadlock bei der teilweise konkurrierenden Umschaltung zwischen Lösungsdomänen und aktiven Rädern zu vermeiden.

Betrachtet man die Box-Whisker Diagramme (Abb. 7.23(a) bis 7.23(d)) erkennt man, dass die durchschnittliche Einregelzeit T_e gegenüber dem modellprädiktiven Regler deutlich reduziert wurde. Berücksichtigt man, dass gegenüber dem Referenzregler (Abb. 7.23(d)) die maximal zu stellenden Lenkwinkel teilweise um den Faktor drei größer sind, die hier kommandierten Stellraten aber sogar leicht kleiner sind, zeigt der MPC mit Basiswechsel ein zügiges Einregelverhalten. Dennoch bleiben Winkelfehler und Streuung der Achsschnittpunkte insbesondere für das Parameterset 1 vernachlässigbar gering. Parameterset 2 zeigt eine ähnliche Charakteristik. Bei einer nur geringen Zunahme der Lenkwinkelfehler bzw. der Streuung der Achsschnittpunkte ist hier die Einregelzeit nochmals deutlich reduziert. Allerdings geht dies einher mit einer deutlichen, wenn auch noch unkritischen, Erhöhung der Lenkgeschwindigkeiten. Parameterset 3 (Abb. 7.23(c)) ist erkennbar zu aggressiv parametrisiert. Zwar sind die resultierenden Lenkwinkelfehler mehrheitlich deutlich geringer als im Falle des Referenzreglers, doch mit maximalen Abweichungen von annähernd 90° nicht akzeptabel. Dieses Verhalten steht im Zusammenhang mit der Vernachlässigung der Singularitäten in der Regelung und kann in Tabelle F.9 bzw. F.10 auch für Parameterset 2 beobachtet werden.

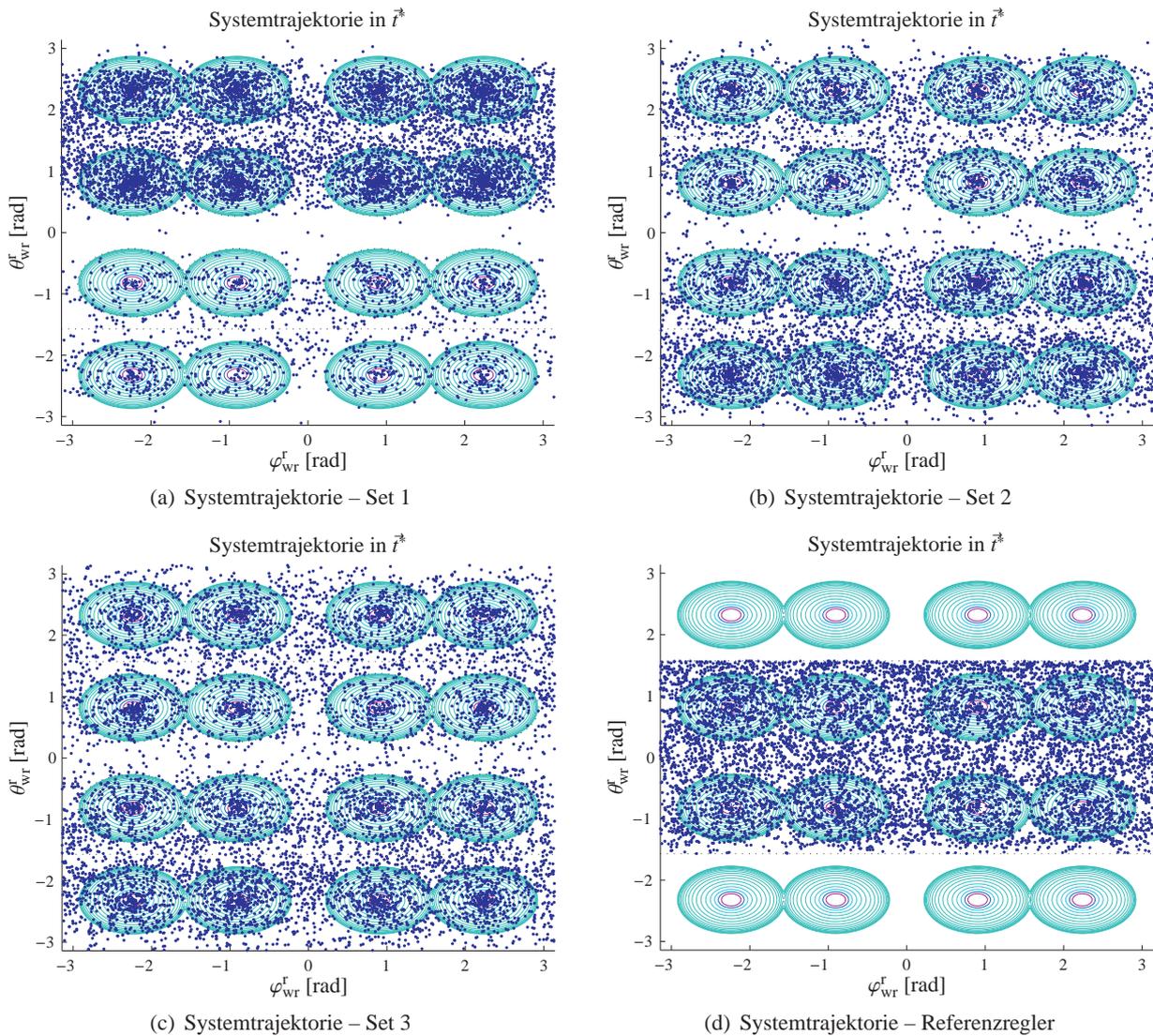


Abbildung 7.22: Dargestellt ist die Projektion der Systemtrajektorien von modellprädiktivem Regler mit Basiswechsel (Set 1 bis 3, Abb. 7.22(a) bis 7.22(b)) und Referenzregler (Abb. 7.22(d)) auf die Oberfläche des auf toroidale Topologie erweiterten Zustandsraums. Die konzentrischen Ellipsen stellen die nach Zweierpotenzen skalierten Höhenverläufe eines exemplarischen repulsiven Potentials dar. Die Zentren der Ellipsen markieren die Lage der vier Radachsen bzw. der daraus erwachsenden 16 Singularitäten. Der Zustandsraum bei Beschränkung auf die sphärische Topologie entspricht dem durch die schwarz gestrichelten Linien eingegrenzten Bereich.

Im Gegensatz zu potentialfeldbasiertem und modellprädiktivem Regler führen Parameterset 2 und 3 für den MPC mit Basiswechsel zu maximalen Stellwerten von 377.6 rad/s bzw. 1333.2 rad/s für die Lenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_s$. Zum Vergleich: zulässig sind im Falle von Care-O-bot[®] 3 etwa 24 rad/s. Für Parameterset 1 wird diese Beschränkung eingehalten. Hier ergibt sich die maximale Stellrate zu 15.367 rad/s. Dieses Verhalten ergibt sich aus der hier nur lokalen, auf das jeweils aktive Rad beschränkten Optimierung des Regelungsproblems. Zwar wird das Bezugssystem umgeschaltet, bevor eine Singularität erreicht wird, im Falle der aggressiven Sets 2 und 3 weist der Twist nach der Umschaltung allerdings zu hohe Änderungsraten auf und wird an den Radachsen vorbei getragen.

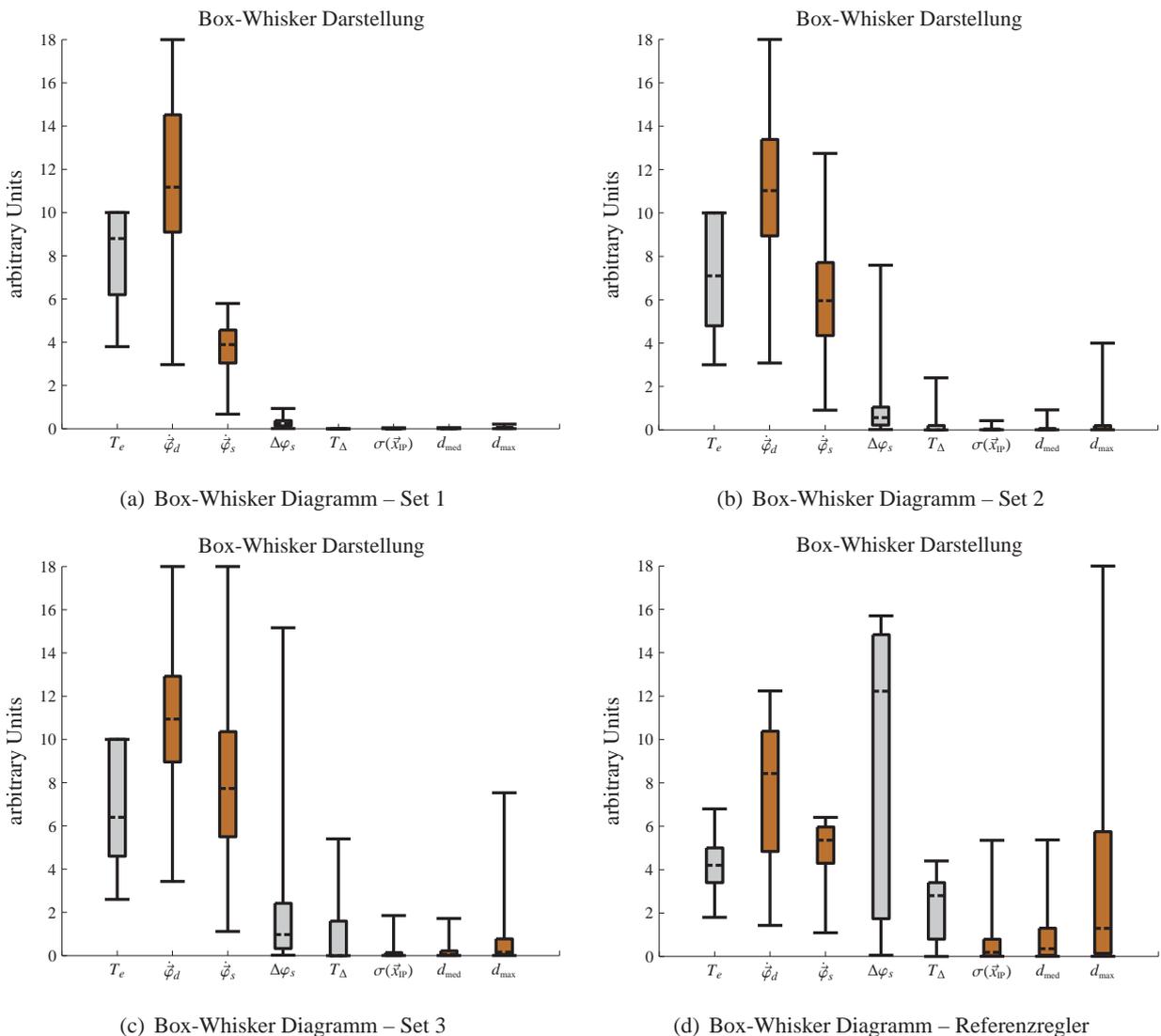


Abbildung 7.23: Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. und v.o.n.u. die Box-Whisker Diagramme der charakteristischen Größen für den modellprädiktiven Regler mit Basiswechsel (Set 1 bis 3) sowie den Referenzregler. Als Outlier werden dabei hier jeweils die obersten und untersten 3% der Werte zu einer Kenngröße betrachtet. Bei den charakteristischen Größen, deren Boxes grau hinterlegt sind, wurde der Wertebereich zur besseren Darstellung aller Größen in einem gemeinsamen Plot mit dem Faktor 10 skaliert. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischen Größen auf das Intervall $[0; 18]$ begrenzt. Die dem Diagramm zugrunde liegende Stichprobenmenge umfasst für jeden der dargestellten Werte 3600 Elemente.

Bei der Bewertung dieses Verhaltens ist zu beachten, dass bei der Reglerauslegung für den Ansatz mit Basiswechsel deutlich weniger Aufwand getrieben wurde als bei den zuvor evaluierten Ansätzen. Wie in Kapitel 5 erwähnt, handelt es sich bei dem Ansatz mit Umschaltung um eine Entwurfsskizze. Mögliche Anpassungen, die die beobachteten Probleme beseitigen, sind leicht vorstellbar. Abhilfe könnte zum Beispiel ein Verschmelzen der Stellgrößenhorizonte schaffen oder eine Anpassung des Optimierungsschritts dahingehend, dass auch während der Optimierung der Wechsel der Basissysteme einbezogen werden kann. Der Ansatz mittels Basiswechsel hat daher das größte Potential hinsichtlich einer Regelung, die eine möglichst große Flexibilität in der Ansteuerung erlaubt.

8 Abschließende Betrachtung

8.1 Vergleich der Regelungsansätze und Einordnung in den Anwendungskontext

Vergleicht man die vier Regelungsansätze anhand ihrer Box-Whisker-Diagramme (Abb. 8.1), so erkennt man, dass die Ansätze erwartungsgemäß stark unterschiedliche Stärken und Schwächen zeigen. So zeigt der einfache Referenzregler hinsichtlich Einregelzeit und Stellgrößen das beste Verhalten. Der potentialfeldbasierte Regler (Abb. 8.1(b)) hingegen zeigt die kleinsten Lenkwinkelfehler und ist daher besonders gut geeignet, wenn es darum geht, die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zu garantieren. Der Regler mit Basiswechsel bietet den besten Kompromiss zwischen verfügbarem Arbeitsraum, Einregelzeiten und Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen.

In Tabelle 8.1 sind die jeweils wesentlichsten Charakteristika, verfügbarer Arbeitsraum, Einregelzeit, Stellgrößen und Verletzung der nicht-holonomen Bindungen gegenübergestellt. Dabei wurde der nutzbare Arbeitsraum aus den Ergebnissen (Abb. 7.8(a) und Abb. 7.15(a)) der Dauersimulationen abgeschätzt. Die Verletzung der nicht-holonomen Bindungen wird durch den mittleren Lenkwinkelfehler $\Delta\varphi_s$ zum geschätzten Momentanpol repräsentiert.

Hier wird besonders deutlich, dass die Vermeidung der singulären Bereiche durch repulsive Potentiale bei potentialfeldbasiertem und modellprädiktivem Regler sehr gut geeignet ist, um eine Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zu garantieren und die Stellraten zu begrenzen. Gleichzeitig wird auch die Schwäche dieses Ansatzes deutlich. Der verfügbare Arbeitsraum, der letztlich ein Maß für die Manövrierbarkeit und Flexibilität des Fahrwerks ist, wird erheblich reduziert. Für beide Regler beträgt die Reduktion etwa 30 % des ursprünglich verfügbaren Arbeitsraums. Damit einhergehend sind die durchschnittlich gemessenen Einregelzeiten gegenüber dem Referenzregler stark erhöht. Der in Tabelle 8.1 angegebene Wert ist dabei noch optimistisch. Die Ergebnisse werden durch die Begrenzung des Maximalwertes auf eine Sekunde verfälscht.

Mittels Basiswechsel durch Reglerumschaltung lässt sich dieser Nachteil beseitigen. Der Regler mit Basiswechsel nutzt den vollen Arbeitsraum des Fahrwerks. Er ermöglicht damit höchste Flexibilität und Manövrierbarkeit. Dementsprechend sind auch die Einregelzeiten deutlich geringer als bei dem potentialfeldbasierten bzw. modellprädiktiven Ansatz. Die Lage von Median und 25 % Perzentil (Abb. 8.1) machen

	Arbeitsraum genutzt, rel. [%]	Einregelzeit $\mu(T_e)$ [s]	max. Stellrate $\mu(\dot{\varphi}_0)$ [rad/s] (Antrieb)	max. Stellrate $\mu(\dot{\varphi}_s)$ [rad/s] (Lenkung)	max. Fehler $\mu(\Delta\varphi_s)$ [rad] (Lenkung)
Referenz-Regler	100	0.421	7.569	4.863	0.913
PFC Set 1	72	0.884	8.947	3.108	0.029
MPC Set 2	68	0.834	8.947	4.172	0.078
Switched MPC Set 2	100	0.710	11.33	6.404	0.114

Tabelle 8.1: Charakterisierung der untersuchten Regelungskonzepte

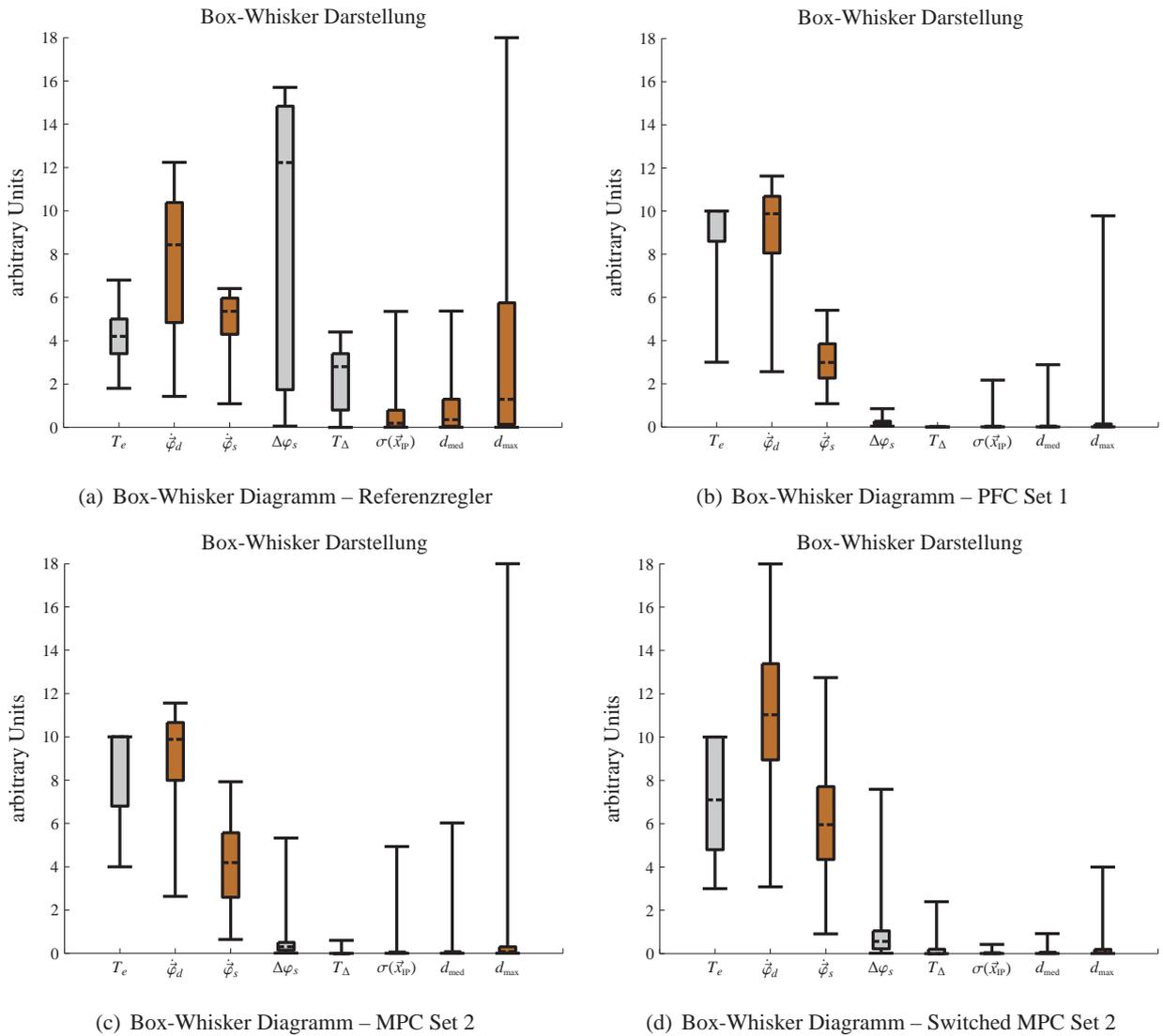


Abbildung 8.1: Die Abbildungen zeigen v.l.n.r. und v.o.n.u. die Box-Whisker Diagramme der charakteristischen Größen für den Referenzregler sowie der jeweils besten Parametrierung des potentialfeldbasierten und modellprädiktiven Regler ohne und mit Basiswechsel. Die horizontalen schwarzen Linien (Whiskers) grenzen den Wertebereich einer Größe ein. Sie geben – nach Filterung der Outlier, hier die obersten und untersten 3% der Werte – die Lage der Minima und Maxima einer Verteilung an. Die Rechtecke (Boxes) geben den Wertebereich zwischen 25tem und 75tem Perzentil – also die Lage der „mittleren“ 50% einer Verteilung – an. Der gestrichelte Balken innerhalb der Boxes gibt die Lage des Median im Wertebereich an. Bei den charakteristischen Größen, deren Boxes grau hinterlegt sind, wurde der Wertebereich zur besseren Darstellung aller Größen in einem gemeinsamen Plot mit dem Faktor 10 skaliert. Aus dem gleichen Grund wurde der Wertebereich aller charakteristischer Größen auf das Intervall $[0, 18]$ begrenzt. Die dem Diagramm zugrunde liegende Stichprobenmenge umfasst für jeden der dargestellten Werte 3600 Elemente.

diese Steigerung gegenüber PFC und MPC besonders deutlich. Dass der Ansatz mit Basiswechsel trotz höherer Stellraten nicht die Einregelzeiten des Referenzreglers erreicht, ist darin begründet, dass der Referenzregler nicht nur den vollständigen Arbeitsraum, sondern sogar den gesamten Konfigurationsraum des Fahrwerks nutzt. Um die zu stellenden Lenkwinkel zu minimieren, verlässt der Referenzregler auf Radmodulebene die Menge der unter Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen zulässigen Konfigurationen.

Anschaulich bilden die Trajektorien des Referenzreglers beim Übergang zwischen zwei Konfigurationen Geraden im achtdimensionalen Konfigurationsraum. Die Trajektorien der übrigen Regler sind dagegen Kurven, welche in einer zweidimensionalen Fläche liegen, die in den achtdimensionalen Konfigurationsraum eingebettet ist. Für den Regler mit Basiswechsel wird der Arbeitsraum durch vier solcher zweidimensionaler Flächen gebildet, die teilweise kollinear sind und zwischen denen in den Singularitäten gewechselt werden kann.

Hinsichtlich der Recheneffizienz sind Referenzregler und Potentialfeldregler dem modellprädiktiven Regler und dem Regler mit Basiswechsel deutlich überlegen. Für den modellprädiktiven Regler müssen praktisch für jeden der n Zeitschritte entlang des Vorhersagehorizontes alle Berechnungen des potentialfeldbasierten Reglers durchgeführt werden. Zusätzlich wird m -mal über den Vorhersagehorizont iteriert. Vernachlässigt man die Operationen in inverser und direkter Kinematik, ist der Aufwand für den modellprädiktiven Regler damit um den Faktor $m \cdot n$ größer als beim potentialfeldbasierten Regler. Für den Regler mit Basiswechsel müssen alle Berechnungen zusätzlich für jedes Radmodul bzw. Bezugssystem durchgeführt werden. Damit skaliert der Rechenaufwand hier zusätzlich mit der Anzahl der Radmodule. Bei einer großen Anzahl von Radmodulen und einer ausgedehnten Kinematik wäre es prinzipiell denkbar, die Berechnungen nur für die jeweils nächsten Module durchzuführen und so diesen Skalierungseffekt zu begrenzen.

In Fällen, in denen eine Vernachlässigung der nicht-holonomen Bindungen und das damit verbundene Durchrutschen und Schieben der Räder hingenommen werden kann, wird der Referenzregler daher die Performance der übrigen Regler immer übertreffen. Solche Anwendungen sind z.B. Outdoor- und insbesondere Geländefahrzeuge, bei denen aufgrund der Bodenbeschaffenheit ohnehin mit starkem Rutschen und Schieben der Räder zu rechnen ist.

Für Anwendungen in Innenräumen, bei denen es auf eine ruhige Fahrt ankommt, bietet der Ansatz mit Basiswechsel hingegen das größte Potential. Besonders wichtig erscheint eine hohe Laufruhe und große Flexibilität im Zusammenhang mit der Mensch-Maschine-Interaktion, mobiler Manipulation und Teleoperation. Bei autonomer Navigation ohne Interaktion mit dem Menschen können die Pfade vorab so geplant werden, dass weiche Kommandos an den unterlagerten Regelkreis geschickt werden und die Singularitäten vermieden werden. Hier würde prinzipiell der Regler auf Radmodulebene genügen. Bei den zuvor genannten, eher reaktiven Verfahren ist das aber im Allgemeinen nicht möglich. Hier erlauben potentialfeldbasierter Regler, modellprädiktiver Regler und der Regelungsansatz über Basiswechsel durch Reglerumschaltung eine saubere Koordination der Radmodule, auch wenn die eingehenden Kommandos weniger günstig geplant sind.

Prinzipiell sind alle vorgestellten Ansätze in diesen Szenarien ähnlich gut anwendbar. Eine leichte Abstufung lässt sich anhand der benötigten bzw. durch den Regler ermöglichten Flexibilität vornehmen. So dürfte, nach aufsteigender Flexibilität sortiert, der potentialfeldbasierte Ansatz den besten Kompromiss aus Flexibilität und Rechenlast für ein teleoperiertes System darstellen. Der MPC-Ansatz erscheint vielversprechend vor dem Hintergrund der Mensch-Maschine-Interaktion und der Ansatz mit Basiswechsel dürfte aufgrund seiner besonderen Flexibilität besonders gute Voraussetzungen für die Anwendung im Bereich der mobilen Manipulation bieten.

8.2 Zusammenfassung und Ergebnis der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die kinematische Modellierung und Regelung von nicht-holonomen, omnidirektionalen Fahrwerken im Kontext der Servicerobotik untersucht. Ausgehend vom „Configuration Kinematic Model“ nach Campion (Campion u. a. 1996) bzw. der Adaption dieses Modells nach Thuilot (Thuilot u. a. 1996) wurde zunächst gezeigt, dass die sphärische Repräsentation des Twists ein lokaler Diffeomorphismus des Momentanpols ist. Damit ist es möglich, ein Regelungsgesetz bezüglich des sphärischen Twists zu entwerfen, welches zu validen Trajektorien im Konfigurationsraum des Gesamtsystems führt. Dies erlaubt sowohl die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen als auch eine exakte Koordination aller Lenkwinkel.

Anschließend wurden die Nachteile dieses Ansatzes – wesentliche und repräsentationsabhängige Singularitäten, die effektiv zu einer Einschränkung des Arbeitsraums führen – aufgezeigt. Es wurde ein erweiterter Zustandsraum mit toroidaler statt sphärischer Topologie definiert, der diese Nachteile beseitigt. Der resultierende Zustandsraum entsteht dabei aus dem ursprünglichen Zustandsraum durch Einbringen von Redundanz bzw. zusätzlicher Mehrdeutigkeiten. Im Wesentlichen handelt es sich um eine Dopplung und Verschiebung des ursprünglichen Zustandsraums. In Folge der zusätzlich eingebrachten Mehrdeutigkeiten sind insbesondere die Abbildungen der direkten Kinematik auf dem erweiterten Zustandsraum nicht eindeutig. Es wurde ein Beobachter entworfen, der diese Mehrdeutigkeiten auflöst.

Die Eigenschaften dieses erweiterten Zustandsraums wurden untersucht. Es wurde gezeigt, dass der Zustandsraum auch nach Erweiterung ein lokaler Diffeomorphismus sowohl des Momentanpols als auch des zulässigen Konfigurationsraums ist. Damit ist ein Reglerentwurf auch im erweiterten Zustandsraum möglich. Des Weiteren wurde durch eine energetische Betrachtung des Gesamtsystems gezeigt, dass sich das System in zwei Teilsysteme zerlegen und getrennt regeln lässt: Die Regelung der Geschwindigkeit, mit der der Roboter um den Momentanpol rotiert einerseits, und die Regelung der Position des Momentanpols andererseits. Die inverse Kinematik, die letztgenannten Anteil des erweiterten Zustandsraums auf den Konfigurationsraum abbildet, weist jedoch immer noch eine Reihe wesentlicher Singularitäten auf. Diese singulären Bereiche müssen durch den Regler vermieden werden, was zu einer effektiven Einschränkung des zulässigen Arbeitsraums bzw. der Flexibilität des Fahrwerks führt.

In einem zweiten Schritt wurde daher die Möglichkeit der völligen Auflösung der Singularitäten untersucht. Dabei wurde auf die schon in (Thuilot u. a. 1996) verwandte Idee zurückgegriffen, repräsentations-



(a) Teleoperation mittels Joypad



(b) Mobile Manipulation – Care-O-bot® 3 öffnet eine Tür

Abbildung 8.2: Anwendungsbeispiele – Teleoperation und mobile Manipulation mit Care-O-bot® 3.

abhängige und wesentliche Singularitäten durch geeignete Koordinatentransformation zusammenzulegen. In (Thuilot u. a. 1996) sollte damit der effektiv zugängliche Arbeitsraum durch eine Reduzierung der Gesamtanzahl der Singularitäten vergrößert werden. Die inverse Kinematik wurde nun zunächst in zwei Komponenten zerlegt. Dabei entspricht die eine Komponente gerade einem Wechsel des Koordinatensystems, bezüglich dessen der erweiterte Zustandsraum definiert ist. Die andere Komponente bildet die gegenwärtige Konfiguration im erweiterten Zustandsraum in den Konfigurationsraum eines Rades ab, das im Ursprung des Basissystems dieses Zustandsraums liegt. Die unabhängige Untersuchung dieser beiden Komponenten zeigt, dass die zweite singularitätsfrei ist und im gesamten Zustandsraum definiert ist. Die erste Komponente ist lokal diffeomorph, wobei die Diffeomorphie gerade in den Punkten, in welchen die wesentlichen Singularitäten liegen, gebrochen wird. Die Analyse zeigt des Weiteren, dass eine stetig differenzierbare Abbildung eines singulären Punktes und seiner Umgebung unter bestimmten Voraussetzung möglich ist. Fällt die Singularität mit dem Ursprung des Basissystems des erweiterten Zustandsraums zusammen, kann dieser Punkt stetig differenzierbar in einen erweiterten Zustandsraum mit einem anderen Basissystem abgebildet werden. Diese Abbildung ist allerdings nicht umkehrbar.

Aufbauend darauf, wurde gezeigt, dass eine geeignete Menge erweiterter Zustandsräume existiert, die zusammen mit den Transformationen zwischen diesen Räumen einen Atlas der Nullmenge der nicht-holonomen Bindungen bilden. Die Nullmenge der nicht-holonomen Bindungen spezifiziert gerade den maximalen, nicht-trivialen, zulässigen Konfigurationsraum des Fahrwerks. Der kleinste Atlas ist dabei gerade durch die Zustandsräume gegeben, für welche gilt, dass der Ursprung ihres Basissystems mit der Lenkachse eines Rades zusammenfällt.

Damit war es schließlich möglich ein Regelungsgesetz zu entwerfen, welches die volle Flexibilität des Fahrwerks ausnutzt, aber weiterhin die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen garantiert. Voraussetzung dafür ist der Wechsel zwischen jeweils nicht-singulären Zustandsräumen. Ein Regelungsgesetz, welches den gesamten Arbeitsraum nutzt, muss daher immer auf dem Prinzip der Reglerumschaltung beruhen.

Auf Basis dieser Analyse wurden insgesamt vier Ansätze für die Regelung des Fahrwerks entworfen, implementiert und untersucht. Der erste Ansatz ignoriert die nicht-holonomen Bindungen und minimiert die zu stellenden Lenkwinkel unter Nutzung des gesamten Konfigurationsraums. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit als Referenzregler bzw. Radmodulregler bezeichnet, da er auf die minimal mögliche Einregelzeit führt. Der zweite und dritte Ansatz beruhen auf dem erweiterten Zustandsraum und vermeiden die Singularitäten durch Optimierung eines entsprechend definierten Gütekriteriums. Dabei wurden die Techniken der potentialfeldbasierten Regelung (PFC) bzw. der modellprädiktiven Regelung (MPC) eingesetzt. Der vierte und letzte Ansatz nutzt den gesamten nicht-trivialen Nullraum der nicht-holonomen Bindungen durch Anwendung einer Reglerumschaltung. Für alle Ansätze wurde entweder analytisch oder durch Anschauung Stabilität gezeigt. Für den potentialfeldbasierten und den modellprädiktiven Regler wurde zusätzlich eine allgemeingültige, konservative Abschätzung des Parameterraums, in welchem der Regler stabil ist, abgeleitet.

Durch simulative Untersuchung aller Konzepte in einem eigens entwickelten gemeinsamen Framework konnten quantitativ vergleichbare, reproduzierbare Messergebnisse für kritische Fahrsituationen gewonnen werden. Auf Basis dieser Ergebnisse wurden die unterschiedlichen Ansätze verglichen und vor dem Hintergrund von Anwendungsszenarien bewertet.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass die drei Ansätze, die auf dem hier eingeführten erweiterten Zustandsraum beruhen, sehr gut geeignet sind, um eine exakte Koordination der Lenkbewegungen und die Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen sicherzustellen. Dabei zeigt der letzte Ansatz mittels Reglerumschaltung, der den gesamten zulässigen Arbeitsraum verwendet, erwartungsgemäß ein deutlich schnelleres Einregelverhalten als die Ansätze, die auf Vermeidung der Singularitäten beruhen. Des Weiteren ist

es mit diesem Ansatz erstmals möglich, die Flexibilität und Manövrierbarkeit nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke bei gleichzeitiger Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen voll auszunutzen.

