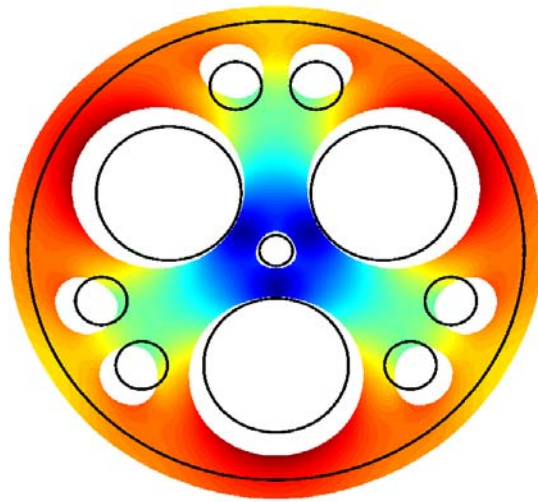


Diplomarbeit

FINITE ELEMENTE APPROXIMATION MIT WEB-SPLINES IN DER EBENEN LINEAREN ELASTIZITÄT

Andreas Kopf
19. Juli 2002



Betreuer: Prof. Dr. Klaus Höllig
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart

Titelbild: Deformation eines Druckbehälters bei konstantem Druck nach außen auf alle inneren Öffnungen

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die auf unterschiedlichste Art und Weise zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben. Mein ganz besonderer Dank gilt Prof. Dr. Klaus Höllig, der mein Interesse an diesem Thema geweckt hat und mir immer mit viel Geduld und Engagement hilfreich zur Seite stand. Weiterhin möchte ich mich bei allen Assistenten und Mitarbeitern des 2. Lehrstuhls, insbesondere Dipl.-Math. Joachim Wipper, Dipl.-Math. Jörg Hörner und Dipl.-Math. Christian Apprich ganz herzlich bedanken, die mir stets bei Fragen und Problemen weitergeholfen haben. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei allen Beteiligten am WEB-Projekt. Zusätzlich zu den bereits oben genannten Personen sind hier vor allem Anja Streit und Marco Bossle zu nennen. Vielen Dank für die tolle Arbeitsatmosphäre und die stets produktive Teamarbeit.

Abschließend möchte ich mich noch besonders bei meiner Familie für die einzigartige Unterstützung bedanken.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Stuttgart, den 19. Juli 2002

Andreas Kopf

Inhaltsverzeichnis

1	Elastizitätstheorie	9
1.1	Einführung	9
1.2	Kinematik	10
1.3	Gleichgewichtsbedingungen	11
1.3.1	Massenerhaltungssatz	11
1.3.2	Impulserhaltungssatz	12
1.3.3	Drehimpulserhaltungssatz	13
1.4	Stoffgesetze, konstitutive Gleichungen	14
1.5	Randwertproblem der Elastizitätstheorie	16
2	Lineare Elastizitätstheorie	18
2.1	Das Hooksche Werkstoffgesetz	18
2.2	Linearisierung des Randwertproblems	19
2.3	Das Variationsproblem	20
2.4	Das Hooksche Werkstoffgesetz in Matrizen- schreibweise	21
2.5	Das Variationsproblem in Matrixschreibweise	22
2.6	Ebener Spannungszustand	22
2.7	Ebener Verzerrungszustand	23
2.8	Vergleichspannung	24
2.9	Stetigkeit und Elliptizität der Bilinearform	26
2.10	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	27
3	Die web-Methode	29
3.1	B-Splines	29
3.2	Gewichtung	33
3.3	Erweiterung	34
3.4	Stabilität	36
3.5	Kondition der Galerkinmatrix	39
4	Fehlerabschätzungen	40
4.1	Grundlagen	41
4.2	Regularität der Lösung	42
4.3	Quasi-Interpolation	43
4.4	Approximation	44
4.5	Fehlerabschätzung	50

5	Implementierung	52
5.1	Gliederung	52
5.2	Numerische Integration	53
5.3	Aufstellen des Galerkinsystems	53
5.3.1	Galerkinmatrix der wb-Splines	55
5.3.2	Erweiterungsmatrix	57
5.4	Lösen des Galerkinsystems	58
5.5	Benutzeroberfläche	60
6	Numerische Resultate	64
6.1	Experimentelle Verifikation der Fehlerordnung	64
6.2	Fehlerordnung bei Singularitäten	67
6.3	Regularität im Innern des Gebietes	68
6.4	Fehler auf dem Neumannrand	69
7	Anwendungsbeispiele	71
7.1	Querschnitt eines Damms	71
7.2	Querschnitt eines Druckbehälters	73
7.3	Rotierende Metallscheibe	76
8	Resumé	79
A	Programmübersicht	81

Einleitung

Bei der numerischen Behandlung von elliptischen Differentialgleichungen wird heute oft die Methode der Finiten Elemente, häufig mit FEM abgekürzt, verwandt. Obwohl das Konzept schon vorher in der Mathematik skizziert wurde, entstand diese Methode in den fünfziger Jahren in der Flugzeugindustrie. Ende der sechziger Jahre begann dann die intensive Analyse und Weiterentwicklung der Finiten Elemente.

Ein wichtiger Anwendungsbereich ist die Strukturmechanik, in der Systeme von partiellen Differentialgleichungen zu lösen sind, die mit elementaren Methoden meist nicht zu bewältigen sind. Variationsmethoden bieten hier eine sehr elegante Lösungsmethode, die zudem ideal für FEM geeignet ist.

Die Methode der Finiten Elemente baut auf der Approximation der schwachen Lösung in einem geeignet gewählten Ansatzraum auf. Bisher wurden hier meist Räume stückweiser nodaler Polynome verwendet, die eine Zerlegung des Gebietes in isoparametrische Dreiecke oder Vierecke voraussetzt.

Ein neuer Ansatz, der in dieser Arbeit für Probleme der ebenen linearen Elastizität untersucht wird, besteht in der Methode der web-Splines (weighted extended b-splines) [Hö], die am Mathematischen Institut A entwickelt wurde. Hierbei wird über das Gebiet ein regelmäßiges Gitter gelegt und die Einhaltung der Randbedingungen durch eine Gewichtsfunktion gesichert. Die web-Methode hat den Vorteil, dass die meist aufwendige Zerlegung des Gebietes entfällt und eine Erhöhung des Ansatzgrades mit einer nur geringen Anzahl von neuen Freiheitsgraden verbunden ist.

In Kapitel 1 wird zunächst die Theorie der Elastizität, ihre Entstehung aus der Kinematik, den Gleichgewichtsbedingungen und dem Stoffgesetz behandelt. Der Übergang zum linearisierten System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

folgt in Kapitel 2. Außerdem wird hier die Herleitung des Variationsproblems

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v$$

und der ebenen Betrachtung beschrieben, bevor das Kapitel in der Behandlung der Existenz- und Eindeutigkeitsfrage endet.

In Kapitel 3 wird die Methode der gewichteten erweiterten B-Splines eingeführt und ihre Stabilität untersucht. In Kapitel 4 wird anschließend die Fehlerabschätzung untersucht,

wobei zuerst kurz auf Fragen der Regularität der Lösung und der Splineapproximation eingegangen wird.

Im Rahmen eines Projektes wurden Implementierungen in `MATLAB` erarbeitet, die in Kapitel 5 vorgestellt werden, bevor dann im 6. Kapitel die numerische Untersuchung folgt. Abschließend werden in Kapitel 7 einige Beispiele aus der Anwendung betrachtet.

Kapitel 1

Elastizitätstheorie

1.1 Einführung

Die Elastizitätstheorie stellt ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik dar, das durch Beschränkung auf elastische, d.h. reversibel deformierbare Materialien entsteht. Innerhalb der Elastizitätstheorie erlaubt die Einschränkung auf wichtige Teilgebiete eine weitere Unterteilung in Elastostatik, Elastokinetik, Thermoelastizität und Viskoelastizität. Die hier nachfolgende Betrachtung der Elastizitätstheorie beschränkt sich auf die Elastostatik, die durch Beschränkung auf zeitunabhängige Deformationen temperatur- und zeitunabhängiger elastischer Materialien beruht.

Die Grundlage bildet die dreidimensionale Theorie, deren wesentliche Bestandteile die Kinematik, die Materialgesetze und die Gleichgewichtsbedingungen sind, wobei letztere sich im Wesentlichen aus den Erhaltungssätzen der Masse, des Impulses und des Drehimpulses zusammensetzen (vgl. hierzu auch [Meh96],[Cia88]).

Im Folgenden wird unterschieden zwischen der Referenzkonfiguration Ω und der Momentankonfiguration Ω^Φ . Hierbei bezeichnet Φ die Deformation eines Punktes x in der Referenzkonfiguration Ω auf einen Punkt $x^\Phi = \Phi(x)$ in Ω^Φ , wie in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Damit haben wir eine Notation für die Lagrangesche Betrachtungsweise, d.h. die Beschreibung der Deformation materieller Punkte in Abhängigkeit ihrer Koordinaten in der Referenzkonfiguration Ω und eine Notation der Eulerschen Betrachtungsweise, d.h.

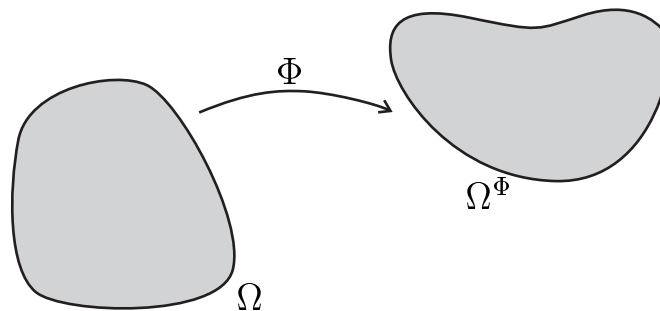


Abbildung 1.1: Deformation des Gebietes Ω

die Beschreibung der Deformation materieller Punkte in Abhängigkeit ihrer Koordinaten in der Momentankonfiguration Ω^Φ eingeführt. Bis auf weiteres werden alle Variablen in der Eulerschen Betrachtungsweise mit einem Φ gekennzeichnet.

Desweiteren bezeichnet Γ_D den Teil der Randes $\partial\Omega$, auf dem die Dirichletsche Randbedingung, d.h. die Verschiebung vorgegeben ist. Der Teil des Randes mit vorgegebenen Spannungen sei Γ_N . Für die Randbereiche gilt

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \quad \text{und} \quad \text{Maß}(\Gamma_D \cap \Gamma_N) = 0.$$

Bei der Behandlung der Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik werden die Spannungen auf dem gesamten Rand als bekannt und vorgegeben angesehen. Damit tritt die obige Aufteilung des Randes in Bereiche mit vorgegebenen Spannungen auf Γ_N und vorgegebenen Verschiebungen auf Γ_D erst bei der Behandlung der Randwertaufgabe auf. Außerdem wird bei der Behandlung der Gleichgewichtsbedingungen die zeitliche Entwicklung nicht außer Acht gelassen.

1.2 Kinematik

Sei $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}^\Phi$ die Deformation und Υ die Verschiebung eines Körpers, also

$$x^\Phi = \Phi(x), \quad u = \Upsilon(x) := \Phi(x) - x, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Für die durch Φ bzw. Υ erzeugten Änderungen des Linienelements gilt nach Taylor

$$\begin{aligned} y^\Phi &:= \Phi(x+z) = \Phi(x) + \nabla\Phi(x)z + o(|z|), \\ v &:= \Upsilon(x+z) = \Upsilon(x) + \nabla\Upsilon(x)z + o(|z|), \end{aligned}$$

wobei der Deformationsgradient $F := \nabla\Phi(x)$ und der Verschiebungsgradient $\nabla\Upsilon(x)$ die lokalen Änderungen von Φ bzw. Υ beschreiben. Mit der Linearität des Gradientenoperators und mit $\nabla x = I$ folgt:

$$\nabla u = \nabla\Upsilon(x) = \nabla\Phi(x) - I, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Also gilt für den Euklidischen Abstand

$$|y^\Phi - x^\Phi|^2 = z^T \nabla\Phi(x)^T \nabla\Phi(x) z + o(|z|^2).$$

Für die lokale Änderung der Längen ist also die Matrix

$$C := \nabla\Phi^T \nabla\Phi$$

ausschlaggebend: C heißt rechter Cauchy-Greenscherscher Verzerrungstensor. Die Abweichung von der Identität bezeichnet man als Verzerrung und

$$E := \frac{1}{2}(C - I)$$

als Greenschen Verzerrungstensor (strain tensor). Mit

$$E^T = \frac{1}{2}(C^T - I) = \frac{1}{2}(C - I) = E$$

sieht man schnell die Symmetrie des Greenschen Verzerrungstensors. Durch Einsetzen von

$$\nabla\Phi(X) = I + \nabla u$$

in

$$E = \frac{1}{2}(\nabla\Phi(x)^T \nabla\Phi(x) - I)$$

folgt

$$\boxed{E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T \nabla u)}. \quad (1.1)$$

1.3 Gleichgewichtsbedingungen

In diesem Abschnitt werden die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik in integraler und differentieller Form angegeben, die für jeden beliebigen materiellen Körper Ω und jeden Teilkörper $B \subset \Omega$ erfüllt sein müssen.

1.3.1 Massenerhaltungssatz

Im Rahmen unserer theoretischen Überlegungen sei der materielle Körper ein abgeschlossenes System, dessen Gesamtmasse sich während des Deformationsprozesses nicht ändert. Damit ist die Masse m des Körpers eine Erhaltungsgröße. Hieraus folgt:

$$m = \int_{\Omega} \rho dv = \int_{\Omega^{\Phi}} \rho^{\Phi} dv^{\Phi}$$

mit ρ : Massendichte in Ω und ρ^{Φ} : Massendichte in Ω^{Φ} .

Mit der Transformation für Volumenelemente

$$dv^{\Phi} = \det F dv$$

ergibt sich aus der obigen Gleichung

$$m = \int_{\Omega} \rho dv = \int_{\Omega} \rho^{\Phi} \det F dv$$

und damit

$$\int_{\Omega} (\rho - \rho^{\Phi} \det F) dv = 0.$$

Auf Grund der Beliebigkeit des betrachteten materiellen Körpers (oder Teilkörpers) kann diese Gleichung nur dann gültig sein, wenn der Integrand der ersten lokalen Form der Massenerhaltung

$$\rho - \rho^{\Phi} \det F = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

genügt. Der Bedingung, dass sich die Masse zeitlich nicht ändern darf, entspricht

$$\begin{aligned} 0 = \dot{m} &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega^{\Phi}} \rho^{\Phi} dv^{\Phi} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho^{\Phi} \det F dv \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\rho}^{\Phi} \det F + \rho^{\Phi} \det F \operatorname{div} \dot{x}) dv \end{aligned}$$

Damit folgt die zweite lokale Form der Massenerhaltung

$$\boxed{\dot{\rho}^{\Phi} + \rho^{\Phi} \operatorname{div} \dot{x} = 0 \quad \forall x \in \Omega^{\Phi}}. \quad (1.2)$$

1.3.2 Impulserhaltungssatz

Wir betrachten einen aus dem materiellen Körper Ω herausgeschnittenen Teilkörper B . Mit Hilfe des Massenerhaltungssatzes gilt für diesen beliebig gewählten Teilkörper B die dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung in der Referenzkonfiguration

$$\int_B \rho \ddot{x} dv = \int_B \rho \bar{b} dv + \int_{\partial B} \bar{t} da$$

wobei \bar{b} die massenbezogene Beschleunigung in Ω und \bar{t} die eingeprägte Oberflächenspannung in Ω ist. Durch das Schnittprinzip sind die inneren Spannungen im Punkt x der Oberfläche ∂B ein Maß für die dort wirkende lokale mechanische Beanspruchung und stellen für den Teilkörper die vorgegebene Spannung \bar{t} dar.

Mit Hilfe des Cauchyschen Theorems

$$\bar{t}^\Phi = T n^\Phi$$

über die lineare Beziehung zwischen dem Normalenvektor n^Φ auf dem Spannungsvektor \bar{t}^Φ in der Momentankonfiguration läßt sich \bar{t} nun durch T , dem Cauchyschen Spannungstensor, ausdrücken.

Für \bar{t} ergibt sich nach Transformation der Oberflächenelemente in Ω^Φ und Ω

$$\bar{t} = P n$$

mit

$$P = \det(F) T F^{-T}.$$

P wird als „1.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor“ bezeichnet.

Für die dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung gilt somit

$$\int_{\partial \Omega} P n da + \int_{\Omega} \rho (\bar{b} - \ddot{x}) dv = 0.$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes kann nun das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umgewandelt werden, und man erhält:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} P + \rho (\bar{b} - \ddot{x})) dv = 0.$$

Da ein beliebiger Körper Ω bzw. Teilkörper B gewählt wurde, gilt die obige Gleichung genau dann, wenn

$$\operatorname{div} P + \rho (\bar{b} - \ddot{x}) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

erfüllt ist.

Im Vorgriff auf den Drehimpulserhaltungssatz notieren wir, dass der Cauchysche Spannungstensor T symmetrisch ist. Diese Symmetrie bleibt für den 1.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor nicht erhalten, d.h. es gilt im allgemeinen

$$P^T = \det(F) (T F^{-T})^T = \det(F) F^{-1} T \neq \det(F) T F^{-T} = P$$

Um auch für die materielle (Lagrangesche) Darstellung einen symmetrischen Spannungstensor zu erhalten, wird der 1.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor durch eine Kongruenztransformation symmetrisiert. Man definiert den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor S durch

$$S := F^{-1}P = \det(F)F^{-1}TF^{-T}$$

und dieser ist symmetrisch:

$$S^T = \det(F)F^{-1}T^T F^{-T} = \det(F)F^{-1}TF^{-T} = S.$$

Der 2.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor stellt eine reine Rechengröße dar, deren Komponenten physikalisch nicht zu interpretieren sind.

Wird nun die Beziehung

$$P = FS$$

verwandt, ergibt sich

$$\boxed{\operatorname{div}(FS) + \rho(\bar{b} - \ddot{x}) = 0 \quad \forall x \in \Omega.} \quad (1.3)$$

1.3.3 Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpuls L eines mit der Geschwindigkeit \dot{x} bewegten materiellen Körpers Ω bezüglich eines raumfesten Punktes x_0^Φ ist gegeben durch

$$L := \int_{\Omega^\Phi} (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \rho^\Phi \dot{x}^\Phi dv^\Phi.$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses L ist gleich der vektoriellen Summe der Momente aller auf den Körper einwirkenden Kräfte. Damit läßt sich der Drehimpulserhaltungssatz in der Form

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}L &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega^\Phi} \rho^\Phi (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \dot{x}^\Phi dv^\Phi \\ &= \int_{\Omega^\Phi} (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \rho^\Phi \bar{b}^\Phi dv^\Phi + \int_{\partial\Omega^\Phi} (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \bar{t}^\Phi da^\Phi \end{aligned}$$

schreiben. Unter der Verwendung des Massenerhaltungssatzes folgt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}L &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega^\Phi} \rho^\Phi (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \dot{x}^\Phi dv^\Phi \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho^\Phi \det(F) (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \dot{x}^\Phi dv \\ &= \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \rho^\Phi \det(F) (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \dot{x}^\Phi dv \\ &= \int_{\Omega} ((\dot{\rho}^\Phi + \rho^\Phi \operatorname{div} \dot{x}^\Phi) (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \dot{x}^\Phi) \det(F) dv \\ &\quad + \int_{\Omega} (\rho^\Phi (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \ddot{x}^\Phi + \rho^\Phi \dot{x}^\Phi \times \dot{x}) \det(F) dv \\ &= \int_{\Omega^\Phi} \rho^\Phi (x^\Phi - x_0^\Phi) \times \ddot{x}^\Phi dv^\Phi. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und der vereinfachenden Bezeichnung $r^\Phi := x^\Phi - x_0^\Phi$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}L &= \int_{\Omega^\Phi} \rho^\Phi r^\Phi \times \ddot{x}^\Phi dv^\Phi \\ &= \int_{\Omega^\Phi} r^\Phi \times \rho^\Phi \bar{b}^\Phi dv^\Phi + \int_{\partial\Omega^\Phi} r^\Phi \times (Tn^\Phi) da^\Phi \end{aligned}$$

und daraus

$$\int_{\Omega^\Phi} (r^\Phi \times (\operatorname{div}T + \rho^\Phi \bar{b}^\Phi - \rho^\Phi \ddot{x}^\Phi) + \nabla r^\Phi \times T) dv^\Phi = 0.$$

Mit der bereits bekannten Kräftegleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div}T + \rho^\Phi \bar{b}^\Phi - \rho^\Phi \ddot{x}^\Phi = 0$$

vereinfacht sich die Drehimpulserhaltung zu

$$\int_{\Omega^\Phi} \nabla r^\Phi \times T dv^\Phi.$$

Mit

$$\nabla r^\Phi = \nabla x^\Phi - \nabla x_0^\Phi = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} e_i \otimes e_k - 0 = 1$$

folgt

$$\int_{\Omega^\Phi} 1 \times T dv^\Phi = 0$$

und damit

$$1 \times T = 0.$$

Durch komponentenweises Betrachten erhält man schließlich

$$T = T^T.$$

Wie bereits gezeigt, folgt daraus für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\boxed{S = S^T}. \quad (1.4)$$

1.4 Stoffgesetze, konstitutive Gleichungen

Für homogene, isotrope, elastische Materialien gilt auf Grund des Prinzips der materiellen Objektivität für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor folgende Aussage:

Die konstitutive Gleichung für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor eines isotropen, elastischen Materials genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität genau dann, wenn die konstitutive Beziehung für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor die Form

$$S(F) = \tilde{S}(F^T F) = \tilde{S}(C)$$

mit

$$\tilde{S}(C) = \gamma_0 I + \gamma_1 C + \gamma_2 C^2$$

besitzt. Dabei sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ Parameterfunktionen.

Für die Beschreibung der Verzerrungen wurde bereits der Greensche Verzerrungstensor E eingeführt, der für jede Starrkörperbewegung verschwindet, d.h. mit

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad \text{bzw.} \quad C = I + 2E$$

gilt für die Starrkörperbewegung mit $C = I$ die Aussage $E = 0$.

Der Unterschied zwischen dem 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor der verformten Konfiguration und dem 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor der Referenzkonfiguration, d.h. die Differenz

$$\tilde{S}(I + 2E) - \tilde{S}(I)$$

kann in der Nähe der Referenzkonfiguration durch Linearisierung nach E gut bestimmt werden. Mit der Linearisierung der Funktionen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ folgt für

$$\pi(x) = -\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2$$

$$\lambda(x) = \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2$$

$$\mu(x) = 2\dot{\gamma}_1 + 4\dot{\gamma}_2$$

die Darstellung

$$\tilde{S}(C) = -\pi(x)I + \lambda(x)(\text{tr}E)I + 2\mu(x)E + o(\|E\|).$$

Setzen wir weiterhin voraus, dass das betrachtete Material homogen und die Referenzkonfiguration spannungsfrei sei, so erhalten wir $\pi(x) = 0$. λ und μ werden dann als Lamé-Konstanten bezeichnet. Damit ergibt sich folgender bedeutsame Sachverhalt: Jedes homogene, isotrope elastische Material genügt in der Umgebung der spannungsfreien Referenzkonfiguration der Abschätzung

$$S = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E + o(\|E\|).$$

Vernachlässigen wir die Terme höherer Ordnung, so erhalten wir die konstitutive Gleichung des St. Venant-Kirchhoff-Materials in der Form

$$\boxed{S = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E}. \quad (1.5)$$

Ersetzen wir den Greenschen Verzerrungstensor E durch seine Definition mittels der Verschiebung u , so gilt mit $H := \nabla u$

$$S = \lambda(\text{tr}H)I + \mu(H^T + H) + \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(H^T H))I + \mu(H^T H).$$

Auf Grund der vollständig nichtlinearen Beziehung zwischen dem Greenschen Verzerrungstensor E und den Verschiebungen u können jedoch auch große Verschiebungen auftreten. Daher wird das St.Venant-Kirchhoff-Material auch als Modell für „große Verschiebung - kleine Verzerrung“ bezeichnet.

1.5 Randwertproblem der Elastizitätstheorie

Die Aussagen der Massenbilanz sowie der Impuls- und Drehimpulserhaltungssätze in der Referenzkonfiguration liefern mit

$$\ddot{x}^\Phi = \frac{D^2}{Dt^2}(x + u) = \frac{D^2}{Dt^2}u = \ddot{u}$$

und der Definition des 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(FS) + \rho(\bar{b} - \ddot{u}) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ S &= S^T & \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Beschränken wir uns im Weiteren auf die Betrachtung statischer Probleme, so erhalten wir durch Vernachlässigung der dynamischen Kräfte

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(FS) + \rho\bar{b} &= 0 & \forall x \in \Omega \\ S &= S^T & \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Mit der Definition $f(x) := \rho\bar{b}$ für die eingepprägten Volumenkräfte können wir die statische Feldgleichung abschließend in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(FS) + f &= 0 & \forall x \in \Omega \\ S &= S^T & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

schreiben.

Bei der Betrachtung der Randbedingungen wird jetzt erstmals der Fall vorgegebener Verschiebungen \bar{u} auf Γ_D beachtet. Dann ergibt sich in der Referenzkonfiguration

$$u(\Phi(x)) = \bar{u} \quad \forall x \in \Gamma_D.$$

Auf dem Randteil Γ_N , auf dem die angreifenden Oberflächenspannungen $g := \bar{t}$ vorgegeben sind, gilt damit

$$Pn = g \quad \forall x \in \Gamma_N.$$

Aus den oben zusammengestellten Beziehungen folgt unter Beschränkung auf statische Probleme das Randwertproblem der Elastizitätstheorie

$$\operatorname{div}((I + \nabla u)S) + f = 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{1.6}$$

$$u = \bar{u} \quad \forall x \in \Gamma_D \tag{1.7}$$

$$((I + \nabla u)S)n = g \quad \forall x \in \Gamma_N. \tag{1.8}$$

Probleme der nichtlinearen Elastizitätstheorie lassen sich oft nur sehr schwer berechnen. Hinzu kommt, dass eigentlich zwei Arten von Nichtlinearitäten gleichzeitig oder unabhängig voneinander auftreten können (siehe [Lei68]). Spricht man von „geometrischer Nichtlinearität“, so versteht man darunter hauptsächlich die Nichtlinearität des Verzerrungstensors von der Verformung u . Aber auch die Gleichgewichtsbedingungen sind

aufgrund des wesentlichen Unterschieds zwischen unverformten und verformten Zustand nichtlinear. So treten durch den Übergang von der Eulerschen zur Lagrangeschen Betrachtungsweise wiederum nichtlineare Terme in den Gleichgewichtsbedingungen auf. Die zweite Art der Nichtlinearität rührt von der Größe der Verzerrungen her. So wird bei großen Verzerrungen die Proportionalitätsgrenze überschritten und die nichtlinearen Terme in den Stoffgleichungen können nicht mehr vernachlässigt werden. In diesem Fall spricht man von „physikalischer Nichtlinearität“.

