Zur Analyse der Grenzdynamik von stochastischen Vielteilchensystemen am Beispiel des Pickard-Tory Sedimentationsmodells

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Thorsten Wittmann

aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr. Christian H. Hesse
Mitberichter:	Prof. Dr. Harro Walk

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juni 2003

Institut für Stochastik und Anwendungen der Universität Stuttgart

2003

für Carolin

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die Sedimentation von Feststoffpartikeln in einem kontinuierlichen Medium ist ein höchst komplexer und zudem theoretisch interessanter Vorgang, der auch in der Praxis von großer Bedeutung ist. In der industriellen Anwendung tritt dieser z.B. im Erzbergbau auf in Form der Trennung von Wasser und dem feingemahlenen Erz, der sogenannten Suspension. Aber auch die Untersuchung des Transports von kleinsten Schadstoffpartikeln in Gewässern oder der Atmosphäre fallen in diesen Bereich.

Ziel dieser Arbeit ist die adäquate mathematische Modellierung des Sedimentationsvorganges durch stochastische Prozesse mit stochastischer Parametrisierung und die Analyse seiner Dynamik. Bei dem verwendeten Modell handelt es sich um ein Partikel-Tracking-Modell, das auf einem System von n über die Ensemble-Konfiguration gekoppelten Langevin-Gleichungen basiert.

Das Modell hat seinen Ursprung in Arbeiten von Pickard und Tory ([PT77], [TP82]) und wird deshalb in der Literatur als Pickard-Tory Modell bezeichnet. Grundlage für diese Arbeit ist das Modell in der Form beschrieben in [HT96]. Das stochastische Sedimentationsmodell kann dabei als das Ergebnis eines zweistufigen, gestaffelten Modellierungsvorganges interpretiert werden. Dabei werden in einer ersten Stufe die hinsichtlich inkrementeller Systemevolution dominanten Faktoren identifiziert, um daraus eine parametrische Modellstruktur zu konstruieren. Die verbleibenden Faktoren werden in einem zweiten, der Feineinstellung dienenden Abschnitt in die Parameter integriert.

Diese Herangehensweise unterscheidet sich vom klassischen Zugang à la Kynch [Kyn52] mittels Kontinuumsmodellen insofern, dass bei diesen der Feststoff als eine zweite kontinuierliche Phase modelliert wird. Man erhält die globale Beschreibung in Form der Lösung einer zeitabhängigen Massen- oder Konzentrationsverteilung der festen Phase. Hingegen wird beim Pickard-Tory Modell die Orts- und Geschwindigkeitskomponente jedes einzelnen Feststoffteilchens betrachtet.

Zu Beginn der Arbeit wird in Kapitel 1 das Pickard-Tory Modell ausführlich vorgestellt. Es wird die adäquate Modellierung eines Vielteilchenmodells (ca. 10^6 Partikel) dargelegt, bei dem sich die Teilchen nach Vorgabe einer Startkonfiguration in einem unbeschränkten Gebiet ausbreiten und in dem die einzelnen

Teilchen als sphärisch mit einem kleinen Radius (ca. $10\mu m$-$100\mu m$) angenommen werden. Die Modellierung erfolgt in zwei Etappen.

Im ersten Schritt betrachtet man zunächst ein einzelnes Teilchen. In die Beschreibung der vertikalen Orts- und Geschwindigkeitskomponente fließen Größen wie Schwerkraft, Auftrieb, Strömungswiderstand aber auch molekulare Diffusion ein. Diese führen auf einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $OU(\mu, \beta, \sigma)$. Die Parameter ergeben sich dabei durch die im zweiten Newton'schen Gesetz auftretenden Konstanten. In entsprechender Weise werden die beiden anderen Raumdimensionen ergänzt. Schließlich wird für jedes der zu modellierenden n Teilchen eine Kopie des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses erstellt.

Alle verbliebenen Einflussfaktoren, die bisher nicht in die Modellstruktur eingegangen sind, werden nun in einem zweiten Schritt implementiert. Unberücksichtigt geblieben ist etwa die Abhängigkeit der Teilchen untereinander (z.B. durch hydrodynamische Interaktion). Dazu koppelt man die bisher konstanten Parameter μ und σ an die lokale Teilchenkonfiguration in der Umgebung des betrachteten Teilchens und modelliert dies mit Hilfe eines Konzentrationsfunktionals. Praktische Untersuchungen haben diese Größe als den Faktor mit dem größten Einfluss auf die Dynamik der Teilchen identifiziert. Jedes Teilchen hängt damit über das Konzentrationsfunktional von den Ortskomponenten der anderen Teilchen ab.

Am Ende lässt sich das Pickard-Tory Modell mit n Teilchen in Form des $6n$-dimensionalen Systemprozesses $Y_t \triangleq Y_t^n \in \mathbb{R}^{6n}$ darstellen, dessen Dynamik durch die zeithomogene stochastische Differenzialgleichung

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(Y_s)ds + \int_0^t \sigma(Y_s)dW_s$$

beschrieben wird. Das k-te Teilchen wird durch den 6-dimensionalen Prozess $Y_t^{k,n}$ repräsentiert.

In Kapitel 2 stehen die Eigenschaften des Pickard-Tory Modells im Zentrum der Untersuchung, dabei interessiert insbesondere die Frage, unter welchen Voraussetzungen an die Koeffizienten eine eindeutige Lösung existiert und welche Eigenschaften diese Lösung besitzt.

Werden Lipschitz-Eigenschaften an die Koeffizienten des Modells vorausgesetzt, so besitzt die eindeutige und starke Lösung die starke Markov-Eigenschaft und die Übergangsfunktionen bilden eine Feller-Dynkin Halbgruppe mit Feller-Eigenschaft (vgl. Kapitel 2.1).

Kapitel 2.2 widmet sich der Frage, ob die Verteilung der Lösung des Pickard-Tory Modells eine Dichte besitzt, da in diesem Fall die Dichtefunktion Lösung der Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung bzw. Fokker-Planck-Gleichung ist. Unter zusätzlichen Glattheitsforderungen an die Koeffizienten kann mit Hilfe des Hörmander-Kriteriums eine positive Antwort gegeben werden. Hierzu werden die Koeffizienten des Pickard-Tory Modells als Vektorfelder interpretiert und daraus Lie-Algebren generiert, welche dann auf ihre strukturellen Eigenschaften hin untersucht werden.

Abschließend wird in Kapitel 2.3 mit dem Martingale-Problem ein alternativer Zugang präsentiert. Dieser setzt lediglich die Stetigkeit der Koeffizienten voraus, benötigt aber eine strikt positive Diffusionsmatrix. Es wird gezeigt, dass für das Pickard-Tory Modell unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige aber nunmehr schwache Lösung existiert, welche die starke Markov-Eigenschaft besitzt. Die zugehörigen Übergangsfunktionen bilden eine Feller-Dynkin Halbgruppe mit starker Feller-Eigenschaft und besitzen eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes.

Als Vielteilchenmodell wurde das Pickard-Tory Modell vor dem Hintergrund konzipiert, Systeme in einer Größenordnung von 10^6 Teilchen zu beschreiben. Die Hochdimensionalität des Modells und insbesondere die starke Abhängigkeit der Teilchen untereinander über das Konzentrationsfunktional führen zu Schwierigkeiten in der weiteren Analyse. Bei der Simulation des Pickard-Tory Modells etwa führen die starken Abhängigkeiten schnell an die Grenze des technisch realisierbaren. In Kapitel 3 wird deshalb eine Methodik vorgestellt, die es erlaubt anstatt des $6n$-dimensionalen Pickard-Tory Modells alternativ eine 6-dimensionale stochastische Differenzialgleichung zu untersuchen, die im Weiteren als Grenzdynamik bezeichnet wird. Betont werden soll, dass hierdurch eine erhebliche Dimensionsreduktion erzielt wird.

Die Grenzdynamik ist durch die 6-dimensionale stochastische Differenzialgleichung

$$\overline{Y}_t = \overline{Y}_0 + \int_0^t b(\overline{Y}_s, c(\overline{Y}_s, P_s))ds + \int_0^t \sigma(\overline{Y}_s, c(\overline{Y}_s, P_s))dW_s, \;\; \mathcal{L}(\overline{Y}_t) = P_t$$

erklärt. Ihre Koeffizienten (vgl. Kapitel 3.1) besitzen die gleiche Struktur wie die Koeffizienten eines Teilchens im Pickard-Tory Modell. Der entscheidende Unterschied besteht in der Modellierung des Konzentrationsfunktionals, bei dem an die Stelle einer gewichteten Summe über die Ortskomponenten der Teilchen die Integration bzgl. der Verteilung $\mathcal{L}(\overline{Y}_t) = P_t$ der Grenzdynamik tritt. Hierdurch entsteht ein Typ stochastischer Differenzialgleichung, der durch die Standardtheorie nicht mehr abgedeckt ist.

Ein zentrales Ergebnis dieser Arbeit ist der Nachweis einer starken und eindeutigen Lösung für die Grenzdynamik in Kapitel 3.3. Der Beweis gliedert sich dabei in mehrere Teile und greift eine Idee von Sznitman [Szn91] auf. Die Menge der Verteilungen von stetigen Semimartingalen bildet zusammen mit den in Kapitel 3.2 eingeführten Wassersteinmetriken den vollständigen metrischen Raum $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$. Die Grenzdynamik wird entkoppelt, indem man zur Integration anstatt $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ zunächst eine beliebige Familie von Maßen $\{Q_t\}_{t\in[0,T]}$ verwendet. Es ist nun möglich auf $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ eine kontrahierende Abbildung zu definieren, deren Fixpunkt gerade die gesuchte Familie von Verteilungen $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ ist. Des Weiteren werden Abschätzungen für alle höheren Momente ermittelt.

Der Zusammenhang mit dem Pickard-Tory Modell wird schließlich in Kapitel 3.4 hergestellt. Es gelingt mit Hilfe des Approximationssatzes der Beweis, dass die Grenzdynamik stellvertretend für das Pickard-Tory Modell betrachtet werden kann. Hierzu werden auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum das Pickard-Tory Modell und unendlich viele voneinander stochastisch unabhängige Kopien der Grenzdynamik definiert, welche mit $\overline{Y}^i_t$, $i = 1, 2, \dots$ bezeichnet werden. Der Approximationssatz zeigt durch

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}^i_t\right\|^{2p}\right] = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p \ge 1,$$

dass die i-te Kopie der Grenzdynamik bei wachsender Teilchenzahl (d.h. im Grenzfall n gegen unendlich) durch das i-te Teilchen im Pickard-Tory Modell approximiert wird. Ferner wird die Konvergenzgeschwindigkeit angegeben.

In Kapitel 3.5 wird abschließend die Frage diskutiert, ob die Verteilung der Grenzdynamik eine Dichte besitzt. Auf Grund der zusätzlichen Zeitabhängigkeit der Koeffizienten kann dies nicht mehr mit dem Hörmander-Kriterium aus Kapitel 2.2 beantwortet werden. Dennoch kann unter der zusätzlichen Bedingung einer positiv definiten Diffusionsmatrix die Existenz einer glatten Dichtefunktion garantiert werden. Auch bei Abschwächung dieser Forderung bleibt es möglich für eine 2-dimensionale Grenzdynamik die Existenz einer Dichtefunktion zu beweisen. Der Beweis benutzt die Theorie über den Malliavin Calculus, der unter Verwendung eines Ableitungsbegriffes für Zufallsvariablen eine hinreichende Bedingung für die Absolutstetigkeit ihrer Verteilungen angibt.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden maßwertige stochastische Prozesse als Instrument zur Beschreibung von Sedimentationsvorgängen eingeführt. Anstatt das Modell weiter im Phasenraum zu betrachten, wird für $t \in [0, T]$ der Systemprozess Y_t^n durch

$$Z_t^n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_t^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$$

in die Gestalt einer maßwertigen Zufallsvariable transformiert. Durch

$$Z^n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(C_T)$$

wird gar das komplette Verhalten des Vielteilchensystems durch ein einziges zufälliges Maß Z^n beschrieben. Die Frage nach der Asymptotik der stochastischen Prozesse im Pickard-Tory Modell kann somit durch die Betrachtung der Konvergenz der zugehörigen maßwertigen Zufallsvariablen beantwortet werden. Im Mittelpunkt steht hierbei die Konvergenz in Verteilung. In Kapitel 4.1 wird ein allgemeines Kriterium bereitgestellt, das die schwache Konvergenz auf $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ charakterisiert und für die beiden Fälle $S = \mathbb{R}^6$ und $S = C[0,T]$ Anwendung findet.

Mit diesem Tool wird in Kapitel 4.2 gezeigt, dass Z^n in Wahrscheinlichkeit gegen eine konstante maßwertige Zufallsvariable konvergiert und daraus abgeleitet, dass das Pickard-Tory Modell dem Prinzip des propagation of chaos gehorcht. Dieses besagt, dass in einem Vielteilchensystem, in dem trotz unabhängiger Startbedingungen die Dynamik zunächst für eine Kopplung der Teilchen untereinander sorgt, diese für große Teilchenzahlen dennoch vernachlässigt werden kann. Diese Eigenschaft hat sich im Approximationssatz bereits durch die stochastisch voneinander unabhängigen Grenzwerte der einzelnen Teilchen angedeutet.

Das Beweisverfahren wird in Kapitel 4.3 auf den maßwertigen Prozess Z_t^n übertragen. Hierbei erhält man die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gleichmäßig in t gegen die Verteilung der Grenzdynamik $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$. Ferner lässt sich für gleichmäßig beschränktes f ein starkes Gesetz der großen Zahlen in der Form

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^1) \right]$$

auch für die stochastisch abhängigen (!) Zufallsvariablen $Y_t^{i,n}$ gleichmäßig in $t \in [0,T]$ beweisen.

Unter Verwendung dieses starken Gesetzes der großen Zahlen und im Zusammenspiel mit Martingale-Theorie und den Techniken des Itô-Kalküls gelingt in Kapitel 4.4 der Nachweis, dass die Familie $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ als Grenzwert des maßwertigen Prozesses Z_t^n Lösung einer Gleichung vom Typ McKean-Vlasov ist. Kann man ferner garantieren, dass diese Verteilungen eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes besitzen, wie dies etwa in Kapitel 3.5 geschehen ist, dann ergibt sich hieraus auch eine Fokker-Planck-Gleichung für die Grenzdynamik.

Summary

The settling of a large number of small solid particles in a viscous fluid is a macroscopic physical phenomenon that is both scientifically interesting and physically relevant. In industrial practice it occurs in a variety of systems such as colloids, suspensions and polymers.

It is a traditional means of separating solids and liquids. There are also a variety of two-phase many-bodied processes in nature that are of importance, e.g. the sediment dynamics in rivers and estuaries, the transport of contaminants in the atmosphere and the falling of snow, to name only a few. These and other aspects have led to extensive scientific activity in the area of sedimentation over the last forty years as reflected by a wide range of publications spread over numerous journals and many fields.

The intention of this thesis is to give an adequate mathematical model of sedimentation using multidimensional diffusion processes in time-dependent environments which are themselves stochastic. We develop tools for the analysis of its dynamics. We use a particle-tracking model which is based on n Langevin equations coupled by the ensemble configuration. The basic structure was developed by Pickard and Tory ([PT77], [TP82]) and is referred to as the Pickard-Tory model in the literature. The work presented here builds on the state of development of the model described in [HT96].

First of all, we give a brief overview of the modeling process which is described in detail in chapter 1. We consider n identical, spherical, macroscopic particles with radius a that are immersed in a viscous fluid described by $\mathbb{R}^3$. Let us assume that sedimentation starts from some initial configuration under the influence of gravity, the fluid being initially at rest. As a many-bodied phenomenon we analyse systems with approximately 10^6 particles, while the particle radius lies between $10\mu m$ and $100\mu m$. The modeling takes place in a two-stage procedure.

The first step is to deduce a stochastic process for incremental particle evolution, individually for all particles. In consideration of gravity, buoyancy and drag, one obtains an equation for the vertical velocity of one particle according to Newton's second law. At this stage of modeling molecular diffusion was disregarded. This

effect can be considered as random and it is implemented by using Brownian motions.

Let $X_k(t)$ be the position and $V_k(t)$ the velocity of the k-th particle, $k = 1, \ldots, n$. As a result the dynamics of the solids are characterized as Ornstein-Uhlenbeck processes $OU(\mu, \beta, \sigma)$ given as solutions of the following stochastic differential equations

$$\begin{aligned} X_k(t) &= X_k(0) + \int_0^t V_k(s)ds \\ V_k(t) &= V_k(0) + \int_0^t (\mu - \beta V_k(s))ds + \int_0^t \sigma dW_k(s), \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

The other two space dimensions are modeled in the same manner, neglecting gravity. Finally, each particle is described by its space-time trajectory, i.e. by a 6-dimensional process.

In a second step the fine structure is superposed. All the remaining effects, such as hydrodynamic interactions not yet considered in the coarse structure, are built into the parameters μ, β, σ. This is done by connecting the parameters to the local solid concentration via a concentration functional c, which is a kernel smoothed version of the system configuration.

At the end the Pickard-Tory model with n particles may be represented by the $6n$-dimensional process $Y_t \triangleq Y_t^n \in \mathbb{R}^{6n}$ that obeys the following time-homogeneous stochastic differential equation

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(Y_s)ds + \int_0^t \sigma(Y_s)dW_s$$

with drift vector ($y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{6n}$)

$$b(y) \triangleq \begin{pmatrix} b_1(y) \\ \vdots \\ b_k(y) \\ \vdots \\ b_n(y) \end{pmatrix}, \quad b_k(y) \triangleq \begin{pmatrix} x_{k4} \\ x_{k5} \\ x_{k6} \\ -\beta x_{k4} + \mu(c_k^n(y)) \\ -\beta x_{k5} \\ -\beta x_{k6} \end{pmatrix}, y_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ x_{k3} \\ x_{k4} \\ x_{k5} \\ x_{k6} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

dispersion matrix

$$\sigma(y) \triangleq \operatorname{diag}(\xi_1(y), \ldots, \xi_n(y)) \quad , y \in \mathbb{R}^{6n},$$

$$\xi_k(y) \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(c_k^n(y)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2(c_k^n(y)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3(c_k^n(y)) \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^{6n}$$

and concentration functional

$$c_k^n(y) \triangleq \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} K(T_k y - T_i y).$$

The k-th particle is represented by the 6-dimensional process $Y_t^{k,n}$.

The main purpose of chapter 2 is to ensure existence and uniqueness of the corresponding stochastic differential equation and to analyse properties of the Pickard-Tory model.

If Lipschitz conditions are assumed for the coefficients, a strong solution exists and is unique. Furthermore, the solution possesses the strong Markov property and the transition functions are a Feller-Dynkin semigroup with Feller property. This is the contents of chapter 2.1.

Chapter 2.2 is dedicated to the question of whether the distribution of the solution of the Pickard-Tory model is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. In this case a density function exists and is given as a solution of the backward Kolmogorov equation, respectively of the Fokker-Planck equation. We use the Hörmander condition to give a positive answer to this question under rather mild assumptions. The coefficients are interpreted as vector fields that generate some Lie-algebras, which are analysed for their structural properties.

Using the martingale approach in the last section of chapter 2, a different technical point of view is presented. Only continuity of the coefficients is assumed but the diffusion matrix has to be positive definite. Under these assumptions a unique but henceforth weak solution exists. Again the solution has the strong Markov property. Now the transition functions are a Feller-Dynkin semigroup with strong Feller property having a density function with respect to Lebesgue measure.

As a many-bodied model, the Pickard-Tory model is designed to handle systems with 10^6 particles. This high dimensionality and particularly the strong dependence of the particles among themselves through the concentration functional leads to several problems in the subsequent analysis.

For example, a simulation of the Pickard-Tory model is almost impossible. In order to evaluate the concentration functional for a given particle one has to compute the distance to every other single particle, a task which is numerically inefficient and theoretically dissatisfactory. In chapter 3 we present a methodology which allows us to analyse a 6-dimensional stochastic differential equation instead of the $6n$-dimensional Pickard-Tory model. This is a significant reduction of dimensions.

The 6-dimensional stochastic differential equation, which from now on we refer to as limit dynamics, is given by

$$\overline{Y}_t = \overline{Y}_0 + \int_0^t b(\overline{Y}_s, c(\overline{Y}_s, P_s))ds + \int_0^t \sigma(\overline{Y}_s, c(\overline{Y}_s, P_s))dW_s, \ \ \mathcal{L}(\overline{Y}_t) = P_t$$

and

$$b(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\beta x_4 + \mu(y) \\ -\beta x_5 \\ -\beta x_6 \end{pmatrix}, x = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6, y \in \mathbb{R},$$

$$\sigma(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3(y) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^6, y \in \mathbb{R},$$

$$c(x,Q) \triangleq \gamma \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x-z)dQ(z), Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6), x \in \mathbb{R}^6.$$

The coefficients have the same structure as the coefficients in the Pickard-Tory model. The main difference occurs in the modeling of the concentration functional. Instead of a weighted sum over the position components of all solids we use an integration with respect to the law $\mathcal{L}(\overline{Y}_t) = P_t$ of the limit dynamics. This dependence generates a new type of stochastic differential equations that cannot be handled with standard stochastic analysis machinery.

Existence and strong uniqueness of the solution of the limit dynamic is one of the main results in this thesis. In chapter 3.3 we give a proof consisting of several steps based on an idea suggested by Sznitman [Szn91]. The solution of a stochastic differential equation is (in this thesis) always a continuous semimartingale and it therefore induces a law which is an element in the set of measures on C_T. Together with the Wasserstein metric introduced in chapter 3.2 we obtain a complete metric space $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$. The next step is to decouple the limit dynamics, i.e. instead of integration with respect to $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ we choose an arbitrary familiy of measures $\{Q_t\}_{t\in[0,T]}$. Now we have a time-inhomogenous stochastic differential equation for which existence and uniqueness results are well known. But as a continuous semimartingale the solution again induces a measure in $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$. Therefore we define a map on $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ which is contracting. The fixpoint is the family of laws $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ we are looking for. As functions of the initial conditions, we can give estimates for all higher moments of the solution.

Finally, a connection with the Pickard-Tory model is established in chapter 3.4. On a common probability space we define the Pickard-Tory model together with infinite copies $\overline{Y}^i_t$, $i = 1, 2, \ldots$ of the limit dynamics which are stochastically independent. We can prove the following approximation result

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|Y^{i,n}_t - \overline{Y}^i_t\right\|^{2p}\right] = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p \ge 1$$

for $n \longrightarrow \infty$. This shows that for fixed i the i-th particle in the Pickard-Tory model is approximated by the i-th copy of the limit dynamics. But these copies are stochastically independent and driven by the same type of stochastic differential equation. Hence it suffices to consider only one limit dynamics. This leads to the stated reduction in dimension. Furthermore, the theorem gives a convergence rate. The higher the moments are that we assume for the initial configuration, the faster this rate of convergence turns out to be.

The last section in chapter 3 deals with the question of whether the law of the limit dynamics is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Due to time-dependence of the coefficients, the Hörmander condition formulated in 2.2 is not a neccessary condition anymore. Nevertheless, we can guarantee a smooth density function under some smoothness conditions for the coefficients and a positive definite dispersion matrix. Even if we weaken these conditions, a positive answer for a 2-dimensional limit dynamics is possible. In proving these results we make use of the theory of Malliavin, the so called Malliavin calculus. Necessary conditions for the existence of a density for the law of the random variable are given with the help of the concept of a derivative for random variables.

In chapter 4 we introduce measure-valued stochastic processes as a new tool to analyse and describe sedimentation. Instead of studying the model in phase space, we define

$$Z_t^n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_t^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6), \quad t \in [0,T],$$

a transformation of the Pickard-Tory process Y_t^n into a measure-valued process. Then one measure-valued random variable

$$Z^n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(C_T)$$

describes the behaviour of the many-bodied system completely. Questions related to the asymptotic behaviour of the stochastic process in the Pickard-Tory model can therefore be answered by analysing the convergence behaviour of the associated measure-valued random variables. In chapter 4.1 we formulate a general criteria that gives a characterization of weak convergence on $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$. The criteria is applied to the cases $S = \mathbb{R}^6$ and $S = C[0,T]$.

With this tool in hand we are able to show the convergence in probability from Z^n to a constant measure-valued random variable. The details are given in chapter 4.2. From this we deduce that the Pickard-Tory model obeys the principle of propagation of chaos. For every particle in this many-bodied system the initial configuration is stochastically independent of every other initial configuration. Due to system evolution this independence disappears with time. But for extremely large particle numbers this effect can be neglected and once again the dynamics of every given particle is independent of the others. With regard to the approximation theorem, such a behaviour has been expected.

In chapter 4.3 this line of argument is transferred to the measure-valued process Z_t^n. We obtain convergence in probability from Z_t^n to the law of the limit dynamics $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ uniformly in t. Furthermore, we prove a strong law of large numbers, namely

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right],$$

for bounded uniformly continuous f and stochastically dependent (!) random variables $Y_t^{i,n}$, uniformly in $t \in [0,T]$.

In the last section of this thesis we make use of this strong law of large numbers and the interplay between martingale theory and Itô calculus. We show that $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$, as a limit of Z_t^n, is a solution of an equation of McKean-Vlasov type. Moreover, given a smooth density for the law of the limit dynamics, e.g. based on the results of chapter 3.5, it is demonstrated, that this density is the solution of a non-linear Fokker-Planck equation for the limit dynamics.

Kapitel 1

Modellbildung

Bei einem Modell handelt es sich um ein Abbild einer definierten Ausgangsstruktur unter bestimmen Gesichtspunkten, d.h. Modelle werden jeweils für ganz bestimmte Frage- oder Problemstellungen entworfen, sie werden durch die zu Grunde liegende Fragestellung entscheidend geprägt. Statistische Modelle implizieren im Vergleich zur abgebildeten Realität erhebliche Vereinfachungen und Formalisierungen. Verschiedene Modelle derselben Ausgangsstruktur verarbeiten und betonen unterschiedliche Informationen. Die Antwort auf die Frage, ob statistische Modelle in angemessener Weise benutzt werden, kann niemals die Statistik alleine liefern, sondern sie muss in den Eigenschaften des gemessenen Sachverhalts gesucht werden.

Die Sedimentation ist ein Vorgang, der in Natur, Wissenschaft und Technik weit verbreitet ist. Dieses Phänomen, die Betrachtung einer großen Anzahl von kleinen Teilchen in einer viskosen Flüssigkeit, soll innerhalb des einleitenden Kapitels mit Hilfe eines Markov-Modells veranschaulicht werden, das von Pickard und Tory in [PT77] vorgeschlagen und in einer Reihe von Artikeln durch Pickard, Tory und Hesse (z.B. [TP82], [Hes93], [HT96], [HD00]) weiterentwickelt und verfeinert wurde.

Zunächst bedarf es einer kurzen Abhandlung des Modellbildungsprozesses. Es gilt n identische, sphärische, makroskopische Teilchen mit Radius a in ruhender Flüssigkeit zu untersuchen. Für jedes der Teilchen sollen die Raum-Zeit-Trajektorien beschrieben werden. Dazu wird in einem Zweistufenmodell zuerst eine grobe Struktur mit konstanten Parametern ermittelt, die dann im nächsten Schritt verfeinert wird. Dies geschieht indem man alle noch nicht enthaltenen Einflussgrößen in die dann von der Systemkonfiguration abhängenden Parameter einbaut.

Zur Vereinfachung richtet man sein Augenmerk zu Beginn nur auf ein Teilchen in ruhender Flüssigkeit. Die vertikale Geschwindigkeit $V(t)$ verhält sich unter

Berücksichtigung von Auftrieb, Reibung und Schwerkraft gemäß dem zweiten Newton'schen Gesetz

$$m\frac{dV(t)}{dt} = mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_g}\right) - \gamma V(t),$$

wobei ρ_f und ρ_g die Dichte des Fluids bzw. des Partikels, m die Masse des Teilchens, g die Fallbeschleunigung und γ der Reibungskoeffizient ist.

In dieser Grobstruktur werden Effekte vernachlässigt, die man als sogenannte molekulare Diffusion bezeichnet und die z.B. durch Kollisionen mit den Molekülen des umgebenden Mediums auftreten. Die Hinzunahme dieser zufallsbehafteten Vorgänge führt zu einer zufälligen stochastischen Bewegung, die durch das Newton'sche Gesetz alleine nicht mehr abzubilden ist. Stattdessen beschreibt man dieses Verhalten durch ein weißes Rauschen $\varepsilon(t)$

$$m\frac{dV(t)}{dt} = mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_g}\right) - \gamma V(t) + \varepsilon(t).$$

Zur formalen Präzisierung erfolgt die mathematisch korrekte Formulierung mit Hilfe einer stochastischen Differenzialgleichung unter Verwendung einer Brownschen Bewegung. Werden im obigen Ausdruck die Parameter zusammengefasst und der Ortsprozess $X(t)$ des Teilchens als Integral der Geschwindigkeit deklariert,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t V(s)ds$$

so wird der Orts-Geschwindigkeits-Prozess eines Teilchens durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $OU(\mu, \beta, \sigma)$ und die stochastische Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= V(t)dt \\ dV(t) &= (\mu - \beta V(t))dt + \sigma dW(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

beschrieben, wobei $W(t)$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist.

Die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (1.1) existiert und kann in der geschlossenen Form

$$V(t) = \frac{\mu}{\beta} + (V(0) - \frac{\mu}{\beta})e^{-\beta t} + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW(s)$$

angegeben werden. Es handelt sich hierbei um einen der wenigen Fälle, in denen dies explizit möglich ist. Meist können mit Hilfe von theoretischen Sätzen lediglich Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung garantiert werden.

Ebenso bemerkenswert an diesem Fall ist die mathematisch interessante Situation, dass die gemeinsame Verteilung von Ort und Geschwindigkeit des Teilchens eine Dichte $p(x, v, t)$ besitzt. Diese lässt sich durch die Formel von Feynman-Kac in Abhängigkeit der Lösung (1.1) darstellen und genügt der Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung oder Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} p - v \frac{\partial}{\partial x} p - \frac{\partial}{\partial v} \left((\mu - \beta v)\, p \right).$$

Auch hier kann im Allgemeinen nur eine schwache Lösung der Fokker-Planck-Gleichung garantiert werden.

Das Vorhandensein konstanter Parameter ermöglicht zudem die explizite Berechnung der Verteilung des bivariaten Prozesses $\{(X(t), V(t)), t \in [0, T]\}$. Mit Startwert (x_0, v_0) besitzt $(X(t),\, V(t))$ eine Gauß-Verteilung mit Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[X(t)\right] &= x_0 + \frac{\mu}{\beta} t + \left(\frac{v_0}{\beta} - \frac{\mu}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) \\ \mathbf{E}\left[V(t)\right] &= \frac{\mu}{\beta} + \left(v_0 - \frac{\mu}{\beta} \right) e^{-\beta t} \end{aligned}$$

und Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\Sigma \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}) & \frac{\sigma^2}{2\beta^2}(1 - e^{-\beta t})^2 \\ \frac{\sigma^2}{2\beta^2}(1 - e^{-\beta t})^2 & \frac{\sigma^2}{2\beta^3}(1 + 2\beta t - (2 - e^{-\beta t})^2) \end{pmatrix}.$$

Bei der Entwicklung des Pickard-Tory Modells erfolgt die Modellierung von n gleichen Teilchen dadurch, dass n Kopien des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $OU(\mu, \beta, \sigma)$ betrachtet werden. Jedem der n Teilchen wird (indexiert durch den Parameter $k = 1, \ldots, n$) somit ein Ortsprozess $X_k(t)$ und ein Geschwindigkeitsprozess $V_k(t)$ zugeordnet, wobei der Ortsprozess

$$X_k(t) = (X_{k1}(t), X_{k2}(t), X_{k3}(t))', \quad k = 1, \dots, n$$

und der Geschwindigkeitsprozess

$$V_k(t) = (V_{k1}(t), V_{k2}(t), V_{k3}(t))', \quad k = 1, \dots, n$$

jeweils aus drei Teilprozessen für die Raumkoordinaten bestehen. Die vertikalen Komponenten $X_{k1}(t)$ und $V_{k1}(t)$ genügen der in (1.1) beschriebenen stochastischen Differenzialgleichung. Die horizontalen Komponenten $X_{k2}(t), V_{k2}(t), X_{k3}(t)$ und $V_{k3}(t)$ hingegen folgen auf Grund der fehlenden Schwerkraft der nach Entfernung des Parameters μ leicht abgewandelten stochastischen Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= V(t)dt \\ dV(t) &= -\beta V(t)dt + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

In dieser Form sind die Teilchen nicht miteinander gekoppelt und so bleiben etwa hydrodynamische Interaktionen völlig unberücksichtigt. Dieser Sachverhalt muss durch eine Modellmodifizierung korrigiert werden. Tatsächlich beeinflusst die Bewegung eines Teilchens in dem viskosen Medium die Bewegung eines jeden anderen Teilchens. Darüber hinaus können sich mehrere Teilchen zu einem Cluster zusammenschließen ([Dav95]) und beeinflussen hierdurch ebenfalls die Bewegung der übrigen Teilchen. Aus diesem Grund werden die Parameter mit Hilfe des Konzentrationsfunktionals c an die lokale Teilchenkonfiguration gekoppelt.

$$\begin{array}{lcl} \mu & \rightsquigarrow & \mu(\, c(Y_k(t))\,) \\ \beta & \rightsquigarrow & \beta(\, c(Y_k(t))\,) \\ \sigma & \rightsquigarrow & \sigma(\, c(Y_k(t))\,) \end{array}$$

Das Konzentrationsfunktional $c : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ misst dabei die lokale Konzentration um das k-te Teilchen und ist durch

$$c(X_k(t), t) \triangleq \int_{\mathbb{R}^3} K(X_k(t) - x) P_k^t(x) dx \tag{1.2}$$

definiert, wobei $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Kernfunktion ist, die sich zu eins integriert, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad K(x) \geq 0.$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Symbol $\triangleq$ als Kennzeichnung für eine Definition benutzt.

Der Konfigurationsprozess $P_k^t(x)$ zählt für das k-te sphärische Teilchen mit Radius a zum Zeitpunkt t die Zahl der am Ort x befindlichen Teilchen. Die Teilchen nehmen im $\mathbb{R}^3$ den Raum $A(t,i) \subset \mathbb{R}^3$ ein und sind zusammen mit dem Konfigurationsprozess durch

$$\begin{aligned} P_k^t(x) &\triangleq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \chi_{A(t,i)}(x), \\ A(t,i) &\triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x - X_i(t)\| \leq a\right\} \end{aligned}$$

und die Indikatorfunktion $\chi_{A(t,i)}(x)$ definiert. Zusammengefasst handelt es sich bei dem Konzentrationsfunktional um ein gewichtetes Mittel. In Abhängigkeit des Kerns K werden also Teilchen, die weiter vom k-ten Teilchen entfernt sind, schwächer und Teilchen, die näher zum k-ten Teilchen sind, entsprechend stärker gewichtet.

Beim Übergang vom Modell mit konstanten Parametern zum Modell mit vom Konzentrationsfunktional abhängigen Parametern erhält man also für die vertikalen Komponenten des k-ten Teilchens insgesamt die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} dX_{k1}(t) &= V_{k1}(t)dt \qquad (1.3) \\ dV_{k1}(t) &= \mu(c(X_k(t),t))dt - \beta(c(X_k(t),t))V_{k1}(t)dt + \sigma(c(X_k(t),t))dW_k(t). \end{aligned}$$

Vielleicht erscheint es zunächst ungewöhnlich den Konfigurationsprozess $P_k^t(x)$ nicht direkt zur Steuerung des Teilchenensembles zu verwenden, sondern nur indirekt über das Konzentrationsfunktional c. Tatsächlich hängt die Entwicklung der Teilchen auch von der Gesamtkonfiguration ab. Die lokale Teilchenkonfiguration erweist sich aber eindeutig als der Faktor mit dem größten Einfluss [HB86]. Theoretische und praktische Untersuchungen [TH96] haben diese Vorgehensweise bestätigt. Die Modellierung in der Form (1.3) ist dadurch gerechtfertigt.

Es handelt sich um ein semi-empirisches Modell, d.h. die Parameterfunktionen β, μ und σ müssen bei Anpassung an eine reale Situation geschätzt werden.

Beispielhaft wurde dies in [HR94] mit einer Suspension von Kalksteinteilchen in Öl durchgeführt. Mit Hilfe von Erstdurchgangszeiten wurden die Parameter geschätzt und es konnte gezeigt werden, dass die beiden Parameterfunktionen μ und σ von der lokalen Teilchenkonfiguration abhängen. Für den „Reibungsparameter“ β hingegen gilt dies nicht und man kann ihn deshalb als konstant annehmen.

Zusätzlich wird für den Ortsprozess eine Störung $\varepsilon > 0$ eingebaut. Diese kann als Messungenauigkeit bei der Bestimmung des Ortsprozesses interpretiert werden, die bei der praktischen Durchführung der Schätzung der Parameter μ, σ und β auftreten wird. Man erhält somit

$$\begin{aligned} dX_{k1}(t) &= V_{k1}(t)dt + \varepsilon\, dW_k^1(t) \\ dV_{k1}(t) &= \mu(c(X_k(t),t))dt - \beta V_{k1}(t)dt + \sigma(c(X_k(t),t))dW_k^2(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Die stochastische Differenzialgleichung in (1.4) wird auch für die Beschreibung der Teilprozesse $X_{k2}(t), X_{k3}(t), V_{k2}(t)$ und $V_{k3}(t)$ in horizontaler Richtung verwendet, allerdings entfällt in diesem Fall der Driftterm μ. Das k-te Teilchen wird daher insgesamt durch den 6-dimensionalen Prozess

$$Y_k(t) \triangleq (X_{k1}(t), X_{k2}(t), X_{k3}(t), V_{k1}(t), V_{k2}(t), V_{k3}(t))'$$

beschrieben.

