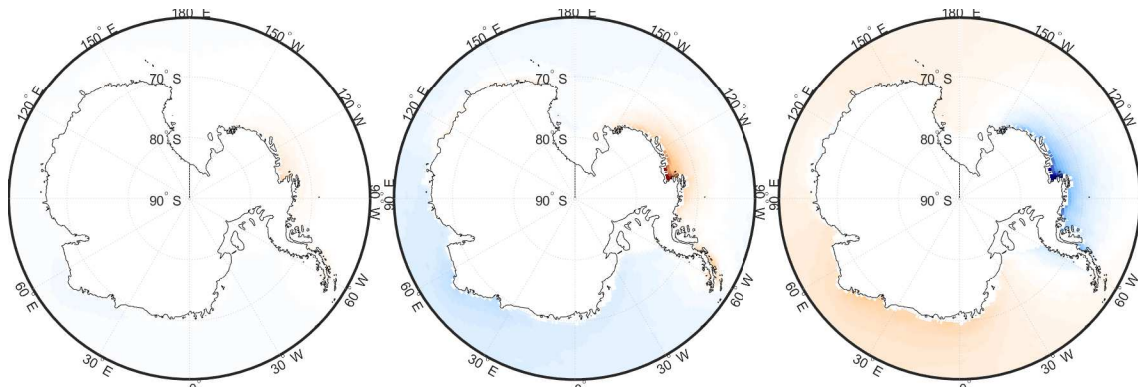


Implementierung der Meeresspiegelgleichung



Masterarbeit im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Laura Janina Balangé

Stuttgart, Oktober 2018

Betreuer: PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Karim Douch
Universität Stuttgart

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

Erklärung der Urheberschaft

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form in keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Durch die globale Erwärmung in Folge des Klimawandels kommt es zu einer Abnahme des Landeises in Grönland und der Antarktis. Dies führt zu einer globalen Änderung des Meeresspiegels. Die Variation des Meeresspiegels wird außer von der Variation der abnehmenden Eislast und der zunehmenden Wasserlast auch von der Änderung der Gravitationsanziehung beeinflusst. Um die durch die Meeresspiegeländerungen betroffenen Gebiete rechtzeitig erkennen zu können, ist eine Berechnung der Entwicklung des Meeresspiegels von großem Interesse. Hierfür wurden zwei pseudo-spektrale Algorithmen implementiert, welche die Berechnung der Meeresspiegeländerung für eine kugelförmige, elastische, nicht rotierende Erde durchführen. Dabei wurden je zwei Varianten implementiert. Eine Variante fixierte Küstenlinien als Berechnungsgrundlage, während die andere eine Variation der Küstenlinien zulässt. Als Eingangsmodelle wurden für den Test der implementierten Algorithmen das post-glaziale ICE5G-Modell und das Modell der gravimetrischen Massenbilanz der Technischen Universität Dresden verwendet. Eine mögliche Erweiterung der Algorithmen wäre die Berücksichtigung weiterer Effekte wie beispielsweise der Erdrotation sowie die Verwendung eines visko-elastischen Erdmodells, um realistischere Ergebnisse zu erhalten.

Abstract

Through global warming as result of climate change there is a decrease in land ice in Greenland and Antarctica. This causes a global change in sea level. The variation of the sea level beside the variation of the decrease in ice loads and the increase in water loads is influenced by the gravitational pull. A calculation of the trend in sea levels is of great interest for the detection of areas affected by changing sea levels. Therefore two pseudospectral algorithms for the calculation of sea level change for a spherical elastic non-rotating Earth were implemented. Each of the algorithms were designed in two alterable versions: one which uses fixed shorelines and the other with variable shorelines. The input models for testing the implemented algorithms were the postglacial ICE5G-Model and the model of gravimetric mass balance of the TU Dresden. A possible extension of the algorithm would be a consideration of further effects such as Earth's rotation or the visco-elastic Earth model. This would generate more realistic results.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Ziel der Arbeit	2
1.3	Aufbau der Arbeit	2
2	Mathematische Grundlagen	3
2.1	Integration auf der Kugeloberfläche	3
2.2	Kugelflächenfunktionen	4
2.3	Faltung auf der Kugel	5
2.4	Greensche Funktionen	6
2.5	Banachscher Fixpunktsatz	6
2.6	Fredholm Integralgleichung zweiter Art	7
3	Benötigte Daten und Modelle	9
3.1	Topographie	9
3.2	Variation des Landeises	11
3.2.1	ICE- 5G Modell	11
3.2.2	Variation der Eisdicke TU Dresden	12
3.3	Konstanten	14
4	Meeresspiegelgleichung	15
4.1	Theorie der Meeresspiegelgleichung	16
4.2	Analytische Herleitung der Meeresspiegelgleichung	18
4.3	Erweiterung der Gleichungen für variable Küstenlinien	21
4.4	Meeresspiegel Green Funktion	21
4.5	Deformationskoeffizienten	23
5	Lösung mittels eines pseudo-spektralen Ansatzes	25
5.1	Algorithmus nach Mitrovica	25
5.1.1	Anwendung des Algorithmus	25
5.1.2	Ablaufdiagramm des Algorithmus	28
5.2	Algorithmus nach Spada (SELEN)	29
5.2.1	Anwendung des Algorithmus	29
5.2.2	Ablaufdiagramm des Algorithmus	31
5.3	Implementierung und Vergleich der beiden Algorithmen	31
5.3.1	Variation der Eingangsparameter für die Berechnung	32
5.3.2	Methoden zur beschleunigten Berechnung	32

5.3.3	Vergleich der implementierten Algorithmen	32
6	Analyse der berechneten Ergebnisse	35
6.1	Ergebnisse unter Verwendung des ICE-5G Modells	36
6.1.1	Lösung mit Variation der Küstenlinien	36
6.1.2	Vertikale Begrenzung der Küstenlinien	42
6.2	Ergebnisse gravimetrische Massenbilanz	45
7	Fazit und Ausblick	49
A	Verwendete MATLAB-Programme	XIX
B	Weitere Ergebnisse	XXI

Abbildungsverzeichnis

2.1	Grafische Darstellung des Raumwinkels	5
2.2	Grafische Darstellung eines Fixpunktes als Schnittpunkt einer Funktion mit der ersten Winkelhalbierenden nach Bärwolff (2008).	7
3.1	Topographiemodell ETOPO1 der NOAA	10
3.2	Berechnete Ozeanfunktion aus dem Topographiemodell	10
3.3	Eisdicke in Metern des ICE5G-Modells zum Zeitpunkt des letzten glazialen Maximums	12
3.4	Variation der Eisdicke in Metern für Grönland und Antarktis aus dem Jahr 2003 nach dem Modell der Gravimetrischen Massenbilanz der TU Dresden	13
3.5	Variation der Eisdicke für Grönland und Antarktis aus dem Jahr 2003 nach dem Modell der Gravimetrischen Massenbilanz der TU Dresden	13
4.1	Zeitliche Veränderung des Meeresspiegels	16
4.2	Definition des Meeresspiegels	16
4.3	Definition der Variation des Meeresspiegel, des Geoids, der Radialverschiebung der festen Erde sowie der Eisdicke	17
4.4	Schematische Darstellung der Variation der Küstenlinien	18
4.5	Verlauf der Love Zahlen von Grad 1 bis 46342	24
5.1	Ablaufdiagramm des Algorithmus nach Mitrovica	28
5.2	Ablaufdiagramm des Algorithmus nach Spada	31
6.1	Berechnete Meeresspiegeländerung mit dem ICE5G-Modell nach dem Algorithmus von Spada mit variablen Küstenlinien	37
6.2	Berechnete Meeresspiegeländerung mit dem ICE5G-Modell nach dem Algorithmus von Mitrovica mit variablen Küstenlinien	38
6.3	Änderung des Meeresspiegel von vor 8 000 bis vor 16 500 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten)	39
6.4	Änderung des Meeresspiegel von vor 17 000 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten)	40
6.5	Darstellung der Variation der Küstenlinien seit dem Ende der letzten Eiszeit bis zum aktuellen Zeitpunkt	41
6.6	Berechnete Meeresspiegeländerung mit dem ICE5G-Modell nach dem Algorithmus von Spada mit fixen Küstenlinien	42

6.7	Berechnete Meeresspiegeländerung mit dem ICE5G-Modell nach dem Algorithmus von Mitrovica mit fixen Küstenlinien	43
6.8	Änderung des Meeresspiegel von vor 8 000 bis vor 16 500 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)	44
6.9	Änderung des Meeresspiegel von vor 17 000 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten) . .	45
6.10	Änderung des Meeresspiegel von 2002-2016 zum heutigen Referenzzeitpunkt für Grönland (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)	46
6.11	Änderung des Meeresspiegel von 2002-2016 zum heutigen Referenzzeitpunkt für die Antarktis (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten) . . .	47
B.1	Variation der Küstenlinien von vor 10 500 bis 14 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten).	XXI
B.2	Variation der Küstenlinien von vor 14 500 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten).	XXII

Tabellenverzeichnis

3.1	Konstanten	14
6.1	Verwendete Eingangsparameter für die Berechnung der Meeresspiegel- änderungen	35
A.1	Implementierte MATLAB-Programme	XIX

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Klimaerwärmung und ihre Folgen sind ein aktuelles Thema unserer heutigen Zeit. Durch die Klimaerwärmung kommt es zu einer drastischen Abnahme des Eisvorkommens in der arktischen und antarktischen Region. Diese Abnahme des Eisvorkommens hat sich in den letzten 30 Jahren deutlich beschleunigt, sodass die vorhandene Eisfläche um circa 30 Prozent zurückgegangen ist¹. Seit dem Jahr 2002 konnte diese Massenabnahme auch durch die GRACE-Mission festgestellt werden. Hierbei zeigt sich eine durchschnittliche jährliche Abnahme der Eismasse von 286 Gigatonnen in Grönland, sowie eine Abnahme von 127 Gigatonnen für die Antarktis². Diese Abnahme der Eismassen führt zu einem erhöhten Wasserzufluss in den Ozeanen, dort verteilt sich das Wasser und es kommt zu einem Anstieg des Meeresspiegels. Von diesem Anstieg sind vor allem die Küstenregionen betroffen, welche teils stark besiedelt sind. Auch viele Großstädte befinden sich direkt an der Küste und liegen oftmals nur wenige Meter über dem aktuellen Meeresspiegel.

Um eine Zukunft für diese Regionen prognostizieren zu können, ist es von großem Interesse, aus verschiedenen Eismodellen die Entwicklung des Meeresspiegels zu berechnen, um so ein Modell für die nächsten Jahrzehnte erstellen zu können. Die Kenntnis der zukünftigen Meeresspiegeländerungen lässt eine frühzeitige Planung zu und kann somit helfen, frühzeitig auf die Folgen des Klimawandels reagieren zu können.

¹*Arctic Sea Ice News & Analysis* (2018). URL: <https://nsidc.org/arcticseaicenews/> (besucht am 04.10.2018).

²*Ice Sheets | NASA Global Climate Change* (2018). URL: <https://climate.nasa.gov/vital-signs/ice-sheets/> (besucht am 04.10.2018).

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Programm zu implementieren, das die Meeresspiegeländerungen auf Grundlage von verschiedenen Eingangsmodelle berechnet. Hierbei wird sowohl ein postglaziales Eismodell, als auch ein Modell, das auf der gravimetrischen Massenbilanz der GRACE-Mission basiert und im Zeitraum zwischen April 2002 und August 2016 verfügbar ist, verwendet. Des Weiteren werden in dieser Arbeit die Variation der Küstenlinien sowie eine elastische Antwort der Erde betrachtet. Schlussendlich soll mittels der durchgeführten Berechnungen gezeigt werden welchen Einfluss die schmelzenden Eisschilde auf den globalen Meeresspiegel haben und welche Küstenregionen besonders von diesem Anstieg betroffen sind.

Für die Berechnung der Meeresspiegeländerungen wird zunächst eine analytische Beschreibung der Meeresspiegelgleichung benötigt. Hierfür dient als Grundlage die Beschreibung nach Farrell und Clark (1976). Neben der analytischen Beschreibung wird für die Implementierung auch eine numerische Beschreibung benötigt. Hierfür werden die Beschreibungen nach Kendall u. a. (2005) und Spada und Stocchi (2006) verwendet.

Um diese Berechnungen durchzuführen, werden zwei numerische Algorithmen zur Lösung der Meeresspiegelgleichung implementiert. Dabei wird sowohl eine Lösung mit vertikaler Begrenzung der Küstenlinien als auch eine Lösung mit variablen Küstenlinien betrachtet. Zusätzlich wird eine grafische Oberfläche des implementierten Programms erstellt. Anschließend wird das implementierte Programm mit zwei verschiedenen Eismodellen auf seine Funktionsfähigkeit überprüft. Anschließend werden die implementierten hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens miteinander verglichen.

1.3 Aufbau der Arbeit

Zunächst werden in dieser Arbeit die benötigten mathematischen Grundlagen zur Lösung der Meeresspiegelgleichung erläutert, bevor die verwendeten Datenmodelle betrachtet werden. Anschließend erfolgt eine analytische Herleitung der Meeresspiegelgleichung sowie die numerische Lösung der Meeresspiegelgleichung. Hierbei werden zwei verschiedenen Lösungsalgorithmen erläutert. Zuletzt erfolgt die Betrachtung der Ergebnisse aus den beiden Lösungsansätzen.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

Die Meeresspiegelgleichung beinhaltet verschiedene Integrale auf der Kugeloberfläche. Um diese numerisch lösen zu können müssen die Integrale als Summen dargestellt werden. Hierfür wird eine Beschreibung durch Kugelflächenfunktionen verwendet. In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen für die numerische Beschreibung der Meeresspiegelgleichung betrachtet. Des Weiteren werden die Sätze, welche die Konvergenz der Meeresspiegelgleichung beschreiben, betrachtet.

2.1 Integration auf der Kugeloberfläche

Da es sich bei der Meeresspiegelgleichung um eine Integralgleichung handelt, wird im folgenden die Integration auf der Kugeloberfläche betrachtet. Hierfür wird zunächst das skalare Oberflächenelement der Einheitskugel mit

$$d\sigma = \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \quad (2.1)$$

definiert. Daraus ergibt sich das Oberflächenelement einer beliebigen Kugel durch

$$dA = R^2 d\sigma. \quad (2.2)$$

Damit kann nun das Integral über die Kugeloberfläche berechnet werden durch

$$A = \iint_A dA. \quad (2.3)$$

Damit ergibt sich für die Berechnung des Oberflächenintegrals auf der Kugel

$$A = R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda. \quad (2.4)$$

2.2 Kugelflächenfunktionen

Um beliebige Felder auf der Kugel durch mathematische Funktionen beschreiben zu können, werden Kugelflächenfunktionen verwendet. Diese sind das Analogon zu den Fourierreihen auf der Kugel. Bei den Kugelflächenfunktionen handelt es sich um ein vollständiges Orthonormalsystem mit dem jede quadratintegrierbare Funktion dargestellt werden kann (Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005). Diese Voraussetzung bedeutet, die Funktion genügt der Bedingung

$$\iint_{\sigma} f^2(\varphi, \lambda) d\sigma < \infty. \quad (2.5)$$

Diese Funktionen können durch eine beliebig hohe Anzahl an Koeffizienten beliebig gut durch Kugelflächenfunktionen dargestellt werden (Clauser, 2013). Die Darstellung der Funktionen ergibt sich dabei durch

$$\begin{aligned} f(\varphi, \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \bar{c}_{l,m}^f \bar{Y}_{l,m}(\varphi, \lambda) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\bar{C}_{l,m}^f \cos(m\lambda) + \bar{S}_{l,m}^f \sin(m\lambda) \right) \bar{P}_{l,m}(\sin \varphi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hierbei sind $\bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)$ die normierten Legendre-Funktionen. Neben der Bestimmung eines Feldes aus gegebenen Koeffizienten können die Koeffizienten auch aus einem bekannten Feld berechnet werden. Hierbei ergeben sich diese durch

$$\bar{c}_{l,m}^f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\varphi, \lambda) \bar{Y}_{l,m}(\varphi, \lambda) d\sigma. \quad (2.7)$$

Die numerische Berechnung der Koeffizienten, sowie der Felder erfolgt in dieser Arbeit durch die Verwendung des SH-BUNDLE des Geodätischen Instituts der Universität Stuttgart¹. Hierbei wurden im speziellen die Funktionen GSHS.M und GSHA.M verwendet.

Eine wichtige Eigenschaft der Kugelflächenfunktion, die zum Lösen der Integrale eingesetzt wird, ist die Orthogonalitätsrelation. Diese besagt

$$\iint_{\sigma} \bar{Y}_{l,m}(\varphi, \lambda) \cdot \bar{Y}_{j,k}(\varphi, \lambda) d\sigma = \begin{cases} 4\pi & \text{für } l = j \text{ und } m = k. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Allerdings muss bei der Verwendung der Kugelflächenfunktionen beachtet werden, dass es im Falle von unstetigen Funktionen zum Auftreten des Gibbs-Phänomens kommt. Dies führt im Bereich der Unstetigkeitsstellen zum Überschwingen, welches sich auch durch eine hohe Zahl an Koeffizienten nicht vermeiden lässt.

¹SH-Bundle, Geodätisches Institut Universität Stuttgart. URL: <https://www.gis.uni-stuttgart.de/forschung/downloads/shbundle/> (besucht am 23. 10. 2018).

2.3 Faltung auf der Kugel

Die Lösung der Meeresspiegelgleichung für einen Punkt auf der Erde zu einem festen Zeitpunkt ist sowohl von allen anderen Zeitpunkten als auch von allen anderen Punkten auf der Erde abhängig. Dadurch entstehen bei der Lösung Integrale über drei Kugelflächenfunktionen. Da die Lösung der Integrale nicht alleine durch Orthogonalitätsrelationen bestimmt werden kann, muss eine harmonische Analyse durchgeführt werden. Damit kann das Integral über das Produkt von drei Kugelflächenfunktionen bestimmt werden.

