Math. Z. 149, 203–225 (1976)

Mathematische Zeitschrift

Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper

Hermann Hähl

Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, D-7400 Tübingen 1, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

Zusammenhängende lokalkompakte Quasikörper entstehen durch Einführung einer stetigen Multiplikation $\circ$ auf $\mathbb{R}^n$, die ein Einselement 1 besitzt, gegenüber der Vektoraddition $+$ linksdistributiv ist, $0\circ x = x\circ 0 = 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ erfüllt und für alle $a, b, c\in\mathbb{R}^n$ mit $0 \neq a \neq b$ eindeutige und stetig von a, b, c abhängende Auflösungen x und y der Gleichungen $a\circ x - b\circ x = c$ und $y\circ a = c$ zuläßt ([5, § 2]). Sie treten als Koordinatenbereiche von kompakten topologischen Translationsebenen auf und kommen nur in den Dimensionen $n = 1, 2, 4, 8$ vor ([10, § 7]). Das lineare Erzeugnis $\langle 1\rangle$ von $1\in\mathbb{R}^n$ ist ein zum Körper der reellen Zahlen isomorpher Unterkörper; die Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $\langle 1\rangle = \mathbb{R}$ kann als die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}$-(Rechts-)Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden. Der Alternativkörper $\mathbb{O}$ der Oktaven ist das klassische achtdimensionale Beispiel einer solchen Struktur; allgemeiner lassen sich reelle Divisionsalgebren mit Eins hier einordnen.

In [5] wurden die allgemeinen topologischen Eigenschaften von zusammenhängenden lokalkompakten Quasikörpern und ihren Automorphismengruppen untersucht; eines der Hauptergebnisse läßt sich folgendermaßen aussprechen:

1.1. **Satz.** *Die Gruppe* Aut Q *der stetigen Automorphismen eines n-dimensionalen lokalkompakten Quasikörpers* Q *ist eine kompakte Gruppe* $\mathbb{R}$*-linearer Transformationen; mit anderen Worten: bei geeigneter Identifikation der additiven Gruppe von* Q *mit* $\mathbb{R}^n$ *wird* Aut Q *eine abgeschlossene Untergruppe von*

$$\mathrm{O}(n-1) = \{\varphi\in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})/\varphi(1) = 1\}.$$

(Vgl. [5, 2.6] in Verbindung mit [3, 2.1]). Für $n = 1$ ist Q der Körper der reellen Zahlen und daher Aut $Q = \{\mathrm{id}\}$. Für $n = 2$ besagt [11] schärfer, daß Aut Q höchstens zwei Elemente hat. Bei $n = 4$ kommen für die Zusammenhangskomponente von Aut Q außer im trivialen Fall nur SO(3) und die eindimensionale Torusgruppe in Frage; beide Möglichkeiten sind durch Beispiele sogar bei Divisionsalgebren belegt ([6, 7]). In dieser Arbeit sollen nun für $n = 8$ die vorkommenden

Automorphismengruppen im einzelnen analysiert werden. Das Ergebnis läßt sich umreißen durch

1.2. **Hauptsatz.** *Sei Γ eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe der stetigen Automorphismen eines achtdimensionalen lokalkompakten Quasikörpers Q. Ist* $\dim \Gamma \geqq 4$, *so ist Γ isomorph zu einer der Gruppen* G_2, $\Gamma SU(3,\mathbb{C})$, $SU(3,\mathbb{C})$, $SO(4,\mathbb{R})$, $\Gamma U(2,\mathbb{C})$ *oder* $U(2,\mathbb{C})$. *Für* $1 \leqq \dim \Gamma \leqq 3$ *ist die Zusammenhangskomponente Δ von Γ isomorph zu* Spin(3), $SO(3,\mathbb{R})$ *oder zu einer höchstens zweidimensionalen Torusgruppe.*

Die Gruppe G_2 ist bekanntlich die Automorphismengruppe der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$; der Hauptsatz gibt also insbesondere einen Überblick über die Struktur der großen Untergruppen von G_2. Umgekehrt wird die feinere Analyse wenigstens für $\dim \Gamma \geqq 4$ bzw. $\dim \Delta \geqq 3$ auch im allgemeinen Fall erweisen, daß Γ bzw. Δ auf $Q = \mathbb{R}^8$ stets wie eine Untergruppe von G_2 in der natürlichen Wirkung auf $\mathbb{O}$ operiert.

Entscheidende Hilfsmittel sind einige geometrisch begründete Aussagen über Involutionen in Γ, die in § 2 bereitgestellt werden, sowie die Klassifikation der kompakten einfachen Liegruppen. § 3 gilt dem Beweis des Hauptsatzes und der Feinanalyse in den einzelnen Fällen. In § 4 wird Beispielmaterial erarbeitet, indem alle achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit mindestens 6-dimensionaler Automorphismengruppe klassifiziert werden. Jede der Gruppen G_2, $\Gamma SU(3,\mathbb{C})$, $SU(3,\mathbb{C})$ und $SO(4)$ tritt dabei als volle Automorphismengruppe gewisser Divisionsalgebren auf.

1.3. **Konventionen, Vorbemerkungen.** $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ bezeichnen die rellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktaven. Üblich notierte Multiplikation ist diesen klassischen Zahlbereichen vorbehalten; in anderen Quasikörpern geben wir die Multiplikation zur Unterscheidung stets durch $\circ$ wieder.

Der Quaternionenkörper $\mathbb{H}$ ist diejenige vierdimensionale Algebra über $\mathbb{R}$ mit Einselement 1, die bezüglich gewisser Elemente i, j, k, welche zusammen mit 1 eine $\mathbb{R}$-Basis bilden, die Multiplikationstabelle

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j$$

hat. Die *Konjugation* in $\mathbb{H}$ ist der Antiautomorphismus

$$\mathbb{H} \to \mathbb{H}: x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \bar{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k \qquad (x_\nu \in \mathbb{R}).$$

$\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ bezeichnet den in $\mathbb{H}$ von i, j, k aufgespannten Untervektorraum der *reinen Quaternionen*; $\mathrm{Spin}(3) = \{a \in \mathbb{H} / a\bar{a} = 1\}$ die multiplikative Gruppe der Quaternionen der Länge 1.

Die Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ definieren wir hier mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation durch die Einführung der folgenden Multiplikation auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$:

$$(u, v) \cdot (x, y) = (ux - y\bar{v}, xv + \bar{u}y)$$

$(u, v, x, y \in \mathbb{H})$. Der Unterkörper $\mathbb{H} \times \{0\}$ von $\mathbb{O}$ wird in der Regel in augenscheinlicher Weise mit $\mathbb{H}$ identifiziert. Schreibt man entsprechend $1, i, j, k$ für $(1,0)$,

$(i, 0)$, $(j, 0)$, $(k, 0)$ und $l=(0, 1)$, so ist $1, i, j, k, l, li=(0, i)$, $lj=(0, j)$, $lk=(0, k)$ eine $\mathbb{R}$-Basis für $\mathbb{O}$, die in der Literatur gelegentlich zur Definition von $\mathbb{O}$ über eine Multiplikationstabelle herangezogen wird ([9, 14.10]). Die *Konjugation* in $\mathbb{O}$ ist der Antiautomorphismus

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}\colon (x, y)\mapsto\overline{(x, y)}=(\bar{x}, -y);$$

sie liefert eine kanonische positiv definite quadratische Form $N\colon \mathbb{O}\to\mathbb{R}\colon z\mapsto z\cdot\bar{z}$ und damit einen kanonischen Orthogonalitätsbegriff in $\mathbb{O}$. Das orthogonale Komplement von 1 in $\mathbb{O}$ ist der Unterraum $\mathrm{Pu}(\mathbb{O})=\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\mathbb{H}$ der *reinen Oktaven;* $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ bezeichne dessen Einheitssphäre. Sie besteht genau aus den Oktaven, deren Quadrat gleich -1 ist[1]. Infolgedessen ist $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ invariant unter den Automorphismen von $\mathbb{O}$; da Automorphismen das Zentrum $\langle 1\rangle\cong\mathbb{R}$ in sich überführen und dort die Identität induzieren, sind Automorphismen also $\mathbb{R}$-linear und orthogonal bezüglich N.

Die Automorphismengruppe $\mathbb{G}$ der Oktaven enthält die Gruppe

$$\Sigma=\{\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}\colon (x, y)\mapsto(axa^{-1}, axb^{-1})/a, b\in\mathrm{Spin}(3)\},$$

wie man unmittelbar verifiziert. Σ ist scharf transitiv auf Tripeln (z_1, z_2, z_3) paarweise orthogonaler Elemente von $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ mit $z_1, z_2\in\mathbb{H}\times\{0\}$ und $z_3\in\{0\}\times\mathbb{H}$. Berücksichtigt man zudem den involutorischen Automorphismus mit $1\leftrightarrow 1$; $i\leftrightarrow i$; $j\leftrightarrow l$; $k\leftrightarrow -li$; $lj\leftrightarrow -lj$; $lk\leftrightarrow -lk$, so ergibt sich, daß $\mathbb{G}$ transitiv auf solchen Tripeln (z_1, z_2, z_3) paarweise orthogonaler Elemente von $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ wirkt, welche die Eigenschaft haben, daß z_3 orthogonal zur von z_1 und z_2 erzeugten Unteralgebra ist. $\mathbb{G}$ ist dann sogar scharf transitiv auf diesen Tripeln, da ein solches Tripel die ganze Algebra $\mathbb{O}$ erzeugt. Insbesondere ist $\mathbb{G}$ 14-dimensional und zusammenhängend, und Σ ist die Untergruppe von $\mathbb{G}$, die $\mathbb{H}\times\{0\}$ invariant läßt. Dies sind die einzigen Informationen, die wir über $\mathbb{G}$ benötigen. Sie werden ausreichen, um im Rahmen unserer Untersuchungen ohne zusätzlichen Aufwand die bekannte Identität von $\mathbb{G}$ mit der aus der Darstellungstheorie fließenden kompakten Ausnahmegruppe G_2 auf anderem Wege zu bestätigen.

2. Unterquasikörper und Involutionen

In diesem Paragraphen sei stets Q ein lokalkompakter Quasikörper der positiven Dimension n. Entsprechend § 1 identifizieren wir stillschweigend die additive Gruppe von Q stets so mit $\mathbb{R}^n$, daß die Gruppe $\mathrm{Aut}\,Q$ der stetigen Automorphismen von Q eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ wird.

Die nachstehende simple Überlegung macht im Rahmen unserer Untersuchung die Verwendung tiefliegender Sätze (vgl. [10, § 7]) über die möglichen Dimensionen lokalkompakter Quasikörper überflüssig:

2.1. **Lemma.** *Für* $\{\mathrm{id}\}\neq\Lambda\subseteq\mathrm{Aut}\,Q$ *ist*

$$B_\Lambda=\{x\in Q/\bigwedge\lambda\in\Lambda\colon \lambda(x)=x\}$$

ein abgeschlossener Unterquasikörper von Q *mit* $1\leqq\dim B_\Lambda\leqq(\dim Q)/2$.

