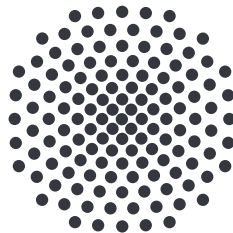


Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände in Bose-Hubbard-Ketten mit Teilchenverlust

Bachelorarbeit von
Felix Kogel

5. August 2018

Prüfer: Prof. Dr. Jörg Main



1. Institut für Theoretische Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Motivation und Einführung in das Thema	5
1.2. Aufbau der Arbeit	6
2. Bose-Einstein-Kondensate	9
2.1. Bose-Einstein-Kondensation	9
2.2. Modelle zur Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten	10
2.2.1. Bose-Hubbard-Modell	10
2.2.2. Gross-Pitaevskii-Gleichung	11
2.3. Offene Quantensysteme	11
2.3.1. Effekte komplexer Potentiale	12
2.3.2. Offene Quantensysteme lokalisierter Bose-Einstein-Kondensate	13
3. \mathcal{PT}-Symmetrie	15
3.1. Eigenschaften von \mathcal{PT} -Symmetrie	15
3.1.1. Der \mathcal{PT} -Operator	15
3.2. \mathcal{PT} -Symmetrie im offenen Zwei-Muldensystem	17
3.2.1. Offenes Zwei-Muldensystem	17
3.2.2. Symmetrische Lösungen	20
3.2.3. Antisymmetrische Lösungen	23
3.3. Wellenfunktionen am Bifurkationspunkt	25
4. Erzeugung \mathcal{PT}-symmetrischer Zustände mit konstanten Parametern	29
4.1. Allgemeine Herleitung der Anfangsbedingungen	29
4.2. Beschreibung der Dynamik des M -Mulden Systems	34
4.2.1. Implementierung	34
4.2.2. Analyse der Dynamik für unterschiedliche Präparationen des Ausgangssystem	35
4.2.3. Unterschiede zum ZMS in den Wellenfunktionen	43
5. Realisierung \mathcal{PT}-brechender Zustände im M-Muldenystem	47
5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen	47
5.1.1. Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Besetzungen	49
5.1.2. Unterschiede zum ZMS in den Wellenfunktionen	55

5.2. Präparation des Anfangszustands durch eine exponentiell verteilte Anfangsbesetzung	58
5.2.1. Zeitliche Entwicklung der Besetzungen	60
6. Zusammenfassung und Ausblick	63
A. Vergleich des chemischen Potentials im ZMS und im M-Muldensystem	67
Literaturverzeichnis	69
Danksagung	73

1. Einleitung

1.1. Motivation und Einführung in das Thema

Die von Dirac [1] und Neumann [2] formulierte Quantenmechanik formuliert physikalische Messvorgänge durch Operatoren, deren Eigenwerte die entsprechenden Messgrößen darstellen. Mit der Forderung, dass diese messbaren Observablen reell sein sollen, ergibt sich die allgemeine Forderung, dass alle Operatoren hermitesch sind.

Ist nun die Dynamik eines sich in einem komplizierten Gesamtsystem befindenden Untersystems von Interesse, so kann dieses durch ein offenes System, das Energie mit der Umgebung austauscht, beschrieben werden. Durch komplexe Potentiale lässt sich dabei oft eine elegante Beschreibung für den Zu- bzw. Abfluss von Teilchen finden.

Offene Quantensysteme werden jedoch durch nicht-Hermitesche Operatoren, die im Allgemeinen komplexe Eigenwerte aufweisen und nicht die gesamte Teilchenzahl erhalten, dargestellt. Bei Untersuchungen zur nicht-Hermiteschen Quantenmechanik von Bender und Boettcher im Jahr 1998 [3] stellte sich heraus, dass Operatoren, welche invariant gegenüber der kombinierten Wirkung des linearen Paritätsoperators \mathcal{P} und des anti-linearen Zeitumkehroperators \mathcal{T} sind, ein rein reelles Eigenwert-Spektrum besitzen können. Zeigt sich ein offenes System nach dieser Raumzeitspiegelung \mathcal{PT} unverändert, so können in dem sogenannten \mathcal{PT} -symmetrischen System auch hier stationäre Zustände mit reellen Eigenwerten auftreten.

Ein anschauliches und einfaches offenes System mit \mathcal{PT} -symmetrischem Verhalten ist durch ein Bose-Einstein-Kondensat in einem Doppelmuldenpotential gegeben [4], wofür Klaiman et al. erstmals den Vorschlag machten, ein optisches Zwei-Muldensystem, bei dem ein ausgeglichener Zu- und Abfluss von Teilchen in die Mulden erfolgt, zu untersuchen [5]. Aus der Gross-Pitaevskii-Gleichung ergibt sich in der Mean-Field-Näherung hierfür ein diskretes Modell des Zwei-Muldensystems [6], das analytisch gelöst werden kann und als Grundlage dieser Arbeit dient.

Mit erfolgreich durchgeführten Experimenten an optischen Systemen [7] und an Mikrowellenleitern [8] konnte \mathcal{PT} -Symmetrie bereits simuliert werden, da die Wellengleichung ähnliche Eigenschaften wie die Schrödingergleichung aufweist. Da ein echtes quantenmechanisches Experiment mit \mathcal{PT} -symmetrischem Verhalten bisher jedoch noch nicht verwirklicht wurde, betrachtete Kotzur [9] ein Untersystem aus zwei Mulden, bei denen ein Elektronenstrahl für einen Verlust und angekoppelte Reservoirmulden für einen Zufluss an Teilchen sorgen, da sich die Einkopplung von Teilchen im Experiment schwierig gestaltet. Diese Konfiguration eines optischen Gitters bildet eine Erweiterung des im

Jahr 2016 in Kaiserslautern durchgeführten Experiments, bei dem die Auswirkung eines lokalen Verlustterms in einem offenen Quantensystem studiert wurde [10].

Mit der Forderung an ein experimentell leicht zugängliches System, wobei alle Gitterparameter des M -Muldensystems zeitlich konstant sind und die Anfangsbesetzungen auf den gleichen Wert eingestellt werden, stellte sich heraus, dass sich für eine spezielle Wahl der Anfangsphasen in diesem M -Muldensystem \mathcal{PT} -symmetrische Zustände bilden, die solange auf einem konstanten Niveau bleiben, bis sich die Reservoirmulden vollständig entleert haben.

In dieser Arbeit wird das gleiche zeitunabhängige Gitter aus M -Mulden, eine sogenannte Bose-Hubbard-Kette, zuerst näher auf die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände hin untersucht, um damit die Möglichkeiten zur Realisierung des Symmetriebruchs besser behandeln zu können. Es sollen unter anderem mit einem Ansatz komplexer Phasen der Wellenfunktionen Effekte offener Quantensysteme, wie die nicht erhaltene Norm dieser \mathcal{PT} -brechenden Zustände, durch eine numerische Berechnung der Dynamik des M -Muldensystems in der Mean-Field-Näherung analysiert werden. Die Beobachtungen für die in den Mulden lokalisierten Zustände sollen dann mit analytischen Berechnungen verglichen werden.

1.2. Aufbau der Arbeit

- In Kapitel 2 werden zuerst die wichtigsten Eigenschaften einer Bose-Einstein-Kondensation erläutert. Anschließend werden das Bose-Hubbard-Modell und die Gross-Pitaevskii-Gleichung als Modelle zur Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten vorgestellt. Da die in dieser Arbeit betrachteten Systeme offen sind, werden offene Quantensysteme allgemein eingeführt, dabei auftretende Effekte komplexer Potentiale behandelt und diese speziell in einem optischen Gitter, in dem Bose-Einstein-Kondensate in der Mean-Field-Näherung lokalisiert sind, betrachtet.
- Kapitel 3 befasst sich mit dem Formalismus der \mathcal{PT} -Symmetrie und dessen Anwendung auf ein offenes Zwei-Muldensystem. Es werden die zwei möglichen Eigenfunktionen mit deren charakteristischen Größen durch die Einteilchen-Dichtematrix beschrieben und berechnet, sowie das Verhalten der Wellenfunktionen am Bifurkationspunkt behandelt.
- Kapitel 4 beginnt mit einer Herleitung der möglichen Präparationen des Ausgangssystems, um \mathcal{PT} -symmetrische Zustände in dem M -Muldensystem zu erhalten. Damit wird deren berechnete Dynamik der Besetzungen, Ströme und Wellenfunktionen analysiert, sowie mit den theoretischen Erwartungen nach dem Zwei-Muldensystem verglichen.
- In Kapitel 5 wird der in Kapitel 4 verwendete Ansatz modifiziert, um über komplexe Phasen die \mathcal{PT} -brechenden Zustände zu realisieren. Zusätzlich wird ein wei-

terer Ansatz vorgestellt, mit dem ebenso versucht wird, die Dynamik des Zwei-Muldensystems (ZMS) zu erreichen. Die zeitlichen Entwicklungen der Besetzungen und Wellenfunktionen werden wiederum beschrieben und mit den theoretischen Erwartungen in Beziehung gebracht.

- Zum Schluss werden in Kapitel 6 die zentralen Aussagen und Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

2. Bose-Einstein-Kondensate

2.1. Bose-Einstein-Kondensation

Der Vorgang der Bose-Einstein-Kondensation wurde bereits in den Jahren 1924/25 von Bose [11] und Einstein [12, 13] vorhergesagt. Erreicht ein Bose-Gas eine kritische Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt, kondensiert dieses zu einem Bose-Einstein-Kondensat, in dem sich die meisten Bosonen in demselben Grundzustand befinden. Da Bosonen nicht dem für Fermionen gültigen Pauli-Prinzip gehorchen müssen, können sich beliebig viele Teilchen im gleichen quantenmechanischen Zustand befinden. Damit können diese Bosonen den gleichen Einteilchen-Grundzustand besetzen, was durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben wird, womit die Beobachtung eines makroskopischen Quantensystems ermöglicht wird. Jedoch konnten erst im Jahr 1995 Bose-Einstein-Kondensate experimentell untersucht werden, wobei circa 10^5 Natrium- bzw. Lithiumatome durch Laserkühlung auf wenige 100 nK gebracht werden konnten [14–16].

Unter Verwendung dimensionsloser Einheiten $\hbar = m = 1$, die in der gesamten Arbeit benutzt werden, wird die Dynamik eines aus N identischen Bosonen bestehenden Vielteilchensystems durch die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{1}{2} \nabla_k^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N V_{\text{int}}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (2.1)$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ das externe Potential, durch das die Bosonen festgehalten werden. Da die Reichweite der Wechselwirkungen zwischen den Teilchen in einem Bose-Einstein-Kondensat deutlich kleiner ist, als deren Abstand, spielt nur die Zweiteilchen-Wechselwirkung $V_{\text{int}}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j)$ eine Rolle. Diese ist mit dem Faktor $1/2$ gewichtet, da jede Kombination in den Summen doppelt vorkommt.

2.2. Modelle zur Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten

2.2.1. Bose-Hubbard-Modell

Nachdem das Bose-Hubbard-Modell im Jahr 1963 zum ersten Mal vorgestellt wurde [17], untersuchten Jaksch et al. dieses Modell 1989 für die Beschreibung ultrakalter Bosonen in einem optischen Gitter [18], welche in einem Experiment realisiert wurden [19].

Aufgrund des dynamischen Stark-Effekts treten Teilchen mit dem elektrischen Feld von Photonen in Wechselwirkung. Dadurch entsteht durch Überlagerung von Laserstrahlen ein optisches Gitter, welches als eine Falle für Bosonen genutzt werden kann [20]. Dieses Gitter entspricht einem periodischen Potential für das die Bloch-Funktionen die entsprechenden Wellenfunktionen bilden. Durch die Periodizität bildet sich, wie im Festkörper, eine Bandstruktur des Energiespektrums, von dem aber für Bose-Einstein-Kondensate mit einer großen Bandlücke, die für sehr geringe Temperaturen und für sehr tiefe Mulden besteht, nur das unterste Energieband besetzt wird.

Das Bose-Hubbard-Modell beschreibt nun lokalisierte Bosonen in einem solchen Gitter quantenmechanisch durch bosonische Erzeugungsoperatoren \hat{b}_k^\dagger und Vernichtungsoperatoren \hat{b}_k der Vielteilchenzustände, die den bosonischen Kommutatorrelationen

$$[\hat{b}_n, \hat{b}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad [\hat{b}_n, \hat{b}_m] = 0, \quad [\hat{b}_n^\dagger, \hat{b}_m^\dagger] = 0 \quad (2.2)$$

gehorschen. Der Zustand eines Vielteilchensystem, bei dem n_k Bosonen in der k -ten Mulde lokalisiert sind, kann durch eine Fock-Basis beschrieben werden,

$$|n_1, \dots, n_k, \dots, n_M\rangle = \frac{(\hat{b}_M^\dagger)^{n_M}}{\sqrt{n_M!}} \dots \frac{(\hat{b}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \dots \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} |0\rangle, \quad (2.3)$$

wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand dargestellt. Tunnelt ein Teilchen von Mulde m zur Mulde n , wird dieser Prozess durch die Vernichtung eines Teilchens in m und die Erzeugung eines Teilchens in n mit dem Operator $\hat{b}_n^\dagger \hat{b}_m$ formuliert.

Der durch die Darstellung der Wannierfunktionen resultierende Hamilton-Operator des Bose-Hubbard-Modells nimmt für lokalisierte Bosonen, bei denen lediglich Beiträge benachbarter Mulden eine Rolle spielen, die folgende Form an [21],

$$\hat{\mathcal{H}} = - \sum_{\langle j,k \rangle} J_{jk} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M U_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) + \sum_{j=1}^M \mu_j \hat{n}_j. \quad (2.4)$$

Hierbei ist $\hat{n}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ der Besetzungszahloperator und J_{jk} die Wahrscheinlichkeit der Tunnelprozesse zwischen benachbarten Mulden, weswegen in der ersten Summe nur über Indizes $\langle j, k \rangle$ mit $k = j - 1$ summiert wird. Die Energie der Teilchen in einer einzelnen

Mulde ist durch μ_j bestimmt und die lokale Wechselwirkung zwischen diesen ist durch U_j gegeben. Der erste Summand in Gl. (2.4) bestimmt mit der Tunnelrate J_{jk} die kinetische Energie und die beiden restlichen Terme die potentielle Energie des Systems.

2.2.2. Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats wird für große Teilchenzahlen N am absoluten Nullpunkt durch die nichtlineare Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE, engl. „Gross-Pitaevskii-Equation“)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

in dimensionslosen Einheiten mit der Stärke der Nichtlinearität

$$g = NU_0 \quad (2.6)$$

bestimmt [22–24]. Hierbei ist $U_0 = 4\pi a$ die Kontaktwechselwirkung mit der s-Wellen Streulänge a , die durch Feshbach-Resonanzen eingestellt werden kann [25].

Diese GPE kann aus der Vielteilchen-Schrödingergleichung (2.1) eines Bose-Einstein-Kondensats hergeleitet werden, indem für das Wechselwirkungspotential bei tiefen Temperaturen ein Delta-Potential angenommen wird. Für die gesamte Wellenfunktion wird dann ein Produktansatz

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{j=1}^N \psi_j(\mathbf{r}_j) \quad (2.7)$$

mit dem Einteilchen-Grundzustand ψ_j , der von allen Bosonen besetzt wird, verwendet. Das Betragsquadrat der Wellenfunktionen ist hierbei auf die Gesamtteilchenzahl normiert, $N = ||\psi||^2$. Mit der sehr großen Teilchenzahl der vollständig kondensierten Bosonen befinden sich also alle Teilchen im gleichen Grundzustand, der sich aus einem gemittelten Feld der anderen Teilchen ergibt. Deshalb wird diese für die GPE benutzte Näherung auch als Mean-Field-Näherung bezeichnet.

2.3. Offene Quantensysteme

Offene Quantensysteme bezeichnen allgemein Systeme, die Energie mit der Umgebung austauschen und durch sogenannte Lindblad-Mastergleichungen mathematisch beschrieben werden können [26]. Im Gegensatz zu geschlossenen Systemen ist für diese nicht die Hermitesche Quantenmechanik, die die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl garantiert, gültig. Jedoch erweist sich eine effektive nicht-Hermitesche Beschreibung als besonders hilfreich für die Beschreibung offener Quantensysteme, da nicht die komplette Dynamik

der Umgebung berechnet werden muss und so nur die effektive Auswirkung der Umgebung auf ein Untersystem untersucht werden kann. Oft kann eine Beschreibung offener Quantensysteme besonders elegant über komplexe Potentiale, deren Effekte im folgenden Kapitel näher untersucht werden, erfolgen.

2.3.1. Effekte komplexer Potentiale

Für geschlossene Systeme mit Hermiteschen Hamilton-Operatoren ist die Zeitentwicklung unitär, wodurch die Erhaltung der Norm eines Zustandes gegeben ist. Jedoch werden Hamilton-Operatoren mit komplexen Potentialen nicht-Hermitesch und beschreiben damit offene Systeme, womit sich mit der Schrödingergleichung $\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hat{\mathcal{H}}\psi$ die Norm durch

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \psi | \psi \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \psi \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial}{\partial t} \psi \right\rangle \\ &= \left\langle -i\hat{\mathcal{H}}\psi \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \middle| -i\hat{\mathcal{H}}\psi \right\rangle \\ &= i \langle \psi | \hat{\mathcal{H}}^\dagger - \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle\end{aligned}\tag{2.8}$$

zeitlich ändert, insofern kein Hermitesches System mit $\hat{\mathcal{H}}^\dagger = \hat{\mathcal{H}}$ vorliegt. Wie sich nun ein komplexes Potential verstehen lässt, wird unter Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \langle \psi | \psi \rangle = \psi^* \psi$ im Ortsraum behandelt. Mit der Schrödingergleichung und dem Hamilton-Operator $H = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \text{Re}(V(\mathbf{r})) + i \text{Im}(V(\mathbf{r}))$ ergibt sich die Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho &= i\psi H^* \psi^* - i\psi^* H \psi \\ &= i\psi \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \text{Re} V(\mathbf{r}) - i \text{Im} V(\mathbf{r}) \right] \psi^* \\ &\quad - i\psi^* \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \text{Re} V(\mathbf{r}) + i \text{Im} V(\mathbf{r}) \right] \psi \\ &= \frac{i}{2} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + 2|\psi|^2 \text{Im} V(\mathbf{r}) \\ &= 2\rho \text{Im} V(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Hier wurde die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)\tag{2.10}$$

benutzt. Dadurch folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 2\rho \text{Im} V(\mathbf{r})\tag{2.11}$$

eines offenes Quantensystems, für das die rechte Seite nicht gleich Null ist. Der komplexe Anteil des Potentials erzeugt also Quellen bzw. Senken in der Wahrscheinlichkeitsdichte, womit sich die Gesamtwahrscheinlichkeit bzw. Gesamtteilchenzahl des Systems ändert. Genauer bedeutet ein positiver Imaginärteil eine Quelle und ein negativer Teil eine Senke.

2.3.2. Offene Quantensysteme lokalisierter Bose-Einstein-Kondensate

Für lokalisierte Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gittern können mit lokalisierten Gewinn- bzw. Verlusttermen Teilchen aus der Umgebung dem Muldensystem hinzugefügt bzw. aus diesem entfernt werden. Dessen Dynamik ergibt sich durch die Anwendung des Bose-Hubbard-Modells auf die Lindblad-Mastergleichung [27, 28].

In der Mean-Field-Näherung für Systeme hoher Teilchenzahlen führt die Gross-Pitaevskii-Gleichung für lokalisierte Bose-Einstein-Kondensate in den Mulden k des Gitters zu der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi_k &= \left(\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}} \psi \right)_k \\ &= -J_{k,k-1} \psi_{k-1} - J_{k,k+1} \psi_{k+1} + g_k^{\text{MF}} |\psi_k|^2 \psi_k + \mu_k \psi_k - i \frac{\gamma_k}{2} \psi_k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

In dieser diskreten Beschreibung des Muldensystems treten die Gewinn- und Verlustterme genau bei den komplexen Anteilen des Hamilton-Operators $\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}$ auf, wodurch nach Abschnitt 2.3.1 Teilchen ein- bzw. ausgekoppelt werden. Der Verlustparameter γ_k ist hierbei für einen lokalen Verlust bzw. Zufluss in der Mulde k positiv bzw. negativ. In dieser Gleichung ist außerdem zu sehen, dass die Einteilchenzustände für die Mean-Field-Näherung und für eine verschwindende Nichtlinearität $g = 0$ auf beliebige Werte normiert werden können, da sich ein zusätzlicher Faktor in der Wellenfunktion aus der Gleichung heraus kürzen würde.

Die Dynamik der Einteilchen-Dichtematrizen $\sigma_{k,l} = \psi_k^* \psi_l$, die später in Abschnitt 3.2.2 näher behandelt werden, lässt sich unter Verwendung von Gl. (2.12) folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k,l} &= i \frac{\partial}{\partial t} (\psi_k^* \psi_l) \\ &= \psi_k^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} \psi_l \right) - \left(i \frac{\partial}{\partial t} \psi_k \right)^* \psi_l \\ &= \psi_k^* \left(-J_{l,l-1} \psi_{l-1} - J_{l,l+1} \psi_{l+1} - i \frac{\gamma_l}{2} \psi_l + g_l^{\text{MF}} |\psi_l|^2 \psi_l + \mu_l \psi_l \right) \\ &\quad - \left(-J_{k,k-1} \psi_{k-1}^* - J_{k,k+1} \psi_{k+1}^* + i \frac{\gamma_k}{2} \psi_k^* + g_k^{\text{MF}} |\psi_k|^2 \psi_k^* + \mu_k \psi_k^* \right) \psi_l. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wird nun von einem M -Muldensystem ausgegangen, das eine konstante Tunnelrate $J_{k,k+1} =: J$ für alle $k \in [1, M]$, sowie ein verschwindendes chemisches Potential $\mu_k = 0$

besitzt, kann die zeitliche Entwicklung der Einteilchen-Dichtematrizen zwischen zwei benachbarten Mulden ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k,k+1} &= \psi_k^* \left(-J\psi_k - J\psi_{k+2} - i \frac{\gamma_{k+1}}{2} \psi_{k+1} + g_{k+1}^{\text{MF}} |\psi_{k+1}|^2 \psi_{k+1} \right) \\
&\quad - \left(-J\psi_{k-1} - J\psi_{k+1} - i \frac{\gamma_k}{2} \psi_k + g_k^{\text{MF}} |\psi_k|^2 \psi_k \right)^* \psi_{k+1} \\
&= J \left(\psi_{k-1}^* \psi_{k+1} + \psi_{k+1}^* \psi_{k+1} - \psi_k^* \psi_k - \psi_k^* \psi_{k+2} \right) \\
&\quad - i \left(\frac{\gamma_k}{2} + \frac{\gamma_{k+1}}{2} \right) \psi_k^* \psi_{k+1} + \left(g_{k+1}^{\text{MF}} |\psi_{k+1}|^2 - g_k^{\text{MF}} |\psi_k|^2 \right) \psi_k^* \psi_{k+1} \\
&= J \left(\sigma_{k-1,k+1} + \sigma_{k+1,k+1} - \sigma_{k,k} - \sigma_{k,k+2} \right) \\
&\quad - i \left(\frac{\gamma_k}{2} + \frac{\gamma_{k+1}}{2} \right) \sigma_{k,k+1} + \left(g_{k+1}^{\text{MF}} |\psi_{k+1}|^2 - g_k^{\text{MF}} |\psi_k|^2 \right) \sigma_{k,k+1}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Für die Besetzungen ergeben sich nach ähnlicher Rechnung die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} n_k &= \frac{\partial}{\partial t} (\psi_k^* \psi_k) \\
&= J_{k-1,k} \tilde{j}_{k-1,k} - J_{k,k+1} \tilde{j}_{k,k+1} - \gamma_k n_k \\
&= j_{k-1,k} - j_{k,k+1} - \gamma_k n_k, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

welche festlegen, dass die Summe aller Ströme in und aus jeweils einer Mulde zusammen mit dem lokalen Verlustterm der zeitlichen Änderung der Besetzungszahl dieser Mulde entspricht.