Zur Lösung der Dreifach Integrale wird in den folgenden Berechnungen eine Faltung auf der Kugel verwendet. Das grundlegende Prinzip hierbei ist die gleitende Mittelwertbildung, die durch eine Gewichtsfunktion definiert ist. Mittels dieser Gewichtsfunktion werden die Gewichte der verschiedenen Datenpunkte auf der Kugel angewendet. Im Falle der Meeresspiegelgleichung wird für die Faltung ein isotroper Faltungskern benötigt. Ein isotroper Faltungskern bedeutet, dass die Gewichte nur vom Winkelabstand zwischen dem Datenpunkt und dem Berechnungspunkt abhängen und somit richtungsinvariant sind (Devaraju, 2015; Kostelec und Rockmore, 2008). Für die folgenden Berechnungen wird als isotroper Faltungskern die zugehörige Greensche Funktion verwendet.

$$g(\varphi_P, \lambda_P) = \iint_{\sigma} f(\varphi_Q, \lambda_Q) h(\psi) d\sigma_Q \quad (2.9)$$

Hierbei handelt es sich bei ψ um den Raumwinkel unter dem die Punkte P und Q vom Kugelmittelpunkt aus erscheinen. Dieser ergibt sich durch

$$\cos \psi = \sin \varphi_P \sin \varphi_Q + \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cos(\lambda_P - \lambda_Q) \quad (2.10)$$

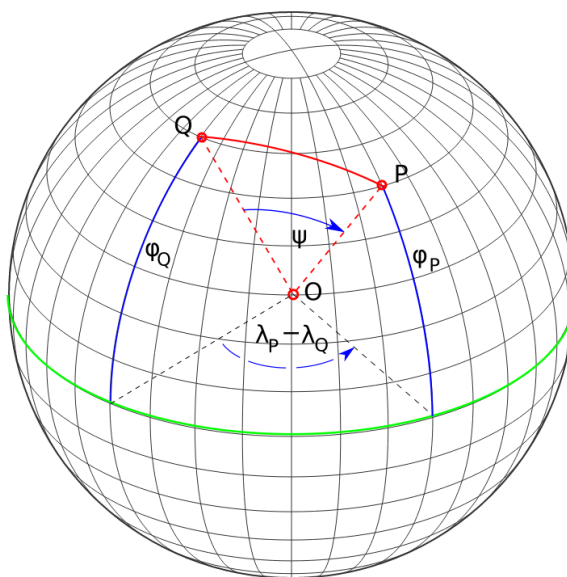


Abbildung 2.1: Grafische Darstellung des Raumwinkels

Im folgenden wird für die Faltung das Symbol \otimes verwendet. Damit ergibt sich für die Faltung

$$h \otimes f = \iint_{\sigma} f(\varphi_Q, \lambda_Q) h(\psi) R^2 d\sigma. \quad (2.11)$$

2.4 Greensche Funktionen

Für die Lösung der Meeresspiegelgleichung wird die Meeresspiegel Green Funktion benötigt. Für die Bestimmung einer beliebigen Green Funktion wird zunächst ein lineares, kontinuierliches und invariantes System in Zeit und Raum betrachtet (Appel, 2005; Lang und Pucker, 2005). Für dieses gilt

$$\Phi(A) = E \quad (2.12)$$

Dabei handelt es sich um das Eingangssignal E , das Ausgangssignal A sowie den Operator Φ . Damit gilt

$$\Phi(A) = D \otimes A = E \quad (2.13)$$

Die Green Funktion G wird nun als eine Funktion definiert, für die gilt

$$\Phi(G) = D \otimes G = G \otimes D = \delta \quad (2.14)$$

Hierbei ist D ein Linearer Operator, und δ die Delta-Distribution. Für diese gilt, dass die Faltung eines Operators mit der Delta-Distribution den Operator selbst ergibt.

$$K = \delta \otimes K. \quad (2.15)$$

Wird die Green Funktion auf beide Seiten der Ausgangsgleichung angewandt, so ergibt sich

$$G \otimes E = G \otimes (D \otimes A) = (G \otimes D) \otimes A = \delta \otimes A = A \quad (2.16)$$

Damit zeigt sich, dass sich das Ausgangssignal durch Faltung des Eingangssignals mit der zugehörigen Greenschen Funktion ergibt.

2.5 Banachscher Fixpunktsatz

Bei der Verwendung einer iterativen Lösung, muss sowohl die Konvergenz dieser Iteration als auch die Eindeutigkeit der so berechneten Lösung nachgewiesen werden (Bärwolff, 2008). Betrachtet man eine reelle Funktion, die ein reelles Intervall abbildet, so ist jede Lösung der Gleichung

$$x = u(x) \quad (2.17)$$

ein Fixpunkt. Aus diesem Grund wird die Gleichung (2.17) auch Fixpunktgleichung genannt. Geometrisch gesehen sind Fixpunkte somit die Schnittpunkte zwischen der gegebenen Funktion, sowie der ersten Winkelhalbierenden.

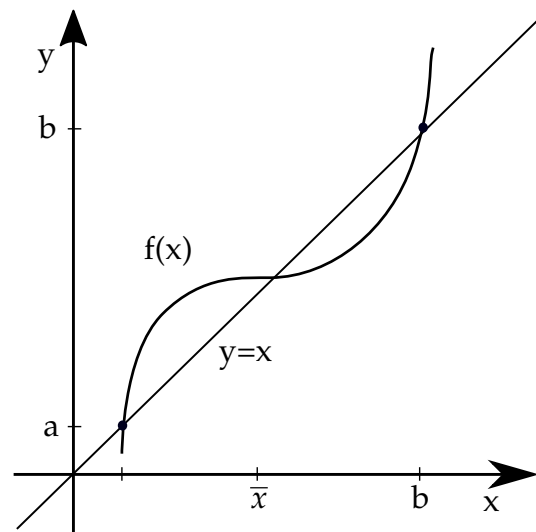


Abbildung 2.2: Grafische Darstellung eines Fixpunktes als Schnittpunkt einer Funktion mit der ersten Winkelhalbierenden nach Bärwolff (2008).

Die numerische Berechnung der Fixpunkte erfolgt hierbei iterativ. Hierbei gilt

$$x_0 \in I, x_{n+1} = u(x_n), n \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Die Existenz der Fixpunkte, sowie deren Eindeutigkeit können nun durch den Banachschen Fixpunktsatz nachgewiesen werden. Dieser setzt voraus, dass es sich bei der Funktion u um eine reellwertige Funktion handelt, die ein abgeschlossenes Intervall I in sich selbst abbildet. Des weiteren gilt für alle $x, y \in I$ die Ungleichung

$$|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|. \quad (2.19)$$

Sofern eine von x, y unabhängige Konstante $K < 1$ existiert, so ergibt sich durch Iteration genau ein Fixpunkt der Gleichung gegen den die Iterationsfolge konvergiert (Banach, 1922). Diese Konvergenz kann mittels des Cauchyschen Konvergenzkriteriums nachgewiesen werden.

2.6 Fredholm Integralgleichung zweiter Art

Ein weiteres Problem bei der Lösung der Meeresspiegelgleichung ist, dass sich die unbekannte Meeresspiegeländerung S sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung befindet. Im Eindimensionalen entspricht dies einer Fredholm Integral Gleichung zweiter Art (Alt, 2006). Dieses hat die Form

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds. \quad (2.20)$$

Hierbei ist die unbekannte Funktion $u(t)$ auf beiden Seiten der Gleichung zu finden. Im Falle der Meeresspiegelgleichung entspricht dies der unbekanntem Meeresspiegeländerung S . Der Term $f(t)$ beinhaltet alle Terme der Meeresspiegelgleichung, welche unabhängig von der Unbekannten berechnet werden können (Junghanns, 2017). Da dieses Integral also nicht direkt gelöst werden kann, wird die Lösung der sukzessiven Approximation angewandt. Hierfür wird die Fredholm Integral Gleichung zweiter Art als Fixpunktgleichung betrachtet. Damit ergibt sich die vereinfachte Schreibweise der Integralgleichung als

$$u = f + Ku. \quad (2.21)$$

Auf diese vereinfachte Gleichung kann nun die Methode der sukzessiven Approximation angewendet werden. Damit ergibt sich für die Lösung der Gleichung

$$u_0 = f \quad u_{n+1} = f + Ku_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Der Nachweis der Konvergenz dieser Approximation erfolgt nun mittels des Fixpunktsatz von Banach. Dieser kann angewendet werden, da es sich bei dem Operator K und u um stetige Funktionen handelt. Damit ergibt sich ebenfalls, dass die Funktion K im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ beschränkt ist und damit eine Konstante existiert, so dass gilt

$$\|K(t, s)\| < 1. \quad (2.23)$$

Dies ist erfüllt, wenn es sich bei dem linearen Operator um eine Kontraktion handelt (Kress, 2013). In diesem Fall gilt der Fixpunktsatz von Banach und es existiert eine eindeutige Lösung.

Kapitel 3

Benötigte Daten und Modelle

Um die Meeresspiegelgleichung numerisch lösen zu können, werden je nach Ansatz verschieden Modelle benötigt. Diese Modelle können in mathematische Modelle und Datenmodelle unterschieden werden. Bei den verwendeten Modellen handelt es sich um Modelle, welche die Topographie der Erde beschreiben, Modelle für die Deformation der Erde sowie um Modelle für das Abschmelzen von Landeis und Meereis. Im folgenden werden die unterschiedlichen Modelle erläutert.

3.1 Topographie

Für die numerische Lösung der Meeresspiegelgleichung wird ein Topographiemodell der Erde benötigt. Dieses berücksichtigt sowohl die Gestalt der Erdoberfläche an Land als auch die Topographie des Meeresbodens. Als Nullniveau wird hierbei der Meeresspiegel verwendet. Damit entspricht die Topographie dem negativen Meeresspiegel SL

$$T = -SL \quad (3.1)$$

Dies bedeutet, dass positive Werte der Topographie gleichbedeutend mit der Eigenschaft Land sind, wohingegen negative Werte gleichbedeuten mit Ozeanen sind. Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurde das ETOPO1-Modell der Wetter- und Ozeanographiebehörde der Vereinigten Staaten NOAA¹ verwendet (Amante und Eakins, 2009). Für die Berechnungen wurde ein Modell verwendet, dessen Relief unterhalb des Eises in Grönland sowie der Antarktis verläuft.

¹NOAA: National Oceanic and Atmospheric Administration

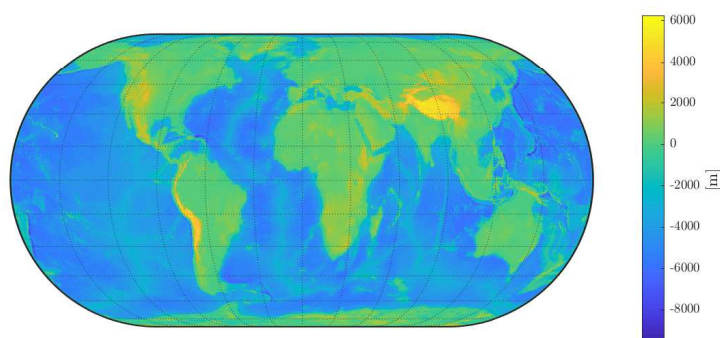


Abbildung 3.1: Topographiemodell ETOPO1 der NOAA

Aus diesem Topographiemodell kann nun die sogenannte Ozeanfunktion abgeleitet werden. Bei der Ozeanfunktion handelt es sich um eine Funktion, welche über den Ozeanen den Wert 1 und über Land den Wert 0 annimmt.

$$\mathcal{O}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{Ozeane} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2)$$

Diese Darstellung ergibt sich aus dem Topographiemodell durch

$$\mathcal{O}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } T < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3)$$

Mit dem vorhandenen Modell der Topographie ergibt sich damit folgende Darstellung für die Ozeanfunktion

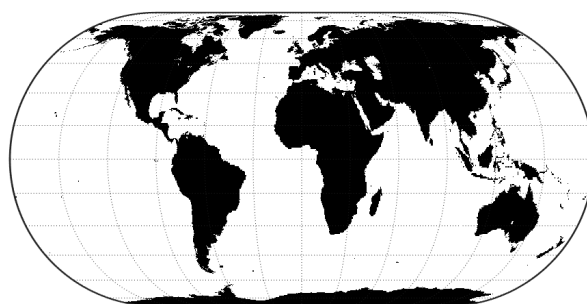


Abbildung 3.2: Berechnete Ozeanfunktion aus dem Topographiemodell

Für die numerische Lösung der Meeresspiegelgleichung werden die Kugelflächenfunktionskoeffizienten der Ozean-Funktion benötigt. Diese Berechnung erfolgt nach

dem bereits erwähnten Prinzip im vorherigen Kapitel. Damit kann die Ozeanfunktion nun als Kugelflächenfunktions-Entwicklung dargestellt werden und es ergibt sich

$$\mathcal{O}(\varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^o \cdot \bar{Y}_{l,m}(\varphi, \lambda) \quad (3.4)$$

Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass es sich bei der Ozeanfunktion um eine Funktion handelt, die an den Küstenlinien unstetig ist. Dies führt bei der Berechnung mit Kugelflächenfunktionen zum Auftreten des Gibbs-Phänomens an den Unstetigkeitsstellen.

Wird keine vertikale Begrenzung der Küstenlinien angenommen, so muss die Ozeanfunktion für jeden Berechnungszeitpunkt neu bestimmt werden. Hierfür muss die Topographie für den jeweiligen Zeitpunkt neu berechnet werden. Steigt der Meeresspiegel, so sinken die Werte der Topographie. Wird an einem bestimmten Ort der Wert 0 überschritten, so kommt es dort zu einer Veränderung der Küstenlinien.

3.2 Variation des Landeises

Für die Variation des Landeises werden verschiedene Modelle verwendet. Hierbei wird zum einen das ICE-5G Modell verwendet, welches die Eisdicke seit der letzten Eiszeit modelliert. Des weiteren wird ein aktuellerer Datensatz der TU Dresden verwendet.

3.2.1 ICE- 5G Modell

Um die postglaziale Variation des Landeises zu modellieren, wird das ICE-5G-Modell verwendet (Peltier, 2004). Die Beschreibung der Datenanalyse für das Modell erfolgt in (Peltier, 1998; Peltier u. a., 2002; Tarasov und Peltier, 2002). Dieses Modell basiert auf dem ETOPO2 Topographiemodell. Das Modell liegt in einer 1 Grad-Auflösung vor. Die Daten dieses Modells geben die vorhandene Eisdicke auf der Erde mit einer zeitlichen Auflösung von 500 Jahren über 21 000 Jahre an. Bei den ältesten Daten ist allerdings eine Auflösung von 1000 Jahren vorhanden. Die Eisdicke ist hierbei in Metern gegeben.

Für die Verwendung des Modells in den nachfolgenden Algorithmen zur Berechnung der Meeresspiegeländerung wird zunächst über die zeitliche Auflösung interpoliert, so dass eine kontinuierliche Auflösung von 500 Jahren vorhanden ist. Anschließend erfolgt die räumliche Interpolation der Daten, da für die Berechnung eine Auflösung von 0.5 Grad verwendet wird. Nun erfolgt die Berechnung der inkrementellen Eisdicke, da für die nachfolgenden Berechnungen die Differenz der Eisdicke zwischen zwei Beobachtungszeitpunkten von Interesse ist.

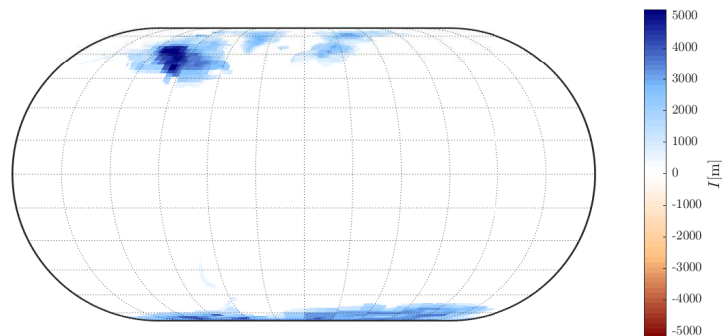


Abbildung 3.3: Eisdicke in Metern des ICE5G-Modells zum Zeitpunkt des letzten glazialen Maximums

Die Ergebnisse der Berechnungen mit diesem Modell dienen einzig und allein zu Testzwecken bezüglich der Funktionsfähigkeit des implementierten Programms. Für eine realistische Berechnung eines Modells der postglazialen Meeresspiegeländerungen muss auch die visko-elastische Antwort der festen Erde beachtet werden.

3.2.2 Variation der Eisdicke TU Dresden

Als weiteres Modell werden die Daten der gravimetrischen Massenbilanz der Technischen Universität Dresden verwendet (Groh und Horwath, 2016). Die Daten dieses Modells liegen in einer monatlichen Auflösung im Zeitraum von April 2002 bis August 2016 vor. Die Variation der Eisdicke ergibt sich hierbei aus der gravimetrischen Massenbilanz, welche mittels der GRACE-Mission² bestimmt wurde. Mittels der GRACE-Mission können schon geringe Änderungen des Gravitationsfeldes gemessen werden, welche durch das Zu- und Abnehmen der Eismassen entstehen. Diese können durch die Variation der Positionen und Beschleunigungen der beiden Satelliten der GRACE-Mission zueinander detektiert werden. Bei diesem Datensatz handelt es sich um einen aus GRACE Daten bestimmten Datensatz, dessen Ausgangsdaten vorverarbeitet wurden (Ivins u. a., 2013)

Die gegebenen Daten liegen in einem ASCII Format vor, welches die jeweiligen Koordinaten, die Fläche sowie die Massenänderungen pro Quadratmeter enthält. Da für die Berechnungen die Änderung der Eisdicke benötigt werden, müssen die Massenänderungen in Änderungen der Eisdicke umgerechnet werden. Dabei gilt

$$\Delta I = \frac{\Delta M}{\rho_I}. \quad (3.5)$$

²GRACE Gravity Recovery and Climate Experiment: Gemeinsame Satellitenmission von NASA und DLR zur Bestimmung der Variationen des Schwerefeldes.

Hierbei ist ΔI die Variation der Eisdicke in Metern, ρ_I die Dichte des Eises und ΔM die Massenänderung des Eises pro Quadratmeter. Für die Anwendung der Daten muss zunächst das Jahresmittel berechnet werden. Die Daten liegen in einer räumlichen Auflösung von 50 km vor. Allerdings gilt es hierbei zu beachten, dass die tatsächliche Auflösung durch die GRACE-Charakteristik etwas gröber ist. Des Weiteren muss beachtet werden, dass die Datensätze für Grönland und die Antarktis separat vorliegen, so dass diese für die weitere Verwendung kombiniert werden müssen.

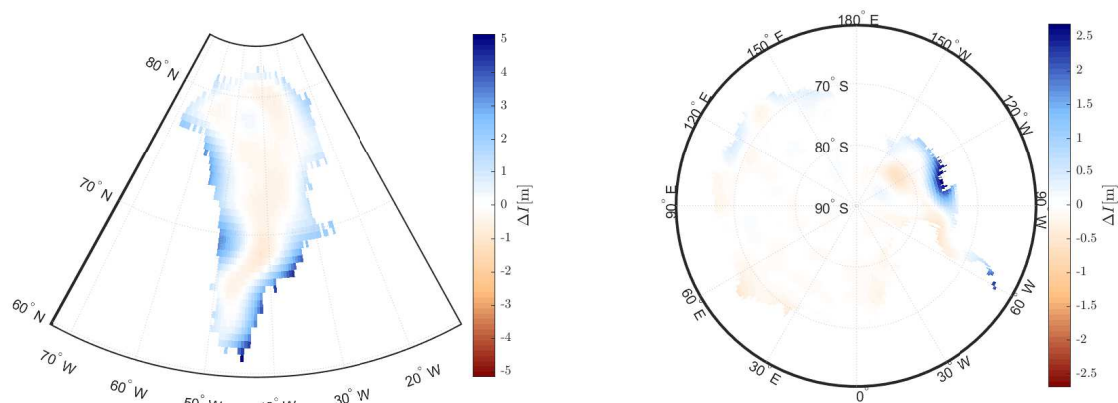


Abbildung 3.4: Variation der Eisdicke in Metern für Grönland und Antarktis aus dem Jahr 2003 nach dem Modell der Gravimetrischen Massenbilanz der TU Dresden

Werden die separaten Datensätze für Grönland und die Antarktis nun zusammengefügt, so zeigt sich, dass die Änderungen der Eisdicke in Grönland deutlich größer sind als in der Antarktis.

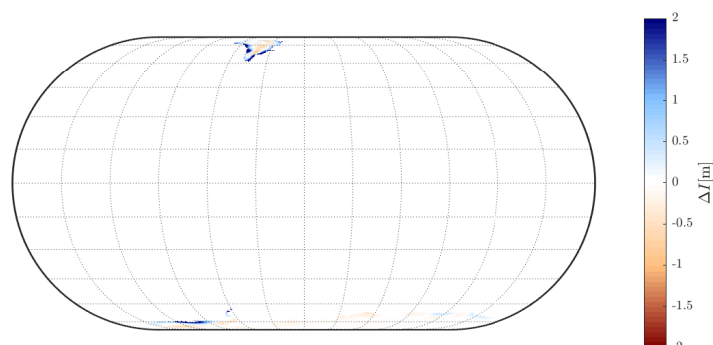


Abbildung 3.5: Variation der Eisdicke für Grönland und Antarktis aus dem Jahr 2003 nach dem Modell der Gravimetrischen Massenbilanz der TU Dresden

3.3 Konstanten

Für die Berechnung der Meeresspiegeländerung werden des weiteren noch verschiedene numerische Konstanten benötigt. Diese sind im folgenden dargestellt

Tabelle 3.1: Konstanten

	Wert	Einheit
Gravitationskonstante	$6.6720 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kg}\text{s}^2$
Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24}$	kg
Dichte Wasser	1000	kg/m^3
Dichte Eis	931	kg/m^3
Radius Erde	6371000	m

Kapitel 4

Meeresspiegelgleichung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Meeresspiegelgleichung. Hierbei werden zum einen die grundlegenden physikalischen Prinzipien wie Massenerhaltung und die Einstellung der Wasseroberfläche auf eine Äquipotentialflächen beschrieben. Zum anderen werden die Effekte welche den Meeresspiegel beeinflussen, wie eine Änderung der Auflasten und eine Veränderung der Küstenlinien, erläutert. Anschließend werden die Formeln für die Meeresspiegelgleichung unter Berücksichtigung von ausgewählten Effekten analytisch hergeleitet.

