

DIREKTE MECHANIK MIT EINDIMENSIONALEN FINITEN ELEMENTEN

DIRECT MECHANICS WITH FINITE ELEMENT TRUSSES

Marc-Philipp Schmid Matr.-Nr.: 3405039

Bachelorarbeit

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Michael Resch
Betreuer: Johannes Gebert, M.Sc.

18. Oktober 2021

HÖCHSTLEISTUNGSRECHENZENTRUM DER UNIVERSITÄT
STUTT GART
INSTITUT FÜR HÖCHSTLEISTUNGSRECHNEN
PROFESSOR DR.-ING. MICHAEL RESCH
NOBELSTRASSE 19, 70569 STUTT GART

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Marc-Philipp Schmid, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe. Alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommenen Aussagen sind als solche gekennzeichnet. Darüber hinaus wurden keine weiteren als die angegebenen Quellen für die Erstellung dieser Bachelorarbeit verwendet.

Die vorliegende Bachelorarbeit wurde weder in Teilen noch als Ganzes bereits veröffentlicht. Die digitale Version stimmt mit allen weiteren Exemplaren dieser Arbeit überein.

Stuttgart, den 18. Oktober 2021

Marc-Philipp Schmid

Zusammenfassung

Das Hüftgelenk zählt zu den am stärksten beanspruchten Bereichen im menschlichen Körper. Da es die Bewegung der unteren Extremitäten gegenüber dem Rumpf ermöglicht, führt ein Versagen direkt zur Immobilisation des Patienten. Je nach Versagensursache ist eine Behandlung durch die Implantation eines künstlichen Hüftgelenks unumgänglich. Auch die Prothesen selbst können wiederum z.B. wegen Lockerung des im Oberschenkel fixierten Prothesenschafts versagen. Um die Wahrscheinlichkeit eines solchen Prothesenversagens zu reduzieren, wird an der Anpassung der Steifigkeit des Prothesenschafts an die Steifigkeit der im Oberschenkelknochen enthaltenen Spongiosa geforscht.

Zur Reduktion der Komplexität bei der Berechnung der Steifigkeit der Spongiosa kann die Direkte Mechanik nach Ralf Schneider (2016) angewendet werden. Da die Anwendung der Direkten Mechanik bisher auf durch Volumenelemente diskretisierten Strukturen stattgefunden hat, soll in der vorliegenden Arbeit die Anwendung der Direkten Mechanik auf ein idealisiertes Knoten-Kanten-Netzwerk, bestehend aus eindimensionalen finiten Elementen, untersucht und anschließend bewertet werden. In diesem Zusammenhang werden Vergleiche der durch die Direkten Mechanik bestimmten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} und der mit der Finiten Elemente Methode bestimmten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} angestellt.

Schlüsselwörter: Prothesenschaft, Spongiosa, Knoten-Kanten-Netzwerk, Finite Elemente Methode (FEM), Direkte Mechanik, reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix

Abstract

The hip joint is one of the most stressed areas in the human body. Since it allows the movement of the lower extremities, failure leads directly to immobilization of the patient. Depending on the cause of failure, treatment by implantation of an artificial hip joint is inevitable. However, the prostheses themselves may in turn fail, for example, due to loosening of the prosthetic stem. To reduce the probability of this type of failure, research is being conducted on matching the stiffness of the prosthesis stem to the stiffness of the cancellous bone contained in the femur.

To reduce the complexity of calculating the stiffness of the cancellous bone, Direct Mechanics according to Ralf Schneider (2016) can be applied. Since the application of Direct Mechanics has taken place on structures discretized by volume elements so far, in the present work the application of Direct Mechanics to an idealized truss consisting of one-dimensional finite elements will be investigated and evaluated. In this context, comparisons are made between the reduced total stiffness matrix \mathbf{K}_{red} calculated with Direct Mechanics and the total stiffness matrix \mathbf{K}_{ges} calculated with the finite element method.

Keywords: prosthetic stem, cancellous bone, truss, finite element method (FEM), Direct Mechanics, reduced total stiffness matrix

Inhaltsverzeichnis

Selbstständigkeitserklärung	III
Zusammenfassung	IV
Abstract	V
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XII
Symbolverzeichnis	XIII
Abkürzungsverzeichnis	XVIII
1. Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziel der Arbeit	2
2. Das Hüftgelenk	3
2.1 Funktion und Aufbau des Hüftgelenks	3
2.2 Hüft-Totalendoprothese	6
2.2.1 Ursachen für Hüft-TEP	6
2.2.2 Arten der Hüft-TEP	8
2.3 Spongiosa.....	10
3. Modellbildung der Spongiosa	14
3.1 CT-Scan des Femurkopfs.....	14
3.2 Thresholding.....	16
3.3 Thinning.....	17
3.4 Colouring	20
4. Mechanische Grundlagen	21
4.1 Grundlagen der Finiten Elemente Methode	21
4.1.1 Grundlegende Annahmen	22
4.1.2 Stabelemente	23
4.1.3 Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix.....	25
4.1.4 Assemblierung.....	27
4.2 Ansatz der Direkten Mechanik.....	29
4.2.1 Grundgedanke der Direkten Mechanik.....	29
4.2.2 Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix	30

4.3	Verwendete FEM-Software Abaqus.....	33
5.	Der Testwürfel	36
5.1	Anforderungen an das Knoten-Kanten-Netzwerk des Testwürfels aus mechanischer Sicht	36
5.2	Aufbau des Testwürfels	38
5.3	Konvention für den Aufbau der Verschiebungsvektoren.....	41
5.4	Zeit- und Speicherplatzkomplexität für die Generierung des Testwürfels	42
5.5	Absicherung des Testwürfels.....	45
6.	Simulationen	47
6.1	Skalierung wesentlicher Parameter	47
6.2	Die Spektralnorm.....	48
6.3	Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} bestimmt durch die Matlab-Implementierung ($K_{ges,Matlab}$) und die FEM-Software Abaqus ($K_{ges,Abaqus}$)	49
6.3.1	Verifikation Inputdeck	49
6.3.2	Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix eines symmetrischen und eines asymmetrischen Testwürfels	49
6.3.3	Einrahmung des Knoten-Kanten-Netzwerks.....	50
6.4	Anwendung der Direkten Mechanik zur Bestimmung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix	51
6.4.1	Der Verschiebungsansatz (Constraints)	51
6.4.2	Die Verschiebungsmatrix.....	52
6.4.3	Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen eines symmetrischen und eines asymmetrischen Testwürfels	53
6.4.4	Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der aus der Anwendung der Direkten Mechanik berechneten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix	53
6.4.5	Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der Steifigkeitsmatrix eines klassischen Hexe-8 Elements.....	54
6.4.6	Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bei Knoten-Kanten-Netzwerken, die das Volumen M_i nicht vollständig ausfüllen	55
7.	Ergebnisse.....	56
7.1	Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} bestimmt durch die Matlab-Implementierung ($K_{ges,Matlab}$) und die FEM-Software Abaqus ($K_{ges,Abaqus}$)	56
7.1.1	Verifikation Inputdeck	56
7.1.2	Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix eines symmetrischen und eines asymmetrischer Testwürfels	57

7.1.3 Einrahmung des Testwürfels	58
7.2 Anwendung der Direkten Mechanik zur Bestimmung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red}	60
7.2.1 Der Verschiebungsansatz (Constraints)	60
7.2.2 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen eines symmetrischen und asymmetrischen Testwürfels	63
7.2.3 Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der aus der Anwendung der Direkten Mechanik berechneten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix	64
7.2.4 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der Steifigkeitsmatrix eines klassischen Hexe-8 Elements	66
7.2.5 Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bei Knoten-Kanten- Netzwerken, die das Volumen M_i nicht vollständig ausfüllen	68
8. Diskussion	71
9. Ausblick	74
10. Literaturverzeichnis	75
11. Anhang	79

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Bewegungsmöglichkeiten des Hüftgelenks	4
Abbildung 2: Aufbau Hüftgelenk.....	5
Abbildung 3: Unterschiede bei der Auswahl einer TEP	8
Abbildung 4: Hüft-Totalendoprothese links	10
Abbildung 5: Aufbau Femur	11
Abbildung 6: Ausschnitt der Spongiosa aus einem Femurkopf (Auflösung 5 μm)	12
Abbildung 7: Ablauf der Modellierung der Spongiosa	14
Abbildung 8: Schnittbild einer CT-Aufnahme des Hüftgelenks mit Oberschenkelhalsfraktur (Pfeil eingefügt)	16
Abbildung 9: ZS-Thinning-Algorithmus	19
Abbildung 10: Thinning und Colouring an einem beispielhaften 2D-Netzwerkausschnitt.....	20
Abbildung 11: Beispielhaftes 3D-Stabwerk bestehend aus 3 Stäben	22
Abbildung 12: Freigeschnittener Stab 1 mit eindimensionalem Koordinatensystem und in einem möglichen verformten Zustand mit den Verschiebungen u_{K1} und u_{K4} (unabhängig von den eingezeichneten Freischnittkräften)	23
Abbildung 13: Zufälliges Knoten-Kanten-Netzwerk mit durch rote Kanten angedeutetem umgebenden würfelförmigen Volumen	36
Abbildung 14: Testwürfelvarianten. Links: Variante 1 mit Stäben entlang der kürzesten Strecke zwischen den Knoten. Rechts: Variante 2 mit diagonal verlaufenden Kanten zwischen den Knoten (nicht durch die Mitte eines Elementarwürfels)	39
Abbildung 16: Links: Testwürfel mit acht Knoten und den Freiheitsgradrichtungen. Rechts: für diesen Testwürfel dargestellter allgemeiner Verschiebungsvektor in der für diese Arbeit erfolgten Sortierung	42
Abbildung 17: Blau (Raute): Zeitkomplexität des Testwürfels bei unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes}). Orange (Kreis): Gesamtkantenanzahl des Testwürfels	

aufgetragen bei unter-schiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes}).....	44
Abbildung 18: Speicherplatzkomplexität des Testwürfel bei unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes}).....	44
Abbildung 19: Diagramm zur Veranschaulichung der von der Solllänge abweichenden Kanten. Ordinate enthält die Anzahl abweichender Kanten bezogen auf die Gesamtkantenanzahl im Knoten-Kanten-Netzwerk.	46
Abbildung 20: Maximale absolute Abweichung der Kanten von der Solllänge (in mm).	46
Abbildung 21: Blau: Betragsmäßig größte Abweichung der Elemente in der Differenzmatrix von $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ und $\mathbf{K}_{ges,Abaqus}$ für verschiedene Gesamtknotenanzahlen (repräsentiert durch k_{nodes})	57
Abbildung 22: Links: Die ersten zwölf Zeilen und Spalten aus der Vergleichsmatrix des elementweisen Vergleichs der Gesamtsteifigkeitsmatrizen des symmetrischen und asymmetrischen Testwürfels.	58
Abbildung 23: Links: Scherung eines Testwürfels mit durchgezogenen Eckkanten. Die rotmarkierte Stelle zeigt beispielhaft eine über den Knoten hinweggeschobe Eckkante.	59
Abbildung 24: Verschiebungsfall eins für Testwürfel 15x5.	62
Abbildung 25: Verläufe der Spektralnormen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_{red} (blau) und der Gesamtsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ berechnet mit der Matlab-Implementierung (orange). Zudem sind die Trendlinien beider Verläufe eingezeichnet.	65
Abbildung 26: Der näherungsweise lineare Zusammenhang der Spektralnormen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$	65
Abbildung 27: Spektralnorm der Differenzmatrix der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{Hexe-8} eines Hexe-8 Elements (Querschnittsfläche $A = 0,01$ mm^2)	66

Abbildung 28: Volumen aller Stäbe des Knoten-Kanten-Netzwerks bei konstanter Querschnittsfläche $A = 0,01 \text{ mm}^2$. Zusätzlich ist das betrachtete Würfelvolumen M_i eingezeichnet (orange Linie).....	67
Abbildung 29: Testwürfel bei dem nicht in jeder Oberfläche des umgebenden Würfels Knoten liegen.....	68
Abbildung 30: Verschiebungsfall drei angewendet auf den Testquader.	69
Abbildung 31: Diskretisierung des Schichtbildes mit eingezeichneten Strahlen aus zwei verschiedenen Richtungen (nach (Maier et al. 2018))	79
Abbildung 32: Permutationsmatrix zur Umrechnung der Knotennummerierung und Freiheitsgradsortierung.....	88
Abbildung 33: Konvention für die Knotennummerierung und die Sortierung der Verschiebungen in den Verschiebungsvektoren der einzelnen Verschiebungsfälle	89
Abbildung 34: Verschiebungsmatrix \mathbf{U}_{Mc} aller 24 Verschiebungsfälle	90
Abbildung 35: Vergleich der in den Stäben des Testwürfels 8×5 auftretenden Spannungen bei der Verwendung von "adjust = yes" und "adjust = no" in der Definition der Constraints.	95

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Alle 24 Verschiebungsfälle angewendet auf den Testwürfel 2x5 mit zusätzlichen Ecken. Zusätzlich sind die aus den Verschiebungen in den Stäben resultierenden Spannungen eingezeichnet.	94
Tabelle 2: Knotendefinition der ersten 20 Knoten des Testwürfels 4x5. Knoten eins bis acht stellen die Referenzknoten dar.	100
Tabelle 3: Oben: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus Job. (Testwürfel 4x5)	101
Tabelle 4: Oben: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus Job. (Testwürfel 10x5)	101

Symbolverzeichnis

Konvention

a	Skalar (klein geschrieben)
\mathbf{a}	Vektor (klein und fett geschrieben)
\mathbf{A}	Matrix (groß und fett geschrieben)

Fomelzeichen

$r(x, y, z)$	neuer Wert für Voxel an der Stelle (x, y, z)
$h(x, y, z)$	alter Wert für Voxel an der Stelle (x, y, z)
t	globaler Schwellenwert
P_1, \dots, P_9	Pixel 1 bis Pixel 9
$B(P_1)$	Summe aller Werte von P_2 bis P_9
$A(P_1)$	Anzahl 01 Muster im geordneten Set P_2, \dots, P_9
γ	Nummerierung der Stäbe eines Knoten-Kanten-Netzwerks
X'_γ	lokales Koordinatensystem für Stab γ
A_γ	Querschnittsfläche des Stabs γ
E_γ	Elastizitätsmodul des Stabs γ
l_γ	Länge des Stabs γ
x	Koordinaten entlang der Stabachse
$\sigma(x)$	Spannung am Ort x
ε	Verzerrung
u	Verschiebung
u'	Ortsableitung der Verschiebung
L	Länge eines Stabs nach Verzerrung

L_0	Ausgangslänge eines Stabs
dx	infinitesimale Länge
du	infinitesimale Verschiebung
$S(x)$	Schnittkraft am Ort x
S_{K1}, \dots, S_{K4}	Kräfte an den Knoten $K1, \dots, K4$
u_{K1}, \dots, u_{K4}	Verschiebungen der Knoten $K1, \dots, K4$
\tilde{u}	Verschiebung mit linearem Näherungsansatz
$\tilde{S}(x)$	Schnittkraft bestimmt mit Näherungsansatz \tilde{u}
$\phi_i(x)$	Ansatzfunktion für Verschiebungsansatz
$\boldsymbol{\phi}_\gamma(x)$	2×1 -Vektor der Ansatzfunktionen für Stab γ (abhängig von x und l_γ)
\mathbf{K}'_γ	2×1 -Steifigkeitsmatrix des Stabs γ im lokalen Koordinatensystem X'_γ
\mathbf{u}_γ	2×1 -Vektor der Knotenverschiebungen (in X'_γ)
\mathbf{s}_γ	2×1 -Vektor der an den Knoten von Stab γ angreifenden Kräfte (in X'_γ)
\mathbf{T}_γ	2×6 -Transformationsmatrix des Stabs γ
\mathbf{v}_γ	6×1 -Vektor aller Knotenverschiebungen im globalen Koordinatensystem
δ	Nummerierung der Freiheitsgrade
\mathbf{f}_γ	6×1 -Vektor aller an den Knoten des Stabs γ angreifenden Kräfte im globalen Koordinatensystem
$c_{1\gamma}, c_{2\gamma}, c_{3\gamma}$	Richtungskosinusse
$\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_Q$	Ortsvektoren zu Knoten P bzw. Q im globalen Koordinatensystem
\mathbf{K}_γ bzw. $\mathbf{K}_\gamma^{global}$	6×6 -Steifigkeitsmatrix des Stabs γ im globalen Koordinatensystem
n	Anzahl der Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks
\mathbf{K}_{ges}	$3n \times 3n$ -Gesamtsteifigkeitsmatrix des Knoten-Kanten-Netzwerks

\mathbf{u}_{ges}	$3n \times 1$ -Vektor aller Knotenverschiebungen des Stabwerks im globalen Koordinatensystem
\mathbf{f}_{ges}	$3n \times 1$ -Vektor aller an den Knoten des Stabwerks angreifenden Kräfte im globalen Koordinatensystem
\mathbf{C}_γ	$6 \times 3n$ -Verteilungsmatrix des Stabs γ
M_i	betrachtetes Volumen mit $M_i \subseteq \mathbb{R}^3$
n_{Mc}	Anzahl Knoten von M_i
n_{ges}	Anzahl Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks innerhalb von M_i
n_{in}	Anzahl der innerhalb von M_i liegenden Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks
n_{out}	Anzahl der auf der Oberfläche von M_i liegenden Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks
$\mathbf{K}_{in}, \mathbf{K}_{out}, \mathbf{K}_{in,out}$	Submatrizen in \mathbf{K}_{ges} sortiert nach der Lage der Knoten in M_i
$\mathbf{u}_{in}, \mathbf{u}_{out}$	Verschiebungsvektor \mathbf{u}_{ges} sortiert nach der Lage der Knoten in M_i
\mathbf{f}_{out}	an den äußeren Knoten angreifende Kräfte (im globalen Koordinatensystem)
\mathbf{S}	Schurkomplement gebildet aus den Submatrizen $\mathbf{K}_{in}, \mathbf{K}_{out}, \mathbf{K}_{in,out}$ von \mathbf{K}_{ges}
$\tilde{\mathbf{u}}_{out,\delta}$	Verschiebungsansatz der äußeren Knoten out in Richtung des Freiheitsgrads δ
$\phi_i(\mathbf{x}_{out,\delta})$	Auswertung der insgesamt n_{Mc} Ansatzfunktionen an den Orten der Knoten auf der Oberfläche von M_i in Richtung des Freiheitsgrads δ
ϕ	Vektor aller Ansatzfunktionen
\mathbf{u}_{Mc}	Vektor der Knotenverschiebungen der Knoten von M_i

f_{M_c}	Vektor der an den Knoten von M_i angreifenden Kräfte
$A(S, \phi)$	reduzierte $3n_{M_c} \times 3n_{M_c}$ -Gesamtsteifigkeitsmatrix für das Volumen M_i mit dem eingeschlossenen Knoten-Kanten-Netzwerk
U_{M_c}	$3n_{M_c} \times 3n_{M_c}$ -Verschiebungsmatrix gebildet aus $3n_{M_c}$ Verschiebungsfällen
F_{M_c}	$3n_{M_c} \times 3n_{M_c}$ -Lastmatrix der zu U_{M_c} korrespondierenden Kräfte
k_{nodes}	Anzahl Knoten, die Entlang einer Würfelkante (je Raumrichtung) äquidistant verteilt werden
$k_{nodes,ges}$	Gesamtknotenanzahl des Knoten-Kanten-Netzwerks
k_{edges}	Gesamtkantenanzahl des Knoten-Kanten-Netzwerks
s_{cube}	Kantenlänge des Würfelvolumens M_i
$s_{abstand_knoten}$	Abstand zweier Knoten in Richtung der Achsen des Koordinatensystems
s_{soll}	vorgegebene Solllänge
α	Korrekturfaktor für die Solllänge
$K_{ges,Abaqus}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} berechnet mit Abaqus
$K_{ges,Matlab}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} berechnet mit der Matlab-Implementierung
$p_{Abweichung}$	prozentuale Abweichung
$K_{red,symmetrisch}$	reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix des Testwürfels mit symmetrischer Kantenanordnung

$\mathbf{K}_{red,asymmetrisch}$	reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix des Testwürfels mit asymmetrischer Kantenanordnung
\mathbf{D}	Differenzmatrix $\mathbf{K}_{red,symmetrisch} - \mathbf{K}_{red,asymmetrisch}$
$V_{Stäbe}$	Volumen aller in M_i enthaltenen Stabelemente

Abkürzungsverzeichnis

CT	Computertomograph
FE	Finites Element
FEM	Finite Elemente Methode
Hüft-TEP	Hüft-Totalendoprothese
ITA	inter-trabecular-angle
k-CT	klinischer Computertomograph
μ -CT	mikrofokus Computertomograph
Voxel	zusammengesetzt aus <u>V</u> olumen und <u>P</u> ixel
ZS-Thinning- Algorithmus	Thinning-Algorithmus nach Zhang und Suen (1984)

Hinweis: In dieser Arbeit wird das generische Maskulinum verwendet, um eine bessere Lesbarkeit sicherzustellen. Dies soll jedoch stellvertretend für alle Geschlechter stehen.

1. Einleitung

1.1 Motivation

Der demographische Wandel zieht weltweit eine Umschichtung der Altersstrukturen in der Bevölkerung nach sich. Ein hieraus abgeleiteter Effekt ist ein zu erwartender Anstieg der jährlich weltweit erlittenen Schenkelhalsfrakturen von ca. 1,6 Millionen (1990) auf ca. 6,26 Millionen (2050) (Ariza et al. 2015; Clemens 2013). Junge Menschen sind von solch einer Verletzung weit weniger betroffen als ältere. Lediglich 5-7% der Schenkelhalsfrakturen betreffen junge Menschen (Altersklasse: unter 55 Jahren), da in dieser Altersklasse die Knochendichte weitaus höher und die Sturzgefahr deutlich geringer ist (Statista 2021a). Gerade bei älteren Personen bleibt zumeist ein künstliches Hüftgelenk (Hüft-Totalendoprothese) als einzige Behandlungsmöglichkeit solcher Frakturen übrig. Aber nicht nur Schenkelhalsfrakturen können zu einem künstlichen Hüftgelenk führen. Häufig wird durch eine Hüft-Totalendoprothese (Hüft-TEP) die Mobilität des Patienten bei einer Hüftarthrose wiederhergestellt. Die bei einer solchen Hüft-TEP auftretenden Probleme sind dabei einerseits die limitierte Standzeit der Reibbeläge und andererseits das Versagen der Prothesen wegen Lockerung, das bei bis zu zehn Prozent der Implantate auftritt (Statista 2021b). Solche Lockerungen stehen in Zusammenhang mit dem sogenannten Stress-Shielding, das die Anpassung des Knochens aufgrund eines geänderten Kraftflusses beschreibt (Kohn 2011, S. 70). Änderungen im knocheninternen Kraftfluss können unter anderem durch ein Implantat mit einer vom Knochen abweichenden Steifigkeit zustande kommen.

Ein Implantatversagen durch Lockerung führt meist zu teuren und für den Patienten erneut schmerzhaften Revisionsimplantationen. Ein Ansatz zur Reduzierung dieser Art des Implantatversagens besteht darin, den Umbau des Knochens aufgrund von Stress-Shieldings möglichst zu verhindern. Dies soll durch eine Anpassung der Steifigkeit des Schaftes der Hüft-TEP an die Steifigkeit des Knochens des Patienten erreicht werden.

1.2 Ziel der Arbeit

Für die Bestimmung der Steifigkeit des Knochens ist ein patientenspezifisches, hochaufgelöstes Knochenmodell erforderlich. Die aktuelle Forschung arbeitet in vitro mit Hüftgelenksköpfen, welche verschiedenen Patienten, die ein künstliches Hüftgelenk erhalten haben oder verstorben sind, entnommen wurden (vgl. Reznikov et al. (2016)). Ausgehend von μ -CT-Scans dieser Hüftgelenksköpfe soll ein Knoten-Kanten-Netzwerk aufgebaut und dessen Steifigkeit bestimmt werden, um so diese patientenspezifische Eigenschaft auf den Schaft der Hüft-TEP übertragen zu können.

In der vorliegenden Arbeit soll zur Vorbereitung auf die Untersuchung des Knoten-Kanten-Netzwerks eines menschlichen Femurkopfs ein einfacher Testwürfel, bestehend aus Stabelementen, generiert werden. Für die Anwendung des Ansatzes der Direkten Mechanik, der in Kapitel 4.2 beschrieben wird, sollen die erforderlichen Randbedingungen zur Lagerung der äußeren Knoten untersucht werden. Des Weiteren soll mit Hilfe des Ansatzes der Direkten Mechanik die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bestimmt werden. Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix wird mit einer eigens in Matlab selbst implementierten Lösung, die mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FEM) berechnet wird, verglichen. Da der Ansatz der Direkten Mechanik auf einer durch Volumenelemente diskretisierten Struktur entwickelt wurde, wird das Ergebnis der mit der Direkten Mechanik berechneten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Knoten-Kanten-Netzwerks zudem mit der Steifigkeitsmatrix eines homogenen Würfelements verglichen (Schneider 2016).

2. Das Hüftgelenk

Dieses Kapitel befasst sich mit der Funktion und dem Aufbau des Hüftgelenks. Des Weiteren wird auf zwei wichtige Erkrankungen, welche zu einer Hüft-TEP führen, eingegangen. Darüber hinaus werden verschiedene Hüft-TEP-Arten vorgestellt und die unter anderem im Femurkopf und -hals enthaltene Spongiosa beschrieben.

2.1 Funktion und Aufbau des Hüftgelenks

„Das Hüftgelenk dient der Bewegung der unteren Extremitäten gegenüber dem Rumpf“ (Schiebler 2005, S. 320). Es ermöglicht dem Menschen den aufrechten Gang und gehört aus diesem Grund zu den am stärksten beanspruchten Bereichen des menschlichen Körpers (Schiebler 2005). Beispielsweise wird beim Stehen die gesamte Last des Körpers über beide Hüftgelenke verteilt. Beim Gehen hingegen wirkt eine periodische Belastung, da das Standbein kurzzeitig die gesamte Kraft, welche aus dem Gewicht des Körpers resultiert, übertragen muss, wohingegen das Spielbein nicht belastet wird (Schiebler 2005; Clemens 2013). Insgesamt erlaubt das Hüftgelenk Drehungen um drei Hauptachsen. Dies entspricht der Charakteristik eines Kugelgelenks (Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Da die Drehbewegungen aufgrund der größeren Umschließung des Femurs durch die Hüftgelenkspfanne jedoch eingeschränkter sind als bei einem Kugelgelenk, wird das Hüftgelenk den Nussgelenken, einer Sonderform des Kugelgelenks, zugeordnet (Schiebler 2005; Faller et al. 2012).

Die Drehungen um die drei Hauptachsen sind in Abbildung 1 dargestellt. Die größte mögliche Bewegung ist die Flexion mit einer maximalen Drehung um ca. 130-140° (siehe Abbildung 1a). Ihr gegenüber steht die Extension mit gerade einmal 15°. Dieser Unterschied entsteht durch die Stabilisierung des Gelenks durch die Bänder, da diese spiralförmig um das Gelenk gewunden sind

und sich bei der Extension zusammenziehen, wohingegen sich die Spirale bei der Flexion weitet und somit eine größere Drehung des Hüftgelenks zulässt.

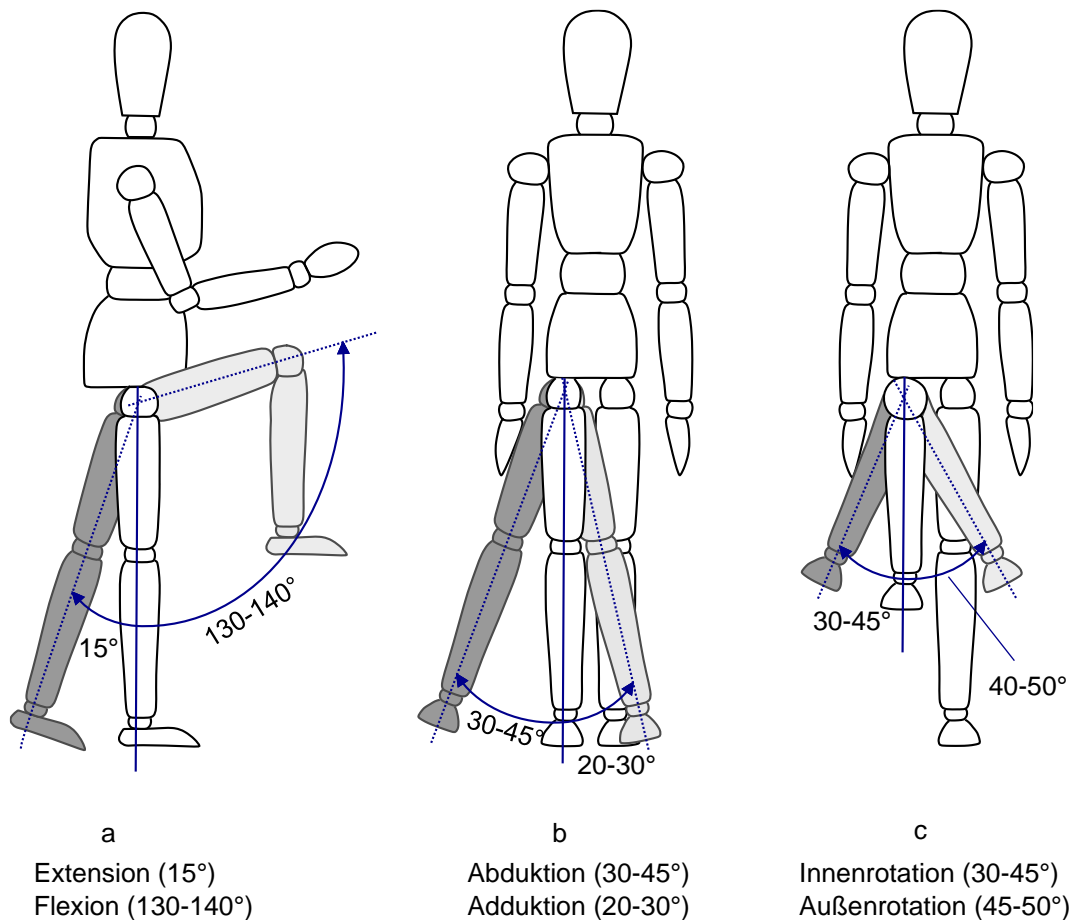


Abbildung 1: Bewegungsmöglichkeiten des Hüftgelenks (in Anlehnung an Faller et al. 2012)

Wie aus Abbildung 2 ersichtlich, wird das Hüftgelenk aus zwei knöchernen Teilen gebildet. Zum einen aus dem Femurkopf (Caput femoris), als Bestandteil der unteren Extremität, und zum Anderen aus der Hüftgelenkspfanne, welche fachspezifisch als Acetabulum bezeichnet wird (Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Das Acetabulum wird dabei aus den drei Hüftbeinen, Darmbein, Sitzbein und Schambein, gebildet (Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Die Druckkräfte beim Gehen und Stehen werden hauptsächlich über den äußeren Bereich des Acetabulums, der sogenannten *Facia lunata*, übertragen (siehe Abbildung 2 rot markierter Bereich) (Schiebler 2005). An dieser Stelle der Hüftgelenkspfanne weist der Knorpel, der das Acetabulum auskleidet und sowohl zur Minimierung von Reibung, als auch zur Stoßdämpfung beiträgt, mit ca. 2,5 bis 3,5 mm seine größte Dicke auf (Clemens 2013; Schiebler 2005).

2. Das Hüftgelenk

Die Hüftgelenkspfanne umschließt in Verbindung mit der Gelenkklippe mehr als die Hälfte des Femurkopfs (Clemens 2013; Schiebler 2005). Dies führt zu der bereits erwähnten Zuordnung des Hüftgelenks zu den Nussgelenken.

Umgeben wird das Hüftgelenk von einer Gelenkkapsel, in welcher sich die Gelenkflüssigkeit zur Ernährung des Knorpels befindet (Faller et al. 2012). Die Gelenkflüssigkeit erfüllt zusätzlich die Funktion eines Schmierstoffs, indem sie die Reibung zwischen Femurkopf und Hüftgelenkspfanne weiter reduziert (Faller et al. 2012).

Das Hüftgelenk wird durch drei Bänder stabilisiert, die schraubenförmig um den Schenkelhals gewunden sind und jeweils von einem der drei Hüftbeine ausgehen (Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Zur Bewegung des Hüftgelenks entspringen am Femur (z.B. am Trochanter major und Trochanter minor) Muskeln, die an der Hüfte und am unteren Rücken Muskeln enden (Faller et al. 2012; Schiebler 2005).¹

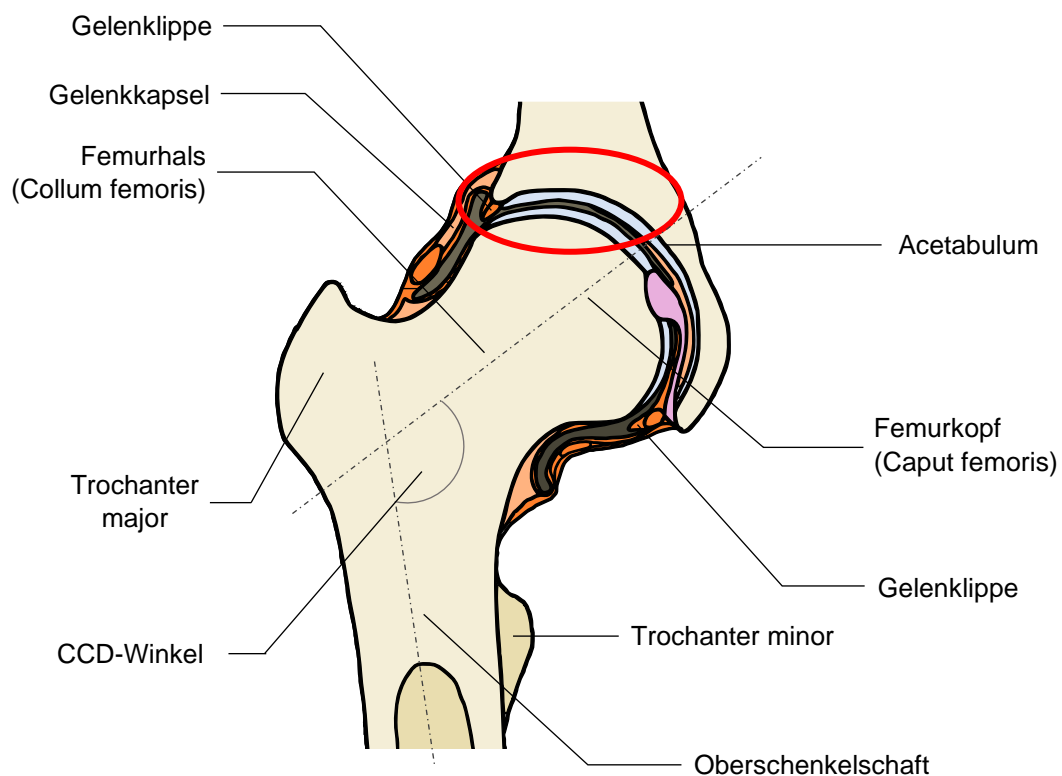


Abbildung 2: Aufbau Hüftgelenk (Eigene Darstellung in Anlehnung an Faller et al. 2012)

¹ Für weitere Ausführungen wird an dieser Stelle auf weiterführende Fachliteratur wie z.B. Faller et al. 2012 und Schiebler 2005 verwiesen.