3. \mathcal{PT} -Symmetrie

Die herkömmliche hermitesche Quantenmechanik stellt per Definition sicher, dass die messbaren physikalischen Größen eines Operators durch reelle Energieeigenwerte beschrieben werden und damit die Erhaltung der Teilchenzahl gegeben ist. Offene Quantensysteme werden, wie in Abschnitt 2.3 bereits erläutert, durch nicht-Hermitesche Operatoren beschrieben. In manchen Fällen lassen sich diese elegant durch komplexe Potentiale beschreiben, mit denen die Wechselwirkung der Umgebung mit Gewinn- bzw. Verlustbeiträgen formuliert wird.

Im Jahr 1998 führten Bender und Boettcher Untersuchungen zur nicht-Hermiteschen Quantenmechanik an, wobei sich herausstellte, dass Operatoren, welche invariant gegenüber der kombinierten Wirkung des Paritätsoperators \mathcal{P} und des Zeitumkehroperators \mathcal{T} sind, ein rein reelles Eigenwertspektrum besitzen können [3]. Dieses Erkenntnis lässt sich unter anderem auch auf offene Quantensysteme anwenden, um reelle Eigenwerte und stationäre Zustände zu finden. Durch eine unitäre Transformation ist es möglich, diese Operatoren auf hermitesche Operatoren und somit auf die hermitesche Formulierung der Quantenmechanik zurückzuführen [29].

3.1. Eigenschaften von \mathcal{PT} -Symmetrie

3.1.1. Der \mathcal{PT} -Operator

Ein System gilt allgemein als \mathcal{PT} -symmetrisch, wenn der Kommutator zwischen dem Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}}$ und dem \mathcal{PT} -Operator verschwindet,

$$\left[\hat{\mathcal{H}}, \mathcal{PT} \right] = 0. \quad (3.1)$$

Bei dem \mathcal{PT} -Operator handelt es sich um eine Kombination des linearen Paritätsoperators, der einer Raumspiegelung entspricht,

$$\mathcal{P} : \hat{\mathbf{r}} \rightarrow -\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -\hat{\mathbf{p}}, \quad (3.2)$$

und des antilinearen Zeitumkehroperators, der die Zeit umkehrt und eine komplexe Konjugation bewirkt,

$$\mathcal{T} : \hat{\mathbf{r}} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -\hat{\mathbf{p}}, i \rightarrow -i, \quad (3.3)$$

was man auch an der kanonischen Kommutatorrelation $[\hat{r}_i, \hat{p}_i] = i\delta_{ij}$ sieht. Da es sich hier um Symmetrieeoperatoren handelt, führt das mehrmalige Anwenden der einzelnen Operatoren, sowie insbesondere die Kombination aus beiden auf die Identität

$$\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathbb{1}, \quad \mathcal{T}\mathcal{T} = \mathbb{1}, \quad \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{P}\mathcal{T} = \mathbb{1}. \quad (3.4)$$

Damit kann ein Ausdruck für die Eigenwerte α der Eigenzustände $|\psi\rangle$ durch

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{P}\mathcal{T}|\psi\rangle = \mathcal{P}\mathcal{T}\alpha|\psi\rangle = \alpha^*\mathcal{P}\mathcal{T}|\psi\rangle = |\alpha|^2|\psi\rangle \quad (3.5)$$

mit $|\alpha|^2 = 1$ und $\phi \in \mathbb{R}$ hergeleitet werden,

$$\alpha = e^{i\phi}. \quad (3.6)$$

Wird nun angenommen, dass mit der Vertauschung von Hamilton-Operator und \mathcal{PT} -Operator (3.1) beide Operatoren eine gemeinsame Eigenbasis $|\psi\rangle$ beschreiben, kann mit dem Eigenwert (3.6) des \mathcal{PT} -Operators gezeigt werden, dass die Eigenwerte μ des Hamilton-Operators reell sind:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}\mathcal{P}\mathcal{T}|\psi\rangle &= \mu^*\mathcal{P}\mathcal{T}|\psi\rangle \\ \iff \hat{\mathcal{H}}e^{i\phi}|\psi\rangle &= \mu^*e^{i\phi}|\psi\rangle \\ \iff \hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle &= \mu^*|\psi\rangle \\ \iff \mu &= \mu^*. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zusammengefasst besitzt der \mathcal{PT} -symmetrische Hamilton-Operator also reelle Eigenwerte, dessen Eigenzustände \mathcal{PT} -symmetrisch genannt werden. Andersherum ergeben sich für eine nicht gemeinsame Eigenbasis des Hamilton- und \mathcal{PT} -Operators komplexe Eigenwerte, wobei die entsprechenden Eigenzustände als \mathcal{PT} -brechend bezeichnet werden.

Nichtlineare \mathcal{PT} -symmetrische Systeme

Im Folgenden soll kurz erläutert werden, welche Eigenschaften ein nichtlinearer Hamilton-Operator

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + f(\psi) \quad (3.8)$$

mit einem komplexen Potential $V(\mathbf{r})$ und einem nichtlinearen Beitrag $f(\psi)$ aufweisen muss, damit er \mathcal{PT} -symmetrisch ist. Mit der Bedingung (3.1) folgt für den Kommutator eines linearen Systems mit $f(\psi) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{P}\mathcal{T}, \hat{\mathcal{H}}] \\ &= \mathcal{P}\mathcal{T} \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) - \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \mathcal{P}\mathcal{T} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V^*(-\mathbf{r}) \right) \mathcal{P}\mathcal{T} - \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \mathcal{P}\mathcal{T} \\ &= (V^*(-\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Um die Forderung eines \mathcal{PT} -symmetrischen linearen Systems zu erfüllen, muss das Potential des Hamilton-Operators die Bedingung

$$V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

erfüllen. Damit müssen der Realteil symmetrisch und der Imaginärteil antisymmetrisch bei einer Raumspiegelung sein.

Für nichtlineare Systeme mit $f(\psi) \neq 0$ stellt sich für einen Hamilton-Operator (3.8), der die Bedingung (3.10) erfüllt, heraus, dass der verbleibende nichtlineare Teil die Eigenschaft

$$f(e^{i\phi} \psi) = f(\psi) \quad (3.11)$$

mit einer reellen Phase ϕ erfüllen muss, damit \mathcal{PT} -Symmetrie des ganzen Systems vorliegt [30]. Das heißt, dass die Wellenfunktion \mathcal{PT} -symmetrisch sein muss, $\mathcal{PT}\psi = e^{i\phi} \psi$.

3.2. \mathcal{PT} -Symmetrie im offenen Zwei-Muldensystem

3.2.1. Offenes Zwei-Muldensystem

Ein anschauliches und einfaches offenes System mit \mathcal{PT} -symmetrischem Verhalten ist durch ein Bose-Einstein-Kondensat in einem Doppelmuldenpotential gegeben [4]. Klaiman et al. machten hierfür erstmals den Vorschlag zur Realisierung eines optischen Zwei-Muldensystems durch ausgeglichenen Zufluss und Abnahme von Teilchen der beiden Mulden [5]. Ein solches Potential mit der Eigenschaft $V(x) = V^*(-x)$, das die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände ultrakalter Bosonen in einem Zwei-Muldensystem (ZMS) erlaubt, kann in einer Dimension durch

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + v_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + i\gamma x e^{-\rho x^2} \quad (3.12)$$

ausgedrückt werden [31]. Hierbei bewirkt der Faktor γ also eine Teilchenzu- bzw. Abnahme aus diesen zwei Mulden, die sich aus einem harmonischen Potential mit der Fallenfrequenz ω mit einem Gauß-Potential als Barriere ergeben. Der komplexe Anteil mit dem Gewinn- und Verlustterm γ sorgt für eine Einkopplung von Teilchen in die linke Mulde und für eine genau so große Auskopplung in der rechten (siehe Kapitel 2.3.1), was in Abbildung 3.1 skizziert ist. Dabei bezeichnet v_0 die Barrierenhöhe und σ die Breite des Gauß-Potentials. Werden die Teilchen bei sehr tiefen Temperaturen betrachtet, können die Wellenfunktionen des Bose-Einstein-Kondensats in den Mulden mit einer hohen Potentialbarriere als lokalisiert angenommen werden und nehmen in der Mean-Field-Näherung die Form

$$\psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\varphi_i} \quad (3.13)$$

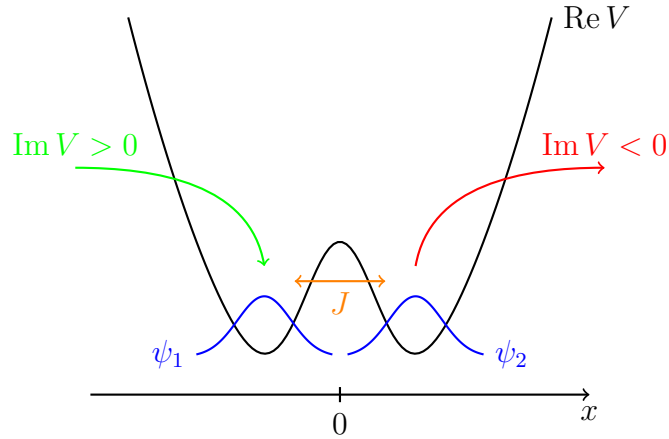


Abbildung 3.1.: Ein eindimensionales, komplexes Zweimuldenpotential mit lokalisierten Wellenfunktionen, die durch Gewinn- und Verlustterm eine Zu- bzw. Abnahme der Teilchen erfahren.

an. Die Besetzungszahl der Mulden ist hier durch n_i gegeben und die Phase ist durch φ_i ausgedrückt.

Mit diesen Wellenfunktionen ergibt sich aus der Gross-Pitaevskii-Gleichung ein diskretes ZMS, dessen Dynamik ausgedrückt wird durch [6]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g|\psi_1|^2 + i\gamma & -J \\ -J & g|\psi_2|^2 - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Hier ist $J \in \mathbb{R}$ die Tunnelrate, welche mit der Barrierenhöhe v_0 in Gl. (3.12) zusammenhängt, und $\gamma \in \mathbb{R}$ der bereits erwähnte Gewinn- und Verlustparameter, der den Teilchenaustausch mit der Umgebung festlegt. Die Stärke der Nichtlinearität $g \in \mathbb{R}$ ist durch den Ausdruck (2.6) gegeben.

Nun stellt sich die Frage, ob dieses System \mathcal{PT} -symmetrisch ist, womit reelle Eigenwerte beobachtbar wären. Da \mathcal{PT} -Symmetrie genau dann gegeben ist, wenn der Hamilton-Operator invariant gegenüber der kombinierten Wirkung des Paritätsoperators \mathcal{P} und Zeitumkehroperators \mathcal{T} ist, müssen im diskreten Modell beide Wellenfunktion vertauscht und eine durch \mathcal{T} hervorgerufene komplexe Konjugation durchgeführt werden. Dadurch ergeben sich exakt dieselben Gleichungen der Matrix (3.14). Der hier auftretende nicht-lineare Term $f(\psi_i) = |\psi_i|^2$ erfüllt die Bedingung (3.11), da $|e^{i\phi}|^2 = 1$ gilt. Das offene ZMS ist also ein \mathcal{PT} -symmetrisches System.

Für \mathcal{PT} -symmetrische Zustände ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion zeitlich konstant,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_i|^2 = 0, \quad (3.15)$$

weswegen der Hamilton-Operator in Gl. (3.14) zeitunabhängig wird und somit die Eigenwertgleichung

$$\hat{\mathcal{H}}_2 \psi = \mu \psi \quad (3.16)$$

mit konstantem Energieeigenwert μ gilt. Die Wellenfunktion ψ kann damit als Produkt des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{\mathcal{H}}_2}$ mit der zeitunabhängigen Wellenfunktion $\psi(t=0) := \phi$ geschrieben werden,

$$\psi(t) = e^{-it\hat{\mathcal{H}}_2} \psi(t=0) = e^{-it\hat{\mathcal{H}}_2} \phi = \phi e^{-i\mu t}. \quad (3.17)$$

Für die zeitunabhängige Eigenwertgleichung $\hat{\mathcal{H}}_2 \phi = \mu \phi$ wird der Ansatz für Wellenfunktionen in Gl. (3.13) mit den Phasen $\varphi_i \in \mathbb{R}$ und den Beiträgen $\sqrt{n_i}$ verwendet. Diese haben die Eigenschaft, dass deren Betragsquadrate

$$|\phi_i|^2 = n_i \quad (3.18)$$

die Anfangsbesetzungen bedeuten. Die zeitlichen Besetzungen der zwei Mulden $i \in \{1, 2\}$,

$$n_i(t) = |\psi_i|^2 = |e^{-i\mu t} \phi_i|^2 = n_i e^{2\text{Im}(\mu)t}, \quad (3.19)$$

sind nur mit reellem Eigenwert zeitlich konstant. Die \mathcal{PT} -gebrochenen Zustände, die einen komplexen Eigenwert aufweisen, fallen zeitlich in der Besetzung exponentiell mit dessen Imaginärteil ab, d.h. die Norm ist nicht erhalten. Hierbei ist die Schreibweise, dass n_i die Anfangsbesetzung und $n_i(t)$ die zeitliche Besetzungszahl bezeichnet, zu beachten. Wird die Energieverschiebung

$$\mu = \tilde{\mu} + gn \quad (3.20)$$

eingeführt, so ergibt sich für die Matrix (3.14)

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{g}{2}\kappa + i\gamma\right) & -J \\ -J & -\left(\frac{g}{2}\kappa + i\gamma\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mu} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

bei der die Ungleichbesetzung der beiden Mulden

$$\kappa = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 = n_1 - n_2 \quad (3.22)$$

eingeführt wird. Mit der mittleren Besetzung

$$n_0 = \frac{n_1 + n_2}{2}, \quad (3.23)$$

woraus die Gesamtbesetzungszahl beider Mulden $2n_0$ folgt, ergeben sich die Wellenfunktionen zu

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n_0 + \frac{\kappa}{2}} e^{i(\varphi_0 + \varphi)} \\ \sqrt{n_0 - \frac{\kappa}{2}} e^{i(\varphi_0 - \varphi)} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Werden die einzelnen Zeilen von Gl. (3.21) berechnet, $\tilde{\mu}$ eliminiert und nach Imaginär- und Realteil umgeformt, so ergeben sich die Gleichungen

$$\kappa \frac{g}{2} \sqrt{(2n)^2 - \kappa^2} + \kappa J \cos(2\varphi) = 0, \quad (3.25a)$$

$$\gamma \sqrt{(2n)^2 - \kappa^2} + 2nJ \sin(2\varphi) = 0. \quad (3.25b)$$

Diese Gleichungen hängen nur von der Phasendifferenz beider Wellenfunktionen

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -2\varphi \quad (3.26)$$

ab, weswegen die Phase $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ in Gl. (3.24) beliebig gewählt werden kann, und besitzen zwei unterschiedliche Lösungen ϕ und Eigenwerte μ der Eigenwertgleichung (3.21), die im Folgenden näher betrachtet werden.

3.2.2. Symmetrische Lösungen

Für eine symmetrische Verteilung der Besetzungen beider Mulden $n_1 = n_2$, was einer Ungleichbesetzung von $\kappa = 0$ entspricht, ist Gleichung (3.25a) immer erfüllt, wodurch aus Gl. (3.25b) der Phasenwinkel

$$\varphi_s = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{J}\right) \quad (3.27)$$

folgt. Da dieser Winkel reell sein soll, ergibt sich die Bedingung

$$\varphi \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |\gamma| \leq |J|. \quad (3.28)$$

Der aus den Gleichungen (3.20) und (3.21) erhaltene Energieeigenwert

$$\mu_s = gn_0 \pm \sqrt{J^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

ist mit dieser Bedingung immer reell, was in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Die Besetzungszahl beider Mulden $i \in \{1, 2\}$ nach Gl. (3.19)

$$n_i(t) = n_i = n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i(t) = 0 \quad (3.30)$$

ist deswegen zeitlich konstant. Diese symmetrischen Lösungen, die eine gleiche Anfangsbesetzung aufweisen, stellen also die \mathcal{PT} -symmetrischen Lösungen des ZMS dar.

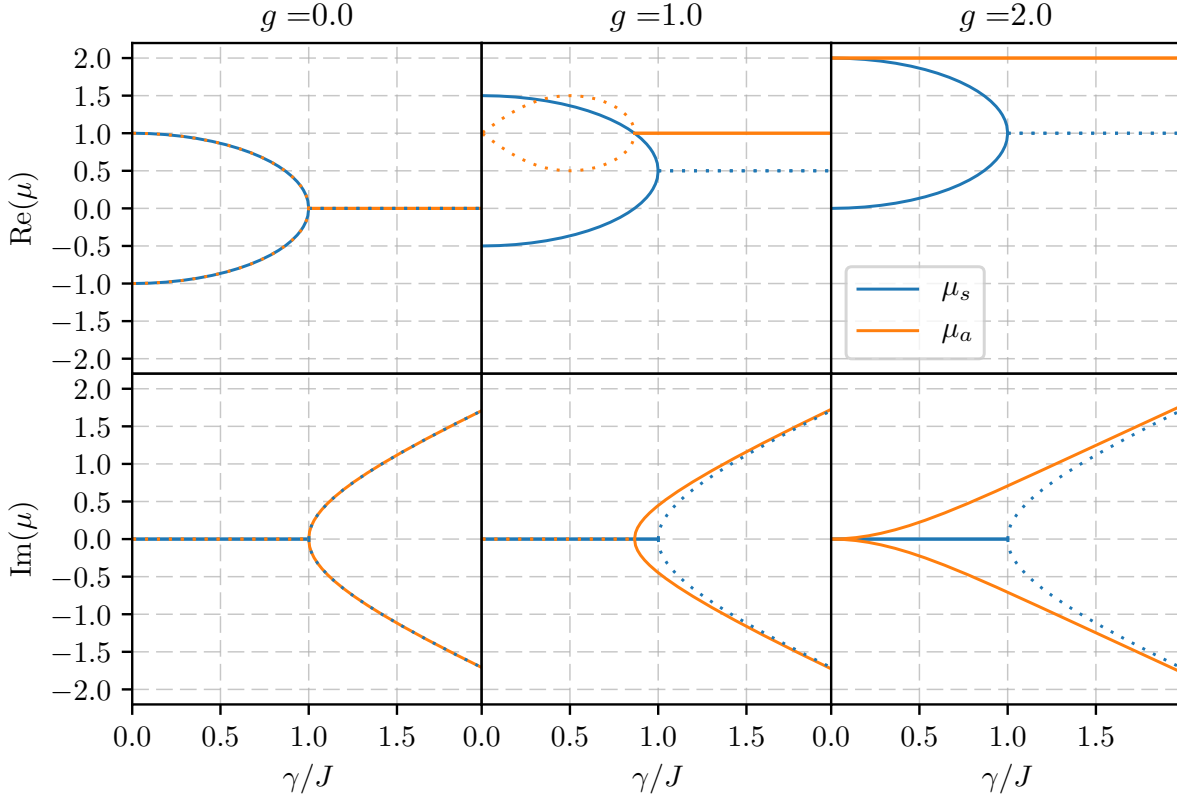


Abbildung 3.2.: Real- und Imaginärteil der Energieeigenwerte der symmetrischen Lösungen μ_s und der antisymmetrischen Lösungen μ_a sind für unterschiedliche Werte der Nichtlinearität $g \in \{0, 1, 2\}$ abgebildet. Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Kurven gehören zu den Lösungen, für die die geforderten Bedingungen $\kappa, \varphi \in \mathbb{R}$ nicht mehr gelten.

Single-particle density matrix

Im Mean-Field ist die Einteilchen-Dichtematrix (Single-particle density matrix, SPDM) in erster Ordnung durch

$$\sigma_{kl} = \psi_k^* \psi_l \quad (3.31)$$

$$=: \frac{1}{2} (c_{kl} + i\tilde{j}_{kl}) \quad (3.32)$$

gegeben, welche die Einteilcheneigenschaften des Systems beschreiben. Unter Verwendung der Zustände (3.13) ergeben sich die Gleichungen

$$\sigma_{kl} = \sqrt{n_k n_l} e^{i(\varphi_l - \varphi_k)}, \quad (3.33)$$

aus denen sich die Korrelationsgrößen c_{kl} und die reduzierten Ströme \tilde{j}_{kl} ,

$$c_{kl} = 2 \operatorname{Re}(\sigma_{kl}) = 2\sqrt{n_k n_l} \cos(\varphi_l - \varphi_k), \quad (3.34a)$$

$$\tilde{j}_{kl} = 2 \operatorname{Im}(\sigma_{kl}) = 2\sqrt{n_k n_l} \sin(\varphi_l - \varphi_k), \quad (3.34b)$$

berechnen lassen. Für $k = l$ lassen sich mit den SPDMs die Besetzungszahlen durch

$$\sigma_{k,k} = \psi_k^* \psi_k = n_k e^{i(\varphi_k - \varphi_k)} = n_k \quad (3.35)$$

ausdrücken. Für spätere Zwecke wird im Folgenden eine weitere Relation berechnet

$$\begin{aligned} \sigma_{k,k+2} &= \psi_k^* \psi_{k+2} = \sqrt{n_k n_{k+2}} e^{i(\varphi_{k+2} - \varphi_k)} \\ &= \sqrt{n_k n_{k+2}} e^{i(\varphi_{k+2} - \varphi_{k+1} + \varphi_{k+1} - \varphi_k)} \\ &= \sqrt{n_k n_{k+2}} \frac{\sigma_{k+1,k+2}}{\sqrt{n_{k+1} n_{k+2}}} \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sqrt{n_k n_{k+1}}} \\ &= \frac{\sigma_{k,k+1} \sigma_{k+1,k+2}}{n_{k+1}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Charakteristische Größen der \mathcal{PT} -symmetrischen Lösungen Mit den SPDMs nach (3.31) können quantenmechanische Größen der komplexen Wellenfunktionen beschrieben werden, die Eigenschaften der Dynamik der \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände darstellen. Mit der Berechnung dieser Observablen für das ZMS,

$$\sigma_{1,2} =: \sigma_s = \psi_1^* \psi_2 = \frac{1}{2} (c_s + i \tilde{j}_s), \quad (3.37)$$

ergibt sich aus dessen Real- und Imaginärteil mit Gl. (3.34) die Korrelation c_s und der reduzierte Strom \tilde{j}_s der symmetrischen Zustände

$$c_s = +2n_0 \cos(2\varphi) = 2n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{J}\right)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} c_s = 0, \quad (3.38a)$$

$$\tilde{j}_s = -2n_0 \sin(2\varphi) = 2n_0 \frac{\gamma}{J}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{j}_s = 0, \quad (3.38b)$$

$$j_s = J \tilde{j}_s = 2n_0 \gamma, \quad \frac{\partial}{\partial t} j_s = 0, \quad (3.38c)$$

wobei j_s den absoluten Strom darstellt, der im Gegensatz zum reduzierten Strom mit dem Faktor J gewichtet ist. Diese Größen sind alle zeitunabhängig und hängen wiederum nur von der Differenz der Phasenwinkel beider Wellenfunktionen $\Delta\varphi = -2\varphi$ ab. In der Dynamik des ZMS, die im Wesentlichen durch die Besetzung $n_i(t)$ und der SPDM $\sigma_{1,2}(t)$ funktioniert, gibt es also mit einer Änderung der absoluten Phasen keinen Unterschied, solange die Differenz $\Delta\varphi$ der relativen Phasen gleich bleibt.

Durch das symmetrische Aus- und Einkoppeln von Teilchen in das ZMS durch $\pm i\gamma$ liegt bei den symmetrischen Lösungen also ein konstanter Strom vor, welcher insgesamt für die konstante Besetzungszahl sorgt. Durch die Einschränkung (3.28) bleibt die Korrelation c_s reell und der Betrag des reduzierten Stroms $|\tilde{j}_s|$ besitzt den Maximalwert $2n_0$.