Neben den betrachteten Effekten wie der elastischen, beziehungsweise einer visko-elastischen Erde und den sich ändernden Auflasten, spielen für die tatsächliche Verteilung des Wassers auf die Ozeane auch die Rotation der Erde, die Meeresströmungen, sowie die lokalen Wassertemperaturen und der Salzgehalt eine wichtige Rolle. Diese werden im weiteren allerdings nicht weiter beachtet (Mitrovica u. a., 2001).

Bei der Betrachtung der Meeresspiegeländerung wird zunächst zwischen der elastischen Antwort und der visko-elastischen Antwort unterschieden. Diese Reaktionen der Erde auf eine sich ändernde Eislast sind in der Abbildung 4.1 dargestellt. Beim Vergleich zwischen den ersten beiden Zeitschritten zeigt sich, dass die Eismasse des Gletschers abnimmt. Durch die geringere Auflast sowie eine verringerte Gravitationsanziehung sinkt der Meeresspiegel am nahegelegenen Ufer des Gletschers. Betrachtet man allerdings das andere Ufer, welches ein weit entferntes Ufer darstellt, so zeigt sich, dass hier der Meeresspiegel deutlich ansteigt. Diese Veränderungen zeigen die elastische Antwort der Erde auf die sich ändernden Auflasten durch Eis und Wasser. Der Vergleich des zweiten und dritten Zeitschrittes zeigt, dass sich die Eismasse nicht weiter verändert, der Meeresspiegel aber weiterhin eine Änderung aufweist. Dies zeigt die viskoelastische Antwort der Erde. Dieser Effekt ist über mehrere tausend Jahre sichtbar. Da sich diese Arbeit allerdings mit den Auswirkungen des Klimawandels beschäftigt und deshalb ein Zeitraum von circa 100 Jahren betrachtet wird, kann die viskoelastische Antwort vernachlässigt werden.

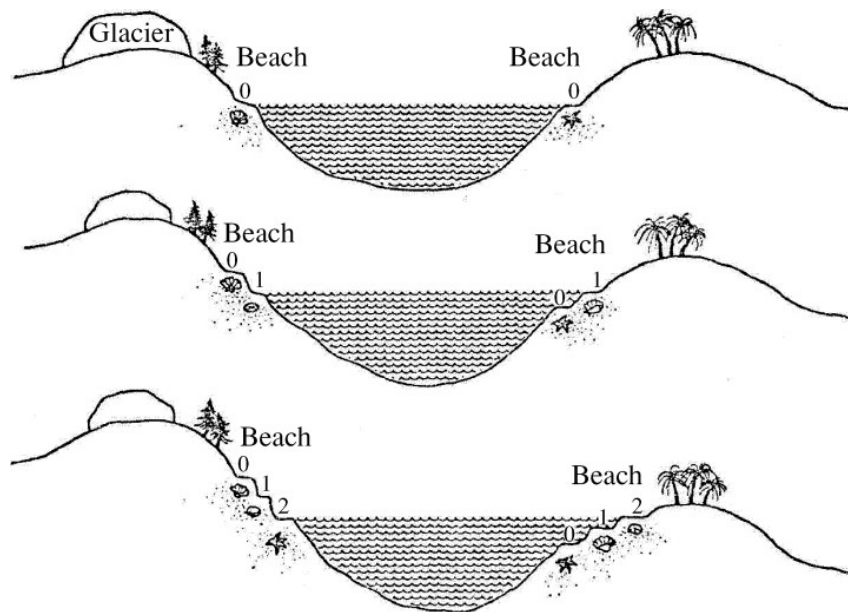


Abbildung 4.1: Zeitliche Veränderung des Meeresspiegels in Folge einer abschmelzenden Eismasse (Farrell und Clark, 1976).

4.1 Theorie der Meeresspiegelgleichung

Bevor die Meeresspiegelgleichung betrachtet wird, muss zunächst der Meeresspiegel definiert werden. Hierbei wird der Meeresspiegel als die radiale Differenz zwischen dem Geoid und der Oberfläche der festen Erde definiert (Spada, 2017). Im folgenden wird das Geoid mit der Meeresoberfläche als identisch angenommen.



Abbildung 4.2: Definition des Meeresspiegels

Im folgenden wird allerdings nicht der absolut Wert des Meeresspiegels betrachtet, sondern vielmehr dessen Variation. Demnach werden auch für die Eingangsgrößen die Variationen betrachtet. Die Variation des Meeresspiegels wird im folgenden durch S , die Variation der Geoidundulation durch N und die Variation der radialen Verschiebung der festen Erde durch U bezeichnet.

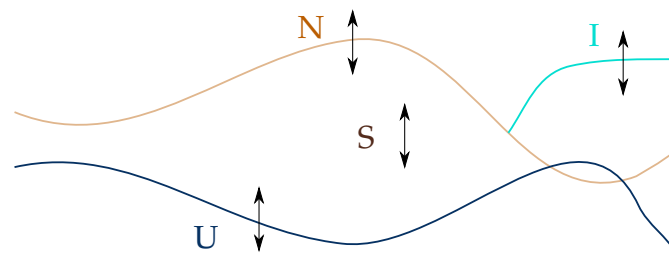


Abbildung 4.3: Definition der Variation des Meeresspiegels, des Geoids, der Radialverschiebung der festen Erde sowie der Eisdicke

Der tatsächliche Meeresspiegel wird von vielen verschiedenen Parametern beeinflusst. Hierzu gehören zum einen Auflasten durch Wasser und Eis, zum anderen die Erdrotation sowie die vertikale Begrenzung der Ozeane durch Küstenlinien. Des Weiteren hängt der aktuelle Meeresspiegel natürlich auch von Phänomenen mit kürzerer Periode wie beispielsweise den Gezeiten ab. Diese werden im folgenden allerdings nicht weiter berücksichtigt.

Die Meeresspiegelgleichung betrachtet die Änderungen der Kryosphäre und die sich damit ändernde Verteilung des Wassers auf der Erdoberfläche. Hierbei wird das Prinzip der Massenerhaltung angewendet, welches besagt, dass die Masse des abschmelzenden Eises der Masse des zusätzlichen Wassers entspricht. Durch das Abschmelzen der Eisschilde kommt es neben dem zusätzlichen Wasser auch zu einer Änderung des Auflastpotentials. Die Last an den verschiedenen Stellen der Erde verändert sich durch das Abschmelzen des Eises sowie dem zusätzlichen Wasser in den Ozeanen. Durch die Änderung der Auflasten kommt es zu einer Reaktion der festen Erde.

Da es sich bei der Wasseroberfläche der Erde um eine Äquipotentialfläche handelt, muss dies auch gelten, nachdem sich das zusätzliche Wasser über die Ozeane verteilt hat. Die verschiedenen Lastpotentiale von Eis und Wasser und das Deformationspotential der Erde werden im folgenden summiert als Störpotential betrachtet.

Mit steigendem Meeresspiegel kommt es zu einer Variation der Küstenlinien. Um diese Änderung feststellen zu können, muss allerdings mit einer recht hohen räumlichen Auflösung gerechnet werden, da sonst eine starke Änderung des Meeresspiegels nötig ist um eine Variation der Küstenlinien zu bemerken. Um die Änderung der Küstenlinien bestimmen zu können kann die Änderung des Meeresspiegels mit Hilfe der gegebenen Topographie ausgewertet werden. Damit ergeben sich die neuen Küstenlinien und somit auch eine neue Ozeanfunktion (Mitrovica und Milne, 2003). Im folgenden wird die Veränderung der Küstenlinien schematisch dargestellt.

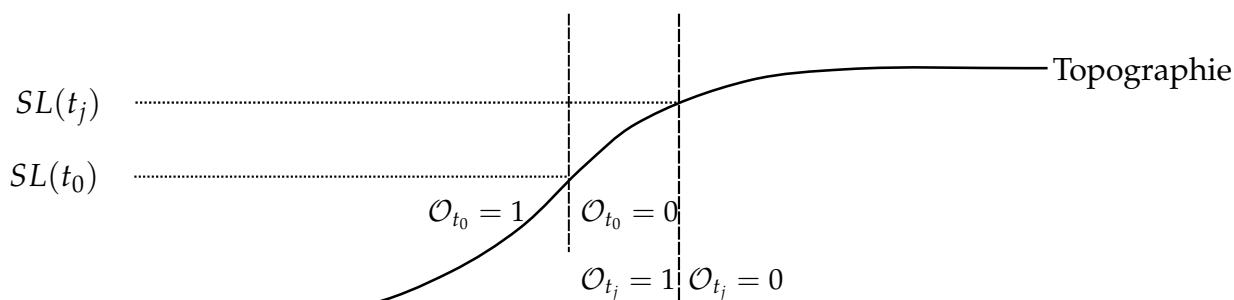


Abbildung 4.4: Schematische Änderung der Küstenlinien und Änderung der Ozean-Funktion durch einen steigenden Meeresspiegel

4.2 Analytische Herleitung der Meeresspiegelgleichung

Im folgenden wird die Meeresspiegelgleichung hergeleitet (Spada, 2017). Hierbei wird angenommen, dass es sich um zeitlich konstante Küstenlinien handelt. Des Weiteren wird von einer nicht rotierenden Erde ausgegangen.

Bei der Betrachtung der Meeresspiegelgleichung gilt zunächst einmal die Voraussetzung dass es sich bei der Ozeanoberfläche um eine Äquipotentialfläche handelt. Das durch Abschmelzen zusätzlich entstandene Wasser verteilt sich demnach so über die Ozeane, dass sich der Meeresspiegel wieder auf einer Äquipotentialfläche einstellt. Des Weiteren gilt für die Änderungsrate des Meeresspiegels folgender Zusammenhang

$$S = N - U. \quad (4.1)$$

Hierbei handelt es sich um die Änderung der Geoidundulation N sowie um die Änderung der Radialverschiebung der festen Erde U . Um die Variation der Geoidundulation zu bestimmen wird die Formel von Bruns verwendet. Diese kann auch für die Variation angewendet werden, da die einzelnen Terme linear auftreten und jeweils nur vom aktuellen Zeitpunkt abhängen. Damit gilt

$$N = \frac{\Phi}{\gamma} + c. \quad (4.2)$$

Hierbei handelt es sich um die Variation des Störpotentials Φ , welches die Effekte die durch eine Änderung der Auflast entstehen beinhaltet. Des weiteren wird die Referenzschwere an der Erdoberfläche γ benötigt. Die Potentialanomalie ergibt sich durch $-c \cdot \gamma$. Um die Konstante c zu bestimmen, wird das Prinzip der Massenerhaltung verwendet. Dieses besagt, dass die Gesamtmasse aus Eis und Wasser konstant bleibt. Dies bedeutet, dass die Summe aus der negativen Masse des abgeschmolzenen Eises und der Masse des zusätzlichen Wassers null ergibt. Hierbei ist M_I, M_O die Änderung der Masse des Eises, sowie des Wassers.

$$M_I + M_O = 0 \quad (4.3)$$

Um die abgeschmolzene Eisdicke zu bestimmen wird die Eisdicke des aktuellen Zeitpunktes mit der des Bezugszeitpunktes verglichen. Die Dicke des abgeschmolzenen Eises ergibt sich damit durch

$$I(\omega, t) = T_I(\omega, t) - T_I(\omega, t_0) \quad (4.4)$$

Hierbei steht T für die Eisdicke, ω für die Position in φ, λ sowie t für den Berechnungszeitpunkt und t_0 für den Referenzzeitpunkt. Die negative Masse des abgeschmolzenen Eises ergibt sich somit durch

$$M_I = \int_I \rho_I I dA \quad (4.5)$$

Die zusätzliche Masse der Ozeane ergibt sich nun durch

$$M_O = \int_O \rho_W S dA \quad (4.6)$$

Durch Verwendung der Gleichungen (4.1),(4.2) sowie den Gleichungen (4.5) und (4.6) ergibt sich die Potentialanomalie durch

$$\begin{aligned} M_I + \rho_W \int_O S dA &= M_I + \rho_W \int_O (N - U) dA = M_I + \rho_W \int_O \left(\frac{\Phi}{\gamma} + c - U \right) dA = 0 \\ M_I + \rho_W A_O c + \rho_W \int_O \left(\frac{\Phi}{\gamma} - U \right) dA &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit ergibt sich für die Konstante c

$$c = -\frac{M_I}{\rho_W A_O} - \frac{1}{A_O} \int_O \left(\frac{\Phi}{\gamma} - U \right) dA \quad (4.8)$$

S^E wird die eustatische Meeresspiegeländerung genannt, die die mittlere Meeresspiegeländerung über den Ozeanen angibt. Diese ist definiert als

$$S^E = -\frac{M_I}{\rho_W A_O} \quad (4.9)$$

Durch Kombination der Gleichungen (4.1),(4.2), (4.8) und (4.9) ergibt sich für die Meeresspiegelgleichung folgende Darstellungsform

$$S = \frac{\Phi}{\gamma} - U - \frac{M_I}{\rho_W A_O} - \frac{1}{A_O} \int_O \left(\frac{\Phi}{\gamma} - U \right) dA \quad (4.10)$$

Das Störpotential Φ besteht aus den Auflastpotentialen und dem induzierten Deformationspotential des Eises und Wassers. Damit ergibt sich für das Störpotential

$$\Phi = v_{\text{Last}}^{\text{Eis}} + v_{\text{Last}}^{\text{Wasser}} + v_{\text{Def}} \quad (4.11)$$

$$v_{\text{Last}} = v_{\text{Last}}^{\text{Eis}} + v_{\text{Last}}^{\text{Wasser}} = G\rho_I \iint \frac{I(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dA + G\rho_W \iint \frac{\mathcal{O}S(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dA \quad (4.12)$$

$$v_{\text{Def}} = \iint v_{\text{Last}} \sum_l (k_l \cdot P_l(\cos \psi)) dA \quad (4.13)$$

Die obige Integraldarstellung der einzelnen Terme wird nun in eine Faltung mit einer Greenschen Funktion umgeschrieben. Bei diesen Faltungen handelt es sich um eine 3D (2D +1D)-Faltung. Diese beinhalten eine Faltung über die Oberfläche (2D) sowie eine Faltung über die Zeit. Diese Faltungen werden mittels der Meeresspiegel Greenfunktion beschrieben, die sich aus der Greenschen Funktion für das Störpotential sowie der Radialverschiebung wie folgt ergibt

$$\frac{G_S}{\gamma} = \frac{G_\Phi}{\gamma} - G_u \quad (4.14)$$

Hierbei setzen sich die Greenschen Funktionen im Falle einer elastischen Erde aus den Termen für die feste Erde, sowie denen der elastischen Erde zusammen. Damit ergibt sich

$$G_\Phi = \delta(t) \frac{R\gamma}{M_E} \sum_l (1 + k_l^e) P_l(\cos \psi) \quad (4.15)$$

$$G_u = \delta(t) \frac{R}{M_E} \sum_l h_l^e P_l(\cos \psi) \quad (4.16)$$

Damit gilt für die Greensche Funktion der Meeresspiegelgleichung

$$\frac{G_S}{\gamma} = \delta(t) \frac{R}{M_E} \sum_l (1 + k_l^e - h_l^e) P_l(\cos \psi) \quad (4.17)$$

Der Nachweis der Gültigkeit der Meeresspiegel-Greenfunktion erfolgt in Kapitel 4.4. Unter Verwendung der Greenschen Funktionen ergibt sich durch Faltungen für das Störpotential sowie die Radialverschiebung somit

$$\Phi = \rho_I G_\Phi \otimes_I I + \rho_W G_\Phi \otimes_O S \quad (4.18)$$

$$U = \rho_I G_u \otimes_I I + \rho_W G_u \otimes_O S \quad (4.19)$$

Die Faltung wird hierbei definiert durch

$$G \otimes_O S = \int_{-\infty}^t dt' \int_{\sigma'} G(t-t', \psi) S(t', \varphi', \lambda') \mathcal{O}(\varphi', \lambda') R^2 d\sigma' \quad (4.20)$$

In die obigen Formeln eingesetzt ergibt sich damit

$$S = \frac{\rho_I}{\gamma} G_S \otimes_i I + \frac{\rho_W}{\gamma} G_S \otimes_O S + S^E - \frac{\rho_I}{\gamma} \overline{G_S \otimes_i I} - \frac{\rho_W}{\gamma} \overline{G_S \otimes_O S} \quad (4.21)$$

Hierbei bezeichnet $\overline{(\dots)}$ das Mittel über die Ozeane. Da die Änderung des Meeresspiegels nur über den Ozeanen betrachtet werden soll, wird die Projektion auf die Ozeane benötigt. Diese ist gegeben durch

$$Z = S \cdot \mathcal{O} \quad (4.22)$$

4.3 Erweiterung der Gleichungen für variable Küstenlinien

Um die Gleichungen für variable Küstenlinien zu erweitern, muss die Topographie für jeden Zeitpunkt nach der Berechnung der Meeresspiegeländerung neu berechnet werden. Hierbei muss zunächst beachtet werden, dass es sich bei der Topographie um den negativen Meeresspiegel handelt. Der Meeresspiegel bezogen auf die feste Erdoberfläche ist gegeben durch SL (vergleiche Abbildung 4.2) Dieser ergibt sich durch

$$SL(\omega) = G(\omega) - F(\omega). \quad (4.23)$$

Für die Topographie gilt somit

$$T(t, \omega) = -SL(t, \omega) \quad (4.24)$$

Die Änderung der Topographie muss nun für jeden Berechnungszeitpunkt neu bestimmt werden. Dabei ergibt sich die Topographie für den aktuellen Zeitpunkt aus der Topographie des Referenzzeitpunktes, sowie den Änderungen des Meeresspiegels zum Referenzzeitpunkt durch

$$T(t_j, \omega) = T(t_0, \omega) - S(t_j, \omega) \quad (4.25)$$

Im Anschluss an die Berechnung der aktuellen Topographie muss auch die Ozean Funktion für den Berechnungszeitraum neu bestimmt und angewendet werden.