Schließlich kann das Konzentrationsfunktional c durch

$$c_n(y,t) \triangleq \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} K(x - X_i(t)) = \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} K^*(y - Y_i(t)) \tag{1.5}$$

stark vereinfacht werden. Dabei wird die Dichtefunktion auf kanonische Art von $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y = (x,v)'$ fortgesetzt. Lässt man den Partikelradius $a = a(n)$ von n abhängen, das Gesamtvolumen $\gamma = n\frac{4}{3}\pi a(n)^3$ konstant und setzt die Dichtefunktion als Lipschitz-stetig voraus, so lässt sich die Änderung asymptotisch vernachlässigen. Genauer gilt

Lemma 1.0.1 *Das Feststoffvolumen γ sei für alle n konstant und K sei eine mit Konstante $\|K\|_L$ Lipschitz-stetige Dichtefunktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein von t unabhängiges $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt*

$$\max_{1\leq k\leq n} |c(X_k(t),t) - c_n(Y_k(t),t)| < \varepsilon.$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ fest. Es reicht aus den Ausdruck für ein festes k zu beweisen, da k nur endlich viele Werte annehmen kann. In Anlehnung an die obige Notation sei

$$A_n(t,i) \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x - X_i(t)\| \leq a(n)\right\}$$

eine Kugel vom Radius $a(n)$.

Das Konzentrationsfunktional (1.2) kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned}
c(X_k(t),t) &= \int_{\mathbb{R}^3} K(X_k(t)-x)P_k^t(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} K(X_k(t)-x)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \chi_{A_n(t,i)}(x)dx \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \int_{A_n(t,i)} K(X_k(t)-x)dx.
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.1.1 kann der Kern durch 0 und $\|K\|_\infty$ als nach unten und oben beschränkt angesehen werden. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung [Wal92b, 7.10] gilt die Abschätzung

$$m \cdot |A_n(t,i)| \leq \int_{A_n(t,i)} K(X_k(t)-x)dx \leq M \cdot |A_n(t,i)| = M\frac{\gamma}{n}, \tag{1.6}$$

wobei m und M das Minimum und das Maximum des Kernes $K(X_k(t) - \cdot)$ auf dem Gebiet $A_n(t,i)$ sind und $|\cdot|$ das Volumen des Gebietes angibt.

Auf Grund der ebenfalls geforderten Stetigkeit nimmt K nach dem Zwischenwertsatz für Gebiete [Wal92b, 2.4] jeden Wert zwischen m und M an. Es existieren daher $\theta(i,n,t) \in A_n(t,i)$ für $i = 1,\ldots,n$, so dass in (1.6) Gleichheit, d.h.

$$\int_{A_n(t,i)} K(X_k(t)-x)dx = \frac{\gamma}{n}K(X_k(t)-\theta(i,n,t))$$

und damit

$$c(X_k(t),t) = \frac{\gamma}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} K(X_k(t)-\theta(i,n,t))$$

gilt.

Wählt man $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug und $n \geq n_0$, so gilt für die nachstehende Differenz

$$\begin{aligned}
&|c(X_k(t),t) - c_n(Y_k(t),t)| \\
=&\left|\frac{\gamma}{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} K(X_k(t)-\theta(i,n,t)) - \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} K^*(Y_k(t)-Y_i(t))\right| \\
=&\frac{\gamma}{n}\left|\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} K(X_k(t)-\theta(i,n,t)) - \sum_{i=1}^{n} K(X_k(t)-X_i(t))\right| \\
=&\frac{\gamma}{n}\left|\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \Big(K(X_k(t)-\theta(i,n,t)) - K(X_k(t)-X_i(t))\Big) - K(0)\right| \\
\leq&\frac{\gamma\,\|K\|_L}{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\|X_i(t)-\theta(i,n,t)\| + \frac{\gamma K(0)}{n} \\
\leq&\frac{\gamma\,\|K\|_L}{n} n\,a(n) + \frac{\gamma K(0)}{n} \\
=&\sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4\pi n}}\gamma\,\|K\|_L + \frac{\gamma K(0)}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Der Hinweis, dass mit dem Pickard-Tory Modell Systeme mit ca. $10^5 - 10^6$ Teilchen (Partikelradius ca. 10 bis $100\mu m$) untersucht werden, plausibilisiert den Kontext von Lemma 1.0.1, so dass diese Approximation gerechtfertigt erscheint.

Im letzten Schritt soll nun das Pickard-Tory Modell auf eine standardisierte Form gebracht werden. Das n-Teilchensystem wird durch einen $6n$-dimensionalen Prozess im $\mathbb{R}^{6n}$ beschrieben, wobei das k-te Teilchen durch den 6-dimensionalen Prozess $Y_t^{k,n}$ dargestellt ist, d.h.

$$Y_t^n \triangleq (Y_t^{1,n'}, Y_t^{2,n'}, \ldots, Y_t^{k,n'}, \ldots, Y_t^{n,n'})'.$$

Zur Erhöhung der Lesbarkeit wird auf den Index n in vielen Fällen verzichtet und stattdessen kurz $Y_t \triangleq Y_t^n$ notiert. Der 6-dimensionale Prozess Y_t^k ist seinerseits durch

$$\begin{aligned}
Y_t^k &\triangleq (X_t^{k1}, X_t^{k2}, X_t^{k3}, V_t^{k1}, V_t^{k2}, V_t^{k3})' \\
&\triangleq (X_t^{k1}, X_t^{k2}, X_t^{k3}, X_t^{k4}, X_t^{k5}, X_t^{k6})'
\end{aligned}$$

definiert.

X_t^{k1} ist der Ortsprozess des k-ten Teilchens in vertikaler Richtung und X_t^{k2} bzw. X_t^{k3} sind die Ortsprozesse für die beiden horizontalen Richtungen. Die Geschwindigkeitsprozesse in horizontaler und vertikaler Richtung werden mit V_t^{ki} $(i = 1, 2, 3)$ zur Vereinheitlichung meist jedoch mit X_t^{ki} $(i = 4, 5, 6)$ bezeichnet.

Bei der Auswertung des Konzentrationsfunktionals werden nur die Ortsprozesse benötigt. Deshalb sei $T_k : \mathbb{R}^{6n} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Projektion, die jedem $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{6n}) \in \mathbb{R}^{6n}$ den Vektor $T_k y \triangleq (y_{6k-5}, y_{6k-4}, y_{6k-3})$ zuordnet. Angewendet auf den Systemprozess Y_t ergibt sich durch $T_k Y_t$ der dreidimensionale Ortsprozess für das k-te Teilchen. Das Konzentrationsfunktional c_k^n hat für das k-te Teilchen nach (1.5) und Lemma 1.0.1 die Form

$$c_k^n(y) \triangleq \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} K(T_k y - T_i y), \tag{1.7}$$

wobei $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die dort bereits verwendete Lipschitz-stetige Dichtefunktion ist.

Die (6×6)-Dispersionsmatrix für das $k-$te Teilchen wird durch

$$\xi_k(y) \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(c_k^n(y)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2(c_k^n(y)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3(c_k^n(y)) \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^{6n} \tag{1.8}$$

erklärt. Die $(6n \times 6n)$ Dispersionsmatrix des Systemprozesses Y_t ergibt sich zu

$$\sigma(y) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(y) & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 0 & \xi_1(y) & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \xi_k(y) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & 0 & \xi_n(y) \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^{6n} \tag{1.9}$$

und besitzt damit nur Einträge auf der Hauptdiagonalen. Die ε_i (i=1,2,3) sind nichtnegative Konstanten. Die Dispersionsparameterfunktionen σ_i (i=1,2,3) können in jeder Raumkoordinate verschieden sein.

Analog setzt sich der Driftvektor $b(y)$ für das Gesamtsystem aus den Driftvektoren der n Teilchen zusammen. Sei $y \in \mathbb{R}^{6n}$, $y_k \in \mathbb{R}^6$ und es gelte die Darstellung $y = (y_1', y_2', \ldots, y_n')'$ und $y_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, x_{k4}, x_{k5}, x_{k6})$, dann sind durch

$$b_k(y) \triangleq \begin{pmatrix} x_{k4} \\ x_{k5} \\ x_{k6} \\ -\beta x_{k4} + \mu(c_k^n(y)) \\ -\beta x_{k5} \\ -\beta x_{k6} \end{pmatrix} \quad b(y) \triangleq \begin{pmatrix} b_1(y) \\ \vdots \\ b_k(y) \\ \vdots \\ b_n(y) \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^{6n} \tag{1.10}$$

die Driftvektoren gegeben, wobei $\beta \in \mathbb{R}^+$ eine positive Konstante ist.

Insgesamt lässt sich das Pickard-Tory Modell also in der Form

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t \tag{1.11}$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$dY_t^{(i)} = b_i(Y_t)dt + \sigma_{ii}(Y_t)dW_t^{(i)}; \quad 1 \leq i \leq 6n$$

als zeithomogene stochastische Differenzialgleichung schreiben.

Partikelsysteme, bei denen die Teilchen untereinander über ein Funktional abhängen, wurden in der Literatur etwa in [Oel84], [Oel85], [Szn91] und [RR94] untersucht und dort auch als Systeme schwach interagierender Diffusionsprozesse (weak interacting diffusion process) benannt.

Abschließend wird der zugehörige Differenzialoperator $\mathcal{A}$, der im Zusammenhang mit dem Martingale-Problem in Kapitel 2.3 auftreten wird, aus Gründen der Vollständigkeit bereits jetzt eingeführt.

$$(\mathcal{A}f)(y) \triangleq \sum_{i=1}^{6n} b_i(y)\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6n} a_{ii}(y)\frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_i^2} \tag{1.12}$$

$$a_{ik}(y) \triangleq \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(y)\sigma_{kj}(y) \tag{1.13}$$

Die $(6n \times 6n)$ Matrix a wird als Diffusionsmatrix bezeichnet. Hieraus ergibt sich speziell für $y \in \mathbb{R}^{6n}$

$$a_{ik}(y) \triangleq \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \varepsilon_1^2 & i = k = 1, 7, \ldots, 6n-5 \\ \varepsilon_2^2 & i = k = 2, 8, \ldots, 6n-4 \\ \varepsilon_3^2 & i = k = 3, 9, \ldots, 6n-3 \\ \sigma_1(c_k^n(y))^2 & i = k = 4, 10, \ldots, 6n-2 \\ \sigma_2(c_k^n(y))^2 & i = k = 5, 11, \ldots, 6n-1 \\ \sigma_3(c_k^n(y))^2 & i = k = 6, 12, \ldots, 6n. \end{cases} \tag{1.14}$$

Kapitel 2

Eigenschaften

Das zentrale Thema in diesem Kapitel ist die Untersuchung des in Kapitel 1 vorgestellten Pickard-Tory Modells hinsichtlich der Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, sowie deren mathematische Eigenschaften.

Hierzu werden zwei unterschiedliche Zugänge gewählt. In Kapitel 2.1 steht die klassische Theorie nach Itô im Mittelpunkt, während in Kapitel 2.3 der technisch aufwendigere Zugang nach Stroock und Varadhan gewählt wird. Die beiden Theorien führen zu Ergebnissen, die sich nur bedingt vergleichen lassen. So sichern zwar beide Zugänge Existenz und Eindeutigkeit der stochastischen Differenzialgleichungslösung (1.11), allerdings unterscheiden sie sich deutlich hinsichtlich der geforderten Voraussetzungen an die Koeffizienten.

Da beim Zugang nach Itô die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung durch eine Picard-Lindelöf-Iteration konstruiert wird, müssen die Koeffizienten einer Lipschitz-Bedingung genügen. Darüber hinaus verlangt man, dass die Koeffizienten eine lineare Wachstumsbedingung erfüllen, um ein „Explodieren“ der Lösung zu verhindern. Einführungen in das Thema finden sich in der Literatur etwa in [Gar88], [KS91, 5.2] oder [RY91, IX].

In Kapitel 2.1 werden zunächst grundlegende Begriffe erklärt, die auch im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder benötigt werden. Anschließend werden in Definition 2.1.3 und Definition 2.1.4 die Begriffe starke Lösung und pfadweise Eindeutigkeit eingeführt, durch welche die geforderte Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung formal präzisiert werden.

Nach Formulierung der Voraussetzungen, welche die Parameter des Pickard-Tory Modells zu erfüllen haben, wird in Satz 2.1.1 unter Verwendung der bereitgestellten Hilfsmittel schließlich gezeigt, dass eine Lösung in der gewünschten Art existiert.

Im Rest von Kapitel 2.1 werden Eigenschaften der Lösung diskutiert. Erläutert werden dabei unter anderem die Begriffe Feller-Dynkin Halbgruppe und

Feller-Eigenschaft. Zusammenfassend werden in Satz 2.1.2 die Eigenschaften des Pickard-Tory Modells umfassend dargestellt.

In Kapitel 2.2 wird speziell auf die Frage nach der Existenz einer Dichte der Verteilung des Systemprozesses im Pickard-Tory Modell eingegangen. In Kapitel 1 wurde beim Modell für ein Teilchen bereits darauf hingewiesen, dass ein Beweis über die Existenz einer solchen Dichte meist nicht geführt werden kann. Diese Thematik wird separat betrachtet, weil sich dieses Problem historisch und thematisch vom Zugang nach Itô unterscheidet.

Vorangestellt werden technische Begriffe wie Klammeroperation und Lie-Algebra, bevor in Definition 2.2.4 die zentrale Bedingung für die Gültigkeit des Theorems von Hörmander formuliert werden kann. Schließlich muss in Lemma 2.2.3 das Pickard-Tory Modell in die Fisk-Stratonovich-Form übersetzt werden, dies geht mit einer Verschärfung der Forderungen an die Koeffizienten einher, bevor dann in Satz 2.2.2 mit den genannten Hilfsmitteln ein positives Ergebnis bzgl. der Existenz einer Dichte formuliert werden kann.

In Kapitel 2.3 wird der alternative Zugang nach Stroock und Varadhan vorgestellt und auf das Pickard-Tory Modell angewendet. Zentral ist hierbei der Begriff des Martingale-Problems, das in Definition 2.3.1 eingeführt wird. Umfassende Erläuterungen zum Martingale-Problem finden sich in der Originalarbeit von Stroock und Varadhan [SV79]. Anstatt die gewünschte stochastische Differenzialgleichung direkt zu lösen, wird mit Hilfe der Koeffizienten ein Martingale-Problem konstruiert und dieses ausführlich untersucht. Durch diesen maßtheoretischen Zugang kann auf jegliche Lipschitz-Bedingungen vollständig verzichtet werden. Im Wesentlichen müssen die Koeffizienten messbar bzw. stetig sein.

Allerdings erhält man durch diese Transformation lediglich eine schwache Lösung und Verteilungseindeutigkeit. Diese Begriffe werden in Definition 2.3.2 und Definition 2.3.3 präzisiert. Ferner muss die Dispersionsmatrix die strukturelle Voraussetzung der strikten Positivität erfüllen. Der Theorieteil schließt mit Satz 2.3.1, der garantiert, dass es sich tatsächlich um zwei äquivalente Formulierungen desselben Problems handelt.

Nachdem die notwendigen Voraussetzungen formuliert wurden, findet die vorgestellte Theorie in Satz 2.3.3 Anwendung auf das Pickard-Tory Modell. Im Gegensatz zum Zugang nach Itô garantiert diese Vorgehensweise ohne weitere Voraussetzungen die Existenz einer Dichte. In diesem Satz wird zugleich auf die weiteren Eigenschaften der Lösung eingegangen.

2.1 Existenz und Eindeutigkeit nach Itô

Wie eingangs erwähnt wird in diesem Kapitel die Frage geklärt, unter welchen Bedingungen die in Kapitel 1 formulierte stochastische Differenzialgleichung eine Lösung besitzt und welche Eigenschaften dieser Lösung zugewiesen werden können. Dazu bedarf es zunächst einiger technischer Grundbegriffe, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ und eine ihm zugeordnete Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ die den üblichen Bedingungen (usual conditions) genügt. Dieser Begriff ist für die Konstruktion von stochastischen Integralen notwendig, insbesondere bei Fragen nach der Messbarkeit. Die Techniken, wie Filtrierungen so ergänzt werden können, dass sie den üblichen Bedingungen genügen, und welche Eigenschaften dabei übertragen werden, sind z.B. in [KS91, 2.7] beschrieben.

Definition 2.1.1 *Eine Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ genügt den* **üblichen Bedingungen**, *falls sie*

1. *rechtsstetig ist, d.h $\mathcal{F}_t \triangleq \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ und*

2. *$\mathcal{F}_0$ alle P-Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält.*

Alle im Rahmen dieser Arbeit auftretenden stochastischen Prozesse sind $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes\mathcal{F}$-messbar und adaptiert. Adaptiert bedeutet, dass die Zufallsvariablen X_t nicht nur $\mathcal{F}$-messbar, sondern auch $\mathcal{F}_t$-messbar sind. Entweder nach Definition wie bei der Brownschen Bewegung oder gemäß ihrer Konstruktion wie bei stochastischen Integralen.

Ferner werden auf Grund der physikalischen Modellbildung nur stetige Prozesse betrachtet. Daraus ergibt sich die progressive Messbarkeit , d.h. die $\mathcal{B}([0,t))\otimes\mathcal{F}_t$-Messbarkeit der Zufallsvariablen X_t [KS91, 1.1.13].

Schließlich stammen alle Prozesse aus der Menge der stetigen Semimartingale. Diese ist geeignet, da die Itô-Formel [KS91, 3.3.3] besagt, dass „glatte Funktionen“ stetige Semimartingale in stetige Semimartingale überführen.

Definition 2.1.2 *Ein* **stetiges Semimartingale** $(X_t, \mathcal{F}_t)$ *ist ein adaptierter Prozess, der eine eindeutige Zerlegung $X_t = X_0 + M_t + A_t$ in ein stetiges lokales Martingale $(M_t, \mathcal{F}_t)$ und einen stetigen, adaptierten Prozess $(A_t, \mathcal{F}_t)$ von endlicher Variation besitzt.*

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde bereits auf die unterschiedlichen Konzepte von Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das in Kapitel 1 formulierte Modell eingegangen. Im Rahmen des Zugangs nach Itô wird dabei eine starke Lösung im folgenden Sinn gesucht:

Definition 2.1.3 *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ eine den üblichen Bedingungen genügende Filtrierung. $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ sei eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und ξ die Verteilung einer auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definierten Zufallsvariablen X_0. Diese wird* ***Startkonfiguration*** *der Lösung genannt.*

Eine ***starke Lösung*** *der stochastischen Differenzialgleichung*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.1}$$

ist ein stetiges $\mathbb{R}^n$-wertiges Semimartingale $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ mit den Eigenschaften

1. $P[X_0 = \xi] = 1.$
2. *Für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $0 \leq t < \infty$ gilt*
$$P[\int_0^t \{\sigma_{ij}^2(X_s) + |b_i(X_s)|\}ds < \infty] = 1.$$
3. *Für alle $0 \leq t < \infty$ gilt P-fast sicher*
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s.$$

Für die Beantwortung der Frage nach der Eindeutigkeit der angesprochenen stochastischen Differenzialgleichung (2.1) stehen ebenfalls zwei Varianten zur Verfügung. Es wird zunächst der stärkere Begriff eingeführt.

Definition 2.1.4 *Bei einer stochastischen Differenzialgleichung der Form (2.1) liegt* ***pfadweise Eindeutigkeit*** *vor, wenn für zwei starke Lösungen X und $\tilde{X}$ bei gleichem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gleicher Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}$, gleicher Brownscher Bewegung $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ und fast sicher gleicher Startkonfiguration*
$$P[X_t = \tilde{X}_t; 0 \leq t < \infty] = 1$$
gilt.

Zum Beweis von Existenz und Eindeutigkeit der stochastischen Differenzialgleichung müssen geeignete Voraussetzungen an die verwendeten Koeffizienten im Pickard-Tory Modell gestellt werden. Im Einzelnen sind dies

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $\|\mu\|_L$.
2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante $\|\sigma\|_L$.
3. Die Startkonfiguration des Systems wird durch die Zufallsvariable η mit $\mathbf{E}[\eta^2] < \infty$ beschrieben. Diese ist unabhängig von der Brownschen Bewegung.
4. Die Konstanten $\varepsilon_i \geq 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind nichtnegativ.
5. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$.

Aus den Voraussetzungen an den Kern K kann man seine Beschränktheit mit Hilfe der folgenden Überlegung folgern. Im Weiteren bezeichnet $\|K\|_L$ deshalb neben der Lipschitzkonstanten auch das Supremum für K. Ebenso wird bei Abschätzungen nicht zwischen K und K^* unterschieden.

Lemma 2.1.1 *Sei $K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine positive und gleichmäßig stetige Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx < \infty$, dann ist K beschränkt.*

Beweis Angenommen K sei unbeschränkt, dann existiert eine Folge $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $K(x_m) \longrightarrow \infty$. O.B.d.A. kann $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ vorausgesetzt werden.

Diese Folge besitzt auf Grund der Stetigkeit von K keinen Häufungspunkt x. Ansonsten könnte man eine Teilfolge x_{m_j} mit $x_{m_j} \longrightarrow x$ auswählen. Gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit steht dann $K(x_{m_j}) \longrightarrow K(x) < \infty$ im Widerspruch zu $K(x_m) \longrightarrow \infty$.

Die getroffene Aussage des Lemmas ist bewiesen, wenn aus den Annahmen gefolgert werden kann, dass für $m \longrightarrow \infty$ die im Widerspruch zu $K(x_m) \longrightarrow \infty$ stehende Beziehung $K(x_m) \longrightarrow 1$ gilt.

Da die Folge $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt unterschreiten die Elemente nicht einen Minimalabstand δ_0, d.h. es existiert ein $\delta_0 > 0$ mit $\|x_l - x_m\| > \delta_0$ für alle l, m. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von K existiert aber ein $\delta < \delta_0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ aus

$$\|x - x_m\| < \delta \implies |K(x) - K(x_m)| < 1$$

und damit $K(x) > K(x_m) - 1$ folgt.

Hieraus resultiert die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\|x-x_m\|<\delta} K(x)dx \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\|x-x_m\|<\delta} (K(x_m)-1)dx \\
&= \mathrm{vol}_\delta \sum_{m=1}^{\infty} (K(x_m)-1),
\end{aligned}$$

wobei vol_δ das Volumen der n-dimensionalen offenen Kugel mit Radius δ ist. Aus der Konvergenz der Reihe folgt $K(x_m) - 1 \longrightarrow 0$. Damit ist ein Widerspruch erzeugt. ∎

Im folgenden Lemma wird das Konzentrationsfunktional c_k^n untersucht. Dabei fliest neben den oben formulierten Voraussetzungen auch die eben bewiesene Beschränktheit des Kerns K ein. Die Eigenschaften des Konzentrationsfunktionals spielen im Hauptsatz des Kapitels Satz 2.1.1 über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eine zentrale Rolle.

Lemma 2.1.2 *Das Konzentrationsfunktional c_k^n ist Lipschitz-stetig mit Konstante $2\gamma \|K\|_L$ und erfüllt die Wachstumsbedingung*

$$|c_k^n(y)| \leq \gamma \|K\|_L (1 + \|y\|), \quad y \in \mathbb{R}^{6n},$$

wenn die Kernfunktion K eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion ist.

Beweis Für das in (1.7) definierte Konzentrationsfunktional gilt für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{6n}$ auf Grund der Lipschitz-Stetigkeit des Kernes K

$$\begin{aligned}
|c_k^n(y) - c_k^n(\tilde{y})| &= \left| \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} K(T_k y - T_i y) - K(T_k \tilde{y} - T_i \tilde{y}) \right| \\
&\leq \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} |K(T_k y - T_i y) - K(T_k \tilde{y} - T_i \tilde{y})| \\
&\leq \frac{\gamma}{n} \|K\|_L \sum_{i=1}^{n} \|T_k y - T_i y - T_k \tilde{y} + T_i \tilde{y}\| .
\end{aligned}$$

Beachtet man noch, dass die T_k als Projektionen selbst Lipschitz-stetig mit Konstante 1 sind, dann ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
|c_k^n(y) - c_k^n(\tilde{y})| &\leq \frac{\gamma}{n} \|K\|_L \sum_{i=1}^{n} \|T_k y - T_k \tilde{y}\| + \|T_i y - T_i \tilde{y}\| \\
&\leq 2\frac{\gamma}{n} n \|K\|_L \|y - \tilde{y}\| \\
&= 2\gamma \|K\|_L \|y - \tilde{y}\|
\end{aligned}$$

direkt, dass das Konzentrationsfunktional ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

Ferner gilt die Wachstumsbedingung für $y \in \mathbb{R}^{6n}$ wegen

$$\begin{aligned}
|c_k^n(y)| &= \left| \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} K(T_k y - T_i y) \right| \\
&\leq \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} |K(T_k y - T_i y)| \\
&\leq \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(|K(T_k y - T_i y) - K(T_k y)| + |K(T_k y)| \right) \\
&\leq \gamma \|K\|_L \|y\| + \gamma \|K\|_L \\
&\leq \gamma \|K\|_L (1 + \|y\|).
\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass nach Lemma 2.1.1 aus der Lipschitz-Stetigkeit die Beschränktheit des Kernes K folgt. ■

Vor dem Hintergrund dieser Vorüberlegungen kann nun der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz als Hauptergebnis dieses Abschnittes bewiesen werden.

Satz 2.1.1 *Unter den genannten Voraussetzungen besitzt die stochastische Differenzialgleichung (1.11) eine starke, pfadweise eindeutige Lösung Y_t mit Startkonfiguration η. Darüberhinaus ist der Prozess quadratintegrierbar, d.h. für alle $T > 0$ existiert eine Konstante C, so dass*

$$\boldsymbol{E}\left[\|Y_t\|^2\right] \leq C(1 + \boldsymbol{E}\left[\|\eta\|^2\right])e^{Ct}; \quad 0 \leq t \leq T$$

gilt.

Beweis Zum Beweis der getroffenen Aussage ist nach [KS91, 5.2.9] zu zeigen, dass Driftvektor und Dispersionsmatrix global Lipschitz-stetig sind und einer linearen Wachstumsbedingung genügen. Dies soll im Folgenden Schritt für Schritt geschehen.

Für den in (1.10) definierten Driftvektor für das k-te Teilchen gilt mit $x, y \in \mathbb{R}^{6n}$ nach Lemma 2.1.2

$$\begin{aligned}
\|b_k(x) - b_k(y)\|^2 =& (x_{k4} - y_{k4})^2 + (x_{k5} - y_{k5})^2 + (x_{k6} - y_{k6})^2 \\
&+ \left[\mu(c_k^n(x)) - \mu(c_k^n(y)) + \beta(y_{k4} - x_{k4})\right]^2 \\
&+ \beta^2(y_{k5} - x_{k5})^2 + \beta^2(y_{k6} - x_{k6})^2 \\
\leq& (x_{k4} - y_{k4})^2 + (x_{k5} - y_{k5})^2 + (x_{k6} - y_{k6})^2 \\
&+ 2\left(\mu(c_k^n(x)) - \mu(c_k^n(y))\right)^2 + 2\beta^2(x_{k4} - y_{k4})^2 \\
&+ \beta^2(x_{k5} - y_{k5})^2 + \beta^2(x_{k6} - y_{k6})^2 \\
\leq& (1 + 2\beta^2)\|x - y\|^2 + 2\|\mu\|_L^2 |c_k^n(x) - c_k^n(y)|^2 \\
\leq& (1 + 2\beta^2)\|x - y\|^2 + 2\|\mu\|_L^2 4\gamma^2 \|K\|_L^2 \|x - y\|^2 \\
\leq& \underbrace{\left((1 + 2\beta^2) + 8\|\mu\|_L^2 \gamma^2 \|K\|_L^2\right)}_{\triangleq C_0} \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\|b(x) - b(y)\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \|b_k(x) - b_k(y)\|^2 \\
&\leq nC_0 \|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

d.h. der Driftvektor ist global Lipschitz-stetig.

Ebenso erhält man auf Grund der geforderten Lipschitz-Stetigkeit der Dispersionskoeffizienten σ_i für die Dispersionsmatrix (1.9) des k-ten Teilchens

$$\begin{aligned}
\|\xi_k(x) - \xi_k(y)\|^2 &= \sum_{i=1}^{3} \|\sigma_i(c_k^n(x)) - \sigma_i(c_k^n(y))\|^2 \\
&\leq 3\|\sigma\|_L^2 |c_k^n(x) - c_k^n(y)|^2 \\
&\leq 12\gamma^2 \|\sigma\|_L^2 \|K\|_L^2 \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\|\sigma(x)-\sigma(y)\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k(x)-\xi_k(y)\|^2 \\ &\leq 12n\gamma^2 \|\sigma\|_L^2 \|K\|_L^2 \|x-y\|^2\end{aligned}$$

die Lipschitz-Stetigkeit der Dispersionsmatrix.

Die in [KS91, Theorem 5.2.9] zusätzlich geforderte lineare Wachstumsbedingung ergibt sich für festes $y \in \mathbb{R}^d$ aus der Lipschitz-Stetigkeit der Koeffizienten ($C_1 \triangleq \sqrt{nC_0}$) wie nachstehend zu sehen ist

$$\begin{aligned}\|b(x)\| &= \|b(x)-b(y)+b(y)\| \\ &\leq \|b(x)-b(y)\| + \|b(y)\| \\ &\leq C_1 \|x-y\| + \|b(y)\| \\ &\leq C_1 \|x\| + \underbrace{C_1 \|y\| + \|b(y)\|}_{\triangleq C_2} \\ &\leq \max\{C_1, C_2\}(1+\|x\|).\end{aligned}$$

Analog gilt obige Umformung für $\sigma(x)$. Die formulierten Eigenschaften der eindeutigen Lösung garantiert dann wie erwähnt [KS91, 5.2.9]. ■

Es kann noch bemerkt werden, dass die geforderte globale Lipschitzbedingung auf eine lokale Lipschitzbedingung abgeschwächt werden kann. Allerdings muss dann zusätzlich die lineare Wachstumsbedingung für μ und die σ_i gefordert werden (vgl. [Fri75, Theorem5.2.2]).

Neben der Existenz sind vor allem die Eigenschaften der Lösung von Interesse, mit denen sich deshalb das restliche Kapitel beschäftigt. Zunächst müssen allerdings wieder einige technische Begriffe eingeführt werden.

Wählt man für die Startkonfiguration einen festen Punkt, etwa $\eta = x$ fast sicher, so wird für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{6n})$, d.h. eine Borel-messbare Menge, und beschränktes, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{6n})$-messbares f durch

$$F_t(x,A) \triangleq P^x(Y_t \in A) \quad \text{und} \tag{2.2}$$

$$F_t f(x) \triangleq \int f(y) F_t(x,dy) \tag{2.3}$$

eine Familie von Markovkernen mit zugehörigen Übergangsfunktionen definiert. Die Übergangsfunktionen F_t können auch als lineare Operatoren auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ aufgefasst werden. Hierzu sei $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ die Menge der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktion. Offensichtlich gilt die Relation $C_\infty(\mathbb{R}^d) \subsetneq C_b(\mathbb{R}^d)$.

In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Feller-Dynkin Halbgruppe (vgl. [Wil79, III.8]) anzuführen. Eine Erläuterung hiervon folgt in Definition 2.1.5.

Definition 2.1.5 *Eine Familie $\{F_t; t \geq 0\}$ von linearen Operatoren auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ wird* **Feller-Dynkin Halbgruppe** *genannt, wenn folgende Bedingungen gelten:*

1. *Für alle $t \geq 0$ gilt*
$$F_t : C_\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^d).$$
2. *Für alle $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt aus*
$$0 \leq f \leq 1 \Longrightarrow F_t f \leq 1.$$
3. *Für alle $s, t \geq 0$ gilt*
$$F_t F_s = F_{s+t}, \quad F_0 = I.$$
4. *Für alle $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt*
$$\lim_{t \downarrow 0} \|F_t f - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Für den nächsten Begriff muss der Definitionsbereich und der Wertebereich für die Familie der Übergangsfunktionen F_t erweitert werden.

Gilt für die Familie von Übergangsfunktionen F_t in 1. von Definition 2.1.5 die Eigenschaft

$$F_t : C_b(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0,$$

so besitzt F_t die **Feller-Eigenschaft** . Lässt sich diese Eigenschaft auch auf die beschränkten Borel-messbaren Funktionen erweitern, d.h. gilt

$$F_t : b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0,$$

dann spricht man von der **starken Feller-Eigenschaft**.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass sich dieser Vorgang auch umkehren lässt. Mit Hilfe des Satzes von Riesz kann man aus einer Feller-Dynkin Halbgruppe entsprechende Übergangsfunktionen konstruieren (vgl. [RY91, III.2]). Hiervon wird im weiteren Verlauf allerdings kein Gebrauch gemacht.

Für das Pickard-Tory Modell kann nun abschließend folgende Aussage formuliert werden (vgl. [Wil79, V.22]).

Satz 2.1.2 *Unter den genannten Voraussetzungen besitzt die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (1.11) die starke Markov-Eigenschaft und die mittels (2.2) definierten Übergangsfunktionen $\{F_t\}$ bilden eine Feller-Dynkin Halbgruppe mit Feller-Eigenschaft.*

2.2 Nachweis der Existenz einer Dichte

Wie in der Einleitung erwähnt, kann die klassische Itô-Theorie die Frage nach der Existenz von Dichten für Markovkerne nicht beantworten. Es interessiert nun die Frage, ob für die in (2.3) erklärten Übergangsfunktionen eine Dichtefunktion $p_t(x, y)$ existiert, so dass die Beziehung

$$F_t f(x) \triangleq \int f(y) F_t(x, dy) = \int f(y) p_t(x, y) dy$$

gilt. In diesem Fall löst diese, wie in Kapitel 1 erwähnt, die Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung oder Fokker-Planck-Gleichung (vgl. auch [Øks98, 8.3]).

Definiert man dabei ausgehend vom Differenzialoperator $\mathcal{A}$ in (1.12) den formal adjungierten Operator $\mathcal{A}^*$ des Pickard-Tory Modells durch

$$(\mathcal{A}^* f)(y) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \Big[a_{ii}(y) f(y) \Big] - \sum_{i=1}^{6n} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big[b_i(y) f(y) \Big], \quad f \in C^2(\mathbb{R}^{6n}) \tag{2.4}$$

so löst die Dichtefunktion $p_t(x, y)$ für festes $y \in \mathbb{R}^{6n}$ die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \mathcal{A}^* p_t(x, y), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^{6n}. \tag{2.5}$$

Eine positive Antwort für das vorliegende Modell kann mit Hilfe des Theorems von Hörmander gegeben werden. Hierzu müssen die Koeffizienten der stochastischen Differenzialgleichung als Vektorfelder interpretiert werden und die daraus konstruierten Lie-Algebren für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^{6n}$ den Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^{6n}$ aufspannen.

Im Folgenden werden dazu einige Begriffe aus der Differenzialgeometrie zur Verfügung gestellt, die zur Untersuchung der stochastischen Differenzialgleichung (1.11) notwendig sind (vgl. [IW89, v] und [Gra94, 25.5]). Im Einzelnen sind dies:

Mit $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ werde die Menge der reellwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. $f+g$, $f \cdot g$ und af sind für $a \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ auf die übliche Weise erklärt. Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eine unendlichdimensionale, assoziative und kommutative Algebra mit Einselement ([Gra94, Lemma 25.2]).

Des Weiteren muss der Begriff des Tangentialvektors (ausgehend vom $\mathbb{R}^n$) verallgemeinert werden. Diese Verallgemeinerung erlaubt es, die Koeffizienten des Pickard-Tory Modells in Kombination mit partiellen Ableitungen, ausgewertet an einer Stelle x, als Tangentialvektoren zu sehen.

Definition 2.2.1 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ein* **Tangentialvektor** *V_x im Punkt x ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{R}$ für den zusätzlich folgende Produktregel*

$$V_x(fg) = f(x)V_x(g) + g(x)V_x(f)$$

mit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt x wird mit $T_x\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Durch

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x f \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x$$

wird ein Tangentialvektor definiert und $T_x\mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise zu einem Vektorraum gemacht. Dabei bildet

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_x \right\}$$

eine Basis von $T_x\mathbb{R}^n$ ([Gra94, Lemma 25.8-Korollar 25.13]). Nun kann der (abstrakte) Begriff eines Vektorfeldes definiert werden.

Definition 2.2.2 *Ein* **Vektorfeld** *X ist eine Abbildung von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften*

1. $X(af+bg) = aXf + bXg$ *(Linearitätseigenschaft)*
2. $X(fg) = f(Xg) + (Xf)g$ *(Produktregel)*

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Die Menge der Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ wird mit

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \triangleq \{X \mid X \text{ ist Vektorfeld auf } \mathbb{R}^n\}$$

bezeichnet.

*Auf $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ wird durch $[X_1, X_2] \triangleq X_1X_2 - X_2X_1$ eine **Klammeroperation** $[\cdot,\cdot] : \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ erklärt.*

Der Zusammenhang zwischen Vektorfeld (Definition 2.2.2) und Tangentialvektor (Definition 2.2.1) ergibt sich, indem das Vektorfeld X auf einen Punkt x eingeschränkt wird und man so einen Tangentialvektor erhält, d.h. $X_x f \triangleq (Xf)|_x \in \mathbb{R}$ und $X_x \in T_x\mathbb{R}^n$. Den Bezug zur klassischen Analysis stellt das folgende Lemma her.

Lemma 2.2.1 *Durch den Operator*

$$\partial_i : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n),$$

der jeder Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zuordnet, ist ein Vektorfeld erklärt, d.h. für $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\partial_i \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial_i|_x \in T_x\mathbb{R}^n.$$

Wie schon $T_x\mathbb{R}^n$ kann man auch $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ auf kanonische Weise zu einem Vektorraum erklären. Der Versuch, auch eine Multiplikation im üblichen Sinne einzuführen, scheitert, da im Allgemeinen das Produkt zweier Vektorfelder kein Vektorfeld ist. Die soeben eingeführte Klammeroperation behebt diesen Mangel.

Der für die Formulierung des Hörmander-Kriteriums zentrale Begriff der Lie-Algebra wird in der folgenden Definition präzisiert.

