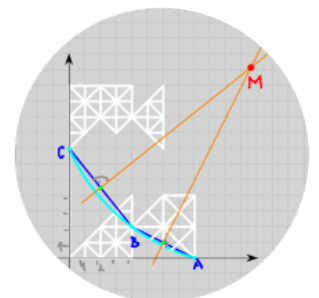
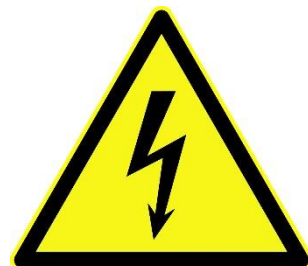
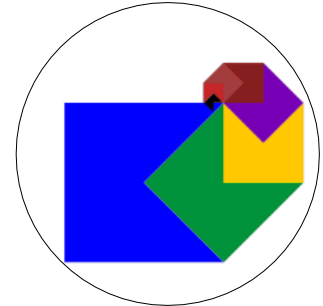


formen kräfte und

Ein mathematisch-physikalischer Gang
zur Kunst auf dem Campus Vaihingen



Die Kunstwerke:

1. Haus und Stuhl.....	4
2. Die Leerstühle.....	6
3. Hörsaalmodelle und Sternstück.....	8
4. Mosaik Leerstühle.....	12
5. Heuweg.....	14
6. Würfelaugen.....	16
7. Schneckentreppe.....	18
8. Blitzweg.....	20
9. Pergola.....	24
10. Brunnen.....	26



Formen und Kräfte

Ein mathematisch-physikalischer Gang zur Kunst



Mathematik und Physik spielen auf dem Campus Vaihingen eine zentrale Rolle: Einerseits sind es eigenständige Fachbereiche, die an der Universität Stuttgart mit Forschung und Lehre vertreten sind und die gemeinsam die Fakultät 8 bilden. Andererseits gehören grundlegende Kenntnisse der Mathematik und Physik zu den Voraussetzungen für ein erfolgreiches Studium aller anderen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Fächer, von Chemie über Maschinenbau, Elektro- und Luft- und Raumfahrttechnik bis zu Bauingenieurwesen und Architektur.

Auch im Alltag sind wir von vielfältigen Phänomenen und Anwendungen aus Mathematik und Physik umgeben, teils von offensichtlichen wie der Summation an der Supermarktkasse oder dem am Kühlschrank haftenden Magneten und teils von weniger offensichtlichen, die dann zu besonders überraschenden „Aha!“- oder „Heureka!“-Erfahrungen führen können.

Beim Rundgang „Formen und Kräfte“ geht es um derartige Objekte auf dem Campus Vaihingen, die Mathematik oder Physik teils deutlich, teils verborgen enthalten. Letzteres wohl sogar in der Mehrzahl der Fälle: Selbst wenn man als Studierende oder Mitarbeitende der Universität den Campus gut kennt und ihn regelmäßig in der einen oder anderen Art erlebt, so gibt es gerade auf der zentralen „Lernstraße“ möglicherweise sogar sehr großformatige „Dinge“, die vielfach nur beiläufig oder gar nicht wahrgenommen werden, die aber eine genauere Betrachtung lohnen und die dann vielfältige Assoziationen wecken können. Genau darum soll es in diesem Rundgang gehen! In zehn Stationen erklären wir mathematische und physikalische Phänomene anhand von Kunstwerken und den Außenraum gestaltenden Elementen auf dem Campus Vaihingen. Sie wurden zwischen 1978 und 1985 auf der „Lernstraße“ errichtet, die von der Busschleife bis zur Mensa reicht, und sie zeigen einmal mehr, dass Mathematik und Physik allgegenwärtig sind – und hoffentlich viel Spaß beim vielfältigen Entdecken bereiten!



Zur Webseite
„Formen und Kräfte“

Prof. Dr. Markus Stoppel
Dr. Marc Scheffler
Dipl.-Wirt.-Ing. (FH) Katja Stefanie Engstler



Planungsmodell der Lernstraße, mit Blick Richtung Westen. Auf den links dargestellten Parkplätzen wurden später das Hörsaalgebäude Pfaffenwaldring 53 sowie das Informatikgebäude Universitätsstraße 38 errichtet.
Copyright: "Kunst & Zwischenraum"

Die Lernstraße

Gestaltung der Außenanlage Campus Vaihingen

Gruppe „Kunst und Zwischenraum“, Arbeitsgemeinschaft
Bernd-Rüdiger Damerow + Gerhard Sonns + Jo Heber



Der Campus Vaihingen der Universität Stuttgart entstand seit den späten 1950er Jahren, indem nach und nach teils sehr große Neubauten für die ingenieur- und naturwissenschaftlichen Fakultäten und ihre Forschungsinstitute errichtet wurden.

Als verbindendes Element und zur zentralen Erschließung dieser Gebäude, einschließlich Universitätsbibliothek und Mensa, gibt es mitten auf dem Campus die „Lernstraße“: Die Gestaltung dieser Fläche mit Wegen und Aufenthaltsbereichen wurde in den 1970er und 1980er Jahren von Bernd-Rüdiger Damerow, Gerhard Sonns und Jo Heber in zwei großen Phasen entworfen, östlich bzw. westlich des Zugangs zur S-Bahn-Station.

Einige Formen sowie konstruktive Elemente durchziehen die gesamte Lernstraße, etwa rasterförmige Strukturen sowie diagonale Linien. Hinzu kommen größere künstlerische Objekte, die sich in das technisch-naturwissenschaftliche Umfeld einfügen, ohne die in den jeweiligen Gebäuden vertretenen Arbeitsgebiete direkt abzubilden. Einige dieser Objekte veranschaulichen bewusst oder unbewusst mathematische oder physikalische Konzepte, wobei es interessante Querbezüge zwischen verschiedenen Teilen der Lernstraße gibt.

Während bei großen öffentlichen Bauvorhaben „Kunst am Bau“ oft in Form einzelner fest installierter Kunstwerke anzutreffen ist, ist die „Lernstraße“ eine außergewöhnliche Gesamtgestaltung eines größeren Universitätsgeländes. Sie dient heute einerseits der praktischen Wegführung zwischen den Gebäuden und lädt andererseits zum genauen Hinschauen ein – im Rahmen dieses Rundgangs vor allem im Hinblick auf mathematische und physikalische Aspekte.



Nur senkrecht wachsen und nicht schief

Skulptur „Haus und Stuhl“

und der Schritt von zwei zu drei Dimensionen

Zwischen dem Treppenaufgang der S-Bahn-Station und dem Hörsaalgebäude Pfaffenwaldring 47 begrüßt eine Skulptur die Gäste des Campus Vaihingen. In ihr zeigen sich verschiedene Aspekte, die auch an anderer Stelle der Lernstraße eine Rolle spielen.

Die aus Beton geformten (und rot gefärbten) Teile der Skulptur umfassen einerseits die recht abstrakte Form eines Stuhles, die zentrales Element der Leerstühle vor dem Gebäude Pfaffenwaldring 9 (Seite 6) ist. Außerdem sieht man die symbolhafte Vereinfachung eines Hauses: Seitliche Wände mit einem Satteldach darauf, wobei die vordere Giebelseite des Hauses offen bleibt und somit ins Haus hinein einlädt. Etwas überraschend mag die Gestaltung der „Kanten“ erscheinen, etwa der Dachfirst oder die Dachtraufen, an denen das Haus nicht als konvexe Form erscheint, sondern ausgeprägte Rinnen aufweist. Was hat es damit auf sich?



Ansicht mit Haus



links: Giebelfront mit Fünfeck, Mitte: Haus aus reinen Flächen, rechts: Extrudieren zu größerer Dicke



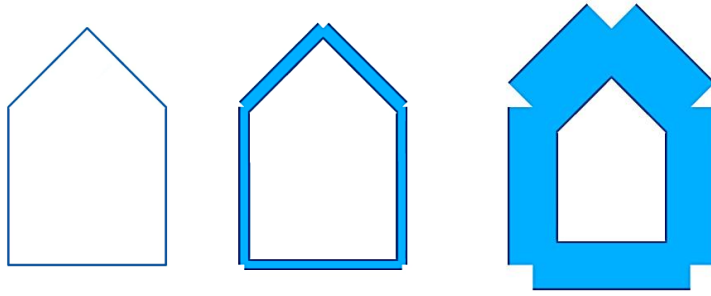
Ansicht mit Stuhl

Zeichnet man die Giebelfront des Hauses mit fünf geraden Linien, also insgesamt als Fünfeck in einer Ebene, handelt es sich dabei um eindimensionale Strukturen (Linien) in einem zweidimensionalen Raum (Ebene) (linkes der drei obigen Bilder). Nimmt man alle weiteren Kanten des Hauses wie Dachfirst und Dachtraufen hinzu, so umspannen diese die relevanten Flächen des Hauses, also Wände, Dach und Boden. Diese idealen Flächen - ohne Dicke - sind zweidimensionale Strukturen (Flächen) im dreidimensionalen Raum (mittleres der drei obigen Bilder).

Mathematischer Hintergrund

Extrudieren

Will man aus diesem vereinfachten Schema eines Hauses ein reales Gebäude errichten, so brauchen Wände, Dach und Boden eine nicht-verschwindende Dicke (d.h. die Dicke muss größer als null sein). Dieses „Dreidimensionalmachen“ der Flächen kann auf verschiedene Arten bewerkstelligt werden, hier wird das Verfahren des Extrudierens angewandt (rechtes der drei obigen Bilder): Jede dieser ebenen Flächen wird senkrecht zur Fläche aus sich herausgezogen und das damit durchwanderte Volumen wird massiv ausgefüllt.



Da dieser Vorgang streng senkrecht zur ursprünglichen Fläche vorgenommen wird, bilden sich die „Einschnitte“ an den Kanten der nun massiv gewordenen Seitenflächen des Hauses. Man kann die jetzt entstandenen Oberflächen der Skulptur auch als „Parallelfächen“ analog zu den Parabelkurven der Station Heuweg auffassen (siehe Seite 14).

