

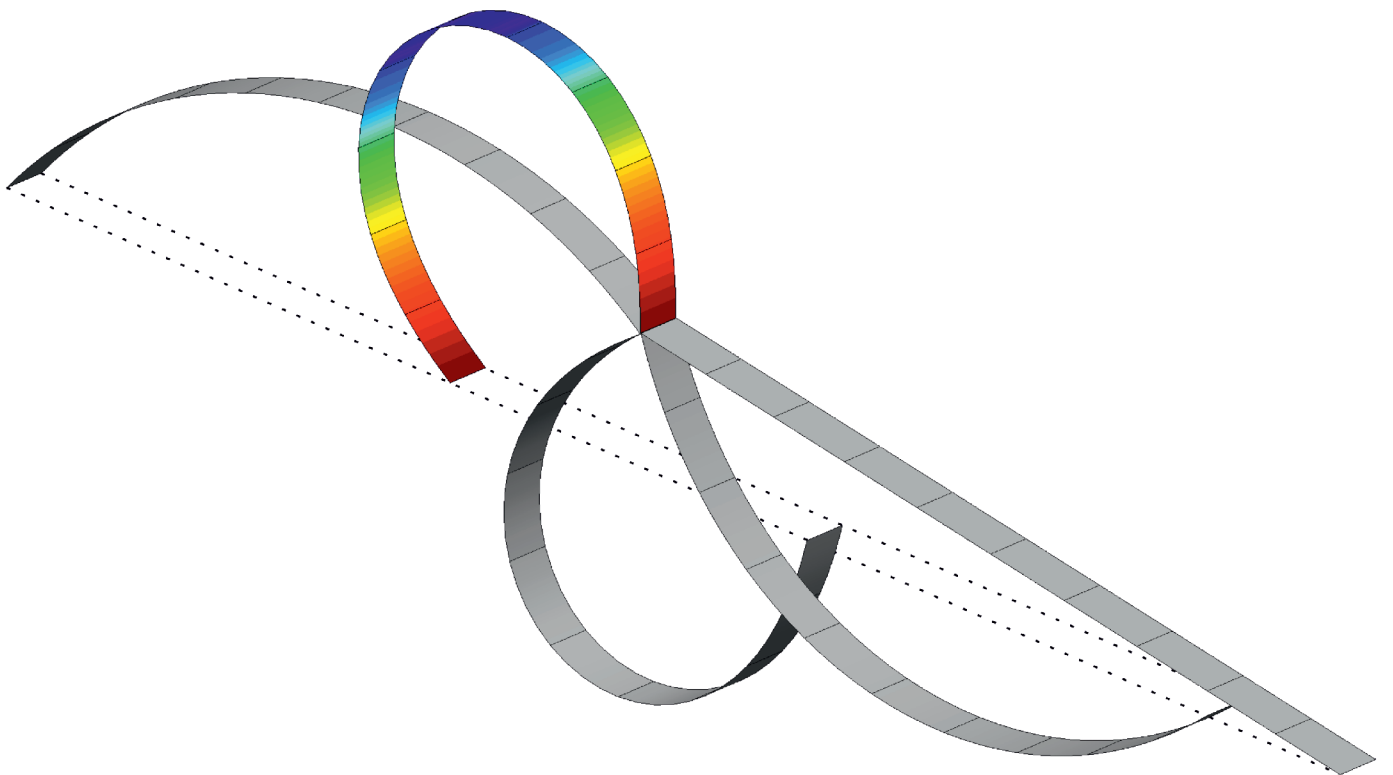
Universität Stuttgart



Baustatik und Baudynamik

# Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen

Bastian Oesterle





# **Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen**

von

**Bastian Oesterle**

Bericht Nr. 67

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2018



© Bastian Oesterle

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: [sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de)  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-059899-9

# **Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Bastian Oesterle**

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Laura De Lorenzis, Braunschweig

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm, Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung: 30. April 2018

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2018



## Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Computersimulation von Schalenstrukturen. Schalen spielen aufgrund ihrer Effizienz in vielen Bereichen von Natur und Technik eine bedeutende Rolle. Sie kennzeichnet ein hohes Verhältnis von Steifigkeit zu Materialeinsatz, das maßgeblich durch die Krümmungseigenschaften der Schale beeinflusst wird. Das Vorkommen von Schalenstrukturen ist sehr vielseitig und erstreckt sich über alle Ingenieurdisziplinen – vom Bauwesen, über den Maschinen- und Fahrzeugbau, bis hin zur Luft- und Raumfahrt. Aus allen Bereichen sind Schalen als dünnwandige, gekrümmte Flächentragwerke nicht wegzudenken. Die stetig steigenden Anforderungen an leichte, optimierte Tragstrukturen erfordern eine sehr gute Prognose deren Tragverhaltens, Beanspruchung und Lebensdauer. In den meisten Fällen kann dabei nicht auf analytische Lösungen zurückgegriffen werden, was die Bestimmung von Näherungslösungen erfordert.

Sollen Deformationsvorgänge von Schalenstrukturen mithilfe numerischer Approximationsverfahren simuliert werden, erfolgt zunächst die Wahl einer geeigneten Schalentheorie. Man unterscheidet in der Regel zwischen schubstarr, schubweichen und dreidimensionalen Schalentheorien. Welche Effekte Berücksichtigung finden, hängt maßgeblich von den im Rahmen einer Theorie getroffenen Annahmen ab. Die einer Schalentheorie zugrunde liegenden partiellen Differenzialgleichungen des kontinuierlichen Problems werden durch eine Diskretisierung in einen Satz algebraischer Gleichungen überführt, der sich gut mit computerorientierten Algorithmen lösen lässt. Die gesuchte Funktion der exakten Lösung wird durch eine Linearkombination sogenannter Ansatzfunktionen approximiert. Jede Ansatzfunktion besteht wiederum aus dem Produkt von Formfunktionen mit diskreten Knotenparametern.

Je nach Art der Diskretisierung und der darin verwendeten Formfunktionen werden diverse Methoden unterschieden. Das wohl bekannteste und am häufigsten verwendete Diskretisierungsschema ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Grundidee ist die Unterteilung des Lösungsgebiets in Teilgebiete mit stückweise definierten Ansatzfunktionen. Üblicherweise werden lineare oder quadratische Polynome als Ansatz verwendet. Doch in den letzten zwei Jahrzehnten hat sich eine Vielzahl alternativer Diskretisierungsverfahren etabliert. Die Mehrzahl dieser Konzepte basiert auf glatten und sich überlappenden Formfunktionen mit komplexer Struktur. Als prominente Beispiele seien netzfreie Methoden genannt, die auf die Unterteilung in Untergebiete, sogenannte Elemente, verzichten. Die zugehörigen glatten, global oder lokal definierten Formfunktionen werden je nach Lage der Knoten bestimmt und verlieren die einfache Struktur von Polynomen. In den letzten Jahren hat die Beliebtheit splinebasierter Ansätze rasant zugenommen. Mit der Vorstellung der isogeometrischen Analyse (IGA) im Jahre 2005 wurde ein Grundstein für zahlreiche Neuentwicklungen im Bereich der computergestützten Berechnung gelegt. Die IGA schlägt die Verwendung einheitlicher Formfunktionen in den Bereichen des computergestützten Entwurfs (CAD) und der computergestützten

Berechnung (z. B. FEM) vor. CAD-typische, splinebasierte Formfunktionen werden nun auch für die numerische Simulation physikalischer Vorgänge verwendet.

Die beschriebenen glatten Diskretisierungsverfahren unterscheiden sich in vielerlei Hinsicht, teilen sich aber eine entscheidende Eigenschaft. Numerische Locking-Effekte treten bei jedem Diskretisierungsverfahren auf, ungeachtet von der Polynomordnung, der Glattheit, oder jedem weiteren Kriterium. Locking-Effekte führen in Abhängigkeit eines sogenannten kritischen Parameters, z. B. der Schlankheit, zu einer unter Umständen sehr schlechten Approximation der gesuchten Lösung. Die Verschiebungslösung wird unterschätzt und bestimmte Spannungskomponenten oder -resultierende zeigen oszillatorisches Verhalten. In gewissen Fällen sind die berechneten Ergebnisse vollständig unbrauchbar und geben keinerlei Aufschluss über das tatsächliche Strukturverhalten.

Sogenannte geometrische Locking-Effekte verstärken sich dramatisch mit zunehmender Schlankheit der verwendeten finiten Elemente. Für die numerische Simulation von Schalenstrukturen haben diese Locking-Effekte eine inhärente Bedeutung, da Schalen stets schlanke, dünne Tragstrukturen sind. Im Kontext numerischer Simulationen von Schalen ist die Vermeidung von Locking-Effekten von elementarer Bedeutung für eine verlässliche Prognose des realen Tragverhaltens und der Beanspruchungen im Tragwerk.

Angesichts einer stetig steigenden Anzahl komplexer Diskretisierungsverfahren beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit intrinsisch lockingfreien Schalenformulierungen. Aus der Literatur bekannte Konzepte versuchen stets die durch die Diskretisierung entstehenden Locking-Effekte zu *beseitigen* oder *abzumindern*. Tritt Locking jedoch gar nicht auf, ist dessen Beseitigung obsolet. Deshalb sollen die hier vorgestellten Schalenformulierungen numerische Locking-Effekte bereits auf Theorieebene *vermeiden*, ungeachtet vom verwendeten Diskretisierungsschema. Die *Vermeidung* von Locking bereits vor der Diskretisierung verspricht ein breites Anwendungsspektrum für diverse Diskretisierungsschemata im Bereich von Computersimulationen physikalischer Vorgänge.

Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der intrinsischen Vermeidung von Querschublocking in Formulierungen für Strukturtheorien. Über hierarchische Reparametrisierung der kinematischen Gleichungen kann Querschublocking im Rahmen einer primalen Methode a priori vermieden werden. Das Konzept wird gleichermaßen für schubweiche Balken-, Platten- und Schalenformulierungen demonstriert, wobei jeweils zwei hierarchische Parametrisierungen unterschieden werden. Sowohl die Parametrisierung hierarchischer Rotationen als auch die Parametrisierung hierarchischer Verschiebungen resultiert in Formulierungen, die intrinsisch frei von Querschublocking sind. Jedoch zeigt die rotationsfreie Parametrisierung mit hierarchischen Verschiebungen deutliche Vorteile durch eine exzellente Approximation der Querkräfte. Im Bereich analytischer Betrachtungen ist die rotationsfreie Parametrisierung schubweicher Balkentheorien grundsätzlich nicht neu. Den Weg in numerische Approximationsverfahren hat sie, womöglich durch die Forderung  $C^1$ -kontinuierlicher Ansätze, für lange Zeit nicht gefunden. Doch durch die Neuentwicklungen im Bereich netzfreier Methoden und der IGA ist es einfach möglich, die Forderung nach glatten Ansatzräumen zu erfüllen.



Auch im Kontext rotationsfreier Parametrisierungen der schubweichen Plattentheorie nach Mindlin lassen sich im Rahmen analytischer Lösungsverfahren frühe Quellen finden. Jedoch ist es bis heute niemandem gelungen, eine konsistente rotationsfreie Plattenformulierung zu beschreiben, die das bekannte Mindlin-Modell reproduziert. In allen Arbeiten wird nur *eine* hierarchische Schubverschiebung parametrisiert, wodurch ein künstlicher Zwang in den kinematischen Gleichungen induziert wird. Diese inkorrekten Plattenformulierungen werden auch heutzutage noch in zahlreichen Veröffentlichungen aufgegriffen, ohne die bestehenden Schwächen zu diskutieren. In dieser Arbeit wird die rotationsfreie Parametrisierung der Mindlin-Theorie durch *zwei* hierarchische Schubverschiebungen vorgeschlagen, wodurch ein künstlicher Zwang vermieden wird. Die in dieser Arbeit vorgestellten schubweichen, rotationsfreien Platten- und Schalenformulierungen sind womöglich die ersten ihrer Art, die das Plattenmodell nach Mindlin exakt reproduzieren können. Im Kontext numerischer Approximationsverfahren sind entsprechende Formulierungen intrinsisch frei von Querschublocking und besitzen ein exzellentes Approximationsvermögen der Querkräfte.

Eine geometrisch nichtlineare Simulationen mit schubweichen Schalenformulierungen erfordert eine spezielle Behandlung und multiplikative Zerlegung großer Rotationen. Durch die elegante Reparametrisierung bei hierarchischen Schalenformulierungen konnte auch in diesem Kontext ein innovativer Ansatz entwickelt werden. Die zugrunde liegende Annahme ist, dass die Querschubrotationen für typische Schalenprobleme eher klein sind, wohingegen die Gesamtrotationen beliebig groß sein können. Diese Annahme resultiert in einer additiven Zerlegung der Green-Lagrange-Verzerrungen in vollständig nichtlineare Anteile vom rotationsfreien Kirchhoff-Love-Typ und hierarchisch addierte, linearisierte Querschubanteile. Dadurch sind große Gesamtrotationen additiv zerlegbar und können sehr einfach dargestellt werden. Für die in dieser Arbeit untersuchten Benchmarkprobleme wird die Gültigkeit der, zunächst restriktiv erscheinenden, Annahme kleiner Schubrotationen aufgezeigt.

Der letzte theoretische Teil dieser Arbeit beschäftigt sich vor allem mit der intrinsischen Vermeidung von Membranlocking. Es wird ein neuartiges, reparametrisiertes gemischtes Prinzip vorgestellt, in dem ausschließlich Verschiebungsgrößen als Primärvariablen auftreten. Diese Reparametrisierung führt dazu, dass die für gemischte Methoden notwendige Wahl geeigneter Spannungs- oder Verzerrungsräume entfällt. Mit dem vorgestellten Mixed-Displacement(MD)-Konzept wird für jede Equal-Order-Interpolation aller Primärvariablen automatisch der optimale Verzerrungsraum konstruiert. Die daraus resultierende intrinsische Vermeidung geometrischer Locking-Effekte verspricht ein breites Anwendungsspektrum dieser Methode.

Für alle präsentierten Konzepte werden vielseitige numerische Untersuchungen vorgestellt, die eine hervorragende Qualität der Verschiebungen, vor allem aber auch der Schnittgrößen bestätigen.

## Abstract

This thesis deals with the computer simulation of shell structures. Because of their efficiency, shells play a significant role in various areas of nature and technology. Shells are characterized by a high ratio of stiffness to material usage that is significantly influenced by the curvature properties of the shell. The occurrence of shell structures is very versatile and extends all engineering disciplines – from construction, through mechanical engineering and vehicle construction, all the way to the aerospace. Shells as thin-walled, curved structures are essential in all areas. The ever increasing demands for light, optimized structures require a very good prediction of their load-bearing behaviour, stress and life time. In most cases, analytical solutions are not available, what requires the determination of approximate solutions.

Should deformation processes of shell structures be simulated using numerical approximation first, the choice of a suitable shell theory is made. As a rule, one distinguishes between shear rigid, shear deformable and three-dimensional shell theories. Which effects are taken into account depends decisively on the assumptions made in a theory. The underlying partial differential equations of the continuous shell theory are transformed by a discretization into a set of algebraic equations which can be solved well with computer-oriented algorithms. The sought-after function of the exact solution is approximated by a linear combination of so-called ansatz functions. Each ansatz function itself consists of the product of shape functions and discrete nodal parameters.

Depending on the type of discretization and shape functions used therein, various methods are distinguished. Probably the best known and most widely used discretization scheme is the finite element method (FEM). Its basic idea is the subdivision of the solution domain into subdomains with piecewise defined ansatz functions. Usually, linear or quadratic polynomials are used as ansatz. But over the past two decades, a variety of alternative discretization schemes were established. The majority of these concepts are based on smooth and overlapping shape functions with complex structure. As prominent examples, meshfree methods which renounce the definition of subdomains, so-called elements, should be mentioned. The associated smooth, globally or locally defined shape functions are determined dependent on the nodal positions and lose the simple structure of polynomials. In recent years, the popularity of spline-based approaches has rapidly increased. With the presentation of the isogeometric analysis (IGA) in 2005 the cornerstone was set for numerous new developments in the field of computer-aided simulation. The IGA proposes the use of common shape functions in the fields of computer-aided design (CAD) and computational simulation (e.g. FEM). CAD-typical, spline-based shape functions are now also used for numerical simulation of physical processes.

The described smooth discretization schemes differ in many ways, but share a crucial property. Numerical locking effects are present in each discretization procedure, regardless of the polynomial order, the smoothness, or any other criterion. Locking effects result, in dependence of a so-called critical parameter, e.g. the slenderness, in a, in certain circumstances, very poor approximation of the sought-after solution. The solution for the

displacements is underestimated and certain stress components or stress resultants show oscillatory behaviour. In particular cases, the calculated results are completely useless and give no information about the actual structural behavior.

So-called geometrical locking effects increase dramatically with increasing slenderness of the finite elements used. For the numerical simulation of shell structures these locking effects have an inherent importance because shells are ever slender, thin load-bearing structures. In the context of numerical simulations of shells the avoidance of locking effects is of elementary importance for a reliable prediction of the real structural behavior and the stresses in the structure.

In view of a steadily increasing number of complex discretization procedures, the present work deals with intrinsically locking-free shell formulations. The concepts known from the literature always try to *remove* or *alleviate* the locking effects stemming from the discretization. However, if locking does not occur, then its removal is obsolete. Therefore, the shell formulations presented herein are designed to *avoid* numerical locking effects already at the theory level, regardless of the used discretization scheme. The *avoidance* of locking – already before discretization – promises a broad spectrum of applications for various discretization schemes in the field of computer simulations of physical processes.

The first part of this thesis deals with the intrinsic avoidance of transverse shear locking in formulations for structural theories. Via hierarchic reparametrization of the kinematic equations, transverse shear locking can be a priori avoided. The concept is equally demonstrated for shear deformable beam, plate and shell formulations, whereby two hierarchic parametrizations are distinguished. Both the parametrization of hierarchic rotations and the parametrization of hierarchic displacements result in formulations that are intrinsically free from transverse shear locking. The rotation-free parametrization with hierarchic displacements, however, shows significant advantages by an excellent approximation of the shear forces. In the field of analytical methods the rotation-free parametrization of shear deformable beam theories is basically not new. For a long time it has not found the way into numerical approximation methods, probably caused by the requirement for  $C^1$ -continuous ansatz spaces. But the new developments in the field of meshfree methods and the IGA make it easily possible to meet the requirement for smooth ansatz spaces.

Also in the context of rotation-free parametrizations of the shear deformable plate theory according to Mindlin, old sources can be found in the context of analytical solutions. However, to date, no one succeeded in developing a consistent rotation-free plate formulation that reproduces the well-known Mindlin model. In all works only *one* hierarchic shear displacement is parametrized, inducing an artificial constraint in the kinematic equations. These incorrect plate formulations are still taken up in numerous publications without discussing the existing weaknesses. In this work the rotation-free parametrization of the Mindlin theory via *two* hierarchic shear displacements is proposed, thereby avoiding an artificial constraint. The shear deformable, rotation-free plate and shell formulations presented herein, are probably the first of their kind that exactly reproduce

the plate model according to Mindlin. In the context of numerical approximation methods corresponding formulations are intrinsically free from transverse shear locking and possess an excellent approximation capability of the shear forces.

A geometrically non-linear simulation with shear deformable shell formulations calls for a special treatment and multiplicative decomposition of large rotations. By the elegant reparametrization in hierarchic shell formulations, also in this context, an innovative approach could be developed. The underlying assumption is that the transverse shear rotations are rather small for typical shell problems, whereby the total rotations can be arbitrarily large. This assumption results in an additive split of the Green-Lagrange strains into completely non-linear parts of the rotation-free Kirchhoff-Love type and hierarchically added, linearized transverse shear parts. As a result, large total rotations are additively decomposable and can be represented very easily. For the benchmark problems examined in this work, the validity of the assumption of small shear rotations, which initially appears restrictive, is shown.

The last theoretical part of this thesis deals mainly with the intrinsic avoidance of membrane locking. A novel, reparametrized mixed principle is proposed, in which only displacement quantities occur as primary variables. This reparametrization leads to the elimination of the, for mixed methods necessary, choice of suitable stress or strain spaces. With the presented mixed displacement (MD) concept the optimal strain space is automatically constructed for every equal-order interpolation of all primary variables. The resulting intrinsic avoidance of geometrical locking effects promises a wide range of applications of this method.

For all presented concepts versatile numerical investigations are proposed, which confirm the excellent quality of displacements, but above all of the stress resultants.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart.

Herzlichst danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff für das Ermöglichen und Betreuen meiner Doktorarbeit. Neben einer hervorragenden fachlichen Unterstützung, genoss ich im Arbeitsalltag stets vollstes Vertrauen und vielfältige Entfaltungsmöglichkeiten. Die sehr gut gesteckten Rahmenbedingungen haben wesentlich zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen. Auch auf persönlicher Ebene durfte ich in den letzten Jahren sehr viel dazulernen – vielen Dank dafür.

Ein großer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm für das kontinuierliche Interesse an meinem Forschungsthema. In zahlreichen fachlichen Diskussionen hat er maßgebende Punkte stets aus einem anderen Blickwinkel beleuchtet und kritisch hinterfragt. Die enge Zusammenarbeit in unserem „Drei-Generationen-Projekt“ habe ich stets als ein Privileg empfunden.

Des Weiteren danke ich Frau Prof. Dr.-Ing. Laura De Lorenzis vielmals für das aufrichtige Interesse an meiner Arbeit, für die Übernahme des Mitberichtes sowie das schnelle Anfertigen des Gutachtens. Prof. Dr.-Ing. Holger Steeb danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Für die Entwicklung und Pflege unseres Forschungscodes NumPro sowie die vielfältige Institutsorganisation im Hintergrund danke ich Dr.-Ing. Malte von Scheven. Danke auch an Dr.-Ing. Anton Tkachuk, der mit seinem Wissen stets in der Lage ist, Impulse zu geben.

Allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen danke ich für die tolle Atmosphäre am Institut, die wesentlich zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen hat. Während meiner Promotionszeit wurde ich von diversen Seiten unterstützt. Die hilfsbereite und kollegiale Zusammenarbeit am Institut ist keinesfalls selbstverständlich und ich hoffe, dass das am IBB immer so bleibt.

Für die sorgfältige Korrektur meiner Arbeit danke ich Renate Sachse, Simon Bieber, Martina Matzen, Christoph Wilking, Steffen Roth und Lucía Wolf.

Zu guter Letzt danke ich meinen Freunden und meiner Familie, allen voran meiner Frau Lucía von ganzem Herzen, da ich in jeder Phase meines Studiums und meiner Promotion aufrichtige Unterstützung und Liebe erfahren durfte.

Stuttgart, im Mai 2018

Bastian Oesterle



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xvii</b>
<b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>xix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Stand der Technik . . . . .	1
1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Differenzialgeometrie . . . . .	9
2.2 Kinematik . . . . .	11
2.3 Konstitutivgesetz . . . . .	13
2.4 Gleichgewicht und Spannungsmaße . . . . .	14
2.5 Randbedingungen . . . . .	15
2.6 Energieprinzipien . . . . .	15
2.6.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) . . . . .	16
2.6.2 Prinzip von Hellinger-Reissner . . . . .	17
2.6.3 Prinzip von Hu-Washizu . . . . .	18
<b>3 Verschiebungsbasierte finite Elemente</b>	<b>19</b>
3.1 Das isoparametrische Konzept . . . . .	19
3.2 Konvergenzanforderungen und -geschwindigkeit . . . . .	21
3.3 Das isogeometrische Konzept . . . . .	22
3.4 Linearisierung und Lösung . . . . .	25
3.5 Spannungsrückrechnung . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Locking</b>	<b>31</b>
4.1	Klassifizierung von Locking-Effekten . . . . .	31
4.1.1	Schublocking . . . . .	33
4.1.2	Membranlocking . . . . .	35
4.1.3	Krümmungs-Dicken-Locking . . . . .	37
4.1.4	Volumetrisches Locking . . . . .	38
4.1.5	Bedeutung der einzelnen Locking-Effekte für diese Arbeit . . . . .	39
4.2	Locking im isogeometrischen Kontext . . . . .	41
4.2.1	Einfluss von Polynomordnung und Kontinuität . . . . .	41
4.2.2	Beseitigung von Locking-Effekten – ein kurzer Überblick . . . . .	44
4.2.3	Zusammenfassung . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Modellproblem – hierarchische Balkenformulierungen</b>	<b>53</b>
5.1	Standard-Formulierung mit totalen Rotationen – $v$ - $\varphi$ -Formulierung . . . . .	53
5.2	Formulierung mit hierarchischen Rotationen – $v$ - $\gamma$ -Formulierung . . . . .	55
5.3	Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen – $v$ - $v_s$ -Formulierung . . . . .	58
5.4	Rand- und Zwangsbedingungen . . . . .	64
5.5	Zusammenfassung . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Hierarchische Schalenformulierungen</b>	<b>67</b>
6.1	Differenzialgeometrie . . . . .	68
6.2	Schubstarres Kirchhoff-Love-Schalenmodell . . . . .	70
6.2.1	Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen . . . . .	70
6.2.2	Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen . . . . .	72
6.3	Schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen . . . . .	74
6.3.1	Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen . . . . .	74
6.3.2	Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen . . . . .	76
6.4	Schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen . . . . .	80
6.4.1	Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen . . . . .	81
6.4.2	Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen . . . . .	86
6.5	Materialgesetz . . . . .	87
6.6	Diskretisierung . . . . .	88
6.7	Rand- und Zwangsbedingungen . . . . .	90
6.8	Vergleich schubweicher Plattenformulierungen . . . . .	92
6.9	Zusammenfassung . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Eine variationelle Methode zur intrinsischen Vermeidung von Locking-Effekten</b>	<b>99</b>
7.1	Grundkonzept der Methode . . . . .	100



7.2	Spezifische Formulierungen für ausgewählte Strukturmodelle . . . . .	103
7.2.1	Timoschenko-Balkenformulierung . . . . .	104
7.2.2	Mindlin-Plattenformulierung . . . . .	111
7.2.3	Kirchhoff-Love- und Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen . . .	112
7.3	Zwangsbedingungen . . . . .	113
7.4	Assemblierung und Lösung . . . . .	114
7.5	Zusammenfassung . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Numerische Experimente</b>	<b>117</b>
8.1	Geometrisch lineare Benchmarkprobleme . . . . .	119
8.1.1	Quadratische Platte . . . . .	119
8.1.2	Eingespannter Zylinderstreifen . . . . .	126
8.1.3	Scordelis-Lo-Schale . . . . .	132
8.2	Geometrisch nichtlineare Benchmarkprobleme . . . . .	136
8.2.1	Balkenproblem . . . . .	136
8.2.2	Durchschlagen eines Bogenstücks . . . . .	138
8.2.3	Eingespannte, geschlitzte Kreisringplatte . . . . .	142
8.2.4	Durchschlagen eines Rings . . . . .	143
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>147</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	147
9.2	Ausblick . . . . .	150
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>



---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Geometriebeschreibung und Kinematik eines Körpers im dreidimensionalen Raum. . . . .	10
3.1	Vergleich quadratischer B-Splines für einen Patch bestehend aus fünf Elementen, links: $C^0$ -kontinuierlich, rechts: $C^1$ -kontinuierlich. . . . .	23
4.1	Geometrisch lineare Kinematik eines ebenen, geraden Timoschenko-Balkens. . . . .	33
4.2	Deformationsverhalten und qualitative Verzerrungsverläufe für ein bilineares Scheibenelement unter reiner Biegebelastung, $u_1 = \xi^1 \xi^2$ , $\nu = 0$ . . .	34
4.3	Geometriebeschreibung eines ebenen, gekrümmten Bernoulli-Balkens. . .	36
4.4	Deformation eines trapezförmig verzerrten Elements unter reiner Biegebeanspruchung, $\nu = 0$ . . . . .	38
4.5	Balken unter Sinuslast, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten.	41
4.6	Balken unter Sinuslast, relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), $p = 2/3/4$ , $C^{p-1}$ , oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	42
4.7	Balken unter Sinuslast, relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), $p = 3$ , $C^{2/1/0}$ , oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	43
5.1	Balken unter Sinuslast, $v$ - $\varphi$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines, $p = 2$ , $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft $Q$ , oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	54
5.2	Balken unter Sinuslast, $v$ - $\gamma$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines, $p = 2$ , $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft $Q$ , oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	56
5.3	Vergleich der linearisierten Kinematik hierarchischer Balkenformulierungen, (a) $v$ - $\gamma$ -Formulierung, (b) $v$ - $u_s$ -Formulierung. . . . .	59

5.4	Balken unter Sinuslast, $v$ - $v_s$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines, $p = 2$ , $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft $Q$ , oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	61
5.5	Balken unter Sinuslast, Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen, $p = 2$ , $C^1$ , relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	62
5.6	Balken unter Sinuslast, Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen, $p = 3$ , $C^2$ , relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	63
5.7	Zusätzlich benötigte Zwangsbedingung bei der $v$ - $v_s$ -Formulierung. . . . .	64
6.1	Referenz- und Momentankonfiguration eines Schalenkörpers. . . . .	68
6.2	Schalenmittelfläche für kleine und große Rotationen, schubstarre Kirchhoff-Love-Schalenformulierung. . . . .	72
6.3	Schalenmittelfläche für kleine und große Rotationen, schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen. . . . .	76
6.4	Linearisierte Kinematik der rotationsfreien Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen, dargestellt für den Sonderfall einer rechteckigen Platte. . . . .	83
6.5	Vergleich diskreter Direktoren im Falle einer isogeometrischen B-Spline-Diskretisierung (links) und einer gewöhnlichen FE-Diskretisierung (rechts)	88
6.6	Definition der Verschiebungs- und Schnittgrößen einer Platte. . . . .	93
6.7	Vergleich der linearisierten Kinematik schubweicher Plattenformulierungen.	95
7.1	Balken unter Sinuslast, Einfluss von $\gamma$ auf die Max-Ent-Formfunktionen einer Diskretisierung mit 12 äquidistant verteilten Knoten. . . . .	107
7.2	Balken unter Sinuslast, Formulierungen: $v$ - $\varphi$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{\gamma}$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{v}_s$ , B-Splines, 10 Elemente, $p = 2$ , $C^1$ , Verlauf der Querkraft $Q$ , links: $\frac{L}{t} = 10$ , rechts: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	107
7.3	Balken unter Sinuslast, Formulierungen: $v$ - $\varphi$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{\gamma}$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{v}_s$ , B-Splines, $p = 2$ , $C^1$ , relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	108
7.4	Balken unter Sinuslast, Formulierungen: $v$ - $\varphi$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{\gamma}$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{v}_s$ , Max-Ent, 12 Knoten, $C^\infty$ , $\gamma = 0,8$ , Verlauf der Querkraft $Q$ , links: $\frac{L}{t} = 10$ , rechts: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	109
7.5	Balken unter Sinuslast, Formulierungen: $v$ - $\varphi$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{\gamma}$ / $v$ - $\varphi$ - $\bar{v}_s$ , Max-Ent, 12 Knoten, $C^\infty$ , $\gamma = 0,8$ , relative $L^2$ -Norm des Fehlers in $v$ (links) bzw. in $Q$ (rechts), oben: $\frac{L}{t} = 10$ , unten: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	110
7.6	Über Randbedingungen eingebrachte Zwangsbedingungen auf das $\bar{\mathbf{u}}$ -Feld für Balken, Platten und Schalen. . . . .	114

8.1	Quadratische Platte, Problemstellung, Längen: $L_x = L_y = 10$ , Material: $E = 1000$ , $\nu = 0,3$ . . . . .	120
8.2	Quadratische Platte, $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung $v_{z,\max}$ in Feldmitte, Drillmoment $m_{xy}$ und Querkraft $q_{xz}$ , Fälle 1 und 2, RM-st und SD. . . . .	121
8.3	Quadratische Platte, $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung $v_{z,\max}$ in Feldmitte, Drillmoment $m_{xy}$ und Querkraft $q_{xz}$ , Fall 1, RM-hr und RM-hd. . . . .	122
8.4	Quadratische Platte, Maximalverschiebung $v_{z,\max}$ in Abhängigkeit der Schlankheit $\frac{L}{t}$ , links: Fall 5, rechts: Fall 6. . . . .	123
8.5	Quadratische Platte, Querkraft $q_{xz}$ bei $y = 5$ , Fall 5, 10x10 isogeometrische Elemente (12x12 Kontrollpunkte), links: $\frac{L}{t} = 100$ , rechts: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	124
8.6	Quadratische Platte, Querkraft $q_{xz}$ bei $y = 5$ , Fall 6, 12x12 uniform verteilte Knoten, links: $\frac{L}{t} = 100$ , rechts: $\frac{L}{t} = 1000$ . . . . .	124
8.7	Quadratische Platte, $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung $v_{z,\max}$ in Feldmitte, Drillmoment $m_{xy}$ und Querkraft $q_{xz}$ , Fälle 3 und 4, RM-st und SD. . . . .	125
8.8	Eingespannter Zylinderstreifen, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten. . . . .	127
8.9	Eingespannter Zylinderstreifen, Verschiebung $v_{x,\max}$ in Abhängigkeit der Schlankheit $\frac{R}{t}$ , links: isogeometrische Diskretisierungen mit 10 Elementen, $C^{p-1}$ , rechts: Max-Ent-Diskretisierung mit 12 Knoten in Umfangsrichtung. . . . .	127
8.10	Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft $n_{11}$ , KL, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen, $C^{p-1}$ , oben: $p = 2$ , unten: $p = 3$ . . . . .	128
8.11	Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft $n_{11}$ , KL-u-E, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen, $C^{p-1}$ , oben: $p = 2$ , unten: $p = 3$ . . . . .	129
8.12	Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft $n_{11}$ , KL-MD, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen, $C^{p-1}$ , oben: $p = 2$ , unten: $p = 3$ . . . . .	130
8.13	Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft $n_{11}$ , $\frac{R}{t} = 100$ , Max-Ent-Diskretisierung mit 12 Knoten, $\gamma = 0,4$ . . . . .	131
8.14	Scordelis-Lo-Schale, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten. . . . .	132
8.15	Scordelis-Lo-Schale, verschiedene isogeometrische Diskretisierungen. . . . .	132
8.16	Scordelis-Lo-Schale, Konvergenz der Verschiebung $v_{z,A}$ , Fall 2, links: $p = 2$ , $C^1$ , rechts: $p = 3$ , $C^2$ . . . . .	133
8.17	Scordelis-Lo-Schale, Membrankraft $n_{11}$ (Ringkraft). . . . .	134
8.18	Scordelis-Lo-Schale, Querkraft $q_{13}$ entlang der Parameterkoordinate $\xi^1$ (Ringrichtung) durch den Punkt A. . . . .	135
8.19	Balkenproblem, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für $\lambda = 1$ . . . . .	136
8.20	Balkenproblem, Querkraft $q_{13}$ entlang der Koordinate $x$ , links: $\frac{L_x}{t} = 10$ , rechts: $\frac{L_x}{t} = 100$ . . . . .	137
8.21	Bogenstück, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie in vier Schritten mit $v_{x,A} = 100/180/270/300$ . . . . .	139

8.22	Bogenstück, Last-Verschiebungs-Diagramme, 10 Elemente, variable Polynomordnungen $p$ , $C^{p-1}$ , links: KL, rechts: RM-hd-MD. . . . .	139
8.23	Bogenstück, 63x4 Elemente, Shell181 (ANSYS 16), links: Membrankraft $n_{11}$ (Ringkraft) für $v_{x,A} = 100$ , rechts: Querkraft $q_{13}$ für $v_{x,A} = 100$ . . . . .	140
8.24	Bogenstück, Membrankraft $n_{11}$ (Ringkraft) für $v_{x,A} = 100$ , KL, 10 Elemente, $C^{p-1}$ . . . . .	140
8.25	Bogenstück, Membrankraft $n_{11}$ (Ringkraft) für $v_{x,A} = 100$ , RM-hd-MD, 10 Elemente, $C^{p-1}$ . . . . .	141
8.26	Bogenstück, Querkraft $q_{13}$ für $v_{x,A} = 100$ , RM-hd-MD, 10 Elemente, $C^{p-1}$ . . . . .	141
8.27	Kreisringplatte, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für $\lambda = 1$ . . . . .	142
8.28	Kreisringplatte, Last-Verschiebungs-Diagramm, 2 Patches, $p = 2$ , $C^1$ , $n_{\text{ele}} = 24 \times 3$ bzw. $n_{\text{ele}} = 32 \times 4$ . . . . .	142
8.29	Durchschlagen eines Rings, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für $\lambda = 1$ . . . . .	143
8.30	Durchschlagen eines Rings, Last-Verschiebungs-Diagramm, $\frac{MR_0}{EI_1}$ in Abhängigkeit von $\hat{\Theta}_z$ , 2 Patches mit jeweils 50 Elementen, $p = 3$ (Umfangsrichtung) und $q = 2$ (Breitenrichtung), ANSYS-Referenzlösungen (SHELL63 und SHELL181) berechnet mit $250 \times 2$ Elementen. . . . .	144
8.31	Durchschlagen eines Rings, Deformationsvorgang. . . . .	145
9.1	Auszug aus aktuellen Anwendungen der in dieser Arbeit vorgestellten Konzepte, links: isogeometrische Schalenanalyse mit hierarchisch verfeinerten B-Splines, mittig: lineare und nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit isogeometrischen Schalenformulierungen, rechts: Lockingfreie isogeometrische Kollokation für Balken, Platten und Schalen. . . . .	150
9.2	Membranlocking – Ausblick. . . . .	151

---

# Tabellenverzeichnis

6.1	Vergleich der Kinematik unterschiedlicher schubweicher Plattenformulierungen. . . . .	93
8.1	Zusammenstellung der in Kapitel 8 verwendeten Schalenformulierungen. .	118
8.2	Eingespannter Zylinderstreifen, Fehlerbetrachtung der Verschiebung $v_{x,\max}$ am freien Ende und der Membrankraft $n_{11}$ an der Einspannung, isogeometrische Diskretisierungen, $C^{p-1}$ . . . . .	131
8.3	Balkenproblem, Konvergenz der maximalen Vertikalverschiebung $v_{z,\max}$ . .	137





---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

## Abkürzungen

ANS	.....	Assumed-Natural-Strain
B-Splines	....	Basis-Splines
CAD	.....	Computer-Aided-Design, computergestützter Entwurf
DSG	.....	Discrete-Strain-Gap oder Discrete-Shear-Gap
EAS	.....	Enhanced-Assumed-Strain
FEM	.....	Finite-Elemente-Methode
FHG	.....	Freiheitsgrad(e)
hd	.....	hierarchic-displacement, hierarchische Verschiebung
HR	.....	Hellinger-Reissner
hr	.....	hierarchic-rotation, hierarchische Rotation
HW	.....	Hu-Washizu
IGA	.....	isogeometrische Analyse
KL	.....	Kirchhoff-Love
LBB	.....	Ladyschenskaja-Babuška-Brezzi
LRB-Splines	.	lokal verfeinerte B-Splines
Max-Ent	.....	Maximum-Entropy
MD	.....	Mixed-Displacement
MLS	.....	Moving-Least-Squares
NURBS	.....	nicht-uniforme rationale B-Splines
NURPS	.....	nicht-uniforme rationale Powell-Sabin-Splines
PHT-Splines	.	polynomiale Splines über hierarchischen T-Netzen
PvV	.....	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
RI	.....	reduzierte Integration
RM	.....	Reissner-Mindlin

SD	.....	shear-deformable, schubweich
SRI	.....	selektiv reduzierte Integration
T-Splines	....	Verallgemeinerung von NURBS zur Darstellung von T-Netzen
U-Splines	....	Unstructured-Splines

### Mathematische Notationen

$(\bullet)^{-1}$	.....	Inverse von $(\bullet)$
$(\bullet)^T$	.....	Transponierte von $(\bullet)$
$(\bullet)^{-T}$	.....	Transponierte der Inversen von $(\bullet)$
$ \bullet $	.....	Betrag einer skalaren Größe $(\bullet)$
$\ (\bullet)\ $	.....	Euklid'sche Norm eines Vektors $(\bullet)$
$\ (\bullet)\ _{L^2}$	.....	$L^2$ -Norm von $(\bullet)$
$(\bullet \cdot \bullet)$	.....	Skalarprodukt
$(\bullet : \bullet)$	.....	zweifache Verjüngung
$(\bullet \times \bullet)$	.....	Kreuzprodukt
$(\bullet \otimes \bullet)$	.....	dyadisches Produkt
$LIN(\bullet)$	.....	Funktion liefert die Linearisierung von $(\bullet)$
$\det(\bullet)$	.....	Determinante von $(\bullet)$
$Div(\bullet)$	.....	Divergenz von $(\bullet)$ bezogen auf die Referenzkonfiguration
$\Delta(\bullet)$	.....	Inkrementelle Änderung von $(\bullet)$
$\frac{d(\bullet)}{d(\bullet)}$	.....	totale Ableitung
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	.....	partielle Ableitung
$(\bullet)_{,(\bullet)}$	.....	partielle Ableitung, alternative Schreibweise
$\cup$	.....	Assemblierungsoperator
$\emptyset$	.....	Nullmenge
$\cap$	.....	Schnittmenge
$\cup$	.....	Vereinigungsmenge

### Lateinische Buchstaben

$A$	.....	Querschnittsfläche eines Balkens
$\mathbf{A}$	.....	Kollokationsmatrix für diskrete Projektionen
$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^i$	.....	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration

---

$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$ .....	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Momentankonfiguration
$\mathbf{A}_3 = \mathbf{G}_3$ .....	Schalen-, Platten- oder Balkendirektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3$ .....	Schalen-, Platten- oder Balkendirektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{a}_3^\perp$ .....	anteiliger Schalendirektor in der Momentankonfiguration bei hierarchischen Schalenformulierungen
$b$ .....	Breite eines ebenen Balkens
$\mathbf{b}$ .....	Volumenkraftvektor je Masseneinheit
$\hat{\mathbf{b}}$ .....	verallgemeinerter Volumenkraftvektor
$\mathbf{B}$ .....	diskreter Verschiebungs-Verzerrungs-Operator
$\bar{\mathbf{B}}$ .....	modifizierter diskreter Verschiebungs-Verzerrungs-Operator
$C^0, C^{p-1}, C^\infty$	Kontinuitäten, stetige Differenzierbarkeiten
$\mathbf{C}$ .....	Materialtensor vierter Stufe
$C^{ijkl}$ .....	Komponenten von $\mathbf{C}$
$c$ .....	variationeller Index
$\mathbf{D}$ .....	globaler Vektor der diskreten, primalen Knotenverschiebungen
$\bar{\mathbf{D}}$ .....	globaler Vektor der zusätzlichen diskreten Knotenverschiebungen im Rahmen des MD-Konzepts
$\check{\mathbf{D}}$ .....	globaler Vektor aller diskreten Knotenverschiebungen, beinhaltet $\mathbf{D}$ und $\bar{\mathbf{D}}$
$\mathbf{d}$ .....	lokaler Vektor der diskreten Knotenverschiebungen
$d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$ .....	infinitesimales Linienelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$E$ .....	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}$ .....	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
$E_{ij}$ .....	Komponenten von $\mathbf{E}$
$\tilde{\mathbf{E}}$ .....	Tensor der zusätzlichen Verzerrungen im Rahmen der EAS-Methode
$e$ .....	Element der Finite-Elemente-Diskretisierung
$\mathbf{e}_{1-3}$ .....	normierte Basisvektoren des global kartesischen Koordinatensystems
$F$ .....	Kraft
$\mathbf{F}$ .....	Deformationsgradient
$\mathbf{F}^{\text{int}}, \mathbf{F}^{\text{ext}}$ .....	globale Vektoren der internen und externen Kräfte
$G$ .....	Schubmodul
$\mathbf{G}$ .....	Metriktenor in der Referenzkonfiguration

$G_{ij}, G^{ij}$ .....	Komponenten von $\mathbf{G}$ in ko- bzw. kontravarianter Darstellung
$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$ .....	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}$ .....	Metriktenor in der Momentankonfiguration
$g_{ij}, g^{ij}$ .....	Komponenten von $\mathbf{g}$ in ko- bzw. kontravarianter Darstellung
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$ .....	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren in der Momentankonfiguration
$h$ .....	charakteristische Kantenlänge eines finiten Elements
$I$ .....	Flächenträgheitsmoment oder Knotennummer
$\mathbf{I}$ .....	Identitätstensor bzw. -matrix
$K$ .....	Plattenbiegesteifigkeit
$\mathbf{K}_T$ .....	tangentiale Systemsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_e$ .....	elastischer Anteil von $\mathbf{K}_T$
$\mathbf{K}_u$ .....	Anfangsverschiebungsanteil von $\mathbf{K}_T$
$\mathbf{K}_g$ .....	geometrischer Anteil von $\mathbf{K}_T$
$\mathcal{L}$ .....	gewöhnlicher partieller Differenzialoperator, verbindet $\mathbf{u}$ und $\mathbf{E}_u$
$\bar{\mathcal{L}}$ .....	partieller Differenzialoperator, verbindet $\bar{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$
$M$ .....	Biegemoment eines ebenen Balkens
$\hat{M}$ .....	vorgeschriebenes Biegemoment eines ebenen Balkens
$m$ .....	verteilte Momentenlast
$m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}$	Biegemomente und Drillmoment einer Platte
$m_{11}, m_{22}, m_{12}$	Biegemomente und Drillmoment einer Schale
$n_{11}, n_{22}, n_{12}$ ..	Membrankräfte und In-Plane-Schubkraft einer Schale
$N$ .....	Formfunktion
$\mathbf{N}$ .....	Normale in der Referenzkonfiguration oder Matrix der Formfunktionen $N^I$
$n_{\text{ele}}$ .....	Anzahl der finiten Elemente
$n_{\text{CP,ele}}$ .....	Anzahl der Kontrollpunkte eines isogeometrischen finiten Elements
$n_{\text{CP}}$ .....	Anzahl der Kontrollpunkte
$n_{\text{nd,ele}}$ .....	Anzahl der Knoten eines finiten Elements
$n_{\text{nd}}$ .....	Anzahl der Knoten
$\mathcal{O}$ .....	Konvergenzordnung
$p$ .....	Polynomgrad
$\mathbf{P}$ .....	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathbf{P}^I$ .....	Vektor der Knoten- bzw. Kontrollpunktkoordinaten am Punkt $I$
$Q$ .....	Querkraft eines ebenen Balkens

$\hat{Q}$ .....	vorgeschriebene Querkraft eines ebenen Balkens
$q_{xz}, q_{yz}$ .....	Querkräfte einer Platte
$q_{13}, q_{23}$ .....	Querkräfte einer Schale
$q$ .....	Linien- oder Flächenbelastung
$\mathbf{R}(\mathbf{D})$ .....	Residuum, Vektor der Ungleichgewichtskräfte
$\mathbf{R}(\xi^1, \xi^2)$ .....	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{R}(\Phi), \mathbf{R}(\Psi)$ .	Rotationstensoren
$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$ .....	Ortsvektor eines materiellen Punktes der Schalenmittelfläche in der Momentankonfiguration
$\mathbf{S}$ .....	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$S^{ij}$ .....	Komponenten von $\mathbf{S}$
$\mathbf{T}$ .....	erster Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor
$t$ .....	Schalendicke
$\mathbf{t}$ .....	Cauchy-Spannungsvektor
$\hat{\mathbf{T}}$ .....	vorgeschriebene Spannung in der Referenzkonfiguration
$\hat{\mathbf{t}}$ .....	vorgeschriebene Spannung in der Momentankonfiguration
$\mathbf{u}$ .....	Verschiebungsvektor eines materiellen Punktes
$\bar{\mathbf{u}}$ .....	zusätzlicher Verschiebungsvektor im Rahmen des MD-Konzepts
$\hat{\mathbf{u}}$ .....	vorgeschriebene Verschiebung
$\mathbf{v}$ .....	Vektor der Gesamtverschiebungen eines materiellen Punktes auf der Schalenmittelfläche
$\mathbf{v}_b$ .....	Vektor der Biegeverschiebungen eines materiellen Punktes auf der Schalenmittelfläche
$\mathbf{v}_{s_\alpha}$ .....	Vektor einer Biege-Schubverschiebung eines materiellen Punktes auf der Schalenmittelfläche
$v^{s_\alpha}$ .....	kontravariante Komponente einer Biege-Schubverschiebung eines materiellen Punktes auf der Schalenmittelfläche
$v$ .....	Verschiebung der Mittelfaser eines ebenen Balkens bzw. der Mittelfläche einer Platte
$v_b$ .....	Biegeverschiebung der Mittelfaser eines ebenen Balkens bzw. der Mittelfläche einer Platte
$\check{v}_b$ .....	Biegeverschiebung der Mittelfaser einer Platte im Rahmen der SD-Formulierung
$v_s$ .....	Schubverschiebung der Mittelfaser eines ebenen Balkens oder Schubverschiebung einer Platte im Rahmen der SD-Formulierung

$\tilde{v}_s$ .....	Schubverschiebung im Rahmen der DSG-Methode
$\bar{v}_s$ .....	zusätzliche Schubverschiebung im Rahmen des MD-Konzepts
$\bar{v}_{\alpha\beta}$ .....	zusätzliche Membranverschiebungen im Rahmen des MD-Konzepts
$v_{s_x}, v_{s_y}$ .....	Biege-Schubverschiebungen der Mittelfaser einer Platte
$\bar{v}_{s_x}, \bar{v}_{s_y}$ .....	zusätzliche Biege-Schubverschiebungen im Rahmen des MD-Konzepts
$\mathbf{w}$ .....	hierarchischer Differenzvektor der RM-hr-Formulierung
$w^\alpha$ .....	kontravariante Komponenten von $\mathbf{w}$
$\tilde{\mathbf{w}}$ .....	hierarchischer Differenzvektor der RM-hd-Formulierung
$\mathbf{X}, \mathbf{x}$ .....	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

### Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta$ .....	Indizes für die Schalenkoordinaten $\xi^1$ und $\xi^2$
$\Gamma_D, \gamma_D$ .....	Oberfläche mit Dirichlet-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\Gamma_N, \gamma_N$ .....	Oberfläche mit Neumann-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\gamma$ .....	Schubwinkel eines ebenen Balkens bzw. skalarer Lokalitätsparameter der Max-Ent-Funktionen
$\bar{\gamma}$ .....	zusätzlicher Schubwinkel im Rahmen des MD-Konzepts
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ .....	Querschubwinkel einer Platte
$\bar{\gamma}_{xz}, \bar{\gamma}_{yz}$ .....	zusätzliche Querschubwinkel im Rahmen des MD-Konzepts
$\gamma_{13}, \gamma_{23}$ .....	Querschubwinkel einer Schale
$\Delta\mathbf{D}, \Delta\bar{\mathbf{D}}, \Delta\check{\mathbf{D}}$	Verbesserung eines Verschiebungsvektors während einer Iteration
$\delta_j^i$ .....	Kronecker-Symbol
$\delta\mathbf{D}$ .....	globaler Vektor der virtuellen diskreten Knotenverschiebungen
$\delta\mathbf{E}$ .....	Variation des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors
$\delta\mathbf{u}$ .....	virtueller Verschiebungsvektor eines materiellen Punktes
$\partial\Omega_R, \partial\Omega_M$ ...	Oberfläche eines Gebiets $\Omega_R$ bzw. $\Omega_M$ in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\delta\Pi$ .....	virtuelle Arbeit bzw. Variation eines Funktionals
$\varepsilon$ .....	Membrandehnung
$\boldsymbol{\varepsilon}$ .....	Linearisierter Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor, Ingenieurdehnungen
$\varepsilon_{ij}$ .....	Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}$

---

$\hat{\Theta}$ .....	vorgeschriebene Rotation
$\kappa$ .....	Krümmung eines ebenen Balkens
$\bar{\kappa}$ .....	zusätzliche Krümmung im Rahmen des MD-Konzepts
$\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}$ ..	Krümmungen und Verwindung einer Platte
$\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}$ ..	Krümmungen und Verwindung einer Schale
$\lambda$ .....	1. Lamé-Konstante oder Lastfaktor
$\mu$ .....	2. Lamé-Konstante
$\nu$ .....	Querdehn- bzw. Poissonzahl
$\xi$ .....	Position in natürlichen Elementkoordinaten
$\xi^1, \xi^2, \xi^3$ .....	natürliche Elementkoordinaten, krummlinige Koordinaten
$\Pi$ .....	Funktional
$\rho$ .....	Dichte in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\sigma$ .....	Cauchy-Spannungstensor
$\sigma^{ij}$ .....	Komponenten von $\sigma$
$\Phi$ .....	Rotationsvektor der RM-hr-Formulierung
$\tilde{\Phi}$ .....	Rotationsvektor der RM-hd-Formulierung
$\varphi$ .....	Gesamtrotation eines ebenen Balkens
$\varphi_x, \varphi_y$ .....	totale Rotationswinkel einer Platte
$\varphi^\alpha$ .....	kontravariante Komponenten des Rotationsvektor $\Phi$
$\tilde{\varphi}^\alpha$ .....	kontravariante Komponenten des Rotationsvektor $\tilde{\Phi}$
$\Psi$ .....	hierarchischer Rotationsvektor
$\Omega_R, \Omega_M$ .....	Gebiet, das ein materieller Körper in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration einnimmt

### Kopf- und Fußzeiger

$(\bullet)_E$ .....	Größe $(\bullet)$ wird aus $\mathbf{E}$ bestimmt
$(\bullet)_{\text{ex}}$ .....	exakte/analytische Lösung für die Größe $(\bullet)$
$(\bullet)^{\text{ext}}$ .....	externer Anteil einer Größe $(\bullet)$
$(\bullet)^h$ .....	Größe $(\bullet)$ in diskreter Form
$(\bullet)_{\text{HR}}$ .....	Größe $(\bullet)$ im Rahmen des Prinzips von Hellinger-Reissner
$(\bullet)_{\text{HW}}$ .....	Größe $(\bullet)$ im Rahmen des Prinzips von Hu-Washizu
$(\bullet)^i$ .....	Größe $(\bullet)$ im Iterationsschritt $i$
$(\bullet)^I$ .....	Größe $(\bullet)$ am Knoten $I$
$(\bullet)^{\text{int}}$ .....	interner Anteil einer Größe $(\bullet)$

- $(\bullet)^{\text{KL}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  der KL-Formulierung
- $(\bullet)_{\text{max}}$  ..... maximal auftretender Wert der Größe  $(\bullet)$
- $(\bullet)_{\text{PvV}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  im Rahmen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen
- $(\bullet)^{\text{Ref}}$  ..... Referenzlösung für die Größe  $(\bullet)$
- $(\bullet)^{\text{RM-hr}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  der RM-hr-Formulierung
- $(\bullet)^{\text{RM-hd}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  der RM-hd-Formulierung
- $(\bullet)_{\mathbf{S}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  wird aus  $\mathbf{S}$  bestimmt
- $(\bullet)_{\mathbf{u}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  wird aus  $\mathbf{u}$  bestimmt
- $(\bullet)_{\bar{\mathbf{u}}}$  ..... Größe  $(\bullet)$  wird aus  $\bar{\mathbf{u}}$  bestimmt
- $(\bullet)_{x,y,z}$  .....  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Komponente der Größe  $(\bullet)$



# 1

---

## Einleitung

### 1.1 Motivation und Stand der Technik

In unserer Umwelt treten Strukturen verschiedenster Form und Ausprägung auf. Bei genauerer Betrachtung der dreidimensionalen Körper fällt auf, dass zumeist eine der drei Dimensionen deutlich kleiner oder deutlich größer ist als die anderen beiden. Als Beispiel für die erste Ausprägung sei ein Blatt eines Baumes genannt, für letztere ein dünner Ast. Im Ingenieurwesen werden diese Strukturen je nach Ausprägung ihrer Dimensionen klassifiziert. So spricht man im Falle einer beliebig gekrümmten Struktur, bei der zwei Dimensionen deutlich größer sind als die dritte, von einer Schale. Ebene Schalen werden je nach Belastung in zwei weitere Kategorien unterteilt. Bei Belastung in der Ebene spricht man von einer Scheibe, bei Belastung quer zur Ebene von einer Platte. Kann eine Schale nur Membrankräfte aufnehmen, spricht man von Membranen. Die genannten Tragstrukturen lassen sich unter dem Überbegriff der Flächentragwerke zusammenfassen. Sind nun zwei der drei Dimensionen deutlich kleiner als die dritte, spricht man im Allgemeinen von Stabtragwerken. Je nach Tragverhalten unterscheidet man beispielsweise zwischen Balken und Seilen.

Flächentragwerke spielen in vielen Bereichen von Natur und Technik eine bedeutende Rolle. Schalenstrukturen sind die wohl effizienteste Art einen Raum zu überspannen. Sie kennzeichnet ein hohes Verhältnis von Steifigkeit zu Materialeinsatz. Die Krümmung einer Schale hat einen maßgebenden Einfluss auf ihre hohe Steifigkeit. Durch die Krümmung wird für Belastungen quer zur Schalenebene die tangentielle Membransteifigkeit aktiviert. Prominente Beispiele für Schalenstrukturen in der Natur sind Eierschalen, Blätter oder der menschliche Schädel. Im Bauwesen treten Schalen beispielsweise in Form von Kuppeln, Hallenüberdachungen, Silos und Kühltürmen auf. In anderen Ingenieurdisziplinen sind Schalen unter anderem in Form von Autokarosserien, Rotorblättern sowie

Flugzeug- und Schiffsrümpfen vertreten. Im Bauwesen lassen sich Scheiben, Platten und Stabtragwerke in jedem Gebäude finden.

Für den Entwurf von Flächentragwerken ist das Verständnis des Lastabtrags enorm wichtig. Bei der Entwicklung einer mathematischen oder mechanischen Theorie wird versucht, die komplexe Realität auf wesentliche Aspekte zu reduzieren. In der Strukturmechanik kommt dem Konzept der Dimensionsreduktion eine fundamentale Bedeutung zu. Die Dimensionsreduktion der dreidimensionalen Realität auf ein- oder zweidimensionale Theorien eröffnet durch einhergehende Vereinfachungen einen Zugang zu analytischen Betrachtungen und Handrechenverfahren. Zudem hat sich aus dimensionreduzierten Theorien eine spezielle Denkweise entwickelt, die aus der heutigen Ingenieurpraxis nicht wegzudenken ist. Es ist nur schwer vorstellbar, wie Ingenieure Tragstrukturen ohne Balken-, Platten- und Schalentheorien und dem einhergehenden Denken in Spannungsresultierenden, wie Schnittkräften und -momenten, entwerfen könnten. Die erste asymptotisch korrekte Plattentheorie geht auf KIRCHHOFF (1850) zurück; ihre Lösungen finden sich heute noch in vertafelter Form wieder, siehe z. B. CZERNY (1970). Basierend auf den Annahmen von Kirchhoff, entwickelte LOVE (1888) die erste, für allgemeine Geometrien gültige Schalentheorie unter Vernachlässigung von Querschubeffekten. Platten- und Schalentheorien für dickere Schalen, in denen Querschubeffekte Berücksichtigung finden, gehen auf REISSNER (1944) und MINDLIN (1951) zurück.

Computergestützte Berechnungsverfahren gewinnen seit vielen Jahren stark an Bedeutung. Eine immer anspruchsvollere Architektur erfordert von Ingenieuren eine zuverlässige Prognose des Tragverhaltens jenseits von analytischen Handrechenverfahren, die schnell an ihre Grenzen stoßen. Dabei kommt vorwiegend die Finite-Elemente-Methode (FEM) zum Einsatz, wobei dimensionsreduzierte Schalentheorien eine maßgebende Rolle spielen. In kommerzieller Statik-Software für das Bauwesen stehen automatische Bemessungsverfahren nur für Flächentragwerke zur Verfügung. Dreidimensionale Stahlbetontragwerke erfordern bis heute ein hohes Maß an einer Bemessung „von Hand“. Auch in anderen Ingenieurbereichen, wie z. B. dem Automobilbau, sind die FEM und entsprechende finite Schalenelemente nicht wegzudenken. Bei der Crash-Simulation von Fahrzeugen mithilfe der FEM sind bis heute effiziente finite Schalenelemente unabdingbar; eine vollständig dreidimensionale Auflösung eines Gesamtfahrzeugs mit Volumenelementen führt in der Regel zu einem unwirtschaftlich hohen Rechenaufwand.

Wird im Rahmen der FEM von effizienten Schalenelementen gesprochen, so sind dabei nicht nur die Rechenzeit und der Speicherbedarf gemeint, sondern auch die Ergebnisqualität. Bereits in den jungen Jahren der FEM in den 1960er Jahren wurde erkannt, dass primale finite Elemente unter bestimmten Umständen zu sehr schlechten Ergebnissen und reduzierten Konvergenzraten im präasymptotischen Bereich führen. Der seit Ende der 1970er Jahre verwendete Begriff Locking entstand aus der bildlichen Vorstellung,

dass sich das Element gegenüber der Deformation versperert oder verschließt. Über ein zu steifes Strukturverhalten hinaus sind die Ergebnisse für manche Spannungsgrößen von minderer Qualität und weisen unphysikalische Oszillationen auf. Seit den Ursprüngen der FEM hat sich eine sehr große Anzahl an Veröffentlichungen mit den vielseitigen Ausprägungen von Locking und dessen Abminderung beschäftigt. Heutzutage existiert eine große Bandbreite von Methoden zur Abminderung bzw. Beseitigung von Locking-Effekten bei finiten Elementen für Kontinua und jegliche Art von Strukturtheorie.

In den letzten zwei Jahrzehnten hat die Popularität von neuartigen Diskretisierungsschemata in vielen Bereichen der computerorientierten Mechanik stetig zugenommen. Viele der genannten Verfahren stellen glattere, aber auch komplexere Ansatzräume bereit. Glatte Ansatzräume können für spezielle Anwendungen von großem Vorteil gegenüber  $C^0$ -kontinuierlichen Ansatzräumen von klassischen finiten Elementen sein. An dieser Stelle seien beispielsweise netzfreie Methoden verschiedenster Ausprägung genannt, bei denen im Gegensatz zur FEM keine Elemente definiert werden, vielmehr nur eine Ansammlung von Knoten. Netzfreie Methoden, basierend auf Moving-Least-Squares (MLS)-Ansätzen, wurden von BELYTSCHKO U. A. (1994), KRYSL UND BELYTSCHKO (1996) und LIU U. A. (1997) eingeführt und es existieren zahlreiche Anwendungen auf strukturmechanische Probleme. Eine interessante, alternative netzfreie Methode unter Verwendung von Maximum-Entropy (Max-Ent)-Ansätzen, siehe SUKUMAR (2004), wurde von ARROYO UND ORTIZ (2006) in lokaler Form vorgestellt und für strukturmechanische Berechnungen genutzt. ÇIRAK U. A. (2000) haben sogenannte, aus der dreidimensionalen Computergrafik bekannte, Subdivisions-Techniken auf die Berechnung dünner Schalen angewendet. Die Idee von glatten finiten Elementen, basierend auf Splines, ist grundsätzlich nicht neu (siehe beispielsweise LEUNG (1990), GONTIER UND VOLLMER (1995) oder HÖLLIG (2002)), hat jedoch lange Zeit keine große Beachtung erfahren. Mit der Vorstellung der isogeometrischen Analyse (IGA) durch HUGHES U. A. (2005) wird zum ersten Mal ein Konzept vorgeschlagen, das die Verbesserung des Arbeitsablaufs an der Schnittstelle von computergestütztem Entwurf (CAD) und computergestützter Berechnung, z. B. durch die FEM, zum Ziel hat. Die grundlegende Idee ist die Verwendung einer CAD-Basis, üblicherweise nicht-uniforme rationale B-Splines (NURBS), für die Parametrisierung des Geometrie- und des Berechnungsmodells.

In den Folgejahren kam es im Bereich der isogeometrischen Schalenformulierungen zu einigen interessanten Entwicklungen. Durch die Kontrollierbarkeit der Polynomordnung und der damit einhergehenden Kontinuität zwischen Elementen ist die Konstruktion von  $C^1$ -kontinuierlichen Ansatzräumen auf relativ einfache Weise möglich. Mitunter führte diese Eigenschaft zu einer regelrechten Renaissance schubstarrer Schalentheorien, da die Anforderungen an die Ansatzräume mit isogeometrischen finiten Elementen deutlich einfacher zu bewerkstelligen sind als bei klassischen finiten Elementen. Der Beitrag von ÇIRAK U. A. (2000) ist als Pionierarbeit im Kontext glatter Diskretisierung-

gen dünner Schalenmodelle zu betrachten, obwohl zu diesem Zeitpunkt die isogeometrische Analyse noch nicht ihren Namen trug. Die erste Diskretisierung einer klassischen Kirchhoff-Love-Schalentheorie (KIRCHHOFF (1850), LOVE (1888)) unter Verwendung von NURBS wurde von KIENDL U. A. (2009) präsentiert. Nachfolgend haben sich viele weitere Veröffentlichungen mit isogeometrischen Kirchhoff-Love-Schalenelementen und deren Anwendung auf z. B. Blechumformungsprozesse, Formoptimierung, Phasenfeldbeschreibung von Bruchvorgängen oder Fluid-Struktur-Interaktion beschäftigt, siehe beispielsweise KIENDL U. A. (2010), BENSON U. A. (2011), KIENDL U. A. (2014), LU UND ZHENG (2014), KIENDL U. A. (2015b), TEPOLE U. A. (2015), KIENDL U. A. (2016), DUONG U. A. (2017), HELTAI U. A. (2017).

Isogeometrische, schubweiche Schalenelemente mit Reissner-Mindlin-Kinematik wurden unter anderem von BENSON U. A. (2010), DORNISCH U. A. (2013), DORNISCH UND KLINKEL (2014), DORNISCH U. A. (2016), ADAM U. A. (2015a) vorgestellt. Im Gegensatz zu den schubstarrten Schalenelementen stellen Reissner-Mindlin-Elemente geringere Anforderungen an die Ansatzräume, d. h.  $C^0$ -Kontinuität ist ausreichend. Dennoch kann auch für schubweiche Theorien eine höhere Kontinuität von Vorteil sein. Auf elegante Art und Weise wurde von ECHTER U. A. (2013) eine hierarchische Familie von schubstarrten, schubweichen und dreidimensionalen Schalenelementen für geometrisch lineare Probleme formuliert. Durch das hierarchische Konzept ist es prinzipiell möglich, durch knotenweise Aktivierung oder Deaktivierung von hierarchischen Freiheitsgraden, adaptiv zwischen Schalenmodellen zu wechseln. Darüber hinaus stellt die spezielle Parametrisierung der Schalenkinematik ein diskretisierungsunabhängiges Konzept zur Vermeidung von Querschublocking und Krümmungsdickenlocking (im Falle dreidimensionaler Schalentheorien) bereit. Besonders bemerkenswert ist hierbei, dass die erwähnten Locking-Effekte im Rahmen einer primalen Einfeldformulierung a priori vermieden werden.

Isogeometrische Kontinuums-Schalenelemente wurden unter anderem von BOUCLIER U. A. (2013), HOSSEINI U. A. (2013), HOSSEINI U. A. (2014), CASEIRO U. A. (2014), BOUCLIER U. A. (2015a), CASEIRO U. A. (2015) und LEONETTI U. A. (2018) präsentiert.

Isogeometrische Schalenformulierungen sind nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der Praxis von großem Interesse. So sind in der FE-Software LS-DYNA bereits schubweiche und schubstarre isogeometrische Schalenformulierungen und eine Mischform, sogenannte Blended-Shells, nach BENSON U. A. (2010), BENSON U. A. (2011) und BENSON U. A. (2013) verfügbar. Nach ersten Implementierungen für strukturierte NURBS-Patches, können in LS-DYNA inzwischen auch getrimmte NURBS-Geometrien mit isogeometrischen Schalenelementen berechnet werden. Aktuelle Projekte beschäftigen sich mit der Implementierung von T- und U-Splines als Erweiterung der IGA-Codes auf unstrukturierte, lokal verfeinerte Vierecksnetze.

Im wissenschaftlichen Bereich der IGA wurde und wird eine stetig steigende Zahl unterschiedlicher glatter Ansatzräume und damit einhergehender Diskretisierungsverfahren eingeführt, um mechanische Problemstellungen zu bearbeiten. Als Beispiele für glatte Ansatzräume seien unter anderem (getrimmte) B-Splines/NURBS, hierarchisch verfeinerte B-Splines, T-Splines, Powell-Sabin-Splines und ihre nicht-uniforme rationale Version NURPS, PHT-Splines, LRB-Splines oder U-Splines genannt. Für Details sei beispielsweise auf SPELEERS U. A. (2006), NGUYEN-THANH U. A. (2011), SCOTT U. A. (2012), SPELEERS U. A. (2013), SCHILLINGER U. A. (2012), BORNEMANN UND ÇIRAK (2013), SCOTT U. A. (2014), THOMAS U. A. (2015), JOHANNESSEN U. A. (2014), LIU U. A. (2015), JOHANNESSEN U. A. (2015), BREITENBERGER U. A. (2015) und CASQUERO U. A. (2017) verwiesen.

Die zuvor genannten glatten Diskretisierungsverfahren unterscheiden sich in vielerlei Hinsicht, teilen sich aber eine entscheidende Eigenschaft. Locking tritt bei jedem Diskretisierungsverfahren auf, ungeachtet von der Polynomordnung, der Kontinuität, oder jedem beliebigen anderen Kriterium. Aufgrund der Struktur der zugrunde liegenden partiellen Differenzialgleichungen, die gelöst werden sollen, und dem Gebiet, auf dem diese definiert sind, sind Locking-Effekte intrinsisch existent. Die Intensität oder andere Charakteristika der jeweiligen Locking-Effekte können sich jedoch diskretisierungsabhängig unterscheiden. Bei gewöhnlichen finiten Elementen sind die Ansatzräume in jedem Element gleich, somit kann je nach Ordnung und Elementform ein geeignetes Verfahren zur Abminderung bzw. Beseitigung des entsprechenden Locking-Effekts gefunden werden. Im Gegensatz hierzu haben isogeometrische Diskretisierungsverfahren den Nachteil, dass sich die Ansatzräume von Element zu Element unterscheiden. Im Falle der netzfreien Methoden hängt der Ansatzraum an einem speziellen Punkt von der Verteilung der umliegenden Knoten ab. Diese Eigenschaften führen zusammen mit der höheren Glattheit dazu, dass spezielle Locking-Effekte für jedes Diskretisierungsverfahren aufs Neue untersucht werden müssen. Im Rahmen von gemischten Methoden werden beispielsweise stets geeignete niedrigere Ansatzräume gesucht, um Locking-Effekten zu begegnen. Speziell für netzfreie Methoden oder unstrukturierte splinebasierte Diskretisierungen erscheint diese Herangehensweise äußerst komplex.

## 1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

In der computergestützten Simulation von Schalenstrukturen werden typischerweise geometrisch lineare und geometrisch nichtlineare Analysen durchgeführt. Unabhängig vom verwendeten Materialmodell spielen dabei geometrische Locking-Effekte, speziell für große Schlankheiten, eine maßgebende Rolle. In vielen Fällen werden Verschiebungen

deutlich unterschätzt und Spannungen für praktikable Netzfeinheiten nur in inakzeptabler Qualität abgebildet. Die stetig anwachsende Bandbreite an neuen Diskretisierungsverfahren im Rahmen der IGA und darüber hinaus stellen neue Ansprüche an entsprechende Konzepte zur Vermeidung von Locking.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Untersuchung von Schalenformulierungen mit folgenden Anforderungen:

- Die Schalenkinematik soll sowohl für die Berechnung von dünnen als auch moderat dicken Schalen geeignet sein.
- Große Rotationen sollen effizient darstellbar sein.
- Locking soll intrinsisch, d. h. auf Theorieebene, und somit diskretisierungsunabhängig vermieden werden.
- Es sollen sowohl die Verschiebungslösungen als auch die Ergebnisse für Spannungen bzw. Schnittgrößen von hoher Qualität sein.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

In *Kapitel 2* werden Grundlagen der Kontinuumsmechanik besprochen, um die benötigten Größen und Prinzipien einzuführen, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel wichtig sind.