Definition 2.2.3 *Sei K ein Körper, L ein K-Vektorraum und es existiere eine Klammeroperation $[\cdot,\cdot] : L \times L \longrightarrow L$ auf L. Man nennt L eine* ***Lie-Algebra*** *über K, wenn folgende Bedingungen gelten:*

1. *Für $D \in L$ gilt $[D, D] = 0_L$*
2. *Für $D1, D2, D3 \in L$ und $a, b \in K$ gilt*
$$\begin{aligned}[aD1 + bD2, D3] &= a[D1, D3] + b[D2, D3] \quad \textit{bzw.}\\ [D1, aD2 + bD3] &= a[D1, D2] + b[D1, D3]\end{aligned}$$
3. *Für die Klammeroperation gilt die Jacobiidentität, d.h. für $D1, D2, D3 \in L$ gilt*
$$[[D1, D2], D3] + [[D3, D1], D2] + [[D2, D3], D1] = 0.$$

Verknüpft man noch die beiden Mengen $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ durch eine Multiplikation der Form

$$(gX)f \triangleq g(Xf),$$

d.h. eine Abbildung $(g, X) \mapsto gX$ von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, dann kann man die für die weitere Anwendung relevante Menge $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ folgendermaßen charakterisieren. Nach [Gra94, Lemma 25.26] gilt:

Satz 2.2.1 *Die Menge $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ ist ein $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$-Modul und eine Lie-Algebra über $\mathbb{R}$.*

Als Abschluss dieser vorbereitenden Bemerkungen noch zwei nützliche Rechenregeln. Die Klammeroperation ist bezüglich der Multiplikation mit Funktionen nicht multilinear, stattdessen gilt nach [Gra94, Lemma 25.27, Korollar 25.34]

Lemma 2.2.2 *Es seien $X, Y, \partial_i, \partial_j \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ und $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \tag{2.6}$$

und

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad \textit{für alle } 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.7}$$

Bevor wie besprochen das Hörmander-Kriterium angewendet werden kann, muss die Modellgleichung in Fisk-Stratonovich-Form notiert werden. Hierbei wird anstatt des Itô-Integrals (Integration bzgl. dW_t) ein Stratonovich-Integral benutzt (Integration bzgl. ∂W_t). Bei einem Wechsel zwischen Stratonovich-Form und Itô-Form bleibt die Dispersionsmatrix erhalten, hingegen ändert sich im Allgemeinen der Drift. In dem hier betrachteten Fall stimmen beide Formen allerdings überein, wie das nachstehende Lemma zeigt.

Lemma 2.2.3 *Die Fisk-Stratonovich-Form des Pickard-Tory Modells (1.11) hat die Form*

$$\begin{aligned} dY_t &= b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)\partial W_t \\ Y_0 &= \eta, \end{aligned} \tag{2.8}$$

d.h. der Driftvektor ändert sich nicht.

Beweis Für den Beweis wird ausgenutzt, dass die Darstellung einer stochastischen Differenzialgleichung in Fisk-Stratonovich-Form und Itô-Form äquivalent ist. Es wird im Weiteren gezeigt, dass die Form (2.8) in die Itô Form des Pickard-Tory Modells (1.11) überführt werden kann.

Beim Übergang von der Darstellung einer stochastischen Differenzialgleichung in Fisk-Stratonovich-Form in die Itô-Form muss der Driftvektor geeignet modifiziert werden.

Der Driftvektor $b(y) : \mathbb{R}^{6n} \longrightarrow \mathbb{R}^{6n}$ ist durch (1.10), die Dispersionsmatrix $\sigma(y) : \mathbb{R}^{6n} \longrightarrow \mathbb{R}^{6n} \times \mathbb{R}^{6n}$ durch (1.9) erklärt. Der transformierte Driftvektor wird mit $d(y) : \mathbb{R}^{6n} \longrightarrow \mathbb{R}^{6n}$ bezeichnet.

Dann hat die stochastische Differenzialgleichung (2.8) gemäß [IW89, Theorem V.1.1] die Itô-Form

$$\begin{aligned} dY_t &= d(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t \\ Y_0 &= \eta \end{aligned}$$

wobei sich der neue Driftvektor mittels

$$d^i(y) = b^i(y) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{6n}(\frac{\partial}{\partial y_k}\sigma_{ij}(y))\sigma_{kj}(y), \quad i = 1, \dots, 6n$$

berechnet.

Die Dispersionsmatrix σ hat Diagonalgestalt. Deshalb vereinfacht sich die Darstellung für den neuen Driftvektor d $(i = j = k)$ zu

$$d^i(y) = b^i(y) + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y_i}\sigma_{ii}(y))\sigma_{ii}(y), \quad i = 1, \dots, 6n.$$

Die Aussage des Lemmas ist bewiesen, wenn $\frac{\partial}{\partial y_i}\sigma_{ii}(y) = 0$ für alle $i = 1, \dots, 6n$ nachgewiesen wird. Für $i = 1, 2, 3, 7, 8, 9, \dots, 6n-5, 6n-4, 6n-3$ ist dies offensichtlich, da $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ Konstanten sind. Wegen der sich wiederholenden Struktur kann für die restlichen Fälle o.B.d.A. $i = 4, 5, 6$ gewählt werden.

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y_4}\sigma_{44}(y) = \frac{\partial}{\partial y_4}\sigma_1(c_1^n(y)) = 0$$

weil

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_4}c_1^n(y) &= \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_4}K(T_1 y - T_i y)\\ &= \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_4}K((y_1, y_2, y_3) - (y_{6i-5}, y_{6i-4}, y_{6i-3}))\\ &= 0\end{aligned}$$

ist und die Kernfunktion K nicht von y_4, y_5, y_6 abhängt. Auf analoge Art erhält man

$$\frac{\partial}{\partial y_5}\sigma_{55}(y) = \frac{\partial}{\partial y_6}\sigma_{66}(y) = 0.$$

■

Im Anschluss kann das angekündigte Hörmander-Kriterium formuliert werden. Aus den Komponenten eines Driftvektors $\tilde{b}(x) \in \mathbb{R}^n$ und einer Dispersionsmatrix $\tilde{\sigma}(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ erhält man die Vektorfelder $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$:

$$A_0 \triangleq \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(x)\partial_i, \quad A_j \triangleq \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_{ij}(x)\partial_i \tag{2.9}$$

Hieraus werden nun rekursiv folgende Lie-Algebren definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\triangleq \mathbf{Lie}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \\ \mathcal{A}_k &\triangleq \mathbf{Lie}\{[A, A_0] : A \in \mathcal{A}_{k-1}\}, \quad k \geq 1 \\ \mathcal{A} &\triangleq \mathbf{Lie}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\} \end{aligned}$$

Für $B_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, \ldots$ steht $\mathbf{Lie}\{B_1, B_2, \ldots\}$ für die durch die B_i erzeugte Lie-Algebra, d.h. den unter Berücksichtigung die Lie-Klammer aufgespannten Vektorraum.

Definition 2.2.4 *Wenn die Lie-Algebra $\mathcal{A}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ den Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^n$ aufspannt, dann erfüllen die Vektorfelder $A_0, A_1, \ldots, A_n, \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ das* ***Hörmander-Kriterium****.*

Neben der Gültigkeit dieser strukturellen Voraussetzungen müssen nun noch die Voraussetzungen an die Koeffizienten verschärft formuliert werden. Im Einzelnen ergeben sich:

1. Die Kernfunktion $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Dichtefunktion und ihre erste Ableitung sei auf ganz $\mathbb{R}^3$ beschränkt.

2. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist unendlich oft differenzierbar und seine Ableitung ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

3. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls unendlich oft differenzierbar und ihre Ableitung ist ebenfalls auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Zusätzlich sind die Dispersionskoeffizienten strikt positiv, d.h. es gilt

$$\min_{i=1,2,3} \inf_{x \in \mathbb{R}} \sigma_i(x) > 0.$$

Es kann nun das Hauptergebnis über die Existenz einer Dichte im Pickard-Tory Modell formuliert werden.

Satz 2.2.2 *Unter den zusätzlichen Bedingungen an die Koeffizienten des Modells (1.11) besitzen die Übergangsfunktionen* $\{F_t\}$ *eine Dichte* $p_t(x, y)$ *bzgl. des Lebesgue-Maßes, die unendlich oft differenzierbar ist.*

Beweis Zuerst wird geprüft, ob die Koeffizienten das Hörmander-Kriterium erfüllen. Gemäß (2.9) werden deshalb die Vektorfelder A_i definiert. Die Vektorfelder sind für $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{6n})$ durch

$$A_i \triangleq \begin{cases} \varepsilon_1 \partial_i & i = 1, 7, 13, \ldots, 6n-5 \\ \varepsilon_2 \partial_i & i = 2, 8, 14, \ldots, 6n-4 \\ \varepsilon_3 \partial_i & i = 3, 9, 15, \ldots, 6n-3 \\ \sigma_1(c^n_{(i+2)/6}(y))\partial_i & i = 4, 10, 16, \ldots, 6n-2 \\ \sigma_2(c^n_{(i+1)/6}(y))\partial_i & i = 5, 11, 17, \ldots, 6n-1 \\ \sigma_3(c^n_{i/6}(y))\partial_i & i = 6, 12, 18, \ldots, 6n \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} A_0 \triangleq & \sum_{i=1}^{n} (y_{6i-2}\partial_{6i-5} + y_{6i-1}\partial_{6i-4} + y_{6i}\partial_{6i-3}) \\ & -\beta \sum_{i=1}^{n} (y_{6i-2}\partial_{6i-2} + y_{6i-1}\partial_{6i-1} + y_{6i}\partial_{6i}) + \sum_{i=1}^{n} \mu(c_i^n(y))\partial_{6i-2} \end{aligned}$$

erklärt.

Es werden nun sukzessive die Lie-Algebren $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots$ berechnet. Sind die Konstanten ε_i (i=1,2,3) strikt positiv, so gilt nach der Voraussetzung $\sigma_i > 0$ bereits

$$\mathbf{span}\{A_1, A_2, \ldots, A_{6n}\} = \mathbf{span}\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_{6n}\}$$

und damit das Hörmander-Kriterium. Sind hingegen die Konstanten $\varepsilon_i = 0$ (i=1,2,3) so gilt

$$\mathbf{Lie}\{A_1, A_2, \ldots, A_{6n}\} = \mathbf{span}\{\partial_4, \partial_5, \partial_6, \partial_{10}, \partial_{11}, \partial_{12}, \ldots, \partial_{6n-2}, \partial_{6n-1}, \partial_{6n}\}$$

und somit $\mathcal{A}_0 \subsetneqq T_y\mathbb{R}^{6n}$, da durch Anwendung der Lie-Klammer auf die Vektorfelder $A_1, \ldots, A_{6n}$ keine neuen linear unabhängigen Vektorfelder entstehen.

Man berechnet daher die Lie-Algebra $\mathcal{A}_1$. Für $j = 4, 5, 6, 10, 11, 12, \ldots, 6n-2, 6n-1, 6n$ gilt

$$\begin{aligned}
[\partial_j, A_0] = &\sum_{i=1}^{n} \left([\partial_j, y_{6i-2}\partial_{6i-5}] + [\partial_j, y_{6i-1}\partial_{6i-4}] + [\partial_j, y_{6i}\partial_{6i-3}]\right) \\
&-\beta \sum_{i=1}^{n} \left([\partial_j, y_{6i-2}\partial_{6i-2}] + [\partial_j, y_{6i-1}\partial_{6i-1}] + [\partial_j, y_{6i}\partial_{6i}]\right) \\
&+\sum_{i=1}^{n} [\partial_j, \mu(c_i^n(y))\partial_{6i-2}].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nach den Regeln (2.6) und (2.7) ergeben sich folgende Aussagen für die einzelnen Summanden in (2.10):

$$\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i-2}\partial_{6i-5}] &= y_{6i-2}\underbrace{[\partial_j, \partial_{6i-5}]}_{=0} + \underbrace{(\partial_j y_{6i-2})}_{=\delta_{j,6i-2}}\partial_{6i-5} + y_{6i-2}\underbrace{(\partial_{6i-5}1)}_{=0}\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i-5} & j = 4, 10, 16, \ldots, 6n-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i-1}\partial_{6i-4}] &= y_{6i-1}[\partial_j, \partial_{6i-4}] + (\partial_j y_{6i-1})\partial_{6i-4} + y_{6i-1}(\partial_{6i-4}1)\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i-4} & j = 5, 11, 17, \ldots, 6n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i}\partial_{6i-3}] &= y_{6i}[\partial_j, \partial_{6i-3}] + (\partial_j y_{6i})\partial_{6i-3} + y_{6i}(\partial_{6i-3}1)\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i-3} & j = 6, 12, 18, \ldots, 6n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i-2}\partial_{6i-2}] &= y_{6i-2}[\partial_j, \partial_{6i-2}] + (\partial_j y_{6i-2})\partial_{6i-2} + y_{6i-2}(\partial_{6i-2}1)\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i-2} & j = 4, 10, 16, \ldots, 6n-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i-1}\partial_{6i-1}] &= y_{6i-1}[\partial_j, \partial_{6i-1}] + (\partial_j y_{6i-1})\partial_{6i-1} + y_{6i-1}(\partial_{6i-1}1)\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i-1} & j = 5, 11, 17, \dots, 6n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\partial_j, y_{6i}\partial_{6i}] &= y_{6i}[\partial_j, \partial_{6i}] + (\partial_j y_{6i})\partial_{6i} + y_{6i}(\partial_{6i}1)\partial_j \\
&= \begin{cases} \partial_{6i} & j = 6, 12, 18, \dots, 6n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Der letzte Term in (2.10) hingegen ist immer 0 wie folgende Rechnung dokumentiert.

$$
\begin{aligned}
[\partial_j, \mu(c_i^n(y))\partial_{6i-2}] &= \mu(c_i^n(y))[\partial_j, \partial_{6i-2}] + (\partial_j \mu(c_i^n(y)))\partial_{6i-2} + \mu(c_i^n(y))(\partial_{6i-2}1)\partial_j \\
&= (\partial_j \mu(c_i^n(y)))\partial_{6i-2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dabei wurde benutzt, dass die Kernfunktion K nicht von $y_4, y_5, y_6,\ y_{10}, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{6n-2},\ y_{6n-1}, y_{6n}$ abhängt und die Ableitung ∂_j des Konzentrationsfunktionals für $j = 4, 5, 6, 10, 11, 12, \dots, 6n-2, 6n-1, 6n$ deshalb 0 ergibt.

$$
\begin{aligned}
\partial_j c_i^n(y) = \frac{\gamma}{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_j K(T_i y - T_k y) = \\
\frac{\gamma}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} K((y_{6i-5}, y_{6i-4}, y_{6i-3}) - (y_{6k-5}, y_{6k-4}, y_{6k-3})) = 0
\end{aligned}
$$

Dann ergibt sich somit insgesamt

$$
[\partial_j, A_0] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \partial_{6i-5} + \partial_{6i-2} & , j = 4, 10, 16, \dots, 6n-2 \\ \sum_{i=1}^n \partial_{6i-4} + \partial_{6i-1} & , j = 5, 11, 17, \dots, 6n-1 \\ \sum_{i=1}^n \partial_{6i-3} + \partial_{6i} & , j = 6, 12, 18, \dots, 6n \end{cases}
$$

und damit $\mathcal{A}_1 = T_y\mathbb{R}^{6n}$ bzw. $\mathcal{A} = \textbf{Lie}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\} = T_y\mathbb{R}^{6n}$.

Das Hörmander-Kriterium ist also erfüllt und das Pickard-Tory Modell genügt den notwendigen strukturellen Voraussetzungen. Es bleibt die Prüfung der notwendigen Voraussetzungen an die Koeffizienten. Konkret muss gezeigt werden, dass die Koeffizienten glatte Funktionen mit beschränkten ersten Ableitungen sind.

Gemischte Ableitungen des Konzentrationsfunktionals

$$c_i^n(y) = \frac{\gamma}{n} \sum_{k=1}^{n} K(T_i y - T_k y)$$

bleiben beschränkt, da die inneren Ableitungen von K nur Vorzeichenwechsel bewirken und die Beschränktheit der Ableitungen von K vorausgesetzt wurde. Die Dispersionsmatrix und der Driftvektor bestehen neben Konstanten und linearen Termen, welche die geforderte Beschränktheit erfüllen, lediglich aus Termen der Form

$$\sigma_i(c_k^n(y)) \quad \text{bzw. } \mu(c_k^n(y)).$$

Durch Differenzieren und Anwenden der Produktregel entstehen Ableitungen von μ und σ, die nach Voraussetzung beschränkt sind, sowie Ableitungen des Konzentrationsfunktionals. Diese sind nach der obigen Überlegung ebenfalls beschränkt. Da die Beschränktheit auch für die Produkte dieser Terme bestehen bleibt, sind die notwendigen Voraussetzungen erfüllt und die Behauptung folgt z.B. mit [RW87, V.38.16]. ∎

2.3 Modell ohne Lipschitz-Bedingung

Sollen die Koeffizienten ohne Lipschitz-Bedingungen vorgegeben werden, so scheiden die bisher angewendeten Methoden aus, da diese auf Fixpunktsätzen basieren, welche die Lipschitz-Bedingungen für die Konstruktion der Lösung benötigen.

Einen technisch anderen Zugang bietet die von Stroock und Varadhan entwickelte Methode des Martingale-Problems, welche im Folgenden kurz vorgestellt und auf das Modell angewendet wird. Unter deutlich schwächeren Voraussetzungen an die Koeffizienten des Modells aber unter einer stärkeren Voraussetzung an die Modellstruktur erhält man bedingt vergleichbare Ergebnisse wie in Kapitel 2.1.

Zur Formulierung des Martingale-Problems wird ein spezieller Messraum benötigt. Als Grundraum Ω wird die Menge aller stetigen $\mathbb{R}^n$-wertigen Funktionen $w(t)$ gewählt ($\Omega \triangleq C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$). Führt man auf Ω die Metrik

$$d(w,w') \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \max_{0\le t\le i}(|w(t)-w'(t)| \wedge 1)$$

ein, so wird (Ω, d) zu einem Polnischen Raum ([Bau90, 31.6]).

$\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$ sei die durch offene Mengen von Ω gebildete Borel σ-Algebra. Es sei $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{C}_t$) die Menge aller endlichdimensionalen Zylindermengen der Form

$$C = \{\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}); (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_m)) \in A\}; \quad n \ge 1; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $i = 1, \ldots, m$ und $t_i \in [0, \infty)$ (bzw. $t_i \in [0, t]$). Dann gilt

$$\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma\{w(t) : t \ge 0\}$$

bzw. (vgl 2.4.1 und 2.4.2 in [KS91])

$$\mathcal{B}_t \triangleq \sigma(\mathcal{C}_t) = \sigma\{w(s) : 0 \le s \le t\}.$$

Allerdings genügt diese Filtrierung zunächst nicht den üblichen Bedingungen.

Das folgende abstrakte Problem betrachten Stroock und Varadhan, dabei sei S_n^+ die Menge der positiv definiten $(n \times n)$-Matrizen.

Definition 2.3.1 *Seien $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow S_n^+$ und $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (lokal beschränkte und) messbare Funktionen und $x \in \mathbb{R}^n$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$ ist eine Lösung des* ***Martingale-Problems*** **für** (a, b) **gestartet bei** *x, falls die beiden folgenden Bedingungen gelten:*

1. *$P(\omega(0) = x) = 1$*
2. *Für alle $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. für alle beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Support, ist*

$$C_t^f \triangleq f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{A} f(\omega(s)) ds$$

ein stetiges $\{\mathcal{B}_t\}$-Martingale.

*Das Martingale-Problem für (a, b) gestartet bei x ist **eindeutig**, falls nur ein einziges Maß existiert. Man nennt es „gut gestellt"(**well-posed**), wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung des Martingale-Problems für (a, b) gestartet bei x existiert.*

Die Theorie der stochastischen Integration wird in den meisten Fällen unter der Annahme entwickelt, dass die üblichen Bedingungen gelten. Das Martingale-Problem hingegen ist mit $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)), \{\mathcal{B}_t\})$ auf einem Raum erklärt, für den die üblichen Bedingungen gerade nicht gelten.

Sei $\{\mathcal{G}_t\}$ die Augmentation, d.h. die Ergänzung um P-Nullmengen, der kanonischen Filtrierung $\{\mathcal{B}_t\}$ unter P und $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{t+}$, dann erfüllt $\mathcal{F}_t$ nach Konstruktion die üblichen Bedingungen. Wegen Lemma 2.3.1 (vgl. [KS91, 5.4.13]) bleibt die Martingale Eigenschaft aber auch für die augmentierte Filtrierung erhalten.

Lemma 2.3.1 *Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$ und $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Falls $\{C_t^f, \mathcal{B}_t; 0 \leq t < \infty\}$ ein Martingale ist, dann ist auch $\{C_t^f, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ ein Martingale.*

Das Ziel ist aber weiterhin die Lösung der Modellgleichung (1.11). Bevor auf die Frage nach der Lösbarkeit eines Martingale-Problems eingegangen wird, soll deshalb zunächst der Zusammenhang mit den stochastischen Differenzialgleichungen hergestellt werden. Dabei muss das Konzept einer starken Lösung im Sinne von Definition 2.1.3 aufgegeben werden und nach einem anderen Existenzbegriff gesucht werden.

Für das in Kapitel 1 formulierte Modell wird daher eine schwache Lösung in folgendem Sinn gesucht:

Definition 2.3.2 *Eine **schwache Lösung** der stochastischen Differenzialgleichung*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.11}$$

ist ein Triple $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$ mit den Eigenschaften

1. *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine den üblichen Bedingungen genügende Filtrierung.*

2. *$X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ ist ein stetiger, adaptierter $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess und $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ ist eine d-dimensionale Brownsche Bewegung.*

3. *Für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $0 \leq t < \infty$ gilt*

$$P\left[\int_0^t \{\sigma_{ij}^2(X_s) + |b_i(X_s)|\} ds < \infty\right] = 1.$$

4. *Es gilt P-fast sicher*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s.$$

*Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(\Gamma) \triangleq P[X_0 \in \Gamma], \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt **Startverteilung** der Lösung.*

Auch der Begriff der Eindeutigkeit muss gegenüber dem Zugang nach Itô abgeschwächt werden.

Definition 2.3.3 *Es liegt **Verteilungseindeutigkeit** der Gleichung (2.11) vor, wenn für je zwei schwache Lösungen $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$ und $(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ mit gleicher Startverteilung die beiden Prozesse die gleiche Verteilung besitzen.*

Eine starke Lösung ist immer auch eine schwache Lösung, wie man aus der Definition unmittelbar abliest. Die Umkehrung gilt auf Grund eines Beispiels von Tanaka nicht (vgl. [KS91, 5.3.5]). Als Eindeutigkeitsbedingung kann deshalb die in Definition 2.3.3 formulierte Verteilungseindeutigkeit auch für starke Lösungen analog formuliert werden. Dabei folgt aus der pfadweisen Eindeutigkeit stets die Verteilungseindeutigkeit einer Lösung (vgl. [KS91, 5.3.20]).

Liegt ein schwache Lösung $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$ der Gleichung (2.11) mit $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ vor, dann löst die Verteilung von X das Martingale-Problem für $(\sigma\sigma^T, b)$ gestartet bei x, wie das folgende bekannte Lemma kurz demonstriert.

Lemma 2.3.2 *Sei $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$ eine schwache Lösung der Gleichung (2.11) mit $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ und die Dispersionsmatrix σ sei lokal beschränkt. Dann löst die Verteilung von X das Martingale-Problem für $(\sigma\sigma^T, b)$ gestartet bei x.*

Beweis Als stetiger Prozess induziert die schwache Lösung (X, W) in $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), B(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)))$ eine Verteilung. Nach dem Transformationssatz bleibt daher zu zeigen, dass

$$\{M_t^f, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\} \text{ mit } M_t^f \triangleq f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)ds$$

für alle $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein stetiges $\{\mathcal{F}_t\}$-Martingale ist. Dabei ist $\mathcal{A}$ ein zu (1.12) analog gebildeter Differenzialoperator.

Mit der Itô-Formel erhält man für $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n \int_0^t b_i(X_s) \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dW_s^{(j)} \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(X_s)\sigma_{kj}(X_s)}_{\triangleq a_{ik}(X_s)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(X_s) ds \\
&= \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_0^t \sigma_{ij}(X_s) \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dW_s^{(j)}}_{\triangleq M_t^{(i,j)}}
\end{aligned}$$

und damit

$$M_t^f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_t^{(i,j)}.$$

Da f kompakten Support hat und die σ_{ij} lokal beschränkt sind, ist der Integrand von allen $M_t^{(i,j)}$ beschränkt und M^f daher ein stetiges (sogar quadratisch integrierbares) $\{\mathcal{F}_t\}$-Martingale. ∎

Ist umgekehrt P^x eine Lösung des Martingale-Problems für $(\sigma\sigma^T, b)$ gestartet bei x und ist $\sigma(x)$ strikt positiv definit, dann existiert eine schwache Lösung $(X_t \triangleq \omega(t), W_t), (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)), P), \{\mathcal{F}_t\}$ der Gleichung (2.11) mit $X_0 = x$ (vgl. [KS91, 5.4.6]).

Wird auf die Voraussetzung $\sigma(x)$ strikt positiv definit verzichtet, dann muss unter Umständen der Wahrscheinlichkeitsraum aus technischen Gründen erweitert werden. Im weiteren Verlauf wird diese Zusatzbedingung an die Dispersionsmatrix notwendig, deshalb kann bereits hier diese Voraussetzung verwendet werden.

Fasst man dies alles zusammen, so erhält man folgende Äquivalenz:

Satz 2.3.1 *Sei $\sigma(x)$ lokal beschränkt und strikt positiv definit, dann ist die Existenz einer Lösung P des Martingale-Problems für $(\sigma\sigma^T, b)$ äquivalent zur Existenz einer schwachen Lösung $(\tilde{X}, \tilde{W})$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ der Gleichung (2.11). Die beiden Lösungen sind durch $P = \tilde{P}X^{-1}$ verknüpft, d.h. X induziert ein Maß P auf $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)))$.*

Zwei schwache Lösungen sind gerade dann äquivalent, wenn sie gleiche Verteilungen besitzen. Es ergibt sich

Satz 2.3.2 *Die Eindeutigkeit der Lösung P des Martingale-Problems für beliebige aber feste Anfangsverteilung*

$$P\{\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); \omega(0) \in \Gamma\} = \mu(\Gamma); \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

ist äquivalent zur Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der Gleichung (2.11).

Damit das Martingale-Problem lösbar ist, werden die folgenden Voraussetzungen an die Koeffizienten des Modells (1.11) gestellt:

1. $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$, d.h. es gilt insbesondere $K(x) \geq 0, \int K(x)dx = 1$.
2. Die Konstanten $\varepsilon_i > 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind strikt positiv.
3. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist messbar und genügt der Wachstumsbedingung
$$\mu(x) \leq M(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$
4. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind stetig und strikt positiv, d.h.
$$\min_{i=1,2,3} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma_i(x) > 0,$$
und genügen der Wachstumsbedingung
$$|\sigma_i(x)| \leq M(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \tag{2.13}$$

Folgende Aussagen lassen sich dann für das Diffusionsmodell zeigen:

Satz 2.3.3 *Unter den genannten Voraussetzungen besitzt*

1. *die stochastische Differenzialgleichung (1.11) eine schwache, verteilungs-eindeutige Lösung Y_t. Diese besitzt*

2. *die starke Markov-Eigenschaft und die zugehörige Familie $\{F_t\}$ von Übergangsfunktionen ist eine Feller-Dynkin Halbgruppe mit starker Feller-Eigenschaft und besitzt darüber hinaus*

3. *eine Dichte $p_t(x,y)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes.*

Beweis Ist die Diffusionsmatrix a stetig und strikt positiv definit und der Driftvektor messbar, so wird in [SV79, Corollary 7.2.1] zunächst unter der zusätzlichen Annahme der Beschränkheit bewiesen, dass das Martingale-Problem gut gestellt, die Lösungen $\{P^x\}$ messbar sind und die Prozesse $(X_t \triangleq \omega(t))$ die starke Markov Eigenschaft besitzen.

Die starke Feller-Eigenschaft wird schließlich in [SV79, Corollary 7.2.4] gezeigt. In dieser Situation sind nach [SV79, Lemma 9.2.2] in Verbindung mit [SV79, Korollar 9.1.10] die Übergangsfunktionen $F_t(x,A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ stetig auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ und für alle $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ besitzt $F_t(x,A)$ eine Dichte $p_t(x,y)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes.

Durch [SV79, Lemma 10.1.5] in Verbindung mit [SV79, Korollar 10.2.2] lässt sich unter Beibehaltung des bisher gesagten die Voraussetzung der Beschränktheit durch eine schwächere Wachstumsbedingung ersetzen.

Auf Grund der in Satz 2.3.1 und Satz 2.3.2 beschriebenen Äquivalenz zwischen Martingale-Problem und stochastischer Differenzialgleichung kann hieraus dann eine eindeutige schwache Lösung

$$(X_t \triangleq \omega(t), W_t), (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{6n}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{6n})), P), \{\mathcal{F}_t\}$$

der stochastischen Differenzialgleichung (1.11) konstruiert werden.

Im Einzelnen müssen nun die geforderten Eigenschaften an die Koeffizienten im Pickard-Tory Modell nachgewiesen werden.

Es sei $x, \theta \in \mathbb{R}^{6n}$ mit $|\theta| = 1$. Auf Grund der strikten Positivität der σ_i existiert $\varepsilon \triangleq \min_{x\in\mathbb{R}}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)\} > 0$. Mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{6n}$ wird das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{6n}$ bezeichnet. Daher gilt wegen (1.14)

$$
\begin{aligned}
\langle \theta, a(x)\theta\rangle_{6n} &= \theta_1^2\varepsilon_1^2 + \theta_2^2\varepsilon_2^2 + \theta_3^2\varepsilon_3^2 + \theta_4^2\sigma(c_1^n(x))^2 + \theta_5^2\sigma(c_1^n(x))^2 + \theta_6^2\sigma(c_1^n(x))^2 \\
&\quad + \theta_7^2\varepsilon_1^2 + \theta_8^2\varepsilon_2^2 + \theta_9^2\varepsilon_3^2 + \theta_{10}^2\sigma(c_2^n(x))^2 + \theta_{11}^2\sigma(c_2^n(x))^2 + \theta_{12}^2\sigma(c_2^n(x))^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \theta_{6n-5}^2\varepsilon_1^2 + \theta_{6n-4}^2\varepsilon_2^2 + \theta_{6n-3}^2\varepsilon_3^2 + \theta_{6n-2}^2\sigma(c_n^n(x))^2 + \theta_{6n-1}^2\sigma(c_n^n(x))^2 \\
&\qquad + \theta_{6n}^2\sigma(c_n^n(x))^2 \\
&\geq \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{6n} \theta_i^2 \\
&= \varepsilon^2 \left|\theta\right|^2 \\
&= \varepsilon^2 > 0
\end{aligned}
$$

und die Diffusionsmatrix $a(x)$ ist strikt positiv definit.

Nach Lemma 2.1.2 ist das Konzentrationsfunktional c_k^n stetig und mit der vorausgesetzten Stetigkeit der σ_i ergibt sich insgesamt die Stetigkeit der Diffusionsmatrix $a(x)$.

Zur Ermittlung der Wachstumsbedingung der a_{ik} genügt es auf Grund der speziellen Form (1.14) die Fälle $i = k = 4, 5, 6, 10, 11, 12, \ldots, 6n-1, 6n-2, 6n$ zu betrachten.

Sei $l = (i+3) \mod 6$, $m = \lceil i/6 \rceil$, d.h. $l = 1, 2, 3$ und $1 \leq m \leq n$, dann gilt wegen Lemma 2.1.2 und den Voraussetzungen (2.13) an die σ_i für $x \in \mathbb{R}^{6n}$

$$
\begin{aligned}
|a_{ii}(x)| &= \left[\sigma_l(c_m^n(x))\right]^2 \\
&\leq M^2(1 + |c_m^n(x)|)^2 \\
&\leq 2M^2(1 + |c_m^n(x)|^2) \\
&\leq 2M^2(1 + \gamma^2 \left\|K\right\|_L^2 (1 + \|x\|)^2) \\
&\leq 2M^2(1 + 2\gamma^2 \left\|K\right\|_L^2 + 2\gamma^2 \left\|K\right\|_L^2 \|x\|^2) \\
&\leq 2M^2(1 + 2\gamma^2 \left\|K\right\|_L^2)(1 + \|x\|^2),
\end{aligned}
$$

d.h. die Diffusionsmatrix $a(x)$ erfüllt die notwendige Wachstumsbedingung.

Die Messbarkeit des Driftvektors ist offensichtlich. (Ist μ sogar stetig, ist der Driftvektor nach der obigen Argumentation ebenfalls stetig).

Es gilt wegen Lemma 2.1.2 und den Voraussetzungen (2.12) an μ für $x \in \mathbb{R}^{6n}$ ($x = (y_1, \ldots, y_n)$ und $y_k = (x_{k1}, \ldots, x_{k6}) \in \mathbb{R}^6$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_{k4}\mu(c_k^n(x)) &\leq \max\{1, \|x\|\} \sum_{k=1}^{n} \mu(c_k^n(x)) \\
&\leq \max\{1, \|x\|\} M \sum_{k=1}^{n} (1 + |c_k^n(x)|) \\
&\leq \max\{1, \|x\|\} M \sum_{k=1}^{n} (1 + \gamma \|K\|_L (1 + \|x\|)) \\
&\leq \max\{1, \|x\|\} \underbrace{n\, M(1 + \gamma \|K\|_L)}_{\triangleq M_0} (1 + \|x\|)
\end{aligned}$$

wobei o.B.d.A $M \geq 1$ und daher $M_0 \geq 1$ vorausgesetzt werden darf.

Man erhält damit

$$\begin{aligned}
\langle x, b(x)\rangle_{6n} &= \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, b_k(x)\rangle_6 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_{k1}x_{k4} + \underbrace{x_{k2}x_{k5}}_{\leq x_{k2}^2 + x_{k5}^2} + x_{k3}x_{k6} + x_{k4}\mu(c_k^n(x)) \underbrace{- \beta(x_{k4}^2 + x_{k5}^2 + x_{k6}^2)}_{\leq 0} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{6} x_{ki}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{k4}\mu(c_k^n(x)) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{k4}\mu(c_k^n(x)) \\
&\leq \|x\|^2 + \max\{1, \|x\|\} M_0 (1 + \|x\|) \\
&\leq \begin{cases} 3M_0 & ,\text{für } \|x\| < 1 \\ 3M_0 \|x\|^2 & ,\text{für } \|x\| \geq 1 \end{cases} \\
&\leq 3M_0(1 + \|x\|^2).
\end{aligned}$$

Der Driftvektor erfüllt hiermit ebenfalls die geforderte Wachstumsbedingung und die zu Beginn des Beweises genannten Voraussetzungen sind somit alle gegeben.

■

Kapitel 3

Grenzdynamik

In Kapitel 1 wurde das Teilchenmodell von Pickard-Tory vorgestellt und im Anschluss dessen Eigenschaften ausführlich untersucht. Ist man an einer konkreten Simulation interessiert, so ergeben sich verschiedenartige Probleme. Im Folgenden soll auf diese Hindernisse kurz eingegangen und darüber hinaus eine Methodik vorgestellt werden, die sich zur Behandlung solch komplexer Systeme anbietet.

Das Pickard-Tory Modell ist ein Vielteilchenmodell und wurde vor dem Hintergrund entwickelt, Systeme mit mehr als 10^6 Teilchen bei einem Partikelradius von ca. $10\mu m$ bis $100\mu m$ zu untersuchen. Für jedes Teilchen müssen dabei jeweils drei Orts- und drei Geschwindigkeitskomponenten mit einer angemessenen Genauigkeit gespeichert werden. Insgesamt werden damit hohe Anforderungen an den Speicherbedarf des Computers gestellt.

Das weitaus größere Problem besteht in der starken Abhängigkeit der Teilchenprozesse untereinander. Wie in Kapitel 1 ausführlich diskutiert, hängt die Entwicklung eines jeden Teilchens von der Gesamtkonfiguration des Systems ab. Innerhalb des Pickard-Tory Modells hat die lokale Teilchenkonfiguration als der Faktor mit dem größten Einfluss Eingang gefunden. Die mathematische Umsetzung erfolgt durch die Einführung des Konzentrationsfunktionals c_k^n in (1.7). Zur Auswertung des Funktionals muss in jedem Zeitschritt für alle Teilchen der jeweilige Abstand zu allen anderen Teilchen ermittelt werden. Auf Grund der hohen Zahl an Teilchen ist dies nur mit massivem Computereinsatz, d.h. Supercomputern möglich.

Dieser Zustand ist mathematisch und praktisch höchst unbefriedigend. Man hat daher versucht Alternativen zu ermitteln, welche es gestatten, das gekoppelte Vielteilchensystem durch ein geeignetes System zu ersetzen. Der Kerngedanke hierbei besteht darin, das asymptotische Verhalten des Vielteilchenmodells bei wachsender Teilchenzahl genauer zu analysieren. Führt man in geeigneter Weise diesen Grenzübergang durch, so erhält man eine Grenzdynamik wiederum in

Form einer stochastischen Differenzialgleichung, die das Verhalten des Vielteilchenmodells ersatzweise beschreibt (vgl. [McK66], [McK67], [DG88], [Szn91]). Dabei kann ein immenser Dimensionsvorteil erzielt werden. Im vorliegenden Fall etwa wird das 6n-dimensionale Problem auf ein 6-dimensionales Problem zurückgeführt.

Der gewonnene Dimensionsvorteil muss mit einer komplexeren Struktur in der Grenzdynamik bezahlt werden. Die beim Grenzübergang entstehende stochastische Differenzialgleichung ist nichtlinear und wird auch McKean-Vlasov System genannt. Der Name ergibt sich durch die Tatsache, dass diese gekoppelten Systeme zum ersten Mal von McKean in [McK67] untersucht wurden.

Dieses Verfahren wird in den folgenden Kapiteln für das Pickard-Tory Modell durchgeführt und die im Augenblick vage gehaltenen Begriffe Grenzübergang und Grenzdynamik mathematisch exakt definiert und erläutert. Es folgt nun wegen der Übersichtlichkeit und besseren Lesbarkeit eine kurze Inhaltsangabe des Kapitels 3.