Die Extrusion der Dachflächen wurde übrigens weiter vorgenommen als die der Seitenwände und des Bodens, konkret um einen Faktor $\sqrt{2}$. Dadurch liegen bei den Dachtraufen die Außenkanten des Daches bündig über den Außenflächen der Seitenwände des Hauses und die Dachflächen erscheinen massiver als Wände und Boden.

Physikalischer Hintergrund

Extrusion wird häufig in CAD-Konstruktionen eingesetzt, um aus zweidimensionalen Strukturen dreidimensionale zu machen. Mit realen Materialien wird Extrusion ebenfalls eingesetzt, indem eine plastische Masse durch ein Loch mit bestimmtem Querschnitt gepresst wird und das Material dadurch die Form des Loches in zwei Dimensionen übernimmt und diesen Querschnitt dann auf beliebiger Länge in der dritten Dimension behält.

Auch bei Kristallen in der Natur oder der materialwissenschaftlichen Forschung und Technologie kann es ähnliche Phänomene geben, wenn sich Material bevorzugt in ausgewählten Kristallrichtungen anlagert und der Kristall somit vorrangig in diese Richtungen hin wächst. Überlagern sich dabei mehrere Kristallite, kann es zu ähnlichen Strukturen kommen wie auf der Rückseite von „Haus und Stuhl“.



<https://de.wikipedia.org/wiki/Spätzle#/media/Datei:Spätzlepresse.JPG> (Ausschnitt).
Lizenz: CC0



Rückseite von „Haus und Stuhl“



Fluorit, Quarz
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluorite-Quartz-tc902a.jpg>. Attribution: Rob Lavinsky, iRocks.com – CC BY-SA 3.0



Der Prof thront nicht da oben

Die Leerstühle - von den 68ern zum Platz an der Sonne

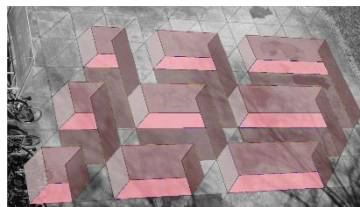
Vor dem Haupteingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 9 sind die Leerstühle aus Beton platziert: Das Wortspiel „Leerstuhl - Lehrstuhl“ erinnert an die Ordinarien, also die „ordentlichen Professoren“ oder eben „Lehrstuhlinhaber“. In der Entstehungszeit der Plastik (Mitte der 1970er Jahre) waren sicher die Proteste der 68er Studentenbewegung präsent, die sich auch gegen abgehobene Professoren, deren scheinbar allmächtige Position und steil ansteigende Hierarchien richteten: „Unter den Talaren - der Muff von tausend Jahren“. Die machtvoll und autoritär besetzten Positionen sind geräumt ... die Plätze in der Sonne werden gerne von Studierenden genutzt. Gar so breit wären die Sitzflächen selbst für den gewichtigsten Professor aber nicht nötig - vielleicht darf man hier auch Bänke oder Sitzreihen erkennen, gestaffelt wie im großen Hörsaal.



Hörsaal V57.03



Skulptur „Leerstühle“



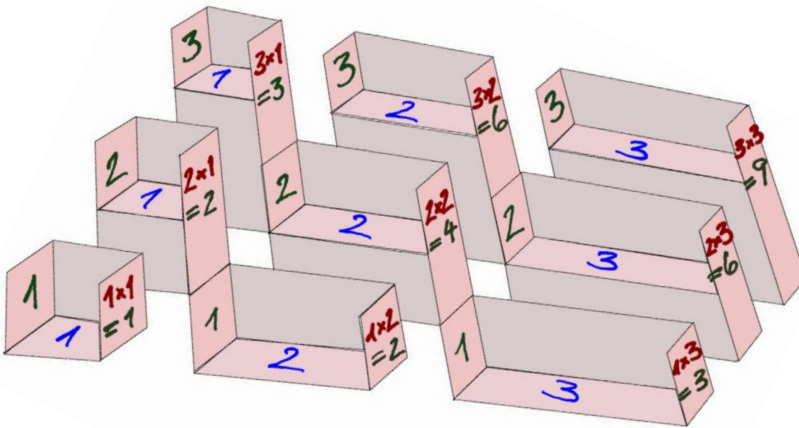
Die Leerstühle werden durch eine Darstellung als Parallelprojektion wieder aufgegriffen im Mosaik vor dem Haupteingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 7.



Die Leerstühle erinnern auch an leere Reihen in den Hörsälen während der Pandemie ...

Mathematik?

Grundsätzlich kann man zu jeder endlichen Abfolge von Zahlen ein „Bildungsprinzip“ als Formel angeben, mit deren Hilfe sich diese ersten Glieder aus ihrer jeweiligen Nummer ergeben - sogar viele verschiedene Formeln ... die „Vorhersage“ birgt dann eine gewisse Willkür. Nichtsdestotrotz sind die Natur- und Ingenieurwissenschaften voll von Beispielen, bei denen solche auf den ersten Blick willkürlich in die Daten hinein interpretierten Muster zu brauchbaren Theorien geführt haben. Wir wollen in die Zahlen, die wir aus Höhe und Breite der Leerstühle lesen, eine Anordnung, ein Bildungsprinzip und dann eine Fortsetzung konstruieren.

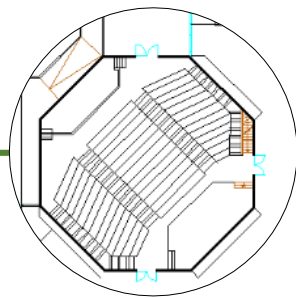


8	8	16	24	32	?	48	56	64	???	???	????
7	7	14	?	28	35	42	49	56	63	70	77
6	6	12	18	24	30	?	42	48	54	60	66
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
4	4	8	12	16	20	24	28	32	??	40	44
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

In der ersten Reihe ändert sich die Breite des Sitzmöbels von links nach rechts zunehmend (siehe die blauen Zahlen). Mit jeder Reihe, die wir weiter nach hinten gehen, ändert sich analog die Höhe. Da die Tiefe immer konstant bleibt, ergibt sich die Maßzahl des Volumens jedes Sitzmöbels aus dem Produkt Höhe mal Breite. Das Bildungsprinzip „Multiplikation“ führt auf eine Tabelle, deren Symmetrie eine fundamentale Rechenregel aufzeigt:

Die Kommutativität der Multiplikation $x \cdot y = y \cdot x$.

Außerdem findet man auf der Diagonalen der Tabelle die Quadratzahlen.



Der Prof springt im Achteck

Modelle der achteckigen Hörsäle und ein Sternstück

Die Geometrie der in die Gebäude Pfaffenwaldring 7 und 9 integrierten Hörsäle wird durch drei betonierte Modelle vor einem der Zugänge zum Gebäude angedeutet. Auch das Sternstück nimmt die regelmäßig achteckige Struktur dieser Grundrisse auf, verdeutlicht und verfremdet sie gleichzeitig. Zum Sternstück muss man sich ein Stück weit in die Eingangsschlucht hinein wagen.

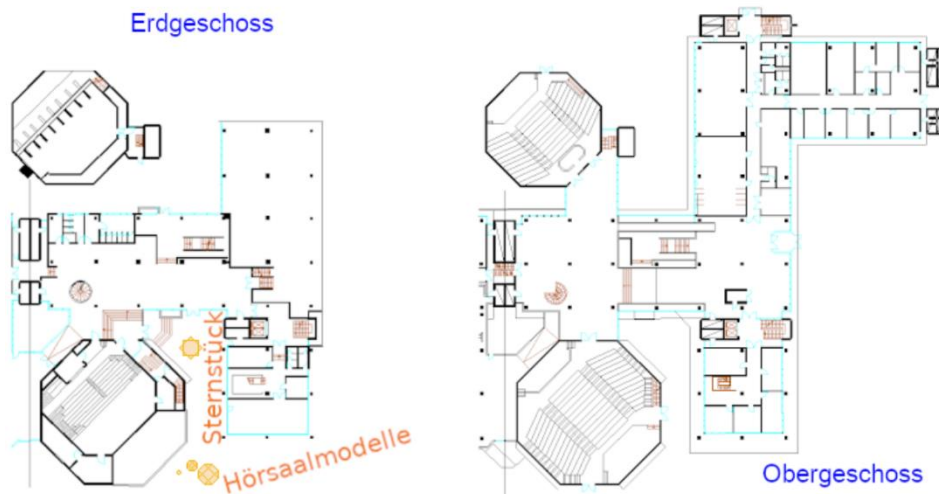


Die Hörsaalmodelle

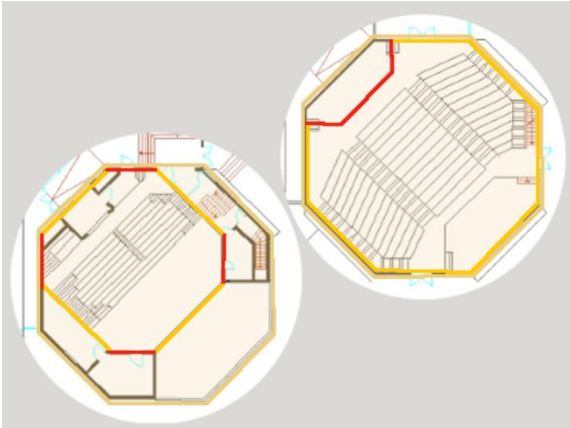


Das Sternstück

Die regelmäßig achteckige Form der Hörsäle selbst lässt sich von außen erst wahrnehmen, wenn man ein bisschen abgehoben ist und über der Sache steht, deswegen ein Ausschnitt aus dem Bauplan:



Im Innern der Hörsäle ist die regelmäßige Form dadurch verschleiert, dass verschiedene Nebenräume vom achteckigen Grundriss abgetrennt sind. Selbst die Modelle lassen Zweifel (oder den Ruf nach einem Meterstab zum Nachmessen) aufkommen: Die zu Grunde liegende Form scheint kein regelmäßiges Achteck zu sein, sondern nur die Symmetrieeigenschaften von zwei geschickt überlagerten und dann eingehüllten Rechtecken zu haben. Dieser Eindruck wird auch durch die Dachgestaltung des Hörsaals V 7.02 unterstützt.