Eine Einschränkung der Anwendbarkeit der entwickelten Ansätze ergibt sich im Zusammenhang mit den vergleichsweise langen durchschnittlichen Einregelzeiten. Diese liegen deutlich über der typischen Dauer eines Regeltaktes der Positions- oder Bahnregelung des Roboters. Damit ist eine schlichte Kaskadierung im Kontext der autonomen Navigation nicht ohne Weiteres möglich. Zwar muss berücksichtigt werden, dass die Einregelzeiten unter unrealistisch erschwerten Bedingungen ermittelt wurden (Abschnitt 6.2), doch zeigt sich deutlich, dass gerade bei den Ansätzen mit Singularitätsvermeidung je nach Fahrmanöver mit erheblichen Trajektorienfehlern zu rechnen ist.

Erhebliches Potential hat in diesem Kontext der Regler mit Basiswechsel. Da er den gesamten Arbeitsraum nutzen kann, können hier dauerhafte Regelfehler prinzipiell vermieden werden. Auch wurde im Rahmen dieser Arbeit lediglich eine einzige Strategie zur Umschaltung herausgegriffen und implementiert. Diese Strategie baute im Wesentlichen auf dem zuvor entworfenen MPC-Ansatz auf und erlaubt daher nur die Optimierung der Regelstrategie hinsichtlich des gerade aktiven Basissystems. Andere Ansätze, die z.B. das Optimierungsproblem über alle Basissysteme lösen, könnten hier eine deutliche Verbesserung der Einregelzeit bewirken. Prinzipiell wäre es für den als Versuchsträger verwendeten Care-O-bot[®] 3 z.B. möglich, hier auf ähnliche Einregelzeiten wie für den Referenzregler zu kommen.

In jedem Fall ist die hohe Flexibilität, die hier erstmals in Zusammenhang mit der Einhaltung der nicht-holonomen Bindungen sichergestellt werden kann, vorteilhaft im Kontext mit mobiler Manipulation und der Interaktion mit Menschen. Im Vergleich zu reinen Differentialantrieben können nun unterschiedliche Bewegungen z.B. der abzufahrenden Trajektorie überlagert werden. So kann sich der Roboter z.B. bei der Begleitung und beim Führen einer Person dieser Person zuwenden, wie es bei Menschen üblich ist. Vor dem Hintergrund der Integration in ein komplexes Gesamtsystem ist es insbesondere vorteilhaft, dass diese Eigenschaften auf Fahrwerksebene sichergestellt werden können, ohne dass eine entsprechende überlagerte Planung notwendig ist. Entwickeln übergeordneter Komponenten wird mit dem Twist ein einfaches, intuitiv verständliches Interface bereitgestellt.

Teil III

Anhang

A Erläuterungen zu Modellierung und Einsatz quasi-omnidirektionaler Fahrwerke

A.1 Modellierung als Parallelkinematik

Eine erste formale Methode zur Modellierung und Klassifizierung der Kinematik mobiler Roboter wurde von Muir und Neuman entwickelt. Muir und Neuman (Muir und Neuman 1986) modellierten radbasierte mobile Roboter als parallele, geschlossene kinematische Ketten. Unter Verwendung von Sheth-Uicker Koordinaten lieferten sie eine formale Vorgehensweise zur Aufstellung der *Rad Jacobi-Matrix* J_i und Klassifizierung der Kinematik hinsichtlich Redundanz, Überaktuierung und Lösbarkeit der Vorwärts- bzw. inversen Kinematik. Die von Muir und Neuman entwickelte Darstellung ermöglicht für Differentialkinematiken und omnidirektionale Fahrwerke die Berechnung der zur Erreichung einer bestimmten Roboter-geschwindigkeit \vec{v}_r notwendigen Stellgrößen \vec{q} durch Lösen der Jacobi-Matrix J für das Gesamtsystem. Nach dem von Muir und Neuman entwickelten Formalismus ist die inverse Kinematik für Fahrwerke mit rekonfigurierbaren Kinematiken allerdings im Allgemeinen nicht lösbar. Praktisch bedeutet das, dass für Kinematiken, welche aktiv gelenkt sind, nur die Geschwindigkeit der Fahrtriebe berechnet werden kann. Eine Berechnung der Stellrate für die Lenkantriebe, also jene Antriebe welche für die Rekonfiguration des Systems verantwortlich sind, ist nicht möglich.

In (Kim u. a. 2004) wird der Ansatz von Muir und Neuman dahingehend weiter entwickelt. Durch explizite Modellierung der Fahrwerke als parallele Manipulatoren und Anwendung der Methode der *Augmented Generalized Coordinates* kann der Schlupf der Räder in Fahrtrichtung und orthogonal zur Fahrtrichtung mit einbezogen werden. Analog zu Muir und Neuman wird der Rad-Boden Kontakt als Gelenk modelliert. Das ermöglicht eine exaktere Lösung der Vorwärtskinematik sowie eine Berechnung der Geschwindigkeit der Fahrtrieb, auch bei Verletzung der nicht-holonomen Bindungen. Allerdings ermöglicht auch dieser Ansatz nicht die Berechnung der notwendigen Lenkbewegungen.

Damit haben die Arbeiten von (Muir und Neuman 1986) und (Kim u. a. 2004) gezeigt, dass eine Strukturierung der Regelung von Fahrwerkskinematik wie sie bei seriellen Manipulatoren üblich ist – Entkopplung der kartesischen Planung und Regelung von der Ansteuerung der Gelenke über die Berechnung der Inversen Kinematik – für die Fahrwerke mobiler Roboter im Allgemeinen nicht unmittelbar möglich ist. Hier müssen neben der Berücksichtigung der nicht-holonomen Bindungen die benötigten Stellgrößen für die Lenkung des Systems aus der Trajektorie bzw. Trajektorienregelung abgeleitet werden.

A.2 Modellierung nach Descartes' Prinzip der Bewegung starrer Körper

Dennoch wird in (Alexander und Maddocks 1989) eine Methode zur expliziten Berechnung der Lenkwinkel auf Basis der kartesischen Geschwindigkeiten des Roboters vorgeschlagen. Dabei fokussiert sich diese Arbeit auf mobile Roboter mit gelenkten und festen Standardrädern und insbesondere auf solche mit quasi-omnidirektionalem Fahrwerk, wie es auch bei Care-O-bot[®]3 eingesetzt wird. Durch Lösung der Geschwindigkeitsgleichungen nach Descartes' Prinzip der instantanen Bewegung fester Körper lassen sich Rotationsrate der Fahrtriebe sowie die zugehörigen Lenkwinkel für Räder an beliebiger Position des Roboters berechnen. Diese Vorgehensweise ist vergleichsweise einfach und dementsprechend sehr robust. Allerdings können auch hier die Stellraten für die Lenkbewegung nur mittelbar durch Differenzierung

der erhaltenen Folge von Lenkwinkeln errechnet werden. Die Folge der Lenkwinkel ist allerdings nur differenzierbar, wenn die sich aus den eingehenden Geschwindigkeitskommandos ergebende Trajektorie stetig differenzierbar ist. Dafür ist Stetigkeit der einzelnen Stellgrößen zwar eine notwendige aber keine hinreichende Bedingungen. Als Beispiel stelle man sich eine Referenzfahrt vor, bei der zunächst in Vorwärtsrichtung beschleunigt und wieder gebremst wird und anschließend in Seitwärtsrichtung beschleunigt und gebremst wird. Beide Kommandos können stetig differenzierbar sein. Dennoch wird sich bei der Richtungsänderung von Vorwärts zu Seitwärts ein Sprung in den benötigten Lenkwinkeln um 90° ergeben. Darüber hinaus beinhaltet die Formulierung nach (Alexander und Maddocks 1989) für quasi-omnidirektionale Fahrwerke mehrere Singularitäten, so dass die Ableitung nicht über den gesamten Arbeitsraum des Systems definiert ist. Zwar können in diesen Fällen die Lenkwinkel der einzelnen Räder immer noch direkt berechnet und ausgeregelt werden. Ohne explizite Berechnung der Stellgrößen über die Ableitung kann aber die Synchronität der Aktoren nicht gewährleistet werden. Aktor-Konflikte sind so unvermeidbar.

Gerade vor dem Hintergrund reaktiver Verfahren, die in der Servicerobotik eine besondere Rolle spielen, oder bei Teleoperation ist eine stetig differenzierbare resultierende Trajektorie bzw. das Vermeiden der angesprochenen Singularitäten nur schwer zu gewährleisten. Daher ist bei Verwendung der Methode nach Alexander mit Aktor-Konflikten und damit mindestens mit einer unruhigen Fahrweise des Systems zu rechnen. Gerade im Kontext der Mensch-Maschine-Interaktion, in welchem die Erscheinung und Anmutung des Roboters von besonderer Bedeutung ist, ist diese Eigenschaft nachteilig.

Burke und Durrant-Whyte greifen die Notwendigkeit die Lenkbewegung in die kinematische Beschreibung des Systems aufzunehmen in (Burke und Durrant-Whyte 1993) durch die Einführung eines virtuellen Rades auf. Anstelle der direkten Verwendung des Robotertwists $\vec{t}_r = (v_x, v_y, \omega)^T$ zur Beschreibung der Roboterbewegung verwenden Sie Betrag und Richtung der translatorischen Bewegung des Roboters $\vec{t}_r' = (|\vec{v}|, \angle \vec{v}, \omega)$. Damit kann ein Teil des Lenk- bzw. des Konfigurationsraums quasi-omnidirektionaler Roboter direkt geregelt werden. Allerdings kann die Beschreibung der Roboterbewegung nun nicht mehr in kartesischen Geschwindigkeiten erfolgen. Des Weiteren erfasst der Ansatz bei omnidirektionale Systeme des Typ1 bzw. Fahrwerken mit Ackermann-Kinematik nicht den gesamten Konfigurationsraum. Hier stößt man auf ähnliche Probleme wie bei Verwendung der Methode nach (Alexander und Maddocks 1989). Ändert sich das Verhältnis zwischen translatorischer und rotatorischer Geschwindigkeit $|\vec{v}|, \omega$ sprunghaft – dabei können beide Werte selbst sich kontinuierlich ändern – sind Sprünge in den resultierenden Lenkwinkeln die Folge. Die Gleichungen nach (Burke und Durrant-Whyte 1993) sind dann nicht mehr differenzierbar und die Synchronität der Aktoren ist nicht länger gewährleistet.

A.3 Modellierung auf Basis der kinematischen Bindungen

In einer Reihe grundlegender Arbeiten (Campion u. a. 1993; Betourne und Campion 1996; Campion u. a. 1996) entwickeln Campion und Andere Mitte der neunziger Jahre eine allgemeine, strukturierte kinematische Klassifizierung und Beschreibung radbasierter mobiler Roboter. Den Ausgangspunkt ihrer Methode bildet die Betrachtung der nicht-holonomen Bindungen der Räder. Durch Formulierung der kinematischen Beschränkungen der einzelnen Räder in Weltkoordinaten und gemeinsame Beschreibung in einem einzigen Gleichungssystem lassen sich die Freiheitsgrade beliebiger Fahrwerke bestimmen und nach Konfigurations- und Mobilitätsfreiheitsgraden klassifizieren. Dabei gilt die Annahme, dass der Roboter sich nicht verändert, die Räder also z.B. nicht an einzeln beweglichen Beinen montiert sind. Jeder mobile Roboter lässt sich so einer der fünf in Tabelle 2.1 aufgelisteten kinematischen Klassen eindeutig zuordnen. Eine Zusammenfassung des Vorgehens findet sich in Kapitel 2.2.2 zur kinematischen Klassifizierung mobiler Roboter. Darüber hinaus gibt die Unterscheidung von Konfigurationsfreiheitsgraden bzw. *degree of steerability* δ_s und Mobilitätsfreiheitsgraden bzw. *degree of mobility* δ_m Aufschluss darüber in

wieweit eine Transformation der kartesischen Geschwindigkeiten \vec{t}_r über die Lösung der inversen Kinematik in Gelenkwinkelgeschwindigkeiten \vec{q} möglich ist. Die Formulierung einer solchen inversen Kinematik ist nur bei Differentialkinematiken ($\delta_s = 0, \delta_m = 2$) und omnidirektionalen Fahrwerken ($\delta_s = 0, \delta_m = 3$) möglich. Bei allen anderen Kinematiken ist die Einführung von δ_s internen Zustandsvariablen, welche die Fahrwerkskonfiguration beschreiben notwendig. Die entsprechende Zustandsraumdarstellung, welche die Entwicklung der Roboterkonfiguration $x_r^w = (x_r^w, y_r^w, \theta_r^w)^T$ mit den internen Konfigurationsvariablen in Verbindung bringt wird zusammen mit ihrer Herleitung in (Campion u. a. 1996) bzw. in (Siciliano und Khatib 2008) gegeben. Auf Basis dieser Zustandsraumdarstellung ist es möglich, die Entwicklung der internen Konfigurationsvariablen direkt zu beschreiben bzw. zu regeln. Darüber hinaus entwickeln Campion und Andere auf Basis dieser Darstellung auch eine dynamische Beschreibung des Systems, wobei jedoch Aspekte wie das Durchrutschen der Räder außer Acht gelassen werden. Ähnliche Ansätze hinsichtlich der Modellierung werden in (Hashimoto u. a. 1999; Mori u. a. 2002; Lauria u. a. 2006b; Robuffo Giordano u. a. 2009) verwandt, wobei die Verfahren jeweils wegen der Verwendung unteraktuierter Kinematiken, spezieller Räder oder variablen Radstände variieren.

Die Zustandsraumdarstellung nach Campion ermöglicht zwar eine weitgehende Kontrolle der Nullraum-bewegung bzw. Rekonfiguration oder Lenkung des Fahrwerks, erlaubt allerdings nicht mehr die direkte Kommandierung von kartesischen Geschwindigkeiten \vec{t}_r für den Roboter. Die der internen Konfiguration bzw. Lenkung des Roboters zugeordneten Variablen stehen in Bezug zu Größen wie der *Curvature* oder Richtungsänderung der Bahn. Damit ist die Verwendung dieser Methode eng an eine vorhergehende Bahnplanung bzw. Bahnregelung zur Ableitung dieser Größen gekoppelt. Das erschwert die Einbindung in ein Gesamtsystem wie den Care-O-bot[®]3 mit teilweise reaktiven Komponenten, die eine Vorausplanung nicht erlauben. Dies wird noch durch die quasi-omnidirektionalen Fahrwerken eigenen Singularitäten verstärkt. So adressieren (D'Andréa-Novel u. a. 1995) und (Thuilot u. a. 1996) die Regelung quasi-omnidirektionaler Fahrwerke ausgehend von der in (Campion u. a. 1996) erarbeiteten Zustandsraumdarstellung. Insbesondere (Thuilot u. a. 1996) geht dabei auf die Analogie zwischen Zustandsraumdarstellung des Nullraums und dem Momentanpol des Systems sowie auf die Singularitäten von quasi-omnidirektionalen Fahrwerken ein. Voraussetzung für die Vermeidung der Singularitäten während der Regelung ist eine vorab geeignet geplante Trajektorie. Dazu wird bereits während der Bahnplanung der verwandte Geschwindigkeitsraum eingeschränkt, um kritische Betriebspunkte zu vermeiden.

Dieses Vorgehen kann sich im praktischen Einsatz als problematisch erweisen. Gerade in Umgebungen mit dynamischen, evtl. unerwartet auftauchenden Hindernissen kann ein Umplanen erforderlich werden, das den Roboter dann an kritische Betriebspunkte heranzführt. Auch wird der Einsatz reaktiver Verfahren, in unterschiedlichen Funktionsmodulen erschwert. Denn wenn die Vermeidung der Singularitäten nicht in der Fahrwerksregelung selbst, sondern in der Planung erfolgt müssen auch andere, von der Planung zunächst unabhängige Komponenten sicherstellen, das die generierten Kommandos in einem zulässigen Betriebspunkt des Fahrwerks liegen. Das erschwert den Einsatz reaktiver Verfahren und resultiert in einer engen Verschränkung von Bahnplanung, Bahnregelung und Ansteuerung der Fahrwerkskinematik.

A.4 Modellierung zur Entkopplung von Fahrwerks- und Roboterregelung

Einige aktuelle Ansätze zur Modellierung und Regelung quasi-omnidirektionaler Fahrwerke (Moore und Flann 2000; Kulkarni u. a. 2006; Brandstötter 2007; Gracia und Tornero 2008) zielen daher auf eine stärkere Entkopplung der Fahrwerksansteuerung von der Bahnplanung und -Regelung über die inverse Kinematik nach Vorbild der Ansteuerung serieller Manipulatoren. Somit soll neben der Integration reaktiver Verfahren, wie dem Verfolgen von Personen, die Implementierung mancher Lernverfahren (Kulkarni u. a. 2006) vereinfacht. Moore wählt dazu eine Zustandsraumdarstellung, welche die Dynamik des

Systems über den Rad-Boden-Kontakt modelliert und lässt explizit die kurzfristige Verletzung der nicht-holonomen Bindungen und damit das kurzfristige Durchrutschen der Räder zu (Moore und Flann 2000). Damit wird auf Kraft-Drehmoment Ebene die Formulierung einer inversen Kinematik nach dem Vorbild von seriellen bzw. parallelen Manipulatoren möglich. Moore entwickelt seinen Ansatz allerdings für ein Offroadfahrwerk, für welches, gerade bei Fahrten auf weichem Untergrund ohnehin mit einem Durchrutschen der Räder zu rechnen ist. Vor dem Hintergrund der Servicerobotik, welche insbesondere auf Anwendungen in Innenräumen abzielt, also Umgebungen in denen eine Schädigung des Untergrundes oder Reifenabrieb unerwünscht ist, ist ein solches Vorgehen allerdings unzulässig. Kulkarni wiederum erreicht die Entkopplung durch eine Einschränkung der Mobilität des Systems. Der in (Kulkarni u. a. 2006) betrachtete mobile Roboter wird zwischen den Modi Doppelackermann und Drehen auf der Stelle umgeschaltet. Daher sind die sonst auftretenden Singularitäten hier nicht weiter relevant und bedürfen keiner spezifischen vorausgehenden Planung. Ein ähnliches Vorgehen wird auch in einigen kommerziellen Outdoorsystemen gewählt. Im Kontext der Servicerobotik und insbesondere der Mensch-Maschine-Interaktion, für die ja gerade ein möglichst flexibles und agiles Fahrverhalten angestrebt wird, erscheint dieses Vorgehen allerdings eher weniger geeignet.

Eine umfangreiche Literatur zur dynamischen Modellierung, insbesondere auch des Rad-Boden Kontakts hat sich gerade auch im Umfeld der Automobilindustrie entwickelt (Grip u. a. 2009; Macek u. a. 2007; Economou u. a. 2003). Aus naheliegenden Gründen – hohe Geschwindigkeiten, große träge Massen, i.d.R. keine Notwendigkeit der autonomen Bahnplanung und Steuerung – wird hier auf eine strenge kinematische Analyse meist zugunsten einer detaillierten dynamischen Betrachtung verzichtet. Eine sehr gute Einführung findet sich in (Kiencke und Nielsen 2005).

A.5 Überblick und Anforderungen an die Regelung quasi-omnidirektionaler Fahrwerke

Die Modellierung und Regelung mobiler Roboter weist grundsätzliche Unterschiede zu den bei Manipulatoren verwandten Ansätzen auf. Neben der Existenz nicht-holonomer Bindungen, welche insbesondere spezielle Verfahren in der Bahn- und Trajektorienplanung erfordern, sind Fahrwerke, im Gegensatz zu seriellen Manipulatoren, durch geschlossene kinematische Ketten gekennzeichnet. Darüber hinaus sind Fahrwerke häufig überaktuiert. Das heißt sie verfügen über mehr Motoren als Freiheitsgrade in den geschlossenen kinematischen Ketten. Daher kann es zu Aktor-Konflikten kommen (Muir und Neuman 1986), welche bestenfalls durch un stetiges Durchrutschen der Räder zu einem unruhigen Fahrverhalten, schlimmstenfalls durch innere Verspannungen zu einer Beschädigung der Struktur oder der Antriebe führen können.

Letztlich sind einige Fahrwerkskinematiken durch interne Zustandsgrößen, welche die Konfiguration des Systems bestimmen gekennzeichnet. Beispiele für solche Systeme sind gelenkte Fahrwerke, wie Ackermann-Kinematik (PKW, Motorrad), und omnidirektionale Kinematik des Typs 1 und 2. Als Folge ist eine direkte Lösung der inversen Kinematik, welche die kartesische Bewegung \vec{t}_r des Roboters mit den Stellgrößen auf Gelenkwinkel ebene in Beziehung setzt, nicht möglich.

Im Zusammenhang mit Einsatz und Integration in Servicerobotern wie Care-O-bot[®]3 ergeben sich darüber hinaus besondere Anforderungen an die verwandten Fahrwerke bzw. an deren Modellierung und Regelung. Diese sind zum einen in der besonderen Bedeutung der Mensch-Maschine-Interaktion für diesen Bereich begründet. Wie in 1.1 erläutert, ist in diesem Zusammenhang zum Beispiel die Beweglichkeit des Roboters sowie seine Anmutung von besonderer Bedeutung. Zum anderen ist es beim Einsatz in einem komplexen Gesamtsystem mit diversen funktionalen Komponenten vorteilhaft, wenn Ansteuerung oder Regelung möglichst modular gekapselt sind. Einfach gestaltete, generische Schnittstellen sind hier

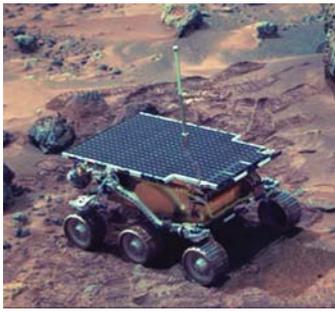
	Anwendbarkeit auf quasi-omnidirektionale Fahrwerke	Synchrone Ansteuerung der Motoren	Steuerbarkeit der Nullraum-/Lenkbewegung	Behandlung von Singularitäten	Unabhängigkeit von Bahnplanung und -Regelung	Ausnutzung der Manövrierbarkeit
(Muir und Neuman 1986)	-		-		+	
(Kim u. a. 2004)	-		-		+	
(Alexander und Maddocks 1989)	+	-	-	-	+	+
(Burke und Durrant-Whyte 1993)	+	o	o	-	+	+
(Campion u. a. 1996)	+	+	+	-	o	+
(Thuilot u. a. 1996)	+	+	+	+	-	o
(Moore und Flann 2000)	+	-	-	o	+	+
(Kulkarni u. a. 2006)	o	o	o	o	+	-

Tabelle A.1: Vor- und Nachteile ausgewählter Konzepte und Ansätze zur Modellierung und Regelung von Roboterfahrwerken bei Anwendung auf quasi-omnidirektionale Fahrwerke

wünschenswert. Die feste Bindung an Bahnplanung und -Regelung ist eher nachteilig, sollen doch auch andere Software-Komponenten direkten Zugriff auf die mobile Plattform haben.

Tabelle A.1 gibt einen knappen Überblick über die vorgestellten Verfahren und fast die jeweiligen Vor- und Nachteile hinsichtlich quasi-omnidirektionaler Fahrwerke vor dem Hintergrund der Servicerobotik grob zusammen. Neben den hier vorgestellten Verfahren existiert eine Vielfalt weiterer Ansätze, die sich aber häufig auf vergleichsweise exotische Sonderfälle (Mori u. a. 2002; Lauria u. a. 2006b) beziehen oder sich mehr oder weniger einem der hier vorgestellten Verfahren unterordnen lassen. So ist auf PR2 z.B. im wesentlichen das Verfahren nach (Alexander und Maddocks 1989) implementiert, während für Rollin' Justin die Methoden von Capion und Thuilot (Campion u. a. 1996; Thuilot u. a. 1996) adaptiert wurden (Robuffo Giordano u. a. 2009). Einige der kommerziellen Systeme beschränken dagegen ähnlich wie Kulkarni in (Kulkarni u. a. 2006) die Mobilität, um die Regelung zu vereinfachen.

Aus den oben genannten Anforderungen an Modellierung und Regelung lässt sich ein Reihe von Metriken zur Bewertung der entworfenen Verfahren ableiten. Voraussetzung für eine hohe Laufruhe und angenehme Anmutung der Bewegungen ist zum Beispiel die Vermeidung von Aktorkonflikten und die Berücksichtigung der nicht-holonomen Bindungen. Als Maß kann hier zum einen die Existenz des Momentanpols (ICM) bzw. die Streuung der Achsschnittpunkte um den ICM dienen. Alternativ könnte man die aus internen Verspannungen herrührender Kräfte analysiert werden. Eine hohe Beweglichkeit und Agilität kann in der Regel erreicht werden, wenn ein möglichst großer prozentualer Bereich des Arbeitsraums des Fahrwerkes von der Regelung genutzt werden kann. Vor dem Hintergrund der Bahntreue, welche insbesondere bei der Navigation in engen Umgebungen eine Rolle spielt, ist darüber hinaus ein möglichst schnelles Folgeverhalten des Fahrwerksreglers anzustreben. Letztlich ist eine Integration in unterschiedliche funktionale Komponenten nur dann einfach zu bewerkstelligen, wenn die gewählte Zustandsraumbeschreibung eine Kommandierung der Nullraum- bzw. Lenkbewegung des Fahrwerks zulässt und Charakteristika wie die zuvor angesprochenen Singularitäten innerhalb der Fahrwerkskomponente behandelt werden.



(a) Mars Flight Experiment MFEX – Sojourner (NASA Jet Propulsion Laboratory 1997)



(b) Mars Exploration Rover MER – Spirit & Opportunity (NASA Jet Propulsion Laboratory 2003)



(c) Mars Science Laboratory MSL – Curiosity (NASA Jet Propulsion Laboratory 2008)

Abbildung A.1: Marsrover des NASA Jet Propulsion Laboratory (v.l.n.r.): Aufnahme des Sojourner auf dem Mars im Rahmen der Pathfinder Mission; künstlerische Darstellung einer der Schwestersonden Spirit & Opportunity auf dem Mars; Fahrwerk und Chassis der Curiosity im Labor (geplanter Missionsbeginn 2011).

A.6 Einsatzbereiche quasi-omnidirektionaler Fahrwerke

Quasi-omnidirektionale Fahrwerke vom Typ 1 bieten ein hohes Maß an Manövrierbarkeit bei vergleichsweise geringen Anforderungen an die Bodenbeschaffenheit. Daher sind sie besonders geeignet für Serviceroboter, die im privaten oder gewerblichen Umfeld mit direktem Kontakt zu ungeschulten Personen – z.B. als Lotsen im Kaufhaus, Assistenzsysteme in Pflegeheimen oder Privathaushalten – zum Einsatz kommen. Aufgrund ihrer hohen Robustheit durch den Einsatz von gewöhnlichen Rädern werden quasi-omnidirektionale Fahrwerke vom Typ 1 – im Folgenden als quasi-omnidirektionale Fahrwerke bezeichnet – darüber hinaus insbesondere auch in Outdoor- und Offroad-Systemen eingesetzt. Einsatzbereiche sind dabei insbesondere die planetare Exploration, der Bereich Verteidigung & Sicherheit und der Agrarsektor.

So hat das Jet Propulsion Laboratory der NASA die Marssonden Sojourner (MFEX, Abb. A.1(a)), Spirit & Opportunity (MER, Abb. A.1(b)) sowie Curiosity (MSL, Abb. A.1(c)) mit sechs unabhängig angetriebene Rädern ausgestattet, von denen die vorderen und hinteren beiden Räder jeweils unabhängig gelenkt werden können. Die mittleren Räder sind dagegen fixiert und werden nicht gelenkt (Bickler 1998; Lindemann u. a. 2006). Die Fahrzeuge werden teilautonom, teilweise teleoperiert betrieben. Die Steuerung der Fahrzeuge kann zwischen verschiedenen Betriebsmodi umgeschaltet werden. Möglich sind Doppel-Ackermann sowie Drehen auf der Stelle und falls nötig parallele Ansteuerung für kurze Fahrten seitwärts, bei denen die mittleren Räder über den Boden schleifen (Bickler 1998). Die Verwendung fester, ungelenkter Räder in der Mitte sowie die Aufteilung der Elementarbewegungen (Vorwärts, Seitwärts, Rotation) auf die unterschiedlichen Betriebsmodi reduziert dabei die Manövrierbarkeit der Systeme nur leicht. Stark eingeschränkt wird hingegen die für diese Anwendung weniger wichtige Agilität der Systeme.

Beispiele für Geländefahrzeuge bzw. -Roboter mit Fahrwerken bestehend aus unabhängig gelenkten und angetriebenen Rädern sind RoboScout[®] (Gecko, Abb. A.2(a)), Spider[®] ILD01 (Abb. A.2(b)) bzw. Hortibot (Jorgensen u. a. 2006) sowie Seekur[®] (Abb. A.2(c)). RoboScout[®] wird von Base Ten Systems Electronics GmbH für die Bundeswehr entwickelt. Es handelt sich um ein teilautonomes, teilweise teleoperiertes Fahrzeug für unbemannte Aufklärungseinsätze. Das Fahrwerk kann in den Modi Doppel-Ackermann sowie Drehen auf der Stelle (Tellerwende) betrieben werden. Die Auslieferung eines ersten Testsystems ist für 2010 geplant. Spider[®] ILD01 bzw. Spider ILD02 sind teleoperierte Rasenmäher, die von Dvorak - sva-hove seckacky Ltd. für das Bearbeiten großer Flächen mit starker Hanglage, wie z.B. Böschungen an Au-



(a) RoboScout[®], mit freundlicher Genehmigung der Ruag Coel GmbH (Ruag Coel freundlicher Genehmigung der DVOR-GmbH Geschäftsbereich RUAG BASE 10 AK - Svahove Sekacky Ltd. (DVORAK 2012))
 (b) Spider[®] ILD02 – Hortibot, mit freundlicher Genehmigung der DVOR-GmbH Geschäftsbereich RUAG BASE 10 AK - Svahove Sekacky Ltd. (DVORAK 2012)
 (c) Seekur[®] (MobileRobots Inc. 2006)

Abbildung A.2: Beispiele für Offroadfahrzeuge mit unabhängig gelenkten Rädern (v.l.n.r.): Aufnahme des RoboScout; Seekur bei der Absicherung eines Geländes im Winter; Spider ILD02 beim Mähen in Hanglage.

tobahnen, entwickelt wurden. Die Räder sind um 360° verstellbar. Die Ansteuerung des Spider[®] erlaubt den Betrieb des Fahrwerks in den Modi Doppel-Ackermann und parallele Ansteuerung sowie Drehen auf der Stelle. Eine freie Überlagerung der Modi ist nicht möglich. Im Rahmen des Projektes HortiBot koordiniert durch das Danish Institute of Agricultural Sciences, Department of Agricultural Engineering wurde der Spider[®] als mobile Basis für einen autonomen Agrarroboter eingesetzt. Seekur[®] wurde von Mobile Robots Inc. als autonomer Sensorträger für den Outdoor- und Offroadbereich entwickelt. Anwendungen liegen in der Forschung, insbesondere aber auch im Bereich der Gebäude- sowie Objektüberwachung und -sicherung. Die Steuerung erlaubt den Betrieb des Fahrwerks in den Modi Doppel-Ackermann, parallele Ansteuerung sowie Drehen auf der Stelle. Zudem ist eine teilweise Überlagerung der Elementarbewegungen möglich.

Für Serviceroboter im öffentlichen und privaten Umfeld spielt beim Einsatz quasi-omnidirektionaler Fahrwerke neben der guten Manövrierbarkeit insbesondere die hohe Agilität eine wesentliche Rolle. Die quasi-omnidirektionalen Fahrweise kann z.B. dazu eingesetzt werden den Manipulator während Interaktion mit der Umgebung in einer definierten Orientierung oder Position zu halten. Darüber hinaus ergeben sich neue Möglichkeiten für die Mensch-Maschine-Interaktion über die Bewegung des Roboters im Raum. Neben einer Vielzahl unterschiedlichster Test- und Versuchsplattformen setzen insbesondere PR2 (Abb. A.3(a)) von Willow Garage, Rollin' Justin (Abb. A.3(b)) des DLR Institut für Robotik und Mechatronik sowie Care-O-bot[®]3 (Abb. A.3(c)) des Fraunhofer Institut Produktionstechnik und Automatisierung Fahrwerke mit separat angetriebenen und gelenkten Rädern ein. Bei Rollin' Justin können die Radmodule zusätzlich ausgefahren bzw. wieder eingezogen werden. Damit kann die Grundfläche je nach Situation – große Standfläche während der Manipulation, kleine Grundfläche während der Fahrt durch Engstellen – angepasst werden. Anders als bei den zuvor genannten Fahrwerken erlaubt die Ansteuerung von PR2, Care-O-bot[®]3 und Rollin' Justin eine weitgehend freie Überlagerung und Kombination der elementaren Bewegungen Vorwärts, Seitwärts und Rotation. Die Beweglichkeit der Systeme ist jedoch durch die Existenz singulärer Konfigurationen des Fahrwerks eingeschränkt. Bei Rollin' Justin werden diese kritischen Stellen z.B. analog zu (Thuilot u. a. 1996) durch eine Einschränkung des zulässigen Geschwindigkeitsraums während der Bahnplanung (Robuffo Giordano u. a. 2009) vermieden.