*Kapitel 3* behandelt auf kompakte Art und Weise die Grundlagen von verschiebungsbaasierten finiten Elementen. Dabei wird kurz auf das isogeometrische Diskretisierungskonzept eingegangen, da es trotz der genannten Forderung nach Diskretisierungsunabhängigkeit das wesentliche Diskretisierungsverfahren dieser Arbeit darstellt.

In *Kapitel 4* werden zunächst Locking-Effekte im Allgemeinen klassifiziert und beschrieben, bevor deren Signifikanz für die zu entwickelnden Schalenformulierungen verdeutlicht wird. Zudem wird in diesem Kapitel der Einfluss der Glattheit der Ansatzräume auf die Konvergenz und die Sensibilität gegenüber Locking diskutiert und an einem einfachen Balkenmodell demonstriert. Zuletzt wird eine Literaturübersicht zum Thema der Verminderung von Locking im IGA-Kontext gegeben.

In *Kapitel 5* wird die Idee der hierarchischen Reparametrisierung von kinematischen Gleichungen für das Modellproblem schubweicher Balkenformulierungen vorgestellt. Beispielhafte Konvergenz- und Lockingstudien für isogeometrische finite Elemente unterstreichen das große Potenzial hierarchischer Formulierungen.

*Kapitel 6* beschreibt die Anwendung des hierarchischen Konzepts auf Schalenformulierungen. Im Speziellen werden zwei Schalenformulierungen präsentiert, die sich in ihrer hierarchischen Parametrisierung der Querschubanteile unterscheiden, nämlich mittels

hierarchischer Rotationen bzw. Verschiebungen. Beide hierarchischen Formulierungen werden für kleine und große Rotationen beschrieben, wobei ein besonderes Augenmerk auf der effizienten Beschreibung großer Rotationen im Rahmen eines sogenannten 5-Parameter-Modells liegt. Die entwickelten Formulierungen werden auf theoretischer Ebene mit verwandten Plattenformulierungen aus der Literatur verglichen.

*Kapitel 7* beschreibt eine variationelle Methode zur diskretisierungsunabhängigen Vermeidung von Locking, die durch den Wunsch nach einer effizienten Vermeidung von Membranlocking motiviert wird. Grundidee und Parallelen zu verwandten Konzepten werden ausführlich diskutiert.

Ein vielseitiger Satz an numerischen Experimenten ist in *Kapitel 8* dokumentiert. Die Qualität zuvor entwickelter Schalenelemente wird anhand ausführlicher Auswertungen von Verschiebungen und Spannungen diskutiert. Dies geschieht sowohl für geometrisch lineare als auch für nichtlineare Problemstellungen.

In *Kapitel 9* werden die gewonnenen Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst, sowie weiterführende Anregungen und mögliche Weiterentwicklungen und Anwendungen diskutiert.





# 2

---

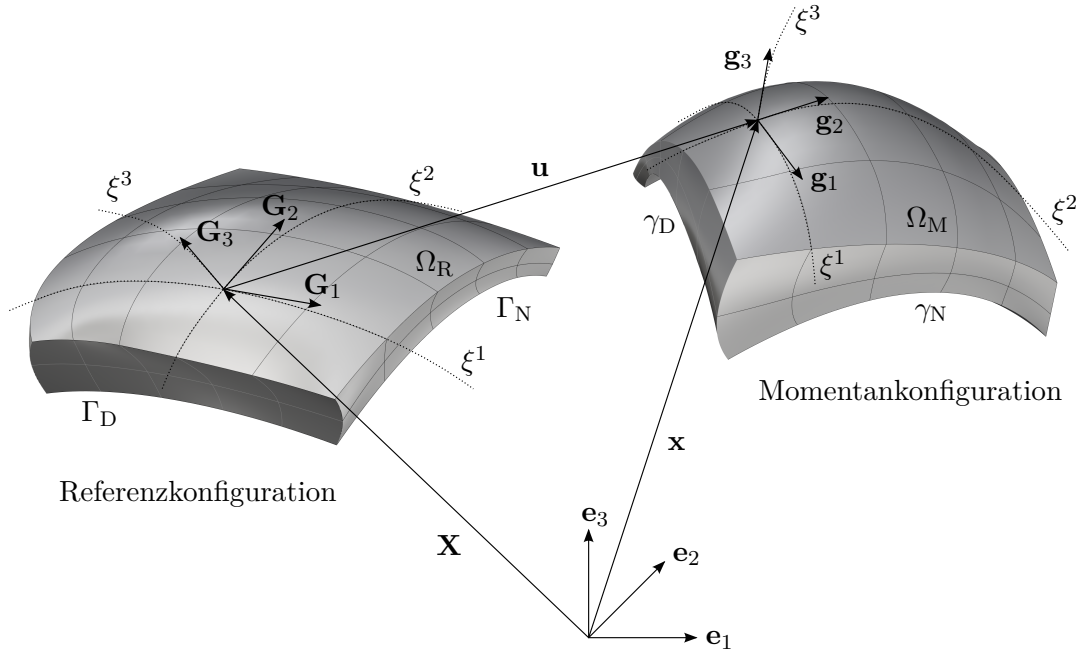
## Grundlagen

In diesem Kapitel werden alle wesentlichen Begriffe, Definitionen und mechanischen Größen eingeführt, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Für die Herleitung einer Schalenformulierung ist das Verständnis der elementaren Differentialgeometrie wichtig. Für einen tieferen Einblick in diesen Themenbereich wird an dieser Stelle auf KLINGBEIL (1966) und BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) verwiesen. Die kontinuumsmechanischen Grundlagen werden direkt in konvektiven Koordinaten dargestellt, da dies für das Verständnis nachfolgender Kapitel von Nutzen ist. Als geeignete Werke zur Kontinuumsmechanik werden unter anderem HOLZAPFEL (2000), ALTENBACH (2015), BAŞAR UND WEICHERT (2000) empfohlen. Für das tiefer gehende Studium hier eingeführter Energieprinzipien wird auf ODEN UND REDDY (1976), FELIPPA (1994) und FELIPPA (2017) verwiesen.

### 2.1 Differentialgeometrie

Für die Darstellung von Deformationsvorgängen fester Körper im dreidimensionalen Euklid'schen Raum wird für gewöhnlich auf eine Lagrange'sche Betrachtungsweise zurückgegriffen. Hierbei wird der Deformationsvorgang des Körpers von seinen materiellen Punkten aus beschrieben, weshalb die Lagrange'sche Betrachtungsweise auch als materielle Betrachtungsweise bezeichnet wird.

Für die eindeutige Beschreibung eines Punktes wird zunächst ein ortsfestes, global kartesisches Koordinatensystem  $x^i$  eingeführt, das von den orthonormierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  aufgespannt wird. Zudem wird mit  $\xi^i$  ein konvektives, krummliniges Koordinatensystem eingeführt, dessen Koordinatenlinien mit dem Körper verbunden sind, siehe Abbildung 2.1.



**Abbildung 2.1:** Geometriebeschreibung und Kinematik eines Körpers im dreidimensionalen Raum.

Das Ortsvektorfeld  $\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  beschreibt die Ausgangslage des Körpers, der in der sogenannten Referenzkonfiguration mit  $\Omega_R$  bezeichnet wird. In der Momentankonfiguration wird der Körper mit  $\Omega_M$  bezeichnet und durch das Vektorfeld  $\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  eindeutig beschrieben. Größen in der Referenzkonfiguration werden mit Großbuchstaben bezeichnet, Größen der Momentankonfiguration mit Kleinbuchstaben. Durch die Differenz der beiden Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{X}$  wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  beschrieben. Auf die Unterteilung der Ränder des Körpers in  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  bzw.  $\gamma_D$  und  $\gamma_N$  wird in Abschnitt 2.5 näher eingegangen.

Die kovarianten Basisvektoren eines Materialpunktes können je nach Konfiguration durch partielle Ableitung des entsprechenden Ortsvektors nach den konvektiven Koordinaten  $\xi^i$  bestimmt werden, d. h.

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} = \mathbf{X}_{,i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} = \mathbf{x}_{,i} = (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,i} = \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i}. \quad (2.1)$$

Eine fundamentale Kenngröße für die Beschreibung von Flächen und Körpern in konvektiven Koordinaten ist der Metriktensor (auch Einheitstensor), der sich darstellen lässt als

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.2)$$

Dabei stehen die ko- und kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration über

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad (2.3)$$

miteinander in Beziehung. Die Koeffizienten des Metriktensors in ko- und kontravarianter Darstellung sind dabei als Skalarprodukt der entsprechenden Basisvektoren definiert:

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j. \quad (2.4)$$

Die Beziehung zwischen ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten lässt sich in Matrixschreibweise darstellen zu

$$\{G^{ij}\} = \{G_{ij}\}^{-1}. \quad (2.5)$$

Aus den Gleichungen (2.2) und (2.4) lässt sich die Umrechnung zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren darstellen als

$$\mathbf{G}^i = \{G^{ij}\} \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G}_i = \{G_{ij}\} \cdot \mathbf{G}^j. \quad (2.6)$$

Die Beziehungen aus den Gleichungen (2.2–2.6) lassen sich in analoger Weise für die Größen der Momentankonfiguration beschreiben. Damit sind Körper in beiden Konfigurationen geometrisch eindeutig beschrieben.

## 2.2 Kinematik

Der Deformationsvorgang, der die Geometrie der Referenz- auf die Momentankonfiguration überführt, wird im Folgenden näher betrachtet. Zusammenhänge zwischen geometrischen Größen beider Konfiguration werden in der Kontinuumsmechanik durch die sogenannten kinematischen Gleichungen beschrieben. Startpunkt ist die Definition des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$ , der die Deformation eines materiellen Punktes von der Referenz- in die Momentankonfiguration beschreibt, siehe Abbildung 2.1.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.7)$$

Die Abbildungsvorschrift differentieller Linienelemente beider Konfigurationen ist gegeben zu

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.8)$$

wobei der materielle Deformationsgradient durch die Basisvektoren in der Referenz- und Momentankonfiguration beschrieben wird als

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i. \quad (2.9)$$

Die zugehörigen inversen Größen sind gegeben durch

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \quad (2.10)$$

Mit den Gleichungen (2.9) und (2.10) lassen sich Vorwärts- und Rückwärtstransformationen, im Englischen push forward und pull back genannt, beschreiben zu

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i, \quad (2.11)$$

und

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i. \quad (2.12)$$

In der vorliegenden Arbeit sollen große Verschiebungen und Rotationen, aber nur kleine Verzerrungen betrachtet werden. Ein hierfür geeignetes Verzerrungsmaß wird durch den Green-Lagrange-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \\ &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mit den Beziehungen aus Gleichungen (2.1) und (2.9) ergeben sich alternative Darstellungen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) \cdot (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Im Falle einer geometrisch linearen Berechnung werden nichtlineare Terme vernachlässigt und die Green-Lagrange-Verzerrungen entsprechen den sogenannten Ingenieurdehnungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (2.15)$$

## 2.3 Konstitutivgesetz

Um eine Beziehung der eingeführten kinematischen zu den statischen Größen herzustellen, wird ein sogenanntes Konstitutivgesetz benötigt, welches die zweite Feldgleichung zur Beschreibung des Randwertproblems darstellt. Die energetisch konjugierte statische Größe zum bereits eingeführten Green-Lagrange-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  wird durch den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, kurz PK2-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.16)$$

beschrieben. Die Beziehung von Verzerrungs- und Spannungsgrößen wird durch ein Material-, Stoff- bzw. Konstitutivgesetz hergestellt, in diesem Fall vom St.-Venant-Kirchhoff'schen Typ durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Gleichung (2.17) stellt eine lineare Abbildungsbeziehung zwischen den Green-Lagrange-Verzerrungen und den PK2-Spannungen dar.

Der vierstufige Materialtensor  $\mathbf{C}$  lässt sich in krummlinigen Koordinaten beschreiben zu

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (2.18)$$

Existiert ein Potential, so lässt sich  $\mathbf{C}$  aus der Verzerrungsenergiedichte  $W^{\text{int}}(\mathbf{E})$  herleiten:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W^{\text{int}}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}. \quad (2.19)$$

Bei dem in dieser Arbeit verwendeten linear elastischen, isotropen Materialgesetz sind zwei Parameter zur Beschreibung des Materialverhaltens ausreichend. In der Literatur werden häufig die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  angegeben, die sich aus dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\nu$  bestimmen lassen zu

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.20)$$

Mit den Gleichungen (2.20) lassen sich die Komponenten des Materialtensors ausdrücken als

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}). \quad (2.21)$$

## 2.4 Gleichgewicht und Spannungsmaße

Das Prinzip *actio est reactio* von Isaac Newton gilt auch hier, für die an einem Körper wirkenden internen und externen Kräfte, die durch das statische Gleichgewicht miteinander in Beziehung gebracht werden. Unter Vernachlässigung von Trägheitstermen lautet die sogenannte statische Gleichgewichtsgleichung im Gebiet

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Die skalare Massendichte  $\rho$  der Referenzkonfiguration und der Volumenbeschleunigungsvektor je Masseneinheit  $\mathbf{b}$  beschreiben gemeinsam externe Volumenkräfte.  $\operatorname{Div} \mathbf{P}$  repräsentiert die internen Kräfte, wobei der erste Piola-Kirchhoff(PK1)-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  durch

$$\mathbf{P} = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.23)$$

beschrieben wird. Die Tensorbasis des PK1-Spannungstensors beinhaltet sowohl Anteile aus der Referenz- als auch der Momentankonfiguration, da er eine tatsächlich wirkende Kraft in der Momentankonfiguration auf ein Flächenelement der Referenzkonfiguration bezieht. Die physikalische Interpretation dieser Größe ist erschwert, da keine direkte Aussage über eine Kraft pro Fläche in der aktuellen Konfiguration gemacht wird. Das Spannungsmaß, das genau diese Information bereitstellt, ist der sogenannte Cauchy-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (2.24)$$

Im Gegensatz zu den PK1- und PK2-Spannungstensenoren aus den Gleichungen (2.23) und (2.16), bezieht der Cauchy-Spannungstensor aus Gleichung (2.24) sowohl Kraft als auch Fläche vollständig auf die Momentankonfiguration. Somit werden die zugehörigen Spannungskomponenten auch als wahre oder physikalische Spannungen bezeichnet. Alle drei genannten Spannungsmaße lassen sich durch eindeutige Beziehungen ineinander überführen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \\ \mathbf{P} &= \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.5 Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems der Elastostatik werden noch geeignete Randbedingungen benötigt. Für statische bzw. quasistatische Probleme genügen Randbedingungen. Bei dynamischen Anfangswertproblemen werden zusätzliche Anfangsbedingungen benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit werden allerdings nur statische bzw. quasistatische Problemstellungen unter Vernachlässigung von Trägheitstermen betrachtet, was bereits in Gleichung (2.22) durch das Fehlen der Trägheitsterme berücksichtigt wurde.

Abbildung 2.1 zeigt den Körper bzw. das Gebiet  $\Omega$  in der Referenz- und der Momentankonfiguration. Die Randbedingungen werden auf die Ränder des Gebiets aufgebracht. Dabei sind auf den Rändern  $\Gamma_N$  und  $\gamma_N$  (hellgrau) Neumann-Randbedingungen, auch Spannungsrandbedingungen genannt, in der Form

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} \quad (2.26)$$

vorgeschrieben. Der Spannungsvektor  $\mathbf{T}$  steht mit dem PK1-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  über das Cauchy-Theorem  $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$  in Verbindung, wobei  $\mathbf{N}$  den Normalenvektor auf dem Neumann-Rand  $\Gamma_N$  beschreibt.  $\Gamma_D$  und  $\gamma_D$  (dunkelgrau) beschreiben die Ränder mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen der Form

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.27)$$

welche auch als Verschiebungsrandbedingungen bezeichnet werden. Für die Teilmengen der Ränder gilt

$$\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega_R, \quad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset, \quad (2.28)$$

wobei entsprechende Zusammenhänge für die Ränder in der Momentankonfiguration in analoger Weise gelten. Die Gleichungen (2.22), (2.13) und (2.17) stellen gemeinsam mit den Gleichungen (2.26) und (2.27) die vollständige Beschreibung des Randwertproblems der Elastostatik dar. Sie werden als Euler-Lagrange-Gleichungen bzw. starke Form des Randwertproblems bezeichnet.

## 2.6 Energieprinzipien

In allgemeinen Fällen ist die starke Form eines Randwertproblems nicht exakt lösbar, was zur Entwicklung von Diskretisierungsverfahren wie z. B. der FEM geführt hat. Dabei werden bestimmte Gleichungen des Randwertproblems nur schwach erfüllt, d. h.

nicht punktweise, sondern im integralen Sinne. Zur Herleitung von Finite-Elemente(FE)-Formulierungen werden unterschiedliche Energieprinzipien herangezogen, die sich darin unterscheiden, welche der Feldgleichungen stark bzw. schwach erfüllt werden. Zur Herleitung der einfachsten, primalen Formulierungen dient das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV). Alternative, sogenannte gemischte Elementformulierungen, basieren meist auf dem Prinzip von Hellinger-Reissner, dem Prinzip von Fraeijs de Veubeke (siehe ZIENKIEWICZ (2001)) bzw. Hu-Washizu oder entsprechenden Modifikationen. Einen guten Überblick über die genannten Funktionale und zugehörige Variationsprinzipien findet man in ODEN UND REDDY (1976), FELIPPA (1994) und FELIPPA (2017). In dieser Arbeit werden das PvV und das Prinzip von Hellinger-Reissner (HR) verwendet, weshalb sie im Folgenden beschrieben werden. Zudem wird das Prinzip von Hu-Washizu in knapper Form eingeführt, da es zusammen mit den beiden anderen zu den wichtigsten Variationsprinzipien im Kontext der FEM zählt.

### 2.6.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Beim PvV werden das Gleichgewicht und die Neumann-Randbedingungen aus den Gleichungen (2.22) und (2.26) nicht mehr punktweise (stark), sondern nur noch im integralen Sinne, also schwach, erfüllt. Dessen Herleitung kann grundsätzlich über unterschiedliche Wege erfolgen. Besteht ein Potential, so kann das PvV über das Prinzip des Minimums der potentiellen Energie hergeleitet werden. Eine andere Herangehensweise stellt die Methode der gewichteten Residuen dar. Dabei werden die Gleichungen (2.22) und (2.26) mit einer Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  multipliziert und über das Gebiet bzw. den entsprechenden Rand integriert, d. h.

$$\delta \Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} \delta \mathbf{u} \cdot (\text{Div } \mathbf{P} + \hat{\mathbf{b}}) \, d\Omega_{\text{R}} + \int_{\Gamma_{\text{N}}} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}) \, d\Gamma_{\text{N}} = 0. \quad (2.29)$$

Dabei gilt  $\hat{\mathbf{b}} = \rho \mathbf{b}$  und  $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$  (Cauchy-Theorem). Das PvV besagt, dass bei einem im Gleichgewicht stehenden mechanischen System eine beliebige, geometrisch verträgliche virtuelle Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$  keine Arbeitsanteile verursacht. Unter Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes, der Nutzung von Gleichung (2.25) sowie weiterer Umformungen ergibt sich das PvV zu

$$\delta \Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{u}) = \underbrace{- \int_{\Omega_{\text{R}}} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_{\text{R}}}_{\delta \Pi_{\text{PvV}}^{\text{int}}} + \underbrace{\int_{\Omega_{\text{R}}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{b}} \, d\Omega_{\text{R}} + \int_{\Gamma_{\text{N}}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, d\Gamma_{\text{N}}}_{\delta \Pi_{\text{PvV}}^{\text{ext}}} = 0, \quad (2.30)$$

wobei  $\delta \Pi_{\text{PvV}}^{\text{int}}$  und  $\delta \Pi_{\text{PvV}}^{\text{ext}}$  die virtuelle innere und äußere Arbeit darstellen. Das PvV ist ein sogenanntes Einfeldprinzip, da nur die Verschiebung  $\mathbf{u}$  als freie Variable vorkommt.



## 2.6.2 Prinzip von Hellinger-Reissner

Beim Hellinger-Reissner-Prinzip (HELLINGER (1914), REISSNER (1950)) werden zusätzlich zum Gleichgewicht und den Neumann-Randbedingungen auch die kinematischen Gleichungen (2.13) sowie die geometrischen Randbedingungen (2.27) in schwacher Form eingebracht. Wie in späteren Teilen dieser Arbeit gezeigt wird, kann diese schwache Erfüllung der Kinematik im Kontext von finiten Elementen einen positiven Einfluss auf die Ergebnisqualität haben. Das schwache Einbringen der Kinematik führt im Wesentlichen dazu, dass neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  auch die Spannungen  $\mathbf{S}$  als freie Variable im Funktional auftauchen. Darum spricht man in diesem Kontext auch von einem Zweifeldfunktional. Im Falle eines St.-Venant-Kirchhoff-Materials lässt sich das Prinzip von Hellinger-Reissner, kurz HR, darstellen zu

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = & \underbrace{\int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\text{S}} : \mathbf{S} - \mathbf{E}_{\text{u}} : \mathbf{S} \right) d\Omega_{\text{R}}}_{\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega_{\text{R}}} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}) d\Omega_{\text{R}} + \int_{\Gamma_{\text{N}}} (\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma_{\text{N}}}_{\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}} \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Bei Mehrfeldfunktionalen muss unterschieden werden, ob eine Größe selbst eine freie Variable darstellt, oder aus einer ebensolchen berechnet wurde. Deshalb beschreiben beispielsweise die Fußzeiger in  $\mathbf{E}_{\text{u}}$  und  $\mathbf{E}_{\text{S}}$ , aus welcher freien Variablen die Größe berechnet wurde, d. h.

$$\mathbf{E}_{\text{u}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}_{\text{S}} = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{S}. \quad (2.32)$$

Es sei angemerkt, dass die schwache Erfüllung der Dirichlet-Randbedingungen im HR-Prinzip zunächst zu zusätzlichen Integralausdrücken über  $\Gamma_{\text{D}}$  führt. Diese Anteile ergeben sich stets zu null, da später im Rahmen der Diskretisierung, siehe auch Kapitel 3, stets mindestens  $C^0$ -kontinuierliche Ansätze für die Verschiebungen gewählt werden, die die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen. Die Variation der externen Anteile  $\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}$  aus Gleichung (2.31) unterscheiden sich nicht im Vergleich zum PvV. Variation der internen Anteile aus Gleichung (2.31) nach den Verschiebungen und den Spannungen führt zu

$$\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \delta\mathbf{S} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{S} - \mathbf{E}_{\text{u}} : \delta\mathbf{S} - \delta\mathbf{E}_{\text{u}} : \mathbf{S} \right) d\Omega_{\text{R}}, \quad (2.33)$$

wobei im Rahmen des HR-Prinzips folgendes gilt:

$$\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}} + \delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}} = 0. \quad (2.34)$$

### 2.6.3 Prinzip von Hu-Washizu

Die letzte, im Hellinger-Reissner-Prinzip stark erfüllte Gleichung, nämlich das Konstitutivgesetz aus Gleichung (2.17), wird nun im Rahmen des Prinzips von Hu-Washizu (HU (1955), WASHIZU (1955)) schwach eingebracht. Die freien Variablen sind in diesem Falle die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  sowie die Spannungen  $\mathbf{S}$ . Unter Vernachlässigung des Terms über den Verschiebungsrand  $\Gamma_D$ , siehe Abschnitt 2.6.2, lässt sich das Prinzip von Hu-Washizu (HW) darstellen zu

$$\Pi_{\text{HW}}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \underbrace{\int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{E}_u) : \mathbf{S} \right) d\Omega_R}_{\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}} + \Pi_{\text{HW}}^{\text{ext}} \rightarrow \text{stat.} \quad (2.35)$$

Dabei gilt auch hier  $\Pi_{\text{HW}}^{\text{ext}} = \Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}} = \Pi_{\text{PvV}}^{\text{ext}}$ , weshalb auf eine detaillierte Ausführung der externen Anteile verzichtet wird. Häufig kommt im Rahmen von FE-Formulierungen eine Modifikation des Prinzips von Hu-Washizu nach SIMO UND RIFAI (1990) zur Anwendung. Grundidee ist hierbei eine Reparametrisierung der Verzerrungen in der Form  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_u$ . Über die Ausnutzung einer Orthogonalitätsbeziehung der Spannungen  $\mathbf{S}$  und der erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  lassen sich auf diese Weise die Spannungen aus der Formulierung eliminieren. Für weitere Details zur modifizierten Form des Prinzips von Hu-Washizu sowie dessen Anwendung auf die Formulierung von effizienten finiten Elementen wird auf SIMO UND RIFAI (1990), BISCHOFF (1999) sowie IRSLINGER (2013) verwiesen.

# 3

---

## Verschiebungsbasierte finite Elemente

Da in vielen Bereichen der Mechanik nur selten analytische Lösungen für entsprechende Problemstellungen gefunden werden können, haben sich diverse numerische Methoden zur Lösung partieller Differenzialgleichungen etabliert. In dieser Arbeit kommt hauptsächlich die FEM zum Einsatz, welche die schwache Form eines mechanischen Problems diskretisiert und nach den gesuchten Größen löst. Im Diskretisierungsschritt kommt die Grundidee zum Tragen, eine kontinuierliche Funktion in eine endliche Anzahl von diskreten Punktwerten zu überführen. Zwischen diesen diskreten Punktwerten wird die gesuchte Funktion durch sogenannte Formfunktionen interpoliert und approximiert. Je nach Art der Formfunktionen und ihrer Verwendung zur Approximation der Geometrie und der freien Variablen spricht man von isoparametrischen oder isogeometrischen Diskretisierungen. In diesem Kapitel werden die maßgebenden Diskretisierungs- und Lösungsaspekte linearer und nichtlinearer, elastostatischer Problemstellungen beschrieben, die für das Verständnis dieser Arbeit von Bedeutung sind. Die allgemeine Beschreibung erfolgt für primale Formulierungen, basierend auf dem PvV nach Abschnitt 2.6.1. Für ein tieferes Studium der FEM wird beispielhaft auf die umfassende Literatur verwiesen, wie z. B. HUGHES (2000), ZIENKIEWICZ U. A. (2005) und BELYTSCHKO U. A. (2014).

### 3.1 Das isoparametrische Konzept

Die bisher beschriebenen Gleichungen des elastostatischen Randwertproblems sind sowohl in starker als auch schwacher Form kontinuierlich. Dies bedeutet für das PvV aus Abschnitt 2.6.1, dass ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  gefunden werden muss, welches für beliebige  $\delta\mathbf{u}$  Gleichung (2.30) erfüllt. Ist ein solches Verschiebungsfeld gefunden, so sind die zugehörigen Differenzialgleichungen in jedem Punkt exakt erfüllt. In allgemeinen Fällen kann die exakte Lösung nicht gefunden werden und man muss sich mit einer Approximation begnügen. Durch die Diskretisierung des Problems kann ein Satz von

Differenzialgleichungen in einen Satz algebraischer Gleichungen überführt werden, der leichter numerisch lösbar ist. Der Grundgedanke der FEM besteht in einer Gebietszerlegung in eine endliche Anzahl endlich großer Teilgebiete, sogenannter finiter Elemente

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \Omega_e. \quad (3.1)$$

$\Omega^h$  beschreibt hierbei eine diskrete Approximation des Gebiets  $\Omega$  in  $n_{\text{ele}}$  Teilgebiete  $\Omega_e$ , welche über den Assemblierungsoperator  $\bigcup$  zum diskreten Gesamtgebiet  $\Omega^h$  zusammengesetzt werden. Die Konnektivität benachbarter Elemente ist über gemeinsame Knoten gewährleistet, an welchen diskrete Knotenwerte, sogenannte Freiheitsgrade, definiert sind. In jedem dieser Elemente werden über das Produkt aus den diskreten Knotenwerten und den Formfunktionen abschnittsweise Ansatzfunktionen für z. B. die Verschiebungen definiert. Ausgangspunkt für die numerische Lösung eines elastostatischen Randwertproblems ist die Diskretisierung des Deformationsvorgangs aus Abbildung 2.1. Sind die Geometrie der Referenzkonfiguration sowie das Verschiebungsfeld diskretisiert, so sind alle weiteren Größen in Momentan- und Referenzgeometrie in diskreter Form beschreibbar. Werden für die Diskretisierung der Geometrie sowie des Verschiebungsfeldes dieselben Formfunktionen verwendet, spricht man vom isoparametrischen Konzept:

$$\mathbf{X}_e \approx \mathbf{X}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{d}^I. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) zeigt die Diskretisierung des Verschiebungsfeldes eines finiten Elements als Summe der Produkte der Formfunktionen  $N^I$  mit den diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}^I$  über die Anzahl der Knoten  $n_{\text{nd,ele}}$  des Elements. Der Ausdruck beschreibt hierbei die Ansatzfunktion für das Verschiebungsfeld eines Elements. Werden beim Ansatz für die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}_e$  dieselben Formfunktionen wie beim Ansatz der Verschiebungen verwendet, spricht man von einem Bubnov-Galerkin-Ansatz, der in dieser Arbeit stets verwendet wird, siehe auch Gleichung (3.6). Werden für die Ansätze der beiden Felder unterschiedliche Formfunktionen verwendet, handelt es sich um einen Petrov-Galerkin-Ansatz.

Das isoparametrische Konzept bildet die Grundlage für die Entwicklung nahezu aller finiten Elemente in wissenschaftlichen und kommerziellen FE-Programmen. Die eindeutige Abbildungsvorschrift von isoparametrischen Elementen im Parameterraum in den physikalischen Raum hat sich als äußerst effizient erwiesen, beispielsweise für die numerische Integration von Steifigkeitsmatrizen, siehe Abschnitt 3.4. Isoparametrische Elemente bieten eine einfache Basis zur Erweiterung auf FEM höherer Ordnung, so-

nannte  $p$ -FEM. Dennoch finden bi- bzw. trilineare Elemente aufgrund ihrer Einfachheit und Effizienz noch heute vorrangige Verwendung in wissenschaftlichen und kommerziellen FE-Programmen.

## 3.2 Konvergenzanforderungen und -geschwindigkeit

Die FEM ist ein Approximationsverfahren, welches ein kontinuierliches Problem über den Diskretisierungsprozess in ein Problem mit einer endlichen Anzahl an Freiheitsgraden überführt. Wird das FE-Netz bei gleichbleibendem Polynomgrad  $p$  sukzessive verfeinert (sogenannte  $h$ -Verfeinerung), so erwartet man eine stets genauer werdende Lösung. Strebt die Lösung eines Approximationsverfahrens mit zunehmender Anzahl an Freiheitsgraden gegen die Lösung der zugrunde liegenden Differenzialgleichung, so wird das Verfahren als konvergent bezeichnet. Nach Lax-Wendroff ist Konvergenz im Rahmen der FEM gewährleistet, wenn das Diskretisierungsverfahren konsistent und stabil formuliert ist. Konsistent ist ein Verfahren dann, wenn die Kriterien der Vollständigkeit und Kompatibilität erfüllt sind. Daraus ergeben sich für die in der FEM verwendeten Ansatzfunktionen folgende Anforderungen:

- Vollständigkeit: Bis zur Polynomordnung  $p = c$  können Funktionen exakt abgebildet werden.
- Kompatibilität: Mindestens  $C^c$ -Kontinuität innerhalb eines Elements, und  $C^{c-1}$ -Kontinuität zwischen benachbarten Elementen.
- Stabilität: Sichergestellt durch rangerhaltende numerische Integration und eine reguläre Elementform.

Dabei beschreibt  $c$  den variationellen Index, der als höchste auftretende Ableitung der Unbekannten in der zugehörigen schwachen Form der Problemstellung definiert ist. In gewöhnlichen Elastizitätsproblemen für Kontinua gilt  $c = 1$ . Die daraus folgenden Anforderungen an die Kompatibilität sind bereits durch lineare Lagrange-Polynome erfüllt. Komplizierter gestaltet sich die Gewährleistung der Kontinuität bei Problemen, die einen variationellen Index von  $c = 2$  aufweisen, d. h. wenn zweite Ableitungen der gesuchten Variablen in der schwachen Form des Problems auftreten. Prominente Beispiele aus der Strukturmechanik stellen schubstarre Balken, Platten- oder Schalenmodelle dar. In diesen Fällen können Lagrange-Polynome jeglicher Ordnung nicht die erforderliche  $C^1$ -Kontinuität gewährleisten.

Wie schnell eine FE-Methode durch Netzverfeinerung gegen die zu erwartende Lösung strebt, wird durch die Konvergenzrate bzw. -geschwindigkeit beschrieben. Zu erwartende Konvergenzraten können im Allgemeinen nur für lineare Probleme im asymptotischen

Limit verschwindender Elementlänge  $h \rightarrow 0$  angegeben werden. Diese theoretischen Konvergenzraten können im Falle nicht glatter Lösungen, wie z. B. unter dem Einfluss von Singularitäten, beeinträchtigt werden. Für ein elliptisches Variationsproblem der Ordnung  $c$  gilt nach STRANG UND FIX (1988) für die zu erwartende  $L^2$ -Norm des Fehlers in den Verschiebungen folgende Konvergenzordnung:

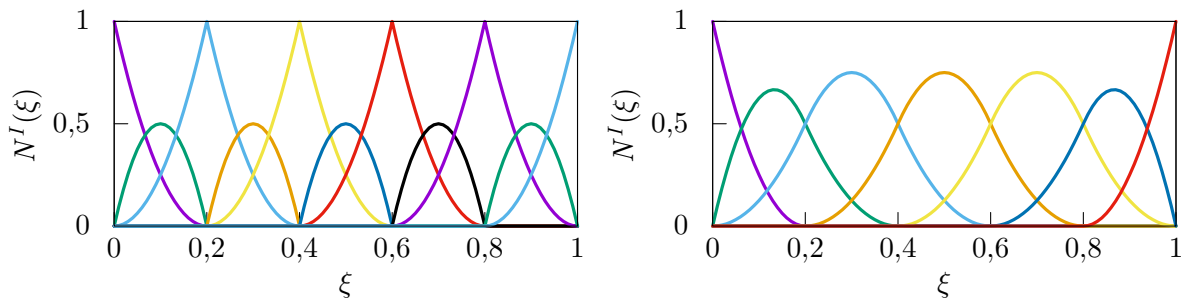
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2} = \mathcal{O}\left(h^{p+1} + h^{2(p-c+1)}\right). \quad (3.4)$$

## 3.3 Das isogeometrische Konzept

Die Ursprünge der FEM können in den 1950er und 1960er Jahren gefunden werden. Erste Entwicklungen im Bereich der heutzutage bekannten Form des Computer-Aided-Design (CAD) sind erst deutlich später zu datieren, etwa in den 1970er und 1980er Jahren. Durch diese zeitliche Diskrepanz in der Entwicklung könnte die komplett unterschiedliche Geometriebeschreibung beider Technologien begründet sein. Obwohl heutzutage die Erstellung von Geometriemodellen mithilfe von CAD-Software nicht mehr aus dem Ingenieurbereich wegzudenken ist, muss die darin verwendete Geometriedarstellung stets in ein für die Berechnung geeignetes FE-Netz überführt werden.

Mit der Einführung der isogeometrischen Analyse (IGA) durch HUGHES U. A. (2005) wurde ein Meilenstein in Richtung der Verknüpfung von Design und Analyse gesetzt. Die bahnbrechende Idee besteht aus der Nutzung einer einheitlichen Geometriedarstellung, wobei hier CAD-typische Geometrieparametrisierungen, wie z. B. NURBS Verwendung finden. Obwohl bereits deutlich früher splinebasierte FE-Methoden vorgestellt wurden, siehe beispielsweise LEUNG (1990), GONTIER UND VOLLMER (1995) oder HÖLLIG (2002), kann durch die Arbeit von HUGHES U. A. (2005) der Durchbruch von splinebasierten finiten Elementen verzeichnet werden. In den letzten Jahren hat die IGA vor allem in der Wissenschaft einen regelrechten Aufschwung erlebt, aber auch kommerzielle FE-Software, wie LS-DYNA, beinhaltet inzwischen Implementierungen isogeometrischer Elementformulierungen.

Im Grunde handelt es sich bei isogeometrischen finiten Elementen um isoparametrische Elemente, bei denen die Formfunktionen der Geometrieparametrisierung für die FE-Diskretisierung verwendet werden. Der Begriff isogeometrisch spiegelt also eine identische Geometrieparametrisierung von CAD- und FE-Modell wider. Die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Konvergenzanforderungen an die Ansatzfunktionen sind für gängige Spline-Ansätze im Rahmen der IGA ebenso erfüllt, wie bei gewöhnlichen Ansätzen, basierend auf Lagrange-Polynomen.



**Abbildung 3.1:** Vergleich quadratischer B-Splines für einen Patch bestehend aus fünf Elementen, links:  $C^0$ -kontinuierlich, rechts:  $C^1$ -kontinuierlich.

Als maßgebender Mehrwert der IGA wurde von HUGHES U. A. (2005) beispielsweise die Zeitersparnis in der Erstellung von brauchbaren FE-Netzen beschrieben. Bei einer geeigneten Geometriedarstellung kann die CAD-Geometrie direkt für die Berechnung verfeinert werden, wobei in jeder Verfeinerungsstufe die exakte Geometriebeschreibung erhalten bleibt. Diese Eigenschaft unterscheidet die IGA grundlegend von der polynom-basierten FEM, da sich bei letztgenanntem Fall bereits für einfache Geometrien, wie z. B. einen Zylinder, mit jeder Netzverfeinerung eine andere Berechnungsgeometrie einstellt.

Neben klassischer  $h$ - und  $p$ -Verfeinerung wurde im IGA-Kontext auch die sogenannte  $k$ -Verfeinerung präsentiert, welche als Mischform neben der Polynomgraderhöhung auch kontinuieritätssteigernd wirkt. So kann innerhalb eines sogenannten Patches, zwischen den Elementen eine maximale Kontinuität von  $C^{p-1}$  erreicht werden, wobei  $p$  den Polynomgrad der Formfunktionen beschreibt. Genau diese Eigenschaft ist von maßgebendem Interesse für diese Arbeit, da die erforderliche  $C^1$ -Kontinuität für schubstarre Strukturmodelle wie Bernoulli-Balken, Kirchhoff-Platte und Kirchhoff-Love-Schale bereits ab B-Splines zweiter Ordnung einfach bereitgestellt wird, wie in Abbildung 3.1 ersichtlich. Diese Eigenschaft führte zu einer regelrechten Renaissance schubstarrer Modelle im Kontext isogeometrischer finiter Elemente. Zur näheren Erläuterung dieser Thematik wird auf die Kapitel 5 und 6 verwiesen.

Die höhere Glattheit von NURBS im Rahmen der IGA führte in vielen Bereichen der computergestützten Mechanik zu interessanten und viel versprechenden Ergebnissen. In HUGHES U. A. (2005) zeigte sich für Problemstellungen der Fluidmechanik ein sehr gute Abbildung scharfer Randschichten in Advektions-Diffusions-Problemen durch  $k$ -Verfeinerung, welche im Vergleich zu gewöhnlicher  $p$ -FEM als überlegen eingestuft werden kann. Die Robustheit isogeometrischer Simulationen von Problemen der Fluid-Struktur-Interaktion wurde beispielsweise in BAZILEVS U. A. (2012) und KAMENSKY U. A. (2015) demonstriert.

Für Problemstellungen der Strukturmechanik und der Wellenausbreitung konnte gezeigt werden, dass isogeometrische finite Elemente verbesserte spektrale Eigenschaften im Vergleich zu gewöhnlichen finiten Elementen aufweisen, siehe z. B. COTTRELL U. A. (2006), REALI (2006), COTTRELL U. A. (2007). Speziell für die numerische Auflösung der höheren dynamischen Moden wurden in HUGHES U. A. (2008) die Überlegenheit der  $k$ -Verfeinerung gegenüber gewöhnlicher  $p$ -Verfeinerung gezeigt. Im Kontext expliziter Dynamik wird aber noch nach ausreichend genauen (konzentrierten) Massenmatrizen gesucht. Gewöhnliche konzentrierte Massenmatrizen, die durch Zeilensummation bestimmt werden, besitzen lediglich eine Genauigkeit der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ , unabhängig vom Polynomgrad  $p$ . Die Entwicklung von Massenmatrizen höherer Qualität wird von verschiedenen Autoren diskutiert, siehe beispielsweise WANG U. A. (2013), IDESMAN (2017) und SCHAEUBLE U. A. (2017).

Isogeometrische Kontaktformulierungen können in vielen Fällen gute Ergebnisse liefern, welche entsprechenden Ergebnissen gewöhnlicher Lagrange-FEM überlegen sind. Die glatten isogeometrischen Ansatzräume resultieren in glatteren Kontaktspannungen mit geringeren Oszillationen, als es bei Lagrange-Polynomen höherer Ordnung der Fall ist. Für nichtlineare Kontaktsimulationen mit großen Relativgleitungen zwischen Kontaktkörpern kann sich die höhere Glattheit positiv auf die Robustheit der Kontaktalgorithmen auswirken. Für ein tiefergehendes Studium isogeometrischer Kontaktformulierungen wird auf DE LORENZIS U. A. (2011), DE LORENZIS U. A. (2012), TEMIZER U. A. (2012), MATZEN U. A. (2013), DIMITRI U. A. (2014), SEITZ U. A. (2016) und MATZEN UND BISCHOFF (2016) verwiesen. Die genannten Veröffentlichungen unterscheiden sich vor allem in der Art und Weise, wie die Kontaktbedingungen in die zugehörige schwache Form eingebracht werden. Ein ausführlicher Überblick über zugehörige Methoden und isogeometrische Formulierungen wird in DE LORENZIS U. A. (2014) gegeben.

Die hohe Glattheit isogeometrischer Ansätze führte auch im Kontext von Kollokation zu großer Beliebtheit. Die Untersuchung isogeometrischer Kollokationsmethoden wurde von AURICCHIO U. A. (2010a) initiiert. Grundidee ist die Verbindung der hohen Glattheit isogeometrischer Ansätze mit dem niedrigen numerischen Aufwand der Kollokation. Dabei wird direkt die starke Form des zugehörigen Randwertproblems an einem Satz von Kollokationspunkten ausgewertet (kollokiert), anstatt die schwache Form des Randwertproblems zu integrieren. Inhalt dieses Kapitels ist die Beschreibung (isogeometrischer) finiter Elemente mit Bubnov-Galerkin-Ansatz, basierend auf der schwachen Form. Obwohl auf der starken Form basierend, sind die Beiträge zur Kollokation im isogeometrischen Kontext sehr interessant und erwähnenswert. Eine Untersuchung von Problemen der expliziten Dynamik wurde in AURICCHIO U. A. (2012) vorgestellt. Ein numerischer Kostenvergleich von isogeometrischer Kollokation und isogeometrischer FEM wurde in SCHILLINGER U. A. (2013) präsentiert. Die Erweiterung isogeometrischer Kollokation der starken Form auf Kontaktprobleme geht auf DE LORENZIS U. A. (2015) und KRUSE



U. A. (2015) zurück. Kollokationskonzepte für Balken und Platten wurden in BEIRÃO DA VEIGA U. A. (2012b), AURICCHIO U. A. (2013), REALI UND GOMEZ (2015), WEEGER U. A. (2017), KIENDL U. A. (2017) und MARINO (2017) vorgestellt. Isogeometrische Kollokation der Reissner-Mindlin- und Kirchhoff-Love-Schalenmodelle wird in KIENDL U. A. (2017), MAURIN U. A. (2018) untersucht. Die Wahl spezieller, superkonvergenter Kollokationspunkte (Cauchy-Galerkin-Punkte), mit denen die Galerkin-Lösung reproduziert werden kann, wird von GOMEZ UND DE LORENZIS (2016) initiiert sowie von MONTARDINI U. A. (2017) und FAHRENDORF U. A. (2018) weiter untersucht.

Die Zahl unterschiedlichster glatter Diskretisierungsverfahren im Rahmen der IGA und auch darüber hinaus steigt stetig an, wie bereits in Abschnitt 1.1 beschrieben wurde. An dieser Stelle sei angemerkt, dass im Rahmen dieser Arbeit vorrangig finite Elemente basierend auf NURBS verwendet werden. Dennoch sind die vorgestellten Entwicklungen grundsätzlich auf jegliche Art glatter Diskretisierungsverfahren anwendbar und somit nicht auf eine bestimmte Art von Ansatzräumen beschränkt.

Von einer detaillierten Einführung in B-Splines, NURBS, Verfeinerungsstrategien sowie das isogeometrische Konzept als Ganzes wird an dieser Stelle abgesehen und auf PIEGL UND TILLER (1995), HUGHES U. A. (2005) sowie COTTRELL U. A. (2009) verwiesen.

## 3.4 Linearisierung und Lösung

Im Abschnitt 2.6.1 wurden die Differenzialgleichungen der Elastostatik in ihrer schwachen Form dargestellt. Das PvV aus Gleichung (2.30) beschreibt dabei in kontinuierlicher Weise, dass die Summe der virtuellen inneren und äußeren Arbeiten gleich null ist

$$\delta\Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{u}) = \delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{int}} + \delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Wenn Gleichung (3.5) erfüllt ist, herrscht statisches Gleichgewicht. Gleichung (3.5) beschreibt einen Satz nichtlinearer Differenzialgleichungen, welche meist nicht direkt gelöst werden können. Durch Diskretisierung kann dieser Satz von Differenzialgleichungen in einen Satz algebraischer Gleichungen überführt werden. Somit gilt für die Verschiebungen und die virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &\approx \mathbf{u}_e^h(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{d}^I = \mathbf{N} \mathbf{d}, \\ \delta \mathbf{u}_e &\approx \delta \mathbf{u}_e^h(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{d}^I = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei  $\mathbf{N}$  die Matrix der Formfunktionen und  $\mathbf{d}$  bzw.  $\delta\mathbf{d}$  die Vektoren der diskreten Freiheitsgrade je Element darstellen. Über den Zusammenbau zum Gesamtsystem lassen sich die diskreten (virtuellen) Verschiebungen in globalen Vektoren  $\mathbf{D}$  bzw.  $\delta\mathbf{D}$  sammeln. Damit ergibt sich die diskrete Form von Gleichung (3.5) zu

$$\delta\Pi_{PvV}^h(\mathbf{D}) = \delta\Pi_{PvV}^{\text{int},h} + \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext},h} \Rightarrow \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{R}(\mathbf{D}) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

wobei mit  $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{D})$  und  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  die sogenannten internen und externen Kräfte bezeichnet sind. Deren Ungleichgewicht wird durch das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  beschrieben. Es herrscht somit statisches Gleichgewicht zwischen den internen und den externen Kräften, wenn  $\mathbf{R}(\mathbf{D}) = \mathbf{0}$  gilt.

Die nichtlineare Abhängigkeit der internen Knotenkräfte  $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{D})$  von den Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  verhindert im Allgemeinen immer noch die direkte Lösbarkeit von Gleichung (3.7). Wie bei nichtlinearen Problemen typisch, wird ein Lösungsansatz durch Linearisierung des Problems beschrieben, was einer Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied entspricht. Die nichtlinearen algebraischen Gleichungen werden mithilfe der Newton-Raphson-Methode iterativ durch eine Reihe linearer Probleme gelöst.

Obwohl es sich bei allen nachfolgenden Herleitungen um ein diskretisiertes System handelt, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Kopfzeiger  $(\bullet)^h$  verzichtet. Die Linearisierung von  $\delta\Pi_{PvV}(\mathbf{D})$  lässt sich auf globaler Ebene darstellen zu

$$\begin{aligned} \text{LIN } \delta\Pi_{PvV} &= \delta\Pi_{PvV} + \Delta\delta\Pi_{PvV} \\ &= \delta\Pi_{PvV} + \delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}\Delta\mathbf{D} \\ &= \underbrace{\delta\Pi_{PvV}^{\text{int}} + \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext}}}_{-\mathbf{R}(\mathbf{D})} + (\delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}^{\text{int}} + \underbrace{\delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}^{\text{ext}}}_{=\mathbf{0}})\Delta\mathbf{D}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei  $(\bullet)_{,\mathbf{D}}$  eine partielle Ableitung beschreibt. Da in dieser Arbeit keine verformungsabhängigen Lasten, wie z. B. Druck berücksichtigt werden, ergibt sich stets  $\delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$ . Der Anteil  $\delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}^{\text{int}}$  soll hingegen detaillierter beschrieben werden, da mit ihm die tangentiale Steifigkeitsmatrix hergeleitet werden kann. Mit der Gleichung (2.30) ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\delta\Pi_{PvV,\mathbf{D}}^{\text{int}} = - \int_{\Omega_R} (\delta\mathbf{E}_{,\mathbf{D}}^{\text{T}} \mathbf{S} + \delta\mathbf{E}^{\text{T}} \mathbf{S}_{,\mathbf{D}}) d\Omega_R. \quad (3.9)$$

Mithilfe der Regeln der Variationsrechnung, wie

$$\delta\mathbf{E} = \left( \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{D}} \right)^{\text{T}} \delta\mathbf{D} = \mathbf{E}_{,\mathbf{D}}^{\text{T}} \delta\mathbf{D} \quad (3.10)$$

und des Konstitutivgesetzes aus Gleichung (2.17) lässt sich Gleichung (3.9) darstellen zu

$$\delta\Pi_{\text{PvV,D}}^{\text{int}} = -\delta\mathbf{D}^T \underbrace{\left[ \int_{\Omega_R} (\mathbf{E}_{,\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \mathbf{E}_{,\mathbf{D}} + \mathbf{E}_{,\mathbf{D}\mathbf{D}}^T \mathbf{S}) \, d\Omega_R \right]}_{\mathbf{K}_T}. \quad (3.11)$$

Die Tangentensteifigkeit  $\mathbf{K}_T$  setzt sich aus einem elastischen, einem sogenannten Anfangsverschiebungs- sowie einem geometrischen Steifigkeitsanteil zusammen, d. h.  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g$ . Der erste Anteil aus Gleichung (3.11) entspricht  $\mathbf{K}_{e+u}$ , der zweite Anteil entspricht hingegen  $\mathbf{K}_g$ .

Mit der Newton-Raphson-Methode werden die nichtlinearen Gleichungen aus Gleichung (3.7) iterativ, d. h. als Abfolge linearer Teilprobleme, gelöst. Innerhalb einer Iteration gilt im Iterationschritt  $i$

$$\Delta\mathbf{D}^{i+1} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{D}^i) \quad (3.12)$$

sowie

$$\mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{D}^i + \Delta\mathbf{D}^{i+1}, \quad (3.13)$$

bis sich das Residuum innerhalb einer vorgegebenen Toleranz zu null ergibt. Es gilt somit  $\mathbf{R}(\mathbf{D}) \approx \mathbf{0}$ . Dies bedeutet wiederum, dass die internen und die externen Kräfte im Gleichgewicht stehen, also  $\mathbf{F}^{\text{int}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$ .

Im Falle einer geometrisch linearen Berechnung entsprechen die Green-Lagrange-Verzerrungen nach Gleichung (2.15) den sogenannten Ingenieurdehnungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , welche nur linear von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und somit  $\mathbf{D}$  abhängig sind. Dann gilt stets  $\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_g = \mathbf{0}$  und Gleichung (3.11) reduziert sich auf

$$\delta\Pi_{\text{PvV,D}}^{\text{int}} = -\delta\mathbf{D}^T \underbrace{\left[ \int_{\Omega_R} (\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{D}}) \, d\Omega_R \right]}_{\mathbf{K}_e}, \quad (3.14)$$

wobei der Term  $[\bullet]$  allein der elastischen Steifigkeit  $\mathbf{K}_e$  entspricht. Diese lässt sich auch in der üblichen Schreibweise einschlägiger FE-Literatur darstellen als

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_R} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) \, d\Omega_R, \quad (3.15)$$

wobei der B-Operator auch als diskreter Verschiebungs-Verzerrungs-Operator bezeichnet wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die Herleitungen dieses Abschnitts auf Systemebene beschrieben. Natürlich sind auch alternative Darstellungen auf Knoten- oder Elementebene möglich. Die Berechnung der internen bzw. externen Kräfte sowie der Tangentensteifigkeitsmatrix erfolgt in Rahmen dieser Arbeit elementweise mit anschließender Assemblierung zu Systemmatrizen und -vektoren.

## 3.5 Spannungsrückrechnung

Die in diesem Kapitel beschriebenen finiten Elemente werden als verschiebungsbasiert bezeichnet, da ihre primalen Variablen die Verschiebungen sind. Somit ist nach der Lösung eines linearen oder nichtlinearen Problems zunächst nur die Geometrie in der Referenz- sowie der entsprechenden Momentankonfiguration des Lastschritts bekannt. Neben den Verschiebungen sind vor allem die auftretenden Spannungen in mechanischen Systemen von maßgebender Bedeutung für Ingenieure. Da bei verschiebungsbasierten finiten Elementen die gewünschten Spannungsgrößen nicht direkt verfügbar sind und somit aus dem Lösungsfeld der Verschiebungen berechnet werden müssen, erfolgt eine Spannungsrückrechnung.

Die elementweisen, diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  werden nach Gleichung (3.3) mit den Formfunktionen oder entsprechender Ableitungen zum Lösungsfeld für Verschiebungen oder Verschiebungsableitungen interpoliert. Die Green-Lagrange-Verzerrungen lassen sich nach Gleichung (2.13) oder (2.14) bestimmen.

Über das Materialgesetz können nach Gleichung (2.17) die PK2-Spannungen bestimmt werden. Wie in Kapitel 2 bereits beschrieben, werden die Cauchy-Spannungen als wahre oder physikalische Spannungen bezeichnet. Die Beziehung zwischen PK2- und Cauchy-Spannungstensor ist nach Gleichung (2.25) gegeben zu

$$\boldsymbol{\sigma} = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (3.16)$$

wobei sich die Komponenten über

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} S^{ij} \quad (3.17)$$

ineinander umrechnen lassen. Da sich diese Arbeit im Weiteren mit der Entwicklung von Schalenformulierungen befasst, wurden, wie in diesem Kontext üblich, alle eingeführten Tensoren in konvektiven Koordinaten beschrieben. Die kontravarianten Komponenten  $\sigma^{ij}$  beziehen sich also auf die kovariante Basis  $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ , welche im allgemeinen Fall nicht

normiert ist. Damit die Darstellung der Spannungskomponenten  $\sigma^{ij}$  nicht von der Metrik abhängt, wird der Cauchy-Spannungstensor üblicherweise auf eine orthonormierte, kartesische Basis  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  transformiert. Für die Umrechnung der Spannungskomponenten in für den Ingenieur oder Anwender aussagekräftige Werte gilt

$$\tilde{\sigma}^{kl} = \sigma^{ij} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}^l). \quad (3.18)$$

Eine ausführliche Zusammenstellung dieser und weiterer Transformationsregeln ist beispielsweise in KIENDL (2011) zu finden. Im Falle reduzierter Schalenmodelle wie Kirchhoff-Love oder Reissner-Mindlin, welche nicht den gesamten dreidimensionalen Verzerungsraum abbilden, bietet sich eine Transformation des Cauchy-Spannungstensors in eine lokal kartesische Basis an. Hier lassen sich die getroffenen Annahmen, beispielsweise die verschwindenden Dickennormalspannungen  $\sigma^{33}$ , darstellen. Des Weiteren lassen sich nur die in lokal kartesischen Koordinaten dargestellten Spannungskomponenten zu physikalisch sinnvollen Spannungsergebnissen, wie z. B. Membrankräften oder Biegemomenten, integrieren.



# 4

---

## Locking

Im vorherigen Kapitel wurden zunächst primale, sogenannte verschiebungsbasierte finite Elemente in allgemeiner Darstellung präsentiert, obwohl diese für viele praktische Problemstellungen nicht optimal sind. Bereits im jungen Alter der FEM, in den 1960er Jahren, wurde erkannt, dass verschiebungsbasierte finite Elemente unter bestimmten Umständen zu sehr schlechten Ergebnissen und reduzierten Konvergenzraten im präasymptotischen Bereich führen. Der seit Ende der 1970er Jahre verwendete Begriff Locking entstand aus der Vorstellung, dass sich das Element gegenüber der Deformation versperert. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Locking-Effekte allgemein, ihre Symptome sowie ihre Bedeutung im Kontext der IGA erläutert.

### 4.1 Klassifizierung von Locking-Effekten

In der Literatur gehen die Herangehensweisen zur Beschreibung von Locking-Effekten auseinander. In entsprechenden Arbeiten von z. B. BISCHOFF (1999) und KOSCHNICK (2004) werden die mechanische, die numerische und die mathematische Sichtweise auf die Ursachen von Locking-Effekten beschrieben. Die mechanische Betrachtungsweise ist die wohl anschaulichste, da hier direkt Verzerrungen bzw. Spannungen für einfache Problemstellungen identifiziert werden, die als parasitär einzustufen sind. Als parasitär werden Spannungen oder Verzerrungen immer dann bezeichnet, wenn sie in der analytischen Lösung nicht existieren, wie beispielsweise Querkräfte unter reiner Biegung eines Balkens. Die numerische Sichtweise nach HUGHES (2000) ist eher formal und misst die Tendenz zu übersteifem Elementverhalten mithilfe eines Zwangsbedingungsfaktors, auch als Constraint-Count oder Constraint-Ratio bekannt. Hierdurch lassen sich reduzierte Integrationsregeln und ihr positiver Einfluss auf die Verringerung von Locking herleiten und verstehen. Nach BRAESS (2017) würde man aus mathematischer Sicht eher von einem

schlecht konditionierten Problem, als von Locking sprechen. Als Ursache für die schlechte Konditionierung wird der große Quotient der auftretenden Konstanten genannt, der bei sogenannten steifen Differenzialgleichungen auftritt. Für tiefere Einblicke in die mathematische Beschreibung von Locking-Effekten sei auf BRAESS (2017) verwiesen.

Ziel dieses Abschnitts ist eine möglichst zugängliche und anschauliche Darstellung der unterschiedlichen Locking-Effekte, weshalb sie hier vorwiegend aus mechanischer Sicht betrachtet werden. Bevor jedoch die Ursachen für Locking beschrieben werden, werden die Symptome aufgelistet, die prinzipiell durch alle Locking-Effekte hervorgerufen werden:

1. Die Verschiebungslösung wird unterschätzt, d. h. die Struktur verhält sich zu steif.
2. Bestimmte Spannungskomponenten oder Spannungsergebnisse weisen oszillatorisches Verhalten auf.
3. Die Intensität von 1. und 2. hängt von einem sogenannten kritischen Parameter ab.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass Locking grundsätzlich von der numerisch zu lösenden partiellen Differenzialgleichung und der Form des Gebiets, auf dem diese definiert ist, abhängt. Locking-Effekte treten für jegliche Art von Diskretisierungsverfahren, Polynomordnung oder Glattheit der Formfunktionen, Elementform, oder jeden anderen Einflussfaktor in Erscheinung, wobei sich Intensität und Charakteristika unterscheiden können.

Die verschiedenen Versteifungseffekte können nach BISCHOFF (1999), je nach Art ihres kritischen Parameters, in zwei wesentlich unterschiedliche Klassen unterteilt werden: in materielle und geometrische Locking-Effekte. Wie die Namensgebung bereits andeutet, treten materielle Locking-Effekte, wie z. B. volumetrisches Locking, in Abhängigkeit eines kritischen Materialparameters in Erscheinung, hier die Querdehnzahl  $\nu$ . Geometrische Locking-Effekte beschreiben hingegen eine ganze Klasse diverser Versteifungseffekte, die von den geometrischen Abmessungen eines finiten Elements abhängen. Der kritische Parameter ist in praktisch allen Fällen die Dicke des Elements bzw. eine davon abgeleitete Kennzahl, wie z. B. die Schlankheit. Geometrische Locking-Effekte werden je nach Art ihrer Zwangsbedingung bzw. der auftretenden parasitären Spannungskomponenten weiter unterteilt in Schub- und Querschublocking, Membranlocking sowie Krümmungs-Dicken-Locking bzw. Trapezlocking. Die klassifizierten Effekte werden im Folgenden beschrieben und diskutiert.



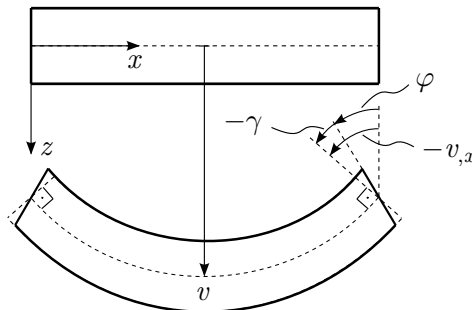
### 4.1.1 Schublocking

Der recht allgemeine Begriff des Schublockings wird üblicherweise im Bereich finiter Elemente für zwei- und dreidimensionale Kontinua verwendet. Im Gegensatz zu Kontinuums-elementen wird finiten Schalenelementen eine Dickenrichtung zugewiesen, während die beiden anderen Richtungen die Schalenebene beschreiben. Im Kontext von Schalen wird Schublocking weiter unterschieden in Querschublocking sowie Schublocking in der Schalenebene (In-Plane-Shear-Locking). Bei Balken- und Plattenelementen tritt Querschublocking in analoger Art und Weise auf.

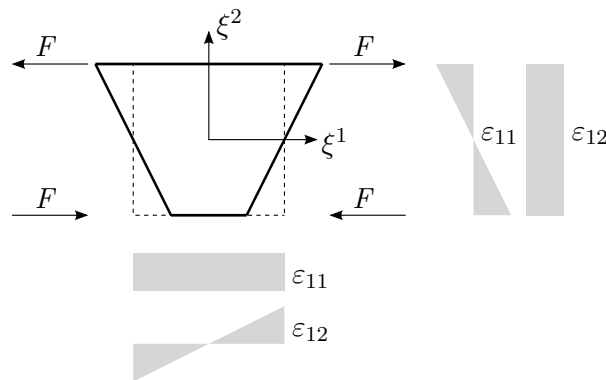
Alle Arten von Schublocking haben dieselbe Ursache und lassen sich in einem gemeinsamen Kontext darstellen und erklären. Die Beschreibung des Querschublockings beim Timoschenko-Balken bietet den wohl einfachsten Zugang zur Materie und soll somit als Startpunkt dienen. Abbildung 4.1 stellt die bekannte Kinematik eines ebenen Timoschenko-Balkens dar, wobei  $v$  die Verschiebung der Mittelfaser in  $z$ -Richtung,  $\varphi$  die totale Rotation des Querschnitts und  $\gamma$  die Schubrotation beschreibt. Die kinematischen Gleichungen dieses Balkenmodells lauten

$$\gamma = v_{,x} + \varphi \quad \text{und} \quad \kappa = \varphi_{,x}, \quad (4.1)$$

wobei die Krümmung mit  $\kappa$  bezeichnet wird und  $(\bullet)_{,x} = \frac{d(\bullet)}{dx}$  eine Ableitung nach der räumlichen Koordinate  $x$  definiert. Werden die primären Verschiebungsgrößen  $v$  und  $\varphi$  im Zuge der Finite-Elemente-Diskretisierung mit denselben Formfunktionen diskretisiert, spricht man auch von einer Equal-Order-Interpolation. Im einfachsten Fall werden lineare Formfunktionen zur Diskretisierung verwendet. In genau diesem Fall ergibt sich in der Darstellung reiner Biegedeformationen ein grundlegendes Problem. Die Bedingung verschwindender Querschubverzerrungen, d. h.  $\gamma^h = 0$ , kann hier nur für den trivialen Fall einer Starrkörperrotation, d. h. für konstante  $\varphi^h$ , erfüllt werden. Die Darstellung stückweise konstanter Krümmungen erfordert lineare Verläufe von  $\varphi^h$ . Somit ist jedoch



**Abbildung 4.1:** Geometrisch lineare Kinematik eines ebenen, geraden Timoschenko-Balkens.



**Abbildung 4.2:** Deformationsverhalten und qualitative Verzerrungsverläufe für ein bilineares Scheibenelement unter reiner Biegebelastung,  $u_1 = \xi^1 \xi^2$ ,  $\nu = 0$ .

$v_{,x}^h$  elementweise konstant,  $\varphi^h$  hingegen linear. Die Erfüllung der Bedingung  $\gamma^h = 0$  ist somit nicht mehr möglich. Dieses Ungleichgewicht von zwei nicht ausbalancierten Ansatzfunktionen ist die maßgebende Ursache für Querschublocking. In jedem linearen finiten Element werden unter reiner Biegung stets lineare Querschubverzerrungen zurückbleiben, die als parasitär bezeichnet werden, da sie in der analytischen Lösung nicht auftreten. Die innere Energie aus parasitären Querschubverzerrungen und Querkraften führt zu einer vergrößerten Steifigkeit und somit zu einer unter Umständen deutlichen Unterschätzung der Verschiebungslösung. Die Unausgewogenheit der Ansätze bleibt auch bei Elementen höherer Ordnung erhalten, weshalb Locking, entgegen weit verbreiteter Ansichten, auch in diesen Fällen nicht beseitigt, sondern nur verringert wird. Beispielsweise kann ein Element mit quadratischen Ansätzen zwar konstante Krümmungen exakt abbilden, doch bereits die Darstellung linearer Krümmungsverläufe resultiert in quadratischen parasitären Querschubverzerrungen.

Bei Querschublocking handelt es sich um einen geometrischen Locking-Effekt. Somit ist der kritische Parameter ein Geometrie Kennwert: die Schlankheit  $L/t$ . Dabei ist allerdings die Schlankheit eines Elements und nicht der gesamten Struktur maßgebend. Das bedeutet, je feiner die Diskretisierung ist, desto gedrungener (weniger schlank) ist ein einzelnes Element und die Bedeutung von Querschublocking nimmt ab. Dadurch konvergieren auch primale Timoschenko-Balkenelemente mit Netzverfeinerung gegen die analytische Lösung, obwohl sie von Querschublocking betroffen sind. Doch aus praktischen Gesichtspunkten ist es wünschenswert, bereits für grobe Netze niedriger Ordnung gute Ergebnisse für Verschiebungen und Spannungen zu erhalten, was der Beseitigung von Locking-Effekten eine bedeutende Rolle zuweist.

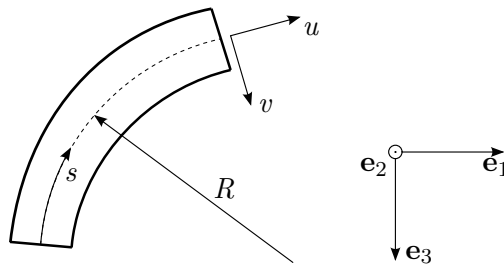
Das zuvor beschriebene Schublocking bei Scheiben- oder Volumenelementen sowie entsprechendes In-Plane-Shear-Locking bei Schalen lässt sich ebenfalls in einfacher Weise veranschaulichen. In Abbildung 4.2 ist der Deformationsmode eines bilinearen Scheiben-

elements unter reiner Biegung dargestellt. Aus dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T = [\xi^1 \xi^2, 0]^T$  lassen sich über  $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ ,  $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$  und  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$  die in Abbildung 4.2 dargestellten qualitativen Verzerrungsverläufe bestimmen, wobei  $(\bullet)_{,\alpha} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi^\alpha}$  gilt. Ein in  $\xi^2$  linear verlaufender Verzerrungsverlauf  $\varepsilon_{11}$  entspricht dem zu erwartenden Ergebnis unter reiner Biegung. Doch ergeben sich auch hier, analog zum Timoschenko-Balken, linear in  $\xi^1$  verlaufende Schubverzerrungen  $\varepsilon_{12}$ , die erneut als parasitär eingestuft werden. Für Schalen entspricht dieser Effekt dem sogenannten In-Plane-Shear-Locking bei Biegung in der Schalenebene. Für Volumenelemente lassen sich analoge Überlegungen für Biegedeformationen um alle drei Achsen anstellen, worauf an dieser Stelle verzichtet wird.

### 4.1.2 Membranlocking

Für bestimmte Flächen unter entsprechender Belastung können in der Realität sogenannte dehnungslose Verformungen auftreten. Diese Verformungen sind reine Biegedeformationen, die bereits für kleine Belastungen sehr groß sein können, da die für dünne Strukturen dominierende Membransteifigkeit nicht aktiviert wird. Ein alltägliches Beispiel stellt das Auf- und Abrollen eines Blattes Papier dar. Im Vergleich zur Membrandehnung in der Ebene des Blattes wird für eine reine Biegedeformation um ein Vielfaches weniger Energie benötigt, obwohl die zugehörigen Verschiebungen bedeutend größer sind.

Mit der Entwicklung gekrümmter finiter Elemente für Balken und Schalen wurde ein Versteifungseffekt entdeckt, der eine numerische Abbildung genau dieser dehnungslosen Verformungen verhindert. Dieser Locking-Effekt rührt aus einer Kopplung von Biege- und Membrandehnungen her und wurde von STOLARSKI UND BELYTSCHKO (1982) als Membranlocking bezeichnet. In diesem Beitrag wurde Membranlocking für gekrümmte Balkenelemente beschrieben, die auf der Theorie flacher Schalen von MARGUERRE (1938) basieren. Entgegen der überwiegenden Mehrheit der Literatur, die sich mit Membranlocking beschäftigt, soll hier Membranlocking am gekrümmten Bernoulli-Balken in der Ebene erklärt werden, siehe beispielsweise LIM U. A. (1997). Identische Überlegungen könnten auch für gekrümmte Timoschenko-Balken vorgenommen werden, siehe beispielsweise FRIEDMAN UND KOSMATKA (1998) und darin zitierte Literatur oder BOUCLIER U. A. (2012). Allerdings tritt hier zusätzlich Querschublocking auf, weshalb in dieser Arbeit die reduzierten kinematischen Gleichungen nach Euler und Bernoulli betrachtet werden. Abbildung 4.3 zeigt die Geometriebeschreibung eines ebenen Bernoulli-Balkens mit Krümmungsradius  $R$ , dessen Mittelfaser durch den Bahnparameter  $s$  beschrieben wird. Die zwei mitdrehenden Verschiebungskomponenten in Tangential- und Normalenrichtung werden durch  $u$  bzw.  $v$  beschrieben. Die beiden kinematischen Gleichungen des



**Abbildung 4.3:** Geometriebeschreibung eines ebenen, gekrümmten Bernoulli-Balkens.

gekrümmten Bernoulli-Balkens für allgemeine Krümmungsradien lassen sich darstellen als

$$\varepsilon = u_{,s} - \frac{v}{R} \quad \text{und} \quad \kappa = \left( -v_{,s} + \frac{u}{R} \right)_{,s}, \quad (4.2)$$

wobei  $\varepsilon$  die Membrandehnung und  $\kappa$  die Krümmung beschreibt. Im Falle gerader Balken gilt  $R = \infty$  und es ergeben sich die gewohnten Dehnungs- bzw. Krümmungsterme gerader Bernoulli-Balken zu

$$\varepsilon = u_{,s} \quad \text{und} \quad \kappa = -v_{,ss}. \quad (4.3)$$

In Gleichung (4.3) ist erkennbar, dass die Membrandehnung  $\varepsilon$  im geraden Fall von der Krümmung  $\kappa$  entkoppelt ist und damit im Rahmen einer FE-Diskretisierung kein Locking auftritt. Ableitungen jeweils nur eines Parameters sind für jeweils ausschließlich eine Verzerrungskomponente verantwortlich. Es kann sowohl reine Biegung als auch reine Membrandehnung problemlos dargestellt werden, indem entweder  $u_{,s} = 0$  oder  $v_{,ss} = 0$  erfüllt ist.

