

Institut für Formale Methoden der Informatik

Abteilung Theoretische Informatik

Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
70569 Stuttgart

Bachelorarbeit

**Das Kachelungsproblem
4-wege-deterministischer
Wang-Kacheln**

Tobias Meisel

Studiengang: B.Sc. Informatik

Prüfer: Volker Diekert

Betreuer: Jan Philipp Wächter

begonnen am: 31.01.2018

beendet am: 31.07.2018

1 Inhaltsangabe

Wang-Kacheln sind farbige Quadrate die nach bestimmten Regeln Kachelungen einer beliebig großen Ebene darstellen können. 4-Wege-deterministische Wang-Kacheln sind ein Spezialfall für den anhand der Farbe der beiden Kanten einer Ecke einzelne Kacheln eindeutig identifiziert werden können. Dieses Papier beschäftigt sich mit der Thematik des Kachelungsproblems für 4-Wege-deterministische Wang-Kacheln. Hierzu beinhaltet es eine Einführung in diesen Themenbereich und stellt verschiedene Beispiele bekannter Kachelsätze vor.

Inhaltsverzeichnis

1	Inhaltsangabe	3
1.1	Aufgabenstellung	7
1.2	Bildquellen	7
2	Einführung	9
3	Grundlagen	11
3.1	Wang-Kacheln	11
3.1.1	Sandwichkacheln	11
3.1.2	Kachelungen	12
3.1.3	Determinismus	13
3.1.4	$n \times n$ -Kachelsets	13
3.1.5	Homomorphismen	13
3.1.6	Das Kachelungsproblem	14
3.2	Turingmaschinen	14
4	Aperiodische Kachelsätze	17
4.1	Robinsons Kachelsatz	17
4.2	Gefärbter Kachelsatz von Robinson	21
4.3	Kari und Papasoglus Kachelsatz	22
4.4	Gefärbter Kachelsatz von Kari und Papasoglu	26
5	Lukkarilas Beweise	29
5.1	Lukkarilas Kachelsatz	29
5.1.1	Struktur	30
5.1.2	erste und zweite Lage	30
5.1.3	dritte und vierte Lage	33
5.1.4	Das erzeugte Muster	34
5.1.5	Eigenschaften:	39
5.2	Das Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel	42
5.2.1	Struktur	42
5.2.2	erste Lage	43
5.2.3	zweite Lage	44
5.2.4	dritte und vierte Lage	44
5.2.5	Wahl der gesetzten Kachel	46
5.2.6	Symmetrie	46
5.2.7	Resultat	47
5.3	Das Kachelungsproblem ohne gesetzter Kachel	47
5.3.1	Struktur	47
5.3.2	erste Lage	48

Inhaltsverzeichnis

5.3.3	zweite Lage	48
5.3.4	dritte und vierte Lage	55
5.4	Resultate	58
6	Erklärung	63

1.1 Aufgabenstellung

Ein Wang-Kachel ist ein Quadrat, dessen vier Seiten mit einer von endlich vielen Farben gefärbt sind. Ziel des Kachelungsproblems ist es auf Eingabe eines solchen Kachelsatzes zu entscheiden, ob sich die (zweiseitig unendliche) Ebene derart mit den Kacheln überdecken lässt, dass je zwei benachbarte Kacheln an der gemeinsamen Seite dieselbe Farbe besitzen. Wie R. Berger 1966 zeigte ist dieses Problem im Allgemeinen unentscheidbar. 2009 zeigte Ville Lukkarila sogar, dass das Problem auch dann noch unentscheidbar bleibt, wenn eine Kachel des eingegebenen Kachelsatzes bereits durch die Farben an zwei beliebigen Seiten eindeutig festgelegt ist. Dieses Ergebnis ist von großer Bedeutung für reversible Berechnungsmodelle. In der Bachelorarbeit soll der Beweis von Lukkarila ausgearbeitet und, soweit möglich, vereinfacht werden. Ferner sollen die Bezüge der Konstruktion zum Endlichkeitsproblem für inverse Automatenhalbgruppen und Automatengruppen untersucht werden.

1.2 Bildquellen

Alle in diesem Text verwendeten Bilder stammen vom Autor dieses Papiers und sind größtenteils aus den in der Bibliografie angegebenen Quellen inspiriert.

2 Einführung

Wang-Kacheln sind ein formales System. Sie werden dargestellt Quadrate mit gefärbten Seiten die bestimmten Regeln folgend eine beliebige Ebene bedecken können. Sie wurden benannt nach Hao Wang und von diesem in seiner 1961 erschienenen Arbeit “Proving theorems by pattern recognition” [8] vorgestellt. Ein Kachelset oder -satz ist eine endliche Menge von Wang-Kacheln ohne Duplikate. Es gibt zu diesem Themengebiet verschiedene alternative Definitionen die zum Teil äquivalent zu Wangs Kacheln sind und zum Teil andere Eigenschaften besitzen. Dieser Text wie auch die Arbeit “The 4-way deterministic tiling problem is undecidable” (2009) von Ville Lukkarila um den es in dieser Arbeit geht beschränken sich jedoch größtenteils auf die von Wang vorgeschlagene Definition.

Eine Kachelung durch Wang-Kacheln ist eine Funktion die jedem Ort auf einer Fläche eine Wang-Kachel zuordnet. Eine Kachelung wird als valide bezeichnet wenn die aneinander anliegenden Seiten zweier benachbarter Kacheln die selbe Farbe haben.

Das Kachelproblem der Wang-Kacheln (auch Domino-Problem genannt) ist das Entscheidungsproblem ob ein gegebenes Kachelset eine Ebene valide kacheln kann.

Es wurde bereits gezeigt dass das Domino-Problem unentscheidbar ist, wobei Beweise dieses Sachverhaltes zumeist auf der Existenz sogenannter aperiodischer Kachelsets, also solcher Kachelsätze die nur nichtperiodische valide Kachelungen zulassen, beruhen.

Vorausgehende Arbeiten konnten ebenfalls bereits beweisen dass das Kachelungsproblem für 1-Weg-deterministische Kachelsets unentscheidbar ist.

Die Arbeit von Ville Lukkarila um die es in dieser Arbeit geht baut darauf auf und zeigt dass das Kachelungsproblem auch für 4-Wege-deterministische Kachelsets unentscheidbar ist.

Um diesen Beweis zu bewerkstelligen konstruiert Lukkarila auf Basis eines bekannten aperiodischen Kachelsatz einen neuen Kachelsatz mit dessen Hilfe es möglich ist das Halteproblem der Turingmaschine auf das Kachelungsproblem für 4-Wege-deterministische Kachelsätze abzubilden und dieses somit als Unentscheidbar zu beweisen.

Wang-Kacheln dienen unter anderem dem mathematischen Beweis der Unentscheidbarkeit verschiedener Probleme der theoretischen Informatik sowie der Mathematik. Sie haben jedoch auch verschiedene andere praktische und theoretische Anwendungen zum Beispiel in den Bereichen der Computerspiele und der mathematischen Selbstzusammensetzung. In diesem Abschnitt der Einführung soll kurz auf einige dieser Anwendungen eingegangen werden um die Motivation für Forschungen auf dem Gebiet der Wang-Kacheln zu motivieren. Außer den klassischen Wang-Kacheln existieren noch Verallgemeinerungen wie zum Beispiel der Wang-Würfel, auf die hier allerdings nicht weiter eingegangen werden soll.

2 Einführung

Ein dem Gebiet der Wang-Kacheln recht nahe stehendes Beispiel ist das der zellulären Automaten. Diese sind unter anderem bekannt durch das populäre “Spiel des Lebens” das 1970 von John Horton Conway veröffentlicht wurde. Da diese beiden Gebiete einander recht nahe stehend sind Querverweise recht häufig so zum Beispiel beim Nachweis der Unentscheidbarkeit der Umkehrbarkeit bei zweidimensionalen Zellulären Automaten [2].

Auch in der Biologie finden Wang-Kacheln Anwendungen. So regen Erik Winfree, Furong Liu, Lisa A. Wenzler und Nadrian C. Seeman in ihrem Papier “Design and self-assembly of two dimensional DNA crystals” [10] die mögliche Verwendung von DNA-Kristallen als Komponenten für DNA-basierte Rechner an. Diese Kristalle verfügen über “klebrige” Kanten und fungieren so ähnlich wie Wang-Kacheln. Dadurch würde die Synthese komplexer Strukturen aus einer beschränkten Menge recht einfacher Moleküle möglich und die Erkenntnisse der Forschung auf dem Gebiet der Wang-Kacheln ließe sich auf biologische Berechnungsmodelle anwenden.

Auf dem Gebiet der Computer-Hardware wird Forschung betrieben die die Anwendung von Wang-Kacheln auf Hardware-Komponenten moderner Computer untersucht. Wang-Kacheln dienen hierbei der Erzeugung von Texturen, die auf 3D-Objekte angewendet werden um einen bestimmten visuellen Effekt zu erzeugen, um besagtes Objekt beispielsweise rau oder glatt erscheinen zu lassen. Li-Yi Wei von des prominenten Herstellers für Computerhardware NVIDIA veröffentlichte hierzu das Papier “Tile-Based Texture Mapping on Graphics Hardware” [9] dass sich mit diesem Thema beschäftigt. Vorteile der Verwendung von Wang-Kacheln ist hierbei dass aus einem beschränkten Kachelsatz eine Vielzahl verschiedener Muster erzeugt werden kann. Zusätzlich ist diese Methode weniger speicherlastig als die Verwendung komprimierter Bilder.

Johannes Kopf, Daniel Cohen-Or, Oliver Deussen und Dani Lischinski definieren in ihrem Papier “Recursive Wang Tiles for Real-Time Blue Noise” [4] eine Methode zur Anwendung von Wang-Kacheln im Bereich der Computergrafik. Der von ihnen konstruierte Kachelsatz erzeugt hierbei eine Kachelung die eine Fläche mit einer Menge von Punkten darstellen, die eine gegebene Dichtefunktion berücksichtigen. Diese findet beispielsweise bei verschiedenen Rendering- und Verarbeitungstechniken Anwendung. Die Verwendung von Wang-Kacheln sorgt dabei für die Möglichkeit schnell beliebig große aperiodische Flächen zu erzeugen, wobei der hierfür benötigte Speichereinsatz konstant bleibt (für weiteres siehe [4]).

Es ist also zu sehen dass Wang-Kacheln nicht nur ein theoretisches Gebilde sind, sondern auch in der Praxis Anwendung finden.

3 Grundlagen

3.1 Wang-Kacheln

Eine Wang-Kachel (im folgenden Text zur Vereinfachung auch einfach nur Kachel genannt) ist ein Quadrat mit gefärbten Kanten. Die Kanten des Quadrates werden hierbei die nördliche, östliche, südliche und westliche Kante genannt (entsprechend zugeordnet).

Jede Kante hat eine Farbe c die Element eines endlichen Sets von Farben C sind, also $\forall c : c \in C$. Farben müssen dabei nicht Farben im klassischen Sinne sein, sie können je nach Anwendungsgebiet auch beispielsweise durch einem Puzzle ähnliche Dellen, farbigen Pfeilen oder ähnlichem dargestellt werden. Der Einfachheit wegen werden diese allgemeinen Darstellungen einfach als die Farben der Kanten bezeichnet. Entsprechend müssen dann allerdings auch die Funktionen festgelegt werden, die für zwei Farben festlegen ob diese einander entsprechen. Später im Text werden zumeist Pfeile eingesetzt werden für die gilt: Der Pfeil der in der einer Kante einer Kachel beginnt muss in der entsprechenden Kante einer anderen Kachel fortgesetzt werden um als zueinander passend zu gelten. Existieren zusätzlich noch Etikettierungen müssen auch diese zueinander passen. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung gegenüber der Verwendung von Farben im natürlichen Sinn und dient meist nur der deutlicheren Veranschaulichung. Bei der Verwendung komplexer Konstrukte als Farben muss allerdings darauf geachtet werden dass sie sich bei der Rotation und Spiegelung von Kacheln nicht trivial verhalten. Dies ist relevant, da viele Konstruktionen von Kachelsätzen die Rotation von Kacheln aktiv verwenden.

Für eine gegebene Kachel t wird die nördliche Kante durch t_n , die östliche durch t_e , die südliche durch t_s und die westliche durch t_w dargestellt. Ein Wang-Kachelset wird zumeist T genannt, wobei $t \in T$ die Kacheln des Kachelsets sind.

3.1.1 Sandwichkacheln

Sandwichkacheln dienen der Zusammenfassung "einfacherer" Kachelsets zu komplexeren Strukturen. Sie werden dabei als Sandwichkacheln bezeichnet da die zusammengefassten Kachelsätze wie die Lagen eines Sandwich zusammengebaut werden. Angenommen man habe Kachelsets T_i mit $1 \leq i \leq j$, dann nennt man T ein Sandwich-Kachelset, wobei $T \subseteq T_1 \times T_2 \times \dots \times T_j$ ist. Die Kachelsets T_1 bis T_j werden Schichten oder Lagen des Sandwich-Kachelsets T genannt. Die Elemente

$$t = (t_1, \dots, t_j) \in T \text{ mit } t_1 \in T_1, t_2 \in T_2, \dots \quad (3.1)$$

3 Grundlagen

werden Sandwich-Kacheln genannt. Die Farben des Elements t werden dann aus den Farben der einzelnen Schichten ermittelt, somit gilt

$$t_n = (t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{jn}) \quad (3.2)$$

Dem entsprechend werden t_e , t_s und t_w definiert.

Es seien $\forall i \in \{1 \dots j\} : S_i \subset T_i$ dann wird eine Kachel $t \in T_k$ für die

$$S_1 \times \dots \times S_{k-1} \times \{t\} \times S_{k+1} \times \dots \times S_j \subseteq T \quad (3.3)$$

gilt gepaart mit den Kacheln S_l der Schicht l genannt.

An Sandwichkacheln wird deutlich, dass sich komplexe Kachelsets durch andere, zum Teil viel einfachere, Kachelsätze ausdrücken und konstruieren lassen.

3.1.2 Kachelungen

Eine Kachelung ist eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ die jedem Feld auf einer zweidimensional unendlichen Ebene (dargestellt durch ein Paar von Ganzzahlen) eine Kachel aus einem gegebenen Kachelset T zuordnet. Die Findung einer möglichen Kachelung ist in den meisten Problemfällen Ziel und Zweck des Konstruktes der Wang-Kacheln.

Eine Kachelung wird als valide bezeichnet wenn $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ gilt dass die Farben von $f(x, y)$ an allen Kanten zu den Farben der jeweiligen Nachbarn passen. Ein Beispiel: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s$ (entsprechendes gilt für die östliche, südliche und westliche Kante).

Eine Kachelung f heißt periodisch wenn es Zahlen $(a, b) \in \mathbb{Z}$ gibt so dass

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : f(x, y) = f(x + a, y + b) \text{ wobei } (a, b) \neq (0, 0) \quad (3.4)$$

gilt, wenn sich also ein Muster nach einer bestimmten Strecke wiederholt. Die Variablen (a, b) werden dann die Periode (in x- beziehungsweise y-Richtung) genannt. Existieren keine Perioden wird die Kachelung f nichtperiodisch genannt. Ein Kachelset T wird aperiodisch genannt wenn mindestens eine valide Kachelung existiert aber keine Kachelung periodisch ist.

Erlaubt ein Kachelset periodische Kachelung f mit einer Periode, dann gibt es auch eine sogenannte doppel-periodische Kachelung $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

$$g(x, y) = g(x + a, y) \text{ und } g(x, y) = g(x, y + b). \quad (3.5)$$

. Die Kachelung wiederholt sich also unabhängig in x- und in y-Richtung.

Anzumerken ist noch dass die Kachelungsfunktion f in dieser Definition nur Translation, aber nicht Rotation oder Reflexion anwenden darf. Je nach Vorliebe der Autoren kann eine Funktion f auch dies. Dies sorgt zwar für einfachere Kachelsätze, da diese nicht die reflektierten beziehungsweise rotierten Versionen von grundlegenden Kacheln enthalten müssen, allerdings kommt es bei der Verwendung nicht trivialer Farben, beispielsweise Pfeilen, und bei der Notwendigkeit von Einschränkungen möglicher Kachelungen zu Problemen. Aus diesem Grund ist hier f nur der Translation mächtig, während Rotation und Reflexion in der Konstruktion der Kachelsätze angewandt werden.

3.1.3 Determinismus

Ein Wang-Kachelset heißt NW-deterministisch wenn in T keine zwei Kacheln mit den selben Farben an den nördlichen und westlichen Kanten existieren. Es folgt dass man in einem NW-deterministischen Kachelset durch Kenntnis der Farbe der nördlichen und der westlichen Kante eindeutig eine einzelne Kachel identifizieren kann. Dies gilt entsprechen für die anderen drei Ecken, also NE, SW und SE. Ein Kachelset ist 4-Wege-deterministisch wenn es sowohl NW- als auch NE-, SW- und SE-deterministisch ist.

Ein Kachelsatz wird streng deterministisch genannt, wenn man durch die Kenntnis der Farben zweier beliebiger aneinander liegender Kanten die zugehörige Kachel eindeutig identifiziert werden kann. Es ist also nicht nötig die Ecke zu wissen. Offensichtlich ist dies eine speziellere Eigenschaft gegenüber dem 4-Wege-Determinismus. Für Sandwichkacheln ist es möglich Determinismuseigenschaften von seinen Komponenten zu erben. Die Sandwichkachel mehrerer an der selben Ecke deterministischer Kachelsätze ist an dieser Ecke ebenfalls deterministisch. Kann ein deterministisches Kachelset in mehrere disjunkte Kachelmengen geteilt werden und wird jede dieser Teilmengen mit einem deterministischen Kachelsatz gepaart ist die resultierende Sandwichkachelmengen ebenfalls deterministisch.

3.1.4 $n \times n$ -Kachelsets

T sei ein Kachelset das $n \times n$ -Kachelset ist ist das Wang-Kachelset ist das Kachelset das man erhält wenn man jeden valide $n \times n$ -Cluster aus T nimmt und diese Cluster in neue Wang-Kacheln konvertiert. Die Farben dieses $n \times n$ -Kachelsets werden aus den ursprünglichen Kacheln hergeleitet. Die vertikalen Farben sind die nördlichen und südlichen $n \times (n - 1)$ -Untercluster der neuen Kacheln, die horizontalen Farben entsprechen dem östlichen und westlichen $(n - 1) \times n$ -Untercluster. Das aus T erhaltene $n \times n$ -Kachelset wird auch $T^{n \times n}$ genannt. Wenn vorhanden erbt es die Eigenschaft des 4-Wege-Determinismus von T .

Diese Methode findet Anwendung um für Kacheln in einer Kachelung ihre Umgebung in ihren Kanten zu codieren. Dadurch können komplexe Paarungen vorgenommen werden.

3.1.5 Homomorphismen

Eine Abbildung $h : T_1 \rightarrow T_2$ wird Homomorphismus genannt wenn sie die Struktur der Farben erhält.

