

Temperaturoptionen für die Elemente BITO
und TORU des FEM-Programms COSA

Diplomarbeit
von
cand. aer. Konstantin Iatridis

16. Dezember 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	6
1.1	Aufgabenstellung	7
2	Berücksichtigung des Temperatureinflusses in der FEM-Rechnung	9
2.1	Die Grundgleichung der FE-Rechnung	10
2.2	Definition der Anfangslasten	10
2.3	Ermittlung der Spannungen bei Rechnungen mit Temperaturlasten	15
3	Temperaturerweiterung für den Biegetorsionsbalken BITO	16
3.1	Das Element BITO	17
3.1.1	Geometrie und Verschiebungsansätze	17
3.1.2	Temperaturansatz für BITO	20
3.2	Berechnung der Anfangslasten für BITO	23
3.2.1	Aufstellen der Dehnungsmatrix	23
3.2.2	Ermittlung der Anfangsspannungen	28
3.2.3	Integration der Anfangslasten	29
3.3	Korrektur der Spannungen	32
4	Vorstellung von Temperaturberechnungen unter Verwendung des Elements BITO	33
4.1	Beidseitig eingespannter Balken unter konstanter Temperaturänderung	34
4.2	Balken mit Temperaturgradienten	35
4.3	Einseitig eingespannter Balken mit Temperaturgradienten	37
4.4	Kreisring	39

5	Temperaturerweiterung für das Ringelement TORU	42
5.1	Das Element TORU	43
5.1.1	Rotationssymmetrische Strukturen unter rotationssymmetrischen Belastungen	43
5.1.2	Geometrie und Verschiebungsansatz für TORU	44
5.1.3	Temperaturansatz für TORU	49
5.2	Berechnung der Anfangslasten	50
5.2.1	Aufstellen der Dehnungs- und Anfangsspannungsmatrizen	50
5.2.2	Integration der Anfangslasten	56
6	Vorstellung von Temperaturberechnungen unter Verwendung des Elements TORU	61
6.1	Rechenbeispiele zum Vergleich mit den analytischen Lösungen	62
6.1.1	Kreisring	62
6.1.2	Langer Hohlzylinder	64
6.1.3	Langer dünnwandiger Zylinder	68
6.1.4	Langer Vollzylinder	72
6.1.5	Gelochte Scheibe	77
6.2	Anwendung auf eine Flugzeugstruktur	82

Abbildungsverzeichnis

3.1	Das Element BITO	17
3.2	Temperaturverteilung am Querschnitt des Elements BITO . .	21
3.3	Temperaturgradienten an den Knoten des Elements BITO . .	23
4.1	Beidseitig eingespannter Balken bei gleichmäßiger Tempera- turänderung	34
4.2	Einseitig eingespannter Balken mit bilinearer Temperaturver- teilung	37
4.3	Kreisring unter konstanter Temperaturbelastung	39
4.4	Idealisierung eines Kreisringes mit BITOs	41
5.1	Freiheitsgrade für das Element TORU	46
5.2	Dimensionslose Dreieckskoordinaten	48
6.1	Idealisierungen für den Ring aus Abbildung 4.3	63
6.2	Langer Hohlzylinder mit linearer Temperaturverteilung	66
6.3	Idealisierung des Hohlzylinders aus Abbildung 6.2	68
6.4	Dünnwandiger Hohlzylinder unter linearer Temperaturlast . .	69
6.5	Untersuchte Idealisierungsvarianten für das Problem 'dünn- wandiger Zylinder'	70
6.6	Langer Vollzylinder unter linearer Temperaturlast	72
6.7	FE-Netze für das Beispiel Vollzylinder	73
6.8	Gelochte Scheibe mit linearer Temperaturverteilung	77
6.9	Idealisierungsvarianten für die Scheibe aus Abbildung 6.8 . . .	79
6.10	Radialspannungen für die gelochte Scheibe	80
6.11	Tangentialspannungen für die gelochte Scheibe	81
6.12	Druckspant hinten (<i>Do328</i>)	83

6.13	Verlauf der Radialspannungen für den hinteren Druckspant der <i>Do328</i>	84
6.14	Verlauf der Tangentialspannungen für den hinteren Druck- spant der <i>Do328</i>	85

Tabellenverzeichnis

4.1	Normalspannungen für einen beidseitig eingespannten Balken bei gleichmäßiger Temperaturänderung	35
4.2	Ergebnisse aus dem Beispiel 'Balken mit Temperaturgradienten'	36
6.1	Verschiebungen des Mittelpunktes des Ringquerschnitts (Variante (a) aus Abbildung 6.1)	64
6.2	Radialspannungen für einen dickwandigen Hohlzylinder	68
6.3	Tangentialspannungen für dünnwandigen Zylinder	70
6.4	Maximale Tangentialspannung an den freien Enden eines dünnwandigen Rohres	71
6.5	Radialspannungen für das Beispiel Vollzylinder	75
6.6	Tangentialspannungen für das Beispiel Vollzylinder	75
6.7	Axialspannungen für das Beispiel Vollzylinder	76
6.8	Radialspannungen für das Beispiel 'Scheibe'	78
6.9	Tangentialspannungen für das Beispiel 'Scheibe'	78

Kapitel 1

Einführung

1.1 Aufgabenstellung

In vielen Bereichen des Maschinenbaus spielt die Erfassung des Temperatureinflusses an einem Tragwerk eine wichtige Rolle. Als Beispiele können der Motoren- und Turbinenbau, die Raumfahrttechnik, die Reaktortechnik usw. angeführt werden.

Im Flugzeugbau für den Unterschallbereich sind die in der Struktur auftretenden Temperaturunterschiede nicht sehr hoch, dennoch ist eine genaue Berechnung der Spannungen, d.h. auch unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses nötig, um möglichst effektiv, also gewichtssparend, zu dimensionieren. Im Überschallflug treten an Teilen der Struktur aufgrund der großen Anströmgeschwindigkeiten hohe Temperaturdifferenzen auf, die nicht vernachlässigt werden dürfen.

In den letzten Jahren hat in der Luftfahrt die Notwendigkeit für die Erfassung dieser Temperaturspannungen noch mehr an Bedeutung gewonnen, da die im modernen Flugzeugbau verwendeten Materialien stark unterschiedliche Wärmeausdehnungskoeffizienten besitzen. Dies hat zur Folge, daß auch unter einer mäßigen Temperaturänderung, im Vergleich zu der Temperatur des spannungslosen Zustands, betragsmäßig hohe Spannungen auftreten können, da die aus verschiedenen Werkstoffen hergestellten Bauteile sich gegenseitig die freie, und deswegen spannungslose, Ausdehnung blockieren. Als Beispiel sei hier die Kombination von CFK- und Aluminum-Werkstoffen genannt, die um zwei Größenordnungen unterschiedliche Ausdehnungskoeffizienten besitzen.

In dieser Arbeit soll die Integration der Temperaturerweiterung für zwei finite Elemente des FEM-Programmsystems *COSA-DEMEL*, das bei der Firma Dornier-Luftfahrt entwickelt wurde und angewandt wird, vorgestellt werden. Es handelt sich dabei um die Elemente *BITO* und *TORU*. Das erste ist ein räumliches Balkenelement, das zweite ein Volumenelement, das für die Berechnung von rotationssymmetrischen Strukturen unter rotationssymmetrischen Belastungen eingesetzt wird.

In Kapitel 2 werden die allgemeinen Gleichungen, die im Zusammenhang mit der Lösung von Problemen mit Temperaturlasten mittels der FE-Methode stehen, aufgeführt.

In Kapitel 3 erfolgt die spezielle theoretische Herleitung für das Element *BITO*.

Kapitel 4 enthält Beispielrechnungen, die die Richtigkeit der Herleitung

und Programmumsetzung beim *BITO* zeigen sollen.

Im Kapitel 5 wird die Theorie für das zweite Element *TORU* hergeleitet.

Schließlich stellt das Kapitel 6 analog zu Kapitel 4 Rechnungen vor, die die erfolgreiche Anwendung des um den Temperaturteil erweiterten Elements *TORU* beweisen sollen.

Kapitel 2

Berücksichtigung des Temperatureinflusses in der FEM-Rechnung

2.1 Die Grundgleichung der FE-Rechnung

Das grundlegende Gleichungssystem der FE-Methode lautet

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{r} . \quad (2.1)$$

Hat das Tragwerk n Freiheitsgrade, so sind \mathbf{R} ein $(n \times m)$ -Vektor, dessen Komponenten die Knotenkräfte sind, \mathbf{r} ein ebenfalls $(n \times m)$ -Vektor, dessen Komponenten die Knotenverschiebungen sind, und \mathbf{K} die Struktursteifigkeitsmatrix der Dimension $(n \times n)$. Dabei ist m die Anzahl der Lastfälle.

Die Berechnung einer Struktur, das bedeutet die Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungszustandes, sowie der Lagerreaktionen an jedem Punkt, entspricht im idealisierten Modell der Berechnung einer finiten Anzahl von Verschiebungen, der Knotenverschiebungen (Vektor \mathbf{r}). Sind nämlich für jedes Element die Knotenverschiebungen bekannt, so läßt sich über einen lokalen Ansatz der Gesamtzustand des Elements, und damit der Struktur, bestimmen.

2.2 Definition der Anfangslasten

Wenn ein Körper eine gleichmäßige Temperaturänderung erfährt, entstehen in ihm Dehnungen; der Körper bleibt jedoch spannungsfrei, solange seine freie Ausdehnung nicht behindert wird. Bei einer ungleichmäßigen Temperaturverteilung neigen die verschiedenen Bereiche des Körpers dazu, sich um verschiedene Beträge zu deformieren. Da aber die Kontinuität des Körpers nicht verletzt werden darf (keine Lücken und Überlappungen), stellt sich in ihm ein Deformationszustand ein, der mit Spannungen (Wärmespannungen) verbunden ist.

Der Einfluß der Wärmedehnungen wird bei den FEM-Rechnungen über die Einführung der *Anfangslasten* (oder *Temperaturlasten*) berücksichtigt. Diese sind beim Aufstellen des Gleichungssystems (2.1) zusammen mit den anderen Knotenkräften im Vektor \mathbf{R} enthalten. Um zu der Definitionsgleichung der Anfangslasten zu kommen, ist es notwendig einige Bemerkungen über die Dehnungen anzuführen.

Man unterscheidet zwei Arten von Dehnungen, die *elastischen Dehnungen* ϵ und die *Anfangsdehnungen* η .

Elastische Dehnungen sind die Dehnungen, die infolge von Spannungen auftreten; sie sind also der Spannungs-Dehnungsbeziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2)$$

zugeordnet. Dabei ist $\boldsymbol{\kappa}$ die Materialsteifigkeitsmatrix, die für einen dreidimensionalen isotropen Körper die Form

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{\nu} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

hat. Für diese Anordnung der Materialsteifigkeit lauten der Spannungsvektor

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx} \} \quad (2.4)$$

und der Dehnungsvektor

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{ \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \epsilon_{zx} \} . \quad (2.5)$$

Dabei sind die ersten drei Komponenten beider Vektoren die Normalspannungen bzw. Normaldehnungen und die letzten drei die Schubspannungen bzw. Schubdehnungen.

Als Anfangsdehnungen werden die Dehnungen bezeichnet, die ohne Spannungen auftreten. Die Anfangsdehnungen können auch andere Ursachen als eine Temperaturänderung haben, wie z.B. Materialfehler; dennoch bleiben die temperaturbedingten Anfangsdehnungen der wichtigste Fall. Auch in der

vorliegenden Arbeit wird davon ausgegangen, daß die Anfangsdehnungen nur durch Temperaturdifferenzen entstehen. Dann läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= \{\eta_{xx} \eta_{yy} \eta_{zz} \eta_{xy} \eta_{yz} \eta_{zx}\} \\ &= \alpha \Delta T \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Bei einer Temperaturänderung ΔT entstehen in einem Körper nur Normaldehnungen.

In diesem Zusammenhang soll hier der Begriff der Anfangsspannungen $\boldsymbol{\tau}$ erwähnt werden. Als solche sind die Spannungen definiert, die eine Anfangsdehnung auf elastischem Weg völlig rückgängig machen. Es gilt also

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\eta}.\tag{2.7}$$

Beide Dehnungen (elastische und Anfangsdehnungen) werden unter dem Begriff der *totalen Dehnung* $\boldsymbol{\gamma}$ zusammengefaßt

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\eta}.\tag{2.8}$$

Nach diesen Erläuterungen kann man die Definitionsgleichung der Anfangslasten \mathbf{J}_S angeben (der Index S steht für 'Struktur' zum Unterscheiden von den Anfangslasten für ein Element)

$$\mathbf{J}_S = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{e}^t \boldsymbol{\tau} dV.\tag{2.9}$$

Der Vektor \mathbf{J}_S ist, wie der Lastvektor für n Freiheitsgrade, ebenfalls der Dimension $(n \times m)$, wobei m die Anzahl der Temperaturlastfälle ist. Die Matrix \mathbf{e} entspricht den Dehnungen infolge Einheitsverschiebungen der Knoten und ist von der Dimension $(6 \times n)$

$$\mathbf{e} = [\boldsymbol{\epsilon}_1 \ \boldsymbol{\epsilon}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\epsilon}_n]\tag{2.10}$$

Dabei sind $\boldsymbol{\epsilon}_1$ die Dehnungen infolge der Verschiebung $r_1 = 1$, während die Verschiebungen $r_2, r_3, \dots, r_n = 0$ sind, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ die Dehnungen infolge der Verschiebung $r_2 = 1$ während die Verschiebungen $r_1, r_3, \dots, r_n = 0$ bleiben, usw.

Wenn der Vektor der Anfangslasten \mathbf{J}_S vom Gesamtlastvektor \mathbf{R} getrennt aufgeführt werden soll, lautet das Gleichungssystem (2.1)

$$\mathbf{R}_K = \mathbf{K} \mathbf{r} + \mathbf{J}_S . \quad (2.11)$$

Dabei soll \mathbf{R}_K den Vektor bezeichnen, der als Komponenten alle anderen Knotenkräfte außer den Anfangslasten beinhaltet. Aus dieser Gleichung kann man die physikalische Bedeutung der Anfangslasten erkennen: wird ein Tragwerk einer Temperaturänderung ausgesetzt, dann sind die Anfangslasten die Knotenkräfte, die notwendig sind, um die Ausdehnung des Tragwerks zu verhindern ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$).

Für ein einziges Element gelten die obengenannten Gleichungen vom Prinzip her unverändert. Es werden lediglich zum Teil andere Bezeichnungen benutzt, um die Elementbeziehungen von der der Struktur zu unterscheiden.

Da das Element, anders als die Gesamtstruktur, kinematisch bestimmt ist, ist, wenn die Knotenverschiebungen bekannt sind, auch die Verschiebung an einem beliebigen Punkt des Elements bekannt. Die Verbindung zwischen den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{\rho}$ und den Verschiebungen im Element \mathbf{u} liefert eine elementspezifische Interpolationsfunktion $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho} . \quad (2.12)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\rho}$ im Element entspricht dem Vektor \mathbf{r} der Struktur. Dadurch läßt sich auch die Beziehung zwischen den Dehnungen und Knotenverschiebungen aufstellen

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\rho} . \quad (2.13)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\alpha}$, die im Element der Matrix \mathbf{e} der Struktur entspricht, läßt sich über die Beziehung

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D} \boldsymbol{\omega} \quad (2.14)$$

aufstellen, wobei \mathbf{D} der Operator ist, der die Dehnungen mit den Verschiebungen an einem Punkt verbindet (Matrixschreibweise der sechs Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen)

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

oder in einer kompakteren Schreibweise

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} \mathbf{u} .$$

Für die Verteilung der Anfangsdehnungen $\boldsymbol{\eta}$ wird im Element folgender Ansatz gemacht

$$\boldsymbol{\eta}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\eta}}(x, y, z) \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{I}} . \quad (2.16)$$

Dabei bezeichnet der Vektor $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{I}}$ die Stützpunkte der Anfangsdehnungen an den Knoten des Elements, die vom Anwender angegeben werden müssen.

Wenn das Polynom der Verschiebungsverteilung im Element vom Grad (n) ist, dann ist die Funktion der totalen Dehnungen von der Ordnung ($n-1$). Also wird für die Anfangsdehnungen auch eine Interpolationsfunktion der Ordnung ($n-1$) gewählt. Andernfalls wäre der Ansatz für die Anfangsdehnungen $\boldsymbol{\eta}$ nicht mit dem Ansatz für die totalen Dehnungen $\boldsymbol{\gamma}$ darstellbar, was zu elastischen Zusatzdehnungen und damit zu Spannungen führen würde.

Die Gleichung für die Anfangslasten lautet somit für ein Element

$$\mathbf{J} = \int_V \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\tau} dV . \quad (2.17)$$

Der Übergang von der Element- auf die Strukturebene erfolgt über die Boolesche Matrix \mathbf{a} . Diese sortiert einfach die Komponenten eines Elementvektors in die Komponenten des entsprechenden Strukturvektors. In diesem Fall ist

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{a}^t \mathbf{J} . \quad (2.18)$$

Es ist zu beachten, daß für die Verschiebungen die entsprechende Beziehung

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{a} \mathbf{r} \quad (2.19)$$

lautet.

2.3 Ermittlung der Spannungen bei Rechnungen mit Temperaturlasten

Die Berücksichtigung der Temperatúrausdehnung über die Anfangslasten führt nach der Lösung des Gleichungssystems zu den wahren Verschiebungen, d.h. zu Verschiebungen, die sich sowohl aus der Temperatur wie auch aus der sonstigen Belastung der Struktur ergeben. Damit ist der Verschiebungszustand überall am Tragwerk festgelegt.

Die berechneten Knotenverschiebungen führen im Element zur Berechnung der Dehnungen mit Gleichung (2.13), und dann über das Materialgesetz zu den Spannungen nach Gleichung (2.2).