2.2 Hüft-Totalendoprothese

Im Folgenden wird die Hüft-Totalendoprothese (Hüft-TEP) thematisiert. In diesem Zusammenhang wird auf die wichtigsten beiden Ursachen (Hüftarthrose und Oberschenkelhalsfraktur), die zu einer Hüft-TEP führen können, eingegangen. Des Weiteren werden der Aufbau und die unterschiedlichen Ausführungen einer Hüft-TEP beschrieben.

2.2.1 Ursachen für Hüft-TEP

Neben den vielfältigen Ursachen, die zur Notwendigkeit einer Hüft-Totalendoprothese führen können, ist die Hüftarthrose² eine besonders hervorzuhebende Erkrankung des Hüftgelenks (Rinio 2021a). Hierbei handelt es sich um einen altersuntypischen Verschleiß des Knorpels zwischen dem Femurkopf und der Hüftgelenkspfanne (Rinio 2021a; Uniklinikum Dresden 2021). Mit zunehmendem Alter lässt die Beweglichkeit des Hüftgelenks nach. Der Knorpel verliert an Elastizität wodurch die Stoßdämpfung negativ beeinträchtigt wird (Rinio 2021a). Altersuntypischer Knorpelverschleiß hingegen wird beispielsweise durch erhöhte Belastung des Hüftgelenks während der Ausübung des Berufs, durch Leistungssport, durch eine Hüftdysplasie (angeborene Hüftfehler, welcher mittlerweile im Kindesalter meist korrigiert wird) oder durch Übergewicht verursacht und durch Entzündungen im Hüftgelenk begünstigt (Rinio 2021a; Uniklinikum Dresden 2021).

Der Verschleiß des Knorpels kann von einer geringen Einbuße an Knorpelvolumen, welche einen Patienten womöglich kaum einschränkt, bis hin zu einer sogenannten Knorpelglatze reichen. Hierbei handelt es sich um einen Durchbruch des Knochens durch den Knorpel, sodass Knochen auf Knochen reibt. In Folge dessen kann es zur Immobilisation eines Patienten kommen (Rinio 2021a). Des Weiteren können durch solch eine Knorpelglatze Schäden am Femurkopf, an der Gelenkkapsel, den Bändern und der Muskulatur entstehen (Rinio 2021a).

² von lat. coxa: Hüfte; deshalb auch als Coxarthrose bezeichnet

Wann eine Hüft-TEP bei einem Patienten zum Einsatz kommt, hängt bei der Hüftarthrose in erster Linie vom Zustand des Knorpels und dem eigenen Wohlbefinden des Patienten bzw. dessen Beweglichkeit ab.

Neben der Coxarthrose zählt die Oberschenkelhalsfraktur zu den häufigsten Ursachen für eine Hüft-TEP (Rinio 2021a; Uniklinikum Dresden 2021). Wie bereits in Kapitel 1.1 beschrieben, wird ein Anstieg der weltweit jährlich erlittenen Oberschenkelhalsfrakturen von 1,66 Mio. (Stand: 1990) auf ca. 6,26 Mio. (2050) erwartet. Allein in Deutschland erleiden ca. 140.000 Personen jährlich eine Oberschenkelhalsfraktur (Clemens 2013). Hierbei sind jüngere Menschen (Altersklasse: unter 55 Jahre) mit 5-7% Anteil an den gesamten Oberschenkelhalsfrakturen von dieser Verletzung weit geringer betroffen als ältere Menschen (Clemens 2013; Statista 2021a). Gründe hierfür sind z.B. die mit zunehmendem Alter wachsende Sturzgefahr und die zunehmende Osteoporose (Dachverband Osteologie e.V. 2017). Unter Osteoporose versteht man eine Erkrankung des Skeletts, welche sich durch eine niedrige Knochenmasse und eine Veränderung in der Knochenstruktur zeigt (Dachverband Osteologie e.V. 2017). Aufgrund hormoneller Veränderungen sind Frauen häufiger von einer Osteoporose betroffen als Männern (Clemens 2013).

Frakturbegünstigend ist auch die Gelenkstellung. Eine Beschreibung hierfür liefert der CCD-Winkel (Centrum-Collum-Diaphysenwinkel), welcher von den Achsen des Femurschafts und des Femurhalses eingeschlossen wird (siehe Abbildung 2) (Faller et al. 2012; Schiebler 2005; Szarzynski 2004). Im Laufe des Lebens ändert sich der CCD-Winkel. Im Kindesalter liegt er bei ca. 150° und flacht mit zunehmendem Alter auf ca. 120° ab (Schiebler 2005). Je kleiner der Winkel, desto größer wird die Gefahr eines Oberschenkelhalsbruchs, da die Biegebelastung im Oberschenkelhals zunimmt (Schiebler 2005; Szarzynski 2004).³

Oberschenkelhalsfrakturen können sowohl nach ihrem Bruchwinkel, als auch nach dem Grad der Dislokation des Femurkopfs kategorisiert werden (Clemens 2013). In Abhängigkeit von Alter, Lebensweise und Gesundheitszustand des Patienten und Kategorie des Bruchs wird entschieden, welche

³ Für weitere Ursachen für Oberschenkelhalsfrakturen, und Frakturen allgemein, wird auf Dachverband Osteologie e.V. (2017) verwiesen.

Behandlungsmöglichkeiten bestehen. Gerade bei jungen Menschen möchte man eine Hüft-TEP aufgrund der limitierten Standzeit und möglicher Revisionsimplantationen vermeiden und setzt daher, vorausgesetzt die Kategorie der Bruchs lässt es zu, auf osteosynthetische (knochenerhaltende) Verfahren (Szarzynski 2004; Clemens 2013; Gleisberg et al. 2021). Bei diesen wird der Bruch durch Schrauben fixiert und ein Zusammenwachsen des Knochens ermöglicht (Szarzynski 2004).

2.2.2 Arten der Hüft-TEP

Besteht die Notwendigkeit einer Hüft-Totalendoprothese, so kann diese entsprechend den Anforderungen und Gegebenheiten bezüglich Alter, Lebensweise und Knochenbeschaffenheit an den Patienten angepasst werden (Rinio 2021b). Eine Hüft-Totalendoprothese besteht generell aus vier Komponenten (Abbildung 4). In der Hüfte wird die Hüftpfannenkomponente mit dem Pfanneninlay verankert, im Oberschenkel der Prothesenschaft mit der Hüftkopfkomponente (endoprothetics.guide 2021). Das Pfanneninlay und die Hüftkopfkomponente bilden zusammen die Gleitpaarung.

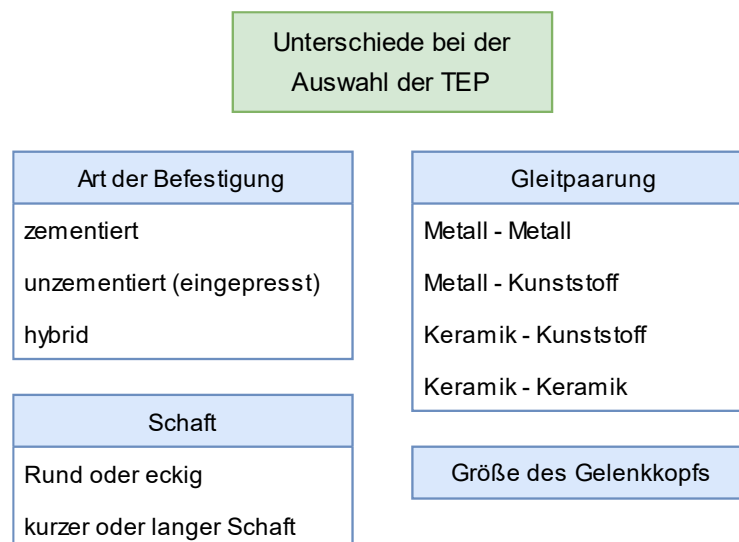


Abbildung 3: Unterschiede bei der Auswahl einer TEP (Eigene Darstellung nach endoprothetics.guide (2021))

In Abbildung 3 sind die wesentlichen Merkmale, welche bei einer Hüft-TEP variiert werden können, dargestellt. Für die vorliegende Arbeit sind die Punkte

„Art der Befestigung“ und „Schaft“ von Bedeutung. Bei einer Hüft-TEP muss sowohl die Hüftgelenkspfannenkomponente als auch der Prothesenschaft im Knochen fixiert werden (siehe Abbildung 4). Hierfür gibt es zwei geläufige Verfahren. Bei dem ersten Verfahren werden der Schaft und die Pfanne der Totalendoprothese mit Hilfe eines Knochenzements, in der Regel ein schnellhärtender Kunststoff wie z.B. Polymethylmethacrylat (PMMA), im Knochen befestigt (Learmonth et al. 2007; endoprosthesis.guide 2021). Der Vorteil dieses Verfahrens besteht in der raschen Remobilisation des Patienten und der festen Verankerung der Prothese im Knochen (endoprosthesis.guide 2021; Clemens 2013). Aufgrund der limitierten Standzeit der Prothese wird dieses Verfahren weniger bei jüngeren Personen angewandt, da eine erneute Implantation zum Auswechseln des Gelenks nur mit erhöhtem Aufwand möglich ist (Clemens 2013).

Bei dem zweiten Verfahren werden Hüftgelenkspfanne und Prothesenschaft in den Knochen eingepresst und können aufgrund einer porösen Oberflächenstruktur in den Knochen einwachsen (endoprosthesis.guide 2021; Rinio 2021b; Clemens 2013). Vorteil hierbei ist, dass eine mögliche erneute Implantation gewährleistet werden kann, weshalb dieses Verfahren bei jüngeren Personen zum Einsatz kommt (Clemens 2013). Wie in Kapitel 1 erwähnt, ist die Optimierung dieses zweiten Verfahrens Ziel der aktuellen Forschung. Aufgrund der Anpassung des Knochens an den veränderten Kraftfluss (Stress-Shielding), kann es zu einer Lockerung der Prothese kommen (Kohn 2011). Um diesen Umbau des Knochens zu verhindern, soll die Steifigkeit des Prothesenschafts an die Steifigkeit des Oberschenkelhalses und -kopfs angepasst werden.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen Prothesen liegt in der Geometrie (Querschnitt und Länge) des Schaftes. Kurzschaftprothesen werden bevorzugt bei jüngeren Patienten eingesetzt, da weniger Knochen zur Implantation abgetragen werden muss und so eine erneute Implantation zur Auswechslung der Prothese ermöglicht wird. Runde Prothesensäfte werden im Vergleich zu unrunder (siehe Abbildung 4) seltener eingesetzt, da nach ihrer Implantation bei Patienten vermehrt Oberschenkel Schmerzen aufgetreten sind (Learmonth et al. 2007).

Für eine lange Standzeit der Hüft-TEP sind neben der Verankerung des Implantats auch geringe Reibung und wenig Verschleiß der Gleitpaarung von Bedeutung. Mögliche Gleitpaarungen stellen beispielsweise Keramik-Keramik, Keramik-Kunststoff (Polyethylen), Metall-Metall oder Metall-Kunststoff (Polyethylen) dar (siehe Abbildung 3) (Clemens 2013; Rinio 2021b). In Abbildung 4 sind die oben beschriebenen Bestandteile auf einem Röntgenbild der Hüfte (linkes Hüftgelenk von vorne) zu erkennen. Hierbei handelt es sich um eine unzementierte Hüftgelenksprothese mit langem Prothesenschaft. Es ist dabei ersichtlich, dass der Prothesenschaft weit in den Oberschenkelknochen hineinragt.

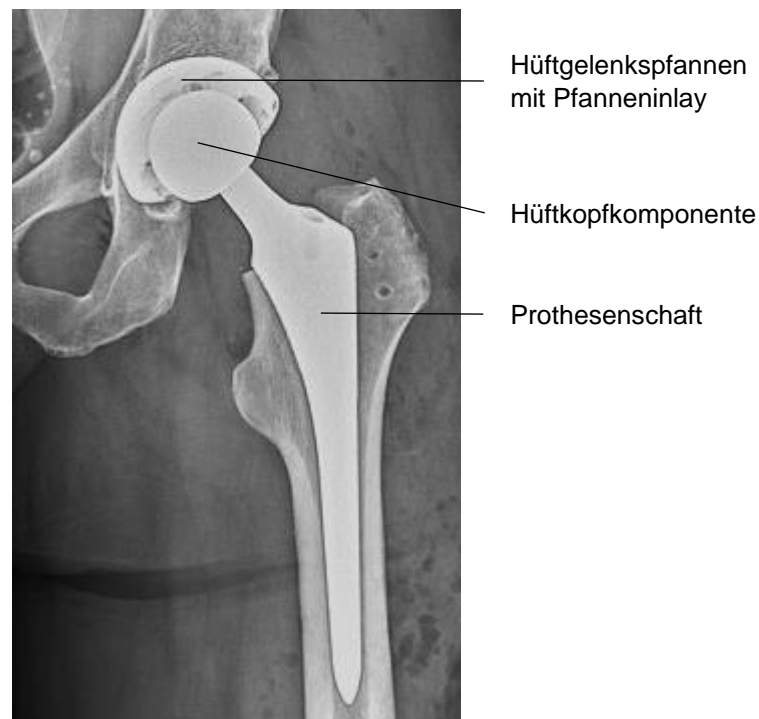


Abbildung 4: Hüft-Totalendoprothese links (Bild: (Häggström 2021b))

2.3 Spongiosa

Für die vorliegende Arbeit ist der Oberschenkelknochen von besonderem Interesse, da in ihm der Prothesenschaft fixiert wird.

Wie Abbildung 5 zeigt, kann der Oberschenkelknochen makroskopisch in vier Bereiche unterteilt werden. Diese sind: Femurkopf, Femurhals, Femurschaft und die beiden am unteren Ende befindlichen Gelenkknorren (Faller et al.

2012). Betrachtet man den Oberschenkelknochen in einem Längsschnitt, so erkennt man, dass es sich um einen Röhrenknochen handelt, bei dem zwei Knochentypen unterschieden werden können (Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Zum einen die Kompakta, die den gesamten Knochen umgibt und im Femurschaft verstärkt vorliegt, zum anderen die in den Knochenenden zu findende Spongiosa (Faller et al. 2012; Schiebler 2005).

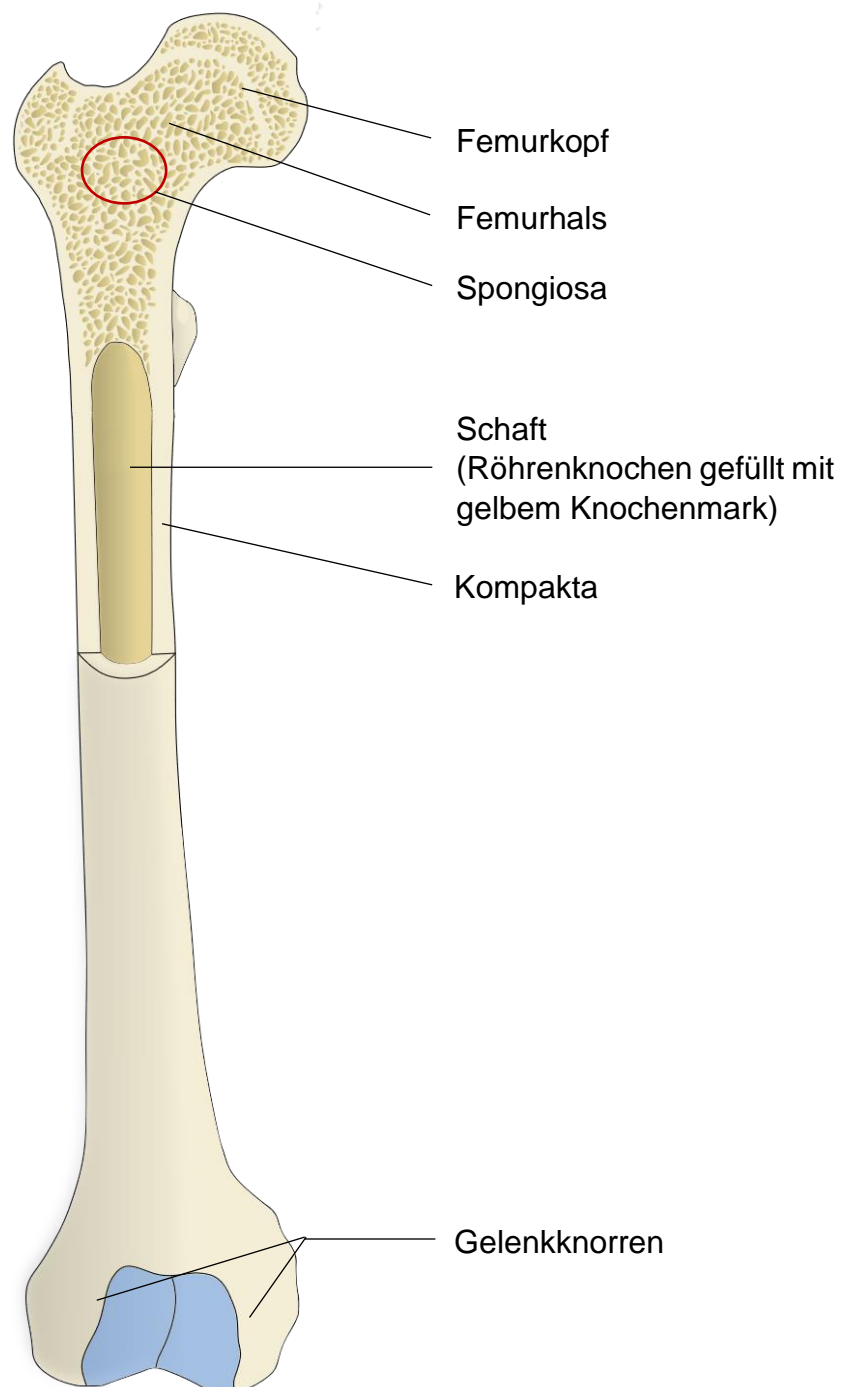


Abbildung 5: Aufbau Femur (Eigene Darstellung in Anlehnung an Schiebler (2005) und Faller et al. (2012))

Die Spongiosa füllt nicht nur die Enden von langen Röhrenknochen, sondern füllt auch kurze Knochen (z.B. Wirbelkörper) aus. In beiden Fällen wird die Spongiosa von einer dünnen Schicht dichten Knochens (Kompakta) umgeben (Schiebler 2005). Da sich die vorliegende Arbeit mit einer möglichen Bestimmung der Steifigkeit der Spongiosa befasst, wird an dieser Stelle nicht näher auf den Aufbau der Kompakta eingegangen.

Die Spongiosa (engl.: cancellous bone) ist ein schwammartiges, poröses Knochengewebe, welches aus Knochenbälkchen, den sogenannten Trabekeln, aufgebaut ist (Reznikov et al. 2016; Faller et al. 2012; Schiebler 2005). Die Trabekel wiederum werden aus 2-3 μm dicken Kollagenschichten gebildet (Reznikov et al. 2016). In den Hohlräume der Spongiosa befindet sich rotes, blutbildendes Knochenmark (Faller et al. 2012). Ein Ausschnitt der Spongiosa aus einem menschlichen Femurkopf ist in Abbildung 6 dargestellt.

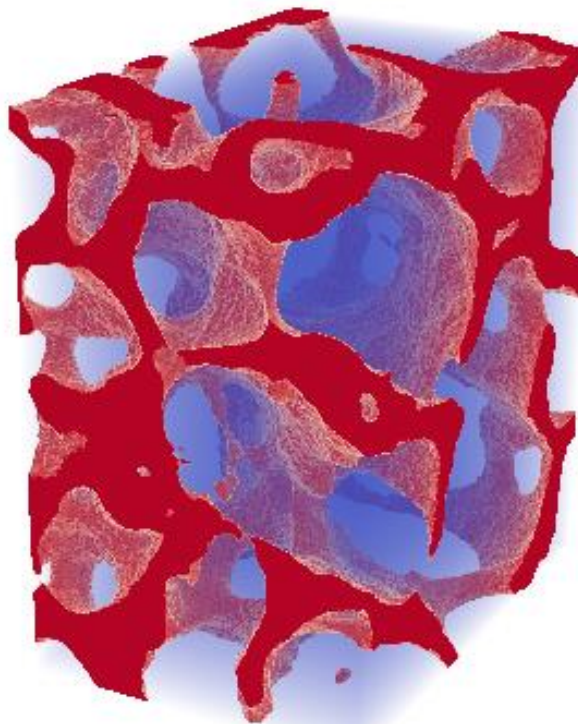


Abbildung 6: Ausschnitt der Spongiosa aus einem Femurkopf (Auflösung 5 μm)

Der Aufbau des Femurs aus Kompakta und Spongiosa ermöglicht eine hohe Belastbarkeit, bei vergleichsweise geringem Gewicht (Schiebler 2005). So entfallen nach Schiebler (2005) „[b]eim Menschen [...] nur etwa 10% des Körpergewichts – etwa 7 kg – auf das Skelett“ (Schiebler 2005, S. 169). Gleichzeitig

sorgt die über den Femurkopf und -hals unregelmäßig aufgebaute Struktur für ein anisotropes Verhalten der Spongiosa.

Untersuchungen der Spongiosa durch Rudolf Reznikov et al. (2016) beschreiben das geringe Gewicht indirekt durch den inter-trabecular-angle (ITA). Der ITA wurde von ihnen als Winkel zwischen den Trabekeln eines gemeinsamen Knotenpunktes definiert. Ein Knotenpunkt wird dabei von mindestens drei abgehenden Trabekeln gebildet. Bei ihren Untersuchungen wurde Spongiosa von insgesamt acht Personen, sowohl aus dem Femurkopf als auch aus dem Femurhals, untersucht. Ein Ergebnis der Untersuchungen von Reznikov et al. (2016) ist dabei, dass sich die Trabekel über die verschiedenen Proben hinweg so anordnen, dass mit einer minimalen Anzahl an Trabekeln das größtmögliche Volumen abgedeckt wird. Folglich ergibt sich auch ein möglichst geringes Gewicht der Spongiosa.

Darüber hinaus sind sowohl Spongiosa als auch Kompakta in der Lage sich veränderten Lastbedingungen durch Umbau und Verstärkung anzupassen. Bei der Kompakta geschieht die Anpassung lediglich durch Verstärkung (Schiebler 2005; Reznikov et al. 2016). Da dieser Umbau jedoch über einen längeren Zeitraum stattfindet, ist die in den weiteren Kapiteln folgende statische Modellierung der Spongiosa gerechtfertigt. Wie schon in Kapitel 1 angemerkt stellt dieses Verhalten die Grundlage für die aktuelle Forschung bezüglich der Bestimmung der Steifigkeit der Spongiosa.

3. Modellbildung der Spongiosa

Um die Steifigkeitsmatrix der Spongiosa mit Hilfe der Anwendung der Direkten Mechanik (Kap. 4.2) berechnen zu können, muss zunächst ein geeignetes Modell erstellt werden. Da der Ablauf der Modellbildung Bestandteil aktueller, noch nicht abgeschlossener Forschung ist, wird in diesem Kapitel lediglich auf die Grundprinzipien der Modellbildung der Spongiosa eingegangen.

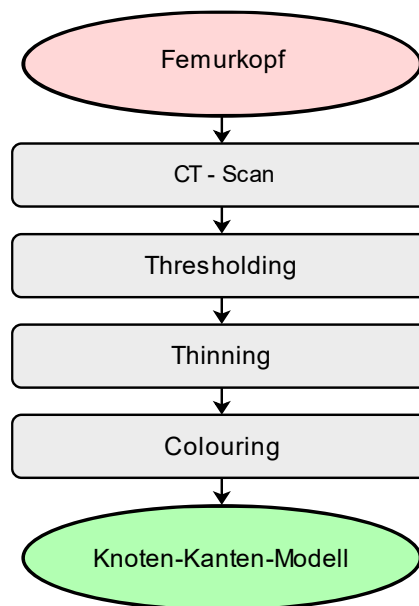


Abbildung 7: Ablauf der Modellierung der Spongiosa

Die einzelnen Schritte, welche bei der Modellierung der Spongiosa durchlaufen werden, sind in der Übersicht in Abbildung 7 veranschaulicht. In den folgenden Abschnitten werden diese Schritte genauer erläutert.

3.1 CT-Scan des Femurkopfs

Erster Schritt bei der Modellbildung der Spongiosa ist die Erstellung einer dreidimensionalen Abbildung eines explantierten Femurkopfs mit Hilfe eines Computertomographen (CT).

Die Computertomographie ist ein Röntgen-Schichtaufnahmeverfahren, das im Gegensatz zur klassischen Röntgenaufnahme, welche eine zweidimensionale Projektion aus überlagerten Schichten darstellt, durch Aufnahme von

Transversalschnittbildern eine dreidimensionale Abbildung realisieren kann (Krestel 1988; Radü et al. 1980). Transversalschnittbilder sind zweidimensionale Abbildungen einer orthogonal zur Längsachse eines Objekts verlaufenden Schicht (Krestel 1988). Zudem liefert die Computertomographie „kontrastreiche Weichteildarstellungen“ (Krestel 1988, S. 91).

Grundlegend besteht das Messsystem eines Computertomographen aus einer Röntgenröhre, einem Strahlungsdetektor und einer Auswertelektronik (Krestel 1988; Radü et al. 1980; Schneider 2016). Das Messobjekt wird im Strahlengang zwischen Röntgenröhre und Strahlungsdetektor platziert (Radü et al. 1980). Die Strahlung durchdringt nun das Messobjekt und wird vom Detektor erfasst. In Abhängigkeit von der Dicke und dem Absorptionsverhalten des Messobjekts ergibt sich am Detektor ein Intensitätsverlauf der abgeschwächten Strahlung (Krestel 1988).

Die Strahlen können gebündelt ausgesandt werden. Dies erfordert jedoch eine Transversalbewegung der Messeinrichtung oder des Messobjekts, damit das Messobjekt vollständig erfasst werden kann (Radü et al. 1980). Eine weitere Möglichkeit, die heutzutage zumeist angewendet wird, besteht im kegelförmigen Aussenden der Strahlung (Schneider 2016). Hierdurch wird die Transversalbewegung der Messeinrichtung oder des Messobjekts zur Projektionsaufnahme einer Schicht vermieden.

Für die Berechnung eines Transversalschnittbilds ist die Aufnahme mehrerer Intensitätsverläufe aus unterschiedlichen Richtungen notwendig. Um diese aufzunehmen, wird das Messobjekt oder die Messeinrichtung schrittweise von 0° bis 180° rotiert. Hierbei wird in jedem Rotationsschritt erneut ein Intensitätsverlauf aufgezeichnet. Mit Hilfe der Rücktransformation mit Faltung (Krestel 1988) oder algebraischer Verfahren (siehe Anhang A) kann anschließend aus den gemessenen Intensitätsverläufen die Dichteverteilung des Transversalschnittbildes berechnet werden (Maier et al. 2018). Für die Generierung einer dreidimensionalen Abbildung muss dieser Vorgang für mehrere Schichten des Messobjekts wiederholt werden (Krestel 1988).

Ergebnis ist eine dreidimensionale Abbildung, bei der jedem Voxel ein Absorptionswert zugewiesen ist. Um die Absorptionswerte von unterschiedlichen Computertomographen, die abhängig von Material und Intensität der Ausgangsstrahlung sind, vergleichbar zu machen, wird die Hounsfield-Einheit

(HE) verwendet (siehe Anhang A) (Radü et al. 1980). Mit Hilfe dieser Einheit kann jedem Voxel ein Grauwert zugewiesen werden. Dies führt zu den bekannten graustufen Transversalschnittbildern. In Abbildung 8 ist ein Schnittbild einer CT-Aufnahme des Hüftgelenks bei einer 77-jährigen Patientin nach einem Sturz dargestellt.



Abbildung 8: Schnittbild einer CT-Aufnahme des Hüftgelenks mit Oberschenkelhalsfraktur (Pfeil eingefügt) (Bild: (Häggström 2021a))

Aufgrund der notwendigen hohen Auflösung findet für die Abbildungsgenerierung der Spongiosa ein sogenanntes mikrofokus CT (μ -CT) Anwendung. Im Gegensatz zum klinischen CT (k-CT), welches bei Patienten Anwendung findet, wird bei einem μ -CT das Messobjekt rotiert (Schneider 2016). Das μ -CT erlaubt in Abhängigkeit der Größe und der Position des Messobjekts im Strahlengang Auflösungen im Bereich von ca. 5 μ m (vgl. Abbildung 6 Spongiosa) (Schneider 2016). Ein k-CT-Scan ist beispielsweise in Abbildung 8 dargestellt. Es wird ersichtlich, dass bei diesem Schnitt durch das Hüftgelenk die Spongiosa im Femurkopf und -hals für die Erstellung des Knoten-Kanten-Modells nicht ausreichend aufgelöst ist. Die Verwendung explantierter Femurköpfe in der aktuellen Forschung erlaubt den Einsatz eines μ -CT (vgl. Abbildung 6).

3.2 Thresholding

Wie in Kapitel 3.1 beschrieben, ist das Ergebnis des CT-Scans eine dreidimensionale Abbildung der Spongiosa mit Grauwerten in Abhängigkeit von den verschiedenen Hounsfield-Werten. Für die Weiterverarbeitung ist jedoch eine binarisierte Abbildung der Spongiosa notwendig. Eine binarisierte Abbildung

besteht ausschließlich aus zwei Farben. Jedem Voxel kann daher entsprechend dem in ihm vorhandenen Material entweder der Wert 1 oder 0 zugeordnet werden. Eine solche binarisierte dreidimensionale Abbildung ist in Abbildung 6 (Kapitel 2.3) dargestellt. Hierbei ist die Knochenstruktur rot (Wert 1) und die Hohlräume, in denen sich normalerweise Knochenmark befindet, blau (Wert 0) dargestellt.

Um eine solche Segmentierung der Spongiosaabbildung in Knochenstruktur und Hohlraum bzw. Knochenmark zu erhalten, wird das globale Schwellenwertverfahren (engl.: thresholding) angewandt. Bei diesem wird ein Schwellenwert definiert und anschließend jedes Voxel mit diesem verglichen (Erhardt 2017). Es ergibt sich die Formulierung (Erhardt 2017):

$$r(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h(x, y, z) > t \\ 0 & \text{falls } h(x, y, z) \leq t \end{cases} \quad (\text{Gl. 3.1})$$

Mit r als neuen Wert für das Voxel an der Stelle (x, y, z) , h als alter Wert für das Voxel an der Stelle (x, y, z) und t als globaler Schwellenwert.

Der Schwellenwert für das Thresholding kann mittels eines Histogramms, welches auf der Abszisse die Anzahl der Voxel und auf der Ordinate die Hounsfield-Einheit enthält, bestimmt werden. Dieses Histogramm muss für jeden Femurkopf einzeln erstellt werden, da die Hounsfield-Werte des Knochens aufgrund unterschiedlicher Knochendichte der Proben voneinander abweichen können.

Ergebnis dieses Verfahrensschritts ist eine binarisierte, dreidimensionale Darstellung der Spongiosa wie beispielhaft in Abbildung 6 (Kap. 2.3) dargestellt.

3.3 Thinning

Die mittels Thresholding generierte binarisierte 3D-Abbildung der Spongiosa enthält Trabekel mit unterschiedlichen Querschnittsflächen und unterschiedlichen Krümmungen. Nach der digitalen Entfernung der Kortikalis müssen zur Vorbereitung für den letzten Verfahrensschritt, das Colouring, die verschiedenen Querschnitte der Trabekel auf den Querschnitt eines Voxels reduziert werden (siehe Abbildung 9 a. und b.). Diese Aufgabe übernimmt ein sogenannter Thinning-Algorithmus (deutsch: Ausdünnungsalgorithmus). Nach dem

Durchlauf des Thinning-Algorithmus besteht ein Trabekel folglich aus einer Aneinanderreihung einzelner Voxel.

Da in diesem Kapitel die grundlegende Vorgehensweise bei der Generierung des Knoten-Kanten-Modells der Spongiosa beschrieben wird, wird an dieser Stelle auf den aufwendigeren Thinning-Algorithmus im Dreidimensionalen verzichtet. Die prinzipielle Funktionsweise eines Thinning-Algorithmus wird im folgenden Abschnitt daher am Beispiel des 2D-Thinning-Algorithmus nach Zhang und Suen (1984) (abgekürzt: ZS-Thinning-Algorithmus) erläutert.

Grundlage für den ZS-Thinning-Algorithmus ist ein binarisiertes 2D-Bild, wobei jedes zu Kontur gehörende Pixel den Wert 1 besitzt. Es wird jedes Pixel einzeln in Zusammenhang mit seinen acht Nachbarpixeln betrachtet. Die Nummerierung der Pixel erfolgt dabei, wie in Abbildung 9 a unter der Annahme, dass jedes Pixel mit 8 Nachbarpixeln verbunden ist.

Der ZS-Thinning-Algorithmus besteht aus zwei Schritten zur Entfernung der Randpixel der Kontur, welche nur durchlaufen werden, falls der Wert von Pixel P_1 gleich eins ist. Ist dies nicht der Fall, dann zählt P_1 nicht zur Kontur.

Schritt 1:

$$2 \leq B(P_1) \leq 6 \quad (\text{Gl. 3.2})$$

$$A(P_1) = 1 \quad (\text{Gl. 3.3})$$

$$P_2 * P_4 * P_6 = 0 \quad (\text{Gl. 3.4})$$

$$P_2 * P_4 * P_8 = 0 \quad (\text{Gl. 3.5})$$

Schritt 2:

$$2 \leq B(P_1) \leq 6 \quad (\text{Gl. 3.6})$$

$$A(P_1) = 1 \quad (\text{Gl. 3.7})$$

$$P_2 * P_4 * P_8 = 0 \quad (\text{Gl. 3.8})$$

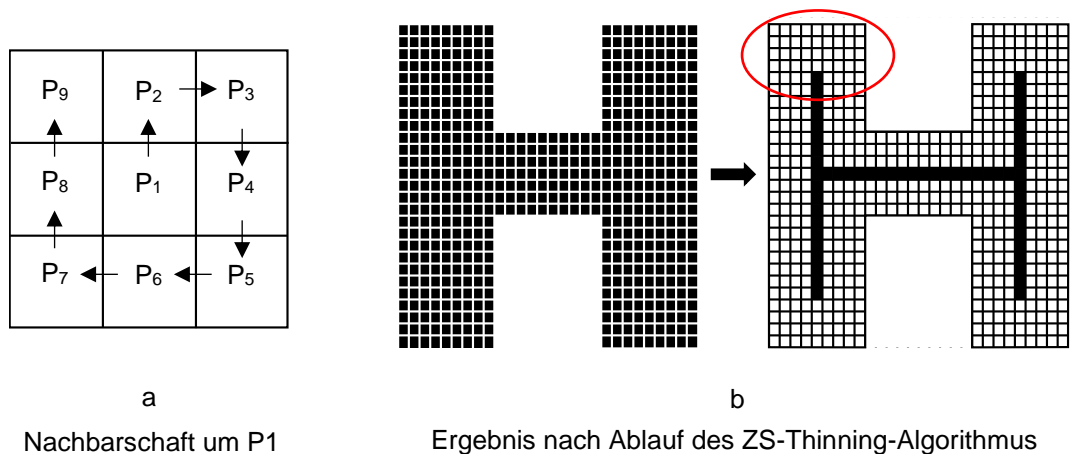
$$P_2 * P_4 * P_8 = 0 \quad (\text{Gl. 3.9})$$

$B(P_1)$ ist hierbei die Summe aller Werte von P_2 bis P_9 . „ $A(P_1)$ ist die Anzahl an 01 Mustern im geordneten Set der Nachbarn $P_2, P_3, P_4, \dots, P_8, P_9$ von P_1 “

(Zhang und Suen 1984, S.2) ⁴. Dieses geordnete Set ist durch die Pfeilrichtung in Abbildung 9 a illustriert.

