ACHTDIMENSIONALE LOKALKOMPAKTE TRANSLATIONSEBENEN MIT MINDESTENS 17- DIMENSIONALER KOLLINEATIONSGRUPPE

1. EINLEITUNG

1.1. *Zum Kontext*

Diese Arbeit bildet den Abschluß eines Klassifikationsprogramms mit dem Ziel der expliziten Bestimmung aller achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, deren Kollineationsgruppe mindestens 17-dimensional ist.

Diese Klassifikation ist über den Rahmen der Theorie der topologischen Translationsebenen hinaus von Belang. Nach neuesten Ergebnissen von Salzmann (bisher unveröffentlicht) ist jede achtdimensionale, (lokal)kompakte topologische projektive Ebene, deren Kollineationsgruppe mindestens 17-dimensional ist, entweder isomorph zu einer der quaternalen Hughes-Ebenen ([23, Satz 2, 3.6ff]), oder aber eine Translationsebene bzw. dual zu einer solchen. Die Klassifikation, die hier zum Abschluß gebracht wird, liefert also die Ebenen mit größtmöglicher Beweglichkeit unter den achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen schlechthin.

Für den Fall einer Kollineationsgruppe der Dimension ≥ 19 ist das Resultat von Salzmann bereits publiziert [22], [23, Satz 1]. Im Rahmen der hier ausgeführten Klassifikation ergibt sich andererseits, daß außer der Ebene über dem Quaternionenkörper keine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene eine Kollineationsgruppe der Dimension ≥ 19 hat (dieses Ergebnis kann schon vorab, vor der Durchführung der Klassifikation im Einzelnen, gewonnen werden, siehe [7, 1.3]). Insgesamt ist also die desarguessche Quaternionenebene die einzige achtdimensionale, kompakte projektive Ebene mit einer Kollineationsgruppe der Dimension ≥ 19 . Die Klassifikation liefert andererseits einige Familien von nicht desarguesschen Translationsebenen, deren Kollineationsgruppe Dimension 18 oder 17 hat. Eine vollständige Liste dieser Ebenen ist in §6 angegeben.

Die vorliegende Arbeit ist nur der abschließende Teil der Gesamtklassifikation; deshalb seien hier in einem kurzen Überblick die Vorarbeiten und die anderen Bestandteile erwähnt. In [7] wurde die Klassifikation angekündigt und ihr Programm erläutert. In derselben Arbeit sowie in [3], [6] und [11] finden sich die wesentlichen theoretischen

Grundlagen. In [9] und [13] wurden jeweils Teilklassen der Gesamtklassifikation explizit bearbeitet. Eine letzte Teilklass, deren Erörterung noch aussteht, wird in der vorliegenden Arbeit behandelt. Auch [10] und [12] sind für die Klassifikation wichtig, obwohl die darin konstruierten Ebenenfamilien schließlich nicht in das Klassifikationsergebnis eingehen, da sich bei ihrer Untersuchung herausstellt, daß die Dimension ihrer Kollineationsgruppe zwar recht groß ist, aber doch nicht 17 erreicht; diese Arbeiten dienen also der Ausgrenzung der Klassifikation aus ihrem Umfeld. Für die Teilklass von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, deren duale Ebenen ebenfalls Translationsebenen sind, die also Lenz-Typ V haben, wurde eine entsprechende Klassifikation schon viel früher gesondert durchgeführt ([4], [5]); inzwischen kann man die Ergebnisse für diese speziellere Situation in der allgemeinen umfassenderen Klassifikation mitgewinnen. Durch diese Einordnung in einen allgemeineren Kontext erhalten manche Phänomene, die bei der gesonderten Betrachtung von Lenz-Typ-V-Ebenen nur konstatiert werden konnten, eine natürliche Erklärung. Dies soll in einem Exkurs (§5) noch näher ausgeführt werden.

1.2. Zum Inhalt

Die Arbeit [11] führt auf einen Typus von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, der unter dem Gesichtspunkt großer Kollineationsgruppen vielversprechend ist, nämlich diejenigen, in denen die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen

- (1) eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe Σ enthält, die auf der Translationsachse L_∞ Fixpunkte hat und eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Transformationsgruppe von L_∞ induziert,

und überdies

- (2) eine dreidimensionale abgeschlossene Untergruppe N von Scherungen mit fester Achse besitzt, die von Σ normalisiert wird

(Alternative (2) des $SO_3(\mathbb{R})$ -Satzes in [11, 1.4]). Diese Ebenen lassen sich alle explizit bestimmen. Der Fall, daß Σ selbst isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$ ist, wurde in [13] abgehandelt; die entsprechenden Ebenen wurden dort kurz $SO_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen genannt. Hier behandeln wir nun den alternativ verbleibenden Fall, daß Σ die universelle Überlagerungsgruppe $\text{Spin}(3) = \text{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$ von $SO_3(\mathbb{R})$ ist; die hierunter fallenden Ebenen nennen wir analog $\text{Spin}(3)$ - $SO_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen.

In §2 werden diese Ebenen explizit bestimmt. Diejenigen Ebenen unter ihnen, die zum Lenz-Typ V gehören (also über einer reellen Divisionsalgebra koordinatisiert sind), verdienen besonderes Interesse, da man genau diese Ebenen auch durch Ableiten (im Sinne der Differentialrechnung) der Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer-Tits gewinnen kann; dies ist in §3 näher ausgeführt. §4 befaßt sich mit der Bestimmung der Kollineationsgruppe der verschiedenen Typen von $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen; dabei sind die in [11] und [13] vorbereiteten allgemeinen Strukturaussagen von großem Nutzen.

Es erweist sich nun, daß mit der Bestimmung dieser Ebenen die angestrebte Klassifikation ihren Abschluß findet: Außer den Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer-Tits und den Divisionsalgebren von Rees befinden sich alle achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe unter den $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen und den $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen und können also deren Klassifikation entnommen werden. Dies ist in den letzten beiden Paragraphen ausgeführt. §5 befaßt sich dabei, wie schon erwähnt, nochmals mit dem Spezialfall von Lenz-Typ-V-Ebenen. In §6 wird dann der allgemeine Fall behandelt und (im Klassifikationssatz) die Liste aller achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe explizit aufgestellt.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Forschungsstipendium und das Heisenberg-Stipendium, auf die die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wesentlich zurückgehen. Die Arbeit umfaßt die aktualisierte Version eines Abschnitts aus der Habilitationsschrift des Verfassers.

1.3. Grundtatsachen

Eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene läßt sich als affine Ebene bezüglich irgend zweier verschiedener Koordinatenachsen W und S durch einen als Ursprung gewählten Punkt o koordinatisieren über einem lokalkompakten topologischen Quasikörper Q , dessen additive Gruppe die Vektorgruppe $\mathbb{R}^4$ ist ([21, §7, insb. 7.23]). Der affine Punktraum $\mathbb{A}$ ist in diesen Koordinaten der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $Q \times Q = \mathbb{R}^8$. Die Ursprungsgeraden sind die 4-dimensionalen linearen Teilräume $W = Q \times \{0\}$, $S = \{0\} \times Q$ und $\{(x, a \circ x); x \in Q\}$ (Gerade der 'Steigung' a) für $0 \neq a \in Q$, wo $\circ$ die Multiplikation des Quasikörpers Q ist; die übrigen affinen Geraden entstehen als Bilder der Ursprungsgeraden unter der Translationsgruppe des Vektorraums $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$. Durch Adjunktion einer uneigentlichen Geraden L_∞

erhält man eine kompakte topologische projektive Ebene ([21, §7]); als projektive Gerade ist L_∞ homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung einer affinen Geraden, also zur 4-Sphäre S^4 .

Die Gruppe G^c der stetigen affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit dem Stabilisator G_o^c des Ursprungs. G_o^c ist eine abgeschlossene Gruppe von $\mathbb{R}$ -linearen Transformationen von $A = \mathbb{R}^8$ (siehe z.B. [3, §3]). Der Trägheitsnormalteiler der Wirkung von G_o^c auf L_∞ ist die Gruppe $G_{[o, L_\infty]}$ der affinen Streckungen vom Zentrum o aus, d.h. aller Kollineationen, die jede Ursprungsgerade invariant lassen. Algebraisch lassen sich diese Streckungen in Koordinaten über dem koordinatisierenden Quasikörper Q anhand dessen Kern $\text{Ker } Q$ beschreiben als die Kollineationen

$$(x, y) \mapsto (x \circ c, y \circ c) \quad \text{mit } 0 \neq c \in \text{Ker } Q$$

([1], [17, 8.2]). $\text{Ker } Q$ ist ein abgeschlossener Unterkörper von Q , also nach dem Satz von Pontrjagin isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sofern nicht $Q \cong \mathbb{H}$ ist, d.h. die klassische Quaternionenebene vorliegt.

Somit hat die affine Ebene eine lineare Struktur als Rechtsvektorraum über $\text{Ker } Q$, wobei $G_{[o, L_\infty]}$ einfach die Gruppe der skalaren Streckungen dieses Vektorraums ist. Die Kollineationen aus G_o^c sind semilinear über $\text{Ker } Q$ ([1], [17, 8.3(8)]), natürlich mit stetigem Begleitautomorphismus. Da $\mathbb{R}$ nur einen und $\mathbb{C}$ genau zwei stetige Automorphismen hat, sind außer im Fall der Quaternionenebene die Kollineationen aus der Zusammenhangskomponente Γ_o von G_o^c stets linear sogar über $\text{Ker } Q$. Man erhält dann eine Darstellung von Γ_o als fastdirektes Produkt

$$\Gamma_o = \Delta \cdot (G_{[o, L_\infty]})^1;$$

dabei ist Δ die Zusammenhangskomponente der Gruppe

$$S\Gamma_o = \{\gamma \in \Gamma_o; \det_{\text{Ker } Q} \gamma = 1\}$$

der Kollineationen aus Γ_o , die über $\text{Ker } Q$ Determinante 1 haben, und $(G_{[o, L_\infty]})^1$ die Zusammenhangskomponente der Streckungsgruppe. $S\Gamma_o$ bewirkt auf L_∞ dieselbe Transformationsgruppe wie Γ , wirkt aber fast effektiv auf L_∞ . Im Fall der Quaternionenebene erreicht man im übrigen dasselbe durch die Setzung $\Delta = S\Gamma_o = \text{SL}_2(\mathbb{H})$.

Die folgende Aussage, die wir immer wieder benutzen werden, besagt die Kompaktheit von geometrisch wichtigen Untergruppen der Kollineationsgruppe; sie ist die vereinfachte Version eines grundlegenden Ergebnisses aus [6, 2.1]:

1.4. LEMMA (über Achsenstandgruppen). *Eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von $S\Gamma_o$, die zwei verschiedene uneigentliche Punkte $w, s \in L_\infty$ festläßt, ist entweder kompakt oder semidirektes Produkt einer kompakten Untergruppe mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen abgeschlossenen Untergruppe Y ; die Bahnen von Y in $L_\infty \setminus \{w, s\}$ haben dann sowohl w als auch s als Häufungspunkt.*

Eine Untergruppe Y der geschilderten Art wird im folgenden auch als *Kompressionsuntergruppe* bezüglich w und s bezeichnet.

2. $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -EBENEN MIT GROSSEN SCHERUNGSGRUPPEN

In diesem Abschnitt werden die genannten Ebenen explizit bestimmt. Wir werden sie als Koordinatenebenen über geeigneten Quasikörpern angeben, die nun zunächst beschrieben werden sollen.

2.1. KONSTRUKTION. Die additive Gruppe des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$ sei in der Weise mit $\mathbb{R}^4$ identifiziert, daß dem Element

$$a = a_1 + i \cdot a_2 + j \cdot a_3 + k \cdot a_4$$

das 4-Tupel der Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ entspricht. Der Unterraum

$$\mathbb{P} = \text{Pu } \mathbb{H}$$

der reinen Quaternionen entspricht dann dem Unterraum $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^4$. Wir fixieren einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper von $\mathbb{H}$, z.B.

$$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle = \mathbb{R} + i \cdot \mathbb{R} = \{r + i \cdot s; \quad r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Für ein festes Element

$$h \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$$

mit

$$|h| = 1 \quad \text{und} \quad \text{Re } h = h_1 > 0, \quad \text{Im } h = h_2 \geq 0$$

betrachten wir das System der Nebenklassen des Unterraums

$$\mathbb{P}h = (\text{Pu } \mathbb{H}) \cdot h.$$

Sei Φ ein *topologischer Querschnitt* dieses Nebenklassensystems, d.h. eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{H}$, die jede Nebenklasse von $\mathbb{P}h$ in genau einem Punkt trifft, und von der wir zusätzlich noch

$$0 \in \Phi; \quad 1 \in \Phi$$

verlangen. Jede Quaternion a läßt sich dann zerlegen in der Form

$$(*) \quad a = p(a) \cdot h + \varphi(a)$$

mit

$$p(a) \in \mathbb{P} \quad \text{und} \quad \varphi(a) \in \Phi.$$

Dabei sind $\varphi(a)$ und $p(a)$ eindeutig bestimmt durch

$$a + \mathbb{P}h = \varphi(a) + \mathbb{P}h, \quad \text{also} \quad (a + \mathbb{P}h) \cap \Phi = \{\varphi(a)\}$$

und

$$p(a) = (a - \varphi(a)) \cdot h^{-1},$$

und hängen stetig von a ab, wie man sich leicht überlegt: Die Schnittfunktion $a \mapsto \varphi(a)$ setzt sich zusammen aus der kanonischen Projektion auf den zu $\mathbb{R}$ homöomorphen Faktorraum $\mathbb{H}/\mathbb{P}h$ und der Umkehrung der naheliegenden bijektiven Abbildung $\Phi \rightarrow \mathbb{H}/\mathbb{P}h$; letztere ist aber stetig, also ein Homöomorphismus von $\Phi \cong \mathbb{R}$ auf $\mathbb{H}/\mathbb{P}h \cong \mathbb{R}$.

