

# **Stabilität und Langzeitverhalten schlanker Brettschichtholzträger**

**Reiner Hofmann**

**Mitteilungen**



# Stabilität und Langzeitverhalten schlanker Brettschichtholzträger

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
Reiner Dieter Wilhelm Hofmann  
aus Schwäbisch Gmünd

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ulrike Kuhlmann
1. Mitberichter:	Prof. Dr. Andrea Frangi
2. Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Schänzlin

Tag der mündlichen Prüfung: 08.03.2022

Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart  
2022

**Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf, Nr. 2022-4**

Reiner Hofmann      Stabilität und Langzeitverhalten schlanker  
Brettschichtholzträger

Herausgeber      Prof. Dr.-Ing. U. Kuhlmann  
Pfaffenwaldring 7  
70569 Stuttgart  
Telefon: 0711/685-66245  
Telefax: 0711/685-66236

Redaktion      M. Sc. Gloria Hofmann

D93

©Institut für Konstruktion und Entwurf; Stuttgart 2022  
Alle Rechte vorbehalten

ISSN 1439-3751

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während und nach meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart.

Frau Prof. Dr.-Ing. Ulrike Kuhlmann, Direktorin des Instituts für Konstruktion und Entwurf, danke ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, das entgegengebrachte Vertrauen und für ihre Hartnäckigkeit, mit der sie die Fertigstellung der vorliegenden Arbeit nach meiner Zeit am KE immer wieder einforderte sowie für die Übernahme des Hauptberichts.

Ebenso herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. Andrea Frangi und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Schänzlin für die kritische Durchsicht der Arbeit und für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Ein weiterer Dank gilt der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen „Otto von Guericke“ e.V. (AiF) für deren finanzielle Unterstützung der Untersuchungen im Rahmen zweier Forschungsprojekte, auf die sich ein Teil dieser Arbeit stützt.

Darüber hinaus danke ich allen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Konstruktion und Entwurf für die Anregungen und die gute Zusammenarbeit, insbesondere Herrn Ing. Pietro Aldi, Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Brühl und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Schänzlin für die unzähligen Diskussionen während dieser Zeit.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie für ihre stetige Unterstützung, die Geduld und Toleranz. In all den Jahren haben sie mir so oft den Rücken frei gehalten.

Stuttgart, im März 2022

Reiner Hofmann



# Kurzdarstellung

Mit Brettschichtholz lassen sich große Spannweiten mit schlanken Bauteilen verwirklichen. Unvermeidbare geometrische und strukturelle Imperfektionen verursachen zusätzliche Spannungsanteile, die sich bei schlanken Brettschichtholzträgern traglastmindernd auswirken, wenn sich dadurch die Beanspruchungen des Systems erhöhen. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit treten der Stabilitätsnachweis des Kippens und das damit verbundene Torsionsmoment aus Kippstabilisierung im Vergleich zum einfachen Spannungsnachweis zunehmend in den Vordergrund.

Zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung werden umfangreiche numerische Untersuchungen an parallelgurtigen geraden Trägern, parallelgurtigen Trägern mit angeho-benem Untergurt, Satteldach- und Fischbauchträgern mit und ohne seitlicher Stützung des Druckgurts durchgeführt. Zudem ist eine Unterscheidung der Art der seitlichen Stützung notwendig, um den Einfluss nachgiebiger Aussteifungsverbände auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung zu erfassen. Unter Berücksichtigung des aktuellen Stands der Technik wird für alle untersuchten Trägerkonfigurationen der am ungünstigsten wirkende Vorkrümmungsansatz auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung bestimmt.

Auf Grundlage der durchgeführten Untersuchungen kann ein Näherungsansatz für die Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung erarbeitet werden. Mit diesem Näherungsansatz kann das auftretende Torsionsmoment im Querschnitt am Auflager mit vergleichsweise geringem Aufwand bestimmt und damit der Schubspannungsnachweis für kippgefährdete Brettschichtholzträger geführt werden. Ein komplexer und zeitaufwändiger, genauerer Nachweis, z. B. nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung, kann damit für die am häufigsten in der Bemessungspraxis vorkommenden Brettschichtholzbinderformen entfallen.

Zeitabhängige Dehnungen werden beim Kippnachweis nach der derzeit gültigen Holzbaunorm in der Praxis vernachlässigt oder nur unzureichend berücksichtigt. Beim kippgefährdeten Träger, der mit Hilfe der Biegetorsionstheorie II. Ordnung beschrieben werden kann, führen zeitabhängige Dehnungsänderungen nicht nur zu größeren Verformungen des betrachteten Systems, sondern auch zu Spannungszunahmen infolge von Langzeiteinflüssen, so dass bei einer Berücksichtigung von Langzeiteinflüssen eine geringere Tragfähigkeit zu erwarten ist.

Um das Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger zu erfassen, wird ein numerisches Modell gebildet, das das Kippproblem nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung von rheologischen Modellen für das Langzeitverhalten beschreibt. Um die Auswirkungen des Langzeitverhaltens bestimmen zu können, wird die Bemessungslast, die am Obergurt eines Trägers eingeleitet wird, in einen ständigen Anteil  $g_{zOG}$  und einen kurzzeitig wirkenden Anteil wie der Schneelast  $s_{zOG}$ , für Geländehöhen  $\leq 1000$  m über NN und der rechnerisch ansetzbaren Lasteinwirkungsdauer kürzer als eine Woche, zerlegt. Mit Hilfe des numerischen Modells ist es somit möglich, Berechnungen für kippgefährdete Biegeträger unter kriecherzeugenden, ständig wirkenden Lasten bei konstanter

Holzfeuchte durchzuführen. Bei den Modellrechnungen unter Langzeiteinfluss bei konstanter Holzfeuchte stellt sich abhängig von der Höhe des ständigen Lastanteils eine Zunahme der horizontalen elastischen Verformung und der elastischen Verdrehung ein. Ausgehend von der Bemessungslast zur Zeit  $t = 0$  tritt in Abhängigkeit des ständigen Anteils an der Bemessungslast und der Schlankheit eine unterschiedlich hohe, stark nichtlineare Spannungserhöhung infolge Kriechens ein.

Zur Beschreibung der Dehnungsänderungen aus den zeitschrittweisen Modellberechnungen, die sehr aufwendig und zeitintensiv sind, wird die äquivalente Vorkrümmung  $e_{\infty}$  eingeführt. Für die Herleitung wird die Lasteinwirkung aus der Modellberechnung übernommen und die Vorkrümmung  $e_{\infty}$  des kippgefährdeten Trägers variiert, bis es gelingt, die elastischen Verformungen dieser Berechnung den elastischen Verformungen unter Langzeiteinfluss aus den Modellberechnungen anzunähern. Mit Hilfe der äquivalenten Vorkrümmung ist es möglich, die Bemessungslast zur Zeit  $t = 50$  a zu berechnen. Aus der Bemessungslast ( $t = 50$  a) können schließlich die Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens abgeleitet und der Kippnachweis nach dem Ersatzstabverfahren mit Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung für den Zeitpunkt  $t = 50$  a geführt werden. Dabei ist der Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  von der Höhe des ständigen Lastanteils abhängig. Der Kippstabilitätsnachweis kann dann in gewohnter Weise nach dem Ersatzstabverfahren erfolgen. Unter wechselnder Luftfeuchte nehmen die Spannungen in Abhängigkeit vom Holzfeuchteverlauf ab bzw. zu. Unter wechselnden Feuchteverhältnissen konnten so in der Modellrechnungsreihe Dehnungsänderungen infolge mechano-sorptiver Kriechvorgänge in Abhängigkeit der Kippschlankheit  $\lambda$ , der mittleren Luftfeuchte und der jährlichen Schwankungsamplitude berechnet werden, die teilweise um ein Vielfaches über den Kriechdehnungen bei konstanter Holzfeuchte liegen.



# Abstract

Glued laminated girders can be produced in several types and forms. Slender girders with wide spans are often built. Unavoidable geometrical and structural imperfections of the system may generate effects of second order theory, that may cause a reduction of the load-bearing capacity. These effects increase more than proportionally with the span of the girders, as a consequence at ultimate limit state the stability analysis of such girders becomes more important, including also torsional moments indeed.

The usual procedure to verify the lateral torsional stability refers only to the bending moment and does not consider the torsional moment, which is accompanying the bending moment caused by second order theory. In order to define the influence of the torsional moment on the shear stress of glued laminated timber girders at the end support, a computer program has been developed to perform numerical simulations solving the differential equations describing lateral torsional buckling of glued laminated timber girders based on second order theory. This numerical model also takes single supports at the upper chord into account in order to reduce the relative slenderness of the girder, which are typical for wide span girders as roof beams with horizontal bracings.

As a result of the numerical studies a simplified design approach for the torsional moment due to lateral torsional buckling caused by stability effects was formulated in order to be able to further verify the three-dimensional problem of girders under lateral torsional buckling using the equivalent length method based on a calculation of the internal forces in accordance with first order theory. It is thus possible to estimate the torsional moment due to lateral torsional buckling taking into account horizontal bracings, without the need to carry out a computer aided calculation of the internal forces in accordance with second order theory.

Time dependent strains are neglected in the stress check according to EN 1995-1-1 [1]. The lateral torsional buckling can be described with the second order theory. For a buckling girder, time dependent strains induce not only higher deflections but also higher bending stresses. So if the long-term behaviour of a girder under lateral torsional buckling is taken into account, the load bearing capacity is expected to be lower. A numerical model is developed to investigate the long-term behaviour of lateral torsional buckling of glued laminated timber girders based on second order theory for lateral torsional buckling and on a rheological model describing the long-term behaviour. Stability failure due to lateral torsional buckling is calculated for girders under permanent load and changing moisture conditions, which cause creep deflections. Regarding the long-term behaviour the buckling coefficient  $k_{crit,\infty}$  decreases in comparison to the reference value  $k_{crit}$  at the time  $t=0$  dependent on the slenderness and the ratio of permanent load on the design value of load. The increasing elastic horizontal deflection and the elastic torsion lead to an increasing utilization of the cross-section. The amount of the utilization regarding creep and changing moisture conditions depends on the slenderness of the girder and the ratio

of permanent load. Changing moisture conditions cause in- and decreasing stresses because of the changing moisture content of timber in the timber girder. Numerical studies under changing moisture conditions have been performed with the developed numerical model. The calculated strains caused by mechano-sorptive creep derived under changing moisture conditions partly exceed strains calculated under constant moisture in timber for an amount several times higher.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>I</b>
<b>Kurzdarstellung</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ausgangspunkt . . . . .	1
1.2 Motivation . . . . .	4
1.3 Überblick . . . . .	4
<b>2 Stabilität schlanker Holzbauteile</b>	<b>7</b>
2.1 Instabilitätsfälle . . . . .	7
2.2 Das Biegetorsionsproblem II. Ordnung . . . . .	8
2.3 Stabilitätsnachweise von Holzbauteilen - Normensituation und Stand der Forschung und Technik . . . . .	12
2.3.1 Einführung mit Beispiel . . . . .	12
2.3.2 Kippnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung . . . . .	15
2.3.3 Kippnachweis nach dem Ersatzstabverfahren . . . . .	18
2.4 Torsionsmoment aus Kippstabilisierung - Normensituation und Stand der Forschung und Technik . . . . .	21
2.4.1 Einführung . . . . .	21
2.4.2 Vereinfachte Berechnung nach dem Ersatzstabverfahren . . . . .	23
2.4.3 Nachweis des Satteldachträgers nach dem Ersatzstabverfahren . . . . .	25
2.4.4 Nichtlinear elastische Berechnung . . . . .	26
2.5 Zusammenfassung und nächste Schritte . . . . .	27
<b>3 Analytische und numerische Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung</b>	<b>29</b>
3.1 Analytische Lösung des Kippproblems . . . . .	29
3.2 Linearisierung des gekoppelten Differentialgleichungssystems . . . . .	32
3.3 Linearisierungsansätze im Vergleich . . . . .	35
3.4 Aufstellen der Matrixgleichung . . . . .	37
3.4.1 Vorgehensweise . . . . .	37

3.4.2	Linke Seite der Matrixgleichung . . . . .	38
3.4.2.1	Koeffizientenmatrix $K$ . . . . .	38
3.4.2.2	Randbedingungen . . . . .	42
3.4.3	Rechte Seite der Matrixgleichung . . . . .	45
3.5	Lösen der Matrixgleichung . . . . .	46
3.6	Erweiterung des Berechnungsprogramms <i>constantaligni</i> . . . . .	46
3.7	Verifizierung der Berechnungsergebnisse der numerischen Berechnung .	49
3.7.1	Vorgehensweise . . . . .	49
3.7.2	Beispiel 1: Analytische Lösung für 2. Eulerfall . . . . .	49
3.7.3	Beispiel 2: Analytische Lösung für konstante Momenteneinwirkung	52
3.7.4	Beispiel 3: Gabelgelagerter Einfeldträger mit Doppelbiegung . . . .	54
3.8	Analytische und numerische Lösung des Differentialgleichungssystems im Vergleich . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Einfluss des Langzeitverhaltens auf Holzbauteile</b>	<b>59</b>
4.1	Ursachen des Kriechens von Holz . . . . .	59
4.2	Einflussgrößen auf das Kriechverhalten von Holz . . . . .	61
4.3	Rheologisches Modell nach Toratti [1] . . . . .	65
4.4	Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in der Normung . . . . .	68
4.5	Langzeitverhalten des Schubmoduls . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Stabilität und Langzeitverhalten</b>	<b>77</b>
5.1	Interaktion von Stabilität und Langzeitverhalten . . . . .	77
5.1.1	Übersicht . . . . .	77
5.1.2	Beispiel 1: Kriechverformung des Biegeträgers infolge Biegung um die starke und die schwache Achse . . . . .	78
5.1.3	Beispiel 2: Kriechverformung des Biegeträgers infolge konstanter Torsionseinwirkung $m_x$ . . . . .	80
5.2	Zusammenfassung der Schnittstellenverifizierung . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Eingangsgrößen und Voruntersuchungen</b>	<b>83</b>
6.1	Schubfestigkeit von Brettschichtholz . . . . .	83
6.1.1	Übersicht . . . . .	83
6.1.2	Schubfestigkeit bei Torsionsbeanspruchung . . . . .	83
6.1.3	Schubfestigkeit bei Querkraftbeanspruchung . . . . .	84
6.1.4	Materialbedingte Schwindrisse . . . . .	86
6.1.5	Zusammenfassung . . . . .	87
6.2	Schubmodul von Brettschichtholz - Normensituation und Stand der Technik	88

6.3	Auswirkung unterschiedlicher Festigkeitsklassen auf das Kippverhalten schlanker BSH-Träger . . . . .	88
6.4	Vorkrümmungsansätze . . . . .	93
6.5	Vorkrümmungswerte aus Verformungsmessungen . . . . .	96
6.6	Auswirkung des Vorkrümmungsansatzes auf das Torsionsmoment im Trägerquerschnitt . . . . .	105
6.7	Auswirkung unterschiedlicher Lasteinwirkungen auf kippgefährdeten BSH-Träger am Beispiel eines Trägerquerschnitts 16 cm/112 cm . . . . .	108
6.8	Auswirkung des $h/b$ -Verhältnisses auf kippgefährdete BSH-Träger . . . . .	109
6.9	Einfluss von Horizontalverbänden auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Parameterstudie zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung</b>	<b>113</b>
7.1	Praxisrelevante Binderformen und Stützweiten . . . . .	113
7.2	Parameterstudie an vorgekrümmten Einzelträgern . . . . .	115
7.2.1	Vorgehensweise und Begrenzung der effektiven Kipplänge $l_{ef}$ . . . . .	115
7.2.2	Berechnungsparameterbereich für den parallelgurtigen geraden Träger . . . . .	116
7.2.2.1	Parameter . . . . .	116
7.2.2.2	Der parallelgurtige Träger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung . . . . .	116
7.2.2.3	Der parallelgurtige gerade Träger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung . . . . .	118
7.2.3	Berechnungsparameterbereich für den parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt . . . . .	121
7.2.3.1	Parameter . . . . .	121
7.2.3.2	Der parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt . . . . .	121
7.2.4	Parameterbereich der Berechnungen für den Fischbauchträger . . . . .	127
7.2.4.1	Parameter . . . . .	127
7.2.4.2	Der Fischbauchträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung . . . . .	128
7.2.4.3	Der Fischbauchträger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung	129
7.2.5	Parameterbereich der Berechnungen für den Satteldachträger mit geradem Untergurt . . . . .	133
7.2.5.1	Parameter . . . . .	133
7.2.5.2	Der Satteldachträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung . . . . .	134
7.2.5.3	Der Satteldachträger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung	135

7.3	Parameterstudie an vorgekrümmten Einzelträgern unter Berücksichtigung verformter Aussteifungsverbände . . . . .	137
7.3.1	Erfassung der Nachgiebigkeit eines Aussteifungsverbands . . . . .	137
7.3.2	Der parallelgurtige Träger mit Vorkrümmung und Verformung des Verbands . . . . .	139
7.3.3	Satteldach- und Fischbauchträger mit Vorkrümmung und Verformung des Verbands . . . . .	141
7.4	Vergleich der Ergebnisse der Parameterstudie mit der vereinfachten Bestimmung des Torsionsmoments zur Gabelbemessung $M_d/80$ . . . . .	143
7.5	Ansatz für ein vereinfachtes Bemessungsverfahren für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung . . . . .	145
7.5.1	Übersicht . . . . .	145
7.5.2	Parallelgurtige, gerade Träger und parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt . . . . .	147
7.5.3	Satteldachträger . . . . .	148
7.5.4	Fischbauchträger . . . . .	149
7.6	Zusammenfassung des vereinfachten Bemessungsverfahrens für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung . . . . .	151
<b>8</b>	<b>Parameterstudie zum Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger</b>	<b>153</b>
8.1	Ziele der Parameterstudie . . . . .	153
8.2	Lasteinwirkungsdauer und kriecherzeugender Lastanteil . . . . .	154
8.3	Biegespannungsanteile nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung infolge Kriechen unter konstanter Feuchte . . . . .	158
8.4	Ansätze zur Erfassung des Langzeitverhaltens . . . . .	166
8.4.1	Erfassung durch den Verformungsbeiwert $k_{def}$ . . . . .	166
8.4.2	Erfassung durch äquivalente Vorkrümmung . . . . .	172
8.4.3	Erfassung durch modifizierten Kippbeiwert . . . . .	175
8.5	Torsionsspannungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens . . . . .	177
8.6	Untersuchungen des Langzeiteinflusses bei wechselnder Feuchte . . . . .	178
8.7	Schlussfolgerung . . . . .	184
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>187</b>
<b>10</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>189</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Ausgangspunkt

Seit der Patentierung der Brettschichtholzbauweise durch Otto Hetzer vor mehr als 100 Jahren beschränken sich Holzträger in Abmessung und Form nicht mehr auf das natürliche Vorkommen, s. Abb. 1.1. Träger aus Brettschichtholz lassen sich in annähernd jeder Form herstellen, so dass im Ingenieurholzbau nicht nur große Spannweiten, sondern auch optisch ansprechende schlanke Bauteile verwirklicht werden können. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit gewinnt wegen der größeren Schlankheit bei großen Spannweiten die Stabilität und die hieraus resultierenden Beanspruchungen eines solchen Trägers an Bedeutung. Unvermeidbare geometrische und strukturelle Imperfektionen verursachen zusätzliche Spannungsanteile, die sich bei schlanken Brettschichtholzträgern traglastmindernd auswirken, wenn sich dadurch die Beanspruchungen des Systems erhöhen.



*Abbildung 1.1: Beispiel moderner ausgeführter Brettschichtholzträger*

Für die Ingenieurpraxis ist das Vorhandensein einer gut handhabbaren und gleichzeitig sicheren Bemessungsmethode von entscheidender Bedeutung, nicht nur wenn es um die Wettbewerbsfähigkeit des Werkstoffs Holz mit anderen Baustoffen geht. Mit der derzeit gültigen Bemessungsnorm im Holzbau DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] lässt sich der Stabilitätsnachweis von Biegeträgern nach dem Ersatzstabverfahren führen, das auf der Vereinfachung eines Spannungsnachweises nach einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung basiert.

Zur Erfassung der Effekte, die sich aus der Kippstabilisierung ergeben, fordert DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] in Ergänzung zu DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] für die Auflager-

bemessung gabelgelagerter Biegestäbe, dass je Auflager ein Torsionsmoment von  $M_d/80$  aufgenommen werden kann. Während ursprünglich dieser Ansatz nur zur Dimensionierung der Auflagerkonstruktion verwendet wurde und das auch weitgehend in der Praxis noch so gehandhabt wird, hat sich in der Diskussion mit Fachleuten und Prüfinstanzen die Auffassung durchgesetzt, dass nicht nur das Auflager zur Aufnahme des Torsionsmoments ausgelegt werden muss, sondern auch das Torsionsmoment im Schubspannungsnachweis der kippgefährdeten Träger zu berücksichtigen ist. In der Fortschreibung des Nationalen Anhangs (DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3]) wurde diesem Thema bereits Rechnung getragen, indem der Nachweis der Querschnittstragfähigkeit an Auflagern bei Bauteilen ohne Berücksichtigung der Torsionsspannungsanteile aus Gabelmoment erfolgen darf, wenn für die Kippschlankheit  $\lambda_{ef}$  gilt:

$$\lambda_{ef} = \frac{l_{ef} \cdot h}{b^2} \leq 225 \quad (1.1)$$

Zusätzlich müssen die Stabilisierungskräfte im Bereich der Auflagergabel abgeleitet werden. In allen anderen Fällen müssen die Torsionsspannungsanteile berücksichtigt werden, so dass die Berechnung in der Regel durch das Lösen des komplexen Biegetorsionsproblems II. Ordnung zu erfolgen hat. Da am Lager neben der Torsionsbeanspruchung auch meist gleichzeitig die höchste Beanspruchung infolge Querkraft vorliegt und die üblichen Nachweise im Holzbau auf Spannungsebene erfolgen, addieren sich auf der Einwirkungsseite die Schubspannungen aus Querkraft und Torsion ungünstig. Auf der Widerstandsseite haben neuere Untersuchungen zu einer Reduktion der aufnehmbaren Schubspannung geführt, so dass der Schubnachweis in vielen Fällen heute im Unterschied zur Vergangenheit maßgebend wird. Die Frage stellt sich also verschärft, ob und für welche Kippschlankheiten die Berücksichtigung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung im Träger tatsächlich erforderlich ist, um eine ausreichende Tragfähigkeit zu gewährleisten. Durch eine genauere Ermittlung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung im Querschnitt an den Auflagern soll untersucht werden, ob der Ansatz in DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] in der dort genannten Höhe erforderlich ist.

Die Herleitung des in DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] festgeschriebenen Ansatzes basiert auf einem pauschalen Wert, der am Beispiel eines parallelgurtigen Einfeldträgers hergeleitet worden ist. Für die Herleitung wurde zudem ein gabelgelagerter Einfeldträger unter konstanter Gleichlast  $q_z$  und ohne seitliche Stützung des Druckgurts angenommen.

Das Bemessungsmoment im Auflager wird durch eine lineare Berechnung bestimmt, indem die seitliche Vorverformung mit der seitlichen elastischen Verformung überlagert wird. Das für den Nachweis anzusetzende Torsionsmoment ist an das Biegemoment und damit an die Ausnutzung des Trägers gekoppelt.

Der pauschal festgeschriebene Normwert unterscheidet damit nicht nach Art der Beanspruchung, Geometrie, Abmessungen und Systemrandbedingungen des kippgefährdeten Trägers. Darüber hinaus wird die Problematik durch die üblicherweise vorliegenden variablen Höhen verschärft. Die meisten Brettschichtholzträger werden nicht als parallelgurtige Träger, sondern in Form von Satteldachbindern, Pulträgern oder gelegentlich auch als Fischbauchträger ausgeführt. Diese Trägerformen mit variablen Höhen lassen sich aber nicht mehr mit einfachen Hilfsmitteln berechnen. So beziehen sich die Hinweise zur Kippstabilisierung in der Literatur meist auf Lösungen für parallelgurtige Träger. Selbst Standardstabwerksprogramme lassen meist nur eine Berechnung nach Theorie



I. Ordnung zu und ermöglichen keine genaue Berechnung nach Theorie II. Ordnung für das Kippen von Trägern mit variabler Höhe. Die Untersuchungen von Kuhlmann und Hofmann [4], Mistler [5] und Mistler [6] zeigen jedoch einen deutlichen Einfluss der variablen Höhe, die sich sowohl negativ als auch positiv auswirken und das tatsächlich vorhandene Torsionsmoment am Auflager deutlich erhöhen oder verringern kann.

Zudem sind die in der Praxis vorkommenden Brettschichtholzbiegeträger zwar in der Regel an ihren Enden gabelgelagert, können jedoch aufgrund ihrer Kippschlankheit häufig nicht ohne seitliche Stützung des Druckgurtes ausgeführt werden. Durch die Einführung horizontaler Stützungen wird die Schlankheit eines Trägers auf eine effektive Schlankheit zwischen den Stützungen reduziert. Voruntersuchungen haben gezeigt, dass in dieser Situation die tatsächlich vorhandenen Torsionsmomente wesentlich geringer sind als der pauschal anzusetzende Normwert.

Zu diesen Vereinfachungen, die notwendig sind für ein in der Ingenieurpraxis gut handhabbares Bemessungsverfahren, kommt das Langzeitverhalten des anisotropen Werkstoffs Holz hinzu, das sich auf das Stabilitätsverhalten kippgefährdeter Brettschichtholzträger auswirkt.

Das Langzeitverhalten schlanker Holzbauteile ist vereinfacht durch eine Abminderung der Steifigkeiten mit dem in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] angegebenen Kriechfaktor zu berücksichtigen, wenn es sich um ein druckbeanspruchtes Bauteil handelt und wenn der Anteil der ständig wirkenden Last mehr als 70% beträgt. Untersuchungen zu Biegeträgern (siehe u. a. Kuhlmann und Teichmann [7], Teichmann [8]) haben jedoch gezeigt, dass diese vereinfachte Betrachtung unzureichend ist, weil durch die Langzeiteinflüsse um bis zu 30% größere Verformungen entstehen, die zu vergrößerten Schnittgrößen führen und somit die Tragfähigkeit von Trägern deutlich reduzieren.

Zeitabhängige Dehnungen werden zurzeit in der Praxis vernachlässigt oder nur unzureichend berücksichtigt. Deren Auftreten kann aber bei schlanken Brettschichtholzträgern zu auf der unsicheren Seite liegenden Ergebnissen führen, da sich durch das Langzeitverhalten nicht nur die vertikale Verformung, sondern auch die horizontale Verformung vergrößert. So nimmt die Beanspruchung des kippgefährdeten Trägers infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung durch größere Verformungen in horizontaler Richtung und durch Verdrehung des Querschnitts zu, so dass bei einer Berücksichtigung von Langzeiteinflüssen eine geringere Tragfähigkeit zu erwarten ist.

