

Institut für Formale Methoden der Informatik

Universität Stuttgart  
Universitätsstraße 38  
D-70569 Stuttgart

Masterarbeit

# Dreifärbungen für planare Graphen mit wenigen Dreiecken

Janette Welker

**Studiengang:** Informatik

**Prüfer/in:** PD Dr. M. Kufleitner

**Betreuer/in:** PD Dr. M. Kufleitner

**Beginn am:** 17. Juni 2023

**Beendet am:** 20. Dezember 2023



## Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit dem Problem der Dreifärbbarkeit planarer Graphen. Sie knüpft an die Beiträge von Grötzsch und Grünbaum an und erweitert diese durch Reiteration mit Augenmerk auf unklaren Aspekten und Schließen von bislang übersehenen Lücken. Der Fokus liegt dabei auf der Untersuchung von Grünbaum's Beweis *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings*, in dem die Dreifärbbarkeit von planaren Graphen mit maximal drei Dreiecken bewiesen wird. Zudem wurde das Potenzial der Beweisstruktur für die Implementierung eines effizienten Algorithmus geprüft.



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>  | <b>11</b> |
| <b>3</b> | <b>Planare Graphen mit maximal drei Dreiecken sind dreifärbbar</b> | <b>13</b> |
| 3.1      | Strukturelle Besonderheiten und ihre Konsequenzen . . . . .        | 13        |
| 3.2      | Der Graph enthält kleine Schnitte . . . . .                        | 16        |
| 3.2.1    | Der kleinste Schnitt ist ein 3-Schnitt . . . . .                   | 16        |
| 3.2.2    | Der kleinste Schnitt ist ein 4-Schnitt . . . . .                   | 16        |
| 3.2.3    | Der kleinste Schnitt ist ein 5-Schnitt . . . . .                   | 17        |
| 3.3      | Der Graph enthält keine kleinen Schnitte . . . . .                 | 21        |
| 3.3.1    | Es gibt einen Knoten mit genau zwei Nachbarn . . . . .             | 21        |
| 3.3.2    | Kein Knoten hat genau zwei Nachbarn . . . . .                      | 23        |
| <b>4</b> | <b>Algorithmische Überlegungen</b>                                 | <b>31</b> |
| <b>5</b> | <b>Fazit und Ausblick</b>  | <b>33</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>35</b> |



# Abbildungsverzeichnis

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Dreifärbarkeit ist abhängig von der Anzahl der 3-Zyklen. . . . .                                 | 9  |
| 2.1  | Beispielgraph mit markierten Facetten und Schnitten . . . . .                                    | 12 |
| 3.1  | Gegenbeispiel zu ursprünglichem Beweis von Proposition 3.1 . . . . .                             | 14 |
| 3.2  | Identifizierung von Punkten in 4-Facette kann Dreieck erzeugen. . . . .                          | 15 |
| 3.3  | Beispielhaft eingefärbte spezielle Konfigurationen von 5-Facetten . . . . .                      | 15 |
| 3.4  | Umgang mit Spezialfall A bei 5-Schnitt und einem Dreieck . . . . .                               | 17 |
| 3.5  | Umgang mit Ausnahme von Spezialfall A bei 5-Schnitt und einem Dreieck . .                        | 18 |
| 3.6  | Spezialfall B bei 5-Schnitt und einem Dreieck kann anderen Fall direkt einleiten.                | 18 |
| 3.7  | 3-Pfadverlauf bei Spezialfall B bei 5-Schnitt und drei Dreiecken . . . . .                       | 19 |
| 3.8  | Dreiecksvermeidung in Spezialfall B bei 5-Schnitt und drei Dreiecken . . . . .                   | 20 |
| 3.9  | 3-Pfadverlauf bei Spezialfall A bei 5-Schnitt und drei Dreiecken . . . . .                       | 20 |
| 3.10 | 3-Pfadverlauf beider Knotenpaare bei Spezialfall A bei 5-Schnitt und drei<br>Dreiecken . . . . . | 21 |
| 3.11 | Simple Konfigurationen mit Beispielfärbung . . . . .   | 22 |
| 3.12 | Lösung des ersten Ausnahmefalls bei Knoten von Grad 2 . . . . .                                  | 22 |
| 3.13 | Lösung des zweiten Ausnahmefalls bei Knoten von Grad 2 . . . . .                                 | 23 |
| 3.14 | Vermeidung neuen Dreiecks bei Knoten von Grad 2 und ungefärbter 4-Facette                        | 24 |
| 3.15 | Umgang mit gefärbter 4-Facette . . . . .   | 24 |
| 3.16 | Umgang mit ungleicher Knotenfärbung . . . . .  | 25 |
| 3.17 | Umgang mit gleicher Knotenfärbung . . . . .  | 25 |
| 3.18 | Situation in der ein Knoten mehrfach zum Facettengewicht beiträgt . . . . .                      | 25 |
| 3.19 | Garantierte Konfiguration . . . . .  | 26 |
| 3.20 | 3-Pfad zwischen $A_2$ und $A_3$ ist wegen 5-Schnitt ausgeschlossen. . . . .                      | 27 |
| 3.21 | Erste Reduktionsoption . . . . .   | 27 |
| 3.22 | Zweite Reduktionsoption . . . . .  | 28 |
| 3.23 | Beispiele für Pfadkombinationen, die zu Widersprüchen führen . . . . .                           | 28 |



# 1 Einleitung

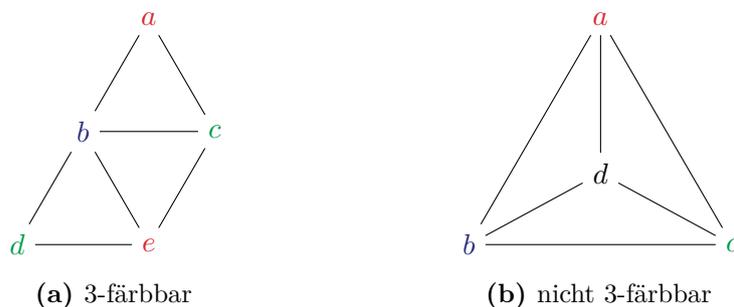
Die Untersuchung der Graphenfärbung ist ein spannendes Kapitel in der Mathematik und theoretischen Informatik. Eine ihrer grundlegenden Motivationen liegt in ihrer Fähigkeit, komplexe Strukturen und Probleme in einer vereinfachten und intuitiven Form darzustellen. Dies reicht von der Einfärbung von Landkarten zur Unterscheidung angrenzender Gebiete, wo die Graphenfärbung ihren Ursprung findet, bis hin zu modernen Anwendungen, zum Beispiel in der Netzwerktheorie und Optimierung.

Historisch begann sie wohl 1852 mit der Vermutung von Francis Guthrie: Jede Landkarte ließe sich mit vier Farben so färben, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben [Wil14]. Dieses Problem ist auf die Graphentheorie übertragbar, indem Länder durch Knoten und Nachbarschaften durch Kanten repräsentiert werden.

Ein weiterer wichtiger Beitrag kam 1959 von Grötzsch mit seinem Werk *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel* [Grö59]. Damit zeigte er, dass jeder planare Graph ohne 3-Zyklen 3-färbbar ist.

Grünbaum ergänzte 1963 diese Forschung durch sein Werk *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings* [Grü63], in dem er zeigte, dass jeder planare Graph mit nicht mehr als drei 3-Zyklen ebenfalls 3-färbbar ist.

2011 entwickelten Dvořák, Kawarabayashi und Thomas in *Three-Coloring Triangle-Free Planar Graphs in Linear Time* [DKT11] einen Linearzeitalgorithmus zur 3-Färbung dreiecksfreier planarer Graphen. Dieser Algorithmus ist von besonderer Bedeutung, da er nicht nur die Machbarkeit der 3-Färbung dreiecksfreier planarer Graphen in linearer Zeit zeigt, sondern auch Ideen mit sich bringt, die adaptiert werden könnten, um die Effizienz von Färbbarkeitsalgorithmen für Graphen mit gelockerten Einschränkungen zu steigern.



**Abbildung 1.1:** Dreifärbbarkeit ist abhängig von der Anzahl der 3-Zyklen.

Bei näherer Untersuchung des von Grünbaum vorgelegten Beweises traten bestimmte Aspekte hervor, die weiterer Ausarbeitung bedurften. Diese Feststellung soll jedoch in keiner Weise den grundlegenden Wert von Grünbaum's Arbeit mindern. Sie spiegelt vielmehr die dynamische Natur der Forschung in diesem Bereich wider und eröffnet Wege für neue Beiträge, die auf dem Fundament aufbauen, welches durch frühere Arbeiten gelegt wurde. In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Beweis sorgfältig aufbereitet, um die identifizierten Lücken und Unklarheiten zu adressieren. Diese Überarbeitung resultierte in einer komplexeren Invariante für Grünbaum's Proposition. Dies machte erforderte einer eingehenderen Analyse verschiedener Fälle und führte zu einer umfangreicheren Fallunterscheidung. Zudem wurde geprüft, inwieweit sich die Struktur des neu formulierten Beweises als Basis für einen effizienten Algorithmus eignet.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir einige Grundbegriffe, Notationen und einen für den Beweis von Proposition 3.3 nützlichen Satz ein. Die Definitionen sind hierbei weitestgehend an jene von Diestel [Die17] angelehnt.

**Definition 2.1** (Planarer Graph). Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt *planar*, wenn er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass sich dessen Kanten ausschließlich an den Endpunkten treffen. Hierbei ist  $V$  die Menge der  $n$  Knoten und  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$  die Menge der  $m$  Kanten. Der Graph ist also schlingenfrei und enthält keine Mehrfachkanten.

**Definition 2.2** (Facetten). Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Betrachte die Einbettung von  $G$  in die Ebene. Als *Facetten* von  $G$  bezeichnen wir die Punktmenge der Ebene, die durch die Knoten- und Kantenmenge von  $G$  voneinander getrennt werden. Eine *k-Facette* ist hierbei eine von genau  $k$  Kanten umschlossene Facette. Dies schließt insbesondere auch die unendliche Außenfläche ein. Speziell sind  $T_F$ ,  $Q_F$  und  $P_F$  Bezeichnungen für 3-, 4- und 5-Facetten in  $G$ . Sei außerdem  $f_k(G) : G \rightarrow \mathbb{N}$  die Abbildung, welche den Graphen  $G$  auf die Anzahl enthaltener  $k$ -Facetten abbildet. Ist implizit klar, dass es sich um den Graphen  $G$  handelt, schreiben wir statt  $f_k(G)$  kurz  $f_k$ .