Im Falle eines gekrümmten Balkens verändert sich diese, aus numerischer Sicht äußerst wünschenswerte Eigenschaft. Zur Erläuterung der Ursache für Membranlocking wird der einfache Fall eines einseitig eingespannten Kreissegments ( $R$  ist konstant) betrachtet. Ein reiner Biegezustand erfordert verschwindende Membranverzerrungen, d. h.  $\varepsilon = 0$ . Aus der Gleichung (4.2), links, folgt

$$u_{,s} = \frac{v}{R}. \quad (4.4)$$

Zusammen mit der Gleichung (4.2), rechts, ergibt sich

$$\kappa = -v_{,ss} + \frac{v}{R^2}. \quad (4.5)$$

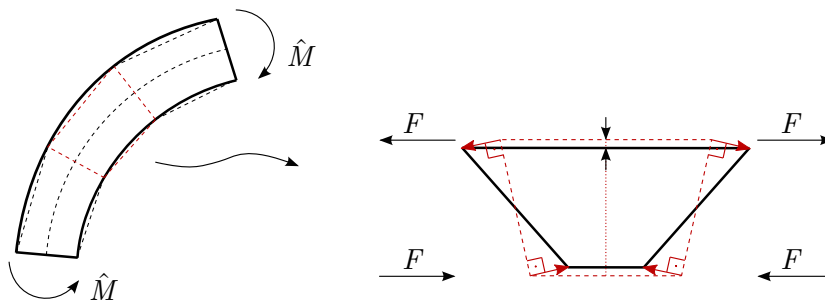
Werden Polynome oder Splines als Formfunktionen verwendet, kann der einfachste Fall konstanter Krümmung nur erfüllt werden, wenn  $v$  konstant ist. Aufgrund der aufgebrachten Randbedingung muss somit  $v = 0$  im gesamten Balken gelten. Aus Gleichung (4.5) folgt also  $\kappa = 0$ . Deshalb ist die Bedingung  $\varepsilon = 0$  nur erfüllt, wenn auch  $\kappa = 0$  gilt, was wiederum dehnungslose Verformungen ausschließt.

Membranlocking existiert grundsätzlich für jede Art von gekrümmten Balken-, Schalen- und Volumenelementen, wobei es in den kinematischen Gleichungen von Schalenformulierungen nicht mehr so leicht identifizierbar ist. Im Falle von Schalenelementen tritt Membranlocking, entsprechend der beiden Dimensionen, für Biegung in zwei Richtungen auf. Wie sich in weiteren Teilen dieser Arbeit zeigen wird, ist die Signifikanz von Membranlocking sehr hoch, denn auch bei Erhöhung der Polynomordnung klingt dieser Versteifungseffekt deutlich langsamer ab, als es beim Schublocking der Fall ist. Speziell im isogeometrischen Kontext ist es interessant zu erwähnen, dass die Geometrie hier „exakt“ dargestellt werden kann, was vorwiegend als großer Vorteil beschrieben wird. Doch im Gegenzug kommt dadurch mit Membranlocking ein ernst zu nehmender Versteifungseffekt zum Tragen, der für gewöhnliche bilineare finite Schalenelemente von vernachlässigbarem Interesse ist. Bilineare Schalenelemente sind nur im Sonderfall verwundener Elementgeometrien, in Form hyperbolischer Paraboloiden, von Membranlocking betroffen, wobei dessen Einfluss auch dann eher als gering einzustufen ist.

### 4.1.3 Krümmungs-Dicken-Locking

Dieser Locking-Effekt tritt sowohl bei gewöhnlichen bi- bzw. trilinearen Kontinuumselementen als auch bei Schalenelementen mit Dickenänderung in Erscheinung. Bei Kontinuumselementen oder Kontinuums-Schalenelementen bezeichnet man ihn für gewöhnlich als Trapezlocking, siehe beispielsweise MACNEAL (1992), SZE (2000) und IRSLINGER (2013). Im Kontext von mittelflächenparametrisierten Schalenformulierungen spricht man typischerweise von Krümmungs-Dicken-Locking, wobei dieses nur für Schalenformulierungen mit Dickenänderung auftritt, d. h. bei 6- bzw. 7-Parameter-Schalenformulierungen, wie z. B. in RAMM u. A. (1994), BETSCH u. A. (1996) und ECHTER (2013). Krümmungs-Dicken-Locking existiert nur bei gekrümmten Geometrien, die bei Diskretisierung mit bi- oder trilinearen Kontinuumselementen automatisch zu trapezförmig verzerrten Elementen führt, siehe Abbildung 4.4. Ursache für diesen Versteifungseffekt sind parasitäre Normalverzerrungen in Dickenrichtung  $E_{33}^h$  bzw.  $\varepsilon_{33}^h$ , die für reine Biegebeanspruchung und  $\nu = 0$  auftreten.

Bei den klassischen 3- und 5-Parameter-Schalenformulierungen nach Kirchhoff-Love bzw. Reissner-Mindlin wird dieses Problem a priori durch modifizierte Stoffgesetze vermieden. 6- bzw. 7-Parameter-Schalenformulierungen sind nicht Inhalt dieser Arbeit, somit wird



**Abbildung 4.4:** Deformation eines trapezförmig verzerrten Elements unter reiner Biegebeanspruchung,  $\nu = 0$ .

Krümmungs-Dicken-Locking nur aus Gründen der Vollständigkeit kurz eingeführt. Wie in Abbildung 4.4 angedeutet, rotieren die linke und rechte Elementkante unter Biegebeanspruchung, verlängern sich aber gemäß einer geometrisch linearen Kinematik nicht. Alle anderen Fasern in Dickenrichtung erfahren hingegen eine unphysikalische Stauchung. In Elementmitte erfährt die angedeutete Faser in Dickenrichtung sogar keinerlei Rotation, hingegen die maximale Stauchung. Mit dem Krümmungs-Dicken-Locking ist nun der letzte geometrische Versteifungseffekt beschrieben.

#### 4.1.4 Volumetrisches Locking

Im Gegensatz zu den bereits vorgestellten geometrischen Locking-Effekten, wird durch das volumetrische Locking ein Versteifungseffekt beschrieben, der von der Querdehn- bzw. Poissonzahl  $\nu$  abhängig ist. Volumetrisches Locking ist nicht existent für  $\nu = 0$ . Für den Grenzfall von  $\nu \rightarrow 0,5$ , also bei fast inkompressiblem Materialverhalten, kann volumetrisches Locking maßgeblich die Lösungsqualität verschlechtern. Der als kritischer Parameter zu betrachtende Kompressionsmodul  $\kappa = E/(3 - 6\nu)$  wird in diesem Fall unendlich, was im Sinne der mathematischen Betrachtungsweise wieder zu einem schlecht konditionierten Problem führt. Die zugehörige Zwangsbedingung lautet im geometrisch linearen Fall

$$\text{Div } \mathbf{u} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} = 0, \quad (4.6)$$

wobei eine Nichterfüllung zu großen Zwangsspannungen führen kann. Der Grenzfall inkompressiblen Materialverhaltens kommt bei Festkörpern beispielsweise bei Metallen oder gummiartigen Materialien vor, wobei sich volumetrisches Locking auch für  $\nu < 0,5$  bemerkbar macht.

Aus der mechanischen Sicht lässt sich volumetrisches Locking für  $\nu \neq 0$  erneut anhand parasitärer Spannungsverläufe erläutern. Für den Deformationsmode aus Abbildung 4.2 mit den dargestellten Verzerrungsverläufen lassen sich über das Hooke'sche Gesetz die zusätzlichen qualitativen Spannungsverläufe bestimmen. Die in  $\xi^2$  linear verlaufende Spannungskomponente  $\sigma^{11,h}$  bewirkt für diesen Mode bei  $\nu \neq 0$  eine ebenso in  $\xi^2$  linear verlaufende Spannungskomponente  $\sigma^{22,h}$ , da hier  $\sigma^{22,h} = \nu\sigma^{11,h}$  gilt. Entsprechende Normalverzerrungen  $\varepsilon_{22}^h$  sind hingegen null, weshalb die auftretenden Spannungen  $\sigma^{22,h}$  als parasitär einzustufen sind. Doch auch für andere Belastungen können die Verzerrungen  $\varepsilon_{22}^h$  höchstens konstant in  $\xi^2$  verlaufen, da das bilineare Verschiebungsfeld einfach partiell nach  $\xi^2$  abgeleitet wird. Die Unausgewogenheit zwischen linearen Spannungen und konstanten Verzerrungen ist die Ursache für volumetrisches Locking.

Bei der Herleitung von mittelflächenparametrisierten 6-Parameter-Schalenformulierungen mit Dickenänderung ergeben sich nur konstante Terme in der Dickennormalverzerrungskomponente  $\varepsilon_{33}^h$  bzw.  $E_{33}^h$ . Der fehlende lineare Verzerrungsanteil verursacht in analoger Weise volumetrisches Locking in Dickenrichtung, was in diesem Kontext üblicherweise als Poisson-Dicken-Locking bezeichnet wird. Im Fall von einschichtigen Schalenmodellen kann dieser Effekt allerdings durch Netzverfeinerung nicht vermindert werden, da keine Verfeinerung in Dickenrichtung stattfindet. Manche Autoren interpretieren das Poisson-Dicken-Locking somit als einen Defekt der Schalenformulierung, da im Gegensatz zu typischen Locking-Effekten, keine Besserung mit zunehmender Netzfeinheit zu erwarten ist. Der fehlende lineare Verzerrungsanteil in Dickenrichtung wird bei dreidimensionalen Schalenformulierungen typischerweise durch einen siebten Parameter eingebracht, was in einer sogenannten 7-Parameter-Formulierung resultiert. Dieser siebte Parameter kann entweder direkt die Dickenverzerrungskomponente linear anreichern (BUECHTER UND RAMM (1992), RAMM U. A. (1994), BISCHOFF UND RAMM (1997)), oder indirekt über ein in Dickenrichtung quadratisch angereichertes Verschiebungsfeld zu linearen Dickenverzerrungen führen, wie beispielsweise in SANSOUR (1995) oder PARISCH (1995).

#### 4.1.5 Bedeutung der einzelnen Locking-Effekte für diese Arbeit

In vorangegangenen Abschnitten wurden alle Locking-Effekte vorgestellt, die für strukturmechanische Probleme von Bedeutung sind. In dieser Arbeit stehen schubweiche Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen mit 5-Parameter-Kinematik im Fokus.

Aufgrund dessen sind vor allem Querschublocking sowie Membranlocking von großer Bedeutung. Querschublocking tritt bereits für lineare Elemente auf und muss in diesem Kontext als maßgebender Locking-Effekt betrachtet werden. Für Elemente höherer Ordnung nimmt zwar die Intensität von Querschublocking in Bezug auf die Qualität der

Verschiebungslösung ab, zugehörige Querkräfte können aber immer noch starke Oszillationen aufweisen.

Im Gegensatz zum Querschublocking, existiert Membranlocking nur bei gekrümmten Elementen, weshalb gewöhnliche bilineare Schalenelemente nur im Falle verwundener Elementgeometrien von Membranlocking geringeren Einflusses betroffen sind. Im Kontext isogeometrischer Schalenelemente gewinnt Membranlocking durch die exakte Beschreibung vieler gekrümmter Geometrien enorm an Bedeutung. Speziell für glatte Diskretisierungen ist die Qualität der Lösungen für Membrankräfte unter Umständen äußerst gering. Neben Querschub- und Membranlocking ist noch Schublocking in der Ebene zu beachten. Letzterem wird für typische Schalenprobleme eine im Vergleich geringere Bedeutung zugewiesen, da es nur für biegeähnliche Verformung in der Schalenebene auftritt.

Das beschriebene Krümmungs-Dicken-Locking sowie Poisson-Dicken-Locking treten nur für dreidimensionale Schalenelemente oder Kontinuums-elemente auf, da im Falle einer Kirchhoff-Love- oder Reissner-Mindlin-Schalenformulierung die entsprechende transversale Normalspannung  $S^{33}$  keine Berücksichtigung findet. Somit werden diese Effekte im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht weiter diskutiert.

Im Fall von volumetrischem Locking bei zweidimensionalen Kontinua stellt die Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingung  $\text{Div } \mathbf{u} = 0$  nur für den ebenen Verzerrungszustand ein großes Problem dar. Hier reduziert sich die Zwangsbedingung auf  $\text{Div } \mathbf{u} = u_{x,x} + u_{y,y} = 0$ . Im Fall ebener Spannungszustände gilt hingegen  $\text{Div } \mathbf{u} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} = 0$ . Da sich im Letzteren  $u_{z,z}$  indirekt aus der Modifikation des Stoffgesetzes ergibt und nicht aus der Kinematik berechnet wird, ist die Zwangsbedingung gelockert und bereitet keine großen Probleme. Da bei Berechnungen mit 3P- bzw. 5P-Schalenformulierungen die Bedingung verschwindender transversaler Normalspannungen ebenso mittels modifizierter Formen des Stoffgesetzes aus Gleichung (2.17) eingebracht wird, ist volumetrisches Locking für die Anwendungen in dieser Arbeit nur von untergeordnetem Interesse und wird nicht tiefer gehend behandelt.

Bisher wurden die Ursachen und Wirkungsweisen von Locking-Effekten allgemein für Kontinua und strukturmechanische Modelle beschrieben, ohne dabei die Einflüsse eines speziellen Diskretisierungsverfahrens detailliert zu diskutieren. Da die in Kapitel 6 beschriebenen Schalenformulierungen vorwiegend mit NURBS im Rahmen des isogeometrischen Konzepts diskretisiert werden, sollen genannte Ansatzräume nachfolgend näher auf spezielle Eigenschaften im Kontext von Locking untersucht werden.

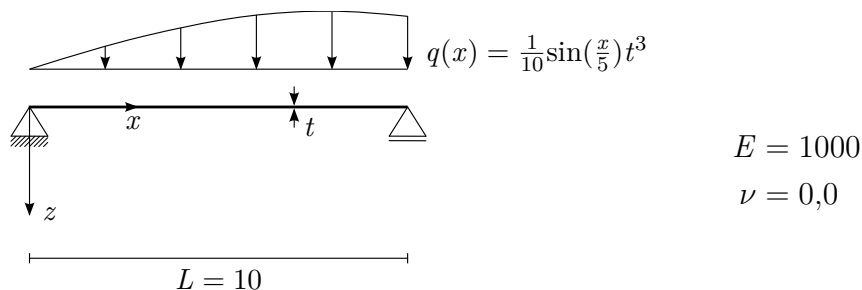


## 4.2 Locking im isogeometrischen Kontext

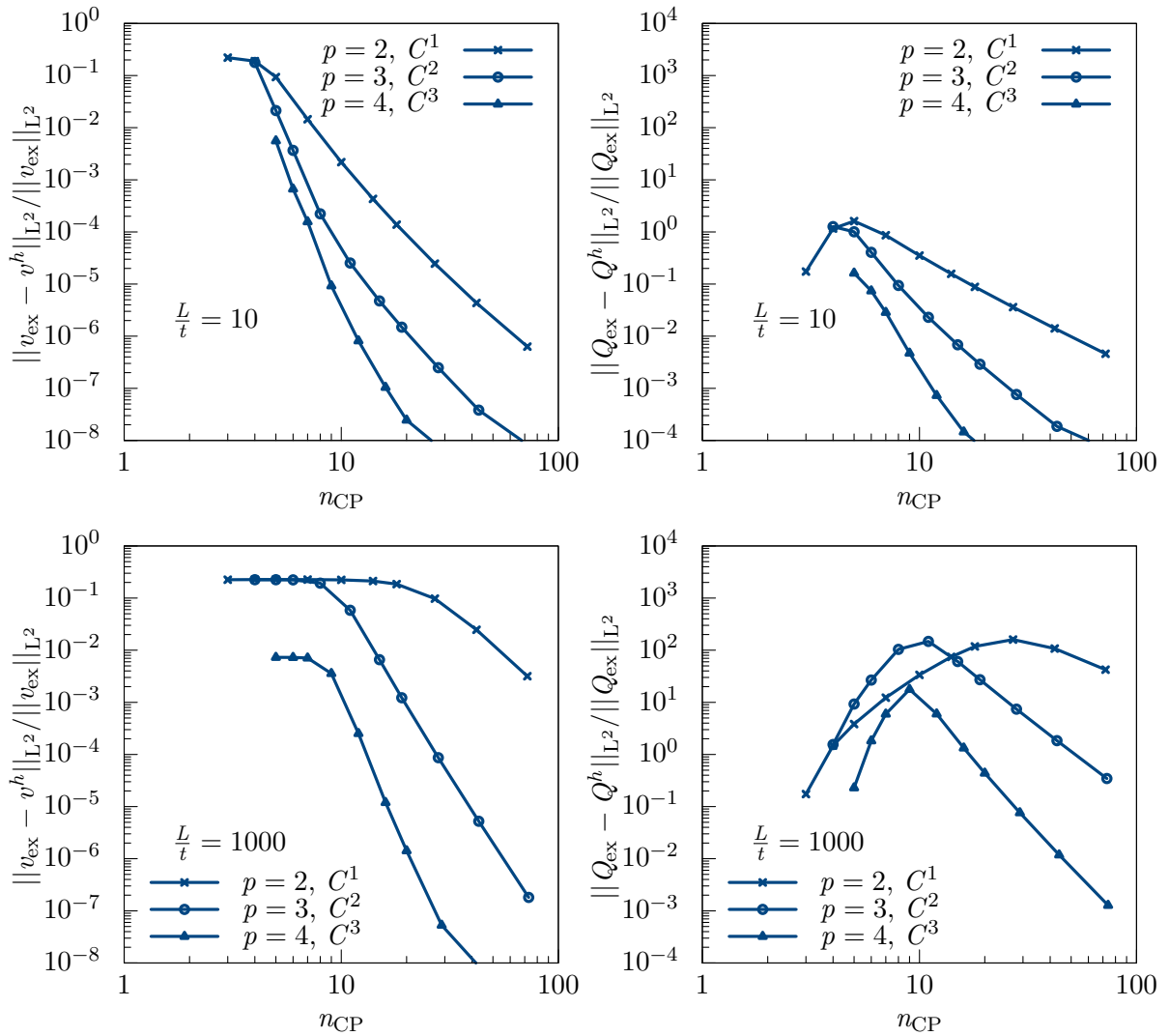
Es wird oft davon gesprochen, dass Locking durch die Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnungen beseitigt werden könne. Es ist wahr, dass sich mit steigender Ansatzordnung die Intensität von Locking prinzipiell reduziert, dennoch wird Locking nie vollständig beseitigt. Die zuvor beschriebene, fehlende Ausgewogenheit der Ansatzräume verschwindet auch mit höherer Ordnung nicht, obwohl mit steigender Ordnung grundsätzlich die Approximationsgüte zunimmt. Numerische Studien an einem einfachen Modellproblem sollen im Folgenden die maßgebenden Eigenheiten isogeometrischer Ansatzräume in Abhängigkeit der Ordnung und der Kontinuität darstellen.

### 4.2.1 Einfluss von Polynomordnung und Kontinuität

Als Einführungsbeispiel dient ein gelenkig gelagerter Balken unter Sinuslast  $q(x)$ , siehe Abbildung 4.5. Die Querlast  $q(x)$  wurde so gewählt, dass mit keiner Diskretisierung die analytische Lösung exakt repräsentiert werden kann. Die Struktur wird mit isogeometrischen Timoschenko-Balkenelementen diskretisiert, wobei stets eine gewöhnliche Elementformulierung mit Verschiebung  $v$  und totaler Rotation  $\varphi$  als Primärvariablen verwendet wird. Die Länge des Balkens ist vorgegeben zu  $L = 10$ , seine Dicke  $t$  ist variabel, was eine Untersuchung der Abhängigkeit vom kritischen Parameter, der Schlankheit  $\frac{L}{t}$ , zulässt. In den Abbildungen 4.6 und 4.7 sind jeweils links die relativen  $L^2$ -Norm Fehler in den Verschiebungen  $v(x)$ , jeweils rechts entsprechende Fehler in der Querkraft  $Q(x)$  aufgetragen. Rechenergebnisse für dicke Balken mit einer Schlankheit von  $\frac{L}{t} = 10$  sind jeweils oben dargestellt, Ergebnisse für sehr dünne Balken mit  $\frac{L}{t} = 1000$  jeweils unten. Um einen fairen Vergleich zwischen den verschiedenen Polynomordnungen und Kontinuitäten zu gewährleisten, sind alle Ergebnisse stets über der Anzahl an Kontrollpunkten  $n_{CP}$ , anstelle über der Elementanzahl, dargestellt.

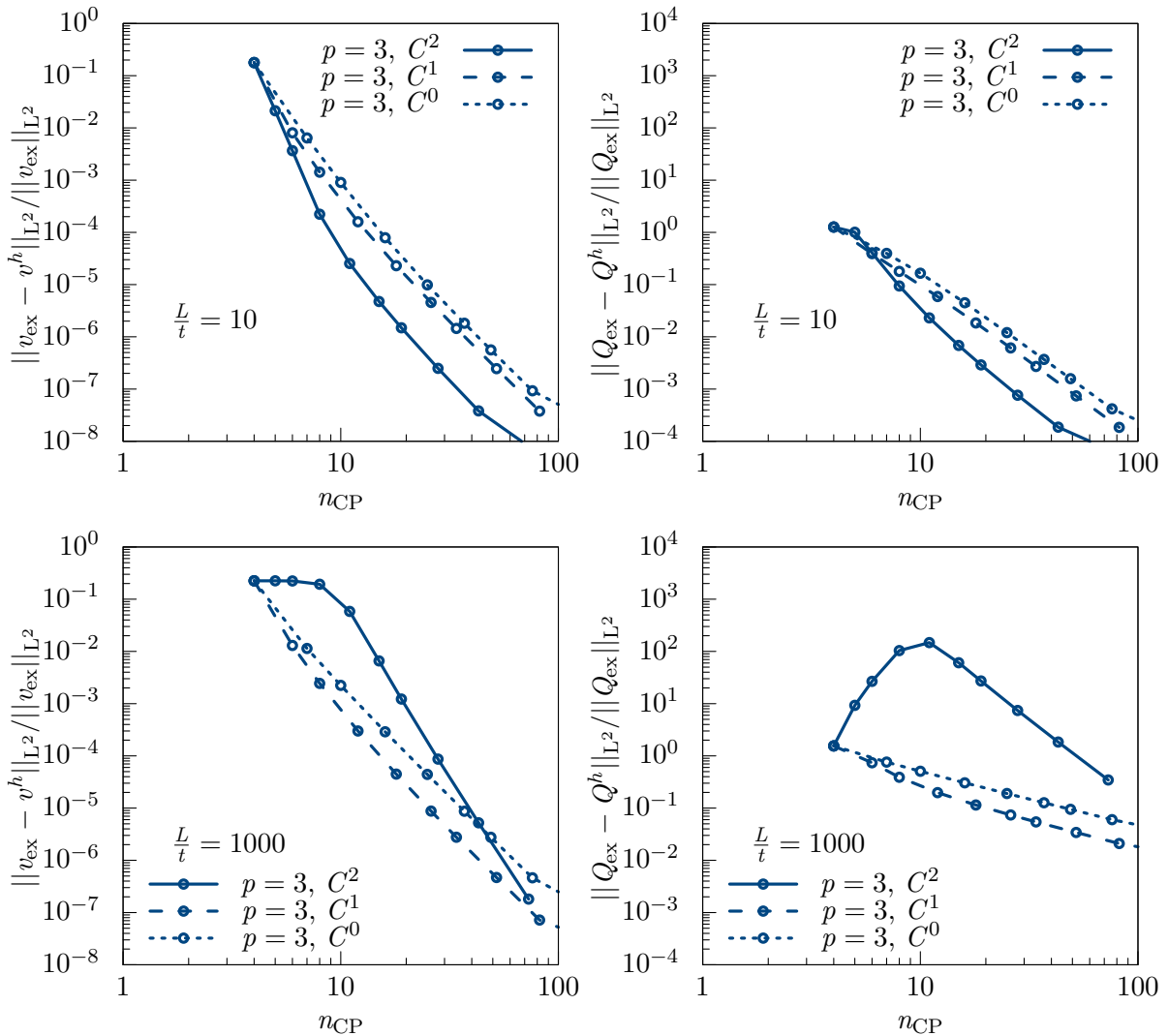


**Abbildung 4.5:** Balken unter Sinuslast, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten.



**Abbildung 4.6:** Balken unter Sinuslast, relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts),  $p = 2/3/4$ ,  $C^{p-1}$ , oben:  $\frac{L}{t} = 10$ , unten:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

In Abbildung 4.6 wird bei maximaler Kontinuität von  $C^{p-1}$  der Polynomgrad  $p$  variiert. Links oben ist klar ersichtlich, dass Querschublocking für  $\frac{L}{t} = 10$  nur eine geringe Rolle spielt. Mit zunehmendem Polynomgrad konvergieren die Ergebnisse schneller gegen die analytische Lösung. Links unten zeigt sich für  $\frac{L}{t} = 1000$  jedoch, dass Locking auch für höhere Ordnungen eine bedeutende Rolle spielt. Für alle Ordnungen ist eine Abhängigkeit von der Schlankheit  $\frac{L}{t}$  sowie die deutliche Ausprägung eines Plateaus im präasymptotischen Bereich erkennbar, was klare Symptome für Locking sind. Dass die Querkraft  $Q(x)$  oszillatorisches Verhalten aufweist, lässt sich vor allem im dünnen Fall (rechts unten) erkennen. Für alle Polynomgrade wachsen die Fehler in der Querkraft zunächst stark an, bevor sie für verhältnismäßig feine Netze wieder kleiner werden. Bereits



**Abbildung 4.7:** Balken unter Sinuslast, relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts),  $p = 3$ ,  $C^{2/1/0}$ , oben:  $\frac{L}{t} = 10$ , unten:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

für dieses simple Beispiel eines ebenen Timoschenko-Balkens zeigen sich für alle dargestellten Polynomgrade deutliche Ausprägungen von Querschublocking, was besonders in der inakzeptablen Qualität der Querkraft  $Q(x)$  für moderate Netze zu erkennen ist. Die Kurven für  $p = 4$  verdeutlichen die Notwendigkeit einer detaillierten Untersuchung der Spannungsqualität. Im dünnen Fall würde bei alleiniger Betrachtung der Verschiebungslösung (links unten) auftretendes Querschublocking für  $p = 4$  eher als minder wichtig eingestuft werden; entsprechende Fehlerbetrachtungen im Querkraftverlauf (rechts unten) zeigen hingegen die Signifikanz von Querschublocking auf.

In Abbildung 4.7 wird nun bei gleich bleibendem Polynomgrad  $p = 3$  die Kontinuität variiert ( $C^{2/1/0}$ ), um den entsprechenden Einfluss näher zu untersuchen. In ADAM U. A.

(2014) und ADAM U. A. (2015a) wurde beschrieben, dass sich die höhere Kontinuität im IGA-Kontext Effizienz steigernd auswirkt, sofern die Elemente gedungen sind und somit Locking keine Rolle spielt, siehe auch ECHTER UND BISCHOFF (2010). Wenn geometrische Locking-Effekte für entsprechend schlanke Strukturen an Bedeutung gewinnen, erzeugt eine höhere Kontinuität zusätzlichen Zwang und die Elemente verhalten sich zunehmend steifer. Wie in Abbildung 4.7 erkennbar ist, erweisen sich die kubischen Elemente mit maximaler  $C^2$ -Kontinuität im dicken Fall gegenüber den Varianten mit  $C^1$ - bzw.  $C^0$ -Kontinuität als überlegen. Im dünnen Fall zeigt sich für die maximale  $C^{p-1}$ -Kontinuität das am stärksten ausgeprägte Locking-Verhalten sowie eine inakzeptable Ergebnisqualität der Verschiebung, vor allem aber der Querkraft.

### 4.2.2 Beseitigung von Locking-Effekten – ein kurzer Überblick

Im Bereich klassischer finiter Elemente hat sich über Jahrzehnte hinweg ein großer Forschungszweig der computergestützten Mechanik entwickelt, der sich mit der Beseitigung von Locking und der damit einhergehenden Verbesserung des Elementverhaltens beschäftigt. Im Bereich der sogenannten FE-Technologie lässt sich eine große Anzahl an Veröffentlichungen finden. Ein entsprechend allgemeiner Literaturüberblick würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb vorwiegend Konzepte zur Abminderung von Locking im isogeometrischen Kontext vorgestellt werden.

Im Rahmen der FEM werden für die Diskretisierung der Verschiebungen meistens  $C^0$ -kontinuierliche Formfunktionen verwendet. Unabhängig von der Polynomordnung sind die daraus abgeleiteten Verzerrungen und Spannungen an den Elementrändern  $C^{-1}$ -kontinuierlich, was zur Folge hat, dass sich eventuell auftretende parasitäre Verzerrungen bzw. Spannungen auf das Elementgebiet beschränken und sich nicht darüber hinaus ausbreiten. Für die FE-Technologie hat dies den Vorteil, dass Überlegungen zur Abminderung von Locking-Effekten oftmals an einem einzigen repräsentativen Element angestellt werden können. Wie in einigen Konzepten ausgenutzt wird, lassen sich für die gängigen Elemente optimale Punkte finden, an denen die parasitären Verläufe in Verzerrungen bzw. Spannungen verschwinden. Für lineare und quadratische finite Elemente sind dies typischerweise die superkonvergenten Punkte nach BARLOW (1976) oder Punkte auf den Elementkanten. Über gezielte Kollokation bzw. numerische Integration an diesen Punkten lassen sich parasitäre Anteile und der zugehörige Locking-Effekt weitestgehend beseitigen, wie beispielsweise bei der Assumed-Natural-Strain-Methode oder reduzierten Integration.

Neuartige, glatte Diskretisierungsverfahren im Rahmen der IGA und auch darüber hinaus stellen neue Anforderungen an die FE-Technologie, da die aus der FEM bekannten Methoden zur Beseitigung von Locking-Effekten nicht mehr ohne Weiteres anwendbar

sind. Bei glatteren Diskretisierungskonzepten entstehen zwangsläufig glattere Verzerrungsverläufe, die nun nicht mehr allein auf Elementebene betrachtet werden können, um spezielle Punkte mit gewünschten Eigenschaften zu identifizieren. Die Nulldurchgänge parasitärer Verzerrungsverläufe können bei glatten Diskretisierungsverfahren sogar von der Belastung abhängig sein, was die Suche nach ihren Positionen für allgemeine Fälle nahezu hoffnungslos macht. Die aus dieser Tatsache entstehenden Folgen werden nachfolgend für verschiedene Konzepte zur Abminderung von Locking bei glatten Diskretisierungsverfahren diskutiert.

### **Reduzierte Integration (RI)**

Die ersten Untersuchungen zu selektiv reduzierten Integrationsregeln für quadratische,  $C^1$ -kontinuierliche, gekrümmte isogeometrische Timoschenko-Balkenelemente wurden von BOUCLIER U. A. (2012) durchgeführt. Man spricht von selektiv reduzierter Integration (SRI), wenn nur bestimmte Teile der Steifigkeitsmatrix reduziert, andere Anteile hingegen voll integriert werden. Die von BOUCLIER U. A. (2012) entwickelten reduzierten Integrationsregeln wurden in den Arbeiten von ADAM U. A. (2014), ADAM U. A. (2015a) und ADAM U. A. (2015b) auf unterschiedliche Polynomordnungen und Kontinuitäten in NURBS-basierten Diskretisierungen von Balken-, Platten- und Schalenformulierungen erweitert. In all diesen Beiträgen wurde gezeigt, dass diverse Locking-Effekte deutlich abgemindert werden können, indem die optimale *Anzahl* an Gaußpunkten über die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Zwangsbedingungsfaktoren bzw. Constraint-Counts ermittelt wird. Abhängig von der Kontinuität ergeben sich unterschiedliche optimale Anzahlen an Gaußpunkten, was eng mit dem zusätzlichen Zwang bei steigender Kontinuität zusammenhängt, siehe auch Abschnitt 4.2.1. Doch die optimalen *Orte* für Quadraturpunkte, wie die der Barlow-Punkte in gewöhnlichen finiten Elementen, wurden für glatte Ansatzräume bisher nicht gefunden.

Die Suche nach optimalen reduzierten Integrationsregeln ist nicht trivial, da jeder zusätzliche Integrationspunkt den Zwang erhöht und somit Locking verstärkt. Sobald aber zu wenig Quadraturpunkte verwendet werden, treten unphysikalische Nulleigenformen auf, die auch Spurious-Modes oder Zero-Eenergy-Modes genannt werden. Zudem führen weniger Gaußpunkte grundsätzlich zu verminderter Genauigkeit, da die zugehörige Integrationsordnung abnimmt.

Alle bisherigen Entwicklungen beschränken sich auf strukturierte NURBS-basierte Diskretisierungen, da die Herleitung allgemeingültiger Regeln nur schwer möglich erscheint. Für jede neue Art von Polynomgrad, Glattheit und Elementform müssen neue Überlegungen angestellt werden, um für jeden speziellen Fall eine optimale reduzierte Integrationsregel zu finden. Zudem ist anzumerken, dass entsprechende Regeln nur auf Pat-

chebene funktionieren, was eine einheitliche Anzahl an Integrationspunkten je Element verbietet. Die Qualität der Spannungen wird in den zuvor genannten Artikeln nicht beschrieben. Doch eigene Studien zeigen, dass die Spannungen an den reduzierten Integrationspunkten von guter Qualität sind, dazwischen aber immer noch Oszillationen auftreten. Entsprechendes Post-Processing auf Patchebene führt wiederum auf glatte Spannungsverläufe, wobei patchweise Prozeduren eher ineffizient sind.

### **Assumed-Natural-Strain(ANS)-Methode**

CASEIRO U. A. (2014) und CASEIRO U. A. (2015) präsentieren eine Erweiterung der bekannten ANS-Methode von HUGHES UND TEZDUYAR (1981) auf NURBS-basierte isogeometrische Kontinuums-Schalenelemente. Eine verwandte Methode lässt sich auch in CARDOSO UND CESAR DE SA (2014) finden. Die Grundidee der ANS-Methode besteht darin, spezielle Kollokationspunkte anstatt der üblichen Integrationspunkte zur Auswertung angenommener Verzerrungsfelder, den Assumed-Natural-Strains, auszuwählen. Zwischen den Kollokations- und den Integrationspunkten muss eine Art Projektion vorgenommen werden, die die gewöhnlichen und die angenommenen Verzerrungen in Verbindung setzt. Auch bei dieser Methode bestimmt die Wahl der Kollokationspunkte maßgeblich die numerische Stabilität und die Verminderung von Locking-Effekten. Für den Fall quadratischer,  $C^1$ -kontinuierlicher NURBS-Patches wurde von CASEIRO U. A. (2014) eine effiziente Prozedur auf Elementebene beschrieben. Da aber die Verzerrungen von kontinuierlicher Natur sind und optimale Kollokationspunkte schwer zu finden sind, führt diese Methode nur zu einer Abminderung geometrischer Locking-Effekte. Die Qualität der Verschiebungslösung der vorgestellten Elemente ist somit nicht unabhängig von der Schlankheit, konvergiert allerdings schneller als bei primalen isogeometrischen Kontinuums-Schalenelementen. Die Qualität der Spannungen wird in den genannten Arbeiten leider nicht diskutiert.

### **Discrete-Strain-Gap(DSG)-Methode**

Das ursprüngliche Konzept der Discrete-Shear-Gap-Methode zur Vermeidung von Querschublocking in finiten Balken-, Platten, und Schalenelementen wurde von BLETZINGER U. A. (2000) präsentiert. Wie in weiterführenden Arbeiten, siehe z. B. KOSCHNICK (2004) und KOSCHNICK U. A. (2005), festgestellt wurde, stellt die DSG-Methode ein allgemeines Konzept zur Beseitigung aller geometrischen Locking-Effekte bereit, was zur allgemeineren Bezeichnung Discrete-Strain-Gap-Methode führte.

Im isogeometrischen Kontext wurden zunächst B-Spline-basierte, lockingfreie schubweiche Balkenelemente mit DSG-Modifikation der Querschubverzerrungen vorgestellt, siehe

ECHTER UND BISCHOFF (2010). In ECHTER U. A. (2013) und ECHTER (2013) wurde die universale Anwendbarkeit auf die Beseitigung geometrischer Locking-Effekte in isogeometrischen, NURBS-basierten Schalenelementen aufgezeigt. Die vier grundlegenden Schritte der DSG-Methode lassen sich zusammenfassen zu: Integration, Kollokation, Interpolation und Differenziation. Da die in dieser Arbeit entwickelten Konzepte enge Verbindungen bzw. Parallelen zur DSG-Methode aufweisen, soll die DSG-Prozedur am einfachen Beispiel eines Timoschenko-Balkens detaillierter aufgearbeitet werden.

Geht man von einem diskretisierten System aus, lassen sich die Schubverzerrungen aus Gleichung (4.1) schreiben als

$$\gamma(x) \approx \gamma^h(x) = \sum_{I=1}^{n_{\text{CP}}} \left( N_{,x}^I v^I + N^I \varphi^I \right), \quad (4.7)$$

wobei  $n_{\text{CP}}$  die Anzahl an Kontrollpunkten beschreibt. Die einzelnen Teilschritte der DSG-Methode sind wie folgt:

1. Integration: Die Querschubverzerrungen der gewöhnlichen primalen Formulierung werden integriert, was auf eine sogenannte Strain-Gap-Funktion (hier: Shear-Gap-Funktion) führt, die als Schubdifferenzverschiebung interpretiert werden kann:

$$v_s^h(x) = \int_0^x \gamma^h(x) \, dx. \quad (4.8)$$

2. Kollokation: Die Funktion  $v_s^h(x)$  beinhaltet immer noch parasitäre Anteile, die aber durch Kollokation an speziellen Punkten eliminiert werden können. Für die DSG-Methode im Kontext  $C^0$ -kontinuierlicher finiter Elemente wurden die gewöhnlichen Elementknoten als die optimalen Kollokationspunkte identifiziert. Bei NURBS-Diskretisierungen wurde von ECHTER UND BISCHOFF (2010) festgestellt, dass die parasitären Anteile in  $v_s^h(x)$  stets an den Greville-Punkten  $x_k$  (siehe MARDEN UND SCHOENBERG (1966) und SCHOENBERG (1967)) verschwinden. Diese Eigenschaft ist besonders zu betonen, da sich die Nulldurchgänge der parasitären Verzerrungsanteile selbst nicht an bekannten Punkten befinden, was eine direkte Kollokation der Querschubverzerrungen  $\gamma^h(x)$  derart schwierig macht. Kollokation von  $v_s^h(x)$  an der  $k$ -ten Greville-Abszisse liefert eine diskrete Schubverschiebung

$$v_s^k = v_s^h(x) \Big|_{x=x_k}. \quad (4.9)$$

3. Interpolation: Durch Equal-Order-Interpolation werden die diskreten Schubverschiebungen mit denselben Formfunktionen, hier B-Splines, interpoliert. Da der Ansatzraum nicht punktweise interpolierend ist, müssen die diskreten Werte der

Schubverschiebungen an den Greville-Punkten auf entsprechende Werte am Kontrollpunkt umgerechnet werden. Dies kann beispielsweise durch eine globale Projektion auf Patchebene geschehen, was zu einem linearen Gleichungssystem mit  $n_{\text{CP}}$  Gleichungen führt. Für die  $k$ -te Gleichung gilt:

$$\sum_{I=1}^{n_{\text{CP}}} N^I(x_k) \tilde{v}_s^I = v_s^k. \quad (4.10)$$

Werden die  $n_{\text{CP}}$  Gleichungen in Matrizen gesammelt, dann lässt sich das lineare Gleichungssystem darstellen als

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{v}_s, \quad (4.11)$$

wobei für die Einträge der Kollokationsmatrix  $A_{ki} = N^i(x_k)$  gilt. Bei glatten, nicht interpolierenden Formfunktionen führt die Lösung dieses Gleichungssystems durch die dicht besetzte Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  zu einer globalen Kopplung der diskreten Schubverschiebungen am Kontrollpunkt. Nahezu voll besetzte Steifigkeitsmatrizen sind die Folge. Im Falle interpolierender Formfunktionen, wie in der gewöhnlichen FEM, gilt  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , was zu  $\tilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{v}_s$  führt. Nach der Lösung von Gleichung (4.11) wird die modifizierte Schubverschiebung  $\tilde{v}_s^h(x)$  konstruiert über

$$\tilde{v}_s^h(x) = \sum_{I=1}^{n_{\text{CP}}} N^I(x) \tilde{v}_s^I. \quad (4.12)$$

4. Differenziation: Die durch die DSG-Prozedur modifizierten Schubverzerrungen eines Timoschenko-Balkens werden im letzten Schritt durch Differenziation der modifizierten Schubverschiebungsfunktion gebildet

$$\tilde{\gamma}^h(x) = \frac{d\tilde{v}_s^h(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n_{\text{CP}}} N_{,x}^i(x) \tilde{v}_s^i. \quad (4.13)$$

Die dargestellte Prozedur lässt sich auf jede von Locking behaftete Verzerrungskomponente jeder Balken-, Schalen- oder Kontinuumstheorie anwenden. Als herausragende Eigenschaft der DSG-Methode ist zu erwähnen, dass sie unabhängig von der Glattheit und der Polynomordnung der Ansatzräume anwendbar ist. Zudem müssen im Rahmen des DSG-Konzepts keine geeigneten Ansatzräume niedriger Ordnung gefunden werden, da auch bei Equal-Order-Interpolation die optimalen Punkte zur Beseitigung der parasitären Verzerrungsanteile identifiziert werden können. Hingegen ist es als nachteilig zu betrachten, dass die DSG-Methode in der dargestellten Form für isogeometrische Schalen und Kontinua mit erheblichem numerischen Mehraufwand verbunden ist. Die Ursachen liegen in der numerisch aufwendigen, patchweisen Integration der diskreten



Strain-Gaps und ihrer globalen Projektion auf entsprechende Kontrollpunktwerte, die in dicht besetzten globalen Steifigkeitsmatrizen resultiert. Aktuelle Forschungsarbeiten beschäftigen sich mit der Effizienzsteigerung der DSG-Methode im Kontext glatter Ansatzräume.

### **Enhanced-Assumed-Strain(EAS)-Methode**

Konzepte wie beispielsweise DSG, ANS oder RI versuchen, parasitäre Verzerrungsanteile über eine Reduktion der Ansatzräume herauszufiltern. Die EAS-Methode (SIMO UND RIFAI (1990)) versucht hingegen die Ansatzräume für Verzerrungen so anzureichern, dass parasitäre Anteile ausbalanciert werden. Übliche EAS-Konzepte basieren auf der in Abschnitt 2.6.3 vorgestellten modifizierten Form des Prinzips von Hu-Washizu, bei der die Spannungen selbst nicht diskretisiert werden müssen, sondern nur die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und die erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$ . CARDOSO UND CESAR DE SA (2012) haben die EAS-Methode zur Behandlung von Locking bei NURBS-basierten isogeometrischen Scheibenelementen angewendet. Bei den untersuchten Elastizitätsproblemen hat sich gezeigt, dass optimale erweiterte Verzerrungsansätze nicht gefunden werden konnten und Locking-Effekte somit nur verringert wurden. Zudem haben sich unphysikalische Moden (Spurious-Modes) gezeigt, die über ein Stabilisierungsverfahren unterbunden werden mussten.

### **$\bar{\mathbf{B}}$ - und gemischte Methoden**

Der erste Beitrag zu  $\bar{\mathbf{B}}$ -Methoden im Kontext glatter, isogeometrischer Diskretisierungen stammt von ELGUEDJ U. A. (2008), worin das ursprüngliche  $\bar{\mathbf{B}}$ -Konzept von HUGHES (1980) erweitert wird. Der Fokus dieser Beiträge liegt in der Verminderung von volumetrischem Locking bei nahezu inkompressiblem Verhalten von Kontinua, siehe auch in ANTOLIN U. A. (2017). Gemischte Dreifeldformulierungen zur Verminderung volumetrischen Lockings wurden von TAYLOR (2011) und MATHISEN U. A. (2011) präsentiert. BOUCLIER U. A. (2012) erweiterten das  $\bar{\mathbf{B}}$ -Konzept auf die Behandlung von Querschub- und Membranlocking in gekrümmten, isogeometrischen Timoschenko-Balkenelementen. Spätere Beiträge beschäftigen sich mit der Verminderung von geometrischen Locking-Effekten in isogeometrischen Kontinuums-Schalenelementen, siehe z. B. BOUCLIER U. A. (2013) und BOUCLIER U. A. (2015b).

ECHTER U. A. (2013) und OESTERLE U. A. (2016) nutzten eine gemischte Verschiebungs-Spannungs-Methode ( $u$ - $\sigma$ ), basierend auf dem Prinzip von Hellinger-Reissner, siehe Abschnitt 2.6.2, zur Behandlung von Membranlocking in isogeometrischen Schalenelementen.

Es sind enge Parallelen zwischen  $u$ - $\sigma$ - und  $\bar{B}$ -Methoden erkennbar. Während in  $u$ - $\sigma$ -Konzepten die richtige Wahl des Spannungsansatzes bedeutend ist, entscheidet bei  $\bar{B}$ -Methoden der Ansatzraum der zusätzlichen Verzerrungsfelder über die Qualität der Elementformulierung. In beiden Konzepten ist es nicht trivial, die optimalen Ansatzräume zu finden. Ist der Ansatzraum für die Spannungen bzw. Verzerrungen zu arm, tauchen unphysikalische Nulleigenformen auf. Ein zu reicher Ansatzraum bewirkt hingegen zusätzlichen Zwang und führt zu oszillierenden Spannungen, obwohl typischerweise trotzdem von lockingfreien Elementen gesprochen wird.

Ein weiterer Nachteil ist, dass für jede Spannungs- bzw. Verzerrungskomponente ein anderer reduzierter Ansatzraum konstruiert werden muss, was in einer Mehrzahl unterschiedlicher Netze resultiert. Dies ist weder effizient, noch allgemeingültig und widerspricht zudem der Grundidee der IGA, die eine direkte Verwendung der aus dem CAD bereitgestellten Parametrisierung vorschlägt.

Die ersten gemischten oder  $\bar{B}$ -Methoden im IGA-Kontext führten bei Kondensation der zusätzlichen Spannungs- oder Verzerrungsparameter, genau wie das DSG-Konzept, zu nahezu voll besetzten Steifigkeitsmatrizen. Lokale Projektionen resultieren in Matrizen mit im Vergleich zu primalen Methoden verbreiteter Bandstruktur. Für strukturierte NURBS-Diskretisierungen stellen lokale Projektionsmethoden interessante Ansätze dar, siehe beispielsweise BOUCLIER U. A. (2013), HU U. A. (2016), ANTOLIN U. A. (2017), GRECO U. A. (2017) oder MIAO U. A. (2017).

### Hierarchische Formulierungen

Die markante Eigenschaft höherer Kontinuitäten an Elementübergängen lässt sich für die Entwicklung schubweicher Balken-, Platten- und Schalenformulierungen nutzen, die auf Theorieebene frei von Querschublocking sind. Kernidee ist die Vermeidung von Unausgewogenheiten in den kinematischen Gleichungen durch eine geeignete Reparametrisierung, d. h. durch die Verwendung von alternativen kinematischen Variablen. ECHTER U. A. (2013) präsentierten eine hierarchische Familie isogeometrischer Schalenelemente, während LONG U. A. (2012) schubweiche Schalenelemente basierend auf einer Loop-Subdivision vorstellten. BEIRÃO DA VEIGA U. A. (2015) präsentierten einen mathematisch orientierten Beitrag mit Anwendung auf Mindlin-Platten, unter Verwendung von NURBS und NURPS. Die genannten Beiträge parametrisieren die Verschiebungen und die Schubrotationen, während in KIENDL U. A. (2015a) für Balken und in OESTERLE U. A. (2016) für Platten und Schalen jeweils entsprechende, integrale Verschiebungsgrößen parametrisiert werden.

Der grundlegende Vorteil von hierarchischen Formulierungen gegenüber gewöhnlichen Parametrisierungen liegt darin begründet, dass Locking bereits auf Theorieebene ver-

mieden wird. Das heißt, unabhängig vom verwendeten Diskretisierungsschema kann im Rahmen einer Equal-Order-Interpolation Querschublocking vermieden werden. Diese Eigenschaft verspricht ein breites Anwendungsspektrum des hierarchischen Konzepts. Weitere Details und Entwicklungen werden in den Kapiteln 5 und 6 diskutiert.

### Weitere Ansätze

AURICCHIO U. A. (2007) und AURICCHIO U. A. (2010b) beschäftigten sich im Rahmen dieser Beiträge mit der Vermeidung von volumetrischem Locking bei ebenen Elastizitätsproblemen. Durch Reformulierung des Problems und Lösen nach einer skalaren Stream-Funktion, aus der im Nachlauf divergenzfreie Verschiebungsfelder berechnet werden können, wird volumetrisches Locking durch das Ausnutzen der höheren Kontinuität vermieden. BEIRÃO DA VEIGA U. A. (2012a) haben die Verwendung unterschiedlicher Ansatzräume für das Verschiebungsfeld und die beiden Rotationsfelder von Mindlin-Platten vorgeschlagen, um die Unausgewogenheiten der Ansatzräume in den Schubverzerrungen zu beseitigen. Dieses Konzept führt bei NURBS-Diskretisierungen zu locking-freien Mindlin-Plattenelementen, ist aber eher schwer auf andere Locking-Effekte und Diskretisierungsmethoden anwendbar.

### 4.2.3 Zusammenfassung

Wie in Abschnitt 4.2.1 gezeigt wurde, kann die Behandlung von Locking auch für isogeometrische finite Elemente höherer Ordnung nicht vernachlässigt werden. Im Gegensatz zur klassischen  $p$ -FEM hat die höhere Kontinuität im Rahmen der IGA einen bedeutenden Einfluss auf das präasymptotische Konvergenzverhalten. Für sehr geringe Schlankheiten spielen geometrische Locking-Effekte eine untergeordnete Rolle und die höhere Kontinuität isogeometrischer Ansätze bewirkt geringere Fehler und eine schnellere Konvergenz im präasymptotischen Bereich. Mit wachsender Schlankheit nimmt der Einfluss von geometrischen Locking-Effekten zu und die höhere Kontinuität kann sich deutlich negativ auf die Ergebnisqualität auswirken. Vor allem für maximale  $C^{p-1}$ -Kontinuität führt die erhöhte Anzahl an Zwangsbedingungen pro Element zu deutlich stärker ausgeprägten Locking-Effekten, die im präasymptotischen Bereich zu erheblich schlechterer Konvergenz führen.

Die höhere Kontinuität spielt aber auch bei der Beseitigung von Locking-Effekten eine Schlüsselrolle. Die aus der FE-Technologie bekannten Methoden zur Beseitigung von Locking-Effekten sind im Allgemeinen nicht direkt auf glatte Diskretisierungsverfahren übertragbar. Optimale Punkte, an denen parasitäre Verzerrungsanteile verschwinden, lassen sich für glatte Ansatzräume nicht mehr direkt auf Verzerrungsebene finden.

Dies führt bei entsprechenden Konzepten, wie z. B. RI oder ANS, dazu, dass Locking-Effekte lediglich abgemindert werden können. Bei gemischten Methoden werden im IGA-Kontext zusätzliche Spannungs- bzw. Verzerrungsansätze in entsprechend glatter Form benötigt, um Stabilität bzw. die Erfüllung der LBB- oder inf-sup-Bedingung, siehe LADYŽENSKAJA UND URAL'CEVA (1968), BABŮSKA UND AZIZ (1972) und BREZZI (1974), zu gewährleisten. Ist allerdings die Kontinuität der zusätzlichen Ansatzräume über die Elementgrenzen hinweg höher als  $C^{-1}$ , können die zusätzlichen Spannungs- bzw. Verzerrungsparameter nicht mehr auf Elementebene eliminiert werden. Vielmehr sind Betrachtungen auf Patch- bzw. Systemniveau erforderlich. Dies führt bei Elimination der zusätzlichen Parameter zu nahezu voll besetzten Matrizen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass alle Methoden zur Beseitigung von Locking, welche nur auf Elementebene agieren, Locking-Effekte nur verringern. Bestehende Methoden, wie die DSG-Methode, die alle geometrischen Locking-Effekte vollständig beseitigen können, sind rechenintensiv und führen zu dicht besetzten Steifigkeitsmatrizen. Ein weiterer großer Nachteil der aus der FEM bekannten Methoden zur Beseitigung von Locking ist, dass sie für jeden glatten Ansatzraum unterschiedlich funktionieren und angepasst werden müssen. Wohl auch aus diesem Grund beschränken sich die Beiträge zur Beseitigung von Locking auf strukturierte NURBS-Diskretisierungen, wohingegen keine Beiträge im Kontext unstrukturierter Netze wie z. B. T-Splines, LRB-Splines oder PHT-Splines zu finden sind.

Um der Problematik Abhilfe zu schaffen, beschäftigen sich die weiteren Teile dieser Arbeit mit der intrinsischen *Vermeidung* von Locking. Wird Locking bereits auf Theorieebene, d. h. vor der Diskretisierung, *vermieden*, ist die Anwendung auf jegliche Art glatter Ansatzräume denkbar, ohne dass im Anschluss über die *Beseitigung* von Locking nachzudenken ist.

---

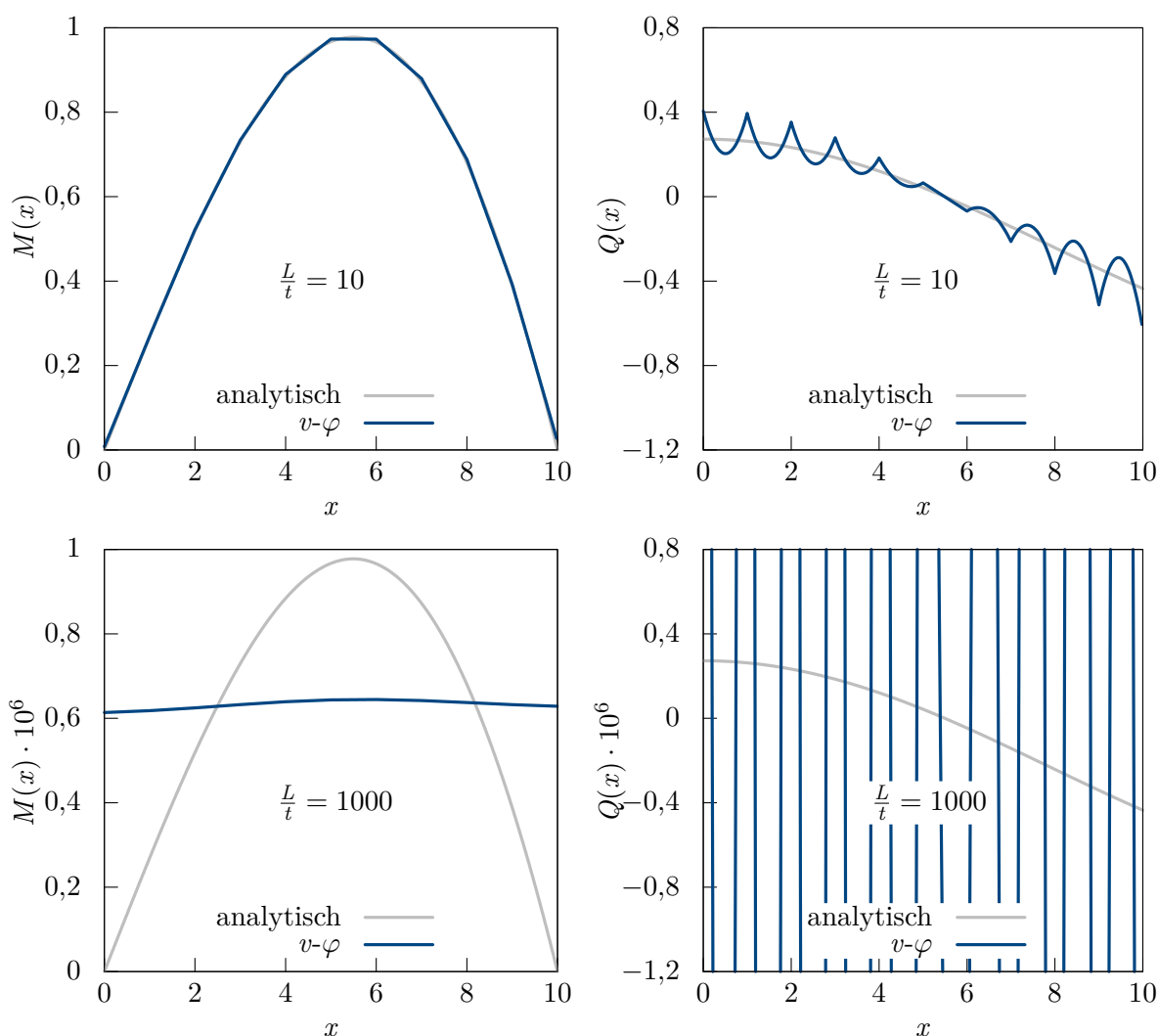
## Modellproblem – hierarchische Balkenformulierungen

Das hierarchische Konzept bietet eine vielversprechende Basis zur intrinsischen Vermeidung von Locking. Die Grundidee besteht darin, geometrische Locking-Effekte durch geeignete Reparametrisierung der Kinematik bereits auf Theorieebene zu vermeiden. Im Sinne eines leichten Einstiegs wird im Folgenden die Vermeidung von Querschublocking am ebenen, geraden Timoschenko-Balken untersucht. Die Kinematik des Balkens wurde bereits in Abbildung 4.1 eingeführt. Querschublocking soll intrinsisch vermieden werden, d. h. unabhängig vom verwendeten Diskretisierungsverfahren. Beispielfhaft werden die vorgestellten schubweichen Balkenformulierungen anhand von B-Spline-Diskretisierungen der schwachen Form getestet. Zur Illustration der auftretenden Effekte wird erneut das Balkenproblem mit sinusförmiger Belastung aus Abschnitt 4.2.1 untersucht, siehe Abbildung 4.5.

### 5.1 Standard-Formulierung mit totalen Rotationen – $v$ - $\varphi$ -Formulierung

Abbildung 4.1 stellt die Kinematik eines ebenen Timoschenko-Balkens dar, wobei  $v$  die Verschiebung der Mittelfaser in  $z$ -Richtung,  $\varphi$  die totale Rotation des Querschnitts und  $\gamma$  die Schubrotation beschreibt. Bei der Standard-Formulierung des Timoschenko-Balkenmodells werden die totale Vertikalverschiebung  $v$  sowie die totale Querschnittsrotation  $\varphi$  als primäre Variablen eingeführt. Mit ihnen werden die Schubrotation  $\gamma$  und die Balkenkrümmung  $\kappa$  als

$$\gamma = v_{,x} + \varphi \quad \text{und} \quad \kappa = \varphi_{,x} \quad (5.1)$$



**Abbildung 5.1:** Balken unter Sinuslast,  $v$ - $\varphi$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines,  $p = 2$ ,  $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments  $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft  $Q$ , oben:  $L/t = 10$ , unten:  $L/t = 1000$ .

beschrieben. Dabei definiert  $(\bullet)_{,x} = \frac{d(\bullet)}{dx}$  eine Ableitung nach der räumlichen Koordinate  $x$ . Werden die diskreten primären Variablen  $v^h$  und  $\varphi^h$  durch eine Equal-Order-Interpolation diskretisiert, kann reine Biegung, d. h.  $\gamma^h = 0$ , nicht erfüllt werden. Die Unausgewogenheit der Ansatzfunktionen von  $v^h_{,x}$  und  $\varphi^h$  führt zu deutlich ausgeprägtem Querschublocking, siehe Abbildung 5.1. In den dargestellten Diagrammen werden jeweils die Momentenverläufe  $M(x)$  bzw. Querkraftverläufe  $Q(x)$  im Falle eines dicken ( $L/t = 10$ ) bzw. sehr dünnen ( $L/t = 1000$ ) Balkens verglichen. Die analytische, exakte Lösung für die Querkraft des Balkenproblems aus Abbildung 4.5 ist  $Q_{\text{ex}}(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{x}{5})t^3 - \frac{1}{4} \sin(2)t^3$ , wobei für das Biegemoment  $M_{\text{ex}}(x) = \frac{5}{2} \sin(\frac{x}{5})t^3 - \frac{1}{4} \sin(2)t^3x$  gilt. Es wird eine Diskretisierung mit 10 quadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen B-Spline-Elementen verwendet.

Die primären Verschiebungsgrößen werden durch eine Equal-Order-Interpolation diskretisiert.

Die beiden linken Diagramme in Abbildung 5.1 zeigen, jeweils in grau, den analytischen Momentenverlauf  $M_{\text{ex}}(x)$ , der im dicken Fall sehr gut approximiert, jedoch im dünnen Fall deutlich unterschätzt wird. Die Verläufe für die Verschiebungen und die Rotationen weisen ein analoges Verhalten auf (an dieser Stelle nicht gezeigt). Die rechts dargestellten Diagramme verdeutlichen das oszillatorische Verhalten der Querkraft im dicken und dünnen Fall, wobei die Oszillationen im dünnen Fall sehr stark zunehmen. Im Sinne der Vergleichbarkeit wird für alle Querkraftdiagramme dieselbe Skalierung der Vertikalachse verwendet, um die Signifikanz der Oszillationen im dünnen Fall zu unterstreichen. Der numerisch berechnete Querkraftverlauf erscheint im dünnen Fall als ein Satz nahezu vertikaler Linien, wobei der zugehörige relative Fehler in der  $L^2$ -Norm 52,78 beträgt (vergleiche: im dicken Fall nur etwa 0,23). Die Lösung, vor allem für  $Q^h(x)$ , hängt extrem von dem Schlankheitsparameter  $\frac{L}{t}$  ab und ist unter bestimmten Umständen komplett unbrauchbar.

## 5.2 Formulierung mit hierarchischen Rotationen – $v$ - $\gamma$ -Formulierung

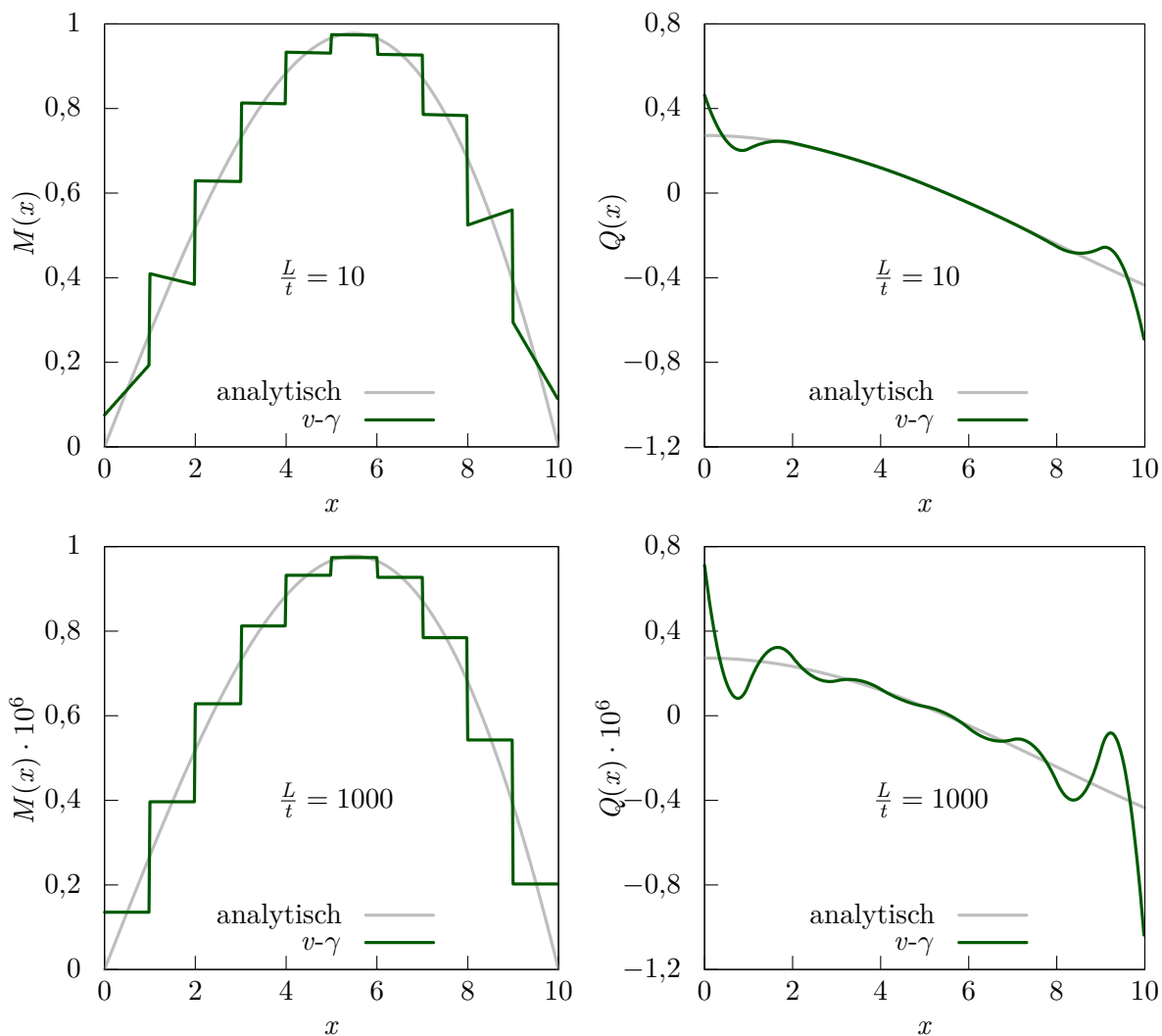
Querschublocking tritt bei der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung auf, da die Bedingung verschwindender Querschubverzerrung  $\gamma^h = 0$  bei einer Equal-Order-Interpolation allgemein nicht punktweise erfüllt werden kann. Folgt man der Idee aus BAŞAR UND KRÄTZIG (1985), LONG U. A. (2012) und ECHTER U. A. (2013), so kann anstatt der totalen Querschnittsrotation  $\varphi$ , die Schubrotation  $\gamma$  direkt als Primärvariable eingeführt werden. Die totale Rotation  $\varphi$  muss dann in Abhängigkeit der beiden Primärvariablen ausgedrückt werden, d. h.

$$\varphi = -v_{,x} + \gamma. \quad (5.2)$$

Die Kombination der Gleichungen (5.1) und (5.2) führt zu der modifizierten Kinematik

$$\gamma = \gamma \quad \text{und} \quad \kappa = \varphi_{,x} = -v_{,xx} + \gamma_{,x}. \quad (5.3)$$

Die Unausgewogenheit in den Ableitungen wurde von der Schubverzerrung  $\gamma$  auf die Krümmung  $\kappa$  verschoben. Aus Gleichung (5.3) lassen sich einige bemerkenswerte Konsequenzen für die numerische Lösung des Balkenproblems mit finiten Elementen erkennen:



**Abbildung 5.2:** Balken unter Sinuslast,  $v$ - $\gamma$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines,  $p = 2$ ,  $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments  $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft  $Q$ , oben:  $\frac{L}{t} = 10$ , unten:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

- Es treten nun zweite Ableitungen in  $\kappa$  auf, d. h. der variationelle Index ist  $c = 2$ . Konsistenz nach Abschnitt 3.2 ist nur dann gewährleistet, wenn mindestens quadratische,  $C^1$ -kontinuierliche Ansatzfunktionen verwendet werden.
- Die Zwangsbedingung im dünnen Limit, nämlich  $\gamma = 0$ , ist für jede Art von Formfunktionen einfach zu erfüllen, da hierfür direkt eine Primärvariable zur Verfügung steht. Querschublocking wird somit a priori vermieden.
- Stattdessen wird die  $v$ - $\gamma$ -Formulierung im dicken Grenzfall für reine Schubverformungen, d. h.  $\kappa \rightarrow 0$ , von einer Art Locking betroffen sein, da nun in  $\kappa$  Unausgewogenheiten in den Ableitungen vorkommen. Dieser Grenzfall ist allerdings von



geringem Interesse, da er außerhalb der Gültigkeit der Timoschenko-Balkentheorie liegt. Für solch gedrungene Strukturen ist eine Auflösung mit Kontinuumselementen unumgänglich.

- In Gleichung (5.2) lässt sich der hierarchische Aufbau der Gesamtrotation  $\varphi$  erkennen. Auf den schubstarreren Anteil  $-v_{,x}$  wird eine hierarchische Schubrotation  $\gamma$  addiert. Für den Fall  $\gamma = 0$  reduziert sich die Kinematik nach Gleichung (5.3) auf  $\kappa = -v_{,xx}$ . Dies entspricht der Kinematik des Bernoulli-Balkenmodells.

Die Ergebnisse für Querkraft und Biegemoment sind für die numerische Lösung des Balkenproblems mit der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung in Abbildung 5.2 dargestellt. Bei einer Diskretisierung mit  $C^1$ -kontinuierlichen B-Splines weisen die Momentenverläufe Sprünge an den Elementgrenzen auf. Die Sprünge folgen aus der zweiten Ableitung der Verschiebungen im Krümmungsterm  $\kappa$ . Verglichen mit der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung, resultiert daraus im dicken Fall zunächst eine schlechtere Approximation des Biegemoments. Doch im dünnen Fall wendet sich das Blatt. Der Momentenverlauf der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung ist nun von deutlich besserer Qualität. Bis auf den verschwindenden linearen Anteil aus  $\gamma_{,x}^h$ , ist das Ergebnis für  $M^h(x)$  unabhängig von der Schlankheit.

Obwohl diese Formulierung aus theoretischer Sicht frei von Querschublocking ist, zeigen sich geringe Oszillationen in den Querkraften. Im dünnen Fall wachsen die Oszillationen leicht an, jedoch nicht über alle Grenzen hinweg, wie es bei der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung der Fall ist. Es ist wünschenswert, auch diese Oszillationen vollständig zu vermeiden. Für den einfachen Fall eines Balkens ist es möglich, die Oszillationen, wie auch bei der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung, durch das Umgehen einer Equal-Order-Interpolation zu beseitigen. Die Unausgewogenheit in  $\kappa^h$  wäre beseitigt, wenn für  $\gamma^h$  ein Ansatz niedriger Ordnung verwendet würde. In dieser Arbeit sollen jedoch Locking und jegliche Art von Spannungsozillationen intrinsisch vermieden werden, und nicht durch eine spezielle Modifikation der Diskretisierung.

Die Verschiebungen  $v^h$  sowie die Rotationen  $\varphi^h$  verhalten sich entsprechend einer locking-freien Formulierung, da ihre Ergebnisse unabhängig von der Schlankheit sind. Auf die Darstellung der Verschiebungsgrößen wird an dieser Stelle allerdings verzichtet. Entsprechende Auswertungen der Verschiebungslösungen sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 zu sehen und werden später diskutiert.

## 5.3 Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen – $v$ - $v_s$ -Formulierung

Mit dem Ziel der vollständigen Vermeidung von Oszillationen in den Querkraftverläufen, wird nun eine weitere hierarchische Formulierung präsentiert. Anstatt die Rotationen hierarchisch aufzuteilen, werden nun die Verschiebungen hierarchisch aufgebaut. Die Grundidee besteht in einer Trennung der Gesamtverschiebung  $v$  in einen Biege- und einen Schubanteil, d. h.

$$v = v_b + v_s. \quad (5.4)$$

Die Idee dieser Reparametrisierung ist nicht neu. Es lassen sich zum Teil sehr alte Veröffentlichungen zu diesem Thema finden. Viele Artikel behandeln diese Trennung bereits im Kontext analytischer Lösungen für statische und dynamische Probleme, siehe z. B. ANDERSON (1953) oder WANG (1995). FE-Formulierungen zur Lösung dynamischer Problemstellungen wurden beispielsweise in KAPUR (1966) und MARGUERRE UND WÖLFEL (1979) vorgestellt, ohne dabei auf Locking einzugehen. In KIENDL U. A. (2015a) wurde, basierend auf der Trennung der Verschiebungsanteile, eine schubweiche Balkenformulierung mit nur einer Unbekannten präsentiert. Die hier aufgeführten Darstellungen orientieren sich an OESTERLE U. A. (2016) und einer praktischen Modifikation des ursprünglichen Konzepts, die in OESTERLE U. A. (2017) zu finden ist.