Ein Beispiel: Sei $h(t) = t'$. Ist h ein Homomorphismus dann gilt $t'_n = g(t_n)$. Dasselbe gilt für t'_e, t'_s und t'_w . g ist hierbei eine Abbildung des Farbsatzes von T_1 auf das Farbsatzes von T_2 .

Das homomorphe Bild $h(T)$ von T wird natürlich definiert als $h(T) = \{h(t) | t \in T\}$. Wenn jede Kachel $t \in T$ in einer validen Kachelung auftaucht kann das $n \times n$ -Kachelset $T^{n \times n}$ homomorph auf T abgebildet werden, es gibt also einen Homomorphismus h für den gilt $h(T^{n \times n}) = T$.

3.1.6 Das Kachelungsproblem

Als Kachelungsproblem wird das folgende Entscheidungsproblem bezeichnet: “Sei ein Wang-Kachelsatz T gegeben. Existiert eine valide Kachelung der zweiseitig unendlichen Ebene?”.

Eine Kachelung f enthält eine Kachel wenn $t \in T$ und $\exists x, y \in \mathbb{Z} : f(x, y) = t$ gilt. Als Kachelungsproblem mit Ursprungskachel wird das folgende Entscheidungsproblem bezeichnet: “Gegeben eines Kachelsatzes T und einer Kachel $t \in T$, gibt es eine valide Kachelung die t enthält? “ eine alternative Formulierung wäre “Gibt es eine Kachelung für die $f(x, y) = t$ gilt?”.

Offensichtlich folgt aus der Entscheidbarkeit des Kachelungsproblems mit Ursprungskachel die Entscheidbarkeit des allgemeinen Kachelungsproblems.

Es ist bereits bekannt dass das Kachelungsproblem unentscheidbar ist. Außerdem ist bekannt dass das Kachelungsproblem für 1-Wege-deterministische Kachelsets unentscheidbar ist.

Die Arbeit von Lukkarila [5] zeigt dass das Kachelungsproblem auch für 4-Wege-deterministische Kachelsätze unentscheidbar ist. Dabei bezieht er sich auf das aperiodische 4-Wege-deterministische Kachelset von Kari und Papasoglu.

3.2 Turingmaschinen

Bei einer Turingmaschine handelt es sich um ein grundsätzliches Berechnungsmodell das auch bei den Beweisen bezüglich Eigenschaften von Wang-Kacheln eine wichtige Rolle spielt. An dieser Stelle wird ein ausreichendes Grundkenntnis dieser vorausgesetzt. Bezüglich der Notation wird auf das Grundlagenbuch “Theoretische Informatik - kurz gefasst” [7] verwiesen.

Eine Turingmaschine die auf einem leeren Band startet kann durch einen bestimmten Kachelsatz als Set von Wang-Kacheln dargestellt werden. In diesem Text wird dazu die Methode verwendet, die Robinson in seiner Arbeit [6] aufführt, diese wird allerdings auch von anderen Arbeiten aufgegriffen.¹

Hierbei werden einzelne Zustandsübergänge der Turingmaschine als eine Reihe der Kachelung dargestellt. Eine Reihe der entstehenden Kachelung besteht aus so genannten zustandserhaltenden Kacheln, also Kacheln die ihren Zustand in diesem Berechnungsschritt nicht ändern, sowie einem Paar von Kacheln das die Zustandsänderung darstellt. Dieses Paar von Kacheln besteht aus einer Aktionskachel, die die Übergangsfunktion der Turingmaschine symbolisiert und einer Reaktionskachel (im original merging tile genannt) die den Zustand nach diesem Rechenschritt darstellt. Die obere Kante einer beliebigen Reihe stellt also den Zustand des Eingabebandes unmittelbar nach einem Rechenschritt dar, während die untere Kante den Zustand unmittelbar davor symbolisiert.

Die Farben dieser Kacheln werden dargestellt als Pfeile mit Beschriftungen. Diese Pfeile dienen dem besseren Verständnis und können gleichwertig durch Farben ersetzt werden. Symbole der Turingmaschine die sich in einem Rechenschritt nicht

¹Ebenfalls erzeugt werden können Eingabebänder die die Form $a^\infty b c^\infty$ mit $a, b, c \in \Sigma^*$ haben, wobei Σ die Menge der Symbole der Turingmaschine sei.

ändern werden durch einen Pfeil von unten nach oben dargestellt, wobei die Beschriftung des Pfeiles dem Symbols entspricht.

Zustandsübergängen der Form $(s_i, q_j) \rightarrow (s_k, q_l, r)$ (wobei s_i das gelesene Zeichen,

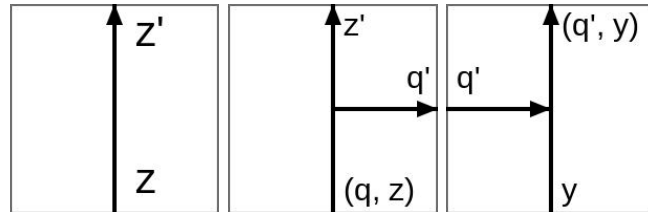


Abbildung 3.1: Von links nach rechts: Eine zustandserhaltende Kachel, eine Aktionskachel die eine Rechtsbewegung symbolisiert und eine Reaktionskachel die eine von links kommende Bewegung abschließt.

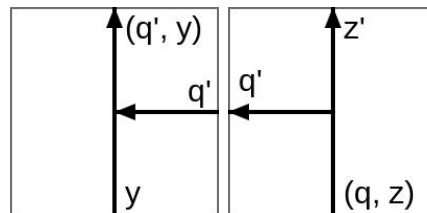


Abbildung 3.2: Die Aktion- und Reaktionskachel die einer Linksbewegung entsprechen.

q_j der anfängliche Zustand, s_k das geschriebene Zeichen, q_l der neue Zustand und r die Richtung des Schreibkopfes, also links oder rechts, ist) werden durch zwei aneinanderliegende Kacheln dargestellt.

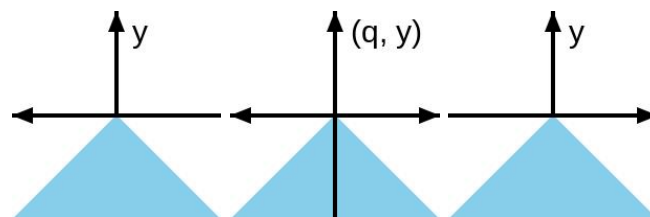


Abbildung 3.3: Die Kacheln die das Eingabeband erzeugen. Die mittlere Kachel ist dabei zu Beginn gesetzt. Es gilt $q = q_{start}$ der Startzustand der Turing-Maschine. y ist ein beliebiges Zeichen des Eingabealphabets der Turingmaschine. Die blaue Markierung dient der Abgrenzung zu Bereichen der Kachelung die nicht die Turingmaschine darstellen und hängt vom genauen Aufbau des Kachelsatzes ab.

4 Aperiodische Kachelsätze

Nicht nur für Lükkarilas später folgende Konstruktion, sondern auch für viele andere Beweise auf diesem und verwandten Feldern ist die Existenz von aperiodischen Kachelsätzen von großer Bedeutung. Aufgrund dessen werden in diesem Abschnitt zwei aufeinander aufbauende Kachelsätze kurz umrissen, deren Kenntnis später noch relevant sein wird. Zusätzlich wird zu jedem der beiden eine gefärbte Version vorgestellt.

4.1 Robinsons Kachelsatz

Dieser Kachelsatz wurde in dieser Form erstmals in der Arbeit “Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane” (1971) [6] von Raphael M. Robinson vorgestellt und stellt einige grundlegende Bausteine zur Verfügung auf die sich sowohl die Arbeiten von Lükkarila [5] als auch die Arbeiten von Kari und Papasoglu [3] stützen. Auf die genaue Verbindung zu diesen beiden Kachelsätzen wird im nächsten Abschnitt noch genauer eingegangen.

Robinson selber wurde inspiriert durch einen Text von Robert Berger [1] der in diesem ebenfalls einen aperiodischen Kachelsatz entwirft, der jedoch mehr als 20.000 verschiedene Kacheln beinhaltet. Robinson umgeht dieses Problem der Größe indem er Pfeile und ursprünglich auch Dellen (ähnlich wie bei einem Puzzle) verwendet. Die Verwendung von Kacheln mit Dellen wird jedoch durch die Verwendung von Sandwichkacheln und einem weiteren Kachelset mit Pfeilen abgelöst, da die Verwendung von Dellen an den Ecken eine Umwandlung in klassisch verwendete Farben schwierig macht.

Das Papier von Robinson beschäftigt sich im Wesentlichen mit der nichtperiodischen Kachelung einer Ebene mit seinem Kachelsatz, sowie mit einem Beweis von Bergers Theorem [1] bezüglich der Unentscheidbarkeit des Kachelungsproblems. Für die von Robinson gewählte Darstellung gilt, wie bereits erwähnt, dass Pfeilspitzen immer in Pfeilenden übergehen müssen, entsprechendes gilt für Doppelpfeile. Für die Darstellung dieser Kacheln muss gesagt werden dass Pfeile die über die komplette Kachel gehen eine vereinfachte Darstellung von zwei Pfeilen in der selben Kachel ist, die ineinander übergehen.

4 Aperiodische Kachelsätze

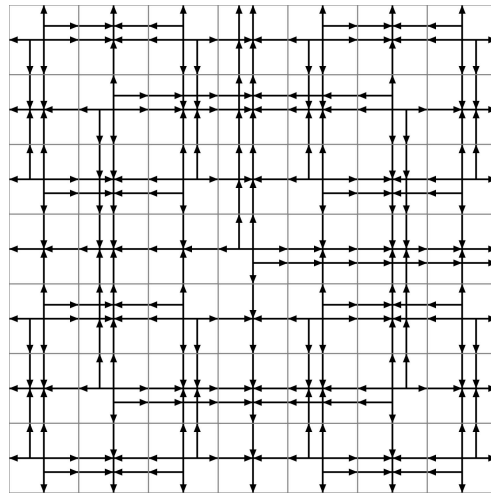


Abbildung 4.1: Ausschnitt des von Robinsons Kachelsatz generierten Muster. Zu erkennen sind 4 3-auf-3-Quadrate, sowie ein 5-auf-5-Quadrat.

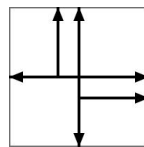


Abbildung 4.2: Ein Kreuz.

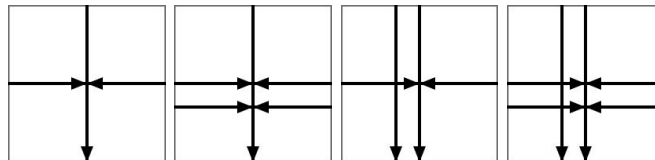


Abbildung 4.3: Arme, nach ihrer Nummerierung von links nach rechts geordnet. Lange, durchgezogene Pfeile stellen zwei kurze Pfeile dar, die in die selbe Richtung zeigen.

Die in Abbildung 4.2 dargestellte Kachel wird als Kreuz, die vier in den Abbildungen 4.3 dargestellten Kacheln als Arme bezeichnet. Diese fünf Kacheln sind die grundlegenden Basiskacheln.

Die Menge an Basiskacheln in Robinsons Kachelsatz besteht außer aus diesen fünf Kacheln auch noch aus deren gespiegelten und rotierten Versionen. Die Anzahl dieser Basiskacheln beträgt 28 individuellen Kacheln. Diese werden zusätzlich mit sogenannten Paritätskacheln zu Sandwichkacheln gepaart, worauf aber später noch eingegangen wird.

Kreuze werden anhand ihrer Doppelpfeile klassifiziert. Das oben abgebildete Kreuz hat die Orientierung "Nord-Ost", da die Doppelpfeile nach Norden und Osten zeigen. Arme werden anhand ihrer primären Pfeile, also die Pfeile die eine Kachel komplett überspannen, klassifiziert. Ein Arm ist in die Richtung orientiert in die sein primärer Pfeil beziehungsweise seine primären Pfeile zeigen.

Zu beachten ist hier, dass die Gruppen der Kreuze, vertikalen und horizontalen Arme mit Rotation und Spiegelung jeweils in sich abgeschlossen sind, was die Eigenschaft des 4-Wege-Determinismus betrifft. Dies bedeutet dass sich wenn die Art der Kachel bekannt ist anhand jeder Ecke festlegen lässt, um welche Kachel es sich handelt. Dies lässt sich durch einen erschöpfenden Vergleich prüfen.

Zusätzlich zu den fünf grundlegenden Kacheln die oben aufgeführt werden werden vier sogenannte Paritätskacheln eingeführt. Sie dienen dazu eine Versetzung der Kreuze im späteren Muster zu erzwingen so dass beispielsweise keine 2-auf-2-Quadrate entstehen können.

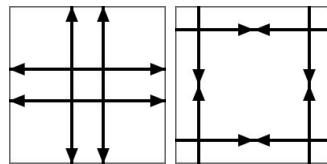


Abbildung 4.4: Paritätskacheln (1) und (2). (1) wird mit allen Kreuzen gepaart. Kreuze die mit dieser Kachel gepaart sind werden als 1-auf-1-Quadrate bezeichnet. Kachel (2) wird mit allen Basiskacheln gepaart.

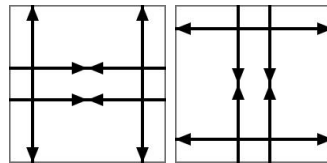


Abbildung 4.5: Paritätskacheln (3) und (4). Kachel (3) wird mit vertikalen, (4) mit horizontalen Kacheln gepaart.

Die Paritätskachel (1) wird dabei mit den Kreuzen gepaart, die Paritätskachel (4) mit horizontalen Armen, die Paritätskachel (3) mit vertikalen Armen und die Paritätskachel (2) mit allen Kacheln. Aus den fünf grundlegenden Kacheln erhält man so zehn Sandwichkacheln ohne Rotation und Spiegelung und 56 Kacheln mit Rotation und Spiegelung. Kacheln die mit einer der Paritätskacheln (1) bis (4) gepaart sind werden entsprechend als Kacheln der Parität (1) bis (4) bezeichnet. Für Kacheln der Parität (1) gilt dabei zusätzlich dass es sich bei diesen um 1-auf-1-Quadrate handelt.

Der so definierte Kachelsatz erzwingt, bei valider Kachelung, eine selbstähnliche Struktur von Quadraten die sich überschneiden. Die Quadrate werden dabei durch die doppelten Pfeile der Kacheln gebildet. Dieser selbstähnliche Aufbau erzeugt für beliebig große Ebenen eine Kachelung die valide aber nicht periodisch ist. Ein Ausschnitt einer solchen Kachelung ist in Abbildung 4.1 aufgeführt.

Aufbau einer solchen Kachelung:

Alle Quadrate haben eine Größe $2^n + 1$ für $n \geq 1$. Die Ecken eines Quadrates, also dessen Kreuze, liegen dabei für alle Quadrate größer als 1 im Zentrum eines kleineren Quadrates. Somit gehört jedes Quadrat der Größe $2^n + 1$ zu genau einem

4 Aperiodische Kachelsätze

Quadrat der Größe $2^{n+1} + 1$, dass wiederum genau zu einem Quadrat der Größe $2^{n+2} + 1$ gehört und so weiter. Als ein Block wird ein Quadrat mit allen zugehörigen kleineren Quadraten bezeichnet. Hat ein Quadrat die Größe die Größe $2^n + 1$ so hat der zugehörige Block die Größe $2^{n+1} - 1$. Eine Darstellung dieses Sachverhaltes wird gezeigt in Abbildung 4.9, die Färbung dient dabei nur der deutlicheren Herausarbeitung der verschiedenen Quadrate.

Die Ausrichtung eines Blocks entspricht der Ausrichtung seines zentralen Kreuzes. Ist ein Block gegeben existiert aufgrund des Vorhandenseins rotierter Varianten jeder Kachel auch eine rotierte Variante dieses Blockes. Gegeben vier entsprechender Blöcke mit jeweils verschiedenen Ausrichtungen lässt sich der nächst größere Block konstruieren, indem im Zentrum ein Kreuz und in den Quadranten jeweils ein Block platziert wird, wobei deren zentrale Kreuze wieder ein Quadrat bilden. Die fehlenden Reihen und Spalten die vom zentralen Kreuz des neuen Blockes ausgehen werden dann entsprechend gekachelt.

Eigenschaften dieser Kachelung:

Für diesen Kachelsatz wurde Aperiodismus bewiesen [6], aus später aufgeführten Gegenbeispielen wird allerdings ersichtlich dass er nicht 4-Wege-deterministisch ist.

Zum Nichtdeterminismus:

Für die spätere Vorstellung einer 4-Wege-deterministischer Versionen dieses Kachelsatzes ist es nützlich eine Fallunterscheidung vorzunehmen zwischen welchen Kacheln es zu Nichtdeterminismus kommt. Eine ähnliche Fallunterscheidung wird von Kari und Papasoglu in [3] vorgenommen.

Die Betrachtung der Kacheln die mit den Paritätskacheln (1), (3) und (4) gepaart sind kann hierbei ausgelassen werden, da es bei Kacheln nur zu Nichtdeterminismus kommen kann wenn beide Kacheln mit der Paritätskachel (2) gepaart sind. Ist dies nicht der Fall lassen sich Kacheln anhand ihrer Paritätskacheln unterscheiden da jede der Paritätskacheln (1), (3) und (4) eindeutig auf die mit ihnen gepaarten Kacheln schließen lässt.

In diesem Beispiel werden Kacheln anhand ihrer Nord-West-Ecken unterschieden, das Beispiel kann jedoch auf die anderen Ecken analog dazu angewandt werden.

Angenommen es treten an der West- und Nordkante...

...zwei ausgehende Pfeile (einzeln oder doppelt) auf. Dann muss es sich um ein Kreuz handeln. Anhand der Art der Pfeile lässt sich 4-Wege-deterministisch schließen um welche Art von Kreuz es sich handelt.

...ein eingehender Pfeil und ein ausgehender Pfeil. Je nach Richtung des ausgehenden Pfeiles lässt sich auf den primären Pfeil und damit auf die Richtung des Armes schließen. Da die Menge der vertikalen beziehungsweise horizontalen Arme bezüglich 4-Wege-Determinismus abgeschlossen ist lässt sich die Kachel so eindeutig identifizieren.

...zwei eingehende Pfeile. Es kann sich sowohl um einen vertikalen als auch um einen horizontalen Arm handeln. Es kommt also ein Nichtdeterminismus auf. Für die spätere Erweiterung genügt es also dieses Problem zu beheben.

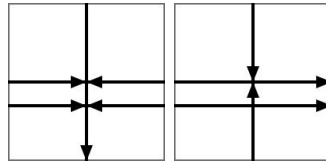


Abbildung 4.6: *Beispiel: Diese beiden Arme sorgen für Nichtdeterminismus an der NW-Ecke wenn sie beide mit der Paritätskachel (2) gepaart sind.*

4.2 Gefärbter Kachelsatz von Robinson

Dieser Kachelsatz wurde von Robinson in seinem Papier “Undecidability and non-periodicity for tilings of the plane” (1971) [6] als Erweiterung zu seinem im selben Papier vorgestellten Kachelsatz eingeführt.