Mit Hilfe rheologischer Modelle ist es möglich, Langzeiteinflüsse aus Kriechen, Quellen/Schwinden zu beschreiben und numerisch zu erfassen. Um den Einfluss unterschiedlicher rheologischer Modellierungen des Holzes zu diskutieren, wurde von Schänzlin in [9] bzw. [10] das Programm *kriHo* entwickelt, mit dem verschiedene rheologische Modelle verglichen werden können. Die gewonnenen Ergebnisse, sowie das Programm *kriHo*, das die numerische Berechnung von kriech- bzw. schwind- und quellbedingten Verformungen ermöglicht, bilden die Grundlage für die weitere Forschungstätigkeit. Für die Lösung des Stabilitätsproblems nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ist zudem ein numerisches Berechnungsprogramm *constantialigni* (vgl. Hofmann [11]) vorhanden, das die Differentialgleichungen am verformten System aufstellt und löst. Durch die Interaktion der numerischen Berechnungsprogramme *kriHo* und *constantialigni* kann die Auswirkung des Langzeitverhaltens auf die Stabilität schlanker Brettschichtholzträger untersucht werden.

## 1.2 Motivation

Das Ziel dieser Arbeit ist es, durch eine genauere Ermittlung des Torsionsmomentes aus Kippstabilisierung an den Auflagern eine vereinfachte praxisgerechte Bemessung von Brettschichtholzträgern variabler Höhe zu ermöglichen, die zu einem statisch sicheren, aber dennoch wirtschaftlichen Einsatz des Werkstoffs Holz bei Brettschichtholzträgern variabler Höhe führt.

Für Fälle, bei denen die Berechnung des Torsionsmoments an den Auflagern erforderlich ist und die daraus resultierenden Schubspannungen im Querschnitt berücksichtigt werden müssen, ist es unbedingt notwendig, eine vereinfachende Herangehensweise zu definieren.

Es wird ein neuer Bemessungsansatz entwickelt, der es dem in der Praxis tätigen Ingenieur erlaubt, ohne große Unterstützung durch FE- Programme o. ä. das Torsionsmoment bei Brettschichtholzträgern in der Größenordnung richtig abzuschätzen. Dabei findet die Kippstabilisierung vor allem durch eine konstruktive Anordnung von Verbänden u. ä. Berücksichtigung.

Für die Bestimmung des Langzeiteinflusses wird zunächst das Verhalten des kippgefährdeten Trägers zur Zeit  $t = 0$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter untersucht.

Um Modellrechnungen unter Langzeiteinfluss durchführen zu können, wird die Bemessungslast für den kippgefährdeten Träger nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bestimmt, die sich aus einem ständigen und damit kriecheerzeugenden Anteil und einem kurzzeitig wirkenden Anteil zusammensetzt. Es werden systematische Parameteruntersuchungen mithilfe numerischer Berechnungsmethoden für variierende Schlankheiten als maßgebendem Parameter am gabelgelagerten Einfeldträger vorgenommen. Aus der systematischen Parameteruntersuchung werden die maßgebenden Einflüsse des Langzeitverhaltens auf die Kippstabilität schlanker Brettschichtholzträger identifiziert und die erzielten Ergebnisse bewertet. Um die Ergebnisse praktisch anwendbar zu machen, werden diese mit den bisher vorhandenen Methoden zur Erfassung des Langzeitverhaltens verglichen und eine Bemessungsmethode mit modifizierten Kippbeiwerten entwickelt.

## 1.3 Überblick

Ausgehend vom Stand der Technik und der Normensituation in Kapitel 1 werden die einzelnen Stabilitätsfälle gegen einander abgegrenzt. Es wird auf die Nachweisverfahren der Kippstabilität und des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung eingegangen. Die Grundlage zur Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung bildet ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, auf das in Kapitel 2 vertieft eingegangen wird. Es wird eine Methode zur numerischen Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystem vorgestellt und der Weg zur numerischen Lösung erläutert. Die numerische Lösung bildet die Grundlage für das daraus entwickelte Berechnungsprogramm *constantialigni*, mit dem die numerischen Untersuchungen sowohl zum Torsionsmoment aus Kippstabilität als auch zur Auswirkung des Langzeitverhaltens auf die Stabilität kippgefährdeter Brettschichtholzträger über die Verknüpfung zu *kriHo* (vgl. [9], [10]) durchgeführt werden. Kapitel 3 befasst sich mit dem Langzeitverhalten des Werkstoffs Holz und den rheologischen Modellen, mit de-

nen das Langzeitverhalten beschrieben und auch numerisch erfasst werden kann. Auf die Interaktion von Stabilität und Langzeitverhalten bei der numerischen Berechnung wird in Kapitel 4 eingegangen, bevor in Kapitel 5 die Eingangsgrößen für die nachfolgenden Parameterstudien Gegenstand der Betrachtung sind. Um eine Ab- und Eingrenzung des zu untersuchenden Bereichs der jeweiligen Eingangsgrößen zu erzielen, waren einige Voruntersuchungen notwendig, die ebenfalls in Kapitel 5 vorgestellt und diskutiert werden. Die Parameterstudie zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung in Kapitel 6 wird an praxisrelevanten Binderformen und Stützweiten durchgeführt. Neben unterschiedlichen Vorkrümmungsansätzen wird auch die Auswirkung nachgiebiger Aussteifungsverbände auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung untersucht. Der Vergleich der Ergebnisse der Parameterstudie mit der bisherigen vereinfachten Bemessungspraxis und ein auf Grundlage der Ergebnisse der Parameterstudie entwickelter Bemessungsansatz fassen die erzielten Ergebnisse in Kapitel 6 zusammen.

In Kapitel 7 werden anhand einer Parameterstudie die Auswirkungen des Langzeitverhaltens des Werkstoffs Holz auf die Stabilität kippgefährdeter Biegeträger untersucht. Auch für diese Untersuchungen ist es notwendig, den Parameterbereich einzugrenzen und damit die Grundlage für die numerischen Untersuchungen zu schaffen. Die Untersuchungen beschränken sich zunächst auf konstante Feuchtebedingungen, wie sie nur im Labor erzeugt werden können. Aus den numerischen Untersuchungen unter konstanter Feuchte können vorhandene Ansätze zur Erfassung des Langzeitverhaltens des Werkstoffs Holz in der Bemessungspraxis miteinander verglichen werden und die Erfassung durch die äquivalente Vorkrümmung und den modifizierten Kippbeiwert abgeleitet werden. Es schließen sich weitere Untersuchungen unter wechselnder Feuchte an, wie sie in der Nutzungsklasse 1, also in allseitig geschlossenen und beheizten Bauwerken, anzutreffen sind. Die im Rahmen dieser Untersuchungen erzielten Ergebnisse lassen sich anschließend in einen modifizierten Kippbeiwert überführen, mit dem das Langzeitverhalten beim Stabilitätsfall Kippen im Ersatzstabverfahren erfasst werden kann. Kapitel 8 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt Hinweise auf Ansatzpunkte für die weitere Forschungsarbeiten in Bereich der Stabilität schlanker Brettschichtholzträger und des Langzeitverhaltens.



## 2 Stabilität schlanker Holzbauteile

### 2.1 Instabilitätsfälle

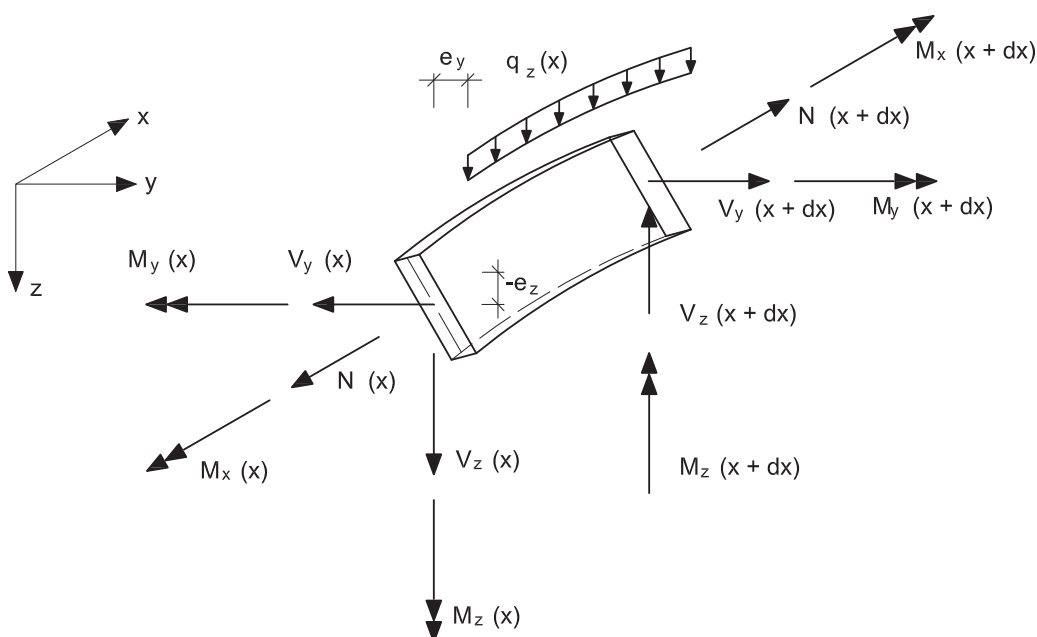
Von einem Stabilitätsproblem oder einem Instabilitätsfall wird gesprochen, wenn der statische Gleichgewichtszustand eines Bauteils bei Erreichen einer kritischen Beanspruchung instabil wird, bzw. das Gleichgewicht verzweigt (vgl. Petersen [12]). Die Phänomene der auftretenden Stabilitätsprobleme lassen sich begrifflich gegeneinander abgrenzen.

- Knicken infolge zentrischer Druckbeanspruchung: Das Bauteil erfährt eine planmäßige Beanspruchung durch eine Druckkraft in Bauteillängsrichtung. Der Angriffspunkt der Beanspruchung fällt dabei mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen. Die Druckkraft lässt sich steigern bis zur elastischen Knickkraft, unter der das Gleichgewicht des Stabes indifferent wird und der Stab ausknickt.
- Biegeknicken: Von Biegeknicken wird gesprochen, wenn ein Bauteil planmäßig durch eine zentrische Druckkraft beansprucht wird. Das Bauteil weicht senkrecht zu einer seiner Hauptachsen aus, jedoch ohne zu drillen. Durch das Ausweichen des Bauteils entsteht ein Zusatzmoment, das überproportional anwächst und zum Biegeknickversagen führt.
- Biegedrillknicken: Als Biegedrillknicken wird die Versagensform beschrieben, bei der Bauteile mit einem Biegemoment und bisweilen mit einer Druckkraft planmäßig beansprucht werden. Diese Versagensform ist gekennzeichnet durch ein seitliches Ausweichen verbunden mit einer Drillung des Querschnitts.
- Kippen: Das Stabilitätsproblem des Kippens stellt einen Sonderfall des Biegedrillknickens dar. Als Kippen wird die Versagensform bezeichnet, bei der Bauteile ausschließlich durch ein Biegemoment beansprucht werden. Die Versagensform des Kippens ist wie beim Biegedrillknicken durch ein seitliches Ausweichen verbunden mit einer Drillung des Querschnitts gekennzeichnet.

Stabilitätsprobleme treten auch immer dann auf, wenn geometrische und strukturelle Imperfektionen oder unplanmäßige Exzentrizitäten bei Stäben, die planmäßig mit reiner Druckkraft oder Biegung beansprucht werden, zu zusätzlichen Spannungen führen. Werden die Spannungen im Gleichgewichtszustand größer als die Spannungen, die der Querschnitt ertragen kann, tritt infolge des Stabilitätsproblems ein Stabilitätsversagen auf. Geometrische und strukturelle Imperfektionen lassen sich in Bauteilen nicht vermeiden. Die geometrischen Imperfektionen werden hauptsächlich durch die Größe und die damit verbundenen Herstellungs- und Einbautoleranzen der Bauteile verursacht. Strukturelle Imperfektionen sind auf den organischen Ursprung des Werkstoffs Holz zurückzuführen. Die Auswirkungen, die sich aus den Imperfektionen auf das Tragwerk ergeben, müssen für den Nachweis stabilitätsgefährdeter Bauteile berücksichtigt werden, wenn diese zu einer erhöhten Beanspruchung des Tragwerks führen.

Da geometrische Imperfektionen und ungewollte Exzentrizitäten nicht zu vermeiden sind, ist der Einsatz eines Berechnungsverfahrens notwendig, um das nichtlineare Tragverhalten der Stabilitätsprobleme erfassen zu können. Es wird von Biegetorsionstheorie II. Ordnung gesprochen, wenn das statische Gleichgewicht am verformten Bauteil erfüllt wird, vgl. auch Petersen in [13] und [12].

## 2.2 Das Biegetorsionsproblem II. Ordnung



**Abbildung 2.1:** Verformtes Trägerelement mit Schnittgrößen

Mithilfe der Biegetorsionstheorie II. Ordnung lassen sich sämtliche aus den Gleichgewichtsbedingungen der Statik am verformten System im vorangegangenen Abschnitt 2.1 beschriebenen Stabilitätsprobleme mathematisch als gekoppeltes Differentialgleichungssystem formulieren (vgl. Gl. (2.1) bis Gl. (2.3)). Für die Herleitung der Grundgleichungen (siehe [13] und [14]) liegen als Annahmen ein einfach symmetrischer Querschnitt, ideal-elastisches Materialverhalten und kleine Verformungen zu Grunde, so dass für jede Stelle

$x$  des Trägers das gekoppelte Differentialgleichungssystem formuliert werden kann:

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}'''' - F \cdot w_{ges}'' + (M_z \cdot \vartheta_{ges})'' = q_z \quad (2.1)$$

$$E \cdot I_z \cdot v_{el}'''' - F \cdot v_{ges}'' + F \cdot \vartheta_{ges}''(z_S - z_M) + (M_{yq} \cdot \vartheta_{ges})'' = q_y \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & G \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}'' - E \cdot I_\omega \cdot \vartheta_{el}'''' \\ & - F \cdot v_{ges}'' \cdot (z_S - z_M) - M_{yq} \cdot v_{ges}'' - M_z \cdot w_{ges}'' \\ & + F \cdot \vartheta_{ges}'' \cdot (i_p^2 + z_M^2 + z_S \cdot r_z - 2 \cdot z_S \cdot z_M) \\ & - q_y \cdot \vartheta_{ges} \cdot e_y - q_z \cdot \vartheta_{ges} \cdot e_z = q_y \cdot e_z - q_z \cdot e_y \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit

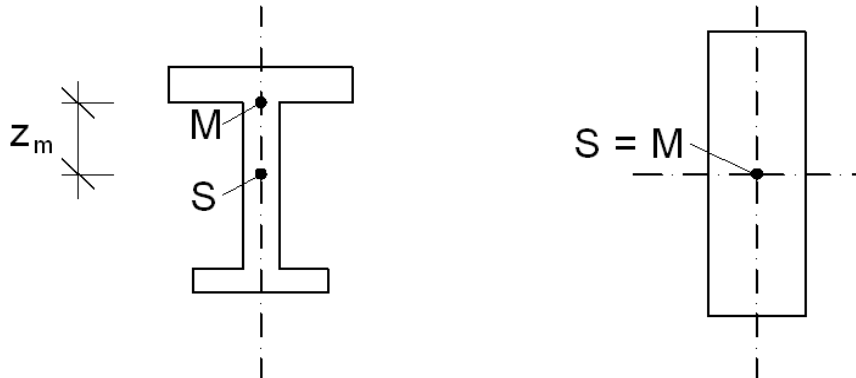
$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$I_y, I_z$	Flächenträgheitsmomente
$I_T$	Torsionsträgheitsmoment
$I_\omega$	Wölbwiderstand
$M_y$	Biegemoment um die y-Achse
$M_z$	Biegemoment um die z-Achse
$F$	Normalkraft in Stablängsrichtung
$q_z$	Gleichstreckenlast in z-Richtung
$q_y$	Gleichstreckenlast in y-Richtung
$z_S$	Lasteinwirkungsordinate bezogen auf den Querschnittsschwerpunkt
$z_M$	Abstand Schubmittelpunkt und Schwerpunkt
$i_p$	polarer Trägheitsradius
$r_z$	Querschnittskennwert nach Tab. 2.1

**Tabelle 2.1:** Querschnittskennwert  $r_z$  für Querschnitte mit Symmetrieeigenschaften nach [15]

Querschnitt	$r_z$
doppelsymmetrisch	= 0
einfachs symmetrisch zur z-Achse	≠ 0
einfachs symmetrisch zur y-Achse	= 0
punktsymmetrisch	= 0

Für das Stabilitätsproblem des Kippens reduziert sich das Differentialgleichungssystem um einige Terme, eine weitere Reduzierung wird erreicht, wenn davon ausgegangen wird, dass planmäßige Biegung ausschließlich um die starke Achse auftritt, vgl. Abb. 2.1 und Gl. (2.4) bis Gl. (2.6). In diesem Fall gilt  $M_z = 0$ ,  $q_y = 0$  und  $F = 0$ . Zudem wurde für die

allgemeine Herleitung der Gl. (2.1) bis Gl. (2.3) ein einfachsymmetrischer Querschnitt gewählt, was die Berücksichtigung eines Schubmittelpunkts außerhalb des Schwerpunkts zur Folge hatte. Im Folgenden soll ein Rechteckquerschnitt für die weiteren Berechnungen zugrunde gelegt werden, da Brettschichtholzträger überwiegend mit Rechteckquerschnitten gefertigt werden. Aufgrund dieser Annahmen fallen Schwerpunkt  $S$  und Schubmittelpunkt  $M$  in einem Punkt zusammen. Der Abstand dieser beiden Punkte  $z_M$  wird zu Null, vgl. Abb. 2.2.



**Abbildung 2.2:** Definition Schwerpunkt und Schubmittelpunkt am einfachsymmetrischen und am doppelsymmetrischen Querschnitt

$$EI_y \cdot w_{el}'''' = q_z \quad (2.4)$$

$$EI_z \cdot v_{el}'''' + (M_y \cdot \vartheta_{ges})'' = 0 \quad (2.5)$$

$$GI_T \cdot \vartheta_{el}'' - EI_\omega \cdot \vartheta_{el}'''' - M_{yq} \cdot v_{ges}'' - q_z \cdot \vartheta_{ges} \cdot e_{z,qz} = 0 \quad (2.6)$$

Um in einem weiteren Schritt das Langzeitverhalten mittels Zeitintegration in die gekoppelten Differentialgleichungen des Biegetorsionsproblems einfließen lassen zu können, werden diese so erweitert, dass das Kriechverhalten eine direkte Berücksichtigung erhält.

Damit kommt zur Vorverformung infolge struktureller und geometrischer Imperfektion und zur elastischen Verformung infolge Lasteinwirkung, die über einen längeren Zeitraum konstant ist, ein weiterer Anteil infolge Kriechen an jeder Stelle  $x$  hinzu, der zeitabhängig ist. Dieser Anteil darf mit den beiden anderen Anteilen der Verformung linear überlagert werden [16]. In der bisherigen Herleitung des Differentialgleichungssystems wurden alle Verformungen, die aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung resultieren, mit dem Index  $_{ges}$  versehen, der die Gesamtverformung kennzeichnet. Diese setzt sich für die unbekanntenen Verformungen Gl. (2.7), Gl. (2.8) und die unbekanntene Verdrehung Gl. (2.9) des Differentialgleichungssystems aus einem elastischen Anteil (Index  $_{el}$ ) und je einem Anteil aus Vorverformung (Index  $_0$ ) zusammen. Infolge Kriechen (Index  $_{kri}$ ) kommt ein weiterer Ver-



formungsanteil hinzu. In Gleichungen gefasst, ergibt sich:

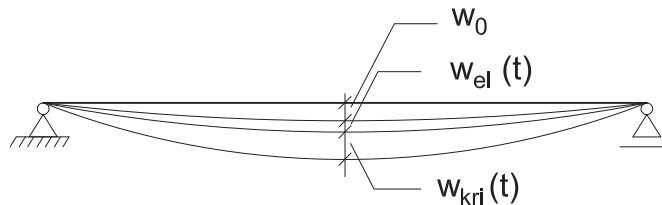
$$w_{ges}(x,t) = w_{el}(x,t) + w_0(x) + \underline{w_{kri}(x,t)} \quad (2.7)$$

$$v_{ges}(x,t) = v_{el}(x,t) + v_0(x) + \underline{v_{kri}(x,t)} \quad (2.8)$$

$$\vartheta_{ges}(x,t) = \vartheta_{el}(x,t) + \vartheta_0(x) + \underline{\vartheta_{kri}(x,t)} \quad (2.9)$$

mit

- $w$  Verformung in z-Richtung (vertikal)
- $v$  Verformung in y-Richtung (horizontal)
- $\vartheta$  Verdrehung um die x-Achse



**Abbildung 2.3:** Komponenten der vertikalen Verformung

Anschließend werden die entsprechenden Terme des Differentialgleichungssystems in Gl. (2.4) bis Gl. (2.6) durch die Ausdrücke in Gl. (2.7) bis Gl. (2.9) ersetzt. Die Terme aus Vorverformung sind zum betrachteten Zeitpunkt  $t$  an jeder Stelle  $x$  konstante Ausdrücke, die sich während des betrachteten Zeitpunkts nicht ändern und deshalb auf die rechte Seite des Differentialgleichungssystems geschrieben werden. Damit lässt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem zu jedem Zeitpunkt  $t$  lösen. Die elastischen Verformungen lassen sich an jeder Stelle  $x$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  unter Berücksichtigung der Kriechverformung berechnen, die aus den rheologischen Modellen hervorgeht und für jeden Zeitpunkt  $t$  bekannt ist. Damit kann also die Kriechverformung als eine zusätzliche Imperfektion interpretiert werden, da sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  einen konstanten Wert annimmt. Man erhält das um Kriecheinflüsse erweiterte Differentialgleichungssystem für den Sonderfall „Kippen“:

$$EI_y \cdot w_{el}'''' = q_z \quad (2.10)$$

$$EI_z \cdot v_{el}'''' + (M_y \cdot \vartheta_{el})'' = - [M_y \cdot (\vartheta_0 + \vartheta_{kri})]'' \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} GI_T \cdot \vartheta_{el}'' - EI_\omega \cdot \vartheta_{el}'''' \\ - M_{yq} \cdot v_{el}'' - q_z \cdot \vartheta_{el} \cdot e_{z,qz} = M_{yq} \cdot (v_0 + v_{kri})'' \\ - q_z \cdot (\vartheta_0 + \vartheta_{kri}) \cdot e_{z,qz} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das Kriechverhalten des Holzes bewirkt eine Zunahme der Verformungen und der Verdrehung des kippgefährdeten Trägers, dabei können horizontale Verformung und Verdrehung des Trägers nicht unabhängig voneinander betrachtet werden, wie aus Gl. (2.10) bis Gl. (2.12) ersichtlich wird. Im Gegensatz zum ideal geraden Biegeträger verursachen die Kriechverformungen am vorgekrümmten Biegeträger zusätzliche elastische Verformungen und Schnittgrößen, die zu einer Zunahme der Spannungen in Abhängigkeit der Lasteinwirkungsdauer im Querschnitt führen.

Das in den Gl. (2.10), Gl. (2.11) und Gl. (2.12) hergeleitete Differentialgleichungssystem bildet die Grundlage für die Lösung des Kippproblems. Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist nur in den wenigsten Fällen analytisch möglich, da die Differentialgleichungen miteinander gekoppelt sind. Daher wurde zur numerischen Lösung des Biegetorsionsproblems das Berechnungsprogramm *constantialigni* entwickelt (siehe [11] und [17]). Die eigentliche Lösung der Differentialgleichung erfolgt über die finite Differenzenmethode (siehe [18] und [19]), bei der die Ableitungen durch Ansatzfunktionen abgebildet werden. Um die Kriechverformungen in dieser Zeitintegration zu erfassen, stehen verschiedene rheologische Modelle zur Verfügung, auf die in Kapitel 4 eingegangen wird.