Kapitel 2

Lineare Elastizitätstheorie

Das Randwertproblem der Elastizitätstheorie ist ein in den unbekanntem Verschiebungen u hochgradig nichtlineares Problem. Aus den Erfahrungen in den Anwendungsgebieten der Elastizitätstheorie läßt sich jedoch oftmals eine Beschränkung der Deformation auf kleine Verschiebungen und kleine Verzerrungen feststellen. Aus diesem Grund kann das nichtlineare Randwertproblem der Elastizitätstheorie für ein homogenes, isotropes, elastisches Material in der Nähe einer spannungsfreien Referenzkonfiguration durch eine Linearisierung in der Verschiebung u hinreichend gut approximiert werden.

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird dann die Gleichung des Variationsproblems hergeleitet und die Beschränkung auf ebene Probleme erläutert [Gek00],[Bra97]. Darüber hinaus folgt eine Betrachtung der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

2.1 Das Hooksche Werkstoffgesetz

Nachdem wir mit dem St.Venant-Kirchhoff-Material bereits den Effekt einer Linearisierung in den Verzerrungen E dargestellt haben, verbleibt nun noch die Linearisierung des St.Venant-Kirchhoff-Materials bezüglich der unbekanntem Verschiebung u .

Zuerst betrachten wir den Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor. Die Linearisierung des Verzerrungstensors

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T \nabla u)$$

ergibt

$$\epsilon := \text{Lin}[E] = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Aus der Materialgleichung des St.Venant-Kirchhoff-Materials

$$S = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E$$

und der Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors ϵ erhält man sofort

$$\sigma = \text{Lin}[S] = \lambda(\text{tr}\text{Lin}[E])I + 2\mu\text{Lin}[E] = \lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon.$$

Damit ergibt sich das "Hooksche Werkstoffgesetz"

$$\boxed{\sigma = \lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon}. \tag{2.1}$$

Hierbei gilt für die Lamé-Konstanten λ und μ , dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl oder Poissonzahl ν folgende Beziehung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

bzw.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Damit ergibt sich das Hooksche Werkstoffgesetz in Abhängigkeit der Parameter E und ν :

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu} \left(\epsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr}\epsilon) I \right).$$

Einige Materialkonstanten lauten:

	E in $10^9 N/m^2$	μ
Blei	17	0,44
Beton (DIN 1045)	22-39	0,15 - 0,22
Reinaluminium (weich)	72	0,34
Marmor	73	0,30
Quarzglas	76	0,17
CrV-Federstahl	212	0,28
Iridium	530	0,26

2.2 Linearisierung des Randwertproblems

Mit dem Hookschen Gesetz (2.1) folgt aus (1.6),(1.7),(1.8)

$$\begin{aligned} \text{div}((1 + \nabla u)(\lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon)) + f &= 0 & \forall x \in \Omega \\ u &= \bar{u} & \forall x \in \Gamma_D \\ ((1 + \nabla u)(\lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon))n &= g & \forall x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Die Linearisierung nach u ergibt

$$\begin{aligned} \text{div}(\lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon) + f &= 0 & \forall x \in \Omega \\ u &= \bar{u} & \forall x \in \Gamma_D \\ (\lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon)n &= g & \forall x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Das oben dargestellte Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie wird nun für eine beschränkte, offene, zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^3 mit einem hinreichend glatten Rand Γ formuliert, wobei eine Beschränkung auf homogene Verschiebungsrandbedingungen angenommen wird. Es sei auf dem Randbereich Γ_D die Verschiebung $\bar{u} = 0$ und auf Γ_N die Oberflächenspannung g vorgegeben. Ferner sei wie bisher

$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad \text{und} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Dann erhalten wir mit (2.1)

$$\sigma = \lambda(\text{tr}\epsilon)I + 2\mu\epsilon$$

das klassische Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \forall x \in \Omega \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \quad (2.3)$$

$$\sigma n = g \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (2.4)$$

2.3 Das Variationsproblem

Durch die Kinematik, die Gleichgewichtsbedingungen und die Stoffgesetze sind die Deformationen, Verzerrungen und Spannungen bestimmt:

	Unbekannte	Gleichungen
Kinematik	6 (ϵ)	6
Masse	3 (x), 1 (ρ)	1
Impuls	9 (σ)	3
Drehimpuls	-	3
Stoffgesetze	-	6

Aus der Gleichung (2.2) des Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie folgt durch Multiplikation mit einer Testfunktion v , die auf $\Gamma_D = \Gamma - \Gamma_N$ verschwindet, und anschließender Integration:

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\sigma \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v.$$

Mit der Formel von Green

$$\int_{\Omega} [\operatorname{div}\sigma \cdot v + \sigma : \nabla v] = \int_{\Gamma} v \cdot \sigma n$$

folgt hieraus

$$\int_{\Omega} f \cdot v = \int_{\Omega} \sigma : \nabla v - \int_{\Gamma_N} v \cdot \sigma n.$$

Da σ symmetrisch ist, folgt mit ϵ

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla v = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : (\nabla v + (\nabla v)^T) = \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(v)$$

und somit

$$\boxed{\int_{\Omega} \sigma : \epsilon(v) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v}. \quad (2.5)$$

Es folgt durch Einsetzen des Hookschen Materialgesetzes (2.1)

$$\sigma = \lambda(\operatorname{tr}\epsilon(u))I + 2\mu\epsilon(u)$$

in obige Gleichung und mit $I : \epsilon(v) = \operatorname{tr}\epsilon(v)$

$$\int_{\Omega} [2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda\operatorname{tr}\epsilon(u)\operatorname{tr}\epsilon(v)] = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v$$

und damit das Extremalproblem

$$\int_{\Omega} [\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \frac{1}{2}\lambda(\operatorname{div}v)^2] - \int_{\Omega} f \cdot v - \int_{\Gamma_N} g \cdot v = \min!.$$

2.4 Das Hooksche Werkstoffgesetz in Matrizen-schreibweise

Eine weitere Darstellungsform des Hookschen Gesetzes ist mit der Matrizen-schreibweise für die Koeffizienten der Tensoren bzgl. des kartesischen Koordinatensystems gegeben. Hierzu definieren wir die Spaltenvektoren

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$$

der Spannungen und

$$\underline{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$$

der Verzerrungen. Dabei gelten folgende Beziehungen zwischen den Komponenten der Tensoren und der Vektoren:

Für den Spannungsvektor $\underline{\sigma}$

$$\sigma_x := \sigma_{11}, \sigma_y := \sigma_{22}, \sigma_z := \sigma_{33}$$

$$\tau_{xy} := \sigma_{12}, \tau_{yz} := \sigma_{23}, \tau_{zx} := \sigma_{13}$$

und für den Verzerrungsvektor $\underline{\epsilon}$ bzw. den Verschiebungsvektor $u = [u^1, u^2, u^3]^T$

$$\epsilon_x := \epsilon_{11} = u_x^1, \epsilon_y := \epsilon_{22} = u_y^2, \epsilon_z := \epsilon_{33} = u_z^3$$

$$\gamma_{xy} := 2\epsilon_{12} = u_y^1 + u_x^2, \gamma_{yz} := 2\epsilon_{23} = u_z^2 + u_y^3, \gamma_{zx} := 2\epsilon_{13} = u_x^3 + u_z^1.$$

Hier wird die Symmetrie des Spannungstensors und des Verzerrungstensors ausgenutzt, indem in die Spaltenvektoren jeweils nur 6 Komponenten aufgenommen werden.

Damit kann man nun das Hooksche Gesetz für den allgemeinen dreidimensionalen Fall in der Form

$$\underline{\sigma} = C \underline{\epsilon} \quad (2.6)$$

mit

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix}$$

schreiben.

Aus dieser Form können nun mit Matrizeninversion die Verzerrungen durch die Spannungen ausgedrückt werden. Die Inversion der Matrix C ist möglich, da diese positiv definit ist, d.h. es gilt $x^T C x > 0$ für $x \neq 0$. Man erhält dann

$$\underline{\epsilon} = C^{-1} \underline{\sigma} \quad (2.7)$$

mit

$$C^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}.$$

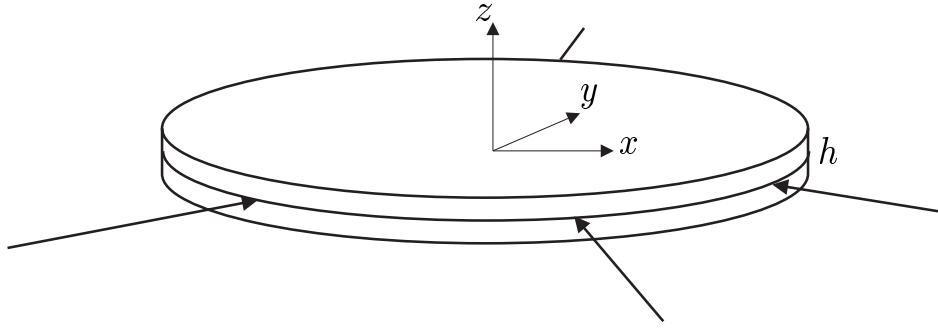


Abbildung 2.1: Ebener Spannungszustand

2.5 Das Variationsproblem in Matrixschreibweise

Entsprechend dem Konzept des Hookschen Gesetzes in der Matrixschreibweise läßt sich nun das Variationsproblem der linearen Elastizitätstheorie ebenfalls in Matrixschreibweise ausdrücken.

Für den Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

definieren wir die Operatormatrix D durch

$$D := \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Aussage der Kinematik

$$\underline{\epsilon} = Du.$$

Mit Hilfe der Definition der Spaltenvektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ können wir nun das Tensorprodukt $\sigma(u) : \epsilon(v)$ durch das Skalarprodukt $\underline{\sigma}^T \underline{\epsilon}$ ersetzen.

Letztendlich erhalten wir für das Variationsproblem die schwache Form:

$$\boxed{\int_{\Omega} u^T D^T C D v = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v \quad \forall v \in V \text{ mit } v = 0 \text{ auf } \Gamma_D} \quad (2.8)$$

2.6 Ebener Spannungszustand

Eine sehr wichtige Rolle in der Anwendung spielt die Beschränkung auf zweidimensionale Modelle. Hierbei gibt es zwei unterschiedliche Modelle, den „Ebenen Spannungszustand“

und den „Ebenen Verzerrungszustand“.

Beim ebenen Spannungszustand machen wir folgende Voraussetzungen: Die Dicke h der Scheibe ist klein gegenüber dem Durchmesser, $z \in [-h/2, h/2]$. Die Kräfte f und g wirken nur in der (x, y) -Ebene, d.h. sie haben keine z -Komponente und es wird angenommen, dass sie gleichmäßig über die konstante Dicke h der Scheibe wirksam sind. Eine Deformation in z -Richtung ist aber möglich (vgl. Abbildung 2.1).

Aus dem allgemeinen Hookschen Materialgesetz erhält man das Materialgesetz für den ebenen Spannungszustand, indem man setzt:

$$u = [u^1, u^2, u^3] = [u^1(x, y), u^2(x, y), z\epsilon_{33}]$$

$$\sigma_{ij}(x, y, z) = \sigma_{ij}(x, y), i = 1, 2$$

$$\sigma_{3i} = \sigma_{i3} = 0, i = 1, 2, 3.$$

Hierbei wird $u^3 = z\epsilon_{33}$ angesetzt, da ϵ_{33} ein Maß für die Verzerrung in z -Richtung ist, und aus dem Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor folgt: $\epsilon_{33} = \partial_z u^3$. Da Spannungen in z -Richtung ausgeschlossen werden sollen, gilt $\sigma_{3i} = \sigma_{i3} = 0, i = 1, 2, 3$.

Es folgt dann aus dem Hookschen Werkstoffgesetz (2.7) $\epsilon_{i3} = \epsilon_{3i} = 0, i = 1, 2$. Aus $\sigma_{33} = 0$ erhalten wir dann für ϵ_{33}

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}).$$

Beim ebenen Spannungszustand sind die Verzerrungen $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ und ϵ_{33} also nicht mehr voneinander unabhängig. Damit lässt sich ϵ_{33} eliminieren und wir erhalten ein Materialgesetz für (2, 2)-Tensoren:

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu} \left[\epsilon + \frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) I \right]$$

Wählt man die Vektoren $\underline{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$ und $\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$, dann gilt

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{pmatrix} \underline{\epsilon} =: C_{(ESZ)} \underline{\epsilon}$$

Dabei hat die Operatormatrix D folgende Form:

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix}.$$

2.7 Ebener Verzerrungszustand

Beim ebenen Verzerrungszustand wird eine Deformation in z -Richtung ausgeschlossen. Es wird angenommen, dass äußere Kräfte auf die Scheibe dies verhindern. D.h. dieser Fall kann zum Beispiel bei langen Körpern, deren Geometrie und Belastung sich in ihrer Längsrichtung nicht ändert, angewandt werden (vgl. Abbildung 2.2).

Aus dem allgemeinen linearen Materialgesetz erhält man nun für

$$u = [u^1, u^2, u^3] = [u^1(x, y), u^2(x, y), 0]$$

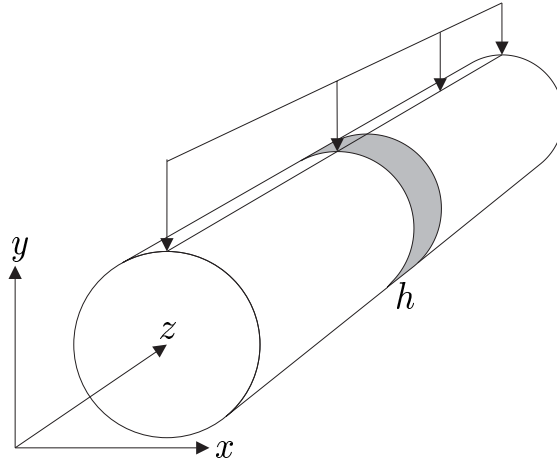


Abbildung 2.2: Ebener Verzerrungszustand

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}(x, y, z) &= \epsilon_{ij}(x, y), \quad i = 1, 2 \\ \epsilon_{3i} &= \epsilon_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Hierbei wird durch $u^3 = 0$ eine Deformation in z -Richtung unterbunden. Ferner werden Verzerrungen mit Anteil in z -Richtung auf 0 gesetzt.

Mit $\epsilon_{33} = 0$ folgt aus (2.6)

$$\sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

und somit erhält man ein Materialgesetz für $(2, 2)$ -Tensoren:

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) I \right].$$

Es gilt hiermit:

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \underline{\epsilon} =: \underline{C}_{(EVZ)} \underline{\epsilon}.$$

Die Operatormatrix D für den ebenen Verzerrungszustand ist identisch mit der Operatormatrix des ebenen Spannungszustands.

2.8 Vergleichsspannung

Die Vergleichsspannung dient dazu, Aussagen über die Beanspruchung des Werkstoffes und dessen Versagen zu treffen. Dabei lässt sich die Frage des Versagens nie allein durch theoretische Überlegungen beantworten.

Man kann den Spannungstensor in verschiedenen, zueinander gedrehten Koordinatensystemen angeben. Ein besonderes Achsensystem ist das "Hauptachsensystem". Es ist dadurch ausgezeichnet, daß in Schnitten senkrecht zu den Achsen nur Normalspannungen

und keine Schubspannungen auftreten. Die drei Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 errechnen sich aus dem charakteristischen Polynom von σ :

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0.$$

Darin sind J_1, J_2 und J_3 die Invarianten des Spannungstensors, d.h. vom Koordinatensystem unabhängige Größen. Sie lauten

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 &= -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ J_3 &= \det(\sigma). \end{aligned}$$

Bezüglich des Hauptachsensystems kann dann der Spannungstensor

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

durch seine Eigenwerte dargestellt werden.

Zur grafischen Veranschaulichung des Spannungszustandes bedient man sich häufig der Mohrschen Spannungskreise. Dort sind die Hauptspannungen nach ihrer Größe geordnet: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Im Fall des ebenen Spannungszustandes erhält man $\sigma_2 = 0$ und somit

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \end{aligned}$$

Für die Vergleichsspannung gibt es mehrere verschiedene Methoden, die häufig zur Verdeutlichung der Spannungsverteilung verwendet werden [HMS90, Ste98]:

- Hypothese der größten Hauptspannung
Diese Vergleichsspannung wird bei spröden, hochfesten metallischen Werkstoffen verwendet, bei denen ein verformungsarmer Bruch, d.h. die Bruchfläche steht senkrecht zur Richtung der größten Hauptspannung, beobachtet werden kann.

$$\sigma_V = \max_{i=1,2,3} (|\sigma_i|)$$

- Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie (von Mises)
Dieser Ansatz geht davon aus, dass wenn im Werkstoff eine gewisse Verzerrungsenergie vorhanden ist, plastisches Fließen beginnt. Anwendung findet diese Methode vor allem bei zähen metallischen Werkstoffen.

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

- Hypothese der größten Schubspannung (Hauptspannungsdifferenz)
Ähnlich zum vorhergehenden Ansatz wird diese Methode auch bei zähen Werkstoffen verwendet, wobei hier davon ausgegangen wird, dass das Fließen einsetzt, wenn die maximale Schubspannung eine Grenze überschreitet.

$$\sigma_V = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{mit} \quad \sigma_3 \leq 0 < \sigma_2 < \sigma_1$$

2.9 Stetigkeit und Elliptizität der Bilinearform

Das Variationsproblem der linearen Elastizität (2.5) lautet

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) \\ F(v) &= \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v. \end{aligned}$$

Dabei erkennt man sofort die Symmetrie der Bilinearform $a(u, v)$. Diese folgt aus

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\operatorname{tr}\epsilon(u))I : \epsilon(v)) \\ &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\operatorname{tr}\epsilon(u))(\operatorname{tr}\epsilon(v))) \\ &= \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(u) + \lambda(\operatorname{tr}\epsilon(v))I : \epsilon(u)) = a(v, u). \end{aligned}$$

Einfacher erkennt man diese Eigenschaft vielleicht durch Betrachtung der Matrixschreibweise aus Abschnitt 2.5 mit $C = C^T$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u^T D^T C D v = \int_{\Omega} (u^T D^T C D v)^T = \int_{\Omega} v^T D^T C D u = a(v, u).$$

Nun ist ein geeigneter Hilbertraum V zu wählen, sodass die Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der V -Norm stetig sind.

Bezüglich der H_1 -Norm kann die Abschätzung

$$|a(u, v)| \leq \frac{3\lambda + 2\mu}{2} \|u\|_1 \|v\|_1$$

der Bilinearform gezeigt werden ([Meh96]) und damit die Stetigkeit.

Sei nun H_{Γ}^1 der Abschluß von $\{v \in C^{\infty}(\Omega)^3 : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$ -Norm. Wegen

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\operatorname{div} v)^2)$$

und

$$\int_{\Omega} \lambda(\operatorname{div} v)^2 \geq 0$$

folgt die H_{Γ}^1 -Elliptizität von $a(u, v)$ aus der Elliptizität von $\int \epsilon(v) : \epsilon(v)$. Dies ist der Inhalt zweier berühmter Ungleichungen [Vil77, Fri47]:

Satz 1 (1. Kornsche Ungleichung). *Sei Ω eine offene, beschränkte Menge im \mathbb{R}^d mit stückweise glattem Rand. Dann gibt es eine Zahl $c = c(\Omega) > 0$, so dass*

$$\int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) dx + \|v\|_0^2 \geq c \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d$$

gilt.

Diese Ungleichung vereinfacht sich für Funktionen die Nullrandbedingungen erfüllen. Dabei ist es nötig, dass v auf einem Teil Γ_D des Randes verschwindet und Γ_D ein positives $(n - 1)$ -dimensionales Maß besitzt.

Satz 2 (2. Kornsche Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand. Ferner habe $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ ein positives 2-dimensionales Maß. Dann gibt es eine positive Zahl $c' = c'(\Omega, \Gamma_D)$, so dass*

$$\int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) dx \geq c' \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$$

gilt.

Damit ist die H_{Γ}^1 -Elliptizität von $a(u, v)$ gezeigt. Eine Herleitung der 2. Kornschen Ungleichung aus der 1. findet man zum Beispiel bei Ciarlet ([Cia88]) oder Braess ([Bra97]).

2.10 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Damit eine eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

existiert, müssen die Voraussetzungen

- $a(\cdot, \cdot)$ stetige, symmetrische Bilinearform
- $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch und
- $F(\cdot)$ stetige Linearform

erfüllt sein.

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden bereits die ersten beiden Voraussetzungen für $V = H_{\Gamma}^1(\Omega)$ gezeigt.

Damit die rechte Seite $F(v)$ des Variationsproblems für alle $v \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$ wohldefiniert ist, müssen weitere Voraussetzungen an das Gebiet Ω gestellt werden.

Man sagt, ein Gebiet Ω erfüllt die Kegelbedingung, wenn die Innenwinkel aller Eckpunkte positiv sind, d.h. wenn man einen Kegel mit positivem Scheitelwinkel so in Ω verschieben kann, dass er die Ecken berührt.

Unter dieser Voraussetzung folgt dann [Bra97]

Satz 3 (Spursatz). *Sei Ω beschränkt und habe stückweisen glatten Rand. Ferner erfülle Ω die Kegelbedingung. Dann gibt es eine beschränkte, lineare Abbildung*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega), \quad \|\gamma(v)\|_{0,\partial\Omega} \leq c \|v\|_{1,\Omega},$$

sodass $\gamma(v) = v|_{\partial\Omega}$ für alle $v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt.

Damit ist die Restriktion von v auf den Rand eine L^2 -Funktion und das Integral über Γ_N wohldefiniert.

Man erhält somit für $f \in L^2(\Omega)^3$ und $g \in L^2(\Gamma_N)^3$ die Stetigkeit der Linearform $F(\cdot)$ mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung [KA00] und der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung [Bra97] durch

$$F(v) \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \leq c \|v\|_0 \leq c \|v\|_1 .$$

Mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram [Cia78] folgt dann für die schwache Lösung des Variationsproblems

Satz 4 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, und Γ_D habe ein positives zweidimensionales Maß. Dann hat die Variationsaufgabe der linearen Elastizitätstheorie für $f \in L^2(\Omega)^3$ und $g \in L^2(\Gamma_N)^3$ genau eine Lösung $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$.*

Die Existenz einer Lösung kann aber auch für den Fall einer Neumannschen Randwertaufgabe, d.h. $\partial\Omega = \Gamma_N$, gezeigt werden. Wegen dem Umfang wird hier auf einen genaueren Nachweis verzichtet und auf [Meh99] verwiesen.

Diese Lösung ist aber keinesfalls eindeutig. Sei nämlich u eine Lösung des Neumannschen Randwertproblems, so ist für beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Funktion

$$u_1 = u + a + (b \times x)$$

ebenfalls Lösung des gleichen Problems. Hierbei bezeichnet $b \times x$ das Vektorprodukt von b und x . Geometrisch kann a als starre Verschiebung und $b \times x$ als starre Drehung interpretiert werden.

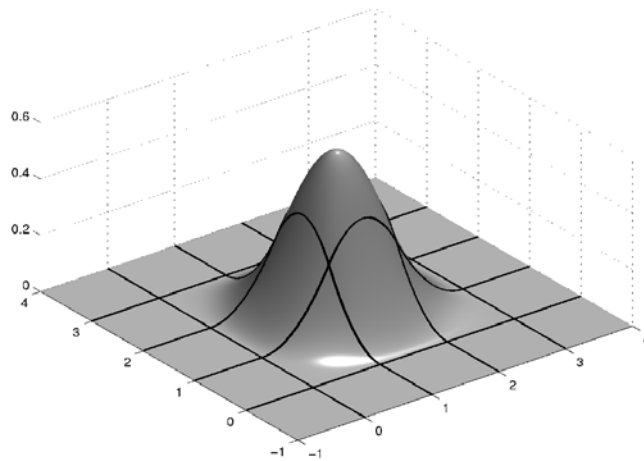
Bisher wurde die Existenz der schwachen Lösung gezeigt. Ob dieses Ergebnis aber auch Lösung des klassischen Problems ist, ergibt sich aus dessen Regularität. So werden bei der Differentialgleichung Ableitungen zweiter Ordnung gebildet, die $u \in C^2(\Omega)^3 \cap C^1(\overline{\Gamma_N})^3 \cap C^0(\overline{\Omega})^3$ fordern. In vielen praktischen Anwendungen ist solch eine Forderung aufgrund nichtregulärer Belastungen aber nicht sinnvoll und damit genügt die schwache Lösung. Eine Aussage über die Regularität der Lösung folgt in Abschnitt 4.2.

Kapitel 3

Die web-Methode

Als Ansatzraum der Finiten Elemente wird der Raum der gewichteten erweiterten Tensorprodukt B-Splines verwendet, wie er in [Hö, HRW01, HRW00] eingeführt wurde. Dazu wird über das Gebiet ein regelmäßiges Gitter der Gitterweite h gelegt und darauf der Ansatzraum der web-Splines aufgebaut.

Bei der Betrachtung der Probleme der ebenen Elastizität, auf die wir uns hier beschränken, hat die gesuchte Lösung zwei Komponenten, die Verschiebung in x- und die Verschiebung in y-Richtung, und erfordert daher ebenfalls einen Ansatzraum mit zwei Komponenten. Dieser wird nun näher betrachtet, wobei zuerst auf einige grundlegende Eigenschaften der B-Splines eingegangen wird (siehe auch [dB78, HL93]). Dabei verwenden wir die Schreibweise $f \preceq g$, falls eine Konstante c mit $f \leq cg$ existiert, die nicht von der Gitterweite h abhängt. Analog werden die Symbole \succeq und \asymp definiert.



Tensorprodukt B-Spline vom Grad 2

3.1 B-Splines

Splines sind Funktionen, die stückweise aus Polynomen zusammengesetzt sind. Dabei wird der Spline über einer Folge von Knoten aufgebaut, die die Polynome trennen. Die Splines vom Grad $\leq n$ bilden einen linearen Raum, falls die Polynome Grad $\leq n$ haben und an den Knoten $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ineinander übergehen. Die Basis-

funktionen dieses Raumes bezeichnet man als B-Splines vom Grad n .

Betrachtet man eine uniforme Knotenfolge $z \in \mathbb{Z}$, so wird der B-Spline auch Kardinalspline genannt. Dieser ist über eine Rekursionsformel berechenbar [Hö02]

Satz 5. *Der B-Spline b^n ist definiert durch*

$$b^n(x) := \int_0^1 b^{n-1}(x-t) dt$$

ausgehend von

$$b^1(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alternativ gilt für die Ableitung

$$\frac{d}{dx} b^n(x) = b^{n-1}(x) - b^{n-1}(x-1).$$

Ein Kardinalspline vom Grad n hat also die Trägergröße $n+1$.

