

Über die Langzeitdynamik von Fronten

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Jasmin Cantner

aus Gemmrigheim

Hauptberichter: Prof. Dr. K. Kirchgässner
Mitberichter: Prof. Dr. P. Werner

Tag der Einreichung: 10. Juni 1996
Tag der mündlichen Prüfung: 08. Juli 1996

Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	2
Zusammenfassung	3
1 Einleitung	5
2 Grundlagen	9
2.1 Der Operator A	10
2.2 Lokale Existenz von Lösungen und a priori Abschätzungen in X^0	17
2.3 Die Laplace-Transformation	22
3 Die lineare Eichform in X^∞	27
3.1 Die Abhängigkeit der Kerne von s in Abhängigkeit der verwendeten Norm	31
3.2 Die Eichform in $L^\infty(\mathbb{R})$, Konstruktion einer Greenschen Funktion	35
3.3 Die lineare Eichform in $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$	44
3.4 Die Langzeitasymptotik in t	50
4 Die Nichtlinearität	60
5 Anwendungen	64
5.1 Die bistabile Gleichung	64
5.2 Allgemeinere Nichtlinearitäten	70
5.3 Einige Bemerkungen zur Wahl der Gewichtsfunktion	77
Literatur	79
Lebenslauf	81

Bezeichnungen

- \mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen,
- \mathbb{R} Menge der reellen Zahlen,
- \mathbb{C} Menge der komplexen Zahlen,
- $\operatorname{Re} z$ Realteil der komplexen Zahl z ,
- $\operatorname{Im} z$ Imaginärteil der komplexen Zahl z ,
- L^p Raum p -fach Lebesgue-integrierbarer Funktionen,
- $L^p(e^{\frac{\gamma}{2}x}) = \{u \in L^p_{loc} \mid \int |u e^{\frac{\gamma}{2}x}|^p < \infty, \|u\|_{L^p(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = \left(\int |u e^{\frac{\gamma}{2}x}|^p\right)^{1/p}\}$,
- H^i üblicher Sobolevraum $H^{i,2}$,
- $X^0 := L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$,
- $X^1 := H^1(\mathbb{R}) \cap H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x})$,
- $X^2 := H^2(\mathbb{R}) \cap H^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$,
- $X^\infty := L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$,
- C_b^k Raum k -fach stetig differenzierbarer und beschränkter Funktionen,
- C_{unif}^k Raum k -fach gleichmäßig stetig differenzierbarer und beschränkter Funktionen,
- A linearer Operator,
- $\mathcal{D}(A)$ Definitionsbereich eines Operators,
- $\sigma(A)$ Spektrum des Operators A , Vereinigung von Punkt-, kontinuierlichem und Residualspektrum,
- $\sigma_e(A)$ wesentliches Spektrum, Vereinigung von kontinuierlichem und Residualspektrum,
- $\sigma_p(A)$ Punktspektrum,
- $R(\lambda, A)$ Resolvente,
- $\rho(A)$ Resolventenmenge,
- Id Identität,
- \mathcal{G} Integraloperator,
- G Greensche Funktion,
- K Integralkern,
- u_0 Frontlösung,
- γ TW Geschwindigkeit,
- $\alpha := \sqrt{\gamma^2 + 4}$,
- $\beta := \sqrt{\gamma^2 - 4}$,
- $\sigma := \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$,
- $\omega := \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$,
- $\mathcal{E} := \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s + \frac{\beta^2}{4})| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0, s \neq \frac{\beta^2}{4}\}$,
- $\mathcal{E}_\gamma := \{s \in \mathbb{C} \mid 2\operatorname{Re} \omega + \gamma > 0\}$,
- $B_r(a)$ Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r ,
- kennzeichnet das Ende eines Beweises.

Zusammenfassung

Untersucht wird eine parabolische partielle nichtlineare Differentialgleichung auf \mathbb{R} , die nach Kirchgässner [Kir92] Eichform genannt wird. Die Lösungen dieser Eichform beschreiben die nichtlineare Dynamik von Störungen von Fronten. Fronten sind ein spezieller Typ von “travelling waves”, d.h., sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegender Wellen, die ihr spezifisches Profil beibehalten.

Von besonderem Interesse hierbei ist die Beschreibung des Langzeitverhaltens von Störungen dieser Fronten unter Berücksichtigung des Einflusses der zugrunde liegenden Funktionenräume, in denen man die Eichform untersucht.

Zunächst wird mit funktionalanalytischen Methoden die Existenz einer Lösung in gewichteten Räumen nachgewiesen. Durch Energieabschätzungen kann ein exponentielles zeitliches Abklingen der Lösung der Eichform gezeigt werden. Interessiert man sich für eine Langzeitanalyse, die auch zeitlich algebraisches Abklingen beinhaltet, so kann man zwar mit Hilfe des Maximumprinzips zusätzlich zu einem exponentiellen auch ein algebraisches Abklingen zeigen, es wird hier jedoch mit Hilfe von geeigneten Resolventenabschätzungen gezeigt, daß dieses Resultat auch ohne Maximumprinzip erzielt werden kann. Wesentlich zur Behandlung der Eichform sind die Eigenschaften des linearen Operators der partiellen Differentialgleichung. Die Lage des Spektrums bestimmt die Langzeitasymptotik der Lösungen der Eichform.

Das Abschätzen der Langzeitasymptotik der Lösungshalbgruppe, bzw. der Lösungen der linearen Gleichung, erfolgt durch Laplace-Transformation in der Zeit. Die parabolische Differentialgleichung wird durch die Laplace-Transformation in eine parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichung transformiert, welche analysiert wird. Asymptotische Integrationsmethoden erlauben die Darstellung einer Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung in Abhängigkeit des Parameters, welcher die Laplace-transformierte Zeit repräsentiert. Diese Abhängigkeit der Lösungen von dem Parameter ist der wesentliche Aspekt dieser Untersuchungen, da durch diesen Parameter die Langzeitasymptotik bestimmt wird. Die Zeitabhängigkeit der Lösungen ist durch die inverse Laplace-Transformation gegeben. Die Langzeitasymptotik der Lösungen wird mit Hilfe von Taubersätzen erschlossen, welche eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Laplace-Transformierten herstellen. Mit dieser Methode kann man die Auswirkung der Wahl der Räume, in denen Lösungen der Eichform existieren, auf die Langzeitasymptotik sehen. Die Taubersätze stellen sich hierbei als ein sehr effizientes Hilfsmittel heraus.

Zur Untersuchung der vollen nichtlinearen Eichform wird diese mit Hilfe der Variation der Konstanten-Formel als Integralgleichung dargestellt. Es wird gezeigt, daß diese Integralgleichung eine Lösung in geeignet gewichteten Räumen besitzt. Diese Lösung klingt in der Zeit ab. Dieses wird in zwei verschiedenen Topologien explizit berechnet.

Anschließend werden die oben genannten Methoden auf eine Gleichung mit einer anderen, aber ebenfalls polynomialen Nichtlinearität angewandt. Dieses Beispiel zeigt, daß die verwendeten Methoden auch ohne weiteres auf allgemeinere Nichtlinearitäten übertragen

werden können.

In einem letzten Abschnitt wird eine allgemeine Nichtlinearität zugelassen. Es wird ausgeführt, unter welchen Voraussetzungen eine Frontlösung existiert, und wie die in den vorigen Kapiteln vorgestellte Analysis auf diesen Fall übertragen werden kann.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. K. Kirchgässner für seine Anregungen und die Betreuung dieser Arbeit. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. P. Werner für die Bereitschaft, die Aufgabe des Mitberichters zu übernehmen, sowie Frau Siegert für die Durchsicht des Manuskripts.

1 Einleitung

Travelling waves, kurz TW, sind spezielle Lösungen partieller Differentialgleichungen im eindimensionalen Raum. Sie können dadurch charakterisiert werden, daß sie in einem gleichförmig bewegten Koordinatensystem ein zeitlich invariantes Profil aufweisen. In dieser Arbeit werden Fronten untersucht, welche spezielle TW-Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen des Typs

$$u_t - u_{xx} = f(u) \tag{1.1}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$ sind. Diese Fronten haben die Eigenschaft, monoton zwei verschiedene konstante "Zustände" zu verbinden, d.h. die Front ist eine Lösung, für die $u(\infty) = 0$ und $u(-\infty) = 1$ ist.

Das Studium von Fronten ist für viele Anwendungen von Interesse. Die Flüssigkeitsmechanik ist ein Forschungsgebiet, in dem die Dynamik von TW eine große Rolle spielt. Auch bei der Modellierung von Phasenübergängen sind Fronten von zentraler Bedeutung. Weitere Beispiele aus den Anwendungen sind in Evans [Eva72a] zu finden, der ein Modell zur Nervenreizleitung untersucht. Aronson und Weinberger untersuchen [AW78] ein Modell aus der Populationsdynamik, und schließlich sei noch die Chemie bzw. physikalische Chemie als Anwendungsgebiet der Reaktions-Diffusionsgleichung (1.1) erwähnt.

Grundlegend zum Verständnis der Dynamik von solchen TW gehört die Stabilität von Fronten unter Störungen, kann man doch davon ausgehen, daß kein in der Realität beobachtbares Phänomen unter völlig störungsfreien Bedingungen vorkommt. Es ist daher zu erwarten, daß nur solche Wellen in der Natur zu sehen sind, die Störungen schnell genug ausklingen lassen.

Die Stabilität einer gegebenen TW unter Störungen zu untersuchen, ist das zentrale Anliegen der Arbeiten zum Beispiel von Alexander, Gardner und Jones [AGJ90], [AW78], [Eva72a], Fife und McLeod [FM77], [Kir92], Kirchgässner und Raugel [KR96], Sattinger [Sat76] und vielen anderen mehr.

Die Problemstellung ist alt, und die in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehende Gleichung

$$u_t - u_{xx} = u - u^2 \tag{1.2}$$

wird nach einer Arbeit von Kolmogorov, Petrovski und Piskunov aus dem Jahre 1937 kurz KPP-Gleichung genannt. Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Gleichung (1.2) eine TW-Lösung $u_0(x + \gamma t)$ mit der Wellengeschwindigkeit γ , $|\gamma| \geq 2$ besitzt. Diese Front u_0 ist eine monotone Verbindung der Gleichgewichte $u = 0$ und $u = 1$. **Hier und im folgenden sei $\gamma < -2$ gewählt.** Die Front verbindet dann die Gleichgewichte $u = 1$ für $x \rightarrow -\infty$ mit $u = 0$ für $x \rightarrow \infty$. Diese Front u_0 erfüllt die Gleichung $\gamma u'_0 - u''_0 = u_0 - u_0^2$, und sie hat die Eigenschaften: $u'_0 < 0$ und $0 \leq u_0 \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus einer Analysis im Phasenraum erhält man auch das asymptotische Verhalten von u_0 . Durch Einführung von bewegten Koordinaten, in denen die Front eine stationäre Lösung ist, wird die Differentialgleichung, die u_0 beschreibt, zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung. u_0

ist eine heterokline Verbindung des Sattels $u_0 = 1, u'_0 = 0$ für $x \rightarrow -\infty$ mit einem Knoten $u_0 = 0, u'_0 = 0$ für $x \rightarrow \infty$ mit der Asymptotik

$$\begin{aligned} u_0 - 1 &\sim e^{(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + 1})x} && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ u_0 &\sim e^{(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - 1})x} && \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die im weiteren immer wieder vorkommenden Terme $\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} \pm 1}$ werden mit $\alpha := \sqrt{\gamma^2 + 4}$ und $\beta := \sqrt{\gamma^2 - 4}$ abgekürzt. Es gilt die Beziehung $\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} = 2$.

Die Dynamik einer Störung u in diesen bewegten Koordinaten relativ zu der Front u_0 kann durch die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t + \gamma u_x - u_{xx} &= (1 - 2u_0)u - u^2 \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

beschrieben werden. Hierbei wurde in (1.2) durch $(x, t) \mapsto (x + \gamma t, t)$ auf bewegte Koordinaten transformiert, und u_0 durch $u_0 + u$ ersetzt. Die Dynamik der Störung u ist durch (1.3) gegeben. Stabilität der Front u_0 liegt vor, wenn die Störung mit der Zeit ausklingt. Die Dynamik der Lösungen von (1.3) hängt eng mit der Wahl des zugrunde liegenden Funktionenraums zusammen, indem eine Lösung von (1.3) existiert.

Eine entscheidende Rolle in der Stabilitätsanalyse der Gleichung (1.3) spielt der lineare Operator $Lu = -u_{xx} + \gamma u_x + (2u_0 - 1)u$. Dessen Spektrum, bzw. die Lage des essentiellen Spektrums in der komplexen Ebene, ist entscheidend für das Langzeitverhalten der Lösungen der linearen Gleichung $u_t - u_{xx} + \gamma u_x + (2u_0 - 1)u = 0, u|_{t=0} = U_0$. Dies bedeutet mit anderen Worten: die Lage des Spektrums entscheidet darüber, ob Störungen mit der Zeit ausklingen oder nicht. Die Lage des Spektrums hängt von der Wahl des zugrunde liegenden Funktionenraums ab. Die Ableitung u'_0 der Front löst die Eigenwertgleichung $Lu'_0 = 0$, ist u'_0 in dem zugrunde liegenden Funktionenraum, so enthält das Spektrum die Null.

In [Sat76] führt die Verwendung von Gewichten zu einer Verschiebung des Spektrums und zu Stabilitätsresultaten im Raum stetiger, beschränkter Funktionen mit dem Gewicht $1 + e^{-\frac{\gamma}{2}x}$. Dieses wird auch in [Hen80], Kapitel 5 erläutert. Dort wird das essentielle Spektrum auch in L^p und in gewichteten L^p -Räumen abgeschätzt. Das Verschieben des Spektrums durch gewichtete Räume hat allerdings zur Folge, daß die Eigenlösung u'_0 zum Eigenwert Null aus den Räumen, in denen man die Störung sucht, unter Umständen ausgeschlossen wird. Dies sieht man am exponentiellen Abklingverhalten von $u'_0 \sim \exp(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2})x$ für $x \rightarrow -\infty$. Es ist $\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} > 0$ und somit $u'_0 \in L^p(-\infty, 0)$ aber $e^{\frac{\gamma}{2}x}u'_0 \sim \exp(\gamma + \frac{\alpha}{2})x \notin L^p(-\infty, 0)$, da $\gamma < -2$. u'_0 ist also nicht in einem Raum L^p versehen mit dem Gewicht $e^{\frac{\gamma}{2}x}$.

In [AGJ90] wird im Raum beschränkter, gleichmäßig stetiger Funktionen eine analytische Funktion konstruiert, die als "Evans-Funktion" bezeichnet wird. Die Nullstellen dieser Evans-Funktion sind die Eigenwerte des linearen Operators. Bei den dort behandelten TW ist die Null im Spektrum des linearen Operators von (1.3). Der Rest des Spektrums ist stabil und von der imaginären Achse wegbeschränkt. Die Stabilität, die in diesem

Zusammenhang gezeigt wird, läßt die Konvergenz gegen eine verschobene TW zu, d.h. Konvergenz wird formuliert in dem Sinne, daß ein Phasenshift $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$\|u(x, t) - u_0(x + c)\|_{C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Vor diesem Hintergrund zeigt [Kap92] in polynomial gewichteten Räumen beschränkter, gleichmäßig stetiger Funktionen die Stabilität von TW.

Neuere Resultate von [EW92], [BKL92] und [Gal92] beruhen auf ganz anderen Methoden. [EW92] zeigen Stabilität von reellen Fronten in Ginzburg-Landau Systemen unter komplexen Störungen unter Verwendung eines Liapunov-Funktional in gewichteten L^p -Räumen. Der Zugang von Bricmont, Kupiainen und Lin, und darauf aufbauend von Galley, geht über das geschickte Ausnutzen von Skalierungsinvarianzen der parabolischen Gleichung. Galley verwendet diese Technik, um die Stabilität der Front der KPP-Gleichung mit langsamster Geschwindigkeit $\gamma = -2$ zu zeigen.

Die durch Kirchgässner in [Kir92] eingeführte ‐Eichtransformation‐ behandelt - stellvertretend für die Stabilitätsanalyse von Fronten - die KPP-Gleichung. Ausgehend von der Gleichung für die Störungen $u(x, t)$ von u_0 in bewegten Koordinaten, also (1.3), wird eine Transformation $u(x, t) = Z(x)v(x, t)$ gesucht, die den Term $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$ wegtransformiert. Dies geschieht im Sinne der Floquet-Theorie und führt auf den speziellen Störungsansatz $u_0 + u_0'V$, welcher letztendlich nach einer geeigneten Transformation das Gewicht $e^{\frac{\gamma}{2}x}$ für die KPP-Gleichung zur Folge hat. Die Wahl der Störung in der Form $u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ wurde bereits in [Sat76] getroffen. Die durch diese Eichtransformation entstandene Eichform

$$\begin{aligned} V_t - V_{xx} - 2\frac{b_x}{b}V_x &= -u_0'V^2, \\ V|_{t=0} &= V_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

mit $b(x) = -u_0'e^{-\frac{\gamma}{2}x}$, ist in geeignet gewichteten Räumen ein lösbares Cauchy-Problem. Die Gewichte werden durch den Operator $-V_{xx} - \frac{2b_x}{b}V_x = -\frac{1}{b^2}(b^2V_x)_x$ und die Nichtlinearität festgelegt. In [Kir92] wird gezeigt, daß in $L^2(b) \cap L^2(u_0')$ eine Lösung des Cauchy-Problems (1.4) existiert, welche exponentiell schnell in der Zeit abklingt.

In dieser Arbeit wird speziell die Störung in der Form $e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ gewählt. Dies hat zur Folge, daß die Störung die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u &= -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2 \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

mit $b(x) = -u_0'e^{-\frac{\gamma}{2}x}$, und damit mit $\frac{b_{xx}}{b} = (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})$, erfüllt. Gleichung (1.5) wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. Zunächst wird die lokale Existenz von Lösungen der Gleichung (1.5) in $X^1 = H^1(\mathbb{R}) \cap H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ gezeigt. Diese Lösungen existieren global in der Zeit und klingen exponentiell schnell ab.

Der zu (1.5) gehörende lineare Operator besitzt asymptotisch konstante Koeffizienten. [Kir92] verwendet diese Eigenschaft, um eine explizite Darstellung einer Lösung zu bestimmen, die eine Gleichung vom Typ (1.5) mit konstanten Koeffizienten löst. Die in

[Kir92] verwendete Methode zur expliziten Darstellung der Lösungen dieser asymptotischen Eichform ist die Laplace-Transformation in der Zeit.

Ausgehend von [Kir92] wird auch in dieser Arbeit mit der Laplace-Transformation bezüglich der Zeit gearbeitet. Für die volle lineare Gleichung (1.5) wird mittels asymptotischer Methoden eine parameterabhängige Greensche Funktion konstruiert. Dieser Parameter repräsentiert die Laplace-transformierte Zeit. Die in Kapitel 3 erzielten Resultate schließen die Lücke zwischen der in [Kir92] mit Hilfe von Maximumprinzipien gezeigten Langzeitasymptotik und der dort explizit für die asymptotische Eichform gezeigten Langzeitasymptotik in dem Sinne, daß die Methode eine parameterabhängige Greensche Funktion zu konstruieren eine explizite Darstellung der Lösung erlaubt. Der in der vorliegenden Arbeit konstruierte Greensche Integraloperator wird in L^p sowie auch gewichteten L^p -Räumen abgeschätzt. Die Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den Resultaten aus [Kir92] und [Sat76]. Die Tauberasymptotik stellt eine Beziehung zwischen dem Verhalten der Laplace-transformierten Lösungen in der Nähe von Singularitäten und dem Verhalten der Lösungen der Eichform für $t \rightarrow \infty$ her. Die Langzeitasymptotik wird mit Taubersätzen bestimmt und bietet eine gute Basis zur Untersuchung der Langzeitasymptotik in Abhängigkeit der zugrunde liegenden Funktionenräume.

Zudem kommen diese Untersuchungen ohne die Verwendung eines Maximumprinzips aus, und die Ergebnisse aus [Kir92] für die L^∞ -Norm der Störungen, die dort mit Hilfe eines Maximumprinzips erreicht werden, werden hier mit allgemeingültigen Methoden verifiziert. Die in dieser Arbeit konstruierte Greensche Funktion basiert auf der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und kann damit auf allgemeinere Situationen, z.B. Systeme, angewandt werden.

Die lokale Existenz von Lösungen der nichtlinearen Gleichung (1.5) mit einem spezifischen zeitlichen Abklingen kann mit einem Fixpunktargument in geeignet gewichteten Räumen gezeigt werden. Dies führt auf das Ergebnis

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \sim \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \|U_0\|_{X^1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \beta = \sqrt{\gamma^2 - 4}, \frac{\beta^2}{4} < 1$$

oder

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \sim e^{-(1-\delta)t} \|U_0\|_{X^1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \delta > 0, \frac{\beta^2}{4} \geq 1.$$

Es ist $\frac{\beta^2}{4} = \frac{\gamma^2}{4} - 1$ fest. Dieses β ist optimal und kann nicht verbessert werden. Das Mitführen der algebraischen Terme ist somit sinnvoll, während beim Abklingen der Form $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \sim e^{-(1-\delta)t} \|U_0\|_{X^1}$ nur $\delta > 0$ gefordert wird. Dieses Ergebnis ist somit unscharf und macht ein Mitführen der algebraischen Terme überflüssig. Es existiert also eine Konstante $a > 0$, so daß

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \sim e^{-at} \|U_0\|_{X^1}, \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

woraus ein exponentielles Abklingen der Störungen folgt, sofern die Anfangsstörung U_0 aus $X^1 = H^1(\mathbb{R}) \cap H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ ist. Die Norm, in der $u(x, t)$ gemessen wird, ist durch $X^\infty = L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ gegeben und bedeutet $e^{\frac{\gamma}{2}x} u \in L^\infty(-\infty, 0)$ und $u \in L^\infty(0, \infty)$, da $\gamma < -2$ vorausgesetzt wurde.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige grundlegende Fakten aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Funktionalanalysis sowie der Laplace-Transformationen bereitgestellt werden. Die Terminologie stimmt überein mit [Hen80], [HP57], [Yos80] oder anderen Standardwerken der partiellen Differentialgleichungen bzw. Funktionalanalysis. Des weiteren beinhaltet dieses Kapitel die lokale Existenz von Lösungen der Eichform sowie erste Abschätzungen der Langzeitasymptotik dieser Lösungen.

Man betrachte die Eichform

$$\begin{aligned} V_t - V_{xx} - 2\frac{b_x}{b}V_x &= -u'_0V^2, \\ V|_{t=0} &= V_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

welche die Dynamik der Störungen einer Front u_0 beschreibt, und die durch die in [Kir92] vorgestellte Eichtransformation aus der zu untersuchenden gestörten KPP-Gleichung hervorgeht. Es ist $b(x) = -u'_0e^{-\frac{\gamma}{2}x}$.

Gleichung (2.1) kann durch die Transformation $bV \mapsto u$ umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u &= -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2, \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei $\frac{b_{xx}}{b} = 2u_0 + \frac{\beta^2}{4}$, mit $\frac{\beta^2}{4} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - 1}$.

Es sei (2.2) als Differentialgleichung in einem Funktionenraum formal dargestellt als

$$\begin{aligned} u_t + A u &= NL(u) \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hierbei ist

$$A u = -u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u = -u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right)u$$

und die Nichtlinearität wird mit

$$NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2$$

abgekürzt.

Für (2.3) läßt sich formal eine Lösung durch

$$u(t) = e^{-At}U_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}NL(u)(s)ds$$

repräsentieren. Es wird hierbei e^{-At} als die (Lösungs-)Halbgruppe mit dem infinitesimalen Generator $-A$ bezeichnet. Das Ziel dieses Kapitels ist es, das zeitliche Abklingen der Halbgruppe abzuschätzen, die Langzeitasymptotik der Halbgruppe in dem zugrunde gelegten Funktionenraum abzuschätzen und schließlich mit der oben aufgeführten "Variation der Konstanten Formel" die Langzeitasymptotik der Eichform (2.2) zu bestimmen. Die Methode bedarf natürlich einer Rechtfertigung, insbesondere müssen Räume und Abbildungen präzisiert werden.

2.1 Der Operator A

Es seien zunächst einige verwendete Definitionen und Sätze aus Henry, [Hen80] zitiert, die den folgenden Ausführungen zugrunde liegen. Diese tragen dieselben Numerierungen wie im Buch von [Hen80].

Definition 1.3.1, [Hen80] *Ein linearer Operator A in einem Banachraum Y heißt sektoriell, wenn er abgeschlossen ist und dichten Definitionsbereich $D(A) \subset Y$ hat. Seine Resolvente erfülle die folgenden Bedingungen: Es existiere ein Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und eine Konstante $M \geq 1$, sowie ein $a \in \mathbb{R}$, so daß der Sektor*

$$S_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

in der Resolventenmenge $\rho(A)$ von A enthalten ist, und dort die Abschätzung

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

für alle $\lambda \in S_{a,\theta}$ gilt.

Bemerkungen: Die Winkelöffnung des Sektors $S_{a,\theta}$ ist $2\pi - 2\theta > \pi$. Ist A ein nach unten beschränkter selbstadjungierter, dicht definierter Operator in einem Hilbertraum, so ist A sektoriell.

Satz 1.3.4, [Hen80] *Sei A ein sektorieller Operator. Dann ist $-A$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$. Diese besitzt die Darstellung*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

mit einem Integrationsweg $\Gamma \subset \rho(-A) \subset \mathbb{C}$, wobei für $\lambda \in \Gamma$, $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ für $|\lambda| \rightarrow \pm\infty$ mit einem Winkel $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ gilt.

Es ist $\frac{d}{dt}e^{-At}y = -Ae^{-At}y$ für jedes $y \in Y$ und für $t > 0$.

Bezeichnungen: Mit $\sigma(A)$ wird das Spektrum eines Operators, dies ist die Vereinigung von Punkt-, kontinuierlichem und Residualspektrum, bezeichnet. Hierbei ist $\sigma_p(A)$ das Punktspektrum. $\sigma_e(A)$ ist das wesentliche Spektrum, d.h. Vereinigung von kontinuierlichem und Residualspektrum. Die Resolventenmenge wird mit $\rho(A)$ bezeichnet. Es ist $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus (\sigma_e \cup \sigma_p)$. Wird im weiteren Text “ $\operatorname{Re} \sigma(A) > C$ ”, $C \in \mathbb{R}$ verwendet, so bedeutet dies: für alle $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re} \lambda > C$.

Zur Untersuchung des wesentlichen Spektrums eines gewöhnlichen Differentialoperators mit asymptotisch konstanten Koeffizienten kann Kap. 5, Appendix, S. 136 ff. aus [Hen80] herangezogen werden.

Beispiel, [Hen80], S. 140. *Sei $-A = u_{xx} + a(x)u_x + b(x)u$, $-\infty < x < \infty$ mit $a(x) \rightarrow a_+$ für $x \rightarrow \infty$, $a(x) \rightarrow a_-$ für $x \rightarrow -\infty$, $b(x) \rightarrow b_+$ für $x \rightarrow \infty$, $b(x) \rightarrow b_-$ für $x \rightarrow -\infty$, a_{\pm} ,*

b_{\pm} Konstanten in \mathbb{R} . Dann gilt für das wesentliche Spektrum $\sigma_e(A)$ in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ oder $C_b^0(\mathbb{R})$ oder $C_{unif}^0(\mathbb{R})$:

$$\sigma_e(A) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{a_{\pm}^2} \geq -b_{\pm} \right\}.$$

Falls $a_{\pm} = 0$ ist $\sigma_e(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq -b_{\pm}, \operatorname{Im} \lambda = 0\}$.

Man betrachte den linearen Operator A , der in Gleichung (2.2) formal eingeführt wurde.

$$Au = -u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right)u. \quad (2.4)$$

Dieser ist selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R})$ und positiv, siehe Lemma 2.1. Er ist somit sektoriell in dem Sektor $S_{\frac{\beta^2}{4}, \phi}$, $\frac{\pi}{2} > \phi > 0$ und erzeugt eine analytische Halbgruppe e^{-At} , deren infinitesimaler Generator $-A$ ist. Aus der Darstellung der Halbgruppe und der Abschätzung

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{M}{|\lambda + \frac{\beta^2}{4}|},$$

sowie einem geeignet gewählten Weg γ in der komplexen Ebene in der Resolventenmenge $\rho(-A)$ mit $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ für $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, folgt

$$\|e^{-At}\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t}.$$

Das Spektrum von A kann wie folgt beschrieben werden: falls das Punktspektrum $\sigma_p(A)$ nicht leer ist, so sind alle Eigenwerte reell und $\geq \frac{\beta^2}{4}$. Für das wesentliche Spektrum σ_e gilt [Hen80], $\sigma_e \subset [\frac{\beta^2}{4}, \infty)$ und damit auch für die Resolventenmenge $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus (\sigma_e \cup \sigma_p) \supseteq \mathbb{C} \setminus [\frac{\beta^2}{4}, \infty)$. Dieses gilt im übrigen in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ und $C_b^0(\mathbb{R})$ und läßt also dort auf ein exponentielles Abklingen der Lösungen gemäß [Hen80], [Sat76] schließen.

Die Nichtlinearität $NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2$, die bisher noch nicht berücksichtigt wurde, enthält außer dem Term u^2 noch den Term $e^{\frac{\gamma}{2}x}$. Wie später noch gezeigt wird, genügt es aufgrund von $NL(u)$ nicht, diesen Operator alleine in $L^2(\mathbb{R})$ zu betrachten. Um lokale Existenz zeigen zu können, muß ein Gewicht im Raum eingeführt werden, siehe Kapitel 2.2. Dies führt auf den Raum $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, wobei $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x}) = \{u \in L_{loc}^2 \mid \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{\gamma x} < \infty\}$, $\|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = (\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{\gamma x} dx)^{1/2}$.

Bezeichnungen: Es werden als Abkürzungen für die hier verwendeten Funktionenräume in Zukunft die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} X^0 &:= L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x}), \\ X^1 &:= H^1(\mathbb{R}) \cap H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x}), \\ X^2 &:= H^2(\mathbb{R}) \cap H^2(e^{\frac{\gamma}{2}x}), \\ X^\infty &:= L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x}) \end{aligned}$$

benutzt, wobei $L^p(e^{\frac{\gamma}{2}x}) = \{u \in L^p_{loc} \mid e^{\frac{\gamma}{2}x}u \in L^p(\mathbb{R})\}$, $\|u\|_{L^p(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u e^{\frac{\gamma}{2}x}|^p\right)^{1/p}$, $\|u\|_{L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |u e^{\frac{\gamma}{2}x}|$. Die Sobolevräume sind entsprechend definiert durch $H^k(e^{\frac{\gamma}{2}x}) = \{u \in H^k_{loc} \mid e^{\frac{\gamma}{2}x} \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(\mathbb{R}), 0 \leq i \leq k\}$, $\|u\|_{H^k(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = \left(\sum_0^k \|e^{\frac{\gamma}{2}x} \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)^{1/2}$.