## 2.3 Stabilitätsnachweise von Holzbauteilen - Normensituation und Stand der Forschung und Technik

### 2.3.1 Einführung mit Beispiel

Hooley und Madsen [20] führten bereits in den 1960er Jahren Versuche an kippgefährdeten Brettschichtholzträgern durch. Ziel der Untersuchungen war es, festzustellen, ob die Stabilitätstheorie auf den anisotropen Werkstoff Holz übertragen werden kann. In den Versuchen stellten Hooley und Madsen [20] fest, dass eine nur geringe Steigerung der Beanspruchung über das kritische Kippmoment hinaus ein überproportional großes Anwachsen der Verformungen zur Folge hat. Das kritische Kippmoment wird von Hooley und Madsen [20] für Rechteckquerschnitte angegeben zu:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{E \cdot h \cdot b^3}{6} \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot 0,94 \quad (2.13)$$

Dieser in den Versuchen von Hooley und Madsen [20] festgestellte Effekte soll nun mit Hilfe numerischer Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung exemplarisch an einem ausgewählten Träger veranschaulicht werden. Gewählt wird ein gabelgelagerter Einfeldträger mit nachfolgenden Abmessungen.

b	=	16,00	cm	Breite des Querschnitts
h	=	112,00	cm	Höhe des Querschnitts
l	=	14,29	m	Länge des Trägers
v <sub>0</sub>	=	3,57	cm	Stich der sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung

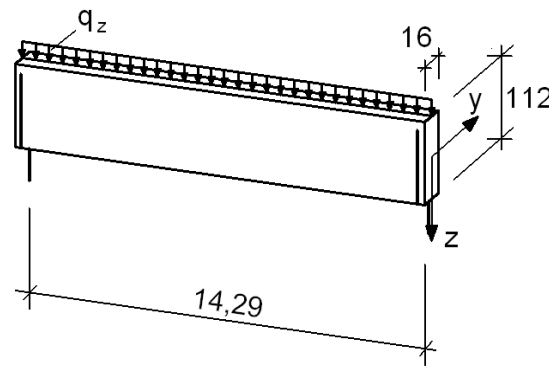


Abbildung 2.4: Gabelgelagerter Einfeldträger

In Abb. 2.5 wurde die planmäßige Belastung durch eine Gleichlast am Obergurt  $q_{zOG}$  über die kritische Verzweigungslast  $q_{krit}$  und damit über das Kippmoment hinaus gesteigert. Die dargestellten bezogenen Verformungen  $f_{el}(q_{zOG})/f_{el}(q_{krit})$  weisen für die vertikale Durchbiegung  $w_{el}$  einen linearen Verlauf auf. Die vertikale Verformung nimmt somit proportional zur Laststeigerung zu. Die horizontale Verformung  $v_{el}$  dagegen nimmt mit zunehmender Last nichtlinear zu. Nach Erreichen des kritischen Kippmoments ist wie in den Versuchen von Hooley und Madsen [20] bei geringfügiger Laststeigerung eine überproportional starke Zunahme der horizontalen Verformung zu beobachten. Aus den

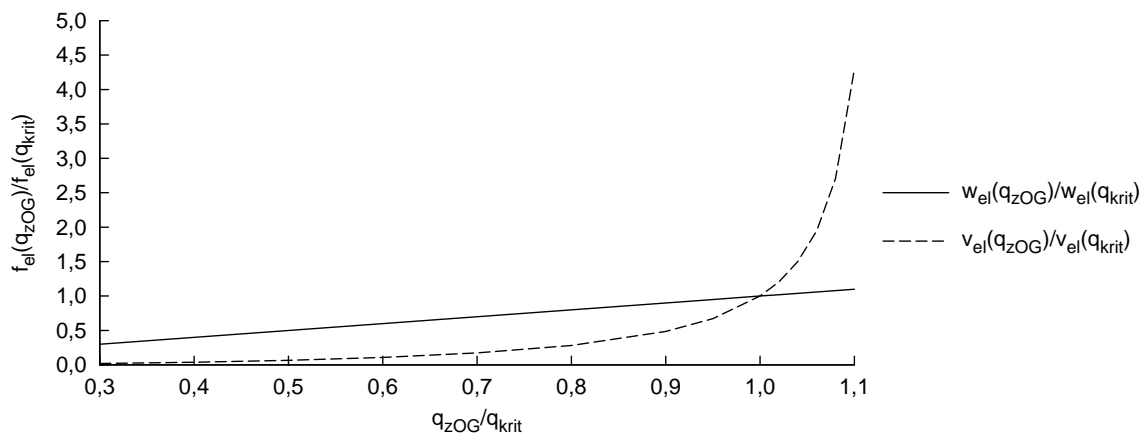
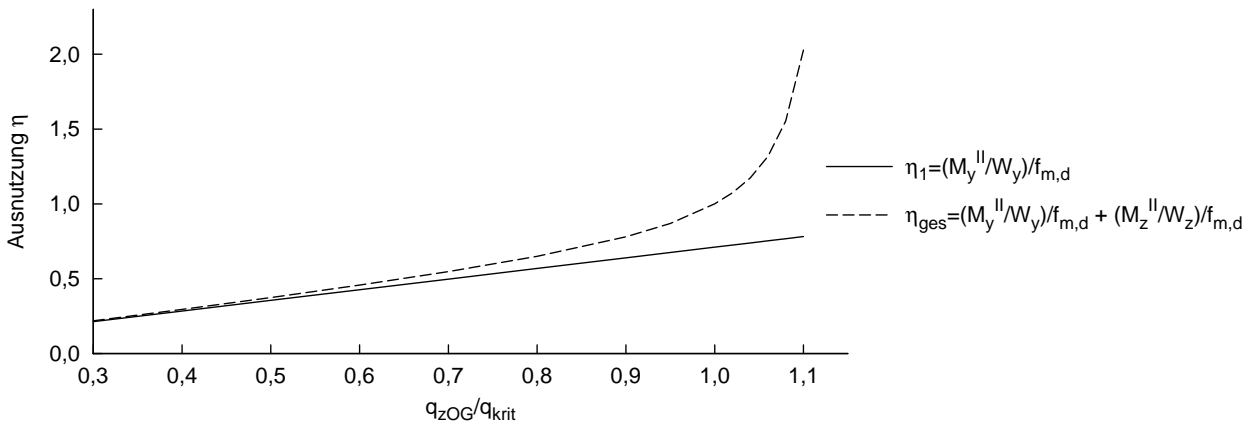


Abbildung 2.5: Quotient der elastischen Verformungen vertikal  $w_{el}$  und horizontal  $v_{el}$  bezogen auf die kritische Verzweigungslast  $q_{krit}$  bei kontinuierlicher Laststeigerung am vorgekrümmten Träger

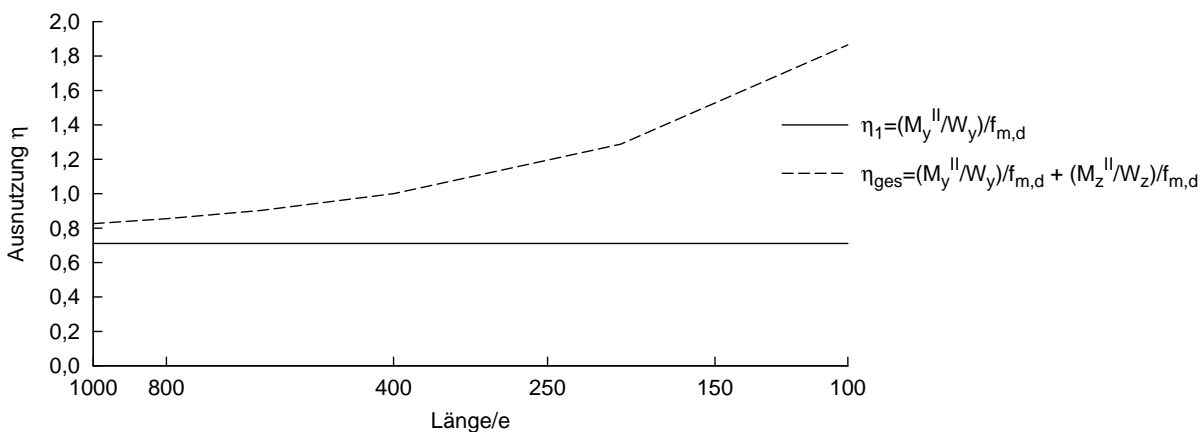
elastischen Verformungen lassen sich Schnittgrößen und Längsspannungen bestimmen. In Abb. 2.6 sind die zugehörigen Längsspannungsausnutzungen als Quotient aus der einwirkenden Spannung und dem Bemessungswert der Biegefestigkeit  $f_{m,d}$  für Biegung um die starke Achse ( $M_y$ ) und mit der überlagerten Längsspannung infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung dargestellt. Durch Abb. 2.6 wird besonders deutlich, wie stark die Längsspannung infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung vom Grad der planmäßigen Beanspruchung abhängt. Bei geringer planmäßiger Beanspruchung sind die Längsspannungen aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung äußerst gering. Sobald sich der Grad der Beanspruchung der Verzweigungslast  $q_{krit}$  nähert, nehmen die Längsspannungen aus

Biegetorsionstheorie II. Ordnung nichtlinear zu. Übersteigt der Grad der Beanspruchung die Verzweigungslast nur geringfügig, so ist eine stark nichtlineare Spannungszunahme zu verzeichnen, die zumindest rechnerisch ein abruptes Versagen des kippgefährdeten Trägers darstellt. Im Gegensatz zu den Versuchen von Hooley und Madsen [20] findet



**Abbildung 2.6:** Längsspannung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei kontinuierlicher Laststeigerung am Beispiel des gabelgelagerten Trägers aus Abb. 2.4

durch das Kriechverhalten des Werkstoffs Holz keine Steigerung der Last bis zum Bruch statt, sondern eine Zunahme der Vorkrümmung über die Zeit, wie sie in Gl. (2.10) bis Gl. (2.12) bereits formuliert wurde. Um die Auswirkungen einer höheren Vorkrümmung besser abschätzen zu können, soll derselbe Träger wie bereits zuvor mit unterschiedlichen Vorkrümmungen beaufschlagt und hiermit die Längsspannungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bestimmt werden. Für diese Untersuchung wird die Verzweigungslast  $q_{krit}$  auf den Träger angesetzt, die sich für den Normvorkrümmungsansatz  $l/400$  nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] bestimmt. Die Variation des Vorkrümmungsansatzes in Abb. 2.7 zeigt eine moderate Zunahme der Längsspannungen für Vorkrümmungsansätze von  $l/1000$  bis  $l/400$ . Für Vorkrümmungsansätze  $> l/400$  wird der Verlauf der damit verbundenen Längsspannungszunahme in Abb. 2.7 zunehmend nichtlinear und führt, wie schon zuvor bei Steigerung der Last zu einem abrupten rechnerischen Versagen des Trägers.



**Abbildung 2.7:** Längsspannung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei veränderlichem Stich der Vorkrümmung  $e$

Die umfangreichsten Untersuchungen zum Thema Kippen von Holzträgern wurden von Brüninghoff [21] durchgeführt, sie mündeten auch in eine Bemessungspraxis [22], bei der in der Regel der Träger nach Theorie I. Ordnung dimensioniert werden kann.

Der Nachweis kippgefährdeter Träger nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] kann grundsätzlich auf zwei unterschiedliche Arten geführt werden. Der Anwender hat zum einen die Möglichkeit, den Spannungsnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu führen. In der Praxis wird häufig wegen des erhöhten Rechenaufwands und der höheren Fehleranfälligkeit versucht, diese Nachweisform zu vermeiden. Zum anderen wird mit dem Ersatzstabverfahren die Möglichkeit geschaffen, dass das Kippproblem eines Biegestab mit vergleichsweise einfachen Mitteln und geringem Rechenaufwand geführt werden kann. Dabei wurde das Ersatzstabverfahren aus dem Biegetorsionsproblem II. Ordnung unter Verwendung einiger Vereinfachungen hergeleitet.

### 2.3.2 Kippnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

Der Kippnachweis kann nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] in Verbindung mit DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] stets als Spannungsnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung geführt werden. Zum Nachweis der Längsspannungen  $\sigma_x$  aus Biegung und Druck (Biegedrillknicken) müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1,0 \quad (2.14)$$

und

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1,0 \quad (2.15)$$

mit

$$k_m = \begin{cases} 0,7 & \text{für Rechteckquerschnitte} \\ & \text{aus Vollholz, Brettschichtholz und Furnierschichtholz,} \\ 1,0 & \text{für andere Querschnitte} \\ & \text{aus Vollholz, Brettschichtholz und Furnierschichtholz} \end{cases}$$

Der Schubspannungsnachweis darf mit Schnittgrößen der Querkraft und des Torsionsmoments aus einer Berechnung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung geführt werden mit:

$$\left(\frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}}\right) + \left(\frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}}\right)^2 \leq 1 \quad (2.16)$$

Für die Berechnung der Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ist eine Vorkrümmung mit einer Ausmitte  $e$  in Feldmitte bei Einfeldträgern und mittig zwischen den Knoten von Mehrfeldträgern als sinus- oder parabelförmige Vorkrümmung anzusetzen.

Der Rechenwert der Ausmitte  $e$  sollte nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] 5.4.4 (2) mindestens betragen:

$$e = \frac{l}{400} \quad (2.17)$$

Für die Schnittgrößenbestimmung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung wird der Mittelwert der Steifigkeiten  $X_{mean}$ , dividiert durch den Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_m$ , für Tragwerke aus mehreren Stäben in Ansatz gebracht. Für die Schnittgrößenberechnung an Einzelstäben wird der 5%-Quantilwert des E-Modul  $E_{0,05}$  und des Schubmodul  $G_{0,05}$  zu verwenden, um die vorhandene Tragfähigkeit nicht zu überschätzen, vgl. Brüninghoff [23]. Die 5%-Quantilwerte bestimmen sich gemäß DIN 1052:2008-12 [24] nach Gl. (2.18) und Gl. (2.19). In DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] ist ein dahingehender Hinweis für die Schnittgrößenbestimmung nicht mehr enthalten.

$$E_d = \frac{5}{6} \cdot \underbrace{E_{mean}}_{E_{0,05}} \quad (2.18)$$

und

$$G_d = \frac{5}{6} \cdot \underbrace{G_{mean}}_{G_{05}} \quad (2.19)$$

Gegenstand der Forschung ist das Kippproblem schon deutlich länger als seine Verankerung in der Holzbaunormung. Von Prandtl [25] und Michell [26] wird bereits 1899 das Kippproblem mathematisch beschrieben. Prandtls und Michells Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf den isotropen Werkstoff. Für den beidseitig gabelgelagerten Träger unter konstanter Momentenbeanspruchung wird das kritische Moment  $M_{crit}$  von Timoshenko [27] angegeben:

$$M_{crit} = \frac{\pi}{l_{ef}} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_T}{1 - \frac{I_z}{I_y}}} \quad (2.20)$$

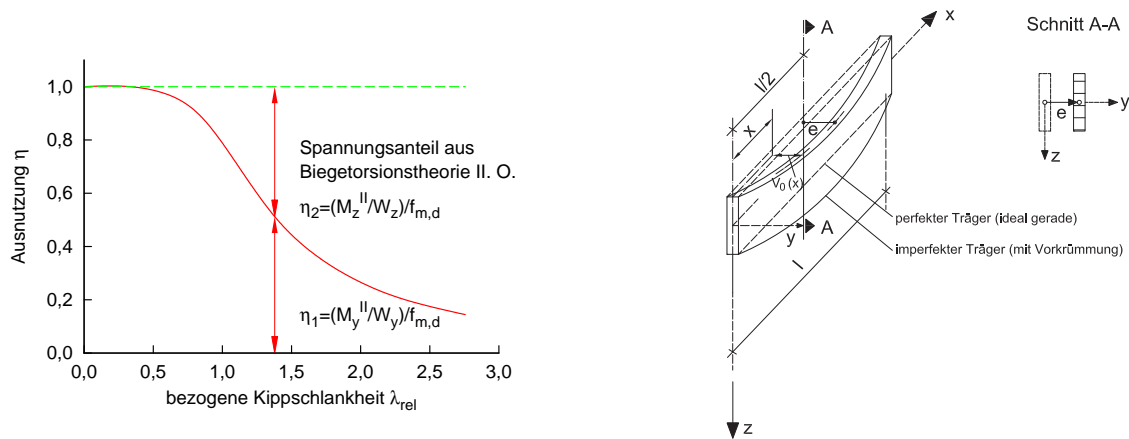
Das kritische Moment  $M_{crit}$  wurde ebenfalls für den isotropen Werkstoff hergeleitet. Hoo-ley und Madsen [20] überprüften in Versuchen an Brettschichholzträgern mit Rechteckquerschnitt, ob das für den isotropen Werkstoff hergeleitete kritische Moment  $M_{crit}$  auf den anisotropen Werkstoff Holz übertragen werden kann. Durch die Versuche von Hoo-ley und Madsen [20] konnte diese Übertragbarkeit auf den anisotropen Werkstoff Holz bestätigt werden. In den Erläuterungen zu DIN 1052:2004-08 [28] wird davon ausgegangen, dass bei kippgefährdeten Trägern

$$I_y \gg I_z \quad (2.21)$$

ist und damit die Bestimmung des kritischen Moments sich vereinfacht zu:

$$M_{crit} = \frac{\pi}{l_{ef}} \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_T} \quad (2.22)$$

Aus Gl. (2.22) ergibt sich die im Ersatzstabverfahren verwendete kritische Kippspannung  $\sigma_{m,crit}$ , vgl. Gl. (2.34). Teichmann vergleicht in [8] und [7] anhand der kritischen Kippspannung  $\sigma_{m,crit}$  die Auswirkung verschiedener Vorkrümmungen auf Träger mit unterschiedlichen Querschnitten und Längen, indem die kritische Kippspannung  $\sigma_{m,crit}$  über der variierenden Länge aufgetragen wird. Choo definiert in [29] die bezogene Kippschlankheit, wie sie in der derzeit gültigen DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] formuliert ist, siehe Gl. (2.33). Mit Hilfe der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  lässt sich das Kippverhalten von Träger mit unterschiedlichen Querschnitten und Längen direkt vergleichen.



**Abbildung 2.8:** Spannungsanteile infolge Gleichlast nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

Der Effekt aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung kann damit zum Zeitpunkt  $t = 0$  von der bezogenen Kippschlankheit abhängig angegeben werden. Abb. 2.8 veranschaulicht in Abhängigkeit der Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  die Längsspannungsanteile  $\sigma_x^{II}$ , die sich aus der Bemessungslast  $q_{zOG}$  auf einen Rechteckquerschnitt bei einer 100%-igen Querschnittsausnutzung ergeben. Es wird deutlich, dass der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung mit zunehmender Schlankheit  $\lambda_{rel,m}$  infolge größer werdender wirksamer Länge  $l_{ef}$  nichtlinear zunimmt. Die wirksame Länge  $l_{ef}$  beschreibt dabei die freie Kipp-länge. Am Beispiel einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 1,4$  soll dies veranschaulicht werden. Der insgesamt zu 100% ausgenutzte Querschnitt eines am Obergurt mit konstanter Gleichlast  $q_{zOG}$  belasteten Trägers kann nur noch etwa zu 50 % infolge planmäßiger Längsspannung aus Biegung um die starke Achse  $M_y^{II}$

$$\eta_1 = \frac{\frac{M_y^{II}}{W_y}}{f_{m,d}} \quad (2.23)$$

ausgenutzt werden. Der übrige 50 %-Anteil an der Gesamtausnutzung resultiert aus dem

Längsspannungsanteil aus Biegung um die schwache Achse  $M_z^{II}$

$$\eta_2 = \frac{\frac{M_z^{II}}{W_z}}{f_{m,d}} \quad (2.24)$$

Dieser Biegespannungsanteil ist nicht auf eine planmäßige Beanspruchung des Trägers in horizontaler Richtung zurückzuführen, sondern eine Folge der in vertikaler Richtung auf den vorgekrümmten Träger wirkenden konstanten Gleichlast  $q_{zOG}$ . Der Biegespannungsanteil  $\eta_2$  folgt aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung und damit aus dem Gleichgewicht am imperfekten, vorgekrümmten Träger, also aus dessen mathematischer Beschreibung durch die gekoppelten Differentialgleichungen Gl. (3.2) und Gl. (3.3).

In Abb. 2.8 bildet die gestrichelt dargestellte Linie die Summe der beiden Anteile aus  $\eta_1$  und  $\eta_2$  für jede Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  ab. Die Querschnittsausnutzung beträgt damit für jede Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  100% bzw.  $\eta = 1,0$ .  $\eta_1$  stellt den Biegespannungsanteil aus der tatsächlichen, äußeren Einwirkung dar und ist in Abb. 2.8 mit durchgezogener Linie dargestellt. Diese Kurve gibt damit den Grenzwert für den Biegespannungsanteil aus der tatsächlichen, äußeren Einwirkung wieder und bildet die Grundlage, aus der der Kippbeiwert  $k_{crit}$  für das Ersatzstabverfahren, vgl. Kapitel 2.3.3, in Gl. (2.36) abgeleitet wurde. Durch den Kippbeiwert  $k_{crit}$  wird der Bemessungswert der Biegespannung  $f_{m,d}$  begrenzt, so dass bei eingehaltenem Nachweis nach dem Ersatzstabverfahren, siehe Gl. (2.25) und Gl. (2.26) der Effekt aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung berücksichtigt ist.

Aus Abb. 2.8 wird deutlich, dass der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung und damit der Anteil der Ausnutzung des Querschnitts  $\eta_2$  mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda$  nichtlinear zunimmt und die Ausnutzung des Querschnitts bzw. dessen Nutzbarkeit aus planmäßiger, äußerer Einwirkung im gleichen Maße nichtlinear abnimmt. Durch Abb. 2.8 und die Anteile an der Gesamtausnutzung des Querschnitts wird die Relevanz des Spannungsanteils aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung für weitgespannte Tragwerke anschaulich, die im Folgenden im Hinblick auf das Langzeitverhalten und das auftretende Torsionsmoment eingehender untersucht wird.

### 2.3.3 Kippnachweis nach dem Ersatzstabverfahren

Beim Ersatzstabverfahren dient ein gabelgelagerter Stab mit Vorkrümmung als Referenzsystem, auf das der nachzuweisende Stab bezogen wird. Die Schnittgrößen dürfen nach Theorie I. Ordnung berechnet werden. Für den Stabilitätsfall des Biegedrillknickens müssen nach DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] folgende Bedingungen eingehalten sein:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,y,d}} + \left( \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (2.25)$$

und

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + \left( \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,y,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (2.26)$$



mit  $k_{c,y}$  Knickbeiwert für Knicken um die y-Achse  
 $k_{c,z}$  Knickbeiwert für Knicken um die z-Achse  
 $k_{crit}$  Kippbeiwert

Die Knickbeiwerte  $k_{c,y}$  und  $k_{c,z}$  ermitteln sich, wie folgt:

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} \quad (2.27)$$

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} \quad (2.28)$$

mit

$$k_y = 0,5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,y} - 0,3) + \lambda_{rel,y}^2] \quad (2.29)$$

$$k_z = 0,5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0,3) + \lambda_{rel,z}^2] \quad (2.30)$$

$\beta_c$  ein Imperfektionsbeiwert für Imperfektionen  
 $\beta_c = 0,2$  für Vollholz und Balkenschichtholz,  
 $\beta_c = 0,1$  für Brettschichtholz und Holzwerkstoffe  
 und mit dem bezogenen Schlankheitsgrad

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (2.31)$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (2.32)$$

Der Kippbeiwert  $k_{crit}$  bestimmt sich in Abhängigkeit des bezogenen Kippschlankheitsgrades  $\lambda_{rel,m}$ :

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \quad (2.33)$$

mit  $\sigma_{m,crit}$  kritische Biegespannung

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{y,crit}}{W_y} = \frac{\pi \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot I_z \cdot G_{0,05} \cdot I_{tor}}}{l_{ef} \cdot W_y} \quad (2.34)$$

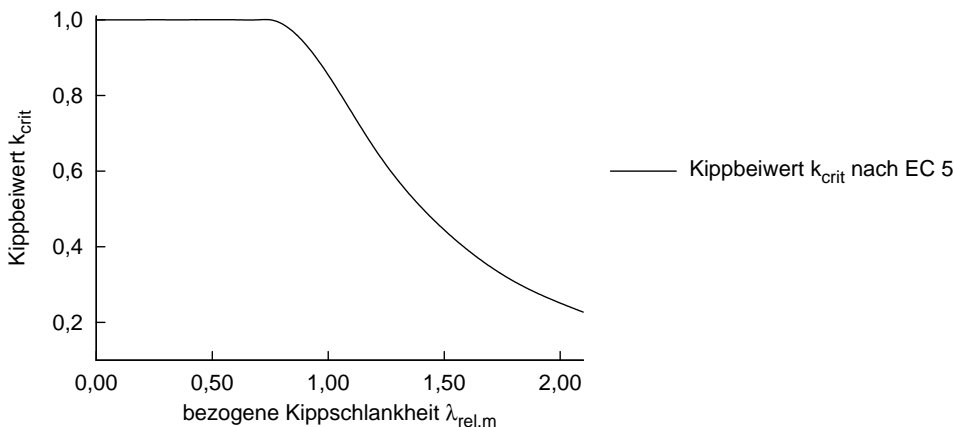
mit  $E_{0,05}$  der 5%-Quantilwert des Elastizitätsmoduls in Faserrichtung  
 $G_{0,05}$  der 5%-Quantilwert des Schubmoduls in Faserrichtung  
 $I_z$  Flächenträgheitsmoment  
 $I_{tor}$  Torsionsträgheitsmoment  
 $l_{ef}$  wirksame Länge des Biegestabes  
 $W_y$  Widerstandsmoment

Für Biegestäbe aus Nadelholz mit Rechteckquerschnitt der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  darf die kritische Biegespannung vereinfacht berechnet werden:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{0,78 \cdot b^2}{h \cdot l_{ef}} \cdot E_{0,05} \quad (2.35)$$

$$k_{crit} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_{rel,m} \leq 0,75 \\ 1,56 - 0,75 \cdot \lambda_{rel,m} & \text{für } 0,75 < \lambda_{rel,m} \leq 1,4 \\ 1/\lambda_{rel,m}^2 & \text{für } \lambda_{rel,m} > 1,4 \end{cases} \quad (2.36)$$

Der Kippbeiwert  $k_{crit}$  wurde von Heimeshoff in [30] durch eine Näherung an Spannungskurven  $\sigma_x(M_y)$  aus Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung hergeleitet, Abb. 2.9 veranschaulicht die Näherungskurve. Die Herleitung erfolgte an Querschnitten mit  $h/b=4$  und  $h/b=10$ . Als Vorkrümmung wurden  $e=l/289$  für Vollholz und  $e=l/577$  für Brettschichtholz gewählt.



**Abbildung 2.9:** Kippbeiwert  $k_{crit}$  nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2]

Die aus der Berechnung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ermittelten Spannungswerte  $\sigma_x(M_y)$  werden durch drei abschnittsweise definierte Näherungskurven in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  angenähert. Für diesen vereinfachten Nachweis nach dem Ersatzstabverfahren schlägt Heimeshoff in [30] vor, für Rechteckquerschnitte den Kippbeiwert  $k_{crit}$  um 10% zu erhöhen, da die Extrema der Spannungen nur in zwei gegenüberliegenden Ecken des Querschnitts auftreten. Mit der Einführung von DIN 1052:2004-08 [31] entfiel diese Regelung und die Vorkrümmung wurde für Vollholz und Brettschichtholz zu  $e=l/400$  festgesetzt. Mit dem Ersatzstabverfahren kann ein Stabilitätsnachweis sehr schnell geführt werden, da nur die Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung dafür zu berechnen sind. Die nichtlinearen Effekte, die sich aus der Biege-

torsionstheorie II. Ordnung ergeben, werden vereinfacht in diese Nachweisform aufgenommen. Durch die getroffenen Annahmen, soll der Biegedrillknicknachweis nach dem Ersatzstabverfahren stets auf der sicheren Seite liegen, wie Brüninghoff in [23] zeigt.