Dabei färbt er die Seitenarme der ursprünglichen Kacheln in rot und grün. Dies führt zu einem Kachelsatz bestehend aus sieben Basisarmen und zwei Basiskreuzen sowie den zugehörigen rotierten und gespiegelten Varianten. Die modifizierten Basisarme sind in Abbildung 4.8 dargestellt, die Kreuze in Abbildung 4.7. Eine valide Kachelung erzeugt das selbstähnliche Muster an Quadraten dass in dieser Form in Kari und Papasoglus [3] und Lukkarilas [5] Papieren dargestellt ist.

Durch die Färbung werden die bereits im grundlegenden Kachelsatz vorhandenen Quadrate deutlicher herausgestellt, außerdem lässt sich in diesem Kachelsatz in Konstruktionen anhand der Farbe für Quadrate auf die Größe und die Platzierung relativ zu anderen Quadraten schließen.

Quadrate einer Farbe schneiden dabei nie Quadrate der gleichen Farbe. Dies hat zur folge dass alle Quadrate einer Größe $2^n + 1$ die selbe Farbe haben, während alle um eine Größenordnung kleineren $2^{n-1} + 1$ - und größeren $2^{n+1} + 1$ -Quadrate die jeweils andere Farbe haben.

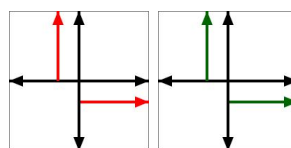


Abbildung 4.7: *Gefärbte Kreuze.*

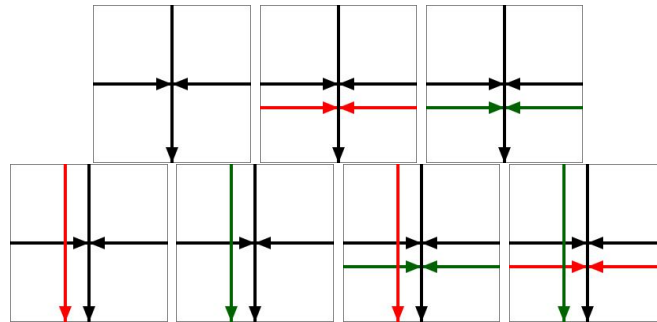


Abbildung 4.8: Gefärbte Arme, nach ihrer Nummerierung von links nach rechts geordnet. Lange, durchgezogene Pfeile stellen zwei kurze Pfeile dar, die in die selbe Richtung zeigen.

4.3 Kari und Paposoglus Kachelsatz

Kari und Paposoglu bauen in ihrer Arbeit “Deterministic aperiodic tile sets” (1999) auf dem von Robinson in [6] konstruierten Kachelsatz auf und entwerfen eine Variante dieses Kachelsatzes die zusätzlich 4-Wege-deterministisch ist. Dieser neue Kachelsatz ist homomorph auf Robinsons Kachelsatz abbildbar, was bedeutet dass es einen Homomorphismus h gibt der den Kachelsatz von Kari und Papsoglu auf den Kachelsatz von Robinson abbildet und dabei die Farbe erhält.

Der Kachelsatz wurde von Kari und Paposoglu in [3] ursprünglich für Beweise auf dem Gebiet der allgemeinen metrischen Räume entworfen, der hier vorliegende Ausschnitt beschränkt sich allerdings auf den deterministischen Kachelsatz selber.

Konstruktion: Der Kachelsatz besteht wie der Kachelsatz aus dem letzten Kapi-

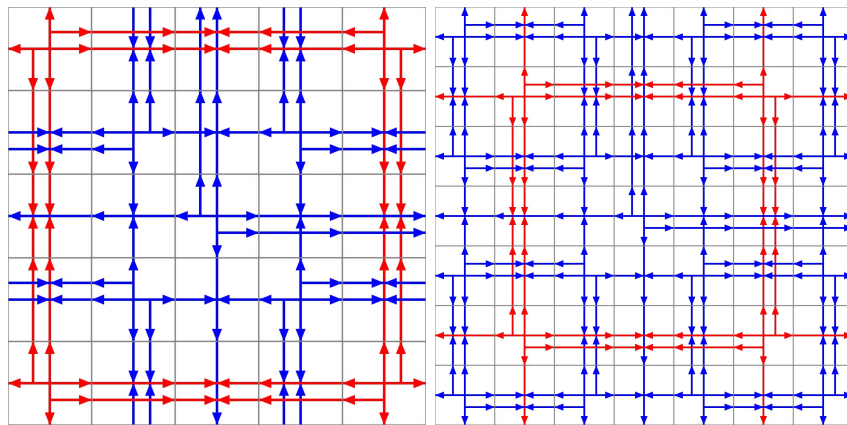


Abbildung 4.9: Links: ein 5-auf-5-Quadrat, die Kantenlänge von Quadraten dieser Form wird durch $2^n + 1$ berechnet. Rechts: ein 7-auf-7-Block, die Kantenlänge von Blöcken dieser Form werden mit der Formel $2^n - 1$ berechnet.

tel aus einem Satz von Basiskacheln und einem Satz von Paritätskacheln. Genauer gesagt besteht er aus den Kacheln die auch von Robinson genutzt wurden, allerdings

werden diese an einigen Pfeilen um Beschriftungen ergänzt.

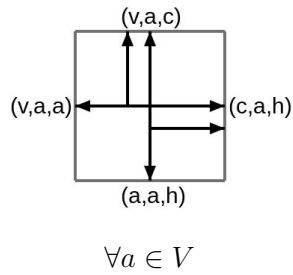


Abbildung 4.10: Modifiziertes Kreuz

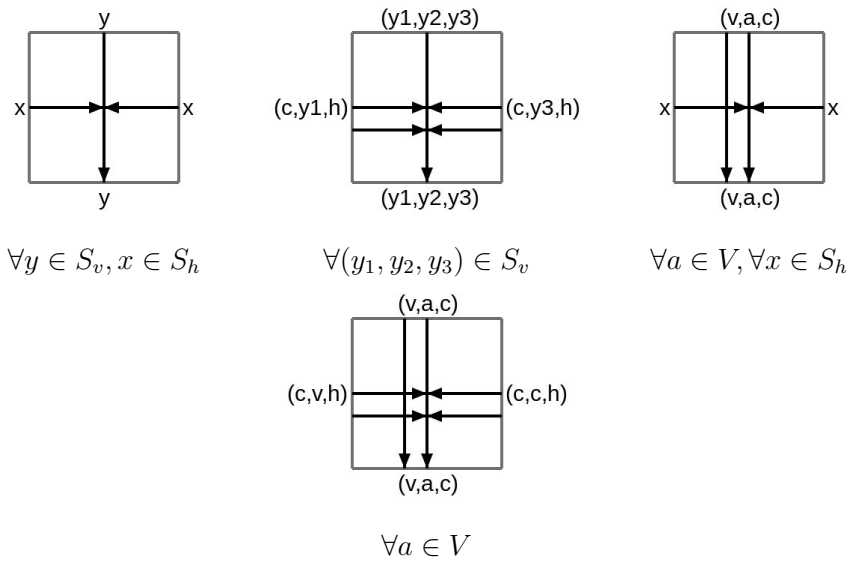


Abbildung 4.11: modifizierte Arme, numerisch angeordnet

4 Aperiodische Kachelsätze

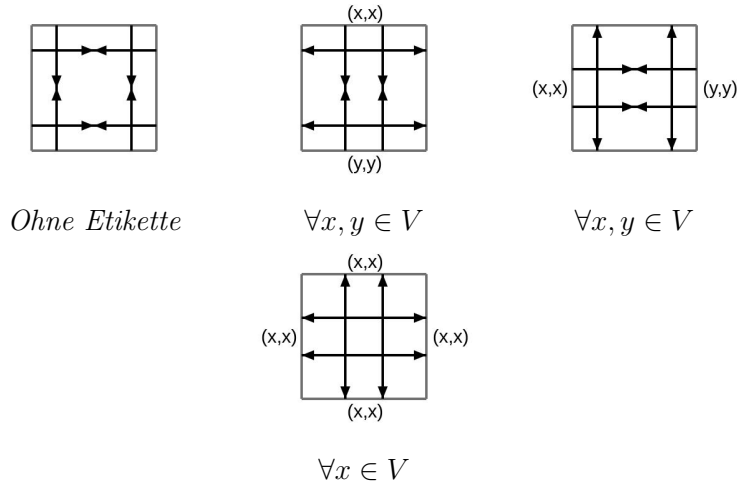


Abbildung 4.12: modifizierte Paritätskacheln, numerisch angeordnet

Wie zu sehen ist besteht der Homomorphismus von Kari und Papasoglus Kachelsatz auf den Kachelsatz von Robinson aus einer Funktion die die Kacheln auf die formgleiche Kachel ohne Beschriftungen und die Paritätskacheln entsprechend abbildet.

Für die Variablen gilt:

$$V = \{v, h, c\} \tag{4.1}$$

$$S_h = \{(x, x, v), (v, x, x) | x \in V\} \tag{4.2}$$

$$S_v = \{(x, x, h), (h, x, x) | x \in V\} \tag{4.3}$$

Einzelne vertikale beziehungsweise horizontale Arme

$$D_h = \{(h, x, c), (c, x, h) | x \in V\} \tag{4.4}$$

$$D_v = \{(v, x, c), (c, x, v) | x \in V\} \tag{4.5}$$

Doppelte vertikale beziehungsweise horizontale Arme

In Kari und Papasoglus Papier existieren zusätzlich noch weitere Pfeile als grafische Darstellung, die hier allerdings nicht gezeigt werden, da für die Funktionalität nur die Etiketten relevant sind.

Diese Basiskacheln gepaart mit den zugehörigen Paritätskacheln und den anderen, durch Rotation und Spiegelung erhaltenen Kacheln bilden den Kachelsatz P . Bei der Spiegelungen ist darauf zu achten dass zusätzlich zum Spiegelung der Kanten auch die Etikettierung verändert werden muss. Jedes Etikett der Form (x_1, x_2, x_3) wird zu einem Etikett der Form (x_3, x_2, x_1) . Bei der Rotation werden alle Vorkommen von v zu h und umgekehrt. Bei einer Rotation von Ost- auf Südkante oder West- auf Nordkante muss zusätzlich die Reihenfolge der Elemente in den Beschriftungen umgekehrt werden.

Paarung: Um das eben genannte Resultat zu erzielen werden die Kacheln folgendermaßen gepaart:

Seien

$$P_1 := \text{die Paritätskachel } p \text{ der Form (1)} \quad (4.6)$$

$$P_2(a) := \text{die Paritätskachel der Form (2) mit } x = a \quad (4.7)$$

$$P_3(a, b) := \text{die Paritätskachel } p \text{ der Form (3) mit } x = a \wedge y = b \quad (4.8)$$

$$P_4(a, b) := \text{die Paritätskachel } p \text{ der Form (4) mit } x = a \wedge y = b \quad (4.9)$$

die verschiedenen Paritätskacheln, dann werden:

Kreuze mit den Paritätskacheln P_1 und $P_2(c)$ gepaart.

Horizontale Kacheln t mit $t_n = (x_1, -, x_3)$ und $t_s = (x_1, -, x_3)$ mit den Paritätskacheln $P_3(x_1, x_3)$ und $P_2(v)$ gepaart.

Vertikale Kacheln t mit $t_w = (x_1, -, x_3)$ und $t_e = (x_1, -, x_3)$ mit den Paritätskacheln $P_4(x_1, x_3)$ und $P_2(h)$ gepaart.

Die Etiketten dienen der Funktion den Nichtdeterminismus bei Kacheln der Parität (4) aufzuheben. Hierzu wird durch Signale von vier Kreuzen der Parität (1) aus determiniert, welche Art von Kachel der Parität (4) zwischen ihnen liegt. Die Variablen c , v und h stehen dabei entsprechend für Kreuz, vertikaler Arm und Horizontaler Arm. Diese Signale werden über die Paritätskacheln zu ihnen hin propagiert.

Für eine ausführliche Beschreibung, sowie Beweisen die Determinismus und Existenz valider Kachelungen zeigen wird auf das Papier “Deterministic aperiodic tile sets” [3] verwiesen.

Zu beachten ist die Änderung der Art wie Kacheln mit Paritätskacheln gepaart werden. Die Paritätskachel (4) in Robinsons Kachelsatz ist hier die Paritätskachel (1). Dies ändert allerdings nicht die Funktionalität.

Das erzeugte Muster:

Das erzeugte Muster dieser Kachelung entspricht dem von Robinsons Kachelsatz erzeugten, bei dem die Kanten um Beschriftungen erweitert werden. Im nachfolgenden Text werden diese Beschriftungen meist nicht dargestellt, so dass die gezeigten Kachelungen den von Robinsons Kachelsatz entsprechen.

Eigenschaften:

Da ein Homomorphismus auf Robinsons Kachelsatz existiert muss die Aperiodizität nicht nachgewiesen werden, da eine Kachelung deren Bild aperiodisch ist nicht selber periodisch sein kann.

Der Beweis des 4-Wege-Determinismus ist dergestalt, dass die Kreuze der Parität (4) des entstehenden Kachelsatzes die Kacheln des $2^n - 1$ -Quadrat dessen Zentrum sie darstellen festlegen, wodurch der 4-Wege-Determinismus, der nur bei Armen der Parität (4) auftritt, aufgehoben wird.

Nachfolgend sind beispielhaft einige Eigenschaften dieses Kachelsatz, der fortan als P bezeichnet wird, aufgelistet. Für ausführliche Beweise wird auf die Arbeit “Deterministic aperiodic tile sets” [3] verwiesen aus der diese entnommen wurden.

Lemma 1. *P ist 4-Wege-deterministisch und aperiodisch.*

Diese beiden Eigenschaften wurden bereits oben erläutert. Aperiodizität folgt aus dem Homomorphismus auf Robinsons Kachelsatz, 4-Wege-Determinismus aus der Konstruktion.

4.4 Gefärbter Kachelsatz von Kari und Papasoglu

Lukkarilla verwendet in seinem Papier implizit eine gefärbte Version von Kari und Papasoglus Kachelsatz. In dieser Sektion wird ein Algorithmus angegeben der eine solche gefärbte Version des Kachelsatzes erzeugt. Diese ist für alle praktischen Anwendungen analog einsetzbar zur gefärbten Version Robinsons Kachelsatzes. Im nachfolgenden Text wird dieser Kachelsatz als C_k bezeichnet, während der gefärbte Kachelsatz von Robinson [6] als C_r bezeichnet wird.

Kachelsatz:

Dieser Kachelsatz wird konstruiert indem die Kacheln von Kari und Papasoglus Kachelsatz gefärbt werden.

Kreuze der Parität (1) werden komplett blau gefärbt.

Alle Kreuze der Parität (4) werden komplett in einer der Farben rot und blau gefärbt. Vertikale und horizontale Arme die an allen vier Kanten Seitenarme haben werden so gefärbt, dass die Nord- und Südkante und die Ost- und Westkante jeweils die gleiche Farbe haben, die Farbe der Nord- und Südkante darf jedoch nicht der der Ost- und Westkante entsprechen.

Alle anderen Arme werden beliebig gefärbt unter der Beschränkung dass die vertikalen Kanten und die horizontalen Kanten jeweils die gleiche Farbe haben.

Lemma 2. *Für den Kachelsatz C_k existiert eine valide Kachelung.*

Für den Kachelsatz von Kari und Papasoglu ist offensichtlich eine valide Kachelung möglich. Deshalb genügt hier der Beweis, dass die zusätzliche Färbung dies nicht verhindert. Hierzu wird zuerst für die beiden kleinsten Blöcke gezeigt dass sie gekachelt werden können, wenn sie im unmodifizierten Kachelsatz gekachelt werden können. Danach genügt der induktive Beweis dass für alle kachelbaren Blöcke der Größe $2^n - 1$ auch die nächstgrößeren Blöcke $2^{n+1} - 1$ gekachelt werden können.

Im folgenden werden Blöcke deren zentrales Kreuz rot ist als rote Blöcke bezeichnet. Dementsprechend werden blaue Blöcke definiert.

Offensichtlich können Blöcke der Größe 1, also Kreuze mit Paritätskachel (1) für alle möglichen Farben gekachelt werden.

Auch Blöcke der Größe 3 können offensichtlich gekachelt werden. Da die Kreuze der Parität (1) in ihren Ecken die Farben der vertikalen Pfeile an vertikalen Kanten und die Farben der horizontalen Pfeilen an horizontalen Kanten vorgeben und diese wiederum die Farbe des zentralen Kreuzes determinieren ist die Färbung eines 3-auf-3-Blocks sogar eindeutig. 3-auf-3-Blöcke können also nur blaue Ecken haben,

da solche Ecken nur Kreuze der Parität (1) sein können. Daraus folgt, dass Blöcke der Größe 3 immer rote Blöcke sind. Also sind Blöcke der Größe 1 als blaue Blöcke kachelbar, während Blöcke der Größe 3 als rote Blöcke kachelbar sind.

Offensichtlich existieren für jeden kachelbaren Block auch drei entsprechende Blöcke die rotierte Versionen des Blockes darstellen.

Im Induktionsschritt genügt es nun zu zeigen dass, wenn es im Kachelsatz eine valide Kachelung eines Blockes gibt, es dann auch in der gefärbten Kachelung eine eindeutige entsprechende Kachelung bestehend aus gefärbten Versionen der Kacheln des ursprünglichen Blocks gibt.

Ein Block dieser Form hat an seinen Außenkanten nur Einzelpfeile, sowie zwei auswärts zeigende Doppelpfeile in Richtung des zentralen Kreuzes. Ist ein solcher Block mit seinen rotierten Gegenstücken gegeben genügt es zu zeigen dass die Reihen und Spalten die vom zentralen Kreuz ausgehen gekachelt werden können. Für die Farbe des zentralen Kreuzes und damit auch der ausgehenden Reihen gilt dass sie blau ist, falls die zentralen Kreuze der kleineren Blöcke rot sind, ansonsten sind sie rot. Wenn für eine ungefärbte Variante einer Kachel an der Kante eines Blockes eine Kachel existiert die passt, dann existiert auch für alle möglichen gefärbten Versionen dieser Kachel eine passende Kachel. Somit ist eine Kachelung der zentralen Reihe und Spalte möglich.

Blöcke der Größe $2^{2*n+1} + 1$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind dabei immer blau, während Blöcke der Größe $2^{2*n} + 1 = 4^n + 1$ immer rot sind.

Für diesen gefärbten Kachelsatz existieren sowohl Homomorphismen auf C_r , als auch auf den unmodifizierten Kachelsatz von Kari und Papasoglu. Der Homomorphismus auf Kari und Papasoglu besteht einfach aus dem entfernen der Farbe. Die Abbildung auf den farbigen Kachelsatz von Robinson besteht aus dem entfernen von Etiketten, sowie der Farben der Hauptpfeile in der Mitte von Kanten sodass nur noch die Nebenpfeile gefärbt sind. Robinsonkacheln der Art (1) verlieren dabei also alle Farbe.

