

Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme

Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D-70569 Stuttgart

Bachelorarbeit

Faktorisierbare Diskretisierungen für Variationsansätze zur Berechnung des Optischen Flusses

Lukas Piller

Studiengang: Informatik B.Sc.

Prüfer/in: Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn

Betreuer/in: Prof. Dr.-Ing. Andrés Bruhn

Beginn am: 15. Oktober 2019

Beendet am: 29. Juni 2020

Kurzfassung

Auf Basis des Variationsansatzes von Horn und Schunck zur Berechnung des optischen Flusses untersucht diese Arbeit die Frage, wie die Approximationsordnung im Diffusionsterm der Euler-Lagrange-Gleichungen verbessert werden kann, indem man optimale Ableitungsfiler in den Diffusionstermen faktorisiert. Um eine solche Faktorisierung zu finden, werden Diskretisierungen für den Diffusionsterm der Euler-Lagrange-Gleichungen mit dem minimierten diskreten Energiefunktional verglichen. Aus dem entstehenden Zusammenhang werden Diskretisierungen für das diskrete Energiefunktional ermittelt, welche durch Faltung optimale Ableitungsfiler des Diffusionsterms ergeben. Solche Faktorisierungen werden für Glattheitsterme mit verschiedenen Nachbarschaften und Ableitungsordnungen berechnet. Dabei wird für alle Diskretisierungen des Glattheitsterms eine Diskretisierung mit Konstanzannahme der ersten Ableitung für den Datenterm verwendet. Daraufhin werden diese mit Standarddiskretisierungen, die ebenfalls hergeleitet werden, verglichen, um Aussagen über die Qualität der neuen Diskretisierungen zu treffen. Dabei führen die neuen Diskretisierungen zu ähnliche Ergebnissen wie die Standarddiskretisierungen, welche aber durch einen systematischen Fehler am Rand etwas schlechter ausfallen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Grundlagen und Definitionen	13
2.1	Bild	13
2.2	Bildfolge	14
2.3	Finite Differenzen	14
2.4	Faltung	17
2.5	Indikatorfunktionen	18
3	Das Verfahren von Horn und Schunck	19
3.1	Optischer Fluss	19
3.2	Verfahren von Horn und Schunck	20
4	Optimierte faktorisierte Diskretisierungen	27
4.1	3er Nachbarschaft	28
4.2	4er Nachbarschaft	36
4.3	5er Nachbarschaft	44
5	Zusätzliche Diskretisierungen	55
5.1	3er Nachbarschaft Vergleich	55
5.2	4er Nachbarschaft Vergleich	59
5.3	5er Nachbarschaft Vergleich	61
5.4	Diskretisierung des Datenterms	62
5.5	Lösungsverfahren des linearen Gleichungssystems	66
6	Evaluation	69
6.1	Der durchschnittliche Winkelfehler	69
6.2	Testdatensatz	70
6.3	Visualisierung	71
6.4	Experimente	71
7	Zusammenfassung und Ausblick	85
	Literaturverzeichnis	87

Abbildungsverzeichnis

4.1	Quadratische und subquadratische Bestrafungsfunktion mit $\lambda = 0.01$	32
6.1	Farbkreis mit Visualisierung des optischen Flusses.	71
6.2	Visualisierungen einiger Flusssschätzungen zur Yosemite Sequenz aus Experiment 2.	75
6.3	Visualisierungen einiger Flusssschätzungen zur Street und Office Sequenz aus Experiment 3.	78
6.4	Zusätzliche Visualisierungen von Flusssschätzungen zur Yosemite Sequenz zu Experiment 4.	80
6.5	Visualisierungen der Flusssschätzungen zur Yosemite Sequenz aus Experiment 4.	81
6.6	Visualisierungen der Flusssschätzungen zur Office Sequenz aus Experiment 4.	83
6.7	Visualisierungen der Flusssschätzungen zur Street Sequenz aus Experiment 4.	84

Tabellenverzeichnis

2.1	Übersicht über die in der Arbeit verwendete Differenzenquotienten.	16
6.1	Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 1. . .	73
6.2	Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 2. . .	74
6.3	Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 3 für die Sequenzen Yosemite und Office.	76
6.4	Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 3 für die Sequenzen Street und Marble.	77
6.5	Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 4 für die Sequenzen Yosemite, Office und Street.	82

1 Einleitung

Im Bereich des Maschinensehens ist die automatische Extraktion von Bewegungsinformationen ein zentrales Problem. Normalerweise ist man an der Richtung und der Geschwindigkeit der Bewegung von Objekten interessiert. Dafür wird in vielen Fällen das Verschiebungsvektorfeld zwischen aufeinander folgenden Bildern einer Bildfolge verwendet, welches diese Informationen für alle Pixel des Bildes enthält. In der Literatur wird dieses Verschiebungsvektorfeld oft als optischer Fluss bezeichnet.

Da die Berechnung des optischen Flusses nicht analytisch möglich ist, gibt es nur Ansätze zur Schätzung des optischen Flusses. Die Variationsansätze die zuerst von Horn und Schunck[HS81] verwendet wurden, haben sich als sehr beliebte und auch genaue Verfahren zur Bestimmung des optischen Flusses entwickelt. Bei den Variationsansätzen sucht man nach dem Minimierer von geeigneten Energiefunktionalen. Da Abweichungen von bestimmten Modellannahmen durch das Energiefunktional bestraft werden, ist die minimierende Funktion ein globales Optimum, weshalb diese Verfahren auch oft als globale Optimierungsmethoden bezeichnet werden. Hierbei werden zwei Arten von Modellannahmen unterschieden: Im Datenterm werden Konstanzannahmen über Merkmale in den aufeinander folgenden Bildern getroffen, welche es ermöglichen, die Pixel dieser Bilder einander zuzuordnen. Im Glattheitsterm werden Glattheitsannahmen über den optischen Fluss getroffen, die sogenannten räumlichen Regularisierungsforderungen, welche auch für die Eindeutigkeit der Lösung sorgen.

Da es sich um ein Energiefunktional handelt, muss jeder Minimierer die Euler-Lagrange-Gleichungen als notwendige Bedingungen erfüllen. Dafür müssen diese partiellen Differentialgleichungen numerisch gelöst werden, wofür eine geeignete Diskretisierung notwendig ist. Häufig werden für diese Diskretisierung finite Differenzen gewählt, wodurch dünnbesetzte lineare oder nichtlineare Gleichungssysteme entstehen, welche dann iterativ gelöst werden.

Auch wenn der Einfluss von höheren Konsistenzordnungen der Diskretisierungen im Datenterm bereits untersucht wurde (z.B.[SRB10]), wurde der Einfluss der Flussableitungen im Glattheitsterm bisher nur von Blei[Ble17] untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass eine hohe Approximationsordnung der Flussableitung im Datenterm nicht notwendigerweise zu einer hohen Approximationsgüte in den zugehörigen Diffusionstermen der Euler-Lagrange-Gleichungen führt.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Approximationsordnung im Diffusionsterm in den Euler-Lagrange-Gleichungen zu verbessern. Dafür werden optimale Ableitungsfilter für die Diffusionsterme faktorisiert, welche dann als entsprechende Approximationen für die Ableitungen im Glattheitsterm verwendet werden. Diese faktorisierten Diskretisierungen werden hergeleitet, anhand des Variationsansatzes von Horn und Schunck implementiert, und mit Hilfe von geeigneten Sequenzen mit bekannter kleiner Verschiebung evaluiert. Dabei werden sowohl einfache quadratische Bestrafungsfunktionen als auch subquadratische Bestrafungsfunktionen verwendet und Glattheitsterme mit Glattheitsannahmen für verschiedene Ableitungsordnungen betrachtet.

Die Arbeit ist in sieben Kapitel aufgeteilt. Nach diesem einführenden Kapitel 1 folgt Kapitel 2 in dem die notwendigen Grundlagen für die Arbeit vorgestellt werden. Danach wird in Kapitel 3 das Verfahren von Horn und Schunck vorgestellt. In Kapitel 4 werden die faktorisierten Ableitungfilter hergeleitet und in Kapitel 5 werden noch weitere benötigte Diskretisierungen vorgestellt. Zuletzt werden die neuen Ableitungfilter in Kapitel 6 evaluiert und die gesamte Arbeit in Kapitel 7 zusammengefasst.

2 Grundlagen und Definitionen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Definitionen, Notationen und Verfahren vorgestellt, die zum Verständnis der Arbeit wichtig sind. Die hier verwendeten Definitionen und Notationen stammen aus den Vorlesungen [Bru19a] und [Bru19b].

2.1 Bild

Da Bilder der Input für Probleme im Bereich des Maschinensehens und somit auch grundlegend für den optischen Fluss sind, müssen sie zuerst definiert werden.

Unter einem kontinuierlichen Grauwertbild f ist eine zweidimensionale, skalarwertige Funktion zu verstehen. Ihr rechteckiger Definitionsbereich $\Omega = (0, a_1) \times (0, a_2)$ wird Bildebene genannt und die Elemente des Wertebereichs werden als Grauwerte bezeichnet.

$$f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Aus einem kontinuierlichen Grauwertbild erhält man ein diskretes Grauwertbild, indem man die Bildebene sampelt und den Wertebereich quantisiert. Das bedeutet für die Bildebene, dass man die Grauwerte nur an den Punkten eines rechteckigen, äquidistanten Gitters mit Gitterweite h_x und h_y angibt. Für den Wertebereich heißt es, dass man nur Grauwerte hat, die aus einer endlichen Menge stammen. In vielen Fällen und auch in dieser Arbeit ist diese Menge $\{0, 1, \dots, 255\}$, da man damit den Grauwert mit einem Byte codieren kann. Hierbei sind, wie auch beim kontinuierlichen Bild, niedrige Grauwerte dunkel und hohe Grauwerte hell.

Für den Anwendungsfall spielen nur diskrete Bilder eine Rolle, da allgemein kontinuierliche Bilder nicht dargestellt werden können.

Das Ergebnis von Sampling und Quantifizierung ist ein diskretes Bild f mit:

$$f := \{f_{i,j} | i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}\} \quad (2.2)$$

Diese Gitterpunkte werden auch Pixel genannt.

Häufig werden die Abstände zwischen den Gitterpunkten in beide Dimensionen gleich gewählt, also $h_x = h_y$.

Im Verlauf der Arbeit ist an manchen Stellen eine in beide Dimensionen unendliche Definition von f nötig. In diesen Fällen wird, wenn nicht anders angegeben, davon ausgegangen, dass $f_{i,j} = 0$ für $i \notin \{1, \dots, N\} \vee j \notin \{1, \dots, M\}$ gilt.

2.2 Bildfolge

Bildfolgen sind Reihen von Bildern, die zeitlich nacheinander aufgenommen wurden. Bildfolgen sind der Input für das Problem des optischen Flusses, wobei wir nur an zwei aufeinander folgenden Bildern einer Bildfolge interessiert sind.

Im Kontinuierlichen ist eine Bildfolge eine Sequenz von Bildern und ist somit als eine dreidimensionale, skalarwertige Funktion zu verstehen. Dadurch ergibt sich für unsere Bildfolge als Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \subset \Omega = (0, a_1) \times (0, a_2) \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

im kontinuierlichen Fall und

$$f := \{f_{i,j,t} | i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}, t \in \{0, \dots, T\}\} \quad (2.4)$$

im diskreten Fall. Die zeitliche Diskretisierung ist, wie die räumliche, äquidistant und es gilt in dieser Arbeit immer $h_t = 1$.

2.3 Finite Differenzen

Finite Differenzen dienen als Mittel zur Approximation von Ableitungen. Sie werden benötigt, da auf den diskreten Bildern die exakte Ableitung nicht bestimmt werden kann.

Es ist bekannt, dass man für eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, mit der Taylorreihe, die Umgebung einer Stelle \mathbf{x} als Reihe der Ableitungen von f darstellen kann:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [\mathbf{h}^T \nabla_m]^k f(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{h}|^{n+1}) \quad (2.5)$$

Unter Verwendung dieser Eigenschaft ist es möglich, eine beliebig gute Approximation für jede Ableitung von f herzuleiten. Dabei steht es zu einem gewissen Grad offen, welche Werte der Funktion f um die Stelle \mathbf{x} verwendet werden. Wie genau das möglich ist, kann man am Beispiel der zweiten Ableitung von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zeigen.

Zuerst berechnet man mehrere Taylorreihen um x und stellt damit ein lineares Gleichungssystem auf. Danach ergibt sich die Lösung dieses Gleichungssystems als gesuchte Approximation für, in diesem Fall, die zweite Ableitung von f an der Stelle x .

Um die zweite Ableitung zu approximieren braucht man die Funktionswerte von mindestens drei Stellen. Sonst ist es nicht möglich die gewünschten Bedingungen in das Gleichungssystem aufzunehmen (siehe linke Seite der Gleichung (2.7)). Wir verwenden $f(x-h)$, $f(x)$ und $f(x+h)$.

Die Taylorreihen für diese drei Funktionswerte lauten:

$$\begin{aligned} f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4) \\ f(x) &= f(x) \\ f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unter Verwendung dieser Taylorreihen kann man nun die folgende Gleichung aufstellen, aus der sich unser lineares Gleichungssystem ergibt.

$$\begin{aligned}
0 \cdot f(x) + 0 \cdot f'(x) + 1 \cdot f''(x) &\stackrel{!}{=} w_{-1}f(x-h) + w_0f(x) + w_1f(x+h) \\
&= w_{-1} \left(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \right) + w_0f(x) \\
&\quad + w_1 \left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \right) \\
&= (w_{-1} + w_0 + w_1)f(x) + h(-w_{-1} + w_1)f'(x) \\
&\quad + \frac{h^2}{2}(w_{-1} + w_1)f''(x) + \mathcal{O}((w_{-1} + w_1)h^3)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Umgeschrieben in der Matrixschreibweise ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Die sich daraus ergebende Lösung sind die gesuchten Gewichte für die Funktionswerte $f(x-h)$, $f(x)$ und $f(x+h)$ für die Approximation von $f''(x)$.

$$w_{-1} = \frac{1}{h^2}, \quad w_0 = -\frac{2}{h^2}, \quad w_1 = \frac{1}{h^2} \tag{2.9}$$

Diese Art von Approximation nennt sich zentraler Differenzenquotient, da die verwendeten Funktionswerte symmetrisch um x liegen.

Jetzt stellt sich die Frage, wie gut diese Approximation $f_a''(x)$ für $f''(x)$ ist. Das lässt sich berechnen, indem man die Gewichte in Gleichung (2.7) einsetzt.

$$\begin{aligned}
f_a''(x) &= w_{-1}f(x-h) + w_0f(x) + w_1f(x+h) \\
&= \frac{1}{h^2}f(x-h) - \frac{2}{h^2}f(x) + \frac{1}{h^2}f(x+h) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \right) \\
&\quad - \frac{2}{h^2}f(x) \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \right) \\
&= \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) f(x) + h \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) f'(x) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) f''(x) \\
&\quad + \frac{h^3}{6} \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) f'''(x) + \frac{h^4}{24} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) f^{(4)}(x) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) h^5 \right) \\
&= 0 \cdot f(x) + 0 \cdot f'(x) + 1 \cdot f''(x) + 0 \cdot f'''(x) + \frac{h^2}{12} \cdot f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \\
&= f''(x) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Approximation von	Differenzenquotient	Fehlerordnung
f'	$\frac{1}{h}(-1, \overset{\bullet}{1})$ (nicht zentral)	$O(h)$
f'	$\frac{1}{h}(\overset{\bullet}{-1}, 1)$ (nicht zentral)	$O(h)$
f'	$\frac{1}{2h}(-1, 0, 1)$	$O(h^2)$
f'	$\frac{1}{12h}(1, -8, 0, 8, -1)$	$O(h^4)$
f''	$\frac{1}{h^2}(1, -2, 1)$	$O(h^2)$
f''	$\frac{1}{2h^2}(1, -1, -1, 1)$	$O(h^2)$
f''	$\frac{1}{12h^2}(-1, 16, -30, 16, -1)$	$O(h^4)$
f'''	$\frac{1}{h^3}(-1, 3, -3, 1)$	$O(h^2)$
f'''	$\frac{1}{2h^3}(-1, 2, 0, -2, 1)$	$O(h^2)$
$f^{(4)}$	$\frac{1}{h^4}(1, -4, 6, -4, 1)$	$O(h^2)$
$f^{(4)}$	$\frac{1}{6h^4}(-1, 12, -39, 56, -39, 12, -1)$	$O(h^4)$
$f^{(6)}$	$\frac{1}{4h^6}(-1, 12, -52, 116, -150, 116, -52, 12, -1)$	$O(h^4)$

Tabelle 2.1: Übersicht über die in der Arbeit verwendete Differenzenquotienten. Bis auf die ersten zwei sind alle zentrale Differenzenquotienten. Für die ersten Beiden ist der zentrale Pixel mit einem Punkt markiert.

Der Fehler unserer Approximation liegt also in $O(h^2)$, sprich es gibt einen Fehler zweiter Ordnung.

Wenn man die Differenzenquotienten auf einem Gitter mit Gitterweite h und Gitterpunkten $f_i := f(ih)$ betrachtet, ergibt sich als Approximation der zweiten Ableitung:

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) \quad (2.11)$$

Im Verlauf der Arbeit werden außer dem hier berechneten noch weitere Differenzenquotienten als Approximationen für Ableitungen verwendet. Alle können auf die im Beispiel verwendete Art hergeleitet werden.

Alle in der Arbeit verwendeten Differenzenquotienten sind in Tabelle 2.1 zu finden.

Es wird auch noch die folgende Kurzschreibweise für partielle Ableitungen eingeführt. Für eine Funktion $f(x, y)$ schreiben wir die partiellen Ableitungen auch als:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) \quad (2.12)$$

2.4 Faltung

Auch Faltungen spielen eine Rolle und sollten deshalb noch erläutert werden. Durch sie können auch Ableitungen und Glättungsoperationen auf dem diskreten Bild dargestellt werden.

Die kontinuierliche Faltung von zwei Bildern g und w ist definiert als

$$(g * w)(x, y) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x - x', y - y') w(x', y') dx' dy'. \quad (2.13)$$

Im für die Arbeit relevanten diskreten Fall versteht man unter der Faltung $f = (f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ von zwei Bildern $g = (g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ und $w = (w_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$

$$f_{i,j} := (g * w)_{i,j} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{i-k, j-l} w_{k,l} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

Das Ergebnis ist also wieder ein Bild.

Wir verwenden Faltungen hauptsächlich als Filter, weshalb g das Bild ist, auf das der Faltungskern w angewandt wird. Das Ergebnis ist das gefilterte Bild f .

2.4.1 Ableitungen als Faltungen

Wie Ableitungen durch Differenzenquotienten als Faltungen verstanden werden können, zeigt sich durch folgende Überlegung: Man betrachte die Filtermaske der Ableitungsapproximation von Gleichung (2.11):

$$\tilde{w} = (\tilde{w}_{k-1,l}, \tilde{w}_{k,l}, \tilde{w}_{k+1,l}) = \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (2.15)$$

Angewendet auf ein Bild $f = (f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ ergibt sich:

$$\tilde{f}_{i,j} = \frac{1}{h^2} (f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}) \quad \forall i, j \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch durch eine Faltung von f mit dem folgenden Faltungskern:

$$w = (w_{-1}, w_0, w_1) = \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (2.17)$$

Es gilt allgemein, dass das Anwenden einer Filtermaske auf alle Punkte durch eine Faltung mit dem passenden Faltungskern ersetzt werden kann. Dabei gilt es aber zu beachten, dass man für nicht symmetrische Filtermasken den dazu adjungierten Faltungskern verwenden muss, da die Faltung den Kern in gespiegelter Reihenfolge anwendet. Dieser ist bei symmetrischen Filtermasken durch die Symmetrie gleich dem nicht adjungierten Faltungskern. Die gespiegelte Version eines Faltungskerns w wird als adjungierter Faltungskern w^* geschrieben.

Diskrete Ableitung eines Bildes durch einen Ableitungsfiler sind also auch Faltungen mit einem zu dem Ableitungsfiler adjungierten Faltungskern.

2.4.2 Glättung

Da die Bildableitungen von diskreten Bildern häufig benötigt werden, werden die Bilder meist erst vorgeglättet. Dies wird durch die Faltung mit einem gaußschen Faltungskern erreicht und es erfüllt zwei Aufgaben: Einerseits wird durch die Glättung das Rauschen im Bild stark reduziert, welches sonst die Ableitungen stark beeinflussen kann. Andererseits sorgt die Faltung mit einem gaußschen Faltungskern dazu, dass das Bild unendlich oft differenzierbar ist, wodurch die Existenz der Ableitungen gesichert ist.

Man erhält also das geglättete Bild \hat{f} durch anwenden eines gaußschen Faltungskernes K_σ mit Standardabweichung σ :

$$\hat{f} = K_\sigma * f \quad (2.18)$$

2.5 Indikatorfunktionen

Die Indikatorfunktionen werden verwendet, damit nicht auf Werte außerhalb eines definierten Bereiches zugegriffen wird. Dies kommt vor allem in Kombination mit den zentralen Differenzenquotienten vor, welche Pixel vor und hinter dem zentralen Pixel verwenden. Die Indikatorfunktionen sind definiert als:

$$X_{[x_u, x_o][y_u, y_o]}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_u \leq x \leq x_o \text{ und } y_u \leq y \leq y_o \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.19)$$

In der Arbeit wird die Kurzschreibweise $X_{[x_u, x_o][y_u, y_o]} := X_{[x_u, x_o][y_u, y_o]}(x, y)$ für die Indikatorfunktionen verwendet.

3 Das Verfahren von Horn und Schunck

Nachdem zuerst die Grundlagen für die Arbeit vorgestellt wurden, geht es nun um den optischen Fluss von Bildfolgen und das Verfahren von Horn und Schunck[HS81] zur Berechnung des optischen Flusses. Basiert auf dem Foliensatz 9 der Vorlesung Computer Vision[Bru19a] und auf den Foliensätzen 18 und 19 der Vorlesung Imaging Science[Bru19b].

3.1 Optischer Fluss

Optischer Fluss ist eine andere Bezeichnung für das Verschiebungsvektorfeld zwischen Bildern einer Bildfolge. Das heißt, man betrachtet eine Bildfolge $f(x, y, t)$ und sucht nach einem zweidimensionalen Vektorfeld $\mathbf{u}(x, y, t)$, das die Verschiebung der einzelnen Pixel in x - und y -Richtung beschreibt. Es handelt sich somit um die wahrgenommene Bewegung der einzelnen Pixel von einem Bild der Folge zum Anderen.

Bei einem perfekten optischen Fluss sollte also für alle Pixel gelten, dass das Pixel an Position (x, y) zum Zeitpunkt t im nächsten Bild zum Zeitpunkt $t + 1$ an Position $(x + u(x, y, t), y + v(x, y, t))$ zu finden ist.

Wenn man das Problem nur auf zwei aufeinander folgende Bilder beschränkt, und somit die zeitliche Komponente entfernt, ergibt sich das Verschiebungsvektorfeld:

$$\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Hierbei ist der Definitionsbereich Ω der gleiche Definitionsbereich wie der des Bildes zum Zeitpunkt t .

Im Diskreten ergibt sich dann für das Verschiebungsvektorfeld:

$$\mathbf{u} := \left\{ \mathbf{u}_{i,j} = \begin{pmatrix} u_{i,j} \\ v_{i,j} \end{pmatrix} \mid i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \quad (3.2)$$

Bisher wurde vernachlässigt, was genau ausmacht, dass es sich in zwei Bildern um den selben Pixel handelt. Um dies festzulegen können verschiedene Annahmen getroffen werden, zum Beispiel die Grauwertkonstanz an beiden Pixeln. Das würde bedeuten, dass für alle Pixel $f(x, y, t) = f(x + u, y + v, t + 1)$ gelten soll.

Es gibt verschiedene Verfahren zur Berechnung der Flussfelder, aber diese Arbeit beschäftigt sich nur mit dem Variationsansatz von Horn und Schunck.

3.2 Verfahren von Horn und Schunck

Das Verfahren von Horn und Schunck ist ein Variationsansatz. Man stellt dafür ein Funktional auf, welches Abweichungen von getroffenen Annahmen bestraft. Dieses Funktional wird Energiefunktional genannt und beschreibt, wie stark ein Verschiebungsvektorfeld von den getroffenen Annahmen abweicht. Der Minimierer dieses Funktionals weicht somit am wenigsten von den Annahmen ab und ist das globale Optimum für die minimierende Funktion.

Eine typische Annahme ist, wie bereits erwähnt, die Grauwertkonstanz. Diese Annahme reicht aber auf Grund des Aperturproblems nicht für eine eindeutige Lösung aus [Bru19b, Foliensatz 7]. Deshalb wird bei Horn und Schunck zusätzlich angenommen, dass der gesuchte optische Fluss bestimmte Glattheitskriterien erfüllt, wodurch die Eindeutigkeit gesichert ist.

Die Grauwertkonstanz $f(x, y, t) = f(x + u, y + v, t + 1)$ ergibt sich als zu minimierende Bedingung zu $0 = (f(x + u, y + v, t + 1) - f(x, y, t))^2$. Durch das Quadrat werden geringe Abweichungen noch weniger bestraft und größere noch mehr. Zusätzlich ist dadurch die Abweichung immer positiv, was für die Suche nach einem Minimum notwendig ist. Diese Bedingung lässt sich durch Verwendung der Taylorreihe (Gleichung (2.5)) linearisieren:

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x + u, y + v, t + 1) - f(x, y, t))^2 \\ &= (f(x, y, t) + f_x(x, y, t) u + f_y(x, y, t) v + f_t(x, y, t) 1 - f(x, y, t))^2 \\ &= (f_x(x, y, t) u + f_y(x, y, t) v + f_t(x, y, t))^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für die Glattheit kann man verschiedene Annahmen treffen, aber eine typische ist, dass benachbarte Pixel ähnlich verschoben werden, also dass die erste Ableitung im Flussfeld recht klein ist. Dies ist optimal, wenn

$$0 = |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \quad (3.4)$$

gilt, also wenn es keinen Unterschied in der Verschiebung gibt.

Diese beiden Bedingungen können im Allgemeinen nicht erfüllt werden, aber wir können ein Verschiebungsvektorfeld suchen, das beide Terme minimiert. Dies führt zum Energiefunktional, dessen minimierende Funktion das gesuchte Flussfeld ist.

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underbrace{(f_x(x, y, t) u + f_y(x, y, t) v + f_t(x, y, t))^2}_{D(u, v)} + \frac{\alpha}{2} \underbrace{(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)}_{S(u, v)} dx dy \quad (3.5)$$

Hierbei ist α ein Regularisierungsparameter, da er die Lösung eindeutig macht. Über ihn kann die Glattheit der Lösung geregelt werden. Für ein kleines α wird die Lösung vom sogenannten Datenterm $D(u, v)$ bestimmt, passt sich sehr den Bilddaten an und die Glattheit sorgt nur für die Eindeutigkeit der Lösung. Bei einem sehr großen α erhält der Glattheitsterm $S(u, v)$ großes Gewicht, die Lösung ist vor allem glatt und spiegelt die Eingabedaten oft kaum noch wieder.

Um das Funktional zu minimieren gibt es zwei grundlegend verschiedene Ansätze. Entweder wird zuerst das Funktional minimiert und daraufhin die Lösung diskretisiert, oder man findet zuerst eine Diskretisierung für das kontinuierliche Energiefunktional und minimiert dann. Im Folgenden werden beide Herangehensweisen behandelt.

3.2.1 Optimieren dann Diskretisieren

In dieser Herangehensweise suchen wir zuerst das Minimum unseres Energiefunktionals (Gleichung (3.5)). Der vorkommende Integrand hängt nicht nur von dem Flussfeld ab, sondern auch von dessen Ableitungen. Insgesamt kann das Energiefunktional geschrieben werden als

$$E(u, v) := \int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots, v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, \dots) dx dy \quad (3.6)$$

mit $F = \frac{1}{2}(f_x u + f_y v + f_t)^2 + \frac{\alpha}{2}(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)$.

Es ist bekannt, dass der Minimierer eines solchen Funktionals die Euler-Lagrange Gleichungen als notwendige Bedingung erfüllen muss. Für das angegebene Funktional ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_u - \partial_x F_{u_x} - \partial_y F_{u_y} &= 0 \\ F_v - \partial_x F_{v_x} - \partial_y F_{v_y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Auf dem Rand von Ω müssen zusätzlich noch die Randbedingungen erfüllt sein, wobei \mathbf{n} der Einheitsnormalenvektor ist:

$$\mathbf{n}^T \begin{pmatrix} F_{u_x} \\ F_{u_y} \end{pmatrix} = 0 \quad \mathbf{n}^T \begin{pmatrix} F_{v_x} \\ F_{v_y} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Für das betrachtete Energiefunktional ergibt sich also

$$\begin{aligned} f_x (f_x u + f_y v + f_t) - \alpha(u_{xx} + u_{yy}) &= f_x (f_x u + f_y v + f_t) - \alpha \Delta u = 0 \\ f_y (f_x u + f_y v + f_t) - \alpha(v_{xx} + v_{yy}) &= f_y (f_x u + f_y v + f_t) - \alpha \Delta v = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{n}^T \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{n}^T \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

Hier wird angemerkt, dass es diese Lösung nicht nur gibt, sondern sie auch eindeutig ist. Dies gilt, da das betrachtete Energiefunktional als Summe von quadratischen Termen ein strikt konvexes Funktional ist. Für strikt konvexe Funktionale ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert[Ble17][Bru19b].

Als nächsten Schritt gilt es nun diese Gleichungen zu diskretisieren. Hierbei werden für das Flussfeld die gleichen Gitterpunkte verwendet wie auch für die Diskretisierung der Bildfolge:

$$\begin{aligned} [f_x]_{i,j} ([f_x]_{i,j} u_{i,j} + [f_y]_{i,j} v_{i,j} + [f_t]_{i,j}) - \alpha([u_{xx}]_{i,j} + [u_{yy}]_{i,j}) &= 0 \\ [f_y]_{i,j} ([f_x]_{i,j} u_{i,j} + [f_y]_{i,j} v_{i,j} + [f_t]_{i,j}) - \alpha([v_{xx}]_{i,j} + [v_{yy}]_{i,j}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

für $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$.

Die Bildableitungen werden erst später betrachtet, aber die Flussableitungen im Diffusionsterm approximieren wir mit beliebigen zentralen Differenzenquotienten mit 5er Nachbarschaft.

$$\begin{aligned} [u_{xx}]_{i,j} &= w_{-2,x} u_{i-2,j} + w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j} + w_{2,x} u_{i+2,j} \\ [u_{yy}]_{i,j} &= w_{-2,y} u_{i,j-2} + w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1} + w_{2,y} u_{i,j+2} \\ [v_{xx}]_{i,j} &= w_{-2,x} v_{i-2,j} + w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j} + w_{2,x} v_{i+2,j} \\ [v_{yy}]_{i,j} &= w_{-2,y} v_{i,j-2} + w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1} + w_{2,y} v_{i,j+2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hierbei wird das Verhalten an den Rändern und die Randbedingungen vernachlässigt.

Insgesamt ergeben sich so die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 0 = & [f_x]_{i,j}^2 u_{i,j} + [f_x]_{i,j} [f_y]_{i,j} v_{i,j} + [f_x]_{i,j} [f_t]_{i,j} \\
 & - \alpha \left(w_{-2,x} u_{i-2,j} + w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j} + w_{2,x} u_{i+2,j} \right. \\
 & \left. + w_{-2,y} u_{i,j-2} + w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1} + w_{2,y} u_{i,j+2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

und

$$\begin{aligned}
 0 = & [f_y]_{i,j} [f_x]_{i,j} u_{i,j} + [f_y]_{i,j}^2 v_{i,j} + [f_y]_{i,j} [f_t]_{i,j} \\
 & - \alpha \left(w_{-2,x} v_{i-2,j} + w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j} + w_{2,x} v_{i+2,j} \right. \\
 & \left. + w_{-2,y} v_{i,j-2} + w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1} + w_{2,y} v_{i,j+2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

für $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$.

Da der Diffusionsterm nun diskretisiert ist, wird diese Herangehensweise nicht weiter betrachtet. Stattdessen wird nun die andere Herangehensweise betrachtet.

3.2.2 Diskretisieren dann Optimieren

Die andere Möglichkeit ist es, das Energiefunktional zuerst zu diskretisieren und dann das Minimum zu berechnen. Auch in diesem Fall vernachlässigen wir vorerst eine weitere Diskretisierung der Bildableitungen. Die Flussableitungen approximieren wir durch einen beliebigen zentralen Differenzenquotienten mit 3er Nachbarschaft:

$$\begin{aligned}
 [u_x]_{i,j} &= X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j}) \\
 [u_y]_{i,j} &= X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1}) \\
 [v_x]_{i,j} &= X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j}) \\
 [v_y]_{i,j} &= X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1})
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Damit man am Rand nicht auf Werte zugreift, die außerhalb des Bildbereiches liegen, werden Indikator-Funktionen X eingeführt.

Dadurch ergibt sich das diskretisierte Energiefunktional:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \left([f_x]_{i,j} u_{i,j} + [f_y]_{i,j} v_{i,j} + [f_t]_{i,j} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left([u_x]_{i,j}^2 + [u_y]_{i,j}^2 + [v_x]_{i,j}^2 + [v_y]_{i,j}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \left([f_x]_{i,j} u_{i,j} + [f_y]_{i,j} v_{i,j} + [f_t]_{i,j} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\alpha}{2} \left(X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j})^2 \right. \\
 &\quad + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1})^2 \\
 &\quad + X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j})^2 \\
 &\quad \left. + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1})^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

mit $\mathbf{u} = (u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{N,M-1}, u_{N,M}, v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{N,M-1}, v_{N,M})$.

Das diskretisierte Energiefunktional ist eine nur von \mathbf{u} abhängige Funktion. Deshalb gelten für die Extrema von E die notwendigen Bedingungen $\frac{\partial E}{\partial u_{k,l}} = 0$ und $\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} = 0$ für $k = 1, \dots, N$ und $l = 1, \dots, M$. Diese partiellen Ableitungen gilt es nun zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial u_{k,l}} &= [f_x]_{k,l} ([f_x]_{k,l} u_{k,l} + [f_y]_{k,l} v_{k,l} + [f_t]_{k,l}) & (k = i, l = j) \\
 &+ \alpha \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} (w_{-1,x} u_{k,l} + w_{0,x} u_{k+1,l} + w_{1,x} u_{k+2,l}) \right) & (k = i - 1, l = j) \\
 &+ X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} (w_{-1,x} u_{k-1,l} + w_{0,x} u_{k,l} + w_{1,x} u_{k+1,l}) & (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} (w_{-1,x} u_{k-2,l} + w_{0,x} u_{k-1,l} + w_{1,x} u_{k,l}) & (k = i + 1, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} (w_{-1,y} u_{k,l} + w_{0,y} u_{k,l+1} + w_{1,y} u_{k,l+2}) & (k = i, l = j - 1) \\
 &+ X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} (w_{-1,y} u_{k,l-1} + w_{0,y} u_{k,l} + w_{1,y} u_{k,l+1}) & (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} (w_{-1,y} u_{k,l-2} + w_{0,y} u_{k,l-1} + w_{1,y} u_{k,l}) & (k = i, l = j + 1) \\
 &= [f_x]_{k,l}^2 u_{k,l} + [f_x]_{k,l} [f_y]_{k,l} v_{k,l} + [f_x]_{k,l} [f_t]_{k,l} \\
 &+ \alpha \left(u_{k-2,l} (X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x}) \right. \\
 &+ u_{k-1,l} (X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x}) \\
 &+ u_{k,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2 \right) \\
 &+ u_{k+1,l} (X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x}) \\
 &+ u_{k+2,l} (X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x}) \\
 &+ u_{k,l-2} (X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y}) \\
 &+ u_{k,l-1} (X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y}) \\
 &+ u_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y}^2 + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2 \right) \\
 &+ u_{k,l+1} (X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y}) \\
 &+ u_{k,l+2} (X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y}) \left. \right) \\
 &= 0 & (3.17)
 \end{aligned}$$

Die Indizes in Klammern geben an, zu welchem Teil der Summe die Ableitung gehört.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} &= [f_y]_{k,l} ([f_x]_{k,l} u_{k,l} + [f_y]_{k,l} v_{k,l} + [f_t]_{k,l}) & (k = i, l = j) \\
&+ \alpha \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} (w_{-1,x} v_{k,l} + w_{0,x} v_{k+1,l} + w_{1,x} v_{k+2,l}) \right) & (k = i-1, l = j) \\
&+ X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} (w_{-1,x} v_{k-1,l} + w_{0,x} v_{k,l} + w_{1,x} v_{k+1,l}) & (k = i, l = j) \\
&+ X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} (w_{-1,x} v_{k-2,l} + w_{0,x} v_{k-1,l} + w_{1,x} v_{k,l}) & (k = i+1, l = j) \\
&+ X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} (w_{-1,y} v_{k,l} + w_{0,y} v_{k,l+1} + w_{1,y} v_{k,l+2}) & (k = i, l = j-1) \\
&+ X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} (w_{-1,y} v_{k,l-1} + w_{0,y} v_{k,l} + w_{1,y} v_{k,l+1}) & (k = i, l = j) \\
&+ X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} (w_{-1,y} v_{k,l-2} + w_{0,y} v_{k,l-1} + w_{1,y} v_{k,l}) & (k = i, l = j+1) \\
&= [f_y]_{k,l} [f_x]_{k,l} u_{k,l} + [f_y]_{k,l}^2 v_{k,l} + [f_y]_{k,l} [f_t]_{k,l} \\
&+ \alpha \left(v_{k-2,l} (X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x}) \right. \\
&+ v_{k-1,l} (X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x}) \\
&+ v_{k,l} (X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2) \\
&+ v_{k+1,l} (X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x}) \\
&+ v_{k+2,l} (X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x}) \\
&+ v_{k,l-2} (X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y}) \\
&+ v_{k,l-1} (X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y}) \\
&+ v_{k,l} (X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y}^2 + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2) \\
&+ v_{k,l+1} (X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y}) \\
&+ v_{k,l+2} (X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y}) \left. \right) \\
&= 0 & (3.18)
\end{aligned}$$

Diese Bedingungen lassen sich umformen zu

$$\begin{aligned}
0 &= [f_x]_{k,l}^2 u_{k,l} + [f_x]_{k,l} [f_y]_{k,l} v_{k,l} + [f_x]_{k,l} [f_t]_{k,l} \\
&+ \alpha \left(\tilde{w}_{-2,x} u_{k-2,l} + \tilde{w}_{-1,x} u_{k-1,l} + \tilde{w}_{0,x} u_{k,l} + \tilde{w}_{1,x} u_{k+1,l} + \tilde{w}_{2,x} u_{k+2,l} \right. \\
&+ \tilde{w}_{-2,y} u_{k,l-2} + \tilde{w}_{-1,y} u_{k,l-1} + \tilde{w}_{0,y} u_{k,l} + \tilde{w}_{1,y} u_{k,l+1} + \tilde{w}_{2,y} u_{k,l+2} \left. \right) & (3.19)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= [f_y]_{k,l} [f_x]_{k,l} u_{k,l} + [f_y]_{k,l}^2 v_{k,l} + [f_y]_{k,l} [f_t]_{k,l} \\
&+ \alpha \left(\tilde{w}_{-2,x} v_{k-2,l} + \tilde{w}_{-1,x} v_{k-1,l} + \tilde{w}_{0,x} v_{k,l} + \tilde{w}_{1,x} v_{k+1,l} + \tilde{w}_{2,x} v_{k+2,l} \right. \\
&+ \tilde{w}_{-2,y} v_{k,l-2} + \tilde{w}_{-1,y} v_{k,l-1} + \tilde{w}_{0,y} v_{k,l} + \tilde{w}_{1,y} v_{k,l+1} + \tilde{w}_{2,y} v_{k,l+2} \left. \right) & (3.20)
\end{aligned}$$

für $k \in \{1, \dots, N\}$ und $l \in \{1, \dots, M\}$ mit passenden $\tilde{w}_{i,x}$ und $\tilde{w}_{i,y}$ für $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Es ist leicht zu sehen, dass Gleichung (3.13) und Gleichung (3.19) bzw. Gleichung (3.14) und Gleichung (3.20) bis auf die Benennung der Variablen und das Vorzeichen vor dem α , gleich sind. Das andere Vorzeichen stammt daher, dass im zweiten Fall direkt $-\Delta u$ bzw. $-\Delta v$ diskretisiert wird, anstatt Δu bzw. Δv .

Hierdurch stellt sich die Frage: Wenn man in der ersten Herangehensweise einen bekannten optimalen Differenzenquotienten mit 5er Nachbarschaft für den Diffusionsterm wählt, wie müssten dann die Gewichte der 3er Nachbarschaft im zweiten Fall aussehen, damit sich der optimale Differenzenquotient mit 5er Nachbarschaft im Diffusionsterm bildet? Im nächsten Kapitel untersuchen wir genau diese Überlegung und wenden das gleiche Prinzip auch auf andere Glattheitsterme an.

4 Optimierte faktorisierte Diskretisierungen

In diesem Kapitel betrachten wir nun, wie die Lösungen für Faktorisierung eines optimalen Ableitungsfilters aussehen und leiten mehrere von ihnen her. Dabei werden Nachbarschaften von verschiedenen Größen betrachtet, wobei aber der Glattheitsterm des Energiefunktionals, das es zu diskretisieren gilt, für jede Größe unterschiedlich ist.

Bevor wir zu den spezifischen Nachbarschaften kommen, benötigen wir noch eine Vorüberlegung zur Struktur der Faktorisierung. Im diskreten Fall lässt sich die Diskretisierung der Ableitung für den Glattheitsterm des Energiefunktionals umschreiben als:

$$|D_x \mathbf{u}|^2 + |D_y \mathbf{u}|^2 + |D_x \mathbf{v}|^2 + |D_y \mathbf{v}|^2 \quad (4.1)$$

Hierbei werden die zwei Teile des Flussfeldes in einer Vektorform geschrieben und die Matrizen D_x bzw. D_y enthalten die zur gewählten Diskretisierung der Ableitung passenden Gewichte als Einträge.

Abgeleitet nach den u_i bzw. den v_i ergibt sich:

$$2 \left(D_x^T D_x \mathbf{u} + D_y^T D_y \mathbf{u} \right) \quad \text{bzw.} \quad 2 \left(D_x^T D_x \mathbf{v} + D_y^T D_y \mathbf{v} \right). \quad (4.2)$$

Für die gesuchte korrekte Faktorisierung gilt:

$$D_x^T D_x = -D_{xx} \quad \text{bzw.} \quad D_y^T D_y = -D_{yy} \quad (4.3)$$

wobei D_{xx} und D_{yy} die optimalen Ableitungsfiler mit passender Nachbarschaft für die zweite Ableitung sind. Das andere Vorzeichen erhalten wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen des kontinuierlichen Energiefunktionals.

Es wurde bereits etabliert, dass Ableitungen als Faltungsoperationen dargestellt werden können. Das heißt, unter Vernachlässigung des Randes gilt für den Glattheitsterm des Energiefunktionals:

$$|K_x * \mathbf{u}|^2 + |K_y * \mathbf{u}|^2 + |K_x * \mathbf{v}|^2 + |K_y * \mathbf{v}|^2 \quad (4.4)$$

wobei nun K_x bzw. K_y die zu den Diskretisierungen passenden Faltungskerne sind.

Abgeleitet ergibt sich wieder:

$$2 \left(K_x^* * K_x * \mathbf{u} + K_y^* * K_y * \mathbf{u} \right) \quad \text{bzw.} \quad 2 \left(K_x^* * K_x * \mathbf{v} + K_y^* * K_y * \mathbf{v} \right) \quad (4.5)$$

mit K_x^* bzw. K_y^* dem adjungierten Faltungskern zu K_x bzw. K_y .

Für die korrekte Faktorisierung gilt ebenfalls wieder:

$$K_x^* * K_x = -K_{xx} \quad \text{bzw.} \quad K_y^* * K_y = -K_{yy} \quad (4.6)$$

wobei K_{xx} und K_{yy} jetzt die Faltungskerne zu den optimalen Ableitungsfiltern der zweiten Ableitung sind.

Insgesamt ergibt sich, dass man den optimalen Faltungskern erhält, indem man die korrekte Faktorisierung mit ihrem adjungierten Faltungskern faltet. Diese Faltung mit dem eigenen adjungierten Faltungskern bezeichnen wir ab jetzt zur Vereinfachung als Faltung mit sich selbst oder Selbstfaltung.

Wir suchen also nach Ableitungsfiltern, die bei Faltung mit sich selbst die optimalen Ableitungsfiler ergeben, da Ableitungsfiler und Faltungskerne adjungiert zu einander sind.

Diese Überlegung wurde für das bekannte Energiefunktional durchgeführt, gilt aber auch für die später betrachteten Energiefunktionale, da sie unabhängig von dem Grad der Ableitung ist.

4.1 3er Nachbarschaft

Zuerst wird untersucht, wie der Ableitungsfiler mit 3er Nachbarschaft aussehen muss, wenn man den optimalen Ableitungsfiler mit 5er Nachbarschaft der zweiten Ableitung erhalten will. Danach leiten wir die zur Implementierung nötige Diskretisierung her.

4.1.1 Herleitung des Ableitungsfilters

Gesucht ist ein Ableitungsfiler mit 3er Nachbarschaft (a, b, c) , der nach einer Faltung mit sich selbst den bekanntesten optimalen Ableitungsfiler für die negative zweite Ableitung mit 5er Nachbarschaft ergibt $(\frac{1}{12h^2} (1, -16, 30, -16, 1))$. Dieser hat aufgrund der Herleitung ein negatives Vorzeichen, berechnet also eigentlich die Steigung in die entgegengesetzte Richtung. Die Selbstfaltung unseres Ableitungsfilters ergibt allgemein:

$$(a, b, c) * (c, b, a) = (ac, ab + bc, a^2 + b^2 + c^2, ab + bc, ac) \quad (4.7)$$

Wenn man dies mit dem gegebenen Ableitungsfiler gleichsetzt, ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$ac = \frac{1}{12h^2}, \quad ab + bc = -\frac{16}{12h^2}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{30}{12h^2} \quad (4.8)$$

Diese Gleichungen stellen ein nichtlineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten dar.

Zur Übersicht führen wir für die Herleitung die Abkürzung $z := \frac{1}{12h^2}$ ein. Dadurch ergibt sich das vereinfachte Gleichungssystem

$$ac = 1z \quad (4.9)$$

$$ab + bc = -16z \quad (4.10)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 30z. \quad (4.11)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich direkt $a, b, c \neq 0$. Durch Umformung von Gleichung (4.9) ergibt sich:

$$c = \frac{z}{a} \quad (4.12)$$

Gleichung (4.12) einsetzen in Gleichung (4.10):

$$ab + b\frac{z}{a} = -16z \Rightarrow a^2b + bz = -16az \Rightarrow b(a^2 + z) = -16az \Rightarrow b = \frac{-16az}{a^2 + z} \quad (4.13)$$

Gleichung (4.12) und Gleichung (4.13) in Gleichung (4.11):

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{-16az}{a^2 + z}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 &= 30z \\ \Rightarrow a^2 + \frac{256a^2z^2}{a^4 + 2a^2z + z^2} + \frac{z^2}{a^2} &= 30z \\ \Rightarrow a^2(a^4 + 2a^2z + z^2)a^2 + 256a^2z^2a^2 + z^2(a^4 + 2a^2z + z^2) &= 30z(a^4 + 2a^2z + z^2)a^2 \\ \Rightarrow a^8 + 2za^6 + 258z^2a^4 + 2z^3a^2 + z^4 &= 30za^6 + 60z^2a^4 + 30z^3a^2 \\ \Rightarrow a^8 - 28za^6 + 198z^2a^4 - 28z^3a^2 + z^4 &= 0 \\ \stackrel{w:=a^2}{\Rightarrow} w^4 - 28zw^3 + 198z^2w^2 - 28z^3w + z^4 &= 0 \\ \Rightarrow (w^2 - 14zw + z^2)^2 &= 0 \\ \Rightarrow w^2 - 14zw + z^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Gleichung (4.14) auflösen nach w :

$$w_1 = (7 + 4\sqrt{3})z, \quad w_2 = (7 - 4\sqrt{3})z \quad (4.15)$$

Mit $a = \sqrt{w}$ und $z = \frac{1}{12h^2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_{1/2} &= \pm\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})z} \\ &= \pm\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})\frac{1}{12h^2}} \\ &= \pm\frac{1}{h}\sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{12}} \\ &= \pm\frac{1}{h}\sqrt{\frac{84 + 48\sqrt{3}}{144}} \\ &= \pm\frac{1}{h}\sqrt{\frac{(6 + 4\sqrt{3})^2}{12^2}} \\ &= \pm\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ a_{3/4} &= \pm\sqrt{(7 - 4\sqrt{3})z} \\ &= \pm\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dadurch ergibt sich für c aus Gleichung (4.9):

$$\begin{aligned}
 c_{1/2} &= \frac{1}{a_{1/2}12h^2} = \frac{1}{\pm \frac{6+4\sqrt{3}}{12h} 12h^2} \\
 &= \pm \frac{1}{h(6+4\sqrt{3})} = \pm \frac{1}{h(6+4\sqrt{3})} \frac{6-4\sqrt{3}}{6-4\sqrt{3}} \\
 &= \pm \frac{6-4\sqrt{3}}{-12h} = \mp \frac{6-4\sqrt{3}}{12h} \\
 &= \mp \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 c_{3/4} &= \frac{1}{a_{3/4}12h^2} = \frac{1}{\pm \frac{6-4\sqrt{3}}{12h} 12h^2} \\
 &= \mp \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

und für b aus Gleichung (4.10):

$$\begin{aligned}
 b_{1/2} &= -\frac{4}{3h^2(a_{1/2} + c_{1/2})} = -\frac{4}{3h^2(\pm \frac{6+4\sqrt{3}}{12h} \mp \frac{6-4\sqrt{3}}{12h})} \\
 &= -\frac{4}{3h} \frac{12}{\pm 8\sqrt{3}} = -\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3h} \\
 &= \frac{1}{h} \left(\mp \frac{2\sqrt{3}}{3h} \right) \\
 b_{3/4} &= -\frac{4}{3h^2(a_{3/4} + c_{3/4})} = -\frac{4}{3h^2(\pm \frac{6-4\sqrt{3}}{12h} \mp \frac{6+4\sqrt{3}}{12h})} \\
 &= \frac{1}{h} \left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{3h} \right)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Lösungen sind die Ableitungsfiler:

$$\begin{aligned}
 (a_1, b_1, c_1) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 (a_2, b_2, c_2) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 (a_3, b_3, c_3) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 (a_4, b_4, c_4) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Insgesamt lässt sich dies vereinfachen zu:

$$(a, b, c) = \pm \left(\frac{1}{2h} (-1, 0, 1) \pm \frac{\sqrt{3}h}{3} \cdot \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \right). \tag{4.20}$$

Es handelt sich also um eine Approximation der ersten Ableitung plus eine gewichtete Approximation der zweiten Ableitung. Hierbei ist das erste Vorzeichen egal, da es durch die Selbstfaltung immer wegfällt, und das zweite Vorzeichen führt nur zu einer Spiegelung des Filters, was durch die Selbstfaltung zum selben Ergebnis führt. Deshalb wählen wir in beiden Fällen das positive Vorzeichen für den 'einfachsten' Filter:

$$(a, b, c) = \frac{1}{2h} (-1, 0, 1) + \frac{\sqrt{3}h}{3} \cdot \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (4.21)$$

welchen wir im weiteren Verlauf verwenden.

4.1.2 Herleitung der Diskretisierung

Das weiter zu diskretisierende Energiefunktional hatte in Kapitel 3 die Form

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_x]_{i,j}^2 + [u_y]_{i,j}^2 + [v_x]_{i,j}^2 + [v_y]_{i,j}^2 \right) \quad (4.22)$$

und die notwendigen Bedingungen für das gesuchte Minimum waren $\frac{\partial E}{\partial u_{k,l}} = 0$ und $\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} = 0$. Die hier verwendete Darstellung ist eine alternative Darstellung, die später, wenn auch der Datenterm genauer betrachtet wird, noch ausführlich erklärt wird (siehe Abschnitt 5.4). Hier gilt es nur anzumerken, dass die Darstellung für eine passende Matrix \mathbf{J} und $\mathbf{w} = (u, v, 1)^T$ äquivalent zu der bisher verwendeten Darstellung ist.

In Kapitel 6 wollen wir uns auch subquadratische Bestrafungsfunktionen im Glattheitsterm und im Datenterm anschauen. Diese gewichten große Ableitungen weniger, wodurch Kanten im optischen Fluss besser erhalten bleiben, was oft zu besseren Ergebnissen führt, da diese sonst zu stark geglättet werden. Deshalb können wir nicht die Herleitung aus Kapitel 3 verwenden, sondern müssen es uns erneut herleiten. Die Version mit den Bestrafungsfunktionen lässt sich leicht wieder zu der ohne Bestrafungsfunktionen vereinfachen. Dafür wählt man als Bestrafungsfunktion einfach $\Psi(s^2) = s^2$. In diesem Fall ergibt sich das bekannte Energiefunktional und für die partiellen Ableitungen mit $\Psi'(s^2) = 1$, wie wir noch sehen werden, die bekannten partiellen Ableitungen.

Als subquadratische Bestrafungsfunktion wird $\Psi(s^2) = 2\lambda^2 \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} - 2\lambda$ verwendet. Damit werden größere Ableitungen statt quadratisch nur ungefähr linear mehr gewichtet. Kleine Ableitungen werden damit noch stärker bestraft als bei der quadratischen Bestrafungsfunktion, aber größere Ableitungen, die vor allem an Kanten auftreten, werden viel weniger bestraft. Die Ableitung hier ergibt sich zu $\Psi'(s^2) = 1/\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}$. Das Verhalten von beiden Bestrafungsfunktionen ist in Abbildung 4.1 zu sehen.

Hierbei ist anzumerken, dass die Herleitungen von Glattheits- und Datenterm unabhängig voneinander betrachtet werden kann. Dies liegt daran, dass wir die Summe im Energiefunktional zu zwei unabhängigen Summen umschreiben können, weswegen es beim Ableiten möglich ist, sie unabhängig zu betrachten. Die beiden Teile des Energiefunktionals werden im folgenden E_d für den Datenterm und E_s für den Glattheitsterm genannt. Deshalb betrachten wir zuerst verschiedene Glattheitsterme und kommen erst danach zu einem Datenterm.

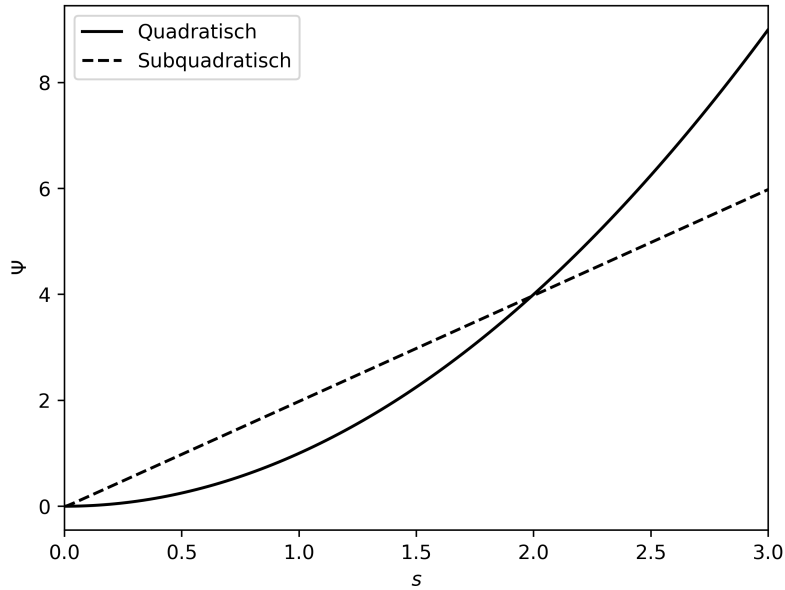


Abbildung 4.1: Quadratische und subquadratische Bestrafungsfunktion mit $\lambda = 0.01$.

Bei der Herleitung verwenden wir wieder die beliebigen Differenzenquotienten aus Gleichung (3.15) und als Bestrafungsfunktion ein Ψ_s . Dadurch ergibt sich der Glattheitsteil des Energiefunktionals zu

$$\begin{aligned}
 E_s(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left([u_x]_{i,j}^2 + [u_y]_{i,j}^2 + [v_x]_{i,j}^2 + [v_y]_{i,j}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left(X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j})^2 \right. \\
 &\quad + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1})^2 \\
 &\quad + X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j})^2 \\
 &\quad \left. + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1})^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Weiterhin wird folgende Abkürzung zur Vereinfachung der Ableitung eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{s,i,j} &= \Psi'_s \left(X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j})^2 \right. \\
 &\quad + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1})^2 \\
 &\quad + X_{[2,N-1][1,M]} (w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j})^2 \\
 &\quad \left. + X_{[1,N][2,M-1]} (w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1})^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nun gilt es, die partiellen Ableitungen des Glattheitsterms zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_s}{\partial u_{k,l}} &= \alpha \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} (w_{-1,x} u_{k,l} + w_{0,x} u_{k+1,l} + w_{1,x} u_{k+2,l}) \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i-1, l = j) \right. \\
&\quad + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} (w_{-1,x} u_{k-1,l} + w_{0,x} u_{k,l} + w_{1,x} u_{k+1,l}) \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
&\quad + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} (w_{-1,x} u_{k-2,l} + w_{0,x} u_{k-1,l} + w_{1,x} u_{k,l}) \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i+1, l = j) \\
&\quad + X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} (w_{-1,y} u_{k,l} + w_{0,y} u_{k,l+1} + w_{1,y} u_{k,l+2}) \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j-1) \\
&\quad + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} (w_{-1,y} u_{k,l-1} + w_{0,y} u_{k,l} + w_{1,y} u_{k,l+1}) \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
&\quad \left. + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} (w_{-1,y} u_{k,l-2} + w_{0,y} u_{k,l-1} + w_{1,y} u_{k,l}) \Psi'_{s,k,l-1} \right) \quad (k = i, l = j+1) \\
&= \alpha \left(u_{k-2,l} \left(X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right. \\
&\quad + u_{k-1,l} \left(X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
&\quad + u_{k,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \quad \left. + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
&\quad + u_{k+1,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
&\quad + u_{k+2,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right) \\
&\quad + u_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
&\quad + u_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
&\quad + u_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \quad \left. + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
&\quad + u_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
&\quad \left. + u_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Indizes in Klammern geben an, zu welchem Teil der Summe die Ableitung gehört.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial v_{k,l}} &= \alpha \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} (w_{-1,x} v_{k,l} + w_{0,x} v_{k+1,l} + w_{1,x} v_{k+2,l}) \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i-1, l = j) \right. \\
 &\quad + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} (w_{-1,x} v_{k-1,l} + w_{0,x} v_{k,l} + w_{1,x} v_{k+1,l}) \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &\quad + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} (w_{-1,x} v_{k-2,l} + w_{0,x} v_{k-1,l} + w_{1,x} v_{k,l}) \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i+1, l = j) \\
 &\quad + X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} (w_{-1,y} v_{k,l} + w_{0,y} v_{k,l+1} + w_{1,y} v_{k,l+2}) \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j-1) \\
 &\quad + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} (w_{-1,y} v_{k,l-1} + w_{0,y} v_{k,l} + w_{1,y} v_{k,l+1}) \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &\quad \left. + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} (w_{-1,y} v_{k,l-2} + w_{0,y} v_{k,l-1} + w_{1,y} v_{k,l}) \Psi'_{s,k,l-1} \right) \quad (k = i, l = j+1) \\
 &= \alpha \left(v_{k-2,l} \left(X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right. \\
 &\quad + v_{k-1,l} \left(X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
 &\quad + v_{k,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
 &\quad + v_{k+1,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
 &\quad + v_{k+2,l} \left(X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right) \\
 &\quad + v_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 &\quad + v_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 &\quad + v_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 &\quad + v_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
 &\quad \left. + v_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Filtermasken verstehen, welche auf u und v angewendet werden. Dabei sind die Filtermasken für beide Fälle gleich.

	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
$l-2$	0	0	$\tilde{w}_{-2,y}$	0	0
$l-1$	0	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0	0
l	$\tilde{w}_{-2,x}$	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$	$\tilde{w}_{2,x}$
$l+1$	0	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0	0
$l+2$	0	0	$\tilde{w}_{2,y}$	0	0

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{-2,x} &= X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
\tilde{w}_{-1,x} &= X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
\tilde{w}_{0,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} \\
\tilde{w}_{1,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} \\
\tilde{w}_{2,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \\
\tilde{w}_{-2,y} &= X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
\tilde{w}_{-1,y} &= X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
\tilde{w}_{0,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} \\
\tilde{w}_{1,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} \\
\tilde{w}_{2,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

und

$$\begin{aligned}
(w_{-1,x}, w_{0,x}, w_{1,x}) &= \frac{1}{2h_x} (-1, 0, 1) + \frac{\sqrt{3}h_x}{3} \cdot \frac{1}{h_x^2} (1, -2, 1) \\
(w_{-1,y}, w_{0,y}, w_{1,y}) &= \frac{1}{2h_y} (-1, 0, 1) + \frac{\sqrt{3}h_y}{3} \cdot \frac{1}{h_y^2} (1, -2, 1)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Solange die Indikatorfunktionen 1 sind, also man nicht zu nah am Rand ist, ist dies der gewünschte optimale Ableitungsfiler für den Diffusionsterm. Es gilt also bei einem Abstand zum Rand von mindestens 2 Pixeln auf allen Seiten für die quadratische Bestrafungsfunktion mit $\Psi'(s^2) = 1$:

	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$
$l-2$	0	0	$\frac{1}{12h_y^2}$	0	0
$l-1$	0	0	$-\frac{16}{12h_y^2}$	0	0
l	$\frac{1}{12h_x^2}$	$-\frac{16}{12h_x^2}$	$\frac{30}{12h_x^2} + \frac{30}{12h_y^2}$	$-\frac{16}{12h_x^2}$	$\frac{1}{12h_x^2}$
$l+1$	0	0	$-\frac{16}{12h_y^2}$	0	0
$l+2$	0	0	$\frac{1}{12h_y^2}$	0	0

4.2 4er Nachbarschaft

Als nächstes kommen wir zur Herleitung für die 4er Nachbarschaft. In diesem Fall ist der zum Glattheitsterm gehörende Anteil des Energiefunktional anders gewählt. Das Glattheitskriterium ist nicht die Glattheit der ersten Ableitung, sondern die der zweiten Ableitung. Damit beide Richtungen getrennt faktorisiert werden können, werden keine Bedingungen an die gemischten Terme gestellt.

$$0 = |u_{xx}|^2 + |u_{yy}|^2 + |v_{xx}|^2 + |v_{yy}|^2 \quad (4.29)$$

Bei der Verwendung der ersten Ableitung werden konstante Flussfelder bevorzugt. Deshalb wird hier die zweite Ableitung verwendet, welche lineare Flussfelder geringer bestraft. Hierdurch können für manche Bildfolgen bessere Ergebnisse erwartet werden, da sie zwar linear glatt sind, aber nicht konstant. Zusätzlich wurde für die 3er Nachbarschaft die zweite Ableitung mit 5er Nachbarschaft faktorisiert. Das Ergebnis war die Selbstfaltung der ersten Ableitung plus einen gewichteten Anteil der zweiten Ableitung. Die zweite Ableitung ist die höchste Ableitung, die noch mit 3 Punkten approximiert werden kann. Überträgt man diesen Gedanken auf die 4er Nachbarschaft, so ist die höchste approximierbare Ableitung die dritte Ableitung. Somit sollte die Faktorisierung der vierten Ableitung eine Selbstfaltung der zweiten Ableitung plus gewichtete dritte Ableitung sein. Diesen Gedanken verwenden wir um die Herleitung des Filters zu verkürzen.

Das sich ergebende kontinuierlichen Energiefunktional sieht wie folgt aus:

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{J} \mathbf{w})^2}_{D(u,v)} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} (|u_{xx}|^2 + |u_{yy}|^2 + |v_{xx}|^2 + |v_{yy}|^2)}_{S(u,v)} dx dy \quad (4.30)$$

Damit ist das F aus Gleichung (3.6):

$$F = \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{J} \mathbf{w})^2 + \frac{\alpha}{2} (|u_{xx}|^2 + |u_{yy}|^2 + |v_{xx}|^2 + |v_{yy}|^2) \quad (4.31)$$

In diesem Fall sind die Euler-Lagrange Gleichungen länger als für die 3er Nachbarschaft, da F von mehr Ableitungen abhängt.

$$\begin{aligned} F_u - \partial_x F_{u_x} - \partial_y F_{u_y} + \partial_{xx} F_{u_{xx}} + 2\partial_{xy} F_{u_{xy}} + \partial_{yy} F_{u_{yy}} &= 0 \\ F_v - \partial_x F_{v_x} - \partial_y F_{v_y} + \partial_{xx} F_{v_{xx}} + 2\partial_{xy} F_{v_{xy}} + \partial_{yy} F_{v_{yy}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aufgelöst ergeben sich für das neue F die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} J_{11} u + J_{12} v + J_{13} + \alpha (u_{xxxx} + u_{yyyy}) &= 0 \\ J_{12} u + J_{22} v + J_{23} + \alpha (v_{xxxx} + v_{yyyy}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Hier sieht man dann die Unterschiede zur ursprünglichen Herleitung. Es liegt die vierte Ableitung im Diffusionsterm vor und sie hat ein positives Vorzeichen. Einen optimalen Ableitungsfiler hierfür gilt es nun zu faktorisieren.

4.2.1 Herleitung des Ableitungsfilters

Gesucht ist ein Ableitungsfilter mit 4er Nachbarschaft (a, b, c, d) , der nach einer Faltung mit sich selbst den bekannten optimalen Ableitungsfilter für die vierte Ableitung mit 7er Nachbarschaft ergibt $(\frac{1}{6h^4}(-1, 12, -39, 56, -39, 12, -1))$. Die Selbstfaltung unseres Ableitungsfilters ergibt allgemein:

$$(a, b, c, d) * (d, c, b, a) = \left(ad, ac + bd, ab + bc + cd, a^2 + b^2 + c^2 + d^2, ab + bc + cd, ac + bd, ad \right) \quad (4.34)$$

Wenn man dies mit dem gegebenen Ableitungsfilter gleichsetzt, ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$ad = -\frac{1}{6h^4}, \quad ac + bd = \frac{12}{6h^4}, \quad ab + bc + cd = -\frac{39}{6h^4}, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{56}{6h^4} \quad (4.35)$$

Diese Gleichungen stellen wieder ein nichtlineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten dar. Allerdings ist es möglich, dieses Gleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem mit einer Unbekannten zu vereinfachen. Für die 3er Nachbarschaft ergab sich die optimale zweite Ableitung durch die Selbstfaltung der ersten Ableitung plus gewichtete zweite Ableitung. Wie bereits gesagt führt dieses Muster, erweitert auf die 4er Nachbarschaft, zu, zweite Ableitung plus gewichtete dritte Ableitung ist selbstgefaltet die optimale vierte Ableitung. Außerdem wird nur eine Lösung benötigt. Die Differenzenquotienten mit 4er Nachbarschaft für die zweite bzw. dritte Ableitung sind:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} (1, -1, -1, 1) \\ \text{bzw.} & \frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Damit lässt sich die Gleichung umformulieren zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} \left(1 - 2\frac{\beta}{h}, -1 + 2\frac{3\beta}{h}, -1 - 2\frac{3\beta}{h}, 1 + 2\frac{\beta}{h} \right) * \frac{1}{2h^2} \left(1 - 2\frac{\beta}{h}, -1 + 2\frac{3\beta}{h}, -1 - 2\frac{3\beta}{h}, 1 + 2\frac{\beta}{h} \right) \\ & = \frac{1}{6h^4} (-1, 12, -39, 56, -39, 12, -1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem mit nur einer Unbekannten:

$$\frac{1}{h^4} \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{h^2} \right) = -\frac{1}{6h^4} \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{h^4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{6\beta^2}{h^2} \right) = \frac{12}{6h^4} \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{h^4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{15\beta^2}{h^2} \right) = -\frac{39}{6h^4} \quad (4.40)$$

$$\frac{1}{h^4} \left(1 + \frac{20\beta^2}{h^2} \right) = \frac{56}{6h^4} \quad (4.41)$$

Nach β aufgelöst ergibt sich für alle Gleichungen

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{5}{12}} h \quad (4.42)$$

Damit ergeben sich zwei Ableitungsfiler als Lösung. Es gibt aber wie auch im Fall der 3er Nachbarschaft noch zwei weitere Lösungen. Diese erhält man mit einem negativen Vorzeichen vor dem Ableitungsfiler, welches durch die Selbstfaltung wegfällt. Mit diesen Lösungen ergeben sich vier Ableitungsfiler:

$$(a, b, c, d) = \pm \left(\frac{1}{2h^2} (1, -1, -1, 1) \pm \sqrt{\frac{5}{12}} h \cdot \frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1) \right). \quad (4.43)$$

Wir verwenden wie auch schon bei der 3er Nachbarschaft nur eine dieser Lösungen. Dabei wählen wir den äquivalenten zu dem, den wir bei der 3er Nachbarschaft gewählt haben.

$$(a, b, c, d) = \frac{1}{2h^2} (1, -1, -1, 1) + \sqrt{\frac{5}{12}} h \cdot \frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1). \quad (4.44)$$

4.2.2 Herleitung der Diskretisierung

Zu dem neuen kontinuierlichen Energiefunktional ergibt sich das neue diskrete Energiefunktional:

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_{xx}]_{i,j}^2 + [u_{yy}]_{i,j}^2 + [v_{xx}]_{i,j}^2 + [v_{yy}]_{i,j}^2 \right) \quad (4.45)$$

Auch hier gelten selbstverständlich weiterhin die notwendigen Bedingungen für das gesuchte Minimum $\frac{\partial E}{\partial u_{k,l}} = 0$ und $\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} = 0$.

Für die Ableitung werden auch wieder allgemeine Differenzenquotienten, diesmal mit einer 4er Nachbarschaft, verwendet. Dies bedeutet, die Stelle an der approximiert wird liegt zwischen den mittleren Auswertungspunkten.

$$\begin{aligned} [u_{xx}]_{i,j} &= X_{[2.5, N-1.5][1, M]} (w_{-1.5, x} u_{i-1.5, j} + w_{-0.5, x} u_{i-0.5, j} + w_{0.5, x} u_{i+0.5, j} + w_{1.5, x} u_{i+1.5, j}) \\ [u_{yy}]_{i,j} &= X_{[1, N][2.5, M-1.5]} (w_{-1.5, y} u_{i, j-1.5} + w_{-0.5, y} u_{i, j-0.5} + w_{0.5, y} u_{i, j+0.5} + w_{1.5, y} u_{i, j+1.5}) \\ [v_{xx}]_{i,j} &= X_{[2.5, N-1.5][1, M]} (w_{-1.5, x} v_{i-1.5, j} + w_{-0.5, x} v_{i-0.5, j} + w_{0.5, x} v_{i+0.5, j} + w_{1.5, x} v_{i+1.5, j}) \\ [v_{yy}]_{i,j} &= X_{[1, N][2.5, M-1.5]} (w_{-1.5, y} v_{i, j-1.5} + w_{-0.5, y} v_{i, j-0.5} + w_{0.5, y} v_{i, j+0.5} + w_{1.5, y} v_{i, j+1.5}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Auch in diesem Fall führen wir subquadratische Bestrafungsfunktionen ein und nutzen wieder aus, dass wir die Terme getrennt betrachten können.

Dadurch ergibt sich für den Glattheitsterm:

$$\begin{aligned}
E_s(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left([u_{xx}]_{i,j}^2 + [u_{yy}]_{i,j}^2 + [v_{xx}]_{i,j}^2 + [v_{yy}]_{i,j}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left(\right. \\
&\quad X_{[2.5,N-1.5][1,M]} \left(w_{-1.5,x} u_{i-1.5,j} + w_{-0.5,x} u_{i-0.5,j} + w_{0.5,x} u_{i+0.5,j} + w_{1.5,x} u_{i+1.5,j} \right)^2 \\
&\quad + X_{[1,N][2.5,M-1.5]} \left(w_{-1.5,y} u_{i,j-1.5} + w_{-0.5,y} u_{i,j-0.5} + w_{0.5,y} u_{i,j+0.5} + w_{1.5,y} u_{i,j+1.5} \right)^2 \\
&\quad + X_{[2.5,N-1.5][1,M]} \left(w_{-1.5,x} v_{i-1.5,j} + w_{-0.5,x} v_{i-0.5,j} + w_{0.5,x} v_{i+0.5,j} + w_{1.5,x} v_{i+1.5,j} \right)^2 \\
&\quad \left. + X_{[1,N][2.5,M-1.5]} \left(w_{-1.5,y} v_{i,j-1.5} + w_{-0.5,y} v_{i,j-0.5} + w_{0.5,y} v_{i,j+0.5} + w_{1.5,y} v_{i,j+1.5} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Weiterhin wird folgende Abkürzung zur Vereinfachung der Ableitung eingeführt:

$$\begin{aligned}
\Psi'_{s,i,j} &= \Psi'_s \left(X_{[2.5,N-1.5][1,M]} \left(w_{-1.5,x} u_{i-1.5,j} + w_{-0.5,x} u_{i-0.5,j} + w_{0.5,x} u_{i+0.5,j} + w_{1.5,x} u_{i+1.5,j} \right)^2 \right. \\
&\quad + X_{[1,N][2.5,M-1.5]} \left(w_{-1.5,y} u_{i,j-1.5} + w_{-0.5,y} u_{i,j-0.5} + w_{0.5,y} u_{i,j+0.5} + w_{1.5,y} u_{i,j+1.5} \right)^2 \\
&\quad + X_{[2.5,N-1.5][1,M]} \left(w_{-1.5,x} v_{i-1.5,j} + w_{-0.5,x} v_{i-0.5,j} + w_{0.5,x} v_{i+0.5,j} + w_{1.5,x} v_{i+1.5,j} \right)^2 \\
&\quad \left. + X_{[1,N][2.5,M-1.5]} \left(w_{-1.5,y} v_{i,j-1.5} + w_{-0.5,y} v_{i,j-0.5} + w_{0.5,y} v_{i,j+0.5} + w_{1.5,y} v_{i,j+1.5} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Hierbei werden die vorkommenden Werte des Flussfeldes, die zwischen den Einträgen liegen, durch das Mitteln der benachbarten Werte berechnet.

$$\begin{aligned}
u_{i-1.5,j} &= \frac{u_{i-2,j} + u_{i-1,j}}{2} & u_{i-0.5,j} &= \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \\
u_{i+0.5,j} &= \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} & u_{i+1.5,j} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Äquivalent werden die Werte berechnet, die in y-Richtung dazwischen liegen, und die Werte von v .

Nun gilt es die partiellen Ableitungen des Glattheitsterms zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial u_{k,l}} &= \alpha \left((w_{-1.5,x} u_{k,l} + w_{-0.5,x} u_{k+1,l} + w_{0.5,x} u_{k+2,l} + w_{1.5,x} u_{k+3,l}) \right. \\
 &\quad \cdot X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \quad (k = i - 1.5, l = j) \\
 &+ (w_{-1.5,x} u_{k-1,l} + w_{-0.5,x} u_{k,l} + w_{0.5,x} u_{k+1,l} + w_{1.5,x} u_{k+2,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \quad (k = i - 0.5, l = j) \\
 &+ (w_{-1.5,x} u_{k-2,l} + w_{-0.5,x} u_{k-1,l} + w_{0.5,x} u_{k,l} + w_{1.5,x} u_{k+1,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \quad (k = i + 0.5, l = j) \\
 &+ (w_{-1.5,x} u_{k-3,l} + w_{-0.5,x} u_{k-2,l} + w_{0.5,x} u_{k-1,l} + w_{1.5,x} u_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \quad (k = i + 1.5, l = j) \\
 &+ (w_{-1.5,y} u_{k,l} + w_{-0.5,y} u_{k,l+1} + w_{0.5,y} u_{k,l+2} + w_{1.5,y} u_{k,l+3}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} \quad (k = i, l = j - 1.5) \\
 &+ (w_{-1.5,y} u_{k,l-1} + w_{-0.5,y} u_{k,l} + w_{0.5,y} u_{k,l+1} + w_{1.5,y} u_{k,l+2}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \quad (k = i, l = j - 0.5) \\
 &+ (w_{-1.5,y} u_{k,l-2} + w_{-0.5,y} u_{k,l-1} + w_{0.5,y} u_{k,l} + w_{1.5,y} u_{k,l+1}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \quad (k = i, l = j + 0.5) \\
 &+ (w_{-1.5,y} u_{k,l-3} + w_{-0.5,y} u_{k,l-2} + w_{0.5,y} u_{k,l-1} + w_{1.5,y} u_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \quad (k = i, l = j + 1.5) \\
 &= \alpha \left(u_{k-3,l} \left(X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \right. \\
 &\quad + u_{k-2,l} \left(X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
 &\quad + u_{k-1,l} \left(X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
 &\quad + u_{k,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x}^2 \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x}^2 \Psi'_{s,k+0.5,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x}^2 \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x}^2 \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
 &\quad + u_{k+1,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \right) \\
 &\quad + u_{k+2,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \right) \\
 &\quad + u_{k+3,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Weiter auf der nächsten Seite.

$$\begin{aligned}
 \dots & + u_{k,l-3} \left(X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
 & + u_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
 & + u_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \right. \\
 & \quad \left. + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
 & + u_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+0.5} \right. \\
 & \quad \left. + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
 & + u_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \right. \\
 & \quad \left. + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \right) \\
 & + u_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \right) \\
 & + u_{k,l+3} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} \right)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Die Indizes in Klammern geben an, zu welchem Teil der Summe die Ableitung gehört.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial v_{k,l}} &= \alpha \left((w_{-1.5,x} v_{k,l} + w_{-0.5,x} v_{k+1,l} + w_{0.5,x} v_{k+2,l} + w_{1.5,x} v_{k+3,l}) \right. \\
 & \quad \cdot X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \quad (k = i - 1.5, l = j) \\
 & + (w_{-1.5,x} v_{k-1,l} + w_{-0.5,x} v_{k,l} + w_{0.5,x} v_{k+1,l} + w_{1.5,x} v_{k+2,l}) \\
 & \quad \cdot X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \quad (k = i - 0.5, l = j) \\
 & + (w_{-1.5,x} v_{k-2,l} + w_{-0.5,x} v_{k-1,l} + w_{0.5,x} v_{k,l} + w_{1.5,x} v_{k+1,l}) \\
 & \quad \cdot X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \quad (k = i + 0.5, l = j) \\
 & + (w_{-1.5,x} v_{k-3,l} + w_{-0.5,x} v_{k-2,l} + w_{0.5,x} v_{k-1,l} + w_{1.5,x} v_{k,l}) \\
 & \quad \cdot X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \quad (k = i + 1.5, l = j) \\
 & + (w_{-1.5,y} v_{k,l} + w_{-0.5,y} v_{k,l+1} + w_{0.5,y} v_{k,l+2} + w_{1.5,y} v_{k,l+3}) \\
 & \quad \cdot X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} \quad (k = i, l = j - 1.5) \\
 & + (w_{-1.5,y} v_{k,l-1} + w_{-0.5,y} v_{k,l} + w_{0.5,y} v_{k,l+1} + w_{1.5,y} v_{k,l+2}) \\
 & \quad \cdot X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \quad (k = i, l = j - 0.5) \\
 & + (w_{-1.5,y} v_{k,l-2} + w_{-0.5,y} v_{k,l-1} + w_{0.5,y} v_{k,l} + w_{1.5,y} v_{k,l+1}) \\
 & \quad \cdot X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \quad (k = i, l = j + 0.5) \\
 & + (w_{-1.5,y} v_{k,l-3} + w_{-0.5,y} v_{k,l-2} + w_{0.5,y} v_{k,l-1} + w_{1.5,y} v_{k,l}) \\
 & \quad \cdot X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \quad (k = i, l = j + 1.5) \\
 & = \dots
 \end{aligned}$$

Weiter auf der nächsten Seite.

$$\begin{aligned}
\dots = & \alpha \left(v_{k-3,l} \left(X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \right. \\
& + v_{k-2,l} \left(X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
& + v_{k-1,l} \left(X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
& + v_{k,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x}^2 \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x}^2 \Psi'_{s,k+0.5,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x}^2 \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x}^2 \Psi'_{s,k-1.5,l} \right) \\
& + v_{k+1,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \right) \\
& + v_{k+2,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \right) \\
& + v_{k+3,l} \left(X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \right) \\
& + v_{k,l-3} \left(X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
& + v_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
& + v_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
& + v_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+0.5} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1.5} \right) \\
& + v_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \right) \\
& + v_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \right) \\
& \left. + v_{k,l+3} \left(X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Ähnlich wie auch die Werte des Flussfeldes in den Bestrafungsfunktionen $\Psi_{s,k,l}$ durch Mitteln berechnet wurden, werden auch die Evaluationen der Ableitungen der Bestrafungsfunktionen die zwischen zwei Werten liegen durch Mitteln der Benachbarten berechnet. Zum Beispiel:

$$\Psi'_{s,k+0.5,l} = \frac{\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k+1,l}}{2} \tag{4.52}$$

Die anderen Werte werden äquivalent berechnet.

Diese Gleichungen lassen sich auch als Filtermasken verstehen, welche auf u und v angewendet werden. Dabei sind die Filtermasken für beide Fälle gleich.

	$k-3$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$
$l-3$	0	0	0	$\tilde{w}_{-3,y}$	0	0	0
$l-2$	0	0	0	$\tilde{w}_{-2,y}$	0	0	0
$l-1$	0	0	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0	0	0
l	$\tilde{w}_{-3,x}$	$\tilde{w}_{-2,x}$	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$	$\tilde{w}_{2,x}$	$\tilde{w}_{3,x}$
$l+1$	0	0	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0	0	0
$l+2$	0	0	0	$\tilde{w}_{2,y}$	0	0	0
$l+3$	0	0	0	$\tilde{w}_{3,y}$	0	0	0

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{-3,x} &= X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
\tilde{w}_{-2,x} &= X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
\tilde{w}_{-1,x} &= X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \\
&\quad + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
\tilde{w}_{0,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x}^2 \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x}^2 \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
&\quad + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x}^2 \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x}^2 \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
\tilde{w}_{1,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
&\quad + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \\
\tilde{w}_{2,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
\tilde{w}_{3,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \\
\tilde{w}_{-3,y} &= X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
\tilde{w}_{-2,y} &= X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
\tilde{w}_{-1,y} &= X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \\
&\quad + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
\tilde{w}_{0,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
&\quad + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
\tilde{w}_{1,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
&\quad + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \\
\tilde{w}_{2,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
\tilde{w}_{3,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

und

$$\begin{aligned} (w_{-1.5,x}, w_{-0.5,x}, w_{0.5,x}, w_{1.5,x}) &= \frac{1}{2h^2} (1, -1, -1, 1) + \sqrt{\frac{5}{12}} h \cdot \frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1) \\ (w_{-1.5,y}, w_{-0.5,y}, w_{0.5,y}, w_{1.5,y}) &= \frac{1}{2h^2} (1, -1, -1, 1) + \sqrt{\frac{5}{12}} h \cdot \frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Solange die Indikatorfunktionen 1 sind, also man nicht zu nah am Rand ist, ist dies der gewünschte optimale Ableitungsfilter für den Diffusionsterm. Es gilt somit bei einem Abstand zum Rand von mindestens 3 Pixeln auf allen Seiten für die quadratische Bestrafungsfunktion mit $\Psi'(s^2) = 1$:

	$k-3$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$
$l-3$	0	0	0	$-\frac{1}{6h_y^4}$	0	0	0
$l-2$	0	0	0	$\frac{12}{6h_y^4}$	0	0	0
$l-1$	0	0	0	$-\frac{39}{6h_y^4}$	0	0	0
l	$-\frac{1}{6h_x^4}$	$\frac{12}{6h_x^4}$	$-\frac{39}{6h_x^4}$	$\frac{56}{6h_x^4} + \frac{56}{6h_y^4}$	$-\frac{39}{6h_x^4}$	$\frac{12}{6h_x^4}$	$-\frac{1}{6h_x^4}$
$l+1$	0	0	0	$-\frac{39}{6h_y^4}$	0	0	0
$l+2$	0	0	0	$\frac{12}{6h_y^4}$	0	0	0
$l+3$	0	0	0	$-\frac{1}{6h_y^4}$	0	0	0

4.3 5er Nachbarschaft

Als letzte neue Nachbarschaft wird die 5er Nachbarschaft hergeleitet. Auch in diesem Fall ist der zum Glattheitsterm gehörende Anteil des Energiefunktional anders gewählt. Das Glattheitskriterium ist nun die Glattheit der dritten Ableitung und es werden wieder keine Bedingungen an die gemischten Terme gestellt, damit die getrennte Faktorisierung möglich ist.

$$0 = |u_{xxx}|^2 + |u_{yyy}|^2 + |v_{xxx}|^2 + |v_{yyy}|^2 \quad (4.55)$$

Die Gedanken, die hier zur Verwendung der dritten Ableitung führen, sind ähnlich zu denen, die bei der 4er Nachbarschaft zur zweiten Ableitung führen. Einerseits ist für manche Bildfolgen ein besseres Ergebnis zu erwarten, da jetzt quadratische Ergebnisse bevorzugt werden. Andererseits führt eine Übertragung der bisherigen Struktur der Faktorisierungen dazu, dass es sich hier um die dritte Ableitung handeln sollte.

Dadurch ergibt sich das kontinuierlichen Energiefunktional zu:

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{J} \mathbf{w})^2}_{D(u,v)} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} (|u_{xxx}|^2 + |u_{yyy}|^2 + |v_{xxx}|^2 + |v_{yyy}|^2)}_{S(u,v)} dx dy \quad (4.56)$$

Damit ist das F aus Gleichung (3.6):

$$F = \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T \mathbf{J} \mathbf{w})^2 + \frac{\alpha}{2} (|u_{xxx}|^2 + |u_{yyy}|^2 + |v_{xxx}|^2 + |v_{yyy}|^2) \quad (4.57)$$

In diesem Fall sind die Euler-Lagrange Gleichungen länger als für die 3er Nachbarschaft, da F von mehr Ableitungen abhängt.

$$\begin{aligned} F_u - \partial_x F_{u_x} - \partial_y F_{u_y} + \partial_{xx} F_{u_{xx}} + 2\partial_{xy} F_{u_{xy}} + \partial_{yy} F_{u_{yy}} \\ - \partial_{xxx} F_{u_{xxx}} - 3\partial_{xxy} F_{u_{xxy}} - 3\partial_{xyy} F_{u_{xyy}} - \partial_{yyy} F_{u_{yyy}} = 0 \\ F_v - \partial_x F_{v_x} - \partial_y F_{v_y} + \partial_{xx} F_{v_{xx}} + 2\partial_{xy} F_{v_{xy}} + \partial_{yy} F_{v_{yy}} \\ - \partial_{xxx} F_{v_{xxx}} - 3\partial_{xxy} F_{v_{xxy}} - 3\partial_{xyy} F_{v_{xyy}} - \partial_{yyy} F_{v_{yyy}} = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Aufgelöst ergeben sich für das neue F die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} J_{11} u + J_{12} v + J_{13} - \alpha (u_{xxxxxx} + u_{yyyyyy}) = 0 \\ J_{12} u + J_{22} v + J_{23} - \alpha (v_{xxxxxx} + v_{yyyyyy}) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Hier sieht man wieder die Unterschiede zu den vorigen Herleitungen. Im Diffusionsterm liegt die sechste Ableitung vor und sie hat wieder ein negatives Vorzeichen. Einen optimalen Ableitungsfiler hierfür gilt es nun erneut zu faktorisieren.

4.3.1 Herleitung des Ableitungsfilters

Gesucht ist ein Ableitungsfiler mit 5er Nachbarschaft (a, b, c, d, e) , der nach einer Faltung mit sich selbst den bekannten optimalen Ableitungsfiler mit umgedrehtem Vorzeichen für die sechste Ableitung mit 9er Nachbarschaft ergibt $(\frac{1}{4h^6} (1, -12, 52, -116, 150, -116, 52, -12, 1))$. Die Selbstfaltung unseres Ableitungsfilters ergibt allgemein:

$$\begin{aligned} (a, b, c, d, e) * (e, d, c, b, a) \\ = \left(ae, ad + be, ac + bd + ce, ab + bc + cd + de, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, \right. \\ \left. ab + bc + cd + de, ac + bd + ce, ad + be, ae \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Wenn man dies mit dem gegebenen Ableitungsfiler gleichsetzt, ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} ae = \frac{1}{4h^6}, \quad ad + be = -\frac{12}{4h^6}, \quad ac + bd + ce = \frac{52}{4h^6}, \\ ab + bc + cd + de = -\frac{116}{4h^6}, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \frac{150}{4h^6} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Hier hat man wieder ein nichtlineares Gleichungssystem mit fünf Unbekannten. Es ist aber wie bei der 4er Nachbarschaft möglich, dies in ein lineares Gleichungssystem mit einer Unbekannten umzuformen. Erweitern wir das Muster der vorigen Selbstfaltungen, muss diesmal der Differenzenquotient der dritten Ableitung plus gewichtete vierte Ableitung selbstgefaltet werden. Auch hier

wird nur eine Lösung benötigt. Die Differenzenquotienten mit 5er Nachbarschaft für die dritte bzw. vierte Ableitung sind:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^3} (-1, 2, 0, -2, 1) \\ \text{bzw. } & \frac{1}{h^4} (1, -4, 6, -4, 1) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Damit lässt sich die Gleichung umformulieren zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^3} \left(-1 + 2\frac{\beta}{h}, 2 - 2\frac{4\beta}{h}, 2\frac{6\beta}{h}, -2 - 2\frac{4\beta}{h}, 1 + 2\frac{\beta}{h} \right) \\ & * \frac{1}{2h^3} \left(-1 + 2\frac{\beta}{h}, 2 - 2\frac{4\beta}{h}, 2\frac{6\beta}{h}, -2 - 2\frac{4\beta}{h}, 1 + 2\frac{\beta}{h} \right) \\ & = \frac{1}{4h^6} (1, -12, 52, -116, 150, -116, 52, -12, 1) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem mit nur einer Unbekannten:

$$\frac{1}{h^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta^2}{h^2} \right) = \frac{1}{4h^6} \quad (4.64)$$

$$\frac{1}{h^6} \left(1 - \frac{8\beta^2}{h^2} \right) = -\frac{12}{4h^6} \quad (4.65)$$

$$\frac{1}{h^6} \left(-1 + \frac{28\beta^2}{h^2} \right) = \frac{52}{4h^6} \quad (4.66)$$

$$\frac{1}{h^6} \left(-1 - \frac{56\beta^2}{h^2} \right) = -\frac{116}{4h^6} \quad (4.67)$$

$$\frac{1}{h^6} \left(\frac{5}{2} + \frac{70\beta^2}{h^2} \right) = \frac{150}{4h^6} \quad (4.68)$$

Nach β aufgelöst ergibt sich für alle Gleichungen:

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} h \quad (4.69)$$

Damit ergeben sich zwei Ableitungsfiler als Lösung. Es gibt aber, wie auch im Fall der 3er und 4er Nachbarschaft, noch zwei weitere Lösungen. Diese erhält man mit einem negativen Vorzeichen vor dem Ableitungsfiler, welches durch die Selbstfaltung wegfällt. Mit diesen Lösungen ergeben sich vier Ableitungsfiler:

$$(a, b, c, d, e) = \pm \left(\frac{1}{2h^3} (-1, 2, 0, -2, 1) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} h \cdot \frac{1}{h^4} (1, -4, 6, -4, 1) \right). \quad (4.70)$$

Wir verwenden, wie auch schon bei den anderen Nachbarschaften, nur eine dieser Lösungen. Dabei wählen wir den äquivalenten Ableitungsfiler zu denen, die wir bei den anderen Nachbarschaften gewählt haben.

$$(a, b, c, d, e) = \frac{1}{2h^3} (-1, 2, 0, -2, 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} h \cdot \frac{1}{h^4} (1, -4, 6, -4, 1). \quad (4.71)$$

4.3.2 Herleitung der Diskretisierung

Zu dem neuen kontinuierlichen Energiefunktional ergibt sich das neue diskrete Energiefunktional:

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_{xxx}]_{i,j}^2 + [u_{yyy}]_{i,j}^2 + [v_{xxx}]_{i,j}^2 + [v_{yyy}]_{i,j}^2 \right) \quad (4.72)$$

Auch hier gelten selbstverständlich weiterhin die notwendigen Bedingungen für das gesuchte Minimum $\frac{\partial E}{\partial u_{k,l}} = 0$ und $\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} = 0$.

Für die Ableitung werden auch wieder allgemeine Differenzenquotienten, diesmal mit einer 5er Nachbarschaft, verwendet. Also liegt der approximierte Wert wieder auf einem Auswertungspunkt.

$$\begin{aligned} [u_{xxx}]_{i,j} &= X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} u_{i-2,j} + w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j} + w_{2,x} u_{i+2,j}) \\ [u_{yyy}]_{i,j} &= X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} u_{i,j-2} + w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1} + w_{2,y} u_{i,j+2}) \\ [v_{xxx}]_{i,j} &= X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} v_{i-2,j} + w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j} + w_{2,x} v_{i+2,j}) \\ [v_{yyy}]_{i,j} &= X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} v_{i,j-2} + w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1} + w_{2,y} v_{i,j+2}) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Auch in diesem Fall führen wir subquadratische Bestrafungsfunktionen ein und nutzen erneut aus, dass wir die Terme getrennt betrachten können.

Dadurch ergibt sich für den Glattheitsterm:

$$\begin{aligned} E_s(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left([u_{xxx}]_{i,j}^2 + [u_{yyy}]_{i,j}^2 + [v_{xxx}]_{i,j}^2 + [v_{yyy}]_{i,j}^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left(\begin{aligned} &X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} u_{i-2,j} + w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j} + w_{2,x} u_{i+2,j})^2 \\ &+ X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} u_{i,j-2} + w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1} + w_{2,y} u_{i,j+2})^2 \\ &+ X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} v_{i-2,j} + w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j} + w_{2,x} v_{i+2,j})^2 \\ &+ X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} v_{i,j-2} + w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1} + w_{2,y} v_{i,j+2})^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Weiterhin wird folgende Abkürzung zur Vereinfachung der Ableitung eingeführt:

$$\begin{aligned} \Psi'_{s,i,j} &= \Psi'_s \left(\begin{aligned} &X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} u_{i-2,j} + w_{-1,x} u_{i-1,j} + w_{0,x} u_{i,j} + w_{1,x} u_{i+1,j} + w_{2,x} u_{i+2,j})^2 \\ &+ X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} u_{i,j-2} + w_{-1,y} u_{i,j-1} + w_{0,y} u_{i,j} + w_{1,y} u_{i,j+1} + w_{2,y} u_{i,j+2})^2 \\ &+ X_{[3,N-2][1,M]} (w_{-2,x} v_{i-2,j} + w_{-1,x} v_{i-1,j} + w_{0,x} v_{i,j} + w_{1,x} v_{i+1,j} + w_{2,x} v_{i+2,j})^2 \\ &+ X_{[1,N][3,M-2]} (w_{-2,y} v_{i,j-2} + w_{-1,y} v_{i,j-1} + w_{0,y} v_{i,j} + w_{1,y} v_{i,j+1} + w_{2,y} v_{i,j+2})^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Nun gilt es die partiellen Ableitungen des Glattheitsterms zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial u_{k,l}} &= \alpha \left((w_{-2,x} u_{k,l} + w_{-1,x} u_{k+1,l} + w_{0,x} u_{k+2,l} + w_{1,x} u_{k+3,l} + w_{2,x} u_{k+4,l}) \right. \\
 &\quad \cdot X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} \Psi'_{s,k+2,l} \quad (k = i - 2, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} u_{k-1,l} + w_{-1,x} u_{k,l} + w_{0,x} u_{k+1,l} + w_{1,x} u_{k+2,l} + w_{2,x} u_{k+3,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i - 0.5, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} u_{k-2,l} + w_{-1,x} u_{k-1,l} + w_{0,x} u_{k,l} + w_{1,x} u_{k+1,l} + w_{2,x} u_{k+2,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} u_{k-3,l} + w_{-1,x} u_{k-2,l} + w_{0,x} u_{k-1,l} + w_{1,x} u_{k,l} + w_{2,x} u_{k+1,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i + 1, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} u_{k-4,l} + w_{-1,x} u_{k-3,l} + w_{0,x} u_{k-2,l} + w_{1,x} u_{k-1,l} + w_{2,x} u_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} \Psi'_{s,k-2,l} \quad (k = i + 2, l = j) \\
 &+ (w_{-2,y} u_{k,l} + w_{-1,y} u_{k,l+1} + w_{0,y} u_{k,l+2} + w_{1,y} u_{k,l+3} + w_{2,y} u_{k,l+4}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l+2} \quad (k = i, l = j - 2) \\
 &+ (w_{-2,y} u_{k,l-1} + w_{-1,y} u_{k,l} + w_{0,y} u_{k,l+1} + w_{1,y} u_{k,l+2} + w_{2,y} u_{k,l+3}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j - 1) \\
 &+ (w_{-2,y} u_{k,l-2} + w_{-1,y} u_{k,l-1} + w_{0,y} u_{k,l} + w_{1,y} u_{k,l+1} + w_{2,y} u_{k,l+2}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ (w_{-2,y} u_{k,l-3} + w_{-1,y} u_{k,l-2} + w_{0,y} u_{k,l-1} + w_{1,y} u_{k,l} + w_{2,y} u_{k,l+1}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \quad (k = i, l = j + 1) \\
 &+ (w_{-2,y} u_{k,l-4} + w_{-1,y} u_{k,l-3} + w_{0,y} u_{k,l-2} + w_{1,y} u_{k,l-1} + w_{2,y} u_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l-2} \quad (k = i, l = j + 2) \\
 &= \alpha \left(u_{k-4,l} \left(X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \right. \\
 &\quad + u_{k-3,l} \left(X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
 &\quad + u_{k-2,l} \left(X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Weiter auf der nächsten Seite.

$$\begin{aligned}
& \dots + u_{k-1,l} \left(X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
& + u_{k,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x}^2 \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x}^2 \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
& + u_{k+1,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
& + u_{k+2,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
& + u_{k+3,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right) \\
& + u_{k+4,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+2,l} \right) \\
& + u_{k,l-4} \left(X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
& + u_{k,l-3} \left(X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
& + u_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
& + u_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
& + u_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y}^2 \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y}^2 \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
& + u_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
& + u_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right. \\
& \quad \left. + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
& + u_{k,l+3} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right) \\
& + u_{k,l+4} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+2} \right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Die Indizes in Klammern geben an, zu welchem Teil der Summe die Ableitung gehört.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial v_{k,l}} &= \alpha \left((w_{-2,x} v_{k,l} + w_{-1,x} v_{k+1,l} + w_{0,x} v_{k+2,l} + w_{1,x} v_{k+3,l} + w_{2,x} v_{k+4,l}) \right. \\
 &\quad \cdot X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} \Psi'_{s,k+2,l} \quad (k = i - 2, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} v_{k-1,l} + w_{-1,x} v_{k,l} + w_{0,x} v_{k+1,l} + w_{1,x} v_{k+2,l} + w_{2,x} v_{k+3,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i - 0.5, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} v_{k-2,l} + w_{-1,x} v_{k-1,l} + w_{0,x} v_{k,l} + w_{1,x} v_{k+1,l} + w_{2,x} v_{k+2,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} v_{k-3,l} + w_{-1,x} v_{k-2,l} + w_{0,x} v_{k-1,l} + w_{1,x} v_{k,l} + w_{2,x} v_{k+1,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i + 1, l = j) \\
 &+ (w_{-2,x} v_{k-4,l} + w_{-1,x} v_{k-3,l} + w_{0,x} v_{k-2,l} + w_{1,x} v_{k-1,l} + w_{2,x} v_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} \Psi'_{s,k-2,l} \quad (k = i + 2, l = j) \\
 &+ (w_{-2,y} v_{k,l} + w_{-1,y} v_{k,l+1} + w_{0,y} v_{k,l+2} + w_{1,y} v_{k,l+3} + w_{2,y} v_{k,l+4}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l+2} \quad (k = i, l = j - 2) \\
 &+ (w_{-2,y} v_{k,l-1} + w_{-1,y} v_{k,l} + w_{0,y} v_{k,l+1} + w_{1,y} v_{k,l+2} + w_{2,y} v_{k,l+3}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j - 1) \\
 &+ (w_{-2,y} v_{k,l-2} + w_{-1,y} v_{k,l-1} + w_{0,y} v_{k,l} + w_{1,y} v_{k,l+1} + w_{2,y} v_{k,l+2}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ (w_{-2,y} v_{k,l-3} + w_{-1,y} v_{k,l-2} + w_{0,y} v_{k,l-1} + w_{1,y} v_{k,l} + w_{2,y} v_{k,l+1}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \quad (k = i, l = j + 1) \\
 &+ (w_{-2,y} v_{k,l-4} + w_{-1,y} v_{k,l-3} + w_{0,y} v_{k,l-2} + w_{1,y} v_{k,l-1} + w_{2,y} v_{k,l}) \\
 &\quad \cdot X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l-2} \quad (k = i, l = j + 2) \\
 &= \alpha \left(v_{k-4,l} \left(X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \right. \\
 &\quad + v_{k-3,l} \left(X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
 &\quad + v_{k-2,l} \left(X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Weiter auf der nächsten Seite.

$$\begin{aligned}
\cdots &+ v_{k-1,l} \left(X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
&+ v_{k,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x}^2 \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x}^2 \Psi'_{s,k-2,l} \right) \\
&+ v_{k+1,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
&+ v_{k+2,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
&+ v_{k+3,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+1,l} \right) \\
&+ v_{k+4,l} \left(X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+2,l} \right) \\
&+ v_{k,l-4} \left(X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
&+ v_{k,l-3} \left(X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
&+ v_{k,l-2} \left(X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right. \\
&\quad \left. + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
&+ v_{k,l-1} \left(X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
&+ v_{k,l} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y}^2 \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} \right. \\
&\quad \left. + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y}^2 \Psi'_{s,k,l-2} \right) \\
&+ v_{k,l+1} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right. \\
&\quad \left. + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
&+ v_{k,l+2} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right. \\
&\quad \left. + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l} \right) \\
&+ v_{k,l+3} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+1} \right) \\
&+ v_{k,l+4} \left(X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+2} \right)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

4 Optimierte faktorisierte Diskretisierungen

Diese Gleichungen lassen sich auch als Filtermasken verstehen, welche auf u und v angewendet werden. Dabei sind die Filtermasken für beide Fälle gleich.

	$k - 4$	$k - 3$	$k - 2$	$k - 1$	k	$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$	$k + 4$
$l - 4$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{-4,y}$	0	0	0	0
$l - 3$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{-3,y}$	0	0	0	0
$l - 2$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{-2,y}$	0	0	0	0
$l - 1$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0	0	0	0
l	$\tilde{w}_{-4,x}$	$\tilde{w}_{-3,x}$	$\tilde{w}_{-2,x}$	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$	$\tilde{w}_{2,x}$	$\tilde{w}_{3,x}$	$\tilde{w}_{4,x}$
$l + 1$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0	0	0	0
$l + 2$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{2,y}$	0	0	0	0
$l + 3$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{3,y}$	0	0	0	0
$l + 4$	0	0	0	0	$\tilde{w}_{4,y}$	0	0	0	0

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{-4,x} &= X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-2,l} \\
\tilde{w}_{-3,x} &= X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \\
\tilde{w}_{-2,x} &= X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
&\quad + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-2,l} \\
\tilde{w}_{-1,x} &= X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{-2,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} \\
&\quad + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k-2,l} \\
\tilde{w}_{0,x} &= X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x}^2 \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} \\
&\quad + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} + X_{[5,N][1,M]} w_{2,x}^2 \Psi'_{s,k-2,l} \\
\tilde{w}_{1,x} &= X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} \\
&\quad + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[4,N-1][1,M]} w_{1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
\tilde{w}_{2,x} &= X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \\
&\quad + X_{[3,N-2][1,M]} w_{0,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k,l} \\
\tilde{w}_{3,x} &= X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+2,l} + X_{[2,N-3][1,M]} w_{-1,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+1,l} \\
\tilde{w}_{4,x} &= X_{[1,N-4][1,M]} w_{-2,x} w_{2,x} \Psi'_{s,k+2,l} \\
\tilde{w}_{-4,y} &= X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-2} \\
\tilde{w}_{-3,y} &= X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \\
\tilde{w}_{-2,y} &= X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
&\quad + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-2} \\
\tilde{w}_{-1,y} &= X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{-2,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} \\
&\quad + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l-2} \\
\tilde{w}_{0,y} &= X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y}^2 \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} \\
&\quad + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} + X_{[1,N][5,M]} w_{2,y}^2 \Psi'_{s,k,l-2} \\
\tilde{w}_{1,y} &= X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} \\
&\quad + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][4,M-1]} w_{1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
\tilde{w}_{2,y} &= X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1} \\
&\quad + X_{[1,N][3,M-2]} w_{0,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l} \\
\tilde{w}_{3,y} &= X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+2} + X_{[1,N][2,M-3]} w_{-1,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+1} \\
\tilde{w}_{4,y} &= X_{[1,N][1,M-4]} w_{-2,y} w_{2,y} \Psi'_{s,k,l+2}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

und

$$\begin{aligned}
(w_{-2,x}, w_{-1,x}, w_{0,x}, w_{1,x}, w_{2,x}) &= \frac{1}{2h^3} (-1, 2, 0, -2, 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} h \cdot \frac{1}{h^4} (1, -4, 6, -4, 1) \\
(w_{-2,y}, w_{-1,y}, w_{0,y}, w_{1,y}, w_{2,y}) &= \frac{1}{2h^3} (-1, 2, 0, -2, 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} h \cdot \frac{1}{h^4} (1, -4, 6, -4, 1)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

4 Optimierte faktorisierte Diskretisierungen

Solange die Indikatorfunktionen 1 sind, also man nicht zu nah am Rand ist, ist dies der gewünschte optimale Ableitungsfiler für den Diffusionsterm. Es gilt also bei einem Abstand zum Rand von mindestens 4 Pixeln auf allen Seiten für die quadratische Bestrafungsfunktion mit $\Psi'(s^2) = 1$:

	$k - 4$	$k - 3$	$k - 2$	$k - 1$	k	$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$	$k + 4$
$l - 4$	0	0	0	0	$\frac{1}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l - 3$	0	0	0	0	$-\frac{12}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l - 2$	0	0	0	0	$\frac{52}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l - 1$	0	0	0	0	$-\frac{116}{4h_y^6}$	0	0	0	0
l	$\frac{1}{4h_x^6}$	$-\frac{12}{4h_x^6}$	$\frac{52}{4h_x^6}$	$-\frac{116}{4h_x^6}$	$\frac{150}{4h_x^6} + \frac{150}{4h_y^6}$	$-\frac{116}{4h_x^6}$	$\frac{52}{4h_x^6}$	$-\frac{12}{4h_x^6}$	$\frac{2}{4h_x^6}$
$l + 1$	0	0	0	0	$-\frac{116}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l + 2$	0	0	0	0	$\frac{52}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l + 3$	0	0	0	0	$-\frac{12}{4h_y^6}$	0	0	0	0
$l + 4$	0	0	0	0	$\frac{1}{4h_y^6}$	0	0	0	0

5 Zusätzliche Diskretisierungen

Im letzten Kapitel wurden die faktorisierten Diskretisierungen hergeleitet. Es werden noch drei weitere Diskretisierungen für den Glattheitsterm betrachtet. Diese basieren auf Standarddiskretisierungen und dienen zum Vergleich in Kapitel 6. Zusätzlich wird noch der Datenterm, welcher bisher vernachlässigt wurde, diskretisiert. Zuletzt wird noch das Lösungsverfahren für die linearen Gleichungssystem vorgestellt.

5.1 3er Nachbarschaft Vergleich

Ein großer Support ist gut, wenn die Punkte eng zusammenliegen und der Abstand h gegen null geht. Bei Bildern ist dieser Abstand aber fest, da die Bilder bereits abgetastet sind. In diesem Fall liefert ein möglichst kleiner Support meist optimale Ergebnisse. Deshalb verwenden wir als Vergleich Diskretisierungen mit möglichst kleinem Support, welche die gleichen Glatheitsterme diskretisieren.

Als Vergleich zur neuen 3er-Nachbarschaft wird deshalb eine Diskretisierung mit geringem symmetrischem Support verwendet. Diese wurde auch von Blei als Vergleichswert verwendet und liefert allgemein gute Ergebnisse[Ble17]. Es wird hierbei wieder das ursprüngliche Energiefunktional mit der Glattheit der ersten Ableitung betrachtet:

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_x]_{i,j}^2 + [u_y]_{i,j}^2 + [v_x]_{i,j}^2 + [v_y]_{i,j}^2 \right) \quad (5.1)$$

Hierbei gilt es, die erste Ableitung so zu diskretisieren, dass man eine Approximation für den Laplace-Operator mit minimalem symmetrischem Support in den notwendigen Bedingungen für das Minima erhält. Dafür sind mindestens drei Punkte in beide Richtungen notwendig. Die Approximation erhalten wir durch gemittelte quadrierte einseitige Differenzenquotienten. Es wird über beide einseitigen Differenzenquotienten gemittelt, damit beide Seiten gleich behandelt werden.

Die einseitigen Differenzenquotienten sind bekanntermaßen der Vorwärtsdifferenzenquotient

$$[f_x]_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (5.2)$$

und der Rückwärtsdifferenzenquotient

$$[f_x]_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}. \quad (5.3)$$

Mit den passenden Indikatorfunktionen ergeben sich dann die Diskretisierungen für die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
 [u_x]_{i,j}^2 &= \frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \\
 [u_y]_{i,j}^2 &= \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right) \\
 [v_x]_{i,j}^2 &= \frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \\
 [v_y]_{i,j}^2 &= \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Auch in diesem Fall führen wir Bestrafungsfunktionen ein und nutzen erneut aus, dass wir die Terme getrennt betrachten können.

Dadurch ergibt sich für den Glattheitsterm:

$$\begin{aligned}
 E_s(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left([u_x]_{i,j}^2 + [u_y]_{i,j}^2 + [v_x]_{i,j}^2 + [v_y]_{i,j}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\alpha}{2} \Psi_s \left(\frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Weiterhin wird folgende Abkürzung zur Vereinfachung der Ableitung eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{s,i,j} &= \Psi'_s \left(\frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} \right)^2 + X_{[2,N][1,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} \right)^2 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right)^2 + X_{[1,N][2,M]} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right)^2 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nun gilt es die partiellen Ableitungen des Glattheitsterms zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial u_{k,l}} &= \frac{\alpha}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k+1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i-1, l = j) \right. \\
 &+ X_{[1,N-1][1,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k+1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k,l} + X_{[2,N][1,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k-1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[2,N][1,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k-1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i+1, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][1,M-1]} \frac{u_{k,l} - u_{k,l+1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j-1) \\
 &+ X_{[1,N][1,M-1]} \frac{u_{k,l} - u_{k,l+1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][2,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][2,M]} \frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l-1} \quad (k = i+1, l = j) \\
 &= \alpha \left(-\frac{u_{k-1,l}}{2h_x^2} X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right. \\
 &+ \frac{u_{k,l}}{2h_x^2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right) \\
 &- \frac{u_{k+1,l}}{2h_x^2} X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) \\
 &- \frac{u_{k,l-1}}{2h_y^2} X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 &+ \frac{u_{k,l}}{2h_y^2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \right) \\
 &\left. - \frac{u_{k,l+1}}{2h_y^2} X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Indizes in Klammern geben an, zu welchem Teil der Summe die Ableitung gehört.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_s}{\partial v_{k,l}} &= \frac{\alpha}{2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k+1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k+1,l} \quad (k = i-1, l = j) \right. \\
 &+ X_{[1,N-1][1,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k+1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k,l} + X_{[2,N][1,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k-1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[2,N][1,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k-1,l}}{h_x^2} \Psi'_{s,k-1,l} \quad (k = i+1, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][1,M-1]} \frac{v_{k,l} - v_{k,l+1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l+1} \quad (k = i, l = j-1) \\
 &+ X_{[1,N][1,M-1]} \frac{v_{k,l} - v_{k,l+1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][2,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k,l-1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l} \quad (k = i, l = j) \\
 &+ X_{[1,N][2,M]} \frac{v_{k,l} - v_{k,l-1}}{h_y^2} \Psi'_{s,k,l-1} \quad (k = i+1, l = j) \\
 &= \alpha \left(-\frac{v_{k-1,l}}{2h_x^2} X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right. \\
 &+ \frac{v_{k,l}}{2h_x^2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right) \\
 &- \frac{v_{k+1,l}}{2h_x^2} X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) \\
 &- \frac{v_{k,l-1}}{2h_y^2} X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 &+ \frac{v_{k,l}}{2h_y^2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \right) \\
 &\left. - \frac{v_{k,l+1}}{2h_y^2} X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right) \right) \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Filtermasken verstehen, welche auf u und v angewendet werden. Dabei sind die Filtermasken für beide Fälle gleich.

	$k-1$	k	$k+1$
$l-1$	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0
l	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$
$l+1$	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{-1,x} &= -\frac{1}{2h_x^2} X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \\
 \tilde{w}_{0,x} &= \frac{1}{2h_x^2} \left(X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[2,N][1,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k-1,l} \right) \right) \\
 \tilde{w}_{1,x} &= -\frac{1}{2h_x^2} X_{[1,N-1][1,M]} \left(\Psi'_{s,k+1,l} + \Psi'_{s,k,l} \right) \\
 \tilde{w}_{-1,y} &= -\frac{1}{2h_y^2} X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \\
 \tilde{w}_{0,y} &= \frac{1}{2h_y^2} \left(X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right) + X_{[1,N][2,M]} \left(\Psi'_{s,k,l} + \Psi'_{s,k,l-1} \right) \right) \\
 \tilde{w}_{1,y} &= -\frac{1}{2h_y^2} X_{[1,N][1,M-1]} \left(\Psi'_{s,k,l+1} + \Psi'_{s,k,l} \right)
 \end{aligned}$$

Hierbei erhält man, mindestens einen Pixel vom Rand entfernt und mit der quadratischen Bestrafungsfunktion mit $\Psi'_{s,i,j} = 1$, genau den negativen zentralen Differenzenquotienten mit minimalem Support $(\frac{1}{h^2}(-1, 2, -1))$. Damit ist diese Diskretisierung im ähnlichen Sinne optimal wie die, welche in Kapitel 4 hergeleitet wurden.

Es gilt, bei einem Abstand zum Rand von mindestens 1 Pixel auf allen Seiten für die quadratische Bestrafungsfunktion mit $\Psi'(s^2) = 1$:

	$k-1$	k	$k+1$
$l-1$	0	$-\frac{1}{h_y^2}$	0
l	$-\frac{1}{h_x^2}$	$\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$	$-\frac{1}{h_x^2}$
$l+1$	0	$-\frac{1}{h_y^2}$	0

5.2 4er Nachbarschaft Vergleich

Wie bei der vorangegangenen Diskretisierung besteht die Herangehensweise daraus, eine Standarddiskretisierung mit geringem Support zu verwenden. Anders als bei der vorangegangenen Diskretisierung wird hier aber eine sehr einfache Diskretisierung verwendet.

Wie auch bei der 4er Nachbarschaft gilt es, den Glattheitsterm des diskreten Energiefunktionals zu diskretisieren.

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_{xx}]_{i,j}^2 + [u_{yy}]_{i,j}^2 + [v_{xx}]_{i,j}^2 + [v_{yy}]_{i,j}^2 \right) \quad (5.9)$$

Dafür wird nun der kleinste zentrale Differenzenquotient verwendet, welcher die zweite Ableitung approximiert:

$$\frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (5.10)$$

Diese Diskretisierung hat eine 3er Nachbarschaft, muss aber nicht erneut hergeleitet werden. Die allgemeine Diskretisierung für eine 3er Nachbarschaft wurde bereits für die 3er Nachbarschaft in Kapitel 4 hergeleitet. Der einzige Unterschied liegt darin, dass diese Diskretisierung nicht die erste, sondern die zweite Ableitung approximiert.

Als Filtermaske die auf u und v angewendet wird, ergibt sich wieder:

	$k - 2$	$k - 1$	k	$k + 1$	$k + 2$
$l - 2$	0	0	$\tilde{w}_{-2,y}$	0	0
$l - 1$	0	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0	0
l	$\tilde{w}_{-2,x}$	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$	$\tilde{w}_{2,x}$
$l + 1$	0	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0	0
$l + 2$	0	0	$\tilde{w}_{2,y}$	0	0

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{-2,x} &= X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
 \tilde{w}_{-1,x} &= X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{-1,x} \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k-1,l} \\
 \tilde{w}_{0,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x}^2 \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x}^2 \Psi'_{s,k,l} + X_{[3,N][1,M]} w_{1,x}^2 \Psi'_{s,k-1,l} \\
 \tilde{w}_{1,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{0,x} \Psi'_{s,k+1,l} + X_{[2,N-1][1,M]} w_{0,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k,l} \\
 \tilde{w}_{2,x} &= X_{[1,N-2][1,M]} w_{-1,x} w_{1,x} \Psi'_{s,k+1,l} \\
 \tilde{w}_{-2,y} &= X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
 \tilde{w}_{-1,y} &= X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{-1,y} \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l-1} \\
 \tilde{w}_{0,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N-1][2,M-1]} w_{0,y}^2 \Psi'_{s,k,l} + X_{[1,N][3,M]} w_{1,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1} \\
 \tilde{w}_{1,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{0,y} \Psi'_{s,k,l+1} + X_{[1,N][2,M-1]} w_{0,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l} \\
 \tilde{w}_{2,y} &= X_{[1,N][1,M-2]} w_{-1,y} w_{1,y} \Psi'_{s,k,l+1}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

und hier aber

$$\begin{aligned}
 (w_{-1,x}, w_{0,x}, w_{1,x}) &= \frac{1}{h_x^2} (1, -2, 1) \\
 (w_{-1,y}, w_{0,y}, w_{1,y}) &= \frac{1}{h_y^2} (1, -2, 1)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

die Approximation der zweiten Ableitung.

Die sich ergebende Diskretisierung für den Diffusionsterm ist nicht optimal.

5.3 5er Nachbarschaft Vergleich

Die Überlegung zum Vergleich der 5er Nachbarschaft ist die gleiche wie für die 4er Nachbarschaft. Es soll eine Standarddiskretisierung mit geringem Support und möglichst einfacher Struktur verwendet werden.

Wie auch bei der 5er Nachbarschaft gilt es, den Glattheitsterm des diskreten Energiefunktionals zu diskretisieren.

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \mathbf{w}_{i,j}^T \mathbf{J}_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\alpha}{2} \left([u_{xxx}]_{i,j}^2 + [u_{yyy}]_{i,j}^2 + [v_{xxx}]_{i,j}^2 + [v_{yyy}]_{i,j}^2 \right) \quad (5.13)$$

Dafür wird nun der kleinste zentrale Differenzenquotient verwendet, welcher die dritte Ableitung approximiert:

$$\frac{1}{h^3} (-1, 3, -3, 1) \quad (5.14)$$

Diese Diskretisierung hat eine 4er Nachbarschaft, muss aber nicht erneut hergeleitet werden. Die allgemeine Diskretisierung für eine 4er Nachbarschaft wurde bereits für die 4er Nachbarschaft in Kapitel 4 hergeleitet. Der einzige Unterschied liegt darin, dass diese Diskretisierung statt der zweiten die dritte Ableitung approximiert.

Als Filtermaske die auf u und v angewendet wird, ergibt sich wieder:

	$k-3$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$
$l-3$	0	0	0	$\tilde{w}_{-3,y}$	0	0	0
$l-2$	0	0	0	$\tilde{w}_{-2,y}$	0	0	0
$l-1$	0	0	0	$\tilde{w}_{-1,y}$	0	0	0
l	$\tilde{w}_{-3,x}$	$\tilde{w}_{-2,x}$	$\tilde{w}_{-1,x}$	$\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y}$	$\tilde{w}_{1,x}$	$\tilde{w}_{2,x}$	$\tilde{w}_{3,x}$
$l+1$	0	0	0	$\tilde{w}_{1,y}$	0	0	0
$l+2$	0	0	0	$\tilde{w}_{2,y}$	0	0	0
$l+3$	0	0	0	$\tilde{w}_{3,y}$	0	0	0

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{-3,x} &= X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
 \tilde{w}_{-2,x} &= X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
 \tilde{w}_{-1,x} &= X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{-1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \\
 &\quad + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
 \tilde{w}_{0,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x}^2 \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x}^2 \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
 &\quad + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x}^2 \Psi'_{s,k-0.5,l} + X_{[4,N][1,M]} w_{1.5,x}^2 \Psi'_{s,k-1.5,l} \\
 \tilde{w}_{1,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{-0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
 &\quad + X_{[3,N-1][1,M]} w_{0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k-0.5,l} \\
 \tilde{w}_{2,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{0.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} + X_{[2,N-2][1,M]} w_{-0.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+0.5,l} \\
 \tilde{w}_{3,x} &= X_{[1,N-3][1,M]} w_{-1.5,x} w_{1.5,x} \Psi'_{s,k+1.5,l} \\
 \tilde{w}_{-3,y} &= X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
 \tilde{w}_{-2,y} &= X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
 \tilde{w}_{-1,y} &= X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{-1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \\
 &\quad + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
 \tilde{w}_{0,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
 &\quad + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-0.5} + X_{[1,N][4,M]} w_{1.5,y}^2 \Psi'_{s,k,l-1.5} \\
 \tilde{w}_{1,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{-0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
 &\quad + X_{[1,N][3,M-1]} w_{0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l-0.5} \\
 \tilde{w}_{2,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{0.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5} + X_{[1,N][2,M-2]} w_{-0.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+0.5} \\
 \tilde{w}_{3,y} &= X_{[1,N][1,M-3]} w_{-1.5,y} w_{1.5,y} \Psi'_{s,k,l+1.5}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

und hier aber

$$\begin{aligned}
 (w_{-1.5,x}, w_{-0.5,x}, w_{0.5,x}, w_{1.5,x}) &= \frac{1}{h_x^3} (-1, 3, -3, 1) \\
 (w_{-1.5,y}, w_{-0.5,y}, w_{0.5,y}, w_{1.5,y}) &= \frac{1}{h_y^2} (-1, 3, -3, 1)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

die Approximation der dritten Ableitung.

Die sich ergebende Diskretisierung für den Diffusionsterm ist nicht optimal.

5.4 Diskretisierung des Datenterms

Zuletzt müssen wir noch die genaue Diskretisierung des bisher vernachlässigten Datenterms betrachten. Da die Untersuchung der verschiedenen Diskretisierungen des Glattheitstermes Ziel dieser Arbeit ist, wird nur eine bekanntermaßen gute Diskretisierung hergeleitet. Es werden nun Konstanzannahmen höherer Ordnung verwendet, in diesem Fall wird mit einer Konstanzannahme der ersten Ableitungen im Datenterm gearbeitet. Diese ist invariant im Bezug zu additiven

Helligkeitsänderungen, da diese in der Ableitung wegfallen. Es gibt auch Nachteile durch eine größere Anfälligkeit gegenüber Rauschen und beinhaltenden Richtungsinformationen bei Rotationen, aber insgesamt sind bessere Ergebnisse zu erwarten.

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, t) &= f_x(x + u, y + v, t + 1) \\ f_y(x, y, t) &= f_y(x + u, y + v, t + 1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Unter Verwendung der Taylorreihe (Gleichung (2.5)) lassen sich diese Terme linearisieren zu:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x + u, y + v, t + 1) - f_x(x, y, t) \\ &= f_x(x, y, t) + f_{xx}(x, y, t) u + f_{xy}(x, y, t) v + f_{xt}(x, y, t) 1 - f_x(x, y, t) \\ &= f_{xx}(x, y, t) u + f_{xy}(x, y, t) v + f_{xt}(x, y, t) \\ 0 &= f_y(x + u, y + v, t + 1) - f_y(x, y, t) \\ &= f_y(x, y, t) + f_{xy}(x, y, t) u + f_{yy}(x, y, t) v + f_{yt}(x, y, t) 1 - f_y(x, y, t) \\ &= f_{xy}(x, y, t) u + f_{yy}(x, y, t) v + f_{yt}(x, y, t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Im Datenterm des Energiefunktionals ergibt sich:

$$E_d(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_{xx} u + f_{xy} v + f_{xt})^2 + (f_{xy} u + f_{yy} v + f_{yt})^2 dx dy \quad (5.19)$$

Genauso wie für den zum Glattheitsterm gehörigen Teil wird auch hier eine Bestrafungsfunktion Ψ_d eingeführt. Deshalb ist der zu betrachtende Teil des diskreten Energiefunktionals:

$$\begin{aligned} E_d(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \Psi_d \left(([f_{xx}]_{i,j} u_{i,j} + [f_{xy}]_{i,j} v_{i,j} + [f_{xt}]_{i,j})^2 \right. \\ &\quad \left. + ([f_{xy}]_{i,j} u_{i,j} + [f_{yy}]_{i,j} v_{i,j} + [f_{yt}]_{i,j})^2 \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

von dem es nun die partiellen Ableitungen $\frac{\partial E}{\partial u_{k,l}}$ und $\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}}$ zu bestimmen gilt.

Zusätzlich wird folgende Abkürzung zur Vereinfachung der Ableitung eingeführt:

$$\begin{aligned} \Psi'_{d,i,j} &= \Psi'_d \left(([f_{xx}]_{i,j} u_{i,j} + [f_{xy}]_{i,j} v_{i,j} + [f_{xt}]_{i,j})^2 \right. \\ &\quad \left. + ([f_{xy}]_{i,j} u_{i,j} + [f_{yy}]_{i,j} v_{i,j} + [f_{yt}]_{i,j})^2 \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial u_{k,l}} &= [f_{xx}]_{k,l} ([f_{xx}]_{k,l} u_{k,l} + [f_{xy}]_{k,l} v_{k,l} + [f_{xt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ &\quad + [f_{xy}]_{k,l} ([f_{xy}]_{k,l} u_{k,l} + [f_{yy}]_{k,l} v_{k,l} + [f_{yt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ &= u_{k,l} \left([f_{xx}]_{k,l}^2 + [f_{xy}]_{k,l}^2 \right) \Psi'_{d,k,l} \\ &\quad + v_{k,l} ([f_{xx}]_{k,l} [f_{xy}]_{k,l} + [f_{xy}]_{k,l} [f_{yy}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ &\quad + ([f_{xx}]_{k,l} [f_{xt}]_{k,l} + [f_{xy}]_{k,l} [f_{yt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \end{aligned} \quad (5.22)$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_d}{\partial v_{k,l}} &= [f_{xy}]_{k,l} ([f_{xx}]_{k,l} u_{k,l} + [f_{xy}]_{k,l} v_{k,l} + [f_{xt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\
 &\quad + [f_{yy}]_{k,l} ([f_{xy}]_{k,l} u_{k,l} + [f_{yy}]_{k,l} v_{k,l} + [f_{yt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\
 &= u_{k,l} ([f_{xx}]_{k,l} [f_{xy}]_{k,l} + [f_{xy}]_{k,l} [f_{yy}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\
 &\quad + v_{k,l} \left([f_{xy}]_{k,l}^2 + [f_{yy}]_{k,l}^2 \right) \Psi'_{d,k,l} \\
 &\quad + ([f_{xy}]_{k,l} [f_{xt}]_{k,l} + [f_{yy}]_{k,l} [f_{yt}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Dabei sind die vorkommenden Ableitungen wie folgt diskretisiert:

$$\begin{aligned}
 [f_{xx}]_{k,l} &= \frac{1}{12h_x} ([f_x]_{k-2,l} - 8[f_x]_{k-1,l} + 8[f_x]_{k+1,l} - [f_x]_{k+2,l}) \\
 [f_{xy}]_{k,l} &= \frac{1}{12h_y} ([f_x]_{k,l-2} - 8[f_x]_{k,l-1} + 8[f_x]_{k,l+1} - [f_x]_{k,l+2}) \\
 [f_{yy}]_{k,l} &= \frac{1}{12h_y} ([f_y]_{k,l-2} - 8[f_y]_{k,l-1} + 8[f_y]_{k,l+1} - [f_y]_{k,l+2}) \\
 [f_{xt}]_{k,l} &= \frac{1}{12h_x} ([f_t]_{k-2,l} - 8[f_t]_{k-1,l} + 8[f_t]_{k+1,l} - [f_t]_{k+2,l}) \\
 [f_{yt}]_{k,l} &= \frac{1}{12h_y} ([f_t]_{k,l-2} - 8[f_t]_{k,l-1} + 8[f_t]_{k,l+1} - [f_t]_{k,l+2})
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Wobei die hier vorkommenden Ableitungen wiederum diskretisiert werden als:

$$\begin{aligned}
 [f_x]_{k,l} &= \frac{1}{12h_x} (f_{k-2,l} - 8f_{k-1,l} + 8f_{k+1,l} - f_{k+2,l}) \\
 [f_y]_{k,l} &= \frac{1}{12h_y} (f_{k,l-2} - 8f_{k,l-1} + 8f_{k,l+1} - f_{k,l+2}) \\
 [f_t]_{k,l} &= \frac{1}{h_t} (f_{k,l,t+1} - f_{k,l,t})
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Hierbei gilt die Vereinfachung $f_{k,l} = \frac{f_{k,l,t} + f_{k,l,t+1}}{2}$.

Die beiden Bilder werden gemittelt, damit beide einen gleichen Einfluss auf die Bildableitung haben und diese nicht nur durch ein Bild definiert wird. Die Verwendung eines Differenzenquotienten mit größerer Nachbarschaft hat hier zwei Gründe. Einerseits bietet sich eine Diskretisierung mit größerem Support an, da die Bilder vorgeglättet werden und deshalb eine gewisse Glattheit zu erwarten ist. Andererseits hat diese Diskretisierung eine höhere Konsistenzordnung, was das Ergebnisse verbessern sollte.

An dieser Stelle werden das gemittelte Bild f und die ersten Ableitungen f_x , f_y und f_t an den Rändern gespiegelt. Dies ist notwendig, da auf Werte außerhalb des Bildes zugegriffen wird. Das heißt, es gilt im Fall von f :

$$\begin{aligned}
 f_{-i+1,j} &= f_{i,j} \text{ für } i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\} \\
 f_{i,-j+1} &= f_{i,j} \text{ für } i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\} \\
 f_{N+i,j} &= f_{N-i+1,j} \text{ für } i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\} \\
 f_{i,N+j} &= f_{i,M-j+1} \text{ für } i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Für die Ableitungen gilt dies äquivalent.

Es gibt noch eine andere in der Fachliteratur oft verwendete Darstellung der Bildableitung. Diese eignet sich insbesondere zur Betrachtung der Lösungsverfahren.

Dabei werden die Bildableitungen oft mit Hilfe des Bewegungstensors vereinfacht dargestellt. Der Bewegungstensor \mathbf{J} gibt sich im Fall der Konstanzannahme für die erste Ableitung als:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \nabla_3 f_x (\nabla_3 f_x)^T + \nabla_3 f_y (\nabla_3 f_y)^T \\ &= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}^2 + f_{xy}^2 & f_{xx}f_{xy} + f_{xy}f_{yy} & f_{xx}f_{xt} + f_{xy}f_{yt} \\ f_{xx}f_{xy} + f_{xy}f_{yy} & f_{xy}^2 + f_{yy}^2 & f_{xy}f_{xt} + f_{yy}f_{yt} \\ f_{xx}f_{xt} + f_{xy}f_{yt} & f_{xy}f_{xt} + f_{yy}f_{yt} & f_{xt}^2 + f_{yt}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dadurch lässt sich der Datenterm im Energiefunktional umschreiben zu:

$$\begin{aligned} (f_{xx} u + f_{xy} v + f_{xt})^2 + (f_{xy} u + f_{yy} v + f_{yt})^2 &= \mathbf{w}^T \nabla_3 f_x (\nabla_3 f_x)^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \nabla_3 f_y (\nabla_3 f_y)^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \left(\nabla_3 f_x (\nabla_3 f_x)^T + \nabla_3 f_y (\nabla_3 f_y)^T \right) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{J} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit $\mathbf{w} = (u, v, 1)^T$.

Die partiellen Ableitungen aus Gleichung (5.22) und Gleichung (5.23) lassen sich auch umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial u_{k,l}} &= ([J_{11}]_{k,l} u_{k,l} + [J_{12}]_{k,l} v_{k,l} + [J_{13}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ \frac{\partial E_d}{\partial v_{k,l}} &= ([J_{12}]_{k,l} u_{k,l} + [J_{22}]_{k,l} v_{k,l} + [J_{23}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Zusätzlich werden in den Diskretisierungen für den Glattheitsterm symmetrische Filtermasken mit $2n + 1$ Nachbarschaft verwendet. Damit haben die notwendigen Bedingungen des Energiefunktionals für alle verschiedenen Glattheitsterme die Form

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial E_d}{\partial u_{k,l}} &= ([J_{11}]_{k,l} u_{k,l} + [J_{12}]_{k,l} v_{k,l} + [J_{13}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ &\quad + \alpha \left(\sum_{i=-n}^n (\tilde{w}_{i,x} u_{k+i,l}) + \sum_{j=-n}^n (\tilde{w}_{j,y} u_{k,l+j}) \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

und

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial E_d}{\partial v_{k,l}} &= ([J_{12}]_{k,l} u_{k,l} + [J_{22}]_{k,l} v_{k,l} + [J_{23}]_{k,l}) \Psi'_{d,k,l} \\ &\quad + \alpha \left(\sum_{i=-n}^n (\tilde{w}_{i,x} v_{k+i,l}) + \sum_{j=-n}^n (\tilde{w}_{j,y} v_{k,l+j}) \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

für $k \in \{1, \dots, N\}$ und $l \in \{1, \dots, M\}$.

Diese Gleichungen enthalten Bestrafungsfunktionen für Daten- und Glattheitsterm für die hier verwendeten Filtermasken,. Die Bestrafungsfunktion im Glattheitsterm ist enthalten in den Gewichten \tilde{w} .

Das durch diese Gleichungen definierte lineare Gleichungssystem gilt es noch effizient zu lösen. Dafür verwenden wir das Succesiv Overrelaxation (SOR) Verfahren.

5.5 Lösungsverfahren des linearen Gleichungssystems

Zur Bestimmung des Flussfeldes verwenden wir auf Grund der großen Zahl an Unbekannten im dünnbestetzten linearen Gleichungssystem ein iteratives Lösungsverfahren. Verwendet wird das Succesiv Overrelaxation (SOR) Verfahren, welches Ähnlichkeiten zu dem Jacobi und Gauß-Seidel Verfahren aufweist. Sie alle bestimmen die Lösung durch eine Fixpunktiteration, bei der man alle Gleichungen zu einer Unbekannten umstellt und danach für jede nacheinander löst. Dieser Prozess wird dann iterativ wiederholt.

Zuerst werden die Gleichungen umgestellt, sodass nur der zentrale Pixel jeder Gleichung (k, l) auf einer Seite ist.

$$\begin{aligned}
 u_{k,l} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} v_{k,l} - [J_{13}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} - \alpha \left(\sum_{i=-n}^n \sum_{i \neq 0} (\tilde{w}_{i,x} u_{k+i,l}) + \sum_{j=-n}^n \sum_{j \neq 0} (\tilde{w}_{j,y} u_{k,l+j}) \right)}{[J_{11}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} + \alpha (\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y})} \\
 v_{k,l} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} u_{k,l} - [J_{23}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} - \alpha \left(\sum_{i=-n}^n \sum_{i \neq 0} (\tilde{w}_{i,x} v_{k+i,l}) + \sum_{j=-n}^n \sum_{j \neq 0} (\tilde{w}_{j,y} v_{k,l+j}) \right)}{[J_{22}]_{k,l} \Psi'_{d,k,l} + \alpha (\tilde{w}_{0,x} + \tilde{w}_{0,y})}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Hierbei ist anzumerken, dass auf der rechten Seite immer noch $u_{k,l}$ bzw. $v_{k,l}$ vorkommt. Es ist Teil der Bestrafungsfunktionen $\Psi'_{d,k,l}$ und $\Psi'_{s,k,l}$. Dadurch liegt hier ein nichtlineares Gleichungssystem vor. Dies stellt kein großes Problem dar, da wir es als Folge von linearen Gleichungssystemen lösen. Die Ableitungen der Bestrafungsfunktionen werden nach einer festen Anzahl von Iterationen neu berechnet, sie werden aber sonst als von $u_{k,l}$ unabhängige Werte behandelt. Nach dieser Anzahl an inneren Iterationen nehmen wir an, dass das lineare Gleichungssystem mit den bisherigen Werten der Ableitungen der Bestrafungsfunktion zufriedenstellend gelöst ist. Daraufhin werden die Ableitungen neu berechnet. Das sich mit den neuen Werten ergebende lineare Gleichungssystem wird wieder solange iterativ gelöst, bis die Lösung zufriedenstellend ist. Hierdurch erhalten wir ein Verfahren, mit dem wir unsere nichtlinearen Gleichungssysteme lösen können und dessen Lösung konvergiert.

Fügen wir nun die Iterationsschritte hinzu, erhalten wir die Gleichungen zur Berechnung des $m + 1$. Iterationsschrittes aus den Werten des m . Iterationsschrittes.

$$\begin{aligned}
 u_{k,l}^{m+1} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} v_{k,l}^m - [J_{13}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 &\quad - \alpha \frac{\sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} u_{k+i,l}^m) + \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} u_{k,l+j}^m)}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 v_{k,l}^{m+1} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} u_{k,l}^m - [J_{23}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 &\quad - \alpha \frac{\sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} v_{k+i,l}^m) + \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} v_{k,l+j}^m)}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Dabei wurden die Ableitungen der Bestrafungsfunktionen zum letzten Mal mit den Werten zum Iterationsschritt $\tilde{m} \leq m$ aktualisiert.

Damit erhalten wir das Jacobi-Verfahren. Dieses Verfahren hat den Nachteil, dass die neuen und alten Werte während der Berechnung eines Schrittes gespeichert werden müssen. Dies verdoppelt den notwendigen Speicherplatz, was vor allem bei großen Gleichungssystemen ein Problem ist.

Eine Verbesserung ist das Gauß-Seidel-Verfahren, welches die alten Werte mit den neu berechneten überschreibt und im selben Schritt mit ihnen weiter rechnet. Dies führt zudem zu einer verdoppelten Konvergenzgeschwindigkeit im Vergleich zum Jacobi-Verfahren[Ble17].

$$\begin{aligned}
 u_{k,l}^{m+1} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} v_{k,l}^m - [J_{13}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 &\quad - \alpha \frac{\sum_{i=-n}^{-1} (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} u_{k+i,l}^{m+1}) + \sum_{j=-n}^{-1} (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} u_{k,l+j}^{m+1}) + \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} u_{k+i,l}^m) + \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} u_{k,l+j}^m)}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 v_{k,l}^{m+1} &= \frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} u_{k,l}^{m+1} - [J_{23}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \\
 &\quad - \alpha \frac{\sum_{i=-n}^{-1} (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} v_{k+i,l}^{m+1}) + \sum_{j=-n}^{-1} (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} v_{k,l+j}^{m+1}) + \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} v_{k+i,l}^m) + \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} v_{k,l+j}^m)}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Die Konvergenz lässt sich aber mit dem SOR-Verfahren noch weiter beschleunigen. Die Idee hierbei ist, dass man mit den Werten zum Zeitpunkt m und $m + 1$ interpoliert und diesen neuen Wert verwendet. Für eine Lösung x würde sich dadurch

$$x^{m+1} = (1 - \omega)x^m + \omega \tilde{x}^{m+1} \tag{5.35}$$

ergeben, wobei \tilde{x}^{m+1} der neue Wert des Gauß-Seidel-Verfahrens ist. Für $\omega = 1$ ergibt sich dabei das Gauß-Seidel-Verfahren.

Die Beschleunigung kommt nun daher, dass man Werte für Overrelaxation-Parameter ω verwendet, die aus dem Intervall $[0, 2)$ stammen. Das heißt für Werte größer eins wird extrapoliert. Dadurch propagiert man schneller in Richtung der korrekten Lösung und erhält eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit. Es ist zu vermerken, dass für Werte nahe 2 die Konvergenz nicht mehr gesichert ist[Ble17].

In unserem Fall ergibt sich für das SOR-Verfahren:

$$\begin{aligned}
 u_{k,l}^{m+1} &= (1 - \omega)u_{k,l}^m + \omega \left(\frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} v_{k,l}^m - [J_{13}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \frac{\sum_{i=-n}^{-1} (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} u_{k+i,l}^{m+1}) + \sum_{j=-n}^{-1} (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} u_{k,l+j}^{m+1}) + \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} u_{k+i,l}^m) + \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} u_{k,l+j}^m)}{[J_{11}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \right) \\
 v_{k,l}^{m+1} &= (1 - \omega)v_{k,l}^m + \omega \left(\frac{-[J_{12}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} u_{k,l}^{m+1} - [J_{23}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}}}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \frac{\sum_{i=-n}^{-1} (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} v_{k+i,l}^{m+1}) + \sum_{j=-n}^{-1} (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} v_{k,l+j}^{m+1}) + \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_{i,x}^{\tilde{m}} v_{k+i,l}^m) + \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_{j,y}^{\tilde{m}} v_{k,l+j}^m)}{[J_{22}]_{k,l} [\Psi'_{d,k,l}]^{\tilde{m}} + \alpha (\tilde{w}_{0,x}^{\tilde{m}} + \tilde{w}_{0,y}^{\tilde{m}})} \right)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird nur das SOR-Verfahren mit $\omega = 1.96$ zur Lösung von linearen Gleichungssystemen verwendet.

6 Evaluation

In diesem Kapitel betrachten wir die Qualität der neuen Ableitungfilter zur Berechnung des optischen Flusses. Dafür werden synthetische Bildfolgen verwendet, für die der exakte optische Fluss bekannt ist. Dadurch lässt sich der berechnete optische Fluss qualitativ vergleichen. Einerseits kann ein Abweichungsfehler von der exakten Lösung berechnet werden und andererseits kann man sowohl den exakten als auch den berechneten optischen Fluss visualisieren und damit vergleichen.

Zuerst wird die Berechnung des Fehlers und daraufhin die verwendete Visualisierung vorgestellt. Danach wird die eigentliche Evaluation durchgeführt.

6.1 Der durchschnittliche Winkelfehler

Da synthetische Bildfolgen verwendet werden, ist, wie bereits gesagt, der korrekte optische Fluss bekannt. Dieser wird im Englischen als Ground Truth bezeichnet. Dadurch ist es möglich, den Fehler zwischen dem geschätzten Fluss und der Ground Truth zu berechnen. Es gibt hierfür mehr als eine Möglichkeit, aber in dieser Arbeit wird der durchschnittliche Winkelfehler verwendet. Dieser heißt im Englischen Average Angular Error und wird deshalb als AAE abgekürzt.

Dafür wird, wie der Name schon vermuten lässt, der Winkel zwischen den Verschiebungsvektoren des geschätzten Verschiebungsvektorfeldes und des korrekten Verschiebungsvektorfeldes berechnet und dann über alle Pixel gemittelt. Dafür wird nicht $\mathbf{u} = (u, v)^T$ verwendet, sondern $\mathbf{w} = (u, v, 1)^T$. Damit wird auch die zeitliche Komponente in den Fehler aufgenommen, da die Verschiebung innerhalb eines Zeitschritts passiert.

Es wird also über die Winkel $\varphi_{i,j}$ zwischen den

$$\mathbf{w}_{i,j}^e = \begin{pmatrix} u_{i,j}^e \\ v_{i,j}^e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{i,j}^c = \begin{pmatrix} u_{i,j}^c \\ v_{i,j}^c \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

mit $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, M\}$ gemittelt. Hier steht e für geschätzt und c für korrekt (beides aus dem Englischen).

Die Winkel $\varphi_{i,j}$ werden mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet. Für das Skalarprodukt gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{i,j}^e, \mathbf{w}_{i,j}^c \rangle &= u_{i,j}^e u_{i,j}^c + v_{i,j}^e v_{i,j}^c + 1 \\ &= \left| \mathbf{w}_{i,j}^e \right| \left| \mathbf{w}_{i,j}^c \right| \cos(\varphi_{i,j}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei für die Norm der Vektoren gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_{i,j}^e| &= \sqrt{\langle \mathbf{w}_{i,j}^e, \mathbf{w}_{i,j}^e \rangle} = \sqrt{(u_{i,j}^e)^2 + (v_{i,j}^e)^2 + 1} \\ |\mathbf{w}_{i,j}^c| &= \sqrt{\langle \mathbf{w}_{i,j}^c, \mathbf{w}_{i,j}^c \rangle} = \sqrt{(u_{i,j}^c)^2 + (v_{i,j}^c)^2 + 1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Zusammen lässt sich der Winkel $\varphi_{i,j}$ aus $\mathbf{w}_{i,j}^e$ und $\mathbf{w}_{i,j}^c$ berechnen als:

$$\varphi_{i,j} = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{w}_{i,j}^e, \mathbf{w}_{i,j}^c \rangle}{|\mathbf{w}_{i,j}^e| \cdot |\mathbf{w}_{i,j}^c|} \right) = \arccos \left(\frac{u_{i,j}^e u_{i,j}^c + v_{i,j}^e v_{i,j}^c + 1}{\sqrt{(u_{i,j}^e)^2 + (v_{i,j}^e)^2 + 1} \cdot \sqrt{(u_{i,j}^c)^2 + (v_{i,j}^c)^2 + 1}} \right) \quad (6.4)$$

Den AAE erhält man nun durch das Mitteln über alle Pixel:

$$\text{AAE}(\mathbf{w}^e, \mathbf{w}^c) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \varphi_{i,j} \quad (6.5)$$

6.2 Testdatensatz

Als Testdatensatz werden künstlichen Sequenzen verwendet. Dadurch ist es möglich, die berechneten Flussschätzungen mit dem bekannten korrekten optischen Fluss zu vergleichen. Insgesamt werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Bilder aus vier solchen Sequenzen verwendet. Es werden hierbei die gleichen Sequenzen wie bei Blei verwendet [Ble17].

Aus der Sequenz Yosemite mit Wolken werden die Bilder 1 und 2 verwendet. Die aus 15 Bildern bestehende Sequenz wurde von L. Quan entwickelt und hat pro Bild eine Auflösung von 256×256 Pixeln. Es wird der Flug in ein Tal des Nationalparks simuliert, während im Hintergrund die Wolken nach rechts wandern. Es liegt also eine Bewegung in das Tal hinein vor und oben im Hintergrund eine Translation. Die Pixelverschiebung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bildern ist auf 5 beschränkt [Ble17]. Die Bildsequenz ist zum Beispiel auf Github verfügbar [sci].

Aus den Sequenz Office und Street werden jeweils die Bilder 10 und 11 verwendet. Beide wurden von Galvin et al. entwickelt und haben eine Auflösung von 200×200 Pixeln. In der Street Sequenz bewegt sich die Kamera langsam nach rechts, während ein Auto noch schneller nach rechts fährt. Dadurch ergibt sich eine Bewegung des Hintergrundes nach links und eine Bewegung des Autos nach rechts. Die Sequenz hat insgesamt 150 Bilder und die maximale Pixelbewegung ist 4.5 Pixel. Die Office Sequenz zeigt einen Schreibtisch von dem sich die Kamera wegbewegt. Diese Sequenz besteht aus 60 Bildern mit einer maximalen Pixelbewegung von 1.5 Pixeln. Es werden in Grauwertbilder umgewandelte Versionen von diesen farbigen Sequenzen verwendet [Ble17]. Die Bildsequenzen sind ebenfalls online verfügbar [Uni].

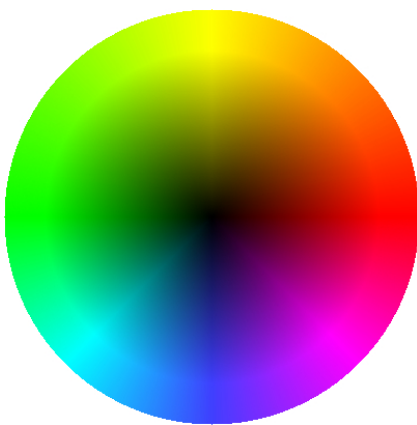
Aus der Sequenz Marble werden die Bilder 16 und 17 verwendet. Die alte Version der aus 30 Bildern bestehende Sequenz wurde von Otte und Nagel entwickelt. Sie hat eine Auflösung von 512×512 Pixeln und zeigt einen Marmorboden mit Säulen über den sich die Kamera bewegt [Ble17]. Die Sequenz ist auch online verfügbar [Alg].

6.3 Visualisierung

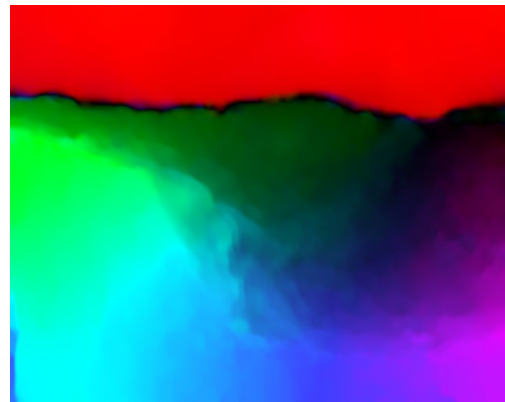
Die Visualisierung ist ein Hilfsmittel um den optischen Fluss verständlich darzustellen. Dadurch ermöglicht die Visualisierung auch eine qualitative Bewertung der Ergebnisse.

Es gibt verschiedene Methoden zur Visualisierung, von denen hier nur eine verwendet wird. Wir verwenden den Colour Plot, eine Visualisierung, die versucht alle Informationen des Verschiebungsvektorfeldes darzustellen. Beim Colour Plot wird jeder Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})^T$ an jedem Pixel dargestellt. Dafür werden die Informationen des Vektors in zwei Teile aufgespalten. Man betrachtet die Länge $|\mathbf{u}_{i,j}|$ des Vektors und die Richtung des Vektors $\mathbf{u}_{i,j}$. Die Richtung entscheidet dann die Farbe des Pixels (i, j) in der Visualisierung und die Länge die Farbintensität des Pixels. Somit können beide Informationen für alle Pixel dargestellt werden.

Abbildung 6.1a zeigt den Farbkreis über den in dieser Arbeit die Richtungen und Farben zugeordnet werden. Abbildung 6.1b zeigt eine Beispiel Fluss schätzung für die Sequenz Yosemite. In ihr sehen wir, dass der sich einheitlich nach rechts bewegende Hintergrund ein einheitliches rot hat. Die Bewegung in das Tal hinein ist an den Bergen auch gut zu erkennen.



(a) Farbkreis



(b) Visualisierung einer Fluss schätzung für die Yosemite Sequenz

Abbildung 6.1: Farbkreis mit Visualisierung des optischen Flusses.

6.4 Experimente

Zur Evaluation der Ergebnisse wurden vier Experimente mit den optimalen Diskretisierungen durchgeführt. Die ersten drei Experimente untersuchen den Einfluss von bestimmten einstellbaren Parametern auf die Qualität der Fluss schätzung. Im letzten Experiment werden die optimalen Diskretisierungen dann noch mit normalen Standarddiskretisierungen verglichen, welche in Kapitel 5 vorgestellt wurden.

Die betrachteten optimalen Diskretisierungen sind hierbei die, die in Kapitel 4 hergeleitet wurden. Sie werden in den Experimenten mit der Größe ihrer Nachbarschaft identifiziert. Die drei Standarddiskretisierungen werden mit dem Zusatz „Vergleich“ von der zugehörigen optimalen

Diskretisierung unterschieden. Alle Diskretisierungen werden mit zwei verschiedenen Bestrafungsfunktionen betrachtet. Einmal mit der einfachen quadratischen Bestrafungsfunktion (als Quad abgekürzt):

$$\Psi(s^2) = s^2, \quad \Psi'(s^2) = 1 \quad (6.6)$$

und zusätzlich noch mit einer subquadratischen Bestrafungsfunktion (als Subquad abgekürzt):

$$\Psi(s^2) = 2\lambda^2 \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} - 2\lambda, \quad \Psi'(s^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}} \quad (6.7)$$

Dadurch ergeben sich die sechs neuen optimalen Diskretisierungen, die untersucht werden und die sechs Standarddiskretisierungen, die zum Vergleich verwendet werden.

Insgesamt haben die Diskretisierungen damit die folgenden Parameter: Den Regularisierungsparameter α , der die Glattheit der Lösung beeinflusst. Die Standardabweichung σ des Gauß-Kerns mit dem vorgeglättet wird. Die Anzahl der inneren Iterationen i_i nach denen die Bestrafungsfunktionen erneut ausgewertet werden. Die Anzahl der äußeren Iterationen i_o , die festlegen wie oft die innere Iteration wiederholt wird, bzw. wie oft die Bestrafungsfunktionen ausgewertet werden. Für die subquadratischen Bestrafungsfunktionen auch noch die Parameter λ_d und λ_s , welche das Verhalten der Bestrafungsfunktionen an den Kanten, im Datenterm oder im Glattheitsterm, regeln.

Für die quadratische Bestrafungsfunktion ergibt sich die Auswertung der Ableitung immer zu 1, weshalb man insgesamt $i = i_o \cdot i_i$ Iterationen hat. Im Fall der subquadratischen Bestrafungsfunktion hat man zwar auch $i = i_o \cdot i_i$ Iterationen, aber die Auswertungen der Ableitung der Bestrafungsfunktion alle i_i Iterationen sind im allgemeinen nicht gleich.

Die Qualität einer Lösung wird hier hauptsächlich durch die Größe des durchschnittlichen Winkelfehlers (AAE) bewertet. Zusätzlich werden die Visualisierungen von manchen Ergebnissen miteinander verglichen und bewertet.

6.4.1 Experiment 1

Im ersten Experiment untersuchen wir den Einfluss der äußeren Iterationen auf die Flusschätzung. Hierbei liegt das Interesse weniger bei der Qualität der Lösung und mehr bei der Konvergenzgeschwindigkeit der einzelnen optimalen Diskretisierungen. Es wurde die Sequenz Yosemite verwendet und die zugehörigen Flussfelder mit verschiedener Anzahl von äußeren Iterationen i_o berechnet. Der Parameter α hat für jede einzelne Diskretisierung einen festen Wert, während die anderen Parameter für alle Diskretisierungen fest sind.

Die durchschnittlichen Winkelfehler zwischen der korrekten Lösung der Sequenz und den Flusschätzungen wurden berechnet und sind in Tabelle 6.1 zu finden.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse erkennt man gut, dass die Flusschätzung für die 3er und 4er Nachbarschaft in beiden Fällen konvergiert. Man sieht aber auch, dass die 4er Nachbarschaft fast 10-mal so viele Iterationen dafür benötigt wie die 3er-Nachbarschaft. Die 5er-Nachbarschaft konvergiert auch in beiden Fällen, allerdings viel langsamer. Die Anzahl der nötigen Iterationen steigen wieder ungefähr um den Faktor 10 und bewegen sich damit in einen Bereich, der sich auf dem verwendeten Computer nicht mehr gut auswerten lässt. Deshalb wird die 5er Nachbarschaft

nicht auf der Marble Sequenz evaluiert, welche die größten Bilder hat. Insgesamt scheint auch die Wahl der Bestrafungsfunktion keinen großen Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit zu haben.

Sowohl die verringerten Konvergenzgeschwindigkeiten als auch die größeren Fehler bei den Fluss-schätzungen für die größeren Nachbarschaften, lassen sich durch die verwendeten Diskretisierungen erklären. Alle optimierten Diskretisierungen sind in 1D konstruiert und auf 2D erweitert. Im Fall der 3er Nachbarschaft ist das kein Problem, weil trotzdem noch alle ersten Ableitungen berücksichtigt werden. Aber bereits bei der 4er Nachbarschaft werden nur die zweiten Ableitungen entlang der Achsen (u_{xx} , u_{yy} , v_{xx} , v_{yy}) verwendet. Im Glattheitsterm fehlen dadurch der gemischte Term u_{xy} bzw. v_{xy} und der dazu identische Term u_{yx} bzw. v_{yx} . Deshalb ist der Glattheitsterm nicht rotationsinvariant und vernachlässigt die gemischten Ableitungen. Bei der 5er Nachbarschaft ist das gleiche Problem für die dritten Ableitungen zu beobachten, hier werden allerdings noch mehr gemischte Ableitungen vernachlässigt.

Die Standarddiskretisierungen, mit denen die optimalen Diskretisierungen noch verglichen werden, leiden unter dem selben Problem, da sie gleich konstruiert wurden. Dadurch ist ein fairer Vergleich gesichert.

3er Nachbarschaft			4er Nachbarschaft			5er Nachbarschaft		
i_o	Quad $\alpha = 20.53$	Subquad $\alpha = 4.87$	i_o	Quad $\alpha = 36.51$	Subquad $\alpha = 2.74$	i_o	Quad $\alpha = 115.48$	Subquad $\alpha = 2.05$
10	5.945°	10.599°	100	7.406°	7.399°	1000	8.912°	9.040°
30	5.942°	3.806°	200	7.224°	6.530°	1500	8.571°	8.824°
50	5.943°	3.686°	300	7.193°	6.351°	2000	8.256°	8.735°
70	5.943°	3.687°	400	7.190°	6.184°	2500	8.152°	8.667°
90	5.943°	3.688°	500	7.192°	6.117°	3000	8.054°	8.631°

Tabelle 6.1: Tabellarische Übersicht der AAE zu den Fluss-schätzungen von Experiment 1. Alle Experimente verwenden die Sequenz Yosemite. Der Parameter i_o ist variabel, Parameter α ist fest für jede Diskretisierung. Die anderen Parameter sind fest für alle Diskretisierungen mit $\sigma = 2.018$, $i_i = 10$ und $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$.

6.4.2 Experiment 2

Im zweiten Experiment wird der Einfluss der Standardabweichung σ des Gauß-Kerns auf die Qualität der Fluss-schätzung betrachtet. Hierzu haben wir die Sequenzen Yosemite, Office, Street und Marble verwendet und die zugehörigen Flussfelder mit verschiedenen Werten für σ berechnet. Es werden nur die Diskretisierungen mit quadratischer Bestrafungsfunktion betrachtet und der Parameter i_i ist für das Experiment fest. Die Anzahl an äußeren Iterationen i_o ist mit Hilfe von Experiment 1 für jede Diskretisierung so gewählt, dass das Ergebnis nah am Grenzwert der Konvergenz liegt. Der Regularisierungsparameter α ist pro Bild und Nachbarschaft fest auf einen Wert gesetzt, der zu guten Ergebnissen führt.

Manche der Visualisierungen sind in Abbildung 6.2 zu sehen. Die Abweichung der Fluss-schätzungen von der korrekten Lösung wurde wieder berechnet und ist in Tabelle 6.2 zu finden.

Sequenz	σ	3er Nachbarschaft	4er Nachbarschaft	5er Nachbarschaft
Yosemite		$\alpha = 20.53$	$\alpha = 36.51$	$\alpha = 115.48$
	1.036	9.706°	11.813°	12.811°
	1.516	6.459°	8.052°	9.203°
	2.018	5.943°	7.193°	8.256°
	2.442	6.039°	7.182°	8.519°
	2.955	6.444°	7.473°	9.219°
Office		$\alpha = 1333.52$	$\alpha = 4869.67$	$\alpha = 4869.67$
	0.483	6.143°	10.692°	16.987°
	0.707	5.093°	8.043°	13.316°
	1.036	4.807°	7.822°	11.770°
	1.516	5.477°	9.290°	12.941°
	2.018	7.623°	11.656°	14.881°
Street		$\alpha = 17783.79$	$\alpha = 3162.28$	$\alpha = 3162.28$
	0.483	7.157°	8.515°	10.019°
	0.707	5.932°	7.104°	8.372°
	1.036	5.934°	6.688°	7.725°
	1.516	7.667°	9.085°	9.497°
	2.018	13.880°	13.570°	13.966°
Marble		$\alpha = 36.52$	$\alpha = 86.60$	—
	2.442	5.615°	6.560°	—
	2.955	5.349°	6.471°	—
	3.575	5.206°	6.618°	—
	4.326	5.286°	7.164°	—

Tabelle 6.2: Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusssschätzungen von Experiment 2. Der Parameter σ ist variabel, Parameter α ist fest für jede Diskretisierung und Sequenz, Parameter i_o ist pro Diskretisierung für alle Bilder gleich, 3er: $i_o = 50$, 4er: $i_o = 300$, 5er: $i_o = 2000$ und der Parameter i_i ist fest $i_i = 10$. Der kleinste Fehler pro Sequenz und Diskretisierung ist **fett** markiert.

Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass für die verwendeten Diskretisierungen die Wahl des Parameters σ mehr von der betrachteten Sequenz abhängt als von der gewählten Diskretisierung. Für die Sequenz Office tritt das beste Ergebnis für alle optimalen Diskretisierungen beim gleichen Wert für σ auf (Office: $\sigma = 1.036$). Bei Street ist der Wert $\sigma = 1.036$ optimal für die 4er und 5er Nachbarschaft. Für die 3er Nachbarschaft ist der Unterschied zum optimalen Wert sehr gering. Bei Yosemite und Marble liegt das σ für die besten Ergebnisse ebenfalls nah beieinander.

Dies ist darauf zurückzuführen, dass alle optimalen Diskretisierungen eine Glattheitsbedingung an die Schätzung stellen. Ist das Bild nicht genug geglättet, finden sich kleine Ausreißer des Bildes in der Flusssschätzung wieder. Dadurch ist die Schätzung nicht glatt genug, was gut in der linken unteren Ecke von Abbildung 6.2a zu sehen ist. Die korrekte Bewegung ist in das Tal hinein, aber die Schätzung berechnet eine gegenläufige Bewegung von Teilen des Berges. Ist σ zu groß, gehen zu viele Informationen im Bild, vor allem über Kanten, verloren. Dadurch ist die Schätzung glatter, aber spiegelt weniger den korrekten optischen Fluss der Sequenz wieder. Dies erkennt man gut an

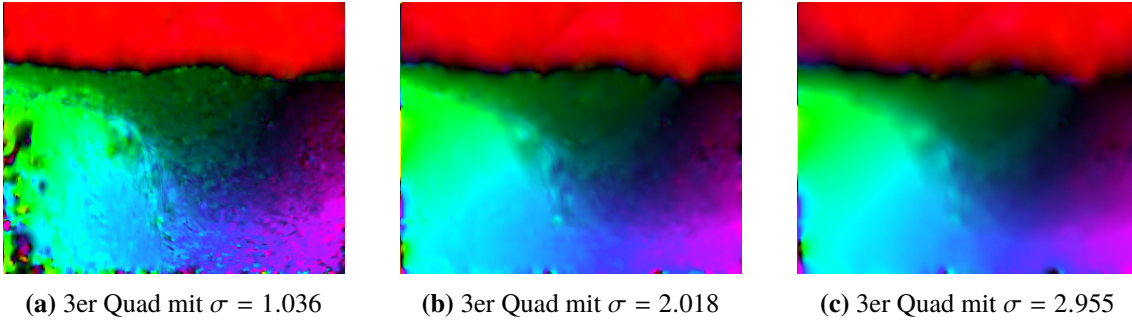


Abbildung 6.2: Visualisierungen einiger Flusssschätzungen zur Yosemite Sequenz aus Experiment 2.

Abbildung 6.2b und Abbildung 6.2c. Bei Abbildung 6.2c ist vor allem der Übergang zum Himmel, welcher eigentlich eine einheitliche Rechtsbewegung vorweist, viel stärker verschwommen als bei Abbildung 6.2b.

Es sollte erneut angemerkt werden, dass die Schätzungen der größeren Nachbarschaften schlechter sind. Die Ursache wurde bereits in Experiment 1 begründet.

6.4.3 Experiment 3

Das dritte Experiment beschäftigt sich mit dem Einfluss des Regularisierungsparameters α auf die Qualität der Flusssschätzung. Hier wurden wieder die Sequenzen Yosemite, Office, Street und Marble verwendet und die zugehörigen Flussfelder mit verschiedenen Werten für α berechnet. Für die Diskretisierungen mit subquadratischer Bestrafungsfunktion gilt $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$. Der Parameter i_i ist fest für das Experiment. Die Anzahl an äußeren Iterationen i_o ist mit Hilfe von Experiment 1 für jede Diskretisierung so gewählt, dass das Ergebnis nah am Grenzwert der Konvergenz liegt. Der Parameter σ ist mit Hilfe von Experiment 2 für jede Sequenz so gewählt, dass gute Ergebnisse für alle Diskretisierungen zu erwarten sind.

Manche der Visualisierungen sind in Abbildung 6.3 zu sehen. Die berechneten Abweichungsfehler der Flusssschätzungen sind in Tabelle 6.3 und Tabelle 6.4 zu finden.

Für alle Sequenzen lässt sich beobachten, dass für eine Bestrafungsfunktion die optimale Wahl des Regularisierungsparameters α für alle optimalen Diskretisierungen in derselben Größenordnung liegen. Es ist eine Tendenz zu beobachten, dass größere Nachbarschaften ihre optimale Schätzung mit einem größeren α liefern als die 3er Nachbarschaft. Dies lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass die größeren Nachbarschaften die Glattheit der höheren Ableitungen des optischen Flusses verlangen. Eine Schätzung mit geringer erster Ableitung ist recht konstant, während eine Funktion mit geringer zweiter Ableitung zumindest linear sein kann. Dadurch wird eine größere Glattheit verlangt.

Der einzige starke Ausreißer zu dieser Tendenz findet sich bei der Street-Sequenz mit quadratischer Bestrafungsfunktion. Hier ist der Regularisierungsparameter für die optimale Flusssschätzung mit 3er Nachbarschaft um den Faktor 5 größer als für die größeren Nachbarschaften. Dieser Ausreißer lässt sich allerdings gut unter Betrachtung der Visualisierung erklären. In der Street Sequenz bewegt sich der Hintergrund nach links und das Auto nach rechts, was eine große erste Ableitung um

Sequenz	Ψ	α	3er Nachbarsch.	4er Nachbarsch.	5er Nachbarsch.
Yosemite $\sigma = 2.018$	Quad	11.54	6.050°	7.896°	9.386°
		20.53	5.943°	7.511°	8.993°
		36.52	6.073°	7.192°	8.697°
		64.94	6.608°	6.921°	8.398°
		115.48	7.703°	6.758°	8.254°
		205.35	9.518°	6.826°	8.377°
	Subquad	0.87	6.487°	7.560°	9.991°
		1.54	4.988°	6.582°	9.026°
		2.74	4.102°	6.360°	8.457°
		4.87	3.686°	6.394°	8.245°
8.66		4.832°	6.865°	8.392°	
Office $\sigma = 1.036$	Quad	562.34	4.984°	9.029°	13.052°
		865.96	4.859°	8.725°	12.549°
		1333.52	4.806°	8.470°	12.181°
		2053.52	4.845°	8.196°	11.932°
		3162.27	4.994°	7.931°	11.815°
		4869.67	5.298°	7.819°	11.797°
		7498.94	5.788°	7.964°	11.897°
	Subquad	10.00	4.732°	7.031°	11.987°
		13.34	4.648°	6.718°	11.379°
		17.78	4.659°	6.499°	10.856°
		23.71	4.808°	6.344°	10.510°
		31.62	5.064°	6.348°	10.299°
		42.17	5.448°	6.546°	10.178°
		56.23	5.990°	6.866°	10.145°
74.99	6.755°	7.247°	10.267°		

Tabelle 6.3: Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 3 für die Sequenzen Yosemite und Office. Der Parameter α ist variabel, Parameter σ ist fest für jede Sequenz, Parameter i_o ist pro Diskretisierung für alle Bilder gleich, 3er: $i_o = 50$, 4er: $i_o = 300$, 5er: $i_o = 2000$, der Parameter i_i ist fest $i_i = 10$ und $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$. Der kleinste Fehler pro Sequenz und Diskretisierung ist **fett** markiert.

das Auto zur Folge hat. In der besten Flusschätzung der 4er Nachbarschaft (Abbildung 6.3a) ist der Hintergrund zwar etwas unruhig und die Form des Autos stark verschwommen, aber die Glattheitsbedingung an die zweite Ableitung führt zu einer erkennbaren Bewegung des Autos. Die Flusschätzung der 3er Nachbarschaft versucht eine solche starke Änderung des optischen Flusses zu verhindern. Dadurch ist bei gleichem Regularisierungsparameter (Abbildung 6.3b) die Bewegung des Autos nur noch schlecht zu erkennen und bei einem deutlich größeren α (Abbildung 6.3c) nur noch als schwacher Fleck sichtbar. Beide stellen darum den optischen Fluss im Bereich des Autos nur schlecht dar, der höhere Regularisierungsparameter führt allerdings zu einem einheitlichen Hintergrund, was zu einer etwas besseren Gesamtschätzung führt.

Sequenz	Ψ	α	3er Nachbarsch.	4er Nachbarsch.	5erNachbarsch.
Street $\sigma = 1.036$	Quad	1778.28	6.360°	6.701°	7.826°
		3162.28	6.250°	6.688°	7.724°
		5623.41	6.161°	6.864°	7.990°
		10000.00	6.040°	7.501°	8.282°
		17782.80	5.928°	9.045°	9.148°
	31622.79	6.021°	10.965°	10.976°	
	Subquad	6.49	4.823°	6.227°	7.610°
		10.00	4.648°	6.050°	7.292°
		15.40	4.895°	6.016°	6.982°
		23.71	5.340°	6.051°	6.842°
36.52		5.269°	6.477°	6.938°	
Marble $\sigma = 3.575$	Quad	23.71	5.247°	7.000°	—
		36.52	5.206°	6.814°	—
		56.23	5.250°	6.675°	—
		86.60	5.373°	6.618°	—
		133.35	5.565°	6.681°	—
	Subquad	3.65	5.082°	6.434°	—
		5.62	4.979°	6.383°	—
		8.66	5.223°	6.501°	—
		13.34	5.565°	6.980°	—

Tabelle 6.4: Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 3 für die Sequenzen Street und Marble. Der Parameter α ist variabel, Parameter σ ist fest für jede Sequenz, Parameter i_o ist pro Diskretisierung für alle Bilder gleich, 3er: $i_o = 50$, 4er: $i_o = 300$, 5er: $i_o = 2000$, der Parameter i_i ist fest $i_i = 10$ und $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$. Der kleinste Fehler pro Sequenz und Diskretisierung ist **fett** markiert.

Die Ergebnisse zeigen auch eindeutig, dass der Regularisierungsparameter für die subquadratische Bestrafungsfunktion viel kleiner gewählt werden sollte als für die quadratische Bestrafungsfunktion. Dies liegt daran, dass die Kanten im optischen Fluss nach Konstruktion der subquadratischen Bestrafungsfunktionen weniger ins Gewicht fallen. Dadurch bleiben die Kanten erhalten, was auch der Grund dafür ist, dass alle Flusschätzungen mit subquadratischer Bestrafungsfunktion bessere Ergebnisse liefern als ihre Gegenstücke mit quadratischer Bestrafungsfunktion. Durch klarere Kanten treten Effekte wie in Abbildung 6.3b und Abbildung 6.3c nicht mehr auf, weil der Hintergrund mit seinen leichten Änderungen immer noch stark genug bestraft wird, aber die Kanten erhalten bleiben (Abbildung 6.3f). Dadurch ist es nicht mehr besser mit einem großen α das Auto zu „überglätten“, wie es im quadratischen Fall passiert.

Auch hier zeigen sich die schlechteren Schätzungen bei den größeren Nachbarschaften im Vergleich zu den kleineren, welche bereits in den ersten zwei Experimenten beobachtet wurden. Hier kann man an den Ergebnissen aber noch zusätzlich beobachten, dass für eine Nachbarschaft der Wechsel von quadratischer Bestrafungsfunktion zu subquadratischer Bestrafungsfunktion die Schätzung zwar verbessert, aber die Größenordnung des Fehlers meist ähnlich groß bleibt. Folglich gleicht die Verwendung einer subquadratischen Bestrafungsfunktion den Fehler, der durch die Konstruktion der

Diskretisierungen mit höheren Ableitungen entsteht, nicht aus. Dies sieht man in Abbildung 6.3d und Abbildung 6.3e. Der AAE ist für die subquadratische Bestrafungsfunktion zwar kleiner, aber in beiden Fällen ist die Fluss schätzung sehr unruhig, obwohl die Bewegung der Sequenz zum Zentrum hin glatt ist.

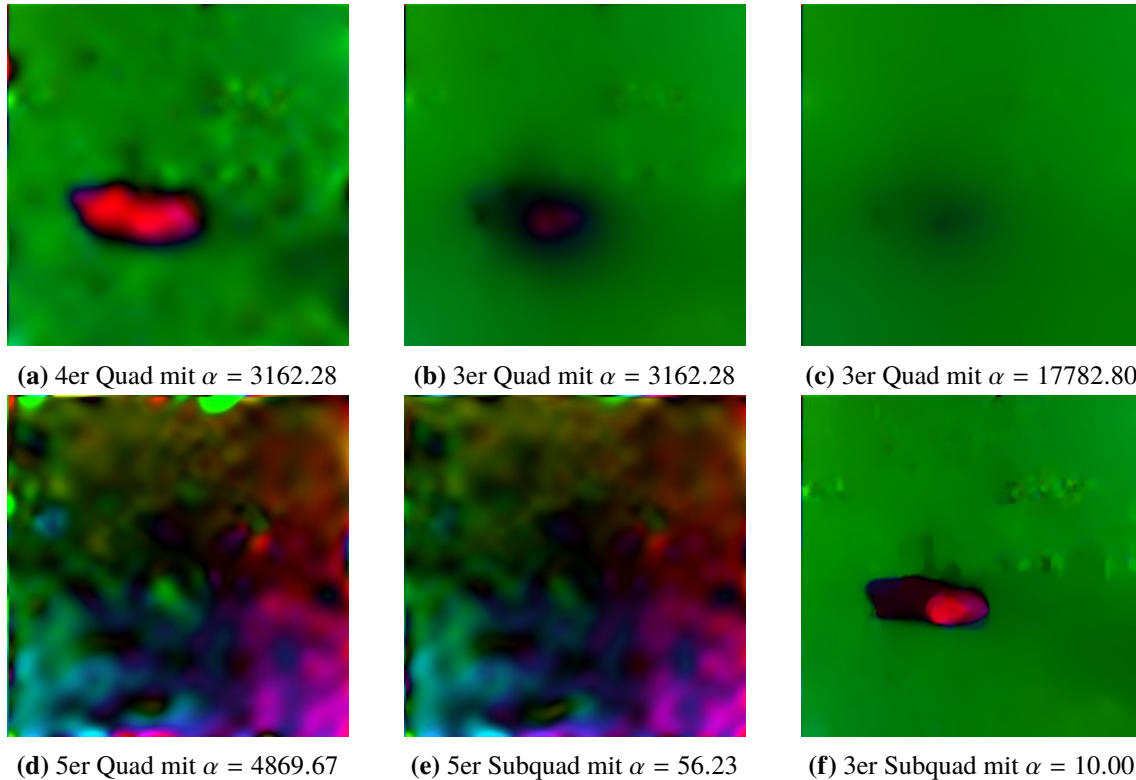


Abbildung 6.3: Visualisierungen einiger Fluss schätzungen zur Street und Office Sequenz aus Experiment 3. Obere Reihe: Alle Bilder zu Street. Untere Reihe: Linkes und mittleres Bild zu Office und rechtes Bild zu Street

6.4.4 Experiment 4

Im letzten Experiment vergleichen wir schließlich die optimalen Diskretisierungen mit bekannten Standarddiskretisierungen. Hierfür wird jede optimale Diskretisierung direkt mit einer passenden Standarddiskretisierung verglichen. Dies geschieht anhand der Sequenzen Yosemite, Office und Street. Um die optimalen Schätzungen zu finden, wurden die Parameter α und σ per Trial-and-Error angepasst. Die Basis dafür bilden die Parameter mit den besten Ergebnissen der vorangegangenen Experimente. Für die Diskretisierungen mit quadratischer Bestrafungsfunktion gilt $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$ und der Parameter $i_i = 10$ ist fest für das Experiment. Die Anzahl an äußeren Iterationen i_o ist mit Hilfe von Experiment 1 für jede Diskretisierung so gewählt, dass das Ergebnis nah am Grenzwert der Konvergenz ist.

Die Visualisierungen aller Fluss schätzungen sind in Abbildung 6.5, Abbildung 6.6 und Abbildung 6.7 zu sehen. Die Abweichungsfehler findet man in Tabelle 6.5.

Die Ergebnisse von Tabelle 6.5 zeigen wie schon Experiment 2, dass für verschiedene Diskretisierungen der Parameter σ bei der gleichen Sequenz nicht viel geändert werden muss, um für alle Diskretisierungen die beste Flusschätzung zu erhalten. Für Yosemite liegt die beste Schätzung bei fast allen Diskretisierungen bei $\sigma = 2.018$ und nur zwei Diskretisierungen haben ihre beste Schätzung bei $\sigma = 1.835$. Für Office und Street hat der Glättungsparameter mehr Variation für die besten Schätzungen, aber in beiden Fällen liegt die beste Wahl für den Parameter σ nah an 1.036. Es ist ebenfalls auffällig, dass σ bei den optimalen Diskretisierungen und bei den jeweiligen zugehörigen Vergleichsdiskretisierungen fast immer gleich gewählt ist. Dies liegt daran, dass optimale und Vergleichsdiskretisierung die Glattheitsbedingung an die gleiche Ableitung stellen.

Für die verschiedenen Diskretisierungen ist der Regularisierungsparameter α , wie auch schon in Experiment 3 beobachtet wurde, viel unterschiedlicher. Es sind auch wieder die gleichen Regelmäßigkeiten für den Zusammenhang zwischen Regularisierungsparameter und bester Schätzung für eine Diskretisierung zu beobachten. Ähnliche Größenordnung von α pro Sequenz und Bestrafungsfunktion. Die Tendenz, dass größere Nachbarschaften mit größerem α das beste Ergebnis liefern. Viel kleineres α für subquadratische Bestrafungsfunktionen als für Quadratische. Es ist zu beobachten, dass diese Regelmäßigkeiten, in gleichem Maß auch für die Vergleichsdiskretisierungen gelten. Die Gründe hierfür sind die gleichen wie für die optimalen Diskretisierungen.

Es ist ebenfalls klar zu sehen, dass die optimalen Diskretisierungen keine Verbesserung in der Qualität der Schätzung im Vergleich zu den bekannten Standarddiskretisierungen liefern. Für alle Sequenzen liefern die optimalen Diskretisierungen schlechtere Schätzungen als ihre jeweiligen Vergleichsdiskretisierungen bei gleicher Bestrafungsfunktion. Dieser Unterschied ist allerdings in den meisten Fällen nicht sehr groß und vor allem in den Visualisierungen fast nicht zu erkennen. Man kann das Ergebnis einer optimalen Diskretisierung mit bloßem Auge praktisch nicht von der zugehörigen Standarddiskretisierung unterscheiden. Daraus lässt sich folgern, dass unsere optimalen Diskretisierungen zwar nicht ungeeignet sind um den optischen Fluss zu berechnen, die Standarddiskretisierungen aber einfacher sind und sogar bessere Ergebnisse liefern.

Der Grund hierfür könnte mit dem Verhalten der optimalen Diskretisierungen an den Rändern zu tun haben. In Abbildung 6.4a (das Bild aus Abbildung 6.5g größer) sieht man in den Pixeln am linken Bildrand einen großen Fehler. Die Flusschätzung macht einen Sprung, ist somit nicht glatt, und zeigt teilweise einen Fluss in falsche Richtungen. Auch andere optimale Diskretisierungen zeigen ähnliche Fehler am linken und oberen Rand. Diese Fehler sind vermutlich verantwortlich dafür, dass die optimalen Diskretisierungen immer schlechter sind als die Standarddiskretisierungen, da bei diesen ein solches Verhalten nicht zu beobachten ist.

Dieser Fehler stammt aus der Wahl der faktorisierten Diskretisierung. In Kapitel 4 gab es für alle Nachbarschaften vier mögliche Faktorisierungen. In allen Fällen wurde die „einfachste“ Diskretisierung mit zwei positiven Vorzeichen gewählt. Im Fall der 3er Nachbarschaft ist das:

$$(a, b, c) = \frac{1}{2h} (-1, 0, 1) + \frac{\sqrt{3}h}{3} \cdot \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (6.8)$$

Wenn wir die Flusschätzung für Abbildung 6.4a erneut mit gleichen Parametern aber

$$(a, b, c) = \frac{1}{2h} (-1, 0, 1) - \frac{\sqrt{3}h}{3} \cdot \frac{1}{h^2} (1, -2, 1) \quad (6.9)$$

berechnen, erhalten wir Abbildung 6.4b. In Abbildung 6.4b sehen wir erneut einen starken Fehler, dieses Mal aber am rechten und unteren Rand.

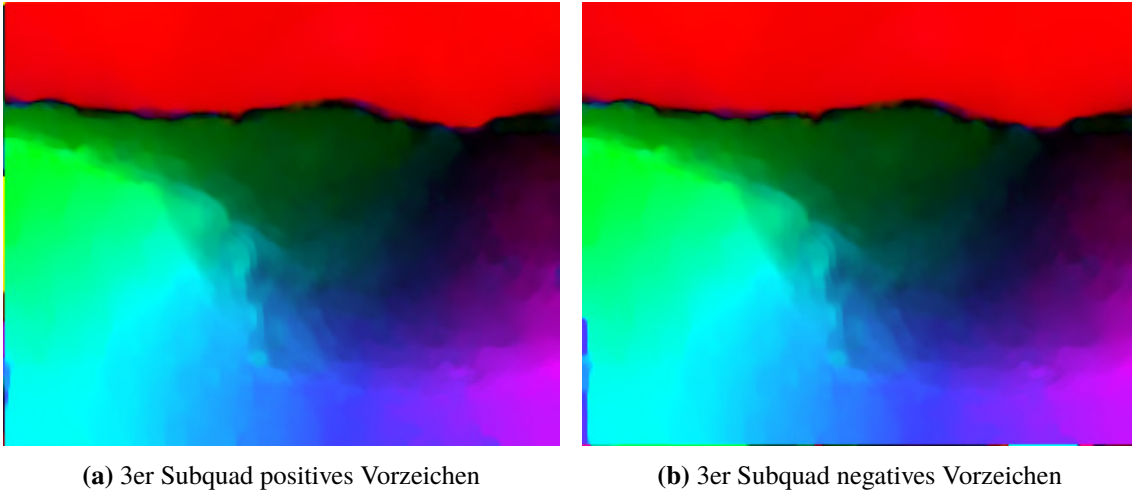


Abbildung 6.4: Zusätzliche Visualisierungen von Flusschätzungen zur Yosemite Sequenz zu Experiment 4.

Dies lässt darauf schließen, dass die Fehlerquelle damit zusammenhängt, wie die Diskretisierung am Rand aussieht. Am Rand liegt auch bei der optimalen Diskretisierung kein optimaler Ableitungsfiler vor, da manche Indikatorfunktionen 0 sind. Anders als bei den Standarddiskretisierungen scheint dies aber ein größeres Problem zu sein.

Dies wirft die Frage auf, wieso es bei den optimalen Diskretisierungen ein größeres Problem darstellt. Möglicherweise stammt es daher, dass die zentralen Differenzenquotienten eine gewisse Symmetrie haben. Sie sind entweder achsensymmetrisch zur Mitte (z.B. $\frac{1}{h^2} (1, -2, 1)$) oder punktsymmetrisch zur Mitte (z.B. $\frac{1}{2h} (-1, 0, 1)$). Die Summe zweier verschiedener zentraler Differenzenquotienten mit verschiedenen Symmetrien wie in Gleichung (6.8) und Gleichung (6.9) hat aber keine dieser Symmetrien.

Eine andere Frage wäre, wie der qualitative Unterschied zwischen den optimalen Diskretisierungen und den Standarddiskretisierungen unter Vernachlässigung des Randes aussieht. Möglicherweise fällt der Fehler am Rand so ins Gewicht, dass die gesamte Flusschätzung schlechter ist, obwohl die optimale Diskretisierung in der Mitte des Bildes eigentlich etwas bessere Ergebnisse liefert. Diese Verbesserung ist, falls sie existiert, nicht sehr groß, wie man in Abbildung 6.5, Abbildung 6.6 und Abbildung 6.7 sehen kann. Die Visualisierungen von optimalen Diskretisierungen und Standarddiskretisierungen sind sich sehr ähnlich. Diese beiden Fragen können aber im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr geklärt werden.

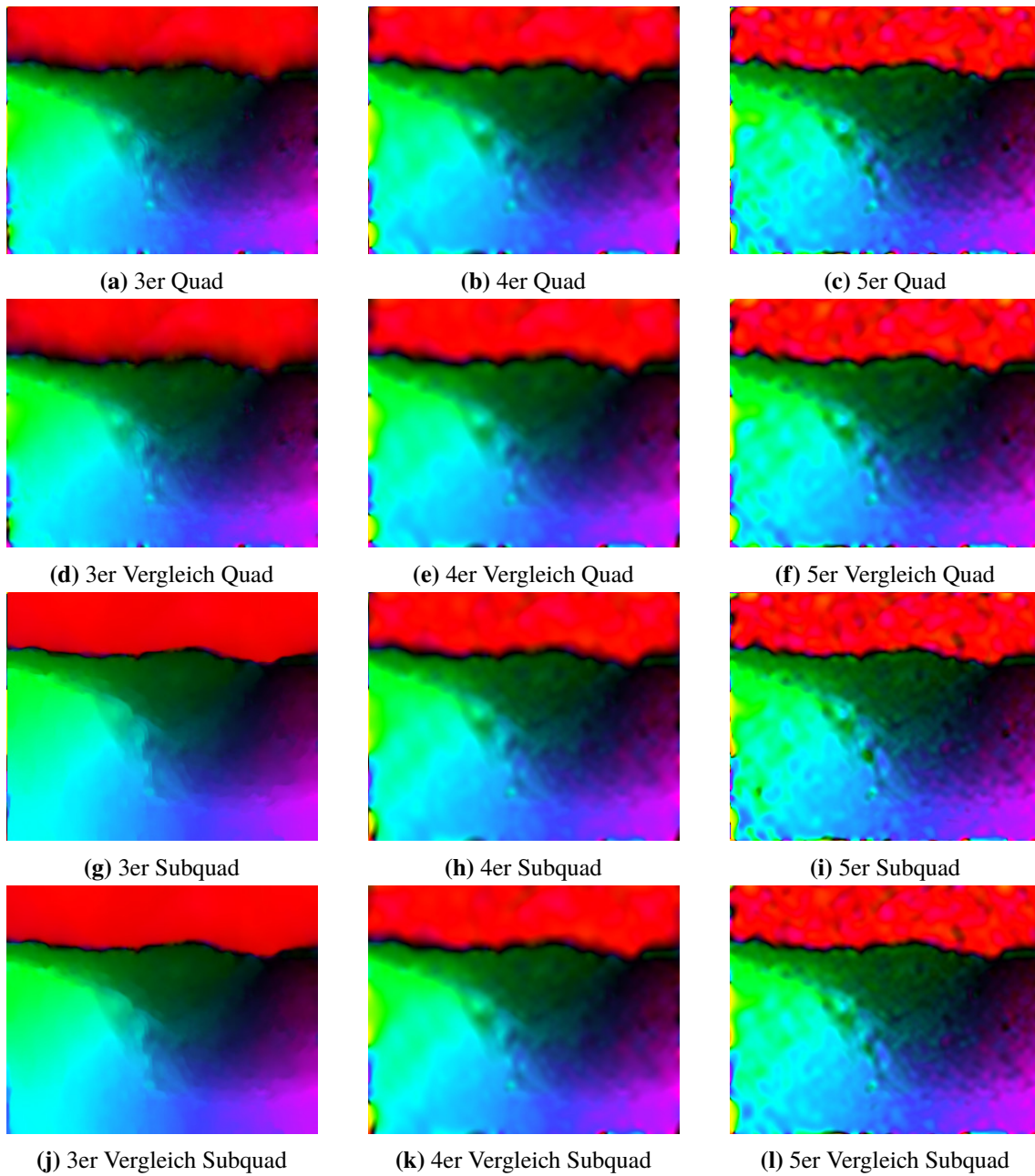


Abbildung 6.5: Visualisierungen der Flusschätzungen zur Yosemite Sequenz aus Experiment 4.

Sequenz	Ψ	Diskretisierung	σ	α	AAE
Yosemite	Quad	3er Nachbarschaft	2.018	20.53	5.943°
		3er Nachbarsch. Vergleich	2.018	23.71	5.916°
		4er Nachbarschaft	2.018	133.35	6.753°
		4er Nachbarsch. Vergleich	2.018	205.35	6.611°
		5er Nachbarschaft	2.018	115.48	8.256°
		5er Nachbarsch. Vergleich	2.018	273.84	7.862°
	Subquad	3er Nachbarschaft	2.018	4.87	3.686°
		3er Nachbarsch. Vergleich	2.018	4.87	3.528°
		4er Nachbarschaft	2.018	3.65	6.345°
		4er Nachbarsch. Vergleich	2.018	7.50	6.060°
		5er Nachbarschaft	1.835	4.87	8.241°
		5er Nachbarsch. Vergleich	1.835	4.22	7.609°
Office	Quad	3er Nachbarschaft	1.036	1333	4.806°
		3er Nachbarsch. Vergleich	0.942	1778	4.657°
		4er Nachbarschaft	0.856	6493	7.646°
		4er Nachbarsch. Vergleich	0.856	11547	7.106°
		5er Nachbarschaft	1.036	4869	11.745°
		5er Nachbarsch. Vergleich	1.036	4869	10.922°
	Subquad	3er Nachbarschaft	1.036	15.40	4.636°
		3er Nachbarsch. Vergleich	1.036	13.34	4.416°
		4er Nachbarschaft	1.139	27.38	6.311°
		4er Nachbarsch. Vergleich	1.139	42.17	5.824°
		5er Nachbarschaft	1.139	48.70	10.074°
		5er Nachbarsch. Vergleich	1.139	64.93	9.304°
Street	Quad	3er Nachbarschaft	0.856	31622	5.790°
		3er Nachbarsch. Vergleich	0.856	48696	5.606°
		4er Nachbarschaft	1.036	2738	6.677°
		4er Nachbarsch. Vergleich	1.036	4869	6.513°
		5er Nachbarschaft	1.036	2738	7.716°
		5er Nachbarsch. Vergleich	1.036	5623	7.312°
	Subquad	3er Nachbarschaft	1.139	8.66	4.585°
		3er Nachbarsch. Vergleich	1.253	7.50	4.470°
		4er Nachbarschaft	1.036	15.40	6.016°
		4er Nachbarsch. Vergleich	1.036	23.71	5.595°
		5er Nachbarschaft	1.036	27.38	6.834°
		5er Nachbarsch. Vergleich	1.036	42.17	6.416°

Tabelle 6.5: Tabellarische Übersicht der AAE zu den Flusschätzungen von Experiment 4 für die Sequenzen Yosemite, Office und Street. Die Parameter α und σ sind variabel, Parameter i_o ist pro Diskretisierung für alle Bilder gleich, 3er: $i_o = 50$, 4er: $i_o = 300$, 5er: $i_o = 2000$, der Parameter i_i ist fest $i_i = 10$ und $\lambda_s = \lambda_d = 0.01$. Die bessere Flusschätzung zwischen einer optimalen Diskretisierung und der zugehörigen Vergleichsdiskretisierung ist **fett** markiert.

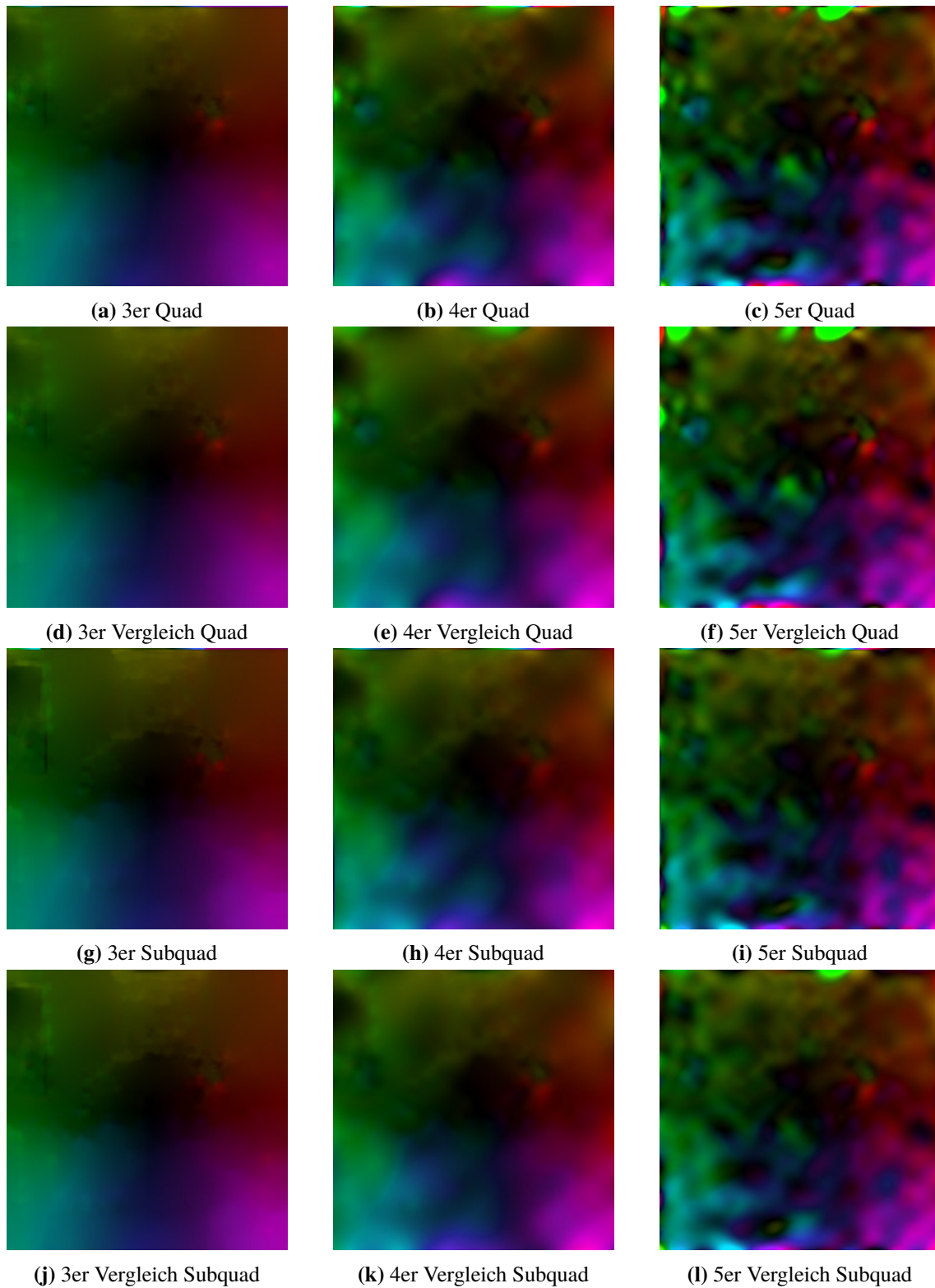


Abbildung 6.6: Visualisierungen der Flusschätzungen zur Office Sequenz aus Experiment 4.

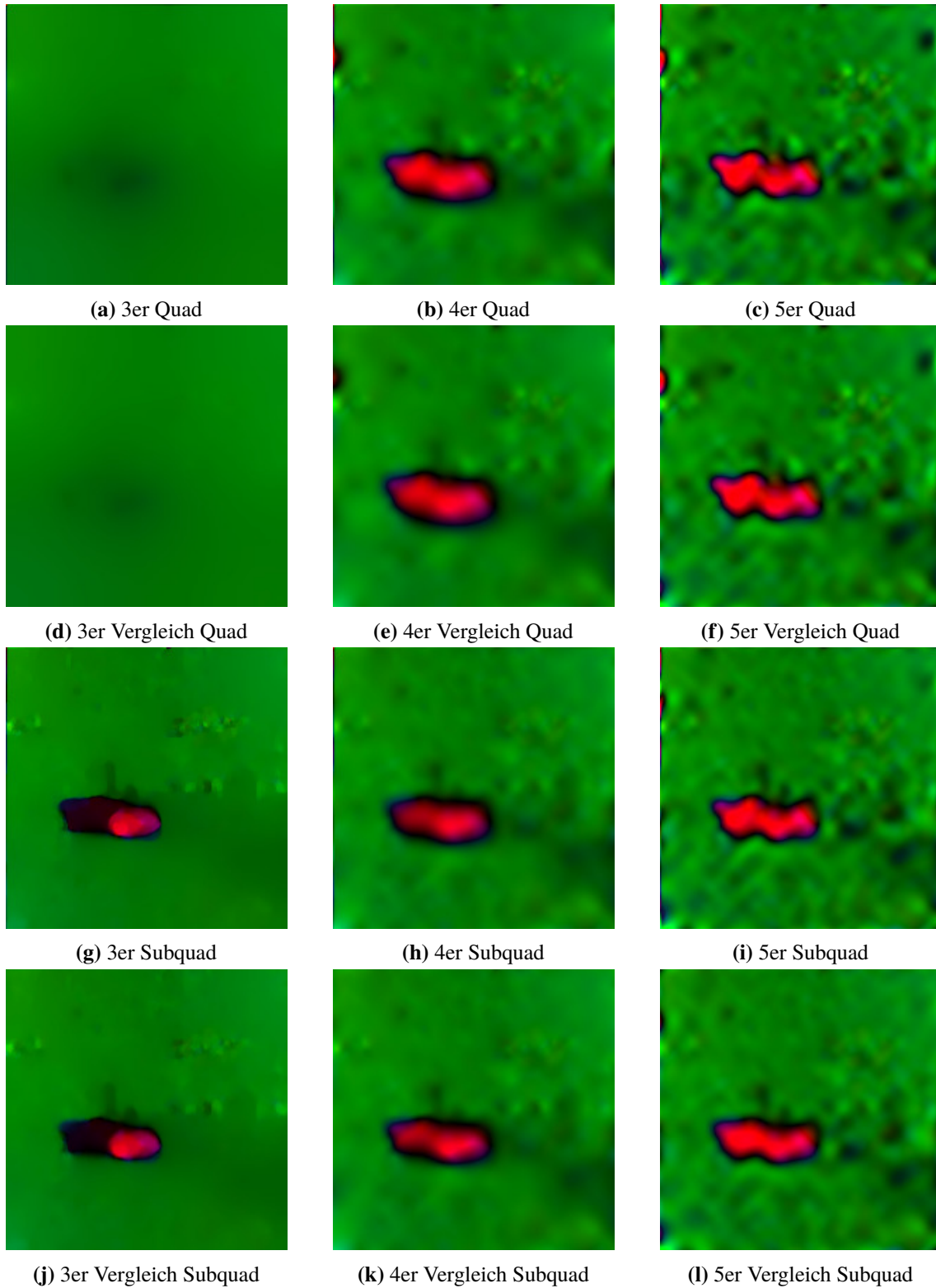


Abbildung 6.7: Visualisierungen der Fluss-schätzungen zur Street Sequenz aus Experiment 4.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Es war das Ziel dieser Arbeit, die Approximationsordnung im Diffusionsterm in den Euler-Lagrange-Gleichungen zu verbessern. Dafür sollten optimale Ableitungsfiler für die Diffusionsterme faktorisiert werden, welche als entsprechende Approximationen für die Ableitungen im Glattheitsterm verwendet werden können. Zuerst wurden die notwendigen Grundlagen vorgestellt. Danach wurde auf das Problem der Berechnung des optischen Flusses eingegangen und ausgehend vom Verfahren von Horn und Schunck zwei Lösungswege vorgestellt. Zum einen über das kontinuierliche Energiefunktional, welches daraufhin diskretisiert werden musste, und zum anderen über das zuerst diskretisierte diskrete Energiefunktional, welches es daraufhin zu minimieren galt. Aus der Betrachtung der beiden Wege wurde eine Möglichkeit zur Faktorisierung eines optimalen Ableitungsfilters für die Diffusionsterme entwickelt. Die Herangehensweise war es, das Ableiten als Selbstfaltung zu betrachten und das dadurch entstehende Gleichungssystem zu lösen. Diese Faktorisierung wurde für Nachbarschaften verschiedener Größe, welche auch verschiedene Glattheitsbedingungen haben, durchgeführt. Das Ergebnis waren die neuen faktorisierten optimalen Ableitungsfiler für die Glattheitsterme. Diese Filter besitzen eine auffällige Struktur, da sie die gewichtete Summe von Differenzenquotienten kleinerer Ableitungen sind. Daraufhin wurden weitere Standarddiskretisierungen vorgestellt, welche sich als Vergleich zu den neu entwickelten eignen. Außerdem wurde eine Diskretisierung mit einer Konstanzannahme in der ersten Ableitung für den Datenterm vorgestellt. Daraufhin wurden Experimente durchgeführt, um die Qualität der neuen optimalen Diskretisierungen zu bewerten. Dabei stellte es sich heraus, dass die neuen optimalen Ableitungsfiler ähnliche Ergebnisse wie die Standarddiskretisierungen liefern, aber in allen Testfällen etwas schlechter ausfallen. Dies hängt vermutlich mit einem Fehler zusammen, der bei den optimalen Diskretisierungen systematisch am Rand auftritt.

Ausblick

Es ist noch eine offene Frage, ob unter Vernachlässigung des Fehlers am Rand die optimalen Diskretisierungen möglicherweise doch eine kleine Verbesserung der Approximation bewirken. Außerdem ist der genaue Ursprung dieses Fehlers nicht bekannt, auch wenn Vermutungen angestellt wurden, dass er mit den Symmetrieeigenschaften der Ableitungsfiler zusammenhängt. Diese Vermutungen müssten in einer neuen Experimentenreihe überprüft werden.

Auch eine interessante Frage ist, ob sich das Muster, welches in den drei untersuchten Nachbarschaften auftritt, verallgemeinern lässt. Ebenfalls könnte man untersuchen, ob das Muster auch gilt, wenn die Nachbarschaft wächst, der Glattheitsterm aber gleich bleibt.

Schließlich ist auch die Frage von Interesse, ob man eine Faktorisierung für die Glattheitsterme höherer Ordnung finden kann, welche die gemischten Ableitungen nicht vernachlässigen. Dies ist die größte Schwäche der hier präsentierten optimalen Diskretisierungen mit 4er und 5er Nachbarschaft.

Literaturverzeichnis

- [Alg] I. für Algorithmen und Kognitive Systeme der Universität Karlsruhe. *Image Sequence Server*. URL: http://i21www.ira.uka.de/image_sequences/ (zitiert auf S. 70).
- [Ble17] J. Blei. „Diskretisierungen höherer Konsistenzordnungen für Variationsansätze zur Berechnung des Optischen Flusses“. Studienarbeit. Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme der Universität Stuttgart, 2017 (zitiert auf S. 11, 21, 55, 67, 68, 70).
- [Bru19a] A. Bruhn. „Vorlesung Computer Vision“. Vorlesungsskript. Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme der Universität Stuttgart, 2019. URL: https://www.vis.uni-stuttgart.de/institut/abteilungen/intelligente_systeme/ (zitiert auf S. 13, 19).
- [Bru19b] A. Bruhn. „Vorlesung Imaging Science“. Vorlesungsskript. Institut für Visualisierung und Interaktive Systeme der Universität Stuttgart, 2019. URL: https://www.vis.uni-stuttgart.de/institut/abteilungen/intelligente_systeme/ (zitiert auf S. 13, 19–21).
- [HS81] B. K. Horn, B. G. Schunck. „Determining Optical Flow“. In: *Techniques and Applications of Image Understanding*. Hrsg. von J. J. Pearson. Bd. 0281. International Society for Optics and Photonics. SPIE, 1981, S. 319–331. DOI: [10.1117/12.965761](https://doi.org/10.1117/12.965761). URL: <https://doi.org/10.1117/12.965761> (zitiert auf S. 11, 19).
- [sci] scivision. *barron-optflow*. URL: <https://github.com/scivision/barron-optflow> (zitiert auf S. 70).
- [SRB10] D. Sun, S. Roth, M. J. Black. „Secrets of optical flow estimation and their principles“. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2010, S. 2432–2439 (zitiert auf S. 11).
- [Uni] C. V. R. G. der University of Otago. *Optical Flow Algorithm Evaluation*. URL: <http://of-eval.sourceforge.net/> (zitiert auf S. 70).

Alle URLs wurden zuletzt am 23. 6. 2020 geprüft.

Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommene Aussagen als solche gekennzeichnet. Weder diese Arbeit noch wesentliche Teile daraus waren bisher Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens. Ich habe diese Arbeit bisher weder teilweise noch vollständig veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit allen eingereichten Exemplaren überein.

Ort, Datum, Unterschrift