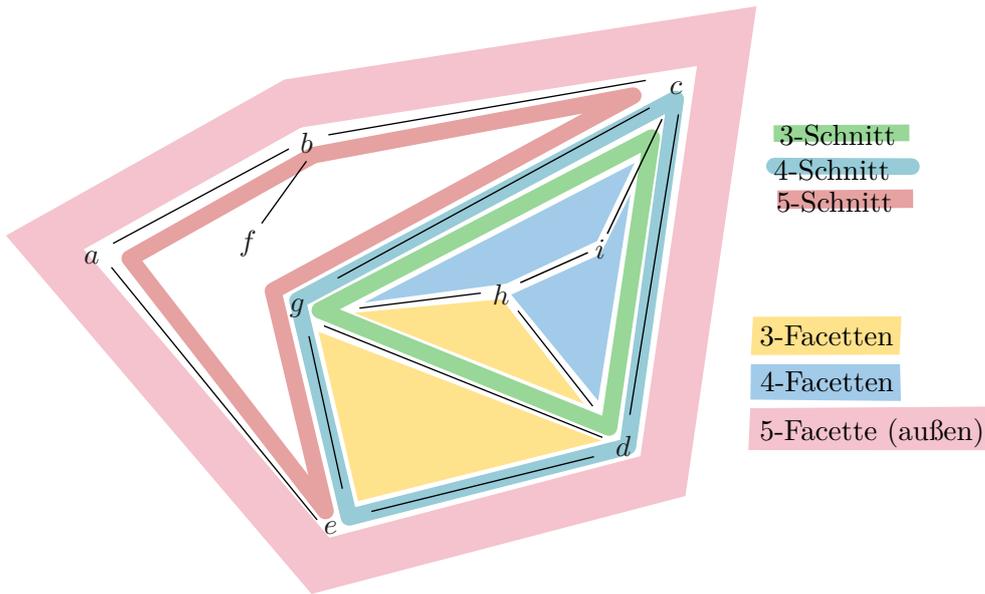
**Definition 2.3** (Pfade, Zyklen und Schnitte). Ein *k-Pfad* in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Folge von Knoten  $x_0 x_1 \dots x_k$ , sodass  $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$  für  $0 \leq i \leq k-1$ .

Ein *k-Zyklus* ist ein geschlossener  $k$ -Pfad, bei dem Start- und Endknoten übereinstimmen. Wird ein  $k$ -Zyklus via Knotenfolge  $x_0 x_1 \dots x_k$  angegeben, so werden Start- und Endknoten nicht mehrfach angegeben.  $\{x_k, x_0\} \in E$  ist impliziert. Wir schreiben  $T$  oder *Dreieck* für 3-,  $Q$  oder *Viereck* für 4- und  $P$  oder *Fünfeck* für 5-Kreise.

Ein *k-Schnitt* in einem Graphen  $G$  ist ein  $k$ -Zyklus, welcher keine  $k$ -Facette in  $G$  ist. Wir schreiben  $T_C$  für 3-,  $Q_C$  für 4- und  $P_C$  für 5-Schnitte.

**Definition 2.4** (Färbung). Die *Färbung* eines planaren Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $c : V \rightarrow C$ , wobei  $C$  eine Menge von Farben ist, sodass für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt, dass  $c(u) \neq c(v)$ .

**Definition 2.5** (Distanz). Die Abbildung  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$  bildet Knotenpaare auf die Länge des kürzesten Weges ab, welcher diese beiden Knoten in  $G$  verbindet. Die Länge beschreibt hierbei die Anzahl der dazwischen liegenden Kanten.



**Abbildung 2.1:** Beispielgraph mit markierten Facetten und Schnitten

**Definition 2.6** (Identifizieren zweier Knoten). Das *Identifizieren* zweier Knoten  $u, v \in V$  besteht darin, diese zu einem einzigen Knoten  $w$  zu verschmelzen. Sei dafür  $G^* = (V^*, E^*)$  ein neuer Graph, welcher durch diese Reduktion aus  $G$  abgeleitet wird. Hier ist  $V^* = (V \cup \{w\}) \setminus \{u, v\}$  und  $E^* = (E \cup \{\{x, w\} \mid \{x, u\} \in E \vee \{x, v\} \in E\}) \setminus \{\{x, y\} \mid y \in \{u, v\}\}$ . D.h. die Knoten  $u$  und  $v$  werden gelöscht, und alle Kanten, die in  $G$  zu mindestens einem dieser Knoten führten, führen in  $G^*$  stattdessen zu  $w$ .

**Satz 2.7** (Euler'sche Formel). Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $f$  Facetten (einschließlich der unendlichen äußeren Facette), gilt die Gleichung  $n - m + f = 2$ .

## 3 Planare Graphen mit maximal drei Dreiecken sind dreifärbbar

In den nachfolgenden Abschnitten wird der überarbeitete Beweis aus *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings* [Grü63] detailliert präsentiert. Dabei sollen Unklarheiten in diesem Beweis näher erläutert und gefundene Lücken geschlossen werden.

### 3.1 Strukturelle Besonderheiten und ihre Konsequenzen

Wir beginnen mit der Darstellung der Hilfsproposition aus [Grü63, Proposition 1], welche die Einschränkung der zu betrachtenden Graphenmenge ermöglicht.

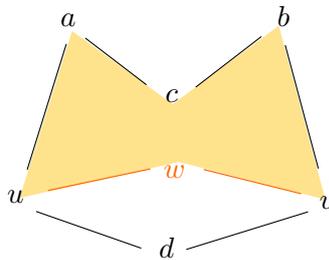
**Proposition 3.1.** *Sei  $G$  ein planarer Graph. Dann existiert ein planarer Graph  $H$  mit folgenden Eigenschaften:*

- $G$  ist ein Teilgraph von  $H$ ,
- $k$ -Facette in  $H$  mit  $k > 5$
- $\forall$  Dreiecke  $T$  in  $H$  gilt  $T$  ist auch in  $G$ .

*Beweis.* Wir konstruieren den Graphen  $H = (V', E')$  aus  $G = (V, E)$  mit  $V \subseteq V'$  und  $E \subseteq E'$ . Dann betrachten wir eine  $k$ -Facette  $K_F$  in  $G$  mit  $k > 5$ . Existiert eine Kante  $\{a, b\}$  in  $E$ , deren Endpunkte  $a$  und  $b$  nicht via  $K_F$  benachbart sind, wählen wir zwei Knoten  $u$  und  $v$  auf  $K_F$ , getrennt durch  $a$  und  $b$ , mit der Distanz  $d(u, v) \geq 3$ . Existiert eine solche Kante nicht, wählen wir zwei beliebige Knoten  $u, v$  auf  $K_F$  mit der Distanz  $d(u, v) \geq 3$ . Wir konstruieren einen neuen Knoten  $w$  im von  $K_F$  umschlossenen Bereich mit  $\{\{u, w\}, \{w, v\}\} \subseteq E'$ . Durch diesen Prozess wird  $K_F$  in zwei neue Facetten unterteilt, wobei diese jeweils weniger als  $k$  Kanten haben, und es entstehen keine neuen Dreiecke.  $\square$

In diesem Beweis haben wir eine inhaltliche Anpassung gegenüber dem in *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings* [Grü63, S. 304] Vorgestellten vorgenommen. Diese Anpassung besteht in der Einführung der Einschränkung  $d(u, v) \geq 3$  für den Fall, dass zwischen den Knoten  $a$  und  $b$  keine Kante existiert. Ohne diese könnte das angegebene Verfahren zur Entstehung einer Facette mit sechs Kanten führen, wie in Abbildung 3.1 dargestellt.

Um den Beweis in den nachfolgenden Abschnitten zu vereinfachen, nutzen wir zusätzlich zu Proposition 3.1 das folgende Lemma.



**Abbildung 3.1:** Gegenbeispiel zu ursprünglichem Beweis von Proposition 3.1

**Lemma 3.2.** *Für einen Graphen mit einer 4-Facette gilt: Zwei nicht über den Rand dieser Facette benachbarte Knoten können genau dann ohne die Entstehung eines neuen Dreiecks identifiziert werden, wenn sie nicht über einen Pfad der Länge 3 verbunden sind.*

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph mit einer 4-Facette  $Q = abcd$ , wobei  $a$  und  $c$  gegenüberliegende Knoten auf dieser Facette sind.

Nehmen wir zunächst an, es existiert ein 3-Pfad  $axyc$  zwischen  $a$  und  $c$  entlang der Knoten  $x$  und  $y$ , wobei diese nicht auf  $Q$  liegen. Werden  $a$  und  $c$  zu einem Knoten  $\overline{ac}$  verschmolzen, entsteht durch die Kanten  $\{a, x\}$ ,  $\{x, y\}$ , und  $\{y, c\}$  das Dreieck  $\overline{ac}xy$  im neuen Graphen. Die Existenz eines solchen 3-Pfades führt also zu einem Dreieck.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass das Verschmelzen von  $a$  und  $c$  ein neues Dreieck im Graphen erzeugt hat. Wir wissen,  $a$  und  $b$  sind mindestens über die zwei 2-Pfade  $abc$  und  $adc$  entlang  $Q$  verbunden. Diese Pfade können durch Verschmelzen des Start- und Endknotens aufgrund ihrer Länge nicht in einem Dreieck resultieren. Dazu bedarf es eines 3-Pfades und damit eines weiteren Knotens  $x$  abseits der 4-Facette. Ein zusätzlicher Pfad  $axbc$  ( $abxc$  analog) würde mit der Kante  $\{a, b\}$  bereits die Existenz des Dreiecks  $axb$  bedeuten. Verschmelzen wir  $a$  und  $c$  zu einem Knoten  $\overline{ac}$ , werden die Kanten  $\{a, x\}$  und  $\{b, c\}$  durch die Kanten  $\{\overline{ac}, x\}$  und  $\{b, \overline{ac}\}$  ersetzt und das Dreieck  $axb$  durch  $\overline{ac}xb$ . Die Anzahl der Dreiecke im Graphen bleibt also unverändert.

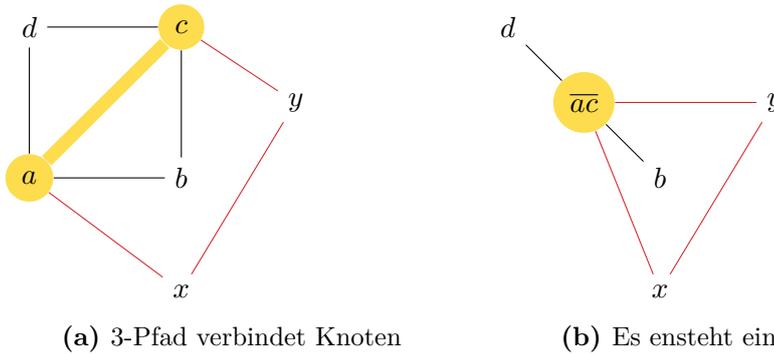
Ein neues Dreieck bedarf daher eines weiteren Knotens  $y$  abseits der 4-Facette und des Pfades  $axyc$  über diesen. Verschmelzen wir damit die Knoten, werden die Kanten  $\{a, x\}$  und  $\{y, c\}$  durch die Kanten  $\{\overline{ac}, x\}$  und  $\{y, \overline{ac}\}$  ersetzt. Als Konsequenz daraus entsteht das neue Dreieck  $\overline{ac}xy$ .