Lemma 3. *Der Kachelsatz C_k ist 4-Wege-deterministisch und aperiodisch.*

Der 4-Wege-Determinismus folgt aus dem Fakt, dass bereits der ursprüngliche Kachelsatz 4-Wege-deterministisch ist. Da die Modifikation nur Farbe hinzufügt müssten zwei Kacheln, die an einer Ecke nichtdeterministisch wären, so gefärbt sein dass die Farben an der entsprechenden Ecke identisch, aber an mindestens einer anderen Kante verschieden ist. Bei dem vorliegenden Farbschemas kann dies nicht der Fall sein. Der Kachelsatz muss also 4-Wege-deterministisch sein.

Aperiodizität folgt aus dem Homomorphismus auf den unmodifizierten Kachelsatz der ebenfalls aperiodisch ist.

5 Lukkarilas Beweise

Die folgende Sektion des Textes arbeitet die Kernaussagen des Textes “The 4-way deterministic tiling problem is undecidable” (2009) von Ville Lukkarila [5] heraus. Dabei werden einige kleine Änderungen eingebracht, sowie die Notation teilweise angepasst. Außerdem werden einige wenige Vereinfachungen vorgenommen, wo diese angebracht waren.

Die Beweisführung von Lukkarila lässt sich in drei grundlegende Abschnitte aufteilen. Im ersten Abschnitt entwirft er einen 4-Wege-deterministischen, aperiodischen Kachelsatz auf Basis der Kachelsätze von Robinson und des darauf basierenden von Kari und Papasoglu. Dieser wird im zweiten Beweis verwendet werden um 4-Wege-Determinismus zu erzeugen.

Im zweiten Abschnitt beweist er die Unentscheidbarkeit des Kachelungsproblems mit einer Ausgangskachel für 4-Wege-deterministische Kachelsätze unter Zuhilfenahme des im vorherigen Abschnitt konstruierten Kachelsatzes.

Im dritten Abschnitt schließlich beweist er die Unentscheidbarkeit des Kachelungsproblems mit 4-Wege-deterministischem Kachelsatzes, wiederum unter Zuhilfenahme der Konstruktion seines Kachelsatzes.

5.1 Lukkarilas Kachelsatz

Als ersten Schritt in seinem Beweis entwirft Lukkarila einen 4-Wege-deterministischen Kachelsatz D der eine einzelne diagonale Linie auf der Ebene forciert.

Die prägende und erwünschte Eigenschaft dieses Kachelsatzes ist eben diese Diagonale die dank der aperiodischen Eigenschaft des Kachelsatzes einzigartig auf der gekachelten Ebene ist.

Die Diagonale wird dabei durch Elemente einer Untermenge D_1 des Kachelsatzes dargestellt. Dieser Kachelsatz D_1 ist Teil zweier disjunkter Kachelsätze D_1 und D_2 , mit $D = D_1 \cup D_2$, die zusammen den Kachelsatz D bilden. Die Kacheln den Kachelsatz D_2 Kacheln dabei den Rest der Ebene, liegen allerdings selber nie auf der Diagonalen.

Ein solches Muster ist nicht erzwungen, es sind noch andere valide Kachelungen möglich. Für diesen Beweis ist es allerdings ausreichend zu zeigen dass eine Kachelung existiert die die geforderten Eigenschaften hat.

Einige Worte zum Ablauf der Konstruktion: Zuerst wird aus zwei grundlegenden Kachelsätzen der Kachelsatz T entworfen der grundlegende Eigenschaften erfüllt. Dieser zweilagige Sandwichkachelsatz wird dann mit seiner rotierten Version zum Kachelsatz U zusammengefasst. Aus diesem wiederum kann man den fertigen Kachelsatz D gewinnen.

5.1.1 Struktur

Lukkarila entwirft seinen Kachelsatz D als vierschichtigen Sandwichkachelsatz. Hierbei bestehen die erste und die dritte Schichten aus dem gefärbten Kachelsatz von Kari und Papasoglu beziehungsweise einer um 180 Grad rotierten Variante dessen, während die zweite und vierte Schicht Elemente eines eigens dafür konstruierten Kachelsatzes beziehungsweise einer um 180 Grad rotierten Version dessen beinhalten. Strukturell ist D folgendermaßen aufgebaut:

Schicht 1: Gefärbter Kachelsatz von Kari und Papasoglu*

Schicht 2: Kacheln aus einem von Lukkarilla eingeführten Kachelsatz (siehe Grafik)

Schicht 3: Gefärbter Kachelsatz von Kari und Papasoglu um 180 Grad rotiert*

Schicht 4: Die Kacheln aus Schicht 2 um 180 Grad rotiert

*Diese Kachelsätze treten als ihre $3 \times x$ -Clusterkachelsätze auf

Jede Kachel aus der ersten Schicht ist hierbei mit einer bestimmten Untermenge der Kacheln aus Schicht 2 gepaart. Die Schichten drei und vier sind die erste, respektive zweite Schicht, um 180 Grad rotiert.

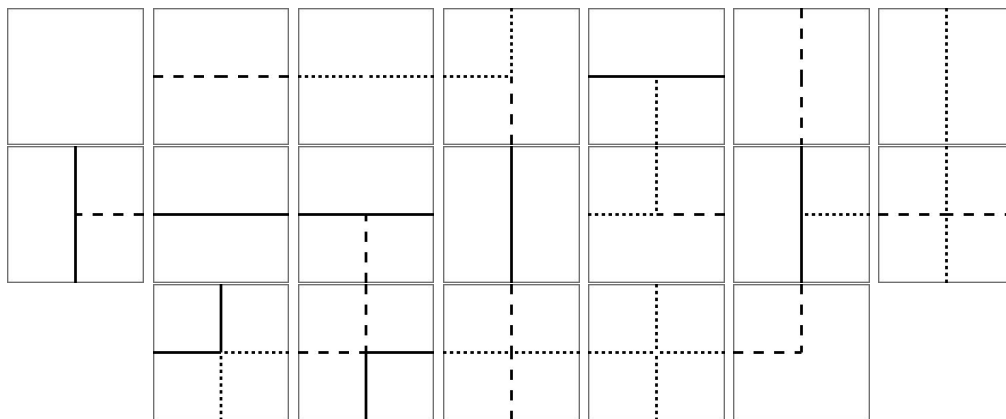


Abbildung 5.1: Die auf Lage 2 verwendeten Kacheln

5.1.2 erste und zweite Lage

Um seinen Beweis später zu vereinfachen führt Lukkarilla eine Nummerierung für die Ecken und Kantenmittelpunkte allgemeiner Quadrate auf, wie sie von Kari und Papasoglus Kachelsatz erzeugt werden. Die Zahlen 2, 4, 6 und 8 benennen Ecken eines dieser Quadrate dar, beginnend an der Nord-westlichen Ecke und sich gegen den Uhrzeigersinn fortsetzend. Die Zahlen 1, 3, 5 und 7 bezeichnen die Kantenmittelpunkte ausgehend von der östlichen Kante und ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn fortgesetzt. Zu beachten ist hierbei dass, wie in [6] und [3] aufgeführt, Quadrate die mit Kari und Papasoglus Kachelsatz erzeugt werden immer eine ungerade Kantlänge haben, weshalb ein einziger Mittelpunkt jeder Kante existiert.

Wie bereits angemerkt können Quadrate einer solchen Kachelung solchermaßen gefärbt werden, dass sie mit steigender Kantlänge abwechselnd rot und blau gefärbt sind (siehe Schaubild im Kapitel "aperiodische Kachelsätze"). Quadrate der

gleichen Farbe schneiden sich dabei nie. Per Definition sind hierbei die kleinsten 3-auf-3-Quadrate blau. Es folgt dass alle blauen Quadrate die Größe $2^{(2n+1)} + 1$ für $n \geq 0$ und alle roten Quadrate die Größe $4^n + 1$ für alle $n > 0$ haben.

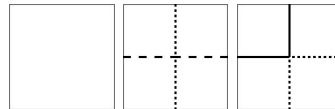
Außerdem relevant für die Konstruktion des Sandwichkachelsatzes ist die Lage der Kacheln, konkret ob die Ecken eines Quadrats innerhalb eines blauen 3-auf-3-Quadrates liegen. Um dies später herausfinden zu können fasst Lukkarila die Kacheln des Kachelsatzes von Kari und Papasoglu wie im Kapitel "Grundlagen" beschrieben zu einem 3×3 -Kachelsatz zusammen. Durch diese Konstruktion lässt sich anhand seiner Farben für jede Kachel bestimmen ob diese in einem blauen 3-auf-3-Quadrat auftritt oder außerhalb eines solchen.

Paarung: In Lukarillas Kachelsatz werden die Kacheln der Schichten 1 und 2 folgendermaßen gepaart:

a) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (1) liegen werden mit E_1 gepaart:



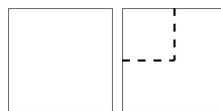
b) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (2) liegen werden mit E_2 gepaart:



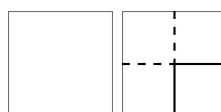
c) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (3) liegen werden mit E_3 gepaart:



d) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (4) liegen und in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegen werden mit E_4 gepaart:

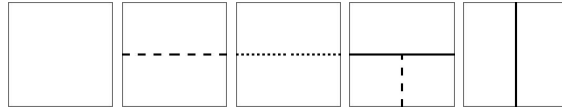


Kacheln die nicht in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegen werden mit E_5 gepaart:

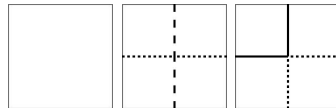


5 Lukkarilas Beweise

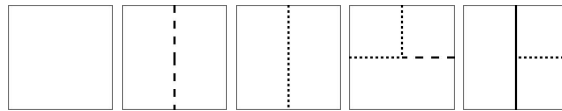
e) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (5) liegen werden mit E_6 gepaart:



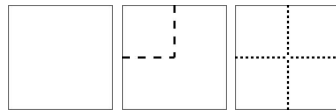
f) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (6) liegen werden mit E_7 gepaart:



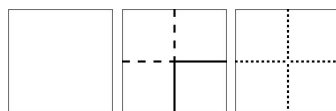
g) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (7) liegen werden mit E_8 gepaart:



h) Kacheln die in Schicht 1 auf Position (8) liegen und in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegen werden mit E_9 gepaart:



Kacheln die nicht in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegen werden mit E_{10} gepaart:



i) Kacheln die in Schicht 1 auf keiner der Positionen (1) bis (8) zu finden sind werden E_{11} gepaart:



Der daraus entstehende, bisher zweilagige, Sandwichkachelsatz wird im folgenden als Kachelsatz T bezeichnet werden. Sei A der 3×3 -Kachelsatz von Kari und Papasoglu. Außerdem sei $B = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{11}$. Per Konstruktion gilt:

$$T \subseteq A \times B \tag{5.1}$$

5.1.3 dritte und vierte Lage

Der hierdurch entstandene Sandwichkachelsatz T ist noch nicht 4-Wege-deterministisch. Dies folgt aus dem nicht 4-Wege-deterministischen Kachelsatz B . Ein Beispiel: die erste Kachel in E_9 und die zweite Kachel in E_9 sind nicht Süd-Ost-Deterministisch. Dies sorgt bei der Paarung einer Kachel der Lage eins mit diesen beiden Kacheln auch im Resultat für Nichtdeterminismus. Im späteren Verlauf wird dieser Nicht-Determinismus durch weitere Paarungen aufgehoben.

Sei jetzt $A_1 \subseteq A$ die Menge der Kacheln die auf Position (4) oder (8) und im Zentrum eines blauen 3-auf-3-Quadrates liegen. Sei t_d die hier abgebildete Kachel.

 t_d

T wird nun so in T_1 und T_2 zerlegt, dass in T_1 die Kacheln die später auf der Mitteldiagonalen liegen zusammengefasst sind. Kacheln auf der Diagonalen sind dann solche Sandwichkacheln, die auf der zweiten Lage t_d enthalten.

$$T_1 = A_1 \times \{t_d\} \quad (5.2)$$

$$T_2 = T \setminus T_1 \quad (5.3)$$

Zur Konstruktion von U_1 und U_2 wird zusätzlich noch eine Rotationsfunktion benötigt. Diese wird definiert als

$$\text{rot}(M) = \{\text{rot}(m) \mid m \in M \wedge \text{rot}(x) = \text{“x um 180 Grad rotiert“}\} \quad (5.4)$$

Lukkarila entwirft U , U_1 und U_2 jetzt als

$$U_1 = T_1 \times \text{rot}(T_1) \quad (5.5)$$

$$U_2 = T_2 \times \text{rot}(T_2) \quad (5.6)$$

$$U = U_1 \cup U_2 \quad (5.7)$$

Für U_1 gilt deshalb $U_1 = A_1 \times \{t_d\} \times \text{rot}(A_1) \times \{\text{rot}(t_d)\}$, die spätere Diagonale besteht also auf der zweiten und vierten Lage aus zueinander um 180 Grad gedrehten Versionen von t_d .

Um jetzt für jede Kachel sagen zu können wird D als 4×4 -Clusterkachelsatz von U gebildet. Somit lässt sich für jede Kachel anhand der Farbe ihrer Kanten schließen ob diese auf der Diagonalen liegt.

5.1.4 Das erzeugte Muster

Wie bereits am Anfang dieses Abschnitts erwähnt ist dieser Kachelsatz nicht eindeutig, es existiert also mehr als eine valide Kachelung. In diesem Abschnitt wird eine bestimmte Kachelung begutachtet, die als die erwünschte Kachelung bezeichnet werden könnte. Für das Kachelungsproblem mit gesetzter Startkachel kann eine Ursprungskacheln angegeben werden, aus der diese Kachelung entsteht. Ist eine solche Kacheln gegeben wird dieses Muster erzwungen, die Kachelung ist also eindeutig. Auf Lage eins befindet sich hierbei eine valide Kachelung des Kachelsatzes von Kari und Papasoglu, diese ist in den hier beinhalteten Darstellungen meist ausgeblendet um die gewünschten Kernaussagen deutlicher herauszustellen.

Auf Lage zwei besitzt die Kachelung ein einseitig selbstähnliches Muster, dass an der Mitteldiagonalen anfängt und sich immer weiter oberhalb der Diagonalen ausbreitet. Unterhalb der Diagonalen befinden sich auf Lage zwei nur weiße Kacheln. Auf Lage drei befindet sich eine valide Kachelung der um 180 Grad rotierten Versionen der Kacheln aus Lage eins. Auf Lage vier wiederum befindet sich die Kachelung von Lage zwei um 180 Grad rotiert, das heißt das Muster breitet sich unterhalb der Diagonalen aus, die leeren Kacheln oberhalb. Die beiden Diagonalen laufen per Konstruktion aufeinander. Alle im folgenden beschriebenen Eigenschaften beziehen sich auf Lage zwei können jedoch analog auf Lage vier übertragen werden, weshalb diese hier meist nicht extra aufgeführt ist. Effektiv werden hier also eigentlich größtenteils Eigenschaften von T besprochen, diese treffen allerdings auf aus die daraus entstehenden Kachelsätze U und D zu.

Die bereits angesprochene diagonale Linie die quer über die Ebene gezeichnet wird, wird in diesem Kachelsatz auf der zweiten Schicht des Sandwich-Kachelsatzes durch Elemente aus U_1 dargestellt, also durch Kacheln die Nord-westlich ausgerichteten Ecken gestrichelter Linien entsprechen. Von diesen Punkten ausgehend entsteht ein selbstähnliches Muster aus Signalen, das sich rekursiv mit der zunehmenden Entfernung zur Mitteldiagonalen und mit jedem Rekursionsschritt in der Größe fast verdoppeln. Eine Unterteilung des Musters in einzelne Rekursionsschritte wird hier vorgenommen, um die Eigenschaft der Existenz einer validen Kachelung darzustellen. Die einzelnen Schritte sind dabei durch treppenförmig verlaufende durchgezogene Linien getrennt.

Ein solcher Schritt beginnt an einer treppenförmigen Linie die von einem Quadrat der Größe $2^n + 1$ zu weiteren Quadraten der selben Größe verläuft. Beginnend im Zentrum eines $2^n + 1$ -Quadrates das in der Süd-Ost-Ecke des zugehörigen $2^{n+1} + 1$ liegt, setzt sie sich zum nordöstlichen Quadrat der Größe $2^n + 1$ fort, um von diesem östlich zum nordwestlichen Quadrat des $2^{n+1} + 1$ -Quadrates rechts neben dem ursprünglichen $2^{n+1} + 1$ fort. Von dort verläuft sie nördlich zur südwestlichen Ecke des Quadrates darüber, und von dort wieder zur südöstlichen Ecke des selben Quadrates.

Ein Rekursionsschritt beginnt entweder mit der zweiten Kachel aus E_9 , falls es der erste Rekursionsschritt ist und somit auf der Mitteldiagonalen liegt, oder aus der zweiten Kachel aus E_{10} , falls es nicht der erste Rekursionsschritt ist. Ist eine solche Ursprungskachel gegeben erzwingt sie die Platzierung aller anderer Ursprungskacheln und damit der gesamten Kachelung.

Lemma 4. Sei t_{start} die Ursprungskachel die im Zentrum eines m -auf- m - Quadrates liegt wobei $m = 2^n + 1$. Sei außerdem $f(x, y) = t_{\text{start}}$. Dann gilt für eine solche Kachelung $f: f(x + 2 * 2^n * k, y + 2 * 2^n * k) = t_{\text{start}}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei a eine Kachel der Form t_{start} auf Position $(0, 0)$ im Zentrum eines $2^n + 1$ -Quadrates. Dieses Quadrat liegt aufgrund der Definition von t_{start} im der Position (4) oder (8) des zugehörigen $2^{n+1} + 1$ -Quadrates. Für diese beiden Fälle muss dieses Lemma bewiesen werden. Es genügt dabei zu beschreiben wie sich das Signal an den Kacheln der Form (1) bis (8) verhält, da es an anderen Positionen nur gerade weiter propagiert werden kann.