Zunächst noch einige Bemerkungen zum wesentlichen Spektrum von Operatoren, die bei der Behandlung der Stabilität von Fronten auftreten. Das zu betrachtende Problem ist die Stabilität der Front u_0 , die eine TW-Lösung der KPP-Gleichung (1.2)

$$u_t - u_{xx} = u - u^2$$

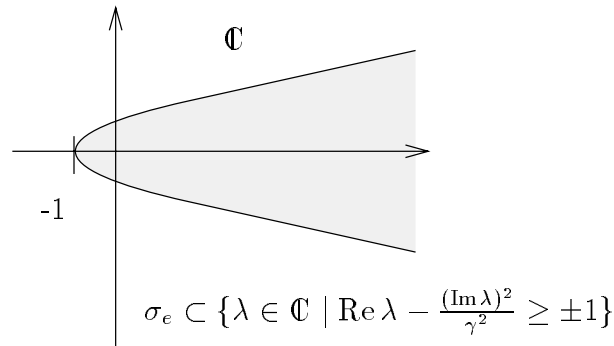
ist.

Ein Standard Störungsansatz $u_0 \mapsto u_0 + w$ führt auf die Gleichung

$$w_t - w_{xx} + \gamma w_x = (1 - 2u_0)w - w^2. \quad (2.5)$$

Da $0 < u_0(x) < 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0 = 1$, hat der zu der Gleichung (2.5) gehörende lineare Operator $-w_{xx} + \gamma w_x + (2u_0 - 1)w$ in $L^p(\mathbb{R})$ folgende Spektraleigenschaft [Hen80] ([Sat76] im $C_b^0(\mathbb{R})$):

Für das wesentliche Spektrum gilt: $\sigma_e \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda - \frac{(\text{Im } \lambda)^2}{\gamma^2} \geq \pm 1\}$, $\min \text{Re } \sigma_e = \min(-1, 1) = -1$, in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ und in $C_b^0(\mathbb{R})$.



Somit liegt ein Teil des wesentlichen Spektrums in der linken Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda \leq 0\}$. Außerdem ist 0 ein Eigenwert zur Eigenlösung u'_0 , denn

$$0 = -u_0''' + \gamma u_0'' + 2u_0 u_0' - u_0' = Au_0'.$$

Dies hat zur Folge, daß die Front u_0 nicht in einem strikten Sinne in $L^p(\mathbb{R})$ stabil ist. Aus diesen Bemerkungen zu (2.5) folgt, daß man, um Stabilität zu erzielen, versuchen muß, mit dem Teil des Spektrums, der nicht strikt in der rechten Halbebene liegt, fertig zu werden.

Sattinger wählt den Weg, ein exponentielles Gewicht einzuführen, um das Spektrum in die rechte Halbebene zu verschieben. Im Falle [Sat76] führt dies dann auf den Operator

$$Lw = -\tilde{w}_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) \tilde{w},$$

welcher positiv ist. Sein Spektrum liegt strikt in der rechten Halbebene für $|\gamma| > 2$. Die Forderungen in [Sat76] an das Gewicht, das dort als $1 + e^{-\frac{\gamma}{2}x}$ gewählt ist, sind zunächst einmal, daß das Gewicht eine glatte Funktion sein soll, die größer als 1 ist. Setzt man $\tilde{w} = e^{-\frac{\gamma}{2}x}w$ in die Gleichung (2.5) ein, dann wird der Term $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$ wegtransformiert und das Spektrum verschoben. Dies wird in [KR96] erläutert. In Kapitel 5.3 dieser Arbeit wird die Auswirkung der Wahl eines exponentiellen Gewichtes dargestellt.

Geht man zurück zu der Herkunft der Eichform, so ist diese aus der speziellen Transformation $u_0 \mapsto u_0 + u'_0 V$ hervorgegangen, wobei u_0 die Frontlösung der KPP-Gleichung ist. Da $b(x) = -u'_0 e^{-\frac{\gamma}{2}x}$ kann man die Transformation auf die Eichform auch als $u_0 \mapsto u_0 + b e^{\frac{\gamma}{2}x} V$ auffassen, und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß vorher schon vereinfachend bV durch u ersetzt wurde, entspricht die Eichform also dem linearen Operator, der entsteht, wenn man einen Störungsansatz für die Front der KPP-Gleichung in der Form $u_0 \mapsto u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ macht. u erfüllt dann die Gleichung (2.2).

Die Auswirkung dieser speziellen Darstellung der Störung sieht man am Vergleich des wesentlichen Spektrums von (2.4) und (2.5). Der Störungsansatz mit $u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ transformiert den Term $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$ weg und verschiebt das Spektrum. Zudem wird die Eigenlösung u'_0 zum Eigenwert Null aus dem Raum $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x}) \cap L^2(\mathbb{R})$, in dem der Operator untersucht wird, ausgeschlossen. In diesem Raum existiert lokal eine Lösung der Gleichung (2.2), siehe Kapitel 2.2.

Bei der Herleitung der Eichform (2.1) ist der Zugang systematisch. In [Kir92] wird für den Linearteil der KPP-Gleichung für die gestörte Front (2.5) eine glatte Transformation $Z : \mathbb{R} \mapsto GL(2)$ gesucht, die den Linearteil der Gleichung in einen "konstanten" Linearteil abbildet, so daß die Transformation die Information der Koeffizienten des Operators trägt. Dieser Ansatz ist im Sinne der Floquet-Theorie zu verstehen und liefert eine Darstellung der Störung, aus der sich Stabilität folgern läßt. Bei der so entstandenen Eichform erfordert der lineare Operator keine Gewichte mehr, da er schon positiv ist, und kein Teil des Spektrums in der negativen Halbebene liegt, wie man aus (2.4) sehen kann. Hier ist es die Nichtlinearität, die andere Gewichte im Raum fordert als der lineare Operator. Dies wird in Abschnitt 2.2 bei der Klärung der Frage nach der Existenz von Lösungen noch genauer ausgeführt werden und führt, durch die Verwendung eines Gewichtes, auf einen noch zu untersuchenden Operator A_γ :

$$A_\gamma u = -u_{xx} - \gamma u_x + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u. \quad (2.6)$$

Will man die Eichform (2.2) behandeln, so muß der lineare Operator A aus (2.4) untersucht werden, und zwar sowohl in $L^2(\mathbb{R})$ als auch, durch die Nichtlinearität bedingt, in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$.

Für den Operator $A_\gamma u = -u_{xx} - \gamma u_x + (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u$ gilt in dem mit dem Gewicht $e^{\frac{\gamma}{2}x}$ versehenen Raum $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$:

$$A_\gamma u = -\frac{1}{e^{\gamma x}} (e^{\gamma x} u_x)_x + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u = Au - \gamma \frac{\partial}{\partial x} u. \quad (2.7)$$

Lemma 2.1 $A_\gamma u$ ist selbstadjungiert in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ mit $\mathcal{D}(A_\gamma) = H^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$.

Beweis:

Es sei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ das Skalarprodukt in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ bezeichnet. $\mathcal{D}(A_\gamma)$ ist dicht in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, da C_0^∞ dicht in $L^2(\mathbb{R})$. $A_\gamma u = -\frac{1}{e^{\gamma x}}(e^{\gamma x}u_x)_x + (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u$ ist symmetrisch, da $\langle A_\gamma u, v \rangle_\gamma = \langle u, A_\gamma v \rangle_\gamma$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(A_\gamma)$. Dies folgt aus partieller Integration. Die auftretenden Randterme $e^{\gamma x}u_x(x)\bar{v}(x)|_{-\infty}^\infty$ und $e^{\gamma x}u(x)\bar{v}_x(x)|_{-\infty}^\infty$ sind Null für $u, v \in \mathcal{D}(A_\gamma)$, da

$$|e^{\gamma x}u^2(x_n) - e^{\gamma x}u^2(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x_n} \frac{d}{dx} (u^2(x)e^{\gamma x}) dx \right| \leq \int_{x_m}^{x_n} (2uu_x + |\gamma|u^2) e^{\gamma x} dx \leq C(\gamma) \|u\|_{H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2$$

gilt. Für jede Cauchyfolge $\{x_n\}$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ist $|e^{\gamma x}u^2(x_n) - e^{\gamma x}u^2(x_m)| < C\varepsilon$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{\gamma}{2}x}u(x)$ existiert und muß gleich Null sein, da $u \in L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$. Genauso folgt $|e^{\gamma x}u_x^2| \leq C\|u\|_{H^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2$. Also ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\gamma x}u_x(x)\bar{v}(x) = 0$.

A_γ ist abgeschlossen in $\mathcal{D}(A_\gamma)$. Sei $u_n \rightarrow 0$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(A_\gamma)$, $A_\gamma u_n \rightarrow v$. Es ist $\langle A_\gamma u_n, u_n \rangle_\gamma \geq \frac{\beta^2}{4} \|u_n\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 \geq 0$. Sei $\tilde{v} \in \mathcal{D}(A_\gamma)$, $p > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{4} \|u_n + p\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \langle A_\gamma(u_n + p\tilde{v}), (u_n + p\tilde{v}) \rangle_\gamma = \\ &= \operatorname{Re} \left(\langle A_\gamma u_n, u_n \rangle_\gamma + p \langle A_\gamma u_n, \tilde{v} \rangle_\gamma + p \langle A_\gamma \tilde{v}, u_n \rangle_\gamma + p^2 \langle A_\gamma \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\gamma \right). \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\frac{\beta^2}{4} p \|\tilde{v}\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 \leq \operatorname{Re} \langle v, \tilde{v} \rangle_\gamma + p \langle A_\gamma \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_\gamma.$$

Für $p \rightarrow 0$ folgt $0 \leq \operatorname{Re} \langle v, \tilde{v} \rangle_\gamma$ für alle $\tilde{v} \in \mathcal{D}(A_\gamma)$. Hieraus folgt $v = 0$, denn aus der Annahme $v \neq 0$ ergibt sich mit $\tilde{v} = -v$ ein Widerspruch. Da $\mathcal{D}(A_\gamma)$ dicht in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ folgt $v = 0$ in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$.

Ein abgeschlossener und symmetrischer Operator ist selbstadjungiert genau dann, wenn $\operatorname{Ker}(A_\gamma^* \pm i) = 0$, Satz 3.16, [Kat66], S. 271. A_γ ist symmetrisch und $\mathcal{D}(A_\gamma) \subseteq \mathcal{D}(A_\gamma^*)$. Sei $(A_\gamma^* \pm i)u = 0$ und $u \in \mathcal{D}(A_\gamma^*)$. Sei ϕ eine glatte Testfunktion mit $\phi(x) = 1$ für $|x| \leq r$, $\phi(x) = 0$ für $|x| \geq R$, $R > r$ und $|\phi'(x)| \leq M$ für $x \in \mathbb{R}$. Setzt man $v = \phi u$, so ist $v \in \mathcal{D}(A_\gamma)$, und es gilt

$$(A_\gamma \pm i)v = (A_\gamma^* \mp i)v = \phi A_\gamma^* u - \phi''u - 2\phi'u' - 2\gamma\phi'u \mp i\phi u = -\phi''u - 2\phi'u' - 2\gamma\phi'u \mp i\phi u.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \langle (A_\gamma \pm i)v, v \rangle_\gamma &= - \int_{\mathbb{R}} \phi''u\phi\bar{u}e^{\gamma x} dx - 2 \int_{\mathbb{R}} \phi'u'\phi\bar{u}e^{\gamma x} dx - \gamma \int_{\mathbb{R}} \phi'u\phi\bar{u}e^{\gamma x} dx \pm i \int_{\mathbb{R}} \phi^2 u\bar{u}e^{\gamma x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi'^2 |u|^2 e^{\gamma x} dx + \int_{\mathbb{R}} \phi'\phi(u\bar{u}' - u'\bar{u})e^{\gamma x} dx \pm i \|\phi u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2, \end{aligned}$$

wie aus partieller Integration folgt. Da der Term $(u\bar{u}' - u'\bar{u}) \pm i\|\phi u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2$ rein imaginär ist, ist $\langle A_\gamma v, v \rangle_\gamma = \int_{\mathbb{R}} \phi'^2 |u|^2 e^{\gamma x} dx$. Andererseits gilt $\langle A_\gamma v, v \rangle_\gamma \geq \frac{\beta^2}{4} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. Es folgt hieraus

$$\frac{\beta^2}{4} \int_{\mathbb{R}} \phi'^2 |u|^2 e^{\gamma x} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \phi'^2 |u|^2 e^{\gamma x} dx.$$

Verwendet man die Eigenschaften der Testfunktion ϕ , so ist

$$\frac{\beta^2}{4} \int_{-r}^r |u|^2 e^{\gamma x} dx \leq M \int_{|x|>r} |u|^2 e^{\gamma x} dx.$$

Führt man den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ durch, so folgt $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ für $u \in \mathcal{D}(A_\gamma^*)$. ■

Lemma 2.2 *Der Operator $-A = u_{xx} - (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u$ erzeugt eine analytische Halbgruppe $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ in $X^0 := L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$. Zudem gilt*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

wobei Γ ein Weg in $\rho(-A) \subset \mathbb{C}$ mit $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ für $|\lambda| \rightarrow \infty$ für $\lambda \in \Gamma$, mit einem Winkel θ aus dem Intervall $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Beweis:

Nach Satz 1.3.4, [Hen80] genügt es zu zeigen, daß A ein sektorieller Operator in X^0 ist.

A ist selbstadjungiert und positiv in $L^2(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R})$ und damit sektoriell. Der Sektor ist durch $S_{\frac{\beta^2}{4}, \phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |\arg(\lambda - \frac{\beta^2}{4})| \leq \pi, \lambda \neq \frac{\beta^2}{4}, \phi > 0\}$ gegeben.

Es ist weiterhin zu zeigen, daß A in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ sektoriell ist. Es werden die in Definition 1.3.1, [Hen80] für sektorielle Operatoren geforderten Eigenschaften nachgeprüft:

A_γ ist selbstadjungiert und positiv in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ und somit abgeschlossen. A ist in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ eine Störung des abgeschlossenen Operators A_γ mit dem Term $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$. $A = A_\gamma + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$ ist in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ abgeschlossen, wenn $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$ “ A_γ -beschränkt” ist im Sinne von [Kat66], S. 190 ff., Theorem 1.1. Der Operator $\gamma \frac{\partial}{\partial x}$ heißt A_γ -beschränkt, wenn es Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$, $c_2 < 1$ gibt mit

$$\|\gamma \frac{\partial}{\partial x} u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq c_1 \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} + c_2 \|A_\gamma u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}, \quad (2.8)$$

für alle $u \in \mathcal{D}(A_\gamma)$. Es ist $\mathcal{D}(A_\gamma) \subset \mathcal{D}(\gamma \frac{\partial}{\partial x})$. Die Abschätzung (2.8) wird durch [Kat66], Example 1.6, S.191 ff. gewährleistet, kann aber auch direkt gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_x \cdot u_x e^{\gamma x} dx = \left. uu_x e^{\gamma x} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx} + \gamma u_x) u e^{\gamma x} dx \\ &\leq \|u_{xx} + \gamma u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß $u \in \mathcal{D}(A_\gamma) = H^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, und somit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} uu_x e^{\gamma x} = 0$. Weiterhin ist für $k > 0$

$$\|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq \|u_{xx} + \gamma u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^{1/2} \cdot \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{k} (u_{xx} + \gamma u_x - (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u + (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u) \right\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^{1/2} \cdot \|ku\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{1}{k} (-A_\gamma u + (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u) \right\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} + \|ku\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \right) \\
&\leq \frac{1}{2k} \|A_\gamma u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} + \left(\frac{1}{2k} \cdot \frac{\alpha^2}{4} + k \right) \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (2.8) für $k > \frac{|\gamma|}{2}$. $A = A_\gamma + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$ ist somit ein abgeschlossener und dicht definierter Operator in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, da A eine Störung von A_γ mit einem Term niedrigerer Differentiationsordnung ist.

Schließlich schätzt man noch die Resolvente von A in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ ab:

Bildet man das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von

$$(A_\gamma + \gamma \frac{\partial}{\partial x} - \lambda \text{Id})u = f$$

mit $u \in \mathcal{D}(A_\gamma) \subset L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ mit der natürlichen Komplexifizierung versehen sei, dann erhält man

$$\left\langle \left(A_\gamma + \gamma \frac{\partial}{\partial x} - \lambda \text{Id} \right) u, u \right\rangle = \langle f, u \rangle.$$

Nach Trennung in Imaginär- und Realteil ergibt sich für den Imaginärteil

$$\begin{aligned}
&\text{Im} \int_{\mathbb{R}} \gamma u_x \bar{u} e^{\gamma x} dx - \text{Im} \lambda \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 = \text{Im} \langle f, u \rangle \\
\Rightarrow \quad &|\text{Im} \lambda| \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 \leq |\langle f, u \rangle| + \left| \text{Im} \int_{\mathbb{R}} \gamma u_x \bar{u} e^{\gamma x} dx \right| \\
&\leq \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \|f\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} + |\gamma| \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}.
\end{aligned}$$

Der Realteil ist

$$\langle A_\gamma u, u \rangle + \text{Re} \int_{\mathbb{R}} \gamma u_x \bar{u} e^{\gamma x} dx - \text{Re} \lambda \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 = \text{Re} \langle f, u \rangle.$$

Weiterhin

$$\|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4} \right) |u|^2 e^{\gamma x} + \text{Re} \int_{\mathbb{R}} \gamma u_x \bar{u} e^{\gamma x} dx + (-\text{Re} \lambda) \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 = \text{Re} \langle f, u \rangle.$$

Die unterstrichenen Terme werden mit

$$\frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \text{Re} \int_{\mathbb{R}} \gamma u_x \bar{u} e^{\gamma x} dx \geq -\frac{\gamma^2}{2} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2$$

abgeschätzt. Es folgt

$$\frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta^2}{4} - \text{Re} \lambda \right) \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 \leq \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \|f\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})},$$

woraus die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

in einem Sektor $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Re} \lambda - 1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}|\operatorname{Im} \lambda| > 0\}$ folgt. A ist abgeschlossen in $L^2(\mathbb{R})$ und in $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, also ist A auch abgeschlossen in X^0 . A erfüllt in $L^2(\mathbb{R})$ eine Resolventenabschätzung $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{|\lambda|}$ in dem Sektor $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Re} \lambda + \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{2}|\operatorname{Im} \lambda| > 0\} \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Re} \lambda - 1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}|\operatorname{Im} \lambda| > 0\}$. Diese Resolventenabschätzung gilt also auch in X^0 in dem Sektor $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Re} \lambda - 1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}|\operatorname{Im} \lambda| > 0\}$. Nach [Hen80] ist also A ein sektorieller Operator in X^0 und erzeugt somit eine analytische Halbgruppe mit den oben genannten Eigenschaften. ■

Bemerkungen: Man hätte statt $X^0 = L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ auch den Raum $L^2(1 + e^{\frac{\gamma}{2}x})$ wählen können. Auch hier wird von $-A$ eine analytische Halbgruppe erzeugt, da A ein sektorieller Operator ist. Dieser Raum ist isomorph zu X^0 . Dieses Gewicht wird in [Sat76] verwendet, um das Spektrum zu stabilisieren. Allerdings ist dort der zugrunde liegende Funktionenraum C_b^0 . Dies hat zur Konsequenz, daß die dort gezeigte Stabilität in dem Sinne zu verstehen ist, daß ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $\|u(x, t) - u_0(x + c)\|_{C_b^0} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dies wird als asymptotisch orbitale Stabilität mit einem Shift $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

2.2 Lokale Existenz von Lösungen der nichtlinearen Eichform und a priori Abschätzungen in X^0

Um die lokale Existenz einer Lösung der Eichform (2.2)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u &= -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2 \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned}$$

in X^0 zu zeigen, soll Satz 3.3.3 aus [Hen80] verwendet werden.

Satz 3.3.3, [Hen80] Betrachte $\frac{dw}{dt} + Aw = f(t, w)$, $w(t = t_0) = w_0$. Sei A ein sektorieller Operator in einem Banachraum Z . Sei $0 \leq \alpha < 1$, und $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times Z^\alpha$ offen, mit $Z^\alpha = \mathcal{D}((A + a\operatorname{Id})^\alpha)$, $a \in \mathbb{R}$ geeignet.

Es sei $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$ lokal Hölder-stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in w , d.h. zu $(t_1, w_1) \in \mathcal{U}$ existiere eine Umgebung $V \subset \mathcal{U}$ von (t_1, w_1) derart, daß für alle $(t_2, w_2) \in V$ und $(t_3, w_3) \in V$ gilt $\|f(t_2, w_2) - f(t_3, w_3)\|_{X^0} \leq L(|t_2 - t_3|^\theta + \|w_2 - w_3\|_{Z^\alpha})$, für Konstanten $L > 0$, $\theta > 0$. Unter diesen Voraussetzungen gibt es zu jedem $(t_0, w_0) \in \mathcal{U}$ eine Zeit $T = T(t_0, w_0) > 0$, so daß $\frac{dw}{dt} + Aw = f(t, w)$ eine eindeutige Lösung w in $(t_0, t_0 + T)$ mit dem Anfangswert $w(t = t_0) = w_0$ besitzt.

Es gilt weiterhin die Frage zu beantworten, welche Abbildung die Nichtlinearität $NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2$ stiftet.

Lemma 2.3 $NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2 : X^1 \rightarrow X^0$ ist stetig. Es gilt

$$\|e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2\|_{X^0} \leq M(\gamma)\|u\|_{X^1}^2 \quad \text{und} \quad \|e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2\|_{X^1} \leq M'(\gamma)\|u\|_{X^1}^2 \quad (2.9)$$

mit positiven reellen Konstanten $M(\gamma)$ und $M'(\gamma)$.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} |u(x)^2| &= 2 \left| \int_{-\infty}^x u u_x(\xi) d\xi \right| \leq 2 \left(\int_{-\infty}^x |u|^2 d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^x |u_x|^2 d\xi \right) \\ &\leq \int_{-\infty}^x u^2 d\xi + \int_{-\infty}^x u_x^2 d\xi \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_1$. Somit ist für jedes $u \in H^1(\mathbb{R})$ dieses u auch in $L^\infty(\mathbb{R})$. Dieses muß man jetzt noch für den Raum, der mit dem exponentiellen Gewicht versehen ist, nachrechnen. Dies ergibt

$$|(e^{\frac{\gamma}{2}x}u(x))^2| \leq (1 + |\gamma/2|)\|u\|_{H^1(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2,$$

und für die Nichtlinearität

$$\begin{aligned} |e^{\frac{\gamma}{2}x}u(x) \cdot u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^x \frac{d}{dx} (e^{\frac{\gamma}{2}x}u \cdot u) \right| \leq \int_{-\infty}^x \left| \frac{\gamma}{2}e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2 + 2e^{\frac{\gamma}{2}x}uu_x \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{|\gamma|}{4} \|e^{\frac{\gamma}{2}x}u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|e^{\frac{\gamma}{2}x}u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \leq C(\gamma)\|u\|_{X^1}^2. \end{aligned}$$

Damit gilt also: ist $u \in X^1$, so ist $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap e^{\frac{\gamma}{2}x}u \in L^\infty = X^\infty$. Hieraus folgt (2.9) mit $\|e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2\|_{X^1} \leq C'(\gamma)\|u\|_{X^\infty}\|u\|_{X^1} \leq M'(\gamma)\|u\|_{X^1}^2$. Hieraus folgt $\|e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2\|_{X^0} \leq M(\gamma)\|u\|_{X^1}^2$.

Da die Nichtlinearität ein Polynom ist, ist sie sogar eine analytische Abbildung von $X^1 \rightarrow X^0$, bzw. $X^1 \rightarrow X^1$ und damit Lipschitz-stetig. ■

Dies gilt jedoch nur in X^0 und nicht in $L^2(\mathbb{R})$ allein. Das erklärt, wie schon in Paragraph 2.1 angedeutet, warum es nicht genügt, nur in $L^2(\mathbb{R})$ zu arbeiten, obwohl der lineare Operator A sehr wohl in $L^2(\mathbb{R})$ behandelt werden kann, und auch das Spektrum die gewünschten Eigenschaften hätte.

Insbesondere ist $NL(u)$ lokal Lipschitz-stetig in u und nicht explizit von t abhängig. Hieraus folgt die Existenz nach [Hen80]:

Satz 2.4 Es sei $Au = -u_{xx} + (2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u$, $NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2$, dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $U_0 \in X^1$ eine Zeit $T = T(U_0) > 0$, so daß die Eichform

$$u_t - u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right)u = NL(u), \quad u|_{t=0} = U_0$$

eine eindeutige Lösung $u(x, t)$ in $(0, T)$ besitzt mit $u(x, 0) = U_0$.

Beweis:

Die Aussage folgt aus Satz 3.3.3 [Hen80]. Nach Lemma 2.2 ist A ein sektorieller Operator in X^0 . Nach Lemma 2.3 ist $NL(u) : \mathcal{U} \mapsto X^0$ analytisch, wobei $\mathcal{U} \subset X^1$ offen. Also ist $NL(u)$ lokal Lipschitz-stetig in $u \in \mathcal{U}$. ■

Es wird hier per Definition 3.3.1, [Hen80] unter einer Lösung u des Anfangswertproblems (2.2) auf dem Zeitintervall $[0, T)$ die stetige Funktion $u : [0, T) \rightarrow X^0$ mit $u|_{t=0} = U_0$ verstanden. Es gilt für diese Lösung für $t \in (0, T)$, daß $u \in \mathcal{U} \subset X^1$, $u \in \mathcal{D}(A) = X^2$ und $\frac{du}{dt} \in C^0((0, T), X^0)$ ist. u erfüllt die Differentialgleichung (2.2) in $(0, t)$. Zusätzlich hat man noch folgende Regularität der Lösung: Für eine Anfangsbedingung aus X^1 ist die Lösung in $X^2 = \mathcal{D}(A)$ für $t > 0$. Hieraus folgt mit den Sobolevschen Einbettungssätzen, daß die Lösung auch stetig in x ist. Dies wird später für die Abschätzung der Langzeitasymptotik verwendet.

Lemma 3.3.2, [Hen80] gewährleistet die Gültigkeit der Darstellung der Lösung als Lösung der "Variation der Konstanten" Formel, d.h. ist u Lösung der Differentialgleichung (2.2), dann ist u darstellbar als Lösung der Gleichung

$$u(x, t) = e^{-At}U_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}NL(u(s))ds.$$

Dieser Existenzsatz 2.4 liefert zunächst nur die Existenz einer Lösung auf einem Zeitintervall bis zur Zeit T . Die Existenz für alle Zeiten wird aus den nun folgenden Abschätzungen der linearen Halbgruppe e^{-At} folgen.

Mit Hilfe von Energieabschätzungen kann in X^0 a priori die Langzeitasymptotik der linearen Gleichung abgeschätzt werden. Die zu untersuchende Gleichung ist

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right)u &= 0 \\ u|_{t=0} &= U_0, \end{aligned}$$

wobei die gesuchte Abschätzung in $X^0 = L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ gelten soll. Eine einfache Überlegung liefert im $L^2(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u^2 = 0,$$

indem man die Differentialgleichung mit u multipliziert und über \mathbb{R} integriert. Unter Verwendung von $u_0(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhält man folgende Ungleichung, aus der sich direkt die Lösung der linearen Gleichung abschätzen läßt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta^2}{4} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq 0 \\ \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq e^{-2\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|e^{-At}U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Im $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ gilt:

$$\begin{aligned} u_t - e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}u_x)_x + \gamma u_x + \frac{b_{xx}}{b}u &= 0 \\ u|_{t=0} &= U_0. \end{aligned}$$

Multipliziert man obige Gleichung mit $e^{\gamma x}u$ und integriert, so erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \gamma u u_x e^{\gamma x} dx + \int_{\mathbb{R}} \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u^2 e^{\gamma x} dx = 0.$$

Das Integral mit dem Term $u u_x$ ist nicht notwendigerweise positiv. Durch quadratisches Ergänzen unter der Verwendung von $\frac{\gamma^2}{4} = \frac{\beta^2}{4} + 1$, läßt sich obige Gleichung umschreiben zu

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} (2u_0 - 1) u^2 e^{\gamma x} dx + \int_{\mathbb{R}} \left(u_x + \frac{\gamma}{2}u\right)^2 e^{\gamma x} dx = 0,$$

woraus sofort

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} (2u_0 - 1) u^2 e^{\gamma x} dx \leq 0$$

folgt. Da $(2u_0 - 1)(x)$ Werte zwischen -1 und 1 annimmt, muß man diesen Term jetzt geeignet behandeln, siehe [KR96]. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $2u_0 - 1 \geq 1 - \delta$, für $-\infty \leq x \leq x_0$, woraus die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + (1 - \delta) \int_{-\infty}^{x_0} u^2 e^{\gamma x} dx \leq \int_{x_0}^{\infty} (1 - 2u_0) u^2 e^{\gamma x} dx$$

und des weiteren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + (1 - \delta) \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{\gamma x} dx &\leq \int_{x_0}^{\infty} (1 - 2u_0 + 1 - \delta) u^2 e^{\gamma x} dx \\ &\stackrel{\gamma < 0}{\leq} C(\delta) e^{x_0 \gamma} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C(\delta) e^{x_0 \gamma} e^{-\frac{\beta^2}{2}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

folgt. Schreibt man dies als Integralgleichung um, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 &\leq e^{-2(1-\delta)t} \|U_0\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + C(\delta) e^{x_0 \gamma} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \int_0^t e^{-2(1-\delta)(t-s)} e^{-\frac{\beta^2}{2}s} ds \\ &\leq C'(\delta) \left(e^{-2(1-\delta)t} \|U_0\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + e^{-\frac{\beta^2}{2}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\|e^{-At}U_0\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq C''(\delta) \left(e^{-(1-\delta)t} + e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \right) \|U_0\|_{X^0}. \quad (2.11)$$

Aus diesen Energieabschätzungen (2.10), (2.11) kann jetzt direkt die Langzeitasymptotik der Halbgruppe e^{-At} abgelesen werden.

Die Halbgruppe e^{-At} genügt auch einer Abschätzung

$$\|e^{-At}\|_{X^1 \rightarrow X^1} \leq C(\delta)e^{-a_0 t}, \quad a_0 = \min\left\{\frac{\beta^2}{4}, 1 - \delta\right\}.$$

Dies wird neben anderen Abschätzungen der Halbgruppe in [KR96] gezeigt, indem man die lineare Gleichung mit u_{xx} bzw. $e^{\gamma x} u_{xx}$ multipliziert und integriert.

