

Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D - 70569 Stuttgart

Bachelorarbeit

Variationsansätze zur Struktur-Textur-Zerlegung mit Regularisierern höherer Ordnung

Marco Alt

Studiengang:	Informatik
Prüfer/in:	Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn
Betreuer/in:	Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn
Beginn am:	1. November 2016
Beendet am:	3. Mai 2017
CR-Nummer:	G.1.3, G.1.4, I.2.10, I.4.3

ZUSAMMENFASSUNG

Eines der schwierigsten Probleme im Bereich der Bildverarbeitung ist die Zerlegung eines Bildes in seinen Struktur- und seinen Texturanteil. Die Struktur bezeichnet hierbei die im Bild enthaltenen Objekte und die Textur repräsentiert Elemente wie Muster und Beschriftungen, die auf diesen Objekten zu finden sind. Die Zerlegung kann durchgeführt werden, indem die Textur durch Glättung aus dem Bild entfernt wird, sodass nur der Strukturanteil zurückbleibt. Der Texturanteil kann dann rückwirkend als Differenz zwischen Strukturbild und Originalbild berechnet werden. Eine Möglichkeit das Bild zu glätten, ist die Anwendung eines Variationsansatzes. Es wird ein diskretes Energiefunktional minimiert, das aus einem Ähnlichkeitsterm und einem Glattheitsterm besteht. Die Glattheitsterme von diesen Verfahren beruhen oft auf Regularisierern 1. Ordnung, was bedeutet, dass sie nicht in der Lage sind, Farbverläufe in der Struktur bei der Glättung zu erhalten. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Variationsansatz auf Regularisierer 2. Ordnung erweitert. Diese Ansätze mit quadratischen Regularisierern glätten die Strukturkanten relativ stark. Sie werden deshalb beide zu subquadratischen Ansätzen erweitert, sodass die Kanten besser erhalten bleiben. In Experimenten werden alle Ansätze miteinander verglichen. Dabei wird neben der Kantenerhaltung insbesondere auf den Erhalt von Farbverläufen geachtet, wo die Regularisierer 2. Ordnung deutlich bessere Ergebnisse liefern.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
1.1	Vorgehen und Motivation	1
1.2	Verwandte Arbeiten	3
1.3	Gliederung	3
2	QUADRATISCHER VARIATIONSANSATZ	5
2.1	Regularisierer 1. Ordnung	5
2.1.1	Aufstellung der Energiefunktion	5
2.1.2	Minimierung der Energiefunktion	8
2.1.3	Aufstellung des linearen Gleichungssystems	10
2.1.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	11
2.2	Regularisierer 2. Ordnung	13
2.2.1	Aufstellung der Energiefunktion	13
2.2.2	Minimierung der Energiefunktion	16
2.2.3	Aufstellung des linearen Gleichungssystems	19
2.2.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	20
3	SUBQUADRATISCHER VARIATIONSANSATZ	23
3.1	Regularisierer 1. Ordnung	23
3.2	Regularisierer 2. Ordnung	26
3.3	Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme	27
4	EXPERIMENTE	33
4.1	Realbilder	33
4.2	Testbilder	36
4.2.1	Quadratischer Variationsansatz	36
4.2.2	Subquadratischer Variationsansatz	43
4.3	Evaluation	48
5	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	49
5.1	Ausblick	49
	LITERATUR	51
	ERKLÄRUNG	53

1. EINLEITUNG

Im Bereich der Bildverarbeitung spielt die Zerlegung von Bildern oder das Entfernen von bestimmten Elementen in einem Bild eine wichtige Rolle. Eines der schwierigsten Probleme in diesem Gebiet ist das Zerlegen von Bildern in ihre Struktur- und Texturanteile. Die Definition von den Begriffen Struktur und Textur kann dabei variieren beziehungsweise schwierig zu unterscheiden sein, abhängig davon, was abgebildet ist und welche Größenordnung das Abgebildete hat. So kann zum Beispiel eine Textur selbst den wichtigsten Teil eines Bildes ausmachen, oder es können sehr viele kleine Objekte als Details im Bild zu sehen sein, die anderswo als Strukturelemente gelten würden. Im Allgemeinen bezeichnet die Struktur den homogenen Farbanteil der im Bild enthaltenen Objekte, also ihre Form und Farbe und gegebenenfalls die Reflexion des Lichts. Die Textur dagegen ist die lokale Variation der Farbwerte innerhalb dieser Objekte. Diese werden zum Beispiel durch Beschriftungen oder periodische Muster, die über das Objekt verlaufen, verursacht. Die Abbildung 1.1 zeigt das Testbild „Barbara“, in dem mehrere solcher Texturen innerhalb von Strukturen zu sehen sind. Beispielsweise sind Hose und Kopftuch hier Objekte, und damit Strukturelemente. Auf diesen Objekten verlaufen Linien als Textur. Genauso verhält es sich mit der Tischdecke und dem karierten Muster darauf.

Eine Zerlegung von Bildern in diese Struktur- und Texturanteile hat zum Beispiel Vorteile beim maschinellen Sehen im Bereich der Objekterkennung. Durch die Entfernung der Textur aus einem Bild bleibt nur die Struktur zurück, sodass dann die verschiedenen Objekte einfacher unterschieden und erkannt werden können.

1.1 VORGEHEN UND MOTIVATION

Eine Möglichkeit, die Struktur-Textur-Zerlegung durchzuführen, ist die Entfernung der Textur aus dem Originalbild. Das Ergebnis davon ist das Strukturbild. Den zugehörigen Texturanteil kann man dann erzeugen, indem rückwirkend die Differenz zwischen diesem Bild und dem Originalbild berechnet wird. Im resultierenden Texturbild werden die Farbwerte angepasst, damit sowohl positive als auch negative Differenzen sichtbar sind. In Abbildung 1.2 ist das am Beispiel eines einfachen Testbildes mit zwei ineinanderliegenden Quadraten als Struktur und darüberliegenden Linien als Textur zu sehen. Die beiden unteren Bilder zeigen, wie eine solche Zerlegung dabei idealerweise aussehen würde.

Ein möglicher Weg zur Entfernung der Textur ist die Glättung des Bildes mit dem Ziel, die Textur dadurch herauszufiltern. Das kann im Bereich der Variationsrechnung durch ein Optimierungsproblem erreicht werden. Dabei wird ein Energiefunktional



Abbildung 1.1: Ein Beispiel für ein Bild mit vielen feinen Textur-elementen auf der Struktur.

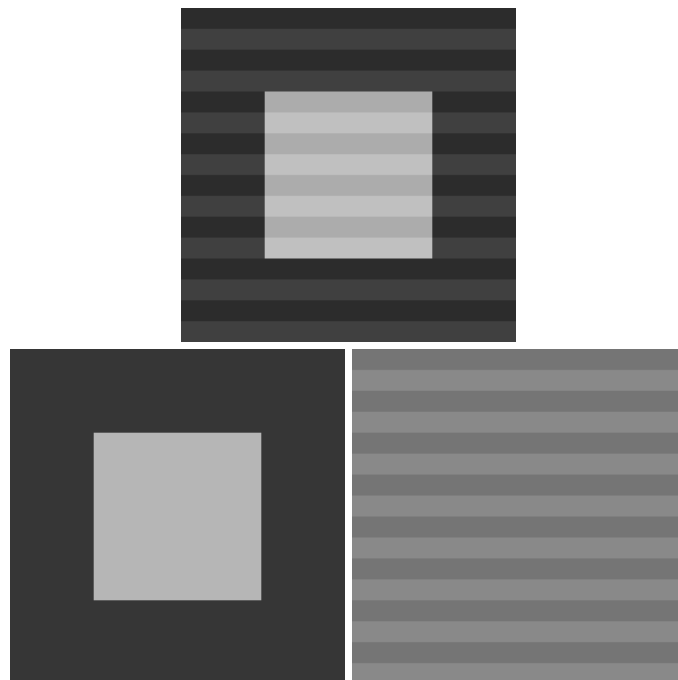


Abbildung 1.2: Zerlegung eines Bildes (oben) in Struktur-bild (links) und Textur-bild (rechts).

aufgestellt, das aus zwei Termen besteht: einem Datenterm, der dafür sorgen soll, dass das Strukturbild dem Original möglichst ähnlich ist, und einem Glattheitsterm, der die Homogenität der Struktur sicherstellen soll. Das Strukturbild wird ermittelt, indem dieses Energiefunktional minimiert wird.

Die Glattheitsterme solcher Verfahren beruhen oft auf Regularisierern 1. Ordnung. Diese gehen von stückweise konstanten Strukturelementen aus. Falls Farbverläufe im Bild vorhanden sind, sind sie nicht in der Lage diese zu erhalten. Solche Farbverläufe können zu den Strukturelementen selbst gehören oder sie sind beispielsweise in Form von Schattierungsinformation enthalten, wie auch in Abbildung 1.1 zu sehen ist. Ziel dieser Arbeit ist es daher, diese Variationsansätze auf Regularisierer höherer Ordnung zu erweitern. Diese sollten im Vergleich zu Regularisierern 1. Ordnung deutlich bessere Ergebnisse liefern, da sie auch nicht stückweise konstante Strukturinformationen erhalten können.

1.2 VERWANDTE ARBEITEN

Erste Variationsansätze für die Struktur-Textur-Zerlegung in Form eines kontinuierlichen Optimierungsproblems wurden von Aujol et al. [3] vorgeschlagen. Es wurde untersucht, wie verschiedene Arten von Texturen mit verschiedenen Glattheitstermen behandelt werden können, wobei der Datenterm immer auf totaler Variation (TV) [11] beruht. Die Texturen wurden dabei in oszillierende Muster mit $TV-L^2$ und $TV-G$ [9], strukturelle Texturen mit $TV-L^1$ [2, 10], und periodische Texturen mit $TV-Gabor$ [4, 6, 7] eingeteilt. Die Extraktion von Strukturen aus texturierten Oberflächen mit relativer totaler Variation wurde in [15] untersucht. Eine Alternative zu den variationalen Methoden für die Glättung bilden beispielsweise der bilaterale Filter [13] und der darauf aufbauende Rolling-Guidance-Filter [17]. Struktur-Textur-Zerlegung mithilfe dieser beiden Filter wurde in [1] untersucht.

Die Ansätze in den folgenden Kapiteln bauen vor allem auf den Variationsansätzen mit Regularisierern 1. Ordnung aus [1] auf.

1.3 GLIEDERUNG

In Kapitel 2 wird zunächst der quadratische Variationsansatz vorgestellt, angefangen mit den Regularisierern 1. Ordnung. Es wird darauf eingegangen, wie das Energiefunktional aufgebaut ist und wie es für die Minimierung abgeleitet werden kann. Anschließend wird gezeigt, wie aus dem resultierenden linearen Gleichungssystem die Lösung ermittelt wird. Dieses Vorgehen wird dann auf Regularisierer 2. Ordnung erweitert. Da diese Verfahren das Bild glätten und dabei nur schlecht die Strukturkanten erhalten können, wird in Kapitel 3 gezeigt, wie dem mithilfe von subquadratischen Variationsansätzen entgegengewirkt werden kann. Hier wird ebenfalls wieder auf die Regularisierer beider Ordnungen eingegangen und gezeigt, wie das entstehende nicht-

lineare Gleichungssystem gelöst werden kann. In Kapitel 4 werden alle vier Verfahren visuell und qualitativ evaluiert und miteinander verglichen. Schließlich folgt in Kapitel 5 eine Zusammenfassung und ein kleiner Ausblick auf mögliche zukünftige Arbeiten.

2. QUADRATISCHER VARIATIONSANSATZ

Die Zerlegung eines Bildes in seine Struktur- und Texturanteile kann im Bereich der Variationsrechnung durch die Aufstellung eines geeigneten Energiefunktional erreicht werden. Dies ist ein globaler Ansatz. Ähnlich wie bei Verfahren der Bildaufbereitung, wo durch Glättung des Bildes das Rauschen entfernt werden soll, wird hier die im Allgemeinen feinere Textur entfernt, während die gröberen Strukturelemente erhalten bleiben sollen. Das Energiefunktional ist in diesem Fall diskret und hat generell die folgende Form:

$$E = \text{Ähnlichkeit} + \text{Glattheit} . \quad (2.1)$$

Mithilfe von diesem Energiefunktional E soll ein optimales Strukturbild aus einem gegebenen Eingangsbild ermittelt werden. Eine entscheidende Rolle spielt hierbei der im Glattheitsterm verwendete Regularisierer und der zugehörige Regularisierungsparameter, der die Stärke der Glättung bestimmt. Bei diesem Ansatz sollen Ableitungen als Regularisierer dienen. Im Folgenden wird zunächst das Vorgehen anhand der 1. Ableitung erläutert und anschließend auf die 2. Ableitung erweitert.

2.1 REGULARISIERER 1. ORDNUNG

Der allgemeine Ablauf von diesem und den später folgenden Ansätzen ist immer gleich. Es wird ein Energiefunktional mit den entsprechenden Regularisierern aufgestellt und anschließend minimiert. Das Ergebnis dieser Minimierung wird durch das Lösen des resultierenden Gleichungssystems ermittelt.

2.1.1 *Aufstellung der Energiefunktion*

Der erste Schritt ist das Aufstellen einer geeigneten diskreten Energiefunktion, die die gewünschten Ableitungen 1. Ordnung als Regularisierer beinhaltet. Dafür wird vorerst von diesem kontinuierlichen Funktional E ausgegangen:

$$E(u) = \int_{\Omega} \underbrace{(u - f)^2}_{\text{Ähnlichkeit}} + \alpha \underbrace{|\nabla u|^2}_{\text{Glattheit}} \, dx dy . \quad (2.2)$$

Das Bild f ist das bekannte Originalbild und u ist das gesuchte Strukturbild, das durch die Filterung ermittelt wird. Der erste der beiden Summanden ist der Datenterm, der für die Ähnlichkeit zuständig ist. Der zweite Summand ist der Glattheitsterm mit der Regularisierung und dem Regularisierungsparameter α , der bestimmt, wie stark das

Bild geglättet werden soll. Als Regularisierer wird die 1. Ableitung eingesetzt. Da Texturen in Form von lokalen Variationen im Farbwert auftreten, sind die Ableitungswerte an diesen Stellen höher, wodurch sie stärker geglättet werden. Das sorgt dafür, dass das Strukturbild stückweise konstant wird.

Zur einfacheren Berechnung soll hier nun das Funktional 2.2 diskretisiert werden. Für den Datenterm ist dies sehr einfach. Für den Glattheitsterm werden Approximationen der Ableitung 1. Ordnung verwendet. Bei einem eindimensionalen Signal $u = (u_1, \dots, u_n)$ kann diese Ableitung in einem Punkt u_i beispielsweise durch die Vorwärtsdifferenz $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ oder auch die Rückwärtsdifferenz $\frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ approximiert werden, wobei h die Gitterweite bezeichnet. In dieser Arbeit wird eine Mittelung dieser beiden Differenzen benutzt. Bei einem zweidimensionalen Bild $u_{i,j}$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ ist diese Approximation jeweils für die partiellen Ableitungen in x - und y -Richtung durchzuführen, was dem in E enthaltenen Gradienten $|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2$ entspricht. Für die beiden Richtungen bezeichnet dabei h_x die Gitterweite in x -Richtung und h_y die Gitterweite in y -Richtung. Sei vereinfacht angenommen, dass beide Gitterweiten gleich sind mit $h = h_x = h_y$, dann führt das zur folgenden diskreten Energiefunktion:

$$E(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} \left(\frac{u_{i,j} - u_{k,l}}{h} \right)^2 \right). \quad (2.3)$$

Die Menge $\mathcal{N}(i,j)$ bezeichnet dabei die Menge aller direkten Nachbarpunkte des Bildpunktes $u_{i,j}$.