3.2.3. Antisymmetrische Lösungen

Die antisymmetrischen Lösungen weisen eine antisymmetrische Besetzungszahl $n_0 \pm \kappa/2$ mit der Ungleichbesetzung

$$\kappa_a = \pm 2n_0 \sqrt{1 - \frac{J^2}{(gn_0)^2 + \gamma^2}} \quad (3.39)$$

auf, die reell sein soll, wodurch für γ die Bedingung

$$\kappa \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 \geq J^2 - (gn_0)^2 \quad (3.40)$$

gilt. Durch Division der Gleichungen (3.25) ergibt sich der reelle Phasenwinkel φ zu

$$\varphi_a = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right). \quad (3.41)$$

Der komplexe Energieeigenwert μ beträgt

$$\begin{aligned} \mu_a &= 2gn_0 \pm \gamma \sqrt{\frac{J^2}{(gn_0)^2 + \gamma^2} - 1} \\ &= 2gn_0 + i \frac{\gamma}{2n_0} \kappa_a \end{aligned} \quad (3.42)$$

und ist mit der Bedingung (3.40) nun komplex für alle $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dadurch stellen die antisymmetrischen Lösungen überall, außer direkt am Bifurkationspunkt $\gamma^2 = J^2 - (gn_0)^2$, \mathcal{PT} -gebrochene Lösungen mit komplexen Eigenwerten und nicht erhaltener Norm dar. Es ist zu beachten, dass in Gl. (3.39) dasselbe Vorzeichen wie in μ_a stehen muss, damit die Wellenfunktion ψ eine Lösung von Gl. (3.14) ist.

In Abbildung 3.2 wird diese Eigenschaft der komplexen Eigenwerte von μ_a deutlich gezeigt, sowie die Übereinstimmung der Eigenwerte der symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen für $g = 0$.

Mit dem komplexen Eigenwert zeigen die Besetzungen (3.19) beider Mulden

$$n_1(t) = \left(n_0 + \frac{\kappa_a}{2}\right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \quad (3.43a)$$

$$n_2(t) = \left(n_0 - \frac{\kappa_a}{2}\right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \quad (3.43b)$$

ein exponentiell ansteigendes bzw. abfallendes Verhalten, wenn κ_a positiv bzw. negativ ist, und unterscheiden sich lediglich in einer unterschiedlichen Anfangsbesetzung n_i .

Mehrdeutigkeit des Arkustangens Der Phasenwinkel in Gl. (3.41) wird durch die Umkehrfunktion des Tangens, welcher π -periodisch ist, ausgedrückt, weswegen die Arkustangens-Funktion ebenfalls mehrere Lösungen besitzt. Wird im Folgenden $\tan(2\varphi_a)$ im Bereich $2\varphi_a \in (-\pi/2, \pi/2)$ definiert, so folgt

$$\varphi_a = \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\gamma}{gn_0} \right) + \pi n_a \right], \quad n_a \in \mathbb{Z}. \quad (3.44)$$

Um die Wahl der ganzen Zahl n_a zu ermitteln, wird die Forderung $\varphi_s \stackrel{!}{=} \varphi_a$ für $\kappa_a = 0$ gestellt, da für den speziellen Wert

$$\kappa_a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 = J^2 - (gn_0)^2 \quad (3.45)$$

Gleichung (3.25a) wieder trivial erfüllt ist und der Winkel φ_a dem Winkel φ_s der symmetrischen Lösung entsprechen muss. Werden die Ausdrücke für die beiden Phasenwinkel eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\gamma}{J} \right) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\gamma}{gn_0} \right) + \pi n_a \right] \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{\gamma}{J} &\stackrel{!}{=} \sin \left[\arctan \left(\frac{\gamma}{gn_0} \right) + \pi n_a \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Mehrdeutigkeit des Arkussinus wurde hier nicht näher in Betracht gezogen, da diese durch $\sin(\arcsin(x + 2\pi n)) = x$ mit $n \in \mathbb{Z}$ wieder verschwindet. Da für die Sinusfunktion $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ gilt, ergibt sich weiter für die Bedingung

$$-\frac{\gamma}{J} \stackrel{!}{=} \sin \left[\arctan \left(\frac{\gamma}{gn_0} \right) \right] \cdot (-1)^{n_a} = \frac{\frac{\gamma}{gn_0}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right)^2 + 1}} (-1)^{n_a}, \quad (3.47)$$

was mit Gl. (3.45) umgeformt werden kann zu

$$-\frac{|g| |J|}{gJ} \stackrel{!}{=} (-1)^{n_a}. \quad (3.48)$$

Besitzen g und J also gleiches bzw. verschiedenes Vorzeichen, so muss n_a als eine ungerade bzw. gerade Zahl gewählt werden, damit die antisymmetrischen Lösungen auch Lösungen der Eigenwertgleichung (3.14) sind.

Charakteristische Größen der antisymmetrischen Lösungen Analog zu dem letzten Unterkapitel werden nun die quantenmechanischen Größen der antisymmetrischen Lösungen mithilfe der SPDM hergeleitet, die für das ZMS die Form

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{(2n_0)^2 - \kappa_a^2}}{2} e^{-i2\varphi_a} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \quad (3.49)$$

annimmt, womit mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{für } x \leq 0 \\ \arccos\left(\frac{+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

die Korrelation c_a und der reduzierte Strom \tilde{j}_a mit Gl. (3.34) berechnet werden können zu

$$\begin{aligned} c_a &= +\sqrt{(2n_0)^2 - \kappa_a^2} \cos\left[\arctan\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right) + \pi n_a\right] e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \\ &= +\sqrt{\frac{(2n_0)^2 - \kappa_a^2}{\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right)^2 + 1}} (-1)^{n_a} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{j}_a &= -\sqrt{(2n_0)^2 - \kappa_a^2} \sin\left[\arctan\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right) + \pi n_a\right] e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \\ &= -\sqrt{\frac{(2n_0)^2 - \kappa_a^2}{\left(\frac{\gamma}{gn_0}\right)^2 + 1}} \frac{\gamma}{gn_0} (-1)^{n_a} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mit der Bedingung (3.48) und dem Ausdruck für κ_a aus Gl. (3.39) nehmen beide Größen die folgende Form an,

$$c_a = -2 \frac{Jgn_0^2}{(gn_0)^2 + \gamma^2} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{j}_a = +2 \frac{J\gamma n_0}{(gn_0)^2 + \gamma^2} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}. \quad (3.54)$$

Die Korrelationsgröße c_a und der Strom $j_a = J\tilde{j}_a$ sind im Gegensatz zu den symmetrischen Lösungen im letzten Unterkapitel nicht mehr zeitlich konstant, sondern besitzen dasselbe exponentielle Verhalten wie die Besetzungszahlen $n_i(t)$ in Gl. (3.43).

3.3. Wellenfunktionen am Bifurkationspunkt

Für den Bereich $|\gamma| < |J|$ existieren zwei symmetrische Lösungen mit reellen Eigenwerten, die an dem Punkt $|\gamma| = |J|$ zusammenlaufen. Hier ergibt sich eine Bifurkation, wobei die \mathcal{PT} -Symmetrie gebrochen wird und sich für $|\gamma| > |J|$ komplexe Energien ergeben (siehe Abbildung 3.2). Besonders ist hierbei, dass die Wellenfunktionen für die entarteten Eigenenergien am Bifurkationspunkt übereinstimmen. Für eine nicht verschwindende

Nichtlinearität $g \neq 0$ tritt für $|\gamma| < |J|$ ein zusätzlicher Bifurkationspunkt auf, an dem die Eigenwerte der antisymmetrischen Lösungen in zwei komplexe Zweige aufspalten.

Da die Eigenwerte der symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen (3.29) und (3.42) für den Fall $g = 0$ übereinstimmen, soll in diesem Kapitel das Verhalten der symmetrischen Lösungen für $|\gamma| > |J|$ über den Bifurkationspunkt hinaus, an dem per Definition nur noch die antisymmetrischen Lösungen existieren, untersucht werden. Dafür findet sich in dem Phasenwinkel φ_s aus Gl. (3.27) ein komplexer Anteil, der sich in einer veränderten Anfangsbesetzung zeigt. Es stellt sich also die Frage, ob die symmetrische Wellenfunktion

$$\psi_1^s(t) = \sqrt{n_0} e^{+i\varphi_s} e^{-i\mu_s t} \quad (3.55)$$

möglicherweise für $|\gamma| > |J|$ das gleiche Verhalten aufweist, wie die antisymmetrische Wellenfunktion

$$\psi_1^a(t) = \sqrt{n_0 + \frac{\kappa_a}{2}} e^{+i\varphi_a} e^{-i\mu_a t}. \quad (3.56)$$

Damit die zeitliche Entwicklung gleich ist, muss $\mu_s = \mu_a$ gelten, was genau erfüllt ist, falls die Nichtlinearität den Wert $g = 0$ besitzt.

Nun soll überprüft werden, wie sich die komplexe Phase φ_s auf die Besetzung auswirkt. Für die Berechnung der Arkussinus-Funktion wird die Exponentialdarstellung der Sinus-Funktion invertiert, wobei sich unter Benutzung der Mitternachtsformel die allgemeine komplexe Form des Arkussinus

$$\arcsin(x) = -i \ln \left(ix \pm \sqrt{1 - x^2} \right) \quad (3.57)$$

ergibt. Da der Arkussinus für $x \in (-1, 1)$ jeweils zwei Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$ besitzt, wird die Mehrdeutigkeit durch die Vorzeichen \pm ausgedrückt, woraus sich mit einer weiteren Umformung die Darstellung des Arkussinus

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - i \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.58)$$

ergibt. Hier ist die Mehrdeutigkeit des \arcsin mit jeweils zwei Lösungen für $x \in (-1, 1)$ im Intervall 2π durch die Vorzeichen \pm ausgedrückt. Mit $\alpha = \gamma/J$ berechnet sich der Phasenwinkel der symmetrischen Lösungen damit zu

$$\begin{aligned} \varphi_s &= -\frac{1}{2} \arcsin(\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n - i \ln \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \right] \\ &= -\pi \left(\frac{1}{4} + n \right) - i \underbrace{\ln \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)}_{\in \mathbb{R}^+ \text{ für } \alpha > 1}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

wobei die Relation

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \left(x \mp \sqrt{x^2 - 1} \right)^{-1} \quad (3.60)$$

verwendet wurde. O.B.d.A folgt mit $n = 0$ für die symmetrische Lösung

$$\phi_1^s = \sqrt{n_0} e^{+i\varphi_s} = \sqrt{n_0 \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (3.61)$$

Wird diese Lösung mit der antisymmetrischen Lösung

$$\phi_1^a = \sqrt{n_0 + \frac{\kappa_a}{2}} e^{+i\varphi_a} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{n_0 \pm n_0 \sqrt{1 - \frac{J^2}{(gn_0)^2 + \gamma^2}}} e^{+i\varphi_a} \\ &\stackrel{g=0}{=} \sqrt{n_0 \left(1 \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

verglichen, fallen für $g = 0$ die identischen Phasen $\varphi_s = \varphi_a = -\pi/4$ auf und es stellt sich die Frage, ob die Beträge der beiden Wellenfunktionen für $|\gamma| > |J|$ ebenfalls gleich sind. Dafür soll nun die exponentiell ansteigende Lösung mit $\kappa_a > 0$ betrachtet werden, für die in Gleichung (3.63) das positive Vorzeichen gehört:

$$\begin{aligned} &\sqrt{n_0 \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} = \sqrt{n_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} \\ \stackrel{(3.60)}{\Leftrightarrow} &\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow &\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \pm \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = 1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Diese Gleichung ist trivialerweise für $\alpha = \gamma/J = 1$ erfüllt, was bedeutet, dass beide Funktionen für $\alpha \rightarrow 1$ am Bifurkationspunkt mit $g = 0$ ineinander übergehen, da für diesen Fall auch $\kappa \rightarrow 0$ geht. Für $\alpha > 1$ und $g = 0$ stimmen zwar die Phasen überein, aber nicht die Beträge bzw. die Anfangsbesetzungen. Für die exponentiell abfallende Lösung mit $\kappa < 0$ ergibt sich eine analoge Rechnung.

Will man den Betrag von ϕ_1^s in Gl. (3.61) ähnlich zu dem Betrag der antisymmetrischen Lösung (3.62) ausdrücken, ergibt sich

$$\phi^s = \sqrt{n_0 \alpha \pm \frac{\tilde{\kappa}}{2}} e^{+i\varphi_s} \quad (3.65)$$

3. \mathcal{PT} -Symmetrie

mit $\tilde{\kappa} = 2n_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$, was zwar eine gewisse Ähnlichkeit zu Gleichung (3.62) besitzt, jedoch ist die mittlere Besetzung

$$\tilde{n}_0 = \frac{|\phi_1^s|^2 + |\phi_2^s|^2}{2} = n_0\alpha$$

mit dem Faktor $\alpha = \gamma/J$ gewichtet.

Zusammenfassend gehen am Bifurkationspunkt $\gamma = J$ die symmetrische und antisymmetrische Lösungen (3.55) und (3.56) für $g = 0$ in der gesamten komplexen Phase $\pm\varphi - \mu t$ ineinander über mit dem einzigen Unterschied, dass der Betrag $|\psi_i(t = 0)|$ und damit die Anfangsbesetzungen $n_i(t = 0) = |\psi_i(t = 0)|^2$ verschieden sind. Dadurch, dass beide Lösungen für $g = 0$ in diesem Bifurkationspunkt ineinander übergehen, sind hier auch die Ströme und Korrelationen (3.38c) und (3.38a) dieselben wie in den Gleichungen (3.54) und (3.53).

4. Erzeugung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände mit konstanten Parametern

Um die \mathcal{PT} -brechenden Zustände des ZMS (3.43) realisieren zu können, werden in diesem Kapitel zunächst die Bedingungen für die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände in einem M -Muldensystem, welches aus einem Gitter mit wechselwirkenden Bose-Einstein Kondensaten besteht, hergeleitet und deren Dynamik untersucht. Ziel ist es, in den mittleren zwei Mulden des Systems eine zeitlich konstante Teilchenzahl, die mit einem konstanten Strom zwischen diesen Mulden nach Kapitel 3.2.2 verbunden ist, zu erreichen. Hierbei soll die experimentelle Realisierbarkeit große Bedeutung haben, weswegen der Verlustterm durch einen Elektronenstrahl [32] und der Gewinnterm durch angekoppelten Mulden, die als Teilchenreservoir den erforderlichen Strom liefern, umgesetzt werden. Ein ähnliches Experiment mit einem lokalen Verlustterm in einem offenen Quantensystem wurde bereits im Jahr 2016 durchgeführt [10].

Die entsprechende Dynamik der Systemmulden soll sich in einem Gitter mit zeitlich unabhängigen und in jeder Mulde gleich großen Parametern durch die Präparation des Anfangszustandes, was die Wahl der Anfangsphasen und Anfangsbesetzungen betrifft, bilden. Für eine spezielle Wahl des M -Muldensystems, für das die Ströme aller M Mulden den gleichen Betrag besitzen und die Ströme der Reservoirmulden in die Richtung der beiden Systemmulden gerichtet sind, wurde bereits gezeigt [9], dass sich mit einem lokalen Verlustterm in der rechten Systemmulde \mathcal{PT} -symmetrische Zustände bilden können.

Unter Verwendung der Mean-Field-Näherung ist es im Folgenden möglich, die Bedingungen der sich zu bildenden Dynamik im M -Muldensystem mit lokalen Verlusttermen, die eine Kopplung des Systems mit der Umgebung bezwecken und damit ein offenes Quantensystem definieren, herzuleiten.

4.1. Allgemeine Herleitung der Anfangsbedingungen

Es wird ein M -Muldensystem betrachtet, bei dem sich durch die Ankopplung von Reservoirmulden an die mittleren beiden Mulden mit den lokalen Verlusttermen γ_{k_S} und $\gamma_{k_{S+1}}$ mit $k_S = M/2$ die \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände aus Kapitel 3.2.2 ergeben sollen. Insbesondere sollen die physikalisch beobachtbaren Größen Teilchenzahl $n(t)$ und Strom

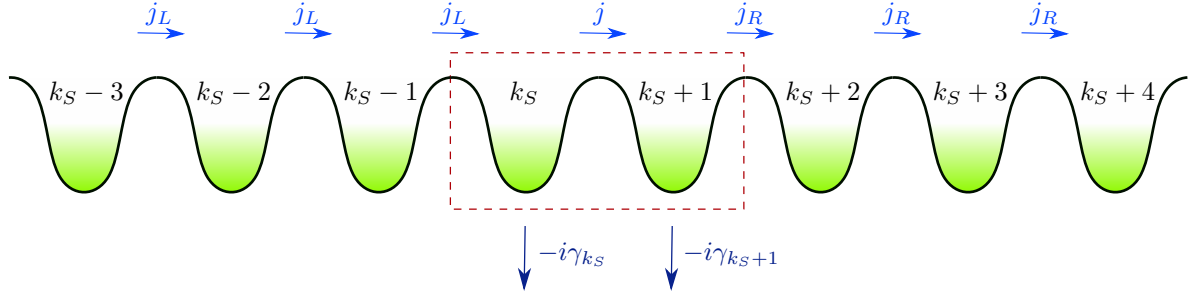


Abbildung 4.1.: Es sind die inneren Systemmulden k_S und $k_S + 1$ (rot-gestricheltes Untersystem) mit den lokalen Verlusttermen γ_{k_S} und γ_{k_S+1} , an die die Reservoirmulden eines M -Mulden-system angrenzen, dargestellt. Zwischen diesen Mulden fließen die Ströme j_L , j und j_R , deren Richtungen durch die blauen Pfeile gekennzeichnet sind.

$j(t)$ dem ZMS entsprechen und zeitlich konstant sein.

Da sich die Ströme zwischen den einzelnen Mulden im Mean-Field-Limit durch die SPDM (3.31) beschreiben lassen, wird als Ansatz die Gleichung (3.34b) verwendet, um die gewünschten Ströme bei $t = 0$ durch die Phasendifferenzen

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \arcsin \left(\frac{j_{k,k+1}}{2J_{k,k+1}\sqrt{n_k n_{k+1}}} \right) \quad (4.1)$$

festzulegen. Damit das komplette System experimentell leicht zugänglich ist, sollen die Gitterparameter

$$J_{k,k+1} \stackrel{!}{=} J, \quad (4.2a)$$

$$\mu_k \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.2b)$$

zeitlich konstant und in allen Mulden gleich groß sein. An die Systemmulden k_S und $k_S + 1$ werden die Bedingungen

$$\varphi_{k_S+1} - \varphi_{k_S} := -2\varphi_s = \arcsin \left(\frac{\gamma}{J} \right), \quad (4.3a)$$

$$n_{k_S} = n_{k_S+1} := n_0, \quad (4.3b)$$

$$J\tilde{j}_{k_S,k_S+1} = j_{k_S,k_S+1} := j = 2n_0\gamma \quad (4.3c)$$

gestellt, damit diese mit den Gleichungen (3.27), (3.30) und (3.38c) übereinstimmen und die Dynamik des ZMS besitzen. Hier bezeichnet γ den Gewinn- und Verlustterm des ZMS. Zwischen allen Reservoirmulden, die sich links der Systemmulden befinden, soll jeweils der Strom j_L fließen, sowie rechts davon ein Strom j_R , was in Abbildung 4.1

veranschaulicht wird:

$$J\tilde{j}_{k,k+1} = j_{k,k+1} := \begin{cases} j_L & \text{für } k \in [1, k_S - 1] \\ j & \text{für } k = k_S \\ j_R & \text{für } k \in [k_S + 1, M - 1] \end{cases}. \quad (4.4)$$

Außerdem sollen die Besetzungszahlen der Systemmulden nach Gl. (3.30) konstant bleiben

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{k_S} = j_L - j - \gamma_{k_S} n_{k_S} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{k_S+1} = j - j_R - \gamma_{k_S+1} n_{k_S+1} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.5b)$$

wobei hier die Änderung der Besetzungszahl durch Gl. (2.15) ausgedrückt wurde. Anschaulich bleibt die Besetzungszahl also zeitlich gleich, falls die Summe der in die Mulde hinein und heraus fließenden Ströme mit der Auskopplung von Teilchen Null ergibt. Hier sei nochmals darauf hingewiesen, dass $\gamma_k > 0$ eine Auskopplung und $\gamma_k < 0$ einen Zufluss an Teilchen bedeutet. Diese Verlustterme

$$\gamma_{k_S} = \frac{j_L - j}{n_0}, \quad (4.6a)$$

$$\gamma_{k_S+1} = \frac{j - j_R}{n_0}, \quad (4.6b)$$

sowie deren Summe und Differenz

$$\gamma^+ = \gamma_{k_S+1} + \gamma_{k_S} = \frac{j_L - j_R}{n_0}, \quad (4.7a)$$

$$\gamma^- = \gamma_{k_S+1} - \gamma_{k_S} = \frac{2j - j_L - j_R}{n_0} \quad (4.7b)$$

können durch die einzelnen Ströme ausgedrückt werden. Weil ausschließlich an den Systemmulden lokale Verlustterme existieren sollen, müssen mit der Anwendung von Gl. (2.15) auf die Reservoirmulden auch deren Besetzungen zeitlich konstant sein,

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k = 0 \quad (4.8)$$

für $k \in [1, M]$. Mit der zweiten Ableitung der Besetzungszahl der Systemmulden, die ebenfalls nach dem ZMS Null sein muss, und mit $j, \gamma_{k_S}, \gamma_{k_S+1}, n_{k_S}, n_{k_S+1} = \text{const.}$ ergibt sich nach Gl. (4.5), dass die Ströme in den Reservoirmulden

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n_{k_S} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} j_L = 0, \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n_{k_S+1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} j_R = 0 \quad (4.9b)$$

ebenfalls zeitlich konstant sein müssen. Um die Auswirkung dieser Forderung, dass alle Ströme im M -Muldensystem zeitlich konstant sein sollen, auf die mögliche Wahl der Ströme und Phasen zu sehen, können die SPDM in Betracht gezogen werden, deren zeitliche Ableitung durch Gl. (2.14) gegeben ist. Mit den Relationen (3.35) und (3.36) folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k,k+1} = & -\sigma_{k,k+1} \left[iJ \left(\frac{\sigma_{k-1,k}}{n_k} - \frac{\sigma_{k+1,k+2}}{n_{k+1}} \right) + \frac{1}{2} (\gamma_k^{\text{loss}} + \gamma_{k+1}^{\text{loss}}) \right] \\ & - iJ (n_{k+1} - n_k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für die Systemmulden und die jeweils angrenzende Reservoirmulde ergeben sich konkret:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k_S, k_S+1} = -\sigma_{k_S, k_S+1} \left[iJ \frac{\sigma_{k_S-1, k_S} - \sigma_{k_S+1, k_S+2}}{n_0} + \frac{1}{2} \gamma^+ \right], \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k_S+1, k_S+2} = & -\sigma_{k_S+1, k_S+2} \left[iJ \left(\frac{\sigma_{k_S, k_S+1}}{n_{k_S+1}} - \frac{\sigma_{k_S+2, k_S+3}}{n_{k_S+2}} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{k_S+1} \right] \\ & - iJ (n_{k_S+2} - n_{k_S+1}), \end{aligned} \quad (4.11b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k_S-1, k_S} = & -\sigma_{k_S-1, k_S} \left[iJ \left(\frac{\sigma_{k_S-2, k_S-1}}{n_{k_S-1}} - \frac{\sigma_{k_S, k_S+1}}{n_{k_S}} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{k_S} \right] \\ & - iJ (n_{k_S} - n_{k_S-1}). \end{aligned} \quad (4.11c)$$

Bei diesen Berechnungen wurde bereits aus Gründen der Übersichtlichkeit eine Gleichbesetzung aller Mulden $n_k = n_{k+1}$ angenommen, die später in Gl. (4.15) begründet wird, weswegen alle $g_k^{\text{MF}} =: g$ aus Gl. (2.14) verschwinden.