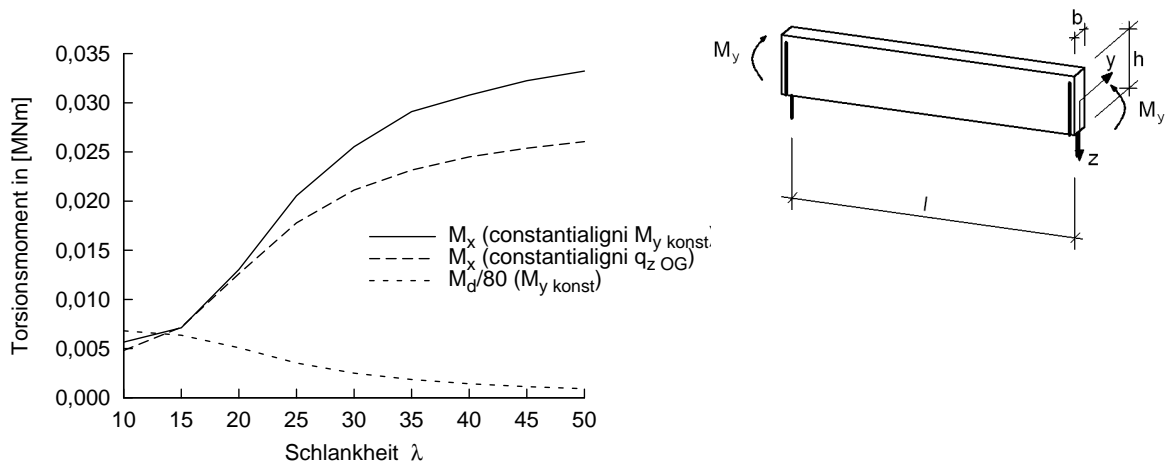
## 2.4 Torsionsmoment aus Kippstabilisierung - Normensituation und Stand der Forschung und Technik

### 2.4.1 Einführung

Für den Nationalen Anhang [3] zu EN 1995-1-1 [2] wurde die Übernahme der bisherigen Regelung der DIN 1052:2008-12 [24] vorgeschlagen. Das Torsionsmoment wird in diesem vereinfachten Bemessungsvorschlag an das Biegemoment gekoppelt und zu  $M_d/80$  berechnet. Hinweise und Vergleichsberechnungen aus der Praxis haben gezeigt, dass dieser für den gabelgelagerten Einfeldträger ohne horizontale Stützung hergeleitete Vorschlag u.U. zu unwirtschaftlichen Ergebnissen führen kann. Von Kuhlmann und Hofmann sind in [4] zu diesem Thema numerische Untersuchungen zur Bestimmung des Torsionsmoments am gabelgelagerten Einfeldträger mit konstantem Querschnitt durchgeführt worden. Da eine Querschnittsausnutzung von 100% nur iterativ bestimmt werden kann, wurde die Berechnung mit Hilfe von *constantaligni* in Hofmann [11], Kuhlmann/Hofmann [17], einem numerischen Berechnungsprogramm zur Lösung des Differentialgleichungssystems des Biegetorsionsproblems (vgl. Petersen [13], Roik et al. [14]), vorgenommen. Mit *constantaligni* können Berechnungen am gabelgelagerten Einfeldträger nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung durchgeführt werden. Außerdem konnten bislang zwei diskrete horizontale Stützungen in den Drittelpunkten des gabelgelagerten Einfeldträgers berechnet werden. In einer Voruntersuchung im Rahmen von [4] wurde für den Vergleich mit dem Nationalen Anhang [3] zur DIN EN 1995-1-1 [2] das statische System des Einfeldträgers, ein Brettschichtholzquerschnitt 16 cm/112 cm unter 100% Querschnittsausnutzung zugrunde gelegt.

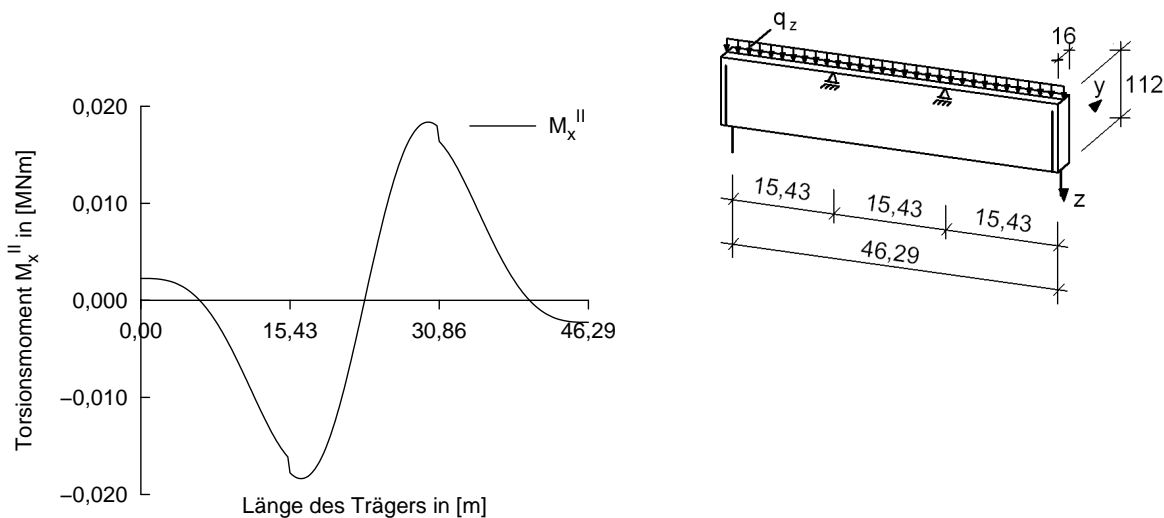
Die Ergebnisse zeigten für eine zunehmende Kippschlankheit eine nichtlineare Zunahme der Effekte aus der Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei einer gleichzeitigen Reduzierung des Anteils an der Gesamtspannung  $\sigma_x^{II}$  aus Biegung um die starke Achse, da die Anteile aus Biegung um die schwache Achse anwachsen. Abb. 2.10 zeigt zudem, dass der in DIN EN 1995-1-1/NA angegebene Wert  $M_d/80$  mit zunehmender Schlankheit abnimmt und damit entgegengesetzt zum Torsionsmoment verläuft, das sich aus den Berechnungen nach Theorie II. Ordnung ergibt.

In einer weiteren Voruntersuchung wurde der Querschnitt und das statische System des gabelgelagerten Einfeldträgers der vorangegangenen Untersuchung beibehalten, jedoch wurden in den Drittelpunkten des Trägers zunächst zwei horizontale Stützungen des Obergurts eingeführt. Der Vergleich der Ergebnisse aus Berechnungen nach Theorie II. Ordnung und dem Vorschlag des Nationalen Anhangs zur DIN EN 1995-1-1 zeigten auch hier, dass das tatsächlich auftretende Torsionsmoment in Abhängigkeit der Schlankheit, verglichen mit dem Vorschlag der Norm, einen entgegengesetzten Verlauf besitzt. Der An-



**Abbildung 2.10:** Vergleich des Torsionsmoments  $M_x$  nach numerischer Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung und nach dem in DIN EN 1995-1-1/NA [3] enthaltenen Ansatz am statischen System des gabelgelagerten Einfeldträgers

satz nach [3] liegt hier jedoch, bezogen auf das auftretende Torsionsmoment am Auflager, auch für große Schlankheiten auf der sicheren Seite.



**Abbildung 2.11:** Torsionsmoment  $M_x$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am gabelgelagerten Einfeldträger mit diskreter horizontaler Stützung des Obergurts in den Drittelpunkten [4]

Das maximale Torsionsmoment  $M_{x,max}$  tritt für den untersuchten Einfeldträger am Ort der diskreten horizontalen Stützung auf (vgl. Abb. 2.11), so dass am Auflager zwar die maximale Schubspannung infolge Querkraft auftritt, diese jedoch nicht mit der maximalen Schubspannung infolge Torsion überlagert werden muss.

Aus dieser Betrachtung wird deutlich, ähnlich wie auch von Mistler in [5] [6] dargestellt, welche Bedeutung dem Horizontalverband als aussteifendem Bauteil im Hinblick auf die Bestimmung des Torsionsmoments zukommt und welche Vorteile eine systematische Untersuchung dieses Effekts bieten kann.

## 2.4.2 Vereinfachte Berechnung nach dem Ersatzstabverfahren

DIN EN 1995-1-1 [2] in Verbindung mit DIN 1995-1-1/NA:2010-12 [3] ermöglichen es dem Anwender einen durch einachsige Biegung kippgefährdeten Biegeträger nach dem Ersatzstabverfahren nachzuweisen. Hierfür dürfen die Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung berechnet werden. Mit dem Beiwert  $k_{crit}$  werden die Effekte nach Theorie II. Ordnung erfasst, indem die zulässige Biegespannung um diesen Wert reduziert wird. Mit dem Ersatzstabverfahren ist es dem in der Praxis tätigen Ingenieur möglich, den Nachweis eines kippgefährdeten Biegeträgers sicher und mit relativ einfachen Mitteln zu führen. Aufwändige Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung sind hierfür nicht notwendig.

Das Ersatzstabverfahren basiert auf der analytischen Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung. Aus der analytischen Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung konnte der Kippbeiwert  $k_{crit}$  unter Annahme beidseitiger Gabelagerung und einem über die Stablänge konstanten Biegemoment für Träger mit konstantem Rechteckquerschnitt hergeleitet werden. Wird der kippgefährdete Biegeträger durch Einzel- und Gleichlasten beansprucht, sind nach DIN EN 1995-1-1/NA:2010-12 [3] Ersatzstablängen  $l_{ef}$  zu verwenden. Der Kippnachweis wird dann unter Berücksichtigung der Ersatzstablänge  $l_{ef}$  nach dem Ersatzstabverfahren geführt.

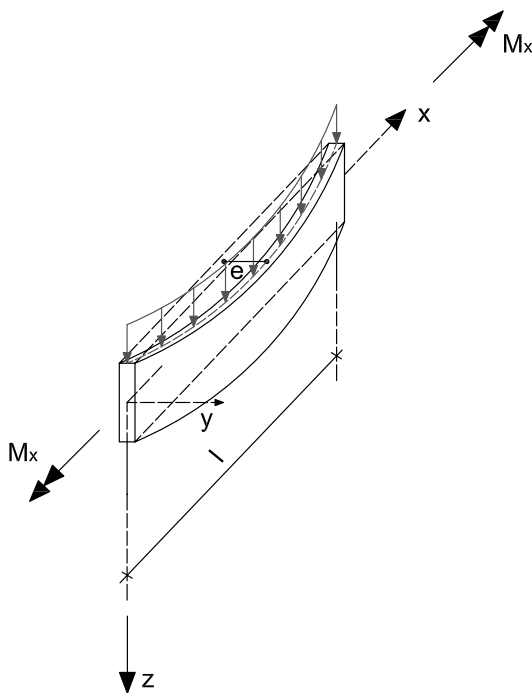
Gänzlich unerfasst bleiben beim Ersatzstabverfahren die Zusatzspannungen, die sich aus der Verdrehung des Querschnitts ergeben. Aus der Verdrehung des Stabes entsteht ein Torsionsmoment, das einen zusätzlichen Anteil zu den übrigen Schubspannungen liefert. Nach der aktuell gültigen Bemessungsnorm DIN EN 1995-1-1 [2] mit dem für Deutschland gültigen Nationalen Anhang [3] darf der Schubspannungsnachweis geführt werden mit:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}} \right) + \left( \frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (2.37)$$

In Gl. (2.37) geht neben den Spannungsanteilen aus Querkraft nur der Anteil aus Saint-Venantscher Torsion ein. Die Wölbkrafttorsion bleibt unberücksichtigt. Bei planmäßiger Biegung um die starke Achse und einer Schnittgrößenbestimmung nach Theorie I. Ordnung reduziert sich Gl. (2.37) auf:

$$\left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right) \leq 1 \quad (2.38)$$

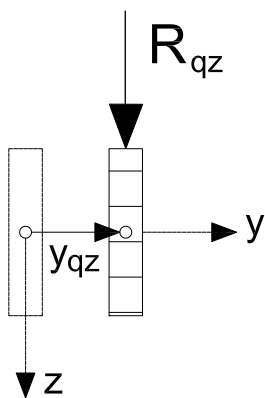
Somit wird beim Ersatzstabverfahren der Schubspannungsanteil aus Torsion nicht erfasst, da eine Quantifizierung des tatsächlich einwirkenden Torsionsmoment aus Kippstabilisierung im Querschnitt am Auflager im Rahmen des Ersatzstabverfahrens nicht vorgenommen wird. DIN EN 1995-1-1/NA:2010-12 [3] übernimmt einen Ansatz aus DIN 1052:2008-12 [24], der ursprünglich zur Dimensionierung von Auflagergabeln kippgefährdeter Biegeträger hergeleitet worden war. Die Herleitung dieses Ansatzes wurde in den Erläuterungen zu DIN 1052:2004-08 [28] für einen gabelgelagerten Einfeldträger unter konstanter Gleichlast  $q_z$  vorgenommen. Darin wird das Torsionsmoment im Auflager durch eine lineare Berechnung bestimmt. Dazu wird die seitliche Vorverformung mit der maximal zulässigen seitlichen elastischen Verformung der Horizontalaussteifungskonstruktion überlagert.



**Abbildung 2.12:** Schematische Darstellung des gabelgelagerten Einfeldträgers unter Gleichlast  $q_{zOG}$  am Obergurt

Die maximale Ausmitte  $e$  (vgl. Abb. 2.12) in Feldmitte ergibt sich damit zu:

$$e = \frac{l}{400} + \frac{l}{500} \tag{2.39}$$



**Abbildung 2.13:** Schnitt durch den gabelgelagerten Einfeldträger aus Abb. 2.12 an der Stelle der Resultierenden  $R_{qz}$  aus der konstanten Gleichlast  $q_{zOG}$

Anschließend wird die Lastangriffsordinate  $y_{qz}$  der einwirkenden konstanten Gleichlast  $q_z$  berechnet, indem nur eine Trägerhälfte zu Grunde gelegt wird und die Gleichlast  $q_z$  auf den verformten Stab aufgetragen wird. Unter der Annahme einer parabelförmig verlaufenden Vorverformung und Verformung, kann der Linienschwerpunkt der Parabel mit dem

Stich  $e$  bestimmt werden. Das Torsionsmoment im Auflager  $M_x$  berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 M_x &= q_z \cdot \frac{l}{2} \cdot \left( \frac{l}{400} + \frac{l}{500} \right) \cdot \frac{2}{3} = & (2.40) \\
 &= q_z \cdot \frac{l^2}{666,67} \cdot \frac{8}{8} = \\
 &= M_d \cdot \frac{1}{83,3}
 \end{aligned}$$

Durch Runden ergibt sich der in DIN 1995-1-1/NA:2010-12 [3] angegebene Bemessungswert für das Torsionsmoment im Auflager:

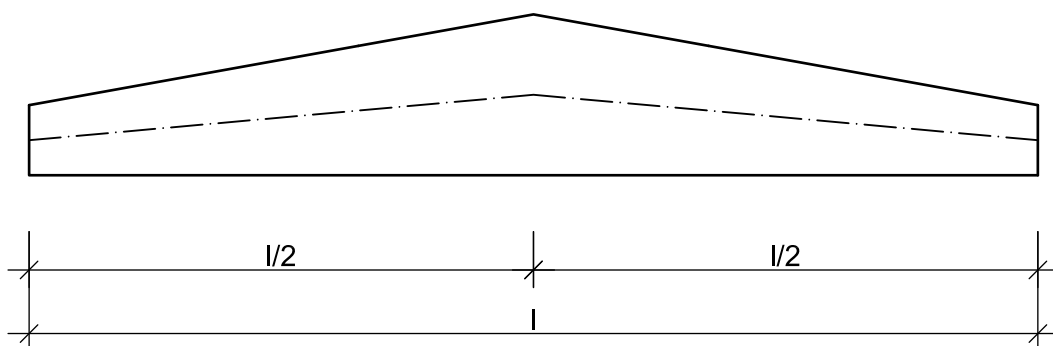
$$M_x = M_d \cdot \frac{1}{80} \quad (2.41)$$

Seit Einführung von DIN 1052:2008-12 [24] wird in der Praxis das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung im Stabquerschnitt häufig nach Gl. (2.41) bestimmt und bei Verwendung des Ersatzstabverfahrens mit den Schubspannungen aus der Schnittgrößenberechnung nach Theorie I. Ordnung im Querschnitt am Auflager überlagert. Mit der Einführung von DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] kann der Schubspannungsanteil aus Torsion in Bauteilen unberücksichtigt bleiben, wenn für die Kippschlankheit  $\lambda_{ef}$  der Bauteile gilt

$$\lambda_{ef} = \frac{l_{ef} \cdot h}{b^2} \leq 225 \quad (2.42)$$

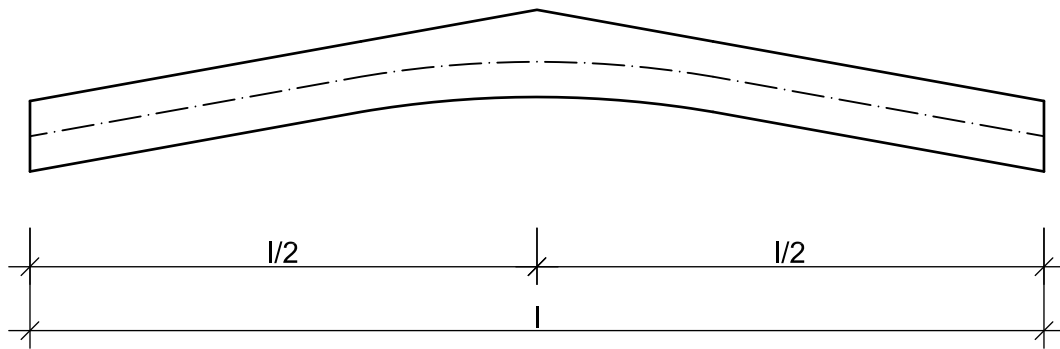
und zusätzlich die Stabilisierungskräfte im Bereich der Auflagergabel abgeleitet werden. In allen anderen Fällen müssen die Torsionsspannungsanteile berücksichtigt werden, so dass die Berechnung in der Regel mit Hilfe numerischer Methoden nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung erfolgen muss.

### 2.4.3 Nachweis des Satteldachträgers nach dem Ersatzstabverfahren



**Abbildung 2.14:** Schematische Darstellung eines Satteldachträgers mit geradem unteren Rand

Beim Satteldachträger muss zunächst unterschieden werden zwischen Träger mit geradem unteren Rand (Abb. 2.14) und Trägern mit gekrümmtem unteren Rand (Abb. 2.15).



**Abbildung 2.15:** Schematische Darstellung eines Satteldachträgers mit gekrümmtem unteren Rand

Für Träger mit geradem unteren Rand liegt ein Querschnitt mit linear veränderlicher Höhe vor, für den ein Nachweis der Kippstabilität in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] nach dem Ersatzstabverfahren geführt werden kann. Grundsätzlich kann bei Trägern mit veränderlicher Höhe der Kippnachweis in zwei Bereichen maßgebend werden. Zum einen kann der Kippnachweis an der Stelle mit der größten Höhe maßgebend werden, zum anderen an der Stelle der größten Längsspannung.

Wird die Stelle der größten Längsspannung maßgebend, darf mit den Querschnittswerten an der Stelle  $0,65 \times l_1$  der Nachweis geführt werden, vgl. Colling [32].  $l_1$  ist dabei die Länge des betrachteten Kippbereichs, d. h. die freie Kiplänge zwischen den seitlichen Halterungen eines Aussteifungsverbands. Auf das infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung entstandene Torsionsmoment im Querschnitt wird im Normtext nicht weiter eingegangen. Aus Abb. 2.14 wird deutlich, dass aufgrund der geneigten Schwerlinie des Querschnitts und des Obergurts die Lastenleitung von vertikalen Gleich- und Einzellasten in Bezug auf das Auflager im Mittel höher liegt, als dies bei einem Träger mit konstanter Querschnittshöhe der Fall ist. Die Höhenlage der Lastenleitung ist in der Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu berücksichtigen. Deshalb sind hierfür genauere Untersuchungen notwendig, um die veränderte Höhenlage der Lastenleitung zu quantifizieren und anschließend die entsprechenden Schlüsse für die Bemessung auf Torsion ziehen zu können. Für den Satteldachträger mit gekrümmtem unteren Rand sind keine speziellen Regeln in Bezug auf Kippstabilität und Torsion im Auflager in der Norm niedergeschrieben. Die komplexere Form des Trägers im Vergleich zum Satteldachträger macht eine weitere Differenzierung in der Betrachtung notwendig.

#### 2.4.4 Nichtlinear elastische Berechnung

Neben der vereinfachten Berechnung von Biegeträgern besteht in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] stets die Möglichkeit, kippgefährdete Biegeträger nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung nachzuweisen. Dafür müssen zunächst die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung berechnet werden, um anschließend einen Biegespannungsnachweis nach Gl. (2.14) und Gl. (2.15) zu führen.

Zudem muss die Schubspannung für den Biegeträger nachgewiesen werden. Auf den Schubspannungsnachweis wird im Zusammenhang mit der Schubfestigkeit von Brett-schichtholz im nachfolgenden Abschnitt 6.1 eingegangen.



## 2.5 Zusammenfassung und nächste Schritte

Die Biegetorsionstheorie II. Ordnung bildet die Grundlage zur mathematischen Beschreibung des Kippproblems. Daraus als Näherung abgeleitet, ist das Ersatzstabverfahren in die Normung eingegangen und bildet für die Ingenieurpraxis eine wichtige Grundlage, um schnell und sicher zu Bemessungsergebnissen zu gelangen. Der Rechenaufwand für einen Nachweis des kippgefährdeten Biegeträgers nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung ist um ein Vielfaches höher als dies bei Anwendung des Ersatzstabverfahrens der Fall ist. Für die Berechnung ist in den allermeisten Fällen eine geeignete numerische Methode zur Lösung des Biegetorsionsproblems notwendig, weshalb in der Praxis auf geeignete Berechnungsprogramme zurückgegriffen wird. Für den Nachweis nach Theorie II. Ordnung sollten deshalb neben der genauen Kenntnis des eingesetzten Berechnungsprogramms auch grundlegende Kenntnisse im Bereich der Biegetorsionstheorie II. Ordnung vorhanden sein, um die durch Programmrechnung erzeugten Ergebnisse beurteilen zu können.

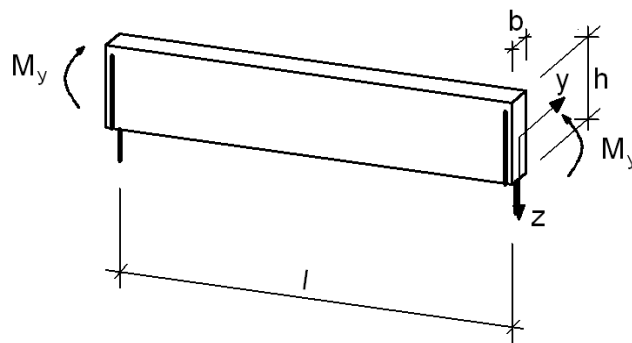
Im Rahmen dieser Arbeit wird im Folgenden das Biegetorsionsproblem II. Ordnung weiter betrachtet, mit dem Ziel aus numerischen Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung das Torsionsmoment aus Kippstabilität für die gängigsten Trägerformen im Holzbau genauer bestimmen zu können und in einem weiteren Schritt das Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger erfassen zu können.



## 3 Analytische und numerische Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung

### 3.1 Analytische Lösung des Kippproblems

Den Ausgangspunkt für die Bestimmung des Langzeitverhaltens und des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung bildet das Differentialgleichungssystem für das Biegetorsionsproblem II. Ordnung, das in Abschnitt 2.2 hergeleitet worden ist.



**Abbildung 3.1:** Gabelgelagerter Einfeldträger unter konstanter Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$

Für den Sonderfall des Kippens unter konstanter Momenteneinwirkung, siehe Abb. 3.1, kann das Differentialgleichungssystem vereinfacht und analytisch gelöst werden.

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV} = 0 \quad (3.1)$$

$$E \cdot I_z \cdot v_{el}^{IV} + (M_{yq} \cdot \vartheta_{ges})^{II} = 0 \quad (3.2)$$

$$G \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}^{II} - E \cdot I_w \cdot \vartheta_{el}^{IV} - M_{yq} \cdot v_{ges}^{II} = 0 \quad (3.3)$$

Aus dem reduzierten Gleichungssystem ist leicht zu ersehen, dass Gl. (3.1) entkoppelt werden kann und einer exakten Lösung zugänglich ist. Die elastischen Verformungen ergeben sich aus der allgemeinen Herleitung der Biegelinie des Bernoulli-Balkens

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV}(x) &= q_z(x) \\
 E \cdot I_y \cdot w_{el}^{III}(x) &= -q_z(x) \cdot x + c_1 \\
 E \cdot I_y \cdot w_{el}^{II}(x) &= \frac{1}{2} \cdot q_z(x) \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \\
 E \cdot I_y \cdot w_{el}^I(x) &= \frac{1}{6} \cdot q_z(x) \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3 \\
 E \cdot I_y \cdot w_{el}(x) &= \frac{1}{24} \cdot q_z(x) \cdot x^4 + \frac{1}{6} \cdot c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot c_3 \cdot x + c_4
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Konstanten  $c_1 - c_4$  lassen sich aus den statischen und geometrischen Randbedingungen bestimmen. Die 2. Ableitung des Biegemoments führt auf der rechten Seite der Gl. (3.5) auf die Einwirkung  $q_z$ , die in dem untersuchten Sonderfall gleich Null ist.

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV}(x) = q_z(x) = 0 \tag{3.5}$$

Die Ableitung des konstanten Moments liefert die Querkraft  $Q_z$  in Gl. (3.6), die gleich Null ist

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{III}(x) = -Q_z(x) = 0 \tag{3.6}$$

Die 2. Ableitung der vertikalen Durchbiegung entspricht dem Biegemoment  $M_y$  in Gl. (3.7)

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{II}(x) = -M_y(x) \tag{3.7}$$

Die Tangente an die vertikale Verformungskurve ist an der Stelle  $x = l/2$  gleich Null, daraus folgt Gl. (3.8)

$$w^I\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \tag{3.8}$$

Schließlich ist die vertikale Durchbiegung an der Stelle  $x=0$ , also am Auflager, gleich Null, daraus folgt Gl. (3.9)

$$w(0) = 0 \tag{3.9}$$

Einsetzen in die Gleichungen Gl. (3.4) liefert für die maximale Durchbiegung in Feldmitte:

$$w_{el,m} = \frac{M_y \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I_y} \tag{3.10}$$

Damit verbleiben noch die Gleichungen Gl. (3.2) und Gl. (3.3), die nicht voneinander entkoppelt gelöst werden können. Ziel ist, die elastische Verformung des Stabes in horizontaler Richtung  $v_{el}$  und die elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  jeweils in Feldmitte zu erhalten. Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen wird ein Cosinus-Ansatz gewählt.

$$v_{el}(x) = a \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.11)$$

$$\vartheta_{el}(x) = b \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.12)$$

mit  $a, b$  als unbekannte Koeffizienten

Mit den Ableitungen der obigen Ansatzfunktionen lässt sich für Gl. (3.2)

$$E \cdot I_z \cdot a \cdot \frac{\pi^2}{l^2} - M_y \cdot \vartheta_0 - M_y \cdot b = 0 \quad (3.13)$$

und für Gl. (3.3)

$$-G \cdot I_T \cdot b - E \cdot I_\omega \cdot b \cdot \frac{\pi^2}{l^2} + M_y \cdot v_0 + M_y \cdot a = 0 \quad (3.14)$$

schreiben.

Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems.