Die Einführung eines hierarchischen Schubparameters auf Verschiebungsebene nach Gleichung (5.4) beeinflusst die Parametrisierung der Rotation

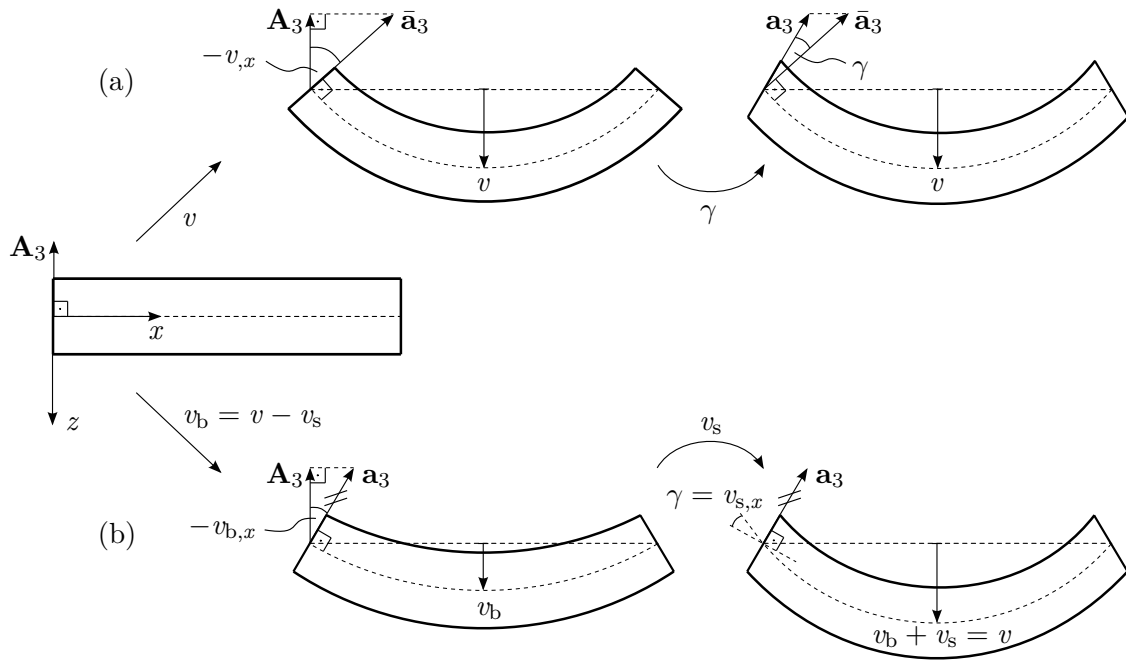
$$\varphi = -v_{,x} + \gamma = -(v_b + v_s)_{,x} + v_{s,x} = -v_{b,x}. \quad (5.5)$$

Mit der Gleichung (5.5) ergibt sich die entsprechend modifizierte Kinematik

$$\gamma = v_{s,x} \quad \text{und} \quad \kappa = -v_{b,xx}. \quad (5.6)$$

Diese Elementformulierung wird im Folgenden als  $v_b$ - $v_s$ -Formulierung bezeichnet, da die Biege- und Schubverschiebung die Primärvariablen darstellen. Im Falle dieses einfachen Balkenmodells sind aber auch alternative Parametrisierungen möglich. Prinzipiell kann aus den drei Verschiebungen  $v$ ,  $v_b$  und  $v_s$  eine beliebige Kombination von zwei Anteilen gewählt werden. Die Kinematik einer entsprechenden  $v$ - $v_b$ -Formulierung ergibt sich zu

$$\gamma = v_{,x} - v_{b,x} \quad \text{und} \quad \kappa = -v_{b,xx}. \quad (5.7)$$



**Abbildung 5.3:** Vergleich der linearisierten Kinematik hierarchischer Balkenformulierungen, (a)  $v$ - $\gamma$ -Formulierung, (b)  $v$ - $v_s$ -Formulierung.

Bei der Wahl von  $v$  und  $v_s$  als Primärvariablen ergibt sich für die kinematischen Gleichungen einer  $v$ - $v_s$ -Formulierung

$$\gamma = v_{s,x} \quad \text{und} \quad \kappa = -v_{,xx} + v_{s,xx}. \quad (5.8)$$

Im Falle eines Timoschenko-Balkens sind aus mathematischer Sicht alle drei Formulierungen äquivalent zueinander. Die numerischen Ergebnisse aller Varianten sind identisch. Allerdings ist die  $v$ - $v_s$ -Formulierung für eine praktische FE-Implementierung am besten geeignet, was unter anderem mit den Randbedingungen zusammenhängt, siehe Abschnitt 5.4. Zudem bildet diese Formulierung die Basis der Platten- und Schalenformulierungen in Abschnitt 6.4.

In Abbildung 5.3 werden die Balkenformulierungen mit hierarchischen Rotationen bzw. hierarchischen Verschiebungen durch geometrische Interpretation der Deformationsanteile verglichen. Als wichtiges Merkmal sind die jeweiligen Direktoren eingezeichnet, die die Orientierung der Querschnitte anzeigen. Im Falle der  $v$ - $\gamma$ -Parametrisierung (a) deformiert sich der Balken durch die Gesamtverschiebung  $v$ . Der Direktor  $\mathbf{A}_3$  der undefor mierten Konfiguration rotiert dabei gemäß einer linearisierten Kinematik um den Anteil  $-v_{,x}$ . Der resultierende Direktor  $\bar{\mathbf{a}}_3$  steht in diesem Zwischenzustand stets senkrecht auf der deformierten Mittelfaser. Im zweiten Deformationsschritt werden die Querschnitte bzw. die Direktoren  $\bar{\mathbf{a}}_3$  um eine Schubrotation  $\gamma$  in die finale Position rotiert. Die endgül-

tigen Direktoren  $\mathbf{a}_3$  stehen, gemäß einer Timoschenko-Kinematik, nicht mehr senkrecht auf der deformierten Mittelfaser.

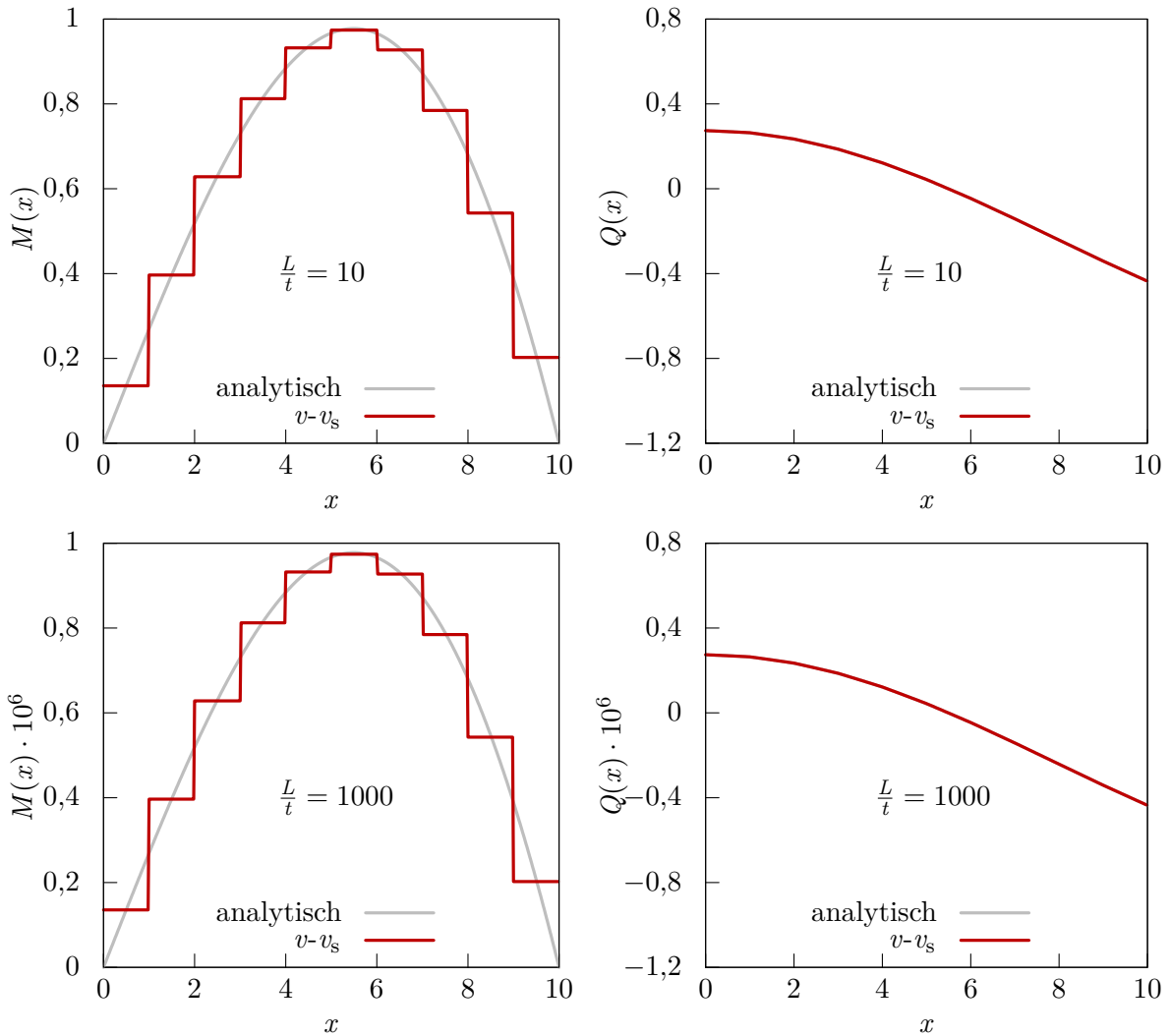
Bei den vorgestellten Formulierungen mit hierarchischen Verschiebungen unterscheidet sich die geometrische Interpretation der anteiligen Deformationen. Wie in Abbildung 5.3 (b) dargestellt ist, deformiert sich der Balken zunächst um den Verschiebungsanteil  $v_b$ , wobei die Rotation des Direktors  $\mathbf{A}_3$  durch  $-v_{b,x}$  beschrieben ist. Der daraus resultierende Direktor  $\mathbf{a}_3$  steht erneut senkrecht auf der deformierten Mittelfaser und entspricht bei dieser Formulierung allerdings schon dem endgültigen Direktor. Bei weiterer Verschiebung um den Anteil  $v_s$  ändern sich lediglich die Tangenten an die Mittelfaser, während die Orientierungen der Querschnitte unverändert bleiben. Der Schubwinkel  $\gamma$  lässt sich nun nicht mehr als hierarchische Rotation des Direktors identifizieren, sondern als Ableitung der hierarchischen Schubverschiebung, d. h.  $\gamma = v_{s,x}$ .

Die drei dargestellten Formulierungen mit hierarchischen Verschiebungen, nach den Gleichungen (5.6), (5.7) und (5.8), besitzen einige nennenswerte Eigenschaften:

- Verglichen mit der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung treten erneut zweite Ableitungen in  $\kappa$  auf und der variationelle Index ist  $c = 2$ . Allerdings treten in  $\gamma$  nun erste Ableitungen auf.
- Durch die hierarchische Konstruktion ist, wie bei der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung, das schubstarre Basismodell nach Euler und Bernoulli enthalten.
- Die Bedingung  $\gamma = 0$  ist für jede der drei Parametrisierungen einfach zu erfüllen, weshalb Querschublocking für jegliche Art von Formfunktionen vermieden wird.
- Sowohl die Parametrisierung von  $\gamma$  als auch von  $\kappa$  ist in den Gleichungen (5.6), (5.7) und (5.8) vollkommen ausgewogen. D. h. für jede Equal-Order-Interpolation der jeweiligen primären Variablen werden keinerlei Oszillationen auftreten.
- Die hier als Primärvariable eingeführte Schubverschiebung  $v_s$  entspricht in ihrer physikalischen Bedeutung der Schubverschiebung  $\tilde{v}_s$  der DSG-Methode aus Gleichung (4.12).

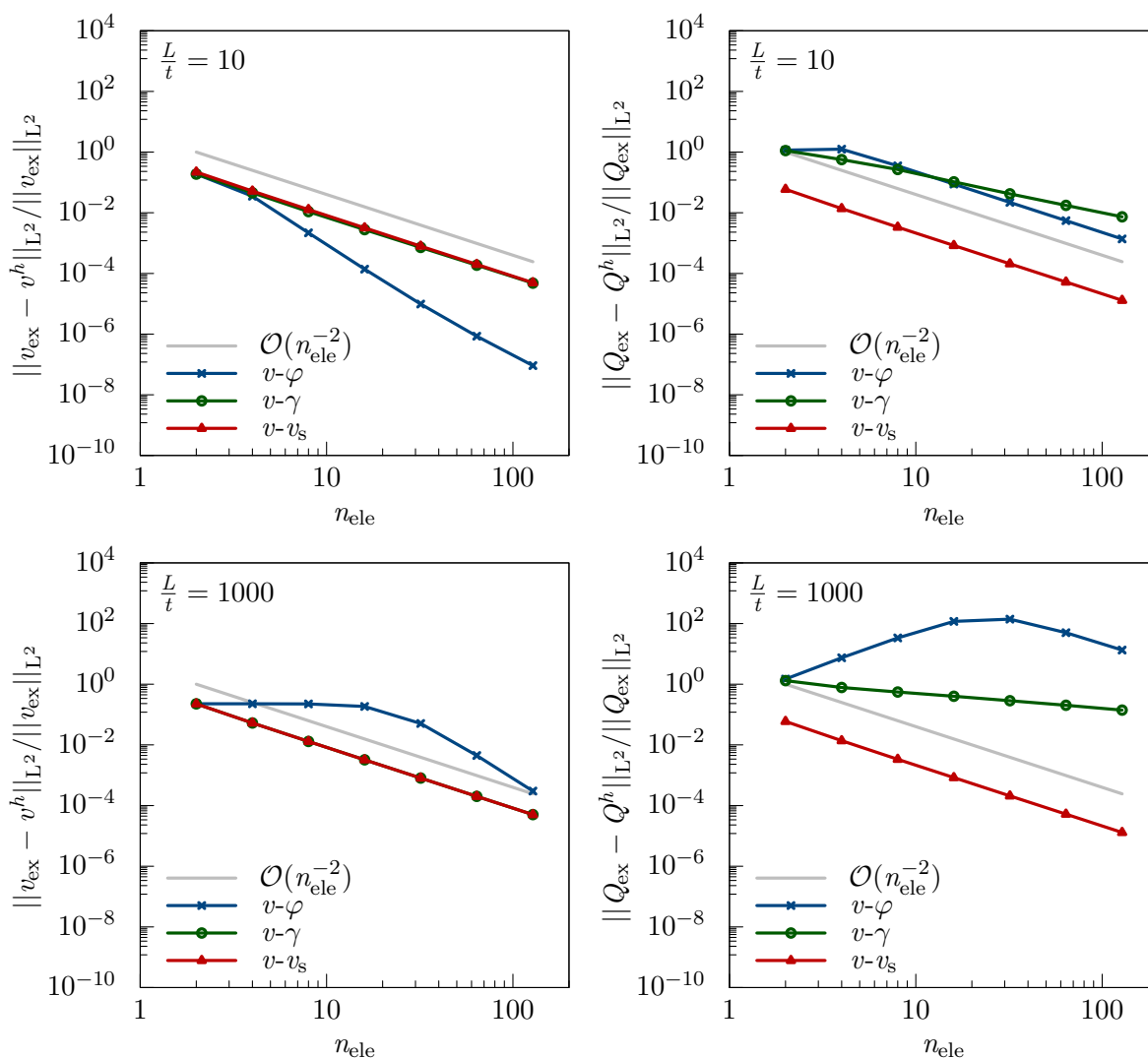
In Abbildung 5.4 sind die numerischen Ergebnisse des bekannten Balkenproblems exemplarisch für die  $v$ - $v_s$ -Formulierung dargestellt, wobei die Ergebnisse für die  $v_b$ - $v_s$ - oder  $v$ - $v_b$ -Formulierung identisch sind. Die Ergebnisse für das Biegemoment sind, im Vergleich zu den Ergebnissen der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung, von ähnlicher Qualität. Die Qualität der Querkraft ist nun jedoch herausragend sowie vollständig unabhängig von der Schlankheit.

Die besonderen Eigenschaften der  $v$ - $v_s$ -Formulierung werden auch in den Fehlerdiagrammen der Abbildungen 5.5 und 5.6 für quadratische und kubische Ansätze deutlich. Die



**Abbildung 5.4:** Balken unter Sinuslast,  $v$ - $v_s$ -Formulierung, 10 Elemente, B-Splines,  $p = 2$ ,  $C^1$ , links: Verlauf des Biegemoments  $M$ , rechts: Verlauf der Querkraft  $Q$ , oben:  $L/t = 10$ , unten:  $L/t = 1000$ .

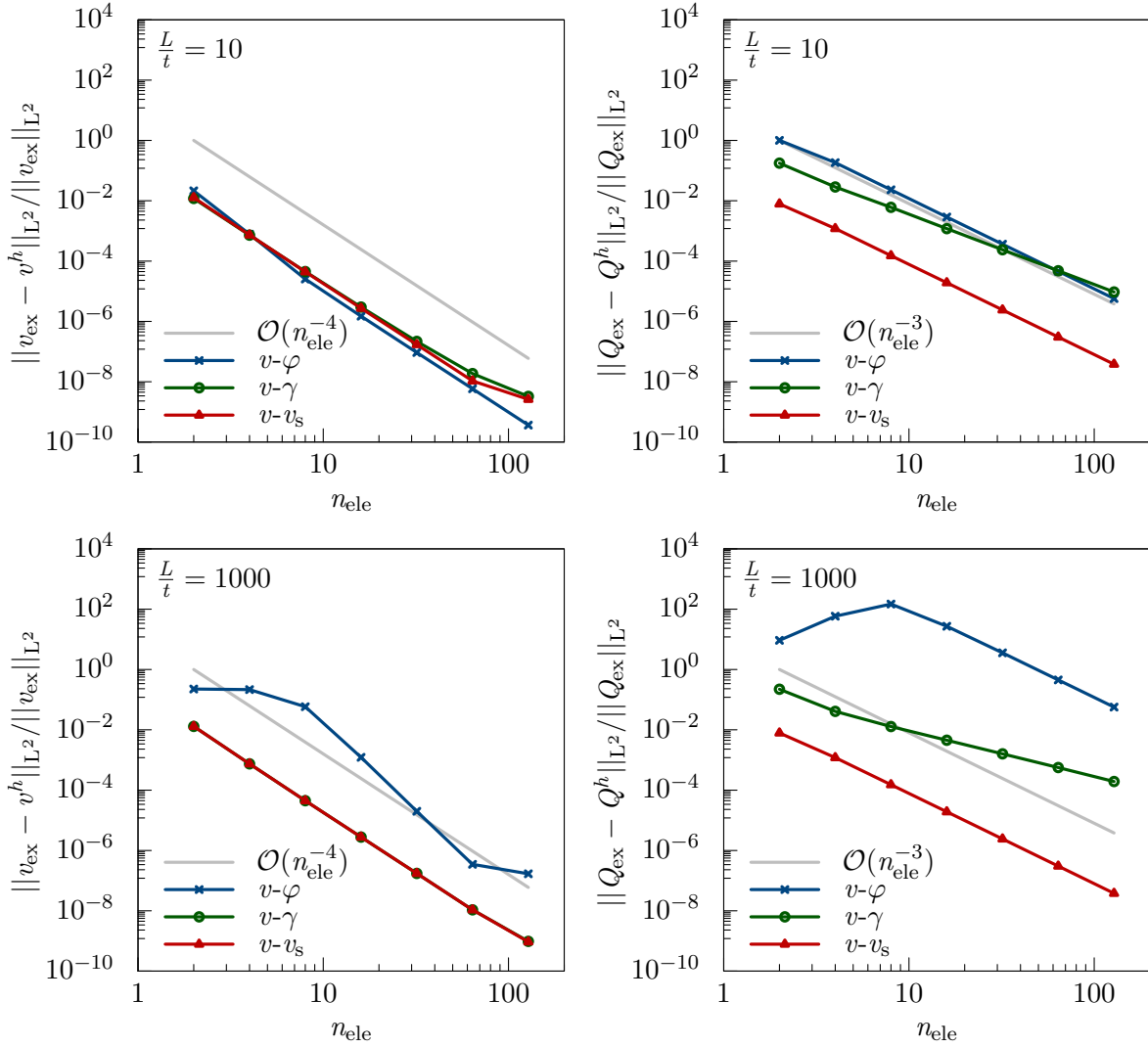
Querkräfte der  $v$ - $v_s$ -Formulierung liefern sowohl im dicken als auch dünnen Fall die besten Ergebnisse aller drei Varianten. Sie konvergieren jeweils mit der optimalen Ordnung  $p$  und sind komplett unabhängig von der Schlankheit. Die  $v$ - $v_s$ -Formulierung vermeidet Querschublocking vollständig. Die Querkraftfehler der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung zeigen im Vergleich zu den in grau dargestellten Referenzkurven reduzierte Konvergenzraten. Die  $v$ - $\varphi$ -Formulierung ist bei  $C^{p-1}$ -Kontinuität von ausgeprägtem Querschublocking betroffen, was sich vor allem in der schlechten Konvergenz der Querkräfte bemerkbar macht. Dabei ist interessant, dass der Querkraftfehler der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung für  $L/t = 1000$  im Fall beider Polynomgrade zunächst divergiert, später jedoch mit der korrekten Ordnung  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-3})$  konvergiert, wobei  $n_{\text{ele}} \sim \frac{1}{h}$  gilt. Für den dargestellten Bereich ist keine op-



**Abbildung 5.5:** Balken unter Sinuslast, Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen,  $p = 2$ ,  $C^1$ , relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts), oben:  $\frac{L}{t} = 10$ , unten:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

timale Konvergenzrate der Querkräfte der  $v-\gamma$ -Formulierung zu erkennen, siehe auch BEIRÃO DA VEIGA U. A. (2015) im Kontext schubweicher Platten. Die Ursache dieser Diskrepanz ist bis jetzt noch nicht geklärt.

Die entsprechenden Verschiebungsfehler der  $v-\gamma$ -Formulierung konvergieren mit der optimalen Ordnung und sind praktisch identisch zu den Fehlern der  $v-u_s$ -Formulierung. Die  $v-\varphi$ -Formulierung ist von Querschublocking betroffen, was durch eine Parameterabhängigkeit gekennzeichnet ist. Für  $\frac{L}{t} = 10$  und  $p = 2$  ist  $v-\varphi$  den hierarchischen Balkenformulierungen sogar überlegen, im dünnen Fall allerdings deutlich unterlegen. An dieser Stelle ist anzumerken, dass sich für den Fall quadratischer Ansätze die zu



**Abbildung 5.6:** Balken unter Sinuslast, Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen,  $p = 3$ ,  $C^2$ , relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts), oben:  $L/t = 10$ , unten:  $L/t = 1000$ .

erwartenden Konvergenzraten für  $v$ - $\varphi$  und  $v$ - $\gamma$  bzw.  $v$ - $v_s$  unterscheiden. Für  $v$ - $\varphi$  dominiert wegen des geringeren variationellen Index von  $c = 1$  stets der linke Term aus Gleichung (3.4). Die asymptotischen Konvergenzraten der Verschiebungslösung der  $v$ - $\varphi$ -Formulierung sind also stets von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{p+1})$  bzw.  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-p-1})$ . Im Fall der hierarchischen Formulierungen führt, ebenso wie beim schubstarrten Bernoulli-Balken, der variationelle Index von  $c = 2$  dazu, dass für den Fall  $p = 2$  der rechte Term aus Gleichung (3.4) maßgebend wird. Somit reduziert sich die Konvergenzrate für  $p = 2$  auf  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-2})$ . Für  $p = 3$  wird wieder der linke Ausdruck aus Gleichung (3.4) maßgebend und es ist eine Konvergenz der Ordnung  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-4})$  zu erwarten.

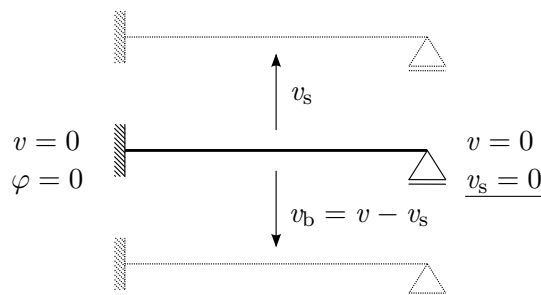
## 5.4 Rand- und Zwangsbedingungen

Die Reparametrisierung der kinematischen Größen führt bei den hierarchischen Balkenformulierungen zu erhöhten Anforderungen im Kontext von Dirichlet-Randbedingungen. Wie aus den Gleichungen (5.2) und (5.5) ersichtlich, ist die Gesamtrotation  $\varphi$  bei beiden hierarchischen Formulierungen nun nicht mehr direkt verfügbar. Der Winkel  $\varphi$  wird durch eine Kombination der beiden Primärvariablen  $v$  und  $\gamma$  bzw.  $v$  und  $v_s$  dargestellt. Somit sind für die Erfüllung rotatorischer Dirichlet-Randbedingungen, wie  $\varphi = 0$ , bekannte Konzepte wie beispielsweise Lagrange-Multiplikator-, Penalty- oder Master-Slave-Methoden (Multi-Point-Constraints) nötig. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass im Falle einer  $v_b$ - $v_s$ -Formulierung bereits die Bedingung  $v = 0$  über eines der genannten Konzepte erfolgen muss, da die Gesamtverschiebung nicht direkt als primärer Parameter zur Verfügung steht. Aus diesem Grund wird die  $v$ - $v_s$ -Formulierung als praktischste Parametrisierung hierarchischer Verschiebungen angesehen und spielt im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine maßgebende Rolle.

Im Falle aller hierarchischen Verschiebungsformulierungen ( $v$ - $v_s$ ,  $v_b$ - $v_s$ ,  $v$ - $v_b$ ) sind allerdings zusätzliche Betrachtungen nötig. Die zugehörige schwache Form des Balkenproblems lässt sich exemplarisch für die  $v$ - $v_s$ -Variante darstellen als

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{PvV} &= -\delta\Pi_{PvV}^{\text{int}} - \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext}} &&= 0 \\ &= \int_0^L (\delta\gamma GA\gamma + \delta\kappa EI\kappa) dx - \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext}} &&= 0 \\ &= \int_0^L (\delta v_{s,x} GA v_{s,x} + (-\delta v_{,xx} + \delta v_{s,xx}) EI (-v_{,xx} + v_{s,xx})) dx - \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext}} &&= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei  $GA$  und  $EI$  die Schub- und die Biegesteifigkeit eines Balkens darstellen.  $E$  beschreibt dabei den Elastizitätsmodul,  $G$  den Schubmodul,  $A = bt$  die Querschnittsfläche (mit Breite  $b$  und Dicke  $t$ ) und  $I = bt^3/12$  das Flächenträgheitsmoment im Falle eines



**Abbildung 5.7:** Zusätzlich benötigte Zwangsbedingung bei der  $v$ - $v_s$ -Formulierung.



Rechteckquerschnitts. Da in Gleichung (5.9) nur Ableitungen von  $v_s$  auftreten, führt ein konstanter Schubverschiebungsverlauf  $v_s$  zu keiner Energie. Diese konstante Starrkörpererschubverschiebung muss durch eine geeignete Zwangsbedingung unterbunden werden, z. B. durch Aufbringen einer zusätzlichen Dirichlet-Randbedingung am linken bzw. rechten Balkenrand oder durch Einbringen einer Penalty-Steifigkeit. In Abbildung 5.7 ist eine geometrische Interpretation zur Verdeutlichung dieser zusätzlichen Maßnahme dargestellt. Die Dirichlet-Randbedingungen für das dargestellte Balkenproblem fordern am linken Balkenende  $v = 0$  und  $\varphi = 0$ , am rechten Ende  $v = 0$ . Obwohl der Starrkörperanteil der Totalverschiebung  $v$  unterbunden wird, kann es zu einer betragsmäßig gleich großen, aber entgegengesetzten Starrkörperverschiebung des Biege- und Schubanteils der Verschiebung kommen, die zu unterbinden ist. Dafür genügt allerdings eine zusätzliche Bedingung an einer beliebigen Stelle, siehe exemplarisch  $\underline{v_s = 0}$  am rechten Rand in Abbildung 5.7. Die Gesamtverschiebung  $v$  wird von dieser Zwangsbedingung nicht beeinflusst.

## 5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden hierarchische Balkenformulierungen präsentiert und analytisch sowie anhand eines numerischen Experiments untersucht. Die Grundidee des hierarchischen Konzepts liegt in der Reparametrisierung der Kinematik zur Vermeidung von Unausgewogenheiten zwischen den einzelnen Anteilen der kinematischen Gleichungen. Neben der Untersuchung der berechneten Verschiebungsgrößen, d. h. Verschiebungen und Rotationen, lag ein großer Fokus auf der Untersuchung der Spannungsresultierenden, d. h. Biegemoment und Querkraft. Auch wenn die Verschiebungen schlankheitsunabhängig mit optimaler Ordnung konvergieren, kann die Spannungsqualität immer noch suboptimal sein, wie bei der  $v$ - $\gamma$ -Formulierung mit hierarchischen Rotationen zu sehen ist. Bei der  $v$ - $v_s$ -Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen konnte unabhängig von der Schlankheit eine optimale Konvergenz der Verschiebungs- und Querkraftlösung gezeigt werden. Die schwache Form aus Gleichung (5.9) wurde exemplarisch mit B-Splines diskretisiert, wobei jede andere Art von mindestens  $C^1$ -kontinuierlichen Formfunktionen denkbar ist. Locking wird intrinsisch, d. h. auf Theorieebene, für jede Equal-Order-Interpolation *vermieden*, und nicht nachträglich für einen speziellen Ansatzraum *beseitigt*. Für einfache Balkenprobleme erscheint diese markante Eigenschaft von nicht allzu großer Bedeutung, verspricht jedoch für zwei- oder dreidimensionale Diskretisierungen ein breites Anwendungsspektrum.

Über die, bereits in Abschnitt 4.1 erwähnte, mathematische Betrachtungsweise lassen sich die maßgeblichen Eigenschaften der hier vorgestellten Balkenformulierungen in Bezug auf Querschublocking zusammenfassend bewerten. Nach BRAESS (2017) spricht man

von sogenannten steifen Differentialgleichungen, die in schlecht konditionierten Problemstellungen resultieren. Beim Timoschenko-Balken mit einer  $v$ - $\varphi$ -Parametrisierung ist das Momentengleichgewicht als die steife Differentialgleichung zu betrachten:

$$\begin{aligned}
 m &= -M_{,x} + Q \\
 &= -EI\varphi_{,xx} + GA\gamma \\
 &= -E\frac{bt^3}{12}\varphi_{,xx} + Gbt\gamma \\
 &= -E\frac{bt^3}{12}\varphi_{,xx} + Gbt(v_{,x} + \varphi)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Im dünnen Grenzfall, d. h. für  $t \rightarrow 0$ , wird der rechte Koeffizient  $Gbt$  im Vergleich zum linken Koeffizienten  $E\frac{bt^3}{12}$  sehr groß. Somit werden bereits kleine Fehler in der numerischen Approximation des Ausdrucks  $(v_{,x} + \varphi)$  mit einer sehr großen Zahl  $Gbt$  multipliziert, was zu Querschublocking und verminderter Ergebnisqualität führt. Im Falle einer  $v$ - $\gamma$ -Parametrisierung ergibt sich eine modifizierte Form von Gleichung (5.10) zu

$$m = -E\frac{bt^3}{12}(-v_{,xxx} + \gamma_{,xx}) + Gbt(\gamma). \tag{5.11}$$

Die Unausgewogenheit wurde aus dem rechten Klammersausdruck beseitigt. Die  $v$ - $\gamma$ -Formulierung ist aus mathematischer Sicht für  $t \rightarrow 0$  gut konditioniert, d. h. frei von Locking. Allerdings sind die Terme im linken Klammersausdruck aus Gleichung (5.11) nicht ausbalanciert, was zu Locking im dicken Grenzfall führt. Dieser Grenzfall liegt jedoch außerhalb der Gültigkeit einer Balkenkinematik nach Timoschenko. Trotzdem leidet unter dieser Unausgewogenheit die Qualität der numerischen Ergebnisse für die Querkraft  $Q(x)$ , wie in diesem Kapitel gezeigt wurde.

Für die hier vorgeschlagene  $v$ - $v_s$ -Formulierung ergibt sich die Gleichung für das Momentengleichgewicht zu

$$m = -E\frac{bt^3}{12}(-v_{,xxx} + v_{s,xxx}) + Gbt(v_{s,x}), \tag{5.12}$$

wobei nun beide Klammersausdrücke in sich ausgewogen sind. Das heißt, die Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen ist weder im dünnen noch im dicken Grenzfall von Locking betroffen. In dieser mathematischen Argumentation treten keinerlei Diskretisierungsaspekte auf, was ein weiteres Indiz dafür ist, dass Locking intrinsisch vermieden wird. Dies gilt sowohl für klassische FE-Methoden, die die schwache Form aus Gleichung (5.9) diskretisieren als auch für Kollokationsmethoden, siehe Abschnitt 3.3, die direkt die starken Gleichungen und somit auch das Momentengleichgewicht nach Gleichung (5.12) kollokieren.

# 6

---

## Hierarchische Schalenformulierungen

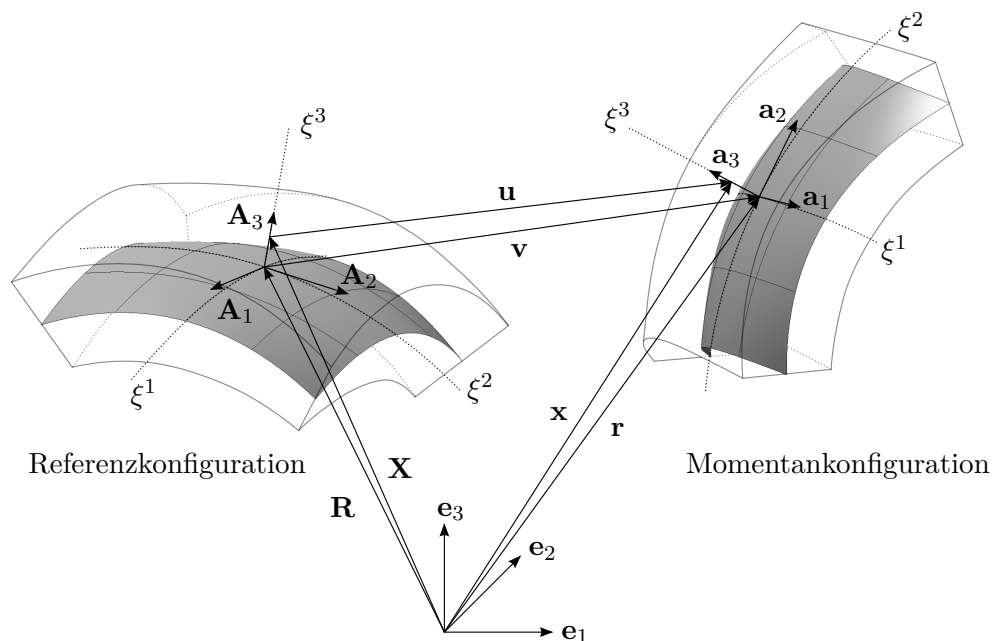
In der wissenschaftlichen Literatur findet sich eine große Anzahl unterschiedlicher FE-Formulierungen für Platten und Schalen. Ein guter Überblick über verschiedene Schalenmodelle, Herleitungsarten und typische Diskretisierungsaspekte ist in BISCHOFF U. A. (2004) zu finden. Der Inhalt der vorliegenden Arbeit beschränkt sich auf einschichtige Schalen vom Kirchhoff-Love- bzw. Reissner-Mindlin-Typ, wohingegen dreidimensionale bzw. 7-Parameter-Schalenmodelle nicht näher betrachtet werden. Der Zielsetzung aus Abschnitt 1.2 folgend, beschäftigt sich dieses Kernkapitel mit der intrinsischen Vermeidung von Locking bei schubweichen Schalenformulierungen und einer effizienten Darstellung finiter Rotationen im Kontext geometrisch nichtlinearer FE-Analysen.

Die hierarchischen Balkenformulierungen nach den Abschnitten 5.2 und 5.3 enthalten das schubstarre Bernoulli-Balkenmodell als Basis. Die in diesem Kapitel entwickelten schubweichen Schalenformulierungen basieren in analoger Weise auf einer hierarchischen Erweiterung einer schubstarren Kirchhoff-Love-Schalenformulierung, welche zuerst eingeführt wird. Die schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen nach ECHTER U. A. (2013) wird auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen erweitert, ebenso die neuartige, rotationsfreie Parametrisierung mit hierarchischen Verschiebungen nach OESTERLE U. A. (2016). In Anlehnung an OESTERLE U. A. (2017) erfolgt für alle drei Schalenformulierungen zunächst die Beschreibung einer linearen Kinematik für kleine Rotationen, nachfolgend die Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen. Diese Herangehensweise ermöglicht die Entwicklung eines neuartigen Konzepts zur einfachen und effizienten Darstellung großer Rotationen bei Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen.

## 6.1 Differenzialgeometrie

Die zugrunde liegende Differenzialgeometrie ist für alle der nachfolgenden Schalenformulierungen identisch, weshalb diese kurz in einem gemeinsamen Kontext vorgestellt wird. Wie bereits in Abbildung 2.1 eingeführt, wird der dreidimensionale Schalenkörper durch ein konvektives, krummliniges Koordinatensystem parametrisiert. Die Koordinatenlinien in der Schalebene werden dabei mit  $\xi^\alpha$  bezeichnet, die Koordinate in Dickenrichtung der Schale mit  $\xi^3 \in [-t/2, t/2]$ , wobei  $t$  die Schalendicke beschreibt und alle  $\xi^i$  physikalische Längeneinheiten haben. Griechische Indizes nehmen, wie üblich, die Werte 1 und 2 an; lateinische Indizes laufen von 1 bis 3. Im Gegensatz zu Abschnitt 2.1 wird der Körper in dimensionsreduzierter Form beschrieben. Abbildung 6.1 zeigt den Deformationsvorgang eines Schalenkörpers. Die Größen der Referenzkonfiguration werden durch Großbuchstaben beschrieben, Kleinbuchstaben finden in der Momentankonfiguration Verwendung. Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{x}$  zu beliebigen materiellen Punkten des Schalenkörpers werden als lineare Funktionen der Koordinate  $\xi^3$  ausgedrückt, was eine typische Annahme klassischer Schalenmodelle ist. Punkte auf den in Abbildung 6.1 dargestellten Mittelflächen werden durch  $\xi^3 = 0$  festgelegt.

Durch die Dimensionsreduktion sind sowohl die Ortsvektoren  $\mathbf{R}$  als auch die Direktoren  $\mathbf{A}_3$  der Referenzkonfiguration lediglich Funktionen der Koordinaten der Schalebene  $\xi^\alpha$ . Für den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt des Schalenkörpers in der undeforinierten



**Abbildung 6.1:** Referenz- und Momentankonfiguration eines Schalenkörpers.

Lage gilt dann

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{R}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{A}_3(\xi^1, \xi^2). \quad (6.1)$$

Die partielle Ableitung von  $\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3 = 0)$  nach den Koordinaten der Schalenebene  $\xi^\alpha$  liefert die kovarianten Basisvektoren der Mittelfläche

$$\mathbf{A}_\alpha = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^3=0} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha}. \quad (6.2)$$

Um den dreidimensionalen Tangentialraum zu vervollständigen, wird der Referenzdirektor  $\mathbf{A}_3$ , in üblicher Form, durch das normierte Kreuzprodukt der kovarianten Basisvektoren der Schalenebene  $\mathbf{A}_\alpha$  definiert zu

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}. \quad (6.3)$$

Aus Gleichung (6.1) folgt für die kovarianten Basisvektoren des Schalenkörpers der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha}, \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^3} = \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.4)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass  $\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3$  nicht allgemein gültig ist, sondern aus der Annahme einer linear in Dickenrichtung  $\xi^3$  verlaufenden Metrik resultiert. Für den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu einem beliebigen Punkt des Schalenkörpers in der deformierten Lage gilt entsprechend

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2). \quad (6.5)$$

Bis zu diesem Punkt sind die eingeführten geometrischen Größen für die nachfolgend vorgestellten Schalenformulierungen identisch. Maßgebende Unterschiede entstehen aus der Spezifizierung des Direktors  $\mathbf{a}_3$  der Momentankonfiguration. Dessen Konstruktion unterscheidet sich sowohl in Abhängigkeit der geometrisch linearen bzw. nichtlinearen Kinematik als auch in Abhängigkeit des zugrunde liegenden Schalenmodells.

## 6.2 Schubstarres Kirchhoff-Love-Schalenmodell

Im Folgenden wird die Kinematik des Kirchhoff-Love-Schalenmodells genauer spezifiziert. Für die vollständige Beschreibung der Kinematik sind drei Verschiebungen ausreichend, weshalb in diesem Kontext häufig von einem 3-Parameter-Modell gesprochen wird.

Im IGA-Kontext haben zugehörige schubstarre Schalenelemente stark an Popularität gewonnen, da die geforderte  $C^1$ -Kontinuität einfach zu bewerkstelligen ist. Von ÇIRAK U. A. (2000) wurden Kirchhoff-Love-Schalenelemente basierend auf einer Loop-Subdivision präsentiert. Das erste schubstarre Schalenelement unter Verwendung von NURBS wurde von KIENDL U. A. (2009) vorgestellt und in zahlreichen weiteren Arbeiten in identischer oder ähnlicher Form verwendet, siehe beispielsweise KIENDL U. A. (2010), BENSON U. A. (2011), SCHMIDT U. A. (2012), KIENDL U. A. (2014), LU UND ZHENG (2014), KIENDL U. A. (2015b), TEPOLE U. A. (2015), BREITENBERGER U. A. (2015), KIENDL U. A. (2016), DUONG U. A. (2017), HELTAI U. A. (2017).

Die nachfolgenden Herleitungen sind demnach nicht neu, werden aber für eine detaillierte Beschreibung und Diskussion der, in den Abschnitten 6.3 und 6.4 vorgestellten, hierarchischen Schalenformulierungen benötigt. Bevor die Darstellung großer Rotationen beschrieben wird, wird der lineare Fall kleiner Rotationen diskutiert.

### 6.2.1 Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen

Für den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu einem beliebigen Punkt des Schalenkörpers in der deformierten Lage gilt für das Kirchhoff-Love(KL)-Modell eine spezifizierte Form von Gleichung (6.5)

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3^{\text{KL}}(\xi^1, \xi^2). \quad (6.6)$$

Im Falle kleiner Rotationen kann der Kirchhoff-Love-Direktor durch

$$\mathbf{a}_3^{\text{KL}} = \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 \quad (6.7)$$

beschrieben werden, siehe auch Abbildung 6.2, links. Dabei ist

$$\mathbf{\Phi} = \varphi^1 \mathbf{A}_1 + \varphi^2 \mathbf{A}_2 \quad (6.8)$$

ein linearisierter Rotationsvektor. Die Ausdrücke für die Rotationswinkel  $\varphi^\alpha$  sind

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= +\frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{,2} \mathbf{A}_3, \\ \varphi^2 &= -\frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{,1} \mathbf{A}_3,\end{aligned}\tag{6.9}$$

wobei  $\mathbf{v}$  den Vektor der drei Mittelflächenverschiebungen darstellt. Nach Abbildung 6.1 lassen sich die Verschiebungen  $\mathbf{v}$  der Mittelfläche als eine Differenz der Mittelflächenortsvektoren darstellen, das heißt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{R}.\tag{6.10}$$

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  des Schalenkörpers wird für das Kirchhoff-Love-Modell durch

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ &= \mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{R} - \xi^3 \mathbf{A}_3 \\ &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{A}_3)\end{aligned}\tag{6.11}$$

beschrieben. Für die Berechnung von Verzerrungskomponenten werden die partiellen Ableitungen des Verschiebungsfelds  $\mathbf{u}$  nach den krummlinigen Koordinaten  $\xi^i$  benötigt:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{,\alpha} &= \mathbf{v}_{,\alpha} + \xi^3 (\mathbf{a}_{3,\alpha}^{\text{KL}} - \mathbf{A}_{3,\alpha}), \\ \mathbf{u}_{,3} &= \mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{A}_3.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ist nach Gleichung (2.15) durch

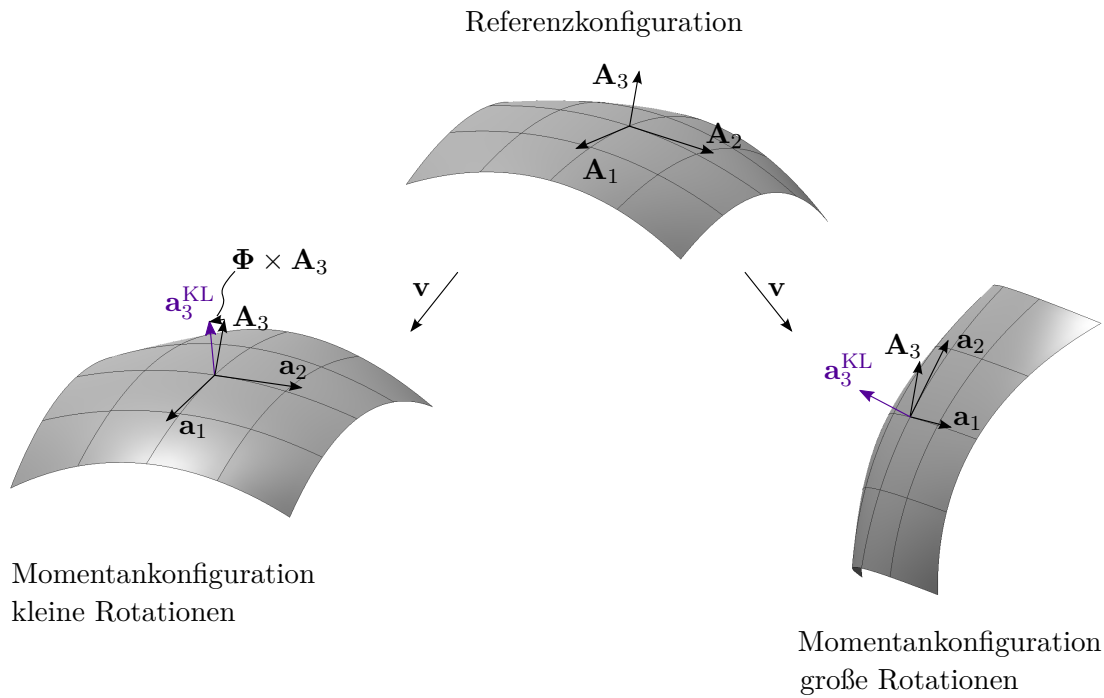
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j\tag{6.13}$$

beschrieben, wobei sich die Komponenten durch

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i)\tag{6.14}$$

berechnen lassen. Mit den Gleichungen (6.4), (6.7) und (6.12) lassen sich die Verzerrungskomponenten des Kirchhoff-Love-Modells spezifizieren zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 + \xi^3 (\mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_{3,1} + \boldsymbol{\Phi}_{,1} \times \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1), \\ 2\varepsilon_{12}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_1 \\ &\quad + \xi^3 (\mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_{3,2} + \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_{3,1} + \boldsymbol{\Phi}_{,1} \times \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 + \boldsymbol{\Phi}_{,2} \times \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1), \\ \varepsilon_{22}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2 + \xi^3 (\mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_{3,2} + \boldsymbol{\Phi}_{,2} \times \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2), \\ \varepsilon_{i3}^{\text{KL}} &= 0.\end{aligned}\tag{6.15}$$



**Abbildung 6.2:** Schalenmittelfläche für kleine und große Rotationen, schubstarre Kirchhoff-Love-Schalenformulierung.

Die konstanten Anteile von  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  stellen jeweils die Membrandehnungen dar. Linear in  $\xi^3$  verlaufende Anteile repräsentieren die Krümmungsänderungen, d. h. Biegung und Verwindung. In  $\xi^3$ -Richtung quadratisch verlaufende Terme wurden, wie üblich, vernachlässigt, da ihr Einfluss auf die Ergebnisse elastischer Berechnungen dünner bis moderat dicker Schalen bei kleinen Verzerrungen als sehr gering einzustufen ist. Die konstanten und linear in  $\xi^3$  verlaufenden Anteile werden im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit voneinander getrennt, da die im späteren Verlauf vorgestellten finiten Elemente spannungsbasiert formuliert sind. Das heißt, es wird, im Sinne einer einfachen Erweiterbarkeit auf nichtlineare Stoffgesetze, auf eine Vorabintegration des Materialgesetzes in Dickenrichtung  $\xi^3$  verzichtet.

### 6.2.2 Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen

Für die korrekte Darstellung großer Rotationen ist die linearisierte Konstruktion des aktuellen Direktors  $\mathbf{a}_3^{\text{KL}}$  nach Gleichung (6.7) nicht mehr gültig. Vielmehr ist eine geometrisch nichtlineare Beschreibung im aktuellen Tangentialraum nötig, d. h.

$$\mathbf{a}_3^{\text{KL}} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (6.16)$$



Dabei gilt für die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  der Momentankonfiguration

$$\mathbf{a}_\alpha = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^3=0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}. \quad (6.17)$$

Der aktuelle Direktor  $\mathbf{a}_3^{\text{KL}}$  wird aus einem normierten Kreuzprodukt der kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  konstruiert, die selbst nur von partiellen Ableitungen der Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$  abhängen. Dadurch werden, wie beim schubstarrten Bernoulli-Balken, keine zusätzlichen Rotationen als primäre Variablen benötigt. Für den nichtlinearen Green-Lagrange-Verzerrungstensor gilt nach Gleichung (2.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \\ &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \end{aligned} \quad (6.18)$$

wobei sich die Komponenten  $E_{ij}$  nach der Vorschrift

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (6.19)$$

bestimmen lassen. Die Verzerrungskomponenten des Kirchhoff-Love-Modells ergeben sich zu

$$\begin{aligned} E_{11}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} - \xi^3 (\mathbf{a}_{1,1} \cdot \mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_3), \\ 2E_{12}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,2} - \xi^3 2 (\mathbf{a}_{1,2} \cdot \mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{A}_{1,2} \cdot \mathbf{A}_3), \\ E_{22}^{\text{KL}} &= \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{v}_{,2} - \xi^3 (\mathbf{a}_{2,2} \cdot \mathbf{a}_3^{\text{KL}} - \mathbf{A}_{2,2} \cdot \mathbf{A}_3), \\ E_{i3}^{\text{KL}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Die konstanten Anteile von  $E_{\alpha\beta}$  beschreiben die Membrandehnungen und die linear in  $\xi^3$  verlaufenden Anteile repräsentieren die Biegeanteile. In  $\xi^3$ -Richtung quadratisch verlaufende Terme wurden erneut vernachlässigt. Der aktuelle Direktor  $\mathbf{a}_3^{\text{KL}}$  für die Darstellung großer Rotationen ist in Abbildung 6.2, rechts, dargestellt. Durch seine spezielle Konstruktion ist er senkrecht zum aktuellen Tangentialraum ausgerichtet, wodurch sich die Querschubverzerrungskomponenten  $E_{\alpha 3}$  automatisch zu null ergeben. Zudem verschwinden die Normalverzerrungskomponenten  $E_{33}$  in Dickenrichtung durch die Annahme, dass während der Rotation des Direktors keine Längenänderung stattfindet.

## 6.3 Schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen

In folgendem Abschnitt wird die Anreicherung des beschriebenen Kirchhoff-Love-Modells durch hierarchische Schubrotationen diskutiert. Die Grundidee dieser hierarchischen Anreicherung wurde bereits in Abschnitt 5.2 für schubweiche Balken beschrieben. Im Speziellen liegt der Fokus dieses Kapitels auf der Erweiterung der schubweichen 5-Parameter-Schalenformulierung aus ECHTER U. A. (2013) auf die Darstellung großer Rotationen. Ein verwandtes Konzept ist bereits in LONG U. A. (2012) zu finden. Die maßgebenden Unterschiede werden im Weiteren aufgeführt. Wie beim vorangegangenen schubstarreren Schalenmodell wird zunächst der Fall kleiner Rotationen betrachtet, da er die Basis für effiziente Neuentwicklungen darstellt.

### 6.3.1 Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen

Der erste Schritt in der Herleitung von Verzerrungskomponenten ist erneut die geometrische Beschreibung der Deformation des Schalenkörpers. Aufgrund der Dimensionsreduktion genügt es, den Bewegungsvorgang der Schalenmittelfläche mit der zugehörigen Deformation des Direktors zu betrachten. Abbildung 6.3 vergleicht die Deformation der schubweichen Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen im Kontext kleiner bzw. großer Rotationen. Im Falle kleiner Rotationen (links) deformiert sich die Schalenmittelfläche durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$ , während der Referenzdirektor durch den linearisierten Rotationsvektor  $\Phi$  vom Kirchhoff-Love-Typ gedreht wird. Der daraus resultierende Direktor  $\mathbf{a}_3^\perp$  steht im gesamten Gebiet senkrecht auf der Schalenmittelfläche, ist aber nur im Falle querschubfreier Deformationen identisch zum tatsächlichen Kirchhoff-Love-Direktor  $\mathbf{a}_3^{\text{KL}}$ . In allgemeinen Fällen unterscheiden sich die Verschiebungsfelder der schubstarreren und schubweichen Formulierungen, sodass  $\mathbf{a}_3^\perp \neq \mathbf{a}_3^{\text{KL}}$  gilt. Um Querschubeffekte zu berücksichtigen, wird der vorläufige Direktor  $\mathbf{a}_3^\perp$  durch zwei hierarchische Schubrotationen gedreht. Beim ebenen schubweichen Balken wird der Direktor nur durch eine Schubrotation gedreht, vergleiche auch Abbildung 5.3, oben. Mit einem hierarchischen Rotationsvektor  $\Psi$  ergibt sich für die Konstruktion des aktuellen Direktors

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \Phi \times \mathbf{A}_3 + \Psi \times \mathbf{A}_3. \quad (6.21)$$

Der Rotationsvektor  $\Phi$  wird, wie beim schubstarreren Modell, nach den Gleichungen (6.8) und (6.9), aus partiellen Ableitungen der Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$  bestimmt. Der zusätzliche hierarchische Rotationsvektor  $\Psi = \psi^\alpha \mathbf{A}_\alpha$  beinhaltet zwei unabhängige Querschubrotationen  $\psi^\alpha$ . In ECHTER U. A. (2013) wurden zwei unabhängige Komponenten

$w^\alpha$  eines hierarchischen Schubdifferenzvektors  $\mathbf{w}$  als Primärvariablen eingeführt, wobei  $\mathbf{w}$  die Tangentialverschiebung der Schalenoberfläche beschreibt, das heißt:

$$\mathbf{w} := \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{A}_3 = w^1 \mathbf{A}_1 + w^2 \mathbf{A}_2. \quad (6.22)$$

Aus mathematischer Sicht sind, im Falle kleiner Rotationen, beide Varianten äquivalent zueinander. Im Sinne einer im Vergleich zu ECHTER U. A. (2013), OESTERLE U. A. (2016) und OESTERLE U. A. (2017) einheitlichen Notation, beinhalten die nachfolgenden Ausdrücke den hierarchischen Differenzvektor  $\mathbf{w}$ . Somit gilt für den aktuellen Direktor

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}_3 + \mathbf{w}. \quad (6.23)$$

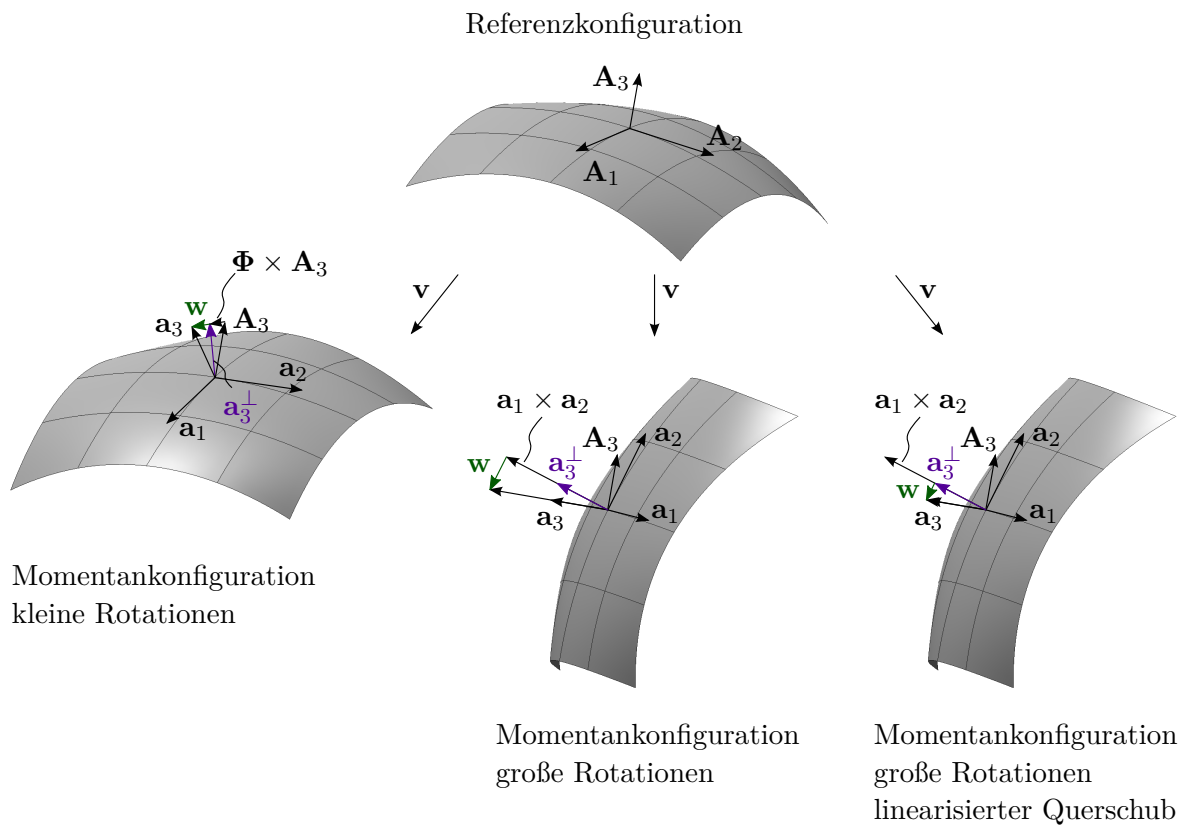
Mit der Gleichung (6.23) gilt für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  des Schalenkörpers und dessen partielle Ableitungen nach den krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3), \\ \mathbf{u}_{,\alpha} &= \mathbf{v}_{,\alpha} + \xi^3 (\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_{3,\alpha}), \\ \mathbf{u}_{,3} &= \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Damit ergeben sich die linearisierten Verzerrungskomponenten für die Reissner-Mindlin-Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen (RM-hr) zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\text{RM-hr}} &= \varepsilon_{11}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1), \\ 2\varepsilon_{12}^{\text{RM-hr}} &= 2\varepsilon_{12}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{A}_1), \\ \varepsilon_{22}^{\text{RM-hr}} &= \varepsilon_{22}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2), \\ 2\varepsilon_{13}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}_1, \\ 2\varepsilon_{23}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}_2, \\ \varepsilon_{33}^{\text{RM-hr}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Die Gleichung (6.25) zeigt die positiven Eigenschaften des hierarchischen Konzepts auf, siehe auch ECHTER U. A. (2013). Die Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  vom Kirchhoff-Love-Typ sind als Basis in  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{RM-hr}}$  enthalten und im Fall verschwindender Querschubverzerrungen, d. h.  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , sogar identisch zu den Komponenten aus Gleichung (6.15). Die Anteile  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  hängen also nur von den drei Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$  ab, die zusätzlichen Beiträge sind ausschließlich von  $\mathbf{w}$  abhängig. Auch wenn die Anteile  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  aus den Gleichungen (6.25) und (6.15) im allgemeinen Fall nicht identisch sind, werden sie auf dieselbe Art und Weise berechnet. Diese Eigenschaft führt zu einer einfachen Implementierung in einem FE-Code, da bereits existierende Ausdrücke nur *additiv* erweitert werden. Existierende Elementmatrizen müssen lediglich durch zusätzliche Beiträge ergänzt werden,



**Abbildung 6.3:** Schalenmittelfläche für kleine und große Rotationen, schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen.

wodurch sich eine Erweiterung auf Basis einer bestehenden schubstarr Elementformulierung, sehr einfach gestaltet. Zudem gilt bezüglich der Vermeidung von Querschublocking dasselbe wie bei der entsprechenden Balkenformulierung aus Abschnitt 5.2. Die Zwangsbedingung verschwindender Querschubverzerrungen  $2\varepsilon_{\alpha 3}$  im Grenzfall  $t \rightarrow 0$  ist durch  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  erfüllt. Aus mathematischer Sicht sind die Zwänge beseitigt und die Formulierung ist intrinsisch frei von Querschublocking.

### 6.3.2 Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen

Mittig in Abbildung 6.3 ist die Deformation der Schalenmittelfläche der schubweichen Schalenformulierung RM-hr für den Fall großer Rotationen dargestellt. Wie im geometrisch linearen Fall, besteht die Rotation des Direktors aus zwei Anteilen. Im ersten Anteil werden nun bereits große Rotationen berücksichtigt, wodurch für den vorläufigen

Direktor

$$\mathbf{a}_3^\perp = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (6.26)$$

gilt. Diese Berechnungsvorschrift gleicht der Vorschrift aus Gleichung (6.16) zur Berechnung des Kirchhoff-Love-Direktors. Jedoch gilt allgemein, wie im geometrisch linearen Fall,  $\mathbf{a}_3^\perp \neq \mathbf{a}_3^{\text{KL}}$ . Denn die Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$  sind im allgemeinen Fall für KL- und RM-Formulierungen nicht identisch, was zu unterschiedlichen Tangentialvektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  führt. Der Direktor  $\mathbf{a}_3^\perp$  steht senkrecht auf der deformierten Mittelfläche und erfüllt damit die Kirchhoff-Love-Bedingung, beschreibt aber nicht die Kirchhoff-Love-Lösung.

Mit der Einführung zweier großer Schubrotationen  $\psi^\alpha$  ergibt sich die vollständig nicht-lineare Erweiterung von Gleichung (6.21) zu

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{R}(\Psi) \cdot \mathbf{a}_3^\perp = \mathbf{R}(\Psi) \cdot \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (6.27)$$

Dabei beschreibt  $\mathbf{R}(\Psi)$  einen Rotationstensor, der von den Komponenten eines Rotationsvektors  $\Psi = \psi^\alpha \mathbf{a}_\alpha$  abhängt. Die Berechnungsvorschrift für  $\mathbf{a}_3$ , nach Gleichung (6.27), weist eine hochgradig nichtlineare, multiplikative Struktur auf. Die korrekte Behandlung großer Rotationen und ihrer multiplikativen Zerlegung über z. B. Euler-Parameter, Quaternionen oder Rodriguez-Parameter zählt zum Stand der Technik, ist aber sehr anspruchsvoll.

Sollen große Schubrotationen durch einen hierarchischen Schubdifferenzvektor  $\mathbf{w}$  abgebildet werden, dann muss dies durch eine alternative Parametrisierung verwirklicht werden. Der Differenzvektor  $\mathbf{w}$  wird hierzu auf die nicht normierte, aktuelle Normale  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  aufaddiert, was eine andere geometrische Bedeutung als im geometrisch linearen Fall zur Folge hat. Um die Bedingung verschwindender transversaler Normalverzerrungen zu erfüllen, muss der resultierende Vektor  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{w}$  normiert werden. Somit gilt als Berechnungsvorschrift für  $\mathbf{a}_3$  die Gleichung

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{w}}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{w}\|}. \quad (6.28)$$

Die korrekte Behandlung großer Rotationen erfordert, dass der hierarchische Schubdifferenzvektor  $\mathbf{w}$  in Abhängigkeit des *aktuellen* Tangentialraums  $\mathbf{a}_\alpha$  dargestellt wird, d. h.

$$\mathbf{w} = w^1 \mathbf{a}_1 + w^2 \mathbf{a}_2. \quad (6.29)$$

Doch auch die Vorschrift zur Berechnung von  $\mathbf{a}_3$  nach Gleichung (6.28) ist hochgradig nichtlinear in den fünf Primärvariablen  $v^i$  und  $w^\alpha$  und ähnlich komplex wie eine Berech-

nung unter Verwendung eines Rotationstensors nach Gleichung (6.27). Wie in LONG U. A. (2012) gezeigt wurde, kann der Schubdifferenzvektor  $\mathbf{w}$  alternativ mithilfe von drei kartesischen Komponenten formuliert werden, was zunächst in einer 6-Parameter-Formulierung mit Dickenänderung resultiert. Um die Dickenänderung zu unterbinden, müssen zusätzliche Zwangsbedingungen eingebracht werden. Dies ist beispielsweise über Lagrange-Multiplikatoren zu bewerkstelligen.

Abgesehen von der theoretischen und algorithmischen Komplexität der Darstellung großer Rotationen bei Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen, lässt sich eine wichtige Beobachtung machen. Die elegante additive Zerlegung von Verzerrungskomponenten, siehe Gleichung (6.25), in Anteile aus Biege- und Membranwirkung sowie Anteile aus Querschub ist nicht mehr vorhanden. Im Folgenden wird ein Weg zur Bewahrung dieser Eigenschaft mit dem Ziel einer einfachen und effizienten Darstellung großer Rotationen vorgestellt.

Zugrunde liegt die Hypothese, dass der Anteil der Schubrotationen an den Gesamtrotationen für eine große Klasse an Problemstellungen sehr gering ist. Aus diesem Grund ist in Frage zu stellen, ob die relativ komplexe Konstruktion des Direktors  $\mathbf{a}_3$ , nach Gleichung (6.27) oder (6.28), für typische Anwendungen notwendig ist. In geometrisch nichtlinearen Analysen schubweicher Schalen können die Gesamtrotationen, die sich aus Starrkörper-, Biege-Membran- und Schubrotationen zusammensetzen, sehr groß werden. Unter der Voraussetzung, dass die Schubrotationen klein sind, ist eine exakte Darstellung von Starrkörper- sowie Biege-Membranrotationen ausreichend. Die Schubrotationen können dann im Sinne einer linearisierten Rotation eingebracht werden. Mit den beschriebenen Annahmen lässt sich die Vorschrift zur Berechnung des benötigten aktuellen Direktors darstellen als

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{R}(\Psi) \cdot \mathbf{a}_3^\perp \approx \mathbf{a}_3^\perp + \Psi \times \mathbf{a}_3^\perp = \mathbf{a}_3^\perp + \mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} + \mathbf{w}. \quad (6.30)$$

Die Gleichung (6.30) kombiniert nun Eigenschaften einer Formulierung für kleine und große Rotationen, nach den Gleichungen (6.23) bzw. (6.28).

Die zugehörige geometrische Interpretation ist in Abbildung 6.3, rechts, zu sehen. Die Rotation von  $\mathbf{A}_3$  nach  $\mathbf{a}_3^\perp$  wird auf einfache Art und Weise exakt abgebildet, genau wie beim schubstarrten Kirchhoff-Love-Modell. Auf den vorläufigen, normierten Direktor  $\mathbf{a}_3^\perp$  wird ein Schubdifferenzvektor  $\mathbf{w}$  hierarchisch addiert, was zum endgültigen Direktor  $\mathbf{a}_3$  führt. Da die Darstellung von  $\mathbf{a}_3^\perp$  exakt, d. h. ohne Approximationen irgendeiner Art bewerkstelligt wird, können die Biege-Membranrotationen beliebig groß werden. Die Querschubrotationen, dargestellt durch den hierarchischen Schubdifferenzvektor  $\mathbf{w}$ , werden hingegen als klein angenommen. Dies stellt im Vergleich zur vollständig nichtlinearen Formulierung nach Gleichung (6.28) eine Approximation dar. Die Annahme

kleiner Schubrotationen äußert sich geometrisch in einer kleinen Längenänderung des Direktors während der hierarchischen Schubrotationen von  $\mathbf{a}_3^\perp$  durch  $\mathbf{w}$ . Dem ersten Anschein nach könnte dieses Konzept mit einer Co-Rotational-Formulierung, siehe beispielsweise WEMPNER (1969), BELYTSCHKO UND HSIEH (1973), CRISFIELD (1990) oder FELIPPA UND HAUGEN (2005), verwechselt werden. Das hier vorgestellte Konzept unterscheidet sich jedoch grundlegend. In einer Co-Rotational-Beschreibung werden große Starrkörperrotationen von der Gesamtdeformation extrahiert und exakt abgebildet, wobei alle Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen in einem mitdrehenden Koordinatensystem linearisiert betrachtet werden. Dagegen können im Rahmen des hier neu vorgestellten Konzepts sowohl große Starrkörper- als auch große Biege-Membranrotationen exakt dargestellt werden. Lediglich die anteiligen Querschubrotationen werden in einem linearisierten Sinne als klein betrachtet. Mit der Gleichung (6.30) gilt für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  des Schalenkörpers sowie für dessen partielle Ableitungen nach den krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\
 &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3) \\
 &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{a}_3^\perp + \mathbf{w} - \mathbf{A}_3), \\
 \mathbf{u}_{,\alpha} &= \mathbf{v}_{,\alpha} + \xi^3 (\mathbf{a}_{3,\alpha}^\perp + \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{A}_{3,\alpha}), \\
 \mathbf{u}_{,3} &= \mathbf{a}_3^\perp + \mathbf{w} - \mathbf{A}_3.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Damit ergeben sich die nichtlinearen Verzerrungskomponenten für die Reissner-Mindlin-Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen zu

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{\text{RM-hr}} &= E_{11}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 2E_{12}^{\text{RM-hr}} &= 2E_{12}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 E_{22}^{\text{RM-hr}} &= E_{22}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{a}_2), \\
 2E_{13}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 + \underline{\xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{w})}, \\
 2E_{23}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_2 + \underline{\xi^3 (\mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{w})}, \\
 E_{33}^{\text{RM-hr}} &= \underline{\frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}.
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Die, im Schritt der linearisierten Schubrotation verursachte, kleine Längenänderung des Direktors führt zu den unterstrichenen Ausdrücken in Gleichung (6.32), die nichtlinear in  $\mathbf{w}$  sind. Die Annahme einer linearisierten Kinematik erfordert auch eine konsistente Linearisierung der entsprechenden Terme. Dies wird im Wesentlichen durch die Vernachlässigung der unterstrichenen Ausdrücke bewerkstelligt. Durch die vollständige Linearisierung bezüglich der Schubparameter  $w^\alpha$  ergeben sich die Green-Lagrange

Verzerrungskomponenten der hier vorgeschlagenen Formulierung zu

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{\text{RM-hr}} &= E_{11}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 2E_{12}^{\text{RM-hr}} &= 2E_{12}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 E_{22}^{\text{RM-hr}} &= E_{22}^{\text{KL}} + \xi^3 (\mathbf{w}_{,2} \cdot \mathbf{a}_2), \\
 2E_{13}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1, \\
 2E_{23}^{\text{RM-hr}} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_2, \\
 E_{33}^{\text{RM-hr}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Die additive Zerlegung des Direktors  $\mathbf{a}_3$  nach Gleichung (6.30) macht sich in positiven Eigenschaften der Verzerrungskomponenten  $E_{ij}^{\text{RM-hr}}$  bemerkbar. Im Speziellen bewirkt die additive Direktordefinition eine additive Zerlegung der nichtlinearen Green-Lagrange-Verzerrungen in Biege-Membrananteile und Querschubanteile, siehe Gleichung (6.33), was im Fall vollständig nichtlinearer Beschreibungen des aktuellen Direktors, nach Gleichungen (6.27) oder (6.28), nicht möglich ist. Die Verzerrungskomponenten  $E_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  vom Kirchhoff-Love-Typ, siehe Gleichung (6.20), können auch in Gleichung (6.33) identifiziert werden. Obwohl die Anteile  $E_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  nur im Fall querschubfreier Deformationen, d. h.  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , identisch sind, können sie aufgrund identischer Berechnungsvorschrift direkt verwendet werden. Wie im geometrisch linearen Fall, kann ein Reissner-Mindlin-Schalenelement mit hierarchischen Rotationen (RM-hr) implementiert werden, indem bestehenden Kirchhoff-Love-Elementmatrizen additiv Anteile hinzugefügt werden.

Zudem ist an dieser Stelle bemerkenswert, dass die nichtlinearen Green-Lagrange Verzerrungskomponenten nach Gleichung (6.33) in ihrer Grundstruktur den linearen Verzerrungskomponenten aus Gleichung (6.25) entsprechen. Erstere Gleichungen sind aus letzteren durch Ersetzen von  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  durch  $E_{\alpha\beta}^{\text{KL}}$  und  $\mathbf{A}_\alpha$  durch  $\mathbf{a}_\alpha$  zu bekommen.