---

[1] Wegen $N(x)\geqq 0$ und da die Konjugation involutorisch ist, ist $-1=x^2$ gleichwertig mit $-\bar{x}=\bar{x}(x^2)=N(x)\cdot x$ und folglich mit $x=-\bar{x}$ und $N(x)=1$

Beweis. Daß B_Λ ein abgeschlossener Unterquasikörper ist, ist evident. B_Λ enthält das lineare Erzeugnis $\langle 1 \rangle$ von 1 in $Q = \mathbb{R}^n$ und ist daher insbesondere ein Untervektorraum positiver Dimension. Wäre $\dim B_\Lambda > n/2$, so hätten für jedes $z \in Q \setminus \{0\}$ die Unterräume B_Λ und $z \circ B_\Lambda$ von $\mathbb{R}^n = Q$ einen Durchschnitt positiver Dimension; es gäbe also $a, b \in B_\Lambda \setminus \{0\}$ mit $z \circ a = b$. Da B_Λ ein Unterquasikörper ist, würde $z \in B_\Lambda$ und insgesamt $B_\Lambda = Q$ folgen, was wegen $\Lambda \neq \{\mathrm{id}\}$ Unsinn ist. □

Die folgende Verschärfung im Spezialfall, daß Λ aus einer Involution ι besteht, ergibt sich samt Beweis aus einer geometrischen Idee von Baer ([1, Th. 1], vgl. auch [13, § 1(9)]), wenn man ι als involutorische Kollineation der projektiven Ebene über Q deutet:

2.2. **Lemma.** *Sei ι ein stetiger involutorischer Automorphismus von Q. Dann hat der aus den Fixpunkten von ι bestehende Unterquasikörper B_ι genau die halbe Dimension.*

Beweis. Sei $z \in Q \setminus B_\iota$; dann existiert für jedes $x \in Q$ genau ein $b_x \in B_\iota$ mit $z \circ b_x - x \in B_\iota$: man erhält nämlich b_x als die eindeutige Auflösung der Gleichung $z \circ b_x - \iota(z) \circ b_x = x - \iota(x)$, und da ι involutorisch ist, ist in der Tat $\iota(b_x) = b_x$. Die Lösung b_x hängt linear von x ab, und $Q \to B_\iota \times B_\iota$: $x \mapsto (b_x, z \circ b_x - x)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, da injektiv. □

2.3. Immer wieder benötigte Anwendungen der vorstehenden Aussagen betreffen den Zentralisator Z einer Involution ι in $\mathrm{Aut}\, Q$. Er läßt B_ι und damit auch das orthogonale Komplement $B_\iota^\perp$ von B_ι in $\mathbb{R}^n = Q$ invariant, da wir uns $\mathrm{Aut}\, Q$ als Gruppe orthogonaler Transformationen von $\mathbb{R}^n$ repräsentieren. Nach 2.2 ist $\dim B_\iota = \dim B_\iota^\perp = (\dim Q)/2$. Ferner wirkt Z effektiv auf $B_\iota^\perp$, d.h. die Einschränkungsabbildung $Z \to Z|B_\iota^\perp$: $\zeta \mapsto \zeta|B_\iota^\perp$ ist ein Isomorphismus:

Ist nämlich $\zeta|B_\iota^\perp$ die Identität, also $B_\iota^\perp \subseteq B_\zeta = \{x \in Q / \zeta(x) = x\}$, so ist wegen $1 \notin B_\iota^\perp$ die Dimension von B_ζ größer als $\dim B_\iota^\perp = (\dim Q)/2$; nach 2.1 ist daher $\zeta = \mathrm{id}$.

Daher ist Z isomorph einer Untergruppe der Gruppe der orthogonalen Transformationen von $B_\iota^\perp$, also der Gruppe $\mathrm{O}(n/2, \mathbb{R})$; insbesondere ist $\dim Z \leqq \dim \mathrm{O}(n/2) = n(n-2)/8$.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen schon, daß bei der Untersuchung von Automorphismen achtdimensionaler Quasikörper Einschränkungen auf vierdimensionale Unterquasikörper eine große Rolle spielen werden; deshalb präzisieren wir 1.1 für $n = 4$ noch in folgender Weise:

2.4. *Sei Q ein vierdimensionaler lokalkompakter Quasikörper und Γ eine dreidimensionale abgeschlossene Untergruppe von* $\mathrm{Aut}\, Q$. *Dann ist $\Gamma = \mathrm{SO}(3) = \{\varphi \in \mathrm{SO}(4, \mathbb{R}) / \varphi(1) = 1\}$.*

Beweis. Nach 1.1 ist $\Gamma \subseteq \mathrm{O}(3)$; und aus Dimensionsgründen enthält Γ die Zusammenhangskomponente $\mathrm{SO}(3)$ von $\mathrm{O}(3)$. Da $\mathrm{SO}(3)$ Index 2 in $\mathrm{O}(3)$ hat, würde aus $\mathrm{SO}(3) \neq \Gamma$ folgen, daß $\Gamma = \mathrm{O}(3)$; dann enthielte aber Γ eine Involution, deren Fixgebilde ein dreidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^4 = Q$ ist, im Widerspruch zu 2.1. □

3. Automorphismengruppen

Im folgenden sei Γ eine kompakte Automorphismengruppe (mit Zusammenhangskomponente Δ) eines achtdimensionalen lokalkompakten Quasikörpers Q, den wir uns entsprechend 1.1 stets so mit $\mathbb{R}^8$ identifiziert denken, daß Γ eine Gruppe orthogonaler Transformationen wird. Mit $\mathbb{G}$ bezeichnen wir die volle Automorphismengruppe der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$. Für einen Untervektorraum V von $\mathbb{O}$ sei $\mathbb{G}_V$ die Gruppe der Elemente von $\mathbb{G}$, die V invariant lassen. Für $x, y, \ldots \in \mathbb{O}$ bezeichnet $\langle x, y, \ldots \rangle$ das lineare Erzeugnis von $x, y, \ldots$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{O}$ und $\mathbb{G}_{x, y, \ldots}$ die Standgruppe von $\mathbb{G}$ auf $x, y, \ldots$.

3.1. **Satz.** *Δ möge eine zentrale Involution ι mit Fixquasikörper B_ι enthalten. Ist dann* $\dim \Gamma \geqq 4$, *so wirkt Γ auf Q linear äquivalent zu einer der folgenden Automorphismengruppen der Oktavenalgebra:*

(i) $\mathbb{G}_{\langle 1, i, j, k \rangle} = \{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y b^{-1}) / a, b \in \mathrm{Spin}(3)\},$
$\cong \mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$

(ii) $\mathbb{G}_{\langle 1, i \rangle} \cap \mathbb{G}_{\langle j, k \rangle}$
$= \left\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (c x c^{-1}, a y c^{-1}) \middle/ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Spin}(3); \\ c \in \mathrm{Spin}(3) \cap (\langle 1, i \rangle \cup \langle j, k \rangle) \end{array}\right\}$
$\cong \Gamma\mathrm{U}(2, \mathbb{C}),$

(iii) $\left\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y c^{-1}) \middle/ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Spin}(3); \\ c \in \mathrm{Spin}(3) \cap (\langle 1, i \rangle \cup \langle j, k \rangle) \end{array}\right\}$
$\cong \Gamma\mathrm{U}(2, \mathbb{C}),$

(iv) $\mathbb{G}_{\langle 1, i, j, k \rangle} \cap \mathbb{G}_i$
$= \left\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (c x c^{-1}, a y c^{-1}) \middle/ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Spin}(3); \\ c \in \mathrm{Spin}(3) \cap \langle 1, i \rangle \end{array}\right\}$
$\cong \mathrm{U}(2, \mathbb{C}),$

(v) $\left\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y c^{-1}) \middle/ \begin{array}{l} a \in \mathrm{Spin}(3); \\ c \in \mathrm{Spin}(3) \cap \langle 1, i \rangle \end{array}\right\}$
$\cong \mathrm{U}(2, \mathbb{C}).$

Ist $\dim \Gamma = 3$, *so wirkt Δ äquivalent zu einer der folgenden Automorphismengruppen von $\mathbb{O}$:*

(vi) $\mathbb{G}_{i, j, k} = \{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (x, y b^{-1}) / b \in \mathrm{Spin}(3)\},$

(vii) $\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y) / a \in \mathrm{Spin}(3)\}.$

In allen diesen Fällen entspricht B_ι dem Unterkörper $\mathbb{H} \times \{0\}$ von $\mathbb{O}$.

Ist $\dim \Gamma \leqq 2$, *so ist Δ trivial oder eine höchstens zweidimensionale Torusgruppe.*

Beweis. Nach 2.3 läßt Δ die nach 2.2 vierdimensionalen Untervektorräume B_ι und $B_\iota^\perp$ invariant und wirkt auf $B_\iota^\perp$ effektiv; insbesondere ist Δ isomorph einer kompakten zusammenhängenden Untergruppe von $\mathrm{SO}(B_\iota^\perp) \cong \mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$. Die Untergruppenstruktur von $\mathrm{SO}(4)$ ist bekannt (vgl. [7, 3.1 ff.] für eine explizite Beschreibung); demnach ist entweder Δ ein höchstens zweidimensionaler Torus oder es liegt einer der folgenden Fälle vor:

(a) $\dim \Delta = 6$. Dann ist $\Delta | B_\iota^\perp = \mathrm{SO}(B_\iota^\perp)$ und Δ wirkt auf $B_\iota^\perp$ bei geeigneter Identifikation von $B_\iota^\perp$ mit $\mathbb{H}$ bekanntlich als die Gruppe

$$\{\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon y \mapsto a y b^{-1} / a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

([9, 10.29]).

Nach 1.1 ist die Automorphismengruppe $\Delta | B_\iota$ des vierdimensionalen Unterquasikörpers B_ι höchstens dreidimensional, also hat Δ auf B_ι einen mindestens dreidimensionalen Ineffektivitätskern. Da Δ Involutionen mit von 0 verschiedenen Fixpunkten in $B_\iota^\perp$ enthält, kann andererseits Δ nicht trivial auf B_ι operieren (sonst gäbe es Involutionen, die einen mindestens 5-dimensionalen Untervektorraum von Q punktweise festlassen, im Widerspruch zu 2.2). $\Delta \cong \mathrm{SO}(4)$ hat nun genau zwei echte zusammenhängende Normalteiler, die als Zusammenhangskomponente N des Ineffektivitätskerns von Δ auf B_ι in Frage kommen; in der angegebenen Wirkung auf $B_\iota^\perp \triangleq \mathbb{H}$ entsprechen ihnen die Gruppen

$$\mathrm{LO}(4) = \{\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon y \mapsto a y / a \in \mathrm{Spin}(3)\},$$
$$\mathrm{RO}(4) = \{\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon y \mapsto y b^{-1} / b \in \mathrm{Spin}(3)\}.$$

Da diese beiden in $\mathrm{O}(4)$ konjugiert sind, können wir bei geeigneter Identifikation von $B_\iota^\perp$ mit $\mathbb{H}$ noch annehmen, daß N auf $B_\iota^\perp$ als $\mathrm{RO}(4)$ operiert. Der $\mathrm{LO}(4)$ entsprechende Normalteiler M von Δ wirkt dann fast effektiv und damit als $\mathrm{SO}(3)$ auf B_ι (2.4). Einfache Überlagerungsargumente ([7, 3.2]) zeigen nun, daß mittels einer orthogonalen Basistransformation B_ι so mit $\mathbb{H}$ identifiziert werden kann, daß insgesamt M auf $Q = B_\iota \times B_\iota^\perp$ als die Gruppe $\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}\colon (x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y) / a \in \mathrm{Spin}(3)\}$ operiert. Δ wirkt dann wie die in (i) angegebene Gruppe.