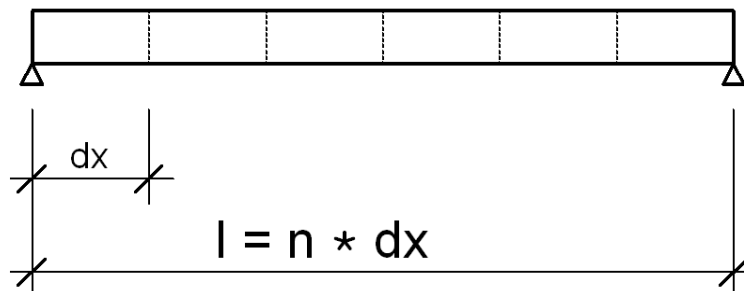
$$a = \left( \frac{G \cdot I_T}{M_y} + \frac{E \cdot I_\omega \cdot \pi^2}{M_y \cdot l^2} \right) \cdot \frac{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot v_0 + M_y \cdot \vartheta_0}{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{G \cdot I_T}{M_y} + \frac{E \cdot I_z \cdot E \cdot I_\omega}{M_y} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} - M_y} - v_0 \quad (3.15)$$

$$b = \frac{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot v_0 + M_y \cdot \vartheta_0}{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{G \cdot I_T}{M_y} + \frac{E \cdot I_z \cdot E \cdot I_\omega}{M_y} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} - M_y} \quad (3.16)$$

Mit den Koeffizienten  $a$  und  $b$  lassen sich die Verformungen  $w_{el}$  nach Gl. (3.10) und  $v_{el}$  Gl. (3.11) und die elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  Gl. (3.12) analytisch bestimmen. Im Folgenden lassen sich die Ergebnisse der numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems mit den Ergebnissen der analytischen Lösung vergleichen und auftretende Abweichungen in den Ergebnissen diskutieren, vgl. Kap. 3.7 und 3.8.

## 3.2 Linearisierung des gekoppelten Differentialgleichungssystems

Im Folgenden soll mit Hilfe der finiten Differenzenmethode das gekoppelte Differentialgleichungssystem gelöst werden. Dabei wird das gekoppelte Differentialgleichungssystem nach Theorie II. Ordnung in ein lineares Gleichungssystem überführt [19]. Die in den Differentialgleichungen auftretenden Ableitungen werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Hierzu wird der zu untersuchende Abschnitt in  $n$  gleiche Teile der Länge  $dx$  unterteilt (vgl. Abbildung 3.2).



**Abbildung 3.2:** Aufteilung des Balkens in  $n$  Elemente der Länge  $dx$

Es entstehen somit

$$i = n + 1 \quad (3.17)$$

Stützstellen.

Die Schrittweite  $dx$  bestimmt sich zu:

$$dx = \frac{l}{n} \quad (3.18)$$

Die in Gl. (3.1), Gl. (3.2) und Gl. (3.3) vorkommenden Ableitungen von  $w_{el}, v_{el}, \vartheta_{el}$  auf der linken Seite der Differentialgleichungen sind nicht bekannt. Durch eine Linearkombination von der in der Umgebung der Stützstelle  $i$  gelegenen Funktionswerten sollen diese bestimmt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich eine Funktion  $f(x)$  in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt.

Es wird auf den Satz von Taylor zurückgegriffen, der folgendes besagt:

Unter Verwendung der Ableitungen kann eine Funktion in der Nähe eines Punktes  $x$  durch den Funktionswert an der Stelle  $x$  und den Ableitungen von der Funktion an  $x$  dargestellt werden.

$$f(x + dx) = f(x) + dx \cdot f'(x) + \frac{dx^2}{2} \cdot f''(x) + \frac{dx^3}{6} \cdot f'''(x) + \frac{dx^4}{24} \cdot f^{(4)}(x) \quad (3.19)$$

Durch das Taylorpolynom  $f(x + dx)$  in Gl. (3.19) lässt sich damit die Funktion  $f(x)$  in deren Umgebung  $(x + dx)$  annähern. Wird die Taylor-Entwicklung jedoch schon nach dem linearen Glied abgebrochen und nach der Ableitung der Funktion aufgelöst, erhält man Gl. (3.20).

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \quad (3.20)$$

Dies ist die Vorwärts-Differenzenformel für die erste Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x$  unter Verwendung des Funktionswertes am Hilfspunkt  $x + dx$ . Wird die folgende Gleichung verwendet, nimmt man einen Fehler in Kauf, der proportional zur Schrittweite  $dx$  ist. Durch eine größere Anzahl an Stützstellen und einer dadurch kleiner werdenden Schrittweite  $dx$ , müsste dieser Fehler kleiner werden.

Analog dazu kann die Rückwärts-Differenz (Gl. (3.21)) hergeleitet werden, bei der die Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $x$  mit Hilfe des Funktionswertes am Hilfspunkt  $x - dx$  angenähert wird.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - dx)}{dx} \quad (3.21)$$

Es kann ebenso anstelle der Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenz der Mittelwert beider Formeln verwendet werden. Es lautet:

$$f(x + dx) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{dx^2}{2} \cdot f''(x) + \frac{dx^3}{6} \cdot f'''(x) + \frac{dx^4}{24} \cdot f^4(x) \quad (3.22)$$

und

$$f(x - dx) = f(x) - dx \cdot f'(x) + \frac{dx^2}{2} \cdot f''(x) - \frac{dx^3}{6} \cdot f'''(x) + \frac{dx^4}{24} \cdot f^4(x) \quad (3.23)$$

Falls die dritte Ableitung von  $f(x)$  im Intervall  $[x - dx; x + dx]$  existiert und beschränkt ist, kann Gl. (3.23) von Gl. (3.22) subtrahiert und das Ergebnis durch  $2 \cdot dx$  dividiert werden und man erhält Gl. (3.24), :

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x - dx)}{2 \cdot dx} \quad (3.24)$$

Diese Gleichung wird als zentraler Differenzquotient oder symmetrische Differenz bezeichnet, wobei hier der Fehler jetzt quadratisch mit der Verkleinerung der Schrittweite  $dx$  eingeht. Die symmetrische Differenz liefert die beste Näherung an die exakte Ableitung der Funktion  $f(x)$ . Bislang wurde zur Bestimmung der Ableitung im diskreten Punkt

$i$  jeweils der vorausgegangene und der nachfolgende Punkt betrachtet. Um das Ergebnis weiter zu verfeinern, werden im Folgenden je zwei Vorgänger und Nachfolger betrachtet. Das zuvor erläuterte Prinzip ändert sich hierdurch nicht. Für die drei Unbekannten  $v, w, \vartheta$  des gekoppelten Differentialgleichungssystems, vgl. Gl. (3.1) bis Gl. (3.3) müssen die Funktionen  $v(x), w(x), \vartheta(x)$  viermal abgeleitet werden. Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem nun in ein lineares Gleichungssystem überführen zu können, werden also folgende Ableitungen benötigt [19]:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{f(x-2 \cdot dx) - 8 \cdot f(x-dx) + 8 \cdot f(x+dx) - f(x+2 \cdot dx)}{12 \cdot dx} \\
 f''(x) &= \frac{-f(x-2 \cdot dx) + 16 \cdot f(x-dx) - 30 \cdot f(x) + 16 \cdot f(x+dx) - f(x+2 \cdot dx)}{12 \cdot dx^2} \\
 f'''(x) &= \frac{-f(x-2 \cdot dx) + 2 \cdot f(x-dx) - 2 \cdot f(x+dx) + f(x+2 \cdot dx)}{2 \cdot dx^3} \\
 f''''(x) &= \frac{f(x-2 \cdot dx) - 4 \cdot f(x-dx) + 6 \cdot f(x) - 4 \cdot f(x+dx) + f(x+2 \cdot dx)}{dx^4}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aus den Ableitungen, Gl. (3.25), wird ersichtlich, dass mindestens fünf Punkte (Stützstellen) notwendig sind, um mit Hilfe der Ableitungen das lineare Gleichungssystem zu lösen. Wird der zu betrachtende Abschnitt in mehr als  $n = 4$  Teile unterteilt, entstehen mehr als 5 Stützstellen. Dementsprechend wäre es möglich, für weiter innen liegende Punkte eine größere Zahl an Stützstellen zur Bestimmung der Ableitung im Punkt  $i$  zu betrachten. Ein wesentlicher Einfluss auf die Genauigkeit ist aber, wie Versuchsrechnungen in [18] gezeigt haben, nicht zu erwarten. Die Koeffizienten der oben angeschriebenen Ableitungen können unter Erweiterung um die Zeile  $f(x)$  in der Matrix  $G$ , Gl. (3.27), zusammengefasst werden.

$$H = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \\ f''''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x-2 \cdot dx) \\ f(x-dx) \\ f(x) \\ f(x+dx) \\ f(x+2 \cdot dx) \end{pmatrix} \cdot G \tag{3.26}$$



mit  $G$ :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12 \cdot dx} & \frac{-2}{3 \cdot dx} & 0 & \frac{2}{3 \cdot dx} & \frac{-1}{12 \cdot dx} \\ \frac{-1}{12 \cdot dx^2} & \frac{4}{3 \cdot dx^2} & \frac{-5}{2 \cdot dx^2} & \frac{4}{3 \cdot dx^2} & \frac{-1}{12 \cdot dx^2} \\ \frac{-1}{2 \cdot dx^3} & \frac{1}{dx^3} & 0 & \frac{-1}{dx^3} & \frac{1}{2 \cdot dx^3} \\ \frac{1}{dx^4} & \frac{-4}{dx^4} & \frac{6}{dx^4} & \frac{-4}{dx^4} & \frac{1}{dx^4} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Das Matrizenprodukt  $xG$  liefert nun die Einträge der Koeffizientenmatrix  $K$ .

### 3.3 Linearisierungsansätze im Vergleich

In der Literatur [18,33,34] finden sich zu dieser Themenstellung bereits mehrere Lösungsansätze im Bereich des Stahlbaus, die auf den Holzbau übertragen werden können, da es sich hier um ein mechanisches Problem handelt, das mit Methoden der Mathematik einer Lösung zugeführt wird. Die Problematik des Biegedrillknickens ist für den Stahlbau seit jeher von großer Relevanz, da im Stahlbau auf Grund der hohen Festigkeit des Werkstoffs Stahl häufig sehr schlanke Träger zum Einsatz kommen. Dagegen traten im traditionellen Holzbau eher kompaktere Abmessungen und durch den natürlichen Werkstoff begrenzte Stützweiten auf, so dass die Problematik bis zur Einführung des Holzleimbau eine untergeordnetere Rolle spielte. Erst der Einsatz von Brettschichtholz, das es ermöglicht, Querschnitte in beinahe unbegrenzter Form und Länge zu produzieren, lässt der Stabilitätsproblematik im Holzbau eine zunehmende Relevanz beimessen. An dieser Stelle seien drei Ansätze zur Lösung des Differentialgleichungssystems mit finiter Differenzenmethode genannt, wobei zwei von ihnen sehr ähnlich sind.

- Vinnakota [33] unterteilt den zu betrachtenden Träger in  $n$  Teile.

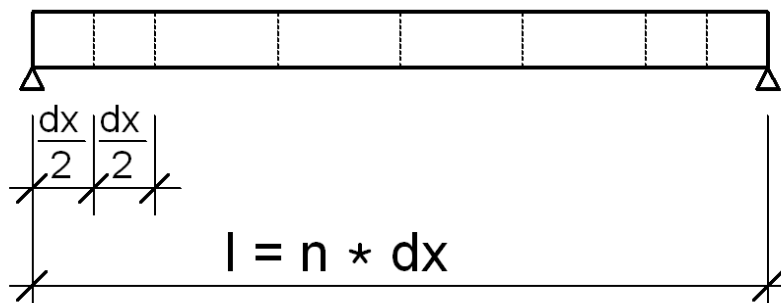


Abbildung 3.3: Elementierung nach [33]

Die so entstandenen Abschnitte der Länge  $dx$ , vgl. Abb. 3.2, neben den Endauflagern werden noch einmal in  $dx/2$  unterteilt, vgl. Abb. 3.3. Um die Ableitungen nach der Differenzenmethode zu berechnen, kann bei diesem Ansatz nicht für alle

Stützstellen der Mittelwert der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz aus Gl. (3.24) verwendet werden. Für die Stützstelle am linken Auflager muss die Vorwärtsdifferenz (vgl. Gl. (3.20)) in Ansatz gebracht werden, für das rechte Auflager die Rückwärtsdifferenz (vgl. Gl. (3.21)). Alle weiteren Punkte werden durch den Mittelwert der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz berechnet, indem jeweils ein Vorgänger und ein Nachfolger für die Berechnung betrachtet werden. Eine Erweiterung auf zusätzliche Vorgänger und Nachfolger ist mit einigem Mehraufwand verbunden. Dies hat zur Folge, dass die Programmierung dieser Randstellen den Programmieraufwand zur Umsetzung der Lösung erhöht, deshalb wird im Folgenden dieser Lösungsansatz nicht weiter verfolgt.

- Im Lösungsansatz nach Staller [18] wird das Differentialgleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem umgewandelt. Dies geschieht mit Hilfe der finiten Differenzenmethode. Dazu wird der zu betrachtende Träger ebenfalls in  $n$  Teile geteilt. Es werden jedoch an beiden Enden des zu betrachtenden Abschnitts je zwei fiktive Teile eingefügt. Somit entstehen an beiden Seiten zwei weitere fiktive Stützstellen und  $n + 5$  diskrete Punkte. Für die vier äußeren Punkte können aber keine finiten Gleichungen angeschrieben werden, was den Einsatz von Randbedingungen notwendig macht. Da für jede Raumrichtung nur zwei Randbedingungen existieren, können an den Enden jeweils nur zwei fiktive Punkte berücksichtigt werden. Das bedeutet aber auch, dass zur Bestimmung der Ableitung an den Rändern nur zwei diskrete Punkte links und rechts des Punktes  $i$  zur Bestimmung der Ableitung im Punkt  $i$  benutzt werden können. Als vorteilhaft erscheint bei diesem Ansatz die Tatsache, dass für die Bestimmung der Ableitungen in allen  $n + 1$  Stützstellen der Mittelwert aus Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz aus Gl. (3.24) benutzt werden kann. Der Programmieraufwand für das Lösen des linearen Gleichungssystems wird dadurch verringert. Vereinfachend werden bei Staller [18] die für die Aufstellung des Gleichungssystems benötigten Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung ermittelt und eingesetzt. Der Stallersche Ansatz geht über den einfachen Einfeldträger hinaus und behandelt auch Mehrfeldträger sowie die Berücksichtigung von Unstetigkeiten des Querschnitts. Umfangreiche Übergangsmatrizen zur Erfassung der Übergangsbedingungen sind dafür in das Gesamtgleichungssystem einzubauen. Dadurch entsteht ein großes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $w, v, \vartheta$ , das gelöst wird, indem die Eigenwerte bestimmt werden. Das Bestimmen der Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems unter Verwendung der Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung, die dadurch als konstante Koeffizienten in das Differentialgleichungssystem eingehen, kann als Vereinfachung angesehen werden.
- Hauswirth/Zweidler [34] verwenden ebenfalls die Methode der finiten Differenzen zur Lösung des Differentialgleichungssystems. Grundsätzlich verfolgen sie den gleichen Ansatz wie zuvor bereits Staller [18], allerdings schreiben sie die Randbedingungen direkt als Differenz auf die entsprechenden Koeffizienten und reduzieren die Anzahl der linearen Gleichungen auf  $n + 1$ . Dementsprechend muss für jede Art der Lagerung ein spezielles Gleichungssystem erstellt werden, der bloße Austausch der Randbedingungen genügt hier nicht. Auf eine Vereinfachung durch Verwendung von Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung wird verzichtet. Vielmehr trennen sie das lineare Gleichungssystem in die drei Differentialgleichungen für  $\vartheta, v, w$  auf und lösen jede der Gleichungen entkoppelt von den übrigen für jede einzelne der drei Unbekannten durch Iteration. Das heißt, in jedem der drei Gleichungssysteme ist

nur eine Unbekannte vorhanden, die übrigen werden als konstant angesehen und der Wert aus dem vorangegangenen Rechenzeitschritt eingesetzt. Erreichen die Werte aus dem aktuellen Zeitschritt näherungsweise die des vorangegangenen, so wird die Iteration abgebrochen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Lösung des Differentialgleichungssystems in allen drei Varianten im Ansatz gleich ist, in der Umsetzung jedoch erhebliche Unterschiede vorhanden sind. Die Gegenüberstellung der in der Literatur aufgezeigten Lösungsmöglichkeiten hatten alle eine Linearisierung des Differentialgleichungssystems zur Folge. Bezüglich der Randbedingungen ist jedoch festzuhalten, dass die Lösung nach Hauswirth/Zweidler [34] ein wenig umständlich erscheint, auf dem Hintergrund einer raschen und unkomplizierten Änderung des statischen Systems. Die iterative Lösung des gekoppelten Gleichungssystems erhöht zudem den Rechenaufwand immens, da die Lösung der Matrixgleichung in mehreren Schritten erfolgt und solange iteriert werden muss, bis das Ergebnis konvergiert. Mit den in [18] getroffenen Annahmen und Vereinfachungen werden in den dort angeführten Beispielen hinreichend genaue Lösungen erzielt, so dass diese Lösungsmethode mit relativ geringem Rechenaufwand umgesetzt werden kann. Nicht zuletzt dieser Umstand hat eine Orientierung an [18] zur Folge, da eine spätere Verknüpfung mit dem Rechenprogramm *kriHo* den Rechenaufwand und auch die Rechenzeit ohnehin sehr vergrößert.

## 3.4 Aufstellen der Matrixgleichung

### 3.4.1 Vorgehensweise

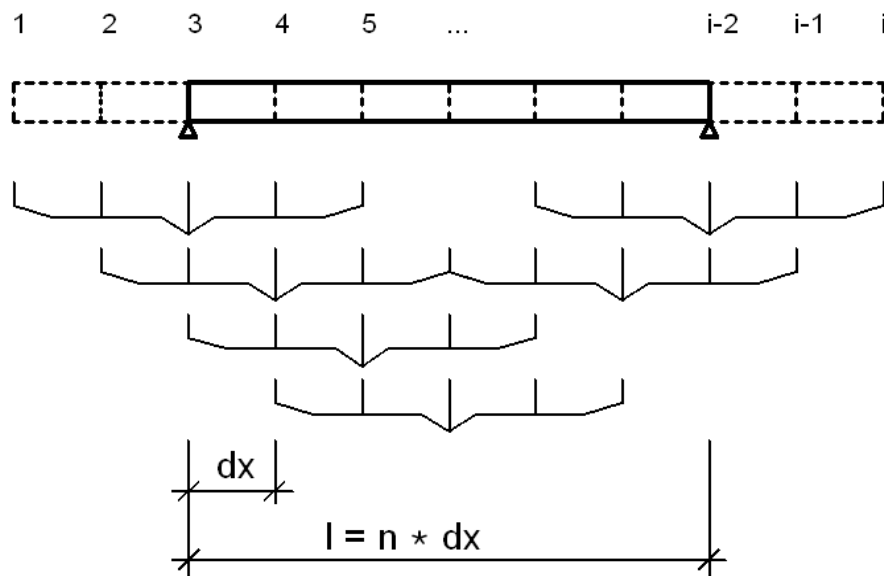
Wie bereits im vorangehenden Abschnitt bei der Gegenüberstellung der Lösungsansätze angedeutet, scheint die Umsetzung der Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems nach [18] am besten für die Lösung der hier gestellten Aufgabe geeignet. Der in Abbildung 3.4 dargestellte, gabelgelagerte Träger wird dazu an den Enden um je zwei fiktive Elemente der Länge  $dx$  erweitert werden. Entsprechend den Gleichungen (3.1),

(3.2) und (3.3) besteht die Matrixgleichung aus einer linken und einer rechten Seite. Nach Trennung der Koeffizienten von den Unbekannten, kann die Matrixgleichung zu

$$Kx = r \tag{3.28}$$

mit  $K$  Koeffizientenmatrix  
 $x$  Vektor mit den Unbekannten  $w, v, \vartheta$   
 $r$  Lastvektor

angeschrieben werden.



**Abbildung 3.4:** Aufteilung eines gabelgelagerten Balkens in  $n=6+4$  fiktive Elemente

## 3.4.2 Linke Seite der Matrixgleichung

### 3.4.2.1 Koeffizientenmatrix $K$

Für das Aufstellen der Koeffizientenmatrix  $K$  werden zuerst die Terme in jeder der Differentialgleichungen nach Unbekannten getrennt. In Tabelle 3.1 wird dies veranschaulicht. Die Tabellierung (Tab. 3.1) verdeutlicht den Aufbau der Koeffizientenmatrix  $K$ . Die Koeffizientenmatrix  $K$  kann in neun Blöcke eingeteilt werden, die sich aus der Anzahl der Gleichungen  $\times$  Anzahl der Unbekannten ergeben. Zur Erfassung der Randbedingungen werden drei weitere Blöcke hinzugefügt, auf die in Abschnitt 3.4.2.2 eingegangen wird.

$$K = \begin{pmatrix} K_{I,w} & K_{I,v} & K_{I,\vartheta} \\ K_{II,w} & K_{II,v} & K_{II,\vartheta} \\ K_{III,w} & K_{III,v} & K_{III,\vartheta} \\ RB_w & RB_v & RB_\vartheta \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

**Tabelle 3.1:** Terme der Differentialgleichungen getrennt nach Unbekannten

Gl.	w	v	$\vartheta$
I (3.1)	$EI_y w_{el}'''' - F w_{el}''$		$+M_z'' \vartheta_{el} + 2M_z' \vartheta_{el}' + M_z \vartheta_{el}''$
II (3.2)		$EI_z v_{el}'''' - F v_{el}''$	$+F(z_S - z_M) \vartheta_{el}''$ $+M_y'' \vartheta_{el} + 2M_y' \vartheta_{el}' + M_y \vartheta_{el}''$
III (3.3)	$-M_z w_{el}''$	$-M_y v_{el}'' - F(z_S - z_M) v_{el}''$	$GI_T \vartheta_{el}'' - EI_\omega \vartheta_{el}''''$ $+F(i_p^2 + z_M^2 + z_S r_z - 2z_S z_M) \vartheta_{el}''$ $-q_y e_y \vartheta_{el} - q_z e_z \vartheta_{el}$
	Randbedingungen w	Randbedingungen v	Randbedingungen $\vartheta$

mit Index  $I$  = Gleichung I ( $\rightarrow$  2.1)  
 Index  $II$  = Gleichung II ( $\rightarrow$  2.2)  
 Index  $III$  = Gleichung III ( $\rightarrow$  2.3)  
 Index  $w$  = unbekannte Verformung  $w$   
 Index  $v$  = unbekannte Verformung  $v$   
 Index  $\vartheta$  = unbekannte Verdrehung  $\vartheta$

Jeder dieser Blöcke umfasst  $3 \cdot (n + 1)$  Zeilen und  $3 \cdot (n + 5)$  Spalten. In den ersten drei Blöcken der Koeffizientenmatrix werden horizontal die Koeffizienten, die sich aus der 1. Differentialgleichung ergeben, getrennt nach den Unbekannten eingetragen. In den nächsten drei Blöcken für die 2. Differentialgleichung und in den verbliebenen für die 3. Differentialgleichung.

Bringt man nun jede der hergeleiteten Differentialgleichungen in die allgemeine Form einer Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a f''''(x) + b f'''(x) + c f''(x) + d f'(x) + e f(x) = f \quad (3.30)$$

können nach Anwendung der Produktregel auf die gemischten Terme der Differentialgleichungen die Zeilenvektoren der Unbekannten, nach folgendem Schema

$$x = ( e_i, d_i, c_i, b_i, a_i ) \quad (3.31)$$

gebildet werden.

Für jeden diskreten Punkt  $i$  kann nun der entsprechende Eintrag berechnet und dem Zeilenvektor  $x$  zugewiesen werden. Die Schnittgrößen in den Differentialgleichungen werden nach [18] vereinfachend durch die Schnittgrößen, die sich nach Theorie I. Ordnung ergeben, ersetzt. Dadurch werden diese zu konstanten Koeffizienten. Schreibt man die Koeffizienten der einzelnen Blöcke an die entsprechende Stelle des Zeilenvektors  $x$  gemäß dem obigem Schema und multipliziert diesen für jeden Block mit der Matrix  $G$ , siehe Gl. (3.27), nach den Rechenregeln der Matrizenrechnung, so erhält man die Einträge der Koeffizientenmatrix  $K$ .