(a) Personal Robot 2 (PR2) (mit Kopf Mock-Up), mit freundlicher Genehmigung der Willow Garage Inc. (Willow Garage 2009)

(b) Rollin' Justin, mit freundlicher Genehmigung des Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Institut für Robotik und Mechatronik (DLR Institut für Robotik und Mechatronik 2012)

(c) Care-O-bot[®]3 des Fraunhofer IPA

Abbildung A.3: Serviceroboter für das private Umfeld mit unabhängig gelenkten Rädern (v.l.n.r.): PR2 beim Einstecken seines Ladekabels in eine Steckdose; Rollin' Justin trägt eine Obstkiste; Care-O-bot[®]3 reicht eine Wasserflasche an.

B Herleitung der Rollbedingung und non-slipping Bedingung

B.1 Gelenktes und un gelenktes Standardrad (S)

Rollbedingung und non-slipping Bedingung können durch Aufstellen der Vektorgleichungen für die Bewegung parallel zur Fahrtrichtung (senkrecht zur horizontalen Achse des Rades) sowie senkrecht zur Fahrtrichtung des Rades (parallel zur horizontalen Achse des Rades) gebildet werden. Abb. B.1 zeigt die geometrische Herleitung der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten für das gelenkte und un gelenkte ($\varphi_{s,i} = \text{const}$) Standardrad. Damit ergibt sich die resultierende Geschwindigkeit des Rades parallel zu seiner Fahrtrichtung zu

$$\begin{aligned} v_{res,\parallel} &= \dot{x}_{wr,\parallel}^r + \dot{y}_{wr,\parallel}^r + v_{\omega,\parallel}^r \\ &= \dot{x}_{wr}^r \cdot \sin(\theta_{s,i}) - \dot{y}_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{s,i}) - \omega_{wr}^r d_{a,i} \cdot \cos(\beta_{s,i}) \\ &= (\sin(\theta_{s,i}), -\cos(\theta_{s,i}), -d_{a,i} \cos(\beta_{s,i})) \cdot \vec{t}_{wr}^r, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

wobei $\dot{x}_{wr,\parallel}^r$, $\dot{y}_{wr,\parallel}^r$ und $v_{\omega,\parallel}^r$ jeweils der zur Fahrtrichtung des Rades parallele Anteil des für den Twist \vec{t}_{wr}^r im Punkt des Rad-Boden-Kontakts resultierenden Geschwindigkeitsvektors ist (Abb. B.1). Dabei sind $\beta_{s,i}$ und $\theta_{s,i}$ Hilfsvariablen, die allein von $\varphi_{s,i}$ und konstanten Parametern abhängen:

$$\begin{aligned} \beta_{s,i} &= \varphi_{s,i} - \alpha_{a,i} + \pi/2 \\ \theta_{s,i} &= \beta_{s,i} + \alpha_{a,i} \\ &= \varphi_{s,i} + \pi/2. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich die resultierende Geschwindigkeit orthogonal zur Fahrtrichtung

$$\begin{aligned} v_{res,\perp} &= \dot{x}_{wr,\perp}^r + \dot{y}_{wr,\perp}^r + v_{\omega,\perp}^r \\ &= \dot{x}_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{s,i}) + \dot{y}_{wr}^r \cdot \sin(\theta_{s,i}) + \omega_{wr}^r d_{a,i} \cdot \sin(\beta_{s,i}) \\ &= (\cos(\theta_{s,i}), \sin(\theta_{s,i}), d_{a,i} \sin(\beta_{s,i})) \cdot \vec{t}_{wr}^r. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Betrachtet man nun die nicht-holonomen Bindungen bzw. verbleibenden Freiheitsgrade ($\varphi_{s,i}, \varphi_{d,i}$) des Standardrades (vgl. Abschnitt 2.2.2) so lassen sich aus Gleichung (B.1), (B.2) folgende Bedingungen ableiten:

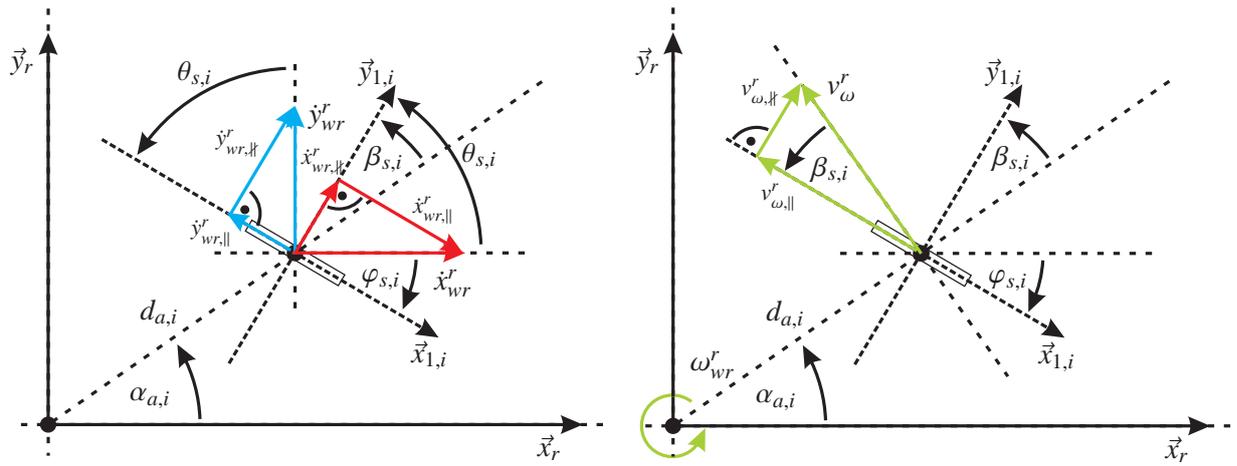
$$\begin{aligned} (\sin(\theta_{s,i}), -\cos(\theta_{s,i}), -d_{a,i} \cos(\beta_{s,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w &= r \cdot \dot{\varphi}_{d,i}, \\ (\cos(\theta_{s,i}), \sin(\theta_{s,i}), d_{a,i} \sin(\beta_{s,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w &= 0. \end{aligned}$$

Substitution von $\beta_{s,i}$ und $\theta_{s,i}$ führt zur Rollbedingung

$$(-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w + r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} = 0 \quad (\text{B.3})$$

und zur non-slipping Bedingungen

$$(-\sin(\varphi_{s,i}), \cos(\varphi_{s,i}), d_{a,i} \cos(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{t}_{wr}^w = 0. \quad (\text{B.4})$$



(a) Kartesischen Geschwindigkeit im Bezugssystem des Rades (b) Rotatorische Geschwindigkeit im Bezugssystem des Rades

Abbildung B.1: Darstellung der resultierenden Geschwindigkeitsvektoren parallel (||) und orthogonal (perp) zur Fahrtrichtung des Rades. Abb. B.1(a) zeigt die Aufspaltung des linearen Anteils des Twists \vec{t}_{wr}^r auf die Geschwindigkeitsvektoren parallel und orthogonal zum Rad. Abb. B.1(b) zeigt die Aufspaltung des Geschwindigkeitsvektors, der durch die Rotation des Roboters im Punkt des Rad-Boden-Kontakts entsteht.

Die geometrische Interpretation der non-slipping Bedingung führt zur Einführung des Momentanpols (Abschnitt 2.2.3). Bewegt sich ein fester Körper auf einer verallgemeinerten Kreisbahn, so ist der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt dieses Körpers orthogonal zur Verbindungsachse zwischen diesem Punkt und dem Mittelpunkt der Kreisbewegung. Das heißt, alle Räder müssen orthogonal zu dieser Verbindungsachse stehen, damit die non-slipping Bedingung erfüllt sein kann. Die horizontalen Radachsen schneiden sich damit genau in diesem Mittelpunkt der Kreisbewegung, dem Momentanpol.

B.2 Castor-Rad (SO)

Die Aufstellung der Rollbedingung und non-slipping Bedingung für das Castor-Rad verläuft analog zum Standardrad. Die Geschwindigkeitskomponenten, welche der linearen Bewegung des Roboters zugeordnet sind, verhalten sich dabei identisch zum Standardrad. Durch den zusätzlich Hebelarm, den Castor-Offset ergibt sich allerdings eine wesentliche Abweichung in der non-slipping Bedingung (Abb. B.2(a)). Die resultierende Geschwindigkeit parallel zur Fahrtrichtung des Rades ergibt sich damit analog Gleichung (B.1) zu

$$\begin{aligned} v_{res,||} &= \dot{x}_{wr,||}^r + \dot{y}_{wr,||}^r + v_{\omega,||}^r \\ &= (\sin(\theta_{s,i}), -\cos(\theta_{s,i}), -d_{a,i} \cos(\beta_{s,i})) \cdot \vec{t}_{wr}^r \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

und die resultierende Geschwindigkeit orthogonal zur Fahrtrichtung des Rades ist

$$\begin{aligned} v_{res,perp} &= \dot{x}_{wr,perp}^r + \dot{y}_{wr,perp}^r + v_{\omega,perp}^r + v_{\omega,h_{a,i}}^r + v_{\dot{\varphi}_{s,i},h_{a,i}}^r \\ &= \dot{x}_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{s,i}) + \dot{y}_{wr}^r \cdot \sin(\theta_{s,i}) + \omega_{wr}^r d_{a,i} \cdot \sin(\beta_{s,i}) + \omega_{wr}^r h_{a,i} + \dot{\varphi}_{s,i} h_{a,i} \\ &= (\cos(\theta_{s,i}), \sin(\theta_{s,i}), h_{a,i} + d_{a,i} \sin(\beta_{s,i})) \cdot \vec{t}_{wr}^r + h_{a,i} \cdot \dot{\varphi}_{s,i} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

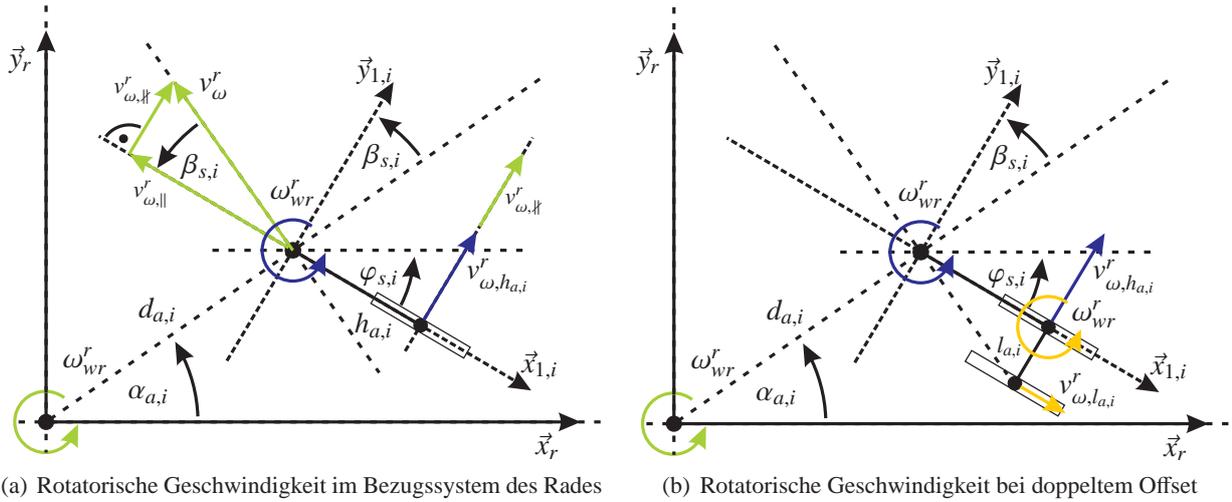


Abbildung B.2: Darstellung der aus der rotatorischen Bewegung des Roboters resultierenden Geschwindigkeitsvektoren parallel (\parallel) und orthogonal (\perp) zur Fahrtrichtung des Rades. Abb. B.2(a) zeigt die im Punkt des Rad-Boden-Kontakts resultierende Geschwindigkeit für ein einfaches Castor-Rad mit Vorwärts-Offset $h_{a,i}$. Abb. B.2(b) zeigt die zusätzlich resultierenden Geschwindigkeiten für den allgemeinen Fall eines Rades mit Vorwärts- und Seitwärts-Offset.

Damit ergibt sich die Rollbedingung für ein Castor-Rad zu

$$(-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w + r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Bei der Aufstellung der non-slipping Bedingungen ist zu beachten, dass eine Lenkbewegung $\dot{\varphi}_{s,i}$ im Rad-Boden-Kontakt eine Geschwindigkeitsvektor orthogonal zum Castor-Offset $h_{a,i}$ bewirkt. Die non-slipping Bedingung ergibt sich damit zu

$$(-\sin(\varphi_{s,i}), \cos(\varphi_{s,i}), h_{a,i} + d_{a,i} \cos(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w + h_{a,i} \cdot \dot{\varphi}_{s,i} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Damit wird für das Gesamtsystem „Castor-Rad“ die nicht-holonome, kinematische Bindung, die aus der non-slipping Bedingung erwächst, aufgelöst. Etwaige orthogonale Geschwindigkeitskomponenten können durch entsprechende Steuerbewegungen $\dot{\varphi}_{s,i}$ ausgeglichen werden. Castor-Räder verursachen daher keine zusätzlichen nicht-holonomen Bindungen bei Integration in ein Fahrwerk.

Abb. B.2(b) zeigt schließlich den allgemeinen Fall eines Rades mit Vorwärts- und Seitwärts-Offset. Der zusätzlich Offset zur Seite führt dazu, dass in diesem Fall die Lenkbewegung $\dot{\varphi}_{s,i}$ auch in die parallel zur Fahrtrichtung des Rades liegende Geschwindigkeitskomponente eingeht

$$\begin{aligned} v_{res,\parallel} &= \dot{x}_{wr,\parallel}^r + \dot{y}_{wr,\parallel}^r + v_{\omega,\parallel}^r + v_{w,l_{a,i}}^r + v_{\dot{\varphi}_{s,i},l_{a,i}}^r \\ &= \dot{x}_{wr}^r \cdot \sin(\theta_{s,i}) - \dot{y}_{wr}^r \cdot \cos(\theta_{s,i}) - \omega_{wr}^r d_{a,i} \cdot \cos(\beta_{s,i}) + \omega_{wr}^r l_{a,i} + \dot{\varphi}_{s,i} l_{a,i} \\ &= (\sin(\theta_{s,i}), -\cos(\theta_{s,i}), l_{a,i} - d_{a,i} \cos(\beta_{s,i})) \cdot \vec{r}_{wr}^r + l_{a,i} \cdot \dot{\varphi}_{s,i}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Damit ergibt sich die Rollbedingung zu

$$(-\cos(\varphi_{s,i}), -\sin(\varphi_{s,i}), -l_{a,i} - d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{r}_{wr}^w - l_{a,i} \cdot \dot{\varphi}_{s,i} + r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Die non-slipping Bedingung bleibt von dem Seitwärts-Offset allerdings unbeeinflusst. Daher ändert ein

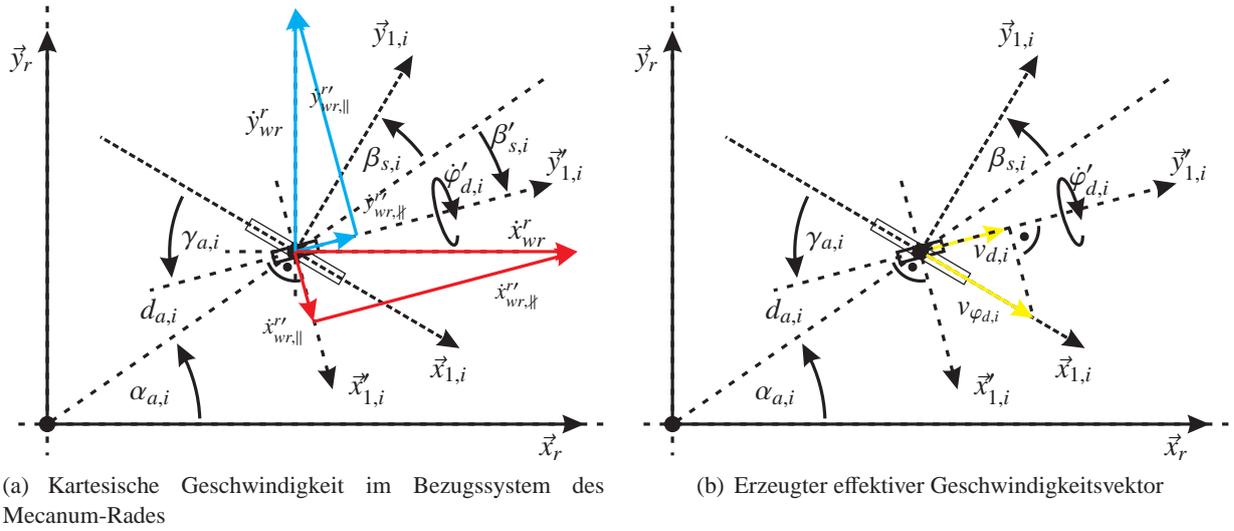


Abbildung B.3: Darstellung der aus der kartesischen Roboterbewegung und der Eigenbewegung des Mecanum-Rades resultierenden Geschwindigkeitsvektoren parallel (\parallel) und orthogonal (\perp) zur Rollrichtung der passiven Rollen. Abb. B.3(a) zeigt die Aufspaltung des linearen Anteils des Twists \vec{t}_{wr}^r auf die Geschwindigkeitsvektoren parallel und orthogonal zur Rollrichtung. Abb. B.3(b) zeigt die Aufspaltung des Geschwindigkeitsvektors, der durch die Rotation des Mecanum-Rades in Rollrichtung der passiven Rollen und orthogonal dazu entsteht.

etwaiger Seitwärtsoffset die kinematischen Eigenschaften eines Rades nicht. Bei Standardrädern mit Seitwärtsoffset bleiben alle nicht-holonomen Bindungen bestehen. Lediglich die Notwendigkeit eine Lenkbewegung durch Abrollen des Rades zu kompensieren tritt hinzu.

B.3 Mecanum- und Kugelrad (Me)

Mecanum-Räder oder Kugelräder verfügen über einen zusätzlichen passiven Freiheitsgrad. Dadurch wird die non-slipping Bedingung aufgelöst. Mecanum- oder Kugelräder verursachen daher keine zusätzlichen nicht-holonomen Bindungen bei Integration in ein Fahrwerk. Der passive Freiheitsgrad wird bei Mecanum-Rädern durch Montage von frei drehbaren Rollen auf dem Radumfang (Abb. B.3) realisiert. In der Regel sind die Räder um einen Winkel $\gamma_{a,i} = 45^\circ$ oder $\gamma_{a,i} = 90^\circ$ versetzt. Dabei bezeichnet $\gamma_{a,i}$ den Winkel zwischen Rollrichtung der umlaufenden Rollen und der horizontalen Achse des Mecanum-Rades (s. Abb. B.3).

Die Geschwindigkeitskomponenten lassen sich bezüglich des abrollenden Rades analog zum Standardrad berechnen. Die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Rollrichtung der passiven Rolle ist

$$\begin{aligned} v'_{res,\parallel} &= \dot{x}'_{wr,\parallel} + \dot{y}'_{wr,\parallel} + v'_{\omega,\parallel} \\ &= \left(\sin(\theta'_{s,i}), -\cos(\theta'_{s,i}), -d_{a,i} \cos(\beta'_{s,i}) \right) \cdot \vec{t}'_{wr}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Die Geschwindigkeitskomponente orthogonal zur passiven Rolle ergibt sich zu

$$\begin{aligned} v'_{res,\perp} &= \dot{x}'_{wr,\perp} + \dot{y}'_{wr,\perp} + v'_{\omega,\perp} \\ &= \left(\cos(\theta'_{s,i}), \sin(\theta'_{s,i}), d_{a,i} \sin(\beta'_{s,i}) \right) \cdot \vec{t}'_{wr}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dabei sind $\beta'_{s,i}$ und $\theta'_{s,i}$ Hilfsvariablen. Durch Substitution von

$$\begin{aligned}\beta'_{s,i} &= \beta_{s,i} - \pi/2 + \gamma_{a,i} , \\ \theta'_{s,i} &= \beta'_{s,i} + \alpha_{a,i} \\ &= \theta_{s,i} - \pi/2 + \gamma_{a,i} \\ &= \varphi_{s,i} + \gamma_{a,i}\end{aligned}$$

in (B.11) und (B.12) lassen sich die Vektorgleichungen direkt in Abhängigkeit von $\beta_{s,i}$ und $\theta_{s,i}$ bzw. $\varphi_{s,i}$ schreiben:

$$v'_{res,\parallel} = (-\cos(\theta_{s,i} + \gamma_{a,i}), -\sin(\theta_{s,i} + \gamma_{a,i}), -d_{a,i} \sin(\beta_{s,i} + \gamma_{a,i})) \cdot \vec{i}_{wr}^r \quad (\text{B.13})$$

$$v'_{res,\perp} = (\sin(\theta_{s,i} + \gamma_{a,i}), -\cos(\theta_{s,i} + \gamma_{a,i}), -d_{a,i} \cos(\beta_{s,i} + \gamma_{a,i})) \cdot \vec{i}_{wr}^r . \quad (\text{B.14})$$

Da die umlaufend montierten Rollen passiv abrollen können ergibt sich aus (B.13) keine Zwangs- oder Steuergröße für die Bewegung des Mecanum-Rades. Aus der non-slipping Bedingung der Rollen (B.14) leitet sich die Rollbedingung

$$\begin{aligned}(-\cos(\varphi_{s,i} + \gamma_{a,i}), -\sin(\varphi_{s,i} + \gamma_{a,i}), -d_{a,i} \sin(\varphi_{s,i} - \alpha_{a,i} + \gamma_{a,i})) \cdot \mathbf{R}_w^r(\varphi_{wr}^w) \vec{i}_{wr}^w \\ \dots + r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} \cos(\gamma_{a,i}) = 0\end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

für das Mecanum-Rad ab. Dabei ergibt sich $r \cdot \dot{\varphi}_{d,i} \cos(\gamma_{a,i})$ aus der Aufspaltung des durch die Rotation $\varphi_{d,i}$ des Mecanum-Rades verursachten Geschwindigkeitsvektors $v_{d,i}$ in die Komponente parallel und orthogonal zur freien Drehrichtung der umlaufend montierten Rollen (Abb. B.3(b)). Die Integration eines Mecanum- oder Kugelrades bringt damit einen zusätzlichen steuerbaren Freiheitsgrad in eine Fahrwerkskinematik ein, ohne zusätzliche nicht-holonome Bindungen einzuprägen.

C Erläuterungen zur topologischen Analyse des Parameterraums

C.1 Der Momentanpol als Funktion der Fahrwerkskonfiguration

Wie in Abschnitt 2.2.3 erläutert ergibt sich der Momentanpol aus den Gesetzen der Festkörperbewegung nach Descartes. Für nicht-holonome Fahrwerke ist er zusätzlich durch die Fahrwerkskonfiguration bestimmt $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$. Vorausgesetzt, dass die nicht-holonomen Gleichungen alle ideal erfüllt sind, müssen die Räder alle auf einer Kreisbahn um den Momentanpol abrollen. Das bedeutet, alle Radachsen müssen sich in einem Punkt schneiden. Für ein Fahrwerk mit drei oder mehr Standardrädern, welche nicht alle auf einer gemeinsamen Gerade liegen, ist der Momentanpol damit immer definiert, solange die gegenwärtige Konfiguration $(\vec{\varphi}_s, \vec{\varphi}_d)$ innerhalb des Unterraums $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ des Konfigurationsraums Q liegt. Dabei ist $N[\mathbf{C}_{1,S}]$ der Raum der nicht-trivialen Lösungen der aus den nicht-holonomen Bindungen erwachsenden Zwangsbedingungen (2.18).

Abbildung C.1 zeigt einige mögliche Konfigurationen (Abb. C.1(a) bis Abb. C.1(d)) von jeweils zwei Rädern, für die der ICM als Schnittpunkt der Achsen wohl definiert ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird dabei angenommen, dass die beiden Räder auf der \vec{x} -Achse liegen und Rad 1 im Ursprung liege. Es ist immer möglich das jeweils betrachtet Radpaar durch einfache Transformation (Rotation und Translation) in ein Koordinatensystem abzubilden, in welchem diese Voraussetzung gilt. Der Momentanpol lässt sich in diesen Fällen direkt durch Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\lambda_1 \vec{y}_{1,1} = \Delta \vec{x} + \lambda_2 \vec{y}_{1,2} \quad (\text{C.1})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{y}_{1,1} & -\vec{y}_{1,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \Delta \vec{x} \quad (\text{C.2})$$

bestimmen. Dabei bezeichnen $\vec{y}_{1,1}$ und $\vec{y}_{1,2}$ die Richtung der jeweiligen Radachse nach der in Abschnitt 2.1.2 (Abb. 2.6 und Abb. 2.7(a)) eingeführten Konvention, $\Delta \vec{x}$ ist der von der Rotationsachse des ersten Rades zur Rotationsachse des zweiten Rades zeigende Vektor $\vec{x}_{a,2} - \vec{x}_{a,1}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sind die durch Lösung des Gleichungssystems zu bestimmenden Parameter.

Um das LGS (C.1) zu lösen, werden die Achsen $\vec{y}_{1,1}$ und $\vec{y}_{1,2}$ und damit \mathbf{A} als Funktion

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{y}_{1,1} & -\vec{y}_{1,2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_{s,1}) & \sin(\varphi_{s,2}) \\ \cos(\varphi_{s,1}) & -\cos(\varphi_{s,2}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

der Lenkwinkel $\varphi_{s,1}, \varphi_{s,2}$ ausgedrückt. Dieses Gleichungssystem lässt sich unter der Bedingung, dass die Determinanten der 2×2 -Matrix \mathbf{A}

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (\text{C.5})$$

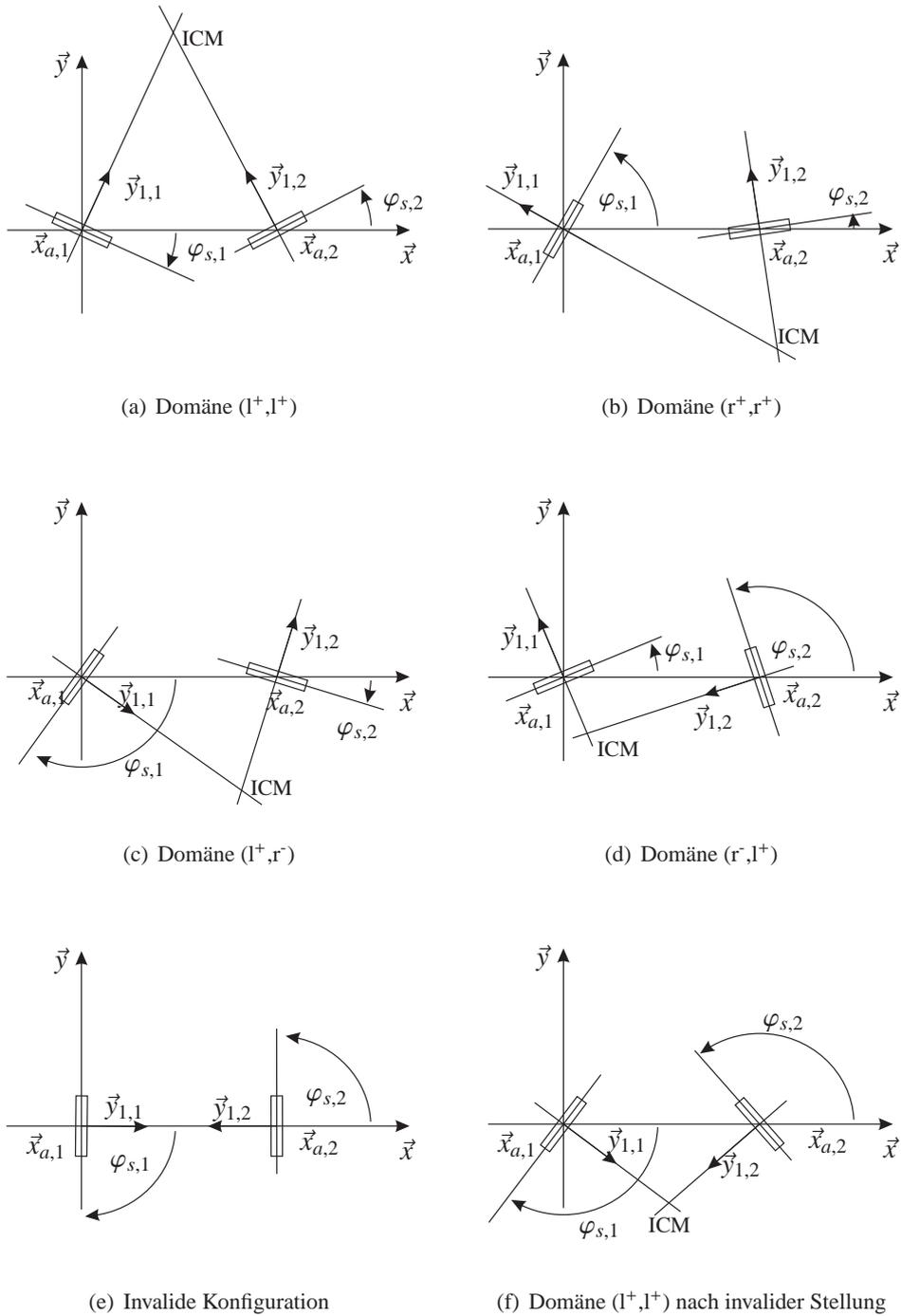


Abbildung C.1: Die Abbildungen zeigen unterschiedliche Fahrwerkskonfiguration mit zugehörigem Momentanpol. Abbildung C.1(e) zeigt eine invalide Konfiguration. Abbildung C.1(f) zeigt die Konfiguration in Domäne (l^+, l^+) (Abb. C.1(a)) nach Durchlaufen der invaliden Konfiguration. Die gegenwärtige Domäne kann nicht direkt errechnet werden, sondern ergibt sich als Funktion der Anfangsstellung und des Pfades, des ICM in der Ebene.

ungleich Null ist

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det(\mathbf{A}) \\ 0 &\neq \sin(\varphi_{s,1})\cos(\varphi_{s,2}) - \cos(\varphi_{s,1})\sin(\varphi_{s,2}) \\ 0 &\neq \sin(\varphi_{s,1} - \varphi_{s,2}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

lösen. Das LGS ist also genau dann lösbar, wenn die Radachsen nicht parallel zueinander stehen

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_{s,2} - \varphi_{s,1} \neq k \cdot \pi, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.7})$$

Durch Inversion von \mathbf{A} erhält man

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \vec{x} \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi_{s,1} - \varphi_{s,2})} \begin{pmatrix} -\cos(\varphi_{s,2}) & -\sin(\varphi_{s,2}) \\ -\cos(\varphi_{s,1}) & -\sin(\varphi_{s,1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \text{ bzw.} \quad (\text{C.9})$$

$$\lambda_1 = \frac{\cos(\varphi_{s,2})\Delta x + \sin(\varphi_{s,2})\Delta y}{\sin(\varphi_{s,2} - \varphi_{s,1})} \quad (\text{C.10})$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos(\varphi_{s,1})\Delta x + \sin(\varphi_{s,1})\Delta y}{\sin(\varphi_{s,2} - \varphi_{s,1})}. \quad (\text{C.11})$$

Stehen die Radachsen gerade parallel zueinander, so wird die Matrix \mathbf{A} singulär und kann nicht invertiert werden. Die nach C.9 formulierte Vorwärtskinematik weist in diesem Fall eine Singularität auf. Anschaulich entspricht dies gerade dem Durchgang des Momentanpols durch ∞ . In Abbildung C.1 entspricht dies gerade einem Wechsel zwischen der in Abbildung C.1(a) dargestellten Lösungsdomäne und der in Abbildung C.1(c) dargestellten Lösungsdomäne. Dennoch ist der Momentanpol auch in dieser Situation eindeutig definiert. In Kapitel 3.1 wird eine angepasste Parametrierung des Momentanpols sowie eine Formulierung der Vorwärtskinematik hergeleitet, welche auch in dieser Situation regulär ist.