Dabei muß jedoch berücksichtigt werden, daß bei einer Rechnung mit Temperaturlasten die Dehnungen, die sich aus den Knotenverschiebungen direkt ergeben, nicht die elastischen, sondern die totalen Dehnungen sind, und aus diesem Grunde zu falschen Spannungen führen. Die wirklichen Spannungen lassen sich erst nach Subtraktion der Anfangsdehnungen von den totalen Dehnungen nach der folgenden Gleichung berechnen

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta}) . \quad (2.20)$$

Kapitel 3

Temperaturerweiterung für den Biegetorsionsbalken BITO

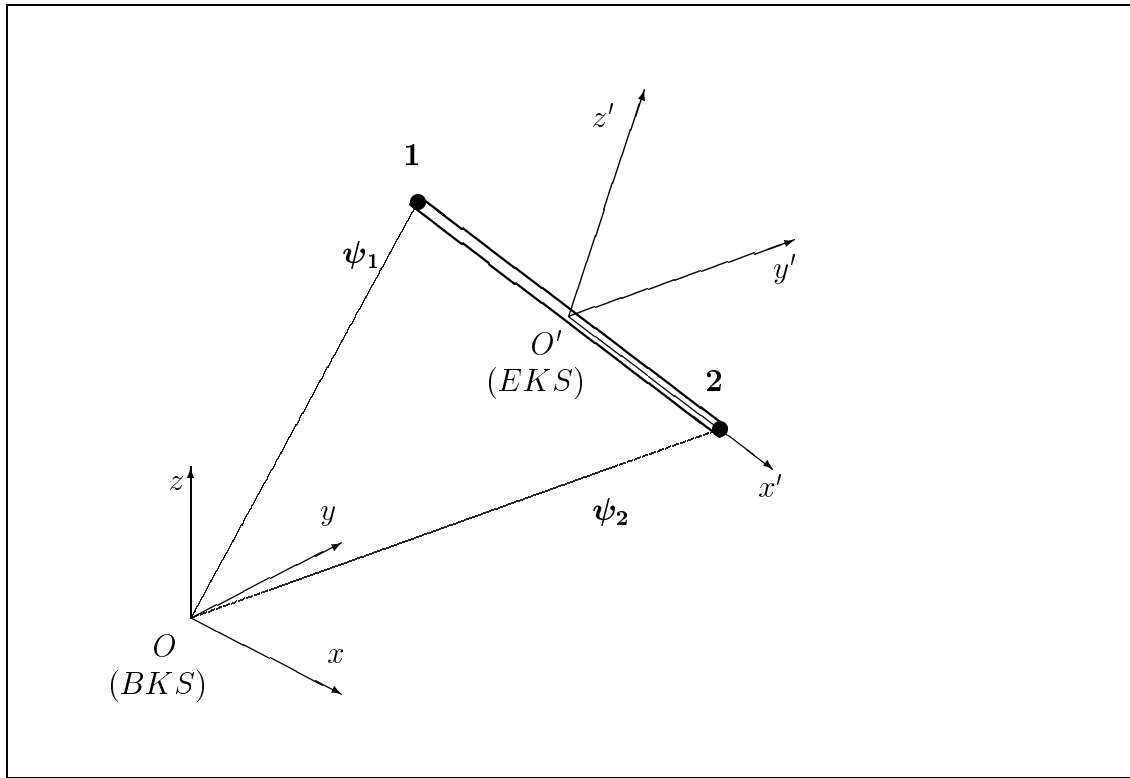


Abbildung 3.1: Das Element BITO

3.1 Das Element BITO

3.1.1 Geometrie und Verschiebungsansätze

Beim *BITO* handelt es sich um einen räumlichen Biegetorsionsbalken mit zwei Knoten (Abbildung 3.1). Das Element bietet folgende Deformationsmöglichkeiten an: eine Längsdeformation, zwei Querbiegeverformungen (da zwei Biegeachsen) und eine Torsionsverformung.

Die Verbindungslinie der beiden Elementknoten ist die neutrale Faser des Balkens. Dieser entspricht gleichzeitig die x' -Achse eines lokalen kartesischen Koordinatensystems ($O'x'y'z'$), das als *Element-Koordinaten-System (EKS)* bezeichnet wird. Die y' - und z' -Achsen entsprechen den zwei Hauptträgheitsachsen des Querschnitts. Der Verschiebungszustand im Element ist durch den Verschiebungsvektor \mathbf{u} bestimmt

$$\mathbf{u} = \{ u \ v \ w \} . \quad (3.1)$$

Der Dehnungsvektor hat die Komponenten

$$\boldsymbol{\gamma} = \{ \gamma_{xx} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{zx} \} . \quad (3.2)$$

Analog hat der Spannungsvektor die Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{zx} \} . \quad (3.3)$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix lautet

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - 2\nu}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{\nu} \end{bmatrix} . \quad (3.4)$$

Für die Verlängerung u gilt ein linearer Ansatz in x' .

Die Funktionen für die Querverschiebungen sind Polynome dritten Grades in x' . Für den Biegeanteil wurde beim *BITO* die Balkenbiegungstheorie mit Berücksichtigung der Schubdeformation zu Grunde gelegt. Diese besagt, anders als die Bernoullische Hypothese, daß ein vor der Deformation ebener und zur neutralen Faser normaler Querschnitt auch nach der Deformation eben bleibt, jedoch nicht mehr normal zur neutralen Faser ist.

Nach der *Elementaren Theorie der Biegung* (ETB) läßt sich die Normaldehnung γ_{xx} aus der zweiten Ableitung der Querverschiebungen v und w nach x' berechnen

$$\gamma_{xx}(x', y', z') = -y' \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} - z' \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} . \quad (3.5)$$

Für den Torsionsanteil gilt beim *BITO* die *St. Venantsche*-Theorie. Da bei dieser Theorie Drillbiegeeffekte nicht berücksichtigt sind, werden offene Profile ausgeschlossen. Außerdem ist eine Verwölbungsbehinderung des Querschnitts nicht zugelassen. Mit diesen Annahmen wird für die Verschiebungen infolge der Torsion ein linearer Ansatz für die Querverschiebungen v, w in Abhängigkeit vom Drillwinkel θ gemacht. Dieser lautet (siehe [1])

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w(z', y') \frac{\partial \theta}{\partial x'} \\ -z' \theta \\ y' \theta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Für die mit der Torsion verbundenen Schubdehnungskomponenten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x'} \left(\frac{\partial w}{\partial y'} - z' \right) \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x'} \left(\frac{\partial w}{\partial z'} + y' \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Eingabe der Knoten erfolgt in einem globalen kartesischen Koordinatensystem, das in *DEMEL Basis Koordinaten-System (BKS)* genannt wird. Die Ortsvektoren der Knoten lauten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1 &= \{x_1 \ y_1 \ z_1\} \\ \boldsymbol{\psi}_2 &= \{x_2 \ y_2 \ z_2\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dann läßt sich für den Verbindungsvektor der beiden Knoten Richtung von 1 nach 2 schreiben

$$\boldsymbol{\psi}_{12} = \boldsymbol{\psi}_2 - \boldsymbol{\psi}_1 = \{x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1\} \quad (3.9)$$

Der Einheitsvektor in Längsrichtung ergibt sich durch Division mit der Länge des Balkens l

$$\mathbf{c}_{12} = \frac{\boldsymbol{\psi}_{12}}{|\boldsymbol{\psi}_{12}|} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{l} \\ \frac{y_2 - y_1}{l} \\ \frac{z_2 - z_1}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Alle folgenden Angaben beziehen sich auf das Element-Koordinaten-System. Für jeden Knoten sind die nachstehenden Freiheitsgrade definiert

u	Längsverschiebung	N	Normalkraft
v	y' -Querverschiebung	Q_y	y' -Querkraft
w	z' -Querverschiebung	Q_z	z' -Querkraft
ϕ_x	Verdrehung um x'	M_x	Torsionsmoment um x'
ϕ_y	Verdrehung um y'	M_x	Biegemoment um y'
ϕ_z	Verdrehung um z'	M_x	Biegemoment um z'

Die Knotenverschiebungen werden zu einem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\rho}$ und die Knotenkräfte zu einem Kraftvektor \mathbf{P} zusammengefaßt

$$\boldsymbol{\rho} = \{u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2 \ w_1 \ w_2 \ \phi_{x1} \ \phi_{x2} \ \phi_{y1} \ \phi_{y2} \ \phi_{z1} \ \phi_{z2}\} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{P} = \{N_1 \ N_2 \ Q_{y1} \ Q_{y2} \ Q_{z1} \ Q_{z2} \ M_{x1} \ M_{x2} \ M_{y1} \ M_{y2} \ M_{z1} \ M_{z2}\}. \quad (3.12)$$

3.1.2 Temperaturansatz für BITO

Für die Temperaturverteilung wird ein trilinearer Ansatz gemacht, d.h., daß die Temperatur linear in alle drei Koordinatenrichtungen x' , y' , z' variieren kann (Abbildung 3.2). Als Stützpunkte für diesen Ansatz werden pro Knoten die Temperaturen ΔT_i und die Temperaturgradienten ΔT_{y_i} und ΔT_{z_i} , $i = 1, 2$, angegeben. Die letzten sind folgendermaßen definiert

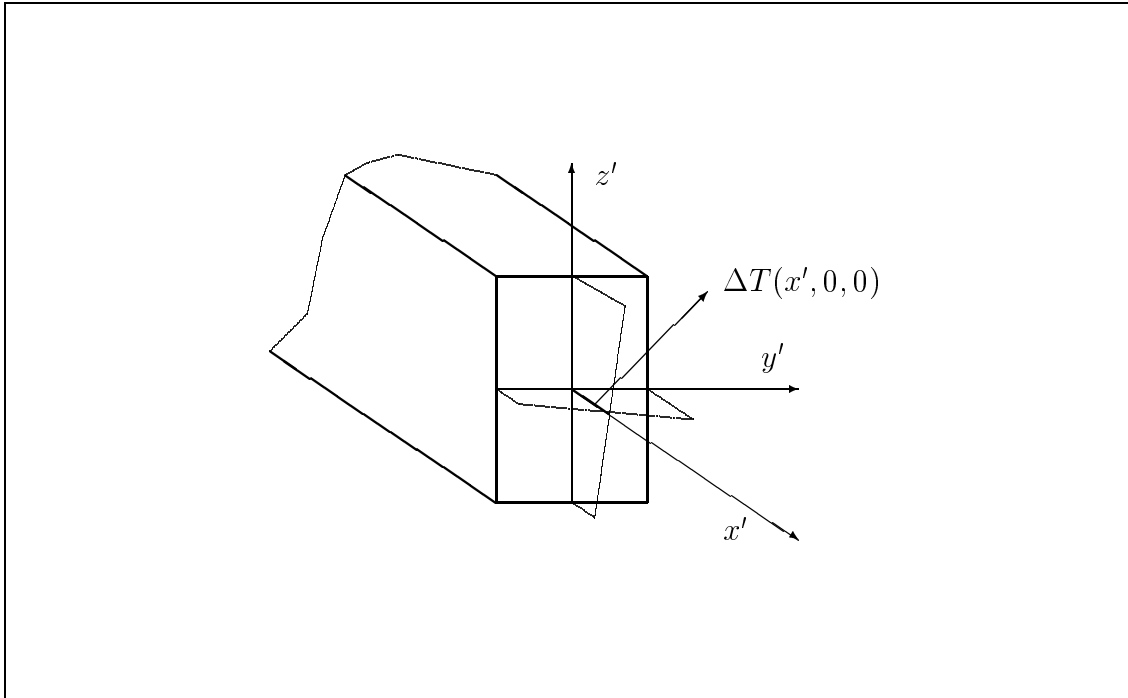


Abbildung 3.2: Temperaturverteilung am Querschnitt des Elements BITO

$$\begin{aligned}\Delta T_{y_i} &= \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right)_i \\ \Delta T_{z_i} &= \left(\frac{\partial T}{\partial z'} \right)_i,\end{aligned}\tag{3.13}$$

und sind positiv, wenn die Temperatur in die positive y' bzw. z' -Richtung ansteigt.

Damit läßt sich die Temperatur an einem Punkt des Elements aus der nachstehenden Gleichung bestimmen

$$\begin{aligned}
\Delta T = & \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} + \frac{\Delta T_2 - \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}}{\frac{l}{2}} x + \\
& \left(\frac{\Delta T_{y_1} + \Delta T_{y_2}}{2} + \frac{\Delta T_{y_2} - \frac{\Delta T_{y_1} + \Delta T_{y_2}}{2}}{\frac{l}{2}} x \right) y + \\
& \left(\frac{\Delta T_{z_1} + \Delta T_{z_2}}{2} + \frac{\Delta T_{z_2} - \frac{\Delta T_{z_1} + \Delta T_{z_2}}{2}}{\frac{l}{2}} x \right) z .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Diese Gleichung kann folgendermaßen in Matrixschreibweise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
\Delta T = & \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2x}{l} \quad 1 + \frac{2x}{l} \quad \left(1 - \frac{2x}{l} \right) y \quad \left(1 + \frac{2x}{l} \right) y \quad \left(1 - \frac{2x}{l} \right) z \quad \left(1 + \frac{2x}{l} \right) z \right] \cdot \\
& \{ \Delta T_1 \quad \Delta T_2 \quad \Delta T_{y_1} \quad \Delta T_{y_2} \quad \Delta T_{z_1} \quad \Delta T_{z_2} \}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

oder

$$\Delta T = \boldsymbol{\omega}_\eta \boldsymbol{\Delta T} .$$

Die Interpolationsfunktion $\boldsymbol{\omega}_\eta$ ist identisch mit der Interpolationsfunktion der Anfangsnormaldehnung η_{xx} (daher der Index η), da sie sich nur um den konstanten Faktor α unterscheiden

$$\eta_{xx} = \alpha \Delta T .$$

Multipliziert man den Vektor $\boldsymbol{\Delta T}$ der Temperaturstützpunkte mit α , erhält man den Vektor mit den Stützpunkten der Anfangsdehnungen $\boldsymbol{\eta}_I$. Damit schreibt man für die Normalkomponente der Anfangsdehnungen η_{xx}

$$\eta_{xx} = \boldsymbol{\omega}_\eta \boldsymbol{\eta}_I . \tag{3.16}$$

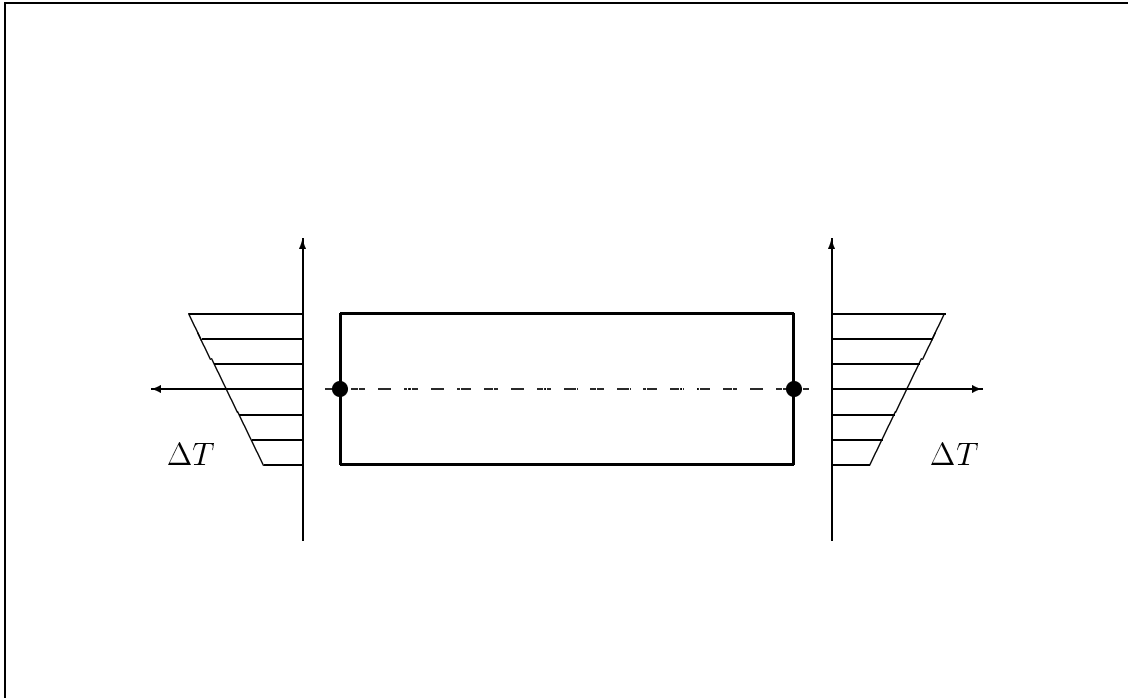


Abbildung 3.3: Temperaturgradienten an den Knoten des Elements BITO

3.2 Berechnung der Anfangslasten für BITO

3.2.1 Aufstellen der Dehnungsmatrix

Die Beziehung zwischen den Dehnungen $\boldsymbol{\gamma}$ und den Elementknotenverschiebungen $\boldsymbol{\rho}$ lautet:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\rho} . \quad (3.17)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ entspricht den Dehnungen infolge Einheitsverschiebungen der Knoten. Da die Vektoren $\boldsymbol{\gamma}$ und $\boldsymbol{\rho}$ der Dimension (3×1) , bzw. (12×1) sind, handelt es sich bei $\boldsymbol{\alpha}$ um eine (3×12) -Matrix.

Zum Aufstellen dieser Matrix werden die Dehnungen, die jede einzelne Knotenverschiebung bewirkt, wenn alle anderen Knotenverschiebungen Null sind, auf direktem Weg berechnet.

Dehnungen infolge Einheitsverschiebungen in Längsrichtung

1. $u_1 = 1, u_2 = 0$

Die Einheitsverschiebung $u_1 = 1$ bewirkt die Normaldehnung

$$\gamma_{xx} = -\frac{1}{l}$$

2. $u_1 = 0, u_2 = 1$

Analog bewirkt die Einheitsverschiebung $u_2 = 1$ die Normaldehnung

$$\gamma_{xx} = \frac{1}{l}$$

Die beiden Ausdrücke entsprechen den Elementen (1, 1) und (1, 2) der α -Matrix.