Beispielhaft sei dies für die I. Gleichung und deren Unbekannten  $w, v, \vartheta$  vorgeführt:

- Der erste Block  $K_{I,w}$ :

Die Einträge des Vektors  $x_w$  lauten

$$x_w(i) = \left( 0, 0, -F(i), 0, EI_y(i) \right) \quad (3.32)$$

mit  $M$  multipliziert erhält man für jede Zeile  $n$  in diesem Block

$$K_{I,w} = x_w \cdot G \quad (3.33)$$

$$K_{I,w}(i) = \begin{pmatrix} -\frac{F(i)}{12 \cdot dx^2} + \frac{EI_y(i)}{dx^4} \\ +\frac{4 \cdot F(i)}{3 \cdot dx^2} - \frac{4 \cdot EI_y(i)}{dx^4} \\ -\frac{5 \cdot F(i)}{2 \cdot dx^2} + \frac{6 \cdot EI_y(i)}{dx^4} \\ +\frac{4 \cdot F(i)}{3 \cdot dx^2} - \frac{4 \cdot EI_y(i)}{dx^4} \\ -\frac{F(i)}{12 \cdot dx^2} + \frac{EI_y(i)}{dx^4} \end{pmatrix}^T \quad (3.34)$$

Um die Übersicht für die Anschauung über die  $n+1$  Stützstellen zu wahren, werden den Einträgen des Zeilenvektors die Großbuchstaben A bis E zugewiesen

$$A_i \hat{=} \left[ -\frac{F}{12 \cdot dx^2}(i) + \frac{EI_y}{dx^4}(i) \right] \quad (3.35)$$

$$B_i \hat{=} \left[ \frac{4 \cdot F}{3 \cdot dx^2}(i) - \frac{4 \cdot EI_y}{dx^4}(i) \right] \quad (3.36)$$

$$C_i \hat{=} \left[ -\frac{5 \cdot F}{2 \cdot dx^2}(i) + \frac{6 \cdot EI_y}{dx^4}(i) \right] \quad (3.37)$$

$$D_i \hat{=} \left[ \frac{4 \cdot F}{3 \cdot dx^2}(i) - \frac{4 \cdot EI_y}{dx^4}(i) \right] \quad (3.38)$$

$$E_i \hat{=} \left[ -\frac{F}{12 \cdot dx^2}(i) + \frac{EI_y}{dx^4}(i) \right] \quad (3.39)$$

Für den Block der I. Gleichung mit der Unbekannten  $w$  nach Tabelle 3.1 werden die Einträge wie folgt in die Koeffizientenmatrix geschrieben. Dieser Block umfasst

$n + 1$  Zeilen und  $n + 5$  Spalten:

$$K_{I,w} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_n & B_n & C_n & D_n & E_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{n+1} & B_{n+1} & C_{n+1} & D_{n+1} & E_{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

- Der zweite Block  $K_{I,v}$ :

Im zweiten Block sind keine Einträge vorhanden, weshalb der Zeilenvektor  $x_v(i)$  ein Nullvektor ist.

$$x_v(i) = ( 0, 0, 0, 0, 0 ) \quad (3.41)$$

Damit ist dieser Block:

$$K_{I,v} = 0 \quad (3.42)$$

- Der dritte Block  $K_{I,\vartheta}$ :

Der Term  $(+M_z''\vartheta_{el} + 2M_z'\vartheta'_{el} + M_z\vartheta''_{el})$  im dritten Block der I. Differentialgleichung liefert nach Trennung der Koeffizienten von der Unbekannten  $\vartheta$  und deren Ableitungen folgende Einträge des Vektors  $x_\vartheta$ :

$$x_\vartheta(i) = ( M_z''(i), 2 \cdot M_z'(i), M_z(i), 0, 0 ) \quad (3.43)$$

mit  $G$  multipliziert erhält man für jede Zeile  $n$  in diesem Block

$$K_{I,\vartheta} = x_\vartheta \cdot G \quad (3.44)$$

$$K_{I,\vartheta}(i) = \begin{pmatrix} -\frac{M_z'(i)}{12 \cdot dx} - \frac{M_z(i)}{12 \cdot dx^2} \\ \frac{4 \cdot M_z'(i)}{3 \cdot dx} + \frac{4 \cdot M_z(i)}{3 \cdot dx^2} \\ M_z''(i) - \frac{5 \cdot M_z(i)}{2 \cdot dx^2} \\ -\frac{4 \cdot M_z'(i)}{3 \cdot dx} + \frac{4 \cdot M_z(i)}{3 \cdot dx^2} \\ +\frac{M_z'(i)}{12 \cdot dx} - \frac{M_z(i)}{12 \cdot dx^2} \end{pmatrix}^T \quad (3.45)$$

Um auch hier die Übersicht für die Anschauung über die  $n + 1$  Stützstellen zu wahren, werden den Einträgen des Zeilenvektors Großbuchstaben F bis K zugewiesen

$$F_i \stackrel{\wedge}{=} \left[ -\frac{M'_z}{12 \cdot dx}(i) - \frac{M_z}{12 \cdot dx^2}(i) \right] \quad (3.46)$$

$$G_i \stackrel{\wedge}{=} \left[ -\frac{4 \cdot M'_z}{3 \cdot dx}(i) + \frac{4 \cdot M_z}{3 \cdot dx^2}(i) \right] \quad (3.47)$$

$$H_i \stackrel{\wedge}{=} \left[ +\frac{M''_z}{1}(i) - \frac{5 \cdot M_z(i)}{2 \cdot dx^2}(i) \right] \quad (3.48)$$

$$J_i \stackrel{\wedge}{=} \left[ -\frac{4 \cdot M'_z}{3 \cdot dx}(i) + \frac{4 \cdot M_z}{3 \cdot dx^2}(i) \right] \quad (3.49)$$

$$K_i \stackrel{\wedge}{=} \left[ +\frac{M'_z}{12 \cdot dx}(i) - \frac{M_z(i)}{12 \cdot dx^2}(i) \right] \quad (3.50)$$

Im dritten Block der I. Gleichung mit der Unbekannten  $\vartheta$  nach Tabelle 3.1 werden die Einträge wie folgt in die Koeffizientenmatrix geschrieben. Dieser Block umfasst wieder  $n + 1$  Zeilen und  $n + 5$  Spalten

$$K_{I,\vartheta} = \begin{pmatrix} F_1 & G_1 & H_1 & J_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & G_2 & H_2 & J_2 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & G_3 & H_3 & J_3 & K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_n & G_n & H_n & J_n & K_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_{n+1} & G_{n+1} & H_{n+1} & J_{n+1} & K_{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Für alle weiteren Blöcke wird in gleicher Weise vorgegangen bis die neun Blöcke, die direkt aus dem Differentialgleichungssystem stammen, komplettiert sind. Anschließend müssen noch die Randbedingungen in die Koeffizientenmatrix eingefügt werden.

### 3.4.2.2 Randbedingungen

Um die Koeffizientenmatrix invertieren zu können, muss diese quadratisch sein, also von der Größe  $m \times m$ . Die Koeffizientenmatrix  $K$  umfasst  $3 \cdot (n + 5)$  Zeilen und  $3 \cdot (n + 5)$  Spalten. Die neun Blöcke, die direkt aus den Differentialgleichungen folgen, haben je eine Größe von  $3 \cdot (n + 1)$  Zeilen und  $3 \cdot (n + 5)$  Spalten. Die Differenz aus Zeilen und Spalten berechnet sich zu zwölf. Damit verbleiben unabhängig von der Anzahl der Stützstellen  $i$  zwölf Gleichungen, durch die die Randbedingungen erfasst werden. Für den gabelgelagerten Balken lauten diese:

- am linken Auflager (siehe Abbildung 3.4)

$$\begin{aligned} M_y(3) &= 0 & ; & & w(3) &= 0 \\ M_z(3) &= 0 & ; & & v(3) &= 0 \\ M_w(3) &= 0 & ; & & \vartheta(3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$



- am rechten Auflager

$$\begin{aligned} M_y(i-2) &= 0 & ; & & w(i-2) &= 0 \\ M_z(i-2) &= 0 & ; & & v(i-2) &= 0 \\ M_\omega(i-2) &= 0 & ; & & \vartheta(i-2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Es existieren also für jedes Auflager sechs Randbedingungen und damit für beide Auflager insgesamt zwölf Gleichungen. Die Momentenwerte werden als

$$\begin{aligned} M_y &= -E \cdot I \cdot w'' \\ M_z &= E \cdot I \cdot v'' \\ M_\omega &= -E \cdot I \cdot \vartheta'' \end{aligned} \quad (3.54)$$

geschrieben und die Ableitungen durch finite Differenzen ausgedrückt. Der Eintrag in die Randbedingungsblöcke für den in Abbildung 3.4 dargestellten, gabelgelagerten Einfeldträger wird wie folgt vorgenommen:

erster Block  $RB_w$  in  $z$ -Richtung  
mit 12 Zeilen und  $n + 1$  Spalten

$$RB_w = \begin{pmatrix} -\frac{EI_y(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5EI_y(3)}{2dx^2} & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EI_y(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_y(i-2)}{12dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y(i-2)}{3dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & -\frac{5EI_y(i-2)}{2dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y(i-2)}{3dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_y(i-2)}{12dx^2} \end{pmatrix}^T \quad (3.55)$$

zweiter Block  $RB_v$  in  $y$ -Richtung  
mit 12 Zeilen und  $n + 1$  Spalten

$$RB_v = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{EI_z(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5EI_z(3)}{2dx^2} & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_z(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z(i-2)}{12dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z(i-2)}{3dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5EI_z(i-2)}{2dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z(i-2)}{3dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z(i-2)}{12dx^2} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (3.56)$$

dritter Block  $RB_\vartheta$  um die  $x$ -Achse  
mit 12 Zeilen und  $n + 1$  Spalten

$$RB_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{EI_\omega(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_\omega(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5EI_\omega(3)}{2dx^2} & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_\omega(3)}{3dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_\omega(3)}{12dx^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_\omega(i-2)}{12dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_\omega(i-2)}{3dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5EI_\omega(i-2)}{2dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_\omega(i-2)}{3dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_\omega(i-2)}{12dx^2} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (3.57)$$

Damit sind alle Einträge der Koeffizientenmatrix zusammengestellt und die linke Seite des linearen Gleichungssystems dadurch komplettiert.

### 3.4.3 Rechte Seite der Matrixgleichung

Die Einträge auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems werden im Spaltenvektor  $r$  zusammengestellt und eingetragen. In Tabelle 3.2 sind nachfolgend alle zu berücksichtigenden Terme, die sich aus der Herleitung ergeben, aufgeführt und um die Randbedingungen ergänzt.

**Tabelle 3.2:** Einträge auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems

Gl.	Last	Vorverformung	Kriechen
I (3.1)	$q_z$	$+Fw_0''$ $-M_z''\vartheta_0 - 2M_z'\vartheta_0' - M_z\vartheta_0''$	$+Fw_{kri}''$ $-M_z''\vartheta_{kri} - 2M_z'\vartheta_{kri}' - M_z\vartheta_{kri}''$
II (3.2)	$q_y$	$+Fv_0'' - F(z_S - z_M)\vartheta_0''$ $-M_y''\vartheta_0 - 2M_y'\vartheta_0' - M_y\vartheta_0''$	$+Fv_{kri}'' - F(z_S - z_M)\vartheta_{kri}''$ $-M_y''\vartheta_{kri} - 2M_y'\vartheta_{kri}' - M_y\vartheta_{kri}''$
III (3.3)	$q_y e_z - q_z e_y$	$+M_z w_0'' + M_y v_0''$ $+F(z_S - z_M)v_0''$ $-F(i_p^2 + z_M^2 + z_S r_z - 2z_S z_M)\vartheta_0''$	$+M_z w_{kri}'' + M_y v_{kri}''$ $+F(z_S - z_M)v_{kri}''$ $-F(i_p^2 + z_m^2 + z_S r_z - 2z_S z_M)\vartheta_{kri}''$
RB	$RB_w$	$RB_v$	$RB_\vartheta$

Um die Übersicht über alle Terme der Gleichungen zu wahren, werden nur noch die zugehörigen römischen Ordnungsziffern an der entsprechenden Stelle  $i$  angegeben. Unter Verwendung dieser Notation erhält man für  $n + 1$  Stützstellen für jede Stelle  $i$ :

$$r = \begin{pmatrix} I(1) \\ I(2) \\ I(\dots) \\ I(\dots) \\ I(n+1) \\ II(1) \\ II(2) \\ II(\dots) \\ II(\dots) \\ II(n+1) \\ III(1) \\ III(2) \\ III(\dots) \\ III(\dots) \\ III(n+1) \\ RB(1) \\ RB(\dots) \\ RB(12) \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

So entsteht mit den Einträgen aus Tabelle 3.2 ein Zeilenvektor  $r$  (Gl. (3.58)) mit  $3 \cdot (n + 5)$  Zeilen. Die aus Randbedingungen resultierenden Einträge sind für den gabelgelagerten

Balken zu Null zu setzen. Werden jedoch Momente aus Normalkraft mit Exzentrizität und/oder Randmomente berücksichtigt, sind die Einträge auf der rechten Seite an entsprechender Stelle anzupassen.

### 3.5 Lösen der Matrixgleichung

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 3.3 vorgestellten Lösungsansätzen, die eine Traglastberechnung zum Ziel hatten und somit die Eigenwerte der Matrixgleichung zu bestimmen waren, interessieren hier die Verformungen und Verdrehungen, die aus dem Langzeitverhalten hervorgehen. Die Erfassung des Langzeitverhaltens erfolgt durch rheologische Modelle, auf die nachfolgend noch genauer eingegangen wird und die die Kriechverformung an jeder Stelle  $x$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  liefern. Die Änderung der Kriechverformung wird zu jedem Zeitpunkt  $t$ , wie durch Gl. (2.7) bis Gl. (2.9) beschrieben, auf den Zeilenvektor  $r$  geschrieben. Um nun die elastischen Verformungen  $w_{el}, v_{el}$  und die elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  auf dem Zeilenvektor  $x$  für jeden Zeitpunkt  $t$  berechnen zu können, muss das lineare Gleichungssystem gelöst werden. Dies geschieht mit Hilfe von Gl. (3.59), indem die Inverse  $K^{-1}$  der Koeffizientenmatrix  $K$  gebildet wird.

$$Kx = r \implies x = K^{-1}r \quad (3.59)$$

Durch Addition der Verformungen aus Kriechen auf dem Zeilenvektor  $r$  zu jedem Zeitpunkt  $t$ , können durch Iteration über die Zeit die Verformungen durch das abermalige Lösen der Matrixgleichung berechnet werden.

### 3.6 Erweiterung des Berechnungsprogramms *constantialigni*

Das auf der Grundlage der vorangegangenen Abschnitte entwickelte Berechnungsprogramm *constantialigni* ermöglicht die Berechnung eines gabelgelagerten Einfeldträgers nach Theorie II. Ordnung. Praxisrelevante Systeme weitgestützter Einfeldträger machen jedoch häufig den Einsatz von horizontalen Zwischenstützungen des Obergurts zur Verringerung der Kipplänge notwendig. Um das Kriechverhalten eines Einfeldträgers mit Zwischenstützungen simulieren zu können, muss das Berechnungsprogramm *constantialigni* um entsprechende Zwischenstützungen erweitert werden. Zunächst werden horizontale Stützungen des Querschnitts eingeführt. Es werden zwei grundsätzliche Arten der horizontalen Stützung unterschieden. Zum einen die starre Stützung des Querschnitts im Schwerpunkt des Querschnitts und zum anderen eine nachgiebige Stützung des Querschnitts in Form einer Normalkraftfeder, die in jeder Höhe des Querschnitts angebracht werden kann. Statisch betrachtet stellt eine punktuelle Stützung des Querschnitts eine Diskontinuitätsstelle dar, die eine besondere Betrachtung dieser Stelle notwendig macht. Um den Funktionswert der Ableitungen auch Einleitungsstellen von Einzellasten und punktuelle Halterungen im Feld einer numerischen Berechnung zugänglich zu machen, werden im Bereich der Diskontinuitätsstellen zusätzliche fiktive Stützstellen und Elemente eingeführt. An jeder Diskontinuitätsstelle werden so vier zusätzliche Elemente

**Tabelle 3.3:** Terme der Differentialgleichungen getrennt nach Unbekannten

Gl.	w	v	$\vartheta$
I (3.1)	$EI_y w_{el}'''' - F w_{el}''$		$+M_z'' \vartheta_{el} + 2M_z' \vartheta_{el}' + M_z \vartheta_{el}''$
II (3.2)		$EI_z v_{el}'''' - F v_{el}''$	$+F(z_S - z_M) \vartheta_{el}''$ $+M_y'' \vartheta_{el} + 2M_y' \vartheta_{el}' + M_y \vartheta_{el}''$
III (3.3)	$-M_z w_{el}''$	$-M_y v_{el}'' - F(z_S - z_M) v_{el}''$	$GI_T \vartheta_{el}'' - EI_\omega \vartheta_{el}''''$ $+F(i_p^2 + z_M^2 + z_S r_z - 2z_S z_M) \vartheta_{el}''$ $-q_y e_y \vartheta_{el} - q_z e_z \vartheta_{el}$
	Randbedingungen w Auflager	Randbedingungen v Auflager	Randbedingungen $\vartheta$ Auflager
	Randbedingungen w Übergangsstelle	Randbedingungen v Übergangsstelle	Randbedingungen $\vartheta$ Übergangsstelle

und Stützstellen eingebaut, über die die Diskontinuitätsstelle beschrieben werden kann. Zusätzlich ist die entstandene Nahtstelle auf der linken und der rechten Seite der Lasteinleitungsstelle zu betrachten, woraus sich eine weitere Stützstelle im System ergibt. In die Koeffizientenmatrix fließen als Eingangsgrößen die entsprechenden Werte infinitesimal nahe links und rechts der Diskontinuitätsstelle ein. Die  $m \times m$ -Matrix muss deshalb je Diskontinuitätsstelle um fünf Zeilen und fünf Spalten je unbekannter Verformung erweitert werden. Daraus ergibt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Durch die Einführung einer zusätzlichen Diskontinuitätsstelle werden drei weitere Blöcke in die erweiterte Koeffizientenmatrix implementiert, durch die Übergangsbedingungen erfasst werden, siehe (Tab. 3.3).

$$K = \begin{pmatrix} K_{I,w} & K_{I,v} & K_{I,\vartheta} \\ K_{II,w} & K_{II,v} & K_{II,\vartheta} \\ K_{III,w} & K_{III,v} & K_{III,\vartheta} \\ RB_w & RB_v & RB_\vartheta \\ \dot{U}S_w & \dot{U}S_v & \dot{U}S_\vartheta \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

mit	Index	$I$	=	Gleichung I ( $\rightarrow$ 2.1)
	Index	$II$	=	Gleichung II ( $\rightarrow$ 2.2)
	Index	$III$	=	Gleichung III ( $\rightarrow$ 2.3)
	Index	$w$	=	unbekannte Verformung $w$
	Index	$v$	=	unbekannte Verformung $v$
	Index	$\vartheta$	=	unbekannte Verdrehung $\vartheta$

Jeder der ersten neun Blöcke umfasst damit bei Berücksichtigung einer Diskontinuitätsstelle  $(n+2)$  Zeilen und  $(n+10)$  Spalten. In den ersten drei Blöcken der Koeffizientenmatrix werden horizontal die Koeffizienten, die sich aus der 1. Differentialgleichung ergeben, getrennt nach den Unbekannten eingetragen. In den nächsten drei Blöcken für die 2. Differentialgleichung und in den verbliebenen für die 3. Differentialgleichung. Je eingeführter Diskontinuitätsstelle sind damit noch zwölf Gleichungen in die verbleibenden zwölf Zeilen zu schreiben, um eine reguläre Matrix zu erhalten, die invertierbar ist und mit der das linearisierte Differentialgleichungssystem numerisch gelöst werden kann. Über statische Gleichgewichtsbetrachtungen und geometrische Kompatibilität an der Übergangsstelle werden die fehlenden Gleichungen implementiert.

Für die statischen Übergangsbedingungen ergeben sich folgende Randbedingungen:

links der Übergangsstelle		rechts der Übergangsstelle
$w(x)$	=	$-w(x)$
$v(x)$	=	$-v(x)$
$\vartheta(x)$	=	$-\vartheta(x)$
$w(x)'$	=	$-w(x)'$
$v(x)'$	=	$-v(x)'$
$\vartheta(x)'$	=	$-\vartheta(x)'$

Damit sind sechs Übergangsbedingungen bekannt. Es müssen also noch sechs weitere Bedingungen gefunden werden, um die Koeffizientenmatrix zu vervollständigen. Diese ergeben sich aus dem statischen Gleichgewicht links und rechts der Übergangsstelle.

Bed.	Koeffizientenmatrix Übergangsstelle links		Koeffizientenmatrix Übergangsstelle rechts	Lastvektor
$\sum M_y=0$	$EI_y w''$	-	$EI_y w''$	$P_z$
$\sum F_z=0$	$EI_y w'''$	-	$EI_y w'''$	
$\sum M_z=0$	$EI_z v'' + M_y \vartheta$	-	$EI_z v'' + M_y \vartheta$	
$\sum F_y=0$	$EI_z v''' + M_y' \vartheta + M_y \vartheta' - C_y v - C_y z_c \vartheta$	-	$EI_z v''' + M_y' \vartheta + M_y \vartheta'$	
$\sum M_\omega=0$	$EI_\omega \vartheta''$	-	$EI_\omega \vartheta''$	
$\sum M_T=0$	$GI_T \vartheta' - EI_\omega \vartheta''' - C_y z_c v + C_y z_c^2 \vartheta + P_z z_p \vartheta$	-	$GI_T \vartheta' - EI_\omega \vartheta'''$	

Es werden zunächst nur zwei horizontale Stützstellen eingebaut, da das Programm für jede horizontale Stützstelle aufwändig getestet und verifiziert werden muss. Anschließend erfolgte der Zusammenbau mit *kriHo*, einem Programm, das das rheologische Verhalten des Holzes abbildet. Jede weitere Zwischenstützung hat zusätzliche Stützstellen zur Folge. Die Rechenzeit und die benötigte Rechenleistung in *kriHo* steigen mit jeder weiteren Diskontinuitätsstelle, da nicht nur die Zahl der virtuellen Stützstellen und Elemente steigt, sondern auch die Zahl der tatsächlichen Elemente um eine hinreichende Genauigkeit der Berechnung zu gewährleisten.

## 3.7 Verifizierung der Berechnungsergebnisse der numerischen Berechnung

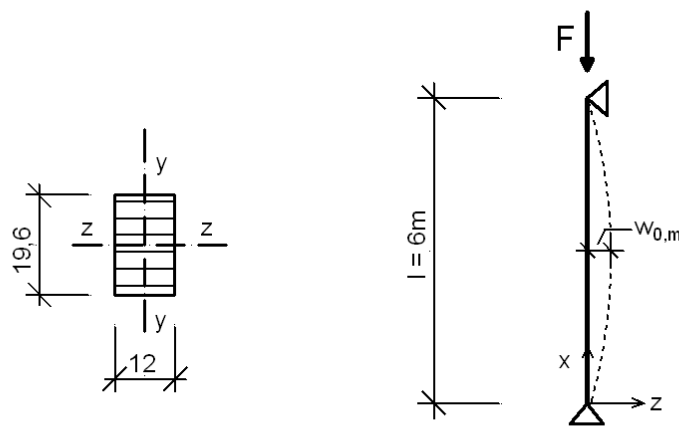
### 3.7.1 Vorgehensweise

Nachdem das gekoppelte Differentialgleichungssystem des Biegetorsionsproblems mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen in ein lineares Gleichungssystem überführt worden ist, können mit dem erstellten Berechnungsprogramm die Durchbiegungen  $v_{el}, w_{el}$  sowie die Verdrehung  $\vartheta_{el}$  des Querschnitts bestimmt werden. Aus den elastischen Verformungen werden die zugehörigen Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung bestimmt und ausgegeben. Um nun die programmierten Algorithmen auf deren Richtigkeit zu überprüfen, müssen die Ergebnisse verifiziert werden. Für das vorliegende Problem wird in Fällen, die einer analytischen Lösung zugänglich sind, auf Handrechnungen zurückgegriffen, die aus der Literatur bekannt sind. In dieser ersten Phase der Verifizierung des Programms wurden zahlreiche Referenzsysteme berechnet, deren Lösung bereits durch Handrechnung oder computergestützte Berechnungsprogramme (vgl. u. a. [35], [36]) aufgestellt worden sind. Beispielhaft werden einige der untersuchten Referenzsysteme vorgestellt, da die Ergebnisse der vorgenommenen systematischen Verifizierung an dieser Stelle nicht in ihrem vollem Umfang dargestellt werden können. Nach Abschluss der ersten Phase der Verifizierung des Programms schließt sich eine zweite Phase an, in der die Schnittstelle zwischen dem neu erstellten Programm zur numerischen Lösung des Biegetorsionsproblems und dem Programm zur Erfassung der rheologischen Modelle *kriHo* verifiziert werden soll.

### 3.7.2 Beispiel 1: Analytische Lösung für 2. Eulerfall

Das erste Referenzsystem stellt die analytische Lösung des 2. Eulerfalls dar, der an beiden Seiten gelenkig gelagert ist, siehe Abb. 3.5. Werden keine Einflüsse aus planmäßiger Biegebeanspruchung des Systems berücksichtigt, reduziert sich das Differentialgleichungssystem auf

$$EI_y w_{el}'' = F \cdot (w_{el} + w_0) \quad (3.61)$$



**Abbildung 3.5:** Beispiel 1: 2. Eulerfall - Stützenquerschnitt, Achsenorientierung und statisches System

Wählt man nun die Vorverformung zu

$$w_0(x) = w_{0,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (3.62)$$

und für die elastische Durchbiegung

$$w_{el} = w_{el,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (3.63)$$

als Ansatzfunktion zur Lösung der Differentialgleichung, so erhält man durch Einsetzen

$$w_{el,m} = \frac{F \cdot w_{0,m}}{-F + \frac{EI_y \cdot \pi^2}{l^2}} \quad (3.64)$$

als elastische Durchbiegung in  $z$ -Richtung in Feldmitte  $m$ . Die Gesamtdurchbiegung  $w_{ges}$  berechnet sich nach Gl. (3.65) zu:

$$w_{ges} = w_{el} + w_0 \quad (3.65)$$

Als Beispiel wird das in Abb. 3.5 dargestellte System berechnet. Es wird ein rechteckiger Querschnitt aus Brettschichtholz GL 32c mit den folgenden Abmessungen und der Belastung gewählt:



$b$	=	12,0	cm	Breite des Querschnitts
$h$	=	19,6	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	=	6,0	m	Länge der Stütze
$E_{mean}$	=	1370	kN/cm <sup>2</sup>	
$EI_y$	=	10315464,3	kNcm <sup>2</sup>	
$F$	=	70,0	kN	charakteristische Druckbeanspruchung

Diese Werte in obige Gleichung eingesetzt führten zu

$$w_m = 0,4934 \text{ cm.}$$

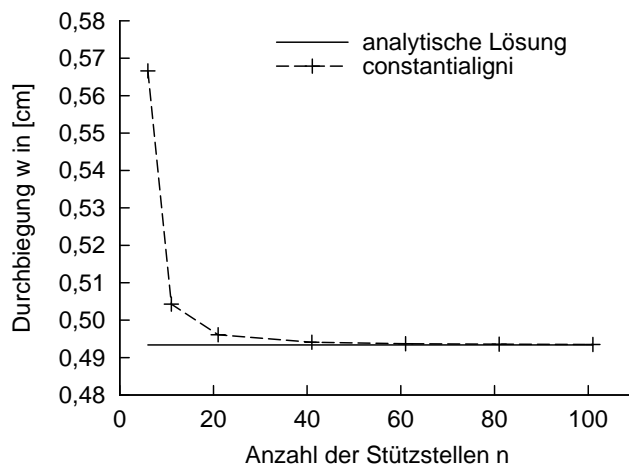
Die numerische Berechnung mit *constantialigni* für  $n + 1 = 11$  Stützstellen liefert

$$w_m = 0,5043 \text{ cm}$$

Der Vergleich der numerischen Berechnung mit der analytischen Lösung ergibt eine Ergebnisabweichung von 2,2 Prozent. In Abschnitt 3.2 wurde die Hypothese formuliert, dass durch die Erhöhung der Anzahl der Stützstellen die analytische Lösung hinreichend genau genähert werden kann. Aus diesem Grunde wird die Anzahl der Stützstellen zunächst um zehn erhöht. Die numerische Berechnung für  $n + 1 = 21$  Stützstellen liefert eine Durchbiegung

$$w_m = 0,4961 \text{ cm}$$

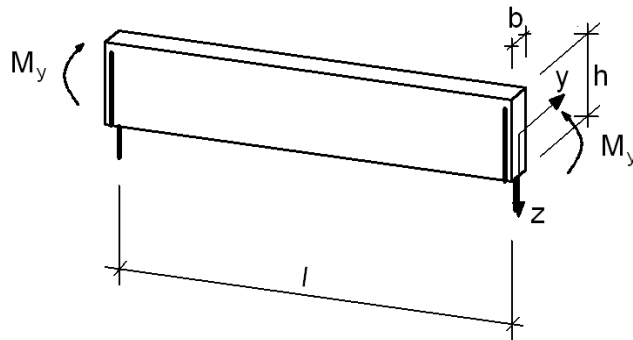
Das für  $n + 1 = 21$  Stützstellen berechnete Ergebnis weicht nur noch um 1 Prozent von der analytischen Lösung der DGL ab. Durch eine weitere Erhöhung der Anzahl der Stützstellen konvergiert das Ergebnis der numerischen Berechnung zunehmend gegen den Ergebniswert der analytischen Lösung. In Abbildung 3.6 sind die Ergebniswerte über der Anzahl der Stützstellen aufgetragen, die dargestellte Kurve zeigt eine deutliche Konvergenz.