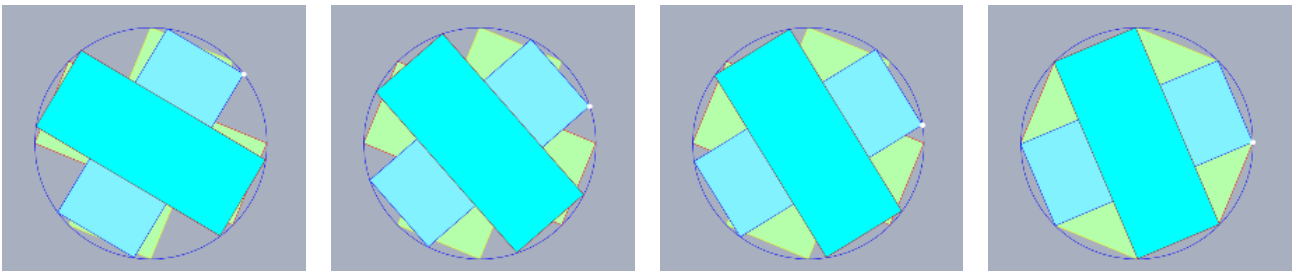
Form der Hörsäle innen



Dach des Hörsaals V 7.02

Mathematischer Hintergrund Konstruktionen und Symmetrien

Tatsächlich bildet aber der Umriss des Hörsaals (und der des Modells) jeweils ein regelmäßiges Achteck; die acht Seiten sind alle gleich lang, die eingeschlossenen Winkel sind alle gleich. Man könnte (in der Theorie) das Achteck durch eine Achtdrehung mit sich selbst wieder zur Deckung bringen.

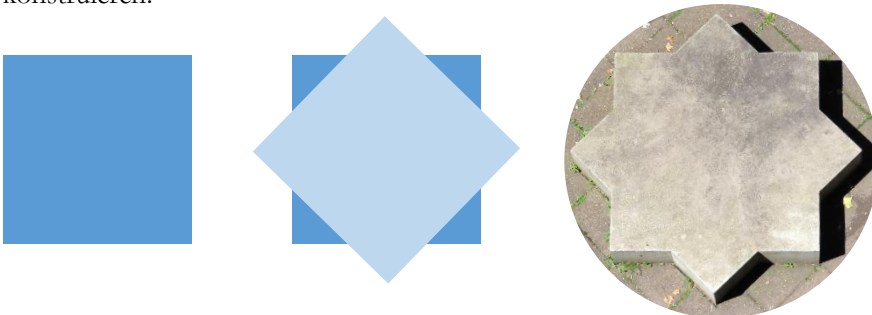


Man kann das regelmäßige Achteck aus Papier allein durch Falten basteln, oder mit Zirkel und Lineal konstruieren wie die alten Griechen. Oder man gewinnt das regelmäßige Achteck durch Überlagern von zwei passenden Rechtecken - die richtigen Abmessungen können dabei errechnet werden.



© Prof. M. Stoppel

Der im Sternstück dargestellte Stern hat die gleichen Symmetrien wie die regelmäßigen Achtecke: Es gibt insgesamt acht Drehungen und acht Spiegelungen. Man kann den Stern einfach durch Überlagerung von zwei Quadraten konstruieren.



Errechnen des Achtecks (PDF)

Physikalischer Hintergrund Skalieren von Größen

Die drei „Hörsaalobjekte“ haben alle dieselbe Form: Es sind achteckige, reguläre Prismen, die von oben betrachtet jeweils von einem regelmäßigen Achteck gebildet werden. Die Seitenflächen der Prismen sind jeweils Quadrate, damit sind alle Kantenlängen eines Prismas gleich. Bei diesen drei unterschiedlich großen Polyedern handelt es sich also jeweils um ein gleichseitiges, reguläres, achteckiges Prisma.



Trotzdem ist die Wirkung der drei Objekte sehr unterschiedlich. Dies liegt an den Abmessungen. Die Außenabmessungen des mittleren Objektes sind doppelt so groß wie die des kleinen und die des großen sind doppelt so groß wie die des mittleren. Man sagt, dass die Außenformen vom kleinen zum mittleren und dann zum großen Objekt jeweils um den Faktor 2 skaliert wurden.

Solche Skalierungen und ihre Auswirkungen spielen in der Physik eine große Rolle. Je nach relevanten Skalen müssen unterschiedliche Phänomene betrachtet werden. Auf sehr kleinen Skalen (sehr kleine Längenabmessungen, etwa bei Atomen) dominiert die Quantenmechanik, wohingegen bei sehr großen Skalen (sehr große Abmessungen, etwa im Weltall) die Relativitätstheorie berücksichtigt werden muss.



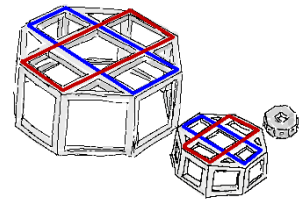
© Prof. M. Stroppel

Auch im Alltag spielt Skalenverhalten eine große Rolle. Ein geometrisches Phänomen ist dabei beispielsweise, dass sich das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen eines Körpers verändert, wenn man alle Abmessungen in den drei Dimensionen mit einem gemeinsamen Faktor skaliert. So verhalten sich Wassertropfen je nach Größe sehr unterschiedlich: Im Regen fallen sie schnell zu Boden, im Nebel hingegen nicht.

Ein anderes Beispiel betrifft Sonne und Mond: Der Durchmesser der Sonne ist mit fast 1,4 Millionen Kilometern etwa 400 mal so groß wie der Durchmesser des Mondes (knapp 3500 km), das Volumen der Sonne ist somit ca. $400^3 = 64 \cdot 10^6$ also 64-Millionen-mal größer als das des Mondes. Da die Sonne aber ebenfalls ca. 400-mal soweit von der Erde entfernt ist wie der Mond, erscheinen Sonne und Mond von der Erde aus gesehen praktisch gleich groß. Das ist bei einer Sonnenfinsternis wichtig, wenn sich für den Beobachter auf der Erde der Mond vor die Sonne schiebt. Da sich die Abstände zwischen Erde und Sonne bzw. Erde und Mond wegen der leicht ellipsenförmigen Umlaufbahnen im Laufe eines Jahres leicht ändern, gibt es sowohl totale Sonnenfinsternisse (Mond bedeckt Sonne vollständig) als auch ringförmige Sonnenfinsternisse (ein schmaler „Ring“, der Rand der Sonne, wird vom Mond nicht verdeckt).

Skalenverhalten finden wir auch bei den drei Hörsaalobjekten, bei denen die Außenabmessungen zwar jeweils um den Faktor zwei skaliert sind, die Dicke der aus Beton geformten Kanten hingegen gleich bleibt. Somit ändert sich das Kantenlängen-zu-Gesamtvolumen-Verhältnis deutlich und dies fällt sofort ins Auge: Das größte Hörsaalobjekt erscheint als leicht-voluminöser Körper, dessen Kanten „kaum ins Gewicht“ fallen, wohingegen beim kleinsten Hörsaalobjekt fast das gesamte Volumen von den massiven Kanten ausgefüllt wird. Die Eigenschaften des kleinsten Hörsaalobjekts werden von den Kanten dominiert, die des größten dagegen vom Volumen.

Im idealen Fall der Skalierung eines geometrischen dreidimensionalen Körpers um einen Faktor 2 verringert sich das Kantenlängen-zu-Gesamtvolumen-Verhältnis um einen Faktor $2^3/2 = 4$, also beim Vergleich des kleinsten und des größten Hörsaalobjektes um den Faktor $4^2 = 16$ und dieser große Effekt zeigt sich hier auf den ersten Blick. Genaugenommen ist es hier nicht exakt der Faktor 16, da die relevanten Betonbalken der Kanten selbst dreidimensionale Körper sind, die sich teilweise überschneiden. Diese Überschneidungsbereiche werden beim Verdoppeln der Kantenlänge nicht mitskaliert.

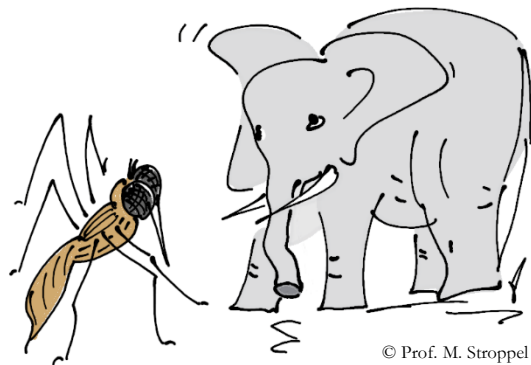


Auch in der Biologie wird Skalenverhalten thematisiert:

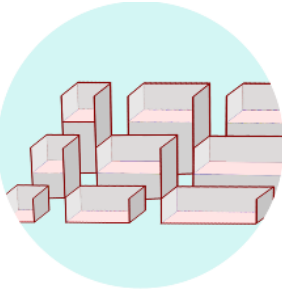
Wenn man ein Lebewesen (ob Pflanze oder Tier) einfach um einen festen Faktor skaliert, wachsen Oberflächen (die für den Austausch von Sauerstoff oder Nährstoffen relevant sind) eben nur mit dem Quadrat, die zu versorgenden Körpermassen aber mit der dritten Potenz des Faktors.

Deswegen brauchen wir Säugetiere eine komplizierte Lunge, die die Oberfläche durch eine Unzahl kleiner Blasen vergrößert; ein Insekt oder gar ein Einzeller kommt mit einem viel einfacheren Atmungssystem aus.

