

Institut für Formale Methoden der Informatik

Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D-70569 Stuttgart

Masterarbeit

Das Ordnungsproblem für Automatengruppen und verwandte Fragestellungen

Andreas Bühler

Studiengang: Informatik
Prüfer/in: Prof. Volker Diekert
Betreuer/in: Jan Philipp Wächter

Beginn am: 15. April 2019
Beendet am: 15. Oktober 2019

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden Problemstellungen in der Klasse der Automatenhalbgruppen untersucht. Ein besonderer Augenmerk gilt dabei dem Ordnungsproblem welches im Allgemeinen sowohl für Automatenhalbgruppen als auch für Automatengruppen unentscheidbar ist.

Es wird dann für die Klasse der Automatenhalbgruppen mit beschränkter Aktivität ein Algorithmus mit überraschend geringem Platzbedarf vorgestellt.

Danach wird ein Entscheidungsalgorithmus für das Mitgliedschaftsproblem in ultimativ periodischen Teilmengen von Automatenhalbgruppen beschränkter Aktivität erarbeitet.

Dieses Problem beinhaltet insbesondere das Mitgliedschaftsproblem in monogenen Unterhalbgruppen, welches dadurch ebenfalls in Automatenhalbgruppen beschränkter Aktivität entscheidbar ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Einleitung	7
1.2	Grundlagen	8
2	Torsionsfreiheit	11
2.1	Index und Periode	11
2.2	Torsionsfreiheit und reduzierte Zustandswörter	13
2.3	Der Algorithmus	16
3	Ultimativ periodische Teilmengen	19
3.1	Offset und Periode	19
3.2	Das Gleichungssystem	23
3.3	Der Algorithmus	24
4	Zusammenfassung und Ausblick	25
4.1	Zusammenfassung	25
4.2	Ausblick	25
	Literaturverzeichnis	27

1 Einführung

1.1 Einleitung

Die sicherlich bekannteste Automatengruppe ist die Grigortschuk-Gruppe¹. Sie war das erste Beispiel einer Gruppe mit subexponentiellem aber superpolynomiellen Wachstum. Sie ist außerdem eine Burnside-Gruppe: d. h. alle Elemente haben endliche Ordnung, aber die Gruppe ist unendlich.

Das Interesse an Automatengruppen ist durch diesen berühmten Vertreter geweckt worden. Obwohl das Wortproblem entscheidbar ist, sind einige andere übliche algorithmische Probleme unentscheidbar.

Ein Vertreter dieser unentscheidbaren Probleme ist das Ordnungsproblem. Pierre Gillibert zeigte in [GIL14] die Unentscheidbarkeit des Ordnungsproblems für Halbgruppen. Die Unentscheidbarkeit des Ordnungsproblems für Gruppen wurde dann später ebenfalls von Gillibert [Gil18] gezeigt. Unabhängig davon zeigte Bartholdi und Mitrofanov in [BM17], die Unentscheidbarkeit des Ordnungsproblems für Gruppen, selbst unter der Einschränkung auf kontrahierende Gruppen.

Um trotzdem mehr über diese Gruppen zu erfahren, kann man sich auf einfachere Spezialfälle einschränken. Eine Möglichkeit einer solchen Einschränkung entsteht aus der Klassifizierung der Aktivität eines Automaten. Said Sidki führte diese Hierarchie in [Sid00] ein.

Fortschritt für das Ordnungsproblem lieferten dann Bondarenko, Bondarenko, Sidki und Zapata, als sie mit [BBSZ13] die Entscheidbarkeit des Ordnungsproblems für Automatengruppen mit beschränkter Aktivität zeigen konnten. Eine Erweiterung auf das Ordnungsproblem in Automatenhalbgruppen beschränkter Ordnung stellten Bartholdi, Godin, Klimann und Picantin in [BGKP18] vor.

Im Rahmen dieser Arbeit soll das Ordnungsproblem näher untersucht werden. Da es für den Spezialfall der beschränkten Aktivität entscheidbar ist, stellt sich noch die Frage nach der Komplexitätstheoretischen Einordnung.

Einen Teil dieser Einordnung wird das erste Kapitel liefern und sich dabei stark an dem Kerngedanken des Entscheidbarkeitsbeweises in [BGKP18] orientieren.

In dem zweiten Teil wird ein weiteres Problem betrachtet, welches auch das Ordnungsproblem als Spezialfall enthält. Dieses Problem wendet sich aber von reinen Fragen nach Unendlichkeit oder Endlichkeit ab. Es ist stattdessen ein Problem, das das Mitgliedschaftsproblem in monogenen

¹GP08.

Unterhalbgruppen als Teilproblem enthält.

Der Entscheidungsalgorithmus, der in diesem Teil entwickelt wird, teilt sich einige Kerngedanken mit dem ersten Teil.

1.2 Grundlagen

Zunächst einmal sollen einige Grundlagen erwähnt und Notationen eingeführt werden. Einen Schwerpunkt bilden hier die Kreuzdiagramme, die zentral für das bildliche Verständnis der in dieser Arbeit präsentierten Aussagen sind.

1.2.1 Alphabete und Wörter

Ein Alphabet Σ ist eine nicht-leere, endliche Menge von Buchstaben. Für ein Alphabet bezeichnet Σ^* die Menge aller (endlichen) Wörter über diesem Alphabet, einschließlich des leeren Wortes ϵ . Des Weiteren enthält Σ^+ alle Wörter außer ϵ , und $\Sigma^{\leq n}$ enthält alle Wörter deren Länge $\leq n$ ist. Für ein Wort $u \in \Sigma^+$ ist u^ω das rechtsunendliche, periodische Wort $ww\dots$ und u^{ω^*} das linksunendliche, periodische Wort $\dots ww$.

In dieser Arbeit werden ebenfalls Zustandswörter betrachtet, über einer (ebenso endlichen, nicht-leeren) Zustandsmenge Q . Alle Notationen werden auf diese übertragen.

1.2.2 Transduktoren und ihre Halbgruppe

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen Transduktoren und die von ihnen erzeugte Halbgruppe.

Definition 1. Ein deterministischer (vollständiger) endlicher Transduktor $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \delta)$, in dieser Arbeit meist einfach Automat genannt, besteht aus einer endlichen, nicht-leeren Zustandsmenge Q , einem Ein-/Ausgabealphabet Σ und einer Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma$.