## 6.4 Schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen

Obwohl bei Formulierungen mit hierarchischen Rotationen Querschublocking auf Theorieebene vermieden wird, ist die Qualität der Querkräfte nicht optimal. Wie bereits in Kapitel 5 für schubweiche Balken beschrieben, bietet sich eine Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen an, da sowohl Querschublocking vollständig vermieden wird als auch eine sehr gute Qualität der Querkraftlösungen zu erwarten ist. Im folgenden Abschnitt wird die hierarchische Anreicherung des zuvor beschriebenen Kirchhoff-Love-Modells durch hierarchische Schubverschiebungen diskutiert. Der Systematik folgend, soll zunächst der geometrisch lineare Fall betrachtet werden, da hier bereits interessante



neue Aspekte beleuchtet werden können. Im Anschluss folgt die Erweiterung auf große Rotationen und eine Diskussion weiterer Aspekte im Zusammenhang mit finiten Elementen.

### 6.4.1 Geometrisch lineare Kinematik – kleine Rotationen

Grundsätzlich ist die Idee, Verschiebungen in Biege- und Schubanteile zu trennen, nicht neu. Ebene Balkenprobleme wurden schon vor langer Zeit mithilfe dieser Idee untersucht, siehe auch Abschnitt 5.3 und darin zitierte Literatur. Im Kontext schubweicher Platten lassen sich ebenfalls zahlreiche jüngere Veröffentlichungen finden, siehe beispielsweise SHIMPI (2002), SHIMPI UND PATEL (2006), ENDO UND KIMURA (2007), ENDO (2015) und viele mehr. Keine der genannten Veröffentlichungen beschäftigt sich jedoch mit der FE-Lösung der Plattenprobleme. Offenbar wirkte die benötigte  $C^1$ -Kontinuität vor der Entwicklung des isogeometrischen Konzepts zu abschreckend, als dass sich entsprechende FE-Formulierungen hätten durchsetzen können. Doch auch im Kontext isogeometrischer Diskretisierungen lassen sich neuerdings einige Veröffentlichungen finden, welche sich mit der rotationsfreien Parametrisierung schubweicher Plattenprobleme beschäftigen, siehe beispielsweise YIN U. A. (2014) und LIU U. A. (2017). Doch in keiner der genannten Veröffentlichungen wird das Kirchhoff'sche Modell für dünne Platten mit *zwei* unabhängigen Schubparametern angereichert. Vielmehr wird in allen Beiträgen lediglich *eine* Schubverschiebung eingeführt, mit deren Hilfe *zwei* unabhängige Schubwinkel beschrieben werden müssen. Dieser zusätzliche Zwang führt dazu, dass in keinem der genannten Beiträge eine schubweiche, rotationsfreie Plattenformulierung beschrieben wird, die die Lösungen bekannter schubweicher Modelle nach Reissner oder Mindlin reproduzieren.

Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, kann im Fall schubweicher Balkenformulierungen mit hierarchischen Verschiebungen, eine beliebige Kombination von zwei der drei Verschiebungen  $v$ ,  $v_b$  und  $v_s$  gewählt werden, da jede einzelne eine skalare Größe darstellt. Im Kontext von Schalen ist eine derart freie Wahl der Parametrisierung nicht mehr möglich, da jeder Anteil nun eine vektorielle Größe mit einer unterschiedlichen Anzahl an enthaltenen skalaren Parametern darstellt. Die Verschiebungen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}_b$  sind jeweils Vektoren mit drei global kartesischen Verschiebungsparametern. Die zwei unabhängigen Schubverschiebungen  $\mathbf{v}_{s_1}$  und  $\mathbf{v}_{s_2}$  beinhalten jeweils nur einen skalaren Parameter. Somit kann im Rahmen einer 5-Parameter-Theorie nur eine der zwei Kombinationen  $\mathbf{v}_b$ - $\mathbf{v}_{s_1}$ - $\mathbf{v}_{s_2}$  oder  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{v}_{s_1}$ - $\mathbf{v}_{s_2}$  gewählt werden, da die Variante  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{v}_b$  in sechs Parametern resultiert.

OESTERLE U. A. (2016) präsentierten eine Erweiterung der Balkenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen auf eine konsistente Schalenformulierung für geometrisch lineare Probleme. Durch die hierarchische Anreicherung mit *zwei* unabhängigen Schubverschiebungen, basierend auf einer  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{v}_{s_1}$ - $\mathbf{v}_{s_2}$ -Parametrisierung, ist diese Schalenformulie-

rung frei von künstlichen Zwängen in den Schubverzerrungskomponenten. Die genannte rotationsfreie Schalenformulierung ist vermutlich die erste ihrer Art, die exakt die Lösung des klassischen Mindlin-Modells reproduziert. Darüber hinaus sind daraus entwickelte Schalenformulierungen intrinsisch frei von Querschublocking, unabhängig vom verwendeten Diskretisierungskonzept. Für nähere Details zu den unterschiedlichen Parametrisierungen schubweicher Plattenformulierungen und ihren theoretischen Unterschieden wird an dieser Stelle auf Abschnitt 6.8 verwiesen. Zunächst wird die schubweiche Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen näher betrachtet.

Die grundlegende Idee ist die Aufteilung der Totalverschiebungen  $\mathbf{v}$  in Biege-Membrananteile sowie zwei zusätzliche Verschiebungsanteile, die für die Bestimmung der Querschubverzerrungen verantwortlich sind. Somit gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_{s_1} + \mathbf{v}_{s_2}, \quad (6.34)$$

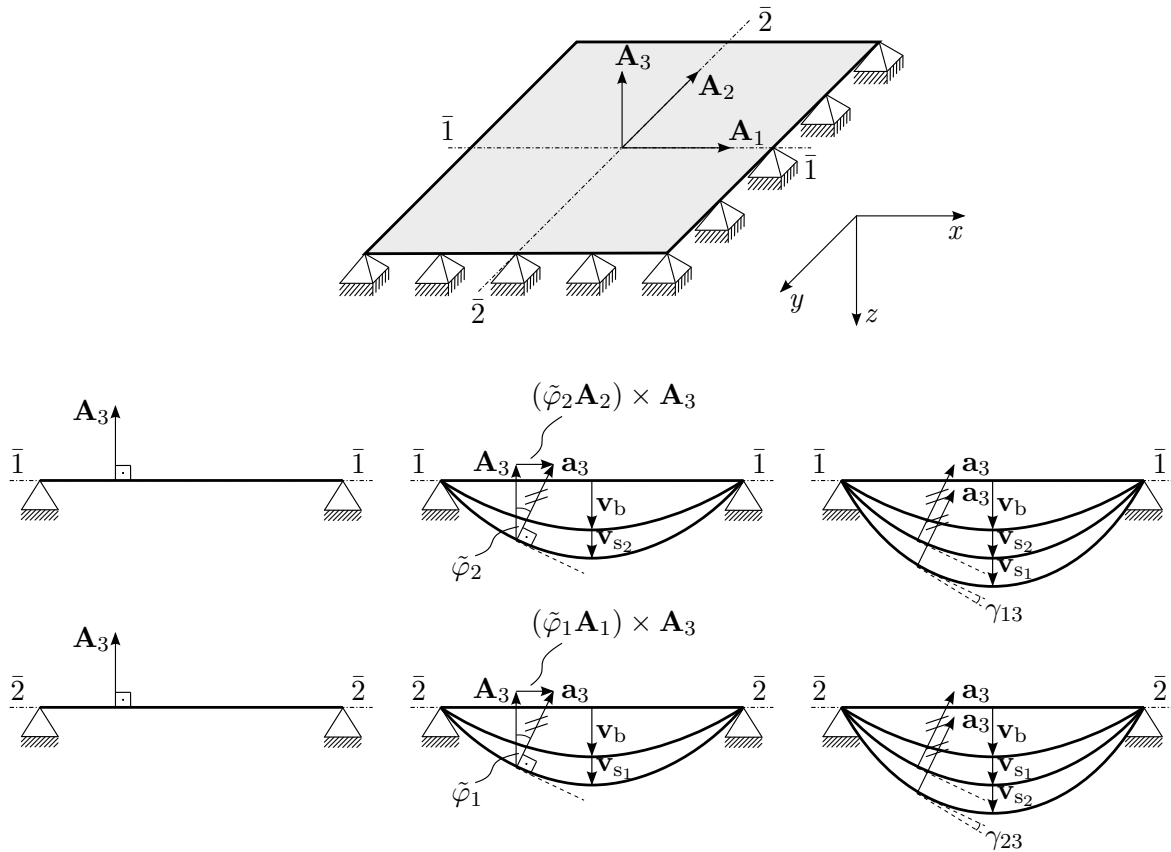
wobei  $\mathbf{v}_{s_\alpha} = v^{s_\alpha} \mathbf{A}_3$  und  $\mathbf{v}_b = v^{b_i} \mathbf{e}_i$  ist. In OESTERLE U. A. (2016) wurde die Konstruktion des aktuellen Direktors dargestellt durch

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \tilde{\Phi} \times \mathbf{A}_3, \quad (6.35)$$

wobei für den Rotationsvektor  $\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}^\alpha \mathbf{A}_\alpha$  gilt. Die zugehörigen Rotationswinkel werden aus anteiligen, partiellen Verschiebungsableitungen berechnet zu

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^1 &= + \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} (\mathbf{v}_b + \mathbf{v}_{s_1})_{,2} \cdot \mathbf{A}_3, \\ \tilde{\varphi}^2 &= - \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} (\mathbf{v}_b + \mathbf{v}_{s_2})_{,1} \cdot \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die geometrische Interpretation dieser speziellen Definition der Rotationswinkel ist in Abbildung 6.4 für den Spezialfall einer rechtwinkligen Platte dargestellt. Die zwei Schnitte  $\bar{1}-\bar{1}$  und  $\bar{2}-\bar{2}$  wurden so gewählt, dass sie parallel zu den Tangentenlinien der Geometrie verlaufen, d. h. in Richtung der kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\alpha$ . Im Schnitt  $\bar{1}-\bar{1}$  deformiert sich die Platte durch  $\mathbf{v}_b$  und  $\mathbf{v}_{s_2}$  zu der gedachten Zwischenkonfiguration in Bildmitte. Der Referenzdirektor  $\mathbf{A}_3$  wird dabei um den Winkel  $\tilde{\varphi}_2$  in linearisierter Weise rotiert. Der resultierende Direktor  $\mathbf{a}_3$  steht senkrecht auf der vorläufigen Mittellinie, die durch die Verschiebungen  $\mathbf{v}_b$  und  $\mathbf{v}_{s_2}$  entstanden ist. Die hierarchische Verschiebung der Mittellinie um  $\mathbf{v}_{s_1}$  bewirkt keine zusätzliche Rotation von  $\mathbf{a}_3$ , jedoch verändert sich die Tangente an die aktuelle Mittellinie. Der entstandene Winkel zwischen der aktuellen Mittellinie und der Mittellinie des Zwischenschritts wird als der Schubwinkel  $\gamma_{13}$  identifiziert, vergleiche Abbildung 5.3. Eine entsprechende Interpretation lässt sich auch für die Deformation im Schnitt  $\bar{2}-\bar{2}$  finden. Im dargestellten Zwischenschritt wird der Referenzdirektor  $\mathbf{A}_3$  um den Winkel  $\tilde{\varphi}_1$  infolge  $\mathbf{v}_b$  und  $\mathbf{v}_{s_1}$  rotiert. Eine zusätzliche Verschiebung  $\mathbf{v}_{s_2}$  der



**Abbildung 6.4:** Linearisierte Kinematik der rotationsfreien Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen, dargestellt für den Sonderfall einer rechteckigen Platte.

Mittellinie bewirkt eine Tangentenänderung, die als zweiter unabhängiger Schubwinkel  $\gamma_{23}$  identifiziert wird.

Analog zur hierarchischen Balkenformulierung nach Abschnitt 5.3 kann eine alternative Darstellung gewählt werden, in der direkt die totalen Verschiebungen parametrisiert werden. Aus mathematischer Sicht sind beide Varianten äquivalent zueinander und führen zu identischen Ergebnissen. Das Umstellen der Gleichung (6.34) nach  $\mathbf{v}_b$  liefert

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{s_1} - \mathbf{v}_{s_2}. \quad (6.37)$$

Das Einsetzen der Gleichung (6.37) in Gleichung (6.36) ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^1 &= + \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{s_2})_{,2} \cdot \mathbf{A}_3, \\ \tilde{\varphi}^2 &= - \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{s_1})_{,1} \cdot \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Mit der Gleichung (6.38) lässt sich die Konstruktion des aktuellen Direktors  $\mathbf{a}_3$ , in zur Gleichung (6.21) analoger Form, darstellen als

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 + \tilde{\mathbf{\Psi}} \times \mathbf{A}_3, \quad (6.39)$$

wobei der Rotationsvektor  $\mathbf{\Phi}$ , nach Gleichung (6.9), aus den Ableitungen der totalen Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$  bestimmt wird. Der zusätzliche, hierarchische Rotationsvektor  $\tilde{\mathbf{\Psi}} = \tilde{\psi}^\alpha \mathbf{A}_\alpha$  beinhaltet nun partielle Ableitungen von Schubverschiebungen anstelle von Schubrotationen, das heißt:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^1 &= -\frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_2,2} \cdot \mathbf{A}_3, \\ \tilde{\psi}^2 &= +\frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_1,1} \cdot \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Mit der Gleichung (6.40) ergibt sich für die Gleichung (6.39)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 - \left( \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_2,2} \cdot \mathbf{A}_3 \right) \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_3 \\ &\quad + \left( \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_1,1} \cdot \mathbf{A}_3 \right) \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Mit den Beziehungen

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_3 = -\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| \|\mathbf{A}_3\| \mathbf{A}^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 = \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| \|\mathbf{A}_3\| \mathbf{A}^1 \quad (6.42)$$

kann die Gleichung (6.41) vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 - \left( \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_2,2} \cdot \mathbf{A}_3 \right) (-\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| \mathbf{A}^2) \\ &\quad + \left( \frac{1}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \mathbf{v}_{s_1,1} \cdot \mathbf{A}_3 \right) (+\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| \mathbf{A}^1) \\ &= \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 + (\mathbf{v}_{s_1,1} \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{A}^1 + (\mathbf{v}_{s_2,2} \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{A}^2 \\ &= \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 + \left( \underbrace{v_{,1}^{s_1} \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3}_{=1} + \underbrace{v^{s_1} \mathbf{A}_{3,1} \cdot \mathbf{A}_3}_{=0} \right) \mathbf{A}^1 \\ &\quad + \left( \underbrace{v_{,2}^{s_2} \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3}_{=1} + \underbrace{v^{s_2} \mathbf{A}_{3,2} \cdot \mathbf{A}_3}_{=0} \right) \mathbf{A}^2 \\ &= \mathbf{A}_3 + \mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}_3 + v_{,1}^{s_1} \mathbf{A}^1 + v_{,2}^{s_2} \mathbf{A}^2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Gleichungen (6.43) und (6.23) eine nahezu gleiche Struktur aufweisen. Doch im Unterschied zur Darstellung in der Gleichung (6.23), sind die Komponenten des neuen Differenzvektors aus Gleichungen (6.43) partielle Ableitungen der hierarchischen Schubverschiebungsparameter  $v^{s\alpha}$  anstatt hierarchischer Schubrotationen. Zudem treten die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}^\alpha$  anstatt der kovarianten Vektoren  $\mathbf{A}_\alpha$  in Erscheinung. Im geometrisch linearen Fall beziehen sich die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}^\alpha$  auf die Referenzkonfiguration, d. h. sie sind unabhängig von den Mittelflächenverschiebungen  $\mathbf{v}$ . Im geometrisch nichtlinearen Fall sind die kontravarianten Basisvektoren hochgradig nichtlinear von  $\mathbf{v}$  abhängig, was die Linearisierung der entsprechenden Terme sehr kompliziert gestaltet. Entsprechende partielle Ableitungen der kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\alpha$  sind hingegen sehr einfach herzuleiten und zu implementieren.

Ein Ziel ist die Entwicklung einer möglichst einfachen und effizienten Schalenformulierung. Aus diesem Grund wird der Differenzvektor in Abhängigkeit der kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\alpha$  ausgedrückt, das heißt:

$$\tilde{\mathbf{w}} := \tilde{\Psi} \times \mathbf{A}_3 = v_{,1}^{s1} \mathbf{A}_1 + v_{,2}^{s2} \mathbf{A}_2. \quad (6.44)$$

Diese Definition erscheint zunächst etwas willkürlich und wird aus diesem Grund näher betrachtet. Die ko- und kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\alpha$  und  $\mathbf{A}^\alpha$  spannen jeweils den identischen Tangentialraum auf und sind im Fall rechtwinkliger Netze sogar identisch. Im Grunde genommen wird damit festgelegt, ob die zugehörigen Rotationswinkel um die ko- oder kontravarianten Achsen rotieren. Dies bringt für schiefwinkliger Netze eine unterschiedliche geometrische Bedeutung mit sich. Doch das zugrunde liegende Schalenmodell ist in beiden Fällen identisch, weshalb die Definition nach Gleichung (6.44) zulässig ist. Für die Schalenformulierung mit hierarchischen Rotationen, siehe Gleichung (6.22), wurde bereits eine identische Annahme getroffen.

Mit der Definition aus Gleichung (6.44) ergibt sich für die Konstruktion des aktuellen Direktors

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \Phi \times \mathbf{A}_3 + \tilde{\mathbf{w}}. \quad (6.45)$$

Im Vergleich zu Gleichung (6.23) besitzt Gleichung (6.45) eine identische Struktur, was in den Komponenten der linearisierten Green-Lagrange-Verzerrungen sichtbar wird. Für die Komponenten der Reissner-Mindlin(RM)-Schalenformulierung mit hierarchischen Ver-

schiebungen (kurz: RM-hd, vom englischen *hierarchic displacement*) gilt:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^{\text{RM-hd}} &= \varepsilon_{11}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1), \\
 2\varepsilon_{12}^{\text{RM-hd}} &= 2\varepsilon_{12}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,1} \cdot \mathbf{A}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_{,2} \cdot \mathbf{A}_1), \\
 \varepsilon_{22}^{\text{RM-hd}} &= \varepsilon_{22}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2), \\
 2\varepsilon_{13}^{\text{RM-hd}} &= \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A}_1, \\
 2\varepsilon_{23}^{\text{RM-hd}} &= \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A}_2, \\
 \varepsilon_{33}^{\text{RM-hd}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Die Gleichung (6.46) zeigt im Vergleich zur Gleichung (6.25) eine identische Struktur, was eine enge Verwandtschaft beider Parametrisierungsvarianten verdeutlicht.

## 6.4.2 Geometrisch nichtlineare Kinematik – große Rotationen

Mit den Annahmen und Erkenntnissen aus den vorangegangenen Abschnitten gestaltet sich die Erweiterung der RM-hd-Schalenformulierung auf große Rotationen relativ einfach. Wird erneut angenommen, dass die Schubrotationen klein sind, folgt die Konstruktion des aktuellen Direktors nach der Regel

$$\mathbf{a}_3 \approx \mathbf{a}_3^\perp + \tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} + \tilde{\mathbf{w}}. \tag{6.47}$$

Allerdings muss der hierarchische Differenzvektor  $\tilde{\mathbf{w}}$  im geometrisch nichtlinearen Fall in Abhängigkeit des aktuellen Tangentialraums beschrieben werden, d. h.

$$\tilde{\mathbf{w}} = v_{,1}^{s1} \mathbf{a}_1 + v_{,2}^{s2} \mathbf{a}_2. \tag{6.48}$$

Damit ergeben sich die Komponenten des Green-Lagrange-Verzerrungstensors zu

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{\text{RM-hd}} &= E_{11}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,1} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 2E_{12}^{\text{RM-hd}} &= 2E_{12}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,1} \cdot \mathbf{a}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_{,2} \cdot \mathbf{a}_1), \\
 E_{22}^{\text{RM-hd}} &= E_{22}^{\text{KL}} + \xi^3 (\tilde{\mathbf{w}}_{,2} \cdot \mathbf{a}_2), \\
 2E_{13}^{\text{RM-hd}} &= \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{a}_1, \\
 2E_{23}^{\text{RM-hd}} &= \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{a}_2, \\
 E_{33}^{\text{RM-hd}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Die Gleichungen (6.49) und (6.33) haben eine identische Struktur. Auch für die RM-hd-Formulierung bleibt die positive Eigenschaft der additiven Zerlegung der Verzerrungskomponenten erhalten. Die Erweiterung eines nichtlinearen Kirchhoff-Love-Modells auf

RM-hd gestaltet sich einfach. Daraus entwickelte schubweiche Schalenelemente erfüllen im Grenzfall  $t \rightarrow 0$  die Zwangsbedingungen  $2E_{\alpha 3}^{\text{RM-hr}} = 0$  bzw.  $2E_{\alpha 3}^{\text{RM-hd}} = 0$  für jede Wahl an Formfunktionen. Aus diesem Grund ist die RM-hd-Schalenformulierung intrinsisch frei von Querschublocking. Durch die bessere Balance in den Krümmungstermen ist bei Berechnungen mit RM-hd-Elementen eine bessere Qualität der Querkräfte zu erwarten als mit RM-hr-Elementen.

## 6.5 Materialgesetz

Für alle numerischen Experimente der vorliegenden Arbeit wird ein linear elastisches St.-Venant-Kirchhoff-Materialgesetz verwendet, siehe auch Abschnitt 2.3. Der vierstufige Materialtensor  $\mathbf{C}$  lässt sich in krummlinigen Koordinaten beschreiben zu

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (6.50)$$

Die zugehörigen Koeffizienten sind

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}), \quad (6.51)$$

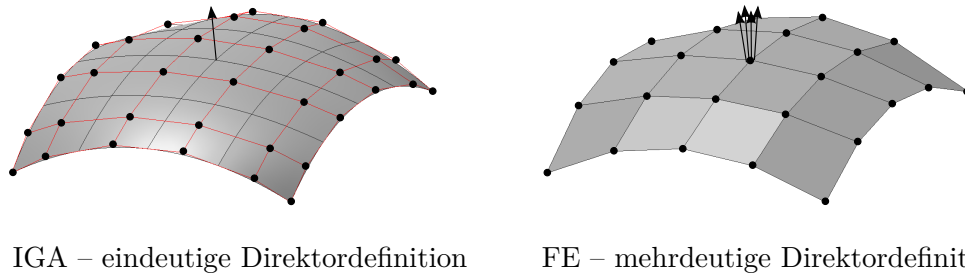
wobei die Lamé-Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  durch

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.52)$$

ausgedrückt werden können.

Dreidimensionale Schalenformulierungen sowie Kontinuums-Schalenformulierungen, siehe beispielsweise BISCHOFF UND RAMM (1997) oder IRSLINGER (2013), erlauben eine direkte Anwendung der dreidimensionalen Elastizitätsgleichungen. Für Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen ist eine Modifikation des Materialtensors nötig, um die Bedingung  $S^{33} = 0$  zu erfüllen. Im Fall linear elastischer Materialgesetze wird dies durch die Eliminierung von  $E_{33}$  über statische Kondensation erreicht. Für nichtlineare Materialgesetze kann die Erfüllung  $S^{33} = 0$  nicht immer direkt über statische Kondensation eingebracht werden, sondern erfordert ein iteratives Verfahren innerhalb der Materialroutine, siehe KLINKEL UND GOVINDJEE (2002). Im Fall eines Kirchhoff-Love-Modells ist zusätzlich eine Modifikation der Querschubanteile zu berücksichtigen.

Nichtlineare Materialgesetze sind üblicherweise in lokal-kartesischen Koordinaten formuliert, wodurch entsprechende Tensortransformationen von  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{S}$  erforderlich sind. Angemerkt sei zudem, dass im Rahmen dieser Arbeit mit Spannungen anstelle von



**Abbildung 6.5:** Vergleich diskreter Direktoren im Falle einer isogeometrischen B-Spline-Diskretisierung (links) und einer gewöhnlichen FE-Diskretisierung (rechts)

Spannungsergebnisse numerisch in Schalendickenrichtung  $\xi^3$  integriert wird. Es wird somit numerisch in Schalendickenrichtung  $\xi^3$  integriert. Das ermöglicht eine Erweiterung auf nichtlineare Materialgesetze. Aussagekräftige plastische Berechnungen von Schalenstrukturen benötigen beispielsweise mindestens fünf Integrationspunkte in Dickenrichtung.

## 6.6 Diskretisierung

Bereits für das Kirchhoff-Love-Modell nach Abschnitt 6.2, das als Basismodell der hierarchischen Reissner-Mindlin-Formulierungen eingebettet ist, beträgt der variationelle Index  $c = 2$ . Da in den Krümmungstermen von Gleichung (6.20), beispielsweise im Anteil  $\mathbf{a}_{1,1}$ , zweite Ableitungen der Verschiebungen  $\mathbf{v}$  auftreten, müssen im Rahmen einer FE-Diskretisierung mindestens  $C^1$ -kontinuierliche Formfunktionen verwendet werden. Zur Diskretisierung der zuvor eingeführten Schalengleichungen wird hier vorwiegend das isogeometrische Konzept nach Abschnitt 3.3 genutzt. In diesem Rahmen existiert eine Vielzahl geeigneter glatter Ansatzräume, wobei in dieser Arbeit vorwiegend gewöhnliche NURBS zum Einsatz kommen.

Die Verwendung glatter Ansatzräume für die Geometrieparametrisierung und die Diskretisierung der Verschiebungsgrößen bringt mit sich, dass Direktoren an jeder Stelle im Schalenkörper exakt berechnet werden können. Bei gewöhnlichen,  $C^0$ -kontinuierlichen finiten Elementen existiert an jedem Knoten eine mehrdeutige Definition der Normalen, siehe Abbildung 6.5. Dies erfordert zusätzliche Direktormittelungen oder die Einführung künstlicher Drillrotationen am Knoten.

Auch die für finite Elemente übliche Definition der Direktoren an den Knoten ist bei isogeometrischen Schalenformulierungen nur bedingt sinnvoll. Durch nicht interpolatorische Eigenschaften glatter Ansatzräume liegen die Kontrollpunkte (vgl. Knoten) nicht



mehr auf der Geometrie. Da die Direktoren nur direkt auf der Geometrie berechnet werden können, sind Projektionsmethoden nötig, um Direktoren an die Kontrollpunkte zu projizieren, siehe beispielsweise BENSON U. A. (2010) oder DORNISCH U. A. (2013). Diese Projektionen können unter Umständen numerisch aufwendig sein und sind im Falle der hier vorliegenden Schalenformulierungen nicht notwendig. Jegliche Geometriegrößen, wie z. B. Direktoren, werden im Rahmen dieser Arbeit direkt an jedem Gaußpunkt *exakt* berechnet.

Der Ortsvektor  $\mathbf{R}^h(\xi^1, \xi^2)$  und die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\alpha^h(\xi^1, \xi^2)$  der Referenzkonfiguration werden in diskreter Form beschrieben als

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^h(\xi^1, \xi^2) &= \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{P}^I, \\ \mathbf{A}_1^h(\xi^1, \xi^2) &= \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N_{,1}^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{P}^I, \\ \mathbf{A}_2^h(\xi^1, \xi^2) &= \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N_{,2}^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{P}^I,\end{aligned}\tag{6.53}$$

wobei  $\mathbf{P}^I$  den Vektor der Knoten- bzw. Kontrollpunktkoordinaten,  $n_{\text{nd}}$  die Anzahl an Knoten- bzw. Kontrollpunkten und  $N^I(\xi^1, \xi^2)$  den entsprechenden Wert der Formfunktion, z. B. NURBS, darstellt. Jedoch ist die Gleichung (6.53) grundsätzlich auch für andere Diskretisierungskonzepte und Formfunktionen gültig. Wie bereits beschrieben, lässt sich der diskrete Direktor  $\mathbf{A}_3^h$  nach der Gleichung (6.3) an jedem beliebigen Punkt durch

$$\mathbf{A}_3^h = \frac{\mathbf{A}_1^h \times \mathbf{A}_2^h}{\|\mathbf{A}_1^h \times \mathbf{A}_2^h\|}\tag{6.54}$$

exakt berechnen. Die diskretisierten Mittelflächenverschiebungen werden beschrieben mit

$$\mathbf{v}^h(\xi^1, \xi^2) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{v}^I.\tag{6.55}$$

Die kovarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration können in diskreter Form konstruiert werden durch

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1^h(\xi^1, \xi^2) &= \mathbf{A}_1^h(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{v}_{,1}^h(\xi^1, \xi^2), \\ \mathbf{a}_2^h(\xi^1, \xi^2) &= \mathbf{A}_2^h(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{v}_{,2}^h(\xi^1, \xi^2).\end{aligned}\tag{6.56}$$

Die beiden Komponenten  $w^\alpha$  des hierarchischen Schubdifferenzvektors  $\mathbf{w}$  könnten im Falle der RM-hr-Formulierung mit  $C^0$ -kontinuierlichen Formfunktionen diskretisiert wer-

den, da nur erste Ableitungen dieser Parameter auftreten. Jedoch werden im Rahmen dieser Arbeit alle Größen ausschließlich durch eine Equal-Order-Interpolationen diskretisiert. Somit gilt für die Approximation der Komponenten  $w^\alpha$

$$w^{\alpha,h}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N^I(\xi^1, \xi^2) w^{\alpha I}. \quad (6.57)$$

Bei der RM-hd-Formulierung mit hierarchischen Verschiebungen gilt für die Diskretisierung der beiden unabhängigen Schubverschiebungen

$$v^{s\alpha,h}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} N^I(\xi^1, \xi^2) v^{s\alpha I}. \quad (6.58)$$

Mit den aufgeführten, diskreten Größen lassen sich auch die diskreten Direktoren der Momentankonfiguration sowie alle weiteren Ausdrücke bestimmen, die für eine FE-Analyse benötigt werden. Das Einsetzen der diskreten Ausdrücke in die schwache Form aus Gleichung (2.30) sowie das Durchführen der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Linearisierung ermöglichen die Herleitung von Elementmatrizen und die Lösung der schwachen Form des elastostatischen Randwertproblems.

## 6.7 Rand- und Zwangsbedingungen

Die Reparametrisierung der kinematischen Größen führt bei den hierarchischen Schalenformulierungen ebenso wie bei hierarchischen Balkenformulierungen zu erhöhten Anforderungen im Kontext von Dirichlet-Randbedingungen. Durch die Parametrisierung der Gesamtverschiebung  $\mathbf{v}$  können entsprechende Verschiebungsrandbedingungen direkt eingebracht werden. Bei alternativer Parametrisierung der Biegeverschiebung wäre dies nicht möglich. Die hierarchische Aufteilung der Gesamtrotationen in einen Biege-Membrananteil sowie zwei Anteile infolge Querschub führt dazu, dass rotatorische Dirichlet-Randbedingungen nicht direkt auf die Gesamtrotationen aufgebracht werden können. Vielmehr muss die Gesamtrotation der Querschnitte bzw. Direktoren über zusätzliche Zwangsbedingungen mithilfe von z. B. Lagrange-Multiplikatoren oder Penalty-StEIFigkeiten eingebracht werden. Zur Rotationskopplung von NURBS-Patches wird in dieser Arbeit die Bending-Strip-Methode nach KIENDL U. A. (2010) verwendet, bei der Penalty-StEIFigkeiten auf die Biegeanteile der TangentenstEIFigkeitsmatrix addiert werden. Bei jeder der drei Schalenformulierungen dieses Kapitels unterscheiden sich die Biegeanteile. Dies erfordert eine entsprechende Modifikation der Penalty-StEIFigkeitsterme.

Zusätzlich zu den genannten Rand- und Zwangsbedingungen sind für die RM-hd-Formulierung nach Abschnitt 6.4 weitere Zwangsbedingungen auf den Schubverschiebungs-

parametern  $v^{s\alpha}$  nötig. In Abschnitt 5.4 wurde diese Notwendigkeit bereits für Balkenformulierungen mit hierarchischen Verschiebungen beschrieben. Im Kontext dieser eindimensionalen Diskretisierungen musste lediglich der konstante Anteil von  $v_s$  beseitigt werden, um den einzigen Nullenergiemodus und den damit einhergehenden Rangabfall der Steifigkeitsmatrix zu unterbinden.

Im Falle von Platten und Schalen sind weitere Überlegungen nötig, um die zusätzlichen Effekte aus der Zweidimensionalität korrekt zu erfassen. Setzt man beispielsweise Gleichung (6.46) oder (6.49) in Gleichung (2.30) ein, ergibt sich eine schwache Form des Reissner-Mindlin-Schalenproblems. Bei der Herleitung der Tangentensteifigkeitsmatrix fällt auf, dass mehr als die üblichen sechs Nullenergiemoden (Starrkörpermoden) auftreten. Die Ursache liegt in der Definition der Schubrotationen als partielle Ableitungen der Schubverschiebungsparameter  $v^{s\alpha}$ . Setzt man beispielsweise  $\tilde{\mathbf{w}} = v_{,1}^{s1} \mathbf{A}_1 + v_{,2}^{s2} \mathbf{A}_2$  aus Gleichung (6.44) in die Querschubverzerrungskomponente  $2\varepsilon_{13}^{\text{RM-hd}}$  aus Gleichung (6.46) ein, ergibt sich

$$2\varepsilon_{13}^{\text{RM-hd}} = \gamma_{13} = \left( v_{,1}^{s1} \mathbf{A}_1 + v_{,2}^{s2} \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{A}_1. \quad (6.59)$$

Im Falle rechtwinkliger Netze reduziert sich die Gleichung (6.59) auf

$$2\varepsilon_{13}^{\text{RM-hd}} = \gamma_{13} \left( \xi^1, \xi^2 \right) = v_{,1}^{s1} \left( \xi^1, \xi^2 \right) \left\| \mathbf{A}_1 \left( \xi^1, \xi^2 \right) \right\|^2, \quad (6.60)$$

wobei  $\left\| \mathbf{A}_1 \left( \xi^1, \xi^2 \right) \right\|^2$  einen skalaren Metrikparameter darstellt, der durch die krummlinige Beschreibung des Verzerrungstensors entsteht. Jede Funktion  $v^{s1} \left( \xi^1, \xi^2 \right)$  der Form

$$v^{s1} \left( \xi^1, \xi^2 \right) = \int_{\xi^1} \gamma_{13} \left( \xi^1, \xi^2 \right) d\xi^1 + C + F(\xi^2) \quad (6.61)$$

erfüllt die Gleichung (6.60), wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist und  $F(\xi^2)$  eine beliebige Funktion in  $\xi^2$ -Richtung darstellt. Aus der Gleichung (6.61) ist ersichtlich, dass mit einer punktuellen Bedingung der Form  $v^{s1} \left( \xi_p^1, \xi_p^2 \right) = 0$  am Punkt  $P$  nur die Konstante  $C$  beseitigt werden kann.

In OESTERLE U. A. (2016) wurde exemplarisch gezeigt, wie der Anteil  $F(\xi^2)$  für strukturierte NURBS-Patches über zusätzliche Dirichlet-Randbedingungen unterbunden werden kann. Für unstrukturierte Netze, beispielsweise basierend auf T-Splines oder hierarchisch verfeinerten B-Splines, können die zusätzlichen Zwangsbedingungen nicht mehr in Form von Randbedingungen eingebracht werden. Hier sind alternative Konzepte nötig, um zusätzliche Nullenergiemoden durch den Anteil  $F(\xi^2)$  zu unterbinden. Beispielsweise

kann der schwachen Form aus Gleichung (2.30) ein Anteil der Art

$$\int_{\Omega_R} \delta v_{,2}^{s_1} v_{,2}^{s_1} d\Omega_R \quad (6.62)$$

hinzugefügt werden. Mit diesem Penalty-Term werden alle Anteile der Gleichung (6.61) bestraft, die linear oder von höherer Ordnung in  $\xi^2$ -Richtung sind. Die Konstante  $C$  kann somit über eine einzelne punktuelle Bedingung im Patch beseitigt werden. Entsprechende Überlegungen führen für die andere Schubverschiebung  $v^{s_2}$  zu einem zusätzlichen Penalty-Term der Form

$$\int_{\Omega_R} \delta v_{,1}^{s_2} v_{,1}^{s_2} d\Omega_R. \quad (6.63)$$

## 6.8 Vergleich schubweicher Plattenformulierungen

Wie in Abschnitt 6.4.1 bereits angedeutet, ist die Idee der Parametrisierung von Schubverschiebungen nicht neu. Für ebene, schubweiche Balkenformulierungen genügt die Einführung einer Schubverschiebung  $v_s$ , deren Ableitung  $v_{s,x}$  den Schubwinkel  $\gamma$  darstellt. Doch auch viele Veröffentlichungen aus diversen Disziplinen der Mechanik, von analytischen oder numerischen Untersuchungen statischer Probleme bis hin zu dynamischen Untersuchungen geschichteter Platten, beschäftigen sich mit entsprechenden schubweichen Plattenformulierungen. An dieser Stelle seien exemplarisch die Arbeiten von SHIMPI (2002), SHIMPI UND PATEL (2006), ENDO UND KIMURA (2007), ENDO (2015), YIN U. A. (2014), JUNG U. A. (2016), LOU U. A. (2016), NGUYEN U. A. (2017) und LIU U. A. (2017) genannt.

In keiner der genannten Arbeiten wird das Kirchhoff'sche Plattenmodell mit *zwei* unabhängigen Schubverschiebungen angereichert. Vielmehr wird in allen Beiträgen lediglich *eine* Schubverschiebung eingeführt. Das führt dazu, dass keine der genannten Plattenformulierungen die Lösung bekannter schubweicher Modelle nach Reissner bzw. Mindlin reproduziert. Nach bestem Wissen und Gewissen stellt die schubweiche, rotationsfreie Schalenformulierung aus OESTERLE U. A. (2016) die erste ihrer Art dar, die genau die Mindlin-Lösung reproduziert. Um eine einfache Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird die genannte Schalenformulierung auf eine Plattenformulierung reduziert und im Folgenden mit anderen Formulierungen verglichen.

In Abbildung 6.6 wird die Vorzeichenkonvention der Verschiebungs- und Schnittgrößen einer Platte eingeführt. Je nach Plattenformulierung wird die Kinematik unterschiedlich parametrisiert. Eine kompakte Zusammenstellung der Kinematik hier beschriebener Formulierungen ist in Tabelle 6.1 dargestellt. An dieser Stelle wird auf eine detaillierte

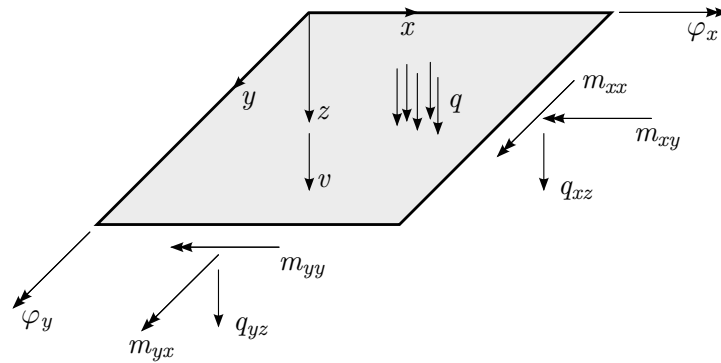


Abbildung 6.6: Definition der Verschiebungs- und Schnittgrößen einer Platte.

Formulierung (Parameter)	Rotationen	Schubwinkel	Krümmungen und Verwindung
<b>RM-st</b> ( $v, \varphi_x, \varphi_y$ )	$\varphi_x = \varphi_x$ $\varphi_y = \varphi_y$	$\gamma_{xz} = v_{,x} + \varphi_y$ $\gamma_{yz} = v_{,y} - \varphi_x$	$\kappa_{xx} = \varphi_{y,x}$ $\kappa_{yy} = -\varphi_{x,y}$ $\kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\varphi_{y,y} - \varphi_{x,x})$
<b>RM-hr</b> ( $v, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ )	$\varphi_x = +v_{,y} - \gamma_{yz}$ $\varphi_y = -v_{,x} + \gamma_{xz}$	$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}$ $\gamma_{yz} = \gamma_{yz}$	$\kappa_{xz} = -v_{,xx} + \gamma_{x,x}$ $\kappa_{yz} = -v_{,yy} + \gamma_{y,y}$ $\kappa_{xy} = -v_{,xy} + \frac{1}{2}(\gamma_{xz,y} + \gamma_{yz,x})$
<b>RM-hd</b> ( $v, v_{s_x}, v_{s_y}$ )	$\varphi_x = +v_{,y} - v_{s_y,y}$ $\varphi_y = -v_{,x} + v_{s_x,x}$	$\gamma_{xz} = v_{s_x,x}$ $\gamma_{yz} = v_{s_y,y}$	$\kappa_{xz} = -v_{,xx} + v_{s_x,xx}$ $\kappa_{yz} = -v_{,yy} + v_{s_y,yy}$ $\kappa_{xy} = -v_{,xy} + \frac{1}{2}(v_{s_x,xy} + v_{s_y,xy})$
<b>SD</b> ( $v, v_s$ )	$\varphi_x = +v_{,y} - v_{s,y}$ $\varphi_y = -v_{,x} + v_{s,x}$	$\gamma_{xz} = v_{s,x}$ $\gamma_{yz} = v_{s,y}$	$\kappa_{xz} = -v_{,xx} + v_{s,xx}$ $\kappa_{yz} = -v_{,yy} + v_{s,yy}$ $\kappa_{xy} = -v_{,xy} + v_{s,xy}$

Tabelle 6.1: Vergleich der Kinematik unterschiedlicher Schubweicher Plattenformulierungen.

Herleitung verzichtet, da sie analog zur Herleitung bei Balken bzw. Schalen ist. Jede Plattenformulierung wird nach ihrer zugehörigen Schalenformulierung benannt, um die direkte Verbindungen aufzuzeigen. Die für die Darstellung einer reinen Plattenkinematik benötigten Parameter bzw. Freiheitsgrade (FHG) sind in Tabelle 6.1 jeweils mit angegeben.

Bei der gewöhnlichen RM-st-Formulierung (st = standard) werden die Gesamtverschiebung  $v$  sowie die beiden Totalrotationen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  parametrisiert. Im Rahmen eines numerischen Lösungsverfahrens wie der FEM tritt für eine Equal-Order-Interpolation Querschublocking für Biegung um beide Achsen auf. Wie bei Balken- und Schalenformu-

lierungen, können im Grenzfall  $t \rightarrow 0$  die Zwangsbedingungen  $\gamma_{xz} = 0$  und  $\gamma_{yz} = 0$  durch hierarchische Reparametrisierungen erfüllt werden. Bei der RM-hd-Formulierung ist, wie bei Balken und Schalen, eine alternative Parametrisierung möglich, bei der die Biegeverschiebung  $v_b$  die Gesamtverschiebung  $v$  als Primärvariable ersetzt. Die Ergebnisse beider Varianten sind identisch. Die SD-Formulierung (SD = *shear deformable*) orientiert sich an der, in der Literatur üblichen, rotationsfreien Parametrisierung mit nur einer Schubverschiebung  $v_s$ . Für beide rotationsfreie Formulierungen, RM-hd und SD, ist bereits auf Theorieebene zu sehen, dass sowohl die kinematischen Gleichungen für die Schubverzerrungen als auch für die Krümmungen vollständig ausgewogen sind. Das bedeutet, für jede Art von Equal-Order-Interpolation ist, neben einer guten Approximation der Verschiebungslösung, eine oszillationsfreie Approximation der Spannungsergebnisse zu erwarten.

In Anlehnung an die Abbildungen 5.3 und 6.4, stellt Abbildung 6.7 die geometrischen Interpretationen der Kinematik der unterschiedlichen Parametrisierungen dar. Gedankliche Teildeformationen und entsprechende Rotationen der Direktoren sind für alle vier Parametrisierungen im Schnitt  $\bar{1}$ - $\bar{1}$  dargestellt. Der Direktor in der undeformierten Lage wird stets mit  $\mathbf{A}_3$  bezeichnet, der endgültige Direktor nach klassischer Mindlin-Kinematik mit  $\mathbf{a}_3$ . Die oberen drei Parametrisierungen stellen dabei unterschiedliche *Formulierungen* des gleichen *Modells* nach Reissner bzw. Mindlin dar. Ein besonderes Augenmerk liegt auf dem Vergleich der Varianten RM-hd und SD. Zunächst ist auffällig, dass die SD-Formulierung die einzige ist, bei der nur zwei anstatt drei Primärvariablen parametrisiert sind. Es stellt sich die Frage, ob eine 2-Parameter-Plattenformulierung das typische 3-Parameter-Plattenmodell nach Mindlin reproduzieren kann.

In den genannten Veröffentlichungen werden die Rotationen nur in Abhängigkeit einer Biegeverschiebung ausgedrückt, die hier mit  $\check{v}_b$  bezeichnet wird, um sie von  $v_b$  der 3-Parameter-Formulierung RM-hd unterscheiden zu können. Aus Abbildung 6.7 ist ersichtlich, dass im allgemeinen Fall  $\check{v}_b \neq v_b$  gilt. Es gibt Sonderfälle, in denen die SD-Formulierung identische Ergebnisse wie die RM-hd-Formulierung liefert ( $\mathbf{a}_3 = \check{\mathbf{a}}_3$ ). Das ist jedoch nur möglich, falls  $v_{s_x} = v_{s_y} = v_s$  und somit  $\check{v}_b = v_b + v_{s_x} = v_b + v_{s_y}$  gilt. Diese Bedingung ist für einige Rechteckplatten mit sogenanntem Hard-Support ( $v = 0$  und Rotation senkrecht zum Rand gleich null) erfüllt, was sich auch analytisch zeigen lässt. Doch bereits für den einfachsten Fall einer quadratischen Platte mit allseitigem Soft-Support (nur  $v = 0$ ) ist die Bedingung  $v_{s_x} = v_{s_y} = v_s$  nicht mehr erfüllt. Somit konvergiert die Lösung der SD-Formulierung nicht gegen die Lösung des klassischen Mindlin-Modells. Dies kann bereits auf Theorieebene gezeigt werden.

Über die Werkstoffgleichungen lassen sich die statischen Größen aus Abbildung 6.6 mit den kinematischen Größen aus Tabelle 6.1 in Verbindung setzen. Unter der Annahme

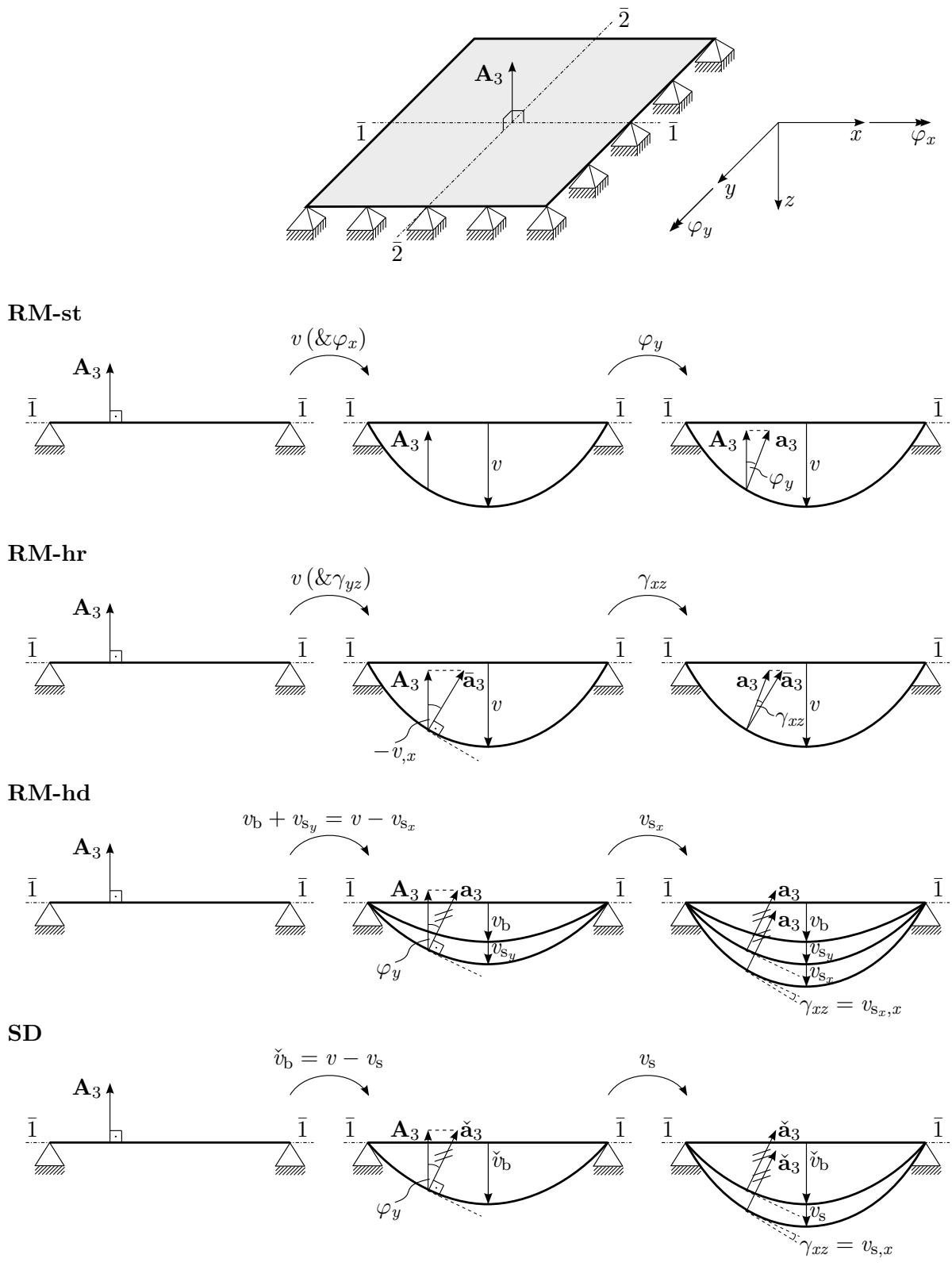


Abbildung 6.7: Vergleich der linearisierten Kinematik Schubweicher Plattenformulierungen.

eines isotropen, linear elastischen Materialverhaltens gilt

$$\begin{aligned} m_{xx} &= K (\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy}), \\ m_{yy} &= K (\kappa_{yy} + \nu \kappa_{xx}), \\ m_{xy} &= K (1 - \nu) \kappa_{xy}, \end{aligned} \tag{6.64}$$

wobei  $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  die Plattenbiegesteifigkeit,  $t$  die Plattendicke,  $E$  den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Poissonzahl beschreibt.

Warum die SD-Formulierung in allgemeinen Fällen nicht das Mindlin-Modell abbilden kann, wird am einfachen Beispiel einer rechteckigen Platte mit allseitigem Soft-Support gezeigt. Im Falle des Mindlin-Modells lässt sich in der Lösung der sogenannte Randschichteffekt beobachten, der weder beim Mindlin-Modell mit Hard-Support oder Einspannung noch beim Kirchhoff-Modell auftritt. Für das genannte Beispiel nimmt die Mindlin-Lösung für das Drillmoment in der Nähe der Eckpunkte seine Maximal- bzw. Minimalwerte an, verschwindet aber vollständig entlang der Kanten. In dieser Randschicht sind im Fall von FE-Analysen dünner Platten sehr feine Netze nötig, um die steilen Gradienten zufriedenstellend abzubilden. In der analytischen Mindlin-Lösung gilt an allen vier Kanten die Bedingung

$$m_{xy} = 0. \tag{6.65}$$

Zunächst soll erklärt werden, warum das Kirchhoff-Modell die Bedingung (6.65) bei allseitig gelenkiger Linienlagerung nicht erfüllen kann. Beispielsweise gilt für die Kante bei  $y = 0$  aus Abbildung 6.6 neben  $v = 0$  bereits  $v_{,x} = 0$ . Soll Gleichung (6.65) erfüllt werden, folgt aus Gleichung (6.64) die Bedingung

$$\kappa_{xy} = v_{,xy} = v_{,yx} = 0. \tag{6.66}$$

Da am Rand bei  $x = 0$  und somit auch an der Ecke bei  $x = y = 0$  bereits  $v_{,y} = 0$  gilt, kann Gleichung (6.66) nur erfüllt sein, falls  $v_{,y} = 0$  entlang des gesamten Randes bei  $y = 0$  gilt. Dies entspricht jedoch einer Einspannung und widerspricht der Forderung nach gleichzeitiger Erfüllung einer gelenkigen Lagerung und eines verschwindenden Drillmoments entlang des Randes.

In analoger Art und Weise lässt sich für die SD-Formulierung ein Widerspruch zeigen. Fordert man die Erfüllung eines allseitigen Soft-Supports für die Platte aus Abbildung 6.6, gilt beispielsweise entlang des Randes bei  $y = 0$

$$\kappa_{xy} = -v_{,xy} + v_{s,xy} = -\check{v}_{b,xy} = -\check{v}_{b,yx} = 0. \tag{6.67}$$



Entlang aller Ränder gilt  $v = \check{v}_b + v_s = 0$ , entlang des Randes bei  $x = 0$  gilt zusätzlich

$$v_{,y} = \check{v}_{b,y} + v_{s,y} = 0, \quad (6.68)$$

entlang des Randes bei  $y = 0$  gilt entsprechend

$$v_{,x} = \check{v}_{b,x} + v_{s,x} = 0. \quad (6.69)$$

An der Ecke bei  $x = y = 0$  gilt aus Gleichung (6.68)

$$\check{v}_{b,y} = -v_{s,y}. \quad (6.70)$$

In Gleichung (6.67) wird gefordert, dass  $\check{v}_{b,y}$  entlang des Randes bei  $y = 0$  konstant ist. Somit müsste  $\check{v}_{b,y}$  entlang des gesamten Randes bei  $y = 0$  den Wert  $-v_{s,y} = -\gamma_{yz}$  an der Ecke  $x = y = 0$  annehmen. Daraus würde  $v_{,y} = 0$  entlang des gesamten Randes bei  $y = 0$  und somit, wie bei der Kirchhoff-Theorie, die Nichterfüllung einer gelenkigen Lagerung folgen. Dieser Widerspruch zeigt bereits auf Theorieebene, dass die SD-Formulierung in allgemeinen Fällen nicht die Lösung des Mindlin-Modells abbilden kann. Dies wird in Abschnitt 8.1.1 durch ein numerisches Experiment untermauert.

## 6.9 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden primale Schalenformulierungen vorgestellt, die sich in der Parametrisierung der Querschubanteile unterscheiden, d. h. durch hierarchische Schubrotationen bzw. Schubverschiebungen. Beide Parametrisierungen führen im Kontext numerischer Approximationsverfahren wie der FEM, auf Elemente, die für jede Equal-Order-Interpolation der primalen Variablen frei von Querschublocking sind. Da die hierarchische Konstruktion das schubstarre Kirchhoff-Love-Modell als Basis beinhaltet, müssen zur Erfüllung der Konsistenz mindestens  $C^1$ -kontinuierliche Formfunktionen zur Diskretisierung verwendet werden.

Für beide hierarchischen Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen wurde eine neuartige, einfache Erweiterung auf Problemstellungen mit großen Rotationen vorgestellt. Die zugrunde liegende Annahme ist, dass die Querschubrotationen für eine breite Klasse von Schalenproblemen eher klein sind, wohingegen die Gesamtrotationen beliebig groß sein können. Diese Annahme führt zu einer additiven Zerlegung der Green-Lagrange-Verzerrungen in vollständig nichtlineare Anteile vom Kirchhoff-Love-Typ und hierarchisch addierte, linearisierte Querschubanteile.

Im Kontext alternativer Formulierungen schubweicher Platten wurden die unterschiedlichen Parametrisierungskonzepte miteinander verglichen. Es konnte analytisch gezeigt werden, dass Plattenformulierungen mit einer Parametrisierung der Querschubanteile durch nur *eine* Schubverschiebung das schubweiche Plattenmodell nach Mindlin bzw. Reissner nicht abbilden können. Die hier vorgestellten Platten- bzw. Schalenformulierungen mit *zwei* hierarchischen Schubverschiebungen (RM-hd) sind womöglich die ersten ihrer Art, die im geometrisch linearen Fall das Mindlin-Modell widerspruchsfrei abbilden können. Zudem sind die RM-hd-Formulierungen im Rahmen einer primalen Methode intrinsisch frei von Querschublocking und lassen eine gute Approximation der Spannungserwartungen erwarten. Die intrinsische Vermeidung von Membranlocking bei primalen Formulierungen konnte bisher noch nicht erreicht werden. Ein entsprechender variationeller Ansatz zur diskretisierungsunabhängigen Vermeidung aller geometrischen Locking-Effekte ist Gegenstand des nächsten Kapitels.

---

## Eine variationelle Methode zur intrinsischen Vermeidung von Locking-Effekten

Die vorgestellten hierarchischen Formulierungen für Balken, Platten und Schalen sind intrinsisch frei von Querschublocking. Im Rahmen dieser primalen Einfeldformulierungen kann Querschublocking a priori, bereits vor der Diskretisierung, ausgeschlossen werden. Im Speziellen hat sich herausgestellt, dass die Parametrisierung der hierarchischen Querschubanteile durch *Verschiebungsgrößen* besondere Vorteile aufweist. Im Gegensatz zur Parametrisierung der Querschubanteile durch Schubrotationen, d. h. *Verzerrungen*, kann bei der Parametrisierung durch *Verschiebungen* ein optimales Konvergenzverhalten für die Ergebnisse der Querkräfte erreicht werden.

Die Erweiterung des hierarchischen Konzepts auf die intrinsische Vermeidung von Membranlocking ist nicht leicht zu bewerkstelligen. Die Vermeidung von Membranlocking ist für typische Schalenprobleme jedoch unabdingbar. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel eine variationelle Formulierung eingeführt, die eine effiziente und allgemeine Lösung dieser Problematik verspricht, siehe auch BIEBER U. A. (2018).

Mehrfeldformulierungen benötigen stets eine geeignete Wahl von Ansatzräumen für die zusätzlichen Verzerrungs- oder Spannungsparameter. Um ein optimales Verhalten zu gewährleisten, müssen typischerweise unterschiedliche Ansatzräume für Verschiebungen und Verzerrungen bzw. Spannungen gewählt werden. Die Wahl der verschiedenen Ansatzräume muss für jedes Diskretisierungsschema neu überdacht werden. Im Speziellen erscheint eine allgemeine Erweiterung auf beliebige glatte Ansatzräume, wie z. B. im Kontext der IGA oder netzfreier Methoden, sehr komplex bzw. nur schwer möglich.

Das hier vorgestellte gemischte Prinzip basiert auf einer ausschließlichen Parametrisierung von *generalisierten Verschiebungen*. Die Parametrisierung von *Verschiebungen*

anstatt *Verzerrungen* oder Spannungen verspricht, analog zu den vorgestellten primalen Konzepten, eine optimale Qualität der berechneten Spannungsergebnisse. Die Parametrisierung auf Verschiebungsebene ermöglicht eine Equal-Order-Interpolation aller involvierten Größen. Eine Erweiterung auf beliebige Diskretisierungsschemata erscheint dadurch erreichbar.

In diesem Kapitel wird eine neuartige variationelle Methode für geometrisch lineare und nichtlineare Problemstellungen präsentiert. Aus dem generellen Konzept werden spezifische Formulierungen für Balken, Platten und Schalen entwickelt, die für jegliche Art von Diskretisierungsschema gültig sind.

## 7.1 Grundkonzept der Methode

Startpunkt ist das Prinzip von Hellinger-Reissner (HR), siehe Abschnitt 2.6.2,

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) + \Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}(\mathbf{u}) \rightarrow \text{stat.}, \quad (7.1)$$

welches einen einfachen Zugang zum Grundkonzept der Methode ermöglicht. Alternative Herleitungen, z. B. basierend auf dem Prinzip von Hu-Washizu, sind ebenfalls denkbar. In diesem Abschnitt steht eine möglichst kompakte und einfache Darstellung der Grundidee im Vordergrund, ohne dabei die Allgemeinheit zu beschränken. Mit dem Ziel einer leichten Lesbarkeit werden die nachfolgenden Gleichungen in gleicher Notation wie in der Tensorschreibweise in Matrixschreibweise dargestellt. Für den externen Anteil aus Gleichung (7.1) gilt dann

$$\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} (\mathbf{u}^{\text{T}} \hat{\mathbf{b}}) \, d\Omega_{\text{R}} + \int_{\Gamma_{\text{N}}} (\mathbf{u}^{\text{T}} \hat{\mathbf{T}}) \, d\Gamma_{\text{N}}. \quad (7.2)$$

Für ein Konstitutivgesetz vom St.-Venant-Kirchhoff'schen Typ lässt sich der interne Anteil spezifizieren zu

$$\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{S}^{\text{T}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{S} \right) \, d\Omega_{\text{R}}. \quad (7.3)$$

Dabei beschreibt  $\mathbf{u}$  die Verschiebungen,  $\mathbf{S}$  den PK2-Spannungstensor,  $\mathbf{C}$  den linear elastischen Materialtensor,  $\hat{\mathbf{b}} = \rho \mathbf{b}$  die Volumenkräfte und  $\hat{\mathbf{T}}$  den externen Spannungsvektor auf dem Neumann-Rand  $\Gamma_{\text{N}}$ . Die im Kontext von Mehrfeldfunktionalen verwendeten Fußzeiger geben an, aus welcher freien Variable eine Größe berechnet wird.  $\mathbf{E}_{\mathbf{u}}$  beschreibt z. B. den gewöhnlichen Green-Lagrange-Verzerrungstensor, welcher aus dem

Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  über die kinematische Beziehung

$$\mathbf{E}_u = \mathcal{L}(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (7.4)$$

berechnet wird. Der Operator  $\mathcal{L}(\mathbf{u})$  beschreibt den im Allgemeinen nichtlinearen Differentialoperator, der durch die kinematischen Gleichungen des zugrunde liegenden Strukturmodells definiert ist. Wenn neben dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  die Green-Lagrange-Verzerrungen  $\mathbf{E}$ , anstatt dem PK2-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , parametrisiert werden sollen, kann man

$$\mathbf{S} =: \mathbf{S}_E = \mathbf{C}\mathbf{E} \quad (7.5)$$

definieren. Das Einsetzen der Gleichung (7.5) in die Gleichung (7.3) liefert

$$\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} - \mathbf{E}_u^T \mathbf{C} \mathbf{E} \right) d\Omega_R. \quad (7.6)$$

Die Formulierung von finiten Elementen auf Basis von Gleichung (7.3) oder (7.6), die stabil und vollständig lockingfrei sind, erfordert eine sorgfältige Wahl der Ansatzräume für die Spannungen bzw. Verzerrungen. Typischerweise müssen Ansätze niedrigerer Ordnung gewählt werden, was in mehreren unterschiedlichen FE-Netzen resultiert. Wenn die Diskretisierung nicht auf einfachen Lagrange-Polynomen basiert, lässt sich ein geeigneter Ansatz „niederer“ Ordnung nicht ohne Weiteres finden. Speziell für glatte, unstrukturierte Diskretisierungen, z. B. basierend auf T-Splines oder netzfreien Konzepten, erscheint die Wahl optimaler Ansatzräume nur schwer möglich.

Um diese nachteilige Eigenschaft a priori zu vermeiden, werden die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  reparametrisiert. Im Sinne einer Parametrisierung durch generalisierte *Verschiebungsgrößen* werden die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  durch einen linearen Differentialoperator  $\bar{\mathcal{L}}$  an ein freies Feld  $\bar{\mathbf{u}}$  gekoppelt, d. h.

$$\mathbf{E} =: \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{u}}. \quad (7.7)$$

Die Definition von  $\bar{\mathcal{L}}$  hängt in spezifischer Weise vom zugrunde liegenden Modell ab. Beispielsweise unterscheidet sich  $\bar{\mathcal{L}}$  für das Timoschenko-Balkenmodell, die zweidimensionale Elastizität oder das Kirchhoff-Love-Schalenmodell, folgt jedoch in allen Fällen gleichen einfachen Regeln, die genauer in Abschnitt 7.2 beschrieben werden. Im Allgemeinen ist  $\bar{\mathcal{L}}$  *nicht* identisch zum Differentialoperator  $\mathcal{L}$  aus Gleichung (7.4).

Die Kernidee der vorgeschlagenen Methode besteht darin, dass die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  aus partiellen Ableitungen des generalisierten Verschiebungsfelds  $\bar{\mathbf{u}}$  berechnet werden. Die zuvor beschriebenen Ansatzräume „niederer“ Ordnung werden somit automatisch im

Rahmen einer Equal-Order-Interpolation konstruiert. Nicht in allen Fällen stellt  $\bar{\mathbf{u}}$  ein Feld mit der physikalischen Einheit von Verschiebungen dar, was die Begrifflichkeit der *generalisierten* Verschiebungsgrößen zum Ausdruck bringen soll. In welchen Fällen  $\bar{\mathbf{u}}$  tatsächlich ein *Verschiebungsfeld* ist, wird in Abschnitt 7.2 näher erläutert.

Das Einsetzen der Gleichung (7.7) in die Gleichung (7.6) führt zu einem modifiziertes Prinzip von Hellinger-Reissner, in dem  $\mathbf{u}$  und  $\bar{\mathbf{u}}$  die unabhängigen Felder darstellen:

$$\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} \right) d\Omega_{\text{R}}. \quad (7.8)$$

Die Variation der Gleichung (7.8) führt zu

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \delta \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} - \delta \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{C} \delta \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} \right) d\Omega_{\text{R}} \\ &= \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \delta \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}^{\text{T}} \mathbf{C} (\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}) - \delta \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} \right) d\Omega_{\text{R}}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Eine Equal-Order-Interpolation der freien Felder  $\mathbf{u}$  und  $\bar{\mathbf{u}}$  führt zu den Approximationen

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I \mathbf{d}^I = \mathbf{N} \mathbf{d}, \quad \bar{\mathbf{u}}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N^I \bar{\mathbf{d}}^I = \mathbf{N} \bar{\mathbf{d}}. \quad (7.10)$$

Die Vektoren  $\mathbf{d}^I$  und  $\bar{\mathbf{d}}^I$  beinhalten die Knotenfreiheitsgrade,  $N^I$  sind die Formfunktionen. In kompakter Darstellung können alle Freiheitsgrade und Formfunktionen in Vektoren  $\mathbf{d}$  bzw.  $\bar{\mathbf{d}}$  und einer Matrix  $\mathbf{N}$  gesammelt werden. Der Kopfzeiger  $h$ , der anzeigt, dass eine Größe diskretisiert ist, wird nachfolgend zur besseren Lesbarkeit weggelassen. Über den Zusammenbau zum Gesamtsystem lassen sich die diskreten Verschiebungen in globalen Vektoren  $\mathbf{D}$  bzw.  $\bar{\mathbf{D}}$  zusammenfassen. Im Sinne einer kompakten Schreibweise wird der globale Vektor aller (generalisierten) Verschiebungsfreiheitsgrade definiert zu

$$\check{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Mit der Gleichung (7.11) lässt sich die Linearisierung der Gleichung (7.9) auf globaler Ebene darstellen zu

$$\begin{aligned} \text{LIN } \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}} &= \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}} + \Delta \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}} \\ &= \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}} + \delta \Pi_{\text{HR}, \check{\mathbf{D}}}^{\text{int}} \Delta \check{\mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Alternativ kann die Linearisierung aus Gleichung (7.12) auf Knoten- oder Elementebene dargestellt werden.

Im nächsten Schritt soll der Term  $\delta\Pi_{\text{HR},\check{\mathbf{D}}}^{\text{int}}$  detaillierter ausgeschrieben werden, da er die Tangentensteifigkeit definiert. Mit der Gleichung (7.9) gilt

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{HR},\check{\mathbf{D}}}^{\text{int}} = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( +\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} + \delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \delta\mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} \right. \\ \left. - \delta\mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}}\mathbf{C}\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} \right) d\Omega_{\text{R}}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Falls  $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}}$  nur linear von den Freiheitsgraden aus  $\check{\mathbf{D}}$  abhängt, wie in Gleichung (7.7) beschrieben, verschwindet  $\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}}$  und Gleichung (7.11) reduziert sich zu

$$\delta\Pi_{\text{HR},\check{\mathbf{D}}}^{\text{int}} = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( +\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \delta\mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} - \delta\mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} \right) d\Omega_{\text{R}}. \quad (7.14)$$

Man beachte, dass Gleichung (7.14) in Abhängigkeit der Green-Lagrange-Verzerrungen und den PK2-Spannungen hergeleitet wurde. Für geometrisch lineare Probleme ist  $\mathbf{E}_{\mathbf{u}}$  linear von den Verschiebungsfreiheitsgraden  $d^I$  abhängig, weshalb der Ausdruck  $\delta\mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}$  verschwindet. Somit reduziert sich die Gleichung (7.14) für geometrisch lineare Probleme auf

$$\delta\Pi_{\text{HR},\check{\mathbf{D}}}^{\text{int}} = \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( +\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \delta\mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}}\mathbf{C}\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}},\check{\mathbf{D}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u},\check{\mathbf{D}}}^{\text{T}}\mathbf{C}\delta\mathbf{E}_{\check{\mathbf{u}}} \right) d\Omega_{\text{R}}. \quad (7.15)$$

Die bisher vorgestellten Gleichungen beschreiben ein allgemein gültiges, gemischtes Prinzip, basierend auf zwei unabhängigen Feldern  $\mathbf{u}$  und  $\check{\mathbf{u}}$ , wobei  $\check{\mathbf{u}}$  in vielen Fällen die Einheit einer Verschiebung hat. Dennoch ist an dieser Stelle klarzustellen, dass  $\mathbf{u}$  das tatsächliche, physikalische Verschiebungsfeld beschreibt, mit dem beispielsweise die Geometrie aktualisiert wird. Das Feld  $\check{\mathbf{u}}$  wird lediglich dazu benötigt, ein geeignetes Verzerrungsfeld im Rahmen einer Equal-Order-Interpolation zu konstruieren. Diese allgemeine Formulierung wird im nächsten Abschnitt für verschiedene Strukturmodelle konkretisiert.

## 7.2 Spezifische Formulierungen für ausgewählte Strukturmodelle

Im folgenden Abschnitt wird das vorgestellte Konzept für die Formulierung einiger strukturmechanischer Modelle spezifiziert. Den Startpunkt bilden Formulierungen für

Timoschenko-Balken und Mindlin-Platten, welche frei von Querschublocking sind. Anschließend wird die Erweiterung des vorgestellten Grundkonzepts auf die Vermeidung von Membranlocking in Kirchhoff-Love- und Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen diskutiert.

Alle Formulierungen haben die besondere Eigenschaft, dass keinerlei spezifische Information des zugrunde liegenden Diskretisierungsschemas beachtet werden muss. Das bedeutet, dass die vorgestellten Gleichungen sowohl für gewöhnliche  $C^0$ -kontinuierliche sowie glatte isogeometrische finite Elemente als auch netzfreie Diskretisierungen gültig sind. Für jede Art von Equal-Order-Interpolation aller freien Variablen werden automatisch geeignete Ansatzräume generiert. Besonders für komplexe Diskretisierungsverfahren stellt dies einen großen Vorteil dar. Die verwendeten Formfunktionen müssen nur die üblichen Bedingungen wie Vollständigkeit und Kompatibilität in Abhängigkeit vom variationellen Index  $c$  erfüllen, siehe Abschnitt 3.2.

Die Definition des zusätzlichen generalisierten Verschiebungsfelds  $\bar{\mathbf{u}}$  folgt für alle Formulierungen einem einfachen und einheitlichen Schema. Das Feld  $\bar{\mathbf{u}}$  wird stets als Stammfunktion der von Locking betroffenen Verzerrungskomponenten definiert. Das Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  folgt aus partieller Ableitung von  $\bar{\mathbf{u}}$  nach einer kartesischen oder krummlinigen Koordinate. Der zugehörige Differenzialoperator  $\bar{\mathcal{L}}$  ist dadurch implizit definiert. Die Grundidee der Einführung von Differenzverschiebungen als Stammfunktionen der von Locking betroffenen Verzerrungskomponenten kann auf die DSG-Methode zurückgeführt werden, siehe auch Abschnitt 4.2.2.