**Abbildung 3.6:** Konvergenz der numerischen Berechnung über die Anzahl der Stützstellen

Im Zuge der Verifizierung wurden weitere numerische Berechnungen für unterschiedliche Querschnittsabmessungen und einer Druckkraft in Längsrichtung des Stabes durchgeführt. Die Ergebnisse konvergierten in gleicher Weise gegen die Ergebnisse, die sich aus der analytischen Lösung ergaben.

### 3.7.3 Beispiel 2: Analytische Lösung für konstante Momenteneinwirkung



**Abbildung 3.7:** Gabelgelagerter Einfeldträger unter konstanter Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$

Für den Sonderfall des Kippens unter konstanter Momenteneinwirkung ist für das vorangegangene Beispiel eine analytische Lösung bekannt. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem vereinfacht sich, wie in Kap. 3.1 hergeleitet, zu:

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV} = 0 \quad (3.66)$$

$$E \cdot I_z \cdot v_{el}^{IV} + (M_{yq} \cdot \vartheta_{ges})^{II} = 0 \quad (3.67)$$

$$G \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}^{II} - E \cdot I_\omega \cdot \vartheta_{el}^{IV} - M_{yq} \cdot v_{ges}^{II} = 0 \quad (3.68)$$

Aus dem reduzierten Gleichungssystem wird ersichtlich, dass Gl. (3.66) entkoppelt werden kann und einer exakten Lösung zugänglich ist. Die elastischen Verformungen ergeben sich aus der allgemeinen Herleitung der Biegelinie des Bernoulli-Balkens.

$$\begin{aligned} E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV}(x) &= q_z(x) = 0 \\ E \cdot I_y \cdot w_{el}^{III}(x) &= -Q_z(x) = 0 \\ E \cdot I_y \cdot w_{el}^{II}(x) &= -M_y(x) \\ w(0) &= 0 \\ w^I\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Einsetzen in die Gleichungen Gl. (3.70) liefert für die maximale Durchbiegung in Feldmitte:

$$w_{el,m} = \frac{M_y \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I_y} \quad (3.70)$$

Damit verbleiben noch die Gleichungen Gl. (3.67) und Gl. (3.68), die nicht voneinander entkoppelt gelöst werden können. Ziel ist die elastische Verformung des Stabes in horizontaler Richtung  $v_{el}$  und die elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  jeweils in Feldmitte zu berechnen. Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen wird ein Cosinus-Ansatz gewählt.

$$v_{el}(x) = a \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.71)$$

$$\vartheta_{el}(x) = b \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.72)$$

Mit den Ableitungen der obigen Ansatzfunktionen lässt sich für Gl. (3.67)

$$E \cdot I_z \cdot a \cdot \frac{\pi^2}{l^2} - M_{yq} \cdot \vartheta_0 - M_{yq} \cdot b = 0 \quad (3.73)$$

und für Gl. (3.68)

$$-G \cdot I_T \cdot b - E \cdot I_\omega \cdot b \cdot \frac{\pi^2}{l^2} + M_{yq} \cdot v_0 + M_{yq} \cdot a = 0 \quad (3.74)$$

mit

$$v_0(x) = v_{0,m} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.75)$$

$$\vartheta_0(x) = \vartheta_{0,m} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \quad (3.76)$$

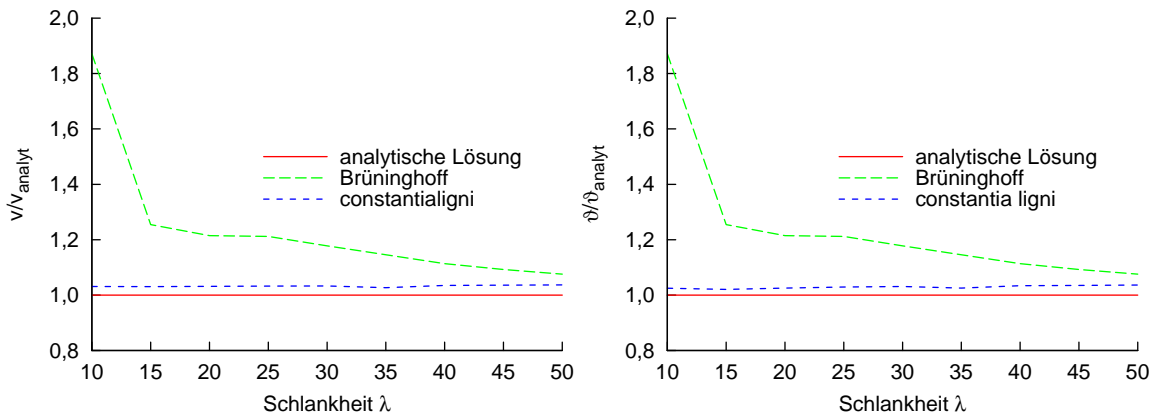
schreiben.

Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems.

$$a = \left( \frac{G \cdot I_t}{M_{yq}} + \frac{E \cdot I_\omega \cdot \pi^2}{M_{yq} \cdot l^2} \right) \cdot \frac{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot v_0 + M_{yq} \cdot \vartheta_0}{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{G \cdot I_t}{M_{yq}} + \frac{E \cdot I_z \cdot E \cdot I_\omega}{M_{yq}} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} - M_{yq}} - v_0 \quad (3.77)$$

$$b = \frac{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot v_0 + M_{yq} \cdot \vartheta_0}{E \cdot I_z \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{G \cdot I_t}{M_{yq}} + \frac{E \cdot I_z \cdot E \cdot I_\omega}{M_{yq}} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} - M_{yq}} \quad (3.78)$$

Damit lassen sich die Verformungen  $w_{el}$  und  $v_{el}$  und die elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  analytisch bestimmen. Im Folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems mit den Ergebnissen der analytischen Lösung verglichen und die auftretenden Abweichungen in den Ergebnissen diskutiert. Brüninghoff stellt in [21] ein



**Abbildung 3.8:** Beispiel 2: Vergleich der Verformungen und Verdrehungen infolge konstanter Momenteneinwirkung  $M_y$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

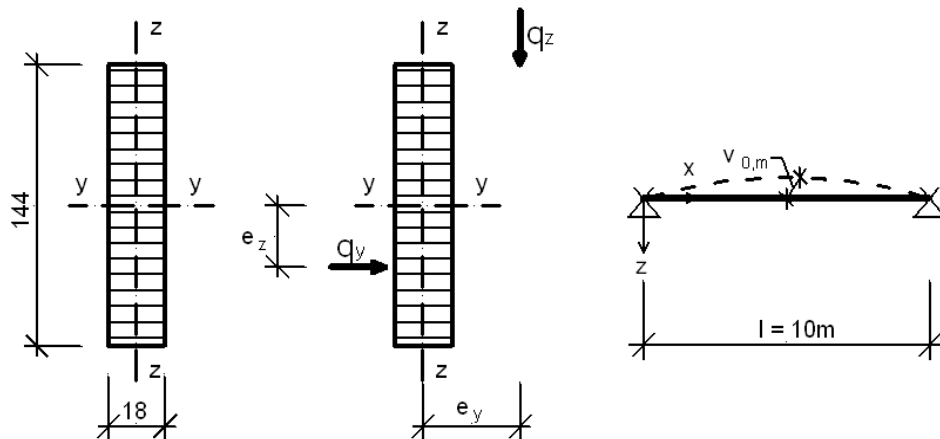
Näherungsverfahren für die Kippstabilität von Brett-schichtholzträgern vor und stellt dieses der analytischen Lösung gegenüber. Die für eine konstante Momenteneinwirkung am gabelgelagerten Einfeldträger berechneten Ergebnisse in Abb. 3.8 stimmen mit der analytischen Lösung sehr gut überein. Mit den Ergebnissen aus [21] ist für größere Schlankheiten  $\lambda$  ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung vorhanden. Die Abweichung von der analytischen Lösung beträgt für Schlankheiten  $\lambda < 35$  weniger als 15%. Die vergleichsweise großen Differenzen der Lösung nach [21] für kleine Schlankheiten  $\lambda$  können auf die Vernachlässigung des Wölbwiderstands  $I_\omega$  in der Näherungslösung zurückgeführt werden, der sich bei kleinen Schlankheiten  $\lambda$  vergleichsweise stark auf die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung auswirkt.

Die konstante Abweichung der analytischen Lösung von weniger als 2% liegt in der mit 21 vergleichsweise geringen Anzahl an Stützstellen begründet. Durch eine Erhöhung der Stützstellen ist eine noch deutlichere Konvergenz der Ergebnisse vorhanden.

### 3.7.4 Beispiel 3: Gabelgelagerter Einfeldträger mit Doppelbiegung

Für den Fall der zweiachsigen Biegung gibt Petersen in [13], Tafel 7.29, Kippbiegung nach Theorie II.Ordnung, eine Handrechenmethode zur Bestimmung der Verdrehung  $\vartheta_m$  des Querschnitts in Feldmitte. Die Verdrehung  $\vartheta_m$  wird hier zum Führen des Spannungsnachweises nach Theorie II. Ordnung gewählt. In diesem Beispiel wird deshalb mit Materialeingangswerten nach DIN 1052:2008-12 [24] für den Grenzzustand der Tragfähigkeit die Berechnung durchgeführt.

Es wird ein rechteckiger Querschnitt aus GL 28h der Nutzungsklasse 2 mit den folgenden Abmessungen und Belastung gewählt:



**Abbildung 3.9:** Beispiel 3: Querschnitt des Biegeträgers, Achsenorientierung und statisches System

$b$	=	18,0	cm	Breite des Querschnitts
$h$	=	144,0	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	=	10,0	m	Länge des Trägers
$E_d$	=	484,6	kN/cm <sup>2</sup>	
$k_{mod}$	=	0,60		
$I_y$	=	4478976	cm <sup>4</sup>	
$I_z$	=	69984	cm <sup>4</sup>	
$I_T$	=	257882	cm <sup>4</sup>	
$I_\omega$	=	112944000	cm <sup>4</sup>	
$q_{z,d}$	=	0,0965	kN/cm	
$q_{y,d}$	=	0,015	kN/cm	
$G_d$	=	30	kN/cm <sup>2</sup>	
$EI_y$	=	$2,1706 \cdot 10^9$	kNcm <sup>2</sup>	
$EI_z$	=	$3,3916 \cdot 10^7$	kNcm <sup>2</sup>	
$e_y$	=	1,0	cm	
$e_z$	=	2,0	cm	

Diese Kennwerte werden in die in [13] angegebenen Gleichungen eingesetzt

$$m = k_1 \cdot l^2 \cdot \mu \cdot \frac{M_{y,m}^2}{E \cdot I_i} + k_2 \cdot M_{y,m} \cdot (e_y + \mu \cdot e_z) \quad (3.79)$$

$$A = \frac{\pi^2}{8} \cdot \left( \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E \cdot I_\omega + G \cdot I_t \right) - k_3 \cdot l^2 \cdot M_{y,m}^2 \cdot \left( \frac{1}{E \cdot I_z} + \frac{\mu^2}{E \cdot I_y} \right) - k_4 \cdot M_{y,m} \cdot (e_z - \mu \cdot e_y) \quad (3.80)$$

$$\vartheta_m = \frac{m}{A} \quad (3.81)$$

mit

$$\mu = \frac{q_y}{q_z} = 0,15544 \quad (3.82)$$

$$I_i = I_z \cdot \frac{I_y}{I_y - I_z} = 71094,9 \text{ cm}^4 \quad (3.83)$$

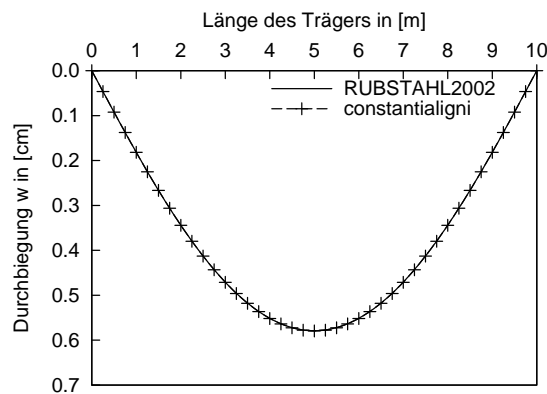
$k_1, k_2$  sowie  $k_3, k_4$  werden aus [13] in Tafel 7.29 abgelesen.

$$\begin{aligned} m &= 0,1114 \cdot 1000^2 \cdot 0,15544 \cdot \frac{12063^2}{484,6 \cdot 71094,9} \\ &\quad + 1,2732 \cdot 12063 \cdot (1 + 0,15544 \cdot 2) \\ &= 93272,3 \\ A &= \frac{\pi^2}{8} \cdot \left( \frac{\pi^2}{1000^2} \cdot 484,6 \cdot 1,129 \cdot 10^8 + 30,0 \cdot 257882 \right) \\ &\quad - 0,0975 \cdot 1000^2 \cdot 12063^2 \cdot \left( \frac{1}{3,392 \cdot 10^7} + \frac{0,15544^2}{2,1706 \cdot 10^9} \right) \\ &\quad - 1,0 \cdot 12063 \cdot (2 - 0,15544 \cdot 1) = \\ &= 9769966,23 \\ \vartheta_m &= \frac{93272,3}{9769966,23} = 0,0095 \end{aligned}$$

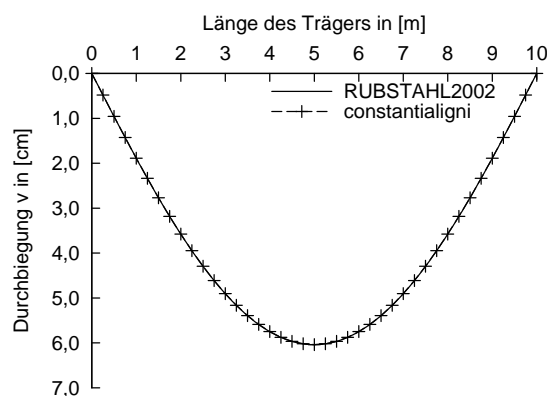
Die numerische Berechnung liefert in diesem Fall ein von der Handrechnung abweichendes Ergebnis. Abb. 3.10 zeigt den Verlauf der Verdrehung  $\vartheta$  über die Länge des Querschnitts. Die maximale Verdrehung in Feldmitte kann zu

$$\vartheta_m = 0,0088$$

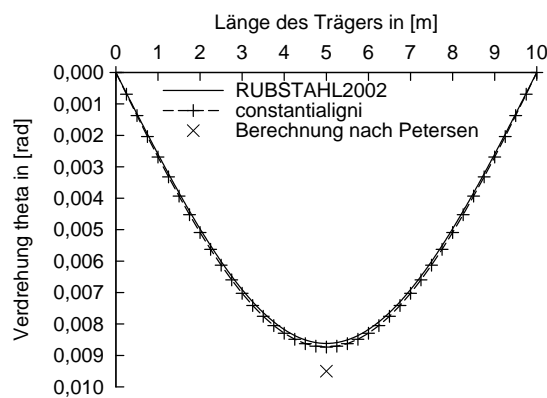
abgelesen werden, was eine Abweichung von ca. 8,6 % von der Berechnung nach Petersen [13] bedeutet. Die Berechnungen nach [13] basieren auf einer Näherungslösung des Differentialgleichungssystems. Es wurden mehrgliedrige Sinus-Ansätze zur Erstellung der Lösung verwendet, worin die quantitative Abweichung zur numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems begründet liegt. Der Näherungsansatz [13] stellt damit für die Anwendung in der Praxis eine gute Näherung dar, die zudem auf der sicheren Seite liegt. Für die anschließende Simulation des Langzeitverhaltens und um das erstellte Programm zu verifizieren, scheint der Vergleich mit der Berechnung nach [13] nicht geeignet, da nur die maximale Verdrehung berechnet werden kann, über die Richtigkeit der in *constantialigni* berechneten Verdrehung und deren Verlauf über die Länge des gewählten Trägers kein Vergleich angestellt werden kann. Infolge weitergehender Literaturrecherche findet sich bei Kindmann in [15] ein Lehrprogramm für den Stahlbau, das für Forschungs- und Lehrzwecke frei verwendbar ist. Da hier die Möglichkeit besteht, diverse Systeme und Querschnitte numerisch zu berechnen und die Berechnung nach Theorie II. Ordnung sowie die Ausgabe der Verformungen und Schnittgrößen vorhanden ist, soll obiger Querschnitt mit [15] berechnet werden. In Abb. 3.10 werden die Ergebnisse aus [15] mit denen von *constantialigni* verglichen.



a) vertikale Durchbiegung



b) horizontale Durchbiegung



c) Verdrehung des Querschnitts um die Längsachse

**Abbildung 3.10:** Beispiel 3: Vergleich der Verformungen und Verdrehungen infolge Doppelbiegung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für das System des gabelgelagerten Einfeldträgers

Wie aus Abb. 3.10 ersichtlich wird, werden beinahe identische Ergebnisse in beiden Programmen erzielt. Lediglich bei der Verdrehung  $\vartheta$  ist keine absolute Übereinstimmung der Verläufe vorhanden. Die Abweichung der berechneten Werte in Feldmitte differieren um 1,36%, was jedoch für die geplanten Simulationen unter Langzeitverhalten eine hinreichende Übereinstimmung darstellt.

Weitere Vergleichsrechnungen führten zu ähnlich guten Ergebnissen. Die Abweichungen lagen dabei stets unter einem Prozent, was für die hier zu untersuchende Fragestellung eine ausreichende Rechengenauigkeit darstellt.

### 3.8 Analytische und numerische Lösung des Differentialgleichungssystems im Vergleich

In den vorangegangenen Kapiteln und anhand der Beispiele in Kap. 3.7 konnte gezeigt werden, dass das gekoppelte Differentialgleichungssystem, das das Biegetorsionsproblem II. Ordnung mathematisch beschreibt, nur in wenigen Ausnahmefällen analytisch gelöst werden kann. Für die Betrachtung kippgefährdeter Träger, wie sie in der Praxis vorkommen, muss deshalb häufig auf Näherungslösungen oder numerische Lösungen zurückgegriffen werden. Mit Hilfe der hier vorgestellten numerischen Lösungsmethode und des daraus erstellten Berechnungsprogramms ist es nun möglich, praxisrelevante Systeme nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu untersuchen.

Von Brüninghoff wird in [21] ein Näherungsverfahren für die Kippstabilität von Brettschicht-holzträgern vorgestellt und analytischen Lösungen gegenübergestellt. Die für eine konstante Momenteneinwirkung am gabelgelagerten Einfeldträger berechneten Ergebnisse in Abb. 3.8 stimmen mit der analytischen Lösung sehr gut überein. Mit den Ergebnissen aus [21] ist für größere Schlankheiten  $\lambda$  ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung vorhanden. Die vergleichsweise großen Differenzen der Lösung nach [21] für kleine Schlankheiten  $\lambda$  können auf die Vernachlässigung des Wölbwiderstands  $I_\omega$  zurückgeführt werden, der sich bei kleinen Schlankheiten  $\lambda$  vergleichsweise stark auf die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung auswirkt.

Aus den Verformungsverläufen der numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems und deren Ableitungen lassen sich die Schnittgrößenverläufe und Querschnittspannungen berechnen.

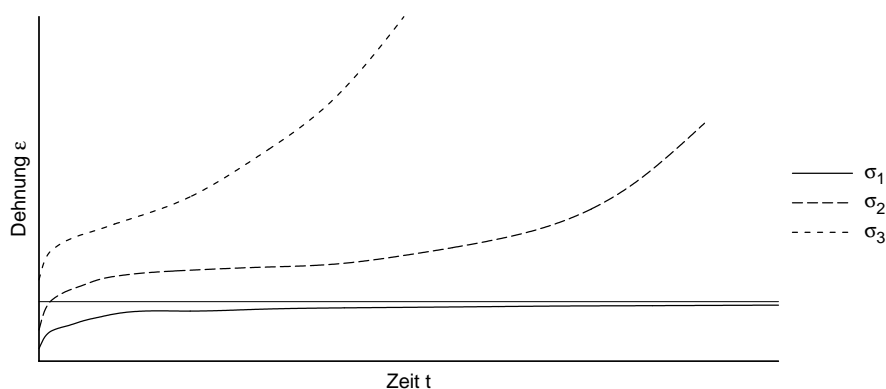
Weitere in der Literatur vorhandene Näherungslösungen erwiesen sich als weniger geeignet für die Verifizierung des numerischen Berechnungsprogramms. Aus diesem Grund wurde auf andere, bereits vorhandene numerische Berechnungsprogramme zurückgegriffen, vgl. [15]. Durch eine Reihe unterschiedlichster Trägerkonfigurationen mit unterschiedlichen Lasteinwirkungen, konnte durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse das Berechnungsprogramm *constantialigni* zur numerischen Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung verifiziert werden. Da für die meisten in der Baupraxis vorkommenden Einwirkungsarten keine geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems für das Biegetorsionsproblem II. Ordnung existiert, wird im Folgenden auf das numerische Berechnungsprogramm *constantialigni* zurückgegriffen.



## 4 Einfluss des Langzeitverhaltens auf Holzbauteile

### 4.1 Ursachen des Kriechens von Holz

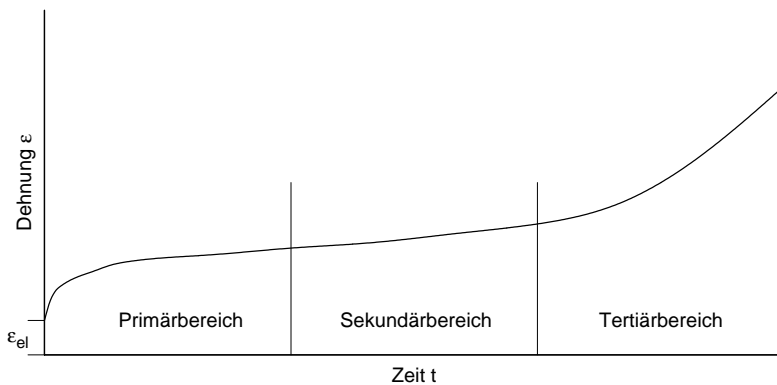
Die Ursache des Kriechens von Holz liegt im Wesentlichen in seiner Materialstruktur begründet. Die Materialstruktur des Holzes wird als eine Mischstruktur aus kristallinen und amorphen Bestandteilen mit eingestreuten submikroskopischen Gefügestörungen in der Literatur beschrieben, vgl. Glos et al. [37]. Wird der Werkstoff einer Beanspruchung ausgesetzt, beginnt sich die Gefügestruktur des Holzes zu verändern. In Abhängigkeit der zeitlichen Dauer und der Intensität der Beanspruchung ist das Kriechen durch unterschiedliches Dehnungsverhalten gekennzeichnet. So entstehen infolge teilweise irreversibler Fließvorgänge viskoelastisch-plastische Formänderungen. Ist eine zeitabhängige Formänderung eines Festkörpers einzig auf eine langfristige Belastung zurückzuführen, wird dies als Kriechverformung bezeichnet. Tritt neben der langfristigen Belastung eine Feuchteänderung auf, die zu einer zeitabhängigen Formänderung eines Festkörpers führt, wird dies als mechano-sorptives Kriechen bezeichnet, vgl. Glos et al. [37]. Somit wird bereits deutlich, dass die von Benning in [38] beschriebenen Einflussgrößen, wie Rohdichte, Jahrringbreite, Ästigkeit, Faserabweichung, Temperatur, Holzfeuchtigkeit, Beanspruchungsart und Belastungsgrad, sich unterschiedlich stark auf die Kriechverformung auswirken.



**Abbildung 4.1:** Zeit-Dehnungsverhalten von Holz in Abhängigkeit des Beanspruchungsgrades nach Benning [38] mit  $\sigma_1$  =linear-viskoelastisches Verhalten unterhalb der Linearitätsgrenze und  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  =Spannungsintensitäten oberhalb der Linearitätsgrenze

In Abhängigkeit der Zeit und der Spannungsintensität können die Kriecheffekte als zeitabhängige Dehnungen in einem Schaubild (vgl. Abb. 4.1) aufgetragen werden. Für die Dehnungskurve infolge der Spannung  $\sigma_1$  in Abb. 4.1 kann nach Rautenstrauch [39] in

guter Näherung von linear-viskoelastischem Verhalten ausgegangen werden. Der Dehnungsverlauf strebt dabei einem Endwert entgegen, der die Linearitätsgrenze in Bezug auf das Werkstoffverhalten darstellt. Die Spannungsverläufe  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  überschreiten die Linearitätsgrenze und die Kriechdehnungen nehmen überproportional zu und die damit verbundenen Spannungsintensitäten führen zum Bruch. Übersteigt die Spannungsintensität die Linearitätsgrenze, lässt sich der Kriechdehnungsverlauf in Abb. 4.2 in drei Bereiche einteilen:



**Abbildung 4.2:** Kriechkurvenbereiche: Primärbereich, Sekundärbereich, Tertiärbereich nach Benning [38]

Im Primärbereich ist eine beinahe exponentielle Zunahme der Dehnung zu verzeichnen, wohingegen der sekundäre Bereich von einer linearen Zunahme der Kriechdehnung gekennzeichnet ist. Im Tertiärbereich erfolgt sodann eine starke Zunahme der Kriechdehnung, die schließlich zum Bruch führt. Die in Abb. 4.1 aufgetragenen Spannungsverläufe  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  unterscheiden sich also im Wesentlichen durch den Sekundärbereich, der beim Verlauf  $\sigma_2$  deutlich ausgeprägt vorhanden ist, und bei Spannungsverlauf  $\sigma_3$  nicht vorhanden ist. Hier erfolgt ein direkter Übergang vom Primär- in den Tertiärbereich, der schließlich zum Bruch führt.