Ein Automorphismus $\gamma \in \Gamma$ induziert einen Automorphismus der Zusammenhangskomponente Δ von Γ, der die beiden einzigen dreidimensionalen zusammenhängenden Normalteiler M und N von Δ invariant läßt oder ineinander überführt; letzteres ist jedoch ausgeschlossen, da M und N in Q Fixgebilde verschiedener Dimension haben. Nun haben M und N als zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Gruppen bekanntlich nur innere Automorphismen; also induziert γ auf Δ insgesamt einen inneren Automorphismus und zur Bestimmung von Γ modulo Δ können wir annehmen, daß γ mit Δ elementweise kommutiert. B_ι und $B_\iota^\perp$ als die Eigenräume von ι zu den Eigenwerten $+1$ und -1 sind dann invariant unter γ, und nach 2.4 ist $\gamma | B_\iota = \mathrm{id}$. Die Einschränkung von γ auf $B_\iota^\perp$ kommutiert mit $\Delta | B_\iota^\perp = \mathrm{SO}(B_\iota^\perp)$ und ist folglich eine Streckung, wobei der Streckungsfaktor wegen der Kompaktheit von Γ den Betrag 1 hat. Insgesamt ist $\gamma \in \Delta$; damit ist gezeigt, daß in diesem Fall stets $\Gamma = \Delta$ ist.

(b) $\dim \Delta = 4$. Als vierdimensionale zusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{SO}(4)$ ist dann Δ isomorph zu $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ und wirkt auf dem geeignet mit $\mathbb{H}$ identifizierten Unterraum $B_\iota^\perp$ als die Gruppe

$$\{\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon y \mapsto a y c^{-1} / a, c \in \mathrm{Spin}(3);\ c \in \langle 1, i \rangle\}.$$

Die beiden einzigen echten zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler M und T von Δ entsprechen in dieser Beschreibung den Gruppen $\mathrm{LO}(4)$ und

$$\{\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon y \mapsto y c^{-1} / c \in \langle 1, i \rangle \cap \mathrm{Spin}(3)\}.$$

Wie in (a) ergibt sich, daß Δ nicht trivial auf B_ι operieren kann. Nach 1.1 ist folglich $\Delta|B_\iota$ gleich SO(3) oder eine eindimensionale Torusuntergruppe von SO(3). Wir behandeln die beiden Fälle gesondert:

(b1) $\Delta|B_\iota = \mathrm{SO}(3)$. Die eindimensionale Zusammenhangskomponente des Ineffektivitätskerns von Δ auf B_ι ist dann gerade T, und man hat $M|B_\iota = \mathrm{SO}(3)$. Aufgrund der Wirkung von M kann dann wie in (a) B_ι so mit $\mathbb{H}$ identifiziert werden, daß Δ die in (v) angegebene Gruppe wird.

(b2) $\Delta|B_\iota$ ist eine Torusuntergruppe von SO(3). Die dreidimensionale Zusammenhangskomponente des Ineffektivitätskerns von Δ auf B_ι ist dann gerade M, und T überlagert $T|B_\iota = \Delta|B_\iota$. Wegen $\iota \in T$ handelt es sich um eine geradzahlige Überlagerung. Da alle Torusuntergruppen von SO(3) konjugiert sind, läßt sich folglich B_ι so mit $\mathbb{H}$ identifizieren, daß sich Δ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ als die Gruppe

$$\{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H} \colon (x, y) \mapsto (c^n x c^{-n}, a y c^{-1}) / a \in \mathrm{Spin}(3);\ c \in \langle 1, i \rangle \cap \mathrm{Spin}(3)\}$$

schreibt. Wäre $n \geqq 2$, so ergäbe sich speziell mit $c^n = -1$ und $a = c$ ein Automorphismus, dessen Fixpunkte einen 6-dimensionalen Unterquasikörper bilden würden, was nach 2.1 ausgeschlossen ist. Also wirkt Δ wie die in (iv) angegebene Gruppe.

Die in den beiden Fällen zur Beschreibung von Δ verwendeten quaternalen Koordinaten halten wir jetzt fest und wenden uns der Behandlung des Falls $\Gamma \neq \Delta$ zu. Da die beiden einzigen echten zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler M und T von Δ verschiedene Dimension haben, sind sie normal auch in Γ. Da ι die einzige Involution von T ist, liegt sie im Zentrum von Γ; nach 2.3 sind also B_ι und $B_\iota^\perp$ invariant auch unter Γ, und Γ wirkt effektiv auf $B_\iota^\perp$. Da $M \cong \mathrm{Spin}(3)$ nur innere Automorphismen hat, kann ein beliebiger Automorphismus $\gamma \in \Gamma \setminus \Delta$ modulo Δ so abgeändert werden, daß er M zentralisiert. Die Einschränkung $\gamma|B_\iota^\perp$ liegt dann im Zentralisator RO(4) von $M|B_\iota^\perp = \mathrm{LO}(4)$ in $\mathrm{O}(B_\iota^\perp) = \mathrm{O}(4)$. Da γ außerdem T normalisiert, muß γ auf $B_\iota^\perp$ eine der Abbildungen $\mathbb{H} \to \mathbb{H} \colon y \mapsto y c^{-1}$ mit $c \in \langle 1, i \rangle$ oder $c \in \langle j, k \rangle$ induzieren. Im Fall $c \in \langle 1, i \rangle$ könnte γ modulo $T \subseteq \Delta$ so modifiziert werden, daß auf $B_\iota^\perp$ die Identität bewirkt wird und läge also entgegen unserer Annahme schon in Δ, da Γ effektiv auf $B_\iota^\perp$ ist. Im Fall $c \in \langle j, k \rangle$ kann durch Konjugation mit einem geeigneten Element aus T angenommen werden, daß

$$\gamma|B_\iota^\perp = (\mathbb{H} \to \mathbb{H} \colon y \mapsto y j^{-1}).$$

Wegen der Effektivität der Wirkung von Γ auf $B_\iota^\perp$ ist γ dadurch eindeutig bestimmt und Γ wird von Δ und γ erzeugt. Zur Untersuchung von $\gamma|B_\iota$ behandeln wir wieder die Fälle (b1) und (b2) getrennt:

Im Fall (b1) wird $M|B_\iota = \mathrm{SO}(3)$ von $\gamma|B_\iota$ zentralisiert, und nach 2.4 ist $\gamma|B_\iota \in \mathrm{SO}(3)$, insgesamt also $\gamma|B_\iota = \mathrm{id}$. Das Erzeugnis Γ von Δ und γ ist in den gewählten Koordinaten dann die in (iii) angegebene Gruppe.

Im Fall (b2) betrachten wir den Automorphismus $\kappa \in \Gamma \setminus \Delta$ mit

$$\kappa|B_\iota^\perp = (\mathbb{H} \to \mathbb{H} \colon y \mapsto j y j^{-1}),$$

der aus γ durch Komposition mit einem Element von M hervorgeht. Da $\kappa|B_\iota^\perp$ involutorisch ist und Γ effektiv auf $B_\iota^\perp$ wirkt, ist κ eine Involution. $\kappa|B_\iota$ normalisiert die Torusgruppe $\Delta|B_\iota=\{\mathbb{H}\to\mathbb{H}\colon x\mapsto cxc^{-1}/c\in\langle 1,i\rangle\cap\mathrm{Spin}(3)\}$ und läßt die Unterräume $\langle 1,i\rangle$ und $\langle j,k\rangle$ als die Eigenräume zu den Eigenwerten $+1$ und -1 der Involution von $\Delta|B_\iota$ invariant. Nach 2.2 muß der aus den Fixpunkten von κ in Q bestehende Unterraum B_κ vierdimensional sein. Wegen $\dim B_\kappa\cap B_\iota^\perp=2$ ist also auch $B_\kappa\cap B_\iota$ zweidimensional. Wäre $\langle 1,i\rangle\subseteq B_\kappa$ und folglich $B_\kappa\cap B_\iota=\langle 1,i\rangle$, so würde die Involution κ auf $\langle j,k\rangle$ die Spiegelung am Ursprung induzieren, d.h. es wäre $\kappa=(\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}\colon(x,y)\mapsto(ixi^{-1},jyj^{-1}))$; durch Komposition mit dem Automorphismus $(x,y)\mapsto(ixi^{-1},iyi^{-1})$ aus Δ würde sich dann die Abbildung $(x,y)\mapsto(x,kyk^{-1})$ als Automorphismus von Q erweisen, obwohl sie einen sechsdimensionalen Unterraum punktweise festläßt, was im Widerspruch zu 2.1 stünde. Wegen $\kappa(1)=1$ muß also die Involution κ sowohl in $\langle 1,i\rangle$ als auch in $\langle j,k\rangle$ einen genau eindimensionalen Eigenraum zum Eigenvektor -1 haben. Da $\kappa|\langle j,k\rangle$ die von Δ auf $\langle j,k\rangle$ induzierte Gruppe der eigentlichen Drehungen normalisiert, induziert κ auf $\langle j,k\rangle=\mathbb{R}^2$ sogar eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden. Es existiert also eine Basistransformation von $\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$ auf Hauptachsen von κ, die in $\langle j,k\rangle$ orthogonal ist. Da Δ auf $\langle 1,i\rangle$ trivial operiert, zeigt dies, daß unbeschadet der gefundenen Beschreibung von Δ die Identifikation von B_ι mit $\mathbb{H}$ so modifiziert werden kann, daß

$$\kappa|B_\iota=(\mathbb{H}\to\mathbb{H}\colon x\mapsto jxj^{-1}).$$

In den damit gefundenen quaternalen Koordinaten ist dann Γ als das Erzeugnis von Δ und κ die in (ii) angegebene Gruppe.

(c) $\dim\Delta=3$. Die von LO(4) und RO(4) verschiedenen dreidimensionalen abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen von $\mathrm{SO}(4)\cong\mathrm{SO}(B_\iota^\perp)$ sind isomorph zu SO(3) und haben also keine zentrale Involution. Folglich ist Δ isomorph zu Spin(3). Wegen der Lie-Einfachheit von Spin(3) und nach 2.4 wirkt Δ auf dem Unterquasikörper B_ι entweder trivial oder als SO(3). Die Methoden von (a) lassen in diesen beiden Fällen Δ in quaternalen Koordinaten als die unter (vi) bzw. (vii) angegebene Gruppe schreiben. □

Der folgende Satz bereitet die Behandlung von Automorphismengruppen ohne zentrale Involution vor und erledigt gleichzeitig einen der vorkommenden Fälle:

3.2. **Satz.** *Eine zu* SO(3) *isomorphe Gruppe* Σ *stetiger Automorphismen von* Q *wirkt entweder linear äquivalent zu*

$$\mathbb{G}_{\langle 1,i,j,k\rangle}\cap\mathbb{G}_l=\{\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}\colon(x,y)\mapsto(axa^{-1},aya^{-1})/a\in\mathrm{Spin}(3)\},\quad(*)$$

oder aber die Einschränkung von Σ *auf den zu* 1 *orthogonalen linearen Teilraum von* Q *verwirklicht die 7-dimensionale irreduzible Darstellung*[2] *von* SO(3).