Lemma 2.5 *Zu jedem $U_0 \in X^1$, mit $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug, existiert genau eine Lösung der Eichform (2.2). Diese existiert für alle Zeiten $t > 0$ und erfüllt die Abschätzung*

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}, \quad (2.12)$$

sofern die Anfangsbedingung klein genug ist. Es ist $a_0 = \min\left\{\frac{\beta^2}{4}, 1 - \delta\right\}$.

Beweis:

Die Abschätzung (2.12) und gleichzeitig auch die Existenz für alle Zeiten kann man mit einem Fixpunktargument in einem gewichteten Raum $C^0([0, \infty), X^1)$ mit einem Gewicht in der Zeit erhalten, indem man mit der Norm $\|u\|_{a_0} := \sup_{[0, \infty)} e^{a_0 t} \|u\|_{X^1}$ arbeitet und zeigt, daß die Integralgleichung

$$u(t) = e^{-At} U_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} NL(u(\tau)) d\tau$$

eine Lösung besitzt. Es ist $a_0 = \min\left\{\frac{\beta^2}{4}, 1 - \delta\right\}$.

Sei $B_r(0) := \{u \mid \|u\|_{a_0} \leq r\}$. Es bildet für $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug und für r entsprechend gewählt die rechte Seite $e^{-At} U_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} NL(u(\tau)) d\tau$ die Kugel $B_r(0)$ in sich ab:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-At} U_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} NL(u(\tau)) d\tau \right\|_{a_0} \leq \\ & \leq C \|U_0\|_{X^1} + \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} NL(u(\tau)) d\tau \right\|_{a_0} \\ & \leq C \|U_0\|_{X^1} + C \sup_{[0, \infty)} \left| e^{a_0 t} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \|NL(u(\tau))\|_{X^1} d\tau \right| \\ & \leq C \|U_0\|_{X^1} + C \sup_{[0, \infty)} \left| \int_0^t e^{-a_0 \tau} \|NL(u(\tau))\|_{a_0}^2 d\tau \right| \\ & \leq C \left(\|U_0\|_{X^1} + \|u\|_{a_0}^2 \right) \leq C \left(\|U_0\|_{X^1} + r^2 \right) < r. \end{aligned}$$

Für die Kontraktion zeigt man:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} (NL(u) - NL(v))(\tau) d\tau \right\|_{a_0} \leq \\ & \leq C \sup_{[0, \infty)} \left| e^{a_0 t} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \frac{e^{2a_0 \tau}}{e^{2a_0 \tau}} (\|u + v\|_{X^1} \|u - v\|_{X^1})(\tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq C \sup_{[0, \infty)} \left| \int_0^t e^{-a_0 \tau} (\|u + v\|_{a_0} \|u - v\|_{a_0})(\tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq C r \|u - v\|_{a_0}. \end{aligned}$$

Also existiert eine Lösung, die die Abschätzung $\|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}$ erfüllt. ■

Korollar 2.6 *Es gilt für die Lösungen der Eichform (2.2) aufgrund der Sobolevschen Einbettungssätze:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}.$$

Zusammenfassend ergibt sich damit, daß die Nichtlinearität der Eichform (2.2) ein Arbeiten in $X^0 = L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ erforderlich macht. In diesem Raum ist A ein sektorieller Operator, der eine analytische, in der Zeit exponentiell abklingende Halbgruppe erzeugt. In X^1 existiert lokal im Raum eine Lösung der Eichform (2.2) global in der Zeit. Diese Lösung klingt exponentiell schnell in t ab.

2.3 Die Laplace-Transformation

Dieser Paragraph soll den Zusammenhang klären zwischen der Laplace-Transformation und der Halbgruppe e^{-At} , die von dem sektoriellen Operator erzeugt wird, und über die Resolvente mittels

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s + A)^{-1} e^{st} ds$$

dargestellt ist. Die verwendeten Bezeichnungen und Sätze sind dem Buch [DL92], Kapitel XVI - XVII entnommen.

Definition 2.1 *Es sei $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}) := \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ mit } \text{supp } f \subset K, K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}\}$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \mathcal{D} := \bigcup_{K \subset \mathbb{R}} \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. Es sei mit $\mathcal{D}'(X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}, X)$ der Raum der Distributionen über \mathbb{R} mit Werten in X , X Banachraum, bezeichnet, wobei $\mathcal{L}(\mathcal{D}, X)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von \mathcal{D} nach X ist.*

Der Träger $\text{supp } f$ einer Distribution ist das Komplement der größten offenen Menge für die $f = 0$ ist. Mit $\mathcal{D}'_{\pm}(X)$ seien die Distributionenräume bezeichnet, deren Träger nach links bzw. nach rechts beschränkt ist. Ist $X = \mathbb{C}$, dann erhält man die üblichen Distributionen über \mathbb{R} mit Werten in \mathbb{C} .

Es sei mit $\mathcal{S}'(X) := \mathcal{L}(\mathcal{S}, X)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von \mathcal{S} nach X bezeichnet, wobei \mathcal{S} die schnell abklingenden Funktionen über \mathbb{R} sind. Die schnell abklingenden Funktionen sind Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right| < \infty$ für alle $m, n \in \mathbb{N}^0$.

Für $f \in \mathcal{D}'(X)$ sei $I_f := \{\xi \in \mathbb{R} \mid e^{-\xi t} f \in \mathcal{S}'(X)\} \subset \mathbb{R}$.

Mit diesen Bezeichnungen kann man die Laplace-Transformierte einer Distribution definieren, siehe [DL92], S. 217 ff.:

Definition 2.2 *$f \in \mathcal{D}'_+$ sei eine Distribution, die eine Laplace-Transformierte besitzt, d.h. es existiere ein $\xi_0 \in \mathbb{R}$, so daß $e^{-\xi t} f \in \mathcal{S}'(X)$ für $\xi > \xi_0$. ξ_0 heißt Abszisse der Konvergenz. Es sei $s \in \mathbb{C}$ mit $s = \xi + i\eta$. Dann ist $\mathcal{L}(f) : s \rightarrow F(s) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} f)(\eta)$ mit der Fouriertransformation \mathcal{F} . Explizit ist*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(\xi+i\eta)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{für} \quad f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

$\mathcal{L}(f)$ heißt die Laplace-Transformierte der Distribution f . $\mathcal{L}(f)$ ist holomorph in s in dem Streifen $\overset{\circ}{I}_f \times \mathbb{R}$ mit Werten in X , wobei mit $\overset{\circ}{I}_f$ das offene Innere von I_f aus Definition 2.1 gemeint ist.

Satz 2.7 1. Es sei $f \in \mathcal{D}'_+(X)$ mit $\text{supp } f \subset [\alpha, \infty)$. Die Funktion $F : s \rightarrow F(s)$ definiert über \mathbb{C} mit Werten in X ist die Laplace-Transformierte der Distribution f genau dann, wenn F holomorph in $(\xi_0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit Werten in X und

$$\|F(s)\|_X \leq e^{-\xi\alpha} \text{Pol}(|s|), \quad s = \xi + i\eta, \xi > \xi_0, \eta \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

wobei $\text{Pol}(|s|)$ ein Polynom in $|s|$ ist.

2. Die aus der Theorie der Laplace-Transformation reeller Funktionen bekannten Sätze über Faltungen, Verschiebung u.ä. übertragen sich direkt im Falle der Distributionen.

3. Sei A ein abgeschlossener und dicht definierter Operator in X und $s\text{Id} + A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ ein Isomorphismus für $s = \xi + i\eta$, $\xi > \xi_0$, $\eta \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\|(s\text{Id} + A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq \text{Pol}(|s|),$$

dann besitzt das abstrakte Problem $\frac{d}{dt}u + Au = 0$ eine Lösung in Form einer eindeutig bestimmten Distribution $G(t) \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(X, \mathcal{D}(A)))$. G besitzt eine Laplace-Transformierte und ist 0 für $t < 0$. Die Distribution G wird als Greensche Funktion bezeichnet. Die Laplace-Transformierte von $G(t)$ ist $G(s) = (s\text{Id} + A)^{-1}$ [DL92], S. 225 ff..

4. Im Falle eines sektoriellen Operators A ist $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s + A)^{-1} e^{st} ds$, mit Γ , wie in Definition 1.3.1 [Hen80], eine analytische Halbgruppe, die holomorph in einen Sektor fortgesetzt werden kann [Hen80], [DL92], S. 367 ff..

Führt man jetzt in der hier zugrunde liegenden linearen Differentialgleichung $u_t + Au = 0$ die Laplace-Transformation in der Zeit durch, so erhält man $su + Au = u(0, x) = U_0$. Man verbleibt mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit dem Parameter s , die es zu lösen gilt. Der Zusammenhang mit der Lösungshalbgruppe aus 2.1 wird durch

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s + A)^{-1} e^{st} ds \quad (2.14)$$

hergestellt. Die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation wird gerechtfertigt durch die in Abschnitt 2.1 angesprochenen Eigenschaften von A in X^0 . Es ist noch zu gewährleisten, daß Laplace-Transformation und Differentiation nach x vertauscht werden dürfen. Aus der Existenz einer Lösung in X^1 und Lemma 2.5 folgt $u : t \rightarrow u(x, t) \in C^0((0, \infty), X^2)$ und $u : t \rightarrow u(x, t) \in C^1((0, \infty), X^0)$ und $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}$ bzw. $\|u(\cdot, t)\|_{X^0} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}$. Sei $s > 0$. $e^{-st}u(x, t)$, $e^{-st}u_x(x, t)$ und $e^{-st}u_{xx}(x, t)$ sind als Funktionen von t lokal integrierbar. Aus $|e^{-st}u_x| \leq C \|u\|_{H^2(\mathbb{R})} e^{-st}$ folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz $\mathcal{L}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(u)$ für $s > 0$. Aus $\| -Ae^{-At}U_0 \|_{X^0} = \left\| \frac{d}{dt} e^{-At}U_0 \right\|_{X^0} \leq \frac{C}{t} e^{-a_0 t}$ für $t > 0$ folgt $\|u_{xx}\|_{X^0} e^{-st}$ absolut integrierbar über $t \in \mathbb{R}_+$ und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt die Vertauschbarkeit $\mathcal{L}(Au) = A\mathcal{L}(u)$.

Die oben aufgeführte Darstellung der Halbgruppe über die Resolvente $(s + A)^{-1}$ liegt in der Tatsache begründet, daß A ein sektorieller Operator ist.

Die Eichform im Laplace-transformierten Falle ist

$$su(x, s) - u_{xx}(x, s) + \frac{b_{xx}}{b}u(x, s) = \mathcal{LNL}(u)(x, s) + U_0(x). \quad (2.15)$$

Im folgenden wird nicht explizit durch eine andere Bezeichnung die eigentliche Lösung $u(x, t)$ von ihrer Laplace-Transformierten $u(x, s)$ unterschieden. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor. Die Variable s repräsentiert immer die Laplace-Transformierte bezüglich der Zeit t .

Um die Eichform (2.15) zu behandeln, wird in Kapitel 3 die lineare Differentialgleichung $su - u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u = U_0$ untersucht. Das lineare Problem wird mittels der Theorie der Greenschen Funktion integriert und daraus eine Abschätzung gewonnen, wie die Lösungen $u(x, s)$ vom Parameter s abhängen. Die Tauberasymptotik, die im Anschluß aufgeführt wird, liefert den Zusammenhang zwischen der Abhängigkeit der Lösung von s und der Abhängigkeit der Lösung von t . Erst dann wird, bezüglich t , mit Hilfe der "Variation der Konstanten" in Kapitel 4 die Nichtlinearität einbezogen.

Die Laplace-Transformierte $u(x, s)$ einer Funktion $u(x, t)$ wird aufgefaßt als Funktion einer komplexen Veränderlichen $s = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ und ist holomorph in der Halbebene $\operatorname{Re} s > \xi_0$, wobei ξ_0 die Abszisse der Konvergenz ist. Der Holomorphiebereich kann natürlich auch größer sein. Die Rücktransformation ist erklärt durch die komplexe Umkehrformel

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{st} u(x, s) ds,$$

mit $\xi > \xi_0$. Diese existiert, sofern $u(x, s)$ der Bedingung (2.13) genügt. In unserem Fall ist $u(x, s)$ Lösung der Differentialgleichung $(s + A)u = U_0$, welche einer Abschätzung $\|u(x, s)\|_{X^0} \leq \frac{C}{|s+a|}$ für $a = -1 - \frac{\gamma^2}{2}$ genügt. Dies ist eine Resolventenabschätzung in der Resolventenmenge des sektoriellen Operators A , die für den gewichteten Fall im Beweis zu Lemma 2.2 ausgeführt wurde. Zur Umkehrformel siehe [DL92].

Um die Langzeitasymptotik der Funktion $u(x, t)$ zu erhalten, muß man bei Anwendung der Taubersätze zur Asymptotik jetzt jedoch nicht explizit das Umkehrintegral berechnen. Die Tauberasymptotik [Doe50] stellt eine Beziehung her zwischen $u(x, s)$ für $s \rightarrow s_0 \in \mathbb{C}$ und der Funktion $u(x, t)$ für $t \rightarrow \infty$, wobei s_0 eine Singularität der Funktion $u(x, s)$ ist.

Die in Kapitel 3 vorgenommenen Abschätzungen liefern ein Verhalten der Norm von $u(x, s)$ in der Form $\|u(x, s)\| \sim \mathcal{O}((s - s_0)^\lambda)$, mit einem $\lambda \in [-1, 0]$, wobei $s \in \mathbb{C} \setminus \{s | \operatorname{Re} s \leq s_0, \operatorname{Im} s = 0\}$. Diese s liegen in der entlang der negativ reellen Achse bis zum Punkt s_0 aufgeschnittenen komplexen Ebene. Dort ist $(s - s_0)^\lambda$ erklärt und holomorph. Die Konvergenzordnung λ hängt von der Wahl der Räume bzw. Normen, in denen man arbeitet, ab.

Der Beweis des hier verwendeten Taubersatzes wird hier kurz angedeutet, um die Rolle der Singularität der Laplace-Transformierten $u(x, s)$ und deren Auswirkung auf die Langzeitasymptotik von $u(x, t)$ zu demonstrieren.

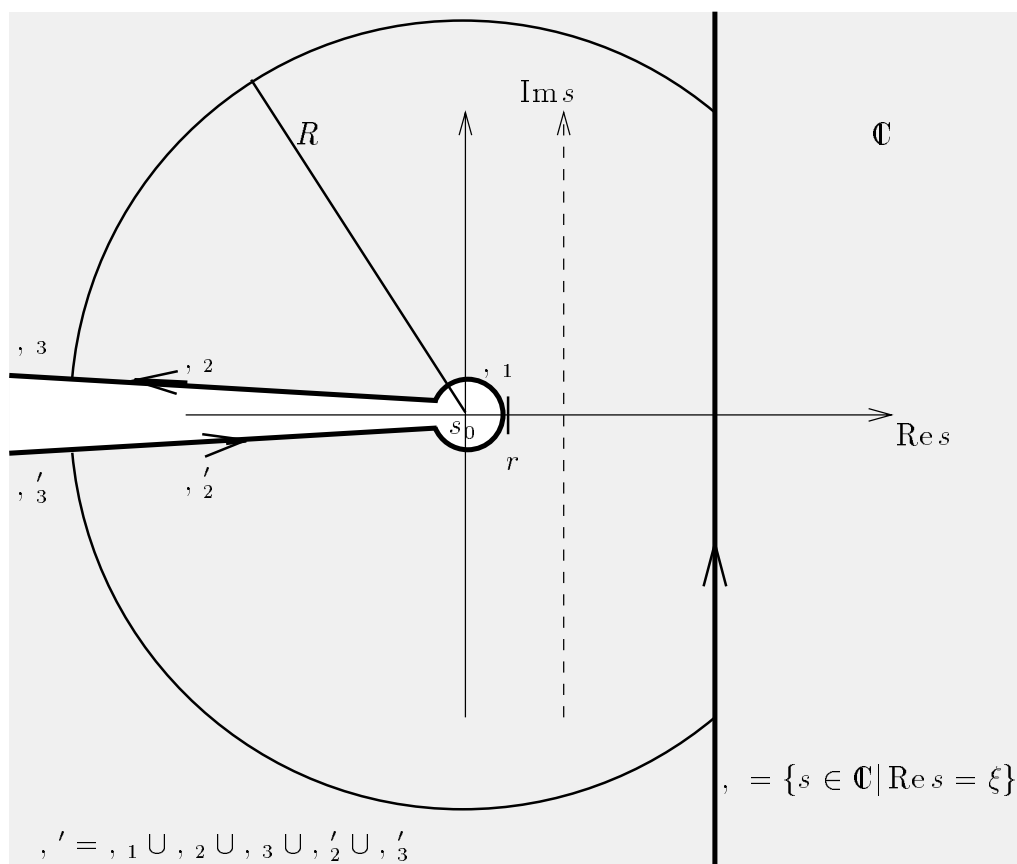


Abbildung 2

Satz 2.8 [Doe50] $F(s)$ sei holomorph in einem Sektor $|\arg(s - s_0)| \leq \psi$, $(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi)$ mit Ausnahme der Stelle s_0 . Es gelte gleichmäßig in $|\arg(s - s_0)| \leq \psi$

$$F(s) = \mathcal{O}(s - s_0)^\lambda \quad (\text{bzw. } |F(s)| \leq C|s - s_0|^\lambda) \quad \text{für } s \rightarrow s_0, \quad \lambda \text{ beliebig reell,} \quad (2.16)$$

und es existiere ein $k > 0$, so daß $F(s) = \mathcal{O}(e^{k|s|})$ für $|s| \rightarrow \infty$ auf den Strahlen $|\arg(s - s_0)| = \psi$. Dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{ts} F(s) ds = \mathcal{O}(e^{s_0 t} t^{-\lambda-1}) \quad (\text{bzw. } f(t) \leq C' e^{s_0 t} t^{-\lambda-1}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

mit $\Gamma = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = \xi, \xi > s_0\}$.

Beweis:

OBdA kann man $s_0 = 0$ setzen. Der Verschiebungssatz bringt dann den Term $e^{s_0 t}$ für $s_0 \neq 0$ wieder herein.

Im schraffierten Gebiet von Abbildung 2 ist $F(s)$ holomorph. Man überlegt sich, daß die Integration entlang Γ , denselben Wert liefert wie die entlang Γ' mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes. Entlang des Kreisbogens Γ_1 um den Ursprung (bzw. s_0) gilt nach (2.16)

$$|F(s)| < C|s|^\lambda, \quad |s| \leq R.$$

Wähle t groß, so daß $1/t < R$, dann ist für $r \leq \frac{1}{t}$

$$\left| \int_{\Gamma_1} e^{ts} F(s) ds \right| \leq 2\pi C e^{t\frac{1}{t}} \frac{1}{t^\lambda} \frac{1}{t} \leq C t^{-\lambda-1}.$$

Auf der geradlinigen Achse γ_2 ist (unter Beachtung von $\cos \psi < 0$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} e^{ts} F(s) ds \right| &\leq C \int_{1/t}^R e^{tr \cos \psi} r^\lambda dr = C \int_1^{tR} e^{u \cos \psi} \left(\frac{u}{t}\right)^\lambda \frac{du}{t} \\ &\leq C t^{-\lambda-1} \int_1^\infty e^{u \cos \psi} u^\lambda du = C t^{-\lambda-1}. \end{aligned}$$

Auf den Reststücken γ_3 der Achse ist

$$\left| \int_{\Gamma_3} e^{ts} F(s) ds \right| \leq C \int_R^\infty e^{tr \cos \psi} e^{kr} dr$$

und somit für $t > \frac{k}{-\cos \psi}$ konvergent. Die Integrale über γ_2 und γ_3 lassen sich genauso abschätzen. Damit ist

$$\left| \int_{\Gamma'} e^{ts} F(s) ds \right| \leq C t^{-\lambda-1}. \blacksquare$$

Im nächsten Kapitel wird dieser Satz angewandt, um $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty}$ in t abzuschätzen, indem man das Verhalten von $\|u(x, s)\|_{X^\infty}$ in s berechnet.

Angenommen eine Abschätzung der Form $\|u(x, s)\| = \|(s + A)^{-1} U_0\| \leq C(s - s_0)^\lambda \|U_0\|$ kann gezeigt werden, wobei $(s + A)^{-1}$ holomorph in der aufgeschnittenen \mathbb{C} -Ebene $\{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s - s_0)| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ sei. Die verwendete Norm sei jetzt noch nicht spezifiziert. Da die Halbgruppe e^{-At} über die Resolvente dargestellt werden kann, erhält man die Abschätzung

$$\|e^{-At}\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s + A)^{-1} e^{st} ds \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \|R(s, A)\| |e^{st}| |ds|.$$

Durch die Holomorphie sowohl von $(s + A)^{-1}$ als auch von $(s - s_0)^\lambda$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|e^{-At} U_0\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s + A)^{-1} U_0 e^{st} ds \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (s + A)^{-1} U_0 e^{st} ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} \|R(s, A)\| \|U_0\| |e^{st}| |ds| \leq C \|U_0\| \int_{\Gamma'} |s - s_0|^\lambda |e^{st}| |ds|, \end{aligned}$$

wobei hier mit dem Cauchy-Integralsatz der Weg γ in den Weg γ' aus dem Beweis zu Satz 2.8 verschoben wurde. Jetzt kann das Integral über den Weg γ' genauso abgeschätzt werden wie im Beweis von Satz 2.8 und liefert eine Langzeitasymptotik von $\|e^{-At} U_0\| \leq C e^{s_0 t} t^{-\lambda-1} \|U_0\|$.

Das nächste Kapitel wird sich mit der Frage beschäftigen, wie die Abhängigkeit der Norm der Lösungen $\|u(x, s)\|$ der linearen Laplace-transformierten Gleichung von s ist. Die Tauberasympotik ermöglicht es dann direkt, die Langzeitasymptotik der Norm der Lösungen $\|u(\cdot, t)\|$ zu bestimmen.

3 Die lineare Eichform in X^∞

Ziel dieses Kapitels ist es, die in [Kir92] mit Hilfe von Maximumprinzipien gefolgerte Langzeitasymptotik der Lösung $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ ohne Zuhilfenahme von Maximumprinzipien zu verifizieren. Dies geschieht in dieser Arbeit durch die Konstruktion einer Greenschen Funktion für die Laplace-transformierte Gleichung. In [Kir92] wird die Langzeitasymptotik der asymptotischen linearen Eichform in $L^2(\mathbb{R})$ explizit berechnet und mit Maximumprinzipien auf die Langzeitasymptotik in $L^\infty(\mathbb{R})$ geschlossen. Diese asymptotische lineare Eichform entsteht durch Ersetzen des x -abhängigen aber asymptotisch konstanten Koeffizienten $\frac{b_{xx}}{b}$ durch Konstanten. Mit dieser Arbeit sollte auch gezeigt werden, daß in bezug auf die Langzeitasymptotik der führende Term durch die asymptotische Eichform bestimmt ist. Grundlegend ist jedoch das Arbeiten in dem in Kapitel 2 vorgestellten Raum X^1 , da für Anfangsbedingungen $U_0 \in X^1$ durch Satz 2.4 die Existenz einer Lösung in X^1 gewährleistet ist.

Es wird für die Lösung $u(x, t)$ des linearen Problems

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u &= 0 \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

die Langzeitasymptotik bestimmt und zwar einerseits in $X^0 = L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\alpha}{2}x})$ und andererseits in $X^\infty = L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(e^{\frac{\alpha}{2}x})$. In X^0 wurde die Langzeitasymptotik bereits mit den Energieabschätzungen gezeigt. Die Abschätzungen von $u(x, t)$ in X^∞ werden eine Langzeitasymptotik liefern, die neben einem exponentiellen Abklingen von $e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ auch ein algebraisches Abklingen der Form $t^{-1/4}$ in Übereinstimmung mit [Kir92] aufzeigt. Vorausgesetzt wird bei den Abschätzungen in diesem Kapitel, daß die Anfangsbedingung $U_0 \in X^0$ (oder X^1) ist. Die Existenz ist gewährleistet, insbesondere liefert das Existenzresultat aus Satz 2.4 die Regularität der Lösungen, d.h. für $t > 0$ ist $u(x, t) \in \mathcal{D}(A) = X^2 = H^2(\mathbb{R}) \cap H^2(e^{\frac{\alpha}{2}x})$. Wie bereits in Lemmata 2.1 und 2.3 ausgeführt, ist $u(x, t)$ stetig und beschränkt, also $u(x, t) \in X^\infty$, für $u(x, t) \in X^2$.

In diesem Kapitel wird die Resolvente explizit konstruiert über eine Greensche Funktion zu dem parameterabhängigen gewöhnlichen Differentialgleichungsproblem

$$su - u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right) u = f(x)$$

in $L^2(\mathbb{R})$. Es wird hierbei verwendet, daß für den Koeffizienten $2u_0 + \frac{\beta^2}{4}$ gilt: $2u_0 + \frac{\beta^2}{4} \rightarrow \frac{\beta^2}{4}$ für $x \rightarrow \infty$ und $2u_0 + \frac{\beta^2}{4} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4}$ für $x \rightarrow -\infty$. Diese Eigenschaft erlaubt zum einen das Erstellen einer asymptotischen Eichform, die explizit invertiert werden kann, und zum anderen die Anwendung asymptotischer Methoden zur Konstruktion der Greenschen Funktion für die lineare Eichform.

Die lineare Eichform in (3.1) lautet nach Anwendung der Laplace-Transformation

$$su - u_{xx} + \frac{b_{xx}}{b}u = U_0 \quad (3.2)$$

für $s > 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Untersucht wird zunächst ein Paar gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Dieses lautet für $s > 0$

$$su - u_{xx} + \frac{\alpha^2}{4}u = U_0 \quad \text{für } x < 0 \quad (3.3a)$$

$$su - u_{xx} + \frac{\beta^2}{4}u = U_0 \quad \text{für } x \geq 0. \quad (3.3b)$$

Die Gleichung (3.3) in $L^2(\mathbb{R})$ wird im folgenden Text als asymptotische lineare Eichform bezeichnet. Aus den Gleichungen (3.3a), (3.3b) kann man direkt eine Lösung konstruieren, die an der Stelle $x = 0$ einmal stetig differenzierbar zusammengesetzt ist, und die die Randbedingungen $u(x, s) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ im Unendlichen erfüllt. Die im folgenden in (3.6) auf diese Weise konstruierte Lösung von (3.3) sei bezeichnet durch

$$u(x, s) = \int K(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi. \quad (3.4)$$

Sei

$$\mu(x) := \begin{cases} \frac{\beta^2}{4} - (2u_0 + \frac{\beta^2}{4}) = -2u_0(x) & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{\alpha^2}{4} - (2u_0 + \frac{\beta^2}{4}) = 2(1 - u_0(x)) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$\mu(x)$ klingt exponentiell schnell gegen Null ab für $|x| \rightarrow \infty$. Dieses Abklingverhalten lautet explizit $\mu(x) \sim \exp((\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2})x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $\mu(x) \sim \exp((\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2})x)$ für $x \rightarrow -\infty$, $\gamma < -2$.

Dann hat die Lösung der linearen Eichform (3.2) eine Darstellung über die Integralgleichung

$$u(x, s) = \int K(x, \xi, s) [U_0(\xi) + \mu(\xi)u(\xi, s)] d\xi. \quad (3.5)$$

(3.5) ist die Gleichung (3.4) um den Integralterm $\int K(x, \xi, s)\mu(\xi, s)u(\xi, s) d\xi$ erweitert.

Zur Darstellung der Lösung wie in (3.4) wird die Lösung der Gleichungen (3.3a), (3.3b) explizit wie folgt bestimmt: Betrachtet man die Differentialgleichung (3.3) dynamisch, so sieht man, daß $u = u_x = 0$ ein Sattelpunkt ist sowohl für $x > 0$ als auch für $x < 0$. Dieser Sattelpunkt besitzt jeweils eine eindimensionale stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Die dadurch entstandenen vier freien Konstanten werden durch die Regularitätsforderung in $x = 0$ und durch die Forderung $u(x, s) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ festgelegt.

Die Darstellung lautet, mit $\omega := \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$ und $\sigma := \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$, siehe [Kir92]:

$$u_+(x, s) = \int_0^\infty e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \quad (3.6a)$$

$$+ \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma x + \omega \xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \quad (3.6b)$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\sigma|x-\xi|} \frac{1}{2\sigma} U_0(\xi) d\xi \quad \text{für } x > 0 \quad (3.6c)$$

$$u_-(x, s) = \int_{-\infty}^0 e^{\omega(x+\xi)} \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \quad (3.6d)$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{\omega x - \sigma \xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \quad (3.6e)$$

$$+ \int_{-\infty}^0 e^{-\omega|x-\xi|} \frac{1}{2\omega} U_0(\xi) d\xi \quad \text{für } x < 0. \quad (3.6f)$$

Diese explizite Darstellung berechnet sich aus den jeweiligen Fundamentallösungen der Gleichungen (3.3a) und (3.3b). Diese sind für (3.3a) $\exp(\pm\sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}x)$ und für (3.3b) $\exp(\pm\sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}x)$. Zunächst hat man die Fundamentallösungen nur für $s > 0$ aufgrund der Laplace-Transformation erklärt. $(s + A)u = U_0$ ist lösbar für $s > 0$ mit den in (3.6a)-(3.6f) angegebenen Lösungen. Ist $\{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s + \frac{\beta^2}{4})| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, so ist $(s + A)u = U_0$ invertierbar mit den oben angegebenen Lösungen, welche in natürlicher Weise komplexifiziert werden. Die holomorphe Fortsetzung der reellen Wurzel ist in der so aufgeschnittenen Ebene der eindeutige Wert mit positivem Vorzeichen auf dem ersten Blatt der Riemannschen Fläche. Die Wurzeln $\omega = \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$ und $\sigma = \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$ haben in der aufgeschnittenen komplexen Ebene

$$\mathcal{E} := \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \left| \arg \left(s + \frac{\beta^2}{4} \right) \right| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0, s \neq \frac{\beta^2}{4} \right\}$$

positiven Realteil und die Fundamentallösungen sind holomorph in s . Man beachte hierbei, daß $-\frac{\alpha^2}{4} < -\frac{\beta^2}{4}$. Die Lage der Singularitäten ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Paare von Fundamentallösungen für (3.3a) und (3.3b) sind linear unabhängig, woraus sich unter den Randbedingungen $u(x, s) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und der C^1 -Bedingung an der Stelle $x = 0$, $u_+(0, s) = u_-(x, s)$, $\frac{du_+}{dx}(0, s) = \frac{du_-}{dx}(0, s)$, die in (3.6a)-(3.6f) aufgeführten Lösungen konstruieren lassen. Für $u_{\pm}(x, s)$ aus (3.6a)-(3.6f) gilt $(s - \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\beta^2}{4})u_+(x, s) = U_0$ für $x > 0$ und $(s - \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2}{4})u_-(x, s) = U_0$ für $x < 0$, d.h. die Gleichungen (3.3a) und (3.3b) sind erfüllt.