Dehnungen infolge Querverschiebungen und Verdrehungen der Knoten um Eins

Wie bereits erwähnt wurde, geht man von einer kubischen Verschiebungsverteilung in y' - und z' -Richtung aus.

$$v = a_0 + a_1 x' + a_2 x'^2 + a_3 x'^3 \quad (3.18)$$

bzw.

$$w = b_0 + b_1 x' + b_2 x'^2 + b_3 x'^3 . \quad (3.19)$$

Nach zweimaliger Differentiation nach x' und Einsetzen in Gleichung (3.5) erhält man für die Normaldehnung

$$\gamma_{xx} = -y'(2a_2 + 6a_3 x') - z'(2b_2 + 6b_3 x') . \quad (3.20)$$

Für die Berechnung der Koeffizienten a_i bzw. b_i stehen als Randbedingungen die Verschiebungen und Verdrehungen der Knoten zur Verfügung. Man erhält somit für jede Richtung ein Gleichungssystem aus vier Gleichungen mit vier unbekanntem Koeffizienten. Für die v -Verschiebungen lautet dieses

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_0 + \left(-\frac{l}{2}\right)a_1 + \left(\frac{l^2}{4}\right)a_2 + \left(-\frac{l^3}{8}\right)a_3 \\
v'_1 &= a_1 + 2\left(-\frac{l}{2}\right)a_2 + 3\left(\frac{l^2}{4}\right)a_3 \\
v_2 &= a_0 + \left(\frac{l}{2}\right)a_1 + \left(\frac{l^2}{4}\right)a_2 + \left(\frac{l^3}{8}\right)a_3 \\
v'_2 &= a_1 + 2\left(\frac{l}{2}\right)a_2 + 3\left(\frac{l^2}{4}\right)a_3 .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ganz analog gilt für die w -Richtung

$$\begin{aligned}
w_1 &= b_0 + \left(-\frac{l}{2}\right)b_1 + \left(\frac{l^2}{4}\right)b_2 + \left(-\frac{l^3}{8}\right)b_3 \\
w'_1 &= b_1 + 2\left(-\frac{l}{2}\right)b_2 + 3\left(\frac{l^2}{4}\right)b_3 \\
w_2 &= b_0 + \left(\frac{l}{2}\right)b_1 + \left(\frac{l^2}{4}\right)b_2 + \left(\frac{l^3}{8}\right)b_3 \\
w'_2 &= b_1 + 2\left(\frac{l}{2}\right)b_2 + 3\left(\frac{l^2}{4}\right)b_3 .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dabei sind v'_i, w'_i die Drehungen des i -ten Knoten um die z' - bzw. y' -Achse

$$\begin{aligned}
v'_i &= \left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right)_i = \phi_{z_i} \\
w'_i &= \left(\frac{\partial w}{\partial x'}\right)_i = \phi_{y_i}
\end{aligned}$$

Es wird ab jetzt nur das erste Gleichungssystem betrachtet, da die Lösung des zweiten ganz analog erfolgt.

$$\mathbf{1.} \quad v_1 = 1, \quad v'_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v'_2 = 0$$

Daraus ergibt sich für dieses Deformationsbild

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \\
a_1 &= -\frac{3}{2l} \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{2}{l^3}
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

und mit Gleichung (3.5) erhält man die Normaldehnung infolge der Einheitsverschiebung $v_1 = 1$:

$$\gamma_{xx} = \left(-\frac{12}{l^3} x' y' \right)
\tag{3.24}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist das Element (1,3) der α -Matrix

2. $v_1 = 0, v'_1 = 1, v_2 = 0, v'_2 = 0$

Für diesen Fall erhält man nach der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{l}{8} \\
a_1 &= -\frac{1}{4} \\
a_2 &= -\frac{1}{2l} \\
a_3 &= \frac{1}{l^2} .
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Die Dehnung infolge der Einheitsverschiebung $v'_1 = 1$ lautet:

$$\gamma_{xx} = \left[-\left(-\frac{1}{l} + \frac{6}{l^2} x' \right) y' \right]
\tag{3.26}$$

3. $v_1 = 0, v'_1 = 0, v_2 = 1, v'_2 = 0$

Dieses Deformationsbild liefert die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \\
a_1 &= \frac{3}{2l} \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= -\frac{2}{l^3}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

und damit ergibt sich für die Dehnung

$$\gamma_{xx} = \frac{12}{l^3} x' y' \tag{3.28}$$

4. $v_1 = 0$, $v_1' = 0$, $v_2 = 0$, $v_2' = 1$

Die Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{l}{8} \\
a_1 &= -\frac{1}{4} \\
a_2 &= \frac{1}{2l} \\
a_3 &= -\frac{1}{l^2}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

und damit liefert diese Biegeform die Dehnung

$$\gamma_{xx} = \left(-\frac{1}{l} + \frac{6}{l^2} x' \right) y' . \tag{3.30}$$

Die Lösung des zweiten Gleichungssystems (3.22) für die verschiedenen Biegedeformationen um die y' -Achse liefert die Elemente (1, 5), (1, 6) und (1, 9), (1, 10) der α -Matrix. Damit ist auch die erste Zeile dieser Matrix bestimmt. Die Elemente (1, 7) und (1, 8) sind mit Nullen belegt, da die Verdrillungen ϕ_{x_1} und ϕ_{x_2} keine Normaldehnungen bewirken. Wie man später sehen wird, ist es gar nicht nötig die zweite und dritte Zeile der Matrix, also die Einflüsse der Knotenverschiebungen auf die Schubdehnungen, zu berechnen.

3.2.2 Ermittlung der Anfangsspannungen

Die Beziehung zwischen Anfangsspannungen und Anfangsdehnungen ist durch

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\eta} \quad (3.31)$$

gegeben. Dabei hat der Vektor der Anfangsdehnungen die Komponenten

$$\boldsymbol{\eta} = \{ \eta_{xx} \ \eta_{xy} \ \eta_{zx} \} . \quad (3.32)$$

Da die Anfangsdehnungen nur durch die Temperaturbelastung hervorgerufen werden, lässt sich für die Normaldehnung schreiben:

$$\boldsymbol{\eta} = \{ \eta_{xx} \ 0 \ 0 \} \quad (3.33)$$

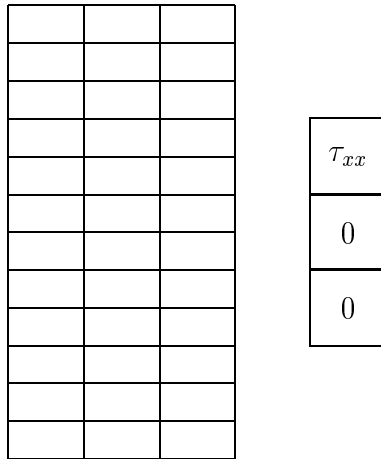
Damit erhält man für die Komponenten des Vektors der Anfangsspannungen:

$$\tau_{xx} = -E \eta_{xx}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Man betrachtet jetzt die Matrizenmultiplikation $\boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\tau}$



$$\alpha^t \quad \tau$$

Bei der Multiplikation werden die zweite und dritte Zeile der α -Matrix mit Nullen multipliziert. Das ist der Grund, warum auf die Berechnung derselben im letzten Abschnitt verzichtet wurde. Physikalisch bedeutet dies, daß die Temperaturdehnungen keinen Schubanteil haben.

3.2.3 Integration der Anfangslasten

Gleichung (2.16) kann nun folgendermaßen geschrieben werden

$$\mathbf{J} = -E \int_V \alpha^t \omega_\eta \boldsymbol{\eta}_I dV . \quad (3.34)$$

Die Elemente des Vektors $\boldsymbol{\eta}_I$ sind Konstanten und können deshalb aus dem Integral ausgeklammert werden

$$\mathbf{J} = -E \left(\int_V \alpha^t \omega_\eta dV \right) \boldsymbol{\eta}_I . \quad (3.35)$$

Integration über $dV = dA dx$ liefert

$$\mathbf{J} = -\frac{E}{2} \begin{bmatrix} -A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l}I_y & -\frac{2}{l}I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l}I_y & \frac{2}{l}I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l}I_z & -\frac{2}{l}I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l}I_z & \frac{2}{l}I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_{z_1} \\ \eta_{z_2} \\ \eta_{y_1} \\ \eta_{y_2} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Dabei bezeichnet A die Querschnittsfläche des Elements, I_y bzw. I_z die Trägheitsmomente des Querschnitts um die y' - bzw. z' -Achse. Nach Ausmultiplizieren erhält man die Anfangslasten

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ Q_{y_1} \\ Q_{y_2} \\ Q_{z_1} \\ Q_{z_2} \\ M_{x_1} \\ M_{x_2} \\ M_{y_1} \\ M_{y_2} \\ M_{z_1} \\ M_{z_2} \end{bmatrix} = -E \begin{bmatrix} -\frac{A}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ \frac{A}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ \frac{I_z}{l}(\eta_{y_1} - \eta_{y_2}) \\ \frac{I_z}{l}(-\eta_{y_1} + \eta_{y_2}) \\ \frac{I_y}{l}(\eta_{z_1} - \eta_{z_2}) \\ \frac{I_y}{l}(-\eta_{z_1} + \eta_{z_2}) \\ 0 \\ 0 \\ I_y \eta_{z_1} \\ -I_y \eta_{z_2} \\ I_z \eta_{y_1} \\ -I_z \eta_{y_2} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

M_{x_1} und M_{x_2} bezeichnen die Torsionsmomente an den Knoten. Es ist klar, daß es nicht möglich ist, mittels der zugelassenen Temperaturverteilung ein Torsionsmoment zu erzeugen.

Q_{y_1} und Q_{y_2} bzw. Q_{z_1} und Q_{z_2} bezeichnen die Querkräfte an den Knoten. Für eine symmetrische Temperaturverteilung entlang der y' - bzw. z' -Achse, also für $\eta_{y_1} = \eta_{y_2}$ bzw. $\eta_{z_1} = \eta_{z_2}$ sind die Querkräfte gleich Null, das Deformationsbild ist symmetrisch. Für eine antisymmetrische Temperaturverteilung $\eta_{y_1} = -\eta_{y_2}$ bzw. $\eta_{z_1} = -\eta_{z_2}$ erhält man ein antisymmetrisches Deformationsbild, und die damit verbundenen Querkräfte.

3.3 Korrektur der Spannungen

Die aus der Lösung des Gleichungssystems (2.1) erhaltenen Verschiebungen führen zur Berechnung von Spannungen, die nicht, wie im Kapitel 2 bereits erwähnt wurde, den tatsächlichen Spannungen entsprechen. Die Berechnung der wahren Spannungen, die für die Beanspruchung der Struktur maßgebend sind, erfolgt nach Gleichung(2.19),

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\eta} . \quad (3.38)$$

Im Fall des Elements *BITO* ist $\boldsymbol{\sigma}$ gleich der Normalspannung σ_{xx} , $\boldsymbol{\gamma}$ gleich der Normaldehnung γ_{xx} , $\boldsymbol{\eta}$ gleich der Anfangsnormaldehnung η_{xx} , $\boldsymbol{\kappa}$ gleich dem Elastizitätsmodul E . Die Schubspannungen σ_{xy} und σ_{zx} sind die wahren Spannungen und müssen deshalb nicht korrigiert werden. Damit wird Gleichung (3.38) zu

$$\sigma_{xx} = E \gamma_{xx} - E \eta_{xx} . \quad (3.39)$$

So erfolgt z.B. die Korrektur der Normalspannung an der oberen y' -Randfaser am linken Ende des Elements durch Subtrahieren des Ausdruckes

$$E \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\eta}} (x' = l, y' = +y_{+RF}, z' = 0) \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{I}}$$

von den über die totalen Dehnungen berechneten Spannung $E \cdot \gamma_{xx}$.

Kapitel 4

Vorstellung von Temperaturberechnungen unter Verwendung des Elements BITO

4.1 Beidseitig eingespannter Balken unter konstanter Temperaturänderung

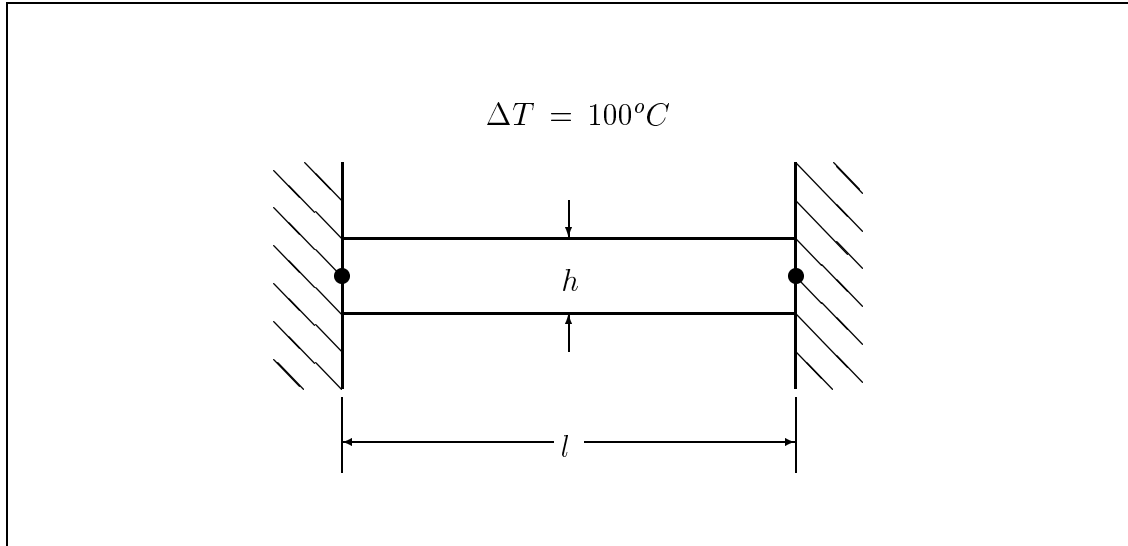


Abbildung 4.1: Beidseitig eingespannter Balken bei gleichmäßiger Temperaturänderung

Es wird ein beidseitig eingespannter Balken unter gleichmäßiger Temperaturänderung ΔT betrachtet (Abbildung 4.1). Da jede Knotenverschiebung unterdrückt wird, entstehen im Element Temperaturspannungen, die sich nach der Theorie aus der Formel

$$\sigma_{xx} = \pm \alpha E \Delta T \quad (4.1)$$

berechnen lassen, wobei das '+'-Zeichen bei Abkühlung und das (-)-Zeichen bei Erwärmung gültig ist.

Ist das Material Aluminium, so hat das Elastizitätsmodul E den Wert

$$E = 700000 \text{ kp/cm}^2$$

und der Ausdehnungskoeffizient α den Wert

$$\alpha = 0.22 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ C}.$$

Es wird eine Temperaturänderung von $100^\circ C$ über der Temperatur bei der der Körper spannungslos ist angenommen. Die Eingabe der Temperaturbelastung für die Knoten lautet dann:

Knoten	ΔT	ΔT_y	ΔT_z
1	100	0	0
2	100	0	0

Tabelle (4.1) zeigt die Übereinstimmung der Ergebnissen aus *DEMEL* mit der aus Formel (4.1).

Knoten	Normalspannungen [kp/cm^2]		rel. Fehler [%]
	σ_{xx} -Theorie	σ_{xx} - <i>DEMEL</i>	
1	1540	1540	0
2	1540	1540	0

Tabelle 4.1: Normalspannungen für einen beidseitig eingespannten Balken bei gleichmäßiger Temperaturänderung

4.2 Balken mit Temperaturgradienten

In diesem Beispiel wird die Rechenvorschrift mit Temperaturgradienten getestet. Es handelt sich wieder um einen starr eingespannten Balken aus Aluminium, wie in Abbildung 4.1 zu sehen ist, jedoch mit einer linear variierenden Temperaturverteilung in y' -Richtung. Die Temperaturverteilung ist unabhängig von der Koordinate x' , d.h. das Temperaturprofil ist in jedem Querschnitt das gleiche. Das Trägheitsmoment des Querschnitts um die z' -Achse wird mit $I_z = 1.333 cm^4$ und die Dicke des Balkens in y' -Richtung mit $h = 1 cm$ angenommen. Die analytische Lösung für die Normalspannungen in Abhängigkeit von der Koordinate y' (Abstand vom neutralen Faser) lautet

$$\sigma = -\alpha E [\Delta T + y' \Delta T_y] \quad (4.2)$$

Die Eingabedaten für die Temperaturen an den Knoten sind

Knoten	ΔT	ΔT_y	ΔT_z
1	100	1	0
2	100	1	0

wobei der Temperaturgradient ΔT_y in $[^\circ C/cm]$ angegeben wird. Den Vergleich zwischen den Spannungen aus der Theorie und *DEMEL* liefert Tabelle (4.2).

Knoten	Normallspannungen bei $y' = 0$ [kp/cm^2]		rel. Fehler [%]
	σ_{xx} -Theorie	σ_{xx} - <i>DEMEL</i>	
1	1540.0	1540.0	0.0
2	1540.0	1540.0	0.0
	Normallspannungen bei $y = \pm h$ [kp/cm^2]		
1	1555.4	1555.4	0.0
2	1555.4	1555.4	0.0

Tabelle 4.2: Ergebnisse aus dem Beispiel 'Balken mit Temperaturgradienten'

Wie man sieht, stimmen die Ergebnisse aus *DEMEL* mit den theoretischen Werten überein. Für das Einspannmoment M_R lautet die analytische Lösung

$$M_{R_z} = E I_z \alpha \Delta T_y \quad (4.3)$$

und mit den angenommenen Elementdaten ergibt sich

$$M_{R_z} = 20.528 \text{ kp cm.}$$

Dieses Ergebnis liefert auch *DEMEL*.

Man erweitert das Beispiel, indem man den gleichen Balken gelenkig lagert. Am Knoten 2 wird außerdem die Längsverschiebung erlaubt. Material und Belastung bleiben jedoch gleich. Da die Drehung der Knoten und die Verlängerung nicht mehr verhindert wird, dehnt sich das Element spannungsfrei. Auch in diesem Fall liefert *BITO* das erwartete Ergebnis.

4.3 Einseitig eingespannter Balken mit Temperaturgradienten

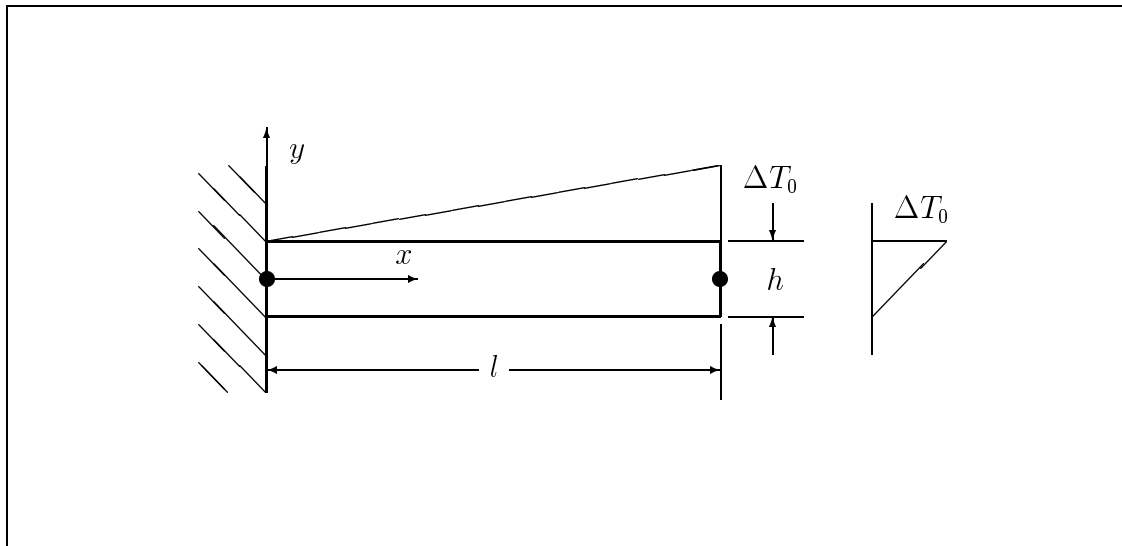


Abbildung 4.2: Einseitig eingespannter Balken mit bilinearer Temperaturverteilung

Abbildung 4.2 zeigt einen einseitig eingespannten Balken mit einem linearen Temperaturverlauf, sowohl in Längs- wie auch in Querrichtung: am linken Ende ($x = 0$, Knoten 1) und am unteren Rand des freien Endes ($x = l$, $y = -h/2$) ist die Temperatur Null, während am oberen Rand $y = h/2$ die Temperatur ΔT_0 herrscht.