Lediglich, wenn beide Radachsen $\vec{y}_{1,1}$ und $\vec{y}_{1,2}$ sowie der die Lenkachsen der beiden Räder verbindende Vektor $\Delta \vec{x}$ kollinear sind, ist der Momentanpol nicht eindeutig durch die Lenkwinkel definiert. Abbildung C.1(e) stellt die entsprechende Situation dar. Das Radpaar entspricht dann im Wesentlichen der Konfiguration eines Differentialantriebes. Die Position des Momentanpols ist dann durch das Verhältnis der Rotationsrate $\dot{\varphi}_{d,1}$ und $\dot{\varphi}_{d,2}$ von Rad 1 zu Rad 2 bestimmt und kann nicht direkt über die Lenkwinkel rekonstruiert werden.

Für Fahrwerke mit drei oder mehr Standardrädern, bei denen die Rotationsachsen der Räder nicht alle auf einer Geraden liegen, lassen sich jedoch immer mindestens 2 Paare finden, für welche der Momentanpol definiert ist.

Der Momentanpol lässt sich dann als Funktion von $(\lambda_1, \varphi_{s,1})$ bzw. $(\lambda_2, \varphi_{s,2})$ schreiben

$$\vec{x}_{\text{ICM}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot (-\sin(\varphi_{s,1})) \\ \lambda_1 \cdot \cos(\varphi_{s,1}) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_{\text{ICM}} = \begin{pmatrix} x_{a,2} + \lambda_2 \cdot (-\sin(\varphi_{s,2})) \\ y_{a,2} + \lambda_2 \cdot \cos(\varphi_{s,2}) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

wobei o.B.d.A. angenommen wurde, dass Rad 1 im Ursprung des gewählten Koordinatensystems liege.

Die Darstellung in Polarkoordinaten

$$\vec{r}_{\text{ICM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_{\text{ICM}}^2 + y_{\text{ICM}}^2} \\ \arctan_2(y_{\text{ICM}}, x_{\text{ICM}}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

lässt sich ebenfalls direkt in Abhängigkeit der Parameter $(\lambda_1, \varphi_{s,1})$ bzw. $(\lambda_2, \varphi_{s,2})$ schreiben. Setzt man (C.12) in (C.13) ein und verwendet die Umformungen

$$\begin{aligned} \arctan_2\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) &= \arctan_2(a, b) + \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{c}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{c}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \\ &= \arctan_2(a, b) + \pi \cdot \sigma(-c) - \left\langle \delta(c), \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$-\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{C.15})$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{C.16})$$

so ergeben sich die Polarkoordinaten zu

$$\vec{r}_{\text{ICM}} = \begin{pmatrix} r_{\text{ICM}} \\ \varphi_{\text{ICM}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \text{sgn}(\lambda_1) \\ \varphi_{s,1} + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sigma(-\lambda_1) - \left\langle \delta(-\lambda_1), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{pmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

wobei gelte, dass $\lambda_1 \neq 0$. Dabei bezeichnet $\sigma(a)$ die über den Arcustangens definierte Heaviside-Funktion

$$\sigma(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{a}{\epsilon}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sigma(a) = \begin{cases} +1 & \forall a > 0 \\ 1/2 & \forall a = 0 \\ 0 & \forall a < 0 \end{cases},$$

$\text{sgn}(a)$ die über die Heaviside-Funktion definierte Signum-Funktion

$$\text{sgn}(a) = 2 \cdot \left(\sigma(a) - \frac{1}{2} \right)$$

und $\langle \delta(a), f(a) \rangle$ die Auswertung der Funktion f an der Stelle $a = 0$ durch Faltung mit der Dirac-Distribution bzw. Bildung des Skalarproduktes (vgl. (Cohen-Tannoudji u. a. 1999) S.98 ff.) mit der um a verschobenen Dirac-Distribution

$$\langle \delta(a), f \rangle = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \delta(x-a) f(x) dx. \quad (\text{C.18})$$

Dabei wurde in (C.12) und (C.17) zur Vereinfachung der Notation jeweils ausgenutzt, dass das Rad 1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Ursprung des Koordinatensystems liege. Diese Wahl des Koordinatensystems führt dazu, dass sich unter Anwendung von (C.15) und (C.16) auf (C.12) noch eine weitere praktische Notation ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\text{ICM}} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \left(\cos\left(\varphi_{s,1} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \lambda_1 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{s,1} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{pmatrix} \text{ bzw.} \\ \vec{r}_{\text{ICM}}^* &= \begin{pmatrix} r_{\text{ICM}}^* \\ \varphi_{\text{ICM}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \varphi_{s,1} + \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\text{ICM}} \cdot \text{sgn}(\lambda_1) \\ \varphi_{\text{ICM}} - \pi \cdot \sigma(-\lambda_1) + \left\langle \delta(-\lambda_1), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Diese Darstellung ist eng verbunden mit dem Ansatz des „virtuellen Rades“ nach (Burke und Durrant-Whyte 1993) und ist die Basis für die Definition der erweiterten Polarkoordinaten (3.8, 3.9) in Abschnitt 3.1.3.

Es ist zu beachten, dass die so bisher gegebene Definition des Momentanpols die Konfiguration sowie die gegenwärtige Bewegung des Fahrwerks nicht eindeutig charakterisiert. So gibt der Momentanpol lediglich den Mittelpunkt des verallgemeinerten Kreises an, auf dem der Roboter sich bewegt. Er macht keine Aussage darüber, in welche Richtung sich der Roboter entlang des Kreisbogens bewegt. Auch kann durch die Angabe des so definierten Momentanpols weder die zugehörige Konfiguration des Fahrwerks, noch die gegenwärtige Lösungsdomäne bestimmt werden. Je nach Anfangskonfiguration des Fahrwerks könnte der in Abbildung C.1(a) dargestellte Momentanpol auch von jeweils um $\pm\pi$ gedrehten Rädern gebildet werden. Aufgrund dieser Mehrdeutigkeiten kann der so definierte Momentanpol nicht diffeomorph in den Raum der nicht-holonomen Bindungen abgebildet werden.

Im Folgenden wird jedem Rad ein zusätzlicher Parameter k zugeordnet um diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen. Die Definition dieses Parameters erfolgt über die Betrachtung der Rücktransformation bzw. inversen Kinematik von \vec{r}_{ICM}^* bzw. $(\lambda_1, \varphi_{s,1})$ nach $(\varphi_{s,1}, \varphi_{s,2})$. Dabei wird weiterhin angenommen, dass Rad 1 im Ursprung des Koordinatensystems liege, so dass

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \varphi_{s,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\text{ICM}}^* \\ \varphi_{\text{ICM}}^* - \pi/2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

weiterhin gilt. Damit können $(\lambda_1, \varphi_{s,1})$ als bekannt angenommen werden. Formt man (C.1) um

$$\lambda_1 \vec{y}_{1,1} - \Delta \vec{x} = \lambda_2 \vec{y}_{1,2} \quad (\text{C.21})$$

und drückt $\vec{y}_{1,1}$ und $\vec{y}_{1,2}$ in Abhängigkeit der Winkel $\varphi_{s,1}$, $\varphi_{s,2}$ aus, erhält man das Gleichungssystem

$$\lambda_1(-\sin(\varphi_{s,1})) - \Delta x = \lambda_2(-\sin(\varphi_{s,2})) \quad (\text{C.22})$$

$$\lambda_1 \cos(\varphi_{s,1}) + \Delta y = \lambda_2 \cos(\varphi_{s,2}) . \quad (\text{C.23})$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lambda_2 \neq 0$ gelte, lässt sich durch Anwendung des in 4 Quadranten definierten Arcustangens die linke und die rechte Seite von (C.22) und (C.23) umformen zu

$$\arctan_2(\lambda_1 \cos(\varphi_{s,1}) - \Delta y, \lambda_1(-\sin(\varphi_{s,1})) - \Delta x) = \arctan_2(\lambda_2 \cos(\varphi_{s,2}), \lambda_2(-\sin(\varphi_{s,2}))) . \quad (\text{C.24})$$

Mit (C.14) - (C.16) lässt sich die rechte Seite umformen zu:

$$\begin{aligned} & \arctan_2(\lambda_2 \cos(\varphi_{s,2}), \lambda_2(-\sin(\varphi_{s,2}))) \\ &= \arctan_2(\lambda_2 \sin(\varphi_{s,2} + \pi/2), \lambda_2 \cos(\varphi_{s,2} + \pi/2)) \\ &= \arctan_2(\sin(\varphi_{s,2} + \pi/2), \cos(\varphi_{s,2} + \pi/2)) + \pi \cdot \sigma(-\lambda_2) - \langle \delta(-\lambda_2), \frac{\pi}{2} \rangle \\ &= \varphi_{s,2} + \pi/2 + \pi \cdot \sigma(-\lambda_2) - \langle \delta(-\lambda_2), \frac{\pi}{2} \rangle . \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Analog lässt sich die linke Seite umformen zu

$$\begin{aligned} & \arctan_2(\lambda_1 \cos(\varphi_{s,1}) - \Delta y, \lambda_1(-\sin(\varphi_{s,1})) - \Delta x) \\ &= \arctan_2(\lambda_1 (\cos(\varphi_{s,1}) - \Delta y/\lambda_1), \lambda_1 ((-\sin(\varphi_{s,1})) - \Delta x/\lambda_1)) \\ &= \arctan_2(\sin(\varphi_{s,1} + \pi/2) - \Delta y/\lambda_1, \cos(\varphi_{s,1} + \pi/2) - \Delta x/\lambda_1) + \pi \cdot \sigma(-\lambda_1) - \langle \delta(-\lambda_1), \frac{\pi}{2} \rangle . \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Damit ergibt sich $\varphi_{s,2}$ zu:

$$\begin{aligned} \varphi_{s,2} = & \arctan_2(\sin(\varphi_{s,1} + \pi/2) - \Delta y/\lambda_1, \cos(\varphi_{s,1} + \pi/2) - \Delta x/\lambda_1) \dots \\ & \dots + \pi \cdot \sigma(-\lambda_1) - \langle \delta(-\lambda_1), \frac{\pi}{2} \rangle - \pi \cdot \sigma(-\lambda_2) + \langle \delta(-\lambda_2), \frac{\pi}{2} \rangle - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (C.27)$$

mit $r_{\text{ICM}}^* = \lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} = & \arctan_2(\sin(\varphi_{\text{ICM}}^*) - \Delta y/r_{\text{ICM}}^*, \cos(\varphi_{\text{ICM}}^*) - \Delta x/r_{\text{ICM}}^*) \dots \\ & \dots - \frac{\pi}{2} + \underbrace{\pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{r_{\text{ICM}}^*}\right) - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_2}\right) - \langle \delta(-r_{\text{ICM}}^*), \frac{\pi}{2} \rangle + \langle \delta(-\lambda_2), \frac{\pi}{2} \rangle}_{\text{I}} . \end{aligned} \quad (C.28)$$

Das verbleibenden λ_2 auf der rechten Seite von Gleichung (C.27) bzw. (C.28) lässt sich eliminieren, indem man die Gleichungen für die existierenden Lösungsdomänen separat betrachtet. Diese Domänen sind dabei gerade durch die Bedingungen $\Delta\varphi_{12} \neq 0$ bzw. $1/\lambda_2 \neq 0$ (C.6), $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ abgegrenzt. Der Wechsel von einer Lösungsdomäne in eine andere ist durch die Verletzung einer dieser Bedingungen charakterisiert. So wandert der Momentanpol für $\Delta\varphi_{12} = 0$ durch den Fernpunkt. Lag der Momentanpol zuvor jeweils auf der linken Seite der Räder (l,l), also in die Richtung, in welche die Radachsen zeigen ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) so liegt er anschließend auf der rechten Seite der Räder (r,r). Das entspricht einem Übergang von der in Abbildung C.1(a) dargestellten Domäne zu der in Abbildung C.1(b) dargestellten Domäne. Wie man aus den Bildern erkennen oder aus Gleichung (C.9) ableiten kann, gilt für diese beiden Domänen $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$.

Während ein Durchgang durch den Fernpunkt ∞ das Vorzeichen von λ_1 und λ_2 gleichermaßen ändert, ändert sich bei einem Durchgang des Momentanpols durch das i -te Rad nur das Vorzeichen des Parameters λ_i . So gilt zum Beispiel für die in Abbildung C.1(c) dargestellte Lösungsdomäne, dass sie durch überstreichen der Achse des Rades 1 $\vec{y}_{1,1}$ über die Lenkachse des Rades 2 hervorgeht. Dabei hat gerade λ_2 einen Nulldurchgang. Nach diesem Nulldurchgang gilt $\text{sgn}(\lambda_1) = -\text{sgn}(\lambda_2)$.

Betrachtet man Gleichung (C.27) und (C.28) und beachtet man, dass sich die Vorzeichen von λ_1 , λ_2 relativ zueinander nur dann ändern, wenn einer der Parameter einen Nulldurchgang hat, das System also eine Singularität passiert, so erkennt man, dass die Summe innerhalb einer Domäne konstant ist

$$\begin{aligned} \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_1}\right) - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_2}\right) &= k_{12} \\ \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{r_{\text{ICM}}^*}\right) - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_2}\right) &= k_{12} . \end{aligned}$$

Das gilt insbesondere auch bei Durchgang durch den Fernpunkt. Interpretiert man die Gleichung wie in (C.28) als Transformation des Momentanpols auf den Lenkwinkel $\varphi_{s,i}$ und beachtet die 2π -Periodizität, so lässt sich diese Summe als zusätzlicher Parameter $k_i \in \{-1, 1\}$ interpretieren

$$\text{mod } 2\pi(\pi \cdot \sigma(-r_{\text{ICM}}^*) - \langle \delta(-r_{\text{ICM}}^*), \frac{\pi}{2} \rangle - \pi \cdot \sigma(-\lambda_i) + \langle \delta(-\lambda_i), \frac{\pi}{2} \rangle) = \pi \cdot \sigma(-k_i) , \quad (C.29)$$

der die Konfiguration des i -ten Rades beschreibt. Er ist durch die Anfangsstellung des Rades bei Inbetriebnahme bestimmt und ändert sich nur bei Durchgang des Momentanpols durch eine Lenkachse. Damit kann der Konfigurationsraum des Fahrwerks durch Hinzunahme der Parameter \vec{k} außerhalb der Singularitäten $r_{\text{ICM}}^* = 0$ und $\lambda_i = 0$ vollständig aus dem Momentanpol \vec{r}_{ICM}^* rekonstruiert werden:

$$\varphi_{s,i} = \arctan_2(\sin(\varphi_{\text{ICM}}^*) - \Delta y/r_{\text{ICM}}^*, \cos(\varphi_{\text{ICM}}^*) - \Delta x/r_{\text{ICM}}^*) - \pi/2 + \pi \cdot \sigma(-k_i) . \quad (C.30)$$

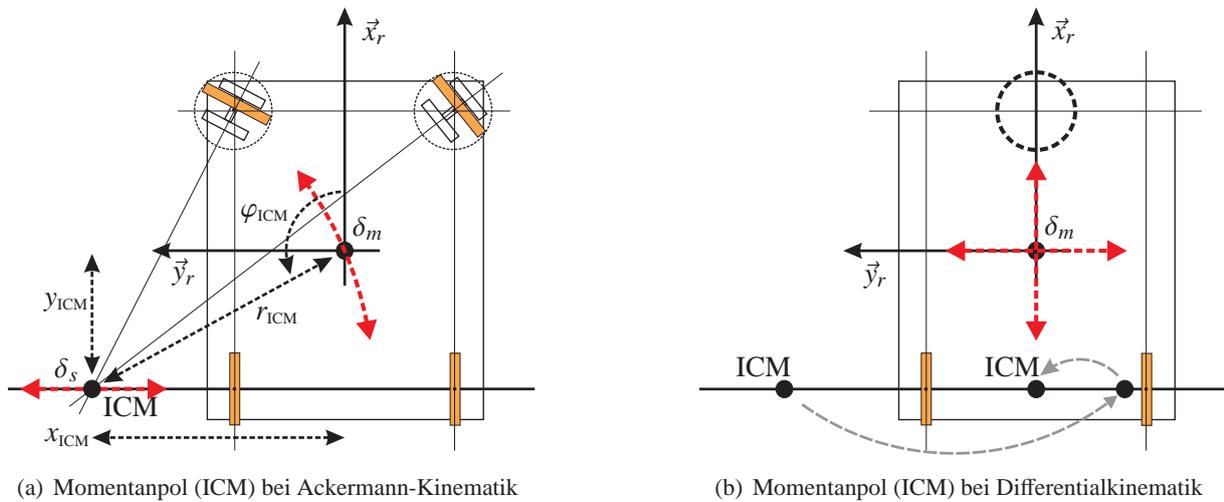


Abbildung C.2: Momentanpol (ICM) mit Freiheitsgraden und Parametrierung (polar (r_{ICM}, φ_{ICM}) und kartesische (y_{ICM}, x_{ICM}) Koordinaten) für Ackermann- (C.2(a)) und Differentialkinematik (C.2(b)). Die roten Pfeile mit unterbrochener Linie bei ICM und Koordinatenursprung zeigen die möglichen Freiheitsgrade des Systems bzw. des ICM. Die orangenen Rechtecke mit Umkreis (Abb. C.2(a)) stehen für lenkbare Standardräder, die Rechtecke ohne Umkreis für feste Standardräder. Der schwarze Kreis mit unterbrochener Linie rechts (Abb. C.2(b)) steht für ein passives Stützrad, dass die kinematischen Eigenschaften des Systems nicht beeinflusst, z.B. ein passives Castor-Rad.

Des Weiteren folgt damit direkt, dass gilt:

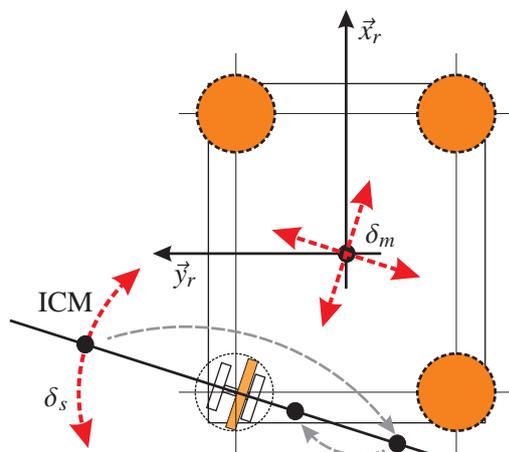
$$\operatorname{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right). \quad (\text{C.31})$$

Die in Abbildung C.1 verwendete Kennzeichnung der Domänen ergibt sich damit letztlich aus dem Vorzeichen des Parameters k sowie dem Vorzeichen von λ . So ist der in Abbildung C.1(a) dargestellte Fall durch $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ und $k_1 = k_2 = 1$ charakterisiert. Das bedeutet der Momentanpol liegt jeweils „links“ (l) der Achse $\vec{x}_{1,1}$ bzw. $\vec{x}_{1,2}$ und das zugehörige k ist positiv (+). Die Lösungsdomäne ist daher als (l^+, l^+) gekennzeichnet.

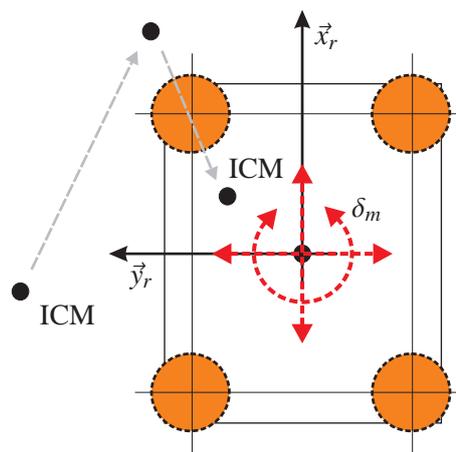
C.2 Momentanpol und resultierende Freiheitsgrade

Abbildung C.2 zeigt die Aufteilung der Freiheitsgrade für ein Fahrwerk mit Ackermann (C.2(a)) sowie ein Fahrwerk mit Differentialkinematik (C.2(b)). Für die Ackermann Kinematik ist der ICM auf eine kontinuierliche Bewegung entlang der Achse durch die hinteren beiden, festen Standardräder beschränkt ($\delta_s = 1$). Der Roboter kann um diesen Punkt mit variabler Geschwindigkeit rotieren ($\delta_m = 1$). Bei der Differentialkinematik ist der ICM zwar ebenfalls auf die Achse der hinteren Räder beschränkt. Die Freiheitsgrade ($\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r$) der ebenen Bewegung des Ursprungs des körperfesten Koordinatensystems ($O_r, \vec{x}_r, \vec{y}_r$) können aber – rein kinematisch betrachtet – direkt vorgegeben werden ($\delta_m = 2$). Der dritte Freiheitsgrade $\dot{\varphi}_{wr}^r$ ergibt sich dann über die verbleibende Zwangsbedingung ($3 - \delta_M = 1$) in direkter Abhängigkeit aus ($\dot{x}_{wr}^r, \dot{y}_{wr}^r$). Der Momentanpol bewegt sich dabei nicht kontinuierlich sondern ändert seine Position sprunghaft ($\delta_s = 0$).

In Abbildung C.3 sind die Freiheitsgrade des ICM für ein Typ 2 quasi-omnidirektionales und ein omni-



(a) Momentanpol (ICM) bei Typ 2 quasi-omnidirektionaler Kinematik



(b) Momentanpol (ICM) bei omnidirektionaler Kinematik

Abbildung C.3: Momentanpol (ICM) mit Freiheitsgraden für omnidirektionale (C.3(b)) und Typ 2 quasi-omnidirektionale Kinematik (C.3(a)). Ausgefüllte Kreise kennzeichnen aktive Räder, die keine Zwangsbedingungen auf das Fahrwerk ausüben (Castor- oder Mecanum-Räder).

direktionales Fahrwerk dargestellt. Für beide Fahrwerke gilt, dass der ICM überall in der (\vec{x}_w, \vec{y}_w) -Ebene platziert werden kann ($\delta_M = 3$). Für das omnidirektionale Fahrwerk (Abb. C.3(b)), das vollständig durch Castor- oder Mecanum-Räder aufgebaut ist, sind alle Zwangsbedingungen aufgehoben. Wie beim Differentialantrieb kann der ICM – kinematisch betrachtet – instantan bzw. sprunghaft seine Position in der Ebene ändern ($\delta_m = 3$). Fahrwerke mit Typ 2 quasi-omnidirektionaler Kinematik verfügen über ein aktiv lenkbares Standardrad. Der ICM kann dann ähnlich wie beim Differentialantrieb entlang der Achse dieses Rades instantan positioniert werden ($\delta_m = 2$). Die Lage der Achse selbst und damit auch die Lage des ICM in der (\vec{x}_w, \vec{y}_w) -Ebene kann durch die Lenkbewegung des Standardrades kontinuierlich variiert werden ($\delta_s = 1$).

C.3 Stetige Fortsetzung des Momentanpols auf der Einheitskugel

Die Projektion des Momentanpols auf die Einheitskugel lässt sich in ihrer erweiterten Form nach Gleichung (3.10) in Abschnitt 3.1.3 in folgender Form schreiben

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan_2(y_{\text{ICM}}, x_{\text{ICM}}) + \pi \sigma \left(-\frac{k_k}{\lambda_k} \right) - \left\langle \delta \left(-\frac{k_k}{\lambda_k} \right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{(x'_{\text{ICM}})^2 + (y'_{\text{ICM}})^2}} \cdot \text{sgn} \left(\frac{k_k}{\lambda_k} \right) \right) \end{pmatrix}.$$

Durch Verwendung von (C.12) und Einsetzen von $\varphi_{s,i}$ bzw. $\varphi_{s,k}$, wobei (i, k) ein beliebiges, geeignetes

Paar von Rädern charakterisiere, lässt sich der Term in (3.10) bzgl. des Parameter φ als

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan_2(y_{a,k} + \lambda_k(\cos(\varphi_{s,k})), x_{a,k} + \lambda_k(-\sin(\varphi_{s,k}))) + \dots \\ &\quad + \pi\sigma\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned} &= \arctan_2\left(\lambda_k\left(\frac{y_{a,k}}{\lambda_k} + \cos(\varphi_{s,k})\right), \lambda_k\left(\frac{x_{a,k}}{\lambda_k} - \cos(\varphi_{s,k})\right)\right) + \dots \\ &\quad + \pi\sigma\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

schreiben. In der Umgebung des Fernpunktes gilt ferner

$$\begin{aligned} r_{\text{ICM}}^{r*} &\rightarrow +/\infty \\ \lambda_k &\rightarrow +/\infty \\ k_k/\lambda_k &\rightarrow +/0 \end{aligned}$$

für alle Standardräder des Fahrwerks. Nutzt man dies und verwendet zudem (C.25), so lässt sich φ in der Umgebung des Fernpunktes schreiben als

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{s,k} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle + \pi\sigma\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_k}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ &\quad \text{mit } \lambda_k \neq 0 \\ &= \varphi_{s,k} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) + \begin{cases} \pi\sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) & \text{mit } k_k = 1 \\ \pi\left(1 - \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right)\right) & \text{mit } k_k = -1 \end{cases} \\ &= \varphi_{s,k} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma(-k_k). \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Dabei charakterisiert der letzte Term $\pi\sigma(-k_k)$ die gegenwärtige kinematische Konfiguration des Rades k und ist in der Umgebung des Fernpunkts konstant.

Analog ergibt sich für den Term in (3.10) bzgl. θ durch Einsetzen von (C.12)

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(x_{a,k} + \lambda_k(-\sin(\varphi_{s,k}))^2 + (y_{a,k} + \lambda_k \cos(\varphi_{s,k}))^2}} \cdot \text{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right)\right) \quad (\text{C.35})$$

$$= \arctan\left(\frac{\text{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right)}{\sqrt{\lambda_k^2 (x_{a,k}/\lambda_k - \sin(\varphi_{s,k}))^2 + \lambda_k^2 (y_{a,k}/\lambda_k + \cos(\varphi_{s,k}))^2}}\right). \quad (\text{C.36})$$

Untersucht man diese Funktion wieder in der Umgebung des Fernpunktes $r_{\text{ICM}}^{r*}, \lambda_i \rightarrow \infty$, an dem die Pro-

jektion des Momentanpols durch (3.10) stetig fortgesetzt werden soll, so lässt sich (C.36) zu

$$\theta = \arctan\left(\frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{k_k}{\lambda_k}\right)}{|\lambda_k|}\right) \quad (\text{C.37})$$

$$= \arctan\left(\frac{k_k \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)}{\lambda_k \cdot \operatorname{sgn}(\lambda_k)}\right) \quad (\text{C.38})$$

mit (C.9)

$$= \arctan\left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{ik}) \cdot k_k \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)}{(\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})) \cdot \operatorname{sgn}(\lambda_k)}\right) \quad (\text{C.39})$$

vereinfachen. Dabei ist $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y)^T$ gerade der Vektor $\vec{x}_{a,k} - \vec{x}_{a,i}$ von Lenkachse des Rades i zur Lenkachse des Rades k . Verwendet man nun, dass für $\lambda_k \neq 0$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{\operatorname{sgn}(\lambda_k)}$$

$$\operatorname{sgn}^2(\lambda_k) = 1$$

gilt, so lässt sich (C.39) weiter vereinfachen zu

$$\theta = \arctan\left(k_k \cdot \frac{\sin(\Delta\varphi_{ik})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})}\right) \quad (\text{C.40})$$

mit $k_k \in \{-1, 1\}$

$$= k_k \cdot \arctan\left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{ik})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})}\right). \quad (\text{C.41})$$

Damit lassen sich die Parameter (φ, θ) aus (3.6) in der Umgebung des Fernpunktes $r_{\text{ICM}}^* \rightarrow \infty$ nun direkt als Funktion

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{\varphi}_s) = \begin{pmatrix} \varphi_{s,k} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma(-k_k) \\ k_k \cdot \arctan\left(\frac{\sin(\varphi_{s,k} - \varphi_{s,i})}{\Delta x \cos(\varphi_{s,i}) + \Delta y \sin(\varphi_{s,i})}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{C.42})$$

der Konfiguration des Roboters $\vec{\varphi}_s$ bzw. der Lenkwinkel $(\varphi_{s,i}, \varphi_{s,k})$ eines nach Anhang C.1 geeigneten Radpaares schreiben.

Zur Formulierung der Umkehrabbildung wird zunächst $\varphi_{s,k}$ unter Verwendung von (C.24) bis (C.27) als

Funktion

$$\begin{aligned}
 \varphi_{s,k} &= \arctan_2(\sin(\varphi_{s,v} + \pi/2) - \Delta y/\lambda_v, \cos(\varphi_{s,v} + \pi/2) - \Delta x/\lambda_v) + \dots \\
 &\quad + \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_v}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_v}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) + \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \frac{\pi}{2} \\
 &\text{mit } k_v \in \{-1, 1\} \\
 &= \arctan_2(k_v \sin(\varphi_{s,v} + \pi/2 + \pi\sigma(-k_v)) - \Delta y/\lambda_v, k_v \cos(\varphi_{s,v} + \pi/2 + \pi\sigma(-k_v)) - \Delta x/\lambda_v) \dots \\
 &\quad \dots + \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_v}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_v}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) + \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \frac{\pi}{2} \\
 &= \arctan_2\left(\sin(\varphi_{s,v} + \pi/2 + \pi\sigma(-k_v)) - k_v \frac{\Delta y}{\lambda_v}, \cos(\varphi_{s,v} + \pi/2 + \pi\sigma(-k_v)) - k_v \frac{\Delta x}{\lambda_v}\right) \dots \\
 &\quad \dots + \underbrace{\pi\sigma\left(-\frac{1}{k_v}\right) + \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_v}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_v}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \pi \cdot \sigma\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right) + \left\langle \delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle - \pi/2}_{\text{I}} \quad (\text{C.43})
 \end{aligned}$$

von $(\varphi_{s,v}, \lambda_v)$ eines beliebigen Rades v geschrieben. Dabei lässt sich unter Verwendung von (C.31) der Term I umformen zu

$$\begin{aligned}
 \text{I} &= \pi\sigma(-k_v) + \pi\sigma(-k_v \cdot k_k) \\
 &\quad \text{mod } 2\pi \\
 &= -\pi\sigma(-k_k) . \quad (\text{C.44})
 \end{aligned}$$

Um $\varphi_{s,k}$ im Folgenden als Funktion von (φ, θ) auszudrücken wird ein „virtuelles“ Rad im Ursprung des Koordinatensystems eingeführt. O.B.d.A. sei Rad v dieses virtuelle Rad, so dass $\vec{x}_{a,v} = \vec{0}$ gilt. Drückt man nun (C.36) als Funktion von $(\varphi_{s,v}, \lambda_v)$ aus und verwendet, dass das Rad v im Ursprung des Koordinatensystems liege, so lässt sich k_i/λ_i als Funktion von θ

$$\tan(\theta) = \frac{k_v}{\lambda_v} \quad (\text{C.45})$$

ausdrücken. Dabei wurde wie in (C.37) und (C.38) die Betragsfunktion über die Signum-Funktion dargestellt und angenommen, dass $\lambda_v \neq 0$ gelte. Analog lässt sich über (C.33) unter den gleichen Annahmen die erste Gleichung von (3.13) als Funktion

$$\varphi = \varphi_{s,v} + \frac{\pi}{2} + \pi\sigma(-k_v) \quad (\text{C.46})$$

in Abhängigkeit von $\varphi_{s,v}$ schreiben. Substituiert man nun (C.44), (C.45) und (C.46) in (C.43) und berücksichtigt, dass aufgrund der Annahme $\vec{x}_{a,v} = \vec{0}$ nun gilt $\Delta\vec{x} = \vec{x}_{a,k}$, so lässt sich die gegenwärtige Konfiguration des Rades k und analog die weiterer Räder als Funktion

$$\begin{aligned}
 \varphi_{s,k} &= \arctan_2(\sin(\varphi) - y_{a,k} \tan(\theta), \cos(\varphi) - x_{a,k} \tan(\theta)) - \pi/2 - \pi\sigma(-k_k) \\
 \varphi_{s,i} &= \arctan_2(\sin(\varphi) - y_{a,i} \tan(\theta), \cos(\varphi) - x_{a,i} \tan(\theta)) - \pi/2 - \pi\sigma(-k_i) \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

der sphärischen Koordinaten nach (3.13) und der Konfiguration des Fahrwerks $(\vec{x}_{a,k}, k_k)$ ausdrücken. Man kann

C.4 Analogie von Momentanpol und Twist

Um die Analogie zwischen Momentanpol und sphärischem Twist aufzuzeigen soll der auf die Einheitskugel projizierte Momentanpol in seiner Formulierung nach (3.34)

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan_2\left(\frac{\dot{x}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}, -\frac{\dot{y}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right) + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \rangle \\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{\dot{y}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_{wr}^r}{\omega_{wr}^r}\right)^2}} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (\text{C.48})$$

unabhängig von den Lenkwinkeln $\vec{\varphi}_s$ und der Hilfsgröße λ geschrieben werden. Dazu werden im Folgenden die Gleichungen für die zwei Parameter (φ, θ) im einzelnen untersucht und umgeformt.