Fall 1: Position (4)

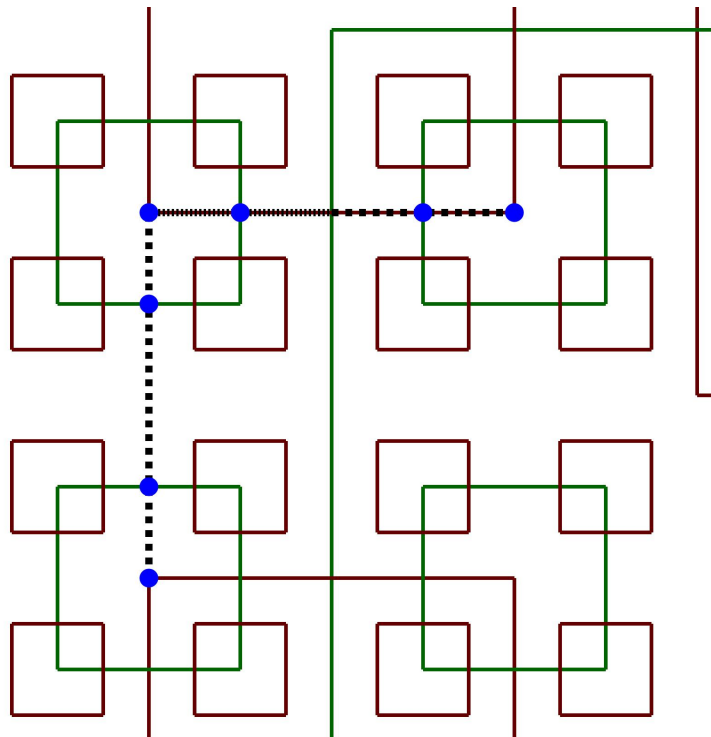


Abbildung 5.2: Beispielhafter Verlauf. Punkte an denen das Signale eine potentielle Änderung machen könnte sind durch blaue Kreise markiert. Andere ausgehende Signale sind ausgeblendet. Anzumerken ist das in diesem Beispiel nicht alle blauen Punkte an Schnittstellen mit Quadraten in diesem Schaubild liegen. Sie liegen stattdessen an Punkten an denen allgemein eine solche Situation auftreten kann.

Zu beachten ist dass die Abbildung 5.2 allgemein für Quadrate der Größe $2^n + 1$ gilt, wobei alle Quadrate kleiner als $2^{n-1} + 1$ nicht dargestellt werden. An Stellen die nicht markiert sind treten nur Kacheln auf die Signale ohne Verzweigungen geradlinig weiterleiten. Dass es keine weiteren Stellen gibt an denen andere Signaländerungen auftreten können folgt dass ein solcher Verlauf erzwungen ist.

Der erste kritische Punkt in 5.2 ist durch t_{start} gegeben. Ein gestrichelte Signal setzt

5 Lukkarilas Beweise

sich nordwärts bis zur Position $(0, 2^{n+1})$ fort, für die Fälle (3) und (7) der beiden $2^{n-1} + 1$ -Quadrate die es durchläuft gibt es keine andere Möglichkeit als das Signal weiter zu tragen. An dieser Position vom Typ (6) gibt es nur eine Möglichkeit zur Kachelung, nämlich die zweite Kachel aus Kachelsatz E_6 . Von diesem Punkt aus setzt sich ein gestricheltes Signal nordwärts und ein dotiertes Signal westwärts fort. Das westwärts gewandte Signal durchläuft eine Kachel der Position (1). Hier gibt es zwei Möglichkeiten einer Kachelung: Die zweite und die dritte Kachel des Kachelsätze E_1 . Nur die zweite Kachel des Kachelsatzes E_1 ist dabei möglich, da bei einer Wahl der dritten ein gestricheltes Signal südwärts folgen würde, das an der Position (8) nur westlich zur Position (7) folgen kann, wo es mit der bereits vorhandenen Kachelung kollidiert. Es folgt also ein ostwärts gewandtes dotiertes Signal, das an der Position (7) eines $2^{n+1} + 1$ -Quadrates notwendigerweise zu einem nordwärts gewandten dotierten Signal und einem ostwärts gewandten gestrichelten Signal wird. Das ostwärts gewandte Signal durchläuft die Position (5) unverändert und erzwingt an der Position (8) des $2^{n+1} + 1$ Quadrates eine Kachel des Typs t_{start} . Die Art der Startkachel hängt davon ab ob sie innerhalb eines blauen 3-auf-3-Quadrates liegt oder nicht.

Fall 2: Position (8)

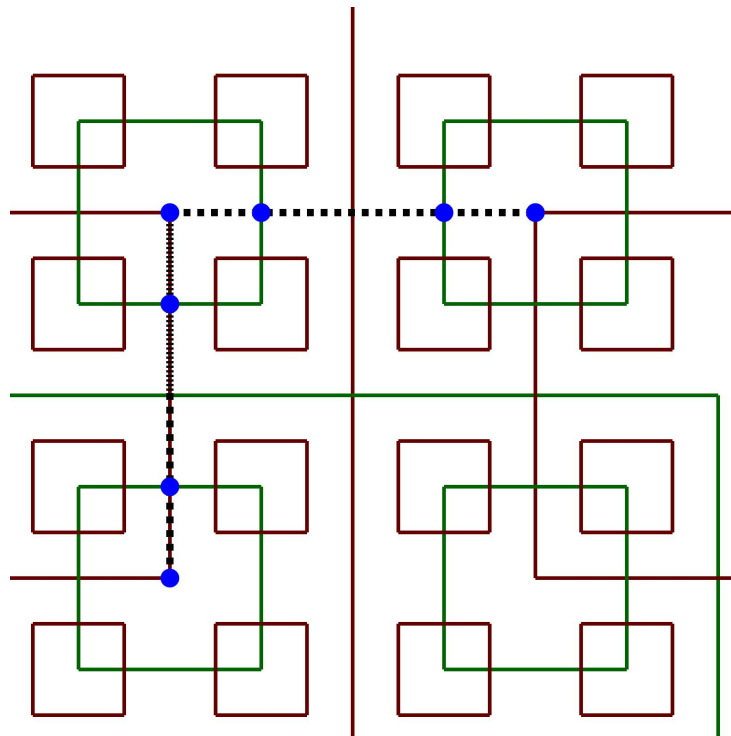


Abbildung 5.3: Beispielhafter Verlauf. Punkte an denen das Signale eine potentielle Änderung machen könnte sind durch blaue Kreise markiert. Andere ausgehende Signale sind ausgeblendet. Anzumerken ist das in diesem Beispiel nicht alle blauen Punkte an Schnittstellen mit Quadraten in diesem Beispiel liegen.

Liegt dieser Fall vor setzt sich das Signal nordwärts unverändert durch eine Position (3) fort, wird auf der nachfolgenden Position (1) zum dotierten Signal, wobei ebenfalls ein westlich gewandtes dotiertes Signal ausgeht, durchquert eine Position (7) und auf der nachfolgenden Position (2) existieren zwei mögliche Kachelungen, nämlich die zweite und die dritte Kachel des Kachelsatzes E_2 . Hierbei muss die zweite Kachel gewählt werden, da es bei der Wahl der dritten zur Kollision mit der bereits vorhandenen Kachelung kommt. Das von Süden kommende gepunktete Signal wird also weiter fortgesetzt, es entsteht jedoch auch ein gestricheltes Signal westwärts. Dieses westwärts gewandte Signal durchquert eine Position (1) und eine Position (7) ohne Möglichkeit zur Signaländerung. Schließlich erzwingt es auf Position (8) des $2^{n+1} + 1$ -Quadrates eine Kachel der Art t_{start} . Die genaue Art der Kachel hängt wieder davon ab, ob die Kachel in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegt oder nicht.

Somit ist gezeigt dass diese beiden Arten von Kacheln jeweils einen Nachbar erzwingen, welcher rekursiv wieder Nachbarn erzwingt. Für eine weiter beispielhafte grafische Darstellung wird auf das Papier von Kari und Papasoglu [3] verwiesen.

Lemma 5. *Die Kachelung eines Rekursionsschrittes gegeben der Ursprungskacheln ist eindeutig und erzeugt Ursprungskacheln für den nächsten Rekursionsschritt.*

Die Kachelung eines Rekursionsschrittes ist eindeutig vorgegeben durch die im letzten Lemma erzeugte Kette von Ursprungskacheln und den von ihnen erzeugten Signalen. In Grafik 5.4 werden alle kritischen Punkte aufgeführt. Für jeden dieser Punkte kann unter Berücksichtigung bereits bekannter Signale abgeleitet werden, dass nur eine Kachel und damit eine Möglichkeit der Signalverarbeitung existiert.

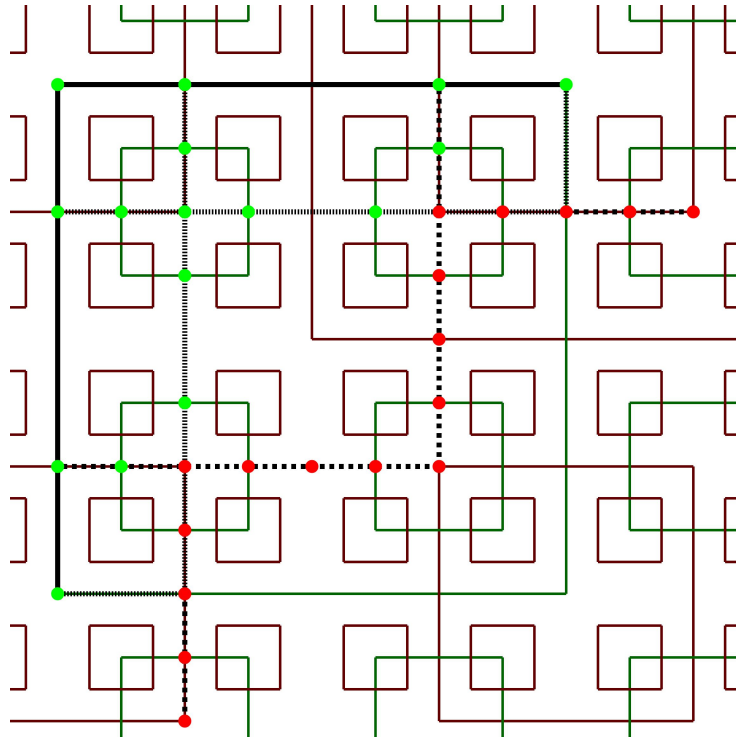


Abbildung 5.4: Ein Rekursionsschritt. Alle Punkte stellen kritische Stellen dar, also Stellen an denen ein Signalwechsel stattfinden kann. Für rote Punkte und die von ihnen ausgehenden Signale wurde im letzten Lemma bereits bewiesen dass sie gezwungenermaßen diese Form haben. Für grüne Punkte existiert bei der auftretenden Kombination von bekannten Signalen und Position nur eine eindeutige Kachel.

Die Kachel links oben ist dabei die zweite Kachel aus Kachelsatz E_{10} und damit wiederum eine Ursprungskachel. Da diese im Zentrum eines $2^{n+1} + 1$ -Quadrates liegt, verläuft die nächste Rekursionsebene auf den nächst größeren Quadraten.

Lemma 6. *Unterhalb der Diagonalen können nur weiße Kacheln auftreten.*

Für den obigen Fall gilt das unterhalb eines Rekursionsschrittes, bei dem die Startkachel die zweite Kachel aus Kachelsatz E_9 ist keine Signale in östliche oder südliche Richtung existieren. Für den ersten Rekursionsschritt gilt deshalb dass dessen Süd-Östliche-Kante komplett weiß gekachelt ist. Daher kann für Kacheln die direkt an die Diagonale angrenzen auf Lage zwei nur eine weiße Kachel gekachelt werden, da es keine anderen Kacheln gibt deren, Nord- und Westkanten jeweils weiß sind. Für die wiederum daran angrenzenden Kacheln gilt dies dann ebenfalls. So erzwingt eine weiße Linie eine komplett weiße Kachelung. Die Existenz valider Kachelungen wird dabei nicht eingeschränkt, da jede Kachel der Lage eins auf Lage zwei mit der weißen Kachel gepaart ist.

Theorem 1. *Es gibt eine valide Kachelung mit diesem Kachelsatz und ist eine Startkachel der Form t_{start} gegeben ist diese Kachelung erzwungen.*

Wie in den obigen Lemmas gezeigt erzwingt eine Startkachel der Art t_{start} die Kachelung einer Diagonalen, unter der sich nur weiße Kacheln befinden. Diese Diagonale erzwingt Rekursionsschritte, die wiederum rekursiv weitere größere Rekursionsschritte erzwingen. Da zwischen den Signalen der zweiten Lage nur weiße Kacheln existieren und diese mit allen Kacheln gepaart sind existiert mit dem oben beschriebenen Aufbau der Rekursionsschritte also eine valide Kachelung.

Verläuft eine solche Grenze anfangs an den Ecken eines $2^n + 1$ -Quadrates, so setzt sich das Muster dergestalt fort, dass die Grenze die das Ende des Rekursionsschrittes darstellt anhand der Ecken des nächstgrößeren Quadrates, also einem $2^{n+1} + 1$ -Quadrat. Pro Rekursionsschritt verdoppelt sich das Muster also fast. Im folgenden werden Rekursionsschritte die von einer Grenze ausgehen die zwischen Ecken von Quadraten der Größe $2^n + 1$ ausgehen als $2^n + 1$ -Rekursionsschritte bezeichnet. Der kleinste Rekursionsschritt entsteht direkt aus den Kacheln die in D_1 liegen und hat die Größe 5. Nach oben hin haben die Rekursionsschritte dagegen keine Grenze. Die Muster der Rekursionsschritte entstehen aus den beiden gestrichelten Linien die sich, wie hier in der Abbildung zu sehen, aus den Ecken der Grenze heraus fortsetzen. Alle Kacheln die in einem Rekursionsschritt aber nicht auf einer der Linien liegen sind weiß gekachelt.

5.1.5 Eigenschaften:

Lemma 7. *U ist 4-Wege-deterministisch*

Zuerst muss hier festgestellt werden, warum T nicht 4-Wege-deterministisch ist. Da eine Kachel im Kachelsatz von Kari und Papasoglu nicht zugleich an zwei der Positionen (1) bis (8) sein kann kann dieser in disjunkte Teilmengen geteilt werden, die jeweils 4-Wege-deterministisch sind und mit einem der Kachelsätze E_1 bis E_{11} gepaart werden. Da die Kachelsätze E_1 bis E_3 , E_5 bis E_8 und E_{10} bis E_{11} 4-Wege-deterministisch sind, ist die Menge der Sandwichkacheln die durch Paarung mit diesen Kachelsätzen entsteht ebenfalls 4-Wege-deterministisch. Der Nichtdeterminismus tritt also nur innerhalb der Menge von Kacheln auf, die mit E_4 oder E_9 gepaart sind.

Es genügt zu zeigen, dass die weiße Kachel und t_d Süd-Ost-Deterministisch und Nord-West-deterministisch für ihre rotierte Variante sind, da dies die einzige Form des Nichtdeterminismus innerhalb der Kachelsätze E_4 und E_9 ist. Es ist also ausreichend diesen Nichtdeterminismus aufzuheben um U 4-Wege-deterministisch zu machen. Für den Nord-West-Determinismus verläuft die Argumentation wie in den folgenden Paragraphen für den Süd-Ost-Determinismus und wird deshalb nicht extra behandelt.

Für U wird dieser Fall von Nichtdeterminismus durch die Art der Konstruktion aufgehoben.

Angenommen U sei wie oben definiert. Läge auf Lage eins oder Lage drei eine Kachel die nicht in E_4 oder E_6 liegt und auf Lage zwei läge eine weiße Kachel, liegt ein Determinismus vor, da t_d nicht in einer solchen Konstellation auftreten kann.

Es müssen also nur die Fälle unterschieden werden bei denen auf Lage eins und

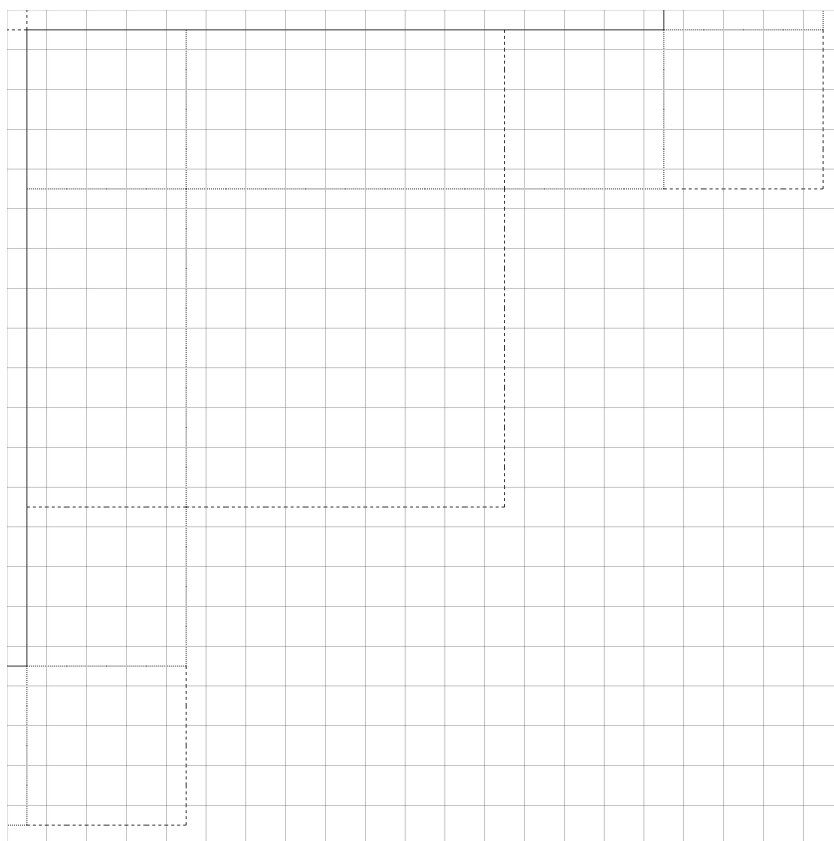


Abbildung 5.5: *Beispiel eines Rekursionsschrittes. Dieses Muster wiederholt sich an der oben links erkennbaren durchgezogenen Ecke. Die unten rechts erkennbaren Ecken liegen jeweils innerhalb eines roten 3-auf-3-Quadrates.*

drei Kacheln der Positionen (2) oder (6) liegen und auf Lage zwei eine weiße Kachel liegt. Nichtdeterminismus kann dann nur an der Süd-Ost-Ecke auftreten, da sich die Kacheln die hier auftreten an allen anderen Ecken von allen anderen Kacheln unterscheiden lassen die in einer solchen Position auftreten können.

Liegt auf Lage zwei eine weiße Kachel, gilt für alle Kacheln die auf Lage vier auftreten können dass diese an der Süd-Ost-Ecke nicht mit t_d übereinstimmen. Es tritt also 4-Wege-Determinismus auf.

Somit behebt U den Nichtdeterminismus der in T noch auftreten kann.

Lemma 8. *Das Kachelset T erlaubt eine valide Kachelung f , so dass*

$$f(x, y) \in T_1 \iff x = y \wedge x, y \in 4\mathbb{Z} \quad (5.8)$$

gilt

Die Existenz einer solchen validen Kachelung folgt aus der Struktur des Kachelsatzes. Im vorausgehenden Abschnitt “das erzeugte Muster” wird der Fakt erläutert dass gegeben einer Kachel die t_d enthält eine Kachelung erzwungen wird, die an den genannten Koordinaten ebenfalls t_d erzwingt und daraus eine valide Kachelung von T entsteht. Auf die die Eigenschaften des Lemmas zutreffen.