Die Querverschiebung v am freien Ende des Balkens für diese Temperaturverteilung, läßt sich mit dem Einheitslastgesetz berechnen. Für eine an diesem Punkt angreifende und nach unten gerichtete Einheitskraft ergibt sich für die Verschiebung in y -Richtung (siehe [4])

$$v_2 = \int_{x=0}^{x=l} M \frac{\alpha \Delta T}{h} dx , \quad (4.4)$$

wobei M das Biegemoment infolge der Einheitslast ist. An einem Punkt x berechnet sich dieses aus der nachstehenden Gleichung

$$M = 1 (l - x) . \quad (4.5)$$

Die Temperatur ergibt sich aus

$$\Delta T = \frac{\Delta T_0}{l} x . \quad (4.6)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (4.2) und (4.3) in (4.1) und anschließender Integration ergibt sich für die Verschiebung am freien Ende ($x = l$)

$$v_2 = \frac{\alpha \Delta T_0 l^2}{6 h} . \quad (4.7)$$

Für dieses Beispiel sind folgende Werte gegeben

$$h = 5 \text{ cm}$$

$$l = 50 \text{ cm}$$

$$\Delta T_0 = 100^\circ C$$

Damit lautet die Temperatureingabe in [$^\circ C$], bzw. [$^\circ C/cm$]

Knoten	ΔT	ΔT_y	ΔT_z
1	0	0	0
2	50	20	0

Gleichung (4.4) und *DEMEL* liefern für die Verschiebung den gleichen Wert

$$v_2 = 0.18333 \text{ cm} .$$

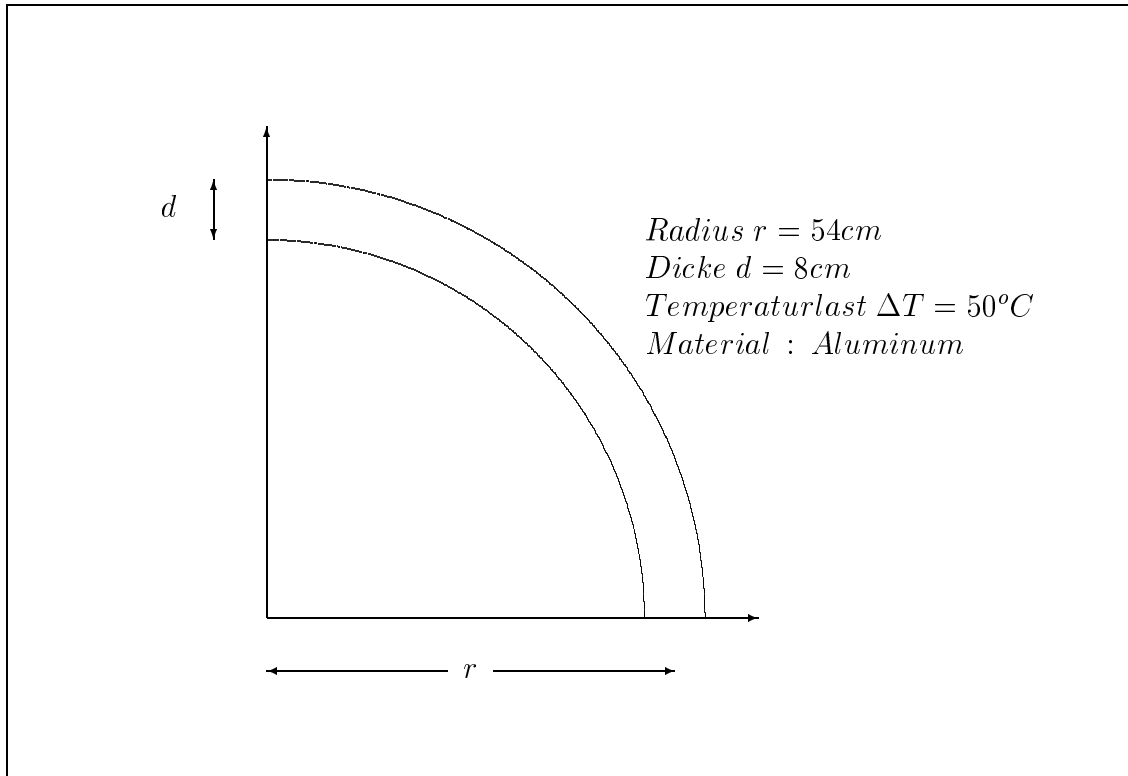


Abbildung 4.3: Kreisring unter konstanter Temperaturbelastung

4.4 Kreisring

Abbildung 4.3 zeigt einen 90° -Abschnitt aus einem Kreisring bei dem der Querschnitt viel kleiner als der Radius ist. Der Ring wird mit einem konstanten Temperaturfeld belegt. Vernachlässigt man die Deformation des Querschnitts aufgrund der Temperaturänderung, so gilt für die Radialverschiebung an jedem Punkt

$$u = \epsilon_{tt} r. \quad (4.8)$$

Dabei ist ϵ_{tt} die Tangentialdehnung, die sich aus der Formel

$$\epsilon_{tt} = \alpha \Delta T$$

berechnen läßt.

Dieser Kreisring kann mit mehreren *BITOs* idealisiert werden. In den hier angeführten Beispielen wird der Ring gleichmäßig durch 8 bzw. 40 *BITOs* angenähert (Abbildung 4.4). Die Temperaturverteilung wird mit $\Delta T = 50^\circ C$ angenommen und jedem Knoten zugeordnet. Beide Idealisierungen liefern für die Radialverschiebung den exakten theoretischen Wert, der für die angegebenen Daten gleich 0.0594 cm ist. Für die Tangentialverschiebung erhält man, wie erwartet den Wert Null.

Gleichzeitig erlaubt dieses Beispiel die Überprüfung der Richtigkeit der Rechnung bei Benutzung von Sonderkoordinatensystemen für die Freiheitsgrade. Die Verschiebungen der Knoten werden nicht in den Richtungen des Basis-Koordinatensystems, sondern in radialer und tangentialer Richtung ausgegeben. Diese Ausnahme-Koordinatensysteme sind ebenfalls in Abbildung 4.4(a) dargestellt.

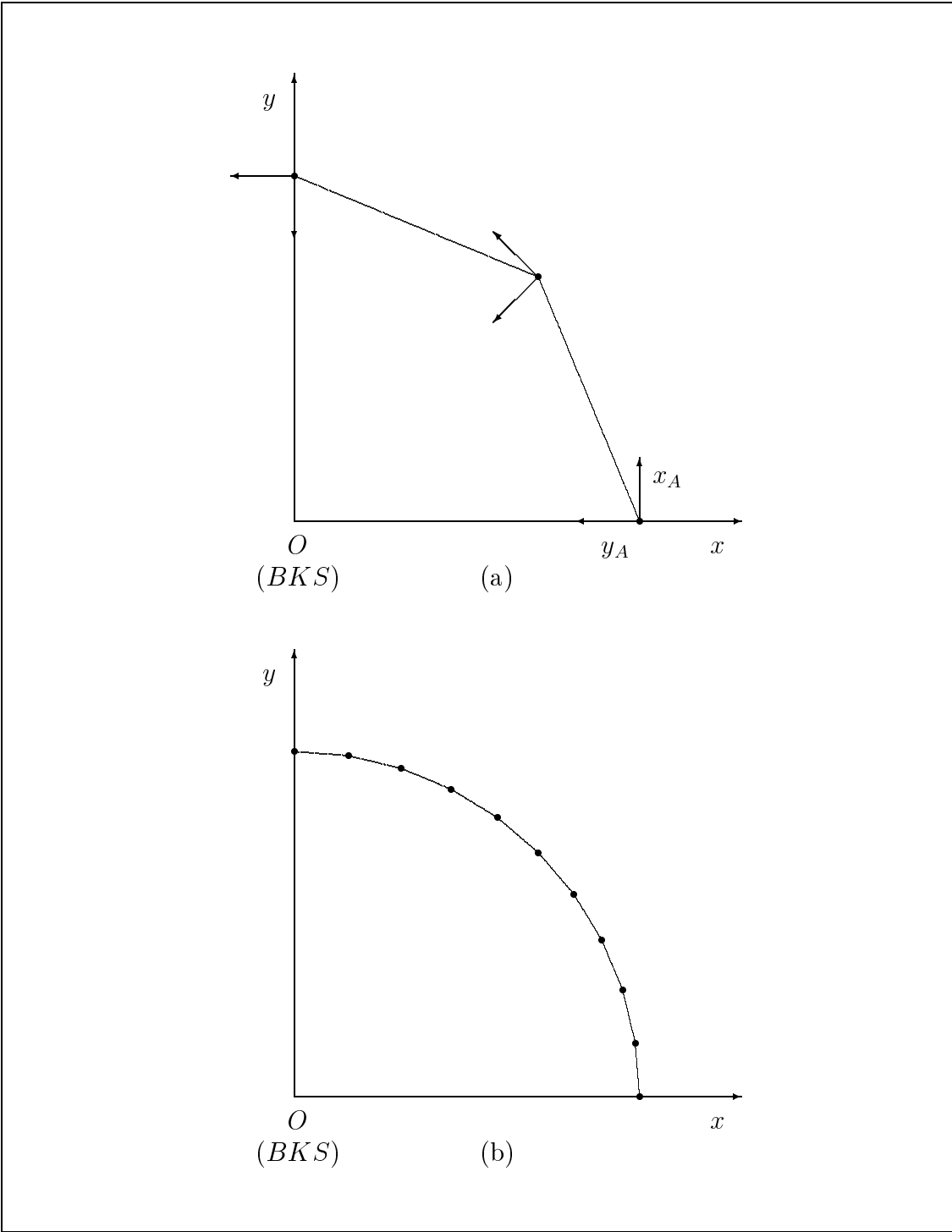


Abbildung 4.4: Idealisierung⁴¹ eines Kreisringes mit BITOs

Kapitel 5

Temperaturerweiterung für das Ringelement TORU

5.1 Das Element TORU

5.1.1 Rotationssymmetrische Strukturen unter rotationssymmetrischen Belastungen

Die Untersuchung achsensymmetrischer Strukturen kann durch eine gewöhnliche dreidimensionale Analyse durchgeführt werden. Dazu werden die üblichen Volumenelemente verwendet. Diese Vorgehensweise ist allerdings nicht effizient, da sie nicht die Vereinfachungen, die sich aus der Symmetrie der Struktur und eventuell der Belastung ergeben, berücksichtigt. Dadurch ergibt sich eine Inflation der Anzahl der Unbekannten und eine Verkomplizierung des Elementnetzes.

Wird ein rotationssymmetrischer Körper einer rotationssymmetrischen Belastung ausgesetzt, so sind Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen ebenfalls rotationssymmetrisch. Das Problem reduziert sich dann auf ein zweidimensionales: Wählt man ein Zylinderkoordinatensystem $(O r z \varphi)$, wobei die z -Achse mit der Symmetrieachse identisch ist, r die radiale Richtung und φ den Winkel bezeichnet, so läßt sich ein Punkt durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \{r z\} \quad (5.1)$$

hinreichend beschreiben, da der Zustand unabhängig von der Koordinate φ ist und somit die Punkte auf dem Umfang nicht unterscheidbar sind. Aus demselben Grund reduziert sich der Verschiebungsvektor auf

$$\mathbf{u} = \{u v\} , \quad (5.2)$$

wobei u die radiale und v die axiale Komponenten ist.

Lediglich die Dehnungen und Spannungen unterscheiden sich vom zweidimensionalen Fall: eine radiale Translation führt zu Verzerrungen und Spannungen in Umfangsrichtung. Aus diesem Grund haben der Dehnungs- und Spannungsvektor jeweils vier Komponenten, die drei des ebenen Falles und eine für die Umfangsrichtung, die hier mit t bezeichnet wird

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{rr} \gamma_{zz} \gamma_{tt} \gamma_{rz}\} \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{rr} \sigma_{zz} \sigma_{tt} \sigma_{rz}\} . \quad (5.4)$$

Die Beziehung zwischen den Dehnungen und den Verschiebungen an einem Punkt des Körpers lautet:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{rr} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{tt} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (5.6)$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix für homogenes Material $\boldsymbol{\kappa}$ erhält man aus der des zweidimensionalen Falles unter Berücksichtigung der zusätzlichen Komponente der Dehnungen und Spannungen in tangentialer Richtung γ_{tt} bzw. σ_{tt}

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{\nu} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Für den Fall daß die Belastung nicht achsensymmetrisch ist, kann dieses Konzept erweitert werden, indem man die Lasten in Fourier-Reihen entwickelt, solange der Aufwand dafür vertretbar ist. Die genaue Vorgehensweise soll jedoch hier nicht weiter erläutert werden, da in dieser Arbeit nur der Fall rotationssymmetrischer Körper unter rotationssymmetrischen Belastungen behandelt wird.

5.1.2 Geometrie und Verschiebungsansatz für TORU

Ein Element des FEM-Programmsystems *COSA-DEMEL* daß für solche Berechnungen konzipiert wurde, ist das Volumenelement *TORU*. Es handelt

sich um einen Kreisring mit dreiecksförmigen Querschnitt. Die Anzahl der Knoten ist sechs. Diese sind die Eckpunkte und die Mittelpunkte der Seiten des Querschnitts. Für ein kartesisches Koordinatensystem mit Ordinatenachse in radialer Richtung und Abszissenachse auf der Symmetrieachse des Elements, lauten die Ortsvektoren $\boldsymbol{\psi}_i$ der Knoten

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_1 &= \{r_1 z_1\} \\ \boldsymbol{\psi}_2 &= \{r_2 z_2\} \\ \boldsymbol{\psi}_3 &= \{r_3 z_3\}\end{aligned}\tag{5.8}$$

für die Eckknoten, und

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_4 &= \{r_1 z_1\} \\ \boldsymbol{\psi}_5 &= \{r_2 z_2\} \\ \boldsymbol{\psi}_6 &= \{r_3 z_3\}\end{aligned}\tag{5.9}$$

für die Mittelknoten. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_4 &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_3) \\ \boldsymbol{\psi}_5 &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_3 + \boldsymbol{\psi}_1) \\ \boldsymbol{\psi}_6 &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2)\end{aligned}\tag{5.10}$$

Für jeden Knoten sind folgende Freiheitsgrade definiert:

u	Verschiebung in radiale Richtung	R	Kraft in radiale Richtung
v	Verschiebung in axiale Richtung	Z	Kraft in axiale Richtung

Die Knotenverschiebungen werden in einem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\rho}$ und die Kräfte in einem Kraftvektor \mathbf{P} zusammengefaßt:

$$\boldsymbol{\rho} = \{u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 u_4 v_4 u_5 v_5 u_6 v_6\}\tag{5.11}$$

$$\mathbf{P} = \{R_1 Z_1 R_2 Z_2 R_3 Z_3 R_4 Z_4 R_5 Z_5 R_6 Z_6\}\tag{5.12}$$

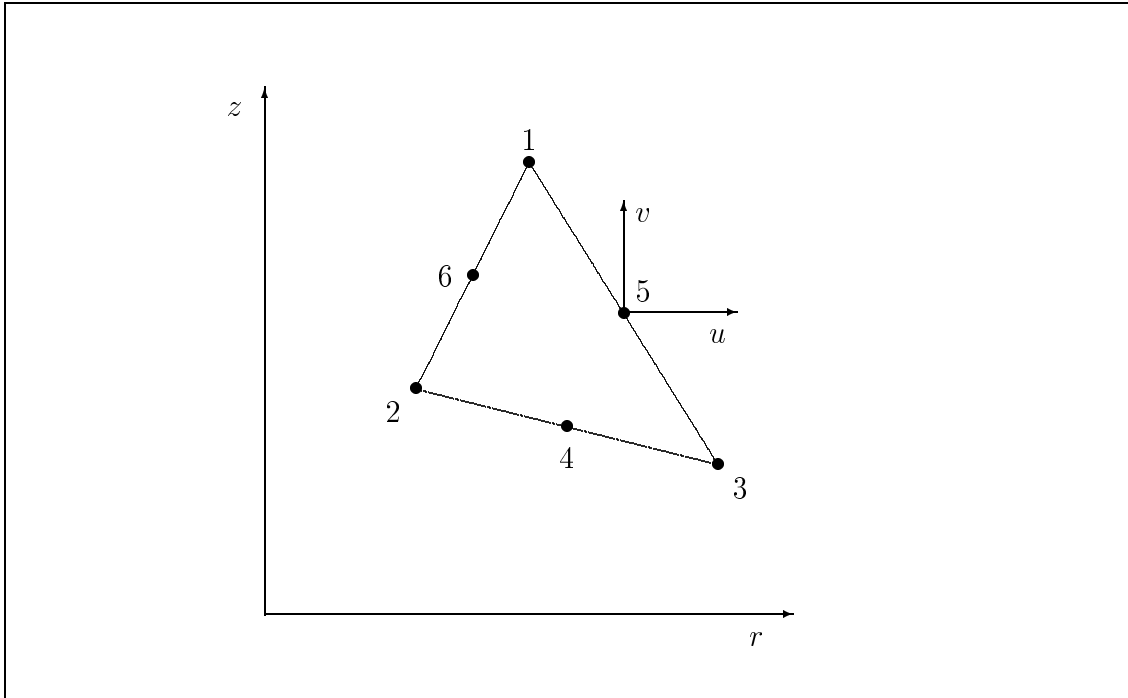


Abbildung 5.1: Freiheitsgrade für das Element TORU

Für die Interpolation der Verschiebungen und der Dehnungen erweist sich die Benutzung von natürlichen Koordinaten im Dreiecksbereich

$$\zeta = \{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3\} \quad (5.13)$$

als nützlich. Diese sind folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z_1/h_\alpha \\ \zeta_2 &= z_2/h_\beta \\ \zeta_3 &= z_3/h_\gamma . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Hierbei sind z_1, z_2, z_3 die dimensionsbehafteten natürlichen Koordinaten, die von den Seiten aus in Richtung der Höhen des Dreiecks gehen, und $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ die Längen der Höhen (Abbildung 5.3). Da man sich in der Ebene befindet, sind die drei natürlichen Koordinaten nicht unabhängig voneinander. Wie man leicht erkennen kann, gilt

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1. \quad (5.15)$$

Die Beziehung zwischen rechtwinkligen Koordinaten und natürlichen Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} r &= \zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 \\ z &= \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \zeta_3 z_3. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die obenstehenden Gleichungen mit Gleichung (5.15) in ein Gleichungssystem zusammengefaßt, liefern durch Inversion die Beziehung zwischen den natürlichen und den kartesischen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} r_2 z_3 - r_3 z_2 & z_2 - z_3 & r_3 - r_2 \\ r_3 z_1 - r_1 z_3 & z_3 - z_1 & r_1 - r_3 \\ r_1 z_2 - r_2 z_1 & z_1 - z_2 & r_2 - r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Mit den Abkürzungen

$$2A_{jk} = r_j z_k - r_k z_j$$

$$b_i = z_j - z_k$$

$$a_i = r_k - r_j$$

$$2A = a_j b_i - a_i b_j$$

kann man Gleichung (5.17) kompakter schreiben

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Dabei bedeutet A die Gesamtfläche des Dreiecks, A_{ij} die Flächen der Dreiecke, die durch den Punkt ζ und den Eckknoten des Elements definiert sind (siehe [7]).