Definition 2. Ein Automat $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \delta)$ definiert zwei Operationen, \cdot und \circ :

Für $q \in Q, a \in \Sigma$ und $\delta(q, a) = (q', a')$

operiert a auf q von rechts mit $q \cdot a = q'$

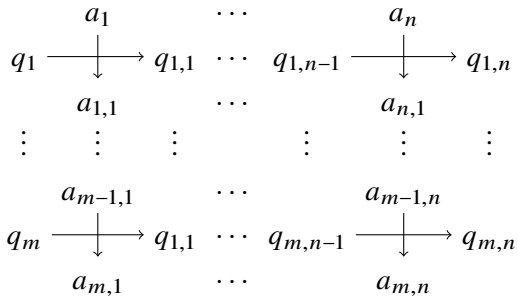
und q operiert auf a von links mit $q \circ a = a'$

Dieses Verhalten wird als Kreuzdiagramm wie folgt dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & \downarrow & \\ q & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} & q' \\ & a' & \end{array}$$

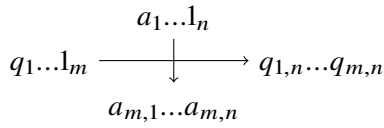
Kreuzdiagramme in dieser Form wurden in [AKL+12] zuerst verwendet, erfreuen sich aber zunehmender Beliebtheit.

Jetzt sollen die Operationen \circ und \cdot auf Wörter und Zustandswörter erweitert werden. Das nächste Diagramm zeigt, wie $q_m \dots q_1 \circ a_1 \dots a_n$ und $q_m \dots q_1 \cdot a_1 \dots a_n$ zu verstehen sind:



Dann ist $q_m \dots q_1 \circ a_1 \dots a_n = a_{m,1} \dots a_{m,n}$ und $q_m \dots q_1 \cdot a_1 \dots a_n = q_{m,n} \dots q_{1,n}$.

Um die Diagramme besser verwenden zu können, werden auch die einzelnen Kreuze auf Wörter erweitert, also:



Die Operationen können jeweils intuitiv auch auf unendliche Wörter angewandt werden, allerdings können unendliche Wörter nicht operieren.

Für ein $r \in Q^+$ sei jetzt $q \circ : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ die (längenerhaltende) Abbildung mit $(q \circ)(w) \mapsto q \circ w$. Aus den Kreuzdiagrammen oben lässt sich leicht entnehmen, dass $q_m \dots q_1 \circ w = (q_m \circ)(\dots(q_1 \circ)(w)\dots)$. Daraus ergibt sich die von \mathcal{T} erzeugte Halbgruppe $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \{r \circ \mid r \in Q^+\}$ mit der regulären Verkettung von Abbildungen.

Definition 3 (Aktivität). Die Menge aller aktiven Ausgaben von q der Länge n ist $A_q(n) = \{w \in \Sigma^n \mid \exists u \in \Sigma^n : q \circ u = w \text{ und } (q \cdot u) \circ \neq id_{\Sigma^*}\}$.

Die Aktivität von q ist dann $|A_q(n)|$. Die Aktivität von q ist beschränkt, wenn eine Schranke $K_q \geq |A_q(n)| \forall n \in \mathbb{N}$ existiert.

Der Automat \mathcal{T} hat beschränkte Aktivität, wenn alle seine Zustände beschränkte Aktivität haben, die Aktivität von \mathcal{T} ist dann $K = \max(K_q)$.

Definition 4 (Torsion). Sei $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \delta)$ ein Automat. Dann bedeutet für ein $q \in Q$ die Aussage $q \circ$ hat **Torsion**, dass $i \neq j$ existieren mit $q^i \circ = q^j \circ$.

Ist dies nicht der Fall, ist q **torsionsfrei**.

Fakt 1. Für einen festen Automaten \mathcal{T} ist π die Projektion auf Zustandswörtern, die die Buchstaben q' mit $q' \circ = id_{\Sigma^*}$ löscht $\pi(q')$ kann in $\text{NSPACE}(\log |Q| + \log |\Sigma|)$ Platz berechnet werden (Zeugen für $q \circ \neq id_{\Sigma^*}$ buchstabenweise raten).

1. $\forall w \in Q^*, x \in \Sigma^* : w \circ x = \pi(w) \circ x$
2. $\forall w \in Q^*, x \in \Sigma^* : \pi(w \cdot x) = \pi(\pi(w) \cdot x)$

2 Torsionsfreiheit

Definition 5. Sei *TORSIONSFREIHEIT* folgendes Problem:

Eingabe: Automat \mathcal{T} mit beschränkter Aktivität, $q \in Q$

Ausgabe: Ist $q \circ$ torsionsfrei?

In diesem Teil wird ein nichtdeterministischer Algorithmus für *TORSIONSFREIHEIT* vorgestellt.

In diesem gesamten Abschnitt sind $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \delta)$ und q beliebige aber feste Eingaben für dieses Problem.

2.1 Index und Periode

Definition 6. Jedem $u \in \Sigma^*$ sei das Paar (s_u, t_u) mit $s_u, t_u \in Q^*$ wie folgt zugeordnet:

Sei der Index k_u von q auf u die kleinste Zahl, für die gilt, dass $q^{k_u} \circ u = q^{k_u+l} \circ u$ für ein $l > 0$

Des Weiteren sei die Periode l_u das kleinste der möglichen l die diese Gleichung erfüllen.

Dann sei $s_u = q^{k_u} \cdot u$ und $t_u = q^{l_u} \cdot (q^{k_u} \circ u)$

Es gilt also $k_u = |s_u|$, $l_u = |t_u|$ minimal und

$$q^{\omega^*} \cdot u = t_u \omega^* s_u$$

Index und Periode von q auf u sind wie folgt mit Eigenschaften von $q^n \circ u$ verknüpft:

Lemma 1. Für $u \in \Sigma^*$ gilt:

1. Für $i \neq j$ gilt: $q^i \circ u = q^j \circ u \Leftrightarrow i, j \geq k_u$ und $i \equiv j \pmod{l_u}$
2. Für $n < k_u + l_u$ sind alle $q^n \circ u$ paarweise verschieden.
3. $k_i + l_i = |\{q^n \circ p_i | n < k_i + l_i\}| = |\{q^n \circ p_i | n \in \mathbb{N}\}|$

Beweis.

1. \Rightarrow :

$i, j \geq k_u$, da k_u minimal gewählt.

Sei jetzt $i = k_u + m \cdot l_u + i'$ wobei m maximal ist.

Ebenso sei $j = k_u + n \cdot l_u + j'$ wobei n maximal ist.