Verglichen mit Schritt 1 ergibt sich in Schritt 2 lediglich eine Änderung in Gleichung 3.8. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so darf P_1 nicht gelöscht werden.

Der ZS-Thinning-Algorithmus kann in einer Iteration alle Bildpunkte auswerten und eine erste Ausdünnung vornehmen. Es wird dann bis zur vollständigen Ausdünnung der Kontur weiter iteriert. Ein beispielhaftes Ergebnis des ZS-Thinning-Algorithmus angewandt auf den Buchstaben „H“ ist in Abbildung 9 b dargestellt. (Zhang und Suen 1984)



a

Nachbarschaft um P1

b

Ergebnis nach Ablauf des ZS-Thinning-Algorithmus

Abbildung 9: ZS-Thinning-Algorithmus (nach Zhang und Suen 1984)

Bei der Übertragung dieses prinzipiellen Vorgehens auf dreidimensionale, binarisierte Abbildungen ist darauf zu achten, dass im 3D-Raum ein Bildpunkt nicht nur acht, sondern 26 Nachbarvoxel besitzt. Dies führt zu komplexeren Bedingungen für das Löschen eines Randvoxels der Kontur. Des Weiteren darf ein Trabekel nicht entlang seiner Achse ausgedünnt werden, da dies zu einer Verkürzung des Trabekels führt. Diesen Sachverhalt berücksichtigt der ZS-Thinning-Algorithmus nicht, wie man in Abbildung 9 b (rot markierte Stelle) erkennen kann.

⁴ Eigene Übersetzung aus dem Englischen

3.4 Colouring

Um die gekrümmten Trabekel durch Stäbe ersetzen zu können, müssen die jeweiligen Start- und Endknoten der Trabekel identifiziert werden. Hierfür wird das Colouring angewendet. Durch das Thinning ergibt sich, dass jedes Voxel, das Bestandteil eines Trabekels ist, genau zwei Nachbarvoxel hat, die beide den Wert eins haben und zur ausgedünnten Struktur gehören. Besitzt ein Voxel nun mehr als zwei Nachbarn mit Wert eins, so weiß man, dass es sich bei diesem Voxel um einen Knotenpunkt handeln muss, von welchem mehrere Trabekel abgehen. Nun wird jedem abgehenden Voxel eine Farbe zugewiesen. Diese Farbe wird für jeden Trabekel durch einen Zahlenwert charakterisiert. Indem nun die Trabekel durch die Nachverfolgung der Nachbarvoxel „abgeschritten“ und eingefärbt werden, können anschließend für jeden Trabekel der Start- und Endknoten identifiziert werden (siehe Abbildung 10 c).

Im letzten Schritt werden nun die eingefärbten, gekrümmten Trabekel durch den jeweils kürzesten Abstand zwischen Start- und Endknoten ersetzt. Dieser Abstand entspricht der Länge des Stabes, welcher für die Trabekel eingesetzt wird.

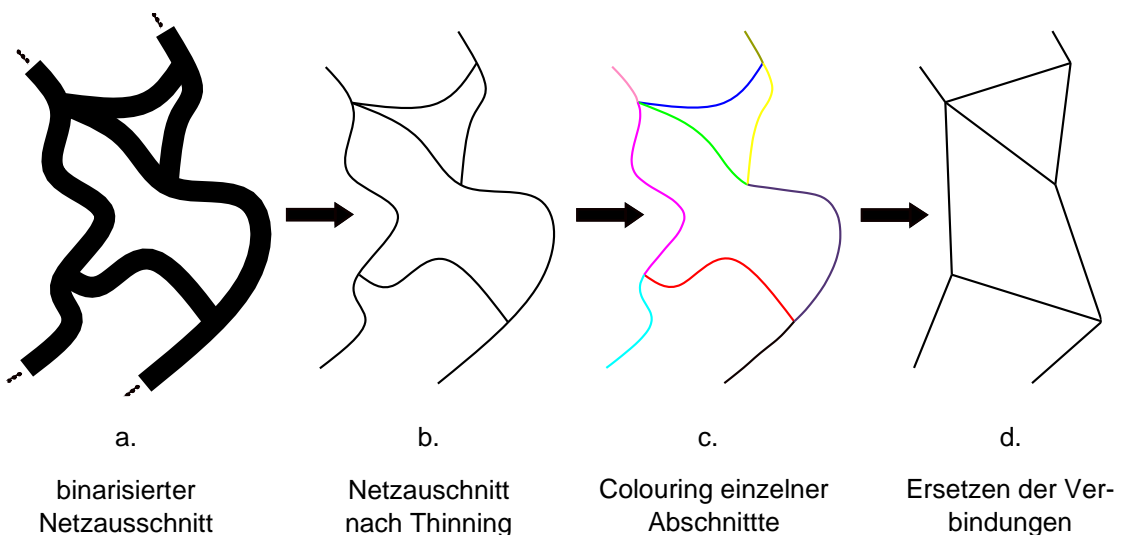


Abbildung 10: Thinning und Colouring an einem beispielhaften 2D-Netzwerkausschnitt

Der gesamte Prozess mit seinen Zwischenschritten, ausgehend von einem beispielhaften, binarisierten 2D-Netzwerkausschnitt hin zum abstrahierten 2D-Stabnetzwerk, ist in Abbildung 10 verdeutlicht.

4. Mechanische Grundlagen

Liegt ein Modell der Spongiosa vor, soll mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente die Gesamtsteifigkeit der Spongiosa bestimmt werden. Da der Rechenaufwand für dieses hochaufgelöste Spongiosamodell mit Hilfe der klassischen Finiten Elemente Methode, wie in diesem Kapitel gezeigt wird, sehr hoch ist, wird die Anwendung der Direkten Mechanik auf das Knoten-Kanten-Modell untersucht.

Daher werden in diesem Kapitel an einem beispielhaften Stabwerk die mechanischen Grundlagen der Finiten Elemente Methode behandelt. Außerdem wird der Ansatz der Direkten Mechanik nach Ralf Schneider (2016), der in der weiteren Arbeit auf einem Knoten-Kanten-Netzwerk angewandt wird, beschrieben.

4.1 Grundlagen der Finiten Elemente Methode

Häufig kann in der Mechanik die Lösung auftretender Differenzialgleichungen nicht mehr analytisch berechnet werden. Um dennoch eine Näherungslösung zu gegebenen Randbedingungen zu erhalten, kann auf verschiedene numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Ein Vertreter dieser numerischen Verfahren ist die Finite Elemente Methode (FEM).

Bei der Finiten Elemente Methode wird die Gesamtstruktur durch eine räumliche Diskretisierung in viele kleine, endliche Teile (Finite Elemente) zerlegt (Divide-et-impera-Prinzip). Die sogenannten Knoten verbinden dabei die Finiten Elemente (FEs) zur Gesamtstruktur. Für die Finiten Elemente wird ein Näherungsansatz gewählt, mit dessen Hilfe aus den Verschiebungen der Knoten eines Finiten Elements die Verschiebungen an jedem Ort des FEs approximiert werden können. Es müssen folglich nur noch die Knotenverschiebungen bestimmt werden. Die Formulierung des mechanischen Gesamtproblems mit Hilfe der FEM führt auf ein zu lösendes lineares Gleichungssystem. (Wagner 2017; Gross et al. 2018)

Abhängig von dem Grundproblem bieten moderne FEM-Programme eine Vielzahl unterschiedlicher Finiter Elemente an. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch nur Stabelemente zum Einsatz kommen, soll die mathematische Formulierung dieser im Folgenden näher betrachtet werden⁵. Hierfür wird das in Abbildung 11 dargestellte 3D-Stubnetzwerk verwendet. Alle drei Stäbe haben das gleiche Elastizitätsmodul E und die gleiche Querschnittsfläche A . Die Längen der Stäbe sind l_1, l_2, l_3 . Die eingezeichneten Bindungen bleiben in der Herleitung zunächst unberücksichtigt.

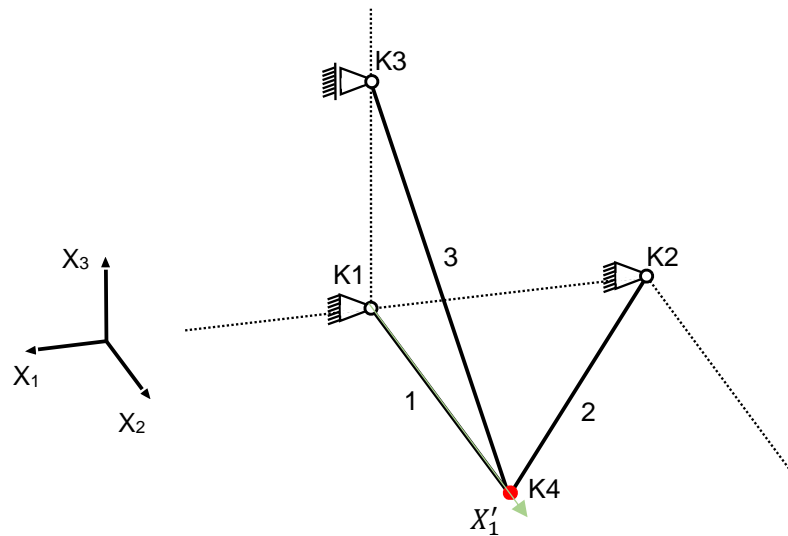


Abbildung 11: Beispielhaftes 3D-Stubwerk bestehend aus 3 Stäben

4.1.1 Grundlegende Annahmen

Für die nachfolgenden Herleitungen müssen bezüglich der Verwendung der Stabelemente zur Modellierung der Spongiosa einige Annahmen getroffen werden.

Für die folgenden Betrachtungen wird für die Verformung der Stabelemente ein unendlich großer, linear-elastischer Verformungsbereich vorausgesetzt. Daraus folgt, dass es zu keinen plastischen Verformungen bzw. Versagen der Stäbe kommen kann. Zudem folgt aus dieser Annahme die dauerhafte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, welches bei der Herleitung der

⁵ Für weitere Finite Elemente wird auf Gross et al. 2018 und Wagner 2017 verwiesen.

Elementsteifigkeitsmatrix in Abschnitt 4.1.2 eine wesentliche Rolle spielt. Des Weiteren sollen lediglich kleine Verformungen betrachtet werden.

Stabelemente können verwendet werden, falls die Ausdehnung des zu modellierenden Volumenkörpers in einer Richtung deutlich größer ist als in den anderen (schlanker Stab) (Wagner 2017). Sie können nur entlang dieser Längsachse Kräfte aufnehmen. Eine Biegebelastung von Stabelementen ist daher ausgeschlossen. Darüber hinaus besitzt ein Stabelement zwei Knoten. Jeder Knoten hat im dreidimensionalen Raum genau drei Freiheitsgrade (Gross et al. 2018).

Für die in Kapitel 6 beschriebenen Simulationsexperimente soll darüber hinaus eine rein statische Betrachtung stattfinden. Es werden demnach lediglich der Anfangs- und der Endzustand nach Verformung des Knoten-Kanten-Netzwerks betrachtet.

4.1.2 Stabelemente

Folgend wird die Herleitung der FE-Gleichungen für Stabelemente nach Marcus Wagner (2017) in Verbindung mit Dietmar Gross et al. (2018) beschrieben.

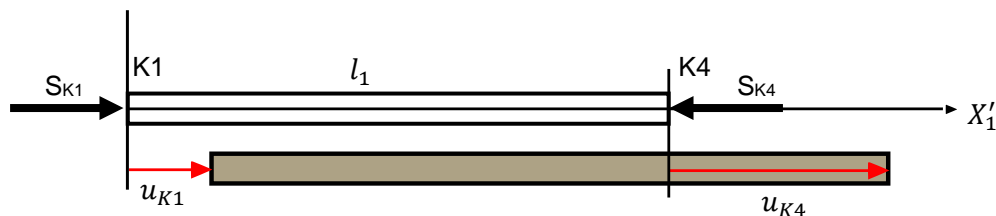


Abbildung 12: Freigeschnittener Stab 1 mit eindimensionalem Koordinatensystem und in einem möglichen verformten Zustand mit den Verschiebungen u_{K1} und u_{K4} (unabhängig von den eingezeichneten Freischnittkräften)

Wird das Stabwerk aus Abbildung 11 freigeschnitten, so kann jeder Stab $\gamma \in [1,2,3]$ für sich betrachtet werden. Da sich die Herleitung im 1D-Raum einfacher gestaltet, wird jedem Stab entlang seiner Längsachse ein lokales 1D-Koordinatensystem X'_γ angeheftet (siehe Abbildung 11 und 12). Im Folgenden soll Stab 1 als Beispielstab dienen.

Unter Berücksichtigung der in Kapitel 4.1.1 genannten Annahmen kann das Hookesche Gesetz (Gl. 4.1) angewendet werden:

$$\sigma(x) = E * \varepsilon \quad (\text{Gl. 4.1})$$

Des Weiteren gilt für die Verzerrung ε und eine Schnittkraft S :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \quad (\text{Gl. 4.2})$$

$$S(x) = \sigma(x) * A \quad (\text{Gl. 4.3})$$

Hierbei ist A die Querschnittsfläche und u' die Ortsableitung der Verschiebung. du beschreibt eine infinitesimale Verschiebung. Entsprechend repräsentiert dx eine infinitesimale Länge des Stabes in Längsrichtung.

Unter Verwendung der Gleichungen 4.1 bis 4.3 und mit einem Näherungsansatz \tilde{u} folgt für eine Schnittkraft S an der Stelle x :

$$S(x) = E * A * u' \text{ bzw. } \tilde{S}(x) = E * A * \tilde{u}' \quad (\text{Gl. 4.4})$$

Es wird nun für die Verschiebung ein linearer Näherungsansatz gewählt.

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(x) * u_i = \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) * u_{K1} + \frac{x}{l_1} * u_{K4} \quad (\text{Gl. 4.5})$$

$\phi_i(x)$ sind die linearen Ansatzfunktionen, die mit den jeweiligen Knotenverschiebungen ($u_1 = u_{K1}$ und $u_2 = u_{K4}$) multipliziert werden. Dieser Verschiebungsansatz kann auch wie folgt in Matrixschreibweise notiert werden:

$$\tilde{u}(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right), \frac{x}{l_1} \right] * \begin{bmatrix} u_{K1} \\ u_{K4} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\phi}_1(x)]^T * \mathbf{u}_1 \quad (\text{Gl. 4.6})$$

Mit der oben genannten Annahme einer statischen Betrachtung müssen bei einem Schnitt durch den Balken folglich auch die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Unter Verwendung des positiven und negativen Schnittufers ergeben sich die Gleichungen 4.7 und 4.8:

$$S_{K1} = -\tilde{S}(x) \quad (\text{Gl. 4.7})$$

$$S_{K4} = +\tilde{S}(x) \quad (\text{Gl. 4.8})$$

Die Ortsableitung des Verschiebungsansatzes \tilde{u} ($\tilde{u}' = \frac{d}{dx} \tilde{u}$) aus Gleichung 4.6 wird in die Gleichung 4.4 eingesetzt und $\tilde{S}(x)$ anschließend in die Gleichungen 4.7 und 4.8. Hieraus ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\underbrace{\frac{E_1 * A_1}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}'_1} * \underbrace{\begin{bmatrix} u_{K1} \\ u_{K4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{K1} \\ S_{K4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_1} \quad (\text{Gl. 4.9})$$

Die 2×2 -Matrix \mathbf{K}'_1 (bzw. allgemein gilt \mathbf{K}'_γ) ist die Elementsteifigkeitsmatrix des Stabes 1 (bzw. allgemein γ), \mathbf{u}_1 (bzw. allgemein \mathbf{u}_γ) ist der Vektor der Knotenverschiebungen und \mathbf{s}_1 (bzw. \mathbf{s}_γ) ist der Vektor der an den Knoten angreifenden Kräfte. Alle Bestandteile der Gleichung 4.9 sind im für den jeweiligen Stab γ , wobei hier $\gamma = 1$ ist, definierten 1D-Koordinatensystem X'_γ dargestellt.

Man kann erkennen, dass sich die Elementsteifigkeitsmatrix verschiedener Stäbe lediglich in den Parametern E_γ, A_γ und l_γ unterscheidet.

Eine weitere Möglichkeit zur Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix basiert auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebung. Da hieraus die gleiche Elementsteifigkeitsmatrix resultiert, wird nicht näher auf dieses Verfahren eingegangen.⁶

4.1.3 Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix

Der Einfachheit halber ist die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix eines Stabes in einem entlang der Stabachse definierten 1D-Koordinatensystem geschehen. Mit Stäben modellierte mechanische Strukturen befinden sich allerdings in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 . Zudem sind die meisten 1D-Koordinatensysteme der Stäbe in einem Stabwerk nicht zueinander parallel ausgerichtet. Aus diesen Gründen muss eine Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen vom jeweiligen lokalen 1D-Koordinatensystem in ein globales mehrdimensionales Koordinatensystem stattfinden. Da die Spongiosa im dreidimensionalen Raum modelliert wird, wie auch das Beispielstabwerk in Abbildung 11, wird die

⁶ Für genaue Ausführungen des Prinzips der virtuellen Arbeit wird auf Gross et al. (2018) verwiesen.

Transformation in ein globales dreidimensionales Koordinatensystem vorgestellt. Dies geschieht in Anlehnung an Gross et al. (2018) unter Verwendung des Beispielstabs 2 aus Abbildung 11.

Ein Knoten eines Stabes hat im dreidimensionalen Koordinatensystem anstelle von einem Freiheitsgrad drei Freiheitsgrade. Die Freiheitsgrade stellen dabei die Richtungen einer möglichen Bewegung dar. Es kann daher für Stab 2 folgender Zusammenhang zwischen den Verschiebungen aufgestellt werden:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{K2} \\ u_{K4} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 * \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{41} \\ u_{42} \\ u_{43} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 * \mathbf{v}_2 \quad (\text{Gl. 4.10})$$

\mathbf{T}_2 (bzw. allgemein \mathbf{T}_γ) ist die 2×6 -Transformationsmatrix des Stabes 2. Die Indizierung der Transformationsmatrix ist notwendig, da sie verschiedene Einträge enthält, falls die Stäbe nicht parallel zueinander ausgerichtet sind. \mathbf{v}_2 (bzw. allgemein \mathbf{v}_γ) ist der Vektor aller Knotenverschiebungen eines Stabes im dreidimensionalen Raum. Die Indizierung der Einträge folgt dabei dem Schema $u_{\gamma\delta}$, wobei $\delta \in [1,2,3]$ ist und die Richtung einer möglichen Bewegung angibt. $\delta = 1$ entspricht einer Bewegungsmöglichkeit entlang der X_1 -Achse. Mit derselben Transformationsmatrix können auch die am Stab angreifenden Kräfte in das eindimensionale Koordinatensystem transformiert werden. Hierbei beschreibt \mathbf{f}_2 die am Stab angreifenden Kräfte im dreidimensionalen Koordinatensystem. Die Indizierung erfolgt auf die gleiche Weise wie bei den Verschiebungen.

Die 2×6 -Transformationsmatrix besitzt allgemein folgende Gestalt:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} c_{1\gamma} & c_{2\gamma} & c_{3\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{1\gamma} & c_{2\gamma} & c_{3\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 4.11})$$

$c_{1\gamma}, c_{2\gamma}, c_{3\gamma}$ sind die sogenannten Richtungskosinusse, welche eine Projektion der Längsachse des Stabes und damit der X'_γ -Achse auf die drei Achsen des globalen Koordinatensystems darstellt. Aus diesem Zusammenhang folgt auch die gewählte Indizierung.

Die Berechnung der Richtungskosinusse $c_{1\gamma}, c_{2\gamma}, c_{3\gamma}$ kann bei bekannten Winkeln zwischen den Achsen des 1D- und 3D-Koordinatensystems über Cosinus und Sinus-Zusammenhänge erfolgen, oder über Gleichung 4.12.

$$\begin{bmatrix} c_{1\gamma} \\ c_{2\gamma} \\ c_{3\gamma} \end{bmatrix} = \frac{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)}{l_\gamma} \quad (\text{Gl. 4.12})$$

Hierbei sind \mathbf{r}_P und \mathbf{r}_Q die Ortsvektoren zu den Knoten P und Q des Stabes γ im globalen Koordinatensystem.

Nach Gross et al. (2018) kann mit Hilfe der Transformationsmatrix die Elementsteifigkeitsmatrix wie folgt vom lokalen in das globale Koordinatensystem übertragen werden:

$$\mathbf{K}_\gamma^{global} = \mathbf{T}_\gamma^T * \mathbf{K}'_\gamma * \mathbf{T}_\gamma \quad (\text{Gl. 4.13})$$

4.1.4 Assemblierung

Mit den in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Formeln kann nun für jeden Stab eines Stabwerks die globale Steifigkeitsmatrix aufgestellt werden. Im letzten Schritt müssen diese Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_γ zur Gesamtsteifigkeit \mathbf{K}_{ges} zusammengesetzt werden. Dieses „Zusammensetzen“ wird auch als Assemblierung bezeichnet.

An einem Knoten können mehrere Stäbe zusammenkommen. Bei der Assemblierung muss deshalb beachtet werden, dass die Verschiebungen an den Knoten der freigeschnittenen Stäbe, bei einer Verbindung im Stabwerk, die gleichen Verschiebungen aufweisen. Die Zuordnung der Verschiebungen aller Knoten des Stabwerks auf die benötigten Knotenverschiebungen eines betrachteten Stabs übernehmen sogenannte Verteilungsmatrizen (siehe Gleichung 4.14). Diese Verteilungsmatrizen sind dünn besetzt. Je mehr Knoten das Stabwerk aufweist, desto mehr Nullen tauchen in der Verteilungsmatrix auf.

$$\mathbf{v}_\gamma = \mathbf{C}_\gamma * \mathbf{u}_{ges} \quad (\text{Gl. 4.14})$$

\mathbf{v}_γ ist der in Gleichung 4.10 auftretende 6×1 -Vektor aller Knotenverschiebungen des Stabes γ . \mathbf{C}_γ ist die $6 \times 3n$ -Verteilungsmatrix des Stabes γ , wobei n die Anzahl der Knoten im Stabwerk beschreibt. \mathbf{u}_{ges} ist der $3n \times 1$ -Vektor aller Knotenverschiebungen des Stabwerks. Aus Gleichung 4.14 wird auch ersichtlich, dass jede Verteilungsmatrix \mathbf{C}_γ bei einem dreidimensionalen Stabwerk sechs Einträge gleich eins hat. Alle weiteren Einträge sind null.

Mit den Verteilungsmatrizen kann nun die Gesamtsteifigkeitsmatrix wie folgt gebildet werden:

$$\mathbf{K}_{ges} = \sum_{\gamma} \mathbf{C}_\gamma^T * \mathbf{K}_\gamma * \mathbf{C}_\gamma \quad (\text{Gl. 4.15})$$

\mathbf{K}_{ges} ist die gesuchte, symmetrische $3n \times 3n$ -Gesamtsteifigkeitsmatrix des Stabwerks. Mit Hilfe der Gesamtsteifigkeitsmatrix kann jetzt das zu lösende lineare Gleichungssystem für das gesamte Stabwerk angegeben werden (Gl. 4.16).

$$\mathbf{K}_{ges} * \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{f}_{ges} \quad (\text{Gl. 4.16})$$

Zusätzlich zu den bereits bekannten Bestandteilen in Gleichung 4.16 tritt hier noch der $3n \times 1$ -Vektor aller an den Knoten des Netzwerks angreifenden Kräfte \mathbf{f}_{ges} auf. Werden beispielsweise die Knotenverschiebungen gesucht, so ist \mathbf{f}_{ges} bekannt. Das lineare Gleichungssystem lässt sich dann eindeutig lösen. (Gross et al. 2018)

Unterliegt das Stabwerk Bindungen, wie z.B. das Stabwerk aus Abbildung 11, so ist in Abhängigkeit der Art der Bindung die Verschiebung an diesem Knoten in einem oder mehreren Freiheitsgraden gleich 0 oder aber zumindest eingeschränkt. Diese Randbedingungen können in Gleichung 4.16 eingebunden werden. (Wagner 2017)

4.2 Ansatz der Direkten Mechanik

In den folgenden Unterkapiteln wird der Ansatz der Direkten Mechanik nach Schneider (2016) behandelt.

Hervorzuheben ist dabei, dass dieser Ansatz auf Grundlage der Diskretisierung der Spongiosa unter Verwendung von Hexe-8-Elementen (FE-Würfelement) hergeleitet wurde. Die Anwendung der Gleichungen auf Stabelemente soll in dieser Arbeit untersucht werden.

4.2.1 Grundgedanke der Direkten Mechanik

Im Gegensatz zu den in Kapitel 4.1 vorgestellten Gleichungen, welche zum Ziel haben die Verschiebungen bei bekannten angreifenden Kräften bzw. die angreifenden Kräfte bei bekannten Verschiebungen zu bestimmen, befasst sich der Ansatz der Direkten Mechanik mit der Bestimmung einer reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Knoten-Kanten-Netzwerks.

Der Begriff „reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix“ soll anhand eines Beispiels erklärt werden:

Um die Steifigkeit der Spongiosa des Femurkopfs berechenbar zu machen, wird die Spongiosa mit den in Kapitel 3 vorgestellten Schritten in ein Knoten-Kanten-Netzwerk (Stabwerk) überführt. Da die Größe der Steifigkeitsmatrix des gesamten Knoten-Kanten-Netzwerks direkt von der Anzahl der vorhandenen Knoten abhängt (siehe Gleichung 4.15), wird dieses zur besseren Beherrschbarkeit anschließend in Subvolumina aufgeteilt. Jedes dieser Subvolumina wird nun für sich betrachtet. Das „Verhalten“ des Stabwerks innerhalb eines Subvolumens soll nun durch ein Volumenelement mit beispielsweise acht Knoten abgebildet werden. Um dies zu erreichen, wird eine Reduzierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Stabwerks mit n -Knoten innerhalb des Subvolumens auf diese acht Knoten notwendig. Die Reduktion der Knotenanzahl spiegelt sich direkt in der Größe der Gesamtsteifigkeitsmatrix wider. Anstelle einer $3n \times 3n$ -Gesamtsteifigkeitsmatrix wird bei der Reduktion auf acht Knoten eine 24×24 -Gesamtsteifigkeitsmatrix generiert, welche den Rechenaufwand und die Komplexität der Zusammensetzung zur Steifigkeitsmatrix des

gesamten Spongiosamodells erheblich verringert. Daher wird in dieser Arbeit die mit der Direkten Mechanik berechnete Steifigkeitsmatrix als reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bezeichnet.

Für jedes Subvolumen ergibt sich eine eigene reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix. Aus diesem Grund können die Subvolumina auch als Finite Elemente betrachtet werden, welche speziell für die Simulation der Spongiosa eines Femurkopfs generiert werden.

4.2.2 Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix

Betrachtet wird ein Volumen M_i mit n_{Mc} Knoten. Der Index Mc steht für Makrostruktur. Es gilt:

$$M_i \subseteq \mathbb{R}^3$$

Innerhalb von M_i befindet sich ein Knoten-Kanten-Netzwerk mit n_{ges} Knoten. Von diesen n_{ges} Knoten liegen n_{out} Knoten auf der Oberfläche von M_i . Folglich verbleiben $n_{in} = n_{ges} - n_{out}$ Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks, welche sich innerhalb von M_i befinden.

Nach Gleichung 4.16 lässt sich das lineare Gleichungssystem für das Knoten-Kanten-Netzwerk unter Berücksichtigung aller Freiheitsgrade aufstellen:

$$\mathbf{K}_{ges} * \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{f}_{ges} \quad (\text{Gl. 4.17})$$

Nun lassen sich „[d]urch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen [...] die Freiheitsgrade des [Knoten-Kanten-Netzwerks] nach inneren und äußeren Freiheitsgraden sortieren“ (Schneider 2016, S. 81). Hierbei entsteht das lineare Gleichungssystem aus Gleichung 4.18 mit den Submatrizen \mathbf{K}_{in} , \mathbf{K}_{out} und $\mathbf{K}_{in,out}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{in} & \mathbf{K}_{in,out} \\ \mathbf{K}_{in,out}^T & \mathbf{K}_{out} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{in} \\ \mathbf{u}_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{out} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 4.18})$$

Ausformulieren dieser Matrixgleichung mit Hilfe der Submatrizen liefert zwei Gleichungen:

$$\mathbf{K}_{in} * \mathbf{u}_{in} + \mathbf{K}_{in,out} * \mathbf{u}_{out} = \mathbf{0} \quad (\text{Gl. 4.19})$$

$$\mathbf{K}_{in,out}^T * \mathbf{u}_{in} + \mathbf{K}_{out} * \mathbf{u}_{out} = \mathbf{f}_{out} \quad (\text{Gl. 4.20})$$

Umformung von Gleichung 4.19 nach \mathbf{u}_{in} und einsetzen in Gleichung 4.20 ergibt:

$$\left(-\mathbf{K}_{in,out}^T * \mathbf{K}_{in}^{-1} * \mathbf{K}_{in,out} + \mathbf{K}_{out}\right) * \mathbf{u}_{out} = \mathbf{S} * \mathbf{u}_{out} = \mathbf{f}_{out} \quad (\text{Gl. 4.21})$$

Gleichung 4.21 beschreibt das Knoten-Kantennetzwerk nun durch ein neues lineares Gleichungssystem mit einer Matrix \mathbf{S} , welche lediglich die Dimension $3n_{out} \times 3n_{out}$ besitzt. Die Steifigkeit des in M_i liegenden Netzwerkanteils wird durch die inverse Matrix \mathbf{K}_{in}^{-1} berücksichtigt. Diese ist über die Matrix $\mathbf{K}_{in,out}$ an die äußeren Knoten gekoppelt.

Weiter wird ein Näherungsansatz, welcher die Verschiebung der n_{out} Knoten durch die Verschiebung der n_{Mc} Knoten des Volumens M_i ausdrückt, gewählt. Dieser Näherungsansatz kann analog zu Gleichung 4.5 aufgebaut werden. Die Anzahl der Ansatzfunktionen nimmt allerdings in Abhängigkeit von n_{Mc} zu. Wird Gleichung 4.21 entsprechend den Freiheitsgraden sortiert, kann der Verschiebungsansatz wie folgt formuliert werden:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{out,\delta} = \left[\sum_{i=1}^{n_{Mc}} \phi_i(\mathbf{x}_{out,\delta}) * u_{Mc,i,\delta} \right]_{out,\delta} \quad (\text{Gl. 4.22})$$

Der Index δ zeigt, dass es sich um den gleichen Freiheitsgrad aller durch den Verschiebungsansatz approximierten Knoten handelt. Der Unterstrich auf der rechten Seite der Gleichung soll zusätzlich verdeutlichen, dass es sich bei $\tilde{\mathbf{u}}_{out,\delta}$ um einen Spaltenvektor der Länge n_{out} handelt. Die Ansatzfunktionen $\phi_i(x)$ werden an den Stellen $\mathbf{x}_{out,\delta}$, also an den Positionen aller auf der Oberfläche von M_i liegenden Knoten n_{out} , ausgewertet. Im Gegensatz zu Schneider (2016) sind die hier verwendeten Ansatzfunktionen $\phi_i(x)$ in Gleichung 4.22 nicht mit einer dimensionslosen Koordinate definiert. Es muss daher keine Koordinatentransformation stattfinden.

$$\mathbf{S} * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{Mc}} \phi_i(\mathbf{x}_{out,1}) * u_{Mc,i,1} \\ \sum_{i=1}^{n_{Mc}} \phi_i(\mathbf{x}_{out,2}) * u_{Mc,i,2} \\ \sum_{i=1}^{n_{Mc}} \phi_i(\mathbf{x}_{out,3}) * u_{Mc,i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{out,1} \\ \mathbf{f}_{out,2} \\ \mathbf{f}_{out,3} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 4.23})$$

Einsetzen des Verschiebungsansatzes liefert Gleichung 4.23, wobei die Sortierung der einzelnen Bestandteile sich nach den Freiheitsgraden orientiert.

$$\mathbf{f}_{Mc} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{out}} f_{i,1} * \phi(x_{i,1}) \\ \sum_{i=1}^{n_{out}} f_{i,2} * \phi(x_{i,2}) \\ \sum_{i=1}^{n_{out}} f_{i,3} * \phi(x_{i,3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Mc,1} \\ \mathbf{f}_{Mc,2} \\ \mathbf{f}_{Mc,3} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 4.24})$$

Des Weiteren können mit Hilfe der Ansatzfunktionen die an den n_{out} Knoten angreifenden Kräfte auf die n_{Mc} Knoten von M_i entsprechend der Gleichung 4.24 verteilt werden.

$f_{i,1}$ beschreibt dabei die am Knoten i in Richtung von Freiheitsgrad eins angreifende Kraftkomponente. Entsprechendes gilt für die weiteren Kraftkomponenten. ϕ beschreibt den Vektor, der aus den Ansatzfunktionen ϕ_1 bis $\phi_{n_{Mc}}$ gebildet wird. Dieser wird am Knoten i in der zu $f_{i,1}, f_{i,2}$ bzw. $f_{i,3}$ korrespondierenden Richtung des Freiheitsgrades ausgewertet.

Mit den Gleichungen 4.23 und 4.24 kann folgendes lineares Gleichungssystem formuliert werden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}, \phi) * \mathbf{u}_{Mc} = \mathbf{f}_{Mc} \quad (\text{Gl. 4.25})$$

$\mathbf{A}(\mathbf{S}, \phi)$ ist die symmetrische, reduzierte $3n_{Mc} \times 3n_{Mc}$ -Gesamtsteifigkeitsmatrix des in M_i befindlichen Netzwerks. Sie wird in dieser Arbeit als reduziert bezeichnet, da sie die Information der Steifigkeit des gesamten ursprünglichen Knoten-Kanten-Netzwerks enthält, diese jedoch in einer Matrix mit kleineren

Dimensionen festhält. Das Volumen M_i kann als neues finites Element mit der Steifigkeitsmatrix $A(\mathcal{S}, \phi)$ interpretiert werden.

Zur Bestimmung von $A(\mathcal{S}, \phi)$ wird nicht nur ein Verschiebungsfall \mathbf{u}_{M_c} betrachtet, sondern $3n_{M_c}$ -Verschiebungsfälle. Diese bilden die Spalten der $3n_{M_c} \times 3n_{M_c}$ -Verschiebungsmatrix \mathbf{U}_{M_c} , zu der die $3n_{M_c} \times 3n_{M_c}$ -Lastmatrix \mathbf{F}_{M_c} gehört. \mathbf{F}_{M_c} soll durch eine Simulation des Knoten-Kanten-Netzwerks unter Aufbringung der Verschiebungsfälle aus \mathbf{U}_{M_c} bestimmt werden.