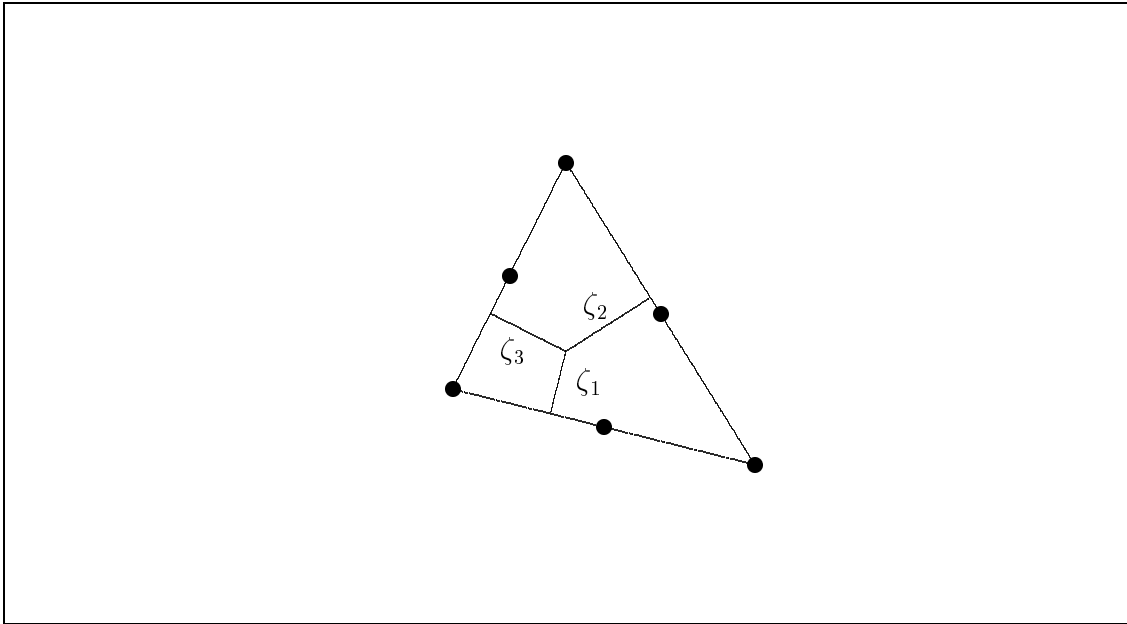


Abbildung 5.2: Dimensionslose Dreieckskoordinaten

Da die Anzahl der Knoten sechs ist, wird eine quadratische Interpolationsfunktion für die Verschiebungen möglich. Diese lautet in natürlichen Koordinaten

$\omega =$

$$\left[\zeta_1(2\zeta_1 - 1) \mathbf{I}_2 \quad \zeta_2(2\zeta_2 - 1) \mathbf{I}_2 \quad \zeta_3(2\zeta_3 - 1) \mathbf{I}_2 \quad 4\zeta_2\zeta_3 \mathbf{I}_2 \quad \zeta_3\zeta_1 \mathbf{I}_2 \quad 4\zeta_1\zeta_2 \mathbf{I}_2 \right] \quad (5.19)$$

5.1.3 Temperaturansatz für TORU

Für die Temperaturverteilung am Querschnitt wird ein linearer Ansatz gemacht. Wenn $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3$ die Temperaturen an den drei Eckknoten des Elements sind, dann läßt sich die Temperatur an dem Punkt mit den Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ aus der nachstehenden Formel berechnen

$$\Delta T = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Die Anfangsdehnungen lassen sich ebenfalls durch eine lineare Interpolationsfunktion ω_η aus den Werten der Anfangsdehnungen an den Knoten η_I berechnen

$$\eta = \omega_\eta \eta_I \quad (5.21)$$

mit η_I

$$\eta_I = \{ \eta_{rr_1} \eta_{zz_1} \eta_{tt_1} \eta_{rz_1} \eta_{rr_2} \eta_{zz_2} \eta_{tt_2} \eta_{rz_2} \eta_{rr_3} \eta_{zz_3} \eta_{tt_3} \eta_{rz_3} \} \quad (5.22)$$

wobei die Indizes 1, 2, 3 für die Eckpunkte des Querschnitts stehen. Da auch bei diesem Element nur Anfangsdehnungen, die durch Temperaturbelastung entstehen berücksichtigt werden, sind die Anfangsschubdehnungen überall Null. Für homogenes Material wird Gleichung (5.22) zu

$$\eta_I = \alpha \{ \Delta T_1 \Delta T_1 \Delta T_1 0 \Delta T_2 \Delta T_2 \Delta T_2 0 \Delta T_3 \Delta T_3 \Delta T_3 0 \} \quad (5.23)$$

Für die Interpolationsfunktion ω_η kann man also schreiben

$$\omega_\eta = [\zeta_1 \mathbf{I}_4 \quad \zeta_2 \mathbf{I}_4 \quad \zeta_3 \mathbf{I}_4], \quad (5.24)$$

wobei \mathbf{I}_4 für die Einheitsmatrix der Dimension (4×4) steht.

5.2 Berechnung der Anfangslasten

5.2.1 Aufstellen der Dehnungs- und Anfangsspannungsmatrizen

Die Berechnung der Anfangslasten erfolgt wieder nach Gleichung (2.16). Dazu werden zuerst die Matrizen α und τ aufgestellt.

Die Matrix α entspricht den Dehnungen infolge Einheitsverschiebungen der Knoten. Mit den Gleichungen

$$\gamma = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (5.25)$$

und

$$\mathbf{u} = \omega \rho \quad (5.26)$$

erhält man

$$\alpha = \mathbf{D} \omega \quad (5.27)$$

Für die Anfangsspannungen τ an einem Punkt des Körpers gilt Gleichung (2.7).

Mit Gleichung

$$\eta = \omega_\eta \eta_I$$

erhält man

$$\tau = -\kappa \omega_\eta \eta_I. \quad (5.28)$$

Somit ergibt sich für die Anfangslasten \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = - \int_V (\mathbf{D} \omega)^t (\kappa \omega_\eta \eta_I) dV. \quad (5.29)$$

Die Komponenten des Vektors η_I sind Konstanten und können vor das Integral ausgezogen werden

$$\mathbf{J} = - \int_V (\mathbf{D} \omega)^t (\kappa \omega_\eta) dV \eta_I \quad (5.30)$$

Für das Differential dV kann man schreiben $dV = r d\phi dA$. Die Integration wird über einen Winkel $\phi = 1$ durchgeführt. Die Gleichung für die Anfangslasten wird also zu

$$\mathbf{J} = - \int_{\phi=0}^{\phi=1} \int_{dA} (\mathbf{D} \boldsymbol{\omega})^t (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\omega}_\eta) dV_{\eta_I} \quad (5.31)$$

Nach Ausmultiplizieren von $\mathbf{D} \boldsymbol{\omega}$ und Transponieren erhält man

$$(\mathbf{D} \boldsymbol{\omega})^t =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_1(2\zeta_1 - 1)) & 0 & \frac{1}{r} (\zeta_1(2\zeta_1 - 1)) & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_1(2\zeta_1 - 1)) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_1(2\zeta_1 - 1)) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_1(2\zeta_1 - 1)) \\ \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_2(2\zeta_2 - 1)) & 0 & \frac{1}{r} (\zeta_2(2\zeta_2 - 1)) & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_2(2\zeta_2 - 1)) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_2(2\zeta_2 - 1)) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_2(2\zeta_2 - 1)) \\ \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_3(2\zeta_3 - 1)) & 0 & \frac{1}{r} (\zeta_3(2\zeta_3 - 1)) & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_3(2\zeta_3 - 1)) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (\zeta_3(2\zeta_3 - 1)) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_3(2\zeta_3 - 1)) \\ \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_2\zeta_3) & 0 & \frac{1}{r} (4\zeta_2\zeta_3) & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_2\zeta_3) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_2\zeta_3) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_2\zeta_3) \\ \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_3\zeta_1) & 0 & \frac{1}{r} (4\zeta_3\zeta_1) & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_3\zeta_1) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_3\zeta_1) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_3\zeta_1) \\ \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_1\zeta_2) & 0 & \frac{1}{r} (4\zeta_1\zeta_2) & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_1\zeta_2) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} (4\zeta_1\zeta_2) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} (4\zeta_1\zeta_2) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Nun werden die Differentiale berechnet. Mit den Gleichungen (5.18) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r}(\zeta_i(2\zeta_i - 1)) = \frac{b_i}{2A}(4\zeta_i - 1) \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\zeta_i(2\zeta_i - 1)) = \frac{a_i}{2A}(4\zeta_i - 1) \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(4\zeta_i\zeta_j) = \frac{1}{2A}(4b_i\zeta_j + 4b_j\zeta_i) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(4\zeta_i\zeta_j) = \frac{1}{2A}(4a_i\zeta_j + 4a_j\zeta_i) \quad (5.36)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (5.33) bis (5.36) in Gleichung (5.37) ergibt sich

$$(D\omega)^t =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{b_1}{2A}(4\zeta_1 - 1) & 0 & \frac{1}{r}\zeta_1(2\zeta_1 - 1) & \frac{a_1}{2A}(4\zeta_1 - 1) \\ 0 & \frac{a_1}{2A}(4\zeta_1 - 1) & 0 & \frac{b_1}{2A}(4\zeta_1 - 1) \\ \frac{b_2}{2A}(4\zeta_2 - 1) & 0 & \frac{1}{r}\zeta_2(2\zeta_2 - 1) & \frac{a_2}{2A}(4\zeta_2 - 1) \\ 0 & \frac{a_2}{2A}(4\zeta_2 - 1) & 0 & \frac{b_2}{2A}(4\zeta_2 - 1) \\ \frac{b_3}{2A}(4\zeta_3 - 1) & 0 & \frac{1}{r}\zeta_3(2\zeta_3 - 1) & \frac{a_3}{2A}(4\zeta_3 - 1) \\ 0 & \frac{a_3}{2A}(4\zeta_3 - 1) & 0 & \frac{b_3}{2A}(4\zeta_3 - 1) \\ \frac{4}{2A}(b_3\zeta_2 + b_2\zeta_3) & 0 & 4\zeta_2\zeta_3 & \frac{4}{2A}(a_3\zeta_3 + a_2\zeta_2) \\ 0 & \frac{4}{2A}(a_3\zeta_2 + a_2\zeta_3) & 0 & \frac{4}{2A}(b_3\zeta_2 + b_2\zeta_3) \\ \frac{4}{2A}(b_1\zeta_3 + b_3\zeta_1) & 0 & 4\zeta_3\zeta_1 & \frac{4}{2A}(a_1\zeta_3 + a_3\zeta_1) \\ 0 & \frac{4}{2A}(a_1\zeta_3 + a_3\zeta_1) & 0 & \frac{4}{2A}(b_1\zeta_3 + b_3\zeta_1) \\ \frac{4}{2A}(b_2\zeta_1 + b_1\zeta_2) & 0 & 4\zeta_1\zeta_2 & \frac{4}{2A}(a_2\zeta_1 + a_1\zeta_2) \\ 0 & \frac{4}{2A}(a_2\zeta_1 + a_1\zeta_2) & 0 & \frac{4}{2A}(b_2\zeta_1 + b_1\zeta_2) \end{array} \right] \quad (5.37)$$

Die Multiplikation $\kappa\omega_\eta$ liefert

$$\kappa\omega_\eta = [\zeta_1 \kappa \zeta_2 \kappa \zeta_3 \kappa] \quad (5.38)$$

Weiterhin ergibt sich aus der Multiplikation $(\mathbf{D} \boldsymbol{\omega})^t (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\omega}_\eta) r$ eine (12×12) -Matrix, die in vierspaltigen Abschnitten auf den nächsten drei Seiten aufgeführt wird.

Kapitel 6

Vorstellung von Temperaturberechnungen unter Verwendung des Elements TORU

6.1 Rechenbeispiele zum Vergleich mit den analytischen Lösungen

6.1.1 Kreisring

Als erstes einfaches Testbeispiel wurde der Kreisring von Kapitel 4, Abschnitt 4.4 gewählt. Beim Testen des Elements *BITO* wurden mittels dieses Kreisringes die theoretische und die approximierende Lösung für die Radialverschiebungen verglichen. Dieser Vergleich wäre auch für eine Idealisierung mit *TORUs* möglich, wobei der gleiche Wert nur am Mittelpunkt des Querschnitts zu erwarten ist, da das *TORU* auch die Deformation des Querschnitts berücksichtigt. Das Idealisierungsmodell, das in Abbildung 6.1(a) zu sehen ist, liefert für den Mittelpunkt des Querschnitts bei einer Temperaturänderung von 50°C für die Radialverschiebung den Wert $u = 0.0595\text{ cm}$. Dieser stimmt mit dem Wert aus Gleichung (4.4) überein.

Als weiteren Schritt wird am gleichen Ring ein lineares Temperaturfeld, bestimmt durch die Temperaturen ΔT_i an der Innenseite des Ringes und ΔT_a an der Außenwand, aufgebracht. Da die mittlere Temperaturänderung weiterhin 50°C beträgt, kann man für die Radialverschiebung am Mittelpunkt des Querschnitts den gleichen Wert wie bei der konstanten Temperaturänderung erwarten. Das Netzmodell aus Abbildung 6.1 liefert für diesen Punkt (Knoten 12) den Wert $u = 0.5949638\text{ cm}$.

Für diesen Temperaturverlauf kann man weiterhin überprüfen ob das Deformationsbild des Querschnitts zumindest qualitativ richtig ist. Für die Knoten 11, 12, 13 kann man z.B. erwarten, daß sie sich aus Symmetriegründen in axialer Richtung nicht verschieben. Ebenso aus Symmetriegründen müssen die z -Verschiebungen der Knoten 1 und 21, 2 und 22, 3 und 23 betragsmäßig gleich groß und mit unterschiedlichen Vorzeichen sein. Die r -Verschiebungen sollten auch bezüglich der Vorzeichen übereinstimmen. Tabelle 6.1 zeigt, daß alle diese, aus der Symmetrie der Struktur und der Belastung entstandenen Bedingungen, vom idealisierten Modell eingehalten werden.

Eine andere Idealisierungsvariante des Kreisringes ist in Abbildung 6.1(b) dargestellt. Trotz der größeren Anzahl an Elementen zeigt das unsymmetrische Netz seine Nachteile. Die Axialverschiebungen an den Knoten 21, 22, 23, 24 und 25, die normalerweise den Wert Null haben sollen, sind um sieben Zehnerpotenzen größer als bei dem Netz von Abbildung 6.1(a).

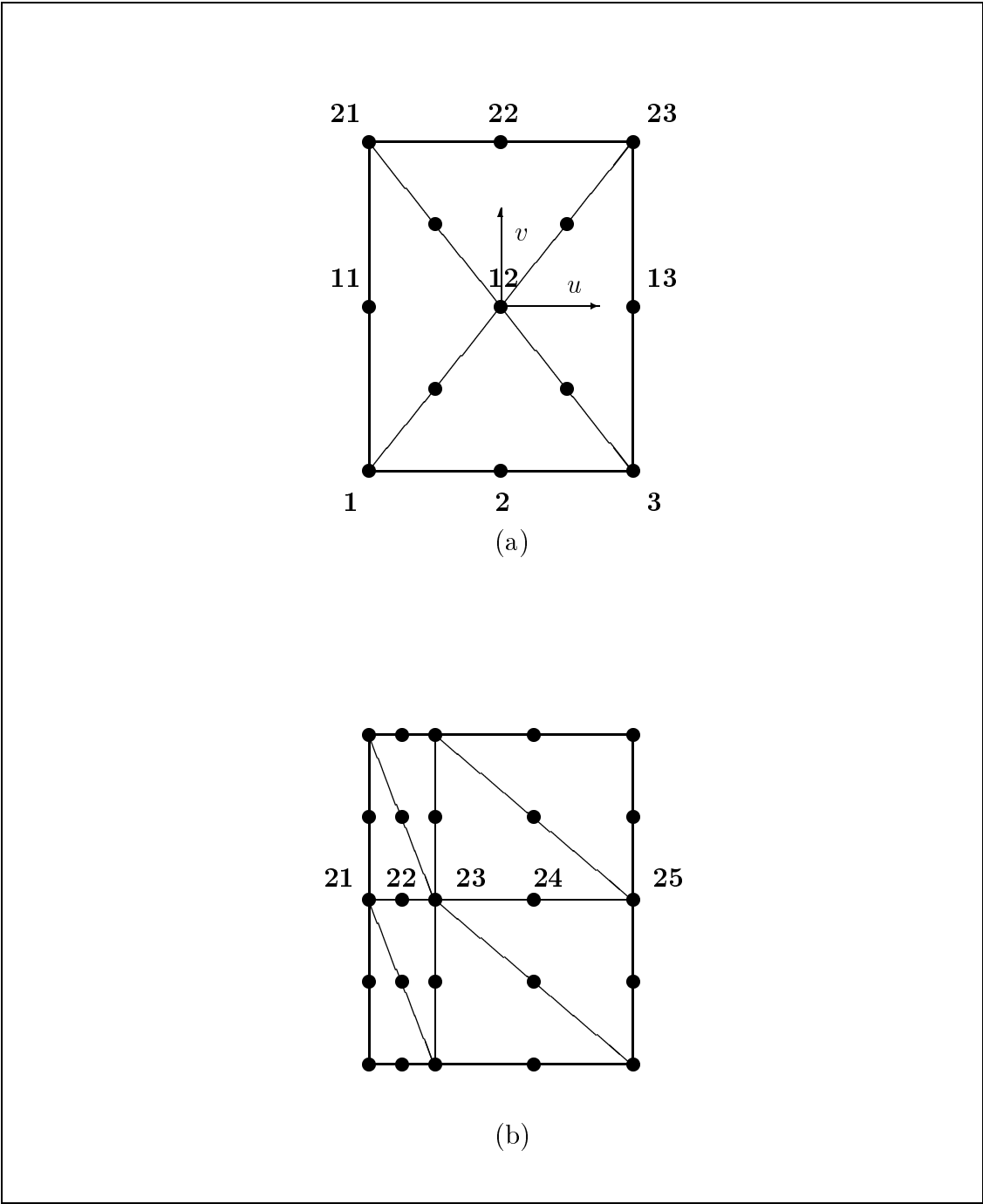


Abbildung 6.1: Idealisierungen für den Ring aus Abbildung 4.3

Knotennr.	Verschiebungen	
	u [cm]	v [cm]
1	0.05334488	0.00169799
2	0.05503820	-0.00546604
3	0.06243777	-0.01259028
11	0.05786284	(Lager)
12	0.05949638	0.8215E-14
13	0.06684252	0.1376E-13
21	0.05334488	-0.00169799
22	0.05503820	0.00546604
23	0.06243777	0.01259028