Für das optimale u muss diese gesamte Summe möglichst klein sein. Der Datenterm sorgt dann dafür, dass das Ergebnisbild u möglichst nah an f liegt, während der Glattheitsterm gleichzeitig zu einem trotzdem gut geglätteten u führt. Das Ermitteln des gefilterten Bildes u ist also ein Minimierungsproblem, das heißt man sucht ein u , das die Funktion $E(u)$ zu einem gegebenen Eingabebild f minimiert. Da $E(u)$ konvex ist, existiert ein globales Minimum als einziger Extremwert. Das Setzen der Ableitung $\frac{\delta}{\delta u} E = 0$ führt zu einem linearen Gleichungssystem, dessen Lösung der zugehörige Minimierer u ist.

Zuvor muss allerdings noch festgelegt werden, wie die Bildränder behandelt werden. Im Glattheitsterm werden Nachbarn von Punkten verwendet, die an den Rändern und in den Ecken nicht existieren. Eine Möglichkeit dies zu umgehen ist die Belegung dieser fehlenden Punkte mit Werten, beispielsweise mit dem gleichen Wert wie der betrachtete Randpunkt. Das bietet sich im Fall der ersten Ableitung an, da immer nur die direkten Nachbarn auf jeder Seite beziehungsweise ober- und unterhalb des Punktes verwendet werden. Im Hinblick auf die später noch folgende Erweiterung auf Ableitungen 2. Ordnung, bei denen dies vor allem in den Ecken nicht mehr so einfach ist, wird in dieser Arbeit jedoch anders vorgegangen.

Der Glattheitsterm besteht aus mehreren Summanden. Im obigen Fall sind das vier Stück, zwei für die gemittelte Ableitung in x -Richtung und zwei für die y -Richtung. Explizit ausgeschrieben lautet das Energiefunktional wie folgt:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h_x} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_y} \right)^2 \right) \right). \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Je nachdem welcher Punkt $u_{i,j}$ gerade betrachtet wird, können manche Summanden problemlos berechnet werden, während andere eventuell nicht vorhandene Bildpunkte beinhalten können. Zum Beispiel hat bei der Berechnung der Ableitung in $u_{1,2}$ der erste Summand ein $u_{0,2}$, das über den Rand hinaus gehen würde. In diesem Fall muss der erste Summand aus der Berechnung entfernt werden. Die restlichen Summanden machen keine Probleme und können verwendet werden. Für die Ecke $u_{1,1}$ fallen sogar der erste und der dritte Summand gleichermaßen weg. Insgesamt gibt es neun verschiedene Fälle, die auftreten können. Die Ecken und Ränder bilden jeweils vier davon und alle restlichen Punkte innerhalb des Bildes sind der neunte Fall. Um diese individuellen Umstände zu berücksichtigen, bietet es sich an, pro Summand eine Abfrage zu setzen, die angibt, ob er abhängig von der Position des betrachteten Bildpunktes in die Summe einfließt oder entfernt wird. Das kann mit einer abschnittsweise definierten Hilfsfunktion χ erreicht werden:

$$\chi_{[a,b][x,y]}(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in [a, b] \text{ und } j \in [x, y] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Die Erweiterung von Gleichung 2.4 mit dieser Funktion χ ergibt schließlich:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\chi_{[2,N][1,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right. \right. \\
+ \chi_{[1,N-1][1,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h_x} \right)^2 \\
+ \chi_{[1,N][2,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \\
\left. \left. + \chi_{[1,N][1,M-1]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_y} \right)^2 \right) \right). \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Mit dieser so angepassten Energiefunktion sind alle neun Fälle in einer einzigen Formel abgedeckt.

2.1.2 Minimierung der Energiefunktion

Der nächste Schritt zur Minimierung ist nun $E(\mathbf{u})$ nach \mathbf{u} abzuleiten, sodass ein lineares Gleichungssystem mit $\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} E = 0$ gebildet werden kann. Die diskrete Funktion wird dazu allgemein nach dem Punkt $u_{k,l}$ abgeleitet. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass der gerade betrachtete Punkt auch Teil der Berechnung von anderen Punkten sein kann. So kommt zum Beispiel der Punkt $u_{1,1}$ nicht nur in der Approximation seiner eigenen Ableitung vor, sondern auch im ersten Summanden der Berechnung der Ableitung in $u_{2,1}$. Außerdem lässt sich allgemein sagen, dass die Ableitung des Glattheitsterms nach $u_{k,l}$ immer die gleiche Form hat: eine Summe von diesem Punkt und seinen Nachbarn mit jeweils einem gewissen Gewicht als Faktor. Um eine allgemein gültige Ableitung zu formulieren, wird zuerst jedes Auftreten eines Bildpunktes im Glattheitsterm einzeln angeschaut. Das sind acht Stück im obigen Funktional 2.6. Jeder davon wird nacheinander als $u_{k,l}$ bezeichnet und der Term, in dem er steht, dann nach $u_{k,l}$ abgeleitet. Dabei ist es wichtig, dass alle anderen Indizes und die Grenzen der Funktion χ entsprechend mit angepasst werden. Die jeweiligen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad i = k, j = l \quad \chi_{[2,N][1,M]}(k,l) \quad \left(\frac{u_{k,l} - u_{k-1,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{2} \quad i = k+1, j = l \quad \chi_{[1,N-1][1,M]}(k,l) \quad \left(-\frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{3} \quad i = k, j = l \quad \chi_{[1,N-1][1,M]}(k,l) \quad \left(\frac{u_{k,l} - u_{k+1,l}}{2h_x^2} \right) \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad i = k - 1, j = l & \quad \chi_{[2,N][1,M]}(k, l) \quad \left(-\frac{u_{k-1,l} - u_{k,l}}{2h_x^2} \right) \\
(5) \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N][2,M]}(k, l) \quad \left(\frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{2h_y^2} \right) \\
(6) \quad i = k, j = l + 1 & \quad \chi_{[1,N][1,M-1]}(k, l) \quad \left(-\frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{2h_y^2} \right) \\
(7) \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N][1,M-1]}(k, l) \quad \left(\frac{u_{k,l} - u_{k,l+1}}{2h_y^2} \right) \\
(8) \quad i = k, j = l - 1 & \quad \chi_{[1,N][2,M]}(k, l) \quad \left(-\frac{u_{k,l-1} - u_{k,l}}{2h_y^2} \right)
\end{aligned}$$

Damit sind nun alle möglichen Fälle abgedeckt, in denen ein gewisser Punkt von u bei Ableitungen von sich selbst und anderen Punkten vorkommen kann. Wenn man die Koeffizienten aller Punkte mit denselben Indizes jeweils zusammenfasst, dann erhält man ihre Gewichte für die allgemeine Ableitung. Die Abbildung 2.1 zeigt das Ergebnis. Es sind die Gewichte für die 3×3 Nachbarschaft eines Punktes $u_{k,l}$ zu sehen. In diesem Fall sind also nur die vier direkten Nachbarn und der Punkt selbst relevant. Für jeden Punkt gibt es einen oder mehr Einträge zusammen mit den Grenzen, innerhalb derer der Eintrag mit zum Gewicht des betrachteten Punktes gehört. Außerdem sind jeweils die Nummern der Terme aus der Liste 2.7 zu sehen, aus denen die Einträge gebildet wurden. Zur Ermittlung des Gewichtes eines Punktes werden alle Einträge im zugehörigen Feld aufaddiert, bei denen der betrachtete Punkt innerhalb der Grenzen liegt, die Anderen werden übersprungen (beziehungsweise sind 0). Zum Beispiel lautet die Ableitung nach dem Eckpunkt $u_{1,1}$ dann folgendermaßen (mit $h_x = h_y = 1$):

$$\frac{\delta E}{\delta u_{1,1}} = u_{1,1} - f_{1,1} + \alpha(-u_{1,2} + 2u_{1,1} - u_{2,1}). \quad (2.8)$$

Die Ableitung des Datenterms kann normal durchgeführt werden, während für den Glattheitsterm einfach die Gewichte aus der Maske eingesetzt werden. Wenn der Punkt nicht am Rand liegt, gibt es entsprechend mehr Summanden, hier am Beispiel von $u_{3,3}$:

$$\frac{\delta E}{\delta u_{3,3}} = u_{3,3} - f_{3,3} + \alpha(-u_{3,2} - u_{2,3} + 4u_{3,3} - u_{4,3} - u_{3,4}). \quad (2.9)$$

Mithilfe dieser Maske lässt sich schließlich wie schon zuvor bei der Erstellung der Energiefunktion nun eine allgemein gültige Formel für die Ableitung aufstellen, die alle Fälle abdeckt:

$$\frac{\delta E}{\delta u_{i,j}} = u_{i,j} - f_{i,j} + \alpha \left(w_{i,j,i,j} \cdot u_{i,j} + \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} w_{i,j,k,l} \cdot u_{k,l} \right). \quad (2.10)$$

	$k-1$	k	$k+1$
$l-1$	0	$\textcircled{5}+\textcircled{8}$ $[1, N][2, M] - \frac{1}{h_y^2}$	0
l	$\textcircled{1}+\textcircled{4}$ $[2, N][1, M] - \frac{1}{h_x^2}$	$\textcircled{1}+\textcircled{4}$ $[2, N][1, M] + \frac{1}{h_x^2}$ $\textcircled{2}+\textcircled{3}$ $[1, N-1][1, M] + \frac{1}{h_x^2}$ $\textcircled{5}+\textcircled{8}$ $[1, N][2, M] + \frac{1}{h_y^2}$ $\textcircled{6}+\textcircled{7}$ $[1, N][1, M-1] + \frac{1}{h_y^2}$	$\textcircled{2}+\textcircled{3}$ $[1, N-1][1, M] - \frac{1}{h_x^2}$
$l+1$	0	$\textcircled{6}+\textcircled{7}$ $[1, N][1, M-1] - \frac{1}{h_y^2}$	0

Abbildung 2.1: Maske für die Gewichte eines Punktes und seiner direkten Nachbarn beim Berechnen der Ableitung von $E(u)$ für Regularisierer 1. Ordnung beim quadratischen Ansatz.

Die Werte $w_{a,b,x,y}$ sind das Gewicht eines Punktes $u_{x,y}$ in Relation zum zentralen Punkt $u_{a,b}$ entsprechend der Maske.

2.1.3 Aufstellung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem (LGS), mit dem das Minimierungsproblem gelöst werden kann, ist aufgebaut aus den Ableitungen $\frac{\delta E}{\delta u_{i,j}} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$. Entsprechend umgeformt ergibt sich ein LGS, das aus einer Reihe von Gleichungen der folgenden Form besteht:

$$u_{i,j} + \alpha \left(w_{i,j,i,j} \cdot u_{i,j} + \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} w_{i,j,k,l} \cdot u_{k,l} \right) = f_{i,j}. \quad (2.11)$$

Dies kann in Matrixschreibweise umgeformt werden. Es wird zur besseren Übersicht wieder angenommen, dass $h_x = h_y = 1$ gilt. Die beiden Werte treten immer nur als Nenner in den Gewichten auf, ändern also nichts an Form und Aufbau der Matrix. Man erhält ein LGS der Form $Au = f$:

$$\left(I + \alpha \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_2 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B_2 & -I \\ & & & -I & B_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Die angegebenen Blöcke innerhalb der Matrix A haben die Größe $N \times N$. Die Matrix selbst besteht aus $M \times M$ Blöcken dieser Größe. Sie ist pentadiagonal, denn es gibt in jeder Zeile Einträge zu einem Punkt und seinen bis zu vier Nachbarn. Allgemein bestehen die verschiedenen Blöcke immer aus den Gewichten, die entsprechend der Maske zu einem bestimmten Punkt von u gehören. In diesem Fall sind das:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Block $-I$ ist die negative Einheitsmatrix und enthält die Gewichte, die noch nicht in den Blöcken B_1 und B_2 abgedeckt sind. Diese sind im Falle der 1. Ordnung hier alle -1 .

2.1.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

Um das LGS zu lösen können, iterative Verfahren angewendet werden, die die Lösung näherungsweise bestimmen. Es wird zunächst vom Jacobi-Verfahren (auch Gesamtschrittverfahren) [8, 12] ausgegangen. Dieses Verfahren ist ein Splitting-Verfahren. Ein LGS der Form $Au = f$ wie in Gleichung 2.12 wird gelöst, indem A aufgeteilt und die Gleichung umgeformt wird. Sei $A = D - N$ mit D als Diagonalmatrix, die nur die Diagonale von A enthält. N ist entsprechend der Rest. Damit erhält man die Gleichung $(D - N)u = f$. Aufgelöst nach u ergibt sich dann $u = D^{-1}(f + Nu)$. Daraus lässt sich die Iterationsvorschrift für das Jacobi-Verfahren formulieren:

$$u^{(n+1)} = D^{-1}(f + Nu^{(n)}). \quad (2.13)$$

Um u zu initialisieren wird $u^{(0)} = f$ gesetzt. Diese schrittweise Annäherung wird für jeden Bildpunkt von u durchgeführt. Die Werte konvergieren dabei gegen die tatsächliche Lösung des LGS. Das Verfahren konvergiert, wenn der Spektralradius der Matrix kleiner als 1 ist. Das ist hier der Fall, da die Matrix sogar strikt diagonal dominant ist. Die Vorschrift 2.13 für die einzelnen Punkte lautet schließlich:

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{f_{i,j} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n)}}{1 + \alpha \cdot w_{i,j,i,j}}. \quad (2.14)$$

Das Jacobi-Verfahren verwendet für jeden Iterationsschritt immer nur die Werte des vorherigen Schrittes. Das ermöglicht eine parallele Berechnung aller $\mathbf{u}_{i,j}$ der gleichen Iteration. Eine andere Beschleunigung des Verfahrens ist möglich, indem für die einzelnen Schritte nicht nur die alten Werte benutzt werden, sondern die bereits berechneten Punktwerte für die folgenden Berechnungen im selben Schritt verwendet werden. Wenn im Bild von links oben nach rechts unten durchgegangen wird, dann besitzen der obere und der linke Nachbar des betrachteten Punktes schon die Werte der neuen Iteration. Durch das Einsetzen dieser neuen Werte statt den alten konvergiert das Verfahren schneller, man muss aber die Möglichkeit zur Parallelisierung dafür aufgeben. Man erhält damit das Gauß-Seidel-Verfahren [8, 12]:

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{f_{i,j} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}^{(n+1)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n+1)} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}^{(n)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n)}}{1 + \alpha \cdot w_{i,j,i,j}}. \quad (2.15)$$

Die Menge der Nachbarn ist hier aufgeteilt. Mit $\mathcal{N}^{(n+1)}(i,j)$ ist die Menge Nachbarn gemeint, die schon einen neuen Wert in Iteration $(n+1)$ erhalten haben und $\mathcal{N}^{(n)}(i,j)$ enthält entsprechend die Nachbarn, bei denen noch der Wert der Iteration davor gilt. Dieses Verfahren konvergiert, wenn die Matrix symmetrisch und positiv definit ist. In diesem Fall ist die Matrix symmetrisch und die positive Definitheit ist ebenfalls wieder dadurch gegeben, dass sie strikt diagonaldominant ist.