Es existiert also eine Kachelung für die das Lemma gilt.

Lemma 9. *Der 4-Wege-deterministische Kachelsatz U erlaubt eine valide Kachelung f , so dass*

$$f(x, y) \in T_1 \iff x = y \wedge x, y \in 4\mathbb{Z} \quad (5.9)$$

Da t_d nur gleichzeitig auf den Lagen zwei und vier auftauchen kann wird gegeben einer solchen Kacheln sowohl auf der zweiten als auch auf der vierten Lage die Bildung einer Diagonalen erzwungen. Diese Diagonalen laufen aufeinander.

Da eine Kachelung von T existiert und da die Kacheln aus T in U größtenteils frei gepaart sind muss dann auf den Lagen drei und vier eine Kachelung existieren die von der Kachelung auf Lage eins und zwei bis auf die Lage der Kacheln t_d und damit der Diagonalen unabhängig ist.

Für das Kachelset D schlussendlich gilt:

$$D = U^{4 \times 4} \quad (5.10)$$

. Im Sinne der vorausgehenden Kachelsätze wird D_1 als die Untermenge von Clusterkacheln definiert, in denen sich mindestens eine Kachel aus U_1 findet und die damit auf der Diagonalen liegen müssen. Dementsprechend wird D_2 durch $D_2 = D \setminus D_1$ definiert.

Wie oben erwähnt erhalten Cluster-Kachelsätze allgemein die Eigenschaft des 4-Wege-Determinismus von ihren ursprünglichen Kachelsätzen. Da das Lemma 5 gilt und Distanzen durch die Verwendung des 4×4 -Clustersatzes sozusagen um den Faktor 0.25 skaliert werden muss für $T_1^{(4 \times 4)}$

$$x = y \wedge x, y \in \mathbb{Z} \iff f(x, y) \in T_1^{4 \times 4} \quad (5.11)$$

gelten. So kann man die Aussage des letzten Lemmas zur zweiten Aussage des folgenden Theorems verallgemeinern:

Theorem 2. Aus den vorausgehenden Beweisen und Definitionen folgt dass es ein Kachelset $D = D_1 \cup D_2$ gibt das

1. 4-Wege-deterministisch ist
2. eine valide Kachelung $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow D$ existiert, wobei

$$f(x, y) \in D_1 \iff x = y \tag{5.12}$$

hält.

5.2 Das Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel

Das 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel ist ein Spezialfall des allgemeinen Kachelungsproblems. Es gleicht diesem bis auf den Fakt das auf der Ebene zu Beginn bereits eine Kachel gesetzt ist. Dies schränkt die Problematik in dem Sinne ein, dass beim allgemeinen Kachelungsproblem nicht notwendigerweise für jede Kachel des Kachelsatzes gilt dass diese im Endeffekt auch verwendet wird. Um dieses Entscheidungsproblem von seinem allgemeineren Verwandten deutlicher zu unterscheiden folgt ein Gedankenexperiment dass die besonderen Eigenschaften dessen ein wenig herausstellt. Wie Eingangs erwähnt existiert die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Untermenge eines Kachelsatzes die funktionell gleich mächtig wie der ursprünglichen Kachelsatz ist, während eine andere disjunkte Untermenge existiert die für mögliche Kachelungen irrelevant ist. Je nachdem welcher Untermenge die gesetzte Kachel entstammt ergibt sich so für das Entscheidungsproblem abhängig von der gegebenen Startkachel ein anderes Ergebnis.

Andererseits können mögliche Konstrukte durch die gesetzte Kachel sozusagen erzwungen werden die im allgemeinen Problem nicht berücksichtigt werden da einfachere Kachelungen möglich sind. Diese Eigenschaft wird in diesem Abschnitt benutzt.

Lukkarilas Beweis greift dabei den im Kapitel “Definitionen” kurz umrissenen Ansatz der Reduktion von Turing-Maschinen auf Kachelsätze auf. Das entstehende Kachelset ist allerdings auch hier nicht 4-Wege-deterministisch, weshalb Lukkarila es in einer Konstruktion ähnlich derer seines Kachelsatz (siehe Kapitel “Lukkarilas Kachelsatz”) modifiziert.

Ist die Reduktion vorgenommen, ist für den entstehenden Kachelsatz eine Kachelung möglich genau dann wenn die zugehörige Turingmaschine nicht hält.

Durch eine solchen Reduktion einer Turingmaschine auf 4-Wege-deterministische Kachelsätze mit Startkachel folgt die Unentscheidbarkeit des Kachelungsproblems mit gesetzter Kachel direkt aus der Unentscheidbarkeit des Halteproblems der Turingmaschinen.

5.2.1 Struktur

Die Lagen des Kachelsatzes E haben folgende Funktionen:

Lage 1: Repräsentation der Berechnungen einer Turingmaschine

Lage 2: Sorgt für Unterscheidung zwischen Aktions- und Reaktionskachel

Lage 3: Unterscheidung der linken Übergangskacheln und den zustandserhaltenden Kacheln aus Lage 1

Lage 4: Unterscheidung der rechten Übergangskacheln und den zustandserhaltenden Kacheln aus Lage 1

Die Lage eins dient hierbei der grundlegenden Funktionalität, während die Kachelsätze der Lagen zwei, drei und vier dazu dienen den Kachelsatz E 4-Wege-deterministisch zu machen.

5.2.2 erste Lage

Der Kachelsatz der Lage 1 entspricht dabei dem der aus einer Turingmaschine durch die im Kapitel "Definitionen" eingeführte Konstruktionsmethode erhalten wird. Zur Wiederholung:

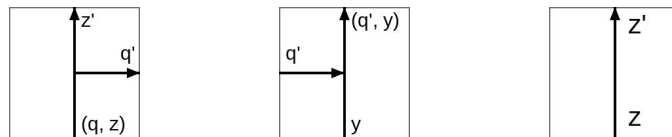


Abbildung 5.6: Aktionskachel, Reaktionskachel und zustandserhaltende Kachel

Da in diesem konkreten Problem eine Kachel gesetzt ist, kann eine Reihe der Kachelung forciert werden, die einer Startkonfiguration, hier einem leeren Band mit Startzustand q_{start} , entspricht auf die dann eine Turingmaschine angewendet wird.

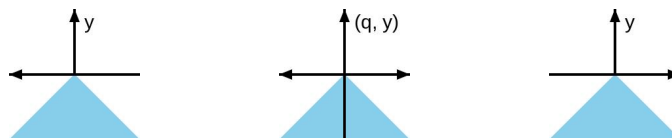


Abbildung 5.7: Eingabeband erzeugende Kacheln

Dieser Kachelsatz ist noch nicht 4-Wege-deterministisch, da die zustandserhaltenden Kacheln mit den Aktions- und Reaktionskacheln für Nichtdeterminismus sorgen. Zudem können die Aktions- und Reaktionskacheln untereinander nicht immer deterministisch unterschieden werden, was ebenfalls Nichtdeterminismus erzeugt. Dies sind jedoch die einzigen Punkte die für Nichtdeterminismus sorgen und werden auf den anderen Lagen behoben.

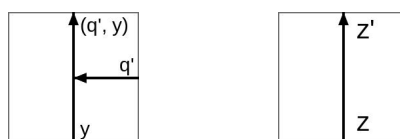


Abbildung 5.8: Nichtdeterministisch an SW-Ecke

5.2.3 zweite Lage

Die zweite Lage von E besteht aus einer Menge von Kacheln der hier gezeigten Form:

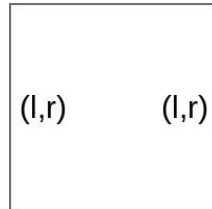


Abbildung 5.9: Kacheln der zweiten Lage. Zur Interpretation von (l,r) siehe Text.

Im folgenden Paragraph wird beschrieben wie die Kacheln der Lage 1 mit den Kacheln der Lage 2 gepaart werden:

Sei M_1 die Menge aller Aktionskacheln und M_2 die Menge der Reaktionskacheln sowie $n = |M_1 \cup M_2|$, sei außerdem $f : M_1 \cup M_2 \rightarrow \{1 \dots n\}$ eine bijektive Aufzählungsfunktion.

Für jedes mögliche Paar aus Aktionskachel und Reaktionskachel sei l die linke Kachel und r die rechte Kachel. Dann sei t die Kachel nach dem oben dargestellten Schema, wobei (i, k) durch $(f(l), f(r))$ ersetzt werden. Jetzt werden l, r sowie alle zustandserhaltenden Kacheln auf Lage 2 mit t gepaart. Abschließend werden alle Konfigurationskacheln auf Lage 2 mit einer leeren Kachel gepaart.

Da so jede Kachel mit ihrer eigenen Identifikationsnummer und der ihres Partners gekennzeichnet ist kann sie von anderen Kacheln unterschieden werden, da dieses Zahlenpaar eindeutig ist.

Die zweite Lage dient so der Differenzierung zwischen verschiedenen möglichen Aktions- und Reaktionskacheln, so dass Aktions- und Reaktionskacheln untereinander 4-Wege-deterministisch sind. Wie oben bereits aufgeführt ist dies eines der einzigen beiden Probleme die für Nichtdeterminismus sorgen. Stellt man die zweite Lage grafisch dar, ähnelt sie horizontalen Signalen, bestehend aus jeweils einem Zahlenpaar, auf jeder Reihen. Ausnahme ist die erste Reihe, die das Ausgangsband darstellt und auf der zweiten Lage mit leeren Kacheln gepaart ist.

5.2.4 dritte und vierte Lage

Die dritte und vierte Lage von E ähneln sich in Aufbau und Konstruktion und werden deshalb hier zugleich behandelt. Diese zwei Lagen bestehen aus modifizierten Versionen des im vorherigen Kapitels konstruierten Kachelsatz D , mithilfe von D_1 und D_2 . Hierbei wird die Eigenschaft der Existenz einer einzelnen Diagonalen genutzt, um die Aktions- und Reaktionskacheln der Turingmaschine 4-Wege-deterministisch zu machen.

Zur Wiederholung:

$$D = D_1 \cup D_2 \tag{5.13}$$

$$D_1 = \text{Menge aller Kacheln die auf der Nordwest-Südost-Diagonalen liegen} \tag{5.14}$$

5.2 Das Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel

$$D_2 = D \setminus D_1 \quad (5.15)$$

Aus D wird nun der Kachelsatz D^r gewonnen, indem bei allen Kacheln in D die Farben der nördlichen und die südlichen Kanten getauscht und die der östlichen und westlichen Kanten bijektiv durch Farben einer, zu den Farben von D disjunkten, Farbmenge ersetzt werden.

D^r ist dabei deterministisch, da D 4-Wege-deterministisch ist, und der Tausch der Farben strukturell einer Spiegelung und der Anwendung eines Homomorphismus entspricht, wobei beide Operationen den Determinismus erhalten. Auch $D \cup D^r$ ist deterministisch da sowohl D als auch D^r 4-Wege-deterministisch ist und D mit D^r , dass an allen östlichen und westlichen Kanten Farben einer von den Farben von D disjunkten Menge hat, offensichtlich keine gleichen Ecken haben kann. Daraus folgt dass $D \cup D^r$ 4-Wege-deterministisch ist.

Durch $D \cup D^r$ können beliebige Zickzack-Linien gezeichnet werden. Dabei werden Nordost-Südwest-Diagonalen durch die D -Komponente und Nordwest-Südost-Diagonale durch die D^r -Komponente dargestellt. Übergänge von D nach D^r in einer Kachelung durch $D \cup D^r$ sind dabei immer durch eine horizontale Kante gekennzeichnet, da die östlichen und westlichen Farben der Komponenten keine anderen Übergänge zulassen. Obwohl solche Übergänge prinzipiell in jeder Reihe möglich sind, treten sie aufgrund der Paarung nur dann auf, wenn der virtuelle Lese-Schreibkopf der Turingmaschine ebenfalls einen Richtungswechsel vornimmt.

Paarung:

Analog zu D_1 und D_2 werden D_1^r und D_2^r definiert:

$$D_1^r = \text{“alle Kacheln auf der NW-SO-Diagonale“} \quad (5.16)$$

$$D_2^r = D^r \setminus D_1^r \quad (5.17)$$

Nun werden die Übergangskacheln, also die Paare aus Aktions- und Reaktionskacheln auf den Lagen drei und vier folgendermaßen mit den Kachelsätzen D_1 , D_2 , D_1^r und D_2^r gepaart:

Lage drei: Die jeweils linke Kachel (Aktionkachel nach rechts oder Reaktionskachel von rechts) aller Übergangspaare werden mit den ihrer Richtung entsprechenden Diagonalen gepaart. Die Kacheln auf die die eine Aktion nach rechts darstellen werden auf Lage drei mit D_1 gepaart, die Kacheln auf die “Reaktionskachel von rechts” zutrifft werden mit den Kacheln in D_1^r gepaart. Alle anderen Kacheln werden auf Lage drei mit $D_2 \cup D_2^r$ gepaart.

Lage vier: Die jeweils rechte Kachel (Aktionskachel nach links oder Reaktionskachel von links) aller Übergangspaare werden mit den ihrer Richtung entsprechenden Diagonalen gepaart. Die Kacheln auf die “Aktionskachel nach links” zutrifft werden auf Lage vier mit D_1^r gepaart, die Kacheln auf die “Reaktionskachel von links” zutrifft werden mit den Kacheln in D_1 gepaart. Alle anderen Kacheln werden auf Lage drei mit $D_2 \cup D_2^r$ gepaart.

Da so die Sandwichkacheln die Aktionen des Schreib-Lesekopfes darstellen anhand der Lage drei (für die jeweils linke Kachel) und der Lage vier (für die jeweils rechte Kachel) von den zustandserhaltenden Kacheln unterschieden werden können ist somit der 4-Wege-Determinismus für den Sandwichkachelsatz E hergestellt.

Die Anwendung des Kachelsatzes von Lukkarila hat bei dieser Konstruktion den

Vorteil nichtperiodisch zu sein, so dass die, zur Funktion notwendige, Diagonale eindeutig ist, was bei periodischen Kachelungen nicht der Fall wäre.

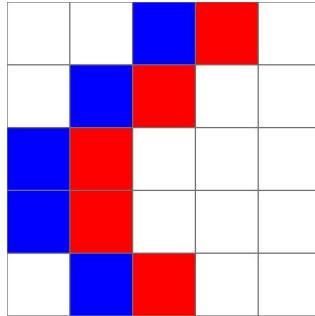


Abbildung 5.10: *Illustration der dritten und vierten Lage. Blaue Kästen repräsentieren die linke Kachel des Lese-/Schreibkopfes, rote die rechte.*

5.2.5 Wahl der gesetzten Kachel

Erwähnenswert ist hier noch ein Aspekt der von Lukkarila nicht beachtet wurde. Während zwar in seinem Kachelsatz der Lage 1 die Wahl der gesetzten Kachel eindeutig ist (siehe oben bei “Basiskacheln”), ist sie dies im fertigen Kachelsatz E nicht mehr, da laut seiner Definition die vorherige Ausgangskachel $k_1 \in L_1$ mit allen möglichen Kacheln des Kachelsatzes D gepaart wurde. Dies hat zur Folge dass es keine triviale Standardstartkachel mehr gibt. Die Wahl der Startkachel, ab sofort k_{start} genannt, hängt von der ursprünglichen Turingmaschine ab, genauer in welche Richtung sich diese aus dem Startzustand heraus bewegt. Bewegt sie sich nach rechts muss k_{start} auf der vierten Lage eine Kachel aus D_1 (und damit auf der Nordost-Südwest-Diagonalen), und auf der dritten Lage ebenfalls eine Kachel aus D_2 sein, die allerdings direkt rechts neben einer NW-SO-Diagonalkachel liegt. Bewegt sich die Turingmaschine jedoch nach links, muss k_{start} auf der dritten Lage eine Kachel aus D_1^r (und damit auf der Nordwest-Südost-Diagonalen) und auf der vierten Lage eine Kachel aus D_2^r die jedoch direkt links neben der NW-SO-Diagonalen liegt. Für beide Fälle gibt es mehrere mögliche Startkacheln, die jedoch äquivalent sind. Die Wahl der Startkachel kann beim Reduktionsvorgang dynamisch gewählt werden.

5.2.6 Symmetrie

Da sich der so generierte Sandwichkachelsatz nur in positive y-Richtung ausbreiten kann muss für die negative y-Richtung eine separate Menge von Sandwichkacheln eingeführt werden, die dies bewerkstelligen. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel eine horizontal gespiegelte Version des Kachelsatzes, einfacher wäre allerdings eine Kachelmenge die diesen Bereich durch leere Sandwichkacheln belegt, die keine Farbe mit dem restlichen Kachelsatz teilen (beispielsweise die blaue Färbung in Abbildung 5.7).

5.2.7 Resultat

Aus dieser vorausgehenden Konstruktion und den Beweisen der verschiedenen Determinismuseigenschaften folgt dass eine Reduktion des Halteproblems für Turingmaschinen auf eine Teilmenge der 4-Wege-deterministischen Wang-Kachelsätze möglich ist. Daraus folgt dass das Kachelungsproblem für diese Teilmenge nicht entscheidbar ist. Daraus wiederum folgt dass das Kachelungsproblem für die Menge aller 4-Wege-deterministischen Wang-Kachelsätze, die diese Teilmenge enthält, auch nicht entscheidbar sein kann. Es folgt:

Theorem 3. *Das 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel ist unentscheidbar.*

5.3 Das Kachelungsproblem ohne gesetzter Kachel

Das Kachelungsproblem ohne gesetzte Kachel für 4-Wege-deterministische Wang-Kacheln, oder einfach das Kachelungsproblem für 4-Wege-deterministische Wang-Kacheln wird Lukkarila in diesem Abschnitt als unentscheidbar beweisen, wobei er unter anderem auf den Beweis von Robinson [6] zurückgreift und diesen erweitert. Ähnlich wie im letzten Abschnitt benutzt Lukkarila hier die Methode der Reduktion, in diesem Fall vom 4-Wege-deterministischen Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel auf das allgemeine 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem. Daraus folgt dass, wenn es einen Algorithmus gäbe der das allgemeine 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem lösen würde, es auch einen Algorithmus geben würde der das 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel lösen könnte, was nicht der Fall ist (siehe letztes Kapitel).

Genauer entwirft er eine Konstruktion die aus einem Kachelsatz einen komplexeren Kachelsatz entwirft, für den das allgemeine 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem entschieden werden kann genau dann wenn für den simulierten Kachelsatz und die gegebene Startkachel das 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem mit gesetzter Kachel entschieden werden kann.

5.3.1 Struktur

Die Lagen des Kachelsatzes F haben die folgenden Funktionen:

$$F \subseteq L_1 \times L_2 \times L_3 \times L_4 \quad (5.18)$$

Lage 1: 3×3 -Kachelsatz aus Kari und Papasoglus Kachelsatz

Lage 2: Kacheln um freie Gebiete (siehe unten) zu identifizieren

Lage 3: Zu simulierenden Kachelsatzes G mit Erweiterungen

Lage 4: Kacheln zur Weitergabe von Strukturinformationen auf Lage drei zudem wird eine zu Beginn auf der Ebene gesetzte Kachel gewählt t_{start} . Die Startkachel befindet sich per Definition im Ursprung also im Punkt $(0, 0)$.