Die sich aus den Gleichungen (4.11) ergebenden Bedingungen werden im Folgenden in einer Fallunterscheidung genauer betrachtet:

- Nach dem ZMS sind die zeitlichen Ableitungen des Stromes und der Korrelation jeweils Null (siehe Gl. (3.38)), weswegen für die Systemmulden

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (c_{k_S, k_S+1} + i \tilde{j}_{k_S, k_S+1}) = \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k_S, k_S+1} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.12)$$

gefordert wird. Da der Strom j_{k_S, k_S+1} zwischen den Systemmulden nicht Null sein soll und damit $\sigma_{k_S, k_S+1} \neq 0$ ist, werden der Real- und Imaginärteil in der eckigen Klammer in Gl. (4.11a) jeweils Null gesetzt:

$$0 \stackrel{!}{=} \gamma^+ - \frac{J}{n_0} (\tilde{j}_{k_S-1, k_S} - \tilde{j}_{k_S+1, k_S+2}) = \gamma^+ - \frac{1}{n_0} (j_L - j_R), \quad (4.13)$$

$$0 \stackrel{!}{=} c_{k_S-1, k_S} - c_{k_S+1, k_S+2}. \quad (4.14)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu Gl. (4.7a) und deshalb bereits erfüllt. Da nach Gl. (4.9) alle Ströme $\tilde{j}_{k, k+1}$ zeitlich konstant sein müssen und dieses Verhalten nach

dem ZMS nur bei einer Gleichbesetzung benachbarter Mulden mit $n_k = n_{k+1}$ der Fall ist, sollen die Besetzungszahlen aller Mulden gleich sein,

$$n_k \stackrel{!}{=} n_0 \quad (4.15)$$

für $k \in [1, M]$. Werden die Korrelationsgrößen in Gl. (4.14) durch die Gl. (3.34) ausgedrückt, so folgt

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_{k_S} - \varphi_{k_S-1}) &= \cos(\varphi_{k_S+2} - \varphi_{k_S+1}) \\ \Leftrightarrow \quad \varphi_{k_S} - \varphi_{k_S-1} &= \pm(\varphi_{k_S+2} - \varphi_{k_S+1}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

wodurch die Ströme von rechts und links in die Systemmulden den gleichen Betrag besitzen müssen:

$$j_L = \pm j_R. \quad (4.17)$$

- Mit den geforderten Bedingungen (4.8) und (4.9) müssen wegen Gl. (3.34) die Korrelationen

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{k_S-1, k_S} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{k_S+1, k_S+2} = 0 \quad (4.19)$$

ebenso zeitlich konstant sein. Damit gilt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (c_{k_S+1, k_S+2} + i \tilde{j}_{k_S+1, k_S+2}) = \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{k_S+1, k_S+2} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.20)$$

weswegen die Gleichung (4.11b) analog zu den vorangegangenen Rechnungen wieder Null gesetzt werden, was dann mit dem Real- und Imaginärteil die Zusammenhänge

$$0 \stackrel{!}{=} \gamma_{k_S+1} - \frac{J}{n_0} (\tilde{j}_{k_S, k_S+1} - \tilde{j}_{k_S+2, k_S+3}) = \gamma_{k_S+1} - \frac{1}{n_0} (j - j_R), \quad (4.21)$$

$$0 \stackrel{!}{=} c_{k_S, k_S+1} - c_{k_S+2, k_S+3} \quad (4.22)$$

liefert. Aus der zweiten Gleichung folgt analog

$$j = \pm j_R. \quad (4.23)$$

- Dieselbe Rechnung für Gl. (4.11c) ergibt

$$j = \pm j_L, \quad (4.24)$$

j_L	j_R	$n_0\gamma_{k_S}$	$n_0\gamma_{k_S+1}$	$n_0\gamma^+$	$n_0\gamma^-$	Richtungen der Ströme j_L, j, j_R
$+j$	$-j$	0	$2j$	$2j$	$2j$	$\rightarrow \rightarrow \leftarrow$
$+j$	$+j$	0	0	0	0	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$
$-j$	$+j$	$-2j$	0	$-2j$	$2j$	$\leftarrow \rightarrow \rightarrow$
$-j$	$-j$	$-2j$	$2j$	0	$4j$	$\leftarrow \rightarrow \leftarrow$

Tabelle 4.1.: Die möglichen Werte für die Ströme j_L und j_R in den Reservoirmulden in Abhängigkeit des Stromes zwischen den Systemmulden j , für die sich die \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände aus Kapitel 3.2.2 mit konstanter Teilchenzahl und Strom im Untersystem $k_S, k_S + 1$ im M -Mulden System realisieren lassen.

weswegen die Beträge aller Ströme in den System- und Reservoirmulden gleich sein müssen,

$$|j_L| \stackrel{!}{=} |j| \stackrel{!}{=} |j_R|. \quad (4.25)$$

Mit dem Strom zwischen den Systemmulden $j = 2\gamma n_0$ können für j_L und j_R daher die Werte aus Tabelle 4.1 gewählt werden, damit sich in den Systemmulden die gleiche stationäre Dynamik wie im ZMS mit konstanter Teilchenzahl und Strom einstellt. Da alle Ströme den gleichen Betrag besitzen, lassen sich hier nur die Richtungen der Ströme j_L, j und j_R , welche als Pfeile anschaulich in der Tabelle eingezeichnet sind, wählen. Die einzustellenden lokalen Verlustterme γ_{k_S} und γ_{k_S+1} , sowie deren Summe γ^+ und Differenz γ^- lassen sich dann durch die Gleichungen (4.6) und (4.7) berechnen.

Um diese konstanten Ströme j_L, j und j_R in dem gesamten M -Mulden System zu erreichen, müssen nach Gl. (4.1) die Phasendifferenzen des Anfangszustandes wie folgt gesetzt werden:

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k := \begin{cases} \arcsin\left(\frac{j_L}{2Jn_0}\right) & \text{für } k \in [1, k_S - 1] \\ \arcsin\left(\frac{j}{2Jn_0}\right) & \text{für } k = k_S \\ \arcsin\left(\frac{j_R}{2Jn_0}\right) & \text{für } k \in [k_S + 1, M - 1] \end{cases}. \quad (4.26)$$

4.2. Beschreibung der Dynamik des M -Mulden Systems

4.2.1. Implementierung

Um die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktionen ψ_k aller Mulden berechnen zu können, wurde zuerst der Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}$ als Matrix gemäß Gl. (2.12) definiert. Da bei allen Berechnungen $g = 0$ gesetzt wurde, womit die Nichtlinearität und damit

die Zeitabhängigkeit in $\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}$ verschwindet, konnte der zeitliche Verlauf direkt über den Zeitentwicklungsoperator (3.17) bestimmt werden. Mit der standardmäßigen Implementierung des Matrixexponentials in PYTHON lassen sich dann beliebige Zeitpunkte von $\psi_k(t)$ berechnen, da diese jeweils direkt mit dem Anfangszustand $\psi_k(t=0)$ in Relation stehen. Dabei treten keine relevanten numerischen Probleme auf.

Die Berechnung der Wellenfunktionen für eine nicht verschwindende Nichtlinearität $g \neq 0$ kann nicht mehr mithilfe des Zeitentwicklungsoperators erfolgen. Da dieser Fall keine große Rolle in dieser Arbeit spielt, wurde aus Einfachheit dafür nur ein *Euler-Verfahren* implementiert, das mit Gl. (2.12) die folgende einfache Form annimmt:

$$\begin{aligned}\psi(t + \Delta t) &= \psi(t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \\ &= \psi(t) - i\Delta t \cdot \hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}} \psi(t).\end{aligned}\tag{4.27}$$

Hierfür müssen die Zeitschritte Δt sehr klein sein, da für dieses ungenaue Verfahren sonst schnell ein relevanter numerischer Fehler entsteht. Der Anfangszustand wird gemäß Gl. (3.13) implementiert.

4.2.2. Analyse der Dynamik für unterschiedliche Präparationen des Ausgangssystem

Im Folgenden wird die Mean-Field-Dynamik des M -Muldensystems mit den Parametern

$$M = 50, \quad J = 1, \quad \mu_k = 0, \quad g = 0, \quad \gamma = 1 \tag{4.28}$$

auf unterschiedliche Aspekte hinsichtlich der Wahl unterschiedlicher Ströme untersucht. Wird die zeitliche Entwicklung nach Kapitel 4.2.1 berechnet, ergeben sich mit den Anfangsbesetzungen

$$n_k(t=0) = n_0 = 0,5 \tag{4.29}$$

für alle Mulden $k \in [1, M]$ und den Phasendifferenzen des Anfangszustand nach Gl. (4.26) die gewünschten Wellenfunktionen $\psi(t)$. Dafür wurden die absoluten Phasen der Systemmulden als

$$\varphi_{k_S} = -\varphi_{k_S+1} = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{j}{2Jn_0}\right) = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{J}\right) \tag{4.30}$$

gesetzt. Jedoch macht es keinen Unterschied, wenn die absoluten Phasen um eine Phase $+\varphi_0$ verschoben werden, da für die Dynamik nur die relativen Phasen entscheidend sind. Die zeitlichen Besetzungszahlen

$$n_k(t) = \psi_k^*(t)\psi_k(t), \quad k \in [k_S - 2, k_S + 3] \tag{4.31}$$

der inneren 6 Mulden sind zusammen mit der theoretischen Besetzung $n(t) = n_0$ des ZMS nach (3.30) in Abbildung 4.2 logarithmisch und in Abbildung 4.3 linear dargestellt. Hierbei sind die 4 verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl der Ströme der Reservoirmulden j_L und j_R in der gleichen Reihenfolge von oben nach unten aufgetragen, wie es in Tabelle 4.1 aufgelistet ist. In der logarithmischen Darstellung 4.2 ist für alle Wahlen der Ströme sofort die Bildung der \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände, die sich in der konstanten Besetzungszahl zeigt, bis $t \approx 9$ zu erkennen.

In dem ersten Fall, für den $+j_L = j = -j_R$ gilt, wird nach Tabelle 4.1 nur an der rechten Systemmulde $k_S + 1$ ausgekoppelt mit dem lokalen Verlustterm $\gamma_{k_S+1} = 4\gamma$, weswegen die Ströme der Reservoirmulden in Richtung der Systemmulden zeigen.

Die äußeren Reservoirmulden $\{1, M\}$ beginnen sich zuerst zu entleeren, was auch oben in Abbildung 4.4 genauer zu sehen ist. Dieser Entleerungsvorgang breitet sich über das gesamte Reservoir aus, bis schließlich die Systemmulden ihre Besetzungszahl nicht mehr konstant halten können, wobei die \mathcal{PT} -Symmetrie zusammenbricht. Da mit dieser Wahl die Ströme j_L und j_R in der Mitte des Systems zwischen k_S und $k_S + 1$ gespiegelt werden können, ergibt sich eine Symmetrie, die die Folge hat, dass sich gegenüberliegende Mulden $\{k_S, k_S + 1\}$, $\{k_S - 1, k_S + 2\}$, $\{k_S - 2, k_S + 3\}$, usw. identisch verhalten. Diese Symmetrie liegt deswegen auch bei der dritten Möglichkeit $-j_L = j = +j_R$, bei der alle Ströme von der Mitte weg gerichtet sind, vor.

Entleert sich eine Mulde komplett, was an den spitzen nach unten gerichteten Peaks zu erkennen ist, bleibt diese nicht leer, sondern wird durch die Kopplung der Nachbarmulden sofort wieder aufgefüllt. Da hier ständig Teilchen aus dem System entnommen werden, geht die Teilchenzahl aller Mulden für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Die ersten zwei Möglichkeiten in Tabelle 4.1 sind die experimentell am einfachsten zu realisierenden, da kein Zufluss an Teilchen erfolgen muss.

Der zweite Fall repräsentiert den trivialen Fall, bei dem M identische Mulden ohne lokalen Verlustterm im Gitter angeordnet sind. Damit gibt es auch keinen Teilchenaustausch mehr mit der Umgebung und das M -Muldensystem ist kein offenes Quantensystem mehr. Die Teilchenzahl bleibt erhalten, jedoch tritt nach dem Zusammenbruch der \mathcal{PT} -Symmetrie trotzdem ein ungeordnetes Verhalten auf. Werden die beiden Systemmulden, dessen Dynamik in dieser Arbeit von Interesse ist, betrachtet, stellt dieses Untersystem trotzdem noch ein offenes Quantensystem dar, wobei dessen Gewinn- und Verlustterm effektiv durch den Strom der Reservoirmulden erzeugt wird.

Im dritten und vierten Fall ist ersichtlich, dass die Teilchenzahlen nach dem \mathcal{PT} -Symmetriebruch divergieren. Dieses Verhalten ist damit zu begründen, dass ein Einkoppelungsterm vorliegt, bei dem sich die Gesamtzahl aller Teilchen stetig erhöht. Obwohl im vierten Fall der Einkoppelungsterm $-\gamma_{k_S+1}$ gleich groß wie der Verlustterm $+\gamma_{k_S}$ ist, bleibt die Gesamtteilchenzahl hier nicht erhalten, da die Gewinn- und Verlustterme abhängig von der Besetzungen der Systemmulden sind (siehe Gl. (4.5)). Erhöht sich die Teilchenzahl, wie es im dritten Bild von Abbildung 4.2 der Fall ist, so werden auch mehr Teilchen eingekoppelt, womit sich die Besetzungszahl immer stärker erhöht.

Der vierte Fall sieht auf den ersten Blick gleich aus wie das ZMS, da in der linken

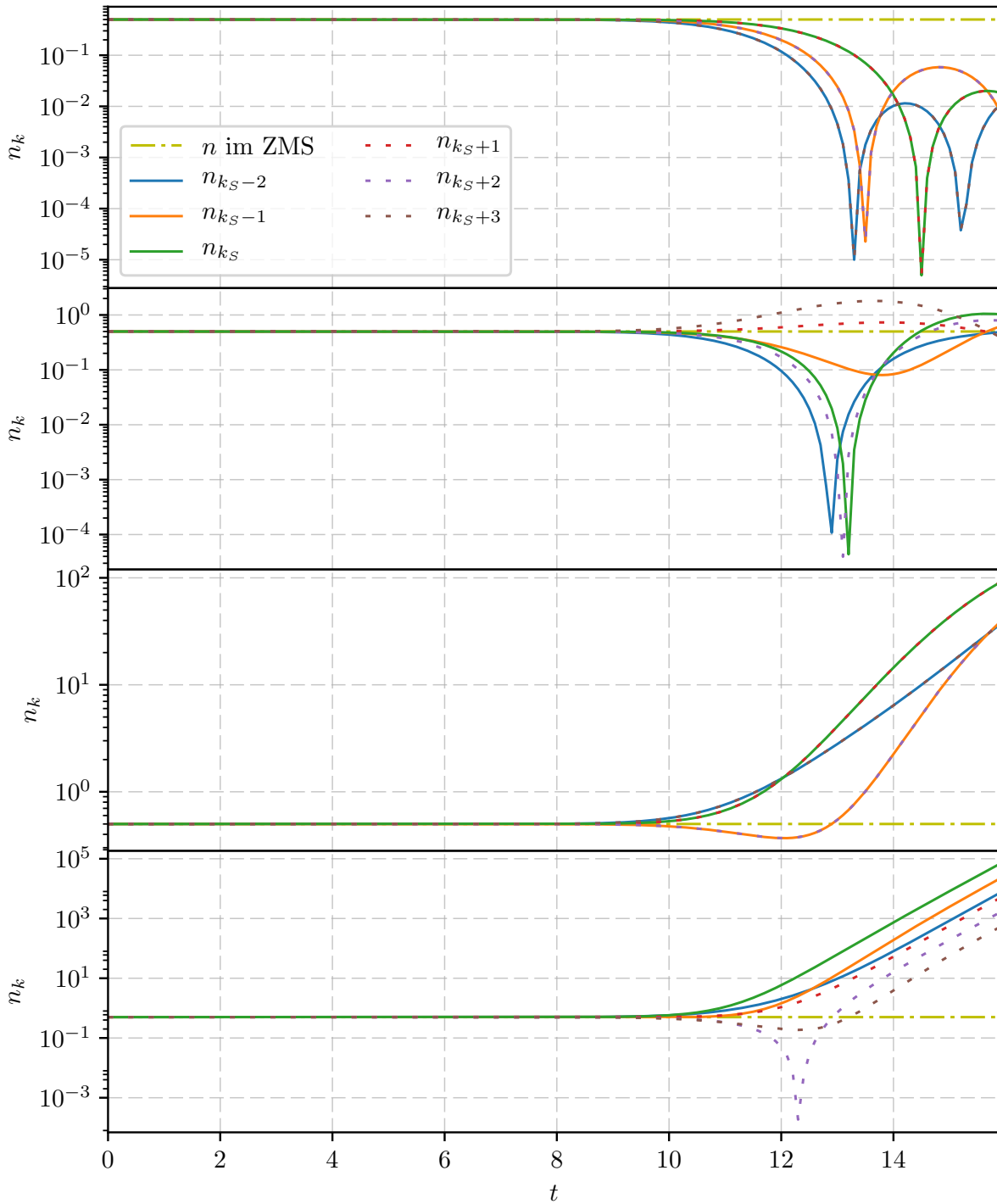


Abbildung 4.2.: Die zeitlichen Besetzungszahlen $n_k(t) = \psi_k^*(t)\psi_k(t)$, $k \in [k_S - 2, k_S + 3]$ der inneren 6 Mulden zusammen mit der theoretischen Besetzung $n(t) = n_0$ des ZMS nach (3.30) sind logarithmisch abgebildet. Die 4 Möglichkeiten für die Wahl der Anfangsströme sind von oben nach unten in gleicher Weise wie in Tabelle 4.1 dargestellt.

4. Erzeugung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände mit konstanten Parametern

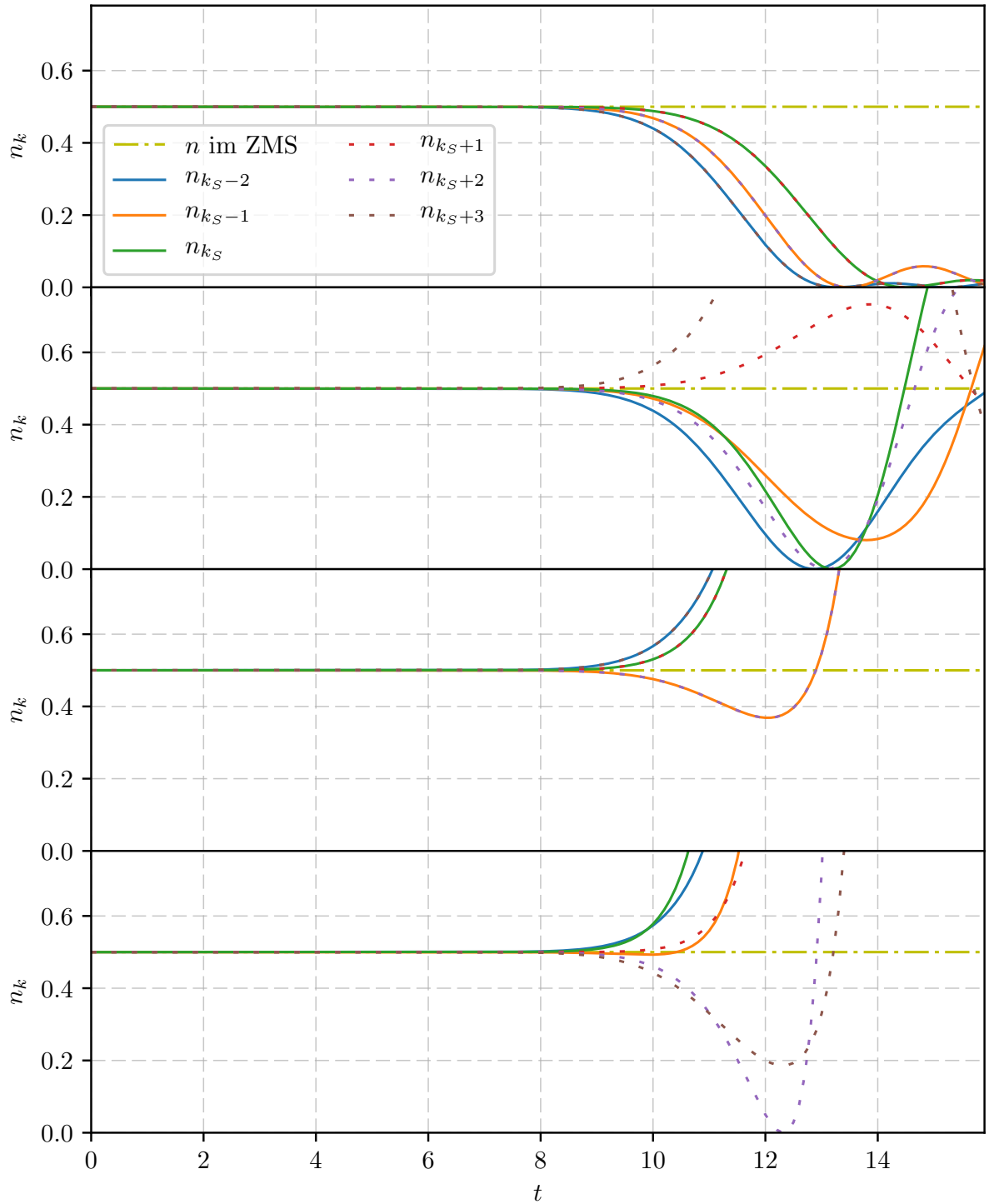


Abbildung 4.3.: Die zeitlichen Besetzungszahlen wie in Abbildung 4.2, jedoch mit linearen Achsen.

Systemmulde mit der gleichen Rate eingekoppelt wird, wie in der rechten ausgekoppelt wird. Würde hier aber der Strom der Reservoirmulden gleich Null gesetzt werden, führt das nicht zu der Dynamik des ZMS, da die Reservoirmulden immer noch mit einer bestimmten Wechselwirkung $J \neq 0$ angekoppelt sind. Wird dabei beispielsweise der Strom zwischen rechter System- und angrenzender Reservoirmulde berechnet, ergibt sich, dass dieser sich sofort zu Beginn ändert, $\frac{\partial}{\partial t} j_{k_S+1, k_S+2}(t=0) \neq 0$, obwohl dieser Strom $j_{k_S+1, k_S+2}(t=0) = 0$ ist. Diese Dynamik kann mit Gl. (4.11) berechnet werden und sorgt von Anfang an bei $t=0$ für den Zusammenbruch des Systems.

In Abbildung 4.3 sind dieselben zeitlichen Besetzungszahlen linear dargestellt um den Symmetriebruch genauer betrachten zu können. Das oberste Bild besitzt im Vergleich zu den anderen drei Bildern die am meisten geordnete Dynamik, da sich die dargestellten Besetzungen solange konstant halten bis der erforderliche Strom der angrenzenden Mulden nicht mehr gegeben ist. Als Folge gehen mit dem Verlustterm die Teilchenzahlen aller Mulden gegen Null, bis sich keine Teilchen im gesamten System mehr befinden. Hier behalten im Vergleich zu den anderen Wahlen der Ströme j_L und j_R die beiden Systemmulden am längsten die geforderte Besetzung $n_0 = 0,5$ und weichen am wenigsten davon ab. Im zweiten und vierten Bild gibt es für die linke Systemmulde eine größere Abweichung als für die rechte, weil die Symmetrie der Stromrichtungen dabei nicht gegeben ist.

Die Zeitdauer, in der die Besetzungen auf dem konstanten Wert n_0 bleiben, kann gleichermaßen in allen Fällen durch Hinzufügen von mehreren Reservoirmulden beliebig erhöht werden.

Ströme und Korrelationen im M -Muldensystem Nachdem die Teilchenzahlen der Systemmulden die gewünschte Besetzung (3.30) des ZMS für eine lange Zeit konstant halten, werden im Folgenden noch die Ströme $j_{k, k+1}$ und Korrelationen $c_{k, k+1}$ untersucht. In Abbildung 4.4 wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nur noch die Dynamik der ersten Möglichkeit in Tabelle 4.1 mit $+j_L = j = -j_R$ aufgetragen. Dabei sind die zeitlichen Verläufe $n_k(t)$, $\tilde{j}_{k, k+1}(t)$ und $c_{k, k+1}(t)$ aller Mulden mit den theoretischen Verläufen der \mathcal{PT} -symmetrischen Zuständen ZMS für $\gamma = 1$ abgebildet. In dieser Abbildung ist nochmals zu sehen, wie die äußeren Mulden $\{1, M\}$ direkt bei $t=0$ anfangen sich zu entleeren und sich dieser Prozess gleichmäßig bis zur Mitte des Systems fortsetzt. Der zeitliche Verlauf des reduzierten Stromes $\tilde{j}_{k, k+1}(t)$ besitzt die gleiche Dynamik wie die Besetzung $n_k(t)$, wobei der Strom aller Reservoirmulden rechts der Systemmulden ein negatives Vorzeichen besitzt. Der reduzierte Strom zwischen den Systemmulden

$$\tilde{j}_{k_S, k_S+1}(t < 9) = 1 \quad (4.32)$$

ist nach dem ZMS in Gl. (3.38b) durch den korrekten Wert gegeben, sowie die Korrelationsgröße

$$c_{k_S, k_S+1}(t < 9) = 0 \quad (4.33)$$

4. Erzeugung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände mit konstanten Parametern

nach Gleichung (3.38a).

In Abbildung 4.5 ist dieselbe Dynamik wie in Abbildung 4.4 zu sehen, mit dem Unterschied, dass der Gewinn- und Verlustterm hier als $\gamma = 0,8$ gewählt wird. Auch darin besitzen die Ströme $\tilde{j}_{k,k+1}(n)$ und Korrelationen $c_{k,k+1}(t)$ den selben qualitativen zeitlichen Verlauf wie die Besetzungen $n_k(t)$. Die entsprechenden Größen in den Systemmulden

$$\tilde{j}_{k_S,k_S+1}(t < 9) = 0,8, \quad c_{k_S,k_S+1}(t < 9) = 0,6 \quad (4.34)$$

können hier wiederum mit den theoretischen Werten des ZMS in Deckung gebracht werden.

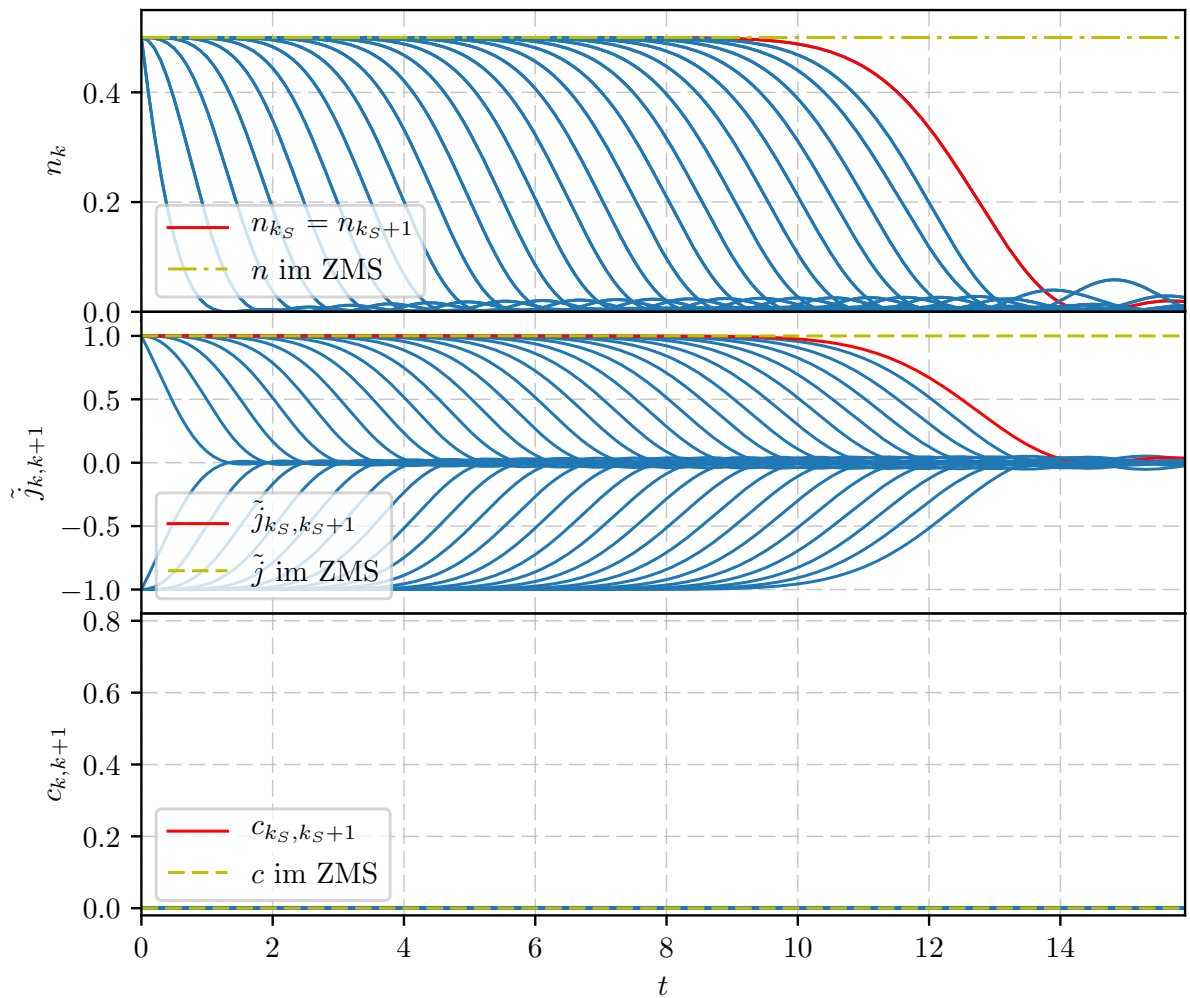


Abbildung 4.4.: Es sind die zeitlichen Verläufe $n_k(t)$, $\tilde{j}_{k,k+1}(t)$ und $c_{k,k+1}(t)$ aller Mulden mit den theoretischen Verläufen der \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände des ZMS aufgetragen. Die Wahl der Ströme beträgt hierbei $+j_L = j = -j_R$ und $\gamma = 1$.

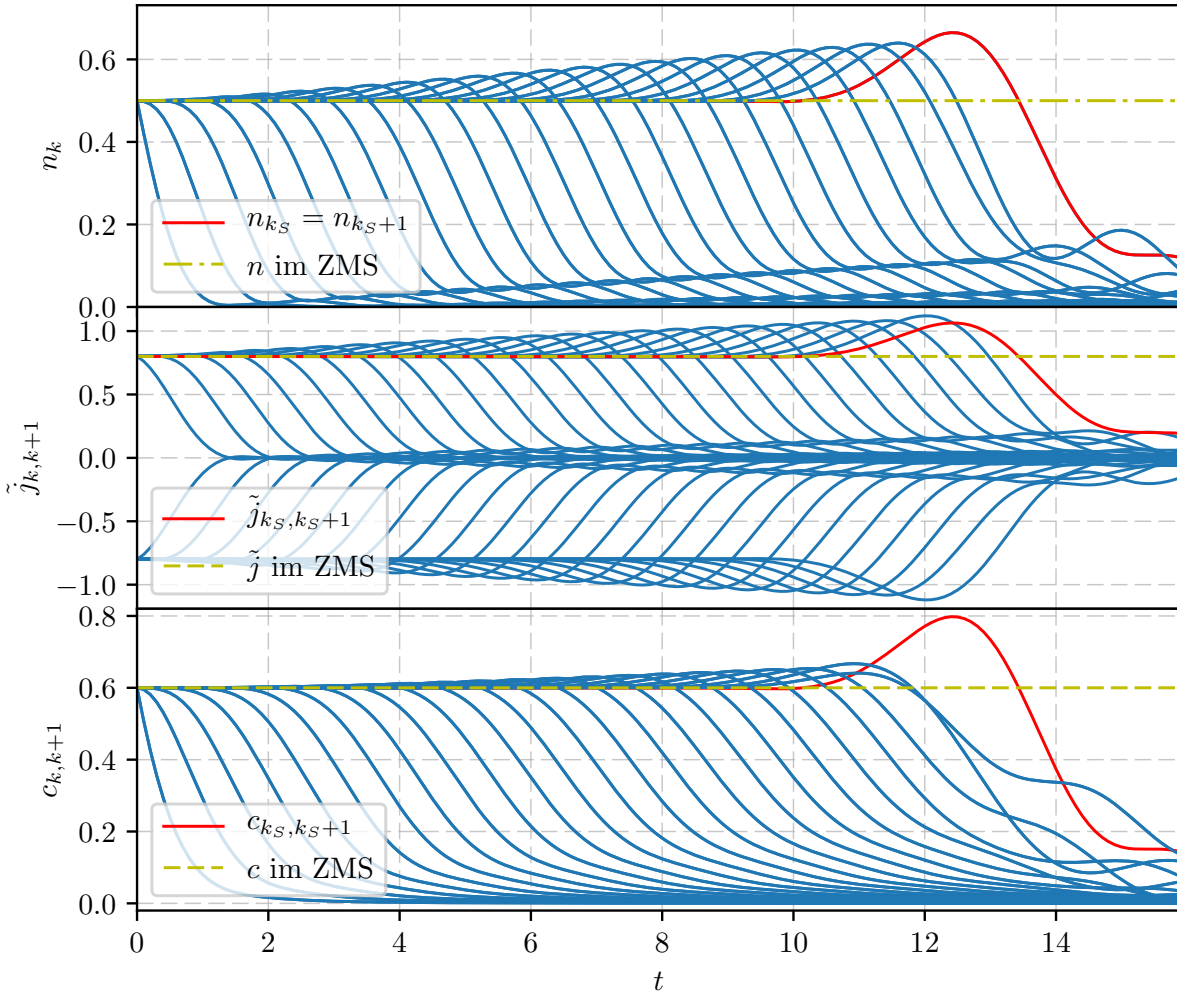


Abbildung 4.5.: Es sind die zeitlichen Verläufe $n_k(t)$, $\tilde{j}_{k,k+1}(t)$ und $c_{k,k+1}(t)$ aller Mulden mit den theoretischen Verläufen der \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände des ZMS aufgetragen. Die Wahl der Ströme beträgt hierbei $+j_L = j = -j_R$ und $\gamma = 0,8$.

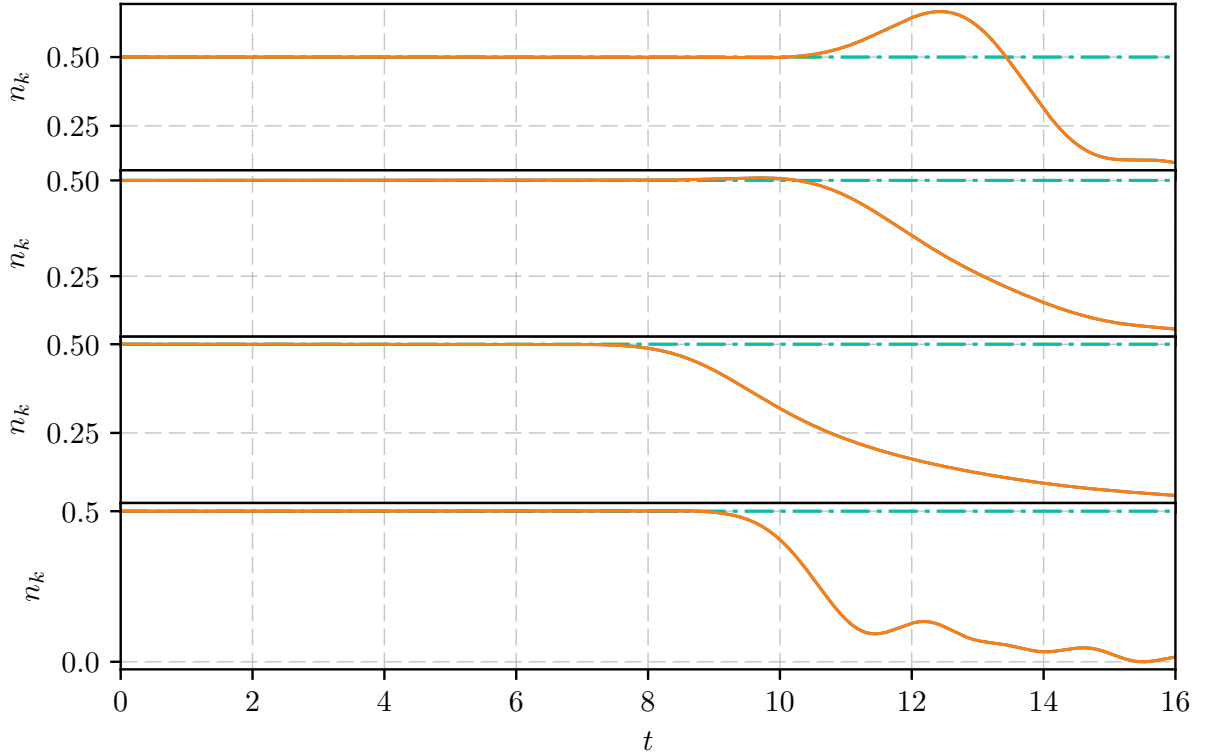


Abbildung 4.6.: Die Besetzungszahlen der Systemmulden k_S und $k_S + 1$ mit den gestrichelten theoretischen Besetzungen n_0 des ZMS für unterschiedliche Nichtlinearitäten $g \in \{0, 1, 3, -3\}$ mit $\gamma = 0,8$.

Auswirkung einer nicht verschwindenden Nichtlinearität Da die bisherige Beschreibung dieses Abschnitts für den linearen Fall $g = 0$ erfolgte, wird im Folgenden kurz die Auswirkung einer nicht verschwindenden Nichtlinearität g untersucht. Für die in Kapitel 4.1 hergeleiteten Bedingungen für die Präparation des Anfangszustandes ergeben sich mit $g \neq 0$ keine Änderungen in den Strömen oder Anfangsbesetzungen, da die Bedingungen (4.3) und Phasen (4.26) unabhängig von g sind. Im ZMS folgt mit einer beliebigen Nichtlinearität eine Verschiebung des Energieeigenwerts (3.29), jedoch bilden sich damit immer noch die gleichen stationären Besetzungszahlen. In Abbildung 4.6 sind die Besetzungszahlen der Systemmulden k_S und $k_S + 1$ mit den gestrichelten theoretischen Besetzungen n_0 des ZMS für unterschiedliche Nichtlinearitäten $g \in \{0, 1, 3, -3\}$ mit $\gamma = 0,8$ dargestellt. Es ist zu erkennen, dass je größer der Betrag $|g|$ ist, desto früher weichen die Besetzungszahlen von dem konstanten Wert $n_0 = 0,5$ ab. Dieses Verhalten lässt sich mit dem Einfluss des nicht linearen Terms in Gl. (3.14) begründen, weil dadurch bereits eine kleine Abweichung $d|\psi_i|^2$ von dem konstanten Wert n_0 stärker ins Gewicht fällt und die \mathcal{PT} -Symmetrie der Zustände damit schneller gebrochen wird.

4.2.3. Unterschiede zum ZMS in den Wellenfunktionen

Zuletzt soll noch die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktionen der Systemmulden im M -Muldensystem genauer betrachtet werden. Deren Real- und Imaginärteil sind zusammen mit den erwarteten Wellenfunktionen des ZMS nach Gl. (3.55) oben in Abbildung 4.7 für den Gewinn- und Verlustterm $\gamma = 0,8$ dargestellt. Die zeitlichen Verläufe sind zwar qualitativ ähnlich und ergeben reine Sinus- bzw. Kosinus-Funktionen, sind aber nicht deckungsgleich. Da im letzten Unterkapitel bereits aufgezeigt wurde, dass die Beträge der Wellenfunktionen $|\psi_k(t)|^2 = n_k(t)$ mit dem Modell des ZMS übereinstimmen, werden deshalb nun die Phasen der Wellenfunktionen

$$\psi_k(t) = \sqrt{n_k(t)} e^{i\varphi_k(t)} \quad (4.35)$$

durch

$$\varphi_k(t) = \text{Im} [\ln (\psi_k(t))] \quad (4.36)$$

berechnet. Diese Phase $\varphi_k(t)$ ist mit deren Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(t) =: \varphi'_k(t)$ ebenfalls in Abbildung 4.7 dargestellt. Dabei entspricht die Phasendifferenz zwischen der linken und rechten Systemmulde überall der Gl. (4.26), aber die zeitliche Abhängigkeit der absoluten Phasen ist verschieden. Wird der berechnete Wert für die Änderung der Phasen

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{k_S}(t < 9) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{k_S+1}(t < 9) = 1,2 \quad (4.37)$$

mit dem erwarteten Wert des ZMS

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{1/2}^s(t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{Im} [\ln (\psi_{1/2}^s(t))]) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\pm \varphi_s - \mu_s t) \\ &= -\mu_s \stackrel{\gamma=0,8}{=} 0,6 \end{aligned} \quad (4.38)$$

nach Gl. (3.55) verglichen, fällt auf, dass dieser genau dem Doppelten entspricht. Dieses Verhalten ist dem Aspekt geschuldet, dass die Herleitung in Abschnitt 4.1 versucht, über die Änderungen der Besetzungszahlen $\frac{\partial}{\partial t} n_k = \frac{\partial}{\partial t} (\psi_k^* \psi_k)$ die entsprechenden Bedingungen für die Bildung der symmetrischen Zustände nach dem ZMS zu bekommen. Dabei geht ein Teil der Information, die nur direkt in den Phasen der Wellenfunktionen ψ_k steckt, verloren. In Anhang A wird gezeigt, dass das chemische Potential, also der Energieeigenwert, des M -Muldensystems im Vergleich zu dem ZMS einen exakt doppelt so großen Wert besitzt. Da es für die Präparation des Systems mit konstanten Gitterparametern nach der Herleitung in Kapitel 4.1 keine zusätzlichen Freiheitsgrade mehr gibt, kann das chemische Potential auch nicht variiert werden.

Zusammenfassend bilden sich für die Realisierung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände mit dem Ansatz dieses Kapitels, für den die Besetzungszahlen in allen M Mulden identisch

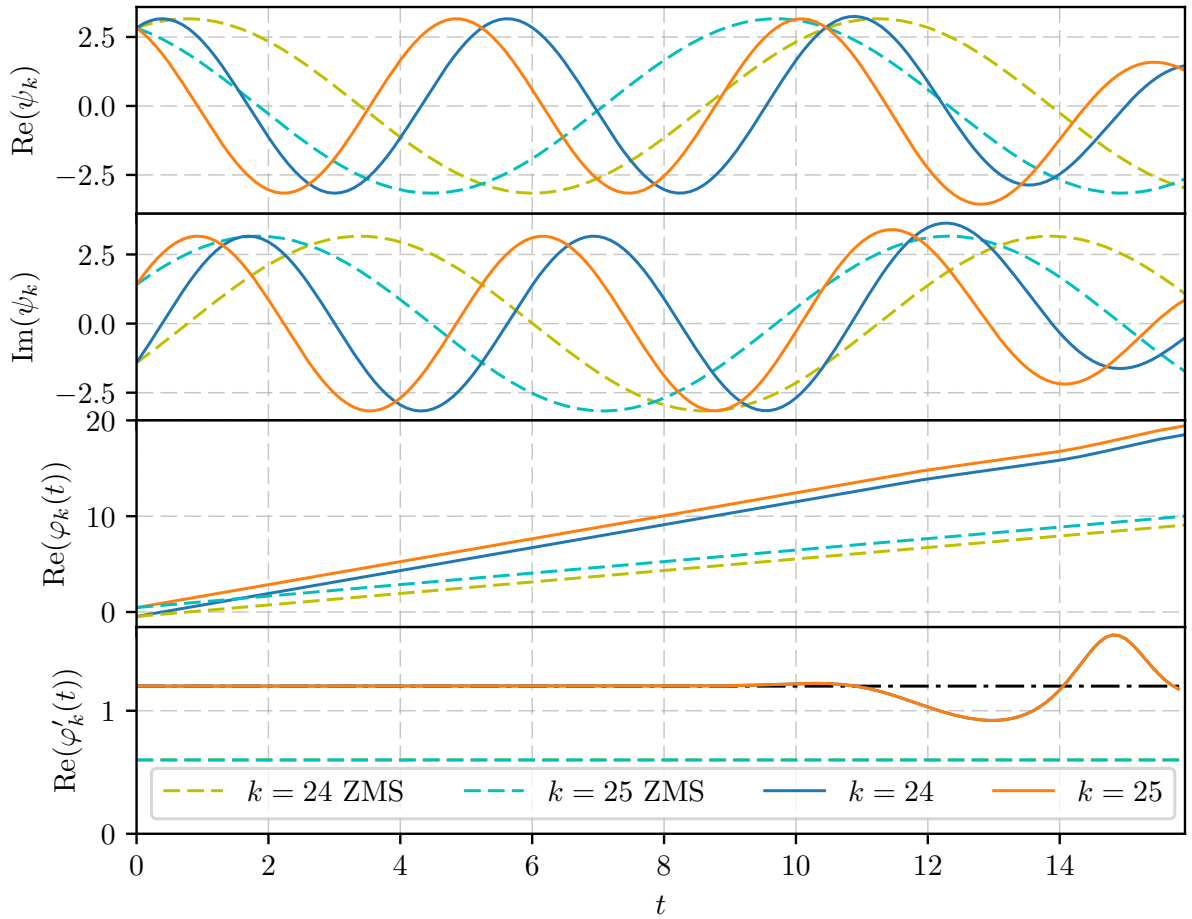


Abbildung 4.7.: Die zeitlichen Verläufe der Wellenfunktionen und deren berechneten Phasen und Phasenänderung nach Gl. (4.36) sind für die zwei Systemmulden k_S und $k_S + 1$ zusammen mit den theoretisch erwarteten Größen des ZMS abgebildet, wobei $\gamma = 0,8$ gewählt wurde.

und die Phasendifferenzen betragsmäßig gleich sind, in den Systemmulden die Wellenfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_{k_S}(t < 9) &= \psi_1^s(t) \cdot e^{-i\mu_s t} \\ &= \sqrt{n_0} e^{+i\varphi_s} e^{-2i\mu_s t},\end{aligned}\tag{4.39a}$$

$$\psi_{k_{S+1}}(t < 9) = \sqrt{n_0} e^{-i\varphi_s} e^{-2i\mu_s t}\tag{4.39b}$$

mit den Gleichungen (3.55) und (3.29) aus. In den Besetzungszahlen

$$n_{k_S}(t < 9) = n_0,\tag{4.39c}$$

$$n_{k_{S+1}}(t < 9) = n_0\tag{4.39d}$$

wirkt sich dieser Unterschied zum ZMS durch den doppelt gewichteten reellen Eigenwert μ_s im Exponent nicht aus. Die vier unterschiedlichen Fälle für die Richtungen der Ströme in Tabelle 4.1 liefern fast die identischen zeitlichen Besetzungszahlen in den Systemmulden. Da bei den letzten beiden Möglichkeiten auch ein Einkopplungsterm vorhanden sein muss, sind diese im Vergleich zu den ersten zwei schwerer zu realisieren.

5. Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände im M -Muldensystem

Nachdem in Kapitel 4 die Bedingungen für die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände in einem M -Muldensystem gefunden werden konnten, womit sich ausschließlich durch Präparation des Ausgangszustandes eine konstante Besetzung, sowie ein konstanter Strom in den Systemmulden ergibt, soll in diesem Kapitel das Ziel sein, \mathcal{PT} -brechende Zustände mit nicht erhaltener Norm und zeitlich exponentiellem Verhalten in der Besetzungszahl nach Gl. (3.43) in demselben M -Muldensystem zu realisieren.

Motiviert durch eine im Experiment einfach zu realisierende Wahl konstanter Gitterparameter, soll wiederum nur durch Präparation der Anfangsphasen und Anfangsbesetzungen die erhaltene Dynamik des ZMS erreicht und auftretende Unterschiede dazu untersucht werden. Die zeitlich konstanten Gewinn- und Verlustterme der Systemmulden können durch einen Elektronenstrahl experimentell erreicht werden. Dafür werden in den folgenden Kapiteln zwei unterschiedliche Ansätze untersucht:

- Im ersten Ansatz wird mit den in Kapitel 4 gefundenen Bedingungen für die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände der Übergang des Phasenwinkels φ_s von \mathbb{R} nach \mathbb{C} durchgeführt, der die \mathcal{PT} -brechenden Zustände für $g = 0$ nach Kapitel 3.3 bis auf eine leicht unterschiedliche Anfangsbesetzung exakt beschreibt.
- Im zweiten Ansatz werden die zeitlichen Besetzungen und Ströme der in Kapitel 3.2.3 eingeführten antisymmetrischen Lösungen, die die Dynamik im ZMS für $g = 0$ korrekt beschreiben, als Grundidee dienen, womit die Bedingungen für die Präparation des Anfangszustandes hergeleitet werden.

5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen

Wie in Kapitel 3.2 hergeleitet wurde, existieren für $|\gamma| \leq |J|$ reelle Eigenwerte (3.29). An den exzeptionellen Punkten $|\gamma| = |J|$ liegen \mathcal{PT} -Symmetriebrüche vor, weswegen es für $|\gamma| > |J|$ nur noch die antisymmetrischen Lösungen mit komplexen Eigenwerten (3.42) gibt, was in Abbildung 3.2 anschaulich dargestellt ist.

Um diese antisymmetrischen Lösungen, die den \mathcal{PT} -brechenden Zuständen entsprechen, in den Systemmulden erhalten zu können, soll der Zugang, wie in Kapitel 4, über

das Einstellen der Anfangsphasen erfolgen. Mit dem Strom der symmetrischen Lösungen $j = 2\gamma n_0$ zwischen den Systemmulden, ergeben sich mit Gl. (4.26) aus der Herleitung im Kapitel 4.1 die folgenden zu wählenden Phasendifferenzen

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} - \varphi_k &:= \begin{cases} \arcsin\left(\frac{j_L}{2Jn_0}\right) & \text{für } k \in [1, k_S - 1] \\ \arcsin\left(\frac{j}{2Jn_0}\right) & \text{für } k = k_S \\ \arcsin\left(\frac{j_R}{2Jn_0}\right) & \text{für } k \in [k_S + 1, M - 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \arcsin\left(\pm \frac{\gamma}{J}\right) & \text{für } k \in [1, k_S - 1] \\ \arcsin\left(\frac{\gamma}{J}\right) & \text{für } k = k_S \\ \arcsin\left(\pm \frac{\gamma}{J}\right) & \text{für } k \in [k_S + 1, M - 1] \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei die Vorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können und wodurch sich die 4 unterschiedlichen Fälle in Tabelle 4.1 ergeben. Wird nun $|\gamma| > |J|$ gewählt, wird die Arkussinus-Funktion komplex und wirkt sich nach Gl. (3.61) auf den Betrag der Wellenfunktion bzw. auf die Anfangsbesetzung aus. Es wird wie in Abschnitt 3.3 $g = 0$ gewählt, da die resultierende Wellenfunktion nur für diese Wahl dieselbe zeitliche Entwicklung wie die antisymmetrischen Lösungen mit $\mu_s = \mu_a$ besitzt.

Außerdem würde für $g \neq 0$ mit der nicht erhaltenen Norm

$$\frac{d}{dt} |\psi_{1/2}| \neq 0 \quad (5.2)$$

der \mathcal{PT} -brechenden Zustände der Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}}_2$ in Gl. (3.14) zeitabhängig und die Schrödingergleichung nichtlinear werden, wodurch sich die Zeitentwicklung der Wellenfunktion nicht mehr durch Gl. (3.17) beschreiben ließe und somit keine analytischen Lösungen des ZMS mehr existieren würden.

Analog zu Gl. (4.30) soll nun für die Anfangsphasen der Systemmulden

$$\varphi_{k_S} = -\varphi_{k_S+1} := \varphi = -\frac{1}{2} \arcsin(\alpha) \quad (5.3)$$

mit $\alpha = \frac{\gamma}{J}$ gewählt werden. Mit dieser Wahl folgt nach den Gleichungen (3.58) und (3.61) mit den komplexen Phasen für die Wellenfunktionen der Systemmulden

$$\phi_{k_S} = \sqrt{n_0} e^{+i\varphi_{k_S}} = \sqrt{n_0 \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\mu_s t}, \quad (5.4a)$$

$$\phi_{k_S+1} = \sqrt{n_0} e^{+i\varphi_{k_S+1}} = \sqrt{n_0 \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)} e^{+i\frac{\pi}{4}} e^{-i\mu_s t} \quad (5.4b)$$

und für die Besetzungen

$$n_{k_S} = n_0 \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) e^{2\text{Im}(\mu_s)t}, \quad (5.5a)$$

$$n_{k_S+1} = n_0 \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) e^{2\text{Im}(\mu_s)t} \quad (5.5b)$$

5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen

mit

$$\mu_s \stackrel{g=0}{=} \mp \sqrt{J^2 - \gamma^2} \in i\mathbb{R} \quad (5.6)$$

für $\gamma > J$. Bei μ_s steht das negative bzw. positive Vorzeichen für die exponentiell fallende bzw. ansteigende Besetzungszahl $n(t)$. Zu der exponentiell fallenden Lösung gehört also beispielsweise in Gl. (5.5a) ein Minus und in (5.5b) ein Plus als Vorzeichen, was mit Gl. (3.43) im Einklang steht, weil κ das gleiche Vorzeichen wie μ_a besitzen muss.

Werden diese Rechnungen mit Gl. (5.1) auf die Reservoirmulden übertragen, folgt, dass sich mit diesem Ansatz die Anfangsbesetzungen benachbarter Mulden im gesamten M -Muldensystem,

$$n_k(t=0) = n_{k+1}(t=0) \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)^2, \quad (5.7)$$

jeweils um einen konstanten Faktor unterscheiden, was mit der Relation (3.60) gezeigt werden kann. Zusammengefasst wirken sich also die komplexen Phasendifferenzen (5.1) nach Gl. (3.58) wegen

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - i \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (5.8)$$

für $|x| > 1$ effektiv so auf den Ausgangszustand aus, dass sich alle reellen Phasen um die Differenz $\pi/2$ unterscheiden und die Anfangsbesetzungen exponentiell über das M -Muldensystem verteilt sind.

5.1.1. Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Besetzungen

Im Folgenden wird analog zu Kapitel 4 dasselbe Gitter mit den Parametern

$$M = 50, \quad J = 1, \quad g = 0, \quad \mu_k = 0, \quad \gamma = 1,01 \quad (5.9)$$

gewählt, wobei nun der Gewinn- und Verlustterm γ des ZMS größer als J ist, um in das Regime der \mathcal{PT} -brechenden Lösungen für $g = 0$ zu kommen. Die Präparation des Ausgangssystems erfolgt über die Wellenfunktionen

$$\psi_k(t=0) = \sqrt{n_0} e^{i \operatorname{Re}(\varphi_k)} e^{-\operatorname{Im}(\varphi_k)}, \quad (5.10)$$

mit den komplexen Phasendifferenzen (5.1), dem Wert $n_0 = 0,5$ und dem bereits erwähnten absoluten Phasen der Systemmulden (5.3).

In Abbildung 5.1 sind die Anfangsbesetzungen $|\psi_k(t=0)|^2$ für die vier verschiedenen Möglichkeiten zur Wahl der Stromrichtungen in der gleichen Reihenfolge wie in Tabelle 4.1 abgebildet. In diesem Kapitel werden aus Übersichtlichkeit nur die in dem zeitlichen Verlauf exponentiell fallenden Besetzungszahlen betrachtet, da die exponentiell ansteigenden denselben qualitativen Verlauf besitzen. Die exponentielle Verteilung

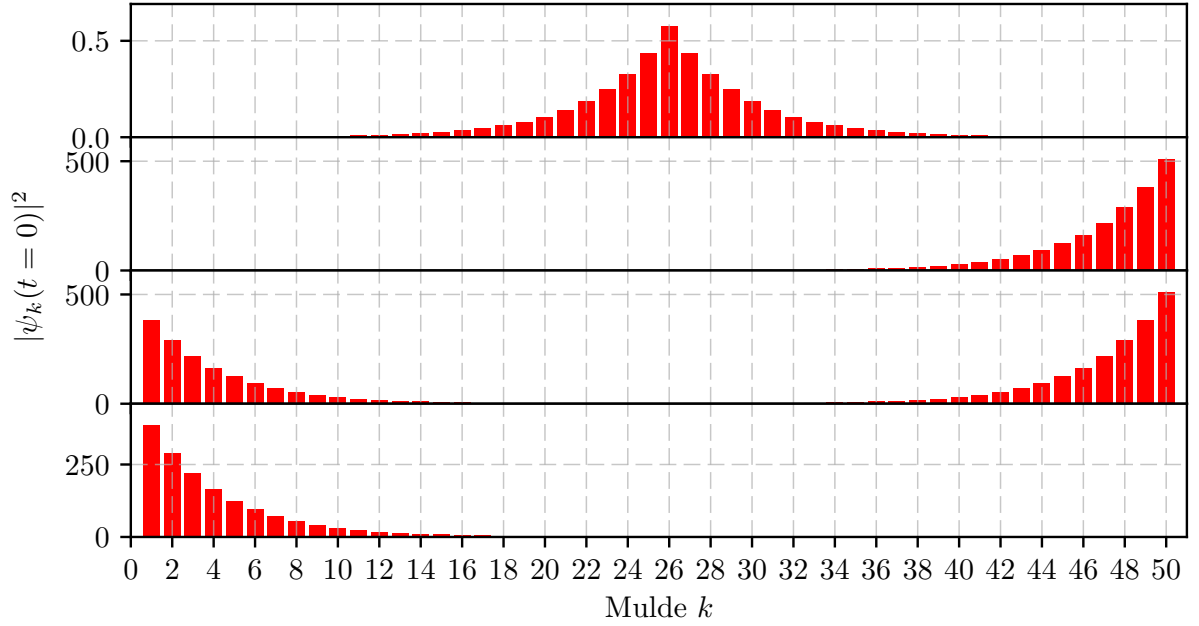


Abbildung 5.1.: Die Anfangsbesetzungen $|\psi_k(t=0)|^2$ für die vier verschiedenen Möglichkeiten zur Wahl der Stromrichtungen sind in der gleichen Reihenfolge wie in Tabelle 4.1 für das M -Muldensystem mit $\gamma = 1,01$ dargestellt.

der Anfangsbesetzungen, die nach Gl. (5.7) hergeleitet wurde, zeigt sich hier deutlich, wobei sich die gewählte Richtung der Ströme so auswirkt, dass die Besetzungen von der Mitte des Gitters entweder exponentiell ansteigen oder abfallen. Die unterschiedlichen Gesamtteilchenzahlen der vier Möglichkeiten zum Zeitpunkt $t = 0$ sind der Tatsache verschuldet, dass die Besetzungen der Systemmulden jeweils auf denselben Wert gesetzt werden. Für die spezielle Parameterwahl $\gamma = 1,01$ und $J = 1$ kann mit Gl. (5.5) zunächst diese Besetzung

$$n_{k_S}(t=0) = n_0 \left(\frac{\gamma}{J} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{J^2} - 1} \right) \approx 0,434, \quad (5.11a)$$

$$n_{k_{S+1}}(t=0) = n_0 \left(\frac{\gamma}{J} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{J^2} - 1} \right) \approx 0,576 \quad (5.11b)$$

berechnet werden, was mit den Besetzungen in der Abbildung übereinstimmt. Die Behauptung (5.7), dass das Verhältnis der Teilchenzahlen zweier benachbarter Mulden immer den gleichen Faktor

$$\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)^2 = \begin{cases} 1,327 & \text{für } + \\ 0,754 & \text{für } - \end{cases} \quad (5.12)$$

5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen

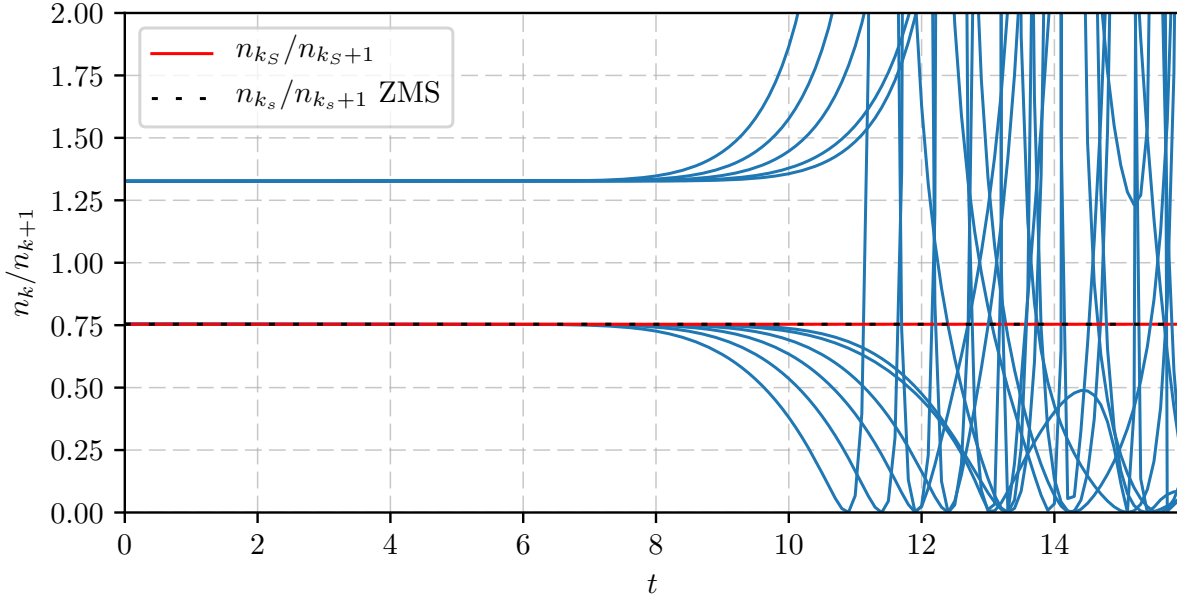


Abbildung 5.2.: Die Verhältnisse der zeitlichen Besetzungen zweier benachbarter Mulden n_k/n_{k+1} sind durch zwei charakteristische Faktoren (5.12) gegeben. Interessant ist hier das Verhältnis beider Systemmulden n_{k_S}/n_{k_S+1} , das im Gegensatz zu allen anderen Mulden über den Symmetriebruch hinaus auf dem gleichen Wert bleibt.

aufweist, wird in Abbildung 5.2 für die erste Verteilung der Anfangsbesetzungen in Abbildung 5.1 ($+j_L = j = -j_R$), veranschaulicht.

Die Abbildung 5.3 zeigt nun die zeitliche Entwicklung der Besetzungen der mittleren 6 Mulden des M -Muldensystems, die mit Gl. (4.31) berechnet wurden, zusammen mit den theoretisch erwarteten Besetzungszahlen der Systemmulden nach den antisymmetrischen Lösungen (3.43) des ZMS. Diese antisymmetrischen Lösungen sind vom qualitativen Verhalten den Systemmulden sehr ähnlich, jedoch fallen diese deutlich geringer ab.

In Abbildung 5.4 sind dieselben zeitlichen Entwicklungen der Besetzungen auf einer logarithmischen Skala aufgetragen. Bis $t \approx 7$ folgt die Besetzung hier einer Geraden, was einem rein exponentiellem Verhalten entspricht. Da die Steigungen der Geraden in diesem Bereich bei allen vier Möglichkeiten genau gleich groß sind, ist auch die exponentielle Abfallrate der Besetzungen überall identisch, jedoch unterschiedlich zu jener der antisymmetrischen Lösungen im ZMS.

Im zweiten Bild in Abbildung 5.4, bei dem es keinen Zufluss oder Verlust von Teilchen gibt, scheint es zunächst so, als würden die Teilchenzahlen divergieren, was einen Widerspruch zu der Teilchenerhaltung in diesem System darstellen würde. Die Gesamtzahl aller Teilchen bei $t = 0$ ist aber wegen den Anfangsbesetzungen in den Systemmulden (5.11) nicht bei jeder Wahl der Stromrichtungen gleich: Bei der ersten Möglichkeit be-

5. Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände im M -Muldensystem

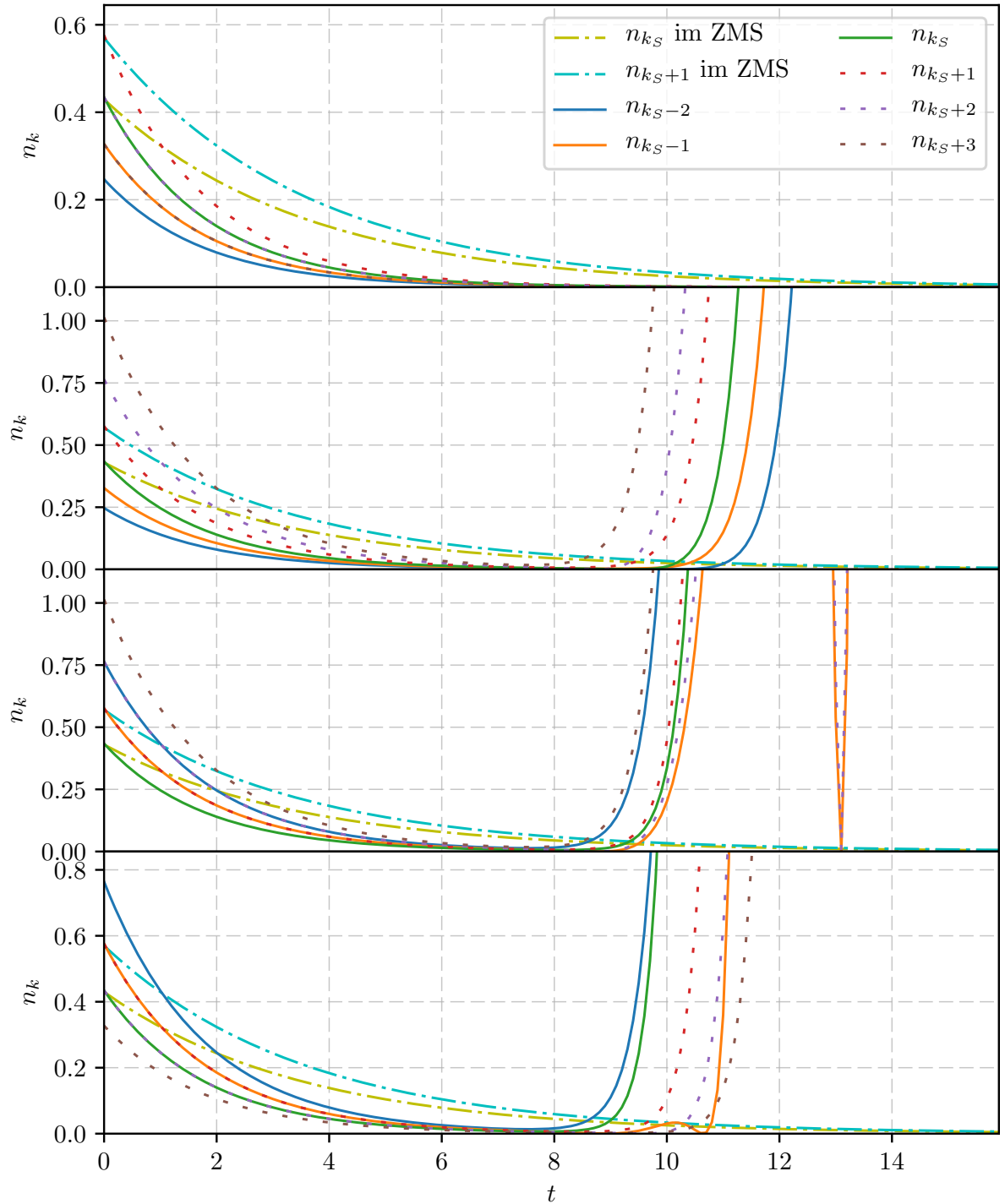


Abbildung 5.3.: Die zeitlichen Besetzungszahlen $n_k(t) = \psi_k^*(t)\psi_k(t)$, $k \in [k_S - 2, k_S + 3]$ der inneren 6 Mulden zusammen mit der theoretischen Besetzung des ZMS nach (3.30) sind für $\gamma = 1,01$ auf linearen Achsen abgebildet. Die 4 Möglichkeiten für die Wahl der Anfangsströme für die \mathcal{PT} -gebrochenen Zustände sind von oben nach unten in gleicher Weise wie in Tabelle 4.1 dargestellt.

5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen

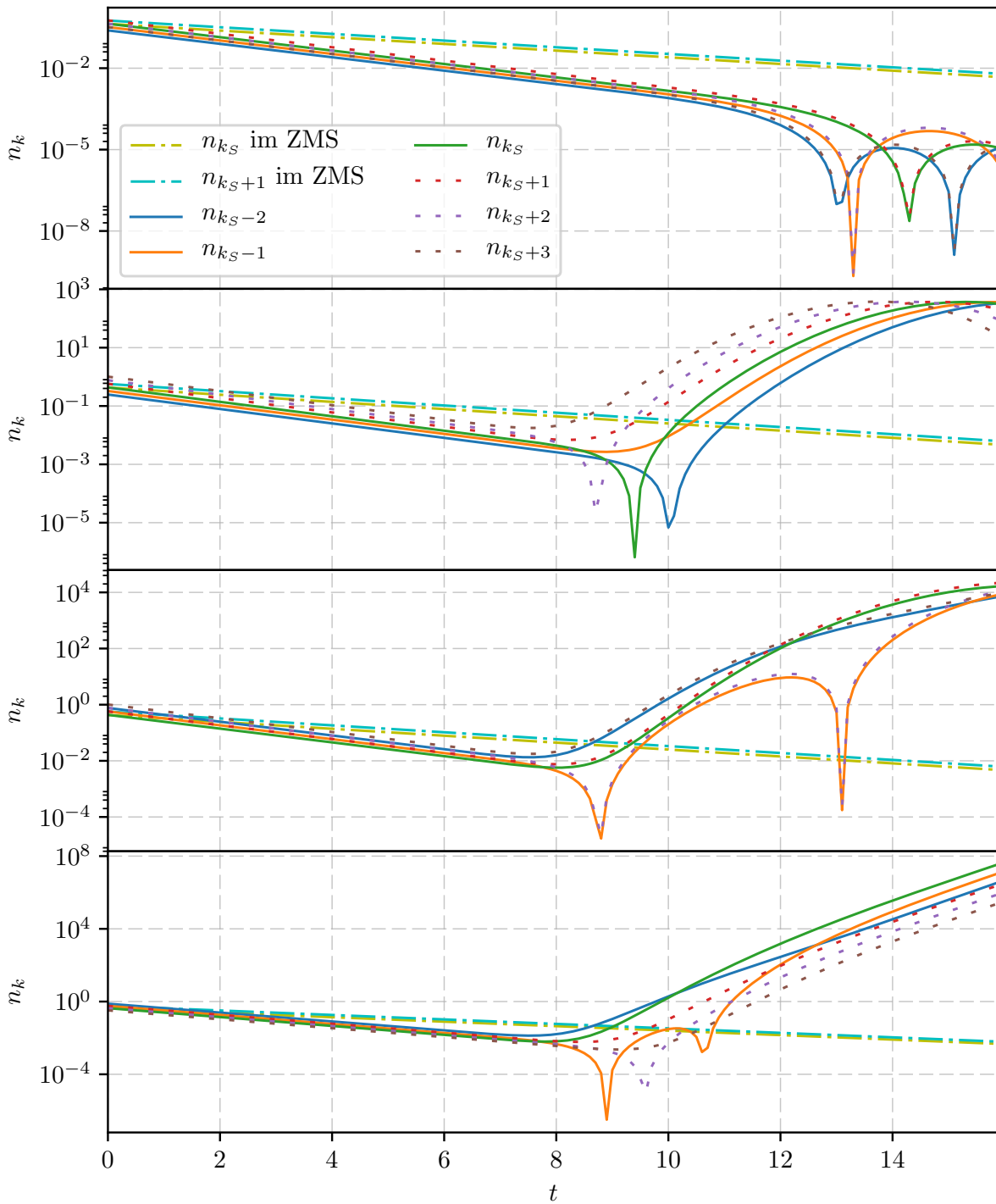


Abbildung 5.4.: Die zeitlichen Besetzungszahlen wie in Abbildung 5.3, jedoch für einen kleineren Zeitbereich und mit logarithmischer Skalierung.

sitzt die am höchsten gefüllte Mulde die Anfangsbesetzung $n_{k_S+1} = 0.576$, wohingegen die am höchsten gefüllte Mulde bei den anderen Möglichkeiten annähernd zwei Größenordnungen größer ist (siehe Abbildung 5.1). So sammeln sich bei $t \approx 15$ im zweiten Bild in Abbildung 5.4 alle Teilchen des M -Muldensystems in den mittleren Mulden und verteilen sich nach diesem Maximum wieder auf die anderen Mulden. In den zwei unteren Bildern sind die divergierenden Teilchenzahlen, die mit der Einkopplung von Teilchen verbunden ist, erkennbar.