Bemerkungen: Für $s \in \mathcal{E}$ fest und für ein gegebenes $U_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, sind die in (3.6a)-(3.6f) gegebenen Lösungen $u_{\pm}(x, s) \in L^r(\mathbb{R})$, falls $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Hierbei werden $L^r(\mathbb{R})$ -Abschätzungen für die Faltungsintegrale (3.6c) und (3.6f) benötigt. Aus [DS57], Seite 528 erhält man: Ist $f \in L^p$ und $g \in L^q$, so ist die Faltung $f * g \in L^r$ mit $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Indizes “ \pm ” bei den L^p -Normen bedeuten, daß auf \mathbb{R}_{\pm} eingeschränkt wird.

Für das Integral aus (3.6c) gilt

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma|x-\xi|} \frac{1}{2\sigma} U_0(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{2|\sigma|} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma|x-\xi|} |U_0(\xi)| d\xi.$$

Hieraus folgt mit [DS57], Seite 528:

$$\left\| \int_0^{\infty} e^{-\sigma|x-\xi|} \frac{1}{2\sigma} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^r_+(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2|\sigma|} \|e^{-\operatorname{Re}\sigma|x|}\|_{L^q(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{1}{|q \operatorname{Re} \sigma|^{1/q}} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(q) \left(\frac{1}{|\operatorname{Re} \sigma|} \right)^{\frac{q+1}{q}} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (3.7)$$

Für das Integral aus (3.6a) erhält man

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| &= \left| e^{-\sigma x} \int_0^\infty e^{-\sigma \xi} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{C(s)}{|2\sigma|} e^{-\operatorname{Re} \sigma x} \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \sigma \xi} U_0(\xi) d\xi \leq \frac{C(s)}{|\sigma|} e^{-\operatorname{Re} \sigma x} \|e^{-\operatorname{Re} \sigma \xi}\|_{L^q_+(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

für $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Hieraus folgt

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^r_+(\mathbb{R})} \leq \frac{C(s)}{|2\sigma|} \cdot \frac{1}{|r \operatorname{Re} \sigma|^{1/r}} \frac{1}{|q \operatorname{Re} \sigma|^{1/q}} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

mit $1 \leq r \leq \infty$. Für die anderen Integrale schließt man ebenso. Da $\operatorname{Re} \sigma > 0$ für $s \in \mathcal{E}$, ist die Lösung u aus (3.6) in $L^r(\mathbb{R})$ für $s \in \mathcal{E}$ fest.

Da im folgenden der Parameter s immer aus der aufgeschnittenen \mathbb{C} -Ebene $\mathcal{E} = \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s + \frac{\beta^2}{4})| < \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0, s \neq \frac{\beta^2}{4}\}$ ist, sei graphisch die Lage der Singularitäten der Wurzeln $\sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$ und $\sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$ dargestellt.

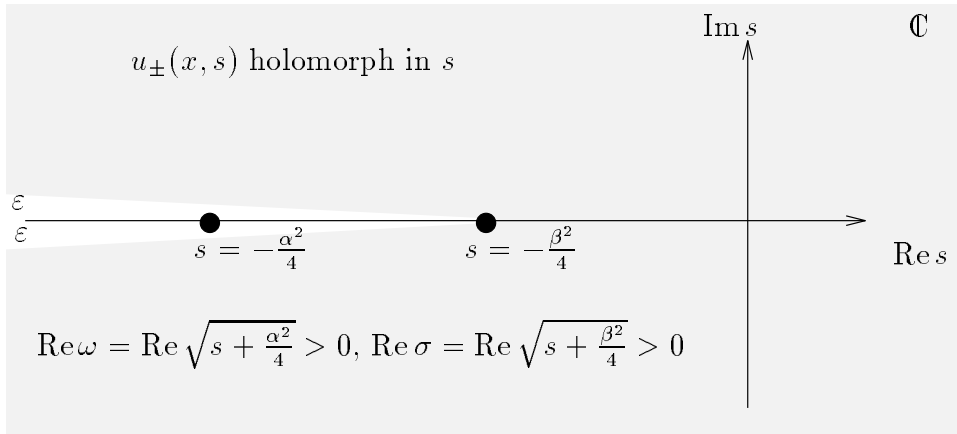


Abbildung 3

An dieser Stelle könnte man nun direkt die inverse Laplace-Transformierte der oben angegebenen Lösung der asymptotischen linearen Gleichung berechnen, wie dies in [Kir92] getan wird. Man kann hier aber auch einen anderen Weg gehen, der auf folgender Überlegung beruht: um die Langzeitasymptotik der vollen nichtlinearen Eichform zu berechnen, wird man die Darstellung in Form einer Integralgleichung wählen und versuchen, in geeigneten gewichteten Räumen mit einem Fixpunktargument oder ähnlichen Methoden die Existenz einer Lösung zu zeigen. Spätestens dann wird man gezwungen sein, die Normen der Lösung bezüglich x zu verwenden. Also kann man auch schon jetzt bei den Lösungen der linearen Gleichung die Normen bezüglich x und ihre Abhängigkeit vom Parameter s untersuchen,

um dann mittels Taubersätzen die Langzeitasymptotik der linearen Gleichung zu ermitteln. Mit anderen Worten, man schätzt das Zeitverhalten der Lösungshalbgruppe e^{-At} ab, indem man für e^{-At} die Darstellung über die Resolvente $e^{-At} = \int_{\Gamma} e^{-st} R(s, -A) ds$ wählt, wie dies schon in Kapitel 2.3 am Ende angesprochen wurde.

3.1 Die Abhängigkeit der Kerne von s in Abhängigkeit der verwendeten Norm

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der Lösungen der asymptotischen Eichform von s unter Verwendung der Tauberasympotik und unter der Voraussetzung $U_0 \in L^2(\mathbb{R})$ abgeschätzt. Es wird die Abhängigkeit der Kerne von s in den Normen $L^\infty(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R})$ unter der Voraussetzung $U_0 \in L^2(\mathbb{R})$ untersucht. Es ist in diesem Abschnitt $s \in \mathcal{E}$ mit $|\arg(s + \frac{\beta^2}{4})| < \pi - \varepsilon_0$, $s \neq \frac{\beta^2}{4}$ und $\varepsilon_0 > 0$ fest.

Die Untersuchung der Abhängigkeit der linearen Eichform in $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ wird am Ende dieses Kapitels behandelt, da die verwendeten Methoden jetzt noch nicht zur Verfügung stehen.

Lemma 3.1 *Sei $U_0 \in L^2(\mathbb{R})$. u bezeichne die Lösung der asymptotischen linearen Eichform (3.3). Dann gibt es eine Konstante $C(\varepsilon_0)$, so daß*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \tag{3.8}$$

gilt.

Beweis:

Verwendet wird die Darstellung von $u(x, s)$ aus (3.6).

Zunächst werden die Terme $\frac{1}{|\omega + \sigma|}$ und $\left| \frac{\sigma - \omega}{\omega + \sigma} \right|$ für $s \in \mathcal{E}$ abgeschätzt. Beide Terme sind holomorph in s für $s \in \mathcal{E}$. Sei $s + \frac{\beta^2}{4} = re^{i\phi}$. Es ist

$$\frac{1}{|\omega + \sigma|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}(\omega + \sigma)|} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \omega} \leq \sqrt{2} \quad \text{für } r \leq 1, |\phi| \leq \pi - \varepsilon_0,$$

da $\operatorname{Re} \sigma > 0$ und $\operatorname{Re} \omega > 0$ in \mathcal{E} , und $\operatorname{Re} \omega > \frac{1}{\sqrt{2}}$ in dem angegebenen Kreissektor. Es ist $\omega = \sqrt{2 + re^{i\phi}}$ mit $r \leq 1, |\phi| \leq \pi - \varepsilon_0$. Es gilt $\{s \in \mathbb{C} \mid s = 2 + re^{i\phi}, r \leq 1, |\phi| \leq \pi - \varepsilon_0\} \subset \{s \in \mathbb{C} \mid s = qe^{i\theta}, q \geq 1, |\theta| \leq \frac{\pi}{4}\}$. Hieraus folgt, daß $\operatorname{Re} \omega = \operatorname{Re} \sqrt{2 + re^{i\phi}} \geq 1 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ist die erste Abschätzung gezeigt. Weiterhin gilt

$$\frac{1}{|\omega + \sigma|} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \sigma} \leq \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{8}} \quad \text{für } r \geq 1, 0 \leq |\phi| \leq \frac{3\pi}{4}.$$

$$\frac{1}{|\omega + \sigma|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \sigma|} \leq \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{8}} \quad \text{für } r \geq 1, \frac{3\pi}{4} \leq |\phi| \leq \pi - \varepsilon_0,$$

da $\operatorname{Im} \sigma$ und $\operatorname{Im} \omega$ für ein festes $s \in \mathcal{E}$ gleiches Vorzeichen besitzen. Außerdem ist $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{|\omega + \sigma|} = 0$. Es existiert damit ein $C > 0$, so daß $\frac{1}{|\omega + \sigma|} \leq C$. Da $\frac{\sigma - \omega}{\omega + \sigma} = \frac{-2}{(\omega + \sigma)^2}$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit von $\left| \frac{\sigma - \omega}{\omega + \sigma} \right|$ für $s \in \mathcal{E}$.

Zudem ist $\frac{1}{\operatorname{Re} \sigma} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)$, da $\sigma = r^{1/2} e^{i\phi/2}$, mit $|\phi| < \pi - \varepsilon_0$ und somit $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{|\sigma|}{|\operatorname{Re} \sigma|} \leq \frac{1}{\sin(\varepsilon_0/2)}$, mit $\varepsilon_0 > 0$ fest.

Die Abschätzungen der Integrale lauten:

ad (3.6a), $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} \right| \cdot \|e^{-\operatorname{Re} \sigma x}\| \|e^{-\operatorname{Re} \sigma \xi} U_0\|_{L^1_+(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \frac{C}{|\sigma|} \|e^{-\operatorname{Re} \sigma \xi}\|_{L^1_+(\mathbb{R})} \cdot \|U_0\|_{L^1_+(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|\sigma|} \frac{1}{(2\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C}{|\sigma|(2\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{3/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad (3.9)$$

für $\sigma \rightarrow 0$ gleichmäßig in \mathcal{E} , $\varepsilon_0 > 0$ fest.

ad (3.6b), $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma x + \omega \xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \right| &\leq C \int_{-\infty}^0 e^{\operatorname{Re} \omega \xi} U_0(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \frac{C}{(2\operatorname{Re} \omega)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6c), $x > 0$: Verwendet wird die Abschätzung (3.7) für $r = \infty$, $p = q = 2$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma|x-\xi|} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty_+(\mathbb{R})} &\leq \left| \frac{1}{2\sigma} \right| \|e^{-\operatorname{Re} \sigma|x|}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C}{|\sigma|(2\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{3/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ad (3.6d), $x < 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^0 e^{\omega(x+\xi)} \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} \right| \frac{1}{(2\operatorname{Re} \omega)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6e), $x < 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{\omega x - \sigma \xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \frac{1}{\omega + \sigma} \right| \frac{1}{(2\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6f), $x < 0$: Verwendet wird die Abschätzung (3.7) für $r = \infty$, $p = q = 2$.

$$\left\| \int_0^{\infty} \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x-\xi|} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{|\omega|(2\operatorname{Re}\omega)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Alle Terme sind holomorph in s in der aufgeschnittenen Ebene \mathcal{E} . Man beachte, daß ω und σ durch $\sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$ bzw. $\sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$ gegeben sind, und in der aufgeschnittenen Ebene die Wurzeln positiven Realteil haben. Die am weitesten rechts gelegene Singularität ist also $\operatorname{Re} s = -\frac{\beta^2}{4}$, $\operatorname{Im} s = 0$, da $s = -\frac{\alpha^2}{4} = -\frac{\beta^2}{4} - 2$ links von $-\frac{\beta^2}{4}$ liegt. Hieraus ergibt sich schnell durch Vergleich der Abschätzungen ad (3.6a) - ad (3.6f), daß für $s \rightarrow -\frac{\beta^2}{4}$ die Abschätzungen in (3.9) und (3.10) diejenigen sind, die die Asymptotik in t bestimmen. Nach Satz 2.8 wird aus $(s + \frac{\beta^2}{4})^\lambda$ für $s \rightarrow -\frac{\beta^2}{4}$ ein Term $e^{-\frac{\beta^2}{4}t} t^{-\lambda-1}$ für $t \rightarrow \infty$. Damit ist $\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(|\sigma|^{-3/2}) = \mathcal{O}(|s + \frac{\beta^2}{4}|^{-3/4})$ für $s \rightarrow -\frac{\beta^2}{4}$ diejenige Abschätzung, deren inverse Laplace-Transformierte die langsamste Langzeitasymptotik liefert. $u(x, s)$ ist holomorph in der aufgeschnittenen Ebene und auf den Strahlen $|\arg(s + \frac{\beta^2}{4})| = \psi$, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, $s + \frac{\beta^2}{4} = r e^{i\psi}$ gilt $\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{r^{3/2} \cos \frac{\psi}{2}} = \mathcal{O}(e^{k|s|})$ für ein $k > 0$. Die Voraussetzungen des Satzes 2.8 sind erfüllt, und die Abschätzung $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(e^{-\frac{\beta^2}{4}t} t^{-1/4})$ für $t \rightarrow \infty$ folgt. ■

Bemerkungen: Die Abschätzungen der Terme (3.6a)-(3.6f) können auch in $L^2(\mathbb{R})$ durchgeführt werden. Sie liefern das Ergebnis $\|u(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|\sigma|^2} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$, d.h. u hängt von s ab wie $(s + \frac{\beta^2}{4})^{-1}$, was eine Langzeitasymptotik von $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ zur Folge hat. Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches man über die Energieabschätzung (2.10) erhalten hat. Die expliziten Abschätzungen lauten im Falle der $L^2(\mathbb{R})$ -Norm:

ad (3.6a), $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^2_+(\mathbb{R})} &= \|e^{-\sigma x}\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma\xi} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} \right| \|e^{-\operatorname{Re}\sigma x}\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \|e^{-\operatorname{Re}\sigma\xi} U_0\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C}{|\sigma|} \|e^{-\operatorname{Re}\sigma x}\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \|e^{-\operatorname{Re}\sigma\xi}\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \cdot \|U_0\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^2} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6b), $x > 0$:

$$\begin{aligned} \|e^{-\sigma x}\|_{L^2_+(\mathbb{R})} \left| \int_{-\infty}^0 e^{\omega\xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \frac{1}{\omega + \sigma} \right| \frac{1}{(2\operatorname{Re}\sigma)^{1/2} (2\operatorname{Re}\omega)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C(\varepsilon_0)}{(\operatorname{Re}\sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6c): Verwendet wird (3.7) mit $r = 2$, $p = 2$, $q = 1$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma|x-\xi|} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^2_+(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{|\sigma|} \|e^{-\operatorname{Re}\sigma|x|}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^2} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

ad (3.6d), $x < 0$:

$$\|e^{\omega x}\|_{L^2_-(\mathbb{R})} \left| \int_{-\infty}^0 e^{\omega\xi} \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} U_0(\xi) d\xi \right| \leq \frac{C}{|\omega|\operatorname{Re}\omega} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

ad (3.6e), $x < 0$:

$$\|e^{\omega x}\|_{L^2_-(\mathbb{R})} \left| \int_0^\infty e^{-\sigma\xi} \frac{1}{\omega + \sigma} U_0(\xi) d\xi \right| \leq \left| \frac{1}{\omega + \sigma} \right| \frac{C}{(\operatorname{Re}\sigma\operatorname{Re}\omega)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{(\operatorname{Re}\sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

ad (3.6f): Verwendet wird (3.7) mit $r = 2$, $p = 2$, $q = 1$.

$$\left\| \int_0^\infty \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x-\xi|} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^2_-(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|\omega|\operatorname{Re}\omega} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Das in Lemma 3.1 gezeigte zeitliche Abklingen der Lösungen ist eine Abschätzung der Lösung, dargestellt über den Integraloperator mit dem Integralkern $K(x, \xi, s)$, der zu der asymptotischen linearen Eichform (3.3) gehört. Abgeschätzt wird die Lösung als Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^\infty(\mathbb{R})$. Erst diese Norm bringt das zusätzliche algebraische Abklingen der Ordnung $t^{-1/4}$ zum Vorschein. Eine Abschätzung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$ liefert “nur” $e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$, ebenso wie eine Abschätzung von $L^\infty(\mathbb{R})$ nach $L^\infty(\mathbb{R})$ dies tut, verwendet man die hier vorgestellte Methode.

Der “kritische” Term, also der, der für die Langzeitasymptotik verantwortlich ist, ist das Integral aus Gleichung (3.6c) (das Integral aus (3.6a) kann viel einfacher abgeschätzt werden und wird deshalb nicht ausgeführt). Dies ist eine Faltung, die bereits in $L^r(\mathbb{R})$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, abgeschätzt wurde, siehe (3.7).

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\sigma|x-\xi|} \frac{1}{2\sigma} U_0(\xi) d\xi \right\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \frac{C(q)}{|\sigma| \cdot |\operatorname{Re}\sigma|^{1/q}} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq C(q, \varepsilon_0) \left(\frac{1}{|\sigma|} \right)^{\frac{q+1}{q}} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Da $\sigma = \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$ liefert der Taubersatz eine Langzeitasymptotik von

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(q, \varepsilon_0) t^{\frac{1-q}{2q}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Bisher sind an p, q, r nur die Bedingungen $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ gestellt worden. Wählt man $q = 1$ so folgt daraus $r = p$. Dies liefert eine Langzeitasymptotik von $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})=L^p(\mathbb{R})} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Das Abklingverhalten ist also rein exponentieller Natur bei dieser Wahl der Räume.

Das Abklingen der Lösung der linearen Eichform in der Form

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}}\right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

wird in [Kir92] mit Hilfe des Maximumprinzips gezeigt. Das Benutzen solcher Prinzipien sollte mit dieser Arbeit aber gerade vermieden werden.

3.2 Die Eichform in $L^\infty(\mathbb{R})$, Konstruktion einer Greenschen Funktion

Ausgehend von der asymptotischen Eichform (3.3), deren Lösungen in der Form $u = \int K(x, \xi, t) U_0(\xi) d\xi$ dargestellt werden konnten, wird versucht, eine ähnliche Darstellung der Lösung der vollen linearen Eichform (3.2) zu erhalten. Betrachte

$$su - u_{xx} + \left(2u_0 + \frac{\beta^2}{4}\right)u = U_0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Der selbstadjungierte Operator $A + s\text{Id} = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(2u_0 + s + \frac{\beta^2}{4}\right) : \mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist für $s \in \mathcal{E}$ invertierbar, wie mit einer Resolventenabschätzung gezeigt werden kann:

Bildet man das Skalarprodukt der Gleichung (3.2) mit u , $\langle (A + s\text{Id})u, u \rangle = \langle U_0, u \rangle$, mit $U_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}(A)$, so ist nach Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \text{Im } s \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \text{Im } \langle U_0, u \rangle \\ \left(\text{Re } s + \frac{\beta^2}{4}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} 2u_0 |u|^2 dx &= \text{Re } \langle U_0, u \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |\text{Im } s| \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ \left(\text{Re } s + \frac{\beta^2}{4}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $s \in \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } s| + \varepsilon \left(\text{Re } s + \frac{\beta^2}{4}\right) > 0\}$. Dann ist

$$\left(|\text{Im } s| + \varepsilon \left(\text{Re } s + \frac{\beta^2}{4}\right)\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (1 + \varepsilon) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

woraus die Resolventenabschätzung

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} s| + \varepsilon(\operatorname{Re} s + \frac{\beta^2}{4})} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

in dem Sektor $\{s \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} s| + \varepsilon(\operatorname{Re} s + \frac{\beta^2}{4}) > 0, \varepsilon > 0\}$ folgt. \mathcal{E} ist ein solcher Sektor, in dem diese Resolventenabschätzung gilt.

In Anlehnung an die Konstruktion der Lösungen der asymptotischen linearen Eichform betrachte man das Paar von Gleichungen

$$-u_{xx} + \left(2u_0 + s + \frac{\beta^2}{4}\right)u = U_0 \quad \text{für } x \geq 0, \quad (3.11a)$$

$$-u_{xx} + \left(2u_0 - 2 + s + \frac{\alpha^2}{4}\right)u = U_0 \quad \text{für } x < 0. \quad (3.11b)$$

Es ist $2u_0 - 2 + \frac{\alpha^2}{4} = 2u_0 + \frac{\beta^2}{4}$, d.h. die Gleichungen (3.11a) und (3.11b) haben dieselben Koeffizienten und sind nur eine andere Schreibweise für die lineare Eichform (3.2). (3.11b) wird in dieser Form geschrieben, da $2u_0 - 2$ für $x < 0$ exponentiell gegen Null abklingt für $x \rightarrow -\infty$. Jede der Gleichungen (3.11a) und (3.11b) ist invertierbar in $L^2(\mathbb{R})$ mit einer Anfangsbedingung $\cos \theta u(0) - \sin \theta u'(0) = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ in $L_+^2(\mathbb{R})$ bzw. $L_-^2(\mathbb{R})$, siehe [CL55].

Die homogene Differentialgleichung $-u_{xx} + (s + \frac{\beta^2}{4} + 2u_0)u = 0$ für $x > 0$ und s aus der aufgeschnittenen Ebene besitzt zwei linear unabhängige Lösungen, ebenso wie $-u_{xx} + (s + \frac{\alpha^2}{4} + 2(u_0 - 1))u = 0$ für $x < 0$. Diese werden in Lemma 3.2 zusammen mit einer Abschätzung ihrer Asymptotik in s explizit konstruiert. Es wird mit Hilfe dieser linear unabhängigen Lösungen jeweils eine Lösung von (3.11a) und (3.11b) mittels einer Greenschen Funktion dargestellt. Die Lösungen für $x \geq 0$ und $x \leq 0$ werden dann an der Stelle $x = 0$ einmal stetig differenzierbar zusammengesetzt, indem zu der so erhaltenen speziellen Lösung $u_+ = \mathcal{G}_+ U_0$, $u_- = \mathcal{G}_- U_0$ die homogene Lösung hinzuaddiert wird. Dies liefert zwei freie Konstanten für die homogenen Lösungen für $x > 0$ resp. $x < 0$. Diese zwei Konstanten werden durch die C^1 -Bedingung an $x = 0$ eindeutig festgelegt.

Mit Hilfe der nächsten Lemmata in diesem Abschnitt soll

$$\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\mathcal{G}\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

abgeschätzt werden. Die $L^\infty(\mathbb{R})$ -Norm ist, da stetige Funktionen gemessen werden, gleich der C^0 -Norm. Dieses Kapitel fußt auf der Existenztheorie von Kapitel 2, d.h. die Anfangsbedingung U_0 ist aus $X^1 = H^1(\mathbb{R}) \cap H^1(e^{\frac{\alpha^2}{2}x})$, und somit sind die Lösungen nach Satz 2.4 in X^1 , d.h. die Lösungen sind stetig in x und beschränkt.

Im folgenden gilt es nun, eine Greensche Funktion zu konstruieren und ihre Abhängigkeit von s abzuschätzen. Dazu werden Abschätzungen für je ein Paar linear unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichungen (3.11a), (3.11b) nach [Sat76] verwendet.

Lemma 3.2 *Sei $s \in \mathcal{E}$ und $U_0 = 0$. Die homogene Gleichung (3.11a) besitzt ein Paar linear unabhängiger Lösungen $\varphi_1(x, s)$, $\varphi_2(x, s)$, ebenso wie die Gleichung (3.11b) ein Paar*

linear unabhängiger Lösungen $\psi_1(x, s)$, $\psi_2(x, s)$ besitzt. Diese haben folgende Eigenschaften:

(a) Für σ und ω groß:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-\sigma x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_1' &= e^{-\sigma x} (-\sigma + \mathcal{O}(1)) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_2 &= e^{\sigma x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_2' &= e^{\sigma x} (\sigma + \mathcal{O}(1)) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \psi_1 &= e^{\omega x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_1' &= e^{\omega x} (\omega + \mathcal{O}(1)) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_2 &= e^{-\omega x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_2' &= e^{-\omega x} (-\omega + \mathcal{O}(1)) && \text{für } x \rightarrow -\infty . \end{aligned}$$

(b) Für $\sigma \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-\sigma x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_1' &= e^{-\sigma x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_2 &= e^{\sigma x} \left(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \varphi_2' &= e^{\sigma x} \left(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ \psi_1 &= e^{\omega x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_1' &= e^{\omega x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_2 &= e^{-\omega x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \psi_2' &= e^{-\omega x} \mathcal{O}(1) && \text{für } x \rightarrow -\infty . \end{aligned}$$

Dabei sind φ_i , ψ_i analytisch in s der aufgeschnittenen \mathbb{C} -Ebene \mathcal{E} .

Beweis:

Um beispielsweise φ_1 zu konstruieren, setzt man $\varphi_1(x, s) := z_1(x, s)e^{-\sigma x}$. Für $s \in \mathcal{E}$ ist $\operatorname{Re} \sigma > 0$. Da φ_1 Lösung von $-\varphi_1'' + (\sigma^2 + 2u_0)\varphi_1 = 0$ sein soll, muß z_1 die Gleichung

$$-z_1'' + 2u_0 z_1 + 2\sigma z_1' = 0 \tag{3.12}$$

für $x \geq 0$ erfüllen.

Gesucht ist eine Lösung von (3.12), die die Bedingung $z_1'(\infty) = 0$ und $z_1(\infty) = 1$ erfüllt. Eine Darstellung dieser Lösung ist

$$z_1'(x) = - \int_x^\infty e^{2\sigma(x-\xi)} 2u_0(\xi) z_1(\xi) d\xi .$$

$$z_1(x) = 1 + \int_x^\infty \left(\frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma} \right) 2u_0(\xi) z_1(\xi) d\xi. \quad (3.13)$$

Zur Konstruktion von φ_2 setzt man $\varphi_2 = z_2 e^{\sigma x}$. z_2 erfüllt dann die Gleichung

$$z_2'' + 2\sigma z_2' - 2u_0 z_2 = 0.$$

Unter der Annahme, daß $z_2'(0) = 0$ und $z_2(0) = 1$ ist, erhält man eine Darstellung der Lösung mittels

$$z_2'(x) = \int_0^x e^{-2\sigma(x-\xi)} 2u_0(\xi) z_2(\xi) d\xi$$

und

$$z_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{1 - e^{-2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma} \right) 2u_0(\xi) z_2(\xi) d\xi. \quad (3.14)$$

Die Lösungen ψ_1 und ψ_2 werden genauso konstruiert, d.h. man setzt $\psi_1(x, s) := \tilde{z}_1(x, s) e^{\omega x}$ und $\psi_2(x, s) = \tilde{z}_2(x, s) e^{-\omega x}$, wobei ψ_1 und ψ_2 Lösungen von (3.11b) sind. Darstellungen von \tilde{z}_1 und \tilde{z}_2 sind

$$\tilde{z}_1(x) = 1 + \int_{-\infty}^x \frac{1 - e^{2\omega(\xi-x)}}{2\omega} (2u_0(\xi) - 2) \tilde{z}_1(\xi) d\xi, \quad \text{mit } \tilde{z}_1(-\infty) = 1, \tilde{z}_1'(-\infty) = 0,$$

$$\tilde{z}_2(x) = 1 + \int_x^0 \frac{1 - e^{2\omega(x-\xi)}}{2\omega} (2u_0(\xi) - 2) \tilde{z}_2(\xi) d\xi, \quad \text{mit } \tilde{z}_2(0) = 1, \tilde{z}_2'(0) = 0.$$

Beweis der Aussage (a).

Aus Gleichung (3.13) erhält man

$$|z_1(x)| \leq 1 + \int_x^\infty \left| \frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{\sigma} \right| u_0(\xi) |z_1(\xi)| d\xi. \quad (3.15)$$

Für σ groß ist $|1 - e^{2\sigma(x-\xi)}| \leq 1$. $u_0(x)$ ist monoton fallend und klingt exponentiell schnell ab für $x \rightarrow \infty$. Sei $\int_0^\infty u_0(x) dx = C_0$. Mit dem Gronwallschen Lemma folgt aus (3.15)

$$|z_1(x)| \leq 1 + \left| \int_x^\infty \frac{2u_0(\xi)}{2|\sigma|} \exp\left(\left| \int_\xi^x \frac{2u_0(r)}{2|\sigma|} dr \right| \right) d\xi \right| \leq 1 + \frac{C_0}{|\sigma|} e^{\frac{C_0}{|\sigma|}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right). \quad (3.16)$$

Für $\varphi_1' = (z_1' - \sigma z_1) e^{-\sigma x}$ folgt direkt $\varphi_1' = (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\sigma)) e^{-\sigma x}$.

Aus der Gleichung (3.14) erhält man

$$|z_2(x)| \leq 1 + \int_0^x \left| \frac{1 - e^{-2\sigma(x-\xi)}}{\sigma} \right| u_0(\xi) |z_2(\xi)| d\xi.$$

Aus dem Gronwallschen Lemma folgt

$$|z_1(x)| \leq 1 + \left| \int_0^x \frac{2u_0(\xi)}{2|\sigma|} \exp\left(\left|\int_\xi^x \frac{2u_0(r)}{2|\sigma|} dr\right|\right) d\xi \right| \leq 1 + \frac{C}{|\sigma|}.$$

Für die Lösungen ψ_1 und ψ_2 wird genauso abgeschätzt.

Beweis der Aussage (b).

Zu zeigen ist, daß (3.13) eine Lösung besitzt, die für $\sigma \rightarrow 0$ gleichmäßig in x beschränkt ist. Für $|\sigma| \leq 1$ ist $\left|\frac{1-e^\sigma}{\sigma}\right| \leq C_1$. Es sei $z_1(x) = 1 + w_1(x)$. $w_1(x)$ erfüllt die Integralgleichung

$$w_1(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) d\xi + \int_x^\infty \left(\frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) w_1(\xi) d\xi =: \mathcal{T} w_1. \quad (3.17)$$

Wähle x_0 so, daß $\int_0^\infty 2yu_0(y+x_0) dy \leq \frac{1}{2C_1}$. Es ist

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq x_0} |\mathcal{T} w_1| &= \sup_{x \geq x_0} \left| \int_x^\infty \left(\frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) d\xi + \int_x^\infty \left(\frac{1 - e^{2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) w_1(\xi) d\xi \right| \\ &= \sup_{x \geq x_0} \left| \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-2\sigma y}}{2\sigma y}\right) 2yu_0(y+x) dy + \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-2\sigma y}}{2\sigma y}\right) 2yu_0(y+x) w_1(y+x) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sup_{x \geq x_0} |w_1|. \end{aligned}$$

\mathcal{T} bildet die Kugel $B_1(0) = \{w_1 \in C^0([x_0, \infty)) \mid \sup_{x \geq x_0} |w_1| \leq 1\}$ in sich ab und eine Kontraktion liegt vor. Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt von (3.17) mit $\sup_{x \geq x_0} |w_1| \leq 1$. Die

Wahl von x_0 ist unabhängig von σ .