Damit lässt sich nun ein kardinaler Tensorprodukt B-Spline auf \mathbb{R}^2 definieren

Definition 6. *Der bivariate Kardinalspline $b^n(x)$ vom Grad $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ ist ein Produkt univariater Kardinalsplines:*

$$b^n(x) = b^{n_1}(x_1) \cdot b^{n_2}(x_2)$$

für $x \in \mathbb{R}^2$.

Der Träger des kardinalen Tensorprodukt B-Splines b^n ist dann $[0, n+1]^2$. Durch Skalierung und Verschiebung um $k \in \mathbb{Z}^2$ erhalten wir aus $b^n(x)$

$$b_{k,h}^n(x) = h^{-1} b^n(x/h - k), \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

Mit diesen $b_{k,h}^n$ als Basis lässt sich nun der Finite Element Ansatzraum über dem regelmäßigen Gitter konstruieren. Dabei kann gegebenenfalls noch eine Verschiebung des Koordinatensystems nötig sein, in Abhängigkeit davon, ob der Ursprung auch ein Gitterpunkt ist.

Die Funktionen $b_{k,h}^n$ sind $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar und auf jeder Gitterzelle

$$Q_l = h([0, 1]^2 + l), \quad l \in \mathbb{Z}^2$$

der Gitterweite h ein Polynom vom Grad n . Aufgrund des Skalierungsfaktors ist $\|b_{k,h}^n\|_{0,\mathbb{R}^2}$ unabhängig von h und k .

Bemerkung: Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden auf die explizite Angabe der Indizes h und n verzichtet.

Des weiteren existieren duale Funktionale λ_k^l , auf die jetzt näher eingegangen wird.

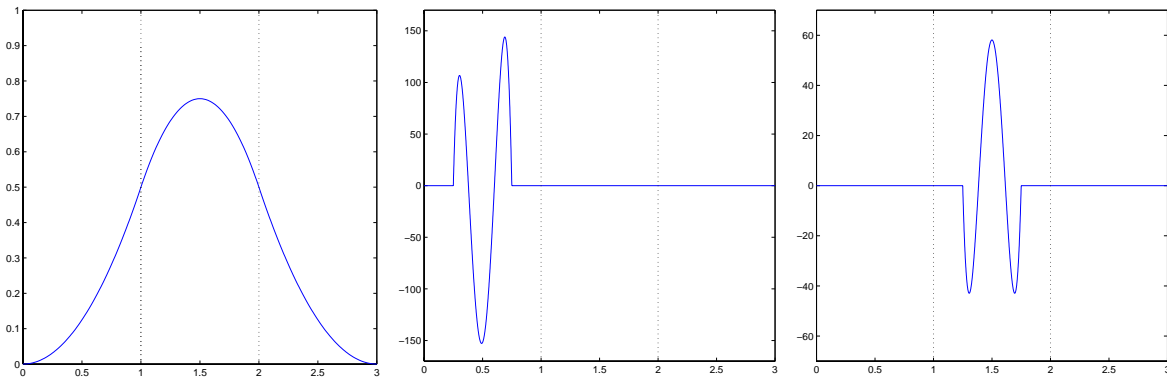


Abbildung 3.1: kardinaler B-Spline vom Grad 2 (links), λ^0 (Mitte), λ^1 (rechts)

Für jedes $l \in \{0, \dots, n\}^2$ existiert eine Funktion λ^l , deren Träger in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^2 + l$ enthalten ist, und für die gilt

$$\int b(\cdot - k) \lambda^l = \delta_{k,0} .$$

Zur Verdeutlichung sind in Abbildung 3.1 links der B-Spline vom Grad 2 und daneben zwei der drei zugehörigen dualen Funktionale dargestellt, deren Träger sich im Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ bzw. $[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}]$ befinden.

Dann ist

$$Q'_{i+l} = h([1/4, 3/4]^2 + i + l)$$

der Träger der Funktion

$$\lambda'_i(x) = h^{-1} \lambda^l(x/h - i)$$

und es gilt

$$\int b_k \lambda'_i = \delta_{k,i} .$$

Außerdem ist die Funktion λ'_i aufgrund des Skalierungsfaktors h^{-1} normalisiert, d.h. $\|\lambda'_i\|_{0, \mathbb{R}^2} \asymp 1$. Hierbei ist es wichtig, dass $l = l(i)$ von i abhängt. Dies ermöglicht es, für jedes b_i , dessen Träger eine Gitterzelle enthält die ganz in Ω liegt, l so zu wählen, dass die Gitterzelle $Q_{i+l(i)}$, die $Q'_{i+l(i)}$ enthält, ganz im Gebiet Ω liegt.

Hierbei wurde eine Einteilung der B-Splines in verschiedene Gruppen gemacht, die durch die folgende Definition beschrieben wird:

Definition 7. Die Menge aller, für Ω relevanten B-Splines b_k sei

$$K = \{k \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } b_k \cap \Omega \neq \emptyset\} .$$

Sei $L_k = \{l \in \mathbb{Z}^2 : Q_{k+l} \subset \text{supp } b_k \cap \Omega\}$. Dann nennt man b_k einen inneren B-Spline, falls $L_k \neq \emptyset$, und äußeren B-Spline andernfalls. Die dazugehörigen Teilmengen werden mit I für die inneren und J für die äußeren B-Splines bezeichnet und es gilt

$$K = I \cup J .$$

Für $i \in I$ wird $l(i)$ in der Definition der dualen Funktionale $\lambda_i^{l(i)}$ so gewählt, dass $l(i)$ in L_i liegt. Zur Vereinfachung schreiben wir

$$\lambda_i = \lambda_i^{l(i)} .$$

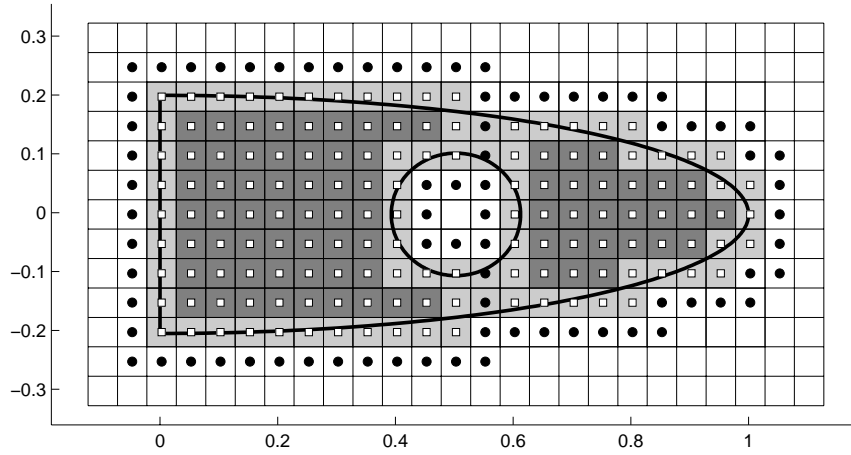


Abbildung 3.2: Einteilung in innere (□) und äußere Splines (●)

Die obige Definition garantiert, dass jeder innere B-Spline b_i ein normalisiertes duales Funktional λ_i besitzt, dessen Träger in Ω liegt und vom Rand den Abstand $\geq h$ hat. In Abbildung 3.2 ist die Aufteilung in innere und äußere Splines dargestellt. Dabei wurden quadratische Splines verwendet und die Markierung im Trägermittelpunkt des zugehörigen Splines gesetzt.

Für die B-Splines und ihre dualen Funktionale gilt:

Satz 8. Für alle $k \in K$ und alle $i \in I$ gilt

$$\|b_k\|_0 \leq 1, \quad \|\lambda_i\|_0 \leq 1, \quad \int_{\Omega} b_k \lambda_i = \delta_{k,i}.$$

Die Approximationseigenschaft der B-Splines baut auf die der stückweisen Polynome auf. So lässt sich für eine Linearkombination von B-Splines mit Koeffizienten $q(k)$ folgende Aussage treffen:

Satz 9. Der Spline

$$p = \sum_{k \in K} q(k) b_k$$

ist ein Polynom vom Grad $\leq n$ auf Ω genau dann, wenn q ein Polynom vom Grad $\leq n$ auf K ist.

Da wie bereits erwähnt die Lösungen der Probleme der ebenen Elastizität vektoriell sind, müssen weitere Notationen eingeführt werden. So sei nun $b_{k,\nu}$, $\nu \in \{1, 2\}$ definiert durch

$$b_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} b_k(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_{k,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_k(x) \end{pmatrix}.$$

Analog gelte diese Schreibweise für die dualen Funktionale $\lambda_{k,\nu}$

$$\lambda_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_k(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{k,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_k(x) \end{pmatrix}.$$

Dann sind die $b_{k,\nu}$ weiterhin linear unabhängig und haben beschränkten Träger. Ferner lassen sich die bisher getroffenen Aussagen übertragen. Da die L^2 -Norm komponentenweise betrachtet werden kann, bleiben die Abschätzungen aus Satz 8 erhalten. Betrachtet man den Satz 9, so kann der Spline ebenfalls als Vektor aufgefasst werden:

$$p_\nu = \sum_{k \in K} q_\nu(k) b_{k,\nu}. \quad (3.1)$$

Sei nun s ein vektorieller Spline auf Ω . Dann lässt sich s als Linearkombination aller auf Ω vorkommenden B-Splines $b_{k,\nu}$ ($k \in K, \nu = 1, 2$) schreiben:

$$s = \sum_{k \in K} \sum_{\nu=1}^2 a_{k,\nu} b_{k,\nu}, \quad a_{k,\nu} \in \mathbb{R}.$$

Dann wird die Folge der Koeffizienten als Vektor $A = \{a_{k,\nu}\}_{k \in K, \nu=1,2}$ aufgefasst und die Euklidische Norm

$$\|A\| := \left(\sum_{k \in K} \sum_{\nu=1}^2 a_{k,\nu}^2 \right)^{1/2}$$

verwendet.

3.2 Gewichtung

Um auf dem Rand vorgegebene homogene Dirchlet-Randbedingungen zu realisieren, benötigt man eine hinreichend glatte Gewichtsfunktion

$$w(x) \asymp \text{dist}(x, \Gamma_D),$$

die die Einhaltung der Randbedingungen sicherstellt. Die Menge der gewichteten B-Splines

$$\tilde{B}_{k,\nu} := w b_{k,\nu}$$

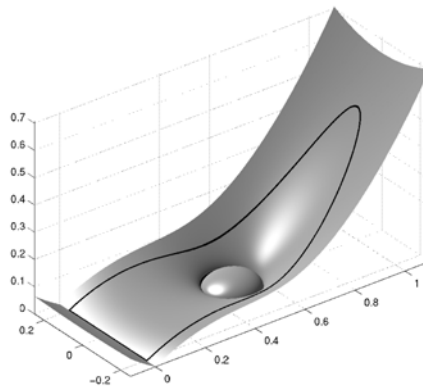


Abbildung 3.3: Beispiel einer Gewichtsfunktion

garantiert uns die Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ auf Γ_D .

In Abbildung 3.3 ist als Beispiel das Gebiet einer halben Ellipse mit Loch angenommen. Dabei sind auf dem Geradenstück und auf dem Rand des Loches homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben und somit muss die Gewichtsfunktion an diesen Stellen Null sein.

Satz 10. *Der Raum der gewichteten B-Splines*

$$\tilde{B}_{k,\nu} := wb_{k,\nu}, \quad k \in K, \nu \in \{1, 2\}$$

heißt *wb-Raum*.

Allerdings ist die Basis $\{\tilde{B}_{k,\nu}, k \in K, \nu \in \{1, 2\}\}$ des wb-Raums nicht stabil bezüglich der Gitterweite h . Dies kann dazu führen, dass die Galerkin-Matrix sehr schlecht konditioniert ist. Der Grund hierfür liegt in den äußeren B-Splines, die in Ω nur einen sehr kleinen Träger haben. Dieses Problem kann man durch eine Erweiterung umgehen.

3.3 Erweiterung

Bei der Erweiterung werden die äußeren B-Splines an die inneren gekoppelt. Dies verhindert das bereits angesprochene Problem, dass äußere B-Splines mit kleinem Träger in Ω Einfluß auf die Kondition der Galerkinmatrix und das damit verbundene Lösen haben. Auch können diese nicht einfach weggelassen werden.

Gelöst wird dieses Problem, indem die inneren B-Splines durch eine Linearkombination der äußeren erweitert werden:

$$B_{i,\nu} := b_{i,\nu} + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_{j,\nu}.$$

Die Erweiterung erfolgt für ein festes $\nu = 1, 2$, d.h. es wird kein $b_{i,\nu}$ mit einem $b_{j,\mu}$, $\nu \neq \mu$ verknüpft. Dies erscheint auch sinnvoll, da die Zusammenfassung der Träger für jede Komponente einzeln zu geschehen hat. Hieraus wird deutlich, dass die Erweiterungskoeffizienten nicht von ν abhängen.

Die Koeffizienten $e_{i,j}$ werden so gewählt, dass die Größe des Trägers von $B_{i,\nu} \preceq h$ ist und dass weiterhin alle Polynome vom Grad $\leq n$ im Aufspann der $B_{i,\nu}$ liegen.

Ziel ist es, die Summe über K in (3.1)

$$p_\nu = \sum_{k \in K} q(k) b_{k,\nu}$$

durch eine Summe über I , d.h. alle inneren Splines zu ersetzen. Da q ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, können alle Koeffizienten $q(j)$, $j \in J$, aus $(n+1)^2$ Koeffizienten $q(i)$, $i \in I(j) \subset I$, berechnet werden, sofern die Polynominterpolation an den Punkten in I eindeutig ist. Sei $l_{j,i}$ nun das Lagrange-Polynom vom Grad n mit

$$l_{j,i}(k) = \delta_{i,k}, \quad i, k \in I(j).$$

Dann werden für ein festes j die Koeffizienten $e_{i,j}$ als

$$e_{i,j} = l_{j,i}(j), \quad i \in I(j)$$

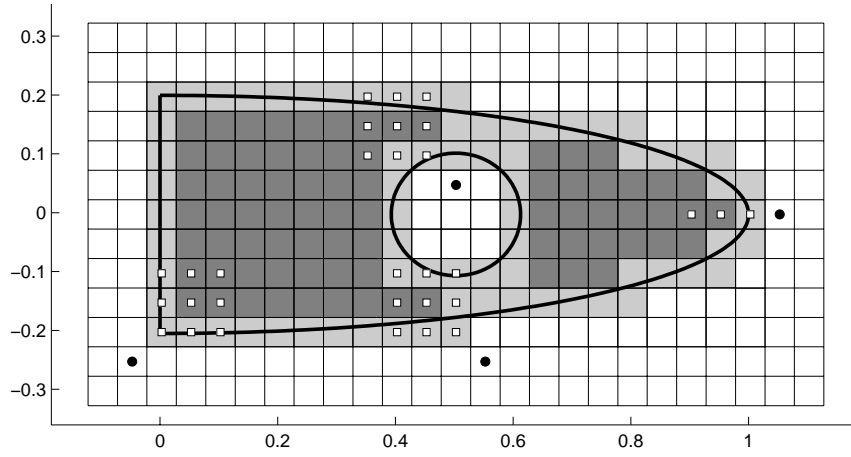


Abbildung 3.4: Beispiele einiger Indexfelder $I(j)$ bei der Erweiterung

gewählt. Für $i \notin I(j)$ wird $e_{i,j}$ auf 0 gesetzt. Durch Aufsummation erhält man

$$q(j) = \sum_{i \in I} e_{i,j} q(i).$$

Setzt man dieses Ergebnis in (3.1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} p_\nu(x) &= \sum_{i \in I} q(i) b_{i,\nu}(x) + \sum_{j \in J} q(j) b_{j,\nu}(x) \\ &= \sum_{i \in I} q(i) \left[b_{i,\nu}(x) + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_{j,\nu}(x) \right], \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

wie bereits oben erwähnt. Die Berechnung der Koeffizienten $e_{i,j}$ folgt aus der Darstellung der Lagrangepolynome.

Satz 11. Falls für alle $j \in J$ die Menge

$$I(j) = \{i \in \mathbb{Z}^2 : \alpha_\mu \leq i_\mu \leq \alpha_\mu + n\}$$

das am nächsten an j liegende Indexfeld der Größe $(n+1) \times (n+1)$ ist, so gilt für die Koeffizienten

$$e_{i,j} = \begin{cases} \prod_{\mu=1}^2 \prod_{\substack{l=\alpha_\mu \\ l \neq i_\mu}}^{\alpha_\mu+n} \frac{j_\mu - l}{i_\mu - l} & \text{für } i \in I(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei wird das Feld so gewählt, dass die Trägergröße des erweiterten B-Splines möglichst klein ist und damit die Bandbreite der Galerkinmatrix nicht unnötig groß wird. Dies erreicht man, indem man das Indexfeld betrachtet, das am nächsten an j liegt.

Durch Multiplikation mit der Gewichtsfunktion und geeignete Skalierung erhält man folgendes Ergebnis:

Satz 12. Für Koeffizienten $e_{i,j}$ wie in Satz 11 sind die gewichteten erweiterten B-Splines (web-Splines) $B_{i,\nu}$ durch

$$B_{i,\nu} := \frac{w}{w(x_i)} \left(b_{i,\nu} + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_{j,\nu} \right), \quad i \in I$$

definiert. Dabei ist x_i der Mittelpunkt der Gitterzelle $Q_{l(i)+i}$. Der zugehörige Splineraum

$$\mathcal{B} := \bigoplus \{B_{i,\nu} : i \in I, \nu = 1, 2\}$$

heißt web-Raum.

In Abbildung 3.4 sind für vier exemplarisch gewählte äußere Splines (\bullet) alle inneren (\square) dargestellt, an die dieser gekoppelt wird. Man erkennt sofort das in Satz 11 angesprochene Indexfeld der Größe $(n+1) \times (n+1)$, wobei in diesem Beispiel $n = 2$, d.h. quadratische B-Splines verwendet wurden. Für den am weitesten rechts liegenden B-Spline sind 6 der 9 Erweiterungskoeffizienten gleich Null. Dies resultiert aus der Berechnung der Erweiterungskoeffizienten über die Lagrange-Polynome.

3.4 Stabilität

Für die Kondition der Galerkin-Matrix

$$G_h = \left\{ \int_{\Omega} (B_{i,\nu})^T D^T C D B_{j,\mu} \right\}_{\substack{i,j \in I \\ \mu,\nu=1,2}}$$

ist die Stabilitätseigenschaft der Basisfunktionen ausschlaggebend. Um diese zu zeigen, werden die dualen Funktionale

$$\Lambda_{i,\nu} = \frac{w(x_k)}{w} \lambda_{k,\nu}, \quad k \in I$$

der Basisfunktionen $B_{i,\nu}$ verwendet. Für diese lässt sich mit Satz 8 die Beschränktheit in der L^2 -Norm zeigen.

Satz 13. Für $i, k \in I$ sind die Basisfunktionen $B_{i,\nu}$ und ihre dualen Funktionale $\Lambda_{k,\nu}$ bezüglich der Gitterweite h beschränkt und biorthogonal, d.h.

$$\|B_{i,\nu}\|_l \preceq h^{-l}, \quad \|\Lambda_{k,\nu}\|_0 \preceq 1, \quad \int_{\Omega} B_{i,\nu} \Lambda_{k,\nu} = \delta_{i,k}.$$

Beweis: Wegen der komponentenweisen Schreibweise ist

$$\|B_{i,\nu}\|_l^2 = \|B_{i,\nu}^1\|_l^2 + \|B_{i,\nu}^2\|_l^2$$

und es genügt die Betrachtung von einer Komponente $B_i := B_{i,1}$. Ebenso ist dies bei dem dualen Funktional $\Lambda_{i,\nu}$ möglich.

Mit der allgemeinen Leibniz-Formel für Multi-Indizes

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta} f D^\beta g$$

folgt für

$$\begin{aligned} \|D^\alpha B_i\|_0 &= \left\| D^\alpha \left(\frac{w}{w(x_i)} (b_i + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_j) \right) \right\|_0 \\ &\leq \left\| \frac{w}{w(x_i)} \left(D^\alpha b_i + \sum_{j \in J} e_{i,j} D^\alpha b_j \right) \right\|_0 \\ &\quad + \left\| \sum_{\beta < \alpha} c_\beta \frac{D^{\alpha-\beta} w}{w(x_i)} \left(D^\beta b_i + \sum_{j \in J} e_{i,j} D^\beta b_j \right) \right\|_0. \end{aligned}$$

Für die Gewichtung gilt wegen $w(x_i) \succeq h$ und $|x - x_i| \preceq h$ für alle $x \in \text{supp } B_i$

$$\frac{w(x)}{w(x_i)} = 1 + \frac{w(x) - w(x_i)}{w(x_i)} \preceq 1.$$

Mit

- $\frac{w}{w(x_i)} \preceq 1$,
- $\frac{1}{w(x_i)} \preceq h^{-1}$,
- $D^\alpha w \preceq 1$ für $|\alpha| > 0$
- $D^\alpha b_i \preceq h^{-|\alpha|}$ aufgrund der Skalierung
- $e_{i,j} \preceq 1$

folgt dann

$$\|D^\alpha B_i\|_0 \preceq h^{-|\alpha|} + h^{-1} \sum_{\beta < \alpha} h^{-|\beta|} \preceq h^{-|\alpha|}.$$

Durch Summation über alle $|\alpha| \leq l$ folgt die Behauptung.

Für die Abschätzung der dualen Funktionale $\Lambda_{i,\nu}$ reicht es, die Beschränktheit von $\Lambda_i := \Lambda_{i,1}^1$ zu zeigen. Da der Träger jedes dualen Funktionals in einer inneren Zelle liegt, ist für $x \in \text{supp } \Lambda_i$

$$w(x) \succeq h$$

und damit

$$\frac{w(x_i)}{w(x)} = 1 + \frac{w(x_i) - w(x)}{w(x)} \preceq 1 + \frac{h}{w(x)} \preceq 1.$$

Aus $\|\lambda_i\|_0 \preceq 1$ folgt somit

$$\|\Lambda_i\| \preceq \left| \frac{w(x_i)}{w(x)} \right| \|\lambda_i\|_0 \preceq 1.$$

Die Gleichung $\int_\Omega B_{i,\nu} \Lambda_{k,\nu} = \delta_{i,k}$ erhält man durch Einsetzen der Definitionen

$$\begin{aligned} \int_\Omega B_{i,\nu} \Lambda_{k,\nu} &= \int_\Omega \frac{w}{w(x_i)} \left(b_{i,\nu} + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_{j,\nu} \right) \frac{w(x_k)}{w} \lambda_{k,\nu} \\ &= \frac{w(x_k)}{w(x_i)} \int_\Omega b_{i,\nu} \lambda_{k,\nu} = \delta_{i,k}, \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass für alle $j \in J$ gilt: $\int b_{i,\nu} \lambda_{j,\nu} = 0$. \square

Damit lässt sich nun ein weiteres Resultat gewinnen:

Satz 14. *Die web-Basis $\{B_{i,\nu}\}_{i \in I, \nu=1,2}$ ist bezüglich der L^2 -Norm stabil und mit $A = \{a_{i,\nu}\}_{i \in I, \nu=1,2}$ gilt*

$$\left\| \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1,2} a_{i,\nu} B_{i,\nu} \right\|_0 \asymp \|A\|.$$

Allgemeiner gilt

$$\|A\| \preceq \left\| \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1,2} a_{i,\nu} B_{i,\nu} \right\|_l \preceq h^{-l} \|A\|.$$

Beweis: Mit dem Spline

$$v_h = \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1}^2 a_{i,\nu} B_{i,\nu}$$

gilt aufgrund der Beschränktheit der dualen Funktionale

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1}^2 a_{i,\nu}^2 &= \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1}^2 \langle v_h, \Lambda_{i,\nu} \rangle^2 \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1}^2 \|v_h\|_{0, \text{supp} \Lambda_{i,\nu}}^2 \|\Lambda_{i,\nu}\|_0^2 \\ &\preceq \|v_h\|_0^2 \leq \|v_h\|_l^2 \end{aligned}$$

und damit die erste Ungleichung des allgemeinen Falls. Da die Anzahl der B-Splines, in deren Träger ein fester Punkt x liegt, beschränkt ist, gilt mit $I(x) := \{i \in I : B_{i,\nu}(x) \neq 0\}$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v_h\|_0^2 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i \in I(x)} \sum_{\nu=1}^2 a_{i,\nu} D^\alpha B_{i,\nu}(x) \right)^2 dx \\ &\preceq \int_{\Omega} \sum_{i \in I(x)} \sum_{\nu=1}^2 a_{i,\nu}^2 (D^\alpha B_{i,\nu}(x))^2 dx \\ &= \sum_{i \in I} a_{i,\nu}^2 \int_{\Omega} (D^\alpha B_{i,\nu}(x))^2 dx \\ &\leq \|A\|^2 \max_{i \in I} \|D^\alpha B_{i,\nu}\|_0^2 \\ &\preceq h^{-2|\alpha|} \|A\|^2. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus Satz 13. Durch Summation über alle α mit $|\alpha| \leq l$ folgt die zweite Ungleichung der Behauptung. \square

3.5 Kondition der Galerkinmatrix

Mit Hilfe des Satzes 14 kann jetzt eine Abschätzung für die Kondition der Galerkin-Matrix gefunden werden.

Die Konditionszahl $\varrho_h(G_h)$ in der 2-Norm ist der Quotient aus dem größten und dem kleinsten Eigenwert. Diese können durch Maximierung bzw. Minimierung des Rayleigh-Quotienten

$$r(A) = \frac{A^T G_h A}{A^T A}$$

berechnet werden.

Satz 15. *Unter der Voraussetzung $|\Gamma_D| > 0$ gilt für die Konditionszahl der Galerkin-Matrix G_h des Ansatzraumes \mathcal{B}*

$$\varrho_h(G_h) \preceq h^{-2}.$$

Beweis: Sei $v_h = \sum_i \sum_{\nu=1}^2 a_{i,\nu} B_{i,\nu}$.

Die untere Abschätzung folgt aus der Elliptizität der Bilinearform:

$$A^T G_h A = a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_1^2 \geq \|v_h\|_0^2 \succeq \|A\|^2.$$

Die obere Abschätzung folgt aus der Stetigkeit der Bilinearform:

$$A^T G_h A = a(v_h, v_h) \leq M \|v_h\|_1 \|v_h\|_1 \preceq h^{-2} \|A\|^2.$$

Damit ergibt sich für den Rayleigh-Quotienten

$$1 \preceq r(A) \preceq h^{-2}$$

und somit $\varrho_h(G_h) \preceq h^{-2}$. □

Kapitel 4

Fehlerabschätzungen

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes Gebiet mit $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\text{Maß}(\Gamma_D \cap \Gamma_N) = 0$ und Γ_D, Γ_N hinreichend glatt. Hierbei bezeichne Γ_D den Dirichlet-Rand und Γ_N den Neumann-Rand.