Die Gleichung für θ lässt sich für $\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$ unter Verwendung von (3.33) umformen zu:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}{|\omega_{wr}^r|}} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_{wr}^r \cdot \operatorname{sgn}(\omega_{wr}^r)}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}} \cdot k_i \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\right) \\ &\quad \text{mit (3.33)} \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_{wr}^r \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}} \cdot k_i \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\text{I}}{\text{II}}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Man kann erkennen, dass der Ausdruck $\operatorname{sgn}^2(1/\lambda_i)$ in Term I ausgelassen werden kann, da er für $1/\lambda_i \neq 0$ konstant 1 ist. Dabei ist dies für $\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$ gleichbedeutend mit $\omega_{wr}^r \neq 0$. Der Fall $1/\lambda_i = 0$ entspricht dem Fall in dem die Radachsen von Rad i und Rad k parallel zueinander sind. Das bedeutet, der Momentanpol befindet sich in seinem Fernpunkt und der Roboter führt eine rein translatorische Bewegung aus ($\omega_{wr}^r = 0$). Term I lässt damit in Abhängigkeit von ω_{wr}^r schreiben

$$\omega_{wr}^r \cdot \operatorname{sgn}^2\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) = \begin{cases} \omega_{wr}^r \cdot 1 & \forall \omega_{wr}^r \neq 0 \\ 0 & \forall \omega_{wr}^r = 0 \end{cases} \quad (\text{C.50})$$

Die Gleichung (3.34) bzgl. θ lässt sich also vereinfacht schreiben als

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}} \cdot k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})\right) \quad (\text{C.51})$$

und ist damit unabhängig von den Lenkwinkeln $\vec{\varphi}_s$ des Fahrwerks. Dabei ist zu beachten, dass die Abbildung von (C.49) nach (C.51) durch Substitution des Terms I mit (C.50) einer stetigen aber nicht stetig

differenzierbaren Fortsetzung des Momentanpols über seinen Fernpunkt entspricht. Wäre diese Fortsetzung stetig differenzierbar, so wäre die Einführung der erweiterten Definition nach (3.10) nicht nötig gewesen.

Gleichung (C.51) ist noch nicht vollständig unabhängig von der Konfiguration des Fahrwerks. Die Bedeutung des verbliebenen Terms II wird in Abschnitt 4 detailliert diskutiert. Im Folgenden wird zunächst der Term bezüglich der φ Variable (3.34) in gleicher Weise umgeformt.

Unter der Annahmen, dass $1/\omega_{wr}^r \neq 0$, also $\omega_{wr}^r \neq +/-\infty$ lässt sich unter Verwendung von (C.14) der in (3.34) der Variable φ zugeordneten Term zu

$$\begin{aligned} \varphi = & \arctan_2(\dot{x}_{wr}^r, -\dot{y}_{wr}^r) + \pi\sigma\left(-\frac{1}{\omega_{wr}^r}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\omega_{wr}^r}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle + \dots \\ & + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (C.52)$$

umschreiben. Verwendet man nun, dass bei der hier gewählten Definition der Heaviside-Funktion und der Signum-Funktion über den Arcustangens

$$\sigma(\xi) = \sigma(\operatorname{sgn}(\xi)) \quad (C.53)$$

gilt, lässt sich (C.52) als

$$\begin{aligned} \varphi = & \arctan_2(\dot{x}_{wr}^r, -\dot{y}_{wr}^r) + \pi\sigma\left(\frac{-1}{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{1}{\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle + \dots \\ & + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (C.54)$$

schreiben. Mit $k_i \in \{-1, 1\}$ und $\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$, was Voraussetzung für die Darstellung des Twists in sphärischen Koordinaten war, lässt sich das als

$$\begin{aligned} \varphi = & \arctan_2(\dot{x}_{wr}^r, -\dot{y}_{wr}^r) + \pi\sigma\left(\frac{\overbrace{-k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})}^a}{\underbrace{\operatorname{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)}_b}\right) - \left\langle \delta\left(\frac{k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})}{\operatorname{sgn}\left(\frac{k_i}{\lambda_i}\right)}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle + \dots \\ & + \pi\sigma\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right) - \left\langle \delta\left(-\frac{k_i}{\lambda_i}\right), \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (C.55)$$

schreiben. Betrachtet man die möglichen Ergebnisse der Summe über alle Heaviside- und Signum-Terme in (C.55) für die unterschiedlichen Kombinationen von a und b so erkennt man, dass sich diese Summe zu $\pi \cdot \sigma(-k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}))$ vereinfachen lässt. Die möglichen Fälle mit den jeweiligen Ergebnissen sind in Tabelle (C.1) zu sehen.

Damit lässt sich der Term bezüglich φ zu

$$\varphi = \arctan_2(\dot{x}_{wr}^r, -\dot{y}_{wr}^r) + \pi \cdot \sigma(-k_i \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}))$$

vereinfachen. Nutzt man zusätzlich, dass

$$\arctan_2(x, -y) = \arctan_2(y, x) + \frac{\pi}{2} \quad (C.56)$$

	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b < 0$	π	0	$0_{\text{mod}2\pi}$
$b = 0$	π	n.d.	0
$b > 0$	π	0	0

Tabelle C.1: Überblick über die Fälle, auf welche die Terme a und b reduziert werden können sowie die zugehörigen Funktionswerte für die Summe über die in (C.55) auftretenden Heaviside- und Signum-Funktionen. Die mittlere Spalte kann für $\dot{\varphi}_{d,i} \neq 0$ nicht auftreten. Daher stellt das Auftreten des nicht definierten Wertes für den Fall $(a, b) = (0, 0)$ zunächst keine Einschränkung dar. Für den Fall $a > 0, b < 0$ ergibt sich genau genommen 2π . Da durch die Projektion auf die Kugel φ in $\text{mod}2\pi$ -Arithmetik gerechnet wird ist dies identisch zu $\varphi = 0$.

gilt, so lässt sich dies weiter umschreiben zu

$$\varphi = \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sigma(-k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})) . \quad (\text{C.57})$$

Damit erhält man die Projektion des erweiterten Momentanpol auf die Kugeloberfläche nach (3.10) als Funktion der kartesischen Geschwindigkeiten

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan_2(\dot{y}_{wr}^r, \dot{x}_{wr}^r) + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sigma(-k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i})) \\ \arctan\left(\frac{\omega_{wr}^r}{\sqrt{(\dot{x}_{wr}^r)^2 + (\dot{y}_{wr}^r)^2}}\right) \cdot k_i \text{sgn}(\dot{\varphi}_{d,i}) \end{pmatrix} . \quad (\text{C.58})$$

D Erläuterungen zur Stabilitätsbetrachtung (MPC)

D.1 Stabilität bei Zustandsrückführung ohne Singularitätsvermeidung

Zur Gewährleistung der Stabilität eines modellprädiktiven Reglers müssen wie in Abschnitt 5.3.2 erläutert vier Bedingungen hinsichtlich des Zustands des Systems bei Erreichen des Horizonts X_f , hinsichtlich des das System in diesem Endzustand stabilisierenden Reglers $\vec{k}(\vec{x}(t_f), t_f)$ sowie hinsichtlich des Gütekriterium (5.55)

$$J = \Phi(\vec{x}(t_f)) + \int_{t=t_0}^{t_f} \mathcal{L}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt$$

erfüllt sein:

1. X_f ist Teil der Menge aller zulässigen Zustände \mathbb{X} ($X_f \in \mathbb{X}$), wobei gilt: X_f ist abgeschlossen und beinhaltet den Ursprung (bzw. die Ruhelage des geregelten Systems),
2. innerhalb der Menge aller zulässigen Endzustände X_f ist die Regelgröße $\vec{u}(t_f)$ Element der zulässigen Regelgrößen \mathbb{U} ($\vec{u}(t_f) \in \mathbb{U} \forall \vec{x} \in X_f$),
3. X_f ist positiv invariant unter $\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f)$,
4. $\dot{\Phi}(\vec{x}(t_f)) + \mathcal{L}(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f) \leq 0, \forall \vec{x} \in X_f$.

Wie schon in Abschnitt 5.3.2 erwähnt, ist Forderung drei implizit durch die vierte Forderung erfüllt, wenn X_f eine Niveaumenge bzw. Subniveaumenge bezüglich $\Phi(\cdot)$ ist. Schließlich muss noch gelten, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist und J positiv definit bzw. positiv semidefinit ist.

Zunächst wird der Fall ohne repulsive Potentiale betrachtet. In diesem Fall ist sowohl das System, als auch die Rückführung linear und zeitinvariant. Ein optimaler Regler könnte daher auch direkt über die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung entworfen werden. Der Einsatz eines modellprädiktiven Reglers ist in diesem Fall nicht notwendig. Er soll aber als Vorbetrachtung zur Behandlung des nichtlinearen Reglers zur Singularitätenvermeidung kurz skizziert werden.

Auf eine Beschränkung des finalen Zustands wird verzichtet:

$$X_f := \mathbb{R}^4. \tag{D.1}$$

Das betrachtete System hat die Form

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} \tag{D.2}$$

Der stabilisierende Regler nach Erreichen des Horizontes sei durch den in Abschnitt 5.2.2 entworfenen linearen Potentialfeldregler gegeben und die Stellgrößen \vec{u} seien zunächst unbeschränkt:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}_f) &= K \cdot \vec{x}_f \\ &= \text{diag}\left(-\frac{k_p}{m}, -\frac{k_p}{m}, -\frac{k_v}{m}, -\frac{k_v}{m}\right)\end{aligned}\tag{D.3}$$

$$\mathbb{U} := \mathbb{R}^2 .\tag{D.4}$$

Als erster Ansatz für das Gütekriterium bezüglich des Endzustandes $\Phi(\cdot)$ bzw. der Bestrafung der Trajektorie $\mathcal{L}(\cdot)$ wird das zuvor definierte Potentialfeld gewählt. Dieses Potentialfeld erfüllt, wie in Abschnitt 5.2.2 gezeigt, gerade alle Eigenschaften einer Lyapunov-Funktion. Prüft man diesen Ansatz findet man allerdings, dass sich, aufgrund der zusätzlichen Terme bezüglich der Bestrafung der Trajektorie bzw. Stellgrößen, die Erfüllung von Bedingung 4 nicht allgemein zeigen lässt. Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, dass die zuvor genannten Bedingungen nach (Mayne und Michalska 1990; Rawlings 2000) keine notwendigen sondern hinreichende Bedingungen sind. Das heißt es ist durchaus möglich, dass die bisherige Gütefunktion auf ein stabiles System führt, auch wenn Bedingung 4 sich nicht allgemeingültig zeigen lässt.

Um diese störenden Terme zu eliminieren genügt es das zuvor gewählte Gütekriterium um Kreuzterme bezüglich der Orts- und zugehörigen Geschwindigkeitsvariable (x_1, x_3) bzw. (x_2, x_4)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2}\lambda_1 x_1^2 + \lambda_{13} x_1 x_3 + \frac{1}{2}\lambda_3 x_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 x_2^2 + \lambda_{24} x_2 x_4 + \frac{1}{2}\lambda_4 x_4^2\tag{D.5}$$

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}) = \frac{1}{2}\lambda'_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda'_3 x_3^2 + \frac{1}{2}\lambda'_2 x_2^2 + \frac{1}{2}\lambda'_4 x_4^2 + \frac{1}{2}r_1 u_1^2 + \frac{1}{2}r_2 u_2^2\tag{D.6}$$

zu erweitern. Da die Teilsysteme (x_1, x_3) und (x_2, x_4) bei Vernachlässigung der Singularitäten nicht gekoppelt sind, genügt es wie zuvor zu zeigen, dass das Teilsystem (x_1, x_3) die Bedingungen eins bis vier erfüllt. Die Erfüllung der Bedingungen für (x_2, x_4) folgt dann analog.

Unter der Annahme, dass die Optimierung wie in Abschnitt 5.3.1 erläutert für die unterschiedlichen Lösungsdomänen getrennt durchgeführt wird, ist \mathbb{X} geschlossen und es gilt

$$x_f = \mathbb{X} .$$

Die erste Forderung und die dritte Forderung ist damit trivial erfüllt. Da die Regelgrößen zunächst nicht beschränkt sind, ist auch die zweite Forderung trivial erfüllt. Zu prüfen bleibt also die vierte Forderung bzw. die positive Definitheit von J und dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist.

Wie bereits zuvor diskutiert, kann eine Funktion dann eine Lyapunov-Funktion sein, wenn Sie positiv definit und stetig differenzierbar ist. Die stetige Differenzierbarkeit von

$$\Phi_{13}(x) = \frac{1}{2}\lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_{13} x_1 x_3 + \frac{1}{2}\lambda_3 x_3^2\tag{D.7}$$

folgt unmittelbar aus der quadratischen Form der Funktion $\Phi(\cdot)$. Die Forderung nach positiver Definitheit bzw. Semidefinitheit im gesamten Definitionsbereich X_f führt auf die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_{13} x_1 x_3 + \frac{1}{2}\lambda_3 x_3^2 &\geq 0 \quad \forall x_1, x_3 & (D.8) \\ x_1^2 + 2\frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} x_1 x_3 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_3} x_3^2 &\geq 0 \\ \underbrace{\left(x_1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} x_3\right)^2}_A - \underbrace{\left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} x_3\right)^2}_B + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Da Term A für alle $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2$ und damit für alle $(x_1, x_3) \in \mathbb{X}_{13}$ positiv semidefinit ist, lässt sich Ungleichung (D.8) durch die aus B erwachsende Ungleichung

$$\lambda_1 \cdot \lambda_3 \geq \lambda_{13} \quad (D.9)$$

konservativ abschätzen. Ist (D.9) erfüllt und gilt des Weiteren, dass

$$\lambda_1, \lambda_3 \geq 0, \quad (D.10)$$

so ist $\Phi(\cdot)$ im gesamten Definitionsbereich positiv semidefinit. Da $\mathcal{L}(\cdot)$ nach (D.6) keinerlei Kreuzterme aufweist, ist damit auch das Gütekriterium J positiv semidefinit, wenn gilt:

$$\lambda'_1, \lambda'_3, r_1 \geq 0. \quad (D.11)$$

Die letzte Voraussetzung dafür, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist, ist dass die erste Ableitung von $\Phi(\cdot)$ im ganzen Definitionsbereich des Systems negativ semidefinit ist. Da $\mathcal{L}(\cdot)$ hier gerade positiv semidefinit ist, ist diese Bedingung gerade erfüllt, wenn Bedingung 4 erfüllt ist. Zu zeigen ist nun also noch, dass die vierte Bedingung erfüllt ist. Da bereits gezeigt wurde, dass die Forderungen eins bis drei hier erfüllt sind und das Gütekriterium J positiv semidefinit ist, folgt dann unmittelbar die asymptotische Stabilität des zugehörigen modellprädiktiven Reglers.

Aus der vierten Forderung ergibt sich durch Ableitung des Gütekriteriums und Einsetzen des oben vorgeschlagenen Regelgesetzes

$$\begin{aligned} 0 &\geq \dot{\Phi}(\vec{x}) + \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, t_f) \\ 0 &\geq \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_{13} x_3^2 + \lambda_{13} x_1 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3\right) + \lambda_3 x_3 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda'_1 x_1^2 + \lambda'_3 x_3^2 + r_1 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3\right)^2 \\ 0 &\geq x_1^2 \underbrace{\left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2}\right)}_I + x_3^2 \underbrace{\left(\lambda_{13} - \lambda_3 \frac{k_v}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_3 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_v^2}{m^2}\right)}_II \\ &\quad + x_1 x_3 \underbrace{\left(\lambda_1 - \lambda_{13} \frac{k_v}{m} - \lambda_3 \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p k_v}{m^2}\right)}_III. \end{aligned} \quad (D.12)$$

Soll Ungleichung (D.12) für den gesamten Arbeitsraum X_f erfüllt sein, so müssen die Koeffizienten I und II von x_1^2 bzw. x_3^2 negativ semidefinit sein. Das ist eine notwendige Bedingung. Eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingungen für negative Definitheit von (D.12) ist das I und II negativ semidefinit und III exakt Null ist.

Durch Umformen der Gleichheitsbedingung III lässt sich r_1 als Funktion der Parameter λ_1 , λ_{13} und λ_3 schreiben

$$r_1 = \frac{2m^2}{k_p k_v} \underbrace{\left(-\lambda_1 + \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda_3 \frac{k_p}{m} \right)}_{\geq 0, \text{ wegen } r_1 \geq 0}. \quad (\text{D.13})$$

Aus der Forderung (D.11), dass r_1 größer oder gleich Null sei folgt damit eine weitere Ungleichung bezüglich der Parameter in $\Phi(\cdot)$.

Durch Einsetzen von (D.13) in die Terme I und II in (D.12), ergeben sich insgesamt die folgenden vier Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \lambda'_1 + \lambda_3 \frac{k_p^2}{k_v m} - \lambda_1 \frac{k_p}{k_v} \leq 0 \quad \text{aus Term I in (D.12)} \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{1}{2} \lambda'_3 + \lambda_{13} \left(1 + \frac{k_v^2}{k_p m} \right) - \lambda_1 \frac{k_v}{k_p} \leq 0 \quad \text{aus Term II in (D.12)} \quad (\text{D.15})$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m} - \lambda_{13} \frac{k_p}{m} \leq 0 \quad (\text{D.16})$$

$$\lambda_{13}^2 - \lambda_1 \lambda_3 \leq 0 \quad (\text{D.17})$$

die zusammen mit der Forderung

$$\lambda_1, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_3 \geq 0 \quad (\text{D.18})$$

eine hinreichende Bedingung für die vierte Forderung bilden. Sind diese Forderungen erfüllt, folgt zusammen mit der stetigen Differenzierbarkeit und positiven Definitheit von $\Phi(\cdot)$ unmittelbar, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist und der vorgeschlagene modellprädiktive Regler global asymptotisch stabil ist.

Betrachtet man die Ungleichungen (D.14) bis (D.18), so erkennt man, dass die absoluten Werte von λ_1 bzw. λ_3 nach oben nicht begrenzt sind. Aus (D.15) erwächst durch die Bedingung, dass alle Parameter größer oder gleich Null sein müssen, lediglich eine untere Grenze für λ_1 . Die Ungleichungen (D.14) und (D.16) führen dann auf eine rein relative Beziehung von λ_1 und λ_3

$$0 \leq \lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m} \leq \lambda_{13} \frac{k_v}{m}. \quad (\text{D.19})$$

Man kann ferner erkennen, dass der in Abweichung zum ursprünglichen Potential neu eingeführte Parameter λ_{13} sehr kleine Werte annehmen kann. Tatsächlich lassen sich die Ungleichungen auch für $\lambda_{13} = 0$ erfüllen. In diesem Fall wird (D.19) zu einer Gleichheitsbeziehung, die λ_1 und λ_3 fest verknüpft. Die einzige Einschränkung findet man durch Zusammenfassung der Ungleichungen (D.14) und (D.16). Hierdurch erhält man

$$\lambda'_1 \leq \frac{2k_p^2}{k_v m} \lambda_{13}. \quad (\text{D.20})$$

Wie bereits eingangs erwähnt ist die Einführung von λ_{13} nötig um eine Bestrafung der Abweichung zwischen Ist- und Sollkonfiguration bezüglich der „Ortsvariable“ in das Gütemaß entlang der Trajektorie aufzunehmen.

Dabei ist zu beachten, dass die Forderungen (D.14) bis (D.18) den Parameterraum der Gütefunktion J in Abhängigkeit der gewählten Reglerparameter k_p , k_v und m gerade auf den Bereich eingrenzen, in welchem globale asymptotische Stabilität des modellprädiktiven Reglers durch die direkte Methode nach Lyapunov gezeigt werden kann. Es ist anzumerken, dass die damit verbundenen Bedingungen hier mehrfach konservativ abgeschätzt wurden. Tatsächlich sind bereits die ursprünglichen Forderungen eins bis vier eine konservative Abschätzung des zulässigen Parameterraums. Globale asymptotische Stabilität kann also durchaus für einen erweiterten Parameterraum bzw. Einzugsbereich des Reglers gelten.

D.2 Stabilität bei Zustandsrückführung mit Singularitätsvermeidung

Analog zur Stabilitätsbetrachtung des modellprädiktiven Reglers bei linearer Zustandsrückführung wird in diesem Abschnitt die Stabilität des Reglers unter Einbeziehung der repulsiven Potentiale zur Vermeidung der singulären Bereiche diskutiert. Dabei wird wie zuvor aus der vierten Forderung bezüglich der Änderung des Gütekriteriums ein System von Ungleichungen abgeleitet, unter welchem $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion bzw. der modellprädiktive Regler asymptotisch stabil ist. Anschließend wird ein Set vereinfachter Ungleichungen bezüglich der Parameter des Gütekriteriums abgeleitet, die den Parameterraum beschreiben unter welchem asymptotische Stabilität nach Lyapunov gezeigt werden kann.

Zuletzt wird eine konkrete Wahl der Parameter nach dem Vorbild des Entwurfs der Lyapunov-Funktion nach Abschnitt 5.2.2 auf ihre Validität geprüft. Hieraus ergibt sich ein System von Ungleichungen, welche die Parameter k_p , k_v , k_r und m des eingesetzten Reglers erfüllen müssen.

Dabei soll zunächst wie zuvor angenommen werden, das auf eine Begrenzung der zulässigen Zustände X_f bei Erreichen des Horizonts verzichtet werden kann

$$X_f := \mathbb{R}^4 . \quad (\text{D.21})$$

Die Dynamik des unregulierten Systems sei weiterhin durch Gleichung (D.2) gegeben. Als Ansatz für den stabilisierenden Regler nach Erreichen des Horizonts wird die in Abschnitt 5.2.2 diskutierte potentialfeldbasierte, nichtlineare Zustandsrückführung gewählt. Innerhalb des Wirkungsbereichs der repulsiven Potentiale ist die Rückführung durch

$$\vec{u}(\vec{x}_f) = \begin{pmatrix} -\frac{k_p}{m}x_{1,f} - \frac{k_v}{m}x_{3,f} - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}_f) - d_0}{d(\vec{x}_f)} (x_{1,f} - x_{1,s}) \\ -\frac{k_p}{m}x_{2,f} - \frac{k_v}{m}x_{4,f} - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}_f) - d_0}{d(\vec{x}_f)} (x_{2,f} - x_{2,s}) \end{pmatrix} \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbb{U} = \mathbb{R}^2 \quad (\text{D.23})$$

gegeben. Außerhalb der repulsiven Potentiale ist die Rückführung durch den in Abschnitt D.1 diskutierten Regler gegeben.

Ebenso wird außerhalb der repulsiven Potentiale das zuvor in Abschnitt D.1 vorgestellte Gütekriterium verwendet. Innerhalb des Einflussbereichs der repulsiven Potentiale treten die repulsiven Potentiale als

zusätzliche Terme im Gütekriterium auf

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}_f) = & \frac{1}{2} \lambda_1 x_{1,f}^2 + \lambda_{13} x_{1,f} x_{3,f} + \frac{1}{2} \lambda_3 x_{3,f}^2 \\ & + \frac{1}{2} \lambda_2 x_{2,f}^2 + \lambda_{24} x_{2,f} x_{4,f} + \frac{1}{2} \lambda_4 x_{4,f}^2 + \frac{1}{2} \lambda_r (d(\vec{x}_f) - d_0)^2, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}) = & \frac{1}{2} \lambda'_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \lambda'_3 x_3^2 + \lambda'_{13} x_1 x_3 + \frac{1}{2} \lambda'_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \lambda'_4 x_4^2 + \lambda'_{24} x_2 x_4 \\ & + \frac{1}{2} \lambda'_r (d(\vec{x}) - d_0)^2 + \frac{1}{2} r_1 u_1^2 + \frac{1}{2} r_2 u_2^2. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Mit dem vorläufigen Verzicht auf eine Beschränkung des Zustandsraums X_f bzw. des Raums der zulässigen Stellgrößen \mathbb{U} , sind die ersten drei Forderungen trivial erfüllt. Zu zeigen ist also noch, dass das Gütekriterium J positiv semidefinit und seine Ableitung $\dot{\Phi}(\cdot) + \mathcal{L}(\cdot)$ entlang der Trajektorie des geregelten Systems negativ semidefinit sowie, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist.

Einzugsbereich und Ungleichheitsbedingungen

Sowohl $\Phi(\cdot)$, als auch $\mathcal{L}(\cdot)$ gehen durch Addition eines quadratischen Terms und eines Kreuzterms aus den in Abschnitt D.1 definierten Gütemaßen hervor. Analog zum zuvor diskutierten System sind $\Phi(\cdot)$ und $\mathcal{L}(\cdot)$ und damit auch das Gütemaß J gerade dann positiv semidefinit, wenn die neuen Parameter λ_r bzw. λ'_r größer oder gleich Null sind und den Kreuzterm übertreffen. Damit ist die Forderung

$$\lambda_1, \lambda_3, \lambda_{13}, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_{24}, \lambda_r \geq 0 \quad (\text{D.26})$$

$$\lambda'_1, \lambda'_3, \lambda'_{13}, \lambda'_2, \lambda'_4, \lambda'_{24}, \lambda'_r, r_1, r_2 \geq 0 \quad (\text{D.27})$$

$$\lambda'_{13} - \lambda'_1 \lambda'_3 \leq 0 \quad (\text{D.28})$$

$$\lambda'_{24} - \lambda'_2 \lambda'_4 \leq 0 \quad (\text{D.29})$$

eine notwendige Voraussetzung dafür, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion bzw. J positiv semidefinit ist.

Die stetige Differenzierbarkeit von $\Phi(\cdot)$, welche eine notwendig Voraussetzung für eine gültige Lyapunov-Funktion ist, wurde bereits im Zusammenhang mit dem nichtlinearen Potentialfeld-Regler Abschnitt 5.2.2 bzw. dem linearen modellprädiktiven Regler diskutiert. An der Grenze der repulsiven Potentiale ist sowohl $\Phi(\cdot)$, als auch die zugehörige Ableitung $\dot{\Phi}(\cdot)$ stetig. Allerdings ist $\Phi(\cdot)$ in den Singularitäten \vec{x}_s selbst offensichtlich nicht stetig differenzierbar. Damit ist $\Phi(\cdot)$ keine globale Lyapunov-Funktion. Wenigstens die Singularitäten müssen aus den zulässigen Endzuständen X_f ausgeschlossen werden, womit die ersten drei Bedingungen nicht länger trivial erfüllt sind. Bevor die Auswirkungen auf diese Bedingungen näher diskutiert werden, soll zunächst geprüft werden ob $\Phi(\cdot)$ im verbliebenen Zustandsraum eine Lyapunov-Funktion bzw. ob die Ableitung des Gütemaßes negativ semidefinit ist.

Damit $\Phi(\cdot)$ im verbliebenen Definitionsbereich des Zustandsraums eine Lyapunov-Funktion ist, ist noch zu zeigen, dass $\dot{\Phi}(\cdot)$ in diesem Bereich negativ semidefinit ist. Dabei folgt wie zuvor aus (D.26) und (D.27), dass die negative Definitheit von $\dot{\Phi}(\cdot)$ eine notwendige Voraussetzung zur Erfüllung des vierten Kriteriums ist. Es folgt aus der Umkehrung, dass die negative Definitheit der Ableitung des Gütemaßes

$$J(\vec{x}, \vec{u}) = \dot{\Phi}(\vec{x}, \vec{u}) + \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}) \leq 0 \quad (\text{D.30})$$

eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion im verbleibenden Definitionsbereich ist.

Die Ableitung des Gütemaßes ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(\cdot) + \mathcal{L} = & \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_3 x_3 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,s}) \right) \\
 & + \lambda_{13} x_3^2 + \lambda_{13} x_1 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,s}) \right) \\
 & + \lambda_2 x_2 x_4 + \lambda_4 x_4 \left(-\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,s}) \right) \\
 & + \lambda_{24} x_4^2 + \lambda_{24} x_2 \left(-\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,s}) \right) \\
 & + \lambda_r \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} ((x_1 - x_{1,s})x_3 + (x_2 - x_{2,s})x_4) \\
 & + \frac{1}{2} \lambda'_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \lambda'_3 x_3^2 + \lambda'_{13} x_1 x_3 + \frac{1}{2} \lambda'_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \lambda'_4 x_4^2 + \lambda'_{24} x_2 x_4 + \frac{1}{2} \lambda'_r (d(\vec{x}) - d_0)^2 \\
 & + \frac{1}{2} r_1 \left(-\frac{k_p}{m} x_1 - \frac{k_v}{m} x_3 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_1 - x_{1,s}) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} r_2 \left(-\frac{k_p}{m} x_2 - \frac{k_v}{m} x_4 - \frac{k_r}{m} \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} (x_2 - x_{2,s}) \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

Alle Zustandsvariablen beziehen sich auf den Zustand zum Ende des Prädiktionshorizonts. Dabei wurde zwecks besserer Übersichtlichkeit und geringeren Schreibaufwands auf den Index f verzichtet. Aufgrund der Abstandsfunktion $d(\vec{x})$, welche x_1 und x_2 nichtlinear verknüpft, kann das System nicht wie zuvor auf eine bzw. zwei Dimensionen reduziert werden.

Ausmultiplizieren und sortieren nach den Zustandsvariablen führt auf eine Kombination von quadratischen Termen und Kreuztermen. Eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Forderung ist wie zuvor, dass die Koeffizienten aller Kreuzterme Null werden, während die Koeffizienten der quadratischen Terme kleiner oder gleich Null sind. Diese strikte Forderung führt aufgrund der Bestrafung der Stellgrößen allerdings zu einem Widerspruch zu (D.27).

Um diesen Widerspruch zu vermeiden müssen die Kreuzterme bezüglich x_1 und $(x_1 - x_{1,s})$ bzw. x_2 gemeinsam betrachtet werden. Die Ableitung des Gütekriteriums spaltet sich damit in einen Term

$$\begin{aligned}
 J_I = & x_3^2 \left(-\lambda_3 \frac{k_v}{m} + \lambda_{13} + \frac{1}{2} \lambda'_3 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_v^2}{m^2} \right) + x_4^2 \left(-\lambda_4 \frac{k_v}{m} + \lambda_{24} + \frac{1}{2} \lambda'_4 + \frac{1}{2} r_2 \frac{k_v^2}{m^2} \right) \\
 & + x_3 (x_1 - x_{1,s}) \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \left(-\lambda_3 \frac{k_r}{m} + \lambda_r + r_1 \frac{k_v k_r}{m^2} \right) + x_4 (x_2 - x_{2,s}) \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \left(-\lambda_4 \frac{k_r}{m} + \lambda_r + r_2 \frac{k_v k_r}{m^2} \right) \\
 & + x_1 x_3 \left(\lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m} - \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda'_{13} + r_1 \frac{k_p k_v}{m^2} \right) + x_2 x_4 \left(\lambda_2 - \lambda_4 \frac{k_p}{m} - \lambda_{24} \frac{k_v}{m} + \lambda'_{24} + r_2 \frac{k_p k_v}{m^2} \right),
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

in welchem die Koeffizienten unabhängig voneinander betrachtet werden und den folgenden Term, dessen

Elemente gemeinsam abgeschätzt werden müssen:

$$\begin{aligned}
 J_{II} = & x_1^2 \left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right) + x_2^2 \left(-\lambda_{24} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_2 + \frac{1}{2} r_2 \frac{k_p^2}{m^2} \right) \\
 & + (x_1 - x_{1,s})^2 \left(\frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \right)^2 \left(\frac{1}{2} r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r \right) + (x_2 - x_{2,s})^2 \left(\frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \right)^2 \left(\frac{1}{2} r_2 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r \right) \\
 & + x_1 (x_1 - x_{1,s}) \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \left(-\lambda_{13} \frac{k_r}{m} + r_1 \frac{k_p k_r}{m^2} \right) + x_2 (x_2 - x_{2,s}) \frac{d(\vec{x}) - d_0}{d(\vec{x})} \left(-\lambda_{24} \frac{k_r}{m} + r_2 \frac{k_p k_r}{m^2} \right).
 \end{aligned} \tag{D.33}$$

Setzt man die Parameter λ_{13} , λ_{24} sowie λ'_1 , λ'_2 und r_1 , r_2 paarweise gleich und verwendet, dass gerade

$$d(\vec{x})^2 = (x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_s\|^2$$

gilt, so lassen sich die zu J_{II} gehörigen Terme (D.33) zu

$$\begin{aligned}
 J'_{II} = & (x_1^2 + x_2^2) \left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right) + (d(\vec{x}) - d_0)^2 \left(\frac{1}{2} r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r \right) \\
 & + \frac{x_1 (x_1 - x_{1,s}) + x_2 (x_2 - x_{2,s})}{d(\vec{x})} (d(\vec{x}) - d_0) \left(-\lambda_{13} \frac{k_r}{m} + r_1 \frac{k_p k_r}{m^2} \right)
 \end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
 = & \|\vec{x}\| \left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right) + (d(\vec{x}) - d_0)^2 \left(\frac{1}{2} r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r \right) \\
 & + \frac{\|\vec{x}\| \|\vec{x} - \vec{x}_s\| \cos(\psi)}{d(\vec{x})} (d(\vec{x}) - d_0) \left(-\lambda_{13} \frac{k_r}{m} + r_1 \frac{k_p k_r}{m^2} \right),
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

vereinfachen. Dabei ist ψ gerade der Winkel zwischen den Vektoren \vec{x} bzw. $\vec{x} - \vec{x}_s$

$$\psi = \angle \vec{x}, (\vec{x} - \vec{x}_s). \tag{D.36}$$

Verwendet man, dass innerhalb der repulsiven Potentiale der Abstand zwischen Singularität \vec{x}_s und Zustand \vec{x} immer kleiner als der Kreisradius d_0 ist, so führt Faktorisieren auf folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
 0 \geq & \frac{1}{2} r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} \lambda'_r + \frac{\|\vec{x}\|^2}{|d(\vec{x}) - d_0|^2} \overbrace{\left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right)}^A \\
 & - \cos(\psi) \frac{\|\vec{x}\|}{|d(\vec{x}) - d_0|} \underbrace{\left(-\lambda_{13} \frac{k_r}{m} + r_1 \frac{k_p k_r}{m^2} \right)}_B,
 \end{aligned} \tag{D.37}$$

die erfüllt sein muss, damit (D.34) und damit die Ableitung von J negativ semidefinit ist.