Es ist eben doch nicht so einfach,
aus einer Mücke einen Elefanten zu machen!



© Prof. M. Stoppel



Da biste platt, Prof

Die Leerstühle als Mosaik

Im Boden vor dem Haupteingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 7 ist ein Mosaik eingelassen. Der äußere Rand ist mit diagonal halbierten Quadraten belegt, im Innern fallen zunächst unregelmäßige Formen auf, die sich aber durchweg an die Kanten der Quadrate und die zur Halbierung gewählten Diagonalen anpassen.

Diese drei Richtungen ziehen sich durch die Gestaltung der Lernstraße und lassen sich immer wieder entdecken. Erst bei näherem Hinsehen - nein, beim Blick aus genügend großem Abstand - kann man erkennen, dass das Mosaik eine ebene Skizze eines dreidimensionalen Objekts liefert. Diese stellt die (vor dem Haupteingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 9 aufgestellten) Leerstühle dar. (siehe Seite 6)

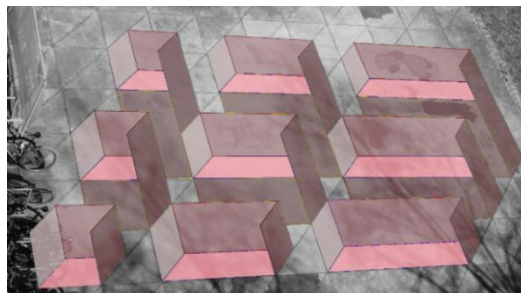


Das Leerstuhl-Mosaik



Die Leerstühle

Die Skizze ist auch deswegen nicht leicht zu erkennen, weil sie die Kabinettprojektion (ein bestimmtes, für den schnellen und zuverlässigen dreidimensionalen Eindruck schlecht geeignetes Verfahren der Parallelprojektion) nutzt. Dieses Verfahren ist aber (eventuell mit geeigneteren Verzerrungsfaktoren als hier) für Aufgaben im Ingenieuralltag wesentlich besser geeignet als die Zentralprojektion, die ein unseren Augen (und Kameras) weitgehend analoges Abbildungsprinzip nutzt - die Zentralprojektion erkaufte hohe Anschaulichkeit durch starke Verzerrungen. Die vom vierten Stock des Gebäudes aus aufgenommenen Fotografien und die daran angepassten Zeichnungen zeigen genau solche Verzerrungen: parallele Linien sind nicht als Parallelen abgebildet - die horizontalen Linien scheinen nach rechts zusammen zu laufen.



Die Verzerrung durch Zentralprojektion

Das Verfahren der Kabinett-Projektion wurde auch beim Objekt „Wegkreuz“ in der Lernstraße verwendet. Auch dort ist es nicht ganz leicht, die Darstellung zu erkennen, vor allem dann, wenn man direkt drauf steht.

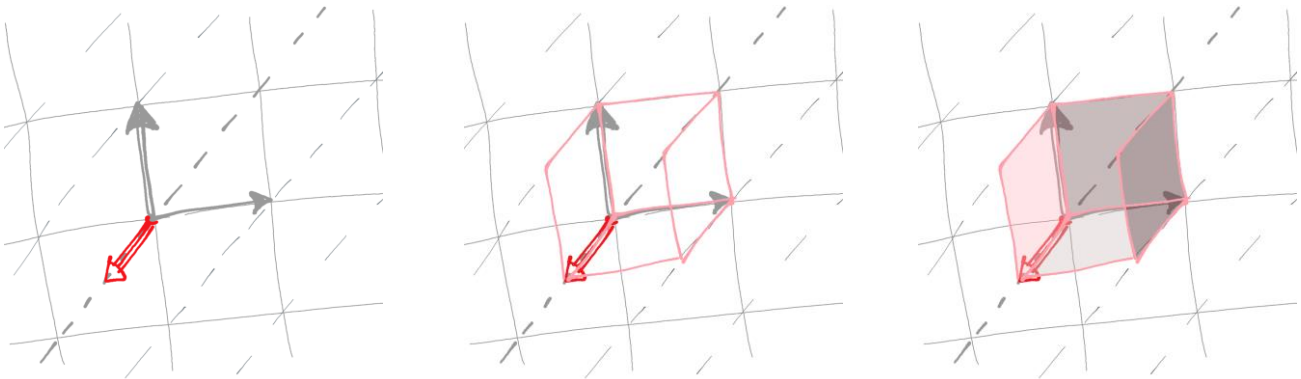


Kabinett-Projektion des Wegkreuzes

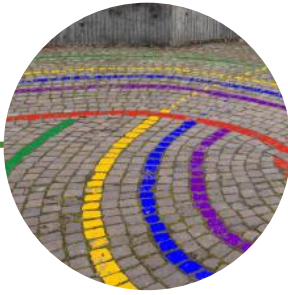
Mathematischer Hintergrund

Kabinettprojektion

In zwei Richtungen (und damit in der davon aufgespannten - hier vertikalen - Ebene) sind Längen und Winkel unverzerrt abgebildet und lassen sich ohne Schwierigkeiten aus der Projektion ablesen. Eine feste dritte Richtung (im Raum orthogonal zu den vorigen - hier horizontal in die Tiefe) wird in der Projektion frei gewählt, auch die Skalierung auf dieser Richtung wird frei gewählt. Je nach Wahl dieser Richtung und der Skalierung entlang dieser Richtung findet man einen Kompromiss zwischen dem Wunsch, den räumlichen Eindruck zuverlässig zu erzeugen, und dem Anliegen, schnell reale Abmessungen aus der Projektion herauslesen zu können.



Im Mosaik vor dem Haupteingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 7 kam auch noch das Anliegen dazu, das Mosaik in die quadratische Pflasterung so einzupassen, dass nur die ohnehin verwendete Diagonal-Richtung der Quadrate verwendet wird: Das geht klar auf Kosten der zuverlässigen räumlichen Interpretation - die dadurch erzeugte Mehrdeutigkeit macht aber einen eigenen Reiz bei der Betrachtung des Mosaiks aus, weil sich dieses beim Betrachten nicht sofort erschließt, sondern immer etwas rätselhaft bleibt.



Neben der Spur und auf der Kurve

Der Heuweg: Schriftzug, Parallelkurven und Begrenzungswände

Die ursprüngliche Konzeption der „Lernstraße“ als verbindendes Gestaltungselement auf dem damals neu entstandenen Campus Vaihingen startet mit dem „Heuweg“: Ein gepflasterter schlangenförmiger Weg, umsäumt von Rasen. Der Weg ist „lesbar“, das Wort „heu“ ist mit langem Auf- und Abschwung darin zu lesen. Ursprünglich wurde das „heu“ in den Lauben zwischen Pfaffenwaldring 47 und der Mensa fortgeführt zu „heu — heute — heureka — heut wüßst' ich's ja“.



©2022 AeroWest, Kartendaten ©2022 GeoBasis-DE/BKG (©2009), Google

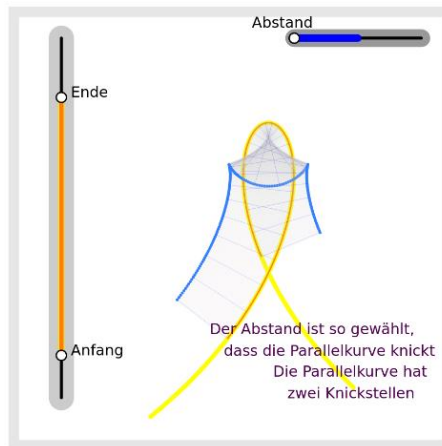
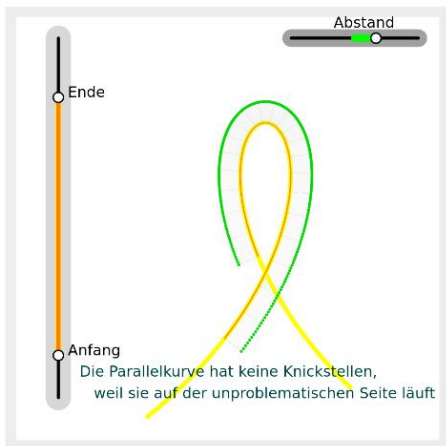
Mathematischer Hintergrund

Parallelkurven



Durch die Ausführung als Kopfsteinpflaster entstehen neben der Mittelkurve, die den Schriftzug bildet, sogenannte Parallelkurven. Die Parallelkurven sind in der bearbeiteten Fotografie bunt eingefärbt. Im Bild ist die Mittelkurve gelb markiert, dazu sind vier Parallelkurven markiert. Jede dieser Parallelkurven hält einen festen Abstand (jeweils quer zur momentanen Richtung der Mittelkurve gemessen) zur Mittelkurve ein: Man kann den Abstand an Pflastersteinen abzählen. Dabei entsteht meist eine Kurve, die qualitativ der Mittelkurve recht ähnlich ist.

Wenn der Kurvenradius im Vergleich zum gewählten Abstand zu klein wird, kann es auf der Parallelkurve zu Singularitäten (insbesondere Knicken) kommen, obwohl die Mittelkurve glatt und ohne Knick verläuft. In der (bearbeiteten) Fotografie erahnt man dieses Phänomen an der rot markierten Parallelkurve - im realen Heuweg kann man noch schlimmere Singularitäten entdecken. Eine Verallgemeinerung von Parallelkurven (nämlich Parallellflächen) findet man bei der Skulptur „Haus und Stuhl“ (siehe Seite 4).