Somit ergibt sich, dass das Verschmelzen von  $a$  und  $c$  genau dann ein neues Dreieck bildet, wenn ein Pfad der Länge 3 über zwei Knoten  $x$  und  $y$  abseits der 4-Facette, zwischen ihnen existiert.  $\square$

Proposition 2 aus Grötzsch's Theorem on 3-Colorings [Grü63, S. 304] haben wir angepasst, um eine zusätzliche Ausnahmekonfiguration zu berücksichtigen.

**Proposition 3.3.** *Sei  $G$  planar und o.B.d.A.<sup>1</sup>  $G$  enthält nur  $k$ -Facetten mit  $k \leq 5$ . Hat  $G \leq 3$  Dreiecke  $T$ , so ist  $G$  mit nur 3 Farben färbbar.*

<sup>1</sup>wegen Proposition 3.1

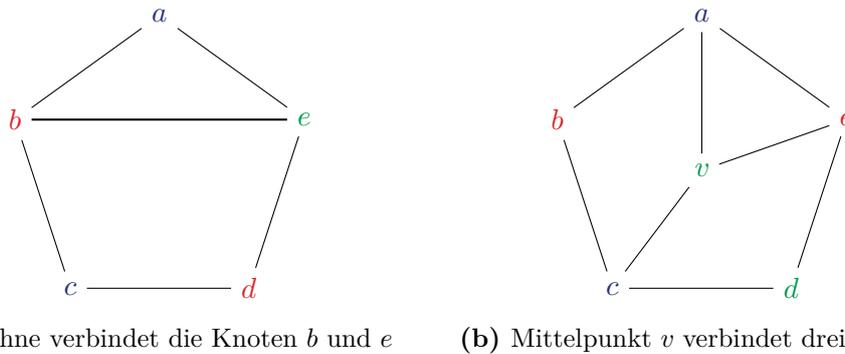


**Abbildung 3.2:** Identifizierung von Punkten in 4-Facette kann Dreieck erzeugen.

*Ist die äußere Facette bereits mit 3 Farben gefärbt und es existiert  $\leq 1$  Dreieck, so kann diese Färbung auf den Rest des Graphen  $G$  erweitert werden und dieser ist 3-färbbar.*

*Existiert ein 5-Schnitt, können folgende spezielle Konfigurationen auftreten:*

- (A) *Erstens kann, wie in Abbildung 3.3a dargestellt, eine Sehne zwei Knoten  $x$  und  $y$  einer 5-Facette verbinden. In diesem Fall können die Knoten  $x$  und  $y$  nicht dieselbe Farbe einnehmen, d.h. Sehnenkonfiguration  $x, y \implies c(x) \neq c(y)$ .*
- (B) *Zweitens könnte, wie in Abbildung 3.3b dargestellt, ein Knoten  $v$  existieren, der mit den äußeren Knoten  $x, y$  und  $z$  verbunden ist, wobei mindestens zwei der Knoten  $x, y$  und  $z$  unterschiedlich gefärbt sein müssen, d.h. Mittelpunktkonfiguration  $\implies |c(x), c(y), c(z)| = 2$ .*



**Abbildung 3.3:** Beispielhaft eingefärbte spezielle Konfigurationen von 5-Facetten

Das Kernargument des Beweises in den folgenden Abschnitten bildet eine Induktion über die Kantenzahl des Graphen. Wir finden Methoden, um mögliche Teilkonfigurationen eines Graphen zu reduzieren. Diese Reduktionen ermöglichen es, den Graphen schrittweise in eine simple Form zu überführen, wobei gewährleistet ist, dass die Färbbarkeit des vereinfachten Graphen stets die Färbbarkeit des ursprünglichen Graphen impliziert. Dieses Verfahren kann induktiv wiederholt werden, bis ein Basisfall erreicht ist, für den Proposition 3.3 offensichtlich zutrifft. So wird durch die sukzessive Umkehrung der Reduktionsschritte die 3-Färbbarkeit des Ausgangsgraphen sichergestellt.

Es sei hierbei angemerkt, dass der Fall „planare Graphen *ohne* Dreiecke sind dreifärbbar“ bereits gezeigt ist [Grö59].

Wir unterteilen den Beweis zunächst grob in zwei Abschnitte anhand der Größe der vorhandenen  $k$ -Schnitte.

## 3.2 Der Graph enthält kleine Schnitte

Wir betrachten zunächst den Fall  $\exists k$ -Schnitt mit  $k \leq 5$ .

Sei in den folgenden Unterfällen — Abschnitt 3.2.1, Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 3.2.3 —  $K_C$  der Teilgraph, welcher den entsprechenden  $k$ -Schnitt ausmacht. Wir unterteilen  $G$  entlang  $K_C$  in zwei Teile: den inneren Graphen  $G_I = (V_I, E_I)$  und den äußeren Graphen  $G_A = (V_A, E_A)$ , mit  $G_I \neq G_A \neq \emptyset$  und  $G_I \cap G_A = K_C$ . Es gilt  $|E_I| < |E|$  und  $|E_A| < |E|$ . Über das Induktionsargument sind also beide dieser Graphen 3-färbbar. Es bleibt zu klären, inwieweit die Färbungen dieser Teilgraphen an ihrer Schnittstelle  $K_C$  kompatibel sind.

$k \leq 2$  ist durch die Grundeinschränkungen an den Graphen bereits ausgeschlossen.

### 3.2.1 Der kleinste Schnitt ist ein 3-Schnitt

Da die Färbung von  $T_C$  bis auf Benennung eindeutig ist, sind die Färbungen der beiden Graphen  $G_I$  und  $G_A$  an dieser Grenze kompatibel, und wir können sie nach der Färbung konfliktlos zu  $G$  zusammenführen.

### 3.2.2 Der kleinste Schnitt ist ein 4-Schnitt

Ist der kleinste im Graphen vorhandene  $k$ -Schnitt ein 4-Schnitt, so sind alle möglichen 3-Zyklen 3-Facetten. Wir betrachten die Anzahl dieser Facetten, um zu entscheiden wie die Färbung gehandhabt wird.

Fall  $f_3 \geq 2$ :

Entweder  $f_3(G_I) \leq 1$  oder  $f_3(G_A) \leq 1$ . Angenommen  $f_3(G_I) \leq 1$ . Wir färben zunächst  $G_A$  induktiv.  $Q_C$  ist dann die durch diese Färbung bereits gefärbte äußere Facette von  $G_I$ . Diese Färbung erweitern wir anschließend auf  $G_I$ .

Der Fall  $f_3(G_A) \leq 1$  verläuft symmetrisch.

Fall  $f_3 \leq 1$ :

Entweder  $f_3(G_I) \leq 1$  oder  $f_3(G_A) \leq 1$ . Angenommen  $f_3(G_I) \leq 1$ . Sei  $Q_C$  die äußere Facette von jeweils  $G_A$  und  $G_I$ . Wir wählen eine beliebige gültige 3-Färbung für diese Facette und erweitern sie Färbung zuerst auf  $G_A$ , dann auf  $G_I$ .

Der Fall  $f_3(G_A) \leq 1$  verläuft symmetrisch.

### 3.2.3 Der kleinste Schnitt ist ein 5-Schnitt

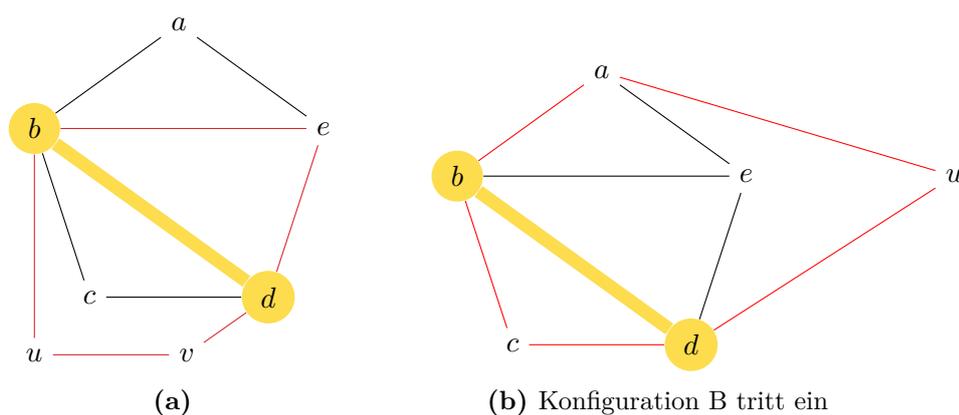
Wir handhaben auch hier die Färbung basierend auf der Anzahl der vorhandenen 3-Facetten.

Fall  $f_3 \leq 1$ :

Entspricht dem Verfahren von Abschnitt 3.2.2. Ohne Einschränkung ist die äußere Facette bereits gefärbt und liegt in  $G_A$ . Wir erweitern die Färbung auf  $G_A$ . Dann ist  $P_C$  die gefärbte äußere Facette von  $G_I$ . Wir setzen die Erweiterung der Färbung auf  $G_I$  fort, falls  $G_I$  weder Konfiguration A noch Konfiguration B auf Seite 15 entspricht.

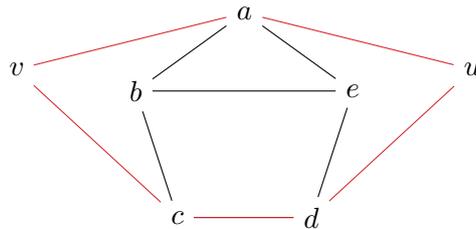
**Spezialfall A** Falls  $G_I$  Konfiguration A entspricht, verschmelzen wir das Quadrat  $bcde$  an den Knoten  $b, d$  oder  $c, e$  und setzen dann die Färbung fort.

Liegt der Zustand aus Lemma 3.2 vor, führt dies zu einer Ausnahme: Existiert ein Pfad der Länge 3, welcher die beiden zu verschmelzenden Knoten verbindet, entsteht beim Verschmelzen ein Dreieck (sofern dieses nicht schon vorher vorhanden war). In diesem Fall wählen wir einen anderen 5-Schnitt, der entlang dieses 3-Pfades verläuft (rot gekennzeichnete Schnitt in Abbildung 3.4).



**Abbildung 3.4:** Wir wählen einen alternativen 5-Schnitt (rot) statt durch die Identifizierung ein Dreieck zu erzeugen.