Da ein zusätzliches, generalisiertes Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  im Rahmen eines gemischten Zweifeldprinzips eingeführt wird, wird dieses Konzept im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit als Mixed-Displacement(MD)-Methode bezeichnet.

### 7.2.1 Timoschenko-Balkenformulierung

Zunächst wird die Wahl des zusätzlichen Verschiebungsfelds  $\bar{\mathbf{u}}$  und die Konstruktion zugehöriger Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  über  $\bar{\mathcal{L}}$  für den Fall einer linearen Timoschenko-Balkenformulierung beschrieben. In den Gleichungen (7.16) und (7.17), jeweils links, sind das gewöhnliche Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und die linearen Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{u}$  dargestellt, siehe auch Gleichung (4.1) oder (5.1). Der Operator  $\mathcal{L}$  beschreibt dabei den gewöhnlichen, linearen Differenzialoperator, der die Kinematik des Timoschenko-Modells definiert. Obwohl die Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\mathbf{u}}$  in diesem Fall nur linear von  $\mathbf{u}$  abhängig sind, wird, im Sinne einer einheitlichen Darstellung, auf die Bezeichnung  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}}$  verzichtet.

Im Rahmen eines numerischen Diskretisierungsverfahrens tritt im dünnen Grenzfall Querschublocking auf. Dies wurde bereits diskutiert. Für Balkenformulierungen existiert



eine Vielzahl von Methoden, mit denen Querschublocking begegnet werden kann. Die MD-Methode soll an diesem einfachen Problem erläutert werden. Dazu werden das zusätzliche, freie Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  und das zugehörige Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  über die partielle Ableitung von  $\bar{\mathbf{u}}$  nach der kartesischen Koordinate  $x$  definiert. Die für Timoschenko-Formulierungen spezifische Wahl von  $\bar{\mathbf{u}}$  und  $\bar{\mathcal{L}}$  bzw.  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  ist in den Gleichungen (7.16) und (7.17), jeweils rechts, zu sehen:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \varphi \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_s \\ \varphi \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{,x} + \varphi \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} \bar{v}_s \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{s,x} \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix} \qquad (7.17)$$

Die neu eingeführte Variable  $\bar{v}_s$ , die als Schubverschiebung interpretiert werden kann, ist äquivalent zu der Schubklaffung  $\tilde{v}_s$  der DSG-Methode bzw. zur hierarchischen Verschiebung  $v_s$ , siehe Gleichung (4.12) bzw. (5.4).

An dieser Stelle ist anzumerken, dass  $\kappa$  nicht speziell behandelt wird, da der Ausdruck für die Krümmung nicht für Querschublocking verantwortlich ist. Somit wird keine spezielle Annahme für  $\bar{\kappa}$  getroffen, d. h.  $\bar{\kappa}$  und  $\kappa$  sind identisch. Für eine Implementierung dieser Balkenformulierung bedeutet das, dass der Biegeanteil der Steifigkeitsmatrix in identischer Weise berechnet werden kann wie bei einer gewöhnlichen primalen  $v$ - $\varphi$ -Formulierung.

Das Einsetzen der Gleichung (7.17) in die Gleichung (7.9) führt in Matrixschreibweise zu

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega_{\text{R}}} (\delta \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}^{\text{T}} \mathbf{C} (\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{u}}) - \delta \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}) \, d\Omega_{\text{R}} \\ &= \int_{\Omega_{\text{R}}} \left( \delta \begin{bmatrix} \bar{v}_{s,x} \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix}^{\text{T}} \begin{bmatrix} GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \bar{v}_{s,x} \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{,x} + \varphi \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta \begin{bmatrix} v_{,x} + \varphi \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix}^{\text{T}} \begin{bmatrix} GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{s,x} \\ \varphi_{,x} \end{bmatrix} \right) \, d\Omega_{\text{R}} \\ &= \int_{\Omega_{\text{R}}} [\delta \bar{v}_{s,x} GA \bar{v}_{s,x} - \delta \bar{v}_{s,x} GA (v_{,x} + \varphi) \\ &\quad - (\delta v_{,x} + \delta \varphi) GA \bar{v}_{s,x} - \delta \varphi_{,x} EI \varphi_{,x}] \, d\Omega_{\text{R}}, \end{aligned} \qquad (7.18)$$

wobei  $GA$  und  $EI$  die Schub- und die Biegesteifigkeit eines Balkens darstellen. Der externe Anteil  $\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}$  ergibt sich im Falle des Timoschenko-Modells zu

$$\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{ext}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} (\delta v q + \delta\varphi m) \, d\Omega_{\text{R}} + \delta v(L) \hat{Q}_L + \delta\varphi(L) \hat{M}_L - \delta v(0) \hat{Q}_0 - \delta\varphi(0) \hat{M}_0, \quad (7.19)$$

wobei  $q$  und  $m$  externe, verteilte Querkräfte bzw. Momente beschreiben. Die Länge des Balkens wird mit  $L$  bezeichnet, vorgeschriebene Querkräfte und Momente am linken bzw. rechten Rand mit  $\hat{Q}_L$ ,  $\hat{M}_L$ ,  $\hat{Q}_0$  und  $\hat{M}_0$ . Das Sortieren der Gleichung (7.18) nach  $\delta\bar{v}_{s,x}$  führt zu

$$\delta\Pi_{\text{HR}}^{\text{int}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_{\text{R}}} [\delta\bar{v}_{s,x} GA (\bar{v}_{s,x} - v_{,x} - \varphi) - (\delta v_{,x} + \delta\varphi) GA \bar{v}_{s,x} - \delta\varphi_{,x} EI \varphi_{,x}] \, d\Omega_{\text{R}}. \quad (7.20)$$

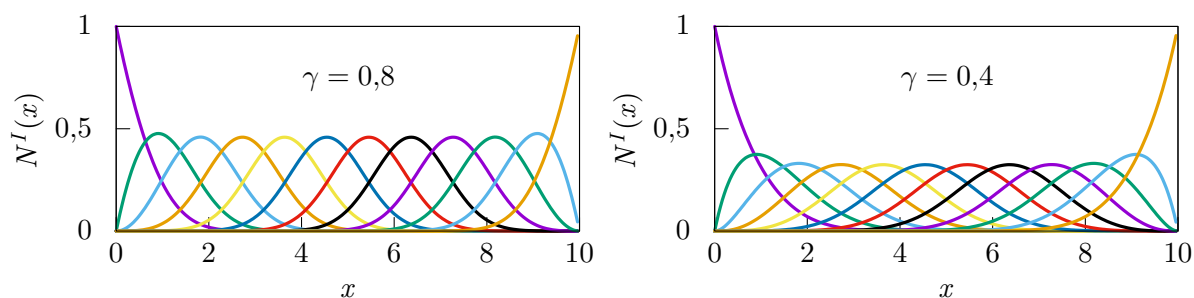
Eine partielle Integration dieser Gleichung und die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung führt zu einer Euler-Lagrange-Gleichung der Form

$$\underbrace{\bar{v}_{s,xx}}_{\gamma_{\bar{u},x}} = \underbrace{v_{,xx} + \varphi_{,x}}_{\gamma_{u,x}}. \quad (7.21)$$

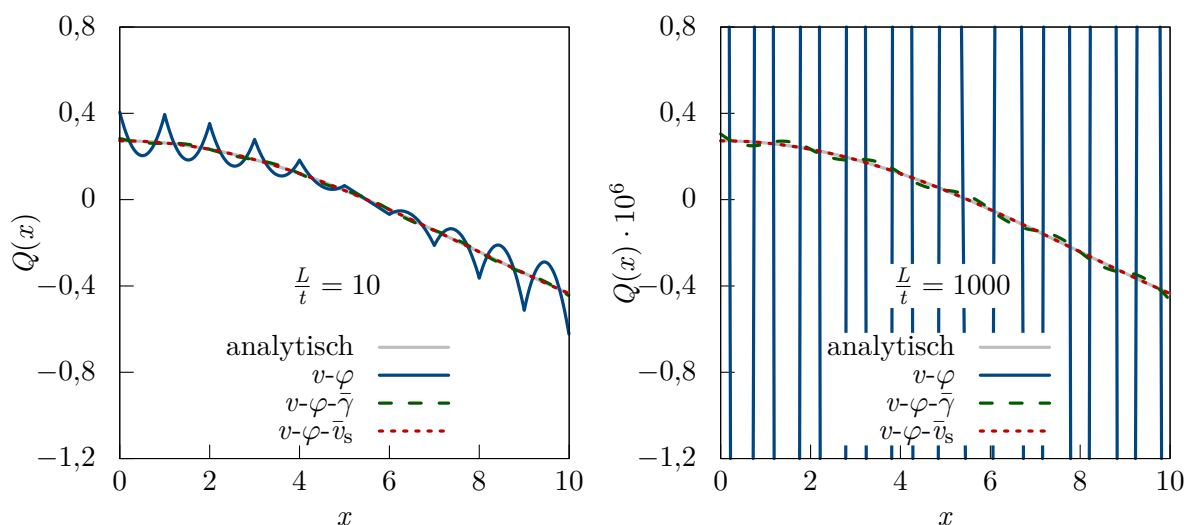
Die Gleichung (7.21) beschreibt eine zusätzliche kinematische Zwangsbedingung auf den Ableitungen von  $\gamma_{\bar{u}}$  und  $\gamma_u$ . Die anderen Euler-Lagrange-Gleichungen stellen die Gleichgewichtsbedingungen und Neumann-Randbedingungen dar. Löst man die Gleichung (7.21) nach  $\varphi_{,x}$  auf und setzt den gewonnenen Ausdruck in die Gleichung (7.18) ein, ergibt sich exakt die schwache Form der hierarchischen  $v$ - $v_s$ -Formulierung aus der Gleichung (5.9). Der einzige, kleine Unterschied liegt in der Bezeichnung der Schubverschiebungen  $v_s$  bzw.  $\bar{v}_s$ . Damit ist für den einfachen Fall eines Timoschenko-Balkens die enge Verwandtschaft der MD-Formulierung mit der hierarchischen  $v$ - $v_s$ -Formulierung gezeigt. Sie unterscheiden sich in der Art, wie die kinematische Zwangsbedingung aus Gleichung (7.21) erfüllt wird, d. h. schwach (bei MD) oder stark (bei  $v$ - $v_s$ ).

Diese besondere Eigenschaft lässt vermuten, dass die MD-Formulierung, ebenso wie die  $v$ - $v_s$ -Formulierung, intrinsisch frei von Querschublocking ist und eine optimale Konvergenz von sowohl der Verschiebungs- als auch der Spannungsgrößen zeigt. Zur numerischen Untersuchung dieser erwünschten Eigenschaft wird erneut auf das Einführungsbeispiel Abbildung 4.5 zurückgegriffen. Der gelenkig gelagerte Balken unter sinusförmiger Belastung  $q(x)$  wird mit zwei unterschiedlichen Diskretisierungsverfahren untersucht:

- Isogeometrische finite Elemente unter Verwendung von quadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen B-Splines, siehe Abbildung 3.1, rechts.



**Abbildung 7.1:** Balken unter Sinuslast, Einfluss von  $\gamma$  auf die Max-Ent-Formfunktionen einer Diskretisierung mit 12 äquidistant verteilten Knoten.

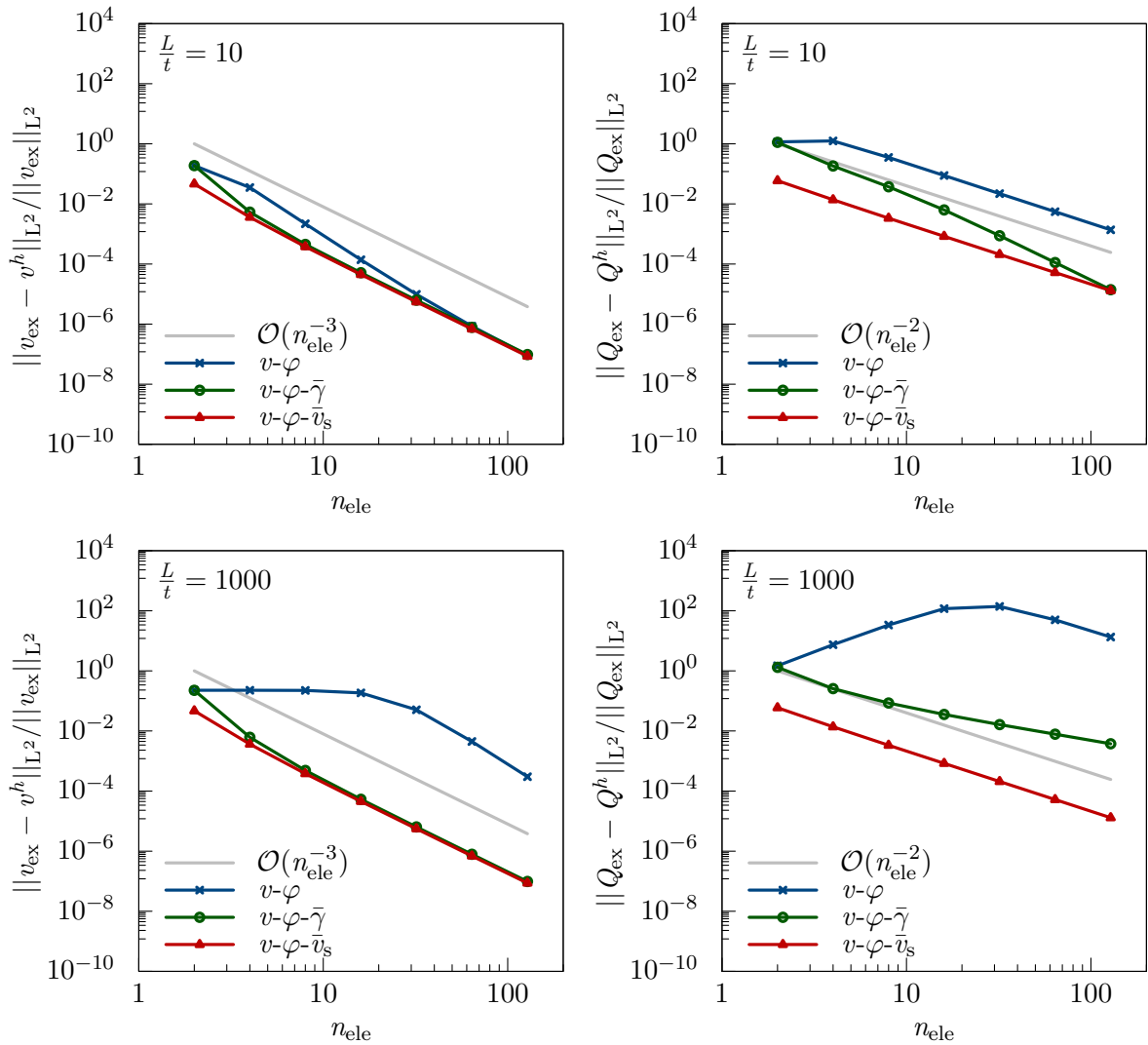


**Abbildung 7.2:** Balken unter Sinuslast, Formulierungen:  $v-\varphi/v-\varphi-\bar{\gamma}/v-\varphi-\bar{v}_s$ , B-Splines, 10 Elemente,  $p = 2$ ,  $C^1$ , Verlauf der Querkraft  $Q$ , links:  $\frac{L}{t} = 10$ , rechts:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

- Eine netzfreie Methode mit Maximum-Entropy(Max-Ent)-Ansätzen, siehe SUKUMAR (2004) und ARROYO UND ORTIZ (2006). Die hier maßgebenden Kerneigenschaften der Formfunktionen sind die  $C^\infty$ -Kontinuität im Inneren eines Gebiets sowie die Konstruktion über rationale Exponentialfunktionen in Abhängigkeit von einem Parameter  $\gamma$ , mit dem die Lokalität der Formfunktionen gesteuert werden kann, siehe Abbildung 7.1. Für die nachfolgende Untersuchung wird exemplarisch  $\gamma = 0,8$  angesetzt.

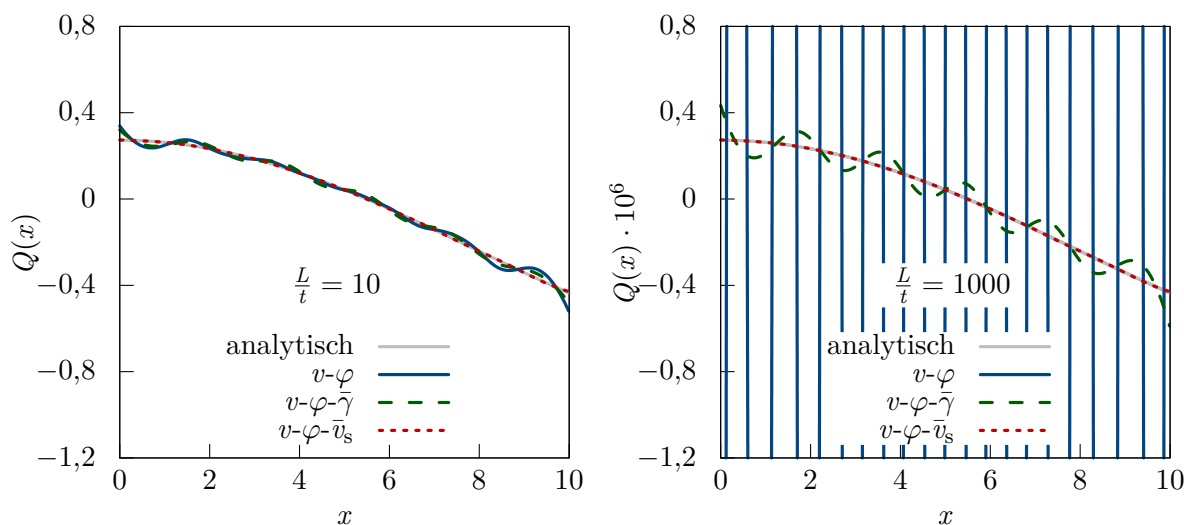
Mit diesen zwei Diskretisierungsverfahren werden drei unterschiedliche Timoschenko-Balkenformulierungen untersucht und verglichen:

- $v-\varphi$ : Eine gewöhnliche, primale  $v-\varphi$ -Balkenformulierung nach Abschnitt 5.1.



**Abbildung 7.3:** Balken unter Sinuslast, Formulierungen:  $v-\varphi/v-\varphi-\bar{\gamma}/v-\varphi-\bar{v}_s$ , B-Splines,  $p = 2$ ,  $C^1$ , relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts), oben:  $L/t = 10$ , unten:  $L/t = 1000$ .

- $v-\varphi-\bar{\gamma}$ : Eine gemischte Verschiebungs-Verzerrungs-Formulierung, basierend auf der Gleichung (7.6), hier mit  $v-\varphi-\bar{\gamma}$  bezeichnet. Analog zur Herleitung des Ausdrucks aus der Gleichung (7.21) lässt sich eine entsprechende Verwandtschaft mit der primalen  $v-\gamma$ -Formulierung aus Abschnitt 5.2 zeigen. Die Formulierungen  $v-\varphi-\bar{\gamma}$  und  $v-\gamma$  unterscheiden sich durch die schwache bzw. starke Erfüllung der kinematischen Zwangsbedingung  $\bar{\gamma} = \gamma_u$ .
- $v-\varphi-\bar{v}_s$ : Die in diesem Kapitel präsentierte MD-Formulierung nach Gleichung (7.18). Im Kontext von Timoschenko-Balken als  $v-\varphi-\bar{v}_s$ -Formulierung bezeichnet.

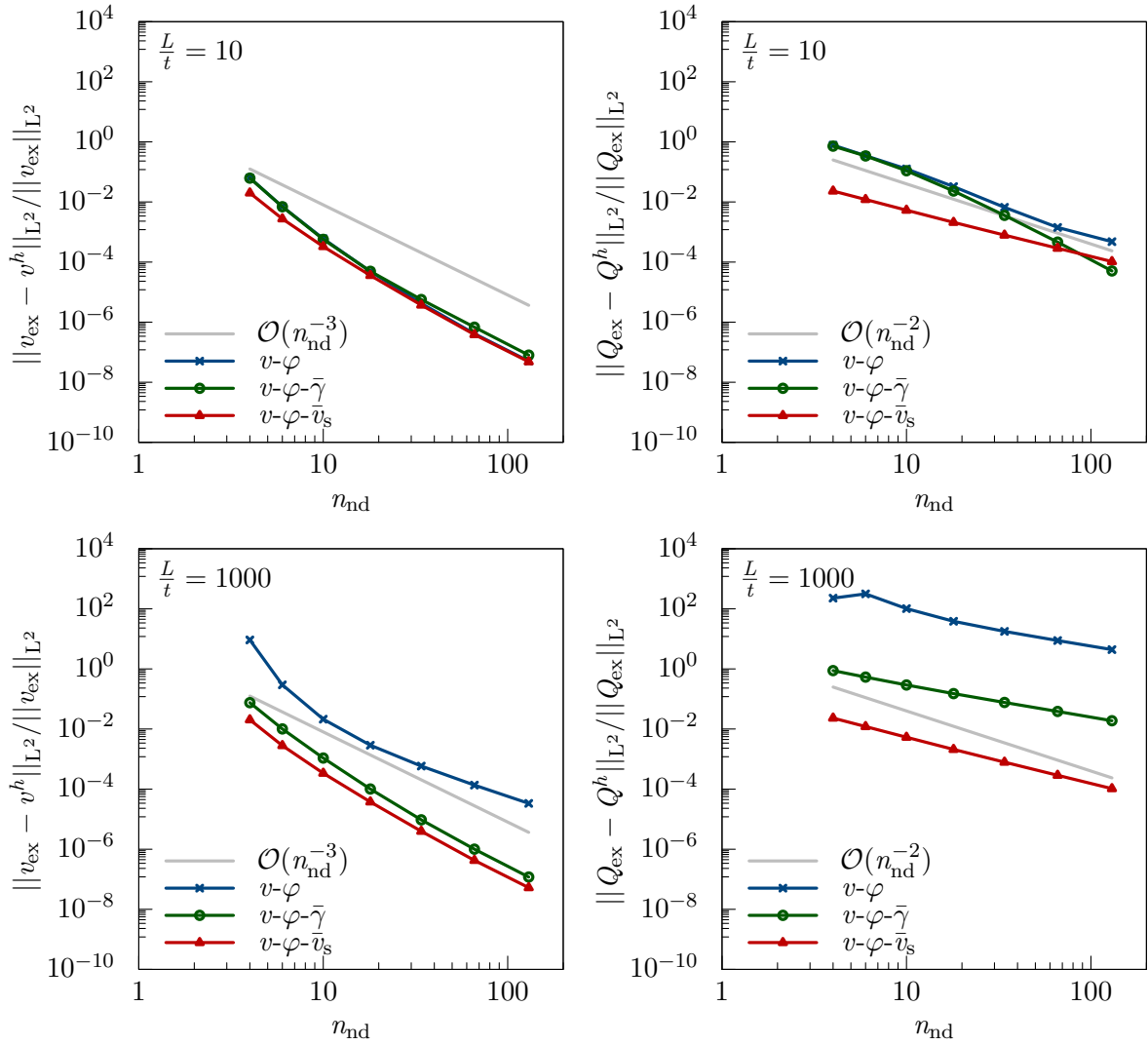


**Abbildung 7.4:** Balken unter Sinuslast, Formulierungen:  $v-\varphi/v-\varphi-\bar{\gamma}/v-\varphi-\bar{v}_s$ , Max-Ent, 12 Knoten,  $C^\infty$ ,  $\gamma = 0,8$ , Verlauf der Querkraft  $Q$ , links:  $\frac{L}{t} = 10$ , rechts:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

In allen Fällen werden jegliche freie Variablen durch eine Equal-Order-Interpolation approximiert. Das Balkenproblem wird basierend auf der zugehörigen schwachen Form untersucht, obwohl eine Kollokation der starken Form ebenfalls denkbar wäre.

In Abbildung 7.2 sind die Querkraftverläufe  $Q(x)$  der Formulierungen  $v-\varphi$ ,  $v-\varphi-\bar{\gamma}$  und  $v-\varphi-\bar{v}_s$  dargestellt. Für die B-Spline-Diskretisierung mit 10 quadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen Elementen liefert die MD-Formulierung  $v-\varphi-\bar{v}_s$  perfekte Ergebnisse, sowohl im dicken als auch im dünnen Fall. Eine entsprechende Beobachtung konnte bereits für die primale  $v-v_s$ -Formulierung gemacht werden. Während die Querkräfte der gewöhnlichen  $v-\varphi$ -Formulierung unter starken Oszillationen leiden, sind die Querkräfte der  $v-\varphi-\bar{\gamma}$ -Formulierung von deutlich besserer Qualität. Für dieses spezielle Beispiel ist die gemischte Formulierung  $v-\varphi-\bar{\gamma}$  auch der primalen  $v-\gamma$ -Formulierung überlegen, vergleiche Abbildung 5.2. Der dritte Parameter, der geringere variationelle Index und die schwache Erfüllung der Kinematik scheinen einen positiven Einfluss auf die Qualität der Querkraftlösungen zu haben.

Doch die Ergebnisse der  $v-\varphi-\bar{\gamma}$ -Formulierung sind im Allgemeinen nicht optimal. Dies lässt sich auch in den Konvergenzdiagrammen aus Abbildung 7.3 erkennen. Die Konvergenz der Querkraft ist auch bei der  $v-\varphi-\bar{\gamma}$ -Formulierung abhängig von der Schlankheit und führt im dünnen Fall zu verminderter Konvergenz. Für Problemstellungen mit anderen Randbedingungen können die Ergebnisse noch deutlich schlechter ausfallen, siehe BIEBER U. A. (2018). Die erhöhte Konvergenzrate der Querkraft im dicken Fall ist auf die höhere Ordnung der Ansätze in  $\bar{\gamma}$  zurückzuführen.



**Abbildung 7.5:** Balken unter Sinuslast, Formulierungen:  $v-\varphi/v-\varphi-\bar{\gamma}/v-\varphi-\bar{v}_s$ , Max-Ent, 12 Knoten,  $C^\infty$ ,  $\gamma = 0,8$ , relative  $L^2$ -Norm des Fehlers in  $v$  (links) bzw. in  $Q$  (rechts), oben:  $L/t = 10$ , unten:  $L/t = 1000$ .

Die MD-Formulierung  $v-\varphi-\bar{v}_s$  weist sowohl für die Konvergenz der Verschiebung als auch der Querkraft ein parameterunabhängiges, optimales Verhalten auf. Die Verschiebungskonvergenz ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-3})$ , die Querkräfte konvergieren mit  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-2})$ . Anzumerken ist, dass die beiden gemischten Formulierungen  $v-\varphi-\bar{\gamma}$  und  $v-\varphi-\bar{v}_s$  einen variationellen Index von  $c = 1$  aufweisen. Die verwandten primalen Formulierungen  $v-\gamma$  und  $v-v_s$  weisen dagegen einen variationellen Index von  $c = 2$  auf, wodurch die Konvergenzordnung der Verschiebungslösung im quadratischen Fall auf  $\mathcal{O}(n_{\text{ele}}^{-2})$  reduziert wird.

In den Abbildungen 7.4 und 7.5 sind entsprechende Ergebnisse für eine netzfreie Max-Ent-Diskretisierung mit 12 Knoten dargestellt. Wie in Abschnitt 4.2.1 bereits für isogeometrische Diskretisierungen festgestellt wurde, kann sich eine höhere Kontinuität für schlanke Strukturen negativ auf die Ergebnisqualität auswirken. Die  $C^\infty$ -Kontinuität der Max-Ent-Formfunktionen verstärkt auftretendes Querschublocking und damit einhergehende Oszillationen der Querkraft. In Abbildung 7.5 ist ersichtlich, dass eine schlankheitsunabhängige Konvergenz nur von der  $v$ - $\varphi$ - $\bar{v}_s$ -Formulierung erreicht wird. Das vorgeschlagene MD-Konzept scheint auch jenseits polynombasierter Diskretisierungskonzepte eine automatische Konstruktion des optimalen Ansatzes für die zusätzlichen Verzerrungen  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  bereitzustellen. Die optimale Wahl eines direkten Ansatzes für  $\bar{\gamma}$  der  $v$ - $\varphi$ - $\bar{\gamma}$ -Formulierung ist im Kontext netzfreier Diskretisierungen nicht klar ersichtlich.

### 7.2.2 Mindlin-Plattenformulierung

Die Anwendung des MD-Konzepts auf schubweiche Mindlin-Plattenformulierungen erfolgt in nahezu analoger Weise wie bei Timoschenko-Balkenformulierungen. Der einzige Unterschied liegt darin, dass nun zwei unabhängige Schubverzerrungen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  behandelt werden müssen, um Querschublocking vollständig zu vermeiden. Deshalb setzt sich das  $\bar{\mathbf{u}}$ -Feld aus zwei unabhängigen Schubverschiebungen  $\bar{v}_{s_x}$  und  $\bar{v}_{s_y}$  zusammen, die zur Konstruktion der zusätzlichen Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}_{xz}$  und  $\bar{\gamma}_{yz}$  partiell nach  $x$  bzw.  $y$  abgeleitet werden. In Matrixnotation gilt für die Verschiebungs- und Verzerrungsfelder:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{s_x} \\ \bar{v}_{s_y} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{,x} + \varphi_y \\ v_{,y} - \varphi_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} \bar{v}_{s_x} \\ \bar{v}_{s_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{s_x,x} \\ \bar{v}_{s_y,y} \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Die Konstruktion des Differentialoperators  $\bar{\mathcal{L}}$  folgt derselben Regel wie beim Balken. Für jede von Locking betroffene Verzerrungskomponente wird eine zusätzliche Komponente in  $\bar{\mathbf{u}}$  definiert, aus der sich die zugehörigen Verzerrungskomponenten über eine partielle Ableitung ergeben. Die partielle Ableitung erfolgt jeweils in dieselbe Richtung wie bei den gewöhnlichen Verzerrungskomponenten. Im vorliegenden Fall wird  $\bar{v}_{s_x}$  partiell nach  $x$  abgeleitet,  $\bar{v}_{s_y}$  partiell nach  $y$ . Diese Vorgehensweise ist analog zur partiellen Ableitung der entsprechenden Verschiebungsgrößen im Rahmen hierarchischer Verschiebungs- bzw. DSG-Formulierungen für Mindlin-Platten. Wie beim Timoschenko-Balken besitzen die

hier eingeführten Schubparameter  $\bar{v}_{s_x}$  und  $\bar{v}_{s_y}$  tatsächlich die physikalische Einheit einer Verschiebung.

Die Biegeanteile der Plattenformulierung werden hier nicht aufgeführt, da sie keine besondere Behandlung benötigen. Die zugehörigen Anteile zur Steifigkeitsmatrix können wie bei einer primalen Formulierung berechnet werden.

### 7.2.3 Kirchhoff-Love- und Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen

Die Hauptmotivation für die Entwicklung der MD-Methode war die Vermeidung von Membranlocking und in-plane Schublocking bei geometrisch linearen und nichtlinearen Schalenformulierungen. Die genannten Locking-Effekte treten sowohl in Kirchhoff-Love als auch Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen auf, wobei letztere grundsätzlich auch noch unter Querschublocking leiden. Die in Kapitel 6 beschriebenen hierarchischen Schalenformulierungen sind a priori frei von Querschublocking. Aus diesem Grund entfällt die Notwendigkeit einer Behandlung von Querschublocking durch das MD-Konzept. Querschublocking kann bei gewöhnlichen Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen analog zur Vorgehensweise bei Mindlin-Plattenformulierungen beseitigt werden.

Die hier gezeigte Anwendung beschränkt sich auf die Vermeidung von Membranlocking und Schublocking in der Schalenebene. Wie für Balken- und Plattenformulierungen vorgestellt, müssen die Krümmungsanteile der Green-Lagrange-Verzerrungen nicht betrachtet werden. Zur Vermeidung der gewünschten Locking-Effekte genügt die Behandlung der Membrananteile der Verzerrungskomponenten, d. h. der in  $\xi^3$ -Richtung konstanten Terme. Im Falle der drei vorgestellten Schalenformulierungen (KL, RM-hr und RM-hd) sind die Membranverzerrungsanteile identisch, siehe Gleichungen (6.20), (6.49) und (6.33). Für alle Schalenformulierungen gilt in gleicher Weise

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{(11)} \\ \bar{v}_{(12)} \\ \bar{v}_{(22)} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{E}_u^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m \\ 2E_{12}^m \\ E_{22}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} \\ \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,2} \\ \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,2} \cdot \mathbf{v}_{,2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{\bar{u}}^m = \begin{bmatrix} \bar{v}_{(11),1} \\ \bar{v}_{(12),12} \\ \bar{v}_{(22),2} \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

wobei  $(\bullet)^m$  den Membrananteil einer Größe beschreibt. Im Gegensatz zu Betrachtungen an ebenen gekrümmten Balken, siehe Gleichung (4.2), ist bei Betrachtung von  $\mathbf{E}_u^m$  nicht mehr so einfach zu erkennen, warum Membranlocking für jede Equal-Order-Interpolation auftritt. Existierende Unausgewogenheiten sind durch die Formulierung in krummlinigen



Koordinaten nicht mehr klar ersichtlich. Dennoch kann man zuversichtlich sein, dass die einfachen Regeln zur Definition des  $\bar{\mathbf{u}}$ -Felds und des zugehörigen Differentialoperators  $\bar{\mathcal{L}}$ , auch zur Vermeidung von Membranlocking führen. Der in Gleichung (7.25), rechts, implizit definierte, lineare Differentialoperator  $\bar{\mathcal{L}}$  lässt sich darstellen zu

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

wobei  $\xi^\alpha$  die krummlinigen Koordinaten auf der Schalenmittelfläche darstellen.

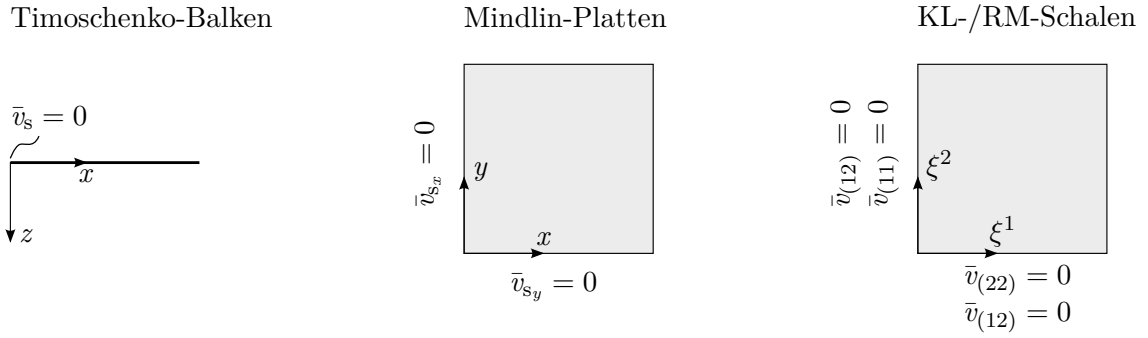
Den bisherigen, einfachen Regeln folgend, werden die Parameter  $\bar{v}_{(\alpha\alpha)}$  zur Berechnung der zusätzlichen Normalverzerrungen partiell nach  $\xi^\alpha$  abgeleitet. Der maßgebliche Unterschied zu bisherigen Ausführungen ist die Berechnung der zusätzlichen in-plane Schubverzerrungen. Die generalisierte Verschiebungsgröße  $\bar{v}_{(12)}$  ist streng genommen keine Verschiebung, da ihre physikalische Einheit von der Art „Verschiebung mal Verschiebung“, z. B.  $\text{m}^2$ , ist. Um in-plane Schublocking zu vermeiden, muss der Parameter  $\bar{v}_{(12)}$  sowohl nach  $\xi^1$  als auch  $\xi^2$  abgeleitet werden. Die Definition dieser Regel erscheint zunächst etwas willkürlich. Es lässt sich jedoch die Äquivalenz zur Behandlung der in-plane Schubverzerrungen bei der DSG-Methode zeigen. Auf die detaillierte Ausführung dieser Eigenschaft wird an dieser Stelle verzichtet. Wie bereits erwähnt, müssen die Krümmungsanteile nicht behandelt werden. Zugehörige Anteile der Steifigkeitsmatrix ergeben sich in gleicher Weise wie bei einer primalen Verschiebungsformulierung.

## 7.3 Zwangsbedingungen

Bereits für die Schalenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen (RM-hd) wurden benötigte Zwangsbedingungen auf den Schubverschiebungsparametern  $v^{s\alpha}$  diskutiert, siehe Abschnitt 6.7. Auch im Kontext aller MD-Formulierungen sind weitere Zwangsbedingungen auf dem zusätzlichen Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  nötig, um unerwünschte Nullenergiemoden zu verhindern.

Als einfaches Beispiel soll eine Mindlin-Plattenformulierung mit MD-Modifikation, siehe Abschnitt 7.2.2, betrachtet werden. Das zusätzliche Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  wird beschrieben durch

$$\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{xz}(x,y) \\ \bar{\gamma}_{yz}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{v}_{s_x}(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}_{s_y}(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$



**Abbildung 7.6:** Über Randbedingungen eingebrachte Zwangsbedingungen auf das  $\bar{\mathbf{u}}$ -Feld für Balken, Platten und Schalen.

Analog zur Gleichung (6.61) aus Abschnitt 6.7 gilt, dass jedes Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  der Form

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{s_x}(x,y) \\ \bar{v}_{s_y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_x \bar{\gamma}_{xz}(x,y) dx + C_1 + F_1(y) \\ \int_y \bar{\gamma}_{yz}(x,y) dy + C_2 + F_2(x) \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

die Gleichung (7.27) erfüllt, wobei  $C_1$  und  $C_2$  beliebige Konstanten sind.  $F_1(y)$  sei eine beliebige Funktion von  $y$ ,  $F_2(x)$  beliebig in  $x$ . Diese Mehrdeutigkeit führt zu Nullenergiemoden, die im Rahmen dieser Arbeit über zusätzliche Dirichlet-Randbedingungen unterbunden werden, siehe Abbildung 7.6. Für allgemeine Fälle, z.B. stark unstrukturierte Netze, können die zusätzlichen Zwangsbedingungen nicht mehr in Form von Randbedingungen eingebracht werden. Eine allgemein gültige Vermeidung dieser Nullenergiemoden, z.B. über Lagrange-Multiplikatoren oder Penalty-Stefigkeiten, bedarf weiterer, detaillierterer Untersuchungen.

## 7.4 Assemblierung und Lösung

Da alle freien Variablen im Rahmen des MD-Konzepts durch Equal-Order-Interpolation approximiert werden, existieren an jedem Knoten bzw. Kontrollpunkt der Diskretisierung dieselben Freiheitsgrade. Durch diese wünschenswerte Eigenschaft können jedem Knoten alle Freiheitsgrade aus Gleichung (7.10) zugewiesen werden, wodurch eine Implementierung für jedes Diskretisierungskonzept vereinheitlicht wird.

Für den Fall einer geometrisch linearen Problemstellung lässt sich das globale Gleichungssystem einer MD-Formulierung herleiten zu

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{\text{ext}} \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Die dargestellte Struktur dieses Gleichungssystems folgt der Struktur für eine typische gemischte  $\mathbf{u}\text{-}\boldsymbol{\sigma}$ - bzw.  $\mathbf{u}\text{-}\boldsymbol{\varepsilon}$ -Formulierung.

In klassischen FE-Formulierungen werden die zusätzlichen Spannungs- oder Verzerrungsparameter über statische Kondensation auf Elementlevel beseitigt. Die dafür benötigte  $C^{-1}$ -Kontinuität der zusätzlichen Ansatzräume ist im vorliegenden Fall nicht erfüllt, da alle Parameter mit denselben Formfunktionen interpoliert werden. Eine Elimination der zusätzlichen Parameter aus  $\bar{\mathbf{D}}$  wäre auf globaler Systemebene möglich. Das führt zwar zu kleineren Matrizen, diese sind allerdings dicht besetzt. Für große Diskretisierungen kann dies zu Speicherproblemen führen kann. Diese Beobachtungen wurden im IGA-Kontext bereits von ELGUEJ U. A. (2008) und ECHTER UND BISCHOFF (2010) gemacht.

Im vorgeschlagenen Konzept wird das gesamte Gleichungssystem aus Gleichung (7.29) für alle Unbekannten gelöst, ohne die zusätzlichen  $\bar{\mathbf{D}}$ -FHG zu eliminieren. Die daraus resultierenden globalen Matrizen sind zwar größer als bei einer primalen Formulierung, jedoch bleibt die Bandstruktur erhalten. In der vorliegenden Implementierung werden die Freiheitsgrade sogar knotenweise sortiert, d. h.  $\check{\mathbf{D}} = [\mathbf{d}^1, \bar{\mathbf{d}}^1, \mathbf{d}^2, \bar{\mathbf{d}}^2, \dots, \mathbf{d}^{n_{\text{nd}}}, \bar{\mathbf{d}}^{n_{\text{nd}}}]^T$ , wobei  $n_{\text{nd}}$  die Anzahl der Knoten beschreibt. Die Koeffizientenmatrix des daraus resultierenden Gleichungssystems besitzt dieselbe Bandstruktur wie die Steifigkeitsmatrix einer primalen Formulierung mit einer identischen Anzahl an Freiheitsgraden pro Knoten.

Für spezielle Diskretisierungen im IGA-Kontext könnte eine Elimination der Parameter aus  $\mathbf{D}$  über lokale Projektionsmethoden sinnvoll sein. Im Kontext NURBS-basierter Formulierungen seien hier BOUCLIER U. A. (2013), GRECO U. A. (2017) und MIAO U. A. (2017) genannt. Jedoch ist anzumerken, dass lokale Projektionsmethoden erneut von der zugrunde liegenden Diskretisierung abhängen, wodurch eine allgemeine Anwendbarkeit nicht möglich ist.

Die zusätzlichen Unbekannten der MD-Formulierungen führen im Vergleich zu primalen Formulierungen nicht zwangsläufig zu mehr Berechnungsaufwand. Im Falle geometrisch nichtlinearer Berechnungen führt die Lösung gemischter Sattelpunktprobleme, verglichen mit der Lösung elliptischer Probleme, teilweise zu einer deutlich geringeren Anzahl benötigter Iteration innerhalb eines Lastinkrements, siehe z. B. auch MAGISANO U. A. (2017) und darin zitierte Literatur.

## 7.5 Zusammenfassung

Die hier dargestellte MD-Methode basiert auf einer reparametrisierten Variante des Hellinger-Reissner(HR)-Prinzips. Bei diesem Zweifeldfunktional wird neben dem primalen Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  ein zusätzliches freies Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$  eingeführt. Aus

$\bar{\mathbf{u}}$  wird durch partielle Ableitung das Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  konstruiert. Die Definition der Komponenten von  $\bar{\mathbf{u}}$  und deren partielle Differenziation ist zwar vom Strukturmodell und der zu behandelnden Verzerrungskomponenten abhängig, erfolgt jedoch stets nach einer einheitlichen Regel.

Im Kontext numerischer Approximationsverfahren wie der FEM, ermöglicht die MD-Methode eine Konstruktion lockingfreier Formulierungen im Rahmen einer Equal-Order-Interpolation. Dieser Eigenschaft kann durch die stetig steigende Anzahl an glatten Ansatzräumen, z. B. im IGA-Kontext, eine große Bedeutung zugeordnet werden. Bei typischen gemischten Formulierungen ist die optimale Wahl der Ansatzräume für die zusätzlichen Parameter im Kontext glatter Diskretisierungskonzepte nur schwer möglich. Bei den vorgestellten MD-Formulierungen wird der optimale Ansatzraum für  $\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{u}}}$  automatisch durch partielle Ableitung des  $\bar{\mathbf{u}}$ -Felds konstruiert, unabhängig vom zugrunde liegenden Diskretisierungsverfahren.

Für ebene Timoschenko-Balken wurde die enge Verwandtschaft der MD-Formulierung  $v-\varphi-\bar{v}_s$  zur hierarchischen Balkenformulierung  $v-v_s$  aufgezeigt. Die Formulierungen unterscheiden sich nur durch die schwache bzw. starke Erfüllung einer kinematischen Zwangsbedingung. Der große Vorteil des gemischten MD-Konzepts ist die einfache Erweiterbarkeit auf die Beseitigung von Membranlocking bei Schalenformulierungen, unabhängig vom verwendeten Diskretisierungskonzept. Diese besondere Eigenschaft wird im Rahmen des nächsten Kapitels detailliert untersucht.

---

## Numerische Experimente

In diesem Kapitel wird ein vielseitiger Satz geometrisch linearer und nichtlinearer Benchmarkprobleme vorgestellt, um die maßgebenden Eigenschaften der entwickelten Schalenformulierungen zu untersuchen. Im Speziellen soll gezeigt werden, dass

- Locking intrinsisch, d. h. auf Theorieebene und somit diskretisierungsunabhängig, vermieden wird,
- sowohl die Verschiebungslösungen als auch die Ergebnisse für Spannungen bzw. Schnittgrößen von hoher Qualität sind,
- große Rotationen effizient darstellbar sind.

Um die intrinsische Vermeidung von Locking zu demonstrieren, werden im Folgenden zwei unterschiedliche glatte Diskretisierungskonzepte verwendet:

- Isogeometrische, NURBS-basierte finite Elemente mit den Polynomgraden  $p$  und  $q$  sowie maximaler Kontinuität innerhalb eines Patches von  $C^{p-1}$  und  $C^{q-1}$ .
- Ein netzfreies Diskretisierungskonzept mit Max-Ent-Ansätzen, siehe SUKUMAR (2004) und ARROYO UND ORTIZ (2006). Die Formfunktionen sind im Inneren eines Gebiets  $C^\infty$ -kontinuierlich, wobei die Lokalität vom Parameter  $\gamma$  abhängt, siehe auch Abbildung 7.1. Um die Geometrie im Rahmen des isoparametrischen Konzepts zu beschreiben, werden die Knotenkoordinaten über eine Least-Squares-Approximation bestimmt.

Mit den genannten Diskretisierungskonzepten werden zu Vergleichszwecken diverse Schalenformulierungen in ihrer schwachen Form diskretisiert. Eine detaillierte Auflistung und Beschreibung der untersuchten Formulierungen wird in Tabelle 8.1 bereitgestellt. Alle Berechnungen folgen dem Grundsatz einer Equal-Order-Interpolation. Das bedeutet, zur Diskretisierung aller Parameter werden stets dieselben Formfunktionen verwendet. Um eine Erweiterung auf allgemeine, unstrukturierte Ansatzräume zu ermöglichen, erscheint

<b>KL</b>	Verschiebungsbasierte Kirchhoff-Love-Schalenformulierung unter Verwendung von drei Mittelflächenverschiebungen als freie Parameter, siehe Abschnitt 6.2.
<b>KL-u-E</b>	KL-Schalenformulierung basierend auf dem gemischten Prinzip mit Verschiebungs- und Verzerrungsansatz nach Gleichung (7.6) unter Verwendung von insgesamt sechs freien Parametern.
<b>KL-MD</b>	KL-Schalenformulierung basierend auf dem MD-Konzept unter Verwendung von insgesamt sechs Parametern, siehe Abschnitt 7.2.3.
<b>RM-st</b>	Standard verschiebungsbasierte Reissner-Mindlin-Schalenformulierung unter Verwendung von drei Mittelflächenverschiebungen und zwei Rotationen als freie Parameter. Für die Beschreibung einer entsprechenden Plattenformulierung genügen drei freie Parameter, siehe Abschnitt 6.8.
<b>RM-hr</b>	Verschiebungsbasierte hierarchische Reissner-Mindlin-Schalenformulierung unter Verwendung von drei Mittelflächenverschiebungen und zwei hierarchischen Rotationen als freie Parameter, siehe Abschnitt 6.3. Für die Beschreibung einer entsprechenden Plattenformulierung genügen drei freie Parameter, siehe Abschnitt 6.8.
<b>RM-hr-MD</b>	RM-hr-Schalenformulierung mit Modifikation der Membranverzerrungen durch das MD-Konzept unter Verwendung von insgesamt acht Parametern, siehe Abschnitt 7.2.3.
<b>RM-hd</b>	Verschiebungsbasierte hierarchische Reissner-Mindlin-Schalenformulierung unter Verwendung von drei Mittelflächenverschiebungen und zwei hierarchischen Verschiebungen als freie Parameter, siehe Abschnitt 6.4. Für die Beschreibung einer entsprechenden Plattenformulierung genügen drei freie Parameter, siehe Abschnitt 6.8.
<b>RM-hd-MD</b>	RM-hd-Schalenformulierung mit Modifikation der Membranverzerrungen durch das MD-Konzept unter Verwendung von insgesamt acht Parametern, siehe Abschnitt 7.2.3.
<b>SD</b>	Verschiebungsbasierte schubweiche Schalenformulierung unter Verwendung von drei Mittelflächenverschiebungen und einer Schubverschiebung als freie Parameter. Für die Beschreibung einer entsprechenden Plattenformulierung genügen zwei freie Parameter, siehe Abschnitt 6.8.

**Tabelle 8.1:** Zusammenstellung der in Kapitel 8 verwendeten Schalenformulierungen.

eine Equal-Order-Interpolation unabdingbar. Im Falle mehrerer Patches im Rahmen einer isogeometrischen Berechnung erfolgt die Patch-Kopplung über die Bending-Strip-Methode nach KIENDL U. A. (2010).

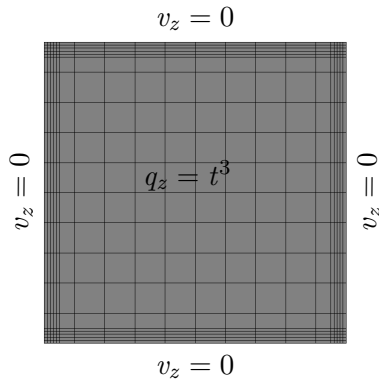
## 8.1 Geometrisch lineare Benchmarkprobleme

Im folgenden Abschnitt werden die in dieser Arbeit entwickelten Schalenformulierungen für drei typische, geometrisch lineare Problemstellungen untersucht. Die Auswahl der Benchmarkprobleme und der Elementformulierungen hat zum Ziel, auftretende Effekte möglichst klar voneinander zu trennen. Im ersten Beispiel werden die entwickelten Schalenformulierungen für den Sonderfall einer Platte untersucht. Zunächst wird getestet, ob die entwickelten schubweichen hierarchischen Schalenformulierungen in der Lage sind, die klassische Plattentheorie nach Mindlin abzubilden. Zudem wird der Effekt des Querschublockings, von anderen Locking-Effekten isoliert, betrachtet. Das zweite Benchmarkproblem besteht aus einem eingespannten Zylinderstreifen unter Querlast. Um Membranlocking und dessen Vermeidung isoliert betrachten zu können, werden ausschließlich Kirchhoff-Love-Schalenformulierungen untersucht. Das dritte und letzte geometrisch lineare Problem besteht aus der bekannten Scordelis-Lo-Schale unter Eigengewicht, welche mit unterschiedlichen schubweichen Schalenformulierungen untersucht wird. Hier wird das kombinierte Auftreten von Querschub- und Membranlocking sowie deren Vermeidung betrachtet. Bei allen Benchmarkproblemen liegt ein spezielles Augenmerk auf der Qualität der berechneten Schnittgrößen.

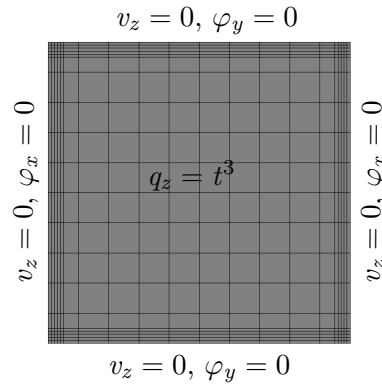
### 8.1.1 Quadratische Platte

Zunächst wird eine quadratische Platte unter Gleichlast  $q_z$  untersucht. Die Längen betragen  $L_x = L_y = 10$ , für den  $E$ -Modul und die Querdehnzahl gilt  $E = 1000$  und  $\nu = 0,3$ . In Abbildung 8.1 sind alle untersuchten Fälle dargestellt. Die Fälle 1 bis 4 beschreiben jeweils eine isogeometrische Diskretisierung mit Randverfeinerung und insgesamt  $20 \times 20$  bikubischen,  $C^3$ -kontinuierlichen B-Spline-Elementen. Die Platten in den Fällen 1 und 2 sind allseitig gelenkig gelagert, unterscheiden sich jedoch durch die Realisierung eines Soft- bzw. Hard-Supports. Im Unterschied hierzu sind die Platten in den Fällen 3 und 4 jeweils nur an zwei Kanten über Eck gelenkig gelagert, während die anderen Kanten frei sind. Die Randverfeinerung und der hohe Polynomgrad führen im Falle einer dicken Platte dazu, dass Querschublocking ausgeschlossen wird und eventuell auftretende Randschichten aufgelöst werden können. Die Platten aus den Fällen 1-4 werden im Folgenden untersucht, um die Unterschiede der in dieser Arbeit entwickelten schubweichen Formulierungen im Vergleich zur schubweichen Plattenformulierung mit nur zwei Unbekannten (SD-Formulierung) aufzuzeigen. Der Fall 5 beschreibt eine uniform verfeinerte isogeometrische Diskretisierung mit lediglich  $10 \times 10$  biquadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen B-Spline-Elementen, um die entwickelten Schalen- bzw. Plattenformulierungen in Bezug auf Querschublocking und dessen Vermeidung zu untersuchen.

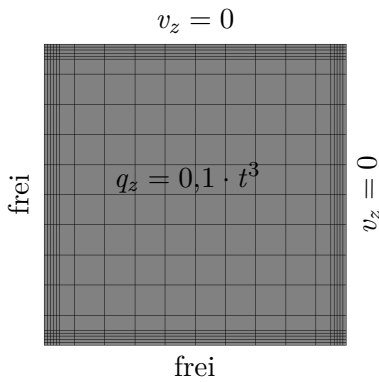
Fall 1: IGA,  $p = 4$ ,  $C^3$ , Soft-Support



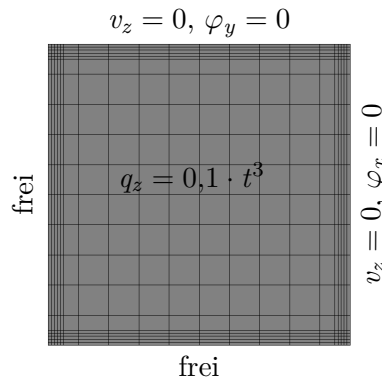
Fall 2: IGA,  $p = 4$ ,  $C^3$ , Hard-Support



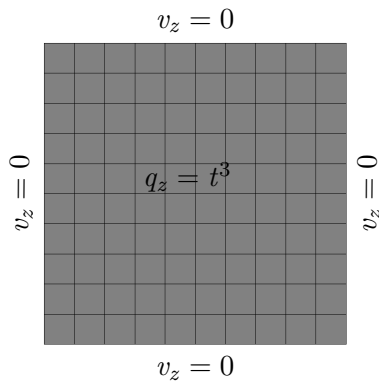
Fall 3: IGA,  $p = 4$ ,  $C^3$ , Soft-Support



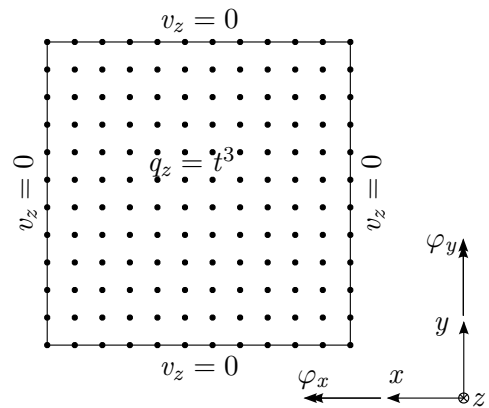
Fall 4: IGA,  $p = 4$ ,  $C^3$ , Hard-Support



Fall 5: IGA,  $p = 2$ ,  $C^1$ , Soft-Support



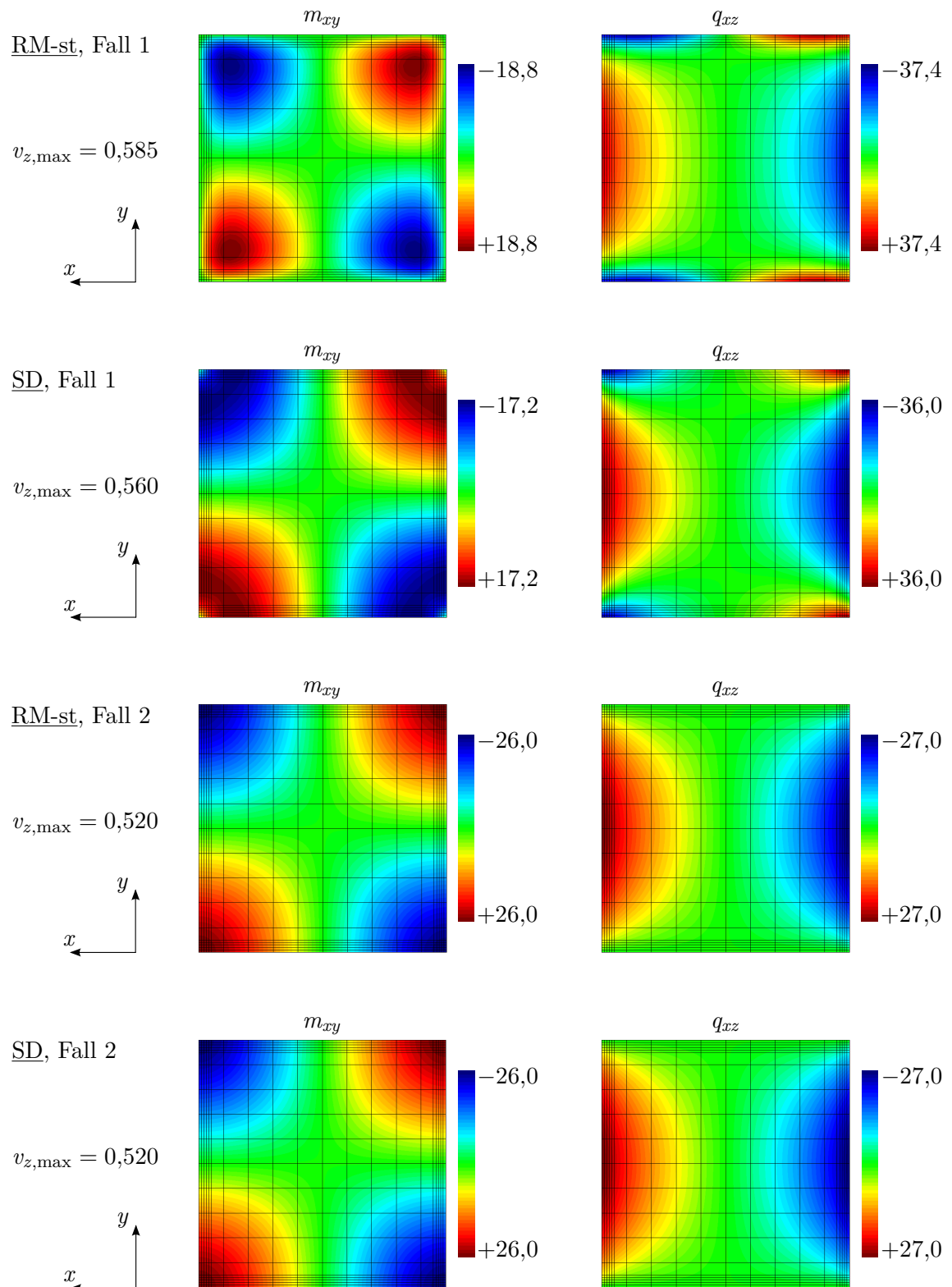
Fall 6: Max-Ent,  $C^\infty$ ,  $\gamma = 0,8$ , Soft-Support



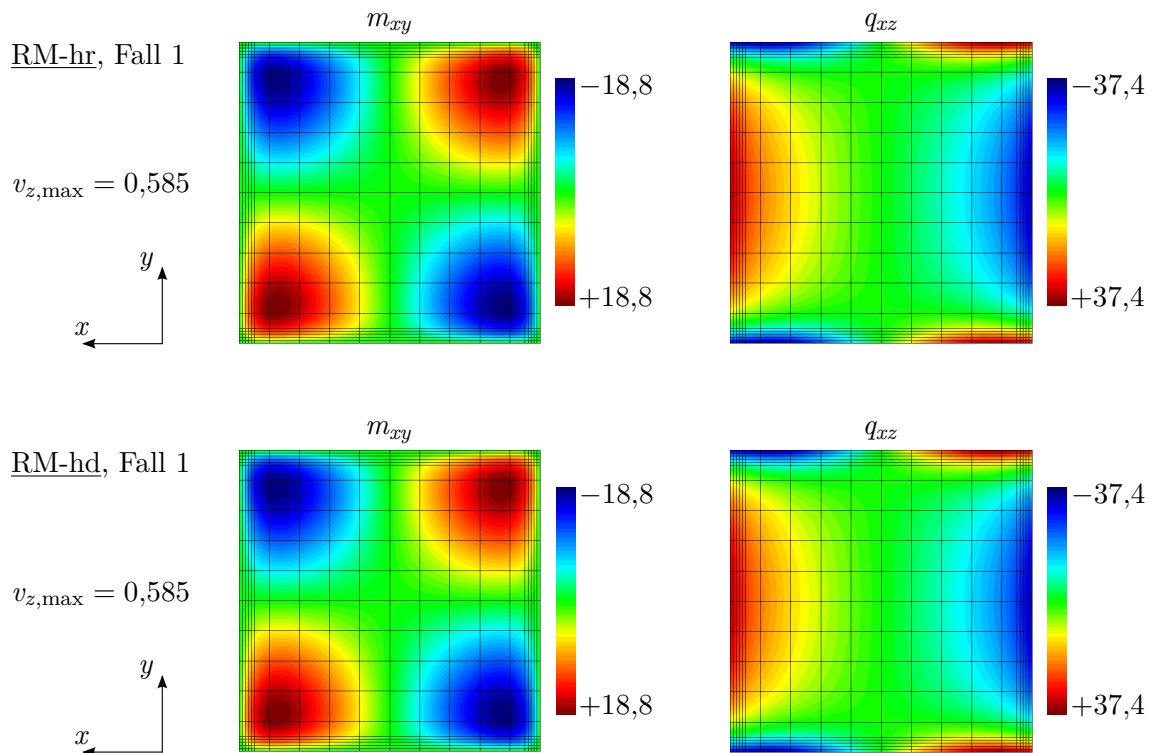
**Abbildung 8.1:** Quadratische Platte, Problemstellung, Längen:  $L_x = L_y = 10$ , Material:  $E = 1000, \nu = 0,3$ .

Zur Untersuchung der Plattenformulierungen auf die intrinsische Vermeidung von Querschublocking, wird im Fall 6 eine netzfreie Diskretisierung mit einer im Vergleich zum Fall 5 äquivalenten Anzahl an Knoten gewählt.





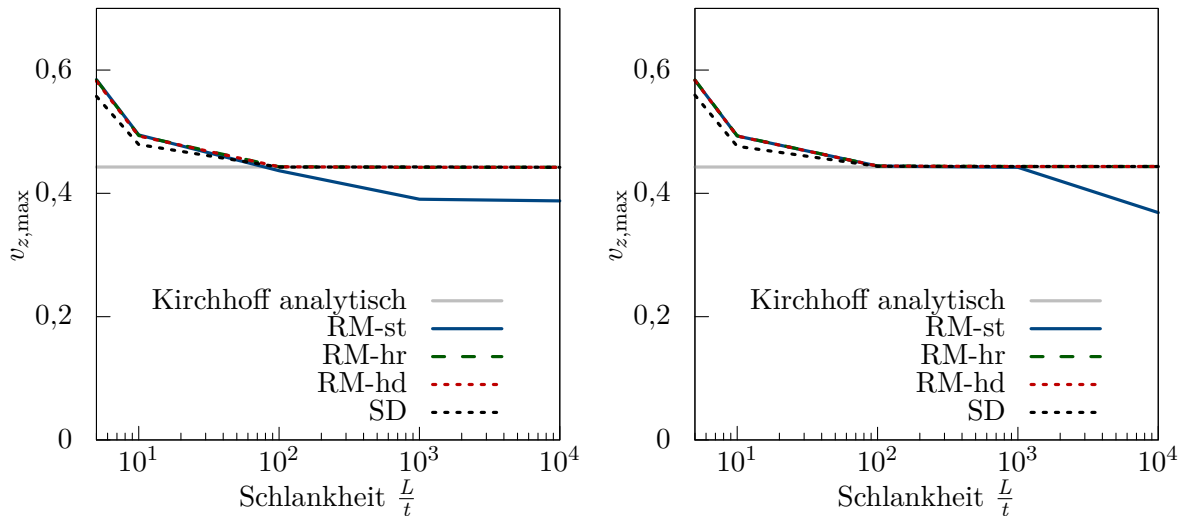
**Abbildung 8.2:** Quadratische Platte,  $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung  $v_{z,\max}$  in Feldmitte, Drillmoment  $m_{xy}$  und Querkraft  $q_{xz}$ , Fälle 1 und 2, RM-st und SD.



**Abbildung 8.3:** Quadratische Platte,  $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung  $v_{z,\max}$  in Feldmitte, Drillmoment  $m_{xy}$  und Querkraft  $q_{xz}$ , Fall 1, RM-hr und RM-hd.

In der Abbildung 8.2 werden die Ergebnisse der Berechnungen für die Fälle 1 und 2 mithilfe der gewöhnlichen RM-st-Formulierung dargestellt und mit den Ergebnissen der SD-Formulierung verglichen. Die sehr dicke Platte weist eine Schlankheit  $\frac{L}{t} = 5$  auf, um Querschublocking auch für die RM-st-Formulierung sicher auszuschließen. Die Randverfeinerung soll sicherstellen, dass eventuell auftretende Randschichten korrekt aufgelöst werden. Bei der RM-st-Formulierung zeigt sich im Fall 1 (Soft-Support) der typische Randschichteffekt des Mindlin-Modells, der zu verschwindenden Drillmomenten  $m_{xy}$  entlang des gesamten Randes führt. Für den Fall 2 (Hard-Support) verschwindet  $m_{xy}$  entlang des Randes nicht und weist durch die realisierte Drilleinspannung in den Ecken Maxima bzw. Minima auf. Die dargestellten Ergebnisse für RM-st sind nicht neu, sondern stellen vielmehr eine Referenzlösungen für die maximale Verschiebung in Feldmitte sowie den Verlauf der Drillmomente  $m_{xy}$  und der Querkräfte  $q_{xz}$  bereit.

Die Ergebnisse einer äquivalenten Untersuchung für die SD-Formulierung weisen interessante Eigenschaften auf. Im Fall 2 (Hard-Support) sind die Ergebnisse absolut identisch zur gerade beschriebenen Mindlin-Referenzlösung. Doch im Fall 1 (Soft-Support) ergeben sich deutliche Abweichungen im Vergleich zur Mindlin-Lösung. Wie in Abschnitt 6.8 bereits theoretisch begründet wurde, zeigt sich, dass die Drillmomente ent-

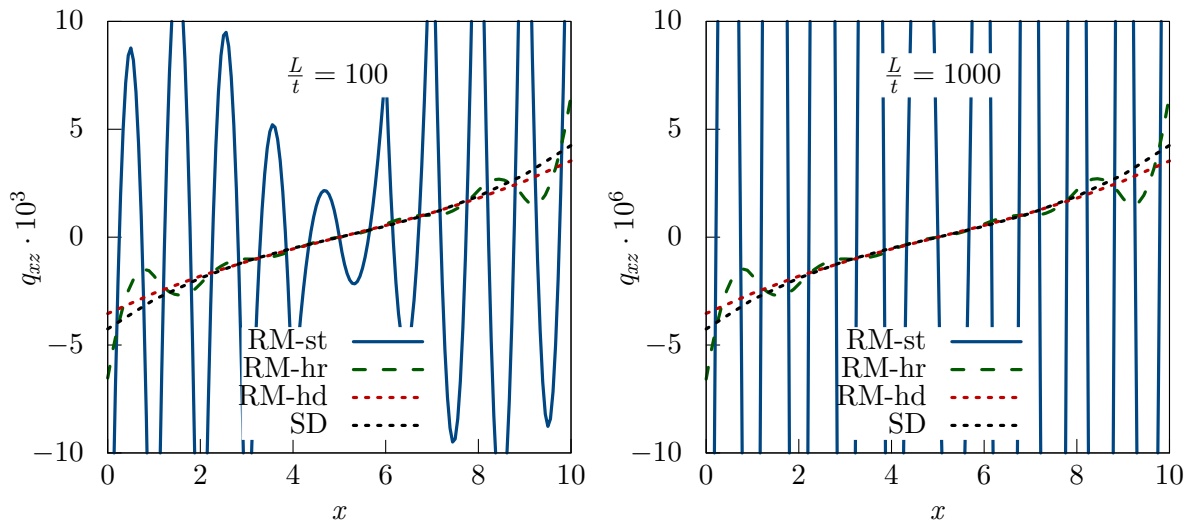


**Abbildung 8.4:** Quadratische Platte, Maximalverschiebung  $v_{z,\max}$  in Abhängigkeit der Schlankheit  $\frac{L}{t}$ , links: Fall 5, rechts: Fall 6.

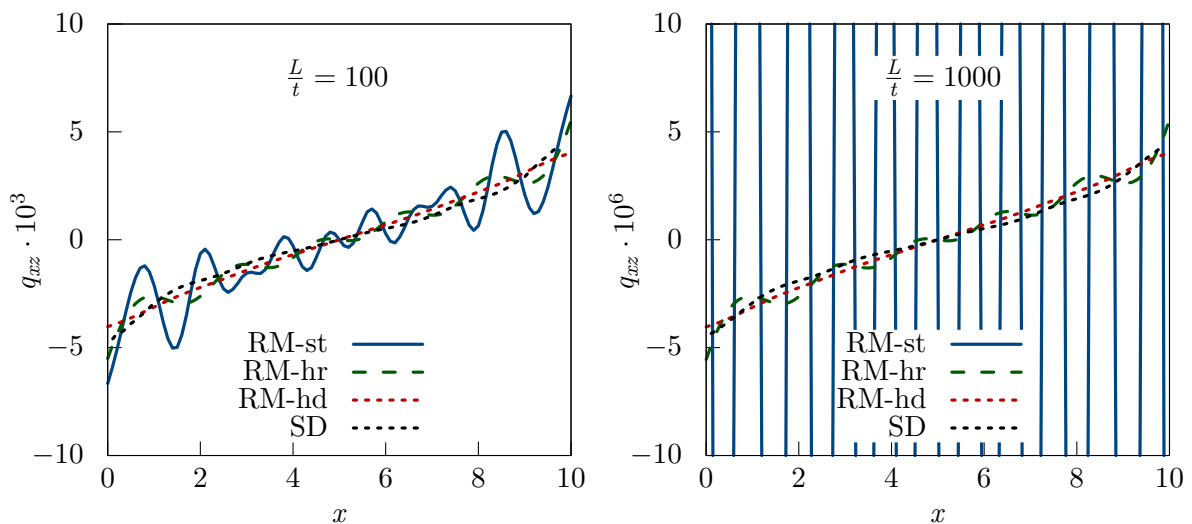
lang der Ränder nicht verschwinden. Die Minima und Maxima von  $m_{xy}$  und  $q_{xz}$  ähneln betragsmäßig denen der Referenzlösung für Soft-Support. Jedoch verläuft  $m_{xy}$  nahezu gleich wie bei der Referenzlösung für Hard-Support. Lediglich in den vier Eckpunkten verschwindet für die SD-Formulierung das Drillmoment  $m_{xy}$  entlang der Ränder. Die Verschiebungslösung  $v_{z,\max}$  liegt betragsmäßig zwischen der Referenzlösung für Soft- und Hard-Support. Die numerischen Ergebnisse untermauern die theoretischen Erkenntnisse aus Abschnitt 6.8. Obwohl die SD-Formulierung sehr häufig in der wissenschaftlichen Literatur zu finden ist, führt die Parametrisierung von nur einer Schubverschiebung zu einem künstlichen Zwang. Die SD-Formulierung ist somit nicht in der Lage, die schubweiche Plattentheorie nach Mindlin abzubilden.