Tabelle 6.1: Verschiebungen des Mittelpunktes des Ringquerschnitts (Variante (a) aus Abbildung 6.1)

6.1.2 Langer Hohlzylinder

Bei ungleichmäßiger Erwärmung der Wände dickwandiger Rohre entstehen infolge unterschiedlicher Dehnung der einzelnen Schichten Temperaturspannungen. Für einen langen Hohlzylinder, der mit einer in radialer Richtung veränderlichen Temperatur belastet wird (Abbildung 6.2), gelten die Gleichungen

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr \right] \quad (6.1)$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right] \quad (6.2)$$

für die Radial- und Tangentialspannungen σ_{rr} bzw. σ_{tt} . Für freie Rohrenden wird die Wärmedehnung nicht behindert ($\gamma_{zz} \neq 0$) und die Gleichung für die Axialspannung σ_{zz} lautet

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right]. \quad (6.3)$$

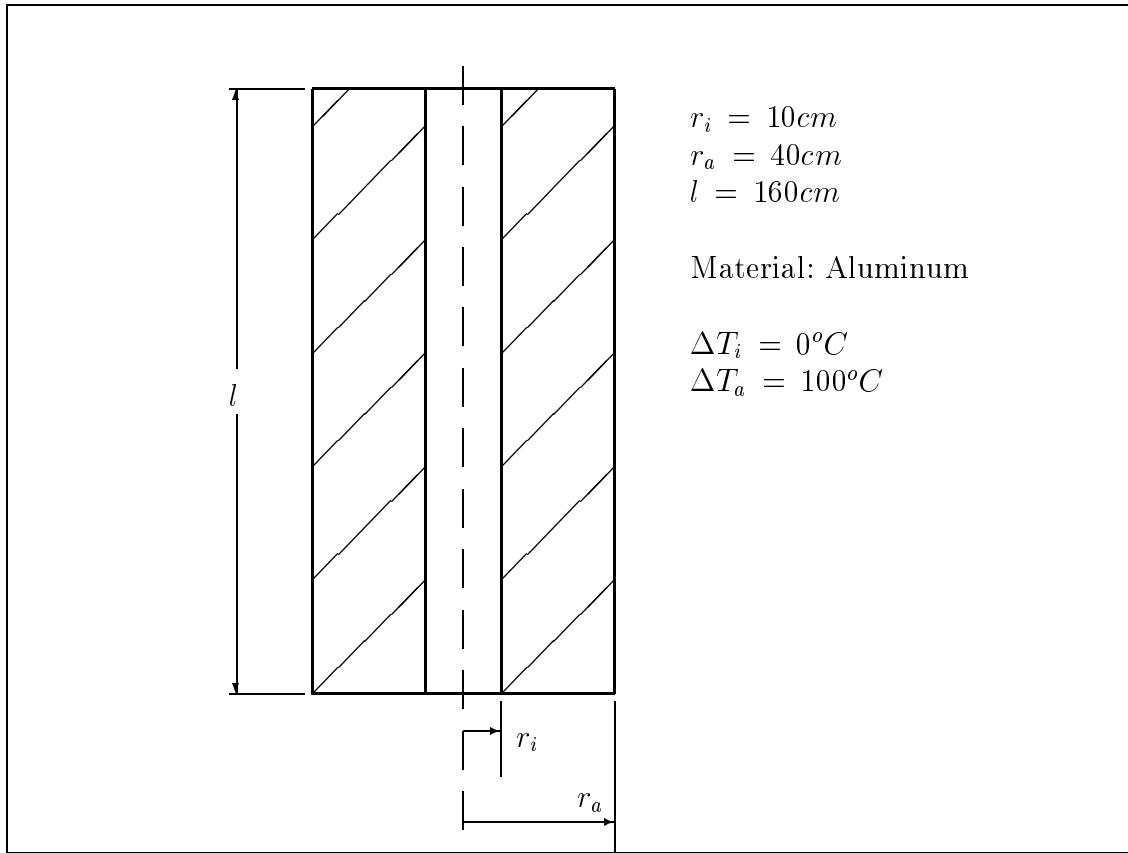


Abbildung 6.2: Langer Hohlzylinder mit linearer Temperaturverteilung

Für eingespannte Zylinderenden ist die Wärmedehnung $\gamma_{zz} = 0$. Die Axialspannung berechnen sich dann aus

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2\nu}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right] \quad (6.4)$$

Man geht von einer linearen Temperaturverteilung in radialer Richtung aus

$$\Delta T = \Delta T_i + \frac{\Delta T_a - \Delta T_i}{r_a - r_i} (r - r_i) \quad (6.5)$$

und nach Einsetzen in die Gleichungen (6.1) bis (6.4) und anschließender

Integration, erhält man

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \left(\frac{a(r_a^3 - r_i^3)}{3(r_a^2 - r_i^2)} + \frac{\Delta T_i - ar_i}{2} \right) - \left(\frac{a(r^3 - r_i^3)}{3r^2} + \frac{(\Delta T_i - ar_i)(r^2 - r_i^2)}{2r^2} \right) \right] \quad (6.6)$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \left(\frac{a(r_a^3 - r_i^3)}{3(r_a^2 - r_i^2)} + \frac{\Delta T_i - ar_i}{2} \right) + \left(\frac{a(r^3 - r_i^3)}{3r^2} + \frac{(\Delta T_i - ar_i)(r^2 - r_i^2)}{2r^2} \right) - \Delta T(r) \right] \quad (6.7)$$

Dabei bezeichnet a den Quozient $\frac{\Delta T_a - \Delta T_i}{r_a - r_i}$.

In Abbildung 6.2 wird ein dickwandiger Zylinder mit freien Enden dargestellt. Der Zylinder ist in der Mitte der inneren Wand gelagert. Die Geometrie- und Temperaturdaten sind ebenfalls der Abbildung (6.2) zu entnehmen.

Das Idealisierungsmodell ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Die Ergebnisse für die Radialspannungen die mit *DEMEL* ermittelt wurden, sowie die exakte analytische Lösung sind der Tabelle 6.2 zu entnehmen. Auffallend ist der große Fehler in der Nähe der inneren Wand, während an der äußeren Wand relativ gute Ergebnisse erzielt wurden.

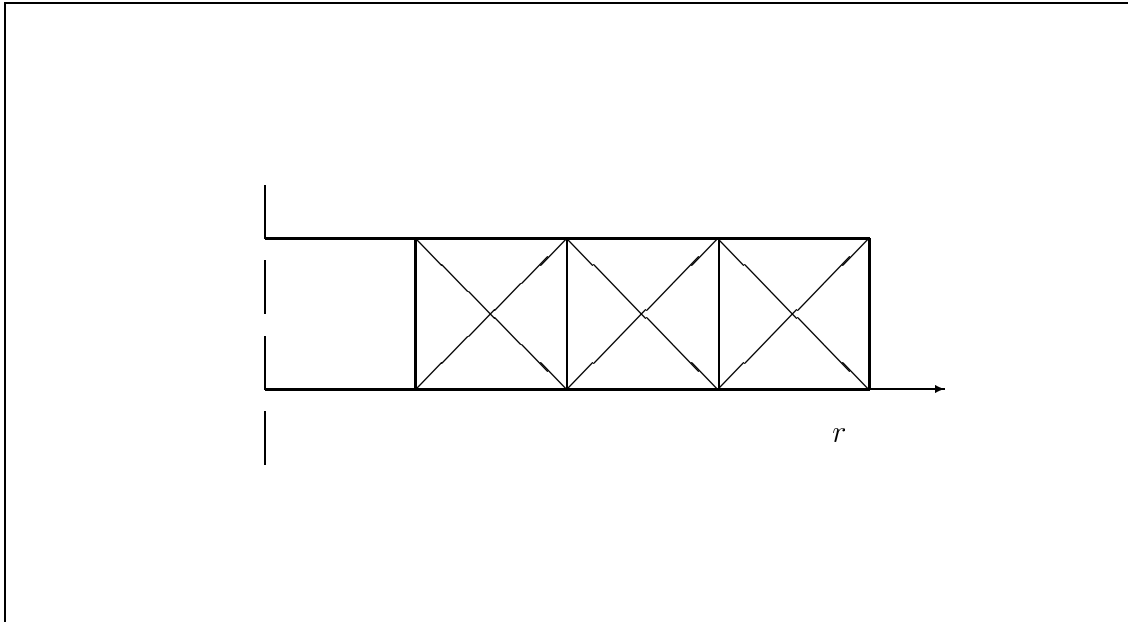


Abbildung 6.3: Idealisierung des Hohlzylinders aus Abbildung 6.2

r [cm]	σ_{rr} -exakt [kp/cm ²]	σ_{rr} -TORU [kp/cm ²]	rel. Fehler [%]
10	0.0	201.0	-
20	342.0	370.0	9.35
30	206.0	215.0	4.36
40	0.0	8.0	-

Tabelle 6.2: Radialspannungen für einen dickwandigen Hohlzylinder

6.1.3 Langer dünnwandiger Zylinder

Für dünnwandige Zylinder, bei denen das Radienverhältnis r_a/r_i nicht viel größer 1 ist, und bei einer in r -Richtung linearen Temperaturverteilung, gilt eine einfache Formel für die Maximalwerte der Tangentialspannungen σ_{tt} und der Axialspannungen σ_{zz} (die an der inneren und äußeren Wand herrschen)

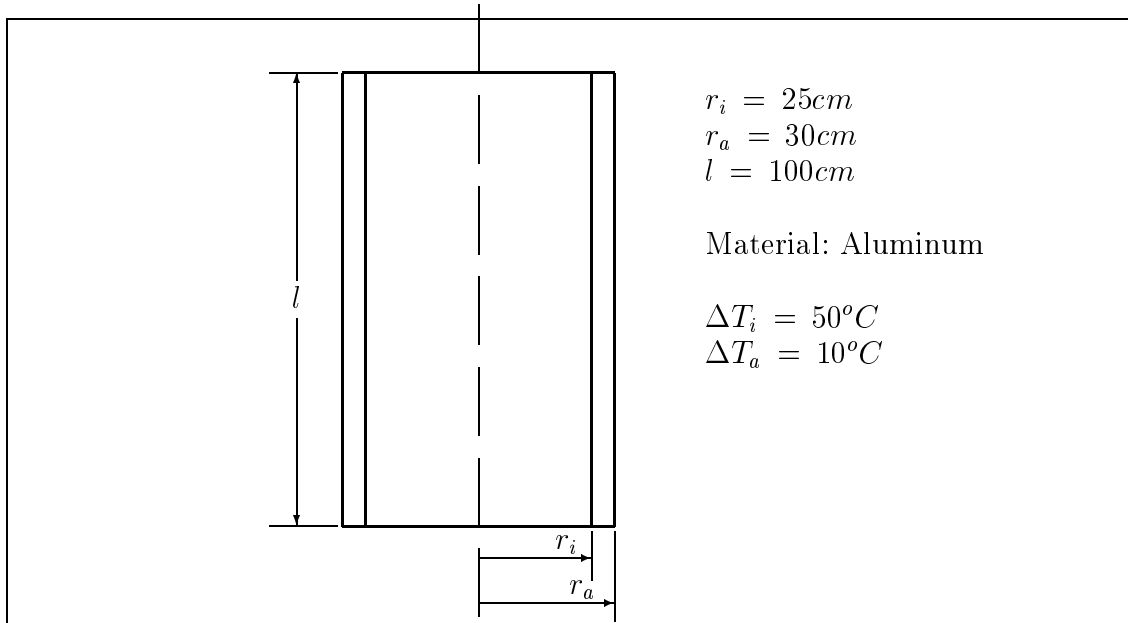


Abbildung 6.4: Dünnwandiger Hohlzylinder unter linearer Temperaturlast

$$\sigma_{tt_a} = \sigma_{zz_a} = \frac{\alpha E(\Delta T_i - \Delta T_a)}{2(1 - \nu)} \left(1 - \frac{m}{6 + 3m}\right) \quad (6.8)$$

für die Außenwand, bzw.

$$\sigma_{tt_i} = \sigma_{zz_i} = -\frac{\alpha E(\Delta T_i - \Delta T_a)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{m}{6 + 3m}\right) \quad (6.9)$$

für die innere Wand. Dabei ist m durch die Formel

$$\frac{r_a}{r_i} = 1 + m$$

definiert.

Der dünnwandige Zylinder aus Abbildung 6.4 wird mit *TORUs* approximiert. Er ist an der Mitte der inneren Wand so gelagert, daß die Axialverschiebung v an dieser Stelle gesperrt wird. Die zwei verschiedenen Elementnetze für einen Zylinderstreifen der Breite $b = 10\text{cm}$ sind aus Abbildung 6.5 zu entnehmen. Nachstehende Tabelle zeigt den Vergleich der analytischen Lösungen, die mit Gleichungen (6.8) und (6.9) gewonnen wurden, und den

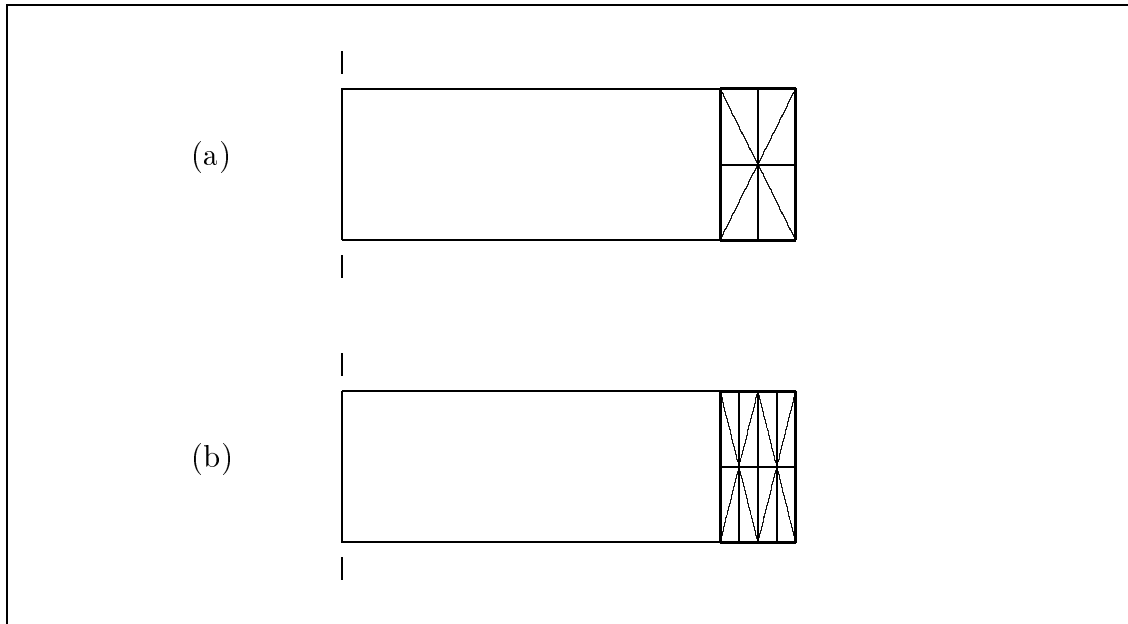


Abbildung 6.5: Untersuchte Idealisierungsvarianten für das Problem 'dünnwandiger Zylinder'

approximierenden Lösungen aus *DEMEL*. Wie man sieht, weisen beide Netzverteilungen gute Resultate auf.

Variante	σ_{tt_i} [kp/cm^2]	rel. Fehler [%]	σ_{tt_a} [kp/cm^2]	rel. Fehler [%]
exakt	-453.0	-	426.0	-
Netz (a)	-459.0	1.32	423.0	0.70
Netz (b)	-455.0	0.44	426.0	0.00

Tabelle 6.3: Tangentialspannungen für dünnwandigen Zylinder

Die axiale Spannungsverteilung über die Dicke eines dünnen Hohlzylinders, infolge einer linearer Temperaturlast, kann als ein Biegemoment aufgefaßt werden. Bei einer höheren Temperatur an der inneren als an der äußeren Fläche des Rohres ($\Delta T_i \geq \Delta T_a$), versucht dieses Moment, bei freien Rohrenden, den Radius des Zylinders an den Enden zu vergrößern. Eine Durchmes-

servergrößerung hat eine Erhöhung der Tangentialspannungen zur Folge, die an dem Eckpunkt des freien Randes maximal wird. Für die Tangentialspannung an diesem Punkt gilt folgende Gleichung

$$\sigma_{tt_{max}} = \frac{\alpha E(\Delta T_i - \Delta T_a)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\sqrt{3}} - \nu \right) . \quad (6.10)$$

Für das Beispiel der Abbildung 6.4 ergeben sich folgende Werte aus der obenstehenden Gleichung und der beiden Idealisierungsvarianten.