Eine weitere Beschleunigung kann man mit dem SOR-Verfahren (Successive Over-Relaxation, Überrelaxationsverfahren) [12, 16] erreichen. Dieses Verfahren funktioniert ähnlich wie das Gauß-Seidel-Verfahren. Es hat zusätzlich noch einen Überrelaxationsparameter $\omega \in (0, 2)$. Der Parameter wird als Gewicht eingesetzt, zum einen für den Term des neuen Iterationsschritts, wie er auch im Gauß-Seidel-Verfahren auftritt, und zum anderen für den Wert des Punktes im Schritt davor. Diese Erweiterung ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{(n+1)} &= (1 - \omega) \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n)} \\ &+ \omega \cdot \frac{f_{i,j} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}^{(n+1)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n+1)} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}^{(n)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot \mathbf{u}_{k,l}^{(n)}}{1 + \alpha \cdot w_{i,j,i,j}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für entsprechend passend gewählte Werte für ω konvergiert das SOR-Verfahren am schnellsten von den drei vorgestellten Verfahren. Eine genauere Untersuchung dazu befindet sich in [1].

Die Abbildung 2.2 zeigt die Ergebnisse am Testbild „Barbara“ für drei verschiedene α -Werte. Es ist jeweils der Strukturanteil links und der Texturanteil rechts zu sehen. Das Texturbild ist die Differenz des Strukturbilds und des Originalbilds. Für diese Differenz wurde der Nullpunkt auf 127,5 gesetzt, sodass positive und negative Differenzen gleichermaßen sichtbar sind. Man kann schön sehen, wie sich bereits für $\alpha = 1$ eine Textur abzeichnet. Allerdings ist sie trotzdem noch deutlich im Strukturbild zu erkennen. Eine stärkere Glättung mit $\alpha = 25$ lässt die Texturen aus dem Strukturanteil verschwinden. Stattdessen sind sie viel stärker im Texturbild vertreten, wo nun auch deutlicher die geglätteten Strukturkanten zu erkennen sind. Die noch stärkere Glättung mit $\alpha = 100$ sorgt dafür, dass das Strukturbild noch unkenntlicher wird, während im Texturbild schon deutlich mehr als nur die Textur zu erkennen ist, was beides unerwünscht ist.

2.2 REGULARISIERER 2. ORDNUNG

Die bisher vorgestellten Regularisierer basieren auf der ersten Ableitung. Diese gehen von stückweise konstanten Strukturverläufen aus und sind deshalb nicht in der Lage, Farbverläufe zu erhalten. Solche Farbverläufe existieren beispielsweise durch Schattierung. Um Verläufe wie diese Schattierungsinformationen in der Struktur bei der Struktur-Textur-Zerlegung zu erhalten, bietet es sich deswegen an, anstatt der bisherigen Regularisierer nun Regularisierer 2. Ordnung einzusetzen. Das allgemeine Vorgehen bleibt dabei gleich wie zuvor, es wird lediglich im Glattheitsterm die zweite Ableitung eingesetzt.

2.2.1 Aufstellung der Energiefunktion

Es wird wieder von einem kontinuierlichen Energiefunktional ausgegangen:

$$E(u) = \int_{\Omega} \underbrace{(u - f)^2}_{\text{Ähnlichkeit}} + \alpha \underbrace{\|\mathcal{H}_u\|_F^2}_{\text{Glattheit}} \, dx dy . \quad (2.17)$$

Der Datenterm für die Ähnlichkeit ist unverändert. Im Glattheitsterm befindet sich nun die 2. Ableitung in Form der Hesse-Matrix von u anstatt des Gradienten. Dieses Energiefunktional wird für die weiteren Berechnungen nun wieder diskretisiert. Welche Diskretisierungen nötig sind, kann man besser sehen, wenn man den Glattheitsterm ausführlich ausschreibt:

$$E(u) = \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2) \, dx dy . \quad (2.18)$$



(a) $\alpha = 1$, Struktur

(b) $\alpha = 1$, Textur



(c) $\alpha = 25$, Struktur

(d) $\alpha = 25$, Textur



(e) $\alpha = 100$, Struktur

(f) $\alpha = 100$, Textur

Abbildung 2.2: Struktur-Textur-Zerlegung mit quadratischem Variationsansatz und Regularisierern 1. Ordnung für verschiedene α , jeweils links das Strukturbild und rechts das dazugehörige Texturbild (SOR-Verfahren mit $\omega = 1,95$).

Für diese Ableitungen im Regularisierer werden wieder diskrete Approximationen eingesetzt. Die zweiten Ableitungen für die x -Richtung und die y -Richtung lauten jeweils:

$$\begin{aligned} u_{xx} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, \\ u_{yy} &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die noch fehlenden Terme sind die Ableitungen von u zuerst nach x und dann nach y , und umgekehrt. Diese beiden Werte sind gleich und können beide durch folgende Approximation diskretisiert werden:

$$u_{xy} = u_{yx} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y}. \quad (2.20)$$

Durch Einsetzen dieser Diskretisierungen in das Energiefunktional erhält man:

$$\begin{aligned} E(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M &\left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \alpha \left(\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \right)^2 \right. \right. \\ &+ 2 \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \right)^2 \\ &\left. \left. + \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wie schon bei den Regularisierern 1. Ordnung können die Approximationen im Glattheitsterm nicht auf alle Punkte allgemein angewendet werden, da wieder einige der verwendeten Nachbarpunkte über die Ränder hinaus gehen können. Deshalb wird erneut dieselbe Hilfsfunktion χ (2.5) eingesetzt, um festzulegen welche der drei Summanden in die Rechnung mit einbezogen werden können:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((\mathbf{u}_{i,j} - f_{i,j})^2 \right. \\
& + \alpha \left(\chi_{[2,N-1][1,M]}(i,j) \left(\frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}}{h_x^2} \right)^2 \right. \\
& + \chi_{[2,N-1][2,M-1]}(i,j) \cdot 2 \left(\frac{\mathbf{u}_{i+1,j+1} - \mathbf{u}_{i+1,j-1} - \mathbf{u}_{i-1,j+1} + \mathbf{u}_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \right)^2 \\
& \left. \left. + \chi_{[1,N][2,M-1]}(i,j) \left(\frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i,j-1}}{h_y^2} \right)^2 \right) \right). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Diese Begrenzungen sind bei der 2. Ableitung etwas stärker, da hier nicht nur ein einziger Nachbar pro Summand auftritt. Das führt insbesondere auch dazu, dass bei der Ableitung von E nach u dann nicht mehr nur die vier direkten Nachbarn des betrachteten Punktes in der Berechnung enthalten sind, sondern auch noch weitere Punkte in einer 5×5 Umgebung.

2.2.2 Minimierung der Energiefunktion

Zunächst wird wieder nach jedem Punkt $u_{k,l}$ abgeleitet, sodass am Ende allgemein ein LGS mit $\frac{\delta}{\delta u} E = 0$ aufgestellt werden kann. Wie zuvor wird dazu jedes einzelne Auftreten eines Punktes von u im Glattheitsterm als $u_{k,l}$ betrachtet und der entsprechende Summand danach abgeleitet. Die anderen Indizes und Grenzen von χ werden entsprechend angepasst. Die zugehörigen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad i = k-1, j = l & \quad \chi_{[3,N][1,M]}(k,l) \left(\frac{\mathbf{u}_{k,l} - 2\mathbf{u}_{k-1,l} + \mathbf{u}_{k-2,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{2} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[2,N-1][1,M]}(k,l) \left(\frac{-2\mathbf{u}_{k+1,l} + 4\mathbf{u}_{k,l} - 2\mathbf{u}_{k-1,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{3} \quad i = k+1, j = l & \quad \chi_{[1,N-2][1,M]}(k,l) \left(\frac{\mathbf{u}_{k+2,l} - 2\mathbf{u}_{k+1,l} + \mathbf{u}_{k,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{4} \quad i = k-1, j = l-1 & \quad \chi_{[3,N][3,M]}(k,l) \left(\frac{\mathbf{u}_{k,l} - \mathbf{u}_{k,l-2} - \mathbf{u}_{k-2,l} + \mathbf{u}_{k-2,l-2}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{5} \quad i = k-1, j = l+1 & \quad \chi_{[3,N][1,M-2]}(k,l) \left(\frac{-\mathbf{u}_{k,l+2} + \mathbf{u}_{k,l} + \mathbf{u}_{k-2,l+2} - \mathbf{u}_{k-2,l}}{8h_x^2 h_y^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{6} \quad i = k + 1, j = l - 1 & \quad \chi_{[1,N-2][3,M]}(k, l) \left(\frac{-u_{k+2,l} + u_{k+2,l-2} + u_{k,l} - u_{k,l-2}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{7} \quad i = k + 1, j = l + 1 & \quad \chi_{[1,N-2][1,M-2]}(k, l) \left(\frac{u_{k+2,l+2} - u_{k+2,l} - u_{k,l+2} + u_{k,l}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{8} \quad i = k, j = l - 1 & \quad \chi_{[1,N][3,M]}(k, l) \left(\frac{u_{k,l} - 2u_{k,l-1} + u_{k,l-2}}{h_y^4} \right) \\
\textcircled{9} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N][2,M-1]}(k, l) \left(\frac{-2u_{k,l+1} + 4u_{k,l} - 2u_{k,l-1}}{h_y^4} \right) \\
\textcircled{10} \quad i = k, j = l + 1 & \quad \chi_{[1,N][1,M-2]}(k, l) \left(\frac{u_{k,l+2} - 2u_{k,l+1} + u_{k,l}}{h_y^4} \right)
\end{aligned}$$

Anhand dieser Liste von Ableitungen kann man nun sehen, welche Punkte in der Nachbarschaft von $u_{k,l}$ in den Ableitungen auftreten können. Es gibt 12 Punkte, die neben dem zentralen Punkt für dessen Ableitung relevant sein können. Sie befinden sich in einer 5×5 Umgebung, was dazu führt, dass bei der Berechnung der Ableitungen nicht mehr nur neun Fälle unterschieden werden müssen, sondern sogar 25. Pro Ecke und Rand gibt es jeweils zwei Fälle, das heißt die Eck- und Randpunkte selbst, sowie ihre Nachbarn, wobei für die Ecken hier der diagonale Nachbar gemeint ist. Weitere Spezialfälle bilden die direkten Nachbarn der Eckpunkte. Sie gehören einerseits zu einem Rand und sind andererseits als Nachbar des Eckpunktes auch Nachbar eines anderen Randes. Pro Ecke gibt es zwei solcher Fälle. Die restlichen Punkte innerhalb des Bildes bilden den 25. Fall. Wie bei den Regularisierern 1. Ordnung können die Koeffizienten der Punkte aus der Ableitungsliste 2.23 zusammengefasst und in einer Maske als Gewichte ausgedrückt werden. Diese Maske ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Es sind wieder die Gewichte zu sehen, die in die Ableitung eingesetzt werden müssen, wenn der betreffende Punkt innerhalb der angegebenen Grenzen liegt. Bei jedem Eintrag sind die Grenzen von χ und die Nummer des zugehörigen Terms aus der Liste 2.23 angegeben. Die Ableitung nach dem Eckpunkt $u_{1,1}$ mit $h_x = h_y = 1$ ist damit zum Beispiel:

$$\frac{\delta E}{\delta u_{1,1}} = u_{1,1} - f_{1,1} + \alpha \left(\frac{17}{8}u_{1,1} - 2u_{2,1} + \frac{7}{8}u_{3,1} - 2u_{1,2} + \frac{7}{8}u_{1,3} + \frac{1}{8}u_{3,3} \right). \quad (2.24)$$

Ein neuer Fall im Vergleich zu den Regularisierern 1. Ordnung sind hier Punkte, die Nachbarn von Rand- oder Eckpunkten sind, wie beispielsweise $u_{2,2}$:

	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
$l-2$	④ $[3, N][3, M]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$	0	④ $[3, N][3, M]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑧ $[1, N][3, M]$ $+\frac{1}{h_y^4}$	0	⑥ $[1, N-2][3, M]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$
$l-1$	0	0	⑧ $[1, N][3, M]$ $-\frac{2}{h_y^4}$ ⑨ $[1, N][2, M-1]$ $-\frac{2}{h_y^4}$	0	0
l	① $[3, N][1, M]$ $+\frac{1}{h_x^4}$ ④ $[3, N][3, M]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑤ $[3, N][1, M-2]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$	① $[3, N][1, M]$ $-\frac{2}{h_x^4}$ ② $[2, N-1][1, M]$ $-\frac{2}{h_x^4}$	① $[3, N][1, M]$ $+\frac{1}{h_x^4}$ ② $[2, N-1][1, M]$ $+\frac{4}{h_x^4}$ ③ $[1, N-2][1, M]$ $+\frac{1}{h_x^4}$ ④ $[3, N][3, M]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑤ $[3, N][1, M-2]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑧ $[1, N][3, M]$ $+\frac{1}{h_y^4}$ ⑨ $[1, N][2, M-1]$ $+\frac{4}{h_y^4}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $+\frac{1}{h_y^4}$	② $[2, N-1][1, M]$ $-\frac{2}{h_x^4}$ ③ $[1, N-2][1, M]$ $-\frac{2}{h_x^4}$	③ $[1, N-2][1, M]$ $+\frac{1}{h_x^4}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$
$l+1$	0	0	⑨ $[1, N][2, M-1]$ $-\frac{2}{h_y^4}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $-\frac{2}{h_y^4}$	0	0
$l+2$	⑤ $[3, N][1, M-2]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$	0	⑤ $[3, N][1, M-2]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $-\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $+\frac{1}{h_y^4}$	0	⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $+\frac{1}{8h_x^2 h_y^2}$

Abbildung 2.3: Maske für die Gewichte eines Punktes und seiner Nachbarn beim Berechnen der Ableitung von $E(u)$ für Regularisierer 2. Ordnung beim quadratischen Ansatz.

mehr kleiner als 1, was zur Folge hat, dass das Jacobi-Verfahren divergieren kann. Die Matrix ist jedoch immer noch symmetrisch und positiv definit. Deshalb konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren trotzdem und damit auch das SOR-Verfahren. Für die schnellste Konvergenz wird dementsprechend wieder das SOR-Verfahren für die Lösung des LGS angewendet. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= (1 - \omega) \cdot u_{k,l}^{(n)} \\ &+ \omega \cdot \frac{f_{i,j} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}_5^{(n+1)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot u_{k,l}^{(n+1)} + \alpha \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}_5^{(n)}(i,j)} -w_{i,j,k,l} \cdot u_{k,l}^{(n)}}{1 + \alpha \cdot w_{i,j,i,j}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Nachbarmenge $\mathcal{N}_5^{(n+1)}(i,j)$ enthält diejenigen Nachbarn, die in der momentanen Iteration schon ihre neuen Werte haben. Im Fall dieser 5×5 Umgebung sind das alle Punkte über und auf gleicher Höhe links vom Punkt $u_{i,j}$. Die Menge $\mathcal{N}_5^{(n)}(i,j)$ enthält entsprechend die restlichen Punkte.