Gilt wie zuvor schon angenommen, dass die Ruhelage, welche durch eine geeignete Koordinatentransformation immer in den Ursprung abgebildet werden kann, außerhalb der repulsiven Potentiale liegt und gilt ferner, dass \vec{x} im Einflussbereich eines der Potentiale liege, das kann hier immer als erfüllt angenommen werden, da sonst gerade der im vorigen Abschnitt diskutierte Fall einer linearen Zustandsrückführung gilt, so gilt

$$x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{x}\|^2 > \|d(\vec{x}) - d_0\|^2. \tag{D.38}$$

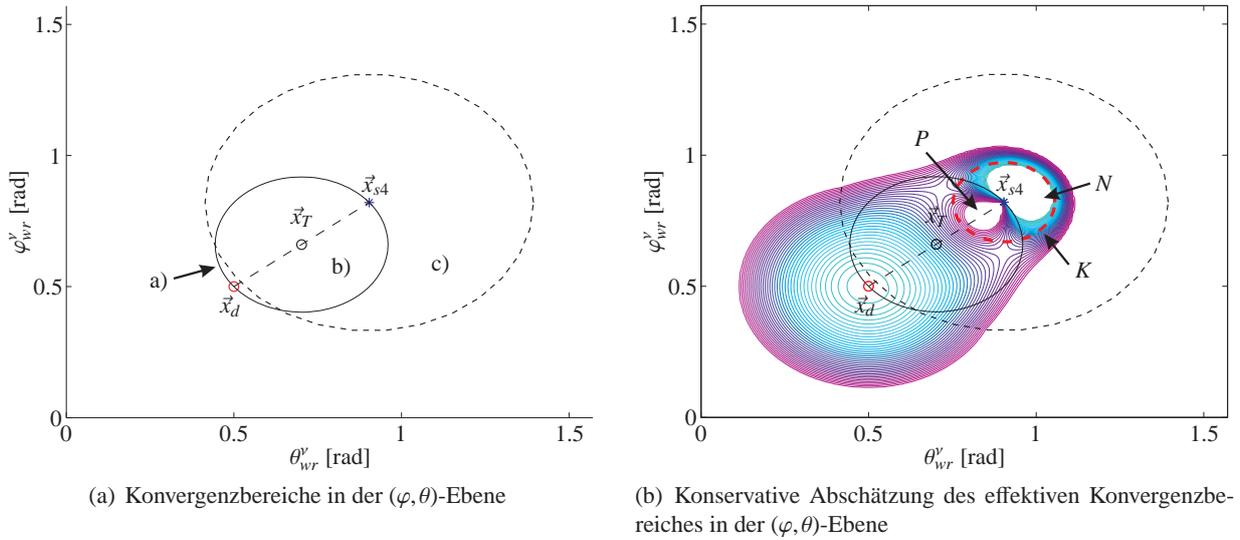


Abbildung D.1: Die Darstellung veranschaulicht die Regionen in der (φ, θ) -Ebene in welche die Fallunterscheidung bzgl. Gleichung (D.37) den Zustandsraum zerlegt. Das linke Bild (Abb. D.1(a)) zeigt die Mengen auf (a), innerhalb (b) und außerhalb (c) des Thaleskreises (schwarze durchgängige Linie). Es bezeichnet \vec{x}_d den Sollwert, \vec{x}_{s4} die Singularität und \vec{x}_T den Mittelpunkt des zugehörigen Thaleskreises. Der schwarz gestrichelte Kreis kennzeichnet den Einflussbereich der repulsiven Potentiale. Das rechte Bild (Abb. D.1(b)) stellt die negativen Höhenlinien in der Umgebung der Singularität für eine Beispielparmetrierung dar. Die Darstellung der Höhenlinien ist dabei auf den Wertebereich zwischen $[0; -2]$ beschränkt. Die mit N gekennzeichnete Region sowie der Außenbereich der Darstellung weisen stark negative Werte (< -2) auf und erfüllen die Forderung, dass die erste Ableitung des Gütekriteriums negativ sein muss. Die mit P gekennzeichnete Region führt hingegen auf positive Werte für die erste Ableitung des Gütekriteriums. Die rot gestrichelte Linie K markiert die Grenze zwischen der konservativen Abschätzung der zulässigen Bereiche. Für alle Punkte welche außerhalb dieses Kreises liegen stellt das Gütekriterium bei der hier gewählten Parametrierung eine valide Lyapunov-Funktion dar. Dabei gilt wie bisher, dass die Sollgrößen beliebige sind, aber außerhalb des Wirkungsbereichs der Singularitäten liegen sollen. Parametrierung (einheitenlos): $k_p = 2.0$, $\vec{x}_d = (0.5, 0.5)^T$, $k_r = 2.5$, $d_0 = 1.4$, $(a, b) = (0.35, 0.35)$, $m = 0.75$, $\lambda'_1 = 2.0$, $\lambda'_r = 2.5$, $r_1 = 0.165$, $\lambda_{13} = 5.5$. Die Parametrierung des Reglers entspricht dabei im wesentlichen der zuvor (Abb. 5.5) für den gewöhnlichen potentialfeldbasierten Regler gewählten Parametrierung.

Dies ist unmittelbar klar, wenn man sich kurz die geometrische Bedeutung dieser Ungleichung veranschaulicht. Es beschreibt $\|d(\vec{x}) - d_0\|$ den Abstand eines Punktes zu einem Kreis um $(x_{1,s}, x_{2,s})^T$ mit Radius d_0 . Es beschreibt $\|\vec{x}\|$ den Abstand eines Punktes zum Ursprung $\vec{0}$. Wenn \vec{x} innerhalb des Kreises und $\vec{0}$ außerhalb des Kreises liegt ist klar, dass der Abstand zwischen Ursprung und betrachtetem Punkt größer als der von Kreis und betrachtetem Punkt ist. Der gleiche Zusammenhang gilt auch, wenn statt dem euklidischen Abstandsmaß ein elliptisches Abstandsmaß zwischen Ursprung und betrachtetem Punkt verwendet wird. Das ist Voraussetzung dafür, dass die folgenden Stabilitätsbetrachtungen auch auf andere konvexe Hindernissen übertragbar sind.

Bezüglich Ungleichung (D.37) lassen sich im wesentlichen 3 Fälle unterscheiden. Der Cosinus des Winkels ψ kann gleich, kleiner oder größer Null sein. Diese Fallunterscheidung teilt den Zustandsraum innerhalb des Einflussbereichs der Singularitäten in drei Bereiche (Abb. D.1). Für den Fall a), in welchem der Cosinusterm gerade Null ist, sind die zugehörigen Punkte im Zustandsraum gerade durch die Zustände gegeben, welche auf dem Thaleskreis von $\vec{0}$ nach \vec{x}_s liegen. Fall b) sind dann alle Zustände innerhalb dieses Thaleskreises und Fall c) alle Zustände außerhalb des Thaleskreises. Dabei ist zu beachten, dass diese Fallunterscheidung jeweils nur innerhalb des Wirkungsradius der repulsiven Potentiale relevant ist, da der Term \dot{J}_{II} sonst ohnehin verschwindet.

Untersucht man (D.37) für Fall a), so vereinfacht sich (D.37) zu

$$0 \geq \frac{1}{2}r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2}\lambda'_r + \frac{\|\vec{x}\|^2}{|d(\vec{x}) - d_0|^2} \left(-\lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2}\lambda'_1 + \frac{1}{2}r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \right). \quad (\text{D.39})$$

Liegt \vec{x} dicht am Rand des Wirkungsbereichs des repulsiven Potentials, so wird der Quotient über die Abstände gegen Unendlich streben und der quadratische Term dominiert die Ungleichung. Um die Ungleichung zu erfüllen genügt es in diesem Fall, wenn der zugehörige Koeffizient A kleiner Null ist.

Nähert man sich der Singularität, so wird der Quotient monoton abfallen. Liegt \vec{x} sehr dicht am Rand des Wirkungsbereichs, so strebt der Quotient gegen Eins, wird aber immer größer Eins bleiben

$$\frac{\|\vec{x}\|^2}{|d(\vec{x}) - d_0|^2} \rightarrow 1^+ .$$

Für Fall a) lässt sich die resultierende Ungleichung also zu

$$0 \geq \frac{1}{2}r_1 \frac{k_r^2}{m^2} + \frac{1}{2}\lambda'_r - \lambda_{13} \frac{k_p}{m} + \frac{1}{2}\lambda'_1 + \frac{1}{2}r_1 \frac{k_p^2}{m^2} \quad (\text{D.40})$$

nach oben abschätzen. Ungleichung (D.40) gibt eine Bedingung für die untere Grenze von λ_{13} an.

Die Bedingung die sich aus Ungleichung (D.40) ergibt ist wichtig für die Abschätzung der verbliebenen Fälle. Soll das repulsive Potential stark genug sein, um sicherzustellen, dass die Singularitäten gemieden werden, so muss k_r in der Regel signifikant größer als k_p sein. Sonst könnte der betrachtete Regler die Singularitäten gegebenenfalls „überfahren“. Damit Ungleichung (D.40) dennoch erfüllt sein kann, muss also im Allgemeinen gelten

$$\lambda_{13} > r_1 \frac{k_p}{m} .$$

Dabei ist zu beachten, dass dies eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung ist.

Mit dieser Abschätzung erkennt man jedoch, dass der Term B in (D.37) immer kleiner Null sein wird, wenn (D.37) unabhängig vom gegenwärtigen Zustand erfüllbar sein soll. Damit folgt unmittelbar, dass die Ungleichung (D.37) auch in Fall b), in welchem der Cosinusterm nur negative Werte annimmt, immer erfüllt ist, wenn Sie für Fall a) erfüllt ist. Die Erfüllung der Ungleichung (D.40) ist damit eine hinreichende Bedingung für negative Semidefinitheit der Ableitung des Gütekriteriums in den Fällen a) und b).

Zu untersuchen ist nun noch Fall c), also der Fall in welchem der Cosinusterm positive Werte annimmt. Dazu soll wiederum der Grenzfall

$$\frac{\|\vec{x}\|^2}{|d(\vec{x}) - d_0|^2} \rightarrow 1^+ ,$$

welcher die obere Grenze der Ungleichung (D.37) abschätzt, betrachtet werden. Zusätzlich soll angenommen werden, dass

$$\cos(\psi) = 1 \quad (\text{D.41})$$

gilt. Dies entspricht gerade dem Fall, dass Zustand, Ursprung und Singularität auf einer Geraden liegen, wobei der gegenwärtige Zustand des Systems dicht an der Singularität liegt und die Singularität zwischen

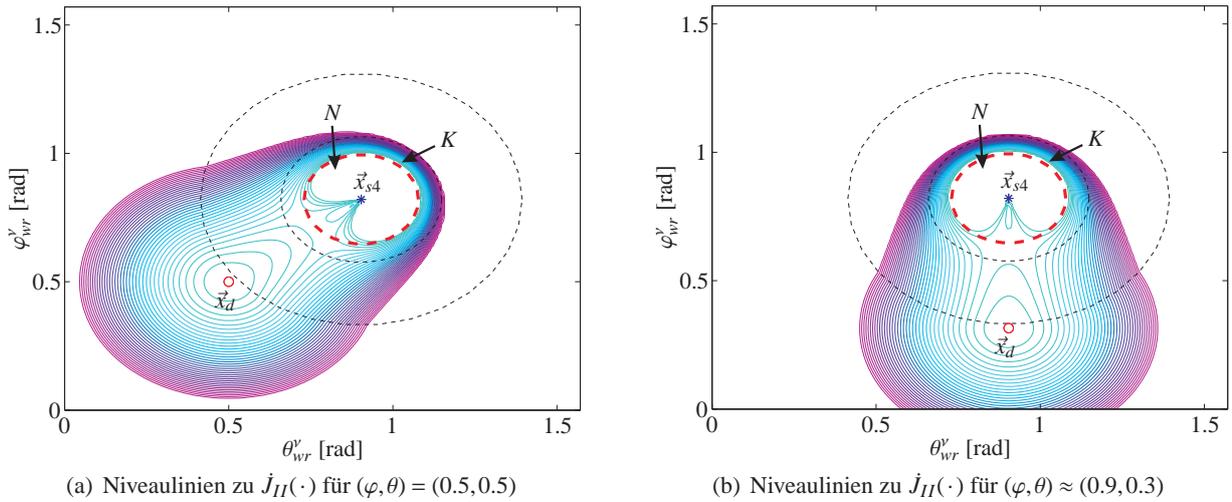


Abbildung D.2: Die Darstellung veranschaulicht die Niveaulinien in $[0; -2]$, die sich für eine weniger konservative Beispielparmetrierung ergeben. Im Dargestellten Fall ist Ungleichung (D.40) nicht erfüllt. Es lässt sich dennoch eine konservative Grenze K (roter gestrichelter Kreis) definieren, außerhalb der das Gütekriterium eine valide Lyapunov-Funktion darstellt. Es ist wieder \vec{x}_d der Sollwert und \vec{x}_{s4} die nächstgelegene Singularität. Der größere schwarz gestrichelte Kreis beschreibt den Wirkungsbereich des Potentials. Es bezeichnet P die Menge der Punkte, für welche die erste Ableitung des Gütekriteriums positive Werte annimmt. Parametrierung (einheitenlos): $r_1 = 0.165$, $\lambda_{13} = 5.5$, übrige Parameter identisch zur Wahl für Abbildung D.1.

gegenwärtigem Zustand und Ursprung liegt. In diesem Fall lässt sich (D.37) zu

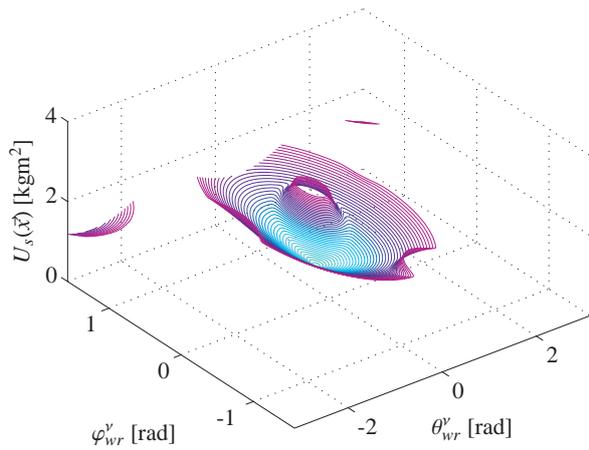
$$\lambda_{13} \left(\frac{k_r}{m} - \frac{k_p}{m} \right) + \frac{r_1}{2m^2} (k_p - k_r)^2 + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} \lambda'_r \leq 0$$

abschätzen. Unter der Annahme, dass weiterhin k_p kleiner sei als k_r , existiert nur die triviale Lösung

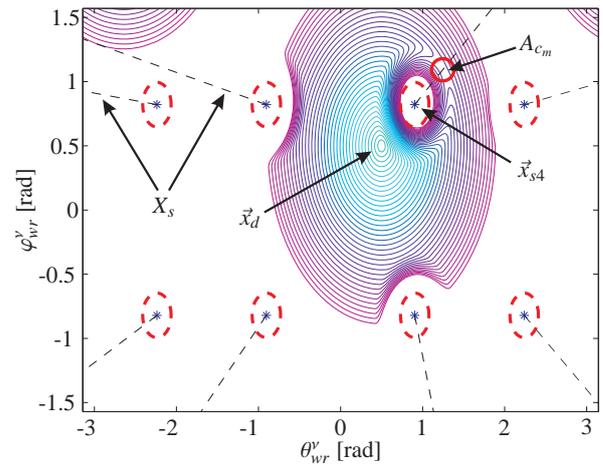
$$\lambda_{13} = r_1 = \lambda'_1 = \lambda'_r = 0 \quad (\text{D.42})$$

für diese Ungleichung. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass die Erfüllung des vierten Kriteriums bei den vorgenommenen Abschätzungen unabhängig von der konkreten Parametrierung nicht für den gesamten Arbeitsraum gezeigt werden kann. Der Kreuzterm \dot{J}_{II} wird, wenn die Zielkonfiguration dicht am Wirkungsbereich der repulsiven Potentiale liegt, in einer hinreichend kleinen Umgebung der Singularitäten größer Null werden. Da für Zustände in der Umgebung der Wirkungsbereichsgrenze der quadratische Term dominant ist, werden diese Umgebungen bei Erfüllung von Ungleichung (D.40) immer konvexe Regionen auf der dem Ursprung abgewandten Seite der Singularität bilden. Die Ausdehnung dieser Umgebung hängt von den gewählten Parametern bezüglich des Reglers bzw. des Gütekriteriums ab. Abbildung D.2 zeigt für eine Beispielparmetrierung die zu zwei Sollkonfigurationen gehörenden Höhenlinien (Abb. D.2(a) bzw. D.2(b)), die eine Folge solcher Umgebungen abgrenzen.

Das bedeutet, es existiert ein Unterraum D_J des Zustandsraums \mathbb{X} , in welchem die vierte Bedingung erfüllt und $\Phi(\cdot)$ eine Lyapunov-Funktion ist. Dieser Unterraum geht durch Ausschluss der Singularitäten, wegen der Forderung der stetigen Differenzierbarkeit sowie der Regionen in welchen (D.37) nicht erfüllt ist, aus dem gesamten Zustandsraum hervor. Begrenzt man die zulässigen Endzustände auf eine geschlossene Niveaumenge bzw. Subniveaumenge X_f , welche eine Teilmenge des Unterraums D_J ist, ist die erste und dritte Forderung implizit erfüllt. Die zweite Forderung ist weiterhin trivial erfüllt. Damit ist der vorgeschlagene modellprädiktive Regler in X_f asymptotisch stabil.



(a) Bestrafung des Endzustandes im Einzugsbereich des Reglers über (φ, θ)



(b) Höhenlinien der Bestrafung nach Projektion in die (φ, θ) -Ebene

Abbildung D.3: Potential und zugehörige Höhenlinien in (φ, θ) -Ebene für den geschlossenen Regelkreis bzw. die zugehörige Lyapunov-Funktion. Wie zuvor ist \vec{x}_d der Sollzustand und \vec{x}_{s4} die nächstgelegene Singularität. Die fett gestrichelt dargestellten, roten Kreise markieren die Grenze der Bereiche in welchen die erste Ableitung des Gütekriteriums positiv ist. Die Höhenlinien sind für den Wertebereich dargestellt, welcher bei der gewählten Parametrierung außerhalb der kritischen Bereiche liegt. Der rote Kreis markiert die Region A_{cm} in welcher sich der im Potential am tiefsten gelegene Sattelpunkt befindet. Man kann erkennen, dass für die gewählte Parametrierung die bereits für den Potentialfeld-Regler formulierte Forderung nach geschlossenen Höhenlinien restriktiver ist, als die Einschränkungen, welche sich aus der Forderung nach negativen Definitheit der Ableitung des Gütekriteriums ergeben. Die zusätzlich dargestellten schwarzen, gestrichelten Linien markieren die Zustände X_s welche auch bei Optimierung auf die Sattelpunkte führen. Das Gütekriterium wurde unter der Randbedingung $(x_3, x_4) \equiv \vec{0}$ ausgewertet. Es wurde die gleiche Parametrierung wie in Abbildung D.1 verwendet. Die Parametrierung des Reglers ist bis auf die Form der repulsiven Potentiale identisch zu der zuvor (Abb. D.1) verwendeten Parametrierung. Um die Darstellung zu vereinfachen wurde der erste Hauptachse der Ellipse zu $a = 0.35$ gesetzt, womit sich kreisförmige Wirkungsbereiche für die Potentiale ergeben.

Näherungsweise geht diese Menge X_f aus der bereits für den Potentialfeld-Regler eingeführten Subniveaumenge D_c hervor. Nach Föllingers Kriterium für Stabilität im Großen war dort der Einzugsbereich des Reglers bereits auf den Unterraum reduziert worden, in welchem die Lyapunov-Funktion eine geschlossene Höhenlinie aufwies. Dieser Linie war ein Niveau c zugeordnet. Reduziert man c bzw. die zugehörige Subniveaumenge D_c nun soweit, das sie vollständig in D_J liegt erhält man X_f (Abb D.3).

Wie zuvor ist zu beachten, dass die direkte Methode nach Lyapunov ein hinreichendes aber kein notwendiges Kriterium für Stabilität ist. Der Einzugsbereich X_f ist daher eine konservative Abschätzung des Einzugsbereichs X'_f in welchem asymptotische Stabilität gilt. Wie zuvor zeigt die Betrachtung der Zustandstrajektorien des geregelten Systems für den finalen Regler, dass das System in endlicher Zeit auf den Ursprung geführt wird. Lediglich für Anfangszustände, die auf der Geraden durch Ursprung und Singularität liegen, wird der Ursprung nicht erreicht. Hier existiert eine lokale, instabile Ruhelage.

Abschätzung des zulässigen Parameterraums

Die Bedingung dass der Kreuzterm \dot{J}_{II} negativ semidefinit sei, führt auf einen begrenzten Einzugsbereich X_f , in welchem asymptotische Stabilität nach der direkte Methode von Lyapunov möglich ist. Eine weitere Voraussetzung ist allerdings, dass auch der zweite Term \dot{J}_I (D.32) negativ semidefinit sein muss. Betrachtet man diesen Term, so ergeben sich zusätzliche Gleichheits- und Ungleichheitsbedingungen, welche die Parameter des Gütekriteriums bzw. des Reglers erfüllen müssen. Nur wenn eine nicht-leere Menge des

Parameterraums existiert, deren Elemente alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen kann für den gewählten Ansatz asymptotische Stabilität nach Lyapunov gezeigt werden.

Zusätzlich müssen die zur Analyse des Terms J_{II} gemachten Annahmen und Vereinfachungen hier ebenfalls gelten. Für die Parameter des Gütekriteriums ergeben sich damit die ersten drei Gleichheitsbeziehungen

$$\lambda_{13} = \lambda_{24} \qquad \lambda'_1 = \lambda'_2 \qquad r_1 = r_2 . \qquad (D.43)$$

Es gelte auch weiterhin die Annahme, dass k_p kleiner k_r sei. Davon abgesehen sollen zunächst keine weiteren Festlegungen hinsichtlich der Parametrierung des Reglers getroffen werden. Die Parameter des Reglers werden im Folgenden als fest vorgegeben angenommen. Es wird der zulässige Parameterraum des Gütekriteriums in Abhängigkeit von der gegebenen Parametrierung bestimmt.

Betrachtet man die Koeffizienten in Term J_I (D.32), so erkennt man, dass sich die beiden Teilsysteme (x_1, x_3) und (x_2, x_4) wieder getrennt betrachten lassen, wobei die sich aus ihren Koeffizienten ergebenden Bedingungen vollständig symmetrisch sind. Das bedeutet, der zulässige Parameterraum bezüglich λ_2 , λ_4 und λ_{24} ist identisch zum zulässigen Parameterraum für λ_1 , λ_3 und λ_{13} . Daher wird im Folgenden lediglich eines der beiden Teilsysteme analysiert.

Zunächst ergibt sich für die Kreuzterme in J_I die Forderung, dass die zugehörigen Koeffizienten identisch Null werden sollen

$$-\lambda_3 \frac{k_r}{m} + \lambda_r + r_1 \frac{k_v k_r}{m^2} = 0 \qquad (D.44)$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 \frac{k_p}{m} - \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda'_{13} + r_1 \frac{k_p k_v}{m^2} = 0 . \qquad (D.45)$$

Aus dem verbleibenden quadratischen Term ergibt sich die Ungleichheitsbedingung

$$-\lambda_3 \frac{k_v}{m} + \lambda_{13} + \frac{1}{2} \lambda'_3 + \frac{1}{2} r_1 \frac{k_v^2}{m^2} \leq 0 . \qquad (D.46)$$

Gleichzeitig muss die aus J_{II} erwachsende Ungleichheitsbedingung (D.40)

$$\frac{1}{2} \lambda'_r + \frac{1}{2} \lambda'_1 + \frac{1}{2} r_1 \left(\frac{k_p^2}{m^2} + \frac{k_r^2}{m^2} \right) - \lambda_{13} \frac{k_p}{m} \leq 0 \qquad (D.47)$$

erfüllt sein. Zusätzlich gelten weiterhin die Bedingungen hinsichtlich der positiven Semidefinitheit des Gütekriteriums J

$$\lambda_{13} - \lambda_3 \lambda_1 \leq 0 , \qquad \lambda_3, \lambda_1, \lambda_{13}, \lambda_r \geq 0 , \qquad (D.48)$$

$$\lambda'_{13} - \lambda'_3 \lambda'_1 \leq 0 , \qquad \lambda'_3, \lambda'_1, \lambda'_{13}, \lambda'_r, r_1 \geq 0 . \qquad (D.49)$$

Die Gleichheitsbedingungen können genutzt werden, um einige der Parameter aus den Ungleichungen zu eliminieren. Nutzt man (D.45), so lässt sich r_1 als Funktion

$$r_1 = \frac{m^2}{k_p k_v} \left(\lambda_3 \frac{k_p}{m} + \lambda_{13} \frac{k_v}{m} - \lambda_1 - \lambda'_{13} \right) \qquad (D.50)$$

in Abhängigkeit der Parameter λ_1 , λ_3 und λ_{13} schreiben. Durch Einsetzen des Ergebnisses für r_1 in (D.44)

erhält man unmittelbar eine entsprechende Funktion für λ_r

$$\lambda_r = \frac{k_r}{k_p} \left(\lambda_1 + \lambda'_{13} - \lambda_{13} \frac{k_v}{m} \right). \quad (\text{D.51})$$

Aufgrund der Bedingung, dass r_1 bzw. λ_r größer oder gleich Null sein müssen (D.48), (D.49), erwachsen aus diesen beiden Gleichungen zwei weitere Ungleichungen

$$\lambda_1 + \lambda'_{13} \geq \lambda_{13} \frac{k_v}{m} \quad (\text{D.52})$$

$$\lambda_1 + \lambda'_{13} \leq \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda_3 \frac{k_p}{m}. \quad (\text{D.53})$$

Es ergibt sich also ein Lösungskorridor, in welchem die Summe aus λ_1 und λ_{13} liegen muss

$$\lambda_{13} \frac{k_v}{m} \leq \lambda_1 + \lambda'_{13} \leq \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda_3 \frac{k_p}{m}. \quad (\text{D.54})$$

Setzt man (D.50) in (D.46) und (D.47) ein, so lassen sich zwei neue Ungleichungen

$$\lambda'_3 \leq \left(\lambda_1 + \lambda'_{13} \right) \frac{k_v}{m} + \lambda_3 \frac{k_v}{m} - \lambda_{13} \left(2 + \frac{k_v^2}{k_p m} \right) \quad (\text{D.55})$$

$$\lambda'_r + \lambda'_1 \leq \left(\lambda_1 + \lambda'_{13} \right) \frac{k_p^2 + k_r^2}{k_p k_v} - \lambda_3 \frac{k_p^2 + k_r^2}{k_v m} - \lambda_{13} \frac{k_r^2 - k_p^2}{k_p m} \quad (\text{D.56})$$

bilden, welche die Parameter des Gütekriteriums für den finalen Zustand mit jenen für die Güte der Trajektorie verknüpfen.

Der erlaubte Parameterraum wird dann durch alle Parameter gebildet für die die Ungleichungen (D.52) bis (D.56) sowie die Forderungen (D.48) und (D.49) simultan erfüllt sind.

Es ist offensichtlich, dass die konkrete Form des zulässigen Parameterraums von den Parametern k_p , k_v , k_r und m des geregelten Systems abhängt. Es lässt sich aber zeigen, dass unabhängig von der konkreten Wahl der Parameter der resultierende Parameterraum „nicht-leer“ ist, also immer eine Lösung existiert. Dabei wird eine vernünftige Wahl der Parameter vorausgesetzt:

$$k_p, k_v, k_r, m \geq 0. \quad (\text{D.57})$$

Um zu zeigen, dass für „vernünftige“ Parameter des geregelten Systems immer eine Lösung existiert, genügt es zu zeigen, dass eine Lösung existiert, die unabhängig von den Parametern des geregelten Systems die Ungleichungen erfüllt. Dazu wird der Ansatz gemacht, dass dies gerade für die Parametrierung gilt, für welche die Summe aus λ_1 und λ'_{13} maximal ist. Aus (D.54) ergibt sich

$$\lambda_1 + \lambda'_{13} := \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \lambda_3 \frac{k_p}{m}. \quad (\text{D.58})$$

Setzt man dies in (D.55), so erhält man nach Ausmultiplizieren und Kürzen

$$\lambda'_3 \leq \lambda_3 \frac{k_v}{m} \left(\frac{k_p}{m} \right) - \lambda_{13} \left(2 + \frac{k_v^2 m - k_v^2 k_p}{k_p m} \right). \quad (\text{D.59})$$

Da keine der Ungleichungen den Parameter λ_3 nach oben begrenzt, lässt sich immer ein λ_3 wählen, so

dass die rechte Seite der Ungleichung (D.59) größer Null bzw. größer als ein gewünschtes λ'_3 wird. Damit ist (D.59) unabhängig von der konkreten Parametrierung des geregelten Systems immer erfüllbar.

Durch Einsetzen von (D.58) in (D.56) und Vereinfachen erhält man

$$\lambda'_r + \lambda'_1 \leq \lambda_{13} 2 \frac{k_p}{m}. \quad (\text{D.60})$$

Wieder erkennt man, dass die rechte Seite von (D.60) für „vernünftige“ k_p , m und λ_{13} positiv ist. Damit existieren nicht-triviale Lösungen für λ'_r und λ'_1 , die die Ungleichung erfüllen.

Zu prüfen ist nun noch, ob auch die Ungleichungen (D.48) und (D.49)

$$\lambda_1 \lambda_3 \geq \lambda_{13}^2 \qquad \lambda'_1 \lambda'_3 \geq \lambda_{13}^2$$

in diesem Fall erfüllbar sind. Nutzt man, dass keine der Ungleichungen λ'_{13} explizit begrenzt und wählt

$$\lambda'_{13} := 0,$$

so erkennt man, dass jede nicht-triviale Lösung für λ'_1 , λ'_3 Ungleichung (D.49) erfüllt. Analog folgt, da λ_1 an seiner Obergrenze gewählt wurde und λ_3 nicht nach oben beschränkt ist, dass sich immer ein λ_3 wählen lässt, so dass (D.48) erfüllt ist.

Damit folgt, das unabhängig von der konkreten Parametrierung des geregelten Systems immer eine Parametrierung des Gütekriteriums existiert, für welche der modellprädiktive Regler im Einzugsbereich X_f asymptotisch stabil ist.

Untersuchung des bisherigen Gütemaßes

Für den Entwurf des potentialfeldbasierten Reglers hat es sich als zweckmäßig erwiesen die Proportionalitätsfaktoren bzw. die attraktiven und repulsiven Felder unmittelbar in das Gütemaß aufzunehmen. Analog dazu wird nun geprüft, ob die gleiche Wahl

$$\lambda_1 = k_p \qquad \lambda_3 = k_v \quad (\text{D.61})$$

innerhalb des zuvor abgegrenzten, zulässigen Parameterraums für das Gütekriterium J liegt. Des Weiteren werden die Bedingungen abgeleitet, die die verbleibenden Parameter, unter der Voraussetzung dass die vorgenommene Wahl zulässig ist, erfüllen müssen.