Veränderung
des Abstands der
Parallelkurve zur
Mittelkurve



Zur interaktiven Darstellung
auf der Webseite

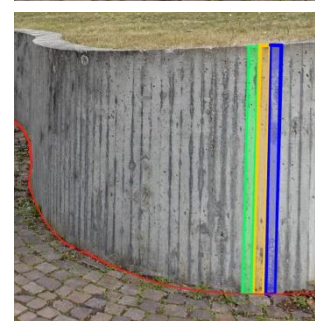
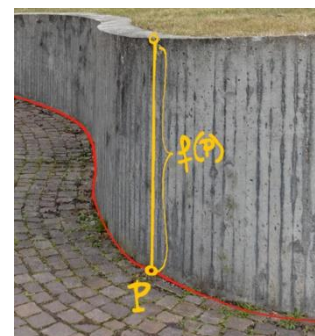
Die Wandkurve und das Kurvenintegral



Besonders auffällige Singularitäten findet man in den Kurven, die den Rand des Heuwegs bilden und auf denen vertikal betonierte Wände errichtet sind: Die Knicke sind unübersehbar. Diese Knicke kommen aber nicht vom erratischen Verhalten einer Parallelkurve, sondern rühren daher, dass der Rand aus verschiedenen Stücken einer Parallelkurve zusammengesetzt ist - die Parallelkurve selbst verlässt hier die Wand, bildet wie die Mittelkurve eine Schleife und überschneidet sich dann selbst, um wieder an die Wand zurückzukehren.

Die Wände selbst haben variable Höhe; die Fläche der Wand ist deswegen nicht leicht zu bestimmen. Wenn man die momentane Höhe der Wand als Funktion des auf der Grundlinie (also auf der Kurve am Rand des Heuwegs) liegenden Punktes auffasst, kann man die Fläche der Wand durch ein so genanntes Kurvenintegral bestimmen. Für die exakte Auswertung der abstrakten Formel braucht man nicht nur die explizite Kenntnis der Funktion, sondern auch eine Parametrisierung der Kurve (die wir als Grundriss der Wand sehen) mit einem geeigneten Parameterintervall, und die Ableitung dieser Parametrisierung.

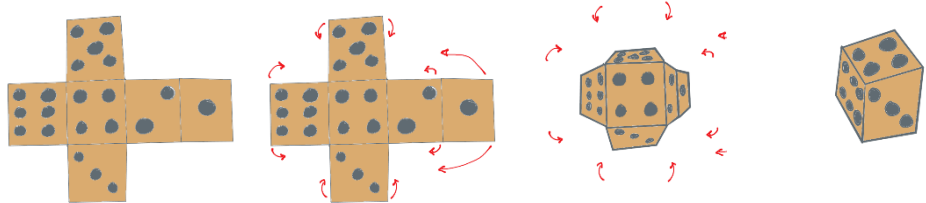
Selbst wenn man all dies hat, machen die Knicke in der Kurve noch Ärger: Man muss gegebenenfalls an solchen Knicken die Parametrisierung neu ansetzen, um das gesamte Kurvenintegral in mehreren Abschnitten zu berechnen. Für eine näherungsweise Bestimmung des Werts dieses Kurvenintegrals kann man die Fläche durch Rechtecke approximieren. In der betonierten Fassung der Wand bieten sich die Spuren der Schalung durch vertikale Bretter an: die vertikalen Streifen auf der Wand suggerieren Rechtecke wie die eben angesprochenen.





Die Würfel sind gefallen Würfelaugen im Weg und im Beet

Auf dem Durchgang quer durch die Rasenfläche von den Ingenieurinstituten zum großen Hörsaal und zur Informatik liegen große betonierte Halbkugeln im Weg. Diese sind wie die Augen auf den Seiten eines Würfels angeordnet, dabei ist die Oberfläche aufgeklappt zu einem Würfelnetz, wie man es von Bastelanleitungen her kennt.



Das Würfelnetz

Die Würfelaugen findet man (nur noch unvollständig erhalten) auch noch einmal in der Wiese; sie bilden dort das Würfelbeet. Im Originalzustand waren im Würfelbeet würzige Kräuter gepflanzt.

Außerdem tauchen die Würfelaugen in anderer Gestaltung noch einmal auf zwischen Mensa und Pfaffenwaldring 57 (auf dem Weg zum Teich, nicht mehr in unserem Rundgang).

Im Bild wurde das Würfelnetz durch nachträgliche Bearbeitung farblich herausgehoben.

©2022 AeroWest, Kartendaten ©2022 GeoBasis-DE/BKG (©2009), Google

Vom Wegkreuz zum Kreuzweg

Wenn man von den Würfelaugen weiter über den zentralen Platz geht, betritt man das Wegkreuz, bzw. den Kreuzweg: Hier ist ein (stilisiertes) dreidimensionales Kreuz durch eine Parallelprojektion (wie beim Mosaik der Leerstühle) in der Ebene dargestellt, auf der man wandelt (Seite 13).

Hintergrund (mathematisch, historisch, archäologisch)

Im Würfelnetz der Lernstraße sind die Augenzahlen anders angeordnet als auf modernen Würfeln üblich. Während sich bei handelsüblichen Würfeln gegenüberliegende Würfelseiten immer zu 7 summieren ($1+6=2+5=3+4$), liegen sich hier (nach dem Zusammenfallen) 1 mit 4, dann 2 mit 6, und schließlich 3 mit 5 gegenüber. Diese Anordnung kam wohl dadurch zustande, dass im Würfelnetz die Zahlen verteilt wurden wie bei einem Hüpfspiel (den Riesen, die hier in verunsicherten Nächten hüpfen, möchten wir aber lieber nicht unter die Sohle geraten).

Es gibt (bis auf Drehung des Würfels) insgesamt 30 Möglichkeiten, die Augenzahlen auf die Seiten zu verteilen. Es gibt nämlich $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ Möglichkeiten, die Augenzahlen irgendwie auf die sechs Seiten zu verteilen, wenn

der Würfel fest vor einem liegt. Da es aber $6 \cdot 4 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ Drehungen gibt, die den Würfel wieder in sich überführen, bleiben $720 / 24 = 6 \cdot 5 = 30$ Verteilungen bis auf Drehung.

Die Regel, dass sich gegenüberliegende Augenzahlen stets zu 7 addieren, stellt also eine sehr spezielle Wahl dar. Diese Regel ist schon seit mehr als 2000 Jahren nachweisbar. Archäologisch-historische Untersuchungen von H.C. Küchelmann zeigen, dass es im alten Ägypten (vor mehr als 3000 Jahren) noch keine festgelegte Verteilung gab. Im antiken Griechenland ist die Regel dann sowohl in archäologischen Funden als auch literarisch nachweisbar. Anscheinend haben römische Soldaten im gesamten römischen Reich Würfel verbreitet, die dieser Regel folgen. Nach dem Abzug der Römer aus den Niederlanden gab es dort für einige Zeit mehr Würfel, die einer anderen Regel folgen: nämlich 1 gegenüber 2, dann 3 gegenüber 4, und schließlich 5 gegenüber 6 (vgl. Jelmer W. Eerkens, Alex de Voogt: The Evolution of Cubic Dice from the Roman through Post-Medieval Period in the Netherlands. Acta Archaeologica 88(1) 2017, 163-173).

Spiegelbilder

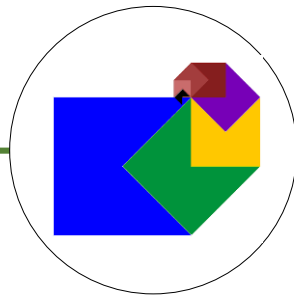
Durch die Regel „gegenüber liegende Augenzahlen addieren sich zu sieben“ ist die Belegung der Würfelseiten noch nicht vollständig (bis auf Drehung) festgelegt: Es gibt zwei verschiedene Anordnungen, die sich wie Spiegelbilder zu einander verhalten. Dieses Phänomen wird mit dem Fachbegriff Chiralität bezeichnet (auf deutsch könnte man das mit „Händigkeit“ übersetzen). Chiralität gibt es auch bei Molekülen, insbesondere bei Enzymen spielt diese Eigenschaft oft eine wichtige biochemische Rolle. Bei Schraubverbindungen für Gas- bzw. Wasserleitungen wird durch Chiralität verhindert, dass versehentlich die falschen Leitungen verbunden werden.



Chiralität: Eine Spiegelung erzeugt den linken aus dem rechten Würfel (und den rechten aus dem linken).

Bei den unten gezeigten Würfeln kommt eine der beiden chiralen Versionen statistisch häufiger vor: eine Reihe tanzt aus der Reihe - welche?





Addieren ins Aschgraue

Die Schneckentreppe und ihre Abwicklung

In den Rasen eingebettet fallen zunächst mehrere Stufen auf, die absteigend kleiner werden und eine Spirale bilden. Jede einzelne Stufe besteht aus einem Quadrat mit einem dreieckigen Ausschnitt, in den die nächste Stufe dann passt.



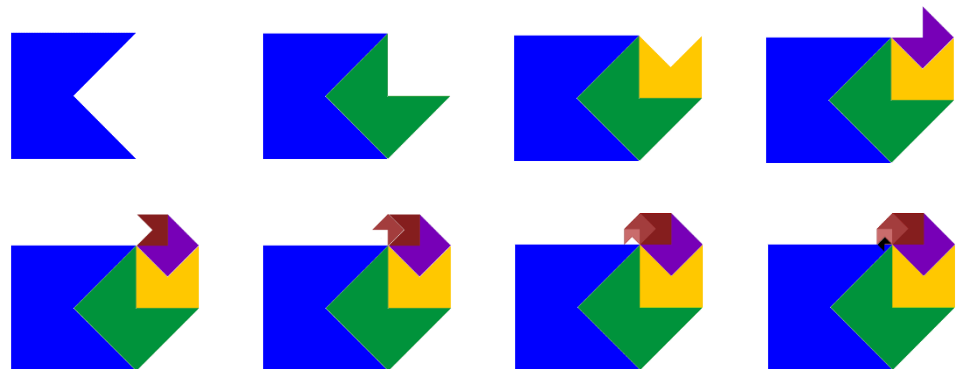
Die Schneckentreppe



Dabei hat der Ausschnitt ein Viertel der Fläche des Quadrats, die folgende Stufe hat gerade die Hälfte der Fläche der vorausgehenden Stufe. Das sieht man im folgenden Bild: das hellblaue Dreieck ist doppelt so groß wie das hellgrüne, das dunkelblaue doppelt so groß wie das dunkelgrüne.