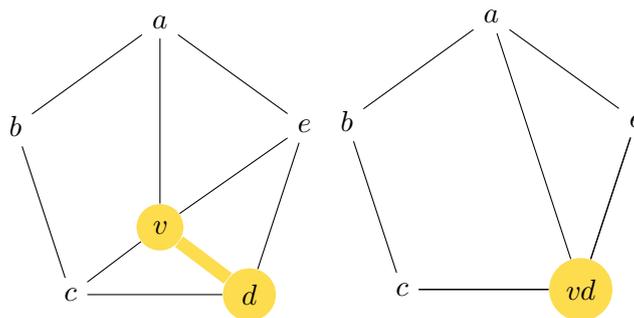
Hierbei könnte, wie in Abbildung 3.4b illustriert, Konfiguration B eintreten. Besteht das genannte Problem bei dem anderen Knotenpaar nicht, fahren wir stattdessen mit diesem fort. Sollten jedoch beide Knotenpaare zu Konfiguration B führen, wechseln wir zum äußeren Fünfeck, welches sich aus den beiden verbindenden Pfade zusammensetzt, wie in Abbildung 3.5 dargestellt. Ist dieses Fünfeck die äußere Facette, so sind einige Knoten des ursprünglichen 5-Schnitts bereits gefärbt ( $a, c, d$  in der Abbildung). Wir können dann diese Färbung auf die übrigen Knoten erweitern.



**Abbildung 3.5:** Wir wechseln zum äußerem Fünfeck (rot).

Ist dieses Fünfeck nicht die äußere Facette, verschmelzen wir die Knoten  $b$  und  $d$  oder  $c$  und  $e$ . Hierbei kann kein neues Dreieck entstehen, und weder  $b$  noch  $c$  können vorgefärbt gewesen sein, da diese in diesem Fall nicht Teil der äußeren Facette sein können.

**Spezialfall B** Falls  $G_I$  Konfiguration B entspricht, reduzieren wir das Quadrat  $abcv$ , indem wir die Knoten  $b$  und  $v$  oder das Quadrat  $cved$  durch Identifizieren der Knoten  $v$  und  $d$  verschmelzen, wie in Abbildung 3.6 dargestellt. Es sei erwähnt, dass der Knoten  $v$  sicher nicht gefärbt ist, da dieser nicht Teil der äußeren Facette sein kann. Durch diese Verschmelzung wird der Teilgraph in Konfiguration A überführt, und wir können gemäß Spezialfall A fortfahren.



**Abbildung 3.6:** Nach Verschmelzen von  $v$  und  $d$  entspricht der Graph Konfiguration A und führt entsprechend zu Spezialfall A.

Fall  $f_3 = 2$ :

Entweder  $f_3(G_I) = f_3(G_A) = 1$  oder O.E.  $f_3(G_I) = 0$  und  $f_3(G_A) = 2$ .

Im Fall von  $f_3(G_I) = f_3(G_A) = 1$  färben wir den 5-Schnitt  $P_C$ . Die initiale Färbung von  $P_C$  ist auch im Spezialfall möglich (s. Konfiguration A und Konfiguration B)

Dieser Teilgraph bildet dann die gefärbte äußere Facette sowohl von  $G_A$  als auch von  $G_I$ . Wir erweitern die Färbung auf  $G_A$  und  $G_I$ , es sei denn, sie entsprechen entweder Konfiguration A oder Konfiguration B. In diesem Fall verfahren wir gemäß Abschnitt 3.2.3.

Ist O.E.  $f_3(G_I) = 0$  und  $f_3(G_A) = 2$ , färben wir zunächst  $G_A$  induktiv. Wir erweitern dann die Färbung der äußeren Facette  $P_C$  auf  $G_I$ . Da  $f_3(G_I) = 0$ , besteht hier keine Einschränkung an die Färbung.

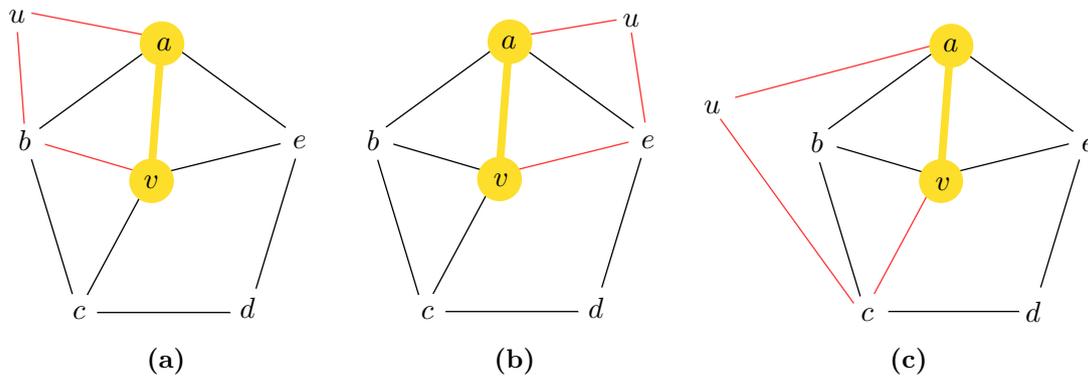
Fall  $f_3 = 3$ :

Entweder O.E.  $f_3(G_I) = 1$  und  $f_3(G_A) = 2$  oder O.E.  $f_3(G_I) = 0$  und  $f_3(G_A) = 3$ .

Ist O.E.  $f_3(G_I) = 0$  und  $f_3(G_A) = 3$  verfahren wir analog zu Abschnitt 3.2.3, da keine Einschränkung an  $G_I$  besteht.

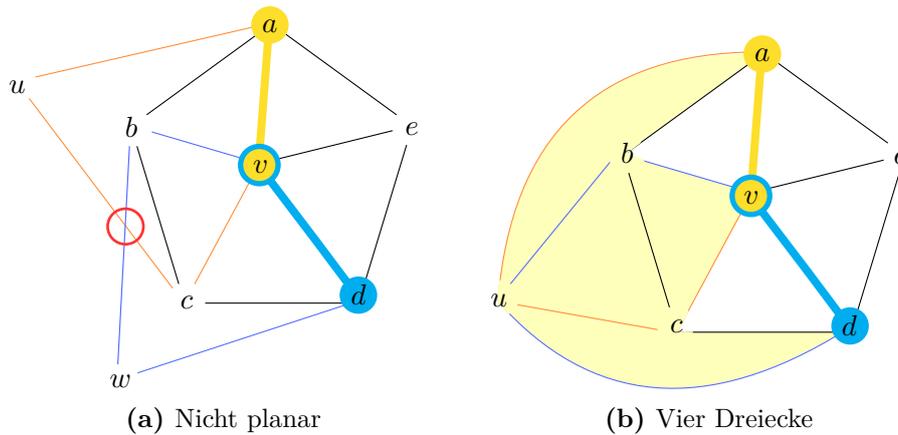
Ist O.E.  $f_3(G_I) = 1$  und  $f_3(G_A) = 2$  färben wir zunächst  $G_A$  induktiv und betrachten dann  $G_I$  mit  $P_C$  als dessen äußere, bereits gefärbte Facette. Liegt das Dreieck nicht wie in Konfiguration A oder Konfiguration B vor, erweitern wir die Färbung auf  $G_I$ . Falls doch, verfahren wir folgendermaßen:

**Spezialfall B** Liegt Konfiguration B vor, können wir entweder  $a$  und  $v$  oder  $v$  und  $d$  verschmelzen. Ist entsprechend dem Abschnitt 3.2.2 das zu verschmelzende Knotenpaar durch einen Pfad der Länge 3 verbunden, welcher ein neues Dreieck erzeugen würde, so kann dieser Pfad zwischen  $a$  und  $v$  verlaufen wie in Abbildung 3.7 (für  $vd$  symmetrisch).



**Abbildung 3.7:** Mögliche Verläufe eines 3-Pfades zwischen den zu verschmelzenden Knoten

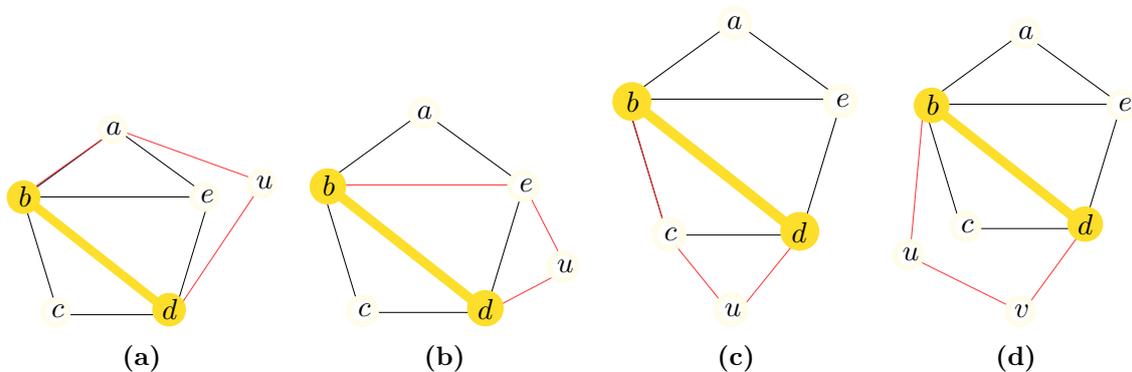
Hierbei kann nur in Konfiguration c ein *neues* Dreieck entstehen. Wir kontrahieren in diesem Fall das andere Knotenpaar. Die Komplikation auf diese Weise aufzulösen ist möglich, da nicht beide Knotenpaare über einen solchen dreieckserzeugenden Pfad verbunden sein können. Andernfalls wäre der Graph nicht planar (Abbildung 3.8a), es wären vier Dreiecke enthalten ( $buc$ ,  $bvc$ ,  $uba$ ,  $ucd$  in Abbildung 3.8b), oder es wären  $k$ -Schnitte vorhanden, die wir anderweitig abarbeiten könnten.



**Abbildung 3.8:** Die Komplikation wird durch Wechsel des zu verschmelzenden Knotenpaares umgangen, da nicht beide Paare simultan über einen 3-Pfad verbunden sein können.