Mit dieser Substitution ergeben sich die Ungleichungen zu

$$\lambda_{13} \frac{k_v}{m} \leq k_p + \lambda'_{13} \leq \lambda_{13} \frac{k_v}{m} + \frac{k_v k_p}{m} \quad (\text{D.62})$$

$$\lambda'_3 \leq \frac{k_v^2}{m} \left(\frac{k_p}{m} + 1 \right) - \lambda_{13} \left(2 + \frac{k_v^2 m - k_v^2 k_p}{k_p m} \right) \quad (\text{D.63})$$

$$\lambda'_r + \lambda'_1 \leq \lambda_{13} 2 \frac{k_p}{m} \quad (\text{D.64})$$

$$\lambda_{13}^2 \leq k_v k_p \quad (\text{D.65})$$

$$\lambda_{13}^2 \leq \lambda'_1 \lambda'_3 \quad (\text{D.66})$$

Um zu prüfen ob eine Lösung für dieses System von Ungleichungen existiert werden die maximal möglichen Werte für λ'_1 (D.64) und λ'_3 (D.63) sowie der minimal mögliche Wert für λ'_{13} (D.62) in Ungleichung

(D.66) eingesetzt. Es ergibt sich die Ungleichung

$$\left(\lambda_{13} \frac{k_v}{m} - p\right)^2 \leq \underbrace{\left(\frac{k_v^2}{m} \left(\frac{k_p}{m} + 1\right) - \lambda_{13} \left(2 + \frac{k_v^2 m - k_v^2 k_p}{k_p m}\right)\right)}_A \cdot \underbrace{\left(\lambda_{13} 2 \frac{k_p}{m} - \lambda'_r\right)}_B. \quad (\text{D.67})$$

Der quadratische Term auf der linken Seite der Ungleichung wird gerade minimal für

$$\lambda_{13} = \frac{k_p m}{k_v}. \quad (\text{D.68})$$

Wenn die Terme A und B für diese Substitution das gleiche Vorzeichen aufweisen, ist Ungleichung D.67 erfüllt. Da zusätzlich die Ungleichungen (D.63) und (D.64) erfüllt sein müssen folgt, dass sowohl A als auch B positiv sein müssen. Für Term B ist diese Forderung erfüllt, so lange

$$\lambda'_r \leq \frac{2k_p^2}{k_v} \quad (\text{D.69})$$

gilt. Für Term A erhält man nach Substitution und Vereinfachung

$$\frac{k_v^3}{m^3} k_p + \frac{k_v^2}{m^2} k_v - 2k_p - \frac{k_v^2}{m} m + \frac{k_v^2}{m} k_p \geq 0. \quad (\text{D.70})$$

Die vorgeschlagene Parametrierung des Gütekriteriums ist also nicht für beliebige Parameter des geregelten Systems zulässig. Aus (D.70) erwachsen Bedingungen an die Parameter des geregelten Systems. Eine konservative Abschätzung zeigt jedoch, dass eine geeignete Parametrierung existiert. So löst

$$k_v \geq m \sqrt[3]{2} \quad k_p \geq m \quad (\text{D.71})$$

Ungleichung (D.70). Gilt zusätzlich

$$k_v \geq \sqrt[3]{k_p m^2}, \quad (\text{D.72})$$

so erfüllt die Substitution für λ_{13} gleichzeitig Ungleichung (D.65).

Die Substitution (D.61) ist damit ein valider Ansatz für die Bestimmung des Gütekriteriums. Die restlichen Parameter ergeben sich über die Ungleichungen (D.62) bis (D.66). Der Ansatz ist allerdings nicht allgemeingültig. Es muss in jedem Fall geprüft werden, ob das spezifische System die Ungleichungen erfüllt.

E Optimierung – analytische und numerische Ansätze

E.1 Pontryagin-Minimum-Prinzip

Wie in (Kirk 2004) erläutert ist der Grundgedanke des Pontryagin Minimum Prinzips (PMP), dass eine optimale Stellgröße \vec{u}^* die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}(t), t) = \mathcal{L}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) + \vec{p}^T(t) \vec{d}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (\text{E.1})$$

minimiert

$$\mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t) \leq \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}(t), \vec{p}^*(t), t). \quad (\text{E.2})$$

Dabei wird $\vec{p}(t)$ als der Costate-Vector bzw. als Lagrange-Multiplikator bezeichnet. Die Einführung der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt es, eine theoretische Abweichung der Systemdynamik \vec{d} gegen die Minimierung des Gütemaßes bezüglich der Systemtrajektorie \mathcal{L} abzuwägen.

Diese Formulierung ist analog zum Aufstellen der Hamilton-Funktion in der Mechanik

$$\mathcal{H}^* = \vec{p}^T \vec{q} - \mathcal{L}^*. \quad (\text{E.3})$$

Hier bezeichnet \vec{p} den Impuls und \vec{q} die verallgemeinerte Geschwindigkeit – also die Änderung \vec{d} der Zustände \vec{x} des Systems – und \mathcal{L}^* die nach der Konvention der Mechanik definierte Lagrange-Funktion. In der klassischen Mechanik ist das in der Regel die Differenz aus potentieller und kinetischer Energie.

Der Ansatz nach (E.2) bzw. (E.3) führt, wie in (Kirk 2004) gezeigt auf die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{p}} \quad (\text{E.4})$$

$$\dot{\vec{p}}^*(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{x}}, \quad (\text{E.5})$$

welche in der Physik die Berechnung der auf ein verallgemeinertes Teilchen wirkenden Kraft bzw. der Geschwindigkeit eines verallgemeinerten Teilchens erlauben. Im Zusammenhang mit der Systemtheorie bzw. der Optimierung von Funktionalen ergibt sich zusätzliche die Bedingung

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \Phi(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f) - \vec{p}^*(t_f) \right)^T \delta \vec{x}(t_f) + \left(\mathcal{H}(\vec{x}^*(t_f), \vec{u}^*(t_f), \vec{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f) \right) \delta t_f, \quad (\text{E.6})$$

welche die Einbeziehung von Bedingungen hinsichtlich des Endzustandes eines Systems erlaubt. Kirk gibt (vgl. (Kirk 2004), Tabelle S. 200) einen Überblick über verschiedene Endbedingungen sowie die daraus erwachsenden Implikationen für (E.6). Ist, wie bei dem hier betrachteten Problem, der Endzeitpunkt für die Optimierung fest vorgegeben, hier durch den Horizont N , der finale Zustand selbst aber frei, so ergibt

sich aus (E.6) die zusätzliche Bedingung

$$\vec{p}^*(t_f) = \frac{\partial \Phi(\vec{x}^*(t_f))}{\partial \vec{x}}. \quad (\text{E.7})$$

Dabei ist zu beachten, dass die Erfüllung der zuvor genannten Kriterien lediglich eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung dafür ist, dass \vec{u}^* optimal ist.

Für Systeme mit unbeschränkten Stellgrößen, für die

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}}, \quad (\text{E.8})$$

gilt, lässt sich ein hinreichendes Kriterium über die zweite Ableitung der Hamilton-Funktion bezüglich \vec{u} finden. Ist

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}^2} = \mathbf{R} \quad (\text{E.9})$$

positiv definit, so ist \vec{u}^* zumindest ein lokales Minimum. Kirk gibt weitere Kriterien, aus welchen sich zusammen mit (E.8) und (E.9) letztlich auch folgern lässt, dass \vec{u}^* ein globales Minimum ist.

Es ist anzumerken, dass die Formulierung eines Optimierungsproblems nach (E.4) bis (E.8) noch keine Aussage über die Lösbarkeit dieses Problems erlaubt. So ist es möglich, dass der Lösungsraum bzgl. des Optimierungsproblems singuläre Bereiche aufweist. In solchen Bereichen lässt das Pontryagin Minimum Prinzip (E.2) keine Aussage hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Optimierungsgrößen \vec{x}^* , \vec{u}^* und \vec{p}^* zu. Nach Kirk ist das Optimierungsproblem gerade dann frei von Singularitäten, wenn zum einen die erste Ableitung des Gütekriteriums stetig ist. Und wenn zum anderen für den Anteil des Gütekriteriums bezüglich des Endzustands $\Phi(\cdot)$ zusätzlich gilt, dass die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig oder zumindest symmetrisch sind

$$\frac{\partial^2 \Phi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_i}. \quad (\text{E.10})$$

E.2 Potentialfeldansatz und Gradientenabstieg

Der Grundgedanke potentialfeldbasierter Regler ist die Ermittlung des Regelgesetzes durch Auswertung des Gradienten eines Potentialfelds im gegenwärtigen Zustand. Ein potentialfeldbasierter Regler ist damit letztlich ein linearer bzw. nichtlinearer Kennfeldregler.

In Abschnitt 5 wurden die Eigenschaften wie Stabilität und Einzugsbereich des hier vorgeschlagenen Reglers im kontinuierlichen Zeitbereich untersucht und diskutiert. Bei der Implementierung wird der Regler unweigerlich diskretisiert werden. Vor dem Hintergrund der Potentialfelder und damit verbundenen Zustandsabhängigkeit des Regelgesetzes kann es hier insbesondere im Zusammenhang mit den repulsiven Potentialen zu Problemen kommen.

Ursache dafür ist, dass bei endlicher Zeitauflösung die zugrunde liegende kontinuierliche Differentialgleichung zweiter Ordnung lediglich angenähert werden kann. Bei zeitdiskreter Darstellung ergibt sich die

Dynamik des Systems zu

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{A}\vec{x}_k + \mathbf{B}\vec{u}_k \quad (\text{E.11})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\Delta T^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\Delta T^2}{m} \\ \frac{\Delta T}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T}{m} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

Die Messgleichung bleibt für das hier betrachtete System unverändert

$$\vec{y}_k = \mathbf{C}\vec{x}_k + \mathbf{D}\vec{u}_k \quad (\text{E.13})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{4 \times 2}. \quad (\text{E.14})$$

Die Bestimmung von \vec{u}_k als den Gradienten des Potentialfelds $V(\vec{x})$ an der Stelle \vec{x}_k entspricht einer Linearisierung der Trajektorie des geregelten Systems bezüglich der Zeit t in diesem Zustand \vec{x}_k . Diese Näherungslösung ist, wie bei Linearisierung üblich, so lange gültig, wie die Nichtlinearitäten im Arbeitspunkt nicht zu stark sind bzw. der Bereich ΔT in welchem man die Linearisierung nutzt, klein ist. In der Umgebung der Singularitäten sind diese Forderungen nicht immer erfüllt.

Zunächst soll jedoch noch knapp das System ohne Singularitäten betrachtet werden. Ein bekanntes Problem ist zum Beispiel, dass es zu einem „Overshoot“ des Zustands über eine Gleichgewichtslage kommen kann. Befindet man sich zum Zeitpunkt t_k dicht an der Gleichgewichtslage, in einem Zustand $x(t_k)$, der bei kontinuierlicher Betrachtung innerhalb von ΔT auf die Gleichgewichtslage konvergieren würde, so kann es vorkommen, dass die Linearisierung und Prädiktion auf einen Zustand t_{k+1} führt, der die Gleichgewichtslage bereits überquert hat. Es kann zu Oszillation um die Gleichgewichtslage kommen.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu beseitigen ist, zu prüfen ob zwischen aktuellem und prädizierten Zustand eine Nullstelle in einer der Komponenten des Kraftvektors vorliegt und gegebenenfalls die Schrittweite zu halbieren. Ein solcher Prozess kann mehrfach bei jeweiliger Halbierung der Schrittweite iteriert und zur Berechnung einer angepassten Stellgröße genutzt werden. Zusätzlich wird für gewöhnlich die Stellgröße zu Null gesetzt, sobald die Regelgröße einen bestimmten Bereich um die Nulllage erreicht hat. Diese Methode wurde z.B. im Zusammenhang mit der Bahnoptimierung für das Gesamtsystem implementiert. Dieses arbeitet mit einer erheblich langsameren Taktung.

Nachteilig ist, dass dieser Ansatz durch die zusätzliche Prädiktion des Zustands, die Prüfung auf Überqueren einer Nullstelle sowie die gegebenenfalls nötigen Iterationen, die Rechenlast erheblich steigert. Während sich das in der Umgebung der Ruhelage kaum vermeiden lässt, sind in der Umgebung anderer Gleichgewichtslagen größerer Näherungslösungen oft hinreichend.

Weitere Gleichgewichtslagen existieren zum Beispiel, wenn die dissipative Kraft sich mit den attraktiven bzw. repulsiven Kräften gerade aufhebt. In diesem Fall liegt eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit vor. Gleichungen (5.50) sowie (5.53) und (5.53) bestimmen diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit

$$\vec{x}_{v,eq} = \frac{\vec{F}_{att} + \vec{F}_{rep}}{k_v} \quad (\text{E.15})$$

unter der Vereinfachung, dass die Proportionalitätskonstanten im betrachteten Zeitintervall konstant seien. Dabei bezeichnet $\vec{x}_{v,d}$ gerade die Zustände, welche mit der „Geschwindigkeit“ der ursprünglichen Zustandsvariablen in Verbindung gebracht werden können und durch die Augmentierung des Systems (5.24) in Abschnitt 5.2.1 teil des Zustandsvektors geworden sind. Einen Hinweis auf das Überschreiten

einer Gleichgewichtslage liefert der Vergleich der Gleichgewichtsgeschwindigkeit nach (E.15) mit dem auf Basis der gegenwärtigen Stellgrößen prädierten Zustand

$$\vec{x}_{v,k+1} = \Delta T \left(\vec{F}_{att} + \vec{F}_{rep} + \vec{F}_{dis} \right). \quad (E.16)$$

Ist die Differenz Δv_{k+1} zwischen gegenwärtigem und prädiertem Zustand größer, als die Differenz Δv_{eq} zwischen gegenwärtigem Zustand und Gleichgewichtslage

$$\Delta v_{k+1} = \vec{x}_{v,k+1} - \vec{x}_{v,k} \quad \Delta v_{eq} = \vec{x}_{v,eq} - \vec{x}_{v,k}, \quad (E.17)$$

so liegt voraussichtlich eine Überschreitung der Gleichgewichtslage vor. Dabei ist zu beachten, dass dies aufgrund der zuvor gemachten Annahme, dass die Proportionalitätskonstanten innerhalb von ΔT konstant sind, nicht im Allgemeinen gilt. Es gilt jedoch immer, wenn alle Potentiale in abfallende Richtung eine positive Krümmung aufweisen, wenn also ihre zweite Ableitung in Richtung des negativen Gradienten größer Null ist. Das gilt für die hier relevanten Lösungsäste von quadratischen, kubischen oder hyperbolischen Funktionen. Ein Gegenbeispiel wären die von Khatib (Khatib 1986) vorgeschlagenen „FIRAS“-Funktionen.

Falls die Überquerung einer Gleichgewichtssituation vorliegt kann eine Verbesserung der numerischen Lösung des Regelungsproblems durch eine Anpassung der tatsächlich beaufschlagten Stellgröße \tilde{u} erzielt werden. Durch Inversion der Systemdynamik lässt sich die Stellgröße errechnen, welche gerade auf die Gleichgewichtslage führt

$$\tilde{u}_k = \mathbf{B}_{vv}^{-1} \left(\tilde{x}_{v,k+1} - \mathbf{A}_{vv} \vec{x}_{v,k} \right) \quad (E.18)$$

$$\tilde{x}_{v,k+1} = \begin{cases} \vec{x}_{v,k+1} & \Delta v_{k+1} \leq \Delta v_{eq} \\ \vec{x}_{v,eq} & \Delta v_{eq} < \Delta v_{k+1} \end{cases}. \quad (E.19)$$

Dabei ist \mathbf{A}_{vv} die Teilmatrix der Matrix \mathbf{A} , welche die Eigendynamik der augmentierten Zustände beschreibt und \mathbf{B}_{vv} ist Analog die Teilmatrix, welche die Stellraten auf die augmentierten Zustände abbildet. Da die augmentierten Zustände gerade die erste Integration der Stellgrößen waren, ist dieses Teilsystem vollständig steuerbar und die Inverse zu \mathbf{B}_{vv} existiert.

Eine Begrenzung des Zustandes \vec{x}_v kann zusätzlich erreicht werden, indem analog dem in (5.51), (5.52) skizzierten Vorschlag Khatibs der abgeschätzte Zustand $\tilde{x}_{v,k+1}$ auf einen zulässigen Bereich beschränkt wird, bevor die Eigentliche Stellgröße nach (E.18) abgeleitet wird:

$$\tilde{u}_k = \mathbf{B}_{vv}^{-1} \left(v \tilde{x}_{v,k+1} - \mathbf{A}_{vv} \vec{x}_{v,k} \right) \quad (E.20)$$

$$v = \min \left(1, \frac{v_{max}}{|\tilde{x}_{v,k+1}|} \right). \quad (E.21)$$

Die Modifikationen nach Gleichung (E.20), (E.21) haben gegenüber dem zuvor vorgestellten Ansatz (5.51), (5.52) den Vorteil, dass sie die Projektion der Trajektorie in die (x_1, x_2) -Ebene nicht verfälschen. Die ursprüngliche Formulierung konnte als Reduktion der Proportionalitätskonstanten k_p und k_r des Reglers interpretiert werden. Das entspricht zwar einer Verminderung der Gesamtenergie des Systems und führt wiederum auf ein asymptotisch stabiles System, allerdings können die Zustandstrajektorien tiefer in den Wirkungsbereich der repulsiven Potentiale eindringen. Vor dem Hintergrund der Vermeidung der singulären Bereiche kann dieses Verhalten kritisch sein.

Der Ansatz nach (E.20), (E.21) kann dagegen als Erhöhung der Zeitauflösung bzw. Verlangsamung der Bewegung des Systems entlang der projizierten Trajektorie betrachtet werden. Dabei verändert sich für

den Fall Δv_{k+1} kleiner Δv_{eq} , das ist der Fall, in welchem die numerische Approximation also hinreichend genau ist, die in die (x_1, x_2) -Ebene projizierte Trajektorie nicht. Lediglich die Geschwindigkeit mit der Sie abgefahren wird ändert sich. Die Modifikation stellt sicher, dass bei einer Anpassung der Stellgrößen das Ergebnis mindestens so stark in Richtung des Gradienten zeigt, wie ohne Anpassung.

E.3 Gradientenabstieg für Singularitätsvermeidung

Das Gradientenabstiegsverfahren zur Minimierung von Gütekriterien bzw. Funktionalen nach Pontryagin (Pontryagin u. a. 1962) basiert, wie in (Kirk 2004) dargelegt, unmittelbar auf der Anwendung der kanonischen Gleichungen (E.4), (E.5)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{p}} \\ \dot{\vec{p}}^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{x}}.\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Stellgrößen zunächst nicht beschränkt seien, lässt sich Gleichung (E.8)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}}$$

nutzen, um einen Ansatz für die optimale Stellgröße \tilde{u} sukzessive zu verbessern.

Dazu wird zunächst ein Ansatz für die Stellgröße \tilde{u} , z.B. unter Verwendung des zuvor entworfenen potentialfeldbasierten Reglers gemacht. Auf Basis dieses Ansatzes und des gegenwärtigen Zustandes $\vec{x}(t_0)$ wird die Entwicklung des Systems bis zum Horizont T_N über

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}(t), \tilde{u}(t), \vec{p}(t), t)}{\partial \vec{p}} \\ &= \vec{a}(\vec{x}(t), \tilde{u}(t), t)\end{aligned}$$

berechnet. Durch Integration bzw. Summation ergibt sich der Endzustand $\tilde{\vec{x}}(t_f)$. Mit diesem Zustand lässt sich der End- bzw. Anfangswert

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{p}}(t_f) &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} h(\tilde{\vec{x}}(t_f)) \\ &= -\mathbf{Q}_p^T \tilde{\vec{x}} - \underbrace{\left(\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right)^T \mathbf{Q}_s^T \xi^T(\vec{x})}_{\sum_{i=1}^N \frac{\partial U_{s,i}}{\partial \vec{x}}}\end{aligned}\tag{E.22}$$

für die Entwicklung der Lagrange-Faktoren bzw. der Costate-Vektoren berechnen. Dabei wurde die Symmetrie der Matrizen \mathbf{Q}_p und \mathbf{Q}_s genutzt. Die Costate-Vektoren werden dann durch Integration „rückwärts“ vom Endzeitpunkt t_f zum Anfangszeitpunkt t_0 über

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{x}(t), \tilde{u}(t), \vec{p}(t), t)}{\partial \vec{x}} \\ &= -\mathbf{Q}_p^T \tilde{\vec{x}} - \left(\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right)^T \mathbf{Q}_s^T \xi^T(\vec{x}) - \mathbf{A}^T \vec{p}(t)\end{aligned}\tag{E.23}$$

ermittelt. Dabei bezeichnet \mathbf{A}' die zeitkontinuierliche Dynamik des Systems.

Damit lässt sich eine Korrektur für die Serie der Stellgrößenvektoren

$$\tilde{\vec{u}}(t) = \tilde{\vec{u}}(t) - \tau \frac{\partial^* \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}^*(t), t)}{\partial \vec{u}} \quad (\text{E.24})$$

$$= \tilde{\vec{u}}(t) - \tau (\mathbf{R}^T \tilde{\vec{u}}(t) + \mathbf{B}'^T \vec{p}(t)) \quad (\text{E.25})$$

errechnen. Es bezeichnet \mathbf{B}' die zeitkontinuierliche Stellgrößenmatrix des Systems. Danach erfolgt eine weitere Iteration dieser Prozedur, wobei nun die korrigierte Serie der Stellgrößen nach (E.24) verwendet wird. Die Prozedur wird so oft wiederholt, bis eine bestimmte Iterationstiefe erreicht oder die Korrektur bzgl. \vec{u} kleiner als eine bestimmte Vorgabe wird.

Bei zeitdiskreter Betrachtung ergibt sich entsprechend

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{A} \vec{x}_k + \mathbf{B} \vec{u}_k \quad (\text{E.26})$$

$$\vec{p}_{k+1} = -\mathbf{A}^T \vec{p}_k - \mathbf{B}_p \left(\mathbf{Q}_p'^T \tilde{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \xi^{\vec{x}}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right)^T \mathbf{Q}_s'^T \xi^{\vec{T}}(\vec{x}) \right), \text{ mit} \quad (\text{E.27})$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T}{m} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\Delta T^2}{m} & 0 & \frac{\Delta T}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\Delta T^2}{m} & 0 & \frac{\Delta T}{m} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.28})$$

bzw. für die Korrektur der Stellgröße

$$\tilde{\vec{u}}_k = \tilde{\vec{u}}_k - \tau (\mathbf{R}^T \tilde{\vec{u}}_k + \mathbf{B}^T \vec{p}_k) \quad (\text{E.29})$$

Dabei ist zu beachten, dass bei diesem Verfahren für gewöhnliche die geeignete Wahl von τ eine kritische Rolle spielt. Ist τ zu klein gewählt, wird es vieler Iteration und damit erheblicher Rechnerkapazität bedürfen um der optimalen Lösung nahe zu kommen. Ist τ zu groß gewählt, so kann das Verfahren instabil werden. Zusätzlich bestehen weiterhin die zuvor diskutierten Probleme hinsichtlich der Integrationsfehler.

Über die Analogie zur Physik lässt sich ähnlich dem Vorgehen bei den Potentialfeld-Reglern eine Ansatz entwickeln, der dieses Probleme mindert. Betrachtet man zunächst wieder das Zeitkontinuierliche System (E.4), (E.5) und vernachlässigt man zunächst die Kreuzterme in \mathbf{Q}_p , so ergibt sich der Anteil der Änderung der Costate-Vektoren, welcher der Ableitung der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\cdot)$ zugeordnet ist zu

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_1} = -q_{11}x_1 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_1} \quad (\text{E.30})$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_2} = -q_{22}x_2 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_2} \quad (\text{E.31})$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_3} = -q_{33}x_3 \quad (\text{E.32})$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_4} = -q_{44}x_4. \quad (\text{E.33})$$

Dabei entsprechen die abgeleiteten Costate-Vektoren gerade den auf das System einwirkenden verallgemeinerten Kräften (E.3). Von Interesse sind gerade wieder die Gleichgewichtslagen. Jene Zustände also, in welchen sich die Kräfte die durch die Geschwindigkeiten, hier also Zustand x_3 und x_4 , verursacht werden sich mit den Kräften, welche ihre Ursache in der Position (x_1, x_2) des Systems haben gegenseitig

aufheben.

Verwendet man zusätzlich, dass aufgrund der Struktur von \mathbf{B}' lediglich die Komponenten $\dot{p}_{\mathcal{L}_3}$ und $\dot{p}_{\mathcal{L}_4}$ einen korrigierenden Einfluss auf $\tilde{\mathbf{u}}$ haben, so lassen sich in Anlehnung an den potentialfeldbasierten Ansatz angepasste Costate-Vektoren

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_1} := 0 \tag{E.34}$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_2} := 0 \tag{E.35}$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_3} := q_{33}(vx_{3,eq} - x_3) \tag{E.36}$$

$$\dot{p}_{\mathcal{L}_4} := q_{44}(vx_{4,eq} - x_4) \tag{E.37}$$

definieren, welche letztlich einer Einregelung auf die Gleichgewichtsgeschwindigkeit entsprechen. Dabei bezeichnet $x_{3,eq}$ bzw. $x_{4,eq}$ hier wieder die Gleichgewichtsgeschwindigkeit, die sich unter der Annahme einstellt, dass die im gegenwärtigen Zustand anliegenden Kräfte innerhalb des betrachteten Zeitabschnitts konstant seien.

Dieser Ansatz begrenzt über die Beschränkung der Costate-Vektoren die Korrektur der Stellgrößenreihe und reduziert damit ein wenig die Problematik der Wahl von τ . Andere Ansätze reduzieren dieses Problem z.B. durch eine Anpassung des Korrekturfaktors τ auf Basis der gegenwärtigen Steigung in der Umgebung des Zustandes.

F Tabellen Messdaten

F.1 Regelung über virtuelle Potentialfelder

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.884	0.207	1.0	0.840	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.947	2.504	9.878	7.849	10.727	0.0	11.940	3600
$\dot{\varphi}_s$	3.108	1.179	2.990	2.229	3.925	0.0	6.230	3600
$\Delta\varphi_s$	0.029	0.087	0.018	0.012	0.027	0.0	1.567	3600
T_Δ	0.001	0.004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.06	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.312	1.791	0.008	0.003	0.033	0.0	42.472	3600
d_{med}	0.393	2.161	0.013	0.005	0.041	0.0	58.209	3600
d_{max}	1.342	6.500	0.055	0.015	0.148	0.0	151.57	3600

Tabelle F.1: Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 1) unter wechselnder Sollwertvorgabe

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.857	0.236	1.0	0.760	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.917	2.460	9.705	7.785	10.713	0.0	12.208	3600
$\dot{\varphi}_s$	5.286	1.920	5.181	3.917	6.628	0.0	11.233	3600
$\Delta\varphi_s$	0.180	0.319	0.066	0.035	0.125	0.0	1.569	3600
T_Δ	0.017	0.033	0.0	0.0	0.020	0.0	0.260	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	1.106	2.791	0.040	0.007	0.805	0.0	50.158	3600
d_{med}	1.461	3.289	0.075	0.014	1.169	0.0	51.668	3600
d_{max}	5.591	12.255	0.272	0.035	5.0	0.0	152.94	3600

Tabelle F.2: Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 2) unter wechselnder Sollwertvorgabe

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.882	0.218	1.0	0.860	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.952	2.455	9.667	7.652	10.785	0.0	12.490	3600
$\dot{\varphi}_s$	7.440	2.655	7.302	5.667	9.114	0.0	17.515	3600
$\Delta\varphi_s$	0.406	0.462	0.187	0.081	0.530	0.0	1.570	3600
T_Δ	0.126	0.140	0.080	0.0	0.200	0.0	0.720	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	1.639	3.093	0.264	0.015	2.075	0.0	41.959	3600
d_{med}	1.956	2.991	0.425	0.031	3.005	0.0	30.139	3600
d_{max}	7.460	11.573	1.567	0.080	11.255	0.0	111.76	3600

Tabelle F.3: Statistische Kenngrößen des PF-Reglers (Set 3) unter wechselnder Sollwertvorgabe

F.2 Regelung über Modellprädiktion

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.913	0.175	1.0	0.920	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.929	2.502	9.884	7.882	10.694	0.0	11.723	3600
$\dot{\varphi}_s$	2.730	1.094	2.736	1.992	3.573	0.0	5.246	3600
$\Delta\varphi_s$	0.025	0.090	0.014	0.008	0.020	0.0	1.566	3600
T_Δ	0.001	0.004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.06	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.357	2.385	0.006	0.002	0.026	0.0	64.390	3600
d_{med}	0.436	2.228	0.010	0.004	0.033	0.0	43.42	3600
d_{max}	1.574	8.129	0.041	0.012	0.128	0.0	155.17	3600

Tabelle F.4: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC, Set 1

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.834	0.211	1.0	0.660	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.947	2.477	9.887	7.867	10.708	0.0	11.942	3600
$\dot{\varphi}_s$	4.172	2.072	4.191	2.497	5.674	0.0	10.257	3600
$\Delta\varphi_s$	0.078	0.195	0.030	0.014	0.052	0.0	1.565	3600
T_Δ	0.005	0.017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.140	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.576	2.363	0.013	0.003	0.073	0.0	45.147	3600
d_{med}	0.676	2.168	0.022	0.007	0.083	0.0	33.679	3600
d_{max}	2.629	8.407	0.077	0.020	0.328	0.0	106.28	3600

Tabelle F.5: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC, Set 2

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.804	0.231	0.920	0.60	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	8.889	2.428	9.782	7.837	10.589	0.0	12.144	3600
$\dot{\varphi}_s$	5.211	2.864	5.141	2.842	7.280	0.0	15.614	3600
$\Delta\varphi_s$	0.145	0.301	0.045	0.017	0.093	0.0	1.568	3600
T_Δ	0.019	0.043	0.0	0.0	0.0	0.0	0.320	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.608	2.179	0.020	0.005	0.127	0.0	55.739	3600
d_{med}	0.694	2.098	0.033	0.009	0.171	0.0	60.913	3600
d_{max}	2.746	7.949	0.115	0.024	0.668	0.0	175.62	3600

Tabelle F.6: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC, Set 3

	Obere Grenze erste Ableitung	Steigung alt. Potential	Steigung rep. Potentiale	Ausdehnung rep. Potentiale	Hauptkomp. φ rep. Potentiale	Hauptkomp. θ rep. Potentiale	Integrationsk. inv. virt. Masse	Dämpfung	Gewichtung Stellenenergie	Optimierung Gain
Set 1	$1/2\pi$	16	90	1.4	0.5	0.4	5.0	3.25	1.0	0.025
Set 2	π	16	90	1.4	0.5	0.4	5.0	3.25	1.0	0.025
Set 3	$3/2\pi$	16	100	1.5	0.5	0.4	5.0	3.0	0.25	0.025

Tabelle F.7: Modellprädiktiver Regler: Untersuchte Parametersets

F.3 Regelung über Reglerumschaltung

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.797	0.224	0.88	0.6	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	11.817	4.85	11.176	8.869	14.858	0.0	27.704	3600
$\dot{\varphi}_s$	3.691	1.413	3.892	2.962	4.608	0.0	15.367	3600
$\Delta\varphi_s$	0.03	0.029	0.023	0.012	0.039	0.0	0.446	3600
T_Δ	0.002	0.001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.16	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.011	0.036	0.006	0.003	0.011	0.0	1.241	3600
d_{med}	0.015	0.033	0.011	0.005	0.018	0.0	1.0	3600
d_{max}	0.054	0.13	0.032	0.015	0.061	0.0	5.0	3600

Tabelle F.8: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC mit Basiswechsel, Set 1

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.71	0.254	0.71	0.46	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	11.33	4.733	11.031	8.731	13.657	0.0	108.57	3600
$\dot{\varphi}_s$	6.404	7.441	5.953	4.195	7.871	0.0	377.6	3600
$\Delta\varphi_s$	0.114	0.224	0.056	0.020	0.110	0.0	1.570	3600
T_Δ	0.034	0.076	0.0	0.0	0.02	0.0	0.72	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.077	0.437	0.015	0.005	0.041	0.0	15.505	3600
d_{med}	0.115	0.602	0.028	0.011	0.063	0.0	21.902	3600
d_{max}	0.476	2.524	0.083	0.030	0.212	0.0	91.367	3600

Tabelle F.9: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC mit Basiswechsel, Set 2

	Mittelwert μ_x	Standard- Abw. σ_x	Median med_x	unteres Per- centil $p_{25,x}$	oberes Per- centil $p_{75,x}$	Minimum min_x	Maximum max_x	Stichprobe N_x
T_e	0.671	0.266	0.640	0.440	1.0	0.020	1.0	3600
$\dot{\varphi}_d$	11.363	7.962	10.944	8.741	13.187	0.0	391.11	3600
$\dot{\varphi}_s$	9.562	24.995	7.728	5.271	10.605	0.0	1333.2	3600
$\Delta\varphi_s$	0.285	0.431	0.097	0.030	0.263	0.0	1.571	3600
T_Δ	0.107	0.163	0.0	0.0	0.16	0.0	1.0	3600
$\sigma(\vec{x}_{IP})$	0.246	0.771	0.032	0.008	0.16	0.0	17.688	3600
d_{med}	0.329	0.779	0.054	0.016	0.259	0.0	15.104	3600
d_{max}	1.395	3.485	0.162	0.044	0.929	0.0	92.65	3600