Die Abbildung 2.4 zeigt Ergebnisse dieses Vorgehens am selben Bild wie bei den Regularisierern 1. Ordnung für die gleichen α -Werte. Man kann sehen, dass das Bild ein wenig schwächer geglättet wird als bei den entsprechenden α -Werten bei der 1. Ordnung. Außerdem ist zu erkennen, dass Farbverläufe besser erhalten wurden. Das wird insbesondere daran ersichtlich, dass in den Texturbildern weniger Farbverläufe zu erkennen sind, was bedeutet, dass sie nicht aus dem Strukturbild entfernt wurden. In diesem Fall ist das vor allem im Gesicht und an den Armen zu sehen. Für größere Werte für α werden die Strukturkanten jedoch immer noch stark geglättet. Bei Bildern mit gröberen Texturen als in diesem Beispiel sind derartige α -Werte aber nötig, was ebenfalls wieder zu schlechteren Strukturbildern führt.



(a) $\alpha = 1$, Struktur

(b) $\alpha = 1$, Textur



(c) $\alpha = 25$, Struktur

(d) $\alpha = 25$, Textur



(e) $\alpha = 100$, Struktur

(f) $\alpha = 100$, Textur

Abbildung 2.4: Struktur-Textur-Zerlegung mit quadratischem Variationsansatz und Regularisierern 2. Ordnung für verschiedene α , jeweils links das Strukturbild und rechts das dazugehörige Texturbild (SOR-Verfahren mit $\omega = 1,7$).

3. SUBQUADRATISCHER VARIATIONSANSATZ

In den beiden bisher vorgestellten Ansätzen wurden die Ableitungen in den Glattheitstermen immer quadriert. Das hat zur Folge, dass größere Werte viel stärker bestraft werden als kleine. Das kommt vor, wenn die Ableitung in einem gewissen Punkt sehr hoch ist. Das ist in Bildern vor allem an Kanten der Fall. Sie werden nicht erhalten, da sie durch die hohen Ableitungswerte zu „teuer“ sind, das heißt der Glattheitsterm glättet sie entsprechend stark, um die geforderte Glattheit zu erreichen. Insbesondere an den Strukturkanten kann das in diesen Verfahren zu schlechten Ergebnissen führen, da diese für die Struktur-Textur-Zerlegung von großem Interesse sind. Für gute Zerlegungsergebnisse ist es wünschenswert, diese Strukturkanten möglichst gut zu erhalten.

Um das zu erreichen wird im Glattheitsterm eine subquadratische Funktion ψ eingesetzt, die dafür sorgen soll, dass die Glättung bei großen Ableitungswerten abgeschwächt wird, während die restlichen Punkte trotzdem weiterhin gut geglättet werden. Das wird erreicht, indem mithilfe von ψ die „Kosten“ von Kanten bei der Glättung gesenkt werden, wodurch sie besser erhalten bleiben. Die Funktion ψ ist für die Regularisierer beider Ordnungen gleich und lautet:

$$\psi(s^2) = 2\lambda^2 \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}. \quad (3.1)$$

Der Parameter λ kann variiert werden, wodurch bestimmt wird, wie stark die Glättung abgeschwächt werden soll.

Im Folgenden wird diese Funktion zuerst in die Regularisierer eingesetzt und erläutert welche Auswirkungen das auf die Ableitungen der Energiefunktionen hat. Anschließend geht es um das Lösen der entstehenden Gleichungssysteme, die durch das Hinzufügen der subquadratischen Funktion nicht mehr linear sind wie zuvor.

3.1 REGULARISIERER 1. ORDNUNG

Die subquadratische Funktion ψ wird in das Energiefunktional eingefügt, indem sie im Glattheitsterm um die Ableitungsapproximationen gelegt wird. Das heißt, dass der Regularisierungsparameter α als Faktor vor ψ bleibt, während der Rest des Terms als Parameter von ψ eingesetzt wird. Das schließt die Hilfsfunktion χ für die jeweiligen verschiedenen Summanden mit ein. Für das Energiefunktional mit Regularisierern 1. Ordnung (2.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M & \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 + \frac{\alpha}{2} \psi \left(\chi_{[2,N][1,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right. \right. \\
& + \chi_{[1,N-1][1,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h_x} \right)^2 \\
& + \chi_{[1,N][2,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \\
& \left. \left. + \chi_{[1,N][1,M-1]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_y} \right)^2 \right) \right). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Daraus folgen Änderungen für die Ableitung von E nach u und entsprechend auch Änderungen an den Werten in der Gewichtsmaske eines Punktes. Die Gewichte werden wieder ermittelt, indem die einzelnen Punkte von u nacheinander betrachtet werden und der Summand nach ihnen abgeleitet wird. Diese Ableitungen schließen nun aber auch ψ' als äußere Ableitung mit ein:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[2,N][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{u_{k,l} - u_{k-1,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{2} \quad i = k+1, j = l & \quad \chi_{[1,N-1][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k+1,l} \left(-\frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{3} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N-1][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{u_{k,l} - u_{k+1,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{4} \quad i = k-1, j = l & \quad \chi_{[2,N][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k-1,l} \left(-\frac{u_{k-1,l} - u_{k,l}}{2h_x^2} \right) \\
\textcircled{5} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N][2,M]}(k,l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{2h_y^2} \right) \\
\textcircled{6} \quad i = k, j = l+1 & \quad \chi_{[1,N][1,M-1]}(k,l) \quad \psi'_{k,l+1} \left(-\frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{2h_y^2} \right) \\
\textcircled{7} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[1,N][1,M-1]}(k,l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{u_{k,l} - u_{k,l+1}}{2h_y^2} \right) \\
\textcircled{8} \quad i = k, j = l-1 & \quad \chi_{[1,N][2,M]}(k,l) \quad \psi'_{k,l-1} \left(-\frac{u_{k,l-1} - u_{k,l}}{2h_y^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Im Vergleich zur Liste 2.7 beim quadratischen Ansatz kommt hier effektiv nur jeweils die äußere Ableitung als Faktor hinzu, während die innere Ableitung immer genau dem alten Term entspricht. Die Werte $\psi'_{i,j}$ bezeichnen den Wert der Ableitung von ψ ,

	k - 1	k	k + 1
l - 1	0	$\textcircled{5} + \textcircled{8}$ $[1, N][2, M] - \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k,l-1}}{2h_y^2}$	0
l	$\textcircled{1} + \textcircled{4}$ $[2, N][1, M] - \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k-1,l}}{2h_x^2}$	$\textcircled{1} + \textcircled{4}$ $[2, N][1, M] + \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k-1,l}}{2h_x^2}$ $\textcircled{2} + \textcircled{3}$ $[1, N - 1][1, M] + \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k+1,l}}{2h_x^2}$ $\textcircled{5} + \textcircled{8}$ $[1, N][2, M] + \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k,l-1}}{2h_y^2}$ $\textcircled{6} + \textcircled{7}$ $[1, N][1, M - 1] + \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k,l+1}}{2h_y^2}$	$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ $[1, N - 1][1, M] - \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k+1,l}}{2h_x^2}$
l + 1	0	$\textcircled{6} + \textcircled{7}$ $[1, N][1, M - 1] - \frac{\psi'_{k,l} + \psi'_{k,l+1}}{2h_y^2}$	0

Abbildung 3.1: Maske für die Gewichte eines Punktes und seiner direkten Nachbarn beim Berechnen der Ableitung von $E(u)$ für Regularisierer 1. Ordnung beim subquadratischen Ansatz.

wenn ψ die Ableitungsapproximation im Punkt $u_{i,j}$ als Parameter hat. Beispielsweise gilt für den Punkt $u_{3,3}$:

$$\psi'_{3,3} = \psi' \left(\left(\frac{u_{3,3} - u_{2,3}}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{u_{3,3} - u_{4,3}}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{u_{3,3} - u_{3,2}}{h_y} \right)^2 + \left(\frac{u_{3,3} - u_{3,4}}{h_y} \right)^2 \right). \tag{3.4}$$

Dabei ist die Ableitung von ψ :

$$\psi'(s^2) = \frac{\delta\psi(s^2)}{\delta s^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}}. \tag{3.5}$$

Damit kann man gut sehen, wie die Glättung bei großen Ableitungswerten abgeschwächt wird: Für große Argumente in ψ wird ψ' entsprechend klein und damit auch die neuen Faktoren $\psi'_{i,j}$ bei den Ableitungen beziehungsweise den Gewichten in der Maske. Die damit angepasste neue Maske ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Mithilfe der Maske kann dann wie zuvor das Gleichungssystem aus den Ableitungen von $E(u)$ gebildet werden.

3.2 REGULARISIERER 2. ORDNUNG

Für die Regularisierer 2. Ordnung ist das Vorgehen identisch. Die Funktion wird nach α in den Glattheitsterm eingesetzt und erhält die Ableitungsapproximation einschließlich χ als Parameter. Man erhält das neue Energiefunktional:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left((u_{i,j} - f_{i,j})^2 \right. \\
& + \alpha \psi \left(\chi_{[2,N-1][1,M]}(i,j) \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \right)^2 \right. \\
& + \chi_{[2,N-1][2,M-1]}(i,j) 2 \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \right)^2 \\
& \left. \left. + \chi_{[1,N][2,M-1]}(i,j) \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \right)^2 \right) \right). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Auch dabei ändern sich die einzelnen Ableitungen aus der Liste 2.23 nur insofern, dass ein neuer Faktor $\psi'_{i,j}$ hinzukommt:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad i = k-1, j = l & \quad \chi_{[3,N][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k-1,l} \left(\frac{u_{k,l} - 2u_{k-1,l} + u_{k-2,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{2} \quad i = k, j = l & \quad \chi_{[2,N-1][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{-2u_{k+1,l} + 4u_{k,l} - 2u_{k-1,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{3} \quad i = k+1, j = l & \quad \chi_{[1,N-2][1,M]}(k,l) \quad \psi'_{k+1,l} \left(\frac{u_{k+2,l} - 2u_{k+1,l} + u_{k,l}}{h_x^4} \right) \\
\textcircled{4} \quad i = k-1, j = l-1 & \quad \chi_{[3,N][3,M]}(k,l) \quad \psi'_{k-1,l-1} \left(\frac{u_{k,l} - u_{k,l-2} - u_{k-2,l} + u_{k-2,l-2}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{5} \quad i = k-1, j = l+1 & \quad \chi_{[3,N][1,M-2]}(k,l) \quad \psi'_{k-1,l+1} \left(\frac{-u_{k,l+2} + u_{k,l} + u_{k-2,l+2} - u_{k-2,l}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{6} \quad i = k+1, j = l-1 & \quad \chi_{[1,N-2][3,M]}(k,l) \quad \psi'_{k+1,l-1} \left(\frac{-u_{k+2,l} + u_{k+2,l-2} + u_{k,l} - u_{k,l-2}}{8h_x^2 h_y^2} \right) \\
\textcircled{7} \quad i = k+1, j = l+1 & \quad \chi_{[1,N-2][1,M-2]}(k,l) \quad \psi'_{k+1,l+1} \left(\frac{u_{k+2,l+2} - u_{k+2,l} - u_{k,l+2} + u_{k,l}}{8h_x^2 h_y^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad i = k, j = l - 1 \quad & \chi_{[1,N][3,M]}(k, l) \quad \psi'_{k,l-1} \left(\frac{u_{k,l} - 2u_{k,l-1} + u_{k,l-2}}{h_y^4} \right) \\
 \textcircled{9} \quad i = k, j = l \quad & \chi_{[1,N][2,M-1]}(k, l) \quad \psi'_{k,l} \left(\frac{-2u_{k,l+1} + 4u_{k,l} - 2u_{k,l-1}}{h_y^4} \right) \quad (3.7) \\
 \textcircled{10} \quad i = k, j = l + 1 \quad & \chi_{[1,N][1,M-2]}(k, l) \quad \psi'_{k,l+1} \left(\frac{u_{k,l+2} - 2u_{k,l+1} + u_{k,l}}{h_y^4} \right)
 \end{aligned}$$

Für die Faktoren $\psi'_{i,j}$ gelten dieselben Regeln wie bei den Regularisierern 1. Ordnung mit der Ableitung von ψ (3.5) und den entsprechenden Parametern. Mit den Werten dieser Liste wird wieder die ursprüngliche Gewichtsmaske (2.3) angepasst. Die neue Maske ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

3.3 LÖSUNG DER NICHTLINEAREN GLEICHUNGSSYSTEME

Die Gleichungssysteme, die aus den vorgestellten subquadratischen Ansätzen für die Regularisierer beider Ordnungen entstehen, können nicht wie bisher mit den einfachen Splitting-Verfahren gelöst werden. Sie funktionieren nur bei linearen Gleichungssystemen. Das ist durch das Hinzufügen der Funktion ψ nicht mehr der Fall. Um die Systeme trotzdem auf eine ähnliche Weise zu lösen, wird ein Lagged-Nonlinearity-Verfahren eingesetzt [5, 14]. Dabei werden für die nichtlinearen ψ' -Faktoren Werte berechnet, die über mehrere Iterationen hinweg konstant bleiben und dadurch ermöglichen, dass wie zuvor das SOR-Verfahren für diese Iterationen angewendet werden kann. Danach werden neue Werte für ψ' aus den neuen Punktwerten von u berechnet und für die folgenden SOR-Iterationen verwendet. Dieses Vorgehen kann beliebig oft wiederholt werden, bis die Werte konvergieren. Dabei kommen nun die in den vorherigen Abschnitten eingeführten Werte $\psi'_{i,j}$ zum Einsatz. Sie werden wie in den Gleichungen 3.4 und 3.5 gezeigt berechnet und werden dann entsprechend der angepassten neuen Gewichtsmasken in den SOR-Iterationen eingesetzt. Das nichtlineare Gleichungssystem wird also als Folge von mehreren linearen Gleichungssystemen gelöst.

Der Algorithmus für dieses Vorgehen sieht wie folgt aus:

Algorithmus 1 Subquadratischer Variationsansatz

- 1: **procedure** LAGGED-NONLINEARITY($f, u, \psi, \lambda, n_{\text{out}}, n_{\text{SOR}}$)
 - 2: **for** ($k = 0, k < n_{\text{out}}, k++$) **do**
 - 3: calculate_all_ $\psi'_{i,j}(u, \psi, \lambda)$
 - 4: SOR($f, u, \psi'_{i,j}, n_{\text{SOR}}$)
-

	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
$l-2$	④ $[3, N][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$	0	④ $[3, N][3, M]$ $-\frac{\psi'_{k-1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $-\frac{\psi'_{k+1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑧ $[1, N][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k, l-1}}{h_y^4}$	0	⑥ $[1, N-2][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$
$l-1$	0	0	⑧ $[1, N][3, M]$ $-\frac{2\psi'_{k, l-1}}{h_y^4}$ ⑨ $[1, N][2, M-1]$ $-\frac{2\psi'_{k, l}}{h_y^4}$	0	0
l	① $[3, N][1, M]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l}}{h_x^4}$ ④ $[3, N][3, M]$ $-\frac{\psi'_{k-1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑤ $[3, N][1, M-2]$ $-\frac{\psi'_{k-1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$	① $[3, N][1, M]$ $-\frac{2\psi'_{k-1, l}}{h_x^4}$ ② $[2, N-1][1, M]$ $-\frac{2\psi'_{k, l}}{h_x^4}$	① $[3, N][1, M]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l}}{h_x^4}$ ② $[2, N-1][1, M]$ $+\frac{4\psi'_{k, l}}{h_x^4}$ ③ $[1, N-2][1, M]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l}}{h_x^4}$ ④ $[3, N][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑤ $[3, N][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑧ $[1, N][3, M]$ $+\frac{\psi'_{k, l-1}}{h_y^4}$ ⑨ $[1, N][2, M-1]$ $+\frac{4\psi'_{k, l}}{h_y^4}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k, l+1}}{h_y^4}$	② $[2, N-1][1, M]$ $-\frac{2\psi'_{k, l}}{h_x^4}$ ③ $[1, N-2][1, M]$ $-\frac{2\psi'_{k+1, l}}{h_x^4}$	③ $[1, N-2][1, M]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l}}{h_x^4}$ ⑥ $[1, N-2][3, M]$ $-\frac{\psi'_{k+1, l-1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $-\frac{\psi'_{k+1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$
$l+1$	0	0	⑨ $[1, N][2, M-1]$ $-\frac{2\psi'_{k, l}}{h_y^4}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $-\frac{2\psi'_{k, l+1}}{h_y^4}$	0	0
$l+2$	⑤ $[3, N][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k-1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$	0	⑤ $[3, N][1, M-2]$ $-\frac{\psi'_{k-1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $-\frac{\psi'_{k+1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$ ⑩ $[1, N][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k, l+1}}{h_y^4}$	0	⑦ $[1, N-2][1, M-2]$ $+\frac{\psi'_{k+1, l+1}}{8h_x^2 h_y^2}$

Abbildung 3.2: Maske für die Gewichte eines Punktes und seiner Nachbarn beim Berechnen der Ableitung von $E(u)$ für Regularisierer 2. Ordnung beim subquadratischen Ansatz.