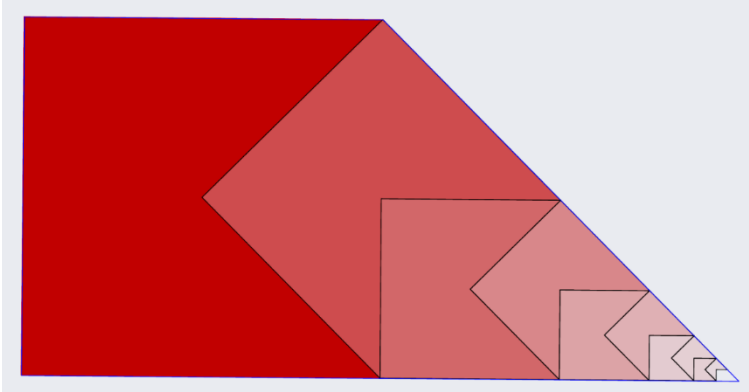


Die Stufen fahren in dieser Weise fort, werden immer kleiner und bilden eine Spirale:



Das wäre kein Problem, wenn man sich vorstellt, dass die Stufen sich spiraling immer weiter ins Erdreich hinab anordnen - wie bei einer Wendeltreppe (bei der hier realisierten Stufenhöhe könnten allerdings nur sehr kleine Zwerge diese Treppe nutzen ...) Diese Vorstellung führt auf eine beliebig tief absteigende Treppe.

Neben der Treppe sind Kopien der Stufen in den Rasen hinaus abgewickelt: Bei dieser Anordnung kann man beliebig viele weitere Stufen überlappungsfrei anfügen. Obwohl wir - in Gedanken - immer weitere Stufen anfügen (und die Wendeltreppe beliebig weit nach unten führt), kommen wir durch die Abwicklung über die im Bild (und im Rasen) angedeutete Fläche nicht hinaus.



Mathematischer Hintergrund

Wir geben der Urstufe die Nummer 0, und nehmen an, dass diese Urstufe die Fläche A_0 hat (in welcher Maßeinheit auch immer).

Die nächste Stufe hat dann die Nummer 1 und die Fläche $A_1 = 1/2 A_0$,

dann kommt Stufe Nummer 2 mit Fläche

$$A_2 = 1/2 A_1 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot A_0 = (1/2)^2 A_0, \dots$$

allgemein hat die Stufe mit der Nummer n dann die Fläche $A_n = (1/2)^n A_0$.

Wenn wir die Flächen bis zur Nummer N zusammen addieren, erhalten wir $A_0 + A_1 + \dots + A_N = A_0 + 1/2 A_0 + \dots + (1/2)^N A_0 = (1 + 1/2 + \dots + (1/2)^N) A_0$.

Wenn wir nicht aufhören zu addieren, streben unsere Faktoren

$$S_N = 1 + 1/2 + \dots + (1/2)^N$$

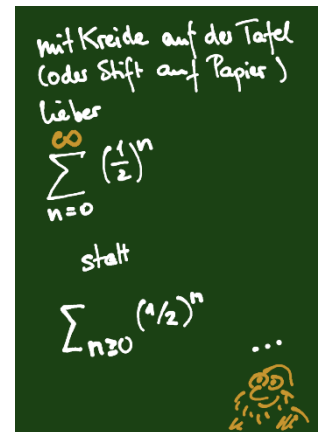
gegen das, was Mathematiker und Mathematikerinnen (und Artverwandte) mit $\sum_{n \geq 0} (1/2)^n$ bezeichnen. Dass diese unendlich lange Addition eine sinnvolle Bedeutung haben könnte, wird durch die ausgewickelte Schnecken-treppe angedeutet. Man kann sogar erkennen, dass diese unendlich lange Addition insgesamt den Wert $2A_0 = (\sum_{n \geq 0} (1/2)^n) A_0$ ergibt, also $2 = \sum_{n \geq 0} (1/2)^n$.

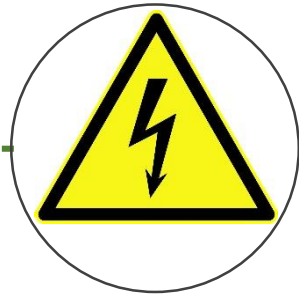
Mehr mathematischer Hintergrund

Zur Begründung der Summenformeln gibt es ein Video, das allerdings die in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ behandelte Mathematik voraussetzt.

Man kann sich die unendlich lange Summation auch mit einer Verallgemeinerung des Turms von Babel verdeutlichen.

Zenos Paradox lässt sich mit Hilfe der hier betrachteten unendlich langen Summation auflösen - mehr dazu im Abschnitt 12.1 des Büchleins *Begegnungen mit Mathematik*. (DOI: 10.13140/RG.2.1.3263.0805)





Zick-zack mit Hochspannung

Der Blitzweg zwischen Elektrotechnik und Physik

Zwischen den Gebäuden der Elektrotechnik (mit den vorgelagerten Hörsälen) und der Universitätsbibliothek liegt eine höhergelegte und durch ein Pflasterraster strukturierte Rasenfläche. Die Kante dieser erhöhten Fläche hat eine sehr zackige Form: Sie wurde von den Architekten der Lernstraße als „Blitzweg“ gestaltet. Dieser Blitz zielt von der Elektrotechnik auf das Hochhaus, in dem die Institute der Physik beheimatet sind.



Der Blitzweg

Blitze sind ein aus Gewittern vertrautes Naturphänomen, welches mit großen Gefahren verbunden ist: Blitzschlag kann für Menschen tödlich enden oder Brände auslösen. Blitze entstehen in Gewitterwolken, in denen sehr hohe elektrische Spannungen vorliegen. Bei derartigen Hochspannungen kann es in Luft, die an sich ein schlechter elektrischer Leiter ist, zu elektrischen Durchschlägen kommen, bei denen sehr starke elektrische Ströme durch schmale „Kanäle“ fließen: Wir nehmen das als Blitz wahr.

Die Möglichkeit ähnlicher Durchschläge und elektrischer Entladungen muss immer berücksichtigt werden, wenn man technische Einrichtungen plant, die mit Hochspannung (mehr als 1000 Volt) arbeiten. Dementsprechend besteht das Warnzeichen für Hochspannungseinrichtungen aus einem stilisierten Blitz.



Physikalischer Hintergrund

Was ist eigentlich ein Blitz und warum ist er gezackt?

Das helle Leuchten eines Blitzes entsteht dadurch, dass durch den etwa zentimeter-dicken sogenannten Blitzkanal ein extrem starker elektrischer Strom fließt, der die Luft auf Temperaturen von einigen zehntausend Grad erhitzt, sodass aus der Luft ein leuchtendes Plasma wird - wie es auch in der Sonne oder in einer Kerzenflamme vorkommt.

Bevor es dazu kommt, laufen typischerweise eine Reihe verschiedener Prozesse ab: In der Gewitterwolke findet durch Kollisionen zwischen Eiskristallen und Wassertropfen eine Ladungstrennung statt. Die nach oben steigenden Eiskristalle führen zu einer elektrisch positiv geladenen Oberseite der Gewitterwolke, während die Unterseite der Wolke negativ aufgeladen wird.

Die elektrischen Spannungen zwischen Wolke und Erdboden können dann Millionen Volt betragen, aber trotzdem findet zunächst kein elektrischer Durchschlag statt, weil normale Luft ein guter elektrischer Isolator ist. Stattdessen findet von der Wolke aus in Richtung Erdboden eine Abfolge von Vorentladungen statt, die jeweils eine ca. 50 m lange Strecke durch die Luft ionisieren, wodurch diese elektrisch leitfähig wird. Diese Entladungen des sogenannte Leitblitzes schließen an die jeweils vorherige an, können sich aber in ihrer Richtung ändern – was im Endeffekt die gezackte Form des Blitzes bewirkt.

Wenn der Leitblitz den Erdboden erreicht und somit der gut leitfähige Blitzkanal zwischen Wolke und Erdboden gebildet ist, beginnt die eigentliche Blitzentladung. Für den Bruchteil einer Sekunde fließen extrem starke elektrische Ströme, die das Gas im Blitzkanal zu einem Plasma erhitzen und das helle Aufleuchten verursachen. Meist folgen mehrere derartige Entladungen schnell nacheinander durch denselben Blitzkanal, wodurch der Blitzschein flackert. Durch die sehr hohen Temperaturen dehnt sich das Gas im Blitzkanal schlagartig aus, was zu einer Druckwelle führt, die wir als Donner wahrnehmen.

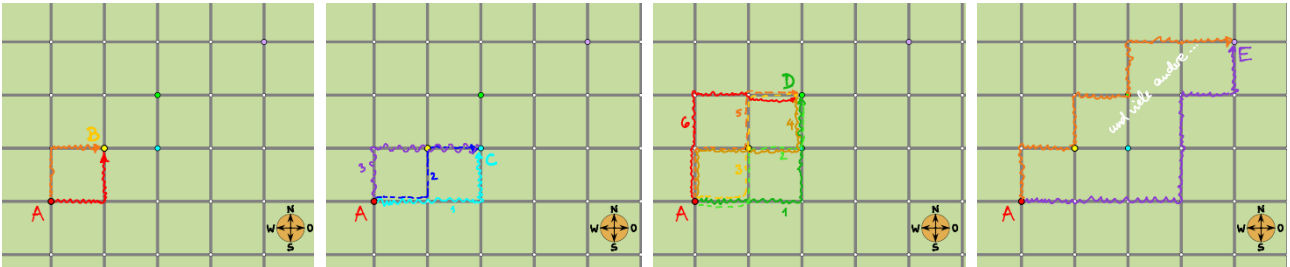
Blitze sind ein Naturphänomen mit anspruchsvollen, auch von aktueller Forschung nicht vollständig erklärten physikalischen Ursachen. Gleichzeitig spielen sie in der Hochspannungstechnik eine wichtige Rolle. Somit ist es naheliegend, dass die Verbindung zwischen den Gebäuden der Fachbereiche für Physik bzw. für Elektrotechnik innerhalb der Lernstraße der „Blitzweg“ ist.