	σ_{tt} [kp/cm ²]	rel. Fehler [%]
exakt	550.0	–
Netz (a)	515.0	6.36
Netz (b)	520.0	5.45

Tabelle 6.4: Maximale Tangentialspannung an den freien Enden eines dünnwandigen Rohres

6.1.4 Langer Vollzylinder

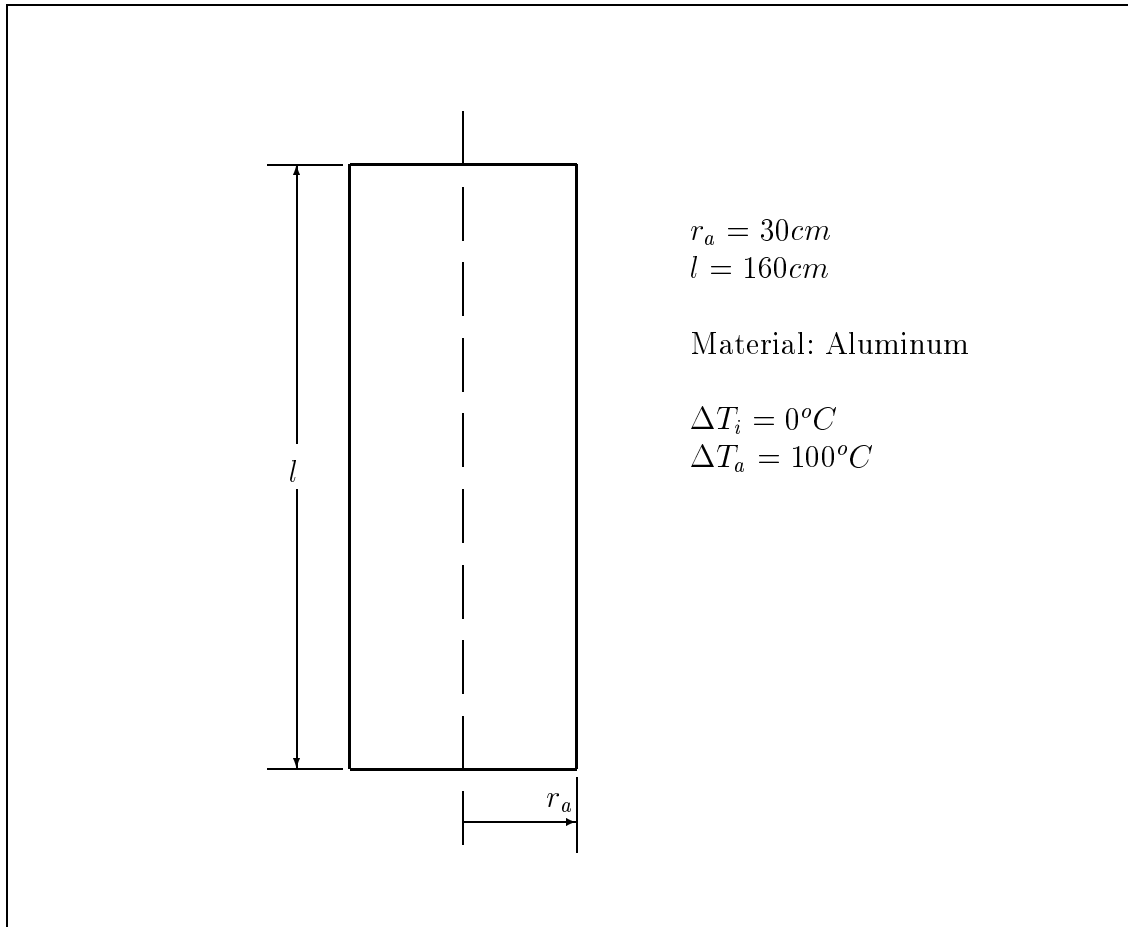


Abbildung 6.6: Langer Vollzylinder unter linearer Temperaturlast

Bei einem langen Vollzylinder ändern sich die Gleichungen für die Radial- und Tangentialspannungen (6.1) und (6.2) zu

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r_a^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r \, dr \right] \quad (6.11)$$

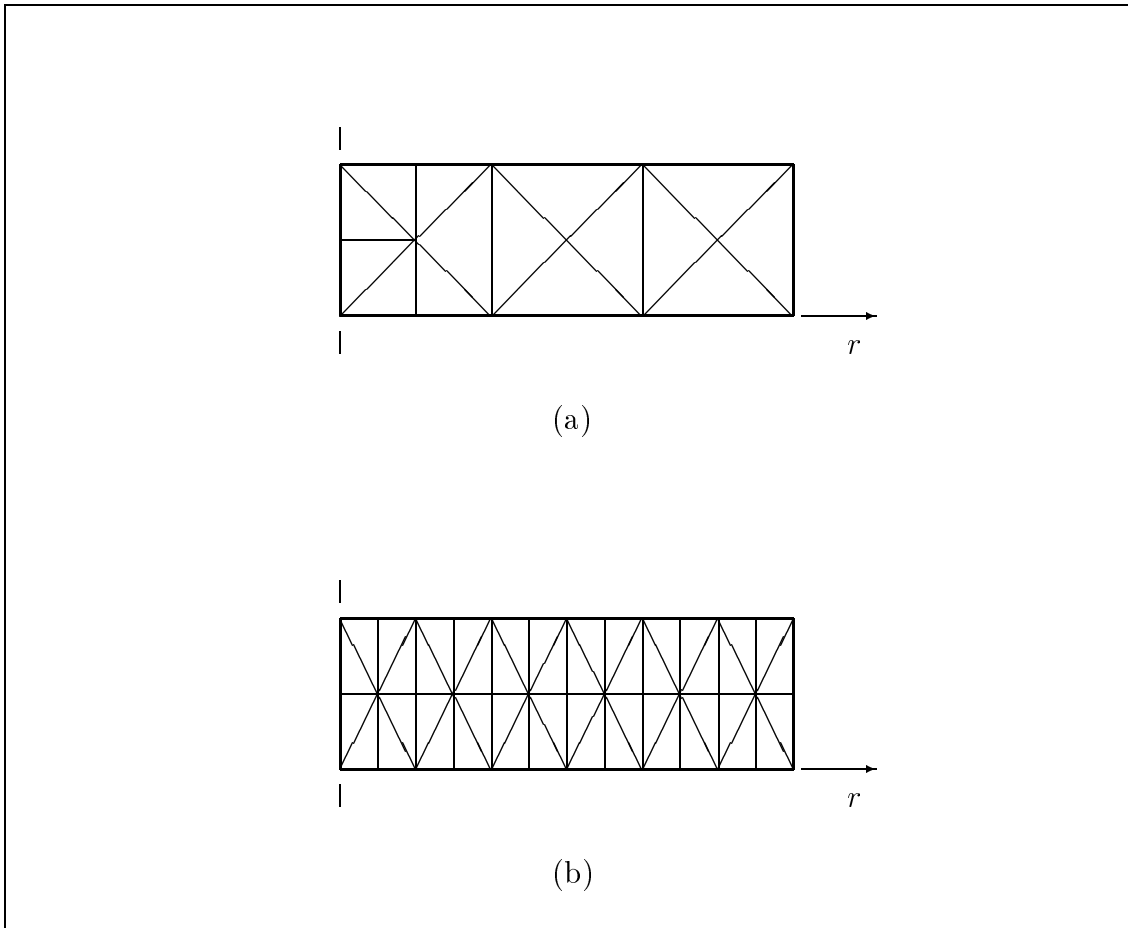


Abbildung 6.7: FE-Netze für das Beispiel Vollzylinder

$$\sigma_{tt} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r_a^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right]. \quad (6.12)$$

Sind die Zylinderenden frei, gilt für die Spannung in axialer Richtung

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r_a^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right], \quad (6.13)$$

während für eingespannten Zylinderenden folgende Gleichung gültig ist

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{2\nu}{r_a^2} \int_0^{r_a} \Delta T(r) r dr - \Delta T(r) \right]. \quad (6.14)$$

Abbildung 6.6 zeigt einen langen Vollzylinder, der mit einer in radialer Richtung linear variierenden Temperaturverteilung belastet wird. Die Temperaturänderung ΔT an einem Punkt des Körpers läßt sich also aus der Formel

$$\Delta T = \frac{(\Delta T_a - \Delta T_i)}{r_a} r \quad (6.15)$$

berechnen. Dabei ist ΔT_i die Temperatur im Innern des Zylinders an der Symmetrieachse, ΔT_a die Temperatur an der Außenfläche, r_a der Radius des Zylinders und r der Abstand eines Punktes von der Symmetrieachse. Es ist klar, daß r Werte zwischen 0 und r_a annehmen kann.

Integration der Gleichungen (6.12), (6.13) mit der Temperaturfunktion (Gleichung (6.16)) liefert für die Spannungen

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{\Delta T_a - \Delta T_0}{3} \left(1 - \frac{r}{r_a} \right) \quad (6.16)$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[\frac{\Delta T_a - \Delta T_0}{3} \left(1 + \frac{r}{r_a} \right) - \Delta T(r) \right]. \quad (6.17)$$

Die Axialspannungen σ_{zz} ergeben sich, für freie Zylinderenden, aus der Formel

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{tt}. \quad (6.18)$$

Die Idealisierung einer Schicht der Dicke 10cm ist in Abbildung 6.7 dargestellt.

Der Vergleich zwischen der analytischen und der approximierenden Lösung mit *TORU's* kann an Hand der Tabellen (6.5) bis (6.7) erfolgen. Die Spannungen für die erste Idealisierung (Netz (a)), sind im Inneren des Zylinders über die Elemente gemittelte Werte, da es in dieser Region zu größeren Spannungssprüngen kommt. Bei der zweiten Idealisierung ist es nicht nötig Mittelwerte zu benutzen, da die Unterschiede zwischen den Elementen in der Größenordnung von $2\text{kp}/\text{cm}^2$ liegen.

r [cm]	σ_{rr} -exakt [kp/cm ²]	σ_{rr} -Netz 1 [kp/cm ²]	rel. Fehler %	σ_{rr} -Netz 2 [kp/cm ²]	rel. Fehler %
0.0	733.0	674.0	8.05	734.0	0.13
5.0	611.0	586.0	4.19	612.0	0.16
10.0	488.0	510.0	4.50	489.0	0.20
15.0	366.0	390.0	6.55	367.0	0.27
20.0	245.0	251.0	2.87	245.0	0.00
25.0	122.0	118.0	3.27	122.0	0.00
30.0	0.0	1.0	-	0.0	0.00

Tabelle 6.5: Radialspannungen für das Beispiel Vollzylinder

r [cm]	σ_{tt} -exakt [kp/cm ²]	σ_{tt} -Netz 1 [kp/cm ²]	rel. Fehler %	σ_{tt} -Netz 2 [kp/cm ²]	rel. Fehler %
0.0	733.0	686.0	8.05	734.0	0.13
5.0	489.0	447.0	4.23	489.0	0.00
10.0	245.0	117.0	52.25	245.0	0.00
15.0	0.0	75.0	-	0.0	0.00
20.0	-245.0	-190.0	22.44	-245.0	0.00
25.0	-489.0	-450.0	7.97	-489.0	0.00
30.0	-733.0	-702.0	4.22	-734.0	0.13

Tabelle 6.6: Tangentialspannungen für das Beispiel Vollzylinder

r [cm]	σ_{zz} -exakt [kp/cm ²]	σ_{zz} -Netz 1 [kp/cm ²]	rel. Fehler [%]	σ_{zz} -Netz 2 [kp/cm ²]	rel. Fehler [%]
0.0	1466.0	1392.0	5.04	1469.0	0.20
5.0	1100.0	938.0	14.72	1102.0	0.18
10.0	733.0	813.0	10.91	735.0	0.27
15.0	366.0	355.0	3.00	368.0	0.54
20.0	0.0	6.0	-	0.0	0.00
25.0	-367.0	-353.0	1.63	-368.0	0.27
30.0	-733.0	-719.0	1.91	-735.0	0.27

Tabelle 6.7: Axialspannungen für das Beispiel Vollzylinder

6.1.5 Gelochte Scheibe

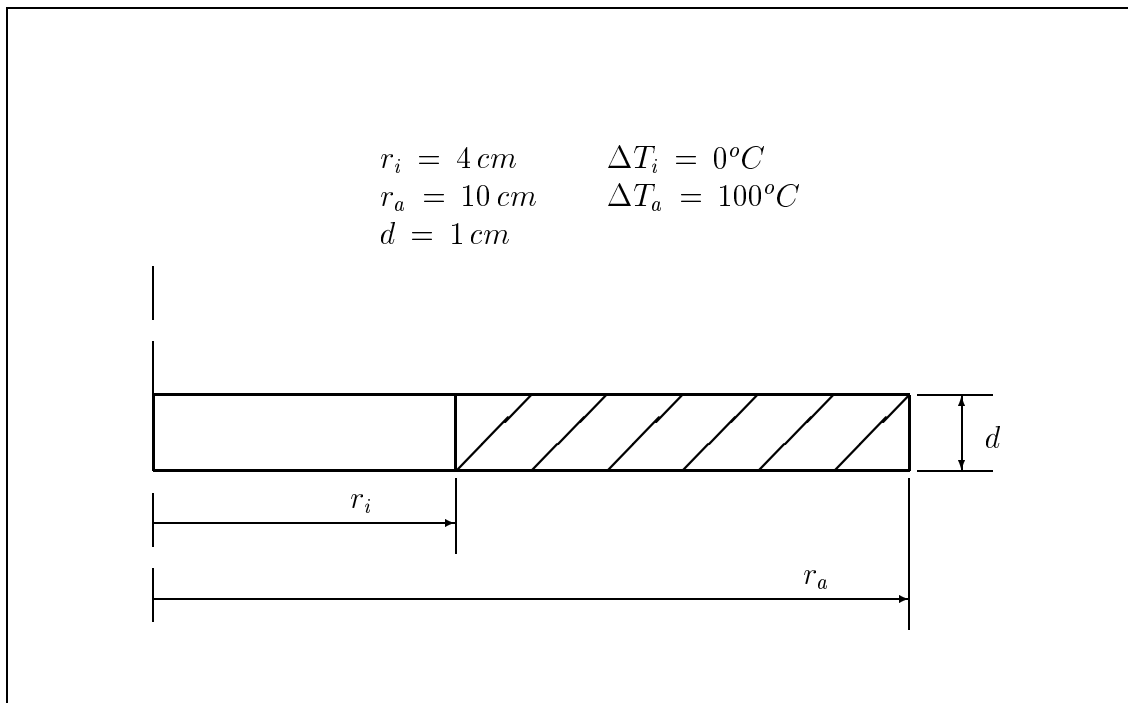


Abbildung 6.8: Gelochte Scheibe mit linearer Temperaturverteilung

Das nächste Beispiel, anhand dessen mit *DEMEL* berechnete Spannungen mit der Theorie verglichen werden, ist die gelochte Scheibe. Die im Abschnitt (6.1.2) aufgeführten Gleichungen für einen Hohlzylinder gelten auch in diesem Fall. Hierbei ist an Stelle des Quotienten $\alpha E / 1 - \nu$ der Faktor αE zu setzen. Die Axialspannung σ_{zz} ist gleich Null. Die Daten der Geometrie und der Belastung können aus Abbildung 6.8 entnommen werden.

Die Rechnung wurde für drei verschiedene Idealisierungen durchgeführt. Die entsprechenden Elementnetze sind in Abbildung 6.9 dargestellt.

r [cm]	σ_{rr} -exakt [kp/cm ²]	σ_{rr} - (a) [kp/cm ²]	Fehler [%]	σ_{rr} - (b) [kp/cm ²]	Fehler [%]	σ_{rr} - (c) [kp/cm ²]	Fehler [%]
4.00	0.0	45.0	-	24.0	-	3.0	-
4.75	114.0	112.0	1.75	112.0	1.75	116.0	1.75
5.50	160.0	174.0	8.75	165.0	3.12	168.0	5.00
6.25	169.0	-	-	170.0	0.59	172.0	1.77
7.00	155.0	162.0	4.51	159.0	2.58	156.0	0.64
8.50	91.0	94.0	3.29	93.0	2.19	93.0	2.19
10.00	0.0	3.0	-	2.0	-	2.0	-

Tabelle 6.8: Radialspannungen für das Beispiel 'Scheibe'

r [cm]	σ_{tt} -exakt [kp/cm ²]	σ_{tt} - (a) [kp/cm ²]	Fehler [%]	σ_{tt} - (b) [kp/cm ²]	Fehler [%]	σ_{tt} - (c) [kp/cm ²]	Fehler [%]
4.00	880.0	890.0	1.13	889.0	1.02	882.0	0.22
4.75	574.0	578.0	0.69	578.0	0.69	575.0	0.17
5.50	336.0	351.0	4.46	349.0	2.67	340.0	1.19
6.25	134.0	-	-	141.0	5.22	136.0	1.47
7.00	-45.0	-41.0	9.75	-41.0	9.75	-44.0	2.43
8.50	-366.0	-360.0	1.63	-362.0	1.09	-365.0	0.27
10.00	-658.0	-661.0	0.45	-657.0	0.15	-660.0	0.30

Tabelle 6.9: Tangentialspannungen für das Beispiel 'Scheibe'

Wie Tabelle 6.8 und Abbildung 6.10 zeigen, liefert die erste Approximation für die Radialspannungen am inneren Rand Werte, die stark von denen der exakten analytischen Lösung abweichen, während sich am äußersten Rand brauchbare Werte ergeben. Dies liegt am größeren Spannungsgradienten am inneren Rand, der durch die relativ grobe Idealisierung nicht richtig erfaßt wird. Die zweite Idealisierung kommt mit der gleichen Anzahl von Elementen aus, liefert jedoch am kritischen inneren Rand wesentlich bessere Ergebnisse durch die homogenere Verteilung der Knoten (die gleichzeitig Stützpunkte für die Temperaturverteilung sind).