Der Parameter n_{out} bestimmt die Anzahl der äußeren Iterationen, das heißt wie oft die Werte $\psi'_{i,j}$ neu berechnet werden. Der Parameter n_{SOR} bestimmt, wie viele SOR-Iterationen pro Berechnung durchgeführt werden. Es gibt insgesamt also $n_{\text{out}} \cdot n_{\text{SOR}}$ SOR-Iterationen. Diese beiden Werte können variiert werden, je nachdem wie viele Iterationen nötig sind, damit die Werte konvergieren. Die restlichen Parameter sind das Originalbild f , das gefilterte Strukturbild u , und die Funktion ψ sowie deren eigener Parameter λ .

Die Abbildung 3.3 zeigt die Ergebnisse für Regularisierer 1. Ordnung. Für alle Bilder gilt $\lambda = 1$. Durch das Hinzufügen der Funktion ψ sind nun größere Werte für α nötig, um das Bild ähnlich wie zuvor zu glätten, da sonst wie bei $\alpha = 25$ in Bild 3.3a noch sehr viel Textur vorhanden ist. Bei $\alpha = 100$ ist das Bild entsprechend gut geglättet und die Textur entfernt, während die Strukturkanten sehr gut erhalten wurden. Wie in Bild 3.3e zu sehen ist, bleiben die Kanten sogar bei noch viel stärkerer Glättung gut erhalten.

In Abbildung 3.4 sind die Regularisierer 2. Ordnung zu sehen. Für diese Bilder wurde $\lambda = 0,1$ gesetzt, sodass die Regularisierung an den Kanten viel stärker abgeschwächt wird, da diese Regularisierer im Gegensatz zur 1. Ordnung schlechter Kanten erhalten können. Entsprechend ist ein relativ großes α nötig, damit die Glättung an anderen Stellen trotzdem die notwendige Stärke hat. Bild 3.4a zeigt, dass bei $\alpha = 100$ noch kaum etwas passiert. Für $\alpha = 400$ (3.4c) wurde die Textur gut entfernt. Das Bild 3.4e zeigt wieder, dass die Kanten sogar bei vergleichsweise großen α noch ähnlich gut erhalten bleiben. Wie schon beim quadratischen Ansatz kann man sowohl in den Struktur- als auch in den Texturbildern deutlich sehen, dass Farbverläufe hier besser beibehalten wurden.



(a) $\alpha = 25$, Struktur



(b) $\alpha = 25$, Textur



(c) $\alpha = 100$, Struktur



(d) $\alpha = 100$, Textur



(e) $\alpha = 200$, Struktur

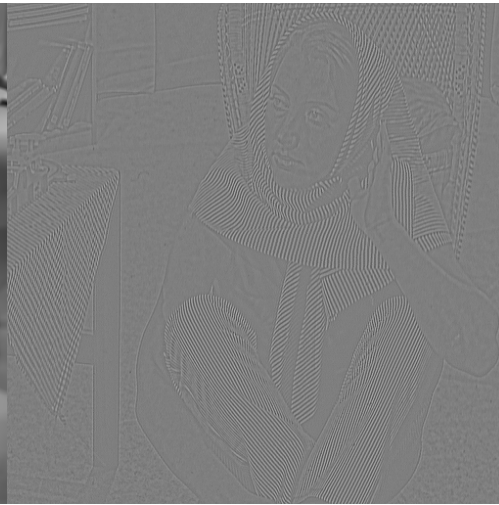


(f) $\alpha = 200$, Textur

Abbildung 3.3: Struktur-Textur-Zerlegung mit subquadratischem Variationsansatz und Regularisierern 1. Ordnung für verschiedene α , jeweils links das Strukturbild und rechts das dazugehörige Texturbild ($\omega = 1,9$ und $\lambda = 1$).



(a) $\alpha = 100$, Struktur



(b) $\alpha = 100$, Textur



(c) $\alpha = 400$, Struktur



(d) $\alpha = 400$, Textur



(e) $\alpha = 800$, Struktur



(f) $\alpha = 800$, Textur

Abbildung 3.4: Struktur-Textur-Zerlegung mit subquadratischem Variationsansatz und Regularisierern 2. Ordnung für verschiedene α , jeweils links das Strukturbild und rechts das dazugehörige Texturbild ($\omega = 1,9$ und $\lambda = 0,1$).

4. EXPERIMENTE

In den beiden vorigen Kapiteln wurden vier Variationsansätze zur Struktur-Textur-Zerlegung vorgestellt. Diese sollen nun anhand von Experimenten visuell und qualitativ miteinander verglichen werden. Dazu werden zunächst noch einmal die Realweltbilder aus diesen Kapiteln angeschaut und gegenübergestellt. Anschließend werden die Verfahren mithilfe von geeigneten Testbildern auf ihre Stärken und Schwächen untersucht.

4.1 REALBILDER

Für die verschiedenen Ansätze wurden bereits Bilder mit den Struktur- und Texturanteilen eines Realweltbildes gezeigt. Die jeweils besten Strukturbilder davon sind in Abbildung 4.1 zu sehen. Die Anzahl der Iterationen des SOR-Verfahrens, die für die Konvergenz nötig sind, hängt vom Verfahren und der Größe der Werte für α ab. Deshalb wurden für diese Bilder und die Testbilder im folgenden Abschnitt immer so viele Iterationen durchgeführt, bis sich die Werte von u nur noch sehr geringfügig geändert haben. Es ist deutlich zu sehen, dass die quadratischen Ansätze den subquadratischen unterlegen sind, was die Glättung der Kanten beziehungsweise deren Erhalt angeht. Vor allem bei den Regularisierern 1. Ordnung werden die Strukturkanten stark geglättet. Die Regularisierer 2. Ordnung glätten die Kanten zwar weniger, das Bild ist aber trotzdem noch unschärfer als bei den Bildern des subquadratischen Ansatzes. Bei diesen ist es umgekehrt: Die Regularisierer 1. Ordnung sind besser im Erhalten der Strukturkanten als die 2. Ordnung. Stattdessen werden bei den Regularisierern 2. Ordnung beim subquadratischen Ansatz jedoch die Farbverläufe deutlich besser beibehalten.

Abbildung 4.2 zeigt die zugehörigen Texturbilder. Anhand von diesen kann man ebenfalls die oben genannten Merkmale der verschiedenen Ansätze sehen und vergleichen. Die Stärke der Glättung von Strukturkanten ist an den hellen und dunklen Differenzen, die entlang der Kanten zu sehen sind, zu erkennen. Sie sind vor allem in den Bildern der quadratischen Ansätze zu sehen. Im subquadratischen Ansatz 2. Ordnung sind sie zwar schwächer als beim quadratischen Ansatz, aber trotzdem noch deutlicher zu erkennen als bei der 1. Ordnung. Außerdem sind bei beiden Bildern der Regularisierer 1. Ordnung die Farbverläufe in den Texturbildern zu erkennen, was bedeutet, dass sie aus den Strukturanteilen entfernt wurden. Da die Verläufe bei den Regularisierern 2. Ordnung gut in den Strukturanteilen erhalten wurden, sind sie in den Texturbildern im Vergleich dazu kaum zu sehen.



(a) Quadratischer Ansatz, 1. Ordnung



(b) Quadratischer Ansatz, 2. Ordnung



(c) Subquadratischer Ansatz, 1. Ordnung



(d) Subquadratischer Ansatz, 2. Ordnung

Abbildung 4.1: Strukturbilder der verschiedenen Variationsansätze.



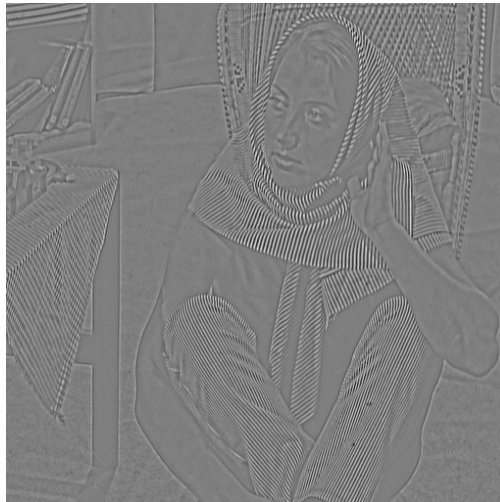
(a) Quadratischer Ansatz, 1. Ordnung



(b) Quadratischer Ansatz, 2. Ordnung



(c) Subquadratischer Ansatz, 1. Ordnung



(d) Subquadratischer Ansatz, 2. Ordnung

Abbildung 4.2: Texturbilder der verschiedenen Variationsansätze.

4.2 TESTBILDER

Zur qualitativen Bewertung der Ansätze werden nun Struktur-Textur-Zerlegungen bei speziell dafür erstellten Testbildern durchgeführt. Diese Bilder sind in Abbildung 4.3 zu sehen. Das Bild 4.3a zeigt die zugrunde liegende Struktur: Zwei verschieden große ineinander liegende Quadrate mit stückweise konstantem Farbwert. Im Bild 4.3b wurde darüber eine karierte Textur gelegt, indem an den entsprechenden Stellen entweder 10 vom Farbwert abgezogen oder 10 auf den Farbwert addiert wurde. Für die Bilder 4.3c und 4.3d gilt dasselbe, wobei statt der stückweise konstanten Struktur hier ein sinusförmiger Farbverlauf auf die Struktur gelegt wurde. In den folgenden Experimenten werden Struktur- und Texturbilder für die beiden rechten Bilder erzeugt. Das ideale Ergebnis für die Struktur ist dabei jeweils das Bild links davon. Es bietet sich also an, diese Strukturen als Grundwahrheiten zu nehmen, mit denen die jeweiligen Resultate der Zerlegungen verglichen werden können. Das Maß für die Abweichung soll dabei der mittlere quadratische Fehler MSE (Mean Squared Error) sein. Der MSE-Wert wird wie folgt für zwei Bilder $g_{i,j}$ und $h_{i,j}$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ berechnet:

$$\text{MSE}(g, h) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (g_{i,j} - h_{i,j})^2. \quad (4.1)$$

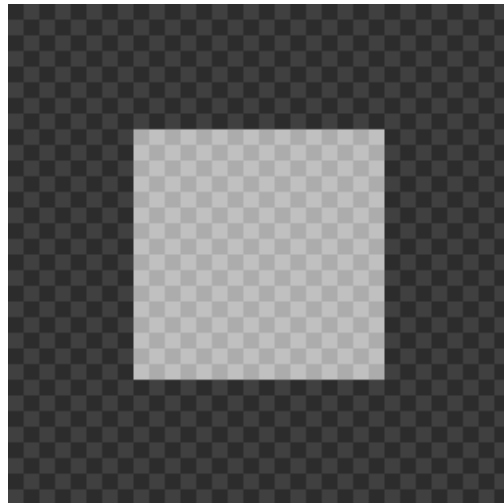
Je kleiner der MSE, desto geringer ist die Abweichung der beiden Bilder. Jeder einzelne Punkt der texturierten Testbilder weicht um den Betrag 10 von der jeweiligen Struktur ab. Der MSE zwischen den Ausgangsbildern und den Grundwahrheiten ist damit 100. Gute Ergebnisse senken den MSE also möglichst weit unter diesen Wert. Die Hauptfaktoren, die den MSE-Wert beeinflussen, sind dabei die bei den Realweltbildern angesprochenen Problemstellungen, wie gut die Strukturkanten des inneren Quadrates erhalten bleiben und wie gut der Farbverlauf im zweiten Testbild beibehalten wird.

4.2.1 Quadratischer Variationsansatz

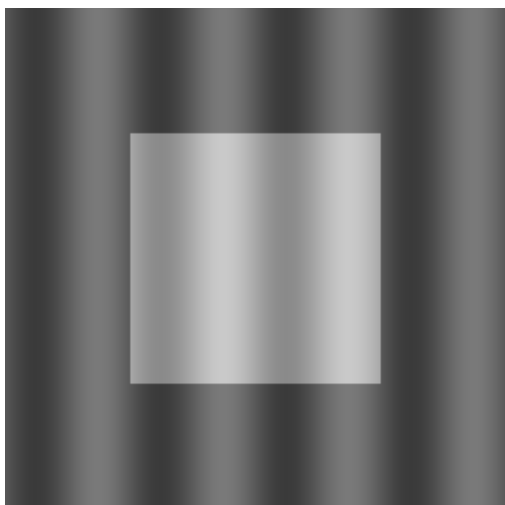
Die Abbildung 4.4 zeigt den quadratischen Ansatz für die Regularisierer 1. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur. Schon bei kleinen Werten für α steigt hier der MSE auf über 100 an und wird für größere α ebenfalls immer höher. Das liegt daran, dass die Entfernung der Textur nicht die großen Abweichungen, die durch die starke Glättung der Strukturkanten erzeugt werden, ausgleichen kann. Diese großen Abweichungen in Kantennähe sorgen dafür, dass der MSE sehr groß wird. Sie sind wieder in den entsprechenden Texturbildern deutlich entlang der Strukturkanten zu sehen. In Abbildung 4.5 sind der gleiche Ansatz und Regularisierer bei der Struktur mit Farbverlauf zu sehen. Hier beginnt der MSE etwas niedriger, der starke Anstieg bei