Mittels dieser Zerlegung definiert man nun eine Modifikation $\circ$ der Quaternionenmultiplikation, indem man für $a, x \in \mathbb{H}$

$$(**) \quad a \circ x = p(a) \cdot x \cdot h + x \cdot \varphi(a)$$

setzt. Es ist dann also

$$(ph + f) \circ x = pxh + xf \quad \text{für } p \in \mathbb{P}, f \in \Phi.$$

Wegen $0 \in \Phi$ und $1 \in \Phi$ ist $\varphi(0) = 0$, $p(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, $p(1) = 0$; also ist 0 Nullelement und 1 Einselement bezüglich $\circ$. Die algebraische Struktur bestehend aus der üblichen Addition in $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ und dieser neuen Multiplikation $\circ$ nennen wir $Q_{h,\Phi}$. Wir zeigen:

2.2. $Q_{h,\Phi}$ ist ein topologischer Quasikörper.

Beweis. Die Multiplikation $\circ$ ist ersichtlich stetig in beiden Variablen und erfüllt das Links distributivgesetz $a \circ (x + y) = a \circ x + a \circ y$. Nach den Kriterien für lokalkompakte Quasikörper aus [8] (insbesondere [8, Satz 2.1]) genügt es zu zeigen, daß für $a, d \in \mathbb{H}$ mit $a \neq 0$ die Gleichung $y \circ a = d$ eindeutig und stetig nach y aufgelöst werden kann. Nach Definition der Multiplikation $\circ$ gilt für eine Auflösung y , daß $p(y) \cdot a \cdot h + a \cdot \varphi(y) = d$, also $a^{-1}d = a^{-1}p(y)ah + \varphi(y)$. Mit $p(y)$ ist auch $a^{-1}p(y)a$ eine reine Quaternion, und nach der eindeutigen Zerlegung (*) in 2.1 folgt $\varphi(a^{-1}d) = \varphi(y)$ und $p(a^{-1}d) = a^{-1}p(y)a$, also $p(y) = a \cdot p(a^{-1}d) \cdot a^{-1}$. Insgesamt ist also $y = a \cdot p(a^{-1}d) \cdot a^{-1}h + \varphi(a^{-1}d)$ durch a und d eindeutig bestimmt und hängt stetig von a und d ab; umgekehrt verifiziert man auch leicht, daß das so bestimmte y tatsächlich die Gleichung $y \circ a = d$ löst. $\square$

2.3. KOORDINATISIERUNGSSATZ. *Die $\text{Spin}(3)$ – $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen sind genau die Ebenen über den Quasikörpern $Q_{h,\Phi}$ aus 2.1. Genauer:*

Gegeben sei eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der bezüglich einer Ursprungsgeraden S die Gruppe der Scherungen mit Achse S mindestens dreidimensional ist, und in der $\mathbb{G}_0^c$ eine zu $\text{Spin}(3)$ isomorphe Untergruppe Σ mit $\Sigma|L_\infty \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$ enthält, welche S invariant läßt.

Ist dann W eine beliebige andere Ursprungsgerade, so wird die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen (und bei geeigneter Wahl eines Einheitspunkts) von einem der Quasikörper $Q_{h,\Phi}$ koordinatisiert.

Beweis. (a) Wie in [13, 2.1] ausgeführt, ist die Wirkung von Σ als $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ auf der zur 4-Sphäre homöomorphen uneigentlichen Geraden nach der Klassifikation von Richardson [20] äquivalent zur gewohnten Wirkung (der zweifachen Einhängung der Standardwirkung von $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ auf der 2-Sphäre); insbesondere ist die Menge der Fixpunkte von Σ in L_∞ homöomorph zur Kreislinie.

Die Voraussetzung über die Existenz von Scherungen läßt sich ferner nach [13, 2.2] dahingehend präzisieren, daß eine zu $\mathbb{R}^3$ isomorphe abgeschlossene Untergruppe N von Scherungen mit Achse S existiert, die von Σ normalisiert wird, und Σ hat auf jeder Bahn von N in L_∞ genau einen Fixpunkt (insbesondere wird N von Σ nicht zentralisiert). Jede von S verschiedene Ursprungsgerade ist daher Bild einer bei Σ invarianten Ursprungsgeraden unter einer Scherung aus N . Aus diesen Informationen werden wir die Geometrie der Ebene rekonstruieren.

(b) Durch Konjugation mit einem geeigneten Element aus N können wir annehmen, daß die gewählte erste Koordinatenachse W ebenfalls Σ -invariant ist.

Der einzige nichttriviale Normalteiler von $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$ wird erzeugt von der zentralen Involution von Σ , und diese wirkt wegen $\Sigma|L_\infty \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$ trivial auf L_∞ , hat also L_∞ als Achse und kann keine weitere Gerade punktweise festlassen. Insbesondere wirkt Σ auf jeder invarianten Ursprungsgeraden effektiv. Nun hat $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$ bis auf Äquivalenz genau eine treue lineare Darstellung im $\mathbb{R}^4$, die sich aufgrund der Identifikation

$$\text{Spin}(3) = \{a \in \mathbb{H}; |a| = 1\}$$

durch die Quaternionenmultiplikation beschreiben läßt. Man kann also den 4-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum S so mit $\mathbb{H}$ identifizieren, daß

$$\Sigma|S = \{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; y \mapsto ay; a \in \text{Spin}(3)\}.$$

Wir betrachten nun neben S und W noch eine weitere Σ -invariante

Ursprungsgerade E . Unter Wahrung der bereits vorgenommenen Identifikation von S mit $\mathbb{H}$ identifizieren wir den Punktraum $\mathbb{A}$ der affinen Ebene so mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, daß

$$S = \{0\} \times \mathbb{H}, \quad W = \mathbb{H} \times \{0\}, \quad E = \{(x, x); x \in \mathbb{H}\}.$$

Wegen der Invarianz von E und W schreibt sich Σ in diesen quaternionalen Koordinaten, die im folgenden stets zugrunde gelegt seien, als

$$(1) \quad \Sigma = \{(x, y) \mapsto (ax, ay); a \in \text{Spin}(3)\}.$$

(c) Die Scherungsgruppe $N \cong \mathbb{R}^3$ ergibt sich dann in der Form

$$(2) \quad N = \{(x, y) \mapsto (x, \omega(x) + y); \omega \in \mathcal{V}\},$$

wobei $\mathcal{V}$ eine abgeschlossene zu $\mathbb{R}^3$ isomorphe Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{R}(4)$ aller $\mathbb{R}$ -linearen Endomorphismen von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ und folglich ein 3-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}(4)$ ist.

Daß N von Σ normalisiert wird, drückt sich in den gewählten Koordinaten mit Hilfe der Abbildungen der Quaternionenlinksmultiplikation

$$\lambda_a: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}: x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{H})$$

folgendermaßen aus:

$$\Lambda_{a \in \text{Spin}(3)} \Lambda_{\omega \in \mathcal{V}}: \lambda_{a^{-1}} \omega \lambda_a \in \mathcal{V};$$

der Wirkung von Σ auf N vermöge Konjugation entspricht die Wirkung der Gruppe $\{\lambda_a; a \in \text{Spin}(3)\}$ auf $\mathcal{V}$. Die Bestimmung der fraglichen Ebenen gründet sich nun auf das Faktum, daß dadurch $\mathcal{V}$ schon im wesentlichen festgelegt ist. Für spätere Zwecke halten wir das in einer vom speziellen Kontext losgelösten Form fest:

2.4. HILFSSATZ. *Sei $\mathcal{V}$ ein dreidimensionaler Untervektorraum des Raums $\mathbb{R}(4)$ aller $\mathbb{R}$ -linearen Endomorphismen von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, der invariant, aber nicht elementweise fest ist unter Konjugation mit der Gruppe der Transformationen*

$$\lambda_a: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}: x \mapsto ax \quad \text{für } a \in \text{Spin}(3).$$

Dann ist für eine geeignete Quaternion $h \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{V} = \{x \mapsto pxh; p \in \text{Pu } \mathbb{H}\}.$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen induziert $\text{Spin}(3)$ per Konjugation eine nichttriviale lineare Darstellung der Zentrumsfaktorgruppe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{V}$. Alle dreidimensionalen nichttrivialen Darstellungen von $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sind nun äquivalent. Insbesondere bilden die Fixpunkte einer Involution ι_1 aus $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ einen eindimensionalen Unterraum, und dieser ist invariant unter

jeder anderen mit ι_1 vertauschbaren Involution ι_2 und besteht aus Eigenvektoren von ι_2 zum Eigenwert -1 . Für die drei paarweise vertauschbaren Involutionen von $\mathcal{V}$, die durch Konjugation mit den Transformationen λ_i , λ_j und λ_k induziert werden, bedeutet das die Existenz eines Endomorphismus $\omega \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned}\lambda_i^{-1} \omega \lambda_i &= \omega & \omega(i) &= i \cdot \omega(1). \\ \lambda_j^{-1} \omega \lambda_j &= -\omega, \text{ also insbesondere mit } \omega(j) = -j \cdot \omega(1) \\ \lambda_k^{-1} \omega \lambda_k &= -\omega & \omega(k) &= -k \cdot \omega(1).\end{aligned}$$

Für $x = x_1 + i \cdot x_2 + j \cdot x_3 + k \cdot x_4 \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ ($x_v \in \mathbb{R}$) folgt dann allgemein

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x_1 + i \cdot x_2 - j \cdot x_3 - k \cdot x_4) \cdot \omega(1) \\ &= -i \cdot (x_1 + i \cdot x_2 + j \cdot x_3 + k \cdot x_4) \cdot i \cdot \omega(1),\end{aligned}$$

also

$$\omega(x) = ixh$$

mit $h = -i \cdot \omega(1) \neq 0$. Für $a \in \text{Spin}(3)$ und $r \in \mathbb{R}$ sind weiter mit ω auch die Endomorphismen $r\lambda_a^{-1} \omega \lambda_a$: $x \mapsto ra^{-1}iaxh$ Elemente von $\mathcal{V}$. Dabei ist $ra^{-1}ia$ wie i eine reine Quaternion, und jede reine Quaternion kann so geschrieben werden, [18, 10.20ff S. 179ff]. Die damit gefundenen Endomorphismen $x \mapsto pxh$ mit $p \in \text{Pu}\mathbb{H}$ füllen bereits einen dreidimensionalen Unterraum aus; somit ist $\mathcal{V}$ bestimmt. $\square$

Fortsetzung des Beweises des Koordinatisierungssatzes 2.3

(d) In einer $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebene lassen sich für den Endomorphismenraum $\mathcal{V}$, welcher die Scherungsgruppe N nach (2) beschreibt, die gemäß Hilfssatz 2.4 bestehenden Möglichkeiten noch etwas weiter eingrenzen. In dieser Situation kann nämlich h keine reine Quaternion sein:

Sonst gäbe es eine Quaternion $z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ sowie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h = -rz^{-1}iz$, also mit $(r^{-1}i)zh = z$, und die nach (2) durch den Endomorphismus $x \mapsto (r^{-1}i)xh$ aus $\mathcal{V}$ bestimmte Scherung würde den Punkt $(z, 0) \in W$ in den Punkt $(z, z) \in E$ und folglich W in E abbilden. Die uneigentlichen Punkte von W und E wären dann zwei verschiedene Fixpunkte von Σ in derselben N -Bahn in L_∞ , im Widerspruch zu den in Beweisteil (a) getroffenen Feststellungen.

(e) Wir koordinatisieren nun die affine Ebene bezüglich W und S als Achsen und $(1, 1) \in E$ als Einheitspunkt durch einen Quasikörper Q , dessen Elemente die quaternalen Koordinaten von W sind. Die N -Bahn der Ursprungsgerade mit Steigung $a \in Q = \mathbb{H}$, also der Ursprungsgerade durch

den Punkt $(1, a)$, besteht nach der in Beweisteil (c) ermittelten Beschreibung (2) der Wirkung von N und nach Hilfssatz 2.4 aus den Ursprungsgeraden durch die Punkte $(1, ph + a)$ mit $p \in \mathbb{P} = \text{Pu } \mathbb{H}$, d.h. aus den Ursprungsgeraden, deren Steigung in der Nebenklasse $\mathbb{P}h + a$ liegt.

Die uneigentlichen Fixpunkte von Σ in L_∞ bilden wie in (a) festgestellt eine Kreislinie und entsprechen, abgesehen vom uneigentlichen Punkt von S , den Steigungen der Σ -invarianten Ursprungsgeraden; diese bilden also eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe, abgeschlossene Teilmenge Φ des Quasikörpers Q . Da ferner Σ auf jeder N -Bahn in L_∞ genau einen Fixpunkt hat, ist Φ ein Querschnitt des Systems der Nebenklassen von $\mathbb{P}h$; ferner enthält Φ die Steigungen 0 und 1 der Geraden W und E .

Die unter Σ invariante Ursprungsgerade der Steigung $f \in \Phi \setminus \{0\}$ enthält mit dem Punkt $(1, f)$ nach der Beschreibung (1) der Wirkung von Σ alle Punkte (a, af) mit $a \in \text{Spin}(3)$; angesichts der reellen Streckungen ist diese Ursprungsgerade also der Untervektorraum

$$\{(x, xf); x \in \mathbb{H}\}.$$

Man erhält schließlich, wie in (a) vermerkt, alle von S verschiedenen Ursprungsgeraden als Bilder solcher Σ -invarianten Ursprungsgeraden unter Scherungen aus N . Mit der Beschreibung (2) von N und Hilfssatz 2.4 ergibt sich also jede Ursprungsgerade $\neq S$ in der Form

$$\{(x, pxh + xf); x \in \mathbb{H}\}$$

mit $p \in \mathbb{P}$ und $f \in \Phi$. Es handelt sich dabei um die Ursprungsgerade der Steigung $ph + f$; also ist die Multiplikation des koordinatisierenden Quasikörpers Q beschrieben durch

$$(ph + f) \circ x = pxh + xf.$$

Dies ist die Multiplikation des in 2.1 konstruierten Quasikörpers $Q_{h, \Phi}$; allerdings ist noch zu zeigen, daß man h auf den in 2.1 postulierten Bereich, also auf $h \in \langle 1, i \rangle$, $|h| = 1$, $\text{Re } h > 0$ und $\text{Im } h \geq 0$ normieren kann.