Blitzeinschlag (Eiffelturm 1902, aus: Camille Flammarion, Thunder and Lightning, 1906)

Mathematischer Hintergrund
Die Manhattan-Metrik

In der Rasenfläche verlaufen Pflasterstreifen, die diese strukturieren. Diese Streifen bilden ein kariertes Gitter aus Pfaden, das wir uns (nach Art echter Mathematiker und Mathematikerinnen) unendlich weit fortgesetzt denken - wir ignorieren also den gezackten Rand. Diese Pfade verlaufen (grob) in nord-südlicher bzw. ost-westlicher Richtung. Wenn man von einer Kreuzung des Gitters zu einer anderen gehen will, hat man die Auswahl zwischen verschiedenen Möglichkeiten:



Um entlang der Pfade von A nach B zu gelangen, kann man zum Beispiel zuerst nach Osten, dann nach Norden gehen oder zuerst nach Norden und dann nach Osten abbiegen. Beide Wege sind gleich lang! Von A nach C gibt es drei Wege, die alle die gleiche (kürzest mögliche) Länge haben; von A nach D schon 6 (alle mit Länge 4), und von A nach E sogar 35 verschiedene Wege der Länge 7.

Eine rekursive Formel

Allgemein kann man die Anzahl der kürzesten Wege zwischen zwei Punkten A und X rekursiv bestimmen:

Wir bezeichnen mit s die Zahl der Karos, die man in Ost-West-Richtung überwinden muss, um von A nach X zu kommen, mit t die benötigte Anzahl solcher Schritte in Nord-Süd-Richtung.

Dann ist (in der Längeneinheit, die der Kantenlänge eines Karos entspricht) $s + t$ die Länge eines kürzesten Wegs von A nach X. Wir schreiben $W(s, t)$ für die Anzahl aller kürzesten Wege.

Dann gilt für alle Zahlen s, t :

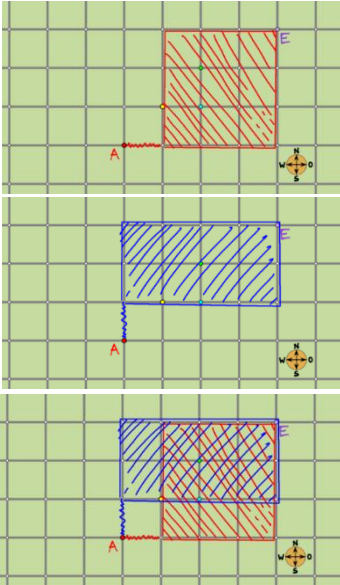
$$W(s, t) = W(t, s),$$

$$W(s, 0) = 1,$$

und $W(s, t) = W(s - 1, t) + W(s, t - 1)$ wenn s und t beide größer als Null sind.

Insbesondere ergibt sich $W(s, 1) = s + 1$ für jede Zahl s .

Damit lassen sich (mit $s = 1 = t$ für $X=B$, mit $s = 1, t = 1$ für $X=C$, und $s = 2 = t$ für $X=D$) die oben behaupteten Anzahlen kürzester Wege schnell bestimmen: Es gilt $W(1,1) = 1 + 1 = 2, W(2,1) = 2 + 1 = 3,$ und $W(2,2) = W(2 - 1, 2) + W(2, 2 - 1) = 2W(2,1) = 2 \cdot 3 = 6.$

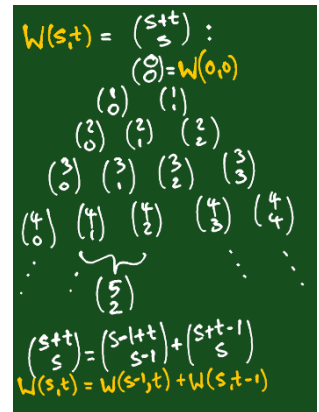


Für den Abstand von A nach E können wir die rekursive Formel mehrfach benutzen:

$$\begin{aligned}
 W(4,3) &= W(4-1,3) + W(4,3-1) \\
 &= W(3,3) + W(4,2) \\
 &= W(3-1,3) + W(3,3-1) + W(4-1,2) + W(4,2-1) \\
 &= 3W(3,2) + W(4,1) \\
 &= 3(W(3-1,2) + W(3,2-1)) + (4+1) \\
 &= 3(W(2,2) + W(3,1)) + 5 \\
 &= 3(6+4) + 5 = 35
 \end{aligned}$$

Binomial-Koeffizienten

Mit der eben bestimmten rekursiven Formel kann man zeigen, dass die Anzahl $W(s,t)$ mit dem Binomialkoeffizient $\binom{s+t}{s}$ („ $s+t$ über s “) übereinstimmt: Man kann also die Anzahl $W(s,t)$ aus dem Pascalschen Dreieck herauslesen. Üblicherweise lernt man die Binomialkoeffizienten im Kontext der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung kennen: Dort verwendet man, dass $\binom{s+t}{t}$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, aus $s+t$ vielen Elementen genau s viele auszuwählen. Hier bei uns findet sich das wieder als Anzahl der Möglichkeiten, aus $s+t$ durchlaufenen Kreuzungen genau s mal in Ost-West-Richtung weiter zu gehen.

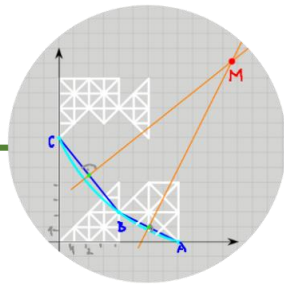


Es ist durchaus sinnvoll, den Abstand zwischen den Kreuzungen so zu messen, dass man die Länge einer kürzesten Verbindungen entlang der Pflasterung bestimmt. Es gibt auf der Rasenfläche (für Leute, die sich an die gepflasterten Wege halten) im Allgemeinen aber mehrere kürzeste Verbindungen zwischen zwei Kreuzungen. Dieser Abstandsbegriff ist in der Mathematik unter der Bezeichnung "Manhattan taxicab metric" bekannt, weil die Straßen in Manhattan solch ein Karomuster bilden: Für einen Taxifahrer dort gibt es auch oft mehrere Möglichkeiten, auf kürzestem Weg (entlang der Straßen) von einer Kreuzung zur anderen zu kommen.

Wer die lange Reise scheut, kann auch in den Innenstädten von Mannheim oder Tuttlingen solche Straßenraster finden.



Historischer Stadtplan Tuttlingen (1878): quadratisches Straßenraster



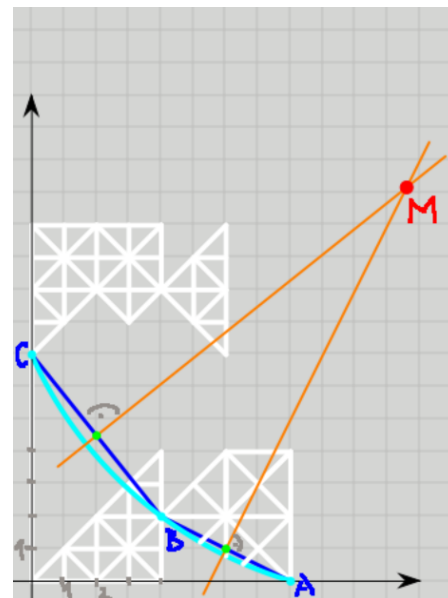
vergittert, verbogen, verrechnet Pergola mit blauem Bogen

Vor dem Hörsaaltrakt des Gebäudes Pfaffenwaldring 47 steht ein wahrer Wald von Säulen. Im Säulenwald finden wir den Glastafelbrunnen, oben sind die Säulen verbunden durch Querstreben, die eine Pergola bilden. Durch die Pergola zieht sich außerdem ein großer blauer Bogen, der die Form der Wasserstrahlen am Brunnen aufnimmt, verändert und stark vergrößert.

Wer die Pergola von weit oben (oder mit genügend Vorstellungsvermögen von unten aus) betrachtet, kann erkennen: Diese bildet einen Teil eines quadratischen Rasters (wie auf einem karierten Blatt Papier); einige Diagonalen sind mit eingetragen (und erhöhen wohl die Stabilität der Pergola). Auf diesem karierten Hintergrund läuft der blaue Bogen, wir können ihn in guter Näherung als Kreisbogen ansehen. Die folgende Skizze zeigt den Grundriss der Pergola und darin den hellblauen Bogen. Um den Mittelpunkt des Kreises zu finden, sind noch dunkelblaue und hellrote Hilfslinien eingezeichnet.



Die Pergola



Konstruktion des Mittelpunkts

Man kann den Mittelpunkt des Kreises einfach konstruieren: Für je zwei Punkte auf dem Kreis ist die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke eine Symmetrieachse des Kreises, läuft also durch den Mittelpunkt. Jetzt brauchen wir also nur zwei Punktpaare zu wählen und die Mittelsenkrechten zu errichten: Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Kreises. Wenn wir dann um den so gefundenen Mittelpunkt den Kreis durch einen der drei benutzten Punkte schlagen, sollte dieser Kreis durch die anderen beiden Punkte gehen – und dann sogar durch jeden Punkt des Bogens; wir erhalten so eine Bestätigung (eine Probe) dafür, dass der Bogen wirklich gut als Teil eines Kreises approximiert wird.