In Kapitel 3.1 wird die Grenzdynamik zunächst formal definiert. Die auftretende stochastische Differenzialgleichung ist in dem Sinne nichtlinear, dass die Verteilung des Lösungsprozesses bei der Formulierung des Problems bereits in die Koeffizienten eingeht. Diese Besonderheit legt die Verwendung spezieller auf Maße zugeschnittene Metriken nahe.

Bevor in Kapitel 3.3 der eigentliche Beweis über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung geführt werden kann, müssen zunächst in Kapitel 3.2 die benötigten Hilfsmittel über Wassersteinmetriken bereitgestellt werden. Die von Sznitman für ein vereinfachtes System in [Szn91] vorgeschlagene Methodik, welche in [RR94] verfeinert wurde, wird auf den hier vorliegenden Fall des Pickard-Tory Modells adaptiert und erweitert.

Die Grundidee kann folgendermaßen erläutert werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind Lösungen stochastischer Differenzialgleichungen immer stetige Semimartingale. Die Menge von Verteilungen dieser Lösungen ergibt zusammen mit den Wassersteinmetriken einen vollständigen metrischen Raum. Auf diesem Raum wird eine kontrahierende Abbildung definiert, deren Fixpunkt gerade die Verteilung der gesuchten Grenzdynamik ist. Mit Hilfe dieses Ansatzes kann im Gegensatz zu [HD00] etwa auf die Beschränktheit der Koeffizienten im Pickard-Tory Modell verzichtet werden. Ferner werden Abschätzungen für alle höheren Momente ermittelt.

In Kapitel 3.4 wird schließlich nachgewiesen, dass die formulierte Grenzdynamik tatsächlich als Grenzwert des Pickard-Tory Modells aufgefasst werden kann. Damit eine solche Untersuchung technisch überhaupt möglich ist, müssen das

Pickard-Tory Modell und die Grenzdynamik auf einem Wahrscheinlichkeitsraum definiert werden.

Vor dem eigentlichen Beweis wird unter Verwendung des in (3.25) erklärten maßwertigen Prozesses Z_t^n eine alternative Darstellung für das Pickard-Tory Modell hergeleitet, die im Beweis über die Approximation Verwendung findet. Maßwertige Prozesse und Zufallsvariablen werden ausführlich in Kapitel 4 behandelt und speziell auf ihr Konvergenzverhalten bei wachsender Teilchenzahl untersucht. Sie erlauben die Beschreibung der Dynamik des Pickard-Tory Modells durch ein einzelnes Maß.

Aus dem Approximationssatz ergeben sich zwei Erkenntnisse. Zum einen kann bei zunehmender Teilchenzahl das Verhalten des i-ten Teilchens durch die i-te Kopie der Grenzdynamik beschrieben werden. Dabei besitzen die Grenzdynamiken für das i-te und j-te Teilchen nicht nur wie im Pickard-Tory Modell gleiche Verteilung, sondern sind im Gegensatz zum Pickard-Tory Modell zusätzlich stochastisch unabhängig. Ferner gibt der Approximationssatz die Konvergenzgeschwindigkeit an. Betrachtet man das $2p$-te Moment der Differenz zwischen dem i-ten Teilchen der Grenzdynamik und des Pickard-Tory Modells, so ist es von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

In einem n-Teilchensystem nimmt also mit zunehmender Teilchenzahl die Kopplung zwischen den einzelnen Teilchen ab. Im Grenzfall drückt sich dies durch die stochastische Unabhängigkeit der Grenzdynamiken aus. Auf Grund der Verteilungsgleichheit der Grenzdynamiken genügt es also anstatt der n-Teilchen im Pickard-Tory Modell eine einzelne Grenzdynamik zu betrachten. Man erhält somit die bereits oben beschriebene Dimensionsreduktion von einem $6n$-dimensionalen auf ein 6-dimensionales Problem.

Abschließend wird in Kapitel 3.5 untersucht, ob analog zum Pickard-Tory Modell auch für die Grenzdynamik die Absolutstetigkeit ihrer Verteilung bzgl. des Lebesgue-Maßes nachgewiesen werden kann. Dieses alleine für sich interessante mathematische Problem bildet darüber hinaus die Grundlage für die Herleitung einer nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung aus der McKean-Vlasov Gleichung in Kapitel 4.4.

Eine technische Schwierigkeit ergibt sich hierbei aus der Tatsache, dass für zeitinhomogene stochastische Differenzialgleichungen und damit auch für die hier betrachtete Grenzdynamik, das in Kapitel 2.2 eingeführte Hörmander-Kriterium keine hinreichende Bedingung mehr für die Existenz einer Dichte darstellt. Der Nachweis der Existenz einer glatten Dichte gelingt in dieser Situation nur noch unter der Voraussetzung, dass die Dispersionsmatrix der Grenzdynamik strikt positiv ist. Dabei kommt ein kürzlich von Antonelli [AKH02] unter Verwendung des Malliavin Calculus entwickeltes Theorem zum Einsatz. Schwächt man diese Voraussetzung weiter ab, so bricht der dort vorgestellte Beweis zusammen.

Um dennoch auch für den Fall einer singulären Dispersionsmatrix ein positives Resultat formulieren zu können, wird anstatt der 6-dimensionalen Grenzdynamik (3.1) nur der vertikale Anteil und damit die 2-dimensionale Version (3.38) der Grenzdynamik herangezogen. Hierbei kommen die Hilfsmittel aus der Theorie des Malliavin Calculus zur Anwendung und so werden zunächst dessen wichtigste Begriffe bereitgestellt. Für eine Zufallsvariable kann eine Dichte dann garantiert werden, wenn sie genügend „glatt“ und ihre Malliavin Matrix invertierbar ist. Die Existenz einer Dichte im vorliegenden Fall wird gezeigt, in dem man unter Ausnutzung der speziellen Struktur der Grenzdynamik die Malliavin Matrix explizit berechnet und beweist, dass ihre Determinante positiv ist.

3.1 Modell für die Grenzdynamik

Die mathematische Grundlage für die Grenzdynamik ist ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$, dessen Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}$ den üblichen Bedingungen genügt. Ferner ist der Wahrscheinlichkeitsraum mit einer 6-dimensionalen Brownschen Bewegung $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ ausgestattet.

Die Zufallsvariablen W_t wie auch später die Lösung Y_t der Grenzdynamik induzieren im $\mathbb{R}^6$ Verteilungen. Allgemeiner umfasse die Menge $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ nicht nur die induzierten Verteilungen sondern alle Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^6$. Die Notation $\mathcal{L}(X)$ wird verwendet (für das englische law), wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch die Zufallsvariable X induziert wird. $P_t \triangleq \mathcal{L}(Y_t) \triangleq P \circ Y_t^{-1} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ ist also die Verteilung des Prozesses Y_t zur Zeit t.

Die Startkonfiguration Y_0 der Grenzdynamik sei eine $\mathbb{R}^6$-wertige, $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable mit Verteilung P_0, die zusätzlich von der Brownschen Bewegung unabhängig ist. Die Grenzdynamik selbst wird durch folgende nichtlineare stochastische Differenzialgleichung

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(Y_s, c(Y_s, P_s))ds + \int_0^t \sigma(Y_s, c(Y_s, P_s))dW_s, \quad \mathcal{L}(Y_t) = P_t \tag{3.1}$$

beschrieben. In Kapitel 3.4 wird gezeigt, dass es sich dabei tatsächlich um den Grenzwert für das n Teilchen Pickard-Tory Modell (1.11) handelt.

Der Driftvektor $b : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^6$ und die Dispersionsmatrix $\sigma : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ werden durch

$$b(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\beta x_4 + \mu(y) \\ -\beta x_5 \\ -\beta x_6 \end{pmatrix}, x = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6, y \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

und

$$\sigma(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3(y) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^6, y \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

definiert und ähneln in der Bauart dem Driftvektor (1.10) und der Dispersionsmatrix (1.9) des Pickard-Tory Modells. Eine Verwechslung mit den in Kapitel 1 eingeführten Funktionen ergibt sich auf Grund der unterschiedlichen Definitionsbereiche nicht.

Die Funktionen $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) entsprechen weiterhin den bereits in Kapitel 1 eingeführten Funktionen und werden als global Lipschitz-stetig mit Konstanten $\|\mu\|_L$ und $\|\sigma\|_L$ vorausgesetzt.

Das Konzentrationsfunktional hingegen muss neu modelliert werden. Beim Pickard-Tory Modell wurde der Abstand der Teilchen ermittelt, durch den Kern K gewichtet und anschließend normiert (vgl. (1.7)). Beim Zugang der Grenzdynamik tritt an die Stelle der Summe ein Integral, wobei bezüglich der Verteilung des Lösungsprozesses integriert wird. Genau hierdurch entsteht die Nichtlinearität, die nicht mehr durch die Standardtheorie zeitinhomogener stochastischer Differenzialgleichungen abgedeckt wird. Konkret ist das Konzentrationsfunktional $c : \mathbb{R}^6 \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6) \longrightarrow \mathbb{R}$ der Grenzdynamik durch

$$c(x,Q) \triangleq \gamma \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x-z) dQ(z) \tag{3.4}$$

erklärt. Der Kern $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist wie in (1.5) weiterhin die Fortsetzung der global Lipschitz-stetigen Dichtefunktion K mit Konstante $\|K\|_L$. Wie in Kapitel 2.1 kann wegen Lemma 2.1.1 der Kern auch weiterhin als beschränkt vorausgesetzt werden. Das im System vorhandene Feststoffvolumen wird ebenfalls in Fortsetzung der bisherigen Notation mit γ bezeichnet.

3.2 Wassersteinmetriken

Entscheidend für den Beweis von Existenz und Eindeutigkeit der nichtlinearen stochastischen Differenzialgleichung ist der Nachweis einer kontrahierenden Abbildung auf einem vollständigen metrischen Raum. Im Folgenden werden deshalb die benötigten Hilfsmittel in angemessenem Umfang zusammengestellt. Diese sind einer Arbeit von Givens und Shortt entnommen [GS84]. Tatsächlich lassen sich die Wassersteinmetriken in den großen Rahmen der Monge-Kantorovich-Masse-Transportprobleme einbetten. Die ausführliche Behandlung dieser Thematik und Literaturlisten diesbezüglich finden sich in [Rac84] und [Rac91].

Im Rahmen dieser Arbeit handelt es sich beim Lösungsprozess einer stochastischen Differenzialgleichung immer um ein stetiges Semimartingale $Y_t(\omega)$. Für festes ω kann der Prozess daher als stetige Funktion aufgefasst werden. Ausgangspunkt für die Grundmenge des metrischen Raumes ist deshalb die Menge der stetigen Funktionen von $[0, T]$ nach $\mathbb{R}^6$, zur Vereinfachung als $C_T \triangleq C([0, T], \mathbb{R}^6)$ bezeichnet.

Bezüglich der durch

$$d_T(f, g) \triangleq \sup_{t \leq T} \|f(t) - g(t)\|$$

erklärten Metrik ist (C_T, d_T) ein vollständiger und separabler metrischer Raum ([AB99, chapter 3.17]). $\|\cdot\|$ ist die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^6$. $\mathcal{B}(C_T)$ ist die σ-Algebra der Borelschen Mengen, die durch die Metrik d_T induziert wird.

Nach diesen Vorabausführungen kann nun der für den weiteren Verlauf benötigte metrische Raum konstruiert werden. Sei $0 \in C_T$ ein beliebiger aber fester Punkt. Als Grundmenge dient die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $(C_T, \mathcal{B}(C_T))$, die der zusätzlichen Bedingung

$$\int_{C_T} d_T^p(x, 0) dQ(x) < \infty \tag{3.5}$$

genügen. Diese Menge wird in Abhängigkeit des Parameters $1 \leq p < \infty$ mit $\mathcal{M}_{1,p} \triangleq \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ bezeichnet.

Ist die Bedingung (3.5) speziell für den Punkt $0 \in C_T$ erfüllt, dann gilt diese auf Grund der nächsten Zeile auch für beliebige Punkte $y \in C_T$

$$d_T^p(x, y) \leq 2^{p-1}(d_T^p(x, 0) + d_T^p(0, y)).$$

Die Wahl des Punktes $0 \in C_T$ ist beliebig und daher muss der Punkt nicht mit in die Abkürzung $\mathcal{M}_{1,p}$ der Menge aufgenommen werden. Die Notation für die Menge dieser Maße ist konsistent, wie folgende offensichtliche Relation $\mathcal{M}_{1,p} \subset \mathcal{M}_1$ zeigt.

Auf der Menge $\mathcal{M}_{1,p}$ wird durch Definition 3.2.1 eine Abbildung $W_{T,p} : \mathcal{M}_{1,p} \times \mathcal{M}_{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ erklärt. Der folgende Satz 3.2.1 sichert, dass es sich dabei tatsächlich um eine Metrik handelt.

Definition 3.2.1 *Seien Q, R Elemente aus $\mathcal{M}_{1,p}$, dann ist die **(minimale)** L_p **Wassersteinmetrik** zwischen Q und R durch*

$$W_{T,p}(Q,R) \triangleq \left(\inf_{\mu \in D(Q,R)} \int_{C_T \times C_T} d_T^p(x,y) d\mu(x,y) \right)^{1/p} \tag{3.6}$$

definiert. Dabei ist $D(Q,R)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $C_T \times C_T$ mit den Randverteilungen Q und R.

Nachstehend werden für den hier vorliegenden Fall die wichtigsten Eigenschaften von Wassersteinmetriken zusammengestellt.

Satz 3.2.1 *Bezüglich der in Definition 3.2.1 erklärten Abbildung können folgende Aussagen getroffen werden:*

1. *Das Infimum in (3.6) wird immer angenommen. Es handelt sich daher um ein Minimum.*

2. *Bei der in (3.6) definierten Abbildung handelt es sich um eine Metrik auf $\mathcal{M}_{1,p}$. Der Begriff Wassersteinmetrik ist daher gerechtfertigt.*

3. *Bei $(\mathcal{M}_{1,p}, W_{T,p})$ handelt es sich in Analogie zum klassischen Riesz-Fischer Theorem um einen vollständigen metrischen Raum.*

4. *Konvergiert eine Folge $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{1,p}$ bzgl. $W_{T,p}$, dann impliziert dies auch die schwache Konvergenz der Folge.*

Beweis Die im Satz formulierten Aussagen sind der Arbeit von Givens und Shortt [GS84] entnommen. Proposition 1 garantiert die Existenz des Infimums in (3.6). In Proposition 2 wird gezeigt, dass es sich bei der Abbildung in (3.6) um eine Metrik handelt. Proposition 3 charakterisiert die Konvergenz und zeigt insbesondere, dass die Konvergenz in der Metrik stärker als die schwache Konvergenz im Sinne der Definition 3.2.2 ist. In Proposition 6 wird schließlich die Vollständigkeit der Menge $\mathcal{M}_{1,p}$ unter der Metrik $W_{T,p}$ gezeigt.
Die Aussagen gelten allgemein, solange der zu Grunde gelegte Raum, wie hier (C_T, d_T), ein vollständiger und separabler metrischer Raum ist. ∎

Um eine Zweideutigkeit mit dem Begriff der schwachen Konvergenz im Sinne der Funktionalanalysis zu vermeiden, soll der Begriff im Folgenden kurz präzisiert und festgelegt werden.

Definition 3.2.2 *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem metrischen Raum (S, d)* ***konvergiert schwach*** *gegen ein Maß P, wenn für alle beschränkten und stetigen Funktionen $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ die Beziehung*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_S f(x)dP_n(x) = \int_S f(x)dP(x) \tag{3.7}$$

gilt. Als abkürzende Schreibweise wird

$$w - \lim P_n = P$$

verwendet.

Nach [IW89, I.2.4] genügt es, wenn die Bedingung (3.7) bereits für alle gleichmäßig stetigen Funktionen $f \in C_b(S)$ erfüllt ist. Diese Menge wird mit $C_{b,u}(S)$ bezeichnet.

In der bisherigen Form sind die vorgestellten Wassersteinmetriken etwas unhandlich für den im folgenden Kapitel durchzuführenden Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis. Deshalb wird im Rest des Kapitels auf eine geeignete Umformung des Ausdruckes (3.6) eingegangen. Werden die Wahrscheinlichkeitsmaße nämlich durch stetige Prozesse induziert, dann lässt sich (3.6) auch intuitiver darstellen.

Man betrachtet die stetigen Prozesse X_t, Y_t für $t \in [0, T]$ und ihre in C_T induzierten Verteilungen $Q \triangleq \mathcal{L}(X) \triangleq P \circ X^{-1}$ und $R \triangleq \mathcal{L}(Y) \triangleq P \circ Y^{-1}$. N sei die gemeinsame Verteilung der Prozesse auf $C_T \times C_T$, wobei im Allgemeinen die Beziehung $N = Q \otimes R$ nicht gilt. Aus

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^p\right] = \int_\Omega \sup_{0\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^p\,dP$$
$$= \int_\Omega d_T^p(X,Y)dP$$
$$= \int_{C_T\times C_T} d_T^p(x,y)dN(x,y)$$

erhält man

$$W_{T,p}(Q,R) = \left(\inf\left\{\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^p\right];\mathfrak{L}(X)=Q,\mathfrak{L}(Y)=R\right\}\right)^{1/p}, \quad (3.8)$$

wobei das Infimum über allen Prozessen mit den Verteilungen Q und R zu bilden ist. Analog kann man Bedingung (3.5) auch als $\mathbf{E}\left[d_T^p(X,0)\right] < \infty$ schreiben. In der Form (3.8) findet die Wassersteinmetrik im nachstehenden Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis Verwendung.

Nützlich in diesem Zusammenhang ist auch folgende Abschätzung. X_t, Y_t sind weiterhin zwei stetige Prozesse für $t \in [0,T]$ und Q bzw. R ihre induzierten Verteilungen in C_T. Betrachtet man die Wassersteinmetrik nur bis zum Zeitpunkt $u \le T$, dann ist aus der Darstellung (3.8) sofort die Beziehung (3.9) ersichtlich.

$$W_{u,p}(Q,R) \le W_{T,p}(Q,R), \quad u \le T \quad (3.9)$$

Abschließend noch eine technische Überlegung, die sich mit der Tatsache beschäftigt, dass ein stetiger Prozess $Y_t, t \in [0,T]$ sowohl in C_T ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathfrak{L}(Y)$ als auch in $\mathbb{R}^6$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathfrak{L}(Y_t)$ induziert. Während in der Wassersteinmetrik die Verteilung $\mathfrak{L}(Y)$ des Prozesses Y benutzt wird, verwendet die stochastische Differenzialgleichung (3.1) die Verteilungen $P_t = \mathfrak{L}(Y_t)$ des Prozesses Y zum Zeitpunkt t. Dabei handelt es sich allerdings nur um einen Unterschied in Bezug auf die Notation wie folgende Betrachtung zeigt.

Sei also Y ein stetiger Prozess, der zum einen in C_T ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \triangleq \mathfrak{L}(Y)$ und zum anderen in $\mathbb{R}^6$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Q_t \triangleq \mathfrak{L}(Y_t)$ mit $t \in [0,T]$ erzeugt.

Es sei $\pi_t : C_T \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion, die der Funktion Y die reelle Zahl Y_t zuordnet, d.h. $Y_t = \pi_t \circ Y$. Nach dem Transformationssatz gilt nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^6} K^*(x-z)dQ_t(z) &= \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x-z)d(P\circ Y_t^{-1})(z)\\ &= \int_\Omega K^*(x-Y_t)dP = \int_\Omega K^*(x-\pi_t Y)dP\\ &= \int_{C_T} K^*(x-\pi_t y)d(P\circ Y^{-1})(y)\\ &= \int_{C_T} K^*(x-y_t)dQ(y).\end{aligned}$$

Das in (3.4) definierte Konzentrationsfunktional $c(x, Q_t)$ kann daher auch wie folgt definiert werden

$$c(x,t,Q) \triangleq \gamma \int_{C_T} K^*(x-y_t)dQ(y) = c(x,Q_t),$$

wobei das Maß $Q \in \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ und die Familie von Maßen $Q_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ durch $Q_t = \pi_t \circ Q$ verknüpft sind. Diese Darstellung ermöglicht die Bearbeitung der stochastischen Differenzialgleichung (3.1) mit Wassersteinmetriken.

3.3 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Kapitel kann nun gezeigt werden, dass die in (3.1) angegebene stochastische Differenzialgleichung eine eindeutige starke Lösung im Sinne von Definition 2.1.3 besitzt. Bevor mit der Durchführung des Beweises begonnen wird, soll etwas ausführlicher auf den Beweisverlauf eingegangen werden.

Im ersten Schritt löst man die spezielle Nichtlinearität in (3.1) auf, indem man in den Koeffizienten nicht die Verteilung $Q = \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ der Lösung Y_t, sondern eine beliebige Verteilung $Q \in \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ notiert. Durch Projektion erhält man auf die im letzten Kapitel beschriebene Art eine Familie von Maßen $Q_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$. Setzt man diese in die Koeffizienten ein, so kann man die Gleichung

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(Y_s, c(Y_s,Q_s))ds + \int_0^t \sigma(Y_s, c(Y_s,Q_s))dW_s \tag{3.10}$$

als zeitinhomogene stochastische Differenzialgleichung deuten, zu deren Behandlung man jetzt wieder die Standardtechniken einsetzen darf.

Im zweiten Schritt beweist man Satz 3.3.1, welcher unter noch genauer zu spezifizierenden Voraussetzungen die Existenz einer Lösung Y_t für die entkoppelte Gleichung (3.10) garantiert. Die Lösung Y_t induziert als stetiges Semimartingale in $\mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ ein Maß.

Man kann nun also auf dem vollständigen metrischen Raum $\mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ eine Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}_{1,p}(C_T) \longrightarrow \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$$

definieren, die nach Lösen von (3.10) in Abhängigkeit von einem Maß $Q \in \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$, diesem die Verteilung dieser Lösung und damit erneut ein Maß $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,p}(C_T)$ zuordnet.

Im dritten Schritt zeigt man, dass die Abbildung Φ für $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_{1,p}$ einer Abschätzung der Form

$$W^p_{t,p}(\Phi(Q_1), \Phi(Q_2)) \leq \int_0^t W^p_{u,p}(Q_1, Q_2)du, \ \ 0 \leq t \leq T$$

genügt. Aus dieser Kontraktionseigenschaft und der Vollständigkeit des metrischen Raumes schließt man dann unmittelbar, dass für beliebiges $Q \in \mathcal{M}_{1,p}$ die Folge $\{\Phi^k(Q)\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{M}_{1,p}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt der Abbildung Φ konvergiert.

Zentral ist dabei der folgende Gedanke und vierte Schritt mit dem der Beweis endet. Liegt eine Lösung der nichtlinearen stochastischen Differenzialgleichung (3.1) vor, so ist deren Verteilung ein Fixpunkt von Φ. Besitzt umgekehrt die Abbildung Φ einen Fixpunkt, so erhält man mittels (3.10) eine Lösung der nichtlinearen stochastischen Differenzialgleichung (3.1).

Schritt zwei ist Bestandteil von Satz 3.3.1 die Schritte drei und vier sind im Beweis zu Satz 3.3.2 zusammengefasst.

Bevor nun das vorgestellte Programm dieses Kapitels durchgeführt wird, erfolgt eine kurze Übersicht der benötigten Voraussetzungen an das nichtlineare Modell:

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $\|\mu\|_L$.
2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante $\|\sigma\|_L$.

3. Die Konstanten $\varepsilon_i \geq 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind nichtnegativ.
4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$.

Es wird nun die bereits angekündigte Untersuchung der entkoppelten stochastischen Differenzialgleichung (3.10) durchgeführt.

Satz 3.3.1 *Unter den genannten Bedingungen für die Koeffizienten und für festes $Q \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ besitzt die entkoppelte stochastische Differenzialgleichung (3.10) eine eindeutige starke Lösung im Sinne von Definition 2.1.3.*

Gilt für die Startkonfiguration Y_0 die Bedingung $\boldsymbol{E}\left[\|Y_0\|^{2p}\right] < \infty$ und ist diese unabhängig von der Brownschen Bewegung, dann besitzt die Lösung ein entsprechendes Moment, d.h. $\boldsymbol{E}\left[\|Y_t\|^{2p}\right] < \infty$ für $t \in [0,T]$ bzw. $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$.

Beweis Ist $Q \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ bzw. die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{Q_t\}_{t\in[0,T]}$ gewählt, dann kann (3.10) als zeitinhomogene stochastische Differenzialgleichung aufgefasst werden und als

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \overline{b}(s, Y_s)ds + \int_0^t \overline{\sigma}(s, Y_s)dW_s \tag{3.11}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\overline{b}(t,x) &\triangleq b(x, c(x, Q_t)), \quad x \in \mathbb{R}^6, t \in [0,T] \\ \overline{\sigma}(t,x) &\triangleq \sigma(x, c(x, Q_t))\end{aligned}$$

aufgeschrieben werden.

Zum Beweis der Existenz einer Lösung von (3.11) muss das Verhalten dieser Funktionen untersucht werden, bevor auf Standardsätze über stochastische Differenzialgleichungen zurückgegriffen werden kann. Insbesondere muss die Lipschitz-Stetigkeit und ein lineares Wachstum nachgewiesen werden.

In den Abschätzungen werden die Konstanten durch C_i abgekürzt. Diese beinhalten die Lipschitzkonstanten, den Reibungskoeffizienten und reelle Zahlen. Hingegen hängen die Konstanten nicht vom Zeitparameter t ab.

Zunächst widmen wir uns dem Nachweis der Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen $b(x,y)$ und $\sigma(x,y)$. Sei dazu $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^6$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, dann liefert eine kurze Rechnung

$$
\begin{aligned}
\|b(x,y)-b(\tilde{x},\tilde{y})\|^2 =& \sum_{i=4}^{6}|x_i-\tilde{x}_i|^2+\beta^2\sum_{i=5}^{6}|x_i-\tilde{x}_i|^2\\
&+|-\beta(x_4-\tilde{x}_4)+\mu(y)-\mu(\tilde{y})|^2\\
\leq& \sum_{i=4}^{6}|x_i-\tilde{x}_i|^2+2\beta^2\sum_{i=4}^{6}|x_i-\tilde{x}_i|^2+2\,\|\mu\|_L^2\,|y-\tilde{y}|^2\\
\leq&(1+2\beta^2)\,\|x-\tilde{x}\|^2+2\,\|\mu\|_L^2\,|y-\tilde{y}|^2\\
\leq& \max\{(1+2\beta^2),2\,\|\mu\|_L^2\}(\|x-\tilde{x}\|^2+|y-\tilde{y}|^2)
\end{aligned}
$$

und mit $C_1 \triangleq \max\{\sqrt{2(1+2\beta^2)},2\,\|\mu\|_L\}$

$$
\|b(x,y)-b(\tilde{x},\tilde{y})\| \leq C_1\left(\|x-\tilde{x}\|+|y-\tilde{y}|\right). \tag{3.12}
$$

Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(x,y)-\sigma(\tilde{x},\tilde{y})\| &= \left(\sum_{i=1}^{3}|\sigma_i(y)-\sigma_i(\tilde{y})|^2\right)^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{i=1}^{3}|\sigma_i(y)-\sigma_i(\tilde{y})|\right)\\
&\leq \sqrt{3}\,\|\sigma\|_L\,|y-\tilde{y}|\\
&\leq C_2\,|y-\tilde{y}| \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

mit $C_2 \triangleq \sqrt{3}\,\|\sigma\|_L$.

Auch für das Konzentrationsfunktional kann die Lipschitz-Stetigkeit bei festem R nachgewiesen werden. Sei $R \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ und $C_3 \triangleq \gamma\,\|K\|_L$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
|c(x,R)-c(\tilde{x},R)| &= \left|\gamma\int_{\mathbb{R}^6}K^*(x-z)-K^*(\tilde{x}-z)dR(z)\right|\\
&\leq \gamma\int_{\mathbb{R}^6}|K^*(x-z)-K^*(\tilde{x}-z)|\,dR(z)\\
&\leq \gamma\,\|K\|_L\int_{\mathbb{R}^6}\|(x-z)-(\tilde{x}-z)\|\,dR(z)\\
&\leq C_3\,\|x-\tilde{x}\|. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (3.12) - (3.14) folgert man nunmehr, dass die Koeffizienten der entkoppelten stochastischen Differenzialgleichung (3.11) global Lipschitz-stetig sind, wie die folgenden Zeilen zeigen.

$$\begin{aligned}
&\left\|\overline{b}(t,x)-\overline{b}(t,\tilde{x})\right\|+\left\|\overline{\sigma}(t,x)-\overline{\sigma}(t,\tilde{x})\right\| \\
&\leq \left\|b(x,c(x,Q_t))-b(\tilde{x},c(\tilde{x},Q_t))\right\|+\left\|\sigma(x,c(x,Q_t))-\sigma(\tilde{x},c(\tilde{x},Q_t))\right\| \\
&\leq C_1\left\|x-\tilde{x}\right\|+C_1\left|c(x,Q_t)-c(\tilde{x},Q_t)\right|+C_2\left|c(x,Q_t)-c(\tilde{x},Q_t)\right| \\
&\leq C_1\left\|x-\tilde{x}\right\|+(C_1+C_2)\,C_3\left\|x-\tilde{x}\right\| \\
&\leq (C_1+(C_1+C_2)\,C_3)\left\|x-\tilde{x}\right\|
\end{aligned}$$

Nun bleibt die lineare Wachstumsbedingung für den Driftvektor $\overline{b}(t,x)$ nachzuweisen. Als Zwischenergebnis erhält man zunächst für $\mu(x)$ mit der Konstanten $C_4 \triangleq \max\{\left\|\mu\right\|_L, \left\|\mu\right\|_L|\tilde{y}|+|\mu(\tilde{y})|\}$ bei beliebigem $\tilde{y}\in\mathbb{R}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
|\mu(y)| &= |\mu(y)-\mu(\tilde{y})+\mu(\tilde{y})| \\
&\leq \left\|\mu\right\|_L|y-\tilde{y}|+|\mu(\tilde{y})| \\
&\leq \left\|\mu\right\|_L|y|+\left\|\mu\right\|_L|\tilde{y}|+|\mu(\tilde{y})| \\
&\leq C_4(1+|y|).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ferner folgt aus der Beschränktheit von K, welche sich aus den Voraussetzungen ergibt (Lemma 2.1.1), auch die Beschränktheit des Konzentrationsfunktionals für festes $Q_t\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$

$$\begin{aligned}
|c(x,Q_t)| &= \left|\gamma\int_{\mathbb{R}^6}K^*(x-z)dQ_t(z)\right| \\
&\leq \gamma\left\|K\right\|_L = C_3.
\end{aligned}$$

Beides berücksichtigt ergibt dies

$$
\begin{aligned}
\left\|\overline{b}(t,x)\right\|^2 &= \|b(x,c(x,Q_t))\|^2 \\
&= \sum_{i=4}^{6} |x_i|^2 + \beta^2 \sum_{i=5}^{6} |x_i|^2 + (-\beta x_4 + \mu(c(x,Q_t)))^2 \\
&\leq (1+2\beta^2) \sum_{i=4}^{6} |x_i|^2 + 2\mu(c(x,Q_t))^2 \\
&\leq (1+2\beta^2) \|x\|^2 + 2\, C_4^2 (1 + |c(x,Q_t)|)^2 \\
&\leq (1+2\beta^2) \|x\|^2 + 2\, C_4^2 (1 + C_3)^2 \\
&\leq C_5 (1 + \|x\|^2)
\end{aligned}
$$

mit $C_5 \triangleq \max\{(1+2\beta^2), 2\, C_4^2(1+C_3)^2\}$. Damit ist der Nachweis für die benötigte lineare Wachstumsbedingung des Driftvektors erbracht.

Wenn man die Rechnung aus (3.15) für die σ_i wiederholt und dabei als Konstante $C_6 \triangleq \max_{i=1,2,3}\{\|\sigma\|_L, \|\sigma\|_L |\tilde{y}| + |\sigma_i(\tilde{y})|\}$ verwendet, dann zeigt die folgende Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\sigma}(t,x)\|^2 &= \|\sigma(x,c(x,Q_t))\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} |\sigma_i(c(x,Q_t))|^2 + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} C_6^2 (1 + |c(x,Q_t)|)^2 + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} C_6^2 (1 + C_3)^2 + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

dass die Dispersionsmatrix beschränkt ist.

Zusammen mit der bereits nachgewiesenen Eigenschaft für den Driftvektor ist damit gezeigt, dass für die Koeffizienten eine lineare Wachstumsbedingung der Form

$$
\left\|\overline{b}(t,x)\right\|^2 + \|\overline{\sigma}(t,x)\|^2 \leq C(1 + |x|^2)
$$

zutrifft. Existenz und Eindeutigkeit im Sinne von Definition 2.1.3 werden dann durch [KS91, Theorem 5.2.9] gesichert.

Noch bleibt offen, ob für die Verteilung der Lösung $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ gilt. Nach [KP92, 4.5.4] hängen die höheren Momente der Lösung einer stochastischen Differenzialgleichung nur von den Momenten der Anfangsverteilung ab. Aus der Forderung $\mathbf{E}\left[\|Y_0\|^{2p}\right] < \infty$ lässt sich etwa die Eigenschaft

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_t\|^{2p}\right] \leq (1 + \mathbf{E}\left[\|Y_0\|^{2p}\right])C < \infty$$

folgern. Damit ist aber gerade Bedingung (3.5) erfüllt, denn

$$\mathbf{E}\left[d_T^{2p}(Y,0)\right] = \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_t - 0\|^{2p}\right] = \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_t\|^{2p}\right] < \infty$$

und damit $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$. ∎

Es kann also im Anschluss der zentrale Satz des Kapitels bewiesen werden, denn auf Grund von Satz 3.3.1 und des zu Beginn des Kapitels vorgestellten Programms, ist die Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_{1,2p} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,2p}$ wohldefiniert.

Im Folgenden werden nun die Schritte drei und vier durchgeführt, welche insbesondere zeigen, dass die Abbildung Φ einen Fixpunkt besitzt und dieser Fixpunkt die Verteilung der Lösung der nichtlinearen stochastischen Differenzialgleichung (3.1) ist.

Satz 3.3.2 *Für die Koeffizienten gelten weiterhin die vor Satz 3.3.1 vereinbarten Bedingungen. Dann besitzt die nichtlineare stochastische Differenzialgleichung (3.1) eine eindeutige starke Lösung im Sinne von Definition 2.1.3.*

Wenn für die Startkonfiguration Y_0 die Bedingung $\boldsymbol{E}\left[\|Y_0\|^{2p}\right] < \infty$ gilt und diese unabhängig von der Brownschen Bewegung ist, dann gilt für den Lösungsprozess die Abschätzung

$$\boldsymbol{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_t\|^{2p}\right] < \infty$$

bzw. $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$.

Beweis Zunächst wird entsprechend der Bemerkung am Ende von Kapitel 3.2 die stochastische Differenzialgleichung (3.1) in der Form

$$
\begin{aligned}
Y_t &= Y_0 + \int_0^t b(Y_s, c(Y_s, s, Q))ds + \int_0^t \sigma(Y_s, c(Y_s, s, Q))dW_s \\
c(x, t, Q) &\triangleq \int_{C_T} K^*(x - \pi_t y)dQ(y) = c(x, Q_t), \quad x \in \mathbb{R}^6, t \in [0, T], Q \in \mathcal{M}_{1,2p}
\end{aligned}
$$

notiert, um sie der Behandlung mit Wassersteinmetriken zugänglich zu machen. Dabei ist $Q \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ die Verteilung der Lösung (3.1) und die Familie von Maßen $Q_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ entsteht durch Projektion $Q_t = \pi_t \circ Q, t \in [0, T]$. Der Parameter T ist beliebig aber fest und gibt das Zeitintervall an, in dem die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung betrachtet wird.

Gegenstand der Untersuchung ist die Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_{1,2p} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,2p}$, welche einem Maß Q die Verteilung der Lösung der entkoppelten stochastischen Differenzialgleichung (3.11) zuordnet.