Hierzu beachte man, daß h nach (d) keine reine Quaternion ist. Bis auf eine Streckung von h mit einem reellen Skalar, die an der Beschreibung von $\mathcal{V}$ gemäß Hilfssatz 2.4 global nichts ändert, kann man also $\text{Re } h > 0$ und $|h| = 1$ annehmen. Sei ferner $c \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ so gewählt, daß die durch Konjugation mit c hervorgerufene Drehung

$$\kappa_c: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}: x \mapsto c^{-1}xc$$

h so abbildet, daß

$$\kappa_c(h) \in \langle 1, i \rangle \quad \text{und} \quad \text{Im } \kappa_c(h) \geq 0.$$

Man verifiziert unmittelbar, daß κ_c ein Isomorphismus des Quasikörpers Q

auf den Quasikörper $Q_{\kappa_c(h), \kappa_c(\Phi)}$ ist; letzterer entspricht dann den Normierungsbedingungen von 2.1.

(f) Um zu zeigen, daß umgekehrt die Ebene über jedem der Quasikörper $Q_{h, \Phi}$ aus 2.1 eine $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebene mit großen Scherungsgruppen ist, braucht man nur nachzurechnen, daß die in (1) definierte Gruppe Σ und die durch (2) mit $\mathcal{V} = \{x \mapsto pxh; p \in \mathbb{P}\}$ beschriebene Gruppe N aus Kollineationen bestehen und daß N von Σ normalisiert wird. Daß $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$, $N \cong \mathbb{R}^3$ und daß die Transformationen aus N Scherungen mit Achse S sind, ist dann klar. $\square$

Aus den Überlegungen in Beweisteil (e) oder durch unmittelbare Verifikation ergibt sich im übrigen:

2.5. In der Ebene über dem Quasikörper $Q_{h, \Phi}$ läßt die Kollineationsgruppe

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (ax, ay); a \in \text{Spin}(3)\}$$

genau die Ursprungsgeraden mit Steigung $f \in \Phi$, also die Ursprungsgeraden der Form

$$\{(x, xf); x \in Q = \mathbb{H}\} \quad \text{mit } f \in \Phi$$

(sowie $S = \{0\} \times Q$) invariant.

Wir bestimmen noch, welche der Quasikörper $Q_{h, \Phi}$ Divisionsalgebren (nicht notwendig assoziativ) sind; diese werden im nächsten Paragraphen von besonderem Interesse sein.

2.6. In $Q_{h, \Phi}$ sind genau dann beide Distributivgesetze erfüllt, wenn $\Phi = \mathbb{R}$. (Es liegt dann eine reelle Divisionsalgebra vor.)

Bemerkung. Wegen $\text{Re } h > 0$ liefert $\Phi = \mathbb{R}$ stets einen Querschnitt mit den in der Konstruktion 2.1 geforderten Eigenschaften.

Beweis. Aus der Gültigkeit beider Distributivgesetze folgt insbesondere, daß das Zentrum den Primkörper $\mathbb{Q}$ des Kerns und damit auch dessen Abschluß $\mathbb{R} = 1 \cdot \mathbb{R}$ enthält. Insbesondere ist auch die Multiplikation von links mit Elementen aus $\mathbb{R}$ die übliche Skalarmultiplikation. Durch Vergleich mit der allgemeinen Formel für die Multiplikation in $Q_{h, \Phi}$ folgt daraus bereits die Behauptung auf rein algebraischem Wege. Die detaillierte Durchführung dieses Vergleichs ist jedoch etwas verzwickelt; deshalb sei hier noch ein 'schnelles' geometrisches Argument auf der Grundlage von 2.5 angegeben:

In der Ebene über dem betrachteten distributiven Quasikörper sind wegen $r \circ x = xr$ für $r \in \mathbb{R}$ die Unterräume

$$\{(x, xr); x \in \mathbb{H}\}$$

Ursprungsgeraden. Diese sind ersichtlich invariant unter der Kollineationsgruppe $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$, so daß aus 2.5 sofort $\Phi = \mathbb{R}$ folgt. $\square$

3. EXKURS: ÜBER DAS ABLEITEN VON FASTKÖRPERN

In diesem Abschnitt soll ausgeführt werden, daß man die Ebenen über den Divisionsalgebren aus 2.6 auch durch Ableiten (im Sinne der Infinitesimalrechnung) aus den lokalkompakten zusammenhängenden Fastkörpern von Kalscheuer–Tits gewinnen kann. Den Hinweis auf diesen Ableitungsprozess und die Anregung, die dabei entstehenden Geometrien zu bestimmen, verdanke ich T. Grundhöfer.

3.1. Die lokalkompakten, zusammenhängenden topologischen Fastkörper (d.h. Quasikörper mit assoziativer Multiplikation) wurden von Kalscheuer [14] und Tits [25] sämtlich explizit bestimmt. Echte Fastkörper, die keine Körper sind, treten dabei nur in Dimension 4 auf, d.h. ihre additive Gruppe ist $\mathbb{R}^4$. Wie bei Tits [25] näher ausgeführt, läßt sich dabei die additive Gruppe eines solchen Fastkörpers F so mit $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ identifizieren, daß für Elemente a vom Betrag $|a| = 1$ und beliebige x die Multiplikation $a * x$ im Fastkörper gleich der Quaternionenmultiplikation $a \cdot x$ ist. Insbesondere ist dann

$$\text{Spin}(3) = \{a; |a| = 1\}$$

eine Untergruppe auch von $F^\times$.

Für beliebige Elemente a ist die ‘Linksmultiplikation’

$$\lambda_a: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4: x \mapsto a * x$$

jedenfalls eine lineare Abbildung, und wegen der Assoziativität der Multiplikation ist die stetige Abbildung

$$\lambda: F^\times \rightarrow \text{GL}_4(\mathbb{R}): a \mapsto \lambda_a$$

ein Homomorphismus von Liegruppen, also insbesondere differenzierbar. Unmittelbar aus den Quasikörperaxiomen folgt, daß für $a \neq 1$ keiner der Automorphismen λ_a Eigenwert 1 haben kann; insbesondere ist λ ein Monomorphismus.

3.2. Die abgeleitete Algebra eines Fastkörpers

Die Ableitung $d\lambda = \lambda_{*1}$ des Homomorphismus λ im Neutralelement ist ein Homomorphismus der Liealgebra $\mathcal{L}F^\times$ in die Endomorphismenalgebra $\mathbb{R}(4)$ von $\mathbb{R}^4$ aufgefaßt als Liealgebra. Aus der zuletzt erwähnten Eigen-

schaft der λ_a hinsichtlich Eigenwerten ergibt sich (mit Hilfe der Exponentialabbildung), daß für $0 \neq A \in \mathcal{L} F^\times$ der Endomorphismus $d\lambda(A)$ nie 0 als Eigenwert hat (in [14, S. 414/415] ist das detailliert ausgeführt). Insbesondere ist $d\lambda$ injektiv, und das Bild von $d\lambda$ ist eine 4-dimensionale Lie-Unteralgebra

$$\mathcal{W} = d\lambda(\mathcal{L} F^\times) = \mathcal{L}(\lambda(F^\times)) \subseteq \mathbb{R}(4)$$

mit

$$(1) \quad \mathcal{W} \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}),$$

die invariant ist unter Konjugation mit den Transformationen λ_a . Die zur Untergruppe $\mathrm{Spin}(3)$ gehörige Lie-Unteralgebra wird unter $d\lambda$ auf eine dreidimensionale Lie-Unteralgebra

$$\mathcal{V} = d\lambda(\mathcal{L} \mathrm{Spin}(3)) = \mathcal{L}(\lambda(\mathrm{Spin}(3)))$$

abgebildet, die noch invariant ist unter Konjugation mit den Transformationen aus $\lambda(\mathrm{Spin}(3))$, also den λ_a für $|a| = 1$.

3.3. Die abgeleitete Geometrie eines Fastkörpers

Eigenschaft 3.2(1) besagt im Einzelnen, daß für beliebiges $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ die Auswertungsabbildung

$$\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^4: \omega \mapsto \omega(x)$$

ein linearer Isomorphismus ist. In $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ bilden daher die Unterräume

$$L_\omega = \{(x, \omega(x)); x \in \mathbb{R}^4\} \quad \text{für } \omega \in \mathcal{W}$$

(zusammen mit $S = \{0\} \times \mathbb{R}^4$) eine lineare Partition, d.h. das System der Ursprungsgeraden einer Translationsebene. Es wird sich zeigen, daß diese Translationsebene eine der in §2 koordinatisierten Ebenen ist, nämlich isomorph zur Ebene über einer der Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ aus 2.6. In der Tat:

Die zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Gruppe Σ der Transformationen

$$\sigma_a: (x, y) \mapsto (ax, ay) = (\lambda_a(x), \lambda_a(y)) \quad \text{für } a \in \mathrm{Spin}(3)$$

besteht aus Kollineationen der konstruierten Translationsebene, da σ_a die Gerade $\{(x, \omega(x)); x \in \mathbb{R}^4\}$ abbildet in

$$\{(\lambda_a(x), \lambda_a(\omega(x))); x \in \mathbb{R}^4\} = \{(x, \lambda_a \omega \lambda_a^{-1}(x)); x \in \mathbb{R}^4\},$$

und da mit ω auch $\lambda_a \omega \lambda_a^{-1}$ zu $\mathcal{W}$ gehört.

Für $\omega \in \mathcal{W}$ ist die Transformation

$$\tau_\omega: (x, y) \mapsto (x, \omega(x) + y)$$

eine Scherung. In der Gruppe aller dieser Scherungen findet man anhand des dreidimensionalen Untervektorraums $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\lambda(\text{Spin}(3))) \subseteq \mathcal{W}$ die zu $\mathbb{R}^3$ isomorphe Untergruppe

$$N = \{\tau_\omega; \omega \in \mathcal{V}\},$$

die von Σ normalisiert wird, da $\sigma_a^{-1} \tau_\omega \sigma_a = \tau_{\omega'}$ mit $\omega' = \lambda_a^{-1} \omega \lambda_a$ und da $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\lambda(\text{Spin}(3)))$ invariant ist unter Konjugation mit den λ_a für $a \in \text{Spin}(3)$.

Somit liegt in der durch Ableitung des Fastkörpers gewonnenen Ebene die Situation des Koordinatisierungssatzes 2.3 vor.

Zusätzlich ist hier noch zu berücksichtigen, daß ein koordinatisierender Quasikörper (bezüglich $W = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ und $S = \{0\} \setminus \mathbb{R}^4$ als Koordinatenachsen) beidseitig distributiv ist. Dies kann man unmittelbar daran ablesen, daß die Menge der Linksmultiplikationen dieses Quasikörpers additiv abgeschlossen ist (wegen der additiven Abgeschlossenheit des Unterraums $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}(4)$). Man kann aber auch (was letztlich auf dasselbe hinausläuft) darauf hinweisen, daß offensichtlich die Gruppe der Scherungen τ_ω mit $\omega \in \mathcal{W}$ transitiv auf der Menge der von der Scherungsachse S verschiedenen Ursprungsgeraden wirkt, und dann den allgemeinen Sachverhalt benutzen, daß dies gleichwertig mit der behaupteten Distributivität ist ([1, Satz 4]).

Insgesamt ist damit die abgeleitete Geometrie eines vierdimensionalen lokalkompakten Fastkörpers nach 2.3 und 2.6 isomorph zur Ebene über einer der Divisionsalgebren $\mathcal{Q}_{h, \mathbb{R}}$.

Dies läßt sich auch umkehren:

3.4. Konstruktion der Fastkörper zu den Divisionsalgebren $\mathcal{Q}_{h, \mathbb{R}}$

Wir betrachten beliebig eine der Divisionsalgebren $\mathcal{Q}_{h, \mathbb{R}}$ gemäß 2.6 und 2.1. Die Ursprungsgeraden in der Ebene über $\mathcal{Q}_{h, \mathbb{R}}$ haben die Gestalt

$$\{(x, pxh + xs); x \in \mathbb{H}\}$$

(für $p \in \mathbb{P} = \text{Pu } \mathbb{H}$, $s \in \mathbb{R}$). Wir wenden nun eine Koordinatentransformation der Form $(x, y) \mapsto (x, y \cdot \rho h^{-1})$ an, wobei der reelle Skalar $\rho > 0$ eigentlich unwesentlich ist und nur zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen so gewählt wird, daß $\rho h^{-1} = 1 + i \cdot \alpha$ für geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist; wegen $|h| = 1$ und $\text{Re } h = \text{Re } h^{-1} > 0$ ist das möglich. Diese Koordinatentransformation ver-

mittelt einen Isomorphismus der Ebene über $Q_{h,\mathbb{R}}$ mit der Ebene, deren Ursprungsgeraden die Unterräume

$$\{(x, px + xs(1 + i \cdot \alpha)); x \in \mathbb{H}\} \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

($p \in \mathbb{P}, s \in \mathbb{R}$) sind. Die in der zweiten Koordinate auftretenden Endomorphismen

$$\omega_{p,s}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4: x \mapsto px + xs(1 + i \cdot \alpha)$$

bilden dann eine Lie-Unteralgebra $\mathcal{W}$ von $\mathbb{R}(4)$, wie man leicht verifiziert (man beachte, daß für reine Quaternionen p, p' auch $pp' - p'p$ wieder eine reine Quaternion – nämlich das Vektorprodukt $p \times p'$ in $\mathbb{P} = \mathbb{R}^3$ – ist). Die zusammenhängende analytische Untergruppe Ω von $GL_4(\mathbb{R})$, um deren Liealgebra es sich handelt, findet man durch Integration, d.h. Anwendung der Exponentialfunktion. Als Bild der Exponentialfunktion erhält man alle Automorphismen der Form

$$x \mapsto a \cdot x \cdot \gamma(r)$$

mit $a \in \text{Spin}(3)$, $0 < r \in \mathbb{R}$ und

$$(1) \quad \gamma(r) = e^{(1 + i\alpha) \cdot \ln r} = r \cdot e^{i\alpha \cdot \ln r}.$$

Da $\{\gamma(r); r > 0\}$ eine Einparameteruntergruppe von $\mathbb{H}^\times$ ist, bildet die Menge dieser Automorphismen bereits eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_4(\mathbb{R})$, und dies ist die gesuchte Untergruppe Ω , die zur Lie-Unteralgebra $\mathcal{W}$ gehört.