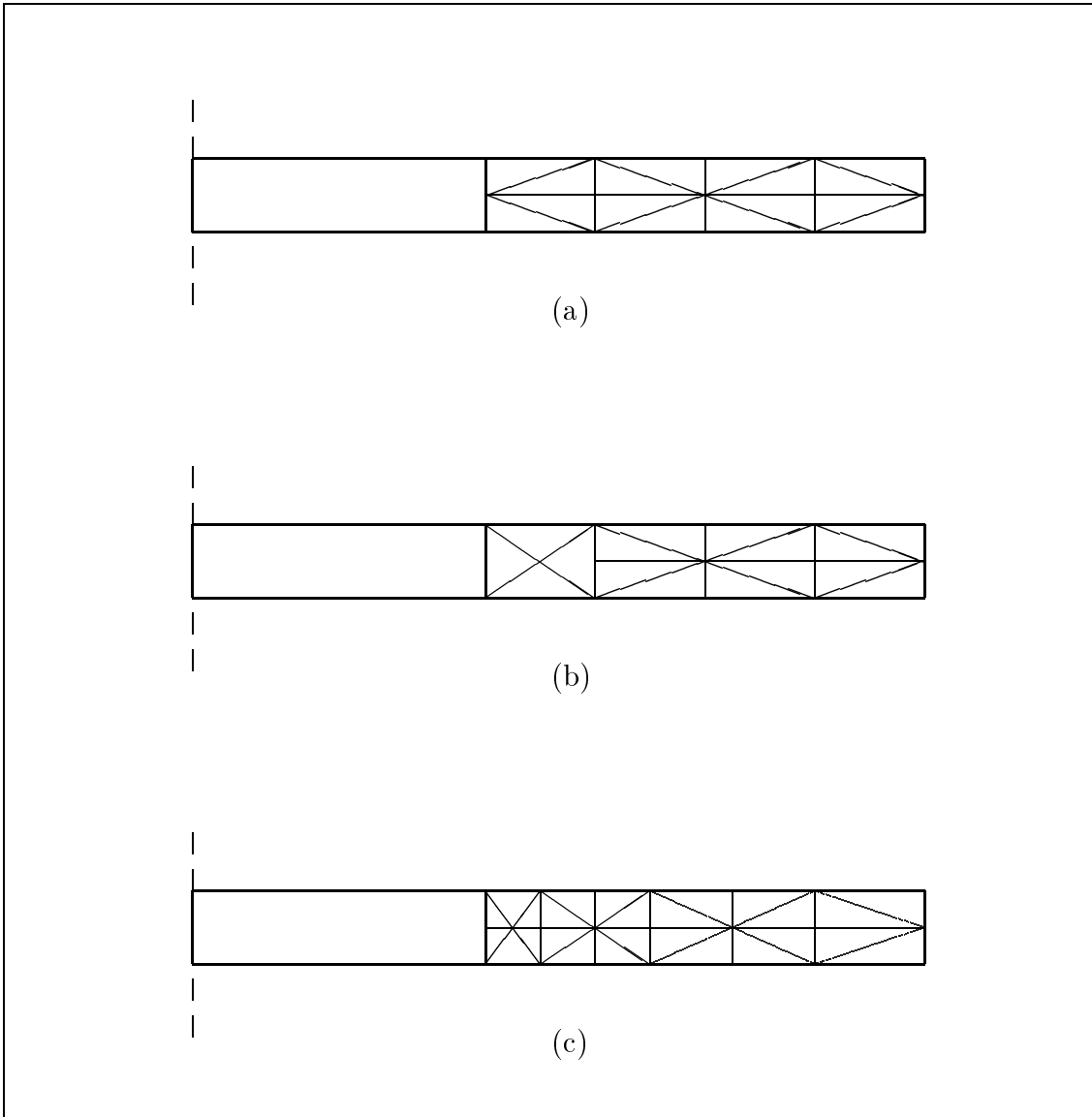


Abbildung 6.9: Idealisierungsvarianten für die Scheibe aus Abbildung 6.8

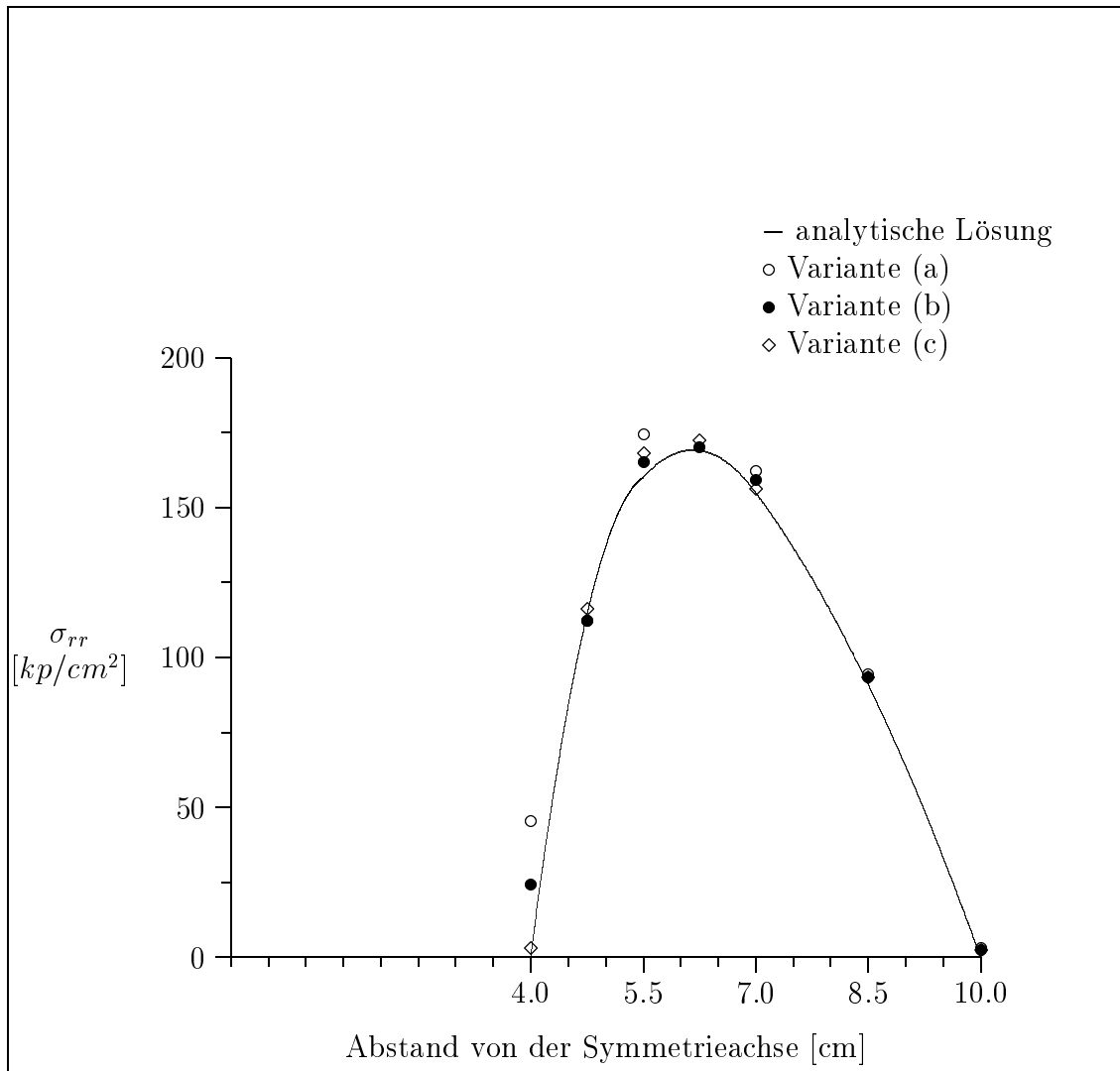


Abbildung 6.10: Radialspannungen für die gelochte Scheibe

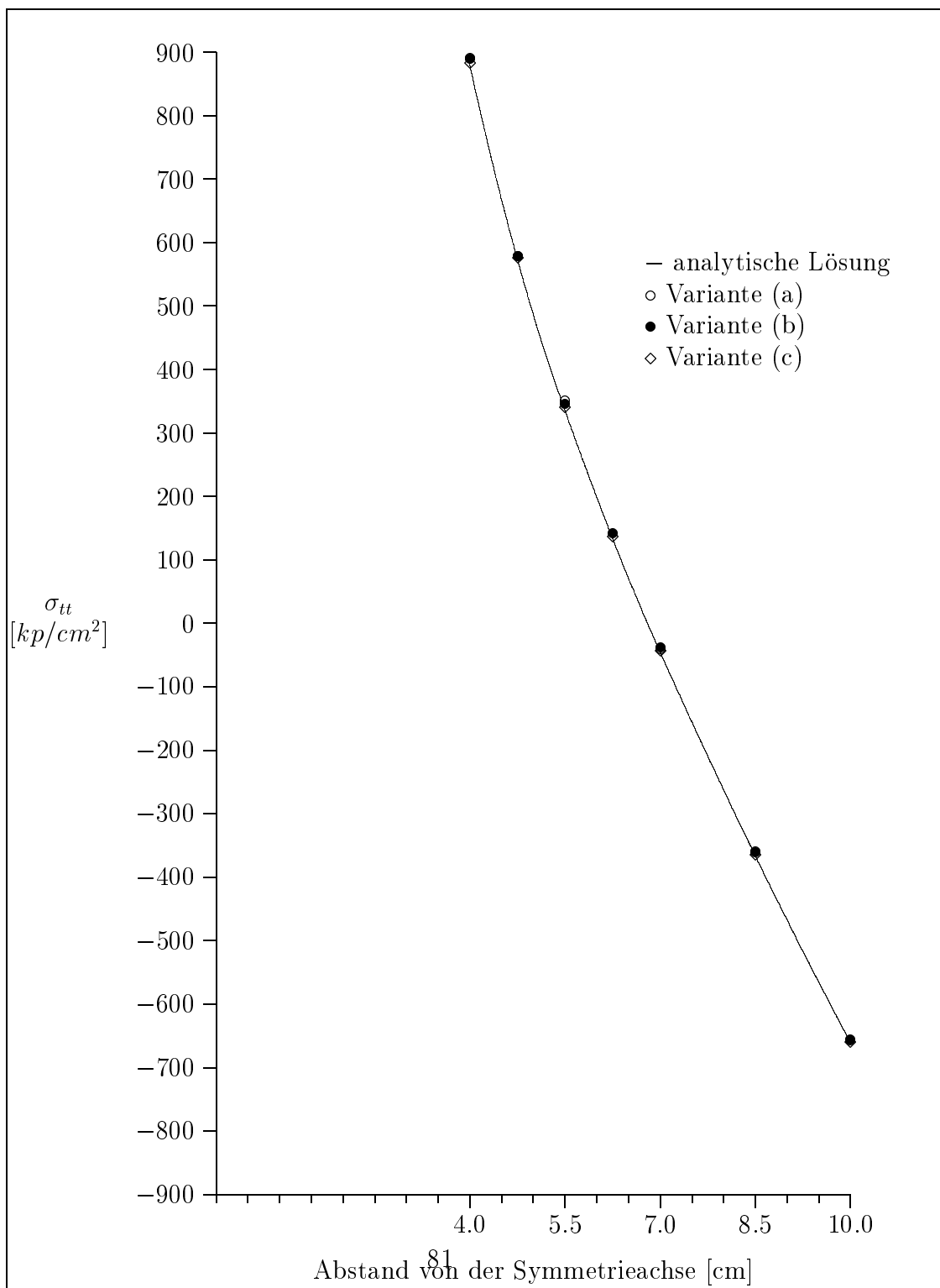


Abbildung 6.11: Tangentialspannungen für die gelochte Scheibe

6.2 Anwendung auf eine Flugzeugstruktur

Als letztes Beispiel wird die Berechnung des hinteren Druckspanten der *Do328* vorgestellt. Diese besteht im wesentlichen aus zwei Baugruppen (Abbildung 6.12). Der äußere Teil ist die Außenhaut des Flugzeugs, die aus Aluminium hergestellt ist. Der innere Teil ist der Spanten selbst, der aus CFK hergestellt ist. Der linke Rand der Außenhaut wird als festeingespannt betrachtet.

In Reiseflughöhe herrschen Außenlufttemperaturen von etwa -50°C . Das bedeutet, daß bei einer Bodentemperatur von $+20^{\circ}\text{C}$, bei der angenommen wird, daß die Struktur spannungsfrei ist, ein Temperaturunterschied von -70°C entsteht. Da Aluminium einen viel größeren Ausdehnungskoeffizient als CFK besitzt, kann sich dieser Teil nicht frei deformieren: das CFK-Bauteil schrumpft nur unwesentlich zusammen, sodaß die Deformation des Aluminiums blockiert wird. Durch den Druck, den die Außenhaut auf den Spanten ausübt entstehen in der Struktur Spannungen.

Die Idealisierung dieses Bauteils mit *TORUs* ist ebenfalls der Abbildung 6.12 zu entnehmen. Als Ergebnis ist der Spannungsverlauf in radialer und tangentialer Richtung in den Abbildungen 6.13 und 6.14 dargestellt.



Abbildung 6.12: Druckspant hinten (*Do328*)

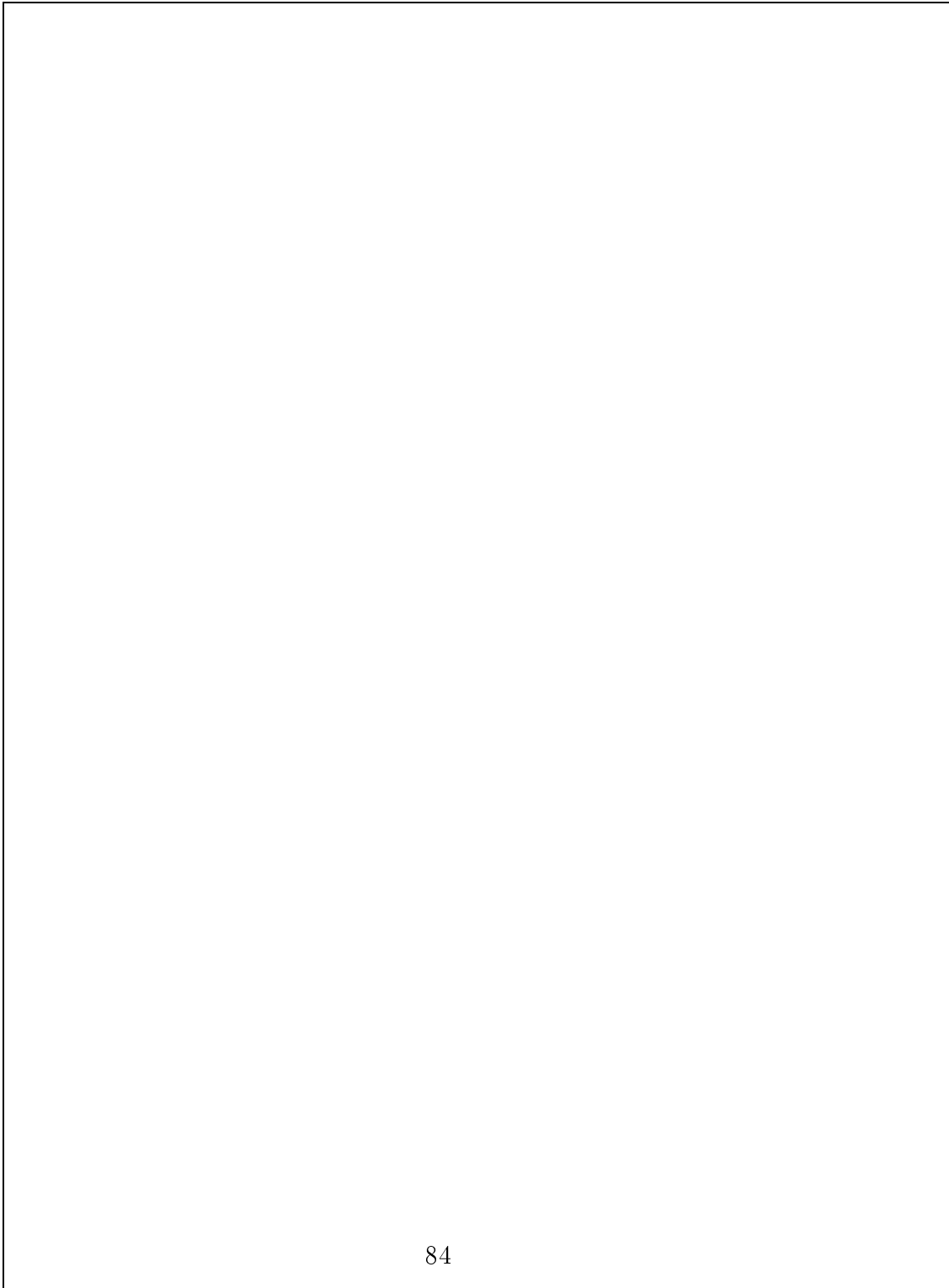


Abbildung 6.13: Verlauf der Radialspannungen für den hinteren Druckspant der *Do328*

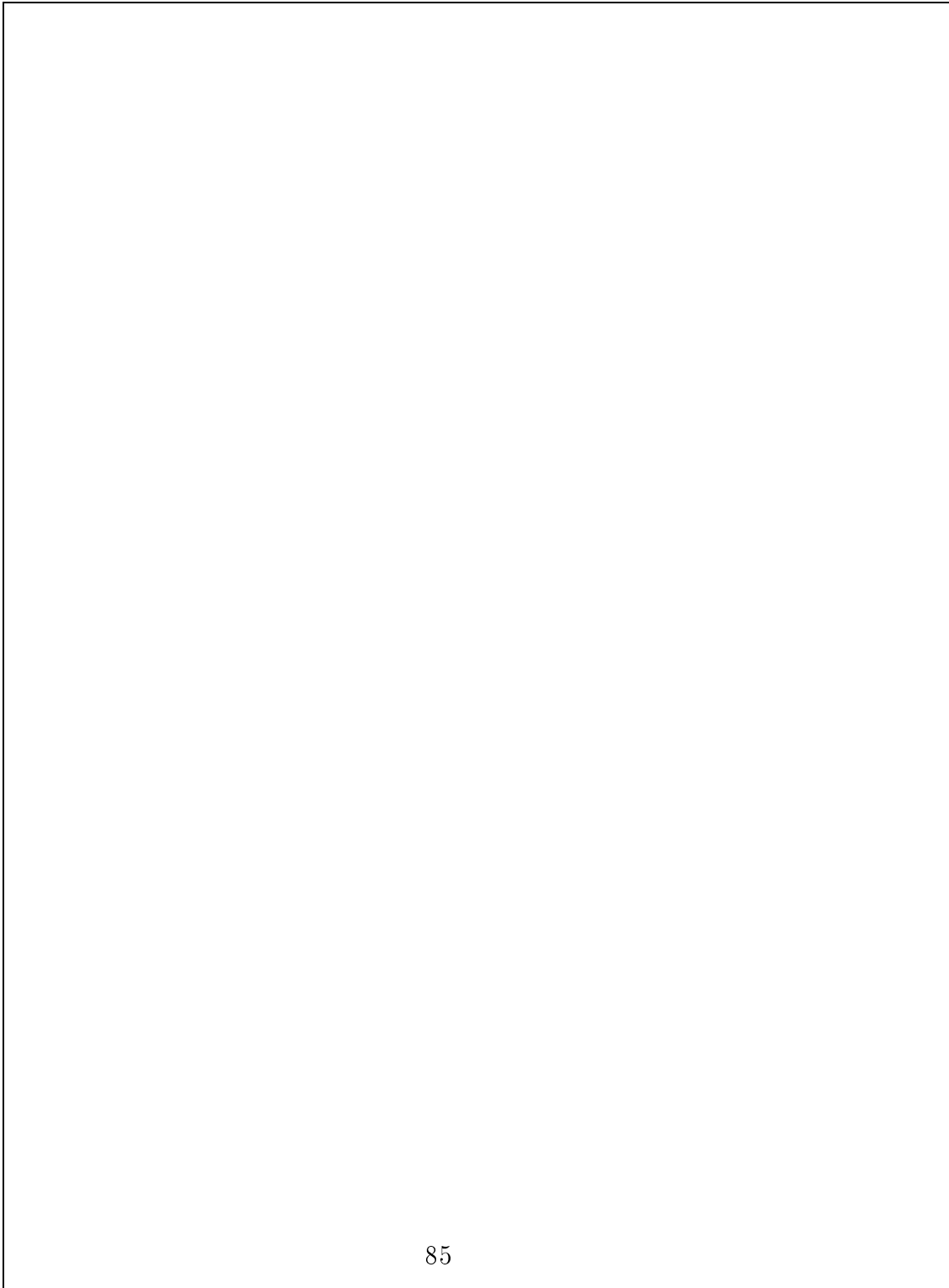


Abbildung 6.14: Verlauf der Tangentialspannungen für den hinteren Druckspant der *Do328*

Literaturverzeichnis

- [1] J. Argyris - H.P. Mlejnek; *Die Methode der finiten Elemente*. Vieweg, 1986
- [2] O. C. Zienkiewicz; *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. Mc Graw-Hill, 1967
- [3] K.-J. Bathe; *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 1986
- [4] T.H. Megson; *Aircraft Structures for Engineering Students*. Arnold, 1972
- [5] J. Argyris; *The TRIAX6 Element for Axisymmetric Analysis by the Matrix Displacement Method*. Journal of the Royal Aeronautical Society, December 1966
- [6] J. Argyris - K.E. Buck; *Die Berechnung achsensymmetrischer Strukturen unter achsensymmetrischer und nichtsymmetrischer Belastung und Temperaturverteilung*. Jahrbuch der DGLR, 1969
- [7] H. Mang; *Linear elastische Rotationskörper unter rotationssymmetrischer Belastung und Torsion*. Der Bauingenieur (49), 1974
- [8] M.A. Eisenberg - L.E. Malvern; *On Finite Element Integration in Natural Coordinates*. Numerical Methods in Engineering, July 1973