Interessant ist, dass beide Systemmulden in dem ersten Bild in Abbildung 5.4 einerseits für $t > 10$ von der reinen exponentiellen Kurve abweichen und trotzdem ihr durch Gl. (5.12) bestimmtes Verhältnis

$$\frac{n_{k_S}(t)}{n_{k_S+1}(t)} = \text{const.} \quad (5.13)$$

für alle $t \in [0, 16]$ erhalten bleibt, was in Abbildung 5.2 gezeigt ist. Dieses Verhältnis bleibt im Gegensatz zu allen anderen Mulden über den Symmetriebruch hinaus auf dem gleichen Wert.

5.1.2. Unterschiede zum ZMS in den Wellenfunktionen

Da die zeitlichen Besetzungen der Mulden in Kapitel 5.1.1 zwar einen exponentiellen Abfall aufweisen, diese aber nicht gleich der erwarteten Rate der antisymmetrischen Lösungen (3.43) sind, werden im Folgenden die numerisch berechneten Wellenfunktionen der beiden Systemmulden

$$\psi_k(t) = \sqrt{n_0} e^{i \operatorname{Re}(\varphi_k(t))} e^{-\operatorname{Im}(\varphi_k(t))}, \quad (5.14)$$

näher untersucht. Die analog zu Gl. (4.36) berechneten Phasen $\operatorname{Re}(\varphi_k(t))$ sind zusammen mit deren zeitlichen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\varphi_k(t)) =: \operatorname{Re}(\varphi'_k(t))$ in Abbildung 5.5 zusammen mit den theoretisch erwarteten Größen des ZMS für den Gewinn- und Verlustterm $\gamma = 1,01$ zu sehen. Die absoluten Phasen besitzen hier die nach Gl. (5.3) erwarteten Anfangswerte $\pm\pi/4$ und sind zeitlich konstant,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\varphi_k(t)) = 0 \quad (5.15)$$

mit $k \in \{k_S, k_S + 1\}$, was mit den Gleichungen (5.4) der Erwartung entspricht.

Um die komplexen Phasen $\operatorname{Im}(\varphi_k(t))$ und deren zeitlichen Änderungen genauer betrachten zu können, kann der natürliche Logarithmus der bei $t = 0$ normierten Wellenfunktion

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\psi_k(t)}{\psi_k(t=0)} \right) &= \ln(\psi_k(t)) - \ln(\psi_k(t=0)) \\ &= -\operatorname{Im}(\tilde{\varphi}_k(t)) + i \operatorname{Re}(\tilde{\varphi}_k(t)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_k(t=0) \quad (5.17)$$

berechnet werden. Dessen negativer Realteil $\operatorname{Im}(\tilde{\varphi}_k(t))$ und die zeitliche Ableitung davon sind auch in Abbildung 5.5 dargestellt.

Wird hier der Wert der zeitlichen Änderung der Phasen

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}[\tilde{\varphi}_{k_S}(t < 9)] = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}[\tilde{\varphi}_{k_S+1}(t < 9)] \approx 0,284 \quad (5.18)$$

wieder mit dem erwartetem Wert des ZMS

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}[\tilde{\varphi}_{1/2}^s(t)] &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}(-\mu_s t) \\ &= \sqrt{\gamma^2 - J^2} \stackrel{\gamma=1,01}{\approx} 0,142 \end{aligned} \quad (5.19)$$

nach (3.56) verglichen, fällt auf, dass dieser genau dem Doppelten entspricht, wie es in Kapitel 4.2.3 der Fall war. Dieser doppelt so große Werte ist in der Abbildung ganz unten mit der schwarz gestrichelten Linie eingezeichnet.

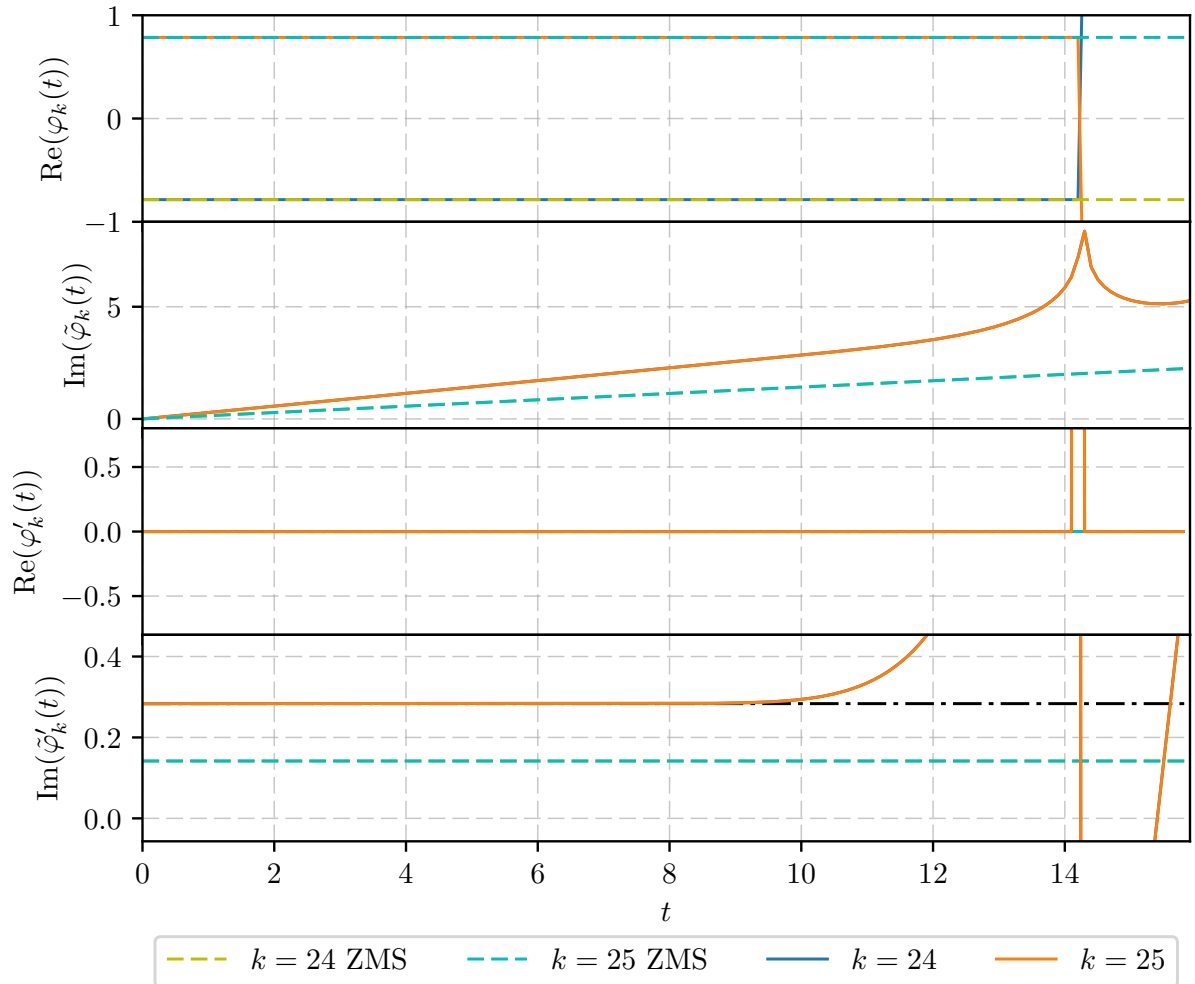


Abbildung 5.5.: Die zeitlichen Verläufe der Real- und Imaginärteile der Phasen der Wellenfunktionen (5.14), sowie deren zeitlichen Ableitungen, sind für die zwei Systemmulden k_S und $k_S + 1$ zusammen mit den theoretisch erwarteten Größen des ZMS abgebildet, wobei $\gamma = 1,01$ gewählt wurde.

5.1. Präparation des Anfangszustands durch komplexe Phasen der symmetrischen Lösungen

Die in Gl. (4.39) gefunden Wellenfunktionen der \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände bleiben also über den Symmetriebruch für die \mathcal{PT} -brechenden Zustände konsistent. Aus diesen Wellenfunktionen ergeben sich für $g = 0$ die zeitlichen Besetzungszahlen

$$n_{k_S}(t < 9) = n_0 e^{-2\text{Im}(\varphi_{k_S})} e^{4\text{Im}(\mu_s)t}, \quad (5.20a)$$

$$n_{k_S+1}(t < 9) = n_0 e^{+2\text{Im}(\varphi_{k_S})} e^{4\text{Im}(\mu_s)t}, \quad (5.20b)$$

mit den Größen (3.55) und (3.29) aus dem ZMS, welche mit Gl. (5.11) und $\alpha = \gamma/J$ noch zu

$$n_{k_S}(t < 9) = n_0 \left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) e^{4\text{Im}(\mu_s)t}, \quad (5.21a)$$

$$n_{k_S+1}(t < 9) = n_0 \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) e^{4\text{Im}(\mu_s)t} \quad (5.21b)$$

umgeformt werden können. Ein Vergleich mit den antisymmetrischen Lösungen (3.43) zeigt, dass deren exponentieller Abfall im Vergleich zu den hier erhaltenen Besetzungen nur mit der Hälfte der Zerfallsrate abfällt, was analog zu Kapitel 4.2.3 begründet wird (siehe Anhang A).

In Kapitel 3.3 wird außerdem gezeigt, dass die Anfangsbesetzung der antisymmetrischen Lösungen sich von den ins Komplexe weitergeführten symmetrischen Lösungen leicht unterscheidet. Für $\gamma \rightarrow J$ gehen jedoch beide Besetzungszahlen ineinander über, weswegen dieser Unterschied für $\gamma = 1,01$ sehr gering ist.

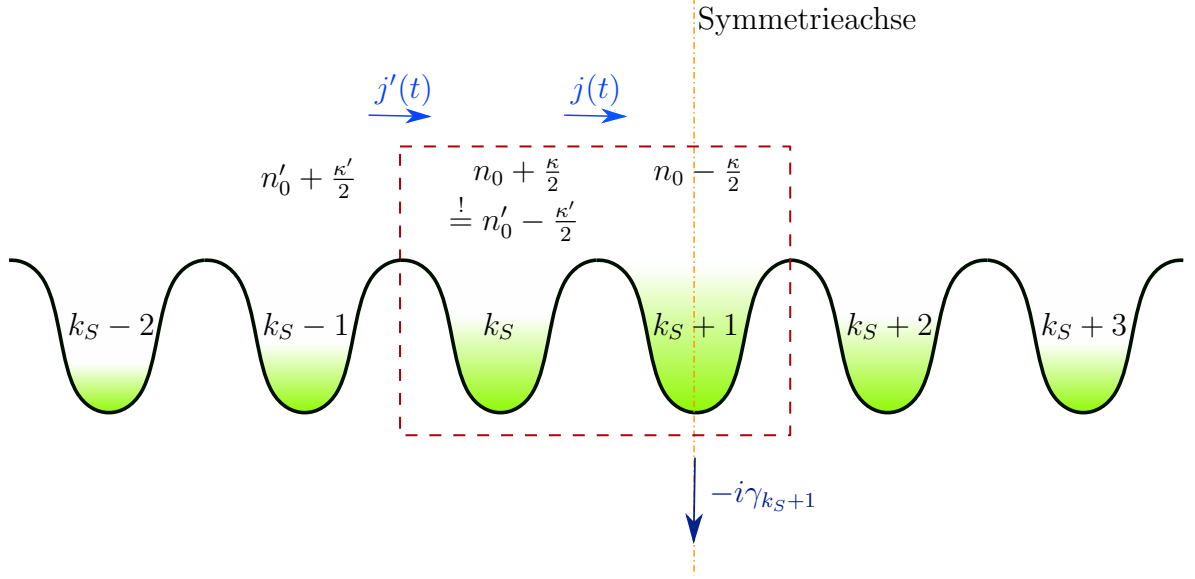


Abbildung 5.6.: Die inneren Systemmulden k_S und $k_S + 1$ (rot-gestricheltes Untersystem) mit dem lokalen Verlustterm γ_{k_S+1} , an die die Reservoirmulden eines M -Muldensystem angrenzen. Der Strom zwischen den Systemmulden entspricht $j(t)$ und derjenige zwischen der angrenzender Reservoirmulde und dem System $j'(t)$.

5.2. Präparation des Anfangszustands durch eine exponentiell verteilte Anfangsbesetzung

In diesem Abschnitt soll ein anderer Ansatz verwendet werden, um die Dynamik der \mathcal{PT} -brechenden Zustände des ZMS in einem M -Muldensystems durch Präparation des Anfangszustands zu realisieren. Anders als in dem Kapitel 5.1 sollen hier nicht die symmetrischen Zustände als Grundidee des Ansatzes fungieren, sondern die antisymmetrischen Zustände, die das Verhalten der \mathcal{PT} -brechenden Zustände im ZMS tatsächlich beschreiben. Die antisymmetrischen Lösungen besitzen einen Strom (3.54), der im Gegensatz zu dem Strom der symmetrischen Lösungen (3.38b) zeitabhängig ist und nicht von φ abhängt, weswegen sich dieser nicht einfach durch die Phasendifferenzen steuern lässt.

Deshalb sollen die Anfangsbesetzungen nun unter den Bedingungen, dass die zeitliche Besetzungen der Systemmulden

$$n_{k_S}(t) = \left(n_0 + \frac{\kappa_a}{2} \right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \quad (5.22)$$

$$n_{k_S+1}(t) = \left(n_0 - \frac{\kappa_a}{2} \right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \quad (5.23)$$

5.2. Präparation des Anfangszustands durch eine exponentiell verteilte Anfangsbesetzung

nach Gl. (3.43) dem ZMS entspricht und der Strom nach Gl. (3.54)

$$j(t) := j_{k_S, k_S+1}(t) = J\tilde{j}_{k_S, k_S+1} = +2 \frac{J^2 \gamma n_0}{(gn_0)^2 + \gamma^2} e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \quad (5.24)$$

zwischen diesen gleich sind, hergeleitet werden.

Der experimentell einfach zu realisierende Fall, bei dem nur an der rechten Systemmulde $k_S + 1$ ausgekoppelt wird (siehe Zeile 1 in Tabelle 4.1), ist in Abbildung 5.6 dargestellt und soll hier genauer betrachtet werden.

Mit Gl. (2.15) und $j' := j_{k_S-1, k_S}$ kann unter Verwendung von Gl. (3.42) und (3.43) der Strom

$$\begin{aligned} j'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} n_{k_S} + j(t) \\ &= 2 \left(\frac{\gamma}{2n_0} \kappa \right) \left(n_0 + \frac{\kappa}{2} \right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t} + 2 \frac{J^2 \gamma n_0}{(gn_0)^2 + \gamma^2} e^{2\text{Im}(\mu_a)t} \\ &= 2\gamma n_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{(gn_0)^2 + \gamma^2}} \right) e^{2\text{Im}(\mu_a)t}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

der von der an das System angrenzenden Reservoirmulde $k_S - 1$ in die linke Systemmulde k_S fließt, berechnet werden. Dieser Strom $j'(t)$ soll nun aber wieder dem Strom eines neuen ZMS entsprechen, das aus den Mulden $k_S - 1$ und k_S besteht:

$$j'(t) \stackrel{!}{=} +2 \frac{J^2 \gamma n'_0}{(gn'_0)^2 + \gamma^2} e^{2\text{Im}(\mu_a)t}. \quad (5.26)$$

Dieses System besitzt dann, wie in Abbildung 5.6 skizziert, die Anfangsbesetzungen

$$n_{k_S-1}(t=0) = n'_0 + \frac{\kappa'}{2}, \quad (5.27a)$$

$$n_{k_S}(t=0) = n'_0 - \frac{\kappa'}{2} \quad (5.27b)$$

mit

$$\kappa' = \pm 2n'_0 \sqrt{1 - \frac{J^2}{(gn'_0)^2 + \gamma^2}}. \quad (5.28)$$

Es sollen also alle benachbarten Mulden durch die Dynamik des ZMS gegeben sein. Da die rechte Mulde des ZMS $\{k_S - 1, k_S\}$ der linken Systemmulde k_S entsprechen soll, müssen die folgenden Besetzungen gleich sein,

$$\begin{aligned} n'_0 - \frac{\kappa'}{2} &\stackrel{!}{=} n_0 + \frac{\kappa}{2} \\ \Leftrightarrow n'_0 \left(1 - \frac{\kappa'}{2n'_0} \right) &\stackrel{!}{=} n_0 \left(1 + \frac{\kappa}{2n_0} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Aus den gleichen Gründen, die bereits in Abschnitt 5.1 diskutiert wurden, wird nun wieder $g = 0$ gesetzt. Werden damit die Gleichungen (5.25) und (5.26) gleichgesetzt, ergibt sich für die mittlere Besetzungszahl zwischen den Mulden $k_S - 1$ und k_S die Bedingung

$$n'_0 = n_0 \frac{\gamma^2}{J^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{J^2}{\gamma^2}} \right). \quad (5.30)$$

Sollen die Besetzungszahlen nach der Bedingung (5.29) gegeben sein, ergibt sich unter Verwendung der Relation (3.60) die Gleichung

$$n'_0 = n_0 \frac{\gamma^2}{J^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{J^2}{\gamma^2}} \right)^2. \quad (5.31)$$

Da die Bedingungen (5.30) und (5.31) nur für $\gamma = J$ beide erfüllt sein können, soll für die Berechnungen die erste Bedingung (5.30), dass die Ströme die richtigen Anfangswerte besitzen, erfüllt sein. Hierbei sind die Anfangsbesetzungen n_k der Systemmulden durch

$$n_{k_S} = n_0 + \frac{\kappa_a}{2}, \quad (5.32)$$

$$n_{k_S+1} = n_0 - \frac{\kappa_a}{2} \quad (5.33)$$

gegeben. Die Phasendifferenzen werden entsprechend Gl. (3.41) auf $\Delta\varphi = \pi/2$ präpariert, wie es in den antisymmetrischen Lösungen des ZMS der Fall ist.

Mit der Forderung, dass in diesem System alle Ströme der Reservoirmulden in die Richtung der Systemmulden verlaufen, ergibt sich eine Symmetrie des Systems, die in Abbildung 5.6 eingezeichnet ist. Mit dieser Symmetrie und Gleichung (2.15) lässt sich die Änderung der Besetzungszahl der Mulde $k_S + 1$ wieder mit Gl. (2.15) berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{k_S+1} = 2j(t) - \gamma_{k_S+1} n_{k_S+1}(t), \quad (5.34)$$

woraus sich durch Umformungen der lokale Verlustterm in der Mulde $k_S + 1$ ergibt:

$$\gamma_{k_S+1} = \frac{J^2}{\gamma} \frac{8n_0}{2n_0 - \kappa} + 2\sqrt{\gamma^2 - J^2}. \quad (5.35)$$

5.2.1. Zeitliche Entwicklung der Besetzungen

Für das Gitter (5.9), das auch für den ersten Ansatz für die Realisierung der \mathcal{PT} -brechenden Zustände verwendet wurde, soll wieder die Dynamik betrachtet werden. Die Anfangsbesetzung $|\psi_k(t=0)|^2$ nimmt in Abbildung 5.7 ebenfalls einen exponentiellen Verlauf an, der aber nicht so steil abfällt, wie die Anfangsbesetzung des ersten Ansatzes in Abbildung 5.1 oben. Die entsprechende zeitliche Entwicklung der mittleren sechs Mulden

5.2. Präparation des Anfangszustands durch eine exponentiell verteilte Anfangsbesetzung

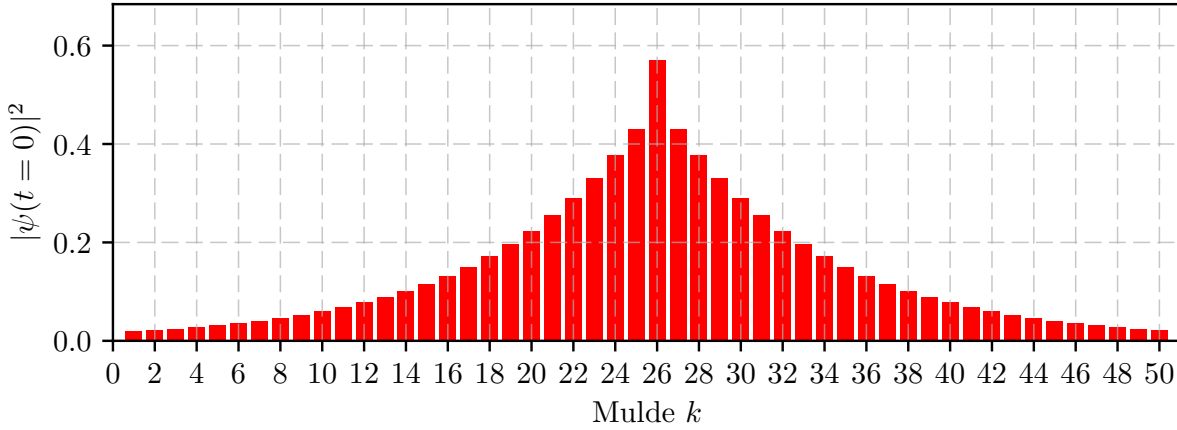


Abbildung 5.7.: Die Anfangsbesetzungen $|\psi_k(t=0)|^2$ für den zweiten Ansatz zur Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände im M -Mulden System sind mit $\gamma = 1,01$ dargestellt.

$k \in [k_S - 2, k_S + 3]$ ist in Abbildung 5.8 mit den gewünschten Besetzungszahlen der antisymmetrischen Lösungen aufgetragen. Hier stimmt die Anfangsbesetzung exakt mit den antisymmetrischen Lösungen (3.43) überein. Der exponentielle Abfall ist ähnlich zu den theoretischen Kurven, jedoch gibt es hier leichte Oszillationen um die gewünschte Besetzungszahl des ZMS. Das Verhältnis zwischen den zwei Systemmulden ist zusammen mit dem theoretischen Verhältnis des ZMS in Abbildung 5.9 zu sehen. Hierbei sind diese Oszillationen um den idealen Wert gut zu erkennen.