Wir suchen nun eine Fastkörpermultiplikation $*$ auf $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, deren Linksmultiplikationen gerade die Automorphismen aus Ω sind. Der Ansatz

$$b * x = a \cdot x \cdot \gamma(r)$$

mit

$$b = b * 1 = a \cdot \gamma(r)$$

für geeignete $a \in \text{Spin}(3)$ und $r > 0$ liefert

$$|b| = |\gamma(r)| = r; \quad a = b \cdot \gamma(r)^{-1} = b \cdot \gamma(|b|)^{-1}.$$

Damit ergibt sich als Multiplikationsvorschrift

$$b * x = b \cdot \gamma(|b|)^{-1} \cdot x \cdot \gamma(|b|),$$

wobei γ nach (1) bestimmt ist. Man kann nun unmittelbar verifizieren, daß diese Multiplikation die Fastkörperaxiome erfüllt. Genau in dieser Form gibt Tits [25] die vierdimensionalen lokalkompakten Fastkörper an.

4. KOLLINEATIONSGRUPPEN

Vorbereitend für die Untersuchung der Kollineationen in den in §2 betrachteten Ebenen bestimmen wir ihren Kern:

4.1. Sei $Q = Q_{h,\Phi}$ einer der in 2.1 konstruierten Quasikörper. Die Multiplikation in Q von rechts mit einem Element c des Kerns von Q ist die übliche Quaternionenmultiplikation:

$$x \circ c = xc \quad \text{für alle } x \in Q = \mathbb{H}.$$

Insgesamt bestehen für den Kern von Q folgende Möglichkeiten:

- (i) Q ist genau dann selbst ein Körper (nämlich der Quaternionenkörper), wenn

$$h = 1 \text{ und } \Phi = \mathbb{R}.$$

- (ii) Andernfalls ist der Kern von Q genau dann isomorph zu $\mathbb{C}$, wenn

$$\Phi \subseteq \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$$

oder wenn $h = 1$ ist und Φ in einem beliebigen zweidimensionalen, die 1 enthaltenden Untervektorraum von $Q = \mathbb{R}^4$ liegt. Auch im zweiten Fall kann bis auf Isomorphie $\Phi \subseteq \langle 1, i \rangle$ angenommen werden. Es ist dann

$$\text{Ker } Q = \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle.$$

- (iii) In allen anderen Fällen ist

$$\text{Ker } Q = \mathbb{R}.$$

Beweis. Wie in 1.3 schon erwähnt, kann man statt des Kerns die Streckungsgruppe $G_{[0, L_\infty]}$ in der Ebene über Q bestimmen, also die Gruppe der Kollineationen, die alle Ursprungsgeraden invariant lassen; es handelt sich nämlich dabei genau um die Transformationen

$$(x, y) \mapsto (x \circ c, y \circ c) \quad \text{mit } 0 \neq c \in \text{Ker } Q.$$

Nach 1.3 wird diese Streckungsgruppe zentralisiert von der Zusammenhangskomponente Γ_o , also insbesondere von der schon in 2.3 ermittelten zusammenhängenden Kollineationsgruppe

$$\Sigma = \{(x, y) \rightarrow (ax, ay); a \in \text{Spin}(3)\}.$$

Für $a \in \text{Spin}(3)$ und $c \in \text{Ker } Q$ ist also

$$a \circ c = (a \cdot 1) \circ c = a \cdot (1 \circ c) = ac,$$

und wegen $\mathbb{R} \subseteq \text{Ker } Q$ gilt dies dann nicht nur für eine Quaternion a der Norm 1, sondern allgemein:

$$x \circ c = xc \quad \text{für alle } x \in \mathbb{H}, c \in \text{Ker } Q.$$

Der Kern von Q besteht also aus den Elementen c , für die die Transformation

$$(x, y) \mapsto (xc, yc)$$

in der Ebene über Q alle Ursprungsgeraden invariant läßt. Die Ursprungsgeraden haben nun die Gestalt

$$\{(x, pxh + xf); x \in \mathbb{H}\} \quad \text{mit } p \in \text{Pu } \mathbb{H}, f \in \Phi,$$

und eine leichte Rechnung zeigt, daß die eben genannte Bedingung folgendes besagt:

Der Kern von Q besteht aus den Elementen c , die in der Quaternionenmultiplikation sowohl mit h als auch mit allen Elementen von Φ kommutieren.

Nun benützen wir, daß im Quaternionenkörper der Zentralisator einer nicht reellen Quaternion d der zweidimensionale Unterraum $\langle 1, d \rangle = \mathbb{R} + d \cdot \mathbb{R}$ ist.

Ein von $\mathbb{R}$ verschiedener Kern kommt demnach genau dann zustande, wenn sowohl h als auch Φ in demselben zweidimensionalen Unterraum V mit $1 \in V$ liegen, und der Kern ist dann gleich V , es sei denn, daß sowohl Φ als auch h sogar in $\mathbb{R}$ liegen. Im letzteren Fall ist dann wegen $|h| = 1$ und $\text{Re } h > 0$ aber $h = 1$, und angesichts der von Φ geforderten Querschnittseigenschaft muß Φ ganz $\mathbb{R}$ ausfüllen; also ist $\dot{Q} = Q_{1, \mathbb{R}}$ der Quaternionenkörper.

Ist $h \neq 1$, so folgt wegen $h \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$, daß auch $V = \langle 1, h \rangle = \langle 1, i \rangle$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß auch im Fall $h = 1$, $\Phi \neq \mathbb{R}$ bis auf Isomorphie $V = \langle 1, i \rangle$ angenommen werden kann. In der Tat: Für festes $b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ induziert die Konjugationsabbildung $x \mapsto bxb^{-1}$ einen Isomorphismus von $Q_{1, \Phi}$ auf $Q_{1, \Phi'}$ mit $\Phi' = b\Phi b^{-1}$, wie man direkt nachrechnet. Da alle reinen Quaternionen gleicher Länge konjugiert sind ([18, 10.22S. 180]), kann dabei b so gewählt werden, daß $bVb^{-1} = \langle 1, i \rangle$ wird; dann ist $\Phi' \subseteq \langle 1, i \rangle$ und also $\text{Ker } Q_{1, \Phi'} = \langle 1, i \rangle$. $\square$

Der folgende Satz klärt nun, welche Möglichkeiten bei den betrachteten Ebenen für die Struktur der Kollineationsgruppe bestehen.

4.2. SATZ (über Kollineationsgruppen). *Es sei eine $\text{Spin}(3)\text{--SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebene mit großen Scherungsgruppen gegeben, d.h. die Ebene über einem der Quasikörper $Q_{h,\Phi}$ aus 2.1. Sei Γ die Zusammenhangskomponente der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen.*

Genau für

$$h = 1 \text{ und } \Phi = \mathbb{R}$$

handelt es sich um die desarguessche Ebene über dem Quaternionenkörper.

In allen anderen Fällen ist der uneigentliche Punkt s der zweiten Koordinatenachse S der einzige Fixpunkt von Γ . In affinen quaternalen Koordinaten wie in §2 ist

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (ax, ay); a \in \text{Spin}(3)\}$$

eine zu $\text{Spin}(3)$ isomorphe Gruppe von Kollineationen und

$$N = \{(x, y) \mapsto (x, pxh + y); p \in \text{Pu } \mathbb{H}\} \cong \mathbb{R}^3$$

ein Normalteiler von Γ_o , der aus Scherungen mit Achse S besteht. Bezüglich der Bahnen von Γ auf der uneigentlichen Geraden L_∞ und der Dimension von Γ bestehen folgende Möglichkeiten:

(i) *Alle N -Bahnen in L_∞ sind invariant unter Γ . Dann ist*

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1,$$

also

$$\dim \Gamma = 14 + d,$$

wo

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } Q_{h,\Phi} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{Ker } Q_{h,\Phi} = \mathbb{R} \\ 2, & \text{falls } \text{Ker } Q_{h,\Phi} \cong \mathbb{C}. \end{cases}$$

(ii) *Genau eine N -Bahn $\mathfrak{X}$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ ist invariant unter Γ . Sie besteht aus genau den Punkten $w' \in L_\infty \setminus \{s\}$, für die eine Kompressionsuntergruppe bezüglich w' und s (im Sinne von 1.4) existiert. Auf den beiden zu $\mathbb{R}^4$ homöomorphen Zusammenhangskomponenten von $L_\infty \setminus (\mathfrak{X} \cup \{s\})$ wirkt dann Γ transitiv, und es ist*

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1,$$

mit einer Kompressionsuntergruppe Y zu einem Fixpunkt w' von Σ in $\mathfrak{X}$, die im Zentralisator von Σ gewählt werden kann; somit ist

$$\dim \Gamma = 15 + d.$$

- (iii) Γ ist transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Der Zentralisator von Σ in $S\Gamma_o$ enthält dann einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Normalteiler Θ , der scharf transitiv auf der Menge der von S verschiedenen Σ -invarianten Ursprungsgeraden operiert. In dieser Situation sind zwei Fälle nach der Größe der Gruppe $\Gamma_{[s,S]}$ der Scherungen mit Achse S zu unterscheiden:

- (1) $\Gamma_{[s,S]}$ ist nicht transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Dann ist

$$\Gamma_{[s,S]} = N.$$

In diesem Fall kann der Kern der Ebene nur isomorph zu $\mathbb{R}$ sein, und man hat

$$\Gamma_o = N \cdot \Theta \cdot \Sigma \cdot P,$$

wo P die Gruppe der Streckungen mit reellem positivem Streckungsfaktor ist, also

$$\dim \Gamma = 16.$$

- (2) Schon $\Gamma_{[s,S]}$ ist transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, d.h. die betrachtete Ebene hat den Lenz-Typ V. Dann ist

$$\Gamma_{[s,S]} = N \cdot \Theta.$$

In diesem Fall ist gleichzeitig der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$, und es ist

$$\Gamma_o = \Gamma_{[s,S]} \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1,$$

wobei

$$Y = \{(x, y) \mapsto (x, ry); 0 < r \in \mathbb{R}\}$$

die Gruppe der Achsenstreckungen in "senkrechter" Richtung mit reellem positivem Streckungsfaktor ist, also

$$\dim \Gamma = 18.$$

Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn

$$h \neq 1, \quad \Phi = \mathbb{R}.$$

Hinweis. Die Fälle, für die $\dim \Gamma \geq 17$ ist, werden in 4.4 noch genauer untersucht.

Beweis. (a) Die Ebene ist genau dann desarguessch, wenn der Koordinatenbereich ein Körper ist; daß dies genau für $h = 1$ und $\Phi = \mathbb{R}$ der Fall ist, wurde in 4.1 gezeigt.

(b) Daß die angegebenen Gruppen Σ und N Kollineationsgruppen der angegebenen Art sind, wurde bereits in der Analyse dieser Ebenen in 2.3 festgestellt.

Für die weiteren Aussagen über die Kollineationsgruppen ist die Hauptarbeit schon bei dem allgemeinen Struktursatz [13, 2.3] geleistet worden, von dem diese Aussagen in großen Zügen übernommen werden können. Im Fall (iii) kann man jedoch für die hier behandelte spezielle Ebenenklasse die Behauptung noch präzisieren, was nunmehr ausgeführt werden soll.

(c) Im weiteren sei also stets Fall (iii) zugrundegelegt, d.h. Γ sei transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Der allgemeine Struktursatz besagt für diesen Fall folgendes:

(c1) Die Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in $S\Gamma_o$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder L_2 und enthält einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Normalteiler Θ , der scharf transitiv auf der Menge der N -Bahnen in $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Ist $Z \cong L_2$, so ist die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,s]}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Insgesamt ist

$$(1) \quad \Gamma_o = N \cdot Z \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1.$$

Die Aussage über die Wirkung von Θ kann man noch anders ausdrücken. Da Σ von Θ zentralisiert wird, permutiert Θ die Menge der Σ -invarianten Ursprungsgeraden $\neq S$; und da diese den Fixpunkten von Σ in $L_\infty \setminus \{s\}$ entsprechen und Σ auf jeder N -Bahn in L_∞ genau einen Fixpunkt hat ([13, 2.2]), wirkt Θ also auf der Menge der Σ -invarianten Ursprungsgeraden $\neq S$ wie auf der Menge dieser N -Bahnen scharf transitiv.

Die angekündigte Präzisierung speziell für $\text{Spin}(3)\text{--}\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen besteht nun im wesentlichen in der folgenden Aussage:

(c2) *In der in (c1) geschilderten Situation ist der Kern der Ebene genau dann isomorph zu $\mathbb{C}$, wenn die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,s]}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ist, und es liegt dann Fall (iii(2)) der Behauptung vor.*

Beweis. Ist der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$, so hat die affine Ebene eine $\mathbb{C}$ -lineare Struktur derart, daß Γ_o aus $\mathbb{C}$ -linearen Transformationen besteht (siehe 1.3). S läßt sich mithin als $\mathbb{C}$ -Vektorraum so mit $\mathbb{C}^2$ identifizieren, daß Σ auf S als die Gruppe $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ operiert. Die Σ zentralisierende Gruppe Θ induziert dann auf S eine Untergruppe des Zentralisators von $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, wirkt also identisch auf S oder induziert eine Gruppe von (komplexen) skalaren Streckungen. Durch Modifikation mit entsprechenden Streckungen der ganzen Ebene aus $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ erhält man aus Θ somit eine zu N komplementäre Einparameteruntergruppe $\tilde{\Theta}$ von Γ_o , die identisch auf S wirkt, d.h. aus axialen Kollineationen mit Achse S besteht.

Auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt dabei $\tilde{\Theta}$ wie Θ , also ohne Fixpunkte, und besteht daher genauer aus Scherungen. Insbesondere haben die Elemente von $\tilde{\Theta}$ Determinante 1 über dem Kern $\mathbb{C}$, und da dasselbe wegen $\Theta \subseteq S\Gamma_o$ auch für Θ gilt, konnten beim Übergang von Θ zu $\tilde{\Theta}$ in Wirklichkeit keine modifizierenden Streckungen auftreten, so daß also Θ selbst eine zu N komplementäre Gruppe von Scherungen ist. Insgesamt haben wir damit die vierdimensionale Scherungsgruppe $N \cdot \Theta$, die auf $L_\infty \setminus \{s\}$ transitiv ist und folglich sämtliche Scherungen mit Achse S schon umfaßt:

$$(2) \quad \Gamma_{[s,S]} = N \cdot \Theta.$$

Damit ist gezeigt, daß die Ebene den Lenz-Typ V hat. Nach [1, Satz 4] ist dies gleichbedeutend damit, daß der koordinatisierende Quasikörper $\mathcal{Q}_{h,\Phi}$ beidseitig distributiv ist; nach 2.6 ist dies genau für $\Phi = \mathbb{R}$ der Fall.

Umgekehrt läßt sich aus $\Phi = \mathbb{R}$ unmittelbar nach 4.1 zurückschließen, daß der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

In der damit beschriebenen Situation enthält die Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in $S\Gamma_o$ neben Θ noch die aus Produkten von Achsenstreckungen mit reellen Faktoren bestehende Einparameteruntergruppe

$$\tilde{Y} = \{(x, y) \mapsto (r^{-1}x, ry); 0 < r \in \mathbb{R}\},$$

da der Koordinatenbereich eine reelle Divisionsalgebra ist. Wie in (c1) zitiert, ist Z höchstens zweidimensional, insgesamt also $Z = \Theta \cdot \tilde{Y}$. Zur Bestimmung von Γ_o beachten wir nun noch, daß die Einparametergruppe

$$Y = \{(x, y) \mapsto (x, ry); 0 < r \in \mathbb{R}\}$$

von Achsenstreckungen mit $(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$ angesichts der darin enthaltenen reellen Streckungen dieselbe Untergruppe erzeugt wie $\tilde{Y}$. Insgesamt ist also nach (1) und (2) $\Gamma_o = N \cdot Z \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1 = N \cdot \Theta \cdot \tilde{Y} \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1 = N \cdot \Theta \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1 = \Gamma_{[s,S]} \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$, wie in (iii(2)) angegeben.

(c3) Der verbleibende Fall, mit zu $\mathbb{R}$ isomorphem Kern, liegt nach (c2) genau dann vor, wenn die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,S]}$ nicht transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Wie in (c1) referiert, ist dann $Z = \Theta$ und also $\Gamma_o = N \cdot \Theta \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$, wobei die Zusammenhangskomponente $(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$ bei dem zu $\mathbb{R}$ isomorphen Kern aus den skalaren Streckungen mit reellem positivem Streckungsfaktor besteht. Somit liegt Situation (iii(1)) vor.

Die Dimension von Γ ergibt sich dann jeweils aus der Beschreibung von Γ_o unter Berücksichtigung der 8-dimensionalen Translationsgruppe. $\square$

4.3. BEMERKUNGEN. Man kann genau bestimmen, wann die in 4.2 beschriebenen Situationen jeweils eintreten. Hier sei lediglich das Ergebnis in Umrissen skizziert:

Fall (iii(2)) liegt genau für

$$\Phi = \mathbb{R}$$

vor, wie schon in 4.2 ausgeführt.

Fall (iii(1)) tritt genau dann ein, wenn Φ die Gestalt

$$\Phi = \{(\beta(t) \cdot m \cdot \beta(t)^{-1} - m + tq) \cdot h; t \in \mathbb{R}\}$$

hat; dabei ist

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \text{Spin}(3) \subseteq \mathbb{H}^\times: t \mapsto \beta(t)$$

ein nichttrivialer Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die multiplikative Gruppe der Quaternionen der Norm 1,

$$m \in \text{Pu } \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

eine reine Quaternion, die senkrecht auf dem von der Einparametergruppe $\beta(\mathbb{R})$ aufgespannten zweidimensionalen $\mathbb{R}$ -Untervektorraum $\langle \beta(\mathbb{R}) \rangle \subseteq \mathbb{H}$ steht, und

$$q = h^{-1} - \beta(1)^{-1} m \beta(1) + m.$$

Fall (ii) ergibt sich, wenn Φ die folgende Form hat:

$$\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-,$$

wobei

$$\Phi_\pm = \{f + e^t \beta(t)(f_\pm - f)h^{-1}\beta(t)^{-1}h; t \in \mathbb{R}\} \cup \{f\}$$

für Quaternionen f, f_+, f_- mit

$$\text{Re } f_- h^{-1} < \text{Re } f h^{-1} < \text{Re } f_+ h^{-1}$$

und einen Homomorphismus

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \text{Spin}(3),$$

welche noch gewissen Bedingungen genügen müssen, die im wesentlichen garantieren, daß 0 und 1 zu Φ gehören. Diese Bedingungen sollen hier nicht im einzelnen ausgeführt werden.

Lediglich für den Spezialfall, daß in dieser Situation der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, werden anschließend (in 4.4) genaue Ausführungen

gemacht, da sich dann eine besonders große Kollineationsgruppe ergibt. (In diesem Spezialfall wird sich die Beschreibung von Φ vereinfachen zu linearen Ausdrücken der Form

$$\Phi_{\pm} = \{f + r \cdot (f_{\pm} - f); r \geq 0\} \cup \{f\},$$

wobei $f, f_+, f_- \in \langle 1, i \rangle$; diese Vereinfachung kommt dadurch zustande, daß in diesem Spezialfall die $\beta(t)$ mit f, f_+, f_- und h kommutieren. Außerdem kann man bis auf Ebenenisomorphie dann noch auf $f = 0, f_+ = 1$ und $f_- = g$ mit $g \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle, |g| = 1$ normieren.)

Hier kam es zunächst einmal darauf an aufzuzeigen, daß nur bei Querschnitten Φ von ganz spezieller Gestalt Fall (ii) oder Fall (iii) auftritt.

Zu Fall (i): Jedenfalls wird deutlich, daß die 'allermeisten' Querschnitte Φ , die für die Konstruktion eines Quasikörpers $Q_{h,\Phi}$ nach 2.1 in Frage kommen, nicht eine solche spezielle Gestalt haben. Auch der Fall (i) kommt also tatsächlich vor. $\square$

Nunmehr stellen wir im Anschluß an Satz 4.2 diejenigen Ebenen, die besonders große Kollineationsgruppe haben, eigens heraus und behandeln sie noch etwas genauer:

4.4. SATZ (Große Kollineationsgruppen). (A) *Die $\text{Spin}(3)\text{-SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen, die eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe haben, sind bis auf Isomorphie genau die Ebenen über den Quasikörpern $Q_{h,\Phi}$ aus 2.1, für die Φ die folgende spezielle Gestalt hat:*

$$\Phi = \Phi(g, h) = \{r \cdot 1; r \geq 0\} \cup \{rg; r \geq 0\},$$

(also linear in zwei Stücken ist); dabei ist entsprechend 2.1

$$h \in \mathbb{C}, \quad |h| = 1, \quad \text{Re } h > 0, \quad \text{Im } h \geq 0,$$

also

$$h = e^{i\delta} \quad \text{mit } 0 \leq \delta < \frac{\pi}{2},$$

ferner ist

$$g \in \mathbb{C}, \quad |g| = 1, \quad \text{Re } gh^{-1} < 0,$$

und bis auf Isomorphie kann g noch normiert werden zu

$$g = e^{i\gamma} \quad \text{mit } \pi \leq \gamma \leq \pi + 2\delta.$$

Die Multiplikation dieser Quasikörper läßt sich folgendermaßen angeben:

$$a \circ x = (a - \varphi(a)) \cdot h^{-1} x h + x \cdot \varphi(a)$$

mit

$$\varphi(a) = \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{Re} ah^{-1}}{\operatorname{Re} h} \right) \cdot 1, & \text{falls } \operatorname{Re} ah^{-1} \geq 0 \\ \left(\frac{\operatorname{Re} ah^{-1}}{\operatorname{Re} gh^{-1}} \right) \cdot g, & \text{falls } \operatorname{Re} ah^{-1} \leq 0. \end{cases}$$

(B) Genau für $h = 1$ und $g = -1$ erhält man eine desarguessche Ebene, nämlich die Quaternionenebene.

(C) Eine Ebene vom Lenz-Typ V ergibt sich genau für $h \neq 1$ und $g = -1$, also $\Phi = \mathbb{R}$. Die Zusammenhangskomponente Γ_o der Gruppe der stetigen Kollineationen, die den Ursprung festlassen, besteht dann aus den Transformationen

$$(x, y) \mapsto (axc, ra(pxh + tx + y)c)$$

mit

$$a \in \operatorname{Spin}(3); \quad 0 \neq c \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle; \quad p \in \operatorname{Pu} \mathbb{H}; \quad r > 0; \quad t \in \mathbb{R}$$

(in den dem Koordinatenbereich zugrundeliegenden quaternionalen Koordinaten der affinen Ebene). Unter Berücksichtigung der Translationsgruppe ergibt sich insbesondere, daß die volle Kollineationsgruppe 18-dimensional ist.

(D) In den anderen Fällen ist die volle Kollineationsgruppe genau 17-dimensional. Γ_o ist die Gruppe der Transformationen

$$(x, y) \mapsto (axc, ra(pxh + y)c)$$

mit

$$a \in \operatorname{Spin}(3); \quad 0 \neq c \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle; \quad p \in \operatorname{Pu} \mathbb{H}; \quad r > 0.$$

Zusätze.

(1) Man kann zeigen, daß alle Kollineationen der betrachteten Ebenen stetig sind, und man kann alle Kollineationen (nicht nur die Elemente der Zusammenhangskomponente) bestimmen.

Bei den Ebenen vom Lenz-Typ V, also mit

$$g = -1,$$

wird die volle Kollineationsgruppe erzeugt von Γ_o , den Translationen und zusätzlich der Geradenspiegelung $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

In den anderen Fällen wird die Kollineationsgruppe fast immer erzeugt von Γ_o und den Translationen. Lediglich noch im Fall

$$g = -h^2$$

treten zusätzliche Kollineationen auf; die volle Kollineationsgruppe wird

dann erzeugt von Γ_o , den Translationen und einer Kollineation der Ordnung 4, nämlich

$$(x, y) \mapsto (xj, yjh^{-2}),$$

deren Quadrat die Punktspiegelung am Ursprung ist.

Bemerkenswerterweise ist also genau für die 'Grenzfälle' $g = -1$ und $g = -h^2$ des Parameterbereichs (siehe Figur 1) die volle Kollineationsgruppe nicht zusammenhängend.

(2) Es läßt sich zeigen, daß bei den angegebenen Normierungen für verschiedene Werte der Parameter g, h die entstehenden Ebenen paarweise nicht isomorph sind.

Die Argumente für diese Zusätze werden im Beweis nur skizziert werden.

Hinweise.

(1) Auf die Divisionsalgebren, die hier mit $h \neq 1$ und $g = -1$ entstehen, und ihren Zusammenhang mit den Divisionsalgebren aus [5, §5] wird in §5, insbesondere 5.3, näher eingegangen.

(2) Es wird sich herausstellen, daß die Ebenen aus (D), also mit $g \neq -1$, die einzigen echten Translationsebenen (nicht über beidseitig distributiven oder assoziativen Quasikörpern) sind, die eine Kollineationsgruppe der Dimension ≥ 17 aufweisen (§6, Klassifikationssatz).

Beweis. (a) Nach dem Satz 4.2 über Kollineationsgruppen tritt in einer Ebene der betrachteten Art (koordinatisiert über einem der Quasikörper $Q_{h,\phi}$ aus 2.1) eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe nur in den Fällen (ii) und (iii(2)) von 4.2 auf, d.h. in folgenden Situationen:

Figur 1.

Situation 1. Die Ebene hat Lenz-Typ V; dies ist genau der Fall für $h \neq 1$ und $\Phi = \mathbb{R}$, in der hier angegebenen Beschreibung also mit $g = -1$.

Situation 2. Genau eine N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$ ist invariant unter Γ . Eine 17-dimensionale Kollineationsgruppe erreicht man nach 4.2(ii) dabei nur durch die zusätzliche Annahme, daß der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Die Ebenen, in denen diese Situation vorliegt, müssen jetzt noch genau bestimmt werden.