4.4 Meeresspiegel Green Funktion

Führt man eine Faltung mit der Greenschen Funktion G_Φ als Faltungskern sowie der Variation des Meeresspiegels oder der Änderung der Eisdicke durch, so ergibt sich

daraus die Summe aus Last- und Deformationspotential. Dieser Zusammenhang soll im folgenden für die verwendeten Greenschen Funktionen gezeigt werden. Beispielsweise wird die Faltung unter Verwendung der Eislast gezeigt. Zunächst wird folgende Gleichung betrachtet

$$\Phi_I = \rho_I G_\Phi \otimes I \quad (4.26)$$

In Integralform geschrieben ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \rho_I \iint_{\sigma} G_\Phi \cdot I \cdot R^2 d\sigma \\ &= \rho_I \iint_{\sigma} \frac{R\gamma}{M_E} \sum_l (1 + k_l) P_l(\cos \psi) \cdot \sum_{k,j} h_{k,j}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{k,j}(\omega') R^2 d\sigma \end{aligned} \quad (4.27)$$

Unter Verwendung des Zusammenhangs

$$P_l(\cos \psi) = \frac{1}{2l+1} \sum_m \bar{Y}_{l,m}(\omega) \bar{Y}_{l,m}(\omega') \quad (4.28)$$

ergibt sich damit

$$\Phi_I = \frac{\rho_I R^3 \gamma}{M_E} \iint_{\sigma} \sum_l (1 + k_l) \frac{1}{2l+1} \sum_m \bar{Y}_{l,m}(\omega) \bar{Y}_{l,m}(\omega') \cdot \sum_{k,j} h_{k,j}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{k,j}(\omega') d\sigma \quad (4.29)$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \frac{4\pi\rho_I R^3 \gamma}{M_E} \sum_l \frac{(1 + k_l)}{2l+1} \sum_m h_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{l,m}(\omega) \\ &= 4\pi\rho_I R G \sum_l \frac{(1 + k_l)}{2l+1} \sum_m h_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{l,m}(\omega) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Höhe der Auflast und den Koeffizienten des Lastpotentials ist gegeben durch

$$v_{l,m} = \frac{4\pi G \rho R}{2l+1} h_{l,m} \quad (4.31)$$

Damit ergibt sich für die Summe aus Last- und Deformationspotential

$$\Phi_I = \sum_l (1 + k_l) \sum_m v_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{l,m} \quad (4.32)$$

was der üblichen Darstellung des Störpotentials mit Hilfe der Auflastzahlen k_l entspricht. Diese Berechnung wird nun auch für den zweiten Teil der Greenschen Funktion durchgeführt. Hierbei gilt

$$U_I = \rho_I G_U \otimes I \quad (4.33)$$

Damit ergibt sich in der Integralschreibweise

$$\begin{aligned} U_I &= \rho_I \iint_{\sigma} G_U \cdot I \cdot R^2 d\sigma \\ &= \rho_I \iint_{\sigma} \frac{R}{M_E} \sum_l h_l P_l(\cos \psi) \cdot \sum_{k,j} h_{k,j}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{k,j}(\omega') R^2 d\sigma \end{aligned} \quad (4.34)$$

Unter Verwendung von Gleichung (4.28) ergibt sich

$$U_I = \rho_I \iint_{\sigma} \frac{R}{M_E} \sum_l h_l \frac{1}{2l+1} \sum_m \bar{Y}_{l,m}(\omega) \bar{Y}_{l,m}(\omega') \cdot \sum_{k,j} h_{k,j}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{k,j}(\omega') R^2 d\sigma \quad (4.35)$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen ergibt sich

$$\begin{aligned} U_I &= \frac{4\pi\rho_I R^3}{M_E} \sum_l \frac{h_l}{2l+1} \sum_m h_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{l,m}(\omega) \\ &= \frac{4\pi\rho_I R G}{\gamma} \sum_l \frac{h_l}{2l+1} \sum_m h_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}_{l,m}(\omega) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Höhe der Auflast, sowie denen der Last- und Deformationspotentials nach Gleichung (4.31) ergibt sich

$$U_I = \frac{1}{\gamma} \sum_l h_l \sum_m v_{l,m}^{\text{Eis}} \bar{Y}(\omega) \quad (4.37)$$

4.5 Deformationskoeffizienten

Als Deformationskoeffizienten werden die Love-Zahlen verwendet. Diese sind von der jeweiligen Wahl des Erdmodells abhängig. Diese Love-Zahlen ergeben sich durch

$$k_l(t) = k_l^E \delta(t) + \sum_{k=1}^K r_k^l e^{-s_k^l t} \quad (4.38)$$

$$h_l(t) = h_l^E \delta(t) + \sum_{h=1}^H r_h^l e^{-s_h^l t} \quad (4.39)$$

Hierbei sind die Koeffizienten r_k^l die Normalmoden. Die Koeffizienten s_k^l die zugehörigen inversen Relaxationszeiten (Vermeersen u. a., 1996).

In diesem Fall wurde für die Berechnung eine elastische Erde zu Grunde gelegt. Die verwendeten Koeffizienten ergeben sich unter der Verwendung des PREM-Modells. Dieses Modell geht von einer radialen Dichteverteilung im Erdinneren aus (Wang u. a., 2012). Diese Dichteverteilung beeinflusst die Ausbreitung der Wellen im Erdinneren.

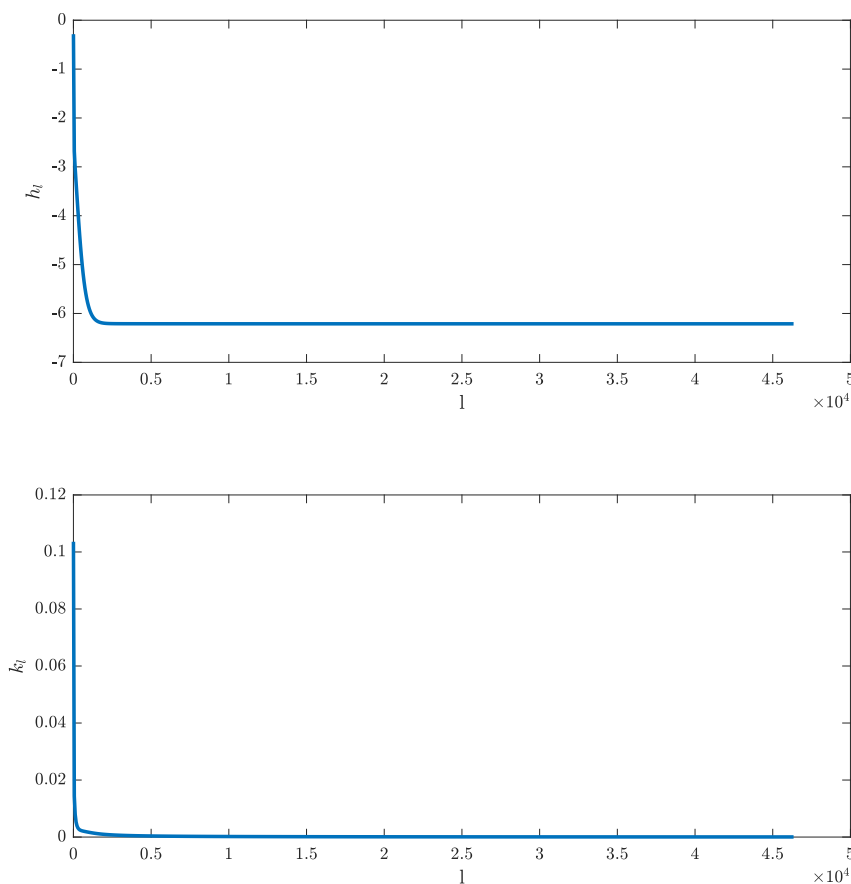


Abbildung 4.5: Verlauf der Love Zahlen von Grad 1 bis 46342

Die Abbildung 4.5 zeigt den Verlauf der Love-Zahlen h_l und k_l in Abhängigkeit des Grades. Bei dem hier verwendeten Datensatz sind die Koeffizienten bis Grad 46342 vorhanden. Bei der Betrachtung zeigt sich, dass der Grenzwert für h_l für einen hohen Grad gegen $-6,21$ konvergiert. Für die Koeffizienten k_l zeigt sich eine Konvergenz gegen 0.

Kapitel 5

Lösung mittels eines pseudo-spektralen Ansatzes

In diesem Kapitel erfolgt die Lösung der Meeresspiegelgleichung mittels eines pseudo-spektralen Ansatzes. Dieser erlaubt die numerische Lösung der Integralgleichung unter der Verwendung von Kugelflächenfunktionen. Die Gleichungen die den folgenden Algorithmen zu Grunde liegen, unterscheiden sich im wesentlichen nicht von den üblichen Gleichungen für die Lösung der Meeresspiegelgleichung.

5.1 Algorithmus nach Mitrovica

Der nachfolgende Algorithmus zur Lösung der Meeresspiegelgleichung verwendet zur Berechnung drei Iterationen. Hierbei gibt es zum einen die Iteration über die Zeit die im folgenden mit dem Index j bezeichnet wird. In dieser Iteration wird die Meeresspiegeländerung für den jeweiligen Zeitpunkt bestimmt. Des Weiteren gibt es eine innere Iteration mit Index i , die die Konvergenz hinsichtlich der Änderung des Meeresspiegels für einen Zeitpunkt betrachtet. Außerdem gibt es die Iteration mit Index k , diese prüft die Anpassung der Küstenlinien zum jeweiligen Berechnungszeitpunkt (Kendall u. a., 2005). Für die Reihenfolge der Iterationen gilt, dass im innersten Iterationsschritt die Änderung des Meeresspiegels berechnet werden muss. Dies geschieht anschließend für alle Berechnungszeitpunkte. Die Überprüfung der Anpassung der Küstenlinien erfolgt im äußersten Iterationsschritt, da diese vom bisherigen zeitlichen Verlauf abhängig sind.

5.1.1 Anwendung des Algorithmus

Zur Berechnung des Algorithmus müssen zunächst die Topographie und die Ozeane für jeden gewünschten Berechnungszeitpunkt definiert werden. Hierbei wird in erster Näherung angenommen, dass sowohl die Topographie als auch die Ozean-Funktion zu allen Zeitpunkten identisch mit dem aktuellen Zeitpunkt ist. Nach der Bestimmung der jeweiligen Felder, müssen zunächst die Kugelflächenfunktionskoeffizienten für die

Topographie zu jedem Zeitpunkt bestimmt werden. Durch die bekannte Topographie wird nun die Ozeanfunktion bestimmt. Des Weiteren muss die vorhandene Eislast modelliert werden, um die eisfreie Ozeanfläche bestimmen zu können. Hierbei ist I ein Feld, welches die vorhandene Eislast in Metern angibt. Daraus wird nun das Feld I^* abgeleitet, welches die Variation des Landeises, sowie des auf dem Grund aufliegenden Meereises. (Mitrovica und Peltier, 1991). Dieses ergibt sich durch

$$I_j^{k*}(\omega) = \begin{cases} I_j & \mathcal{O}(\omega) = 0 \\ I_j & \mathcal{O}(\omega) = 1 \text{ und } I_j > |T_j^k| \frac{\rho_W}{\rho_I} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1)$$

Des Weiteren wird nun die Projektion der Topographie im Bereich der sich ändernden Küstenlinien auf die Ozeane bestimmt. Hierbei gilt

$$TO_j^{k-1} = T_0^{k-1} (\mathcal{O}_j^{k-1} - \mathcal{O}_0^{k-1}) \quad (5.2)$$

Nun werden die bestimmten Felder \mathcal{O} und TO_j in die Koeffizienten der Kugelflächenfunktionen zerlegt. Anschließend kann ein erster Schätzwert für die Ozeanlast berechnet werden. Dieser ergibt sich durch

$$\delta Z_{lm}(t_j) = \frac{\mathcal{O}_{lm}(t_{j-1})}{\mathcal{O}_{00}(t_{j-1})} \left(-\frac{\rho_I}{\rho_W} I_{00}^* + \tau_{00}(t_j) - \tau_{00}(t_{j-1}) \right) - (\tau_{lm}(t_j) - \tau_{lm}(t_{j-1})) \quad (5.3)$$

Die Koeffizienten τ sind hierbei gegeben durch das Feld

$$\tau_j = T_0 \cdot \mathcal{O}_j \quad (5.4)$$

woraus nun die einzelnen Koeffizienten berechnet werden können. Im Falle von $k > 1$ kann die Berechnung aus dem vorherigen Iterationsschritt verwendet werden. Die Störung der Meeresoberfläche kann nun im Falle einer symmetrischen, elastischen und nicht rotierenden Erde wie folgt berechnet werden

$$\Delta \mathcal{S}_{lm}(t_j)^{i-1,k} = T_l E_l \left(\rho_I \Delta I_{lm}^{*k-1}(t_j) + \rho_W \Delta Z_{lm}(t_j)^{i=\infty,k} + \rho_W \delta Z_{lm}(t_j)^{i-1,k} \right) \quad (5.5)$$

Hierbei setzt sich E_l aus den Grad-abhängigen Last-Koeffizienten zusammen

$$E_l = 1 + k_l^E - h_l^E \quad (5.6)$$

Des Weiteren ergibt sich aus der spektralen Faltung unter der Verwendung des Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$T_l = \frac{4\pi R^3}{M_E(2l+1)}. \quad (5.7)$$

Nach der Berechnung von $\Delta \mathcal{S}$ können wieder die Koeffizienten des Feldes berechnet werden. Anschließend erfolgt die Projektion der Störung der Meeresoberfläche auf die Ozeane. Diese ist definiert als

$$UO_j^{i-1,k} = \Delta \mathcal{S}_j^{k-1} \mathcal{O}_j^{k-1} \quad (5.8)$$

Auch hier erfolgt nun wieder die Zerlegung in Kugelflächenfunktionskoeffizienten. Anschließend wird der räumlich konstante Term der Geoidundulation berechnet. Dieser ergibt sich durch

$$\frac{\Delta\Phi^{i-1,k}}{g} = \frac{1}{\mathcal{O}_{00}(t_j)^{k-1}} \left(\left(-\frac{\rho_I}{\rho_W} \Delta_{I00}^*(t_j)^{k-1} - U_{O00}(t_j)^{i-1,k} + T_{O00}(t_j)^{k-1} \right) \right). \quad (5.9)$$

Damit ergibt sich nun die Änderung zum vorherigen Berechnungsschritt durch

$$\delta Z_{lm}(t_j)^{i,k} = -\Delta Z_{lm}(t_{j-1})^{i=\infty,k} + U_{O_{lm}}^{i-1,k} + \frac{\Delta\Phi^{i-1,k}}{g} \mathcal{O}_{lm}(t_j)^{k-1} - T_{O_{lm}}(t_j)^{k-1} \quad (5.10)$$

Nun wird die Konvergenzbedingung für die innere Schleife über i berechnet. Dieses Kriterium ergibt sich durch

$$\zeta_j^{i,k} = \left| \frac{\sum_{l,m} |\delta Z_{lm}(t_j)^{i,k}| - \sum_{l,m} |\delta Z_{lm}(t_j)^{i-1,k}|}{\sum_{l,m} |\delta Z_{lm}(t_j)^{i-1,k}|} \right| \quad (5.11)$$

Als Grenzwert für die Iteration wurde als Abbruchbedingung ein Wert von $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ gewählt. Für $\zeta_j^{i,k} > \varepsilon_1$ beginnt der nächste Iterationsschritt mit Gleichung (5.3). Ist die Bedingung erfüllt und es gilt $\zeta_j^{i,k} < \varepsilon_1$ so erfolgt nun die Berechnung der Koeffizienten der Meeresspiegeländerung

$$\Delta S_{lm}(t_j)^{i=\infty,k} = \Delta S_{lm}(t_j)^{i=\infty,k} + \left[\frac{\Delta\Phi(t_j)}{g} \right]^{i=\infty,k} \quad (5.12)$$

Aus diesen Koeffizienten wird nun wieder das ursprüngliche Feld berechnet. Anschließend erfolgt eine Abfrage, ob die Berechnung über alle Zeitpunkte stattgefunden hat. Ist dies nicht der Fall beginnt die erneute Berechnung ab Gleichung (5.1) mit $j = j + 1$. Wurde eine Berechnung über alle Zeitpunkte durchgeführt, so erfolgt die Berechnung der aktualisierten Topographie, sowie der Ozeanfunktion für alle Zeitpunkte.

$$\begin{aligned} T_0^k &= T(t_p) + \Delta S_p^{i=\infty,k} \\ T_j^k &= T(t_p) + \Delta S_p^{i=\infty,k} - \Delta S_j^{i=\infty,k} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\mathcal{O}_j^k = \begin{cases} 1 & \text{für } T_j^k < 0 \\ 0 & \text{für } T_j^k \geq 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Für die neu berechnete Topographie werden nun wieder die Kugelflächenfunktionskoeffizienten bestimmt. Damit wird anschließend die Konvergenz der Topographie überprüft.

$$\zeta_0^k = \left| \frac{\sum_{l,m} |T_{lm}(t_0)^k| - \sum_{l,m} |T_{lm}(t_0)^{k-1}|}{\sum_{l,m} |T_{lm}(t_0)^{k-1}|} \right| \quad (5.15)$$

Als Abbruchbedingung wird hierfür der Vergleichsparameter $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ verwendet. Für $\zeta_0^k > \varepsilon_2$ beginnt der nächste Iterationsschritt mit Gleichung (5.1). Für $\zeta_0^k < \varepsilon_2$ ist die Berechnung beendet, und die Meeresspiegeländerungen für jeden Berechnungszeitpunkt können betrachtet werden.

5.1.2 Ablaufdiagramm des Algorithmus

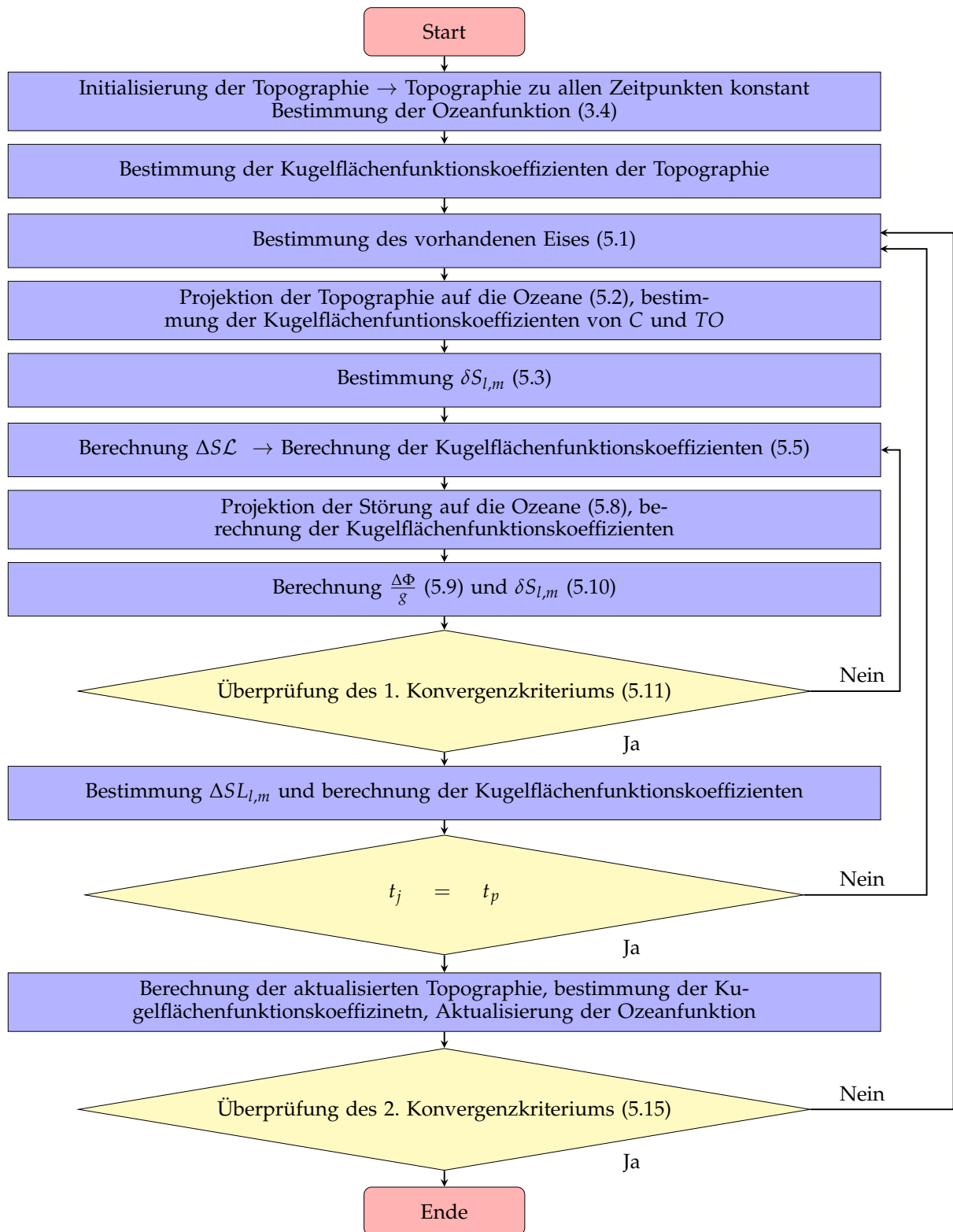


Abbildung 5.1: Ablaufdiagramm des Algorithmus nach Mitrovica

5.2 Algorithmus nach Spada (SELEN)

Der nachfolgende Algorithmus ist auch in den Fortran-Code implementiert (Spada und Stocchi, 2007), welcher unter dem Namen SELEN veröffentlicht wurde. Die Unterschiede hierbei sind, dass in dieser Berechnung eine elastische Erde zu Grunde liegt, während bei der SELEN Implementierung zwischen verschiedenen Erdmodellen (elastisch, visko-elastisch) gewählt werden kann (Spada u. a., 2012).

Für die Lösung werden hierbei zwei Hilfsvariablen A und B eingeführt (Spada und Stocchi, 2006). Diese werden wie folgt definiert

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho_I}{\gamma} G_S \otimes_e I \\ B &= \frac{\rho_W}{\gamma} G_S \otimes_e Z \end{aligned} \quad (5.16)$$

Damit ergibt sich

$$S = A - \bar{A} + S^E + B - \bar{B} \quad (5.17)$$

5.2.1 Anwendung des Algorithmus

Im folgenden wird die numerische Beschreibung des Algorithmus dargestellt. Die Berechnung erfolgt mittels zweier Iterationen. Zum einen gibt es eine äußere Iteration, welche über alle Berechnungszeitpunkte läuft. Die innere Schleife überprüft bei diesem Algorithmus die Konvergenz des Meeresspiegels am ersten Berechnungszeitpunkt.

Für die numerische Lösung wird zunächst der eustatische Term betrachtet. Dieser berechnet die Meeresspiegeländerung, die durch eine abschmelzende Eismasse, entsteht unter der Annahme, dass diese an allen Orten des Ozeans konstant ist. Damit ergibt sich für diese

$$Z^E = -\frac{M_I}{\rho_W A_0} \mathcal{O}. \quad (5.18)$$

Für die Fläche der Ozeane A_0 sowie die abschmelzende Eismasse M_I gilt hierbei

$$\begin{aligned} A_0 &= 4\pi R^2 c_{00}^{\mathcal{O}} \\ M_I &= 4\pi \rho_I R^2 I_{0,0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Darstellung der reduzierten Meeresspiegeländerung durch Kugelflächenfunktionen ergibt sich nun durch

$$Z^E = -\frac{\rho_I}{\rho_W} \frac{I_{00}}{c_{0,0}^{\mathcal{O}}} \sum_{l,m} c_{l,m}^{\mathcal{O}} \bar{Y}_{l,m} \quad (5.20)$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten durch

$$Z_{l,m} = -\frac{\rho_I}{\rho_W} \frac{I_{00}}{c_{0,0}^{\mathcal{O}}} c_{l,m}^{\mathcal{O}} \quad (5.21)$$

Nun wird die numerische Darstellung der Hilfsvariablen A und B festgelegt. Hierbei wird zunächst eine elastische, symmetrische, nicht rotierende Erde zugrunde gelegt. Damit ergibt sich

$$A = 3 \frac{\rho_I}{\rho_e} E_l I_{l,m} \quad (5.22)$$

$$B = 3 \frac{\rho_I}{\rho_e} E_l Z_{l,m} \quad (5.23)$$

Hierbei ist E_l gegeben durch

$$E_l = \frac{1 + k_l^e - h_l^e}{2l + 1} \quad (5.24)$$

Damit werden nun die Terme $A - \bar{A}$ und $B - \bar{B}$ berechnet. Für diese gilt

$$A - \bar{A} = \sum_{l,m} A'_{l,m} \bar{Y}_{l,m} \quad (5.25)$$

$$B - \bar{B} = \sum_{l,m} B'_{l,m} \bar{Y}_{l,m} \quad (5.26)$$

Die benötigten Koeffizienten $A'_{l,m}$ und $B'_{l,m}$ ergeben sich durch

$$A'_{l,m} = A_{l,m} - \bar{A} \delta_{l0} \delta_{m0} \quad (5.27)$$

$$B'_{l,m} = B_{l,m} - \bar{B} \delta_{l0} \delta_{m0} \quad (5.28)$$

Hierbei ist \bar{A} und \bar{B} gegeben durch

$$\bar{A} = \frac{1}{c_{00}^{\mathcal{O}}} \sum_{l,m} c_{l,m}^{\mathcal{O}} A_{l,m} \quad (5.29)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{c_{00}^{\mathcal{O}}} \sum_{l,m} c_{l,m}^{\mathcal{O}} B_{l,m} \quad (5.30)$$

$$S_{l,m} = A'_{l,m} + S_{l,m}^E + B'_{l,m} \quad (5.31)$$

$$S = \sum_{l,m} S_{l,m} \bar{Y}_{l,m} \quad (5.32)$$

Nachdem diese Berechnungsschritte durchgeführt wurden, müssen die Abbruchbedingungen für die Iterationsschleifen betrachtet werden. Für die innere Iterationsschleife wird hierfür die Konvergenz der berechneten Meeresspiegeländerung betrachtet. Diese ergibt sich durch den Vergleich der berechneten Meeresspiegeländerung aus dem vorausgehenden, sowie dem aktuellen Iterationsschritt k .

$$\varepsilon = \left| \frac{\sum \sum |S_k| - \sum \sum |S_{k-1}|}{\sum \sum |S_{k-1}|} \right| \quad (5.33)$$

Wird das Abbruchkriterium von $\varepsilon < 10^{-12}$ erreicht, so wird mit der Berechnung des nächsten Zeitpunktes fortgefahren, bis alle geforderten Zeitpunkte berechnet wurden.

5.2.2 Ablaufdiagramm des Algorithmus

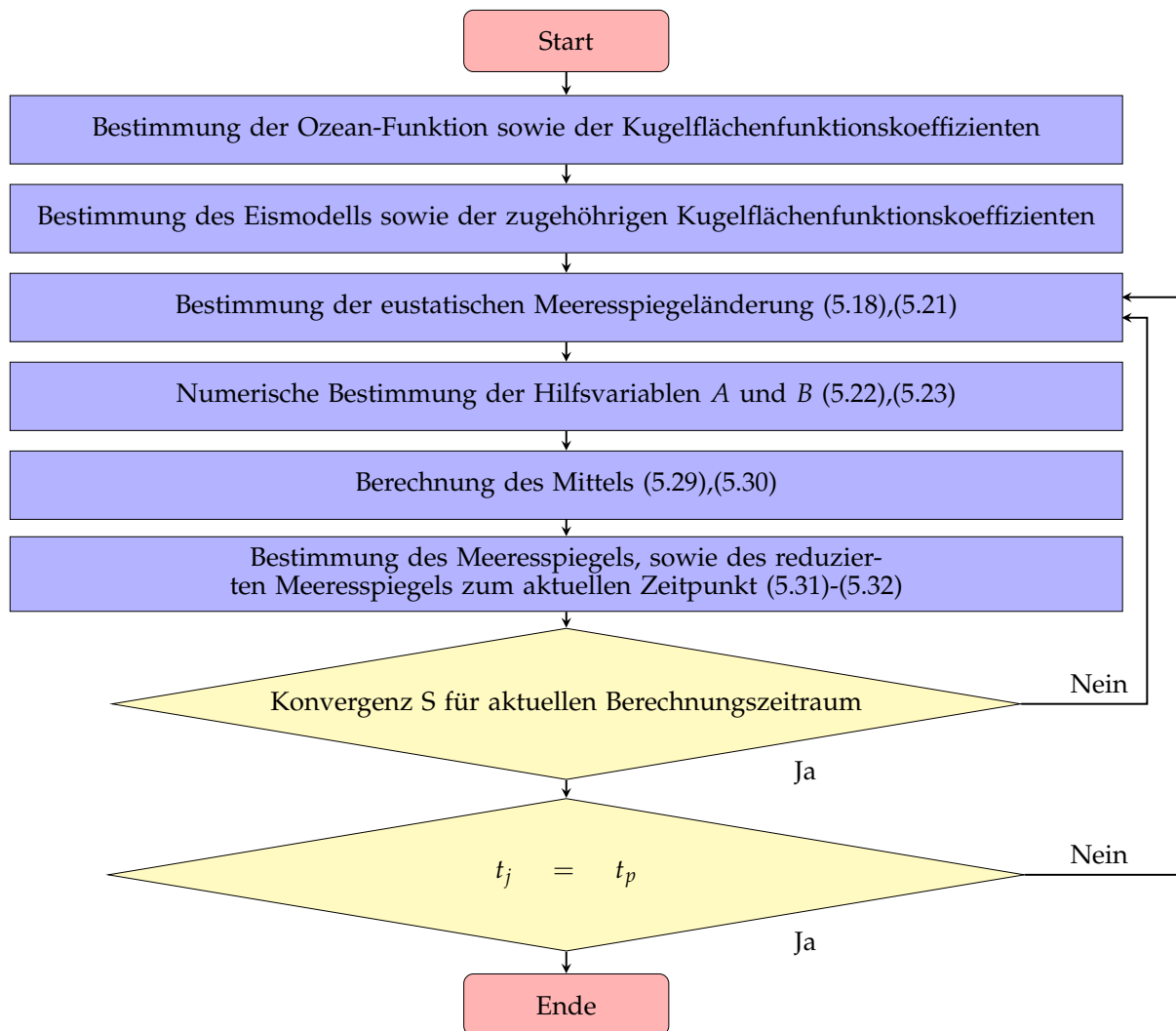


Abbildung 5.2: Ablaufdiagramm des Algorithmus nach Spada

5.3 Implementierung und Vergleich der beiden Algorithmen

Für die Implementierung der Algorithmen wurde die Software MATLAB verwendet. Der Algorithmus nach Spada wurde in einer zweiten Version um eine weitere Iterationsschleife erweitert, um die sich ändernden Küstenlinien bestimmen zu können. Die implementierten Funktionen und Programme, sowie ihre jeweilige Funktion werden in Anhang A erläutert.

5.3.1 Variation der Eingangsparameter für die Berechnung

Bevor die Berechnung der Meeresspiegeländerung durchgeführt wird, können verschiedenen Eingabeparameter festgelegt werden. Hierzu gehört zum einen die Wahl des zu Grunde liegenden Eismodells für die Berechnung. Des Weiteren können die räumliche Auflösung, die Gittergröße, sowie der maximale Entwicklungsgrad der Kugelflächenfunktionen festgelegt werden. Des Weiteren erfolgt die Wahl des gewünschten Berechnungsmodells. Um eine benutzerfreundliche Variation des erstellten Programmcodes zu ermöglichen, wurde zusätzlich eine grafische Benutzeroberfläche erstellt, die die Variation der Parameter ermöglicht.

5.3.2 Methoden zur beschleunigten Berechnung

Um eine möglichst effiziente Berechnung zu ermöglichen, wird mittels der gewählten Auflösung zunächst überprüft, ob ein Topographie- oder Eismodell in der gewählten Auflösung bereits vorhanden ist, oder ob es neu berechnet werden muss. Ist es vorhanden, so kann es direkt geladen werden, sonst wird das Modell für die gewählte Auflösung mittels Interpolation erzeugt und anschließend für weitere Berechnungen gespeichert. Dies wird auch für die benötigten Legendre-Polynome überprüft, um Mehrfachberechnungen möglichst zu verhindern. Nach der Berechnung der Meeresspiegeländerung für einen ausgewählten Parameter und Datensatz werden die Ergebnisse, sowie eine Videodatei mit den Änderungen des Meeresspiegels gespeichert. Soll nun eine erneute Berechnung durchgeführt werden, kann zunächst überprüft werden, ob mit den gewählten Parametern bereits ein berechneter Datensatz vorliegt.

Um die Rechenzeit des Programms weiter zu minimieren wird die Parallel Toolbox von Matlab für die Implementierung verwendet. Mittels der Funktion `PARFOR` können Schleifen, deren Berechnung nicht von einem vorherigen Rechenschritt abhängen, in Blöcke aufgeteilt werden und anschließend parallel berechnet werden. Dies bietet sich in diesem Fall an für Berechnungen, die für jede Gitterzelle getätigt werden müssen, aber nicht von den Berechnungen der anderen Zellen abhängig sind. Dadurch lässt sich die Rechenzeit des Algorithmus signifikant minimieren.

5.3.3 Vergleich der implementierten Algorithmen

Beim Vergleich der beiden Algorithmen zeigt sich, dass bei der Berechnung nach Kendall u. a. (2005) die Berechnung sowohl mittels der Kugelflächenfunktionskoeffizienten als auch direkt über die vorhandenen Felder durchgeführt wird. Im Gegensatz dazu werden bei der Berechnung nach Spada und Stocchi (2006) zu Beginn die Koeffizienten aller Größen berechnet und anschließend die Lösung nur mit diesen bestimmt. Erst nachdem die Konvergenz der Parameter erreicht wurde, erfolgt die Rückrechnung der

Koeffizienten in Felder. Bei der Durchführung zeigt sich, dass es durch die Vermeidung der Rückrechnung innerhalb der Iterationsschleifen zu einer kürzeren Rechenzeit führt.

Kapitel 6

Analyse der berechneten Ergebnisse

Im folgenden werden nun die Ergebnisse der einzelnen durchgeführten Berechnungen betrachtet. Hierbei wird zum einen zwischen den verschiedenen Datenmodellen unterschieden, zum anderen sollen auch die Ergebnisse der verschiedenen Algorithmen verglichen werden.

Um die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmodellen vergleichen zu können, wurden alle nachfolgenden Berechnungen mit denselben Berechnungsparametern durchgeführt. Diese sind in Tabelle 6.1 aufgeführt

Tabelle 6.1: Verwendete Eingangsparameter für die Berechnung der Meeresspiegeländerungen

Parameter	
l_{\max}	140
Auflösung	$0,5^\circ \times 0,5^\circ$

Bei der Betrachtung der Ergebnisse wird zunächst das Konvergenzverhalten der implementierten Programme miteinander verglichen. Hierbei kann zunächst allgemein gesagt werden, dass durch die Variation der Küstenlinien es bei beiden Berechnungsmethoden zu einer deutlich höheren Rechenzeit auf Grund der zusätzlich nötigen Iteration kommt. Da die Iteration über die Zeitschritte lediglich von der Wahl des Eismodells abhängt, ist die Konvergenz der Meeresspiegeländerung für die Gegenüberstellung von besonderem Interesse. Hierfür werden zwischen 2 und 6 Iterationen benötigt. Beim Vergleich der benötigten Iterationsschritte zeigt sich, dass der Algorithmus nach Spada und Stocchi (2006) für alle Eingangsmodelle 2 (bei fixen Küstenlinien) beziehungsweise 3 (bei variablen Küstenlinien) Iterationsschritte benötigt, um eine Konvergenz der Meeresspiegeländerung zu erreichen. Im Gegensatz dazu variiert die Anzahl der benötigten Iterationen bei der Verwendung des Algorithmus nach Kendall u. a. (2005) zwischen 2 und 6 Iterationsschritten sowohl für fixe, als auch für variable Küstenlinien.

Betrachtet man nun die Konvergenz der Änderungen der Topographie, so zeigt sich, dass beide Versionem 2 Iterationen benötigen um die Konvergenz über den kurzen

Zeitraum des Datensatzes der TU Dresden zu erreichen. Darüber hinaus zeigt sich, dass bei einem längeren Zeitraum der Algorithmus nach Spada und Stocchi (2006) 5 Iterationen benötigt, wohingegen der Algorithmus nach Kendall u. a. (2005) nur 3 Iterationen benötigt. Dieser Unterschied in der Anzahl der benötigten Iterationen macht sich auch in der Rechenzeit der jeweiligen Programme bemerkbar.

Des Weiteren zeigt sich, dass die benötigten Iterationsschritte nicht von der Menge des abgeschmolzenen Eises abhängen. Im Gegensatz dazu ist die Konvergenz der berechneten Topographie allerdings sehr wohl abhängig von der Menge des abgeschmolzenen Eises. Kleine Änderungen der Eismasse verändern die Topographie nur gering, so dass nur wenige Änderungen auftreten und somit schneller eine Konvergenz erreicht werden kann. Wird dagegen ein postglaziales Eismodell verwendet, so zeigt sich, dass in diesem Fall deutlich mehr abgeschmolzenes Eis vorhanden ist und dadurch auch größere Änderungen der Topographie entstehen. In diesem Fall sind mehr Iterationen nötig, um eine Konvergenz zu erreichen.

6.1 Ergebnisse unter Verwendung des ICE-5G Modells

Für einen ersten Funktionstest des implementierten Programms wurde das ICE-5G-Modell verwendet. Hierbei muss allerdings beachtet werden, die visko-elastischen Antwort der starren Erde bei diesem Datensatz nicht vernachlässigt werden sollte. Allerdings eignet sich dieser Datensatz trotzdem für einen ersten Testlauf, da hierbei die Verteilung der Meeresspiegeländerung, sowie die Variationen der Küstenlinien sehr gut beobachtet werden können.

6.1.1 Lösung mit Variation der Küstenlinien

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Meeresspiegeländerungen für das ICE-5G-Modell mit variablen Küstenlinien betrachtet. Hierbei wird jeweils die berechnete Meeresspiegeländerung vom Zeitpunkt des letzten glazialen Maximums bis heute betrachtet. Anschließend werden die Änderungen im zeitlichen Verlauf betrachtet. Zunächst werden dabei die berechneten Meeresspiegeländerungen nach dem Algorithmus von Spada betrachtet.

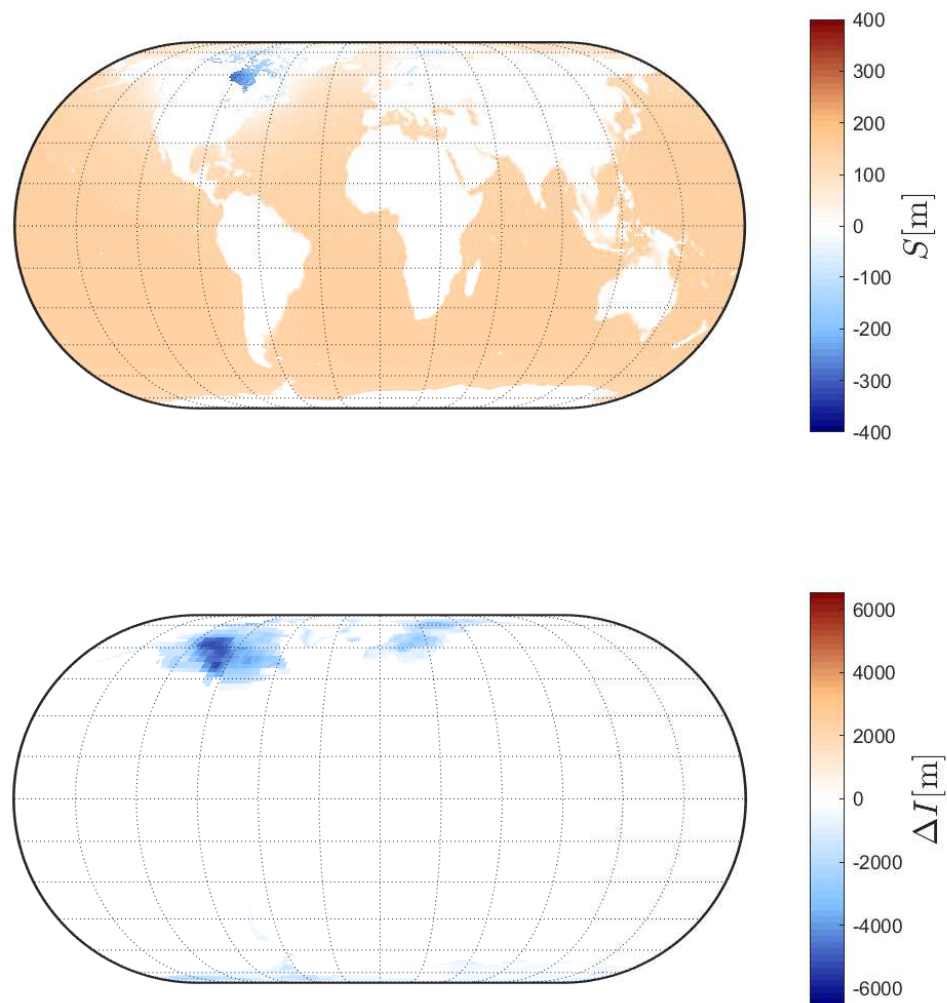


Abbildung 6.1: Berechnete Meeresspiegeländerung (oben) sowie die abschmelzende Eisdicke der Epoche (unten) seit dem Zeitpunkt des glazialen Maximums aus dem Algorithmus von Spada

Bei der Betrachtung der maximalen Meeresspiegeländerung zeigt sich, dass es in den Regionen in denen das größte Eisvorkommen vorhanden war, wie im Norden von Kanada, es zu einer Abnahme des Meeresspiegels kommt. Auch zeigt sich, dass es auch in Skandinavien zu einem deutlich geringeren Meeresspiegelanstieg kommt als im globalen Vergleich. Dies lässt sich mit der Reaktion der Erde auf die veränderte Last durch das Abschmelzen des Eises erklären. Um die Ergebnisse der beiden Algorithmen vergleichen zu können, werden nun die berechneten Lösungen des Algorithmus nach Mitrovica betrachtet.

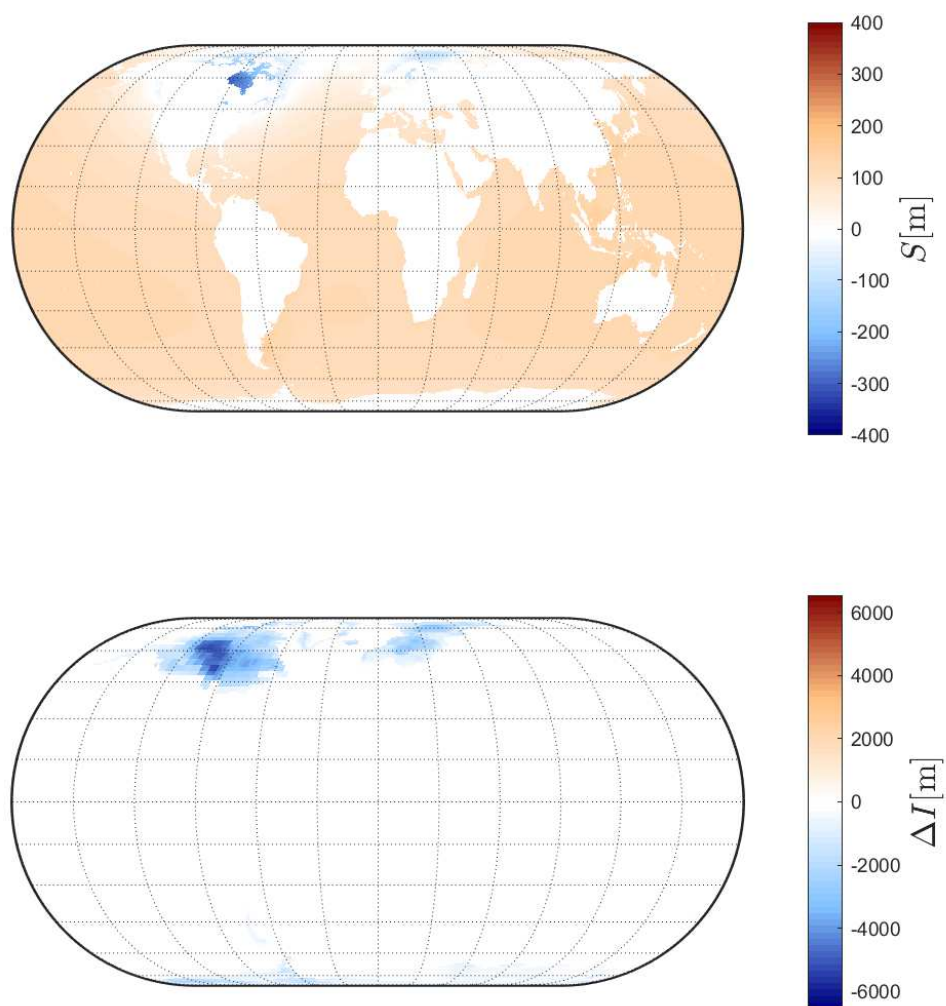


Abbildung 6.2: Berechnete Meeresspiegeländerung (oben) sowie die abschmelzende Eisdicke der Epoche (unten) seit dem Zeitpunkt des glazialen Maximums aus dem Algorithmus von Mitrovica

Die Betrachtung der Ergebnisse aus dem Algorithmus nach Mitrovica zeigt eine ähnliche Verteilung der Meeresspiegeländerung als die vorherige Lösung. Allerdings fällt auf, dass die Effekte des sinkenden Meeresspiegels in Regionen mit ehemals großem Eisvorkommen deutlicher ausfallen.

Im folgenden wird nun der Verlauf der Meeresspiegeländerung mit variablen Küstenlinien nach dem Algorithmus von Mitrovica dargestellt.

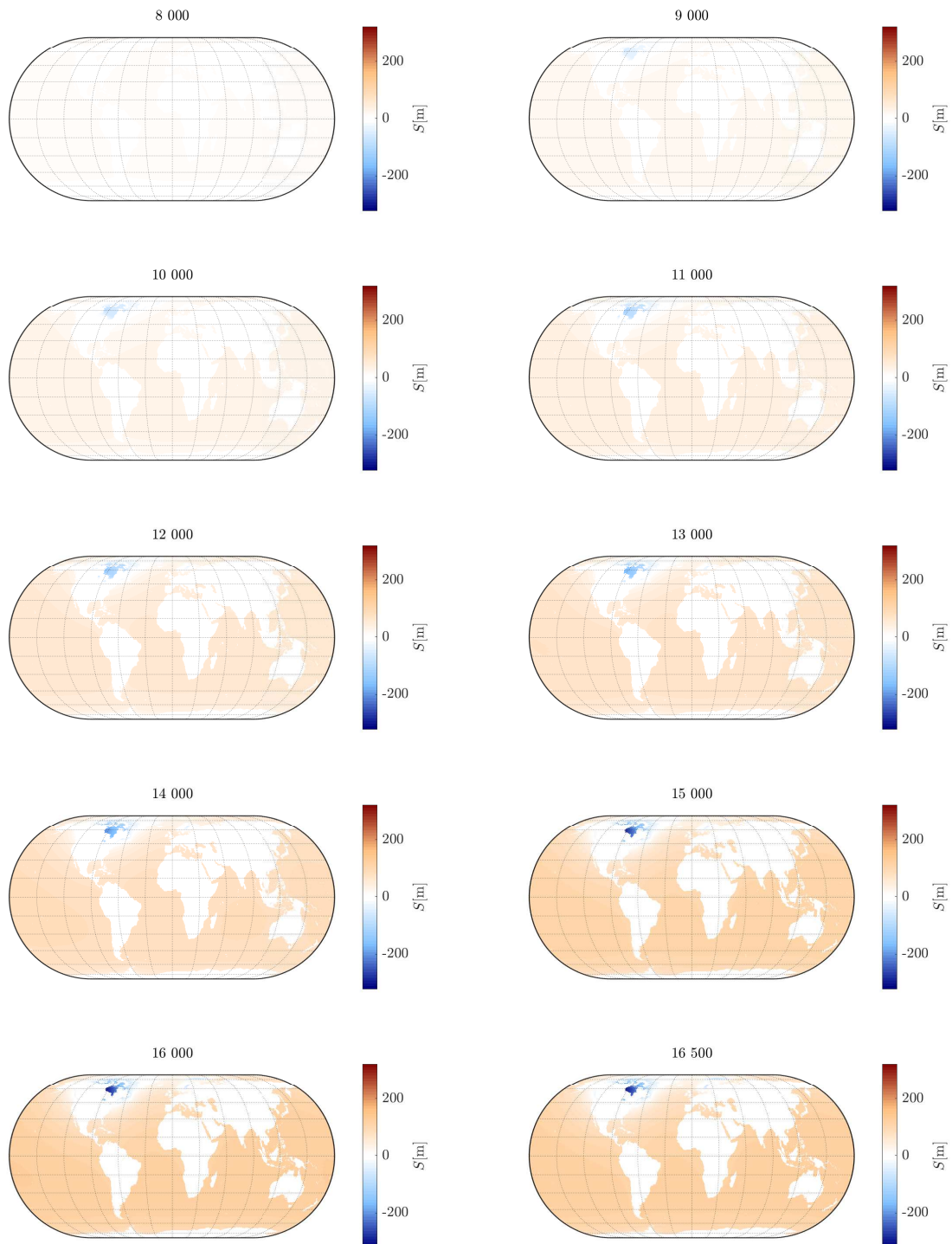


Abbildung 6.3: Änderung des Meeresspiegel von vor 8 000 bis vor 16 500 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten)

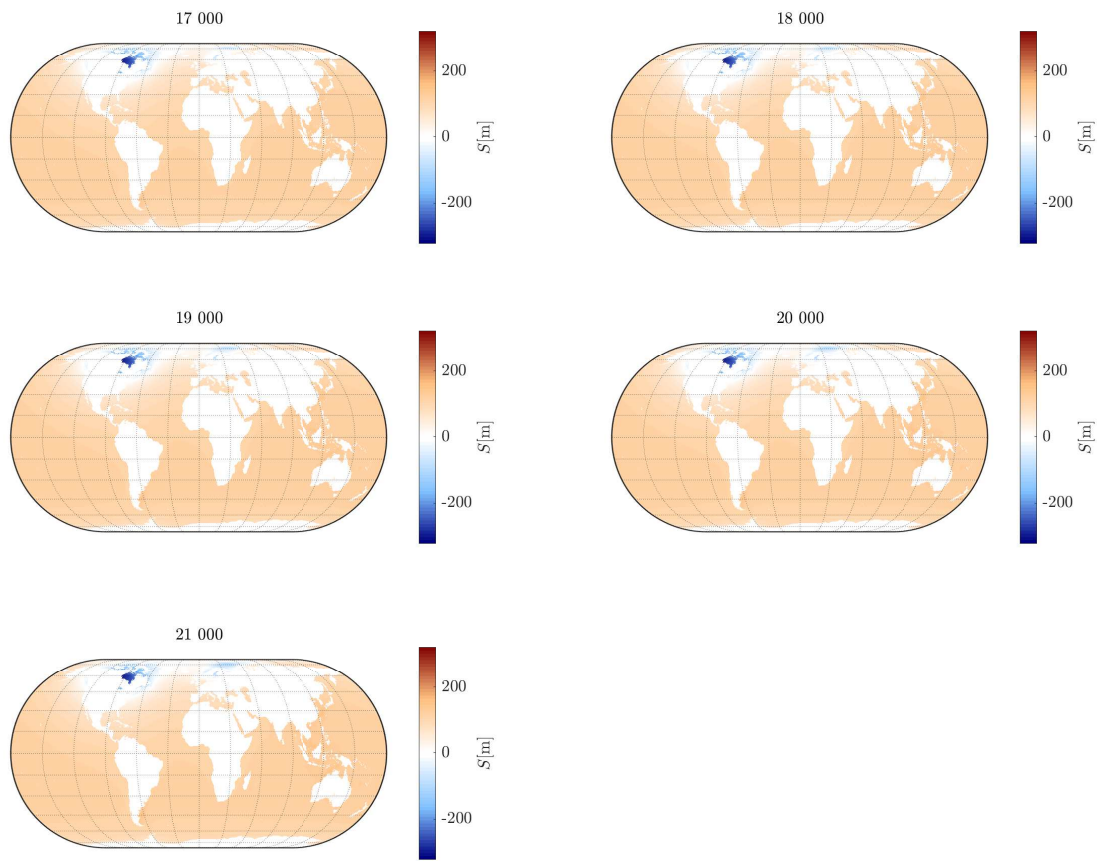


Abbildung 6.4: Änderung des Meeresspiegel von vor 17 000 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten)

Der zeitliche Verlauf der Meeresspiegeländerungen zeigt, dass die größten Änderungen des Meeresspiegels in den ersten 6 000 bis 7 000 Jahren nach dem glazialen Maximum stattgefunden haben. Auch zeigt sich, dass im Vergleich dazu die Änderungen der letzten 10 000 Jahre sehr gering ausfallen und somit nur schwach sichtbar sind.

Neben den Meeresspiegeländerungen können auch die Variationen der Küstenlinien dargestellt werden. Hierbei werden zunächst die Änderungen der Küstenlinien vom letzten glazialen Maximum zum heutigen Zeitpunkt betrachtet für beide Algorithmen betrachten. Eine Entwicklung der Variation der Küstenlinien kann in den Abbildungen B.1 und B.2 betrachtet werden. Bei den hier berechneten Variationen muss allerdings beachtet werden, dass der Berechnung ein elastisches Erdmodell zu Grunde liegt und für die Variation seit dem letzten glazialen Maximums ein visko-elastisches Modell verwendet werden sollte um genaue Ergebnisse zu erhalten.

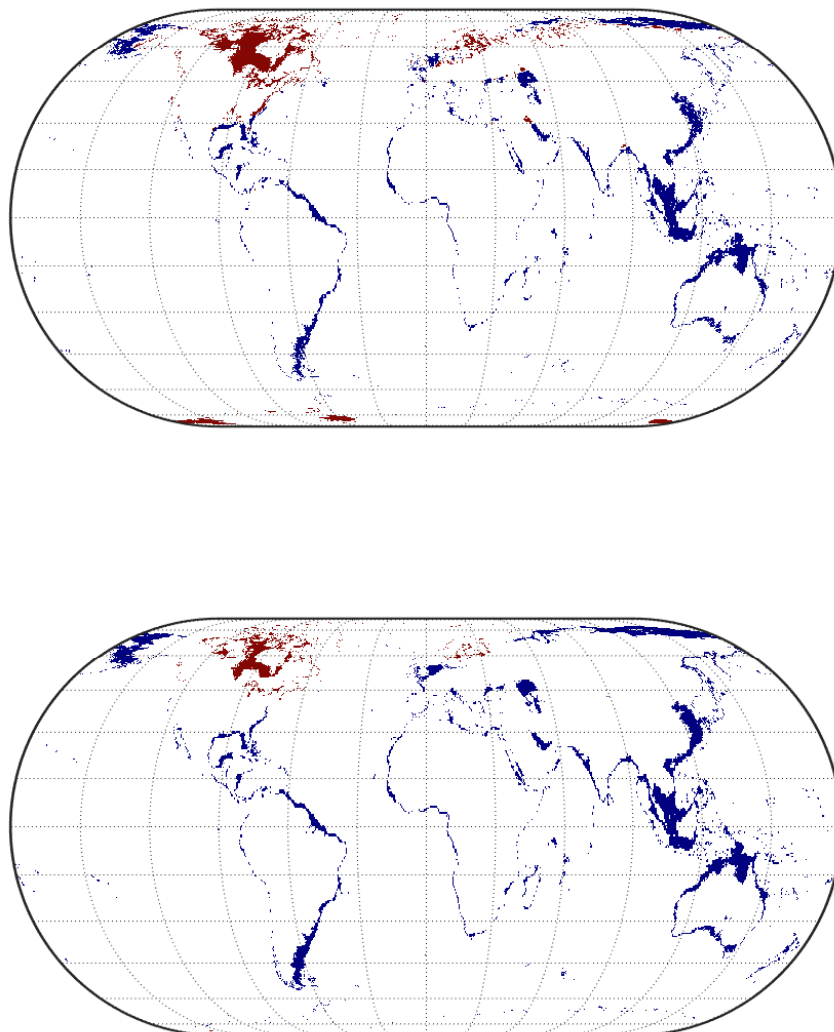


Abbildung 6.5: Darstellung der Variation der Küstenlinien seit dem Ende der letzten Eiszeit bis zum aktuellen Zeitpunkt. (oben) Berechnete Variationen aus der Lösung nach Spada. (unten) Berechnete Variation aus der Lösung nach Mitrovica. Hierbei werden die überfluteten Gebiete in blau dargestellt, während die Gebiete mit gewonnenem Land in rot dargestellt werden.

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass beide Algorithmen ein vergleichbares Muster der Variation der Küstenlinien aufweisen. Des Weiteren zeigt sich, dass die größten Änderungen im Bereich Südostasien, Kanada, Alaska, Südamerika und im Bereich des Schwarzen Meeres auftreten. Auch zeigt sich, dass der Algorithmus nach Spada eine stärkere Variation der Küstenlinien im Bereich der gewonnen Landbereiche aufweist,

wohingegen bei dem Algorithmus nach Spada die überfluteten Gebiete größer ausfallen.

6.1.2 Vertikale Begrenzung der Küstenlinien

Im folgenden werden nun die berechneten Meeresspiegeländerungen für eine Lösung mit vertikaler Begrenzung der Küstenlinien betrachtet.

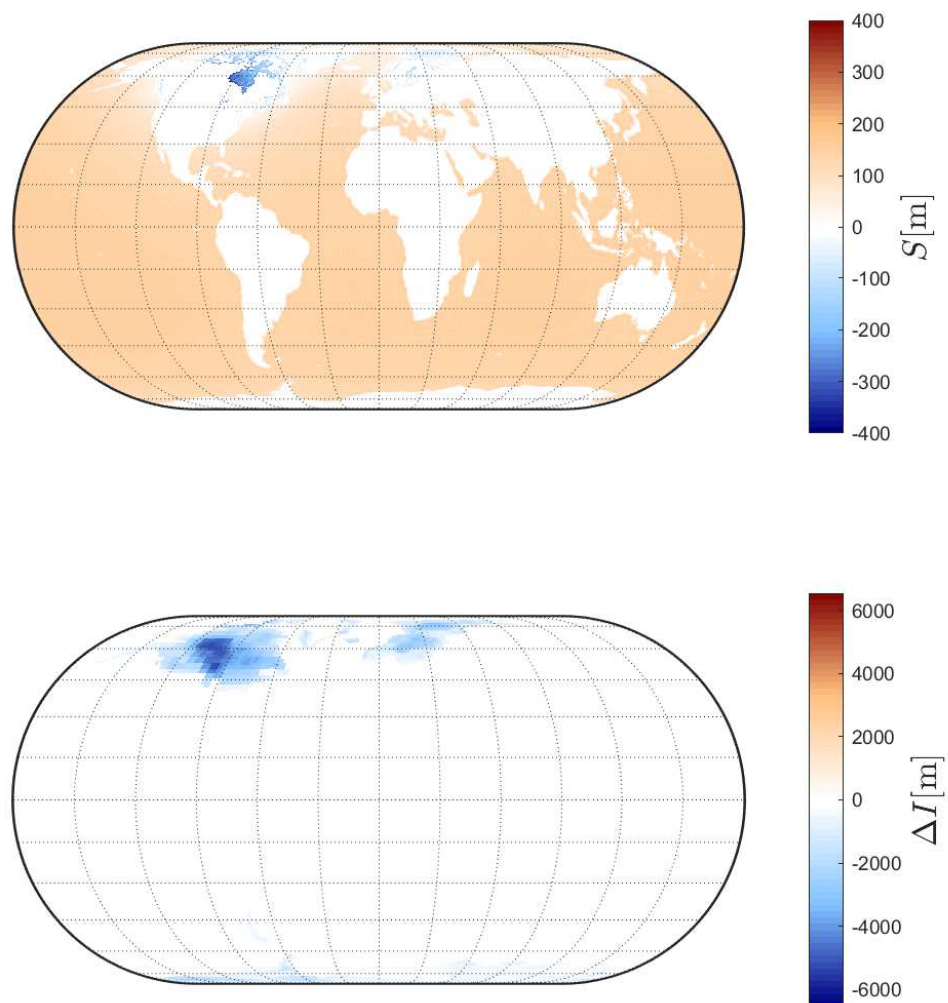


Abbildung 6.6: Berechnete Meeresspiegeländerung (oben) sowie die abschmelzende Eisdicke der Epoche (unten) seit dem Zeitpunkt des glazialen Maximums aus dem Algorithmus von Spada

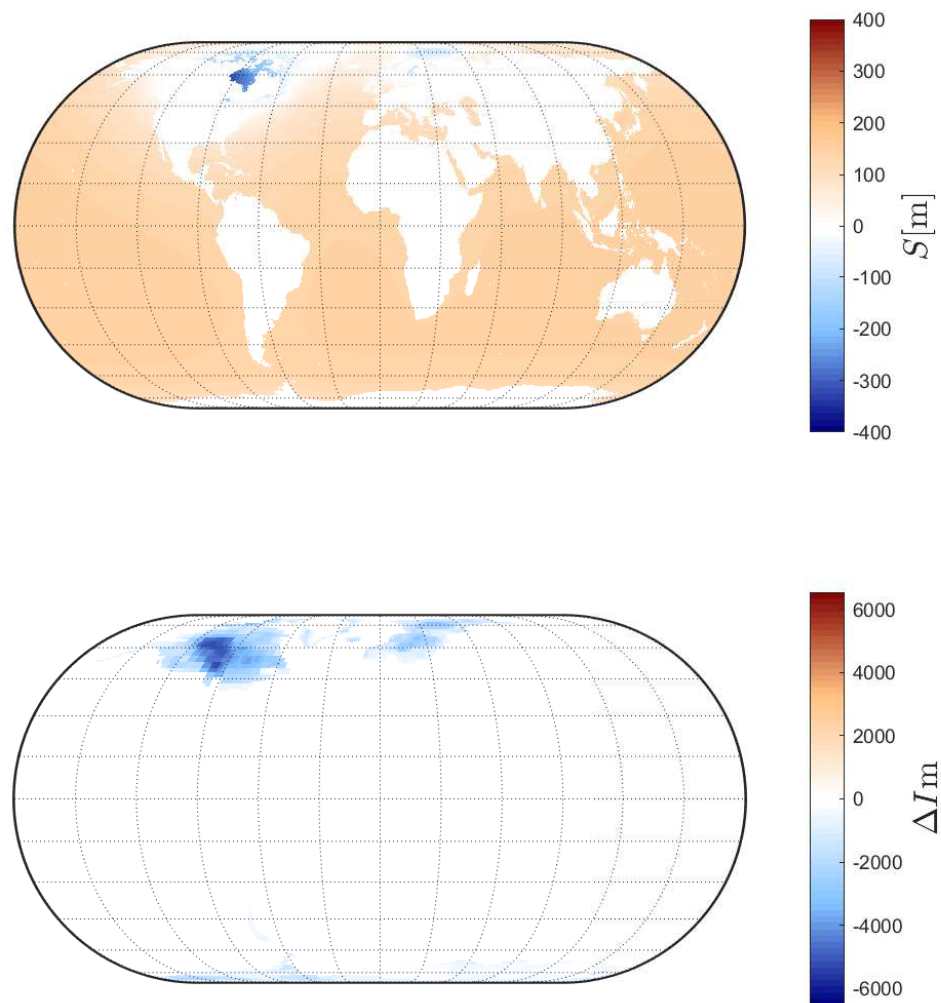


Abbildung 6.7: Berechnete Meeresspiegeländerung (oben) sowie die abschmelzende Eisdicke der Epoche (unten) seit dem Zeitpunkt des glazialen Maximums aus dem Algorithmus von Mitrovica

Auch hier zeigt sich, dass die beiden Berechnungsmethoden ein ähnliches Ergebnis liefern. Des Weiteren fällt auf, dass die Abnahme des Meeresspiegels im Algorithmus nach Mitrovica etwas stärker ausfällt.

Im folgenden wird nun die Änderung des Meeresspiegels im zeitlichen Verlauf betrachtet. Hierbei werden die Lösungen des Spada Algorithmus verwendet.

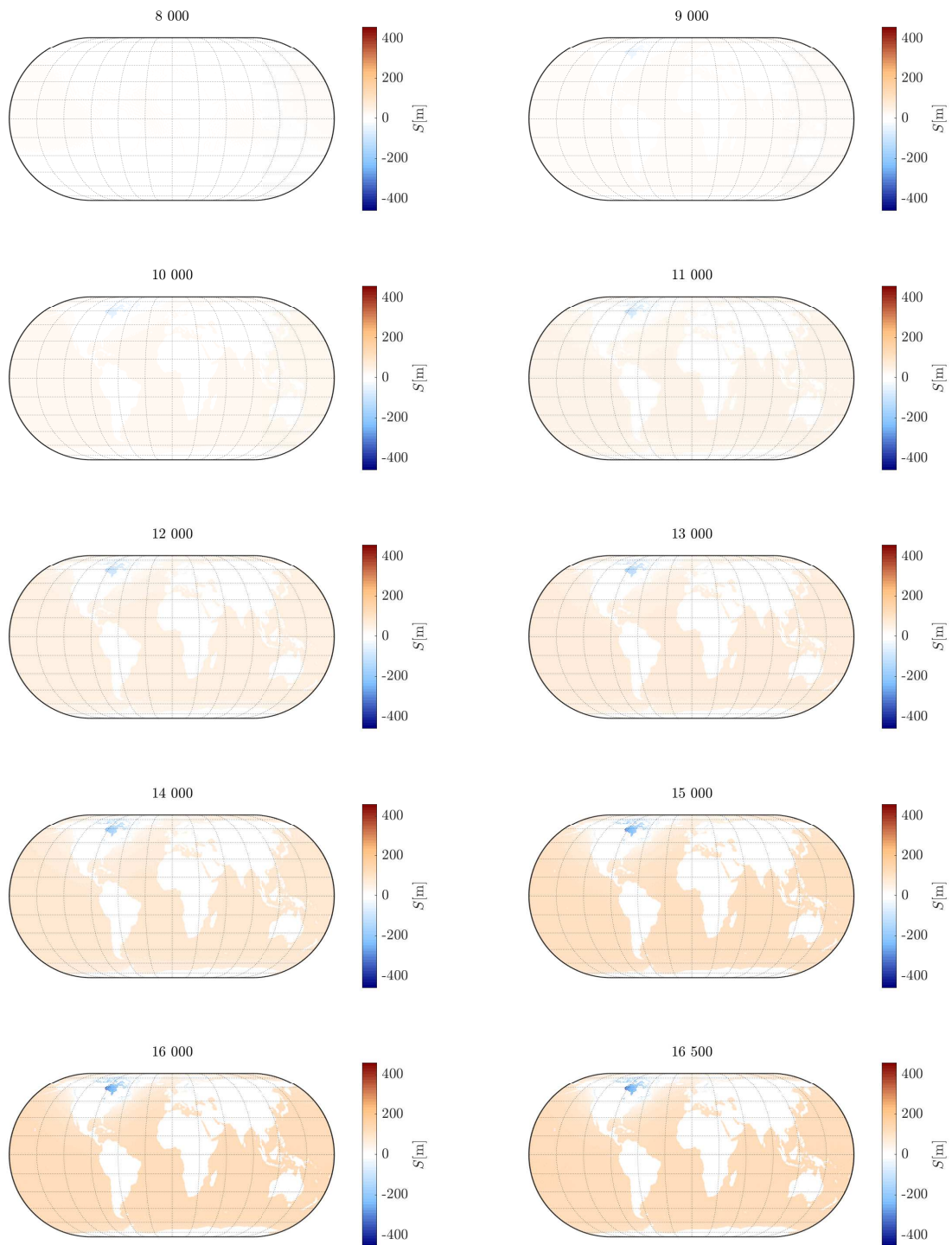


Abbildung 6.8: Änderung des Meeresspiegel von vor 8 000 bis vor 16 500 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)

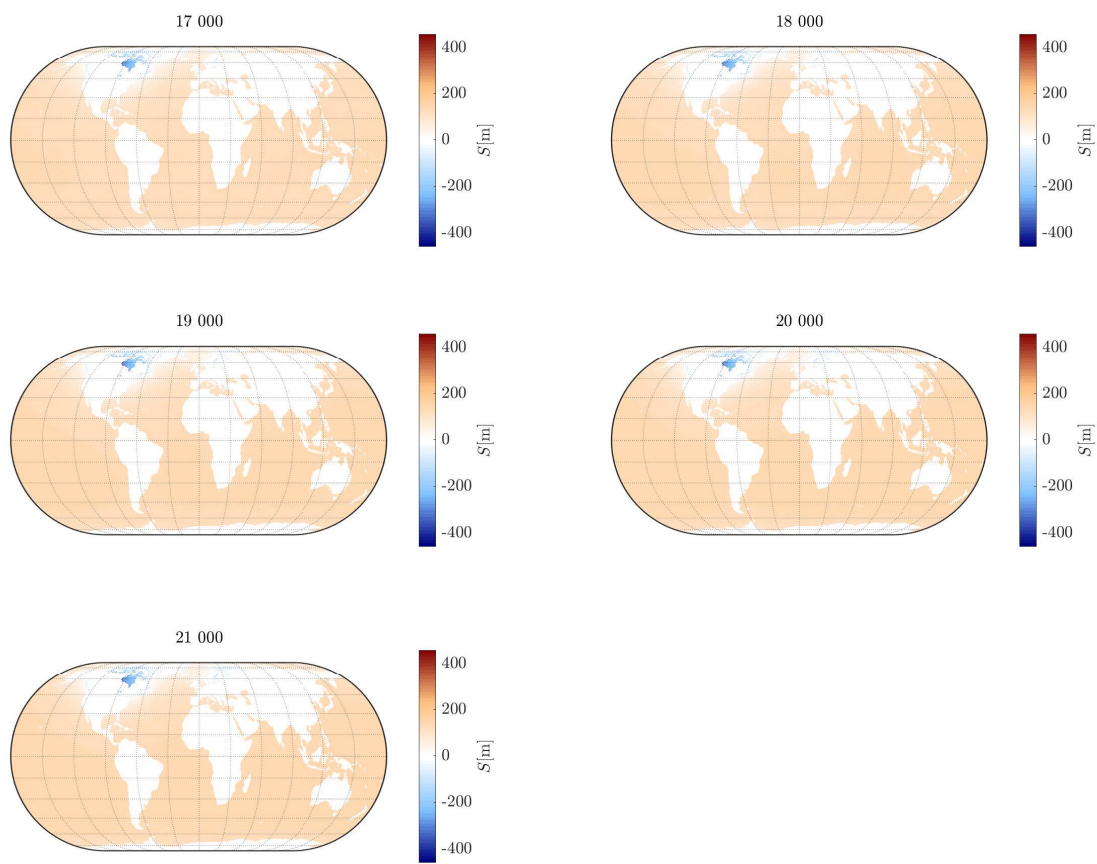


Abbildung 6.9: Änderung des Meeresspiegels von vor 17 000 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)

Es zeigt sich, dass die Meeresspiegeländerungen sich im wesentlichen nicht von denen mit variablen Küstenlinien unterscheiden. Allerdings fällt auf, dass die maximalen Änderungen sich durchaus unterscheiden und bei der Verwendung mit fixen Küstenlinien ein höherer maximaler Anstieg erreicht wird. Dies ist auf die geringere Meeresfläche zurückzuführen.

6.2 Ergebnisse gravimetrische Massenbilanz

Im folgenden werden die Ergebnisse aus den Daten der gravimetrischen Massenbilanz betrachtet. Hierbei handelt es sich um einen aktuellen Datensatz, der allerdings nur eine kurze Zeitspanne abdeckt. Allerdings kann so das elastische Erdmodell gut verwendet werden.

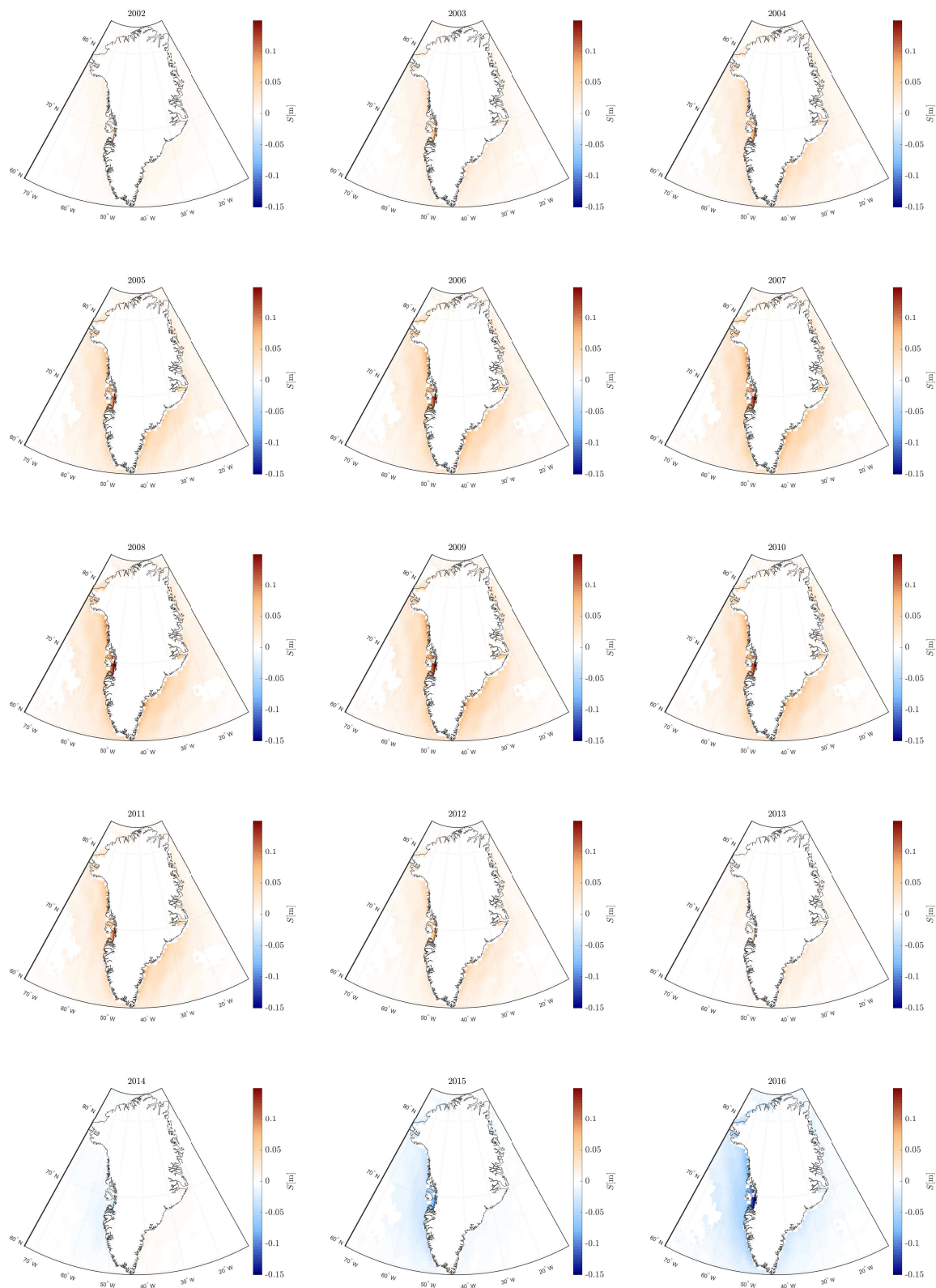


Abbildung 6.10: Änderung des Meeresspiegel von 2002-2016 zum heutigen Referenzzeitpunkt für Grönland (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)

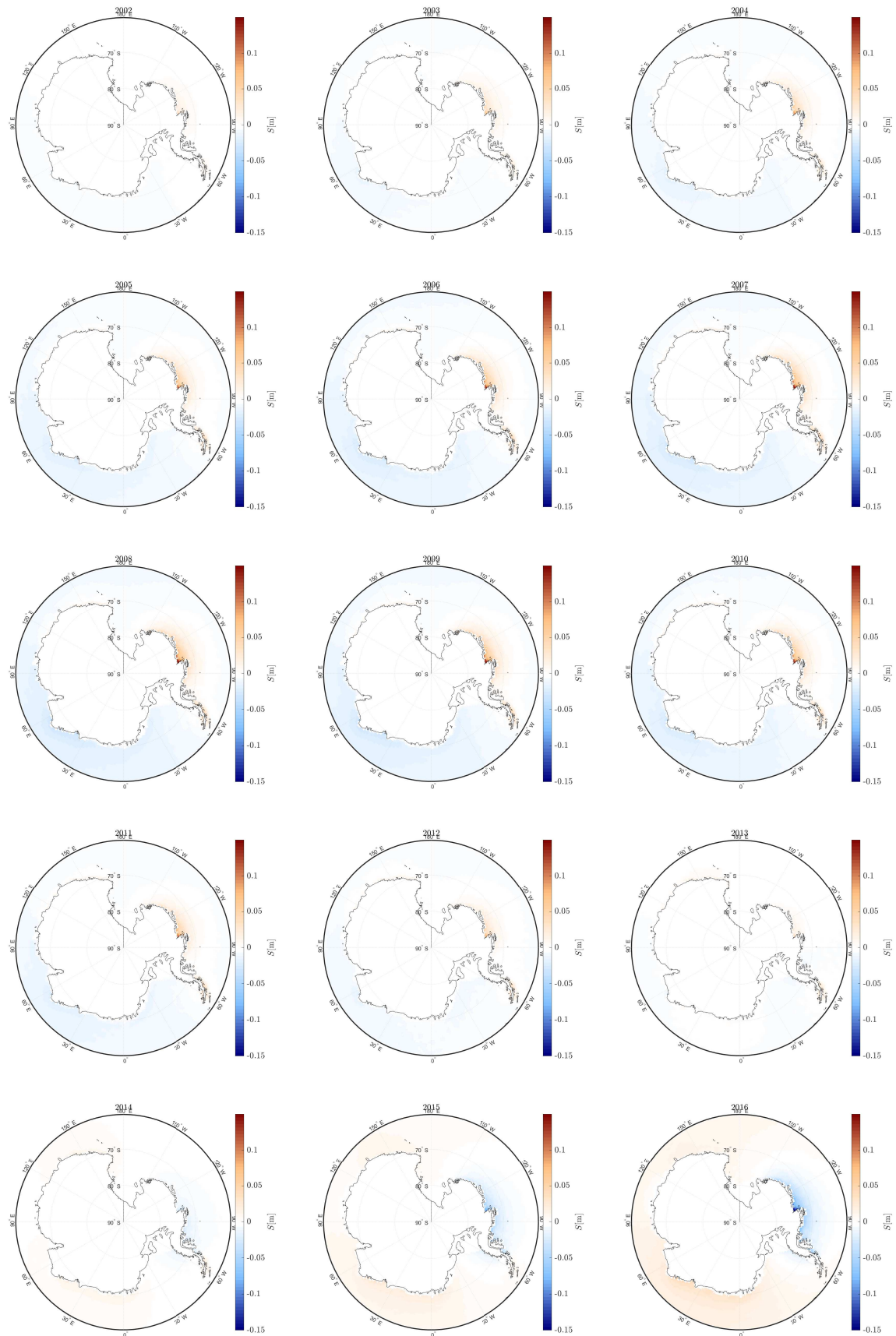


Abbildung 6.11: Änderung des Meeresspiegel von 2002-2016 zum heutigen Referenzzeitpunkt für die Antarktis (Algorithmus nach Spada mit fixen Küsten)

Für diesen Datensatz zeigt sich, dass die globale mittlere Meeresspiegeländerung in den letzten 15 Jahren circa 2 cm beträgt. Dies entspricht in etwa einer jährlichen Meeresspiegeländerung von 1-2 mm pro Jahr. Im folgenden werden die Regionen um Grönland, sowie die Antarktis genauer betrachtet, da es in diesen zu den größten Änderungen des Meeresspiegels kommt.

Die Betrachtung der Ergebnisse zeigt, dass es an den unterschiedlichen Küstenbereichen zu einer unterschiedlichen Reaktion des Meeresspiegels kommt. Auch zeigt sich, dass die Regionen in denen das meiste Eis schmilzt einen sinkenden Meeresspiegel aufweisen.

Für die aktuellen Daten zeigt sich, dass eine Berechnung mit variablen Küstenlinien keinen signifikanten Unterschied in der Berechnung aufweist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass es sich zum einen um eine recht kurze Zeitspanne handelt, zum anderen ist die verwendete Auflösung recht grob, so dass kleine Änderungen der Küstenlinien nicht erkannt werden können.

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Programm implementiert, welches die Meeresspiegeländerungen für verschiedene Eingabemodelle berechnet. Die Berechnungen basieren auf Grundlage der Annahmen, dass es sich um eine elastische, sphärische, nicht rotierende Erde handelt. Unter Verwendung des implementierten Programms können Meeresspiegeländerungen für einen kürzeren Zeitraum berechnet werden. Somit können die Auswirkungen des Klimawandels in den nächsten 50-100 Jahren prädiziert werden. Neben den Meeresspiegeländerungen können mit dem implementierten Programm auch die Variationen der Küstenlinien berechnet werden. Diese liefern Aufschluss darüber, welche Regionen der Erde besonders von einem Ansteigen des Meeresspiegels betroffen sind und somit besonders geschützt werden müssen. Bei diesen Berechnungen zeigt sich allerdings auch, dass vor allem für kurzfristige Änderungen eine sehr hohe räumliche Auflösung verwendet werden muss, um die sich ändernden Küstenlinien detektieren zu können. Die Erhöhung der räumlichen Auflösung bringt allerdings in jedem Falle eine deutliche Erhöhung der Rechenzeit mit sich, so dass ein Kompromiss zwischen Auflösung und Rechenzeit gefunden werden muss. Auch zeigt sich, dass eine Variation der Küstenlinien starke Auswirkungen auf die Rechenzeit hat, so dass bei Änderungen der Kryosphäre über einen kurzen Zeitraum eventuell auf diese Berechnungen verzichtet werden kann, solange keine sehr hohe räumliche Auflösung gewünscht ist.

Alles in allem zeigt sich, dass die implementierten Programme gut funktionieren und die gewünschten Größen berechnet werden können. Eine Beschleunigung der Berechnung konnte durch Zwischenspeichern verschiedener Rechenschritte erreicht werden, wodurch Mehrfachberechnungen vermieden werden können. Des Weiteren zeigt sich, dass die Dauer der Berechnung einer Lösung für die Meeresspiegelgleichung maßgeblich vom Eingabemodell für die Variation der Eisdicke abhängt. Dieses nimmt den größten Einfluss auf die benötigten Iterationsschritte bis die gewünschte Konvergenz erreicht werden kann. Es zeigt sich somit, dass die Berechnung der Meeresspiegeländerungen bei größeren abschmelzenden Eismassen deutlich mehr Rechenzeit benötigt.

Der implementierte Code für die Berechnung der Meeresspiegeländerungen kann um weitere Effekte erweitert werden, um eine realistischere Berechnung des Meeresspiegels zuzulassen. Hierbei wäre es zum einen sinnvoll, das Modell für ein visko-elastisches Erdmodell zu erweitern, um so auch längerfristige Berechnungen durchführen zu können. Des Weiteren kann die Erdrotation bei der Berechnung berücksichtigt werden, welche einen erheblichen Anteil an der globalen Meeresspiegeländerung hat und somit nicht vernachlässigt werden sollte. Um eine noch realistischere Berechnung zu realisieren, könnten ebenfalls die Wassertemperaturen, sowie unterschiedlicher Salzgehalt des Wassers und die daraus resultierenden Dichteänderungen betrachtet werden.

Literatur

- Alt, H. (2006). *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch Masterclass Series. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783540341871.
- Amante, C und Eakins, B. W. (2009). *ETOPO1 Global Relief Model converted to PanMap layer format*. data set. NOAA-National Geophysical Data Center. DOI: 10.1594/PANGAEA.769615. URL: <https://doi.org/10.1594/PANGAEA.769615>.
- Appel, W. (2005). *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K éd. ISBN: 9782914010986. URL: <https://books.google.de/books?id=vtAjcAAACAAJ>.
- Arctic Sea Ice News & Analysis* (2018). URL: <https://nsidc.org/arcticseaicenews/> (besucht am 04.10.2018).
- Banach, S. (1922). "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales". In: *Fundamenta Mathematicae* 3.1, S. 133–181. URL: <http://eudml.org/doc/213289>.
- Bärwolff, G. (2008). *Höhere Mathematik: für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag. ISBN: 9783827416889.
- Clauser, C. (2013). *Einführung in die Geophysik: Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783642044960.
- Devaraju, B. (2015). *Understanding filtering on the sphere - Experiences from filtering GRACE data*. Deutsche Geod. Kommission, Reihe C 756. Munich: Bayer. Akademie der Wissenschaften, S. 131. ISBN: 3-7696-5168-3.
- Farrell, W. E. und Clark, J. A. (1976). "On Postglacial Sea Level". In: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46.3, S. 647–667. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1976.tb01252.x. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1365-246X.1976.tb01252.x>.
- Groh, A. und Horwath, M. (2016). "The method of tailored sensitivity kernels for GRACE mass change estimates". In: EGU General Assembly Conference Abstracts 18, EPSC2016-12065, EPSC2016–12065.
- Hofmann-Wellenhof, B. und Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Vienna : Springer Vienna. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b139113>.
- Ice Sheets | NASA Global Climate Change* (2018). URL: <https://climate.nasa.gov/vital-signs/ice-sheets/> (besucht am 04.10.2018).

- Ivins, E. R., James, T. S., Wahr, J., O. Schrama, E. J., Landerer, F. W. und Simon, K. M. (2013). "Antarctic contribution to sea level rise observed by GRACE with improved GIA correction". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 118.6, S. 3126–3141. DOI: 10.1002/jgrb.50208. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgrb.50208>.
- Junghanns, P. (2017). *Vorlesungsskript zur Vorlesung Analysis und Numerik für Integralgleichungen*.
- Kendall, R. A., Mitrovica, J. X. und Milne, G. A. (2005). "On post-glacial sea level - II. Numerical formulation and comparative results on spherically symmetric models". In: *Geophysical Journal International* 161.3, S. 679–706. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02553.x. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1365-246X.2005.02553.x>.
- Kostelec, P. J. und Rockmore, D. N. (2008). "FFTs on the Rotation Group". In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 14.2, S. 145–179. ISSN: 1531-5851. DOI: 10.1007/s00041-008-9013-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s00041-008-9013-5>.
- Kress, R. (2013). *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York. ISBN: 9781461495932.
- Lang, C. und Pucker, N. (2005). *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783827415585.
- Mitrovica, J. X. und Milne, G. A. (2003). "On post-glacial sea level: I. General theory". In: *Geophysical Journal International* 154.2, S. 253–267. DOI: 10.1046/j.1365-246X.2003.01942.x. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1046/j.1365-246X.2003.01942.x>.
- Mitrovica, J. X. und Peltier, W. (1991). "On Postglacial Geoid Subsidence over the Equatorial Oceans". In: 962, S. 20053–20071.
- Mitrovica, J. X., Milne, G. und Davis, J. (2001). "Glacial isostatic adjustment on a rotating Earth". In: 147, S. 562–578.
- Mitrovica, J. X., Tamisiea, M. E., Ivins, E. R., Vermeersen, L. L.A. B., Milne, G. A. und Lambeck, K. (2010). "Surface Mass Loading on a Dynamic Earth: Complexity and Contamination in the Geodetic Analysis of Global Sea-Level Trends". In: *Understanding Sea Level Rise and Variability*. Wiley-Blackwell. Kap. 10, S. 285–325. ISBN: 9781444323276. DOI: 10.1002/9781444323276.ch10. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781444323276.ch10>.
- Peltier, W. R. (1998). "The inverse problem for mantle viscosity". In: *Inverse Problems* 14.3, S. 441. URL: <http://stacks.iop.org/0266-5611/14/i=3/a=006>.
- Peltier, W. R., Shennan, I., Drummond, R. und Horton, B. (2002). "On the postglacial isostatic adjustment of the British Isles and the shallow viscoelastic structure of the Earth". In: *Geophysical Journal International* 148.3, S. 443–475. DOI: 10.1046/j.

- 1365-246x.2002.01586.x. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1046/j.1365-246x.2002.01586.x>.
- Peltier, W. (2004). "GLOBAL GLACIAL ISOSTASY AND THE SURFACE OF THE ICE-AGE EARTH: The ICE-5G (VM2) Model and GRACE". In: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 32.1, S. 111–149. DOI: 10.1146/annurev.earth.32.082503.144359. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.earth.32.082503.144359>.
- SH-Bundle, Geodätisches Institut Universität Stuttgart. URL: <https://www.gis.uni-stuttgart.de/forschung/downloads/shbundle/> (besucht am 23.10.2018).
- Spada, G. (2017). "Glacial Isostatic Adjustment and Contemporary Sea Level Rise: An Overview". In: *Surveys in Geophysics* 38.1, S. 153–185. ISSN: 1573-0956. DOI: 10.1007/s10712-016-9379-x. URL: <https://doi.org/10.1007/s10712-016-9379-x>.
- Spada, G. und Stocchi, P. (2007). "SELEN: A Fortran 90 program for solving the "sea-level equation"". In: *Computers & Geosciences* 33, S. 538–562.
- Spada, G. und Stocchi, P. (2006). *The Sea Level Equation, Theory and Numerical Examples*. Bd. 96. ISBN: 8854803847.
- Spada, G., Melini, D., Galassi, G. und Colleoni, F. (2012). "Modling sea level changes and geodetic variations by glacial isostasy: the improved SELEN code". In: URL: <https://arxiv.org/abs/1212.5061>.
- Tarasov, L. und Peltier, W. (2002). "Greenland glacial history and local geodynamic consequences". In: *Geophysical Journal International* 150.1, S. 198–229. DOI: 10.1046/j.1365-246X.2002.01702.x. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1046/j.1365-246X.2002.01702.x>.
- Vermeersen, L. L. A., Sabadini, R. und Spada, G. (1996). "Analytical visco-elastic relaxation models". In: *Geophysical Research Letters* 23.7, S. 697–700. DOI: 10.1029/96GL00620. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/96GL00620>.
- Wang, H., Xiang, L., Jia, L., Jiang, L., Wang, Z., Hu, B. und Gao, P. (2012). "Load Love numbers and Green's functions for elastic Earth models PREM, iasp91, ak135, and modified models with refined crustal structure from Crust 2.0". In: *Computers Geosciences* 49, S. 190–199. ISSN: 0098-3004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.06.022>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300412002245>.
- Werner, D. (2007). *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783540725367.

Anhang A

Verwendete MATLAB-Programme

Tabelle A.1: Implementierte MATLAB-Programme

Programm	Beschreibung
MITROVICA.M	Berechnung der Lösung der Meeresspiegelgleichung mit fixierten Küstenlinien nach dem Algorithmus nach Kendall u. a., 2005.
MITROVICA_VK.M	Berechnung der Lösung der Meeresspiegelgleichung mit variablen Küstenlinien nach dem Algorithmus nach Kendall u. a., 2005.
SPADA.M	Berechnung der Lösung der Meeresspiegelgleichung mit fixierten Küstenlinien nach dem Algorithmus nach Spada und Stocchi, 2006.
SPADA_VK.M	Berechnung der Lösung der Meeresspiegelgleichung mit variablen Küstenlinien nach dem Algorithmus nach Spada und Stocchi, 2006.
EINGANGSDATEN.M	Festlegung aller Eingangsparameter wie Wahl des Eismodells, räumliche Auflösung sowie dem maximalen Entwicklungsgrad
RUN_ALL.M	Berechnung der Meeresspiegeländerung mit allen hinterlegten Eismodellen für alle Algorithmen
EIS_LADEN.M	Überprüft ob ein Datensatz des gewählten Modells in der entsprechenden Auflösung vorliegt. In diesem Fall wird der Datensatz geladen. Andernfalls wird Datensatz mit gewünschter Auflösung generiert und anschließend gespeichert.
TOPOGRAPHIE_LADEN.M	Überprüft ob Topographiemodell in der entsprechenden Auflösung vorliegt. In diesem Fall wird der Datensatz geladen. Andernfalls wird Datensatz mit gewünschter Auflösung generiert und anschließend gespeichert.
PLM_LADEN.M	Überprüft ob Legendre-Plynome für die gewählte Auflösung sowie den maximalen Entwicklungsgrad bereits berechnet wurden. Falls ja werden diese geladen. Andernfalls werden diese neu berechnet und anschließend gespeichert.

Anhang B

Weitere Ergebnisse

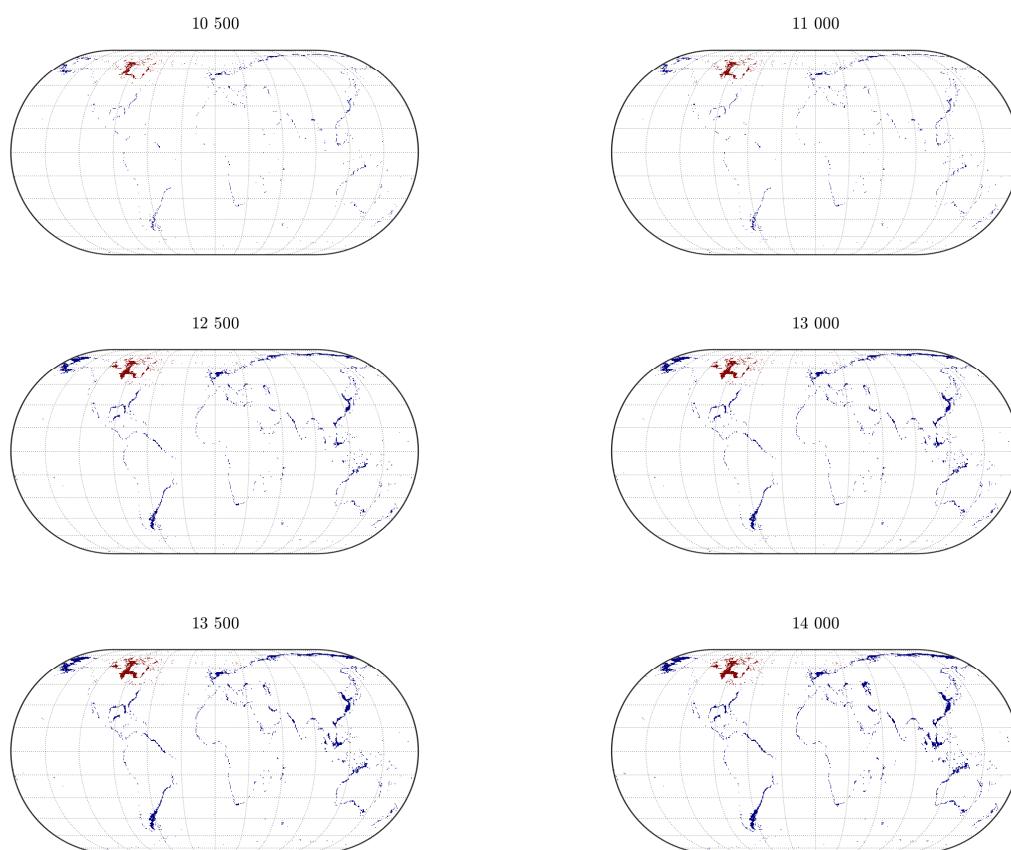


Abbildung B.1: Variation der Küstenlinien von vor 10 500 bis 14 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten). Hierbei werden die überfluteten Gebiete in blau dargestellt, während die Gebiete mit gewonnenem Land in rot dargestellt werden.

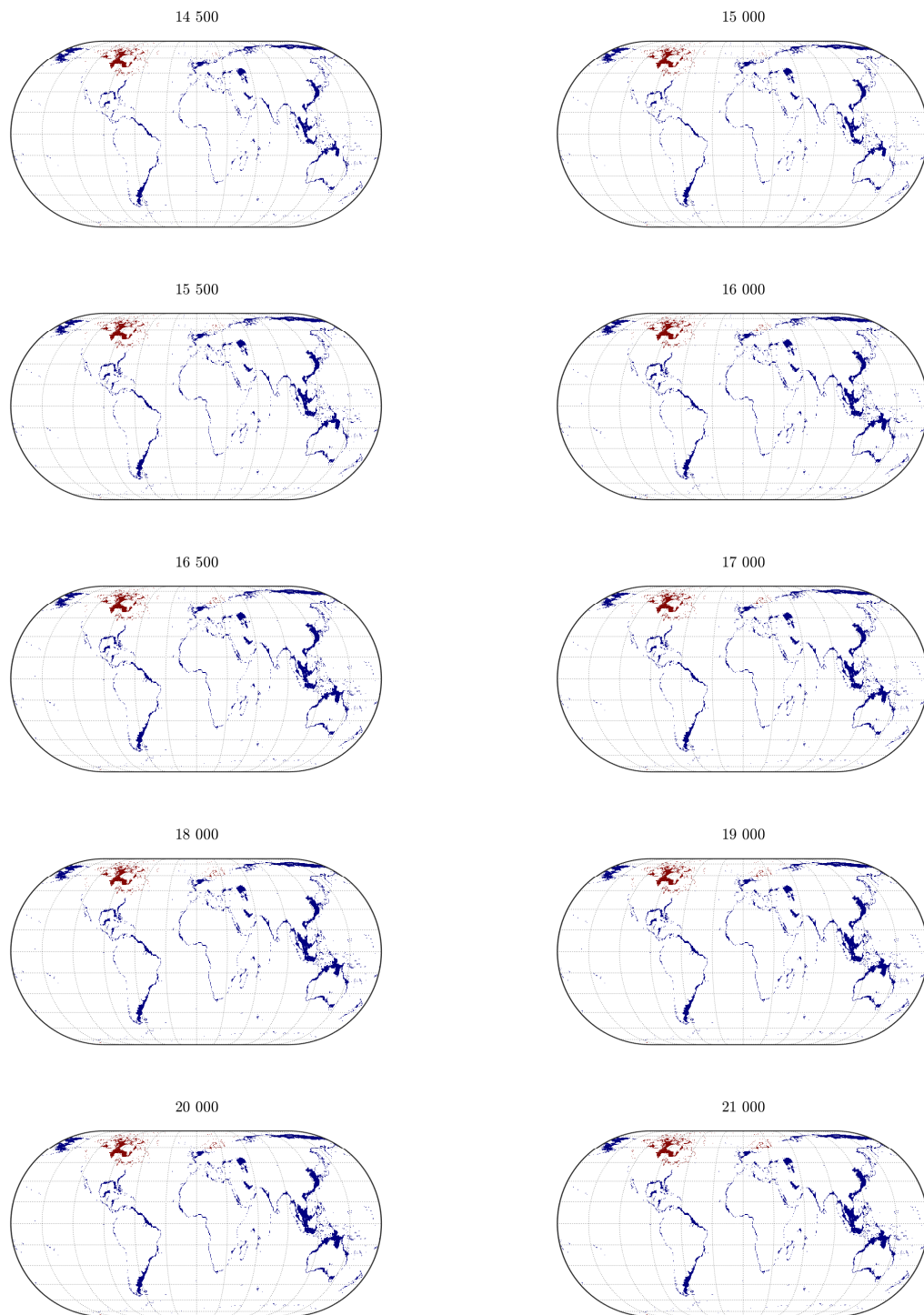


Abbildung B.2: Variation der Küstenlinien von vor 14 500 bis 21 000 Jahren zum heutigen Referenzzeitpunkt (Algorithmus nach Mitrovica mit variablen Küsten). Hierbei werden die überfluteten Gebiete in blau dargestellt, während die Gebiete mit gewonnenem Land in rot dargestellt werden.