Tabelle F.10: Statistische Kenngrößen unter wechselnder Sollwertvorgabe – MPC mit Basiswechsel, Set 3

Literaturverzeichnis

- Alexander und Maddocks 1989** ALEXANDER, J. C. ; MADDOCKS, J. H.: On the Kinematics of Wheeled Mobile Robots. In: *The International Journal of Robotics Research* 8 (1989), Nr. 5, S. 15–27
- Bellmann und Dreyfus 1962** BELLMANN, Richard E. ; DREYFUS, Stuart E.: *Applied Dynamic Programming*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1962
- Bellmann und Kalaba 1965** BELLMANN, Richard E. ; KALABA, Robert E.: *Dynamic Programming and Modern Control*. New York : Academic Press, 1965
- Betourne und Campion 1996** BETOURNE, Alain ; CAMPION, Guy: Kinematic Modelling of a Class of Omnidirectional Mobile Robots. In: IEEE (Hrsg.): *1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 1996, April 22-28, 1996, Minneapolis, MN, USA* Bd. 4. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1996, S. 3631–3636
- Bickler 1998** BICKLER, Donald: Roving over Mars. In: *Mechanical Engineering* 120 (1998), Nr. 4, S. 74–77
- Bloch und Baillieul 2003** BLOCH, Anthony M. ; BAILLIEUL, John: *Interdisciplinary applied mathematics Systems and control*. Bd. 24: *Nonholonomic mechanics and control*. New York : Springer, 2003
- Brandstötter 2007** BRANDSTÖTTER, Mathias: *Kinematikbasierte Regelung zur Rekonfiguration fehlerbehafteter mobiler Roboter*. Graz, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 2007
- Brooks u. a. 2009** BROOKS, Alex ; KAUP, Tobias ; MAKARENKO, Alexei: Randomised MPC-based Motion-Planning for Mobile Robot Obstacle Avoidance. In: IEEE (Hrsg.): *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2009, May 12-17, 2009, Kobe, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2009, S. 3962–3967
- Burke und Durrant-Whyte 1993** BURKE, Thomas ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Kinematics for Modular Wheeled Mobile Robots. In: IEEE (Hrsg.) ; RSJ (Hrsg.): *1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 1993, July 26-30, 1993, Yokohama, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1993, S. 1279–1286
- Camacho und Bordons 2007** CAMACHO, Eduardo F. ; BORDONS, Carlos: *Model predictive control*. 2nd ed., [Neudr.]. London : Springer, 2007 (Advanced textbooks in control and signal processing)
- Campion u. a. 1993** CAMPION, Guy ; BASTIN, Georges ; D'ANDRÉA-NOVEL, Brigitte: Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. In: IEEE (Hrsg.): *1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 1993, May 2-6, 1993, Atlanta, GA, USA* Bd. 1. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1993, S. 462–469
- Campion u. a. 1996** CAMPION, Guy ; BASTIN, Georges ; D'ANDRÉA-NOVEL, Brigitte: Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12 (1996), Nr. 1, S. 47–62

- Chengqing u. a. 2000** CHENGQING, L. ; ANG JR, M.H. ; KRISHNAN, H. ; YONG, L.S.: Virtual Obstacle Concept for Local-Minimum-Recovery in Potential-Field based Navigation. In: IEEE (Hrsg.): *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2000, April 24-28, 2000, San Francisco, CA, USA* Bd. 2. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2000, S. 983–988
- Choset u. a. 2005** CHOSET, HOWIE ; LYNCH, Kevin M. ; HUTCHINSON, Seth ; KANTOR, George ; BURGARD, Wolfram ; KAVRAKI, Lydia E. ; THRUN, Sebastian: *Principles of robot motion: Theory, algorithms, and implementation*. Cambridge, Mass. : MIT Press, 2005 (A Bradford book)
- Clavien u. a. 2010** CLAVIEN, L. ; LAURIA, M. ; MICHAUD, F.: Instantaneous centre of rotation estimation of an omnidirectional mobile robot. In: IEEE (Hrsg.): *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2010, May 3-8, 2010, Anchorage, AK, USA*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2010, S. 5435 –5440
- Cohen-Tannoudji u. a. 1999** COHEN-TANNOUJJI, Claude ; DIU, Bernard ; LALOE, Franck: *Quantenmechanik – Teil 1*. Berlin : Walter de Gruyter, 1999
- Connette u. a. 2008a** CONNETTE, Christian P. ; GEBHARD, Gernot ; PFEIFFER, Kai ; ARNDT, Stefanie ; ALBERT, Amos: Akzeptanz und soziale Aspekte beim Einsatz von Service-Robotern in einem alltagsnahen Umfeld. In: *Robotik 2008. Leistungsstand, Anwendungen, Visionen, Trends: Tagung München, 11. und 12. Juni 2008*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2008 (VDI-Berichte), S. 71–74
- Connette u. a. 2009** CONNETTE, Christian P. ; PARLITZ, Christopher ; HÄGELE, Martin ; VERL, Alexander: Singularity Avoidance for Over-Actuated, Pseudo-Omnidirectional, Wheeled Mobile Robots. In: IEEE (Hrsg.): *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2009, May 12-17, 2009, Kobe, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2009, S. 4124–4130
- Connette u. a. 2008b** CONNETTE, Christian P. ; POTT, Andreas ; HÄGELE, Martin ; VERL, Alexander: Control of an pseudo-omnidirectional, non-holonomic, mobile robot based on an ICM representation in spherical coordinates. In: IEEE (Hrsg.): *47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2008, Dec. 9-11, 2008, Cancun, Mexico*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2008, S. 4976 –4983
- Connette u. a. 2010a** CONNETTE, Christian P. ; HOFMEISTER, Stefan ; BUBECK, Alexander ; HÄGELE, Martin ; VERL, Alexander: Model-Predictive Undercarriage Control for a Pseudo-Omnidirectional, Wheeled Mobile Robot. In: *Joint International Conference of ISR/ROBOTIK2010, June 7-9, 2010, Munich, Germany* International Federation of Robotics and VDE Conference Services (Veranst.), VDE Verlag, Berlin; Offenbach, 2010, S. 1178–1183
- Connette u. a. 2010b** CONNETTE, C.P. ; POTT, A. ; HÄGELE, M. ; VERL, A.: Addressing input saturation and kinematic constraints of overactuated undercarriages by predictive potential fields. In: IEEE (Hrsg.): *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems , IROS 2010, Oct. 18-22, 2010, Taipei, Taiwan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2010, S. 4775 –4781
- Cousins u. a. 2010** COUSINS, Steve ; GERKEY, Brian ; CONLEY, Ken ; GARAGE, Willow: Sharing Software with ROS [ros topics]. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 17 (2010), Nr. 2, S. 12–14
- Cutler und Ramaker 1980** CUTLER, C R. ; RAMAKER, BL: Dynamic Matrix Control – a Computer Control Algorithm. In: *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference, Ann Arbor, MI* Bd. 1 University of Michigan Ann Arbor, MI (Veranst.), 1980, S. Wp5–B
- D’Andréa-Novel u. a. 1995** D’ANDRÉA-NOVEL, Brigitte ; CAMPION, Guy ; BASTIN, Georges: Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots by State Feedback Linearization. In: *The International Journal of Robotics Research* 14 (1995), Nr. 6, S. 543–559

- Dietrich u. a. 2011** DIETRICH, A. ; WIMBOCK, T. ; ALBU-SCHÄFFER, A. ; HIRZINGER, G.: Singularity avoidance for nonholonomic, omnidirectional wheeled mobile platforms with variable footprint. In: IEEE (Hrsg.): *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2011, May 9-13, 2011, Shanghai, China*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2011, S. 6136–6142
- DLR Institut für Robotik und Mechatronik 2012** DLR INSTITUT FÜR ROBOTIK UND MECHATRONIK: *Justin*. 2012. – URL http://www.dlr.de/rm/en/desktopdefault.aspx/tabid-3761/6104_read-537/. – Zugriffsdatum: 27.06.2012
- DVORAK - Svahove Sekacky Ltd. 2008** DVORAK - SVAHOVE SEKACKY LTD.: *Spider ILD02 Slope Mower*. 2008. – URL <http://www.slope-mower.com/en/gallery/photos/spider-ild02/>. – Zugriffsdatum: 05.01.2010
- Economou u. a. 2003** ECONOMOU, J. T. ; LUK, P. C. K. ; TSOURDOS, A. ; WHITE, B. A.: Hybrid modelling of an all-electric front-wheel Ackerman steered vehicle. In: IEEE (Hrsg.): *2003 IEEE 58th Vehicular Technology Conference, VTC 2003-Fall, Oct. 6 - 9, 2003, Orlando, Florida, USA*. Piscataway, NJ : IEEE Operations Center, 2003, S. 3294–3298
- Erickson 2006** ERICKSON, James K.: Living the Dream: An Overview of the Mars Exploration Project. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 13 (2006), Nr. 2, S. 12–18
- Ferland u. a. 2010** FERLAND, Francois ; CLAVIEN, Lionel ; FREMY, Julien ; LETOURNEAU, Dominic ; MICHAUD, Francois ; MICHEL, Lauria: Teleoperation of AZIMUT-3, an Omnidirectional Non-Holonomic Platform with Steerable Wheels. In: IEEE (Hrsg.): *2010 IEEE International Conference on Intelligent Robot and Systems, IROS 2010, Oct. 18-22, 2010, Taipei, Taiwan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2010, S. 2515–2516
- Findeisen und Allgöwer 2002** FINDEISEN, Rolf ; ALLGÖWER, Frank: An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control. In: *21st Benelux Meeting on Systems and Control, March 19-21, 2002, Veldhoven, the Netherlands*, 2002, S. 1–23
- Fischer und Lieb 2010** FISCHER, Wolfgang ; LIEB, Ingo: Funktionen in der Ebene und auf der Sphäre. In: *Einführung in die Komplexe Analysis*. Heidelberg : Vieweg + Teubner, 2010, S. 84–118
- Föllinger und Dörrscheidt 1994** FÖLLINGER, Otto ; DÖRRSCHEIDT, Frank: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Heidelberg : Hüthig, 1994
- Fuchs u. a. 2009** FUCHS, M. ; BORST, Christoph ; ROBUFFO GIORDANO, P. ; BAUMANN, A. ; KRAEMER, E. ; LANGWALD, J. ; GRUBER, R. ; SEITZ, N. ; PLANK, G. ; KUNZE, K. ; BURGER, R. ; SCHMIDT, F. ; WIMBOECK, Thomas ; HIRZINGER, Gerd: Rollin' Justin - Design Considerations and Realization of a Mobile Platform for a Humanoid Upper Body. In: IEEE (Hrsg.): *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2009, May 12-17, 2009, Kobe, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2009, S. 4131–4137
- Gracia und Tornero 2008** GRACIA, L. ; TORNERO, J.: Kinematic Control of Wheeled Mobile Robots. In: *Latin American Applied Research* 38 (2008), Nr. 1, S. 7–16
- Graf u. a. 2000** GRAF, Birgit ; BAUM, Winfried ; TRAUB, Andreas ; SCHRAFT, Rolf D.: Konzeption dreier Roboter zur unterhaltung der Besucher eines Museums. In: *Robotik 2000. Leistungsstand, Anwendungen, Visionen, Trends: Tagung Berlin 29. und 30. Juni 2000* Bd. 1552. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2000, S. 529–536

- Graf u. a. 2004** GRAF, Birgit ; HANS, Matthias ; SCHRAFT, Rolf D.: Care-O-bot II - Development of a Next Generation Robotic Home Assistant. In: *Autonomous Robots* 16 (2004), Nr. 2, S. 193–205
- Grip u. a. 2009** GRIP, Havard F. ; IMSLAND, Lars ; JOHANSEN, Tor A. ; KALKKUHL, Jens C. ; SUISSA, Avshalom: Vehicle Sideslip Estimation: Design, Implementation and Experimental Validation. In: *IEEE Control Systems Magazine* 29 (2009), Nr. 5, S. 36–52
- Hägele 2008** HÄGELE, Martin: *Vorlesung: Robotersysteme – Anwendungen aus der Servicerobotik*. 2008. – URL <http://www.isw.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/robotersysteme-anwendungen-aus-der-servicerobotik/>. – Zugriffsdatum: 26.03.2012
- Hägele 2009** HÄGELE, Martin: *World Robotics 2009: Service Robots*. 2009. – URL <http://www.worldrobotics.org>. – Zugriffsdatum: 27.10.2009
- Hashimoto u. a. 1999** HASHIMOTO, M. ; SUIZU, N. ; FUJIWARA, I. ; OBA, F.: Path Tracking Control of a Non-Holonomic Modular Omnidirectional Vehicle. In: IEEE (Hrsg.): *1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, SMC '99, Oct. 12-15, 1999, Tokyo, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1999, S. 637–642
- Heerink u. a. 2006** HEERINK, Marcel ; KRÖSE, Ben ; EVERS, Vanessa ; WIELINGA, Bob: The Influence of a Robot's Social Abilities on Acceptance by Elderly Users. In: *15th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication, RO-MAN 2006, Sep. 6-8, 2006, Hatfield, United Kingdom*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006, S. 521–526
- Ho u. a. 2008** Ho, Chin-Chang ; MACDORMAN, Karl F. ; DWI PRAMONO, Z. A.: Human Emotion and the Uncanny Valley: A GLM, MDS, and Isomap Analysis of Robot Video Ratings. In: *ACM/IEEE International Conference on Human-Robot Interaction, HRI'08, May 12-15, 2008, Amsterdam, Niederlande*. New York : ACM, 2008, S. 169–176
- Holmberg und Khatib 2000** HOLMBERG, Robert ; KHATIB, Oussama: Development and Control of a Holonomic Mobile Robot for Mobile Manipulation Tasks. In: *The International Journal of Robotics Research* 19 (2000), Nr. 11, S. 1066–1074
- Ilon 1972** Schutzrecht US3876255 A (08.04.1975). ILON, Bengt E. Pr. US19720305887 (13.11.1972). – Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base
- Jondral und Wiesler 2002** JONDRAL, Friedrich ; WIESLER, Anne: *Wahrscheinlichkeitsrechnung Und Stochastische Prozesse: Grundlagen Für Ingenieure Und Naturwissenschaftler*. Heidelberg : Teubner, 2002 (Teubner Studienbücher)
- Jorgensen u. a. 2006** JORGENSEN, Rasmus N. ; SORENSEN, Claus G. ; JENSEN, Kjeld ; SOGAARD, Henning T. ; PEDERSEN, Jorgen M. ; SORENSEN, Lars B. ; HAVN, Ib ; SIBBESEN, Svend ; NIELSEN, Jon: Horti-bot: An Accessory Kit Transforming a Slope Mower into a Robotic Tool Carrier for High-Tech Plant Nursing - Part I. In: ASABE (Hrsg.): *2006 Annual International Meeting, AIM '06, July 9-12, 2006, Portland, Oregon, USA*. St. Joseph, MI : ASABE, 2006, S. 63–82
- Kavraki u. a. 1996** KAVRAKI, Lydia E. ; SVESTKA, P. ; LATOMBE, Jean-Claude ; OVERMARS, M.: Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High Dimensional Configuration Spaces. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12 (1996), Nr. 4, S. 566–580

- Kawamura u. a. 1995** KAWAMURA, K. ; PACK, R. T. ; ISKAROUS, M.: Design Philosophy for Service Robots. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct. 22-25, 1995, Vancouver, british columbia, Canada* Bd. 4. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1995, S. 3736–3741
- Khatib 1986** KHATIB, Oussama: Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. In: *The International Journal of Robotics Research* 5 (1986), Nr. 1, S. 90–98
- Khatib 1987** KHATIB, Oussama: A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. In: *Journal of Robotics and Automation* 3 (1987), Nr. 1, S. 43–53
- Kiencke und Nielsen 2005** KIENCKE, Uwe ; NIELSEN, Lars: *Automotive Control Systems: For Engine, Driveline, and Vehicle*. Second edition. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005
- Kim u. a. 2004** KIM, Wheekuk ; YI, Byung-Ju ; LIM, Dong J.: Kinematic modeling of mobile robots by transfer method of augmented generalized coordinates. In: *Journal of Robotic Systems* 21 (2004), Nr. 6, S. 301–322
- Kirk 2004** KIRK, Donald E.: *Optimal Control Theory: An Introduction*. Mineola, New York : Dover Publications, 2004 (Dover books on engineering)
- Klancar und Skrjanc 2007** KLANCAR, Gregor ; SKRJANC, Igor: Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time. In: *Robotics and Autonomous Systems* 55 (2007), Nr. 6, S. 460–469
- Koren und Borenstein 1991** KOREN, Y. ; BORENSTEIN, J.: Potential Field Methods and Their Inherent Limitations for Mobile Robot Navigation. In: IEEE (Hrsg.): *1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 1991, April 9-11, 1991, Sacramento, CA, USA* Bd. 2. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1991, S. 1398–1404
- Kühn und Grabolle 2009** KÜHN, Matthias ; GRABOLLE, Alexander: Bewertung der Sicherheitseigenschaften des Segway. In: *VKU Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik* 42 (2009), Nr. 2, S. 44–51
- Kulkarni u. a. 2006** KULKARNI, Nilesh ; IPPOLITO, Corey ; KRISHNAKUMAR, Kalmanje ; AL-ALI, Khalid M.: Adaptive Inner-Loop Rover Control. In: IEEE (Hrsg.): *2nd IEEE International Space Mission Challenges for Information Technology, SMC-IT'06, July 17-20, 2006, Pasadena, CA, USA*. Los Alamitos, CA : IEEE Computer Society, 2006, S. 497–504
- Latombe 2003** LATOMBE, Jean-Claude: *The Kluwer international series in engineering and computer science Robotics*. Bd. 124: *Robot motion planning*. 7. print. Boston : Kluwer, 2003
- Laumond 1998** LAUMOND, Jean-Paul: *Lecture notes in control and information sciences*. Bd. 229: *Robot motion planning and control*. London : Springer, 1998
- Lauria u. a. 2006a** LAURIA, Michel ; NADEAU, Isabelle ; LEPAGE, Pierre ; MORIN, Yan ; GIGUÈRE, Patrick ; GAGNON, Frédéric ; LÉTOURNEAU, Dominic ; MICHAUD, Francois: Design and Control of a Four Steered Wheeled Mobile Robot. In: IEEE (Hrsg.): *32nd Annual Conference on Industrial Electronics, IECON 2006, Nov. 6-10, 2006, Paris, France*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006, S. 4020–4025
- Lauria u. a. 2006b** LAURIA, Michel ; NADEAU, Isabelle ; LEPAGE, Pierre ; MORIN, Yan ; GIGUÈRE, Patrick ; GAGNON, Frédéric ; LÉTOURNEAU, Dominic ; MICHAUD, Francois: Kinematical Analysis of a Four Steered Wheeled Mobile Robot. In: IEEE (Hrsg.): *2006 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE 2006, July 9-12, 2006, Montréal, Québec, Kanada*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006, S. 3090–3095

- Liberzon 2003** LIBERZON, Daniel: *Switching in Systems and Control*. Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser, 2003 (Systems & control)
- Lindemann u. a. 2006** LINDEMANN, Randel A. ; BICKLER, Donald B. ; HARRINGTON, Brian D. ; ORTIZ, Gary M. ; VOORHEES, Christopher J.: Mars Exploration Rover Mobility Development: Mechanical Mobility, Hardware Design, Development and Testing. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 13 (2006), Nr. 2, S. 19–26
- Macek u. a. 2007** MACEK, Kristijan ; THOMA, Konrad ; GLATZEL, Richard ; SIEGWART, Roland: Dynamics Modeling and Parameter Identification for Autonomous Vehicle Navigation. In: IEEE (Hrsg.) ; RSJ (Hrsg.): *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2007, Oct. 29 - Nov. 2, 2007, San Diego, California, USA*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2007, S. 3321–3326
- Mayne und Michalska 1990** MAYNE, D.Q. ; MICHALSKA, H.: Receding Horizon Control of Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 35 (1990), Nr. 7, S. 814–824
- Michalska und Mayne 1993** MICHALSKA, H. ; MAYNE, D.Q.: Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), Nr. 11, S. 1623–1633
- MobileRobots Inc. 2006** MOBILEROBOTS INC.: *Seekur*. 2006. – URL <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Seekur.jpg>. – Zugriffsdatum: 05.01.2010
- Moore und Flann 2000** MOORE, Kevin L. ; FLANN, Nicholas S.: A Six-Wheeled Omnidirectional Autonomous Mobile Robot. In: *IEEE Control Systems Magazine* 20 (2000), Nr. 6, S. 53–66
- Mori u. a. 2002** MORI, Yoshikazu ; NAKANO, Eiji ; TAKAHASHI, Takayuki: Mechanism, Control and Design Methodology of the Nonholonomic Quasi-Omnidirectional Vehicle "ODV9". In: *The International Journal of Robotics Research* 21 (2002), Nr. 5-6, S. 511–525
- Muir und Neuman 1986** MUIR, Patrick ; NEUMAN, Charles P.: *Kinematic Modeling of Wheeled Mobile Robots*. June 1986. – URL http://www.ri.cmu.edu/publication_view.html?pub_id=132. – Zugriffsdatum: 15.01.2010
- NASA Jet Propulsion Laboratory 1997** NASA JET PROPULSION LABORATORY: *PIA01122: Sojourner Rover Near the Dice*. 1997. – URL <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA01122>. – Zugriffsdatum: 31.10.2009
- NASA Jet Propulsion Laboratory 2003** NASA JET PROPULSION LABORATORY: *Artist's Concept of Rover on Mars*. 2003. – URL <http://www.jpl.nasa.gov/missions/mer/images.cfm?id=284>. – Zugriffsdatum: 17.11.2009
- NASA Jet Propulsion Laboratory 2008** NASA JET PROPULSION LABORATORY: *Body of Mars Science Laboratory*. 2008. – URL <http://marsprogram.jpl.nasa.gov/msl/news/whatsnew/index.cfm?FuseAction=ShowNews&NewsID=75>. – Zugriffsdatum: 04.01.2010
- Nomura u. a. 2006** NOMURA, Tatsuya ; SUZUKI, Tomohiro ; KANADA, Takayuki ; KATO, Kensuke: Measurement of Anxiety toward Robots. In: *15th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication, RO-MAN 2006, Sep. 6-8, 2006, Hatfield, United Kingdom*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006, S. 372–377

- Oestreicher und Sverinson Eklundh 2006** OESTREICHER, Lars ; SVERINSON EKLUNDH, Kerstin: User Expectations on human Robot Co-operation. In: *15th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication, RO-MAN 2006, Sep. 6-8, 2006, Hatfield, United Kingdom*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006, S. 91–96
- Ott u. a. 2005** OTT, Christian ; ALBU-SCHÄFFER, Alin ; KUGI, Andreas ; STRAMIGIOLI, Stefano ; HIRZINGER, Gerd: Kartesische Impedanzregelung von Robotern mit elastischen Gelenken: Ein passivitätsbasierter Ansatz. In: *at - Automatisierungstechnik* 53 (2005), Nr. 8, S. 378–388
- Pontryagin u. a. 1962** PONTRYAGIN, Lev S. ; BOLTANSKIJ, Vladimir G. ; GAMKRELIDZE, R.V ; FROLOVIC, Misenko E. ; NEUSTADT, Lucien W. (Hrsg.) ; TRIROGOFF, K.N. (Hrsg.): *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York : Interscience Publisher, 1962 (Classics of Soviet Mathematics)
- Quinlan und Khatib 1993** QUINLAN, Sean ; KHATIB, Oussama: Elastic Bands: Connecting Path Planning and Control. In: *1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 1993, May, 1993, Atlanta, USA*. Piscataway, NJ, 1993, S. 802–807
- Raibert u. a. 2008** RAIBERT, Marc ; BLANKESPOOR, Kevin ; NELSON, Gabriel ; PLAYTER, Rob: BigDog, the Rough-Terrain Quadruped Robot. In: IFAC (Hrsg.): *17th International Federation of Automatic Control World Congress, July 6-11, 2008, Seoul, South Korea*. Oxford : Elsevier, 2008, S. 10822–10825
- Rawlings 2000** RAWLINGS, James B.: Tutorial Overview of Model Predictive Control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 20 (2000), Nr. 3, S. 38–52
- Reiser u. a. 2009** REISER, Ulrich ; CONNETTE, Christian P. ; FISCHER, Jan ; KUBACKI, Jens ; BUBECK, Alexander ; WEISSHARDT, Florian ; JACOBS, Theo ; PARLITZ, Christopher ; HÄGELE, Martin ; VERL, Alexander: Care-O-bot 3 - Creating a product vision for service robot applications by integrating design and technology. In: IEEE (Hrsg.) ; RSJ (Hrsg.): *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2009, Oct. 11-15, 2009, St. Louis, Missouri, USA*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2009, S. 1992–1998
- Reister und Unseren 1993** REISTER, David B. ; UNSEREN, Michael A.: Position and Constraint Force Control of a Vehicle with Two or More Steerable Drive Wheels. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9 (1993), Nr. 6, S. 723–731
- Rimon und Koditschek 1992** RIMON, Elon ; KODITSCHKEK, Daniel E.: Exact robot navigation using artificial potential functions. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 8 (1992), Nr. 5, S. 501–518
- Robuffo Giordano u. a. 2009** ROBUFFO GIORDANO, P. ; FUCHS, M. ; ALBU-SCHÄFFER, Alin ; HIRZINGER, Gerd: On the Kinematic Modelling and Control of a Mobile Platform Equipped with Steering Wheels and Movable Legs. In: IEEE (Hrsg.): *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2009, May 12-17, 2009, Kobe, Japan*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2009, S. 4080–4087
- Ruag Coel GmbH Geschäftsbereich RUAG BASE 10 2012** RUAG COEL GMBH GESCHÄFTSBEREICH RUAG BASE 10: *Gecko TRS*. 2012. – URL http://www.ruag.base10.de/graphics/e_3/gecko-1.jpg. – Zugriffsdatum: 27.06.2012
- Sakagarni u. a. 2002** SAKAGARNI, Yoshiaki ; WATANABE, Ryujin ; AOYAMA, Chiaki ; MATSUNAGA, Shinichi ; HIGAKI, Nobuo ; FUJIMURA, Kikuo: The intelligent ASIMO: System overview and integration. In: IEEE (Hrsg.) ; RSJ (Hrsg.): *2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*,

- IROS 2002, Sep. 30 - Oct. 4, 2002, Lausanne, Schweiz* Bd. 3. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2002, S. 2478–2483
- Schraft u. a. 2004** SCHRAFT, Rolf D. ; HÄGELE, Martin ; WEGENER, Kai: *Servicerobotik. Bd. 3: Service Roboter Visionen.* München : Hanser, 2004
- Shimoda u. a. 2005** SHIMODA, Shingo ; KURODA, Yoji ; IAGNEMMA, Karl: Potential Field Navigation of High Speed Unmanned Ground Vehicles on Uneven Terrain. In: IEEE (Hrsg.): *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2005, April 18-20, 2005, Barcelona, Spain.* Piscataway, NJ : IEEE Press, 2005, S. 2828–2833
- Siciliano und Khatib 2008** SICILIANO, Bruno (Hrsg.) ; KHATIB, Oussama (Hrsg.): *Springer Handbook of Robotics.* Berlin, Heidelberg : Springer, 2008 (Springer Handbbooks)
- Siciliano u. a. 2009** SICILIANO, Bruno ; ORIOLO, Giuseppe ; SCIAVICCO, Lorenzo ; VILLANI, Luigi: *Robotics: Modelling, Planning and Control.* London : Springer London, 2009
- Siegwart u. a. 2003** SIEGWART, Roland ; ARRAS, Kai O. ; BOUABDALLAH, Samir ; BURNIER, Daniel ; FROIDEVAUX, Gilles ; GREPPIN, Xavier ; JENSEN, Björn ; LOROTTE, Antoine ; MAYOR, Laetitia ; MEISSER, Mathieu ; PHILIPPSEN, Roland ; PIGUET, Ralph ; RAMEL, Guy ; TERRIEN, Gregoire ; TOMATIS, Nicola: Robox at Expo.02: A large-scale installation of personal robots. In: *Robotics and Autonomous Systems* 42 (2003), Nr. 3-4, S. 203–222
- Siegwart und Nourbakhsh 2004** SIEGWART, Roland ; NOURBAKHSH, Illah R.: *Introduction to Autonomous Mobile Robots.* Cambridge, Mass. : MIT Press, 2004 (Intelligent robotics and autonomous agents)
- Singh u. a. 1996** SINGH, Leena ; STEPHANOU, Harry ; WEN, John: Real-time robot motion control with circulatory fields. In: IEEE (Hrsg.): *1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 1996, April 22-28, 1996, Minneapolis, MN, USA* Bd. 3. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1996, S. 2737–2742
- Staab 2009** STAAB, Harald J.: *Ein Radfahrwerk mit passiver Federung für mobile Roboterassistenten.* Heimsheim, IPA-IAO-Forschung und Praxis; 479, Stuttgart, Univ., Fak. Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik, Inst. für Industrielle Fertigung und Fabrikbetrieb, Diss. 2008, Dissertation, 2009
- Thrun u. a. 2000** THRUN, Sebastian ; BEETZ, Michael ; BENNEWITZ, M. ; BURGARD, Wolfram ; CREMERS, A. B. ; DELLAERT, Frank ; FOX, Dieter ; HÄHNEL, Dirk ; ROSENBERG, C. ; ROY, Nicolas ; SCHULTE, J. ; SCHULZ, Dirk: Probabilistic Algorithms and the Interactive Museum Tour-Guide Robot Minerva. In: *The International Journal of Robotics Research* 19 (2000), Nr. 11, S. 972–999
- Thrun u. a. 2005** THRUN, Sebastian ; BURGARD, Wolfram ; FOX, Dieter: *Probabilistic Robotics.* Cambridge, Mass. : MIT Press, 2005 (Intelligent robotics and autonomous agents)
- Thuilot u. a. 1996** THUILOT, Benoit ; D'ANDRÉA-NOVEL, Brigitte ; MICAELLI, Alain: Modelling and Feedback Control of Mobile Robots Equipped with Several Steering Wheels. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12 (1996), Nr. 3, S. 375–390
- Titterton und Weston 2004** TITTERTON, David H. ; WESTON, John L.: *IEE radar, sonar, navigation, and avionics series.* Bd. 17: *Strapdown inertial navigation technology.* 2. Stevenage, UK : Institution of Electrical Engineers [u.a.], 2004

- Todd 1985** TODD, D. J.: *Walking machines: An introduction to legged robots*. 1st publ. London : Kogan Page, 1985
- Willow Garage 2009** WILLOW GARAGE: *Sensor head mockup: PR2 Alpha prototype with mockup of final sensor head design*. 2009. – URL <http://www.flickr.com/photos/willowgarage/3641752655/in/photostream>. – Zugriffsdatum: 27.06.2012
- World-Information.org** : *Slave and Expert Systems: 1940s - 1950s: The Development of Early Robotics Technology*. – URL <http://world-information.org/wio/infostructure/100437611663/100438659348>. – Zugriffsdatum: 26.10.2009
- Wyrobek u. a. 2008** WYROBEK, Keenan A. ; BERGER, Eric H. ; LOOS, H. F. M. van der ; SALISBURY, J. K.: Towards a Personal Robotics Development Platform: Rationale and Design of an Intrinsically Safe Personal Robot. In: IEEE (Hrsg.): *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2008, May 19-23, 2008, Pasadena, California, USA*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2008, S. 2165–2170
- Xi und Baras 2007** XI, Wei ; BARAS, John S.: MPC Based Motion Control of Car-like Vehicle Swarms. In: IEEE (Hrsg.): *2007 Mediterranean conference on Control & automation, MED '07, June 27-29, 2007, Athens, Greece*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2007, S. 1–6
- Yoshikawa 1990** YOSHIKAWA, Tsuneo: *Foundations of Robotics: Analysis and Control*. Cambridge, Mass. : Mit Press, 1990

In den letzten Jahren verlassen Roboter mehr und mehr ihren angestammten Platz hinter Zäunen und Schutzeinrichtungen. Sie werden Teil des menschlichen Arbeitsumfeldes und Alltagsumfeldes. Zukünftige mobile Roboter müssen daher hinsichtlich Flexibilität, Manövrierbarkeit und Robustheit an die Anforderungen von Alltagsumgebungen angepasst sein. Von zentraler Bedeutung ist dabei der Bewegungsapparat der Roboter. Nicht-holonome, omnidirektionale Fahrwerke, die aus unabhängig gelenkten und unabhängig angetriebenen Standardrädern aufgebaut sind, bieten mittelfristig einen soliden Kompromiss der diesen Anforderungen Rechnung trägt. Diese Arbeit behandelt die kinematische Modellierung und Regelung solcher nicht-holonomer, omnidirektionaler Fahrwerke.

ISBN 978-3-8396-0564-6



FRAUNHOFER VERLAG