Aufgrund des Koordinatisierungssatzes 2.3 können wir annehmen, daß der uneigentliche Punkt w der ersten Koordinatenachse W in der Γ -invarianten N-Bahn auf $L_\infty \setminus \{s\}$ liegt und daß w der (einzige) Fixpunkt von Σ in dieser N-Bahn ist. Sei $Q_{h,\Phi}$ der koordinatisierende Quasikörper für ein solches Bezugssystem. Da der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ sein soll, kann man nach 4.1 o.B.d.A.

$$\Phi \subseteq \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$$

annehmen; dann ist $\text{Ker } Q_{h,\Phi} = \langle 1, i \rangle$. Nach 1.3 ist damit die Gruppe $G_{[o, L_\infty]}$ der Streckungen vom Ursprung aus bestimmt:

$$G_{[o, L_\infty]} = \{(x, y) \mapsto (xc, yc); c \in \langle 1, i \rangle \setminus \{0\}\}.$$

Die Fallbeschreibung 4.2(ii) besagt nun, daß in der Kollineationsgruppe eine die Koordinatenachsen festlassende sog. Kompressionsuntergruppe $Y \cong \mathbb{R}$ existiert. Diese kann zudem so gewählt werden, daß sie die Gruppe

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (ax, ay); a \in \text{Spin}(3)\}$$

zentralisiert, außerdem zentralisiert sie als Untergruppe der Zusammenhangskomponente Γ_o die Streckungsgruppe $G_{[o, L_\infty]}$ (1.4). Damit ist Y eine Einparameteruntergruppe der Form

$$\{(x, y) \mapsto (x \cdot b(t), y \cdot d(t)); t \in \mathbb{R}\}$$

mit $b(t), d(t) \in \mathbb{C}^\times = \langle 1, i \rangle \setminus \{0\}$, und modulo der Gruppe der Streckungen können wir $b(t) \equiv 1$ annehmen, ohne die Wirkung von Y auf L_∞ zu ändern. Wäre die Untergruppe $\{d(t); t \in \mathbb{R}\}$ der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ kompakt, so hätte Y in L_∞ lauter kompakte Bahnen, im Widerspruch zum Begriff einer Kompressionsuntergruppe. Also können wir Y in der Form

$$\{(x, y) \mapsto (x, y \cdot e^{t \cdot c(t)}); t \in \mathbb{R}\}$$

schreiben, wobei $t \mapsto c(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus mit $|c(t)| = 1$ für alle t ist. Wir betrachten nun noch die dreidimensionale Scherungsgruppe N ; da sie ein Normalteiler von Γ_o ist (siehe 4.2), ist insbesondere die N-Bahn

von W invariant unter Y . Diese besteht aus den Geraden $\{(x, pxh); x \in \mathbb{H}\}$ mit $p \in \text{Pu } \mathbb{H}$; zu $p \in \text{Pu } \mathbb{H}$ existiert also ein $p' \in \text{Pu } \mathbb{H}$ mit $p'xh = e' \cdot pxh \cdot c(t)$ für alle $x \in \mathbb{H}$. Unter Berücksichtigung von $|c(t)| = 1$ folgt hieraus $c(t) = \pm 1$, und aus Zusammenhangsgründen $c(t) = 1$. Insgesamt ist also

$$Y = \{(x, y) \mapsto (x, ry); r > 0\}.$$

Da Σ von Y zentralisiert wird, permutiert Y das System der Σ -invarianten Ursprungsgeraden $\{(x, xf); x \in \mathbb{H}\}$ mit $f \in \Phi$ (siehe 2.5), d.h. aus $f \in \Phi$ folgt $rf \in \Phi$ für alle $r > 0$. Insbesondere ist wegen $1 \in \Phi$ und $0 \in \Phi$

$$\{r \cdot 1; r \geq 0\} \subseteq \Phi.$$

Aufgrund seiner Querschnittseigenschaften in Bezug auf das System der Nebenklassen von $(\text{Pu } \mathbb{H}) \cdot h$ enthält Φ außerdem ein Element g mit $\text{Re } gh^{-1} < 0$ und $|g| = 1$; damit ist dann auch

$$\{r \cdot g; r \geq 0\} \subseteq \Phi.$$

Die Vereinigung der damit gefundenen beiden Teilmengen von Φ ist zu $\mathbb{R}$ homöomorph und abgeschlossen, also füllen sie Φ schon ganz aus.

Damit ist gezeigt, daß Φ die behauptete Gestalt hat, wobei allerdings noch begründet werden muß, warum g auf die angegebenen Werte normiert werden kann. Die Kollineationsgruppen waren schon in 4.2 bestimmt worden, und sind hier nur nochmals konkret ausgeschrieben.

Nun zur endgültigen Normierung der Parameterwerte.

(b) Entsprechend den allgemeinen Voraussetzungen an h (siehe 2.1) ist

$$h = e^{i\delta} \quad \text{mit } 0 \leq \delta < \frac{\pi}{2};$$

ferner bedeutet $\text{Re } gh^{-1} < 0$, daß

$$g = e^{i\gamma} \quad \text{mit } \frac{\pi}{2} + \delta < \gamma < \frac{3\pi}{2} + \delta$$

ist. Zunächst betrachten wir noch die Ebenen zu allen diesen Parameterwerten, stellen dann aber zwischen gewissen dieser Ebenen spezielle Isomorphismen her, um schließlich einen eingeschränkten Parameterbereich zu finden, der für jeden Isomorphietyp genau eine Ebene beinhaltet.

Man könnte sogar einen vollständigen Überblick über sämtliche Isomorphismen zwischen solchen Ebenen gewinnen. Das soll nicht in allen

Details ausgeführt werden; eine Skizze wird jedoch einerseits illustrieren, wie man die angekündigten speziellen Isomorphismen findet, und andererseits eine Beweisskizze für die Zusätze zu Satz 4.4 abgeben.

Angenommen also, man habe einen Isomorphismus zwischen zwei solchen Ebenen mit den Parametern g, h und g', h' und zugehörigen Querschnitten $\Phi = \Phi(g, h)$ und $\Phi' = \Phi(g', h')$. Aufgrund der Informationen, die man nach 4.2 für beide Ebenen über die Bahnen von Γ in L_∞ und über die besondere Stellung der 3-dimensionalen Scherungsgruppe $N \cong \mathbb{R}^3$ sowie der zu $\text{Spin}(3)$ isomorphen Kollineationsgruppe Σ hat, kann der gegebene Isomorphismus mit Hilfe bekannter Kollineationen so modifiziert werden, daß er die Koordinatenachsen respektiert und äquivariant ist bezüglich der Wirkung von N und Σ . Da $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$ nur innere Automorphismen besitzt, läßt sich der Isomorphismus weiter durch Elemente von Σ noch so modifizieren, daß er die Wirkung von Σ zentralisiert. Ein solcher Isomorphismus ψ hat dann die Form

$$\psi: (x, y) \mapsto (xb, yd).$$

Nun ist ψ auch äquivariant bezüglich der Gruppe

$$\{(x, y) \mapsto (xc, yc); \quad c \in \langle 1, i \rangle \setminus \{0\}\},$$

da diese in beiden Ebenen die Gruppe $\mathbb{G}_{[0, L_\infty]}$ der zentrischen Streckungen vom Ursprung aus darstellt. Folglich sind entweder $b, d \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$ oder $b, d \in \langle j, k \rangle = \mathbb{R} \cdot j + \mathbb{R} \cdot k$. Durch Modifikation mit Kollineationen aus $\mathbb{G}_{[0, L_\infty]}$ und aus der oben hergeleiteten Kompressionsuntergruppe Y gewinnt man im ersten Fall einen Isomorphismus der Form

$$\psi_1: (x, y) \mapsto (x, yc) \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}, |c| = 1,$$

im zweiten Fall einen Isomorphismus der Form

$$\psi_2: (x, y) \mapsto (xj, yjc) \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}, |c| = 1.$$

Die nachstehende Tabelle I gibt an, wie Isomorphismen dieser Gestalt die Ursprungsgeraden

$$E = \{(x, x); x \in \mathbb{H}\} \quad \text{der Steigung } 1$$

$$L_g = \{(x, xg); x \in \mathbb{H}\} \quad \text{der Steigung } g$$

abbilden.

Für den Vergleich mit der Gestalt der Ursprungsgeraden in der Bildebene (zu den Parametern g', h') sind verschiedene Fallkombinationen denkbar, die dann jeweils zusätzliche Informationen liefern werden. Da die betrachteten Isomorphismen die Wirkung von Σ zentralisieren, führen

TABELLE I

Bild von	(x, x)	(x, xg)
auf Gerade der Steigung	1	g
unter ψ_1	(x, xc)	(x, xgc)
auf Gerade der Steigung	c	gc
unter ψ_2	(xj, xjc)	$(xj, xgjc)$ $= (xj, xj\bar{g}c)$
auf Gerade der Steigung	c	$\bar{g}c$

sie die Σ -invarianten Ursprungsgeraden E und L_g in Σ -invariante Ursprungsgeraden der Bildebene über, also in Geraden der Form $\{(x, xf'); x \in \mathbb{H}\}$ mit $f' \in \Phi'$. In der Bildebene gibt es nun genau zwei Geraden mit einer Steigung aus Φ' vom Betrag 1, nämlich die Geraden der Steigung 1 und g' , und nach der Tabelle I müssen das die Bildgeraden von E und L_g sein. Falls E auf die Gerade der Steigung 1 abgebildet wird, ist $c = 1$; dieser Fall ist uninteressant. Es müssen also noch die folgenden Situationen betrachtet werden:

Situation 1. Unter einem Isomorphismus der Gestalt ψ_1 geht E in L_g über. Tabelle I lehrt dann $g' = c$, $gc = 1$, also

$$(1.1) \quad g' = \bar{g} = c.$$

Wir benutzen ferner, daß ψ_1 äquivariant bezüglich der Wirkung der 3-dimensionalen Scherungsgruppe N in beiden Ebenen sein soll. Die Gerade $\{(x, ixh); x \in \mathbb{H}\}$ der Steigung ih geht aus der Koordinatenachse W durch Anwendung einer Scherung aus N hervor; ihr Bild unter ψ_1 , also $\{(x, ixhc); x \in \mathbb{H}\}$ muß sich somit in der Bildebene wiederum mittels eines geeigneten Elements von N aus W ergeben und sich also nach der Beschreibung aus 4.2 für N auch in der Form $\{(x, pxh'); x \in \mathbb{H}\}$ mit geeignetem $p \in \text{Pu } \mathbb{H}$ schreiben lassen. Der Vergleich zeigt $hc = \pm h'$ (man beachte, daß lauter komplexe Zahlen vom Betrag 1 im Spiel sind), und wegen (1.1) also $h' = \pm \bar{g}h$. Zur Entscheidung über das Vorzeichen beachte man, daß nach (1.1) und nach Voraussetzung $\text{Re } \bar{g}h = \text{Re } g\bar{h} = \text{Re } gh^{-1} < 0$ und $\text{Re } h' > 0$; also ist

$$(1.2) \quad h' = -\bar{g}h.$$

Ebenfalls nach den allgemeinen Voraussetzungen muß $\operatorname{Im} h' \geq 0$ sein; nach (1.2) folgt daraus für die Winkel γ und δ von g und h die zusätzliche Bedingung $\gamma \leq \pi + \delta$, so daß insgesamt (mit den bereits angegebenen Schranken für den Parameterbereich)

$$(1.3) \quad \frac{\pi}{2} + \delta < \gamma \leq \pi + \delta$$

sein muß.

Nur für diesen Gültigkeitsbereich kommt ein Isomorphismus der betrachteten Art in Frage. Umgekehrt verifiziert man, daß dann tatsächlich die nach (1.1) und (1.2) bestimmten Parameter g' , h' alle Bedingungen erfüllen und daß die Abbildung ψ_1 (mit $c = \bar{g}$ gemäß (1.1)) ein Isomorphismus der zu den Parametern g, h einerseits und g', h' andererseits gehörigen Ebenen ist.

Situation 2. Unter einem Isomorphismus der Gestalt ψ_2 geht E in $L_{g'}$ über. Durch ganz entsprechende Schlüsse wie in Situation 1 erhält man dann

$$(2.1) \quad g' = g = c$$

$$(2.2) \quad h' = -g\bar{h}$$

und als Gültigkeitsbereich

$$\pi + \delta \leq \gamma < \frac{3\pi}{2} + \delta.$$

Für die Gültigkeitsbereiche von ψ_1 und ψ_2 siehe Fig. 2.

Man verifiziert nun leicht die Angaben der folgenden Tabelle II über die Beziehungen der Winkel γ' und δ' von g' und h' bei Anwendung der

Figur 2.

TABELLE II

	bei Anwendung von	
	ψ_1	ψ_2
$\pi/2 + \delta < \gamma \leq \pi$	$\gamma' \geq \pi$	
$\pi < \gamma \leq \pi + \delta$	$\gamma' < \pi$	
$\pi + \delta < \gamma < \pi + 2\delta$		$\pi + 2\delta' < \gamma' < 3\pi/2 + \delta'$
$\gamma = \pi + 2\delta$		$\gamma' = \pi + 2\delta'$
$\pi + 2\delta < \gamma < 3\pi/2 + \delta$		$\pi + \delta' < \gamma' < \pi + 2\delta'$

Isomorphismen ψ_1 bzw. ψ_2 je nach Lage der Winkel γ und δ von g und h . Sie zeigt insbesondere, daß man bis auf Anwendung des Isomorphismus ψ_1 o.B.d.A. $\gamma \geq \pi$ annehmen kann. Für $\gamma \leq \pi + 2\delta$ ist man dann schon im Normierungsbereich, der in der Behauptung angegeben ist; andernfalls kann man durch Anwendung von ψ_2 zu Parametern g' , h' mit $\gamma' \in [\pi, \pi + 2\delta']$ übergehen. Zwischen den Ebenen, die zu dem durch $\gamma \in [\pi, \pi + 2\delta]$ beschriebenen Normierungsbereich gehören, kommen keine weiteren Isomorphismen vor, da jeder der beiden Isomorphismen ψ_1 und ψ_2 , sofern überhaupt anwendbar, aus dem Bereich herausführt. Dies begründet auch den Zusatz 2.

Die Bestimmung aller Kollineationen (Zusatz 1) kann hier ebenfalls angeschlossen werden; die vorstehenden Überlegungen zeigen, daß modulo der Translationen und der Kollineationen aus Γ_o jede Kollineation sich zu einer Kollineation der Gestalt ψ_1 oder ψ_2 modifizieren läßt, wobei jetzt natürlich nur der Spezialfall identischer Ebenen, also

$$(3) \quad h' = h, \quad g' = g$$

interessiert. Für eine Kollineation vom Typ ψ_1 erhält man nach (1.1), daß $g = \bar{g}$ reell, also $c = g = -1$ ist; dann ist die Ebene vom Lenz-Typ V, und ψ_1 ist die Spiegelung $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Aus dem Auftreten einer Kollineation vom Typ ψ_2 folgt nach (2.2) und (3), daß $h = -g\bar{h}$, also $g = -h^2$ ist, und nach (2.1) ist ψ_2 dann die angegebene Kollineation $(x, y) \mapsto (xj, yjh^{-2})$. $\square$

5. EXKURS: EBENEN VOM LENZ-TYP V MIT GROSSER KOLLINEATIONSGRUPPE

5.1. An dieser Stelle bietet es sich an, erneut einen Blick auf die in [5] durchgeführte Klassifikation der achtdimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe zu werfen. Teile dieser Klassifikation lassen sich hier nämlich natürlicher einordnen, als das damals möglich war.