[2] Diese Möglichkeit kommt tatsächlich vor: z.B. kann man anhand von Homotopiebetrachtungen in der Kollineationsgruppe der Oktavenebene (die an anderer Stelle ausgeführt werden sollen) bequem einsehen, daß G_2 Untergruppen auch dieser Art enthält

Beweis. Nach [14] besitzt SO(3) irreduzible $\mathbb{R}$-lineare Darstellungen genau in den ungeraden Dimensionen, und zwar jeweils bis auf Äquivalenz nur eine.

Wirkt Σ reduzibel auf $\langle 1\rangle^{\perp}$ (und dann nach [4, 35.1] vollständig reduzibel), so haben also die nichttrivialen irreduziblen Komponenten dieser Wirkung die Dimension 5 oder 3. Wäre eine von ihnen tatsächlich 5-dimensional, so wäre der Unterraum B_{Σ} der Fixpunkte von Σ in Q ein dreidimensionaler Unterquasikörper des (nach 2.2 vierdimensionalen) Fixquasikörpers B_{ι} einer Involution $\iota\in\Sigma$, im Widerspruch zu 2.1. Also sind die nichttrivialen irreduziblen Komponenten von $\langle 1\rangle^{\perp}$ unter Σ dreidimensional. Ferner gibt es genau zwei solche Komponenten; gäbe es nämlich nur eine, so wäre B_{Σ} fünfdimensional, was wiederum 2.1 widerspricht. Q läßt sich dann so mit $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ identifizieren, daß die beiden nichttrivialen irreduziblen Komponenten den Unterräumen $\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\{0\}$ und $\{0\}\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ entsprechen. Da SO(3) nur innere Automorphismen besitzt, läßt sich diese Identifikation zudem noch so einrichten, daß sich die behauptete Beschreibung $(*)$ von Σ ergibt. □

3.3. **Zusatz.** *In der Darstellung von* 3.2$(*)$ *entsprechen den unter* Σ *invarianten dreidimensionalen Teilräumen des Vektorraums* Q *genau die Unterräume*

$$W_0=\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\{0\};\qquad W_{\infty}=\{0\}\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H});\qquad W_{\alpha}=\{(x,x\alpha)/x\in\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\}$$

$(0\neq\alpha\in\mathbb{R})$ *von* $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$.

Beweis. Da die Bahn eines Vektors aus $\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ unter Σ einen mindestens 3-dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ aufspannt und Σ den zu $\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ orthogonalen 2-dimensionalen Teilraum punktweise festläßt, ist jeder 3-dimensionale Σ-invariante Untervektorraum W von $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ in $\mathrm{Pu}(\mathbb{H})\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ enthalten, und Σ wirkt auf W kanonisch als SO(3). Aus demselben Grund folgt aus $W_0\cap W\neq\{0\}$ bzw. $W_{\infty}\cap W\neq\{0\}$, daß $W=W_0$ bzw. $W=W_{\infty}$. Falls hingegen $W_0\cap W=\{0\}=W_{\infty}\cap W$ ist, so muß für $(x,y)\in W$ mit $0\neq x\in\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ und $0\neq y\in\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ die Standgruppe von Σ auf $(x,0)$ auch $(0,y)$ festlassen und umgekehrt; an der Darstellung 3.2 liest man ab, daß folglich $y=x\alpha$ für geeignetes $\alpha\in\mathbb{R}$. Da Σ insbesondere transitiv auf den Richtungen in W operiert, folgt hieraus $W=W_{\alpha}$. □

Entscheidend für das weitere ist nun

3.4. **Lemma.** *Enthält* Δ *keine zentrale Involution, so ist* Δ *lie-einfach.*

Beweis. Zunächst ist Δ halbeinfach: Ein abgeschlossener zusammenhängender kommutativer Normalteiler von Δ wäre ein Torus (da Δ kompakt ist) und folglich zentral, da die Automorphismengruppen von Tori diskret sind; jede seiner Involutionen wäre also zentral in Δ.

Nach [4, 19.12] wird Δ also erzeugt von endlich vielen lie-einfachen kompakten zusammenhängenden Normalteilern N_{ν} $(\nu=1,2,\dots,m)$ positiver Dimension, die sich gegenseitig zentralisieren und insbesondere paarweise diskreten Durchschnitt haben.

Die Annahme $m\geqq 2$ soll nun zum Widerspruch geführt werden: Wir wählen eine Involution ι in N_1; dann läßt das im Zentralisator von N_1 enthaltene Erzeugnis Λ von $N_2, N_3,\dots,N_m$ den aus den Fixpunkten von ι bestehenden Unterquasikörper B_{ι} sowie $B_{\iota}^{\perp}$ invariant. Nach 2.3 ist Λ isomorph einer kompakten zusammenhängenden Untergruppe von $\mathrm{SO}(B_\iota^\perp) \cong \mathrm{SO}(4)$, also – da halbeinfach und ohne zentrale Involution – isomorph zu SO(3). Insbesondere ist die Anzahl der einfachen Faktoren von Δ gleich 2. Vertauschung der Rollen von N_1 und N_2 im vorstehenden Argument liefert $\Delta = N_1 \cdot N_2$ mit $N_\nu \cong \mathrm{SO}(3)$. $\Sigma = N_1$ wirkt auf dem geeignet mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ identifizierten Vektorraum Q in der in 3.2 beschriebenen Weise. Da N_1 von N_2 zentralisiert wird, permutiert N_2 die 3-dimensionalen N_1-invarianten Unterräume von $Q = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$; diese bilden nach 3.3 eine zur Kreislinie homöomorphe Teilmenge S der Graßmann-Mannigfaltigkeit $V_{8,3}$. Da $N_2 \cong \mathrm{SO}(3)$ keine abgeschlossenen Untergruppen der Dimension 2 besitzt, operiert N_2 trivial auf S; insbesondere sind $\mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ invariant unter ganz Δ. Da eine kompakte zusammenhängende lineare Gruppe des $\mathbb{R}^3$ einer Untergruppe von SO(3) isomorph ist, muß die 6-dimensionale Gruppe Δ auf diesen beiden Teilräumen einen mindestens 3-dimensionalen Ineffektivitätskern besitzen, für den angesichts der bekannten Wirkung von N_1 nur N_2 in Frage kommt. N_2 wirkt also trivial auf $\mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ und nach 2.1 folglich auf ganz Q, was Unsinn ist. □

3.5. **Satz.** *Δ möge keine zentrale Involution enthalten. Dann wirkt Γ linear äquivalent zu einer der folgenden Automorphismengruppen der Oktavenalgebra*

(i) $\mathbb{G} \cong \mathrm{G}_2$,

(ii) $\mathbb{G}_{\langle 1, i\rangle} \cong \Gamma\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$,

(iii) $\mathbb{G}_i \cong \mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$

oder aber Δ ist isomorph zu SO(3) *und wirkt wie in* 3.2 *beschrieben.*

Zusatz: Bei geeigneter Identifikation von $\mathbb{O}$ mit $\mathbb{C}^4$ handelt es sich bei (iii) *um die Matrizengruppe*

$$\{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 : (z_0, z) \mapsto (z_0, Az) / A \in \mathrm{SU}(3, \mathbb{C})\} \qquad (*)$$

und bei (ii) *um deren Erweiterung durch die Involution*

$$\kappa: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3).$$

Beweis. Nach 1.1 ist $\dim \Delta \leq \dim \mathrm{SO}(7) = 21$, und nach 3.4 ist Δ lie-einfach. Nach [14] ist Δ daher isomorph zu einer der Gruppen $\mathrm{SO}(7, \mathbb{R})$, $\mathrm{PSO}(6, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(5, \mathbb{R})$, G_2, $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, oder Δ ist lokal isomorph zu $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$.

In SO(7) und PSO(6) existieren Involutionen mit mindestens 7-dimensionalem Zentralisator, womit diese Gruppen nach 2.3 ausscheiden. In SO(5) existiert eine Involution ι, deren Zentralisator eine zu $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(2)$ isomorphe Untergruppe enthält; falls also SO(5) als Automorphismengruppe aufträte, müßte nach 2.3 die Gruppe $\mathrm{SO}(B_\iota^\perp) \cong \mathrm{SO}(4)$ eine zu $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(2)$ isomorphe Untergruppe enthalten, was nicht der Fall ist. Der Fall $\Delta \cong \mathrm{SO}(3)$ ist in 3.2 bereits behandelt. In den verbleibenden Fällen G_2 und $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ müssen jetzt noch die möglichen Wirkungen von Δ auf $Q = \mathbb{R}^8$ sowie die möglichen zugehörigen vollen Gruppen Γ bestimmt werden.

Fall a) $\Delta \cong \mathrm{G}_2$. Anhand der Weylschen Dimensionsformel ([14, S. 9]) entnimmt man der Tabelle [14], daß Δ nur eine reelle irreduzible Darstellung von Dimension ≤ 8 besitzt (nämlich in Dimension 7). Da Δ als einfache Gruppe auf $Q = \mathbb{R}^8$ vollständig reduzibel wirkt, gibt es also bis auf Äquivalenz nur eine mögliche

Wirkung. Die 14-dimensionale zusammenhängende Automorphismengruppe $\mathbb{G}$ von $\mathbb{O}$ ist nach 3.1 und 3.4 einfach und realisiert daher diese Möglichkeit.

Nach [4, 51.19 mit 33.9 und 33.3.4] besitzt Δ nur innere Automorphismen. Ist also Γ eine Automorphismengruppe von Q, deren Zusammenhangskomponente Δ zu G_2 isomorph ist und $\varphi \in \Gamma$, so können wir zur Bestimmung von φ modulo Δ annehmen, daß Δ im Zentralisator von φ liegt. Γ läßt nun $1 \in Q$ fest und den zu 1 orthogonalen Unterraum V von $Q = \mathbb{R}^8$ invariant; ferner ist Δ auf dem Raum $P(V)$ der eindimensionalen Teilräume von V transitiv und hat auf verschiedenen Elementen von $P(V)$ verschiedene Standgruppen, wie man der Wirkung von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{O}$ entnimmt. Wenn Δ von $\varphi \in \Gamma$ zentralisiert wird, muß also φ trivial auf $P(V)$ wirken; $\varphi | V$ ist dann eine Streckung, und zwar mit Streckungsfaktor ± 1, da $\operatorname{Aut} Q$ kompakt ist. Würde φ auf V die Spiegelung induzieren, so wäre φ ein involutorischer Automorphismus, der nur das lineare Erzeugnis von 1 punktweise fixieren würde, im Widerspruch zu 2.2. Also ist $\varphi = \mathrm{id}$ und $\Gamma = \Delta$.

Fall b) Δ ist lokal isomorph zu $SU(3, \mathbb{C})$, also isomorph zu einer Zentrumsfaktorgruppe der einfach zusammenhängenden Gruppe $SU(3, \mathbb{C})$. Nach [14] besitzt $SU(3, \mathbb{C})$ bis auf Äquivalenz (über $\mathbb{R}$!) genau eine nichttriviale reelle irreduzible Darstellung der Dimension $\leqq 7$, nämlich die klassische Wirkung von $SU(3, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$. Wiederum wegen der vollständigen Reduzibilität der Wirkung operiert also Δ bei geeigneter Identifikation von Q mit $\mathbb{C}^4$ als die im Zusatz unter (*) angegebene Gruppe.

Ist nun Γ eine kompakte Automorphismengruppe von Q mit einer solchen Zusammenhangskomponente Δ, so führt Γ den Unterraum $\mathbb{C} \times \{0\}$ der Fixpunkte des Normalteilers Δ sowie $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ als den einzigen reell 6-dimensionalen unter Δ invarianten Teilraum jeweils in sich über.