(3.14) besitzt für jedes s mit $\operatorname{Re} \sigma > 0$ eine Lösung $z_2(x)$ mit $|z_2(x)| \leq C$ auf einem kompakten Intervall $[0, x_k]$. Wähle x_k mit $\int_0^{x_k} (x_k - \xi) 2u_0(\xi) d\xi \leq \frac{1}{2C_1}$ und setze $z_2 = 1 + w_2$. Es ist

$$\begin{aligned} |w_2(x)| &= \left| \int_0^{x_k} \left(\frac{1 - e^{-2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) d\xi + \int_0^{x_k} \left(\frac{1 - e^{-2\sigma(x-\xi)}}{2\sigma}\right) 2u_0(\xi) w_2(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq x \leq x_k} |w_2|. \end{aligned}$$

Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt der Gleichung (3.14) mit $|w_2| \leq 1$ für alle $x \in [0, x_k]$. Mit diesem Argument kann die Lösung auf jedes kompakte Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ fortgesetzt werden. Gleichung (3.14) besitzt auf jedem kompakten Intervall eine von σ unabhängig beschränkte Lösung.

Zu jedem $|\sigma|$ existiert ein x_σ , so daß $\int_{x_\sigma}^\infty \frac{u_0}{|\sigma|} \leq \frac{1}{2}$. Aus (3.14) folgt

$$|z_2(x)| \leq z_2(x_\sigma) + \int_{x_\sigma}^x \frac{u_0(\xi)}{|\sigma|} |z_2(\xi)| d\xi$$

Mit dem Gronwallschen Lemma folgt für alle $x \geq x_\sigma$

$$|z_2(x)| \leq z_2(x_\sigma) + \int_{x_\sigma}^x \frac{u_0(\xi)}{|\sigma|} \exp \left| \int_\xi^x \frac{u_0(r)}{|\sigma|} dr \right| d\xi \leq z_2(x_\sigma) + \frac{C}{|\sigma|}.$$

Zu jedem x_σ existiert eine Folge von Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$ mit $x_k \leq x_\sigma$, auf denen $|z_2|$ unabhängig von σ beschränkt ist, so daß $|z_2| \leq C + \mathcal{O}(\frac{1}{|\sigma|})$ folgt.

Für die Lösungen ψ_1, ψ_2 für $x < 0$ rechnet man analog. Man beachte bei ψ_1 und ψ_2 , daß $\omega \rightarrow \sqrt{2}$ für $\sigma \rightarrow 0$ und $s \in \mathcal{E}$, d.h. $|\psi_1(x, s)| \leq C e^{\operatorname{Re} \omega x}$ und $|\psi_2(x, s)| \leq C e^{-\operatorname{Re} \omega x}$ für alle $x < 0$ und für alle $s \in \mathcal{E}$. ■

Durch Lemma 3.2 ist gewährleistet, daß sowohl für $x \geq 0$ als auch für $x \leq 0$ jeweils ein Paar von Lösungen existiert, die das gewünschte (nämlich dem der asymptotischen Eichform entsprechende) Verhalten in x haben.

Sei

$$G_+(x, \xi, s) = \frac{1}{W_+(s)} \begin{cases} \varphi_1(x, s) \varphi_2(\xi, s) & x > \xi \\ \varphi_2(x, s) \varphi_1(\xi, s) & x < \xi \end{cases} \quad (3.17a)$$

und

$$G_-(x, \xi, s) = \frac{1}{W_-(s)} \begin{cases} \psi_1(\xi, s) \psi_2(x, s) & x > \xi \\ \psi_2(\xi, s) \psi_1(x, s) & x < \xi \end{cases}. \quad (3.17b)$$

Diese Greenschen Funktionen G_+ und G_- existieren und invertieren jeweils die Gleichungen

$$\begin{aligned} -u_{xx} + \left(s + 2u_0 + \frac{\beta^2}{4} \right) u &= U_0 \quad \text{für } x \geq 0, \\ -u_{xx} + \left(s + 2(u_0 - 1) + \frac{\alpha^2}{4} \right) u &= U_0 \quad \text{für } x \leq 0, \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_+(0, s) &= \frac{\varphi_2(0, s)}{W_+} \int_0^\infty \varphi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi, & u'_+(0, s) &= \frac{\varphi'_2(0, s)}{W_+} \int_0^\infty \varphi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi, \\ u_-(0, s) &= \frac{\psi_2(0, s)}{W_-} \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi, & u'_-(0, s) &= \frac{\psi'_2(0, s)}{W_-} \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Die Wronski-Determinanten $W_+(s)$ und $W_-(s)$ in (3.17a) bzw. (3.17b) werden aus den Basislösungen φ_1, φ_2 bzw. ψ_1, ψ_2 gebildet. Diese Wronski-Determinanten sind unabhängig von x und analytisch in s in der aufgeschnittenen \mathbb{C} -Ebene. Schreibt man z.B. die Gleichung für $x \geq 0$, $-u_{xx} + (2u_0 + s + \frac{\beta^2}{4})u = 0$ als System erster Ordnung $\underline{u}_x = A_+(x, s)\underline{u}$, so ist

$$\operatorname{spur} A_+(x, s) = \operatorname{spur} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u_0 + \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aus

$$W(x, s) = W(\xi, s) \exp \int_x^\xi \operatorname{spur} A_\pm(y, s) dy$$

folgt die Unabhängigkeit der Wronski-Determinanten von x , bezeichnet man mit $A_\pm(x, s)$ die jeweilige Matrix der Koeffizienten für die Gleichungen (3.11a) und (3.11b). Daher kann ihre Abhängigkeit von s durch die Abschätzungen aus Lemma 3.2 für große x gewonnen werden. Dies ergibt

$$|W_+(s)| = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad (3.18a)$$

$$|W_-(s)| = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \mathcal{O}(1) \quad (3.18b)$$

für $\sigma \rightarrow 0$.

Man kann eine Lösung von (3.2) darstellen durch $u(x, s) = u_+(x, s)$ für $x \geq 0$, $u(x, s) = u_-(x, s)$ für $x \leq 0$ mittels

$$\begin{aligned} u_+(x, s) &= \int G_+(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi + c_+ \varphi_1 \\ &= \int_x^\infty \frac{\varphi_1(\xi, s) \varphi_2(x, s)}{W_+(s)} U_0(\xi) d\xi + \int_0^x \frac{\varphi_2(\xi, s) \varphi_1(x, s)}{W_+(s)} U_0(\xi) d\xi + c_+ \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} u_-(x, s) &= \int G_-(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi + c_- \psi_1 \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\psi_1(\xi, s) \psi_2(x, s)}{W_-(s)} U_0(\xi) d\xi + \int_x^0 \frac{\psi_2(\xi, s) \psi_1(x, s)}{W_-(s)} U_0(\xi) d\xi + c_- \psi_1. \end{aligned} \quad (3.19b)$$

Es wurde zur speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung noch die homogene Lösung hinzuaddiert, um u_+ und u_- an der Stelle $x = 0$ einmal stetig differenzierbar zusammensetzen zu können. Die nichtberücksichtigten homogenen Lösungen φ_2 und ψ_2 fallen durch die Randbedingungen im Unendlichen heraus. Eine elementare Rechnung liefert für die Konstanten:

$$\begin{aligned} c_+ &= \frac{-1}{\varphi_1(0, s) \psi_1'(0, s) - \varphi_1'(0, s) \psi_1(0, s)} \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\psi_1'(0, s) \varphi_2(0, s) - \varphi_2'(0, s) \psi_1(0, s)}{\varphi_1(0, s) \psi_1'(0, s) - \varphi_1'(0, s) \psi_1(0, s)} \cdot \frac{1}{W_+(s)} \int_0^\infty \varphi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} c_- &= \frac{-1}{\psi_1(0, s) \varphi_1'(0, s) - \psi_1'(0, s) \varphi_1(0, s)} \int_0^\infty \varphi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\psi_2(0, s) \varphi_1'(0, s) - \psi_2'(0, s) \varphi_1(0, s)}{\psi_1(0, s) \varphi_1'(0, s) - \psi_1'(0, s) \varphi_1(0, s)} \cdot \frac{1}{W_-(s)} \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.20b)$$

(3.19a), (3.19b) zusammen mit (3.20a), (3.20b) liefern eine Darstellung der Lösung der linearen Eichform (3.2), die aus (3.11a), (3.11b) konstruiert wurde, und die an der Stelle $x = 0$ einmal stetig differenzierbar zusammengesetzt ist.

Für die Konstanten

$$\begin{aligned} c_+^1(s) &:= \frac{-1}{\varphi_1(0, s)\psi_1'(0, s) - \varphi_1'(0, s)\psi_1(0, s)} \\ c_+^2(s) &:= -\frac{\psi_1'(0, s)\varphi_2(0, s) - \varphi_2'(0, s)\psi_1(0, s)}{\varphi_1(0, s)\psi_1'(0, s) - \varphi_1'(0, s)\psi_1(0, s)} \\ c_-^1(s) &:= \frac{-1}{\psi_1(0, s)\varphi_1'(0, s) - \psi_1'(0, s)\varphi_1(0, s)} = -c_+^1 \\ c_-^2(s) &:= -\frac{\psi_2(0, s)\varphi_1'(0, s) - \psi_2'(0, s)\varphi_1(0, s)}{\psi_1(0, s)\varphi_1'(0, s) - \psi_1'(0, s)\varphi_1(0, s)} \end{aligned}$$

gilt

$$c_\pm^i(s) = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0, i = 1, 2, s \in \mathcal{E}. \quad (3.21)$$

Dies folgt direkt aus dem Beweis zu Lemma 3.2. Man kann per Konstruktion von φ_i, ψ_i diese so wählen, daß die Nenner nicht Null sind, da man bei der Konstruktion die Bedingungen $\varphi_1(\infty) = 1, \varphi_2(0) = 1$ durch $\varphi_1(\infty) = a, \varphi_2(0) = b$ ersetzen kann, mit a, b geeignet gewählt. Zusätzlich ist per Konstruktion $\varphi_2(0) = 1, \varphi_2'(0) = 0, \psi_2(0) = 1, \psi_2'(0) = 0$ und $\varphi_1(x, s)$ beschränkt für alle x und $s \in \mathcal{E}$. Hieraus folgt (3.21).

Mit den vorangegangenen Bemerkungen läßt sich also formulieren:

Lemma 3.3 *Sei $U_0 \in X^1$ und $s \in \mathcal{E}$. Dann besitzt die Lösung $u(x, s)$ der Gleichung (3.2), die über die Gleichungen (3.19a), (3.19b) dargestellt ist, die Abschätzung*

$$\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon_0) \left(\frac{1}{\sigma^{3/2}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Beweis:

Verwendet wird die Darstellung der Lösung aus den Gleichungen (3.19a), (3.19b) und die Abschätzungen (3.18a), (3.18b) und (3.21), sowie Lemma 3.2.

$$\begin{aligned} \left| \int G_+(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi \right| &= \left| \frac{\varphi_2(x, s)}{W_+(s)} \int_x^\infty \varphi_1(\xi, s) d\xi + \frac{\varphi_1(x, s)}{W_+(s)} \int_0^x \varphi_2(\xi, s) d\xi \right| \\ &\leq C \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \left(\left| e^{\operatorname{Re}\sigma x} \int_x^\infty e^{-\operatorname{Re}\sigma\xi} U_0(\xi) d\xi \right| + \left| e^{-\operatorname{Re}\sigma x} \int_0^x e^{\operatorname{Re}\sigma\xi} U_0(\xi) d\xi \right| \right) \\ &\leq C \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \left(\left| e^{\operatorname{Re}\sigma x} \left(\int_x^\infty e^{-2\operatorname{Re}\sigma\xi} d\xi \right)^{1/2} \right| + \left| e^{-\operatorname{Re}\sigma x} \left(\int_0^x e^{2\operatorname{Re}\sigma\xi} d\xi \right)^{1/2} \right| \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \frac{1}{(\operatorname{Re}\sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{3/2}} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int G_-(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \frac{\psi_2(x, s)}{W_-(s)} \int_\infty^x \psi_1(\xi, s) d\xi + \frac{\psi_1(x, s)}{W_-(s)} \int_x^0 \psi_2(\xi, s) d\xi \right| \\
&\leq C \left(\left| e^{-\operatorname{Re} \omega x} \int_x^\infty e^{\operatorname{Re} \omega \xi} U_0(\xi) d\xi \right| + \left| e^{\operatorname{Re} \omega x} \int_0^x e^{-\operatorname{Re} \omega \xi} U_0(\xi) d\xi \right| \right) \\
&\leq C \left(\left| e^{\operatorname{Re} \omega x} \left(\int_x^\infty e^{-2\operatorname{Re} \omega \xi} d\xi \right)^{1/2} \right| + \left| e^{-\operatorname{Re} \omega x} \left(\int_0^x e^{2\operatorname{Re} \omega \xi} d\xi \right)^{1/2} \right| \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C(\varepsilon_0) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|c_+ \varphi_1(x, s)| &\leq \left(|c_+^1(s)| \int_{-\infty}^0 |\psi_1(\xi, s) U_0(\xi)| d\xi + \frac{|c_+^2(s)|}{|W_+(s)|} \int_0^\infty |\varphi_1(\xi, s) U_0(\xi)| d\xi \right) |\varphi_1(x, s)| \\
&\leq C \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + C \frac{1}{(\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C(\varepsilon_0) \left(1 + \left(\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \right) \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|c_- \psi_1(x, s)| &\leq \left(|c_-^1(s)| \int_0^\infty |\varphi_1(\xi, s) U_0(\xi)| d\xi + \frac{|c_-^2(s)|}{|W_-(s)|} \int_{-\infty}^0 |\psi_1(\xi, s) U_0(\xi)| d\xi \right) |\psi_1(x, s)| \\
&\leq \frac{C}{(\operatorname{Re} \sigma)^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + C \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C(\varepsilon_0) \left(\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Somit erhält man für die Lösung der linearen Eichform (3.2), die über die Lösungen der Gleichungen (3.11a) und (3.11b) gewonnen wurde, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{G}U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathcal{G}\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \mathcal{O} \left(\frac{1}{|\sigma|^{3/2}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{(s + \frac{\beta^2}{4})^{3/4}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

für $s \rightarrow -\frac{\beta^2}{4}$ in der aufgeschnittenen \mathbb{C} -Ebene \mathcal{E} , woraus aus dem Taubersatz 2.8 die Langzeitasymptotik

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

folgt.

Insbesondere gilt natürlich auch

$$\|u(x, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{1}{(s + \frac{\beta^2}{4})^{3/4}} \right) \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{1}{(s + \frac{\beta^2}{4})^{3/4}} \right) \|U_0\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

d.h. für $U_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ist diese Abschätzung ebenfalls gültig. Da nach den Existenzresultaten für große Zeiten die Lösung der linearen Eichform in $D(A) = H^2(\mathbb{R})$ enthalten ist, sind die Lösungen $u(x, t)$ auch in $C^1(\mathbb{R})$. Die Verbindung zwischen den hier konstruktiv beschafften Lösungen und der Existenztheorie aus Kapitel 2 ist gewährleistet.

3.3 Die lineare Eichform in $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$

Um die gesuchte Abschätzung der Halbgruppe e^{-At} in X^∞ zu erhalten, muß noch die Halbgruppe in $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ untersucht werden. Die Abschätzung wird wieder in Laplace-transformierter Darstellung gewonnen und mit inverser Laplace-Transformation in t ausgerechnet. Hierzu werden die Methoden aus Kapitel 3.2 verwendet.

Setzt man $e^{\frac{\gamma}{2}x}u = v$, wobei u Lösung der linearen Eichform $-u_{xx} + (s + 2u_0 + \frac{\beta^2}{4})u = U_0$ ist, so muß v die Gleichung

$$-v_{xx} + \gamma v_x + (s + 2u_0 - 1)v = e^{\frac{\gamma}{2}x}U_0 \quad (3.23)$$

lösen, wobei v eine Darstellung

$$v(x, s) = e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi \quad (3.24)$$

mit der Greenschen Funktion $G(x, \xi, s)$ aus Kapitel 3.2 besitzt.

Man hat also jetzt das Verhalten der $L^\infty(\mathbb{R})$ -Norm von v in s abzuschätzen unter der Voraussetzung $U_0 \in X^0$.

Das nach Kapitel 2.2 aus den Energieabschätzungen zu erwartende Langzeitverhalten der Lösung, das hier in s ausgedrückt wird, legt nahe, daß bei den $L^\infty(\mathbb{R})$ -Abschätzungen der Funktion v aus (3.24) eine Verschiebung der Singularität in der komplexen Ebene stattfindet. Aus Kapitel 2 hat man eine Abschätzung des wesentlichen Spektrums in X^1 und eine Langzeitasymptotik erhalten. Die X^∞ -Norm der Lösung muß die so erhaltene Langzeitasymptotik mindestens auch haben, oder sie kann in der Zeit noch schneller abklingen, da $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C\|u(\cdot, t)\|_{X^1}$. Es ist klar, daß die in Kapitel 2 durch die Verwendung der Gewichtsfunktion $e^{\frac{\gamma}{2}x}$ stattgefundenene Verschiebung des Spektrums, bzw. der Resolvente, auch hier zu sehen sein muß.

Beispiel: Zur Illustration dieses Verhaltens sei ein typischer Term aus der Integraldarstellung der asymptotischen Eichform

$$v(x, s) = e^{\frac{\gamma}{2}x} \int_x^\infty \frac{e^{\sigma(x-\xi)}}{2\sigma} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi, \quad x > 0 \quad (3.25)$$

gegeben. Die Abschätzung unter der Voraussetzung $e^{\frac{\gamma}{2}x}U_0 \in L^2(\mathbb{R})$ lautet

$$\begin{aligned} \|v(x, s)\|_{L_+^\infty(\mathbb{R})} &= \left\| e^{\frac{\gamma}{2}x} \int_x^\infty \frac{e^{\sigma(x-\xi)}}{2\sigma} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi \right\|_{L_+^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| \frac{e^{(\frac{\gamma}{2}+\sigma)x}}{2\sigma} \left(\int_x^\infty \left| e^{-\sigma\xi} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \right\|_{L_+^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|e^{\frac{\gamma}{2}x}U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt nur dann, wenn das Integral über ξ existiert, d.h. sofern $s \in \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \sigma + \frac{\gamma}{2} > 0\}$. Dies ist eine Parabel mit Scheitel in $s = 1$, die nach links geöffnet ist. Wie diese Punktmenge aussieht, wird später noch gezeigt. Weiterhin gilt dann

$$\begin{aligned} \|v(x, s)\|_{L^\infty_+(\mathbb{R})} &\leq \left\| \frac{e^{(\frac{\gamma}{2}+\sigma)x}}{2\sigma} \cdot \frac{e^{-\operatorname{Re}(\frac{\gamma}{2}+\sigma)x}}{\operatorname{Re}(\sigma + \frac{\gamma}{2})^{1/2}} \right\|_{L^\infty_+(\mathbb{R})} \cdot \|e^{\frac{\gamma}{2}x} U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{C}{|\sigma| \operatorname{Re}(2\sigma + \gamma)^{1/2}} \|e^{\frac{\gamma}{2}x} U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Die beiden kritischen Punkte für die Tauberasympotik sind $\sigma = 0$, d.h. $s = -\frac{\beta^2}{4}$, und $\operatorname{Re}(2\sigma + \gamma) = 0$, d.h. $2\operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}} + \gamma = 0$. Für $s = 1$ ist dies $2\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}} + \gamma = |\gamma| + \gamma = 0$, da $\gamma < -2$ vorausgesetzt wurde. Die Singularität verschiebt sich also von $-\frac{\beta^2}{4}$ nach 1. Dies führt jedoch zu einer völlig unzulänglichen Zeitasymptotik, da die Tauberasympotik bei einer Singularität $s = 1$ eine Langzeitasymptotik von e^t zur Folge hat. Deswegen wird v mit Hilfe von $\|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ abgeschätzt.

$$\begin{aligned} \|v(x, s)\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} &= \|e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G(x, \xi, s) U_0(\xi) d\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \|e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G(x, \xi, s) d\xi\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

sofern alle vorkommenden Integrale existieren, was noch zu zeigen ist! Für $x > 0$ ist dies durch $\gamma < 0$ und damit $e^{\frac{\gamma}{2}x} < 1$ garantiert.

Das Beispiel zeigt den Mechanismus, wie ein exponentielles Gewicht das Spektrum eines Operators verschiebt, hier jetzt in Laplace-transformierter Darstellung über die Greensche Funktion. Damit sieht man die Auswirkung des exponentiellen Gewichts bezüglich der räumlichen Variablen auf die Langzeitasymptotik.

Lemma 3.4 Sei $u(x, s)$ Lösung der linearen Eichform (3.2) und $U_0 \in X^1$. Dann gilt

$$\|u(x, s)\|_{L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq \frac{C}{\left| \operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \right|^{1/2}} \|U_0\|_{X^0} + \frac{C}{|s + \frac{\beta^2}{4}|^{3/4}} \|U_0\|_{X^0}$$

für $s \in \mathbb{C} \setminus \left(\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \leq 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \leq -\frac{\beta^2}{4}, \operatorname{Im} s = 0\} \right)$.

Beweis:

Setzt man wieder $u = e^{\frac{\gamma}{2}x} v$, dann besitzt v wie in (3.24) als Lösung der linearen Eichform eine Darstellung

$$\begin{aligned} v_+(x, s) &= e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G_+(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi + e^{\frac{\gamma}{2}x} c_+ \varphi_1 \\ v_-(x, s) &= e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G_-(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi + e^{\frac{\gamma}{2}x} c_- \psi_1 \end{aligned}$$

mit $G_\pm(x, \xi, s)$ aus (3.17a), (3.17b) und c_\pm aus (3.20a), (3.20b).

$$\begin{aligned}
& \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G_+(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi \right|, \quad x > 0 \\
&= \left| \frac{e^{\frac{\gamma}{2}x}}{W_+(s)} \int_0^x \varphi_1(x, s) \varphi_2(\xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}x}}{W_+(s)} \int_x^\infty \varphi_2(x, s) \varphi_1(\xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{|W_+(s)|} \left| \int_0^x \varphi_1(x, s) \varphi_2(\xi, s) U_0(\xi) d\xi + \int_x^\infty \varphi_2(x, s) \varphi_1(\xi, s) U_0(\xi) d\xi \right|,
\end{aligned}$$

da $\gamma < -2$ und $x > 0$. Dies wurde bereits in Lemma 3.3 abgeschätzt und liefert

$$\left| e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G_+(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi \right| \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{3/2}}$$

für $\sigma \rightarrow 0$, $s \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
& \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} \int G_-(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 \right) d\xi \right|, \quad x < 0 \\
&= \left| \frac{e^{\frac{\gamma}{2}x}}{W_-(s)} \int_{-\infty}^x \psi_2(x, s) \psi_1(\xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}x}}{W_-(s)} \int_x^0 \psi_1(x, s) \psi_2(\xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right| \\
&\leq \frac{C(\omega)}{|W_-(s)|} \left| e^{(\frac{\gamma}{2} - \operatorname{Re} \omega)x} \int_{-\infty}^x e^{(-\frac{\gamma}{2} + \operatorname{Re} \omega)\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right. \\
&\quad \left. + e^{(\frac{\gamma}{2} + \operatorname{Re} \omega)x} \int_x^0 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \operatorname{Re} \omega)\xi} \left(e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) \right) d\xi \right| \\
&\leq C(\omega) \left(\frac{1}{\operatorname{Re}(2\omega - \gamma)^{1/2}} + \frac{1}{\operatorname{Re}(2\omega + \gamma)^{1/2}} \right) \|U_0\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen gelten jedoch nur, solange $\operatorname{Re}(2\omega + \gamma) > 0$. An dieser Stelle sollte noch einmal die Lage und Bedeutung der möglichen Singularitäten erläutert werden. Es kommen die komplexen Wurzeln $\omega = \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}}$ und $\sigma = \sqrt{s + \frac{\beta^2}{4}}$ vor. Ist $s \in \mathcal{E}$, so sind beide Wurzeln erklärt, eindeutig und mit positivem Realteil. Jetzt, bei den Abschätzungen in dem gewichteten Raum $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$, entstehen noch die Terme $2\omega - \gamma$ und $2\omega + \gamma$. Da die komplexe Ebene bis $-\frac{\beta^2}{4}$ aufgeschnitten und $\gamma < -2$ ist, hat $2\omega - \gamma$ immer positiven Realteil. Anders hingegen $2\omega + \gamma$. Durch Einsetzen sieht man sofort, daß für $s = -1$ der Term $2\omega + \gamma = |\gamma| + \gamma = 0$ ist, da $\gamma < -2$. Damit also alle oben vorkommenden Integrale existieren, muß $\{s \in \mathbb{C} \mid 2\operatorname{Re} \omega + \gamma \leq 0\}$ aus der komplexen Ebene ausgenommen werden. Dies ist eine Parabel mit Scheitel in $s = -1$. Schreibt man $s = \xi + i\eta$, dann ist $\operatorname{Re} \sqrt{s} = \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2} \right)^{1/2}$ und somit die Ungleichung $\sqrt{2} \left(\left(\xi + \frac{\alpha^2}{4} \right) + \sqrt{\left(\xi + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 + \eta^2} \right)^{1/2} \leq -\gamma$ zu erfüllen, welche sich zu $\eta^2 \leq \frac{\gamma^4}{4} - \gamma^2 \left(\xi + \frac{\alpha^2}{4} \right)$ umformen läßt. Die Abschätzungen sind gültig in der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} \mid 2\operatorname{Re} \omega + \gamma \geq 0\} =: \mathcal{E}_\gamma$.

Es müssen noch die beiden verbleibenden Terme abgeschätzt werden. Für $x > 0$ ist

$$\begin{aligned}
& \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} c_+ \varphi_1(x, s) \right| \\
& \leq \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} \varphi_1(x) \right| \left(\left| c_+^1 \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi) e^{\frac{\gamma}{2}\xi} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 d\xi \right| + \frac{|c_+^2|}{|W_+(s)|} \left| \int_0^\infty \varphi_1(\xi) U_0(\xi) d\xi \right| \right) \\
& \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} 2\omega + \gamma)^{1/2}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\gamma\xi} U_0^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} + \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
& = \left(\mathcal{O} \left(\frac{1}{(\operatorname{Re} 2\omega + \gamma)^{1/2}} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \right) \right) \|U_0\|_{X^0},
\end{aligned}$$

und für $x < 0$

$$\begin{aligned}
& \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} c_- \psi_1(x) \right| \\
& \leq \left| e^{\frac{\gamma}{2}x} \psi_1(x) \right| \left(\left| c_-^1 \int_0^\infty \varphi_1(\xi) e^{\frac{\gamma}{2}\xi} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 d\xi \right| + \frac{|c_-^2|}{|W_-(s)|} \left| \int_{-\infty}^0 \psi_1(\xi) U_0(\xi) d\xi \right| \right) \\
& \leq \frac{C(\varepsilon_0)}{|\sigma|^{1/2}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{C}{(\operatorname{Re} 2\omega + \gamma)^{1/2}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\gamma\xi} U_0^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} \\
& = \left(\mathcal{O} \left(\frac{1}{(\operatorname{Re} 2\omega + \gamma)^{1/2}} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \right) \right) \|U_0\|_{X^0},
\end{aligned}$$

sofern bei allen Abschätzungen $\operatorname{Re} 2\omega + \gamma > 0$, d.h. $s \in \mathcal{E}_\gamma$ und $s \in \mathcal{E}$ ist. ■

Bei diesen Abschätzungen treten nun, im Gegensatz zur linearen Eichform in $L^\infty(\mathbb{R})$, sowohl Terme auf, deren Singularitäten entweder bei $\sigma = 0$ sind, als auch Terme, bei denen $2\operatorname{Re}\omega + \gamma > 0$ gefordert werden muß. Die im Beweis zu Lemma 3.4 aufgeführten Abschätzungen sind gültig für $s \in \mathcal{E}_\gamma \cap \mathcal{E}$.

Fall 1: Es sei $\frac{\beta^2}{4} < 1$. $-\frac{\beta^2}{4}$ hat einen positiven Abstand zu -1 und liegt rechts von -1 . $s \in \mathcal{E}_\gamma \cap \mathcal{E}$ ist in Abbildung 4 dargestellt.

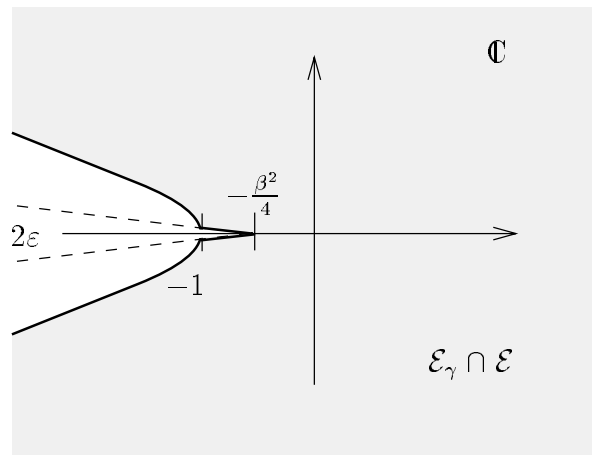


Abbildung 4

Es gilt der in Kapitel 2.3 aufgeführte Taubersatz, und die Langzeitasymptotik ist wieder $\mathcal{O}(t^{-1/4}e^{-\frac{\beta^2}{4}t})$.

Fall 2: Es sei $\frac{\beta^2}{4} \geq 1$. Die Abschätzungen gelten in $s \in \mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \leq 0\} = \mathcal{E}_\gamma$. Dies ist das offene Komplement der Parabel. Dies hat zur Folge, daß bei der inversen Laplace-Transformation, bei der entlang γ integriert wird, der Integrationsweg jetzt nur bis $\gamma' = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = -1 + \delta; \delta > 0\}$, wie in Abbildung 5 dargestellt, verschoben werden darf.

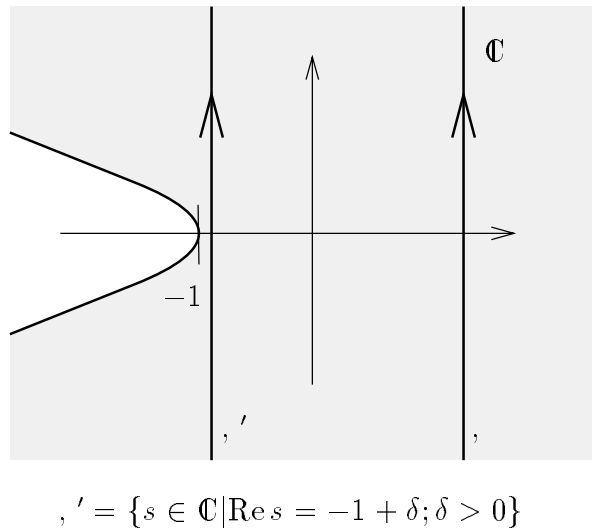


Abbildung 5

Um die inverse Laplace-Transformation durchzuführen, wird γ' in der komplexen Ebene bis γ'' verschoben, wie in Abbildung 6, Seite 48 veranschaulicht. Um die Umkehrtransformation in diesem Falle durchzuführen, kann man eine vereinfachte Version rechnen, da es dann nicht auf die algebraischen Terme in t ankommt. Die zu erwartende Langzeitasymptotik von $e^{-(1-\delta)t}$ ist nicht scharf genug, die algebraischen Terme mitzunehmen, da $\delta > 0$ ist.

Die Abschätzungen aus dem Beweis zu Lemma 3.4 sind auch gültig für große $|s|$. Dies folgt aus der Darstellung der Basislösungen φ_i, ψ_i aus Lemma 3.2. Es gilt hier jedoch zu beachten, daß die Wronski-Determinanten für große $|s|$ durch $|W_+(s)| = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\sigma)$ und $|W_-(s)| = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\omega)$ abzuschätzen sind. Die Abschätzungen der Greenschen Funktion für große $|s|$ lauten dann $\|u(x, s)\|_{L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \sim \frac{1}{|s|^\nu}$ mit $0 < \nu < 1$, wobei ν nicht genauer angegeben werden muß, interessiert man sich nicht für das genaue algebraische Abklingen in t .

Eine einfache Überlegung liefert das Langzeitverhalten der Lösung $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty}$ mittels des komplexen Umkehrintegrals entlang γ'' .

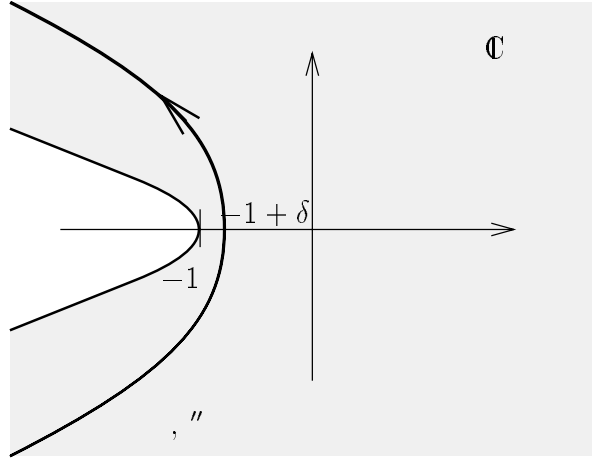


Abbildung 6

Das zu berechnende Integral ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{e^{st}}{|s|^\nu} ds, \quad \text{mit } 0 < \nu < 1.$$

Eine Parametrisierung der Parabel Γ'' mit Scheitel in $s = -(1 - \delta)$, $\delta > 0$ ist $\operatorname{Re} s = -b\rho^2 - (1 - \delta)$, $\operatorname{Im} s = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, $b > 0$ geeignet gewählt. Die inverse Laplace-Transformierte berechnet sich also zu

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{e^{st}}{|s|^\nu} ds \right| \leq \\ & \leq C \int_0^\infty \frac{e^{-b\rho^2 t - (1-\delta)t}}{((b\rho^2 + (1-\delta))^2 + \rho^2)^{\nu/2}} \sqrt{(2b\rho)^2 + 1} d\rho \\ & = C e^{-(1-\delta)t} \int_0^\infty \frac{e^{-b\rho^2 t}}{((b\rho^2 + (1-\delta))^2 + \rho^2)^{\nu/2}} (1 + \mathcal{O}(\rho)) d\rho \\ & \leq C e^{-(1-\delta)t} \int_0^\infty \frac{e^{-b\rho^2 t}}{((1-\delta)^2 + \rho^2)^{\nu/2}} (1 + \mathcal{O}(\rho)) d\rho \\ & \leq C \frac{e^{-(1-\delta)t}}{\sqrt{t}} = \mathcal{O}\left(e^{-(1-\delta)t}\right). \end{aligned}$$

Somit ist das Ergebnis für das zeitliche Abklingen der Lösungen $u(x, t)$ im Falle $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$:

Lemma 3.5 Sei $U_0 \in X^1$, dann gilt für die Lösungen $u(x, t)$ der linearen Eichform (3.1)

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})} = \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}}\right) \|U_0\|_{X^0} + \mathcal{O}\left(e^{-(1-\delta)t}\right) \|U_0\|_{X^0} \quad (3.26)$$

für $t \rightarrow \infty$, $\delta > 0$. ■

Hiermit kann man das Abklingen der Lösungen der linearen Eichform in X^∞ beschreiben.

Satz 3.6 Die Langzeitasymptotik der Lösungen der linearen Eichform (3.1) lautet

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq \begin{cases} C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \|U_0\|_{X^0} & \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} < 1 \\ C e^{-(1-\delta)t} \|U_0\|_{X^0} & \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} \geq 1, \delta > 0, \end{cases}$$

bzw. als Asymptotik der Halbgruppe ausgedrückt

$$\|e^{-At}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \leq \begin{cases} C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} & \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} < 1 \\ C e^{-(1-\delta)t} & \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} \geq 1, \delta > 0. \blacksquare \end{cases}$$

Diese Abschätzungen der Halbgruppe werden es erlauben, wie in Kapitel 4 formuliert, die Existenz von Lösungen mit diesem spezifischen Zeitverhalten zu zeigen.

Bemerkungen: Der Taubersatz 2.8 ist in dem Falle, daß $\frac{\beta^2}{4} > 1$, also $s \in \mathcal{E}_\gamma$, nicht anwendbar, da für die Konvergenz des Integrals der inversen Laplace-Transformation wesentlich ist, daß die Integration auf einen Weg mit $\frac{\pi}{2} < |\arg(s+1)| < \pi$ verschoben werden kann, wobei -1 der Scheitel der Parabel aus \mathcal{E}_γ ist. Dies ist nicht möglich.

Für $s \in \mathcal{E}_\gamma$ kann man den Weg wie gezeigt gehen, allerdings verliert man dabei $e^{\delta t}$ in der Asymptotik. Man kann versuchen, die Integration der inversen Laplace-Transformation entlang einer Geraden $\operatorname{Re} s = -1$ durchzuführen. Hierzu sind jedoch die Abschätzungen nicht gut genug. Man bräuchte hierzu ein Abklingen der Form $u(x, s) \sim (s+1)^{-\nu}$ mit $\nu > 1$, um mit Hilfe von [Doe50], S. 494 ff. auf $u(x, t) \sim t^\nu e^{-t}$ zu schließen. Da aber $\nu > 1$ vorausgesetzt ist, ist diese Asymptotik auch nicht scharf in e^{-t} .

3.4 Die Langzeitasymptotik in t

Die Integralgleichung (3.5), die aus der Darstellung der Lösungen in Laplace-transformierter Form gewonnen wurde, kann durch inverse Laplace-Transformation in die Integralgleichung

$$u(x, t) = \int K(x, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int K(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.27)$$

übergeführt werden. Mit den Resultaten aus Kapitel 3.1 - 3.3 kann man nun die Langzeitasymptotik in t , anstatt über den Parameter s , aus der Darstellung

$$\int K(x, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int K(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.28)$$

berechnen, indem man $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ einsetzt. Die in (3.28) angegebenen Integrale sind die inversen Laplace-Transformierten der Integrale $\int K(x, \xi, s) [U_0(\xi)$

$+\mu(\xi)u(\xi, s)]d\xi$ aus Gleichung (3.5). Die Kerne $K(x, \xi, t)$ sind die inversen Laplace-Transformierten der Kerne $K(x, \xi, s)$, welche in der Gleichung (3.6a) - (3.6f) vorgestellt wurden. Die inversen Laplace-Transformierten der Kerne können explizit berechnet werden, siehe [Kir92]. Da die hier verwendeten Kerne eine leichte Modifikation der in [Kir92] berechneten Kerne sind, wird ein Kern nochmals exemplarisch invers Laplace-transformiert. Die inversen Laplace-Transformierten der anderen 5 Kerne werden angegeben. Die leichte Modifikation der Kerne kommt dadurch zustande, daß in [Kir92] die Eichform (2.1) untersucht wird, während dieser Arbeit die Gleichung (2.2) zugrunde liegt.

Die zu transformierenden Kerne sind:

$$K_1(x, \xi, s) = e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)}, \quad x > 0, \xi > 0 \quad (3.29a)$$

$$K_2(x, \xi, s) = e^{-\sigma x + \omega \xi} \frac{1}{\omega + \sigma}, \quad x > 0, \xi < 0 \quad (3.29b)$$

$$K_3(x, \xi, s) = e^{-\sigma|x-\xi|} \frac{1}{2\sigma}, \quad x > 0, \xi > 0 \quad (3.29c)$$

$$K_4(x, \xi, s) = e^{\omega(x+\xi)} \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)}, \quad x < 0, \xi < 0 \quad (3.29d)$$

$$K_5(x, \xi, s) = e^{\omega x - \sigma \xi} \frac{1}{\omega + \sigma}, \quad x < 0, \xi > 0 \quad (3.29e)$$

$$K_6(x, \xi, s) = e^{-\omega|x-\xi|} \frac{1}{2\omega}, \quad x < 0, \xi < 0. \quad (3.29f)$$

Die inversen Laplace-Transformierten der Kerne K_3 und K_6 können explizit angegeben werden durch

$$K_3(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \quad (3.30c)$$

$$K_6(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}. \quad (3.30f)$$

Der Kern K_1 läßt sich wie folgt behandeln:

$$K_1(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} e^{st} K_1(x, \xi, s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} e^{st} e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} ds, \quad x > 0, \xi > 0,$$

wobei $x > 0, \xi > 0, s \in \mathcal{E}$ und $s_0 > -\frac{\beta^2}{4}$.

Der Integrationsweg wird mit dem Cauchy-Integralsatz verschoben wie in [Kir92], siehe Abbildung 7. Der Integrationsweg parallel zur imaginären Achse wird in einen winkelförmigen Weg um die am weitesten rechts gelegene Singularität verschoben. Die Singularität ist in diesem Fall $s = -\frac{\beta^2}{4}$, ebenso wie bei der Anwendung des Taubersatzes.

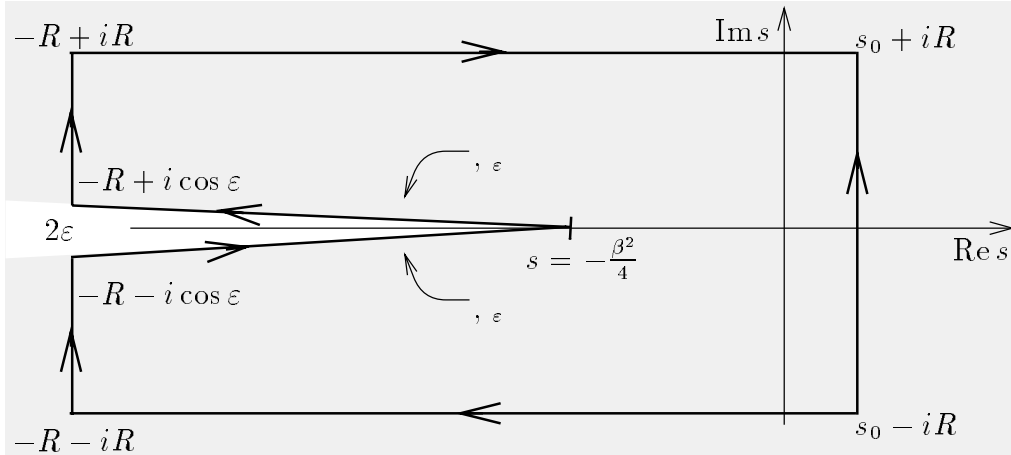


Abbildung 7

Für $R \rightarrow \infty$ verschwinden die Wegintegrale entlang der Wege $s_0 - iR$ nach $-R - iR$ bzw. $-R + iR$ nach $s_0 + iR$ sowie entlang der Wege $-R - iR$ nach $-R - i \cos \varepsilon$ und $-R + i \cos \varepsilon$ nach $-R + iR$. Es bleibt das Integral

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{st} e^{-\sigma(x+\xi)} \frac{\sigma - \omega}{2\sigma(\omega + \sigma)} ds$$

abzuschätzen. Zur Parametrisierung des Weges wählt man $s = -\frac{\beta^2}{4} + q^2 e^{i\phi}$, $\phi = \pi - \varepsilon$ bzw. $\phi = \pi + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi, t) &= \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-q^2 t e^{-i\varepsilon} - iq(x+\xi)e^{-i\varepsilon/2}} \frac{iqe^{-i\varepsilon/2} - \sqrt{2 - q^2 e^{-i\varepsilon}}}{2iqe^{-i\varepsilon/2} (iqe^{-i\varepsilon/2} + \sqrt{2 - q^2 e^{-i\varepsilon}})} 2qe^{-i\varepsilon} dq \\ &= \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-q^2 t - iq(x+\xi)} \cdot \underbrace{\frac{q + i\sqrt{2 - q^2}}{(iq + \sqrt{2 - q^2})}}_{:=a(q)} dq. \end{aligned}$$

Da das Integral für $q = iw$ reell ist für $w \in \mathbb{R}$, erhält man durch die Verschiebung $q = -i\frac{x+\xi}{2t} + r$

$$K_1(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-r^2 t} \cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} a\left(-i\frac{x+\xi}{2t} + r\right) dr.$$

Es ist

$$\operatorname{Im} a\left(-i\frac{x+\xi}{2t} + r\right) = \frac{r^2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2 - \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}}{\left(\frac{x+\xi}{2t} + \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}\right)^2} (1 + \mathcal{O}(r)),$$

woraus

$$K_1(x, \xi, t) = \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \cdot \frac{\frac{1}{2t} + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2 - \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}}{\left(\frac{x+\xi}{2t} + \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}\right)^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

folgt. Hierbei wurde $\int_0^\infty e^{-r^2 t} (1 + \mathcal{O}(r)) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{t}}))$ verwendet. Der Term

$$Q(x, \xi, t) = \frac{\frac{1}{2t} + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2 - \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}}{\left(\frac{x+\xi}{2t} + \sqrt{2 + \left(\frac{x+\xi}{2t}\right)^2}\right)^2}$$

ist gleichmäßig beschränkt, woraus für den Kern $K_1(x, \xi, t)$ in niedrigster Ordnung in t

$$K_1(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \quad (3.30a)$$

folgt. Für die anderen Kerne erhält man:

$$K_2(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} e^{-\frac{x^2}{4t} + \xi\sqrt{2 + \frac{x^2}{4t^2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \quad \text{für } x > 0, \xi < 0, \quad (3.30b)$$

$$K_4(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(e^{\sqrt{2}(x+\xi)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad \text{für } x < 0, \xi < 0, \quad (3.30d)$$

$$K_5(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} e^{-\frac{\xi^2}{4t} + x\sqrt{2 + \frac{\xi^2}{4t^2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \quad \text{für } x < 0, \xi > 0. \quad (3.30e)$$

Lemma 3.7 Seien $K_i(x, \xi, t)$, $i = 1, \dots, 6$ durch (3.30a) - (3.30f) gegeben. Dann gilt

$$\left| \int_0^t \int K_i(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1 + \tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1 + t)^{1/4}},$$

für $i = 1, \dots, 6$.

Beweis:

Mit dem Kern $K_1(x, \xi, t)$ für $x > 0$ ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_0^\infty K_1(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1 + \tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1 + \tau)^{1/4}} \left| \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mu(\xi) d\xi \right| \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right) d\tau \\ & \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1 + \tau)^{1/4}} + \frac{1}{(t-\tau)(1 + \tau)^{1/4}} \right) \left| \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \\ & \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1 + \tau)^{1/4}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t-\tau}(1 + \tau)^{1/4}} \right) \left| \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} + \frac{1}{(t-\tau)(1+\tau)^{1/4}} \right) \left| \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \\
& \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(1+\tau)^{1/4}} \int_0^\infty \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} M(\xi) d\xi d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} \left(\int_0^\infty \mu(\xi) d\xi + \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) d\tau \right).
\end{aligned}$$

Es ist $M(\xi) := \int_0^\xi \mu(r) dr$. μ klingt exponentiell schnell ab für $|x| \rightarrow \infty$. Die Integrale bezüglich ξ sind beschränkt. Es bleiben noch die Faltungsintegrale über t abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(1+\tau)^{1/4}} d\tau \right| &= \left| \frac{1}{(1+t)^{1/4}} \int_0^{t-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{1+\tau} \right)^{1/4} \frac{1}{(t-\tau)^{5/4}} d\tau \right| \\
&\leq \frac{\sqrt[4]{3}}{(1+t)^{1/4}} \left| \frac{1}{(t-\tau)^{1/4}} \right|_0^{t-\frac{1}{2}} \\
&= \mathcal{O} \left(\frac{1}{(1+t)^{1/4}} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \tag{3.31a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} d\tau \right| &\leq \left| \frac{1}{(\frac{1}{2}+t)^{1/4}} \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right| = \frac{1}{(\frac{1}{2}+t)^{1/4}} \left| 2\sqrt{t-\tau} \right|_{t-\frac{1}{2}}^t \\
&= \mathcal{O} \left(\frac{1}{(1+t)^{1/4}} \right). \tag{3.31b}
\end{aligned}$$

Somit ist die Asymptotik des Integrals

$$\left| \int_0^t \int_0^\infty K_1(\cdot, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

in niedrigster Ordnung in t .

Das Integral über den Kern $K_2(x, \xi, t)$, $x > 0$, läßt sich wie folgt abschätzen, wobei $\xi < 0$ zu beachten ist:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_2(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\
& \leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \left| \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} e^{\xi \sqrt{2 + \frac{x^2}{4(t-\tau)^2}}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \left| \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \exp\left(\frac{\xi(2+\frac{x^2}{4(t-\tau)^2})}{\sqrt{2+\frac{x^2}{4(t-\tau)^2}}}\right) \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} \|\mu\|_{L^1(\mathbb{R})} d\tau \right) \\
&\leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \left| \int_{-\infty}^0 e^{\xi \frac{x^2}{4(t-\tau)^2}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+t)^{1/4}}\right) \right),
\end{aligned}$$

unter Verwendung von (3.31b). Bezeichnet man wieder mit $M(\xi) = \int_0^\xi \mu(r) dr$, dann erhält man mit partieller Integration aus dem Integral über ξ

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_2(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\
&\leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} \cdot \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{4(t-\tau)^2} \int_{-\infty}^0 e^{\xi \frac{x^2}{4(t-\tau)^2}} |M(\xi)| d\xi d\tau + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+t)^{1/4}}\right) \right).
\end{aligned}$$

Das Integral über ξ ist gleichmäßig in $t-\tau$ beschränkt. Das Maximum der Funktion $\frac{x^2}{4(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}$ wird bei $x = \pm\sqrt{t-\tau}$ angenommen und beträgt $\frac{1}{4(t-\tau)} e^{-1/4}$. Das verbleibende Integral $\int_0^{t-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-3/2} (1+\tau)^{-1/4} = \mathcal{O}\left((1+t)^{-1/4}\right)$ wurde bereits in (3.31a) abgeschätzt. Somit ergibt sich auch für $K_2(x, \xi, t)$:

$$\left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_2(\cdot, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

in niedrigster Ordnung in t .

Der Term mit $K_3(x, \xi, t)$ läßt sich genauso wie die Faltung mit $K_1(x, \xi, t)$ abschätzen und liefert

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_0^\infty K_3(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \left| \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}}.
\end{aligned}$$

Für die Faltung mit $K_4(x, \xi, t)$, $x < 0$, ist abzuschätzen

$$\left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_4(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \left| \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{2}(x+\xi)} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \\
&\leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}(1+\tau)^{1/4}} + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{d\tau}{(1+t-\tau)^{3/2}(1+\tau)^{1/4}} \right) \\
&\leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde (3.31a) verwendet.

Das Integral über den Kern $K_5(x, \xi, t)$ läßt sich genauso abschätzen wie das über den Kern $K_1(x, \xi, t)$, wobei $x < 0$ zu beachten ist:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_5(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \left| \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}} e^{x\sqrt{2+\frac{\xi^2}{4(t-\tau)^2}}} \mu(\xi) d\xi \right| d\tau \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}}.
\end{aligned}$$

Somit bleibt noch die Faltung mit $K_6(x, \xi, t)$ zu behandeln.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{-\infty}^0 K_6(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} d\xi d\tau \right| \leq \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} |\mu(\xi)| d\xi d\tau \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{-(\frac{\beta^2}{4}+2)(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \|\mu\|_{L^1(\mathbb{R})} d\tau \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \int_0^t \frac{e^{-2(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau)^{1/4}} d\tau \\
&\leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \left(\int_0^{t-\frac{1}{2}} \frac{e^{-2(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} d\tau + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(e^{-2t})). \blacksquare
\end{aligned}$$

Aus Lemma (3.7) folgt, daß sich die Integrale (3.28)

$$\int K(x, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int K(x, \xi, t-\tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

unter der Voraussetzung $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ abschätzen lassen zu

$$\begin{aligned} & \left\| \int K(\cdot, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int K(\cdot, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ & \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß $\| \int K(\cdot, \xi, t) U_0(\xi) d\xi \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t})$ gilt. Dies kann man über die inversen Laplace-transformierten Kerne direkt zeigen, oder die Resultate aus Kapitel 3.1 verwenden, die mit der Tauberasympotik erzielt wurden.

Mit diesen Überlegungen sieht man, daß sich die Langzeitasymptotik $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ in der Integralgleichung

$$u(x, t) = \int K(x, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int K(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

reproduziert. Allerdings liegt keine Kontraktion vor, so daß der Banachsche Fixpunktsatz in einem geeignet gewichteten Raum mit diesen Abschätzungen nicht angewandt werden kann.

Die Integralgleichung (3.5) für $e^{\frac{\gamma}{2}x} u$ lautet im gewichteten Fall

$$\begin{aligned} e^{\frac{\gamma}{2}x} u(x, s) &= e^{\frac{\gamma}{2}x} \int K(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) d\xi + \\ & e^{\frac{\gamma}{2}x} \int K(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} \mu(\xi) u(\xi, s) d\xi, \end{aligned} \quad (3.32)$$

wobei die Kerne $K(x, \xi, s)$ dieselben sind wie die in (3.29a) - (3.29f) gegebenen für den ungewichteten Fall.

Für $x > 0$ lauten die abzuschätzenden Integrale

$$e^{\frac{\gamma}{2}x} \sum_{i=1}^3 \int K_i(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} [U_0(\xi) + \mu(\xi) u(\xi, s)] d\xi.$$

Da $\gamma < -2$ gewählt wurde und $x > 0$ ist, also $e^{\frac{\gamma}{2}x} \leq 1$, lautet eine $L^p(\mathbb{R})$ -Abschätzung der Integralgleichung (3.32) für $1 \leq p \leq \infty$

$$\|e^{\frac{\gamma}{2}x} u_+(x, s)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\| \sum_{i=1}^3 \int K_i(\cdot, \xi, s) [U_0(\xi) + \mu(\xi) u(\xi, s)] d\xi \right\|_{L^p_+(\mathbb{R})}.$$

Sucht man eine Lösung dieser Gleichung in $L^p(\mathbb{R}) \cap L^p(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ mit ihrer Langzeitasymptotik, so sind die Abschätzungen für $x > 0$ dieselben wie in $L^p(\mathbb{R})$ mit denselben inversen Laplace-transformierten Kernen $K_i(x, \xi, t)$, $i = 1, 2, 3$. Hieraus folgt für $x > 0$ in $L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ mit Hilfe von Lemma 3.7:

$$\left\| \sum_{i=1}^3 \int K_i(\cdot, \xi, t) U_0(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int K_i(\cdot, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{X^p_+} \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}},$$

für $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}}$.

Für $x < 0$ lautet die Integralgleichung

$$e^{\frac{\gamma}{2}x} u_-(x, s) = e^{\frac{\gamma}{2}x} \sum_{i=4}^6 \int K_i(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} [U_0(\xi) + \mu(\xi)u(\xi, s)] d\xi .$$

Im Falle $x < 0$ besteht das Problem darin, daß z.B.

$$e^{\frac{\gamma}{2}x} \int K_4(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) d\xi$$

nicht so wie vorher abgeschätzt werden kann, da $e^{\frac{\gamma}{2}x} \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$. Wird verlangt, daß $e^{\frac{\gamma}{2}x} \int K_4(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0(\xi) d\xi$ als Funktion von x in $L^p(\mathbb{R})$ ist, so ist $s \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_\gamma$ die Teilmenge von \mathbb{C} , in der man den Integrationsweg für die inverse Laplace-Transformation wählen darf. Bei der inversen Laplace-Transformation der Kerne K_4 , K_5 und K_6 wird es i.a. nicht möglich sein, den Integrationsweg genauso wie vorher entlang eines Winkelbereiches $s = -\frac{\beta^2}{4} + qe^{i\phi}$, $\phi = \pi \pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ zu wählen. Betrachte

$$\begin{aligned} e^{\frac{\gamma}{2}x} \int_{-\infty}^0 K_4(x, \xi, s) e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 d\xi &= e^{\frac{\gamma}{2}x} \int_{-\infty}^0 \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} e^{\omega(x+\xi)} e^{-\frac{\gamma}{2}\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 d\xi \\ &= e^{(\frac{\gamma}{2}+\omega)x} \int_{-\infty}^0 \frac{\omega - \sigma}{2\omega(\omega + \sigma)} e^{(\omega - \frac{\gamma}{2})\xi} e^{\frac{\gamma}{2}\xi} U_0 d\xi . \end{aligned}$$

Da $\gamma < -2$ und $\operatorname{Re} \omega = \operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\alpha^2}{4}} > 0$ für $s \in \mathcal{E}$ und $U_0 \in X^1$, existiert das Integral. Die Funktion $e^{(\frac{\gamma}{2}+\omega)x}$ ist jedoch nur beschränkt für alle $x \leq 0$, falls $\operatorname{Re}(\frac{\gamma}{2} + \omega) \geq 0$. Da die Existenz einer Lösung in X^1 gezeigt wurde, und diese auch weiterhin zugrunde liegen soll, muß $s \in \mathcal{E}_\gamma$ gefordert werden. Dies ist das offene Komplement der nach links geöffneten Parabel mit Scheitel in $s = -1$, die in Kapitel 3.3 bereits beschrieben wurde. Für die Kerne $K_5(x, \xi, t)$ und $K_6(x, \xi, t)$ gilt das soeben Beschriebene genauso.

Angenommen es ist $\frac{\beta^2}{4} \geq 1$, so daß $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma$ ist. Würde man für diese Kerne die inverse Laplace-Transformierte berechnen, so würde dies eine Langzeitasymptotik von $e^{-(1-\delta)t}$, $\delta > 0$ liefern, da man den Integrationsweg in der komplexen Ebene nur mit einem positiven Abstand bis an die Parabel $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\frac{\gamma}{2} + \omega) \geq 0\}$ verschieben kann. Dies wurde schon im vorigen Abschnitt über die Greensche Funktion ausgeführt.

Berechnet man den Term $\int_0^t \int K(x, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau$, so wird die Langzeitasymptotik bestimmt von der Faltung in der Zeit. Diese Faltung ist $\int_0^t e^{-(1-\delta)(t-\tau)} e^{-(1-\delta)\tau} d\tau = t \cdot e^{-(1-\delta)t} = \mathcal{O}(e^{-(1-\tilde{\delta})t})$, mit $\tilde{\delta} > \delta$ für $t \rightarrow \infty$. Wie auch schon früher bemerkt, ist bei dieser Langzeitasymptotik ein Mitführen der algebraischen Terme nicht sinnvoll. Auf die Ausführung der inversen Laplace-Transformation und die anschließende Berechnung der Faltungsintegrale kann verzichtet werden, da sie keine neuen Erkenntnisse über das Langzeitverhalten liefert. Die Asymptotik der Lösung der linearen Gleichung folgt auch sofort aus $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C \|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-(1-\delta)t}$, wobei die X^1 -Abschätzung mit Hilfe der Energieabschätzung (2.11) gewonnen wurde.

In dem hier untersuchten Falle wird vorausgesetzt, daß die Anfangsbedingung $U_0 \in X^1$ ist. Die Existenztheorie liefert Lösungen sowohl der linearen als auch der nichtlinearen Gleichung, die in X^1 und, für $t > 0$, sogar in X^2 sind. Da $H^1(\mathbb{R})$ -Funktionen stetig sind, entspricht die $L^\infty(\mathbb{R})$ -Norm der C^0 -Norm, und ein Abschätzen der oben gegebenen Integralgleichung in diesen Normen macht Sinn.

Als Schlußfolgerung läßt sich hieraus ziehen, daß die in Kapiteln 3.1 - 3.3 mit Hilfe der Laplace-Transformierten errechnete Langzeitasymptotik über die Inversion mittels des Taubersatzes 2.8 auch über die Darstellung der Integralgleichung in t gesehen werden kann. Allerdings sind die hier aufgeführten Abschätzungen zu schlecht, um ein Fixpunktargument in geeignet gewichteten Räumen für die Integralgleichung (3.27) durchzuführen. Es liegt bei der Abschätzung $\| \int_0^t \int K(\cdot, \xi, t - \tau) \mu(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(1+t)^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ keine echte Kontraktion vor, die man für die Existenz einer Lösung der Gleichung (3.27) zusammen mit ihrer Langzeitasymptotik bräuchte. Dies ist auch der Grund, weshalb in dieser Arbeit die Eichform in Laplace-transformierter Form untersucht wurde, und die Greensche Funktion in Abhängigkeit von s verwendet wurde.

4 Die Nichtlinearität

In Kapitel 2 wurde die Existenz von Lösungen der Eichform (2.2) in X^1 gezeigt, und auch, daß die Darstellung der Lösung als Lösung der Integralgleichung

$$u(x, t) = e^{-A(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} \left(e^{\frac{\gamma}{2}x} u^2 \right) (\tau) d\tau \quad (4.1)$$

gilt. Diese Integralgleichung besitzt nach Lemma 2.5 eine Lösung für alle $t > 0$ mit der Asymptotik $\|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-a_0 t} \|U_0\|_{X^1}$, $a_0 = \min\{\frac{\beta^2}{4}, 1 - \delta\}$, wobei e^{-At} die durch den linearen Operator $-A$ erzeugte Halbgruppe ist.