Die achtdimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V lassen sich koordinatisieren über vierdimensionalen reellen (nicht notwendig assoziativen) Divisionsalgebren. In [5, §4] ist ausgeführt, daß die Kollineationsgruppe einer solchen Ebene genau dann mindestens 17-dimensional ist, wenn sie eine kompakte, zusammenhängende, die Koordinatenachsen fixierende Untergruppe Σ der folgenden Art enthält:

Fall (a) $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$

Fall (b) $\Sigma \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$

Fall (c) Σ ist ein 2-Torus, und der Kern der Ebene ist isomorph zu $\mathbb{C}$.

Die Fälle (b) und (c) wurden in [4] und [5, §6] studiert. Hier geht es um eine alternative Behandlung des Falls (a), der in [5, §5] etwas gewaltsam mit einem analytischen Ansatz gelöst wurde. Es wird sich zeigen, daß Fall (a) genau die Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ aus 2.6, also die in Satz 4.4(C) besprochenen Ebenen, sowie die dazu dualen Ebenen und deren transponierte Ebenen beinhaltet.

5.2. Im folgenden sei also $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$. Auf den beiden Koordinatenachsen W und S und auf der uneigentlichen Geraden L_∞ wirkt Σ entweder effektiv oder als Zentrumsfaktorgruppe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ (wenn die zentrale Involution ι die betreffende Gerade als Achse hat) oder aber trivial.

Wirkt Σ auf einer dieser Geraden trivial, so ist Σ eine Gruppe von Achsenstreckungen. Der Nukleus der koordinatisierenden Divisionsalgebra $D \cong \mathbb{R}^4$, der die Gruppe von Streckungen zu dieser Achse beschreibt [4, 2.6], enthält in seiner multiplikativen Gruppe somit eine zu $\text{Spin}(3)$ isomorphe Untergruppe, und ist dann aus Dimensionsgründen schon ganz D , da es sich um einen Unterkörper handelt. Also ist D ein Körper (der Quaternionenkörper), und die Ebene ist die klassische Quaternionenebene.

Ab jetzt setzen wir voraus, daß Σ nichttrivial auf W, S und L_∞ wirkt. Wir zeigen, daß die zentrale Involution ι eine Spiegelung an einer dieser Geraden ist:

Ist ι nicht die Spiegelung an W oder S , so wirkt Σ effektiv auf diesen Geraden. Da die Wirkung $\mathbb{R}$ -linear ist, und da es bis auf Äquivalenz nur eine Darstellung von $\text{Spin}(3)$ auf $\mathbb{R}^4$ gibt, induziert dann ι auf W und S die Abbildung $x \mapsto -x$. In der affinen Ebene ist ι somit die Spiegelung am Ursprung, deren Achse die uneigentliche Gerade L_∞ ist.

Auf der Achse von ι wirkt Σ dann als die Zentrumsfaktorgruppe $\Sigma/\{1, \iota\} \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$, auf den anderen beiden Geraden effektiv (denn $\{1, \iota\}$ ist der einzige nichttriviale Normalteiler von $\text{Spin}(3)$, und eine Spiegelung kann nicht zwei Geraden punktweise festlassen). Es sind somit die folgenden Fälle

zu betrachten:

- Fall 1.* $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$ wirkt effektiv auf W und S ;
 ι hat L_∞ als Achse, und $\Sigma|L_\infty \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$.
- Fall 2.* $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$ wirkt effektiv auf W und L_∞ ;
 ι hat S als Achse, und $\Sigma|S \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$.
- Fall 3.* $\Sigma \cong \text{Spin}(3)$ wirkt effektiv auf S und L_∞ ;
 ι hat W als Achse, und $\Sigma|W \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Wir werden sehen, daß Fall 1 genau die Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ aus 2.6 beinhaltet. Die beiden anderen Fälle werden darauf zurückgeführt: Fall 2 durch Transposition auf Fall 3, und Fall 3 durch Dualisierung auf Fall 1.

5.3. *Zu Fall 1.* Hier handelt es sich genau um die $\text{Spin}(3)$ – $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen, in denen die Scherungsgruppe zur Achse S sogar transitiv auf $L_\infty \setminus S \cap L_\infty$ ist (da wir Ebenen vom Lenz-Typ V betrachten). Die nach dem Koordinatisierungssatz 2.3 gewonnenen Koordinatenbereiche sind also beidseitig distributiv [1, Satz 4], und mit 2.6 erhält man genau die Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$. Dies entspricht Fall (iii(2)) von Satz 4.2 und Fall (C) von Satz 4.4 (mit $g = -1$), wo auch die volle Kollineationsgruppe dieser Ebenen angegeben ist. Es sei darauf hingewiesen, daß (schon nach 4.1) der Kern dieser Ebenen isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

5.4. *Fall 2* wird durch die Technik der Transposition [2] auf Fall 3 zurückgeführt.

Wir betrachten eine Ebene zu Fall 2 und die zugehörige transponierte Ebene. Nach Proposition 2 von [2] induziert Σ eine isomorphe Kollineationsgruppe Σ^* der transponierten Ebene. Den Ausführungen zu Proposition 3 in [2] kann man ferner folgendes entnehmen: Die Gruppe der Scherungen der transponierten Ebene mit der Polaren S^0 von S als Achse ist als Transformationsgruppe der uneigentlichen Geraden isomorph zur Gruppe der Scherungen der ursprünglichen Ebene mit Achse S , also ebenfalls linear transitiv, d.h. die transponierte Ebene hat auch Lenz-Typ V. Die Spiegelung $\iota \in \Sigma$, die S als Achse und den uneigentlichen Punkt von W als Zentrum hat, induziert ferner in der transponierten Ebene eine Spiegelung mit der Polaren W^0 als Achse und dem uneigentlichen Punkt von S^0 als Zentrum (d.h. die Rolle der Koordinatenachsen in Bezug auf Spiegelungen und allgemeiner Achsenstreckungen wird bei Transposition vertauscht). Damit liegt in der transponierten Ebene der Fall 3 vor.

5.5. *Fall 3* ist dual zu *Fall 1*: Die Rolle der uneigentlichen Geraden (als Achse der transitiven Translationsgruppe) wird in der dualen Ebene übernommen vom Büschel der Geraden durch das Zentrum $S \cap L_\infty$ der transitiven Scherungsgruppe, d.h. vom Büschel der Parallelen zu S . In einer Ebene zu *Fall 3* hat die Spiegelung $\iota \in \Sigma$ Achse W , läßt also die Parallelen zu S einzeln fest und hat somit in der dualen Ebene die uneigentliche Gerade als Achse, so daß dort *Fall 1* vorliegt.

Die duale Ebene ist also, wie bei *Fall 1* vermerkt, die Ebene über einer der Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$. Insbesondere ist ihr Kern isomorph zu $\mathbb{C}$, d.h. sie hat eine zu $\mathbb{C}^\times$ isomorphe Streckungsgruppe, die Σ zentralisiert. In die ursprüngliche Ebene zurückübersetzt, bedeutet das die Existenz einer zu $\mathbb{C}^\times$ isomorphen Kollineationsgruppe, die Σ zentralisiert und alle Parallelen zu S invariant läßt, also aus Achsenstreckungen in Richtung S besteht. Die Torusuntergruppe $\Theta \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ dieser Kollineationsgruppe wurde in [5] rein rechnerisch entdeckt (genauer gesagt, die entsprechende diagonale Torusgruppe T in $\Theta \cdot \Sigma$ bei den dazu transponierten Ebenen, also den Ebenen zu *Fall 2*, siehe [5, 5.4]). Mit der Zurückführung auf den Kern der dualen Ebene ist das Auftreten dieser 'zusätzlichen' Torusgruppe in der Kollineationsgruppe geometrisch befriedigend erklärt.

Um den Anschluß an [5] herzustellen, berechnen wir jetzt noch explizit für die Ebenen zu *Fall 3* die Multiplikation $*$ einer koordinatisierenden Divisionsalgebra, indem wir die Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ zu *Fall 1* dualisieren (einfach durch Vertauschung von Multiplikator und Multiplikand, siehe [17, 1.6 S.41 (58), (59), (60)]). Wie in Satz 4.4 (im Spezialfall $g = -1$) festgestellt, läßt sich die Multiplikation von $Q_{h,\mathbb{R}}$ folgendermaßen angeben:

$$a \circ x = (a - \varphi(a)) \cdot h^{-1} x h + x \cdot \varphi(a)$$

mit

$$\varphi(a) = \frac{\mathrm{Re} \, a h^{-1}}{\mathrm{Re} \, h}.$$

Damit erhält man

$$(1) \quad a * x = x \circ a = p(x) \cdot a h + \varphi(x) \cdot a$$

mit

$$p(x) = (x - \varphi(x)) \cdot h^{-1}.$$

Dabei ist $p(x)$ eine reine Quaternion. Für den $\mathbb{R}$ -linearen Automorphismus A von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ mit

$$A(x) = \mathrm{Re} \, x + (\mathrm{Pu} \, x) \cdot \frac{h}{\mathrm{Re} \, h}$$

gilt also

$$A(\varphi(x) + p(x) \cdot \operatorname{Re} h) = \varphi(x) + p(x) \cdot h = x$$

und somit

$$A^{-1}(x) = \varphi(x) + p(x) \cdot \operatorname{Re} h.$$

Damit können wir die Multiplikation $*$ folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} a * x &= a \cdot (\varphi(x) + a^{-1} p(x) a h) \\ &= a \cdot A(\varphi(x) + a^{-1} p(x) a \cdot \operatorname{Re} h) \\ &\quad \text{(beachte, daß auch } a^{-1} p(x) a \text{ rein)} \\ &= a \cdot A(a^{-1}(\varphi(x) + p(x) \cdot \operatorname{Re} h) a) \\ &= a \cdot A(a^{-1} A^{-1}(x) a). \end{aligned}$$

Dies ist die in [5, 5.2] angegebene Multiplikation. Als Matrix (bezüglich der Basis $1, i, j, k$) ist hier

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \alpha \\ & & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \frac{\operatorname{Im} h}{\operatorname{Re} h},$$

hat also die in [5, 5.3] angegebene Gestalt (bereits in normierter Form).

5.6. Zur Vervollständigung der Übersicht sei noch ohne nähere Ausführungen erwähnt, daß eine Ebene zu Fall 1 bei Transposition in eine Ebene überführt wird, die zur Ausgangsebene isomorph ist, und daß die Ebenen zu Fall 2 selbstdual sind.

Zusammenfassend hat man also, daß sich die Operationen Transposition (T) und Dualisierung (D) auf die hier betrachteten Ebenen entsprechend dem folgenden Diagramm auswirken:

Das Ergebnis dieser Diskussion kann man folgendermaßen zusammenfassen:

5.7. SATZ. Die achtdimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit einer zu $\operatorname{Spin}(3)$ isomorphen Kollineationsgruppe sind genau die Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ aus 2.6 (mit $h \in \mathbb{C}$, $|h| = 1$, $\operatorname{Re} h > 0$, $\operatorname{Im} h \geq 0$), ihre dualen Ebenen und die dazu transponierten Ebenen. Außer im

Fall der Quaternionenebene ($h = 1$) ist die Kollineationsgruppe dieser Ebenen 18-dimensional.

Hinweis. Die explizite Beschreibung der Kollineationsgruppe findet man für die Ebene über $Q_{h,\mathbb{R}}$ in Satz 4.4(C) (Spezialfall $g = -1$), für die dualen Ebenen und deren transponierte Ebenen in [5], §1 Klassifikationssatz (a1) und (a2).

Bemerkung. Interessanterweise hängen nach §3 alle diese Ebenen über den Prozess der Ableitung (und die genannten Operationen der Dualisierung und Transposition) mit den Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer–Tits zusammen.

6. ACHTDIMENSIONALE TRANSLATIONSEBENEN MIT GROSSER KOLLINEATIONSGRUPPE

In diesem Abschnitt kompilieren wir aus der vorliegenden Arbeit und den Arbeiten [6]–[13] den folgenden

KLASSIFIKATIONSSATZ. *Bis auf Isomorphie haben genau die folgenden achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe:*

- (i) *Die desarguessche Ebene über den Quaternionen (mit 35-dimensionaler Kollineationsgruppe);*
- (ii) *Ebenen mit 18-dimensionaler Kollineationsgruppe:*
Die $\text{Spin}(3)\text{--}\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen vom Lenz-Typ V über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ aus 2.1 und 2.6, ihre dualen Ebenen und deren transponierte Ebenen (siehe 5.7, oder auch [5, Klassifikationssatz (b)]).
- (iii) *Ebenen mit 17-dimensionaler Kollineationsgruppe:*
  - (1) *Die Ebenen über den echten Quasikörpern $Q_{h,\Phi(g,h)}$ aus 4.4 mit $g \neq -1$ (also $\Phi(g,h) \neq \mathbb{R}$).*
  - (2) *Die Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer–Tits ([14], [25], [9, 3.3, 4.2])*
  - (3) *Die $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen vom Lenz-Typ V über den Divisionsalgebren $D_\alpha = D_{\alpha,\text{id}}$ aus [4] und [13, 3.3(iii)] (siehe auch [5, Klassifikationssatz (b)])*
  - (4) *Die Lenz-Typ-V-Ebenen über den Reesschen Divisionsalgebren ([5, §6 und Klassifikationssatz (c)], [19]).*

Bemerkungen. Die Ebenen aus (ii) hängen über den Prozess der Ableitung eng mit den Kalscheuer–Tits–Fastkörpern zusammen, siehe §3.

Für alternative (isomorphe) Beschreibungen der Divisionsalgebren D_α aus (iii(3)) vergleiche man auch [15, S. 57 Satz 29]; dort wird gezeigt, daß es sich genau um die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren handelt, die flexibel sind.

Die Reesschen Divisionsalgebren in (iii(4)) sind unter den vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren dadurch gekennzeichnet, daß ihre sämtlichen Nuklei nicht nur aus den reellen Vielfachen der 1 bestehen, sondern zu $\mathbb{C}$ isomorph sind [9].