$\text{GE: } i' < j'$:

Dann gilt:

$$q^{k_u+n \cdot l_u+i'} = q^{i'} (q_u^{l_u})^n q_u^{k_u} \circ u = q^{i'} q^{k_u} \circ u$$

$$\text{Aus } q^i \circ u = q^j \circ u \text{ folgt dann } q^{i'} q^{k_u} \circ u = q^{j'} q^{k_u} \circ u$$

Da aber $q^{k_u} \circ u = q^{k_u+l_u} \circ u = q^{(l_u-j')} q^{j'} q^{k_u} \circ u$
 folgt durch Einsetzen der Zeile darüber: $q^{k_u} = q^{l_u-j'+i'} q^{k_u} \circ u$
 Da l_u minimal ist, muss $i' = j'$ gelten.

\Leftarrow :

Definiere n, m, i', j' wie oben, dann ist $i' = j'$ und es folgt:

$$q^i \circ u = q^{i'} q^{k_u} \circ u = q^{j'} q^{k_u} \circ u = q^{j'} \circ u$$

2. folgt aus 1.

3. folgt aus 1. und 2.

□

Folgende Eigenschaften ergeben sich für Index und Periode bei Verlängerung des Wortes:

Lemma 2. $\forall u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^+$ gilt:

1. $k_u \leq k_{uv}$

2. $l_u \mid l_{uv}$

Beweis.

1. Gilt wegen $q^i \circ uv = q^j \circ uv \Rightarrow q^i \circ u = q^j \circ u$ (Präfix-Kompatibilität) und der Minimalität von k_u .

2. Aus $q^{k_{uv}} \circ uv = q^{k_{uv}+l_{uv}} \circ uv$ folgt mit Präfix-Kompatibilität
 $q^{k_{uv}} \circ u = q^{k_{uv}+l_{uv}} \circ u$

Nach Lemma 1 Punkt 1 gilt dann $k_{uv} \equiv k_{uv} + l_{uv} \pmod{l_u}$ und damit
 $l_{uv} \equiv 0 \pmod{l_u}$.

□

Lemma 3. Für alle $u \in \Sigma^*$ gilt $|\pi(s_u)| + |\pi(t_u)| \leq K_q + 1$

Beweis. Sei $p = t_u s_u = p_{(k_u+l_u)} \dots p_1$ mit $p_i \in Q$

Dann sei $u_i = q^i \circ u$ und es gilt $u_{i+1} = q \circ u_i$ und $q \cdot u_i = p_{i+1}$.

Nach Lemma 1 Punkt 2 sind die u_i für $i < k_u + l_u$ paarweise verschieden.

Ist $p_i \circ \neq id$, dann ist $u_i \in A_q(|u|)$ und u_{i-1} ist der Zeuge dafür.

Also ist für $I = \{i < k_u+l_u \mid p_i \circ \neq id\}$ die Abbildung $f : I \rightarrow A_q(|u|)$ mit $f(i) = u_i$ injektiv.

Da dies alle p_i außer $p_{k_u+l_u}$ abdeckt, folgt nun:

$$|\pi(t_u s_u)| \leq |A_q(|u|)| + 1 \leq K_q + 1$$

□

Lemma 4. Die Anzahl der reduzierten (s, t) -Paare $|\{(\pi(s_u), \pi(t_u)) \mid u \in \Sigma^*\}|$ ist beschränkt durch
 $(K_q + 2) |Q|^{\leq K_q+1} \leq (K_q + 2) |Q|^{K_q+2}$.

Beweis. Dies ist der Fall, da wie wir wissen, dass $\pi(s_u) + \pi(t_u) \leq K_q + 1$. Die Länge von $\pi(s_u)\pi(t_u)$ ist also durch $K_q + 1$ beschränkt. D.h. $\pi(s_u)\pi(t_u) \in \Sigma^{\leq K_q+1}$ da es aber auch nur maximal $K_q + 2$ Möglichkeiten für die Trennposition zwischen $\pi(s_u)$ und $\pi(t_u)$ gibt, gilt die Schranke. □

2.2 Torsionsfreiheit und reduzierte Zustandswörter

Der folgende Satz bildet den Kern des Algorithmus und wird am Ende dieses Abschnitts bewiesen.

Satz 1. q° ist torsionsfrei gdw.

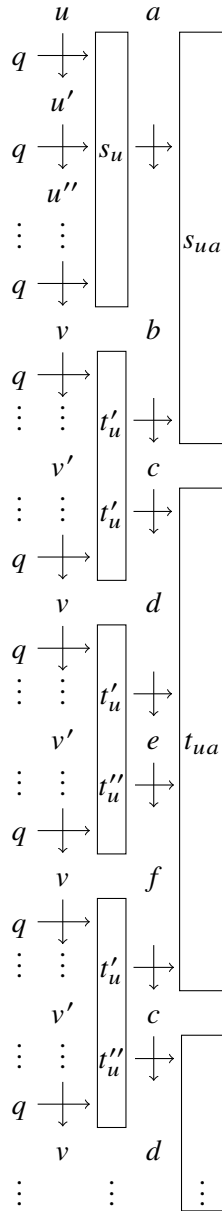
$\exists u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^+$ mit der Eigenschaft, dass

$(\pi(s_u), \pi(t_u)) = (\pi(s_{uv}), \pi(t_{uv}))$ und $k_u + l_u \not\leq k_{uv} + l_{uv}$

Jetzt soll gezeigt werden, dass sich aus den reduzierten Wörtern $\pi(s_u), \pi(t_u)$ und dem Buchstaben $a \in \Sigma$ die reduzierten Wörter $\pi(s_{ua})$ und $\pi(t_{ua})$ ohne Kenntnis von u berechnen lassen.

Zunächst wird die Berechnung aber auf den nicht-reduzierten Wörtern betrachtet:

Das Kreuzdiagramm zeigt eine typische Situation beim Schritt von (s_u, t_u) nach s_{ua}, t_{ua} .
 In dem Diagramm werden Werte die unterschiedlich benannt sind als unterschiedlich angenommen.



Definition 7. Sei $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ und $t_u = p_{l_u} \dots p_1$, dann soll $k' \in \mathbb{N}$ der kleinste Wert sein, für den gilt, dass:

$k' \geq k_u$ und $\exists l', l_u \mid l'$ so, dass:
 für $k' - k_u = \lambda \cdot l_u + i$ mit λ maximal gilt:

$$p_i \dots p_1 (t_u)^\lambda s_u \circ a = p_i \dots p_1 (t_u)^{\lambda+l'} / l_u s_u \circ a$$

Dies ist der letzte Buchstabe von $q^{k'} \circ ua$ bzw. $q^{k'+l'} \circ ua$, da $q^{k'} \cdot u = p_i \dots p_1 (t_u)^\lambda s_u$. (siehe Kreuzdiagramm)

Lemma 5. Sei u, a, k', p_i wie gerade definiert, dann ist $k' = k_{ua}$ und l_{ua} ist das kleinste l' das die Bedingung erfüllt.

Beweis. $k' \leq k_{ua}$:

Nach Lemma 2 gilt $l_u \mid l_{ua}$, damit ist l_{ua} Kandidat für l' und da die Wörter $q^{k_{ua}} \circ ua$ und $q^{k_{ua}+l_{ua}} \circ ua$ gleich sind, stimmen sie auch auf dem letzten Buchstaben überein. Also sind k_{ua}, l_{ua} mögliche Kandidaten für k', l'

$k' \geq k_{ua}$:

$q^{k'} \circ ua = (q^k \circ u)a'$ und $q^{k'+l'} \circ ua = (q^{k'+l'} \circ u)a''$ für passende $a', a'' \in \Sigma$.

Nach Def. von k', l' gilt $a' = a''$.

Außerdem gilt $k' \geq k_u$ und $k' + l' \equiv k' \pmod{l_u}$, deshalb gilt nach Lemma 1 Punkt 1 dass $q^{k'} \circ u = q^{k'+l'} \circ u$.

Insgesamt gilt dann auch $q^{k'} \circ ua = q^{k'+l'} \circ ua$, durch die Minimalität von k_{ua} folgt $k_{ua} \leq k'$

$l' = l_{ua}$ folgt mit den selben Argumenten. □

Fakt 2. Sei $u \in \Sigma^*$, $t_u = p_{l_u} \dots p_1$, $p_j \in Q$ und $k_{ua} = k_u + \lambda \cdot l_u + i$ wie oben mit λ maximal.

Dann ist $s_{ua} = p_i \dots p_1 (t_u)^\lambda s_u \cdot a$ und

$t_{ua} = p_i \dots p_1 t_u^{(l_{ua}/l_u)-1} p_{l_u} \dots p_{i+1} \cdot (p_i \dots p_1 (t_u)^\lambda s_u \circ a)$

Fakt 3. Sei $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $t_u = p_{l_u} \dots p_1$ und $k_{ua} = k_u + \lambda \cdot l_u + i$ wie oben.

Dann ist $p_i \circ \neq id$ für $k_{ua} \neq k_u$

Beweis. Wenn $k_{ua} > k_u$ gilt, dann ist $k_{ua} - 1$ ein kleinerer Kandidat für k' als in Def. 7 mit $l' = l_{ua}$, da der letzte Buchstabe unverändert bleibt. □

Aus diesen beiden Fakten ergibt sich, dass die Vorgehensweise aus Def. 7 sich auf reduzierte Wörter anpassen lässt, da nur die Positionen in den reduzierten Wörtern als Kandidaten in Frage kommen.

Satz 2. Die Abbildung $f : Q^{<K_q+1} \times Q^{<K_q+1} \times \Sigma \rightarrow Q^{<K_q+1} \times Q^{<K_q+1}$ mit $((\pi(s_u), \pi(t_u)), a) \mapsto (\pi(s_{ua}), \pi(t_{ua}))$ ist wohldefiniert und kann deterministisch auf $(K_q + 1) |\Sigma|$ Platz berechnet werden.

Beweis. Wohldefiniertheit folgt aus den Fakten 2 und 3.

f kann wie folgt berechnet werden:

Zunächst prüft man, ob $k_{ua} = k_u$ indem man testet ob $s_u \circ a = (t_u)^i s_u \circ a$ für ein $i < |\Sigma|$ (spätestens dann gibt es eine Wiederholung und damit eine Schleife). Dies ist genau dann der Fall, wenn $k_u = k_{ua}$ und kann durch Abhaken der besuchten Buchstaben in $|\Sigma|$ Platz getestet werden.

Wichtig: Dabei lässt sich folgender Spezialfall abtesten: gilt dies für $i = 1$?

Wenn ja, dann gilt $k_u = k_{ua}$ und $l_u = l_{ua}$, in allen anderen Fällen gilt (nach Lemma 2): $k_u + l_u \not\leq k_{ua} + l_{ua}$

Für $k_{ua} > k_u$ betrachtet man jetzt die Positionen in $\pi(t_u)$ analog zur Vorgehensweise in Def. 7, was nach Fakt 3 ausreichend ist um die erste Wiederholungsposition zu finden:

Man kann die erste Wiederholung an einer bestimmten Position in $\pi(t_u)$ finden, indem man für jede Position in $\pi(t_u)$ markiert welchen Buchstaben man schon an dieser Position gesehen hat.

Diese Liste hat Größe $l_u \cdot |\Sigma| \leq (K_q + 1) |\Sigma|$.

Hat man die Position und den Buchstaben der ersten Wiederholung gefunden, kann man nochmal von oben anfangen und liest bis zum ersten Vorkommen dieses Paares $\pi(s_{ua})$ ab und danach ebenso $\pi(t_{ua})$. \square

Mit diesem Ergebnis kann schließlich der Beweis von Satz 1 erbracht werden:

Beweis(Satz 1). \Rightarrow :

Wenn $q \circ$ torsionsfrei ist, so gilt nach [DFRW19] Proposition 3.3.2, dass ein $\beta \in \Sigma^\omega$ existiert, für das $q^n \circ \beta$ unendlich ist. Dann gilt offensichtlich $\forall i \neq j : q^i \circ \beta \neq q^j \circ \beta$.

Da nach Lemma 4 die Anzahl der reduzierten (s, t) -Paare beschränkt ist, kommt in den $(\pi(s_{\beta_0 \dots \beta_i}), \pi(t_{\beta_0 \dots \beta_i}))$ mindestens ein reduziertes (s, t) -Paar unendlich oft vor.

Außerdem wird $|\{q^n \circ \beta_0 \dots \beta_i | n \in \mathbb{N}\}|$ beliebig groß.

Da aber $|\{q^n \circ \beta_0 \dots \beta_i | n \in \mathbb{N}\}|$ für ein festes i durch $|\Sigma^i|$ beschränkt ist, wird es unendlich oft größer.

Also existiert $i < j$ mit $(\pi(s_{\beta_0 \dots \beta_i}), \pi(t_{\beta_0 \dots \beta_i})) = (\pi(s_{\beta_0 \dots \beta_j}), \pi(t_{\beta_0 \dots \beta_j}))$ und $k_{\beta_0 \dots \beta_i} + l_{\beta_0 \dots \beta_i} < k_{\beta_0 \dots \beta_j} + l_{\beta_0 \dots \beta_j}$
 $u = \beta_0 \dots \beta_i$ und $v = \beta_{i+1} \dots \beta_j$ erfüllen die rechte Seite.

\Leftarrow :

Existieren Wörter $u, v \in \Sigma^*$ mit

$q^{\omega^*} \cdot u = t_u^{\omega^*} s_u$ und $q^{\omega^*} \cdot uv = t_{uv}^{\omega^*} s_{uv}$ (s, t wie oben minimal) so, dass

$\pi(s_u) = \pi(s_{uv})$ und $\pi(t_u) = \pi(t_{uv})$ aber $|s_u| + |t_u| \leq |s_{uv}| + |t_{uv}|$.

Dann gilt $k_{uv^i} + l_{uv^i} \leq k_{uv^{i+1}} + l_{uv^{i+1}}$, denn es kann, wie im Beweis zu Satz 2 angemerkt, geprüft werden ob k bzw. l größer werden.

Da dieser Test aber nur von $s_u \circ$ und $t_u \circ$ abhängt, kommt für alle uv^i das selbe Ergebnis heraus.

Es gilt also $|s_u| + |t_u| < |s_{uv}| + |t_{uv}| < |s_{uv^2}| + |t_{uv^2}| < \dots$

Daraus folgt mit Lemma 1 Punkt 3, dass $|\{q^n \circ uv^\omega | n \in \mathbb{N}\}| \notin \mathbb{N}$ \square

2.3 Der Algorithmus

Der Algorithmus geht also wie folgt vor:

1. Initialisiere (s, t) auf (ϵ, q)
2. Rate buchstabenweise ein Wort $u \in \Sigma^*$, wobei jeweils das aktuelle reduzierte (s, t) -Paar gespeichert wird.
3. Speichere das aktuelle reduzierte (s, t) -Paar
4. Rate (von dem aktuellen Paar aus) buchstabenweise ein Wort $v \in \Sigma^+$ wobei wieder das aktuelle reduzierte (s, t) -Paar gespeichert wird, falls in einem Schritt $k + l$ wächst, setze eine Markierung (dies ist möglich ohne k und l tatsächlich zu kennen, siehe Beweis zu Satz 2)
5. Wenn das aktuelle reduzierte (s, t) -Paar dem in Schritt 3 gespeicherten entspricht, und die Markierung in Schritt 4 gesetzt wurde, hält der Algorithmus

Folgenden Speicherbedarf hat der Algorithmus:

- Der Algorithmus speichert ein aktuelles reduziertes (s, t) -Paar.
- Das Raten eines Buchstabens braucht $\log |\Sigma|$ Platz.
- Um das jeweils nächste Paar zu berechnen braucht er Platz für ein weiteres reduziertes (s, t) -Paar und die oben genannten $(K_q + 1) |\Sigma|$ für die Liste.
- In Schritt 3 wird ein weiteres reduziertes (s, t) -Paar gespeichert.
- Die Berechnung von π benötigt $O(|\log |Q| + \log |\Sigma|)$ Platz (Fakt 1)

Jedes reduzierte (s, t) -Paar kann in $O((K_q + 2) \log Q)$ Platz gespeichert werden.

Also kommt der Algorithmus mit $O(K_q(\log Q + |\Sigma|))$ Platz aus.

Daraus folgt:

Satz 3. *TORSIONSFREIHEIT* liegt in $\text{NSPACE}(K_q(\log Q + |\Sigma|))$.

Korollar 1. Sei *MODTORSIONSFREIHEIT* das Problem mit

Eingabe: Automat \mathcal{T} mit beschränkter Aktivität, $q_1 \dots q_k$

Ausgabe: Ist $(q_k \dots q_1)^\circ$ torsionsfrei?

Dann liegt *MODTORSIONSFREIHEIT* in $\text{NSPACE}(k \cdot K(k \cdot \log Q + |\Sigma|))$. Dies ist ersichtlich durch die Produktautomatenkonstruktion \mathcal{T}^k wobei in diesem Fall $\pi(q'_1, \dots, q'_k) = \epsilon$ gdw. $q'_i^\circ = id_\Sigma \forall i \leq k$

3 Ultimativ periodische Teilmengen

In diesem Kapitel wird ein Entscheidungsalgorithmus für ein Problem entwickelt, das einerseits das Ordnungsproblem als Spezialfall enthält. Insbesondere ist aber auch das Mitgliedschaftsproblem monogener Unterhalbgruppen ein Spezialfall dieses Problems. Folgender Satz wird in diesem Kapitel bewiesen:

Satz 4. *Das Problem*

Eingabe: Automaten mit beschränkter Aktivität $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \delta)$ und $p, q_1, q_2 \in Q$

Ausgabe: Ist $p \circ \in (q_2)^* q_1 \circ$?

ist entscheidbar.

Die Kernidee des Entscheidungsalgorithmus besteht darin, das kleinste z zu finden, für welches $p \circ = (q_2)^z q_1 \circ$ gilt, oder die Existenz eines solchen z auszuschließen.

Betrachte im Folgenden eine beliebige aber feste Eingabe für dieses Problem.

3.1 Offset und Periode

In dieser Arbeit soll generell $0 \cdot \infty = 0$ gelten.

Definition 8. *Jedem $u \in \Sigma^*$ sei sowohl \hat{k}_u als auch \hat{l}_u wie folgt zugeordnet:*

Sei der Offset \hat{k}_u von (p, q_1, q_2) auf u die kleinste Zahl, für die gilt, dass $q_2^{\hat{k}_u} q_1 \circ u = p \circ u$ oder $\hat{k}_u = \infty$, falls es für keine Zahl gilt.

Des Weiteren sei die Periode \hat{l}_u das kleinste l , das $q_2^{\hat{k}_u+l} q_1 \circ u = q_2^{\hat{k}_u} q_1 \circ u$ erfüllt. Falls $\hat{k}_u = \infty$ oder kein solches l existiert, dann sei $\hat{l}_u = \infty$

Definition 9.

Es werden folgende Zustandsbezeichnungen definiert: $r_u = q_1 \circ u$ und $p_u = p \circ u$

Definition 10. *Zu endlichem Offset/Periode gehören dann folgende Zustandswörter:*

$$\hat{s}_u = q_2^{\hat{k}_u} \cdot (q_1 \circ u)$$

$$\text{und } \hat{t}_u = q_2^{\hat{l}_u} \cdot (q_2^{\hat{k}_u} q_1 \circ u)$$

Man beobachtet hierbei: Sind \hat{k}_u und \hat{l}_u endlich, dann ist $(q_2)^{\omega^*} q_1 \cdot u = (\hat{t}_u)^{\omega^*} \hat{s}_u r_u$.

Fakt 4. *Für $u \in \Sigma^*$ gilt:*

$$p \circ u = (q_2)^i q_1 \circ u \text{ gdw. } \exists \lambda : i = \hat{k}_u + \lambda \hat{l}_u$$

Lemma 6. *Für $u \in \Sigma^*$ gilt:*

3 Ultimativ periodische Teilmengen

1. Für $n < \hat{k}_u < \infty$ sind alle $q_2^n q_1 \circ u$ paarweise verschieden.
2. Für $\hat{k}_u < \infty$ und $\hat{l}_u < \infty$ sind für $\hat{k}_u < n < \hat{k} + \hat{l}_u$ alle $q_2^n q_1 \circ u$ paarweise verschieden.

Beweis.

Bezeichne mit $k_{(q_2, q_1 \circ u)}$ und $l_{(q_2, q_1 \circ u)}$ den Index bzw. die Periode von q_2 auf $q_1 \circ u$ wie in Def. 6.

1. Dann ist $\hat{k}_u < k_{(q_2, q_1 \circ u)} + l_{(q_2, q_1 \circ u)}$ nach Lemma 1 Punkt 3 da \hat{k} als erstes Vorkommen gewählt wurde.
2. Es gilt $\hat{l}_u = l_{(q_2, q_1 \circ u)}$ nach Lemma 1 Punkt 1, da \hat{l}_u minimal gewählt war. Mit der selben Eigenschaft folgt die Aussage.

□

Daraus folgt aufgrund der beschränkten Aktivität:

Lemma 7. Für $u \in \Sigma^*$:

1. $|\pi(\hat{s}_u)| \leq K_{q_2}$
2. $|\pi(\hat{t}_u)| \leq K_{q_2}$

Als nächstes stellt sich die Frage, wie sich die Werte \hat{k}_u und \hat{l}_u verändern, wenn man einen Buchstaben $a \in \Sigma$ an u anhängt.

Lemma 8. Für $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$:

1. $\hat{k}_{ua} = \hat{k}_u + \gamma \hat{l}_u$ für ein $\gamma < |\Sigma|$ oder $\hat{k}_{ua} = \infty$
2. $\hat{l}_{ua} = \gamma' \hat{l}_u$ für ein $\gamma' \leq |\Sigma|$ oder $\hat{l}_u = \infty$

Beweis. 1. Angenommen $\hat{k}_{ua} \neq \infty$, dann gibt Präfixabgeschlossenheit aus $p \circ ua = q_2^{\hat{k}_{ua}} q_1 \circ ua$ die Eigenschaft $p \circ u = q_2^{\hat{k}_{ua}} q_1 \circ u$. Fakt 4 garantiert dann die Zerlegung $\hat{k}_{ua} = \hat{k}_u + \lambda \hat{l}_u$.

Da \hat{k}_{ua} minimal ist, müssen für $i \leq \lambda$ alle $(\hat{t}_u)^i \hat{s}_u r_u \circ a$ paarweise verschieden sein. Da es dafür nur $|\Sigma|$ viele Möglichkeiten gibt, ist $\gamma = \lambda < |\Sigma|$

2. Ist $\hat{l}_{ua} \neq \infty$ gibt es wie in 1. eine Zerlegung $\hat{k}_{ua} = \hat{k}_u + \lambda \hat{l}_u$ und auch $\hat{k}_{ua} + \hat{l}_{ua} = \hat{k}_u + \lambda' \hat{l}_u$. Daraus folgt $\hat{l}_{ua} = (\lambda' - \lambda) \hat{l}_u$.

Wieder sind für alle $i < (\lambda' - \lambda) = \gamma'$ die $(\hat{t}_u)^i (\hat{t}_u)^{\lambda} \hat{s}_u r_u \circ a$ paarweise verschieden aber alle aus Σ , es folgt also die Aussage.

□

Jetzt wo λ, λ' auf endlich viele Möglichkeiten eingeschränkt sind, lassen sich diese einfach durchtesten.

Lemma 9. Aus $p_u, r_u, \hat{s}_u, \hat{t}_u$ und $a \in \Sigma$ lassen sich $p_{ua}, r_{ua}, \hat{s}_{ua}, \hat{t}_{ua}$ sowie auch die dazugehörigen γ und γ' wie folgt berechnen:

$\gamma < |\Sigma|$ minimal so, dass $(\hat{t}_u)^\gamma \hat{s}_u r_u \circ a = p_u \circ a$, sonst $\gamma = \infty$

$\gamma' \leq |\Sigma|$ minimal so, dass $(\hat{t}_u)^{\gamma'} (\hat{t}_u)^\gamma \hat{s}_u r_u \circ a = p_u \circ a$, sonst $\gamma' = \infty$

$p_{ua} = p_u \circ a$

$r_{ua} = r_u \circ a$

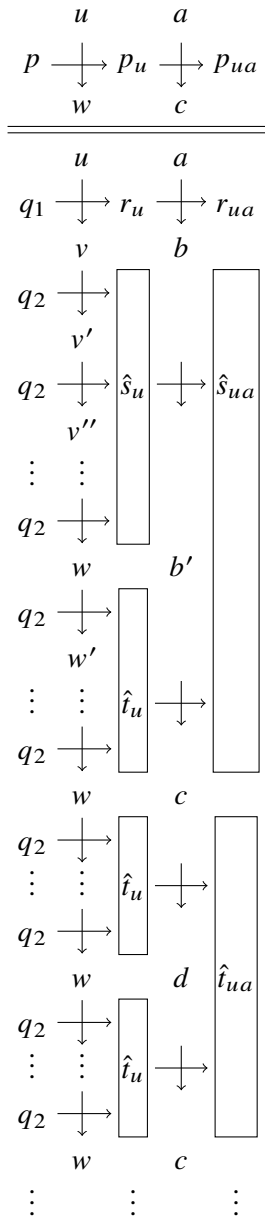
$\hat{s}_{ua} = (\hat{t}_u)^\gamma \hat{s}_u \cdot (r_u \circ a)$ falls $\gamma \neq \infty$, sonst \perp

$\hat{t}_{ua} = (\hat{t}_u)^{\gamma'} \cdot ((\hat{t}_u)^\gamma \hat{s}_u r_u \circ a)$ falls $\gamma' \neq \infty$, sonst \perp

Diese Berechnungen können (mit gleichem reduziertem Ergebnis) genauso auch auf den reduzierten Wörtern durchgeführt werden.

3 Ultimativ periodische Teilmengen

Das Kreuzdiagramm verdeutlicht warum das gesuchte Wort wc falls überhaupt, dann nur an den Wortgrenzen auftauchen kann.



Definition 11. Sei $M = (Z, \Sigma, \hat{\delta}, z_0)$ ein deterministischer endlicher Automat (kein Transduktor!) ohne Endzustand mit Übergangsbeschriftungen $\psi : Z \times \Sigma \rightarrow (\{1, \dots, |\Sigma|, \infty\})^2$ wie folgt:

- $Z \subseteq Q \times Q \times (Q^{\leq K_{q_2}} \cup \{\perp\}) \times (Q^{\leq K_{q_2}} \cup \{\perp\})$
- $z_0 = (p, q_1, \epsilon, q_2)$
- $\hat{\delta}((p_u, r_u, \pi(\hat{s}_u), \pi(\hat{t}_u)), a) = (p_{ua}, r_{ua}, \pi(\hat{s}_{ua}), \pi(\hat{t}_{ua}))$
Dies ist wohldefiniert nach Lemma 9.
- $\psi((p_u, r_u, \pi(\hat{s}_u), \pi(\hat{t}_u)), a) = (\gamma, \gamma')$ wie in Lemma 9

Fakt 5. M ist konstruierbar.

Fakt 6. Für ein gegebenes $u \in \Sigma^*$ lassen sich die Werte \hat{k}_u und \hat{l}_u aus den ψ -Kantenbeschriftungen des Laufs von u in M berechnen.

Definition 12. ψ -Kantenbeschriftungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$(\gamma_1, \gamma'_1) \star (\gamma_2, \gamma'_2) = (\gamma_1 + \gamma'_1 \gamma_2, \gamma'_1 \gamma'_2)$$

Pfadbeschriftung von $p = e_1, e_2, \dots, e_n$ ist dann $\psi(p) = \psi(e_1) \star \psi(e_2) \star \dots \star \psi(e_n)$

Fakt 7. Dann gilt für alle $u, v \in \Sigma^*$:

Ist $z_0 \xrightarrow{u} p_u z' \xrightarrow{v} p_v z''$ in M und $\psi(p_v) = (\gamma_v, \gamma'_v)$, dann ist $\hat{k}_{uv} = \hat{k}_u + \gamma_v \hat{l}_u$ und $\hat{l}_{uv} = \gamma'_v \hat{l}_u$

3.2 Das Gleichungssystem

Lemma 10. Für $z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p \circ = (q_2)^z q_1 \circ$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^* : p \circ u = (q_2)^z q_1 \circ u$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^* : \exists \lambda \in \mathbb{N} : z = \hat{k}_u + \lambda \hat{l}_u$$

Beweis.

1 \Leftrightarrow 2 nach Definition

2 \Leftrightarrow 3 nach Fakt 4 □

Dieses Lemma liefert ein unendliches Gleichungssystem. Jetzt soll mithilfe des Automaten M das Gleichungssystem auf endliche Größe gebracht werden, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Zunächst einmal sollen Wörter mit genau einer Schleife in M betrachtet werden:

Lemma 11. Sei $x = uvw$ mit $z_0 \xrightarrow{u} p_u z' \xrightarrow{v} p_v z' \xrightarrow{w} p_w z''$ wobei p_u, p_v, p_w jeweils schleifenfrei sind.

Dann ergibt sich abhängig von der Beschriftung $\psi(p_v) = (\gamma, \gamma')$ folgendes für den zu $\{uv^i w \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma^*$ gehörenden Teil des Gleichungssystems:

1. $\gamma > 0$:

$\hat{k}_{uv^i w}$ ist unbeschränkt \Rightarrow Das Gleichungssystem hat keine Lösung, der Gesamtblock lässt sich durch $z = \infty + \lambda \infty$ ersetzen.

2. $\gamma' > 1, \gamma = 0$: \hat{l}_{uv^i} ist unbeschränkt, damit auch $\hat{l}_{uv^i w}$

Unterscheide nach $\psi(p_w) = (\gamma_w, \gamma'_w)$:

- Ist $\gamma_w > 0$ so ist auch $\hat{k}_{uv^i w}$ unbeschränkt \Rightarrow keine Lösung \Rightarrow ersetze Block durch $z = \infty + \lambda \infty$

- ist $\gamma_w = 0$, so ist $\hat{k}_{uv^i w} = \hat{k}_{uw}$, da $\hat{l}_{uv^i w}$ unbeschränkt, ist \hat{k}_{uw} die einzige Lösung für diesen Block \Rightarrow ersetze Block durch $z = \hat{k}_{uw} + \lambda \infty$

3. $(\gamma, \gamma') = (0, 1)$ dann gilt $\hat{k}_{uv^i w} = \hat{k}_{uw}$ und $\hat{l}_{uv^i w} = \hat{l}_{uw}$ damit besteht der gesamte Block nur aus einer Gleichung: $z = \hat{k}_{uw} + \lambda \hat{l}_{uw}$

Lemma 12. *Es gibt nur endlich viele uvw wie in Lemma 11 da p_u, p_v, p_w schleifenfrei in dem endlichen Automaten M sein müssen.*

Das endliche Gleichungssystem, das aus den nach Lemma 11 zu (u, v, w) gehörenden Gleichungen besteht, hat dieselbe Lösungsmenge wie das ursprüngliche, unendliche.

Beweis. Zu zeigen: Für ein beliebiges Wort $x \in \Sigma^*$ wird die Gleichung $z = \hat{k}_x + \lambda \hat{l}_x$ von einer der Gleichungen aus Lemma 11 absorbiert.

1. Schleifen die mit $(0, 1)$ beschriftet sind, können entfernt werden ohne die Gleichung zu verändern.
2. Enthält x eine Schleife die mit (γ, γ') beschriftet ist und $\gamma > 0$, dann können alle anderen Schleifen entfernt werden. Das resultierende Wort besitzt eine Zerlegung in uvw und nach Lemma 11 ist das Gleichungssystem ohne Lösung \Rightarrow die zu (u, v, w) gehörende Gleichung absorbiert die von x .
3. Enthält x nur solche Schleifen, die jeweils mit $(0, \gamma')$ für ein $\gamma' \neq 1$ beschriftet sind, dann können alle Schleifen bis auf eine gelöscht werden, und die Zerlegung des Restwortes in (u, v, w) liefert eine bereits vorhandene Gleichung $z = \hat{k}_{uw} + \lambda \infty$ oder $z = \infty + \lambda \infty$. Da $\hat{k}_{uw} = \hat{k}_x$ wird in beiden Fällen die Gleichung $z = \hat{k}_x + \lambda \hat{l}_x$ absorbiert.
4. Enthält x keine Schleife, so ist es bereits in Lemma 11 in den zugehörigen Block eingeflossen.

□

Daraus ergibt sich folgender Algorithmus:

3.3 Der Algorithmus

Auf Eingabe von \mathcal{T}, p, q_1, q_2 geht der Algorithmus wie folgt vor:

1. Konstruiere M nach Definition 11
2. Generiere für alle (u, v, w) die dazugehörige Gleichung nach Lemma 11
3. Löse das Gleichungssystem
4. Gib Lösung aus

4 Zusammenfassung und Ausblick

4.1 Zusammenfassung

Mithilfe der am Anfang definierten Begriffe, vor allem aber der Konzepte von Index und Periode konnte die Suche nach einem effizienten Algorithmus für das Torsionsfreiheitsproblem angetreten werden.

Insbesondere spielten die Zusammenhänge zwischen Index/Periode von länger werdenden Wörtern eine wichtige Rolle. Ganz besonders zentral war allerdings die Beobachtung, dass durch die beschränkte Aktivität eine endliche Repräsentation von $q^{\omega^*} \cdot w$ möglich ist. Die Vereinigung der effizienten Speicherung mit der Möglichkeit, trotzdem noch Informationen über Index und Periode mitzunehmen, führte zu dem effizienten Algorithmus für das Torsionsfreiheitsproblem.

Im zweiten Teil konnten viele Konzepte aus dem ersten Teil wiederverwendet werden. Insbesondere war die effiziente Speicherung, wie sie aus dem ersten Teil bekannt war, ein guter Startpunkt um einen Algorithmus zu erstellen, der das Gesamtbild in den Blick nehmen kann. Schwierig gestaltete es sich jedoch, aus dem Gesamtbild die richtigen Details herauszupicken, um die zentrale Frage zu beantworten. Glücklicherweise ließ sich dann aus den Index/Periode Eigenschaften des ersten Teils eine Variante für das Problem entwerfen. Durch die so gesammelten Informationen konnte die gesuchte Lösung als ein unendliches Gleichungssystem dargestellt werden. Die Erkenntnis, dass sich dieses Gleichungssystem auf eine endliche Zahl von Gleichungen komprimieren lässt, ohne die Lösungsmenge zu verändern, führte dann zu einem Entscheidungsalgorithmus für das Mitgliedschaftsproblem in ultimativ periodischen Teilmengen.

4.2 Ausblick

In dem ersten Teil wurde eine gute obere Schranke für die Komplexität der Torsionsfreiheit und damit des Ordnungsproblems für Automaten mit beschränkter Aktivität gefunden. Es drängt sich allerdings die Frage auf, ob sich nicht auch eine gute untere Schranke zeigen lässt.

NP-Schwere des Ordnungsproblems insbesondere auch in Automatengruppen, wäre ein vielversprechender Ansatzpunkt. Der Entscheidungsalgorithmus aus dem zweiten Teil liefert ein schönes Ergebnis, und lässt auf einen effizienten Algorithmus hoffen, möglicherweise allerdings nur mit weiteren Einschränkungen. Zusätzlich wäre auch für dieses Problem die Suche nach einer unteren Schranke ein vielversprechendes Feld.

Literaturverzeichnis

- [AKL+12] A. AKHAVI, I. KLIMANN, S. LOMBARDY, J. MAIRESSE, M. PICANTIN. „ON THE FINITENESS PROBLEM FOR AUTOMATON (SEMI)GROUPS“. In: *International Journal of Algebra and Computation* 22.06 (2012), S. 1250052. DOI: [10.1142/s021819671250052x](https://doi.org/10.1142/s021819671250052x). eprint: <https://doi.org/10.1142/s021819671250052x>. URL: <https://doi.org/10.1142/s021819671250052x> (zitiert auf S. 8).
- [BBSZ13] I. Bondarenko, N. Bondarenko, S. Sidki, F. Zapata. „An automaton group with undecidable order and Engel problems“. In: *GGD* 7 (2013). ISSN: 1661-7207. DOI: [10.4171/ggd](https://doi.org/10.4171/ggd) (zitiert auf S. 7).
- [BGKP18] L. Bartholdi, T. Godin, I. Klimann, M. Picantin. „A New Hierarchy for Automaton Semigroups“. In: *Implementation and Application of Automata*. Hrsg. von C. Câmpeanu. Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 71–83. ISBN: 978-3-319-94812-6 (zitiert auf S. 7).
- [BM17] L. Bartholdi, I. Mitrofanov. *The word and order problems for self-similar and automata groups*. 2017. arXiv: [1710.10109](https://arxiv.org/abs/1710.10109) [math.GR] (zitiert auf S. 7).
- [DFRW19] D. D’Angeli, D. Francoeur, E. Rodaro, J. P. Wächter. *Orbits of Automaton Semigroups and Groups*. 2019. arXiv: [1903.00222](https://arxiv.org/abs/1903.00222) [cs.FL] (zitiert auf S. 16).
- [GIL14] P. GILLIBERT. „THE FINITENESS PROBLEM FOR AUTOMATON SEMIGROUPS IS UNDECIDABLE“. In: *International Journal of Algebra and Computation* 24.01 (Feb. 2014), S. 1–9. ISSN: 1793-6500. DOI: [10.1142/s0218196714500015](https://doi.org/10.1142/s0218196714500015). URL: <http://dx.doi.org/10.1142/s0218196714500015> (zitiert auf S. 7).
- [Gil18] P. Gillibert. „An automaton group with undecidable order and Engel problems“. In: *Journal of Algebra* 497 (2018), S. 363–392. ISSN: 0021-8693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.049>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869317306579> (zitiert auf S. 7).
- [GP08] R. Grigorchuk, I. Pak. „Groups of intermediate growth: an introduction“. In: *Enseign. Math.*(2) 54.3-4 (2008), S. 251–272 (zitiert auf S. 7).
- [Sid00] S. Sidki. „Automorphisms of one-rooted trees: Growth, circuit structure, and acyclicity“. In: *Journal of Mathematical Sciences* 100.1 (Juni 2000), S. 1925–1943. ISSN: 1573-8795. DOI: [10.1007/BF02677504](https://doi.org/10.1007/BF02677504). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02677504> (zitiert auf S. 7).

Alle URLs wurden zuletzt am 10. 10. 2019 geprüft.

Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Ort, Datum, Unterschrift