Die Spalten von \mathbf{U}_{M_c} , - also die einzelnen Verschiebungsfälle -, müssen linear unabhängig sein, da für die Berechnung von $A(\mathcal{S}, \phi)$ die inverse Matrix $\mathbf{U}_{M_c}^{-1}$ benötigt wird. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Gleichung 4.26 zur Bestimmung von $A(\mathcal{S}, \phi)$:

$$A(\mathcal{S}, \phi) = \mathbf{K}_{red} = \mathbf{F}_{M_c} * \mathbf{U}_{M_c}^{-1} \quad (\text{Gl. 4.26})$$

4.3 Verwendete FEM-Software Abaqus

Für die Finite Elemente Simulation zur Bestimmung der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Knoten-Kanten-Netzwerks und der Lastmatrix \mathbf{F}_{M_c} aus Gleichung 4.26 kommt die FEM-Software Abaqus zum Einsatz. Hiervon wurde für die vorliegende Arbeit lediglich das Modul Abaqus/Standard verwendet, da dieses für die Simulation von linearen und nichtlinearen statischen Problemen geeignet ist. Abaqus ermöglicht es ein Simulationsmodell und alle erforderlichen Definitionen für die Lastfälle aus einer inp-Datei, folgend Inputdeck genannt, in Abaqus CAE (Complete Abaqus Environment) zu importieren. Eine weitere Möglichkeit besteht durch die Simulation mit Abaqus Job. Hierfür wird das erstellte Inputdeck zugrunde gelegt. Aus diesen Gründen wird die Vorbereitung für die Simulation durch die Erstellung eines Inputdecks in Matlab unter Verwendung des Befehls *fprintf* vorgenommen. Ein solches Inputdeck enthält alle für eine Simulation notwendigen Informationen über das Simulationsmodell, die Last- bzw. Verschiebungsfälle und die Rückgabewerte (beispielsweise die Reaktionskräfte). Zu beachten ist, dass Abaqus kein internes Einheitensystem verwendet. Es ist selbst darauf achtzugeben, dass konsistente

Einheiten verwendet werden. Ob diese im SI-Einheitensystem angegeben sind oder nicht, bleibt dem Anwender überlassen.

Es soll folgend der Aufbau eines Inputdecks kurz erläutert werden (ein beispielhaftes Inputdeck ist in Anhang B zu finden). Auf die einzelnen Schlüsselbegriffe wird nicht eingegangen. Sie werden an der entsprechenden Stelle lediglich erwähnt.

Ein Inputdeck kann in zwei große Abschnitte, die Modelldefinition und die Verschiebungs- bzw. Lastfalldefinition, unterteilt werden. Im Bereich der Modelldefinition wird zunächst das gewünschte Simulationsmodell erstellt. Hierfür müssen alle Knoten durch eine Nummer und ihre kartesischen Koordinaten definiert werden (Stichwort: *NODES). Im nächsten Schritt erfolgt die Definition der verwendeten Finiten Elemente (Stichwort: *ELEMENT), in unserem Fall sind dies T3D2 Elemente. T3D2 bedeutet, dass dreidimensionale Stabelemente mit zwei Knoten verwendet werden. Anschließend werden alle Elemente (also alle Kanten des Knoten-Kanten-Netzwerks) nummeriert und durch ihren Start- und Endknoten festgelegt. Nachdem alle Elemente definiert sind, muss für die Stäbe noch ein Material und Materialverhalten festgelegt werden (Stichworte: *SOLID SECTION, *MATERIAL, *ELASTIC). Des Weiteren können in der Modelldefinition Knotengruppen erstellt werden. Diese sind hilfreich für die Definition der Randbedingungen (engl. Boundary Conditions) und die Definition der Constraints (siehe Kapitel 6.4.1).

Im zweiten Abschnitt werden die Lastfälle definiert. Dies kann zugleich für mehrere Lastfälle geschehen (Stichwort: *STEP). Diese können so gestaltet werden, dass nachfolgende Lastfälle auf den vorherigen Verformungen aufbauen, oder aber nach jedem Lastfall der Ausgangszustand wieder hergestellt wird (Stichwort: PERTURBATION, wird an *STEP angehängt). Die Definition der einzelnen Lastfälle kann sowohl über an den Knoten angreifende Kräfte als auch über Verschiebungsrandbedingungen erfolgen (Stichwort: *BOUNDARY). Letztere finden in dieser Arbeit Anwendung, da die Verschiebungsmatrix \mathbf{U}_{Mc} vorgegeben wird. Die Verschiebungsrandbedingungen können mit Hilfe der Gruppierung der Knoten für beliebig viele Knoten, ohne großen Aufwand, vorgegeben werden. Hierfür muss die Richtung der Verschiebung (z.B. „1, 1“ falls lediglich in Richtung von Freiheitsgrad 1 verschoben werden soll) und der vorzeichenbehaftete Betrag der Verschiebung

angegeben werden (negative, keine oder positive Verschiebungen möglich). Zum Schluss können in jedem *STEP die gewünschten Ausgabedaten wie z.B. Reaktionskräfte, Spannungen oder Verschiebungen generiert werden (Stichwort: *FIELD OUTPUT). (Dassault Systèmes 2014)

Ist das Inputdeck nach oben beschriebenem Aufbau erstellt, kann die Simulation entweder über die Kommandozeile mit Abaqus Job gestartet werden, oder das Modell wird über das Abaqus GUI (Grafical User Interface) als Modell importiert und die Simulation hieraus gestartet. Bei letzterem Vorgehen wird durch Abaqus/Standard ein erneutes Inputdeck erstellt, welches die gleichen Elemente enthält wie das, aus dem das Modell importiert wird.

Die Ergebnisse der Simulation werden in einer odb-Datei abgelegt. Diese Datei kann mit dem Abaqus/Viewer (enthalten im Abaqus/CAE und aufrufbar über das GUI) geöffnet und so die Ergebnisse visualisiert werden.

5. Der Testwürfel

In Kapitel 5 wird der für die Simulationen verwendete Testwürfel vorgestellt. Hierfür werden zunächst die Anforderungen an das Netzwerk aus mechanischer Sicht betrachtet. Anschließend wird der Aufbau des Testwürfels und dessen Generierung beschrieben. Darüber hinaus wird die Zeit- und Speicherplatzkomplexität der Implementierung gezeigt und die bei der Kantendefinition auftretenden Abweichungen der Kantenlängen überprüft.

5.1 Anforderungen an das Knoten-Kanten-Netzwerk des Testwürfels aus mechanischer Sicht

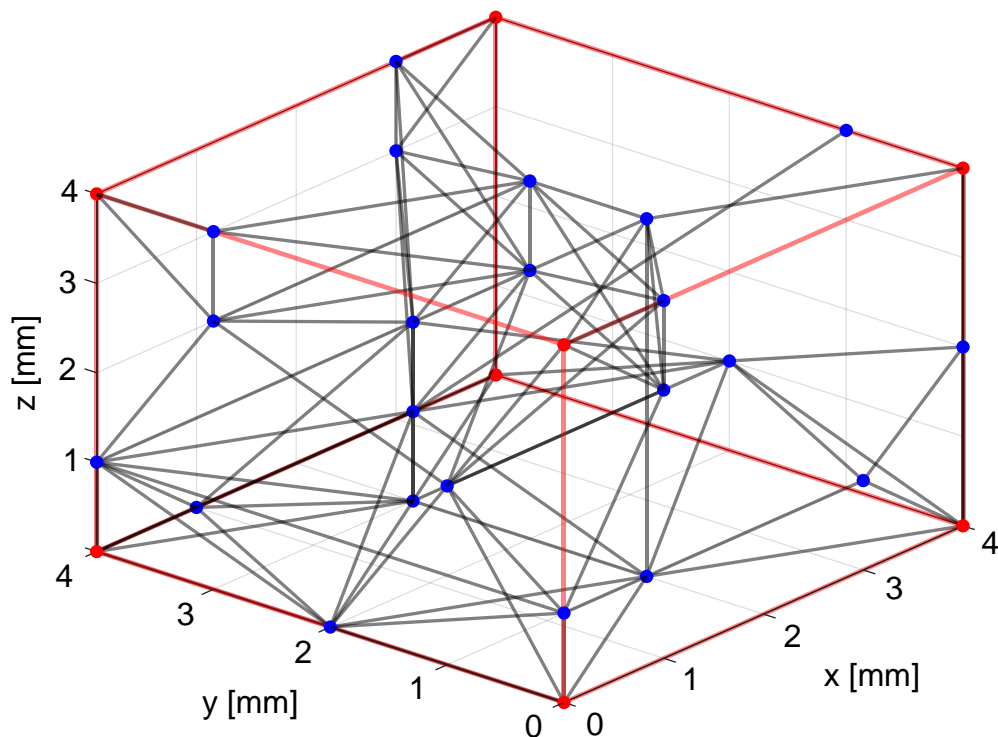


Abbildung 13: Zufälliges Knoten-Kanten-Netzwerk, mit durch rote Kanten angedeutetem umgebendem würfelförmigen Volumen

Abbildung 13 zeigt ein zufälliges Knoten-Kanten-Netzwerk, welches in einem Würfel der Kantenlänge 4 mm x 4 mm eingeschlossen ist (rote Kanten). Die Eckknoten des Würfels gehören dabei sowohl teilweise zum Würfel selbst als auch zum innenliegenden Knoten-Kanten-Netzwerk. Dieses beispielhafte

Netzwerk weist ein anisotropes Materialverhalten auf, da hier aufgrund des zufälligen, unsymmetrischen Netzwerkaufbaus in jeder Raumrichtung eine andere Steifigkeit zu erwarten ist. Je nach Belastungsrichtung sind bei gleicher Kraft folglich unterschiedliche Verformungen zu erwarten.

Zunächst soll der Testwürfel ein solches anisotropes Verhalten jedoch vernachlässigen, um einen Vergleich zwischen der FEM-Lösung der Steifigkeitsmatrix und der Lösung aus der Direkten Mechanik ohne eine Richtungsabhängigkeit zu erhalten. Die Richtungsabhängigkeit kann zunächst vernachlässigt werden, da die Steifigkeitsmatrizen über eine Norm in skalarer Größe verglichen werden (hierdurch entfällt die Richtungsinformation der Steifigkeitsmatrizen). Ein isotropes Verhalten kann durch einen symmetrischen Aufbau des Testwürfels erreicht werden. Gleichzeitig soll aber auch eine schnelle Umgestaltung des Knoten-Kanten-Netzwerks möglich sein, um so zeigen zu können, dass der Ansatz der Direkten Mechanik in der Lage ist die Anisotropie des Stabwerks in der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix abzubilden.

Wird erneut Abbildung 13 betrachtet, so kann an der Stelle $(x, y, z) = (4, 1, 4)$ ein Stab erkannt werden, der nur an einem Knoten mit dem übrigen Netzwerk verbunden ist. Solche Stäbe können bei der Modellierung der Spongiosa durch Aufteilen des Gesamtnetzwerks in Subnetzwerke entstehen. Wird als Subvolumen ein Würfelvolumen verwendet, werden einzelne Trabekel bzw. Stäbe zwangsläufig geschnitten und auf der Oberfläche des Subvolumens entsteht hierdurch ein Knoten. In einem realen Netzwerk würde ein solcher Stab zu Singularitäten führen, da bei vernachlässigter Reibung der Stab ohne Kraftaufbringung verschoben werden kann. Dieses Verhalten muss für den Ansatz der Direkten Mechanik mit Hilfe des Verschiebungsansatzes verhindert werden. Wird dies berücksichtigt, müssen keine Simulationen mit solchen „losen“ Kanten durchgeführt werden. Innerhalb des Würfelvolumens treten „lose“ Kanten nicht auf, da diese bei der Vorbereitung des Spongiosamodells entfernt werden. „Lose“ Kanten müssen im Testwürfel daher nicht berücksichtigt werden.

Eine weitere Vereinfachung soll bezüglich der Lagerung des Würfels (rote Kanten) bei der Aufbringung der Knotenverschiebungen gemacht werden. Zum einen sollen, falls kein Verschiebungsansatz gewählt ist, lediglich die äußeren Knoten (diese liegen auf der Oberfläche des Würfelvolumens)

verschoben werden. Zum anderen sollen alle äußeren Knoten, an denen keine Verschiebung angreift, so gelagert werden, dass sie sich in Richtung der Verformung mitverschieben können. Dies jedoch unter Ausschluss einer Querkontraktion des Würfelvolumens. Letztere Vereinfachung wird aufgrund der durch den Verschiebungsansatz fehlenden Querkontraktion bei der Anwendung der Direkten Mechanik getroffen, um so Kräfte bei einzelnen Verschiebungsfällen aussagekräftiger vergleichen zu können.

5.2 Aufbau des Testwürfels

Der Testwürfel wird in Matlab generiert. Hierfür werden in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die Knoten in einem äquidistanten Gitter angeordnet. Diese äquidistante Knotenverteilung ist in Abbildung 14 an einem Würfel mit drei Knoten je Raumrichtung, insgesamt also 27 Knoten, illustriert. Die Anzahl der verteilten Knoten und das gewünschte Würfelvolumen sind variabel implementiert. So kann ein Testwürfel mit mehr Knoten und Kanten bei gleichem Würfelvolumen generiert werden. Für die Bezeichnung der Testwürfel hat sich daher folgendes Schema ergeben: *Würfel* $k_{nodes} \times s_{cube}$. Hierbei bezeichnet k_{nodes} die Anzahl der Knoten, die entlang von s_{cube} verteilt werden. s_{cube} ist die Kantenlänge des Würfels (in mm). Der Testwürfel für die Simulationen in dieser Arbeit hat eine Kantenlänge von $s_{cube} = 5mm$. Für die gesamte Anzahl an Knoten $k_{nodes,ges}$ im Stabwerk folgt:

$$k_{nodes,ges} = k_{nodes}^3 \quad (\text{Gl. 5.1})$$

Die Knotennummerierung kann Abbildung 14 und Abbildung 16 entnommen werden. Dieses Nummerierungsschema gilt auch für Testwürfel mit einer größeren Anzahl an Knoten.

Eine weitere Betrachtung des gesamten Testwürfels gliedert diesen in $(k_{nodes} - 1)^3$ Elementarwürfel. Diese Elementarwürfel können als Finite Elemente mit acht Knoten betrachtet werden (entspricht Würfel $2 \times 2 \times 2$). Die in Abbildung 14 dargestellten Testwürfel bestehen beispielsweise aus acht Elementarwürfeln. Die Gliederung in Elementarwürfel ist für die Beschreibung der Kantenanordnung nützlich.

Für die Anordnung der Kanten zwischen den Knoten wurden zwei verschiedene Varianten betrachtet (siehe Abbildung 14). Bei der ersten Variante (Abbildung 14 links) sind die Kanten entlang der kürzesten Strecke zwischen den Knoten angeordnet. Hieraus ergibt sich eine Anordnung der Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems und innerhalb der zur xy - bzw. yz - bzw. xz -Ebene parallelen Ebenen. Die Kanten bei Variante zwei verlaufen diagonal auf der Oberfläche der Elementarwürfel. Wie der gesamte, aus diesen Elementarwürfeln aufgebaute Testwürfel betrachtet, so kann auch hier eine Anordnung der Kanten innerhalb der zur xy - bzw. yz - bzw. xz -Ebene parallelen Ebenen entdeckt werden. Im Gegensatz zur Anordnung der Kanten in Variante eins sind die Kanten in dieser Variante allerdings nicht parallel zu den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet.

Für die Anzahl der Kanten k_{edges} im Testwürfel nach Variante 2 gilt:

$$k_{edges} = \underbrace{(k_{nodes} - 1)^3}_{\text{Anzahl Elementarwürfel}} * 12 - \underbrace{[(k_{nodes} - 2) * 3 * (k_{nodes} - 1)^2 * 2]}_{\text{Entfernung doppelter Kanten}} \quad (\text{Gl. 5.2})$$

Anzahl Kanten pro Elementarwürfel

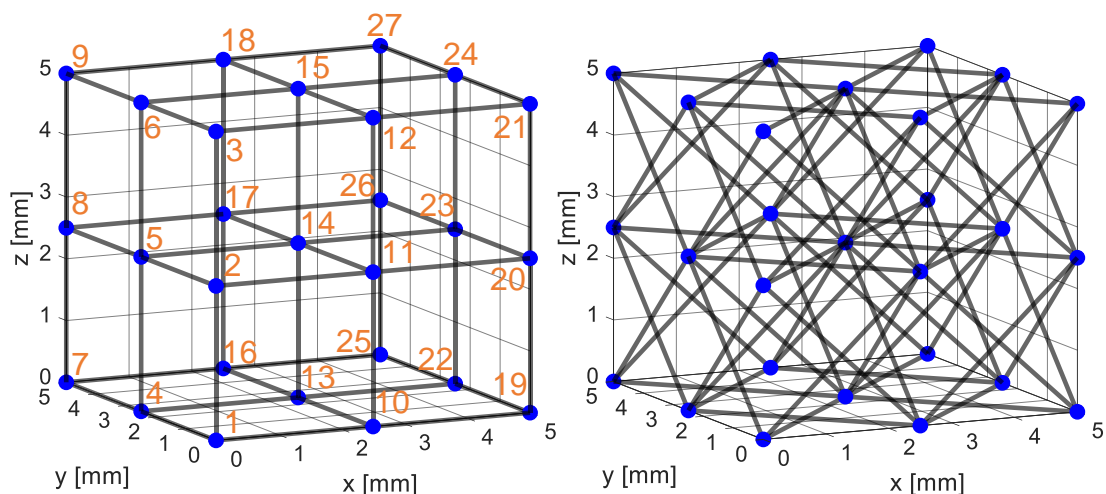


Abbildung 14: Testwürfelvarianten. Links: Variante 1 mit Stäben entlang der kürzesten Strecke zwischen den Knoten. Rechts: Variante 2 mit diagonal verlaufenden Kanten zwischen den Knoten (nicht durch die Mitte eines Elementarwürfels)

Für die in dieser Arbeit erfolgten Simulationen wurden die Testwürfel entsprechend der zweiten Variante aufgebaut. Bei dieser Variante kann überprüft werden, ob die Aufteilung der Steifigkeit der einzelnen Stäbe in Richtung der Koordinatenachsen bei der in Matlab implementierten Lösung korrekt erfolgt. Diese Überprüfung kann durch den Vergleich der in Matlab implementierten Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Knoten-Kanten-Netzwerks mit der Lösung einer kommerziellen FEM-Software durchgeführt werden. Des Weiteren kann durch eine Neuordnung der Kanten innerhalb der xz -Ebene und den hierzu parallelen Ebenen (siehe Abbildung 15) die Anisotropie des Netzwerks in der Gesamtsteifigkeitsmatrix gezeigt werden. Hierfür werden die Stäbe mit zwei Knoten in diesen Ebenen über zwei Elementarwürfel hinweg verbunden (Abbildung 15 links). Dieses Knoten-Kanten-Netzwerk wird in der weiteren Arbeit als „asymmetrischer Testwürfel“ bezeichnet.

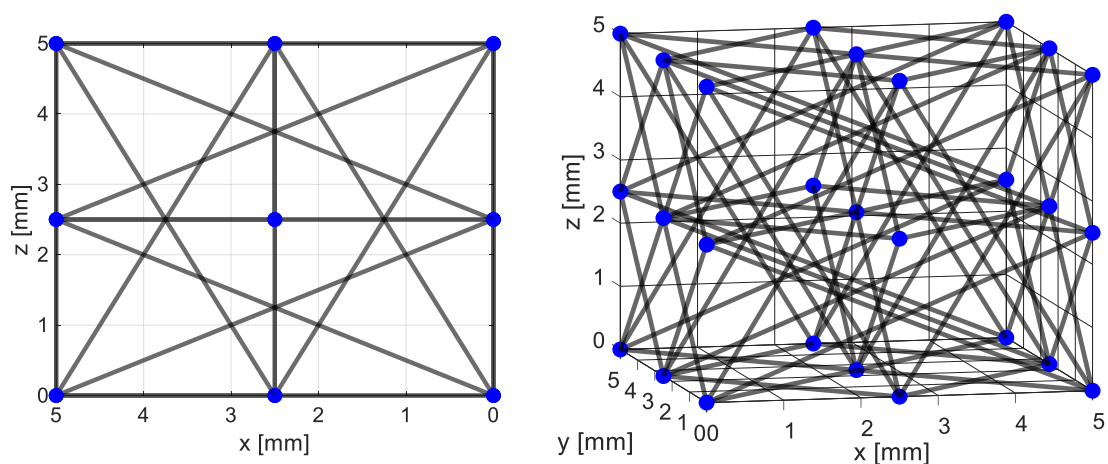


Abbildung 15: Neue Kantenanordnung in der xz -Ebene und zur xz -Ebene parallelen Ebenen. Links: xz -Ebene mit neu angeordneten Kanten. Rechts: Testwürfel komplett dargestellt. Die Anordnung der Kanten in den zur xz -Ebene orthogonalen Ebenen hat sich nicht geändert.

Wird das Knoten-Kanten-Netzwerk der zweiten Variante genauer betrachtet, kann festgestellt werden, dass sich die Kanten auf der Oberfläche der Elementarwürfel schneiden. In einem realen Knoten-Kanten-Netzwerk würde dies nicht auftreten, da an jedem Schnittpunkt ein Knoten liegen würde. Die Schnittstellen verringern daher die Gesamtknotenanzahl im Netzwerk. Da es für die FEM-Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix unerheblich ist, ob sich die Kanten schneiden, kann das Knoten-Kanten-Netzwerk dennoch uneingeschränkt nach Variante zwei aufgebaut werden.

Die Generierung des Testwürfels in Matlab liefert zwei Matrizen. Die erste Matrix beinhaltet alle Knotennummern mit den dazugehörigen x, y, z -Koordinaten. Start- und Endknotennummer, die für die Kantendefinition notwendig sind, befinden sich in der zweiten Matrix. Mit diesen Matrizen kann die Modelldefinition des Testwürfels in einem Inputdeck nach Kapitel 4.3 vorgenommen werden.

5.3 Konvention für den Aufbau der Verschiebungsvektoren

Es wird der Verschiebungsvektor des gesamten Knoten-Kanten-Netzwerks \mathbf{u}_{ges} betrachtet. Aus der Sortierung der Komponenten von \mathbf{u}_{ges} ergibt sich über die Verteilungsmatrizen die Sortierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{ges} (vgl. Gleichung 4.15). Die in der vorliegenden Arbeit gewählte Sortierung ist in Abbildung 16 (rechts) dargestellt. Jede Komponente $u_{i,\delta}$ von \mathbf{u}_{ges} besitzt die beiden Indizes i und δ . i gibt den Knoten an, zu dem die Verschiebung gehört. δ kennzeichnet den Freiheitsgrad, oder anders formuliert, die Richtung der Koordinatenachse, der die Verschiebung zuzuordnen ist.

Die Knotenverschiebungen werden im Gegensatz zu der in Schneider (2016) gewählten Sortierung nicht nach den Freiheitsgraden, sondern nach den Knotennummern sortiert. Da in Schneider (2016) nicht nur die Sortierung, sondern auch die Knotennummerierung auf eine andere Weise erfolgt, ist für die Verwendung der Verschiebungsmatrix \mathbf{U}_{MC} und den Vergleich der Elemente der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen (siehe Kapitel 6.4.5) eine Transformation der Indizierung notwendig. Diese Transformation erfolgt über die in Anhang C angegebene Permutationsmatrix \mathbf{P} . Für die in Kapitel 6.4 beschriebenen Simulationen und Vergleiche werden daher die folgenden beiden Formeln benötigt:

$$\mathbf{u}_{ges} = \mathbf{P} * \mathbf{u}_{ges,Schneider} \quad (\text{Gl. 5.3})$$

$$\mathbf{K}_{red} = \mathbf{P} * \mathbf{K}_{red,Schneider} * \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{Gl. 5.4})$$

Weder die Determinante noch die Eigenwerte der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix ändern sich durch diese Transformation. Ersteres folgt aus

$\det(\mathbf{P}) = 1$. Die zweite Aussage folgt, da \mathbf{K}_{red} zu $\mathbf{K}_{red,Schneider}$ konjugiert ist (vgl. Kimmerle und Stoppel (2013)).

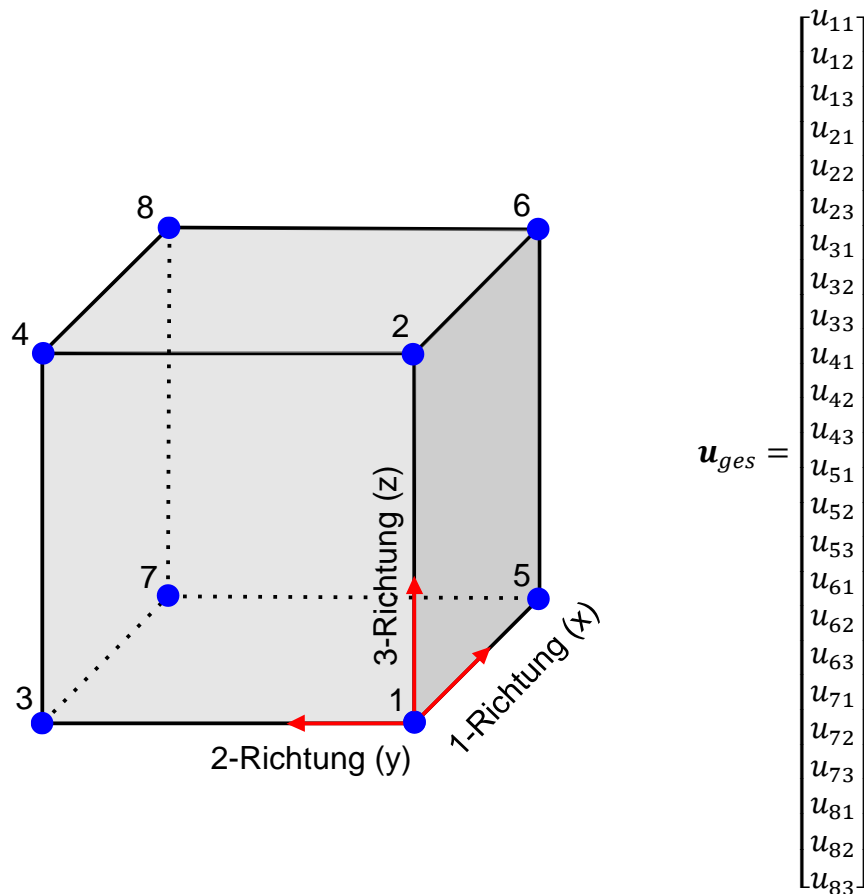


Abbildung 16: Links: Testwürfel mit acht Knoten und den Freiheitsgradrichtungen. Rechts: für diesen Testwürfel dargestellter allgemeiner Verschiebungsvektor in der für diese Arbeit erfolgten Sortierung

5.4 Zeit- und Speicherplatzkomplexität für die Generierung des Testwürfels

Nachdem die Implementierung zur Generierung der Testwürfel abgeschlossen ist, kann diese durch eine Betrachtung der Zeit- und Speicherplatzkomplexität genauer untersucht werden. Eine Extrapolation der Zeit- und Speicherplatzverläufe aufgetragen über der Gesamtknotenanzahl (repräsentiert durch k_{nodes}) ermöglicht eine Abschätzung der Dauer und des benötigten Speicherplatzes für die Erstellung eines größeren Testwürfels.

Wird der Testwürfel über einen *Run and Time*-Aufruf in Matlab generiert, so kann direkt die für die Erstellung des Testwürfels benötigte Zeit abgelesen

werden. Für die gewünschten Gesamtknotenanzahlen ergibt sich das in Abbildung 17 gezeigte Diagramm. Zusätzlich zu den für die Erstellung eines Testwürfels benötigten Zeiten sind in Abbildung 17 sowohl die Gesamtkantenanzahl k_{edges} für die unterschiedlichen Testwürfelgrößen, wie auch die Trendlinien der beiden Verläufe eingetragen. Für die Gesamtkantenanzahl k_{edges} , aufgetragen über die Gesamtknotenanzahl (im Diagramm repräsentiert durch k_{nodes} (vgl. Gl. 5.1)), ergibt sich ein Polynom 3. Grades, für die Zeitkomplexität ein Polynom 4. Grades als Trendlinie. Die kubische Trendlinie entspricht den Erwartungen nach Gleichung 5.3, da die k_{nodes} Knoten entlang jeder Achse des Koordinatensystems verteilt werden. Das Polynom 4. Grades des zeitlichen Verlaufs hat seine Ursache im Algorithmus zur Definition der Kanten. Es ergibt sich folgende Abschätzung: Betrachtet wird der Knoten im Koordinatenursprung (Knotennummer 1). Für diesen wird nun der Abstand zu jedem anderen Knoten im Würfel bestimmt und mit der Solllänge verglichen, obwohl zum Schluss lediglich drei Kanten eingezeichnet werden. Es werden daher $(k_{nodes} - 1) * k_{nodes}^3$ Iterationen für die Vergleiche benötigt. Dies entspricht in der Landau-Notation der Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(n^4)$. Für eine günstigere Zeitkomplexität wäre es daher sinnvoll lediglich die notwendigen Abstände zu den Knoten in unmittelbarer Umgebung zu untersuchen. Da die Zeit von ca. 25 min für die Erstellung des größten betrachteten Testwürfels (siehe Abbildung 17 bei $k_{nodes} = 30$) noch in einem angemessenen Rahmen liegt, wird auf die Optimierung des Algorithmus zur Kantendefinition verzichtet.

Die Speicherplatzkomplexität ist in Abbildung 18 dargestellt. Mit Hilfe einer *whos*-Abfrage kann für alle Variablen aus dem Workspace die Größe, der Variablentyp und auch der benötigte Speicherplatz in eine Matlab-Structure geladen werden. Durch anschließende Summation über alle Variablen erhält man den benötigten Speicherplatz für den gesamten Workspaceinhalt. Wie das Diagramm in Abbildung 18 zeigt, folgt der benötigte Speicherplatz einer kubischen Trendlinie. Wie bereits oben dargelegt ergibt sich für die Gesamtkantenanzahl und Gesamtknotenanzahl eine Komplexität der Klasse $\mathcal{O}(n^3)$. Folglich kann auch die Speicherplatzkomplexität lediglich der Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(n^3)$ angehören (alle weiteren in der Summation auftretenden Variablen sind ebenfalls maximal kubisch von k_{nodes} abhängig).

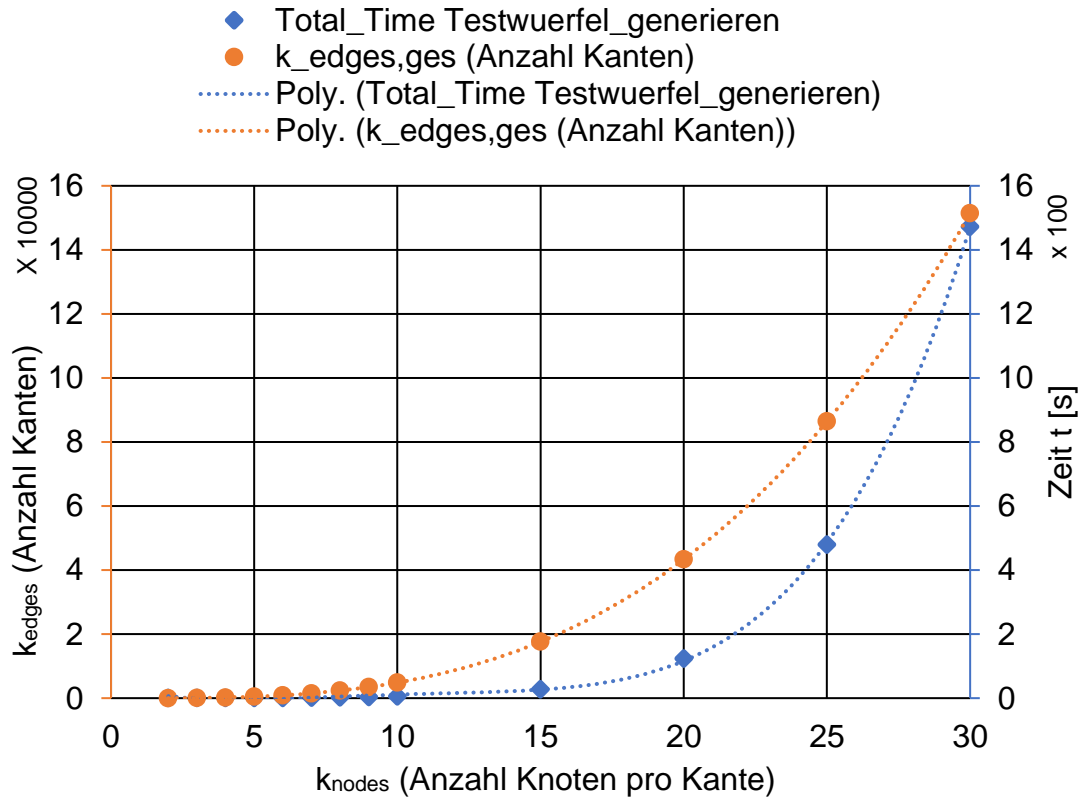


Abbildung 17: Blau (Raute): Zeitkomplexität des Testwürfels bei unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes}). Orange (Kreis): Gesamtkantenanzahl des Testwürfels aufgetragen bei unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes})

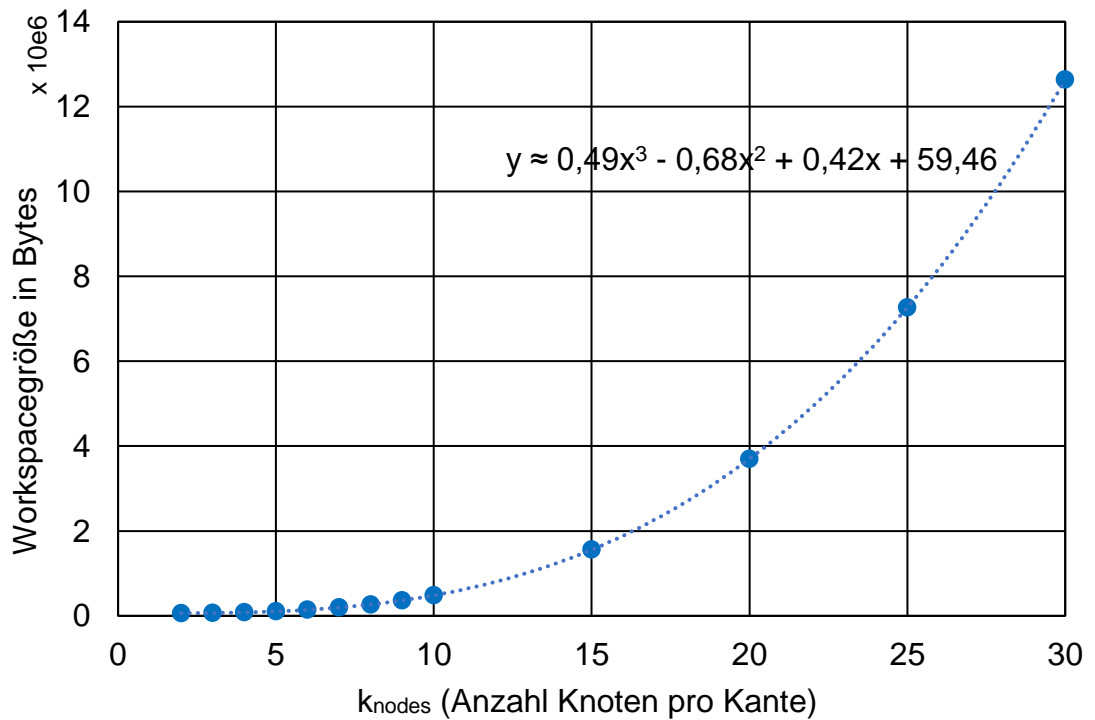


Abbildung 18: Speicherplatzkomplexität des Testwürfel bei unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl (ausgedrückt durch k_{nodes})

5.5 Absicherung des Testwürfels

Zwischen welchen Knoten sich eine Kante befinden soll wird durch einen Vergleich des Abstandes zwischen zwei Knoten mit einer vorgegebenen Solllänge entschieden. Entsprechend der Nummerierung der Knoten wird, um redundante Kanten zu vermeiden, für jeden Knoten lediglich der Abstand zu den Knoten mit höherer Knotennummer ermittelt.