Die Liste enthält außer Ebenen vom Lenz-Typ V (Ebenen über Divisionsalgebren) und Lenz–Barlotti-Typ IVa.2 (Fastkörperebenen) nur eine einzige (zweiparametrig) Familie von echten Translationsebenen vom Lenz–Barlotti-Typ IVa.1, nämlich die in 4.4 beschriebenen Ebenen über den echten Quasikörpern $\mathcal{Q}_{h,\Phi(g,h)}$ mit $g \neq -1$.

Beweis. Sei eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene gegeben, die nicht isomorph zur Quaternionenebene ist und die eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe hat. Sei Γ die Zusammenhangskomponente der Gruppe aller stetigen Kollineationen.

Nach dem Hauptsatz von [7] existiert auf der uneigentlichen Geraden $L_\infty \cong \mathbb{S}^4$ ein Punkt s , dessen Bahn $\Gamma(s)$ unter Γ höchstens 2-dimensional ist. Ist s sogar ein Fixpunkt von Γ , so wählen wir einen weiteren uneigentlichen Punkt w beliebig auf $L_\infty \setminus \{s\}$, andernfalls wählen wir $w \in \Gamma(s) \setminus \{s\}$; in beiden Fällen sei w zudem so gewählt, daß die Bahn von w unter dem Stabilisator Γ_s minimale Dimension hat. Dann ist jedenfalls

$$(1) \quad \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) \leq 4.$$

Seien S und W die zu s und w gehörigen Ursprungsgeraden, und sei $\Gamma_{s,W}$ ihr Stabilisator. In Anbetracht der Translationsgruppe ist $\dim \Gamma_{s,w} = \dim \Gamma_{s,W} + 8$. Nach Voraussetzung und mit der bekannten Dimensionsformel gilt also

$$(2) \quad 17 \leq \dim \Gamma = \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim \Gamma_{s,W} + 8.$$

Nach 1.3 ist nun $\Gamma_{s,W}$ fastdirektes Produkt

$$(3) \quad \Gamma_{s,W} = S\Gamma_{s,W} \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$$

der Untergruppe der Kollineationen, die über dem Kern Determinante 1 haben, und der Zusammenhangskomponente der Gruppe der zentrischen Streckungen mit Zentrum o ; letztere hat Dimension 1 oder 2 je nachdem, ob der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu $\mathbb{C}$ ist.

Sei nun K die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von $S\Gamma_{s,w}$ gemäß dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.4; es ist dann

$$(4) \quad \dim S\Gamma_{s,w} = \begin{cases} \dim K + 1 \\ \dim K \end{cases}$$

je nachdem, ob $S\Gamma_{s,w}$ eine Kompressionsuntergruppe im Sinne von 1.4 enthält oder nicht. Aus (1)–(4) folgt nun

$$(5) \quad 5 \leq \dim \Gamma_{s,w} \leq \dim K + 1 + \dim \text{Kern};$$

insbesondere ist

$$\dim K \geq 2.$$

Wegen $K \subseteq S\Gamma_o$ wirkt K fast effektiv auf der 4-Sphäre L_∞ (d.h. mit endlichem Ineffektivitätskern). Zur Bestimmung der Möglichkeiten für K kann man also die Klassifikation von Richardson [20] der effektiven Wirkungen kompakter zusammenhängender Liegruppen auf der 4-Sphäre heranziehen. Da $K \subseteq \Gamma_{s,w}$ die beiden Fixpunkte $s, w \in L_\infty$ hat, liefert die Klassifikation die folgenden Fälle:

Entweder ist die effektive Wirkung von K auf L_∞ eine klassische Wirkung aus nachstehender Liste

- (a) $SO_4(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$
- (b) $U_2(\mathbb{C})$ oder $SU_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$
- (c) $SO_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

oder aber

- (d) K ist ein 2-dimensionaler Torus.

Bei der näheren Betrachtung der einzelnen Fälle unter Berücksichtigung der übrigen Bedingungen für $\dim \Gamma \geq 17$ werden sich dann die verschiedenen in der Behauptung genannten Ebenentypen ergeben, nämlich:

- im Fall (a) die Fastkörperebenen (iii(2))
- im Fall (b) die dualen Ebenen und die transponierten Ebenen der Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ (Punkt (ii) der Behauptung; in diesen Ebenen ist $K \cong U_2(\mathbb{C})$)
- im Fall (c) die $\text{Spin}(3)$ – $SO_3(\mathbb{R})$ -Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h,\mathbb{R}}$ bzw. den Quasikörpern $Q_{h,\Phi(g,h)}$ ((ii) bzw. (iii(1)), mit $K \cong \text{Spin}(3)$) und die $SO_3(\mathbb{R})$ -Ebenen vom Lenz-Typ V ((iii(3)), mit $K \cong SO_3(\mathbb{R})$).
- im Fall (d) die Ebenen über den Reesschen Divisionsalgebren (iii(4)).

Nun die Behandlung der Fälle im einzelnen.

Die Fälle (a) und (b) lassen sich zusammenfassen dadurch, daß dann K in L_∞ außer den beiden Fixpunkten s und w lauter zur 3-Sphäre homöomorphe Bahnen hat und eine zu $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$ isomorphe Untergruppe Σ enthält. Nach dem Sphärensatz [6, 1.2] hat dann entweder die Ebene den Lenz-Typ V, oder aber s und w bleiben unter der ganzen Gruppe Γ fest.

Sind s und w Fixpunkte von Γ , so muß (2) und (5) zufolge $17 \leq \dim \Gamma_{s,w} + 8 \leq \dim K + 3 + 8$ sein, was angesichts der für K bestehenden Möglichkeiten nur mit $K|L_\infty \cong \text{SO}_4(\mathbb{R})$ zu erfüllen ist. Nach [10, 1.3] ist die Ebene dann eine $\text{Spin}(4)$ -Ebene oder eine $\text{SO}_4(\mathbb{R})$ -Ebene; und in $\text{SO}_4(\mathbb{R})$ -Ebenen ist der Kern nur eindimensional [10, 3.1], die Kollineationsgruppe also höchstens 16-dimensional (siehe auch [10, 3.3]). Unter den $\text{Spin}(4)$ -Ebenen haben nach [9, 3.3, 4.2] lediglich die Fastkörperebenen eine 17-dimensionale Kollineationsgruppe.

Im Fall einer Ebene vom Lenz-Typ V hingegen ist Satz 5.7 anwendbar; er liefert die in (ii) genannten Ebenen. (Alternativ könnte man [5] heranziehen.)

Fall (c) ist Gegenstand des $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Satzes aus [11, 1.4]. Unter der Bedingung $\dim \Gamma \geq 17$ besagt er die Existenz eines dreidimensionalen Normalteilers N von Γ_o , der aus Scherungen mit festem Scherungszentrum besteht. (Die im $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Satz noch enthaltene Alternative, daß eine sogenannte $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -Ebene vorliegen könnte, scheidet hier aus, da deren Kollineationsgruppe höchstens 16-dimensional ist [12, 2.5].) Das gemeinsame Zentrum der Scherungen aus N ist dann notwendig s , da nach Voraussetzung $\dim \Gamma(s) \leq 2$ gilt, und da N in L_∞ abgesehen von diesem Zentrum lauter dreidimensionale Bahnen hat. K überlagert $K|L_\infty \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$ und ist daher isomorph zu $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ oder $\text{Spin}(3)$. Die $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -Ebenen mit großen Scherungsgruppen wurden in [13] klassifiziert; unter ihnen haben nur die Ebenen über den Divisionsalgebren $D_\alpha = D_{\alpha, \text{id}}$ (Punkt (iii(3)) der Behauptung) eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe. Der verbleibende Fall $K \cong \text{Spin}(3)$ war der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit; nach Satz 4.4 steuert er die Ebenen über den Divisionsalgebren $Q_{h, \mathbb{R}}$ (ii) und den übrigen Quasikörpern $Q_{h, \Phi(g, h)}$ (iii(1)) bei.

Im Fall (d), daß K ein zweidimensionaler Torus ist, ist eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe nach (2)–(5) nur zu erzielen, wenn $\Gamma_{s,w}$ eine Kompressionsuntergruppe enthält, der Kern der Ebene isomorph

zu $\mathbb{C}$ ist und gleichzeitig

$$\dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) = 4$$

gilt. Nach Wahl von s und w bedeutet letzteres, daß entweder

$$(d1) \quad \dim \Gamma(s) = 2 \quad \text{und} \quad \dim \Gamma_s(w) = 2$$

oder

$$(d2) \quad s \text{ ein Fixpunkt von } \Gamma \quad \text{und} \quad \dim \Gamma(w) = \dim \Gamma_s(w) = 4$$

ist.

In der Situation (d1) ist wegen der Existenz einer Kompressionsuntergruppe nach dem Sphärenlemma [6, 1.1] die zweidimensionale Bahn $\Gamma(s)$ homöomorph zur 2-Sphäre. Aufgrund der vorausgesetzten Minimalität der Dimension der Bahn $\Gamma_s(w)$ ist jede Bahn von Γ_s in $\Gamma(s)$ zweidimensional, also Γ_s transitiv auf $\Gamma(s) \setminus \{s\}$ und Γ zweifach transitiv auf $\Gamma(s) \cong \mathbb{S}^2$. Nach der Klassifikation von Mostow [16] aller transitiven Wirkungen von Liegruppen auf Flächen oder der Klassifikation von Tits [24, S. 222ff] der zweifach transitiven Wirkungen von Liegruppen wirkt Γ auf $\Gamma(s)$ wie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Der halbeinfache Kopf von Γ_o enthält also eine zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe; somit liegt eine sog. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -Ebene vor. Eine solche hat nach [12, §2, 2.5] aber höchstens 16-dimensionale Kollineationsgruppe.

In Situation (d2) ziehen wir heran, daß der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ sein muß, wie wir zu Beginn der Erörterung von Fall (d) festgestellt haben. Die Gruppe der zentrischen Streckungen vom Ursprung aus enthält also einen eindimensionalen Torus, der von dem 2-Torus $K \subseteq \mathrm{S}\Gamma_o$ zentralisiert wird und mit ihm eine dreidimensionale Torusgruppe $T \subseteq \Gamma_{s,w}$ erzeugt. T wirkt nun linear auf der affinen Geraden $S \cong \mathbb{R}^4$, und da eine Torusuntergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ höchstens zweidimensional ist, enthält T einen eindimensionalen Torus, der S punktweise festläßt. Die Involution ι in diesem Torus ist also eine Spiegelung mit Achse S und Zentrum w . Nun ist im Fall (d2) die Bahn $\Gamma_s(w)$ vierdimensional, so daß man ausgehend von ι viele Spiegelungen mit Achse S erzeugen kann, und da ein Produkt von zwei solchen eine Scherung mit Achse S ist, erhält man auch viele Scherungen; in [6, 2.3] ist dies näher ausgeführt mit dem Ergebnis, daß die Gruppe der Scherungen mit Achse S wie $\Gamma_s(w)$ vierdimensional ist. Sie ist dann transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$, d.h. die Ebene hat Lenz-Typ V. Nach der Klassifikation [5] aller achtdimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit großen Kollineationsgruppen erhält man in dieser

Situation die Ebenen über den Divisionsalgebren von Rees (siehe insbesondere [5, Satz 6.1]); diese sind in (iii(4)) notiert. $\square$

LITERATUR

1. André, J., 'Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Z.* **60** (1954), 156–186.
2. Buchanan, T. und Hähl, H., 'The Transposition of Locally Compact, Connected Translation Planes', *J. Geom.* **11** (1978), 84–92.
3. Hähl, H., 'Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 305–321.
4. Hähl, H., 'Vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 323–331.
5. Hähl, H., 'Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 331–361.
6. Hähl, H., 'Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse', *Result. Math.* **2** (1979), 62–87.
7. Hähl, H., 'Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen', *Math. Z.* **159** (1978), 259–294.
8. Hähl, H., 'Kriterien für lokalkompakte topologische Quasikörper', *Arch. Math. (Basel)* **38** (1982), 273–279.
9. Hähl, H., 'Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen', *Arch. Math. (Basel)* **34** (1980), 231–242.
10. Hähl, H., 'Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen', *Monats. Math.* **90** (1980), 207–218.
11. Hähl, H., 'Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen', *Abh. Math. Sem. Hamburg* **53** (1983), 84–102.
12. Hähl, H., 'Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit zu $SL_2(C)$ isomorphen Kollineationsgruppen', *J. reine angew. Math.* **330** (1982), 76–92.
13. Hähl, H., 'Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen', *Monats. Math.* **97** (1984), 23–45.
14. Kalscheuer, F., 'Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper', *Abh. Math. Sem. Hamburg* **13** (1940), 413–435.
15. Lex, W., 'Zur Theorie der Divisionsalgebren', *Mitt. Math. Sem. Giessen* **103** (1973).
16. Mostow, G. D., 'The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces', *Ann. Math.* **52** (1950), 606–636.
17. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
18. Porteous, I. R., *Topological Geometry*, Van Nostrand, London, 1972.
19. Rees, D., 'Nuclei of Non-associative Division Algebras', *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **46** (1950), 1–18.
20. Richardson, R. W. Jr, 'Groups Acting on the 4-Sphere', *Ill. J. Math.* **5** (1961), 474–485.
21. Salzmann, H., 'Topological Planes', *Advances Math.* **2** (1967), 1–60.
22. Salzmann, H., 'Compact 8-Dimensional Projective Planes with Large Collineation Groups', *Geom. Dedicata* **8** (1979), 139–161.
23. Salzmann, H., 'Kompakte, 8-dimensionale projektive Ebenen mit großer Kollineationsgruppe', *Math. Z.* **176** (1981), 345–357.
24. Tits, J., *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 1955.

25. Tits, J., 'Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments', *Comment. Math. Helvet.* **30** (1956), 234–240.

Anschrift des Verfassers:

Hermann Hähl,
Mathematisches Seminar der Universität Kiel,
Olshausenstr. 40,
D-2300 Kiel 1,
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 15. November 1985)