Das Kachelset F ist so aufgebaut, dass für den Kachelsatz von Kari und Papasoglu bestimmte Bereiche, sogenannte freie Gebiete identifiziert werden. Auf diesen wird

dann eine Kachelung eines beliebigen Kachelsatzes G mit dessen Startkachel t_{start} simuliert.

5.3.2 erste Lage

Wie bereits bei der Vorstellung der Kachelsätze nach Robinson [6] sowie Kari und Papasoglu [3] aufgeführt erzeugen diese ein Muster aus Quadraten steigender Größe. Bei angebrachter Färbung lassen sich diese so in rote und blaue Quadrate färben dass sich nie zwei Quadrate der selben Farbe schneiden (siehe oben). Per Definition sind dabei immer die kleinsten (3-auf-3-)Quadrate blau gefärbt, woraus sich eine eindeutige Färbung ergibt.

Wie in der oben aufgeführten Konstruktion von Lukkarilas Kachelsatz ist auch hier

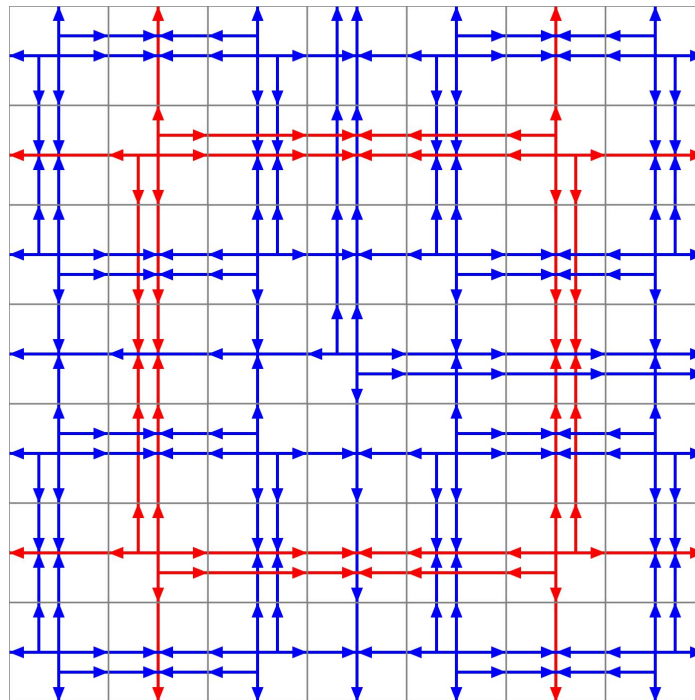


Abbildung 5.11: Zu sehen: blaue 3-auf-3-Quadrate

für die einzelnen Kacheln relevant ob diese in einem blauen 3-auf-3-Quadrat liegen, weshalb (wiederum wie oben) auch hier der 3×3 -Kachelsatz verwendet wird der aus Kari und Papasoglus Kachelsatz [3] entsteht.

Zusätzlich dient die erste Lage des Kachelsatzes der Funktion eine aperiodische valide Kachelung zu erzwingen, so dass die gesetzte Kachel im Zentrum roter Quadrate platziert wird. Dies ist für die Konstruktion relevant.

5.3.3 zweite Lage

Die zweite Lage von F dient der Identifizierung der freien Gebiete einer validen Kachelung. Freie Gebiete oder Kacheln werden dadurch identifiziert dass sie sowohl in

5.3 Das Kachelungsproblem ohne gesetzter Kachel

freien Reihen als auch in freien Spalten liegen. Eine Reihe heißt dabei frei, wenn sie horizontal über die komplette Breite des sie umgebenden roten Quadrates reicht, ohne auf eines der kleineren Quadrate zu treffen. Analog dazu werden freie Spalten definiert, natürlich laufen diese vertikal nicht horizontal.

Allgemein werden in diesem Abschnitt zumeist nur die Quadrate berücksichtigt, die in der oben erwähnten Färbung rot sind.

Im folgenden Abschnitt wird der Begriff der blauen, beziehungsweise der roten Rei-

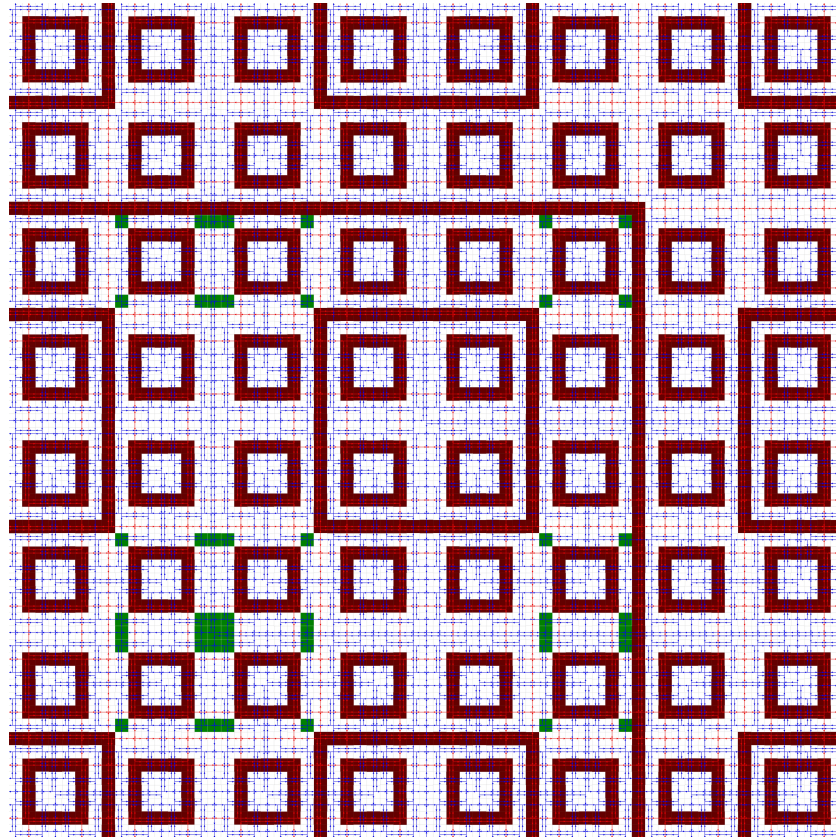


Abbildung 5.12: Auszug einer Kachelung. Die Kacheln die rote Quadrate bilden sind dunkelrot hinterlegt. Die freien Gebiete des teilweise gezeigten roten 65-auf-65-Quadrates sind grün gefärbt.

hen und Spalten verwendet. Diese beschreiben Reihen in denen nur blaue, respektive rote horizontale beziehungsweise vertikale Kanten von Quadraten vorkommen. Aufgrund des Musters gibt es dabei nur rote und blaue Reihen und Spalten keine die sowohl blau als auch rot sind.

Aus der Struktur des Musters wird deutlich, dass freie Reihen nur auf blauen Reihen liegen können. Dies liegt daran dass, falls eine rote Kante auf einer freien Reihe liegen würde, würde diese entweder zu einem kleineren roten Quadrat gehören, was per Definition von freien Reihen nicht sein kann, oder sie gehört zu einem größeren roten Quadrat, was nicht sein kann weil sich in der gewählten Färbung, wie oben erwähnt, Kanten gleicher Farbe nicht kreuzen können. Analog gilt dies auch für freie Spalten.

Paarung:

Um freie Gebiete identifizieren zu können werden die Kacheln auf der ersten Schicht folgendermaßen mit Kacheln auf der zweiten Schicht gepaart:

a) Kacheln die in Schicht eins auf der nördlichen Kante roter Quadrate und auf blauen Spalten liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

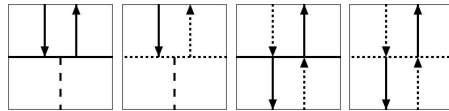


Abbildung 5.13: Kachelset E_1 für nördliche Kanten

b) Kacheln die in Schicht eins auf der östlichen Kante roter Quadrate und auf blauen Reihen liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

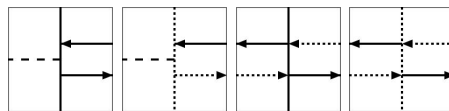


Abbildung 5.14: Kachelset E_2 für östliche Kanten

c) Kacheln die in Schicht eins auf der südlichen Kante roter Quadrate und auf blauen Spalten liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

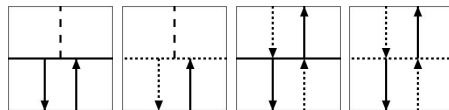


Abbildung 5.15: Kachelset E_3 für südliche Kanten

d) Kacheln die in Schicht eins auf der westlichen Kante roter Quadrate und auf blauen Reihen liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

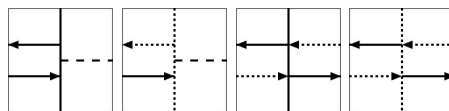


Abbildung 5.16: Kachelset E_4 für westliche Kanten

e) Kacheln die in Schicht eins ein vertikales rotes Einzelpfeilpaar beinhalten (also Robinson-Arme des Typs (1), (2) oder (3) bei denen t_n und t_s rote Einzelpfeile darstellen) und nicht auf der Kante eines roten Quadrates liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

5.3 Das Kachelungsproblem ohne gesetzter Kachel

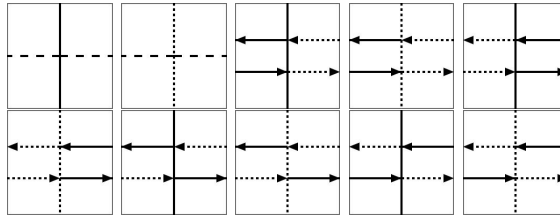


Abbildung 5.17: Kachelset E_5 für vertikale rote Einzelpfeile

f) Kacheln die in Schicht eins zwei horizontale rote Einzelpfeile beinhalten (also Robinson-Arme des Typs (1), (2) oder (3) bei denen t_e und t_w rote Einzelpfeile darstellen) und nicht auf der Kante eines roten Quadrates liegen werden auf Schicht zwei mit diesen Kacheln gepaart:

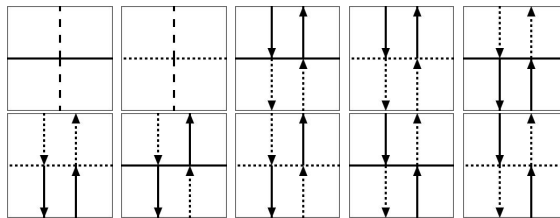


Abbildung 5.18: Kachelset E_6 für horizontale rote Einzelpfeile

g) Alle anderen Kacheln der Schicht eins werden auf Schicht zwei so mit Kacheln gepaart dass sich die Farben die propagiert werden ungehindert fortsetzen können. Solche Kacheln haben die Form von Kreuzen aus gestrichelten Linien, dotierten Linien, durchgezogenen Linien, sowie aller oben auftretenden Doppelpfeilpaaren. Aufgrund der schier Menge der beinhalteten Kacheln ist dieser Kachelersatz E_7 hier nicht abgebildet.

Die oben erwähnten Einzelpfeile erhalten dabei ihre Farbe aus den Kreuzen aus denen sie oder ihre Vorgänger stammen. Dies ist relevant, da grundlegende Eigenschaften möglicher Kachelungen auf Lage zwei abhängig von der Anzahl der vertikalen (oder horizontalen) Reihen von Einzelpfeilen zwischen zwei roten Kanten ist.

Die verschiedenen Signale:

Die Funktionalität der zweiten Lage liegt in der Identifizierung sogenannter freier Reihen (und Spalten) durch gestrichelte Linien.

Die verwendeten Signale sind doppelte gleiche Pfeile, doppelte verschiedene Pfeile, gestrichelte Linien, gepunktete Linien und durchgezogene Linien. Signale laufen zwischen den Nord- und Südkanten beziehungsweise zwischen den Ost- und Westkante roter Quadrate. Treffen Signale auf rote Reihen oder Spalten werden sie transformiert. Die Art der Signale sowie ihre Übergänge sind in den Kachelsets E_1 bis E_6 zu sehen.

Doppelte Pfeile gleicher Art können nur zwischen zwei roten Quadraten gleicher Größe auftreten, wenn die Anzahl der roten Reihen beziehungsweise Spalten zwi-

schen ihnen gerade ist. Dies wird erreicht durch die Paarung der Kacheln mit roten Reihen oder Spalten und damit der Übergänge an diesen. Ist die Anzahl der Übergänge ungerade werden aus doppelten durchgezogenen Pfeilen doppelte gestrichelte Pfeile für die es kein Gegenstück an den Kanten von Quadraten gibt.

Doppelte Pfeile verschiedener Art können nur zwischen zwei Kanten roter Quadrate auftreten, wenn die Anzahl der roten Reihen beziehungsweise Spalten zwischen diesen ungerade ist. Da die Anzahl von roten Reihen beziehungsweise Spalten innerhalb eines roten Quadrates auf Pfaden die direkt zwischen zwei Kanten dieses Quadrates verlaufen immer gerade ist können diese nicht auf freien Pfaden verlaufen.

Gestrichelte Signale identifizieren freie Gebiete. Sie können aufgrund ihrer Paarung nur innerhalb von Quadraten auftreten und müssen dabei direkt zwischen zwei gegenüberliegenden Kanten verlaufen, dürfen also nicht auf kleinere Quadrate treffen. Dotierte und durchgezogene Signale verbreiten Informationen zu Abständen der Kanten roter Quadrate zum Kanten anderer Quadrate. Ist beispielsweise die Nordkante eines Quadrates durchgezogen ist die Anzahl der roten Reihen zwischen dieser Kante und der nächsten Kante des nächsten Quadrat gleicher Größe in nördliche Richtung gerade. Ist sie gestrichelt ist die Anzahl der roten Reihen ungerade.

Struktur:

Da gestrichelte Signale nur auf freien Reihen beziehungsweise Spalten auftreten können lassen sich freie Flächen durch das Auftreten von Kreuzen aus gestrichelten Signalen auf der zweiten Lage erkennen. Diese gestrichelten Reihen (oder Spalten) können dabei nur innerhalb eines Quadrates der Größe $2^n + 1$ auftreten und nur wenn eine direkte Gerade zwischen den Kanten des Quadrates in der entsprechenden Reihe (oder Spalte) existiert.

Im folgenden werden einige Lemmas aufgelistet die Eigenschaften dieser Konstruktion festsetzen. Diese sind allgemein auf Reihen beschränkt, aufgrund der Struktur des Kachelsatzes gelten jedoch analoge Aussagen zu Spalten.

Eine Kachel die dabei innerhalb eines roten Quadrates liegt kann nur genau dann eine gestrichelte Linie enthalten, wenn diese von der westlichen Kante des Quadrates ausgeht und sich bis zur östlichen Kante fortsetzt, ohne auf auf eine vertikale Kante eines kleineren Quadrates zu stoßen (siehe Struktur der Kacheln, wie oben aufgeführt). Daher gilt im Umkehrschluß für alle nicht-freien Reihen, also Reihen auf denen kleinere rote Quadrate liegen, dass diese keine gestrichelten Reihen enthalten können. Dies wird im folgenden Lemma festgehalten:

Lemma 10. *Liegt eine Kachel bei einer validen Kachelung innerhalb eines roten Quadrates und zudem auf einer nichtfreien Reihe kann sie keine horizontale gestrichelte Linie enthalten.*

Liegt eine Kachel auf einer nichtfreien Reihe heißt dies dass es von einer Kante des roten Quadrates kommend ein kleineres Quadrat auf der Reihe gibt. Da kleinere rote Quadrate komplett innerhalb größerer roter Quadrate liegen müsste ein rotes Quadrat fähig sein ein gestricheltes Signal nach außen zu propagieren. Wie in der Kachelung zu sehen ist ist dies nicht der Fall. Es kann also keine horizontalen gestrichelten Linien auf nichtfreien Kacheln geben.

Lemma 11. *Liegt eine Kachel bei valider Kachelung innerhalb eines roten Quadrates und zusätzlich auf einer freien Reihe muss sie eine horizontale gestrichelte Linie enthalten.*

Um dieses Lemma beweisen zu können muss ausgeschlossen werden dass eine Kachel die auf einer solchen Position liegt eine andere Art von Linie enthalten kann. Es gibt folgende Varianten von Linien die eine solche Kachel beinhalten kann: Doppelte gleiche Linien (siehe zweite Kachel E_3 oben), doppelte verschiedene Linien (siehe vierte Kachel E_3) sowie gestrichelte Linien (siehe erste Kachel E_3). Doppelte gleiche Linien können hierbei bereits ausgeschlossen werden, da diese wie in den Kachelsätzen E_1 bis E_6 zu sehen ist von roten Quadraten aus nur nach außen zeigen können.

Auch doppelte Linien mit verschiedenen Pfeilen können in freien Reihen nicht auftreten. Dies ist der Fall da die Anzahl der roten Reihen/Spalten gerade ist. Doppelte verschiedene Pfeile werden bei jeder roten Reihe beziehungsweise Spalte (auf Lage 1) getauscht. Doppelte verschiedene Pfeile die an der westlichen Kante mit einem linksgerichteten punktiertem Pfeil starten haben an der Kachel die an die zugehörige Kachel an der östlichen Kante grenzt auch einen linksgewandten punktierten Pfeil (da die Reihe innerhalb eines Quadrates eine gerade Anzahl von Wechslen vollführt), was nicht zum gegebenen Gegenstück an der rechten Kante passen kann.

Die gerade Anzahl der roten Reihen beziehungsweise Spalten innerhalb eines roten Quadrates folgt aus dem blockweisen Aufbau der Kachelung. Eine rotes Quadrat verläuft entweder ganz in einem größeren roten Quadrat oder außerhalb dessen. Da für jede Größe an roten Quadraten innerhalb eines roten Quadrates zwei rote Reihen und zwei rote Spalten erzeugt werden muss die Anzahl der roten Reihen beziehungsweise Spalten innerhalb eines solchen Quadrates immer gerade sein, auch größere Quadrate können keine roten Spalten oder Zeilen erzeugen, da dies bedeuten würde dass sie ein Quadrat der gleichen Größe schneiden würden.

Es bleibt also als einzige Möglichkeit eine gestrichelte Linie die offensichtlich kachelbar ist.

Aus den beiden vorangehenden Lemmas folgt direkt:

Lemma 12. *Eine Kachel liegt bei einer validen Kachelung innerhalb eines roten Quadrates auf einer freien Reihe genau dann wenn sie auf Lage zwei eine gestrichelte Linie enthält.*

Bezüglich möglicher Kachelungen gilt:

Lemma 13. *Das erhaltene Kachelset das aus diesen ersten beiden Lagen besteht erlaubt eine valide Kachelung.*

Der folgenden Abschnitt beweist dieses Lemma für horizontale Signale. Der entsprechende Beweis für vertikale Signale funktioniert analog dazu.