Wird zur Definition der diagonalen Kanten eine konkrete Solllänge s_{soll} mit dem Abstand zweier Knoten entlang einer Würfelkante $s_{abstand_knoten}$ nach Gleichung 5.5a (Pythagoras bei gleichen Kantenlängen) vorgegeben, folgt aufgrund der Maschinengenauigkeit ein fehlerhafter Aufbau des Testwürfels ab $k_{nodes} = 7$ (ausgenommen $k_{nodes} = 9$ und 11) (vergleiche Abbildung 19).

$$s_{soll} = \sqrt{2} * s_{abstand_knoten} \quad (\text{Gl. 5.5a})$$

Um Kanten mit geringfügiger Abweichung der Länge einfügen zu können, muss die Bedingung in Gleichung 5.5a daher wie folgt angepasst werden. Aus diesem Grund muss die Bedingung in Gleichung 5.5a so modifiziert werden, dass auch Kanten mit geringfügiger Abweichung der Länge eingefügt werden. Es ergibt sich daher die Bedingung:

$$s_{soll} \in [s_{abstand_knoten} * (\sqrt{2} - \alpha); s_{abstand_knoten} * (\sqrt{2} + \alpha)] \quad (\text{Gl. 5.5b})$$

Durch α (dimensionslos) wird hierbei die Korrektur von s_{soll} beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wurde für die Testwürfel $\alpha = 0,25$ gewählt. Bei dieser Modifikation ist zu beachten, dass α nicht zu groß gewählt werden darf, da für die Diagonalen durch die Mitte eines Elementarwürfels $s_{soll} = \sqrt{3} * s_{abstand_knoten}$ gilt. Es sollen jedoch nur die Diagonalen auf der Oberfläche des Elementarwürfels berücksichtigt werden.

Das Diagramm in Abbildung 19 zeigt, wie viele Kanten von der geforderten Solllänge abweichen. Es wird ersichtlich, dass bei den Testwürfeln mit $k_{nodes} = 3, 4, 5, 6, 9$ oder 11 (Knoten pro Kante) keine Modifikation der Bedingung aus Gleichung 5.5a notwendig gewesen wäre, da hier keine Kanten von der Solllänge abweichen. Wird der Aufbau dieser Testwürfel genauer untersucht, so kann festgestellt werden, dass $s_{abstand_knoten}$ hier eine Dezimalzahl mit maximal drei Nachkommastellen ist. Bei den weiteren Testwürfeln

hingegen treten Dezimalzahlen auf, die aufgrund der Maschinengenauigkeit nicht vollständig abgebildet werden können. Aus diesem Grund weichen bei den Testwürfeln mit beispielsweise $k_{nodes} = 20, 25$ oder 30 nahezu 100% der Kanten von der Solllänge ab. Da die absolute Abweichung bei den betrachteten Testwürfeln maximale $1,05 \cdot 10^{-15} \text{mm}$ (siehe Abbildung 20) beträgt, kann diese vernachlässigt werden. Der Testwürfel nach oben beschriebenem Aufbau kann daher für die Simulationen verwendet werden.

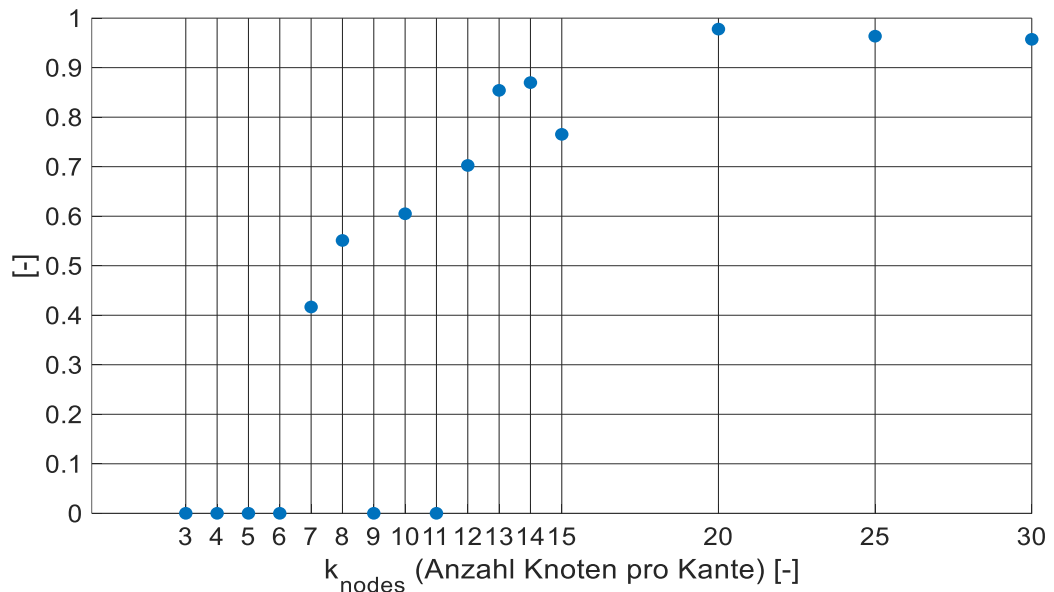


Abbildung 19: Diagramm zur Veranschaulichung der von der Solllänge abweichenden Kanten. Ordinate enthält die Anzahl abweichender Kanten bezogen auf die Gesamtkantenanzahl im Knoten-Kanten-Netzwerk.

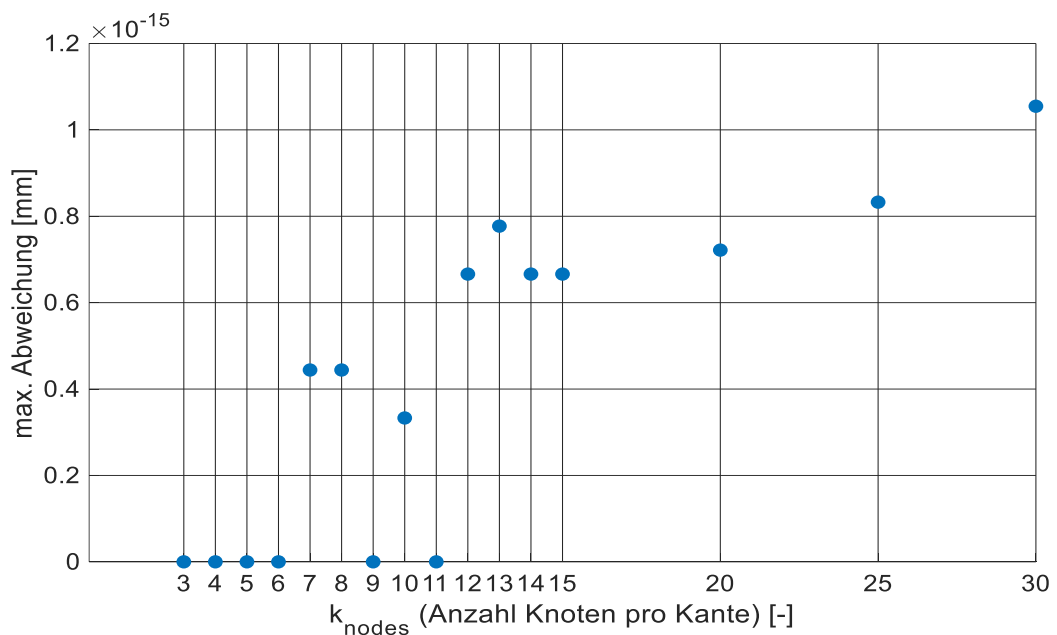


Abbildung 20: Maximale absolute Abweichung der Kanten von der Solllänge (in mm).

6. Simulationen

Kapitel 6 befasst sich mit den durchgeführten Simulationsexperimenten. Zunächst wird auf die frei gewählten Parameter eingegangen und die für den Vergleich der verschiedenen Gesamtsteifigkeitsmatrizen verwendete Norm vorgestellt. Anschließend werden die verschiedenen Vergleiche zwischen der in Matlab implementierten Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix und der mit Hilfe der FEM-Software Abaqus bestimmten Lösung beschrieben. Insbesondere wird hier auf einen Vergleich bezüglich einer Einrahmung des Knoten-Kanten-Netzwerks eingegangen. Darüber hinaus werden die für die Anwendung der Direkten Mechanik verwendeten Verschiebungsfälle und die Vergleiche, die mit der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix durchgeführt wurden, vorgestellt.

Ziel dieser Simulationsexperimente soll eine Aussage über die Anwendbarkeit der Direkten Mechanik auf ein Knoten-Kanten-Netzwerk sein.

6.1 Skalierung wesentlicher Parameter

Für die Simulationsexperimente sind einige wesentliche Parameter festzulegen. Für die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Vergleiche werden Testwürfel mit einer Kantenlänge von jeweils 5 mm verwendet. Entlang dieser Kante werden je nach Vergleich bis zu $k_{nodes} = 30$ Knoten verteilt.

Für die Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrizen wird die Querschnittsfläche aller Stäbe im Allgemeinen auf $A_y = 0,01 \text{ mm}^2$ gesetzt. Da eine lineare Abhängigkeit der Gesamtsteifigkeitsmatrix von der Querschnittsfläche zu erwarten ist (vgl. Gl. 4.15), wird auf eine Untersuchung des Einflusses der Querschnittsfläche verzichtet. Bei Vergleichen, bei denen die Querschnittsfläche variiert, wird ausdrücklich in der Beschreibung darauf hingewiesen.

Wie bereits in den Kapiteln 4 und 5 beschrieben, wird ein linear-elastisches Materialverhalten angenommen. Um sowohl die Gesamtsteifigkeitsmatrizen als auch die reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen bestimmen zu können, ist zudem die Vorgabe eines Materials mit dessen Elastizitätsmodul E und

Poissonzahl ν notwendig. Für die vorliegende Arbeit wird für alle Stäbe Stahl mit $E = 210000 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,3$ gewählt.

6.2 Die Spektralnorm

Für viele Vergleiche, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, können die Elemente der Steifigkeitsmatrizen aufgrund ihrer unterschiedlichen Dimensionen nicht einzeln verglichen werden. Daher ist es notwendig die Matrizen in einem Skalar zusammenzufassen und anschließend die Skalare zu vergleichen. Durch dieses Vorgehen wird die in der Steifigkeitsmatrix enthaltene Information um die Richtungsabhängigkeit reduziert. Da der Testwürfel symmetrisch aufgebaut ist, und daher in jeder Richtung die gleiche Steifigkeit zu erwarten ist, ist diese Informationsreduktion vertretbar (vgl. Kapitel 5.1).

In dieser Arbeit wird für die Vergleiche die Spektralnorm verwendet, da diese die maximalen Eigenwerte der Matrizen, welche auch bei der in Kapitel 5.2 beschriebenen Transformation erhalten bleiben, vergleicht. Die Spektralnorm kann über den Matlab-Befehl $norm(\mathbf{A})$ (\mathbf{A} ist eine quadratische Matrix) aufgerufen werden. Sie ist für eine reelle $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} wie folgt definiert (Bärwolff 2020):

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max_{j=1,2,\dots,n} \lambda_j(\mathbf{A}^T * \mathbf{A})} \quad (\text{Gl. 6.1})$$

λ_j sind die Eigenwerte für die Matrix $(\mathbf{A}^T * \mathbf{A})$. Für symmetrische, reelle Matrizen, wie z.B. die Gesamtsteifigkeitsmatrizen, gilt weiter (Bärwolff 2020):

$$\|\mathbf{A}\|_2 = r(\mathbf{A}) = \max_{j=1,2,\dots,n} \{|\lambda_j(\mathbf{A})|\} \quad (\text{Gl. 6.2})$$

$r(\mathbf{A})$ beschreibt hierbei den Spektralradius der Matrix \mathbf{A} , welcher sich aus dem betragsgrößten Eigenwert von \mathbf{A} ergibt. Die Abhängigkeit der Spektralnorm vom Spektralradius wird durch Gleichung 6.2 ersichtlich.

6.3 Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} bestimmt durch die Matlab-Implementierung ($K_{ges,Matlab}$) und die FEM-Software Abaqus ($K_{ges,Abaqus}$)

6.3.1 Verifikation Inputdeck

Im ersten Schritt wird unter Verwendung der in Abschnitt 4.1 vorgestellten Gleichungen die Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für den in Kapitel 5 vorgestellten Testwürfel in Matlab implementiert. Diese Implementierung dient unter anderem zur Verifikation der nach Kapitel 4.3 für die Testwürfel erstellten Inputdecks. Hierfür wird im Inputdeck zunächst in einem eigenen *STEP über das Schlüsselwort *MATRIX GENERATE, STIFFNESS die Ausgabe der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Abaqus}$ des Knoten-Kanten-Netzwerks definiert. Die Ausgabe erfolgt als eine mtx-Datei, welche die Zeilennummer, die Spaltennummer und den Matrixeintrag für die Gesamtsteifigkeitsmatrix enthält. Diese Datei kann in Matlab eingelesen und daraus anschließend die Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Abaqus}$ erstellt werden.

Verifiziert wird das Inputdeck durch den Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Abaqus}$, bestimmt durch die Abaqus Simulation, mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$, die mit Hilfe der Matlab-Implementierung berechnet wird. Als Vergleichskriterium wird die betragsmäßig größte Differenz der Einträge beider Steifigkeitsmatrizen herangezogen.

Aufgrund des begrenzten Arbeitsspeichers werden die Gesamtsteifigkeitsmatrizen auf beide Weisen lediglich bis zum Testwürfel 10×5 ($k_{nodes} = 10$, also 1000 Knoten \rightarrow 3000x3000-Gesamtsteifigkeitsmatrix) bestimmt und verglichen.

6.3.2 Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix eines symmetrischen und eines asymmetrischen Testwürfels

Um zu zeigen, dass die Anisotropie des Testwürfels in der Gesamtsteifigkeitsmatrix sichtbar ist, werden die Gesamtsteifigkeitsmatrizen der Testwürfel aus Abbildung 14 (rechts) und Abbildung 15 elementweise verglichen. Im

Gegensatz zu dem in Abschnitt 6.3.1 erläuterten Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrizen, bestimmt durch die Matlab-Implementierung und durch Abaqus, wird für diesen Vergleich lediglich die in Matlab implementierte Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix verwendet.

Der Vergleich erfolgt ausschließlich mit einem Testwürfel mit $k_{nodes} = 3$ Knoten, da für diese Testwürfelgröße die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine überschaubare Größe aufweist.

Der elementweise Vergleich liefert eine binäre 81×81 -Vergleichsmatrix. Wird beispielsweise das Element in Zeile i und Spalte j der Vergleichsmatrix betrachtet, so ist dieses gleich eins, falls die auf fünf Nachkommastellen gerundeten Elemente an den gleichen Stellen in den Gesamtsteifigkeitsmatrizen identisch sind. Andernfalls wird das Element null gesetzt. Von Interesse ist die Suche nach einem Muster in der Vergleichsmatrix, das sich durch die ungleichen Elemente der Gesamtsteifigkeitsmatrizen ergeben könnte.

6.3.3 Einrahmung des Knoten-Kanten-Netzwerks

Die Eckknoten der Einrahmung sollen sich auch bei zufälligen Knoten-Kanten-Netzwerken immer an der gleichen Position befinden. Hierdurch soll der für die Anwendung der Direkten Mechanik notwendige Verschiebungsansatz leichter aufgebracht werden können. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Testwürfeln fallen die Eckknoten der Einrahmung mit den Eckknoten der Testwürfel selbst zusammen.

Insgesamt sollen drei Varianten verglichen werden. Die Einrahmung der ersten Variante beinhaltet durchgezogene Kanten zwischen den acht Eckknoten des Würfels. Solche durchgezogenen Kanten sind beispielsweise in Abschnitt 5.1 in Abbildung 13 (rote Kanten) dargestellt. Die zweite Variante betrachtet ebenfalls Kanten zwischen den Eckknoten. Diese werden hier allerdings zwischen den k_{nodes} Knoten aufgeteilt. Als Referenz zu diesen beiden Varianten wird als dritte Variante der Testwürfel ohne die Einrahmung betrachtet.

6.4 Anwendung der Direkten Mechanik zur Bestimmung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix

Während in Kapitel 6.3 auf die Vergleiche, die mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} der Testwürfel durchgeführt wurden, eingegangen wird, sollen in den folgenden Abschnitten die Vergleiche mit der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} aus der Anwendung der Direkten Mechanik behandelt werden. Für die Berechnung von K_{red} wird die in Kapitel 4.2 hergeleitete Gleichung 4.26 verwendet.

6.4.1 Der Verschiebungsansatz (Constraints)

Wie in Kapitel 4.2 vorgestellt, muss für die n_{out} auf der Oberfläche des betrachteten Volumens M_i liegenden Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks mit Hilfe der n_{Mc} Knoten von M_i ein Verschiebungsansatz definiert werden. Für die vorliegende Arbeit wird ein würfelförmiges Volumen M_i mit $n_{Mc} = 8$ Knoten angenommen, welches das Knoten-Kanten-Netzwerk des Testwürfels umschließt.

Der Verschiebungsansatz wird in dieser Arbeit durch sogenannte *Constraints* im Inputdeck für die Simulation mit Abaqus festgelegt. Für deren Definition sind zunächst $n_{Mc} = 8$ Referenzknoten im Inputdeck festzulegen. Diese Referenzknoten liegen in den Ecken des betrachteten Würfelvolumens M_i . Sie fallen folglich mit den Eckknoten der Testwürfel zusammen, werden jedoch als eigenständige Knoten definiert und sind nicht direkt mit den Kanten des Knoten-Kanten-Netzwerks verbunden. Diese acht Referenzknoten werden im Inputdeck im Abschnitt der Knotendefinition zu Beginn definiert (siehe Anhang B). Sie erhalten entsprechend Abbildung 16 die Knotennummerierung von eins bis acht. Die Nummerierung der n_{ges} Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks beginnt daher ab diesem Abschnitt nicht mehr bei eins, sondern bei neun. Mit Hilfe der Referenzknoten können die sechs Oberflächen des Würfelvolumens (Masteroberflächen) im Inputdeck definiert werden (Stichwort: *SURFACE). Ein Referenzknoten ist hierbei an der Definition von drei Oberflächen beteiligt bzw. vier Referenzknoten definieren eine Oberfläche.

Im nächsten Schritt müssen nun mit den Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks, die in einer Masteroberfläche liegen, ebenfalls Oberflächen (Worker-oberflächen) definiert werden. Im Anschluss kann die Bewegung der Worker-oberflächen von der Masteroberflächen durch die *Constraints* abhängig gemacht werden (Stichwort: *TIE) (siehe Anhang B) (Mesh tie constraints 2016). Fällt ein Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks mit einem Referenzknoten zusammen (wie im Falle der Testwürfel), so wird dieser wie der Referenzknoten bewegt. Liegt ein Knoten hingegen auf der kürzesten Strecke zwischen zwei Referenzknoten (Eckkante des Würfelvolumens M_i) bzw. innerhalb der Oberfläche, so nehmen beide bzw. alle vier Referenzknoten auf ihn Einfluss. Die Verschiebung eines Referenzknotens wird dabei linear, entsprechend dem Abstand zum betrachteten Knoten, auf diesen umgerechnet. Die Gesamtverschiebung des betrachteten Knotens ergibt sich anschließend aus der Summation dieser umgerechneten Verschiebungen.

Die *Constraints* ermöglichen daher die Beschreibung der Knotenverschiebungen der n_{out} Knoten durch die Verschiebungen der acht Referenzknoten und hierdurch auch die Anwendung der Direkten Mechanik.

6.4.2 Die Verschiebungsmatrix

Nachdem der Verschiebungsansatz definiert ist, ist für die simulative Bestimmung der Lastmatrix F_{Mc} (siehe Gleichung 4.26) die Vorgabe der Verschiebungsmatrix U_{Mc} notwendig. Aus den in Kapitel 4.2 vorgestellten Gleichungen ergibt sich, dass $3 * n_{Mc}$ Verschiebungsfälle gewählt werden müssen. Für unsere gewählten acht Referenzknoten ergibt dies 24 benötigte Verschiebungsfälle.

Da U_{Mc} invertierbar sein muss, müssen die Verschiebungsfälle linear unabhängig sein. Da in Schneider (2016) bereits eine invertierbare Verschiebungsmatrix U_{Mc} gegeben ist, wird diese für die Bestimmung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen übernommen. Lediglich die Knotennummerierung und Sortierung der Freiheitsgrade wird entsprechend Gleichung 5.3 auf die Konvention in dieser Arbeit angepasst.

Jeder Verschiebungsfall (im Inputdeck als LF_1 bis LF_24 bezeichnet) entspricht einer Spalte in \mathbf{U}_{Mc} und wird durch einen eigenen *STEP im Inputdeck der Testwürfel berücksichtigt (vgl. Anhang B). Mit Hilfe einer Simulation werden für jeden Verschiebungsfall die an den Referenzknoten angreifenden Reaktionskräfte ermittelt. Durch entsprechende Sortierung dieser, kann die Lastmatrix \mathbf{F}_{Mc} bestimmt werden. Mit beiden Matrizen kann anschließend die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix nach Gleichung 4.26 berechnet werden. Die vollständige Verschiebungsmatrix und die einzelnen Verschiebungsfälle sind in Anhang D illustriert.

6.4.3 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen eines symmetrischen und eines asymmetrischen Testwürfels

Um zu zeigen, dass die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix in der Lage ist die Anisotropie eines asymmetrischen Knoten-Kanten-Netzwerks abzubilden, wird ein Vergleich analog zu dem in Abschnitt 6.3.2 durchgeführt. Unter Verwendung der simulativ bestimmten Lastmatrizen \mathbf{F}_{Mc} wird jeweils für den symmetrischen und den asymmetrischen Testwürfel die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnet. Diese werden im Anschluss elementweise verglichen. Wie in Abschnitt 6.3.2 ist auch hier das Ziel ein mögliches Muster in den ungleichen Elementen der Matrizen zu finden.

6.4.4 Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der aus der Anwendung der Direkten Mechanik berechneten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix

Um eine Abschätzung über das Verhalten der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} aus der Anwendung der Direkten Mechanik gegenüber der in Matlab implementierten Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{ges} zu erhalten, werden die Spektralnomen (vgl. Abschnitt 6.2) der Steifigkeitsmatrizen der entsprechenden Testwürfel verglichen. Darüber hinaus soll die Abweichung dieser Normen untersucht werden.

Anzumerken ist, dass für den Testwürfel 2×5 die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht berechnet wird, da dieser Testwürfel lediglich acht Knoten besitzt, die wiederum alle mit den Referenzknoten zusammenfallen. Aus diesem Grund wird für diesen trivialen Testwürfel kein Vergleich angestrebt.

Ziel dieses Vergleichs soll eine Aussage über eine mögliche Abweichung der durch die Direkte Mechanik bestimmten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} gegenüber der Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} sein.

6.4.5 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der Steifigkeitsmatrix eines klassischen Hexe-8 Elements

Durch einen weiteren Vergleich wird die Vermutung, dass sich bei gleichbleibender Querschnittsfläche die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix mit zunehmender Kantenanzahl der Steifigkeitsmatrix eines klassischen Hexe-8 Elements annähert, untersucht.

Ein klassisches Hexe-8 Element ist ein würfelförmiges Volumenelement mit acht Knoten, das in Schneider (2016) zur Diskretisierung der Trabekel verwendet wird. Die Steifigkeitsmatrix für das Hexe-8 Element wird Schneider (2016) entnommen und die Kantenlänge des Würfels, das Elastizitätsmodul E sowie die Poissonzahl ν gleich den für die Testwürfel verwendeten Parametern gesetzt. Da für die Vergleiche die Differenz beider Matrizen berechnet wird, muss in diesem Zusammenhang auf die Knotennummerierung und Sortierung der Freiheitsgrade geachtet werden. Es wird daher die Knotennummerierung und Sortierung der Freiheitsgrade der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix mit Gleichung 5.4 transformiert. Anschließend wird die Spektralnorm der Differenzmatrix gebildet.

Dieser Vergleich wird für Testwürfel mit unterschiedlichen Gesamtknotenanzahlen, aber konstanter Querschnittsfläche durchgeführt.

6.4.6 Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bei Knoten-Kanten-Netzwerken, die das Volumen M_i nicht vollständig ausfüllen

In einer letzten Untersuchung wird der Testwürfel zusätzlich in einen Testquader abgeändert. Die Gesamtknotenanzahl, die Knotennummerierung und die Kantenverteilung bleiben bestehen. Für den Testquader können jedoch in jeder Richtung unterschiedliche Kantenlängen vorgegeben werden. Wird hier für jede Richtung die Kantenlänge 5 mm gewählt, ergibt sich der in den vorherigen Abschnitten verwendete Testwürfel. Die Platzierungen der Referenzknoten bleiben ebenfalls unverändert.

Durch diese Kombination wird ein Knoten-Kanten-Netzwerk im betrachteten würfelförmigen Volumen M_i generiert, welches nicht auf jeder Oberfläche von M_i Knoten besitzt.

Hintergrund dieser Untersuchung ist, dass bei der Aufteilung des runden Femurkopfs in würfelförmige Subvolumina, Subvolumina am Rand nicht vollständig ausgefüllt sein werden. Die Untersuchung soll daher zeigen inwiefern ein Knoten-Kanten-Netzwerk in der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix erfasst wird, falls nicht alle, oder sogar keine Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks auf der Oberfläche von M_i liegen.

7. Ergebnisse

Nachfolgend werden die Ergebnisse zu den in Kapitel 6 vorgestellten Vergleichen zwischen den verschiedenen Gesamtsteifigkeitsmatrizen dargestellt und erläutert.

7.1 Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{ges} bestimmt durch die Matlab-Implementierung ($K_{ges,Matlab}$) und die FEM-Software Abaqus ($K_{ges,Abaqus}$)

7.1.1 Verifikation Inputdeck

Wie Abbildung 21 zeigt, sind die Abweichungen der Elemente der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$ von der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Abaqus}$ für die betrachteten Testwürfel nicht größer als ca. $6,7 * 10^{-3} \frac{N}{mm}$ (Abweichung bei Testwürfel mit $k_{nodes} = 10$). Zur besseren Veranschaulichung kann die maximale prozentuale Abweichung berechnet werden (siehe Abbildung 21). Hierfür wird die betragsmäßig größte Abweichung der Elemente auf das betragsmäßig kleinste Element aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$, das zudem ungleich null ist, bezogen. Beispielsweise berechnet sich für den Testwürfel mit $k_{nodes} = 10$ Knoten entlang einer Würfelkante die prozentuale Abweichung $p_{Abweichung}$ mit dem betragsmäßig kleinsten Element, das zudem ungleich null ist ($K_{ges,Matlab}(min) \approx 1336,43 \frac{N}{mm}$) und der obigen maximalen Abweichung zu $p_{Abweichung} \approx 0,0005 \%$.

Nach Abbildung 21 beträgt die größte prozentuale Abweichung der betrachteten Testwürfel $p_{Abweichung} \approx 0,0006 \%$. Folglich kann daraus geschlossen werden, dass der Aufbau des Inputdecks gelungen ist und die Steifigkeitsmatrizen richtig berechnet werden. Diese Schlussfolgerung kann auch invertiert werden: Die in Matlab implementierte Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrizen liefert das gleiche Ergebnis wie die FEM-Software Abaqus.

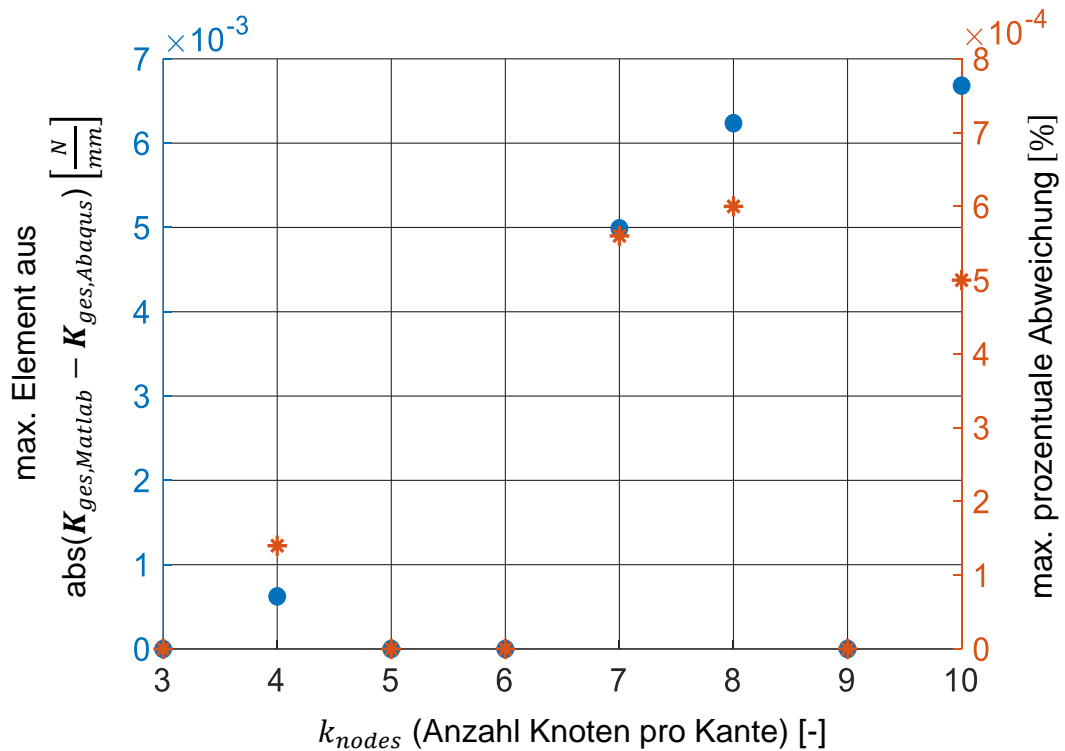


Abbildung 21: Blau: Betragsmäßig größte Abweichung der Elemente in der Differenzmatrix von $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ und $\mathbf{K}_{ges,Abaqus}$ für verschiedene Gesamtknotenanzahlen (repräsentiert durch k_{nodes})
 Orange: Betragsmäßig größte Abweichung bezogen auf betragsmäßig kleinstes, von null verschiedenes Element der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$

7.1.2 Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix eines symmetrischen und eines asymmetrischer Testwürfels

Werden die Gesamtsteifigkeitsmatrizen der Testwürfel mit symmetrisch und asymmetrisch aufgebauten Knoten-Kanten-Netzwerken wie in Abschnitt 6.3.2 beschrieben miteinander verglichen, ergibt sich eine binäre Vergleichsmatrix. Ein Ausschnitt dieser ist in Abbildung 22 dargestellt. Erkennbar ist, dass die Einträge vermehrt übereinstimmen. Dies lässt sich auf den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrizen als dünnbesetzte Matrizen zurückführen. In beiden Matrizen sind viele Elemente null und stimmen daher im Vergleich überein. Unter Zuhilfenahme des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_{ges} kann ein Muster in den ungleichen Elementen der Gesamtsteifigkeitsmatrizen erkannt werden. Betrachtet man die Multiplikation der Vergleichsmatrix mit dem

Verschiebungsvektor, so kann festgestellt werden, dass sich lediglich Einträge unterscheiden, die mit Verschiebungen in Freiheitsgradrichtung eins oder drei multipliziert werden. Dieses Muster lässt sich direkt auf den Aufbau der Testwürfel zurückführen, da lediglich in Freiheitsgradrichtung zwei (orthogonal zur xz-Ebene; vgl. Abbildung 15) die Kanten in beiden Testwürfeln die gleiche Anordnung aufweisen. Wie dieser Vergleich zeigt, spiegelt sich die Richtungsabhängigkeit des Knoten-Kanten-Netzwerks direkt in der Gesamtsteifigkeitsmatrix wider.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \dots \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \vdots & & & \ddots & & \\
 \vdots & & & & & & \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \vdots & & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{11} \\
 u_{12} \\
 u_{13} \\
 u_{21} \\
 u_{22} \\
 u_{23} \\
 u_{31} \\
 u_{32} \\
 u_{33} \\
 u_{41} \\
 u_{42} \\
 u_{43} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}$$

Abbildung 22: Links: Die ersten zwölf Zeilen und Spalten aus der Vergleichsmatrix des elementweisen Vergleichs der Gesamtsteifigkeitsmatrizen des symmetrischen und asymmetrischen Testwürfels.
Rechts: Der Verschiebungsvektor \mathbf{u}_{ges} mit den ersten zwölf Elementen

7.1.3 Einrahmung des Testwürfels

Die Einrahmung des Testwürfels soll ein Grundvolumen schaffen, in das ein zufälliges Knoten-Kanten-Netzwerk eingebettet werden kann. Die Eckknoten des Grundvolumens sollen sich dabei immer an der selben Position befinden. Wie Abbildung 23 zeigt, ergeben sich bei der Verwendung eines Rahmens zwei Grundprobleme. Problem eins (siehe Abbildung 23 links): Die durchgezogenen Eckkanten verschieben sich bei einer Scherbelastung, falls kein Verschiebungsansatz (vgl. Abschnitt 6.4.1) aufgebracht wird, über die

Kanten des Knoten-Kanten-Netzwerks. Hierdurch verliert das Modell seine physikalische Bedeutung, da solch eine Verschiebung in der Realität nicht stattfinden kann. Problem zwei (siehe Abbildung 23 rechts): Bereits bei dem kleinsten verwendeten Testwürfel, Testwürfel 2×5 , treten durch die zusätzlich eingefügten Kanten Spannungsüberhöhungen auf. Diese Spannungsüberhöhungen treten sowohl bei durchgezogenen, als auch bei geteilten Eckkanten auf. Wie schon bei Problem eins folgt auch bei Problem zwei der Verlust der Aussagekraft über das eigentliche Knoten-Kanten-Netzwerk.