Bevor wie in der Einleitung zu diesem Kapitel als Schritt 3 beschrieben, die Kontraktionseigenschaft der Abbildung Φ nachgewiesen werden kann, wird das umnotierte Konzentrationsfunktional c betrachtet und eine für den restlichen Beweis wichtige Abschätzung ermittelt. Für $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^6$, $t \in [0, T]$ und $M, N \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ sei L ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $C_T \times C_T$ mit Randverteilungen M und N. Eine direkte Rechnung ergibt die Beziehung

$$
\begin{aligned}
&|c(x, t, M) - c(\tilde{x}, t, N)| = \left| \int_{C_T} K^*(x - \pi_t y)dM(y) - \int_{C_T} K^*(\tilde{x} - \pi_t z)dN(z) \right| \\
&= \left| \int_{C_T \times C_T} K^*(x - \pi_t y)dL(y, z) - \int_{C_T \times C_T} K^*(\tilde{x} - \pi_t z)dL(y, z) \right| \\
&= \left| \int_{C_T \times C_T} K^*(x - \pi_t y) - K^*(\tilde{x} - \pi_t z)dL(y, z) \right|
\end{aligned}
$$

und weiter die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&|c(x,t,M) - c(\tilde{x},t,N)| \\
&\leq \int_{C_T \times C_T} |K^*(x-\pi_t y) - K^*(\tilde{x} - \pi_t z)| \, dL(y,z) \\
&\leq \int_{C_T \times C_T} \|K\|_L \, \|(x-\pi_t y) - (\tilde{x} - \pi_t z)\| \, dL(y,z) \\
&\leq \int_{C_T \times C_T} \|K\|_L \, \|x - \tilde{x}\| + \|K\|_L \, \|\pi_t y - \pi_t z\| \, dL(y,z) \\
&\leq \|K\|_L \, \|x - \tilde{x}\| + \|K\|_L \int_{C_T \times C_T} \|\pi_t y - \pi_t z\| \, dL(y,z) \\
&\leq \|K\|_L \, \|x - \tilde{x}\| + \|K\|_L \int_{C_T \times C_T} \sup_{0 \leq s \leq t} \|\pi_s y - \pi_s z\| \, dL(y,z) \\
&= \|K\|_L \, \|x - \tilde{x}\| + \|K\|_L \int_{C_T \times C_T} d_t(y,z) dL(y,z).
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Unter anderem mit Hilfe von (3.17) kann nun als erstes Zwischenergebnis (Schritt 3 des Programms) für die Abbildung Φ die schon angesprochene Abschätzung der Form

$$
W_{t,2p}^{2p}(\Phi(Q_1), \Phi(Q_2)) \leq \int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2) du, \quad 0 \leq t \leq T
$$

bewiesen werden. Dabei sind $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ zwei gegebene Verteilungen und nach Definition $\Phi(Q_i)$ die Verteilungen der Lösungen $Y_t^{(i)}$ der entkoppelten stochastischen Differenzialgleichung

$$
Y_t^{(i)} = Y_0 + \int_0^t b(Y_s^{(i)}, c(Y_s^{(i)}, s, Q_i)) ds + \int_0^t \sigma(Y_s^{(i)}, c(Y_s^{(i)}, s, Q_i)) dW_s,
$$

deren Existenz durch Satz 3.3.1 gesichert ist. Da die Wahrscheinlichkeitsmaße $\Phi(Q_1)$ und $\Phi(Q_2)$ durch Prozesse induziert sind, kann nach (3.8) die Wasserstein-metrik in der für den weiteren Beweisverlauf nützlichen Form

$$
\begin{aligned}
&W_{t,2p}(\Phi(Q_1), \Phi(Q_2)) \\
&= \left(\inf \left\{ \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - Y_s\|^{2p} \right] ; \mathcal{L}(X) = \Phi(Q_1), \mathcal{L}(Y) = \Phi(Q_2) \right\} \right)^{1/2p}
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

notiert werden. Nach Konstruktion besitzen aber die Prozesse $Y_s^{(i)}$ die geforderte Verteilungseigenschaft, so dass es zunächst ausreicht den Ausdruck

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|Y_s^{(1)}-Y_s^{(2)}\right\|^{2p}\right]$$

zu untersuchen, um im Anschluss daran das Infimum über der Menge aller möglichen Prozesse mit der geforderten Verteilungseigenschaft zu bilden.

Hängen in folgenden Betrachtungen die Konstanten vom Zeitparameter T ab, so wird dies durch die Notation $C(T)$ ausdrücklich signalisiert. Ebenso werden Terme in Abhängigkeit von t durch entsprechende Terme mit der Grenze T des Zeitintervalls $[0,T]$ ersetzt.

Eine einfache Anwendung der Dreiecksungleichung und von Lemma A.0.1, das im weiteren Verlauf ohne explizite Nennung mehrfach angewendet wird, ergibt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|Y_s^{(1)}-Y_s^{(2)}\right\|^{2p}\right] \qquad (3.19)\\
&\le 4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s b(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-b(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))du\right\|^{2p}\right]\\
&+4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s \sigma(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-\sigma(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))dW_u\right\|^{2p}\right].
\end{aligned}$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite müssen getrennt voneinander bearbeitet werden, da für stochastische Integrale keine Dreiecksungleichung zur Verfügung steht.

Der erste Term in (3.19) kann mit der Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^6$ [Wal92b, 7.12] sowie den Beziehungen für den Drift (3.12) und dem modifizierten Konzentrationsfunktional (3.17) abgeschätzt werden. Das Ergebnis ist die folgende Ungleichung.

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s b(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-b(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))du\right\|^{2p}\\
&\le T^{2p-1}\sup_{0\le s\le t}\int_0^s \left\|b(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-b(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))\right\|^{2p}du\\
&\le T^{2p-1}\int_0^t 4^pC_1^{2p}(\left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}+\left|c(Y_u^{(1)},u,Q_1)-c(Y_u^{(2)},u,Q_2)\right|^{2p})du\\
&\le 4^pC_1^{2p}T^{2p-1}\int_0^t \left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}\\
&\qquad\qquad +4^p\left\|K\right\|_L^{2p}\left(\left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}+\left(\int_{C_T\times C_T}d_u(y,z)dR(y,z)\right)^{2p}\right)du
\end{aligned}
$$

R ist hierbei ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $C_T\times C_T$ mit Randverteilungen Q_1 und Q_2. Insbesondere deshalb kann hier die Ungleichung von Jensen [Dud89, 10.2.6] oder auch die Hölderungleichung herangezogen werden und man schätzt weiter zu

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s b(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-b(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))du\right\|^{2p}\\
&\le 4^pC_1^{2p}T^{2p-1}\int_0^t (1+4^p\left\|K\right\|_L^{2p})\left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}\\
&\qquad\qquad +4^p\left\|K\right\|_L^{2p}\int_{C_T\times C_T}d_u^{2p}(y,z)dR(y,z)du\\
&\le \underbrace{4^pC_1^{2p}(1+4^p\left\|K\right\|_L^{2p})}_{\triangleq C_6}T^{2p-1}\int_0^t \left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}+\int_{C_T\times C_T}d_u^{2p}(y,z)dR(y,z)du\\
&\le C_6T^{2p-1}\int_0^t\left(\left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}+\int_{C_T\times C_T}d_u^{2p}(y,z)dR(y,z)\right)du
\end{aligned}
$$

ab. Wird nun die rechte Seite bezüglich all solcher Verteilungen R minimiert, so schließt man

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s b(Y_u^{(1)},c(Y_u^{(1)},u,Q_1))-b(Y_u^{(2)},c(Y_u^{(2)},u,Q_2))du\right\|^{2p}\\
&\qquad\le C_6T^{2p-1}\int_0^t\left(\left\|Y_u^{(1)}-Y_u^{(2)}\right\|^{2p}+W_{u,2p}^{2p}(Q_1,Q_2)\right)du.
\end{aligned}
$$

Da der zweite Term auf der rechten Seite von ω unabhängig ist, liefert die anschließende Erwartungswertbildung auf beiden Seiten für den ersten Term in (3.19) die folgende Beziehung.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\int_0^s b(Y_u^{(1)}, c(Y_u^{(1)}, u, Q_1)) - b(Y_u^{(2)}, c(Y_u^{(2)}, u, Q_2))du\right\|^{2p}\right] \\
&\quad\leq C_6 T^{2p-1}\int_0^t \mathbf{E}\left[\left\|Y_u^{(1)} - Y_u^{(2)}\right\|^{2p}\right] du + C_6 T^{2p-1}\int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2)du
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Der zweite Term in (3.19) kann nicht auf diese Weise abgeschätzt werden. Stattdessen wird hier mit der Ungleichung für Martingale von Burkholder, Davis und Gundy gearbeitet [KS91, Theorem 3.3.29]. Nach Abschätzung der Diffusionsmatrix (3.13), erneuter Anwendung von (3.17) und der Ungleichung von Jensen erhält man

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\int_0^s \sigma(Y_u^{(1)}, c(Y_u^{(1)}, u, Q_1)) - \sigma(Y_u^{(2)}, c(Y_u^{(2)}, u, Q_2))dW_u\right\|^{2p}\right] \\
\leq & C_7\,\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \left\|\sigma(Y_u^{(1)}, c(Y_u^{(1)}, u, Q_1)) - \sigma(Y_u^{(2)}, c(Y_u^{(2)}, u, Q_2))\right\|^2 du\right)^p\right] \\
\leq & C_7\,\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t C_2^2\left|c(Y_u^{(1)}, u, Q_1) - c(Y_u^{(2)}, u, Q_2)\right|^2 du\right)^p\right] \\
\leq & C_2^{2p} C_7 T^{p-1}\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|c(Y_u^{(1)}, u, Q_1) - c(Y_u^{(2)}, u, Q_2)\right|^{2p} du\right] \\
\leq & \underbrace{C_2^{2p} C_7 4^p \|K\|_L^{2p}}_{\triangleq C_8} T^{p-1}\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \left(\left\|Y_u^{(1)} - Y_u^{(2)}\right\|^{2p} + \int_{C_T\times C_T} d_u^{2p}(y,z)dR(y,z)\right) du\right] \\
\leq & C_8 T^{p-1}\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \left\|Y_u^{(1)} - Y_u^{(2)}\right\|^{2p} du\right] \\
&\qquad + C_8 T^{p-1}\int_0^t \left(\int_{C_T\times C_T} d_u^{2p}(y,z)dR(y,z)\right) du.
\end{aligned}$$

Analog zur vorherigen Rechnung sei dabei R ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $C_T \times C_T$ mit Randverteilungen Q_1 und Q_2. Durch Minimierung bzgl. all dieser Verteilungen und Vertauschung von Erwartungswert und Integral mit dem Satz von Fubini erkennt man

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|\int_0^s \sigma(Y_u^{(1)}, c(Y_u^{(1)}, u, Q_1)) - \sigma(Y_u^{(2)}, c(Y_u^{(2)}, u, Q_2))dW_u\right\|^{2p}\right]\\
\le & C_8 T^{p-1}\int_0^t \mathbf{E}\left[\left\|Y_u^{(1)} - Y_u^{(2)}\right\|^{2p}\right] du + C_8 T^{p-1}\int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2) du. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Fasst man (3.20) und (3.21) zusammen, so ergibt dies für (3.19) die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|Y_s^{(1)} - Y_s^{(2)}\right\|^{2p}\right]\\
\le & 4^p(C_6 + C_8)T^{2p-1}\left(\int_0^t \mathbf{E}\left[\left\|Y_u^{(1)} - Y_u^{(2)}\right\|^{2p}\right] du + \int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2) du\right)\\
\le & \underbrace{4^p(C_6 + C_8)T^{2p-1}}_{\triangleq\beta}\left(\int_0^t \underbrace{\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le u}\left\|Y_s^{(1)} - Y_s^{(2)}\right\|^{2p}\right]}_{\triangleq g(u)} du + \int_0^t \underbrace{W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2)}_{\triangleq f(u)} du\right)
\end{aligned}$$

und mit Hilfe einer speziellen Form des Lemmas von Gronwall (Lemma A.0.2 mit den Bezeichnungen $\beta, f(u), g(u)$)

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left\|Y_s^{(1)} - Y_s^{(2)}\right\|^{2p}\right] \le \beta\exp(\beta t)\int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2) du.$$

Die Prozesse $Y_s^{(i)}$ erfüllen die geforderte Verteilungseigenschaft in (3.18). Die Minimierung der linken Seite über allen Prozessen mit dieser Eigenschaft führt daher zu der gesuchten Abschätzung für die Wassersteinmetrik

$$W_{t,2p}^{2p}(\Phi(Q_1), \Phi(Q_2)) \le \underbrace{\beta\exp(\beta T)}_{\triangleq C(T)}\int_0^t W_{u,2p}^{2p}(Q_1, Q_2) du. \qquad (3.22)$$

Im letzten Schritt des Beweises (Schritt 4 des eingangs formulierten Programms) wird nach Wahl eines beliebigen Startpunktes $M \in \mathcal{M}_{1,2p}$ mit Hilfe der soeben bewiesenen Abschätzung (3.22) gezeigt, dass es sich bei der Folge $\{\Phi^k(M)\}_{k\in\mathbb{N}}$ um eine Cauchy-Folge handelt, deren Grenzwert der einzige Fixpunkt der Abbildung Φ ist.

Man wählt also ein beliebiges $M \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ für festes $T > 0$. Die wiederholte Anwendung der Abschätzung (3.22) für gegebenes $k \geq 1$ ist im Folgenden dargestellt.

$$
\begin{aligned}
&W_{T,2p}^{2p}(\Phi^{k+1}(M), \Phi^k(M)) \\
&= W_{T,2p}^{2p}(\Phi(\Phi^k(M)), \Phi(\Phi^{k-1}(M))) \\
&\leq C(T) \int_0^T W_{t_k,2p}^{2p}(\Phi^k(M), \Phi^{k-1}(M)) dt_k \\
&\leq C(T)^2 \int_0^T \int_0^{t_k} W_{t_{k-1},2p}^{2p}(\Phi^{k-1}(M), \Phi^{k-2}(M)) dt_{k-1}\, dt_k \\
&\leq C(T)^3 \int_0^T \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k-1}} W_{t_{k-2},2p}^{2p}(\Phi^{k-2}(M), \Phi^{k-3}(M)) dt_{k-2}\, dt_{k-1}\, dt_k \\
&\dots \\
&\leq C(T)^k \int_0^T \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_2} W_{t_1,2p}^{2p}(\Phi^1(M), M) dt_1 \, \dots dt_k \\
&= C(T)^k \frac{1}{(k-1)!} \int_0^T (T-u)^{k-1} W_{u,2p}^{2p}(\Phi^1(M), M) du.
\end{aligned}
$$

Das iterierte Integral wurde dabei mit der Cauchy-Formel [KP92, 4.5] aufgelöst. Beachtet man zusätzlich die Monotonie der Wassersteinmetrik (3.9), so schließt man

$$
\begin{aligned}
&W_{T,2p}^{2p}(\Phi^{k+1}(M), \Phi^k(M)) \\
&\leq C(T)^k \frac{1}{(k-1)!} \int_0^T (T-u)^{k-1} W_{u,2p}^{2p}(\Phi^1(M), M) du \\
&\leq C(T)^k \frac{1}{(k-1)!} W_{T,2p}^{2p}(\Phi^1(M), M) \int_0^T (T-u)^{k-1} du \\
&\leq C(T)^k \frac{T^k}{k!} W_{T,2p}^{2p}(\Phi^1(M), M)
\end{aligned}
$$

bzw. mit angepassten Konstanten

$$
W_{T,2p}(\Phi^{k+1}(M), \Phi^k(M)) \leq \frac{C(T)^k}{\sqrt[2p]{k!}} W_{T,2p}(\Phi^1(M), M).
$$

Es sei $l > 1$ und $k > C(T)^{2p}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&W_{T,2p}(\Phi^k(M), \Phi^{k+l}(M)) \\
&\leq W_{T,2p}(\Phi^k(M), \Phi^{k+1}(M)) + \ldots + W_{T,2p}(\Phi^{k+l-1}(M), \Phi^{k+l}(M)) \\
&\leq \frac{C(T)^k}{\sqrt[2p]{k!}} W_{T,2p}(\Phi^1(M), M) \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{C(T)}{\sqrt[2p]{k+1}} + \frac{C(T)^2}{\sqrt[2p]{(k+1)(k+2)}} + \ldots + \frac{C(T)^{l-1}}{\sqrt[2p]{k(k+1)\cdot \ldots \cdot (k+l-1)}}\right) \\
&\leq \frac{C(T)^k}{\sqrt[2p]{k!}} W_{T,2p}(\Phi^1(M), M) \sum_{i=0}^{l-1} \left(\frac{C(T)}{\sqrt[2p]{k}}\right)^i \\
&\leq \frac{C(T)^k}{\sqrt[2p]{k!}} W_{T,2p}(\Phi^1(M), M) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{C(T)}{\sqrt[2p]{k}}\right)^i \\
&\leq \frac{C(T)^k}{(1 - \frac{C(T)}{\sqrt[2p]{k}})\sqrt[2p]{k!}} W_{T,2p}(\Phi^1(M), M).
\end{aligned}$$

Bei der Folge $\Phi^k(M)$ handelt es sich damit um eine Cauchy-Folge, weil für $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $k > k(\varepsilon)$ und $l > 1$ die Metrik kleiner ε ist. Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ existiert also ein eindeutiger Grenzwert $Q \in \mathcal{M}_{1,2p}(C_T)$ der Folge $\Phi^k(M)$.

Nach der folgenden Abschätzung erkennt man, dass es sich hierbei tatsächlich um einen Fixpunkt der Abbildung Φ handelt. Wegen (3.22) gilt nämlich

$$\begin{aligned}
W_{T,2p}^{2p}(Q, \Phi(Q)) &= \lim_{k \longrightarrow \infty} W_{T,2p}^{2p}(\Phi^{k+1}(M), \Phi(Q)) \\
&\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} C(T) \int_0^T W_{u,2p}^{2p}(\Phi^k(M), Q) du \\
&\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} C(T)\, T\, W_{T,2p}^{2p}(\Phi^k(M), Q) = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Q in die entkoppelte stochastische Differenzialgleichung (3.10) ein, so liefert Satz 3.3.1 verbunden mit den Überlegungen bzgl. eines Fixpunktes der Abbildung Φ die im Satz getroffenen Aussagen. ∎

3.4 Approximation des Pickard-Tory Modells

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit der Grenzdynamik durch Satz 3.3.2 gesichert sind, wird in diesem Abschnitt demonstriert, dass das Pickard-Tory Modell für große Teilchenzahlen tatsächlich durch die nichtlineare Grenzdynamik approximiert wird. Damit eine solche Untersuchung technisch überhaupt möglich ist, müssen das Pickard-Tory Modell und die Grenzdynamik auf einem Wahrscheinlichkeitsraum betrachtet werden.

Konkret wählt man zunächst einen beliebigen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$. Die Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ genüge den üblichen Bedingungen. Der Wahrscheinlichkeitsraum muss jedoch groß genug sein, um unendlich viele voneinander stochastisch unabhängige Kopien $\{\overline{Y}^i_t\}_{i=1}^\infty$ der nichtlinearen Grenzdynamik (3.1) inklusive ihrer Anfangsbedingungen $\{\overline{Y}^i_0\}_{i=1}^\infty$ zu tragen. Jede einzelne Grenzdynamik wird dabei weiterhin durch die nichtlineare stochastische Differenzialgleichung (3.1)

$$\overline{Y}^i_t = \overline{Y}^i_0 + \int_0^t b(\overline{Y}^i_s, c(\overline{Y}^i_s, P_s))ds + \int_0^t \sigma(\overline{Y}^i_s, c(\overline{Y}^i_s, P_s))dW^i_s$$
$$\mathcal{L}(\overline{Y}^i_t) = P_t, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

charakterisiert. Wie in Satz 3.3.2 gefordert ist die Anfangsbedingung $\overline{Y}^i_0$ von der 6-dimensionalen Brownschen Bewegung W^i_t unabhängig. Ferner ist die Startkonfiguration für alle Grenzdynamiken gleich, d.h. bei den $\overline{Y}^i_0$ handelt es sich um unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen.

Solch ein Wahrscheinlichkeitsraum existiert. Man geht etwa von dem in Kapitel 2.3 vorgestellten Grundraum $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^6)$, der Menge aller stetigen $\mathbb{R}^6$-wertigen Funktionen, mit zugehöriger σ-Algebra $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^6))$ aus. Auf diesem existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^*, das s.g. Wiener Maß, bzgl. dessen die Koordinatenprozesse $W_t(\omega) \triangleq \omega(t)$ eine 6-dimensionale Brownsche Bewegung darstellen (vgl. [KS91, 5.5.3], [Bau91, 40.4]). Durch Produktraumbildung kann ein für den hier betrachteten Fall geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum gebildet werden, indem man etwa $\Omega = (\mathbb{R}^6 \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^6))^{\mathbb{N}}$ mit dem Maß $(\xi \otimes P^*)^{\otimes \mathbb{N}}$ wählt. Dabei ist ξ die vom Parameter i unabhängige Startkonfiguration aller Teilchen.

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$ wird zusätzlich das Pickard-Tory Modell mit n Teilchen definiert. Im Systemprozess

$$Y^n_t = (Y^{1,n}_t, \dots, Y^{i,n}_t, \dots, Y^{n,n}_t)$$

wird das i-te Teilchen durch die stochastische Differenzialgleichung (1.11)

$$Y_t^{i,n} = Y_0^{i,n} + \int_0^t b_i(Y_s^n)ds + \int_0^t \xi_i(Y_s^n)dW_s^i$$

beschrieben. Die Koeffizienten ξ_i bzw. b_i sind durch (1.8) bzw. (1.10) definiert. W_t^i ist die 6-dimensionale Brownsche Bewegung, die bereits in der Grenzdynamik für das i-te Teilchen $\overline{Y}_t^i$ verwendet wurde. Ebenso haben alle Teilchen im Pickard-Tory Modell die gleiche Startkonfiguration wie die Teilchen in der Grenzdynamik, d.h. auch hier sind die $Y_0^{i,n}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen.

Die Voraussetzungen an die Koeffizienten, aus denen Driftvektor und Dispersionsmatrix für das Pickard-Tory Modell und die Grenzdynamik gebildet wurden, werden so gewählt, dass die Existenz- und Eindeutigkeitssätze Satz 2.1.1 und Satz 3.3.2 beider Modelle gültig sind.

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $\|\mu\|_L$.
2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante $\|\sigma\|_L$.
3. Die Konstanten $\varepsilon_i \geq 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind nichtnegativ.
4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$.
5. Die Startkonfigurationen für die Grenzdynamiken $\{\overline{Y}_0^i\}_{i=1}^\infty$ bilden eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit zweitem Moment, die von der Folge der 6-dimensionalen Brownschen Bewegungen ebenfalls unabhängig ist. Die Startkonfiguration für das i-te Teilchen in beiden Modellen ist dieselbe.

Für den folgenden Beweis und die weiteren Untersuchungen kann (1.11) in eine bzgl. der Notation günstigere Form gebracht werden. Greift man auf die Definition des Driftes im Pickard-Tory Modell (1.10) und der Grenzdynamik (3.2) unter Verwendung von

$$Y_s^{i,n} = (X_s^{i1}, X_s^{i2}, X_s^{i3}, X_s^{i4}, X_s^{i5}, X_s^{i6})'$$

zurück, so lässt sich der Driftvektor als

$$b_i(Y_s^n) = \begin{pmatrix} X_s^{i4} \\ X_s^{i5} \\ X_s^{i6} \\ -\beta X_s^{i4} + \mu(c_i^n(Y_s^n)) \\ -\beta X_s^{i5} \\ -\beta X_s^{i6} \end{pmatrix} = b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) \tag{3.23}$$

und analog wegen (1.8) und (3.3) auch die Dispersionsmatrix durch

$$\begin{aligned} \xi_i(Y_s^n) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(c_i^n(Y_s^n)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2(c_i^n(Y_s^n)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3(c_i^n(Y_s^n)) \end{pmatrix} \\ &= \sigma(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) \end{aligned} \tag{3.24}$$

darstellen. In dieser für die Verwendung von Wassersteinmetriken besonders geeigneten Form finden die Koeffizienten im anstehenden Beweis Eingang.

Zuvor soll allerdings noch auf eine weitere Darstellungsmöglichkeit hingewiesen werden, an der man leicht die Verteilungseigenschaften von Grenzdynamik und Teilchenprozess im Pickard-Tory Modell ablesen kann. Dazu wird mit Hilfe der n Teilchenprozesse $Y_t^{i,n}$ des Pickard-Tory-Modells der maßwertige Prozess

$$Z_t^n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_t^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6) \tag{3.25}$$

definiert.

Der Begriff der maßwertigen Prozesse ist durch folgende Definition festgelegt, die hier bereits allgemeiner als jetzt unbedingt nötig erfolgt. Die Notwendigkeit ergibt sich ausschließlich auf Grund einer mathematisch korrekten Sprache und der Verwendung maßwertiger Prozesse im erweiterten Kontext in Kapitel 4.2. Dort wird insbesondere das Konvergenzverhalten maßwertiger Zufallsvariablen eingehend untersucht. Für die folgenden Überlegungen ist der Spezialfall $S = \mathbb{R}$ von Interesse.

Definition 3.4.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (S, d) ein separabler metrischer Raum. Eine $\mathcal{M}_1(S)$-wertige Zufallsvariable Z, d.h. eine messbare Abbildung*

$$Z : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathcal{M}_1(S), \mathcal{B}(\mathcal{M}_1(S))),$$

nennt man **maßwertige Zufallsvariable**. *Eine Familie maßwertiger Zufallsvariablen Z_t für $t \in [0, T]$ nennt man einen* **maßwertigen Prozess** $Z = \{Z_t\}_{t\in[0,T]}$.

Verwendet man die Definitionen (1.7) bzw. (3.4) der Konzentrationsfunktionale von Pickard-Tory Modell und Grenzdynamik, so gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} c(Y_s^{i,n}, Z_s^n) &\triangleq \gamma \int_{\mathbb{R}^6} K^*(Y_s^{i,n} - z) dZ_s^n(z) = \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^6} K^*(Y_s^{i,n} - z) d\delta_{Y_s^{j,n}}(z) \\ &= \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^{n} K^*(Y_s^{i,n} - Y_s^{j,n}) = \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^{n} K(T_i Y_s^n - T_j Y_s^n) \\ &\triangleq c_i^n(Y_s^n). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Unter Berücksichtigung von (3.23)-(3.26) kann das $i-$te Teilchen im Pickard-Tory Modell statt mit (1.11) durch die stochastische Differenzialgleichung

$$Y_t^{i,n} = Y_0^{i,n} + \int_0^t b(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds + \int_0^t \sigma(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) dW_s^i \tag{3.27}$$

erklärt werden. Das Verhalten des i-ten Teilchens hängt demnach nur von sich selbst und dem maßwertigen Prozess Z_t^n ab, der für alle i Gleichungen identisch ist. Auf Grund des gleichen Aufbaus der stochastischen Differenzialgleichungen ist daraus sofort ablesbar, dass die $\{Y_t^{i,n}\}$ identisch verteilte Zufallsvariablen sind, die aber wegen der gegenseitigen Kopplung über den maßwertigen Prozess Z_t^n voneinander abhängig sind.

Ebenso ergibt sich, dass die Paare $(Y_t^{i,n}, \overline{Y}_t^i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gleiche Verteilung besitzen, da sie durch strukturgleiche stochastische Differenzialgleichungen charakterisiert und die Teilprozesse auf der gleichen Brownschen Bewegung definiert sind. Da diese Eigenschaften im Folgenden mehrfach Anwendung finden, soll dies in einem Lemma kurz zusammengefasst werden.

Lemma 3.4.1 *Die Teilchenprozesse* $\{Y_t^{i,n}\}_{i=1}^n$ *sind abhängige, aber identisch verteilte Zufallsvariablen. Die Paare* $(Y_t^{i,n}, \overline{Y}_t^i)$ *besitzen für alle* $i = 1, \ldots, n$ *gleiche Verteilung.*

Es kann nun die bereits angekündigte Approximation in dem folgenden Satz formuliert werden.

Satz 3.4.1 *Sind die Systemkonfiguration des Pickard-Tory Modells und die Grenzdynamiken auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum in der eben beschriebenen Weise definiert und besitzt die Startkonfiguration* $2p$*-tes Moment für ein und damit jedes Teilchen, d.h. gilt* $\boldsymbol{E}\left[\left\|Y_0^{i,n}\right\|^{2p}\right] < \infty$*, dann liegt eine Approximation der Ordnung* $1/n^p$ *vor.*

$$\boldsymbol{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p \geq 1$$

Beweis Im Beweis wird die in (3.23) und (3.24) eingeführte Notation verwendet.

Berücksichtigt man diese Beziehungen, so lässt sich der zu untersuchende Ausdruck folgendermaßen darstellen.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \qquad (3.28)\\
\leq& 4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t b_i(Y_s^n) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))ds\right\|^{2p}\right]\\
&\qquad + 4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t \xi_i(Y_s^n) - \sigma(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))dW_s^i\right\|^{2p}\right]\\
=& 4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))ds\right\|^{2p}\right]\\
&\qquad + 4^p\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t \sigma(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - \sigma(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))dW_s^i\right\|^{2p}\right]
\end{aligned}$$

Die beiden Terme werden getrennt bearbeitet. Auftretende Konstanten werden regelmäßig zusammengefasst, wobei ausdrücklich eine Abhängigkeit von T aber nicht von der Teilchenzahl n erlaubt ist. Ferner können die Konstanten o.B.d.A. grundsätzlich größer als eins angenommen werden.

Zunächst richtet man das Augenmerk auf den ersten der beiden Terme in (3.28). Mit der Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^6$ [Wal92b, 7.12] und Lemma A.0.1 sowie auf Grund der Lipschitz-Stetigkeit des Driftes (3.12) rechnet man

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))ds\right\|^{2p}\\
\leq &T^{2p-1}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t \left\|b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))\right\|^{2p} ds\\
\leq &T^{2p-1}\int_0^T \left\|b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))\right\|^{2p} ds\\
\leq &C_1^{2p}T^{2p-1}\int_0^T \left(\left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\| + \left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right|\right)^{2p} ds\\
\leq &\underbrace{4^p C_1^{2p}T^{2p-1}}_{\triangleq C_3}\int_0^T \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^{2p} + \left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right|^{2p} ds.
\end{aligned}
$$

Nach Erwartungswertbildung in der letzten Ungleichung und Ausnutzung des Satzes von Fubini ergibt sich nach dem Zusammenfassen der Konstanten die folgende Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t b(Y_s^{i,n}, c_i^n(Y_s^n)) - b(\overline{Y}_s^i, c(\overline{Y}_s^i, P_s))ds\right\|^{2p}\right] \qquad (3.29)\\
\leq &C_3\int_0^T \mathbf{E}\left[\left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^{2p}\right] ds + C_3\int_0^T \mathbf{E}\left[\left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right|^{2p}\right] ds.
\end{aligned}
$$

Auch für den zweiten Term in (3.28) erhält man eine Abschätzung der Form (3.29), allerdings muss man in diesem Fall aus technischen Gründen mit der Ungleichung für Martingale von Burkholder, Davis und Gundy [KS91, Theorem 3.3.29] operieren

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t \sigma(Y_s^{i,n},c_i^n(Y_s^n))-\sigma(\overline{Y}_s^i,c(\overline{Y}_s^i,P_s))dW_s^i\right\|^{2p}\right] \qquad (3.30)\\
\le &C_{BDG}\,\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \left\|\sigma(Y_s^{i,n},c_i^n(Y_s^n))-\sigma(\overline{Y}_s^i,c(\overline{Y}_s^i,P_s))\right\|^2 ds\right)^p\right]\\
\le &C_{BDG}T^{p-1}\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(Y_s^{i,n},c_i^n(Y_s^n))-\sigma(\overline{Y}_s^i,c(\overline{Y}_s^i,P_s))\right\|^{2p} ds\right]\\
\le &\underbrace{C_{BDG}\,C_2^{2p}T^{p-1}}_{\triangleq C_4}\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|c_i^n(Y_s^n)-c(\overline{Y}_s^i,P_s)\right|^{2p} ds\right].
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die bereits im Beweis über Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung erhaltene Abschätzung (3.13) für die Dispersionsmatrix verwendet.

Man fasst nun (3.28) bis (3.30) zusammen, wobei $C_5 \triangleq 4^p(C_3 + C_4)$ gilt, und erhält als erstes Zwischenergebnis den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|Y_t^{i,n}-\overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \le C_5\int_0^T \mathbf{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left\|Y_r^{i,n}-\overline{Y}_r^i\right\|^{2p}\right] ds&\\
+ C_5\int_0^T \mathbf{E}\left[\left|c_i^n(Y_s^n)-c(\overline{Y}_s^i,P_s)\right|^{2p}\right] ds.& \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Als technisch aufwendig erweist sich dabei im Folgenden die Analyse der Differenz der beiden Konzentrationsfunktionale im letzten Term von (3.31). Bevor nun das Lemma von Gronwall eingesetzt werden kann, müssen daher in einem Zwischenschritt geeignet Terme eingefügt werden, die eine weitere Bearbeitung des Ausdrucks ermöglichen.

Greift man auf die Definitionen (1.7) bzw. (3.4) der Konzentrationsfunktionale von Pickard-Tory Modell und Grenzdynamik zurück, so gilt für die Differenz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma}\left|c_i^n(Y_s^n)-c(\overline{Y}_s^i,P_s)\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n K(T_iY_s^n-T_jY_s^n)-\int_{\mathbb{R}^6}K^*(\overline{Y}_s^i-z)dP_s(z)\right|\\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n K^*(Y_s^{i,n}-Y_s^{j,n})-\int_{\mathbb{R}^6}K^*(\overline{Y}_s^i-z)dP_s(z)\right|
\end{aligned}$$
(3.32)

wenn man berücksichtigt, dass die Projektion T_i aus dem Systemprozess Y_s^n den dreidimensionalen Ortsprozess des i-ten Teilchens auswählt und K^* als kanonische Fortsetzung (1.5) von K die Geschwindigkeitskomponenten des i-ten Teilchens unberücksichtigt lässt.

Im Folgenden werden nun Terme in der Art eingefügt, dass im Gegensatz zu (3.32) in der Differenz von Summe und Integral lediglich Prozesse der Grenzdynamik $\overline{Y}_s^i$ aber keine Teilchenprozesse des Pickard-Tory Modells mehr stehen. Dies erlaubt im weiteren Vorgehen die identische Verteilung und die Unabhängigkeit der Grenzdynamiken auszunutzen. Konkret ergänzt man

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma}\left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right| \\
\leq\ & \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K^*(Y_s^{i,n} - Y_s^{j,n}) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K^*(\overline{Y}_s^i - Y_s^{j,n})\right| \\
&+\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K^*(\overline{Y}_s^i - Y_s^{j,n}) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K^*(\overline{Y}_s^i - \overline{Y}_s^j)\right| \\
&+\underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K^*(\overline{Y}_s^i - \overline{Y}_s^j) - \int_{\mathbb{R}^6} K^*(\overline{Y}_s^i - z)dP_s(z)\right|}_{=\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|}.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$
r_s(x,y) \triangleq K^*(x-y) - \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x-z)dP_s(z), \quad x, y \in \mathbb{R}^6
$$

verwendet, die in den weiteren Rechenschritten die Übersichtlichkeit deutlich erhöhen wird.

Weiter erhält man unter Berücksichtigung der Lipschitz-Stetigkeit der Kernfunktion K

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma}\left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right| \leq\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|K^*(Y_s^{i,n} - Y_s^{j,n}) - K^*(\overline{Y}_s^i - Y_s^{j,n})\right| \\
& + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|K^*(\overline{Y}_s^i - Y_s^{j,n}) - K^*(\overline{Y}_s^i - \overline{Y}_s^j)\right| \\
& + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right| \\
\leq\ & \|K\|_L \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\| + \frac{\|K\|_L}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\overline{Y}_s^j - Y_s^{j,n}\right\| \\
& + \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|.
\end{aligned}$$

In (3.31) wird die $2p$-te Potenz benötigt. Es bedarf also weiterer Abschätzungen, bei denen immer wieder Lemma A.0.1 verwendet wird.

$$\begin{aligned}
& \left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right|^{2p} \\
\leq\ & \gamma^{2p}\left(\|K\|_L \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\| + \frac{\|K\|_L}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\overline{Y}_s^j - Y_s^{j,n}\right\| + \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|\right)^{2p} \\
\leq\ & (3\gamma)^{2p}\left(\|K\|_L^{2p} \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^{2p} + \frac{\|K\|_L^{2p}}{n^{2p}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left\|\overline{Y}_s^j - Y_s^{j,n}\right\|\right]^{2p} \right. \\
& \left. + \frac{1}{n^{2p}}\left|\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|^{2p}\right) \\
\leq\ & (3\gamma)^{2p}\left(\|K\|_L^{2p} \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^{2p} + \frac{\|K\|_L^{2p}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\overline{Y}_s^j - Y_s^{j,n}\right\|^{2p} \right. \\
& \left. + \frac{1}{n^{2p}}\left|\sum_{j=1}^{n} r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|^{2p}\right)
\end{aligned}$$

Nach Übergang zum Erwartungswert und mit $C_6 \triangleq (3\gamma)^{2p}\|K\|_L^{2p}$ erhält man für die in (3.31) beschriebene Differenz der Konzentrationsfunktionale

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left|c_i^n(Y_s^n) - c(\overline{Y}_s^i, P_s)\right|^{2p}\right] \\
\leq\ & C_6\,\mathbf{E}\left[\left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^{2p}\right] + \frac{C_6}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\left\|\overline{Y}_s^j - Y_s^{j,n}\right\|^{2p}\right] \\
& + \frac{C_6}{n^{2p}}\,\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|^{2p}\right] \\
\leq\ & C_6\,\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left\|Y_r^{i,n} - \overline{Y}_r^i\right\|^{2p}\right] + \frac{C_6}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left\|\overline{Y}_r^j - Y_r^{j,n}\right\|^{2p}\right] \\
& + \frac{C_6}{n^{2p}}\,\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|^{2p}\right].
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in (3.31) ein, so kann man die verschiedenen Terme zusammenfassen und ermittelt die für den Abschluss des Beweises entscheidende Ungleichung

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \\
\leq\ & C_5(1+C_6)\int_0^T \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left\|Y_r^{i,n} - \overline{Y}_r^i\right\|^{2p}\right] ds \\
& + C_5C_6\int_0^T \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}\left\|\overline{Y}_r^j - Y_r^{j,n}\right\|^{2p}\right] ds \\
& + \frac{C_5C_6}{n^{2p}}\int_0^T \mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^j)\right|^{2p}\right] ds.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Vor der Fortführung des Beweises muss der letzte Integrand in (3.33) näher untersucht werden. Dieser soll mit der Ungleichung von Marcinkiewicz und Zygmund abgeschätzt werden, welche eine obere Schranke für das $2p$-te Moment einer Summe von n zentrierten, unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen angibt.

Nach Voraussetzung bzw. Konstruktion sind die n Grenzdynamiken $\{\overline{Y}_s^j\}_{j=1}^n$ stochastisch unabhängige Kopien von (3.1). Deshalb handelt es sich bei $\{r(y, \overline{Y}_s^j)\}_{j=1}^n$ ebenfalls um n stochastisch unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen, die gemäß

$$r(y,\overline{Y}^j_s) = K^*(y-\overline{Y}^j_s) - \int_{\mathbb{R}^6} K^*(y-z)dP_s(z) = K^*(y-\overline{Y}^j_s) - \mathbf{E}\left[K^*(y-\overline{Y}^j_s)\right]$$

zentriert sind und deren $2p$-tes Moment wegen Satz 3.3.2 existiert.

Somit sind die Voraussetzungen für die Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung erfüllt und es gilt [CT97, 10.3.2]

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n r(y,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\right] \le C_{MZ}\, n^p$$

wobei die Konstante C_{MZ} nur von p abhängt.

Durch geeignete Konditionierung kann mit Hilfe dieser Abschätzung der letzte Integrand in (3.33) vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\right] && (3.34)\\
=&\,\mathbf{E}\left[\left|r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^i_s) + \sum_{j=1,i\neq j}^n r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\right]\\
\le& 2^{2p-1}\,\mathbf{E}\left[\left|r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^i_s)\right|^{2p}\right] + 2^{2p-1}\,\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1,i\neq j}^n r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\right]\\
\le& 2^{2p-1}C_7 + 2^{2p-1}\int_{\mathbb{R}^6}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1,i\neq j}^n r(\overline{Y}^i_s,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\,\middle|\,\overline{Y}^i_s = y\right]dP_s(y)\\
=& 2^{2p-1}C_7 + \int_{\mathbb{R}^6}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1,i\neq j}^n r(y,\overline{Y}^j_s)\right|^{2p}\right]dP_s(y)\\
\le& 2^{2p-1}C_7 + C_{MZ}\,(n-1)^p\\
\le& \underbrace{\max\{2^{2p-1}C_7, C_{MZ}\}}_{\triangleq C_8}\, n^p
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Unabhängigkeit der $r(y,\overline{Y}^j_s)$ und Lemma A.0.3 mit

$$f(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) \triangleq \left| \sum_{k=1}^{n-1} r(x, y_k) \right|^{2p}$$

sowie die Beschränktheit von $\mathbf{E}\left[\left| r(\overline{Y}_s^i, \overline{Y}_s^i) \right|^{2p} \right]$ benutzt.

(3.33) erhält damit die einfache Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left\| Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i \right\|^{2p} \right] \le & C_9 \int_0^T \mathbf{E}\left[\sup_{0 \le r \le s} \left\| Y_r^{i,n} - \overline{Y}_r^i \right\|^{2p} \right] ds \\ & + C_9 \int_0^T \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\sup_{0 \le r \le s} \left\| \overline{Y}_r^j - Y_r^{j,n} \right\|^{2p} \right]}_{= \mathbf{E}\left[\sup_{0 \le r \le s} \left\| \overline{Y}_r^i - Y_r^{i,n} \right\|^{2p} \right]} ds + \frac{C_9}{n^p} \\ \le & 2C_9 \int_0^T \underbrace{\mathbf{E}\left[\sup_{0 \le r \le s} \left\| Y_r^{i,n} - \overline{Y}_r^i \right\|^{2p} \right]}_{\triangleq g(s)} ds + \frac{C_9}{n^p}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

wobei die Konstante durch $C_9 \triangleq \max\{C_5(1 + C_6), C_5 C_6, T\, C_5 C_6 C_8\}$ erklärt ist. Die letzte Ungleichung erhält man unter Ausnutzung der Verteilungsgleichheit der Paare $(Y_t^{i,n}, \overline{Y}_t^i)$ (Lemma 3.4.1).

Eine Anwendung des Lemmas von Gronwall schließt den Beweis endgültig ab. Lemma A.0.2 mit $\beta \triangleq 2C_9$, $f(s) = \frac{1}{2Tn^p}$ und $g(s)$ wie oben liefert die Beziehung

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left\| Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i \right\|^{2p} \right] \le \frac{1}{n^p} \underbrace{C_9 \exp(2C_9 T)}_{\triangleq C_{10}}$$

und damit die im Satz formulierte Behauptung. ■

Die beschriebene Konvergenz lässt sich unter der Voraussetzung, dass die Startkonfiguration ein viertes Moment besitzt, leicht auf die fast sichere Konvergenz ausdehnen wie das folgende Korollar demonstriert.

Korollar 3.4.1 *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.4.1. Insbesondere besitze die Startkonfiguration ein viertes Moment, d.h. es gilt*

$$\boldsymbol{E}\left[\left\|Y_0^{i,n}\right\|^4\right] < \infty,$$

dann liegt eine Approximation in der fast sicheren Konvergenz vor also

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \longrightarrow 0 \quad P\text{-fast sicher für } \; n \longrightarrow \infty.$$

Beweis Nach Satz 3.4.1 und der Ungleichung von Chebyshev-Markov [Bau90, 20.1] gilt für alle $\varepsilon > 0$ und p die Abschätzung

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\sup_{0 \le t \le T} \left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \ge \varepsilon\right\}\right) &\le \frac{1}{\varepsilon^{2p}} \mathbf{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^{2p}} C \, \frac{1}{n^p}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C von T, p und den diversen Lipschitz-Konstanten der Koeffizienten aber nicht von n abhängt. Wählt man speziell etwa $p = 2$ und summiert über n, dann ist der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\sup_{0 \le t \le T} \left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \ge \varepsilon\right\}\right) \le \frac{C}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

beschränkt und nach dem Lemma von Borel-Cantelli [Shi84, Corollary II.10.1] folgt die fast sichere Konvergenz. ∎

Die im Korollar formulierte Bedingung kann leicht abgeschwächt werden. Es muss lediglich die Konvergenz der auftretenden Summe garantiert sein.

3.5 Nachweis der Existenz einer Dichte

In Kapitel 2.2 wurde speziell auf die Frage nach der Existenz einer Dichte der Verteilung des Systemprozesses Y_t^n im Pickard-Tory Modell eingegangen. Diese Fragestellung wird in diesem Kapitel auch für die Grenzdynamik untersucht und mit Satz 3.5.1 positiv beantwortet. Abweichend vom Pickard-Tory Modell müssen allerdings die Voraussetzungen an die Modellstruktur verschärft werden.

Im ersten Schritt erfolgt die Umnotierung der Modellgleichung (3.1) in die Gestalt einer zeitinhomogenen stochastischen Differenzialgleichung, ähnlich wie dies im Beweis zu Satz 3.3.1 geschehen ist.

Konkret wird durch

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \overline{b}(s, Y_s) ds + \int_0^t \overline{\sigma}(s, Y_s) dW_s$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \overline{b}(t,x) &\triangleq b(x, c(x, P_t)), \quad x \in \mathbb{R}^6, t \in [0,T], P_t = \mathcal{L}(Y_t) \\ \overline{\sigma}(t,x) &\triangleq \sigma(x, c(x, P_t)) \end{aligned} \tag{3.36}$$

eine zeitinhomogene und zu (3.1) äquivalente stochastische Differenzialgleichung definiert. Dies ist möglich, da durch Satz 3.3.2 bereits die Existenz der Familie von Maßen $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ gesichert ist.

In [Tan85] wurde durch Angabe eines Gegenbeispiels ausdrücklich gezeigt, dass im zeitinhomogenen Fall das in Definition 2.2.4 formulierte Hörmander-Kriterium nicht mehr für die Existenz einer Dichte ausreicht. Stattdessen kann die Existenz einer Dichte nur unter Gültigkeit eines eingeschränkten Hörmander-Kriteriums nachgewiesen werden.

Folgende Voraussetzungen an die Koeffizienten des Modells gelten:

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist unendlich oft differenzierbar und alle seine Ableitungen sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind alle unendlich oft differenzierbar und haben ebenfalls alle beschränkte Ableitungen. Zusätzlich sind die Dispersionskoeffizienten strikt positiv, d.h. es gilt

$$\min_{i=1,2,3} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma_i(x) > 0.$$

3. Die Konstanten $\varepsilon_i > 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind positiv.

4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Dichtefunktion mit beschränkten Ableitungen.

5. Die Startkonfiguration für die Grenzdynamik Y_0 besitze eine Dichtefunktion mit kompaktem Support in $\mathbb{R}^6$.

Mit diesen Voraussetzungen lässt sich folgender Satz formulieren.

Satz 3.5.1 *Unter den genannten Bedingungen für die Koeffizienten besitzt die Grenzdynamik Y_t bzw. deren Verteilung eine Dichte $p_t(x)$, die unendlich oft differenzierbar ist.*

Beweis Den Schwerpunkt in diesem Beweis bildet der Nachweis der in [AKH02] formulierten Bedingungen. Im ersten Schritt werden hierzu die Voraussetzungen an die Koeffizienten hinsichtlich Differenzierbarkeit und Beschränktheit der Ableitungen geprüft.

Dabei wurden die vor dem Satz formulierten Bedingungen gerade so gewählt, dass die Dispersionsmatrix $\sigma(x, y)$, der Driftvektor $b(x, y)$ und die Kernfunktion $K(x - y)$ beliebig oft stetig differenzierbar mit beschränkten Ableitungen sind.

Im Falle der Dispersionsmatrix überträgt sich diese Eigenschaft wegen der speziellen Gestalt (3.3) von den Dispersionskoeffizienten σ_i (i=1,2,3) direkt auf $\sigma(x, y)$.

Der Driftvektor $b(x, y)$ setzt sich gemäß (3.2) nur aus linearen Termen und der Funktion μ zusammen. Zusammen mit den Voraussetzungen an μ ergibt sich auch für $b(x, y)$ die notwendige Beschränktheit der Ableitungen.

Für die Startverteilung müssen alle höheren Momente existieren. Dies kann aus der Existenz einer Dichtefunktion mit kompakten Support gefolgert werden.

Entscheidend für den Beweis der Aussage ist eine strukturelle Eigenschaft der Dispersionsmatrix, die in Anlehnung an Definition 2.2.4 als das eingeschränkte Hörmander-Kriterium bezeichnet wird. Der Unterschied zum allgemeinen Hörmander-Kriterium besteht darin, dass bei zeitabhängigen Koeffizienten der Driftvektor nicht mehr berücksichtigt werden darf.

Analog zu (2.9) in Kapitel 2.2 erhält man die Vektorfelder A_i. Diese sind auf Grund der Diagonalgestalt durch $A_i \triangleq \overline{\sigma_{ii}}(t, x)\partial_i$ definiert, d.h. es gilt

$$A_i \triangleq \begin{cases} \varepsilon_i \partial_i & i = 1, 2, 3 \\ \sigma_{i-3}(c(x, P_t))\partial_i & i = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Ist eine der Konstanten etwa $\varepsilon_1 = 0$, so kann auch durch Anwenden der Klammeroperation $[\cdot,\cdot]$ auf die verbliebenen A_j das Vektorfeld ∂_1 nicht mehr dargestellt werden. Deshalb musste im Vorfeld die Positivität der Konstanten ε_i gefordert werden.

Definiert man eine Konstante c durch

$$c = \min_{i=1,2,3} \{\inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma_i(x), \varepsilon_i\},$$

so erfüllt die zeitabhängige Dispersionsmatrix (3.36) für fast sicher alle auf eins normierten Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{R}^6$ die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\overline{\sigma_{ii}}(0, Y_0)\; x_i\right)^2 \geq c^2 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = c^2 > 0. \tag{3.37}$$

Aus [AKH02, Theorem 2.2] folgt dann die Behauptung. ∎

Es stellt sich die Frage, ob die Voraussetzungen nicht weiter abgeschwächt werden können, so dass für die Lösung der Grenzdynamik auch im Fall $\varepsilon_i = 0$ eine Dichte existiert. Dies gelingt, in dem zunächst die moderne Technik des Malliavin Calculus vorgestellt und anschließend im Beweis eingesetzt wird.

Die Theorie des Malliavin Calculus stellt Hilfsmittel bereit um zu prüfen, ob die Verteilungen von Zufallsvariablen oder Prozessen absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes sind. Hierzu müssen im Wesentlichen zwei Eigenschaften nachgewiesen werden. Zum einen muss die Zufallsvariable gewisse „Glattheitseigenschaften“ erfüllen. Zum anderen wird die sogenannte Malliavin Matrix ermittelt. Ist diese fast sicher invertierbar, dann besitzt die Verteilung des Prozesses eine Dichte. Sind sämtliche Momente der Inversen darüber hinaus noch integrierbar, dann ist die Dichte beliebig oft stetig differenzierbar.

Die im Beweis zu [AKH02, Theorem 2.2] verwendete Technik, die Inverse der Malliavin Matrix abzuschätzen ohne sie direkt berechnet zu haben, ist in dieser Situation nicht anwendbar, da hierzu wiederholt Gebrauch vom eingeschränkten Hörmander-Kriterium gemacht werden muss. Daher muss es Ziel sein, die Malliavin Matrix explizit zu berechnen und ihre Invertierbarkeit nachzuweisen. Dieses Vorgehen ist für die 6-dimensionale Grenzdynamik nicht durchführbar. Es wird deshalb nur eine Raumdimension und damit folgende Problemstellung untersucht.

Ausgangspunkt ist erneut ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$, dessen Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}$ den üblichen Bedingungen genügt. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum ist eine 2-dimensionale Brownschen Bewegung $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ erklärt.

Die Grenzdynamik wird durch folgende nichtlineare stochastische Differenzialgleichung

$$Y_t = y_0 + \int_0^t b(Y_s, c(Y_s, P_s))ds + \int_0^t \sigma(Y_s, c(Y_s, P_s))dW_s, \;\; \mathcal{L}(Y_t) = P_t, y_0 \in \mathbb{R}^2 \tag{3.38}$$

beschrieben.

Der Driftvektor $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und die Dispersionsmatrix $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sind in Anlehnung an (3.2) und (3.3) durch

$$b(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} x_2 \\ -\beta x_2 + \mu(y) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}$$

und

$$\sigma(x,y) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma(y) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}$$

festgelegt. Das Konzentrationsfunktional $c : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ hat die Form

$$c(x,Q) \triangleq \gamma \int_{\mathbb{R}^2} K(x-z)dQ(z), \quad x \in \mathbb{R}^2, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2).$$

An die Koeffizienten werden die folgenden Bedingungen gestellt:

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und der Dispersionskoeffizient $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Zusätzlich ist der Dispersionskoeffizient strikt positiv.
2. Der Kern $K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Dichtefunktion mit beschränkten Ableitungen und hängt nur von der zweiten Komponente ab.

Bevor mit der eigentlichen Untersuchung begonnen wird folgt eine knappe und übersichtliche Darstellung der benötigten Hilfsmittel. Dabei sind Notation und Aussagen den beiden Büchern [Nua95] und [BN98] von Nualart entnommen.

Den Ausgangspunkt für die Theorie des Malliavin Calculus bildet ein reeller separabler Hilbertraum H mit Skalaprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist eine Famile $\mathcal{H}_1 \triangleq \{W(h) : h \in H\}$ von zentrierten Gaußschen Zufallsvariablen definiert. Diese steht mit dem Hilbertraum durch die für alle $h, g \in H$ geltende Beziehung

$$\mathbf{E}\left[W(h)W(g)\right] = \langle h, g \rangle_H$$

in Verbindung. $\mathcal{H}_1$ ist damit ein abgeschlossener Gaußscher Unterraum von $L^2(\Omega)$.

Es sei $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen deren sämtliche Ableitungen beschränkt sind und $\mathcal{S}$ die Menge aller Zufallsvariablen, die sich in der Form

$$F = f(W(h_1), W(h_2), \ldots, W(h_d)), \quad h_i \in H, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$$

darstellen lassen. Die Menge $\mathcal{S}$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$ und man kann auf $\mathcal{S}$ den Ableitungsoperator D durch

$$DF \triangleq \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), W(h_2), \ldots, W(h_d))h_i$$

definieren. Es gilt $DF \in L^2(\Omega; H)$ bzw. sogar $DF \in \bigcap_{p\geq 2} L^p(\Omega; H)$.

Der Ableitungsoperator D ist nach [Nua95, Lemma 1.2.2] als Abbildung von $L^p(\Omega)$ nach $L^p(\Omega; H)$ abschließbar (vgl. [MV92, §19]) für alle $p \geq 1$. Der Definitionsbereich von D in $L^p(\Omega)$ wird mit $\mathcal{D}^{1,p}$ bezeichnet und ergibt sich als Abschluss von $\mathcal{S}$ unter der Norm

$$\|F\|_{1,p}^p \triangleq \mathbf{E}\left[|F|^p\right] + \mathbf{E}\left[\|DF\|_H^p\right].$$

Analog lassen sich auch k-fache Ableitungen $D^k F$ und zugehörige Definitionsbereiche $\mathcal{D}^{k,p}$ definieren. Bei den Räumen $D^{k,p}$ handelt es sich um Banachräume. Schließlich definiert man $\mathcal{D}^\infty \triangleq \bigcap_{p\geq 1} \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{D}^{k,p}$.

Als wichtige Rechenhilfe steht auch für den Ableitungsoperator D eine Kettenregel zur Verfügung ([Nua95, Prop. 1.2.2]). Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen und $F = (F^1, \dots, F^d)$ ein Zufallsvektor, dessen Komponenten zu $\mathcal{D}^{1,p}$ gehören, dann gilt $\varphi(F) \in \mathcal{D}^{1,p}$ und

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF^i. \tag{3.39}$$

Die bisherigen Definitionen werden nun für die Anwendung auf die 2-dimensionale Grenzdynamik (3.38) spezialisiert. Hierzu wählt man als Hilbertraum H die Menge $L^2([0,T] \times \{1,2\}) \cong \mathrm{Ł}^2([0,T]; \mathbb{R}^2)$ mit dem Produktmaß aus Lebesgue-Maß und Gleichverteilung auf der Menge der Punkte $1, 2$.

Ausgehend von der 2-dimensionalen Brownschen Bewegung W_t^i lässt sich für allgemeines $h \in H$ durch

$$W(h) \triangleq \sum_{i=1}^{2} \int_0^T h_t^i dW_t^i$$

eine Gaußsche Familie mit Hilfe des stochastischen Integrals definieren. Wählt man für h speziell die charakteristische Funktion auf $[0,t] \times \{i\}, i = 1, 2$ ergibt sich durch

$$W(\chi_{[0,t] \times \{i\}}) = W_t^i$$

eine Darstellung für die Brownsche Bewegung. Alle weiteren Definitionen sind auf diesen Spezialfall hin ausgerichtet.

Bei DF handelt es sich um eine H-wertige Zufallsvariable. Werden bei diesem speziellen Hilbertraum $t \in [0,T]$ und $i \in \{1,2\}$ fest gewählt, d.h.

$$D_t^i F \triangleq DF(t,i),$$

dann ergibt die Ableitung der Zufallsvariablen F einen auf $[0,T]$ parametrisierten, reellwertigen stochastischen Prozess (vgl. [Nua95, 1.2]).

Die Ableitung der j-ten Komponente einer Brownschen Bewegung in die i-te Richtung $(i, j = 1, 2)$ erhält man etwa, indem man $F = W_s^j$, $f(x) = x$ und $h = \chi_{[0,s] \times \{j\}}$ wählt. Es gilt

$$D_t^i W_s^j \triangleq (DW_s^j)(t,i) = 1 \cdot \chi_{[0,s]\times\{j\}}(t \times \{i\})$$

und damit

$$D_t^i W_s^j = \begin{cases} 1 & t \in [0,s], i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin gelten für den Ableitungsoperator in der i-ten Komponente D^i die wichtigen Rechenregeln ([Nua95, Theorem 2.2.1])

$$D_r^i \int_0^t f(X_s)ds = \int_r^t D_r^i f(X_s)ds \tag{3.40}$$

und

$$D_r^i \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(X_s)dW_s^j = f_i(X_r) + \sum_{j=1}^d \int_r^t D_r^i f_j(X_s)dW_s^j, \tag{3.41}$$

sofern die Zugehörigkeit zum Definitionsbereich $\mathcal{D}^{1,p}$ gewährleistet ist.

Als Letztes wird die Malliavin Matrix einer Zufallsvariablen $F = (F^1, F^2), F^i \in \mathcal{D}^{1,2}$ eingeführt, die hier in der Form

$$Q_F \triangleq (\langle F^i, F^j \rangle_H)_{1 \le i,j \le 2} = \sum_{l=1}^2 \int_0^T D_r^l F^i D_r^l F^j dr \tag{3.42}$$

dargestellt werden kann. Die Malliavin Matrix ist symmetrisch, nichtnegativ definit und von ω abhängig.

Entscheidend für die Anwendung ist nun der folgende Satz, der ein hinreichendes Kriterium für die Absolutstetigkeit bzgl. des Lebesgue-Maßes einer reellen Zufallsvariablen angibt ([Nua95, Theorem 2.1.1]).

Satz 3.5.2 *Sei $F = (F^1, F^2)$ eine Vektor von Zufallsvariablen. Für $i = 1, 2$ sei $F^i \in \mathcal{D}^{2,4}$ und die Malliavin Matrix sei P-fast sicher invertierbar, dann ist die Verteilung von F absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^2$.*

Mit seiner Hilfe gelingt nun auch für die Grenzdynamik unter abgeschwächten Voraussetzungen der Nachweis über die Existenz einer Dichte.

Satz 3.5.3 *Unter den genannten Voraussetzungen an die Koeffizienten besitzt die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (3.38) eine Verteilung, die absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^2$ ist.*

Beweis Die erste der beiden in Satz 3.5.2 genannten Bedingungen ist erfüllt, da wegen [Nua95, Theorem 2.2.2] bzw. [AKH02, Theorem 2.1] sogar $Y_t^i \in D^\infty$ gilt. Das Hauptaugenmerk liegt damit auf der Berechnung der Malliavin Matrix. Es werden zunächst die Ableitungen $D_r^i Y_t^j$ mit $i, j = 1, 2$ berechnet.

Die Ableitungen in der ersten Komponenten Y_t^1 ergeben sich durch eine direkte Anwendung von (3.40).

$$
\begin{aligned}
D_r^1 Y_t^1 &= \int_r^t D_r^1 Y_s^2 ds \\
D_r^2 Y_t^1 &= \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds
\end{aligned}
$$

Die Anwendung von (3.40) und (3.41) ist hier und auch im Weiteren gestattet, da der Prozess Y_t mit $Y_t^i \in D^\infty$ die notwendigen „Glattheitseigenschaften" mehr als erfüllt.

Bei Ableitung der zweiten Komponente Y_t^2 muss das stochastische Integral beachtet und zwischen D_r^1 und D_r^2 unterschieden werden. Bei der Ableitung in Richtung D_r^1 errechnet man

$$
\begin{aligned}
D_r^1 Y_t^2 &= -\beta D_r^1 \int_0^t Y_s^2 ds + D_r^1 \int_0^t \mu(c(Y_s, P_s)) ds + D_r^1 \int_0^t \sigma(c(Y_s, P_s)) dW_s^2 \\
&= -\beta \int_r^t D_r^1 Y_s^2 ds + \int_r^t D_r^1 \mu(c(Y_s, P_s)) ds + \int_r^t D_r^1 \sigma(c(Y_s, P_s)) dW_s^2,
\end{aligned}
$$

da das stochastische Integral nur von W_s^2 abhängt und somit in Richtung D_r^1 keinen Anteil beisteuert.

Durch mehrfache Anwendung der Kettenregel (3.39) und (3.40) lassen sich die beiden Integranden

$$\begin{aligned}
D_r^1\sigma(c(Y_s,P_s)) &= \gamma\sigma'(c(Y_s,P_s))D_r^1\int_{\mathbb{R}^2} K(Y_s-z)dP_s(z)\\
&= \gamma\sigma'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} D_r^1K(Y_s-z)dP_s(z)\\
&= \gamma\sigma'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s-z)D_r^1Y_s^2dP_s(z)\\
&= \gamma\sigma'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s-z)dP_s(z)D_r^1Y_s^2
\end{aligned}$$

und

$$D_r^1\mu(c(Y_s,P_s)) = \gamma\mu'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s-z)dP_s(z)D_r^1Y_s^2$$

weiter vereinfachen. Die Funktionen μ, σ und K waren entsprechend als stetig differenzierbar vorausgesetzt worden.

Zusammengefasst kann man dies durch

$$\begin{aligned}
D_r^1Y_t^2 = -\beta\int_r^t D_r^1Y_s^2ds &+ \gamma\int_r^t \mu'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s-z)dP_s(z)D_r^1Y_s^2ds\\
&+ \gamma\int_r^t \sigma'(c(Y_s,P_s))\int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s-z)dP_s(z)D_r^1Y_s^2dW_s^2
\end{aligned}$$

darstellen.

Bei der Anwendung von D_r^2 auf den Prozess Y_t^2 muss beachtet werden, dass im Gegensatz zu obiger Rechnung bei der Ableitung des stochastischen Integrals auf Grund der Abhängigkeit von W_s^2 ein weiterer Term auftritt.

Konkret erhält man

$$
\begin{aligned}
D_r^2 Y_t^2 &= -\beta \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds + \int_r^t D_r^2 \mu(c(Y_s, P_s)) ds \\
&\qquad + \sigma(c(Y_r, P_r)) + \int_r^t D_r^2 \sigma(c(Y_s, P_s)) dW_s^2 \\
&= -\beta \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds + \gamma \int_r^t \mu'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) D_r^2 Y_s^2 ds \\
&\qquad + \gamma \int_r^t \sigma'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) D_r^2 Y_s^2 dW_s^2 \\
&\qquad + \sigma(c(Y_r, P_r)).
\end{aligned}
$$

Gruppiert man diese Teilergebnisse, dann bilden sich die linearen stochastischen Differenzialgleichungen

$$
\begin{aligned}
D_r^1 Y_t^1 &= \int_r^t D_r^1 Y_s^2 ds \\
D_r^1 Y_t^2 &= -\beta \int_r^t D_r^1 Y_s^2 ds + \gamma \int_r^t \mu'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) D_r^1 Y_s^2 ds \\
&\qquad + \gamma \int_r^t \sigma'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) D_r^1 Y_s^2 dW_s^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
D_r^2 Y_t^1 &= \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds \\
D_r^2 Y_t^2 &= \int_r^t \left[-\beta + \gamma \mu'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) \right] D_r^2 Y_s^2 ds \\
&\quad + \gamma \int_r^t \sigma'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) D_r^2 Y_s^2 dW_s^2 + \sigma(c(Y_r, P_r)).
\end{aligned}
$$

Für diese 1-dimensionalen Gleichungen existieren Lösungsformeln [KS91, 5.6.C], so dass hier die Lösung explizit angegeben werden kann.

Bis zu diesem Punkt kann auch die 6-dimensionale Grenzdynamik behandelt werden und die Theorie sichert weiterhin die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Allerdings kann auf Grund der Komplexität die Lösung für die 6-dimensionale Grenzdynamik nicht mehr direkt angegeben werden.

Auf Grund einer fehlenden Anfangsbedingung in der Gleichung des Prozesses $D_r^1 Y_t^2$ erhält man mit

$$D_r^1 Y_t^2 = 0, \quad D_r^1 Y_t^1 = \int_r^t D_r^1 Y_s^2 ds = 0$$

eine besonders einfache Lösung. Für den Prozess $D_r^1 Y_t^2$ hingegen lässt sich die Lösung auf Grund der Voraussetzung an $\sigma(x)$ als strikt positiver Prozess

$$\begin{aligned} D_r^2 Y_t^2 &= \sigma(c(Y_r, P_r)) \exp\Big(\gamma \int_r^t \sigma'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) dW_s^2\Big) \\ &\qquad \exp\Big(\int_r^t \gamma\mu'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) \qquad\qquad (3.43) \\ &\qquad\qquad - \beta - \frac{1}{2}\big(\gamma\sigma'(c(Y_s, P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z)\big)^2 ds\Big) \\ D_r^2 Y_t^1 &= \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds \end{aligned}$$

darstellen. Aber bereits $D_r^2 Y_t^1$ kann nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden.

Unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse können nun die einzelnen Komponenten der Malliavin Matrix nach dem Schema

$$Q_t^{ij} = \sum_{l=1}^{2} \int_0^t D_r^l Y_t^i D_r^l Y_t^j dr = \int_0^t D_r^2 Y_t^i D_r^2 Y_t^j dr$$

berechnet werden.

Die Matrix ist dann invertierbar, falls die Determinante strikt positiv ist, d.h. für alle t und P-fast sicher

$$\det Q_t = \int_0^t (D_r^2 Y_t^1)^2 dr \int_0^t (D_r^2 Y_t^2)^2 dr - \left(\int_0^t \underbrace{(D_r^2 Y_t^1)}_{\triangleq f(r,t)} \underbrace{(D_r^2 Y_t^2)}_{\triangleq g(r,t)} dr\right)^2 > 0$$

gilt.

Für festes ω und t kann dies als

$$\langle f(\cdot,t), f(\cdot,t)\rangle_{L^2([0,t])}\ \langle g(\cdot,t), g(\cdot,t)\rangle_{L^2([0,t])} > \left|\langle f(\cdot,t), g(\cdot,t)\rangle_{L^2([0,t])}\right|^2 \tag{3.44}$$

und damit als Cauchy-Schwarz-Ungleichung angesehen werden. Diese Ungleichung ist strikt in dem geforderten Sinn, falls $f(r,t)$ und $g(r,t)$ linear unabhängig sind.

Der Beweis von (3.44) erfolgt durch Widerspruch. Man nimmt also umgekehrt an, dass $f(r,t)$ und $g(r,t)$ linear abhängig sind. Es existiert damit ein $\lambda \neq 0$ mit

$$\lambda\ f(r,t) = g(r,t). \tag{3.45}$$

Unter Berücksichtigung von

$$f(r,t) \triangleq D_r^2 Y_t^1 = \int_r^t D_r^2 Y_s^2 ds = \int_r^t g(r,s) ds$$

ist dies äquivalent zu

$$\lambda \int_r^t g(r,s) ds = g(r,t).$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G(t) &\triangleq \int_0^t \gamma\mu'(c(Y_s,P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) \\ &\qquad\qquad - \beta - \frac{1}{2}\big(\gamma\sigma'(c(Y_s,P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z)\big)^2 ds \\ M(t) &\triangleq \int_0^t \gamma\sigma'(c(Y_s,P_s)) \int_{\mathbb{R}^2} K^{(0,1)}(Y_s - z) dP_s(z) dW_s^2 \end{aligned}$$

und unter Verwendung der speziellen Form (3.43) von $g(r,t)$ lässt sich (3.45) durch

$$\begin{aligned}\lambda \int_r^t \sigma(c(Y_r, P_r)) \exp(G(s)) \exp(-G(r)) \exp(M(s)) \exp(-M(r)) ds \\ = \sigma(c(Y_r, P_r)) \exp(G(t)) \exp(-G(r)) \exp(M(t)) \exp(-M(r))\end{aligned}$$

ausdrücken. Verwendet man die Positivität von $\sigma(x)$, so kann man weiter zu

$$\lambda \int_r^t \exp(G(s)) \exp(M(s)) ds = \exp(G(t)) \exp(M(t))$$

vereinfachen. Hieraus ergibt sich unmittelbar ein Widerspruch, da die linke Seite im Gegensatz zu rechten Seite noch von r abhängt und die Bedingung für alle r gelten müsste.

Die beiden Funktionen sind somit linear unabhängig, die Cauchy-Schwarz-Ungleichung strikt und daher die Malliavin Matrix invertierbar für alle ω und t.

■

Kapitel 4

Eigenschaften der Grenzdynamik

Nachdem in Kapitel 3 die Grenzdynamik und ihr Zusammenhang mit dem Pickard-Tory Modell im Vordergrund stand, liegt in diesem Kapitel der Schwerpunkt auf der Analyse der Asymptotik des Pickard-Tory Modells mit Hilfe maßwertiger Prozesse. Dabei wird laufend auf die Ergebnisse des letzten Kapitels referiert. Insbesondere der Approximationssatz 3.4.1 findet mehrfach Anwendung.

Für die Untersuchung wird auf die bereits in Kapitel 3.4 entwickelte Darstellung der Modellgleichung (3.27) des Pickard-Tory Modells zurückgegriffen. Diese ähnelt in ihrer Form der Modellgleichung (3.1) der Grenzdynamik Y_t^n. An die Stelle der Verteilung $P_t = \mathcal{L}(Y_t)$ der Grenzdynamik tritt dabei der maßwertige Prozess Z_t^n, der gewissermaßen eine Mittelung über die Verteilung der n Teilchen im Pickard-Tory Modell darstellt.

Die Verteilung P_t hängt nicht von ω ab und kann somit als konstante maßwertige Zufallsvariable interpretiert werden. Hingegen handelt es sich bei Z_t^n um ein von ω abhängiges und damit zufälliges Maß.

In Kapitel 4.1 werden die notwendigen technischen Hilfsmittel entwickelt, um die Konvergenz von maßwertigen Prozessen bzw. Zufallsvariablen zu untersuchen. Da es sich um Zufallsvariablen mit Werten in einem separablen metrischen Raum handelt, liegt es nahe den Begriff Konvergenz in Verteilung zu benutzen. Es wird ein Lemma vorgestellt, das die Konvergenz in Verteilung gegen eine konstante Zufallsvariable äquivalent in ein handliches und gut zu testendes Kriterium übersetzt. Dieses Lemma wird in den weiteren Kapiteln benötigt.

Den Kern von Kapitel 4.2 bildet die Aussage in Satz 4.2.1, dass das Pickard-Tory Modell dem Prinzip des propagation of chaos gehorcht. Dies besagt, dass für die n Teilchen, welche zu Beginn unabhängig identisch verteilte Anfangsbedingungen besitzen, durch die Dynamik des Systems diese Unabhängigkeit zunächst verloren geht. Für große Teilchenzahlen hingegen kann die Abhängigkeit zwischen den Teilchen vernachlässigt werden.

Zur Untersuchung dieses Phänomens hat Sznitman in [Szn91] den Begriff Q-chaotisch (vgl. Definition 4.2.1) vorgeschlagen. Zum Nachweis dieser Eigenschaft wird die maßwertige Zufallsvariable Z^n mit den in Kapitel 4.1 bereitgestellten Mitteln untersucht.

Führt man mit denselben Techniken die Untersuchung für den maßwertigen Prozess Z_t^n durch, so ergibt sich die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen die Verteilung der Grenzdynamik P_t. Dies bildet das erste wichtige Resultat in Kapitel 4.3.

Notiert man den Term $\langle Z_t^n, f\rangle$ leicht um, so ergibt sich als Korollar unmittelbar die L_1-Konvergenz des Ausdruckes

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right]$$

für eine geeignete Funktionenklasse. Werden die Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen leicht verschärft, so lässt sich die Aussage auch für die fast sichere Konvergenz zeigen. Man erhält gewissermaßen ein starkes Gesetz der großen Zahlen für abhängige Zufallsvariablen. Das Ergebnis wird in Satz 4.3.2 formuliert und bildet die zentrale Aussage in diesem Kapitel.

Eine Anwendung dieses starken Gesetzes der großen Zahlen wird schließlich in Kapitel 4.4 gegeben und mit seiner Hilfe eine McKean-Vlasov Gleichung ermittelt. Mittels Itô-Formel wird $f(Y_t^{i,n})$ im obigen Summenterm ausgewertet und der Grenzübergang für n gegen unendlich durchgeführt. Dabei tritt ein von der Verteilung der Grenzdynamik abhängiger Differenzialoperator $\mathcal{A}(P_t)$ auf. Abschließend werden noch einmal die Ergebnisse aus Kapitel 3.5 aufgegriffen. Besitzt nämlich die Verteilung der Grenzdynamik $\overline{Y}_t^1$ eine glatte Dichte, so lässt sich aus der McKean-Vlasov Gleichung eine nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung auch für die Grenzdynamik ableiten.

4.1 Schwache Konvergenz in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$

In Kapitel 3.4 wurde eine äquivalente Beschreibung für das Pickard-Tory Modell in Form des in (3.25) definierten maßwertigen Prozesses

$$Z_t^n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_t^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6) \tag{4.1}$$

gefunden. Dieser Ansatz lässt sich weiter verallgemeinern, indem man durch

$$Z^n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y^{i,n}} \in \mathcal{M}_1(C_T) \tag{4.2}$$

eine maßwertige Zufallsvariable definiert. Das komplette Verhalten des Vielteilchenensembles ist nun durch ein einziges zufälliges Maß Z^n beschrieben.

Nachdem durch Satz 3.4.1 eine ausführliche Anwort auf die Frage nach der Approximation des Pickard-Tory Modells gegeben wurde, wird nun weiter dessen Verhalten mittels maßwertiger Prozesse und Zufallsvariablen analysiert. Insbesondere steht dabei die Asymptotik dieser Maße für wachsende Teilchenzahl im Mittelpunkt.

Bevor man in Kapitel 4.2 die Antwort auf die Frage nach dem Konvergenzverhalten erhält und dadurch die Eigenschaft propagation of chaos für das Pickard-Tory Modell nachgewiesen wird, erfolgt in diesem Kapitel die Erläuterung der technischen Hilfsmittel für eine solche Untersuchung.

Hierzu reicht es nicht aus (vgl. Kapitel 3.4) nur den Fall $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$-wertiger Zufallsvariablen zu betrachten. Für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der maßwertigen Zufallsvariablen Z^n muss das Verfahren auch für den Fall $\mathcal{M}_1(C_T)$-wertiger Zufallsvariablen zur Verfügung gestellt werden. Hierbei ist (C_T, d_T) wie bisher die Menge aller auf dem Intervall $[0, T]$ definierten $\mathbb{R}^6$-wertigen stetigen Funktionen zusammen mit der Supremumsnorm.

Im Folgenden werden die Überlegungen allgemein für einen separablen, metrischen Raum (S, d) durchgeführt und anschließend auf die beiden Fälle $S = \mathbb{R}$ und $S = C_T$ angewendet.

Als geeigneter Konvergenzbegriff für die Untersuchung maßwertiger Prozesse und Zufallsvariablen erweist sich hierbei der Begriff der Konvergenz in Verteilung. Zunächst einige Bemerkungen. Im Anschluss folgt die Formalisierung des Konvergenzbegriffs für den hier vorliegenden Fall.

Den Ausgangspunkt bildet ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. In dem metrischen Raum S wird durch die Metrik d die σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{B}(S)$ induziert. Die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{B}(S))$ wird weiterhin mit $\mathcal{M}_1(S)$ bezeichnet.

Viele Eigenschaften der Menge $\mathcal{M}_1(S)$ hängen direkt von der Menge S ab. So überträgt sich etwa die Separabilität. Nach [AB99, 14.12] ist $\mathcal{M}_1(S)$ genau dann metrisierbar und separabel, wenn der metrische Raum (S, d) separabel ist.

Die Metrik kann explizit angegeben werden. Nach [IW89, I.2.5] wird durch

$$\rho(P, Q) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min \left\{ 1, \left| \int_S f_j dP - \int_S f_j dQ \right| \right\} \quad P, Q \in \mathcal{M}_1(S) \tag{4.3}$$

auf $\mathcal{M}_1(S)$ eine Metrik definiert, wobei $f_j : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Folge gleichmäßig stetiger Funktionen ist. Genauer bilden die f_j eine abzählbar dichte Teilmenge innerhalb der Menge gleichmäßig stetiger Funktionen. Diese Metrik ist darüber hinaus äquivalent zur schwachen Konvergenz. Im Weiteren kann $(\mathcal{M}_1(S), \rho)$ deshalb als separabler, metrischer Raum angesehen werden.

Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum ist nun eine Folge von maßwertigen Zufallsvariablen Z_n, d.h. in diesem Fall von $\mathcal{M}_1(S)$-wertigen Zufallsvariablen, definiert.

Die Konvergenz in Verteilung von maßwertigen Zufallsvariablen ist durch die nächste Definition charakterisiert.

Definition 4.1.1 *Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ist eine Folge von maßwertigen Zufallsvariablen* $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *und eine weitere maßwertige Zufallsvariable* Z *definiert. Die* Z_n *und* Z *nehmen also Werte in dem separablen metrischen Raum* $\mathcal{M}_1(S)$ *an.*

Man sagt die Folge der maßwertigen Zufallsvariablen Z_n **konvergiert in Verteilung** *gegen* Z, *wenn die induzierten Verteilungen* $\mathcal{L}(Z_n)$ *schwach im Sinne von Definition 3.2.2 gegen* $\mathcal{L}(Z)$ *konvergieren, d.h. wenn* $\mathrm{w}\text{-}\lim \mathcal{L}(Z_n) = \mathcal{L}(Z)$ *gilt.*

Dabei bezeichne $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1(S))$ die Borelschen Mengen auf $\mathcal{M}_1(S)$ und $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathcal{M}_1(S), \mathcal{B}(\mathcal{M}_1(S)))$. Für eine maßwertige Zufallsvariable Z gilt also $\mathcal{L}(Z) \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$.

Zur Vereinfachung der Notation wird im Weiteren die Abkürzung

$$\langle Q, f \rangle \triangleq \int_S f(x) dQ(x)$$

verwendet. Dabei ist $Q \in \mathcal{M}_1(S)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

Damit lässt sich die soeben erklärte Konvergenz in Verteilung von maßwertigen Zufallsvariablen auf das Prinzip der schwachen Konvergenz in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ zurückführen und wie folgt formulieren. Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ konvergiert schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$, wenn für alle $f \in C_{b,u}(\mathcal{M}_1(S))$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle Q_n, f \rangle = \langle Q, f \rangle$$

gilt.

In Kapitel 4.2 ist die Konvergenz in Verteilung gegen eine konstante maßwertige Zufallsvariable von Interesse, also eine Zufallsvariable die nicht mehr von ω abhängt und daher ein Dirac-Maß als Verteilung besitzt.

Das folgende Lemma charakterisiert den Begriff Konvergenz in Verteilung für diesen Spezialfall durch ein einfach zu überprüfendes Kriterium.

Lemma 4.1.1 *Es sei $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von maßwertigen, d.h. $\mathcal{M}_1(S)$-wertigen Zufallsvariablen und $Q_n \triangleq \mathcal{L}(Z_n)$ die zugehörigen Verteilungen in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$. Ferner sei Z eine konstante maßwertige Zufallsvariable und $Q \triangleq \mathcal{L}(Z) = \delta_Z \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ die zugehörige Verteilung. Dann gilt*

$$\text{w - }\lim_{n \longrightarrow \infty} Q_n = Q \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \boldsymbol{E}[|\langle Z_n, f \rangle - \langle Z, f \rangle|] = 0 \quad \textit{für alle } f \in C_{b,u}(S). \tag{4.4}$$

Beweis Zunächst wird die Rückrichtung bewiesen. Dabei wird die in Kapitel 3.2 eingeführte Wassersteinmetrik benutzt. Allerdings nicht wie dort beschrieben auf dem metrischen Raum (C_T, d_T), sondern auf $(\mathcal{M}_1(S), \rho)$.

In einer Bemerkung am Ende des Beweises von Satz 3.2.1 wurde darauf hingewiesen, dass Definition 3.2.1 und Satz 3.2.1 allgemein gültig bleiben, sofern der zu Grunde liegende Raum wie in diesem Fall $(\mathcal{M}_1(S), \rho)$ separabel und metrisch ist.

Auf $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ ist damit durch

$$W(Q,R) \triangleq \left(\inf_{\mu \in D(Q,R)} \int_{\mathcal{M}_1(S) \times \mathcal{M}_1(S)} \rho(x,y) d\mu(x,y) \right) \quad Q, R \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S)) \tag{4.5}$$

die Wassersteinmetrik W erklärt. Dabei ist $D(Q,R)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{M}_1(S) \times \mathcal{M}_1(S)$ mit den Randverteilungen Q und R. Normalerweise ist die Wassersteinmetrik (4.5) nach Wahl eines Punktes $0 \in \mathcal{M}_1(S)$ auf die Menge aller $Q \in \mathcal{M}_1(S)$ eingeschränkt, für die

$$\int_{\mathcal{M}_1(S)} \rho(x,0)dQ(x) < \infty$$

gilt. Auf Grund der Beschränktheit von ρ ist diese Bedingung allerdings immer erfüllt und daher die Wassersteinmetrik auf alle Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{M}_1(S)$ anwendbar.

Aus der Beschränktheit der Metrik ρ ergibt sich im Gegensatz zu Kapitel 3.2 sogar die Äquivalenz zwischen der schwachen Konvergenz in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ und der Konvergenz in der Wassersteinmetrik (vgl. [Dob70, Theorem 2] oder [GS84, Proposition 4]), d.h. es gilt

$$\text{w - }\lim_{n \longrightarrow \infty} Q_n = Q \iff \lim_{n \longrightarrow \infty} W(Q_n, Q) = 0.$$

Zum Beweis von (4.4) kann daher statt der schwachen Konvergenz die Konvergenz in der Wassersteinmetrik herangezogen werden.

Sei deshalb $R \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S) \times \mathcal{M}_1(S))$ die gemeinsame Verteilung von Z_n und Z, dann lässt sich die Wassersteinmetrik durch

$$W(Q_n, Q) \le \int_{\mathcal{M}_1(S)\times\mathcal{M}_1(S)} \rho(x,y)dR(x,y) = \int_\Omega \rho(Z_n, Z)dP = \mathbf{E}\left[\rho(Z_n, Z)\right]$$

nach oben beschränken. Greift man auf die Definition (4.3) der Metrik ρ zurück, wobei f_j eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen ist, dann kann man weiter abschätzen. Summe und Erwartungswert vertauscht man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz auf Grund der Positivität des Integranden.

$$\begin{aligned} W(Q_n, Q) &\le \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min\{1, |\langle Z_n, f_j\rangle - \langle Z, f_j\rangle|\}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \mathbf{E}\left[\min\{1, |\langle Z_n, f_j\rangle - \langle Z, f_j\rangle|\}\right] \\ &= \int_{\mathbb{N}} \underbrace{\mathbf{E}\left[\min\{1, |\langle Z_n, f_x\rangle - \langle Z, f_x\rangle|\}\right]}_{\le 1} dN(x) \end{aligned}$$

Zur Darstellung der Summe als Integral wird das Zählmaß $N \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\delta_j$ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$ angewendet.

Ferner ist 1 eine integrierbare Majorante für den Integranden, der nach der Voraussetzung in (4.4) für n gegen unendlich und alle $x \in \mathbb{N}$ gegen 0 konvergiert. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz können Limes und Integral vertauscht werden und man erhält wegen

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} W(Q_n, Q) \leq \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\min\{1, |\langle Z_n, f_x\rangle - \langle Z, f_x\rangle|\}\right] dN(x) = 0$$

die erste Hälfte der Behauptung.

Dabei wurde im bisherigen Beweis die spezielle Form der maßwertigen Zufallsvariablen nicht benutzt. Damit bleibt die Aussage auch für nicht konstantes Z gültig.

Setzt man umgekehrt die schwache Konvergenz von Q_n gegen Q voraus, dann gilt nach Definition für alle $F \in C_b(\mathcal{M}_1(S))$

$$\langle Q_n, F\rangle \longrightarrow \langle Q, F\rangle$$

für $n \longrightarrow \infty$. Für festes $f \in C_b(S)$ wird durch

$$F_f(R) \triangleq |\langle R, f\rangle - \langle Z, f\rangle|, \quad R \in \mathcal{M}_1(S)$$

eine bzgl. der schwachen Konvergenz-Topologie (vgl. [Bau90, (30.4)]) stetige Funktion $F_f \in C_b(\mathcal{M}_1(S))$ definiert. Die Beschränktheit von F folgt dabei aus der Beschränktheit von f.

Man rechnet für dieses spezielle F_f nach, dass

$$\begin{aligned}
\langle Q_n, F_f\rangle &= \int_{\mathcal{M}_1(s)} F_f(x) dQ_n(x) = \int_{\Omega} F_f(Z_n) dP = \mathbf{E}\left[|\langle Z_n, f\rangle - \langle Z, f\rangle|\right] \\
\langle Q, F_f\rangle &= \int_{\mathcal{M}_1(s)} F_f(x) dQ(x) = \int_{\Omega} F_f(Z) dP = \mathbf{E}\left[|\langle Z, f\rangle - \langle Z, f\rangle|\right] = 0
\end{aligned}$$

gilt und folgert daraus

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{E}\left[|\langle Z_n, f\rangle - \langle Z, f\rangle|\right] = 0 \quad \text{für alle } f \in C_b(S)$$

und damit auch den zweiten Teil der Behauptung. ■

4.2 Propagation of chaos

Bereits in Kapitel 3.4 wurde darauf hingewiesen, dass die Teilchenprozesse im Pickard-Tory Modell auf Grund der gleichen Struktur der sie steuernden stochastischen Differenzialgleichung [(1.11) bzw. (3.27)] zwar gleiche Verteilung besitzen, aber wegen der Kopplung über den maßwertigen Prozess stochastisch nicht unabhängig sind, obwohl die n Startverteilungen als unabhängig vorausgesetzt wurden.

Im Grenzübergang für $n \longrightarrow \infty$ hingegen löst sich die stochastische Abhängigkeit wieder auf und das Verhalten der einzelnen Teilchen lässt sich durch die nichtlineare stochastische Differenzialgleichung (3.1) beschreiben, wobei in diesem Fall die Teilchenprozesse (bereits nach Konstruktion) stochastisch unabhängig sind.

Bei der Ableitung und Rechtfertigung der Boltzmangleichung entwickelte Kac in [Kac56] den Gedanken, dass aus einer „chaotischen“, d.h. unabhängig identisch verteilten Anfangsbedingung für n-Teilchen durch die dynamische Entwicklung des Systems zunächst die Unabhängigkeit verloren geht. Hingegen ist bei großen Teilchenzahlen zumindest approximativ zu beobachten, dass für zwei bzw. endlich viele Teilchen die Abhängigkeit zwischen den Teilchen abnimmt und sich die Unabhängigkeit und damit das Chaos einstellt bzw. fortsetzt. In der Literatur firmiert ein solches Phänomen unter dem Begriff „propagation of chaos“.

Im Folgenden wird diese Eigenschaft auch für das Pickard-Tory Modell nachgewiesen. Sznitman hat in [Szn91] für die Untersuchung der Eigenschaft propagation of chaos folgende Definition gegeben.

Definition 4.2.1 *Es sei S ein separabler metrischer Raum und Q_n eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf S^n. Ferner sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S. Die Folge Q_n ist Q-**chaotisch**, falls für $f_1, \ldots, f_k \in C_b(S), k \geq 1$ die Bedingung*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle Q_n, f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \rangle = \prod_{i=1}^{k} \langle Q, f_i \rangle$$

gilt.

Es soll im Rahmen des Pickard-Tory Modells gezeigt werden, dass im Fall $S = M_1(C_T)$ die Folge $Q_n \triangleq \mathcal{L}(Y^{1,n}, \ldots, Y^{n,n})$ $\mathcal{L}(\overline{Y})$-chaotisch ist. Nach [Szn91, Proposition 2.2] genügt es hierfür bereits, dass die Folge von maßwertigen Zufallsvariablen Z^n in Verteilung gegen die konstante maßwertige Zufallsvariable

$\mathcal{L}(\overline{Y})$ konvergiert. Der Nachweis erfolgt mit den in Kapitel 4.1 bereit gestellten Hilfsmitteln.

Es liege deshalb die in Kapitel 3.4 beschriebene Situation eines filtrierten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ vor, auf dem das Pickard-Tory Modell und die Grenzdynamiken gemeinsam definiert sind.

Bei festem n bezeichne $Y_t^{i,n}$ das i-te Teilchen im Pickard-Tory Modell, dessen Dynamik durch die Modellgleichung (1.11) beschrieben ist. Bei den $\{\overline{Y}_t^i\}_{i=1}^{\infty}$ handelt es sich um stochastisch unabhängige Kopien der Grenzdynamik, welche die nichtlineare stochastische Differenzialgleichung (3.1) lösen.

Durch die in (4.2) definierte maßwertige Zufallsvariable $Z^n \in \mathcal{M}_1(C_T)$ wird das Verhalten aller Teilchen des Pickard-Tory Modells für den kompletten Zeitraum $[0, T]$ in einem einzigen Maß zusammengefasst.

Die Koeffizienten genügen den folgenden Bedingungen, welche die Gültigkeit der Existenz- und Eindeutigkeitssätze sowie des Approximationssatzes garantieren.

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $\|\mu\|_L$.
2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante $\|\sigma\|_L$.
3. Die Konstanten $\varepsilon_i \geq 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind nichtnegativ.
4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$.
5. Die Startkonfigurationen für die Grenzdynamiken $\{\overline{Y}_0^i\}_{i=1}^{\infty}$ bilden eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit zweitem Moment, die von der Folge der 6-dimensionalen Brownschen Bewegungen ebenfalls unabhängig ist. Die Startkonfiguration für das i-te Teilchen in beiden Modellen ist dieselbe.

Es lässt sich nun unmittelbar das zentrale Ergebnis in diesem Kapitel formulieren.

Satz 4.2.1 *Unter den genannten Bedingungen konvergiert die maßwertige Zufallsvariable Z^n in Wahrscheinlichkeit gegen die konstante maßwertige Zufallsvariable $\overline{Z} = \mathcal{L}(\overline{Y}^1) \in \mathcal{M}_1(C_T)$, welche die Verteilung der Grenzdynamik ist.*

Das Pickard-Tory Modell ist $\mathcal{L}(\overline{Y}^1)$-chaotisch und gehorcht dem Prinzip des propagation of chaos.

Beweis Bei der Verteilung der Grenzdynamik $\mathcal{L}(\overline{Y}^1)$ handelt es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß in $\mathcal{M}_1(C_T)$, welches von ω unabhängig ist. Man kann daher $\overline{Z}$ als konstante maßwertige Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{M}_1(C_T)$ auffassen.

Die erste Aussage des Satzes ist bewiesen, falls Z^n in Verteilung gegen Z konvergiert, da hieraus [Dud89, 11.1.3] die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt.

Konvergenz in Verteilung der Folge von Zufallsvariablen Z^n besagt, dass die induzierten Maße in $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(C_T))$ schwach konvergieren. Es muss also $\text{w-}\lim \mathcal{L}(Z^n) = \mathcal{L}(\overline{Z}) = \delta_{\overline{Z}}$ gelten.

Mit Lemma 4.1.1 und $S = C_T$ ist dies aber zu

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\left|\langle Z^n, f\rangle - \langle \overline{Z}, f\rangle\right|\right] = 0 \tag{4.6}$$

für alle $f \in C_{b,u}(C_T)$ äquivalent.

Unter Verwendung der Definition (4.2) von Z^n kann für den Ausdruck $\langle Z^n, f\rangle$ eine einfache Gestalt der Form

$$\langle Z^n, f\rangle = \int_{C_T} f(x) dZ^n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{C_T} f(x) d\delta_{Y^{i,n}}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(Y^{i,n})$$

ermittelt werden.

Zur weiteren Untersuchung von (4.6) fügt man einen nur von den Grenzdynamiken $\overline{Y}^i$ abhängigen Term ein. Die beiden entstehenden Ausdrücke werden im Weiteren getrennt behandelt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left|\langle Z^n, f\rangle - \langle \overline{Z}, f\rangle\right|\right] &= \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(Y^{i,n}) - \int_{C_T} f(x) d\overline{Z}(x)\right|\right] \\
&\leq \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(Y^{i,n}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\overline{Y}^i)\right|\right] \\
&\qquad + \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\overline{Y}^i) - \int_{C_T} f(x) d\overline{Z}(x)\right|\right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Beziehung (4.6) ist für alle $f \in C_{b,u}(C_T)$ nachzuweisen. Zu jedem solchen f existiert ein Stetigkeitsmodul [Wal92b, 2.2.3], das im Beweis mit $\rho(x),\ x \in [0,\infty)$ bezeichnet wird. Da die Bildmenge von f beschränkt ist, gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(d_T(x,y)) \quad \text{für alle } x, y \in C_T.$$

Wählt man nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$, dann kann der Erwartungswert in der zweiten Zeile von (4.7) mit Hilfe einer Indikatorfunktion durch

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y^{i,n}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{Y}^i)\right|\right] \qquad (4.8)\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|f(Y^{i,n}) - f(\overline{Y}^i)\right|\right]\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|f(Y^{i,n}) - f(\overline{Y}^i)\right|\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)<\rho(\varepsilon)\}}\right]\\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|f(Y^{i,n}) - f(\overline{Y}^i)\right|\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)\geq\rho(\varepsilon)\}}\right]
\end{aligned}$$

in zwei Teile zerlegt werden, von denen der erste unmittelbar durch Verwendung des Stetigkeitsmoduls abgeschätzt werden kann.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|f(Y^{i,n}) - f(\overline{Y}^i)\right|\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)<\rho(\varepsilon)\}}\right]\\
&\qquad\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\rho(d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i))\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)<\rho(\varepsilon)\}}\right] < \rho(\rho(\varepsilon))
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (4.8) schließt man auf Grund der Beschränktheit von f und mit der Ungleichung von Chebyshev-Markov auf

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|f(Y^{i,n})-f(\overline{Y}^i)\right|\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)\geq\rho(\varepsilon)\}}\right]\\
\leq&\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\chi_{\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)\geq\rho(\varepsilon)\}}\right]\\
=&\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{n}\sum_{i=1}^{n}P(\{d_T(Y^{i,n},\overline{Y}^i)\geq\rho(\varepsilon)\})\\
\leq&\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{n\rho(\varepsilon)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left\|Y^{i,n}_s-\overline{Y}^i_s\right\|^2\right]\\
\leq&\frac{2\left\|f\right\|_\infty C}{n\rho(\varepsilon)^2}.
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wurde Satz 3.4.1 benutzt, der bei Existenz eines zweiten Momentes für die Startverteilung die gewünschte Abschätzung garantiert. Die Konstante C hängt dabei nicht von i und nicht von n ab.

Zusammengefasst erhält man für den ersten Summanden in (4.7)

$$
\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(Y^{i,n})-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\overline{Y}^i)\right|\right]\leq\rho(\rho(\varepsilon))+\frac{2\left\|f\right\|_\infty C}{\rho(\varepsilon)^2 n}. \tag{4.9}
$$

Man betrachtet nun den zweiten Term in (4.7). Dabei ist weiterhin $f\in C_{b,u}(C_T)$ gleichmäßig stetig und beschränkt. Beachtet man, dass die Grenzdynamiken $\overline{Y}^i$ nach Konstruktion unabhängig identisch verteilt mit Verteilung $\mathcal{L}(\overline{Y}^i)=\overline{Z}$ sind, dann ist

$$
\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\overline{Y}^i)-\int_{C_T}f(x)d\overline{Z}(x)\right|\right]=\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\overline{Y}^i)-\mathbf{E}\left[f(\overline{Y}^i)\right]\right)\right|\right]
$$

der Erwartungswert einer Summe von zentrierten, beschränkten und unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Gleichung von Bienaymé ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left|\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\overline{Y}^i)-\mathbf{E}\left[f(\overline{Y}^i)\right]\right)\right\}\cdot 1\right|\right] \qquad (4.10)\\
\leq&\sqrt{\mathbf{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\overline{Y}^i)-\mathbf{E}\left[f(\overline{Y}^i)\right]\right)\right]}=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Var}\left[\left(f(\overline{Y}^i)-\mathbf{E}\left[f(\overline{Y}^i)\right]\right)\right]}\\
=&\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Var}\left[f(\overline{Y}^i)\right]}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\mathbf{Var}\left[f(\overline{Y}^1)\right]}\\
\leq&\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

Die Existenz der Varianz ist dabei durch die Beschränktheit von f gesichert.

Nimmt man die letzte Ungleichung, (4.7) und (4.9) zusammen, dann wird (4.6) durch

$$
\mathbf{E}\left[\left|\langle Z^n,f\rangle-\langle\overline{Z},f\rangle\right|\right]\leq\rho(\rho(\varepsilon))+\frac{2\,\|f\|_\infty\,C}{\rho(\varepsilon)^2 n}+\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}}
$$

abgeschätzt. Beim Grenzübergang für n gegen unendlich ergibt sich somit

$$
\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{E}\left[\left|\langle Z^n,f\rangle-\langle\overline{Z},f\rangle\right|\right]\leq\rho(\rho(\varepsilon))
$$

und damit die zu beweisende Eigenschaft (4.6), da für ein Stetigkeitsmodul stets $\rho(\varepsilon)\longrightarrow 0$ für $\varepsilon\longrightarrow 0$ gilt.

Mit [Szn91, Proposition 2.2] folgt schließlich aus der Konvergenz in Verteilung von Z^n gegen $\mathfrak{L}(\overline{Y})$ die Aussage, dass die Folge $Q_n \triangleq \mathfrak{L}(Y^{1,n},\ldots,Y^{n,n})$ $\mathfrak{L}(\overline{Y}^1)$-chaotisch ist. ■

4.3 Ein starkes Gesetz der großen Zahlen

Bei den $\{\overline{Y}_t^i\}_{i=1}^\infty$ handelt es sich nach dem in Kapitel 3.4 beschriebenen Konstruktionsverfahren um stochastisch unabhängige, identisch verteilte und integrierbare Zufallsvariablen. Für $f\in C_b(\mathbb{R}^6)$ gilt deshalb nach dem starken Gesetz der großen Zahlen die Beziehung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{Y}_t^i) \longrightarrow \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right] = \int_{\mathbb{R}^6} f(y)dP_t(y) = \langle P_t, f\rangle$$

fast sicher für n gegen unendlich. Es wird in diesem Kapitel gezeigt, dass ein Zusammenhang dieser Form auch für die stochastisch nicht unabhängigen Zufallsvariablen $\{\overline{Y}_t^{i,n}\}_{i=1}^n$ gilt, d.h. es gilt fast sicher für n gegen unendlich

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right]. \tag{4.11}$$

Dazu wird zunächst Satz 4.2.1 auf den Fall $S = \mathbb{R}^6$ übertragen. Die dort realisierte Technik lässt sich auch auf den Fall des maßwertigen Prozesses Z_t^n anwenden. Aus dem Beweis lässt sich unmittelbar die Gültigkeit der Beziehung im Sinne der L^1-Konvergenz ablesen.

Durch eine leichte Verschärfung der Voraussetzungen kann dann die Gültigkeit im Sinne der fast sicheren Konvergenz gezeigt werden.

Im folgenden Satz wird die Verteilung $\mathcal{L}(\overline{Y}_t^1)$ der Grenzdynamik in Übereinstimmung mit der Notation in (3.1) mit P_t bezeichnet. Alternativ und in enger Anlehnung an Satz 4.3.1 könnte die Bezeichnung $\overline{Z}_t$ gewählt werden.

Satz 4.3.1 *Die Voraussetzungen von Satz 4.2.1 seien erfüllt. Insbesondere die Startkonfiguration besitze ein zweites Moment für ein und damit jedes Teilchen, d.h. es gilt* $\boldsymbol{E}\left[\left\|Y_0^{i,n}\right\|^2\right] < \infty$.

Der maßwertige Prozess Z_t^n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen die konstante maßwertige Zufallsvariable $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$. Dabei ist die Konvergenz unabhängig von t und damit gleichmäßig in $[0,T]$.

Beweis Im Gegensatz zum Beweis von Satz 4.2.1 handelt es sich bei der Verteilung der Grenzdynamik $\mathcal{L}(\overline{Y}_t^1)$ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ und nicht auf $\mathcal{M}_1(C_T)$, welches aber wiederum von ω unabhängig ist.

Die Aussage des Satzes ist durch erneute Anwendung von Lemma 4.1.1 für $S = \mathbb{R}^6$ bewiesen, falls für alle $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbf{E}\left[|\langle Z_t^n, f\rangle - \langle P_t, f\rangle|\right] = 0 \tag{4.12}$$

gezeigt werden kann.

Eine elementare Rechnung ergibt für $\langle Z_t^n, f\rangle$ die folgende einfache Form

$$\begin{aligned}\langle Z_t^n, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^6} f(x) dZ_t^n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^6} f(x) d\delta_{Y_t^{i,n}}(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(Y_t^{i,n}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Zur Untersuchung von (4.12) fügt man die Grenzdynamik $\overline{Y}_t^i$ ein und erhält unter Berücksichtigung der Verteilungsgleicheit der Paare $(Y_t^{i,n}, \overline{Y}_t^i)$ (vgl. Lemma 3.4.1)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[|\langle Z_t^n, f\rangle - \langle P_t, f\rangle|\right] \\ \le&\,\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(Y_t^{i,n}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\overline{Y}_t^i)\right|\right] + \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\overline{Y}_t^i) - \int_{\mathbb{R}^6} f(x) dP_t(x)\right|\right] \\ \le&\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\left|f(Y_t^{i,n}) - f(\overline{Y}_t^i)\right|\right] + \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\{f(\overline{Y}_t^i) - \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^i)\right]\right\}\right|\right] \\ \le&\,\mathbf{E}\left[\left|f(Y_t^{1,n}) - f(\overline{Y}_t^1)\right|\right] + \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\{f(\overline{Y}_t^i) - \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^i)\right]\right\}\right|\right].\end{aligned} \tag{4.14}$$

Bei der Abschätzung des ersten Summanden in (4.14) wählt man $\varepsilon > 0$ und für $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$ sei $\rho(x),\ x \in [0, \infty)$ ein Stetigkeitsmodul. Im Weiteren sei d die euklidische Metrik im $\mathbb{R}^6$.

Eine analoge Rechnung wie im Beweis zu Satz 4.3.1 führt auf

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left|f(Y_t^{1,n}) - f(\overline{Y}_t^1)\right|\right] \\ \le&\,\mathbf{E}\left[\left|f(Y_t^{1,n}) - f(\overline{Y}_t^1)\right| \chi_{\{d(Y_t^{1,n}, \overline{Y}_t^1) < \rho(\varepsilon)\}}\right] + \mathbf{E}\left[\left|f(Y^{1,n}) - f(\overline{Y}_t^1)\right| \chi_{\{d(Y_t^{1,n}, \overline{Y}_t^1) \ge \rho(\varepsilon)\}}\right] \\ \le&\,\rho(\rho(\varepsilon)) + 2\left\|f\right\|_\infty P(\{d(Y_t^{1,n}, \overline{Y}_t^1) \ge \rho(\varepsilon)\}).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung über die Existenz eines zweiten Momentes für die Startkonfiguration lässt sich mit der Ungleichung von Chebyshev-Markov und Satz 3.4.1 die Wahrscheinlichkeit durch

$$P(\{d(Y_t^{1,n}, \overline{Y}_t^1) \geq \rho(\varepsilon)\}) \leq \frac{1}{\rho(\varepsilon)^2} \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} \left\|Y_s^{i,n} - \overline{Y}_s^i\right\|^2\right] \leq \frac{1}{\rho(\varepsilon)^2}\frac{C}{n}$$

nach oben beschränken.

Fasst man die bisherigen Ergebnisse zusammen und berücksichtigt für den zweiten Summanden in (4.14) eine zu (4.10) analoge Abschätzung der Form

$$\mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\overline{Y}_t^i) - \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}_t^i)\right]\right)\right|\right] \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}},$$

so ergibt sich

$$\mathbf{E}\left[|\langle Z_t^n, f\rangle - \langle P_t, f\rangle|\right] \leq \rho(\rho(\varepsilon)) + \frac{2\,\|f\|_\infty}{\rho(\varepsilon)^2}\frac{C}{n} + \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}} \tag{4.15}$$

und damit eine von t unabhängige Abschätzung.

Der Grenzübergang für n gegen unendlich zeigt, dass sich (4.12) durch $\rho(\rho(\varepsilon))$ beschränken lässt und somit also beliebig klein wird, da für ε gegen 0 auch $\rho(\varepsilon)$ gegen 0 konvergiert. ■

Der Nachweis der Beziehung (4.12) im letzten Beweis erlaubt bei der Suche nach einem starken Gesetz der großen Zahlen eine erste Formulierung in der Form (4.11).

Da die Konvergenz in L_1 die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert, kann man das folgende Korollar als schwaches Gesetz der großen Zahlen interpretieren.

Korollar 4.3.1 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.3.1.*

Für $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$ gilt im Sinne der L_1-Konvergenz gleichmäßig in $t \in [0,T]$ die Beziehung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \boldsymbol{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right]$$

für $n \longrightarrow \infty$.

Für einen Beweis der fast sicheren Konvergenz mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli ist die Abschätzung (4.15) zu schwach, da die Ordnung in n nicht für die Konvergenz der Reihe ausreicht. Mit einer leicht abgewandelten Beweisführung und stärkeren Voraussetzungen an die Startkonfiguration kann man dennoch ein positives Resultat erzielen.

Satz 4.3.2 *Die Voraussetzungen von Satz 4.2.1 seien erfüllt. Allerdings besitze die Startkonfiguration jetzt ein fünftes Moment für ein und damit jedes Teilchen, d.h. es gilt* $\boldsymbol{E}\left[\left\|Y_0^{i,n}\right\|^5\right] < \infty$.

Für $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$ *gilt dann im Sinne der fast sicheren Konvergenz gleichmäßig in* $t \in [0,T]$ *die Beziehung*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \boldsymbol{E}\left[f(\overline{Y}_t^1)\right], \quad \textit{d.h.}$$

$$\langle Z_t^n, f\rangle \longrightarrow \langle P_t, f\rangle$$

für $n \longrightarrow \infty$.

Beweis Anstatt den Nachweis

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |\langle Z_t^n, f\rangle - \langle P_t, f\rangle| = 0$$

fast sicher gleichmäßig in t direkt zu erbringen, untersucht man stattdessen nach dem Einfügen der Grenzdynamik $\overline{Y}_t^i$ die beiden Summanden

$$\begin{aligned} &|\langle Z_t^n, f\rangle - \langle P_t, f\rangle| \\ \le &\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{Y}_t^i)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{Y}_t^i) - \int_{C_T} f(x)dP_t(x)\right| \end{aligned} \tag{4.16}$$

getrennt und zeigt, dass diese fast sicher gleichmäßig in t gegen Null konvergieren.

Mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli [Shi84, Corollary II.10.1] kann die fast sicher gleichmäßige Konvergenz in t des ersten Summanden in (4.16) gezeigt werden.

Es sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass folgende Mengenrelation gilt

$$\begin{aligned}&\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(Y_t^{i,n}) - f(\overline{Y}_t^i)\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \\ &\qquad\subset \left\{\max_{1\leq i\leq n}\left|f(Y_t^{i,n}) - f(\overline{Y}_t^i)\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\max_{1\leq i\leq n}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \geq \delta\right\}.\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Chebyshev-Markov [Bau90, 20.1] und Satz 3.4.1 erhält man

$$\begin{aligned}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(Y_t^{i,n}) - f(\overline{Y}_t^i)\right)\right| \geq \varepsilon\right\} &\leq P\left\{\max_{1\leq i\leq n}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \geq \delta\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P\left\{\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\| \geq \delta\right\} \\ &\leq \frac{1}{\delta^{2p}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \\ &\leq \frac{1}{\delta^{2p}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{i,n} - \overline{Y}_t^i\right\|^{2p}\right] \\ &\leq \frac{1}{\delta^{2p}}C\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^p} = \frac{C}{\delta^{2p}}\frac{1}{n^{p-1}},\end{aligned}$$

wobei C eine von t unabhängige Konstante ist. Für $p > 2$, also etwa durch das vorausgesetzte fünfte Moment der Startverteilung, erhält man die benötigte Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(Y_t^{i,n}) - f(\overline{Y}_t^i)\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{\delta^{2p}}\frac{1}{n^{p-1}} < \infty,$$

welche die notwendige Voraussetzung im Lemma von Borel-Cantelli ist.

Für den zweiten Summanden in (4.16) bringt eine Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen in der klassischen Form zwar die fast sichere Konvergenz, allerdings kann über die Gleichmäßigkeit in t keine Aussage getroffen werden.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie in allgemeinen Banachräumen [LT91] erlaubt eine positive Antwort, denn auch für diesen Fall steht ein starkes Gesetz der großen Zahlen zur Verfügung.

Durch $V^i \triangleq f(\overline{Y}^i_t), i = 1, 2, \ldots$ wird eine Folge von Zufallsvariablen definiert. Diese haben Werte in dem separablen Banachraum $C[0, T]$, der mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen ist.

Die V^i sind auf Grund der Beschränktheit der f ebenfalls beschränkt und deshalb integrierbar. Nach [LT91, Corollar 7.10] gilt dann

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V^i - \mathbf{E}\left[V^1\right] \right\|_\infty \longrightarrow 0$$

fast sicher für n gegen unendlich.

Notiert man dies in der ausführlichen Form

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{Y}^i_t) - \mathbf{E}\left[f(\overline{Y}^1_t)\right] \right| \longrightarrow 0$$

fast sicher für n gegen unendlich, dann erhält man damit die im Satz behauptete Gleichmäßigkeit in t auch für die Konvergenz des zweiten Summanden in (4.16). ■

4.4 McKean-Vlasov Gleichung

Die mehrfache Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen für die abhängigen Zufallsvariablen aus dem letzten Kapitel erlaubt es, die Verteilungen $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}^1_t) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6), t \in [0, T]$ der Grenzdynamik als Lösung einer McKean-Vlasov Gleichung zu identifizieren.

Dabei wird eine Idee von Oelschläger in [Oel84] aufgegriffen. Der dort vorgetragene Beweis für eine konstante Dispersionsmatrix (d.h. $\sigma(x, y) = I_6$ ist die 6-dimensionale Einheitsmatrix) wird auf den vorliegenden Fall des Pickard-Tory Modells und seiner Grenzdynamik mit variabler Dispersionsmatrix übertragen und erweitert.

Der Kerngedanke besteht darin, dass die im starken Gesetz der großen Zahlen auftretende Summe mittels Itô-Formel ausgewertet und die bereits bekannte fast sichere und gleichmäßige Konvergenz in t

$$\langle Z_t^n, f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}) \longrightarrow \langle P_t, f\rangle$$

für n gegen unendlich ausgenutzt wird.

In Kapitel 2.2 wurde für das Pickard-Tory Modell die Fokker-Planck-Gleichung (2.5) abgeleitet. Abschließend wird in diesem Kapitel unter der Voraussetzung, dass die Grenzdynamik eine glatte Dichte besitzt, aus der McKean-Vlasov Gleichung auch für die Grenzdynamik eine Fokker-Planck-Gleichung ermittelt.

Bei der Anwendung der Itô-Formel treten Terme auf, die am einfachsten in Form eines Differenzialoperators interpretiert werden können. In einem ersten Schritt wird deshalb durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(Q)f)(x) &\triangleq \sum_{i=1}^{6} b_i(x, c(x,Q))\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\ a_{ii}(x, c(x,Q))\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \\ a_{ik}(x,y) &\triangleq \sum_{j=1}^{6}\sigma_{ij}(x,y)\sigma_{kj}(x,y), \quad Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6),\ i,k = 1\dots,6\end{aligned} \tag{4.17}$$

der Differenzialoperator der Grenzdynamik definiert. Dieser hängt von dem Maß $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ ab.

Für die Koeffizienten gelten die folgenden Bedingungen. Diese garantieren die Gültigkeit der Existenz- und Eindeutigkeitssätze, des Approximationssatzes sowie des starken Gesetzes der großen Zahlen (Satz 4.3.2) aus dem letzten Kapitel.

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $\|\mu\|_L$.
2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind ebenfalls Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante $\|\sigma\|_L$.
3. Die Konstanten $\varepsilon_i \geq 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind nichtnegativ.
4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion mit Konstante $\|K\|_L$.

5. Die Startkonfigurationen für die Grenzdynamiken $\{\overline{Y}_0^i\}_{i=1}^{\infty}$ bilden eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit fünften Moment, die von der Folge der 6-dimensionalen Brownschen Bewegungen ebenfalls unabhängig ist. Die Startkonfiguration für das i-te Teilchen in beiden Modellen ist dieselbe.

Legt man diese Voraussetzungen zu Grunde und beachtet die in Satz 3.3.1 durchgeführten Überlegungen, dann ergibt sich unmittelbar, dass die Koeffizienten $b_i(x, c(x, Q))$ und $a_{ii}(x, c(x, Q))$ des oben definierten Differenzialoperators global Lipschitz-stetige Funktionen sind.

Insbesondere folgt daraus $\mathcal{A}(Q)f \in C(\mathbb{R}^6)$ für $f \in C_b^2(\mathbb{R}^6)$ und $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$. Soll darüber hinaus sogar $\mathcal{A}(Q)f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$ gelten, dann muss $f \in C_0^2(\mathbb{R}^6)$ gewählt werden, da in diesem Fall auf Grund des kompakten Supports von f auch die Koeffizienten $b_i(x, c(x, Q))$ und $a_{ii}(x, c(x, Q))$ des Differenzialoperators beschränkt bleiben.

Satz 4.4.1 *Die Familie* $P_t = \mathcal{L}(\overline{Y}_t^1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$, $t \in [0, T]$ *ist eine Lösung der McKean-Vlasov Gleichung*

$$\langle P_t, f\rangle - \langle P_0, f\rangle = \int_0^t \langle P_s, \mathcal{A}(P_s)f\rangle ds$$

für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^6)$ *und ein Startwahrscheinlichkeitsmaß* $P_{t=0} = P_0$.

Dabei wird die Lösung P_t *durch den maßwertigen Prozess* Z_t^n *im Sinne von Satz 4.3.1 approximiert.*

Beweis Nach (4.13) gilt für den maßwertigen Prozess Z_t^n und $f \in C_b(\mathbb{R}^6)$ die Darstellung

$$\langle Z_t^n, f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_t^{i,n}).$$

Fordert man für die Funktion f zusätzlich die Differenzierbarkeit, so lässt sich dieser Ausdruck mit der Itô-Formel näher untersuchen. Im Weiteren wird dafür die Darstellung (3.27)

$$Y_t^{i,n} = Y_0^{i,n} + \underbrace{\int_0^t b(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n))ds}_{\triangleq B_t} + \underbrace{\int_0^t \sigma(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n))dW_s^i}_{\triangleq M_t}$$

des Prozesses $Y_t^{i,n}$ verwendet, wobei B_t der 6-dimensionale Anteil von beschränkter Variation und M_t der 6-dimensionale Martingaleanteil am Prozess $Y_t^{i,n}$ ist.

Für $f \in C_b^2(\mathbb{R}^6)$ erhält man mit Hilfe der Itô-Formel die Gleichung

$$\begin{aligned}
f(Y_t^{i,n}) - f(Y_0^{i,n}) = &\sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) dB_s^{(j)} \\
&+ \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) dM_s^{(j)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(Y_s^{i,n}) d\langle M^{(j)}, M^{(k)} \rangle_s.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dabei ist $\langle M^{(j)}, M^{(k)} \rangle_t$ die Kovariation zwischen den stetigen Prozessen $M_t^{(j)}$ und $M_t^{(k)}$. Bei gleichen Prozessen im ersten und zweiten Argument der Kovariation spricht man von der quadratischen Variation $\langle M^{(j)} \rangle_t$.

Bevor (4.18) weiter untersucht werden kann, muss zunächst die aufgetretene Kovariation berechnet werden. Auf Grund der Eigenschaften der 6-dimensionalen Brownschen Bewegung W_t^i und den Rechenregeln für die quadratische Variation von Itô-Integralen [KS91, 1.5.7] und [KS91, 3.2.17] gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\langle M^{(j)}, M^{(k)} \rangle_t \\
&= \sum_{l,m=1}^{6} \int_0^t \sigma_{jl}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) \sigma_{km}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) \underbrace{\langle W^{(i,l)}, W^{(i,m)} \rangle_s}_{=\delta_{lm} ds} \\
&= \sum_{l=1}^{6} \int_0^t \sigma_{jl}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) \sigma_{kl}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds \\
&= \sum_{l=1}^{6} \delta_{jl} \delta_{kl} \int_0^t \sigma_{jj}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) \sigma_{kk}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds \\
&= \delta_{jk} \int_0^t \sigma_{jj}^2(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds,
\end{aligned}$$

wobei $W_t^{(i,l)}$ die l-te Komponente der 6-dimensionalen Brownschen Bewegung des i-ten Teilchens im Pickard-Tory Modell ist. In den letzten Schritten wurde zusätzlich die Diagonalgestalt der Dispersionsmatrix σ ausgenutzt.

Für den Ausdruck (4.18) gilt damit insgesamt

$$
\begin{aligned}
f(Y_t^{i,n}) - f(Y_0^{i,n}) =& \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) b_j(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds \\
&+ \sum_{j,k=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) \sigma_{jk}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) dW_s^{(i,k)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(Y_s^{i,n}) \sigma_{jj}^2(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Erfolgt nun auf beiden Seiten der Gleichung (4.19) eine Summierung über i und eine anschließende Normierung mit $1/n$, so ergeben sich auf der linken Seite die bereits bekannten Terme $\langle Z_t^n, f\rangle$ und $\langle Z_0^n, f\rangle$.

Durch die nächsten Rechenschritte kann auch die rechte Seite zusammengefasst werden.

$$
\begin{aligned}
\langle Z_t^n, f\rangle - \langle Z_0^n, f\rangle =& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) \sigma_{jj}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) dW_s^{(i,j)} \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) b_j(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds \\
&+ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(Y_s^{i,n}) \sigma_{jj}^2(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) ds \\
=& \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{6} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n}) \sigma_{jj}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n)) dW_s^{(i,j)}}_{\triangleq N_t^n} \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (\mathcal{A}(Z_s^n) f)(Y_s^{i,n}) ds \\
=& N_t^n + \int_0^t \langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n) f\rangle ds
\end{aligned}
$$

Von Interesse ist nun das Verhalten der Gleichung

$$\langle Z_t^n, f\rangle - \langle Z_0^n, f\rangle = N_t^n + \int_0^t \langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n) f\rangle ds \tag{4.20}$$

für n gegen unendlich. Für eine mögliche Konvergenzaussage muss zunächst der Prozess N_t^n genauer untersucht werden.

Auf Grund der Eigenschaften der Koeffizienten handelt es sich bei N_t^n um ein stetiges lokales Martingale [KS91, 3.2.24]. Tatsächlich gilt mehr.

Bereits im Beweis zu Satz 3.3.1 wurde in (3.16) nachgewiesen, dass alleine die Lipschitz-Stetigkeit der σ_i und die besondere Gestalt des Konzentrationsfunktionals eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned}\sigma_{jj}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n))^2 &\leq \left\|\sigma(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n))\right\|^2 \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{3} C_6^2(1+C_3)^2 + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i}_{\triangleq C}\end{aligned}$$

garantieren (die Konstanten C_3 und C_6 sind im Beweis zu Satz 3.3.1 definiert).

Bei N_t^n handelt es sich somit um ein quadratisch integrierbares Martingale, da die Integranden der stochastischen Integrale von N_t^n beschränkt sind ($f \in C_b^2(\mathbb{R}^6)$).

Seine quadratische Kovariation berechnet sich zu

$$\langle N^n\rangle_t = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{6}\int_0^t \left\{\frac{\partial}{\partial x_j} f(Y_s^{i,n})\sigma_{jj}(Y_s^{i,n}, c(Y_s^{i,n}, Z_s^n))\right\}^2 ds. \tag{4.21}$$

Durch die Voraussetzung $f \in C_b^2(\mathbb{R}^6)$ ist garantiert, dass die Funktion f und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung etwa durch $\|f\|_\infty$ beschränkt sind. Die quadratische Kovariation (4.21) genügt damit der Abschätzung

$$\langle N^n\rangle_t \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{6} \|f\|_\infty^2 \; C^2 \; t = \frac{6\,\|f\|_\infty^2 \; C^2 \; t}{n}.$$

Man ist nun mit Hilfe von Lemma A.0.4 in der Lage für $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |N_t^n| > \varepsilon\right] \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{12\,\|f\|_\infty^2\ C^2\,T}\right)$$

so abzuschätzen, dass der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^\infty P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |N_t^n| > \varepsilon\right] \leq 2\sum_{n=1}^\infty \left(\underbrace{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{12\,\|f\|_\infty^2\ C^2\,T}\right)}_{<1}\right)^n < \infty$$

konvergiert. Nach dem Lemma von Borel-Cantelli [Shi84, Corollary II.10.1] folgt die fast sichere Konvergenz von N_t^n gegen 0 gleichmäßig in t.

Führt man nun in (4.20) den Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ durch, dann konvergiert die linke Seite nach Satz 4.3.2 fast sicher und gleichmäßig in t gegen $\langle P_t, f\rangle - \langle P_0, f\rangle$ und der erste Summand auf der rechten Seite in gleicher Art gegen 0.

Die Aussage des Satzes ist bewiesen, wenn auch die Gültigkeit der Beziehung

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle ds = \int_0^t \langle P_s, \mathcal{A}(P_s)f\rangle ds \tag{4.22}$$

fast sicher und gleichmäßig in t nachgewiesen werden kann. Dies gelingt, in dem zunächst geeignet ergänzt wird.

$$\begin{aligned}&|\langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle - \langle P_s, \mathcal{A}(P_s)f\rangle| \\ &\qquad \leq |\langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle - \langle Z_s^n, \mathcal{A}(P_s)f\rangle| + |\langle Z_s^n, \mathcal{A}(P_s)f\rangle - \langle P_s, \mathcal{A}(P_s)f\rangle| \end{aligned}\tag{4.23}$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite in (4.23) konvergiert nach Satz 4.3.2 fast sicher und gleichmäßig in t gegen 0 für $\mathcal{A}(P_s)f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^6)$. Mit den im Vorfeld des Satzes formulierten Überlegungen ist dies gerade für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^6)$ aber nicht für $f \in C_b^2(\mathbb{R}^6)$ der Fall. Im weiteren Verlauf des Beweises wird, wie in der Aussage des Satzes formuliert, diese schärfere Voraussetzung an f verwendet.

Zur Untersuchung des ersten Summanden in (4.23) betrachtet man zunächst die Differenz der Konzentrationsfunktionale. Diese Differenz soll gleichmäßig in x abgeschätzt werden. Man nutzt dabei die spezielle Form des Konzentrationsfunktionals aus und verwendet die Lévy-Prohorov Metrik (vgl. [Dud89, 11.3]).

Sei hierzu $BL(\mathbb{R}^6)$ der Banachraum der beschränkten, Lipschitz-stetigen reellwertigen Funktionen mit der Norm

$$\|f\|_{BL} \triangleq \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \right\} + \|f\|_{\infty} .$$

Jedes endliche signierte Maß Q [Bau90, §18] kann als Element des Dualraums $BL(\mathbb{R}^6)^*$ interpretiert werden und besitzt die Norm

$$\|Q\|_{BL^*} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^6} f(z) dQ(z) \right| : \|f\|_{BL} = 1 \right\}$$

Nach [Bau90, 18.2] ist die Menge der signierten Maße durch die Eigenschaft charakterisiert, die Differenz zweier endlicher Maße zu sein.

Es seien Q und $R \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. Dann lässt sich die Differenz der Konzentrationsfunktionale durch

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^6} |c(x, Q) - c(x, R)| &\triangleq \gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^6} \left| \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x - z) dQ(z) - \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x - z) dR(z) \right| \\
&= \gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^6} \left| \int_{\mathbb{R}^6} K^*(x - z) d(Q - R)(z) \right| \\
&\leq \gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^6} \underbrace{\|K(x - \cdot)\|_{\mathrm{BL}}}_{= \|K\|_{\mathrm{BL}}} \|Q - R\|_{BL^*} \\
&\leq \gamma \|K\|_{\mathrm{BL}} \|Q - R\|_{BL^*}
\end{aligned}$$

und damit unabhängig von x abschätzen. Aus den Voraussetzungen an den Kern und Lemma 2.1.1 folgt dabei $\|K\|_{\mathrm{BL}} < \infty$.

Den Zusammenhang mit Z_s^n und P_s stellt [Dud89, Theorem 11.3.3] her. Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen Q_n konvergiert genau dann schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q, wenn die Lévy-Prohorov Metrik $\|Q_n - Q\|_{BL^*}$ gegen 0 konvergiert.

Zusammen mit Satz 4.3.2 erhält man somit die Aussage

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^6} |c(x, Z_s^n) - c(x, P_s)| \leq \gamma \|K\|_{\mathrm{BL}} \|Z_s^n - P_s\|_{BL^*} \longrightarrow 0$$

fast sicher und gleichmäßig in s und x.

Da diese Eigenschaft auch unter stetigen Abbildungen wie σ_i^2 erhalten bleibt [CT97, Corollary 3.3.2], schließt man unter Verwendung von (3.12) auch für die Differenz der Differenzialoperatoren

$$\begin{aligned}
&|(\mathcal{A}(Z_s^n)f)(x) - (\mathcal{A}(P_s)f)(x)| \\
=&\left| \sum_{i=1}^{6} (b_i(x, c(x, Z_s^n)) - b_i(x, c(x, P_s)))\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=4}^{6}(\sigma_{i-3i-3}^2(x, c(x, Z_s^n)) - \sigma_{i-3i-3}^2(x, c(x, P_s)))\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\right| \\
\leq& 6\|f\|_\infty \|b(x, c(x, Z_s^n)) - b(x, c(x, P_s))\| \\
&\qquad + \frac{\|f\|_\infty}{2}\sum_{i=1}^{3}\left|\sigma_i^2(c(x, Z_s^n)) - \sigma_i^2(c(x, P_s))\right| \\
\leq& 6C_1\|f\|_\infty |c(x, Z_s^n) - c(x, P_s)| \\
&\qquad + \frac{\|f\|_\infty}{2}\sum_{i=1}^{3}\left|\sigma_i^2(c(x, Z_s^n)) - \sigma_i^2(c(x, P_s))\right| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

auf die fast sichere Konvergenz wiederum gleichmäßig in s und x.

Für den ersten Summanden in (4.23) ergibt sich damit weiter

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty} |\langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle - \langle Z_s^n, \mathcal{A}(P_s)f\rangle| \\
=&\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^6}(\mathcal{A}(Z_s^n)f)(x) - (\mathcal{A}(P_s)f)(x)dZ_s^n(x)\right| \\
\leq&\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}^6}\sup_{x\in\mathbb{R}^6}|(\mathcal{A}(Z_s^n)f)(x) - (\mathcal{A}(P_s)f)(x)|\, dZ_s^n(x) \\
\leq&\lim_{n\longrightarrow\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^6}|(\mathcal{A}(Z_s^n)f)(x) - (\mathcal{A}(P_s)f)(x)| = 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man mit (4.23) die fast sichere Konvergenz für n gegen unendlich von $\langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle$ gegen $\langle P_s, \mathcal{A}(P_s^n)f\rangle$ gleichmäßig in s.

Auf Grund des kompakten Supports von f und der Stetigkeit der Koeffizienten des Differenzialoperators existiert eine auf $[0,t]$ integrierbare Majorante für $\langle Z_s^n, \mathcal{A}(Z_s^n)f\rangle$. Eine Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz beweist schließlich (4.22) und beendet den Beweis. ■

Aus den bisher erzielten Ergebnissen lässt sich nun abschließend auch für die nichtlineare Grenzdynamik eine Fokker-Planck-Gleichung oder Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung herleiten.

Die McKean-Vlasov-Gleichung hat nach Satz 4.4.1 die Form

$$\int_{\mathbb{R}^6} f(x)dP_t(x) - \int_{\mathbb{R}^6} f(x)dP_0(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} (\mathcal{A}(P_s)f)(x)dP_s(x)ds. \tag{4.24}$$

Besitzt nun die Verteilung P_t eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes, d.h. gilt für alle $t \geq 0$

$$P_t(A) = \int_A p_t(x)dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^6),$$

dann lässt sich (4.24) zu

$$\int_{\mathbb{R}^6} f(x)p_t(x)dx - \int_{\mathbb{R}^6} f(x)p_0(x)dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} (\mathcal{A}(P_s)f)(x)p_s(x)dxds \tag{4.25}$$

vereinfachen.

Mit Satz 3.5.1 steht ein Hilfsmittel zur Verfügung, mit dem die Existenz einer Dichte für die Verteilung der Grenzdynamik garantiert werden kann. Es sollen also die für die Gültigkeit von Satz 3.5.1 notwendigen Voraussetzungen an die Koeffizienten des Modells gelten:

1. Der Driftvektor $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

2. Die Dispersionskoeffizienten $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (i=1,2,3) sind alle unendlich oft differenzierbar und haben ebenfalls alle beschränkte Ableitungen. Zusätzlich sind die Dispersionskoeffizienten strikt positiv, d.h. es gilt

$$\min_{i=1,2,3} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma_i(x) > 0.$$

3. Die Konstanten $\varepsilon_i > 0$ (i=1,2,3) in der Dispersionsmatrix sind positiv.

4. Der Kern $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. seine kanonische Fortsetzung $K^* : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Dichtefunktion mit beschränkten Ableitungen.

5. Die Startkonfiguration für die Grenzdynamik Y_0 besitze eine Dichtefunktion mit kompaktem Support in $\mathbb{R}^6$.

Ferner definiert man wie in Kapitel 2.2 den formal adjungierten Operator $\mathcal{A}^*(Q)$ für die Grenzdynamik.

$$(\mathcal{A}^*(Q)f)(x) \triangleq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))f(x)\Big] - \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[b_i(x, c(x,Q))f(x)\Big] \tag{4.26}$$

$$a_{ik}(x,y) \triangleq \sum_{j=1}^{6} \sigma_{ij}(x,y)\sigma_{kj}(x,y), \quad Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6),\ i,k = 1\ldots,6$$

Die Bezeichnung adjungierter Operator wird durch Lemma A.0.5 gerechtfertigt, das eine einfache Beziehung mit dem Differenzialoperator $\mathcal{A}(Q)$ herstellt.

Die Differenziation nach t in (4.25) ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^6} f(x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^6} (\mathcal{A}(P_t)f)(x)p_t(x)dx.$$

Die Dichte und die Koeffizienten sind mehr als zweimal stetig differenzierbar, so dass die rechte Seite mittels Lemma A.0.5 weiter zu

$$\int_{\mathbb{R}^6} f(x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^6} f(x)(\mathcal{A}^*(P_t)p_t)(x)dx$$

umgeformt werden kann.

Die Aussage ist für alle $f \in C_0^2(\mathbb{R}^6)$ gültig und so kann die Lösung der McKean-Vlasov Gleichung als schwache Lösung der nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = (\mathcal{A}^*(P_t)p_t)(x)$$

mit der Dichte von P_0 als Anfangsbedingung angesehen werden.

Anhang A

Abschätzungen und Lemmata

Bei den folgenden Abschätzungen und Lemmas handelt es sich um in der Arbeit häufig verwendete Hilfsmittel bzw. technische Details, die speziell auf die Situation dieser Arbeit hin angepasst bzw. geschaffen wurden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese Überlegungen im Anhang zusammengestellt.

Das folgende Lemma stellt ein Standardtool bei Abschätzungen für Summen und Integrale bereit.

Lemma A.0.1 *Für $p \geq 1$ gilt:*

$$|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p \leq n(|a_1| + \cdots + |a_n|)^p \leq n^p(|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p) \tag{A.1}$$

Ebenso gilt für $m \geq 1$:

$$\left(\int_s^t g(x)\, dx \right)^m \leq (t-s)^{m-1} \int_s^t |g(x)|^m \, dx \tag{A.2}$$

Beweis Die linke Ungleichung von (A.1) folgt aus $|a_i| \leq (|a_1| + \cdots + |a_n|)$ für $1 \leq i \leq n$. Nach der Hölderschen Ungleichung für Summen [Wal92a, 11.23] gilt für $p > 1$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot 1 \right]^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p$$

und somit erhält man die rechte Seite der Ungleichung von (A.1). Für $p = 1$ sind die getroffenen Aussagen trivial. Die Integralungleichung (A.2) ergibt sich für $m > 1$ mit der Hölderschen Ungleichung für Integrale [Bau90, 14.1]:

$$\left[\int_s^t |g(x)| \cdot 1\, dx\right]^m \leq \left[\left(\int_s^t |g(x)|^m\, dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_s^t 1\, dx\right)^{1-\frac{1}{m}}\right]^m$$

■

In den Beweisen über Existenz und Eindeutigkeit der Grenzdynamik sowie der Approximationseigenschaft wird eine spezielle Form des allgemein bekannten Lemmas von Gronwall benötigt. Diese wird hier bewiesen, um den Lesefluss in Kapitel 3 nicht unnötig zu stören.

Lemma A.0.2 *Sei $g(t)$ eine stetige Funktion für die folgende Beziehung gilt.*

$$0 \leq g(t) \leq \beta \int_0^t f(s)ds + \beta \int_0^t g(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Ferner sei $\beta > 0$ und $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ integrierbar, dann gilt

$$g(t) \leq \beta \exp(\beta t) \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Beweis Auf Grund der Integrierbarkeit von f ist durch $\alpha(t) = \beta \int_0^t f(s)ds$ eine absolutstetige und integrierbare Funktion erklärt [Wal92b, 9.28(a)]. Nach Gronwalls Lemma [KS91, 5.2.7] gilt

$$g(t) \leq \beta \int_0^t f(s)ds + \beta \int_0^t \beta \int_0^s f(u)du\ \exp(\beta(t-s))ds.$$

Wegen der Absolutstetigkeit der Integranden [Wal92b, 9.30] erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \beta \int_0^s f(u)du\ \exp(\beta(t-s))ds \\
=&\left|\beta \int_0^s f(u)du \frac{\exp(\beta(t-s))}{-\beta}\right|_{s=0}^t - \int_0^t \beta f(s) \frac{\exp(\beta(t-s))}{-\beta} ds \\
=&-\int_0^t f(u)du - 0 + \int_0^t f(s)\exp(\beta(t-s))ds
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
g(t) &\leq \beta \int_0^t f(s)ds - \beta \int_0^t f(u)du + \beta \int_0^t f(s)\exp(\beta(t-s))ds \\
&\leq \beta \int_0^t f(s)\exp(\beta(t-s))ds \\
&= \beta \exp(\beta t) \int_0^t f(s)\exp(-\beta s)ds \\
&\leq \beta \exp(\beta t) \int_0^t f(s)ds,
\end{aligned}
$$

weil die Funktion f nichtnegativ ist. ■

Ebenfalls im Beweis der Approximationseigenschaft in Kapitel 3 wird bei Konditionierung einer Familie von Zufallsvariablen die folgende Rechenregel benötigt.

Lemma A.0.3 *Es seien $X, Y_1, \ldots, Y_n$ reelle Zufallsvariablen und X sei von den Y_i stochastisch unabhängig. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f(X, Y_1, \ldots, Y_n)$ integrierbar ist. Dann gilt*

$$
\boldsymbol{E}[f(X, Y_1, \ldots, Y_n)|X = x] = \boldsymbol{E}[f(x, Y_1, \ldots, Y_n)]
$$

für P_X-fast sicher alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis Für den Beweis der im Lemma getroffenen Aussage genügt es zu zeigen [Shi84, II.3.7.5], dass P-fast sicher

$$
\mathbf{E}[f(X, Y_1, \ldots, Y_n)|X] = g(X) \tag{A.3}
$$

gilt, wobei die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$
g(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y_1, \ldots, y_n) dP_{(Y_1, \ldots, Y_n)}(y_1, \ldots, y_n)
$$

definiert und daher messbar ist.

Für alle $C \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ existiert ein $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und es gilt auf Grund der Unabhängigkeit zwischen X und $Y_1, \ldots, Y_n$

$$\int_C f(X, Y_1, \dots, Y_n)dP = \int_{B\times\mathbb{R}^n} f(x, y_1, \dots, y_n)dP_{(X,Y_1,\dots,Y_n)}(x, y_1, \dots, y_n)$$
$$= \int_{B\times\mathbb{R}^n} f(x, y_1, \dots, y_n)d(P_X \otimes P_{(Y_1,\dots,Y_n)})(x, y_1, \dots, y_n).$$

Andererseits gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_C g(X)dP = \int_B g(x)dP_X(x)$$
$$= \int_B \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y_1, \dots, y_n)dP_{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1, \dots, y_n)dP_X(x)$$
$$= \int_{B\times\mathbb{R}^n} f(x, y_1, \dots, y_n)d(P_X \otimes P_{Y_1,\dots,Y_n})(x, y_1, \dots, y_n).$$

Zusammengefasst erhält man daher für alle $C \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\int_C f(X, Y_1, \dots, Y_n)dP = \int_C g(X)dP$$

und damit die zu beweisende Aussage (A.3). ■

In [RY91, IV.3.16] als Aufgabe formuliert wird hier aus Gründen der Vollständigkeit eine etwas allgemeinere Aussage inklusive Beweis gegeben.

Lemma A.0.4 *Für ein stetiges lokales Martingale mit $M_0 = 0$ P-fast sicher folgen aus $\langle M\rangle_t \leq C_t$ P-fast sicher die Abschätzungen*

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t} M_s > x\right] \leq \exp(-x^2/2C_t)$$

und

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| > x\right] \leq 2\exp(-x^2/2C_t).$$

Beweis Gemäß [RY91, IV.3.4] (eine direkte Folgerung aus der Itô-Formel) handelt es sich bei

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t \triangleq \exp\left\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right\}$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ ebenfalls um ein positives, stetiges lokales Martingale und damit unter Benutzung des Lemmas von Fatou um ein positives Supermartingale.

Da $-\mathcal{E}^\lambda(M)_t$ ein negatives Submartingale ist, gilt mit Hilfe der Maximalungleichung für Submartingale ([KS91, 1.3.8]) die Abschätzung

$$yP\left[\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}^\lambda(M)_s \ge y\right] = yP\left[\inf_{0\le s\le t} -\mathcal{E}^\lambda(M)_s \le -y\right] \le -\mathbf{E}\left[-\mathcal{E}^\lambda(M)_0\right] = 1.$$

Ferner gilt die Mengenbeziehung

$$\begin{aligned}\left\{\sup_{0\le s\le t} M_s > x\right\} &\subseteq \left\{\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}^\lambda(M)_s > \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)\right\}\\ &\subseteq \left\{\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}^\lambda(M)_s > \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}C_t\right)\right\}.\end{aligned}$$

Fasst man dieses zusammen, dann erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned}P\left[\sup_{0\le s\le t} M_s > x\right] &\le P\left[\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}^\lambda(M)_s > \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}C_t\right)\right]\\ &\le \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}C_t - \lambda x\right),\end{aligned}$$

aus der speziell für $\lambda = x/C_t$ die erste zu beweisende Aussage folgt. Wendet man die erste Ungleichung auf die lokalen Martingale M_t und $-M_t$ an, so ergibt sich auch die zweite Aussage. ∎

In Kapitel 4.3 wird bei der Ermittlung der Fokker-Planck-Gleichung für die Grenzdynamik folgende Relation der beiden in diesem Kapitel definierten Differenzialoperatoren (4.17) und (4.26) benutzt.

Lemma A.0.5 *Für* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^6), g \in C^2(\mathbb{R}^6)$ *und* $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^6)$ *sowie* $b_i(x, c(x,Q)) \in C^2(\mathbb{R}^6)$ *bzw.* $a_{ii}(x, c(x,Q)) \in C^2(\mathbb{R}^6)$ *für* $i = 1, \dots, 6$ *gilt die Beziehung*

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\mathcal{A}(Q)f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^6} f(x)(\mathcal{A}^*(Q)g)(x)dx$$

Beweis Es sei $G \subset \mathbb{R}^6$ ein beschränktes Gebiet, das den Support von f enthält. Es gilt mit der Produktregel und dem Satz von Gauß [Tri72]

$$\begin{aligned}
&\int_G b_i(x, c(x,Q)) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x)dx \\
&= \int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[b_i(x, c(x,Q))f(x)g(x)\Big]dx - \int_G f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[b_i(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx \\
&= -\int_G f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[b_i(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx,
\end{aligned}$$

da f und damit der Integrand kompakten Support besitzen. Durch erneute zweimalige Anwendung des Satzes von Gauß ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
&\int_G a_{ii}(x, c(x,Q)) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} g(x)dx \\
&= \int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}g(x)\Big]dx - \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx \\
&= -\int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx \\
&= -\int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))g(x)\Big]\Big]dx \\
&\qquad\qquad + \int_G f(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx \\
&= \int_G f(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big[a_{ii}(x, c(x,Q))g(x)\Big]dx.
\end{aligned}$$

Summation der beiden Gleichungen über i liefert unter Verwendung der Definitionen (4.17) und (4.26) die formulierte Aussage. ∎

Danksagung

Ich möchte mich bedanken,

bei Herrn Prof. Dr. Christian Hesse, der nicht nur den Vorschlag zu dieser Arbeit gemacht hat, sondern mir zu jeder Zeit als verständnisvoller und fachkundiger Betreuer und Ratgeber zur Seite stand.

bei Herrn Prof. Dr. Harro Walk, der sich freundlicherweise zur Übernahme des Mitberichts bereit erklärt hat.

bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft und Herrn Prof. Alexander Mielke, die durch ihre finanzielle Unterstützung diese Arbeit erst ermöglicht haben.

bei Priv.-Doz. Dr. Jürgen Dippon, als ein immer geduldiger Zuhörer und fachlich kompetenter Ratgeber, der darüber hinaus in vielen privaten Gesprächen ein geschätzter Diskussionspartner war.

bei Marc-Oliver Otto, mit dem mich weit mehr als das gemeinsame Interesse an der Mathematik verbindet.

Der größte Dank gilt meiner Ehefrau Carolin für die liebevolle Unterstützung, die ich in den vergangenen Jahren und insbesondere bei der Erstellung dieser Arbeit erhalten habe.

Index

T

U

V

W

Symbole

Literaturverzeichnis

[AB99] Aliprantis, Charalambos D. ; Border, Kim C.: *Infinite-dimensional analysis*. Second. Berlin : Springer-Verlag, 1999. – xx+672 S. – ISBN 3–540–65854–8

[AKH02] Antonelli, Fabio ; Kohatsu-Higa, Arturo: Rate of convergence of a particle method to the solution of the McKean-Vlasov equation. In: *Ann. Appl. Probab.* 12 (2002), Nr. 2, S. 423–476. – ISSN 1050–5164

[Bau90] Bauer, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1990. – xviii+259 S. – ISBN 3–11–012772–5

[Bau91] Bauer, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. vierte Auflage. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1991. – xviii+520 S. – ISBN 3–11–012190–5; 3–11–012191–3

[BN98] Barlow, Martin T. ; Nualart, David: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1690: *Lectures on probability theory and statistics*. Berlin : Springer-Verlag, 1998. – viii+227 S. – Lectures from the 25th Saint-Flour Summer School held July 10–26, 1995, Edited by P. Bernard. – ISBN 3–540–64620–5

[CT97] Chow, Yuan S. ; Teicher, Henry: *Probability theory*. Third. New York : Springer-Verlag, 1997. – xxii+488 S. – Independence, interchangeability, martingales. – ISBN 0–387–98228–0

[Dav95] Davis, Robert H.: Hydrodynamic Dispersion in Sedimenting Suspensions. In: *Mobile Particulate Systems* (1995), S. 93–104

[DG88] Dawson, Donald A. ; Gärtner, Jürgen: Long time behaviour of interacting diffusions. In: Norris, J.R. (Hrsg.): *Stochastic calculus in application* Bd. 197. Harlow : Longman Sci. Tech., 1988, S. 29–54

[Dob70] Dobrushin, Roland L.: Prescribing a system of random variables by conditional distributions. In: *Theor Probab. Appl.* 15 (1970), Nr. 3, S. 458–486

[Dud89] Dudley, Richard M.: *Real analysis and probability.* Pacific Grove, CA : Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989. – xii+436 S. – ISBN 0–534–10050–3

[Fri75] Friedman, Avner: *Probability and mathematical statistics*. Bd. 28: *Stochastic differential equations and applications. Vol. 1*. New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1975. – xiii+231 S. – Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28. – ISBN 0–12–268201–7

[Gar88] Gard, Thomas C.: *Introduction to stochastic differential equations.* New York : Marcel Dekker Inc., 1988. – xiv+234 S. – ISBN 0–8247–7776–X

[Gra94] Gray, Alfred: *Differentialgeometrie: klassische Theorie in moderner Darstellung.* Heidelberg Berlin Oxford : Spektrum Akademischer Verlag, 1994. – xix+618 S. – ISBN 3–86025–141–4

[GS84] Givens, Clark R. ; Shortt, Rae M.: A class of Wasserstein metrics for probability distributions. In: *Michigan Math. J.* 31 (1984), S. 231–240. – ISSN 0026–2285

[HB86] Happel, John ; Brenner, Howard: *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media.* Second. Dordrecht : Nijhoff, 1986. – 553 S. – ISBN 90–247–2877–0

[HD00] Hesse, Christian H. ; Dunz, Armin: Analysing particle sedimentation in fluids by measure-valued stochastic processes. In: *Multifield problems.* Berlin : Springer, 2000, S. 25–33

[Hes93] Hesse, Christian H.: On a stochastic Model for particle sedimentation in fluids. In: *Applied stochastic models and data analysis* (1993), Nr. 4, S. 73–83

[HR94] Hesse, Christian H. ; Ramos, Eduardo: Dynamic simulation of a stochastic model for particle sedimentation in fluids. In: *Applied mathematical modeling* 18 (1994), Nr. 8, S. 436–444

[HT96] Hesse, Christian H. ; Tory, Elmer M.: The stochastics of sedimentation. In: *Sedimentation of small particles in a viscous Fluid* Bd. 7. Elmer M. Tory, 1996, S. 199–240

[IW89] Ikeda, Nobuyuki ; Watanabe, Shinzo: *North-Holland Mathematical Library.* Bd. 24: *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Second. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1989. – xvi+555 S. – ISBN 0–444–87378–3

[Kac56] Kac, Mark: Foundations of kinetic theory. In: *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III.* Berkeley and Los Angeles : University of California Press, 1956, S. 171–197

[KP92] Kloeden, Peter E. ; Platen, Eckhard: *Numerical solution of stochastic differential equations.* Berlin : Springer-Verlag, 1992. – xxxvi+632 S. – ISBN 3–540–54062–8

[KS91] Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E.: *Brownian motion and stochastic calculus.* Second. New York : Springer-Verlag, 1991. – xxiv+470 S. – ISBN 0–387–97655–8

[Kyn52] Kynch, George J.: A theory of sedimentation. In: *Trans. Faraday Soc.* 482 (1852), S. 166–176

[LT91] Ledoux, Michel ; Talagrand, Michel: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Bd. 23: *Probability in Banach spaces*. Berlin : Springer-Verlag, 1991. – xii+480 S. – Isoperimetry and processes. – ISBN 3–540–52013–9

[McK66] McKean, Henry P.: A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. In: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 56 (1966), S. 1907–1911

[McK67] McKean, Henry P.: Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In: *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967).* Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967, S. 41–57

[MV92] Meise, Reinhold ; Vogt, Dietmar: *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course].* Bd. 62: *Einführung in die Funktionalanalysis*. Braunschweig : Friedr. Vieweg & Sohn, 1992. – x+416 S. – ISBN 3–528–07262–8

[Nua95] Nualart, David: *The Malliavin calculus and related topics.* New York : Springer-Verlag, 1995. – xii+266 S. – ISBN 0–387–94432–X

[Oel84] Oelschläger, Karl: A martingale approach to the law of large numbers for weakly interacting stochastic processes. In: *Ann. Probab.* 12 (1984), Nr. 2, S. 458–479. – ISSN 0091–1798

[Oel85] Oelschläger, Karl: A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 69 (1985), Nr. 2, S. 279–322. – ISSN 0044–3719

[Øks98] Øksendal, Bernt: *Stochastic differential equations*. Fifth. Berlin : Springer-Verlag, 1998. – xx+324 S. – An introduction with applications. – ISBN 3–540–63720–6

[PT77] Pickard, David K. ; Tory, Elmer M.: A Markov model for sedimentation. In: *J. Math. Anal. Appl.* 60 (1977), Nr. 2, S. 349–369

[Rac84] Rachev, Svetlozar T.: The Monge-Kantorovich problem on mass transfer and its applications in stochastics. In: *Theory Probab. Appl.* 29 (1984), Nr. 4, S. 647–676

[Rac91] Rachev, Svetlozar T.: *Probability metrics and the stability of stochastic models*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 1991 (Wiley series in probability and mathematical statistics). – xiv+494 S. – ISBN 0–471–92877–1

[RR94] Rachev, Svetlozar T. ; Rüschendorf, Ludger: Propagation of chaos and contraction of stochastic mappings. In: *Siberian Adv. Math.* 4 (1994), Nr. 1, S. 114–150. – Siberian Advances in Mathematics. – ISSN 1055–1344

[RW87] Rogers, L. Chris G. ; Williams, David: *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. New York : John Wiley & Sons Inc., 1987 (Wiley series in probability and mathematical statistics). – xiv+475 S. – Itô calculus. – ISBN 0–471–91482–7

[RY91] Revuz, Daniel ; Yor, Marc: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Bd. 293: *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin : Springer-Verlag, 1991. – x+533 S. – ISBN 3–540–52167–4

[Shi84] Shiryayev, Albert N.: *Probability*. New York : Springer-Verlag, 1984. – xi+577 S. – Translated from the Russian by R. P. Boas. – ISBN 0–387–90898–6

[SV79] Stroock, Daniel W. ; Varadhan, Srinivasa R. S.: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Bd. 233: *Multidimensional diffusion processes*. Berlin : Springer-Verlag, 1979. – xii+338 S. – ISBN 3–540–90353–4

[Szn91] Sznitman, Alain-Sol: Topics in propagation of chaos. In: Burkholder, D.L. (Hrsg.) ; Pardoux, E. (Hrsg.) ; Sznitman, A. (Hrsg.): *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989* Bd. 1464. Berlin : Springer-Verlag, 1991, S. 165–251

[Tan85] Taniguchi, Setsuo: Applications of Malliavin's calculus to time-dependent systems of heat equations. In: *Osaka J. Math.* 22 (1985), Nr. 2, S. 307–320. – ISSN 0030–6126

[TH96] Tory, Elmer M. ; Hesse, Christian H.: Theoretical and experimental evidence for a Markov model for sedimentation. In: *Sedimentation of small particles in a viscous Fluid* Bd. 7. Elmer M. Tory, 1996, S. 241–281

[TP82] Tory, Elmer M. ; Pickard, David K.: Extensions and refinements of a Markov model for sedimentation. In: *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982), Nr. 2, S. 442–470. – ISSN 0022–247X

[Tri72] Triebel, Hans: *Höhere Analysis*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972. – 704 S. – Hochschulbücher für Mathematik, Band 76

[Wal92a] Walter, Wolfgang: *Analysis 1*. dritte Auflage. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1992. – xii+385 S. – ISBN 3–540–55234–0

[Wal92b] Walter, Wolfgang: *Analysis 2*. dritte Auflage. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1992. – xii+396 S. – ISBN 3–540–55385–1

[Wil79] Williams, David: *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 1979 (Wiley series in probability and mathematical statistics). – 237 S. – Foundations. – ISBN 0–471–99705–6