Die Betrachtung von horizontalen gestrichelten oder durchgezogenen Signale muss nicht berücksichtigt werden, da diese aufgrund des Aufbaus des Kachelsatzes nicht mit den Kacheln aus E_1 bis E_4 kollidieren können.

Eine Reihe die keine rote Kante kreuzt kann, wie oben gezeigt, gekachelt werden egal welche vertikalen Signale auftreten. Es genügt also zu zeigen das Reihen im Allgemeinen kachelbar sind. Sei eine beliebige Reihe die rote Quadrate der Größe $4^n + 1$

5 Lukkarilas Beweise

schneidet gegeben. Offensichtlich können die freien Reihen innerhalb dieser Reihe durch gestrichelte Linien korrekt gekachelt werden. Es genügt also zu zeigen, dass zwischen den Quadraten der Größe $4^n + 1$ kein Kachelungsfehler auftreten können. Liege die östliche Kante des westlichen Quadrates bei $x_1 = -2^{2n-1}$ und die westliche Kante des östlichen Quadrates bei $x_2 = 2^{2n-1}$.

Wenn das Intervall $i = (x_1, x_2)$ eine gerade Anzahl roter Spalten enthält ist die Spalte im Zentrum von i blau und die Reihe kann im Intervall i korrekt gekachelt werden, wenn die zugehörigen vertikalen Signale der beiden Quadrate durchgezogen gewählt werden. Diese Wahl der Signale ist korrekt, da alle West- beziehungsweise Ost-Kanten von roten Quadraten die auf den gleichen Spalten liegen zu Quadrate der selben Größe gehören müssen, deren Abstand zueinander gleich groß ist. Zwischen ihnen kann keine neue rote Spalte entstehen.

Wenn der Intervall i eine ungerade Anzahl roter Spalten enthält müssen die vertikalen Signale gestrichelt gewählt werden. Wie oben aufgeführt ist dies die einzige Möglichkeit einer Kachelung mit einer ungeraden Anzahl an roten Spalten. Dies ist der Fall wenn im Zentrum von i eine rote Reihe oder die Kante eines roten Quadrates verläuft.

Sowohl wenn im Zentrum von i eine rote Kante oder eine rote Spalte verläuft, muss es links und rechts der roten Kante beziehungsweise Spalte jeweils eine gerade Anzahl von roten Spalten geben, da diese von der Anzahl der kleineren roten Quadrate die jeweils links und rechts liegen abhängt. Jedes dieser roten Quadrate liegt auf zwei roten Kanten, die Anzahl der roten Kanten muss also gerade sein. Liegt im Zentrum von i jetzt eine rote Kante existieren sowohl im Kachelsatz E_2 als auch im Kachelsatz E_4 Kacheln die eine Kachelung ermöglichen. Liegt im Zentrum von i dagegen eine rote Spalte existieren in E_5 Kacheln die eine valide Kachelung ermöglichen.

Lemma 14. *Das entstehende Kachelset ist 4-Wege-deterministisch und aperiodisch.*

Da alle Kachelsätze bis E_6 jeweils 4-Wege-deterministisch sind und mit disjunkten Teilmengen von Kari und Papasoglus Kachelsatz gepaart werden ist das Resultat notwendigerweise 4-Wege-deterministisch.

Aperiodizität folgt aus dem Kachelsatz von Kari und Papasoglu auf der ersten Lage. Aus den vorangehenden Lemmas und der Konstruktion diese modifizierten Kachelsatzes folgen die folgenden Eigenschaften:

Theorem 4. *Das 4-Wege-periodische Kachelset von Kari und Papasoglu [3] kann so modifiziert werden dass der Kachelsatz, der Kacheln die freie Gebiete darstellen enthält und der der, der nichtfreie Gebiete enthält voneinander disjunkte Kachelsätze sind. Der modifizierte Kachelsatz ist dabei weiterhin 4-Wege-deterministisch und erlaubt eine valide Kachelung.*

Wie oben bereits argumentiert können freie Reihen beziehungsweise Spalten nur dann auftreten, wenn ein gestricheltes Signal auftritt. Eine freie Fläche wird deshalb durch eine Kreuz aus gestrichelten Signalen gekennzeichnet. Dadurch lässt sich der modifizierte Kachelsatz eindeutig in zwei Kachelsätze aufteilen, bei dem einer alle Kacheln die freie Flächen darstellen und der andere alle anderen Kacheln enthält. Diese Kachelsätze sind notwendigerweise disjunkt, da eine Kachel nicht sowohl frei

als auch unfrei sein kann. Die anderen Eigenschaften folgen aus den entsprechenden Lemmas.

Hieraus wiederum folgt dass Kacheln die freie Gebiete darstellen eindeutig identifiziert werden können um den Kachelsatz G zu simulieren.

5.3.4 dritte und vierte Lage

Aus Gründen die später noch ersichtlich werden werden sind die Sektionen für die dritte und die vierte Lage hier zusammengefasst. Um Aussagen über die Lage der Kacheln der ersten zwei Schichten machen zu können wird für die Konstruktion der dritten und vierten Schicht der bereits erhaltene zweilagige Sandwichkachelsatz zu einem 3×3 -Clusterkacheln erweitert.

Es werden in dieser Sektion nur vertikale Signale behandelt. Das Kachelset kann jedoch einfach erweitert werden um auch vertikale Signale zu propagieren. Hierzu werden entweder die Kacheln der Lagen drei und vier erweitert, oder nur die Kacheln der Lage drei werden entsprechend ergänzt und für die Ausbreitung der horizontalen Signale wird eine neue fünfte Schicht eingeführt die einer um 90 Grad gedrehten Version der vierten Schicht entspricht.

Auf der dritten Lage wird das ursprüngliche Kachelset G , sowie die dafür gegebene gesetzte Kachel t_{start} , in den roten Quadraten simuliert. Da die großen roten Quadrate jedoch wiederum kleinere Quadrate beinhalten wird die Fläche auf die freien Gebiete eingeschränkt um Kollisionen mit von roten Quadraten anderer Größe propagierten Signalen zu vermeiden.

Offensichtlich wächst die Anzahl der freien Reihen und Spalten abhängig von der Größe des umgebenden roten Quadrates. Robinsons berechnete in [6] den nachfolgenden Zusammenhang der Größen:

Lemma 15. *Für jedes rote $(4^n + 1)$ -auf- $(4^n + 1)$ -Quadrat beträgt die Anzahl der freien Reihen und Spalten jeweils $2^n + 1$.*

Per diesem Lemma gibt es also für ein Quadrat mit der Kantenlänge $(4^n + 1)$ $(2^n + 1) * (2^n + 1) = 2^{2n} + 2^{n+1} + 1$ freie Kacheln.

Daraus folgt dass mit der Beschränkung auf die freien Gebiete keine Einschränkung vorliegt, da das Muster unendlich groß werden kann und somit auch beliebig große Kachelungen simuliert werden können.

Auf Lage drei wird jetzt für jedes rote Quadrat eine Kopie der Kachel t_{start} ins Zentrum forciert indem die Kachel t_{start} mit jedem blauen Kreuz gepaart wird das nicht Teil eines 3-auf-3-Quadrates ist (da die Ecken dieser als nicht mittig in einem roten Quadrat liegen) und auf einer freien Fläche liegt. Da alle blauen Kreuze außer denen die in einem 3-auf-3-Quadrat liegen im Zentrum eines roten Quadrates platziert sind ist somit in jedem roten Quadrat die Startkachel von G gegeben. Zur Feststellung der Lage der blauen Kreuze in der endgültigen Kachelung dient die zu Beginn erwähnte Zusammenfassung der ersten beiden Lagen zu 3×3 -Clustern.

Paarung:

Die Kacheln der dritten Lage und wie sie gepaart werden ist in den Abbildungen 5.22

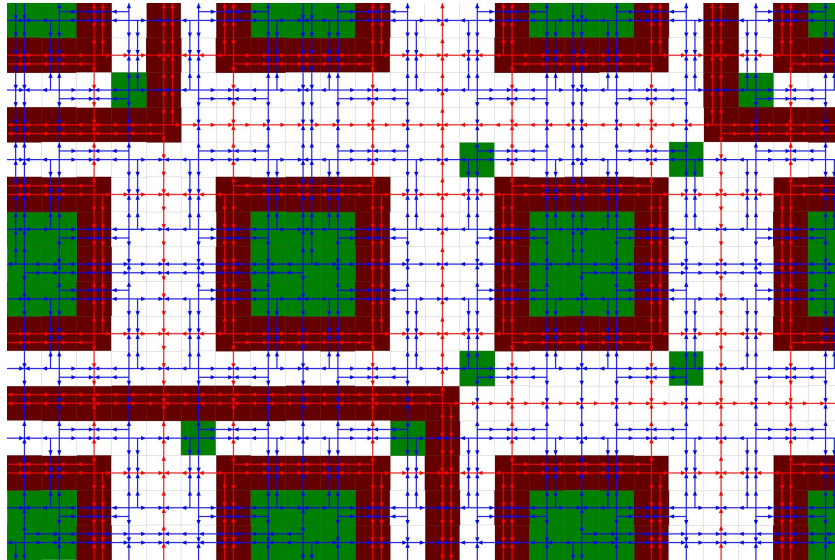


Abbildung 5.19: Erste Lage einer Kachelung mit markierten freien Flächen

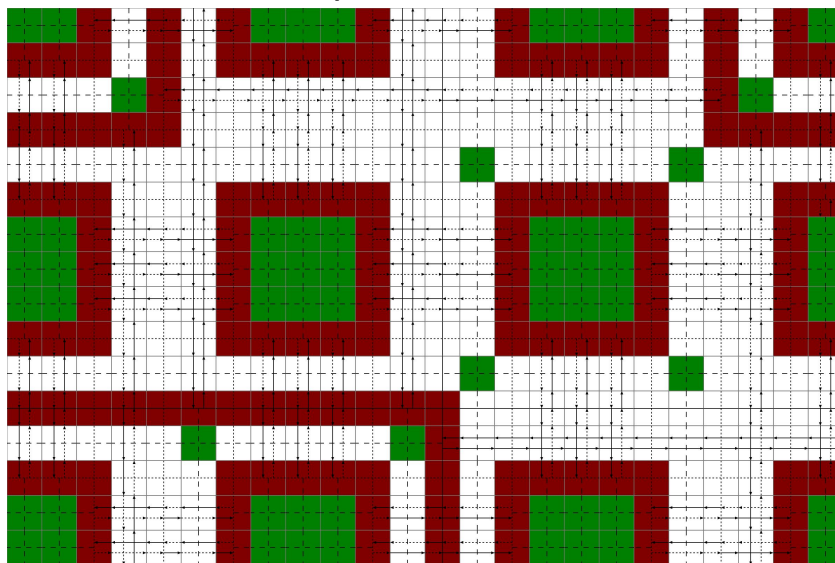


Abbildung 5.20: Zugehörige Elemente der zweiten Lage

Abbildung 5.21: Beispiel der zweiten Lage. Freie Gebiete sind grün hinterlegt, rote Quadrate rot.

5.3 Das Kachelungsproblem ohne gesetzter Kachel

bis 5.28 dargestellt. Die dritte Lage dient dazu eine valide Kachelung darzustellen, wobei angesichts des verteilten Vorkommens der freien Gebiete eine Kommunikation zwischen den freien Flächen bewerkstelligt wird. Anzumerken ist noch dass G selber zu diesem Zweck nicht die Farbe weiß als Farbe seiner Kanten haben darf. Ist dies der Fall kann es durch einen Homomorphismus gelöst werden der die weißen Elemente in G durch eine neue Farbe ersetzt. Für das Bild dieses Homomorphismus gelten offensichtlich die selben Eigenschaften wie für das Urbild.

Funktionalität:

Die Kacheln der Lage drei dienen dazu einzelne Blöcke einer Kachelung des Kachelsatzes G in eine größtenteils weiß gekachelte Ebene einzufügen. Die Farben der Kanten des Kachelsatzes G werden dabei gelöscht und auf Lage vier bis zum nächsten freien Gebiet innerhalb des gleichen roten Quadrats fortgesetzt um eine zusammenhängende Fläche zu simulieren.

Über die Quadratkanten hinaus werden Signale fortgesetzt die die äußeren Kanten der gesamten in dem Quadrat simulierten Kachelung zu propagieren. Hierdurch wird für alle Quadrate einer Größe festgelegt, wie die Kachelung der Simulation aussieht. Würde diese Ausbreitung nicht geschehen könnte jedes Quadrat seine eigene simulierte Kachelung festlegen, was zu Nichtdeterminismus führt.

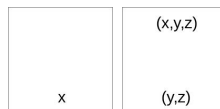


Abbildung 5.22: Kacheln direkt nördlich freier Gebiete. x , y und z sind Farben von G

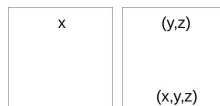


Abbildung 5.23: Kacheln direkt südlich freier Gebiete. x , y und z sind Farben von G

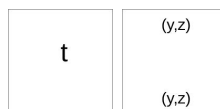


Abbildung 5.24: Kacheln direkt auf freien Gebieten. x und y sind Farben von G , t ist eine beliebige Kachel aus G .

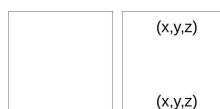


Abbildung 5.25: Kacheln auf nichtfreien Gebieten. x , y und z sind Farben von G

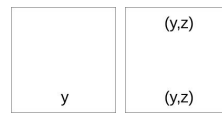


Abbildung 5.26: Kacheln auf roten Kanten nördlich freier Gebiete. x , y und z sind Farben von G



Abbildung 5.27: Kacheln auf roten Kanten südlich freier Gebiete. x , y und z sind Farben von G



Abbildung 5.28: Kacheln auf roten Nord- oder Südkanten die nicht neben freien Gebieten liegen. x , y und z sind Farben von G

Abbildung 5.29: Kacheln um Signale zwischen den zu simulierenden Kacheln auszutauschen.

Lemma 16. *Der Kachelsatz F ist 4-Wege-Deterministisch.*

Da die ersten beiden Lagen des Sandwichkachelsatzes 4-Wege-deterministisch sind und die Kacheln mit disjunkten Teilmengen dieses zweilagigen Sandwichkachelsatzes gepaart werden genügt es zu zeigen dass die Menge dieser Kachelsätze jeweils 4-Wege-deterministisch ist.

Bei einer Betrachtung der Etiketten wird ersichtlich dass von jeder Ecke aus durch die Kenntnis der nördlichen oder südlichen Etikette der ersten Lage auf die zugehörige Kachel geschlossen werden kann. Dies gilt auch für eine Erweiterung um horizontale Signale.

Es wird auch ersichtlich dass wenn eine valide Kachelung für G existiert, dass diese dann auch auf F simuliert werden kann. Lage drei kann freie Gebiete die Teile einer Simulation erhalten in eine weiße Ebene einfügen und die vertikalen Signale auf Lage vier (und die horizontalen Signale auf Lage fünf) behindern einander aufgrund des Aufbaus der Kachelung auf Lage eins nicht.

5.4 Resultate

Theorem 5. *Es existiert ein 4-Wege-deterministischer aperiodischer Kachelsatz der eine Diagonale erzeugt.*

Die könnte relevant sein für andere Konstruktionen auf dem Gebiet der Wang-Kacheln. Ähnlich seiner Verwendung zur Abbildung von Turingmaschinen könnte er verwendet werden um andere Konstrukte auf Wang-Kacheln zu übertragen oder Wang-Kachelsätze zu erstellen die eine bestimmte gewünschte Struktur aufweisen.

Theorem 6. *Turing-Maschinen lassen sich auf 4-Wege-Deterministische Kachelsets abbilden.*

Dies ist ein sehr interessantes Resultat, denn es bedeutet, dass bestimmte Eigenschaften von Wang-Kacheln auf Turingmaschinen übertragen werden können. So wäre es beispielsweise denkbar durch Kenntnis bestimmte Zustände einer Turingmaschine Rückschlüsse auf andere unbekannt Eigenschaften, zum Beispiel unbekannter Schreib-Lesekopf-Aktionen, dieser zu ermöglichen.

Theorem 7. *Das 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem mit Startkachel ist unentscheidbar.*

Dies folgt aus der Reduktion von Turingmaschinen auf 4-Wege-deterministische Kachelsets mit Startkachel.

Theorem 8. *Das allgemeine 4-Wege-deterministische Kachelungsproblem ist unentscheidbar.*

Im vorherigen Kapitel wurde bereits bewiesen, dass Turingmaschinen so auf 4-Wege-deterministische Kachelsätze mit Ursprungskachel abgebildet werden kann dass eine Kachelung möglich ist genau dann wenn die Turingmaschine nicht hält. Da bereits bewiesen ist dass das Halteproblem der Turingmaschine unentscheidbar ist [7] ist notwendigerweise auch das Kachelungsproblem mit Ursprungskachel unentscheidbar. Da in diesem Kapitel gezeigt wurde wie 4-Wege-deterministische Kachelsätze mit Ursprungskachel so auf allgemeine 4-Wege-deterministische Kachelsätze abgebildet werden können, dass eine Kachelung möglich ist genau dann wenn auch eine Kachelung mit dem Kachelsatz mit Ursprungskachel möglich ist ist dieses allgemeine Problem notwendigerweise ebenfalls unentscheidbar.

Literaturverzeichnis

- [1] Robert Berger. The undecidability of the domino problem. number 66 in memoirs of the american mathematical society. *The American Mathematical Society*, 202, 1966.
- [2] J. Kari. Reversibility of 2D cellular automata is undecidable. *Physica D Non-linear Phenomena*, 45:379–385, September 1990.
- [3] J. Kari and P. Papasoglu. Deterministic aperiodic tile sets. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 9(2):353–369, Jun 1999.
- [4] Johannes Kopf, Daniel Cohen-Or, Oliver Deussen, and Dani Lischinski. Recursive wang tiles for real-time blue noise. *ACM Trans. Graph.*, 25(3):509–518, July 2006.
- [5] Ville Lukkarila. The 4-way deterministic tiling problem is undecidable. *Theoretical Computer Science*, 410(16):1516 – 1533, 2009. Theory and Applications of Tiling.
- [6] Raphael M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3):177–209, Sep 1971.
- [7] U. Schöning. *Theoretische Informatik - kurz gefasst*. Spektrum Akademischer Verlag, 2008.
- [8] H. Wang. Proving theorems by pattern recognition #x2014; ii. *The Bell System Technical Journal*, 40(1):1–41, Jan 1961.
- [9] Li-Yi Wei. Tile-based texture mapping on graphics hardware. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS Conference on Graphics Hardware*, HWWS '04, pages 55–63, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [10] Erik Winfree, Furong Liu, Lisa A. Wenzler, and Nadrian C. Seeman. Design and self-assembly of two-dimensional dna crystals. *Nature*, 394:539 EP –, Aug 1998. Article.

6 Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Datum und Unterschrift: