

# **Nichtlineare Halbgruppen und Hysteresemodelle für nichtmonotone Sättigungsprofile**

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
**Rouven Hannes Steinle**  
aus Lauffen am Neckar

Hauptberichter: Prof. Dr. Dr. Rudolf Hilfer  
Mitberichter: Prof. Dr. Christian Rohde

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 2019

Institut für Computerphysik der Universität Stuttgart, 2019



# Danksagung

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Professor Dr. Dr. Rudolf Hilfer und Herrn Professor Dr. Christian Rohde, die meine Dissertation betreut haben.

Bei Herrn Professor Dr. Dr. Rudolf Hilfer möchte ich mich herzlich für die jahrelange gemeinsame Arbeit bedanken, für die zahlreichen interessanten Diskussionen und das Vertrauen in mich, neue Ideen zu entwickeln und umzusetzen.

Bei Herrn Professor Dr. Christian Rohde möchte ich mich herzlich für die interessanten Gespräche und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit bedanken.

Ein herzliches Dankeschön all denjenigen, die mich während der Anfertigung meiner Dissertation unterstützt und motiviert haben. Ebenso meinen Freunden und Kollegen am Institut für Computerphysik, die mir mit viel Interesse und Hilfsbereitschaft zur Seite standen.

Mein abschließender Dank gilt meiner Familie und meiner Frau Kyra, die mich während der Arbeit an meiner Dissertation immer unterstützt haben und stets ein offenes Ohr für mich hatten.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>X</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>XVII</b>
<b>Summary</b>	<b>XX</b>
<b>I Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Motivation und Problemstellung</b>	<b>2</b>
1.1 Motivation . . . . .	2
1.2 Definition der Problemstellung . . . . .	3
1.3 Struktur der Dissertation . . . . .	4
1.4 Fazit . . . . .	5
<b>2 Darcy-Theorie für Zweiphasenströmungen in porösen Medien</b>	<b>7</b>
2.1 Fraktionale Formulierung der Darcy-Theorie . . . . .	7
2.2 Herleitung . . . . .	8
2.3 Material- und Fluidparameter . . . . .	12
2.4 Bestimmung der Welge-Sättigung für Be- und Entwässerung . . . . .	15
2.5 Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . . .	17
2.6 Ausbreitung eines nichtmonotonen Sättigungsprofils ohne Hysterese . . . . .	19
2.7 Folgerung . . . . .	22
<b>II Hystereseemodelle und die Ausbreitung von Sättigungsprofilen</b>	<b>24</b>
<b>3 Formulierung der Hysterese</b>	<b>25</b>

3.1	Allgemeine Formulierung von Hysterese basierend auf Funktionsgraphen . . .	25
3.2	Beschreibung der Hystereseemodelle . . . . .	27
3.3	Anpassung des $\delta$ -Hysterese-modells für numerische Simulationen . . . . .	35
3.4	Folgerung . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Kopplung von Stoßfronten bei nichtmonotonen Sättigungsprofilen</b>	<b>38</b>
4.1	Ausbreitungsgeschwindigkeiten von nichtmonotonen Sättigungsprofilen . . .	39
4.2	Laufender Überschuss . . . . .	40
4.3	Überschuss mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten . . . . .	42
<b>III</b>	<b>Nichtlineare Halbgruppen für die Darcy-Theorie</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Existenz von Lösungen bei nichthysteretischen Zweiphasenströmungen</b>	<b>45</b>
5.1	Motivation . . . . .	45
5.2	Vorbemerkungen . . . . .	46
5.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Existenz von nichtmonotonen Lösungen bei hysteretischen Zweiphasenströmungen</b>	<b>61</b>
6.1	Entkopplung der Be- und Entwässerungsfront . . . . .	61
6.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	64
6.3	Numerische Simulation: $D$ versus $D_G(S)$ . . . . .	70
6.4	Folgerung . . . . .	77
<b>IV</b>	<b>Exploration des Parameterraumes</b>	<b>78</b>
<b>7</b>	<b>Einfluss der Randbedingungen im Sprunghysterese-modell</b>	<b>79</b>
7.1	Modellproblem . . . . .	79
7.2	Quasianalytische Lösungen . . . . .	81
7.3	Numerische Lösungen . . . . .	83
7.4	Folgerung . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Einfluss der Randbedingungen im <math>\delta</math>-Hysterese-modell</b>	<b>94</b>
8.1	Modellproblem . . . . .	94
8.2	Variation der Randwerte $(S^B, t^B)$ . . . . .	95
8.3	Variation des Randparameters $S^{\text{in}}$ . . . . .	107
8.4	Folgerung . . . . .	117

<b>9 Einfluss der Streichkurven im <math>\delta</math>-Hysteresemodell</b>	<b>118</b>
9.1 Modellproblem . . . . .	118
9.2 Quasianalytischer Vergleich . . . . .	121
9.3 Numerische Lösungen . . . . .	124
9.4 Folgerung . . . . .	128
<b>10 Einfluss des Hysterese Modells: Sprunghysterese versus <math>\delta</math>-Hysterese</b>	<b>130</b>
10.1 Modellproblem . . . . .	130
10.2 Quasianalytischer Vergleich . . . . .	132
10.3 Numerische Lösungen . . . . .	134
10.4 Folgerung . . . . .	137
<b>11 Einfluss der Gravitation</b>	<b>138</b>
11.1 Modellproblem . . . . .	138
11.2 Quasianalytische Lösungen . . . . .	140
11.3 Numerische Lösungen . . . . .	143
11.4 Folgerung . . . . .	148
<b>V Numerische Beispiele von nichtmonotonen Sättigungsprofilen</b>	<b>150</b>
<b>12 Modellierung eines Infiltrationsexperiments im Rahmen der <math>\delta</math>-Hysterese</b>	<b>151</b>
12.1 Experimentelle Ergebnisse . . . . .	151
12.2 Modellparameter . . . . .	154
12.3 Modellproblem zur theoretischen Modellierung . . . . .	155
12.4 Quasianalytische Lösungen . . . . .	156
12.5 Numerische Lösungen . . . . .	157
12.6 Folgerung . . . . .	161
<b>13 Problemformulierung und Dimensionalität</b>	<b>163</b>
13.1 Fraktionale Formulierung versus Druck-Sättigungsformulierung . . . . .	164
13.2 Zweidimensionale Strömungen in der fraktionalen Formulierung . . . . .	172
<b>VI Anhang</b>	<b>188</b>
<b>A Bestimmung der kubischen Streichkurven</b>	<b>189</b>
<b>B Open<math>\nabla</math>FOAM Implementierung</b>	<b>192</b>
B.1 Implementierung der fraktionalen Formulierung der Darcy-Theorie . . . . .	192

B.2 Implementierung der Sprunghysterese . . . . .	194
B.3 Implementierung der $\delta$ -Hysterese . . . . .	196
B.4 Test - Verifizierung der Implementierung . . . . .	200
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>201</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Bestimmung der Welge-Sättigung einer primären Bewässerung und beispielhaftes Sättigungsprofil . . . . .	16
2.2	Bestimmung der Welge-Sättigung einer sekundären Entwässerung und beispielhaftes Sättigungsprofil . . . . .	16
2.3	Relative Permeabilitäten und resultierende fraktionale Flussfunktion mit Parametern aus Tabelle 2.1 . . . . .	20
2.4	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung des Anfangs- und Randwertproblem 2A . . . . .	21
2.5	Vergleich der numerischen Lösungen von Anfangs- und Randwertproblem 2A mit Kapillarfluss Funktion und im hyperbolischen Limes . . . . .	22
3.1	Skizze von einer Streichkurvenschleife und einer reversiblen Streichkurve im $\delta$ -Modell . . . . .	27
3.2	Beispiel einer Sättigungsfunktion und den dazugehörigen Funktionen zur Bestimmung der Funktion $A(z, t)$ . . . . .	31
3.3	Beispiel eines Graphen $\mathcal{G}_w(z, t)$ der relativen Permeabilität der benetzenden Phase . . . . .	32
4.1	Skizze eines nichtmonotonen Sättigungsprofils . . . . .	39
6.1	Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionale Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 6.1 . . . . .	72
6.2	Fraktionale Flussfunktionen im $\delta$ -Hysteresemodell für die Be- und Entwässerungsprozesse von Problemen 6A-6E . . . . .	74
6.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 6B . . . . .	75
6.4	Vergleich der numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme 6A-6E . . . . .	76
7.1	Hauptzweige der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 7.1 . . . . .	81

7.2	Funktion der Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Be- und Entwässerungsfronten und fraktionale Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 7.1 . . .	82
7.3	$(S^B, t^B)$ -Parameterraum mit Indikation der qualitativen numerischen Lösung	84
7.4	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 7A . . . . .	87
7.5	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 7B . . . . .	88
7.6	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 7C . . . . .	90
7.7	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 7D . . . . .	91
7.8	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 7E . . . . .	93
8.1	Hauptzweige der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 8.1 . . . . .	96
8.2	Fraktionale Flussfunktionen für zwei unterschiedliche Entwässerungsprozesse im $\delta$ -Hysteresemodell mit Parametern aus Tabelle 8.1 . . . . .	98
8.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8A . . . . .	100
8.4	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8B . . . . .	101
8.5	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8C . . . . .	102
8.6	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8D . . . . .	104
8.7	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8E . . . . .	105
8.8	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8F . . . . .	106
8.9	Hysterese-Randkurven der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 8.3 . . . . .	108
8.10	Fraktionale Flussfunktionen im $\delta$ -Hysteresemodell für vier unterschiedliche Entwässerungsprozesse mit Parameter aus Tabelle 8.3 . . . . .	109
8.11	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8G . . . . .	112

---

8.12	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8H . . . . .	113
8.13	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8I . . . . .	114
8.14	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 8J . . . . .	116
9.1	Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionale Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 9.1 . . . . .	120
9.2	Fraktionale Flussfunktionen im $\delta$ -Hysteresemodell für acht unterschiedliche Streichkurven eines Entwässerungsprozesses . . . . .	122
9.3	Numerische Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen 9A, 9B, 9E, 9F und 9G . . . . .	126
9.4	Numerische Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen 9C und 9D . . . . .	127
9.5	Numerische Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 9H . . . . .	128
9.6	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 9H . . . . .	129
10.1	Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionale Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 10.1 . . . . .	132
10.2	Fraktionale Flussfunktionen im Sprung- und $\delta$ -Hysteresemodell mit Parametern aus Tabelle 10.1 . . . . .	133
10.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 10A . . . . .	135
10.4	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 10B . . . . .	136
11.1	Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 11.1 . . . . .	139
11.2	Fraktionale Flussfunktionen im Sprung- und $\delta$ -Hysteresemodell mit Parametern aus Tabelle 11.1 . . . . .	140
11.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 11A . . . . .	143
11.4	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 11B . . . . .	144
11.5	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 11C . . . . .	145

11.6	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 11D . . . . .	146
11.7	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 11E . . . . .	147
12.1	Hystereserandkurven der relative Permeabilitäten und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit Parametern aus Tabelle 12.2 . . . . .	154
12.2	Fraktionale Flussfunktionen im $\delta$ -Hysteresemodell für die Be- und Entwässerungsprozesse von Problemen 12A und 12B . . . . .	156
12.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 12A . . . . .	158
12.4	Vergleich der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 12A mit Experiment A aus [20] . . . . .	159
12.5	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 12B . . . . .	160
12.6	Vergleich der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 12B mit Experiment B aus [20] . . . . .	161
13.1	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13A . . . . .	168
13.2	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13B . . . . .	169
13.3	Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13C . . . . .	170
13.4	Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems 13D . . . . .	176
13.5	Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems 13D im hyperbolischen Limes . . . . .	177
13.6	Vergleich der Länge der Sättigungsfinger bei dem Anfangs- und Randwertproblemen 13D . . . . .	178
13.7	Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems 13E . . . . .	179
13.8	Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13E . . . . .	180
13.9	Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems 13F . . . . .	182

---

13.10	Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13F . . . . .	183
13.11	Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems 13G . . . . .	185
13.12	Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem 13G . . . . .	186
B.1	Flussdiagramm für die numerische Struktur zur Lösung der hysteretischen Differentialgleichung . . . . .	193
B.2	Diagramm zur Auswertung der Simulationsergebnisse bei dem Sprunghys- terese Modell . . . . .	194
B.3	Diagramm zur Auswertung der Simulationsergebnisse beim $\delta$ -Hysteresemodell	196
B.4	Diagramm zur Bestimmung der Simualtionsparameter bei einem Sättigungs- anstieg im $\delta$ -Hysteresemodell . . . . .	197
B.5	Diagramm zur Bestimmung der Simualtionsparameter bei abnehmender Sät- tigung im $\delta$ -Hysteresemodell . . . . .	198
B.6	Diagramm zur Bestimmung der Simualtionsparameter bei kleinen Sätti- gungsänderungen im $\delta$ -Hysteresemodell . . . . .	199

# Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	20
6.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	71
6.2	Parameter für das Hysteresemodell . . . . .	73
7.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	80
7.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	86
8.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	95
8.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	96
8.3	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	107
8.4	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	108
9.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	119
9.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	121
10.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	131
10.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	132
11.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	139
11.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	140
12.1	Sättigungen der experimentellen Überschussprofile . . . . .	151
12.2	Parameter mit Symbol und Größeneinheit im Vergleich zu den Referenzwerten von DiCarlo [20, 23] und Schroth [65] . . . . .	153
12.3	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	155
13.1	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	166
13.2	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	167
13.3	Differenz diff aus Gleichung (13.4) für die Probleme A-C . . . . .	171
13.4	Parameter mit Symbol und Größeneinheit . . . . .	173
13.5	Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell	173

# Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
$\alpha, \beta, \gamma$	Exponenten in den relativen Permeabilitäten und dem Kapillardruck
$\delta$	Hystereseparameter zur Definition der Ausdehnung der Streichkurven im $\delta$ -Hysteresemodell
$\epsilon$	Parameter in der Halbgruppenformulierung
$\zeta(\cdot)$	Funktion zur Bestimmung der kubischen Streichkurven der relativen Permeabilitäten
$\kappa, \lambda$	Konstanten in der Halbgruppenformulierung
$\mu_{\mathbb{W}}, \mu_{\mathbb{O}}$	Viskosität der benetzenden Phase $\mathbb{W}$ und der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$\varrho_{\mathbb{W}}, \varrho_{\mathbb{O}}$	Dichte der benetzenden $\mathbb{W}$ und nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$\rho(A)$	Resolventenmenge des Operators $A$
$\sigma(A)$	Spektrum des Operators $A$
$\Sigma_{\omega}$	offenes sektorielles Gebiet mit Winkel $\omega$
$\tau$	Parameter zur numerischen Implementierung des $\delta$ -Hysteresemodells
$\phi$	Porosität, beschreibt das Verhältnis Porenvolumen $\mathbb{P}$ zu Gesamtvolumen $\mathbb{S}$ eines porösen Mediums
$\psi_{l,j}$	Parameter der kubischen Streichkurven
$\chi(z, z_a)$	Funktion, die jedem Ort $z \in \Omega$ zu jedes Zeitpunkt $t \in [0, T]$ einen Be- oder Entwässerungsprozess zuordnet
$\omega_A$	Winkel des sektoriellen Operators $A$
$\Omega, \Omega_i$	Gebiet auf dem das Anfangs- und Randwertproblem definiert ist

Symbol	Beschreibung
$a(u, v)$	Sesquilinearform des Operators $A$
$A$	differentieller Operator in der Halbgruppentheorie
$A(z, t)$	Funktion zur Definition der Streichkurven im $\delta$ -Hysterese-modell
$(A, a_j), (A, b_j), (A, c_j), (A, d_j)$	Punkte zur Definition der Streichkurven mit dem Index $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}, c\}$
$B$	Breite des Definitionsgebietes bei einem zweidimensionalen porösen Medium
$c(S_1, S_2)$	analytische Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Sättigungsfront mit linksseitiger Sättigung $S_1$ und rechtsseitiger Sättigung $S_2$
$c^{\text{num}}(S_1, S_2)$	numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Sättigungsfront mit linksseitiger Sättigung $S_1$ und rechtsseitiger Sättigung $S_2$
<code>controlMain</code> ( $z, t$ )	Variable für die Auswahl der Hauptzweige im numerischen Code in <code>OpenFOAM</code>
<code>controlSc</code> ( $z, t$ )	Variable für die Benutzung der Streichkurve im numerischen Code in <code>OpenFOAM</code>
<code>CapFlux</code>	kapillarer Fluss im numerischen Code in <code>OpenFOAM</code>
$C_i, C'_i, C''_i$	Konstanten in der Halbgruppenformulierung
$d/dn$	Ableitung in Normalenrichtung bei dem AWRW-Problem in der Halbgruppenformulierung
<code>dr, _dr</code>	Index für den Hauptzweig der Entwässerung, Index in <code>OpenFOAM</code>
<code>diff</code>	Maß für den Unterschied von zwei numerischen Lösungen
$D, D_c$	Diffusionskonstante
$\mathcal{D}(A)$	Definitionsbereich des Operators $A$
$D(S)$	kapillarer Fluss
$\hat{D}_G(S)$	nichtlinearer diffusiver Anteil in der Druck-Sättigungsformulierung



Symbol	Beschreibung
$\mathbf{e}_z$	Einheitsvektor in Richtung der Schwerkraft
$f(S)$	fraktionale Flussfunktion
$f'(S), f''(S)$	Erste und zweite Ableitung der fraktionalen Flussfunktion in Bezug auf die Sättigung
$\hat{f}_{\mathcal{G}}(S)$	nichtlinearer Transportanteil in der Druck-Sättigungsformulierung
$\text{ff}_i(t)$	numerischer Sättigungswert der fraktionalen Formulierung in der Rechenzelle $i$ zum Zeitpunkt $t$
<code>fvc::div(·)</code>	explizite Divergenzformulierung im OpenFOAM Code
<code>fvm::ddt(·)</code>	implizite zeitliche Ableitung im OpenFOAM Code
<code>fvm::laplacian(·, ·)</code>	implizite Laplace-Formulierung im OpenFOAM Code
$F(u)$	nichtlineare Funktion in der Halbgruppenformulierung
FraFlux	fraktionaler Fluss im numerischen Code in OpenFOAM
$g$	Gravitationsbeschleunigung
$\mathcal{G}(z, t)$	Graph zur Beschreibung einer hysteretischen Mehrphasenströmung
$\mathcal{G}_c$	Graph der Ableitung des Kapillardrucks in Bezug auf die Sättigung
$\mathcal{G}_{\text{O}}$	Graph der relativen Permeabilität der nichtbenetzenden Phase
$\mathcal{G}_w$	Graph der relativen Permeabilität der benetzenden Phase
$h(S, \partial_z S)$	nichtlineare Funktion zur Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit
$\hat{h}_{\mathcal{G}}(S)$	nichtlinearer Transportanteil in der Druck-Sättigungsformulierung
$H(t)$	Hilfsfunktion zum Nachweis der Beschränktheit von Lösungen
$\mathcal{H}^k$	Hilbert-Raum der Ordnung $k$
$\mathcal{H}_N^2$	Raum der Funktionen aus $\mathcal{H}^2$ mit Null-Neumann-Randbedingungen
$\mathcal{H}_i(z, t)$	Hystereseoperatoren

Symbol	Beschreibung
$im, \_im$	Index für den Hauptzweig der Bewässerung, Index in Open $\nabla$ FOAM
$k$	Permeabilität des porösen Mediums
$k_{\mathbb{O}}^{dr}(S)$	Entwässerungshauptzweig der relativen Permeabilität der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$k_{\mathbb{W}}^{dr}(S)$	Entwässerungsrandkurve der relativen Permeabilität der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$k_{\mathbb{O}}^{im}(S)$	Bewässerungsrandkurve der relativen Permeabilität der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$k_{\mathbb{W}}^{im}(S)$	Bewässerungsrandkurve der relativen Permeabilität der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$k_{\mathbb{O}}^r(S), k_{\mathbb{O}}^i(S)$	relative Permeabilität der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$k_{\mathbb{W}}^r(S), k_{\mathbb{W}}^i(S)$	relative Permeabilität der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$k_{\mathbb{O}}^{sc}(S)$	Streichkurve in der relativen Permeabilität nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$k_{\mathbb{W}}^{sc}(S)$	Streichkurve in der relativen Permeabilität der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$K_{\mathbb{W}}^e, K_{\mathbb{O}}^e$	Endpunkte der relativen Permeabilitäten
$L$	Länge des Definitionsgebietes des porösen Mediums
$\mathcal{L}^p$	Lebesgue-Raum
$M_{pc}$	Menge der stückweise konstanten Funktionen
$M_{pm}$	Menge der stückweise monotonen Funktionen
$M_{\mathbb{W}}, M_{\mathbb{O}}$	Massenaustauschterm der benetzenden Phase $\mathbb{W}$ und der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$N$	Einbettungskonstante
$\mathbb{O}$	nichtbenetzende Phase
$p_c(S)$	Ableitung der Kapillardruckfunktion in Bezug auf die Sättigung
$ps_i(t)$	numerischer Sättigungswert der Druck-Sättigungsformulierung in der Rechenzelle $i$ zum Zeitpunkt $t$
$\mathbb{P}$	Porenvolumen

Symbol	Beschreibung
$P_{\text{atm}}$	atmosphärischer Druck
$P_{\text{b}}$	kapillarer Eingangsdruck
$P_{\text{c}}(S), P_{\text{c}}^i(S)$	Kapillardruckfunktion
$P_{\text{c}}^{\text{dr}}(S)$	Entwässerungsrandkurve des Kapillardrucks
$P_{\text{c}}^{\text{im}}(S)$	Bewässerungsrandkurve des Kapillardrucks
$P_{\text{c}}^{\text{sc}}(S)$	Streichkurve im Kapillardruck
$P_{\mathbb{W}}, P_{\mathbb{O}}$	Druck in der benetzenden Phase $\mathbb{W}$ und nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$\mathbf{q}_{\mathbb{W}}, \mathbf{q}_{\mathbb{O}}, q_{\mathbb{W}}, q_{\mathbb{O}}$	partieller Fluss der benetzenden Phase $\mathbb{W}$ und nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^{\text{T}}$	Gesamtfluss im porösen Medium bei mehrdimensionalen Strömungen
$Q$	Gesamtfluss im porösen Medium bei eindimensionalen Strömungen
$r$	Exponent einer Randbedingung am Einlass zur Modellierung von Infiltrationsexperimenten
$\text{sc}, \text{\_sc}$	Index für die Streichkurven, Index in <code>OpenFOAM</code>
$\mathbb{S}$	Gesamtvolumen
$S(z, t), S, S_{\mathbb{W}}$	Sättigung der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$S^{\text{B}}$	Sättigung einer zeitabhängigen Randbedingung
$S_e$	effektive Sättigung
$S_i$	initiales Sättigungsprofil ( $i = 0$ ) oder fester Sättigungswert ( $i \in \mathbb{N}_0$ )
$S^{\text{in}}$	Sättigung links von einem Überschuss, Sättigung einer Randbedingung am Einlass
$S_{\mathbb{O}}$	Sättigung der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	residuale Sättigung der nichtbenetzenden Phase $\mathbb{O}$
$S^{\text{out}}$	Sättigung rechts von einem Überschuss, Sättigung einer Randbedingung am Auslass
$S^{\text{P}}$	Überschusssättigung, Plateausättigung, lokale Maximalsättigung eines Sättigungsprofils

Symbol	Beschreibung
$S^{\text{TW}}$	Überschusssättigung eines nichtmonotonen Profils, welches sich als laufende Welle ausbreitet
$S_{\text{Welge}}$	Welge-Sättigung
$S_{\text{Wi}}$	residuale Sättigung der benetzenden Phase $\mathbb{W}$
$S_*(z, t), S_{**}(z, t)$	Funktionen zur Definition der Graphen im $\delta$ -Hysterese-modell
$(S, X)$	Wertepaar des Graphen $\mathcal{G}_{\text{W}}$
$(S, Y)$	Wertepaar des Graphen $\mathcal{G}_{\text{O}}$
$(S, Z)$	Wertepaar des Graphen $\mathcal{G}_{\text{c}}$
$t^{\text{B}}$	Zeitparameter einer zeitabhängigen Randbedingung
$\Delta t$	Zeitschritt bei der Finiten Volumen Methode
$\mathbf{v}_{\text{W}}, \mathbf{v}_{\text{O}}$	mikroskopische Geschwindigkeit der benetzenden Phase $\mathbb{W}$ und nichtbenetzenden Phase $\text{O}$
$\mathbb{W}$	benetzende Phase
$\mathcal{W}^{k,p}$	Sobolev-Raum
$\mathbf{x} = (x, y, z)^T$	Ortspunkt im porösen Medium
$\Delta z$	Größe der Rechenzelle bei der Finiten Volumen Methode

# Zusammenfassung

Die experimentellen Beobachtungen von Sättigungsüberschüssen und Sättigungsfingern bei gravitationsgetriebenen Infiltrationsprozessen beschäftigt schon seit Jahrzehnten die Forschung von porösen Medien in Mathematik, Physik, Geowissenschaft und Ingenieurwesen. Sowohl die Vorhersage von Sättigungsüberschüssen bei Experimenten als auch das allgemeine theoretische Verständnis von Sättigungsüberschüssen ist noch nicht vollständig geklärt. Des Weiteren ist die Frage, ob Sättigungsüberschüsse und Sättigungsfinger eine Verbindung zueinander haben, weiterhin offen. Zur theoretischen Modellierung von nichtmonotonen Sättigungsprofilen und den Mechanismen, welche zur Entstehung und Ausbreitung dieser Profile nötig sind, gibt es eine Vielzahl von Ansätzen [8, 16, 17, 23, 25, 34]. Ein Ansatz zur Ausbreitung von laufenden nichtmonotonen Sättigungsprofilen wurde in [43] vorgestellt. Dieser Ansatz benutzt ausschließlich hysteretische relative Permeabilitäten zur Modellierung von Be- und Entwässerungsprozessen bei sich ausbreitenden Sättigungsüberschüssen. Sonstige Erweiterungen der Darcy-Theorie werden dabei nicht benutzt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Sättigungsfronten werden mit einer Rankine-Hugoniot-Bedingung, welche die fraktionalen Flüsse verwendet, berechnet. Bei einer optimal aufeinander abgestimmten Wahl der relativen Permeabilitäten, der Material- und Fluidparameter sowie der Anfangs- und Randbedingungen, existieren Sättigungsüberschüsse, die sich mit konstanter Geschwindigkeit und konstanter Überschussbreite ausbreiten.

In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz aus [43] auf die Darcy-Theorie in Verbindung mit einem allgemeinen Hysteresemodell mit graphenabhängigen relativen Permeabilitäten und Kapillardrücken angewendet. Das entstandene Anfangs- und Randwertproblem wird analytisch und numerisch untersucht.

Im analytischen Teil wird sowohl das traditionelle als auch das hysteretische Anfangs- und Randwertproblem der Darcy-Theorie mit den Methoden der nichtlinearen Halbgruppentheorie diskutiert. Für die traditionelle Darcy-Theorie mit der Anfangsbedingung  $S_0$  kann Existenz, Eindeutigkeit und Beschränktheit von Lösungen im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$  gezeigt werden. Darauf aufbauend werden diese Ergebnisse

auf die hysteretische Darcy-Theorie angewendet. Im Rahmen einer vereinfachten Hystereseformulierung und mit geeigneten Bedingungen an die Anfangswerte  $S_0$  und die Parameter der Gleichung existieren auch hier eindeutig Lösungen im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$ . Bei einer nichtmonotonen Anfangsbedingung  $S_0$  sind diese Lösungen auch nichtmonoton.

Des Weiteren wird die Ausbreitung von nichtmonotonen Sättigungsprofile mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingung untersucht. Die Wahl der Parameter und Anfangs- und Randbedingungen erzeugt nicht nur laufende Sättigungsüberschüsse, sondern auch Überschüsse mit wachsender oder schrumpfender Plateaubreite. Nicht nur die Wahl der Parameter hat einen Einfluss auf die Ausbreitung der Lösungen, sondern auch die Wahl des Hysterese-modells. Abhängig vom Hysteresemodell, kann sich ein nichtmonotones Sättigungsprofil als laufende Welle oder mit wachsender oder schrumpfender Plateaubreite durch das poröse Medium bewegen. Außerdem kann man in der theoretischen Betrachtung nicht nur die Ausbreitung von Sättigungsüberschüssen bei schwerkraftgetriebenen, sondern auch bei horizontalen Strömungen erklären.

Im numerischen Teil wird die hysteretische Darcy-Theorie für variierende Material- und Fluidparameter, Anfangs- und Randbedingungen und Hysterese Modelle untersucht. Die numerischen Simulationen bestätigen die analytischen Resultate und zeigen, dass die Lösungen unabhängig von der Hysterese im Kapillardruck und im kapillaren Fluss sind. Jedoch sind die Lösungen stark abhängig von den Anfangs- und Randwerten. In Folge dieser Abhängigkeit gibt es eine große Variation an qualitativ unterschiedlichen zeitlichen Entwicklungen der Sättigungsüberschüsse. Darüber hinaus werden existierende Experimente modelliert. Es kann gezeigt werden, dass die numerischen nichtmonotonen Sättigungsprofile mit den experimentellen Daten in Bezug auf Ausbreitungsgeschwindigkeiten, Überschussbreite und Überschusshöhe übereinstimmen. Des Weiteren wird numerisch untersucht, ob die Formulierung der Darcy-Theorie einen Einfluss auf die Lösungen hat. Bei einer geeigneten Wahl der Randbedingungen sind die numerischen Ergebnisse nahezu identischen und somit sind die Lösungen unabhängig von der Formulierung. Abschließend ist eine erste numerische Einordnung von Sättigungsfingern bei zweidimensionalen Strömungen möglich. Die numerischen Lösungen zeigen, dass nur ein Sättigungsfinger in Verbindung mit einem Sättigungsüberschuss in der Fingerspitze für lange Zeiten existiert.

Diese Arbeit zeigt, dass die Beschreibung von laufenden Sättigungsüberschüssen im Rahmen der Darcy-Theorie mit hysteretischen relativen Permeabilitäten möglich ist. Zusätzlich zu laufenden Sättigungsüberschüssen existieren in der Theorie auch nichtlaufende nichtmonotone Sättigungsprofile mit wachsender oder schrumpfender Plateaubreite. Einerseits sind in der theoretischen Modellierung weitere Untersuchungen und numerische Simulatio-

nen für zweidimensionale Strömungen notwendig, um Aussagen über die Ausbreitung von Sättigungsfingern treffen zu können. Auf der anderen Seite sind auch weitere Forschungen mit längeren quasi-eindimensionalen porösen Medien notwendig, um herauszufinden, ob die nichtlaufenden Überschüsse aus der Theorie auch experimentell beobachtbar sind.

Darüber hinaus wurden bei einer Kooperation mit dem Institut für Wasser- und Umweltsystemmodellierung (IWS) der Universität Stuttgart nichtmonotone Sättigungsprofile mit unterschiedlichen Implementierungen berechnet und verglichen [64]. Die numerischen Lösungen unterscheiden sich dabei nur minimal und damit konnte gezeigt werden, dass die Ausbreitung von Sättigungsüberschüssen nicht von der Wahl der numerischen Lösungsmethode abhängig ist.

## Summary

Since many decades there have been numerous observations of saturation overshoot and saturation fingering in porous media during gravity driven infiltration experiments. Nevertheless, research in mathematics, physics, earth science and engineering still deals with describing these observations. Both, the prediction of saturation overshoot in experiments and the theoretical understanding of saturation overshoot are open questions. Moreover, the connection between saturation overshoot and saturation fingering is still unclear. Several approaches discuss the theoretical modeling of nonmonotone saturation profiles and the initiation and propagation of overshoots [8, 16, 17, 23, 25, 34]. In [43] an approach for the propagation of travelling nonmonotone saturation profiles was introduced. Only hysteresis in the relative permeabilities is used to model imbibition and drainage processes during the propagation of the saturation overshoots. The above mentioned extensions of the Darcy theory are not used. The propagation velocities of the saturation front are calculated with a Rankine-Hugoniot condition using the fractional flow functions. Travelling saturation overshoots with constant propagation velocity and constant plateau width are possible for delicately chosen parameters and initial and boundary values.

Here this approach [43] is used for the Darcy theory with a general hysteresis model with graph dependent relative permeabilities and capillary pressures. The resulting initial and boundary value problem is solved analytically and numerically.

The traditional Darcy theory as well as the hysteretic Darcy theory is investigated with the method of nonlinear semigroups. In case of the traditional Darcy theory with initial condition  $S_0$  existence, uniqueness and boundedness of solutions in the function space  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$  is shown. These previous solutions are applied on the hysteretic Darcy theory. Within a simplified hysteresis model and under adequate assumptions for the parameters and initial condition  $S_0$  and boundary values the existence and uniqueness of solutions in the function space  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$  is proven. For nonmonotone initial conditions  $S_0$  these solutions are also nonmonotone.



Furthermore, the Rankine-Hugoniot condition is used to study the propagation of non-monotone saturation profiles. The result of this study is the existence of saturation overshoots with constant, broadening or shrinking overshoot plateaus depending on the material and fluid parameters and on the initial and boundary values. Also the hysteresis model influences the type of propagation, either as a travelling overshoot or with a broadening or shrinking plateau width. Additionally, the theoretical approach to describe propagation of saturation overshoots does not require gravitational acceleration. Therefore theoretically an overshoot can also occur during horizontal displacement processes.

In the numerical part of the work simulations with a huge variation in the material and fluid parameters as well as the initial and boundary values and the hysteresis model were performed. The numerical simulations confirm the analytical results and moreover it is shown that the solutions are independent of hysteresis in the capillary pressure or the capillary coefficients. But the solutions strongly depend on the initial and boundary values. As a result the saturation overshoots develop qualitatively different time evolutions. Additionally, infiltration experiments are modelled within the hysteretic Darcy theory. The numerical solutions are in almost perfect agreement with the experimental data in terms of propagation velocities, overshoot width and overshoot height. Furthermore, the influence of the formulation of the Darcy theory is investigated numerically. For a suitable choice of boundary conditions the numerical solutions are almost identical and thus saturation profiles are independent of the formulation. Last but not least a first classification of saturation fingering during flow processes in two dimensions is done. Numerical simulations reveal that a saturation finger can only persist for larger times if there exists an overshoot in the finger tip.

Here it is shown that the Darcy theory with hysteretic relative permeabilities suffices to describe travelling nonmonotone saturation profiles. Moreover, theoretically nonmonotone saturation overshoots with an increasing or decreasing plateau width exist. On the one hand it is necessary to continue theoretical investigations and numerical simulation on flow processes and saturation fingering in two dimensions. On the other hand experiments with quasi onedimensional porous media should be done to verify the theoretical results on non travelling overshoots.

In cooperation with the Institute for Modelling Hydraulic and Environmental Systems (IWS) at the University of Stuttgart nonmonotone saturation profiles were calculated with two different numerical implementations and were compared [64]. It is shown that the deviation of the numerical solutions are very small and therefore the propagation of saturation overshoots is independent of the numerical solution scheme.



# **Teil I**

## **Einleitung**

# 1 Motivation und Problemstellung

## 1.1 Motivation

Im Rahmen der Theorie der nichtlinearen Halbgruppen [58, 73] wurde in der Vergangenheit die lokale und globale Existenz und die Eindeutigkeit einer Vielzahl von partiellen Differentialgleichungen untersucht und bewiesen. Unter anderen existieren nichtlineare Halbgruppen für Evolutionsgleichungen und nichtlineare Halbgruppen für parabolische Evolutionsgleichungen [4]. Darüber hinaus existieren nichtlineare Halbgruppen für hysteretische partielle Differentialgleichungen [48, 52]. Die Beschreibung von Hysterese findet meist durch Hystereseoperatoren mit *plays* und *stops* [49, 69] oder über elementare Rechteckschleifen [59, 60] statt.

Bisher noch nicht untersucht wurde die nichtlineare Transportgleichung, welche sich aus der Darcy-Theorie für Zweiphasenströmungen in porösen Medien herleiten lässt. Diese Transportgleichung kann ebenfalls durch die Einführung und Betrachtung eines Hysterese Modells erweitert werden. In diesem interdisziplinären Gebiet zwischen Mathematik, Physik, Hydrologie, Geologie und Maschinenbau ist die Bildung und Ausbreitung von nichtmonotonen Sättigungsprofilen bei Zweiphasenströmungen in porösen Medien ein vielfach untersuchtes Problem. Experimentelle Arbeiten dazu stammen von Youngs [75], Briggs und Katz [9], Glass, Steenhuis und Parlange [38], DiCarlo [20] und Shiozawa und Fujimaki [66].

In der theoretischen Analyse existieren bisher nur Lösungsansätze für Spezialfälle der Darcy-Theorie. Diese Spezialfälle sind die Richards-Gleichung [63], die Buckley-Leverett-Gleichung [51] und Erweiterungen der allgemeinen Darcy-Theorie durch zusätzliche Terme, zum Beispiel der dynamische Kapillardruck [8] oder der *hold-back-pile-up* Effekt [34].

Techniken der linearen Stabilitätsanalyse von elliptisch-parabolischen partiellen Differentialgleichungen [2, 57] sind auf die Richards-Gleichung anwendbar und beweisen die Existenz einer schwachen Lösung [3]. Darauf aufbauend wird sowohl die Stabilität [31] als auch die Nichtexistenz von nichtmonotonen Lösungen der Richards-Gleichung nachgewiesen [32, 33].

Existenz und Eindeutigkeit von laufenden Wellen konnten bisher nur für die Richards-Gleichung mit einer nichtmonotonen Kapillardruck-Sättigungsbeziehung und einem hyperbolischen Term zweiter Ordnung gezeigt werden [22].

In [28, 29, 30] wird für die Buckley-Leverett-Gleichung mit der Benutzung eines dynamischen Kapillardrucks die Existenz von laufenden Wellen bewiesen.

Für die allgemeine Darcy-Theorie mit dynamischem Kapillardruck ist bisher nur die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen bekannt [13, 14, 54, 62]. Die Arbeiten zur Stabilität der Richards-Gleichung [32, 33, 36] führten zu der weit verbreiteten Meinung, dass die Darcy-Theorie nicht in der Lage ist, nichtmonotone Sättigungsprofile darzustellen und zu erklären, „... there is a wide spread belief (...) that the standard multiphase model is incomplete“ [21, Seite 4541].

Ein weiterer Ansatz zur Beschreibung von nichtmonotonen Sättigungsprofilen erfolgt über die Betrachtung der perkolierenden und nichtperkolierenden Anteile der einzelnen Phasen [24, 26, 27, 39, 40, 41]. Im Rahmen dieses Ansatzes wurden propagierende und stehende nichtmonotone Lösungen gefunden [25, 42, 45, 46].

In [43] wird erstmalig ein Mechanismus vorgestellt, welcher die Ausbreitung von Sättigungsüberschüssen in der Darcy-Theorie ausschließlich mit hysteretischen relativen Permeabilitäten beschreibt. Bei diesem Ansatz werden keine der zuvor genannten Erweiterungen der traditionellen Darcy-Theorie benutzt. Dieser Mechanismus bildet den Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung von nichtmonotonen Sättigungsprofilen innerhalb der hysteretischen Darcy-Theorie. In der folgenden Arbeit wird die nichtlineare Halbgruppentheorie auf die hysteretische Darcy-Theorie angewendet, um Aussagen über die Existenz von nichtmonotonen Sättigungsprofilen machen zu können. Darauf aufbauend werden numerische Simulationen der hysteretischen Darcy-Theorie durchgeführt.

## 1.2 Definition der Problemstellung

In diesen Arbeiten sollen folgende Fragen und Probleme beantwortet und diskutiert werden:

1. Kann die lokale und globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der traditionellen Darcy-Theorie im Rahmen der Theorie der nichtlinearen Halbgruppen bewiesen werden? Aus welchem Funktionenraum können diese Lösungen gewählt werden?
2. Existieren nichtmonotone Sättigungsprofile als Lösungen der nichthysteretischen Darcy-Theorie für den Zweiphasenfluss in porösen Medien? Sind diese Lösungen lokal oder global?

3. Sind die Ergebnisse im Rahmen der nichtlinearen Halbgruppentheorie auch auf die hysteretische Darcy-Theorie für den Zweiphasenfluss in porösen Medien anwendbar? Welche Aussagen lassen sich für nichtmonotone Sättigungsprofile treffen?
4. Welchen Einfluss hat das verwendete Hysteresemodell auf die Ausbreitung von nichtmonotonen Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie für den Zweiphasenfluss in porösen Medien?
5. Welche Parameter haben einen Einfluss auf die Ausbreitung und die Existenz von nichtmonotonen Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie für den Zweiphasenfluss in porösen Medien?
6. Können mit der hysteretischen Darcy-Theorie für den Zweiphasenfluss in porösen Medien experimentelle nichtmonotone Sättigungsprofile modelliert werden? Wie gut ist die Übereinstimmung?
7. Existieren Sättigungsüberschüsse auch außerhalb der eindimensionalen fraktionalen Formulierung der Darcy-Theorie?
8. Ist eine Verknüpfung der Ergebnisse zu Sättigungsüberschüssen mit der Beobachtung von Sättigungsfingern in zweidimensionalen porösen Medien möglich?

### 1.3 Struktur der Dissertation

Die Dissertation ist in sechs Teile gegliedert. Teil I umfasst die Einleitung und besteht aus der Motivation und der Einbettung in die mathematischen Teilgebiete (Kapitel 1) sowie der Formulierung und der Herleitung des diskutierten Anfangs- und Randwertproblems (Kapitel 2). Teil II beinhaltet die Formulierung von Hysterese im Allgemeinen und die Herleitung von zwei unterschiedlichen Hystereseusernamen im Speziellen (Kapitel 3). In Kapitel 4 wird die Kopplung von Sättigungsusernamen bei nichtmonotonen Sättigungsusernamen diskutiert. In Teil III werden die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Darcy-Theorie im Rahmen der nichtlinearen Halbgruppentheorie vorgestellt. Dabei wird in Kapitel 5 die lokale und globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des nichthysteretischen Anfangs- und Randwertproblems aus Kapitel 2 diskutiert. In Kapitel 6 wird die Existenz von nichtmonotonen Sättigungsusernamen als Lösung einer vereinfachten Form der hysteretischen Darcy-Theorie (Kapitel 3) gezeigt. Außerdem werden die analytischen Ergebnisse dabei mit ersten numerischen Lösungen illustriert. In Teil IV wird die Abhängigkeit der nichtmonotonen Sättigungsusernamen als Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie von unterschiedlichen Parametern untersucht.

Hierbei wird der Einfluss der Randwerte, Kapitel 7 und Kapitel 8, und des Hystereseomodells, Kapitel 9 und Kapitel 10, sowie der Gravitation (Kapitel 11) numerisch diskutiert. Teil V zeigt die Anwendung des hysteretischen Anfangs- und Randwertproblems auf experimentelle Sättigungsprofile (Kapitel 12) und die numerische Untersuchung von Sättigungsüberschüssen und Sättigungsfiguren außerhalb der eindimensionalen fraktionalen Formulierung (Kapitel 13). Im Speziellen zeigt Kapitel 13 numerischen Lösungen für zwei unterschiedliche eindimensionale Formulierungen und die zweidimensionalen fraktionalen Formulierung des Anfangs- und Randwertproblems. Teil VI umfasst den Appendix und beinhaltet die Implementierung des numerischen Lösers in OpenFOAM, die Bestimmung der kubischen Streichkurven und das Literaturverzeichnis.

Die Vorarbeit zu Kapitel 4 ist in [43] veröffentlicht. In [67] sind die Ergebnisse aus Kapitel 7 veröffentlicht. Das Hystereseomodell aus Kapitel 3 und die Vergleiche von experimentellen Daten mit Simulationen aus Kapitel 12 ist in [68] publiziert.

## 1.4 Fazit

Abschließend wird zusammenfassend erläutert, wie die Fragen der Problemstellung in Abschnitt 1.2 gelöst und beantwortet wurden.

1. Im Rahmen der nichtlinearen Halbgruppentheorie wird lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der traditionellen Darcy-Theorie im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$  bewiesen. Dabei hängt das Zeitintervall  $[0, T_{S_0}]$  nur von der Anfangsbedingung  $S_0$  ab. Diese Lösungen sind dann auch globale Lösungen und außerdem sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.
2. Nichtmonotone Sättigungsprofile als Lösung der Darcy-Theorie ohne Hysterese existieren immer nur für eine kurze Zeit und wandeln sich nach endlicher Zeit in monotone Sättigungsprofile um.
3. Für die Anwendung der nichtlinearen Halbgruppentheorie auf die hysteretische Darcy-Theorie wird das Hystereseomodell vereinfacht. Mit der nichtlinearen Halbgruppentheorie kann auch hier Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2)$  gezeigt werden. Im Rahmen dieser Vereinfachung existieren nichtmonotone Sättigungsprofile als Lösung der hysteretischen Darcy-Theorie für beschränkte Zeiten.

4. Das verwendete Hysteresemodell kann Auswirkungen auf die Ausbreitung der nichtmonotonen Sättigungsprofile haben. Im Allgemeinen sind die Lösungen bei unterschiedlichen Hysterese-Modellen nicht identisch.
5. Die Gravitationsbeschleunigung hat keinen Einfluss auf die Existenz der nichtmonotonen Lösungen. Somit existieren sowohl bei horizontalen als auch bei vertikalen Strömungen nichtmonotone Sättigungsprofile als Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie. Die Randbedingungen haben zusammen mit den Material- und Fluidparametern einen entscheidenden Einfluss auf die Ausbreitung und Existenz von nichtmonotonen Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie. Die Randbedingungen entscheiden darüber, ob ein Überschuss erhalten bleibt oder ob der Sättigungsüberschuss nach einer endlichen Zeit verschwindet.
6. Die hysteretische Darcy-Theorie kann experimentell beobachtbare nichtmonotone Sättigungsprofile bei numerischen Simulationen nachbilden. Die numerischen Sättigungsprofile stimmen mit den experimentellen Profilen in der Ausbreitungsgeschwindigkeit, der Form und der Höhe der Sättigungsüberschüsse nahezu perfekt überein.
7. Numerische Vergleiche zeigen, dass die nichtmonotonen Sättigungsprofile unabhängig von der Formulierung der Darcy-Theorie sind. Bei einer geeigneten Wahl der Randbedingungen liefern die fraktionale Formulierung und die Druck-Sättigungsformulierung nahezu identische Lösungen.
8. Eine erste Verknüpfung von Sättigungsüberschüssen und Sättigungsfingern wird durch zweidimensionale numerische Simulationen hergestellt. Dabei ist zu erkennen, dass ein Sättigungsfinger nur in Kombination mit einem Sättigungsüberschuss im Fingerbereich für lange Simulationszeiten erhalten bleibt. Ein Sättigungsfinger ohne Sättigungsüberschuss verschwindet nach endlicher Zeit.



## 2 Darcy-Theorie für Zweiphasenströmungen in porösen Medien

Im diesem Kapitel wird das Anfangs- und Randwertproblem, welches in dieser Arbeit untersucht wird, definiert und dessen Herleitung vorgestellt. Das Anfangs- und Randwertproblem beschreibt eine inkompressible Zweiphasenströmung von nichtmischbaren Flüssigkeiten in einem porösen Medium auf Grundlage der Darcy-Gleichung [19].

### 2.1 Fraktionale Formulierung der Darcy-Theorie

Das Anfangs- und Randwertproblem in der fraktionalen Formulierung der nichtlinearen Darcy-Theorie für zwei Phasen im Gebiet  $\Omega$  lautet

$$(DG) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{Q}^T \nabla \cdot \mathbf{f}(S) - \nabla \cdot [D(S) \nabla S] = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ S(\mathbf{x}, 0) = S^{\text{out}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

mit  $\phi$  der Porosität,  $S(\mathbf{x}, t)$  einer stückweise stetigen Sättigungsfunktion,  $\mathbf{f}(S) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  der nichtlinearen fraktionalen Flussfunktion,  $D(S) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dem nichtlinearen kapillaren Fluss und dem Gesamtfluss  $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^T \in \mathbb{R}^3$ .

Die eindimensionale Vereinfachung von (DG) ist

$$(DG1) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z} f(S) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(S) \frac{\partial}{\partial z} S \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S^{\text{out}} & \forall z \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(z, t) & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

mit  $\phi$  der Porosität,  $f(S) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  der nichtlinearen fraktionalen Flussfunktion,  $Q \in \mathbb{R}$  dem Gesamtfluss und  $D(S)$  dem nichtlinearen kapillaren Fluss von (DG). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird in (DG1) die Ortsvariable  $z$  benutzt. Die Charakterisierung, ob es sich um Stömungen in Richtung der Gravitation oder um Strömungen parallel zur Schwerkraft handelt, erfolgt über den fraktionalen Fluss  $f(S)$ .

## 2.2 Herleitung

Die fraktionale Formulierung der Darcy-Theorie (DG) ergibt sich aus der Massenerhaltung

$$\frac{\partial \phi \varrho_{\mathbb{W}} S_{\mathbb{W}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \varrho_{\mathbb{W}} S_{\mathbb{W}} \mathbf{v}_{\mathbb{W}}) = M_{\mathbb{W}} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \phi \varrho_{\mathbb{O}} S_{\mathbb{O}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \varrho_{\mathbb{O}} S_{\mathbb{O}} \mathbf{v}_{\mathbb{O}}) = M_{\mathbb{O}} \quad (2.1b)$$

den Darcy-Gleichungen, welche aus der Impulserhaltung folgen,

$$\phi S_{\mathbb{W}} \mathbf{v}_{\mathbb{W}} = -\frac{k}{\mu_{\mathbb{W}}} k_{\mathbb{W}}^r(S_{\mathbb{W}}) (\nabla P_{\mathbb{W}} - \varrho_{\mathbb{W}} g \mathbf{e}_z) \quad (2.2a)$$

$$\phi S_{\mathbb{O}} \mathbf{v}_{\mathbb{O}} = -\frac{k}{\mu_{\mathbb{O}}} k_{\mathbb{O}}^r(S_{\mathbb{W}}) (\nabla P_{\mathbb{O}} - \varrho_{\mathbb{O}} g \mathbf{e}_z) \quad (2.2b)$$

und der Volumenerhaltung

$$S_{\mathbb{W}} + S_{\mathbb{O}} = 1. \quad (2.3)$$

In den Gleichungen (2.1)-(2.3) gelten die Bezeichnungen  $S_{\mathbb{W}}$  Sättigung der benetzenden Phase,  $S_{\mathbb{O}}$  Sättigung der nichtbenetzenden Phase,  $\varrho_{\mathbb{W}}$ ,  $\varrho_{\mathbb{O}}$  Dichten,  $\mathbf{v}_{\mathbb{W}}$ ,  $\mathbf{v}_{\mathbb{O}}$  Phasengeschwindigkeiten,  $M_{\mathbb{W}}$ ,  $M_{\mathbb{O}}$  Massenaustauschterme,  $k$  Permeabilität,  $\mu_{\mathbb{W}}$ ,  $\mu_{\mathbb{O}}$  Viskositäten,  $k_{\mathbb{W}}^r$ ,  $k_{\mathbb{O}}^r$  relativen Permeabilitäten,  $P_{\mathbb{W}}$ ,  $P_{\mathbb{O}}$  Drücken beider Phasen,  $g$  Gravitationsbeschleunigung und  $\mathbf{e}_z$  Einheitsvektor in Richtung der Gravitationsbeschleunigung. Dieses Gleichungssystem wird auch oft als DBRMMWBL-Modell, benannt nach den Forschern Darcy [19], Buckingham [11], Richards [63], Muskat und Meres[55], Wyckoff und Botset [71] und Leverett [51], bezeichnet.

Dieses Gleichungssystem (2.1)-(2.3) wird nun durch die folgenden Verallgemeinerung vereinfacht. Es wird angenommen, dass das poröse Medium seine Form nicht verändert und der

Porenraum  $\mathbb{P}$  makroskopisch homogen ist

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi = \text{const.} \quad (2.4)$$

und dadurch die Porosität räumlich und zeitlich konstant ist. Des Weiteren werden im Folgenden ausschließlich Verdrängungsprozesse von Fluiden untersucht, die chemisch nicht miteinander reagieren. Daher findet keine Fluidumwandlung

$$M_{\mathbb{W}} = 0 \quad (2.5a)$$

$$M_{\mathbb{O}} = 0 \quad (2.5b)$$

statt. Die beiden Fluide werden als inkompressibel

$$\varrho_{\mathbb{W}}(\mathbf{x}, t) = \varrho_{\mathbb{W}} = \text{const.} \quad (2.6a)$$

$$\varrho_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}, t) = \varrho_{\mathbb{O}} = \text{const.} \quad (2.6b)$$

angenommen. Mit den Vereinfachungen (2.4)-(2.6) erhält man das vereinfachte Gleichungssystem

$$\phi \frac{\partial S_{\mathbb{W}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\mathbb{W}} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\phi \frac{\partial S_{\mathbb{O}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\mathbb{O}} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{q}_{\mathbb{W}} = -\frac{k}{\mu_{\mathbb{W}}} k_{\mathbb{W}}^r(S_{\mathbb{W}}) (\nabla P_{\mathbb{W}} - \varrho_{\mathbb{W}} g \mathbf{e}_z) \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{q}_{\mathbb{O}} = -\frac{k}{\mu_{\mathbb{O}}} k_{\mathbb{O}}^r(S_{\mathbb{W}}) (\nabla P_{\mathbb{O}} - \varrho_{\mathbb{O}} g \mathbf{e}_z) \quad (2.7d)$$

$$S_{\mathbb{W}} + S_{\mathbb{O}} = 1 \quad (2.7e)$$

mit

$$\mathbf{q}_{\mathbb{W}}(\mathbf{x}, t) = \phi S_{\mathbb{W}} \mathbf{v}_{\mathbb{W}} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{q}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}, t) = \phi S_{\mathbb{O}} \mathbf{v}_{\mathbb{O}} \quad (2.8b)$$

der Definition der partiellen Flüsse  $q_{\mathbb{W}}, q_{\mathbb{O}}$ . Das Gleichungssystem (2.7) umfasst 9 Gleichungen und 10 Unbekannte ( $S_{\mathbb{W}}, S_{\mathbb{O}}, P_{\mathbb{W}}, P_{\mathbb{O}}, \mathbf{q}_{\mathbb{W}}$  und  $\mathbf{q}_{\mathbb{O}}$ ). Ziel ist es, das Gleichungssystem so umzuformen, dass am Ende eine partielle Differentialgleichung mit der Unbekannten  $S_{\mathbb{W}} = S$  übrig bleibt. Dazu werden weitere Bedingungen benötigt. Die Drücke in den beiden Phasen

werden durch die sogenannten Kapillardruckfunktion  $P_c$

$$P_c(S) = P_\circ - P_w \quad (2.9)$$

miteinander gekoppelt. Die Kapillardruckfunktion beschreibt die Druckdifferenz in Abhängigkeit von der Sättigung.

Durch die Volumenerhaltung (2.3), die Addition der Massenbilanzen (2.7a), (2.7b) und mit der Annahme, dass der Gesamtfluss bei inkompressiblen Fluiden konstant und somit an jeder Stelle des porösen Mediums gleich ist, folgt

$$\mathbf{q}_w + \mathbf{q}_\circ = \mathbf{Q}(t) \quad (2.10)$$

mit dem örtlich konstanten Gesamtfluss  $\mathbf{Q}(t)$ . In dieser Arbeit wird angenommen, dass der Gesamtfluss  $\mathbf{Q}(t)$  auch zeitlich konstant ist und somit

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q} \quad (2.11)$$

gilt. Mit Hilfe der Darcy-Gleichungen (2.2), (2.7c), (2.7d) und der Kapillardruckbeziehung (2.9) wird dieser Gesamtfluss umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\frac{k}{\mu_w} k_w^r(S) (\nabla P_w - \rho_w g \mathbf{e}_z) - \frac{k}{\mu_\circ} k_\circ^r(S) (\nabla (P_c(S) + P_w) - \rho_\circ g \mathbf{e}_z) \\ &= -k \left( \frac{k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} + \frac{k_w^r(S)}{\mu_w} \right) \nabla P_w + g \mathbf{e}_z k \left( \frac{\rho_w k_w^r(S)}{\mu_w} + \frac{\rho_\circ k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} \right) - \frac{k k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} \nabla P_c(S). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Gleichung (2.12) kann nach dem Druck der benetzenden Phase  $P_w$  in Abhängigkeit von der Sättigung  $S$  zu

$$\nabla P_w = \frac{-1}{\frac{k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} + \frac{k_w^r(S)}{\mu_w}} \left[ \frac{\mathbf{Q}}{k} - g \mathbf{e}_z \left( \frac{\rho_w k_w^r(S)}{\mu_w} + \frac{\rho_\circ k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} \right) + \frac{k_\circ^r(S)}{\mu_\circ} \nabla P_c(S) \right] \quad (2.13)$$

umgestellt werden. Der partielle Wasserfluss  $\mathbf{q}_w$  ergibt sich dann zu

$$\mathbf{q}_w = \frac{\mathbf{Q} + \frac{k g}{\mu_\circ} \mathbf{e}_z k_\circ^r(S) (\rho_w - \rho_\circ)}{1 + \frac{\mu_w k_\circ^r(S)}{\mu_\circ k_w^r(S)}} + \frac{k_w^r(S) \frac{k}{\mu_w} \nabla P_c(S)}{1 + \frac{\mu_\circ k_w^r(S)}{\mu_w k_\circ^r(S)}} \quad (2.14)$$

in Abhängigkeit von der Sättigung der benetzenden Phase  $S$  und dem Gesamtfluss  $\mathbf{Q}$ . Das Gleichungssystem (2.7) kann nun durch Einsetzen von (2.14) in (2.7a) auf eine Gleichung reduziert werden. Die entstehende partielle Differentialgleichung

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{Q}^T \nabla \cdot \mathbf{f}(S) - \nabla \cdot [D(S) \nabla S] = 0 \quad (2.15)$$

heißt „fraktionale Formulierung“ mit dem fraktionalen Fluss

$$\mathbf{f}(S) = \frac{\mathbf{1} + \frac{kg}{\mu_{\text{O}} Q_z} \mathbf{e}_z k_{\text{O}}^r(S) (\varrho_{\text{W}} - \varrho_{\text{O}})}{1 + \frac{\mu_{\text{W}} k_{\text{O}}^r(S)}{\mu_{\text{O}} k_{\text{W}}^r(S)}} \quad (2.16)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)^T$  und dem kapillaren Fluss

$$D(S) = - \frac{k_{\text{W}}^r(S) \frac{k}{\mu_{\text{W}}} \frac{dP_c(S)}{dS}}{1 + \frac{\mu_{\text{O}} k_{\text{W}}^r(S)}{\mu_{\text{W}} k_{\text{O}}^r(S)}}. \quad (2.17)$$

Die fraktionale Formulierung (2.15) ist somit abhängig von der Sättigung der benetzenden Phase  $S$  und den Fluid- und Materialparametern.

### 2.2.1 Richards-Gleichung

Die Richards-Gleichung nimmt die Dichte  $\varrho_{\text{O}} = 0 \text{ kg/m}^3$  und den Druck  $P_{\text{O}} = 0 \text{ Pa}$  der nichtbenetzenden Phase an. Ausgehend von den Gleichungen (2.7) vereinfacht sich (DG) dann zu

$$(RL) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \frac{k}{\mu_{\text{W}}} k_{\text{W}}^r(S_{\text{W}}) (\nabla P_c + \varrho_{\text{W}} g \mathbf{e}_z) \right] = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ S(\mathbf{x}, 0) = S^{\text{out}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases},$$

einem Anfangs- und Randwertproblem einer elliptisch-parabolischen partiellen Differentialgleichung.

## 2.2.2 Buckley-Leverett-Gleichung

Bei der Buckley-Leverett-Gleichung, auch hyperbolischen Limes genannt, werden die diffusiven Kräfte vernachlässigt und (DG) schreibt sich als

$$(BL) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{Q}^T \nabla \cdot \mathbf{f}(S) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ S(\mathbf{x}, 0) = S^{\text{out}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} .$$

Dieses Anfangs- und Randwertproblem kann unter anderem mit Hilfe der Methode der Charakteristiken gelöst werden, [35].

## 2.3 Material- und Fluidparameter

Die konstanten Fluidparameter, Dichte und Viskosität, sowie die konstanten Materialparameter Permeabilität und Porosität sind einfach und sehr genau bestimmbar. Die relativen Permeabilitäten und der Kapillardruck jedoch sind keine konstanten Parameter, sondern sind von der Sättigung  $S$  abhängige Funktionen. Die Experimente zur Bestimmung dieser Funktionen sind sehr aufwändig und komplex und die Ergebnisse sind nicht universell auf unterschiedliche Fluide übertragbar. Damit spielen die relativen Permeabilitäten und der Kapillardruck eine zentrale Rolle bei der Modellierung von Zweiphasenströmungen. Im Laufe der Jahrzehnte haben sich daher verschiedene Modelle zur Beschreibung der relativen Permeabilitäten und des Kapillardrucks etabliert.

### 2.3.1 Effektive Sättigung

Die nachfolgenden Modelle zur Beschreibung der relativen Permeabilitäten und des Kapillardrucks sind als Funktionen der effektiven Sättigung  $S_e$

$$S_e(S) = \frac{S - S_{\text{Wi}}}{1 - S_{\text{Wi}} - S_{\text{Or}}} \quad (2.18)$$

mit den residualen Sättigungen der benetzenden Fluidphase  $S_{\text{Wi}}$  und der nichtbenetzenden Fluidphase  $S_{\text{Or}}$  definiert. Die effektive Sättigung ist eine Projektion des physikalisch möglichen Sättigungsintervalls  $[S_{\text{Wi}}, 1 - S_{\text{Or}}]$  der benetzenden Phase  $\text{W}$  auf das Intervall  $[0, 1]$ . Die residuale Sättigung  $S_{\text{Wi}}$  beschreibt die Menge an benetzender Flüssigkeit, die bei einem

Entwässerungsprozess nicht aus dem porösen Medium verdrängt werden kann. Analog dazu beschreibt  $S_{0r}$  die Menge an nichtbenetzender Flüssigkeit, die bei einem Bewässerungsprozess immer im porösen Medium zurückbleibt.

### 2.3.2 Relative Permeabilitäten

In dieser Arbeit werden zwei Modelle zur Beschreibung der relativen Permeabilitäten benutzt. Zum einen das van-Genuchten-Modell [37, 53]

$$k_{\mathbb{W}}^r(S) = K_{\mathbb{W}}^e S_e^{1/2} \left[ 1 - (1 - S_e^{1/\alpha})^\alpha \right]^2 \quad (2.19a)$$

$$k_{\mathbb{O}}^r(S) = K_{\mathbb{O}}^e (1 - S_e)^{1/2} \left[ 1 - S_e^{1/\beta} \right]^{2\beta} \quad (2.19b)$$

mit den Endpunkten  $K_{\mathbb{W}}^e$ ,  $K_{\mathbb{O}}^e$  und den Exponenten  $\alpha$ ,  $\beta$ . Dieses Modell wird für die quasi-analytischen und numerischen Lösungen in den Kapiteln 2, 6 und 13 benutzt. In den übrigen Kapiteln 7-12 wird eine einfachere algebraische Formulierung

$$k_{\mathbb{W}}^r(S) = K_{\mathbb{W}}^e S_e^\alpha \quad (2.20a)$$

$$k_{\mathbb{O}}^r(S) = K_{\mathbb{O}}^e (1 - S_e)^\beta \quad (2.20b)$$

mit den Endpunkten  $K_{\mathbb{W}}^e$ ,  $K_{\mathbb{O}}^e$  und den Exponenten  $\alpha$ ,  $\beta$  benutzt.

### 2.3.3 Kapillardruck

Die Kapillardruck-Sättigungsbeziehung wird in allen Kapiteln durch die van-Genuchten-Formulierung

$$P_c(S) = P_b \left( S_e^{-1/\gamma} - 1 \right)^{1-\gamma} \quad (2.21)$$

mit  $P_b$  dem Eingangsdruck und dem Exponenten  $\gamma$  beschrieben.

### 2.3.4 Fraktionaler Fluss

Die fraktionale Flussfunktion (2.16) ist eine nichtlineare Funktion  $[S_{\mathbb{W}i}, 1 - S_{0r}] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ , die den Anteil des Flusses der benetzenden Phase am Gesamtfluss angibt. Ist keine bzw. nur der nicht verdrängbare Anteil der benetzende Phase  $\mathbb{W}$  im porösen Medium ( $S_e = 0$  bzw.  $S =$

$S_{\text{wi}}$ ), dann ist der fraktionale Fluss Null. Im anderen Extremfall, für ein vollständig mit der benetzenden Phase gesättigtes Medium ( $S_e = 1$  bzw.  $S = 1 - S_{\text{Or}}$ ), ist der fraktionale Fluss Eins. Die fraktionale Flussfunktion ist auf dem Intervall  $S_e \in [0, 1]$  bzw.  $S \in [S_{\text{wi}}, 1 - S_{\text{Or}}]$  definiert und verbindet die Punkte

$$f(S_{\text{wi}}) = 0 \quad (2.22a)$$

$$f(1 - S_{\text{Or}}) = 1 \quad (2.22b)$$

nichtlinear und stetig miteinander. Die fraktionale Flussfunktion ist abhängig von den Modellparametern, entweder monoton steigend oder nichtmonoton.

### 2.3.4.1 Horizontaler Fluss

Der horizontale Fluss in  $x$ - oder  $y$ -Richtung, das heißt ohne Einfluss der Gravitation, ist

$$f(S) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{\text{w}} k_{\text{O}}^r(S)}{\mu_{\text{O}} k_{\text{w}}^r(S)}} \quad (2.23)$$

monoton wachsend. Die beiden Phasen fließen immer in die selbe Richtung und man spricht dabei von *co-current-flow*. Dies ist in der Funktionalgleichung des fraktionalen Flusses (2.23) leicht zu sehen, da für ansteigende Sättigungen die relative Permeabilität der benetzenden Phase  $k_{\text{w}}^r$  zu- und die relative Permeabilität der nichtbenetzenden Phase  $k_{\text{O}}^r$  abnimmt und somit der Quotient monoton fallend ist.

### 2.3.4.2 Vertikaler Fluss

Die Monotonie und der Wertebereich des vertikalen Flusses in  $z$ -Richtung, unter Einfluss der Gravitation,

$$f(S) = \frac{1 + \frac{kg}{Q_z \mu_{\text{O}}} k_{\text{O}}^r(S) (\varrho_{\text{w}} - \varrho_{\text{O}})}{1 + \frac{\mu_{\text{w}} k_{\text{O}}^r(S)}{\mu_{\text{O}} k_{\text{w}}^r(S)}} \quad (2.24)$$

hängt vom Gesamtfluss  $Q_z$  in Gravitationsrichtung ab. Wird der Verdrängungsprozess von der Gravitation dominiert, so kann der fraktionale Fluss Werte größer Eins annehmen. In diesem Fall bewegen sich die Phasen in unterschiedliche Richtungen, genannt *counter-current-flow*.



### 2.3.5 Kapillarer Fluss

Der kapillare Fluss (2.17) ist ein Faktor der diffusiven Kräfte bei der Zweiphasenströmung. Die Funktion  $D(S) : [S_{\text{Wi}}, 1 - S_{\text{Or}}] \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist nichtlineare und verbindet die Punkte  $(S_{\text{Wi}}, D(S_{\text{Wi}})) = (S_{\text{Wi}}, 0)$  und  $(1 - S_{\text{Or}}, D(1 - S_{\text{Or}})) = (1 - S_{\text{Or}}, 0)$ .

## 2.4 Bestimmung der Welge-Sättigung für Be- und Entwässerung

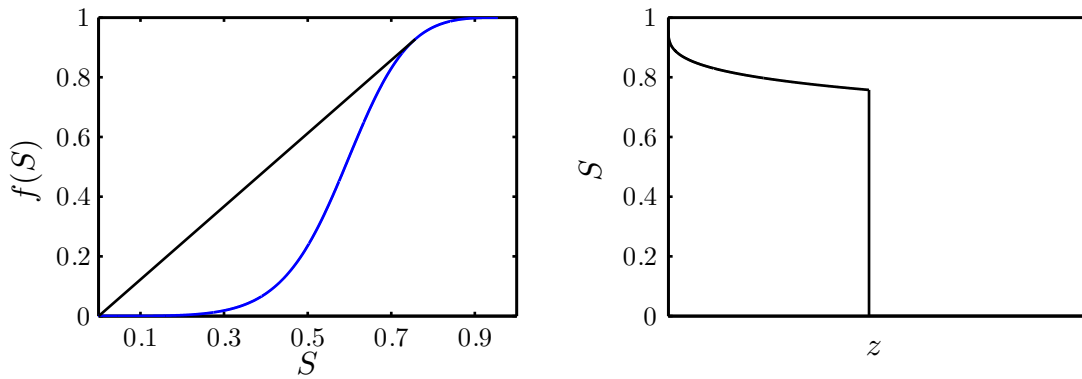
Die Welge-Konstruktion wird meistens für die Buckley-Leverett-Gleichung benutzt. Sie dient zur Bestimmung der maximalen Sättigung einer Bewässerungsfront und der minimalen Sättigung einer Entwässerungsfront.

Bei Verdrängung einer initialer Sättigung  $S_{\text{Wi}}$  durch die Sättigung  $1 - S_{\text{Or}}$  ist die Welge-Sättigung  $S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$  der Berührungspunkt einer Tangenten an den fraktionalen Fluss durch den Punkt  $(S_{\text{Wi}}, f(S_{\text{Wi}}))$ . Die Welge-Sättigung wird dann mit

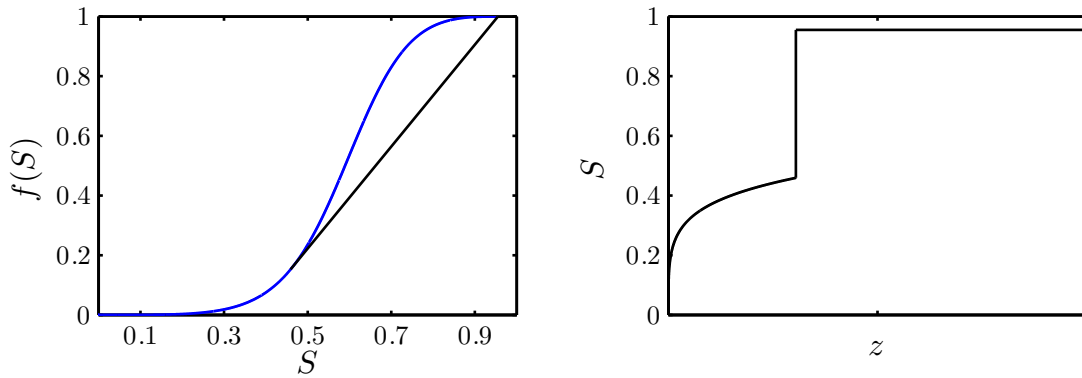
$$\frac{f(S_{\text{Welge}}^{\text{im}}) - f(S_{\text{Wi}})}{S_{\text{Welge}}^{\text{im}} - S_{\text{Wi}}} \stackrel{!}{=} \frac{df(S_{\text{Welge}}^{\text{im}})}{dS} \quad (2.25)$$

bestimmt. Abbildung 2.1 zeigt auf der linken Seite eine fraktionale Flussfunktion (blau) für einen horizontalen Fluss und die Tangente (schwarz) an die Welge-Sättigung für die Bewässerung. Das Sättigungsprofil in Abbildung 2.1 rechts ist ein beispielhaftes Profil eines solchen Verdrängungsprozesses im Buckley-Leverett-Limes (hyperbolischer Limes). Für die Bewässerung ergibt sich eine Stoßfront mit der Welge-Sättigung  $S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$  als Frontsättigung, die Sättigung vor der Stoßfront bleibt  $S_{\text{Wi}}$  und hinter der Stoßfront entsteht eine Verdünnungswelle, welche  $S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$  und  $1 - S_{\text{Or}}$  verbindet. Die Lösung kann auch als Funktion der Variablen  $z/t$  geschrieben werden und somit gilt das abgebildete Sättigungsprofil für alle Zeiten  $t$ . Aus der Konstruktion der Welge-Sättigung mit Hilfe der fraktionalen Flussfunktion ergibt sich automatisch, dass die fraktionale Flussfunktion für Sättigungen  $S \in [S_{\text{Wi}}, S_{\text{Welge}}^{\text{im}}]$  konvex ist.

Bei Verdrängung einer initialer Sättigung  $1 - S_{\text{Or}}$  durch die Sättigung  $S_{\text{Wi}}$  ist die Welge-Sättigung  $S_{\text{Welge}}^{\text{dr}}$  der Berührungspunkt einer Tangenten an den fraktionalen Fluss durch den



**Abbildung 2.1:** Links: fraktionale Flussfunktion (blau) mit Tangente (schwarz) an die Wellen-Sättigung  $S_{\text{Wellge}}^{\text{im}}$ .  
Rechts: Sättigungsprofil im Buckley-Leverett-Limes (hyperbolischer Limes) mit der Wellen-Sättigung als Frontsättigung und einer Verdünnungswelle.



**Abbildung 2.2:** Links: fraktionale Flussfunktion (blau) mit Tangente (schwarz) an die Wellen-Sättigung  $S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}}$ .  
Rechts: Sättigungsprofil im Buckley-Leverett-Limes (hyperbolischer Limes) mit der Wellen-Sättigung als Frontsättigung und einer Verdünnungswelle.

Punkt  $(1 - S_{\text{Or}}, f(1 - S_{\text{Or}}))$ . Die Wellen-Sättigung wird dann mit

$$\frac{f(1 - S_{\text{Or}}) - f(S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}})}{1 - S_{\text{Or}} - S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}}} \stackrel{!}{=} \frac{df(S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}})}{dS} \quad (2.26)$$

bestimmt. Abbildung 2.2 zeigt auf der linken Seite eine fraktionale Flussfunktion (blau) für einen horizontalen Fluss und die Tangente (schwarz) an die Wellen-Sättigung für die Entwässerung. Das Sättigungsprofil in Abbildung 2.2 rechts ist ein beispielhaftes Profil eines solchen Verdrängungsprozesses im Buckley-Leverett-Limes (hyperbolischer Limes). Für die Entwässerung ergibt sich dann eine Stoßfront mit der Wellen-Sättigung  $S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}}$  als Frontsättigung, die Sättigung vor der Stoßfront bleibt  $1 - S_{\text{Or}}$  und hinter der Stoßfront entsteht eine Verdünnungswelle, welche  $S_{\text{Wellge}}^{\text{dr}}$  und  $S_{\text{Wi}}$  verbindet. Analog zur Bewässerung zuvor kann

auch die Lösung der Entwässerung als Funktion der Variablen  $z/t$  geschrieben werden und somit gilt das abgebildete Sättigungsprofil für alle Zeiten  $t$ .

Aus der Konstruktion der Welge-Sättigung mit Hilfe der fraktionalen Flussfunktion ergibt sich automatisch, dass die fraktionale Flussfunktion für Sättigungen  $S \in [S_{\text{Welge}}^{\text{dr}}, 1 - S_{\text{Or}}]$  konkav ist.

## 2.5 Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Das eindimensionale Buckley-Leverett Problem (BL) ist eine hyperbolische partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Daher können mit der Methode der Charakteristiken schwache Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems gefunden werden. In Abhängigkeit von den Parametern des Problems erhält man konvergierende, divergierende oder parallele Charakteristiken.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass sich die Strömung immer von links nach rechts ausbreitet. Daher spricht man von einer Bewässerung, falls

$$S_0 > S_2 \quad (2.27)$$

ist, und von einer Entwässerung, wenn

$$S_0 < S_2 \quad (2.28)$$

gilt.

Die Charakteristiken einer Bewässerung konvergieren, falls

$$\frac{f(S_0) - f(S_2)}{S_0 - S_2} S + f(S_2) - \frac{f(S_0) - f(S_2)}{S_0 - S_2} S_2 > f(S) \quad (2.29)$$

für alle  $S \in (S_2, S_0)$  gilt. Graphisch bedeutet das, dass die Sekante durch die Punkte  $f(S_0)$  und  $f(S_2)$  immer oberhalb des fraktionalen Flussgraphen liegen muss.

Die Charakteristiken einer Entwässerung konvergieren, falls

$$\frac{f(S_0) - f(S_2)}{S_0 - S_2} S + f(S_2) - \frac{f(S_0) - f(S_2)}{S_0 - S_2} S_2 < f(S) \quad (2.30)$$

für alle  $S \in (S_0, S_2)$  erfüllt ist. Graphisch betrachtet, entspricht das einer Sekante durch die Punkte  $f(S_0)$  und  $f(S_2)$ , welche immer unterhalb des fraktionalen Flussgraphen liegt.

Konvergierende Charakteristiken formen Stoßfronten, welche in diesem Fall auch Sättigungsfronten genannt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten dieser Stoß- bzw. Sättigungsfronten können über die Rankine-Hugoniot-Bedingung hergeleitet werden. Dazu betrachtet man die eindimensionale Buckley-Leverett Gleichung (BL)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} h(S, \partial_z S) = 0 \quad (2.31)$$

mit Verwendung der nichtlinearen Funktion

$$h(S) = \frac{1}{\phi} Q f(S) \quad (2.32)$$

in die Integralform

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{z_0}^{z_2} S dz \right] = -h(S)|_{z_0}^{z_2} \quad (2.33)$$

auf einem Gebiet  $\Omega = [z_0, z_2]$ . Die Sättigungsfront unterteilt dieses Gebiet an der Position  $z_1(t)$  in zwei zeitabhängige Teilgebiete  $\Omega_1(t) = [z_0, z_1(t)]$  und  $\Omega_2(t) = [z_1(t), z_2]$ . In diesen Teilgebieten gilt für die Sättigung  $S(z \in \Omega_1(t), t) = S_0$  und  $S(z \in \Omega_2(t), t) = S_2$ . Die Integralform lässt sich dann umschreiben zu

$$S_0 \frac{\partial z_1}{\partial t} - S_2 \frac{\partial z_1}{\partial t} + \underbrace{\int_{z_0}^{z_1} S_t dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} S_t dz}_{\rightarrow 0} = h(S_2) - h(S_0) \quad (2.34)$$

und schließlich erhält man mit der Definition der Geschwindigkeit

$$c(S_0, S_2) = \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad (2.35)$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c(S_0, S_2) = \frac{Q}{\phi} \frac{f(S_0) - f(S_2)}{S_0 - S_2} \quad (2.36)$$

$$= c(S_2, S_0). \quad (2.37)$$

Hierbei ist  $S_0$  der Sättigung links und  $S_2$  die Sättigung rechts von der Front.

Diese Betrachtungsweise der Geschwindigkeiten von Stoßfronten in (BL) kann, laut [50,

Seite 26], auch auf das Anfangs- und Randwertproblem (DG1) im hyperbolischen Limes,  $D(S) \rightarrow 0$ , angewendet werden. Hierbei ist die Stoßfront keine Unstetigkeit, sondern eine glatte Sättigungsfront, welche sich für  $D(S) \rightarrow 0$  einer Unstetigkeit annähert. Die Bedingung  $D(S) \rightarrow 0$  ist gleichbedeutend zu der Bedingung  $f(S) \gg D(S)$ , welche im Folgenden immer angenommen wird.

## 2.6 Ausbreitung eines nichtmonotonen Sättigungsprofils ohne Hysterese

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG1) in Richtung der Gravitation mit  $f(S)$  aus Gleichung (2.24) wird auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  gelöst. Die Randbedingung lautet

$$S^{\text{RB}}(z = 0, t) = \begin{cases} 0.5 & t \leq t^{\text{B}} \\ 0.25 & t > t^{\text{B}} \end{cases} \quad (2.38a)$$

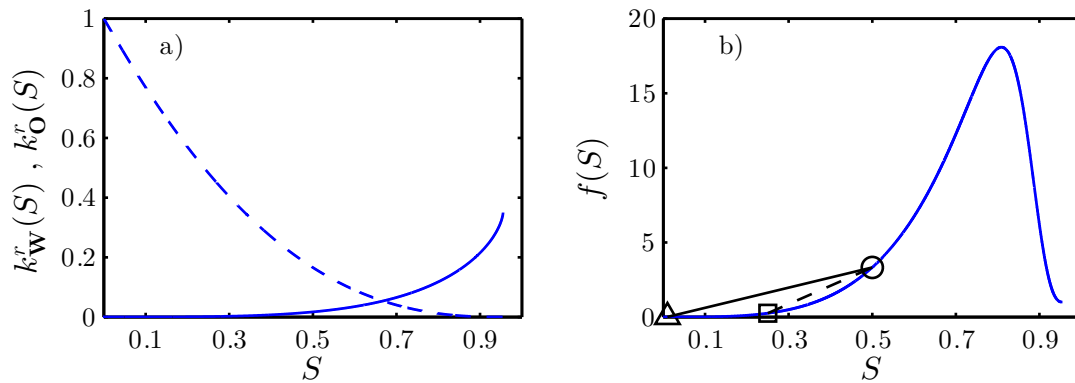
$$S^{\text{RB}}(z = L, t) = 0.01 \quad (2.38b)$$

mit den Fluid- und Materialparametern aus Tabelle 2.1.

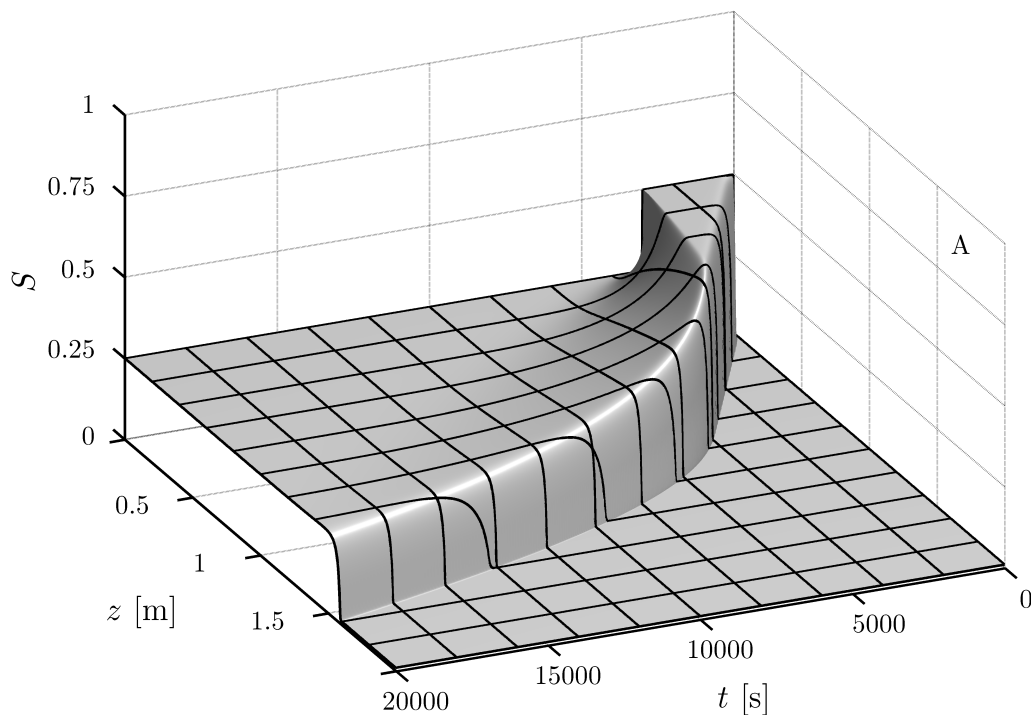
Die relativen Permeabilitäten  $k_{\text{W}}^r(S)$ ,  $k_{\text{O}}^r(S)$  und der Kapillardruck  $P_c(S)$  sind in der van-Genuchten-Formulierung (2.19), (2.21) angegeben. In Abbildung 2.3a) sind die relativen Permeabilitäten für die benetzende (durchgezogene Linie) und die nichtbenetzende Phase (gestrichelte Linie) zu sehen. Die daraus resultierende fraktionale Flussfunktion ist in Abbildung 2.3b) als blaue Kurve dargestellt. Zudem sind die fraktionalen Flüsse für die initiale Sättigung bzw. die Sättigung am Auslass  $S^{\text{out}} = 0.01$  ( $\Delta$ ) und die Sättigungen  $S^{\text{B}} = 0.5$  ( $\circ$ ) und  $S^{\text{in}} = 0.25$  ( $\square$ ) am Einlass markiert. Die eingezeichneten Sekanten, durchgezogen für die Bewässerung und gestrichelt für die Entwässerung, erlauben eine Charakterisierung der Strömungsprozesse. Für die Bewässerung gilt Bedingung (2.29), da die Sekante immer oberhalb der fraktionalen Flusskurve liegt, und somit breitet sich eine Sättigungsfront in positive  $z$ -Richtung aus. Die Geschwindigkeit dieser Front berechnet sich mit Gleichung (2.36) zu  $c(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) = 1.785 \cdot 10^{-4}$  m/s. Für die Entwässerung ist die Bedingung (2.30) nicht erfüllt, da die Sekante ebenso immer oberhalb der fraktionalen Flusskurve liegt. Der Entwässerungsprozess breitet sich somit als Verdünnungswelle aus und es kann keine Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet werden.

**Tabelle 2.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	2	m
Porosität	$\phi$	0.38	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\varrho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\varrho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität $\mathbb{W}$	$\alpha$	0.65	-
Exponent rel. Permeabilität $\mathbb{O}$	$\beta$	0.98	-
Endpunkt rel. Permeabilität $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}}^e$	1	-
Exponent Kapillardruck	$\gamma_{\text{im}}$	0.85	-
Eingangsdruck	$P_{\text{bim}}$	500	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}i}$	0	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}r}$	0.045	-
Welge-Sättigung	$S_{\text{Welge}}$	0.7976	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$



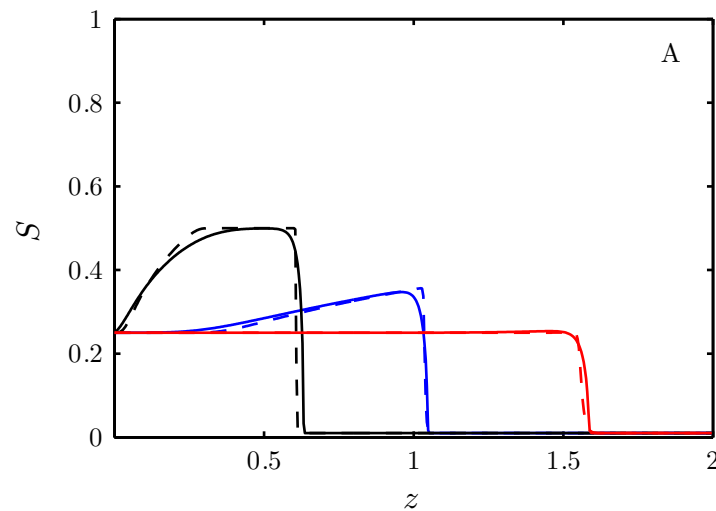
**Abbildung 2.3:** a): Relative Permeabilitäten der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  (durchgezogen) und der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  (gestrichelt) mit den Parametern aus Tabelle 2.1.  
 b): resultierende fraktionale Flussfunktion für Problem A mit den Werten aus Tabelle 2.1. Die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f(S^{\text{out}}))$  ( $\Delta$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.25, f(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ) und  $(S^{\text{B}} = 0.5, f(S^{\text{B}} = 0.5))$  ( $\circ$ ) sind markiert. Die Steigungen der eingezeichneten Geraden sind proportional zu den Geschwindigkeiten der Sättigungsfronten. Hier entspricht die durchgezogene Gerade der Bewässerung und die gestrichelte Gerade der Entwässerung.



**Abbildung 2.4:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A. Bis  $t = t^B = 3000$  s ist die Lösung eine Sättigungsfront und ein nachfolgendes Plateau mit Sättigung  $S^P = S^B = 0.5$ . Die Plateaubreite nimmt mit der Zeit  $t$  gleichmäßig zu. Für  $t > 3000$  s wird durch die Randbedingung eine Entwässerung induziert. Dieser Entwässerungsprozess ist eine Verdünnungswelle und breitet sich schneller aus als die Bewässerung und somit schrumpft die Plateaubreite. Bei  $t \approx 3500$  s hat die Entwässerung die Bewässerungsfront eingeholt. Danach nimmt die Überschussättigung ab, bis der Überschuss komplett verschwunden ist und nur noch ein monotonen Profil zu sehen ist. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.2$  m und  $\Delta t = 2000$  s eingezeichnet.

### 2.6.1 Numerische Lösungen

In Abbildung 2.4 ist die Lösung der Differentialgleichung (DG1) mit den Randbedingungen (2.38) als dreidimensionale Oberfläche dargestellt. Es ist zu sehen, dass sich das Plateau mit Sättigung  $S^B = 0.5$  bis zum Zeitpunkt  $t = t^B = 3000$  s konstant verbreitert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.5, 0.01) \approx 1.79 \cdot 10^{-4}$  m/s kann man aus dem Sättigungsprofil ablesen und ist nahezu identisch mit der zuvor analytisch berechneten Geschwindigkeit. Für Zeiten  $t > t^B$  sinkt die Randsättigung bei  $z = 0$  von  $S^B = 0.5$  auf  $S^{\text{in}} = 0.25$  ab und eine Entwässerung wird induziert. Dieser Entwässerungsprozess breitet sich sehr viel schneller aus als die Bewässerungsfront und somit verkleinert sich die Breite des Überschussplateaus wieder. Zum Zeitpunkt  $t \approx 3500$  s hat die Entwässerung die Bewässerungsfront eingeholt und die Überschussättigung nimmt ab. Nach etwa 20000 s ist von dem Sättigungsüberschuss



**Abbildung 2.5:** Vergleich der numerischen Lösungen von Anfangs- und Randwertproblem A mit Kapillarflussfunktion  $D(S)$  (durchgezogene Linien) und verschwindendem Kapillarfluss  $D(S) \rightarrow 0$  (gestrichelte Linien) für  $t = 3400$  s (schwarz),  $t = 7000$  s (blau) und  $t = 20000$  s (rot).

fast nichts mehr zu sehen und als Lösung bleibt eine Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S = S^{\text{in}} = 0.25$  übrig.

In Abbildung 2.5 sind die numerischen Lösungen für die Zeitpunkte  $t = 3400$  s (schwarz),  $t = 7000$  s (blau) und  $t = 20000$  s (rot) gezeichnet. Die Lösungen von Problem A mit Kapillarfluss  $D(S)$  sind als durchgezogene Linien und die Lösungen im hyperbolischen Limit  $D(S) \rightarrow 0$  als gestrichelte Linien dargestellt. Die beiden Profile zum Zeitpunkt  $t = 3400$  s (schwarz) setzen sich aus einer relativ steilen Sättigungsfront für die Bewässerung und einer konkaven Verdünnungswelle für die Entwässerung zusammen. Zum Zeitpunkt  $t = 7000$  s ist die Überschussättigung deutlich geschrumpft und die Verdünnungswelle der Entwässerung hingegen hat sich verbreitert. Nach  $t = 20000$  s ist der Überschuss fast vollständig verschwunden und die Lösung ist eine monotone Bewässerungsfront. Die Lösungen von Problem A mit und ohne Kapillarflusstern unterscheiden sich zu allen Zeitpunkten nur gering. Einzig die Bewässerungsfront und die Verdünnungswelle der Entwässerung im Buckley-Leverett-Limes sind auf Grund der nahezu fehlenden Diffusion deutlich steiler.

## 2.7 Folgerung

Aus dem Abschnitt 2.5 zur Ausbreitungsgeschwindigkeit und dem numerischen Beispiel zur Ausbreitung eines nichtmonotonen Sättigungsprofils folgt, dass sich entweder der Be- oder



der Entwässerungsprozess als Sättigungsfront ausbreitet. Der jeweils andere Prozess hat die Form einer Verdünnungswelle, da die Bedingungen (2.29) und (2.30) für nichthysteretische Flüsse nie gleichzeitig erfüllt sein können. Somit interagiert die Verdünnungswelle immer mit der Sättigungsfront und dies führt zur einer Auslöschung des Sättigungsüberschusses.

Diese Betrachtung motiviert die Einführung eines Hysterese-modells für die relativen Permeabilitäten und den Kapillardruck zur Unterscheidung zwischen Be- und Entwässerungsprozessen. Diese Hysterese induziert ein hysteretisches Verhalten des fraktionalen Flusses  $f(S)$  und des kapillaren Koeffizienten  $D(S)$ . Dadurch und durch geeignete Parameter lassen sich dann im weiteren Verlauf stabile Sättigungsüberschüsse konstruieren.

## **Teil II**

# **Hysteresemodelle und die Ausbreitung von Sättigungsprofilen**

## 3 Formulierung der Hysterese

In diesem Kapitel wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG1) für die Beschreibung von hysteretischen Strömungen erweitert. Die Hysterese wird in den relativen Permeabilitäten  $k_{\mathbb{W}}^r(S)$  und  $k_{\mathbb{O}}^r(S)$  und dem Kapillardruck  $P_c(S)$  explizit über Graphen definiert. Diese Graphen folgen aus dem verwendeten Hysteresemodell. Implizit folgt dann die Hysterese im fraktionalen Fluss  $f(S)$  und im kapillaren Fluss  $D(S)$ .

Teile dieses Kapitel sind in [68] veröffentlicht.

### 3.1 Allgemeine Formulierung von Hysterese basierend auf Funktionsgraphen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird (DG1) die Beschreibung von hysteretischen Strömungen in eine graphenbasierte Formulierung umgewandelt.

$$(DG2) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\mathcal{G}}(S) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D_{\mathcal{G}}(S) \frac{\partial}{\partial z} S \right] = 0, & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S^{\text{out}}, & \forall z \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(z, t), & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

Die graphenbasierte Formulierung von (DG) ist dazu analog. Der Graph  $\mathcal{G}(t)$  repräsentiert den Strömungsverlauf und ist von der Zeit  $t$  von der Sättigung  $S$  abhängig.

Der Graph  $\mathcal{G}$  ist eine zeitabhängige Teilmenge der  $(S, k_{\mathbb{W}}^r, k_{\mathbb{O}}^r, p_c)$ -Ebene und ist definiert als ein Triple

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}_{\mathbb{W}}, \mathcal{G}_{\mathbb{O}}, \mathcal{G}_c) \quad (3.1)$$

mit  $\mathcal{G}_{\mathbb{W}}$ , einem Graph in der  $(S, k_{\mathbb{W}}^r)$ -Ebene,  $\mathcal{G}_{\mathbb{O}}$ , einem Graph in der  $(S, k_{\mathbb{O}}^r)$ -Ebene und  $\mathcal{G}_c$ , einem Graph in der  $(S, p_c)$ -Ebene. Es gilt  $k_{\mathbb{W}}^r$  ist die relative Permeabilität der benetzenden

Phase und  $k_{\circ}^r$  ist die relative Permeabilität der nichtbenetzenden Phase. Des Weiteren ist  $p_c = dP_c/dS$  die Ableitung des Kapillardrucks  $P_c(S)$  in Bezug auf die Sättigung  $S$ . Der Graph  $\mathcal{G}$  ist eine Teilmenge von  $[0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , die Graphen der relativen Permeabilitäten  $\mathcal{G}_{\mathbb{W}}$  und  $\mathcal{G}_{\circ}$  sind Teilmengen des kartesischen Produkts  $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$  und der Graph des Kapillardrucks  $\mathcal{G}_c$  ist die Teilmenge von  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .

Die Werte des fraktionalen Fluss  $f_{\mathcal{G}}(S)$  aus Gleichung (2.24) für Sättigungen  $S$  sind nun durch die Paare  $(S, X) \in \mathcal{G}_{\mathbb{W}}$  und  $(S, Y) \in \mathcal{G}_{\circ}$

$$f_{\mathcal{G}}(S) = \frac{1 + \frac{kg}{Q\mu_{\circ}} Y (\varrho_{\mathbb{W}} - \varrho_{\circ})}{1 + \frac{\mu_{\mathbb{W}}}{\mu_{\circ}} \frac{Y}{X}} \quad (3.2)$$

mit den Parametern aus Kapitel 2 Gleichung (2.24) definiert. Bei einer eindimensionalen Strömung ohne Einfluss der Gravitation ergibt sich analog und mit Verwendung von Gleichung (2.23)

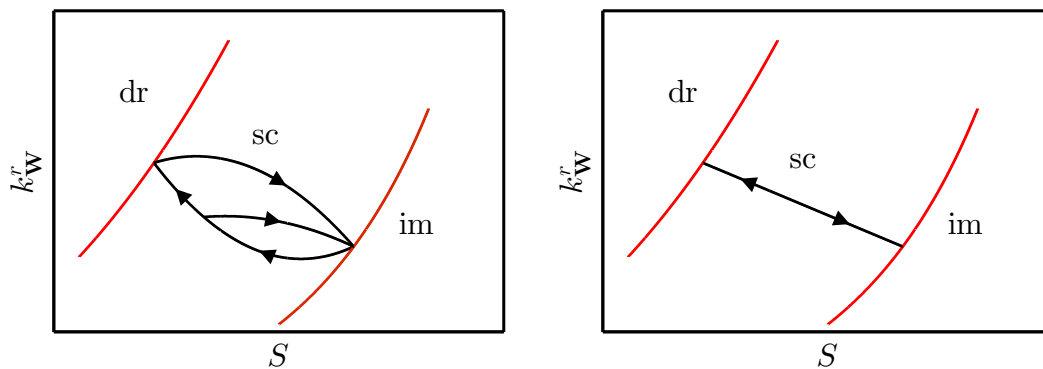
$$f_{\mathcal{G}}(S) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{\mathbb{W}}}{\mu_{\circ}} \frac{Y}{X}}. \quad (3.3)$$

Analog dazu werden die Werte des kapillaren Koeffizienten  $D_{\mathcal{G}}(S)$  für Sättigungen  $S$  durch die Paare  $(S, X) \in \mathcal{G}_{\mathbb{W}}$ ,  $(S, Y) \in \mathcal{G}_{\circ}$  und  $(S, Z) \in \mathcal{G}_c$

$$D_{\mathcal{G}}(S) = -\frac{X \frac{k}{\mu_{\mathbb{W}}} Z}{1 + \frac{\mu_{\circ}}{\mu_{\mathbb{W}}} \frac{X}{Y}} \quad (3.4)$$

mit den Parametern aus Kapitel 2 Gleichung (2.17) definiert.

An jedem festen Punkt  $z \in \mathbb{R}$  wird der Strömungsprozess, welcher durch den Graphen  $\mathcal{G}$  beschrieben wird, durch ein Hysteresemodell bestimmt. Bei ratenunabhängigen Modellen werden die Hystereseoperatoren in einer Integralformulierung ausgedrückt [49, 69]. Diese Integralformen leiten sich aus elementaren *plays* und *stops* ab. In dieser Arbeit werden jedoch keine Integralformen betrachtet. Im Gegensatz dazu ist der Hystereseoperator in dieser Arbeit eine Abbildung der Funktion  $S(z, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  auf einen zeitabhängigen Graphen  $\mathcal{G}(t)$ .



**Abbildung 3.1:** Skizze von einer Streichkurvenschleife (links) und einer reversiblen Streichkurve im  $\delta$ -Modell (rechts) in der relativen Permeabilität der benetzenden Phase. Die Streichkurven sind in schwarz und die Hauptzweige der Hystereseschleife in rot gezeichnet.

## 3.2 Beschreibung der Hystereseemodelle

In dieser Arbeit werden zwei Hystereseemodelle benutzt, um hysteretische Zweiphasenströmungen zu analysieren. Das eine Modell ist eine einfache Interpolationshysterese ohne Schleifen in den Streichkurven, genannt  $\delta$ -Modell, und das andere Modell ist das Sprunghysteresemodell [43, 67], ein Spezialfall des  $\delta$ -Modells.

### 3.2.1 Das $\delta$ -Hysteresemodell

Im  $\delta$ -Modell mit reversiblen Streichkurven bestehen die Graphen der relativen Permeabilitäten und des Kapillardrucks aus drei Teilgraphen. Diese Teilgraphen sind der Graph der primären Bewässerung mit dem Index „im“, der Graph der sekundären Entwässerung mit dem Index „dr“ und die reversible Streichkurve, welche mit „sc“ indiziert ist. Die reversiblen Streichkurven entstehen durch Überlagerung von normalen Streichkurvenschleifen und interpolieren zwischen der primären Bewässerung und der sekundären Entwässerung. In Abbildung 3.1 ist links eine normale Streichkurvenschleife dargestellt. Die reversible Streichkurve, die aus dieser Streichkurvenschleife hervorgeht, ist auf der rechten Seite gezeichnet. Hierbei sind die Teilgraphen der Be- und Entwässerung in rot und die Streichkurven in schwarz dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die reversible Streichkurve eine gute Vereinfachung der Streichkurvenschleife ist.

Die Graphen der Be- und Entwässerung sowie der Streichkurven haben die Form

$$\mathcal{G}_{\mathbb{W}}^i = \{(S, X) \in [S_{\min}^i, S_{\max}^i] \times \mathbb{R}_+ : X = k_{\mathbb{W}}^i(S)\} \quad (3.5a)$$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{O}}^i = \{(S, Y) \in [S_{\min}^i, S_{\max}^i] \times \mathbb{R}_+ : Y = k_{\mathbb{O}}^i(S)\} \quad (3.5b)$$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^i = \{(S, Z) \in [S_{\min}^i, S_{\max}^i] \times \mathbb{R} : Z = p_{\mathbb{C}}^i(S)\} \quad (3.5c)$$

mit dem Index  $i = \{\text{dr}, \text{im}, \text{sc}\}$  und den Sättigungen  $S_{\min}^i, S_{\max}^i$  aus den Gleichungen (3.11). Die funktionalen Formen  $k_{\mathbb{W}}^i(S), k_{\mathbb{O}}^i(S), p_{\mathbb{C}}^i(S)$  werden in den Gleichungen (3.15)-(3.19) definiert.

An jedem Ort  $z \in \mathbb{R}$  ordnet der Hystereseoperator  $\mathcal{H}(z, t)$ , mit  $t \geq 0$ , einer stückweise monotonen Sättigungsfunktion  $S(z, \cdot)$  einen Graph  $\mathcal{G}(z, t) \subset [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  zu. In dieser Arbeit ist der Hystereseoperator eine Hintereinanderausführung von drei Operatoren  $\mathcal{H}(z, t) = \mathcal{H}_3(z, t) \circ \mathcal{H}_2(z, t) \circ \mathcal{H}_1(z, t)$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z, t) : M_{\text{pm}}([0, t]) &\rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ S(z, \cdot) &\mapsto \mathcal{G}(z, t) \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(z, t) : M_{\text{pm}}([0, t]) &\rightarrow M_{\text{pc}}([0, t]) \\ S(z, \cdot) &\mapsto S_{**}(z, \cdot), \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(z, t) : M_{\text{pc}}([0, t]) &\rightarrow M_{\text{pc}}([0, t]) \\ S_{**}(z, \cdot) &\mapsto S_*(z, \cdot) \end{aligned} \quad (3.6c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3(z, t) : M_{\text{pc}}([0, t]) &\rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ S_*(z, \cdot) &\mapsto \mathcal{G}(z, t) \end{aligned} \quad (3.6d)$$

wobei  $M_{\text{pm}}([0, t])$  die Menge der monotonen Funktion in  $[0, t]$  und  $M_{\text{pc}}([0, t])$  die Menge der stückweise konstanten Funktionen in  $[0, t]$  sind.

Zur Definition der stückweise konstante Funktionen  $S_{**}(z, \cdot)$  und  $S_*(z, \cdot)$  wird die das Zeitintervall  $[0, t]$  in Teile

$$0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^{N(t)} = t \quad (3.7)$$

zerlegt, wobei  $S(z, \cdot)$  auf dem Intervall  $[t^i, t^{i+1}]$  monoton ist. Die stückweise konstanten Funktion  $S_{**}(z, \cdot)$  kann dann mit

$$S_{**}(z, t) = S(z, t^i) \quad (3.8)$$

für Zeiten  $t \in [t^i, t^{i+1})$  und  $i = 0, \dots, N(t) - 1$  definiert werden. Mit der Funktion  $S_{**}(z, \cdot)$  wird dann an jedem Punkt  $z \in \mathbb{R}$  und für Zeiten  $t \in [t^i, t^{i+1})$  die stückweise konstante Funktion  $S_*(z, \cdot)$  definiert als

$$S_*(z, t) = S_{**}(z, t^{i-k}) \quad (3.9a)$$

solange für ein festes  $i = 0, \dots, N(t) - 1$  die Ungleichungen

$$|S_{**}(z, t^{i-k-1}) - S_{**}(z, t^i)| \geq \delta \quad (3.9b)$$

$$|S_{**}(z, t^{i-j}) - S_{**}(z, t^i)| < \delta \quad (3.9c)$$

für alle  $0 \leq j \leq k$  erfüllt sind.

Am Ort  $z$  und zur Zeit  $t$  ist der Graph  $\mathcal{G}(z, t)$  aus Gleichung (3.6) somit definiert als Triple

$$\mathcal{G}(z, t) = (\mathcal{G}_{\mathbb{W}}(z, t), \mathcal{G}_{\mathbb{O}}(z, t), \mathcal{G}_{\text{c}}(z, t)) \quad (3.10a)$$

mit

$$\mathcal{G}_j(z, t) = \mathcal{G}_j^{\text{im}}(z, t) \cup \mathcal{G}_j^{\text{sc}}(z, t) \cup \mathcal{G}_j^{\text{dr}}(z, t) \quad (3.10b)$$

für  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}, \text{c}\}$ .

Die Graphen  $\mathcal{G}_i^j$  mit  $i = \{\text{dr}, \text{im}, \text{sc}\}$  und  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}, \text{c}\}$  wurden bereits durch die Gleichungen (3.5) definiert. Die Grenzen der Sättigungsintervalle  $S_{\min}^i, S_{\max}^i$  in den Gleichungen (3.5) sind auch als stückweise konstante Funktionen definiert

$$S_{\min}^{\text{dr}}(z, t) = 0 \quad (3.11a)$$

$$S_{\max}^{\text{dr}}(z, t) = S_{\min}^{\text{sc}}(z, t) = A(z, t) - \delta/2 \quad (3.11b)$$

$$S_{\max}^{\text{sc}}(z, t) = S_{\min}^{\text{im}}(z, t) = A(z, t) + \delta/2 \quad (3.11c)$$

$$S_{\max}^{\text{im}}(z, t) = 1 \quad (3.11d)$$

mit der Konstanten  $\delta > 0$  und der stückweise konstanten Funktion  $A(z, t) \in [0, 1]$ . Die stückweise konstante Funktion  $A(z, t)$  ist definiert als

$$A(z, t) = \begin{cases} S_*(z, t) - \delta/2, & \text{falls } S_*(z, t) \geq S(z, t) \\ S_*(z, t) + \delta/2, & \text{falls } S_*(z, t) \leq S(z, t) \end{cases}, \quad (3.12)$$

und beschreibt die mittlere Sättigung des Intervalls  $[S_{\max}^{\text{dr}} = S_{\min}^{\text{sc}}, S_{\min}^{\text{im}} = S_{\max}^{\text{sc}}]$ .

Abbildung 3.2 ist eine Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  im Zeitintervall  $[0, t_6]$  (schwarz) in Verbindung mit der Funktion  $S_{**}(z, t)$  (oben, rote Linie), mit der Funktion  $S_*(z, t)$  (Mitte, blaue Linie) und mit der Funktion  $A(z, t)$  (unten, grüne Linie). Das Beispiel hierbei benutzt den Hystereseparameter  $\delta = 0.1$ .

In Abbildung 3.3 ist ein Graph  $\mathcal{G}_{\mathbb{W}}$  der relativen Permeabilität der benetzenden Phase zu sehen. Die Teilgraphen der Be- und Entwässerung sind in rot gezeichnet und die reversible Streichkurve ist als schwarze Linie dargestellt. Die vertikalen gestrichelten Linien markieren die Intervallgrenzen  $S_{\max}^{\text{dr}} = S_{\min}^{\text{sc}}$  und  $S_{\min}^{\text{im}} = S_{\max}^{\text{sc}}$ .

### 3.2.2 Das Sprunghysteresemodell

Die Sprunghysterese aus [43, 67] ist ein Spezialfall der  $\delta$ -Hysterese. Hier gilt immer  $\delta = 0$  und daher gilt auch

$$A(z, t) = S_*(z, t) = S_{**}(z, t) \quad (3.13)$$

für alle Orte  $z$  und Zeiten  $t$ . Dies bedeutet, dass die Streichkurven verschwinden und der Graph  $\mathcal{G}(z, t)$  nur aus den Graphen der primären Bewässerung und der sekundären Entwässerung zusammengesetzt ist. Gleichung (3.10) vereinfacht sich somit zu

$$\mathcal{G}(z, t) = (\mathcal{G}_{\mathbb{W}}(z, t), \mathcal{G}_{\mathbb{O}}(z, t), \mathcal{G}_{\text{c}}(z, t)) \quad (3.14\text{a})$$

$$\mathcal{G}_j(z, t) = \mathcal{G}_j^{\text{im}}(z, t) \cup \mathcal{G}_j^{\text{dr}}(z, t) \quad (3.14\text{b})$$

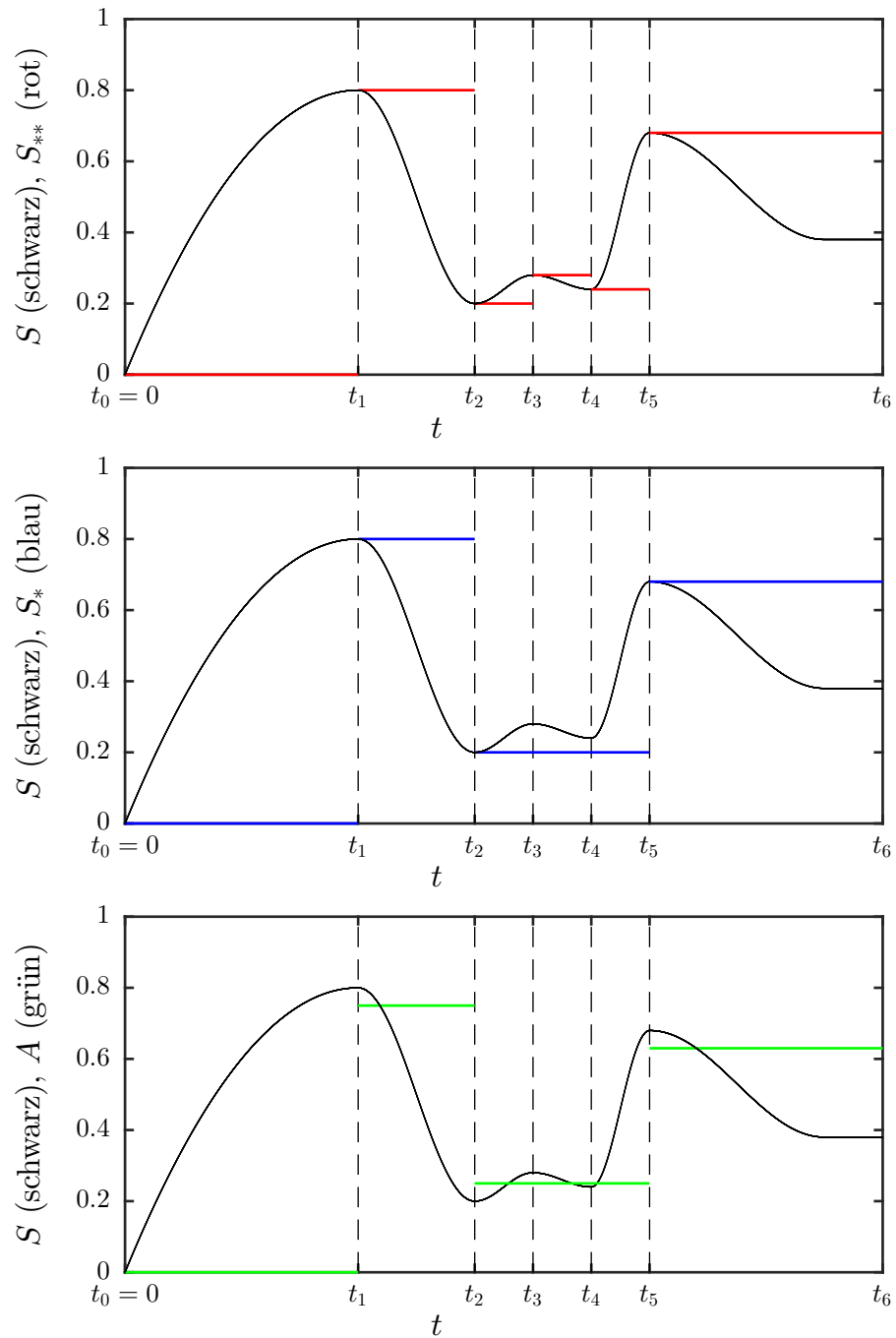
für die Indizes  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}, \text{c}\}$ .

### 3.2.3 Die Funktionalformen

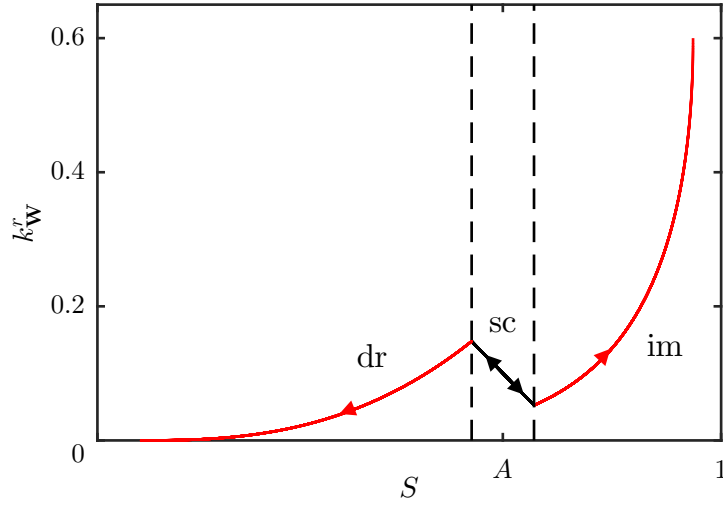
Die Graphen für die primäre Bewässerung und die sekundäre Entwässerung werden zuerst definiert. Diese Graphen werden im weiteren Verlauf der Arbeit auch als Hysterese-Randkurven oder Randkurven bezeichnet.

Die relativen Permeabilitäten sind entweder in der van-Genuchten-Form (vergleiche Gleichungen (2.19)) oder in einer algebraischen Form (vergleiche Gleichungen (2.20)) angegeben.





**Abbildung 3.2:** Beispiel für eine stückweise monotone Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  (schwarz) mit den zugehörigen Funktionen  $S_{**}(z, t)$  (rot),  $S_*(z, t)$  (blau) und  $A(z, t)$  (grün) an einem festen Ort  $z$ . In diesem Beispiel gilt  $\delta = 0.1$ .



**Abbildung 3.3:** Beispiel für einen Graph  $\mathcal{G}_{\mathbb{W}}(z, t)$  der relativen Permeabilität der benetzenden Phase mit  $t \in [t^i, t^{i+1})$ . Die Be- und Entwässerungsgraphen sind in rot und die reversible Streichkurve in schwarz dargestellt. Die Kurve im Bereich  $[0, A - \delta/2]$  ist der Entwässerungsgraph, die Kurve im Bereich  $(A - \delta/2, A + \delta/2)$  ist die reversible Streichkurve und im Bereich  $[A + \delta/2, 1]$  ist der Bewässerungsgraph gezeichnet. Die vertikal gestrichelten Linien markieren die Intervallgrenzen der Streichkurve.

Die Funktionen der relativen Permeabilitäten sind in der van-Genuchten-Formulierung definiert als

$$k_{\mathbb{W}}^i(S) = K_{\mathbb{W}i}^e [S_e^i(S)]^{1/2} \left[ 1 - \left( 1 - (S_e^i(S))^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right]^2 \quad (3.15a)$$

$$k_{\mathbb{O}}^i(S) = K_{\mathbb{O}i}^e [1 - S_e^i(S)]^{1/2} \left[ 1 - (S_e^i(S))^{1/\beta_i} \right]^{2\beta_i} \quad (3.15b)$$

mit  $i = \{\text{im}, \text{dr}\}$ , den Endpunkten  $K_{\mathbb{W}i}^e$ ,  $K_{\mathbb{O}i}^e$  und den Exponenten  $\alpha_i, \beta_i$ . In der algebraischen Form lauten die Funktionen wie folgt,

$$k_{\mathbb{W}}^i(S) = K_{\mathbb{W}i}^e (S_e^i(S))^{\alpha_i} \quad (3.16a)$$

$$k_{\mathbb{O}}^i(S) = K_{\mathbb{O}i}^e (1 - S_e^i(S))^{\beta_i} \quad (3.16b)$$

mit  $i = \{\text{im}, \text{dr}\}$ .

Die Funktionen des Kapillardrucks sind immer in der van-Genuchten-Formulierung

$$P_c^i(S) = P_{bi} \left[ (S_e^i(S))^{-1/\gamma_i} - 1 \right]^{1-\gamma_i} \quad (3.17)$$

mit dem Eingangsdruck  $P_{bi}$  und dem Exponenten  $\gamma_i$ .

In den Gleichungen (3.15)-(3.17) ist die effektive Sättigung definiert als

$$S_e^{\text{dr}}(S; S_{\text{Wi}}, S_{\text{Or}}) = \frac{S - S_{\text{Wi}}}{1 - S_{\text{Wi}} - S_{\text{Or}}} \quad (3.18a)$$

$$S_e^{\text{im}}(S; S_{\text{Or}}) = \frac{S}{1 - S_{\text{Or}}} \quad (3.18b)$$

mit  $S_{\text{Wi}}$  der irreduziblen Sättigung der benetzenden und  $S_{\text{Or}}$  der irreduziblen Sättigung der nichtbenetzenden Phase.

Zuletzt werden noch die reversiblen Streichkurven näher bestimmt

$$k_{\text{W}}^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_{\text{W}}, b_{\text{W}}, c_{\text{W}}, d_{\text{W}}) = \sum_{k=1}^m \psi_{\text{W},k} S^{m-k} \quad (3.19a)$$

$$k_{\text{O}}^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_{\text{O}}, b_{\text{O}}, c_{\text{O}}, d_{\text{O}}) = \sum_{k=1}^m \psi_{\text{O},k} S^{m-k} \quad (3.19b)$$

$$P_c^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_c, b_c, c_c, d_c) = \sum_{k=1}^m \psi_{c,k} S^{m-k} \quad (3.19c)$$

mit dem Hystereseparameter  $\delta$  und den Punkten  $(A - \delta/2, a_{\text{W}})$ ,  $(A + \delta/2, b_{\text{W}})$  in der  $(S, k_{\text{W}}^r)$ -Ebene,  $(A - \delta/2, c_{\text{W}})$ ,  $(A + \delta/2, d_{\text{W}})$  in der  $(S, k_{\text{W}}^{r'})$ -Ebene,  $(A - \delta/2, a_{\text{O}})$ ,  $(A + \delta/2, b_{\text{O}})$  in der  $(S, k_{\text{O}}^r)$ -Ebene,  $(A - \delta/2, c_{\text{O}})$ ,  $(A + \delta/2, d_{\text{O}})$  in der  $(S, k_{\text{O}}^{r'})$ -Ebene,  $(A - \delta/2, a_c)$ ,  $(A + \delta/2, b_c)$  in der  $(S, P_c)$ -Ebene und  $(A - \delta/2, c_c)$ ,  $(A + \delta/2, d_c)$  in der  $(S, p_c)$ -Ebene. Durch die vier Punkte in jeder Ebene, durch welche die Streichkurven beschrieben werden, sind lineare, quadratische und kubische Streichkurven möglich. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden in den relativen Permeabilitäten entweder lineare oder kubische Streichkurven benutzt und im Kapillardruck werden ausschließlich kubische Streichkurven verwendet. Die Parameter aus den Gleichungen (3.19) werden durch die Bedingungen

$$a_j = k_j^{\text{dr}}(S = A - \delta/2) \quad (3.20a)$$

$$b_j = k_j^{\text{im}}(S = A + \delta/2) \quad (3.20b)$$

$$c_j = \zeta_l^{\text{dr}}(\cdot) \quad (3.20c)$$

$$d_j = \zeta_l^{\text{im}}(\cdot) \quad (3.20d)$$

$$a_c = P_c^{\text{dr}}(S = A - \delta/2) \quad (3.20e)$$

$$b_c = P_c^{\text{im}}(S = A + \delta/2) \quad (3.20f)$$

$$c_c = p_c^{\text{dr}}(S = A - \delta/2) \quad (3.20g)$$

$$d_c = p_c^{\text{im}}(S = A + \delta/2) \quad (3.20h)$$

mit  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}\}$  bestimmt. Die Bedingungen (3.20c) und (3.20d) werden nur in Kapitel 9 verwendet, um die Auswirkungen unterschiedlicher Streichkurven in den relativen Permeabilitäten zu studieren. Die Funktionen  $\zeta(\cdot)$  sind dann entweder die Ableitungen der relativen Permeabilitäten in Bezug auf die Sättigung oder beliebige Funktionen, siehe Gleichungen (9.2)-(9.4). Die Bedingungen (3.20) garantieren, dass die Streichkurven eine stetige Interpolation zwischen den Graphen der primären Bewässerung und der sekundären Entwässerung sind. Diese stetige Interpolation ist nicht nur für die relativen Permeabilitäten und den Kapillardruck, sondern auch für den fraktionalen Fluss und den Kapillarfluss sichergestellt.

Die Ableitungen der relativen Permeabilitäten in Bezug auf die Sättigung sind in der van-Genuchten-Formulierung

$$\begin{aligned} \frac{dk_{\mathbb{W}}^i}{dS}(S) &= K_{\mathbb{W}i}^e [S_e^i(S)]^{1/2} \left[ 1 - \left( 1 - (S_e^i(S))^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right] \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - (S_e^i(S))^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right] + 2 (S_e^i(S))^{1/\alpha_i} \left( 1 - (S_e^i(S))^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i-1} \right] \frac{dS_e^i}{dS} \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dk_{\mathbb{O}}^i}{dS}(S) &= K_{\mathbb{O}i}^e [1 - S_e^i(S)]^{1/2} \left[ 1 - (S_e^i(S))^{1/\beta_i} \right]^{2\beta_i} \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} [1 - S_e^i(S)]^{-1} - 2 \left[ 1 - (S_e^i(S))^{1/\beta_i} \right]^{-1} [S_e^i(S)]^{1/\beta_i-1} \right] \frac{dS_e^i}{dS} \end{aligned} \quad (3.21b)$$

und in der algebraischen Formulierung

$$\frac{dk_{\mathbb{W}}^i}{dS}(S) = \alpha_i K_{\mathbb{W}i}^e (S_e^i(S))^{\alpha_i-1} \frac{dS_e^i}{dS} \quad (3.22a)$$

$$\frac{dk_{\mathbb{O}}^i}{dS}(S) = -\beta_i K_{\mathbb{O}i}^e (1 - S_e^i(S))^{\beta_i-1} \frac{dS_e^i}{dS} \quad (3.22b)$$

mit  $i = \{\text{im}, \text{dr}\}$  gegeben. Die Ableitung des Kapillardrucks in Bezug auf die Sättigung ist immer

$$\frac{dP_c^i}{dS} = p_c^i(S) = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} P_{bi} \left[ (S_e^i(S))^{-1/\gamma_i} - 1 \right]^{-\gamma_i} (S_e^i(S))^{-1/\gamma_i-1} \frac{dS_e^i}{dS} \quad (3.23)$$

mit  $i = \{\text{im}, \text{dr}\}$ .

Für die linearen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten,  $m = 2$  in Gleichung (3.19),

ergeben sich die Vorfaktoren in Gleichung (3.19) zu

$$\psi_{j,1} = \frac{b_j - a_j}{\delta} \quad (3.24a)$$

$$\psi_{j,2} = \frac{a_j - b_j}{\delta} A + \frac{a_j + b_j}{2} \quad (3.24b)$$

für  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}\}$ , wobei die Bedingungen (3.20c) und (3.20d) nicht erfüllt sein müssen. Die Vorfaktoren der kubischen Streichkurven ( $m = 4$  in Gleichung (3.19)) in den relativen Permeabilitäten und dem Kapillardruck haben die Form

$$\psi_{j,1} = \frac{d_j + c_j}{\delta^2} - 2 \frac{b_j - a_j}{\delta^3} \quad (3.25a)$$

$$\psi_{j,2} = \frac{b_j - a_j}{\delta^2} - \frac{c_j}{\delta} - \left(3A - \frac{\delta}{2}\right) \psi_{j,1} \quad (3.25b)$$

$$\psi_{j,3} = \frac{b_j - a_j}{\delta} - 2A\psi_{j,2} - \left(3A^2 + \frac{\delta^2}{4}\right) \psi_{j,1} \quad (3.25c)$$

$$\psi_{j,4} = a_j - \left(A - \frac{\delta}{2}\right) \psi_{j,3} - \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^2 \psi_{j,2} - \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^3 \psi_{j,1}. \quad (3.25d)$$

Die Herleitung steht in Appendix A.

### 3.3 Anpassung des $\delta$ -Hysterese Modells für numerische Simulationen

Für die numerische Implementierung wird das Hysterese Modell modifiziert. Die Sättigungsfunktion  $S(z, \cdot)$  wird dafür nicht in monotone Teilstücke zerlegt, wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, sondern es wird, ähnlich zu der Rechteckhysterese im Preisach-Modell [60], ein Verzögerung  $\tau$  eingefügt. Die Verzögerung sorgt dafür, dass der Strömungsprozess sich erst dann ändert, wenn für die Sättigung die Bedingung

$$\left| \frac{\partial S(z, t)}{\partial t} \right| \geq \tau \quad (3.26)$$

gilt. Daraus folgt, dass sich erst die Art des Strömungsprozesses und damit auch der Graph  $\mathcal{G}$ , erst dann ändert, wenn die Ableitung der Sättigung nach der Zeit den Grenzwert  $|\tau|$  übersteigt. In der numerischen Implementierung ist dies eine wichtige Zusatzannahme, um Änderungen der Strömungsprozesse bei numerischen Fluktuationen zu verhindern. Bei der Wahl des Parameters  $\tau$  ist zu beachten, dass dieser sehr viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwin-

digkeit  $c_i(\cdot)$  der initialen Strömung sein muss. Für den Parameter  $\tau$  gilt bei Betrachtung von  $D \rightarrow 0$

$$\left| \frac{\partial S(z, t)}{\partial t} \right| \gg \tau \quad (3.27a)$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{\partial f_i(S(z, t))}{\partial S} \frac{\partial S(z, t)}{\partial z} \right| \gg \tau \quad (3.27b)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f_i(S_2) - f_i(S_1)}{S_2 - S_1} \frac{\partial S(z, t)}{\partial z} \right| \gg \tau \quad (3.27c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f_i(S_2) - f_i(S_1)}{S_2 - S_1} \frac{S_2 - S_1}{L} \right| \gg \tau \quad (3.27d)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f_i(S_2) - f_i(S_1)}{L} \right| \gg \tau \quad (3.27e)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit (4.4) und einer mittleren Steigung in Bezug auf die links- und rechtsseitigen Sättigungen  $S_1$  und  $S_2$  der Be- oder Entwässerungsfront. Damit wird verhindert, dass ein Übergang zwischen Be- und Entwässerung ohne Änderung der Prozessgraphen stattfindet.

Betrachtet man zum Beispiel die Ausbreitung einer Bewässerungsfront mit einer Geschwindigkeit von  $c_i = 10^{-4}$  m/s (diese Geschwindigkeit ist ein typischer Wert in dieser Arbeit) und ein poröses Medium mit der Länge  $L = 1$  m, so benötigt die Sättigungsfront höchstens  $t = L/c_i = 10^4$  s zum Durchlaufen des Mediums. Setzt man in diesem Beispiel  $\tau = 10^{-10}$  1/s, so ergibt sich über die gesamte Dauer von  $t = 10^4$  s eine maximal mögliche Sättigungszu- oder Sättigungsabnahme von  $\Delta S = \tau \cdot t = 10^{-6}$  ohne Änderung des Strömungsprozesses. Diese Änderung ist bei einer Simulationsdauer von  $10^4$  s vernachlässigbar gering und nicht von der numerischen Diffusion in Verbindung mit Rundungsfehlern zu unterscheiden.

### 3.4 Folgerung

In diesem Kapitel wurde das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit hysteretischen relativen Permeabilitäten und hysteretischem Kapillardruck formuliert. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) für beide vorgestellten Hysterese-modelle, Sprung- und  $\delta$ -Hysterese, gelöst.

Die Randkurven der relativen Permeabilitäten sind in den Kapiteln 6 und 13 in der van-Genuchten-Formulierung (3.15) und in den übrigen Kapiteln 7-12 in der algebraische Formu-

lierung (3.16) gegeben. Für die Hystereserandkurven des Kapillardrucks wird für den Rest dieser Arbeit die hysteretische van-Genuchten-Formulierung (3.17) benutzt.

Die Sprunghysterese wird gewählt, um den theoretischen Mechanismus für die Ausbreitung nicht monotoner Sättigungsprofile an einfachen Beispielen vorzustellen und zu analysieren. Dieses Modell ist eine sehr einfache Beschreibung der Hysterese, da die verwendeten Graphen nur aus den Teilgraphen der primären Bewässerung und der sekundären Entwässerung bestehen. Die Konstruktion ohne interpolierenden Streichkurven macht die quasianalytische Diskussion und Interpretation von zeitlich dynamischen Zweiphasenströmungen daher sehr einfach.

Die  $\delta$ -Hysterese hingegen ist deutlich komplexer, da zusätzlich zu den Randkurven auch die Streichkurven einen Einfluss auf die Strömungsprozesse haben. Dieses Modell simuliert ein realistischeres Verhalten bei Übergängen zwischen Be- und Entwässerungsprozessen. Jedoch wird durch die Vielzahl der unterschiedlichen Graphen die quasianalytische Diskussion von dynamischen Vorgängen schwieriger und in einigen Fällen unmöglich.

## 4 Kopplung von Stoßfronten bei nichtmonotonen Sättigungsprofilen

In Kapitel 2.5 wurde bereits für nichthysteretische Zweiphasenströmungen eine Formel zur Berechnung von Sättigungsfronten hergeleitet. Diese Formeln werden in diesem Kapitel auf hysteretische Strömungen aus Kapitel 3.1 angewendet.

Im Verlauf dieser Arbeit werden ausschließlich zwei Arten von Sättigungsfronten betrachtet. Eine Bewässerung wird immer durch den Graph der primären Bewässerung beschrieben und hierfür wird der Index

$$\text{im} = \mathcal{G}^{\text{im}} \quad (4.1)$$

eingeführt. Bei der Entwässerung wird zwischen dem Sprunghysteresemodell und dem  $\delta$ -Hysteresemodell unterschieden. Im Falle der Sprunghysterese wird die Entwässerung durch den Graph der sekundären Entwässerung beschrieben und es wird der Index

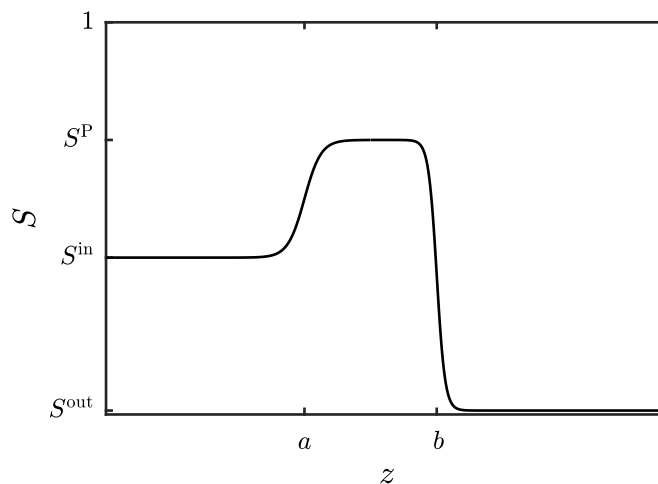
$$\text{dr} = \mathcal{G}^{\text{dr}} \quad (4.2a)$$

eingeführt. Beim  $\delta$ -Modell wird eine Entwässerung immer durch einen Graph, welcher aus einer reversiblen Streichkurve und aus einem Teilgraph der sekundären Entwässerung zusammengesetzt ist, beschrieben. Der Index ist dann als

$$\text{dr} = \mathcal{G}^{\text{dr}} \cup \mathcal{G}^{\text{sc}} \quad (4.2b)$$

definiert. Diese Indizes gelten nur für den fraktionalen Fluss  $f$ , den kapillaren Koeffizienten  $D$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c$ .





**Abbildung 4.1:** Skizze eines nichtmonotonen Sättigungsprofils mit der Überschussättigung  $S^P$  und den Sättigungen links  $S^{\text{in}}$  und rechts  $S^{\text{out}}$  von dem Überschussbereich.

## 4.1 Ausbreitungsgeschwindigkeiten von nichtmonotonen Sättigungsprofilen

Betrachtet man den graphenabhängigen fraktionalen Fluss (3.2) oder (3.3), so verändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit (2.36) zu

$$c_i(S_0, S_2) = \frac{Q}{\phi} \frac{f_i(S_0) - f_i(S_2)}{S_0 - S_2} \quad (4.3)$$

mit den Sättigungen  $S_0, S_2$  und dem fraktionalen Fluss  $f_i$  mit  $i = \{\text{im, dr}\}$ . Die Bedingungen (2.29) und (2.30) gelten dann ebenso für  $f_i$  anstatt  $f$ .

Im Folgenden wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit (4.3) auf ein nichtmonotones Profil angewendet und die Ausbreitung des Sättigungsüberschusses wird diskutiert.

Es wird ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit einem führenden Bewässerungsprozess bei  $z = b$  und einem nachfolgenden Entwässerungsprozess bei  $z = a$  mit einem ausreichend breiten Sättigungsüberschuss betrachtet. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel für ein solches nichtmonotones Profil. Die Sättigung rechts vom Sättigungsüberschuss wird mit  $S^{\text{out}}$ , die Sättigung des Überschusses mit  $S^P$  und die Sättigung links vom Überschuss mit  $S^{\text{in}}$  bezeichnet. Hier wird angenommen, dass die Sättigungen  $S^{\text{in}}, S^{\text{out}}$  und  $S^P$  so gewählt sind, dass für die Bewässerung Bedingung (2.29) mit  $(S_0, S_2) = (S^P, S^{\text{out}})$  und für die Entwässerung Bedingung (2.30) mit  $(S_0, S_2) = (S^{\text{in}}, S^P)$  erfüllt sind.

Die Anwendung von Gleichung (4.3) liefert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bewässerungsfront

$$c_{\text{im}}(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) = \frac{Q}{\phi} \frac{f_{\text{im}}(S^{\text{P}}) - f_{\text{im}}(S^{\text{out}})}{S^{\text{P}} - S^{\text{out}}} \quad (4.4a)$$

und für die der nachfolgenden Entwässerungsfront

$$c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}}) = \frac{Q}{\phi} \frac{f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}) - f_{\text{dr}}(S^{\text{P}})}{S^{\text{in}} - S^{\text{P}}}. \quad (4.4b)$$

In Abhängigkeit der drei charakteristischen Sättigungen  $S^{\text{in}}$ ,  $S^{\text{out}}$  und  $S^{\text{P}}$  haben die beiden Sättigungsfronten entweder die gleiche Geschwindigkeit oder unterschiedliche Geschwindigkeiten.

Für die nachfolgende Bemerkung wird das  $\delta$ -Hysteresemodell mit  $\delta > 0$  betrachtet.

**Bemerkung 4.1.** Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten (4.4) eines nichtmonotonen Sättigungsprofil, welches sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitet (siehe Abbildung 4.1), sind genau dann unabhängig vom Hystereseparameter  $\delta$ , wenn die Ungleichung

$$S^{\text{P}} - S^{\text{in}} \geq \delta \quad (4.5)$$

erfüllt ist. Da sich das Profil in positive  $z$ -Richtung ausbreitet ist die Geschwindigkeit der Bewässerungsfront immer unabhängig vom Hystereseparameter  $\delta$ , siehe Gleichung (4.4a). Bei Betrachtung der Geschwindigkeit der Entwässerungsfront ist Ungleichung (4.5) notwendig. Für  $f_{\text{dr}}(S^{\text{P}})$  gilt immer die Bedingung  $f_{\text{dr}}(S^{\text{P}}) = f_{\text{im}}(S^{\text{P}})$  und somit ist der Wert  $f_{\text{dr}}(S^{\text{P}})$  unabhängig von  $\delta$  und der Streichkurve  $\mathcal{G}^{\text{sc}}$ . Die Streichkurve der Entwässerung ist im Intervall  $(S^{\text{P}} - \delta, S^{\text{P}})$  definiert und falls Bedingung (4.5) erfüllt ist, gilt  $S^{\text{in}} \notin (S^{\text{P}} - \delta, S^{\text{P}})$ . Damit gilt dann  $f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}) = f_{\mathcal{G}^{\text{dr}} \cup \mathcal{G}^{\text{sc}}}(S^{\text{in}}) = f_{\mathcal{G}^{\text{dr}}}(S^{\text{in}})$  und  $f_{\text{dr}}(S^{\text{in}})$  ist unabhängig von  $\delta$  und der Streichkurve  $\mathcal{G}^{\text{sc}}$ . Zusammengefasst ist dann auch Gleichung (4.4b) unabhängig von  $\delta$ .

## 4.2 Laufender Überschuss

Ein nichtmonotonen Sättigungsprofil, wie in Abbildung 4.1, breitet sich mit konstanter Überschussbreite aus, falls

$$c_{\text{im}}(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) = c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}}) \quad (4.6)$$

für  $S^{\text{out}} < S^{\text{in}} < S^{\text{P}}$  gilt. Die Überschussättigung wird dann mit  $S^{\text{P}} = S^{\text{TW}}$  bezeichnet. In diesem Fall ist die Entwässerungsfront genauso schnell wie die Bewässerungsfront und der Überschuss breitet sich als sogenannte „laufende Welle“ aus. Nachfolgend werden die graphischen Methoden zum Finden von laufenden Sättigungsüberschüssen und somit zur Lösung von Gleichung (4.6) im Sprung- und  $\delta$ -Hysteresemodell beschrieben.

### 4.2.1 Sprunghysterese

Für die Bewässerungsfront wird eine Sekante mit den Endpunkten  $(S^{\text{out}}, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  und  $(S^{\text{P}}, f_{\text{im}}(S^{\text{P}}))$  betrachtet. Die Entwässerungsfront wird durch eine Sekante durch die Punkte  $(S^{\text{in}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  und  $(S^{\text{P}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{P}}))$  repräsentiert. Die Steigungen der Sekanten multipliziert mit dem Faktor  $Q/\phi$  entspricht dann den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Sättigungsfronten. Sind die Sekanten parallel zueinander, breitet sich der Überschuss als laufende Welle mit konstanter Überschussbreite aus.

### 4.2.2 $\delta$ -Hysterese

Die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfront (4.4b) kann aufgrund der stetigen Interpolation im  $\delta$ -Modell zu

$$c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}}) = \frac{Q}{\phi} \frac{f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}) - f_{\text{im}}(S^{\text{P}})}{S^{\text{in}} - S^{\text{P}}} \quad (4.7)$$

umgeschrieben werden. Auch die Geschwindigkeiten (4.4a) und (4.7) der Be- bzw. Entwässerungsfront sind graphisch als Sekanten an die fraktionalen Flusskurven darstellbar. Die Sekante für eine Bewässerung verbindet die Punkte  $(S^{\text{out}}, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  und  $(S^{\text{P}}, f_{\text{im}}(S^{\text{P}}))$  miteinander. Für die Entwässerung wird die Sekante durch die Punkte  $(S^{\text{in}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  und  $(S^{\text{P}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{P}}) = f_{\text{im}}(S^{\text{P}}))$  definiert. Anhand dieser Sekanten wird der zeitliche Verlauf und die Ausbreitung des nichtmonotonen Sättigungsprofils analog zur Sprunghysterese betrachtet. Liegen diese Sekanten aufeinander, so breitet sich das Profil als laufende Welle aus. Die graphische Bestimmung von einer der Sättigungen  $S^{\text{in}}$ ,  $S^{\text{out}}$ ,  $S^{\text{P}}$  durch die anderen zwei ist bei diesem Hysteresemodell sehr einfach, da alle drei Punkte auf einer Linie liegen müssen.

### 4.3 Überschuss mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Im Allgemeinen sind die die Ausbreitungsgeschwindigkeiten nicht identisch. Gilt

$$c_{\text{im}}(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) > c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}}), \quad (4.8)$$

ist die Bewässerungsfront schneller als die Entwässerungsfront und das Überschussplateau verbreitert sich. Gilt umgekehrt

$$c_{\text{im}}(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) < c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}}), \quad (4.9)$$

breitet sich die Entwässerung schneller aus als die Bewässerung und die Überschussbreite schrumpft. Die Änderung der Breite ist zeitlich proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz und kann mit

$$\Delta z = [c_{\text{im}}(S^{\text{P}}, S^{\text{out}}) - c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S^{\text{P}})] \cdot t \quad (4.10)$$

angegeben werden.



## **Teil III**

# **Nichtlineare Halbgruppen für die Darcy-Theorie**

# 5 Existenz von Lösungen bei nichthysteretischen Zweiphasenströmungen

Dieser Teil der Arbeit behandelt die Anwendbarkeit und die anschließende Anwendung der Halbgruppentheorie auf Transport-Diffusions-Probleme mit und ohne Hysterese, (DG1) und (DG2). Die analytische Lösungen verifizieren dann die numerischen Lösungen aus den Teilen IV und V.

In diesem Kapitel wird eine Vereinfachung des Anfangs- und Randwertproblems (DG1) in einer Dimension mathematisch diskutiert und im Rahmen der nichtlinearen Halbgruppentheorie gelöst. Es wird gezeigt, dass Lösungen aus dem Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  lokal und global existieren. Diese Lösungen sind klassische Lösungen für  $t > 0$  und zudem nach oben und unten beschränkt.

## 5.1 Motivation

In diesem und dem folgenden Kapitel werden die Anfangs- und Randwertprobleme (DG1) und (DG2) mit  $D(S) = D > 0$  auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Die Gleichungen in (DG1) und (DG2) sind parabolische partielle Differentialgleichungen mit einem Transportanteil, gegeben durch  $\partial_z f(S)$ , und einem diffusiven Anteil, gegeben durch  $D\partial_z^2 S$ .

Die Theorie der nichtlinearen Halbgruppen ist eine weit verbreitete Methode, um die Existenz von schwachen und starken Lösungen von elliptisch-parabolischen partiellen Differentialgleichung zu beweisen, [1, 5, 6, 7, 10, 15, 44, 61, 72, 74]. In [58, 73] werden unter anderem semilinearen parabolischen Differentialgleichungen auf Existenz und Eindeutigkeit von

Lösungen untersucht. Eine Anwendung der Halbgruppentheorie auf Transport-Diffusions-Probleme vom Typ (DG1) und (DG2) mit Hysterese scheint in der Literatur nicht bekannt zu sein.

Die Halbgruppentheorie kann zur Untersuchung von hyperbolischen Differentialgleichungen, wie in (BL), herangezogen werden. In diesem Fall werden anstatt analytischer Halbgruppen stark stetige Halbgruppen beziehungsweise Kontraktionshalbgruppen, wie in [18, 47], benutzt. Eine andere Herangehensweise ohne Benutzung der Halbgruppentheorie, um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme (DG1) und (DG2) für  $D \geq 0$  nachzuweisen, besteht mit einer geeigneten Galerkin-Methode, wie zum Beispiel in [2, 12] diskutiert.

Ziel dieser Arbeit ist die Diskussion des Falles  $D > 0$ . Hierfür wird in diesem Teil die Anwendbarkeit der Halbgruppentheorie auf die Probleme (DG1) und (DG2) mit  $D > 0$  nachgewiesen. Dafür wird die Hysterese im nichtlinearen Term in (DG2) durch eine nichtmonotone Anfangsbedingung und eine Entkopplung der Sättigungsfronten behandeln. Dadurch erfüllt der nichtlineare Term die geforderten Stetigkeitsbedingungen. Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des vereinfachten Anfangs- und Randwertproblems von (DG2) werden dann mit Hilfe der Ergebnisse aus [73] nachgewiesen.

## 5.2 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt werden Definitionen und Sätze über Funktionenräume in Gebiet  $\Omega$  und Halbgruppen, welche im Folgenden verwendet werden, wiederholt. Für elementare Begriffe wird eine Referenz angegeben.

Die Lebesgue-Räume und deren Normen werden mit  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  bezeichnet. Sobolev-Räume und deren Normen werden mit  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$  benannt. Die Hilbert-Räume, welche sich aus den Sobolev-Räumen für  $p = 2$  ergeben, und deren Normen werden mit  $\mathcal{H}^k(\Omega)$  und  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k}$  geschrieben. Ein spezieller Hilbert-Raum, welcher in den Kapiteln 5 und 6 benutzt wird, ist der Raum  $\mathcal{H}_N^2(\Omega)$  und dieser ist definiert als

$$\mathcal{H}_N^2(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{H}^2(\Omega) : \frac{du}{dn} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (5.1)$$

mit der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_N^2} = \|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ . Die beschränkten linearen Abbildungen eines Banach-Raumes  $X$  in sich selbst bilden den Raum  $\mathcal{B}(X)$ .



Im Folgenden sei der Operator  $A$  im Banach-Raum  $X$  mit  $A : X \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  ein dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator mit der Resolventenmenge  $\rho(A)$  und dem Spektrum  $\sigma(A)$ . Für offene Sektoren in der komplexen Ebene wird die Bezeichnung

$$\Sigma_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| < \omega\} \quad (5.2)$$

verwendet. Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  des Operators  $A$  ist ein Banach-Raum mit der Graphennorm  $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ , [70].

**Definition 5.1.** [73, Kapitel 2] Ein Operator  $A$  in einem Banach-Raum  $X$  heißt sektoriell, wenn  $0 \in \rho(A)$  gilt und wenn ein Winkel  $\omega \in (0, \pi]$  und eine Konstante  $M' \geq 1$  existieren, so dass die Bedingungen

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega, \quad (5.3a)$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M'}{|\lambda|} \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega. \quad (5.3b)$$

erfüllt sind. Für  $A$  sektoriell bezeichnet  $\omega_A$  das Infimum über alle Winkel  $\omega \in (0, \pi]$ , welche die Gleichungen (5.3) erfüllen. Der Winkel  $\omega_A$  heißt sektorieller Winkel des Operators  $A$ .

**Theorem 5.1.** [73, Kapitel 2] Sei  $Z \subset X$  und sei  $a(u, v)$  eine Sesquilinearform in  $Z$ , welche

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_Z \|v\|_Z \quad (5.4a)$$

$$\Re a(u, u) \geq \kappa \|u\|_Z^2 \quad (5.4b)$$

mit  $M > \kappa > 0$  erfüllt und sei  $A$  der zu dieser Sesquilinearform assoziierte Operator, dann sind die Gleichungen (5.3) mit  $\omega = \pi/2$  und  $M' = (M + \kappa)/\kappa$  erfüllt. Damit ist  $A$  ein sektorieller Operator in  $X$  mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$ .

**Definition 5.2.** [73, Kapitel 3] Ein Familie von Operatoren  $\{G(t) \in \mathcal{B}(X) : t \in \Sigma_\omega\}$  mit  $\omega \in (0, \pi/2)$  heißt analytische Halbgruppe, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Die Abbildung  $t \rightarrow G(t)$  ist analytisch in  $\Sigma_\omega$ .

(b) Für gegebene  $t_1, t_2 \in \Sigma_\omega$  gilt die Relation  $G(t_1 + t_2) = G(t_1)G(t_2)$ .

(c) Es gilt  $G(0) = I$  und die starke Konvergenzbedingung

$$G(t)x \rightarrow x \quad \text{für } t \rightarrow 0 \text{ mit } t \in \overline{\Sigma_\omega} \setminus \{0\}. \quad (5.5)$$

gilt für alle  $x \in X$  und  $\omega' \in (0, \omega)$ :

Für die Definition der fraktionalen Exponenten wird das Dunford Integral benutzt.

**Definition 5.3.** [73, Kapitel 2] Für  $\eta \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(\eta) > 0$  definiert man

$$A^{-\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \lambda^{-\eta} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (5.6)$$

wobei der Integrationsweg  $\Upsilon$  das Spektrum  $\sigma(A)$  entgegen dem Uhrzeigersinn in  $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0] \cap \rho(A)$  umrundet. Offensichtlich ist  $A^{-\eta}$  für alle  $\Re(\eta) > 0$  eine umkehrbare Abbildung. Damit sind die positiven fraktionalen Exponenten definiert als

$$A^\eta = (A^{-\eta})^{-1} \quad \text{for } \Re(\eta) > 0 \quad (5.7)$$

mit  $\mathcal{D}(A^\eta) = \mathcal{R}(A^{-\eta})$  wobei  $\mathcal{R}(\cdot)$  das Bild der Abbildung bezeichnet.

**Lemma 5.1.** [73, Kapitel 2] Sei  $A$  ein sektorieller Operator mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$  und sei  $e^{-tA}$  die analytische Halbgruppe, welche von  $-A$  erzeugt wird, dann existiert für alle Werte der Konstanten  $\eta \in (0, \infty)$  und alle  $t \in (0, \infty)$  eine Konstante  $C_\eta \in (0, \infty)$ , sodass die Ungleichung

$$\|A^\eta e^{-tA}\| \leq C_\eta t^{-\eta} \quad (5.8)$$

gilt.

In den Kapiteln 5 und 6 wird immer ein Cauchy-Problem

$$(CP) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases}$$

in einem Banach-Raum  $X$  betrachtet. Dabei ist  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  ein sektorieller Operator und erzeugt eine analytische Halbgruppe. Der nichtlineare Operator  $F(S)$  ist definiert als Abbildung von  $\mathcal{D}(A^\eta)$  mit  $0 < \eta < 1$  nach  $X$ .

**Theorem 5.2.** [58, Theorem 3.1, Seite 196] Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe  $G(t)$  mit  $\|G(t)\| \leq M$  und  $0 \in \rho(A)$ . Sei  $F(S) : \mathcal{D}(A^\eta) \rightarrow X$  eine nichtlineare Funktion, welche die Lipschitz-Bedingung

$$\|F(S) - F(V)\|_X \leq C_L \|S - V\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} \quad (5.9)$$

mit  $S, V \in U \subset \mathcal{D}(A^\eta)$  und einer Konstanten  $C_L > 0$  erfüllt und **sei zudem**  $0 < \eta < 1$ ,

dann hat das Cauchy-Problem (CP) für alle Anfangsdaten  $S_0 \in \mathcal{D}(A^\eta)$  eine eindeutige lokale Lösung  $S \in \mathcal{C}([0, t_1]; X) \cap \mathcal{C}^1([0, t_1]; X)$  mit  $t_1 > 0$ .

**Theorem 5.3.** [58, Theorem 3.3, Seite 199] Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe  $G(t)$  mit  $\|G(t)\| \leq M$  und  $0 \in \rho(A)$ . Weiter sei  $F(S) : \mathcal{D}(A^\eta) \rightarrow X$  mit  $0 < \eta < 1$  eine nichtlineare Abbildung, welche die Lipschitz-Bedingung

$$\|F(S) - F(V)\|_X \leq C_L \|S - V\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} \quad (5.10)$$

mit  $S, V \in U \subset \mathcal{D}(A^\eta)$  und einer Konstanten  $C_L > 0$  erfüllt. Falls eine nichtnegative nichtfallende Funktion  $C_L(t)$  existiert, sodass

$$\|F(S)\|_X \leq C_L(t) \left( \|S\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} + 1 \right) \quad (5.11)$$

erfüllt ist, dann hat das Cauchy-Problem (CP) für alle Anfangsdaten  $S_0 \in \mathcal{D}(A^\eta)$  eine eindeutige Lösung  $S(t)$  für alle  $t > 0$ .

**Theorem 5.4.** [73, Theorem 4.1, Seite 178] Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  der Erzeuger der analytischen Halbgruppe  $e^{-tA}$ . Sei  $F(S) : \mathcal{D}(A^\eta) \rightarrow X$  ein nichtlinearer Operator, welcher die Lipschitz-Bedingung

$$\begin{aligned} \|F(S) - F(V)\|_X \leq \varphi \left( \|A^\beta S\|_X + \|A^\eta V\|_X \right) & \left[ \|A^\eta(S - V)\|_X \right. \\ & \left. + (\|A^\eta S\|_X + \|A^\eta V\|_X) \|A^\beta(S - V)\|_X \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit  $S, V \in \mathcal{D}(A^\eta)$ ,  $0 < \beta \leq \eta < 1$  und einer monoton wachsenden Funktion  $\varphi(\cdot)$  erfüllt, dann hat das Cauchy-Problem (CP) für alle Anfangsdaten  $S_0 \in \mathcal{D}(A^\beta)$  eine eindeutige Lösung  $S$  im Funktionenraum  $\mathcal{U} = \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{D}(A^\beta)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; X)$  mit dem Zeitpunkt  $T_{S_0}$ , welcher nur von  $\|A^\beta S_0\|_X$  abhängig ist.

In [73] wird der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für das semilineare Cauchy-Problem (CP) mit einer Kontraktion  $K$  in einem Raum  $\mathcal{Y} \supset \mathcal{U}$  und einer nichtlinearen Funktion  $F(S)$ , welche Ungleichung (5.12) erfüllt, geführt. Aus den Eigenschaften des Operators  $A$  und der Kontraktion  $K$  folgt, dass  $F(S)$  eine gewichtete Hölder-stetige Funktion ist. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz [76, Theorem 1.A, Seite 17] existiert für die betrachtete Kontraktion  $K$  ein Fixpunkt in  $\mathcal{Y}$ . Damit ist  $F(t) = F(S(t))$  eine zulässige Inhomogenität und das semilineare Cauchy-Problem (CP) kann als lineares Cauchy-Problem umgeschrieben und gelöst werden.

**Theorem 5.5.** [73, Korollar 4.1, Seite 185] Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.4 und der Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{D}(A^\beta)$  existiert eine lokale Lösung  $S(t)$  des Cauchy-Problems

(CP) im Funktionenraum  $\mathcal{U} = \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{D}(A^\beta)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; X)$ . Falls für alle Lösungen  $S(t) \in \mathcal{U}$  die Ungleichung

$$\|A^\beta S(t)\| \leq C_c, \quad 0 \leq t \leq T_{S_0} \quad (5.13)$$

mit einer, von  $T_{S_0}$  unabhängigen, Konstanten  $C_c$  erfüllt ist, dann existiert für das Cauchy-Problem (CP) eine eindeutige globale Lösung für Zeiten  $t \in [0, T]$ .

**Bemerkung 5.1.** Theorem 5.2 von Pazy [58] enthält die Grundidee für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bei Anfangsproblemen (CP). Die Arbeit von Yagi [73], und damit Theorem 5.4, erweitert diese Grundidee. Die erste Druckversion von [58], ohne den Zusatz „sei zudem  $0 < \eta < 1$ “, lässt irrtümlicherweise vermuten, dass die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ohne die Verwendung von fraktionalen Potenzen nachgewiesen werden kann. Auf Grund dessen werden in den folgenden Kapiteln die Theorem 5.4 und 5.5 benutzt, um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der vorliegenden Cauchy-Probleme zu zeigen.

### 5.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Im Folgenden wird das Cauchy-Problem, siehe (CP),

$$(CP1) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases},$$

welches sich aus (DG1) für  $D(S) = D = \text{const.} > 0$  ergibt, analysiert. Hierbei ist der lineare Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  definiert durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \quad (5.14)$$

mit  $D_c = D/\phi > 0$  und der nichtlineare Operator  $F(S) : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben mit

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} f'(S) \frac{\partial S}{\partial z} + \epsilon S \quad (5.15)$$

wobei eine Konstante  $\epsilon > 0$  benutzt wird.

Zuerst, in Unterkapitel 5.3.1, wird nachgewiesen, dass der lineare Differentialoperator  $A$  ein sektorieller Operator ist und dass damit  $-A$  die analytische Halbgruppe  $e^{-tA}$  erzeugt. In

Unterkapitel 5.3.2 wird der nichtlineare Operator  $F(S)$  aus Gleichung (5.15) auf Stetigkeit bzw. beschränkte Stetigkeit untersucht. Danach wird in 5.3.3 gezeigt, dass das Cauchy-Problem (CP1) wohldefiniert ist. Abschließend werden dann Existenz, Eindeutigkeit und Beschränktheit von Lösungen  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  bewiesen.

### 5.3.1 Linearer Differentialoperator

**Lemma 5.2.** *Der Operator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  mit*

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \quad (5.16)$$

(siehe Gleichung (5.14)) mit  $D_c > \epsilon > 0$  auf dem Gebiet  $\Omega$  ist ein sektorieller Operator mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$ .

*Beweis.* Es sind die Abschätzungen (5.4) für  $X = \mathcal{L}^2(\Omega)$  und  $Z = \mathcal{H}^1(\Omega)$  zu beweisen. Die Sesquilinearform  $a(u, v)$  mit  $u, v \in \mathcal{H}^1$  für den Operator  $A$  lautet

$$a(u, v) = D_c \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dz + \epsilon \int_{\Omega} u v \, dz. \quad (5.17)$$

Es gilt

$$|a(u, v)| = \left| D_c \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dz + \epsilon \int_{\Omega} u v \, dz \right| \quad (5.18)$$

$$\leq D_c |\langle \nabla u, \nabla v \rangle| + \epsilon |\langle u, v \rangle| \quad (5.19)$$

$$\leq D_c \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2} \|\nabla v\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{L}^2} \|v\|_{\mathcal{L}^2} \quad (5.20)$$

$$\leq M \|u\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad (5.21)$$

mit  $M = \max\{D_c, \epsilon\}$  und

$$\Re a(u, u) = a(u, u) \quad (5.22)$$

$$= D_c \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, dz + \epsilon \int_{\Omega} u^2 \, dz \quad (5.23)$$

$$= D_c \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \epsilon \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 \quad (5.24)$$

$$\geq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 \quad (5.25)$$

mit  $\kappa = \min\{D_c, \epsilon\}$ . Des Weiteren gilt  $\max\{D_c, \epsilon\} = M > \kappa = \min\{D_c, \epsilon\} > 0$  und somit sind die Ungleichungen (5.4) erfüllt.  $\square$

**Korollar 5.1.** *Der Operator  $-A$  mit  $A = -D_c\Delta + \epsilon$  (siehe Gleichung (5.14)) mit  $D_c > \epsilon > 0$  erzeugt die analytische Halbgruppe  $e^{-tA}$ .*

*Beweis.* Für jeden sektorieller Operator  $A$  in  $X$  mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$  erzeugt  $-A$  die analytische Halbgruppe  $e^{-tA}$  in  $X$ , [73].  $\square$

Für den Operator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ , siehe Gleichung (5.14), Lemma 5.2 und Korollar 5.1, ist der Definitionsbereich der fraktionalen Exponenten in einem beschränktem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{C}^2$ -Rand nach [73, Theorem 16.7] gegeben durch

$$\mathcal{D}(A^\eta) = \begin{cases} \mathcal{H}^{2\eta}(\Omega) & \text{für } 0 \leq \eta < 3/4, \\ \mathcal{H}_N^{2\eta}(\Omega) & \text{für } 3/4 < \eta \leq 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

### 5.3.2 Nichtlinearer Operator

**Lemma 5.3.** *Sei  $f \in \mathcal{C}^2$  eine beschränkte Funktion, mit den beschränkten Ableitungen  $f'$  und  $f''$ . Sei  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  der lineare Operator aus Abschnitt 5.3.1. Die nichtlineare Funktion  $F(u) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  definiert durch*

$$F(u) = -\frac{Q}{\phi} f'(u) \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon u \quad (5.27)$$

mit den Konstanten  $Q, \phi, \epsilon > 0$  erfüllt die Ungleichungen

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C_F \left[ (1 + \|A^{1/2}v\|_{\mathcal{L}^2}) \|A^{1/2}(u - v)\|_{\mathcal{L}^2} \right] \quad (5.28a)$$

$$\|F(u)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C_F \|A^{1/2}u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (5.28b)$$

für alle  $u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  und mit der Konstanten  $0 < C_F < \infty$ .

*Beweis.* Nachweis von Ungleichung (5.28a):

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} = \left( \int_{\Omega} \left| -\frac{Q}{\phi} f'(u) \partial_z u + \frac{Q}{\phi} f'(v) \partial_z v + \epsilon(u - v) \right|^2 dz \right)^{1/2} \quad (5.29)$$

$$\leq \frac{Q}{\phi} \left( \int_{\Omega} |f'(u) \partial_z u - f'(v) \partial_z v|^2 dz \right)^{1/2} + \epsilon \left( \int_{\Omega} |u - v|^2 dz \right)^{1/2} \quad (5.30)$$

$$= \frac{Q}{\phi} \left( \int_{\Omega} |f'(u) \partial_z u - f'(v) \partial_z v + f'(u) \partial_z v - f'(u) \partial_z v|^2 dz \right)^{1/2} \\ + \epsilon \left( \int_{\Omega} |u - v|^2 dz \right)^{1/2} \quad (5.31)$$

$$\leq \frac{Q}{\phi} \left( \int_{\Omega} |f'(u)|^2 |\partial_z u - \partial_z v|^2 dz \right)^{1/2} \\ + \frac{Q}{\phi} \left( \int_{\Omega} |f'(u) - f'(v)|^2 |\partial_z v|^2 dz \right)^{1/2} + \epsilon \left( \int_{\Omega} |u - v|^2 dz \right)^{1/2} \quad (5.32)$$

Die Sättigungsableitung des fraktionalen Flusses  $|f'(u)|$  im ersten Summanden wird durch die Konstante

$$C'_f = \frac{Q}{\phi} \max_{w \in \mathbb{R}} |f'(w)| \geq \frac{Q}{\phi} |f'(u)|$$

abgeschätzt. Damit ist die Konstante  $C'_f$  unabhängig von den Funktionen  $u$  und  $v$  und der Ortsvariable  $z$ . Die Differenz der Sättigungsableitungen im zweiten Summand wird durch  $f''$  abgeschätzt. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  und für jeden Punkt  $z \in \Omega$  existiert mindestens ein  $w \in [u(z, t), v(z, t)] \subset \mathbb{R}$ , so dass

$$\frac{f'(u(z, t)) - f'(v(z, t))}{u(z, t) - v(z, t)} = f''(w)$$

gilt. Damit gilt die Abschätzung

$$C''_f = \frac{Q}{\phi} \max_{w \in \mathbb{R}} |f''(w)| \geq \frac{Q}{\phi} \frac{|f'(u) - f'(v)|}{|u - v|}.$$

Mit der Einbettungskonstante  $N$  für  $\mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  und den Konstanten  $C'_f$ ,  $C''_f$  und

$C_F = \max\{C'_f + \epsilon, N \cdot C''_f\}$  ergeben sich für (5.32) die folgenden Abschätzungen.

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C'_f \|\partial_z(u - v)\|_{\mathcal{L}^2} + C''_f \|(u - v)\partial_z v\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u - v\|_{\mathcal{L}^2} \quad (5.33)$$

$$\leq (C'_f + \epsilon) \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} + C''_f \|u - v\|_{\mathcal{L}^\infty} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad (5.34)$$

$$\leq (C'_f + \epsilon) \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} + N \cdot C''_f \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad (5.35)$$

$$\leq C_F [(1 + \|A^{1/2}v\|_{\mathcal{L}^2}) \|A^{1/2}(u - v)\|_{\mathcal{L}^2}] \quad (5.36)$$

Der Beweis von Ungleichung (5.28b) erfolgt entweder durch Verwendung von Ungleichung (5.28a) und  $v = 0$  oder durch die folgende Abschätzung.

$$\|F(u)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left\| \frac{Q}{\phi} f'(u) \partial_z u \right\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (5.37)$$

$$\leq C'_f \|\partial_z u\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{H}^1} \quad (5.38)$$

$$\leq (C'_f + \epsilon) \|u\|_{\mathcal{H}^1} \quad (5.39)$$

$$\leq C_F \|A^{1/2}u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (5.40)$$

□

### 5.3.3 Wohldefiniertheit

Das Cauchy-Problem (CP1) mit dem Operator  $A$  aus Lemma 5.2 und Korollar 5.1 und dem nichtlinearen Operator  $F(S)$  aus Lemma 5.3 ist im Raum  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  punktweise wohldefiniert für Lösungen  $S(t)$  aus dem Funktionenraum

$$\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega)). \quad (5.41)$$

Die Wohldefiniertheit ist dadurch sichergestellt, dass zuerst der Operator  $A$  jedes  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega))$  auf  $AS \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  abbildet. Des Weiteren bildet die zeitliche Ableitung  $\partial/\partial t$  jedes  $S \in \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  nach  $\partial S/\partial t \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  ab. Mit Lemma 5.3 folgt, dass  $F(S)$  eine Abbildung von  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  nach  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  ist. Darüber hinaus ist die Funktion  $f$  und deren Ableitung  $f'$  beschränkt und messbar. Daher ist die Funktion  $F(S)$  als Summe von stetigen Funktionen auch stetig und bildet jedes  $S \in \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega))$  nach  $F(S) \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  ab.



### 5.3.4 Lokale Existenz von Lösungen

**Theorem 5.6.** Sei  $f(S) \in C^2$  eine beschränkte fraktionale Flussfunktion, mit den beschränkten Ableitungen  $f'(S)$  und  $f''(S)$ . Zudem sind die Diffusionskonstante  $D > 0$  und die Konstanten  $\phi, Q > 0$  gegeben. Das Anfangs- und Randwertproblem

$$(DG3) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z} f(S) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(z=0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(z=L, t)}{\partial z} = 0 & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  mit der unbekanntem Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  und einer Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  besitzt eine eindeutige lokale Lösung  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$ .

*Beweis.* Das Anfangs- und Randwertproblem (DG3) wird in die abstrakte Form, siehe Problem (CP1),

$$(DG3a) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases}.$$

im Raum  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  überführt. Der Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \tag{5.42}$$

mit den Konstanten  $D_c = D/\phi$  und  $\epsilon > 0$  mit  $D_c > \epsilon$ , siehe Gleichung (5.14), Lemma 5.2 und Korollar 5.1. Die nichtlineare Funktion  $F(S) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist definiert als

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} f'(S) \frac{\partial S}{\partial z} + \epsilon S \tag{5.43}$$

mit  $\epsilon > 0$ , siehe Gleichung (5.15) und Lemma 5.3.

Für den Beweis wird Theorem 5.4 verwendet. Lemma 5.2 zeigt, dass der gegebene Operator  $A$  aus Gleichung (5.42) ein sektorieller Operator mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$  ist. Danach beweist Korollar 5.1, dass  $-A$  die analytische Halbgruppe  $e^{-tA}$  erzeugt. Lemma 5.3 zeigt, dass die Lipschitz-Bedingung (5.12) aus Theorem 5.4 für die nichtlineare Funktion

$F(S)$  aus Gleichung (5.43) erfüllt ist. Damit sind alle Bedingungen von Theorem 5.4 erfüllt und Theorem 5.6 ist bewiesen.  $\square$

### 5.3.5 Globale Existenz von Lösungen

**Theorem 5.7.** *Sei  $f(S) \in \mathcal{C}^2$  beschränkte fraktionale Flussfunktion, mit den beschränkten Ableitungen  $f'(S)$  und  $f''(S)$ . Zudem sind die Diffusionskonstante  $D > 0$  und die Konstanten  $\phi, Q > 0$  gegeben. Das Anfangs- und Randwertproblem*

$$(DG3) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z} f(S) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(z=0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(z=L, t)}{\partial z} = 0 & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  mit der unbekanntten Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  und einer Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  besitzt eine eindeutige globale Lösung  $S$  für alle Zeiten  $t > 0$ .

*Beweis.* Das Anfangs- und Randwertproblem (DG3) wird, wie zuvor im Beweis von Theorem 5.6, in die abstrakte Form

$$(DG3a) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases}$$

im Raum  $\mathcal{L}^2$  überführt. Der Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \quad (5.44)$$

mit den Konstanten  $D_c = D/\phi$  und  $\epsilon > 0$  mit  $D_c > \epsilon$ , siehe Gleichung (5.14), Lemma 5.2 und Korollar 5.1. Die nichtlineare Funktion  $F(S) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist definiert als

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} f'(S) \frac{\partial S}{\partial z} + \epsilon S \quad (5.45)$$

mit  $\epsilon > 0$ , siehe Gleichung (5.15) und Lemma 5.3.

Für den Beweis werden die Theoreme 5.5 und 5.6 benutzt. Nach Theorem 5.6 existiert im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  eine eindeutige lokale Lösung  $S(t)$  des Cauchy-Problems (DG3a).

Zudem muss die Bedingung

$$\|A^{1/2}S(t)\| \leq C_c, \quad 0 \leq t \leq T_{S_0} \quad (5.46)$$

siehe Ungleichung (5.13) mit  $\beta = 1/2$  erfüllt sein. Zum Nachweis der Ungleichung (5.46) wird die allgemeine Halbgruppendarstellung der Lösung  $S(t)$ , welche durch

$$S(t) = e^{-At}S_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \quad (5.47)$$

gegeben ist, benutzt. Es gilt mit Verwendung von Ungleichung (5.8) aus Lemma 5.1 und Ungleichung (5.28b) aus Lemma 5.3 die Abschätzung

$$\|A^{1/2}S(t)\| = \left\| A^{1/2} \left\{ e^{-tA}S_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \right\} \right\| \quad (5.48)$$

$$\leq \|A^{1/2}e^{-tA}S_0\| + \left\| A^{1/2} \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \right\| \quad (5.49)$$

$$\leq \|e^{-tA}\| \|A^{1/2}S_0\| + \int_0^t \|A^{1/2}e^{-(t-\tau)A}\| \|F(S(\tau))\| d\tau \quad (5.50)$$

$$\leq C_{S_0} + C_F \int_0^t \|A^{1/2}e^{-(t-\tau)A}\| \|A^{1/2}S(\tau)\| d\tau \quad (5.51)$$

$$\leq C_{S_0} + C_F \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \|A^{1/2}S(\tau)\| d\tau \quad (5.52)$$

mit einer Konstanten  $C_{S_0}$ , welche nur von der Anfangsbedingung  $S_0$  abhängt. Aus [58, Lemma 6.7, Seite 159] folgt, dass eine Konstante  $C_c$  existiert, so dass

$$\|A^{1/2}S(t)\| \leq C_c \quad (5.53)$$

gilt. Damit sind alle Bedingungen von Theorem 5.5 erfüllt und Theorem 5.7 ist bewiesen.  $\square$

### 5.3.6 Beschränktheit der globalen Lösung

**Theorem 5.8.** Sei  $f(S) \in \mathcal{C}^2$  eine beschränkte fraktionale Flussfunktion, mit den beschränkten Ableitungen  $f'(S)$  und  $f''(S)$ , und seien die Bedingungen

$$f(S \leq 0) = 0 \quad (5.54a)$$

$$f(0 \leq S \leq 1) \geq 0 \quad (5.54b)$$

$$f(S \geq 1) = 1. \quad (5.54c)$$

erfüllt. Zudem sind die Diffusionskonstante  $D > 0$  und die Konstanten  $\phi, Q > 0$  gegeben. Sei  $S(z, t)$  eine globale Lösung des Anfangs- und Randwertproblems

$$(DG3) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z} f(S) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S_0 & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(z=0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(z=L, t)}{\partial z} = 0 & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  und mit einer Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ . Falls für die Anfangsbedingung  $0 \leq S_0 \leq 1$  gilt, so gilt  $0 \leq S \leq 1$  für alle  $t > 0$ .

*Beweis.* Der Beweis ist in zwei Teile gegliedert. Zuerst wird gezeigt, dass die Lösung  $S$  immer positiv ist,  $S \geq 0$ , falls  $S_0 \geq 0$  gilt. Danach wird die Behauptung  $S \leq 1$  für  $S_0 \leq 1$  bewiesen.

Für den ersten Teil wird die Funktion

$$E(S) = \begin{cases} \frac{S^2}{2}, & \text{falls } S \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{falls } S \in [0, \infty) \end{cases} \quad (5.55)$$

definiert, welche negativen Sättigungswerten eine positive Zahl zuordnet. Diese Funktion  $E(S)$  ist stetig differenzierbar und die erste Ableitung erfüllt die Lipschitz-Bedingung. Das Integral über die Funktion  $E(S)$  ist die Straffunktion  $H(t)$ , welche durch

$$H(t) = \phi \int_{\Omega} E(S) dz = \phi \int_{\Omega_1} E(S) dz + \phi \int_{\Omega_2} E(S) dz \quad (5.56)$$

definiert ist. In Gleichung (5.56) gelten für die Teilgebiete  $\Omega_i$  die Bedingungen  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$  und  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Das Gebiete  $\Omega_i$  können sich zeitlich stetig ändern. Dabei bezeichnet  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$  den Teil von  $\Omega$  wo  $E(u) > 0$  bzw.  $E(u) = 0$  gilt. Diese Funktion dient dann als Maß

dafür, ob negative Sättigungswerte auftreten oder nicht. Damit ist die Funktion  $H$  stetig differenzierbar in der Zeit. Für die zeitliche Ableitung der Straffunktion erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t) = \phi \int_{\Omega} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} dz \quad (5.57)$$

$$= D \int_{\Omega} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} dz - Q \int_{\Omega} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial f(S)}{\partial z} dz \quad (5.58)$$

$$= -D \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial z} dz - Q \int_{\Omega} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial f(S)}{\partial z} dz \quad (5.59)$$

$$= -D \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right|^2 dz - Q \int_{\Omega} \frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial f(S)}{\partial z} dz. \quad (5.60)$$

Das erste Integral in Gleichung (5.60) ist immer positiv und für das zweite Integral gilt

$$\frac{\partial E(S)}{\partial S} \frac{\partial f(S)}{\partial z} = 0, \quad (5.61)$$

da aus der Definition der Funktion  $E(S)$  und der Flussfunktion  $f(S)$  die Aussagen

$$\frac{\partial f(S)}{\partial z} = 0, \quad \forall S \in (-\infty, 0) \quad (5.62a)$$

$$\frac{\partial E(S)}{\partial S} = 0, \quad \forall S \in [0, \infty) \quad (5.62b)$$

folgen. Somit gilt für die zeitliche Ableitung der Straffunktion immer

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t) \leq 0. \quad (5.63)$$

Für die Anfangsbedingung  $S_0$  gilt immer  $H(0) = 0$  und daraus folgt  $H(t) \equiv 0$  und  $S \geq 0$  für alle Zeiten  $t \in [0, \infty)$ .

Im zweiten Teil wird die Sättigung  $S$  durch die transformierte Sättigung  $\tilde{S} = 1 - S$  ersetzt. Dann verändert sich das Anfangs- und Randwertproblem zu

$$(DG3b) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - Q \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}(\tilde{S}) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} \right] = 0, & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ \tilde{S}(z, 0) = \tilde{S}_0, & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(z=0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(z=L, t)}{\partial z} = 0 & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

mit dem fraktionalen Fluss  $\tilde{f}(\tilde{S}) := f(1 - \tilde{S})$ . Auch bei diesem Anfangs- und Randwertproblem gilt für die zeitliche Ableitung der Straffunktion  $H(t) \leq 0$  mit der Funktion  $E(\tilde{S})$ ,

analog zu Teil 1 des Beweises. Des Weiteren gilt  $H(0) = 0$  für die Anfangsbedingung  $\tilde{S}_0$  und daraus folgt  $H(t) \equiv 0$  für alle Zeiten  $t \in [0, \infty)$ . Daher gilt auch  $S \leq 1$  für alle Zeiten  $t \in [0, \infty)$ .  $\square$

## 6 Existenz von nichtmonotonen Lösungen bei hysteretischen Zweiphasenströmungen

In diesem Kapitel wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit Hysterese untersucht. Dabei wird für den Kapillarfluss  $D_G(S) = D = \text{const.} \ll f_G(S)$  mit  $D > 0$  vorausgesetzt. Zur Beschreibung der Hysterese wird das  $\delta$ -Hysteresemodell verwendet mit  $\delta \neq 0$ .

Das Ziel der Analyse ist der Beweis der Existenz von Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems (DG2) im Rahmen der Halbgruppentheorie. Dazu werden die Ergebnisse zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen aus Kapitel 5 auf die hysteretische Differentialgleichung angewendet. Die Grundidee des Beweises ist die Entkopplung der Be- und Entwässerungsfronten.

### 6.1 Entkopplung der Be- und Entwässerungsfront

Im Folgenden wird das  $\delta$ -Hysteresemodell mit  $\delta \neq 0$  und ein einzelner Sättigungsüberschuss betrachtet. *A priori* wird angenommen, dass dieser Sättigungsüberschuss zum Zeitpunkt  $t = 0$  bereits existiert und aus einer führenden Bewässerungsfront, einer nachfolgenden Entwässerungsfront und einem Plateau mit Sättigung  $S^P$  zwischen den Fronten besteht. Eine solche Anfangsbedingung ist zum Beispiel in Abbildung 4.1 dargestellt. Zusätzlich kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass sich der Sättigungsüberschuss in positive  $z$ -Richtung ausbreitet. Im Folgenden wird dann die Bewässerung immer mit  $f_{\text{im}}(S) = f_{G^{\text{im}}}(S)$  und die Entwässerung immer mit  $f_{\text{dr}}(S) = f_{G^{\text{dr}} \cup G^{\text{sc}}}(S)$  beschrieben. Die Sättigungen links und rechts von dem Überschussplateau werden mit  $S^{\text{in}}$  bzw.  $S^{\text{out}}$  bezeichnet und es gilt  $S^{\text{out}} < S^{\text{in}} < S^P$ . Zudem gilt für die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\text{im}}(S)$

und  $f_{\text{dr}}(S)$  die Beziehung

$$f_{\text{im}}(S^{\text{P}}) = f_{\text{dr}}(S^{\text{P}}). \quad (6.1)$$

Die Länge  $L$  des Gebiets  $\Omega = [0, L]$  wird so groß gewählt, dass die Bewässerungsfront während des zu betrachtenden Zeitintervalles nie den Auslass bei  $z = L$  erreicht und somit  $S(z = L, t) = S^{\text{out}}$  für alle  $t > 0$  gilt. Das  $\delta$ -Hysteresemodell mit  $\delta \neq 0$  stellt sicher, dass in jedem Zeitpunkt  $t$  der fraktionale Fluss  $f_{\mathcal{G}}$  stetig in  $z$  ist. Außerdem ist gewährleistet, dass die Ableitung der Sättigung  $\partial S / \partial t$  sowohl in  $t$  als auch in  $z$  stetig ist.

Für den folgenden Beweis der Existenz von nichtmonotonen Lösungen der hysteretischen Darcy-Theorie (DG2) werden die Be- und Entwässerungsfront entkoppelt. Die Entkopplung ermöglicht es das Hysteresemodell durch eine ortsabhängige Funktion zu reformulieren. Diese Funktion gibt an in welchem Bereich welcher Prozess, Be- oder Entwässerung, stattfindet. Zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t \geq 0$  existieren zwei von diesem Zeitpunkt  $t$  abhängige Teilgebiete  $\Omega_i(t) \subset \Omega$  definiert durch

$$\Omega_{\text{im}}(t) = \{z \in \Omega : \partial_t S(z, t) \geq 0\}, \quad (6.2a)$$

$$\Omega_{\text{dr}}(t) = \{z \in \Omega : \partial_t S(z, t) \leq 0\}. \quad (6.2b)$$

Zusätzlich zu  $\Omega_{\text{im}}(t)$  und  $\Omega_{\text{dr}}(t)$  wird ein drittes Teilgebiet

$$\Omega_{\text{P}}(t) = \{z \in \Omega_{\text{im}}(t) \cap \Omega_{\text{dr}}(t) : S(z, t) = S^{\text{P}}\} \quad (6.2c)$$

definiert. Aufgrund der Wahl der Anfangsbedingung gilt, dass  $\Omega_{\text{P}}(t = 0)$  zusammenhängend und ein Intervall mit positiver Länge ist. Für eine Transport-Diffusions-Gleichung, wie in (DG2), mit  $f_{\mathcal{G}} \gg D > 0$  und  $D \rightarrow 0$  existiert dann außerdem ein endliches Zeitintervall  $[0, T_1]$  mit  $T_1 > 0$ , sodass  $\Omega_{\text{P}}(t)$  für alle  $t \in [0, T_1]$  zusammenhängend und ein Intervall mit positiver Länge ist. Dadurch gilt  $S(z, t) = S^{\text{P}}$  für alle  $(z, t) \in \Omega_{\text{P}}(t) \times [0, T_1]$ . Diese Annahme wird zum Einen durch die Betrachtung von hyperbolischen Gleichungen mit  $D = 0$ , für welche dies offensichtlich wahr ist, und zum Anderen durch eine Vielzahl von numerischen Ergebnissen gestützt. Man wählt nun einen Zeitpunkt  $0 < T \leq T_1$  so, dass der Schnitt über alle Teilgebiete  $\Omega_{\text{P}}(t)$

$$\Omega'_{\text{P}} := \bigcap_{t \in [0, T]} \Omega_{\text{P}}(t) \quad (6.3)$$

ebenso ein Intervall positiver Länge ist. Im Folgenden wird das Innere des Gebietes  $\Omega'_{\text{P}}$  mit  $(\Omega'_{\text{P}})^{\circ}$  bezeichnet und es gilt  $(\Omega'_{\text{P}})^{\circ} \neq \emptyset$ . Die Entkopplung der Fronten findet nun im Gebiet



$(\Omega'_p)^\circ$  statt. Aus der Konstruktion der Teilgebiete  $\Omega_i$  mit  $i \in \{\text{im}, \text{dr}, \text{P}\}$  und des Hysterese-modells folgt für  $t \in [0, T]$ , dass die Sättigung im Gebiet  $(\Omega'_p)^\circ$  konstant ist,  $S(z, t) = S^P$  für alle  $(z, t) \in (\Omega'_p)^\circ \times [0, T]$ . Ebenso ist der fraktionale Fluss  $f_G$  im Gebiet  $(\Omega'_p)^\circ$  konstant. Damit folgt auch, dass für alle  $(z, t) \in (\Omega'_p)^\circ \times [0, T]$  keine Änderung des Strömungsprozesses stattfindet. Zur Entkopplung der Fronten wird nun ein beliebiger aber fester Punkt  $z_a \in (\Omega'_p)^\circ$  gewählt. Infolge der Anfangsbedingung, der Ausbreitungsrichtung, der Parameterwahl mit  $f_G \gg D > 0$  und  $(\Omega'_p)^\circ \neq \emptyset$  gelten dann für alle  $t \in [0, T]$  die Ungleichungen

$$\partial_t S(z, t) \geq 0 \quad \text{für } z \geq z_a, \quad (6.4a)$$

$$\partial_t S(z, t) \leq 0 \quad \text{für } z \leq z_a \quad (6.4b)$$

mit  $z_a \in (\Omega'_p)^\circ$  und  $S(z_a, t) = S^P$ . Mit den Ungleichungen (6.4) wird für das Zeitintervall  $[0, T]$  die Funktion

$$\chi(z, z_a) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \geq z_a \\ 0 & \text{für } z < z_a \end{cases} \quad (6.5)$$

definiert, welche die Be- und Entwässerung an der Stelle  $z_a \in (\Omega'_p)^\circ$  entkoppelt und das Gebiet  $\Omega$  in eine Be- und eine Entwässerungsregion unterteilt. Damit wird dann das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) für  $t \in [0, T]$  zu

$$(DG4) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial S}{\partial z} \right] + \chi(z, z_a) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{im}}(S) \\ \quad + (1 - \chi(z, z_a)) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{dr}}(S) = 0, & \forall z \in \Omega, t \in (0, T] \\ S(z, 0) = S_0, & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(L, t)}{\partial z} = 0, & \forall z \in \partial\Omega, t \in (0, T] \end{cases}$$

umgeschrieben und die Be- und Entwässerungsfronten entkoppelt.

Zusammengefasst sind die Voraussetzungen der Stetigkeit des Hysterese-modells und eines nichtleeren Plauteagebietes,  $(\Omega'_p)^\circ \neq \emptyset$  mit  $S(z, t) = \text{const.}$  für  $(z, t) \in (\Omega'_p)^\circ \times [0, T]$ , hinreichend für die Entkopplung der Be- und Entwässerungsfronten.

## 6.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Im Folgenden wird das Cauchy-Problem, siehe (CP),

$$(CP2) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & 0 < t \leq T \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases},$$

welches sich aus (DG4) ergibt, analysiert. Hierbei ist der lineare Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  definiert durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \quad (6.6)$$

mit  $D_c = D/\phi > 0$ , siehe Kapitel 5, und der nichtlineare Operator  $F(S) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben mit

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} \left[ \chi(z, z_a) f'_{\text{im}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} + (1 - \chi(z, z_a)) f'_{\text{dr}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} \right] + \epsilon S \quad (6.7)$$

wobei eine Konstante  $\epsilon > 0$  benutzt wird.

Der lineare Differentialoperator  $A$ , gegeben in Gleichung 6.6, ist identisch zu dem Operator aus Gleichung 5.14. Somit ist schon mit Lemma 5.2 und Korollar 5.1 gezeigt, dass  $A$  ein sektorieller Operator ist und dass damit  $-A$  eine analytische Halbgruppe erzeugt. In Unterkapitel 6.2.1 wird der nichtlineare Operator  $F(S)$  aus Gleichung (6.7) auf Stetigkeit bzw. beschränkte Stetigkeit untersucht. Danach wird in 6.2.2 gezeigt, dass das Cauchy-Problem (CP2) wohldefiniert ist. Abschließend werden dann Eindeutigkeit, Existenz und Beschränktheit von Lösungen  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  für  $T_{S_0} \leq T$  mit Verwendung der Theoreme 5.4 und 5.5 bewiesen.

### 6.2.1 Nichtlinearer Operator

**Lemma 6.1.** *Seien  $f_{\text{im}}, f_{\text{dr}} \in \mathcal{C}^2$  beschränkte Funktionen, mit den beschränkten Ableitungen  $f'_{\text{im}}, f'_{\text{dr}}, f''_{\text{im}}$  und  $f''_{\text{dr}}$ . Sei  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  der lineare Operator aus Abschnitt 5.3.1. Die nichtlineare Funktion  $F(u) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  definiert durch*

$$F(u) = -\frac{Q}{\phi} \left[ \chi(z, z_a) f'_{\text{im}}(u) \frac{\partial u}{\partial z} + (1 - \chi(z, z_a)) f'_{\text{dr}}(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \epsilon u \quad (6.8)$$

mit  $\chi(\cdot, z_a) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  und den Konstanten  $Q, \phi, \epsilon > 0$  erfüllt die Ungleichungen

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C'_F [(1 + \|A^{1/2}v\|_{\mathcal{L}^2}) \|A^{1/2}(u - v)\|_{\mathcal{L}^2}] \quad (6.9)$$

$$\|F(u)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C'_F \|A^{1/2}u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (6.10)$$

für alle  $u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  und mit der Konstanten  $0 < C'_F < \infty$ .

*Beweis.* Zur besseren Lesbarkeit des Beweises der Ungleichung (6.9) und (6.10) werden die Notationen  $\chi_{\text{im}} = \chi(z, z_a)$  und  $\chi_{\text{dr}} = 1 - \chi(z, z_a)$  verwendet. Damit ergeben sich die folgenden Abschätzungen.

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} = \left( \int_{\Omega} \|F(u) - F(v)\|^2 dz \right)^{1/2} \quad (6.11)$$

$$= \left( \int_{\Omega} \left| -\frac{Q}{\phi} \sum_{i \in \{\text{im}, \text{dr}\}} \chi_i f'_i(u) \partial_z u + \frac{Q}{\phi} \sum_{i \in \{\text{im}, \text{dr}\}} \chi_i f'_i(v) \partial_z v + \epsilon(u - v) \right|^2 dz \right)^{1/2} \quad (6.12)$$

$$\leq \frac{Q}{\phi} \sum_{i \in \{\text{im}, \text{dr}\}} \left( \int_{\Omega} |\chi_i [f'_i(v) \partial_z v - f'_i(u) \partial_z u]|^2 dz \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |\epsilon(u - v)|^2 dz \right)^{1/2} \quad (6.13)$$

$$\leq \frac{Q}{\phi} \sum_{i \in \{\text{im}, \text{dr}\}} \left( \int_{\Omega} |f'_i(v) \partial_z v - f'_i(u) \partial_z u|^2 dz \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |\epsilon(u - v)|^2 dz \right)^{1/2} \quad (6.14)$$

Analog zu den Abschätzungen (5.30)-(5.33) aus Kapitel 5, mit der Einbettungskonstante  $N$  für  $\mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  und den Konstanten

$$\begin{aligned} C'_{f,i} &= \frac{Q}{\phi} \max_{w \in \mathbb{R}} |f'_i(w)| \geq \frac{Q}{\phi} |f'_i(u)| \\ C''_{f,i} &= \frac{Q}{\phi} \max_{w \in \mathbb{R}} |f''_i(w)| \geq \frac{Q}{\phi} \frac{|f'_i(u) - f'_i(v)|}{|u - v|} \\ C'_F &= \max\{C'_{f,\text{im}} + C'_{f,\text{dr}} + \epsilon, N \cdot (C''_{f,\text{im}} + C''_{f,\text{dr}})\} \end{aligned}$$

für  $i \in \{\text{im}, \text{dr}\}$  kann Gleichung (6.14) zu

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{L}^2} \quad (6.15)$$

$$\leq (C'_{f,\text{im}} + C'_{f,\text{dr}} + \epsilon) \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} + (C''_{f,\text{im}} + C''_{f,\text{dr}}) \|u - v\|_{\mathcal{L}^\infty} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad (6.16)$$

$$\leq (C'_{f,\text{im}} + C'_{f,\text{dr}} + \epsilon) \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} + N \cdot (C''_{f,\text{im}} + C''_{f,\text{dr}}) \|u - v\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad (6.17)$$

$$\leq C'_F [(1 + \|A^{1/2}v\|_{\mathcal{L}^2}) \|A^{1/2}(u - v)\|_{\mathcal{L}^2}] \quad (6.18)$$

umgeformt werden. Damit ist Ungleichung (6.9) nachgewiesen.

Der Beweis von Ungleichung (6.10) erfolgt entweder durch Verwendung von Ungleichung (6.9) und  $v = 0$  oder durch die folgende Abschätzung.

$$\|F(u)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left\| -\frac{Q}{\phi} [\chi_{\text{im}} f'_{\text{im}}(u) \partial_z u + \chi_{\text{dr}} f'_{\text{dr}}(u) \partial_z u] \right\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (6.19)$$

$$\leq \frac{Q}{\phi} \|(f'_{\text{im}}(u) + f'_{\text{dr}}(u)) \partial_z u\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (6.20)$$

$$\leq C'_{f,\text{im}} \|\partial_z u\|_{\mathcal{L}^2} + C'_{f,\text{dr}} \|\partial_z u\|_{\mathcal{L}^2} + \epsilon \|u\|_{\mathcal{H}^1} \quad (6.21)$$

$$\leq (C'_{f,\text{im}} + C'_{f,\text{dr}} + \epsilon) \|u\|_{\mathcal{H}^1} \quad (6.22)$$

$$\leq C'_F \|A^{1/2}u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (6.23)$$

□

## 6.2.2 Wohldefiniertheit

Das Cauchy-Problem (CP2) mit dem Operator  $A$  aus Lemma 5.2 und Korollar 5.1 und dem nichtlinearen Operator  $F(S)$  aus Lemma 6.1 ist im Raum  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  punktweise wohldefiniert für Lösungen  $S(t)$  aus dem Funktionenraum

$$\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega)). \quad (6.24)$$

Der Nachweis der Wohldefiniertheit läuft analog zu Kapitel 5. Zuerst gilt, dass der Operator  $A$  jedes  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega))$  auf  $AS \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  abbildet. Des Weiteren bildet die zeitliche Ableitung  $\partial/\partial t$  jedes  $S \in \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  nach  $\partial S/\partial t \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  ab. Mit Lemma 6.1 folgt, dass  $F(S)$  eine Abbildung von  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  nach  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  ist. Darüber hinaus sind die Funktionen  $f_{\text{im}}, f_{\text{dr}}$ , deren Ableitung  $f'_{\text{im}}$  und  $f'_{\text{dr}}$  und  $\chi(z, z_a)$  beschränkt und messbar. Daher ist die Funktion  $F(S)$  als Summe von stetigen Funktionen auch stetig und bildet jedes  $S \in \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega))$  nach  $F(S) \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  ab.

### 6.2.3 Lokale Existenz von Lösungen

**Theorem 6.1.** *Seien  $f_{\text{im}}(S), f_{\text{dr}}(S) \in \mathcal{C}^2$  beschränkte fraktionale Flussfunktionen, mit den beschränkten Ableitungen  $f'_{\text{im}}(S), f'_{\text{dr}}(S), f''_{\text{im}}(S)$  und  $f''_{\text{dr}}(S)$ . Zudem sind die Diffusionskonstante  $D > 0$ , die Funktion  $\chi(\cdot, z_a) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  und die Konstanten  $\phi, Q > 0$  gegeben. Das Anfangs- und Randwertproblem*

$$(DG4) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial}{\partial z} S \right] + \chi(z, z_a) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{im}}(S) \\ \quad + (1 - \chi(z, z_a)) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{dr}}(S) = 0, & \forall z \in \Omega, t \in (0, T] \\ S(z, 0) = S_0, & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(L, t)}{\partial z} = 0, & \forall z \in \partial\Omega, t \in (0, T] \end{cases}$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  mit der unbekanntem Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  und einer Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  besitzt eine eindeutige lokale Lösung  $S \in \mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$ .

*Beweis.* Das Anfangs- und Randwertproblem (DG4) wird in die abstrakte Form, siehe Problem (CP2),

$$(DG4a) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & 0 < t \leq T \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases}.$$

im Raum  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  überführt. Der Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \quad (6.25)$$

mit den Konstanten  $D_c = D/\phi$  und  $\epsilon > 0$  mit  $D_c > \epsilon$ , siehe Gleichung (6.6), Lemma 5.2 und Korollar 5.1. Die nichtlineare Funktion  $F(S) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist definiert als

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} \left[ \chi(z, z_a) f'_{\text{im}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} + (1 - \chi(z, z_a)) f'_{\text{dr}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} \right] + \epsilon S \quad (6.26)$$

mit  $\epsilon > 0$ , siehe Gleichung (6.7) und Lemma 6.1.

Für den Beweis wird Theorem 5.4 verwendet. Lemma 5.2 zeigt, dass der gegebene Operator  $A$  aus Gleichung (6.25) ein sektorieller Operator mit dem sektoriellen Winkel  $\omega_A < \pi/2$

ist. Danach beweist Korollar 5.1, dass  $-A$  eine analytische Halbgruppe erzeugt. Lemma 6.1 zeigt, dass die Lipschitz-Bedingung (5.12) aus Theorem 5.4 für die nichtlineare Funktion  $F(S)$  aus Gleichung (6.26) erfüllt ist. Damit sind alle Bedingungen von Theorem 5.4 erfüllt und Theorem 6.1 ist bewiesen.  $\square$

## 6.2.4 Globale Existenz von Lösungen

**Theorem 6.2.** *Seien  $f_{\text{im}}(S), f_{\text{dr}}(S) \in \mathcal{C}^2$  beschränkte fraktionale Flussfunktionen, mit den beschränkten Ableitungen  $f'_{\text{im}}(S), f'_{\text{dr}}(S), f''_{\text{im}}(S)$  und  $f''_{\text{dr}}(S)$ . Zudem sind die Diffusionskonstante  $D > 0$ , die Funktion  $\chi(\cdot, z_a) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  und die Konstanten  $\phi, Q > 0$  gegeben. Das Anfangs- und Randwertproblem*

$$(DG4) \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial}{\partial z} S \right] + \chi(z, z_a) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{im}}(S) \\ \quad + (1 - \chi(z, z_a)) Q \frac{\partial}{\partial z} f_{\text{dr}}(S) = 0, & \forall z \in \Omega, t \in (0, T] \\ S(z, 0) = S_0, & \forall z \in \Omega \\ \frac{\partial S(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial S(L, t)}{\partial z} = 0, & \forall z \in \partial\Omega, t \in (0, T] \end{cases}$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  mit der unbekanntten Sättigungsfunktion  $S(z, t)$  und einer Anfangsbedingung  $S_0 \in \mathcal{H}^1$  besitzt eine eindeutige globale Lösung  $S$  im Zeitintervall  $[0, T]$ .

*Beweis.* Das Anfangs- und Randwertproblem (DG4) wird, wie zuvor im Beweis von Theorem 6.1, in die abstrakte Form

$$(DG4a) \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + AS = F(S), & 0 < t \leq T \\ S(z, 0) = S_0 \end{cases}$$

im Raum  $\mathcal{L}^2$  überführt. Der Differentialoperator  $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_N^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$A = -D_c \Delta + \epsilon \tag{6.27}$$

mit den Konstanten  $D_c = D/\phi$  und  $\epsilon > 0$  mit  $D_c > \epsilon$ , siehe Gleichung (6.6), Lemma 5.2 und

Korollar 5.1. Die nichtlineare Funktion  $F(S) : \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist definiert als

$$F(S) = -\frac{Q}{\phi} \left[ \chi(z, z_a) f'_{\text{im}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} + (1 - \chi(z, z_a)) f'_{\text{dr}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} \right] + \epsilon S \quad (6.28)$$

mit  $\epsilon > 0$ , siehe Gleichung (6.7) und Lemma 6.1.

Für den Beweis werden die Theorem 5.5 und 6.1 benutzt. Nach Theorem 6.1 existiert im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  eine eindeutige lokale Lösung  $S(t)$  des Cauchy-Problems (DG4a).

Zudem muss die Bedingung

$$\|A^{1/2}S(t)\| \leq C_c, \quad 0 \leq t \leq T_{S_0} \quad (6.29)$$

siehe Gleichung (5.13) mit  $\beta = 1/2$  erfüllt sein. Zum Nachweis der Ungleichung (6.29) wird die allgemeine Halbgruppendarstellung der Lösung  $S(t)$ , welche durch

$$S(t) = e^{-At}S_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \quad (6.30)$$

gegeben ist, benutzt. Es gilt mit Verwendung von Ungleichung (5.8) aus Lemma 5.1 und Ungleichung (6.10) aus Lemma 6.1 die Abschätzung

$$\|A^{1/2}S(t)\| = \left\| A^{1/2} \left\{ e^{-tA}S_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \right\} \right\| \quad (6.31)$$

$$\leq \|A^{1/2}e^{-tA}S_0\| + \left\| A^{1/2} \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(S(\tau))d\tau \right\| \quad (6.32)$$

$$\leq \|e^{-tA}\| \|A^{1/2}S_0\| + \int_0^t \|A^{1/2}e^{-(t-\tau)A}\| \|F(S(\tau))\| d\tau \quad (6.33)$$

$$\leq C_{S_0} + C'_F \int_0^t \|A^{1/2}e^{-(t-\tau)A}\| \|A^{1/2}S(\tau)\| d\tau \quad (6.34)$$

$$\leq C_{S_0} + C'_F \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \|A^{1/2}S(\tau)\| d\tau \quad (6.35)$$

mit einer Konstanten  $C_{S_0}$ , welche nur von der Anfangsbedingung  $S_0$  abhängt. Aus [58, Lemma 6.7, Seite 159] folgt, dass eine Konstante  $C_c$  existiert, so dass

$$\|A^{1/2}S(t)\| \leq C_c \quad (6.36)$$

gilt. Damit sind alle Bedingungen von Theorem 5.5 erfüllt und Theorem 6.2 ist bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 6.1.** Die Anfangsbedingungen  $S_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  von (DG4) in den Theoremen 6.1 und 6.2 sind immer nichtmonoton. Damit folgt aus der Entkopplung der Fronten und der Stetigkeit der analytischen Halbgruppe  $e^{-tA}$ , dass auch die Lösungen  $S(t)$  für Zeiten  $t \in [0, T]$  nichtmonoton sind.

**Bemerkung 6.2.** Die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\text{im}}(S)$ , welche aus den Gleichungen (3.2) und (3.3) folgen, sind beschränkte  $\mathcal{C}^2$ -Funktionen mit beschränkten Ableitungen  $f'_{\text{im}}$  und  $f''_{\text{im}}$ . Die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\text{dr}} = f_{\mathcal{G}^{\text{dr}} \cup \mathcal{G}^{\text{sc}}}$ , welche aus den Gleichungen (3.2) und (3.3) und mit der Verwendung von Streichkurven folgen, sind fast überall beschränkte  $\mathcal{C}^2$ -Funktionen mit beschränkten Ableitungen  $f'_i$  und  $f''_i$ . Ausnahme der  $\mathcal{C}^2$ -Eigenschaft ist die Stelle  $S = S_{\text{max}}^{\text{dr}}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Funktionen  $f_{\text{dr}}$  an der Stelle  $S = S_{\text{max}}^{\text{dr}}$  geglättet werden. Damit erfüllen die in dieser Arbeit verwendeten fraktionalen Flussfunktionen  $f_i(S)$  Lemma 6.1. Somit können die Theoreme 6.1 und 6.2 herangezogen werden, um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme, welche in dieser Arbeit numerisch berechnet werden, nachzuweisen.

## 6.3 Numerische Simulation: $D$ versus $D_{\mathcal{G}}(S)$

Im Rest der Arbeit wird bei den numerischen Simulationen meist mit einer kapillaren Diffusionsfunktionen  $D_{\mathcal{G}}(S)$ , anstatt mit einer Diffusionskonstanten  $D > 0$ , gerechnet. Weiterhin gilt allerdings, dass die Werte dieser Diffusionsfunktionen klein gegenüber den fraktionalen Flüssen sind, also dass die Bedingung  $D_{\mathcal{G}}(S) \ll f_{\mathcal{G}}(S)$  gilt.

Die nachfolgenden Simulationen in diesem Abschnitt untersuchen die Unterschiede zwischen einer konstanten Diffusion  $D = \text{const.}$  und einer sättigungsabhängigen Diffusion  $D_{\mathcal{G}}(S)$ . Dabei wird auch die Auswirkung der Hysterese im diffusiven Term auf die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Fronten betrachtet.

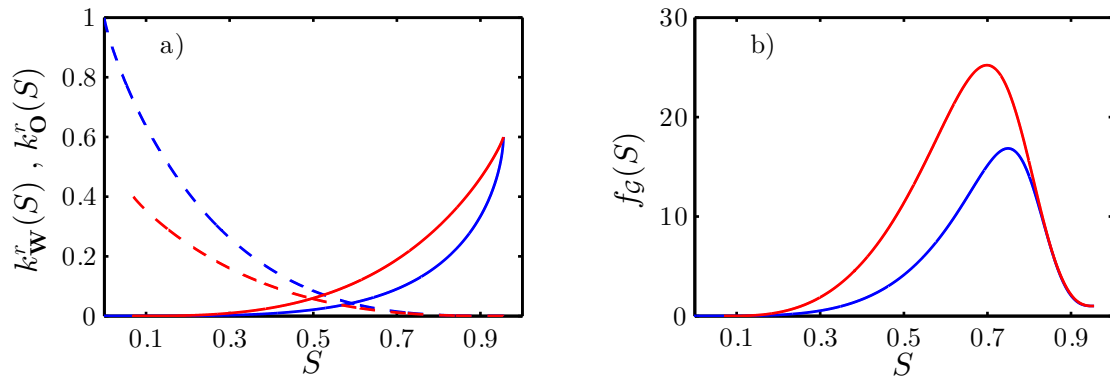
### 6.3.1 Modellprobleme

Im Folgenden wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) in Richtung der Gravitation auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  mit dem fraktionalen Fluss  $f_{\mathcal{G}}(S)$  aus Gleichung (3.2) gelöst. Die



**Tabelle 6.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	2	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	0.6	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	1.2	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	0.85	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	1.1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.4	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}\text{i}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	0.045	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$



**Abbildung 6.1:** Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten in algebraischer Form a) und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen b) mit den Parametern aus Tabelle 6.1. Die Graphen der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die Graphen der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Der primäre Bewässerungsprozess ist in blau und der sekundäre Entwässerungsprozess in rot gezeichnet.

Randbedingung ist durch

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B = 0.7, & \text{für } t \leq 500 \text{ s} \\ S^{\text{in}} = 0.48754, & \text{für } t > 500 \text{ s} \end{cases}, \quad (6.37a)$$

$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (6.37b)$$

gegeben.

Die Parameter für die relativen Permeabilitäten, den Kapillardruck, den fraktionalen Fluss und den Kapillarfluss sind in Tabelle 6.1 spezifiziert. Die Randkurven der relativen Permeabilitäten  $k_{\mathbb{W}}^r$ ,  $k_{\mathbb{O}}^r$  und des Kapillardrucks  $P_c$  werden in der van-Genuchten-Form (3.15) und (3.17) angegeben. In Abbildung 6.1 sind die Randkurven der relativen Permeabilitäten a),  $\mathbb{W}$  durchgezogen und  $\mathbb{O}$  gestrichelt, und des fraktionalen Flusses b) abgebildet. Dabei ist die primäre Bewässerung in blau und die sekundäre Entwässerung in rot dargestellt.

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit der Randbedingung (6.37) wird innerhalb des  $\delta$ -Hysterese Modells mit dem Hysterese parameter  $\delta = 0.05$  und linearen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten gelöst. In Tabelle 6.2 sind für das gegebene Anfangs- und Randwertproblem fünf verschiedene Realisierungen der Hysterese im Kapillardruck und im kapillaren Fluss aufgelistet. Bei den Problemen A und B werden kubische Streichkurven im Kapillardruck definiert und somit die Hysterese im kapillaren Fluss spezifiziert. Bei Problem C wird keine Hysterese im Kapillardruck definiert und die Bestimmung des Kapillardrucks erfolgt mit der Hystereserandkurve der primären Bewässerung. Die Hysterese im kapillaren

**Tabelle 6.2:** Parameter für das Hysteresemodell

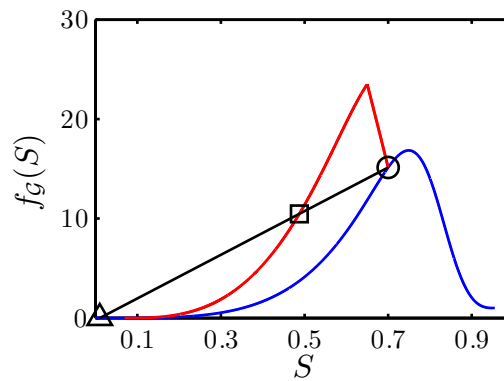
Problem	Hysterese in $D_G(S)$
A	kubische Streichkurven in $P_c$ mit $P_{\text{bdr}} = 800$ Pa
B	kubische Streichkurven in $P_c$ mit $P_{\text{bdr}} = 700$ Pa
C	keine Hysterese in $P_c$
D	keine Hysterese in $D_G(S)$
E	$D_G(S) = D = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$

Fluss wird nur durch die Hysterese der relativen Permeabilitäten erzeugt. Bei Problem D ist der kapillare Fluss nicht hysteretisch und somit nur von der Sättigung abhängig. Zur Bestimmung der Werte von  $D_G(S)$  werden in den relativen Permeabilitäten und dem Kapillardruck die Randkurven der primären Bewässerung benutzt. Problem E verwendet anstatt einer Funktion für den kapillaren Fluss lediglich eine Konstante, die für Be- und Entwässerungsprozesse zudem identisch ist.

### 6.3.1.1 Quasianalytische Lösung

Die Sättigungen der Randbedingung (6.37) sind derart gewählt, dass Gleichung (4.6) erfüllt ist und für die Überschusssättigung einer laufenden Welle  $S^B = S^{\text{TW}} = 0.7$  gilt. Des Weiteren wird durch die Umschaltzeit  $t^B = 500$  s sichergestellt, dass das entstandenen Plateau breit genug ist, um die unterschiedlichen diffusiven Effekte über einen längeren Zeitraum betrachten zu können.

Abbildung 6.2 zeigt die Graphen der fraktionalen Flussfunktionen  $f_{G^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  (blau) und  $f_{G^{\text{dr}} \cup G^{\text{sc}}} = f_{\text{dr}}$  (rot). Die Graphen der Entwässerung berechnen sich aus den Sättigungen  $S_* = 0.7$  und  $A = 0.675$ . In Abbildung 6.2 sind zusätzlich die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^B = 0.7, f_{\text{im}}(S^B) = f_{\text{dr}}(S^B))$  ( $\circ$ ) und  $(S^{\text{in}} = 0.48754, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ) markiert. Die Steigung der Sekanten, welche  $\triangle$  und  $\circ$  verbindet, ist proportional zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bewässerungsfront und die Steigung der Sekanten, welche  $\square$  und  $\circ$  verbindet, ist proportional zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfront. Diese beiden Sekanten sind im vorliegenden Fall identisch und zeigen somit graphisch, dass Gleichung (4.6) erfüllt ist. Gleichung (4.3) liefert die Ausbreitungsgeschwindigkeit beider Sättigungsfronten mit  $c_{\text{im}}(0.7, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.48754, 0.7) = 6.30 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ .



**Abbildung 6.2:** Fraktionale Flussfunktionen für die primäre Bewässerung  $f_{\text{im}}$  (blau) und einen Entwässerungsprozess  $f_{\text{dr}}$  (rot) innerhalb der  $\delta$ -Hysterese mit den Parametern aus Tabelle 6.1. Die Steigung der Sekanten (schwarz) ist proportional zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Sättigungsfronten. Die Punkte  $(0.7, f_{\text{im}}(0.7) = f_{\text{dr}}(0.7))$  ( $\circ$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.48754, f_{\text{dr}}(0.48754))$  ( $\square$ ) und  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(0.01))$  ( $\triangle$ ) sind markiert.

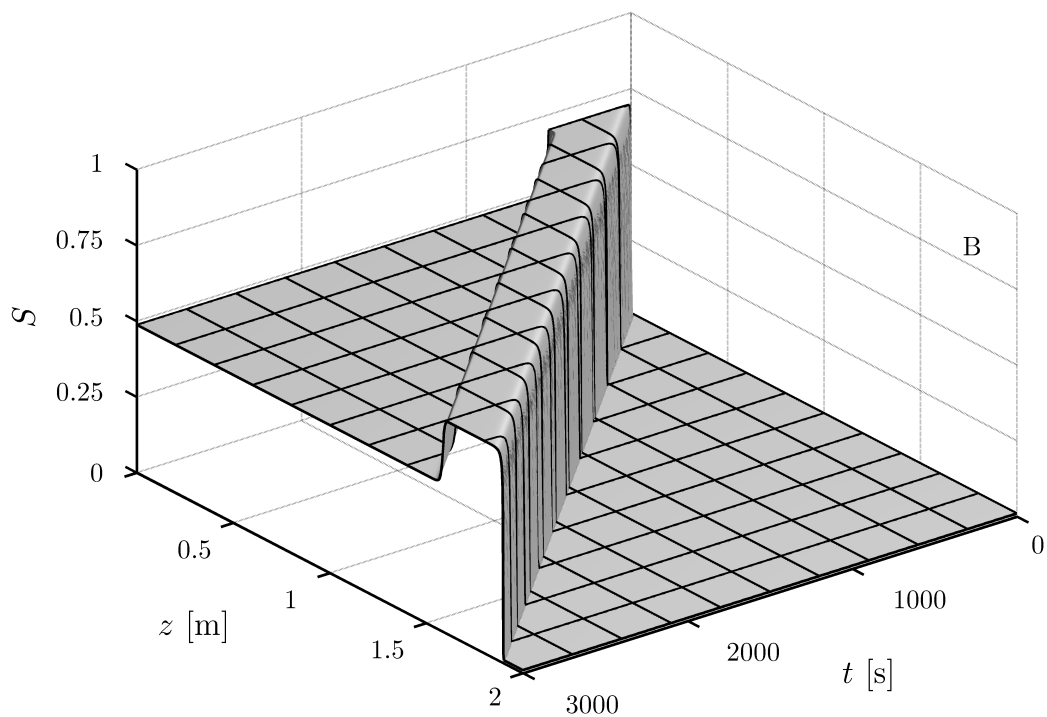
### 6.3.1.2 Numerische Lösungen

Die numerischen Lösungen der Probleme A-E für  $t \leq 500$  s ist eine Bewässerungsfront mit der Frontsättigung  $S^{\text{B}} = 0.7$ , wie im vorherigen Abschnitt analytisch vorhergesagt. Die Front ist für die Probleme A-D identisch. Die Front von Problem E ist wegen Benutzung der Konstanten  $D$  steiler als die Sättigungsfronten der anderen Probleme. Für alle Probleme ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit  $c^{\text{num}}(0.7, 0.01) = c^{\text{num}}(0.48754, 0.7) \approx 6.34 \cdot 10^{-4}$  m/s jedoch identisch und stimmt mit der analytischen Geschwindigkeit nahezu überein.

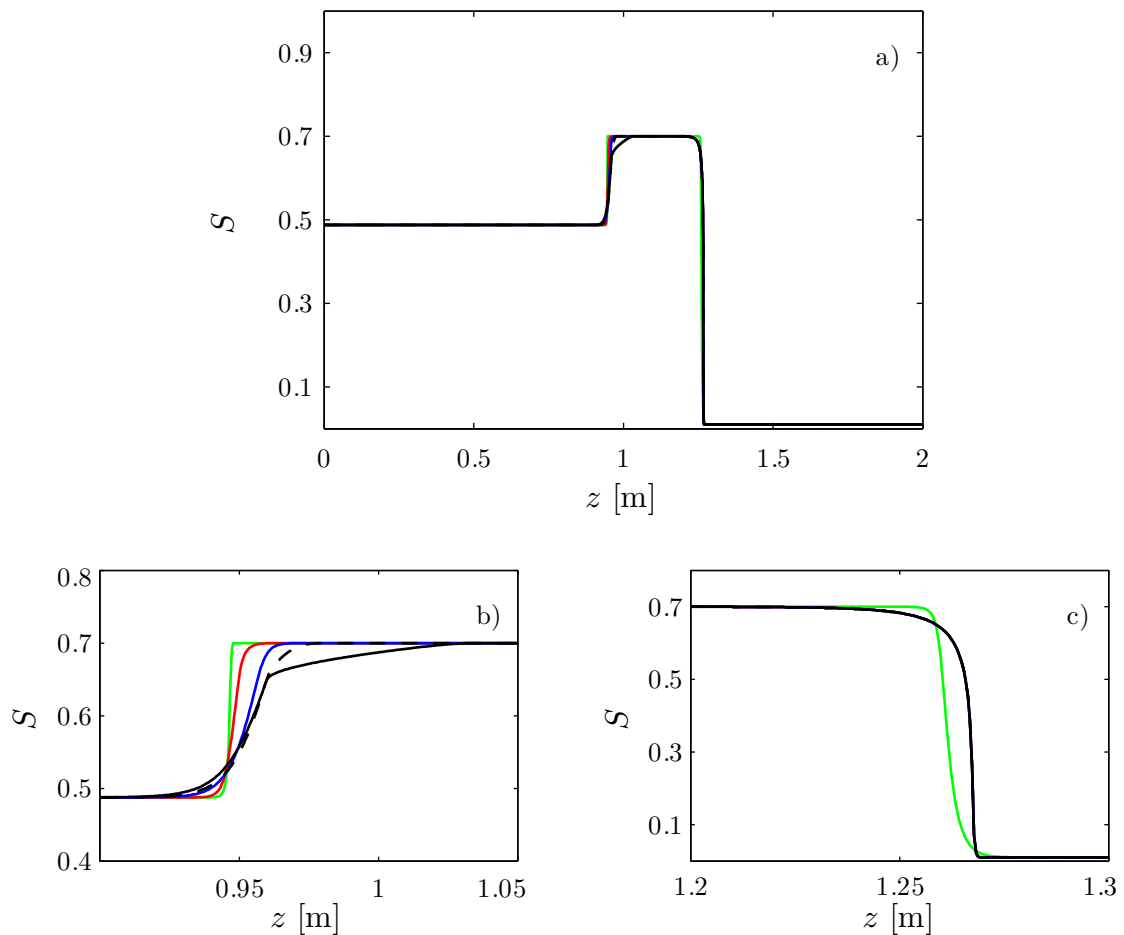
Die numerischen Lösungen sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 zusammengefasst. Die Lösungen sind für alle Probleme nichtmonotone Sättigungsprofile mit einer führenden Bewässerungsfront und nachfolgenden Entwässerungsfronten, welche sich nur in der Form unterscheiden. Für alle Probleme breiten sich die Be- und Entwässerungsfronten mit konstanten und identischen Geschwindigkeiten aus.

In Abbildung 6.3 ist die Lösung von Problem B als dreidimensionale Fläche dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die Breite des Plateaus konstant ist und sich auch die Fronten mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten.

In Abbildung 6.4 ist ein Vergleich der Sättigungsprofile für  $t = 2000$  s dargestellt. Die Profile von Problem A und B sind in schwarz, durchgezogen und gestrichelt, gezeichnet. Das Profil von Problem C ist in blau, das Profil von Problem D wiederum in rot und das Profil von Problem E in grün gezeichnet. Hier sieht man deutlich, dass die Bewässerungsfront unab-



**Abbildung 6.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B. Für  $t \geq t^B$  entsteht ein laufendes nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sind zeitlich konstant und identisch. Daher bleibt die Breite der Überschussregion konstant. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.2$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



1

**Abbildung 6.4:** Vergleich der numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme A-E zum Zeitpunkt  $t = 2000$  s. Problem A in schwarz (durchgezogen), Problem B in schwarz (gestrichelt), Problem C in blau, Problem D in rot und Problem E in grün. a): das komplette Sättigungsprofil. b): detaillierte Darstellung der Entwässerungsfront. c): detaillierte Darstellung der Bewässerungsfront.

hängig von der Wahl der Hysterese im Kapillardruck oder im kapillaren Fluss ist. Nur die Formen der Entwässerungsfronten unterscheiden sich.

## 6.4 Folgerung

In diesem Kapitel wurde das Anfangs- und Randwertproblem DG2 durch das Anfangs- und Randwertproblem DG4 reformuliert. Im Rahmen der Halbgruppentheorie und mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 wurde gezeigt, dass das hysteretische Anfangs- und Randwertproblem (DG4) eindeutige Lösungen im Funktionenraum  $\mathcal{C}((0, T_{S_0}]; \mathcal{H}_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{S_0}]; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{S_0}]; \mathcal{L}^2(\Omega))$  besitzt. Für nichtmonotonen Anfangsbedingung  $S_0$  sind diese Lösungen  $S(z, t)$  auch nichtmonoton im Ort  $z$ . Dieses Kapitel verifiziert die numerischen Lösungen der folgenden Kapitel. Zudem wurden erste numerische Beispiele für propagierende nichtmonotone Sättigungsprofile gezeigt.

Des Weiteren zeigt der Abschnitt 6.3, dass der Einfluss des diffusiven Terms auf die Ausbreitung der Lösungen sehr gering ist. Zudem ist zu erkennen, dass die Ausbreitung der Überschüsse unabhängig von der Hysterese sowohl im Kapillardruck als auch im kapillaren Fluss ist. Alleine die Form der Sättigungsfront ändert sich durch unterschiedliche kapillare Effekte. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Art der Ausbreitung eines ausreichend breiten Überschussplateaus wird alleine durch die Hysterese im fraktionalen Fluss bestimmt. Und der hysteretische fraktionale Fluss ist eine Folge aus der Hysterese in den relativen Permeabilitäten.

## **Teil IV**

# **Exploration des Parameterraumes**



## 7 Einfluss der Randbedingungen im Sprunghysteresemodell

Im folgenden Kapitel wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem Sprunghysteresemodell betrachtet und diskutiert. Ziel ist eine quasianalytische und numerische Exploration des Einflusses der Randbedingungen auf die Ausbreitung von Lösungen.

Die Ergebnisse aus diesem Kapitel sind in [67] veröffentlicht.

### 7.1 Modellproblem

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem fraktionalen Fluss (3.2) auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  und der Randbedingung

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B, & \text{für } t < t^B \\ S^{\text{in}} = 0.35, & \text{für } t \geq t^B \end{cases}, \quad (7.1a)$$

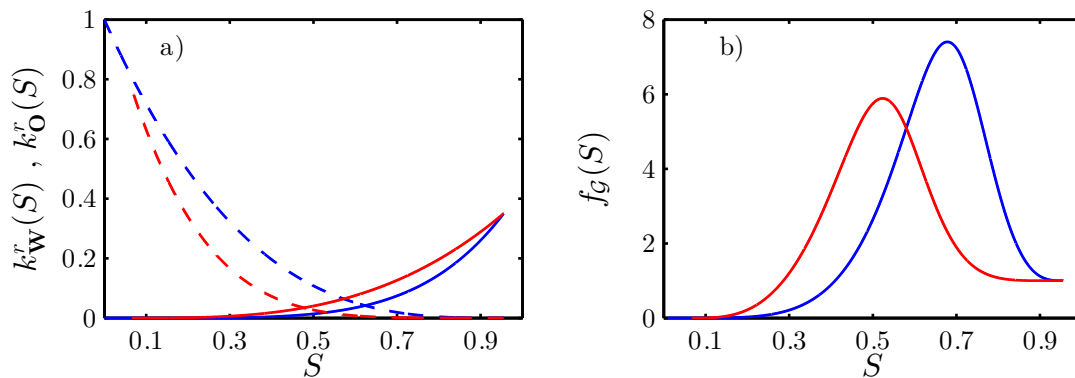
$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (7.1b)$$

beschreibt eine Zweiphasenströmung unter Einfluss der Gravitation. Zur Modellierung der Hysterese wird das Sprunghysteresemodell aus Kapitel 3 verwendet. Die dazugehörigen Fluid- und Materialparameter sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Die Hystereserandkurven der Be- und Entwässerung für die relativen Permeabilitäten sind in algebraischer Form, beschrieben durch die Gleichungen (3.16), gegeben. Für die Beschreibung der Randkurve der Kapillardruckfunktion wird, wie in allen Beispielen, die van-Genuchten-Form, siehe Gleichung (3.17), verwendet.

In Abbildung 7.1a) ist die Randkurve der relativen Permeabilitäten der benetzenden (durchgezogene Linien) und nichtbenetzenden Phase (gestrichelte Linien) mit dem Bewässerungsteil in blau und dem Entwässerungsteil in rot zu sehen. Die resultierenden fraktionalen Fluss-

**Tabelle 7.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Porosität	$\phi$	0.38	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	5	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.75	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.85	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.98	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	1	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	1000	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}\text{i}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	0.045	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$	0.6619	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$



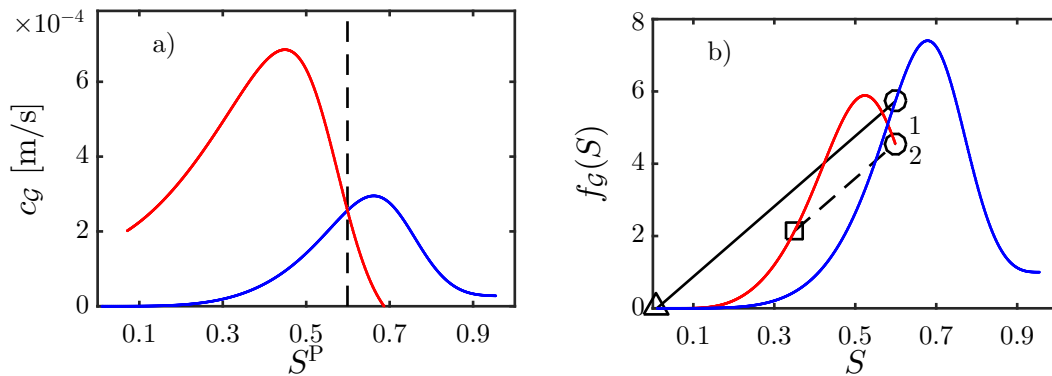
**Abbildung 7.1:** a): Hauptzweige der relativen Permeabilitäten der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  (durchgezogen) und der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  (gestrichelt) in algebraischer Form mit den Parametern aus Tabelle 7.1. Die Graphen der primären Bewässerung sind in blau und die der sekundären Entwässerung in rot gezeichnet.  
 b): Die resultierenden fraktionalen Flussfunktionen mit den Werten aus Tabelle 7.1. Analog dazu ist die primäre Bewässerung in blau und die sekundäre Entwässerung in rot dargestellt.

funktionen für die primäre Bewässerung (blau) und sekundäre Entwässerung (rot) sind in Abbildung 7.1b) dargestellt.

## 7.2 Quasianalytische Lösungen

In Abbildung 7.2a) sind die Geschwindigkeiten (4.4) für die Bewässerungsfront (blau) und die Entwässerungsfront (rot) in Abhängigkeit der Überschusssättigung  $S^P$  für die linksseitige Sättigung  $S^{\text{in}} = 0.35$  und die rechtsseitige Sättigung  $S^{\text{out}} = 0.01$  gezeichnet. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die Überschusssättigung  $S^P = S^{\text{TW}} = 0.5989$ , für welche die Be- und Entwässerungsfront identische Ausbreitungsgeschwindigkeiten haben. Abbildung 7.2a) ist die graphische Lösung von Gleichung (4.6). Es ist deutlich zu sehen, dass sich die Entwässerungsfront für Überschusssättigungen  $S^P < S^{\text{TW}} = 0.5989$  schneller und für  $S^P > S^{\text{TW}} = 0.5989$  langsamer als die Bewässerungsfront ausbreitet.

In Abbildung 7.2b) sind die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\mathcal{G}^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  der primären Bewässerung (blau) und  $f_{\mathcal{G}^{\text{dr}}} = f_{\text{dr}}$  der Entwässerung (rot) für die Überschusssättigung  $S^P = S^{\text{TW}} = 0.5989$  abgebildet. Der Graph des Entwässerungsprozesses berechnet sich aus den Sättigungen  $S_* = A = 0.5989$ . Außerdem sind in Abbildung 7.2b) die Punkte  $(S^{\text{out}}, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  mit  $\triangle$ ,  $(S^{\text{in}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  mit  $\square$ ,  $(S = 0.5989, f_{\text{im}}(S = 0.5989))$  mit  $\circ 1$  und  $(S = 0.5989, f_{\text{dr}}(S = 0.5989))$  mit  $\circ 2$  markiert. Die Steigungen der Sekanten sind jeweils proportional zu der Geschwindigkeit einer Bewässerungsfront mit den Sättigungen  $S^{\text{out}}$  und  $S^{\text{TW}} = 0.5989$  (durch-



**Abbildung 7.2:** a): Die Geschwindigkeitsfunktionen (4.4a) und (4.4b) für feste  $S^{out} = 0.01$  und  $S^{in} = 0.35$  aus Tabelle 7.1. Die Geschwindigkeitsfunktion des Bewässerungsprozesses ist in blau gezeichnet und die Geschwindigkeitsfunktion des Entwässerungsprozesses in rot. Der Schnittpunkt gibt an, für welche Überschusssättigung (Plateausättigung) die Fronten dieselbe Geschwindigkeit haben und sich als laufende Wellen ausbreiten. Hier ist der Schnittpunkt bei  $S^P = 0.5989$ .

b): Die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{im}$  der primären Bewässerung und  $f_{dr}$  eines Entwässerungsprozesses. Die Punkte  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.35, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ),  $(S^P = S^B = 0.5989, f_{im}(S^B))$  ( $\circ 1$ ) und  $(S^P = S^B = 0.5989, f_{dr}(S^B))$  ( $\circ 2$ ) sind markiert. Die Steigungen der eingezeichneten Geraden sind proportional zu den Geschwindigkeiten der Sättigungsfronten. Hier entspricht die durchgezogene Gerade der Bewässerungsfront und die gestrichelte Gerade der Entwässerungsfront. Im Fall der eingezeichneten Geraden haben beide Fronten dieselbe Geschwindigkeit und somit breitet sich ein nicht-monotones Sättigungsprofil mit den gewählten Sättigungen  $(S^{in}, S^{out}, S^P) = (0.01, 0.35, 0.5989)$  als laufende Welle aus.

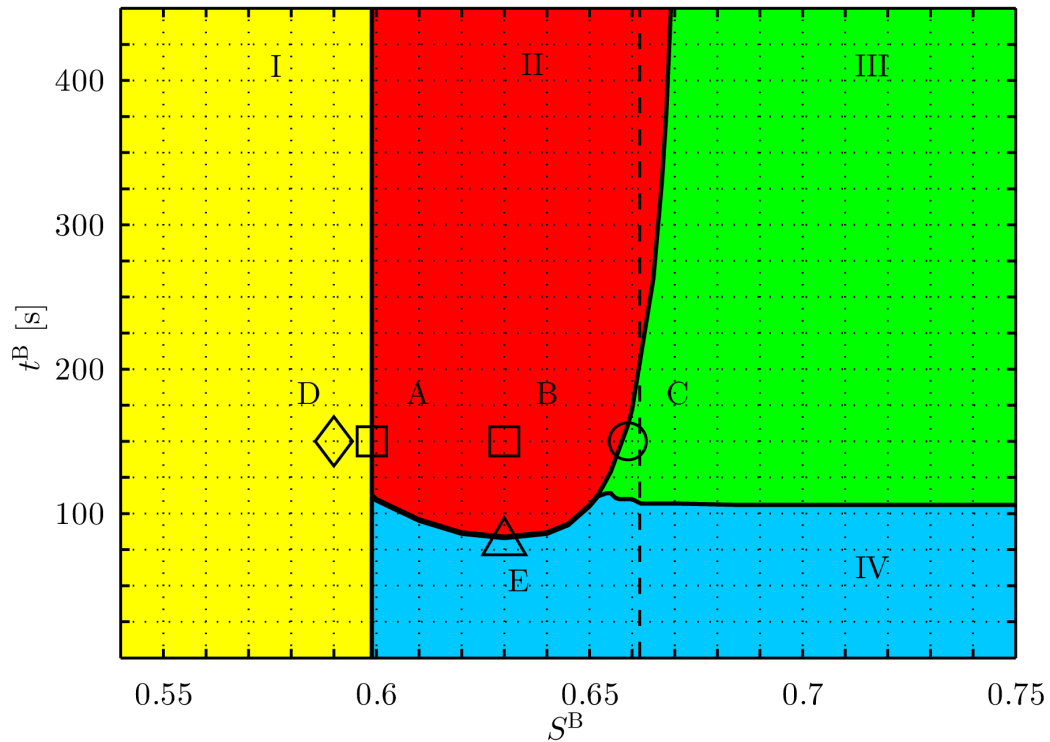
gezogene Sekante) und einer Entwässerungsfront mit den Sättigungen  $S^{\text{TW}} = 0.5989$  und  $S^{\text{in}} = 0.35$ . Der Proportionalitätsfaktor ist  $Q/\phi$ , siehe Gleichungen (2.36) und (4.3).

Der Einfluss der Anfangs- und Randwerte (7.1) wird durch die Fixierung von  $S^{\text{in}} = 0.35$  und  $S^{\text{out}} = 0.01$  (siehe auch Tabelle 7.2) und eine systematische Variation von  $S^{\text{B}}$  und  $t^{\text{B}}$  studiert. Die Lösung des hysteretischen Anfangs- und Randwertproblems (DG2) mit der Randbedingung (7.1) für Zeiten  $t < t^{\text{B}}$  ist eine monotone Bewässerungsfront mit Plateausättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}}$ . Diese Front bewegt sich für  $t < t^{\text{B}}$  in positiver  $z$ -Richtung durch das poröse Medium. Ab dem Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}}$  fällt die Sättigung am linken Rand von  $S^{\text{B}}$  auf  $S^{\text{in}} = 0.35$  ab und eine Entwässerungsfront folgt der bereits existierenden Bewässerungsfront. Sowohl die Bewässerung als auch die Entwässerung breiten sich für  $S^{\text{P}} \leq S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$  als Stoßfronten aus, da für den fraktionalen Fluss  $f_{\text{im}}$  der Bewässerung (blau) und  $S \in [S^{\text{out}} = 0.01, S^{\text{P}}]$  Gleichung (2.29) und für den fraktionalen Fluss  $f_{\text{dr}}$  der Entwässerung (rot) für  $S \in [S^{\text{in}} = 0.35, S_{\text{Welge}}^{\text{im}}]$  Gleichung (2.30) gilt. Die Erfüllung der Bedingungen (2.29) und (2.30) ist auch graphisch in Abbildung 7.2b) sichtbar. Der entstandene Sättigungsüberschuss breitet sich dann für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  in Abhängigkeit von der Überschussättigung  $S^{\text{B}}$ , entweder als laufende Welle oder als Überschuss mit wachsender oder schrumpfender Überschussbreite, aus.

## 7.3 Numerische Lösungen

Im folgenden Abschnitt werden die Parameter  $(S^{\text{B}}, t^{\text{B}})$  der Randbedingung (7.1a) variiert und die numerischen Lösungen untersucht. Anhand der systematischen Studie sollen Bereiche identifiziert werden, in denen sich die numerischen Lösungen qualitativ gleich verhalten. Zu diesem Zweck wurden über 200 numerische Simulationen mit Open $\nabla$ FOAM durchgeführt und manuell ausgewertet, da eine automatisierte Untersuchung und Analyse mit den verfügbaren Ressourcen nicht möglich ist.

Abbildung 7.3 zeigt den  $(S^{\text{B}}, t^{\text{B}})$ -Parameterraum mit einer Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse. Es sind vier Bereiche I-IV markiert, in denen sich die numerischen Lösungen für sehr große Zeiten  $t$  qualitativ gleich verhalten. Die Bereiche II und III kennzeichnen Lösungen, bei denen ein Sättigungsüberschuss für alle Zeiten  $t \geq t^{\text{B}}$  erhalten bleibt. Die Bereiche I und IV wiederum stehen für numerische Lösungen, bei denen der Sättigungsüberschuss verschwindet und sich ein monotonies Sättigungsprofil mit Frontsättigung  $S^{\text{in}}$  ausbreitet. Die vertikale Gerade bei  $S^{\text{B}} = S^{\text{P}} = S^{\text{TW}} = 0.5989$  trennt den Bereich I vom Rest des  $(S^{\text{B}}, t^{\text{B}})$ -Parameterraumes.



**Abbildung 7.3:** Der  $(S^B, t^B)$ -Parameterraum ist in vier Bereiche unterteilt, in denen sich die numerischen Lösungen für sehr große Zeiten  $t$  qualitativ gleich verhalten. Der Sättigungsüberschuss verschwindet vollständig für Parameter aus den Bereichen I und IV. Die Lösungen für Parameter aus dem Bereich II breiten sich als laufende Wellen aus für  $S^B = S^P = S^{TW} = 0.5989$  oder als nichtmonotone Profile mit wachsender Überschussbreite. Für die Plateausättigung gilt in Bereich II immer  $S^P = S^B$ . In Bereich III sind die Lösungen, ähnlich wie in Bereich II, nichtmonotone Sättigungsprofile mit wachsender Überschussbreite. Jedoch nimmt die Überschussättigung für  $t \geq t^B$  ab, bis die Plateausättigung einen konstanten Wert erreicht hat,  $0.5989 = S^{TW} < S^P < S_{\text{Wolge}}^{\text{im}}$ .

Für Sättigungen  $S^B = S^P < S^{TW} = 0.5989$  ist die Entwässerungsfront immer schneller als die Bewässerungsfront,  $c_{dr}(S^{in} = 0.35, S^B) > c_{im}(S^B, S^{out} = 0.01)$ , siehe auch Abbildung 7.2a). Der Bereich I (gelb) definiert daher Lösungen, bei denen sich die Entwässerungsfront schneller ausbreitet als die Bewässerungsfront. Die Breite der Überschussregion schrumpft, bis der Überschuss vollständig verschwunden ist und nur noch ein monotones Sättigungsprofil übrig bleibt.

Für Sättigungen  $S^B = S^P > S^{TW} = 0.5989$  ist die Entwässerungsfront immer langsamer als die Bewässerungsfront,  $c_{dr}(S^{in} = 0.35, S^B) < c_{im}(S^B, S^{out} = 0.01)$ , siehe auch Abbildung 7.2a). Die Lösungen für sehr große Zeiten  $t$  mit den Randparametern aus den Bereichen II (rot) und III (grün) sind nichtmonotone Sättigungsprofile mit anwachsender Überschussbreite. Der Unterschied zwischen diesen beiden Bereichen ist die finale Überschussättigung. Für den Bereich II bleibt die Plateausättigung  $S^B$ , die durch die Randbedingung vorgegeben wird, erhalten,  $S^P = S^B$ . In Bereich III sinkt die Plateausättigung in Abhängigkeit von  $S^B$  und  $t^B$  auf einen Wert von  $0.5989 = S^{TW} < S^P < \min\{S^B, S_{Welge}^{im}\}$  ab und bleibt dann für sehr große Zeiten  $t$  konstant.

Die numerischen Lösungen aus Bereich IV für große Zeiten  $t$  sind, wie in Bereich I, monotone Sättigungsprofile. Die initial erzeugten Sättigungsüberschüsse aus diesem Bereich sind so schmal, dass die diffusiven Kräfte der Kapillardruckfunktion die Nichtmonotonie schon nach kurzer Zeit zerstört haben.

Die Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen in dem  $(S^B, t^B)$ -Parameterraum sind numerische Approximationen aus diversen Simulationen und nicht glatt. Eine Ausnahme hierfür ist der Grenze zwischen Bereich I und dem Rest des Parameterraumes bei  $S^B = S^{TW} = 0.5989$ . Diese Grenze hat den kleinsten numerischen Fehler.

Die fünf nachfolgenden Anfangs- und Randwertprobleme A-E aus Tabelle 7.2 stehen beispielhaft für das unterschiedliche Verhalten der Lösungen und die starke Abhängigkeit von den Randwerten. Die numerischen Lösungen werden als dreidimensionale Flächen in Abhängigkeit von Ort  $z$  und Zeit  $t$  in den Abbildungen 7.4-7.8 gezeichnet und sind zudem in Abbildung 7.3 eingetragen.

### 7.3.1 Problem A

In Abbildung 7.4 ist die numerische Lösung von Problem A zu sehen. Der stark ausgeprägte Sättigungsüberschuss ist gut zu erkennen. Des Weiteren sieht man, dass die Geschwindigkeiten sowohl von der Bewässerungsfront, als auch von der Entwässerungsfront zeitlich kon-

**Tabelle 7.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell
A	0.01	0.35	0.5989	150 s	Sprunghysterese
B	0.01	0.35	0.63	150 s	Sprunghysterese
C	0.01	0.35	0.659	150 s	Sprunghysterese
D	0.01	0.35	0.59	150 s	Sprunghysterese
E	0.01	0.35	0.63	80 s	Sprunghysterese

stant sind. Die Abbildung zeigt auch deutlich, dass die Breite des Sättigungsüberschusses konstant bleibt, was durch die analytischen Betrachtungen in Abschnitt 7.2 vorhergesagt wurde. Die analytischen Geschwindigkeiten, welche mit den Gleichungen (4.4) berechnet werden  $c_{\text{im}}(0.5989, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.35, 0.5989) = 2.56 \cdot 10^{-4}$  m/s, stimmen nahezu perfekt mit den numerischen Geschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.5989, 0.01) = c^{\text{num}}(0.35, 0.5989) = 2.55 \cdot 10^{-4}$  m/s überein.

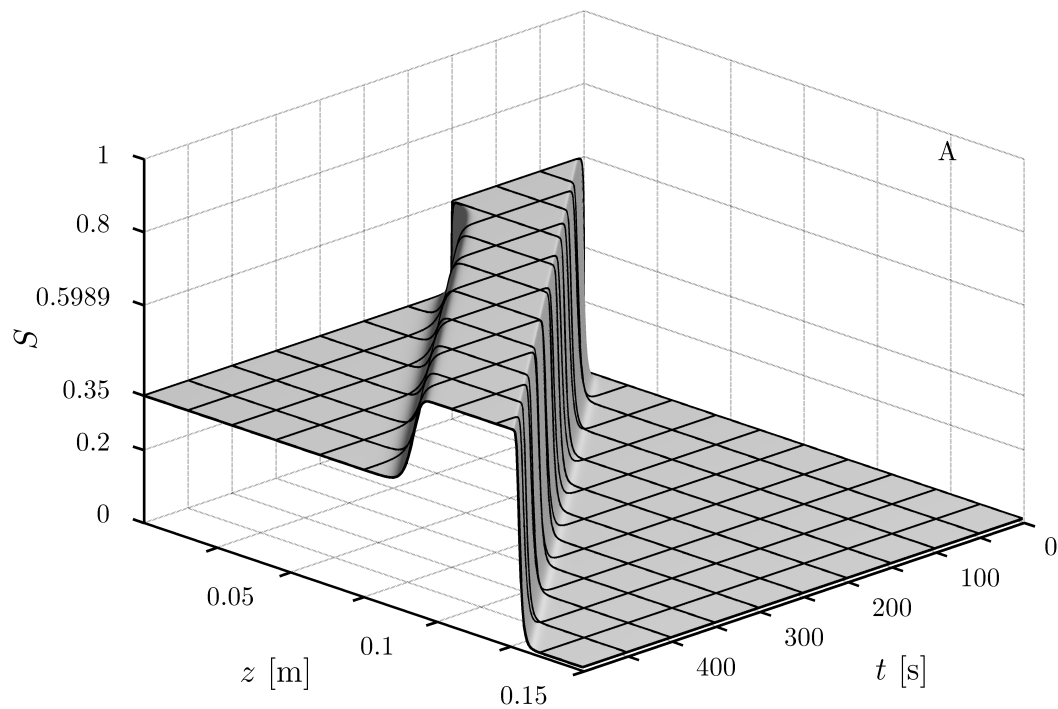
### 7.3.2 Problem B

Problem B ist ein Beispiel für die Parameter aus Bereich II. Das nichtmonotone Sättigungsprofil hat die Plateausättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.63$  und aus den Gleichungen (4.4) folgt, dass die Entwässerungsfront immer langsamer ist als die Bewässerungsfront. Folglich verbreitert sich das Plateau linear mit der Zeit  $t$ . Die Geschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.63, 0.01) = 2.82 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.35, 0.63) = 1.35 \cdot 10^{-4}$  m/s, die direkt in der numerischen Lösung abgelesen werden können, stimmen wieder mit den analytischen Geschwindigkeiten  $c_{\text{im}}(0.63, 0.01) = 2.84 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(0.35, 0.63) = 1.37 \cdot 10^{-4}$  m/s überein. Auch in diesem Beispiel ist gut zu sehen, dass die Geschwindigkeiten zeitlich konstant sind und die Plateausättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.63$  sich nicht ändert.

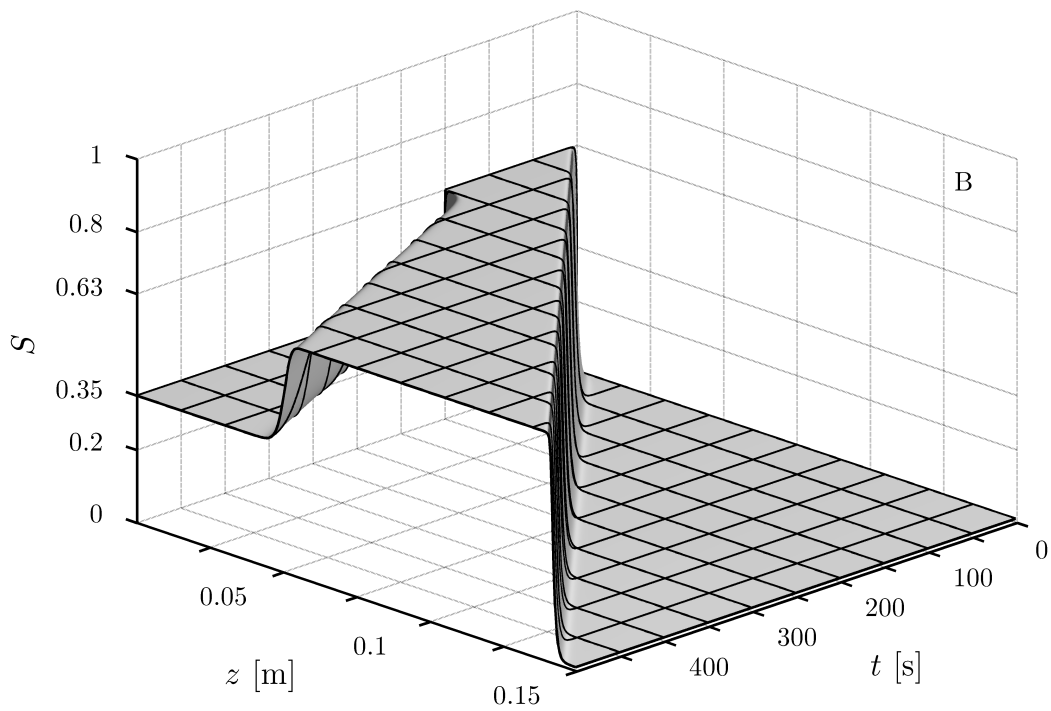
### 7.3.3 Problem C

Die Parameter von Problem C sind aus dem Bereich III und die numerische Lösung ist in Abbildung 7.6 dargestellt. Das nichtmonotone Sättigungsprofil, das sich für  $t \geq t^{\text{B}}$  ausbildet,





**Abbildung 7.4:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A mit  $(S^B, t^B) = (0.5989, 150 \text{ s})$ . Für  $t \geq t^B$  entsteht ein laufendes nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sind zeitlich konstant und identisch. Daher bleibt die Breite der Überschussregion konstant. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015 \text{ m}$  und  $\Delta t = 50 \text{ s}$  eingezeichnet.



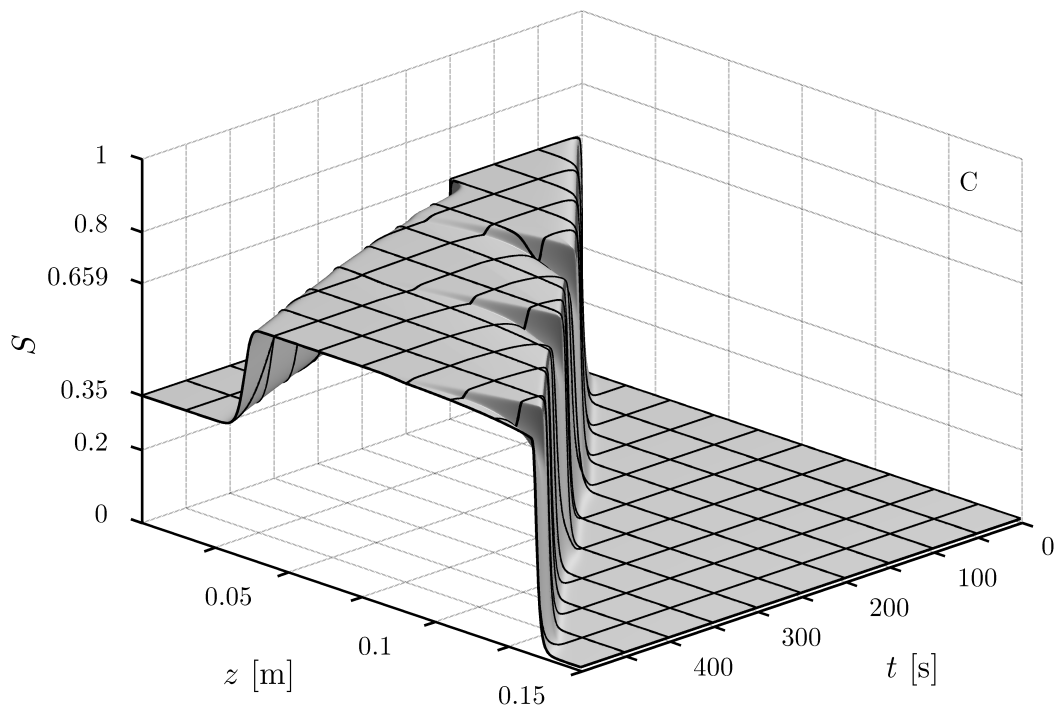
**Abbildung 7.5:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B mit  $(S^B, t^B) = (0.63, 150 \text{ s})$ . Für  $t \geq t^B$  entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sind zeitlich konstant, jedoch mit einer schnelleren Bewässerungsfront. Die Breite der Überschussregion vergrößert sich somit. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015 \text{ m}$  und  $\Delta t = 50 \text{ s}$  eingezeichnet.

besteht aus einer schnellen vorauseilenden Bewässerungsfront und einer langsameren nachfolgenden Entwässerungsfront. Für Probleme aus Bereich III ist die Überschusssättigung  $S^P$  nicht stabil und sinkt auf eine Sättigung  $S$  mit  $0.5989 = S^{TW} \geq S \geq \min\{S^B, S_{\text{Welge}}^{\text{sim}}\}$  ab. In der numerischen Lösung von Problem C fällt die Überschusssättigung langsam von  $S^P = S^B = 0.659$  auf  $S^P \approx 0.631$  ab. Für sehr große Zeiten  $t$  mit  $t \gg t^B$  ist die numerische Lösung von Problem C ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit einer konstanten Plateausättigung  $S^P \approx 0.631$ . Dieses Profil ist in Abbildung 7.6 nicht zu sehen, da sich dieses Plateau erst ab  $t \approx 3000$  s einstellt. Für dieses endgültige Profil stimmen ebenfalls die analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_{\text{im}}(0.631, 0.01) = 2.84 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(0.35, 0.631) = 1.34 \cdot 10^{-4}$  m/s mit den numerischen Geschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.631, 0.01) \approx 2.85 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.35, 0.631) \approx 1.33 \cdot 10^{-4}$  m/s überein. Die Breite des Sättigungsüberschusses nimmt linear mit der Zeit zu, da  $c_{\text{im}}(0.631, 0.01) > c_{\text{dr}}(0.35, 0.631)$  gilt. Während des Absinkens der Überschusssättigung ist es unvermeidbar, dass die Entwässerungsregion auf die Bewässerungsfront trifft. Dabei kommt es zu plötzlichen Übergängen zwischen Be- und Entwässerung, welche als Frontfluktuationen deutlich in Abbildung 7.6 zu sehen sind.

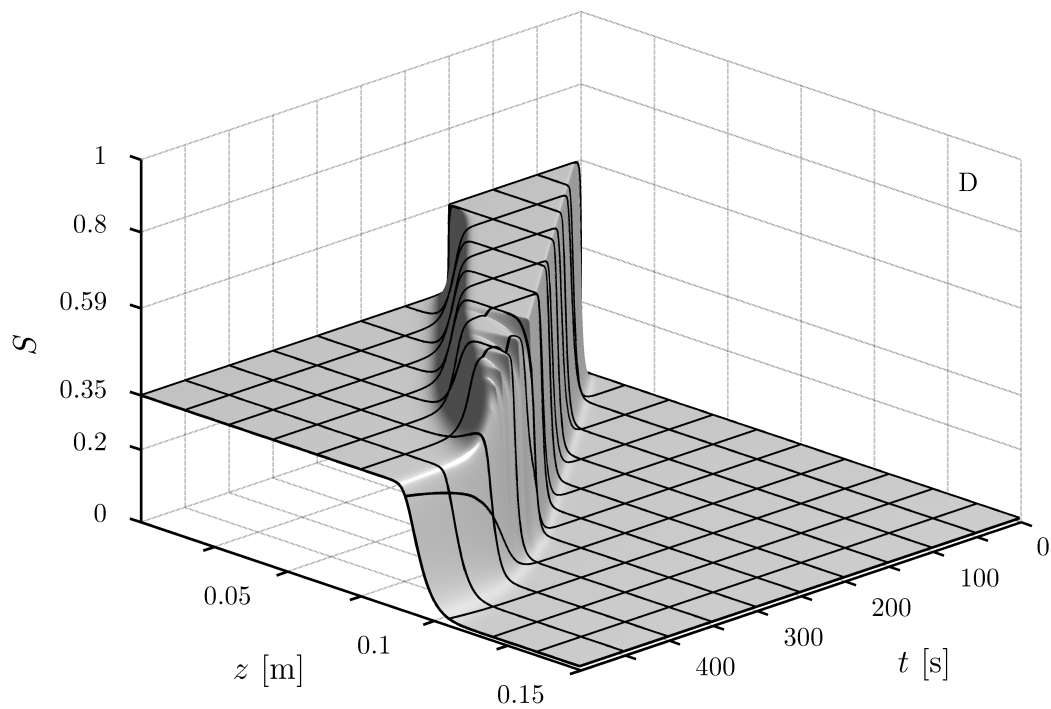
### 7.3.4 Problem D

Abbildung 7.7 zeigt das typische numerische Lösungsverhalten für Probleme aus dem Bereich I. Die nachfolgende Entwässerungsfront mit Geschwindigkeit  $c_{\text{dr}}(0.35, 0.59) = 2.94 \cdot 10^{-4}$  m/s ist immer schneller als die Bewässerungsfront  $c_{\text{im}}(0.59, 0.01) = 2.46 \cdot 10^{-4}$  m/s und nach einer ausreichend langen Zeit  $t > t^B$  ist die Lösung des Anfangs- und Randwertproblems ein monotones Sättigungsprofil mit Stoßfront und Frontsättigung  $S^{\text{in}}$ .

Die numerische Lösung von Problem D kann für Zeiten  $t \geq t^B$  in drei Phasen unterteilt werden. Zuerst, von  $t = t^B$  bis  $t \approx 300$  s, bewegt sich das nichtmonotone Sättigungsprofil mit abnehmender Überschussbreite durch das poröse Medium. Die numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.59, 0.01) \approx 2.45 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.35, 0.59) \approx 2.95 \cdot 10^{-4}$  m/s stimmen mit den analytischen Geschwindigkeiten sehr gut überein. Danach, von  $t > 300$  s bis  $t \approx 450$  s, hat die Entwässerung die Bewässerung eingeholt und die Überschusssättigung nimmt ab. Während des Absinkens der Überschusssättigung treten, vergleichbar mit Problem C aus Bereich III, Fluktuationen im Bereich der Bewässerungsfront auf. Zuletzt, ab  $t \approx 450$  s, ist der Überschuss vollständig verschwunden und nur noch ein monotones Profil ist zu sehen. Auch hier stimmt die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit des endgültigen Profils mit der analytischen Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.35, 0.01) = 3.52 \cdot 10^{-5}$  m/s überein.



**Abbildung 7.6:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem C mit  $(S^B, t^B) = (0.659, 150 \text{ s})$ . Für  $t \geq t^B$  entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Überschussättigung sinkt für  $t \geq t^B$  auf  $0.631 = S^P < S^B$  ab und bleibt dann konstant. Die Geschwindigkeit der Bewässerungsfront ist immer größer als die der Entwässerungsfront,  $c_{\text{im}}(S^P > 0.5989, 0.01) > c_{\text{dr}}(0.35, S^P > 0.5989)$ . Die Breite der Überschussregion vergrößert sich somit. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015 \text{ m}$  und  $\Delta t = 50 \text{ s}$  eingezeichnet.



**Abbildung 7.7:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem D mit  $(S^B, t^B) = (0.59, 150 \text{ s})$ . Für  $t \geq t^B$  entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Entwässerungsfront breitet sich schneller aus als die Bewässerungsfront und daher nimmt die Breite der Überschussregion linear mit der Zeit ab, bis der Überschuss vollständig verschwunden ist. Für sehr große Zeiten  $t$  ist die Lösung ein monotones Sättigungsprofil. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015 \text{ m}$  und  $\Delta t = 50 \text{ s}$  eingezeichnet.

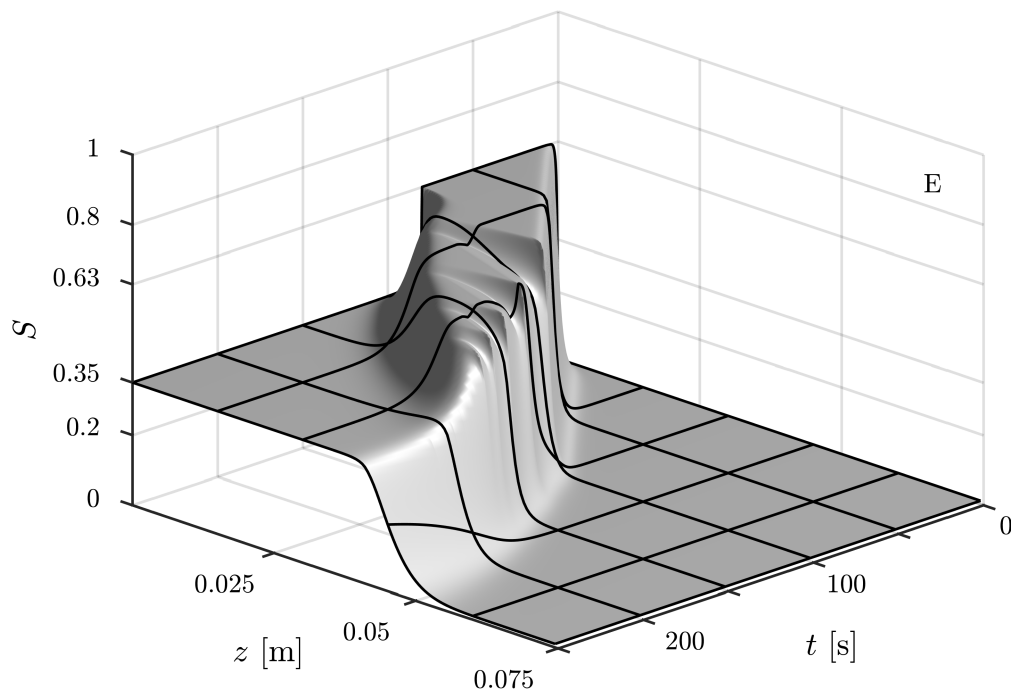
### 7.3.5 Problem E

Die numerische Lösung von Problem E ist typisch für Anfangs- und Randwertprobleme mit Parametern aus Bereich IV und zeigt den starken Einfluss der Zeit  $t^B$  auf die numerische Lösung. Zwar gilt für ein nichtmonotones Profil mit Plateauwerten  $S^B > S^{TW} = 0.5989$ , dass die Bewässerungsfront sich schneller ausbreitet als die Entwässerungsfront, aber für diese Probleme ist zur Zeit  $t^B$  kein ausreichend breites Plateau vorhanden, welches sich ausbreiten kann. Durch den kapillaren Fluss und dessen glättende Eigenschaft breitet sich die Entwässerung sofort über das gesamte Plateau aus und sorgt für ein Absinken der Plateausättigung. Für sehr große Zeiten  $t$  bleibt dann ein monotonen Sättigungsprofil mit Frontsättigung  $S^{in} = 0.35$  übrig. Abbildung 7.8 zeigt die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung von Problem E. Während des Absinkens der Plateausättigung treten wieder Fluktuationen im Bereich der Bewässerungsfront auf. Schon nach kurzer Zeit,  $t \approx 200$  s, ist der Überschuss vollständig verschwunden und ein monotonen Profil bewegt sich durch das Medium. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des monotonen Sättigungsprofils in der numerischen Lösung stimmt erneut mit der analytischen Geschwindigkeit  $c_{im}(0.35, 0.01) = 3.52 \cdot 10^{-5}$  m/s überein.

## 7.4 Folgerung

Die quasianalytischen und numerischen Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems (DG2) mit (7.1a) im Rahmen der Sprunghysterese zeigen eindeutig die starke Abhängigkeit der Lösung von den Anfangs- und Randbedingungen. Je nachdem wie die Randbedingungen gewählt werden, erhält man nichtmonotone Sättigungsprofile mit gleichbleibender Überschussbreite, wachsender Überschussbreite oder verschwindende Überschüsse, die zu monotonen Sättigungsprofilen führen.

Zusätzlich wurde bei der systematischen Untersuchung des  $(S^B, t^B)$ -Parameterraumes überprüft, dass die diskutierten numerischen Lösungsverhalten - Ausbreitung als laufende Welle, Verbreiterung der Überschussregion und Verschwinden des Überschusses - unabhängig von der Hysterese im Kapillardruck oder Kapillarfluss sind.



**Abbildung 7.8:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem E mit  $(S^B, t^B) = (0.63, 80 \text{ s})$ . Für  $t \geq t^B$  entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Überschussregion wird allerdings sofort durch die diffusiven Effekte des Entwässerungsprozesses zerstört. Für sehr große Zeiten  $t$  ist die Lösung ein monotones Sättigungsprofil. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015 \text{ m}$  und  $\Delta t = 50 \text{ s}$  eingezeichnet.

## 8 Einfluss der Randbedingungen im $\delta$ -Hysteresemodell

Analog zu Kapitel 7 wird in diesem Kapitel das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) im Rahmen der  $\delta$ -Hysterese diskutiert. Im Speziellen wird der Einfluss der Randbedingungen auf die Lösungen untersucht. Ziel ist eine quasianalytische und numerische Exploration des Einflusses der Randbedingungen auf die Ausbreitung von Lösungen und die Bestimmung von unterschiedlichen Lösungstypen.

### 8.1 Modellproblem

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem fraktionalen Fluss (3.2) auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  wird mit der Randbedingung

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B, & \text{für } t < t^B \\ S^{\text{in}}, & \text{für } t \geq t^B \end{cases}, \quad (8.1a)$$

$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (8.1b)$$

und dem  $\delta$ -Hysteresemodell aus Kapitel 3 bestimmt. In den beiden folgenden Unterkapiteln wird zuerst der Einfluss der Parameter  $(S^B, t^B)$  und danach des Parameters  $S^{\text{in}}$  untersucht. In diesen beiden Teilen werden unterschiedliche Materialparameter des porösen Mediums benutzt, um das Anfangs- und Randwertproblem zu spezifizieren.



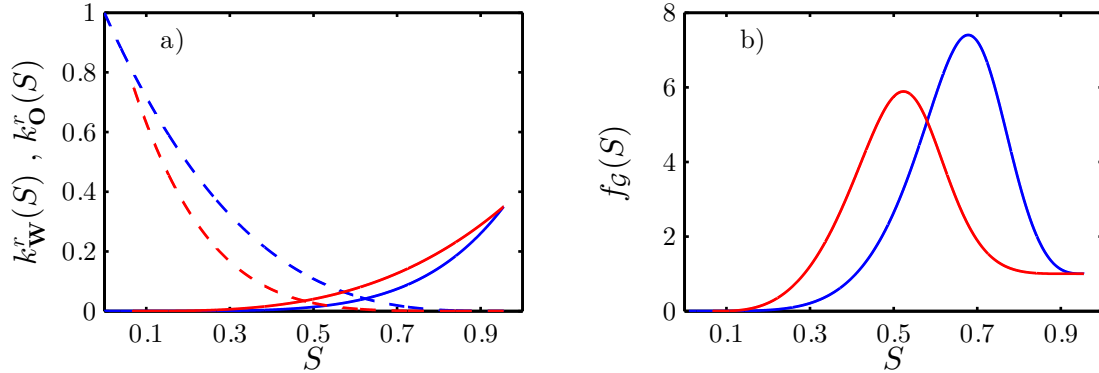
**Tabelle 8.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	5	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.75	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}\text{i}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	0.045	-
Randsättigung	$S^{\text{out}}$	0.01	-
Randsättigung	$S^{\text{in}}$	0.425	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$	0.6619	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$

## 8.2 Variation der Randwerte ( $S^B, t^B$ )

### 8.2.1 Modellparameter

Für die Exploration der Randwerte ( $S^B, t^B$ ) werden die Fluid- und Materialparameter aus Tabelle 8.1 benutzt. Die Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten  $k_{\mathbb{W}}^r, k_{\mathbb{O}}^r$  sind in algebraischer Form (3.16) und die Hystereserandkurven des Kapillardrucks  $P_c$  werden in der van-Genuchten-Form (3.17) angegeben. In Abbildung 8.1 sind die Randkurven der relativen Permeabilitäten, für die primäre Bewässerung und die sekundäre Entwässerung (blau und rot), und die resultierenden fraktionalen Flusskurven gezeichnet.



**Abbildung 8.1:** a): Hauptzweige der relativen Permeabilitäten mit den Parametern aus Tabelle 8.1. Der primäre Bewässerungsprozess ist in blau und der sekundäre Entwässerungsprozess in rot dargestellt.  
 b): Resultierende fraktionale Flussfunktionen für die relativen Permeabilitäten. Analoge Kennzeichnung, primärer Bewässerungsprozess in blau und sekundärer Entwässerungsprozess in rot.

**Tabelle 8.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.425	0.6	100 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
B	0.01	0.425	0.6	200 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
C	0.01	0.425	0.6	700 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
D	0.01	0.425	0.95	100 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
E	0.01	0.425	0.95	200 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
F	0.01	0.425	0.95	700 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

In Tabelle 8.2 sind die Anfangs- und Randwerte und die verwendeten Hystereseparameter der folgenden diskutierten Beispiele aufgelistet. Dabei sind die Randsättigungen  $S^{\text{out}} = 0.01$  und  $S^{\text{in}} = 0.425$ , der Hystereseparameter  $\delta = 0.05$  und die Streichkurven in allen Beispielen identisch. Die Probleme A-C und D-F unterscheiden sich jeweils nur im Umschaltzeitpunkt  $t^B \in \{100 \text{ s}, 200 \text{ s}, 700 \text{ s}\}$ . Daher werden diese Beispiele jeweils gemeinsam analysiert und miteinander verglichen, um den Einfluss des Parameters  $t^B$  auf die Ausbreitung des Sättigungsüberschusses zu studieren. Die initiale Randsättigung  $S^B$  ist in den Beispielen A-C mit  $S^B = 0.6$  kleiner als die Welge-Sättigung und in den anderen Fällen D-F mit  $S^B = 0.95$  größer als die Welge-Sättigung.

## 8.2.2 Quasianalytischer Vergleich

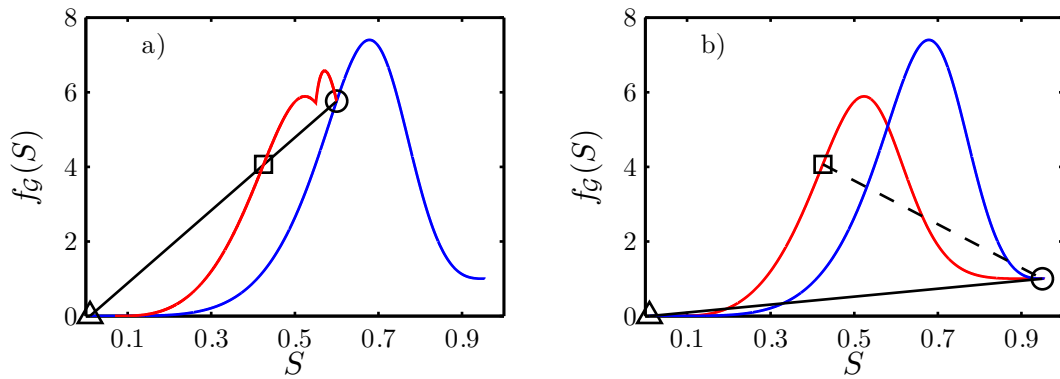
Die quasianalytische Betrachtung ist in zwei Teile unterteilt. Der erste Teil behandelt die Probleme A-C, bei denen die initiale Randsättigung unterhalb der Welge-Sättigung liegt, während der zweite Teil die Probleme D-F, mit der Randsättigung  $S^B = 0.95$ , welche größer als die Welge-Sättigung ist, diskutiert.

Zur quasianalytischen Diskussion werden die fraktionalen Flussfunktionen für die jeweiligen Probleme benötigt. In Abbildung 8.2 sind die fraktionalen Flussfunktionen für die primäre Bewässerung  $f_{G^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  in blau (identisch zu Abbildung 8.1) und die Entwässerungsprozesse  $f_{G^{\text{dr} \cup G^{\text{sc}}}} = f_{\text{dr}}$  für die Probleme A-C a) und D-F b) in rot dargestellt. Die Graphen der Entwässerungsprozesse der Probleme A-C werden mit den Sättigungen  $S_* = 0.6$  und  $A = 0.575$  berechnet. Für die Graphen der Entwässerungsprozesse der übrigen Probleme D-F werden die Sättigungen  $S_* = 0.95$  und  $A = 0.925$  verwendet. In Abbildungen 8.2a) und b) sind jeweils die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.425, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B, f_{\text{im}}(S^B) = f_{\text{dr}}(S^B))$  ( $\circ$ ) markiert. Zusätzlich sind die Sekanten der Be- und Entwässerungsprozesse als Sekanten, die  $\triangle$  und  $\circ$  bzw.  $\square$  und  $\circ$  verbinden, eingezeichnet.

### 8.2.2.1 $S^B \leq S_{\text{Welge}}$ (Probleme A-C)

In Abbildung 8.2a) fällt die Sekante der Bewässerung, welche  $\triangle$  und  $\circ$  verbindet, mit der Sekante der Entwässerung, welche  $\square$  und  $\circ$  verbindet, zusammen. Damit ist für die Sättigungen  $S^{\text{out}} = 0.01$ ,  $S^{\text{in}} = 0.425$  und  $S^P = S^{\text{TW}} = 0.6$  Gleichung (4.6) erfüllt und der Überschuss breitet sich als laufende Welle aus.

Die Lösung der Anfangs- und Randwertprobleme A-C bilden für Zeiten bis  $t = t^B$  eine Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.6$  aus. Für Zeiten  $t > t^B$  wird am Einlass, am



**Abbildung 8.2:** a): Fraktionale Flusskurven  $f_{im}$  (blau) und  $f_{dr}$  (rot) der Probleme A-C mit den relativen Permeabilitäten aus Abbildung 8.1a). Die Punkte  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.425, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B = 0.6, f_{im}(S^B) = f_{dr}(S^B))$  ( $\circ$ ) sind markiert. Die Steigungen der eingezeichneten Sekante ist proportional zu der Geschwindigkeit der Sättigungsfronten. Ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit den gewählten Sättigungen  $(S^{in}, S^{out}, S^P) = (0.01, 0.425, 0.6)$  breitet sich als laufende Welle aus.

b): Fraktionale Flusskurven  $f_{im}$  (blau) und  $f_{dr}$  (rot) von den Problemen D-F mit den relativen Permeabilitäten aus Abbildung 8.1a). Auch hier sind die Punkte  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.425, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B = 0.9, f_{im}(S^B) = f_{dr}(S^B))$  ( $\circ$ ) markiert. Die Steigungen der eingezeichneten Sekante ist proportional zu der Geschwindigkeit der Sättigungsfronten.

Ort  $z = 0$ , durch das Absenken der Sättigung auf  $S^{in} = 0.425$  eine Entwässerung induziert. Falls das Plateau mit Sättigung  $S^B$  zur Zeit  $t^B$  so breit ist, dass die Bewässerungsfront nicht von den diffusiven Effekten der Entwässerung beeinflusst wird, breitet sich der Sättigungsüberschuss als laufende Welle aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront werden mit (4.4) berechnet und sind  $c_{im}(0.6, 0.01) = c_{dr}(0.425, 0.6) = 2.8 \cdot 10^{-4}$  m/s. Interagiert die Bewässerungsfront mit der Entwässerungsfront, nimmt die Plateausättigung ab und damit verbunden ändern sich auch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten beider Fronten. Im Allgemeinen sind die Geschwindigkeiten von diesem Profil mit neuer Plateausättigung  $S^P < S^B$  nicht mehr identisch und die Überschussregion verbreitert sich oder schrumpft.

### 8.2.2.2 $S^B > S_{Welge}$ (Probleme D-E)

Die initiale Randsättigung  $S^B$  ist größer als die Welge-Sättigung und somit breitet sich der Bewässerungsprozess bis  $t = t^B$  als Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S_{Welge}$  und einer Verdünnungswelle, die  $S^B$  mit  $S_{Welge}$  verbindet, aus. Dieses Verhalten lässt sich auch aus der Bewässerungssekante (verbindet  $\triangle$  mit  $\circ$ ) folgern, da die Sekante die fraktionale Flusskurve schneidet. Durch die Reduktion der Sättigung am Einlass auf  $S^{in} = 0.425$  entsteht für Zeiten

$t > t^B$  eine Entwässerung. Dieser Entwässerungsprozess breitet sich zu Beginn nur durch diffusive Effekte aus, da die Sekante der Entwässerung (verbindet  $\square$  mit  $\circ$ ) eine negative Steigung hat. Durch die Ausbreitung wird die Verdünnungswelle der Bewässerung abgebaut und die Steigung der Entwässerungsssekante steigt an. Das endgültige Sättigungsprofil ist ein Sättigungsüberschuss mit Plateausättigung  $S^P \leq S_{\text{Welge}}$  und einer führenden Bewässerungsfront sowie einer nachfolgenden Entwässerung. Die exakte dynamische Entwicklung und die Plateausättigung sind unter anderem abhängig vom Umschaltzeitpunkt  $t^B$  und können nicht vorhergesagt werden.

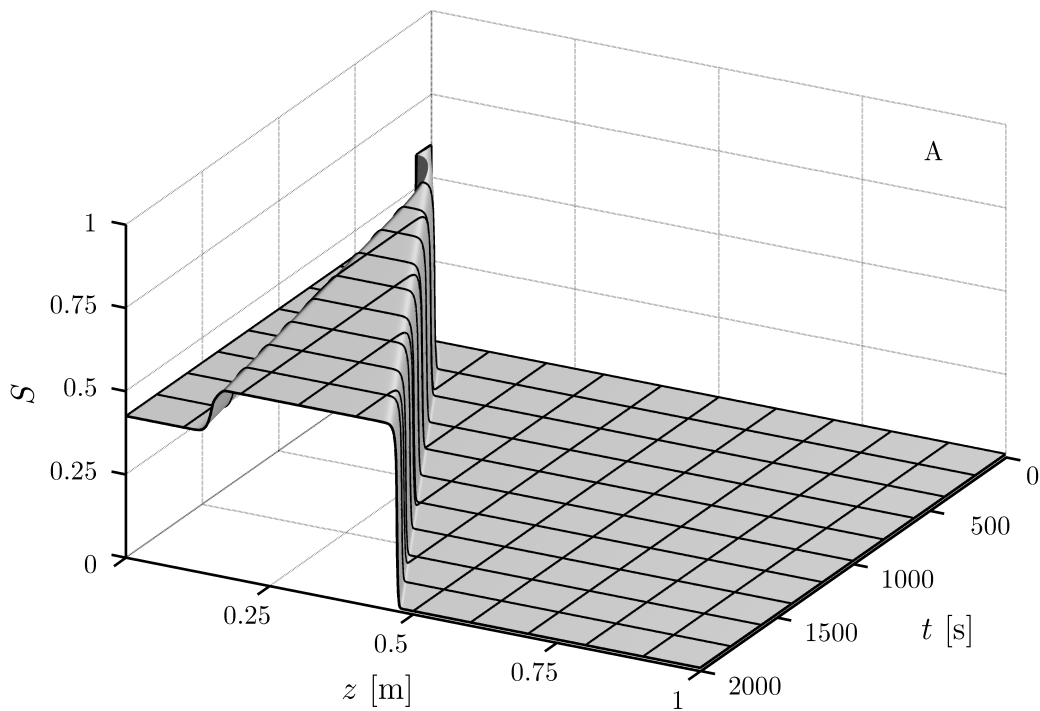
### 8.2.3 Numerische Lösungen mit OpenFOAM

#### 8.2.3.1 Problem A

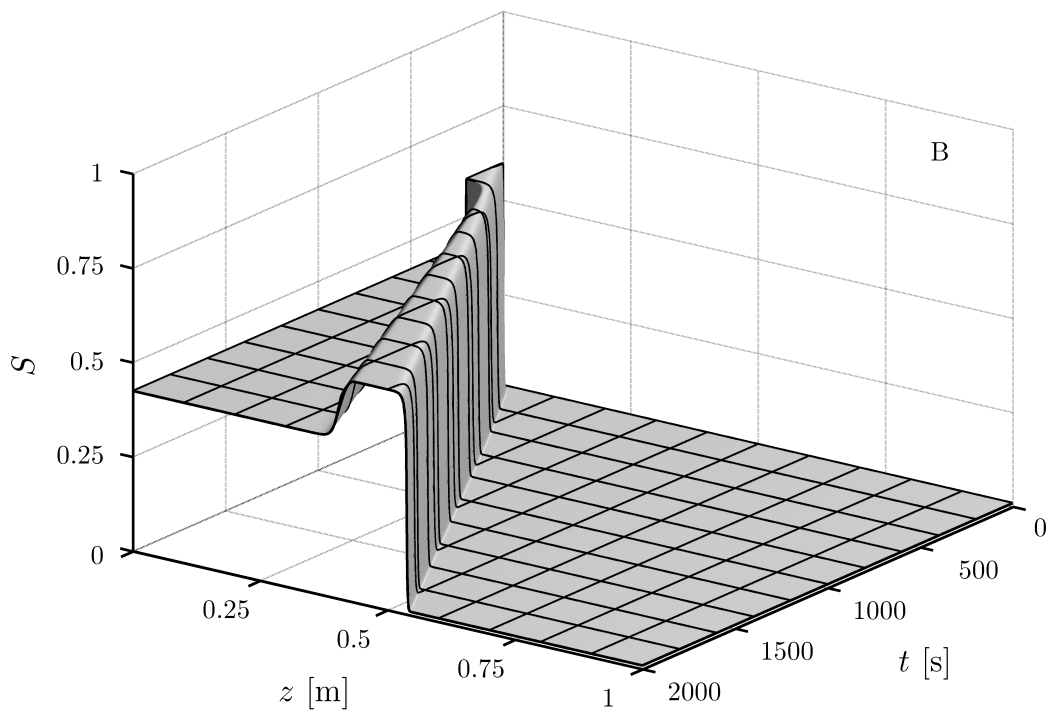
Die numerische Lösung von Problem A sieht man in Abbildung 8.3. Nach  $t = t^B = 100$  s sinkt die Sättigung bei  $z = 0$  von  $S^B = 0.6$  auf  $S^{\text{in}} = 0.425$  ab. Das vorhandene Plateau ist so schmal, dass die induzierte Entwässerungsfront sofort zu der Bewässerungsfront aufschließt. Infolge dessen sinkt die Plateausättigung bis auf  $S^P = 0.5597$  ab. Die damit verbundenen Änderungen der Ausbreitungsgeschwindigkeiten beider Fronten führt dazu, dass sich die Bewässerung schneller ausbreitet als die Entwässerung. Es entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Plateausättigung  $S^P = 0.5597$  und einer anwachsenden Plateaubreite. Die analytischen Geschwindigkeiten  $c_{\text{im}}(0.5597, 0.01) = 2.298 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(0.425, 0.5597) = 6.99 \cdot 10^{-5}$  m/s stimmen mit den numerischen Geschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.5597, 0.01) \approx 2.29 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.425, 0.5597) \approx 7.1 \cdot 10^{-5}$  m/s überein.

#### 8.2.3.2 Problem B

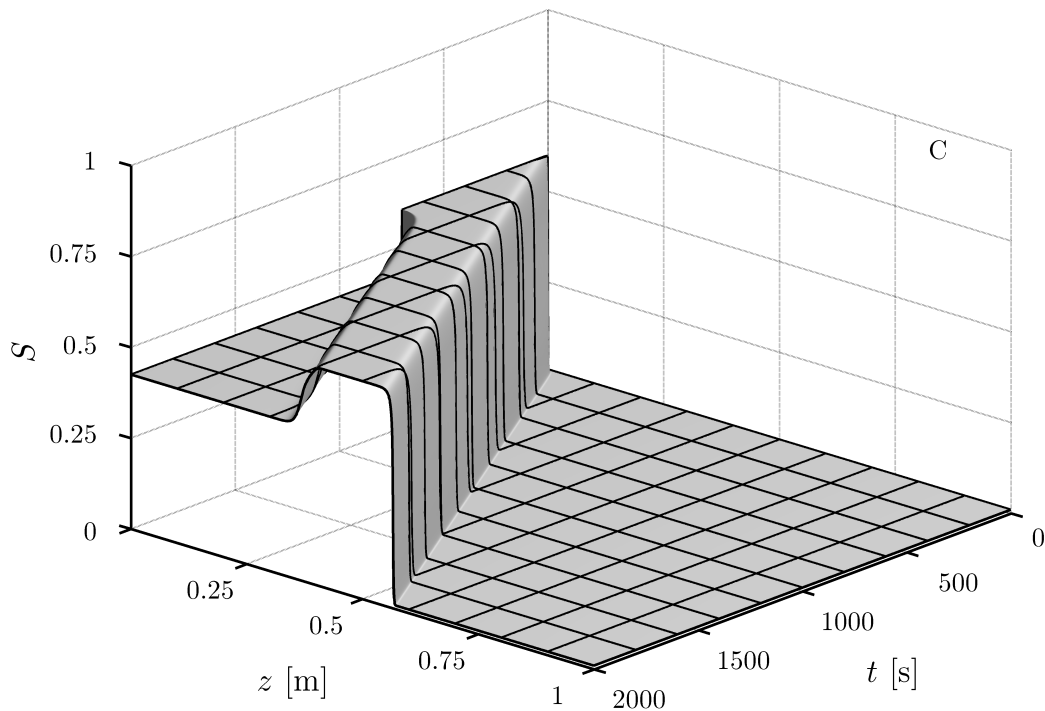
Abbildung 8.4 zeigt die numerische Lösung von Problem B. Analog zu Problem A ist die Dauer bis  $t^B = 200$  s nicht ausreichend groß, um ein Plateau zu erzeugen, welches nicht sofort durch die Entwässerung überrollt wird. Auch hier sinkt die Plateausättigung ab, jedoch nicht so stark wie im Beispiel zuvor. Die neue Plateausättigung ist hier  $S^P = 0.5853$ . Die Berechnung der analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten zeigt, dass die Bewässerungsfront mit  $c_{\text{im}}(0.5853, 0.01) = 2.63 \cdot 10^{-4}$  m/s schneller ist als die Entwässerungsfront mit  $c_{\text{dr}}(0.425, 0.5853) = 2.15 \cdot 10^{-4}$  m/s. Dieses Verhalten zeigt auch die numerische Lösung. Die numerischen Geschwindigkeiten, welche aus Abbildung 8.4 abgelesen werden können,  $c^{\text{num}}(0.5853, 0.01) \approx 2.63 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.425, 0.5853) \approx 2.16 \cdot 10^{-4}$  m/s sind nahezu identisch zu den analytischen Geschwindigkeiten.



**Abbildung 8.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 100$  s ist die Lösung eine reine Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.6$ . Das entstandene Plateau ist so schmal, dass es sofort von der Entwässerung abgebaut wird. Es entsteht ein neues Plateau mit Sättigung  $S^P = 0.5597$ . Dieser Sättigungsüberschuss bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten und wachsender Überschussbreite durch das poröse Medium. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



**Abbildung 8.4:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 200$  s ist die Lösung eine reine Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.6$ . Auch dieses Plateau ist, wie in Problem A, so schmal, dass es sofort von der Entwässerung abgebaut wird. Es entsteht ein neues Plateau mit Sättigung  $S^P = 0.5853$ . Dieser Sättigungsüberschuss bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten und wachsender Überschussbreite durch das poröse Medium. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



**Abbildung 8.5:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem C mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 700$  s ist die Lösung eine reine Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.6$ . Die Breite des entstandenen Plateaus ist ausreichend, sodass die Be- und Entwässerungsprozesse nicht miteinander wechselwirken. Dieser Überschuss breitet sich dann als laufende Welle mit konstanter Plateaubreite aus. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.

### 8.2.3.3 Problem C

Die Umschaltzeit  $t^B$  in Problem C ist so groß gewählt, dass sich ein stabiles Plateau ausbilden kann, welches nicht durch die diffusiven Effekte der Entwässerung zerstört wird. Die numerische Lösung ist in Abbildung 8.5 dargestellt. Das nichtmonotone Sättigungsprofil breitet sich ab  $t = t^B = 700$  s als laufende Welle aus. Es ist gut zu sehen, dass die Breite des Plateaus konstant ist und auch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten konstant und identisch sind. Die numerischen Geschwindigkeiten  $c^{\text{num}}(0.6, 0.01) = c^{\text{num}}(0.425, 0.6) \approx 2.825 \cdot 10^{-4}$  m/s der Be- und Entwässerungsfront stimmen mit der in Abschnitt 8.2.2.1 berechneten Geschwindigkeit überein.



### 8.2.3.4 Problem D

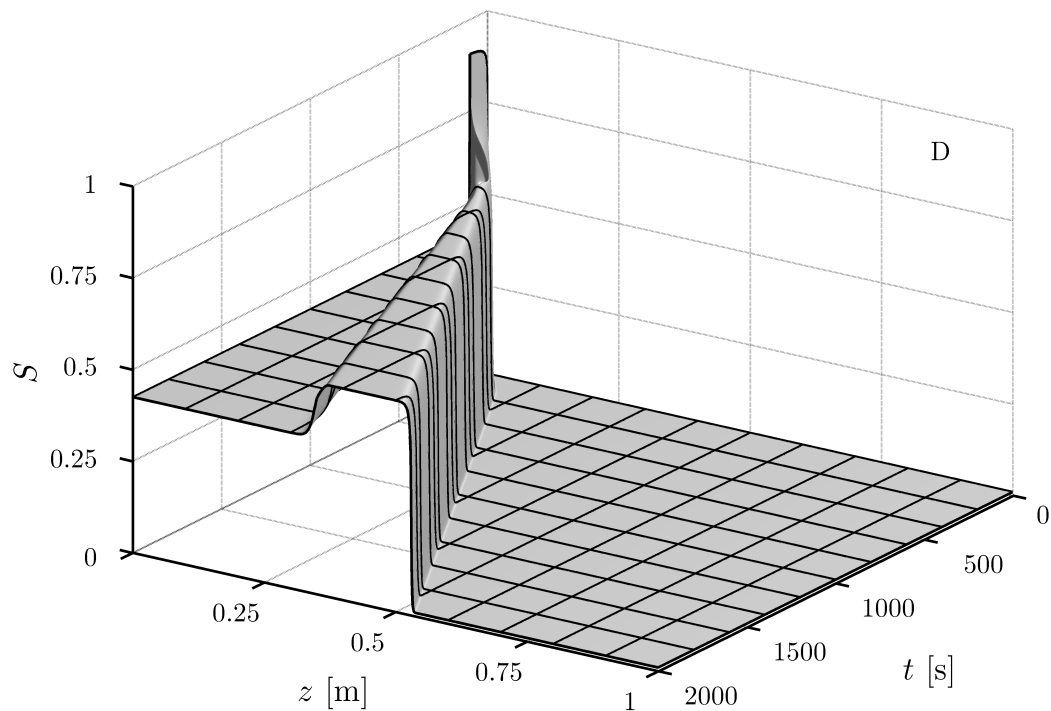
Die numerische Lösung für Problem D ist ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit wachsender Plateaubreite, siehe Abbildung 8.6. Wie analytisch beschrieben, entwickelt sich bis  $t = t^B = 100$  s eine Stoßfront mit Frontsättigung  $S_{\text{Welge}}$  und eine Verdünnungswelle. Der Entwässerungsprozess, der ab  $t^B = 100$  s startet, breitet sich zunächst nur über diffusive Effekte aus, da die Sekante der Entwässerung eine negative Steigung hat, siehe Abbildung 8.2b). Durch die diffusiven Effekte wird die Verdünnungswelle zerstört und es entsteht ein Plateau mit Sättigung  $S^P = 0.5776$ . Dieser Überschuss hat eine wachsende Plateaubreite, da sich die Bewässerungsfront schneller ausbreitet als die Entwässerungsfront. Auch für dieses Sättigungsprofil stimmen die numerischen Geschwindigkeiten,  $c^{\text{num}}(0.5776, 0.01) \approx 2.54 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.425, 0.5776) \approx 1.75 \cdot 10^{-4}$  m/s, mit den analytischen Geschwindigkeiten,  $c_{\text{im}}(0.5776, 0.01) = 2.53 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(0.425, 0.5776) = 1.76 \cdot 10^{-4}$  m/s, überein.

### 8.2.3.5 Problem E

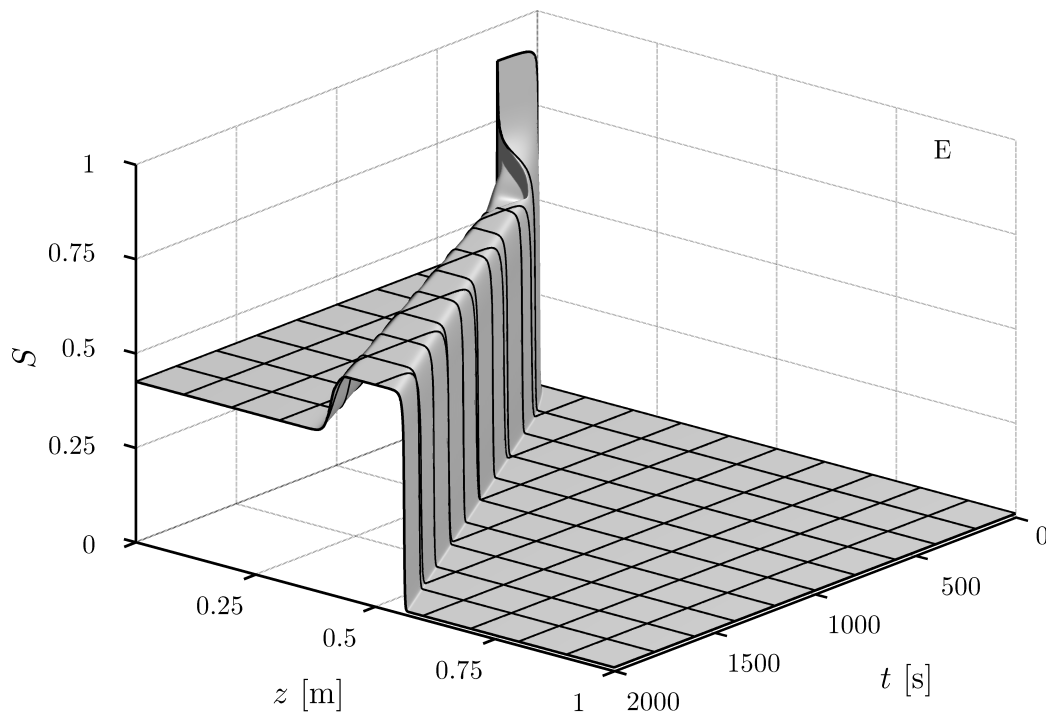
Die numerische Lösung von Problem E, siehe Abbildung 8.7, verhält sich ähnlich wie zuvor die Lösung von Problem D. Das Sättigungsprofil bis  $t = t^B = 200$  s ist eine Stoßfront mit Verdünnungswelle und Frontsättigung  $S_{\text{Welge}}$ . Für Zeiten  $t > t^B$  wird die Verdünnungswelle durch die Diffusion der Entwässerung vollständig abgebaut und es entsteht ein Plateau mit Sättigung  $S^P = 0.5878$ . In Abbildung 8.7 ist zudem ein stationärer Sättigungsanstieg für  $t \in (250 \text{ s}, 450 \text{ s})$  bei  $z \approx 0.085$  m zu sehen. An dieser Stelle wurde die Bewässerungsfront zum ersten Mal von der Entwässerung eingeholt. Danach breitet sich auch dieses Profil als Sättigungsüberschuss mit wachsender Überschussbreite aus. Die Bewässerungsfront bewegt sich mit  $c^{\text{num}}(0.5878, 0.01) \approx 2.66 \cdot 10^{-4}$  m/s ( $c_{\text{im}}(0.5878, 0.01) = 2.66 \cdot 10^{-4}$  m/s) und die Entwässerungsfront hat die Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.425, 0.5878) \approx 2.26 \cdot 10^{-4}$  m/s ( $c_{\text{dr}}(0.425, 0.5878) = 2.26 \cdot 10^{-4}$  m/s).

### 8.2.3.6 Problem F

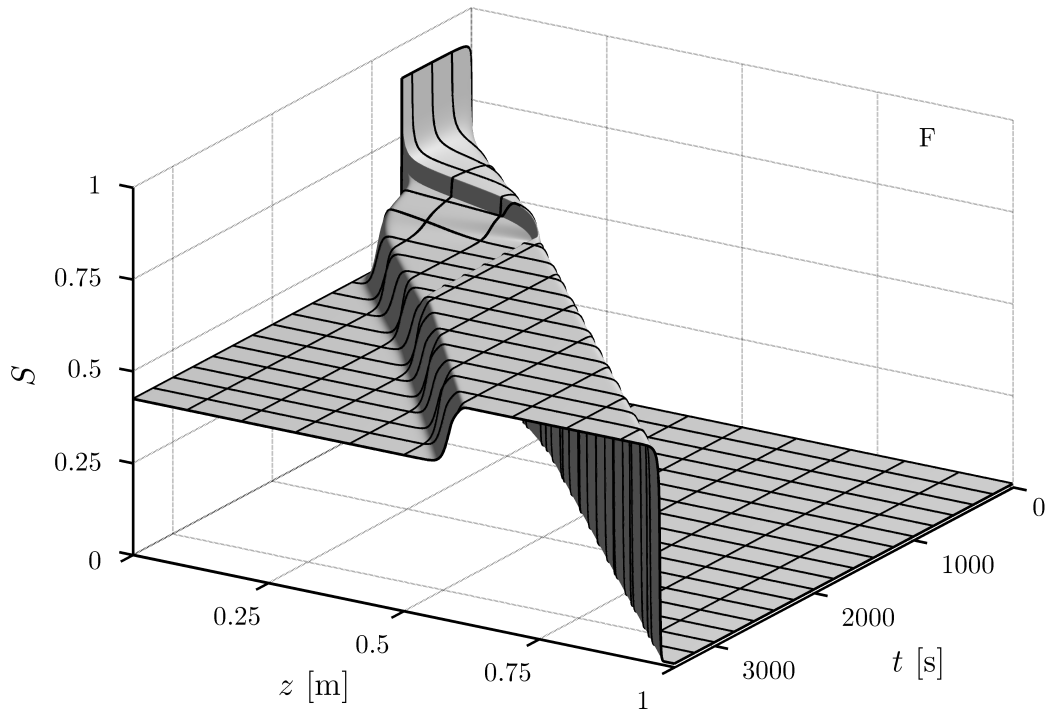
In Abbildung 8.8 ist die numerische Lösung von Problem F dargestellt. Die Lösung ist analog zu den Problemen D und E. Hier kann man jedoch, aufgrund der späten Umschaltzeit  $t^B = 700$  s, die unterschiedlichen Phasen der Lösung deutlich erkennen. Für  $t \geq 700$  s entsteht eine Entwässerung, die sich allerdings erst ab  $t \approx 1100$  s ausbreitet.



**Abbildung 8.6:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem D mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 100$  s ist die Lösung eine Stoßfront mit Frontsättigung  $S_{\text{Wellge}}$  und Verdünnungswelle. Danach zerstören die diffusiven Effekte der Entwässerung die Verdünnungswelle, bis ein Plateau mit konstanter Sättigung  $S^P = 0.5776$  entstanden ist. Dieser Sättigungsüberschuss bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten und wachsender Überschussbreite durch das poröse Medium. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



**Abbildung 8.7:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem E mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 200$  s ist die Lösung eine Stoßfront mit Frontsättigung  $S_{\text{Welge}}$  und Verdünnungswelle. Danach zerstören die diffusiven Effekte der Entwässerung die Verdünnungswelle, bis ein Plateau mit konstanter Sättigung  $S^P = 0.5878$  entstanden ist. Dieser Sättigungsüberschuss bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten und wachsender Überschussbreite durch das poröse Medium. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



**Abbildung 8.8:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem F mit Parameterwerten aus Tabelle 8.1. Bis  $t = t^B = 700$  s ist die Lösung eine Stoßfront mit Frontsättigung  $S_{\text{Wellge}}$  und Verdünnungswelle. Danach zerstören die diffusiven Effekte der Entwässerung die Verdünnungswelle, bis zwei Plateaus mit Sättigungen  $S^P = 0.5677$  und  $S^P = 0.589$  entstanden sind. Der Übergang zwischen den Plateaus ist stationär und somit wird dieser Übergang von der Entwässerungsfront überrollt und ein nichtmonotones Profil mit einem Überschuss bleibt erhalten. Dieser Sättigungsüberschuss bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten und wachsender Überschussbreite durch das poröse Medium. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.015$  m und  $\Delta t = 50$  s eingezeichnet.

In dieser Zeit  $700 \text{ s} \leq t < 1100 \text{ s}$  sind nur die diffusiven Effekte der Entwässerung zu erkennen, welche die Verdünnungswelle zerstören. Ab  $t \approx 1100$  s haben sich zwei Plateaus mit  $S^P = 0.5677$  und  $S^P = 0.589$  gebildet, die durch einen stationären Sättigungsanstieg bei  $z \approx 0.282$  m verbunden sind. Zum Zeitpunkt  $t \approx 2000$  s erreicht die Entwässerungsfront die Unstetigkeitsstelle. Danach breitet sich ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschussättigung  $S^P = 0.589$  und wachsender Plateaubreite aus. Auch bei der Lösung dieses Problems stimmen die analytischen und die numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten überein. Exemplarisch dafür sind die Geschwindigkeiten ab  $t = 2000$  s mit  $c^{\text{num}}(0.589, 0.01) \approx 2.68 \cdot 10^{-4}$  m/s ( $c_{\text{im}}(0.589, 0.01) = 2.68 \cdot 10^{-4}$  m/s) für die Bewässerungs- und  $c^{\text{num}}(0.425, 0.589) \approx 2.36 \cdot 10^{-4}$  m/s ( $c_{\text{dr}}(0.425, 0.589) = 2.32 \cdot 10^{-4}$  m/s) für die Entwässerungsfront.

**Tabelle 8.3:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

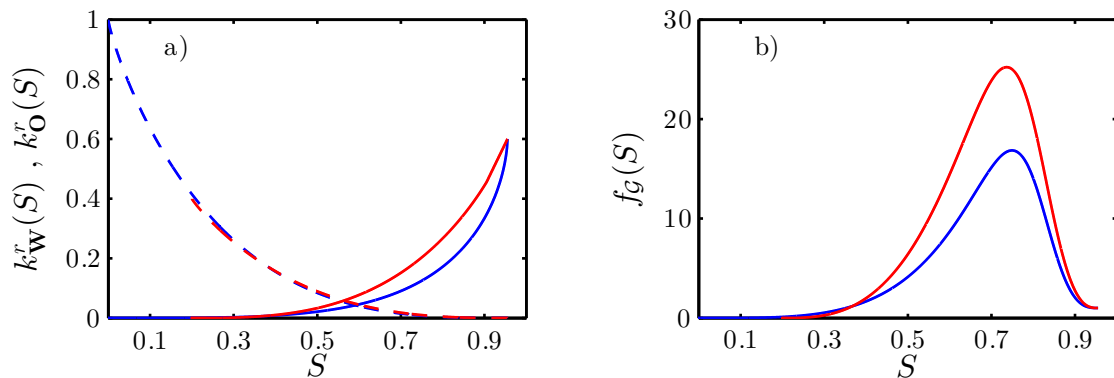
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	0.6	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	1.2	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	0.85	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	1.1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.4	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	$\text{Pa}$
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	$\text{Pa}$
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}\text{i}}$	0.2	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	0.045	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$	0.7355	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$

## 8.3 Variation des Randparameters $S^{\text{in}}$

### 8.3.1 Modellparameter

Für die Exploration des Randwertes  $S^{\text{in}}$  wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) durch die Parameter aus Tabelle 8.3 bestimmt. Die Randkurven der relativen Permeabilitäten  $k_{\mathbb{W}}^r$ ,  $k_{\mathbb{O}}^r$  und die des Kapillardrucks  $P_c$  werden in der van-Genuchten-Form (3.15) und (3.17) angegeben. In Abbildung 8.9 sind die Randkurven der relativen Permeabilitäten a) ( $\mathbb{W}$  durchgezogen und  $\mathbb{O}$  gestrichelt) und der resultierenden fraktionalen Flüsse b) abgebildet. Dabei ist in blau die primäre Bewässerung und in rot die sekundäre Entwässerung dargestellt.

In Tabelle 8.4 sind die Anfangs- und Randwerte und die verwendeten Hystereseparameter



**Abbildung 8.9:** a): Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten in der van-Genuchten-Form mit den Parametern aus Tabelle 8.3.

b): Resultierender fraktionaler Fluss

Die Graphen der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die Graphen der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Die primäre Bewässerung ist in blau und die sekundäre Entwässerung in rot gezeichnet.

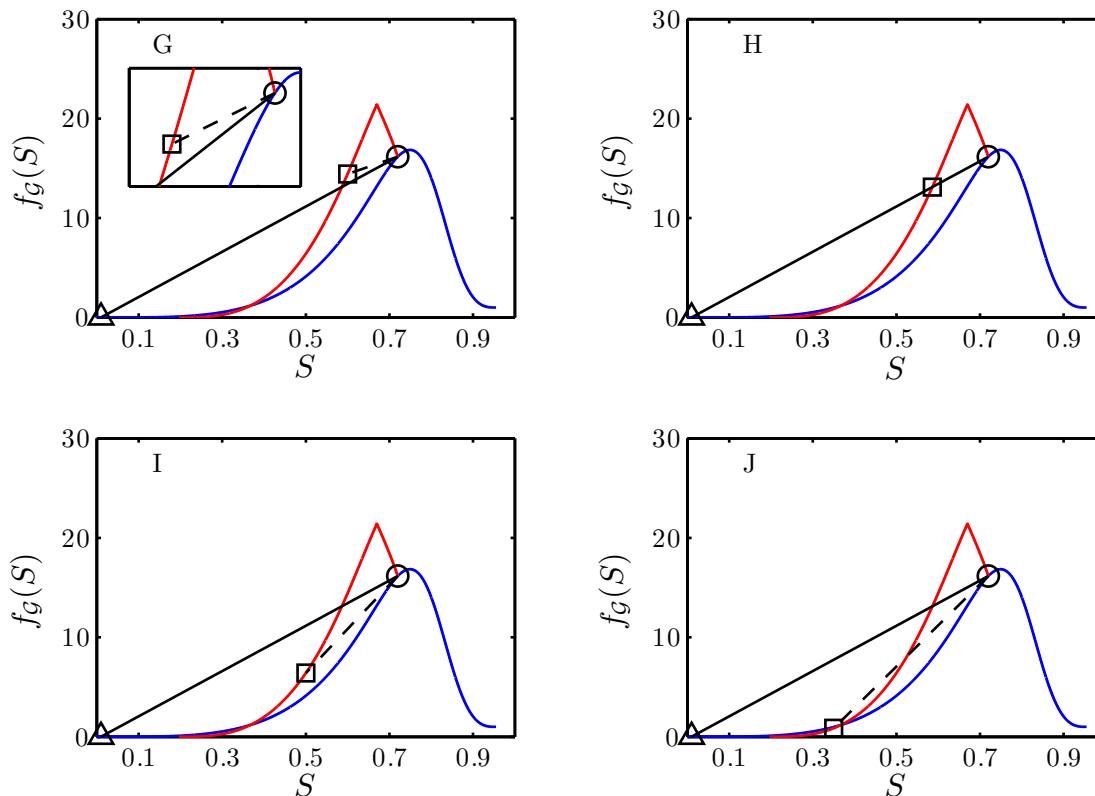
**Tabelle 8.4:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
G	0.01	0.6	0.72	500 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
H	0.01	0.5861	0.72	500 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
I	0.01	0.5	0.72	500 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
J	0.01	0.35	0.72	500 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

der folgenden diskutierten Beispiele aufgelistet. Bei diesen Beispielen variieren nur die Werte der Sättigung am Einlass  $S^{\text{in}}$  während alle anderen Parameter konstant bleiben.

### 8.3.2 Quasianalytischer Vergleich

Abbildung 8.10 zeigt die fraktionierten Flussfunktionen für die primäre Bewässerung  $f_{\mathcal{G}}^{\text{im}} = f_{\text{im}}$  (blau) und die Entwässerung  $f_{\mathcal{G}^{\text{dr}} \cup \mathcal{G}^{\text{sc}}} = f_{\text{dr}}$  (rot). Der Graph der Entwässerung ergibt sich aus den Sättigungen  $S_* = 0.72$  und  $A = 0.695$ . Die Graphen der fraktionierten Flüsse sind in allen vier Abbildungen identisch. Das Symbol  $\triangle$  markiert den Punkt ( $S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}})$ ), die Markierung  $\circ$  steht für den Punkt ( $S^{\text{B}} = 0.72, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}) = f_{\text{dr}}(S^{\text{B}})$ ) und der dritte Punkt ( $S^{\text{in}}, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}})$ ) ist mit  $\square$  markiert. Die durchgezogenen Sekanten repräsentieren die Bewäs-



**Abbildung 8.10:** Fraktionale Flussfunktionen für eine primäre Bewässerung (blau) und die Entwässerung (rot) der Probleme G-J innerhalb der  $\delta$ -Hysterese mit Parametern aus Tabelle 8.3 und mit Hystereseparameter  $\delta = 0.05$ . Die Sekanten repräsentieren die Geschwindigkeiten der Bewässerungsfronten (durchgezogene Linien) und der Entwässerungsfronten (gestrichelte Linien).

serungsprozesse und die gestrichelten Sekanten repräsentieren die Entwässerungsprozesse. Die Steigungen der Sekanten, welche  $\triangle$  und  $\circ$  verbinden, sind proportional zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bewässerungsfront und die Steigungen der Sekanten, welche  $\square$  und  $\circ$  verbinden, sind proportional zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfront. Alle Strömungsprozesse der Probleme G-J, außer der Entwässerung von Problem J, breiten sich als Sättigungsfronten aus, da Gleichung (2.29) bei der Bewässerung und (2.30) bei der Entwässerung erfüllt ist. Die Entwässerung von Problem J breitet sich folglich als Sättigungsfront mit Verdünnungswelle aus.

Die Lösung der Anfangs- und Randwertprobleme ist bis zum Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}} = 500$  s identisch für die Probleme G-J. Es breitet sich eine monotone Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.72$  und der Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.72, 0.01) = 6.54 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Zum Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}}$  wird die Sättigung am Einlass reduziert und es entsteht eine Entwässerung, welche der Bewässerungsfront nachfolgt. Die quasianalytischen Lösungen der Probleme G-J für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  werden im Folgenden diskutiert.

### 8.3.2.1 Problem G

In Abbildung 8.10G ist zu erkennen, dass die Sekante der Entwässerung (gestrichelte schwarze Linie) flacher ist als die Sekante der Bewässerung (durchgezogene schwarze Linie). Folglich bewegt sich die Entwässerungsfront immer langsamer als die Bewässerungsfront durch das poröse Medium. Dies wird auch beim Vergleich der Geschwindigkeiten mit (4.4) deutlich. Die Entwässerung breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c_{dr}(0.6, 0.72) = 4.13 \cdot 10^{-4}$  m/s und die Bewässerungsfront mit  $c_{im}(0.72, 0.01) = 6.54 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Das nichtlineare Sättigungsprofil bewegt sich somit mit wachsender Sättigungsüberschussbreite und Überschussättigung  $S^P = 0.72$  durch das poröse Medium.

### 8.3.2.2 Problem H

Durch Vergleich der Sekanten in Abbildung 8.10H oder die Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Gleichungen (4.4) sieht man, dass sich die Be- und Entwässerungsfront mit identischen Geschwindigkeiten  $c_{im}(0.72, 0.01) = c_{dr}(0.5861, 0.72) = 6.54 \cdot 10^{-4}$  m/s bewegen. Die graphische Lösung und die Berechnung der Geschwindigkeiten zeigen, dass Gleichung (4.6) für die Sättigungen  $S^{out} = 0.01$ ,  $S^{in} = 0.5861$  und  $S^P = S^{TW} = 0.72$  erfüllt ist. Das nichtlineare Sättigungsprofil breitet sich daher als laufender Sättigungsüberschuss mit Überschussättigung  $S^P = S^{TW} = 0.72$  aus.

### 8.3.2.3 Problem I

Bei Problem I wurde die Einlassättigung  $S^{in}$  so gewählt, dass die Entwässerungsfront zu Beginn mit  $c_{dr}(0.5, 0.72) = 1.27 \cdot 10^{-3}$  m/s schneller ist als die Bewässerungsfront. Sobald die Entwässerungsfront die Bewässerungsfront eingeholt hat, sinkt die Überschussättigung ab. In diesem Beispiel gilt für alle Überschussättigungen  $S^P > 0.5772$ , dass die Entwässerungsfront schneller ist als die Bewässerungsfront. Daher sinkt die Überschussättigung auf einen Wert von  $S^P < 0.5772$  ab und breitet sich dann mit wachsender Plateaubreite aus.

### 8.3.2.4 Problem J

Der Entwässerungsprozess in Problem J setzt sich aus einer Sättigungsfront zwischen  $S^P = 0.72$  und  $S \approx 0.456$  und einer Verdünnungswelle zwischen  $S \approx 0.456$  und  $S^{in} = 0.35$  zusammen. Die Stoßfront hat die Geschwindigkeit  $c_{dr}(0.456, 0.72) = 1.32 \cdot 10^{-3}$  m/s und schließt damit nach einer gewissen Zeit zur Bewässerungsfront auf. Infolge dessen sinkt die Überschuss-



sättigung auf  $S^{\text{P}} = S^{\text{in}} = 0.35$  ab, da sich für alle Überschussättigungen  $S^{\text{P}} \geq S^{\text{in}} = 0.35$  die Entwässerung immer schneller ausbreitet als die Bewässerungsfront. Somit wird der Überschuss komplett abgebaut und die Lösung ist ein monotonen Sättigungsprofil mit der Frontgeschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.35, 0.01) = 7.31 \cdot 10^{-5}$  m/s.

### 8.3.3 Numerische Lösungen

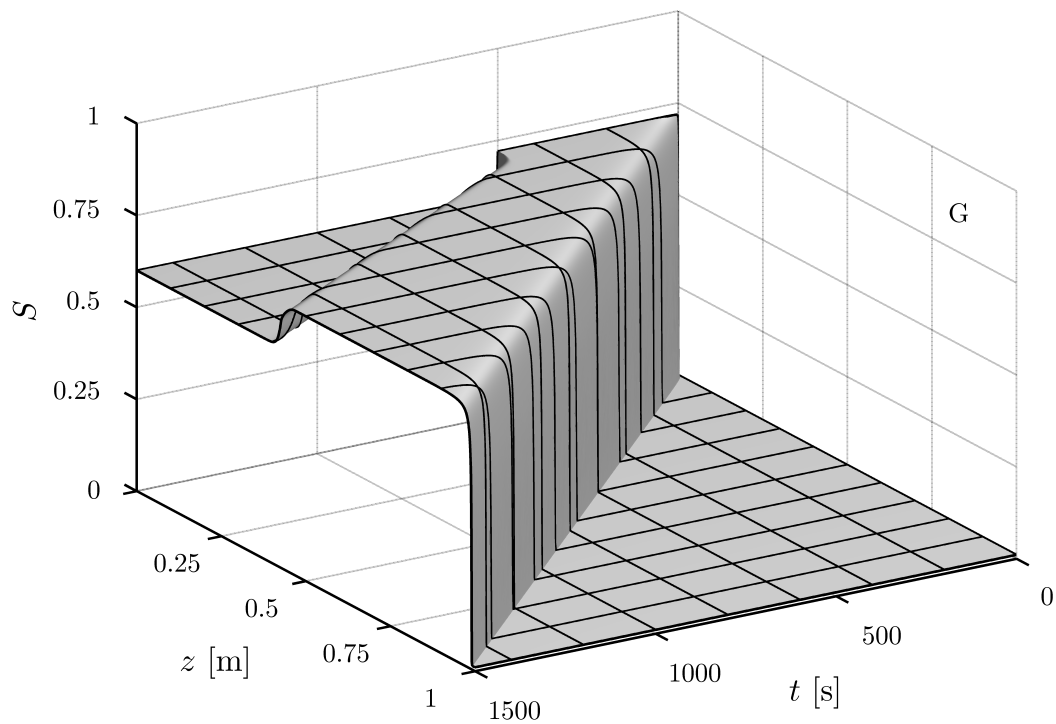
Die numerischen Lösungen der vier Probleme G-J für Zeiten  $t < t^{\text{B}}$  unterscheiden sich nicht. Die Bewässerung breitet sich als Front mit der Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.72, 0.01) \approx 6.54 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Damit ist die numerische Geschwindigkeit identisch zur analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeit von zuvor. Die unterschiedlichen zeitlichen Entwicklungen für  $t \geq t^{\text{B}}$  werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

#### 8.3.3.1 Problem G

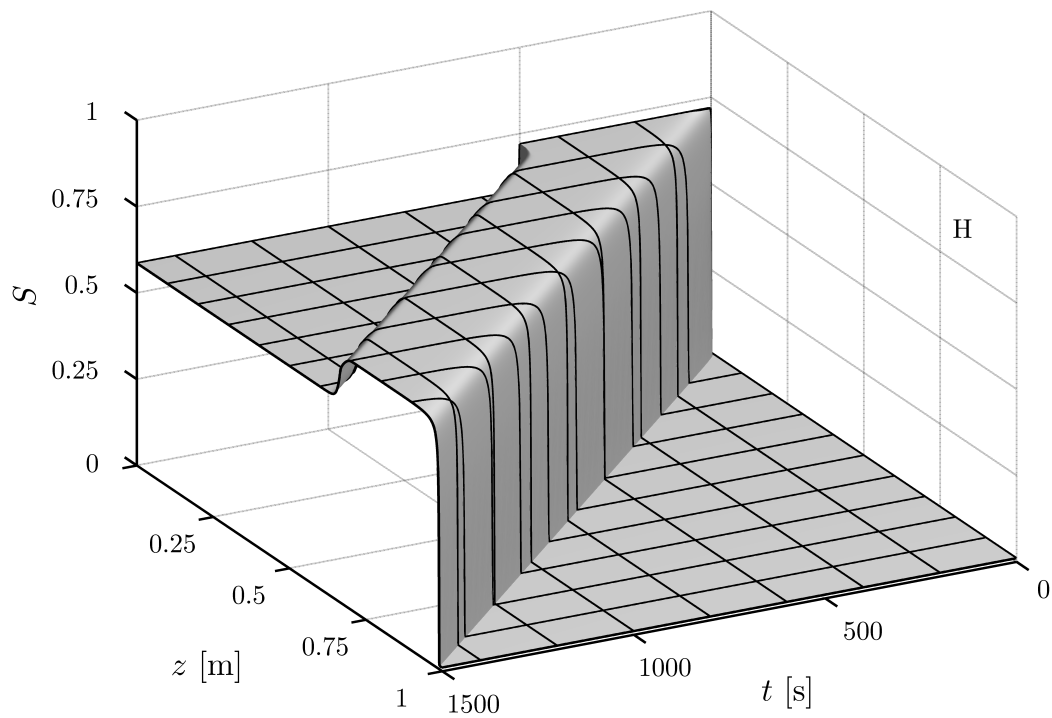
Die numerische Lösung von Problem G ist in Abbildung 8.11 dargestellt. Die dreidimensionale Oberfläche zeigt die zeitliche Entwicklung des Sättigungsprofils. Wie quasianalytisch vorhergesagt, breitet sich das nichtmonotone Profil mit wachsender Überschussbreite aus. Die Entwässerung bewegt sich für  $t > t^{\text{B}}$  als Stoßfront mit der konstanten numerischen Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.6, 0.72) \approx 4.13 \cdot 10^{-4}$  m/s durch das poröse Medium. Diese Geschwindigkeit entspricht der zuvor berechneten analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeit.

#### 8.3.3.2 Problem H

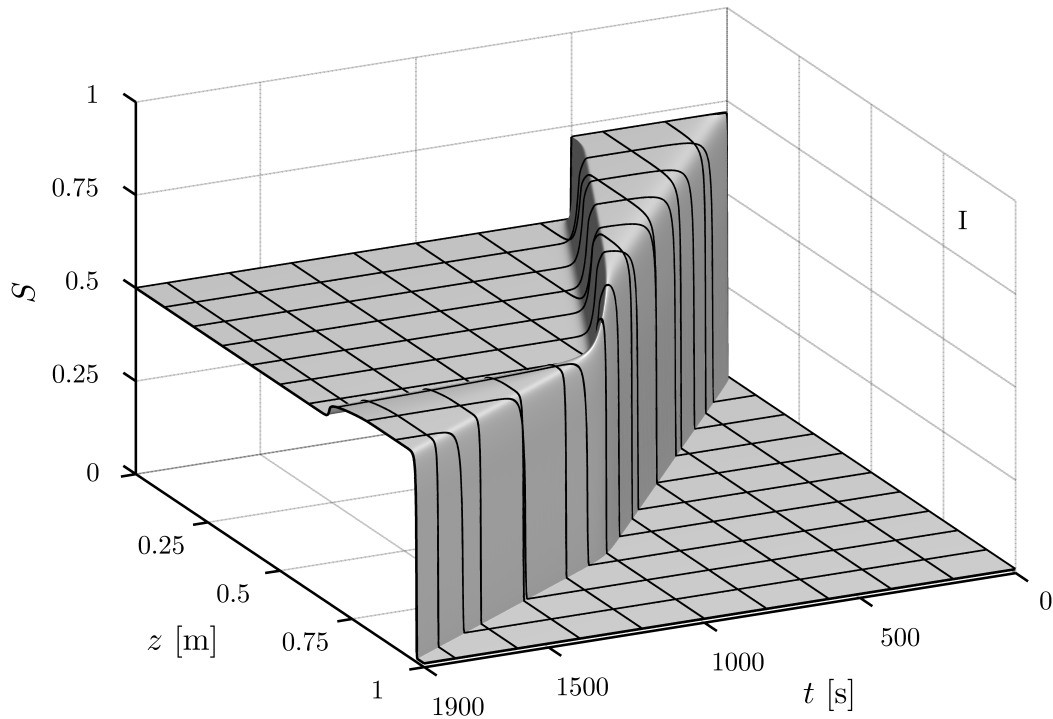
In Abbildung 8.12 wird die numerische Lösung von Problem H gezeigt. Klar zu erkennen sind die konstanten und identischen Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront für alle Zeiten  $t$ . Deutlich sichtbar ist zudem, dass sich die Plateaubreite, wie quasianalytisch vorhergesagt, nicht ändert. Die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfront  $c^{\text{num}}(0.5861, 0.72) \approx 6.54 \cdot 10^{-4}$  m/s ist identisch zu der numerischen Geschwindigkeit der Bewässerungsfront und den analytischen Geschwindigkeiten. Das nichtmonotone Sättigungsprofil bewegt sich damit als laufende Welle durch das poröse Medium.



**Abbildung 8.11:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem G mit Parameterwerten aus Tabelle 8.3. Für  $t \geq t^B$  entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit zunehmender Plateaubreite. Gut zu sehen ist die konstante Ausbreitung der Be- und Entwässerungsfront und die gleichmäßige Verbreiterung des Sättigungsüberschusses. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



**Abbildung 8.12:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem H mit Parameterwerten aus Tabelle 8.3. Für  $t \geq t^{\text{B}}$  entsteht ein laufendes nichtmonotones Sättigungsprofil. Die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sind zeitlich konstant und identisch. Daher bleibt die Breite der Überschussregion konstant. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.



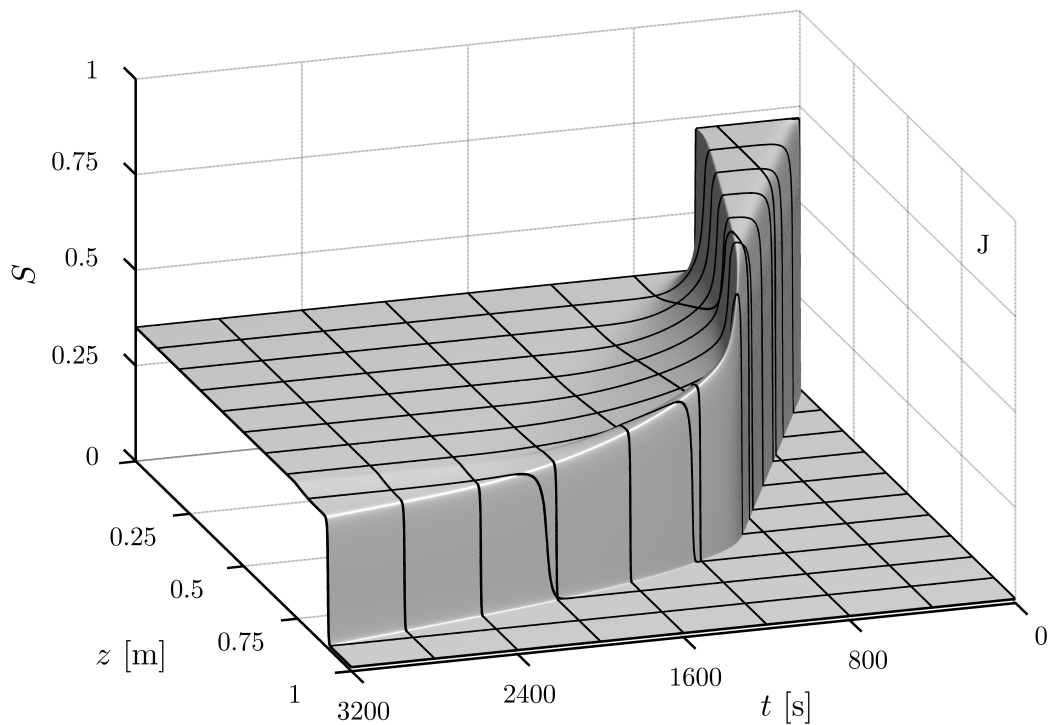
**Abbildung 8.13:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem I mit Parameterwerten aus Tabelle 8.3. Für  $t \geq t^B$  entsteht eine Entwässerungsfront, die sich schneller ausbreitet als die führende Bewässerungsfront. Bei  $t \approx 850$  s hat die Entwässerung die Bewässerung eingeholt und der Sättigungsüberschuss wird abgebaut. Zum Zeitpunkt  $t \approx 1200$  s ist die Überschusssättigung  $S^P = 0.5584$  und die Bewässerungsfront breitet sich für diese Überschusssättigung schneller aus als die Entwässerungsfront. Die endgültige Lösung für lange Zeiten  $t$  ist damit ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit zunehmender Überschussbreite. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 200$  s eingezeichnet.

### 8.3.3.3 Problem I

In Abbildung 8.13 ist die numerische Lösung von Anfangs- und Randwertproblem I dargestellt. Wie quasianalytisch beschrieben, breitet sich die Entwässerung, welche bei  $t = t^{\text{B}}$  erzeugt wird, als Sättigungsfront aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Front ist in der numerischen Lösung  $c^{\text{num}}(0.5, 0.72) \approx 1.275 \cdot 10^{-3}$  m/s und ist damit gleich der analytischen Geschwindigkeit. Die Entwässerungsfront ist schneller als die führende Bewässerungsfront, was dazu führt, dass das Überschussplateau schmaler wird. Nach  $t \approx 850$  s hat die Entwässerungsfront die Bewässerung eingeholt. Ab diesem Zeitpunkt reduziert sich die Höhe des Sättigungsüberschusses von  $S^{\text{P}} = 0.72$  auf  $S^{\text{P}} = 0.5584$ . Diese endgültige Sättigung der Überschussregion  $S^{\text{P}} = 0.5584$  ist nach  $t \approx 1200$  s erreicht. Durch die geringe Überschusshöhe  $\Delta S = S^{\text{P}} - S^{\text{in}} = 0.0584$  und das vorhergegangene Absinken des Überschusses besteht die Entwässerung aus einer Sättigungsfront und einer Verdünnungswelle. Dadurch ist es für die Entwässerung nicht möglich eine numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit mit einer analytischen Geschwindigkeit zu vergleichen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der neuen Bewässerungsfront ist jedoch in den numerischen und analytischen Werten identisch,  $c_{\text{im}}(0.5584, 0.01) = 3.40 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.5584, 0.01) \approx 3.40 \cdot 10^{-4}$  m/s.

### 8.3.3.4 Problem J

Die numerische Lösung für  $t \in [0 \text{ s}, 3200 \text{ s}]$  von Problem J ist in Abbildung 8.14 zu sehen. Die Entwässerung, die zum Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}}$  entsteht, breitet sich als Kombination einer Sättigungsfront mit Sättigungssprung von  $S \approx 0.456$  auf  $S^{\text{P}} = 0.72$  und einer Verdünnungswelle aus. Die numerische Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.456, 0.72) \approx 1.36 \cdot 10^{-3}$  m/s der Entwässerungsfront stimmt mit der analytischen Geschwindigkeit überein. Ab  $t \approx 600$  s hat die Entwässerung die Bewässerung eingeholt und die Überschussättigung sinkt ab. Die Entwässerung breitet sich für alle Überschussättigungen  $S^{\text{P}}$  schneller aus als die Bewässerungsfront. Daher verschwindet der Sättigungsüberschuss nach  $t \approx 2500$  s vollständig und ein monotonen Sättigungsprofil mit Frontsättigung  $S = 0.3396$  und einer Verdünnungswelle bleibt zurück. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Sättigungsfront lässt sich aus den numerischen Daten zu  $c^{\text{num}}(0.3396, 0.01) \approx 7.54 \cdot 10^{-5}$  m/s berechnen. Analytisch liefern die Gleichungen (4.4) die Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.3396, 0.01) = 7.53 \cdot 10^{-5}$  m/s.



**Abbildung 8.14:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem J mit Parameterwerten aus Tabelle 8.3. Die Entwässerung breitet sich für alle Übersättigungen  $S^P \leq 0.72$  schneller aus als die Bewässerungsfront. Somit wird für  $t > t^B$  zuerst die Breite des Überschusses und danach die Höhe des Überschusses abgebaut. Zum Zeitpunkt  $t \approx 2500$  s ist dann ausschließlich ein monotonen Sättigungsprofil übrig, welches durch das poröse Medium propagiert. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 50$  s eingezeichnet.

## 8.4 Folgerung

Die numerischen Lösungen in diesem Kapitel zeigen, wie auch schon Kapitel 7, dass die Randbedingungen, hier der Umschaltzeitpunkt  $t^B$  und die Randsättigungen  $S^B$  und  $S^{in}$ , einen großen Einfluss auf die Ausbreitung, die Höhe und den Zerfall von Sättigungsüberschüssen haben. Für kurze Zeiten  $t^B$ , und somit schmale Überschussplateaus, interagiert die Entwässerung sofort mit der Bewässerungsfront. Dadurch reduziert sich die Plateausättigung sofort nach Entstehung des nichtmonotonen Profils stark und es entstehen nichtlaufende Überschüsse. Für lange Zeiten  $t^B$  entscheidet die Wahl der Randsättigungen über die Art der Ausbreitung des nichtmonotonen Profils. Die gefundenen numerischen Lösungen können, ähnlich wie in Kapitel 7, in unterschiedliche Lösungsklassen unterteilt werden. Abhängig von den Randwerten erhält man laufende Sättigungsüberschüsse oder nichtlaufende Überschüsse mit wachsender Plateaubreite. Zusätzlich dazu existieren auch nichtmonotone Lösungen, bei denen die Überschussbreite und Überschussättigung kontinuierlich abnehmen, bis ein monotones Profil mit Frontsättigung  $S^{in}$  entsteht. Der Zerfall des Sättigungsüberschusses in der Lösung des Anfangs- und Randwertproblems J ist zudem unabhängig von der Form der Streichkurven und dem Hystereseparameter  $\delta$ . Dies wurde in vielen numerischen Simulationen mit OpenFOAM umfassend getestet.

## 9 Einfluss der Streichkurven im $\delta$ -Hysteresemodell

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Streichkurven im  $\delta$ -Hysteresemodell genauer untersucht. Dazu wird das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit unterschiedlichen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten und im Kapillardruck quasianalytisch und numerisch gelöst. Ziel ist es den Einfluss des Parameters  $\delta$  und der Form der Streichkurve numerisch zu bestimmen und die Ergebnisse mit der Bemerkung 4.1 zu vergleichen.

### 9.1 Modellproblem

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem fraktionalen Fluss (3.2) auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  und der Randbedingung

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^{\text{B}} = 0.83, & \text{für } t < t^{\text{B}} = 300 \text{ s} \\ S^{\text{in}} = 0.41, & \text{für } t \geq t^{\text{B}} = 300 \text{ s} \end{cases}, \quad (9.1\text{a})$$

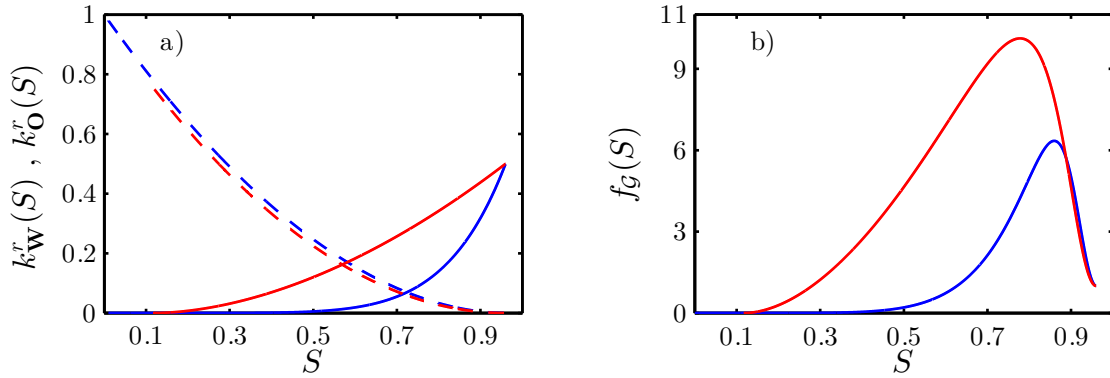
$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (9.1\text{b})$$

beschreibt den Zweiphasenfluss unter Einfluss der Gravitation. Das  $\delta$ -Hysteresemodell aus Kapitel 3 modelliert das hysteretische Verhalten und die Werte aus Tabelle 9.1 spezifizieren die Material- und Fluidparameter. Die Randkurven der relativen Permeabilitäten  $k_{\mathbb{W}}^r, k_{\mathbb{O}}^r$  sind in algebraischer Form (3.16) und die des Kapillardrucks  $P_c$  in der van-Genuchten-Form (3.17) angegeben. In Abbildung 9.1 sind die Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten a) ( $\mathbb{W}$  durchgezogen und  $\mathbb{O}$  gestrichelt) und der resultierenden fraktionalen Flüsse b) abgebildet. Dabei ist in blau die primäre Bewässerung und in rot die sekundäre Entwässerung dargestellt.



**Tabelle 9.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte W	$\rho_W$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte O	$\rho_O$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität W	$\mu_W$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität O	$\mu_O$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung W	$\alpha_{im}$	7	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung O	$\beta_{im}$	1.9	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung W	$\alpha_{dr}$	1.8	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung O	$\beta_{dr}$	2	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung W	$K_{Wim}^e$	0.5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung O	$K_{Oim}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung W	$K_{Wdr}^e$	0.5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung O	$K_{Odr}^e$	0.75	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{im}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{dr}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{bim}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{bdr}$	700	Pa
Irreduzible W Sättigung	$S_{Wi}$	0.12	-
Irreduzible O Sättigung	$S_{Or}$	0.04	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{Welge}^{im}$	0.8538	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$5 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$



**Abbildung 9.1:** Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten in algebraischer Form a) und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen b) mit den Parametern aus Tabelle 9.1. Die Graphen der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die Graphen der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Der primäre Bewässerungsprozess ist in blau und der sekundäre Entwässerungsprozess in rot gezeichnet.

Im Folgenden wird dieses Anfangs- und Randwertproblem für verschiedene Arten von Streichkurven in den relativen Permeabilitäten, linear (3.24) oder kubisch (3.25), und für unterschiedliche  $\delta$ -Parameterwerte betrachtet und gelöst. In Tabelle 9.2 sind für das gegebene Anfangs- und Randwertproblem acht verschiedene Realisierungen A-H der Streichkurven in  $k^r$  aufgelistet. Die kubischen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten werden durch die Bedingungen (3.20c) und (3.20d) mit den Funktionen  $\zeta(\cdot)$  aus Kapitel 3 bestimmt. Für die Probleme C und D gilt

$$\zeta_{\mathbb{W}}^{\text{dr}}(S) = \frac{d}{dS} k_{\mathbb{W}}^{\text{dr}} \left( S = A - \frac{\delta}{2} \right), \quad (9.2a)$$

$$\zeta_{\mathbb{W}}^{\text{im}}(S) = \frac{d}{dS} k_{\mathbb{W}}^{\text{im}} \left( S = A + \frac{\delta}{2} \right), \quad (9.2b)$$

$$\zeta_{\mathbb{O}}^{\text{dr}}(S) = \frac{d}{dS} k_{\mathbb{O}}^{\text{dr}} \left( S = A - \frac{\delta}{2} \right), \quad (9.2c)$$

$$\zeta_{\mathbb{O}}^{\text{im}}(S) = \frac{d}{dS} k_{\mathbb{O}}^{\text{im}} \left( S = A + \frac{\delta}{2} \right). \quad (9.2d)$$

Für die Probleme E und F sind die Funktionen  $\zeta$  identisch und konstant

$$\zeta_{\mathbb{W}}^{\text{dr}} = \zeta_{\mathbb{W}}^{\text{im}} = \zeta_{\mathbb{O}}^{\text{dr}} = \zeta_{\mathbb{O}}^{\text{im}} = 0 \quad (9.3)$$

**Tabelle 9.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
B	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.2$ )	Geraden
C	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	kub. Parabel mit (9.2)
D	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.2$ )	kub. Parabel mit (9.2)
E	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	kub. Parabel mit (9.3)
F	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.2$ )	kub. Parabel mit (9.3)
G	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	kub. Parabel mit (9.4)
H	0.01	0.41	0.83	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.2$ )	kub. Parabel mit (9.4)

und für Probleme G und H gilt

$$\zeta_{\mathbb{W}}^{\text{dr}}(\delta) = 80 \cdot \delta - 22, \quad (9.4a)$$

$$\zeta_{\mathbb{W}}^{\text{im}}(\delta) = 80 \cdot \delta - 22, \quad (9.4b)$$

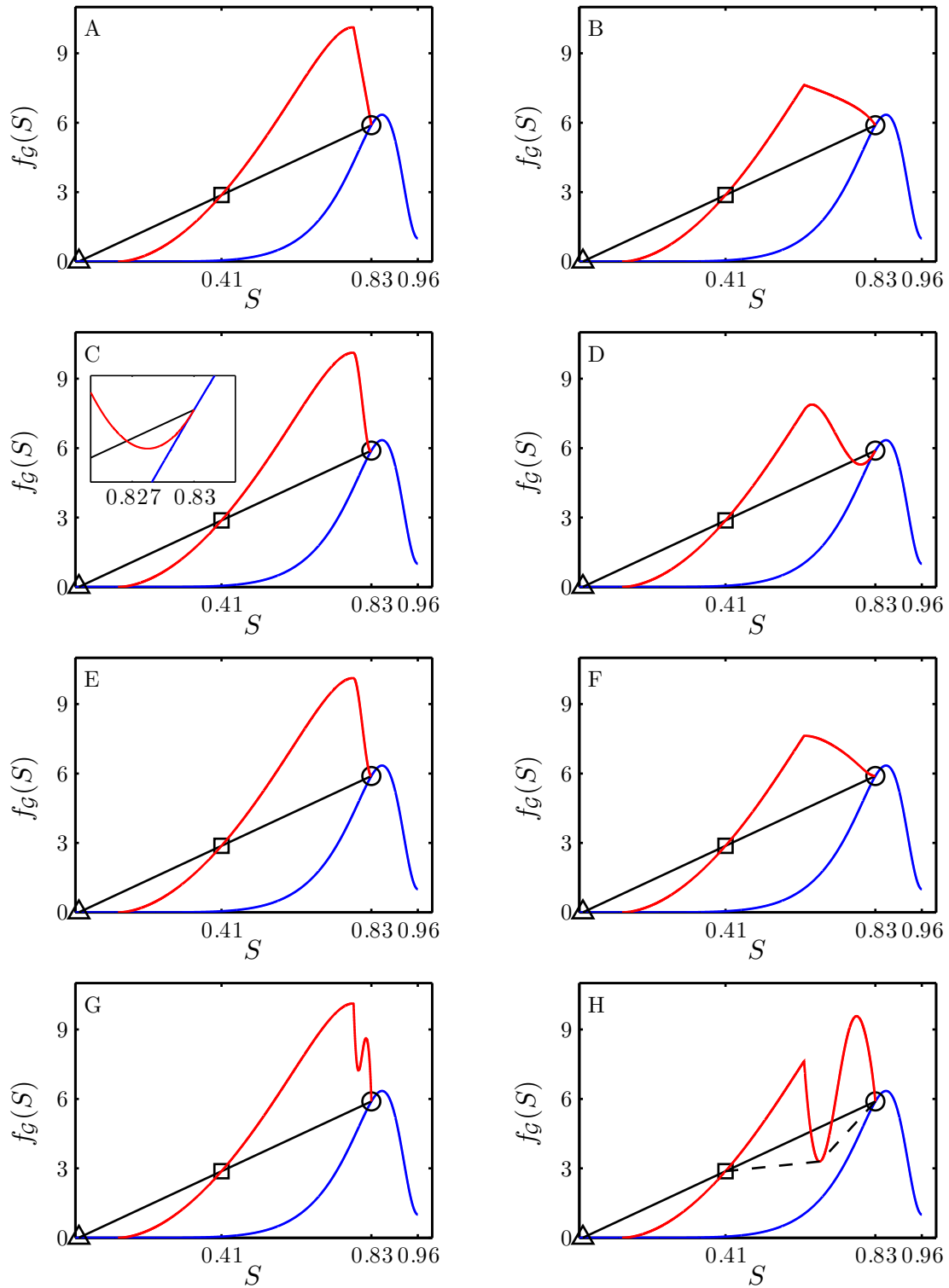
$$\zeta_{\mathbb{O}}^{\text{dr}}(\delta) = 0, \quad (9.4c)$$

$$\zeta_{\mathbb{O}}^{\text{im}}(\delta) = 0. \quad (9.4d)$$

## 9.2 Quasianalytischer Vergleich

Die Sättigungen  $S^{\text{out}}$ ,  $S^{\text{in}}$  und  $S^{\text{B}}$  sind so gewählt, dass Gleichung (4.6) erfüllt ist. Der Überschuss mit Sättigung  $S^{\text{B}} = S^{\text{P}} = S^{\text{TW}}$  breitet sich dann als laufende Welle aus.

Abbildung 9.2 zeigt die Graphen der fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\mathcal{G}^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$ , die primäre Bewässerung (blau), und  $f_{\mathcal{G}^{\text{drUG}^{\text{sc}}}} = f_{\text{dr}}$ , die nachfolgende Entwässerung (rot). Der Graph des Entwässerungsprozesses berechnet sich aus den Sättigungen  $S_* = 0.83$  und  $A = 0.83 - \delta/2$  mit Verwendung des Hystereseparameters  $\delta$  aus Tabelle 9.2. Der fraktionale Fluss  $f_{\text{im}}$  (blau) ist für alle Probleme A-H identisch. Die fraktionalen Flüsse  $f_{\text{dr}}$  (rot) unterscheiden sich aufgrund des Hystereseparameters  $\delta$  und den unterschiedlichen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten, siehe Tabelle 9.2. Zusätzlich zu den fraktionalen Flüssen sind die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{B}} = 0.83, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}) = f_{\text{dr}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ$ ) und  $(S^{\text{in}} = 0.41, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$



**Abbildung 9.2:** Fraktionale Flussfunktionen für die primäre Bewässerung  $f_{\text{im}}$  (blau) und für einen Entwässerungsprozess  $f_{\text{dr}}$  (rot) innerhalb der  $\delta$ -Hysterese mit Parametern aus Tabellen 9.1, 9.2. Die Steigung der Sekanten (schwarz) ist proportional zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Sättigungsfronten. Die Punkte  $(0.83, f_{\text{im}}(0.83) = f_{\text{dr}}(0.83))$  ( $\circ$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.41, f_{\text{dr}}(0.41))$  ( $\square$ ) und  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(0.01))$  ( $\triangle$ ) sind markiert.

(□) markiert. In allen Abbildungen sind zwei Sekanten eingezeichnet. Die Steigungen der Sekanten, welche  $\triangle$  und  $\circ$  verbinden, sind proportional zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bewässerungsfronten und die Steigungen der Sekanten, welche  $\square$  und  $\circ$  verbinden, sind proportional zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfronten. In allen Beispielen sind diese beiden Sekanten identisch. Alle acht Anfangs- und Randwertprobleme haben bis  $t = t^B = 300$  s die identische Lösung, eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S = S^B = 0.83$ . Für Zeiten  $t > t^B$  wird durch die Randbedingung ein Entwässerungsprozess, dessen Form durch den fraktionalen Fluss bestimmt wird, induziert. Abhängig von der Form der Streichkurve entwickeln sich unterschiedliche Entwässerungen, die im Folgenden beschrieben werden.

### 9.2.1 Probleme A, B, E, F und G

Durch die Konstruktion der Sekanten in Abbildung 9.2 sieht man, dass der Entwässerungsprozess der Probleme A, B, E, F und G die Form einer Stoßfront hat, da Gleichung (2.30) für  $S \in [S^{\text{in}} = 0.41, S^P = 0.83]$  gilt. Zudem ist deutlich zu erkennen, dass die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfronten identisch sind mit  $c_{\text{im}}(0.83, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.41, 0.83) = 1.032 \cdot 10^{-3}$  m/s und sich das nichtmonotone Sättigungsprofil somit als laufende Welle ausbreitet.

### 9.2.2 Probleme C und D

In jeder der Abbildungen 9.2C und 9.2D schneiden sich jeweils die fraktionale Flusskurve der Entwässerung und die Entwässerungsekante einmal. Daher ist der Entwässerungsprozess keine reine Stoßfront mehr, sondern setzt sich aus einer Stoßfront und einer Verdünnungswelle zusammen. Die Stoßfront entsteht für Sättigungen  $S \in [S^{\text{in}}, S_1]$  und die Verdünnungswelle bildet sich für Sättigungen  $S \in [S_1, S^B = S^P]$  aus. Die Sättigung  $S_1$  berechnet sich mit

$$\frac{f_{\text{dr}}(S_1) - f_{\text{dr}}(S^{\text{in}})}{S_1 - S^{\text{in}}} = \frac{df_{\text{dr}}(S_1)}{dS} \quad (9.5)$$

für die Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.41$ . Für Problem C gilt  $S_1 \approx 0.828$  und für Problem D  $S_1 \approx 0.797$ . Die Verdünnungswelle, welche die Sättigung  $S_1$  mit  $S^P = S^B = 0.83$  verbindet, führt zu einem Absinken der Überschusssättigung und einer damit verbundenen Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Das dynamische Verhalten ist aufgrund der Interaktion der Verdünnungswelle mit der Bewässerungsfront nur sehr schwer vorauszusagen.

### 9.2.3 Problem H

Das Ausbreitungsverhalten von Problem H ist noch komplexer als jenes der Probleme C und D, da sich die fraktionale Flusskurve  $f_{\text{dr}}$  und die Entwässerungssekante zweimal schneiden, siehe Abbildung 9.2H. Analog zu den Problemen C und D ist dann der Entwässerungsprozess keine reine Stoßfront mehr, sondern besteht aus zwei Stoßfronten, die durch eine Verdünnungswelle verbunden sind. Die Sättigungen, für welche die Stoßfronten in die Verdünnungswelle übergehen, erhält man hier mit den Gleichungen

$$\frac{f_{\text{dr}}(S_1) - f_{\text{dr}}(S^{\text{in}})}{S_1 - S^{\text{in}}} = \frac{df_{\text{dr}}(S_1)}{dS} \quad (9.6a)$$

$$\frac{f_{\text{dr}}(S^{\text{P}}) - f_{\text{dr}}(S_2)}{S^{\text{P}} - S_2} = \frac{df_{\text{dr}}(S_2)}{dS} \quad (9.6b)$$

für die Plateausättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.83$  und für die Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.41$ . Die Sättigungen für die gewählten Parameter von Problem H sind  $S_1 \approx 0.674$  und  $S_2 \approx 0.678$ . Die Entwässerung ist dann eine Kombination aus zwei Stoßfronten, mit Sättigungssprüngen  $S^{\text{in}}$  nach  $S_1$  und  $S_2$  nach  $S^{\text{P}}$ , und einer Verdünnungswelle, welche  $S_1$  und  $S_2$  verbindet. Die Steigungen der gestrichelten Sekanten in Abbildung 9.2H sind proportional zu den Geschwindigkeiten der beiden Entwässerungsfronten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnen sich zu  $c_{\text{dr}}(S^{\text{in}}, S_1) = 2.269 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(S_2, S^{\text{P}}) = 2.42 \cdot 10^{-3}$  m/s. Es wird deutlich, dass sich die Stoßfront mit Sättigungssprung  $S_2$  nach  $S^{\text{P}}$  schneller ausbreitet als die Bewässerungsfront. Die andere Stoßfront (Sättigungssprung  $S^{\text{in}}$  nach  $S_1$ ) breitet sich hingegen langsamer aus als die Bewässerungsfront. Daher wird die schnellere Entwässerungsfront die Bewässerungsfront einholen, was automatisch zu einer Reduktion der Überschussättigung führt. Das exakte dynamische Verhalten und das resultierende Sättigungsprofil kann auch hier aufgrund der komplexen Streichkurven nicht vorausgesagt werden.

## 9.3 Numerische Lösungen

Im folgenden Abschnitt werden die Anfangs- und Randwertprobleme A-H numerisch mit OpenFOAM gelöst.

Die numerischen Lösungen aller Probleme aus Tabelle 9.2 haben für  $t < t^{\text{B}}$  die identische Lösung. In diesem Zeitraum ist die Strömung im gesamten Gebiet eine primären Bewässerung, bei der die Form der Streichkurven und der Wert des Hystereseparameters  $\delta$  keinen Einfluss

hat. Die Lösung ist eine Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.83$  und der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.83, 0.01) \approx 1.04 \cdot 10^{-3}$  m/s. Die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit ist somit fast identisch zur zuvor berechneten analytischen Geschwindigkeit.

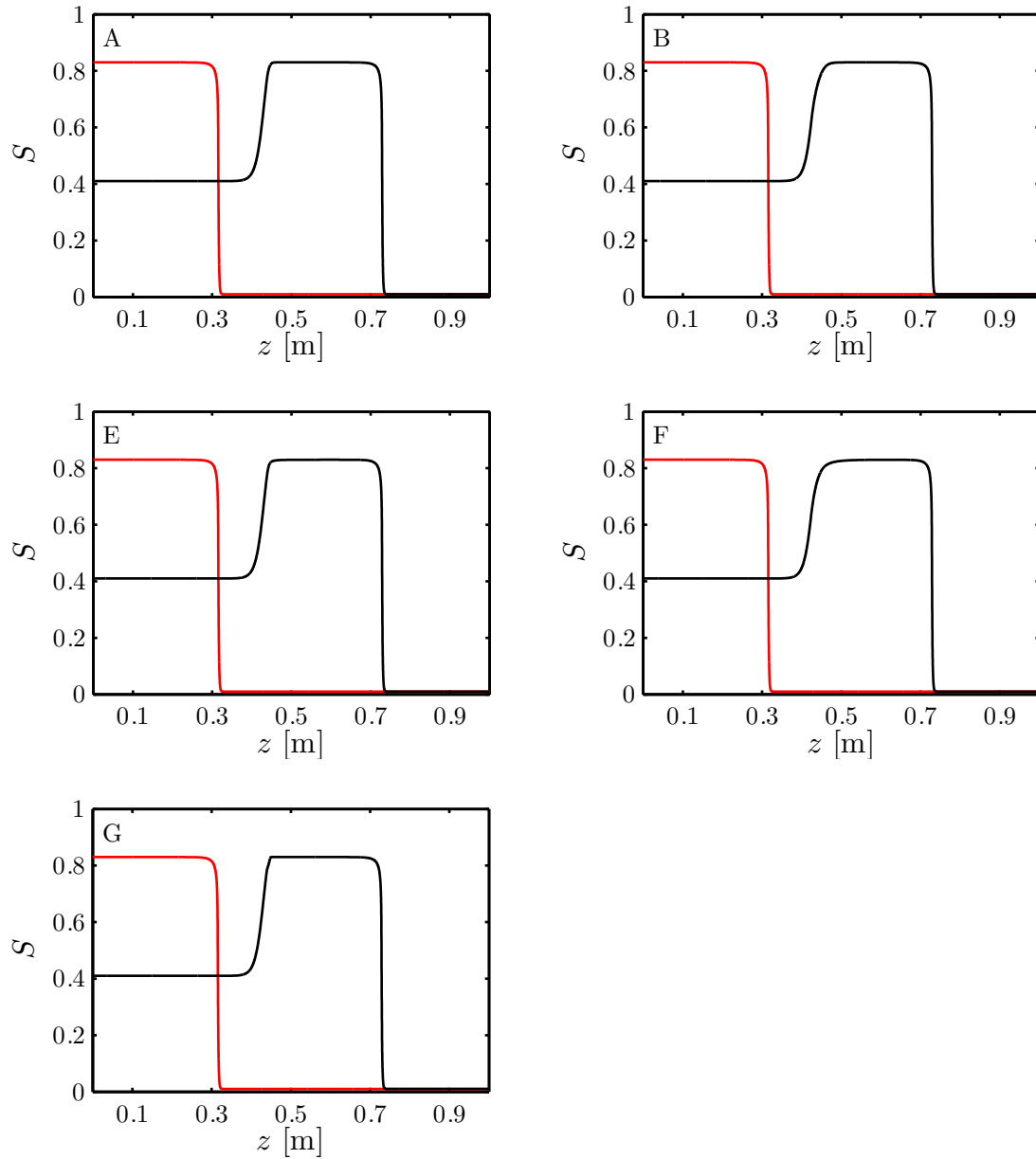
Im Folgenden werden die numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme für Zeiten  $t > t^B$  diskutiert.

### 9.3.1 Probleme A, B, E, F und G

Die numerischen Lösungen der Probleme A, B, E, F und G sind in Abbildung 9.3 dargestellt. In rot ist jeweils das Sättigungsprofil nach  $t = t^B = 300$  s eingezeichnet und das Profil nach  $t = 700$  s ist in schwarz dargestellt. Der Vergleich der Sättigungsprofile nach  $t = 700$  s zeigt, dass kaum Unterschiede zu erkennen sind. Die Breite und Position der Überschussregion und die Überschusssättigung  $S^P = S^B = 0.83$  sind identisch. Die Profile unterscheiden sich nur in der Form der Entwässerungsfront, welche von der Form der Streichkurve abhängig ist. Betrachtet man zusätzlich die zeitliche Entwicklung, sieht man, dass sich die Be- und Entwässerungsfronten, wie quasianalytisch vorausgesagt, konstant und mit gleicher Geschwindigkeit ausbreiten. Die numerischen Geschwindigkeiten, die sich in Abbildung 9.3 ablesen lassen, sind  $c^{\text{num}}(0.83, 0.01) = c^{\text{num}}(0.41, 0.83) \approx 1.04 \cdot 10^{-3}$  m/s und damit nahezu identisch zu der analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Probleme A, B, E, F und G sind somit Beispiele für laufende Sättigungsüberschüsse.

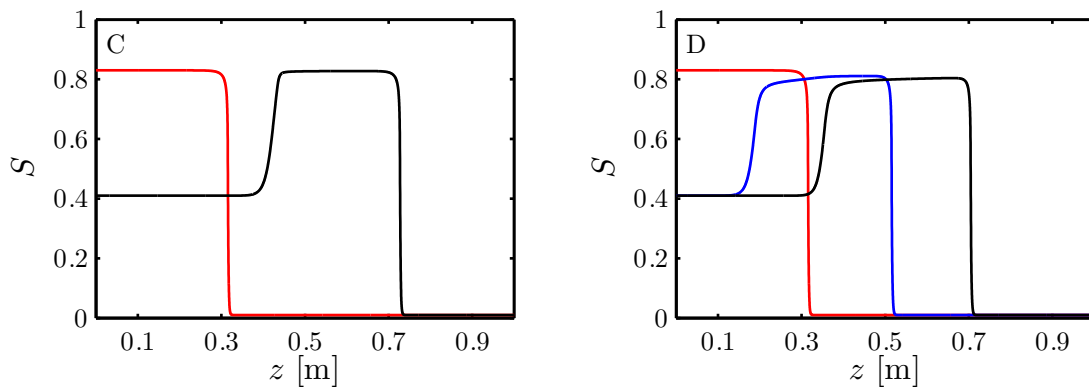
### 9.3.2 Probleme C und D

In Abbildung 9.4 sind ebenfalls die Sättigungsprofile nach  $t = t^B = 300$  s (rot) und  $t = 700$  s (schwarz) eingezeichnet. Zusätzlich ist in der rechten Abbildung, Problem D, das Profil nach  $t = 500$  s in blau abgebildet. Bei Problem C ist optisch kein Unterschied zu den zuvor genannten Problemen zu erkennen. Die genaue Analyse der Sättigungswerte zeigt aber, dass die Überschusssättigung auf  $S^P \approx 0.8276$  absinkt. Die damit verbundene Geschwindigkeitsänderung der Bewässerungsfront und die weiteren dynamischen Entwicklungen sind so minimal, dass der Überschuss für die simulierte Dauer ( $t = 940$  s) immer noch als laufender Sättigungsüberschuss angesehen werden kann. Bei der Visualisierung von Problem D ist sehr gut zu sehen, dass sich der Entwässerungsprozess aus einer Stoßfront und einer Verdünnungswelle zusammensetzt. Infolge der Verdünnungswelle sinkt die Überschusssättigung auf  $S^P \approx 0.804$  ab. Bei Betrachtung der gesamten zeitlichen Entwicklung ist zudem eine geringe Verbreiterung der Überschussregion erkennbar.



**Abbildung 9.3:** Numerische Lösungen von Problemen A, B, E, F und G nach  $t = 300$  s (jeweils in rot) und  $t = 700$  s (jeweils in schwarz). Die Sättigungsprofile von allen fünf Problemen breiten sich mit gleichbleibender Überschussbreite und konstanter Geschwindigkeit aus. Die Plateausättigung ist konstant und somit sind die Lösungen laufende Sättigungsüberschüsse.





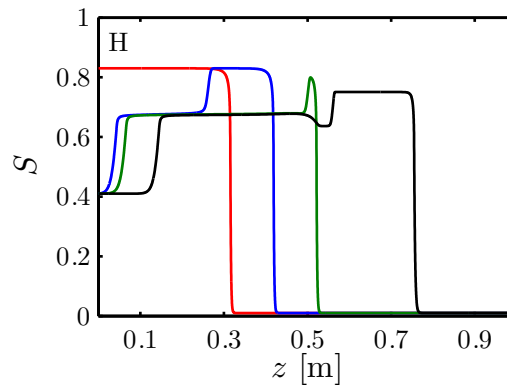
**Abbildung 9.4:** C: Numerische Lösung von Problem C nach  $t = 300$  s (rot) und  $t = 700$  s (schwarz). Bei genauer Analyse der Daten ist ein Absinken der Überschuss-sättigung erkennbar.

D: Numerische Lösung von Problem D nach  $t = 300$  s (rot),  $t = 500$  s (blau) und  $t = 700$  s (schwarz). Das Absinken der Überschuss-sättigung ist gut erkennbar.

Die Verbreiterung der Überschussregion ist, in beiden Fällen, nur schwach ausgeprägt.

### 9.3.3 Problem H

Die numerische Lösung von Problem H ist in den Abbildungen 9.5 und 9.6 dargestellt. Abbildung 9.5 zeigt Sättigungsprofile nach  $t = 300$  s (rot),  $t = 400$  s (blau),  $t = 500$  s (grün) und  $t = 850$  s (schwarz). Abbildung 9.6 ist eine dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung bis  $t = 1000$  s. Bis  $t = t^B = 300$  s ist die Lösung noch identisch zu denen von den Problemen A-G. Danach wird durch die Randbedingung die Entwässerung induziert und es ist deutlich zu sehen, dass sich die Entwässerung, wie analytisch bestimmt, in zwei Sättigungsfronten und eine Verdünnungswelle aufteilt. Die numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der beiden Entwässerungsfronten lassen sich mit den Daten aus den Abbildungen 9.5 und 9.6 zu  $c^{\text{num}}(0.41, S_1 \approx 0.674) \approx 2.26 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(S_2 \approx 0.678, 0.83) \approx 2.45 \cdot 10^{-4}$  m/s berechnen und stimmen mit den analytischen Werten überein. Die schnellere Entwässerungsfront hat zum Zeitpunkt  $t \approx 450$  s die führende Bewässerungsfront eingeholt und die Überschuss-sättigung sinkt von  $S^P = 0.83$  auf  $S^P \approx 0.75$  ab. Darüber hinaus entsteht bei  $z \approx 0.5$  m, der Position an der die Bewässerungsfront eingeholt wurde, ein stationärer Sättigungsabfall von  $S \approx 0.678$  auf  $S = 0.637$ . Die neu entstandene Entwässerungsfront mit dem Sättigungssprung von  $S \approx 0.637$  auf  $S^P \approx 0.75$  breitet sich langsamer aus als die neue Bewässerungsfront mit  $S^P \approx 0.75$ . Dadurch wächst die Breite dieser Überschussregion wieder an.

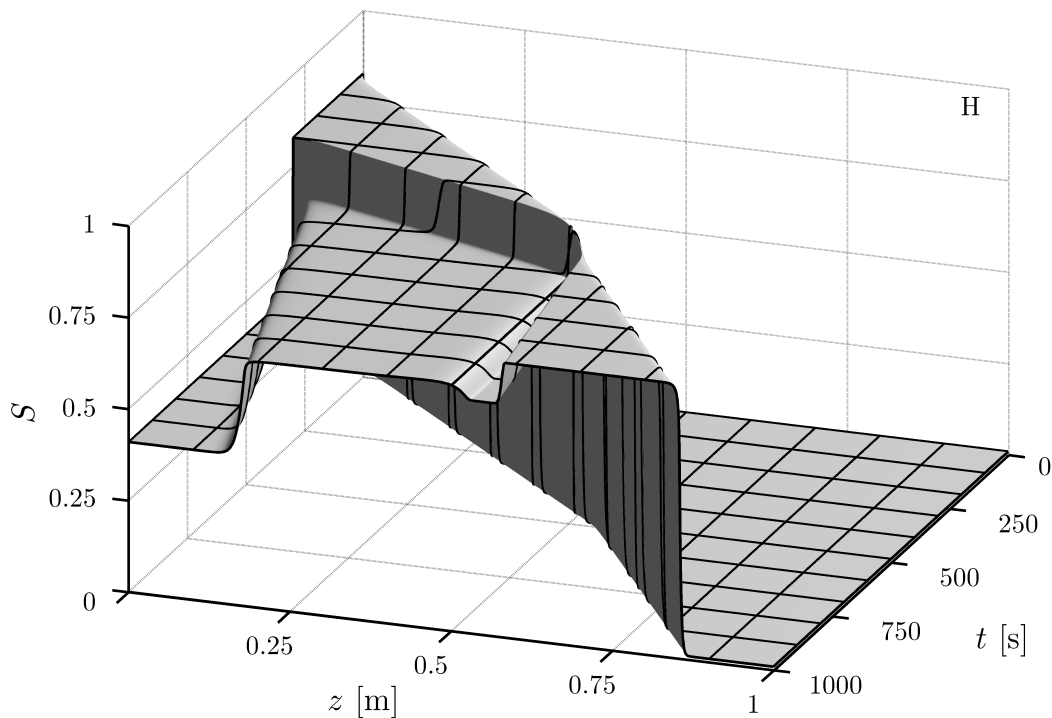


**Abbildung 9.5:** Numerische Lösung von Problem H nach  $t = 300$  s (rot),  $t = 400$  s (blau),  $t = 500$  s (grün) und  $t = 850$  s (schwarz). Im Sättigungsprofil nach  $t = 400$  s sieht man die zwei Stoßfronten der Entwässerung und die verbindende Verdünnungswelle. Nach  $t = 500$  s hat die schnellere Entwässerungsfront die Bewässerungsfront eingeholt und die Überschussättigung nimmt ab. Bei  $z \approx 0.5$  m sinkt die Sättigung stationär ab. Nach  $t = 850$  s besteht der Entwässerungsprozess aus zwei Stoßfronten, die mit einer nichtmonotonen Verdünnungswelle verbunden sind. Die Überschussättigung hat sich von  $S^P = 0.83$  auf  $S^P \approx 0.75$  reduziert.

## 9.4 Folgerung

In diesem Kapitel wurde die Ausbreitung eines nichtmonotonen Sättigungsprofils in Abhängigkeit von den Streichkurven im  $\delta$ -Hysteresemodell untersucht. Die quasianalytischen und numerischen Lösungen der Probleme A und B zeigen, dass bei linearen Streichkurven der Hystereseparameter  $\delta$  nur einen Einfluss auf die Form der Entwässerungsfront hat. Bei den Problemen C-H, mit kubischen Streichkurven, sieht man, dass die Funktionalform der Streichkurve einen Einfluss auf die Ausbreitung des Überschusses haben kann. Der Einfluss ist abhängig von den zusätzlichen Bedingungen (3.20c) und (3.20d) zur Berechnung der Streichkurve. Einzig bei der numerischen Lösung des Anfangs- und Randwertproblems mit Streichkurven Typ H zeigt sich ein großer Einfluss auf die Ausbreitung des Sättigungsprofils.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden daher in den weiteren Kapiteln für das  $\delta$ -Hysteresemodell nur noch lineare Streichkurven in den relativen Permeabilitäten und kubische Streichkurven im Kapillardruck verwendet. Zudem wird der Hystereseparameter  $\delta$  immer sehr viel kleiner als die Höhe des Sättigungsüberschusses gewählt. Damit wird der Einfluss der Streichkurven auf einen Minimum reduziert.



**Abbildung 9.6:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem H. Die Lösung ist bis  $t = 300$  s eine monotone Bewässerungsfront mit Frontsättigung 0.83. Für Zeiten  $t = 300$  s bis  $t \approx 450$  s ist der Entwässerungsprozess aufgeteilt in zwei Stoßfronten und eine Verdünnungswelle. Ab  $t \approx 500$  s holt die schnellere Entwässerungsfront die Bewässerung ein und die Übersättigung sinkt von  $S^P = 0.83$  auf  $S^P \approx 0.75$  ab. Ab  $t \approx 500$  s sinkt bei  $z \approx 0.5$  m die Sättigung stationär von  $S \approx 0.68$  auf  $S \approx 0.637$  ab. Eine neue Entwässerungsfront mit Sättigungssprung von  $S \approx 0.64$  auf  $S^P \approx 0.75$  entsteht. Diese Front breitet sich langsamer aus als die Bewässerungsfront und die Breite des Sättigungsüberschusses wächst wieder an. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 100$  s eingezeichnet.

# 10 Einfluss des Hysterese Modells: Sprunghysterese versus $\delta$ -Hysterese

Nachdem in den Kapiteln 7-9 die Sprunghysterese und das  $\delta$ -Modell getrennt voneinander betrachten wurden, werden in diesem Kapitel die Hysterese Modelle miteinander verglichen. Dazu wird ein Anfangs- und Randwertproblem quasianalytisch und numerisch untersucht und die Unterschiede in der Ausbreitung und den Ausbreitungsgeschwindigkeiten diskutiert.

Teile der Ergebnisse aus diesem Kapitel sind in [68] publiziert.

## 10.1 Modellproblem

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem fraktionalen Fluss (3.2) auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$ , den Material- und Fluidparametern aus Tabelle 10.1 und der Randbedingung

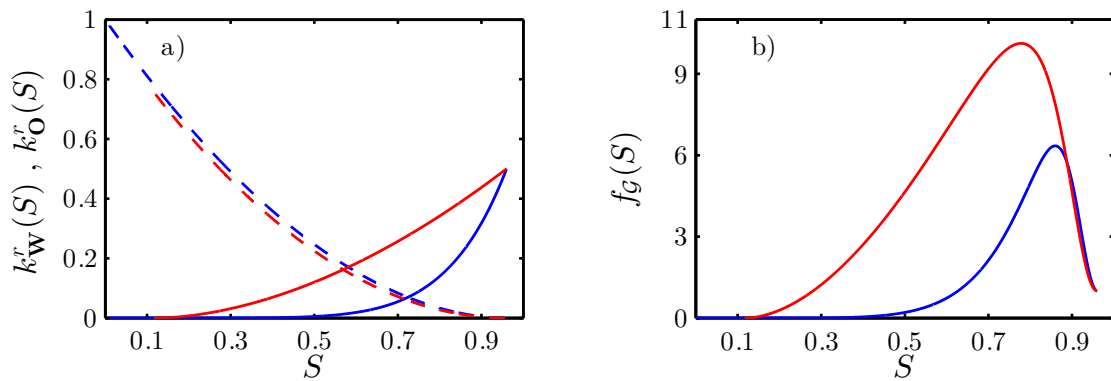
$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B = 0.83, & \text{für } t < t^B = 400 \text{ s} \\ S^{\text{in}} = 0.5, & \text{für } t \geq t^B = 400 \text{ s} \end{cases}, \quad (10.1a)$$

$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (10.1b)$$

wird sowohl für das Sprunghysterese Modell als auch das  $\delta$ -Hysterese Modell gelöst. Die Hysterese Randkurven der relativen Permeabilitäten  $k_{\text{w}}^r$ ,  $k_{\text{O}}^r$  sind in algebraischer Form (3.16) gegeben und in Abbildung 10.1a) zu sehen. Dabei ist die benetzende Phase als durchgezogene Linien, die nichtbenetzende Phase als gestrichelte Linien, die primäre Bewässerung in blau und die sekundäre Entwässerung in rot dargestellt. Der Kapillardruck  $P_c$  ist, wie in allen anderen Kapiteln, wieder in der van-Genuchten-Form (3.17) angegeben. In Abbildung 10.1b) sind die fraktionalen Flusskurven, die aus den Randkurven der relativen Permeabilitäten folgen, gezeichnet.

**Tabelle 10.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte W	$\rho_W$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte O	$\rho_O$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität W	$\mu_W$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität O	$\mu_O$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung W	$\alpha_{\text{im}}$	7	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung O	$\beta_{\text{im}}$	1.9	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung W	$\alpha_{\text{dr}}$	1.8	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung O	$\beta_{\text{dr}}$	2	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung W	$K_{\text{Wim}}^e$	0.5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung O	$K_{\text{Oim}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung W	$K_{\text{Wdr}}^e$	0.5	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung O	$K_{\text{Odr}}^e$	0.75	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	Pa
Irreduzible W Sättigung	$S_{\text{Wi}}$	0.12	-
Irreduzible O Sättigung	$S_{\text{Or}}$	0.04	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$	0.8538	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$5 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$



**Abbildung 10.1:** Hysterese-Randkurven der relativen Permeabilitäten in algebraischer Form a) und der resultierenden fraktionalen Flussfunktionen b) mit den Parametern aus Tabelle 10.1. Die Graphen der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die Graphen der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Die primäre Bewässerung ist in blau und die sekundäre Entwässerung in rot gezeichnet.

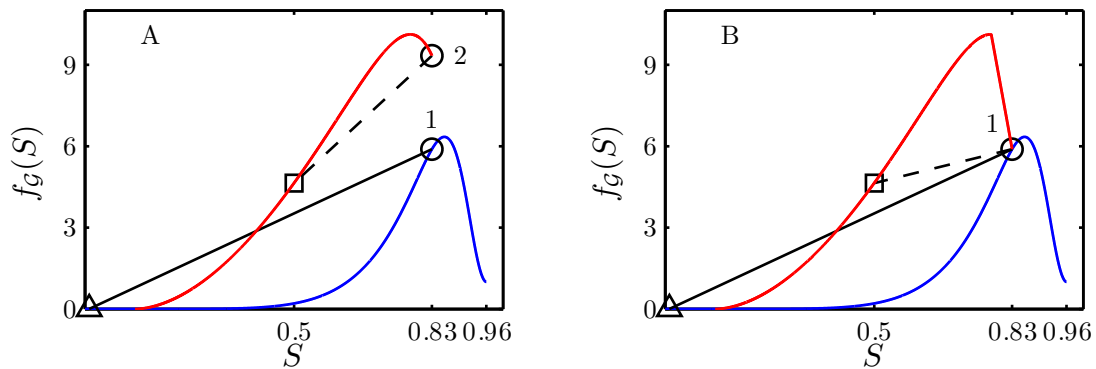
**Tabelle 10.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysterese-modell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysterese-modell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.5	0.83	400 s	Sprunghysterese	-
B	0.01	0.5	0.83	400 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

Die folgenden Abschnitte diskutieren das Anfangs- und Randwertproblem mit den Randwerten und dem Hysterese-modell aus Tabelle 10.2 quasianalytisch und numerisch.

## 10.2 Quasianalytischer Vergleich

Mit den Rankine-Hugoniot-Bedingungen (4.4) lassen sich die Geschwindigkeiten einer führenden Be- und der nachfolgenden Entwässerungsfront für die unterschiedlichen Hysterese-modelle berechnen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer Sättigungsfront bei einer primären Bewässerung sind unabhängig vom Hysterese-modell, da in diesem Fall der fraktionale Fluss  $f_{\text{im}}$  für die beiden Hysterese-modelle identisch ist. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer nachfolgenden Sättigungsfront der Entwässerung ist abhängig vom fraktionalen Fluss  $f_{\text{dr}}$ . Dieser fraktionale Fluss enthält beim  $\delta$ -Hysterese-modell eine Streichkurve. Im Falle der Sprunghysterese existiert keine Streichkurve. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der nachfolgenden Entwässerung vom Hysterese-modell abhängig. Die Problem A und B, welche



**Abbildung 10.2:** Fraktionale Flusskurven für eine primäre Bewässerung (blau) und eine Entwässerung (rot) für Parameter aus Tabelle 10.1 mit Sprunghysterese (A) und  $\delta$ -Hysterese (B). Die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.5, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ),  $(S^{\text{B}} = 0.83, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ 1$ ) und  $(S^{\text{B}} = 0.83, f_{\text{dr}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ 2$ ) sind markiert. Die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfronten sind proportional zur Steigung der durchgezogenen Sekanten (Bewässerung) bzw. zur Steigungen der gestrichelten Sekanten (Entwässerung). Es ist deutlich zu sehen, dass sich im einen Fall (A) der Entwässerungsprozess und im anderen Fall der Bewässerungsprozess (B) schneller ausbreitet.

im Folgenden diskutiert werden, sind Beispiele zur Illustration der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten je nach Hysteresemodell.

Zur quasianalytischen Lösung der Probleme A und B, sowie dem Vergleich beider Probleme werden die fraktionierten Flussfunktionen  $f_{G^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  und  $f_{\text{dr}}$  aus Abbildung 10.2 benutzt. Die Abbildung zeigt die fraktionierten Flüsse der primären Bewässerung und Entwässerung für beide Hystereseemodelle. In Teil A ist das Sprunghysteresemodell mit  $f_{G^{\text{dr}}} = f_{\text{dr}}$  und in Teil B das  $\delta$ -Hysteresemodell mit  $f_{G^{\text{dr} \cup G^{\text{sc}}}} = f_{\text{dr}}$  zu sehen. Die Graphen für den Entwässerungsprozesse werden durch die Sättigungen  $S_* = A = 0.83$  (Sprunghysterese) und durch die Sättigungen  $S_* = 0.83$  und  $A = 0.805$  ( $\delta$ -Hysterese) bestimmt. Für beide Hystereseemodelle ist der fraktionale Fluss der primären Bewässerung in blau und der fraktionale Fluss der Entwässerung in rot gekennzeichnet. In Abbildung 10.2A sind die Punkte  $(0.01, f_{\text{im}}(0.01))$  ( $\triangle$ ),  $(0.83, f_{\text{im}}(0.83))$  ( $\circ 1$ ),  $(0.5, f_{\text{dr}}(0.5))$  ( $\square$ ) und  $(0.83, f_{\text{dr}}(0.83))$  ( $\circ 2$ ) der Anfangs- und Randwerte markiert. In Abbildung 10.2B sind die Punkte  $(0.01, f_{\text{im}}(0.01))$  ( $\triangle$ ),  $(0.5, f_{\text{dr}}(0.5))$  ( $\square$ ) und  $(0.83, f_{\text{im}}(0.83) = f_{\text{dr}}(0.83))$  ( $\circ 1$ ) markiert. Die Steigungen der Sekanten ist mit dem Faktor  $Q/\phi$  proportional zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Bewässerungsfronten (durchgezogene Linien) und der Entwässerungsfronten (gestrichelte Linien). Die Lösung beider Probleme ist für Zeiten  $t < t^{\text{B}} = 400$  s eine monotone Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.83$  und Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.83, 0.01) = 1.03 \cdot 10^{-3}$  m/s. Die Entwässerungsfronten, die ab  $t = 400$  s entstehen, haben unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

### 10.2.1 Problem A (Sprunghysterese)

Für den Fall der Sprunghysterese ist die Entwässerung mit  $c_{\text{dr}}(0.5, 0.83) = 2.04 \cdot 10^{-3}$  m/s schneller als die Bewässerungsfront. Dies wird anhand der Steigungen der Sekanten in Abbildung 10.2A deutlich. Hier ist die gestrichelte Sekante sehr viel steiler als die durchgezogene Sekante. Daher wird die Entwässerungsfront die Bewässerungsfront nach einer endlichen Zeit einholen und der Überschuss wird verschwinden. Das resultierende Sättigungsprofil ist dann eine monotone Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{out}} = 0.5$ , welche sich mit der Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.5, 0.01) = 5.99 \cdot 10^{-5}$  m/s ausbreitet.

### 10.2.2 Problem B ( $\delta$ -Hysterese)

Bei Problem B, siehe Abbildung 10.2B, ist die Bewässerungsfront schneller als die Entwässerungsfront. Somit ist die Lösung von Problem B ein Sättigungsüberschuss mit wachsender Überschussbreite. Gleichungen (4.4) liefern für die Geschwindigkeit der Bewässerungsfront  $c_{\text{im}}(0.83, 0.01) = 1.03 \cdot 10^{-3}$  m/s und  $c_{\text{dr}}(0.5, 0.83) = 5.45 \cdot 10^{-4}$  m/s für die der Entwässerungsfront.

## 10.3 Numerische Lösungen

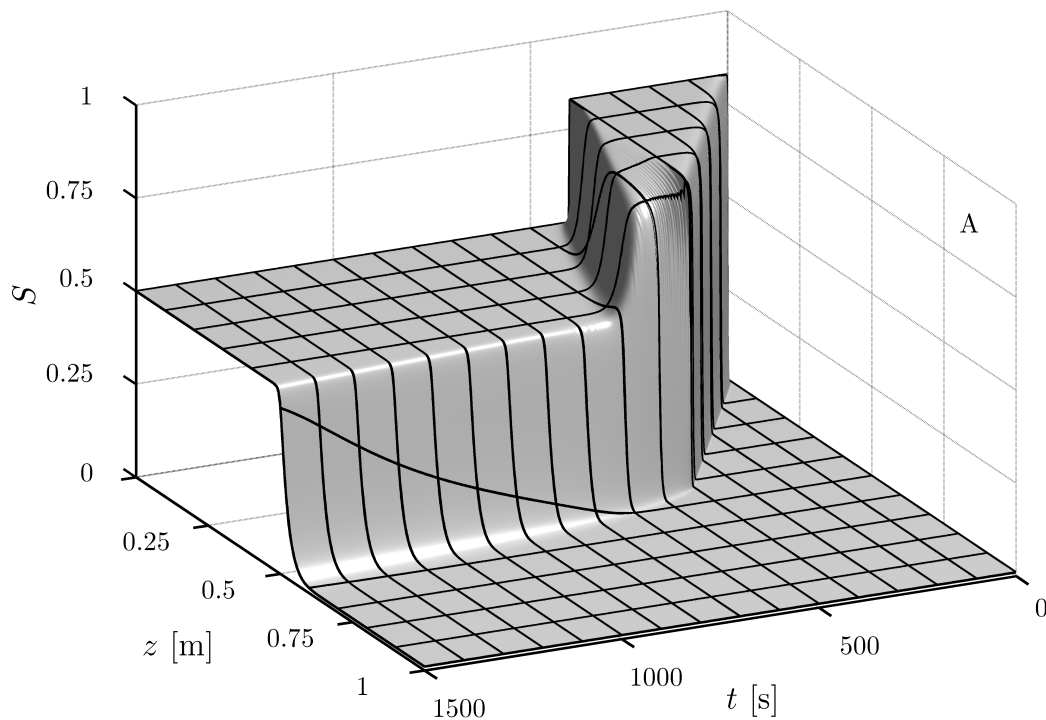
Die numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme A und B sind für Zeiten  $t < t^{\text{B}} = 400$  s identisch. Eine Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{B}}$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.83, 0.01) \approx 1 \cdot 10^{-3}$  m/s durch das poröse Medium. Die errechnete numerische Geschwindigkeit ist identisch zur analytischen Geschwindigkeit von zuvor.

Die Lösungen für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  unterscheiden sich und sind abhängig vom Hysterese Modell. Diese unterschiedlichen Lösungen werden in den folgenden zwei Abschnitten diskutiert.

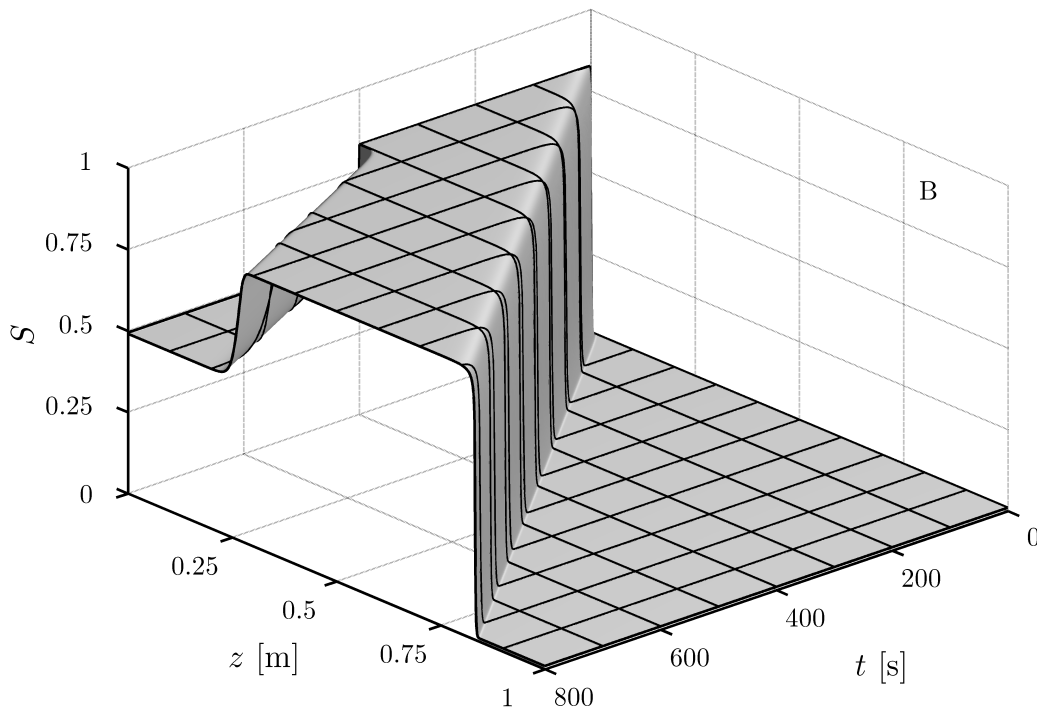
### 10.3.1 Problem A (Sprunghysterese)

Abbildung 10.3 zeigt die numerische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems A. Die Lösung kann zeitlich in vier Phasen unterteilt werden. Zu Beginn, bis  $t = t^{\text{B}} = 400$  s, ist die Lösung eine monotone Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{B}} = 0.83$ . Ab  $t = 400$  s wird durch die Randbedingung eine Entwässerung induziert, die der Bewässerung nachfolgt. Die Entwässerungsfront breitet sich schneller aus als die Bewässerung und daher schrumpft





**Abbildung 10.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A mit Parametern aus Tabelle 10.1. Die Lösung ist für  $t \leq 400$  s eine monotone Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.83$ . Für  $400 \text{ s} < t < 550 \text{ s}$  ist die Lösung ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschuss-sättigung  $S^P = S^B = 0.83$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.5$ . Die Breite der Überschussregion nimmt in dieser Zeit ab, da sich die Entwässerung schneller ausbreitet als die Bewässerung. Ab  $t \approx 550$  s sinkt die Überschuss-sättigung ab, bis nur noch ein monotones Sättigungsprofil übrig ist. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 100$  s eingezeichnet.



**Abbildung 10.4:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B mit Parametern aus Tabelle 10.1. Die Lösung ist für  $t \leq 400$  s eine monotone Sättigungsfrent mit Frontsättigung  $S^B = 0.83$ . Für Zeiten  $t > 400$  s ist die Lösung ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschuss-sättigung  $S^P = S^B = 0.83$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.5$ . Die Bewässerung breitet sich schneller aus als die Entwässerung und somit verbreitert sich der Überschussbereich linear mit der Zeit. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 100$  s eingezeichnet.

die Breite des Sättigungsüberschusses. Nach  $t \approx 550$  s hat die Entwässerungsfrent die Bewässerungsfrent eingeholt und im weiteren zeitlichen Verlauf sinkt die Überschuss-sättigung ab, bis nur noch ein monotones Sättigungsprofil übrig ist. Dieses monotone Profile hat eine Bewässerungsfrent mit Frontsättigung  $S = 0.5$  und bereitet sich mit der Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.5, 0.01) \approx 6 \cdot 10^{-5}$  m/s, welche identisch zu der analytischen Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(S^{\text{in}} = 0.5, S^{\text{out}} = 0.01)$  ist, aus.

### 10.3.2 Problem B ( $\delta$ -Hysterese)

Abbildung 10.4 zeigt die numerischen Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems B. Die numerische Lösung ist in zwei Teile geteilt. Wie in Problem A breitet sich bis  $t = t^B$  eine Bewässerungsfrent mit Frontsättigung  $S^B = 0.83$  mit konstanter Geschwindigkeit aus.

Für Zeiten größer  $t = t^B = 400$  s folgt eine Entwässerungsfront der Bewässerung, hervorgerufen durch die Reduzierung der Sättigung am Einlass von  $S^B = 0.83$  auf  $S^{in} = 0.5$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Entwässerungsfront berechnet sich mit den Werten aus Abbildung 10.4 zu  $c^{num}(0.5, 0.83) \approx 6.0 \cdot 10^{-4}$  m/s und ist nahezu identisch zur analytischen Geschwindigkeit. Damit breitet sich die Entwässerungsfront langsamer aus als die Bewässerungsfront und die Breite des Überschussplateaus wächst linear mit der Zeit.

## 10.4 Folgerung

Die beiden quasianalytischen und numerischen Lösungen aus diesem Kapitel zeigen, dass die Wahl des Hysterese Modells in diesem Fall einen Einfluss auf die Lösung hat. Durch die unterschiedliche Konstruktion der Graphen der Entwässerungsprozesse, mit und ohne Streichkurve, erhält man für Sättigungsfronten unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Wie im betrachteten Anfangs- und Randwertproblem kann sich dadurch das qualitative Lösungsverhalten, Überschuss bleibt erhalten oder Überschuss löst sich auf, je nach verwendetem Hysteresemodell ändern.

# 11 Einfluss der Gravitation

Ziel dieses Kapitels ist, die Ausbreitung von nichtmonotonen Sättigungsprofilen ohne Einfluss der Gravitation anhand von Beispielen zu untersuchen. Dafür werden unterschiedliche Anfangs- und Randwertprobleme für einen horizontalen Fluss analysiert und numerisch gelöst. Wieder werden zwei verschiedene Modelle, die Sprunghysterese und die  $\delta$ -Hysterese, verwendet, um das hysteretische Verhalten zu beschreiben.

## 11.1 Modellproblem

Das Anfangs- und Randwertproblem (DG2) mit dem fraktionalen Fluss aus Gleichung (3.3) auf dem Gebiet  $\Omega = [0, L]$  ist mit der Randbedingung

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B, & \text{für } t < t^B \\ S^{\text{in}}, & \text{für } t \geq t^B \end{cases}, \quad (11.1a)$$

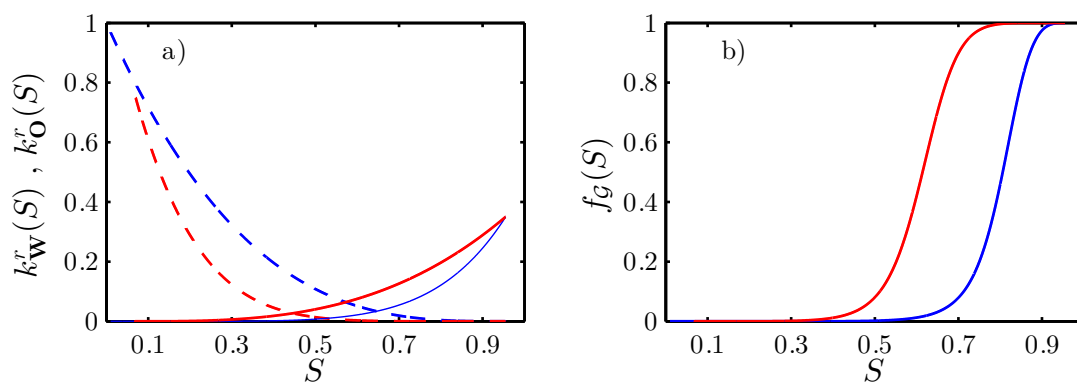
$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} \quad (11.1b)$$

den Hysterese-Modellen aus Kapitel 3 und den Werten aus Tabelle 11.1 spezifiziert. Die Randkurven der relativen Permeabilitäten sind wieder in der algebraischen Formulierung (3.16) angegeben. Für die Randkurven des Kapillardrucks wird die van-Genuchten-Form (3.17) benutzt.

In Abbildung 11.1a) sind die Hysterese-Randkurven der relativen Permeabilitäten für die Parameter aus Tabelle 11.1 dargestellt. Die benetzende Phase ist dabei mit durchgezogenen Linien und die nichtbenetzende Phase mit gestrichelten Linien gezeichnet. Die Randkurve der Bewässerung ist blau und die der Entwässerung rot. Die aus den relativen Permeabilitäten resultierenden fraktionalen Flussfunktionen sind in Abbildung 11.1b) abgebildet. Es ist deutlich zu sehen, dass die fraktionalen Flussfunktionen der Randkurven streng monoton steigend und durch die Werte  $f(S) = 0$  und  $f(S) = 1$  beschränkt sind.

**Tabelle 11.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

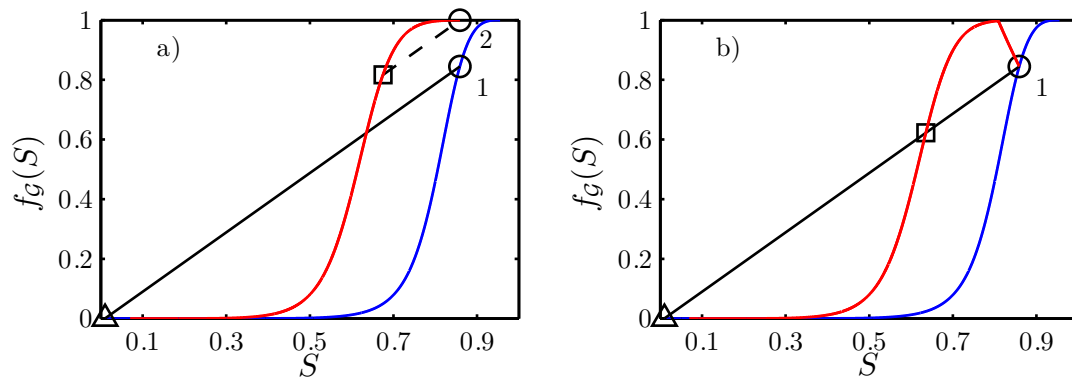
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\varrho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\varrho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	6	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	3	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.35	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.75	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\text{Wi}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\text{Or}}$	0.045	-
Welge-Sättigung der primären Bewässerung	$S_{\text{Welge}}^{\text{im}}$	0.907	-
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-4}$	$\text{m}/\text{s}$



**Abbildung 11.1:** Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten in algebraischer Form a) und der resultierenden fraktionierten Flussfunktionen b) mit den Parametern aus Tabelle 11.1. Die Graphen der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die Graphen der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Der Graph der primären Bewässerung ist in blau und der Graph der sekundären Entwässerung in rot gezeichnet.

**Tabelle 11.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.675	0.8589	800 s	Sprunghysterese	-
B	0.01	0.6355	0.8589	800 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
C	0.01	0.6	0.8589	800 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
D	0.01	0.665	0.8589	800 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
E	0.01	0.6355	0.95	300 s	$\delta$ -Hysterese ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

**Abbildung 11.2:** Fraktionale Flussfunktionen der primären Bewässerung  $f_{\text{im}}$  (blau) und des Entwässerungsprozesses  $f_{\text{dr}}$  (rot) für das Problem A (links) und die Probleme B-D (rechts).

Im Folgenden werden die Anfangs- und Randwertprobleme A-E aus Tabelle 11.2 quasianalytisch und numerisch gelöst. Hierbei wird die Hysterese in Problem A durch die Sprunghysterese und bei den übrigen Problemen (B-E) mit dem  $\delta$ -Hysteresemodell modelliert.

## 11.2 Quasianalytische Lösungen

In diesem Abschnitt werden die Anfangs- und Randwertprobleme quasianalytisch mit Hilfe der Ausbreitungsgeschwindigkeiten für die Be- und Entwässerung aus Gleichungen (4.4) gelöst. Für die Probleme A-D ist die Lösung bis zur Zeit  $t = t^{\text{B}}$  immer ein Plateau mit einer Sättigungsfrent mit Plateau- bzw. Frontsättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.8589$ . Zum Umschaltzeitpunkt  $t^{\text{B}}$  ist das Plateau so breit ist, dass die diffusiven Effekte der entstehenden Entwässerung nicht mit der Bewässerungsfrent wechselwirken.

### 11.2.1 Problem A

In Abbildung 11.2a) sind die fraktionalen Flussfunktionen für Problem A eingezeichnet. In blau ist der fraktionale Fluss  $f_{\mathcal{G}^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  und in rot der fraktionale Fluss  $f_{\mathcal{G}^{\text{dr}}} = f_{\text{dr}}$  dargestellt. Der Entwässerungsprozess ist durch die Sättigungen  $S_* = A = 0.8589$  charakterisiert. Zusätzlich sind die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.675, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ),  $(S^{\text{B}} = 0.8589, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ 1$ ) und  $(S^{\text{B}} = 0.8589, f_{\text{dr}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ 2$ ) markiert. Die durchgezogene schwarze Sekante verbindet  $\triangle$  mit  $\circ 1$ , die gestrichelte Sekante verbindet  $\square$  mit  $\circ 2$ . Die Steigungen beider Sekanten sind jeweils proportional zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Be- (durchgezogen schwarz) bzw. Entwässerungsfront (gestrichelt schwarz) und berechnen sich mit Gleichung (4.4) zu  $c_{\text{im}}(0.8589, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.675, 0.8589) = 2.86 \cdot 10^{-4}$  m/s. Für die gewählten Sättigungen  $(S^{\text{in}}, S^{\text{out}}, S^{\text{B}}) = (0.675, 0.01, 0.8589)$  im Sprunghysteresemodell ist Gleichung (4.6) erfüllt und das nichtmonotone Sättigungsprofil breitet sich als laufende Welle mit der Überschussättigung  $S^{\text{TW}} = 0.8589$  aus.

### 11.2.2 Problem B

In Abbildung 11.2b) sind die fraktionalen Flüsse  $f_{\mathcal{G}^{\text{im}}} = f_{\text{im}}$  und  $f_{\mathcal{G}^{\text{dr} \cup \mathcal{G}^{\text{sc}}}} = f_{\text{dr}}$  für Problem B dargestellt, die Kurve der Bewässerung in blau und die Kurve der Entwässerung in rot. Der Graph der Entwässerung wird mit den Sättigungen  $S_* = 0.8589$  und  $A = 0.8339$  berechnet. Des Weiteren sind die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.6355, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ) und  $(S^{\text{B}} = 0.8589, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}) = f_{\text{dr}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ$ ) markiert. Die Sekanten, welche  $\triangle$  mit  $\circ$  und  $\square$  mit  $\circ$  verbinden, liegen bei diesem Beispiel übereinander. Die analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sind  $c_{\text{im}}(0.8589, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.6355, 0.8589) = 2.86 \cdot 10^{-4}$  m/s. Für die gewählten Sättigungen der Anfangs- und Randbedingungen  $(S^{\text{in}}, S^{\text{out}}, S^{\text{B}}) = (0.6355, 0.01, 0.8589)$  im  $\delta$ -Hysteresemodell ist Gleichung (4.6) erfüllt und das nichtmonotone Sättigungsprofil breitet sich als laufende Welle mit Überschussättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{TW}} = 0.8589$  aus.

### 11.2.3 Problem C

Die fraktionalen Flüsse  $f_{\text{im}}$  und  $f_{\text{dr}}$  bei Problem C sind identisch zu denen aus Problem B. Die Rand- und Anfangssättigungen sind so gewählt, dass die Entwässerungsfront, welche für Zeiten  $t > t^{\text{B}} = 800$  s entsteht, sich schneller ausbreitet als die führende Bewässerungsfront. Die Geschwindigkeit der Bewässerungsfront ist  $c_{\text{im}}(0.8589, 0.01) = 2.86 \cdot 10^{-4}$  m/s, und die

Entwässerungsfront breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c_{\text{dr}}(0.6, 0.8589) = 4.73 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Somit schrumpft die Überschussbreite für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$ , bis die Entwässerungsfront die führende Bewässerungsfront eingeholt hat. Daraufhin wird der Sättigungsüberschuss langsam abgebaut und erreicht einen neuen Plateauwert  $S^{\text{P}}$ . Diese neue Überschussättigung hat einen Wert  $S^{\text{P}} < 0.8164$ , da für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten die Ungleichung  $c_{\text{im}}(S^{\text{P}} < 0.8164, 0.01) > c_{\text{dr}}(0.6, S^{\text{P}} < 0.8164)$  gilt und sich somit die Bewässerungsfront für  $S^{\text{P}} < 0.8164$  schneller ausbreitet als die Entwässerungsfront. Das endgültige Profil ist somit ein Sättigungsüberschuss mit wachsender Plateaubreite. Die genaue zeitliche Entwicklung und Überschussättigung  $S^{\text{P}}$  kann aufgrund der Wechselwirkung zwischen Be- und Entwässerung und der diffusiven Effekte des Kapillarflusses nicht vorhergesagt werden.

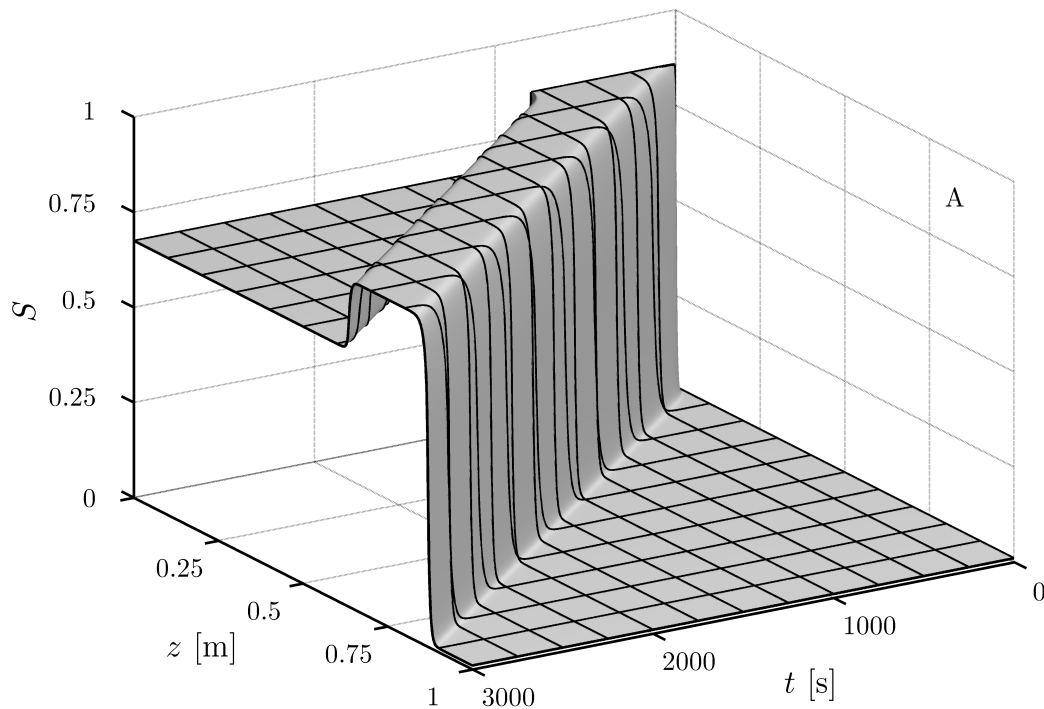
### 11.2.4 Problem D

Auch bei Problem D sind die fraktionalen Flussfunktionen  $f_{\text{im}}$  und  $f_{\text{dr}}$  identisch zu den Flussfunktionen aus Problem B. Die Rand- und Anfangssättigungen sind so gewählt, dass die Entwässerungsfront, welche für Zeiten  $t > t^{\text{B}} = 800$  s entsteht, sich langsamer ausbreitet als die führende Bewässerungsfront. Mit Gleichung (4.4) kann man die analytische Geschwindigkeit der Entwässerungsfront  $c_{\text{dr}}(0.665, 0.8589) = 1.04 \cdot 10^{-4}$  m/s berechnen. Diese ist eindeutig kleiner als die Geschwindigkeit der Bewässerungsfront  $c_{\text{im}}(0.8589, 0.01) = 2.86 \cdot 10^{-4}$  m/s, welche schon für Problem B und C berechnet wurde. Das Sättigungsprofil als Lösung von Problem D breitet sich als Sättigungsüberschuss mit wachsender Plateaubreite aus.

### 11.2.5 Problem E

Die Lösung des Anfangs- und Randwertproblems E bis zum Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}}$  ist eine Stoßfront mit der Frontsättigung  $S_{\text{Welge}} = 0.907$ , der Welge-Sättigung, und eine Verdünnungswelle zwischen  $S_{\text{Welge}} = 0.907$  und  $S^{\text{B}} = 0.95$ . Die Stoßfront breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.907, 0.01) = 3.15 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Wie zuvor wird für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  am Einlass eine Entwässerung induziert. Diese Entwässerung breitet sich schneller aus als die Bewässerungsfront, vergleiche Abbildung 11.2 und Gleichung (4.4). Hierbei wird die Verdünnungswelle zerstört und es bildet sich ein neuer Sättigungsüberschuss mit der Überschussättigung  $S^{\text{P}} \leq 0.8589$  aus. Dies folgt aus Abbildung 11.2b) und den Gleichungen (4.4), da für festes  $S^{\text{out}} = 0.01$  und  $S^{\text{in}} = 0.6355$  nur  $S^{\text{P}} = 0.8589$  die Gleichung (4.6) löst (siehe Problem B). Für Plateausättigungen  $S^{\text{P}} > 0.8589$  ist die Entwässerungsfront immer schneller als die Bewässerungsfront und für  $S^{\text{P}} < 0.8589$  ist die Bewässerungsfront immer schneller als die





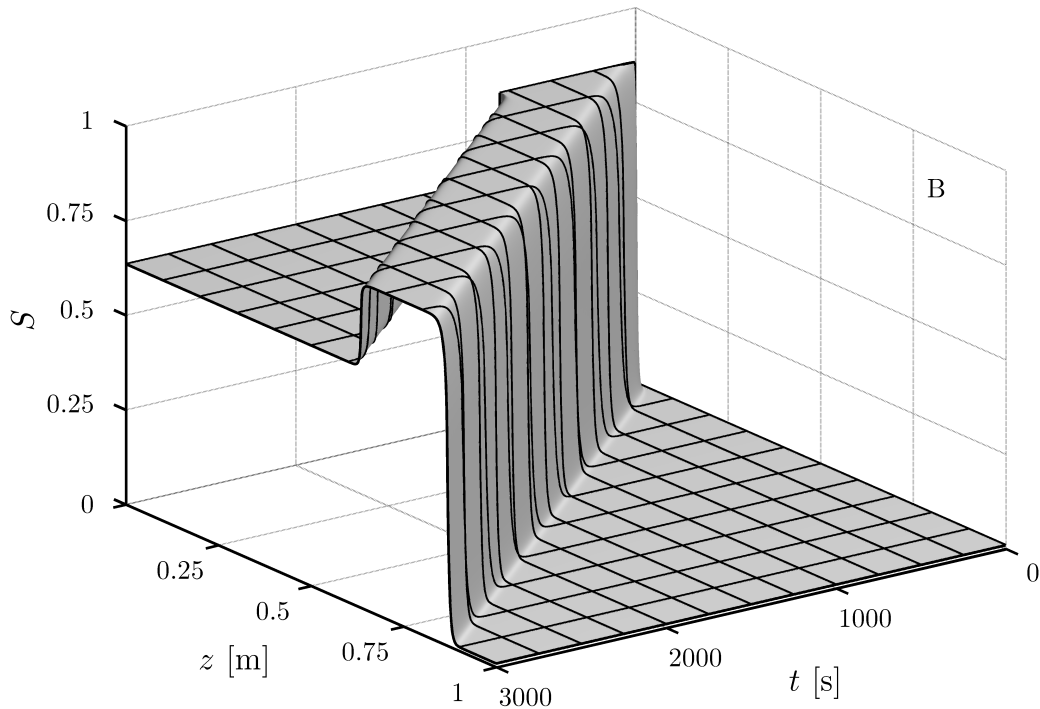
**Abbildung 11.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A mit Parametern aus Tabelle 11.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.8589$ . Für  $t > t^B$  ist die Lösung ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschussättigung  $S^P = S^B = 0.8589$  und Randsättigung  $S^{in} = 0.675$ . Die Be- und Entwässerungsfronten haben eine konstante, identische Geschwindigkeit und somit breitet sich das Profil als laufende Welle aus. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta x = 0.1$  m und  $\Delta t = 250$  s eingezeichnet.

Entwässerungsfront. Das entstandene Sättigungsprofil breitet sich dann mit wachsender oder konstanter Überschussbreite aus. Die exakte Überschussättigung und die zeitliche Entwicklung kann aufgrund der vorhandenen diffusiven Effekte des Kapillardrucks nicht vorhergesagt werden.

## 11.3 Numerische Lösungen

### 11.3.1 Problem A

Die numerische Lösung von Problem A ist in Abbildung 11.3 abgebildet. Man kann deutlich sehen, dass die Geschwindigkeiten der beiden Fronten konstant und identisch sind. Aus den numerischen Daten lassen sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten zu  $c^{\text{num}}(0.8589, 0.01) =$

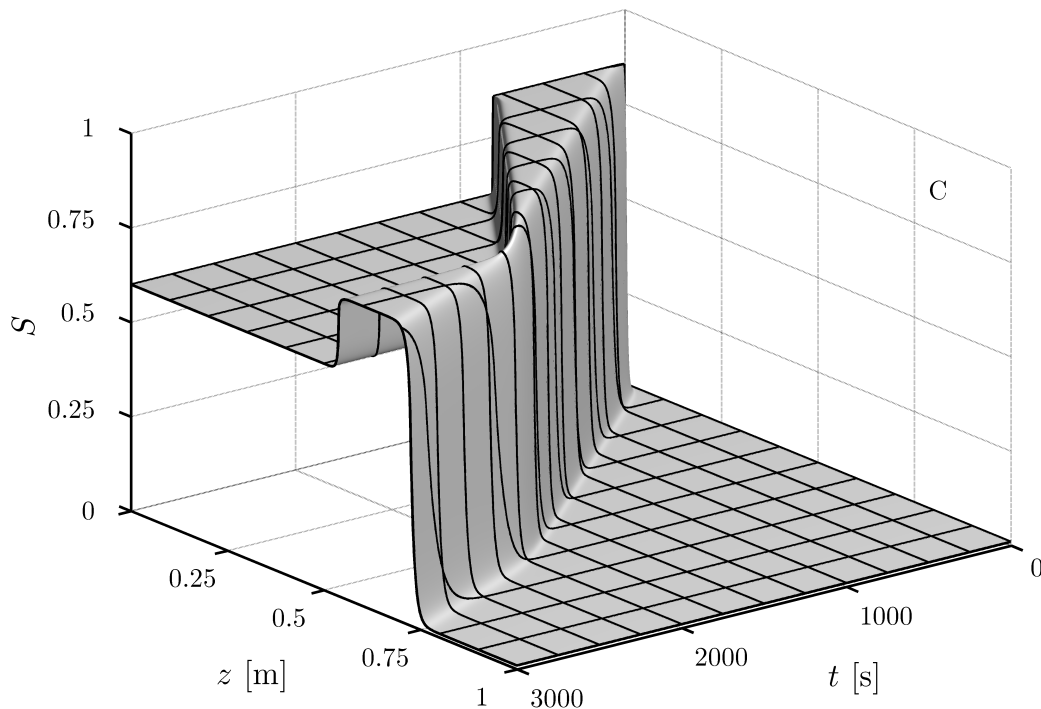


**Abbildung 11.4:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B mit Parametern aus Tabelle 11.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.8589$ . Für  $t > t^B$  ist die Lösung ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschussättigung  $S^P = S^B = 0.8589$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.6355$ . Die Be- und Entwässerungsfronten haben eine konstante, identische Geschwindigkeit und somit breitet sich das Profil als laufende Welle aus. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta x = 0.1$  m und  $\Delta t = 250$  s eingezeichnet.

$c^{\text{num}}(0.675, 0.8589) \approx 2.856 \cdot 10^{-4}$  m/s bestimmen. Diese Geschwindigkeiten stimmen perfekt mit den analytisch berechneten Geschwindigkeiten überein.

### 11.3.2 Problem B

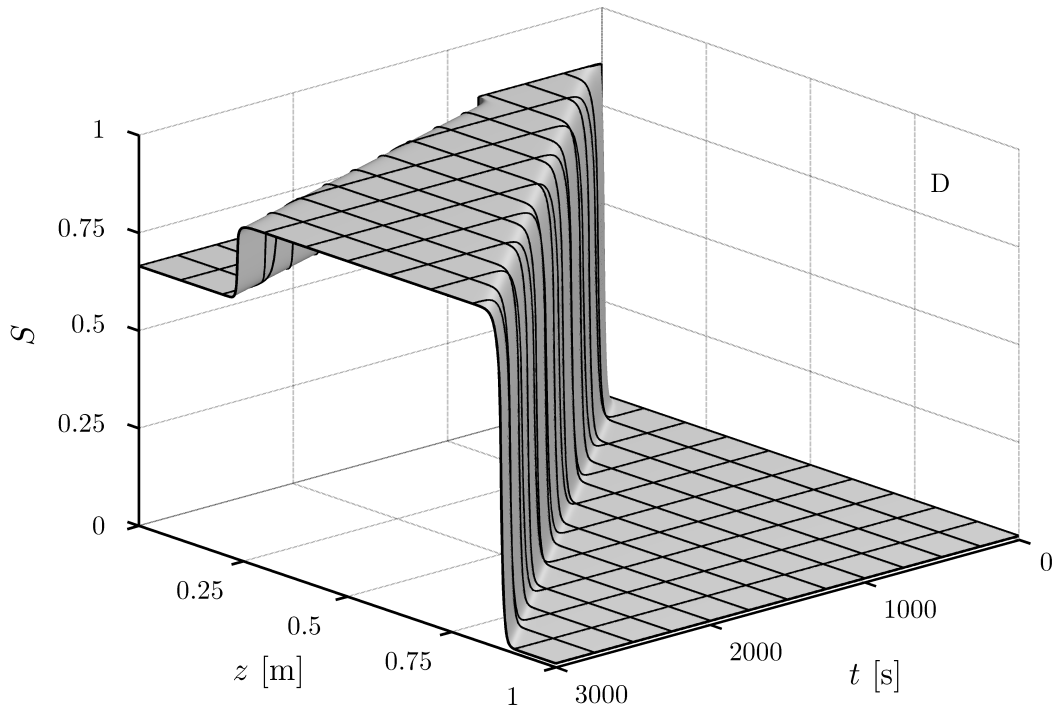
Die Lösung von Problem B repräsentiert ein laufendes nichtmonotones Sättigungsprofil im  $\delta$ -Hysteresemodell. In Abbildung 11.4 ist für  $t > t^B$  deutlich der laufende Überschuss zu sehen. Die numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront  $c^{\text{num}}(0.8589, 0.01) = c^{\text{num}}(0.6355, 0.8589) \approx 2.856 \cdot 10^{-4}$  m/s sind zeitlich konstant. Zudem sind die numerischen und die analytischen Geschwindigkeiten, welche zuvor berechnet wurden, fast identisch.



**Abbildung 11.5:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem C mit Parametern aus Tabelle 11.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.8589$ . Die Entwässerungsfront für  $t \in [t^B, 1100 \text{ s}]$  breitet sich schneller aus als die Bewässerungsfront und somit schrumpft die Breite der Überschussregion. Nachdem die nachfolgende Entwässerungsfront die Bewässerung eingeholt hat, baut sich die Überschussättigung langsam ab, bis  $S^P \approx 0.7945$  erreicht ist. Für das dadurch entstandene Profil breitet sich die Bewässerungsfront wieder schneller aus als die Entwässerung. Die endgültige Lösung ist somit ein nichtmonotones Profil mit einem sich verbreiternden Überschussbereich. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  und  $\Delta t = 250 \text{ s}$  eingezeichnet.

### 11.3.3 Problem C

Abbildung 11.5 zeigt die numerische Lösung von Problem C. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.8589$ . Die numerische Geschwindigkeit beträgt  $c^{\text{num}}(0.8589, 0.01) \approx 2.853 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  und ist somit nahezu gleich der analytischen Geschwindigkeit. Zum Zeitpunkt  $t = t^B = 800 \text{ s}$  wird durch die Randbedingung eine Entwässerung und damit ein nichtmonotones Sättigungsprofil erzeugt. Die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entwässerungsfront  $c^{\text{num}}(0.6, 0.8589) \approx 4.72 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  ist größer als die der führenden Bewässerungsfront und somit nimmt die Überschussbreite mit der Zeit ab. Im Zeitraum  $1100 \text{ s} \leq t \leq 2500 \text{ s}$  hat die Entwässerungsfront die Bewässerung eingeholt und die Überschussättigung reduziert sich auf  $S^P \approx 0.7945$ . Durch die Redukti-

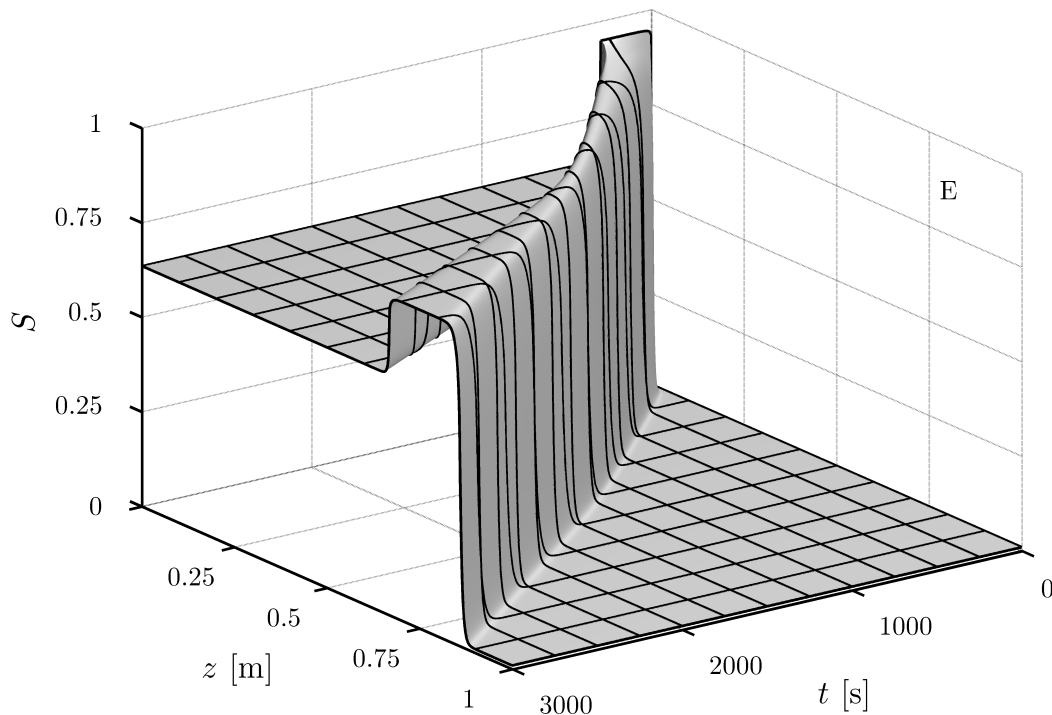


**Abbildung 11.6:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem D mit Parametern aus Tabelle 11.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.8589$ . Die Entwässerungsfront breitet sich hier sehr viel langsamer aus als die Bewässerungsfront. Dadurch erhält man einen Sättigungsüberschuss mit wachsender Überschussbreite. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta x = 0.1$  m und  $\Delta t = 250$  s eingezeichnet.

on der Überschussättigung verändern sich auch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten beider Sättigungsfronten. Nachdem sich die Überschussättigung bei  $S^P \approx 0.7945$  stabilisiert hat, breitet sich die Bewässerungsfront mit  $c^{\text{num}}(0.7945, 0.01) \approx 1.56 \cdot 10^{-4}$  m/s aus und die Entwässerungsfront hat die Geschwindigkeit  $c^{\text{num}}(0.6, 0.7945) \approx 5.21 \cdot 10^{-6}$  m/s. Diese Geschwindigkeiten sind nahezu identisch zu den analytischen Geschwindigkeiten der Bewässerung  $c_{\text{im}}(0.7945, 0.01) = 1.55 \cdot 10^{-4}$  m/s und der Entwässerung  $c_{\text{dr}}(0.6, 0.7945) = 5.72 \cdot 10^{-6}$  m/s.

### 11.3.4 Problem D

Die numerische Lösung von Problem D in Abbildung 11.6 zeigt für  $t > t^B$  ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit einer anwachsenden Überschussregion. Gut zu sehen sind die konstanten Geschwindigkeiten der Fronten, die sich mit  $c^{\text{num}}(0.8589, 0.01) \approx 2.86 \cdot 10^{-4}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.665, 0.8589) \approx 1.05 \cdot 10^{-6}$  m/s deutlich unterscheiden. Wie in den vorherigen numeri-



**Abbildung 11.7:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem E mit Parametern aus Tabelle 11.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S_{\text{Welge}} = 0.907$  und eine Verdünnungswelle, die  $S_{\text{Welge}} = 0.907$  und  $S^B = 0.95$  verbindet. Aufgrund der höheren Geschwindigkeit der Entwässerungsfront für  $t > t^B$  sinkt die Sättigung auf  $S^P \approx 0.8425$  ab. Die Reduktion der Überschussättigung führt zu einer Geschwindigkeitsänderung der Fronten und das nichtmonotone Profil mit  $S^P \approx 0.8425$  breitet sich mit einer anwachsenden Überschussregion aus. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta x = 0.1$  m und  $\Delta t = 250$  s eingezeichnet.

schon Lösungen stimmen auch hier die numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten perfekt mit den zuvor berechneten analytischen Geschwindigkeiten überein.

### 11.3.5 Problem E

Die numerische Lösung von Problem E ist in Abbildung 11.7 gezeichnet. Zu Beginn, bis  $t = t^B$ , ist die Lösung eine Stoßfront mit der Welge-Sättigung als Frontsättigung und einer nachfolgenden Verdünnungswelle. Die Entwässerungsfront, die bei  $t = t^B$  erzeugt wird, folgt der Bewässerungsfront und zerstört die Verdünnungswelle. Aus diesem Grund reduziert sich auch die Überschussättigung bis zum Zeitpunkt  $t \approx 2500$  s auf  $S^P \approx 0.8425$ . Für diese Überschussättigung breitet sich das nichtmonotone Profil mit wachsender Plateaubreite aus. Die

numerischen Geschwindigkeiten dieses Profils sind  $c^{\text{num}}(0.8425, 0.01) \approx 2.6 \cdot 10^{-4}$  m/s für die Bewässerung und  $c^{\text{num}}(0.6355, 0.8425) \approx 1.8 \cdot 10^{-6}$  m/s für die Entwässerung. Auch hier können die analytischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnet werden. Für die Bewässerungsfront erhält man  $c_{\text{im}}(0.8425, 0.01) = 2.59 \cdot 10^{-4}$  m/s und die Entwässerungsfront breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c_{\text{dr}}(0.6355, 0.8425) = 1.79 \cdot 10^{-4}$  m/s aus. Die analytischen und numerischen Geschwindigkeiten stimmen erneut perfekt überein.

## 11.4 Folgerung

Die quasianalytischen Betrachtungen und numerischen Lösungen in diesem Kapitel zeigen, dass die Ausbreitung eines Sättigungsüberschusses auch ohne den Einfluss der Gravitation möglich ist. Die Lösungen zeigen sowohl Sättigungsprofile mit konstantem Überschussplateau als auch Sättigungsüberschüsse mit wachsender Plateaubreite.

Dieses Kapitel zeigt, dass in der Theorie Sättigungsüberschüsse bei horizontalen Zweiphasenflüssen existieren und diese sich unter anderem auch als laufende Profile ausbreiten. In Experimenten mit horizontalen Strömungen konnten bisher allerdings keine nichtmonotonen Sättigungsprofile beobachtet werden. Daher können diese theoretischen Ergebnisse als Grundlage für weitere experimentelle Forschungen auf dem Gebiet der horizontalen Mehrphasenströmungen genutzt werden.



## **Teil V**

# **Numerische Beispiele von nichtmonotonen Sättigungsprofilen**



# 12 Modellierung eines Infiltrationsexperiments im Rahmen der $\delta$ -Hysterese

In den vorigen Teilen wurde die Ausbreitung von Sättigungsüberschüssen in theoretischen porösen Medien diskutiert, für welche keine experimentellen Beobachtungen und Daten existieren.

In diesem Kapitel werden existierende experimentelle Beobachtungen von laufenden nicht-monotonen Sättigungsprofilen vorgestellt und mit numerischen Ergebnissen verglichen. Ziel dieser Untersuchung ist es, die Experimente durch geeignete Parameter und Randbedingungen im Rahmen der hysteretischen Darcy-Theorie (DG2) zu modellieren und numerische Lösungen zu berechnen, welche mit den experimentellen Daten vergleichbar sind.

Die Ergebnisse aus diesem Kapitel sind in [68] veröffentlicht.

## 12.1 Experimentelle Ergebnisse

Die Infiltrationsexperimente von David DiCarlo [20] beschreiben die Verdrängung von Luft durch Wasser unter Einwirkung der Gravitation. Die Experimente wurden in verschiedenen

**Tabelle 12.1:** Sättigungen der experimentellen Überschussprofile

Experiment	Wassereinflussrate	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{P}}$	$t^{\text{B}}$
A	$q_{\text{W}} = 0.79 \text{ cm/min}$	$\approx 0$	$\approx 0.4$	$\approx 0.81$	$\approx 230 \text{ s}$
B	$q_{\text{W}} = 0.079 \text{ cm/min}$	$\approx 0$	$\approx 0.2$	$\approx 0.6$	$\approx 1800 \text{ s}$

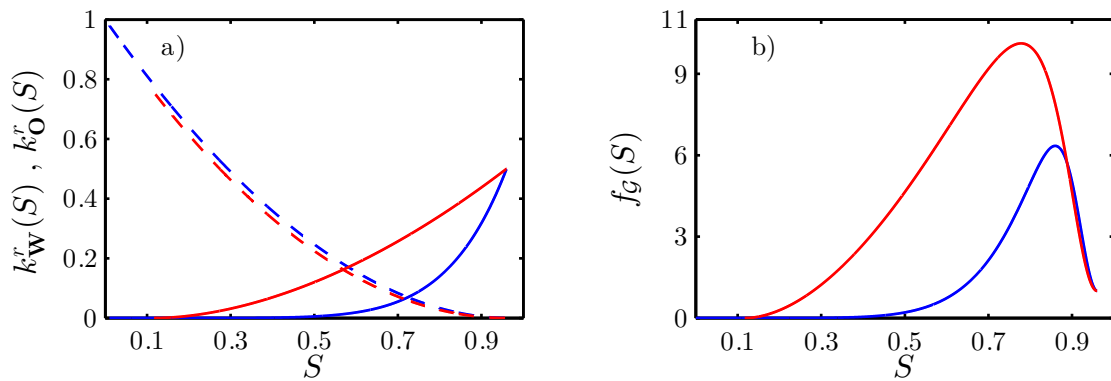
homogenen porösen Medien und mit mehreren unterschiedlichen Einflussraten des Wassers durchgeführt. Durch die Beobachtung der Lichtdurchlässigkeit entlang der Probe wurden die Sättigung innerhalb des porösen Mediums bestimmt und dadurch Sättigungsprofile errechnet. Die beobachteten Profile zeigen, dass die Ausbildung eines Sättigungsüberschusses sehr stark von den jeweiligen experimentellen Parametern abhängig ist. Des Weiteren schlussfolgerte DiCarlo [20], dass sich ein Sättigungsüberschuss als laufende Welle, also mit konstanter Überschussbreite und konstanter Geschwindigkeit, ausbreitet.

Hier werden zwei Experimente aus [20] für den Vergleich von experimentellen Daten und numerischen Simulationen ausgewählt. Diese sind die Experimente mit 20/30 Sand, der Probenlänge 40 cm und den Wassereinflussraten  $q_w = 0.79$  cm/min und  $q_w = 0.079$  cm/min, welche in [20, Abbildung 5] abgebildet sind. Im Folgenden wird das Experiment mit  $q_w = 0.79$  cm/min immer als „Experiment A“ und das Experiment mit  $q_w = 0.079$  cm/min immer als „Experiment B“ bezeichnet. Die Sättigungsprofile aus [20, Abbildung 5] sind in den Abbildungen 12.4 und 12.6 als rote Kurven gezeichnet.

Der im Folgenden beschriebene zeitliche Verlauf der Experimente A und B ist den nicht veröffentlichten Daten der Lichtdurchlässigkeitsmessung entnommen. Sowohl in Experiment A als auch in Experiment B bildet sich eine Sättigungsfront am Einlass des porösen Mediums aus. Die Frontsättigung steigt langsam an, bis die endgültige Sättigung  $S^P \approx 0.81$  im Experiment A und  $S^P \approx 0.62$  bei Experiment B erreicht ist. Bis zum Zeitpunkt  $t^B \approx 230$  s (Experiment A) und  $t^B \approx 1800$  s (Experiment B) ist das Sättigungsprofil monoton und besteht nur aus einer Bewässerungsfront. Diese Bewässerungsfront beschleunigt sich in beiden Experimenten für Zeiten  $t < t^B$ . Zum Zeitpunkt  $t^B$  sinkt die Sättigung im Bereich des Einlasses  $z \rightarrow 0$  schlagartig auf die Werte  $S^{\text{in}} \approx 0.4$  (Experiment A) und  $S^{\text{in}} \approx 0.2$  (Experiment B) ab. Durch dieses Absinken der Sättigung entsteht ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit einer Be- und einer Entwässerungsfront. Die Überschussättigungen werden mit  $S^P$ , die Sättigungen links von der Überschussregion mit  $S^{\text{in}}$  und die Sättigungen rechts des Überschusses mit  $S^{\text{out}}$  bezeichnet. Die Sättigungswerte für beide Experimente sind in Tabelle 12.1 aufgelistet. Die Be- und Entwässerungsfronten breiten sich für Zeiten  $t > t^B$  mit nahezu identischen und konstanten Geschwindigkeiten aus. Dadurch bleibt die Breite der Überschussregion auch nahezu konstant.

**Tabelle 12.2:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit im Vergleich zu den Referenzwerten von DiCarlo [20, 23] und Schroth [65]

Parameter	Symbol	Einheit	Wert	Referenzwert	Referenz
Länge der Probe	$L$	m	0.4	0.4	[20, Seite 2]
Porosität	$\phi$	-	0.348	0.348	[65, Tabellen 2, 3]
Permeabilität	$k$	$\text{m}^2$	$2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$	[23, Tabelle 1]
Dichte W	$\rho_W$	$\text{kg}/\text{m}^3$	1000	1000	[23, Tabelle 2]
Dichte O	$\rho_O$	$\text{kg}/\text{m}^3$	1	0	[23, Tabelle 2]
Viskosität W	$\mu_W$	$\text{Pa}\cdot\text{s}$	0.001	0.001	[23, Tabelle 2]
Viskosität O	$\mu_O$	$\text{Pa}\cdot\text{s}$	0.00003	0.00003	[23, Tabelle 2]
Exp. rel. Perm. W	$\alpha_{\text{im}}$	-	7	-	-
Exp. rel. Perm. O	$\beta_{\text{im}}$	-	1.9	-	-
Exp. rel. Perm. W	$\alpha_{\text{dr}}$	-	1.8	-	-
Exp. rel. Perm. O	$\beta_{\text{dr}}$	-	2	-	-
Endpkt. rel. Perm. W	$K_{\text{Wim}}^e$	-	0.5	-	-
Endpkt. rel. Perm. O	$K_{\text{Oim}}^e$	-	1	-	-
Endpkt. rel. Perm. W	$K_{\text{Wdr}}^e$	-	0.5	-	-
Endpkt. rel. Perm. O	$K_{\text{Odr}}^e$	-	0.75	-	-
Exp. Kapillardruck	$\gamma_{\text{im}}$	-	0.9206	0.8413	[23, Tabelle 3]
Exp. Kapillardruck	$\gamma_{\text{dr}}$	-	0.906	0.9057	[23, Tabelle 3]
Eingangsdruck	$P_{\text{bim}}$	Pa	690	555	[23, Tabelle 3]
Eingangsdruck	$P_{\text{bdr}}$	Pa	700	1000	[23, Tabelle 3]
Irr. Sättigung W	$S_{\text{Wi}}$	-	0.12	-	-
Irrduzible Sättigung O	$S_{\text{Or}}$	-	0.04	-	-
Grav.beschleunigung	$g$	$\text{m}/\text{s}^2$	9.81	-	-
Gesamtfluss	$Q$	$\text{m}/\text{s}$	$5 \cdot 10^{-5}$	-	-



**Abbildung 12.1:** Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten in algebraischer Form a) und der resultierenden fraktionierten Flussfunktionen b) mit den Parametern aus Tabelle 12.2. Die Graphen der relativen Permeabilitäten der benetzenden Phase  $\mathbb{W}$  sind als durchgezogene Linien und die der nichtbenetzenden Phase  $\mathbb{O}$  als gestrichelte Linien dargestellt. Der primäre Bewässerungsprozess ist in blau und der sekundäre Entwässerungsprozess in rot gezeichnet.

## 12.2 Modellparameter

In Tabelle 12.2 werden die Parameter angegeben, die in diesem Kapitel benutzt werden, um die vorgestellten zwei Experimente theoretisch zu modellieren. Die Referenzwerte stammen nicht nur aus [20], sondern aus einer früheren Untersuchung des porösen Mediums durch Schroth [65, Tabellen 2, 3] und aus einer theoretische Modellierung von DiCarlo [23, Tabellen 1, 2, 3]. Die Werte der Porosität  $\phi$ , der Permeabilität  $k$ , der Dichte der benetzenden Phase  $\rho_{\mathbb{W}}$  und der Viskositäten  $\mu_{\mathbb{W}}$ ,  $\mu_{\mathbb{O}}$  sind identisch zu den Referenzwerten aus [65, Tabellen 2, 3] und [23, Tabellen 1, 2]. Die Dichte der nichtbenetzenden Phase  $\rho_{\mathbb{O}}$  unterscheidet sich um  $1 \text{ kg/m}^3$  von dem Werte aus [23, Tabelle 2]. In dem hier verwendeten Hysteresemodell sind die Werte der Hystereserandkurve des Kapillardrucks (3.17) (van-Genuchten-Formulierung) nicht identisch zu den Werten von DiCarlo [23, Tabelle 3], jedoch sind sie in der gleichen Größenordnung.

Die Arbeiten von DiCarlo enthalten entweder keine Informationen über die relativen Permeabilitäten [20] oder die relativen Permeabilitäten sind nicht hysteretisch [23, Tabelle 1]. Daher wurden die Parameter für die Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten (3.16) so bestimmt, dass die beiden experimentellen Ergebnisse, sowohl im Hinblick auf die Überschussättigung als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit, reproduziert werden können.

In Abbildung 12.1 sind die Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten a) in der algebraischen Formulierung (3.16) gezeichnet. Die resultierenden fraktionierten Flusskurven mit den Parametern aus Tabelle 12.2 sind in Abbildung 12.1b) dargestellt. Bei den relativen

**Tabelle 12.3:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	$r$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.388	0.81	220 s	0.125	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
B	0.01	0.206	0.63	1800 s	0.5	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

Permeabilitäten stehen die durchgezogenen Graphen für die benetzende und die gestrichelten Graphen für die nichtbenetzende Phase. In beiden Teilen der Abbildung ist der Prozess der primären Bewässerung in blau und der Prozess der sekundären Entwässerung in rot hervorgehoben. Das stark hysteretische Verhalten der fraktionalen Flussfunktionen für die primäre Bewässerung und die sekundäre Entwässerung wird zum größten Teil durch die Hysterese der relativen Permeabilität in der benetzenden Phase erzeugt. Des Weiteren ist gut zu erkennen, dass der dimensionslose fraktionale Fluss, bedingt durch Gravitationseffekte und den sogenannten *counter-current flow*, größer als 1 werden kann.

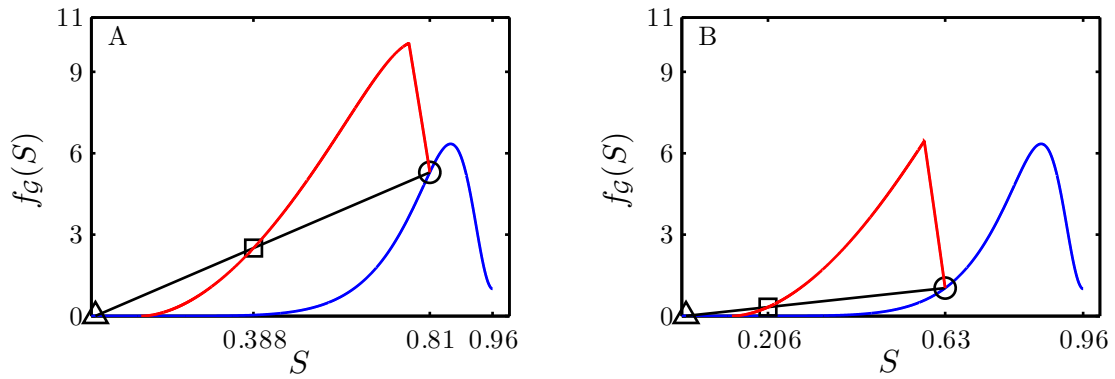
## 12.3 Modellproblem zur theoretischen Modellierung

Die Experimente werden mit dem Anfangs- und Randwertproblem (DG2), dem fraktionalen Fluss aus Gleichung (3.2), dem  $\delta$ -Hysteresemodell und der Randbedingung

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^{\text{B}} \cdot (t/t^{\text{B}})^r, & \text{für } t \leq t^{\text{B}} \\ S^{\text{in}}, & \text{für } t > t^{\text{B}} \end{cases}, \quad (12.1a)$$

$$S(z \rightarrow \infty, t) = S^{\text{out}} = 0.01 \quad (12.1b)$$

modelliert. Die Umschaltzeit  $t^{\text{B}}$  und die Randsättigungen  $S^{\text{out}}$ ,  $S^{\text{in}}$  und  $S^{\text{B}}$  sind in Tabelle 12.3 aufgelistet. Die Einlassrandbedingung repräsentiert den Anstieg der Sättigung am oberen Rand des porösen Mediums, wie es während der Experimente von DiCarlo [20] sichtbar ist. Die Sättigung steigt bis zu einem Wert  $S^{\text{B}}$  an und sinkt dann auf  $S^{\text{in}}$  ab, um eine Entwässerung zu erzeugen.



**Abbildung 12.2:** Fraktionale Flussfunktionen  $f_{im}$  der Bewässerung (blau) und  $f_{dr}$  der Entwässerung (rot) mit Parametern aus Tabelle 9.1 im  $\delta$ -Modell. Die Steigungen der eingezeichneten Sekanten ist proportional zu den Geschwindigkeiten der Sättigungsfronten.

A: Fraktionale Flüsse mit den Punkten  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.388, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B = 0.81, f_{im}(S^B) = f_{dr}(S^B))$  ( $\circ$ ).

B: Fraktionale Flüsse mit den Punkten  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.206, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B = 0.63, f_{im}(S^B) = f_{dr}(S^B))$  ( $\circ$ ).

## 12.4 Quasianalytische Lösungen

In Tabelle 12.3 sind die Werte der Anfangs- und Randbedingungen 12.1 für zwei numerische Simulationen aufgelistet. Hierbei modellieren die Probleme A und B die Experimente A und B aus Tabelle 12.1.

Die quasianalytische Lösung der Probleme A und B für Zeiten  $t \leq t^B$  ist einer Überlagerung von vielen Stoßfronten mit ansteigender Frontsättigung. Die Randbedingung am Einlass  $z = 0$  (12.1a) ist so gewählt, dass die Lösung zum Zeitpunkt  $t = t^B$  eine monotone Stoßfront mit Plateausättigung  $S^P = S^B$  ist. Für  $t > t^B$  wird die Sättigung am Einlass  $z = 0$  auf  $S^{in}$  reduziert. Dieser Sättigungssprung bewirkt die Entstehung einer Entwässerungsfront, die der Bewässerungsfront nachfolgt.

### 12.4.1 Problem A

In Abbildung 12.2A sind die fraktionierten Flusskurven  $f_{G^{im}} = f_{im}$  (blau) und  $f_{G^{dr \cup G^{sc}}} = f_{dr}$  (rot) von Problem A eingezeichnet. Der Graph der Entwässerung berechnet sich mit den Sättigungen  $S_* = 0.81$  und  $A = 0.785$ . Außerdem sind die Punkte  $(S^{out} = 0.01, f_{im}(S^{out}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{in} = 0.388, f_{dr}(S^{in}))$  ( $\square$ ) und  $(S^B = 0.81, f_{im}(S^B) = f_{dr}(S^B))$  ( $\circ$ ) markiert. Die Sättigungen  $S^{out}$ ,  $S^{in}$  und  $S^B$  sind so gewählt, dass die Bewässerungsekante zwischen  $\triangle$  und  $\circ$  und die Entwässerungsekante zwischen  $\square$  und  $\circ$  die gleiche Steigung haben. Das bedeutet,

dass sich die beiden Sättigungsfronten mit identischen Geschwindigkeiten ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet sich mit den Gleichungen (4.4) zu  $c_{\text{im}}(0.81, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.388, 0.81) = 9.5 \cdot 10^{-4}$  m/s. Die quasianalytische Lösung für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  ist dann ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit konstanter Überschusssättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{TW}} = S^{\text{B}} = 0.81$  und konstanter Überschussbreite.

### 12.4.2 Problem B

Abbildung 12.2B zeigt die fraktionalen Flusskurven  $f_{\text{im}}$  (blau) und  $f_{\text{dr}}$  (rot) von Problem B. Der Entwässerungsprozess ist durch den Graphen  $\mathcal{G}$  mit den Sättigungen  $S_* = 0.63$  und  $A = 0.605$  bestimmt. Analog zu Problem A sind zusätzlich die Punkte  $(S^{\text{out}} = 0.01, f_{\text{im}}(S^{\text{out}}))$  ( $\triangle$ ),  $(S^{\text{in}} = 0.206, f_{\text{dr}}(S^{\text{in}}))$  ( $\square$ ) und  $(S^{\text{B}} = 0.63, f_{\text{im}}(S^{\text{B}}) = f_{\text{dr}}(S^{\text{B}}))$  ( $\circ$ ) gekennzeichnet. Auch hier sind die Sättigungen  $S^{\text{out}}$ ,  $S^{\text{in}}$  und  $S^{\text{B}}$  so gewählt, dass die Bewässerungssekante zwischen  $\triangle$  und  $\circ$  und die Entwässerungssekante zwischen  $\square$  und  $\circ$  die gleiche Steigung haben. Daraus folgt, wie in Problem A, dass sich die beiden Sättigungsfronten mit der gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_{\text{im}}(0.63, 0.01) = c_{\text{dr}}(0.206, 0.63) = 2.38 \cdot 10^{-4}$  m/s durch das poröse Medium bewegen. Die quasianalytische Lösung für Zeiten  $t > t^{\text{B}}$  ist ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit konstanter Überschusssättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{TW}} = S^{\text{B}} = 0.63$  und konstanter Überschussbreite.

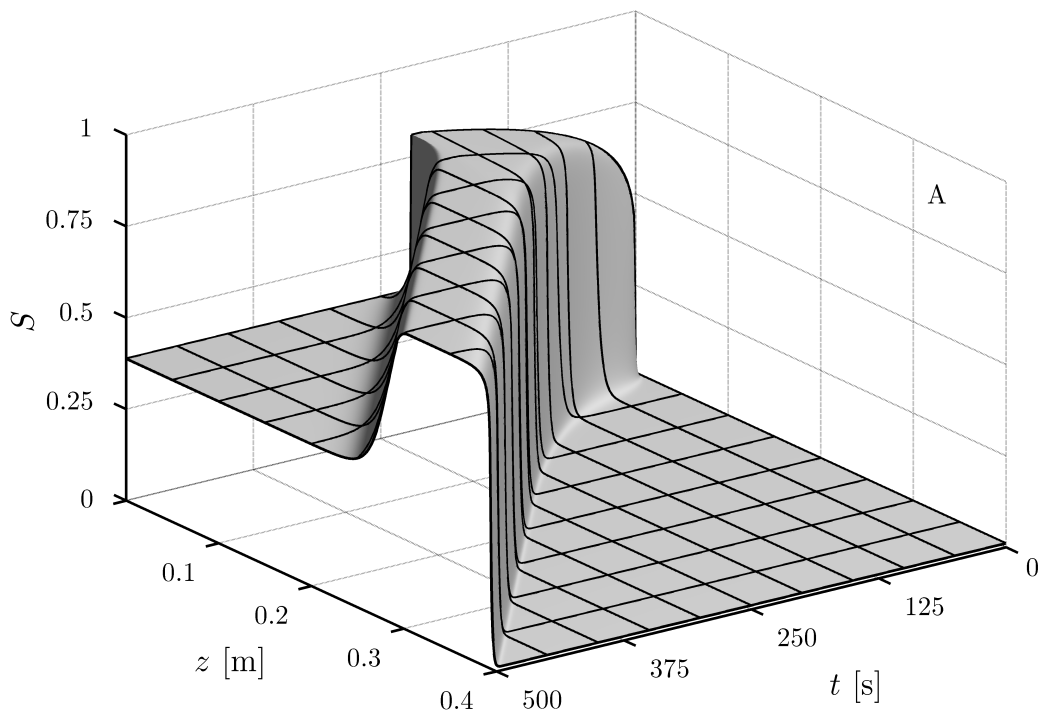
## 12.5 Numerische Lösungen

In diesem Abschnitt werden die numerischen Lösungen mit Open $\nabla$ FOAM der Probleme A und B diskutiert und mit den experimentellen Daten der Infiltrationsexperimente von DiCarlo [20, Abbildung 5] verglichen.

### 12.5.1 Problem A

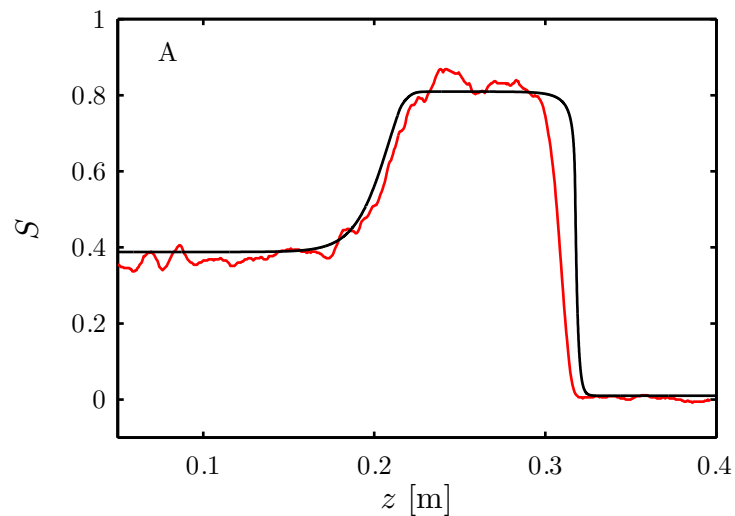
Die numerische Lösung von Problem A ist für Zeiten  $t \in [0 \text{ s}, 500 \text{ s}]$  in Abbildung 12.3 und für den Zeitpunkt  $t = 420 \text{ s}$  in Abbildung 12.4 dargestellt.

In Abbildung 12.3 ist der Anstieg der Sättigung am Rand und die damit verbundene Beschleunigung der Bewässerungsfront bis  $t = t^{\text{B}} = 220 \text{ s}$  gut zu sehen. Es bildet sich eine Front und ein nachfolgendes Plateau mit Sättigung  $S^{\text{P}} = S^{\text{B}} = 0.81$  aus. Zum Zeitpunkt  $t = t^{\text{B}} = 220 \text{ s}$  sinkt die Sättigung am Rand instantan von  $S^{\text{B}} = 0.81$  auf  $S^{\text{in}} = 0.388$  ab



**Abbildung 12.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung des Anfangs- und Randwertproblems A. Die Lösung ist ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschusssättigung  $S^P = S^B = 0.81$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.388$ , siehe Tabelle 12.3 Problem A. Zum Zeitpunkt  $t = t^B = 220$  s entsteht am Rand  $z = 0$  eine Entwässerungsfront, welche der Bewässerungsfront folgt. Die Geschwindigkeiten von beiden Fronten sind identisch und somit bleibt die Breite des Sättigungsüberschusses erhalten. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.05$  m und  $\Delta t = 50$  s eingezeichnet.





**Abbildung 12.4:** Vergleich der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A (schwarz) mit Experiment A aus [20, Abbildung 5] (rot) zum Zeitpunkt  $t = 420$  s.

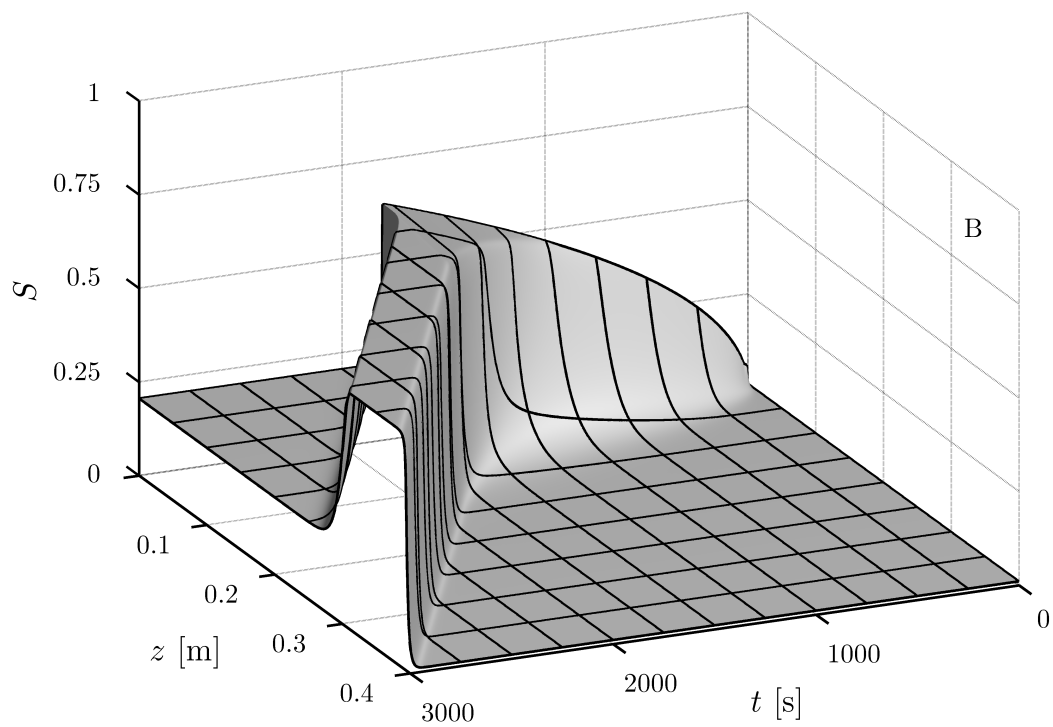
und dadurch wird eine Entwässerung ausgelöst. Diese Entwässerung breitet sich ebenfalls als Sättigungsfront aus. Die Abbildung zeigt außerdem, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeiten beider Sättigungsfronten für  $t > t^B$  konstant und identisch sind. Die numerische Geschwindigkeit der Bewässerungsfront ist  $c^{\text{num}}(0.81, 0.01) \approx 9.5 \cdot 10^{-4}$  m/s und die der Entwässerungsfront ist  $c^{\text{num}}(0.388, 0.81) \approx 9.5 \cdot 10^{-4}$  m/s. Diese Werte sind identisch zu den analytisch berechneten Geschwindigkeiten im Abschnitt davor.

Abbildung 12.4 zeigt einen Vergleich der numerischen Lösung (schwarz) mit den Daten von Experiment A aus [20, Abbildung 5] (rot) zum Zeitpunkt  $t = 420$  s. Die Übereinstimmung beider Kurven im Hinblick auf die Überschusshöhe, die Überschussbreite und Form der Sättigungsfronten ist nahezu perfekt. Darüber hinaus lässt sich aus Abbildung 12.4 schließen, dass sich die Sättigungsprofile aus Experiment und Simulation mit der gleich Geschwindigkeit ausbreiten, da sich die Überschüsse zum gleichen Zeitpunkt an der identischen Stelle im porösen Medium befinden.

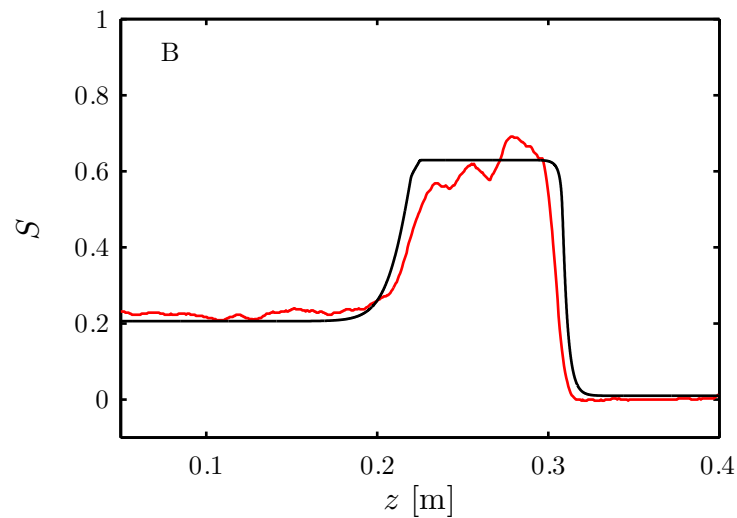
### 12.5.2 Problem B

Die numerische Lösung von Problem B ist für Zeiten  $t \in [0 \text{ s}, 3000 \text{ s}]$  in Abbildung 12.5 und für den Zeitpunkt  $t = 2640$  s in Abbildung 12.6 dargestellt.

Die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung von Problem B zeigt, analog zu Problem A, einen Anstieg der Sättigung am Rand und eine Beschleunigung der Bewässerungsfront bis



**Abbildung 12.5:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B. Die Lösung ist ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschussättigung  $S^P = S^B = 0.63$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.206$ , siehe Tabelle 12.3 Problem B. Zum Zeitpunkt  $t = t^B = 1800$  s entsteht am Rand  $z = 0$  eine Entwässerungsfront, welche der Bewässerungsfront folgt. Die Geschwindigkeiten von beiden Fronten sind identisch und daher bleibt die Breite des Sättigungsüberschusses erhalten. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.05$  m und  $\Delta t = 250$  s eingezeichnet.



**Abbildung 12.6:** Vergleich der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B (schwarz) mit Experiment B aus [20, Abbildung 5] (rot) zum Zeitpunkt  $t = 2640$  s.

$t = t^B = 1800$  s. Es bildet sich eine Sättigungsfront mit Frontsättigung  $S^P = S^B = 0.63$  aus. Zum Zeitpunkt  $t = t^B = 1800$  s entsteht durch das Absenken der Sättigung am Rand von  $S^B = 0.63$  auf  $S^{\text{in}} = 0.206$  eine Entwässerungsfront. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der beiden Fronten sind konstant und identisch für Zeiten  $t > 1800$  s. Mit den numerischen Daten können die Geschwindigkeiten berechnet werden,  $c^{\text{num}}(0.63, 0.01) \approx 3.75 \cdot 10^{-5}$  m/s und  $c^{\text{num}}(0.206, 0.63) \approx 3.73 \cdot 10^{-5}$  m/s. Diese unterscheiden sich nur gering von den analytisch berechneten Geschwindigkeiten.

Der Vergleich des numerischen Sättigungsprofils mit dem Profil von Experiment B aus [20, Abbildung 5] zum Zeitpunkt  $t = 2640$  s ist in Abbildung 12.6 zu sehen. Die numerischen Daten sind in schwarz und die experimentellen Daten in rot dargestellt. Die Überschusshöhe, die Überschussbreite und die Form der Sättigungsfronten stimmen wieder sehr gut überein. Zusätzlich kann man auch hier ableiten, dass sich die Sättigungsüberschüsse aus Experiment und Simulation mit identischen Geschwindigkeiten ausbreiten.

## 12.6 Folgerung

Die numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme A und B bilden die experimentellen Beobachtungen sehr gut nach. Die charakteristischen Merkmale der Überschusslösungen, wie die Überschussättigung, die Überschusshöhe, die Geschwindigkeiten der Be- und Entwässerungsfront sowie die Breite des Überschussplateaus, sind bei den Experimenten und

den numerischen Lösungen nahezu identisch. Es wurde gezeigt, dass die hysteretische Darcy-Theorie reale Experimente zu Sättigungsüberschüssen nachbilden und die Ausbreitung der Überschusslösungen erklären kann.

Darüber hinaus können mit den Parametern und Randbedingungen aus diesem Kapitel auch eine Vielzahl nichtlaufender Sättigungsüberschüsse konstruiert werden [68]. Ein Beispiel von vielen ist die Modifikation von Problem A mit  $S^{\text{in}} > 0.388$ . Die Lösung ist dann ein nicht-monotones Sättigungsprofil mit wachsender Plateaubreite.

Wie in den Kapiteln zuvor ist nur die Hysterese in den relativen Permeabilitäten notwendig, um die Ausbreitung der Sättigungsüberschüsse sicherzustellen. Hysterese im Kapillardruck oder der kapillaren Flussfunktion  $D_G(S)$  ist nicht zwingend notwendig. Eine sehr ausgeprägte Hysterese im Kapillardruck wirkt sich im Extremfall sogar negativ auf die Ausbreitung aus, da das Strömungsverhalten in diesem Fall durch die diffusiven Kräfte dominiert wird. Dies wurde in einer Vielzahl von numerischen Simulationen mit unterschiedlichen Werten des Kapillardrucks und unterschiedlichen Realisierungen der Hysterese im Kapillardruck und der kapillaren Flussfunktion überprüft.

---

## 13 Problemformulierung und Dimensionalität

Die bisherige Arbeit befasst sich ausschließlich mit der eindimensionalen fraktionalen Formulierung der Darcy-Theorie. In diesem Kapitel wird eine andere Formulierung der Darcy-Theorie und die zweidimensionale fraktionale Formulierung betrachtet.

Die gefundenen Überschusslösungen aus den Publikationen [43, 67, 68] sollten mit einer DuMu<sup>x</sup> Implementierung überprüft werden. Die dafür verwendete Implementierung des Instituts für Wasser- und Umweltsystemmodellierung (IWS) der Universität Stuttgart basierte auf eine Druck-Sättigungsformulierung. Trotz intensiver Bemühungen konnten die stabilen Sättigungsüberschüsse lange Zeit nicht reproduziert werden. Schließlich stellte sich heraus, dass geeignete Randbedingungen benutzt werden müssen, um die stabile Überschüsse zu simulieren. In [64] sind die Ergebnisse dieser Kooperation ausführlich zusammengefasst. Die numerischen Lösungen der Anfangs- und Randwertprobleme, welche in Open $\nabla$ FOAM und DuMu<sup>x</sup> berechnet werden, sind nahezu identisch. Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Anfangs- und Randwertprobleme aus [64] reproduziert. Hierfür wurde die eindimensionale Druck-Sättigungsformulierung in Open $\nabla$ FOAM implementiert. Damit wurden die numerischen Ergebnisse dreifach, mit unabhängigen Implementierungen und Formulierungen, überprüft und verifiziert.

Wie einleitend schon dargestellt, kann durch die lineare und nichtlineare Stabilitätsanalyse von elliptisch-parabolischen partiellen Differentialgleichungen gezeigt werden, dass die Richards-Gleichung ohne Einschränkung stabil ist [2, 3, 57]. Das heißt, Störungen verschwinden innerhalb endlicher Zeit und stabil propagierende Sättigungsüberschüsse im Rahmen der Richards-Gleichung sind nicht möglich [31]. Die Stabilität der Richards-Gleichung verhindert nach [32] auch die Bildung von Sättigungsfingern. Es existieren allerdings Sättigungsüberschüsse in der eindimensionalen traditionellen Darcy-Theorie [43, 67, 68]. Deshalb stellt sich die Frage, ob in der zweidimensionalen Darcy-Theorie auch Sättigungsfinger existieren. Daher werden im zweiten Teil dieses Kapitels kurz zweidimensionale Strömungen in der fraktionalen Formulierung auf die Bildung von Sättigungsfingern numerisch untersucht.

## 13.1 Fraktionale Formulierung versus Druck-Sättigungsformulierung

### 13.1.1 Druck-Sättigungsformulierung

Eine weitere Formulierung der Darcy-Theorie ist ein Systems aus zwei Gleichungen, welches aus dem Gleichungssystem (2.7) hergeleitet wird. Die Unbekannten des Systems sind die Sättigung der benetzenden Phase  $S$  und der Druck der nichtbenetzenden Phase  $P_{\circ}$ .

Das Anfangs- und Randwertproblem im Gebiet  $\Omega = [0, L]$  lautet dann

$$(PS) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{f}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ}) + \hat{h}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ}) - \hat{D}_{\mathcal{G}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{f}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ}) - \hat{D}_{\mathcal{G}}(S) \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 & \forall z \in \Omega, t > 0 \\ S(z, 0) = S^{\text{out}} & \forall z \in \Omega \\ P_{\circ}(z, 0) = P_0(z) & \forall z \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(z, t) & \forall z \in \partial\Omega, t > 0 \\ P_{\circ}^{\text{RB}}(z, t) & \forall z \in \partial\Omega, t \geq 0 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung  $P_0(z)$  und der Randbedingung  $P_{\circ}^{\text{RB}}$  für den Druck der nichtbenetzenden Phase.

Die Werte der Funktionen  $\hat{f}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ})$  und  $\hat{h}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ})$  für Sättigungen  $S$  und Drücke  $P_{\circ}$  sind nun durch die Paare  $(S, X) \in \mathcal{G}_{\text{W}}$  und  $(S, Y) \in \mathcal{G}_{\circ}$

$$\hat{f}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ}) = \frac{k \cdot X}{\mu_{\text{W}}} \cdot \left( \varrho_{\text{W}} \cdot g - \frac{\partial P_{\circ}}{\partial z} \right) \quad (13.1a)$$

$$\hat{h}_{\mathcal{G}}(S, P_{\circ}) = \frac{k \cdot Y}{\mu_{\circ}} \cdot \left( \varrho_{\circ} \cdot g - \frac{\partial P_{\circ}}{\partial z} \right) \quad (13.1b)$$

bestimmt. Analog dazu sind die Werte des kapillaren Koeffizienten  $\hat{D}_{\mathcal{G}}(S)$  für Sättigungen  $S$  durch die Paare  $(S, X) \in \mathcal{G}_{\text{W}}$  und  $(S, Z) \in \mathcal{G}_{\text{c}}$

$$\hat{D}_{\mathcal{G}}(S) = -\frac{k}{\mu_{\text{W}}} \cdot X \cdot Z \quad (13.1c)$$

definiert.

### 13.1.2 Anfangs- und Randbedingungen

Die Randwerte für die fraktionale Formulierung (DG2) sind, wie zuvor, zeitabhängig

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B & t < t^B \\ S^{\text{in}} & t \geq t^B \end{cases} \quad (13.2a)$$

$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} \quad (13.2b)$$

mit den Sättigungen  $S^{\text{out}}$ ,  $S^{\text{in}}$  und  $S^B$  und der Zeit  $t^B$ .

In der Druck-Sättigungsformulierung (PS) lautet die Anfangsbedingung für den Druck

$$P_0(z) = P_{\text{atm}} + \left( g \cdot \left( \frac{X \cdot \rho_{\text{W}}}{\mu_{\text{W}}} + \frac{Y \cdot \rho_{\text{O}}}{\mu_{\text{O}}} \right) - \frac{Q}{k} \right) \cdot \frac{z \cdot \mu_{\text{W}} \cdot \mu_{\text{O}}}{X \cdot \mu_{\text{O}} + Y \cdot \mu_{\text{W}}} \quad (13.3a)$$

mit dem atmosphärischen Druck  $P_{\text{atm}}$  und die Randbedingungen sind durch

$$S(z = 0, t) = \begin{cases} S^B & t < t^B \\ S^{\text{in}} & t \geq t^B \end{cases} \quad (13.3b)$$

$$S(z = L, t) = S^{\text{out}} \quad (13.3c)$$

$$P_{\text{O}}(z = 0, t) = P_{\text{atm}} \quad (13.3d)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} P_{\text{O}}(z = L, t) = \left( g \cdot \left( \frac{X \cdot \rho_{\text{W}}}{\mu_{\text{W}}} + \frac{Y \cdot \rho_{\text{O}}}{\mu_{\text{O}}} \right) - \frac{Q}{k} \right) \cdot \frac{\mu_{\text{W}} \cdot \mu_{\text{O}}}{X \cdot \mu_{\text{O}} + Y \cdot \mu_{\text{W}}} \quad (13.3e)$$

gegeben. Die Randbedingung an der Gradienten im Druck der nichtbenetzenden Phase  $P_{\text{O}}$  stellt sicher, dass die Randbedingungen in beiden Formulierungen identisch sind.

### 13.1.3 Numerischer Vergleich

Die Parameter der beiden Anfangs- und Randwertprobleme (DG2) und (PS) sind durch die Werte aus den Tabellen 13.1 und 13.2 bestimmt. Sowohl die relativen Permeabilitäten, als auch der Kapillardruck sind durch die van-Genuchten Formulierungen (3.15) und (3.17) modelliert. Die numerische Implementierung in OpenFOAM zur Lösung des Anfangs- und Randwertproblem (PS) ist zweigeteilt. Der erste Teil ist der rein ortsabhängige Term. Für diesen wird der Druck der nichtbenetzenden Phase als Variable gesetzt und die Sättigungswerte entsprechen denen aus dem letzten Zeitschritt. Im zweiten Schritt werden die aktuellen Sättigungswerte mit dem zeitabhängigen Term und den Druckwerten aus dem ersten Teil

**Tabelle 13.1:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	2	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	0.6	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	1.2	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	0.85	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	1.1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.4	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Atmosphärischer Druck	$P_{\text{atm}}$	$10^5$	Pa
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\text{wi}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\text{or}}$	0.045	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$
Zellenanzahl	$n$	8000	-

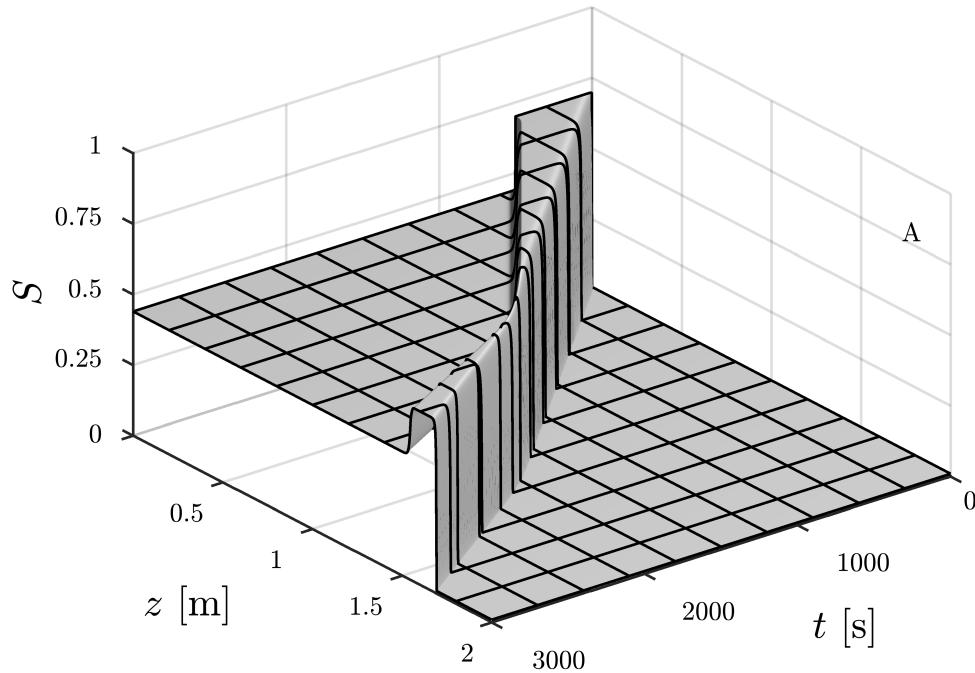


**Tabelle 13.2:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
A	0.01	0.44	0.7	500 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
B	0.01	0.48754	0.7	500 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
C	0.01	0.51	0.7	500 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

berechnet. Die Bestimmung der Graphen zur Beschreibung der Hysterese ist in Abschnitt B.3 beschrieben.

Die numerischen Lösungen der drei Probleme A-C sind in den Abbildungen 13.1-13.3 dargestellt. In Problem A ist die Lösung ein nichtmonotones Profil, welches zuerst ein Plateau mit abnehmender Breite und dann ein Plateau mit zunehmender Breite besitzt. Diese Änderung der Plateaubreite wird durch das Absinken der Plateausättigung hervorgerufen. Die numerische Lösung von Problem B ist ein nichtmonotones laufendes Sättigungsprofil mit konstanter Plateausättigung. Abschließend beschreibt die Lösung von Problem C ein nichtmonotones Profil mit zunehmender Plateaubreite und konstanter Plateausättigung.

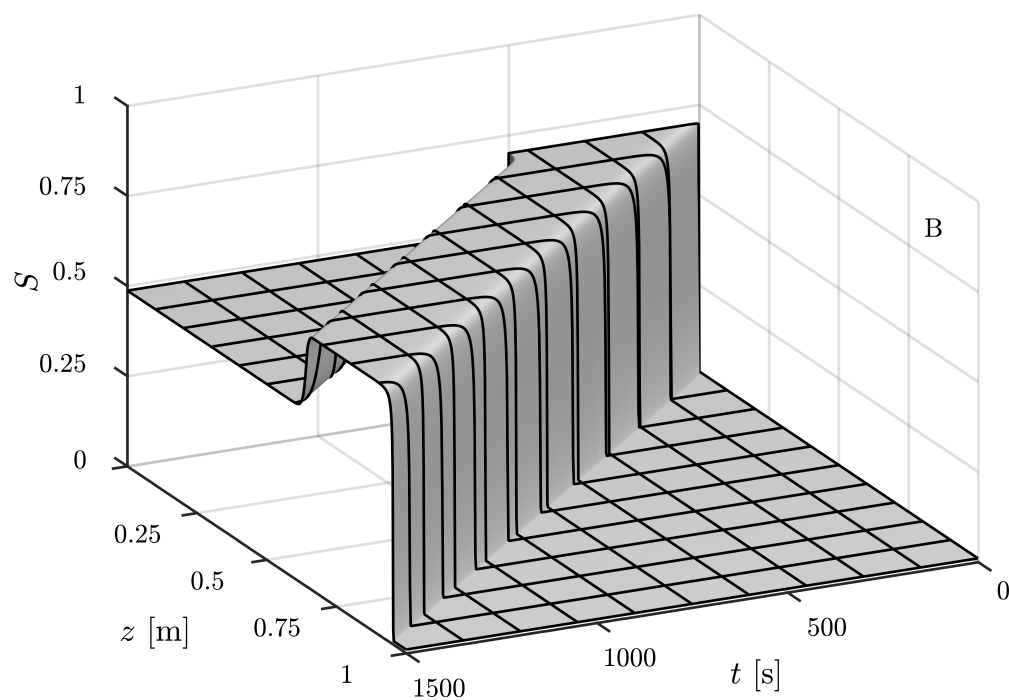


**Abbildung 13.1:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem A mit Parametern aus Tabelle 13.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.7$ . Die Entwässerungsfront für  $t \in [t^B, 1450 \text{ s}]$  breitet sich schneller aus als die Bewässerungsfront und somit schrumpft die Breite der Überschussregion. Nachdem die nachfolgende Entwässerungsfront die Bewässerung eingeholt hat, baut sich die Überschusssättigung langsam ab, bis  $S^P \approx 0.6151$  erreicht ist. Für das dadurch entstandene Profil breitet sich die Bewässerungsfront wieder schneller aus als die Entwässerung. Die endgültige Lösung ist somit ein nichtmonotones Profil mit einem sich verbreiternden Überschussbereich. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.2 \text{ m}$  und  $\Delta t = 300 \text{ s}$  eingezeichnet.

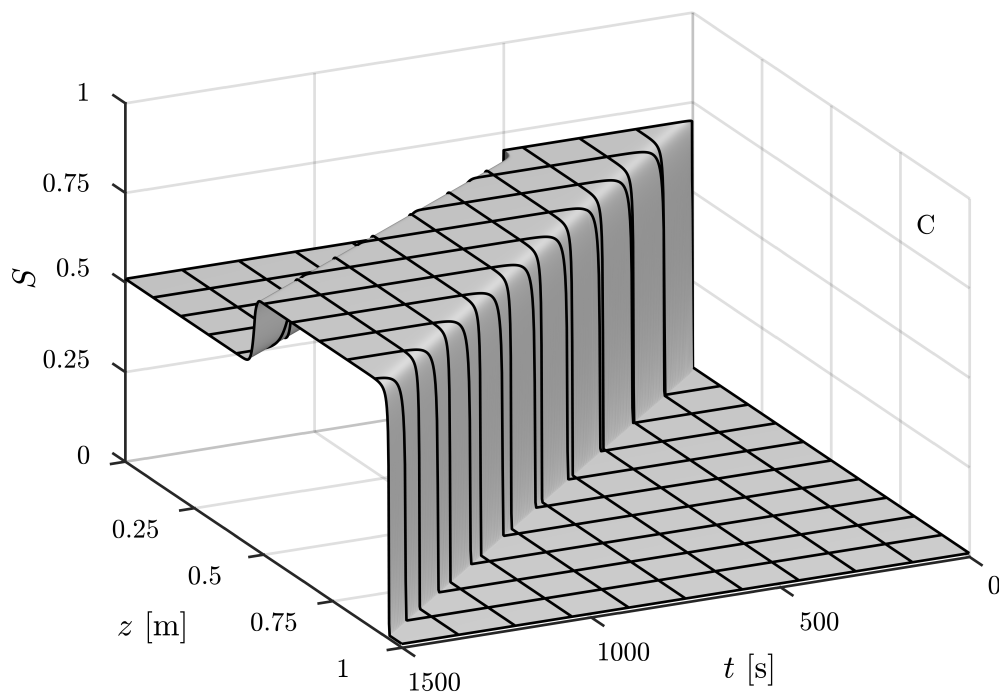
Zur Beurteilung der Unterschiede in den Lösungen der beiden Formulierungen wird die Differenz

$$\text{diff} = \max_t \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta z \cdot |\text{ff}_i(t) - \text{ps}_i(t)| \right\} \quad (13.4)$$

mit der Anzahl der Zellen  $n = 8000$ , der Zellengröße  $\Delta z = L/n = 2.5 \cdot 10^{-4}$ , der Sättigungswerte in der fraktionalen Formulierung  $\text{ff}_i$  und der Sättigungswerte in der Druck-Sättigungsformulierung  $\text{ps}_i$  eingeführt.



**Abbildung 13.2:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem B mit Parametern aus Tabelle 13.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.7$ . Für  $t > t^B$  ist die Lösung ein nichtmonotones Sättigungsprofil mit Überschusssättigung  $S^P = S^B = 0.7$  und Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.48754$ . Die Be- und Entwässerungsfronten haben eine konstante, identische Geschwindigkeit und somit breitet sich das Profil als laufende Welle aus. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 150$  s eingezeichnet.



**Abbildung 13.3:** Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem C mit Parametern aus Tabelle 13.1. Bis  $t = t^B$  ist die Lösung eine monotone Stoßfront mit Frontsättigung  $S^B = 0.7$ . Die Entwässerungsfront breitet sich hier sehr viel langsamer aus als die Bewässerungsfront. Dadurch erhält man einen Sättigungsüberschuss mit wachsender Überschussbreite. Zur besseren Sichtbarkeit wurde ein Gitter mit  $\Delta z = 0.1$  m und  $\Delta t = 150$  s eingezeichnet.

**Tabelle 13.3:** Differenz  $\text{diff}$  aus Gleichung (13.4) für die Probleme A-C

Problem	$\text{diff}$
A	$0.881 \cdot 10^{-3}$
B	$0.891 \cdot 10^{-3}$
C	$0.931 \cdot 10^{-3}$

In Tabelle 13.3 sind die Werte der Differenz  $\text{diff}$  für die drei Probleme A-C aufgelistet. Es ist klar zu erkennen, dass die in Gleichung (13.4) definierte Differenz in allen Fällen kleiner als  $10^{-3}$  und somit vernachlässigbar ist. Dieser Vergleich macht deutlich, dass die numerischen Lösungen nicht von der Formulierung des Anfangs- und Randwertproblems abhängig sind. Sowohl die fraktionale Formulierung als auch die Druck-Sättigungsformulierung liefern bei einer geeigneten Wahl der Anfangs- und Randbedingungen nahezu identische Sättigungsprofile. Damit ist auch gezeigt, dass in der hysteretischen Druck-Sättigungsformulierung ohne Erweiterungsterme stabile Überschüsse existieren. Diese Überschüsse sind, bei geeigneter Wahl der Randbedingungen, identisch zu denen der fraktionalen Formulierung. Somit können die numerischen Ergebnisse der vorigen Kapitel auch mit der Druck-Sättigungsformulierungen verifiziert werden.

Darüber hinaus beschäftigt sich eine Kooperation mit dem Institut für Wasser- und Umweltsystemmodellierung (IWS) der Universität Stuttgart mit der Fragestellung, in wie weit Sättigungsüberschüsse von der numerischen Implementierung abhängig sind. Im Rahmen dieser Kooperation wird die numerische Lösung der fraktionalen Formulierung in `OpenFOAM` mit der numerischen Lösung der Druck-Sättigungsformulierung in `DuMux` verglichen. Auch hier kann gezeigt werden, dass die Unterschiede in den numerischen Lösungen vernachlässigbar gering sind und die Sättigungsüberschüsse somit unabhängig von der Implementierung sind [64].

## 13.2 Zweidimensionale Strömungen in der fraktionalen Formulierung

### 13.2.1 Allgemeines Anfangs- und Randwertproblem

Die Zweiphasenströmung auf dem zweidimensionalen Gebiet  $\Omega$

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq B, 0 \leq z \leq L\} \quad (13.5)$$

wird durch die hysteretische Verallgemeinerung des Anfangs- und Randwertproblems (DG)

$$(DG5) \quad \begin{cases} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{Q}^T \nabla \cdot \mathbf{f}_G(S) - \nabla \cdot [D_G(S) \nabla S] = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ S(\mathbf{x}, 0) = S^{\text{out}}, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ S^{\text{RB}}(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

bestimmt. Im Folgenden wird angenommen, dass für den totalen Fluss  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = Q \mathbf{e}_z \quad (13.6)$$

gilt. Der fraktionale Fluss  $\mathbf{f}_G(S)$  ist analog zu den Gleichungen (2.16) und (3.2) mit

$$\mathbf{f}_G(S) = \frac{\mathbf{1} + \frac{kg}{\mu_{\text{O}} Q} \mathbf{e}_z Y (\rho_{\text{W}} - \rho_{\text{O}})}{1 + \frac{\mu_{\text{W}} Y}{\mu_{\text{O}} X}} \quad (13.7)$$

unter Verwendung von Gleichung (13.6) definiert. Der Kapillarfluss ist identisch zum ein-dimensionalen Fall und berechnet sich mit Gleichung (3.4). Die Fluid- Materialparameter von (DG5) sind in Tabelle 13.4 aufgelistet. Des Weiteren wird für die Hystereserandkurven der relativen Permeabilitäten und des Kapillardrucks das van-Genuchten-Modell (3.15) und (3.17) benutzt.

**Tabelle 13.4:** Parameter mit Symbol und Größeneinheit

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge des porösen Mediums	$L$	1	m
Breite des porösen Mediums	$B$	0.5	m
Porosität	$\phi$	0.348	-
Permeabilität	$k$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^2$
Dichte $\mathbb{W}$	$\rho_{\mathbb{W}}$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
Dichte $\mathbb{O}$	$\rho_{\mathbb{O}}$	1	$\text{kg}/\text{m}^3$
Viskosität $\mathbb{W}$	$\mu_{\mathbb{W}}$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Viskosität $\mathbb{O}$	$\mu_{\mathbb{O}}$	0.00003	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{im}}$	0.6	-
Exponent rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{im}}$	1.2	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$\alpha_{\text{dr}}$	0.85	-
Exponent rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$\beta_{\text{dr}}$	1.1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{im}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Bewässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{im}}^e$	1	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{W}$	$K_{\mathbb{W}\text{dr}}^e$	0.6	-
Endpunkt rel. Permeabilität Entwässerung $\mathbb{O}$	$K_{\mathbb{O}\text{dr}}^e$	0.4	-
Exponent Kapillardruck Bewässerung	$\gamma_{\text{im}}$	0.9206	-
Exponent Kapillardruck Entwässerung	$\gamma_{\text{dr}}$	0.906	-
Eingangsdruck Bewässerung	$P_{\text{bim}}$	690	Pa
Eingangsdruck Entwässerung	$P_{\text{bdr}}$	700	Pa
Irreduzible $\mathbb{W}$ Sättigung	$S_{\mathbb{W}\text{i}}$	0.07	-
Irreduzible $\mathbb{O}$ Sättigung	$S_{\mathbb{O}\text{r}}$	0.045	-
Gravitationsbeschleunigung	$g$	9.81	$\text{m}/\text{s}^2$
Gesamtfluss	$Q$	$10^{-5}$	$\text{m}/\text{s}$

**Tabelle 13.5:** Parameter für die Anfangs- und Randbedingungen und das Hysteresemodell

Problem	$S^{\text{out}}$	$S^{\text{in}}$	$S^{\text{B}}$	$t^{\text{B}}$	Hysteresemodell	Streichkurve in $k^r$
D	0.01	0.7	-	300 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
E	0.01	0.4	0.7	500 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
F	0.01	0.4	0.7	150 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden
G	0.01	0.4956	0.72	150 s	$\delta$ -Modell ( $\delta = 0.05$ )	Geraden

### 13.2.1.1 Randbedingung D

Das numerische Problem D wird durch das Anfangs- und Randwertproblem (DG5) mit den Randbedingungen

$$S(x \in [0, 0.2) \cup (0.3, B], z = 0, t) = \begin{cases} S^{\text{out}} = 0.01, & \text{für } t < t^{\text{B}} \\ S^{\text{in}} = 0.7, & \text{für } t \geq t^{\text{B}} \end{cases}, \quad (13.8a)$$

$$S(x \in [0.2, 0.3], z = 0, t) = S^{\text{in}} = 0.7, \quad (13.8b)$$

$$S(x, z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01, \quad (13.8c)$$

$$S(x = 0, z, t) = S(x = B, z, t) \quad (13.8d)$$

modelliert. Dieses Problem simuliert die Ausbreitung eines Sättigungsfingers, welcher im Zeitraum  $t \in [0, t^{\text{B}}]$  im Bereich  $x \in [0.2, 0.3]$  entsteht.

Im Folgenden wird Problem D unter Berücksichtigung des Kapillarflusses (3.4) mit „D1“ bezeichnet. Das Anfangs- und Randwertproblem D im hyperbolischen Limes wird kurz „D2“ genannt. Die Lösungen D1 und D2 dienen dazu, die Auswirkung der kapillaren Kräfte zu diskutieren.

### 13.2.1.2 Randbedingung E-G

Die Anfangs- und Randwertprobleme E-G werden durch die Randbedingungen

$$S(x \in [0, 0.2) \cup (0.3, B], z = 0, t) = S^{\text{in}}, \quad (13.9a)$$

$$S(x \in [0.2, 0.3], z = 0, t) = \begin{cases} S^{\text{B}}, & \text{für } t < t^{\text{B}} \\ S^{\text{in}}, & \text{für } t \geq t^{\text{B}} \end{cases}, \quad (13.9b)$$

$$S(x, z = L, t) = S^{\text{out}} = 0.01, \quad (13.9c)$$

$$S(x = 0, z, t) = S(x = B, z, t) \quad (13.9d)$$

spezifiziert. Diese Definition der Anfangs- und Randwerte beschreibt die Ausbreitung eines Sättigungsfingers im Bereich  $x \in [0.2, 0.3]$  mit einem erzeugten Sättigungsüberschuss innerhalb des Fingers.



## 13.2.2 Numerische Lösungen

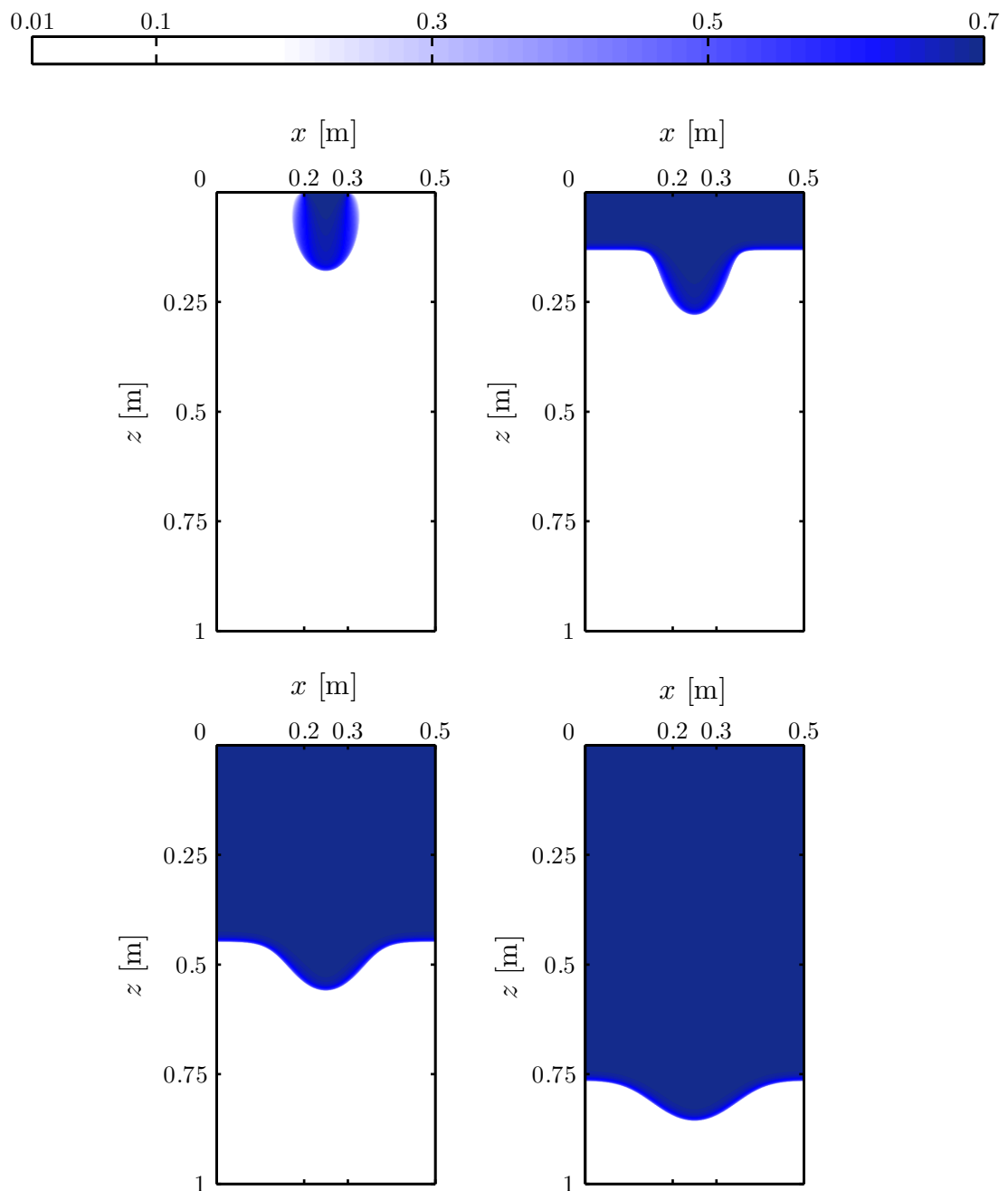
Im Folgenden werden die numerischen Lösungen der Probleme D-G betrachtet. Alle Simulationen wurden mit der örtlichen Diskretisierung  $\Delta x = \Delta z = 1/4000$  m und dem Zeitschritt  $\Delta t = 0.05$  s durchgeführt. Die Länge der Sättigungsfinger in den Problemen D-G werden immer in der Mitte des porösen Mediums bei  $x = 0.25$  m bestimmt. Ebenso werden für die Diskussion der Sättigungsüberschüsse innerhalb der Sättigungsfinger immer Sättigungsprofile in  $z$ -Richtung bei  $x = 0.25$  m betrachtet.

### 13.2.2.1 Problem D

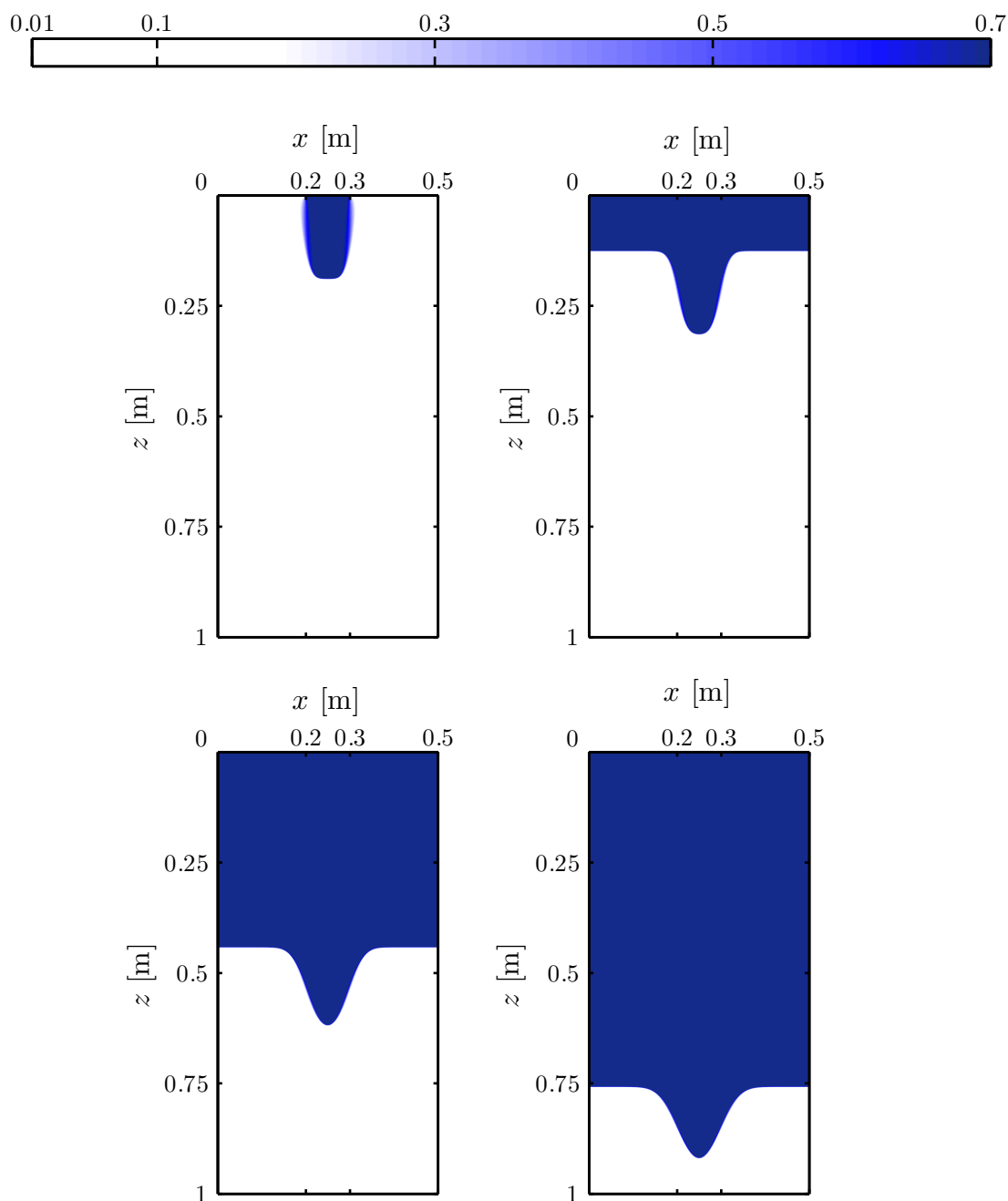
Die Abbildungen 13.4-13.6 zeigen die numerischen Lösungen der Probleme D1 und D2. Die ersten beiden Abbildungen 13.4 und 13.5 zeigen die Sättigungsverteilungen in der  $(x, z)$ -Ebene als farbige Flächen für die Zeiten  $t = 300$  s (oben links),  $t = 500$  s (oben rechts),  $t = 1000$  s (unten links) und  $t = 1500$  s (unten rechts). Der Farbverlauf von weiß nach dunkelblau steht für die Sättigungswerte  $S \in [0.01, 0.7]$ , wie in der Legende über den Abbildungen zu sehen ist. Abbildung 13.6 zeigt den Vergleich der Länge der Sättigungsfinger an der Stelle  $x = 0.25$ .

In Abbildung 13.4 ist die numerische Lösung von Problem D1 mit den kapillaren Koeffizienten  $D_G(S)$  zu sehen. Bis  $t = t^B = 300$  s breitet sich nur im Bereich  $0.2 \leq x \leq 0.3$  ein Sättigungsfinger in  $z$ -Richtung aus. Die diffusiven Effekte von  $D_G$  wirken vor allem in  $x$ -Richtung und sorgen für eine Verbreiterung des Sättigungsfingers. Zudem wird auch die Spitze des Sättigungsfingers stark ausgeschmiert und die Sättigung sinkt deutlich ab, siehe Farbverlauf bei  $(x = 0.25, z)$  von dunkelblau zu hellblau. Für Zeiten  $t > t^B$  wird am gesamten Einlass mit der Randsättigung  $S^{\text{in}} = 0.7$  eingeströmt und es entsteht eine Sättigungsfront über die gesamte Breite. Weiterhin sorgen die diffusiven Effekte dafür, dass der Sättigungsfinger breiter wird und sich nicht so schnell ausbreiten kann wie die anderen Sättigungsfronten bei  $x \in [0, 0.2) \cup (0.3, 0.5]$ . Daher verkürzen diese Sättigungsfronten, links und rechts des Fingers, die Länge des Sättigungsfingers.

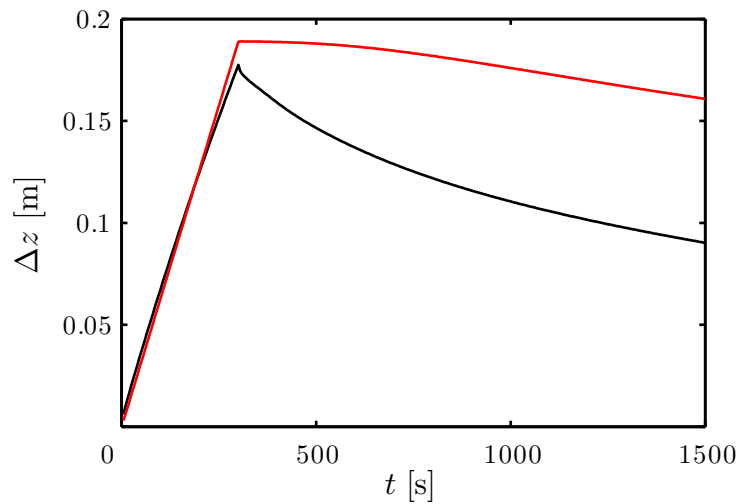
Im Vergleich dazu ist in Abbildung 13.5 die numerische Lösung von Problem D2 mit  $D \rightarrow 0$  dargestellt. Es ist zu sehen, dass der Sättigungsfinger durch die sehr kleinen diffusiven Kräfte nur minimal breiter wird und auch die Sättigungsfront an der Spitze nur sehr leicht ausgeschmiert ist. Bis zum Zeitpunkt  $t = 1500$  s ist zwar trotzdem eine deutliche Verbreiterung des Sättigungsfingers sichtbar, jedoch bleibt die Länge des Sättigungsfingers nahezu konstant.



**Abbildung 13.4:** Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems D1 zu den Zeitpunkten  $t \in \{300\text{s}, 500\text{s}, 1000\text{s}, 1500\text{s}\}$ . Bis  $t = t^B = 300\text{s}$  deutliche Ausbildung eines Sättigungsfingers für  $x \in [0.2, 0.3]$ . Ab  $t = t^B$  holen die Sättigungsfronten rechts und links auf und verkürzen den Sättigungsfinger. Zudem ist eine deutliche Verbreiterung des Sättigungsfingers durch diffusive Effekte von  $D_G$  erkennbar. Die Sättigungen sind farblich markiert von weiß ( $S = 0.01$ ) nach dunkelblau ( $S = 0.7$ ).



**Abbildung 13.5:** Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems D2 zu den Zeitpunkten  $t \in \{300\text{s}, 500\text{s}, 1000\text{s}, 1500\text{s}\}$ . Bis  $t = t^B = 300\text{s}$  deutliche Ausbildung eines Sättigungsfingers für  $x \in [0.2, 0.3]$ . Ab  $t = t^B$  bilden sich Sättigungsfronten rechts und links aus. Geringe Verwitterung und nur geringe Verkürzung des Sättigungsfingers, da  $D \rightarrow 0$  gilt und die diffusiven Effekte so minimiert werden. Die Sättigungen sind farblich markiert von weiß ( $S = 0.01$ ) nach dunkelblau ( $S = 0.7$ ).

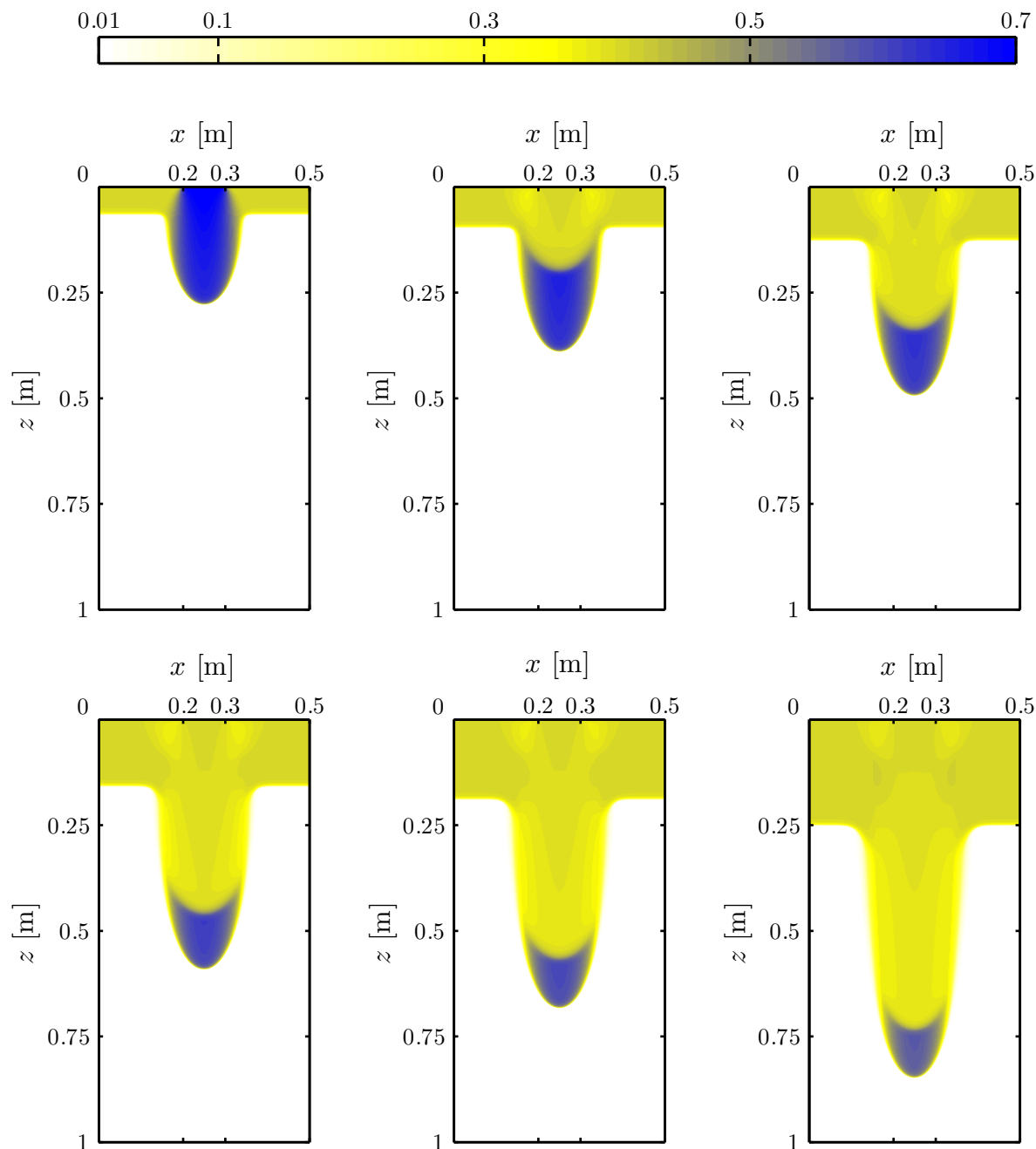


**Abbildung 13.6:** Vergleich der Länge der Sättigungsfinger bei dem Anfangs- und Randwertproblem D1 (schwarze Linie) und D2 (rote Linie). Die Längen werden bei  $x = 0.25$  für  $0 < t \leq 1500$  s berechnet. Bis  $t = t^B = 300$  s ist kaum ein Unterschied zwischen den Sättigungsfingern von D1 und D2 zu erkennen. Für  $t > t^B$  sinkt die Länge bei D1 deutlich ab, die Länge des Sättigungsfingers bei D2 bleibt aber nahezu gleich.

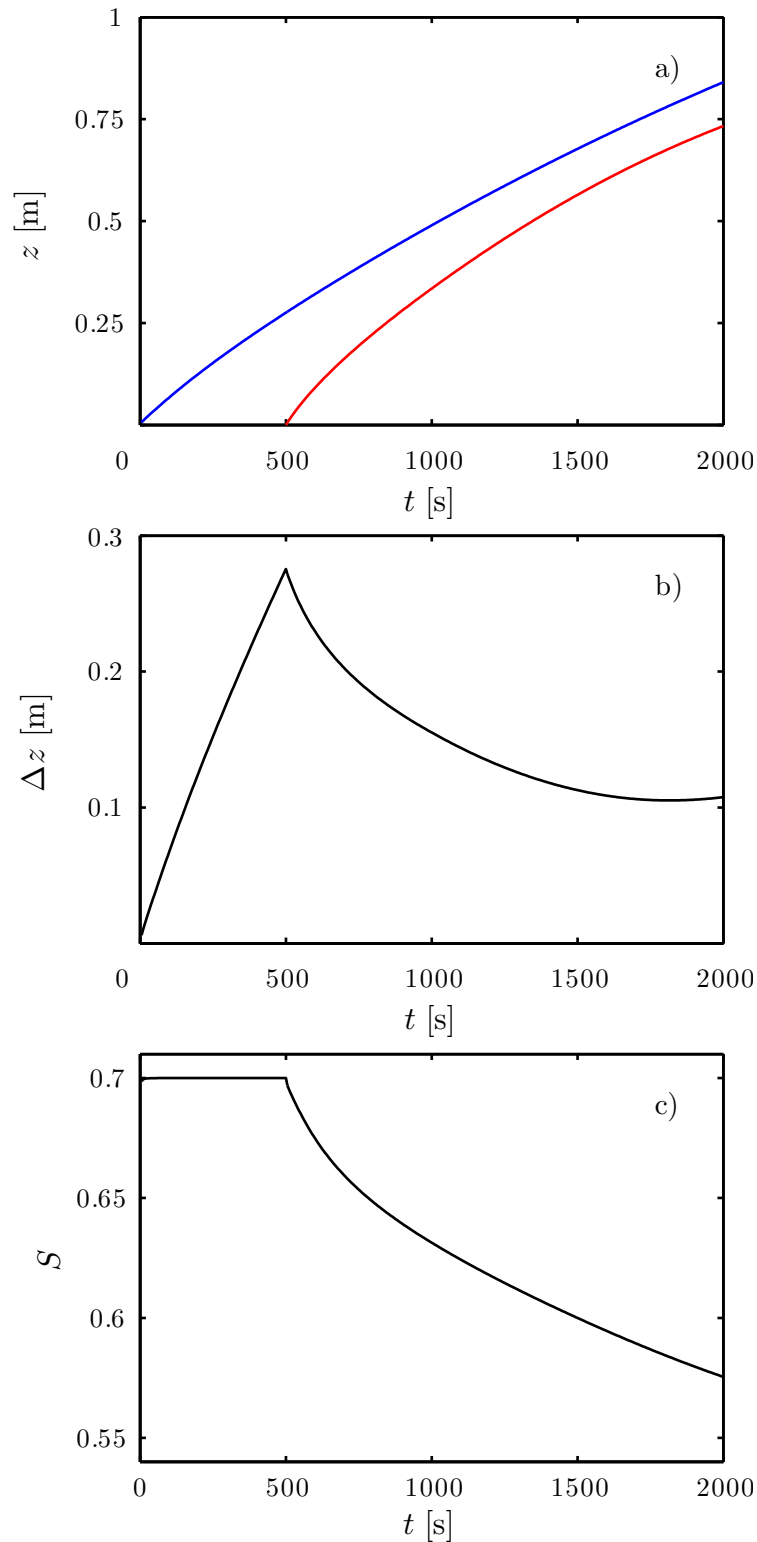
Der Vergleich der Länge der Sättigungsfinger in Abhängigkeit von der Zeit wird in Abbildung 13.6 gezeigt. Die Länge des Sättigungsfingers für Problem D1 ist in schwarz und für Problem D2 in rot gezeichnet. Wie schon in den Abbildung 13.4 und 13.5 zu sehen war, ist die Länge des Sättigungsfingers bis  $t = t^B = 300$  s bei Problem D2 nur minimal größer. Danach, für  $t > t^B$ , ist allerdings klar zu sehen, dass die Länge des Sättigungsfingers bei D1 deutlich abnimmt und der Sättigungsfinger für längere Zeiten verschwindet. Bei Problem D2 ist die Längenänderung für  $t > t^B$  nur schwach ausgeprägt und es wird deutlich länger dauern bis der Sättigungsfinger in diesem Beispiel verschwunden ist.

### 13.2.2.2 Problem E

Die numerische Lösung von Problem E ist in den Abbildungen 13.7 und 13.8 dargestellt. Abbildung 13.7 zeigt die Sättigungsverteilung in der  $(x, z)$ -Ebene als farbige Flächen für die Zeiten  $t = 500$  s (oben links),  $t = 750$  s (oben Mitte),  $t = 1000$  s (oben rechts),  $t = 1250$  s (unten links),  $t = 1500$  s (unten Mitte) und  $t = 2000$  s (unten rechts). Der Farbverlauf von weiß über gelb nach blau steht für die Sättigungswerte  $S \in [0.01, 0.7]$ , wie in der Legende über der Abbildung zu sehen ist. Abbildung 13.8 zeigt die Orte der Be- und Entwässerungsfront a), die Breite des Überschussplateaus b) und die Überschusssättigung c) bei  $(x = 0.25\text{m}, z)$  in Abhängigkeit von der Zeit.



**Abbildung 13.7:** Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems E für  $t \in \{500\text{s}, 750\text{s}, 1000\text{s}, 1250\text{s}, 1500\text{s}, 2000\text{s}\}$ . Deutliche Ausbildung eines Sättigungsfingers für  $x \in [0.2, 0.3]$  mit einem Sättigungsüberschuss ab  $t = t^B = 500$  s. Im Laufe der Zeit sinkt die Überschussättigung ab. Die Breite des Überschussplateaus nimmt bis  $t \approx 1830$  s ab und danach wieder zu. Die Länge des Sättigungsfingers nimmt in Abhängigkeit der Zeit zu. Die Sättigungen sind farblich markiert, von weiß ( $S = 0.01$ ) über gelb nach blau ( $S = 0.7$ ).



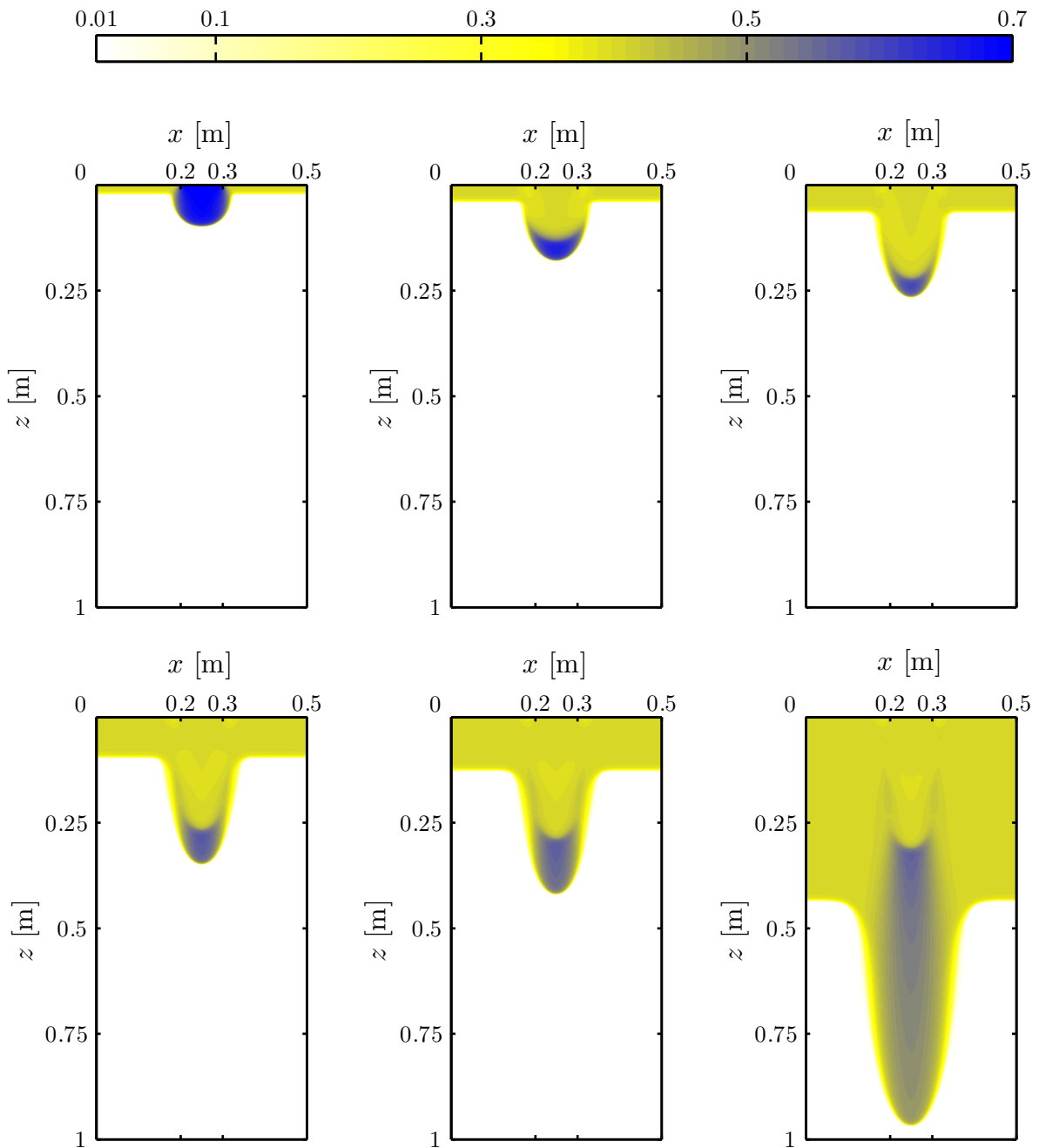
**Abbildung 13.8:** Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem E in Abhängigkeit der Zeit bei  $x = 0.25$  m. a): Ausbreitung der Bewässerungsfront (blau) und der Entwässerungsfront (rot) in  $z$ -Richtung. b): Länge des Überschussplateaus mit einem lokalen Minimum bei  $t \approx 1830$  s. c): Die Überschuss-sättigung steigt bis  $t = t^B$  auf  $S^B = 0.7$  an und reduziert sich dann aufgrund des Einflusses der Diffusion und der nachfolgenden Entwässerungsfront.

Die Flächen in Abbildung 13.7 zeigen, dass sich bis  $t = t^B = 500$  s eine Sättigungsfinger im Bereich  $x \in [0.2, 0.3]$  mit Frontsättigung  $S^B = 0.7$  ausbildet. In den Bereichen links und rechts von diesem Sättigungsfinger,  $x \in [0, 0.2) \cup (0.3, 0.5]$ , breitet sich jeweils eine Bewässerungsfront mit Frontsättigung  $S^{\text{in}} = 0.4$  aus. Durch die diffusiven Effekte des Kapillardrucks verbreitert sich der Sättigungsfinger analog zum Problem D1. Für Zeiten  $t > t^B$  ist die Sättigung für alle  $x$ -Werte am Einlass identisch. Dadurch wird im Bereich  $x \in [0.2, 0.3]$  eine Entwässerung induziert. Diese Entwässerung folgt der Bewässerungsfront des Sättigungsfingers und bildet somit ein nichtmonotones Sättigungsprofil im Sättigungsfinger aus. In Abbildung 13.8a) und b) ist zu sehen, dass sich die Entwässerungsfront für  $t^B = 150$  s  $< t < 1830$  s schneller ausbreitet als die Bewässerungsfront. Daher und wegen der diffusiven Effekten nimmt die Überschussättigung und die Plateaubreite kontinuierlich ab. Das Absinken der Überschussättigung sorgt für ein Abbremsen der Be- und Entwässerungsfronten des Sättigungsüberschusses. Hierbei nimmt die Geschwindigkeit der Entwässerungsfront schneller ab als die der Bewässerungsfront. Ab  $t \approx 1830$  s ist die Entwässerungsfront langsamer als die Bewässerungsfront und das Überschussplateau verbreitert sich. Im Gegensatz zu den Problemen D1 und D2 nimmt die Länge des Sättigungsfingers mit der Zeit zu, siehe Abbildung 13.7 unten rechts.

### 13.2.2.3 Problem F

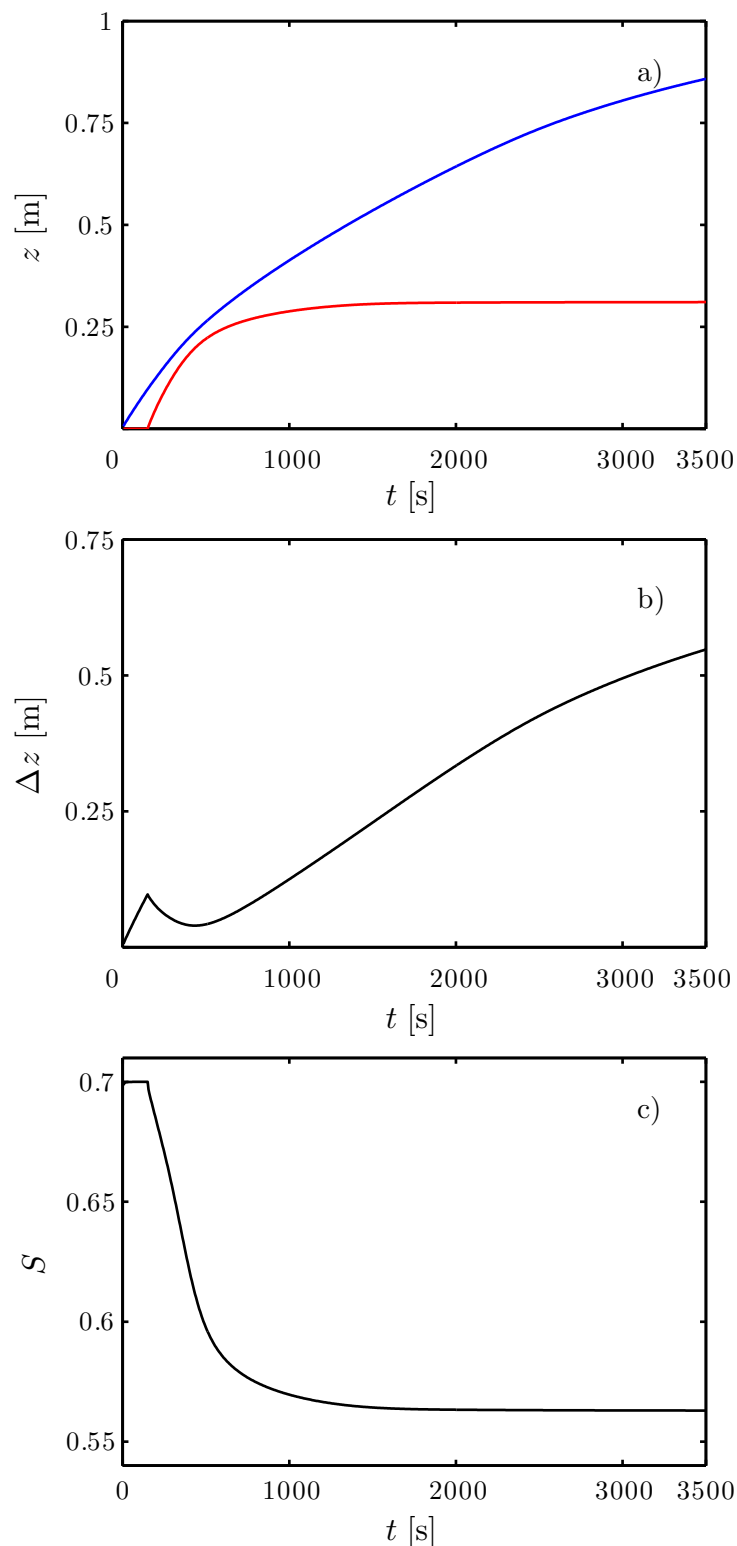
Die numerische Lösung von Problem F ist in den Abbildungen 13.9 und 13.10 dargestellt. Abbildung 13.9 zeigt die Sättigungsverteilung in der  $(x, z)$ -Ebene als farbige Flächen für die Zeiten  $t = 150$  s (oben links),  $t = 300$  s (oben Mitte),  $t = 500$  s (oben rechts),  $t = 750$  s (unten links),  $t = 1000$  s (unten Mitte) und  $t = 3500$  s (unten rechts). Der Farbverlauf von weiß über gelb nach blau steht für die Sättigungswerte  $S \in [0.01, 0.7]$ , wie in der Legende über der Abbildung zu sehen ist. Abbildung 13.10 zeigt die Orte der Be- und Entwässerungsfront a), die Breite des Überschussplateaus b) und die Überschussättigung c) bei  $(x = 0.25, z)$  in Abhängigkeit von der Zeit.

Das zeitliche Verhalten der Lösung ist analog zu Problem E. Der Sättigungsfinger entwickelt sich bis  $t = t^B = 150$  s und durch die Randbedingung wird im Bereich  $x \in [0.2, 0.3]$  eine Entwässerung erzwungen. Die Entwässerungsfront breitet sich, wie in Problem E, zunächst schneller aus als die Bewässerungsfront. Aufgrund dieses Geschwindigkeitsunterschiedes und der diffusiven Effekte sinkt die Überschussättigung ab und das Überschussplateau verkürzt sich, siehe Abbildungen 13.7 und 13.8. Zum Zeitpunkt  $t \approx 435$  s hat die Kurve in Abbildung 13.8b) ein lokales Minimum. Daraus folgt, dass die Plateaubreite ab diesem Zeitpunkt



**Abbildung 13.9:** Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems  $F$  für  $t \in \{150\text{s}, 300\text{s}, 500\text{s}, 750\text{s}, 1000\text{s}, 3500\text{s}\}$ . Deutliche Ausbildung eines Sättigungsfingers für  $x \in [0.2, 0.3]$  mit einem Sättigungsüberschuss ab  $t = t^B = 150\text{s}$ . Im Laufe der Zeit sinkt die Überschussättigung ab. Die Länge des Überschussplateaus nimmt bis  $t \approx 435\text{s}$  ab und danach wieder zu. Die Länge des Sättigungsfingers nimmt in Abhängigkeit der Zeit zu. Die Sättigungen sind farblich markiert, von weiß ( $S = 0.01$ ) über gelb nach blau ( $S = 0.7$ ).





**Abbildung 13.10:** Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem F in Abhängigkeit der Zeit bei  $x = 0.25$  m. a): Ausbreitung der Bewässerungsfront (blau) und der Entwässerungsfront (rot) in  $z$ -Richtung. b): Länge des Überschussplateaus mit einem lokalen Minimum bei  $t \approx 435$  s. c): Die Überschussättigung steigt bis  $t = t^B$  auf  $S^B = 0.7$  an und reduziert sich dann aufgrund der Diffusion und der nachfolgenden Entwässerungsfront.

wieder größer wird und somit die Bewässerungsfront sich schneller ausbreitet als die Entwässerungsfront. Für Zeiten  $t > t^B$  sinkt die Überschusssättigung immer weiter ab, jedoch mit kleiner werdender Änderungsrate, siehe Abbildung 13.8c). Die Überschusssättigung ist zum Zeitpunkt  $t = 3500 \text{ s} = 0.593$  und kann als nahezu stabiler Überschuss angesehen werden.

#### 13.2.2.4 Problem G

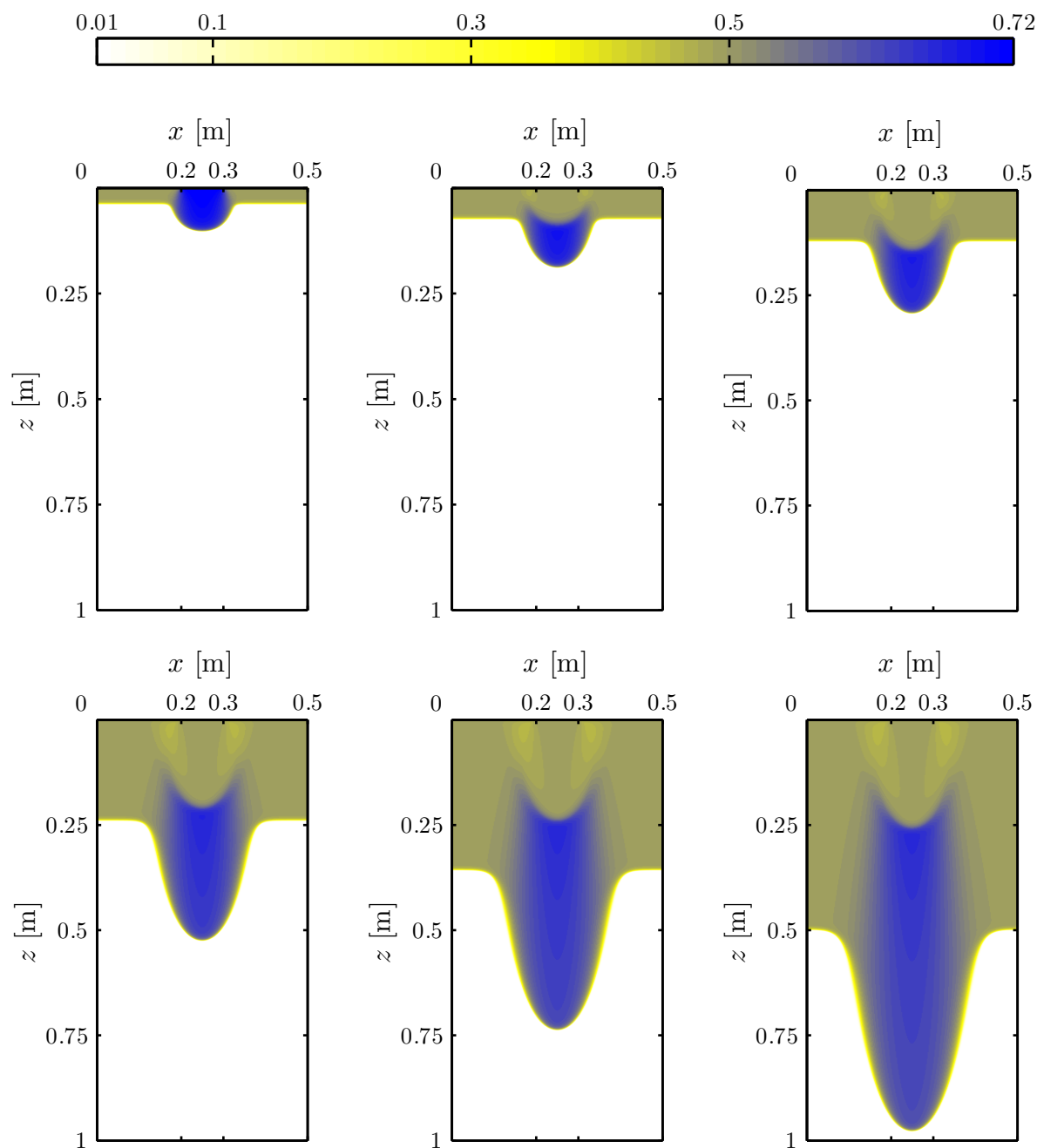
Die numerische Lösung von Problem G ist in den Abbildungen 13.11 und 13.12 dargestellt. Abbildung 13.11 zeigt die Sättigungsverteilung in der  $(x, z)$ -Ebene als farbige Flächen für die Zeiten  $t = 150 \text{ s}$  (oben links),  $t = 300 \text{ s}$  (oben Mitte),  $t = 500 \text{ s}$  (oben rechts),  $t = 1000 \text{ s}$  (unten links),  $t = 1500 \text{ s}$  (unten Mitte) und  $t = 2100 \text{ s}$  (unten rechts). Der Farbverlauf von weiß über gelb nach blau steht für die Sättigungswerte  $S \in [0.01, 0.72]$ , wie in der Legende über der Abbildung zu sehen ist. Abbildung 13.12 zeigt die Orte der Be- und Entwässerungsfront a), die Breite des Überschussplateaus b) und die Überschusssättigung c) bei  $(x = 0.25, z)$  in Abhängigkeit von der Zeit.

Die numerische Lösung ist analog zu den Problemen E und F. Der Unterschied ist, dass die Sättigungen ( $S^{\text{out}} = 0.01, S^{\text{in}} = 0.4956, S^B = 0.72$ ) so gewählt sind, dass sich die Be- und Entwässerungsfronten des Sättigungsüberschusses mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten. Daher entfällt die Phase der Lösung, in der die Plateaubreite des Überschusses abnimmt. Für den betrachteten Zeitraum steigt die Länge des Sättigungsfingers und die Breite des Überschussplateaus immer an. Die Überschusssättigung jedoch nimmt wieder ab  $t = t^B = 150 \text{ s}$  ab.

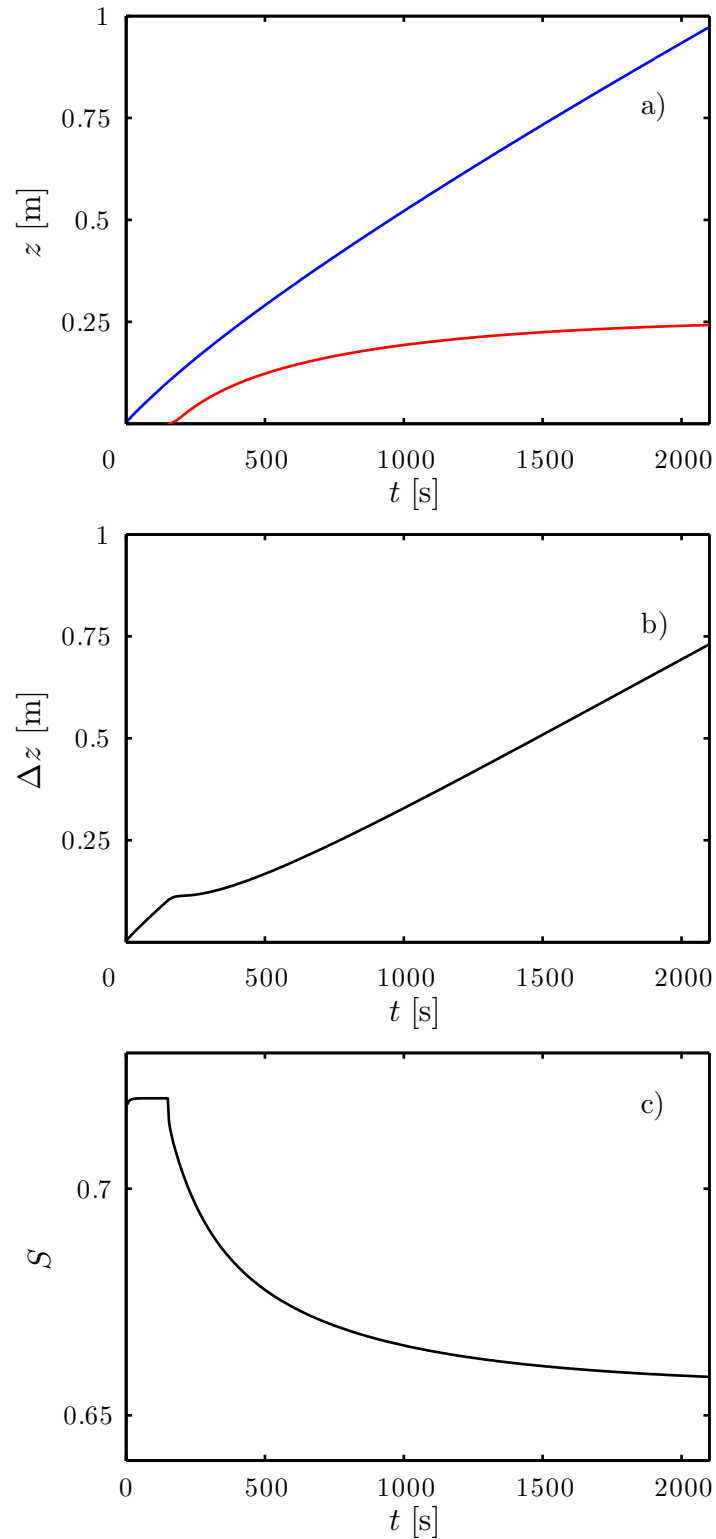
#### 13.2.3 Folgerung

Die numerischen Simulationen der Anfangs- und Randwertprobleme in diesem Kapitel zeigen deutlich, dass der Kapillardruck und somit die diffusiven Effekte einen großen Einfluss auf die Ausbreitung und den Erhalt von Sättigungsfingern haben. Die diffusiven Effekte und damit der Kapillardruck erzeugen eine Verbreiterung und Ausschmierung der Sättigungsfinger und bewirken ein Absinken einer vorhandenen Überschusssättigung.

Ein Sättigungsfinger ohne einen Sättigungsüberschuss an der Spitze wird durch die benachbarten Sättigungsfronten immer eingeholt werden. Daher ist ein solcher Sättigungsfinger nicht stabil und bleibt nur eine kurze Zeit nachweisbar.



**Abbildung 13.11:** Numerische Lösung des zweidimensionalen Anfangs- und Randwertproblems G für  $t \in \{150\text{s}, 300\text{s}, 500\text{s}, 1000\text{s}, 1500\text{s}, 2100\text{s}\}$ . Deutliche Ausbildung eines Sättigungsfingers für  $x \in [0.2, 0.3]$  mit einem Sättigungsüberschuss ab  $t = t^B = 150$  s. Im Laufe der Zeit sinkt die Überschussättigung ab. Die Längen des Überschussplateaus und des Sättigungsfingers nehmen in Abhängigkeit der Zeit zu. Die Sättigungen sind farblich markiert, von weiß ( $S = 0.01$ ) über gelb nach blau ( $S = 0.72$ ).



**Abbildung 13.12:** Auswertung der numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertproblem G in Abhängigkeit der Zeit bei  $x = 0.25$  m. a): Ausbreitung der Bewässerungsfront (blau) und der Entwässerungsfront (rot) in  $z$ -Richtung. b): Monoton steigende Länge des Überschussplateaus. c): Die Überschussättigung steigt bis  $t = t^B$  auf  $S^B = 0.72$  an und reduziert sich dann aufgrund des Einflusses der Diffusion und der nachfolgenden Entwässerungsfront.

Die Sättigungsfinger mit Sättigungsüberschüssen zeigen, dass der Finger für längere Zeiten stabil ist und sich auch, aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Bewässerungsfronten, verlängert. Die Überschusssättigung ist in keinem der betrachteten Beispiele stabil und sinkt durch Einfluss des Kapillardrucks kontinuierlich ab. Jedoch wird auch die Änderungsrate mit der die Überschusssättigung absinkt sehr klein. Die betrachteten Beispiele können daher noch keine Antwort darauf liefern, ob der Sättigungsüberschuss für sehr lange Zeiten  $t \rightarrow \infty$  verschwindet oder sich stabilisiert.

Diese Ergebnisse bilden nur die Grundlage für weitere Untersuchungen, wie die Betrachtung der Probleme D-G für sehr viel längere Zeiträume. Des Weiteren muss auch der Einfluss der Randbedingungen, wie zum Beispiel die Breite des initialen Fingers und die Randsättigungen, auf die Ausbreitung des Sättigungsüberschusses und des Sättigungsfingers systematisch untersucht werden.

## **Teil VI**

## **Anhang**

# A Bestimmung der kubischen Streichkurven

In dem ersten Kapitel des Appendix werden die kubischen Streichkurven (3.19) des  $\delta$ -Hysterese Modells, welche die Bedingungen (3.20) erfüllen, bestimmt.

Für die kubischen Streichkurven in den relativen Permeabilitäten und im Kapillardruck gilt die identische Herleitung. Daher steht der Index  $j$  im Folgenden sowohl für die relativen Permeabilitäten mit Index  $\mathbb{W}$  und  $\mathbb{O}$  als auch für den Index des Kapillardrucks  $c$ .

Die kubischen Streichkurven

$$k_{\mathbb{W}}^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_{\mathbb{W}}, b_{\mathbb{W}}, c_{\mathbb{W}}, d_{\mathbb{W}}) = \sum_{k=1}^4 \psi_{\mathbb{W},k} S^{4-k} \quad (\text{A.1a})$$

$$k_{\mathbb{O}}^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_{\mathbb{O}}, b_{\mathbb{O}}, c_{\mathbb{O}}, d_{\mathbb{O}}) = \sum_{k=1}^4 \psi_{\mathbb{O},k} S^{4-k} \quad (\text{A.1b})$$

$$P_c^{\text{sc}}(S; A, \delta, a_c, b_c, c_c, d_c) = \sum_{k=1}^4 \psi_{c,k} S^{4-k} \quad (\text{A.1c})$$

sind in Kapitel 3 definiert als Funktional in Abhängigkeit der Punkte  $(A - \delta/2, a_j)$ ,  $(A + \delta/2, b_j)$ ,  $(A - \delta/2, c_j)$  und  $(A + \delta/2, d_j)$ . Die Punkte  $(A - \delta/2, a_j)$  und  $(A + \delta/2, b_j)$  sind jeweils Punkte in der  $(S, k_{\mathbb{W}}^r)$ -,  $(S, k_{\mathbb{O}}^r)$ - oder  $(S, P_c)$ -Ebene. Die Punkte  $(A - \delta/2, c_j)$  und  $(A + \delta/2, d_j)$  sind jeweils Punkte in der  $(S, dk_{\mathbb{W}}^r/dS)$ -,  $(S, dk_{\mathbb{O}}^r/dS)$ - oder  $(S, p_c)$ -Ebene.

Dadurch ergeben sich die folgenden vier Bedingungen:

$$\psi_{j,1} \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^3 + \psi_{j,2} \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 + \psi_{j,3} \left( A - \frac{\delta}{2} \right) + \psi_{j,4} = a_j \quad (\text{A.2a})$$

$$\psi_{j,1} \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^3 + \psi_{j,2} \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^2 + \psi_{j,3} \left( A + \frac{\delta}{2} \right) + \psi_{j,4} = b_j \quad (\text{A.2b})$$

$$3\psi_{j,1} \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 + 2\psi_{j,2} \left( A - \frac{\delta}{2} \right) + \psi_{j,3} = c_j \quad (\text{A.2c})$$

$$3\psi_{j,1} \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 2\psi_{j,2} \left( A + \frac{\delta}{2} \right) + \psi_{j,3} = d_j \quad (\text{A.2d})$$

Das Gleichungssystem (A.2) wird als eine erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben und mit der Gauss-Elimination gelöst.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^3 & \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 & A - \frac{\delta}{2} & 1 & a_j \\ \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^3 & \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^2 & A + \frac{\delta}{2} & 1 & b_j \\ 3 \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 & 2 \left( A - \frac{\delta}{2} \right) & 1 & 0 & c_j \\ 3 \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^2 & 2 \left( A + \frac{\delta}{2} \right) & 1 & 0 & d_j \end{array} \right) \quad (\text{A.3})$$

(II) - (I) und (II)/ $\delta$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^3 & \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 & A - \frac{\delta}{2} & 1 & a_j \\ 3A^2 + \frac{\delta^2}{4} & 2A & 1 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta} \\ 3 \left( A - \frac{\delta}{2} \right)^2 & 2 \left( A - \frac{\delta}{2} \right) & 1 & 0 & c_j \\ 3 \left( A + \frac{\delta}{2} \right)^2 & 2 \left( A - \frac{\delta}{2} \right) & 1 & 0 & d_j \end{array} \right) \quad (\text{A.4})$$



(III) – (II), (IV) – (II)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^3 & \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^2 & A - \frac{\delta}{2} & 1 & a_j \\ 3A^2 + \frac{\delta^2}{4} & 2A & 1 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta} \\ -3A\delta + \frac{\delta^2}{2} & -\delta & 0 & 0 & c_j - \frac{b_j - a_j}{\delta} \\ 3A\delta + \frac{\delta^2}{2} & \delta & 0 & 0 & d_j - \frac{b_j - a_j}{\delta} \end{array} \right) \quad (\text{A.5})$$

(IV) + (III), (III)/ –  $\delta$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^3 & \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^2 & A - \frac{\delta}{2} & 1 & a_j \\ 3A^2 + \frac{\delta^2}{4} & 2A & 1 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta} \\ 3A - \frac{\delta}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta^2} - \frac{c_j}{\delta} \\ \delta^2 & 0 & 0 & 0 & d_j + c_j - 2\frac{b_j - a_j}{\delta} \end{array} \right) \quad (\text{A.6})$$

(IV)/ $\delta^2$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^3 & \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^2 & A - \frac{\delta}{2} & 1 & a_j \\ 3A^2 + \frac{\delta^2}{4} & 2A & 1 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta} \\ 3A - \frac{\delta}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{b_j - a_j}{\delta^2} - \frac{c_j}{\delta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_j + c_j}{\delta^2} - 2\frac{b_j - a_j}{\delta^3} \end{array} \right) \quad (\text{A.7})$$

Zusammenfassend errechnen sich dann die Parameter zu

$$\psi_{j,1} = \frac{d_j + c_j}{\delta^2} - 2\frac{b_j - a_j}{\delta^3} \quad (\text{A.8a})$$

$$\psi_{j,2} = \frac{b_j - a_j}{\delta^2} - \frac{c_j}{\delta} - \left(3A - \frac{\delta}{2}\right) \psi_{j,1} \quad (\text{A.8b})$$

$$\psi_{j,3} = \frac{b_j - a_j}{\delta} - 2A\psi_{j,2} - \left(3A^2 + \frac{\delta^2}{4}\right) \psi_{j,1} \quad (\text{A.8c})$$

$$\psi_{j,4} = a_j - \left(A - \frac{\delta}{2}\right) \psi_{j,3} - \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^2 \psi_{j,2} - \left(A - \frac{\delta}{2}\right)^3 \psi_{j,1}. \quad (\text{A.8d})$$

## B Open $\nabla$ FOAM Implementierung

In diesem Kapitel sind die Implementierungen in Open $\nabla$ FOAM zum Lösen der Anfangs- und Randwertproblem (DG1), (DG2) und (DG5) beschrieben. Open $\nabla$ FOAM ist eine Open-Source Bibliothek für partielle Differentialgleichungen. Es basiert auf der Methode der Finiten Volumen und stellt für gängige Differentialgleichungen ganze Lösungsroutinen und für viele Differentialoperatoren Löser bereit.

Im ersten Abschnitt wird die Implementierung der Zweiphasen Darcy-Theorie in der fraktionalen Formulierung, (DG1), und das allgemeine Lösungsschema vorgestellt. In den Abschnitten 2 und 3 wird danach die Implementierung der beiden Hysterese Modelle, Sprung- und  $\delta$ -Hysterese aus Kapitel 3, für die Probleme (DG2) und (DG5) eingeführt.

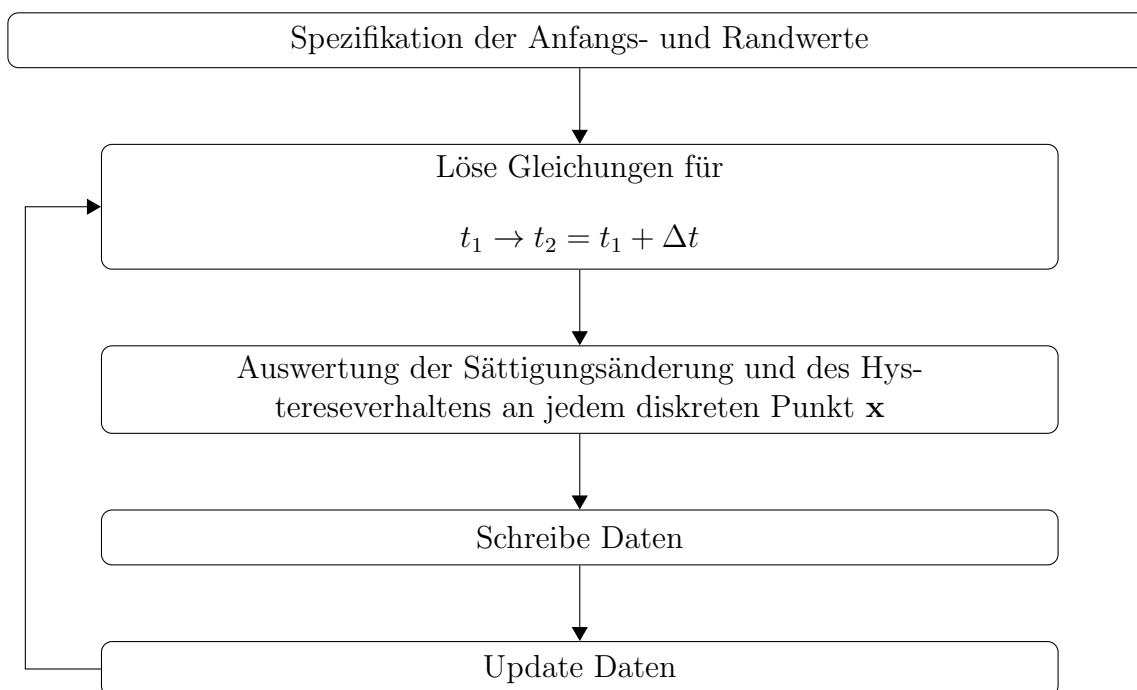
Für alle numerischen Simulationen gilt für die Ortsdiskretisierung  $\Delta x = \Delta z \leq 1/2000$  m und für die Zeitdiskretisierung mindestens  $\Delta t \leq 0.1$  s.

### B.1 Implementierung der fraktionalen Formulierung der Darcy-Theorie

In Open $\nabla$ FOAM (Version 2.1.1 [56]) gibt es keine bereits implementierte Lösungsroutine für den Mehrphasenfluss in porösen Medium beschrieben durch die Darcy-Theorie. Als Basis für die Darcy-Lösungsroutine dient daher die bereits implementierte Lösungsroutine `scalarTransportFoam` für eine lineare Transportgleichung, da (DG1) die Form einer linearen Transportgleichung aufweist. Abbildung B.1 zeigt das allgemeine Diagramm zur Lösung der Gleichungen (DG1) mit geeigneten Anfangs- und Randwerten.

Der Term der Zeitableitung wird implizit implementiert

```
porosity*fvm::ddt(S)
```



**Abbildung B.1:** Flussdiagramm für die numerische Struktur zur Lösung der hysteretischen Differentialgleichung

mit  $\phi = \text{porosity}$ , der Zeitableitung `fvm::ddt(·)` und der Sättigung  $S$ . Die Divergenz des fraktionalen Flusses wird explizit durch

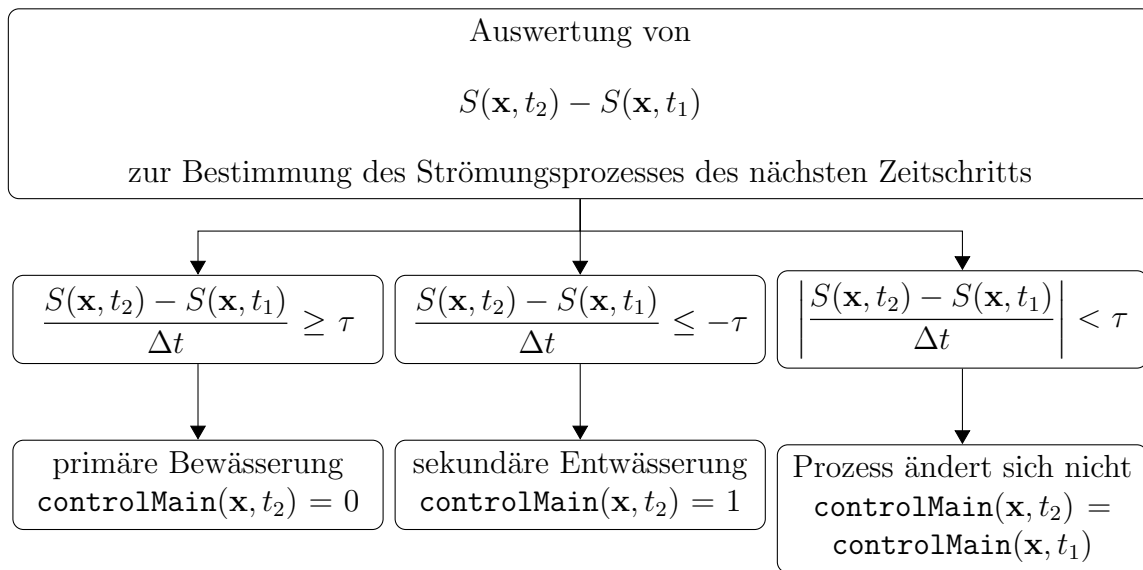
$$Q*(fvc::div(FraFlux))$$

gelöst mit dem totalen Fluss  $Q$ , der Divergenz `fvc::div(·)` und dem fraktionalen Fluss  $f(S) = \text{FraFlux}$ . Der diffusive Term wird mit einem Laplace-Operator

$$-fvm::laplacian(\max(\text{CapFlux}, D), S)$$

implizit gelöst. Dabei ist der kapillare Fluss  $D(S) = \text{CapFlux}$  und  $D$  ist eine Konstante zur Regularisierung des kapillaren Flusses. Die Regularisierung ist notwendig, um den parabolischen Charakter der Gleichung zu erhalten. Für Sättigungen  $S \rightarrow 0$  und  $S \rightarrow 1$  wird der Kapillarfluss sehr klein und dadurch nähert sich die Gleichung dem hyperbolischen Grenzfall an. Dadurch werden Sättigungsfronten zu Unstetigkeiten und diese Unstetigkeiten führen zu numerischen Fluktuationen und falschen Lösungen. Dies wird durch die Regularisierung verhindert.

Zusammengesetzt lautet der OpenFOAM Code



**Abbildung B.2:** Diagramm zur Auswertung der Simulationsergebnisse und Bestimmung der Strömungsprozesse bei dem Sprunghysteresemodell.

```

solve(
    porosity*fvm::ddt(S)
    + Q*(fvc::div(FraFlux))
    - fvm::laplacian(max(CapFlux,D),S)
);
  
```

für die fraktionale Formulierung der Darcy-Theorie (DG1).

## B.2 Implementierung der Sprunghysterese

Das Sprunghysteresemodell benutzt, wie zuvor in Kapitel 3 erläutert, nur die beiden Hystererandkurven, also hier die primäre Be- und die sekundäre Entwässerung, zur Beschreibung der unterschiedlichen Strömungsprozesse. Für die Implementierung muss der Graph  $\mathcal{G}$  nicht gespeichert werden. Nur die Information auf welcher Randkurve man sich befindet wird in der Indikatorfunktion `controlMain` gespeichert. Daher kann die OpenFOAM Implementierung der Gleichung in zwei Teile aufgespalten werden, einer Gleichung für die Bewässerung und eine Gleichung für die Entwässerung. Der numerische Code hat dann die Form

```

solve(
    porosity*fvm::ddt(S_im)
  
```

```

+ Q*(fvc::div(FraFlux_im))
- fvm::laplacian(max(CapFlux_im,D),S_im)
);

solve(
porosity*fvm::ddt(S_dr)
+ Q*(fvc::div(FraFlux_dr))
- fvm::laplacian(max(CapFlux_dr,D),S_dr)
);

```

mit Benutzung der Endungen `_im` für die primäre Bewässerung und `_dr` für die sekundäre Entwässerung. Die fraktionalen Flüsse `FraFlux_im`, `FraFlux_dr` und die kapillaren Koeffizienten `CapFlux_im`, `CapFlux_dr` ergeben sich hierbei aus den Hauptzweigen der relativen Permeabilitäten und des Kapillardrucks. Nach Lösen dieser Gleichungen werden die Be- und Entwässerungssättigungen `S_im` und `S_dr` zu einem Sättigungsprofil zusammengesetzt

$$S = (1-\text{controlMain}) * S_{\text{im}} + \text{controlMain} * S_{\text{dr}}$$

mit der Indikatorfunktion `controlMain`, die jedem diskreten Ort  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t_1$  eine 0 für Bewässerung oder 1 für Entwässerung zuordnet.

In Abbildung B.2 ist ein Diagramm für die Auswertung der Sättigungen und Bestimmung der Prozesse dargestellt. Die Strömung wird durch die primäre Bewässerungsrandkurve definiert, falls die Sättigung am Ort  $\mathbf{x}$  steigt

$$\frac{S(\mathbf{x}, t_2) - S(\mathbf{x}, t_1)}{\Delta t} \geq \tau \quad (\text{B.1a})$$

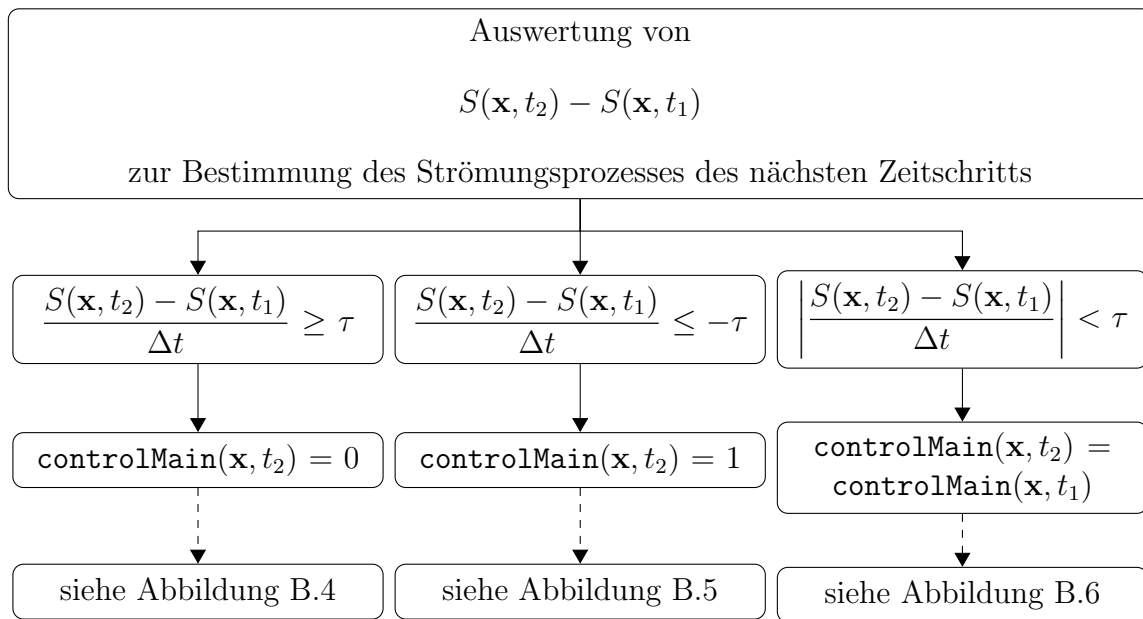
und beim Absinken der Sättigung

$$\frac{S(\mathbf{x}, t_2) - S(\mathbf{x}, t_1)}{\Delta t} \leq -\tau \quad (\text{B.1b})$$

werden Funktionen durch die Entwässerungsrandkurve bestimmt. Ändert sich die Sättigung an einem Ort im porösen Medium nur um den Wert  $\tau$

$$\left| \frac{S(\mathbf{x}, t_2) - S(\mathbf{x}, t_1)}{\Delta t} \right| < \tau \quad (\text{B.1c})$$

bleibt der zeitlich letzte Prozess bestehen. Der Parameter  $\tau \in [10^{-7}, 10^{-12}]$  wirkt Prozessänderungen bei numerischen Fluktuationen entgegen.



**Abbildung B.3:** Diagramm zur Auswertung der Simulationsergebnisse und Bestimmung der Strömungsprozesse beim  $\delta$ -Hysteresemodell.

### B.3 Implementierung der $\delta$ -Hysterese

Das  $\delta$ -Hysteresemodell wird durch eine Implementierung mit nur einer Gleichung gelöst.

```

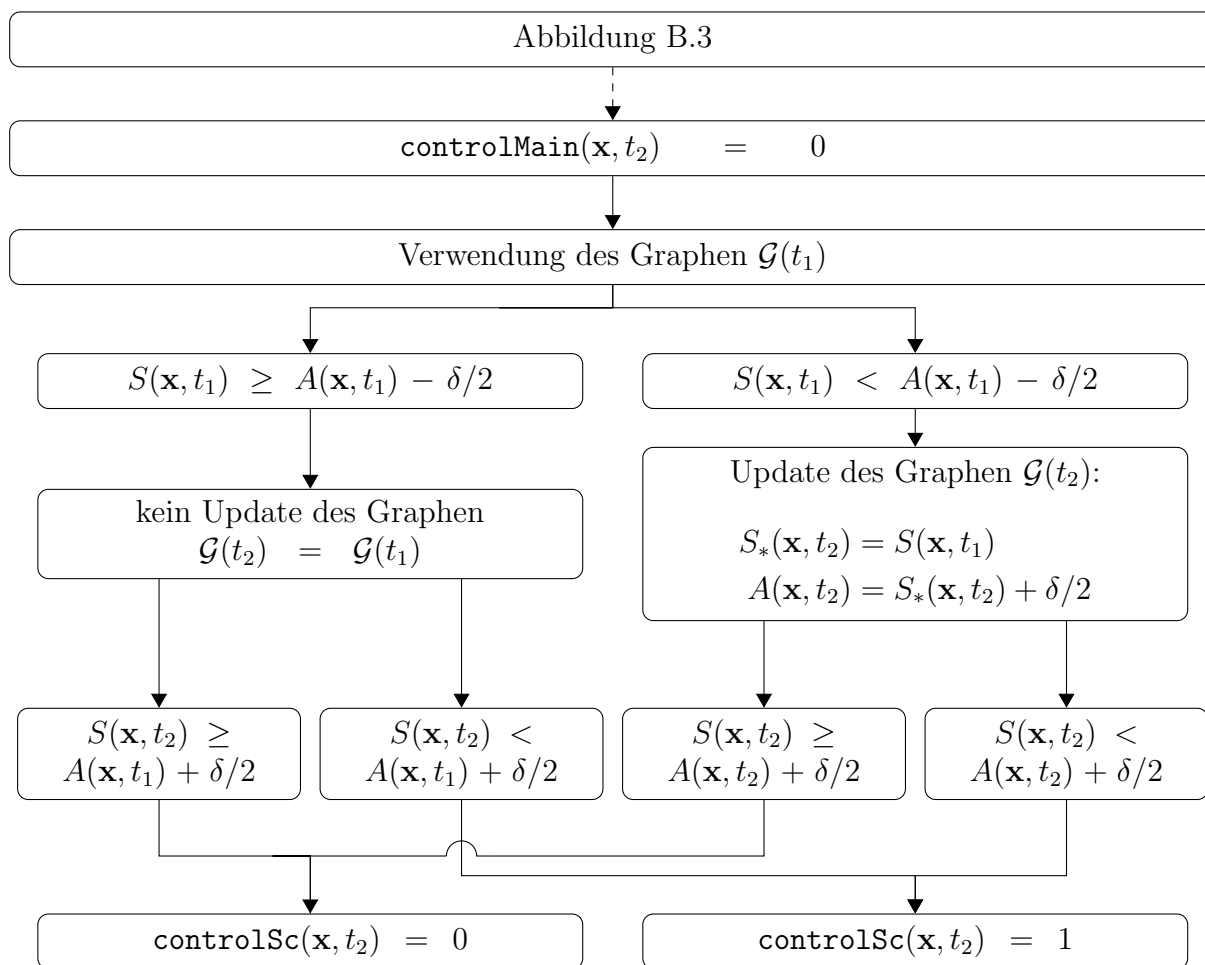
solve(
    porosity*fvm::ddt(S)
    + Q*(fvc::div(FraFlux))
    - fvm::laplacian(max(CapFlux,D),S)
);
  
```

Der fraktionale und der kapillare Fluss berechnen sich aus den relativen Permeabilitäten

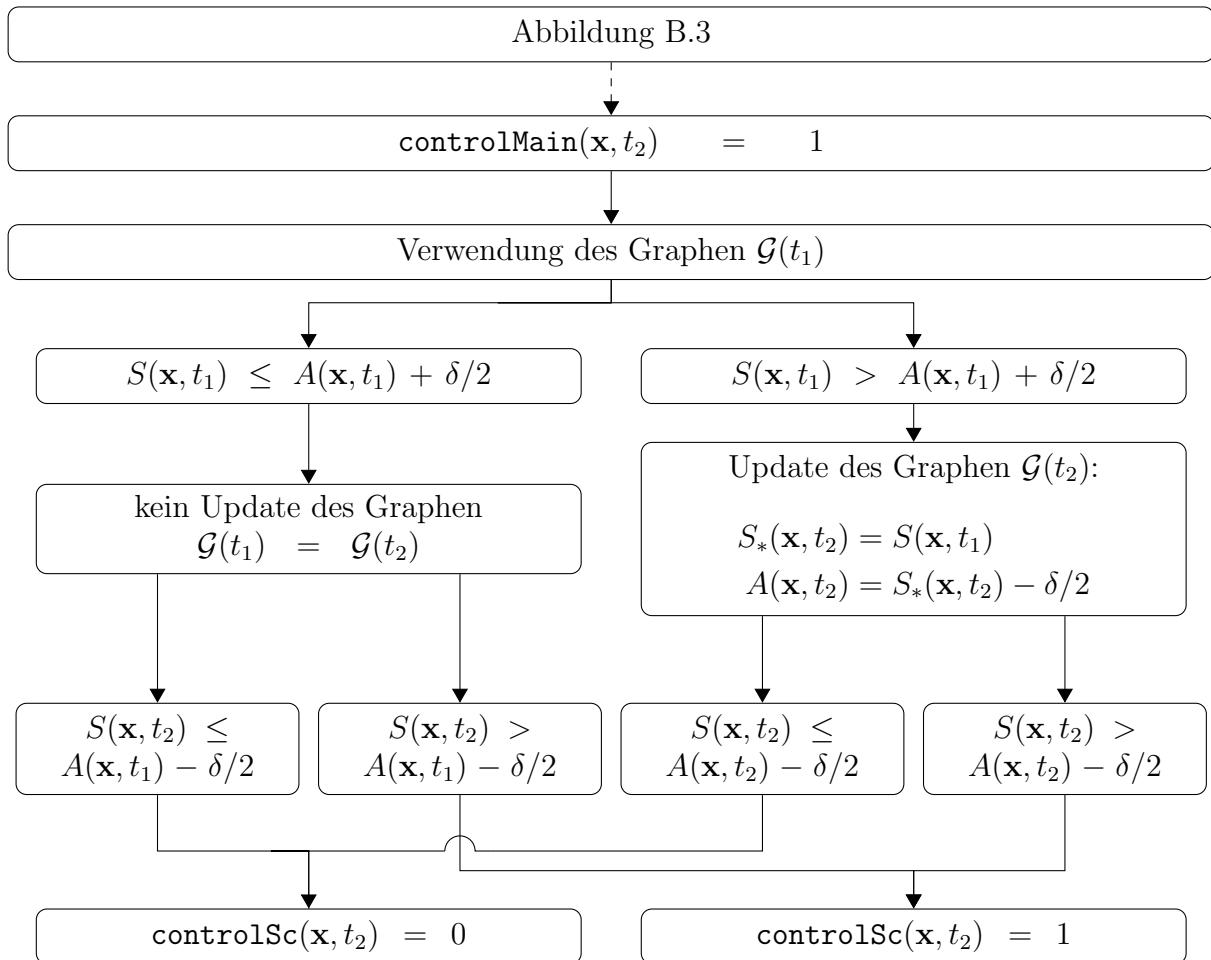
```

RelPermW = (1-controlMain)*(1-controlSc)*RelPermW_im
           + controlMain*(1-controlSc)*RelPermW_dr
           + controlSc*RelPermW_sc

RelPerm0 = (1-controlMain)*(1-controlSc)*RelPerm0_im
           + controlMain*(1-controlSc)*RelPerm0_dr
           + controlSc*RelPerm0_sc
  
```

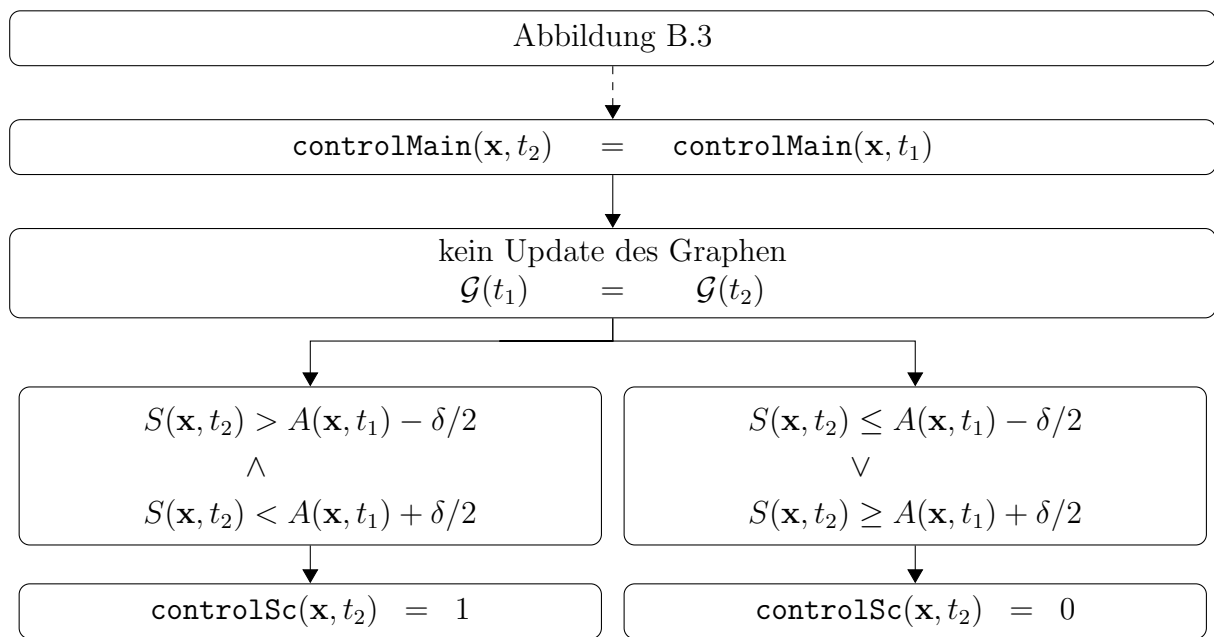


**Abbildung B.4:** Diagramm zur Bestimmung der Simulationsparameter für den Zeitschritt  $t_2$  aus den Daten vom Zeitschritt  $t_1$  bei einem Sättigungsanstieg im  $\delta$ -Hysteresemodell



**Abbildung B.5:** Diagramm zur Bestimmung der Simualtionsparameter für den Zeitschritt  $t_2$  aus den Daten vom Zeitschritt  $t_1$  bei abnehmender Sättigung im  $\delta$ -Hysteresemodell





**Abbildung B.6:** Diagramm zur Bestimmung der Simualtionsparameter für den Zeitschritt  $t_2$  aus den Daten vom Zeitschritt  $t_1$  bei kleinen Sättigungsänderungen im  $\delta$ -Hysterese-modell

und dem Kapillardruck

$$\begin{aligned}
 \text{PC} &= (1-\text{controlMain}) \cdot (1-\text{controlSc}) \cdot \text{PC}_{\text{im}} \\
 &+ \text{controlMain} \cdot (1-\text{controlSc}) \cdot \text{PC}_{\text{dr}} \\
 &+ \text{controlSc} \cdot \text{PC}_{\text{sc}}
 \end{aligned}$$

mit den Endungen  $\text{\_im}$  für die primäre Bewässerung,  $\text{\_dr}$  für die sekundäre Entwässerung und  $\text{\_sc}$  für die reversible Streichkurven. Die Indikatorfunktionen  $\text{controlMain}$  und  $\text{controlSc}$  ordnen jedem diskreten Punkt den jeweiligen Teil, Randkurve der Bewässerung ( $\text{controlMain} = 1 \wedge \text{controlSc} = 0$ ) oder Entwässerung ( $\text{controlMain} = 0 \wedge \text{controlSc} = 0$ ) oder Streichkurve ( $\text{controlSc} = 1$ ), des Graphen  $\mathcal{G}$  zu.

Die Implementierung des  $\delta$ -Hysterese-modells ist deutlich komplexer als die der Sprunghysterese. In jedem Zeitschritt müssen an jedem diskreten Punkt die Daten des Graphen  $\mathcal{G}$  (3.10) berechnet und gespeichert werden. Diese Daten sind die Sättigungsfunktion  $S_*$ , die Punkte  $(A - \delta/2, a_j)$ ,  $(A + \delta/2, b_j)$ ,  $(A - \delta/2, c_j)$  und  $(A + \delta/2, d_j)$  mit  $j = \{\mathbb{W}, \mathbb{O}, \text{c}\}$ , die Indikatorfunktion  $\text{controlMain}$  und die Indikatorfunktion  $\text{controlSc}$ .

Die Abbildungen B.3-B.6 zeigen die Diagramme zur Bestimmung der Indikatorfunktionen  $\text{controlMain}$  und  $\text{controlSc}$  und des Graphen  $\mathcal{G}$  nach einem Zeitschritt  $\Delta t$  der Lösungs-

routine in Open $\nabla$ FOAM. In Abbildung B.3 ist die Bestimmung von `controlMain` anhand der zeitlichen Änderung der Sättigung zu sehen. Die Abbildungen B.4-B.6 zeigen den weiteren Ablauf der Auswertung für einen Bewässerungsprozess (Abbildung B.4), einen Entwässerungsprozess (Abbildung B.5) oder ohne Wechsel des Strömungsprozesses (Abbildung B.6).

Bei einem Bewässerungsprozess (Abbildung B.4) wird zuerst überprüft, ob die Sättigung aus dem aktuellen Zeitschritt  $t_2$  größer als  $A(\mathbf{x}, t_1) - \delta/2$  ist, also im Bereich der Streichkurve oder der Bewässerungsrandkurve des Graphen  $\mathcal{G}(t_1)$  liegt, oder kleiner als  $A(\mathbf{x}, t_1) - \delta/2$  ist, also im Bereich der Entwässerungsrandkurve liegt.

Im ersten Fall,  $S(z, t_2) \geq A(\mathbf{x}, t_1) - \delta/2$ , ist keine Aktualisierung von  $\mathcal{G}$  notwendig, da der Strömungsprozess im vorherigen Zeitschritt  $t_1$  entweder durch die reversible Streichkurve oder die Bewässerungsrandkurve definiert war. Für  $S(\mathbf{x}, t_2) < A(\mathbf{x}, t_1) + \delta/2$  gilt dann `controlSc = 1` oder ansonsten `controlSc = 0`.

Im zweiten Fall,  $S(z, t_2) < A(\mathbf{x}, t_1) - \delta/2$ , muss der Graph  $\mathcal{G}$  neu definiert werden, da der vorherige Prozess eine Entwässerung war, welche durch die Entwässerungsrandkurve bestimmt wurde. Die Sättigungsfunktionen zur Berechnung des Graphen sind dann  $S_*(\mathbf{x}, t_2) = S(\mathbf{x}, t_1)$  und  $A(\mathbf{x}, t_2) = S_*(\mathbf{x}, t_2) + \delta/2$ . Analog zum ersten Fall werden dann die Werte der Indikatorfunktion `controlSc` gesetzt.

Die Bestimmung der Simulationsparameter bei einem Entwässerungsprozess (Abbildung B.5) läuft analog zu Abbildung B.4 ab. Ändert sich die Sättigung nur sehr gering, siehe Abbildung B.6, gibt es kein Update des Graphen  $\mathcal{G}$  und es gilt `controlSc = 0` für Sättigungen  $S(\mathbf{x}, t_2)$  im Definitionsbereich der Randkurven und `controlSc = 1`, falls die Sättigung im Definitionsbereich der Streichkurve liegt.

## B.4 Test - Verifizierung der Implementierung

Die hier vorgestellten Lösungsroutinen wurden ausgiebig getestet und mit analytischen Lösungen verglichen. Hierfür wurden primäre Bewässerungsprozesse und sekundäre Entwässerungsprozesse nahe dem hyperbolischen Limes (Buckley-Leverett-Gleichung) simuliert. Dabei wurde der Kapillarfluss  $D_{\mathcal{G}}(S)$  durch eine Konstante  $D$  ersetzt. Die numerischen Simulationen für verschiedene Parameter konnten die analytischen Resultate jeweils fast perfekt reproduzieren. Daher ist davon auszugehen, dass die Lösungsroutine und die in Open $\nabla$ FOAM vorhandenen Löser auch die hysteretischen Gleichungen mit einem komplexen dynamischen Verhalten exakt lösen.

---

## Literaturverzeichnis

- [1] AIDA, M. ; EFENDIEV, M. ; YAGI, A. : Quasilinear abstract parabolic evolution equations and exponential attractors. In: *Osaka Journal of Mathematics* 42 (2005), S. 101–132
- [2] ALT, H. W. ; LUCKHAUS, S. : Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. In: *Mathematische Zeitschrift* 183 (1983), S. 311
- [3] ALT, H. W. ; LUCKHAUS, S. ; VISINTIN, A. : On nonstationary flow through porous media. In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 136 (1984), S. 303
- [4] AMANN, H. : Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions. In: *Journal of Differential Equations* 72 (1988), S. 201–269
- [5] AWONUSIKA, R. O.: Existence and uniqueness of solutions of semilinear equations with analytic semigroups in banach spaces. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 78 (2012), S. 773–787
- [6] AWONUSIKA, R. O.: A note on solutions of semilinear equations in banach spaces. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 81 (2012), S. 647–661
- [7] BALACHANDRAN, K. ; ILAMARAN, S. : Existence and uniqueness of mild and strong solutions of a semilinear evolution equation with nonlocal conditions. In: *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* 25 (1994), S. 411–418
- [8] BELIAEV, A. ; HASSANIZADEH, S. M.: A theoretical model of hysteresis and dynamic effects in the capillary relation for two-phase flow in porous media. In: *Transport in Porous Media* 43 (2001), S. 487
- [9] BRIGGS, J. ; KATZ, D. : Drainage of Water from Sand in developing aquifer storage. In: *paper SPE1501 presented 1966 at the 41st Annual Fall Meeting of the SPE, Dallas, USA* (1966)
- [10] BRILL, H. : A semilinear sobolev evolution equation in a banach space. In: *Journal of Differential Equations* 24 (1977), S. 412–425

- [11] BUCKINGHAM, E. : Studies on the movement of soil moisture. In: *Technical Report (U.S.Department of Agriculture, Bureau of Soils)* (1907)
- [12] CAO, X. ; POP, I. S.: Two-phase porous media flows with dynamic capillary effects and hysteresis: Uniqueness of weak solutions. In: *Computers & Mathematics with Applications* 69 (2015), S. 688 – 695
- [13] CAO, X. ; POP, I. S.: Uniqueness of weak solutions for a pseudo-parabolic equation modeling two phase flow in porous media. In: *Applied Mathematics Letters* 46 (2015), S. 25 – 30
- [14] CAO, X. ; POP, I. S.: Degenerate two-phase porous media flow model with dynamic capillarity. In: *Journal of Differential Equations* 260 (2016), S. 2418 – 2456
- [15] CHUAN, L. H. ; TSUJIKAWA, T. ; YAGI, A. : Stationary solutions to forest kinematic model. In: *Glasgow Mathematical Journal* 51 (2009), S. 1–17
- [16] CUESTA, C. ; DUIJN, VAN, C. J. ; HULSHOF, J. : Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves. In: *European Journal of Applied Mathematics* 11 (2000), S. 381 – 397
- [17] CUETO-FELGUEROSO, L. ; JUANES, R. : Nonlocal interface dynamics and pattern formation in gravity-driven unsaturated flow through porous media. In: *Physical Review Letters* 101 (2008), S. 244504
- [18] DAFERMOS, C. M. ; SLEMROD, M. : Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semigroups. In: *Journal of Functional Analysis* 13 (1973), S. 97–106
- [19] DARCY, H. : Les fontaines de la ville Dijon. In: *Dalmont, Paris*, (1856)
- [20] DICARLO, D. A.: Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration. In: *Water Resources Research* 40 (2004), S. W04215
- [21] DICARLO, D. A.: Stability of gravity-driven multiphase flow in porous media: 40 years of advancements. In: *Water Resources Research* 49 (2013), S. 4531
- [22] DICARLO, D. A. ; JUANES, R. ; LAFORCE, T. ; WITELSKI, T. P.: Nonmonotonic traveling wave solutions of infiltration into porous media. In: *Water Resources Research* 44 (2008), S. W02406
- [23] DICARLO, D. A. ; MIRZAEI, M. ; AMINZADEH, B. ; DEHGHANPOUR, H. : Fractional flow approach to saturation overshoot. In: *Transport in Porous Media* 91 (2012), S. 955–971

- [24] DOSTER, F. ; HILFER, R. : Generalized Buckley-Leverett theory for two phase flow in porous media. In: *New Journal of Physics* 13 (2011), S. 123030
- [25] DOSTER, F. ; HÖNIG, O. ; HILFER, R. : Horizontal flow and capillarity-driven redistribution in porous media. In: *Physical Review E* 86 (2012), S. 016317
- [26] DOSTER, F. ; ZEGELING, P. A. ; HILFER, R. : Numerical solutions of a generalized theory for macroscopic capillarity. In: *Physical Review E* 81 (2010), S. 036307
- [27] DOSTER, F. : *Die Bedeutung perkolierender und nichtperkolierender Phasen bei Mehrphasenströmungen in porösen Medien auf Laborskala*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2011
- [28] DUIJN, VAN, C. J. ; FAN, Y. ; PELETIER, L. A. ; POP, I. S.: Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equations modelling two-phase flow in porous media. In: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 14 (2013), S. 1361–1383
- [29] DUIJN, VAN, C. J. ; HASSANIZADEH, S. M. ; POP, I. S. ; ZEGELING, P. A.: Non-equilibrium Models for Two Phase Flow in Porous Media: the Occurrence of Saturation Overshoots. In: *5th International Conference on Applications of Porous Media* (2013)
- [30] DUIJN, VAN, C. J. ; PELETIER, L. A. ; POP, I. S.: A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 39 (2007), S. 507–536
- [31] DUIJN, VAN, C. J. ; PIETERS, G. J. M. ; RAATS, P. A. C.: Steady Flows in Unsaturated Soild are Stable. In: *Transport in Porous Media* 57 (2004), S. 215–244
- [32] EGOROV, A. ; DAUTOV, R. ; NIEBER, J. ; SHESHUKOV, A. : Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow. In: *Water Resources Research* 39 (2003), S. 1266
- [33] ELIASSI, M. ; GLASS, R. J.: On the continuum-scale modeling of gravity-driven fingers in unsaturated porous media: The inadequacy of the Richards equation with standard monotonic constitutive relations and hysteretic equations of state. In: *Water Resources Research* 37 (2001), S. 2019
- [34] ELIASSI, M. ; GLASS, R. J.: On the porous-continuum modeling of gravity-driven fingers in unsaturated materials: Extension of standard theory with a hold-back-pile-up effect. In: *Water Resources Research* 38 (2002), S. 1234
- [35] EVANS, L. C.: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 19: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997

- [36] FÜRST, T. ; VODÁK, R. ; ŠIR, M. ; BIL, M. : On the incompatibility of Richards' equation and finger-like infiltration in unsaturated homogeneous porous media. In: *Water Resources Research* 45 (2009), S. 1–12
- [37] GENUCHTEN, VAN, M. T.: A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. In: *Soil Science Society of America Journal* 44 (1980), S. 892–898
- [38] GLASS, R. J. ; STEENHUIS, T. ; PARLANGE, J. : Mechanism for finger persistence in homogeneous unsaturated, porous media: theory and verification. In: *Soil Science* 148 (1989), S. 60
- [39] HILFER, R. : Capillary Pressure, Hysteresis and Residual Saturation in Porous Media. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 359 (2006), S. 119
- [40] HILFER, R. : Macroscopic capillarity and hysteresis for flow in porous media. In: *Physical Review E* 73 (2006), S. 016307
- [41] HILFER, R. : Macroscopic capillarity without a constitutive capillary pressure function. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 371 (2006), S. 209
- [42] HILFER, R. ; DOSTER, F. ; ZEGELING, P. A.: Nonmonotone Saturation Profiles for Hydrostatic Equilibrium in Homogeneous Media. In: *Vadose Zone Journal* 11 (2012), S. vzt2012.002
- [43] HILFER, R. ; STEINLE, R. : Saturation overshoot and hysteresis for twophase flow in porous media. In: *The European Physical Journal Special Topics* 223 (2014), S. 2323–2338
- [44] HOFMANOVÁ, M. : Strong solutions of semilinear stochastic partial differential equations. In: *Nonlinear Differential Equations and Applications* 20 (2013), S. 757–778
- [45] HÖNIG, O. ; ZEGELING, P. A. ; DOSTER, F. ; HILFER, R. : Non-monotonic Travelling Wave Fronts in a System of Fractional Flow Equations from Porous Media. In: *Transport in Porous Media* 114 (2016), S. DOI 10.1007/s11242–015–0618–2
- [46] HÖNIG, O. : *Laufende Wellenlösungen von Systemen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen am Beispiel von Mehrphasenströmungen in porösen Medien*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2012
- [47] JACOB, B. ; MORRIS, K. ; ZWART, H. :  $C_0$ -semigroups for hyperbolic partial differential equations on a one dimensional spatial domain. In: *Journal of Evolution Equations* 15 (2015), S. 493–502

- [48] KOPFOVÁ, J. : Nonlinear semigroup methods in problems with hysteresis. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement 2007* (2007), Nr. Special, S. 580–589
- [49] KRASNOSELSKI, M. A. ; POKROVSKI, A. V.: *Systems With Hysteresis*. Springer, 1989
- [50] LEVEQUE, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. 2. Auflage. Birkhäuser Verlag, 1992
- [51] LEVERETT, M. : Capillary behaviour in porous solids. In: *Transactions of the AIME* 142 (1941), S. 152
- [52] LITTLE, T. D. ; SHOWALTER, R. E.: Semilinear Parabolic Equations With Preisach Hysteresis. In: *Differential and Integral Equations* 7 (1994), S. 1021–1040
- [53] LUCKNER, L. ; GENUCHTEN, VAN, M. T. ; NIELSEN, D. : A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface. In: *Water Resources Research* 25 (1989), S. 2187–2193
- [54] MIKELIĆ, A. : A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure. In: *Journal of Differential Equations* 248 (2010), S. 1561–1577
- [55] MUSKAT, M. ; MERES, M. : Flow of heterogeneous fluids through porous media. In: *Physics* 7 (1936), S. 346
- [56] OPENFOAM: *Version 2.1.1*, 2012. – verfügbar auf <http://www.openfoam.org>
- [57] OTTO, F. : L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations. In: *Journal of Differential Equations* 131 (1996), S. 20
- [58] PAZY, A. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983. – 1. Druck
- [59] PRANDTL, L. : Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928), S. 85–106
- [60] PREISACH, F. : Über die magnetische Nachwirkung. In: *Zeitschrift für Physik* (1935), S. 277–302
- [61] PRÜSS, J. : On semilinear parabolic evolution equations on closed sets. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 77 (1980), S. 513–538

- [62] RÄTZ, A. ; SCHWEIZER, B. : Hysteresis models and gravity fingering in porous media. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 94 (2014), S. 645–654
- [63] RICHARDS, L. A.: Capillary conduction of liquids through porous mediums. In: *Physics* 1 (1931), S. 318
- [64] SCHNEIDER, M. ; KÖPPL, T. ; HELMIG, R. ; STEINLE, R. ; HILFER, R. : Stable propagation of saturation overshoots for two-phase flow in porous media. In: *Transport in Porous Media* 121 (2018), Nr. 3
- [65] SCHROTH, M. H. ; AHEARN, S. J. ; SELKER, J. S. ; ISTOK, J. D.: Characterization of Miller-similar silica sands for laboratory hydrologic studies. In: *Soil Science Society of America Journal* 60 (1996), S. 1331–1339
- [66] SHIOZAWA, S. ; FUJIMAKI, H. : Unexpected water content profiles und flux-limited one-dimensional downward infiltration in initially dry granular media. In: *Water Resources Research* 40 (2004), S. W07404
- [67] STEINLE, R. ; HILFER, R. : Influence of initial conditions on propagation, growth and decay of saturation overshoot. In: *Transport in Porous Media* 111 (2016), S. 369–380
- [68] STEINLE, R. ; HILFER, R. : Hysteresis in relative permeabilities suffices for propagation of saturation overshoot : A quantitative comparison with experiment. In: *Physical Review E* 95 (2017), S. 043112–1 – 043112–10
- [69] VISINTIN, A. : *Differential Models of Hysteresis*. Springer, 1994
- [70] WERNER, D. : *Funktionalanalysis*. 8. Auflage. Springer, 2018
- [71] WYCKOFF, R. D. ; BOTSET, H. : Flow of gas-liquid mixtures through unconsolidated sands. In: *Physics* 7 (1936), S. 325
- [72] YAGI, A. : Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators. In: *Osaka Journal of Mathematics* 28 (1991), S. 385–410
- [73] YAGI, A. : *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*. Springer, 2010
- [74] YAGI, A. ; PRIMICERIO, M. : A modified forest kinematic model. In: *Vietnam Journal of Mathematical Applications* 12 (2104), S. 107–118
- [75] YOUNGS, E. G.: Redistribution of moisture in porous materials after infiltration: 2. In: *Soil Science* 86 (1958), S. 202–207



- 
- [76] ZEIDLER, E. : *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*. Springer, 1986