**Spezialfall A** Liegt Konfiguration A vor, können wir entweder  $b$  mit  $d$  oder  $c$  mit  $e$  verschmelzen.

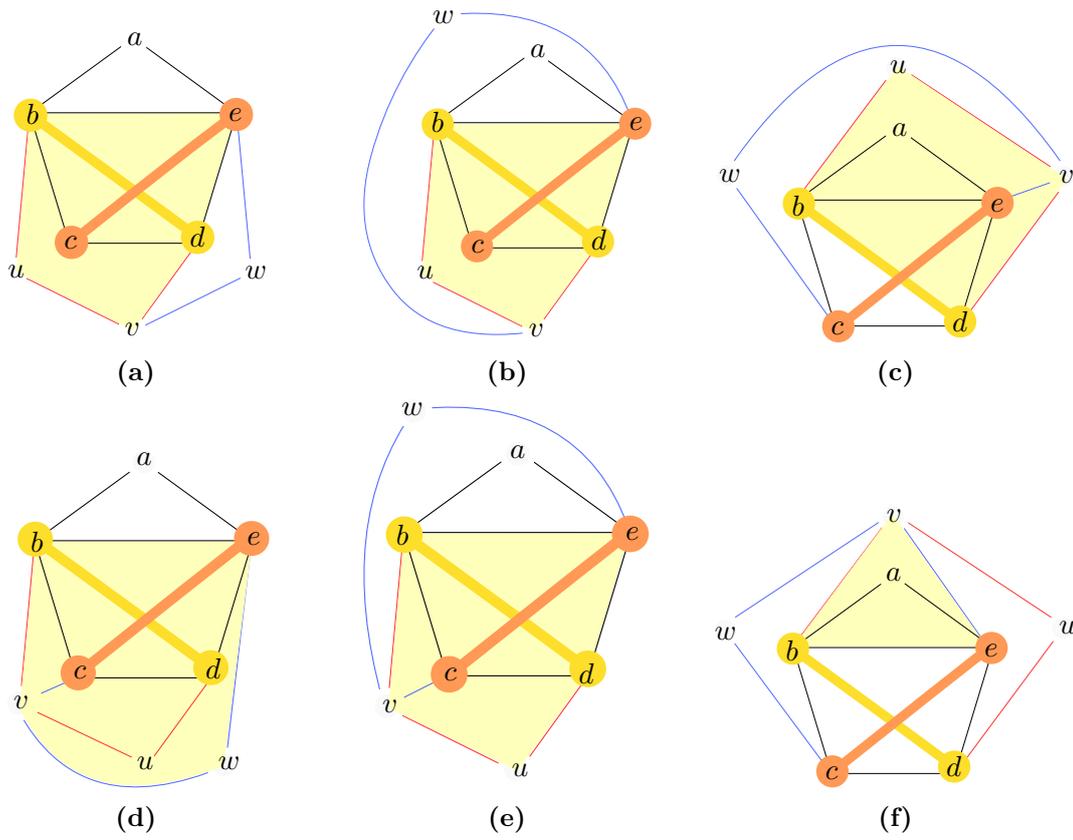
Ist entsprechend dem Lemma 3.2 das zu verschmelzende Knotenpaar durch einen Pfad der Länge 3 verbunden, welcher ein neues Dreieck erzeugen würde, so kann dieser Pfad für  $b$  und  $d$  verlaufen wie in Abbildung 3.9 dargestellt (für  $ce$  symmetrisch).



**Abbildung 3.9:** Mögliche Verläufe eines 3-Pfades zwischen den zu verschmelzenden Knoten

Verläuft der Pfad wie in Abbildung 3.9a wechseln wir zum Fünfeck  $abcdu$  und verfahren wie bei Abschnitt 3.2.3. In den Fällen Abbildung 3.9b und Abbildung 3.9c entsteht durch die Verschmelzung kein neues Dreieck, da die Anzahl Dreiecke von der Transformation nicht beeinflusst wird. Im Fall Abbildung 3.9d kann ein Dreieck entstehen. Wir verschmelzen dann stattdessen das andere Knotenpaar.

Falls dieses andere Knotenpaar aber ebenfalls durch einen Pfad der Länge 3 verbunden ist, kann dieser wie in Abbildung 3.10 verlaufen. In den Fällen a,b und e wechseln wir zum



**Abbildung 3.10:** Sind beide Knotenpaare über einen 3-Pfad verbunden, gehen wir in einen anderen Fall (gelb hinterlegt) über.

5-Schnitt  $bedvu$  und verfahren wie in Abschnitt 3.2.3. Im Fall c betrachten wir den 4-Schnitt  $buvd$  und im Fall d  $bewv$  und verfahren wie in Abschnitt 3.2.2. Im Fall f betrachten wir den den 3-Schnitt  $bve$  und verfahren wie in Abschnitt 3.2.1.

### 3.3 Der Graph enthält keine kleinen Schnitte

Sei  $G$  nun ein Graph ohne  $k$ -Schnitte für  $k \leq 5$ .

#### 3.3.1 Es gibt einen Knoten mit genau zwei Nachbarn

Sei  $x$  ein Knoten mit  $d_x = 2$  und den Nachbarn  $x_1$  und  $x_2$ . Entspricht  $G$  einer der Konfigurationen aus Abbildung 3.11, trifft Proposition 3.3 offensichtlich zu, da eine Färbung direkt angegeben werden kann.

Durch Abarbeiten aller Möglichkeiten, wie  $x_1$  und  $x_2$  via Pfaden der Länge 0 bis 3 verbunden sein können, konnten wir eine weitere mögliche Ausnahmekonfiguration Abbildung 3.11b ausmachen, welche über die bereits von Grünbaum [Grü63, S. 307] gefundenen hinausgeht.

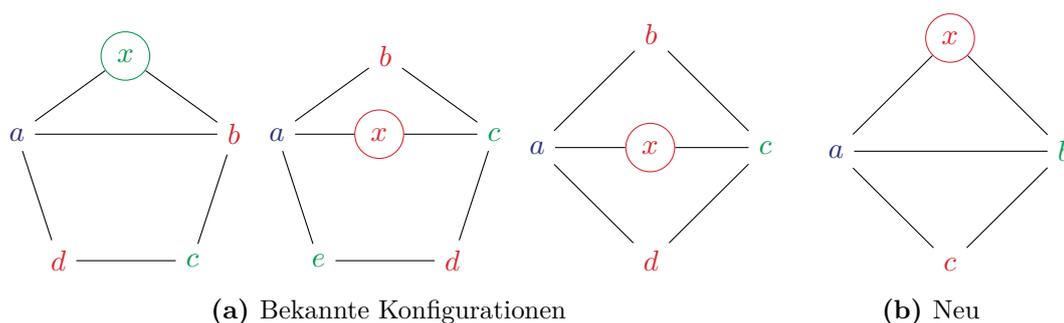


Abbildung 3.11: Simple Konfigurationen mit Beispielfärbung

Ist  $G$  keine dieser Konfigurationen, so sind die an  $x$  anliegenden Facetten sicher 5-Facetten. Wir definieren  $G^*$  als den Graphen, der durch Entfernen von  $x$  und Hinzufügen der Kante  $\{x_1, x_2\}$  (falls noch nicht vorhanden) entsteht. Wir können sicher sein, dass nicht sowohl  $x_1$  als auch  $x_2$  bereits vorgefärbt sind, da eine gefärbte äußere Facette, die beide Knoten enthält, eine Länge von 6 haben müsste und somit durch Anwendung von Proposition 3.1 hätte vermieden werden können.

Wir färben  $G^*$  induktiv. Ist dieser Graph dreigefärbt, wählen wir für den Knoten  $x$  in  $G$  eine Farbe, die nicht mit den Farben für  $x_1$  und  $x_2$  in  $G^*$  übereinstimmt.

Dies wäre aber in folgenden Ausnahmefällen nicht möglich:

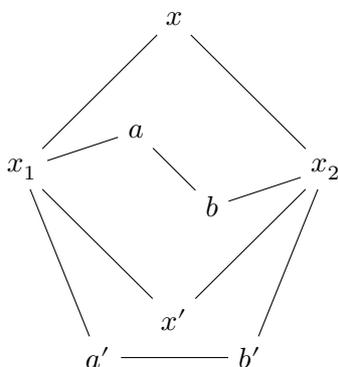
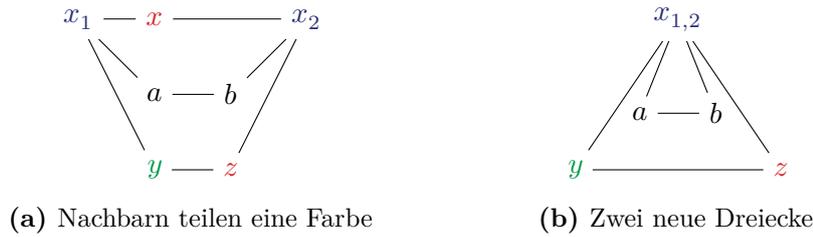


Abbildung 3.12: Ein zusätzlicher Knoten welcher die Nachbarn von  $x$  direkt verbindet kann nicht existieren, da sonst ein 4-Schnitt vorliegen würde.

**Erster Ausnahmefall:**  $\exists x' \neq x \in G$  mit  $\{x', x_1\}, \{x', x_2\} \in E$ . Dieser Fall kann aber nicht eintreten, da die an  $x$  angrenzenden Facetten zwingend 5-Facetten sein müssen und  $xx'x_1x_2$  entsprechend nicht als Facette in  $G$  auftreten kann. Wie in Abbildung 3.12 dargestellt, würde dies dazu führen, dass die Knoten einen 4-Schnitt  $x_1xx_2x'$  bilden, was bereits ausgeschlossen war.

Die tatsächliche Konfiguration kann sich auch von der Abbildung unterscheiden, indem unterschiedliche Knoten zusammenfallen ( $x$  mit  $a$ ,  $x$  mit  $b$ ,  $x'$  mit  $a$ , oder  $x'$  mit  $b$ ). Die Argumentation gilt auch für diese Fälle.



**Abbildung 3.13:** Haben die Nachbarn von  $x$  die gleiche Farbe, führen wir diese zusammen.

**Zweiter Ausnahmefall:**  $x$  liegt auf der gefärbten äußeren Facette und  $c(x_1) = c(x_2)$ . Da die äußere Facette bereits gefärbt ist, gilt im Rest des zu färbenden Graphen  $f_3 \leq 1$ . Wir entfernen  $x$  und verschmelzen  $x_1$  mit  $x_2$ . Dabei entstehen maximal zwei neue Dreiecke, wie in Abbildung 3.13 illustriert.

Weitere Dreiecke könnten nur entstehen, wenn  $x_1$  und  $x_2$  durch mehr als zwei Pfade der Länge 3 verbunden wären. Ein dritter Pfad würde aber in einem 5-Schnitt resultieren, da nur das innere und äußere Fünfeck Facetten sein können. Da  $c(x_1) = c(x_2)$ , waren auch die angrenzenden Knoten mit der Färbung von  $x_1$  und  $x_2$  kompatibel und sind dies entsprechend auch mit dem verschmolzenen Knoten  $x_{1,2}$ .