(b 1) Zur näheren Bestimmung von Γ benötigen wir nun wieder die Automorphismengruppe von $\Delta \cong SU(3, \mathbb{C})$. Einfache geometrische Überlegungen anhand der darin enthaltenen Spiegelungen oder aber [15] lehren, daß die Automorphismengruppe von $SU(3, \mathbb{C})$ die Erweiterung der Gruppe der inneren Automorphismen durch die Konjugation ist (die jede komplexe 3×3-Matrix in die Matrix mit konjugiert-komplexen Einträgen überführt). Ist $\gamma \in \Gamma$, so können wir modulo Δ also annehmen, daß γ auf Δ den identischen Automorphismus oder aber die Konjugation induziert. Nun gilt:

(b2) *Wird Δ von γ zentralisiert, so liegt γ in Δ.* Die Einschränkung $\gamma | \{0\} \times \mathbb{C}^3$ ist dann nämlich eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die auf der projektiven Ebene aller komplexen eindimensionalen Unterräume von $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ die Identität induziert, da verschiedene Unterräume dieser Art verschiedene Standgruppen in $\Delta | \{0\} \times \mathbb{C}^3 = SU(3, \mathbb{C})$ haben. Mit Baers Kunstgriff ([2, III.1 S. 44]) folgt, daß $\gamma | \{0\} \times \mathbb{C}^3$ sogar $\mathbb{C}$-linear und eine Streckung mit komplexem Streckungsfaktor c ist, wobei $|c| = 1$, da Γ kompakt ist. Sei $\zeta \in \Delta$ der Automorphismus, der auf $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{c} & & \\ & \bar{c} & \\ & & c^2 \end{pmatrix} \in SU(3, \mathbb{C})$$

bestimmt wird; dann läßt $\gamma' = \gamma \circ \zeta \in \Gamma$ einen mindestens vierdimensionalen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ punktweise fest. Wegen $\gamma'(1) = 1$ ist dann der aus den Fixpunkten von γ' bestehende Unterquasikörper mindestens 5-dimensional; und nach 2.1 folgt $\gamma' = \mathrm{id}$ und $\gamma \in \Delta$.

(b3) Ist $\Gamma \neq \Delta$, so folgt also mit (b1) und (b2), daß Γ die Erweiterung von Δ durch ein $\varphi \in \Gamma \setminus \Delta$ ist, das auf Δ die Konjugation induziert. Zum vollständigen Beweis des Satzes bleibt zu zeigen, daß unbeschadet der gefundenen Beschreibung von Δ die Identifikation von Q mit $\mathbb{C}^4$ noch so modifiziert werden kann, daß φ in neuen Koordinaten die Abbildung κ der Behauptung wird. Da sowohl $\kappa \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ als auch $\varphi \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ auf $\Delta \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3 = \mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ die Konjugation induzieren, kommutiert $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ elementweise mit der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\kappa \circ \varphi \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ und wie in (b2) folgt mit Baers Kunstgriff, daß $\kappa \circ \varphi \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ eine Streckung mit komplexem Streckungsfaktor c vom Betrag 1 ist. Mit $c = d^2$ hat man dann für alle $z \in \{0\} \times \mathbb{C}^3$

$$\varphi(z \cdot d^{-1}) \cdot d = \varphi(z \cdot \bar{d}) \cdot d = \kappa(z \cdot d) \cdot d = \kappa(z) \cdot \bar{d} \cdot d = \kappa(z);$$

führt man in $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ eine orthogonale Basistransformation mittels der komplexen Streckung um den Faktor d als Transformationsmatrix durch, so geht also $\varphi \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ in $\kappa \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ über.

Insbesondere ist $\varphi \mid \{0\} \times \mathbb{C}^3$ involutorisch, und die Betrachtung des aus den Fixpunkten von φ^2 bestehenden Unterquasikörpers lehrt nach 2.1, daß folglich φ eine Involution ist. Führt man nun noch in $\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ eine Basistransformation über $\mathbb{R}$ durch, die φ dort auf Hauptachsen bringt, so wird bezüglich der neuen Koordinaten φ durch κ dargestellt (man beachte, daß $\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ unter φ nicht punktweise festbleiben kann, da sonst φ im Widerspruch zu 2.2 einen 5-dimensionalen Teilraum von $Q = \mathbb{R}^8$ punktweise festließe). □

4. Achtdimensionale reelle Divisionsalgebren mit großer Automorphismengruppe

In diesem Paragraphen wird systematisch durch Beispiele belegt, daß die Gruppen G_2, $\Gamma\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}(4)$ tatsächlich als die vollen Automorphismengruppen gewisser achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper auftreten. Um runde Klassifikationsergebnisse zu erhalten, schränken wir uns dabei auf achtdimensionale reelle Divisionsalgebren ein. Isomorphiefragen werden nicht systematisch behandelt, da man sie erfahrungsgemäß eleganter beim Studium der Kollineationsgruppen in den projektiven Ebenen über den fraglichen Divisionsalgebren in den Griff bekommt, was in breiterem Kontext später erfolgen soll. – Alle vorkommenden Divisionsalgebren sollen ein Einselement 1 besitzen.

Zunächst betrachten wir Divisionsalgebren mit Automorphismengruppe G_2:

4.1. *Für alle $\tau > 0$ existiert auf $\mathbb{O}$ genau eine Multiplikation $\circ$, die für alle orthogonalen $x, y \in \mathrm{SPu}(\mathbb{O})$*

$$x \circ y = x y$$

und (*)

$$x \circ x = -1 \cdot \tau$$

erfüllt und die den $\mathbb{R}$*-Vektorraum* $\mathbb{O}$ *zu einer reellen Divisionsalgebra* $\mathbb{O}_\tau$ *mit* $1 \in \mathbb{O}$ *als Einselement macht. Die Automorphismengruppe* $\mathbb{G}$ *von* $\mathbb{O}$ *ist auch die Automorphismengruppe von* $\mathbb{O}_\tau$.

Bemerkung. Für $\tau = 1$ erhält man die klassische Oktavenmultiplikation.

Beweis. Schränkt man zunächst die Multiplikationsvorschrift (∗) auf die kanonische Basis $1, i, j, k, l, li, lj, lk$ von $\mathbb{O}$ ein, so erhält man eine Multiplikationstabelle, die vermöge distributiver Fortsetzung eine $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{O}_\tau$ liefert. Bis auf Quadrate stimmt diese Tabelle mit der Tabelle der klassischen Multiplikation in $\mathbb{O}$ überein und der direkte Vergleich mit $\mathbb{O}$ zeigt, daß die so gewonnene Multiplikation tatsächlich (∗) erfüllt. Da diese Beziehungen $\mathbb{G}$-invariant formuliert sind, ist $\mathbb{G}$ auch eine Automorphismengruppe von $\mathbb{O}_\tau$. Die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{O}_\tau$ ergibt sich wie bei der klassischen Oktavenmultiplikation: Ist $0 \neq x \in \mathrm{Pu}(\mathbb{O})$, so läßt sich jedes $y \in \mathbb{O}$ zerlegen als $y = 1 \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_1 + z \cdot \eta_2$ mit $\eta_\nu \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathrm{Pu}(\mathbb{O})$ orthogonal zu x. Für $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ ist $(1 \cdot \xi_0 + x \cdot \xi_1) \circ y = 1 \cdot (\xi_0 \eta_0 - \xi_1 \eta_1 \tau) + x \cdot (\xi_0 \eta_1 + \xi_1 \eta_0) + z \cdot \xi_0 \eta_2 + xz \cdot \xi_1 \eta_2$. Da x, z, xz paarweise orthogonal sind, folgt aus dem Verschwinden dieses Produkts das Verschwinden eines der Faktoren. □

4.2. Die Elemente $1, i, j, k$ von $\mathbb{O}$ spannen in $\mathbb{O}_\tau$ eine Unteralgebra $\mathbb{H}_\tau$ mit Multiplikationstabelle

$$i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1 \cdot \tau; \qquad \begin{aligned} i \circ j &= -j \circ i = k; \\ j \circ k &= -k \circ j = i; \\ k \circ i &= -i \circ k = j \end{aligned}$$

auf. Nach [6] sind die Algebren $\mathbb{H}_\tau$ mit $0 < \tau \in \mathbb{R}$ bis auf Isomorphie genau die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe. Sie sind für verschiedene τ nicht isomorph.

Da $\mathbb{G}$ transitiv auf Paaren orthogonaler Vektoren aus $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ ist, ergibt sich daraus:

4.3. *Die vierdimensionalen Unteralgebren der Divisionsalgebren* $\mathbb{O}_\tau$ *sind sämtlich isomorph zu* $\mathbb{H}_\tau$. *Insbesondere sind die Algebren* $\mathbb{O}_\tau$ $(0 < \tau \in \mathbb{R})$ *paarweise nicht-isomorph.* □

Umgekehrt lassen sich alle Divisionsalgebren mit zu G_2 isomorpher Automorphismengruppe aus ihren vierdimensionalen Unteralgebren so aufbauen:

4.4. **Satz.** *Die achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren, deren Automorphismengruppe zu* G_2 *isomorph ist, sind bis auf Isomorphie genau die Algebren* $\mathbb{O}_\tau$ $(\tau > 0)$ *aus* 4.2.

Beweis. Sei D eine Divisionsalgebra der genannten Art mit Multiplikation $\circ$. Nach 3.5 wirkt ihre Automorphismengruppe linear wie $\mathbb{G} = G_2$ auf den Oktaven; wir identifizieren die $\mathbb{R}$-Vektorräume D und $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ entsprechend. Sei $\iota \in \mathbb{G}$ die Involution $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}: (x, y) \mapsto (x, -y)$. Auf der aus den Fixpunkten von ι bestehenden Unteralgebra $B_\iota \triangleq \mathbb{H} \times \{0\}$ von D induziert der Zentralisator von ι in $\mathbb{G}$ die Automorphismengruppe $\mathrm{SO}(3) = \{\mathbb{H} \to \mathbb{H}: x \mapsto a x a^{-1} / a \in \mathrm{Spin}(3)\}$. Nach [6, Satz 1 und 2.1 – 2.3] lassen sich daher in B_ι paarweise und zu 1 orthogonale Vektoren i, j, k gleicher Länge finden, für die bei geeignetem $\tau > 0$ die

Multiplikationstabelle 4.2 gilt. Unbeschadet der Wirkung von $\mathbb{G}$ können wir dabei die Identifikation von D und $\mathbb{O}$ als $\mathbb{R}$-Vektorräumen so einrichten, daß i, j, k die entsprechend bezeichneten Elemente der kanonischen Basis von $\mathbb{O}$ werden. $\mathbb{G}$ ist nun transitiv auf Paaren orthogonaler Vektoren aus $\mathrm{SPu}(\mathbb{O})$ und besteht bei der vorgenommenen Identifikation von D und $\mathbb{O}$ aus Automorphismen sowohl von $\circ$ wie der Oktavenmultiplikation. Folglich lassen sich unter $\mathbb{G}$ aus der Tabelle 4.2 die Beziehungen $(*)$ von 4.1 herleiten, die $\mathbb{O}_\tau$ kennzeichnen. Vermöge der vorgenommenen Identifikationen ist also D isomorph zu $\mathbb{O}_\tau$. $\square$

Für Divisionsalgebren mit $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ als Automorphismengruppe erhalten wir global das folgende Ergebnis, das im weiteren noch präzisiert werden wird:

4.5. **Satz.** *Jede vierdimensionale reelle Divisionsalgebra mit mindestens eindimensionaler Automorphismengruppe läßt sich zu einer achtdimensionalen reellen Divisionsalgebra erweitern, die eine zu* $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ *isomorphe Automorphismengruppe besitzt.*

Umgekehrt entsteht bis auf Isomorphie jede achtdimensionale reelle Divisionsalgebra mit einer zu $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ *isomorphen Automorphismengruppe durch diesen Erweiterungsprozeß.*

Dieses merkwürdige Ergebnis ist im Grunde enttäuschend, da es vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit eindimensionaler Automorphismengruppe wie Sand am Meer gibt, eine Klassifikation im einzelnen also nur in Sonderfällen sinnvoll erscheint. Für konkrete Beispiele vgl. [7]. – Der angesprochene Erweiterungsprozeß beruht auf folgender

4.6. **Konstruktion.** Entsprechend 3.5(ii) identifizieren wir zunächst die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{O}$ und $\mathbb{C}^4$ so, daß folgendes gilt:

- Identifizierte Vektoren haben in $\mathbb{O}$ bzw. $\mathbb{C}^4$ gleiche Länge.
- Das Einselement 1 von $\mathbb{O}$ entspricht $(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4$.
- Die Rechtsmultiplikation in $\mathbb{O}$ mit Elementen aus dem Unterkörper $\langle 1, i \rangle$ entspricht der Skalarmultiplikation im $\mathbb{C}$-Rechtsvektorraum $\mathbb{C}^4$; insbesondere entspricht $i \in \mathbb{O}$ dem Element $(i, 0, 0, 0)$ von $\mathbb{C}^4$.
- Die Elemente j und l der kanonischen Basis von $\mathbb{O}$ entsprechen den Vektoren $(0, 1, 0, 0)$ und $(0, 0, 1, 0)$ in $\mathbb{C}^4$.
- Die Gruppe

$$\Delta = \{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 : (z_0, z) \mapsto (z_0, Az) / A \in \mathrm{SU}(3, \mathbb{C})\}$$

ist eine Gruppe von Automorphismen von $\mathbb{O}$; und die Konjugation

$$\kappa : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$$

ist ein Automorphismus von $\mathbb{O}$.

Es existiert dann für Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ genau eine Multiplikation $\circ$ auf $\mathbb{C}^4 = \mathbb{O}$, die $\mathbb{C}^4$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra

$$\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

mit Einselement $1=(1,0,0,0)$ macht und

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & i \circ i = -1 \\ \text{(ii)} & i \circ x = -x \cdot (i\alpha) \\ \text{(iii)} & x \circ i = x \cdot (i\beta) \\ \text{(iv)} & (xi) \circ x = i\gamma \\ \text{(v)} & x \circ x = -1 \cdot \delta \\ \text{(vi)} & x \circ y = xy \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{für alle } \mathbb{C}\text{-orthogonalen } x, y \in \{0\} \times \mathbb{C}^3 \\ \text{mit } |x| = |y| = 1\end{array} \qquad (*)$$

erfüllt (man geht hierzu vor wie in 4.1). Da die Beziehungen $(*)$ Δ-invariant sind, ergibt sich durch Vergleich mit den Oktaven, daß Δ eine Automorphismengruppe auch von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ist. – Mit

$$\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

bezeichnen wir die Unteralgebra $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Die Untergruppe von Δ, die $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ invariant läßt, induziert dort die eindimensionale Automorphismengruppe

$$T = \{\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (x, cy) / c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}.$$

4.7. **Lemma.** *Ist $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine Divisionsalgebra, so auch $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.*

Beweis. Für von 0 verschiedene Elemente x und y von $\mathbb{C}^4$ ist $x \circ y \neq 0$ zu zeigen. Liegt x oder y in $\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ oder liegt x im komplex-linearen Erzeugnis von 1 und y, so existiert ein $\varphi \in \Delta$ mit $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, und $x \circ y \neq 0$ folgt daraus, daß diese Unteralgebra nach Voraussetzung eine Divisionsalgebra ist. Andernfalls gibt es Zerlegungen $y = 1 \cdot \eta_0 + \tilde{y} \cdot \eta$ und $x = 1 \cdot \xi_0 + \tilde{y} \cdot \xi + \tilde{z} \cdot \zeta$ mit $\xi_0, \xi, \eta_0 \in \mathbb{C}$ und $\zeta, \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ orthogonale Elemente von $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ vom Betrag 1 sind. Es existiert dann ein Automorphismus $\varphi \in \Delta$ mit $\varphi(\tilde{y}) = j$ und $\varphi(\tilde{z}) = l$, und nach Definition von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ist

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) = (1 \cdot \xi_0 + j \cdot \xi) \circ (1 \cdot \eta_0 + j \cdot \eta) + l \cdot \zeta \eta_0 + lj \cdot \zeta \eta.$$

Der erste Summand liegt in $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \langle 1, i, j, ji \rangle$. Man hat damit eine Zerlegung bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{O}$ und wegen $\zeta \neq 0 \neq \eta$ folgt anhand des letzten Terms, daß $x \circ y \neq 0$. □

Der zweite Teil von Satz 4.5 wird nun präzisiert durch

4.8. **Satz.** *Jede achtdimensionale reelle Divisionsalgebra D mit einer zu* SU$(3, \mathbb{C})$ *isomorphen Automorphismengruppe Δ ist zu einer der Algebren $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ aus* 4.6 *isomorph; dabei kann noch* $\operatorname{Re} \alpha \geqq 0$ *gewählt werden.*

Beweis. (a) Nach 3.5 läßt sich D als $\mathbb{R}$-Vektorraum so mit $\mathbb{C}^4$ identifizieren, daß Δ die in 4.6 angegebene Gruppe wird; zusätzlich kann angenommen werden, daß $(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4$ dem Einselement von D entspricht.

Sind j, l die $(0,1,0,0), (0,0,1,0) \in \mathbb{C}^4$ entsprechenden Elemente von D, so ergibt sich mit den Automorphismen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Delta \quad \text{und} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Delta$$

wegen $\psi(l) = -j$ zunächst, daß $d = l \circ j + j \circ l \in D$ unter ψ auf $-d$ abgebildet wird, woraus notwendig $d = 0$ folgt. Infolgedessen ist $\varphi(j \circ l) = l \circ j = -j \circ l$ und $\psi(j \circ l) = -l \circ j = j \circ l$ und daher $j \circ l \in \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}$. Identifiziert man nun die Oktavenalgebra gemäß 4.6 mit $\mathbb{C}^4$, so gilt entsprechendes auch für das Oktavenprodukt $j \cdot l$. Insgesamt erhält man bei diesen Identifikationen $j \circ l = jl \cdot \varepsilon$ mit einem Skalar $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ändert man nun die Identifikation von $\mathbb{C}^4 = \mathbb{O}$ mit D durch Konjugation mit

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & |\varepsilon|^{-1} & & \\ & & |\varepsilon|^{-1} & \\ & & & |\varepsilon|^{-2} \cdot \varepsilon \end{pmatrix}$$

ab, so verändert dies die Beschreibung von Δ auf $\mathbb{C}^4$ nicht, da $SU(3, \mathbb{C})$ normal in $U(3, \mathbb{C})$ ist; und man erhält dann

$$j \circ l = j \cdot l. \tag{1}$$

(b) $B = \mathbb{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ ist der Unterraum der Fixpunkte von Δ_j und daher eine Unteralgebra von $D = \mathbb{C}^4$. Die Untergruppe von Δ, die B invariant läßt, induziert auf $B = \mathbb{C}^2$ die Automorphismengruppe T aus 4.6. $\mathbb{C} \times \{0\}$ ist der Unterraum der Fixpunkte von T in B, also eine reell-zweidimensionale Divisionsalgebra und als solche zum Körper $\mathbb{C}$ isomorph. Unbeschadet der Beschreibung von Δ und T kann daher die Identifikation von D mit $\mathbb{C}^4$ (und damit die von B mit $\mathbb{C}^2$) im $\mathbb{C} \times \{0\}$ entsprechenden Teil so abgeändert werden, daß für $i = (i, 0) \in B$

$$i \circ i = -1. \tag{2}$$

Unter dem Automorphismus $B = \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2: (x, y) \mapsto (x, -y)$ aus T geht $i \circ j$ in $-i \circ j$ über, weswegen notwendig

$$i \circ j = -j \cdot (i\alpha) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Indem man nötigenfalls die Identifikation von B mit $\mathbb{C}^2$ bzw. die von D mit $\mathbb{C}^4$ durch $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2: (x, y) \mapsto (x, \bar{y})$ bzw. $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4: (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ abändert, was die Beschreibung von T und Δ nicht berührt und an den Beziehungen (1) und (2) nichts ändert, kann dabei noch

$$\operatorname{Re} \alpha \geqq 0 \tag{3a}$$

angenommen werden. Entsprechend ergibt sich

$$j \circ i = j \cdot (i\beta) \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Da invariant unter $(x, y) \mapsto (x, -y)$, ist schließlich

$$(ji) \circ j = i \cdot \gamma \quad \text{mit } \gamma \in \mathbb{C} \tag{5}$$

und

$$j \circ j = -1 \cdot \delta \quad \text{mit } \delta \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

(c) Da Δ aus Automorphismen sowohl bezüglich $\circ$ als auch der Oktavenmultiplikation besteht und transitiv auf Paaren $\mathbb{C}$-orthogonaler Vektoren vom Betrag 1 aus $\{0\} \times \mathbb{C}^3$ ist, ergeben sich aus den Beziehungen (1)–(6) durch Anwendung von Δ gerade die Beziehungen (∗) von 4.6, die $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ charakterisieren. Vermöge der vorgenommenen Identifikationen ist also D zu $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ isomorph. □

Die folgende Aussage schließt den Beweis von 4.5 ab:

4.9. *Jede vierdimensionale reelle Divisionsalgebra B mit mindestens eindimensionaler Automorphismengruppe ist zu einer der Algebren $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ aus* 4.6 *mit* $\operatorname{Re} \alpha \geqq 0$ *isomorph.*

$\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ist dann nach 4.6 und 4.7 eine B erweiternde achtdimensionale reelle Divisionsalgebra mit einer zu $SU(3, \mathbb{C})$ isomorphen Automorphismengruppe.

Beweis. Nach 1.1 enthält bei geeigneter Identifikation von B mit $\mathbb{H}$ die Automorphismengruppe von B eine eindimensionale Torusuntergruppe T von $SO(3) = \{\mathbb{H} \to \mathbb{H}: x \mapsto a x a^{-1} / a \in \mathrm{Spin}(3)\}$. Die Torusuntergruppen von $SO(3)$ sind untereinander konjugiert; folglich ist T bei geeigneter Identifikation von B mit $\mathbb{C}^2$ die gleichnamige Gruppe aus 4.6. Genau wie im Beweisteil (b) von 4.8 (wo nur von T Gebrauch gemacht wurde) ergibt sich, daß diese Identifikation noch so modifiziert werden kann, daß für die Multiplikation $\circ$ von B und gewisse Strukturkonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ die Beziehungen 4.8(2)–(6) gelten. Aus diesen Beziehungen leitet sich nun mittels der Automorphismengruppe T sowohl in B als auch in $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine vollständige Multiplikationstabelle bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis 1; $i = (i, 0)$; $j = (0, 1)$; $ji = (0, i)$ her und zwar die gleiche. Vermöge der vorgenommenen Identifikationen ist also B zu $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ isomorph. □

4.8 soll jetzt in speziellen Situationen noch weiter präzisiert werden. Hierzu zunächst einige Vorbereitungen:

4.10. **Lemma** (Bezeichnungen von 4.6). *Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, wobei* $\operatorname{Re} \alpha \geqq 0$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *ist eine Divisionsalgebra und besitzt einen nicht in T enthaltenen involutorischen Automorphismus φ, der T normalisiert.*

(ii) *Die Strukturkonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind positiv reell.*

(iii) $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *ist eine Divisionsalgebra und*

$$\kappa: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4: (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$$

ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Aus Invarianzeigenschaften bezüglich T folgt, daß die Unterräume $\mathbb{C}\times\{0\}$ und $\{0\}\times\mathbb{C}$ von $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ unter φ in sich übergehen. Da der Normalisator von $SO(2)$ in $GL(2,\mathbb{R})$ die Gruppe der Drehstreckungen (unter Einschluß der uneigentlichen) ist, entsteht aus φ durch Konjugation mit einem Element aus T ein involutorischer Automorphismus ι, der auf $\{0\}\times\mathbb{C}$ die Identität, die Spiegelung in 0 oder aber die Konjugation bewirkt. Im Unterkörper $\mathbb{C}\times\{0\}$ läßt ι die 1 fest und führt i als Wurzel aus -1 in sich oder $-i$ über. Ferner muß ι nach 2.2 einen genau zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ punktweise festlassen; es handelt sich also notwendig um die Abbildung $\iota\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2\colon(x,y)\mapsto(\bar{x},\bar{y})$. Die Auswertung der Bedingung, daß ι ein Automorphismus von $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ist, anhand der Produkte 4.6(ii)–(v) mit $x=j=(0,1)\,\hat{=}\,(0,1,0,0)\in\mathbb{C}^4(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ergibt sofort, daß $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ reell sind. Wegen der Voraussetzung $\operatorname{Re}\alpha\geqq 0$ und der Nullteilerfreiheit ist sogar $\alpha>0$. Für $r\in\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ dann weiter $(1-jr)\circ(1+jr)=1+r^2\delta$; $(i+j\cdot(\alpha r/\beta))\circ(i+jr)=-1-r^2\alpha\delta/\beta$ und $(ir+j)\circ(1+(ji)\cdot r/\gamma)=j\cdot(1+r^2\alpha/\gamma)$, und wegen der Nullteilerfreiheit folgt hieraus nacheinander $\delta>0$ sowie $\alpha/\beta>0$ und $\alpha/\gamma>0$, mit $\alpha>0$ also $\beta>0<\gamma$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Man verifiziert unschwer, daß für alle reellen positiven $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sich mit der in 4.6 angegebenen Multiplikation eine nullteilerfreie Algebra $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, also eine Divisionsalgebra ergibt. Nach 4.7 ist dann auch $\mathbb{C}^4(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ eine Divisionsalgebra. Daß sie κ als Automorphismus zuläßt, verifiziert man direkt anhand der Definition unter Benützung der Tatsache, daß κ ein Automorphismus von $\mathbb{O}=\mathbb{C}^4$ ist.

(iii)$\Rightarrow$(i) ist evident. $\square$

4.11. **Lemma.** *Seien $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, wobei* $\operatorname{Re}\alpha\geqq 0$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Die volle Automorphismengruppe der Divisionsalgebra $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ist dreidimensional.*

(ii) *Die Strukturkonstanten $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sind positiv reell und erfüllen*

$$\alpha=\beta;\qquad \gamma=\alpha\delta.$$

(iii) *$\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ist isomorph zur Divisionsalgebra $\mathbb{H}_{1/\alpha^2}$ aus* 4.2.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Nach Voraussetzung und 2.4 ist die volle Automorphismengruppe von $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ isomorph zu $SO(3)$; sie enthält die Torusgruppe T aus 4.6 als Einparameteruntergruppe. Es existiert daher ein nicht in T gelegener involutorischer Automorphismus, der T normalisiert. Nach 4.10 sind folglich die Strukturkonstanten positiv reell.

Nach [6] ist $\mathbb{C}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ isomorph zu einer der Algebren $\mathbb{H}_\tau$ $(0<\tau\in\mathbb{R})$ und daher flexibel, wie man unmittelbar verifiziert, d.h. für alle Elemente x,y ist $x\circ(y\circ x)=(x\circ y)\circ x$. Wegen $j\circ(i\circ j)=j\circ(-ji\alpha)=i\alpha\gamma$; $(j\circ i)\circ j=(ji\beta)\circ j=i\beta\gamma$; $(i+j)\circ[ji\circ(i+j)]=1\cdot(\beta\delta-\gamma)+ji(\alpha\beta+\beta\gamma)$ und $[(i+j)\circ ji]\circ(i+j)=1\cdot(\gamma-\alpha\delta)+ji(\alpha\beta+\alpha\gamma)$ folgt $\alpha=\beta$ und $\gamma=\alpha\delta$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Setzt man $e=i\cdot 1/\alpha$; $f=j\cdot 1/(\alpha\sqrt{\delta})$; $g=-ji\cdot 1/(\alpha\sqrt{\delta})$, so erhält man in $\mathbb{C}^2(\alpha,\alpha,\alpha\delta,\delta)$

$$e\circ e=f\circ f=g\circ g=-1/\alpha^2;$$

$e \circ f = -f \circ e = g$; $f \circ g = -g \circ f = e$; $g \circ e = -e \circ g = f$,
also bezüglich der Basis $\{1, e, f, g\}$ die Multiplikationstabelle der Algebra $\mathbb{H}_{1/\alpha^2}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist nach [6] bekannt. □

4.12. **Lemma.** *Die Automorphismengruppe einer Divisionsalgebra $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit $\operatorname{Re} \alpha \geqq 0$ ist genau dann zu G_2 isomorph, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positiv reell sind und wenn $\beta = \alpha$, $\gamma = 1/\alpha$ und $\delta = 1/\alpha^2$.*

Beweis. Hat die Divisionsalgebra $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zu G_2 isomorphe Automorphismengruppe, so ist sie nach 4.4 zu einer der Algebren $\mathbb{O}_\tau$ isomorph. Nach 4.3 sind dann alle vierdimensionalen Unteralgebren isomorph und haben dreidimensionale Automorphismengruppe. Mit 4.11 folgt $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ und $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha\delta$ sowie $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cong \mathbb{H}_{1/\alpha^2}$. Andererseits spannen je zwei orthogonale Elemente $x, y \in \{0\} \times \mathbb{C}^3 \subseteq \mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zusammen mit ihrem Produkt $x \circ y = xy$ eine vierdimensionale zu $\mathbb{H}_\delta$ isomorphe Unteralgebra von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf, wie man unmittelbar verifiziert. Da nach [6] die Algebren $\mathbb{H}_\tau$ $(0 < \tau \in \mathbb{R})$ paarweise nichtisomorph sind, folgt $\delta = 1/\alpha^2$, womit insgesamt die behaupteten Beziehungen zwischen den Strukturkonstanten gezeigt sind.

Umgekehrt verifiziert man direkt anhand der Definitionen, daß für $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 = \mathbb{O} : (\xi + i\eta, z_1, z_2, z_3) \mapsto (\xi + i\eta\alpha, z_1, z_2, z_3)$$

$(\xi, \eta \in \mathbb{R})$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}^4(\alpha, \alpha, 1/\alpha, 1/\alpha^2)$ auf $\mathbb{O}_{1/\alpha^2}$ ist. □

4.13. **Satz.** *Die achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren, deren volle Automorphismengruppe zu $\Gamma\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ isomorph ist, sind bis auf Isomorphie genau die Algebren $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ aus 4.6, deren Strukturkonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positiv reell sind und eine der Bedingungen $\beta = \alpha$; $\gamma = 1/\alpha$; $\delta = 1/\alpha^2$ verletzen.*

Beweis. Ist die Automorphismengruppe Γ zu $\Gamma\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ isomorph, so liegt zunächst nach 4.8 bis auf Isomorphie eine der Algebren $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit $\operatorname{Re} \alpha \geqq 0$ vor. Die Zusammenhangskomponente Δ von Γ ist dann die in 4.6 beschriebene Gruppe. Es existiert nun ein involutorischer Automorphismus $\kappa \in \Gamma \setminus \Delta$, der auf Δ die Konjugation bewirkt. Die zu $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ isomorphe Untergruppe von Δ der die Unteralgebra $B = \mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathbb{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ punktweise festlassenden Automorphismen ist konjugationsinvariant; folglich ist B unter κ invariant und κ normalisiert die Untergruppe der Automorphismen aus Δ, die B invariant lassen. Diese induziert auf B die Automorphismengruppe T aus 4.6; nach 4.10 sind also die Strukturkonstanten positiv reell. Die restlichen Aussagen über die Strukturkonstanten folgen nun aus 4.12.

Daß umgekehrt jede der angegebenen Divisionsalgebren zu $\Gamma\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ isomorphe Automorphismengruppe hat, folgt aus 4.6, 4.10(iii) und 4.12 auf dem Hintergrund der Übersicht 3.1 und 3.5 über mögliche Automorphismengruppen. □

4.14. Bei nicht sämtlich reellen Strukturkonstanten (z.B. dann, wenn die volle Automorphismengruppe von $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zu $\mathrm{SO}(2)$ isomorph ist) liefert die Konstruktion von 4.6–4.7 also Divisionsalgebren $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, deren volle Automorphismengruppe zu $\mathrm{SU}(3, \mathbb{C})$ isomorph ist. In diesem Fall läßt sich im übrigen mit den Invarianz- und Transitivitätseigenschaften der Wirkung von $SU(3, \mathbb{C})$ leicht zeigen, daß $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ durch den Isomorphietyp von $\mathbb{C}^4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist; es gibt also wegen 4.9 viele verschiedene Isomorphieklassen von achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren dieses Typs.

Wir wenden uns jetzt der Automorphismengruppe $SO(4)$ zu. Ab jetzt wird die Oktavenmultiplikation wieder, wie in 1.3 beschrieben, in $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dargestellt. Nach dem Muster von 4.1 zeigt man zunächst:

4.15. *Für alle positiven reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ existiert genau eine Multiplikation $\circ$ auf $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, die den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{O}$ zu einer reellen Divisionsalgebra*

$$\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

mit Einselement $1 \in \mathbb{O}$ macht und folgenden Beziehungen genügt:

(i) *Für orthogonale $x, y \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \{0\}$ ist $x \circ y = xy$.*
(ii) *Für $x \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \{0\}$, $y \in \{0\} \times \mathbb{H}$ ist $x \circ y = xy\alpha$ und $y \circ x = yx\beta$.*
(iii) *Für orthogonale $x, y \in \{0\} \times \mathbb{H}$ ist $x \circ y = xy\gamma$.*
(iv) *Für $x \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{H}$ ist $x \circ x = x^2\delta$.*

Die Automorphismengruppe

$$\Delta = \{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H} \colon (x, y) \mapsto (axa^{-1}, ayb^{-1}) / a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

von $\mathbb{O}$ ist auch eine Automorphismengruppe von $\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. □

4.16. **Satz.** *Die achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren, die eine zu* $SO(4)$ *isomorphe Automorphismengruppe besitzen, sind bis auf Isomorphie genau die Algebren $\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (mit positiven reellen Strukturkonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).*

Beweis. Sei D eine achtdimensionale reelle Divisionsalgebra mit einer zu $SO(4)$ isomorphen Automorphismengruppe Δ. Nach 3.1 läßt sich D als $\mathbb{R}$-Vektorraum so mit $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ identifizieren, daß Δ die Gruppe aus 4.15 wird. Da $1 \in D$ fest unter Δ ist, kann dabei angenommen werden, daß das Einselement bei dieser Identifikation $(1, 0) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ wird. Die Multiplikation von D (übertragen auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$) schreiben wir mit dem Symbol $\circ$, um sie von der Oktavenmultiplikation zu unterscheiden.