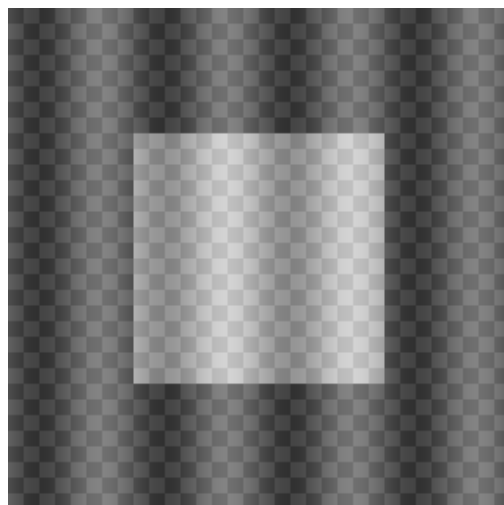
(a) stückweise konstante Struktur



(b) mit Textur

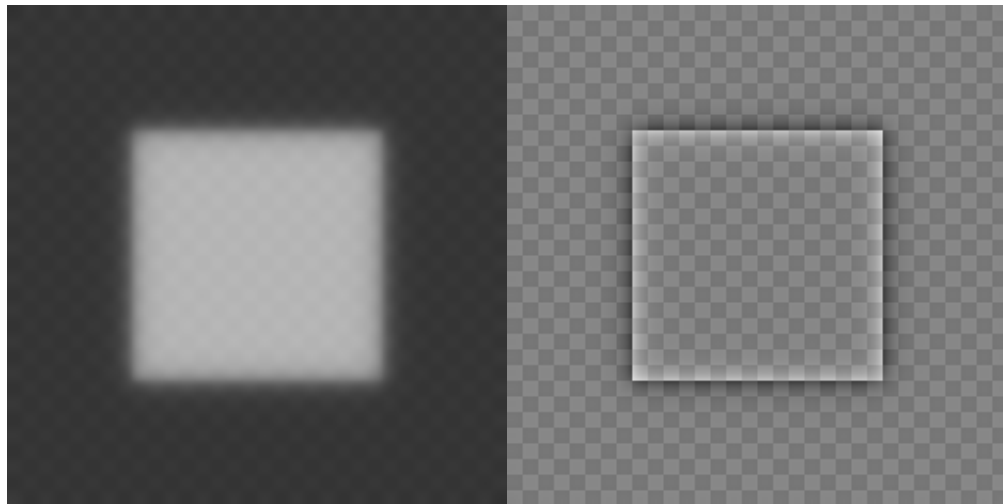


(c) Struktur mit Farbverlauf



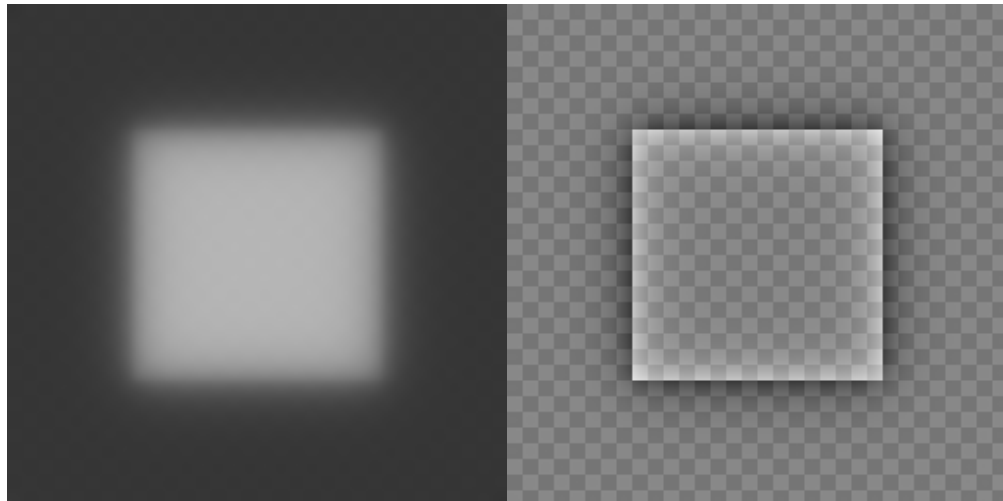
(d) mit Textur

Abbildung 4.3: Testbilder.



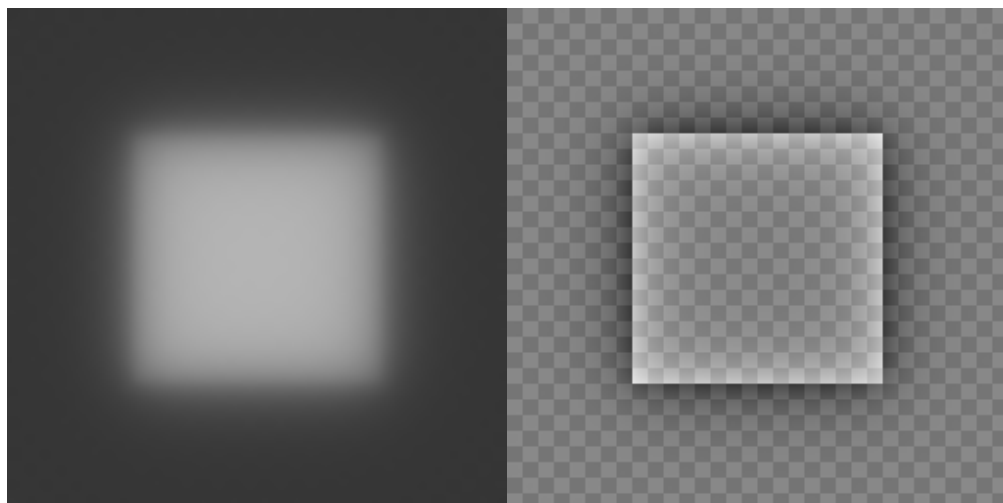
(a) Struktur: $\alpha = 20$; MSE = 142,09

(b) Textur



(c) Struktur: $\alpha = 80$; MSE = 285,02

(d) Textur



(e) Struktur: $\alpha = 150$; MSE = 391,15

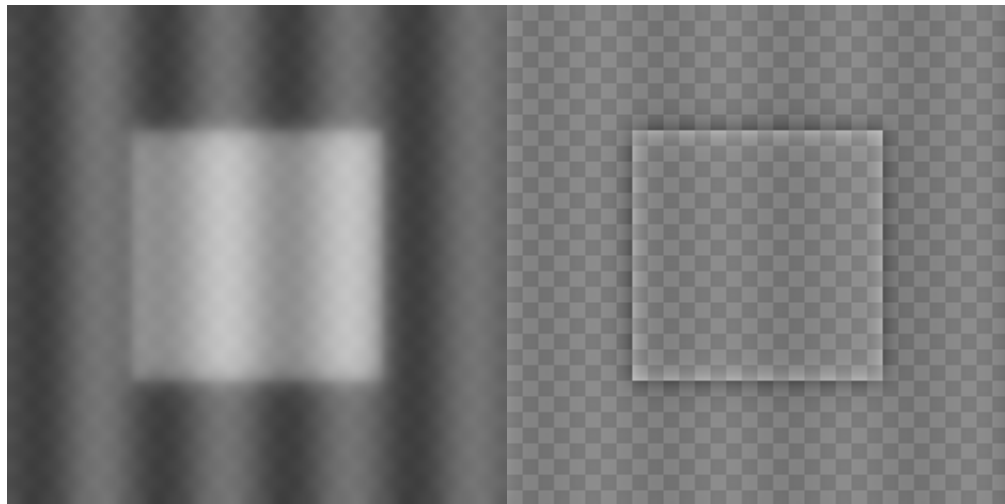
(f) Textur

Abbildung 4.4: Quadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 1. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur.

größeren α ist aber auch bei diesem Bild der Fall. Sowohl in den Struktur- als auch den Texturbildern kann gesehen werden, wie der sinusförmige Verlauf in der Struktur bei stärkerer Glättung immer weiter verschwindet.

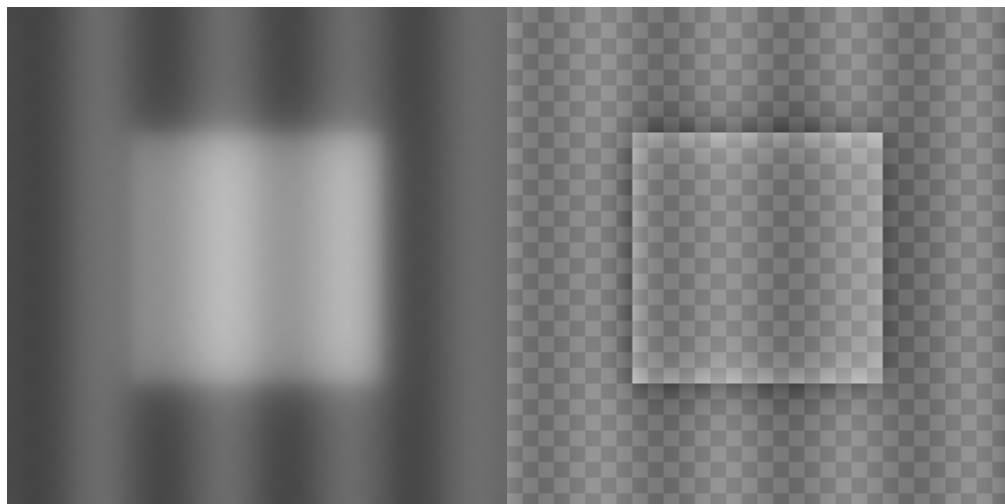
Im Gegensatz dazu zeigt sich für Regularisierer 2. Ordnung wie schon bei den Realweltbildern, dass die Strukturkanten nicht so stark geglättet werden. Abbildung 4.6 zeigt, wie der MSE um einiges langsamer ansteigt als bei den Regularisierern 1. Ordnung für größer werdende α . Allerdings steigt der Wert trotzdem schnell wieder auf über 100 an und auch in den Texturbildern sind wieder die starken Abweichungen in Kantennähe zu erkennen.

Wie schon bei der 1. Ordnung sind die Werte für die Struktur mit Farbverlauf niedriger, aber wie in Abbildung 4.7 zu sehen ist, sind auch hier die Kanten nicht gut erhalten. Eine starke Verbesserung ist bei dem Erhalt des Farbverlaufs zu sehen. Sogar bei stärkerer Glättung verändert sich der Verlauf so gut wie gar nicht, was auch daran zu erkennen ist, dass sich in keinem der Texturbilder ein Verlauf abzeichnet. Das führt zu den sehr viel niedrigeren MSE-Werten als bei den Regularisierern 1. Ordnung in Abbildung 4.5.



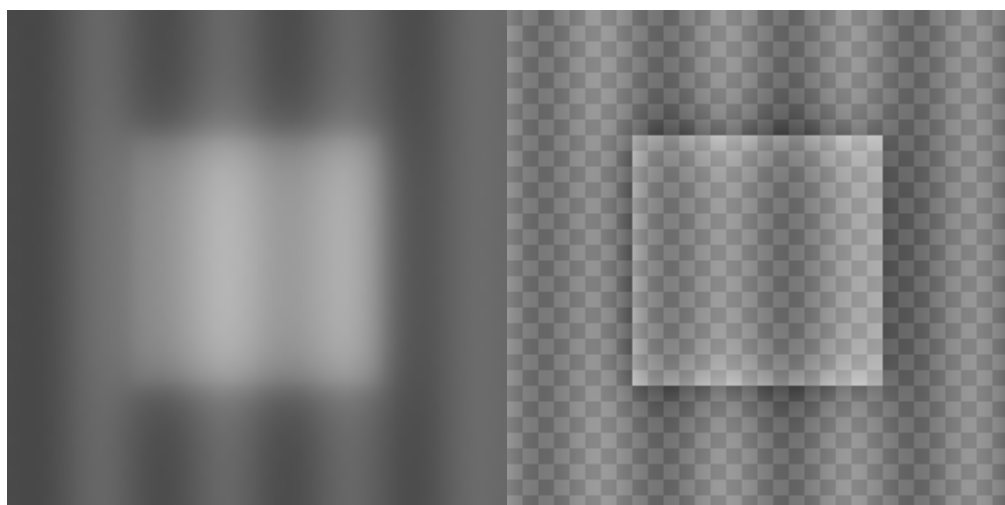
(a) Struktur: $\alpha = 20$; MSE = 70,18

(b) Textur



(c) Struktur: $\alpha = 80$; MSE = 198,51

(d) Textur



(e) Struktur: $\alpha = 150$; MSE = 309,38

(f) Textur

Abbildung 4.5: Quadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 1. Ordnung bei Struktur mit Farbverlauf.

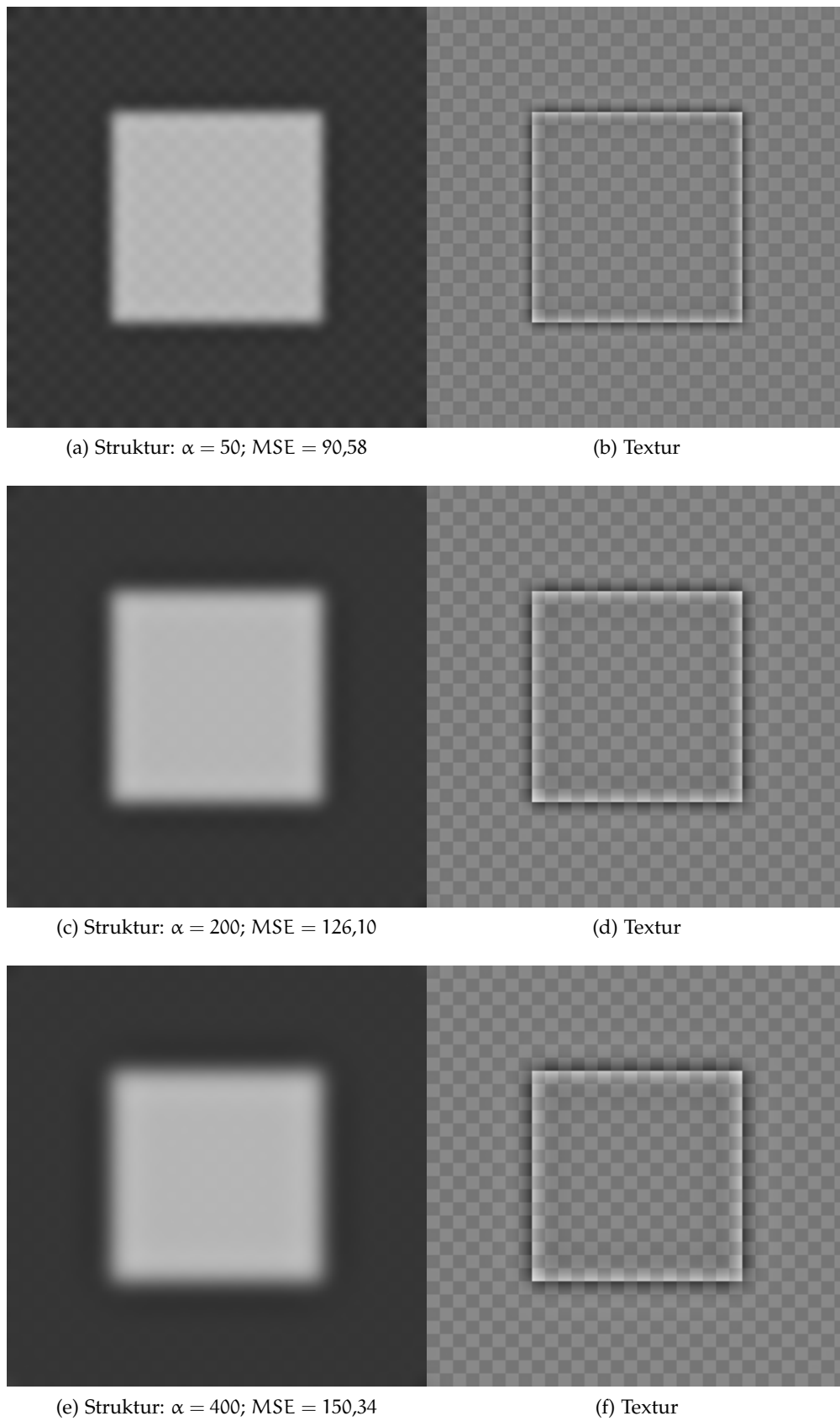


Abbildung 4.6: Quadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 2. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur.