Die korrekte Beschreibung einer schubweichen, rotationsfreien Platten- bzw. Schalenformulierung erfordert die Parametrisierung von zwei unabhängigen Schubverschiebungen. Die in dieser Arbeit vorgestellte RM-hd-Formulierung ist, ebenso wie die RM-hr-Formulierung, in der Lage, die schubweiche Plattentheorie nach Mindlin exakt abzubilden. Die numerischen Ergebnisse für den Fall 1 (Soft-Support) aus Abbildung 8.3 sind mit der Referenzlösung für RM-st identisch. Diese Eigenschaft ist bemerkenswert, da in der Literatur keine vergleichbare rotationsfreie Parametrisierung des Mindlin-Modells zu finden ist.

In den Diagrammen aus Abbildung 8.4 ist erkennbar, dass beide hierarchischen Formulierungen, RM-hr und RM-hd, lockingfreie Verschiebungslösungen aufweisen. Sowohl für isogeometrische als auch netzfreie Diskretisierungen konvergieren beide Formulierungen im dünnen Limit gegen die analytische Kirchhoff-Referenzlösung und können im dicken

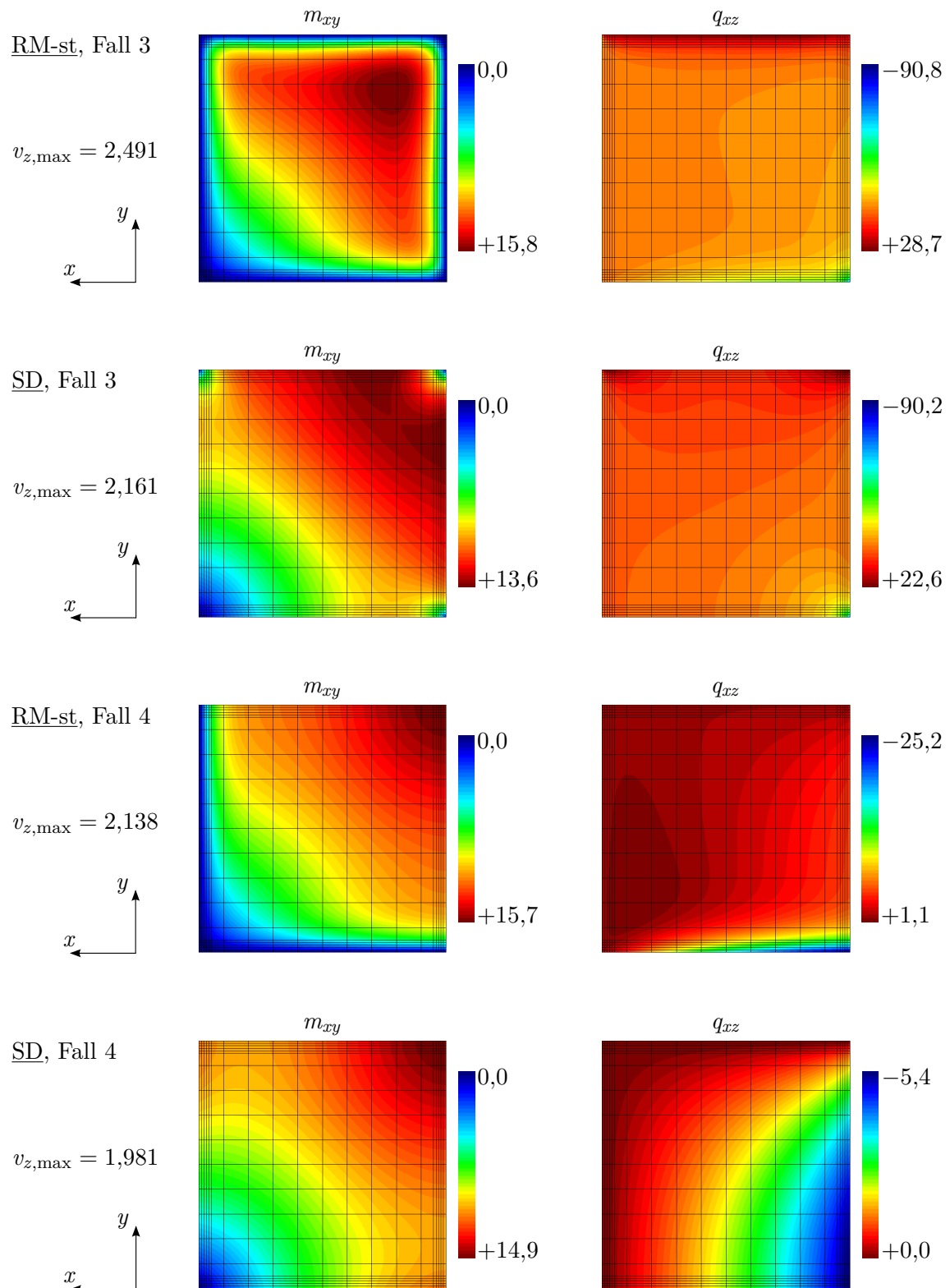


**Abbildung 8.5:** Quadratische Platte, Querkraft  $q_{xz}$  bei  $y = 5$ , Fall 5, 10x10 isogeometrische Elemente (12x12 Kontrollpunkte), links:  $\frac{L}{t} = 100$ , rechts:  $\frac{L}{t} = 1000$ .



**Abbildung 8.6:** Quadratische Platte, Querkraft  $q_{xz}$  bei  $y = 5$ , Fall 6, 12x12 uniform verteilte Knoten, links:  $\frac{L}{t} = 100$ , rechts:  $\frac{L}{t} = 1000$ .

Grenzfall die Mindlin-Lösung abbilden. Die SD-Formulierung ist für dicke Platten zu steif, scheint im dünnen Fall allerdings auch gegen die Kirchhoff-Verschiebungslösung zu streben, ohne von Querschublocking betroffen zu sein. In den Abbildungen 8.5 und 8.6 ist jeweils die Querkraft  $q_{xz}$  entlang eines Pfades durch die Plattenmitte dargestellt. Analog zu den Ergebnissen für die hierarchischen Balken, siehe Kapitel 5, zeigt sich das überlegene Verhalten der RM-hd-Formulierung. Sowohl für die isogeometrische als auch die netzfreie Diskretisierung verläuft  $q_{xz}$ , vollständig unabhängig von der Schlankheit, glatt. Während die Lösung für  $q_{xz}$  bei RM-st stark und bei RM-hr leicht oszilliert, sind



**Abbildung 8.7:** Quadratische Platte,  $\frac{L}{t} = 5$ , Maximalverschiebung  $v_{z,\max}$  in Feldmitte, Drillmoment  $m_{xy}$  und Querkraft  $q_{xz}$ , Fälle 3 und 4, RM-st und SD.

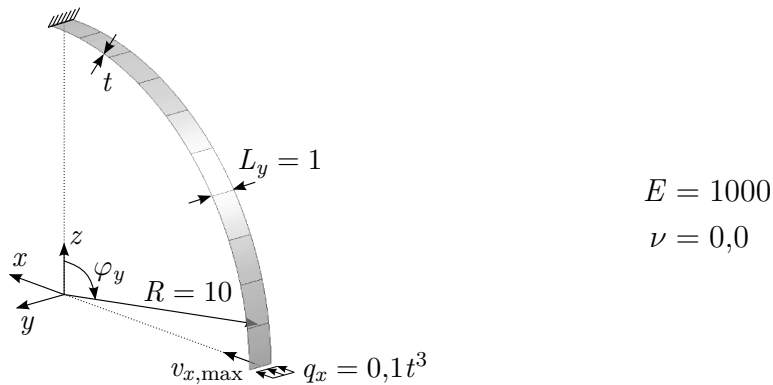
bei der SD-Formulierung keinerlei Oszillationen zu erkennen. Jedoch unterscheidet sich die Querkraftlösung der SD-Formulierung auch entlang des dargestellten Pfades leicht von der Mindlin-Referenzlösung.

Man könnte an dieser Stelle die Frage stellen, wie groß die Bedeutung des Unterschieds zwischen der RM-hd- und der SD-Formulierung wirklich ist. Denn die SD-Formulierung weist lockingfreie Verschiebungslösungen sowie glatte Querkraftverläufe auf. Die Lösungen der SD-Formulierung konvergieren allerdings nicht gegen die Mindlin-Lösung. Die Lösungen der Mindlin-Theorie konvergieren im dünnen Limit gegen die Kirchhoff-Lösung. Für den dünnen Grenzfall, d. h.  $t \rightarrow 0$ , ist die Kirchhoff-Theorie ihrerseits asymptotisch korrekt. Das bedeutet, sie bildet im dünnen Limit die dreidimensionale Kontinuumslösung ab. Da die SD-Formulierung das Mindlin-Modell nicht abbilden kann, ist an dieser Stelle fragwürdig, ob sie in allgemeinen Fällen asymptotisch korrekte Ergebnisse liefert. Während die SD-Formulierung im zweifach symmetrischen Fall 2 (Hard-Support) noch in der Lage ist, die Mindlin-Lösung abzubilden, wendet sich das Blatt für ein unsymmetrisches Problem. In Abbildung 8.7 ist dargestellt, dass die SD-Formulierung sowohl im Fall 3 als auch im Fall 4 nicht in der Lage ist, die Mindlin-Lösung anzunähern. Die Verläufe für  $m_{xy}$  und  $q_{xz}$  unterscheiden sich sowohl für Soft- als auch Hard-Support deutlich von der Referenzlösung der RM-st-Formulierung. Bei alleiniger Betrachtung der Verschiebungslösungen scheint die SD-Formulierung gute Ergebnisse zu liefern. Die dargestellten Ergebnisse für  $m_{xy}$  und  $q_{xz}$  zeigen auf, wie wichtig eine Betrachtung der Spannungen bzw. Schnittgrößen ist.

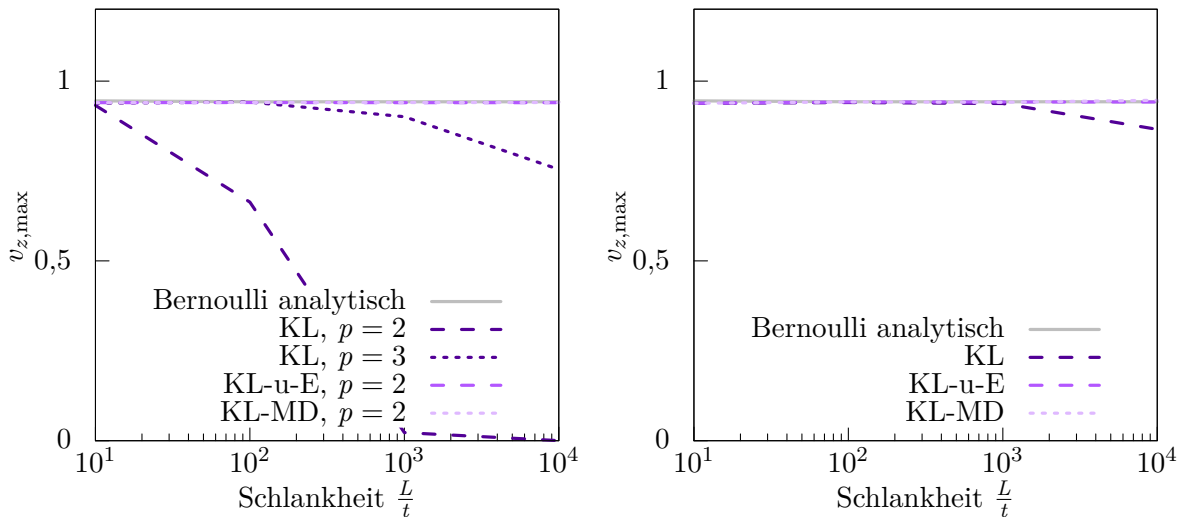
### 8.1.2 Eingespannter Zylinderstreifen

Als zweites Benchmarkproblem wird ein eingespannter Zylinderstreifen unter Querlast  $q_x$  herangezogen, siehe Abbildung 8.8. Mit dem Ziel einer isolierten Betrachtung von Membranlocking werden bei diesem Beispiel ausschließlich KL-Schalenformulierungen untersucht. Die Querlast  $q_x$  ist mit  $t^3$  skaliert, um eine im dünnen Limit von der Schlankheit unabhängige Verschiebungslösung zu erhalten. Für dieses einachsige Biege-Membranproblem kann eine analytische Lösung nach der Bernoulli-Balkentheorie zum Vergleich herangezogen werden. Die horizontale Verschiebung der Kragarmspitze lässt sich analytisch zu  $v_{x,\max}^{\text{Ref}} \approx 0,9424778 + 0,0007854t^2$  bestimmen, während für den Verlauf der Membrankraft  $n_{11}^{\text{Ref}}(\varphi_y) = -\cos(\varphi_y)q_x$  gilt. Dabei beschreibt die „1“-Richtung die Ringrichtung. Die Membrankraft  $n_{11}^{\text{ref}}$  ergibt sich am freien Rand zu null und nimmt an der Einspannung den Minimalwert von  $-0,1t^3$  an.

Abbildung 8.9 bestätigt die hervorragenden Eigenschaften des MD-Konzepts aus Kapitel 7, auch im Kontext der Vermeidung von Membranlocking. Sowohl für die isogeometrische als auch die netzfreie Diskretisierung zeigt KL-MD lockingfreies Verhalten,

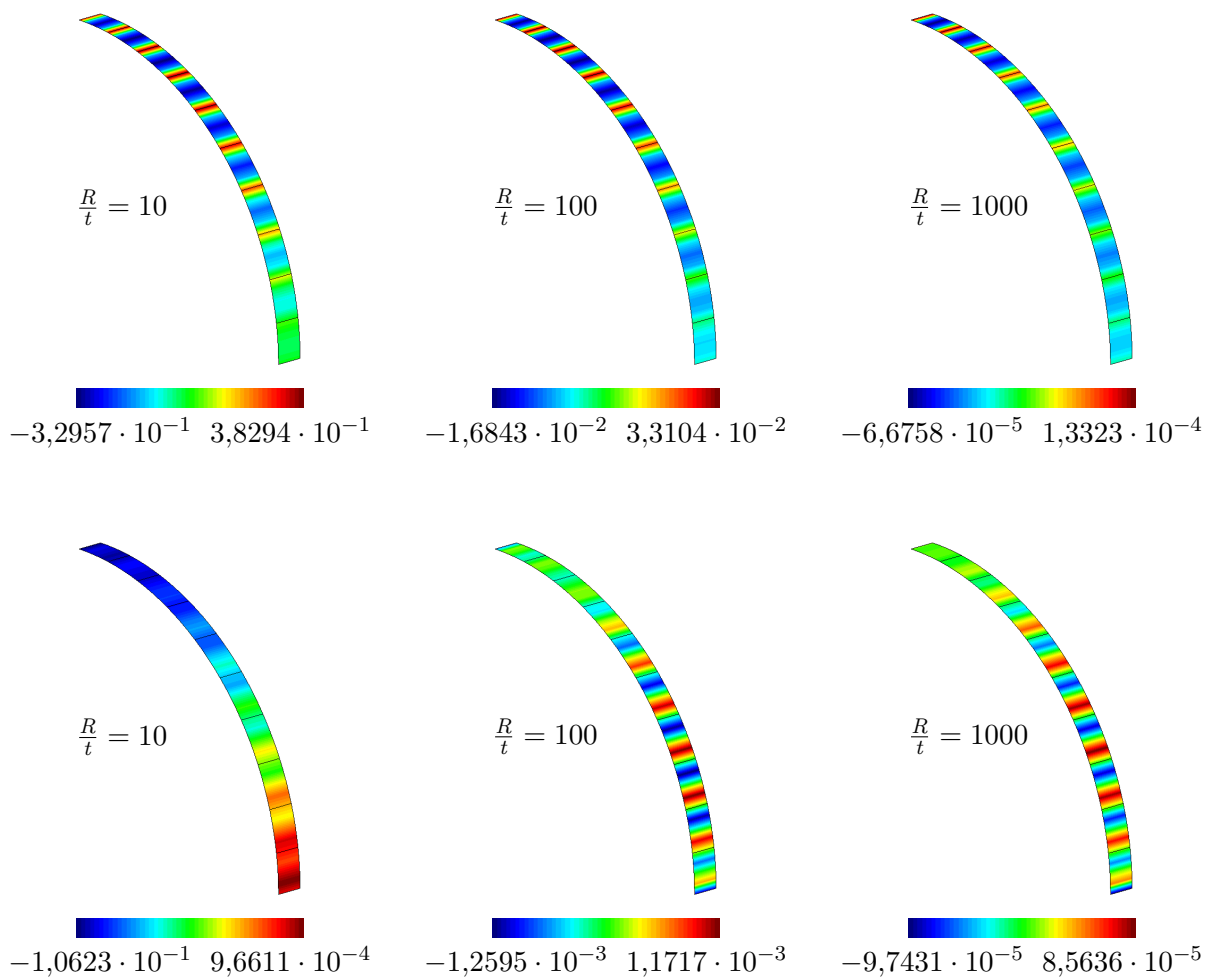


**Abbildung 8.8:** Eingespannter Zylinderstreifen, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten.



**Abbildung 8.9:** Eingespannter Zylinderstreifen, Verschiebung  $v_{x,\max}$  in Abhängigkeit der Schlankheit  $\frac{R}{t}$ , links: isogeometrische Diskretisierungen mit 10 Elementen,  $C^{p-1}$ , rechts: Max-Ent-Diskretisierung mit 12 Knoten in Umfangsrichtung.

während die primale KL-Formulierung unter Membranlocking leidet. Auch die KL-u-E-Formulierung scheint lockingfrei zu sein und zeigt ein praktisch identisches Verschiebungsverhalten wie KL-MD. Doch allein die Qualität der Verschiebungslösungen lässt noch keinen Aufschluss über die Qualität einer Formulierung zu, da eine gute Approximation der Spannungen bzw. Spannungsergebnissen häufig von großer Bedeutung ist. In den Abbildungen 8.10, 8.11 und 8.12 sind die Verläufe der Membrankraft  $n_{11}$  für isogeometrische Diskretisierungen von KL, KL-u-E und KL-MD für  $p=2$  und  $p=3$  in Abhängigkeit der Schlankheit dargestellt. Aus den Ergebnissen in Abbildung 8.10 ist ersichtlich, wie wichtig die Vermeidung von Membranlocking ist. Die Membrankraft  $n_{11}$  der KL-Formulierung ist sowohl für quadratische als auch kubische NURBS-Ansätze

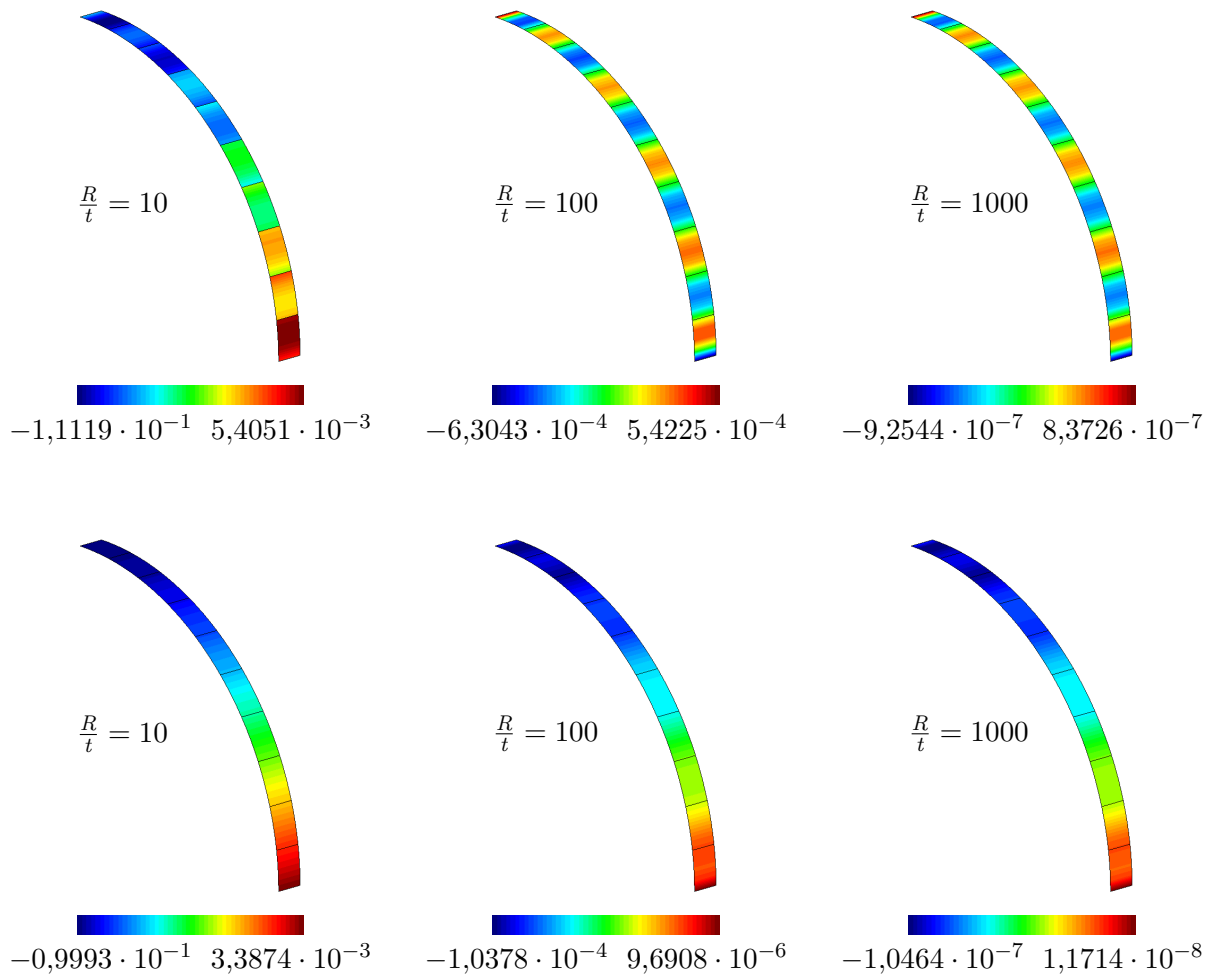


**Abbildung 8.10:** Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft  $n_{11}$ , KL, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen,  $C^{p-1}$ , oben:  $p = 2$ , unten:  $p = 3$ .

vollständig unbrauchbar. Das gilt auch bei Schlankheitenwerten, bei denen die zugehörige Verschiebungslösung von guter Qualität ist. Die Verläufe von  $n_{11}$  weisen ein oszillatorisches Verhalten auf, wobei die Minimal- und Maximalwerte um bis zu drei Zehnerpotenzen falsch abgebildet werden.

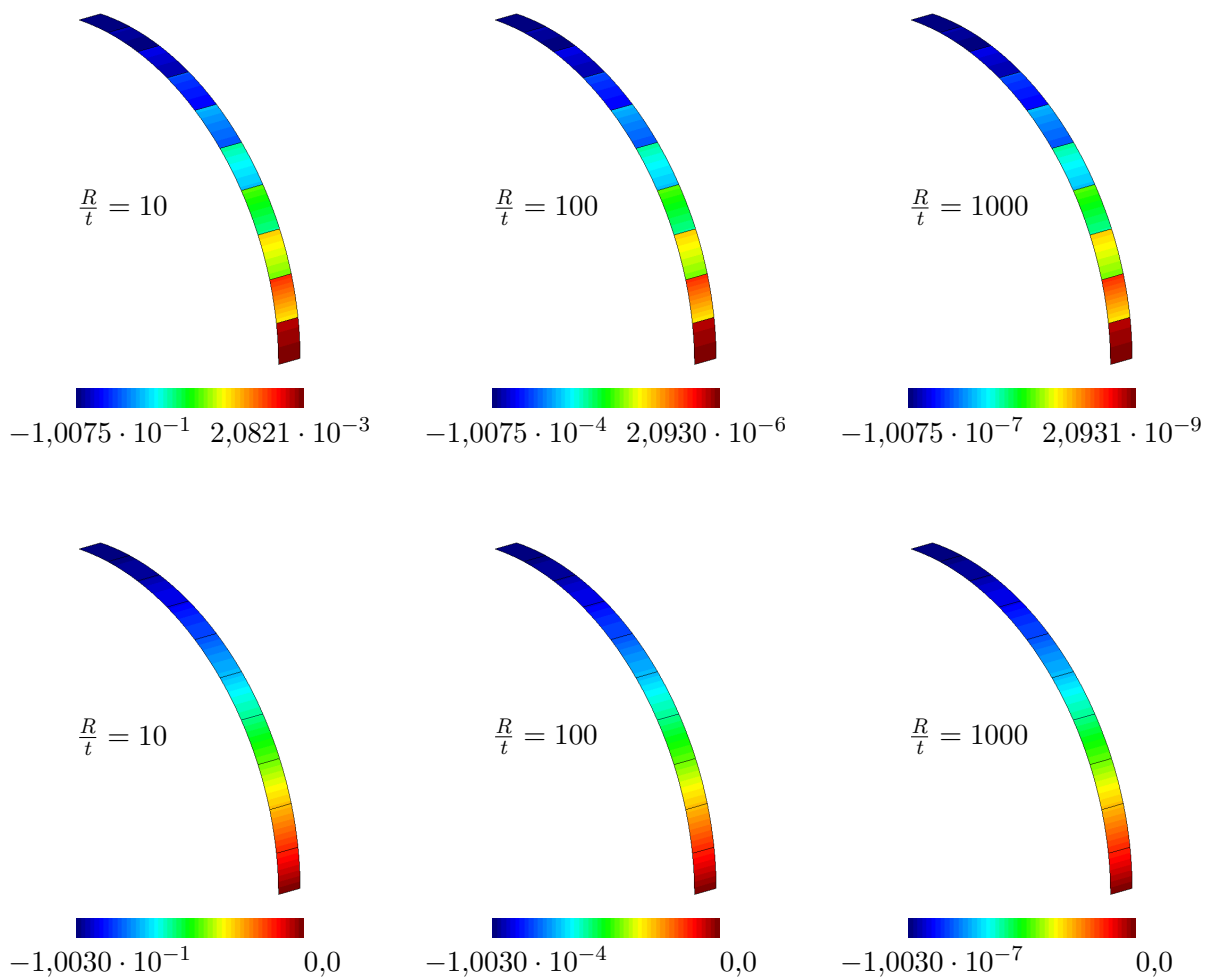
Für KL-u-E verbessert sich die Qualität der Membrankräfte, siehe 8.11. Doch speziell für  $p = 2$  ist erkennbar, dass die Oszillationen nicht vollständig verschwinden und die Minimal- sowie Maximalwerte um fast eine Zehnerpotenz von der Referenzlösung abweichen. Auftretendes Membranlocking ist also nicht vollständig beseitigt. KL-MD zeigt ein überlegenes Verhalten, siehe Abbildung 8.12. Die Ergebnisse der Membrankraft  $n_{11}$  sind sowohl für quadratische als auch kubische NURBS komplett unabhängig von der Schlankheit, was auf die vollständige Vermeidung von Membranlocking hindeutet.





**Abbildung 8.11:** Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft  $n_{11}$ , KL-u-E, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen,  $C^{p-1}$ , oben:  $p = 2$ , unten:  $p = 3$ .

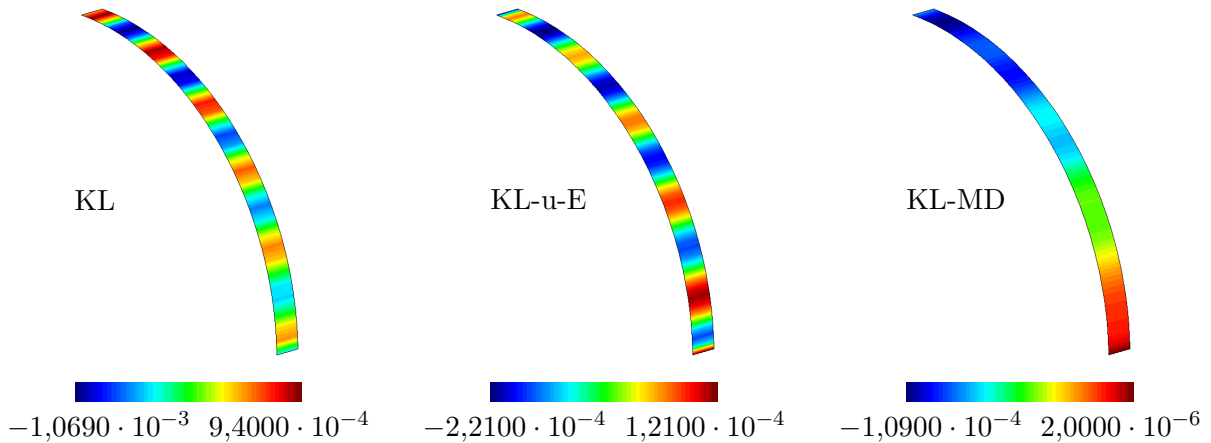
tet. Es ist anzumerken, dass die Sprünge in  $n_{11}$  für  $p = 2$  lediglich aus den Sprüngen der Biegeanteile in der effektiven Normalkraft herrühren. Für  $p = 3$  sind die Membrankraftverläufe absolut glatt und von guter Qualität. Die wichtigsten Ergebnisse aus den Abbildungen 8.9, 8.10, 8.11 und 8.12 sind in Tabelle 8.2 zusammengefasst. Wichtige Erkenntnisse ergeben sich durch die Berechnung der relativen Fehler zweier maßgebender Kenngrößen, nämlich der Verschiebung  $v_{x,\max}$  am freien Rand und der Membrankraft  $n_{11}$  an der Einspannung. Für KL ( $p = 3$ ) sind die Verschiebungsfehler bis zur Schlankheit  $\frac{R}{t} = 1000$  immer noch akzeptabel, die Fehler in  $n_{11}$  wachsen allerdings stark an. KL-u-E zeigt sehr gute Ergebnisse in den Verschiebungen, jedoch wachsen auch hier die Fehler in der Membrankraft mit zunehmender Schlankheit stets an. Lediglich für



**Abbildung 8.12:** Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft  $n_{11}$ , KL-MD, isogeometrische Diskretisierung mit 10 Elementen,  $C^{p-1}$ , oben:  $p = 2$ , unten:  $p = 3$ .

KL-MD sind neben guten Verschiebungsergebnissen auch die Membrankräfte von guter Qualität sowie unabhängig von der Schlankheit.

Das überlegene Verhalten von KL-MD lässt sich auch in Abbildung 8.13 erkennen. Der Zylinderstreifen mit der Schlankheit  $\frac{R}{t} = 100$  wurde mithilfe einer Max-Ent-Diskretisierung untersucht. Obwohl auch für KL-MD leichte Oszillationen in  $n_{11}$  auftreten, sind die Ergebnisse deutlich besser als die Membrankräfte für KL oder KL-u-E. Zudem sind die leichten Oszillationen unabhängig von der Schlankheit (hier nicht gezeigt), was auf eine Vermeidung von Locking hindeutet. Vielmehr könnte die Ursache auch im Verhalten der netzfreien Methode an sich liegen, da ähnliche Symptome und Konzepte zu deren Abminderung bereits in MILLÁN U. A. (2011) beschrieben wurden. Von weiteren



**Abbildung 8.13:** Eingespannter Zylinderstreifen, Membrankraft  $n_{11}$ ,  $\frac{R}{t} = 100$ , Max-Ent-Diskretisierung mit 12 Knoten,  $\gamma = 0,4$ .

	$\frac{R}{t}$	$v_x$	$v_x^{\text{ref}}$	$\left  \left( \frac{v_x - v_x^{\text{Ref}}}{v_x^{\text{Ref}}} \right) \right $ in %	$n_{11}$	$n_{11}^{\text{ref}}$	$\left  \left( \frac{n_{11} - n_{11}^{\text{Ref}}}{n_{11}^{\text{Ref}}} \right) \right $ in %
<b>KL</b> <b>p = 2</b>	10	0,9361	0,9433	<b>0,76</b>	$+3,1364 \cdot 10^{-1}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>414</b>
	100	0,6637	0,9425	<b>29,6</b>	$+3,2305 \cdot 10^{-2}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>32405</b>
	1000	0,0225	0,9425	<b>97,6</b>	$+1,3323 \cdot 10^{-4}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>133330</b>
<b>KL</b> <b>p = 3</b>	10	0,9385	0,9433	<b>0,51</b>	$-1,0623 \cdot 10^{-1}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>6,23</b>
	100	0,9418	0,9425	<b>0,07</b>	$-6,9061 \cdot 10^{-4}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>590</b>
	1000	0,9010	0,9425	<b>4,40</b>	$+2,2416 \cdot 10^{-6}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>2341</b>
<b>KL-u-E</b> <b>p = 2</b>	10	0,9363	0,9433	<b>0,74</b>	$-7,7350 \cdot 10^{-2}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>22,6</b>
	100	0,9401	0,9425	<b>0,25</b>	$+5,4225 \cdot 10^{-4}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>642</b>
	1000	0,9399	0,9425	<b>0,28</b>	$+8,3726 \cdot 10^{-7}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>937</b>
<b>KL-u-E</b> <b>p = 3</b>	10	0,9386	0,9433	<b>0,50</b>	$-9,9513 \cdot 10^{-2}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>0,49</b>
	100	0,9424	0,9425	<b>0,01</b>	$-9,0144 \cdot 10^{-5}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>9,86</b>
	1000	0,9425	0,9425	<b>0,00</b>	$-8,8120 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>11,88</b>
<b>KL-MD</b> <b>p = 2</b>	10	0,9365	0,9433	<b>0,72</b>	$-9,9121 \cdot 10^{-2}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>0,88</b>
	100	0,9404	0,9425	<b>0,22</b>	$-9,9119 \cdot 10^{-5}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>0,88</b>
	1000	0,9405	0,9425	<b>0,21</b>	$-9,9119 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>0,88</b>
<b>KL-MD</b> <b>p = 3</b>	10	0,9386	0,9433	<b>0,50</b>	$-1,0030 \cdot 10^{-1}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	<b>0,30</b>
	100	0,9424	0,9425	<b>0,01</b>	$-1,0030 \cdot 10^{-4}$	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	<b>0,30</b>
	1000	0,9425	0,9425	<b>0,00</b>	$-1,0030 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$	<b>0,30</b>

**Tabelle 8.2:** Eingespannter Zylinderstreifen, Fehlerbetrachtung der Verschiebung  $v_{x,\text{max}}$  am freien Ende und der Membrankraft  $n_{11}$  an der Einspannung, isogeometrische Diskretisierungen,  $C^{p-1}$ .

Untersuchungen der Eigenschaften des Max-Ent-Konzepts wird an dieser Stelle jedoch abgesehen.

### 8.1.3 Scordelis-Lo-Schale

Als drittes numerisches Experiment wird die bekannte Scordelis-Lo-Schale unter Eigen- gewicht, dargestellt in Abbildung 8.14, untersucht. Die zylindrische Schalenstruktur ist an den beiden gekrümmten Rändern in die  $x$ - und die  $z$ -Richtung gelagert und wird durch eine flächenbezogene Eigengewichtslast von  $q_z = 90$  belastet. Die Scordelis-Lo-Schale weist eine moderate Schlankheit von  $\frac{R}{t} = 100$  auf. Während in den vorangegangenen Beispielen Querschub- oder Membranlocking jeweils voneinander isoliert betrachtet wurde, steht nun das kombinierte Auftreten dieser Locking-Effekte und deren Vermeidung im Fokus. Es werden isogeometrische Diskretisierungen unterschiedlicher schubweicher

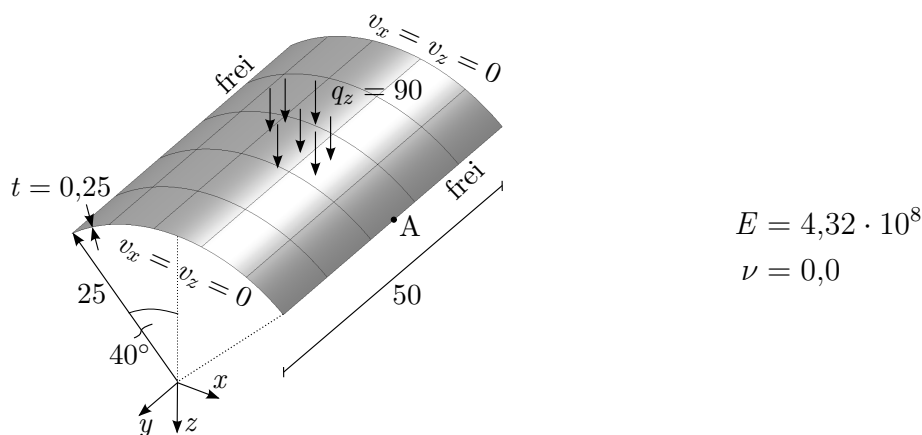
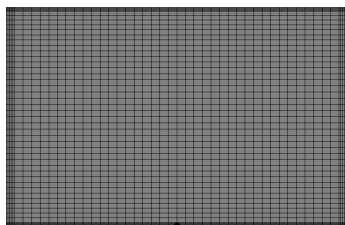


Abbildung 8.14: Scordelis-Lo-Schale, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten.

Fall 1:

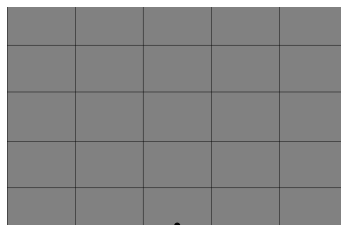
$p = 5, C^4, n_{CP} = 53 \times 53$



A

Fall 2:

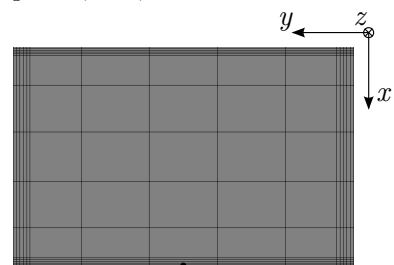
$p = \text{variabel}, C^{p-1},$   
 $n_{CP} = \text{variabel}$



A

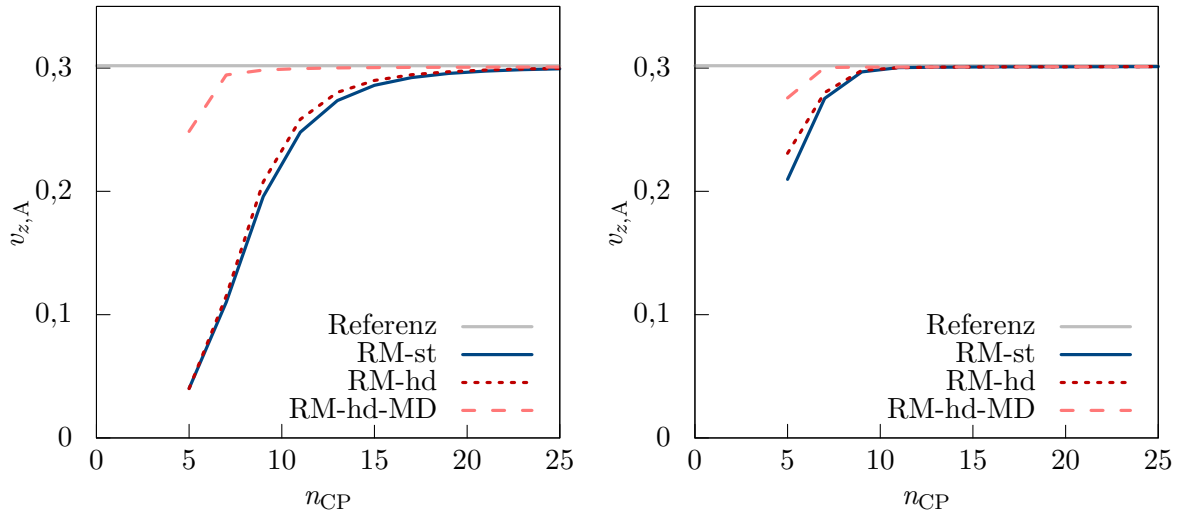
Fall 3:

$p = 2, C^1, n_{CP} = 17 \times 17$



A

Abbildung 8.15: Scordelis-Lo-Schale, verschiedene isogeometrische Diskretisierungen.



**Abbildung 8.16:** Scordelis-Lo-Schale, Konvergenz der Verschiebung  $v_{z,A}$ , Fall 2, links:  $p = 2$ ,  $C^1$ , rechts:  $p = 3$ ,  $C^2$ .

Schalenformulierungen untersucht. An dieser Stelle wird auf die netzfreie Diskretisierung dieses Schalenproblems verzichtet und auf entsprechende numerische Ergebnisse aus BIEBER U. A. (2018) verwiesen. Zur Untersuchung diverser Aspekte werden drei unterschiedliche NURBS-Netze genutzt, siehe Abbildung 8.15. Fall 1 beschreibt eine Diskretisierung mit NURBS fünfter Ordnung,  $C^4$ -Kontinuität und insgesamt  $53 \times 53$  Kontrollpunkten. Die Ränder sind feiner aufgelöst, um die auftretenden Randschichteffekte abbilden zu können. Die Diskretisierung des Falles 1 wird in Kombination mit der RM-st-Formulierung stets als numerische Referenzlösung herangezogen. Im Fall 2 wird eine uniform vernetzte NURBS-Diskretisierung variabler Polynomordnung beschrieben, mit der die Konvergenz der Verschiebungslösung und die Qualität der Membrankräfte untersucht wird. Das Netz im Fall 3 wird gewählt, um die Qualität der Querkräfte für grobe Netze niedriger Ordnung ( $p = 2$ ) zu untersuchen. Es handelt sich um ein insgesamt recht grobes Netz mit  $17 \times 17$  Kontrollpunkten, das jedoch randverfeinert ist, um auftretende Randschichten auflösen zu können.

Abbildung 8.16 zeigt die Konvergenz der Vertikalverschiebung  $v_{z,A}$  des Punktes A für quadratische und kubische Netze im Fall 2. Als Referenz wird die Verschiebungslösung nach Fall 1 herangezogen. Sie ist  $v_{z,A}^{\text{Ref}} = 0,30192$ . Die jeweils schlechtesten Konvergenzeigenschaften zeigt RM-st, da diese Formulierung sowohl unter Membran- als auch Querschublocking leidet. Eine Vermeidung von Querschublocking kann durch Reparametrisierung der Kinematik erreicht werden. Die Formulierung RM-hd ist frei von Querschublocking, was zu nur leicht verbesserten Konvergenzeigenschaften der Verschiebungen führt. Denn RM-hd leidet immer noch unter Membranlocking. Die Formulierung RM-hd-MD ist intrinsisch frei von Querschub- und Membranlocking und zeigt die beste

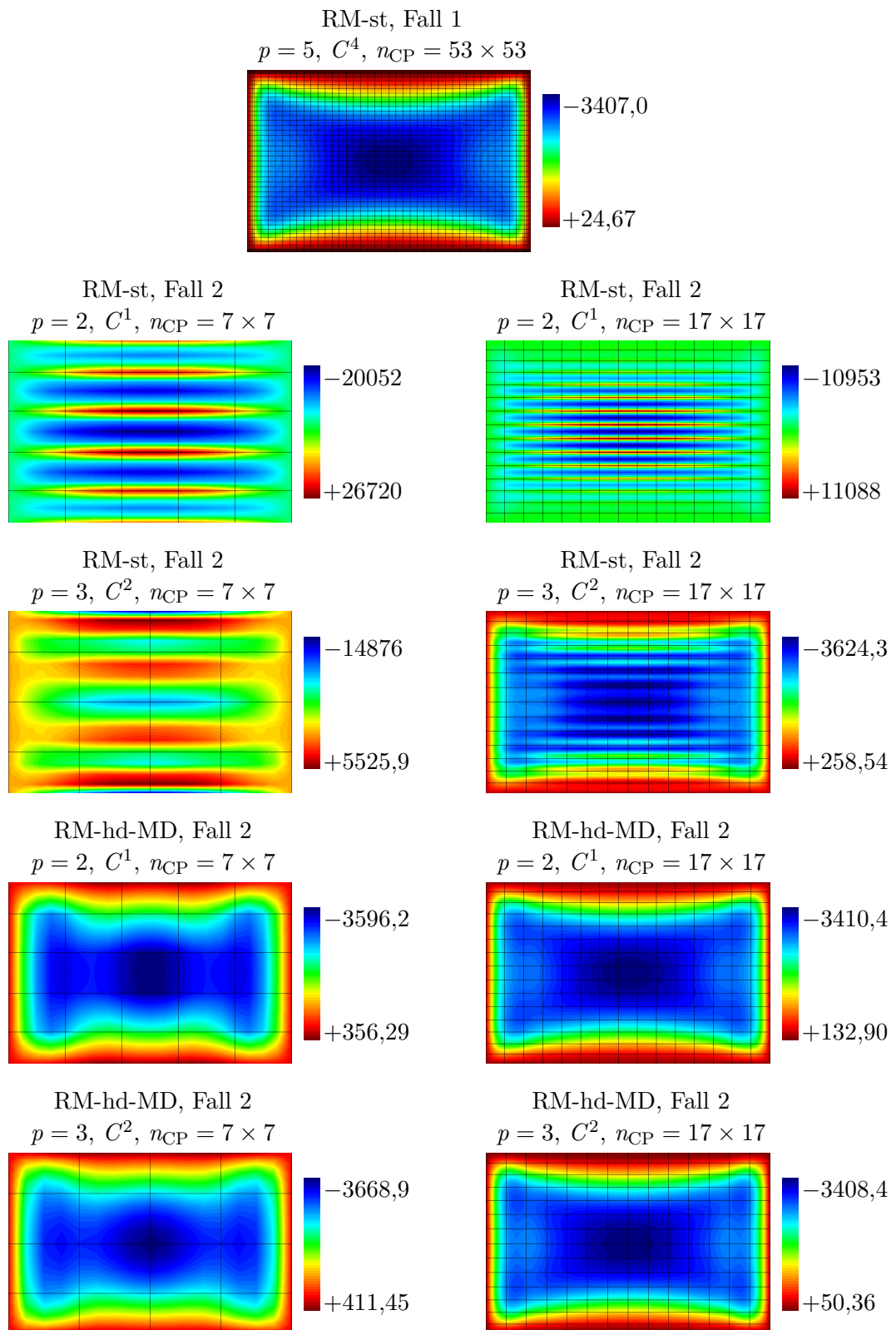
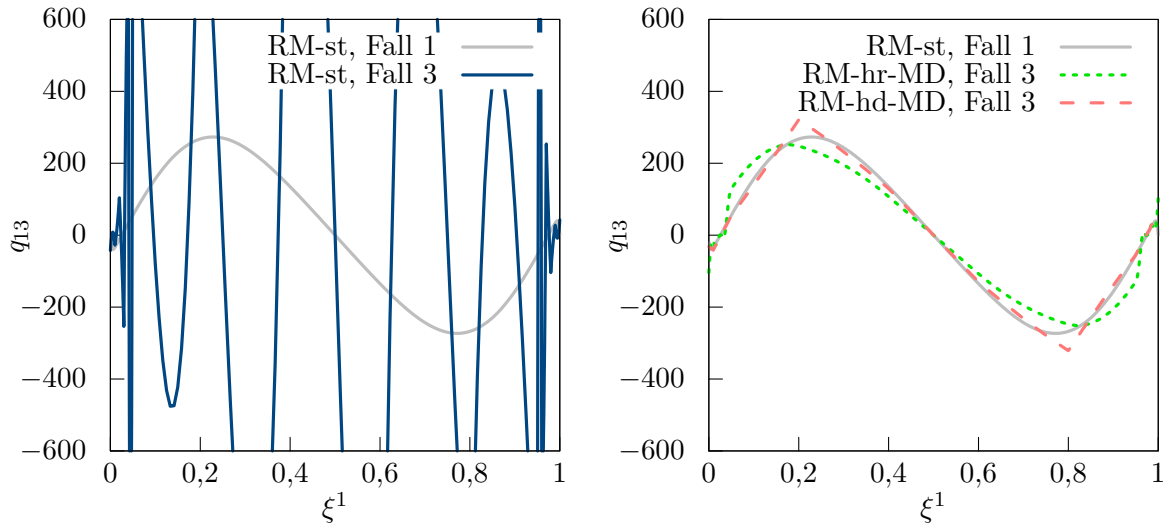


Abbildung 8.17: Scordelis-Lo-Schale, Membrankraft  $n_{11}$  (Ringkraft).



**Abbildung 8.18:** Scordelis-Lo-Schale, Querkraft  $q_{13}$  entlang der Parameterkoordinate  $\xi^1$  (Ringrichtung) durch den Punkt A.

Konvergenz von  $v_{z,A}$ . Doch bereits für kubische Ansätze zeigen auch die beiden anderen Formulierungen recht gute Konvergenzeigenschaften der Verschiebungslösung.

Die Notwendigkeit der Vermeidung von Locking könnte man anhand der alleinigen Betrachtung der Verschiebungskonvergenz erneut in Frage stellen. Jedoch sind auch die Spannungsergebnisse detailliert zu betrachten. In Abbildung 8.17 werden deshalb die Membrankräfte von RM-st sowie RM-hd-MD für ein grobes und eine moderat feines Netz für den Fall 2 mit der Referenzlösung des Falles 1 verglichen. Die Betrachtung der Membrankraft  $n_{11}$  verdeutlicht die Notwendigkeit lockingfreier Schalenformulierungen für effiziente Computersimulationen. Bereits für das grobe Netz mit quadratischen Ansätzen erreicht die lockingfreie RM-hd-MD-Formulierung eine höhere Qualität der Membrankräfte als RM-st für kubische Elemente und das feine Netz. Das auftretende Membranlocking führt bei RM-st zu starken Oszillationen der Membrankraft  $n_{11}$ , begleitet von großen Fehlern in den Minimal- bzw. Maximalwerten, obwohl entsprechende Verschiebungslösungen teilweise von guter Qualität sind. Bei Berechnungen mit der RM-hd-MD-Formulierung kann bereits für grobe Diskretisierungen eine hohe Qualität der Verschiebungen und der Membrankräfte erreicht werden. Der Einfluss von Querschublocking auf die Qualität der Querkräfte wird für einen Pfad durch den Punkt A entlang der gekrümmten Parameterkoordinate  $\xi^1$  untersucht. Abbildung 8.18 vergleicht für unterschiedliche Formulierungen die Qualität der Querkraft  $q_{13}$ . Bei einer recht groben Diskretisierung nach Fall 3 zeigt sich die geringe Approximationskraft einer gewöhnlichen RM-st-Formulierung. Die Querkraft  $q_{13}$  weist entlang der Ringrichtung  $\xi^1$  erhebliche Oszillationen auf und ist nicht in der Lage, die Referenzlösung gut zu approximieren. Im rechten Teil von Abbildung 8.18 ist  $q_{13}$  für die beiden lockingfreien Formulierungen

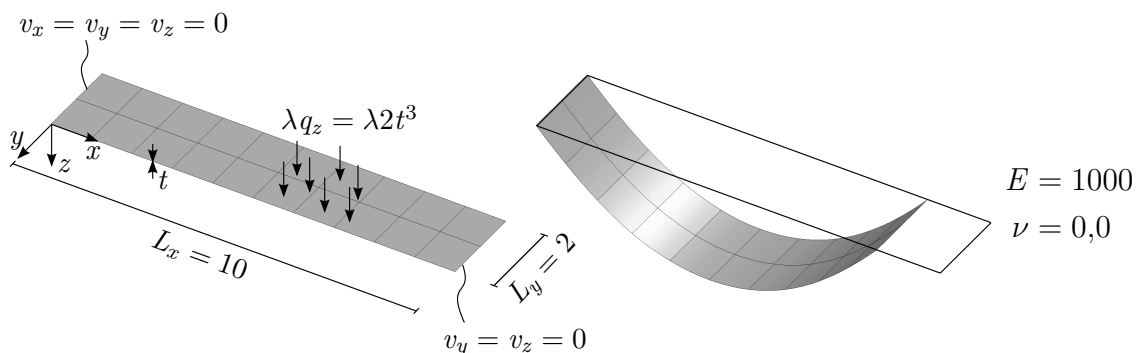
RM-hr-MD sowie RM-hd-MD dargestellt. Während für RM-hr-MD leichte Oszillationen im Randbereich auftreten und der Verlauf im Inneren nicht perfekt approximiert wird, stellt die Lösung durch RM-hd-MD eine gute Approximation von  $q_{13}$  bereit.

## 8.2 Geometrisch nichtlineare Benchmarkprobleme

Neben linearen Problemen spielen geometrisch und materiell nichtlineare Problemstellungen für viele Anwendungen eine bedeutende Rolle. In diesem Abschnitt liegt der Fokus auf der Untersuchung geometrisch nichtlinearer Benchmarkprobleme mit großen Rotationen. Wie bei den linearen Beispielen soll die Qualität der numerischen Verschiebungs- und Spannungsergebnisse der entwickelten Schalenformulierungen detailliert untersucht werden. Alle nachfolgenden Berechnungen werden ausschließlich für NURBS-basierte, isogeometrische Diskretisierungen durchgeführt.

### 8.2.1 Balkenproblem

Als erstes Problem wird ein Plattenstreifen untersucht, der aufgrund seiner Lagerung und Belastung einer einachsigen Biegedeformation unterworfen ist. Für die Querdehnzahl  $\nu = 0,0$  kann dieses Problem als ein zweidimensionales Balkenproblem betrachtet werden, da in  $y$ -Richtung keinerlei Effekte zu erwarten sind. In Abbildung 8.19 ist die Problemstellung inklusive Geometrie- und Materialdaten dargestellt. Es sei angemerkt, dass in Abbildung 8.19 lediglich die Mittelfläche der Schale dargestellt ist und diese dadurch dünn erscheint. Jedoch werden im Folgenden zwei unterschiedliche Dicken von  $t = 1,0$  und  $t = 0,1$  gewählt, die in den Schlankheitsparametern  $\frac{L_x}{t} = 10$  und  $\frac{L_x}{t} = 100$  resultieren. Der dicke Fall, d. h.  $\frac{L_x}{t} = 10$ , liegt nahe dem dicken Grenzfall der Reissner-Mindlin-Theorie. Die Idee ist, einen Fall zu wählen, für den die Querschubdeformationen

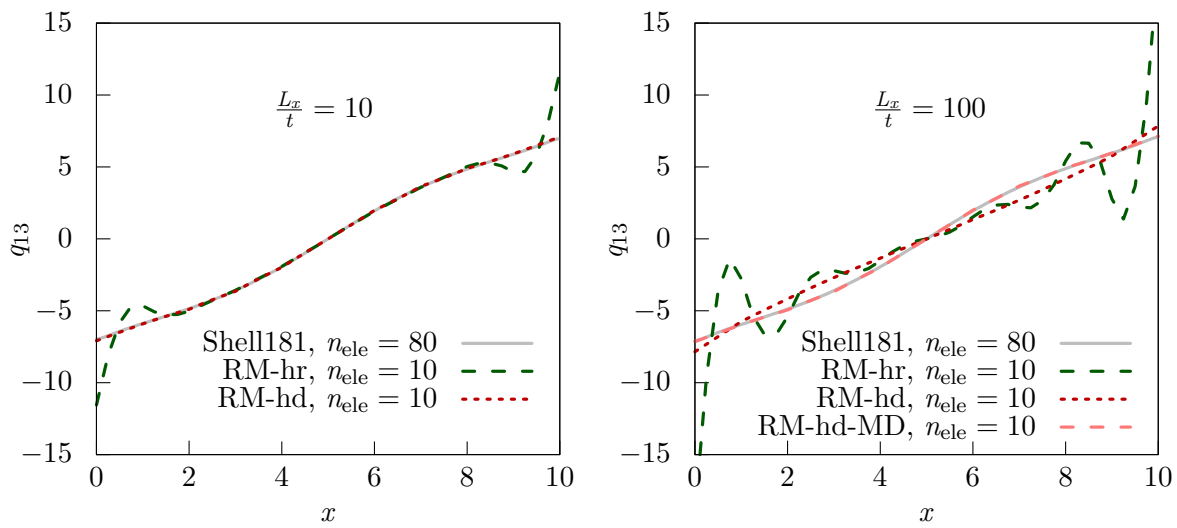


**Abbildung 8.19:** Balkenproblem, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für  $\lambda = 1$ .



$n_{\text{ele}}$ in $x$ -Richtung	$\frac{L_x}{t} = 10$	$\frac{L_x}{t} = 10$	$\frac{L_x}{t} = 100$	$\frac{L_x}{t} = 100$
	RM-hr/RM-hd ( $p = 2$ )	SHELL181	RM-hr/RM-hd ( $p = 2$ )	SHELL181
10	2,3114	2,3108	2,1098	2,2707
20	2,3212	2,3224	2,2711	2,2827
40	2,3232	2,3253	2,2851	2,2856
80	2,3237	2,3260	2,2864	2,2863
120	2,3238	2,3262	2,2865	2,2865
160	2,3238	2,3262	2,2865	2,2865

**Tabelle 8.3:** Balkenproblem, Konvergenz der maximalen Vertikalverschiebung  $v_{z,\text{max}}$ .



**Abbildung 8.20:** Balkenproblem, Querkraft  $q_{13}$  entlang der Koordinate  $x$ , links:  $\frac{L_x}{t} = 10$ , rechts:  $\frac{L_x}{t} = 100$ .

einer einschichtigen Schale nicht vernachlässigbar klein sind. Mit diesem Beispiel soll also untersucht werden, ob die zugrunde liegende Annahme kleiner Schubrotationen, siehe Abschnitt 6.3.2 und 6.4.2, auch für dicke Schalen gültig ist. Der dünne Fall mit  $\frac{L_x}{t} = 100$  soll zur Untersuchung der Qualität der Ergebnisse in Abhängigkeit eines kritischen Parameters dienen. Somit werden die Schalenformulierungen in Bezug auf locking-freies Verhalten getestet. Alle Ergebnisse wurden mit quadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen isogeometrischen Diskretisierungen schubweicher Schalenformulierungen berechnet. Als Vergleich dienen numerische Referenzlösungen aus ANSYS 16, berechnet mit schubweichen, vierknotigen Schalenelementen SHELL181, bei welchen Querschublocking mithilfe des ANS-Konzepts beseitigt wird.

Tabelle 8.3 zeigt für alle Formulierungen eine schnelle Konvergenz der maximalen Vertikalverschiebung  $v_{z,\text{max}}$ . Es sei angemerkt, dass lediglich die Anzahl der Elemente in  $x$ -Richtung von Bedeutung ist, da die Anzahl der Elemente in  $y$ -Richtung durch die ein-

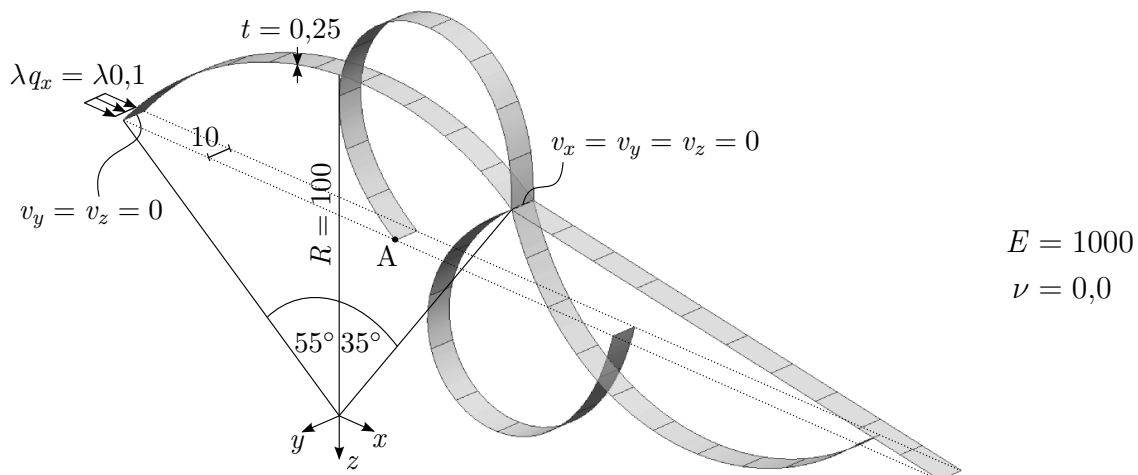
achsige Biegedeformation keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Die konvergierten Ergebnisse der hierarchischen Schalenformulierungen RM-hr und RM-hd zeigen im dicken Fall kleine Abweichungen zur vollständig nichtlinearen Schalenformulierung SHELL181, während die Ergebnisse im dünnen Fall absolut identisch sind. Die kleinen Abweichungen im dicken Fall sind auf die Annahme kleiner Schubrotationen bei RM-hr und RM-hd zurückzuführen, jedoch ist der Unterschied praktisch vernachlässigbar.

Abbildung 8.20 unterstreicht zusätzlich, dass die beschriebenen Abweichungen als sehr gering einzustufen sind. Im dicken Fall sind der Verlauf der Querkraft  $q_{13}$  für RM-hd (10 Elemente) und die Referenzlösung nahezu deckungsgleich. Wie im geometrisch linearen Fall, zeigt  $q_{13}$  für RM-hr leichte Oszillationen im Randbereich, obwohl die Verschiebungslösungen von RM-hr und RM-hd praktisch identisch sind. Im dünnen Fall nehmen die Querkraft-Oszillation für RM-hr leicht zu, während die Querkraft  $q_{xz}$  für RM-hd stets glatt abgebildet werden kann. Die kleine Abweichung folgt lediglich aus der zu steifen Verschiebungslösung, siehe Tabelle 8.3, welche durch Membranlocking verursacht wird. Wird Membranlocking ebenfalls vermieden, kann erneut ein nahezu perfekter Querkraftverlauf abgebildet werden, siehe das Ergebnis für RM-hd-MD.

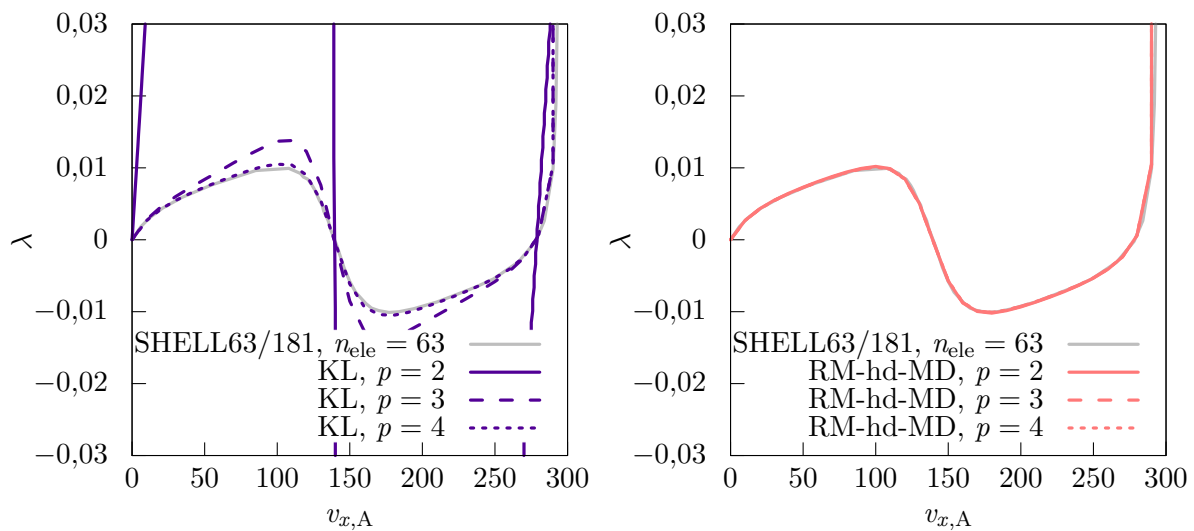
Dieses einfache geometrisch nichtlineare Benchmarkproblem zeigt, dass die Annahme linearisierter Schubrotationen im Kontext kleiner Verzerrungen auch für sehr dicke Schalen vertretbar ist. Ob diese Annahme auch für typische materiell nichtlineare Schalenprobleme mit großen Verzerrungen gültig ist, bedarf weiterer Untersuchungen. Für den dünnen Fall konnte gezeigt werden, dass die Qualität der Querkräfte für die RM-hd-Formulierung hervorragend ist, analog zu den Beobachtungen für geometrisch lineare Probleme.

### 8.2.2 Durchschlagen eines Bogenstücks

Mit diesem Beispiel soll die Signifikanz geometrischer Locking-Effekte in nichtlinearen Schalenproblemen untersucht werden. Das in Abbildung 8.21 dargestellte zylindrische Bogensegment wird am linken Ende durch eine Linienlast  $q_x$  belastet. Bei diesem geometrisch nichtlinearen numerischen Experiment handelt es sich um ein uniaxiales Durchschlagsproblem, da  $\nu = 0,0$  gilt. Um die in Abbildung 8.22 dargestellten Last-Verschiebungs-Kurven vollständig zu durchfahren, kann keine gewöhnliche Lastkontrolle mit stetiger Steigerung des Lastparameters  $\lambda$  verwendet werden. Im vorliegenden Fall wird eine Lastkontrolle mit einem Verschiebungslastfall durch Aufbringen inhomogener Dirichlet-Randbedingungen am linken Bogenende realisiert. Die Struktur besitzt eine relative große Schlankheit von  $\frac{R}{t} = 400$ , wodurch auftretende Locking-Effekte deutlich erkennbar werden. Als numerische Referenzlösung wird eine Berechnung mit SHELL63 und SHELL181 aus ANSYS 16 herangezogen. Die Struktur wird mit 63 Elementen in

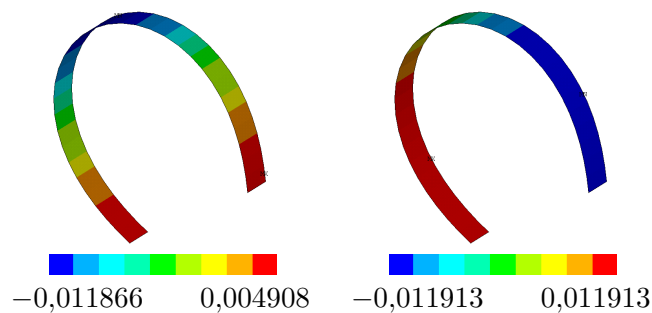


**Abbildung 8.21:** Bogenstück, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie in vier Schritten mit  $v_{x,A} = 100/180/270/300$ .

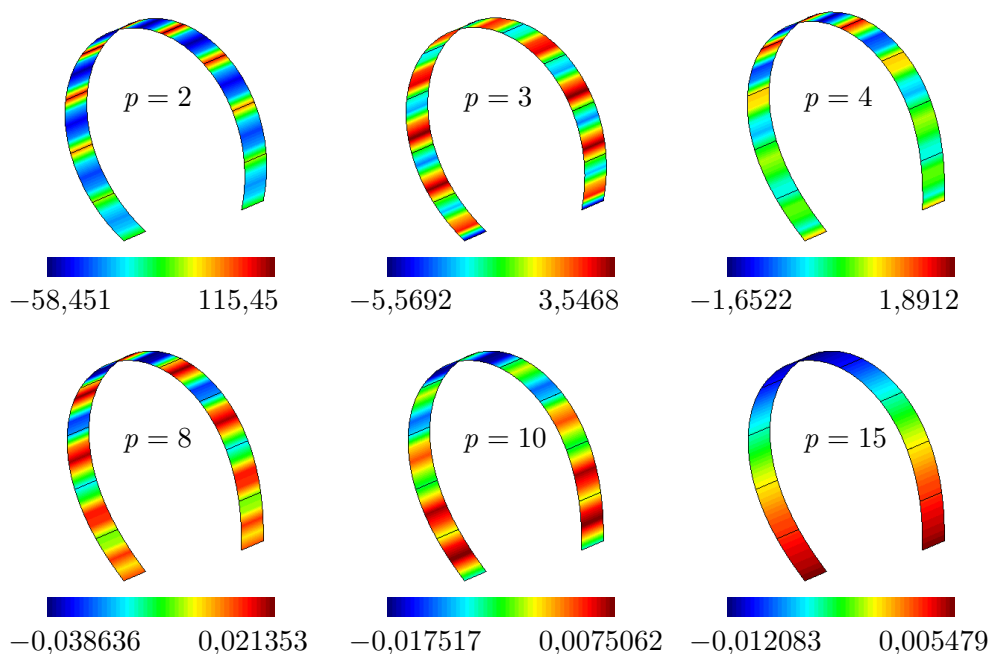


**Abbildung 8.22:** Bogenstück, Last-Verschiebungs-Diagramme, 10 Elemente, variable Polynomordnungen  $p$ ,  $C^{p-1}$ , links: KL, rechts: RM-hd-MD.

Ringrichtung diskretisiert. Im Gegensatz zu SHELL181 handelt es sich bei SHELL63 um ein schubstarres Kirchhoff-Love-Schalelement. Beide Elemente liefern praktisch dieselben Ergebnisse, da Querschubeffekte für solch eine dünne Struktur von geringem Einfluss sind. Wie in Abbildung 8.22 zu sehen ist, konvergieren beide isogeometrischen Schalelemente, KL und RM-hd-MD, zur ANSYS-Referenzlösung. Im linken Diagramm ist jedoch ersichtlich, wie prägnant die Auswirkungen von Membranlocking auf die Ergebnisqualität der primalen KL-Schalenformulierung sind. Für die Diskretisierung mit 10 quadratischen Elementen wird die Verschiebungslösung komplett falsch approximiert. Die zugehörige Kurve überschreitet die Grenzen des linken Diagramms der Abbildung 8.22,

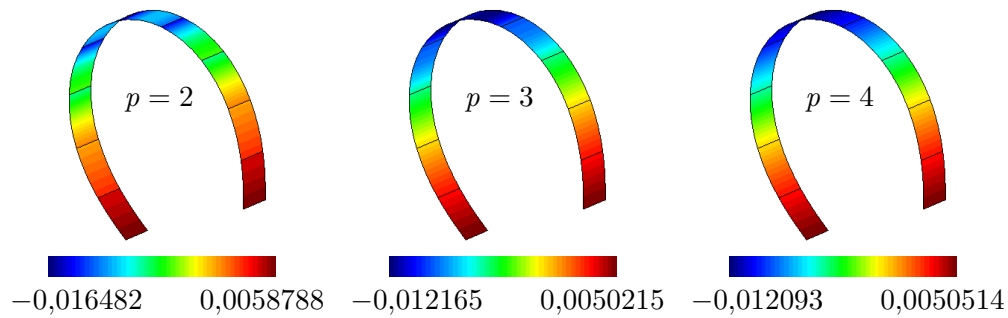


**Abbildung 8.23:** Bogenstück, 63x4 Elemente, Shell181 (ANSYS 16), links: Membrankraft  $n_{11}$  (Ringkraft) für  $v_{x,A} = 100$ , rechts: Querkraft  $q_{13}$  für  $v_{x,A} = 100$ .

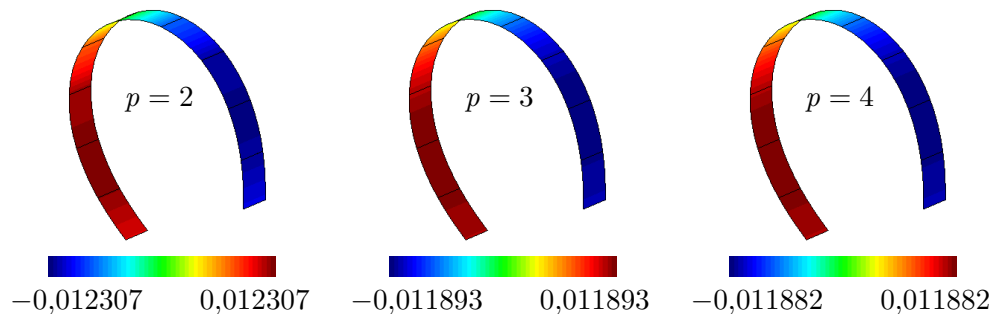


**Abbildung 8.24:** Bogenstück, Membrankraft  $n_{11}$  (Ringkraft) für  $v_{x,A} = 100$ , KL, 10 Elemente,  $C^{p-1}$ .

wobei die Minimal- bzw. Maximalwerte bei  $\lambda = \pm 0,585$  liegen. Eine Polynomgraderhöhung führt zu einer deutlichen Verbesserung der Verschiebungsantwort. Das heißt, die auftretenden Fehler verringern sich mit steigendem Polynomgrad. Für  $p = 4$  wird das Verschiebungsverhalten nahezu perfekt approximiert. Für höhere Ordnungen sind die Fehler in den Verschiebungen praktisch nicht mehr zu erkennen. Im rechten Diagramm der Abbildung 8.22 zeigt sich die Überlegenheit der vollständig lockingfreien Schalenformulierung RM-hd-MD. Für die grobe Diskretisierung mit nur 10 Elementen wird die Referenzkurve für alle Polynomordnungen nahezu perfekt approximiert.



**Abbildung 8.25:** Bogenstück, Membrankraft  $n_{11}$  (Ringkraft) für  $v_{x,A} = 100$ , RM-hd-MD, 10 Elemente,  $C^{p-1}$ .

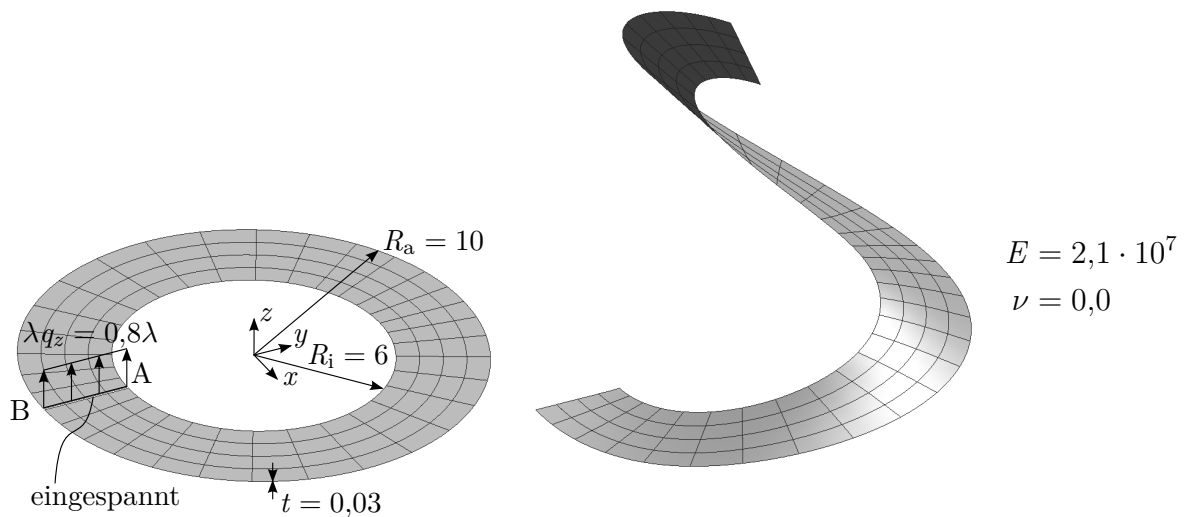


**Abbildung 8.26:** Bogenstück, Querkraft  $q_{13}$  für  $v_{x,A} = 100$ , RM-hd-MD, 10 Elemente,  $C^{p-1}$ .

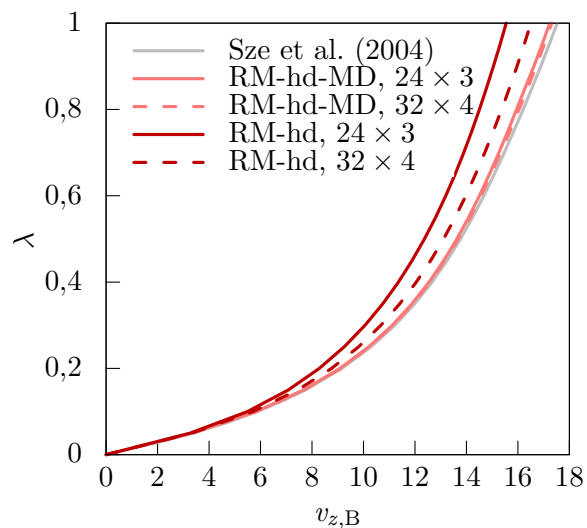
Die numerische Referenzlösung für die zwei maßgebenden Spannungsergebnisse ist in Abbildung 8.23 dargestellt. Für den Zwischenzustand mit der Verschiebung  $v_{x,A} = 100$  des linken Bogenendes sind die Membrankraft  $n_{11}$  und die Querkraft  $q_{13}$  dargestellt, wobei die „1“-Richtung die Ringrichtung beschreibt. Die Abbildungen 8.24 und 8.25 zeigen die entsprechenden Verläufe von  $n_{11}$  für isogeometrische Diskretisierungen der Formulierungen KL und RM-hd-MD mit jeweils 10 Elementen. Die Ergebnisse aus Abbildung 8.24 zeigen sehr deutlich, dass gewöhnliche KL-Formulierungen unter ausgeprägtem Membranlocking leiden. Sogar für hohe Polynomgrade ist die Qualität der Membrankraft inakzeptabel, obwohl die zugehörigen Verschiebungslösungen bereits von guter Qualität sind. Einmal mehr wird deutlich, wie elementar wichtig eine Betrachtung der Ergebnisse für Spannungsgrößen ist, um die Qualität einer Schalenformulierung ganzheitlich beurteilen zu können. Abbildung 8.25 demonstriert die hohe Qualität von  $n_{11}$  bei Verwendung der RM-hd-MD-Formulierung. Unabhängig von der Polynomordnung wird  $n_{11}$  sehr gut approximiert. Der Membrankraftverlauf von RM-hd-MD ist für  $p = 2$  bereits von höherer Qualität als bei einer Berechnung mit primalen KL-Elementen zehnter Ordnung. In Abbildung 8.26 lässt sich die hohe Qualität der Querkraft  $q_{13}$  bei Verwendung der

RM-hd-MD-Formulierung erkennen. Unabhängig vom Polynomgrad ergeben sich glatte Verläufe, die gut mit der Referenzlösung übereinstimmen.

### 8.2.3 Eingespannte, geschlitzte Kreisringplatte



**Abbildung 8.27:** Kreisringplatte, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für  $\lambda = 1$ .



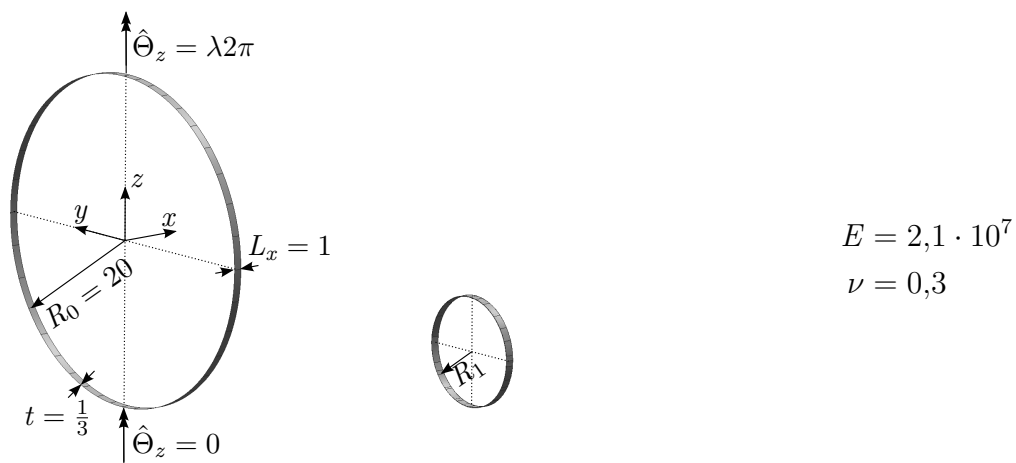
**Abbildung 8.28:** Kreisringplatte, Last-Verschiebungs-Diagramm, 2 Patches,  $p = 2$ ,  $C^1$ ,  $n_{\text{ele}} = 24 \times 3$  bzw.  $n_{\text{ele}} = 32 \times 4$ .

Ein bekanntes Benchmarkproblem für nichtlineare Schalenelemente besteht aus einer geschlitzten Kreisringplatte, die einseitig eingespannt ist und am freien Rand durch eine

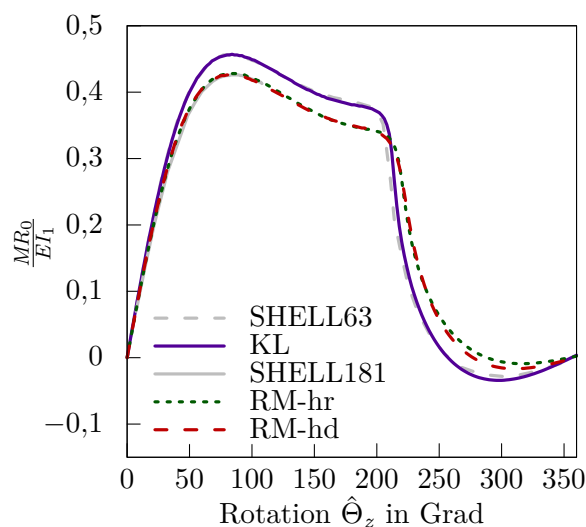
vertikale Linienlast  $q_z$  belastet wird. Die zugehörige Problembeschreibung ist in Abbildung 8.27 dargestellt. Die vertikale Verschiebung  $v_{z,B}$  am Punkt B wird mit den Referenzlösungen aus SZE U. A. (2004) verglichen. Zugehörige Last-Verschiebungs-Diagramme sind in der Abbildung 8.28 exemplarisch für die Formulierungen RM-hd und RM-hd-MD dargestellt. Die jeweiligen Unterschiede zwischen den beiden Formulierungen sind auf Membranlocking zurückzuführen und zeigen erneut die Notwendigkeit von dessen Vermeidung.

### 8.2.4 Durchschlagen eines Rings

Die Untersuchung des letzten Beispiels soll demonstrieren, dass die Abbildung sehr großer Gesamtrotationen, trotz der Parametrisierung linearisierter Schubrotationen, problemlos möglich ist. Dazu wird das Durchschlagsproblem eines elastischen Rings unter vorgeschriebener Rotation des obersten Punktes untersucht. Die Problembeschreibung inklusive Geometrie- und Materialdaten sowie der deformierten Geometrie für  $\lambda = 1$  ist in Abbildung 8.29 dargestellt. Die Inspiration für dieses Benchmarkproblem stammt unter anderem aus GOTO U. A. (1992), SMOLEŃSKI (1999), ROMERO (2004) und MEIER U. A. (2014). Jedoch wurden in diesen Arbeiten Balkenformulierungen betrachtet. Die Ergebnisse in den Last-Verschiebungs-Diagrammen unterscheiden sich von den hier vorgestellten Ergebnissen für Schalen. Die Ursache dieser Diskrepanz liegt wahrscheinlich im unterschiedlichen Verhalten unter großer Torsionsbeanspruchung. Für  $\lambda = 1$  wird der oberste Punkt mit  $\hat{\Theta}_z = 2\pi$  um die  $z$ -Achse über inhomogene Dirichlet-Randbedingungen rotiert. Dabei schlägt die gesamte Struktur durch und die deformierte Geometrie des Rings besitzt den Radius  $R_1 = \frac{R_0}{3}$ . Der Ring hat eine Breite von  $L_x = 1$



**Abbildung 8.29:** Durchschlagen eines Rings, Problemstellung mit Geometrie- und Materialdaten sowie deformierter Geometrie für  $\lambda = 1$ .



**Abbildung 8.30:** Durchschlagen eines Rings, Last-Verschiebungs-Diagramm,  $\frac{MR_0}{EI_1}$  in Abhängigkeit von  $\hat{\Theta}_z$ , 2 Patches mit jeweils 50 Elementen,  $p = 3$  (Umfangsrichtung) und  $q = 2$  (Breitenrichtung), ANSYS-Referenzlösungen (SHELL63 und SHELL181) berechnet mit  $250 \times 2$  Elementen.

und eine Dicke von  $t = 1/3$ , was in den Hauptflächenträgheitsmomenten  $I_1 \approx 2,778 \cdot 10^{-2}$  und  $I_2 \approx 3,086 \cdot 10^{-3}$  resultiert.

In Abbildung 8.30 sind Last-Verschiebungs-Kurven für Berechnungen mit verschiedenen Schalenformulierungen dargestellt. Die isogeometrische Diskretisierung der KL-Formulierung zeigt nahezu identisches Verhalten im Vergleich zum schubstarreren Schalenelement SHELL63 aus ANSYS 16. Im Gegensatz dazu verhalten sich alle schubweichen Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen deutlich weicher. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass das schubweiche Element SHELL181 keine stabile Lösung des Problems bereitstellen konnte. Bei einem Rotationswinkel von etwa  $\hat{\Theta}_z = 108^\circ$  treten Konvergenzprobleme auf und die Berechnung bricht ab. Bis dorthin zeigen alle schubweichen Formulierungen (RM-hr, RM-hd und SHELL181) eine sehr gute Übereinstimmung im Verschiebungsverhalten. Der qualitative Unterschied zwischen den Kirchhoff-Love- und den Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen ist wahrscheinlich auf ein unterschiedliches Verwölbungsverhalten des Querschnitts zurückzuführen. Für ein Seitenverhältnis des Querschnitts von  $\frac{L_x}{t} = 3$  sind die Effekte aus Querschub nicht vernachlässigbar klein. Von der Untersuchung der Effizienz bei groben Netzen wird an dieser Stelle abgesehen, da die Betrachtung sehr großer Rotationen im Vordergrund steht. Abbildung 8.31 zeigt den Deformationsvorgang des Durchschlagsproblems exemplarisch für die RM-hr-Formulierung und unterstreicht die Fähigkeit vorgeschlagener Schalenformulierungen, sehr große Rotationen effizient darstellen zu können.



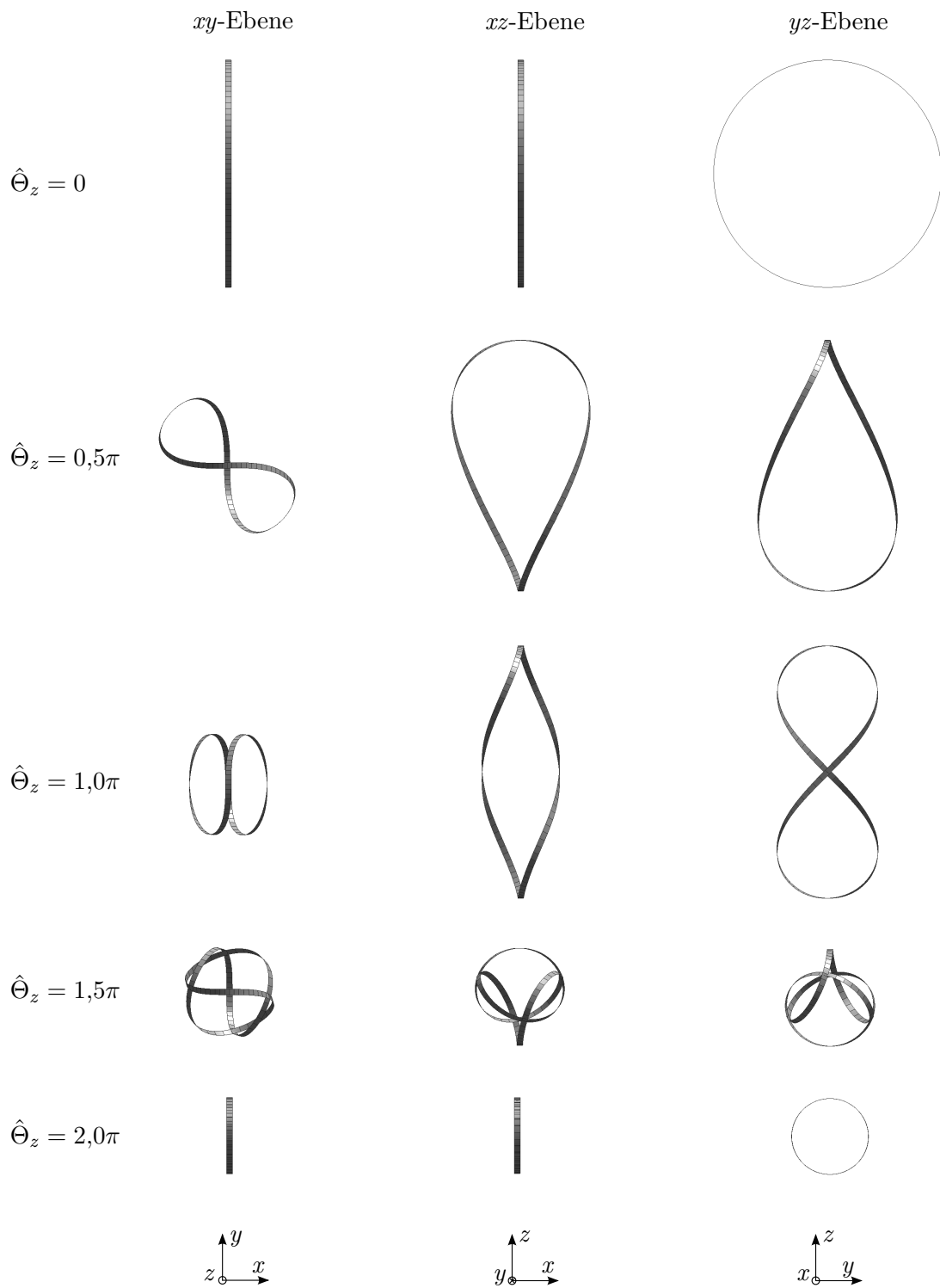


Abbildung 8.31: Durchschlagen eines Rings, Deformationsvorgang.



---

## Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung innovativer Konzepte zur intrinsischen Vermeidung geometrischer Locking-Effekte in schubweichen Schalenformulierungen. Neben Untersuchungen der Qualität von Verschiebungslösungen lag ein starker Fokus auf der Betrachtung der Qualität der Spannungsergebnisse. Die entwickelten Schalenformulierungen sollten sowohl für geometrisch lineare als auch nichtlineare Problemstellungen unter großen Rotationen effizient formuliert werden. Die nachfolgenden Abschnitte fassen die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zusammen und geben Anregungen für mögliche Weiterentwicklungen.

### 9.1 Zusammenfassung

Die präsentierten Neuentwicklungen dieser Arbeit basieren maßgeblich auf Reparametrisierungen der Kinematik von Balken-, Platten- und Schalentheorien. Die daraus resultierenden Balken-, Platten- und Schalenformulierungen haben die besondere Eigenschaft, intrinsisch frei von Locking zu sein. Bestimmte Locking-Effekte werden bereits auf Theorieebene – vor der Diskretisierung – *vermieden*. Somit sind die vorgestellten Formulierungen frei von Locking, unabhängig von den zur Diskretisierung verwendeten Formfunktionen. Locking muss also nicht im Nachgang durch besondere Tricks oder Methoden *beseitigt* werden. Diese besondere Eigenschaft der intrinsischen Vermeidung von Locking ist hervorzuheben. Vor allem angesichts einer Vielzahl an Neuentwicklungen im Bereich glatter Diskretisierungskonzepte, beispielsweise der IGA oder netzfreier Methoden, versprechen die vorgestellten Konzepte eine breite Anwendbarkeit in verschiedenen Bereichen der computergestützten Strukturmechanik und darüber hinaus.

Die Grundidee der Parametrisierung von hierarchischen Rotationen oder hierarchischen Verschiebungen wurde zunächst am ebenen Timoschenko-Balken für lineare Probleme

eingeführt. Die rotationsfreie Parametrisierung hierarchischer Verschiebungen hat sich gegenüber der Parametrisierung hierarchischer Rotationen als überlegen erwiesen. Bereits auf Theorieebene konnte beobachtet werden, dass diese Art von Reparametrisierung jegliche Unausgewogenheiten in den kinematischen Gleichungen vermeidet, die zu Querschublocking führen. Für jede Equal-Order-Interpolation der Primärvariablen ist diese Balkenformulierung frei von Querschublocking und vermeidet unerwünschte Oszillationen in den Querkraftverläufen. Die Idee der direkten Parametrisierung von Schubparametern ist grundsätzlich nicht neu, siehe beispielsweise OÑATE UND ZÁRATE (2010) sowie BISCHOFF UND TAYLOR (2001). Jedoch basieren die genannten Arbeiten auf einem Mehrfeldprinzip. Die in dieser Arbeit vorgestellten hierarchischen Formulierungen vermeiden Querschublocking im Rahmen einer *primalen* Formulierung. Im Gegenzug weisen hierarchische Formulierungen einen variationellen Index von  $c = 2$  auf, weshalb mindestens  $C^1$ -kontinuierliche Ansätze benötigt werden.

Im Folgenden wurde die Erweiterung hierarchischer Balkenformulierungen auf schubweiche hierarchische Schalenformulierungen detailliert beschrieben. Auch hier wurden die Parametrisierungen von hierarchischen Rotationen und hierarchischen Verschiebungen diskutiert und miteinander verglichen. Beide Formulierungen, RM-hr und RM-hd, wurden sowohl für geometrisch lineare als auch nichtlineare Problemstellungen beschrieben. Ein besonderes Augenmerk lag dabei auf der effizienten Darstellung großer Rotationen, die für gewöhnliche Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen zwar zum Stand der Technik gehört, jedoch nur durch spezielle Behandlung in multiplikativer Struktur zu bewerkstelligen ist. Sowohl für RM-hr als auch für RM-hd wurde eine neuartige effiziente Art der Darstellung großer Rotationen vorgestellt. Die zugrunde liegende Annahme ist, dass die Querschubrotationen für eine breite Klasse von Schalenproblemen klein sind, wohingegen die Gesamtrotationen beliebig groß sein können. Diese Annahme resultiert in einer additiven Zerlegung der Green-Lagrange-Verzerrungen in vollständig nichtlineare Anteile vom Kirchhoff-Love-Typ und hierarchisch addierte linearisierte Querschubanteile. Für die in dieser Arbeit untersuchten Benchmarkprobleme konnte diese, zunächst restriktiv erscheinende, Annahme kleiner Schubrotationen gerechtfertigt werden.

Im Kontext rotationsfreier Parametrisierungen schubweicher Platten wurden unterschiedliche Konzepte miteinander verglichen. Bereits auf Theorieebene konnte gezeigt werden, dass Plattenformulierungen mit nur *einer* Schubverschiebung das Mindlin-Plattenmodell nicht abbilden können. Trotz dieses grundlegenden Defekts ist diese Art von Plattenformulierung in der wissenschaftlichen Literatur weit verbreitet. Die hier vorgestellten Platten- bzw. Schalenformulierungen mit *zwei* hierarchischen Schubverschiebungen (RM-hd) sind womöglich die ersten ihrer Art, die im geometrisch linearen Fall das Mindlin-Modell exakt abbilden können. Die numerische Validierung dieser Eigenschaft wurde ausführlich anhand eines Plattenproblems demonstriert. Zudem konnte gezeigt werden, dass die rotationsfreie RM-hd-Formulierung intrinsisch frei von Quer-

schublocking ist und eine hervorragende Approximation der Querkraftverläufe ermöglicht.

Das hierarchische Konzept konnte bisher nicht in allgemeiner Form auf die intrinsische Vermeidung von Membranlocking im Rahmen einer primalen Methode erweitert werden. Jedoch wurde mit dem Mixed-Displacement(MD)-Konzept ein gemischter Ansatz zur intrinsischen Vermeidung geometrischer Locking-Effekte vorgestellt. Grundidee ist erneut die Reparametrisierung von Primärvariablen, hier der Spannungen des Hellinger-Reissner-Variationsprinzips. Über die Reparametrisierung der Spannungen durch Verzerrungen sowie die Reparametrisierung dieser Verzerrungen durch ein zusätzliches Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$ , wurde ein gemischtes Prinzip vorgestellt, das ausschließlich Verschiebungsfelder parametrisiert. Die für gemischte Methoden notwendige Wahl geeigneter Spannungs- oder Verzerrungsräume entfällt. Für jede Equal-Order-Interpolation der Primärvariablen  $\mathbf{u}$  und  $\bar{\mathbf{u}}$  wird automatisch der optimale Verzerrungsraum durch partielle Differenziation von  $\bar{\mathbf{u}}$  konstruiert. Für den einfachen Fall schubweicher Balkenformulierungen konnte die enge theoretische Verwandtschaft des MD-Konzepts mit der hierarchischen Verschiebungsmethode gezeigt werden. Sie unterscheiden sich lediglich durch die schwache bzw. starke Erfüllung einer geometrischen Zwangsbedingung. Der große Vorteil des MD-Konzepts ist die Möglichkeit der Erweiterung der Methode zur Vermeidung von Membranlocking, was im Rahmen des hierarchischen Konzepts noch nicht bewerkstelligt werden konnte.

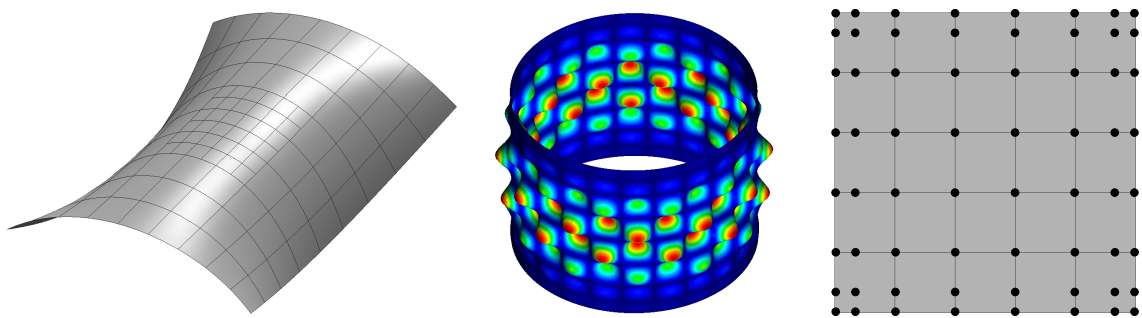
Die erfolgreiche Kombination beider Konzepte zur intrinsischen Vermeidung von Querschub- und Membranlocking wurde mit der RM-hd-MD-Formulierung demonstriert. In allen Benchmarkproblemen zeigte diese Formulierung optimal lockingfreies Elementverhalten mit herausragender Ergebnisqualität für sowohl Verschiebungen als auch Spannungsergebnisse. Im Vergleich zu entsprechenden primalen Formulierungen erfordern die hier vorgestellten gemischten MD-Formulierungen zwar mehr Freiheitsgrade pro Knoten, bewirken aber eine enorme Effizienzsteigerung. Die vorgestellten MD-Formulierungen sind nicht nur frei von Locking, sondern erfordern für die untersuchten nichtlinearen Probleme nur etwa die Hälfte der Anzahl an Iterationen im Rahmen des Newton-Raphson-Verfahrens. Diese positive Eigenschaft gemischter Methoden wurde beispielsweise auch in MAGISANO U. A. (2017) beobachtet. Zusammen mit der exzellenten Approximationsgüte der maßgebenden physikalischen Größen, vor allem den Spannungsergebnissen, ist infrage zu stellen, ob gemischte Elemente im IGA-Kontext überhaupt numerisch teurer sind als primale isogeometrische Elemente.

## 9.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit vorgestellten intrinsisch lockingfreien Schalenformulierungen haben sich in vielen Anwendungen als sehr effizient erwiesen. Es bleiben jedoch weitere Fragen offen, die von sowohl praktischem als auch wissenschaftlichem Interesse sind.

Naheliegende Fragestellungen umfassen vor allem die Erweiterung der vorgestellten Schalenformulierungen auf Berechnungen mit getrimmten NURBS-Patches sowie unstrukturierten Spline-Diskretisierungen basierend auf beispielsweise T-Splines, U-Splines oder hierarchisch verfeinerten B-Splines. Damit einhergehend sollte eine effiziente und allgemeingültige Einbringung der notwendigen Zwangsbedingungen auf hierarchischen Verschiebungsfeldern oder dem zusätzlichen  $\bar{\mathbf{u}}$ -Feld im Rahmen des MD-Konzepts implementiert werden. Ebenso ist für praktische Problemstellungen eine effiziente Kopplung komplexer Multi-Patch-Geometrien erforderlich. Eine interessante und effiziente Idee wird durch sogenannte Blended-Shells beschrieben, bei denen an Patchrändern Rotationsfreiheitsgrade zur Patchkopplung eingeführt werden, siehe BENSON U. A. (2013). Eine Kombination dieser Technologie mit hierarchischen Formulierungen unterstützt die Möglichkeit modelladaptiver Berechnungen. Durch die hierarchische Struktur lassen sich Schubfreiheitsgrade je nach Bedarf ein- oder ausschalten, um eine optimale Balance zwischen Effizienz und Approximationsgüte zu erreichen.

Aktuell laufende Arbeiten beschäftigen sich mit der isogeometrischen Schalenanalyse unter Verwendung von hierarchisch verfeinerten B-Splines, der Anwendung der entwickelter Schalenformulierungen auf lineare und nichtlineare Stabilitätsprobleme von Schalenstrukturen sowie der intrinsischen Vermeidung von Locking im Kontext isogeometrischer Kollokationsmethoden, siehe Abbildung 9.1. Weitere Projekte umfassen die Unter-

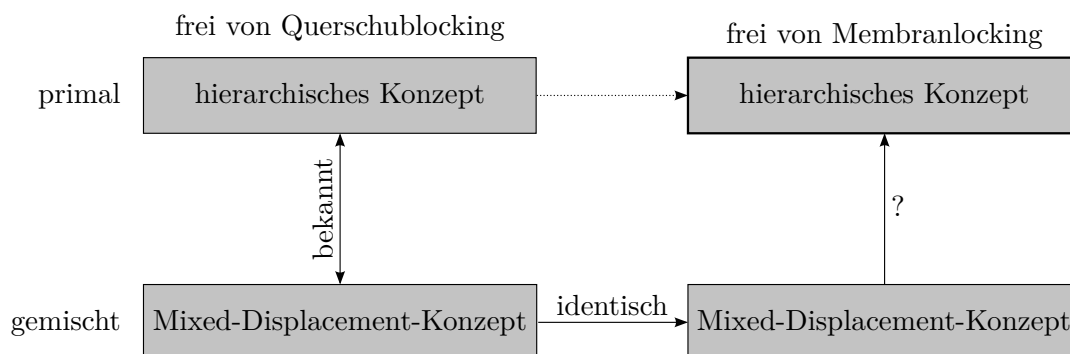


**Abbildung 9.1:** Auszug aus aktuellen Anwendungen der in dieser Arbeit vorgestellten Konzepte, links: isogeometrische Schalenanalyse mit hierarchisch verfeinerten B-Splines, mittig: lineare und nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit isogeometrischen Schalenformulierungen, rechts: Lockingfreie isogeometrische Kollokation für Balken, Platten und Schalen.

suchungen hierarchischer Schalenformulierungen im Kontext dynamischer Problemstellungen sowie nichtlinearer Stoffgesetze. Speziell für Problemstellungen der expliziten Dynamik könnte die direkte Parametrisierung der Querschubanteile erhebliche Vorteile im Kontext selektiver Massenskalierung haben. Nichtlineare Materialgesetze sind aus praktischer Sicht extrem wichtig und könnten den Anwendungsbereich hierarchischer Schalenformulierungen mit linearisierter Schubparametrisierung genauer eingrenzen. Speziell für Probleme mit sehr großen Verzerrungen ist von großem Interesse, wie weit die Annahme linearisierter Schubrotationen für typische Schalenprobleme tatsächlich tragbar ist. Numerische Untersuchungen mithilfe der Materialbibliothek MUESLI, siehe PORTILLO U. A. (2017), sind Gegenstand aktueller Bemühungen.

Mathematische Untersuchungen des MD-Konzepts, z. B. durch Tests der inf-sup-Stabilität, sind nötige weitere Schritte. Ebenso bedarf die beschriebene Eigenschaft der Effizienz gemischter Methoden im Rahmen nichtlinearer Lösungsstrategien weiterer systematischer Untersuchungen. Ob und warum welche Klasse gemischter finiter Elemente weniger Iterationen im Rahmen des Newton-Raphson-Verfahrens benötigt, sind neben Fragen der Robustheit hochinteressante Aspekte nichtlinearer Verfahren.

Von großem, sowohl wissenschaftlichem als auch praktischem Interesse ist die intrinsische Vermeidung von Membranlocking im Rahmen einer primalen Methode. Ein entsprechendes Pendant zur Vermeidung von Querschublocking wurde bereits gefunden, wobei der direkte primale Übertrag noch nicht geglückt ist. Die enge theoretische Verwandtschaft des MD-Konzepts und hierarchischer Methoden lässt auf eine Lösung über den Umweg gemischter Konzepte hoffen, siehe Abbildung 9.2.



**Abbildung 9.2:** Membranlocking – Ausblick.





---

# Literaturverzeichnis

ADAM U. A. 2014

ADAM, C. ; BOUABDALLAH, S. ; ZARROUG, M. ; MAITOURNAM, H.: Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 279 (2014), September, S. 1–28

ADAM U. A. 2015A

ADAM, C. ; BOUABDALLAH, S. ; ZARROUG, M. ; MAITOURNAM, H.: Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 106–137

ADAM U. A. 2015B

ADAM, C. ; HUGHES, T. J. R. ; BOUABDALLAH, S. ; ZARROUG, M. ; MAITOURNAM, H.: Selective and reduced numerical integrations for NURBS-based isogeometric analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 732–761

ALTENBACH 2015

ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2015

ANDERSON 1953

ANDERSON, R. A.: *Transient response of uniform beams*, California Institute of Technology, Ph.D. Thesis, 1953

ANTOLIN U. A. 2017

ANTOLIN, P. ; BRESSAN, A. ; BUFFA, A. ; SANGALLI, G.: An isogeometric method for linear nearly-incompressible elasticity with local stress projection. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), April, S. 694–719

ARROYO UND ORTIZ 2006

ARROYO, M. ; ORTIZ, M.: Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), März, Nr. 13, S. 2167–2202

AURICCHIO U. A. 2007

AURICCHIO, F. ; BEIRÃO DA VEIGA, L. ; BUFFA, A. ; LOVADINA, C. ; REALI, A. ; SANGALLI, G.: A fully “locking-free” isogeometric approach for plane linear elasticity problems: A stream function formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2007), Dezember, Nr. 1–4, S. 160–172

AURICCHIO U. A. 2010A

AURICCHIO, F. ; BEIRÃO DA VEIGA, L. ; HUGHES, T. J. R. ; REALI, A. ; SANGALLI, G.: Isogeometric collocation methods. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20 (2010), November, Nr. 11, S. 2075–2107

AURICCHIO U. A. 2012

AURICCHIO, F. ; BEIRÃO DA VEIGA, L. ; HUGHES, T. J. R. ; REALI, A. ; SANGALLI, G.: Isogeometric collocation for elastostatics and explicit dynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252 (2012), Dezember, S. 2–14

AURICCHIO U. A. 2013

AURICCHIO, F. ; BEIRÃO DA VEIGA, L. ; KIENDL, J. ; LOVADINA, C. ; REALI, A.: Locking-free isogeometric collocation methods for spatial Timoshenko rods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 263 (2013), August, S. 113–126

AURICCHIO U. A. 2010B

AURICCHIO, F. ; BEIRÃO DA VEIGA, L. ; LOVADINA, C. ; REALI, A.: The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEMs versus NURBS-based approximations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), Januar, Nr. 5–8, S. 314–323

BABŮSKA UND AZIZ 1972

BABŮSKA, A. ; AZIZ, A. K.: Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In: AZIZ, A. K. (Hrsg.): *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. New York : Academic Press, 1972

BAŞAR UND KRÄTZIG 1985

BAŞAR, Y. ; KRÄTZIG, W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985

## BARLOW 1976

BARLOW, J.: Optimal stress locations in finite element models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), S. 243–251

## BAŞAR UND WEICHERT 2000

BAŞAR, Y. ; WEICHERT, D.: *Nonlinear continuum mechanics of solids: Fundamental mathematical and physical concepts*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2000

## BAZILEVS U. A. 2012

BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; SCOTT, M. A.: Isogeometric fluid–structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252 (2012), Dezember, S. 28–41

## BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2012A

BEIRÃO DA VEIGA, L. ; BUFFA, A. ; LOVADINA, C. ; MARTINELLI, M. ; SANGALLI, G.: An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212 (2012), Februar, S. 45–53

## BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2015

BEIRÃO DA VEIGA, L. ; HUGHES, T. J. R. ; KIENDL, J. ; LOVADINA, C. ; NIIRANEN, J. ; REALI, A. ; SPELEERS, H.: A locking-free model for Reissner–Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 25 (2015), Februar, Nr. 08, S. 1519–1551

## BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2012B

BEIRÃO DA VEIGA, L. ; LOVADINA, C. ; REALI, A.: Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241–244 (2012), Oktober, S. 38–51

## BELYTSCHKO UND HSIEH 1973

BELYTSCHKO, T. ; HSIEH, B. J.: Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), Januar, Nr. 3, S. 255–271

## BELYTSCHKO U. A. 2014

BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester : Wiley, 2014

## BELYTSCHKO U. A. 1994

BELYTSCHKO, T. ; LU, Y. Y. ; GU, L.: Element-free Galerkin methods. In: *Inter-*

*national Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), Januar, Nr. 2, S. 229–256

BENSON U. A. 2010

BENSON, D. J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), Januar, S. 276–289

BENSON U. A. 2011

BENSON, D. J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; HUGHES, T. J. R.: A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), März, Nr. 13–16, S. 1367–1378

BENSON U. A. 2013

BENSON, D. J. ; HARTMANN, S. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; HUGHES, T. J. R.: Blended isogeometric shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 255 (2013), März, S. 133–146

BETSCH U. A. 1996

BETSCH, P. ; GRUTTMANN, F. ; STEIN, E.: A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 130 (1996), März, Nr. 1, S. 57–79

BIEBER U. A. 2018

BIEBER, Simon ; OESTERLE, Bastian ; RAMM, Ekkehard ; BISCHOFF, Manfred: A variational method to avoid locking—independent of the discretization scheme. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114 (2018), Mai, Nr. 8, S. 801–827

BISCHOFF 1999

BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 1999

BISCHOFF U. A. 2004

BISCHOFF, M. ; BLETZINGER, K.-U. ; WALL, W. A. ; RAMM, E.: Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004

BISCHOFF UND RAMM 1997

BISCHOFF, M. ; RAMM, E.: Shear deformable shell elements for large strains and rotations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), Dezember, Nr. 23, S. 4427–4449

## BISCHOFF UND TAYLOR 2001

BISCHOFF, M. ; TAYLOR, R. L.: A three-dimensional shell element with an exact thin limit. In: *ECCM-2001, Cracow, Poland* (2001)

## BLETZINGER U. A. 2000

BLETZINGER, K.-U. ; BISCHOFF, M. ; RAMM, E.: A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. In: *Computers & Structures* 75 (2000), April, Nr. 3, S. 321–334

## BORNEMANN UND ÇIRAK 2013

BORNEMANN, P. B. ; ÇIRAK, F.: A subdivision-based implementation of the hierarchical b-spline finite element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 253 (2013), Januar, S. 584–598

## BOUCLIER U. A. 2012

BOUCLIER, R. ; ELGUEDJ, T. ; COMBESCURE, A.: Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 245–246 (2012), Oktober, S. 144–162

## BOUCLIER U. A. 2013

BOUCLIER, R. ; ELGUEDJ, T. ; COMBESCURE, A.: Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and  $\bar{B}$ -method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267 (2013), Dezember, S. 86–110

## BOUCLIER U. A. 2015A

BOUCLIER, R. ; ELGUEDJ, T. ; COMBESCURE, A.: Development of a mixed displacement-stress formulation for the analysis of elastoplastic structures under small strains: Application to a locking-free, NURBS-based solid-shell element. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 295 (2015), Oktober, S. 543–561

## BOUCLIER U. A. 2015B

BOUCLIER, R. ; ELGUEDJ, T. ; COMBESCURE, A.: An isogeometric locking-free NURBS-based solid-shell element for geometrically nonlinear analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 101 (2015), März, Nr. 10, S. 774–808

## BRAESS 2017

BRAESS, D.: *Finite Elemente*. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2017

## BREITENBERGER U. A. 2015

BREITENBERGER, M. ; APOSTOLATOS, A. ; PHILIPP, B. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K. U.: Analysis in computer aided design: Nonlinear isogeometric B-Rep

analysis of shell structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 401–457

BREZZI 1974

BREZZI, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 8 (1974), S. 129–151

BUECHTER UND RAMM 1992

BUECHTER, N. ; RAMM, E.: Shell theory versus degeneration—a comparison in large rotation finite element analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 34 (1992), März, Nr. 1, S. 39–59

CARDOSO UND CESAR DE SA 2012

CARDOSO, R. P. R. ; CESAR DE SA, J. M. A.: The enhanced assumed strain method for the isogeometric analysis of nearly incompressible deformation of solids. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 92 (2012), Oktober, Nr. 1, S. 56–78

CARDOSO UND CESAR DE SA 2014

CARDOSO, R. P. R. ; CESAR DE SA, J. M. A.: Blending moving least squares techniques with NURBS basis functions for nonlinear isogeometric analysis. In: *Computational Mechanics* 53 (2014), Januar, Nr. 6, S. 1327–1340

CASEIRO U. A. 2014

CASEIRO, J. F. ; VALENTE, R. A. F. ; REALI, A. ; KIENDL, J. ; AURICCHIO, F. ; ALVES DE SOUSA, R. J.: On the Assumed Natural Strain method to alleviate locking in solid-shell NURBS-based finite elements. In: *Computational Mechanics* 53 (2014), Januar, Nr. 6, S. 1341–1353

CASEIRO U. A. 2015

CASEIRO, J. F. ; VALENTE, R. A. F. ; REALI, A. ; KIENDL, J. ; AURICCHIO, F. ; ALVES DE SOUSA, R. J.: Assumed Natural Strain NURBS-based solid-shell element for the analysis of large deformation elasto-plastic thin-shell structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 861–880

CASQUERO U. A. 2017

CASQUERO, H. ; LIU, L. ; ZHANG, Y. ; REALI, A. ; KIENDL, J. ; GOMEZ, H.: Arbitrary-degree T-splines for isogeometric analysis of fully nonlinear Kirchhoff–Love shells. In: *Computer-Aided Design* 82 (2017), Januar, S. 140–153

ÇIRAK U. A. 2000

ÇIRAK, F. ; ORTIZ, M. ; SCHRÖDER, P.: Subdivision surfaces: a new paradigm for

thin-shell finite-element analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), April, Nr. 12, S. 2039–2072

COTTRELL U. A. 2009

COTTRELL, J. A. ; HUGHES, T. J. R. ; BAZILEVS, Y.: *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley Publishing, 2009

COTTRELL U. A. 2007

COTTRELL, J. A. ; HUGHES, T. J. R. ; REALI, A.: Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007), September, Nr. 41, S. 4160–4183

COTTRELL U. A. 2006

COTTRELL, J. A. ; REALI, A. ; BAZILEVS, Y. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric analysis of structural vibrations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), August, Nr. 41, S. 5257–5296

CRISFIELD 1990

CRISFIELD, M. A.: A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 81 (1990), August, Nr. 2, S. 131–150

CZERNY 1970

CZERNY, F.: *Tafeln für Rechteckplatten*. Beton-Kalender. Berlin : Ernst & Sohn, 1970

DE LORENZIS U. A. 2015

DE LORENZIS, L. ; EVANS, J. A. ; HUGHES, T. J. R. ; REALI, A.: Isogeometric collocation: Neumann boundary conditions and contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 21–54

DE LORENZIS U. A. 2011

DE LORENZIS, L. ; TEMIZER, İ. ; WRIGGERS, P. ; ZAVARISE, G.: A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87 (2011), September, Nr. 13, S. 1278–1300

DE LORENZIS U. A. 2014

DE LORENZIS, L. ; WRIGGERS, P. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric contact: a review. In: *GAMM-Mitteilungen* 37 (2014), Nr. 1, S. 85–123

DE LORENZIS U. A. 2012

DE LORENZIS, L. ; WRIGGERS, P. ; ZAVARISE, G.: A mortar formulation for 3D large

deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. In: *Computational Mechanics* 49 (2012), Nr. 1, S. 1–20

DIMITRI U. A. 2014

DIMITRI, R. ; DE LORENZIS, L. ; SCOTT, M. A. ; WRIGGERS, P. ; TAYLOR, R. L. ; ZAVARISE, G.: Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 (2014), Februar, S. 394–414

DORNISCH UND KLINKEL 2014

DORNISCH, W. ; KLINKEL, S.: Treatment of Reissner–Mindlin shells with kinks without the need for drilling rotation stabilization in an isogeometric framework. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 276 (2014), Juli, S. 35–66

DORNISCH U. A. 2013

DORNISCH, W. ; KLINKEL, S. ; SIMEON, B.: Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 253 (2013), Januar, S. 491–504

DORNISCH U. A. 2016

DORNISCH, W. ; MÜLLER, R. ; KLINKEL, S.: An efficient and robust rotational formulation for isogeometric Reissner–Mindlin shell elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 303 (2016), Mai, S. 1–34

DUONG U. A. 2017

DUONG, T. X. ; ROOHBAKHSHAN, F. ; SAUER, R. A.: A new rotation-free isogeometric thin shell formulation and a corresponding continuity constraint for patch boundaries. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), April, S. 43–83

ECHTER 2013

ECHTER, R.: *Isogeometric analysis of shells*. Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2013

ECHTER UND BISCHOFF 2010

ECHTER, R. ; BISCHOFF, M.: Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), Januar, Nr. 5–8, S. 374–382

ECHTER U. A. 2013

ECHTER, R. ; OESTERLE, B. ; BISCHOFF, M.: A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254 (2013), Februar, S. 170–180



## ELGUEDJ U. A. 2008

ELGUEDJ, T. ; BAZILEVS, Y. ; CALO, V. M. ; HUGHES, T. J. R.:  $\bar{B}$ - and  $\bar{F}$ - projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), Juni, Nr. 33–40, S. 2732–2762

## ENDO 2015

ENDO, M.: Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models. In: *International Journal of Engineering Science* 87 (2015), Februar, S. 32–46

## ENDO UND KIMURA 2007

ENDO, M. ; KIMURA, N.: An alternative formulation of the boundary value problem for the Timoshenko beam and Mindlin plate. In: *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007), März, Nr. 1–2, S. 355–373

## FAHRENDORF U. A. 2018

FAHRENDORF, F. ; DE LORENZIS, L. ; GOMEZ, H.: Reduced integration at superconvergent points in isogeometric analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 328 (2018), Januar, Nr. Supplement C, S. 390–410

## FELIPPA 1994

FELIPPA, C. A.: A survey of parametrized variational principles and applications to computational mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113 (1994), März, Nr. 1, S. 109–139

## FELIPPA 2017

FELIPPA, C. A.: *AFEM: Advanced Finite Element Methods*. Unterlagen zur Vorlesung. University of Colorado, USA, 2017

## FELIPPA UND HAUGEN 2005

FELIPPA, C. A. ; HAUGEN, B.: A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Juni, Nr. 21–24, S. 2285–2335

## FRIEDMAN UND KOSMATKA 1998

FRIEDMAN, Z. ; KOSMATKA, J. B.: An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), Februar, Nr. 3, S. 473–498

GOMEZ UND DE LORENZIS 2016

GOMEZ, H. ; DE LORENZIS, L.: The variational collocation method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 309 (2016), September, S. 152–181

GONTIER UND VOLLMER 1995

GONTIER, C. ; VOLLMER, C.: A large displacement analysis of a beam using a CAD geometric definition. In: *Computers & Structures* 57 (1995), Dezember, Nr. 6, S. 981–989

GOTO U. A. 1992

GOTO, Y. ; WATANABE, Y. ; KASUGAI, T. ; OBATA, M.: Elastic buckling phenomenon applicable to deployable rings. In: *International Journal of Solids and Structures* 29 (1992), Januar, Nr. 7, S. 893–909

GRECO U. A. 2017

GRECO, L. ; CUOMO, M. ; CONTRAFATTO, L. ; GAZZO, S.: An efficient blended mixed B-spline formulation for removing membrane locking in plane curved Kirchhoff rods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 324 (2017), September, S. 476–511

HELLINGER 1914

HELLINGER, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. In: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* 4/4 (1914), S. 601–694

HELTAI U. A. 2017

HELTAI, L. ; KIENDL, J. ; DESIMONE, A. ; REALI, A.: A natural framework for isogeometric fluid–structure interaction based on BEM–shell coupling. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), April, S. 522–546

HÖLLIG 2002

HÖLLIG, K.: *Finite Element Approximation with Splines*, in: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. G. Farin, J. Hoschek, and M.S. Kim (eds.). Elsevier, 2002

HOLZAPFEL 2000

HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester : Wiley, 2000

HOSSEINI U. A. 2013

HOSSEINI, S. ; REMMERS, J. J. C. ; VERHOUSEL, C. V. ; BORST, R. de: An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95 (2013), Juli, Nr. 3, S. 238–256

HOSSEINI U. A. 2014

HOSSEINI, S. ; REMMERS, J. J. C. ; VERHOOSSEL, C. V. ; BORST, R. de: An isogeometric continuum shell element for non-linear analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 271 (2014), April, S. 1–22

HU 1955

HU, H.-C.: On some variational principles in the theory of elasticity and plasticity. In: *Scientia Sinica* 4 (1955), S. 33–54

HU U. A. 2016

HU, P. ; HU, Q. ; XIA, Y.: Order reduction method for locking free isogeometric analysis of Timoshenko beams. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 308 (2016), August, S. 1–22

HUGHES 1980

HUGHES, T. J. R.: Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15 (1980), September, Nr. 9, S. 1413–1418

HUGHES 2000

HUGHES, T. J. R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola : Dover Publications, 2000

HUGHES U. A. 2005

HUGHES, T. J. R. ; COTTRELL, J. A. ; BAZILEVS, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Nr. 39–41, S. 4135–4195

HUGHES U. A. 2008

HUGHES, T. J. R. ; REALI, A. ; SANGALLI, G.: Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), September, Nr. 49, S. 4104–4124

HUGHES UND TEZDUYAR 1981

HUGHES, T. J. R. ; TEZDUYAR, T. E.: Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element. In: *Journal of applied mechanics* 48 (1981), S. 587–596

IDESMAN 2017

IDESMAN, A.: Optimal reduction of numerical dispersion for wave propagation problems. Part 1: Application to 1-D isogeometric elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 317 (2017), April, S. 970–992

IRSLINGER 2013

IRSLINGER, J.: *Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente*, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2013

JOHANNESSEN U. A. 2014

JOHANNESSEN, K. A. ; KVAMSDAL, T. ; DOKKEN, T.: Isogeometric analysis using LR B-splines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 (2014), Februar, S. 471–514

JOHANNESSEN U. A. 2015

JOHANNESSEN, K. A. ; REMONATO, F. ; KVAMSDAL, T.: On the similarities and differences between Classical Hierarchical, Truncated Hierarchical and LR B-splines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 291 (2015), Juli, S. 64–101

JUNG U. A. 2016

JUNG, W.-Y. ; HAN, S.-C. ; PARK, W.-T.: Four-variable refined plate theory for forced-vibration analysis of sigmoid functionally graded plates on elastic foundation. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 111–112 (2016), Juni, S. 73–87

KAMENSKY U. A. 2015

KAMENSKY, D. ; HSU, M.-C. ; SCHILLINGER, D. ; EVANS, J. A. ; AGGARWAL, A. ; BAZILEVS, Y. ; SACKS, M. S. ; HUGHES, T. J. R.: An immersogeometric variational framework for fluid–structure interaction: Application to bioprosthetic heart valves. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 1005–1053

KAPUR 1966

KAPUR, K. K.: Vibrations of a Timoshenko Beam, Using Finite-Element Approach. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 40 (1966), November, Nr. 5, S. 1058–1063

KIENDL 2011

KIENDL, J.: *Isogeometric Analysis and Shape Optimal Design of Shell Structures*, Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München, Dissertation, 2011

KIENDL U. A. 2016

KIENDL, J. ; AMBATI, M. ; DE LORENZIS, L. ; GOMEZ, H. ; REALI, A.: Phase-field description of brittle fracture in plates and shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 312 (2016), S. 374–394

KIENDL U. A. 2015A

KIENDL, J. ; AURICCHIO, F. ; HUGHES, T. J. R. ; REALI, A.: Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 988–1004

KIENDL U. A. 2010

KIENDL, J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K. U.: The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), August, Nr. 37–40, S. 2403–2416

KIENDL U. A. 2009

KIENDL, J. ; BLETZINGER, K. U. ; LINHARD, J. ; WÜCHNER, R.: Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), November, Nr. 49–52, S. 3902–3914

KIENDL U. A. 2015B

KIENDL, J. ; HSU, M.-C. ; WU, M. C. H. ; REALI, A.: Isogeometric Kirchhoff–Love shell formulations for general hyperelastic materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 291 (2015), Juli, S. 280–303

KIENDL U. A. 2017

KIENDL, J. ; MARINO, E. ; DE LORENZIS, L.: Isogeometric collocation for the Reissner–Mindlin shell problem. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 325 (2017), Oktober, Nr. Supplement C, S. 645–665

KIENDL U. A. 2014

KIENDL, J. ; SCHMIDT, R. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K. U.: Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 274 (2014), Juni, S. 148–167

KIRCHHOFF 1850

KIRCHHOFF, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51–88

KLINGBEIL 1966

KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1966

KLINKEL UND GOVINDJEE 2002

KLINKEL, S. ; GOVINDJEE, S.: Using finite strain 3D-material models in beam and shell elements. In: *Engineering Computations* 19 (2002), Mai, Nr. 3, S. 254–271

KOSCHNICK 2004

KOSCHNICK, F.: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München, Dissertation, 2004

KOSCHNICK U. A. 2005

KOSCHNICK, F. ; BISCHOFF, M. ; CAMPRUBÍ, N. ; BLETZINGER, K.-U.: The discrete strain gap method and membrane locking. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Juni, Nr. 21–24, S. 2444–2463

KRUSE U. A. 2015

KRUSE, R. ; NGUYEN-THANH, N. ; DE LORENZIS, L. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric collocation for large deformation elasticity and frictional contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296 (2015), November, S. 73–112

KRYSL UND BELYTSCHKO 1996

KRYSL, P. ; BELYTSCHKO, T.: Analysis of thin shells by the Element-Free Galerkin method. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), August, Nr. 20, S. 3057–3080

LADYŽENSKAJA UND URAL'CEVA 1968

LADYŽENSKAJA, O. A. ; URAL'CEVA, N. N.: *Linear and quasilinear elliptic equations*. New York : Academic Press, 1968 (Mathematics in science and engineering)

LEONETTI U. A. 2018

LEONETTI, L. ; LIGUORI, F. ; MAGISANO, D. ; GARCEA, G.: An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331 (2018), April, S. 159–183

LEUNG 1990

LEUNG, A.Y.T.: Spline finite element for beam and plate. In: *Computers & Structures* 37 (1990), S. 717–729

LIM U. A. 1997

LIM, C. W. ; WANG, C. M. ; KITIPORNCHAI, S.: Timoshenko curved beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. In: *Archive of Applied Mechanics* 67 (1997), Februar, Nr. 3, S. 179–190

LIU U. A. 2015

LIU, L. ; ZHANG, Y. J. ; WEI, X.: Weighted T-splines with application in reparameterizing trimmed NURBS surfaces. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 295 (2015), Oktober, S. 108–126

LIU U. A. 2017

LIU, S. ; YU, T. ; BUI, T. Q. ; YIN, S. ; THAI, D.-K. ; TANAKA, S.: Analysis of functionally graded plates by a simple locking-free quasi-3D hyperbolic plate isogeometric method. In: *Composites Part B: Engineering* 120 (2017), Juli, S. 182–196

LIU U. A. 1997

LIU, W.-K. ; LI, S. ; BELYTSCHKO, T.: Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 143 (1997), April, Nr. 1, S. 113–154

LONG U. A. 2012

LONG, Q. ; BORNEMANN, P. B. ; ÇIRAK, F.: Shear-flexible subdivision shells. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90 (2012), Juni, Nr. 13, S. 1549–1577

LOU U. A. 2016

LOU, J. ; HE, L. ; DU, J. ; WU, H.: Nonlinear analyses of functionally graded microplates based on a general four-variable refined plate model and the modified couple stress theory. In: *Composite Structures* 152 (2016), September, S. 516–527

LOVE 1888

LOVE, A. E. H.: On the Small Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* 179 (1888), S. 491–546

LU UND ZHENG 2014

LU, J. ; ZHENG, C.: Dynamic cloth simulation by isogeometric analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014), Januar, S. 475–493

MACNEAL 1992

MACNEAL, R. H.: On the limits of finite element perfectability. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), November, Nr. 8, S. 1589–1601

MAGISANO U. A. 2017

MAGISANO, D. ; LEONETTI, L. ; GARCEA, G.: Advantages of the mixed format in geometrically nonlinear analysis of beams and shells using solid finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 109 (2017), März, Nr. 9, S. 1237–1262

MARGUERRE 1938

MARGUERRE, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platten großer Formänderung. In: *Proceedings of Fifth International Congress for Applied Mechanics, Wiley, New York* (1938), S. 93–101

MARGUERRE UND WÖLFEL 1979

MARGUERRE, K. ; WÖLFEL, H.: *Mechanics of vibration*. Alphen aan den Rijn : Sijthoff & Noordhoff [International Publishers], 1979

MARINO 2017

MARINO, E.: Locking-free isogeometric collocation formulation for three-dimensional geometrically exact shear-deformable beams with arbitrary initial curvature. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 324 (2017), September, S. 546–572

MARSDEN UND SCHOENBERG 1966

MARSDEN, M. ; SCHOENBERG, I.J.: On variation diminishing spline approximation methods. In: *Mathematica* 31 (1966), S. 61–82

MATHISEN U. A. 2011

MATHISEN, K. M. ; OKSTAD, K. M. ; KVAMSDAL, T. ; RAKNES, S. B.: Isogeometric analysis of finite deformation nearly incompressible solids. In: *Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)* 44 (2011), S. 260–278

MATZEN UND BISCHOFF 2016

MATZEN, M. E. ; BISCHOFF, M.: A weighted point-based formulation for isogeometric contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 308 (2016), S. 73–95

MATZEN U. A. 2013

MATZEN, M. E. ; CICHOSZ, T. ; BISCHOFF, M.: A point to segment contact formulation for isogeometric, NURBS based finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 255 (2013), S. 27–39

MAURIN U. A. 2018

MAURIN, F. ; GRECO, F. ; COOX, L. ; VANDEPITTE, D. ; DESMET, W.: Isogeometric collocation for Kirchhoff–Love plates and shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 329 (2018), Februar, Nr. Supplement C, S. 396–420

MEIER U. A. 2014

MEIER, C. ; POPP, A. ; WALL, W. A.: An objective 3D large deformation finite element formulation for geometrically exact curved Kirchhoff rods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 278 (2014), August, S. 445–478

MIAO U. A. 2017

MIAO, D. ; BORDEN, M. J. ; SCOTT, M. A. ; THOMAS, D. C.: Bézier  $\bar{B}$  Projection. In: *arXiv:1708.07743 [math]* (2017), August. – arXiv: 1708.07743



MILLÁN U. A. 2011

MILLÁN, D. ; ROSOLEN, A. ; ARROYO, M.: Thin shell analysis from scattered points with maximum-entropy approximants. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 85 (2011), Februar, Nr. 6, S. 723–751

MINDLIN 1951

MINDLIN, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), S. 31–38

MONTARDINI U. A. 2017

MONTARDINI, M. ; SANGALLI, G. ; TAMELLINI, L.: Optimal-order isogeometric collocation at Galerkin superconvergent points. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), April, S. 741–757

NGUYEN U. A. 2017

NGUYEN, T. N. ; NGO, T. D. ; NGUYEN-XUAN, H.: A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and Isogeometric implementation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), November, Nr. Supplement C, S. 376–401

NGUYEN-THANH U. A. 2011

NGUYEN-THANH, N. ; KIENDL, J. ; NGUYEN-XUAN, H. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K. U. ; BAZILEVS, Y. ; RABCZUK, T.: Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), November, Nr. 47–48, S. 3410–3424

OÑATE UND ZÁRATE 2010

OÑATE, E. ; ZÁRATE, F.: Extended rotation-free plate and beam elements with shear deformation effects. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), S. 196–227

ODEN UND REDDY 1976

ODEN, J. T. ; REDDY, J. N.: *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer, Berlin, 1976

OESTERLE U. A. 2016

OESTERLE, B. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M.: A shear deformable, rotation-free isogeometric shell formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 307 (2016), August, S. 235–255

OESTERLE U. A. 2017

OESTERLE, B. ; SACHSE, R. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M.: Hierarchic isogeometric large rotation shell elements including linearized transverse shear parametrization.

In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 321 (2017), Juli, S. 383–405

PARISCH 1995

PARISCH, H.: A continuum-based shell theory for non-linear applications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), Juni, Nr. 11, S. 1855–1883

PIEGL UND TILLER 1995

PIEGL, Les ; TILLER, Wayne: *The NURBS Book*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1995 (Monographs in Visual Communication)

PORTILLO U. A. 2017

PORTILLO, D. ; POZO, D. del ; RODRÍGUEZ-GALÁN, D. ; SEGURADO, J. ; ROMERO, I.: MUESLI - a Material UnivErSal Library. In: *Advances in Engineering Software* 105 (2017), März, S. 1–8

RAMM U. A. 1994

RAMM, E. ; BISCHOFF, M. ; BRAUN, M.: Higher order nonlinear shell formulation – a step back into three dimensions. In: *in: (K. Bell, ed.) From Finite Elements to the Troll Platform, Ivar Holand 70th Anniversary, Norwegian Institute of Technology, Trondheim* (1994), S. 65–88

REALI 2006

REALI, A.: An isogeometric analysis approach for the study of structural vibrations. In: *Journal of Earthquake Engineering* 10 (2006), Januar, Nr. spec01, S. 1–30

REALI UND GOMEZ 2015

REALI, A. ; GOMEZ, H.: An isogeometric collocation approach for Bernoulli–Euler beams and Kirchhoff plates. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), Februar, S. 623–636

REISSNER 1944

REISSNER, E.: On the Theory of Bending of Elastic Plates. In: *Journal of Mathematics and Physics* 23 (1944), April, Nr. 1-4, S. 184–191

REISSNER 1950

REISSNER, E.: On a variational theorem in elasticity. In: *Journal of Mathematics and Physics* 29 (1950), S. 90–95

ROMERO 2004

ROMERO, I.: The interpolation of rotations and its application to finite element models of geometrically exact rods. In: *Computational Mechanics* 34 (2004), April, Nr. 2, S. 121–133

## SANSOUR 1995

SANSOUR, C.: A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of a rotation tensor. In: *Archive of Applied Mechanics* 65 (1995), Nr. 3, S. 194–216

## SCHAEUBLE U. A. 2017

SCHAEUBLE, A.-K. ; TKACHUK, A. ; BISCHOFF, M.: Variationally consistent inertia templates for B-spline- and NURBS-based FEM: Inertia scaling and customization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), November, Nr. Supplement C, S. 596–621

## SCHILLINGER U. A. 2012

SCHILLINGER, D. ; DEDÈ, L. ; SCOTT, M. A. ; EVANS, J. A. ; BORDEN, M. J. ; RANK, E. ; HUGHES, T. J. R.: An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252 (2012), Dezember, S. 116–150

## SCHILLINGER U. A. 2013

SCHILLINGER, D. ; EVANS, J. A. ; REALI, A. ; SCOTT, M. A. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267 (2013), Dezember, S. 170–232

## SCHMIDT U. A. 2012

SCHMIDT, R. ; WÜCHNER, R. ; BLETZINGER, K.-U.: Isogeometric analysis of trimmed NURBS geometries. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241–244 (2012), Oktober, S. 93–111

## SCHOENBERG 1967

SCHOENBERG, I. J.: On spline functions, with a supplement by T.N.E. Greville. In: *Inequalities (Proc. Symposium Wright-Patterson Air Force Base, August 1965, ed. by O. Shisha)* (1967), S. 255–291

## SCOTT U. A. 2012

SCOTT, M. A. ; LI, X. ; SEDERBERG, T. W. ; HUGHES, T. J. R.: Local refinement of analysis-suitable T-splines. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 213–216 (2012), März, S. 206–222

## SCOTT U. A. 2014

SCOTT, M. A. ; THOMAS, D. C. ; EVANS, E. J.: Isogeometric spline forests. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 (2014), Februar, S. 222–264

SEITZ U. A. 2016

SEITZ, A. ; FARAH, P. ; KREMHELLER, J. ; WOHLMUTH, B. I. ; WALL, W. A. ; POPP, A.: Isogeometric dual mortar methods for computational contact mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 301 (2016), April, S. 259–280

SHIMPI 2002

SHIMPI, R. P.: Refined Plate Theory and Its Variants. In: *AIAA Journal* 40 (2002), Nr. 1, S. 137–146

SHIMPI UND PATEL 2006

SHIMPI, R. P. ; PATEL, H. G.: A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), November, Nr. 22–23, S. 6783–6799

SIMO UND RIFAI 1990

SIMO, J. C. ; RIFAI, M. S.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (1990), S. 1595–1638

SMOLEŃSKI 1999

SMOLEŃSKI, W. M.: Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178 (1999), Juli, Nr. 1–2, S. 89–113

SPELEERS U. A. 2006

SPELEERS, H. ; DIERCKX, P. ; VANDEWALLE, S.: Numerical solution of partial differential equations with Powell–Sabin splines. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 189 (2006), Mai, Nr. 1–2, S. 643–659

SPELEERS U. A. 2013

SPELEERS, H. ; MANNI, C. ; PELOSI, F.: From NURBS to NURPS geometries. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 255 (2013), März, S. 238–254

STOLARSKI UND BELYTSCHKO 1982

STOLARSKI, H. ; BELYTSCHKO, T.: Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), März, Nr. 1, S. 172–176

STRANG UND FIX 1988

STRANG, G. ; FIX, G.: *An analysis of the finite element method*. Wellesley : Wellesley-Cambridge Press, 1988

## SUKUMAR 2004

SUKUMAR, N.: Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), November, Nr. 12, S. 2159–2181

## SZE 2000

SZE, K. Y.: On immunizing five-beta hybrid-stress element models from ‘trapezoidal locking’ in practical analyses. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), Februar, Nr. 4, S. 907–920

## SZE U. A. 2004

SZE, K. Y. ; LIU, X. H. ; LO, S. H.: Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004), Juli, Nr. 11, S. 1551–1569

## TAYLOR 2011

TAYLOR, R. L.: Isogeometric analysis of nearly incompressible solids. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87 (2011), Juli, Nr. 1-5, S. 273–288

## TEMIZER U. A. 2012

TEMIZER, İ. ; WRIGGERS, P. ; HUGHES, T. J. R.: Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212 (2012), Februar, S. 115–128

## TEPOLE U. A. 2015

TEPOLE, A. B. ; KABARIA, H. ; BLETZINGER, K.-U. ; KUHL, E.: Isogeometric Kirchhoff–Love shell formulations for biological membranes. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 293 (2015), August, S. 328–347

## THOMAS U. A. 2015

THOMAS, D. C. ; SCOTT, M. A. ; EVANS, J. A. ; TEW, K. ; EVANS, E. J.: Bézier projection: A unified approach for local projection and quadrature-free refinement and coarsening of NURBS and T-splines with particular application to isogeometric design and analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284 (2015), S. 55–105

## WANG 1995

WANG, C. M.: Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions. In: *Journal of Engineering Mechanics* 121 (1995), Juni, S. 763–765

WANG U. A. 2013

WANG, D. ; LIU, W. ; ZHANG, H.: Novel higher order mass matrices for isogeometric structural vibration analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 260 (2013), Juni, S. 92–108

WASHIZU 1955

WASHIZU, K.: On the variational principles of elasticity and plasticity. In: *Technical Report 25–18, Massachusetts Institute of Technology* (1955)

WEEGER U. A. 2017

WEEGER, O. ; YEUNG, S.-K. ; DUNN, M. L.: Isogeometric collocation methods for Cosserat rods and rod structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), April, S. 100–122

WEMPNER 1969

WEMPNER, G.: Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. In: *Int. J. Solids Struct.* 5 (1969), S. 117–153

YIN U. A. 2014

YIN, S. ; HALE, J. S. ; YU, T. ; BUI, T. Q. ; BORDAS, S. P. A.: Isogeometric locking-free plate element: A simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. In: *Composite Structures* 118 (2014), Dezember, S. 121–138

ZIENKIEWICZ 2001

ZIENKIEWICZ, O. C.: Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of *Stress Analysis*, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001), September, Nr. 3, S. 287–342

ZIENKIEWICZ U. A. 2005

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; ZIENKIEWICZ, O. C.: *The finite element method its basis and fundamentals*. Amsterdam, Boston : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005

---

## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Name: Bastian Gerhard Klaus Oesterle  
Geburtsdatum: 30. Januar 1986  
Geburtsort: Stuttgart  
Eltern: Karin Oesterle,  
Thomas Oesterle

### Schulische Ausbildung:

09/1992 – 07/1996 Salzäckerschule, Stuttgart  
09/1996 – 06/2005 Königin-Charlotte-Gymnasium, Stuttgart  
06/2005 Allgemeine Hochschulreife

### Zivildienst:

09/2005 – 06/2006 Ev. Kirchengemeinde Fasanenhof, Stuttgart

### Universitäre Ausbildung:

10/2006 – 09/2011 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart  
09/2009 – 04/2010 Auslandsstudium an der University of Calgary, Kanada  
09/2011 Diplomprüfung (mit Auszeichnung)  
seit 11/2011 Akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart  
07/2012 Artur-Fischer-Preis der Fakultät 2 für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften, Universität Stuttgart  
01/2018 Publikationspreis der Universität Stuttgart 2017





---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Elementberechnungen.

- 10 (1989) **K. M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. L. M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.

- 33 (2001) A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-  
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-  
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit  
der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-  
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-  
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-  
optimierung.
- 42 (2004) G. A. D’Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.

- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**  
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**  
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**  
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**  
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**  
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**  
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.
- 64 (2015) M. E. Matzen:**  
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.

- 65 (2016) V. M. Effinger:**  
Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-  
schäume.
- 66 (2017) C. M. Wilking:**  
Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale  
Mortar-Formulierungen.









**Bastian Oesterle**

Angesichts einer stetig steigenden Anzahl komplexer Diskretisierungsverfahren beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit intrinsisch lockingfreien Schalenformulierungen. Aus der Literatur bekannte Konzepte versuchen stets die durch die Diskretisierung entstehenden Locking-Effekte zu *beseitigen* oder *abzumindern*. Tritt Locking jedoch gar nicht auf, ist dessen Beseitigung obsolet. Deshalb sollen die hier vorgestellten Schalenformulierungen numerische Locking-Effekte bereits auf Theorieebene *vermeiden*, ungeachtet vom verwendeten Diskretisierungsschema. Die Vermeidung von Locking bereits vor der Diskretisierung verspricht ein breites Anwendungsspektrum für diverse Diskretisierungsverfahren im Bereich von Computersimulationen physikalischer Vorgänge. Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der intrinsischen Vermeidung von Querschublocking in Formulierungen für Strukturtheorien. Über hierarchische Reparametrisierung der kinematischen Gleichungen kann Querschublocking im Rahmen einer primalen Methode a priori vermieden werden. Das Konzept wird gleichermaßen für schubweiche Balken-, Platten- und Schalenformulierungen demonstriert, wobei jeweils zwei hierarchische Parametrisierungen unterschieden werden.

Der zweite theoretische Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der intrinsischen Vermeidung aller geometrischen Locking-Effekte, vor allem aber von Membranlocking. Es wird ein neuartiges, reparametrisiertes gemischtes Prinzip vorgestellt, in dem ausschließlich Verschiebungsgrößen als Primärvariablen auftreten. Diese Reparametrisierung führt dazu, dass die für gemischte Methoden notwendige Wahl geeigneter Spannungs- oder Verzerrungsräume entfällt. Die daraus resultierende intrinsische Vermeidung geometrischer Locking-Effekte verspricht ein breites Anwendungsspektrum dieser Methode.