$\mathbb{H} \times \{0\}$ als Menge der Fixpunkte der Involution

$$\iota_{-} \colon (x, y) \mapsto (x, -y)$$

ist eine vierdimensionale Unteralgebra von D, auf der Δ eine zu $SO(3)$ isomorphe Automorphismengruppe induziert. Sie ist also für geeignetes $\delta > 0$ zu $\mathbb{H}_\delta$ isomorph (s. 4.2); genauer: nach [6, 2.1–2.3] existiert eine aus Vektoren i, j, k gleicher Länge bestehende Orthogonalbasis des zum Einselement orthogonalen Unterraums $\mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \times \{0\}$ mit $i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1 \cdot \delta$; $i \circ j = -j \circ i = k$ usw. Dabei läßt sich o.B.d.A. die Identifikation von D mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ so modifizieren, daß i, j, k die Elemente $(i, 0)$; $(j, 0)$; $(k, 0)$ von $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ werden. Im Vergleich zur Oktavenmultiplikation ist dann insbesondere

$$(i, 0) \circ (i, 0) = (-1 \cdot \delta, 0), \tag{1}$$

$$(i, 0) \circ (j, 0) = (i, 0) \cdot (j, 0). \tag{2}$$

$\{(1\cdot r, 1\cdot s)/r, s\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ ist die Menge der Fixpunkte der Untergruppe $\{(x,y)\mapsto(axa^{-1}, aya^{-1})/a\in\mathrm{Spin}(3)\}$ von Δ, also eine zweidimensionale Unteralgebra von D und daher zum Körper $\mathbb{C}$ isomorph. ι_- induziert auf ihr den stetigen Automorphismus $(r,s)\mapsto(r,-s)$, der im Körper $\mathbb{C}$ der Konjugation entspricht. Folglich ist $(0,1)\circ(0,1)=(-1\cdot\varepsilon, 0)$ mit $\varepsilon>0$. Indem man die Identifikation von D mit $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ durch eine geeignete Streckung des $\{0\}\times\mathbb{H}$ entsprechenden Teils abändert, kann man $\varepsilon=\delta$ erreichen:

$$(0,1)\circ(0,1)=(-1\cdot\delta, 0). \tag{3}$$

Bezüglich der Involutionen ι_- und

$$\iota_j\colon (x,y)\mapsto(jxj^{-1}, jyj^{-1})$$

ist $(i,0)\circ(0,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, bezüglich der Involution

$$\iota_i\colon (x,y)\mapsto(ixi^{-1}, iyi^{-1})$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $+1$. Folglich ist $(i,0)\circ(0,1)=(0,-i\alpha)$ mit $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$, wobei wir, gegebenenfalls durch Abänderung der Identifikation von D und $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ mit einer Spiegelung im $\{0\}\times\mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ entsprechenden Teil, $\alpha>0$ annehmen können. Man erhält so

$$(i,0)\circ(0,1)=(i,0)\cdot(0,1)\cdot\alpha \qquad \text{mit } \alpha>0. \tag{4}$$

Entsprechend ergibt sich mit geeignetem $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$(0,1)\circ(i,0)=(0,1)\cdot(i,0)\cdot\beta. \tag{5}$$

$(0,1)\circ(0,i)$ ist fest unter ι_- und ι_i und ein Eigenvektor von ι_j zum Eigenwert -1; also ist $(0,1)\circ(0,i)=(-i\gamma, 0)$ mit $0\neq\gamma\in\mathbb{R}$:

$$(0,1)\circ(0,i)=(0,1)\cdot(0,i)\cdot\gamma. \tag{6}$$

Angesichts der Transitivitätseigenschaften von Δ (s. 1.3) und da Δ eine Automorphismengruppe sowohl von D als auch von $\mathbb{O}$ ist, folgen nun durch Anwendung von Δ auf (1)−(6) die Beziehungen 4.15(i)−(iv), die die Algebra $\mathbb{H}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ kennzeichnen; vermöge der vorgenommenen Identifikationen ist also D zu dieser Algebra isomorph.

Zum vollständigen Beweis ist jetzt nur noch zu zeigen, daß mit α auch β und γ positiv sind. Nun ist für $\alpha_\nu, x_\nu\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&(ia_1, 1\cdot a_2)\circ(1\cdot x_0+ix_1, 1\cdot x_2+ix_3)\\ &=(-1\cdot(a_1x_1+a_2x_2)\,\delta+i(a_1x_0-\gamma a_2x_3),\\ &\quad 1\cdot(a_2x_0+\alpha a_1x_3)+i(\beta a_2x_1-\alpha a_1x_2)).\end{aligned}$$

Die Nullteilerfreiheit besagt, daß für $(a_1,a_2)\neq(0,0)$ dieser Ausdruck nur bei $x_0=x_1=x_2=x_3=0$ verschwindet; dies ist gleichbedeutend mit

$$0\neq\det\begin{pmatrix}-\delta a_1 & -\delta a_2\\ \beta a_2 & -\alpha a_1\end{pmatrix}=\delta(\alpha a_1^2+\beta a_2^2)$$

und

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} a_1 & -\gamma a_2 \\ a_2 & \alpha a_1 \end{pmatrix} = \alpha a_1^2 + \gamma a_2^2,$$

was wegen $\alpha > 0$ nur mit $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ gewährleistet ist. □

4.17. **Lemma.** $\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *hat zu* G_2 *isomorphe Automorphismengruppe genau dann, wenn* $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

4.18. **Korollar.** *Die achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren, deren volle Automorphismengruppe zu* SO(4) *isomorph ist, sind bis auf Isomorphie genau die Algebren* $\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *aus* 4.15 *mit* $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (1, 1, 1)$.

Beweise. Hat $\mathbb{H}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zu G_2 isomorphe Automorphismengruppe, so sind nach 4.4 und 4.3 alle vierdimensionalen Unteralgebren isomorph. Nun ist nach Definition die Unteralgebra $\mathbb{H} \times \{0\}$ gleich $\mathbb{H}_\delta$. Die von $e_1 = (0, i) \cdot 1/\alpha$; $e_2 = (k, 0) \cdot 1/\alpha$; $e_3 = (0, j) \cdot 1/\alpha$ aufgespannte vierdimensionale Unteralgebra B muß dann ebenfalls isomorph zu $\mathbb{H}_\delta$ und insbesondere flexibel sein. Sie hat die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} & e_1 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = e_3 \circ e_3 = -1 \cdot \delta/\alpha^2 \\ & e_1 \circ e_2 = e_3 \cdot \beta/\alpha; \quad e_2 \circ e_1 = -e_3 \\ & e_2 \circ e_3 = e_1; \quad e_3 \circ e_2 = -e_1 \cdot \beta/\alpha \\ & e_3 \circ e_1 = -e_1 \circ e_3 = e_2 \cdot \gamma/\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Forderung der Flexibilität liefert $e_3 \cdot \beta\gamma/\alpha^2 = e_1 \circ (e_3 \circ e_1) = (e_1 \circ e_3) \circ e_1 = e_3 \cdot \gamma/\alpha$, also

$$\beta = \alpha$$

und $1 \cdot \delta(1 - \gamma/\alpha)/\alpha^2 + e_1 \cdot (1 + \gamma/\alpha) = [(e_2 + e_3) \circ e_1] \circ (e_2 + e_3) = (e_2 + e_3) \circ [e_1 \circ (e_2 + e_3)] = 1 \cdot \delta(\gamma/\alpha - 1)/\alpha^2 + e_1 \cdot (1 + \gamma/\alpha)$, folglich

$$\gamma = \alpha.$$

Nach der Tabelle (1) ist dann B zu $\mathbb{H}_{\delta/\alpha^2}$ isomorph und soll andererseits zu $\mathbb{H}_\delta$ isomorph sein, womit insgesamt $\gamma = \beta = \alpha = 1$ folgt, da nach [6] die Algebren $\mathbb{H}_\tau$ $(\tau > 0)$ paarweise nichtisomorph sind.

Umgekehrt ist nach den Definitionen $\mathbb{H}^2(1, 1, 1, \delta)$ gleich $\mathbb{O}_\delta$ und hat nach 4.1 zu G_2 isomorphe Automorphismengruppe. Damit ist 4.17 gezeigt.

Das Korollar folgt nun sofort aus 4.16 anhand der Übersicht 3.1 und 3.5 über mögliche Automorphismengruppen, da $SU(3, \mathbb{C})$ keine zu SO(4) isomorphe Untergruppe enthält: $SU(3, \mathbb{C})$ etwa als eine Automorphismengruppe der Oktavenalgebra läßt nämlich nach 3.5 eine zweidimensionale Unteralgebra punktweise fest, während nach 3.1 die Menge der Fixpunkte einer zu SO(4) isomorphen Automorphismengruppe genau aus den reellen Vielfachen des Einselements besteht. □

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Forschungsstipendium, zu dessen Ergebnissen die vorliegende Arbeit gehört.

Literatur

1. Baer, R.: Projectivities with Fixed Points on Every Line of the Plane. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 273 – 286 (1946)
2. Baer, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York: Academic Press 1952
3. Danzer, L., Laugwitz, D., Lenz, H.: Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. Arch. der Math. **8**, 214 – 219 (1957)
4. Freudenthal, H., de Vries, H.: Linear Lie Groups. New York-London: Academic Press 1969
5. Hähl, H.: Automorphismengruppen lokalkompakter zusammenhängender Quasikörper und Translationsebenen. Geometriae dedicata **4**, 305 – 321 (1975)
6. Hähl, H.: Vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe. Geometrie dedicata **4**, 323 – 331 (1975)
7. Hähl, H.: Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geometriae dedicata **4**, 333 – 361 (1975)
8. Osborn, J. M.: Quadratic division algebras. Trans. Amer. math. Soc. **105**, 202-221 (1962)
9. Porteous, I. R.: Topological Geometry. London: Van Nostrand 1969
10. Salzmann, H.: Topological planes. Advances Math. **2**, 1 – 60 (1967)
11. Salzmann, H.: Kompakte vierdimensionale Ebenen. Arch. der Math. **20**, 551 – 555 (1969)
12. Salzmann, H., Löwen, R.: Zahlbereiche Teil I. Vorlesung Tübingen Sommersemester 1971.
13. Salzmann, H.: Homogene kompakte projektive Ebenen. Pacific J. Math. **60**, 217 – 234 (1975)
14. Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen. Lecture Notes in Mathematics 40, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
15. Wonenburger, M. J.: The Automorphisms of $U_n^+(K,f)$ and $PU_n^+(K,f)$. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **24**, 52 – 65 (1964)

Eingegangen am 6. Februar 1976