Aus diesen Ergebnissen kann gefolgert werden, dass keine weiteren Kanten

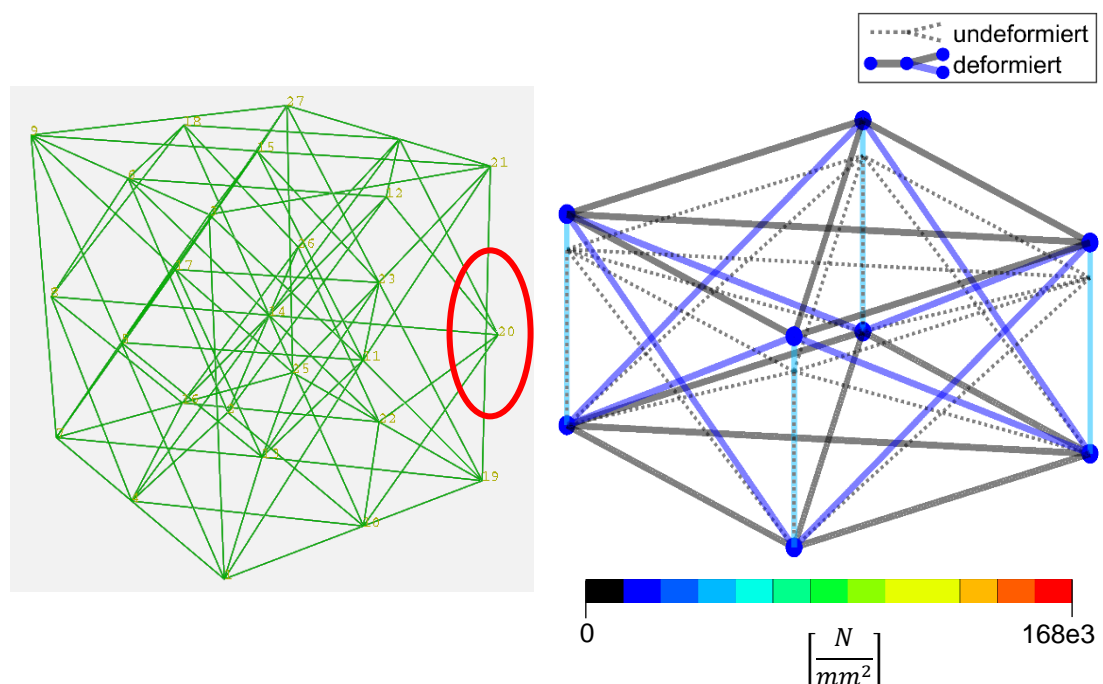


Abbildung 23: Links: Scherung eines Testwürfels mit durchgezogenen Eckkanten. Die rot markierte Stelle zeigt beispielhaft eine über den Knoten hinweggeschobene Eckkante. Rechts: Deformierter Testwürfel unter Verschiebungsfall drei. Erkennbar ist, dass die zusätzlich eingefügten durchgängigen Eckkanten eine höhere Spannung aufweisen als die übrigen Spannungen (hellerer Blau ton).

in das Knoten-Kanten-Netzwerk eingefügt werden dürfen. Das Würfelvolumen, das das Knoten-Kanten-Netzwerk umgeben soll, darf folglich nur Eckknoten (die Referenzknoten) aufweisen, da diese nicht zur Gesamtsteifigkeit des Knoten-Kantennetzwerks beitragen.

7.2 Anwendung der Direkten Mechanik zur Bestimmung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red}

Im Gegensatz zu Kapitel 7.1, das sich vermehrt mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$ befasst, werden in Kapitel 7.2 die Ergebnisse der Vergleiche mit der aus der Anwendung der Direkten Mechanik resultierenden Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} thematisiert.

7.2.1 Der Verschiebungsansatz (Constraints)

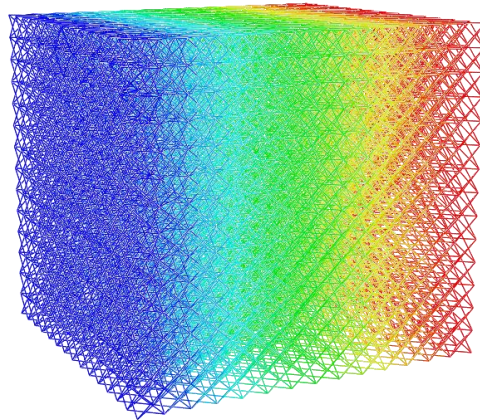
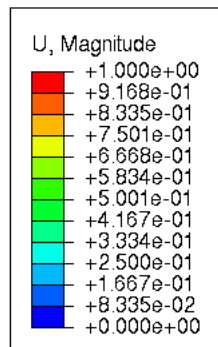
Wie in Abschnitt 6.4.1 beschrieben, wird der Verschiebungsansatz durch die Definition von Constraints ermöglicht. Die Definition der Constraints erfolgt über das Schlüsselwort *TIE und jeweils einem Namen für die Constraints.

Wird die Simulation mit obiger Definition ausgeführt, bricht diese allerdings für Testwürfel mit $k_{nodes} = 9$ oder mehr Knoten mit der Fehlermeldung „[some] elements have small or zero length“ ab. Wird das Knoten-Kanten-Netzwerk betrachtet (siehe Abbildung 24 c), kann festgestellt werden, dass die Kanten zwischen den Referenzknoten falsch verbunden werden (rot markierter Bereich). Dieser Simulationsabbruch folgt aus der Default-Definition "*adjust = yes*", die Abaqus automatisch bei der Definition der Constraints durch das Schlüsselwort *TIE durchführt. *adjust* ist eine Erweiterung des Schlüsselworts *TIE, die ermöglicht die Knoten der Workeroberfläche „ohne Belastung in ihrer Ausgangskonfiguration auszurichten“ (Mesh tie constraints 2016)⁷. Dies wird aber nicht für Workeroberflächen, die zu einer Substruktur gehören, verwendet (Mesh tie constraints 2016). Da die Workeroberflächen der Testwürfel zu einer Substruktur gehören, muss "*adjust = no*" gesetzt werden. Die Simulation beendet ihre Berechnungen mit dieser Änderung des Inputdecks ohne weitere Zwischenfälle. Abbildung 24 b zeigt, dass an den gleichen Stellen, die bei der Verwendung von "*adjust = yes*" zum Abbruch der Simulation geführt haben, Spannungsüberhöhungen auftreten. Solche Spannungsüberhöhungen treten

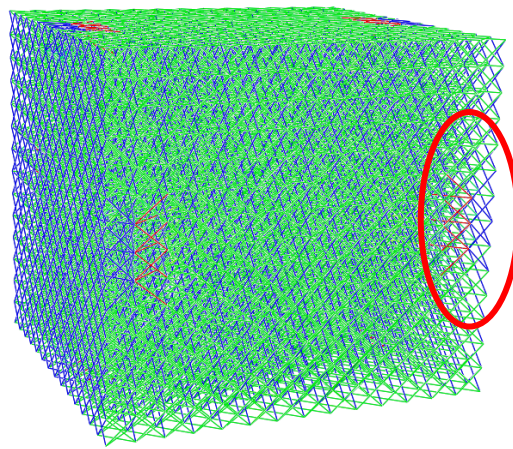
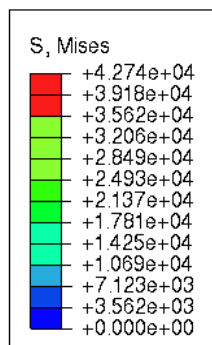
⁷ Eigene Übersetzung aus dem Englischen

bei der Verwendung von "*adjust = no*" z.B. auch bei Testwürfel 8x5 auf, bei dem die Simulation zuvor nicht abgebrochen ist (siehe Anhang E).

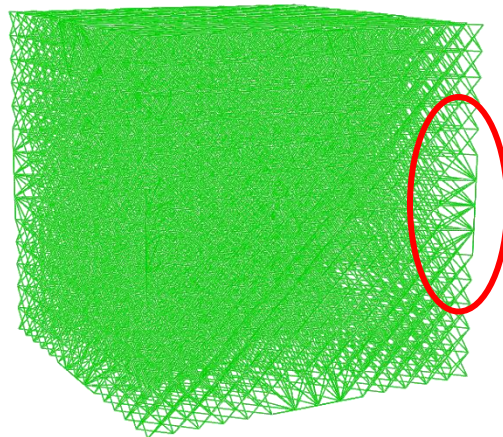
Diese Spannungsüberhöhungen bleiben bei den folgenden Simulationen erhalten unter der Annahme, dass dieses Verhalten zu einer Erhöhung der reduzierten Gesamtsteifigkeit führt, die in einem späteren Postprocessing eliminiert werden kann.



a.



b.



c.

Abbildung 24: Verschiebungsfall eins für Testwürfel 15x5.

- a.: Zeigt die Verschiebung der Knoten und Kanten über den gesamten Testwürfel hinweg. Diese Verschiebung ist für „adjust=yes“ und „adjust=no“ gleich.
- b.: Zeigt die Spannungen innerhalb der Stäbe bei Verwendung von „adjust=no“. Rote Markierung zeigt eine der Stellen, an der eine Spannungsüberhöhung eintritt.
- c.: Rote Markierung zeigt falsche Kantenanordnung bei Verwendung von „adjust=yes“.

7.2.2 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen eines symmetrischen und asymmetrischen Testwürfels

Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 7.1.2 vorgestellten Ergebnis des analogen Vergleichs für die Gesamtsteifigkeitsmatrizen $K_{ges,Matlab}$ und $K_{ges,Abaqus}$, kann beim Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen keine Vergleichsmatrix angewendet werden, da fast alle Elemente voneinander abweichen (Vergleichsmatrix besteht aus Nullen). Die Elemente gleichen Werts haben in beiden Steifigkeitsmatrizen den Wert Null. Im Vergleich zu dem Ergebnis aus Abschnitt 7.1.2 besteht die Vermutung, dass anhand der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen keine Richtung gleicher Steifigkeit ausgemacht werden kann.

Um dies zu überprüfen wird die Differenzmatrix $D = K_{red,symmetrisch} - K_{red,asymmetrisch}$ gebildet (dargestellt in Anhang F). In dieser Differenzmatrix D ist erkennbar, dass die Elemente in den Spalten von D , die mit einer Verschiebung in Freiheitsgradrichtung zwei multipliziert werden, vermehrt betragsmäßig kleinere Werte beinhalten. Die Richtung des Freiheitsgrads zwei stellt dabei die Richtung dar, in der die Anordnung der Kanten bei beiden Testwürfeln auf die gleiche Weise erfolgt. Aufgrund der Symmetrie der reduzierten Steifigkeitsmatrizen treten diese geringeren Abweichungen aber teilweise auch in den weiteren Spalten auf.

Zusammengefasst lässt sich demnach eine Richtung erkennen, in der für eine gleiche Verschiebung ungefähr die gleiche Kraft benötigt wird.

Berechnet man beispielhaft für Verschiebungsfall zwei mit beiden reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen den Lastvektor, so ergibt sich das gleiche Ergebnis (Betrag der maximalen Abweichung der Komponenten für diesen Verschiebungsfall: $0,22 * 10^{-12} N$).

Es zeigt sich, dass sich die Anisotropie in den reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen erkennbar abbildet. Zur Verifikation ist hier allerdings ein Test mit Verschiebungen in der gefundenen Richtung notwendig.

7.2.3 Vergleich der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der aus der Anwendung der Direkten Mechanik berechneten reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix

Das in Abbildung 25 gezeigte Diagramm enthält die Spektralnorm der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} von Testwürfeln mit unterschiedlicher Gesamtknotenanzahl, berechnet mit Hilfe der Direkten Mechanik. Zusätzlich ist die Spektralnorm der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$, berechnet mit der Matlab-Implementierung, der Testwürfel bis einschließlich $k_{nodes} = 10$ Knoten entlang einer Würfelkante dargestellt.

Der Vergleich der Spektralnomen zeigt eine, mit zunehmender Gesamtknotenanzahl, ansteigende Abweichung, wobei die Spektralnorm von \mathbf{K}_{red} stets über der von $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ zu liegen scheint. Zur Untersuchung dieser Abweichung wird der Quotient $\frac{\|\mathbf{K}_{red}\|_2}{\|\mathbf{K}_{ges,Matlab}\|_2}$ gebildet (siehe Abbildung 26). Dieser Quotient folgt näherungsweise einer Geraden. Der Zusammenhang der Spektralnomen kann daher wie folgt formuliert werden:

$$\|\mathbf{K}_{red}\|_2 = p(k_{nodes}) * \|\mathbf{K}_{ges,Matlab}\|_2 \quad (\text{Gl. 7.1})$$

$p(k_{nodes})$ ist hierbei ein Polynom ersten Grades, welches von der Gesamtknotenanzahl des Knoten-Kanten-Netzwerks abhängt. Mit Hilfe von Gleichung 7.1 kann aus den Spektralnomen von \mathbf{K}_{red} und der Auswertung von $p(k_{nodes})$ an den entsprechenden Stellen, die Spektralnorm für $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ berechnet werden (siehe Abbildung 25 gelbe Punkte). Für diese Bestimmung hatte zuvor der Arbeitsspeicher (8GB) nicht mehr ausgereicht.

Über die Funktion *polyfit* können in Matlab für beide Verläufe die Trendlinien eingezeichnet werden (siehe Abbildung 25). Als gefundene Approximation ergeben sich für beide Verläufe Polynome dritten Grades, jedoch mit unterschiedlichen Koeffizienten. Die kubischen Trendlinien sind auf den in Kapitel 5 beschriebenen Aufbau des Testwürfels zurückzuführen, da die Gesamtknoten- und Gesamtkantenanzahl ebenfalls kubisch mit zunehmendem k_{nodes} steigen.

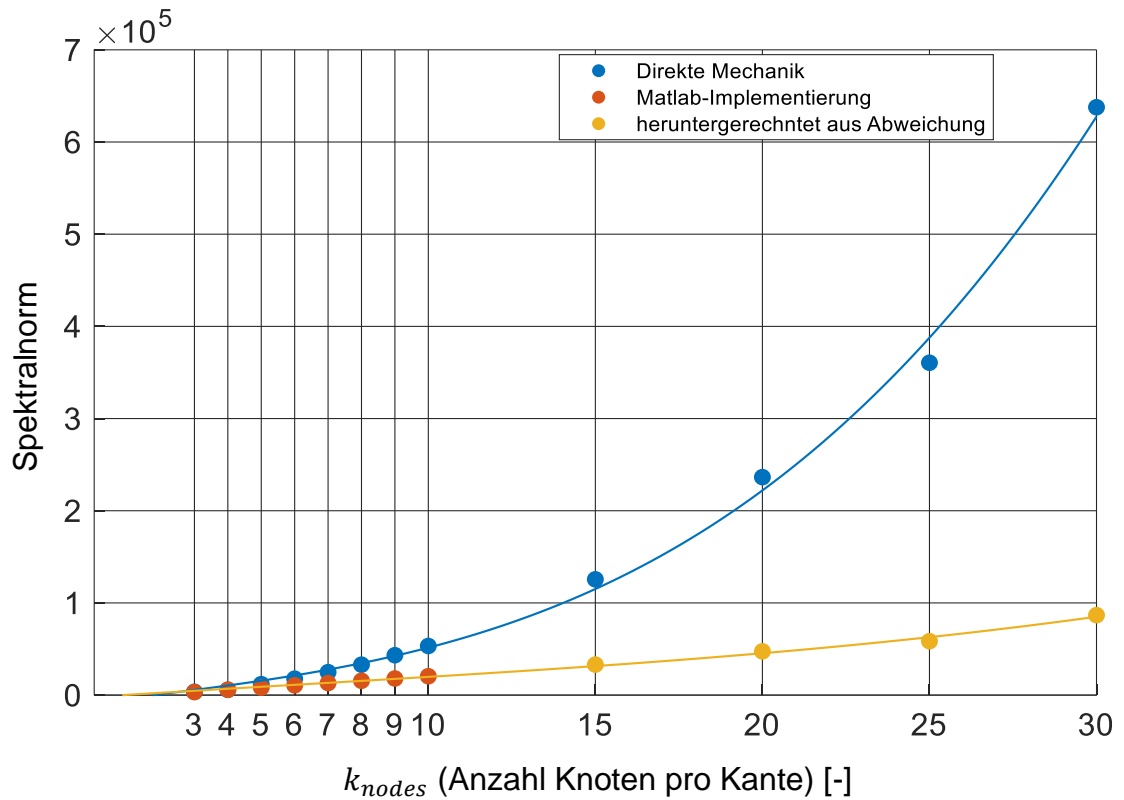


Abbildung 25: Verläufe der Spektralnormen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrizen K_{red} (blau) und der Gesamtsteifigkeitsmatrizen $K_{ges,Matlab}$ berechnet mit der Matlab-Implementierung (orange). Zudem sind die Trendlinien beider Verläufe eingezeichnet.

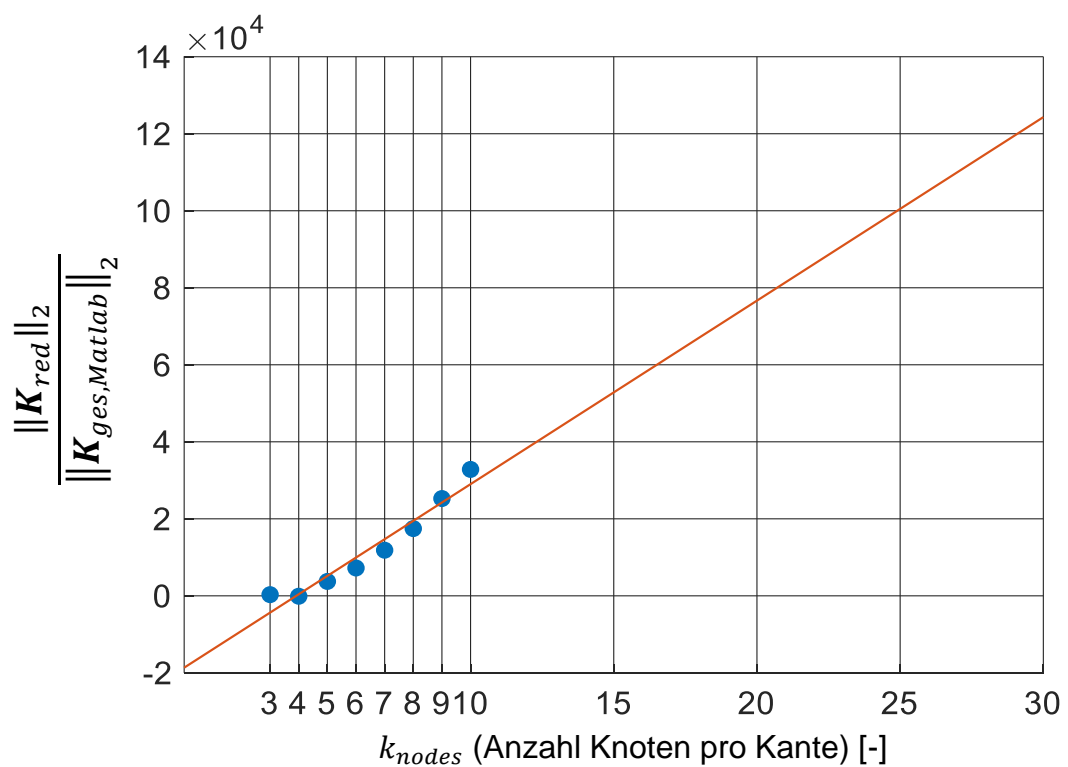


Abbildung 26: Der näherungsweise lineare Zusammenhang der Spektralnormen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$

7.2.4 Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der Steifigkeitsmatrix eines klassischen Hexe-8 Elements

Betrachtet wird die Spektralnorm der Differenzmatrix von \mathbf{K}_{red} und \mathbf{K}_{Hexe-8} . Der Verlauf dieser Spektralnorm für Testwürfel mit unterschiedlichen Gesamtknotenanzahlen ($k_{nodes,ges} = k_{nodes}^3$) ist in Abbildung 27 dargestellt. Die in Kapitel 6.4.5 vorgestellte Vermutung, dass diese Spektralnorm für eine zunehmende Gesamtknotenanzahl gegen Null konvergiert, scheint nach Abbildung 27 nicht zuzutreffen. Während die Spektralnorm für Testwürfel bis $k_{nodes} = 10$ wie erwartet fällt, nimmt sie anschließend sprunghaft zu.

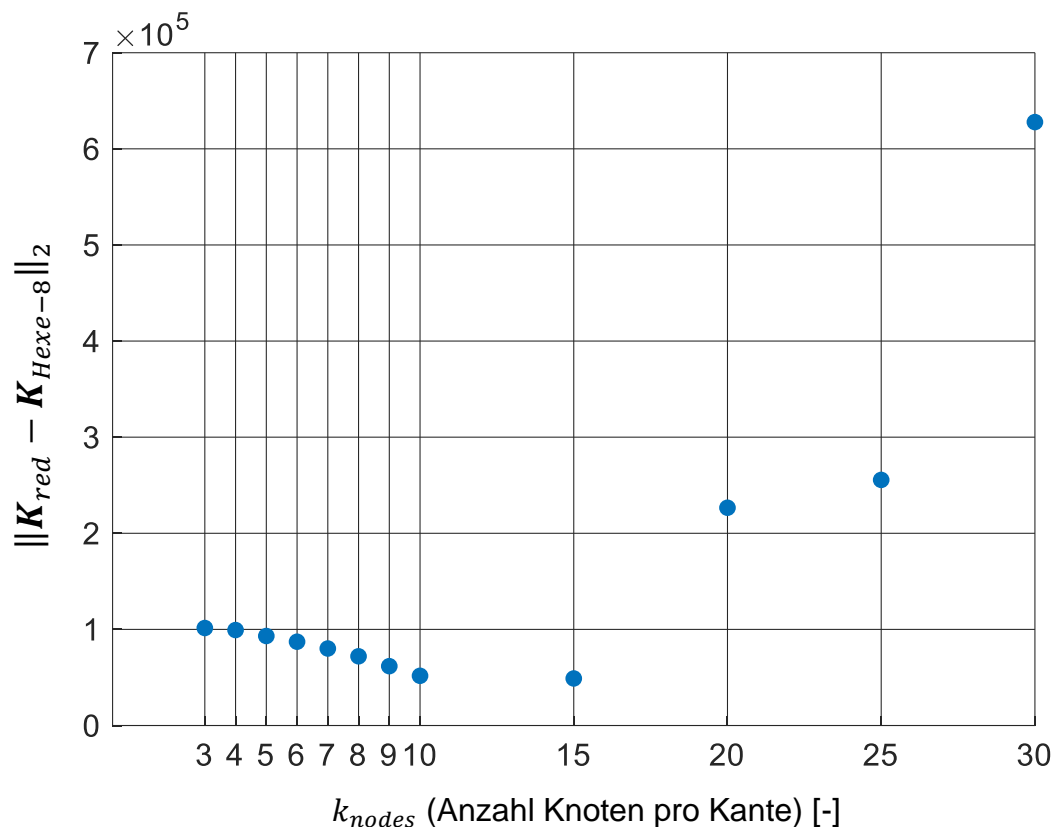


Abbildung 27: Spektralnorm der Differenzmatrix der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{Hexe-8} eines Hexe-8 Elements (Querschnittsfläche $A = 0,01 \text{ mm}^2$)

Eine mögliche Erklärung dieses sprunghaften Anstiegs kann über die Doppelbelegung des Volumens durch die Stäbe erfolgen. Wird das von den Stäben bei einer konstanten Stabquerschnittsfläche von $A = 0,01 \text{ mm}^2$

eingenommene Volumen berechnet, ergibt sich mit Gleichung 7.2 (Variablenbezeichnung siehe Kapitel 5) das in Abbildung 28 gezeigte Diagramm.

$$V_{\text{Stäbe}} = A * \sqrt{2} * s_{\text{abstand_knoten}} * k_{\text{edges}} \quad (\text{Gl. 7.2})$$

Während das Volumen des betrachteten Würfels konstant $V = 125 \text{ mm}^3$ beträgt, nimmt das durch die Stäbe eingenommene Volumen quadratisch zu. Die quadratische Zunahme lässt sich durch Gleichung 7.2 erklären, da k_{edges} kubisch von k_{nodes} abhängt und für die Bestimmung von $s_{\text{abstand_knoten}}$ die Kantenlänge des betrachteten Würfels durch $(k_{\text{nodes}} - 1)$ dividiert wird.

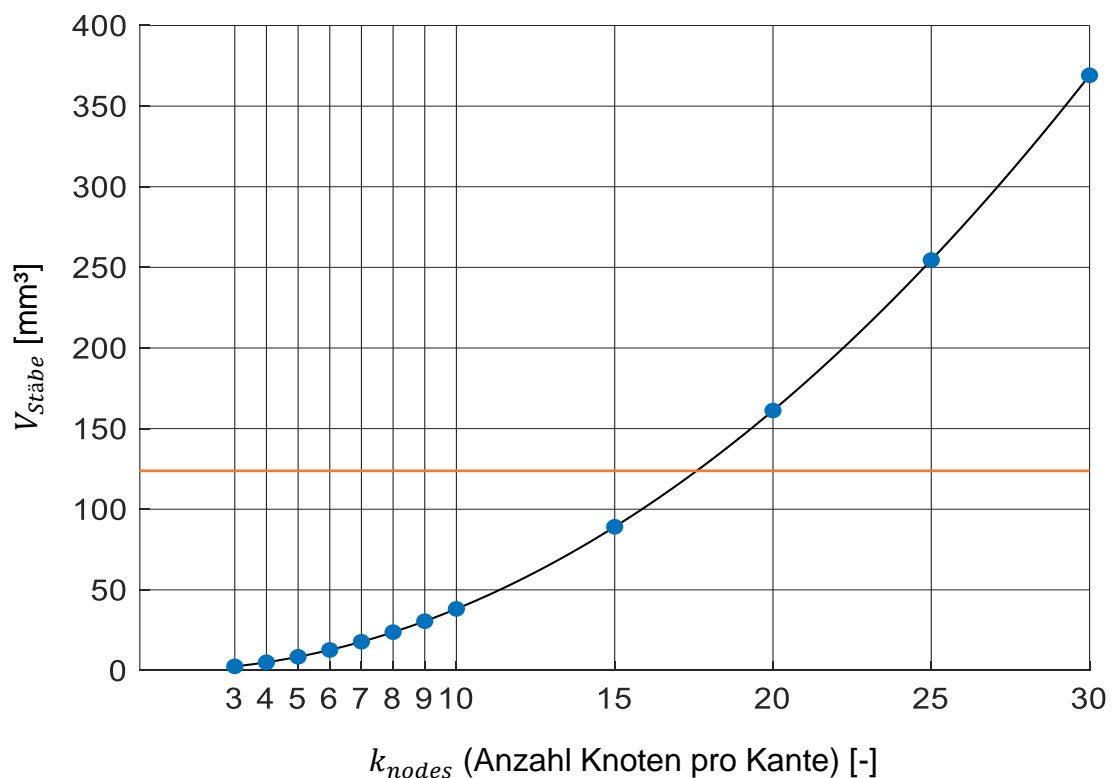


Abbildung 28: Volumen aller Stäbe des Knoten-Kanten-Netzwerks bei konstanter Querschnittsfläche $A = 0,01 \text{ mm}^2$. Zusätzlich ist das betrachtete Würfelvolumen M_i eingezeichnet (orange Linie).

Nach $k_{\text{nodes}} = 15$ überschreitet das Volumen der Stäbe folglich das des betrachteten Würfels, obwohl die Stäbe weiterhin im gleichen Volumen angeordnet sind (siehe Abbildung 28). Folglich kommt es zu einer Doppelbelegung, die bei der Berechnung und den Vergleichen der Steifigkeitsmatrizen des Knoten-Kanten-Netzwerks unberücksichtigt bleibt, sich aber im Vergleich mit der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{Hexe-8}}$ zeigt. Das Überschreiten des Volumens V nach

$k_{nodes} = 15$ passt mit dem ersten Sprung der Spektralnorm in Abbildung 27 bei $k_{nodes} = 20$ zusammen.

Der Vergleich zeigt folglich, dass eine Angleichung der Steifigkeitsmatrizen K_{red} und K_{Hexe-8} erwartet werden kann und sensibilisiert gleichzeitig auch für eine genauere Berücksichtigung der Querschnittsfläche A in weiteren Untersuchungen. Auf eine weitere Untersuchung der Angleichung der beiden Steifigkeitsmatrizen K_{red} und K_{Hexe-8} wird in dieser Arbeit aus Umfangsgründen jedoch verzichtet.

7.2.5 Die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix bei Knoten-Kanten-Netzwerken, die das Volumen M_i nicht vollständig ausfüllen

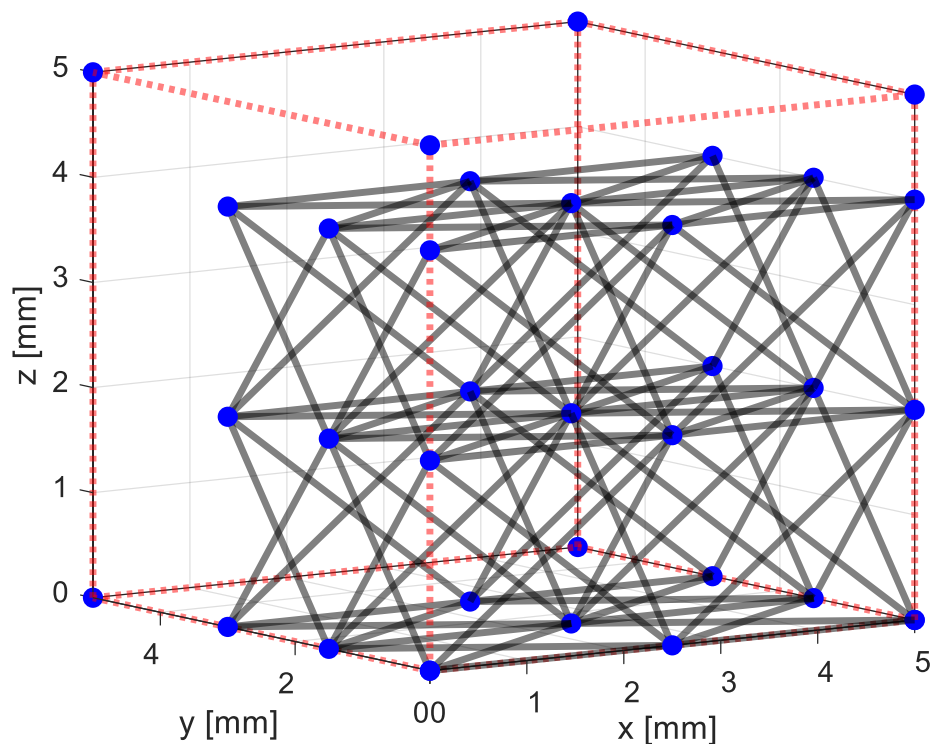


Abbildung 29: Testwürfel bei dem nicht in jeder Oberfläche des umgebenden Würfels Knoten liegen

Abbildung 29 zeigt ein Knoten-Kanten-Netzwerk, bei dem lediglich in vier Oberflächen des würfelförmigen Volumens M_i Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks liegen. Im Inputdeck werden daher auch nur vier Constraints benötigt.

In einer ersten Simulation wird das in Abbildung 29 gezeigte Knoten-Kanten-Netzwerk durch die 24 Verschiebungsfälle belastet. Die Simulation beendet die Berechnungen ohne Fehlermeldungen. Wird beispielsweise eine Verschiebung in z-Richtung betrachtet, so kann erkannt werden, dass in Ebenen orthogonal zur z-Achse nicht überall die gleiche Verschiebung herrscht (siehe Abbildung 30 oben). Dies ist der Fall, sollte der Testwürfel das gesamte Volumen M_i ausfüllen (siehe Abbildung 24 a.). Die Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks weisen zudem nicht mehr die maximale Verschiebung auf, da sie nicht in der um einen Millimeter verschobenen Referenzebene liegen. Weil nicht mehr alle Knoten denselben Verschiebungen unterliegen, resultieren aus den neuen Verschiebungen unterschiedliche Spannungen in den verschiedenen Stäben des Knoten-Kanten-Netzwerks (siehe Abbildung 30 unten).

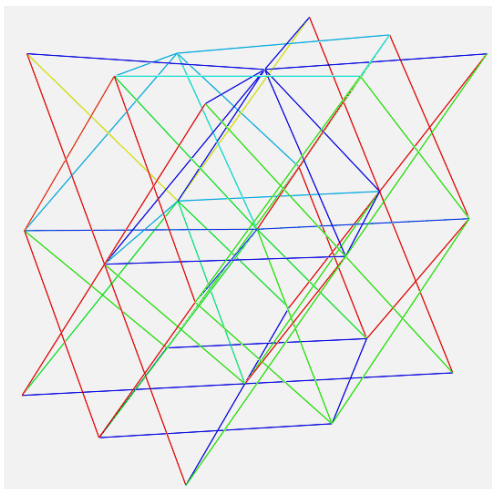
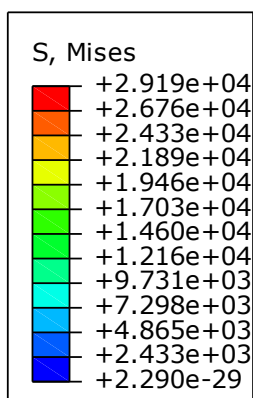
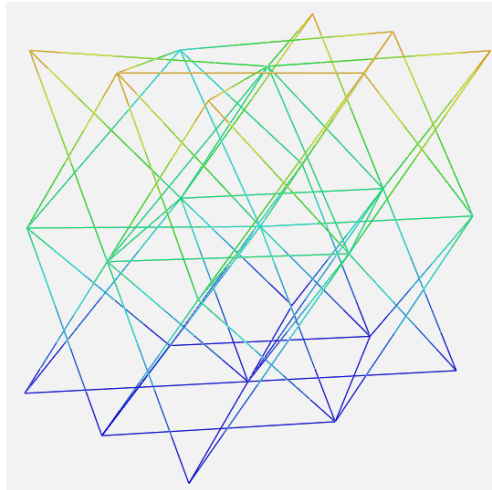
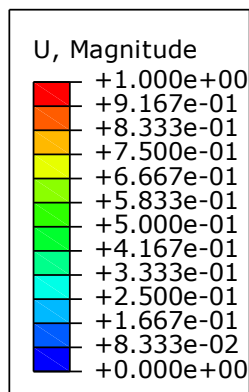


Abbildung 30: Verschiebungsfall drei angewendet auf den Testquader.
 Oben: Verschiebungen des Knoten-Kanten-Netzwerks.
 Unten: Spannungen in den Stäben des Knoten-Kanten-Netzwerks

In einer zweiten Simulation wird das Knoten-Kanten-Netzwerk vollständig isoliert. Es liegen keine Knoten auf den Oberflächen des Volumens M_i . Das Inputdeck enthält daher auch keine Constraints. Die Verschiebung der acht Referenzknoten ist daher ohne Belastung möglich. Aus diesem Grund kann die Simulation nicht ausgeführt werden und bricht ab.

Aus diesen zwei Simulationen ergibt sich, dass, sobald Knoten des Knoten-Kanten-Netzwerks auf der Oberfläche des Volumens M_i liegen, eine Berechnung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix über die Direkte Mechanik möglich ist. Liegen hingegen keine Knoten auf der Oberfläche von M_i kann keine reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnet werden und ein mögliches Knoten-Kanten-Netzwerk im Inneren von M_i bleibt unberücksichtigt.

8. Diskussion

Eine mögliche Erklärung für die Abweichungen der Gesamtsteifigkeitsmatrizen $K_{ges,Matlab}$ und $K_{ges,Abaqus}$ (siehe Abbildung 21) liegt in der Knotendefinition im Inputdeck, das für die Bestimmung von $K_{ges,Abaqus}$ verwendet wird. Die Knotenkoordinaten werden im Inputdeck mit sechs Nachkommastellen definiert. Die Matlab-Implementierung berechnet $K_{ges,Matlab}$ hingegen unter Verwendung von Knotenkoordinaten mit 15 Nachkommastellen. Die Rundung auf sechs Nachkommastellen führt zu einer Änderung der Stablängen. Da die Steifigkeit eines Stabes nach Gleichung 4.9 von der Stablänge abhängt, beeinflusst der Rundungsfehler diese direkt. Die Abweichungen aufgrund der Rundungsfehler sind bei Vergleichen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_{ges,Matlab}$ zu berücksichtigen, da diese zu einer höheren Spektralnorm von K_{red} (systematischer Fehler) beitragen können.

Im Zusammenhang mit den Rundungsfehlern soll hier auch auf einen Unterschied bei der Simulation mit Abaqus Job und Abaqus CAE eingegangen werden (siehe Kapitel 4.3). Während bei der Simulation mit Abaqus Job das in Matlab erstellte Inputdeck zugrunde liegt, wird bei der Simulation mit Abaqus CAE ein neues Inputdeck für das importierte Modell erstellt. Werden diese beiden Inputdecks für den gleichen Testwürfel verglichen, kann ein Unterschied in der Knotendefinition festgestellt werden. Die Knotenkoordinaten im durch Matlab erstellten Inputdeck enthalten wie oben bereits beschrieben sechs Nachkommastellen. Im durch Abaqus generierten Inputdeck enthalten sie acht oder mehr Nachkommastellen, falls die Knotenkoordinaten nicht bereits wie z.B. bei Testwürfel 3x5 weniger als 6 Nachkommastellen aufweisen. Hierbei entsprechen die hinzukommenden Nachkommastellen nicht einer genaueren Rundung der in Matlab generierten Werte (siehe Anhang G). Werden die Reaktionskräfte sowohl mit Abaqus Job als auch mit Abaqus CAE bestimmt, so weichen diese voneinander ab, falls im Inputdeck durch Abaqus CAE Nachkommastellen hinzugefügt wurden (siehe Anhang G).

Beispiel: Die Reaktionskraft an Knoten eins bei Testwürfel 4x5 (Verschiebungsfall eins) ist bei der Simulation mit Abaqus CAE ca. 8,75 %

kleiner als bei der Simulation mit Abaqus Job. Diese Abweichung scheint mit zunehmender Gesamtknotenanzahl jedoch kleiner zu werden. So beträgt sie bei Testwürfel 10x5 an Knoten eins (Verschiebungsfall eins) nur 0,38 %.

Die Bestimmung der Reaktionskräfte erfordert daher die konsequente Nutzung entweder von Abaqus Job oder von Abaqus CAE, um Fehler innerhalb eines Vergleichs zu vermeiden. Da für die in Kapitel 7 vorgestellten Ergebnisse konsequent Abaqus Job verwendet wurde, können diese als repräsentative Ergebnisse gewertet werden. Die Abweichungen legen dennoch nahe, dass Testwürfel mit einer geringen Gesamtknotenanzahl bei Vergleichen wie z.B. in Abbildung 26 nicht berücksichtigt werden sollten. Vergleiche wie z.B. in Kapitel 7.2.2 sind dennoch auch bei kleinen Testwürfeln von Interesse, da sie anschauliche Ergebnisse liefern und sich hier bei konsequenter Verwendung einer Simulationsmethode keine zusätzlichen Fehler untereinander einschleichen.

Des Weiteren soll an dieser Stelle die Verwendung der Constraints diskutiert werden. Die Constraints werden für die Aufbringung des Verschiebungsansatzes benötigt. Außerdem dienen sie der Lagerung von Kanten, die bei der Aufteilung des Femurkopfs in die Subvolumina geschnitten werden. Gleichzeitig kann durch sie aber möglicherweise auch die erhöhte Spektralnorm der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} gegenüber der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ resultieren. Wird beispielsweise Verschiebungsfall eins auf einen Testwürfel mit Verschiebungsansatz angewendet, so verschieben sich alle Knoten, die in der durch die verschobenen Eckknoten definierten Oberfläche liegen. Bei einer Verschiebung der Eckknoten ohne Verschiebungsansatz werden die anderen Knoten nicht um den gleichen Betrag verschoben. Hieraus folgt eine Erhöhung der Steifigkeit. Wie Abschnitt 7.2.3 jedoch zeigt, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen \mathbf{K}_{red} und $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$. Dieser erlaubt eine Anpassung von \mathbf{K}_{red} in einem nachfolgenden Postprocessing.

Im Rahmen des in Abschnitt 7.2.4 vorgestellten Vergleichs zwischen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} und der Steifigkeitsmatrix eines

Hexe-8 Elements \mathbf{K}_{Hexe-8} wird auf das Volumen der Stäbe $V_{Stäbe}$ eingegangen. Eine rein theoretische Berechnung der Steifigkeitsmatrizen ist trotz der Doppelbelegung des Volumens möglich. Eine solche Doppelbelegung kann in der Realität allerdings nicht erfolgen. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass bei konstanter Querschnittsfläche A und mit Verringerung der Stablänge die Annahme eines schlanken Stabes verloren geht. Da in dieser Arbeit rein theoretische Betrachtungen auf einem idealisierten Knoten-Kanten-Netzwerk angestellt werden, können die Berechnungen durchgeführt werden. Für eine Berechnung eines aus Spongiosa abgeleiteten Knoten-Kanten-Netzwerks sind die oben genannten Punkte jedoch zu berücksichtigen.

Die in dieser Arbeit erfolgten Untersuchungen zeigen, dass die Anisotropie eines Knoten-Kanten-Netzwerks in der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix abgebildet wird. Des Weiteren wird ein linearer Zusammenhang zwischen der Spektralnorm der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} und der Spektralnorm der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges,Matlab}$ gezeigt. Aus diesem Ergebnis kann die Möglichkeit einer Anpassung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix in einem Postprocessing abgeleitet werden.

Zusammenfassend lässt sich daher aus den in dieser Arbeit erfolgten Untersuchungen schlussfolgern, dass die Anwendung der Direkten Mechanik auf Knoten-Kanten-Netzwerke mit eindimensionalen finiten Elementen einen vielversprechenden Ansatz zur Bestimmung der Steifigkeit der Spongiosa im Femurkopf darstellt.

9. Ausblick

Für weitere Untersuchungen der Anwendung der Direkten Mechanik auf Knoten-Kanten-Netzwerke mit eindimensionalen finiten Elementen bieten sich verschiedene Herangehensweisen an.

Zum einen können die in dieser Arbeit verwendeten Stäbe durch Balkenelemente ersetzt werden. Es kann anschließend die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix eines nach Kapitel 3 abgeleiteten Modells der Spongiosa mit Stabelementen und Balkenelementen berechnet werden. Durch einen Vergleich von $K_{red,Stabelemente}$ und $K_{red,Balkenelemente}$ kann entschieden werden, ob eine Modellierung der Spongiosa durch Balkenelemente, und daher mit mehr Freiheitsgraden pro Knoten, erforderlich ist. Ein solcher Vergleich würde zudem eine Aussage über eine mögliche Biegebelastung der Trabekel erlauben.

Wird der in dieser Arbeit verwendete Testwürfel betrachtet, so stellt sich die Frage: Gelingt die Reduzierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix auf acht Knoten auch bei komplexeren Netzwerken? Diese Frage beschäftigt sich mit der Thematik, ob das durch die inneren Knoten aufgebaute Netzwerk bei zufälligen Knoten-Kanten-Netzwerken durch die acht Referenzknoten ausreichend beschrieben wird. Da die Direkte Mechanik nicht vorschreibt, wie viele Referenzknoten zu verwenden sind, können daher auch Untersuchungen mit z.B. 20 Referenzknoten (Hexe-20 Element) angestellt werden. Darüber hinaus besteht zudem die Möglichkeit die Geometrie des Volumens M_i frei zu wählen. Zu beachten ist hierbei, dass sich hierdurch die benötigte Anzahl an linear unabhängigen Verschiebungsfällen und die Dimension der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix erhöht.

Abschließend ist zu erwähnen, dass sich die Anwendung der Direkte Mechanik nicht nur auf die Bestimmung der Steifigkeit der Spongiosa beschränkt. Die Bestimmung der Steifigkeit von porösen, schaumartigen Materialien, die aufgrund der benötigten Rechenressourcen bisher nicht möglich war, ist mit Hilfe der Direkten Mechanik ebenso denkbar. Voraussetzung hierfür wäre jedoch eine vorhandene Modellierbarkeit als Knoten-Kanten-Netzwerk und ein bekanntes Materialmodell (Elastizitätsmodul E und Poissonzahl ν).

10. Literaturverzeichnis

- Ariza, O.; Gilchrist, S.; Widmer, R. P.; Guy, P.; Ferguson, S. J.; Cripton, P. A.; Helgason, B. (2015): Comparison of explicit finite element and mechanical simulation of the proximal femur during dynamic drop-tower testing. In: *Journal of biomechanics* 48 (2), S. 224–232. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2014.11.042.
- Bärwolff, Günter (2020): Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Clemens, Daniel (2013): Outcome zementierte versus unzementierte Kopfen-doprothese bei der Versorgung geriatrischer Schenkelhalsfrakturen. Medizinischen Universität Graz. Universitätsklinik für Unfallchirurgie / LKH-Univ. Klinikum Graz.
- Dachverband Osteologie e.V. (2017): Prophylaxe, Diagnostik und Therapie der OSTEOPOROSE. bei postmenopausalen Frauen und bei Männern. Leitlinie des Dachverbands der Deutschsprachigen Wissenschaftlichen Osteologischen Gesellschaften e.V.
- Dassault Systèmes (2014): Abaqus 6.14 Documentation. Online verfügbar unter <http://130.149.89.49:2080/v6.14/index.html>, zuletzt aktualisiert am 12.09.2014, zuletzt geprüft am 13.10.2021.
- endoprosthetics.guide (2021): Künstliches Hüftgelenk | So funktioniert eine Hüftprothese. Online verfügbar unter <https://www.endoprosthetics-guide.com/huefte/kuenstliches-huftgelenk/>, zuletzt aktualisiert am 14.09.2021, zuletzt geprüft am 14.09.2021.
- Erhardt, Alexander (2017): Segmentierung von Lungen auf Röntgenaufnahmen. Bachelorarbeit. Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Würzburg. Institut für Informatik.
- Faller, Adolf; Schünke, Michael; Schünke, Gabriele (2012): Der Körper des Menschen. Einführung in Bau und Funktion ; [4 Poster mit Übersichten] ; Skelett, Gefäße, Nerven, Muskeln. 16., überarb. Aufl. Stuttgart: Thieme. Online verfügbar unter <http://www.vlb.de/GetBlob.aspx?strDisposition=a&strlsbn=9783133297165>.
- Gleisberg, Cornelia; Malek, Daniela; Stich, Anne Kathrin; Follert, Peter (2021): Operative Versorgung von Patienten mit einer hüftgelenknahen Femurfraktur. Online verfügbar unter [75](https://www.gkv-</p></div><div data-bbox=)

90prozent.de/ausgabe/07/autorenbeitrag/07_femurfraktur/07_femurfraktur.html, zuletzt aktualisiert am 15.04.2021, zuletzt geprüft am 26.05.2021.

Gross, Dietmar; Hauger, Werner; Wriggers, Peter (2018): Technische Mechanik 4. Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, numerische Methoden. 10., verbesserte und ergänzte Auflage. Berlin: Springer Vieweg (Lehrbuch, / Dietmar Gross, Werner Hauger, Peter Wriggers ; 4). Online verfügbar unter <http://www.springer.com/de/book/9783662556931>.

Häggström, Mikael (2021a): File:CT of mildly compressed hip fracture.png - Wikimedia Commons. Online verfügbar unter https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CT_of_mildly_compressed_hip_fracture.png, zuletzt aktualisiert am 16.09.2021, zuletzt geprüft am 30.09.2021.

Häggström, Mikael (2021b): File:X-ray of hip with total arthroplasty - Anteroposterior.jpg - Wikimedia Commons. Online verfügbar unter https://commons.wikimedia.org/wiki/File:X-ray_of_hip_with_total_arthroplasty_-_Anteroposterior.jpg, zuletzt aktualisiert am 16.09.2021, zuletzt geprüft am 30.09.2021.

Kimmerle, Wolfgang; Stroppel, Markus (2013): Lineare Algebra und Geometrie. Für Ingenieure, Mathematiker und Physiker. 4. Aufl. Deilingen: Ed. Delkhofen.

Kohn, D. H. (2011): Porous Coatings in Orthopedics. In: *Comprehensive Biomaterials*: Elsevier, S. 65–77.

Krestel, Erich (Hg.) (1988): Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik. Grundlagen und technische Lösungen, Röntgendiagnostik, Computertomographie, nuklearmedizinische Diagnostik, Kernspintomographie, Sonographie. Siemens Aktiengesellschaft. 2., überarb. und erw. Aufl. Berlin: Siemens Aktiengesellschaft.

Learmonth, Ian D.; Young, Claire; Rorabeck, Cecil (2007): The operation of the century: total hip replacement. In: *The Lancet* 370 (9597), S. 1508–1519. DOI: 10.1016/S0140-6736(07)60457-7.

Maier, Andreas; Steidl, Stefan; Christlein, Vincent; Hornegger, Joachim (Hg.) (2018): *Medical Imaging Systems: An Introductory Guide*. Springer. Cham (CH).

- Mesh tie constraints (2016). Online verfügbar unter <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAECSTRefMap/simacst-tiedconstraint.htm>, zuletzt aktualisiert am 21.09.2016, zuletzt geprüft am 08.10.2021.
- Radü, Ernst-Wilhelm; Kendall, Brian E.; Moseley, Ivan F. (1980): Computertomographie des Kopfes. Technische Grundlagen, Interpretation, Klinik. Stuttgart: Thieme.
- Reznikov, Natalie; Chase, Hila; Ben Zvi, Yehonatan; Tarle, Victoria; Singer, Matthew; Brumfeld, Vlad et al. (2016): Inter-trabecular angle: A parameter of trabecular bone architecture in the human proximal femur that reveals underlying topological motifs. In: *Acta biomaterialia* 44, S. 65–72. DOI: 10.1016/j.actbio.2016.08.040.
- Rinio, Martin (2021a): Hüftarthrose (Coxarthrose): Gelenkerhaltende Therapie des Hüftgelenks | Gelenk-Klinik.de. Online verfügbar unter <https://gelenk-klinik.de/hueftgelenk/hueftarthrose-coxarthrose.html>, zuletzt aktualisiert am 13.09.2021, zuletzt geprüft am 13.09.2021.
- Rinio, Martin (2021b): Hüftprothese: Vorteile, Haltbarkeit und Komplikationen der künstlichen Hüfte (Hüft-TEP) | Gelenk-Klinik.de. Online verfügbar unter <https://gelenk-klinik.de/hueftoperation/hueftprothese/hueft-tep-kuenstliches-hueftgelenk.html>, zuletzt aktualisiert am 14.09.2021, zuletzt geprüft am 15.09.2021.
- Schiebler, Theodor Heinrich (Hg.) (2005): Anatomie. Histologie, Entwicklungsgeschichte, makroskopische und mikroskopische Anatomie, Topographie; unter Berücksichtigung des Gegenstandskatalogs; [Neue Approbationsordnung. 9., vollständig überarbeitete Auflage. Berlin: Springer Medizin (Springer-Lehrbuch).
- Schneider, Ralf (2016): Analyse kontinuumsmechanischer, anisotroper Materialparameter mikrostrukturierter Volumina mit Hilfe direkter mechanischer Simulation. Dissertation. Universität Stuttgart, Stuttgart. Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS).
- Statista (2021a): Endoprothetik - Implantationen künstlicher Hüftgelenke in deutschen Krankenhäusern nach Alter 2019 | Statista. Online verfügbar unter <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/785143/umfrage/implantationen-kuenstlicher-hueftgelenke-in-deutschen-krankenhaeusern-nach-alter/>, zuletzt aktualisiert am 13.06.2021, zuletzt geprüft am 13.06.2021.

- Statista (2021b): Inzidenz von Erst- und Revisionsimplantationen von Hüftgelenksprothesen nach Geschlecht 2009 | Statista. Online verfügbar unter <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/268228/umfrage/inzidenz-von-erst-und-revisionsimplantationen-von-hueftgelenksprothesen/>, zuletzt aktualisiert am 13.06.2021, zuletzt geprüft am 13.06.2021.
- Szarzynski, Eva (2004): Klinische und radiologische Ergebnisse nach Duo-kopfprothesenimplantation bei medialer Schenkelhalsfraktur. Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i. Br.
- Uniklinikum Dresden (2021): Bei welchen Erkrankungen und Verletzungen wird der Gelenkersatz durchgeführt? — Deutsch. Online verfügbar unter <https://www.uniklinikum-dresden.de/de/das-klinikum/kliniken-polikliniken-institute/oupc/fuer-patienten/patienteninformation-uebungsprogramme/huefte/ersatz-des-hueftgelenkes/bei-welchen-erkrankungen-und-verletzungen-wird-der-gelenkersatz-durchgefuehrt>, zuletzt aktualisiert am 13.06.2021, zuletzt geprüft am 13.06.2021.
- Wagner, Marcus (2017): Lineare und nichtlineare FEM. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Zhang, T. Y.; Suen, C. Y. (1984): A fast parallel algorithm for thinning digital patterns. In: *Commun. ACM* 27 (3), S. 236–239. DOI: 10.1145/357994.358023.

11. Anhang

Anhang A

Wie in Kapitel 3 beschrieben, werden mit Hilfe des Computertomographen die Intensitätsverläufe der abgeschwächten Strahlung aus unterschiedlichen Winkeln aufgenommen. Die Schnittbildgenerierung kann mit Hilfe analytischer oder algebraischer Rekonstruktionsmethoden erfolgen (Maier et al. 2018). Es wird folgend die algebraische Rekonstruktionsmethode aus Maier et al. (2018) vorgestellt.

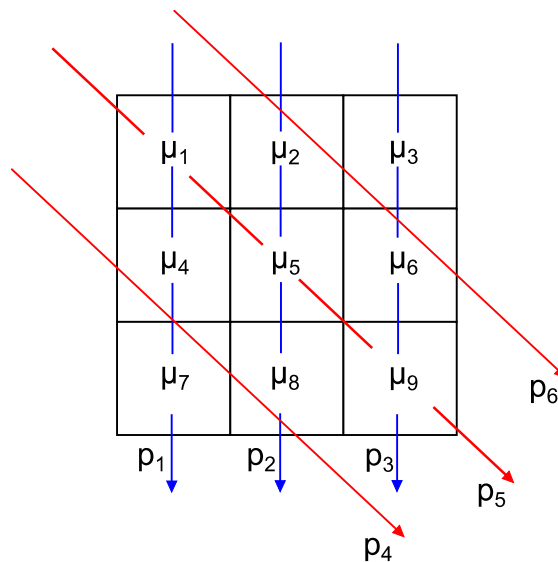


Abbildung 31: Diskretisierung des Schichtbildes mit eingezeichneten Strahlen aus zwei verschiedenen Richtungen (nach (Maier et al. 2018))

Das Schichtbild wird durch endlich viele Pixel diskretisiert (siehe Abbildung 31). Für jedes Pixel muss der Absorptionskoeffizient μ bestimmt werden. Wird ein Intensitätsverlauf aus einer Richtung aufgezeichnet, kann mit Hilfe der Ausgangsintensität I_0 der Strahlung, der Gesamtabsorptionsverlauf bestimmt werden. Ein Strahl durchläuft bis zum Detektor endlich viele Pixel. Die Strahlung wird bei jedem Pixeldurchtritt entsprechend des Absorptionsverhaltens des Pixels abgeschwächt. Die Summe der Abschwächungen ergibt die Gesamtabsorption entlang des Strahls. Aus diesen Überlegungen folgt für die in Abbildung 31 angegebene Diskretisierung ein lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} * \boldsymbol{\mu} = \mathbf{p} \quad (\text{Gl. A.1})$$

Wobei $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8, \mu_9)^T$ der Vektor der Absorptionskoeffizienten und $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T$ der Vektor der Gesamtabsorptionen je Strahl ist. Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems können die Absorptionskoeffizienten μ_i bestimmt werden. Die Dimension der Matrix \mathbf{A} wächst mit einer feineren Diskretisierung und der Anzahl gemessener Gesamtabsorptionen. Da es sich bei \mathbf{A} um eine dünnbesetzte Matrix handelt, können spezielle Speicherverfahren zur Reduktion des benötigten Speicherplatzes angewendet werden

Um die Absorptionskoeffizienten, die von der verwendeten Strahlung abhängen, unterschiedlicher Computertomographen vergleichen zu können, wird die sogenannte Hounsfield-Einheit (HE) verwendet (Maier et al. 2018; Krestel 1988). Diese ist wie folgt definiert (Maier et al. 2018):

$$\mu' = \left(\frac{\mu}{\mu_{Wasser}} - 1 \right) * 1000 \quad (\text{Gl. A.2})$$

Als Bezugsgröße wird der Absorptionswert μ_{Wasser} von Wasser verwendet. Dieser hat daher den normierten Wert $\mu' = 0 \text{ HE}$. Für Knochen ergibt sich in Abhängigkeit des Knochenmaterials ein μ' -Bereich von ca. 60 HE bis 3000 HE (Krestel 1988).

Anhang B

```

*Heading
** job name: Testwuerfel
** Generated by: Skript Inputdeck_erstellen_mit_constraints.m by M.Schmid
** Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
**PARTS
**
*Part, name=Wuerfel
*End Part
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=Wuerfel-instance, part=Wuerfel
*Node
  1, 0.000000, 0.000000, 0.000000
  2, 0.000000, 0.000000, 5.000000
  3, 0.000000, 5.000000, 0.000000
  4, 0.000000, 5.000000, 5.000000
  5, 5.000000, 0.000000, 0.000000
  6, 5.000000, 0.000000, 5.000000
  7, 5.000000, 5.000000, 0.000000
  8, 5.000000, 5.000000, 5.000000
  9, 0.000000, 0.000000, 0.000000
 10, 0.000000, 0.000000, 5.000000
 11, 0.000000, 5.000000, 0.000000
 12, 0.000000, 5.000000, 5.000000
 13, 5.000000, 0.000000, 0.000000
 14, 5.000000, 0.000000, 5.000000
 15, 5.000000, 5.000000, 0.000000
 16, 5.000000, 5.000000, 5.000000
*Element, type=T3D2
  1, 9, 12
  2, 9, 14
  3, 9, 15
  4, 10, 11
  5, 10, 13
  6, 10, 16
  7, 11, 13
  8, 11, 16
  9, 12, 14
 10, 12, 15
 11, 13, 16
 12, 14, 15
*Nset, nset=Knoten, generate
  1, 16, 1
*Elset, elset=Wuerfelemente, generate
  1, 12, 1
**
** Section:
** Solid Section, elset=Wuerfelemente, material=Steel
0.010000
**
*End Instance
**
**

```

Header

Definition der Knoten-
koordinaten (x, y, z).
Knoten eins bis acht
sind die Referenzkno-
ten (da dies Testwür-
fel 2×5 ist, fallen alle
Knoten des Testwür-
fels mit den Referenz-
knoten zusammen)

Definition Elementtyp
T: Truss; 3D: dreidi-
mensional; 2: 2 Knoten

Definition der Kanten
mit Kantenummer,
Start- und Endknoten

Definition der Quer-
schnittsfläche für die
oben definierten Kan-
ten

*Nset , nset=SET_11, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4
*Nset , nset=SET_12, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_13, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_11, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=bc_Set_12, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=bc_Set_13, instance=Wuerfel-instance
7
*Nset , nset=bc_Set_14, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_21, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_22, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 5, 6
*Nset , nset=SET_23, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_21, instance=Wuerfel-instance
3
*Nset , nset=bc_Set_22, instance=Wuerfel-instance
4
*Nset , nset=bc_Set_23, instance=Wuerfel-instance
7
*Nset , nset=bc_Set_24, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_31, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_32, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_33, instance=Wuerfel-instance
1, 3, 5, 7
*Nset , nset=bc_Set_31, instance=Wuerfel-instance
2
*Nset , nset=bc_Set_32, instance=Wuerfel-instance
4
*Nset , nset=bc_Set_33, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=bc_Set_34, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_41, instance=Wuerfel-instance
3, 4, 7, 8
*Nset , nset=SET_42, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_43, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_41, instance=Wuerfel-instance
1
*Nset , nset=bc_Set_42, instance=Wuerfel-instance
2
*Nset , nset=bc_Set_43, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=bc_Set_44, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=SET_51, instance=Wuerfel-instance
2, 4, 6, 8
*Nset , nset=SET_52, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

```

*Nset , nset=SET_53, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_51, instance=Wuerfel-instance
1
*Nset , nset=bc_Set_52, instance=Wuerfel-instance
3
*Nset , nset=bc_Set_53, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=bc_Set_54, instance=Wuerfel-instance
7
*Nset , nset=SET_61, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_62, instance=Wuerfel-instance
1, 3, 5, 7
*Nset , nset=SET_63, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_61, instance=Wuerfel-instance
2
*Nset , nset=bc_Set_62, instance=Wuerfel-instance
4
*Nset , nset=bc_Set_63, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=bc_Set_64, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_71, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_72, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_73, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_71, instance=Wuerfel-instance
4
*Nset , nset=SET_81, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_82, instance=Wuerfel-instance
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_83, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_81, instance=Wuerfel-instance
1
*Nset , nset=SET_91, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_92, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_93, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_91, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=SET_101, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_102, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_103, instance=Wuerfel-instance
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_101, instance=Wuerfel-instance
1
*Nset , nset=SET_111, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_112, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

```

```

*Nset , nset=SET_113, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_111, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=SET_121, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_122, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_123, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8
*Nset , nset=bc_Set_121, instance=Wuerfel-instance
7
*Nset , nset=SET_131, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_132, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_133, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_131, instance=Wuerfel-instance
3
*Nset , nset=SET_141, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_142, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_143, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_141, instance=Wuerfel-instance
3
*Nset , nset=SET_151, instance=Wuerfel-instance
1, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_152, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_153, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_151, instance=Wuerfel-instance
2
*Nset , nset=SET_161, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8
*Nset , nset=SET_162, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_163, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_161, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=SET_171, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
*Nset , nset=SET_172, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_173, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_171, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_181, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_182, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_183, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_181, instance=Wuerfel-instance
4

```

Definition der Knoten-sets für die Aufbringung der Verschiebungen und Lagerungen

```

*Nset , nset=bc_Set_182, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=SET_191, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_192, instance=Wuerfel-instance
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_193, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
*Nset , nset=bc_Set_191, instance=Wuerfel-instance
1
*Nset , nset=bc_Set_192, instance=Wuerfel-instance
8
*Nset , nset=SET_201, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_202, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_203, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_201, instance=Wuerfel-instance
4
*Nset , nset=bc_Set_202, instance=Wuerfel-instance
5
*Nset , nset=SET_211, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_212, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8
*Nset , nset=SET_213, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_211, instance=Wuerfel-instance
7
*Nset , nset=SET_221, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_222, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_223, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_221, instance=Wuerfel-instance
3
*Nset , nset=SET_231, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_232, instance=Wuerfel-instance
1, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_233, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_231, instance=Wuerfel-instance
2
*Nset , nset=SET_241, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=SET_242, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 7
*Nset , nset=SET_243, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
*Nset , nset=bc_Set_241, instance=Wuerfel-instance
6
*Nset , nset=bc_Set_242, instance=Wuerfel-instance
8
**
*Nset , nset=m_Set-1, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 3, 4
*Nset , nset=s_Set-1, instance=Wuerfel-instance

```

```

9, 10, 11, 12
*Nset , nset=m_Set-2, instance=Wuerfel-instance
5, 6, 7, 8
*Nset , nset=s_Set-2, instance=Wuerfel-instance
13, 14, 15, 16
*Nset , nset=m_Set-3, instance=Wuerfel-instance
1, 2, 5, 6
*Nset , nset=s_Set-3, instance=Wuerfel-instance
9, 10, 13, 14
*Nset , nset=m_Set-4, instance=Wuerfel-instance
3, 4, 7, 8
*Nset , nset=s_Set-4, instance=Wuerfel-instance
11, 12, 15, 16
*Nset , nset=m_Set-5, instance=Wuerfel-instance
1, 3, 5, 7
*Nset , nset=s_Set-5, instance=Wuerfel-instance
9, 11, 13, 15
*Nset , nset=m_Set-6, instance=Wuerfel-instance
2, 4, 6, 8
*Nset , nset=s_Set-6, instance=Wuerfel-instance
10, 12, 14, 16
*Surface, type=NODE, name=m_Set-1_CNS_, internal
m_Set-1, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-1_CNS_, internal
s_Set-1, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=m_Set-2_CNS_, internal
m_Set-2, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-2_CNS_, internal
s_Set-2, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=m_Set-3_CNS_, internal
m_Set-3, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-3_CNS_, internal
s_Set-3, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=m_Set-4_CNS_, internal
m_Set-4, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-4_CNS_, internal
s_Set-4, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=m_Set-5_CNS_, internal
m_Set-5, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-5_CNS_, internal
s_Set-5, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=m_Set-6_CNS_, internal
m_Set-6, 1.000000
*Surface, type=NODE, name=s_Set-6_CNS_, internal
s_Set-6, 1.000000
*Tie, name=Constraint-1, adjust=no
s_Set-1_CNS_, m_Set-1_CNS_
*Tie, name=Constraint-2, adjust=no
s_Set-2_CNS_, m_Set-2_CNS_
*Tie, name=Constraint-3, adjust=no
s_Set-3_CNS_, m_Set-3_CNS_
*Tie, name=Constraint-4, adjust=no
s_Set-4_CNS_, m_Set-4_CNS_
*Tie, name=Constraint-5, adjust=no
s_Set-5_CNS_, m_Set-5_CNS_
*Tie, name=Constraint-6, adjust=no
s_Set-6_CNS_, m_Set-6_CNS_
**
*End Assembly
**

```

Definition der Knotensets für die Master- und Worker-oberflächen

Definition der Master- und Worker-oberflächen

Definition der Constraints über das Schlüsselwort *TIE


```

**
** MATERIALS
**
** *Material, name=Steel
** *Elastic
210000.000000, 0.300000
**
** -----
**
** *STEP
** *MATRIX GENERATE, STIFFNESS
** *MATRIX OUTPUT, STIFFNESS, FORMAT=COORDINATE
** *END STEP
**
** STEP:
**
** *Step, name=step_LF_1, nlgeom=NO, perturbation
apply load
** *Static
1.000000, 1.000000, 0.000010, 1.000000
**
**
** BC und VERSCHIEBUNGEN
**
** BC Type: Displacement/Rotation
**
** *Boundary
SET_11, 1, 1
SET_12, 2, 2
SET_13, 3, 3
**
** *Boundary
bc_Set_11, 1, 1, 1.000000
bc_Set_12, 1, 1, 1.000000
bc_Set_13, 1, 1, 1.000000
bc_Set_14, 1, 1, 1.000000
**
** OUTPUT REQUESTS
**
** *Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
** *Output, field
** *Node Output
RF, U
** *Element Output, directions=YES
S
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
** *Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
** *Output, history, variable=PRESELECT
**
** *End Step

```

Materialdefinition

Definition der Randbedingungen aller nicht verschobener Referenzknoten

Definition der Verschiebung des Verschiebungsfalls

Definition der Ausgabeveriablen

LASTFALLDEFINITION

Hier: Aus Platzgründen nur zwei Steps.
Step 1: Erstellung der mtx-Datei zur Ausgabe der Gesamtsteifigkeitsmatrix.
Step 2: Verschiebungsfall eins

Anhang D

Die Berechnung der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix K_{red} nach Gleichung 4.26 erfordert die Definition von 24 linear unabhängigen Verschiebungsfällen. Jeder Verschiebungsfall entspricht dabei einer Spalte in der Verschiebungsmatrix U_{Mc} . Die Nummerierung der Verschiebungsfälle entspricht dabei der Nummerierung der Spalten der Verschiebungsmatrix U_{Mc} .

Im Folgenden ist die Verschiebungsmatrix U_{Mc} dargestellt. Die Nummerierung der Knoten und Freiheitsgrade erfolgt den Konventionen aus Abbildung 33. Darüber hinaus werden in Tabelle 1 alle 24 Verschiebungsfälle illustriert. Hierfür wird der Testwürfel 2×5 verwendet. Um die Verschiebungen besser illustrieren zu können, wurden zusätzlich die Kanten entlang der kürzesten Verbindung zwischen den Knoten eingezeichnet.