Mathematischer Hintergrund:

Berechnung des Mittelpunkts

Wenn man davon ausgeht, dass der Bogen ein Stück eines Kreises ist, kann man den Mittelpunkt (a, b) und den Radius r dieses Kreises auch rechnerisch aus einem Gleichungssystem ermitteln. Dazu führen wir Koordinaten ein, die sich an das Karomuster anpassen (siehe Skizze).

Die Gleichung des Kreises ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

jeder Punkt (x, y) , der diese Gleichung erfüllt, liegt auf dem Kreis – und jeder Punkt auf dem Kreis erfüllt diese Gleichung.



Aus der Skizze entnehmen wir, dass die Punkte A, B, C mit den Koordinaten $(8,0)$, $(4,2)$ und $(0,7)$ auf dem Kreis liegen. Wenn wir diese Koordinatenpaare für (x, y) in die Gleichung des Kreises einsetzen, ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 64 - 16a + a^2 + b^2 &= r^2 \\ 16 - 8a + a^2 + 4 - 4b + b^2 &= r^2 \\ a^2 + 49 - 14b + b^2 &= r^2 \end{aligned}$$

und daraus dann

$$a = 139/12 \approx 11,6$$

$$b = 73/6 \approx 12,2$$

$$r \approx 12,7.$$

Die geometrische Konstruktion von vorhin war doch wesentlich einfacher als diese Rechnung...

Wenn man auch den hellblauen Steinbogen in der Pergola durch eine Parabel (wie die Wasserstrahlen des Brunnens auf Seite 26) oder einen ganz allgemeinen Kegelschnitt approximieren wollte, müsste man mehr als drei Punkte für die Konstruktion bzw. die Rechnung verwenden. Die oben erwähnte Probe scheint zu rechtfertigen, dass man den Steinbogen als Kreisbogen im Rahmen der Betoniergenauigkeit ansieht.

Auf den Säulen der Pergola findet sich noch eine geometrische Spielerei: In eine Reihe von Säulen mit quadratischem Grundriss sind dunkle Quader eingelassen, die so aus der vertikalen Fläche gekippt sind, dass unten der äußere, oben aber der innere Rand des Quaders mit der Außenfläche der Säule abschließt. Da diese dunklen Quader an den verschiedenen Säulen unterschiedliche Dicke haben, klappen sie unterschiedlich weit heraus. (Am weitesten müssten die Quader aus der auf dem Bild ganz vorn stehenden Säule herausragen - aber das fiel leider einer Renovation zum Opfer.)





Wer will Wasser werfen?

Glastafelbrunnen mit Wurfparabeln aus Wassertropfen

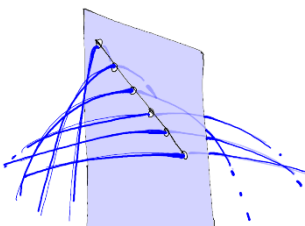
Zuerst fällt eine bemalte Glasplatte auf, die senkrecht aufgestellt ist. In Wirklichkeit sind es zwei parallele Platten, zwischen denen beständig Wasser nachgefüllt wird - wenn man Glück hat und der Brunnen in Betrieb ist. Das Wasser tritt dann durch eine Reihe von Löchern aus und strömt in Bögen nach beiden Seiten. Der Glastafelbrunnen ist eingebunden in ein Pergola-Gerüst aus Beton, in dem ein großer blauer Steinbogen die Form der Wasserstrahlen aufnimmt, variiert und mächtig vergrößert. Die Wasserstrahlen bilden Bögen, die zwar schön gerundet, aber keine Kreise sind:



Man kann sich die Entstehung dieser Bögen so vorstellen, dass viele Wassertropfen nacheinander waagrecht aus dem in die vertikale Glasplatte gebohrten Loch geschleudert werden. Die Geschwindigkeit, mit der diese Tropfen die Glasplatte verlassen, hängt für jedes einzelne Loch offensichtlich von der Höhe dieses Loches ab. Die Tropfen, die weiter oben austreten, fliegen langsam und stürzen schon nahe an der Platte nach unten ab. Die Tropfen aus weiter unten liegenden Löchern fliegen schneller und landen viel weiter von der Platte entfernt im Bodenbecken. Die entstehenden Flugbahnen sind Parabeln (wie manche sie aus der Physik als Wurfparabeln kennen).

Physikalischer Hintergrund

Eine Parabel ist eine Kurve, die mathematisch durch einen quadratischen Zusammenhang zwischen x -Wert und y -Wert der entsprechenden Kurve definiert ist, z.B. $y = a \cdot x^2$, wobei der Vorfaktor a angibt, wie „breit“ die Parabel ist. In unserem Fall ist die Parabel nach unten geöffnet, also muss der Vorfaktor a negativ sein. Die Parabel aus dem ganz oben herausfließenden Wasser ist weniger „breit“ als die darunterliegenden, d.h. die quadratische Funktion muss stärker anwachsen, der Betrag $|a|$ des Vorfaktor muss größer sein. Konkret nimmt $|a|$ von der oben beginnenden Wasserparabel zu den darunter liegenden immer weiter ab.

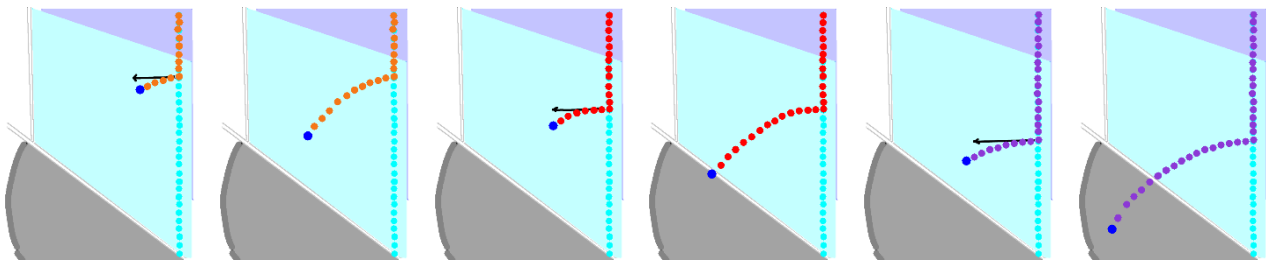


Die Parabelform der Wasserkurven lässt sich vereinfacht wie folgt erklären: Die seitliche Geschwindigkeit des Wasserstrahls wird davon bestimmt, mit welchem Druck das Wasser aus dem Brunnen austritt; wenn das Wasser dann diese seitliche Geschwindigkeit („in x -Richtung“) beibehält (d.h. konstante x -Geschwindigkeit v_x), ändert sich die x -Koordinate eines Wassertropfens linear mit der Zeit: $x = v_x \cdot t$.

Die vertikale Geschwindigkeit v_y des Tropfens nimmt hingegen kontinuierlich mit der Zeit zu, da die Schwerkraft den Tropfen Richtung Erdmittelpunkt beschleunigt: $v_y = -g \cdot t$ mit der Beschleunigung g von ca. 9.8 m/s^2 , dem sogenannten Ortsfaktor, und dem Minuszeichen, da die Beschleunigung „nach unten“ zeigt. Wenn die Geschwindigkeit derartig linear ansteigt, ändert sich die y -Koordinate des Tropfens quadratisch: $y = -1/2 g \cdot t^2$. Kombiniert man die beiden Formeln für x und y , indem man die Zeit t eliminiert, so erhält man: $y = -1/2 (g/v_x^2) \cdot x^2$. Dies ist die Gleichung für diese Parabel und man sieht, dass sie desto steiler/schmäler ausfällt, je stärker die Erdbeschleunigung g ist (an deren Wert sich aber kaum etwas ändern lässt) und je kleiner v_x ist, was sich durch die Höhe des Wasserauslasses in den Glasscheiben kontrollieren lässt: Höhere Löcher haben niedrigeres v_x .



Parabeln, die einzelne Tropfen bei unterschiedlich hoher Austrittsöffnung beschreiben.



Dass die Wassertropfen je nach Höhe der Austrittsöffnung unterschiedlich schnell den Brunnen verlassen (und deswegen auf ihrer jeweiligen Wurfparabel unterschiedlich weit hinaus fliegen) kann man durch Druckbetrachtungen erklären, aber auch durch ein sehr fundamentales Prinzip: Die Erhaltung der Energie.

Jeder Wassertropfen hat beim Eintritt in den Raum zwischen den beiden Glasplatten ganz oben eine bestimmte potentielle Energie (die daher kommt, dass man ihn gegen die Schwerkraft auf diese Höhe gehoben hat). Wenn der Tropfen dann weiter unten durch ein Loch in der Glasplatte austritt, hat er weniger potentielle Energie (weil er weiter unten ist), die Energiedifferenz wird kinetische Energie (also in Geschwindigkeit umgesetzt). Diese qualitative Überlegung ist gut genug, um auch quantitativ genau zu beschreiben, wie weit sich die Parabeln abhängig von der Austrittshöhe öffnen.



Knieperteich, Stralsund



Prof. Dr. Markus J. Stroppel



Dr. Marc Scheffler



Dipl.-Wirt.-Ing. (FH)
Katja Stefanie Engstler

Weitere Angebote für Kinder, Schülerinnen und Schüler:



Mitmachblatt mit vielen Ideen für den Rundgang (PDF) zum Ausdrucken



Bastelanleitung
Würfelnetz



Bastelanleitung
Achteck

Impressum

Fakultät 8 – Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart

Idee und Gestaltung: Katja Stefanie Engstler
Fotografien: Frank Wiatrowski, Prof. Dr. Markus Stroppel,
Dr. Marc Scheffler, Katja Stefanie Engstler
Zeichnungen : Dr. Marc Scheffler, Prof. Dr. Markus Stroppel
Text: Prof. Dr. Markus Stroppel, Dr. Marc Scheffler

Veröffentlicht Juli 2022 / Druck: Oktober 2022

Kontakt über Webseite:
<https://www.f08.uni-stuttgart.de/formen-und-kraefte/index.html>