### 3.3.2 Kein Knoten hat genau zwei Nachbarn

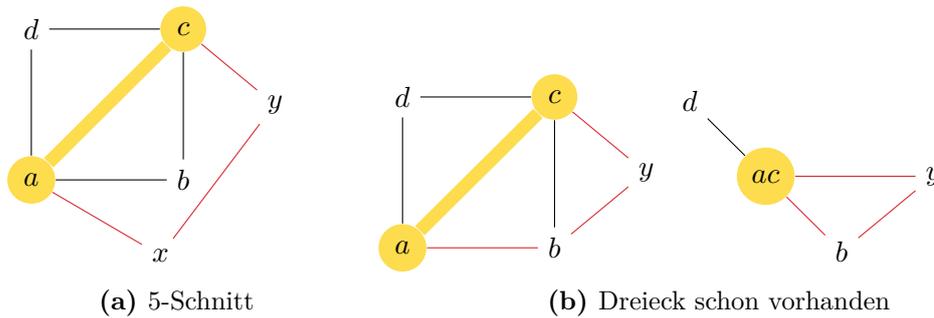
Wir unterteilen weiter in Unterfälle, basierend auf Existenz von 4-Facetten.

Fall  $f_4 > 0$ :

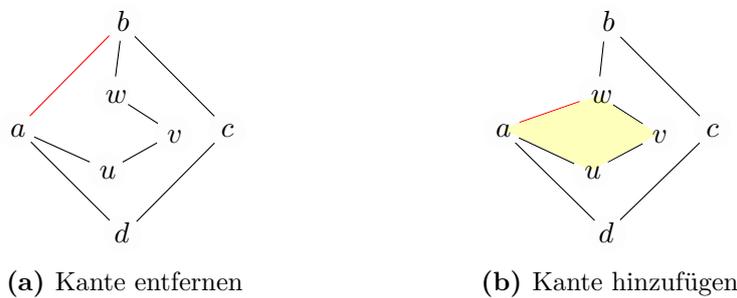
Sind Teile des Graphen bereits gefärbt worden, könnte es sein, dass die gefärbte äußere Facette eine 4-Facette ist. Wir behandeln zunächst etwaige ungefärbte 4-Facetten.

**Es existiert eine ungefärbte 4-Facette.** Sei  $Q_F$  eine ungefärbte 4-Facette und  $a$  ein ungefärbter Knoten auf  $Q_F$ . Wir identifizieren  $a$  mit dem ihm nicht benachbarten Knoten  $c$  auf  $Q_F$ . Hierbei kann über die Bedingung aus Lemma 3.2 kein neues Dreieck entstehen. Denn existiert ein 3-Pfad, gibt es auch einen 5-Schnitt ( $adcyx$  in Abbildung 3.14a), oder das Dreieck war bereits vor der Identifizierung vorhanden ( $byc$  in Abbildung 3.14b).

**Die einzige 4-Facette ist die gefärbte äußere Facette.** Da die äußere Facette bereits gefärbt ist, gilt auch hier, dass  $f_3 \leq 1$ . Es muss eine Kante  $\{a, b\}$  zwischen der gefärbten äußeren 4-Facette und einer 5-Facette geben. Wir entfernen diese Kante und fügen dann die Kante  $\{a, w\}$  gemäß Abbildung 3.15 hinzu. Die gefärbte äußere Facette ist nun eine 5-Facette, dessen letzter übriger Knoten  $w$  kompatibel eingefärbt werden kann. Der resultierende Graph enthält eine 4-Facette  $auvw$ , welche nicht die gefärbte äußere Facette ist. Wir fahren also mit der Reduktion aus Abschnitt 3.3.2 fort.



**Abbildung 3.14:** Das 3-Pfad Problem wird vermieden, da entweder ein bereits abgeschlossener Fall vorliegt oder die Anzahl Dreiecke unverändert bleibt.



**Abbildung 3.15:** Bei gefärbter 4-Facetten, transformieren wir den Graphen so, dass ein anderer Fall zu trifft.

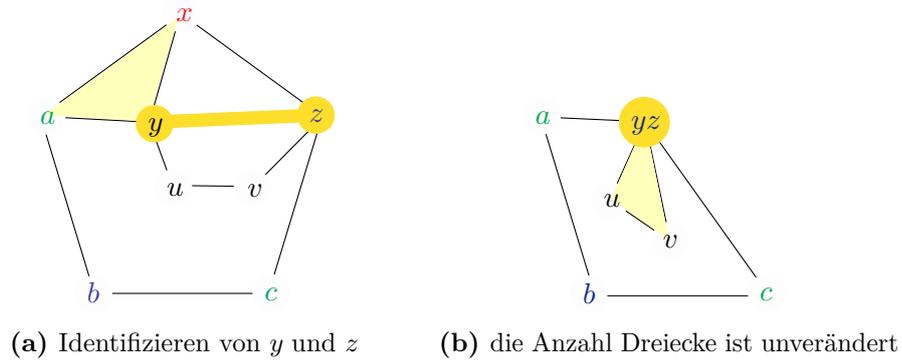
Fall  $f_4 = 0$ :

Ist keine 4-Facetten vorhanden, betrachten wir einerseits Dreiecke mit Knoten von eingeschränkten Grad und solche mit größerem Grad.

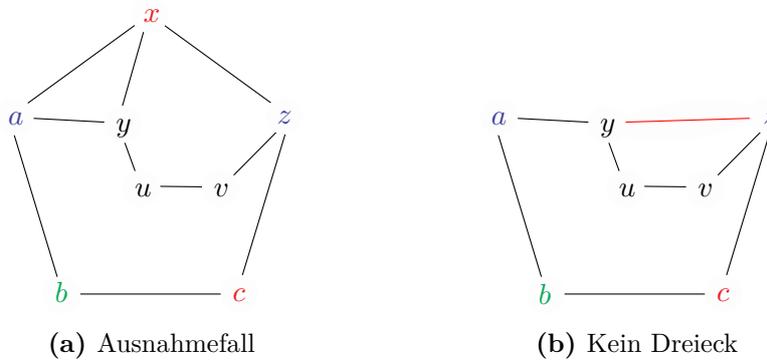
**Es gibt ein Dreieck mit einem Knoten von Grad 3.** Sei  $x$  der Knoten auf der 3-Facetten  $axy$  mit  $d_x = 3$ . Ist die 5-Facetten  $abcxz$  ungefärbt oder die gefärbte äußere Facetten mit  $c(a) \neq c(z)$  (s. Abbildung 3.17), löschen wir den Knoten  $x$  und identifizieren  $y$  und  $z$ .

Ist die 5-Facetten  $abcxz$  die gefärbte äußere Facetten mit  $c(a) = c(z)$  (s. Abbildung 3.17), löschen wir  $x$  und fügen die Kante  $\{y, z\}$  hinzu. Wir färben den resultierenden Graph mit  $abczy$  als gefärbte äußere Facetten. Der Knoten  $y$  kann hierfür umgefärbt werden.

**Jedes Dreieck enthält nur Knoten mit höherem Knotengrad.** Dieser Abschnitt orientiert sich eng an der Methode, die in *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings* [Grü63] verwendet wird, und die ihrerseits *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler* [Leb40] und *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel* [Grö59] folgt. Diese basiert darauf, eine spezifische Konfiguration  $\mathcal{P}$  von Facetten zu identifizieren, die stets in einem Graphen mit den durch diesen Fall gegebenen Einschränkungen vorhanden ist. Diese Konfiguration kann dann auf zwei verschiedene Weisen reduziert werden. Wir zeigen durch Widerspruch, dass mindestens eine dieser Reduktionsmöglichkeiten immer möglich sein muss.

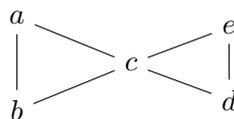


**Abbildung 3.16:** Sind  $a$  und  $z$  unterschiedlich gefärbt, können wir  $y$  und  $z$  ohne Komplikation verschmelzen.



**Abbildung 3.17:** Sind  $a$  und  $z$  gleich gefärbt, können wir  $y$  und  $z$  nicht ohne Komplikation verschmelzen und behandeln diese Ausnahme anders.

Die spezielle Konfiguration ist immer vorhanden. Wir weisen jedem Knoten  $v$  das Gewicht  $w(v) = \frac{1}{d_v}$  und jeder Facette  $F$  das Gewicht  $w(F) = \sum_{v \in F} w(v)$ , also der Summe der Gewichte aller an der Facette teilhabenden Knoten, zu. Insbesondere ist dann die Summe aller Facettengewichte eines Graphen  $\sum_F w(F) = |v| = n$ . Dies gilt nur unter der Annahme, dass alle an einen Knoten angrenzenden Facetten paarweise verschieden sind, also zum Beispiel nicht in dem Sonderfall aus Abbildung 3.18, bei dem die äußere Facette doppelt an  $c$  angrenzt. Wir definieren daher  $w(F)$  als Summe über die Gewichte der an  $F$  teilhabenden Knoten sequentiell entlang des Randes der Facette. Das heißt, einzelne Knoten können mehrfach gezählt werden.



**Abbildung 3.18:** Wenn die äußere Facette beidseitig an einen Knoten angrenzt fällt dieser doppelt ins Gewicht.

Da jeder Knoten  $v$  an einer beliebigen 3-Facette  $T_F$  Grad  $d_v > 3$  hat, erhalten wir als Facettengewicht für  $T_F$  stets  $w(T_F) \leq \frac{3}{4}$ . 4-Facetten haben wir in diesem Fall nicht. Bei 5-Facetten  $P_F$  erhalten wir  $w(P_F) \leq \frac{3}{2}$ , außer ein Knoten  $\bar{v}$  in  $P_F$  hat den Grad  $d_{\bar{v}} \in \{3, 4, 5\}$  und die anderen Knoten  $v$  den Grad  $d_v = 3$ . Bezeichne  $f_5^-$  die Anzahl dieser speziellen Facetten, welche einen Knoten mit eingeschränktem Grad haben und  $f_5^+$  die Anzahl aller anderen mit Knoten von uneingeschränktem Grad. Wir haben also  $f_5^- + f_5^+ = f_5$  als Anzahl aller 5-Facetten, und da der Graph in diesem Fall nur 3- und 5-Facetten enthalten kann, ist  $f = f_3 + f_5$  die Anzahl aller Facetten. Da jede 3-Facette 3 und jede 5-Facette 5 Kanten hat, welche an je zwei Facetten angrenzen, ist  $3f_3 + 5f_5 = 2e$ . Via der Euler'schen Formel  $n + f = m + 2$  erhalten wir für  $G$  mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $f$  Facetten:

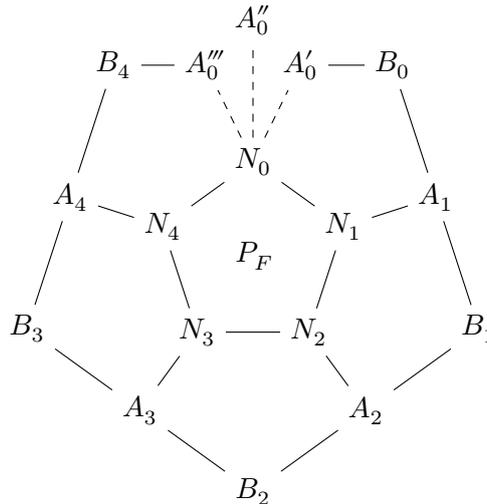
$$\begin{aligned} n + f_3 + f_5 &= \frac{3}{2}f_3 + \frac{5}{2}f_5 + 2 \\ n &= \frac{1}{2}f_3 + \frac{3}{2}f_5 + 2. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Gewichte ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_3 + \frac{5}{2}f_5 + 2 = n &= \sum_F w(F) = w(T)f_3 + w(P)f_5 \leq \frac{3}{4}f_3 + \frac{5}{3}f_5^- + \frac{3}{2}f_5^+ \\ 2 &\leq \frac{1}{4}f_3 + \frac{1}{6}f_5^- \\ 24 &\leq 3f_3 + 2f_5^-. \end{aligned}$$

Da  $f_3(G) \leq 3$ , ist  $f_5^- \geq \frac{15}{2}$  also existieren in  $G$  mindestens 8 solcher speziellen 5-Facetten.

Ist eine dieser 5-Facetten die gefärbte äußere Facette, so ist es trotzdem möglich, eine Facette  $P_F$  unter den verfügbaren, mindestens 8 zu bestimmen, welche weder selbst eingefärbt ist, noch an der gefärbten 5-Facette anliegt. Die Konfiguration um die Facette  $P_F$  entspricht dann der Konfiguration  $\mathcal{P}$ , wie sie in Abbildung 3.19 abgebildet ist.



**Abbildung 3.19:** Im stark eingeschränkten Graphen ist die Konfiguration  $\mathcal{P}$  garantiert.

Hierbei können die Knoten  $A'_0$ ,  $A''_0$  und  $A'''_0$  zusammenfallen. Alle anderen Knoten sind aber sicher paarweise verschieden, da sonst Konfigurationen resultieren, welche Knoten mit Grad 2, Vierecke, weitere Dreiecke oder 5-Schnitte enthalten.

Reduzieren der Konfiguration. Unter der Voraussetzung, dass die Konfiguration  $\mathcal{P}$  im Graph vorkommt, können wir, nach Entfernen der Knoten  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$ , den Graphen folgendermaßen reduzieren:

Entweder wir identifizieren  $A_2$  mit  $A_3$  und  $A_1$  mit  $A_4$  (Abbildung 3.21) oder wir identifizieren  $A_1$  mit  $A_2$  und  $N_0$  mit  $A_3$  (Abbildung 3.22). Durch Verschmelzen der Knoten  $A_2$  mit  $A_3$  oder  $A_1$  mit  $A_2$  kann hierbei nie ein neues Dreieck entstehen, da, sollten sie gemäß Lemma 3.2 verbunden sein, an dieser Stelle wegen  $d_{B_i} > 2$  mit  $i \in \{1, 2\}$  auch ein 5-Schnitt vorhanden sein müsste (s. Abbildung 3.20).

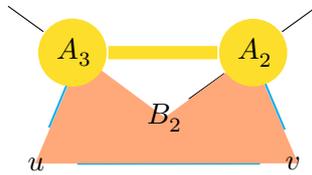


Abbildung 3.20: 3-Pfad zwischen  $A_2$  und  $A_3$  ist wegen 5-Schnitt ausgeschlossen.

Es verbleibt also zu zeigen, dass, obwohl je eines der Knotenpaare  $A_1$  und  $A_4$ , beziehungsweise  $N_0$  und  $A_3$ , über einen Pfad der Länge 3 gemäß Lemma 3.2 verbunden sein können, diese beiden Pfade nicht im selben Graph coexistieren können. Dadurch besteht also immer die Möglichkeit, das jeweilige Knotenpaar, welches nicht durch diesen Pfad verbunden ist, zu einem Knoten zu verschmelzen, ohne dabei ein neues Dreieck zu erzeugen.

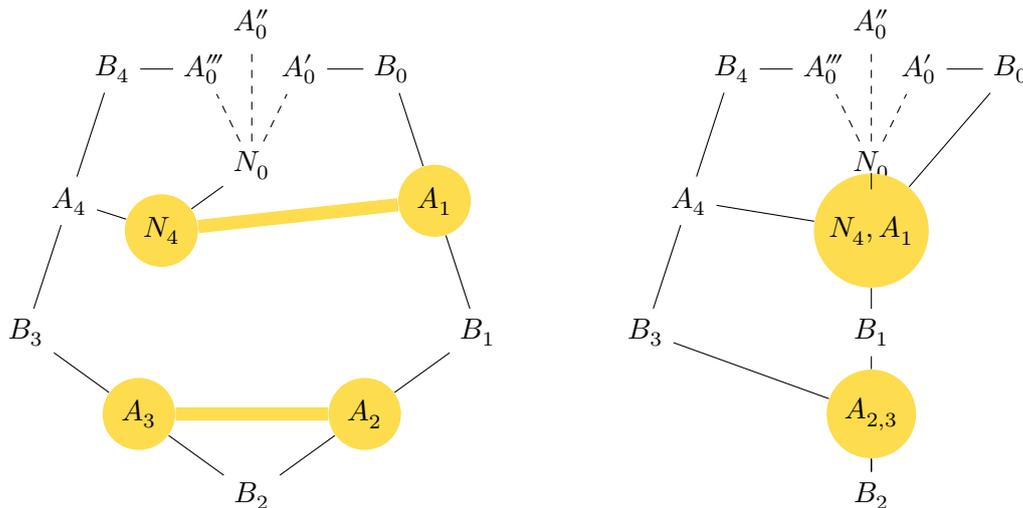
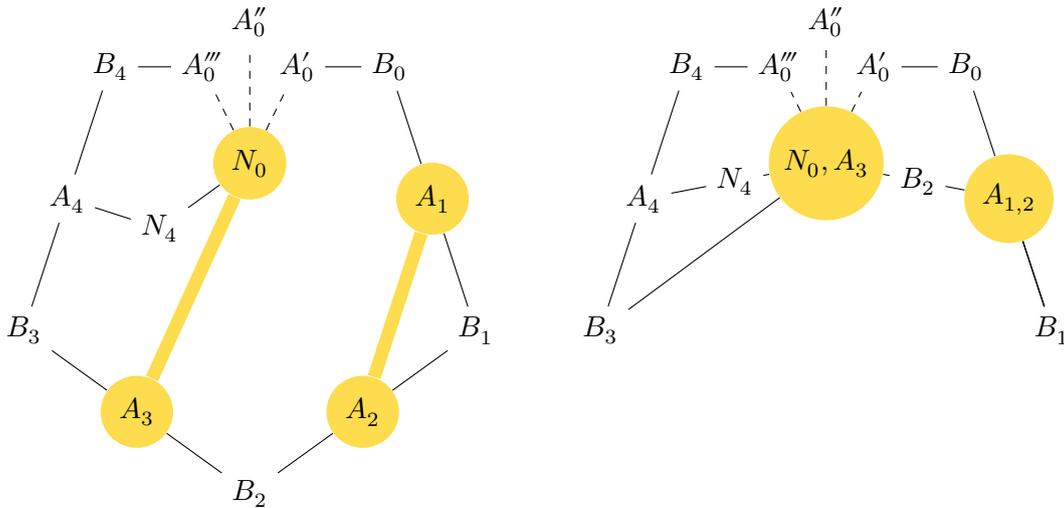
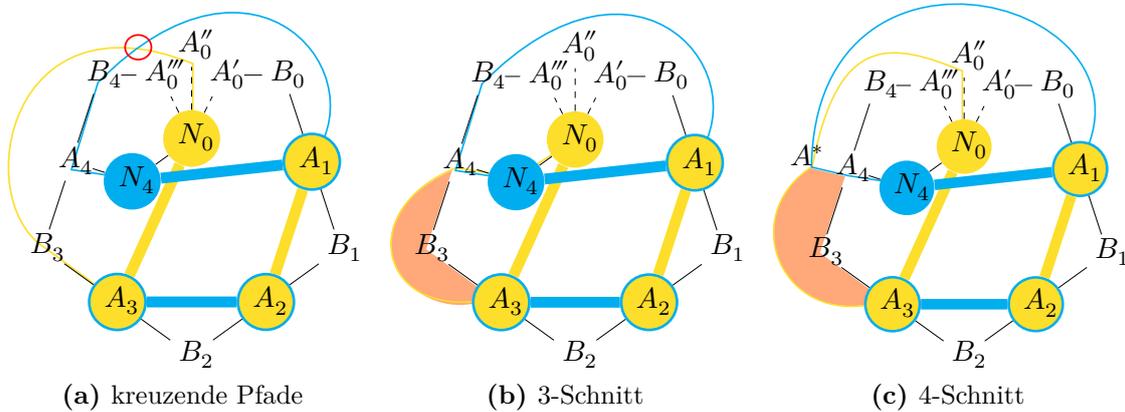


Abbildung 3.21: Erste Reduktionsoption: Wir verschmelzen  $A_2$  mit  $A_3$  und  $A_1$  mit  $A_4$ .



**Abbildung 3.22:** Zweite Reduktionsoption: Wir verschmelzen  $A_1$  mit  $A_2$  und  $N_0$  mit  $A_3$ .

Pfade, welche  $A_1$  und  $A_4$  verbinden, können folgendermaßen verlaufen:  $A_4B_4$ ,  $A_4B_0$ ,  $A_4B_3$ ,  $A_4B_1$ ,  $N_0A_0$  oder  $A_4A^*$ . Dabei steht die Bezeichnung  $A_0$  für  $A_0^k$  mit  $k \in \{1, 2, 3\}$  und  $A^*$  repräsentiert einen Knoten abseits der Konfiguration in Abbildung 3.19. Die genaue Ausprägung dieses Pfades ist hierbei nicht entscheidend. Pfade, die  $N_0$  und  $A_3$  verbinden, können entlang  $A^*A_0$ ,  $N_4A_4$ ,  $B_3A_0$ ,  $B_4A_0''$ ,  $B_2A_0$ ,  $B_0A_0'$  verlaufen. Die Kombination dieser Pfade könnte entweder zu sich kreuzenden Pfaden führen oder mindestens einen  $k$ -Schnitt mit  $k \in \{3, 4, 5\}$  ergeben, da  $d_{B_i} > 2$ . Diese Möglichkeiten widersprechen der Planarität des Graphen, beziehungsweise dem vorangegangenen Ausschluss der  $k$ -Schnitte.



**Abbildung 3.23:** Beispiele für Pfadkombinationen, die zu Widersprüchen führen

Entsprechend bestehen also keine Möglichkeiten, dass die Knotenpaare so untereinander verbunden sind, dass nicht mindestens ein Paar identifiziert werden kann, ohne dass ein neues Dreieck entsteht. Es existiert somit immer eine Möglichkeit zur Reduktion des Graphen.

Zusammenfassend sind damit alle Konfigurationen berücksichtigt, die ein planarer Graph mit maximal drei Dreiecken aufweisen kann. Dies ermöglicht es uns, für jeden derartigen Graphen induktiv eine valide Dreifärbung zu ermitteln.  $\square$



## 4 Algorithmische Überlegungen

In diesem Kapitel untersuchen wir das Potenzial des Beweises für Proposition 3.3 als Grundlage für einen Algorithmus zur Färbung planarer Graphen mit maximal drei Dreiecken. Unser Ziel ist es, die Herausforderungen einer solchen Adaption zu beleuchten und mögliche Lösungsansätze vorzustellen.

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über verwandte Ergebnisse in diesem Bereich. Garey und Johnson demonstrierten mittels eines Polynomialzeitalgorithmus die NP-Vollständigkeit des Entscheidungsproblems zur Dreifärbbarkeit planarer Graphen [GJ79, S. 87]. Diese gilt auch für Graphen mit der zusätzlichen Einschränkung, dass jeder Knoten maximal den Grad 4 hat [GJS74]. Thomassen bewies die Dreifärbbarkeit für planare Graphen ausschließlich mit Zyklen von mehr als fünf Kanten, während Dvořák et al. die Dreifärbbarkeit für Zyklen von mehr als drei Kanten zeigten [DKT11].

Um unseren Beweis zu einem Algorithmus zu adaptieren, müssen wir zunächst sicherstellen, dass die Eingabe sowohl planar ist, gemäß 3.1 keine Facette mit mehr als fünf Seiten enthält und maximal drei Dreiecke aufweist. Die Planarität kann mittels eines Algorithmus von Hopcroft und Wong in linearer Zeit festgestellt werden. Mit einer zweiseitig verketteten Adjazenzliste als Datenstruktur, in der die Nachbarn jedes Knotens  $v$  zyklisch aufgelistet und die beiden Vorkommen derselben Kante miteinander verknüpft sind, können wir mithilfe eines Algorithmus von Mohar und Thomassen [MT01, S. 93] in  $O(k)$  alle Knoten und Kanten von  $k$ -Facetten identifizieren. Chang und Lu entwickelten einen Linearzeitalgorithmus zur Bestimmung der Größe der kleinsten Zyklen im Graphen [CL13]. Es ist also effizient möglich die Eingabe auf Kompatibilität zu prüfen.

Der Hauptteil des Algorithmus verläuft rekursiv. Wir müssen identifizieren, welcher Fall des Beweises zutrifft. Falls der Graph kleine Schnitte enthält, verfahren wir entsprechend des kleinsten Schnittes induktiv weiter. Falls nicht, bestimmen wir den passenden Unterfall und führen die entsprechende Reduktion durch. Die Identifikation, ob der Graph kleine Schnitte enthält, kann durch Prüfung der kleinsten Zyklengröße und der Zugehörigkeit der korrespondierenden Knoten an einer Facette erfolgen. Der Algorithmus von Chang und Lu [CL13] gibt nicht nur die kleinste Zyklusgröße des Graphen, sondern auch einen Knoten auf diesem kleinsten Zyklus aus. Von diesem können alle dem Zyklus zugehörigen Knoten via dem Breitensuchalgorithmus von Itai und Rodeh in Linearzeit identifiziert werden [IR77]. Alternativ fand auch Kowalik [Kow03] geeignete Algorithmen [Kow03]. Falls der kleinste Zyklus kein 3-Schnitt ist, wird eine mehrfache Ausführung des Suchverfahrens notwendig.

Ist diese erste Einteilung erfolgt, werden weitere Suchen notwendig, um den genauen Unterfall zu bestimmen. Nach der Identifizierung werden, je nach Fall, Reduktionen des Graphen notwendig, die in konstanter Zeit möglich sein sollten, da diese als simple Operationen auf der Adjazenzliste umsetzbar sind. Dabei muss festgehalten werden, welche Transformationen gemacht wurden. Schließlich ist der Graph ausreichend reduziert, um

eine direkte Färbung zu ermöglichen. Der Basisfall kann z.B. erreicht sein, wenn der Graph klein genug ist oder keine Dreiecke mehr enthält. Die Färbung des Basisfalls kann dann in Linearzeit erfolgen. Mittels dieses gefärbten Basisfalls und der Liste an ausgeführten Transformationsschritten kann die Färbung auf den Ursprungsgraphen übertragen werden. Dies ist prinzipiell effizient möglich, wobei durch den Fall Abschnitt 3.3.2 auf Seite 24 bereits gefärbte Knoten umgefärbt werden könnten, was zu erhöhter Komplexität beitragen kann. Ist der Ursprungsgraph erreicht, wurde eine passende Dreifärbung gefunden.

Insgesamt ist zu bemerken, dass, obwohl einige Schritte in Linearzeit möglich sind, andere Schritte, insbesondere die Identifikation des jeweils zutreffenden Falles, die Zeitkomplexität des Algorithmus signifikant erhöhen könnten. Ohne effiziente Methoden für diese Schritte skaliert der Algorithmus möglicherweise nicht gut mit komplexeren Graphen. Dennoch könnte durch den Einsatz fortgeschrittener Datenstrukturen und Optimierungstechniken die Komplexität zumindest für einige Graphentypen oder spezifische Fälle reduziert werden. Eine genauere Abschätzung erfordert die Konkretisierung der einzelnen Schritte und die Auswahl einer geeigneten Datenstruktur.

## 5 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Beweis aus *Grötzsch's Theorem on 3-Colorings* [Grü63] kritisch untersucht. Dabei wurden Lücken identifiziert und korrigiert. Der Beweis ist konstruktiv, da er einen induktiven Ansatz verfolgt, bei dem spezifische Konfigurationen identifiziert und reduziert werden.

### Ausblick

Die in Kapitel 4 begonnene Arbeit bietet eine Grundlage für die Entwicklung eines Algorithmus zur Dreifärbung planarer Graphen mit wenigen Dreiecken. Eine vertiefte Untersuchung der Komplexität dieses Algorithmus steht noch aus und wäre ein sinnvoller nächster Schritt.

Ein Ziel für zukünftige Forschung könnte sein, zu untersuchen, ob sogar ein Linearzeitalgorithmus für dieses Problem möglich ist. In *Three-Coloring Triangle-Free Planar Graphs in Linear Time* [DKT11] wurden Grundkonfigurationen ermittelt, von denen mindestens eine in jedem Graphen mit den entsprechenden Einschränkungen vorkommen muss. Die Führung einer Liste von Kandidatenknoten, die zu diesen Konfigurationen gehören könnten, ermöglichte Dvořák et al. [DKT11] einen Linearzeitalgorithmus für die Färbung dreiecksfreier planarer Graphen zu entwickeln. Die Einschränkung der Dreiecksfreiheit zu lockern führt allerdings dazu, dass die genannten Konfigurationen nicht mehr in derselben Form vorhanden sein müssen. Zukünftige Forschungen könnten sich darauf konzentrieren, einen alternativen Satz von Grundkonfigurationen zu ermitteln, der auch Graphen mit Dreiecken berücksichtigt und so potenziell zu einem effizienten Färbungsalgorithmus führt.

Die Weiterentwicklung und Verbesserung der Effizienz von Färbungsalgorithmen könnte weitreichende Anwendungen in vielen Bereichen der Informatik finden, beispielsweise in der Netzwerktheorie und bei Optimierungsproblemen.



# Literaturverzeichnis

- [CL13] H.-C. Chang, H.-I. Lu. „Computing the girth of a planar graph in linear time“. In: *SIAM Journal on Computing* 42.3 (2013), S. 1077–1094 (zitiert auf S. 31).
- [Die17] R. Diestel. *Graph Theory*. Bd. 173. Graduate Texts in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. ISBN: 978-3-662-53621-6 978-3-662-53622-3. DOI: [10.1007/978-3-662-53622-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3) (zitiert auf S. 11).
- [DKT11] Z. Dvořák, K.-I. Kawarabayashi, R. Thomas. „Three-Coloring Triangle-Free Planar Graphs in Linear Time“. In: *ACM Transactions on Algorithms* 7.4 (Sep. 2011), S. 1–14. ISSN: 1549-6325, 1549-6333. DOI: [10.1145/2000807.2000809](https://doi.org/10.1145/2000807.2000809) (zitiert auf S. 9, 31, 33).
- [GJ79] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. First Edition. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman, 1979. ISBN: 0716710455; 9780716710455 (zitiert auf S. 31).
- [GJS74] M. R. Garey, D. S. Johnson, L. Stockmeyer. „Some simplified NP-complete problems“. In: *Proceedings of the sixth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1974, S. 47–63 (zitiert auf S. 31).
- [Grö59] H. Grötzsch. „Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel“. In: *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Nat. Reihe* 8 (1959), S. 109–120 (zitiert auf S. 9, 16, 24).
- [Grü63] B. Grünbaum. „Grötzsch’s Theorem on 3-Colorings“. In: *Michigan Mathematical Journal* 10.3 (1963), S. 303–310 (zitiert auf S. 3, 9, 10, 13, 14, 21, 24, 33).
- [HW74] J. E. Hopcroft, J.-K. Wong. „Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (preliminary report)“. In: *Proceedings of the sixth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1974, S. 172–184 (zitiert auf S. 31).
- [IR77] A. Itai, M. Rodeh. „Finding a minimum circuit in a graph“. In: *Proceedings of the ninth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1977, S. 1–10 (zitiert auf S. 31).
- [Kow03] Ł. Kowalik. „Short cycles in planar graphs“. In: *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Springer. 2003, S. 284–296 (zitiert auf S. 31).
- [Leb40] H. Lebesgue. „Quelques conséquences simples de la formule d’Euler“. In: *journal de mathématiques pures et appliquées* 19.1–4 (1940), S. 27–43 (zitiert auf S. 24).
- [MT01] B. Mohar, C. Thomassen. „Graphs on Surfaces, Johns Hopkins U“. In: *Press, Baltimore* (2001) (zitiert auf S. 31).

- [Tho94] C. Thomassen. „Grötzsch’s 3-Color Theorem and Its Counterparts for the Torus and the Projective Plane“. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 62.2 (1994), S. 268–279 (zitiert auf S. 31).
- [Wil14] R. Wilson. *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved-Revised Color Edition*. Bd. 30. Princeton university press, 2014 (zitiert auf S. 9).

Alle URLs wurden zuletzt am 18. Dezember 2023 geprüft.

## **Erklärung**

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

---

Ort, Datum, Unterschrift