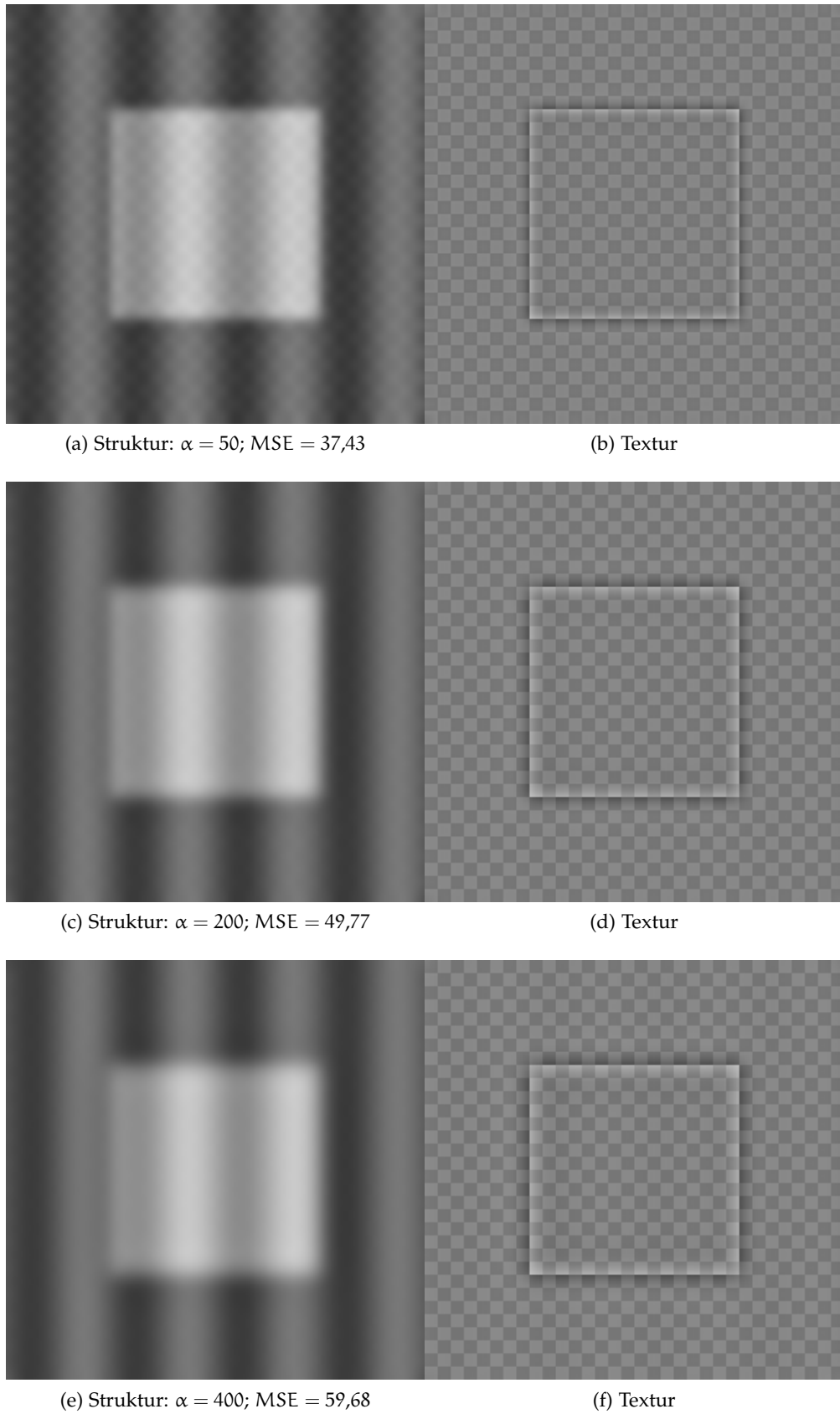


Abbildung 4.7: Quadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 2. Ordnung bei Struktur mit Farbverlauf.

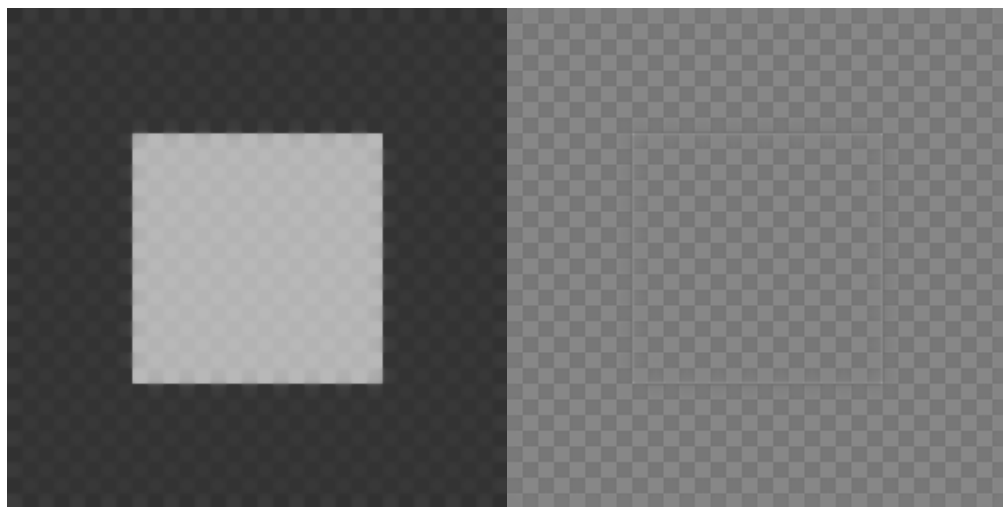
4.2.2 Subquadratischer Variationsansatz

Die Abbildung 4.8 zeigt die Ergebnisse für die stückweise konstante Struktur beim subquadratischen Ansatz mit Regularisierer 1. Ordnung. Für die Funktion ψ wurde hier der Parameter $\lambda = 0,1$ gesetzt. Die Strukturanten werden damit sehr gut erhalten, was zu sehr niedrigen MSE-Werten führt und außerdem dafür sorgt, dass sie in den Texturbildern kaum zu sehen sind.

In Abbildung 4.9 ist derselbe Ansatz für das Testbild mit Farbverlauf zu sehen. In diesem Fall wirkt sich die gute Kantenerhaltung der Regularisierer 1. Ordnung eher negativ aus. Da die Ableitung hier in nahezu jedem Punkt größer oder kleiner als 0 ist, wird durch die subquadratische Bestrafungsfunktion ψ die Glättung insgesamt abgeschwächt, was dazu führt, dass die Textur nur sehr schwer aus dem Bild entfernt werden kann. Aus diesem Grund wurde ein größerer Parameter $\lambda = 1$ gewählt, damit eine gute insgesamt Glättung möglich ist. Auch so werden die Strukturanten noch deutlich besser erhalten als beim quadratischen Ansatz. Jedoch ist genauso wie dort sehr viel vom Farbverlauf entfernt worden, was trotzdem eine sehr große Abweichung von der erwünschten idealen Struktur bewirkt.

Die Regularisierer 2. Ordnung mit subquadratischem Ansatz sind in Abbildung 4.10 für die stückweise konstante Struktur zu sehen. Es wurde wieder $\lambda = 0,1$ gesetzt. Die Ergebnisse sind aufgrund der besseren Kantenerhaltung um einiges besser als beim quadratischen Ansatz, kommen aber wie erwartet nicht an die Regularisierer 1. Ordnung für dieses Bild heran.

Im Gegensatz dazu liefern diese Regularisierer in Kombination mit dem subquadratischen Ansatz bei der Struktur mit Farbverlauf wieder sehr gute Werte, wie in Abbildung 4.11 zu sehen ist. Trotz dem wieder sehr kleinen Wert $\lambda = 0,1$ konnte das Bild gut geglättet und die Textur gut entfernt werden, während der sinusförmige Farbverlauf sehr gut im Strukturbild beibehalten wurde. Die MSE-Werte sind in diesem Fall fast ausschließlich auf die Abweichungen entlang der Strukturanten zurückzuführen.



(a) Struktur: $\alpha = 200$; MSE = 9,11

(b) Textur



(c) Struktur: $\alpha = 400$; MSE = 6,75

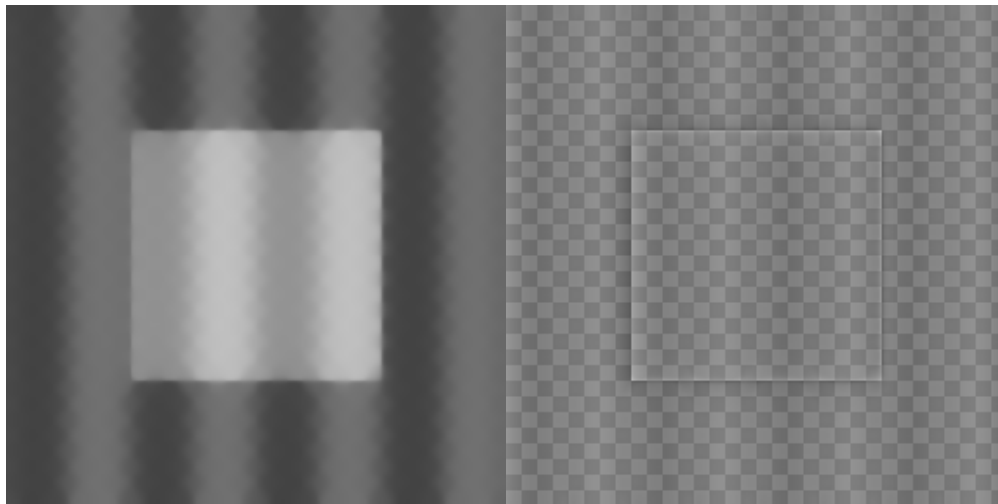
(d) Textur



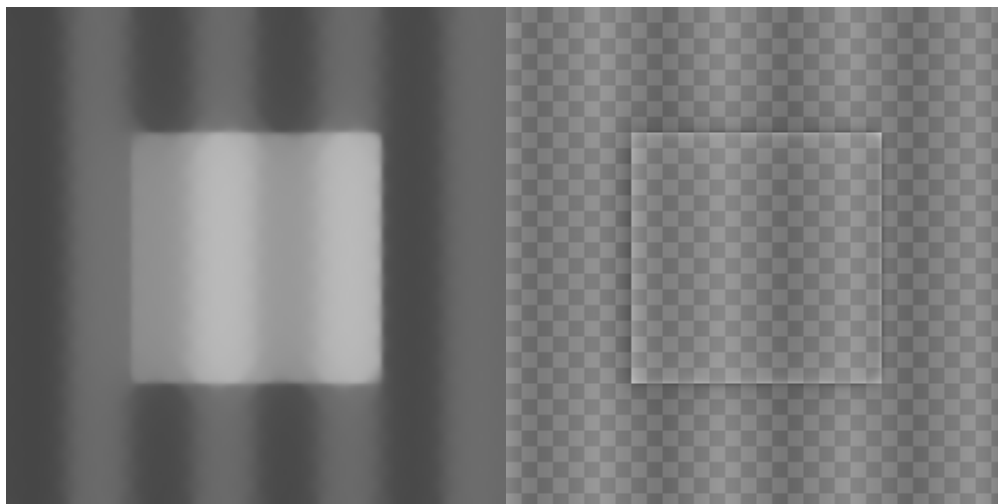
(e) Struktur: $\alpha = 600$; MSE = 10,40

(f) Textur

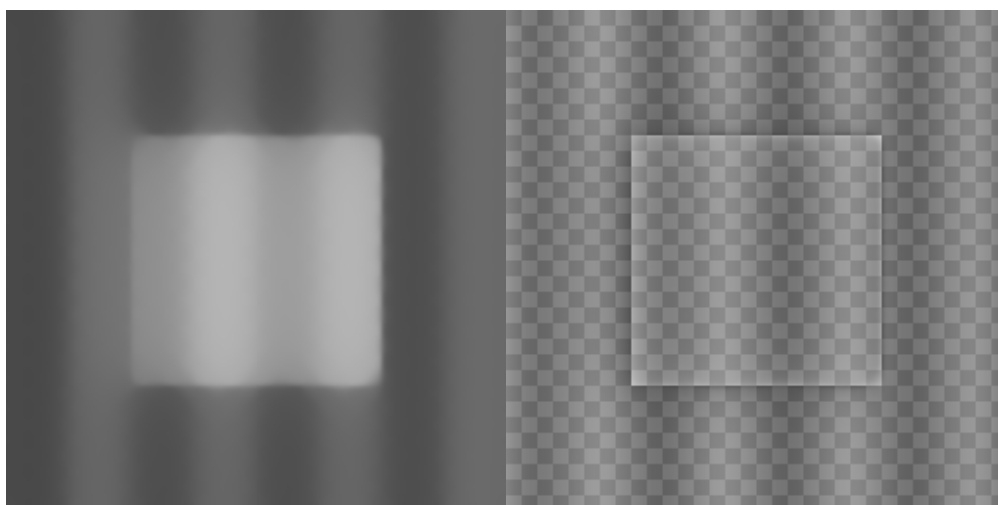
Abbildung 4.8: Subquadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 1. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur ($\lambda = 0,1$).

(a) Struktur: $\alpha = 200$; MSE = 48,57

(b) Textur

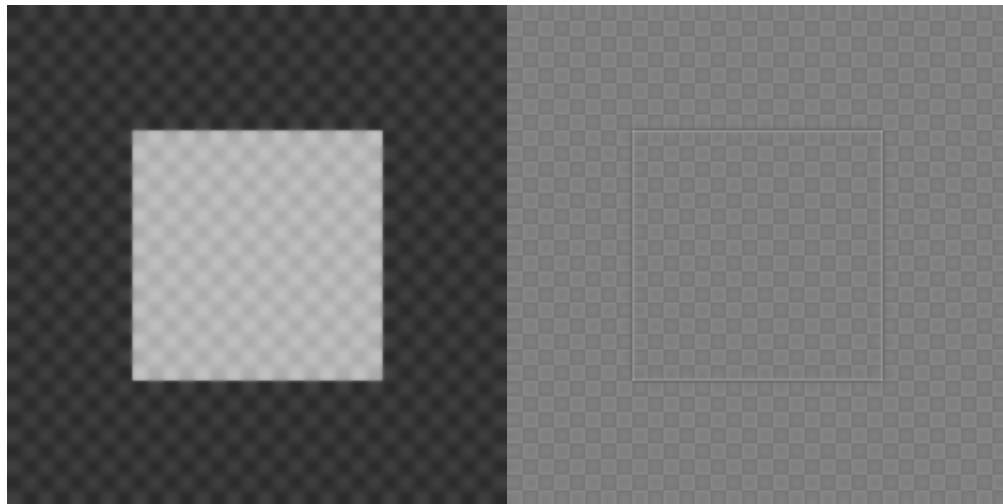
(c) Struktur: $\alpha = 400$; MSE = 110,78

(d) Textur

(e) Struktur: $\alpha = 600$; MSE = 183,68

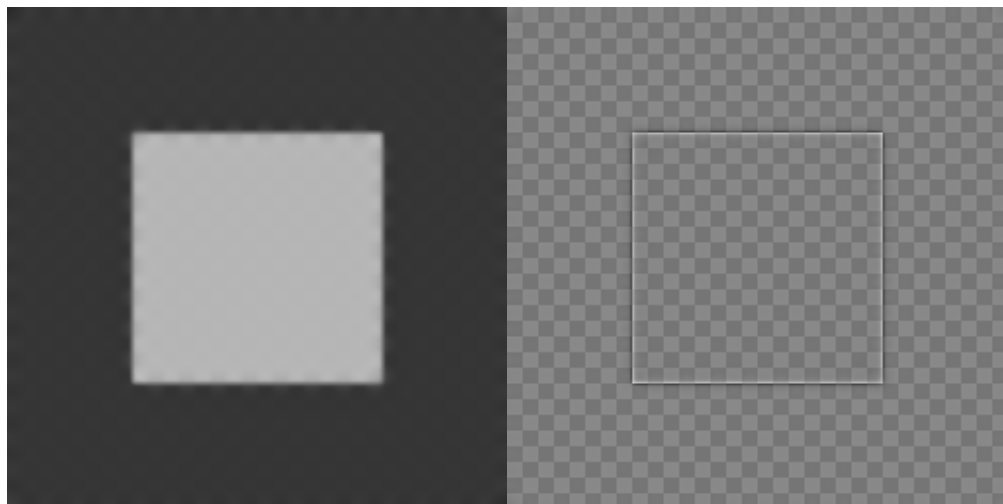
(f) Textur

Abbildung 4.9: Subquadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 1. Ordnung bei Struktur mit Farbverlauf ($\lambda = 1$).