Kapitel 3.2 und 3.3 behandelten die lineare Eichform in X^∞ und lieferten das in Satz 3.6 angegebene Resultat

$$\|e^{-At}U_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} < 1 \quad (4.2a)$$

$$\|e^{-At}U_0\|_{L^\infty(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq C \left(e^{-(1-\delta)t} + \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \right) \|U_0\|_{X^0} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta^2}{4} \geq 1, \delta > 0 \quad (4.2b)$$

Die Existenz von Lösungen der Gleichung (4.1) wird im folgenden mit einem Banachschen Fixpunktsatz in $C^0([T, \infty), X^\infty)$ gezeigt. Hierbei wird in $C^0([T, \infty), X^\infty)$ mit den Normen

$$\begin{aligned} \|u\|_\beta &:= \sup_{t \geq T} e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \\ \|u\|_\delta &:= \sup_{t \geq T} e^{(1-\delta)t} \|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \end{aligned}$$

gearbeitet.

Das Abklingverhalten der Halbgruppe e^{-At} in der Zeit wird durch die feste reelle Größe $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 4}$ und somit durch γ festgelegt. Es sind daher zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Sei $\frac{\beta^2}{4} < 1$. Dann gibt es zu jedem β fest ein $\delta > 0$, so daß $t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t} > e^{-(1-\delta)t}$ für t groß. Die Halbgruppe e^{-At} erfüllt nach Satz 3.6 die Abschätzung $\|e^{-At}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \leq C t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ für $t \rightarrow \infty$.

Satz 4.1 Die Gleichung (4.1) besitzt zu jeder Anfangsbedingung $U_0 \in X^1$, mit $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug, genau eine Lösung $u(x, t) \in C^0([T, \infty), X^\infty)$ mit der Asymptotik

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} = \mathcal{O} \left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}t}}{t^{1/4}} \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Beweis:

Zu zeigen ist, daß die Integralgleichung

$$u(x, t) = e^{-A(t-T)}u(x, T) + \int_T^t e^{-A(t-\tau)} \left(e^{\frac{\gamma}{2}x} u^2 \right) (\tau) d\tau$$

für $t \geq T$ in der Kugel $B_r(0) = \{u \in C^0([T, \infty), X^\infty) \mid \|u\|_\beta \leq r\}$ einen Fixpunkt besitzt.

Die Nichtlinearität genügt der Abschätzung $\|e^{\frac{\gamma}{2}x} u^2\|_{X^0} \leq C\|u\|_{X^\infty}\|u\|_{X^1}$.

$e^{-A(t-T)}u(x, T) + \int_T^t e^{-A(t-\tau)} \left(e^{\frac{\gamma}{2}x} u^2 \right) (\tau) d\tau$ bildet die Kugel $B_r(0)$ in sich ab:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-A(t-T)}u(x, T) + \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(u)(\tau) d\tau \right\|_\beta \leq \\ & \leq \sup_{t \geq T} e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \left(\|e^{-A(t-T)}u(x, T)\|_{X^\infty} + \right. \\ & \quad \left. + \int_T^t \|e^{-A(t-\tau)}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \|NL(u)(\tau)\|_{X^0} d\tau \right) \\ & \leq C \sup_{t \geq T} e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-T)}}{t^{1/4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}T} \|U_0\|_{X^0} + \right. \\ & \quad \left. + \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \|u(x, \tau)\|_{X^\infty} \|u(x, \tau)\|_{X^1} d\tau \right) \\ & \leq C \left(\|U_0\|_{X^1} + \|u\|_\beta \|U_0\|_{X^1} \sup_{t \geq T} (1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} d\tau \right). \end{aligned}$$

Es wurde hierbei verwendet, daß nach Lemma 2.5 $\|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{X^1}$ und $\|u(\cdot, t)\|_{X^0} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \|U_0\|_{X^1}$ gilt. Betrachte

$$\int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} d\tau = \underbrace{\int_T^{t-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} d\tau}_{I_2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |I_1| & \leq \left| \frac{1}{(1+t)^{1/4}} \int_T^{t-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau} \left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{1+\tau} \right)^{1/4} d\tau \right| \\ & \leq C \frac{1}{(1+t)^{1/4}} |e^{-\frac{\beta^2}{4}T} - e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-1/2)}| \leq C \frac{1}{(1+t)^{1/4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}T} \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \frac{1}{(\frac{1}{2} + t)^{1/4}} \left| \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4}} d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{(\frac{1}{2} + t)^{1/4}} \left(\left| \frac{4}{3} (t-\tau)^{3/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau} \right|_{t-\frac{1}{2}}^t + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{\beta^2}{3} (t-\tau)^{3/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau} d\tau \right) \\
&\leq \frac{C}{(\frac{1}{2} + t)^{1/4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}T}. \tag{4.3b}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\| \| e^{-A(t-T)} u(x, T) + \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(u)(\tau) d\tau \| \|_\beta \leq C \| U_0 \|_{X^1} (1 + e^{-\frac{\beta^2}{4}T} r) < r,$$

falls man $\| U_0 \|_{X^1}$ klein genug und T groß genug wählt.

Die Kontraktion folgt aus:

$$\begin{aligned}
&\| \| \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(u)(\tau) d\tau - \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(v)(\tau) d\tau \| \|_\beta \\
&= \| \| \int_T^t e^{-A(t-\tau)} (NL(u) - NL(v))(\tau) d\tau \| \|_\beta \\
&\leq \sup_{t \geq T} \left| e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \int_T^t \| e^{-A(t-\tau)} \|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \cdot \| NL(u) - NL(v) \|_{X^0}(\tau) d\tau \right| \\
&\leq C \sup_{t \geq T} \left| e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \| e^{\frac{\gamma}{2}\xi} (u^2(\xi) - v^2(\xi)) \|_{X^0}(\tau) d\tau \right| \\
&\leq C \sup_{t \geq T} \left| e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \| u + v \|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \| u - v \|_{X^\infty}(\tau) d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Für u gilt aber $\| u(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-\frac{\beta^2}{4}t} \| U_0 \|_{X^1}$. Es kann weiter abgeschätzt werden zu

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{t \geq T} \left| e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau} \| U_0 + V_0 \|_{X^1} \cdot \frac{e^{\frac{\beta^2}{4}\tau} (1+\tau)^{1/4}}{e^{\frac{\beta^2}{4}\tau} (1+\tau)^{1/4}} \| u - v \|_{X^\infty} d\tau \right| \\
&\leq C \| U_0 + V_0 \|_{X^1} \sup_{t \geq T} \left| e^{\frac{\beta^2}{4}t} (1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau} \frac{1}{e^{\frac{\beta^2}{4}\tau} (1+\tau)^{1/4}} d\tau \right| \| \| u - v \| \|_\beta \\
&\leq C \| U_0 + V_0 \|_{X^1} \sup_{t \geq \tau} \left| (1+\tau)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau}}{(t-\tau)^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} d\tau \right| \| \| u - v \| \|_\beta.
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen (4.3a) und (4.3b) liefern das Resultat

$$\left\| \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(u)(\tau) d\tau - \int_T^t e^{-A(t-\tau)} NL(v)(\tau) d\tau \right\|_{\beta} \leq C \|U_0 + V_0\|_{X^1} \|u - v\|_{\beta}.$$

Damit liegt für Anfangsbedingungen, die klein genug sind, eine Kontraktion vor. ■

Fall 2: Sei $\frac{\beta^2}{4} \geq 1$. Dann ist $e^{-(1-\delta)t} > t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$ für jedes $\delta > 0$ und für alle $t > 1$. Die Halbgruppe e^{-At} genügt nach Satz 3.6 der Abschätzung $\|e^{-At}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \leq C e^{-(1-\delta)t}$ für $t \rightarrow \infty$. Es ergibt sich sofort das

Korollar 4.2 *Die Gleichung (4.1) besitzt zu jeder Anfangsbedingung $U_0 \in X^1$, mit $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug, genau eine Lösung $u(x, t) \in C^0([T, \infty), X^\infty)$ mit der Asymptotik*

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} = \mathcal{O}\left(e^{-(1-\delta)t}\right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \delta > 0.$$

Beweis:

Die Aussage folgt sofort aus den durch die Energieabschätzungen (2.10), (2.11) gewonnenen Resultaten, da $\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq \|u(\cdot, t)\|_{X^1}$ und in Lemma 2.5 gezeigt wurde, daß $\|u(\cdot, t)\|_{X^1} \leq C e^{-(1-\delta)t} \|U_0\|_{X^1}$ ist. ■

Es sei an dieser Stelle nochmals erwähnt, daß ein Mitführen der algebraischen Terme nur im ersten Fall, d.h. bei der Asymptotik mit $t^{-1/4} e^{-\frac{\beta^2}{4}t}$, sinnvoll ist. β ist optimal und kann nicht verbessert werden. Im zweiten Fall ist nur $\delta > 0$ vorgegeben. Ein algebraischer Term wird durch ein anderes δ vom exponentiellen Abklingen dominiert, d.h. zu einem $\delta > 0$ und einem Abklingen der Form $t^\nu e^{-(1-\delta)t}$, $\nu \in \mathbb{R}$ für $t \rightarrow \infty$ gibt es ein $\delta' > 0$, so daß $t^\nu e^{-(1-\delta)t} = \mathcal{O}(e^{-(1-\delta')t})$ für $t \rightarrow \infty$.

5 Anwendungen

5.1 Die bistabile Gleichung

Die als ‐bistabile Gleichung‐ bezeichnete Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} = u - u^3 \quad (5.1)$$

besitzt, ebenso wie die KPP-Gleichung, Fronten als ‐travelling wave‐ Lösungen. Der TW-Ansatz $x \mapsto x + \gamma t$ führt auf die Gleichung

$$u_t + \gamma u_x - u_{xx} = u - u^3, \quad (5.2)$$

welche stationäre Lösungen u_0 besitzt. Eine Analysis in der Phasenebene liefert die Fixpunkte $(0, 0)$, $(-1, 0)$ und $(1, 0)$, wobei $(0, 0)$ ein stabiler Knoten und $(\pm 1, 0)$ Sattelpunkte für $|\gamma| > 2$ sind. Es existieren für $|\gamma| > 2$ heterokline Verbindungen zwischen $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sowie zwischen $(0, 0)$ und $(-1, 0)$. Durch die Invarianz der Gleichung (5.2) für stationäre Lösungen unter den Transformationen $u \mapsto -u$ und dem Transformationspaar $x \mapsto -x$, $\gamma \mapsto -\gamma$ genügt es, nur eine dieser Fronten für ein gegebenes $|\gamma| > 2$ zu betrachten. Sei also wie im KPP-Falle $\gamma < -2$ und u_0 diejenige Front, die 1 für $x \rightarrow -\infty$ mit 0 für $x \rightarrow \infty$ monoton verbindet. Es ist $u'_0 < 0$.

Bemerkungen: Zusätzlich kann man noch leicht zeigen, daß es weitere Fronten gibt, nämlich die Sattel-Sattel-Verbindungen von $(-1, 0)$ nach $(1, 0)$. Eine simple Rechnung zeigt, daß, falls eine solche Front existiert, sie die Geschwindigkeit $\gamma = 0$ haben muß. Gleichung (5.2) für stationäre Lösungen als System geschrieben lautet

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \gamma v - u + u^3. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$v \cdot v' = \gamma v^2 - u'(u - u^3).$$

Integriert ergibt dies $\frac{1}{2}v^2|_{-\infty}^{\infty} = \gamma \int v^2 dx - \int_{-1}^1 (u - u^3) du$. Die linke Seite ist Null, ebenso wie der Term $\int_{-1}^1 (u - u^3) du$ aus Symmetriegründen. Damit muß $\gamma = 0$ sein. Man verbleibt also mit

$$-u''_0 = u_0 - u_0^3 \quad (5.3)$$

als Gleichung für die gesuchte Front zwischen -1 und 1 . Gleichung (5.3) besitzt die Lösung $u_0(x) = -\tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$. Dieser Fall wird am Ende dieses Abschnitts noch einmal aufgegriffen.

Doch zurück zu der Gleichung (5.2) für $\gamma < -2$. Die zu dieser Gleichung gehörende Eichform entsteht wieder durch den Störungsansatz $u_0 \mapsto u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x} u$ und führt auf

$$u_t - u_{xx} + \left(3u_0^2 + \frac{\beta^2}{4}\right) u = -e^{\frac{\gamma}{2}x} u_0 u^2 - e^{\gamma x} u^3. \quad (5.4)$$

Der zu Gleichung (5.4) gehörende lineare Operator $Bu := -u_{xx} + (3u_0^2 + \frac{\beta^2}{4})u$ ist ein sektorieller Operator ebenso wie A in 2.1. Die Nichtlinearität ist, ebenso wie die Nichtlinearität der Eichform zur KPP-Gleichung, eine differenzierbare Abbildung von X^1 nach X^0 und somit insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Lemma 2.3 kann direkt übertragen werden. Hieraus folgt die lokale Existenz einer Lösung in X^1 wie in Satz 2.4. (5.4) kann mit denselben Mitteln behandelt werden, wie die Eichform für die KPP-Gleichung (2.2).

Die Front u_0 , die in der bistabilen Gleichung die 1 mit der 0 verbindet, unterscheidet sich von der Front im KPP-Falle durch eine andere räumliche Asymptotik, die sich in anderen Konstanten ausdrückt. Die Front u_0 ist Lösung der Gleichung $\gamma u_0' - u_0'' = u_0 - u_0^3$. Durch Linearisierung um den Fixpunkt $(0, 0)$ erhält man, daß u_0 die Asymptotik

$$\begin{aligned} u_0 &\sim \exp\left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma - 4}}{2}x\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \\ u_0' &\sim \frac{\gamma + \sqrt{\gamma - 4}}{2} \exp\left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma - 4}}{2}x\right) && \text{für } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

auf der stabilen Mannigfaltigkeit in $(0, 0)$ hat. Durch Linearisierung um $(1, 0)$ erhält man, daß

$$\begin{aligned} u_0 &\sim 1 - \exp\left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma + 8}}{2}x\right) && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ u_0' &\sim \frac{\gamma + \sqrt{\gamma + 8}}{2} \exp\left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma + 8}}{2}x\right) && \text{für } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

entlang der instabilen Mannigfaltigkeit in dem Sattel in $(1, 0)$. Die Konstanten α und β , die im KPP-Falle durch $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + 4}$, bzw. durch die Gleichung $\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} = 2$, gegeben waren, wurden ebenso durch Linearisierung in den Fixpunkten erhalten. Diese werden für die bistabile Gleichung durch Konstanten $\tilde{\alpha} = \sqrt{\gamma^2 + 8}$ bzw. $\tilde{\beta} = \sqrt{\gamma^2 - 4}$ ersetzt. Zudem gilt $\frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2}{4} = 3$. Das in den vorigen Kapiteln für die lineare Eichform Gesagte kann direkt unter Beachtung dieser neuen Konstanten $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ übertragen werden und wird deshalb nur kurz behandelt.

Die Koeffizienten des linearen Operators Bu haben ein asymptotisches Verhalten von

$$\begin{aligned} -u_{xx} + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}u &&& \text{für } x \rightarrow \infty \\ -u_{xx} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}u &&& \text{für } x \rightarrow -\infty . \end{aligned}$$

Eine erste Abschätzung der Halbgruppe e^{-Bt} in $L^2(\mathbb{R})$ läßt sich sofort aus einer Energieabschätzung berechnen, die genauso wie in (2.10) durchgeführt werden kann. Man erhält

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} . \quad (5.5)$$

Im Falle $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ ergibt sich aufgrund der Tatsache, daß $3u_0^2 - 1 \rightarrow 2$ für $x \rightarrow -\infty$ vorliegt, eine Zeitasymptotik, die auch genauso wie in (2.11) berechnet werden kann.

$$\|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq C(\delta) \left(e^{-(2-\delta)t} + e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t} \right) \|U_0\|_{X^0} . \quad (5.6)$$

Es kann - genauso wie im KPP-Falle - die lineare Eichform mittels einer Greenschen Funktion in Laplace-transformierter Darstellung gelöst werden, und die Langzeitasymptotik mit Hilfe der Taubersätze berechnet werden. Man erhält:

Lemma 5.1 *Die Lösungshalbgruppe e^{-Bt} erfüllt die Abschätzungen*

$$\|e^{-Bt}\|_{X^0 \rightarrow X^0} \leq C e^{-\tilde{\alpha}_0 t} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

wobei $\tilde{\alpha}_0 = \min\{\frac{\tilde{\beta}^2}{4}, 2 - \delta\}$, $\delta > 0$.

$$\|e^{-Bt}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \leq \begin{cases} C \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} & \text{für } t \rightarrow \infty, \frac{\tilde{\beta}^2}{4} < 2 \\ C e^{-(2-\delta)t} & \text{für } t \rightarrow \infty, \frac{\tilde{\beta}^2}{4} \geq 2, \delta > 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Beweis:

Die Abschätzung (5.7) folgt aus den Energieabschätzungen (5.5), (5.6). Die Abschätzung (5.8) folgt aus Lemma (3.2). Die zu untersuchende Gleichung in Laplace-transformierter Form lautet

$$\begin{aligned} su - u_{xx} + \left(3u_0^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}\right)u &= U_0, \quad x \geq 0 \\ su - u_{xx} + \left((3u_0^2 - 3) + \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}\right)u &= U_0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Für die homogene Gleichung existieren wieder jeweils Paare linear unabhängiger Lösungen für $x \geq 0$ resp. $x < 0$, aus denen eine Greensche Funktion konstruiert werden kann. Hieraus folgt genauso wie in Lemmata 3.3 und 3.4 eine Abschätzung

$$\|u(x, s)\|_{X^\infty} \leq C \left(\frac{1}{\operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}} + \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{|s + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}|^{3/4}} \right) \|U_0\|_{X^0},$$

die in der Menge $s \in \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ \operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \leq 0 \right\} \cup \left\{ \operatorname{Re} s \leq -\frac{\tilde{\beta}^2}{4}, \operatorname{Im} s = 0 \right\} \right)$ gültig ist.

$\operatorname{Re} \sqrt{s + \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \leq 0$ ist eine nach links geöffnete Parabel mit Scheitel in $s = -2$. Mit dem Taubersatz 2.8 folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe von Lemma 5.1 läßt sich die Langzeitasymptotik für die nichtlineare Gleichung wieder mit einem Fixpunktargument zeigen. Auch hier entscheidet wieder γ darüber, welches der beiden vorkommenden Langzeitverhalten das langsamere ist und somit die Langzeitasymptotik bestimmt.

Lemma 5.2 *Die Eichform (5.4) besitzt zu jeder Anfangsbedingung $U_0 \in X^1$, mit $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug, genau eine Lösung. Diese Lösung hat die Zeitasymptotik*

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t}}{(1+t)^{1/4}} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\tilde{\beta}^2}{4} < 2$$

oder

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq C e^{-(2-\delta)t} \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\tilde{\beta}^2}{4} \geq 2, \delta > 0.$$

Beweis:

Gezeigt wird der Fall mit dem zusätzlichen algebraischen Abklingen in t . Der andere Fall mit dem rein exponentiellen Abklingen ist in diesem unter dem Aspekt der Beweistechnik enthalten. Sei $\frac{\tilde{\beta}^2}{4} < 2$. Die zu lösende Integralgleichung

$$u(x, t) = e^{-B(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-B(t-\tau)}NL(u)(\tau)d\tau \quad (5.9)$$

kann, bis auf die etwas andere Nichtlinearität

$$NL(u) = -e^{\frac{\gamma}{2}x}u^2 \left(3u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x}u\right),$$

genauso behandelt werden wie in Satz 4.1. Es gilt

$$\|NL(u)\|_{X^0} \leq C \left(\|u\|_{X^\infty}\|u\|_{X^0} + \|u\|_{X^\infty}^2\|u\|_{X^0}\right)$$

$$\|NL(u)\|_{X^0} \leq C \left(\|u\|_{X^1}^2 + \|u\|_{X^1}^3\right).$$

Mit diesen Abschätzungen für $\|NL(u)\|_{X^0}$ zeigt man mit der Norm $\|u\|_{\tilde{\beta}} := \sup_{t \geq T} e^{\frac{\tilde{\beta}}{4}t}(1+t)^{1/4}\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty}$:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-B(t-T)}u(T) + \int_T^t e^{-B(t-\tau)}NL(u)(\tau)d\tau \right\|_{\tilde{\beta}} \leq \\ & \leq C \left(\|U_0\|_{X^1} + \sup_{t \geq T} e^{\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t}(1+t)^{1/4} \int_T^t \|e^{-B(t-\tau)}\|_{X^0 \rightarrow X^\infty} \|NL(u)\|_{X^0} d\tau \right) \\ & \leq C \left(\|U_0\|_{X^1} + \|u\|_{\tilde{\beta}} \|U_0\|_{X^1} \left(\sup_{t \geq T} e^{\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t}(1+t)^{1/4} \|u\|_{\tilde{\beta}} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \left(\frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \right)^2 e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau} d\tau \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sup_{t \geq T} e^{\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t}(1+t)^{1/4} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau} d\tau \right) \right) \\ & \leq C \|U_0\|_{X^1} \left(1 + r e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}T} + r^2 e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}T} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

$\|U_0\|_{X^1}$, r und T können so gewählt werden, daß durch die rechte Seite der Integralgleichung (5.9) die Kugel $B_r(0)$ in sich abgebildet wird. Verwendet wurde (4.3a) und (4.3b). Des weiteren wurde verwendet, daß das oben unterstrichene Faltungsintegral wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\int_T^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/4}} \left(\frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau}}{(1+\tau)^{1/4}} \right)^2 e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau} d\tau = e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}t} \int_T^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau}}{(t-\tau)^{1/4}(1+\tau)^{1/2}} d\tau.$$

Betrachte

$$\underbrace{\int_T^{t-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau}}{(t-\tau)^{1/4}(1+\tau)^{1/2}} d\tau}_{I_3} + \underbrace{\int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau}}{(t-\tau)^{1/4}(1+\tau)^{1/2}} d\tau}_{I_4}$$

Es ist

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left| \frac{1}{(1+t)^{1/4}} \int_T^{t-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau} \left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{1+\tau} \right)^{1/4} d\tau \right| \\ &\leq C \frac{1}{(1+t)^{1/4}} |e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}T} - e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}(t-1/2)}| \leq C \frac{1}{(1+t)^{1/4}} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}T}, \\ |I_4| &\leq \frac{1}{(\frac{1}{2}+t)^{1/2}} \left| \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau}}{(t-\tau)^{1/4}} d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{(\frac{1}{2}+t)^{1/2}} \left(\left| \frac{4}{3}(t-\tau)^{3/4} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau} \right|_{t-\frac{1}{2}}^t + \int_{t-\frac{1}{2}}^t \frac{\tilde{\beta}^2}{3}(t-\tau)^{3/4} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}\tau} d\tau \right) \\ &\leq \frac{C}{(\frac{1}{2}+t)^{1/2}} e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}T}, \end{aligned}$$

woraus die Abschätzung (5.10) folgt. Für die Kontraktion braucht man noch eine geeignete Darstellung von $NL(u) - NL(v)$, die mit Hilfe von Lemma 2.3 abgeschätzt wird.

$$\begin{aligned} \|NL(u) - NL(v)\|_{X^0}(\tau) &= \|e^{\frac{\gamma}{2}x} u^2 (3u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x} u) - e^{\frac{\gamma}{2}x} v^2 (3u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x} v)\|_{X^0} \\ &\leq \|e^{\frac{\gamma}{2}x} (e^{\frac{\gamma}{2}x} (u^2 + uv + v^2) + 3u_0(u+v))\|_{X^0} \|u-v\|_{X^\infty} \\ &\leq C (\|u\|_{X^0} + \|v\|_{X^0} + \|u^2\|_{X^0} + \|v^2\|_{X^0}) \|u-v\|_{X^\infty} \\ &\leq C e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau} \left(\|U_0\|_{X^1} + \|V_0\|_{X^1} + e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{4}\tau} (\|U_0\|_{X^1}^2 + \|V_0\|_{X^1}^2) \right) \|u-v\|_{X^\infty}(\tau). \end{aligned}$$

Jetzt kann man wieder unter Verwendung der Abschätzungen (4.3a), (4.3b) zeigen, daß für genügend kleine Anfangsbedingungen aus X^1 eine Kontraktion vorliegt. ■

Bemerkungen: Es sollte der Vollständigkeit halber noch der Sonderfall $\gamma = 0$ angesprochen werden, der am Anfang dieses Kapitels in einer Bemerkung vorgestellt wurde. Es existiert für $\gamma = 0$ eine Front zwischen -1 und 1 . Diese kann explizit zu $u_0 = -\tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$ berechnet werden. Ein Störungsansatz $u_0 + u$ in der Gleichung (5.2) liefert

$$u_t - u_{xx} + (3u_0^2 - 1)u = -3u_0 u^2 - u^3. \quad (5.11)$$

Der lineare Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + (3u_0^2 - 1)$ ist selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R})$. Das wesentliche Spektrum kann in diesem Fall mit $\sigma_e \subset [2, \infty)$ angegeben werden. Das Punktspektrum

enthält auf jeden Fall die Null, da es zum Eigenwert Null wieder die Eigenfunktion u'_0 gibt. Es enthält auch noch die Punkte $\frac{3}{2}$ und 2, da man das Eigenwertproblem

$$u_{xx} + (1 - 3u_0^2)u - \lambda u = 0$$

durch die Transformation $\xi = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$, unter der Verwendung von $\tanh^2(\frac{x}{\sqrt{2}}) = 1 - \operatorname{sech}^2(\frac{x}{\sqrt{2}})$, zu der Legendre-Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2)u_\xi \right) + \left(-\frac{(4 - 2\lambda)}{(1 - \xi^2)} + 6 \right) u = 0$$

umschreiben kann, siehe auch [DJ89]. Diese Gleichung besitzt eindeutige Lösungen in Form von Legendrepolyomen, falls $4 - 2\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2$, d.h. für $\lambda = 0, \frac{3}{2}, 2$, wie man in [BS79] nachschlagen kann.

Der Eigenwert 0 ist ein isolierter Eigenwert der Vielfachheit 1. Die Analysis der vorangegangenen Kapitel kann in diesem Fall nicht angewandt werden. Ist 0 ein isolierter Eigenwert, so kann Stabilität, allerdings in einem anderen Sinne als bisher verwendet, gezeigt werden.

Definition 5.1 Sei X ein Banachraum. Eine TW-Lösung u_0 heißt *asymptotisch orbital stabil*, wenn es eine Umgebung $\mathcal{U} \subset X$ von u_0 gibt, so daß zu jeder Anfangsbedingung $U_0 \in \mathcal{U}$ und einer Lösung $u(x, t)$ der Gleichung (5.2) mit $u(x, t = 0) = U_0$ ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\|u(x, t) - u_0(x + c)\|_X \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow \infty$. In dieser Arbeit wird diese Stabilität als *Stabilität mit einem Shift* bezeichnet.

Diese Definition der Stabilität ist im Sinne von [AGJ90] und [Sat76] und beinhaltet, daß auch Konvergenz gegen eine um $c \in \mathbb{R}$ verschobene Frontlösung zugelassen wird.

Die Sattel-Sattel-Verbindung $u_0 = -\tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$ im Falle $\gamma = 0$ ist im Sinne der Definition 5.1 stabil in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $C_b^0(1 + e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}x})$ und in C_{unif}^0 . Die Stabilität in $L^p(\mathbb{R})$ wird in [Hen80], Kapitel 5.4 gezeigt. [AGJ90] zeigen dies in C_{unif}^0 und [Sat76] in dem gewichteten Raum $C_b^0(1 + e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}x})$.

Um Stabilität in einem shiftfreien Sinne zu erhalten, versucht man wieder einen Raum zu wählen, in dem u'_0 nicht liegt, um die Null aus dem Spektrum auszuschließen.

Untersucht man den Operator

$$-B_0U = U_{xx} + 2\sqrt{2} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) U_x,$$

welcher aus der Eichform

$$\begin{aligned} U_t - \frac{1}{u_0'^2} \left(u_0'^2 U_x \right)_x &= -u_0' U^2 (3u_0 + u_0' U) \\ \iff U_t - U_{xx} - 2\sqrt{2} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) U_x &= NL(u) \end{aligned}$$

stammt, so erhält man in $L^2(\mathbb{R})$ für das wesentliche Spektrum

$$\sigma_e(B_0) \subset \left\{ \lambda \mid 8\operatorname{Re} \lambda \geq (\operatorname{Im} \lambda)^2 \right\}.$$

Die Eichform entstand wieder durch Ersetzen von u durch $u_0 + u'_0 U$ in Gleichung (5.2). Der Operator B_0 ist selbstadjungiert in $L^2(u'_0) = \{u \in L^2_{loc} \mid \int_{\mathbb{R}} u^2 u'^2_0 < \infty\}$. Die Nichtlinearität erzwingt ein Arbeiten auch in $L^2(\mathbb{R})$, und damit ausschließlich in $L^2(\mathbb{R})$, da $L^2(u'_0) \cap L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$, da das Gewicht $u'_0 = -\frac{1}{\sqrt{2} \cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}}}$ ist.

Das wesentliche Spektrum ist damit das oben angegebene für den Operator B_0 und geht bis an die Null heran. Die Untersuchung der Eichform wird also auch kein besseres Ergebnis liefern als das oben erwähnte Resultat mit dem Shift, das aus Gleichung (5.11) mit [Hen80], [AGJ90] und [Sat76] gefolgert werden konnte.

Wählt man ein anderes Gewicht für die Störung, z.B. $a(x)u(x, t)$, so ist die zu untersuchende Gleichung in $L^2(a) = \{u \in L^2_{loc} \mid \int_{\mathbb{R}} u^2 a^2 < \infty\}$

$$u_t - \frac{1}{a(x)^2} \left(a(x)^2 u_x \right)_x + \left(3u_0^2 - 1 - \frac{a_{xx}}{a} \right) u = NL(u). \quad (5.12)$$

Das wesentliche Spektrum des zu (5.12) gehörenden linearen Operators $B_a u = -\frac{1}{a^2} (a^2 u_x)_x + (3u_0^2 - 1 - \frac{a_{xx}}{a})u$ kann durch $\operatorname{Re} \sigma_e(B_a) \geq 3u_0^2 - 1 - \frac{a_{xx}}{a}$ abgeschätzt werden. Ein Gewicht $a(x)$ ist nur dann eine gute Wahl, wenn $\operatorname{Re} \sigma_e > 0$ ist. Dies bedeutet, daß $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_{xx}}{a} < 2$ sein muß. Ein exponentielles Gewicht muß daher $a(x) \sim e^{\pm cx}$ erfüllen mit einer Konstanten $c^2 < 2$. Bei einem solchen Gewicht ist das wesentliche Spektrum von der Null wegbeschränkt. Die Nichtlinearität erzwingt jedoch ein Arbeiten auch in $L^2(\mathbb{R})$. In $L^2(\mathbb{R})$ besitzt der zu untersuchende Operator $B_a u = -\frac{1}{a^2} (a^2 u_x)_x + (3u_0^2 - 1 - \frac{a_{xx}}{a})u$ die Eigenlösung $\frac{1}{a(x)}u'_0$, wie man leicht nachrechnet. Diese Eigenlösung ist in $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(a)$, falls $a(x) \sim e^{\pm cx}$ mit $c^2 < 2$, da $u'_0 \sim \frac{1}{e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x+2}}$. Somit liegt die Null im Punktspektrum.

Würde man ein Gewicht $a(x)$ so wählen, daß $u'_0 \notin L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(a)$ ist, so würde das wesentliche Spektrum zum Teil in die linke Halbebene verschoben werden, d.h. es gibt $\lambda \in \sigma_e$ mit $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. In diesem Fall verliert man sogar Stabilität. Es kann nicht mehr erwartet werden als die Stabilität mit dem Shift, die z.B. mit [Hen80] gezeigt werden kann. Diese Sattel-Sattel-Verbindung unterscheidet sich damit von der Sattel-Knoten-Verbindung für $\gamma < -2$ in dem Sinne, daß durch ein exponentielles Gewicht nicht erzwungen werden kann, daß u'_0 keine Eigenlösung zum Eigenwert 0 ist und gleichzeitig das Spektrum stabil und von der Null wegbeschränkt ist.

5.2 Allgemeinere Nichtlinearitäten

Es werde nun die Gleichung

$$u_t - u_{xx} = f(u) \quad (5.13)$$

zugrundegelegt mit dem Ziel, die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Methoden auf diese Gleichung mit einer allgemeinen Nichtlinearität anzuwenden.

Voraussetzungen:

An f werden folgende Voraussetzungen gestellt: es sei $f(u)$ eine glatte Funktion, mindestens C^3 . Es sei $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, $f(u) > 0$ und f strikt konkav für $u \in (0, 1)$.

Die Funktion f hat typischerweise folgende Gestalt:

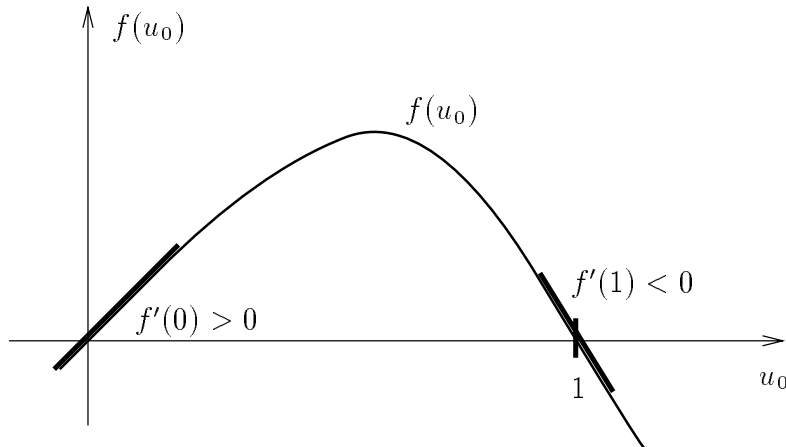


Abbildung 8

Zunächst sei der Vollständigkeit halber gezeigt, daß unter den obigen Voraussetzungen an $f(u)$ eine monotone Frontlösung u_0 existiert. Dies ist eine bekannte Tatsache, siehe z.B. [Sat76]. Zu zeigen ist, daß es ein u_0 gibt, das die Gleichung

$$\gamma u_{0x} - u_{0xx} = f(u_0)$$

löst, und das eine heterokline Verbindung der Fixpunkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ in der Phasenebene ist.

Schreibt man diese Gleichung in ein System erster Ordnung um

$$\begin{aligned} u'_0 &= v_0 \\ v'_0 &= \gamma v_0 - f(u_0), \end{aligned} \quad (5.14)$$

so ergibt eine Analysis der Linearisierung um den Fixpunkt $(0, 0)$ des Systems (5.14)

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \gamma\lambda + f'(0) = 0$. Deren Lösungen sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

Es sei $\gamma < -2\sqrt{f'(0)}$ gewählt, dann ist $(0, 0)$ ein stabiler Knoten. Die Linearisierung um $(1, 0)$ ergibt

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung hiervon sind

$$\mu_{1/2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

Da nach Voraussetzung $f'(1) < 0$, und somit $\mu_1 \cdot \mu_2 = f'(1) < 0$, liegt hier ein Sattel vor.

Es soll gezeigt werden, daß eine Trajektorie (u_0, v_0) existiert, die den Sattel an $(1, 0)$ mit dem Knoten an $(0, 0)$ verbindet. Hierzu betrachte man folgendes Dreieck in der Phasebene:

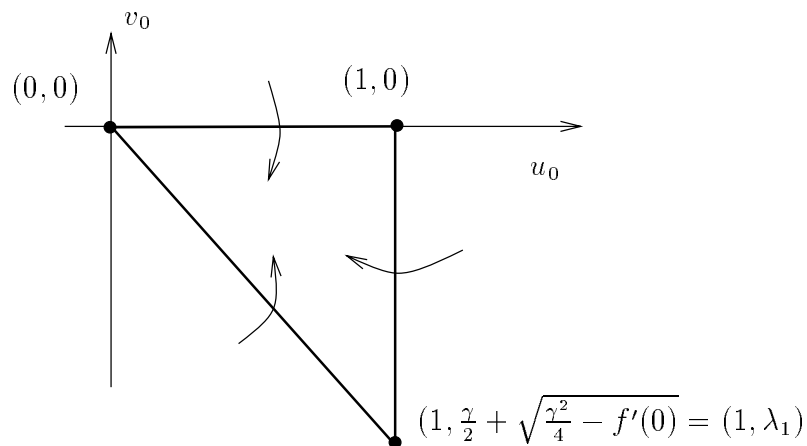


Abbildung 9

Es sei mit $\vec{v}(u_0, v_0) = (v_0, \gamma v_0 - f(u_0))$ das Vektorfeld der zu (5.14) gehörenden Gleichung bezeichnet. Auf der Strecke $(0, 0) - (1, 0)$ ist das Vektorfeld $\vec{v} = (0, -f(u_0))$. Trajektorien schneiden die Strecke senkrecht und laufen in das Innere des Dreiecks. Auf der Strecke $(1, 0) - (1, \lambda_1)$ ist das Vektorfeld $\vec{v} = (v_0, \gamma v_0)$. Trajektorien laufen somit auch ins Innere des Dreiecks. Auf dem Streckenabschnitt, der $(0, 0)$ mit $(1, \lambda_1)$ verbindet, ist $v_0 = \lambda_1 u_0$. Da

$$\frac{dv_0}{du_0} = \gamma - \frac{f(u_0)}{v_0}$$

und $f(u_0)$ streng konkav nach Voraussetzung, ist mit $f(u_0) < f'(0)u_0$

$$\frac{dv_0}{du_0} < \gamma - \frac{f'(0)u_0}{\lambda_1 u_0} = \lambda_1.$$

Hieraus folgt, daß die Steigung der Trajektorien größer als die der Strecke $(0, 0) - (1, \lambda_1)$ ist, und die Trajektorien ins Innere des Dreiecks gerichtet sind. Die Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit im Sattel $(1, 0)$ ist $(1, \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - f'(1)})$ und ist für $\gamma < -2\sqrt{f'(0)}$ im Inneren des Dreiecks liegend. Eine Trajektorie, die im Inneren des Dreiecks startet, und für $x \rightarrow -\infty$ gegen $(1, 0)$ konvergiert, läuft tangential zu $(1, \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - f'(1)})$ in den Sattel an $(1, 0)$. Verfolgt man die Trajektorie in positive x -Richtung, also für $x \rightarrow \infty$, so kann sie im Inneren des Dreiecks nie vertikale Steigung haben und das Dreieck auch nicht verlassen. Daher muß sie für $x \rightarrow \infty$ in dem Knoten $(0, 0)$ enden.

Die Linearisierung der Gleichung in den Fixpunkten $u_0 = 0$ und $u_0 = 1$ liefert die Asymptotik

$$\begin{aligned} u_0 - 1 &\sim \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - f'(1)} + \frac{\gamma}{2}\right)x && \text{für } x \rightarrow -\infty \\ u_0 &\sim \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - f'(0)} + \frac{\gamma}{2}\right)x && \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es liegt eine Sattel-Knoten-Verbindung für $|\gamma| \geq 2\sqrt{f'(0)}$ vor, wobei sich der Sattel an dem Fixpunkt $u_0 = 1$ und der Knoten an $u_0 = 0$ befindet. Es kann wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\gamma \leq -2\sqrt{f'(0)}$ gewählt werden, wobei $f'(0)$ nach Voraussetzung positiv ist. Auch hier, so wie in den vorangegangenen Kapiteln, wird der Grenzfall $|\gamma| = 2\sqrt{f'(0)}$ nicht untersucht.

Es seien mit $\alpha^* := \sqrt{\gamma - 4f'(1)}$ und $\beta^* := \sqrt{\gamma - 4f'(0)}$ die Konstanten bezeichnet. Diese erfüllen die Beziehung $\frac{\alpha^{*2}}{4} - \frac{\beta^{*2}}{4} = -f'(1) + f'(0) > 0$.

Wird in die Gleichung (5.13) eine Störung $u(x, t)$ der Front u_0 eingebracht, dann erfüllt die Störung $u(x, t)$ die Gleichung

$$u_t + \gamma u_x - u_{xx} = f(u_0 + u) - f(u_0),$$

bzw. in anderer Form geschrieben

$$u_t + \gamma u_x - u_{xx} - f'(u_0)u = f(u_0 + u) - f(u_0) - f'(u_0)u. \quad (5.15)$$

Beide Gleichungen gelten natürlich zusammen mit einer Anfangsbedingung $u(x, 0) = U_0$. Es sei die rechte Seite der Gleichung (5.15) mit $f(u_0 + u) - f(u_0) - f'(u_0)u =: R(u_0, u)$ bezeichnet.

Wählt man ein Gewicht $e^{\frac{\gamma}{2}x}$, wie in den vorigen Kapiteln, d.h. man setzt eine Störung der Form $e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0)\right)u &= e^{-\frac{\gamma}{2}x}R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x}u) \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit der rechten Seite $R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x}u) = f(u_0 + e^{\frac{\gamma}{2}x}u) - f(u_0) - f'(u_0)e^{\frac{\gamma}{2}x}u$.

Nach den Voraussetzungen an f ist $f(u_0) > 0$ in $(0, 1)$, $f(u_0) = 0$ für $u_0 = 0, 1$ und $f \in C^k$, $k \geq 3$. Außerdem ist $f'(0) > 0$ und $f'(1) < 0$, f konkav, also ist $f'(u_0)$ monoton fallend und

$$0 < \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) \leq \frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \leq \frac{\gamma^2}{4} + |f'(1)|.$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen definiere man $\frac{\gamma^2}{4} - f'(1) =: p_-$, $\frac{\gamma^2}{4} - f'(0) =: p_+$ und $\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) =: p(x)$.

Der lineare Operator $A_f := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0)) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x)$ ist positiv und selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{D}(A_f) = H^2(\mathbb{R})$. Im nächsten Schritt ist zu klären, wie die Nichtlinearität abbildet, um zu wissen, ob man auch hier wieder - bedingt durch die Nichtlinearität - in einem mit $e^{\frac{\gamma}{2}x}$ gewichteten Raum arbeiten muß.

Die Nichtlinearität $e^{-\frac{\gamma}{2}x}R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x}u)$ ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von $X^1 \rightarrow X^1$, vorausgesetzt $f \in C^3$. Zunächst ist festzustellen, daß $H^1(\mathbb{R})$ eine Banachalgebra bildet, und damit $\|u \cdot v\|_{X^1} \leq C\|u\|_{X^1}\|v\|_{X^1}$ ist. Die Nichtlinearität läßt sich mit dem Satz von Taylor schreiben zu

$$e^{-\frac{\gamma}{2}x}R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x}u) = e^{-\frac{\gamma}{2}x} \int_0^1 (1-\tau) f''(u_0 + \tau \cdot e^{\frac{\gamma}{2}x}u) e^{\gamma x} u^2 d\tau.$$

Unter der Verwendung der Differenzierbarkeit von f und der Tatsache, daß $\|u \cdot v\|_{X^1} \leq C\|u\|_{X^1}\|v\|_{X^1}$, ergibt sich

$$\|e^{-\frac{\gamma}{2}x}R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x}u)\|_{X^1} \leq C\|u\|_{X^1}^2,$$

sofern

$$\int_0^1 (1-\tau) f''(u_0 + \tau \cdot e^{\frac{\gamma}{2}x}u) d\tau \quad (5.17)$$

gleichmäßig in x beschränkt ist. Dies gilt nach den Voraussetzungen an f , solange $e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ beschränkt in x ist. Da u nach Voraussetzung in X^1 liegt, sind $e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ und u Hölder-stetig und $u(x) \rightarrow 0$ bzw. $e^{\frac{\gamma}{2}x}u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, und das Integral in (5.17) ist beschränkt.

Für die Fréchet-Differenzierbarkeit wird nochmals nach $e^{\frac{\gamma}{2}x}u$ differenziert und man erhält wieder aus den Voraussetzungen an f die Beschränktheit.

Da nach dem gerade Gesagten die rechte Seite der Differentialgleichung (5.16) Fréchet-differenzierbar und somit insbesondere Lipschitz-stetig ist, kann die lokale Existenz einer Lösung aus dem Satz 3.3.3 [Hen80] genauso wie in Kapitel 2 gefolgert werden.

In dem mit $e^{\frac{\gamma}{2}x}$ gewichteten Raum $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ hat der Operator A_f die Darstellung

$$\begin{aligned} A_{f,\gamma}u &= -\frac{1}{e^{\gamma x}} (e^{\gamma x} u_x)_x + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u = \\ &= A_f u - \gamma \frac{\partial}{\partial x} u. \end{aligned}$$

Lemma 2.2 kann direkt auch auf diesen Operator übertragen werden. Dasselbe Störungsargument wie in Lemma 2.2 führt zum Ergebnis, daß A_f eine analytische Halbgruppe in X^0 erzeugt. Hierbei gilt es zu beachten, daß f nach Voraussetzung eine konkave Funktion ist, und damit $\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0)$ monoton wachsend und auch nichtnegativ ist.

Die Energieabschätzungen in X^0 bzw. X^1 können unter der Beachtung von $0 < \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) \leq \frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \leq \frac{\gamma^2}{4} + |f'(1)|$ durchgeführt werden.

In $L^2(\mathbb{R})$ erhält man aus

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u &= 0 \\ u|_{t=0} &= U_0 \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit u und Integration über \mathbb{R} die Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u^2 dx = 0$$

woraus unter Verwendung von $\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \geq \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) = p_+ > 0$

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|e^{-A_f t} U_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-(\frac{\gamma^2}{4} - f'(0))t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

folgt.

In $L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ gilt

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{e^{\gamma x}} (e^{\gamma x} u_x)_x + \gamma u_x + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u &= 0 \\ u|_{t=0} &= U_0, \end{aligned}$$

woraus man jetzt durch Multiplikation mit $e^{\gamma x} u$ und Integration

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \|u_x\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \gamma u u_x e^{\gamma x} dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u^2 e^{\gamma x} dx = 0,$$

und durch weiteres Umformen

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(u_x + \frac{\gamma}{2} u \right)^2 e^{\gamma x} dx - \int_{\mathbb{R}} f'(u_0) u^2 e^{\gamma x} dx = 0 \quad (5.18)$$

erhält. Der Term $-f'(u_0)$ sieht als Funktion von x wie in Abbildung 10 angedeutet aus. Man beachte hierbei, daß u_0 als Funktion von x monoton fallend ist, und $f''(u_0) > 0$, da f als konkav vorausgesetzt wurde.

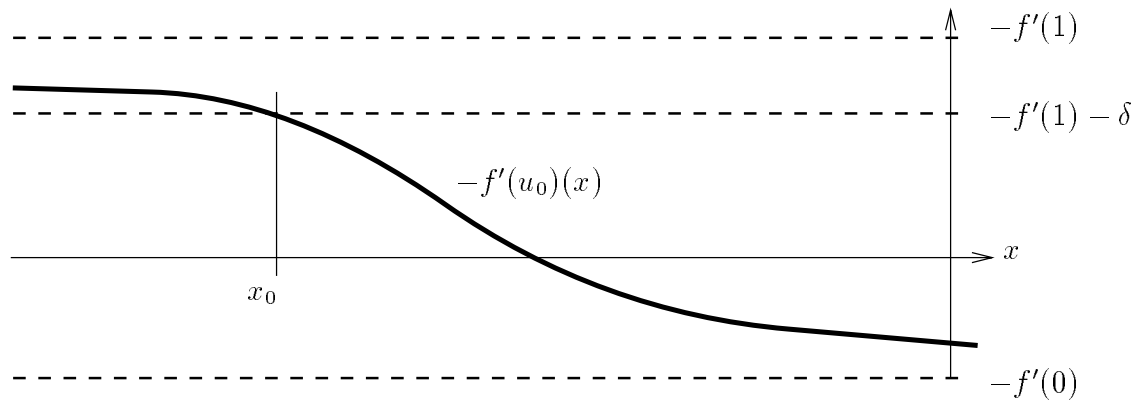


Abbildung 10

Auch hier kann wieder dasselbe Argument wie in Kapitel 2 angewandt werden: zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $-f'(u_0) \geq -f'(1) - \delta$ für $-\infty \leq x \leq x_0$, woraus die Abschätzung

$$\|e^{-A_f t} U_0\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})} \leq C(\delta) \left(e^{-(-f'(1)-\delta)t} + e^{-(\frac{\gamma^2}{4}-f'(0))t} \right) \|U_0\|_{X^0}$$

folgt.

In einem nächsten Schritt bleibt noch die Anwendbarkeit der in Kapitel 3 gezeigten Asymptotik der Greenschen Funktion zu rechtfertigen. Wesentlich hierbei ist Lemma 3.2, das zur Konstruktion der Greenschen Funktion diente. Voraussetzung für die Gültigkeit von Lemma 3.2 ist $\int_0^\infty |p(x) - p_+| dx < \infty$ und $\int_{-\infty}^0 |p(x) - p_-| dx < \infty$, wobei $p(x) = \frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0)$, $p_+ = \frac{\gamma^2}{4} - f'(0)$ und $p_- = \frac{\gamma^2}{4} - f'(1)$. Da $f \in C^3$, kann man $|f'(1) - f'(u_0)| \leq C|1 - u_0|$ abschätzen, woraus aus dem exponentiellen Abklingen der Front $u_0 - 1 \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - f'(1)} + \frac{\gamma}{2}\right)x$ für $x \rightarrow -\infty$ die Existenz des Integrals $\int_{-\infty}^0 |p(x) - p_-| dx < \infty$ folgt. Das andere Integral läßt sich genauso abschätzen. Die Aussagen aus Kapitel 3 übertragen sich entsprechend auf dieses Problem, und man erhält:

Lemma 5.3 *Die Lösung der Laplace-transformierten linearen Eichform*

$$su - u_{xx} + p(x)u = U_0$$

besitzt in X^1 eine Lösung, die der Abschätzung

$$\|u(x, s)\|_{X^\infty} \leq C \left[\frac{1}{(s + p_+)^{3/4}} + \frac{1}{|\operatorname{Re} \sqrt{s + p_-} + \frac{\gamma}{2}|^{1/2}} \right] \|U_0\|_{X^0}$$

genügt. Die Langzeitasymptotik dieser Lösung lautet

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} \leq \begin{cases} C \frac{e^{-(\frac{\gamma^2}{4}-f'(0))t}}{t^{1/4}} \|U_0\|_{X^0} & \text{für } t \rightarrow \infty, \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) < -f'(1) \\ e^{-(-f'(1)-\delta)t} \|U_0\|_{X^0} & \text{für } t \rightarrow \infty, \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) \geq -f'(1), \delta > 0. \blacksquare \end{cases}$$

Hieraus läßt sich mit Hilfe der Abschätzung (5.17) die Langzeitasymptotik für die nichtlineare Gleichung

$$u(x, t) = e^{-A_f t} U_0 + \int_0^t e^{-A_f(t-\tau)} e^{-\frac{\gamma}{2}x} R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x} u)(\tau) d\tau$$

folgern.

Lemma 5.4 *Sei $U_0 \in X^1$ mit $\|U_0\|_{X^1}$ klein genug, dann besitzt die Gleichung (5.16) genau eine Lösung $u(x, t) \in C^0([T, \infty), X^\infty)$. Diese Lösung hat die Asymptotik*

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} = \mathcal{O} \left(\frac{e^{-(\frac{\gamma^2}{4}-f'(0))t}}{t^{1/4}} \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) < -f'(1),$$

bzw.

$$\|u(\cdot, t)\|_{X^\infty} = \mathcal{O} \left(e^{-(-f'(1)-\delta)t} \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad \frac{\gamma^2}{4} - f'(0) \geq -f'(1), \delta > 0. \blacksquare$$

5.3 Einige Bemerkungen zur Wahl der Gewichtsfunktion

Es soll der lineare Operator L aus Gleichung (5.15)

$$\gamma u_x - u_{xx} - f'(u_0)u =: Lu$$

untersucht werden. Die Zeitasymptotik der Halbgruppe e^{-Lt} wird bestimmt durch die Lage des Spektrums $\sigma(L)$ in der komplexen Ebene. Liegt das Spektrum strikt in der rechten Halbebene, d.h. gilt $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(L)$, so folgt hieraus ein exponentielles Abklingen der Halbgruppe. Mit Hilfe von [Hen80], S. 140 ff. kann die Lage des wesentlichen Spektrums für einen linearen Operator mit asymptotisch konstanten Koeffizienten in den Räumen $L^p(\mathbb{R})$, $C_b^0(\mathbb{R})$ und C_{unif}^0 abgeschätzt werden. Bei dem hier zu untersuchenden Operator gilt für den Koeffizienten $f'(u_0)$: $f'(u_0) \rightarrow f'(1)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $f'(u_0) \rightarrow f'(0)$ für $x \rightarrow \infty$. Die asymptotische Konvergenz des Koeffizienten $f'(u_0)$ gegen zwei verschiedene Werte b_{\pm} , mit $b_- = f'(1) < 0$ und $b_+ = f'(0) > 0$, ist durch die Voraussetzungen an f , siehe Kapitel 5.2, gewährleistet. Für das wesentliche Spektrum gilt [Hen80]:

$$\sigma_e \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{\gamma^2} \geq -b_{\pm} \right\}.$$

Da $\min \operatorname{Re} \sigma_e(L) = \min(-b_+, -b_-)$ und nach Voraussetzung $b_+ = f'(0) > 0$ liegt ein Teil des wesentlichen Spektrums in der linken Halbebene, d.h. es existieren $\lambda \in \sigma_e \subset \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Führt man eine exponentielle Gewichtsfunktion $w(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$ ein, und ersetzt man u durch $e^{ax}u$, so transformiert sich der lineare Operator $L = -u_{xx} + \gamma u_x - f'(u_0)u$ zu

$$L_a u = e^{ax} \left(-u_{xx} + (\gamma - 2a)u_x + (\gamma a - a^2 - f'(u_0))u \right).$$

Dessen Spektrum im $L^2(\mathbb{R})$ erfüllt

$$\sigma_e \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{\gamma^2} \geq \gamma a - a^2 - b_{\pm} \right\},$$

und der Wert $\min \operatorname{Re} \sigma_e(L_a) = \min(\gamma a - a^2 - b_+, \gamma a - a^2 - b_-)$ kann durch geeignete Wahl von a in die rechte Halbebene $\operatorname{Re} \lambda > 0$ verschoben werden. Hierbei wurde die durch Ersetzen von u durch $e^{ax}u$ entstandene Differentialgleichung auf beiden Seiten mit e^{-ax} multipliziert. Dies ist genau der Effekt, der durch die Transformation auf die Eichform erzielt wird. Die Wahl des Gewichtes $w(x) = e^{\frac{\gamma}{2}x}$ transformiert den linearen Teil der Störungsgleichung (5.15) auf die Eichform (5.16), siehe [KR96] zur Erläuterung der Wahl des Gewichtes.

Schätzt man das exponentielle Abklingen der Halbgruppe e^{-Lt} in $L^2(\mathbb{R})$ und $L^2(e^{ax})$ ab, so ergibt sich mit Hilfe der Energieabschätzungen in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(-u_{xx} + (\gamma - 2a)u_x + (\gamma a - a^2 - f'(u_0))u \right) u dx = 0$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} (\gamma - 2a) u u_x dx + \int_{\mathbb{R}} (\gamma a - a^2 - f'(u_0)) u^2 = 0,$$

woraus

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})}^2 + \int_{\mathbb{R}} (\gamma a - a^2 - f'(u_0)) u^2 dx \leq 0$$

folgt. Das zeitliche Abklingen der Lösungen läßt sich zu

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{-(\gamma a - a^2 - f'(0))t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

bestimmen. Das so ermittelte Abklingverhalten wird maximal, wenn $\gamma a - a^2 - f'(0)$ maximal ist, d.h. wenn $a = \frac{\gamma}{2}$ ist. Es ist leicht nachzuprüfen, daß dieses $a = \frac{\gamma}{2}$ in dem Intervall liegt, in dem man a wählen muß damit das wesentliche Spektrum vollständig in der rechten Halbebene liegt und nicht die Null enthält. Es ist für $a = \frac{\gamma}{2} \sigma_\epsilon \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq \frac{\gamma^2}{4} + b_\pm = p_\pm > 0\}$, siehe Kapitel 5.2.

Im Falle des gewichteten Raumes $L^2(e^{ax})$ ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{ax})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{e^{2ax}} (e^{2ax} u_x)_x + \gamma u_x + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u \right) u e^{2ax} dx = 0,$$

woraus, wie schon in Kapitel 2.2 ausgeführt,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{ax})}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(u_x + \frac{\gamma}{2} u \right)^2 e^{2ax} dx - \int_{\mathbb{R}} f'(u_0) u^2 e^{2ax} dx = 0$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(e^{ax})}^2 - \int_{\mathbb{R}} f'(u_0) u^2 e^{2ax} dx \leq 0$$

folgt. Hieraus schließt man wie in Kapitel 2.2 bzw. (5.18)

$$\|u\|_{L^2(e^{ax})} \leq C(\delta) \left(e^{-(-f'(1)-\delta)t} + e^{-(\gamma a - a^2 - f'(0))t} \right) \|U_0\|_{X^0}.$$

Auch hier wird das Maximum des Exponenten bei $\frac{\gamma}{2} = a$ angenommen. Man erhält also für $\frac{\gamma}{2} = a$ das beste asymptotische Abklingen der Halbgruppe. Damit ergibt sich für die Eichform (5.16) die Gleichung

$$u_t - u_{xx} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - f'(u_0) \right) u = e^{-\frac{\gamma}{2}x} R(u_0, e^{\frac{\gamma}{2}x} u),$$

welche die Störungen der Frontlösung u_0 der Gleichung

$$u_t - u_{xx} = f(u)$$

in $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(e^{\frac{\gamma}{2}x})$ beschreibt.

Literatur

- [AB88] W. Arendt und J.K. Batty. Tauberian Theorems and Stability of One-Parameter Semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306(2):837–852, April 1988.
- [Ada78] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, San Diego, 1978.
- [AGJ90] J. Alexander, R. Gardner und C. Jones. A Topological Invariant Arising in the Stability Analysis of Traveling Waves. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 410:167–212, 1990.
- [AW78] D.G. Aronson und H.F. Weinberger. Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics. *Advances in Mathematics*, 30:33–76, 1978.
- [BK92] J. Bricmont und A. Kupiainen. Stability of Moving Fronts in the Ginzburg-Landau Equation. Manuscript, 1992.
- [BKL92] J. Bricmont, A. Kupiainen und G. Lin. Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations. Manuscript, 1992.
- [BS79] I. Bronstein und K. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Thun, Frankfurt, 1979.
- [Chu58] R.V. Churchill. *Operational Mathematics*. McGraw Hill, New York, Toronto, London, 1958.
- [CL55] E. Coddington und N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw Hill, New York, Toronto, London, 1955.
- [DJ89] P. Drazin und R. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [DL92] R. Dautray und J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5, Evolution Problems I*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [Doe50] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation I - III*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1950.
- [DS57] N. Dunford und J. Schwartz. *Linear Operators, Part I and II*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [Eva72a] J.W. Evans. Nerve Axon Equations: 1 Linear Approximations. *Indiana University Mathematics Journal*, 21(9):877–885, 1972.
- [Eva72b] J.W. Evans. Nerve Axon Equations: 2 Stability at Rest. *Indiana University Mathematics Journal*, 22(1):75–90, 1972.

- [Eva72c] J.W. Evans. Nerve Axon Equations: 3 Stability of the Nerve Impulse. *Indiana University Mathematics Journal*, 22(6):577–593, 1972.
- [Eva75] J.W. Evans. Nerve Axon Equations: 3 Stability of the Nerve Impulse. *Indiana University Mathematics Journal*, 24(12):1169–1190, 1975.
- [EW92] J.-P. Eckmann und C.E. Wayne. The Nonlinear Stability of Front Solutions for Parabolic Partial Differential Equations. Manuscript, 1992.
- [FM77] P.C. Fife und J.B. McLeod. The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Wave Front Solutions. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 65:335–362, 1977.
- [Gal92] Th. Galley. Local Stability of Critical Fronts in Nonlinear Parabolic Equations. Manuscript, 1992.
- [Har64] Ph. Hartmann. *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1964.
- [Hen80] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer Verlag, New York, 1980.
- [HP57] E. Hille und R. Phillips. *Functional Analysis and Semigroups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, Providence, Rhode Island, 1957.
- [Kap92] T. Kapitula. On the Stability of Travelling Waves in Weighted L^∞ Spaces. Manuscript (to appear in JDE), August 1992.
- [Kat66] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, New York, 1966.
- [Kir92] K. Kirchgässner. On the Nonlinear Dynamics of Travelling Fronts. *Journal of Differential Equations*, 96(2):256–278, April 1992.
- [KR96] K. Kirchgässner und G. Raugel. *Stability of Fronts for a KPP System - the noncritical case -*. Nonlinear Dynamics in Extended Continua. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1996.
- [PW92] R.L. Pego und M.I. Weinstein. Eigenvalues, and Instabilities of Solitary Waves. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 340:47–94, 1992.
- [Sat76] D.H. Sattinger. On the Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Systems. *Advances in Mathematics*, 22:312–355, 1976.
- [Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.