Wird im Weiteren ein Schnittpunkt P von Γ_D und Γ_N betrachtet, so sind in einer Umgebung von P diese beiden Randstücke als Kurven

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \text{ und } \psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma_D &= \{\varphi(t) : 0 \leq t \leq t^*\} \\ \Gamma_N &= \{\psi(s) : 0 \leq s \leq s^*\}\end{aligned}$$

und

$$\varphi(0) = \psi(0) = P$$

gegeben.

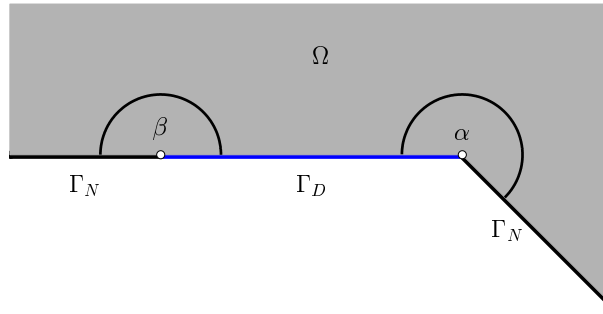
Bemerkung: Aufgrund der geforderten Glattheit an die Gewichtsfunktion w erhält man direkte Einschränkungen an Ω .

So dürfen sich der Dirichlet-Rand Γ_D und der Neumann-Rand Γ_N nur unter einem Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ schneiden. Andernfalls würde man kein $w \asymp \text{dist}(\Gamma_D)$ mit $w \in C^1(\Omega)$ finden. Somit sind die beiden in Abbildung 4 auftretenden Fälle ausgeschlossen. Betrachten wir z.B. den Winkel α . Wegen $w \asymp \text{dist}(\Gamma_D)$ verläuft w auf Γ_N linear. Damit folgt aber aus der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von w sofort, dass w in einem Punkt innerhalb des Gebietes negativ ist, was ein Widerspruch zur Definition der Gewichtsfunktion ist. Analog lassen sich diese Überlegungen auch für den Winkel β anstellen und rechtfertigen unsere Einschränkungen an das Gebiet Ω .

Bemerkung: Obwohl die Lösung u im ebenen Fall zwei Komponenten hat, werden im Folgenden nicht beide angegeben. Die Sobolev-Normen lassen sich für $u = [u^1, u^2]$ komponentenweise betrachten

$$\|u\|_k^2 = \|u^1\|_k^2 + \|u^2\|_k^2$$

und erlauben daher diese Notationsvereinfachung.

Abbildung 4.1: Einschränkungen an das Gebiet Ω

Bemerkung: Die Beschränkung auf ebene Probleme bringt die Neudefinition von

$$H_{\Gamma}^1 := \{v \in C^\infty(\Omega)^2 : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$$

mit sich. Wird in Zukunft der Raum $H^m(\Omega)$ oder $L^2(\Omega)$ verwendet, so ist damit $H^m(\Omega)^2$ bzw. $L^2(\Omega)^2$ gemeint.

4.1 Grundlagen

Im allgemeinen ist man bei der Berechnung von Finite-Element-Näherungen an Fehlerabschätzungen der Form

$$\|u - u_h\| \leq ch^p$$

interessiert, denn damit lassen sich Vorhersagen über das Verhalten des Fehlers treffen oder bestimmte Gitterweiten gemäß den gewünschten Fehlern wählen.

In diesem Zusammenhang nimmt das Lemma von Céa [Bra97] einen wichtigen Stellenwert ein.

Lemma 16 (Lemma von Céa). *Die Bilinearform a sei V -elliptisch mit $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$. Ferner seien u und u_h die Lösungen der Variationsaufgabe in V bzw. in $V_h \subset V$. Dann ist*

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_m.$$

Dabei ist V_h der Raum der Ansatzfunktionen.

Da die Bilinearform der Elastizitätsgleichung H^1 -elliptisch ist und der Ansatzraum der web-Splines $\mathcal{B} \subset H_{\Gamma}^1(\Omega)$ ist, läßt sich das Lemma mit $V = H_{\Gamma}^1(\Omega)$ auf den hier betrachteten Fall anwenden.

Damit ist der erste Schritt zur Abschätzung des Fehlers getan. Das Lemma besagt, dass sich der Fehler der Finiten-Element-Näherung nur um eine Konstante von der bestmöglichen Approximation innerhalb des Ansatzraumes unterscheidet.

Eine weitere wichtige Aussage liefert das Lemma von Aubin-Nitsche [Bra97], das im späteren Verlauf der Fehlerabschätzung seine Anwendung findet.

Lemma 17 (Aubin-Nitsche-Lemma). *Sei H ein Hilbert-Raum mit der Norm $|\cdot|$ und dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Es sei V ein Unterraum, der durch die Norm $\|\cdot\|$ zum Hilbert-Raum wird. Ferner sei*

$$V \hookrightarrow H \quad \text{stetig.}$$

Dann gilt für die Finite-Element-Lösung in $V_h \subset V$

$$|u - u_h| \leq C \|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in V_h} \|\varphi_g - v\| \right\},$$

wenn jedem $g \in H$ die eindeutige (schwache) Lösung $\varphi_g \in V$ des dualen Problems

$$a(w, \varphi_g) = (g, w) \quad \text{für } w \in V$$

zugeordnet wird.

4.2 Regularität der Lösung

Bisher wurden Bedingungen dafür angegeben, dass die Variationsformulierung der linearen Elastizität eine eindeutige Lösung in $H_1^1 \subset H^1(\Omega)$ besitzt. Dazu gehört unter anderem die Lipschitz-Stetigkeit des Gebietes Ω , aus welcher die Kegelbedingung folgt, und die Voraussetzung $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma_N)$.

Für die Abschätzung des Fehlers der Galerkin-Approximation ist die genaue Regularität der Lösung wichtig. Deshalb muß auch betrachtet werden, unter welchen Voraussetzungen beispielsweise $u \in H^k(\Omega)$ liegt. Dies hängt von vielen Faktoren ab [KA00]

- der Glattheit des Gebietsrandes,
- der Form der Gebietes,
- der Glattheit der rechten Seiten der Differentialgleichung,
- der Art des Übergangs von Randbedingungen an jenen Stellen, an denen der Typ wechselt,

die recht einschränkend sind.

Die folgende Definition liefert eine Bezeichnung für die Glattheit des Randes [App01]:

Definition 18. Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 . Dann gehört $\partial\Omega$ zur Klasse C^k , $k \in \mathbb{N}_0$, falls es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem (ξ, η) gibt, so dass gilt:

1. U ist in den neuen Koordinaten ein achsenparalleles Rechteck
2. Es gibt eine C^k -Funktion $\varphi : [-a, a] \rightarrow (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ mit

$$\begin{aligned} \Omega \cap \bar{U} &= \{(\xi, \eta) \in \bar{U} : \eta < \varphi(\xi)\} \quad \text{und} \\ \partial\Omega \cap \bar{U} &= \{(\xi, \eta) \in \bar{U} : \eta = \varphi(\xi)\}. \end{aligned}$$

Dass die Glattheit des Gebietsrandes von entscheidender Bedeutung ist zeigt schon die Betrachtung dreier verschiedener Gebiete:

Ein Kreis $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - m| < r\}$ ist ein C^∞ -Gebiet. Hier ist eine glatte Lösung möglich.

Ein Rechteck $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2\}$ ist ein C^0 -Gebiet, aber nicht C^1 . Dadurch kann es abhängig von der Wahl der anderen Parameter zu Singularitäten kommen. Ein Kreis mit Schlitz $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - m| < r, x \neq m + \lambda(1, 0) \text{ mit } 0 \leq \lambda < r\}$ ist kein Lipschitz-Gebiet. Hier ist nicht einmal mehr die Existenz einer Lösung gesichert.

Angaben über die erwartete Regularität der Lösung sind aufgrund der komplexen Voraussetzungen nicht trivial und werden häufig übergangen.

In [Cia88] wird das reine Verschiebungsproblem, d.h. $\partial\Omega = \Gamma_D$, betrachtet und anschließend eine Erweiterung auf allgemeine Probleme angedeutet. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, was aber ohne weiteres auf den zweidimensionalen Fall übertragen werden kann.

Satz 19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit $\partial\Omega = \Gamma_D$ aus der Klasse C^2 und $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist die schwache Lösung $u \in H^2(\Omega)$.*

Sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$. Ist $\partial\Omega = \Gamma_D$ aus der Klasse C^{m+2} und $f \in H^m(\Omega)$, dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Diese Aussage lässt sich auf das allgemeine Problem $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ mit $|\Gamma_D| > 0$ übertragen, sofern sich die Abschlüsse der beiden Ränder nicht schneiden [Cia88]. Das ist zum Beispiel bei einem Kreisring der Fall, wo der innere Kreis Γ_D und der äußere Γ_N ist. Ebenso lässt sich das Resultat auf auch auf den Fall, dass ausschließlich Neumannrandbedingungen vorgegeben sind, erweitern [Cia88, Gri85].

4.3 Quasi-Interpolation

Um Aussagen über die Güte der Finite-Element-Näherung anhand von web-Splines treffen zu können, ist zuerst eine Betrachtung von deren Eigenschaften unabdingbar [dB78, App01].

Ein verbreiteter Ansatz zur Approximation von Funktionen ist die Quasi-Interpolation stetiger Funktionen. Diese wird bei der Fehlerbetrachtung eine wichtige Rolle spielen und wird deshalb kurz vorgestellt.

Definition 20 (Quasi-Interpolant). *Eine mit Hilfe von linearen Funktionalen σ_k definierte Approximation*

$$f \longrightarrow Sf = \sum_{k \in K} (\sigma_k f) b_k$$

ist ein Quasi-Interpolant der Ordnung n auf $L^2(D)$, wenn

1. $S p = p$ für alle Polynome vom Grad $\leq n$
2. $|\sigma_k f| \leq c h^{-1/2} \|f\|_{0, D_k}$,

wobei D_k der Schnitt des Trägers von b_k mit dem Definitionsbereich D ist.

Entsprechend dieser Definition lässt sich ein bivariater Quasi-Interpolant durch Tensorproduktbildung von Funktionalen σ_{k_ν} definieren:

Definition 21. *Mit Funktionalen σ_k eines univariaten Quasi-Interpolanten der Ordnung m wird durch*

$$f \longrightarrow Sf = \sum_{k \in K} \left(\bigotimes_{\nu=1,2} \sigma_{k_\nu} \right) f b_k$$

ein bivariater Quasi-Interpolant definiert.

Hierfür gilt folgende Abschätzung [App01]

Satz 22. *Für den bivariaten Quasi-Interpolant Sf gilt:*

$$\|Sf - f\|_0 \leq ch^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

Da hier allerdings der Raum \mathcal{B} der vektorwertigen web-Splines betrachtet werden muss, wird ein Quasi-Interpolant

$$P_h := \sum_{\substack{i \in I \\ \nu=1,2}} \left(\int u \Lambda_{i,\nu} \right) B_{i,\nu}$$

verwendet, der von $L^2(\Omega)^2$ auf den gewichteten Splineraum \mathcal{B} abbildet.

Die erste Bedingung für einen Quasi-Interpolanten folgt aus der Eigenschaft, dass sich ein gewichtetes vektorwertiges Polynom wp exakt durch $\sum_{j \in I, \mu=1,2} a_{j,\mu} B_{j,\mu}$ darstellen lässt. Damit gilt

$$\begin{aligned} P_h(wp) &= \sum_{\substack{i \in I \\ \nu=1,2}} \left(\int wp \Lambda_i \right) B_i = \sum_{\substack{i \in I \\ \nu=1,2}} \sum_{\substack{j \in I \\ \mu=1,2}} a_{j,\mu} \left(\int B_{j,\mu} \Lambda_{i,\nu} \right) B_{i,\nu} \\ &= \sum_{i \in I} a_{i,\nu} B_{i,\nu} = wp. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung folgt sofort durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ($T_i = \text{supp} B_i^h \cap \Omega$)

$$\left| \int f \Lambda_{i,\nu} \right| = \|\Lambda_{i,\nu}\|_{0,T_i} \|f\|_{0,T_i},$$

wobei der Faktor $h^{-1/2}$ durch die Skalierung des Funktionals bereits enthalten ist.

Die hier beschriebene Abbildung $f \rightarrow P_h f$ der glatten Funktion f approximiert f und alle ersten $n - 1$ Ableitungen von f mit optimaler Ordnung [dB78, Hö].

Im späteren Verlauf wird auf diesen Quasi-Interpolanten zurückgegriffen, um mit Hilfe des Céa-Lemmas eine Abschätzung für den Fehler einer Approximation in \mathcal{B} zu finden.

4.4 Approximation

Wie bereits eben erwähnt, wird nun die Grundlage für die Anwendung des Céa-Lemmas geschaffen. Dazu werden zuerst einige Hilfsaussagen getroffen, die dann eine Abschätzung der Form

$$\|u - P_h u\|_l \leq ch^{k-l} \|u\|_k$$

ermöglichen.

Zuerst betrachten wir eine Abschätzung für die orthogonale Projektion auf Polynome [Hö]

Lemma 23 (Bramble-Hilbert Lemma). *Ist P die orthogonale Projektion auf Polynome vom Grad $< n$, so gilt*

$$|f - Pf|_l \leq h^{k-l} |f|_k$$

für $0 \leq l \leq k \leq n$.

Ist das Gebiet beschränkt, so kann in dem obigen Lemma die Seminorm durch die Norm ersetzt werden.

Lemma 24. Für jede Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\text{dist}(\Omega', \Gamma_D) > \delta$ und $k \geq 1$ gilt:

$$\|v\|_{k, \Omega'} \leq c \delta^{-1} (\|u\|_{k, \Omega'} + \|v\|_{k-1, \Omega'}).$$

Beweis: Nach der allgemeinen Leibniz-Formel gilt für $u = wv$ und w hinreichend glatt:

$$D^\alpha u = w D^\alpha v + \sum_{\beta < \alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta} w D^\beta v.$$

Da w äquivalent zum Abstand ist, folgt durch Umstellen und Dividieren durch $w > \delta$

$$|D^\alpha v| \leq \delta^{-1} (|D^\alpha u| + c \sum_{\beta < \alpha} D^\beta v)$$

und damit die Behauptung. □

Lemma 25. Sei \tilde{Q} eine Teilmenge des Gebiets Ω und sei der Abstand zum Dirichletrand $\delta = \text{dist}(\tilde{Q}, \Gamma_D)$. Ferner sei p ein Polynom vom Grad n , das $v = u/w$ approximiert. Dann gilt

- für $\delta \succeq h$

$$(\max w) \|v - p\|_{k, \tilde{Q}} \preceq h^{n-k} (\|v\|_{n-1, \tilde{Q}} + \|u\|_{n, \tilde{Q}})$$

- für $\delta \preceq h$

$$(\max w) \|v - p\|_{k, \tilde{Q}} \preceq h^{n-k} \|v\|_{n-1, \tilde{Q}}$$

Beweis: Aus $\delta \succeq h$ folgt $\delta^{-1} \max w \preceq 1$ und mit Lemma 24 und dem Lemma von Bramble-Hilbert

$$\begin{aligned} (\max w) \|v - p\|_{k, \tilde{Q}} &\preceq (\max w) h^{n-k} \|v\|_{n, \tilde{Q}} \\ &\preceq \delta^{-1} (\max w) h^{n-k} (\|v\|_{n-1, \tilde{Q}} + \|u\|_{n, \tilde{Q}}) \\ &\preceq h^{n-k} (\|v\|_{n-1, \tilde{Q}} + \|u\|_{n, \tilde{Q}}) \end{aligned}$$

Für den Fall $\delta \preceq h$ ist $\max w \preceq h$ und es folgt mit dem Lemma von Bramble-Hilbert

$$\begin{aligned} (\max w) \|v - p\|_{k, \tilde{Q}} &\preceq (\max w) h^{n-1-k} \|v\|_{n-1, \tilde{Q}} \\ &\preceq h^{n-k} \|v\|_{n-1, \tilde{Q}} \end{aligned}$$

□

Eine weitere Abschätzung für den gewichteten Fehler findet man mit

Lemma 26. Sei $w \asymp \text{dist}(x, \Gamma_D)$ und sei p das Polynom vom Grad n , das v approximiert, dann gilt

$$\|w(v - p)\|_l \preceq l \|v - p\|_{l-1} + (\max w) \|v - p\|_l$$

Beweis: Mit der Leibniz-Formel folgt

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(w(v-p))\|_0 &\leq \|wD^\alpha(v-p)\|_0 + \left\| \sum_{\beta < \alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta} w D^\beta(v-p) \right\|_0 \\ &\leq (\max w) \|D^\alpha(v-p)\|_0 + \left\| \sum_{\beta < \alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta} w D^\beta(v-p) \right\|_0. \end{aligned}$$

Dabei taucht im zweiten Summanden 2-mal ein Term mit $|\beta| = |\alpha| - 1$ auf und man erhält durch Summation über alle $|\alpha| \leq l$ die Behauptung. \square

Nun bedarf es noch einer weiteren Abschätzung, zu deren Beweis wir den folgenden Hilfssatz verwenden:

Hilfssatz 27. Sei $q(t) := \frac{p(t)}{t}$ und $p(0) = 0$. Dann gilt mit der L^2 -Norm $|\cdot|$ auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$|q^{(k-1)}| \leq c |p^{(k)}|.$$

Beweis: Mit $p(0) = 0$ gilt

$$q(t) = \frac{1}{t} \int_0^t p'(\tau) d\tau = \int_0^1 p'(t\tau) d\tau.$$

(k-1)-fache Differentiation liefert

$$q^{(k-1)}(t) = \int_0^1 \tau^{k-1} p^{(k)}(t\tau) d\tau$$

und damit

$$\begin{aligned} |q^{(k-1)}| &\leq \int_0^1 |\tau^{k-1} p^{(k)}(t\tau)| d\tau = \int_0^1 \tau^{k-1} \left(\int_0^1 |p^{(k)}(t\tau)|^2 dt \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq \int_0^1 \tau^{k-\frac{3}{2}} |p^{(k)}| d\tau = c |p^{(k)}|. \end{aligned}$$

\square

Satz 28 (Partition der Eins [Ada78]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und sei \mathcal{O} eine Familie offener Mengen mit $\Omega \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$. Dann existiert eine Familie \mathcal{F} von Funktionen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $0 \leq f(x) \leq 1$
2. falls $K \subsetneq \Omega$, verschwinden alle bis auf endlich viele $f \in \mathcal{F}$ auf K
3. für alle $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein $U \in \mathcal{O}$ mit $\text{supp } f \subset U$
4. für alle $x \in \Omega$ gilt: $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$

Eine solche Familie \mathcal{F} heisst C^∞ -Partition der Eins von Ω bezüglich \mathcal{O} .

Unter Verwendung der Partition der Eins (Satz 28) und dem Hilfssatz 27 folgt nun:

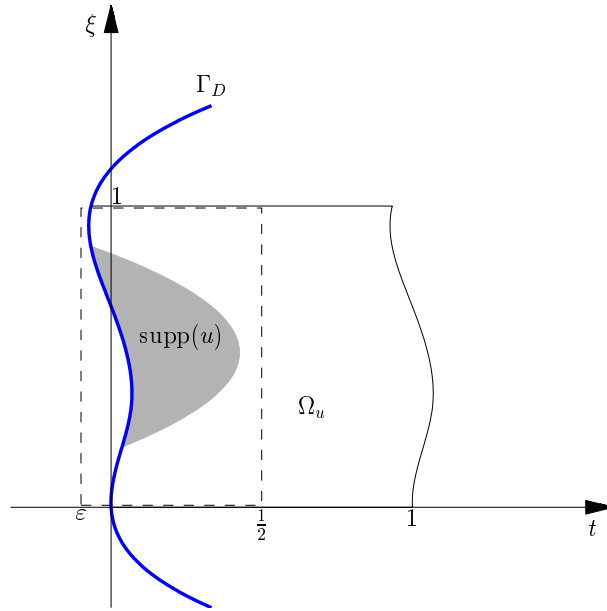


Abbildung 4.2: Abschätzung nahe des Dirichlet-Randes

Lemma 29. Sei $u \in H^1_{\Gamma}(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ und $v := u/w$. Dann gilt

$$\|v\|_{k-1} \leq c \|u\|_k.$$

Beweis: Mit Hilfe der Partition der Eins können wir uns auf eine lokale Betrachtung einschränken und erhalten 3 Fälle, die wir getrennt betrachten:

1.) Für den Fall, dass $\text{dist}(\text{supp}(u), \Gamma_D) > \delta$, erhält man aufgrund der Beschränktheit von w sofort

$$\|v\|_{k-1} \leq c \|u\|_{k-1} \leq c \|u\|_k.$$

2.) Betrachten wir nun den Fall, dass $\text{dist}(\text{supp}(u), \Gamma_D) \leq \delta$ und $\text{supp}(u) \cap \Gamma_N = \emptyset$.

Dann ist mit einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems $\text{supp}(u) \subset [0, 1] \times [-\varepsilon, \frac{1}{2}]$ (siehe Abbildung 4.2) und wir können den relevanten Teil von Ω durch

$$\Omega_u := \{x = (\xi, t) : 0 \leq \xi \leq 1, \vartheta(\xi) \leq t \leq 1 + \vartheta(\xi)\}$$

mit

$$\vartheta(0) = 0, \quad \nabla\vartheta(0) = 0, \quad \|\nabla\vartheta(\xi)\| \leq \varepsilon \ll 1$$

beschreiben. Falls $\vartheta \equiv 0$ und $w(x) = t$, lässt sich der Hilfssatz 27 sofort für den Würfel $Q_* = [0, 1]^2$ anwenden. Andernfalls führen wir den Diffeomorphismus

$$x = (\xi, t) \longrightarrow (\xi, s) = y, \quad s = t - \vartheta(\xi)$$

ein, wobei \tilde{u} und \tilde{v} die Funktionen bzgl. dieser transformierten Variablen seien. Dann folgt mit

$$\tilde{v}(y) = v(\xi, s + \vartheta(\xi)) = \frac{u(\xi, s + \vartheta(\xi))}{w(\xi, s + \vartheta(\xi))} = \frac{s}{w(\xi, s + \vartheta(\xi))} \cdot \frac{\tilde{u}(y)}{s}$$

und der Glattheit des ersten Quotienten

$$\|v\|_{k-1} = \|v\|_{k-1, \Omega_u} \leq c_1 \|\tilde{v}\|_{k-1, Q_*} \leq c_2 \|\tilde{u}/s\|_{k-1, Q_*} \leq c_3 \|\tilde{u}\|_{k, Q_*} \leq c \|u\|_k.$$

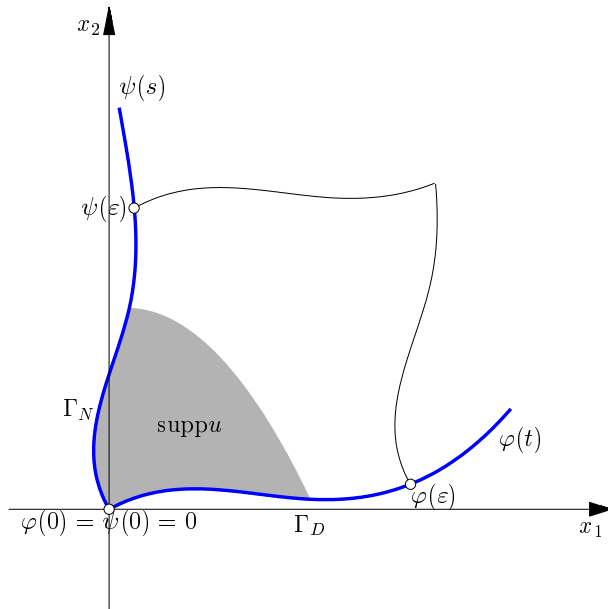


Abbildung 4.3: Abschätzung bei Dirichlet- und Neumann-Randbedingung

3.) Damit fehlt uns nun noch der Fall, dass $\text{dist}(\text{supp}(u), \Gamma_D) \leq \delta$ und $\text{supp}(u) \cap \Gamma_N \neq \emptyset$ (siehe Abbildung 4.3).

Seien nun, wie zu Beginn des Kapitels eingeführt, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ bzw. $\psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$ die Randstücke von Γ_D bzw. Γ_N . Die Abbildung

$$\Phi : (t, s) \longrightarrow (x_1, x_2) = \varphi(t) + \psi(s)$$

ist stetig differenzierbar und hat im Punkt $(0, 0)$ die Jacobi-Matrix

$$J_\Phi(0, 0) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(0) & \psi'_1(0) \\ \varphi'_2(0) & \psi'_2(0) \end{pmatrix}$$

Damit Φ' im Ursprung invertierbar ist, muss gelten

$$\det(J_\Phi(0, 0)) = \varphi'_1(0)\psi'_2(0) - \varphi'_2(0)\psi'_1(0) \neq 0 \iff \varphi'(0) \nparallel \psi'(0).$$

Dies ist aufgrund der Annahme $\alpha \in (0, \pi)$ erfüllt. Nach dem Umkehrsatz (siehe z.B. [Heu95]) existiert nun eine Umgebung W des Ursprungs, sodass $\Phi|_W$ ein Diffeomorphismus ist. Bei genügend feiner Wahl der Partition der Eins gilt

$$\text{supp}(u) \subset \Omega_u := \Phi(W).$$

Dann gilt wie im 2.Fall

$$\tilde{v}(t, s) = \frac{\tilde{u}(t, s)}{w(\Phi^{-1}(x_1, x_2))} = \frac{s}{w(\Phi^{-1}(x_1, x_2))} \cdot \frac{\tilde{u}(t, s)}{s}$$

Nun läßt sich wieder der Hilfssatz 27 anwenden und man erhält auch für diesen Fall

$$\|v\|_{k-1} = \|v\|_{k-1, \Omega_u} \leq c_1 \|\tilde{v}\|_{k-1, Q_*} \leq c_2 \|\tilde{u}/s\|_{k-1, Q_*} \leq c_3 \|\tilde{u}\|_{k, Q_*} \leq c \|u\|_k.$$

□

Damit bekommen wir nun eine Abschätzung der Form $\|u - u_h\| \leq C h^{k-l} \|u\|_k$:

Satz 30. Sei $u \in H^1_\Gamma(\Omega) \cap H^p(\Omega)$ und sei $P_h u := \sum_{i \in I} \sum_{\nu=1}^2 \langle \Lambda_{i,\nu}, u \rangle B_{i,\nu}$ der Quasi-Interpolant. Dann gilt für $0 \leq l < k \leq \min(n+1, p)$

$$\|u - P_h u\|_l \preceq h^{k-l} \|u\|_k.$$

Beweis: Die obige Abschätzung kann komponentenweise betrachtet werden. Somit wird im weiteren Verlauf des Beweises der Index ν nicht mehr auftreten und alle Ungleichungen gelten sowohl für $\nu = 1$ als auch für $\nu = 2$.

Aufgrund der beschränkten Träger der Basisfunktionen kann der Beweis für jede Gitterzelle Q getrennt durchgeführt werden. Sei

$$I(Q) := \{i \in I : \text{supp}(B_i) \cap Q \neq \emptyset\}$$

und

$$\tilde{Q} = \bigcup_{i \in I(Q)} \text{supp}(B_i) \cap \Omega.$$

Man erhält sofort $|I(Q)| \preceq 1$ und $\text{diam}(\tilde{Q}) \preceq h$.

Sei nun p ein Polynom vom Grad n , das $v = u/w$ mit

$$\|v - p\|_{\nu, \tilde{Q}} \leq ch^{\mu-\nu} \|v\|_{\mu, \tilde{Q}} \quad (4.1)$$

für $0 \leq \nu < \mu \leq \min(n+1, p)$ approximiert.

Da $wp \in \ker(\text{Id} - P_h)$, folgt

$$\begin{aligned} u - P_h u &= wv - \left(\sum_{i \in I} \langle \Lambda_i, wv \rangle B_i \right) - wp + \left(\sum_{i \in I} \langle \Lambda_i, wp \rangle B_i \right) \\ &= w(v - p) - \sum_{i \in I} a_i B_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit $a_i = \langle \Lambda_i, w(v - p) \rangle$.

Betrachten wir nun zuerst den ersten Term.

Dieser lässt sich für $l \geq 1$ mit Lemma 26 nach oben abschätzen durch

$$\|w(v - p)\|_{l, Q \cap \Omega} \preceq \|w(v - p)\|_{l, \tilde{Q}} \preceq l \|v - p\|_{l-1, \tilde{Q}} + (\max_{\tilde{Q}} w) \|v - p\|_{l, \tilde{Q}}. \quad (4.3)$$

Das Ergebnis kann mit dem Lemma von Bramble-Hilbert und Lemma 25 weiter abgeschätzt werden und man erhält:

$$\|w(v - p)\|_{l, Q \cap \Omega} \preceq h^{k-l} (\|v\|_{k-1, \tilde{Q}} + \|u\|_{k, \tilde{Q}}). \quad (4.4)$$

Im Fall $l = 0$ folgt ebenfalls

$$\begin{aligned} \|w(v - p)\|_{0, Q \cap \Omega} &\preceq \|w(v - p)\|_{l, \tilde{Q}} \preceq (\max_{\tilde{Q}} w) \|v - p\|_{0, \tilde{Q}} \\ &\preceq h^k (\|v\|_{k-1, \tilde{Q}} + \|u\|_{k, \tilde{Q}}) \end{aligned}$$

und somit gilt für den ersten Term in (4.2) die Abschätzung (4.4).

Den zweiten Term $\sum_{i \in I} a_i B_i$ von (4.2) reduzieren wir auf alle Summanden mit $i \in I(Q)$ und erhalten

$$\left\| \sum_{i \in I(Q)} a_i B_i \right\|_{l, Q \cap \Omega} \leq h^{-l} \left(\sum_{i \in I(Q)} |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq ch^{-l} (\max_{i \in I(Q)} |a_i|).$$

Wegen der Beschränktheit der dualen Funktionale Λ_i gilt

$$|a_i| \leq \|w(v - p)\|_{0, \tilde{Q}}$$

und mit (4.4) ($l = 0$)

$$\left\| \sum_{i \in I(Q)} a_i B_i^h \right\|_{l, Q \cap \Omega} \leq ch^{k-l} (\|u\|_{k, \tilde{Q}} + \|v\|_{k-1, \tilde{Q}}) \quad (4.5)$$

Mit (4.4) und (4.5) folgt nun für (4.2)

$$\|u - P_h u\|_{l, Q \cap \Omega}^2 \leq ch^{2(k-l)} (\|u\|_{k, \tilde{Q}}^2 + \|v\|_{k-1, \tilde{Q}}^2)$$

und mit dem Ergebnis von Lemma 29

$$\|v\|_{k-1} \leq c \|u\|_k$$

und der Summation über alle Gitterzellen folgt die Behauptung. \square

4.5 Fehlerabschätzung

In Kapitel 2.10 wurde bereits die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in H_\Gamma^1(\Omega)$ des Variationsproblems unter Annahme bestimmter Voraussetzungen gezeigt. Mit den im letzten Abschnitt hergeleiteten Abschätzungen und der Regularität der Lösung lassen sich nun Aussagen über die Konvergenz der Finite-Element-Näherung treffen.

Satz 31. *Sei $u \in H_\Gamma^1(\Omega) \cap H^p(\Omega)$ Lösung des Variationsproblems und sei $u_h \in \mathcal{B}$ die Finite-Element-Näherung durch Splines mit Grad n , dann gilt*

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch^s \|u\|_{1+s}$$

für $s \leq \min(n + 1, p) - 1$.

Beweis: Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist auf H_Γ^1 H_1 -elliptisch. Dann folgt mit dem Lemma von Céa

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{B}} \|u - v_h\|_1.$$

Insbesondere gilt mit Satz 30 und $P_h u \in \mathcal{B}$

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C}{\alpha} \|u - P_h u\|_1 \leq ch^s \|u\|_{1+s}$$

für $1 + s \leq \min(n + 1, p)$. \square

Wird der Fehler in der L^2 -Norm gemessen, so ist der Fehler der Interpolation nach Satz 30 um eine h -Potenz günstiger. Dass sich diese Eigenschaft auf die Galerkin-Näherung überträgt, zeigt die nächste Aussage.

Satz 32. *Seien die Voraussetzungen von Satz 31 erfüllt und sei das Problem H^2 -regulär. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^k \|u\|_k$$

für $0 < k \leq \min(n + 1, p)$.

Beweis: Mit $H := H^0(\Omega)$, $|\cdot| = \|\cdot\|_0$ und $V := H^1_\Gamma(\Omega)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ist die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig und das Aubin-Nitsche-Lemma anwendbar. Wegen der geforderten H^2 -Regularität des Problems folgt aus der Symmetrie der Bilinearform die H^2 -Regularität des dualen Problems. Damit gilt

$$\inf_{v \in \mathcal{B}_h} \|\varphi_g - v\|_1 \leq ch \|g\|_0,$$

und man erhält

$$\|u - u_h\|_0 \leq C'h \|u - u_h\|_1$$

und mit Satz 31 die Behauptung. □

Kapitel 5

Implementierung

Die Finite Elemente Methode der gewichteten erweiterten B-Splines wurde in einem Projekt [HAB⁺] von Diplomanden des Mathematischen Institutes A in MATLAB [Ker97] implementiert. Dabei wurde MATLAB gewählt, weil es sich aufgrund seines handlichen Matrixkonzepts und der vielfältigen graphischen Ausdrucksmöglichkeiten ideal für solch ein Projekt eignet.

5.1 Gliederung

Die hier vorgestellte Implementierung berechnet die Lösung des ebenen Spannungszustandes und des ebenen Verzerrungszustandes, wie sie in Kapitel 2 vorgestellt wurden.

Die Daten der partiellen Differentialgleichung müssen wie folgt vorhanden sein:

- Das Gebiet muss in der Form stückweiser Beziersegmente vorgegeben werden. Auf die Speicherstruktur wird hier nicht näher eingegangen, ist aber aus der zugehörigen Dokumentation [HAB⁺] ersichtlich.
- Die rechten Seiten der Differentialgleichung, sprich die Volumen- und die Flächenlast müssen als MATLAB-Funktionen gegeben sein.
- Des weiteren muss auch die Gewichtsfunktion, die die Dirichlet-Randbedingungen spezifiziert, und ihre ersten und zweiten Ableitungen als MATLAB-Funktion übergeben werden.

Außerdem muss selbstverständlich das Elastizitätsmodul und die Poissonzahl angegeben werden.

Das Programmpaket gliedert sich in verschiedene Bereiche, von denen die wichtigsten im folgenden näher angesprochen werden:

1. Gittergenerierung
2. Numerische Integration
3. Aufstellen des Galerkinsystems

4. Lösen des Galerkinsystems
5. Visualisierung der Ergebnisse

Bemerkung: Bei der Gittergenerierung wird ein regelmäßiges Gitter der Weite h über das Gebiet Ω gelegt. Sollte dabei eine Gitterlinie den Rand $\partial\Omega$ berühren oder sollte der Rand durch einen Gitterpunkt laufen, so kann das zu Stabilitätsproblemen führen. In diesem Fall muss das Gitter ein wenig verschoben werden.

Bemerkung: Um das Ergebnis der Berechnung geeignet zu visualisieren, wird die Lösung, die als Linearkombination der gewichteten Basisfunktionen des Ansatzraums vorliegt, an Gitterpunkten ausgewertet. Anschließend werden, falls gewünscht, die Vergleichsspannungen nach 2.8 berechnet.

Zur Verdeutlichung der Deformation wird diese skaliert dargestellt, wobei sich der Faktor aus der Größe des Gebietes und der maximalen Verschiebung berechnet.

5.2 Numerische Integration

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix müssen Integrale der Form

$$\int_{Q \cap \Omega} \tilde{B}_{i,\nu}^T D^T C D \tilde{B}_{j,\mu}$$

über Gitterzellen berechnet werden.

Aufgrund der krummlinigen Ränder und den wechselnden Gewichtsfunktionen ist diese Integration nur numerisch realisierbar. Ein weit verbreitetes Verfahren hierfür ist die Gauß-Integration [Hö98].

Dabei wird für $Q \subset \mathbb{R}^2$ das Integral

$$\int_Q f(x) dx \approx \sum_{l=1}^{n^2} w_l f(x_l)$$

approximiert. Hierbei sind die Gewichte w_l und die Stützstellen x_l für ein festes n auf dem Einheitsquadrat gegeben. Gitterzellen, die im Innern des Gebietes liegen, sind daher einfach zu behandeln. Schwieriger wird der Fall bei der Betrachtung von Gitterzellen, die nur teilweise in Ω liegen. Dort müssen die Stützstellen gemäß ihrer Verteilung auf dem Einheitsquadrat dem Gebiet $Q \cap \Omega$ angepasst werden [App01].

Bei der Berechnung der Randintegrale

$$\int_{Q \cap \Gamma_N} g(x) dx \approx \sum_{i=1}^k w_i g(x_i)$$

wird das Integral zuerst in alle auf $Q \cap \Gamma_N$ vorkommenden Beziersegmente aufgeteilt und jedes einzelne mit n Gaußknoten approximiert.

5.3 Aufstellen des Galerkinsystems

Betrachtet man die Eigenschaften der Galerkin-Matrix genauer, so fallen einige Dinge auf:

- Je höher der Splinegrad n gewählt wird, desto zahlreicher sind auch die Nichtnull-Einträge in jeder Spalte. In der zugehörigen Spalte einer weit im Inneren liegenden Basisfunktion sind $(2(2n+1))^2 = 16n^2 + 16n + 4$ Einträge $\neq 0$. Diese Zahl vergrößert sich aber, wird eine durch äußere Splines erweiterte Basisfunktion betrachtet.
- Eine Erhöhung des Splinegrades hat nur eine relativ geringe Vergrößerung des Ansatzraumes und damit der Galerkin-Matrix zufolge. Sei zum Beispiel ein Gitter der Größe (r,s) vorgegeben. Dann ist $G_h \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ mit $m \leq (r+n)(s+n)$, je nachdem wieviele äußere B-Splines auftreten oder wegfallen.
- Aufgrund der zweidimensionalen Ansatzfunktionen $B_{i,\nu}$ weist die Galerkin-Matrix G_h bei geeigneter Numerierung der Basisfunktionen eine Blockstruktur mit (2×2) -Blöcken auf.

Bei der Aufstellung der Galerkin-Matrix G_h lässt sich die oben genannte Blockstruktur ausnützen. Dazu müssen die Basisfunktionen zuerst in $i \in I$ und dann in $\nu \in \{1, 2\}$ sortiert werden. Im Folgenden werden wir von dieser Anordnung ausgehen.

Mit $m = |I|$ erhalten wir eine Galerkin-Matrix $G_h \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$, die aus (2×2) -Blockmatrizen $A_{i,j}$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ aufgebaut ist.

$$G_h = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}$$

Wegen der Symmetrie der Bilinearform ist $A_{j,i} = A_{i,j}^T$.

Betrachtet man nun einen Eintrag $A_{i,j}$ näher, so erhält man aus der Bilinearform in Matrixschreibweise:

$$A_{i,j} = \left\{ \int_{\Omega} (B_{i,\nu})^T D^T C D B_{j,\mu} \right\}_{\mu,\nu=1,2}$$

Da die Erweiterung der inneren B-Splines durch die äußeren einer linearen Abbildung von der Menge $\{B_{k,\nu}, k \in K, \nu = 1, 2\}$ auf die Menge $\{B_{i,\nu}, i \in I, \nu = 1, 2\}$ entspricht, lässt sich diese als Multiplikation mit einer geeigneten Erweiterungsmatrix E auffassen. Da bei der Erweiterung nur die randnahen Basisfunktionen betroffen sind, ist diese Matrix nur sehr schwach besetzt.

Obwohl die obige Darstellung einen Zusatzaufwand an Rechenleistung bedeutet, wird sie im weiteren Verlauf aufgrund ihrer Anschaulichkeit verwendet. Man erhält aus dem ursprünglichen System $G_h x = y$ mit

$$G_h = E M E^T \quad , \quad u = E^T x \quad \text{und} \quad y = E z$$

ein neues Gleichungssystem. Hierbei bezeichnet M die Galerkinmatrix, E die Erweiterungsmatrix aus Abschnitt 5.3.2 und z die rechte Seite des Gleichungssystems unter Verwendung gewichteter nichterweiterter B-Splines.

Damit ist das Aufstellen und das Lösen des Galerkinsystems in drei Schritte aufteilbar:

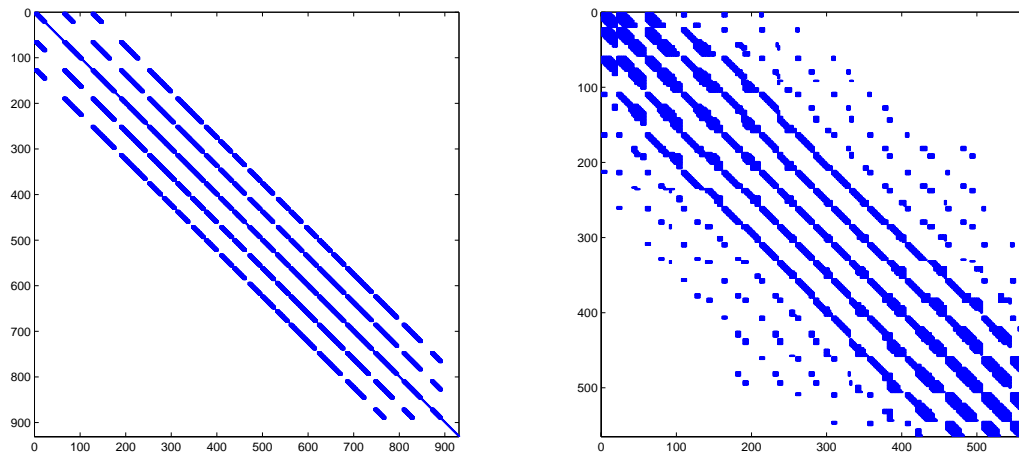


Abbildung 5.1: Belegungsstruktur der Galerkinmatrix, links des wb-Raums (32352 Nichtnull-Elemente), rechts des web-Raums (37426 Nichtnull-Elemente)

1. Aufstellen der Galerkinmatrix und der rechten Seite für gewichtete nichterweiterte B-Splines (wb-Splines)
2. Berechnen der Erweiterungsmatrix
3. Berechnen und Lösen des erweiterten Systems und Rücktransformation der Lösung

Dabei ist die Rücktransformation $u = E^T x$ nur nötig, wenn die Lösung wieder als Linearkombination gewichteter nichterweiterter B-Splines dargestellt werden soll. Dies hat den Vorteil, dass nach der Lösung des Galerkinsystems die Erweiterungsmatrix dann nicht weiter benötigt wird.

Betrachtet man die Struktur der nichterweiterten bzw. der erweiterten Galerkinmatrix in Abbildung 5.1 genauer, so erkennt man bei der nichterweiterten sofort die Bandstruktur. Dabei sind einzelne Bänder zu erkennen, deren Anzahl $2n + 1$ von der Wahl des Splinegrades abhängen. Da ein gegebener Spline eine Trägergröße von $(n + 1) \times (n + 1)$ hat, sind zu beiden Seiten der Hauptdiagonale n solcher Bänder vorhanden. Im rechten Bild ist die Struktur der erweiterten Galerkinmatrix dargestellt. Obwohl man es hier nicht so deutlich sieht, hat auch diese Matrix eine Bandstruktur, die allerdings eine weit größere Breite hat.

5.3.1 Galerkinmatrix der wb-Splines

Die Berechnung der nichterweiterten Galerkinmatrix M erfolgt durch eine Schleife über alle Gitterzellen. Dabei werden alle B-Splines betrachtet, in deren Träger die aktuelle Gitterzelle Q liegt. Dies entspricht der Betrachtung des $(2n + 1) \times (2n + 1)$ -Feldes mit Q im Zentrum. Die Addition aller Teilergebnisse liefert die Steifigkeitsmatrix.

Betrachtet man nun ein Gitterzelle Q genauer, so muss für zwei wb-Splines $\tilde{B}_{i,\nu}$ und $\tilde{B}_{j,\mu}$ der Beitrag $T_{i,j,Q}$ von Q zur Untermatrix $\tilde{A}_{i,j}$ durch Integration über diese eine Gitterzelle berechnet werden:

$$T_{i,j,Q} = \left\{ \int_{Q \cap \Omega} \tilde{B}_{i,\nu}^T D^T C D \tilde{B}_{j,\mu} \right\}_{\mu,\nu=1,2} .$$

Wegen der Symmetrie $T_{i,j,Q} = T_{j,i,Q}^T$ kann man sich auf $j \geq i$ beschränken. Durch weiteres Ausrechnen erhält man

$$\begin{aligned} T_{i,j,Q} &= \alpha \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \int_{Q \cap \Omega} \partial_1(wb_i) \partial_1(wb_j) \\ &\quad + \alpha \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \int_{Q \cap \Omega} \partial_2(wb_i) \partial_2(wb_j) \\ &\quad + \alpha \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} \int_{Q \cap \Omega} \partial_1(wb_i) \partial_2(wb_j) \\ &\quad + \alpha \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \int_{Q \cap \Omega} \partial_2(wb_i) \partial_1(wb_j). \end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten α , c_1 und c_2 für den ebenen Spannungszustand

$$\alpha = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu)$$

und für den ebenen Verzerrungszustand

$$\alpha = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad c_1 = 1 - \nu, \quad c_2 = \frac{1}{2}(1 - 2\nu).$$

Analog läßt sich auch die Berechnung der rechten Seite z des Gleichungssystems auf die skalaren B-Splines zurückführen. So ist mit der bereits verwendeten Nummerierung $z \in \mathbb{R}^{2m}$ aus m Spaltenvektoren z_i der Länge 2 aufgebaut. Hierbei bietet sich wieder die zellweise Betrachtung

$$z_i = \sum_Q z_{i,Q}$$

an. In der Schleife über alle Gitterzellen Q wird für alle B-Splines, deren Träger Q enthält,

$$z_{i,Q} = \left\{ \int_{Q \cap \Omega} f \tilde{B}_{i,\nu} + \int_{Q \cap \Gamma_N} g \tilde{B}_{i,\nu} \right\}_{\nu=1,2}$$

berechnet. Mit der komponentenweisen Betrachtung der Kräfte $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ und $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ folgt dann unter Verwendung skalarer B-Splines

$$z_{i,Q} = \begin{pmatrix} \int_{Q \cap \Omega} f_1 wb_i + \int_{Q \cap \Gamma_N} g_1 wb_i \\ \int_{Q \cap \Omega} f_2 wb_i + \int_{Q \cap \Gamma_N} g_2 wb_i \end{pmatrix}.$$

Hier ist zu beachten, dass in den vorangegangenen Formeln für $T_{i,j,Q}$ und $z_{i,Q}$ die skalaren Basisfunktionen b_i auftreten. Damit muss zur numerischen Berechnung der Schritt von b_i zu $b_{i,\nu}$ nicht ausgeführt werden.

Die Integrale über die wb-Splines werden, wie im letzten Abschnitt dargestellt numerisch bestimmt. Wegen der krummlinigen Ränder und da die Gewichtsfunktion oft nicht exakt durch ein Polynom darstellbar ist, kann die Integration über eine Quadraturformel nicht exakt sein. Stattdessen muss eine für die Berechnung hinreichend große Anzahl von Stützstellen gewählt werden.

Wegen der Trägergröße der gewichteten, nichterweiterten B-Splines von $(n+1)^2$ Gitterzellen hat die Galerkinmatrix der wb-Splines in jeder Zeile höchstens $4(2n+1)^2$ Einträge $\neq 0$. Die Bandbreite hängt von der Anzahl (r, s) der Gitterzellen ab und beträgt maximal $2n \max(r, s) + 2n + 2$. Diese Bandstruktur lässt sich in Abbildung 5.1 gut erkennen.

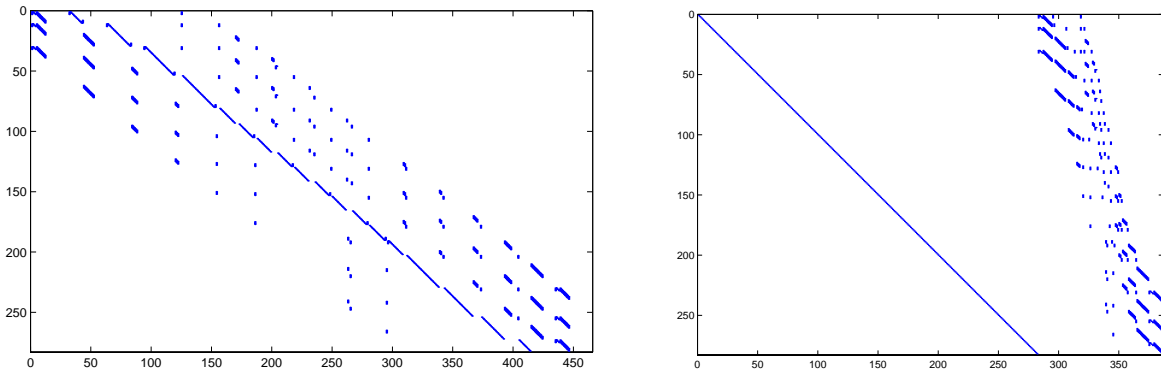


Abbildung 5.2: Erweiterungsmatrix, links global nummeriert, rechts nach I und J (1098 Nichtnull-Elemente)

5.3.2 Erweiterungsmatrix

Das Aufstellen der Erweiterungsmatrix erfolgt sukzessive, indem für jeden äußeren B-Spline b_j die Indexmenge $I(j)$ berechnet wird. Hierbei repräsentiert $I(j)$ das $(n + 1) \times (n + 1)$ -Feld innerer B-Splines, das bezüglich der Maximumsnorm am nächsten an j liegt. Nach Satz 11 können dann die Werte $e_{i,j}$ durch Auswertung geeigneter Lagrange polynome berechnet werden.

Außerdem müssen für alle inneren B-Splines b_i , $i \in I$ die Indizes $l(i)$ so bestimmt werden, dass der Träger des dualen Funktionals λ_i in Ω möglichst nahe am Mittelpunkt des B-Spline-Trägers liegt. Dieses Ergebnis benötigt man zur Berechnung des Skalierungsfaktors $\frac{1}{w(x_i)}$.

Die sich daraus ergebende Erweiterung bezieht sich aber bislang nur auf die B-Splines b_k . Deshalb muß bei der Aufstellung der Erweiterungsmatrix E beachtet werden, dass erstens $e_{i,j}$ nicht von $\nu \in \{1, 2\}$ abhängt und zweitens auch keine Erweiterung von $B_{i,\nu}$ durch $B_{j,\mu}$, $\mu \neq \nu$ erfolgt. Damit ergibt sich, unter Verwendung der bei der Aufstellung der nichterweiterten Galerkinmatrix angenommenen Nummerierung, die Matrix E mit

$$E(i, k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ e_{i/2, k/2} & \text{für } i, k \text{ gerade, } k \text{ äußerer Spline} \\ e_{(i-1)/2, (k-1)/2} & \text{für } i, k \text{ ungerade, } k \text{ äußerer Spline} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i \in \{1, 2, \dots, 2|I|\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, 2|K|\}$.

In Abbildung 5.2 ist die Belegungsstruktur der Erweiterungsmatrix unter Verwendung quadratischer Splines ($n = 2$) dargestellt. Die beiden Bilder verdeutlichen die geringe Anzahl der Nichtnull-Elemente. Dabei wurde bei dem linken Bild eine globale Nummerierung verwendet. Hierunter versteht man die lexikographische Nummerierung aller auf dem Gitter vorkommenden Splines, auch jener, deren Träger überhaupt nicht in Ω liegen. Die Bandstruktur erklärt sich durch die Wahl der Menge $I(j)$.

Im rechten Bild dagegen wurden zuerst die inneren und dann die äußeren Splines durchnummeriert (die Splines, die weder innere noch äußere sind, wurden hier nicht berücksichtigt). Hier kann man gut die Struktur der Erweiterung sehen. Jeder erweiterte Spline

ist eine Linearkombination aus sich selbst und mehreren äußeren. Dadurch entsteht diese Blockstruktur mit einer Diagonalmatrix an erster Stelle.

5.4 Lösen des Galerkinsystems

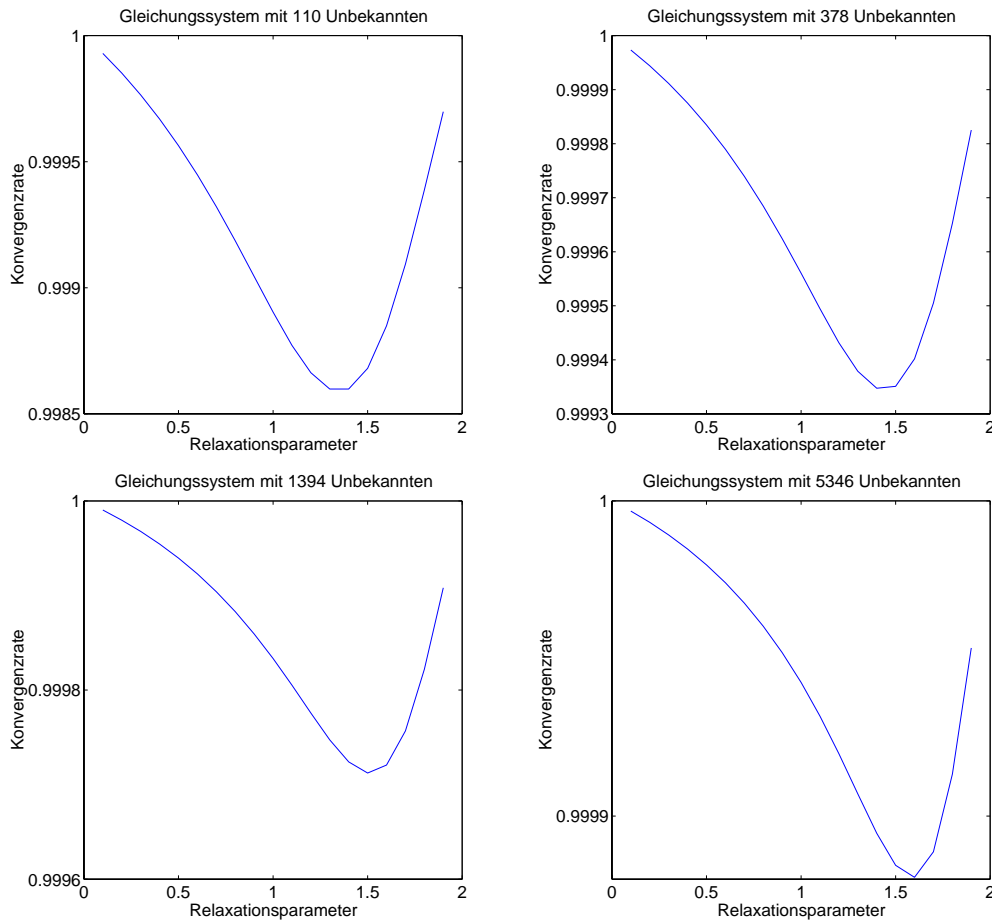


Abbildung 5.3: Konvergenzraten des Lösers in Abhängigkeit von ω unter Verfeinerung des Gitters

Nachdem die Galerkinmatrix und die rechte Seite aufgestellt wurden, muss nun die Lösung x des Gleichungssystems

$$G_h x = y$$

berechnet werden.

Die Wahl des Lösers hängt von der Eigenschaft der Matrix ab. So wird zwischen den beiden Fällen

- Γ_D hat positives eindimensionales Maß, d.h. G_h ist positiv definit
- reines Neumann-Problem, d.h. $\dim \ker G_h > 0$

unterschieden.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass G_h positiv definit ist. Dann kann das Gleichungssystem mit dem iterativen PCG-Verfahren mit SSOR-Vorkonditionierung gelöst werden,

dass hier kurz vorgestellt wird:

Die Matrix G_h ist symmetrisch und damit zerlegbar in

$$G_h = D + L + L^T,$$

wobei D eine Diagonalmatrix und L eine untere Dreiecksmatrix ist. Somit lässt sich die Matrix C der SSOR-Vorkonditionierung

$$C = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D + \omega L)D^{-1}(D + \omega L^T)$$

angeben (vgl. [Hö98]). Hierbei ist $\omega \in (0, 2)$ der Relaxationsparameter.

Des weiteren kann C als Multiplikation zweier Dreiecksmatrizen C_1 und C_2 mit

$$\begin{aligned} C_1 &= (D + \omega L^T) \\ C_2 &= \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D + \omega L)D^{-1} \\ C &= C_2 C_1 \end{aligned}$$

betrachtet werden.

Damit ergibt sich eine Iterationsvorschrift [Bra97]:

Startwerte:

$$\begin{aligned} x^0 & \text{ Startvektor, } g^0 = G_h x^0 - y, \\ h^0 & = C_1^{-1}(C_2^{-1} g^0), d^0 = -h^0, \\ \mu^0 & = \langle g^0, h^0 \rangle \end{aligned}$$

Iteration:

$$\begin{aligned} a^k & = G_h d^k \\ \lambda_k & = \mu_k / \langle d^k, a^k \rangle \\ x^{k+1} & = x^k + \lambda_k d^k \\ g^{k+1} & = g^k + \lambda_k a^k \\ h^{k+1} & = C_1^{-1}(C_2^{-1} g^{k+1}) \\ \mu^{k+1} & = \langle g^{k+1}, h^{k+1} \rangle \\ d^{k+1} & = -h^{k+1} + (\mu^{k+1} / \mu^k) d^k \end{aligned}$$

Die optimale Wahl des Relaxationsparameters hängt stark von Ω und der gewählten Gitterweite ab. In Abbildung 5.3 erkennt man sofort, dass sich mit zunehmender Verfeinerung des Gitters der optimale Relaxationsparameter ω_{opt} verändert. Dabei ist in y-Richtung der Spektralradius der Iterationsmatrix $I - C^{-1}G_h$ aufgezeichnet.

In Abbildung 5.4 sind die Anzahl der Iterationen und die Entwicklung der Rechenzeit verdeutlicht. Trotz der schwankenden Iterationszahl erkennt man die Tendenz, dass bei Zunahme des Splinegrades auch die Iterationszahl steigt. Dies ist aufgrund der steigenden Bandbreite nicht verwunderlich. Die Abnahme des Fehlers, dessen Verlauf typisch für das pcg-Verfahren ist, ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Liegt ein reines Neumann-Problem vor, so ist G_h nicht positiv definit und wird deshalb nicht mit dem Verfahren konjugierter Gradienten gelöst. Stattdessen greift man auf das MINRES-Verfahren [Fis96] zurück, wobei auch hier eine Vorkonditionierung mit SSOR wie oben beschrieben, sinnvoll erscheint.

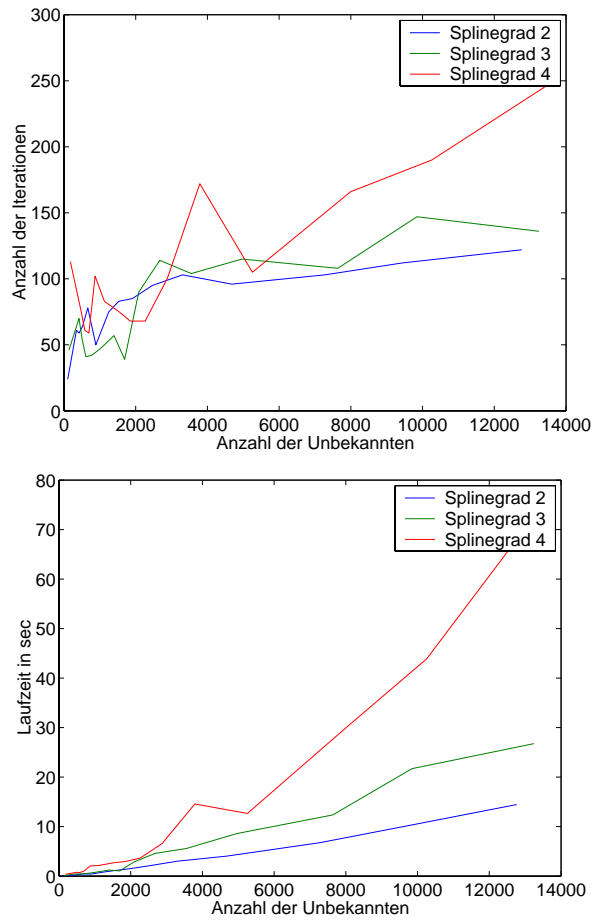


Abbildung 5.4: oben: Anzahl der Iterationen bei verschiedenen Splinegraden, unten: Laufzeit des Lösers (1.4GHz-Prozessor)

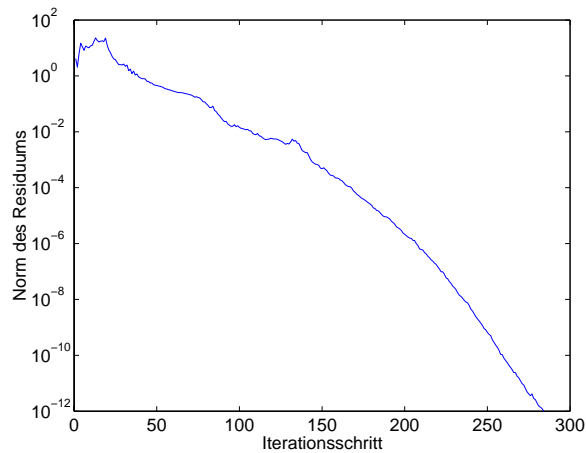
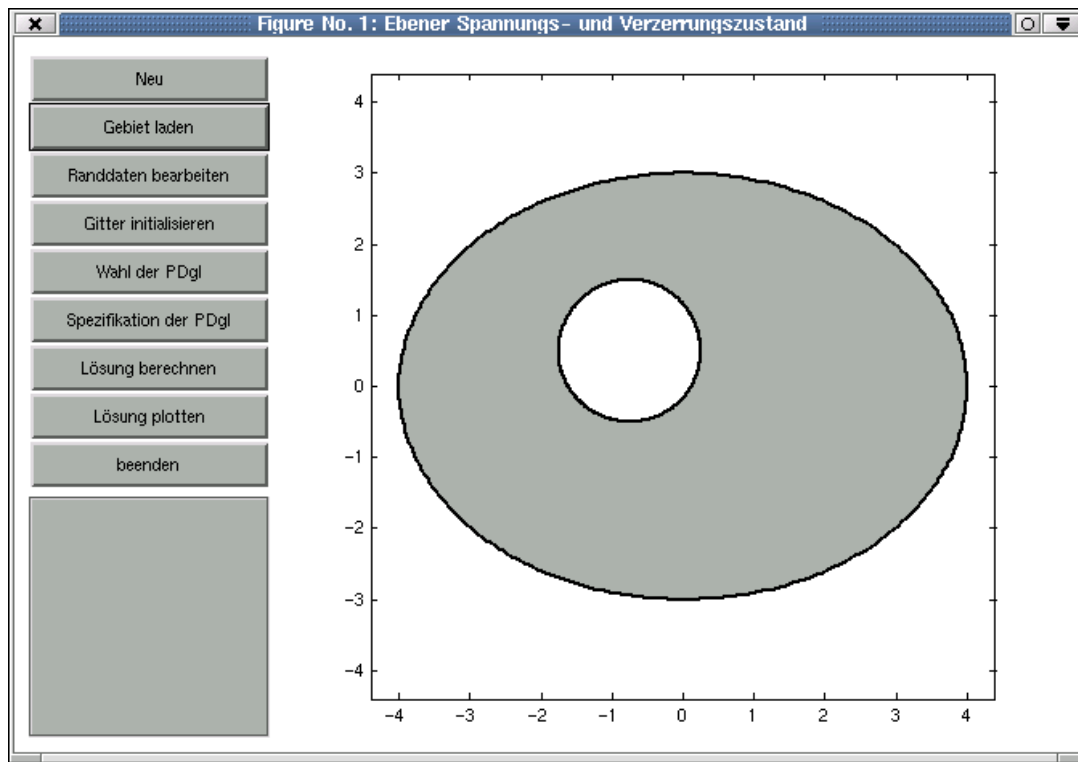


Abbildung 5.5: Abnahme des Fehlers im Laufe der Iteration

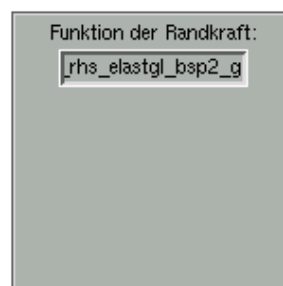
5.5 Benutzeroberfläche

Zur einfachen Bedienung der Programme wurde eine Benutzeroberfläche implementiert, die einen Großteil der von den Programmen erlaubten Flexibilität beinhaltet.

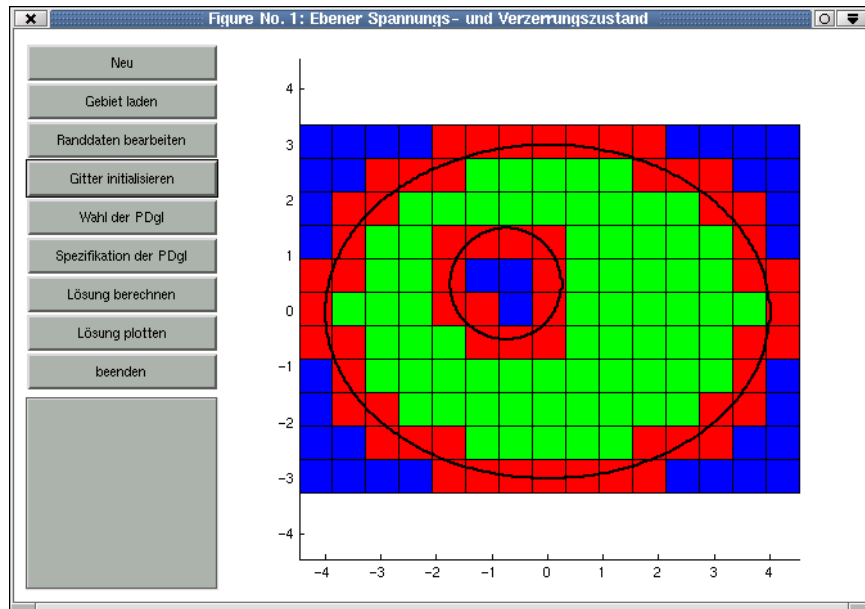


Im Folgenden soll die Benutzung dieser Oberfläche kurz erläutert werden, indem anhand eines Beispiels die einzelnen Schritte ausgeführt werden.

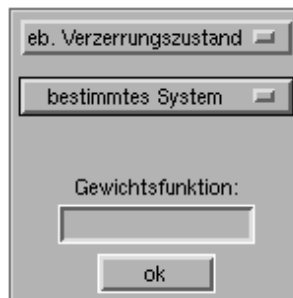
1. Gebiet laden: Auswahl der entsprechenden Datei in dem sich öffnenden Fenster. Das Gebiet wird in dem Achsenkreuz dargestellt (siehe oben). Dabei muss das Gebiet, das gegebenenfalls vorher mit einem Editor erstellt wurde, in einer Datei abgespeichert sein.
2. Randdaten bearbeiten: links unten erscheint eine Eingabezeile, in die der Funktionsname der Randlast eingetragen werden muss.



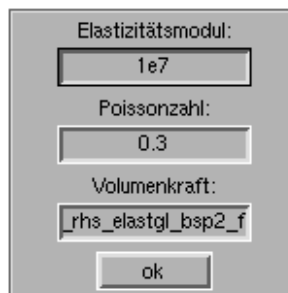
3. Gitter initialisieren: Eingabe der Gitterweite links unten. Daraufhin wird das Gitter berechnet und im Achsenkreuz dargestellt.



4. Wahl der PDgl: Wahl zwischen ebenem Spannungs- und Verzerrungszustand und gegebenenfalls Angabe der Gewichtsfunktion. Die Angabe der Gewichtsfunktion entfällt, wenn eine reines Neumannproblem vorliegt. Dieser Fall entspricht dem unbestimmten System.



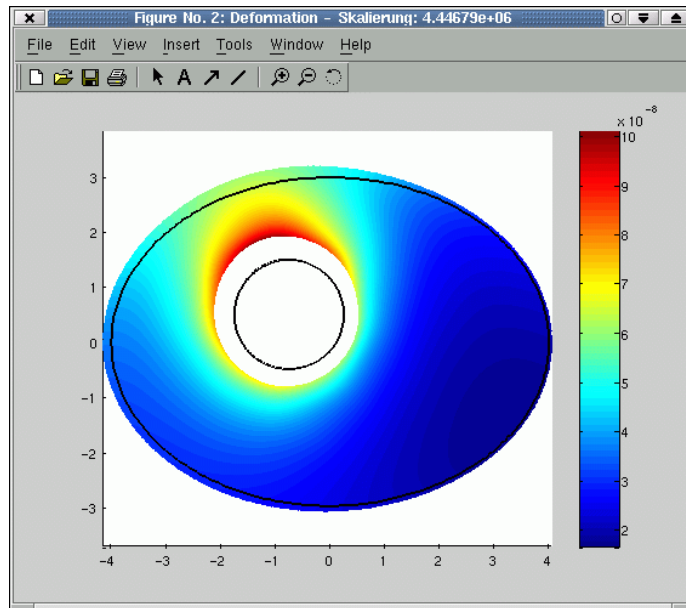
5. Spezifikation der PDgl: Angabe des Elastizitätsmoduls, der Poissonzahl und der Volumenlast.



6. Lösung berechnen
7. Lösung plotten: Es besteht die Wahl zwischen der Verschiebung, der Verschiebungsnorm, der max. Hauptspannung, der von Mises-Spannung und der max. Schubspannung.



Als Ergebnis wird dann die Lösung in einem neuen Fenster dargestellt.



Kapitel 6

Numerische Resultate

6.1 Experimentelle Verifikation der Fehlerordnung

Die im letzten Kapitel bewiesenen Fehlerordnungen (Satz 31 und Satz 32) werden nun anhand einiger Beispiele veranschaulicht. Dabei spielt die Regularität der Lösung, wie schon in Abschnitt 4.2 beschrieben, eine wichtige Rolle.

Bemerkung: Die hier aufgeführten Fehler sind relative Fehler und ergeben sich, sofern die exakte Lösung u vorgegeben ist, aus

$$e_h = \frac{\|u_h - u\|_m}{\|u\|_m}.$$

Andernfalls wird der Fehler von u_h zu der vorhergehenden Berechnung $u_{h/2}$ auf einem größeren Gitter berechnet:

$$e_h = \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_m}{\|u_{h/2}\|_m}.$$

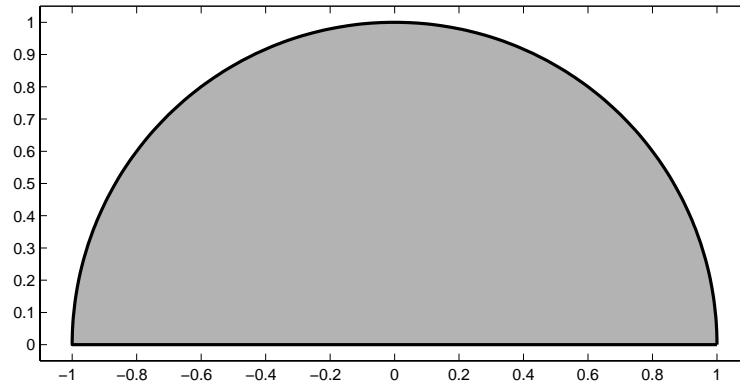
Die Konvergenzordnungen ergeben sich aus

$$c = \log_2 \frac{e_h}{e_{h/2}}.$$

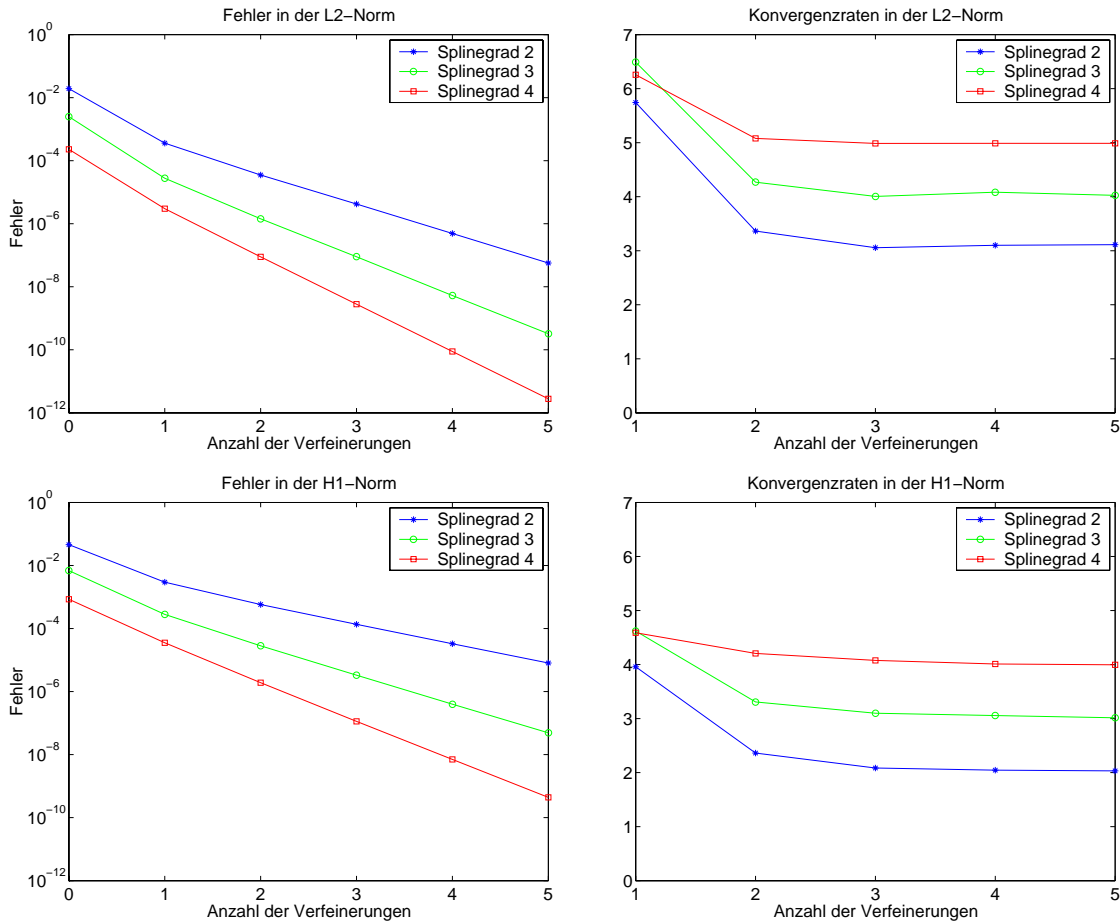
Betrachten wir zuerst den Fall, dass eine beliebig glatte Lösung auf einem Gebiet vorgegeben sei. Hier wurde als Gebiet ein Halbkreis gewählt, dessen Geradenstück auf der x-Achse liegt und eingespannt ist.

Als Gewichtsfunktion ist daher $w(x, y) = y$ zu wählen. Die vorgegebene Lösung u lautet

$$u(x, y) = w(x, y) \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \begin{pmatrix} e^x / (1 + y) \\ xe^y \end{pmatrix}.$$



Obwohl das Gebiet Ω nur C^0 ist, ist durch die Vorgabe der glatten Lösung $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ für ein hinreichend großes m . Dann ergeben sich die erwarteten Fehlerordnungen in der L^2 - und der H^1 -Norm.



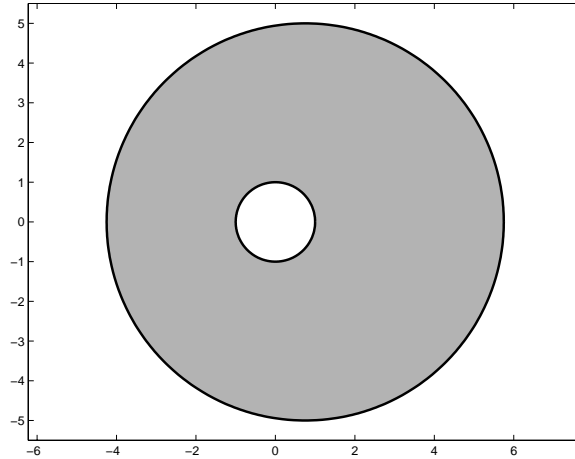
Greift man als Beispiel den Fehler in der H^1 -Norm und Splinegrad $n = 2$ des Ansatzraumes heraus, so ergibt sich das berechnete Resultat h^2 aus

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch^s \|u\|_{1+s}$$

mit $s = \min(3, m) - 1 = 2$ und hinreichender Glattheit der Lösung u (hier $u \in H^3(\Omega)$).

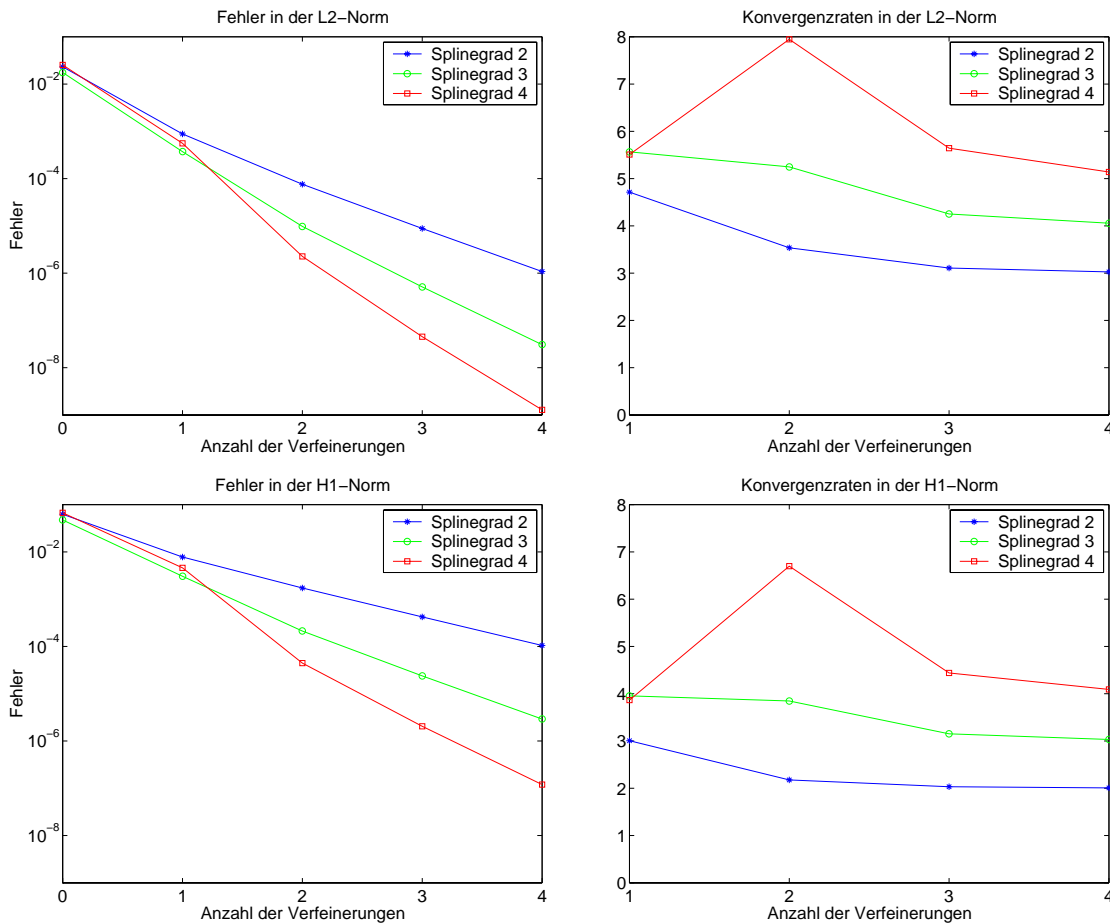
Als weiteres Beispiel für eine glatte Lösung werden die in Abschnitt 4.2 angesprochenen

Voraussetzungen erfüllt, indem als Gebiet der Kreisring zwischen zwei nicht konzentrisch liegenden Kreisen gewählt wird.



Dabei ist der innere Kreis fest eingespannt und es wirkt eine Volumenkraft vom Ursprung weg, die einer Rotation um den Ursprung und der damit verbundenen Zentrifugalkraft entspricht.

Aufgrund der Glattheit des Gebietsrandes und der Kräfte f und g und da sich die Abschlüsse der Randtypen nicht schneiden, ist auch die Glattheit der Lösung u gegeben. Und so ergeben sich, wie oben auch, die Fehler und Konvergenzordnungen.



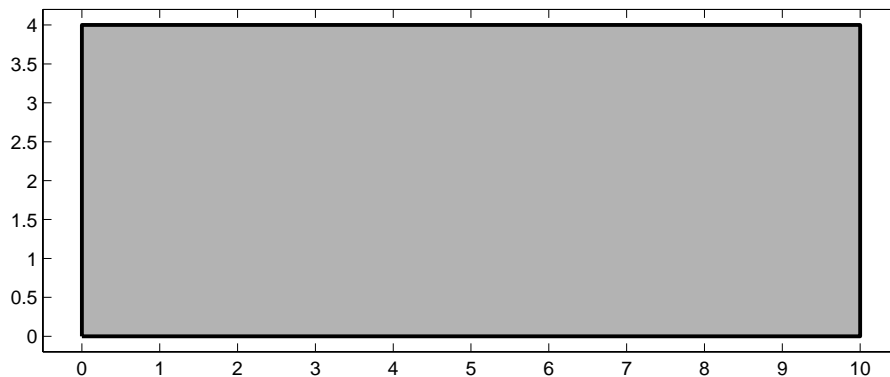
6.2 Fehlerordnung bei Singularitäten

Ein Rechteck

$$R := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 4\},$$

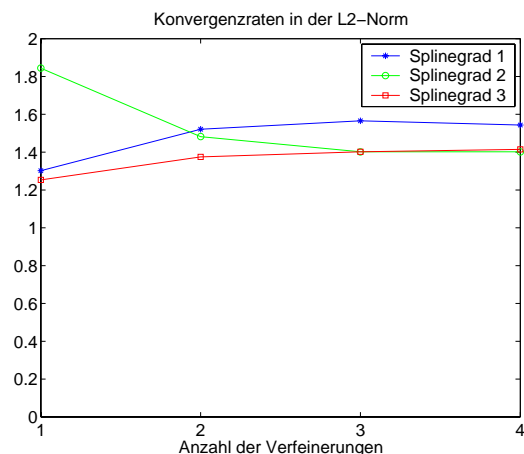
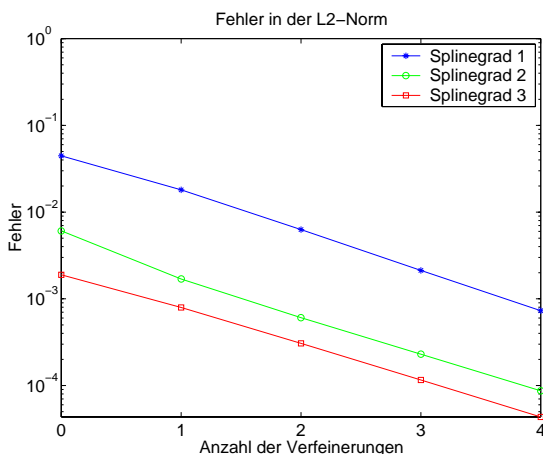
dass am linken Rand (auf der y-Achse) eingespannt ist, wird durch seine Gewichtskraft deformiert.

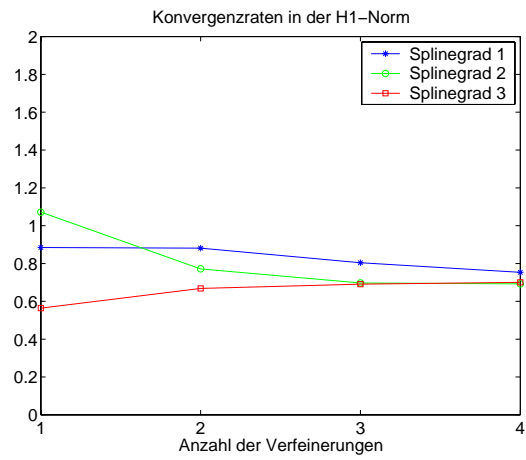
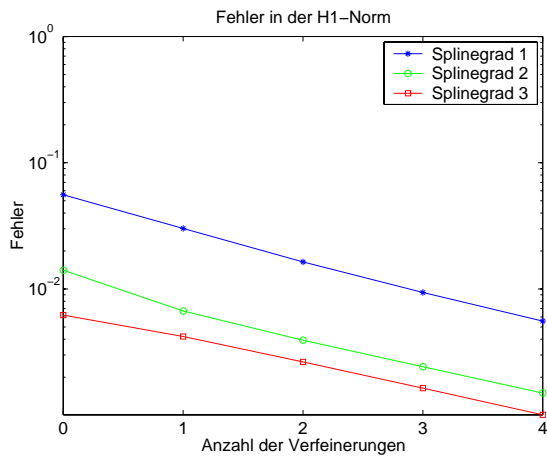
An den Punkten $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (0, 4)$ entstehen Singularitäten, die die Konvergenzordnung der Finiten Elemente Approximation beeinflussen.



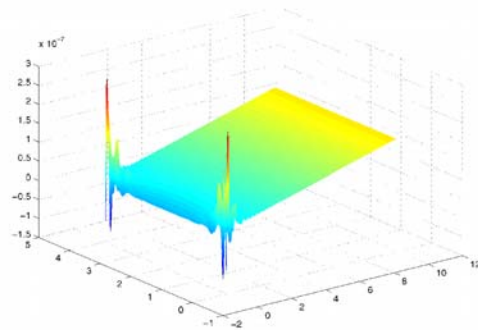
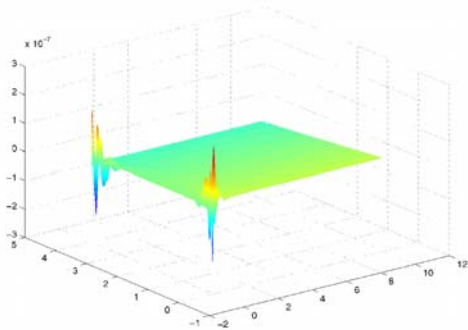
Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz garantiert uns eine Lösung in $H^1_{\Gamma}(\Omega)$ und somit eine Konvergenzordnung des L^2 -Fehlers von h^1 . Wie man aber bei der experimentellen Betrachtung feststellt, wird sogar eine Ordnung von etwa $h^{1.4}$ erreicht. Auf eine genauere Untersuchung rationaler Konvergenzordnungen wird hier aber verzichtet.

Anhand der gefunden Konvergenzordnungen ergibt sich sofort, dass die Verwendung von Splinegraden höher als $n = 1$ nicht sinnvoll ist, da man wegen der fehlenden Regularität der Lösung kaum bessere Ergebnisse mit ihnen erzielen würde.





Bei der Betrachtung des Fehlers auf dem Gebiet werden die Singularitäten an den Punkten P_1 und P_2 deutlich. Dabei ist links der Fehler der x-Komponente und rechts der Fehler der y-Komponente von u dargestellt.

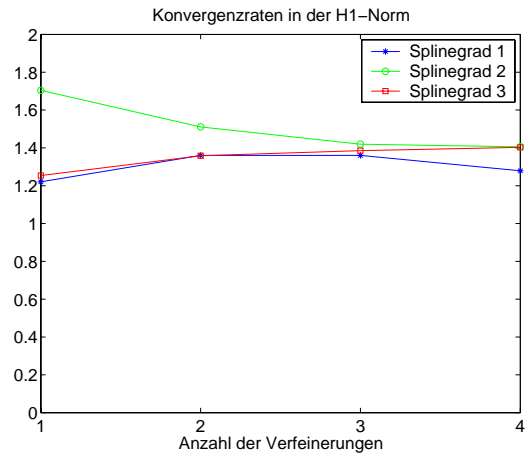
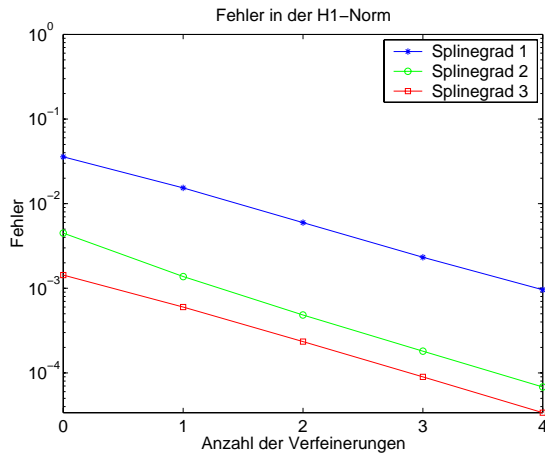
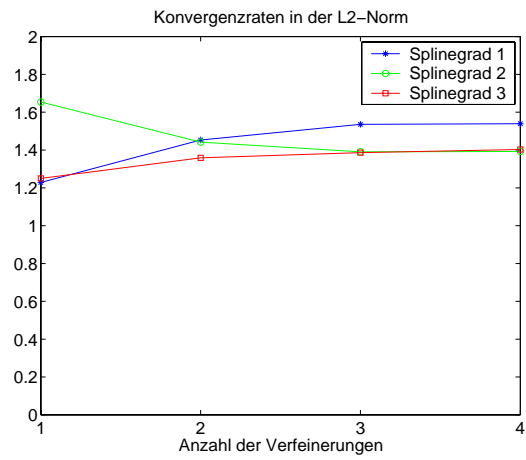
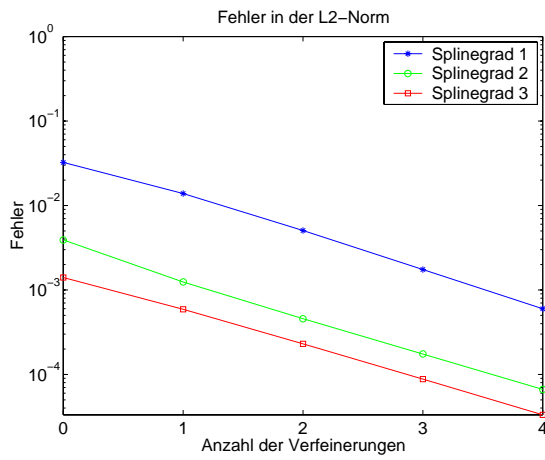


6.3 Regularität im Innern des Gebietes

Im Innern des Gebietes hat die Lösung zusätzliche Regularität. Betrachten wir bei dem vorherigen Beispiel nur die Teilmenge

$$R' := \{x \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x_1 \leq 8, 1 \leq x_2 \leq 3\},$$

so ergeben sich die unten stehenden Fehler und Konvergenzraten. Dabei fällt auf, dass sich die Konvergenzrate in der L^2 -Norm nicht verändert hat. In der H^1 -Norm hat sich die Ordnung aber bis zu der der L^2 -Norm verbessert.

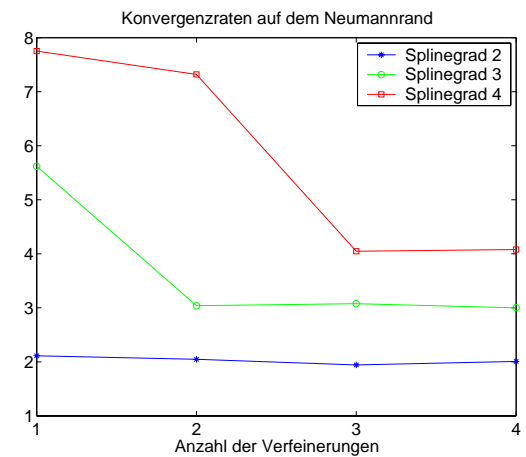
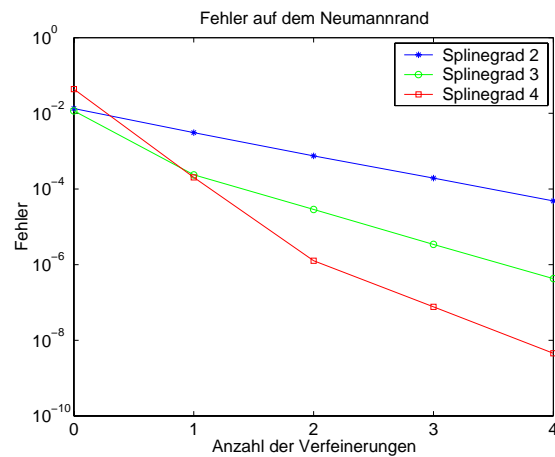


6.4 Fehler auf dem Neumannrand

Bei der Fehlerbetrachtung muss auch untersucht werden, wie gut die gegebenen Randbedingungen approximiert werden.

Die Gewichtsfunktion sichert uns die exakte Einhaltung der homogenen Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ auf Γ_D . Anders verhält es sich mit der auf Γ_N vorgegebenen Bedingung $\sigma n = g$. Diese wird im Folgenden an zwei Beispielen untersucht.

Als erstes Beispiel dient wieder die hinreichend glatte Lösung über dem Gebiet des Kreisrings aus Abschnitt 6.1.



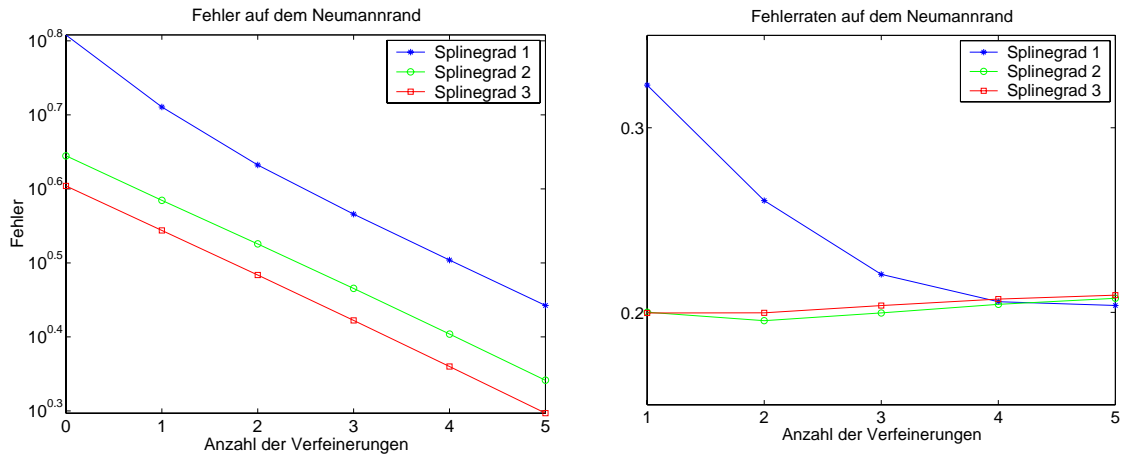
Links ist der relative Fehler

$$\frac{\|\sigma_n - g\|_{0,\Gamma_N}}{\|f\|_0}$$

und rechts dessen Konvergenzordnung dargestellt.

Hier erfolgt die Approximation der Randbedingungen mit gleicher Ordnung wie die Approximation auf dem gesamten Gebiet.

Im Beispiel des links eingespannten Rechtecks aus 6.2 ist dies nicht mehr der Fall. Die Betrachtung des Randfehlers liefert eine schlechtere Konvergenz als auf dem Gebiet.



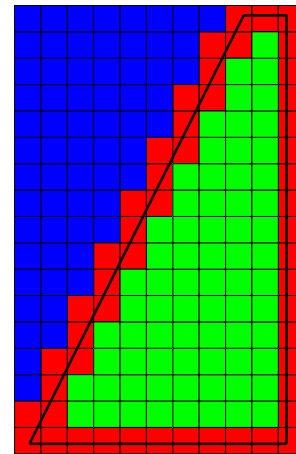
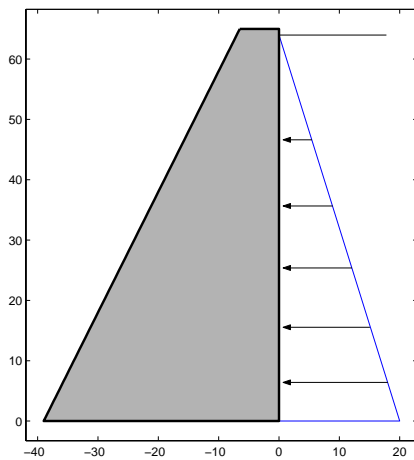
Kapitel 7

Anwendungsbeispiele

7.1 Querschnitt eines Damms

Betrachtet wird ein vereinfachtes Modell eines Damms, dessen Querschnitt und dessen Belastung sich nicht ändert.

Untersucht man die Verschiebungen und die Spannungen in dem Damm, so kann der ebene Verzerrungszustand angenommen werden. Dabei besitzt das Ergebnis aufgrund der zweidimensionalen Betrachtung nur ab einem gewissen Abstand zum Dammsende Aussagekraft.



Der Damm wird durch die eigene Gewichtskraft und die Wasserkraft deformiert, wobei letztere, wie aus obigem Bild ersichtlich, linear mit der Wassertiefe ansteigt.

Dabei errechnet sich die Gewichtskraft der Staumauer für eine angenommene Dichte $\rho = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ des Betons durch

$$f = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24000 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}^3} .$$

Der Wasserdruck, der auf die rechte Seite des Damms wirkt, ergibt sich aus

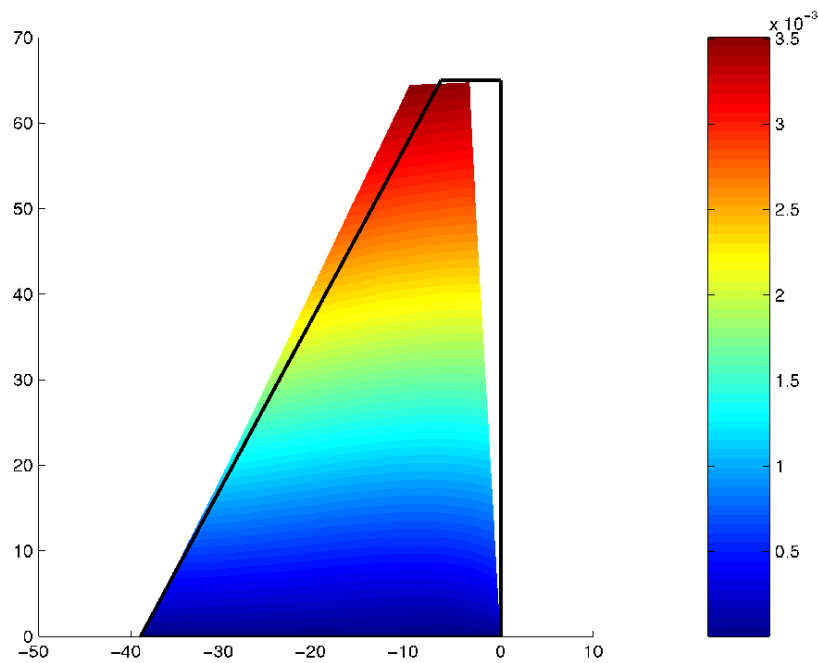
$$g(h) = \begin{pmatrix} -10^4 h + 64e4 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

Dabei wurde verwendet, dass der Wasserspiegel bei 64 Meter liegt, und der Wasserdruck pro Meter Wassertiefe um $10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ zunimmt.

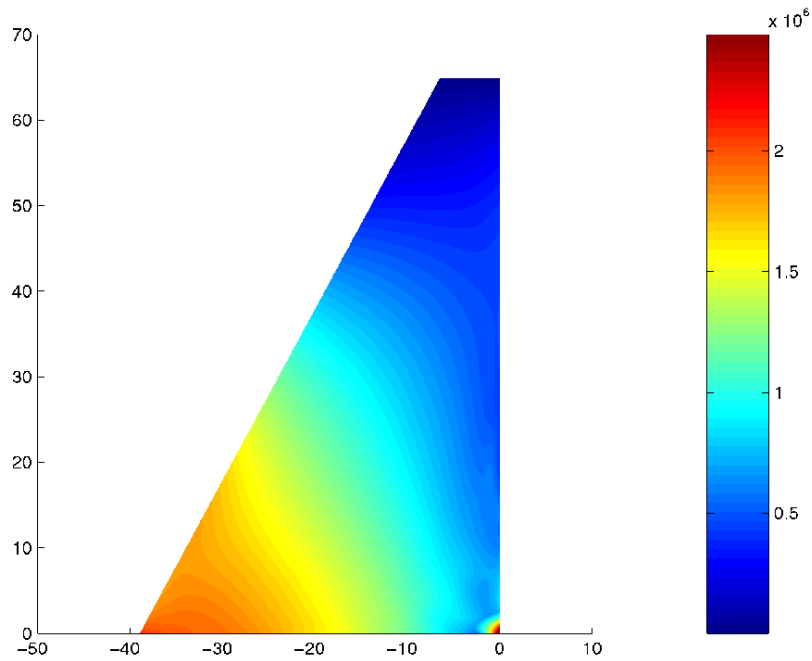
Rechts ist das verwendete Gitter abgebildet. Als Gewichtsfunktion wurde der Abstand zum Fuß des Dammes verwendet, wobei angenommen wurde, dass der Damm am Grund fest eingespannt ist.

Gewichtsfunktion	$w(x, y) = y$
Elastizitätsmodul	$E = 3e10$
Poissonzahl	$\nu = 0.25$
Volumenlast	$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -24000 \end{pmatrix}$
Flächenlast	$g(x, y) = \begin{pmatrix} 10000(y - 64) \\ 0 \end{pmatrix}$
Gitterweite	$h = 4$

Aus der Berechnung ergeben sich folgende Ergebnisse, wobei die Deformation zur Verdeutlichung skaliert dargestellt ist:



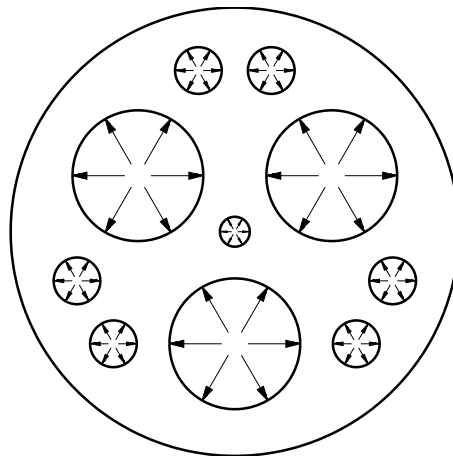
Deformation des Dammes (Skalierungsfaktor: 969)



Max. Hauptspannung im Damm

Bei der Spannung wird die Singularität der Lösung in den beiden unteren Eckpunkten deutlich. Dies liegt am Übergang von der Dirichlet- zur Neumann-Randbedingung. Aufgrund der gewählten Gitterweite von $h = 4$ wird dies am linken Punkt nicht so deutlich sichtbar.

7.2 Querschnitt eines Druckbehälters



Als zweites Beispiel wird ein Druckbehälter betrachtet, dessen Querschnitt aus der Abbildung der Gitterzerlegung und der angreifenden Kräfte ersichtlich ist [Han73]. Aufgrund der geometrischen Beschaffenheit, sprich dass sich der Querschnitt und die Belastung in einer Richtung nicht ändern, findet der ebene Verzerrungszustand Anwendung.

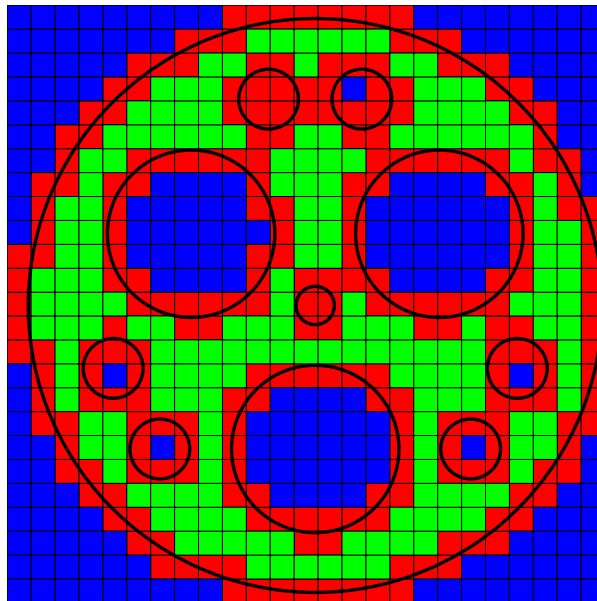
Bei dem hier betrachteten Beispiel wirkt in allen Öffnungen ein konstanter Druck von

$40 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ radial nach außen.

Zur Berechnung der Verschiebungen wurden folgende Werte zugrunde gelegt. Wegen ihrer Komplexität wird hier allerdings auf die Angabe der Flächenlast verzichtet.

Gewichtsfunktion	$w(x, y) = 1$
Elastizitätsmodul	$E = 2e7$
Poissonzahl	$\nu = 0.3$
Volumenlast	$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Flächenlast	
Gitterweite	$h = 100$

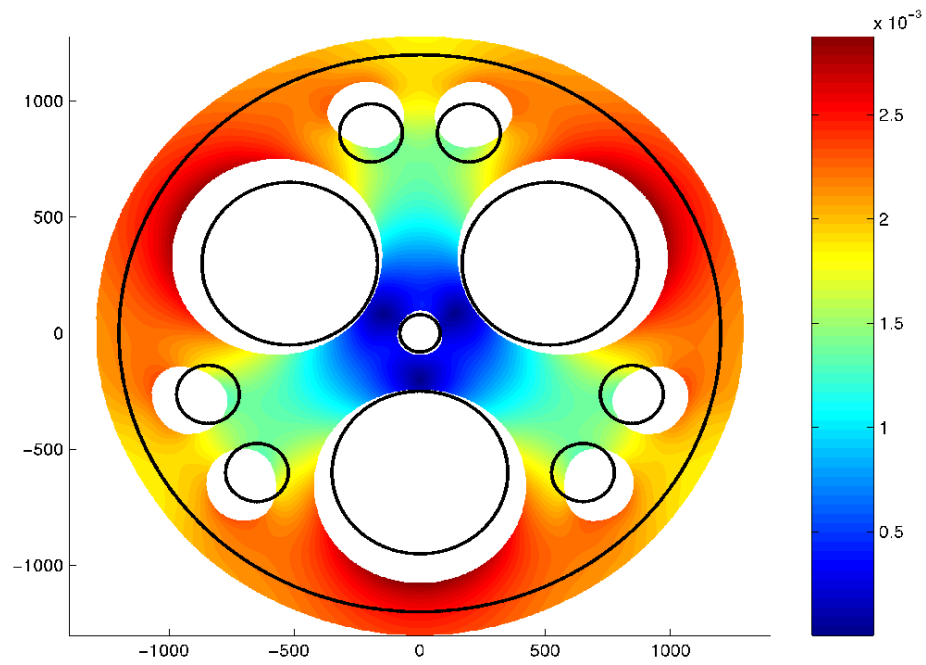
Die Gittergenerierung liefert



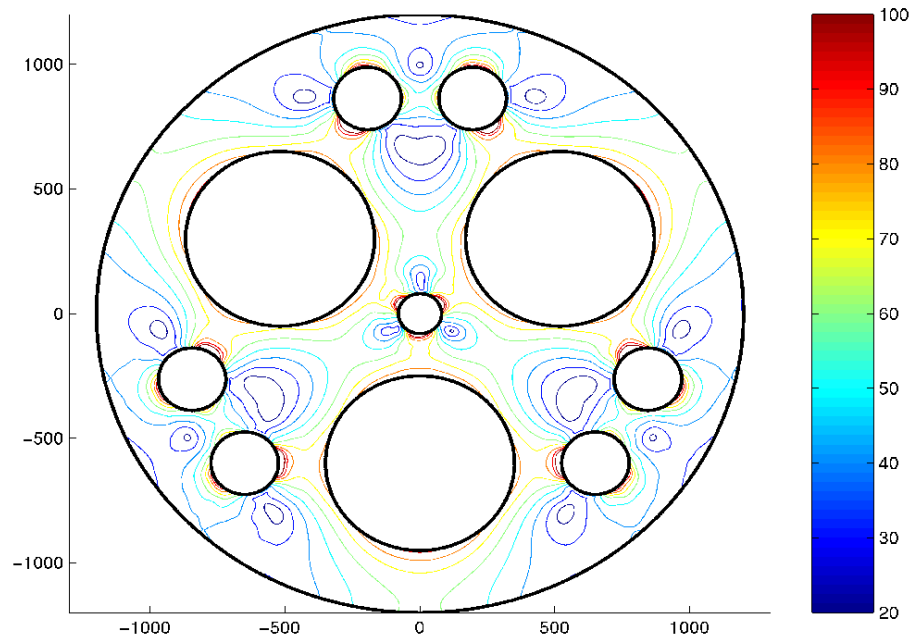
Hierbei wurde eine recht feine Gitterweite gewählt, damit die Ergebnisse beim kleinsten, dem mittleren Loch auch noch hinreichend gut sind. Außerdem muß der Bedingung, dass keine Zelle zwei Ränder enthält, Rechnung getragen werden.

Die Symmetrie des Gebietes macht eine Teilbetrachtung möglich, die hier aber nicht weiter verfolgt wurde.

Die Berechnung des ebenen Verzerrungszustandes liefert die folgende Verschiebung



Deformation des Druckbehälters (Skalierungsfaktor: 43430)

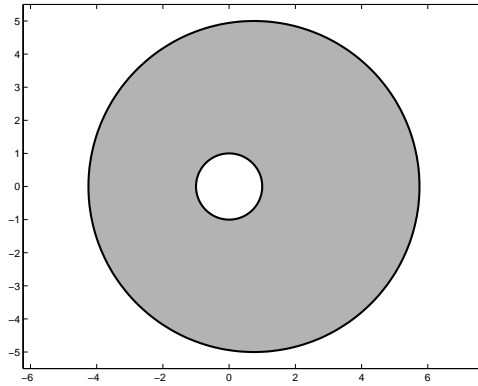


Max. Hauptspannung

Bei dem Plot der Spannungen wurde eine kleinere Gitterweite gewählt, um die Linien gleicher Hauptspannung weiter zu glätten.

7.3 Rotierende Metallscheibe

Als letztes Beispiel betrachten wir eine dünne Metallscheibe (Dichte $\rho = 7.5 \text{ kg/cm}^3$), wie unten abgebildet.



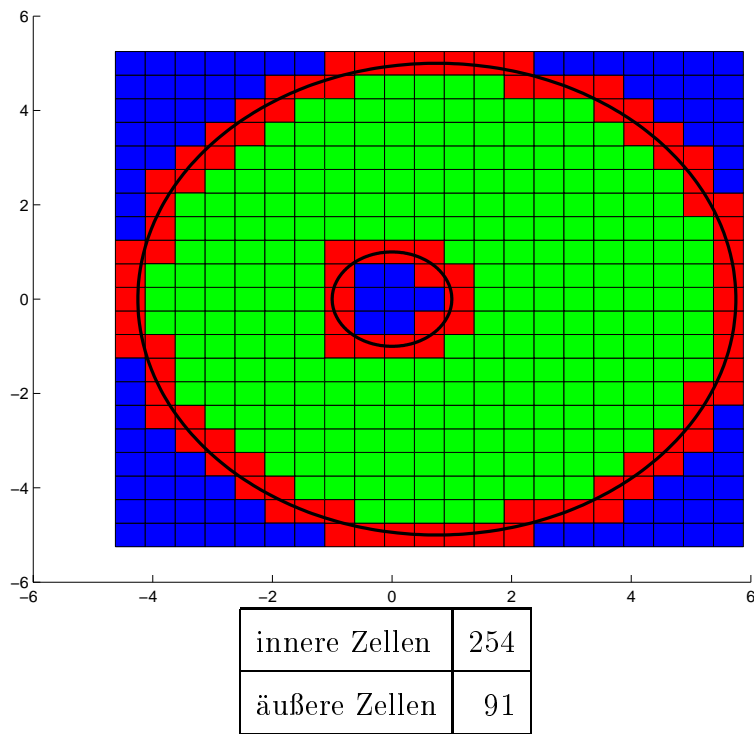
Diese Scheibe dreht sich mit $\omega = 10$ Umdrehungen pro Sekunde um den Ursprung und ist am inneren Kreis fest eingespannt. Dann ergibt sich in jedem Punkt (x, y) die Zentrifugalkraft

$$f(x, y) = \omega^2 \rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

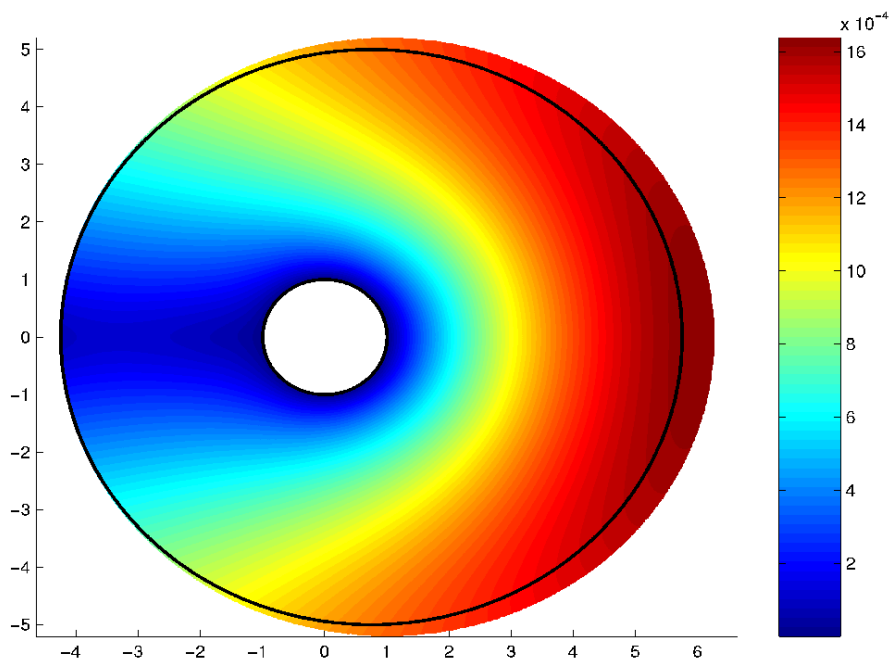
Bei der Berechnung wird wegen der Geometrie der Scheibe der ebene Spannungszustand zugrunde gelegt. Die Scheibe ist, gesehen zu ihrer Ausdehnung in der (x, y) -Ebene, dünn und die angreifenden Kräfte, hier die Zentrifugalkräfte, wirken nur in dieser Ebene.

Gewichtsfunktion	$w(x, y) = x^2 + y^2 - 25$
Elastizitätsmodul	$E = 2.12e7$
Poissonzahl	$\nu = 0.28$
Volumenlast	$f(x, y) = 750 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Flächenlast	$g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Gitterweite	$h = 0.5$

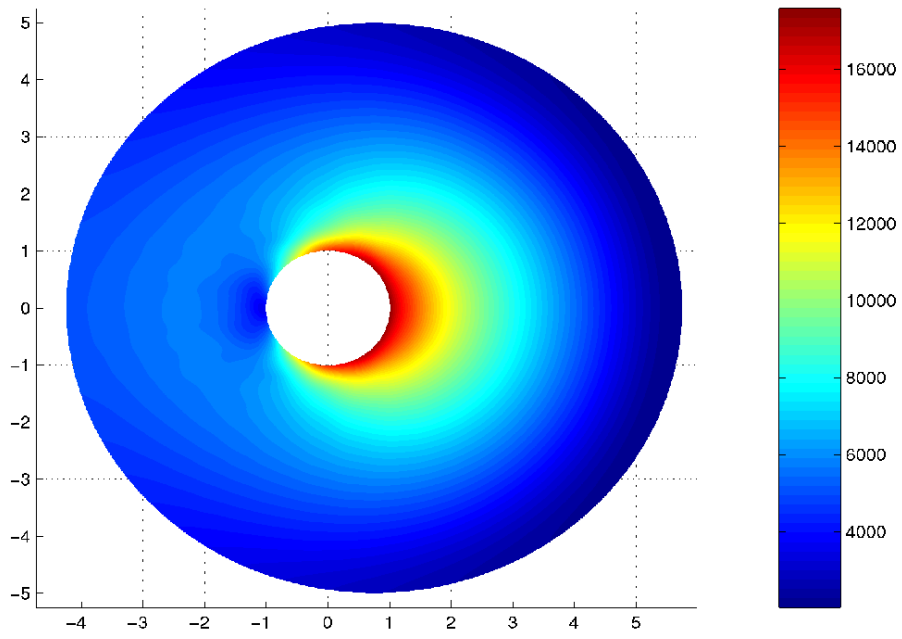
Auch hier liefert die Gittergenerierung eine Einteilung der Zellen in innere und äußere. Dabei wird schön das Verhältnis der Anzahl der inneren Zellen zu den äußeren deutlich.



Die Berechnung liefert die Deformation sowie die von Mises-Spannung. Wie bereits im vorhergehenden Kapitel beschrieben, ist aufgrund der Glattheit der Gebietsränder die Verwendung höherer Splinegrade sinnvoll, da ohne großen Mehraufwand eine bessere Approximation erzielt wird. Hier kamen Splines vom Grad 3 zur Anwendung.



Deformation (Skalierungsfaktor:320)



von Mises-Spannung

Kapitel 8

Resumé

Zusammenfassend lassen sich die Ergebnisse in kurzer Form darstellen. Die web-Methode hat gegenüber den bisherigen Standard-FEM-Verfahren keine gravierenden Nachteile:

- die web-Basis ist stabil,
- die Kondition der Galerkinmatrix wächst mit h^{-2} ,
- die web-Basis liefert die volle Approximationsordnung,
- die Fehlerabschätzung entspricht der der Standardelemente,
- hierarchische Basen erlauben adaptive Verfeinerung,
- das regelmäßige Gitter erlaubt Multigridmethoden und
- die Möglichkeit der Parallelisierung

Hinzu kommen die direkten Vorteile der Methode:

- die aufwendige Gittergenerierung entfällt,
- die Glattheit und die Approximationsordnung kann beliebig hoch gewählt werden,
- die Erhöhung des Splinegrades bringt nur eine geringe Anzahl neuer Freiheitsgrade mit sich und
- die Darstellung der Gebietsränder als NURBS-Kurven ist prädestiniert für den Einsatz in CAD-Systemen

Einziger Nachteil ist die Konstruktion der Gewichtsfunktion. Hier gibt es aber mit den R-Funktionen [RS95] bereits ein effizientes Verfahren für Gebiete, die durch implizite Gleichungen definiert werden. Aber auch für NURBS-berandete Gebiete lässt sich numerisch eine Gewichtsfunktion bestimmen.

Alles in allem lässt sich zusammenfassen, dass die Methode der gewichteten erweiterten B-Splines ein effizientes Verfahren zum Lösen von Randwertproblemen darstellt. Durch die Verwendung von B-Splines und NURBS-Kurven zur Gebietsberandung bietet sich ein

Einsatz in CAD-Systemen an, deren Geometriedarstellung meist darauf basiert. Des Weiteren sind bereits viele Methoden der B-Spline-Manipulation und -Auswertung effizient implementiert und somit diese Berechnungen nicht aufwendiger als bei den Standard-FEM-Verfahren.

Vorausblickend gibt es noch eine Reihe interessanter Aufgaben in diesem Bereich, die genauere Betrachtung verdienen.

So gibt es noch viele weitere physikalische Probleme, seien es nun zeitabhängige oder zeitunabhängige. Darüber hinaus darf natürlich auch die Betrachtung dreidimensionaler Probleme, die aufgrund der zunehmenden Rechenleistung der Computer immer mehr in den Vordergrund rücken, nicht außer Acht gelassen werden.

Des Weiteren bleibt eine detaillierte Betrachtung der Regularität der Lösung genauso unerlässlich wie die Entwicklung neuer problemabhängiger Gewichtsfunktionen.

Aber auch die bisherigen Verfahren liefern weitere interessante Ansatzpunkte. So sind Mehrgitterverfahren und Adaptivität aus den Standardverfahren kaum noch wegzudenken und motivieren auch für das web-Verfahren eine weitergehende Untersuchung.

Anhang A

Programmübersicht

Nachfolgend wird die Funktionsweise der MATLAB-Programme, die im Zuge dieser Diplomarbeit erstellt wurden, kurz erläutert. Dabei steht mehr die Funktion, der Aufbau und die meist zellweise Bearbeitung im Vordergrund. Auf Details der Implementierung wird hier nicht näher eingegangen. Die Funktionsweisen von Programmen, die hier nur im Zusammenhang erwähnt werden, sind aus der Projekt-Dokumentation [HAB⁺] ersichtlich. Ebenso findet man dort Aussagen über Implementierung und Speicherstrukturen.

`web_elastgl_project`:

Bei Problemen, bei denen auf dem ganzen Rand Neumann-Randbedingungen vorgegeben sind, ist die Eindeutigkeit der Lösung nicht gegeben. Will man nun zwei Lösung qualitativ miteinander vergleichen, zum Beispiel um Aussagen über das Fehlerverhalten treffen zu können, so muss vorher eine Projektion auf den Kern der Differentialgleichung erfolgen. Dies erledigt diese Funktion.

Eine Basis des Kerns bilden

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_3 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich durch Projektion

$$u_{neu} = u - \sum_{i=1}^3 \frac{\int_{\Omega} u p_i}{\int_{\Omega} p_i p_i} p_i.$$

Das Programm berechnet unter Verwendung von `web_integrate` die benötigten Integrale und damit die drei Faktoren. Anschließend werden die Funktionen x und y durch Splinekoeffizienten repräsentiert und dann u_{neu} berechnet. Die Repräsentation durch Splinekoeffizienten ist nötig, um die Speicherstruktur der Lösung u beizubehalten.

`web_elastgl_residuum`:

Die Funktion berechnet den Fehler der Lösung, indem diese wieder in die Differentialgleichung eingesetzt wird. Dabei wird sowohl der Fehler in Ω als auch der Fehler

auf dem Neumannrand berechnet.

Hierzu wird jede Gitterzelle Q einzeln betrachtet. Die Funktion `web_int_points` liefert die Gausspunkte und -gewichte. Die Lösung, die Gewichtsfunktion und die rechte Seite f wird anschließend an den Gausspunkten ausgewertet. Dabei wird zum Auswerten der Lösung die Funktion `web_cspline_eval` verwendet, die auch die ersten und zweiten Ableitungen ausgibt. Damit können die Werte von $-\operatorname{div}\sigma(x)$ berechnet und von $f(x)$ subtrahiert werden. Zuletzt wird mit den Gaussgewichten der Fehler auf $Q \cap \Omega$ gebildet.

Liegt die betrachtete Gitterzelle Q auf dem Neumannrand, so werden zusätzlich die Gausspunkte auf dem Rand berechnet. Hierzu liefert die Funktion `web_gausspar` die Parameter, die an die einzelnen Randsegmente angepasst werden. Mit den so erhaltenen Gausspunkten und -gewichten werden anschließend durch Auswerten der Funktion g und von σn die Differenzen auf dem Rand berechnet und mit den Gewichten integriert.

Wurden alle Gitterzellen bearbeitet, so folgt durch Aufsummieren das Ergebnis.

`web_elastgl_sol`:

`web_elastgl_sol` berechnet für ein gegebenes Problem die Fehlerentwicklung bei mehrmaliger Halbierung der Schrittweite. Dabei kann die exakte Lösung angegeben werden oder aber die Fehlerberechnung erfolgt im Vergleich zur vorhergehenden Lösung auf dem gröberen Gitter.

Für die Startgitterweite wird das Problem gelöst und sofern keine exakte Lösung vorliegt, die relevanten Daten gespeichert. Das Lösen erfolgt durch mehrere Schritte, auf die in der Beschreibung zu `web_elastgl_test` näher eingegangen wird. Dann wird iterativ die Gitterweite halbiert und das gegebene Problem dort gelöst. Der Fehler in der L^2 -, H^1 - und H^2 -Norm wird anschließend mit dem Programm `web_error` berechnet.

Zuletzt werden die Fehler und Konvergenzraten in den einzelnen Normen grafisch dargestellt.

`web_elastgl_test`:

Die Funktion `web_elastgl_test` stellt ein komplettes Programm zum Lösen eines Problems dar. So werden alle nötigen Schritte von der Gittergenerierung bis zur Visualisierung der Lösung nacheinander durchlaufen.

Zu Beginn des Programms wird die Funktion `web_grid_init` aufgerufen, die die Gittergenerierung übernimmt. Das Ergebnis wird durch `web_grid_plot` dargestellt. Anschließend stellt die Funktion `web_galerkin_elastgl` das Gleichungssystem für nichterweiterte B-Splines auf. Die Erweiterung übernimmt die Funktion `web_ext_system`, in deren Anschluß das System mit Hilfe von `web_ext_solve` gelöst wird. Liegt nun der Fall vor, dass das Problem keine eindeutige Lösung besitzt, so wird die berechnete Lösung unter Verwendung der Funktion `web_elastgl_project` auf den Kern der Differentialgleichung projiziert. Danach wird das Ergebnis mit der Funktion `web_solution_plot_elastgl` visualisiert. Als Abschluß wird die Lösung wieder in die Differentialgleichung eingesetzt und der Fehler auf dem Gebiet und auf dem Neumannrand berechnet. Dies übernimmt `web_elastgl_residuum`.

web_galerkin_elastgl:

`web_galerkin_elastgl` bildet das Kernprogramm. Hier erfolgt das Aufstellen der Galerkinmatrix.

Dazu wird in einer Schleife nach und nach jede Gitterzelle durchlaufen. Die Funktion `web_int_points` liefert die zugehörigen Gausspunkte, an denen die Gewichtsfunktion gleich ausgewertet wird. Die Funktion `web_cspline_eval` erledigt dies anschließend für die B-Splines. Damit kann die Galerkinmatrix nun berechnet werden. Bevor allerdings das Aufstellen der Galerkinmatrix beginnt, wird zuerst die rechte Seite des Gleichungssystems berechnet. Dazu müssen, liegt die aktuelle Gitterzelle auf dem Rand des Gebietes, mit `web_int_boundary` die Gausspunkte auf dem Rand bestimmt werden, an denen dann die B-Splines und die Funktion g ausgewertet werden.

Nun folgt das Aufstellen der Matrix. In einer Schleife über alle, auf dieser Gitterzelle relevanten B-Splines wird $\nabla(wb_i)$ berechnet und gleichzeitig die rechte Seite des Gleichungssystems aufgebaut. Diese Ergebnisse werden dann dazu verwendet, um in einer erneuten Schleife über alle möglichen B-Spline-Kombinationen das Integral über $\nabla(wb_i)\nabla(wb_j)$ zu berechnen und in der Matrixstruktur abzuspeichern.

Zuletzt werden die Diagonalelemente, die Null sind, auf 1 gesetzt. Dies muß gemacht werden, da bei dieser Implementierung auch B-Splines als Basisfunktionen vorkommen, deren Träger nicht in Ω liegt.

web_int_boundary:

Die Funktion `web_int_boundary` liefert die Integrationspunkte und -gewichte auf dem Randstück, das in einer gegebenen Gitterzelle liegt, zurück.

Hierzu werden in einer Schleife über alle dort vorkommenden Randsegmente die Gausspunkte auf jedem Segment verteilt. Dazu dient die Funktion `web_bez_eval`, die zu gegebenen Parameterwerten die entsprechenden Stützstellen liefert. Anschließend müssen nur noch mit Hilfe der Integraltransformation die neuen Gewichte bestimmt werden.

web_integrate:

Diese Funktion berechnet das Integral über das Gebiet Ω . Hierbei kann der Integrand sowohl als MATLAB-Funktion, als String oder durch die Splinekoeffizienten übergeben werden. Voraussetzung ist allerdings ein vorhandenes Gitter.

Die Integration erfolgt für jede Gitterzelle Q einzeln. Auf Q wird dann das Integral durch Gaussintegration berechnet, wobei je nach Wahl des Integranden dieser an den Stützstellen ausgewertet werden muss. Bei den Splinekoeffizienten erfolgt dieser Vorgang durch die Funktion `web_cspline_eval`.

web_solution_plot_elastgl:

`web_solution_plot_elastgl` visualisiert das Ergebnis der numerischen Berechnung. Dabei besteht die Wahl zwischen der Verschiebung, der Norm der Verschiebung, der maximalen Hauptspannung, der von Mises-Spannung und der maximalen Schub-

spannung.

Über das Gebiet Ω wird ein feines Gitter gelegt, an dessen Punkten die Lösung ausgewertet wird. Hierzu dient die Funktion `web_spl_eval`, die bei gegebener Gewichtsfunktion den Funktionswert der Lösung an einer Stelle berechnet.

Im Anschluss daran werden, sofern gewünscht, die einzelnen Spannungen berechnet. Nachdem die Funktionswerte der Gitterpunkte außerhalb des Gebiets auf NaN gesetzt wurden, erfolgt die grafische Ausgabe. Dazu wird im Fall der Verschiebung ein zweidimensionaler Plot ausgegeben, in dem die Deformation zur Verdeutlichung skaliert dargestellt ist. Im Fall der Verschiebungsnorm wird ein dreidimensionaler Plot erzeugt, der die Norm des Verschiebungsvektors repräsentiert. Die Ausgabe der Spannungen erfolgt als zweidimensionaler Plot auf dem Referenzgebiet.

Literaturverzeichnis

- [Ada78] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Inc., 1978.
- [App01] C. Apprich. Der Penalty-Ansatz bei Spline-Galerkin-Approximation des Poisson-Problems. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A, 2001.
- [Bra97] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1997.
- [Cia78] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [Cia88] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, 1988.
- [dB78] C. de Boor. *A practical guide to splines*. Springer Verlag, 1978.
- [Fis96] B. Fischer. *Polynomial Based Iteration Methods for Symmetric Linear Systems*. Wiley, Teubner, 1996.
- [Fri47] K.O. Friedrichs. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. In *Annals of Mathematics*, Jgg. 48, Seiten 441–471. 1947.
- [Gek00] E. Gekeler. *Finite Elemente, Begleittext zur Vorlesung*. 2000.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic Problems in nonsmooth Domains*. Pitman Publishing, 1985.
- [HAB⁺] K. Höllig, C. Apprich, M. Boßle, W. Geis, J. Hörner, A. Kopf, B. Russig, A. Streit und J. Wipper. WEB-Projekt-Dokumentation. Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A.
- [Han73] V. Hansson. *Konstruktiver Ingenieurbau, Heft 14: Zur praktischen Berechnung von Scheiben mit beliebiger Geometrie und allgemeinem Materialgesetz*. Vulkan-Verlag Essen, 1973.
- [Heu95] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. B.G. Teubner Stuttgart, 9. Auflage, 1995.
- [HL93] J. Hoschek und D. Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A.K. Peters, 1993.
- [HMS90] G. Holzmann, H. Meyer und G. Schumpich. *Technische Mechanik, Teil 3: Festigkeitslehre*. B.G. Teubner Stuttgart, 7. Auflage, 1990.

- [Hö] K. Höllig. *Finite Element Methods with B-Splines*, *Frontiers in Applied Mathematics* 26, SIAM. to appear.
- [Hö98] K. Höllig. *Grundlagen der Numerik*. MathText, 1998.
- [Hö02] K. Höllig. Finite Element Approximation with Splines. In G. Farin, J. Hoschek und M.S. Kim, Hrsg., *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Seiten 283–308. Elsevier, 2002.
- [HRW00] K. Höllig, U. Reif und J. Wipper. Error Estimates for the web-Method. In L.L. Schumaker T. Lyche, Hrsg., *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Seiten 195–209. Vanderbilt University Press, 2000.
- [HRW01] K. Höllig, U. Reif und J. Wipper. Weighted extended b-spline approximation of Dirichlet problems. In *SIAM J. Numer. Anal.* 39:2, Seiten 442–462. 2001.
- [KA00] P. Knabner und L. Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer Verlag, 2000.
- [Ker97] R. Kernan, Hrsg. *MATLAB User's Guide*. Prentice-Hall, 1997.
- [Lei68] H. Leipholz. *Einführung in die Elastizitätstheorie*. G. Braun Karlsruhe, 1968.
- [Meh96] G. Mehlhorn, Hrsg. *Der Ingenieurbau, Band 4: Werkstoffe/Elastizitätstheorie*. Ernst und Sohn, 1996.
- [Meh99] G. Mehlhorn, Hrsg. *Der Ingenieurbau, Band 1: Mathematik/Technische Mechanik*. Ernst und Sohn, 1999.
- [RS95] V.L. Rvachev und T.I. Sheiko. R-functions in boundary value problems in mechanics. In *Appl. Mech. Rev.* 48:4, Seiten 151–188. 1995.
- [Ste98] R. Steinbuch. *Finite Elemente - Ein Einstieg*. Springer Verlag, 1998.
- [Vil77] P. Villaggio. *Qualitative Methods in Elasticity*. Noordhoff International Publishing, 1977.