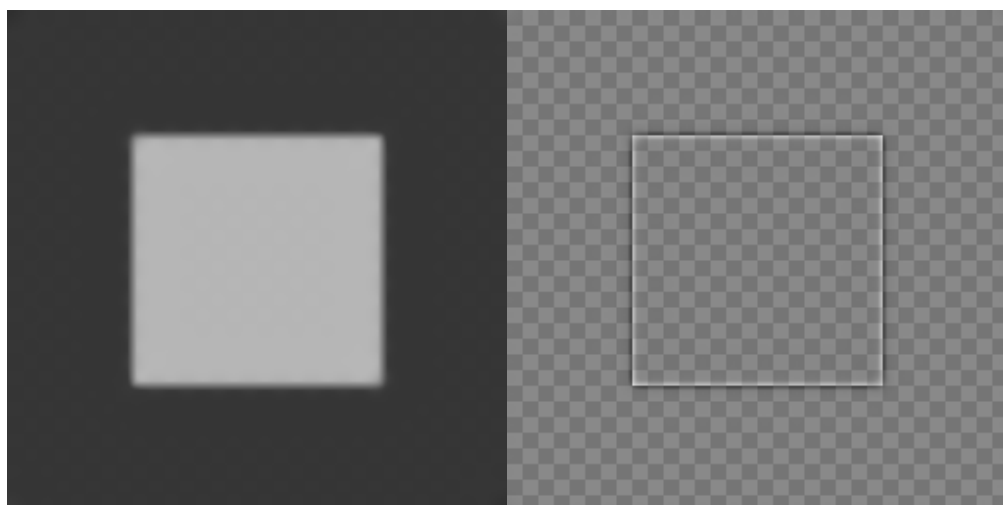
(a) Struktur: $\alpha = 100$; MSE = 42,23

(b) Textur



(c) Struktur: $\alpha = 400$; MSE = 37,28

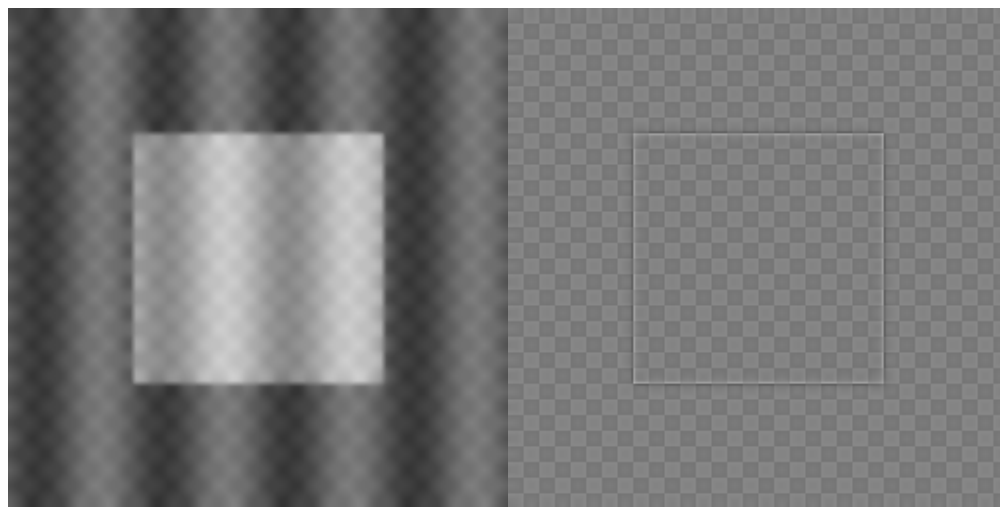
(d) Textur



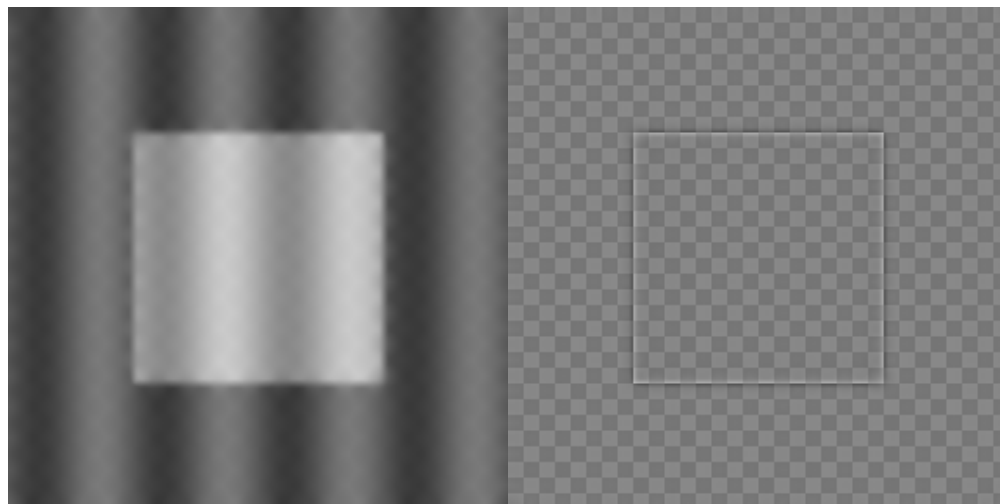
(e) Struktur: $\alpha = 800$; MSE = 56,33

(f) Textur

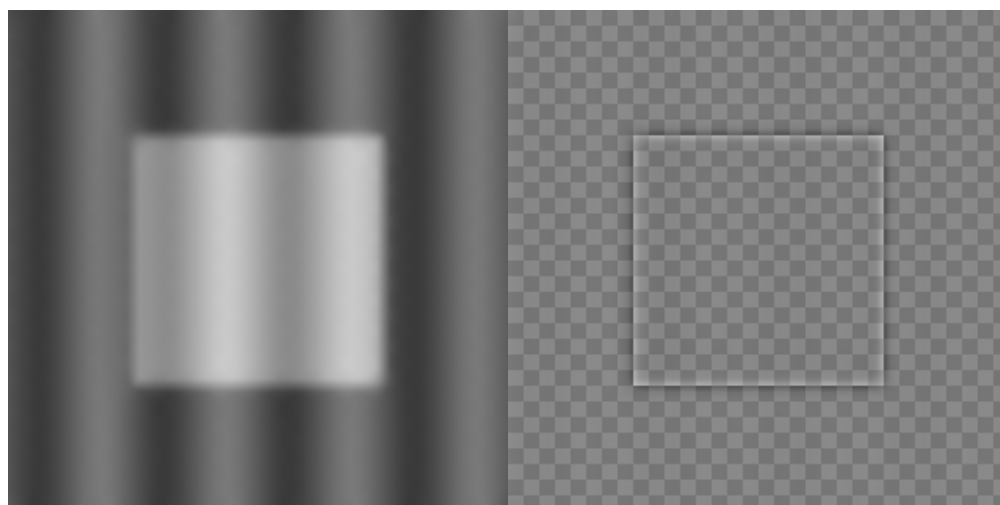
Abbildung 4.10: Subquadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 2. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur ($\lambda = 0,1$).

(a) Struktur: $\alpha = 200$; MSE = 25,77

(b) Textur

(c) Struktur: $\alpha = 400$; MSE = 21,65

(d) Textur

(e) Struktur: $\alpha = 1000$; MSE = 34,32

(f) Textur

Abbildung 4.11: Subquadratischer Variationsansatz mit Regularisierern 2. Ordnung bei Struktur mit Farbverlauf ($\lambda = 0,1$).

4.3 EVALUATION

In den Experimenten hat sich bestätigt, dass die subquadratischen Variationsansätze für beide Ordnungen von Regularisierern immer den entsprechenden quadratischen Ansätzen vorzuziehen sind. Sie unterscheiden sich zwar nicht voneinander, was den Erhalt von Farbverläufen angeht, sind aber deutlich besser im Erhalten der Strukturkanten, die bei der Struktur-Textur-Zerlegung sehr wichtig sind. Beim direkten Vergleich der beiden subquadratischen Ansätze gibt es jedoch keinen eindeutig überlegenen Regularisierer. Die mit Abstand besten Werte wurden mit den Regularisierern 1. Ordnung bei stückweise konstanter Struktur erzielt, wo trotz guter Glättung die Kanten sehr gut erhalten wurden. Die Regularisierer 2. Ordnung können dies nicht so gut. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit lag jedoch darauf, ob die Regularisierer 2. Ordnung besser Farbverläufe erhalten können, da das bei der 1. Ordnung nur schlecht möglich ist. In diesem Fall war die 2. Ordnung klar im Vorteil und hat für Strukturen mit Farbverläufen deutlich bessere Werte erzielt.

Je nachdem worauf der Fokus einer Struktur-Textur-Zerlegung für ein Bild liegen soll, haben also beide Regularisierer jeweils ihre Vor- und Nachteile. Wenn keine Farbverläufe vorhanden sind, oder ihr Erhalt nicht so wichtig ist, sind die Regularisierer 1. Ordnung besser. Wenn dagegen die Farbverläufe in der Struktur wichtig sind, liefern die Regularisierer 2. Ordnung die eindeutig besseren Ergebnisse.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurden Variationsansätze zur Struktur-Textur-Zerlegung für Bilder vorgestellt. Um den Strukturanteil eines Bildes zu erzeugen, wird die Textur daraus entfernt und die Differenz zwischen Originalbild und Strukturbild ergibt den entsprechenden Texturanteil. Hier wurde die Textur entfernt, indem das Bild geglättet wurde. Das geschieht mithilfe einer diskreten Energiefunktion, die Ableitungen in den Bildpunkten als Regularisierer enthält. Das gesuchte Strukturbild ist das globale Minimum dieser Energiefunktion. Mit Ableitungen 1. Ordnung als Regularisierer können die Bilder gut geglättet und die Textur entfernt werden. Falls das Bild jedoch Farbverläufe in den Strukturelementen enthält, werden diese nicht gut erhalten, da diese Regularisierer von stückweise konstanten Strukturen ausgehen. Um die Ergebnisse diesbezüglich zu verbessern, wurde der Ansatz auf Regularisierer 2. Ordnung erweitert. Aufgrund der quadratischen Regularisierer werden die Strukturkanten jedoch bei beiden Ordnungen relativ stark geglättet. Um dem entgegenzuwirken, wurden subquadratische Funktionen in die Regularisierer eingesetzt, die die Glättung bei hohen Ableitungswerten abschwächen. Anschließend wurden Experimente durchgeführt, die die verschiedenen Ansätze anhand von Testbildern qualitativ miteinander verglichen haben. Wie erwartet waren die subquadratischen Ansätze den quadratischen wegen der besseren Kantenerhaltung überlegen und es wurde bestätigt, dass die Regularisierer 2. Ordnung deutlich besser beim Erhalten von Farbverläufen sind. Trotzdem sind die Regularisierer 1. Ordnung beim subquadratischen Ansatz stärker, was das Erhalten der Kanten angeht.

5.1 AUSBLICK

Wie in den Experimenten zu sehen war, haben sowohl die Regularisierer 1. als auch 2. Ordnung jeweils ihre Vorteile. Für zukünftige Arbeiten bietet es sich also an, zu untersuchen, wie beide Ansätze gegebenenfalls kombiniert werden können. Beispielsweise indem die allgemeine Glättung eines Bildes mit Regularisierern 2. Ordnung durchgeführt wird und an den Strukturkanten als Spezialfall die 1. Ordnung eingesetzt wird. Außerdem kann untersucht werden, wie diese Variationsansätze im Vergleich zu anderen Methoden in der Struktur-Textur-Zerlegung abschneiden. Die in [1] vorgestellten Variationsansätze mit Regularisierern 1. Ordnung wurden mit dem bilateralen Filter und dem Rolling-Guidance-Filter verglichen und für schlechter befunden. Es wäre daher interessant zu sehen, wie es sich mit den Regularisierern 2. Ordnung verhält.

LITERATUR

- [1] Stephan Albrecht. "Variationsansätze zur Struktur-Textur-Zerlegung". B.Sc. Thesis, Universität Stuttgart. 2015.
- [2] Stefano Alliney. "A property of the minimum vectors of a regularizing functional defined by means of the absolute norm". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 45.4 (1997), S. 913–917.
- [3] Jean-François Aujol, Guy Gilboa, Tony Chan und Stanley Osher. "Structure-texture image decomposition modeling, algorithms, and parameter selection". In: *International Journal of Computer Vision* 67.1 (2006), S. 111–136.
- [4] Dennis Dunn und William E Higgins. "Optimal Gabor filters for texture segmentation". In: *IEEE Transactions on image processing* 4.7 (1995), S. 947–964.
- [5] Emanuele Galligani. "A nonlinearity lagging for the solution of nonlinear steady state reaction diffusion problems". In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.3 (2013), S. 567–583.
- [6] Anil K Jain und Farshid Farrokhnia. "Unsupervised texture segmentation using Gabor filters". In: *Pattern Recognition* 24.12 (1991), S. 1167–1186.
- [7] Stéphane Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [8] Andreas Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Springer, 2011.
- [9] Yves Meyer. *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations: the fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures*. Bd. 22. American Mathematical Society, 2001.
- [10] Mila Nikolova. "A variational approach to remove outliers and impulse noise". In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 20.1 (2004), S. 99–120.
- [11] Leonid I Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. "Nonlinear total variation based noise removal algorithms". In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 60.1-4 (1992), S. 259–268.
- [12] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003.
- [13] Carlo Tomasi und Roberto Manduchi. "Bilateral filtering for gray and color images". In: *IEEE International Conference on Computer Vision*. 1998, S. 839–846.
- [14] Curtis R Vogel und Mary E Oman. "Iterative methods for total variation denoising". In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 17.1 (1996), S. 227–238.
- [15] Li Xu, Qiong Yan, Yang Xia und Jiaya Jia. "Structure extraction from texture via relative total variation". In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 31.6 (2012), S. 139.

- [16] David M Young. *Iterative solution of large linear systems*. Elsevier, 2014.
- [17] Qi Zhang, Xiaoyong Shen, Li Xu und Jiaya Jia. "Rolling guidance filter". In: *European Conference on Computer Vision*. Springer. 2014, S. 815–830.

ERKLÄRUNG

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Ort, Datum, Unterschrift