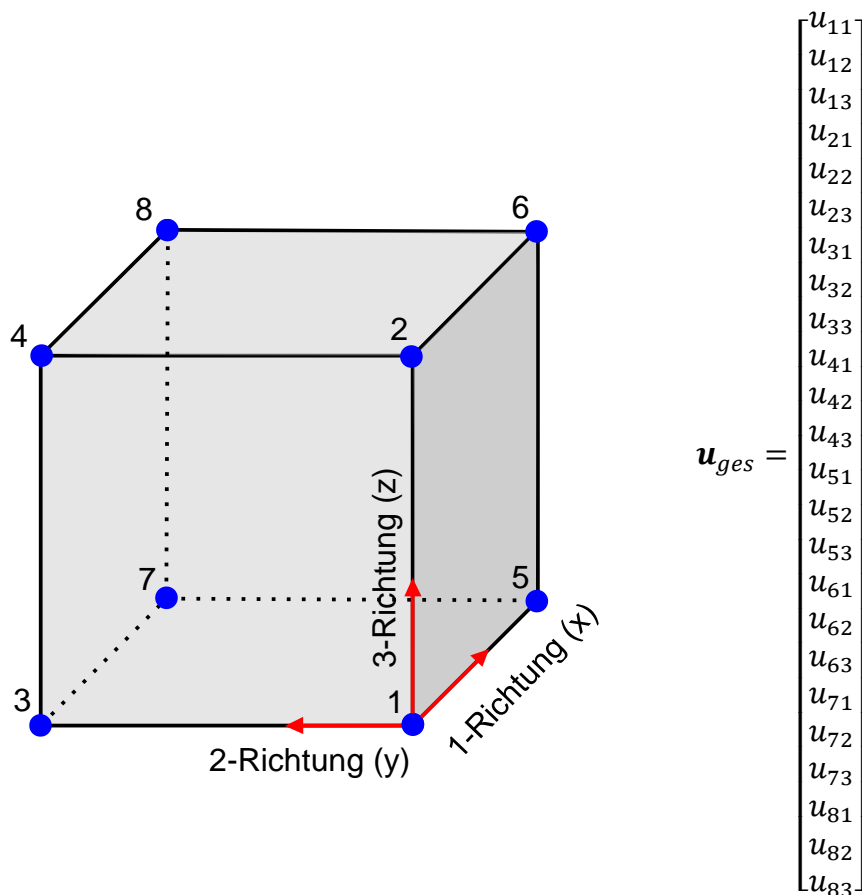
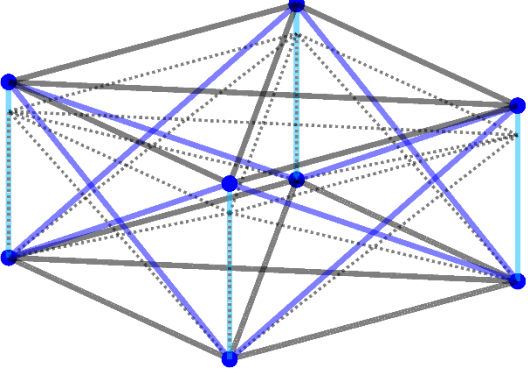
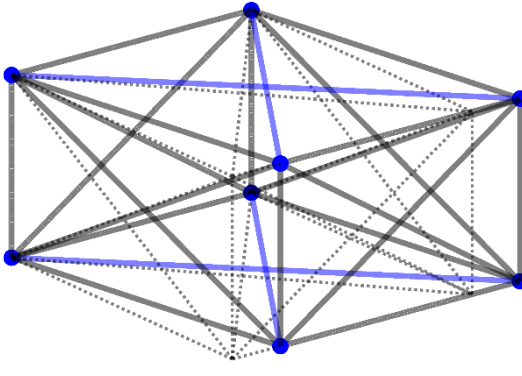
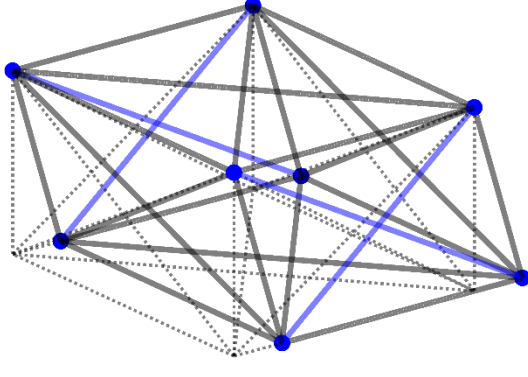
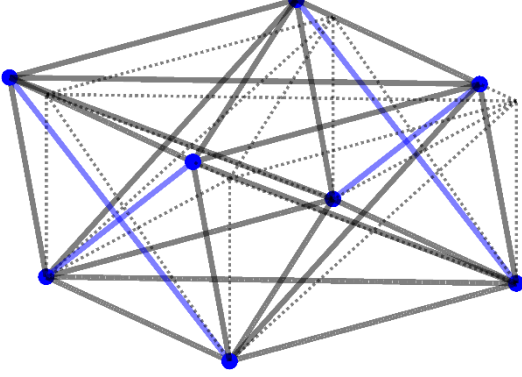
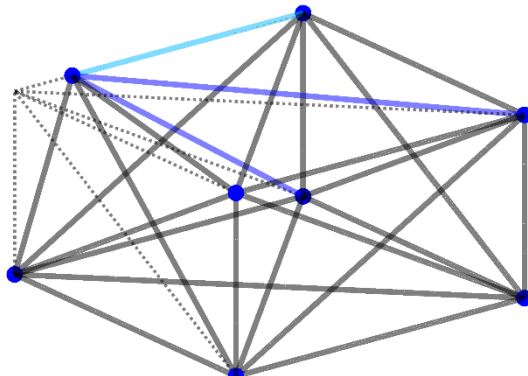
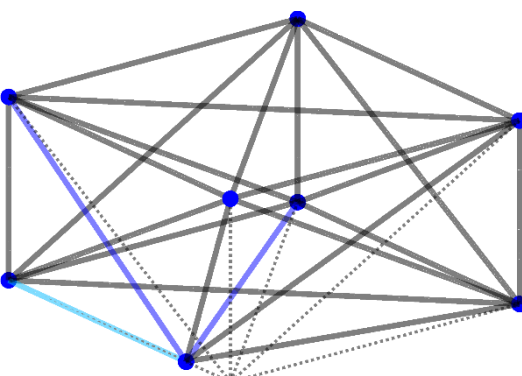
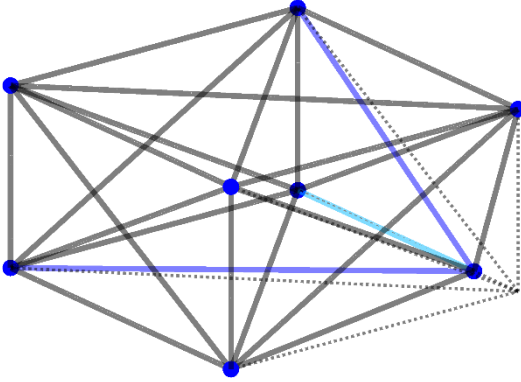
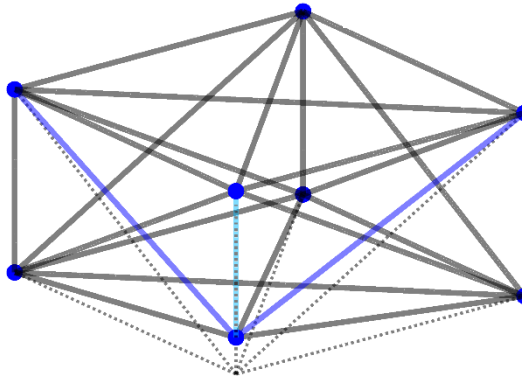
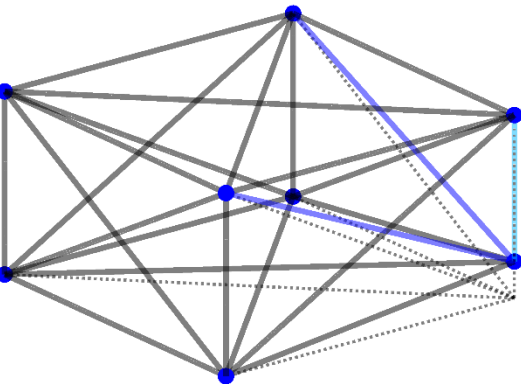
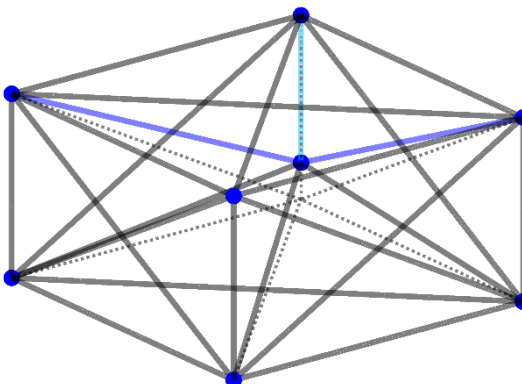
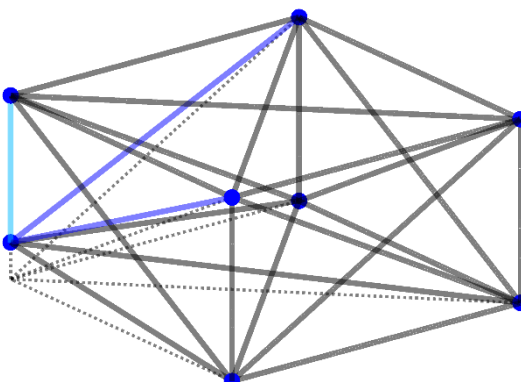
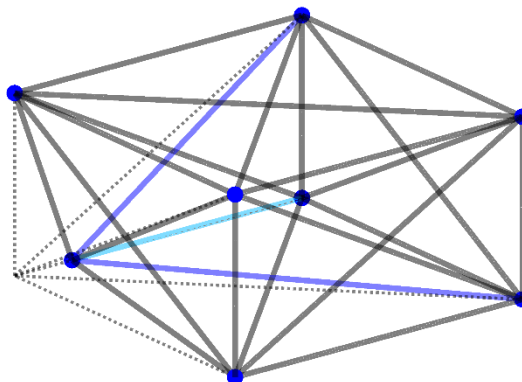
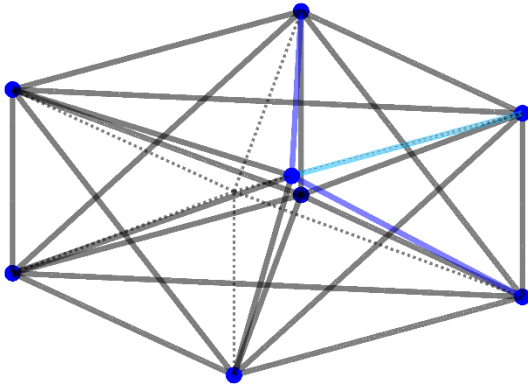
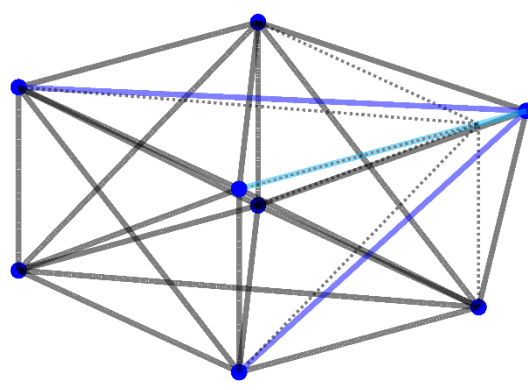
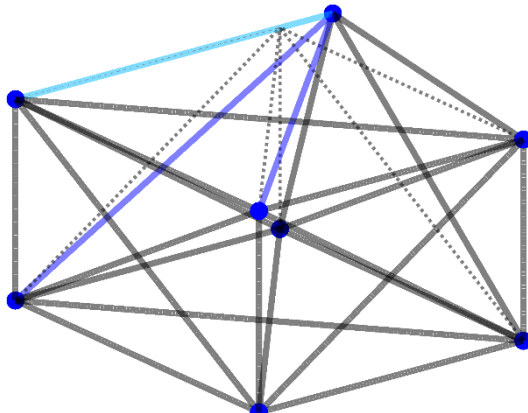
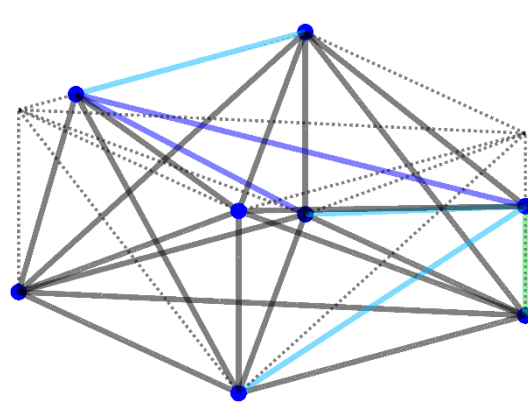
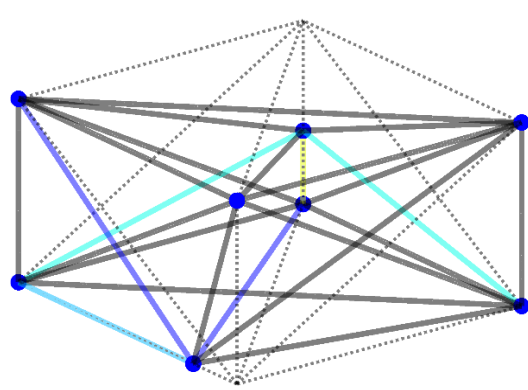
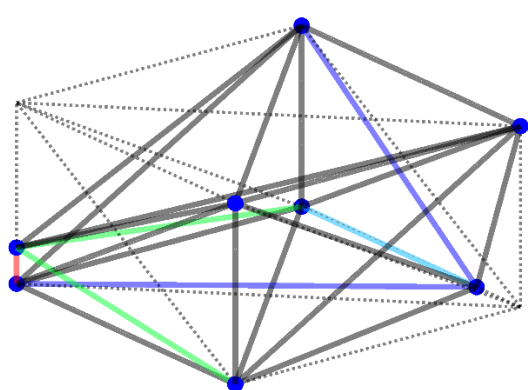


Abbildung 33: Konvention für die Knotennummerierung und die Sortierung der Verschiebungen in den Verschiebungsvektoren der einzelnen Verschiebungsfälle

<p>Verschiebungsfall 3:</p>	<p>Verschiebungsfall 4:</p>
	
<p>Verschiebungsfall 5:</p>	<p>Verschiebungsfall 6:</p>
	
<p>Verschiebungsfall 7:</p>	<p>Verschiebungsfall 8:</p>
	

<p>Verschiebungsfall 9:</p>	<p>Verschiebungsfall 10:</p>
	
<p>Verschiebungsfall 11:</p>	<p>Verschiebungsfall 12:</p>
	
<p>Verschiebungsfall 13:</p>	<p>Verschiebungsfall 14:</p>
	

Verschiebungsfall 15:	Verschiebungsfall 16:
	
Verschiebungsfall 17:	Verschiebungsfall 18:
	
Verschiebungsfall 19:	Verschiebungsfall 20:
	

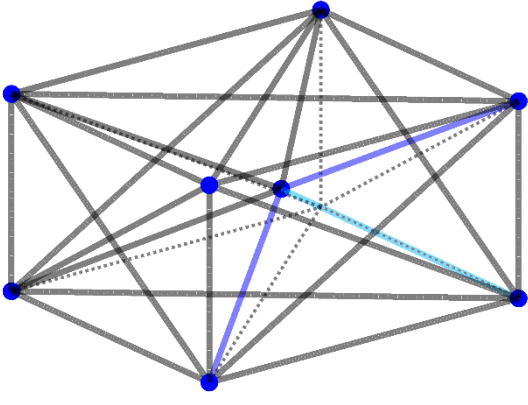
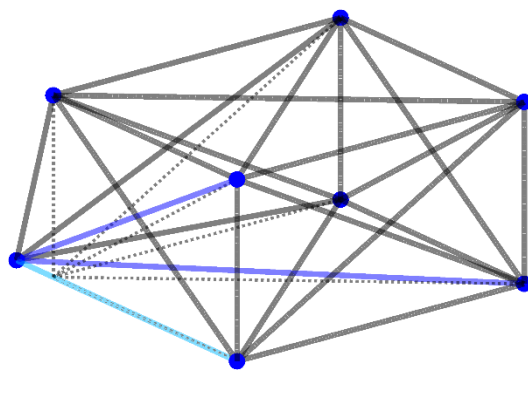
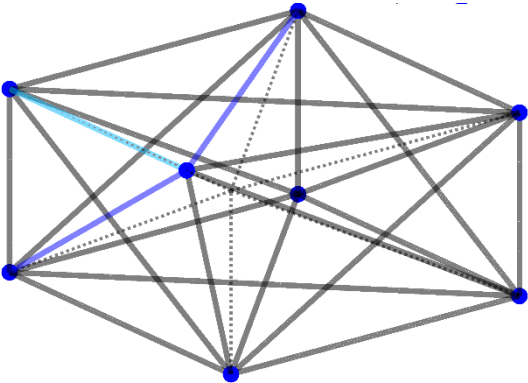
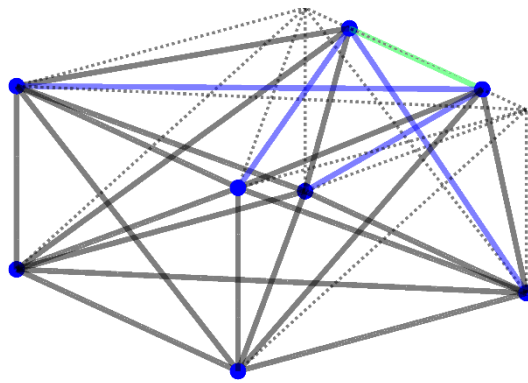
Verschiebungsfall 21:	Verschiebungsfall 22:
	
Verschiebungsfall 23:	Verschiebungsfall 24:
	

Tabelle 1: Alle 24 Verschiebungsfälle angewendet auf den Testwürfel 2x5 mit zusätzlichen Eckkanten. Zusätzlich sind die aus den Verschiebungen in den Stäben resultierenden Spannungen eingezeichnet.

Anhang E

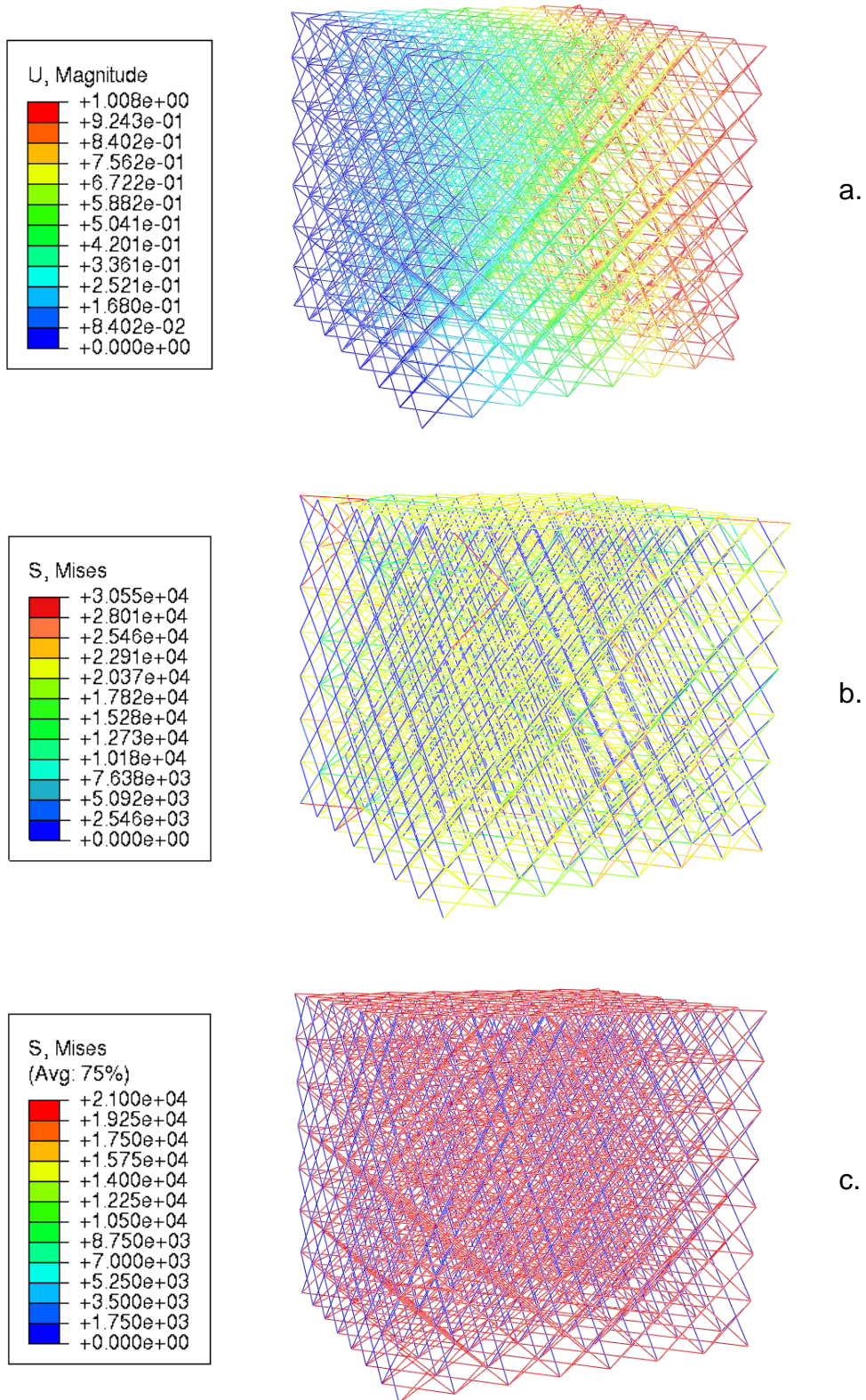


Abbildung 35: Vergleich der in den Stäben des Testwürfels 8x5 auftretenden Spannungen bei der Verwendung von "adjust = yes" und "adjust = no" in der Definition der Constraints.

In Kapitel 7.2.1 wird der Unterschied bei der Verwendung von "*adjust = yes*" und "*adjust = no*" in der Definition der Constraints am Beispiel des Testwürfels 15×5 vorgestellt. Bei diesem Testwürfel beendet Abaqus die Simulation lediglich bei der Verwendung von "*adjust = no*". Bei Testwürfeln bis einschließlich $k_{nodes} = 8$ Knoten entlang einer Würfelkante beendet die Simulation die Berechnung auch bei der Verwendung von "*adjust = yes*". Da für die Simulation aller Testwürfel die gleiche Definition der Constraints verwendet werden soll, wird auch für diese Testwürfel "*adjust = no*" gesetzt. Dies hat eine Spannungsüberhöhung zur Folge, wie sie auch bei größeren Testwürfeln auftritt. Diese Spannungsüberhöhung wird in Abbildung 35 am Beispiel des Testwürfels 8×5 , der Verschiebungsfall eins unterworfen wird, illustriert.

Anhang F

Für den Vergleich der reduzierten Gesamtsteifigkeit eines symmetrischen und eines asymmetrischen Testwürfels wird die Differenzmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{K}_{red,symmetrisch} - \mathbf{K}_{red,asymmetrisch}$ gebildet. Die Elemente werden nachfolgend in Submatrizen kombiniert, um die gesamte Differenzmatrix \mathbf{D} darstellen zu können. Eine beispielhafte Spalte, die wie in Abschnitt 7.2.2 beschrieben, geringere Abweichungen aufweist, ist rot markiert.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. F.1})$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} -249,60 & -9,28 & -4,43 & -177,44 & 9,28 & 0,00 & -57,35 & 9,28 \\ -9,28 & 18,56 & -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 & -18,56 \\ -4,43 & -9,28 & -249,60 & 0,00 & -9,28 & 245,18 & -0,89 & 9,28 \\ -177,44 & 9,28 & 0,00 & -249,60 & -9,28 & 4,43 & -28,06 & -9,28 \\ 9,28 & 0,00 & -9,28 & -9,28 & 18,56 & 9,28 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & 245,18 & 4,43 & 9,28 & -249,60 & 0,00 & -9,28 \\ -57,35 & -9,28 & -0,89 & -28,06 & 9,28 & 0,00 & -249,60 & 9,28 \\ 9,28 & -18,56 & 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 & 18,56 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} -0,89 & -9,28 & -57,35 & 0,00 & -9,28 & 56,46 & -4,43 & 9,28 \\ -28,06 & 9,28 & 0,00 & -57,35 & -9,28 & 0,89 & -177,44 & -9,28 \\ -9,28 & 0,00 & 9,28 & 9,28 & -18,56 & -9,28 & -9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & 56,46 & 0,89 & 9,28 & -57,35 & 0,00 & -9,28 \\ 245,18 & 9,28 & 0,00 & 181,87 & -9,28 & -4,43 & 56,46 & -9,28 \\ -9,28 & 0,00 & 9,28 & 9,28 & -18,56 & -9,28 & -9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & -177,44 & -4,43 & 9,28 & 181,87 & 0,00 & -9,28 \\ 181,87 & -9,28 & 4,43 & 245,18 & 9,28 & 0,00 & 28,95 & 9,28 \end{bmatrix}$$

$$D_{31} = \begin{bmatrix} 9,28 & -18,56 & 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 & 18,56 \\ 4,43 & -9,28 & 181,87 & 0,00 & -9,28 & -177,44 & 0,89 & 9,28 \\ 56,46 & 9,28 & 0,00 & 28,95 & -9,28 & -0,89 & 245,18 & -9,28 \\ 9,28 & 0,00 & -9,28 & -9,28 & 18,56 & 9,28 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & -28,06 & -0,89 & 9,28 & 28,95 & 0,00 & -9,28 \\ 28,95 & -9,28 & 0,89 & 56,46 & 9,28 & 0,00 & 181,87 & 9,28 \\ -9,28 & 18,56 & -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 & -18,56 \\ 0,89 & -9,28 & 28,95 & 0,00 & -9,28 & -28,06 & 4,43 & 9,28 \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} -0,89 & -28,06 & -9,28 & 0,00 & 245,18 & -9,28 & 0,00 & 181,87 \\ -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 \\ -57,35 & 0,00 & 9,28 & 56,46 & 0,00 & 9,28 & -177,44 & 4,43 \\ 0,00 & -57,35 & 9,28 & 0,89 & 181,87 & 9,28 & -4,43 & 245,18 \\ -9,28 & -9,28 & -18,56 & 9,28 & -9,28 & -18,56 & 9,28 & 9,28 \\ 56,46 & 0,89 & -9,28 & -57,35 & -4,43 & -9,28 & 181,87 & 0,00 \\ -4,43 & -177,44 & -9,28 & 0,00 & 56,46 & -9,28 & 0,00 & 28,95 \\ 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} = \begin{bmatrix} -249,60 & 0,00 & 9,28 & 245,17 & 0,00 & 9,28 & -28,06 & 0,89 \\ 0,00 & -249,60 & 9,28 & 4,43 & 28,95 & 9,28 & -0,89 & 56,46 \\ 9,28 & 9,28 & 18,56 & -9,28 & 9,28 & 18,56 & -9,28 & -9,28 \\ 245,18 & 4,43 & -9,28 & -249,60 & -0,89 & -9,28 & 28,95 & 0,00 \\ 0,00 & 28,95 & 9,28 & -0,89 & -249,60 & 9,28 & 4,43 & -177,44 \\ 9,28 & 9,28 & 18,56 & -9,28 & 9,28 & 18,56 & -9,28 & -9,28 \\ -28,06 & -0,89 & -9,28 & 28,95 & 4,43 & -9,28 & -249,60 & 0,00 \\ 0,89 & 56,46 & -9,28 & 0,00 & -177,44 & -9,28 & 0,00 & -249,60 \end{bmatrix}$$

$$D_{32} = \begin{bmatrix} 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 \\ 28,95 & 0,00 & 9,28 & -28,06 & 0,00 & 9,28 & 245,18 & -4,43 \\ 0,00 & 181,87 & 9,28 & -4,43 & -57,35 & 9,28 & 0,89 & -28,06 \\ -9,28 & -9,28 & -18,56 & 9,28 & -9,28 & -18,56 & 9,28 & 9,28 \\ -177,44 & -4,43 & -9,28 & 181,87 & 0,89 & -9,28 & -57,35 & 0,00 \\ 4,43 & 245,18 & -9,28 & 0,00 & -28,06 & -9,28 & 0,00 & -57,35 \\ -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 \\ 181,87 & 0,00 & 9,28 & -177,44 & 0,00 & 9,28 & 56,46 & -0,89 \end{bmatrix}$$

$$D_{13} = \begin{bmatrix} 9,28 & 4,43 & 56,46 & 9,28 & 0,00 & 28,95 & -9,28 & 0,89 \\ -18,56 & -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 & 18,56 & -9,28 \\ 9,28 & 181,87 & 0,00 & -9,28 & -28,06 & 0,89 & -9,28 & 28,95 \\ -9,28 & 0,00 & 28,95 & -9,28 & -0,89 & 56,46 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & -9,28 & -9,28 & 18,56 & 9,28 & 9,28 & 0,00 & -9,28 \\ -9,28 & -177,44 & -0,89 & 9,28 & 28,95 & 0,00 & 9,28 & -28,06 \\ 9,28 & 0,89 & 245,18 & 9,28 & 0,00 & 181,87 & -9,28 & 4,43 \\ 18,56 & 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 & -18,56 & 9,28 \end{bmatrix}$$

$$D_{23} = \begin{bmatrix} 9,28 & 28,95 & 0,00 & -9,28 & -177,44 & 4,43 & -9,28 & 181,87 \\ -9,28 & 0,00 & 181,87 & -9,28 & -4,43 & 245,18 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & 9,28 & -18,56 & -9,28 & -9,28 & 0,00 & 9,28 \\ -9,28 & -28,06 & -4,43 & 9,28 & 181,87 & 0,00 & 9,28 & -177,44 \\ -9,28 & 0,00 & -57,35 & -9,28 & 0,89 & -28,06 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & 9,28 & 9,28 & -18,56 & -9,28 & -9,28 & 0,00 & 9,28 \\ -9,28 & 245,17 & 0,89 & 9,28 & -57,35 & 0,00 & 9,28 & 56,46 \\ 9,28 & -4,43 & -28,06 & 9,28 & 0,00 & -57,35 & -9,28 & -0,89 \end{bmatrix}$$

$$D_{33} = \begin{bmatrix} 18,56 & 9,28 & -9,28 & 0,00 & -9,28 & 9,28 & -18,56 & 9,28 \\ 9,28 & -249,60 & 0,00 & -9,28 & 56,46 & -0,89 & -9,28 & -57,35 \\ -9,28 & 0,00 & -249,60 & -9,28 & 4,43 & -177,44 & 9,28 & 0,00 \\ 0,00 & -9,28 & -9,28 & 18,56 & 9,28 & 9,28 & 0,00 & -9,28 \\ -9,28 & 56,46 & 4,43 & 9,28 & -249,60 & 0,00 & 9,28 & 245,17 \\ 9,28 & -0,89 & -177,44 & 9,28 & 0,00 & -249,60 & -9,28 & -4,43 \\ -18,56 & -9,28 & 9,28 & 0,00 & 9,28 & -9,28 & 18,56 & -9,28 \\ 9,28 & -57,35 & 0,00 & -9,28 & 245,18 & -4,43 & -9,28 & -249,60 \end{bmatrix}$$

Anhang G

Der in der Diskussion erwähnte Unterschied bei der Verwendung von Abaqus Job und Abaqus CAE wird in den nachfolgenden Abbildungen verdeutlicht. Hierfür sind in Tabelle 2 die Unterschiede der Knotenkoordinaten in den beiden Inputdecks für Testwürfel 4x5 dargestellt. In den Tabellen 3 und 4 sind die Reaktionskräfte, die sich bei Verschiebungsfall eins ergeben, sowohl für den Testwürfel 4x5 als auch für den Testwürfel 10x5 dargestellt.

*Node				*Node			
1,	0.000000,	0.000000,	0.000000	1,	0.,	0.,	0.
2,	0.000000,	0.000000,	5.000000	2,	0.,	0.,	5.
3,	0.000000,	5.000000,	0.000000	3,	0.,	5.,	0.
4,	0.000000,	5.000000,	5.000000	4,	0.,	5.,	5.
5,	5.000000,	0.000000,	0.000000	5,	5.,	0.,	0.
6,	5.000000,	0.000000,	5.000000	6,	5.,	0.,	5.
7,	5.000000,	5.000000,	0.000000	7,	5.,	5.,	0.
8,	5.000000,	5.000000,	5.000000	8,	5.,	5.,	5.
9,	0.000000,	0.000000,	0.000000	9,	0.,	0.,	0.
10,	0.000000,	0.000000,	1.666667	10,	0.,	0.,	1.66666698
11,	0.000000,	0.000000,	3.333333	11,	0.,	0.,	3.33333302
12,	0.000000,	0.000000,	5.000000	12,	0.,	0.,	5.
13,	0.000000,	1.666667,	0.000000	13,	0.,	1.66666698,	0.
14,	0.000000,	1.666667,	1.666667	14,	0.,	1.66666698,	1.66666698
15,	0.000000,	1.666667,	3.333333	15,	0.,	1.66666698,	3.33333302
16,	0.000000,	1.666667,	5.000000	16,	0.,	1.66666698,	5.
17,	0.000000,	3.333333,	0.000000	17,	0.,	3.33333302,	0.
18,	0.000000,	3.333333,	1.666667	18,	0.,	3.33333302,	1.66666698
19,	0.000000,	3.333333,	3.333333	19,	0.,	3.33333302,	3.33333302
20,	0.000000,	3.333333,	5.000000	20,	0.,	3.33333302,	5.

Tabelle 2: Knotendefinition der ersten 20 Knoten des Testwürfels 4x5. Knoten eins bis acht stellen die Referenzknoten dar.

Links: Die Knotendefinition aus dem in Matlab generierten Inputdeck (für Abaqus Job)

Rechts: Die Knotendefinitionen, die nach dem Modellimport durch Abaqus CAE erstellt wurden

Node Label	RF.Magnitude @Loc 1	RERF1 @Loc 1	RF.RF2 @Loc 1	RF.RF3 @Loc 1
1	1.83404333E+03	-1.52673633E+03	-718.606567	-718.606567
2	1.77502100E+03	-1.47569751E+03	-677.758850	716.700256
3	1.77502100E+03	-1.47569751E+03	716.700256	-677.758850
4	1.69668445E+03	-1.39593323E+03	681.948792	681.948792
5	1.80209094E+03	1.52398730E+03	-680.071533	-680.071533
6	1.76711401E+03	1.48073010E+03	-673.270874	690.533386
7	1.76711401E+03	1.48073010E+03	690.533386	-673.270874
8	1.67357239E+03	1.38861694E+03	660.525391	660.525391

Node Label	RF.Magnitude @Loc 1	RERF1 @Loc 1	RF.RF2 @Loc 1	RF.RF3 @Loc 1
1	1.67357239E+03	-1.38861694E+03	-660.525391	-660.525391
2	1.76711401E+03	-1.48073010E+03	-690.533386	673.270874
3	1.76711401E+03	-1.48073010E+03	673.270874	-690.533386
4	1.80209094E+03	-1.52398730E+03	680.071533	680.071533
5	1.69668445E+03	1.39593323E+03	-681.948792	-681.948792
6	1.77502100E+03	1.47569751E+03	-716.700256	677.758850
7	1.77502100E+03	1.47569751E+03	677.758850	-716.700256
8	1.83404333E+03	1.52673633E+03	718.606567	718.606567

*Tabelle 3: Oben: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus Job. (Testwürfel 4x5)
Unten: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus CAE. (Testwürfel 4x5)*

Node Label	RF.Magnitude @Loc 1	RFRF1 @Loc 1	RF.RF2 @Loc 1	RF.RF3 @Loc 1
1	16.2410840E+03	-13.2591318E+03	-6.62536523E+03	-6.63873389E+03
2	16.3552227E+03	-13.3749189E+03	-6.62806592E+03	6.68383057E+03
3	16.3575342E+03	-13.3814736E+03	6.67846729E+03	-6.62594629E+03
4	16.2560039E+03	-13.2859912E+03	6.62487549E+03	6.62201807E+03
5	16.3277393E+03	13.3325518E+03	-6.67474805E+03	-6.65476221E+03
6	16.3459229E+03	13.3514111E+03	-6.70852930E+03	6.62756787E+03
7	16.3522246E+03	13.3492227E+03	6.63954785E+03	-6.71639160E+03
8	16.3027051E+03	13.2683311E+03	6.69381787E+03	6.70241748E+03

Node Label	RF.Magnitude @ Loc 1	RF .RF1 @Loc 1	RF.RF2 @Loc 1	RF.RF3 @Loc 1
1	16.3030957E+03	-13.3266201E+03	-6.64062646E+03	-6.64034717E+03
2	16.3216553E+03	-13.3361650E+03	-6.63199561E+03	6.67530908E+03
3	16.3218076E+03	-13.3360020E+03	6.67665234E+03	-6.63134814E+03
4	16.2022363E+03	-13.1996992E+03	6.64414453E+03	6.64347217E+03
5	16.3527627E+03	13.3488672E+03	-6.67783252E+03	-6.68035498E+03
6	16.3707578E+03	13.3620928E+03	-6.67410645E+03	6.70167822E+03
7	16.3669775E+03	13.3608408E+03	6.69809180E+03	-6.67094043E+03
8	16.1101904E+03	13.1266865E+03	6.60567236E+03	6.60253125E+03

Tabelle 4: Oben: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus Job. (Testwürfel 10x5)

Unten: Reaktionskräfte an den Referenzknoten, verursacht durch Verschiebungsfall eins, bestimmt mit Abaqus CAE. (Testwürfel 10x5)