In diesen Abbildungen 5.8 und 5.9 ist also festzuhalten, dass für die Ausgangssituation $t = 0$ in den Systemmulden die geforderten Anfangsbesetzungen n_{k_S} und n_{k_S+1} und der Strom j_{k_S, k_S+1} exakt denen des ZMS in Abschnitt 3.2.3 entsprechen. Dadurch, dass die angekoppelten Reservoirmulden zwar den richtigen Strom nach Bedingung (5.30) liefern, aber dann durch die Bedingung (5.31) nicht die richtigen Besetzungszahlen aufweisen, zerstört deren Dynamik den gewünschten reinen exponentiellen Verlauf der Besetzungen.

Um zu überprüfen, ob dieser Ansatz berechtigt ist, kann der Übergang von $\gamma \rightarrow J$ durchgeführt werden. An diesem Bifurkationspunkt $\gamma = J$ müssen diese antisymmetrischen Lösungen per Definition in die symmetrischen Lösungen übergehen. Wird für diesen Ansatz dieser Grenzfall berechnet, ergibt sich genau die Dynamik des ersten Bildes in Abbildung 4.3. Der Ansatz in diesem Kapitel entspricht also für $\gamma = J$ dem Ansatz in Kapitel 4 .

5. Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände im M -Muldensystem

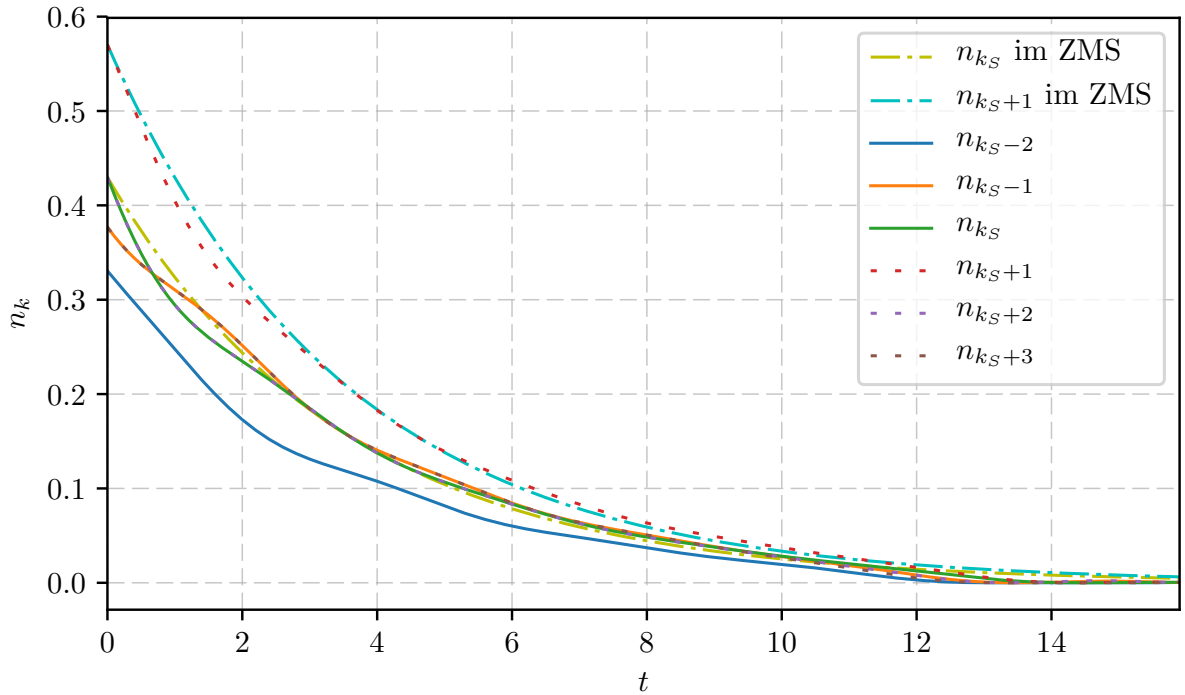


Abbildung 5.8.: Für den zweiten Ansatz zur Realisierung \mathcal{PT} -brechender Zustände sind die zeitlichen Besetzungszahlen der inneren sechs Mulden $k \in [k_S - 2, k_S + 3]$ mit den theoretischen gewünschten des ZMS nach Gl. (3.43) für $\gamma = 1,01$ abgebildet.

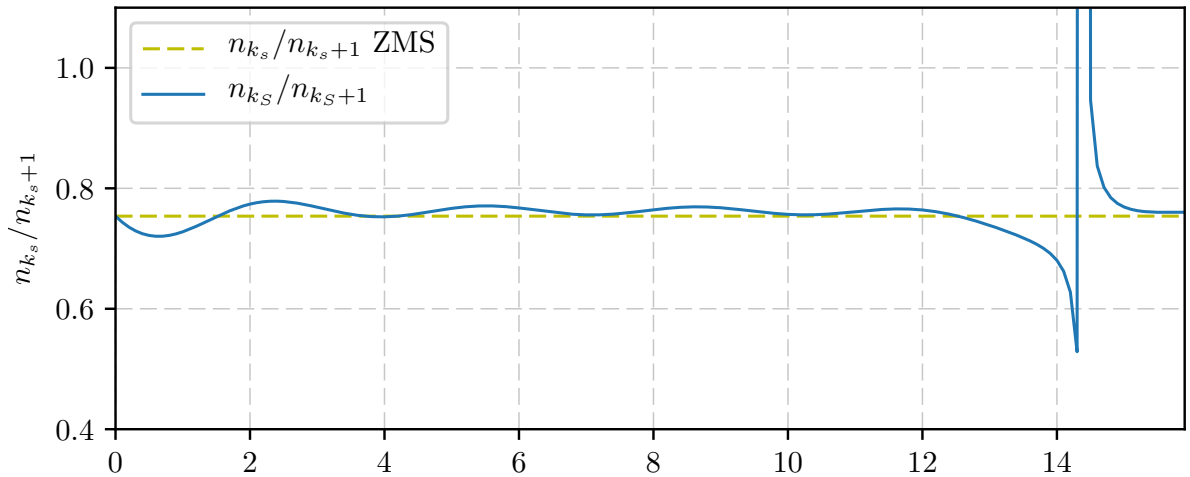


Abbildung 5.9.: Die Verhältnisse der zeitlichen Besetzungen der zwei Systemmulden n_{k_S}/n_{k_S+1} sind mit dem konstanten Verhältnis des ZMS nach (3.43) abgebildet.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, Untersuchungen an Bose-Hubbard-Ketten anzustellen, um die Brechung der \mathcal{PT} -Symmetrie zu realisieren, da bislang noch kein \mathcal{PT} -symmetrisches Quantensystem im Experiment behandelt wurde.

Basierend auf dem Vorschlag von Kotzur [9] wird konkret ein Untersystem von zwei Mulden in einem M -Muldensystem betrachtet, das die Dynamik eines ZMS besitzen soll. Da ein lokalisierter Zufluss von Teilchen in eine Mulde experimentell schwer zu realisieren ist, erfahren diese beiden Systemmulden einen ausgeglichenen Gewinn- und Verlust von Teilchen, indem angekoppelte Reservoirmulden einen Zufluss und ein lokalisierter Elektronenstrahl einen Abfluss von Teilchen bewirken. Die Konfiguration dieses optischen Gitters bildet eine Erweiterung des im Jahr 2016 in Kaiserslautern durchgeführten Experiments [10], bei dem die Effekte eines Elektronenstrahls auf ein eindimensionales Gitter untersucht wurden.

In dieser Arbeit wurde deshalb ein experimentell leicht zugängliches optisches Gitter als M -Muldensystem verwendet, das zeitlich konstante und in allen Mulden gleich große Gitterparameter besitzt, sowie einen konstanten Elektronenstrahl für die Auskopplung der Teilchen. Außerdem wird in der Arbeit von realistischen hohen Teilchenzahlen ausgegangen, wodurch die Verwendung der Mean-Field-Näherung gut begründet wird.

Im ersten Teil der Arbeit wurde zuerst näher untersucht, wie die Präparation des Ausgangszustands erfolgen muss, damit sich die \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände des ZMS in den zwei Systemmulden in einem solchen Gitter bilden können. Hier wurde allgemein von einem Gewinn- und Verlustterm jeweils an beiden Systemmulden ausgegangen.

Wird gefordert, dass die Phasen und Besetzungszahlen der Systemmulden, sowie der Strom zwischen diesen genau gleich sein muss wie im ZMS, ergibt sich zunächst, dass alle Ströme im gesamten M -Muldensystem zeitlich konstant sein müssen. Insbesondere müssen diese Ströme alle den gleichen Betrag besitzen und die Besetzungszahlen zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich groß sein, damit das System eine stationäre Dynamik beschreibt. Damit wurden vier unterschiedliche Möglichkeiten gefunden, wie die Richtungen der Ströme links und rechts des Untersystems eingestellt werden können. Dabei muss für zwei Möglichkeiten ein lokaler Zufluss von Teilchen in eine Mulde erfolgen, weswegen diese sehr schwer umsetzbar sind. Die zwei restlichen Möglichkeiten bestehen aus dem trivialen Fall, bei dem alle Mulden des Systems identisch sind und es keine Wechselwirkung mit der Umgebung gibt, und aus dem anschaulichen Fall, bei dem die Ströme der Reservoirmulden alle in die Mitte des Systems gerichtet sind und nur an der rechten Systemmulde ausgekoppelt wird.

Der erwähnte letzte Fall erweist sich als eine vielversprechende Konfiguration, da sich beginnend mit den äußersten Mulden das gesamte System zur Mitte hin entleert und die Systemmulden solange auf einem konstanten Besetzungsniveau bleiben bis der Strom der angrenzenden Reservoirmulden nicht mehr aufrecht erhalten werden kann und sich zum Schluss kein Teilchen mehr im System befindet.

Darüber hinaus wurde festgestellt, dass die stationären \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände ihre konstante Besetzungszahl am längsten halten können, falls die Nichtlinearität g gleich Null ist, welche im Experiment einfach durch Feshbach-Resonanzen eingestellt werden kann [25].

Mit der genaueren Betrachtung der Wellenfunktionen stellt sich heraus, dass zwar alle Größen des ZMS zum Zeitpunkt $t = 0$ die geforderten Werte annehmen, jedoch weisen die Änderungen der Phasen der Wellenfunktionen, die in den Besetzungszahlen nicht sichtbar sind, einen Doppelt so großen Wert, wie im ZMS, auf. Dieser Wert ist für ein solches M -Muldensystem immer gleich und kann nicht variiert werden, da keine weiteren einstellbaren Freiheitsgrade mehr zur Verfügung stehen.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die Bedingungen für die Realisierung der \mathcal{PT} -brechenden Zustände nach dem ZMS in demselben zeitunabhängigen Gitter wie im ersten Teil gesucht, indem wieder die Besetzungen und Phasen des Ausgangssystems zum Zeitpunkt $t = 0$ eingestellt werden und während der Dynamik kein Einfluss mehr darauf genommen wird.

Dafür werden zwei Ansätze vorgestellt und deren Dynamik in dem sich ergebenden zeitlichen Verlauf der Besetzungen diskutiert.

Im ersten Ansatz werden die im ersten Teil hergeleiteten Bedingungen für die Bildung \mathcal{PT} -symmetrischer Zustände über den \mathcal{PT} -Symmetriebruch hinaus angewandt. Hierbei treten komplexe Phasen auf, die sich effektiv auf die Besetzungszahlen auswirken und im gesamten M -Muldensystem eine exponentiell verteilte Anfangsbesetzung mit konstanten Phasendifferenzen benachbarter Mulden bewirken.

Die numerischen Berechnungen der Besetzungen beschreiben einen zeitlichen exponentiellen Abfall bzw. Anstieg, der sich durch die zeitliche Änderung der Phasen, die hier im Gegensatz zu den \mathcal{PT} -symmetrischen nicht mehr rein imaginär sind, zeigt. Die zeitlichen Verläufe der Besetzungen beschreiben rein exponentiell verlaufende Funktionen, die nach der gleichen Zeitdauer zusammenfallen, wie die \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände im ersten Teil.

Analog zum ersten Teil besitzen diese Änderungen der Phasen im Vergleich zum ZMS einen doppelt so großen Wert, was die Konsistenz der Wellenfunktionen vom \mathcal{PT} -symmetrischen in den gebrochenen Bereich beweist. Die Anfangsbesetzungen beider Systemmulden unterscheiden sich für einen Bereich dicht am \mathcal{PT} -Symmetriebruch nur sehr gering von den theoretischen Anfangsbesetzungen des ZMS, sind aber trotzdem nicht gleich. Dies wird damit begründet, dass sich durch die komplexe Fortführung der symmetrischen Lösungen in den \mathcal{PT} -gebrochenen Bereich nicht exakt dieselben An-

fangsbesetzungen der in diesem Bereich geltenden antisymmetrischen Lösungen des ZMS ergeben. Die Zeitdauer, während der sich die \mathcal{PT} -symmetrischen und -brechenden Zustände aufrecht erhalten können, kann beliebig durch die Zunahme mehrerer Mulden erhöht werden.

Der zweite Ansatz fordert direkt, dass sich in den Systemmulden die zeitlichen Besetzungen und Ströme der \mathcal{PT} -brechenden antisymmetrischen Lösungen des ZMS bilden sollen. Hierfür ergeben sich jedoch zwei unterschiedliche Bedingungen für die Präparation der Ströme und der Besetzungszahlen, die beide nur direkt am Bifurkationspunkt erfüllt sind. Werden die Ströme nach der ersten Bedingung richtig eingestellt, ergibt sich ein qualitativ sehr ähnlicher Verlauf der berechneten Besetzungszahlen, jedoch stellen diese keine reine exponentiell abfallenden Kurven dar, sondern führen Oszillationen um diesen theoretisch erwarteten Verlauf nach dem ZMS aus. Es zeigt sich also, dass es keine Möglichkeit gibt, in den Systemmulden genau die \mathcal{PT} -brechenden Zustände des ZMS zu erhalten. Mit dem ersten Ansatz kann jedoch ein System mit anderen Gitterparametern so gewählt werden, damit sich der exponentielle Verlauf der Besetzungszahlen in den Systemmulden mit der gewünschten exponentiellen Abfallrate exakt ergibt.

Mit der Möglichkeit, die exponentiell verteilte Anfangsbesetzung im M -Muldensystem präparieren zu können, stellt der in dieser Arbeit studierte Ansatz eine hohe experimentelle Zugänglichkeit für die \mathcal{PT} -brechenden Zustände dar. Die Präparation der Phasen ist grundsätzlich möglich [33–35], jedoch muss die Einstellung konstanter Phasendifferenzen zuvor näher untersucht werden. Im Rahmen dieser Arbeit konnte außerdem noch nicht geklärt werden, wie sich eine nicht-verschwindende Nichtlinearität $g \neq 0$ in der Dynamik der \mathcal{PT} -brechenden Zustände zeigt und ob sich diese nichtlinearen Lösungen des ZMS ebenfalls realisieren lassen. Außerdem können die Effekte der Dynamik außerhalb der Mean-Field-Näherung für geringe Teilchenzahlen untersucht werden.

A. Vergleich des chemischen Potentials im ZMS und im M -Muldensystem

Es soll gezeigt werden, dass das chemische Potential, also der Energieeigenwert, des M -Muldensystems im Vergleich zu dem ZMS einen exakt doppelt so großen Wert besitzt, wobei von einer verschwindenden Nichtlinearität $g = 0$ ausgegangen wird. Dafür wird die Wellenfunktion der Mulde k

$$\psi_k = \psi_R + i\psi_I, \quad (\text{A.1})$$

dessen Index aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wird, in ihren Realteil ψ_R und Imaginärteil ψ_I aufgeteilt. Damit kann die zeitliche Ableitung der Phase $\varphi = \arctan(\psi_I/\psi_R)$ berechnet werden,

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1 + (\psi_I/\psi_R)^2} \frac{\dot{\psi}_I\psi_R - \psi_I\dot{\psi}_R}{\psi_R^2} = \frac{1}{n} \left(\dot{\psi}_I\psi_R - \psi_I\dot{\psi}_R \right), \quad (\text{A.2})$$

wobei die Besetzungszahl $\psi_R^2 + \psi_I^2 = n$ benutzt wurde.

Für das ZMS in Gl. (3.14) folgt mit Gl. (3.27) für die zeitliche Ableitungen der Phasen

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = J \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = J \cos\left(\arcsin\left(\frac{\gamma}{J}\right)\right) = \sqrt{J^2 - \gamma^2} =: \mu_s, \quad (\text{A.3})$$

was nach Abschnitt 3.2.2 dem erwarteten Wert in Gl. (3.29) für $g = 0$ entspricht.

Für das M -Muldensystem, bei dem an der rechten Systemmulde mit $\gamma_{k_S+1} = 4\gamma$ ausgekoppelt wird und nach Gl. (2.12) durch

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_k = -J\psi_{k-1} - J\psi_{k+1} - i \frac{\gamma_k}{2} \psi_k. \quad (\text{A.4})$$

beschrieben wird, lassen sich mit Gl. (A.2) die Phasenänderungen für den Zeitpunkt $t = 0$ analytisch berechnen,

$$\dot{\varphi}_{k_S} = \dot{\varphi}_{k_S+1} = 2J \cos(\varphi_{k_S+1} - \varphi_{k_S}) = 2\mu_s. \quad (\text{A.5})$$

Hierbei wurde verwendet, dass alle Phasendifferenzen benachbarter Mulden betragsmäßig gleich sind.

A. Vergleich des chemischen Potentials im ZMS und im M-Muldensystem

Mit der in dieser Arbeit verwendeten experimentell leicht zugänglichen Präparation des Systems mit konstanten Gitterparametern bleiben nach der Herleitung in Kapitel 4.1 keine zusätzlichen Freiheitsgrade übrig, wodurch das chemische Potential auch nicht variiert werden kann und für ein M -Muldensystem immer immer doppelt so groß ist, wie im ZMS.

Literaturverzeichnis

- [1] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press (1981).
- [2] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. “Die” Grundlehren der mathematischen Wissenschaften / “Die” Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer (1996).
- [3] Carl M. Bender und Stefan Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having \mathcal{PT} -Symmetry. *Phys. Rev. Lett.* 80, 5243–5246 (1998).
- [4] E. M. Graefe, H. J. Korsch und A. E. Niederle. Mean-Field Dynamics of a Non-Hermitian Bose-Hubbard Dimer. *Phys. Rev. Lett.* 101, 150408 (2008).
- [5] Shachar Klaiman, Uwe Günther und Nimrod Moiseyev. Visualization of Branch Points in \mathcal{PT} -Symmetric Waveguides. *Phys. Rev. Lett.* 101, 080402 (2008).
- [6] Eva-Maria Graefe. Stationary states of a \mathcal{PT} symmetric two-mode Bose–Einstein condensate. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45, 444015 (2012).
- [7] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou und D. N. Christodoulides. Observation of \mathcal{PT} -Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials. *Phys. Rev. Lett.* 103, 093902 (2009).
- [8] S. Bittner, B. Dietz, U. Günther, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter und F. Schäfer. \mathcal{PT} Symmetry and Spontaneous Symmetry Breaking in a Microwave Billiard. *Phys. Rev. Lett.* 108, 024101 (2012).
- [9] S. Kotzur. *Realisierungen von Teilchenreservoirs zur Erzeugung von balanced gain and loss in zeitabhängigen Bose-Hubbard-Ketten*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2017).
- [10] Ralf Labouvie, Bodhaditya Santra, Simon Heun und Herwig Ott. Bistability in a Driven-Dissipative Superfluid. *Phys. Rev. Lett.* 116, 235302 (2016).
- [11] Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik* 26, 178–181 (1924).
- [12] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungber. Kgl. Akad. Wiss.* (1924).

- [13] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungber. Kgl. Akad. Wiss.* (1925).
- [14] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science* 269, 198–201 (1995).
- [15] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett und R. G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1687–1690 (1995).
- [16] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969–3973 (1995).
- [17] H. A. Gersch und G. C. Knollman. Quantum Cell Model for Bosons. *Phys. Rev.* 129, 959–967 (1963).
- [18] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner und P. Zoller. Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett.* 81, 3108–3111 (1998).
- [19] Greiner Markus, Mandel Olaf, Esslinger Tilman, Hänsch Theodor W. und Bloch Immanuel. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* 415, 39 (2002).
- [20] J H Müller, D Ciampini, O Morsch, G Smirne, M Fazzi, P Verkerk, F Fuso und E Arimondo. Bose-Einstein condensation of rubidium atoms in a triaxial TOP trap. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 33, 4095 (2000).
- [21] Masahito Ueda. *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*. WORLD SCIENTIFIC (2010).
- [22] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 20, 454–477 (1961).
- [23] Alexander L. Fetter. Vortices in an Imperfect Bose Gas. I. The Condensate. *Phys. Rev.* 138, A429–A437 (1965).
- [24] J Rogel-Salazar. The Gross–Pitaevskii equation and Bose–Einstein condensates. *European Journal of Physics* 34, 247 (2013).
- [25] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne und Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* 82, 1225–1286 (2010).
- [26] H.-P Breuer und Francesco Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems* (2006).

- [27] D. Witthaut, F. Trimborn, H. Hennig, G. Kordas, T. Geisel und S. Wimberger. Beyond mean-field dynamics in open Bose-Hubbard chains. *Phys. Rev. A* 83, 063608 (2011).
- [28] G. Kordas, D. Witthaut, P. Buonsante, A. Vezzani, R. Burioni, A. I. Karanikas und S. Wimberger. The dissipative Bose-Hubbard model. *The European Physical Journal Special Topics* 224, 2127–2171 (2015).
- [29] Carl M Bender. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. *Reports on Progress in Physics* 70, 947 (2007).
- [30] Dennis Dast, Daniel Haag, Holger Cartarius, Jörg Main und Günter Wunner. Eigenvalue structure of a Bose–Einstein condensate in a \mathcal{PT} -symmetric double well. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46, 375301 (2013).
- [31] Dast D., Haag D., Cartarius H., Wunner G., Eichler R. und Main J. A Bose-Einstein condensate in a \mathcal{PT} -symmetric double well. *Fortschritte der Physik* 61, 124–139 (2012).
- [32] G. Barontini, R. Labouvie, F. Stubenrauch, A. Vogler, V. Guarrera und H. Ott. Controlling the Dynamics of an Open Many-Body Quantum System with Localized Dissipation. *Phys. Rev. Lett.* 110, 035302 (2013).
- [33] Ł. Dobrek, M. Gajda, M. Lewenstein, K. Sengstock, G. Birkl und W. Ertmer. Optical generation of vortices in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* 60, R3381–R3384 (1999).
- [34] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider und W. D. Phillips. Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate. *Science* 287, 97–101 (2000).
- [35] Shu-Wei Song, Deng-Shan Wang, Hanquan Wang und W. M. Liu. Generation of ring dark solitons by phase engineering and their oscillations in spin-1 Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* 85, 063617 (2012).

Danksagung

Für die erfolgreiche Vollendung dieser Bachelorarbeit waren viele Personen verantwortlich, denen ich im Folgenden meinen Dank aussprechen will.

Zu Beginn gilt ein großer Dank Herrn Apl. Prof. Dr. Jörg Main, der mir die Arbeit am ersten Institut für Theoretische Physik erst ermöglichte, mir stets bei fachlichen Fragen zur Seite stand und mich mit seinen Tipps und Anregungen ständig neu begeistern konnte, sodass ich die Faszination für das Thema nie verlor.

Weiterhin bin ich Daniel Dizdarevic, der sich für alle ungeklärten Fragen und anregende Diskussionen viel Zeit genommen hat und mich immer wieder motivieren konnte, sehr dankbar.

Für eine sehr ermunternde und wohlfühlende Büroatmosphäre möchte ich Matthias Schmidt, der mir bei allen Problemen jederzeit behilflich war, danken.

Außerdem gilt mein Dank dem ganzen Institut für interessante, abwechslungsreiche und unterhaltsame Gesprächsthemen in den Kaffeerunden.

Nicht zuletzt danke ich auch meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben und mir immerwährend bei allem zur Seite standen.

Erklärung

Ich versichere,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- und dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 5. August 2018

Felix Kogel