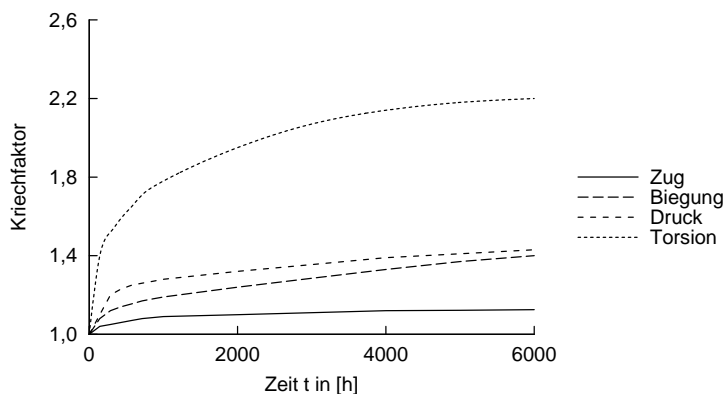
Eine Spannungsintensität über der Linearitätsgrenze sollte somit für den Gebrauchsspannungsbereich vermieden werden. Nach Rautenstrauch [39] kann die Linearitätsgrenze beim Werkstoff Holz zu 40% der Beanspruchbarkeit des Kurzzeitversuchs angenommen werden. Um die Linearitätsgrenze nicht zu überschreiten, werden in DIN 1052:2008-12 [24] und DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] modifizierte Werte der Kurzzeitfestigkeit verwendet, um größere Lasteinwirkungsdauern abbilden zu können und so ein Bauteilversagen während dessen Standzeit infolge Überschreiten der Linearitätsgrenze zu vermeiden. Für den einfachen Biegebalken wird in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] durch Modifikation die Festigkeitswerte  $f$  in Abhängigkeit der Lasteinwirkungsdauer und der Nutzungsklasse mit dem Modifikationsbeiwert  $k_{mod}$  sichergestellt, dass die Linearitätsgrenze der Kriechdehnung während des Bemessungszeitraums nicht erreicht wird. Anders als beim einfachen Biegebalken wirkt sich bei stabilitätsgefährdeten Bauteilen die Kriechverformung auf die Schnittgrößen und die auftretenden Spannungen im Bauteil aus. Hartnack untersuchte in [40] das Langzeitverhalten druckbeanspruchter Bauteile aus Holz. Zur Erfassung des Langzeitverhaltens wurden in [40] numerische Versuche durchgeführt. Infolge der Kriechdehnung nimmt die Beanspruchung des druckbeanspruchten Bauteils zu. Um diese zusätzliche Beanspruchung in die Bemessung zu implementieren, gibt Hartnack in [40] einen modifizierten Nachweis nach Theorie II. Ordnung an, der neben der geometrischen

Vorkrümmung eine weitere Vorkrümmung zur Erfassung des Langzeitverhaltens vorsieht. Um Druckstäbe mit planmäßig mittigem Druck auch weiterhin mit dem Ersatzstabverfahren nachweisen zu können, schlägt Hartnack in [40] vor, den Imperfektionsbeiwert  $\beta_c$  in [31] additiv zu ergänzen und so das Langzeitverhalten zu erfassen. Unabhängig von der Form des Nachweises hängt die Traglast stabilitätsgefährdeter Bauteile immer von den Verformungen infolge Kriechen ab, so auch bei den nachfolgend untersuchten kippgefährdeten Trägern.

## 4.2 Einflussgrößen auf das Kriechverhalten von Holz

Das Kriechverhalten des Werkstoffs Holz ist auf zahlreiche Einflussgrößen zurückzuführen. Benning gibt in [38] einen zusammenfassenden Überblick über die wichtigsten Kriecheinflüsse. Diese Zusammenfassung resultiert aus diversen Forschungsergebnissen, die der Literatur entnommen sind und aus experimentellen Kriechuntersuchungen an Kleinstproben aus Vollholz und an Brettschichtholz mit baupraktischen Abmessungen gewonnen werden konnten. Die in [38] beschriebenen Einflussgrößen sind die Rohdichte, Jahringbreite, Ästigkeit, Faserabweichung, Temperatur, Holzfeuchte, Beanspruchungsart und der Belastungsgrad. Jede dieser Einflussgrößen wirkt sich unterschiedlich stark auf das Kriechverhalten des Holzes aus:

- **Beanspruchungsart:** Gressel stellte in [41] und [42] die Kriechfaktoren von Fichtenholz bei gleichen klimatischen Bedingungen (Lufttemperatur 20°C und 55% relativer Luftfeuchte) unter Biege-, Zug-, Druck- und Torsionsbeanspruchung vergleichend einander gegenüber. In Abb. 4.3 sind die Kriechfaktoren dargestellt, mit de-

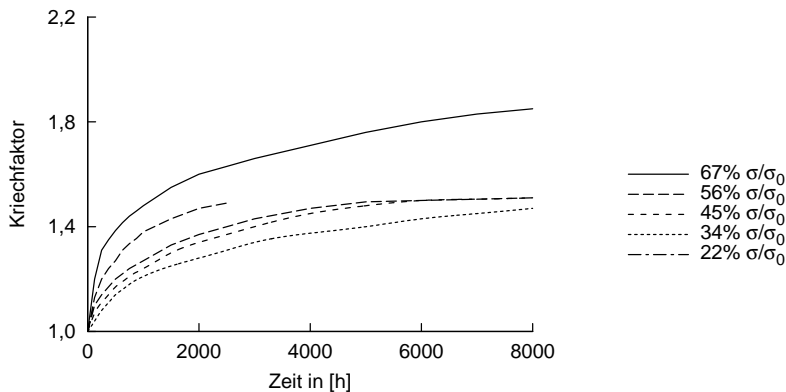


**Abbildung 4.3:** Kriechfaktoren in Abhängigkeit der Art der Beanspruchung nach Gressel [41], [42]

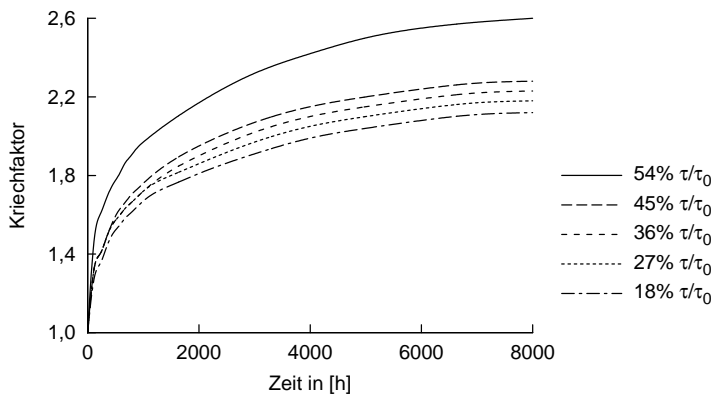
nen die elastischen Dehnungen  $\varepsilon_{el}$  multipliziert werden müssen, um die Kriechdehnungen zu erhalten. Die Kriechfaktoren sind dabei abhängig von der Art der Beanspruchung. Unter den der Untersuchungen zugrunde gelegten klimatischen Bedingungen ist das Schubkriechen infolge Torsionsbeanspruchung am größten, das Kriechen infolge Zugbeanspruchung am kleinsten.

- **Grad der Beanspruchung:** Gressel untersuchte in [41] und [42], welche Auswirkungen die Höhe der Beanspruchung auf das Kriechverhalten hat. Für Fichtenholz bei 20°C Lufttemperatur und 55% relativer Luftfeuchte wurden die in Abb. 4.4 und Abb. 4.5 dargestellten Kriechfaktoren bei unterschiedlichem Grad der Biege- und

Torsionsbeanspruchung bestimmt. Dabei wird der Grad der Beanspruchung stets bezogen auf die Kurzzeitfestigkeit angegeben.



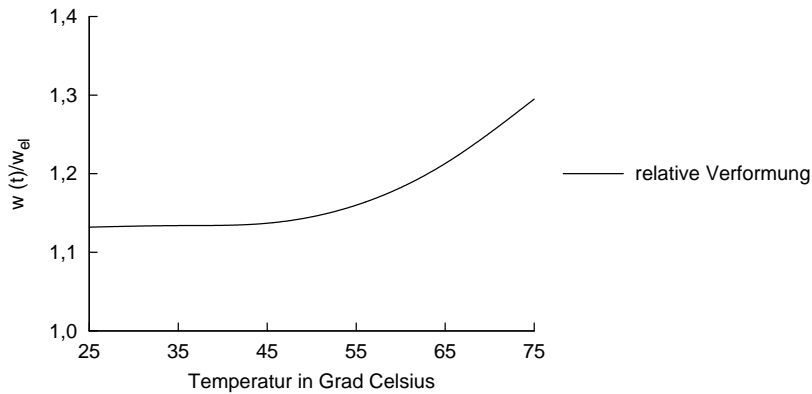
**Abbildung 4.4:** Kriechfaktoren in Abhängigkeit des Belastungsgrads bei Biegebeanspruchung nach Gressel [41], [42] mit  $\sigma_0$  = maximal zulässige Beanspruchung



**Abbildung 4.5:** Kriechfaktoren in Abhängigkeit des Belastungsgrads bei Torsionsbeanspruchung nach Gressel [41], [42] mit  $\tau_0$  = maximal zulässige Beanspruchung

- **Temperatur:** Der Einfluss der Temperatur auf das Kriechverhalten von Holz wurde von Morlier und Palka in [43] untersucht. Für die üblicherweise vorherrschenden Temperatureinwirkungen auf Bauteile bis ca. 50°C ist aus Abb. 4.6 keine wesentliche Veränderung der relativen Verformung abzulesen, so dass der Temperatureinfluss auf das Kriechen bei üblichen Konstruktionen des Hochbaus vernachlässigt werden kann.
- **Feuchtegehalt und Änderung der Feuchte:** Der Feuchtegehalt des Holzes sowie Holzfeuchteänderungen haben wesentlichen Einfluss auf das Kriechverhalten. Änderungen der Holzfeuchtigkeit infolge wechselnder Luftfeuchtebedingungen wirken sich ebenfalls auf das Kriechverhalten aus, wie Schänzlin in [10] zeigte.

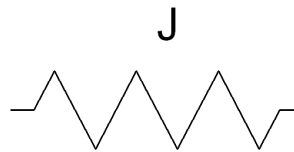
Um das Kriechverhalten von Holz theoretisch beschreiben zu können, werden rheologische Modelle eingesetzt, in denen von einem Kriechverhalten gemäß Spannungskurve  $\sigma_1$  in Abb. 4.1, d. h. unterhalb der Linearitätsgrenze ausgegangen wird. Rheologische Modelle haben zum Ziel, das Materialverhalten durch einfache, eindimensionale mechanische Modelle aus Elementen der elementaren Starrkörpermechanik abzubilden, vgl. Schwarte in [44].



**Abbildung 4.6:** Einfluss der Temperatur auf die Kriechverformung nach einer Woche nach Morlier und Palka [43]

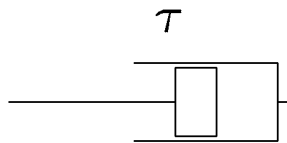
Diese sogenannten Grundelemente sind:

- Das Hooke'sche Element: Ein linear-elastisches Federelement, mit dem elastisches Verhalten eines Stoffes beschrieben werden kann, vgl. Abbildung 4.7.



**Abbildung 4.7:** Hooke'sche Element

- Das Newton Element: Ein geschwindigkeitsabhängiges Dämpferelement, mit dem viskoplastisches Verhalten dargestellt werden kann, vgl. Abbildung 4.8.

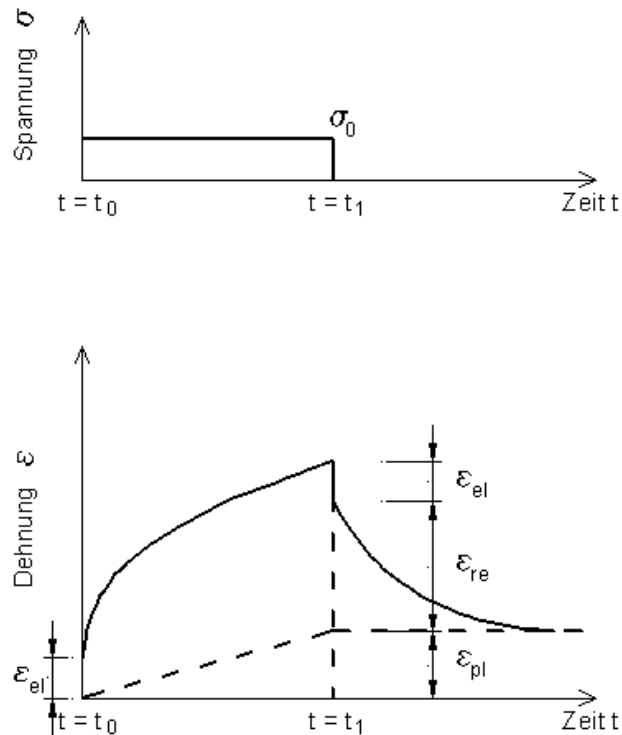


**Abbildung 4.8:** Newton Element

Der Modellierung des zeitabhängigen Dehnungsverhalten wird folgendes Zeit-Dehnungsverhalten unter konstanter Beanspruchung  $\sigma_0$  eines Holzquerschnitts durch beispielsweise eine Zugkraft in einem definierten Zeitraum  $t_0$  bis  $t_1$  zugrunde gelegt (vgl. Abbildung 4.9).

Die Gesamtdehnung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen

- Der eine Anteil ist zeitabhängig und völlig reversibel. Dieser setzt sich aus der elastischen Dehnung  $\varepsilon_{el}$  und der verzögert elastischen Dehnung  $\varepsilon_{ve}$  zusammen.



**Abbildung 4.9:** Zeitdehnung für hochpolymere Stoffe nach Schulte [45]

- Der andere Anteil ist irreversibel und beschreibt die plastische Dehnung  $\varepsilon_{pl}$ , die aus den Fließverformungen des Holzes folgt.

Bei einer Entlastung des Systems zum Zeitpunkt  $t_1$  verringert sich die Gesamtdehnung

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{pl} \quad (4.1)$$

schlagartig um den elastischen Anteil  $\varepsilon_{el}$ . Der reversible Anteil der Dehnung  $\varepsilon_{ve}$  geht mit der Zeit zurück, während der plastische Anteil  $\varepsilon_{pl}$  bleibt.

Je nach Umfang und Aufbau ist es demnach möglich, das Verformungsverhalten von Holz jeweils nach Art des Einflusses mehr oder minder genau wiederzugeben. In Toratti [1], Hanhijärvi [46], Martensson [47] finden sich mehrere Ansätze und rheologische Modelle, die unter anderem Feuchteänderung, Temperatur, etc. miteinfassen. In *kriHo* [48] [10], einem am Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart entwickelten Rechenprogramm, werden mit Hilfe rheologischer Modelle die zeitabhängigen Verformungen in Abhängigkeit der Materialparameter, Systemeigenschaften, Lastgeschichte und Klimabedingungen berechnet. Dabei werden aus der Literatur stammende rheologische Modelle nach Toratti [1], Hanhijärvi [46], Becker [49] und Martensson [47] als Grundlage eines Berechnungsalgorithmus in *kriHo* implementiert.

### 4.3 Rheologisches Modell nach Toratti [1]

Toratti stellt in [1] mögliche Wege zur Erfassung des Langzeitverhaltens von Holz auf, die in den rheologischen Modellen A-D zusammengefasst sind. *kriHo* beinhaltet das rheologische Modell B nach Toratti. Es besteht aus sechs in Reihe geschalteten Kelvin-Voigt-Körpern, siehe Abbildung 4.10,

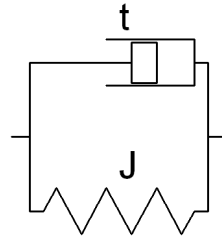


Abbildung 4.10: Kelvin-Voigt-Körper

durch die das reine Kriechen erfasst wird, einem Kelvin-Voigt-Körper für die Erfassung des mechano-sorptiven Kriechens, dem Kriechen infolge Feuchteschwankung, und einem weiteren Element am Ende zur Berücksichtigung der Feuchtedehnung. Der Kelvin-Voigt-Körper wird aus der Parallelschaltung je eines linear-elastischen Federelements (Hooke'sche Element, vgl. Abbildung 4.7) und einem geschwindigkeitsabhängigen Dämpfer-element (Newton Element, vgl. Abbildung 4.8) gebildet.

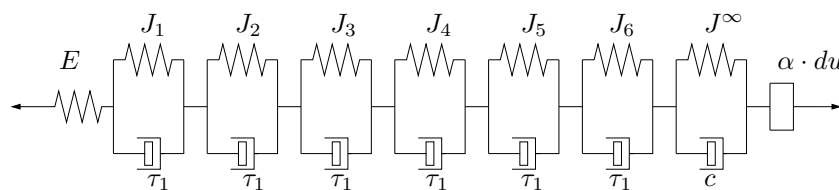


Abbildung 4.11: Rheologisches Modell nach Toratti [1]

Die zeitabhängige Kriechdehnung setzt sich aus fünf Teilen zusammen:

$$\varepsilon_{ges}(t) = \varepsilon_{el}(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{irrec}(t) \quad (4.2)$$

- elastische Dehnung  $\varepsilon_{el}(t)$  aufgrund von Änderungen des E-Moduls und aufgrund von Spannungsänderungen

$$\varepsilon_{el}(t) = \int \left( J_0 \cdot \dot{\sigma} + \dot{J}_0 \cdot \sigma \right) dt \quad (4.3)$$

mit	$\varepsilon_{el}(t)$	elastische Kriechdehnung
	$\sigma$	Spannung
	$J_0$	elastische Nachgiebigkeit $= 1/E(u)$
	$E(u)$	E-Modul in Abhängigkeit der Holzfeuchte
	$dt$	zeitliche Änderung

- reine Kriechdehnung  $\varepsilon_r(t)$

$$\varepsilon_r(t) = J_0(u_{ref}) \cdot \int \sum_{i=1}^6 J_n \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_n}}\right) \cdot d\sigma(t') \quad (4.4)$$

mit  $J_0(u_{ref})$  elastische Nachgiebigkeit bezogen auf  $u_{ref}$  die Referenzfeuchte  
 $J_n, \tau_n$  Parameter (vgl. Tab. 4.1)  
 $\sigma$  Spannung  
 $u_{ref} = 0,2$

**Tabelle 4.1:** Parameter für das von Schänzlin in [10] modifizierte rheologische Modell nach Toratti [1]

	$J_n$ [ ]	$\tau_n$ [Tage]
1	0,0686	0,01
2	-0,0056	0,1
3	0,0716	1
4	0,0409	10
5	0,2201	193,23
6	1,8052	11078,51

Die Parameter in Tab. 4.1 sind durch Einsetzen in folgende Exponentialfunktion bestimmt worden

$$J(t,0) = J_0(u) + J_0(u_{ref}) \cdot \left(\frac{t}{t_d}\right)^k \quad (4.5)$$

mit  $t$  Laufzeit  
 $t_d$  29500 Tage ( $\sim 80$  Jahre)  
 $k = 0,21$

- mechano-sorptive Kriechdehnung  $\varepsilon_{ms}(t)$ : Für die Auswertung der mechano-sorptiven Kriechdehnung wird ein Kelvin-Voigt-Körper verwendet. Mit Hilfe dieses Modells kann die mechano-sorptive Kriechdehnung zu

$$\varepsilon_{ms}(t) = J^\infty \cdot \int_0^t \left(1 - e^{-c \cdot \int_t^{t'} |du(t'')|}\right) d\sigma(t') \quad (4.6)$$

bestimmt werden.

mit  $J^\infty = 0,7 \cdot J_0(u_{ref})$   
 $c = 2,5$

- irreversible Kriechdehnung  $\varepsilon_u(t)$  aufgrund wechselnder Feuchte: Der Einfluss der irreversiblen Kriechdehnung aufgrund wechselnder Feuchte kann durch folgende Gleichung bestimmt werden

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t (\alpha - b \cdot \varepsilon(t')) du(t') \quad (4.7)$$



$$\begin{aligned} \text{mit } b &= 1,3 \\ \alpha &= 0,00625 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung wird der Einfluss der Gesamtkriechdehnung auf die irreversible Kriechdehnung aufgrund wechselnder Feuchte durch den Term  $-b \cdot \varepsilon(t')$  berücksichtigt.

- Einfluss der Spannung auf die mechano-sorptive Kriechdehnung  $\varepsilon_{irrec}(t)$ : Für Spannungen aus Zwängung wird diese nicht umkehrbare Dehnung eingeführt.

$$\varepsilon_{irrec}(t) = J_0(u_{ref}) \cdot e \cdot \int_0^t \sigma(t') |du(t')| \quad \text{nur für Zwängungen} \quad (4.8)$$

$$\text{mit } e = 0,1$$

Abschließend schlägt Toratti vor, um das Modell für geringe Luftfeuchte zu verbessern, die effektive Feuchte für Spannungen aus Zwängungen zu verwenden.

$$\dot{u}_{\text{eff}} = \dot{u} \cdot e^{200 \cdot (u - 0.18)} \quad (4.9)$$

Für die numerische Bestimmung innerhalb des Rechenprogramms *kriHo* wurde diese Gleichung in die nachfolgende umgewandelt

$$\dot{u}_{\text{eff}} = \begin{cases} \dot{u} \cdot e^{200 \cdot (u - 0.18)} & \text{für } u \leq 18\% \\ \dot{u} & \text{für } u > 18\% \end{cases} \quad (4.10)$$

Weil die elastische Nachgiebigkeit  $J_0$  vom E-Modul abhängt, schlägt [1] folgenden Zusammenhang zwischen E-Modul und Feuchtegehalt vor

$$E(u) = E(u = 0) \cdot (1 - 1.06 \cdot u) \quad (4.11)$$

Da der E-Modul für den Feuchtegehalt  $u = 0$  häufig nicht gegeben ist, wird Gl. (4.11) umgewandelt in

$$E(u) = E_0 \cdot \frac{1 - 1.06 \cdot u}{1 - 1.06 \cdot u_0} \quad (4.12)$$

mit  $E_0$  E-Modul bei einem Feuchtegehalt von  $u_0$   
 $u_0$  Eingangswert der Feuchte  
 $u$  Ist-Wert der Feuchte

Abschließend erwähnt Toratti in [1] eine Erweiterung des rheologischen Modells auf nicht-lineares Materialverhalten durch Berücksichtigung des tertiären Kriechbereichs und des Bruchs am Ende. Diese Erweiterung der Theorie ist im Berechnungsprogramm *kriHo* nicht enthalten, da mit Hilfe von *kriHo* ursprünglich nur Untersuchungen zum Kriechen von Holz und der damit verbundenen Formänderung vorgenommen werden sollten. Auch in Verbindung mit dem Berechnungsmodul *constantialigni* zur Berechnung des Biegetorsi-

onsproblems II. Ordnung wird diese Erweiterung nicht benötigt, da bei der Untersuchung der Kippstabilität unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens die Verformungszunahme am kippgefährdeten Träger bestimmt werden soll.

## 4.4 Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in der Normung

Im Hochbau wird für die Bemessung von Bauteilen eine Nutzungsdauer von 50 Jahren zugrunde gelegt. Während der Dauer der Nutzung soll nicht nur die Standsicherheit im Grenzzustand der Tragfähigkeit, sondern auch die einwandfreie Nutzbarkeit im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sichergestellt werden. Die einzelnen Bauteile werden während der Dauer der Nutzung durch ständige und veränderliche Einwirkungen beansprucht. Die ständigen Einwirkungen verursachen neben elastischen Verformungen auch Kriechverformungen. Unter Kriechen wird allgemein die zeitabhängige Verformung eines Werkstoffs oder eines Tragwerks bei statischer Belastung verstanden. Das Kriechen von Holz ist für den Einsatz im Bauwesen von relevanter Bedeutung, vor allem für die Verformungsberechnung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit.

Die zeitabhängigen Kriechverformungen werden nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] über den Beiwert zur Bestimmung der Kriechverformung  $k_{def}$  berücksichtigt, indem die Anfangsverformung infolge ständiger Einwirkungen mit dem Faktor  $(1+k_{def})$  multipliziert wird. Die Endverformung  $w_{G,fin}$  lässt sich demzufolge nach Gl. (4.13) berechnen:

$$w_{G,fin} = w_{G,inst} \cdot (1 + k_{def}) \quad (4.13)$$

mit:

$w_{G,inst}$	Anfangswert der Verformung, d. h. elastische Verformung infolge ständiger Last
$k_{def}$	Beiwert zur Bestimmung der Kriechverformung unter Berücksichtigung der maßgebenden Nutzungsklasse
$\psi_2$	Kombinationsbeiwert

Treten veränderliche Einwirkungen mit beispielsweise einer Lasteinwirkungsdauer „mittel“ bei Verkehrslasten oder „lang“ bei Lagerstoffen auf, wird der Beiwert  $k_{def}$  mit  $\psi_2$  multipliziert, dem Kombinationsbeiwert aus DIN EN 1990:2010-12 [50], der in Abhängigkeit der Art der Einwirkung angegeben ist. Die Endverformung  $w_{Q,fin}$  infolge veränderlicher Einwirkung wird bestimmt nach Gl. (4.14):

$$w_{Q,fin} = w_{Q,inst} \cdot (1 + \psi_2 \cdot k_{def}) \quad (4.14)$$

mit:

$w_{Q,inst}$	Anfangswert der Verformung, d. h. elastische Verformung infolge veränderlicher Last
--------------	--

Durch den Kombinationsbeiwert  $\psi_2$  wird berücksichtigt, dass in der Praxis ein Bauteil nicht ununterbrochen durch seine Bemessungslast beansprucht ist, sondern sich Zeiträume mit höherer und geringerer Beanspruchung abwechseln. Veränderliche Einwirkungen

mit einer Lasteinwirkungsdauer „mittel“ oder „lang“ besitzen einen bestimmten Anteil, der quasi-ständig wirkt. Der quasi-ständige Lastanteil der veränderlichen Einwirkung wird normativ durch den Kombinationsbeiwert  $\psi_2$  bestimmt und damit die stochastische Verteilung der zeitlichen Änderung der veränderlichen Einwirkung berücksichtigt, die DIN EN 1990:2010-12 [50] zugrunde liegt. Mit dem quasi-ständig vorhandenen bzw. wirkenden Lastanteil der veränderlichen Einwirkung und der ständigen Einwirkung lässt sich die Endverformung  $w_{fin}$  unter Berücksichtigung des Kriechens berechnen. Für die Bestimmung der Gesamtverformung am einfachen Biegeträger wird von einer linearen Berechnung der Verformungsanteile ausgegangen, so dass eine lineare Überlagerung der einzelnen Anteile vorgenommen werden darf.

Wirkt sich das Langzeitverhalten auf die Verteilung der Schnittgrößen im Tragwerk aus, wie dies am kipgefährdeten Träger der Fall ist, so muss dies nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] in den Nachweisen im Grenzzustand der Tragfähigkeit berücksichtigt werden. DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] sieht eine Berücksichtigung mittels Modifikation des Elastizitäts- und Schubmoduls vor.

$$E_{mean,fin} = \frac{E_{mean}}{(1 + \psi_2 \cdot k_{def})} \quad (4.15)$$

$$G_{mean,fin} = \frac{G_{mean}}{(1 + \psi_2 \cdot k_{def})} \quad (4.16)$$

mit:

$E_{mean}$	Mittelwert des Elastizitätsmoduls
$G_{mean}$	Mittelwert des Schubmoduls
$k_{def}$	Beiwert zur Bestimmung der Kriechverformung unter Berücksichtigung der maßgebenden Nutzungsklasse
$\psi_2$	Kombinationsbeiwert

Wie im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit ist  $\psi_2$  der Kombinationsbeiwert aus DIN EN 1990:2010-12 [50], der mit dem Beiwert zur Bestimmung der Kriechverformung  $k_{def}$  multipliziert wird. Ein Kombinationsbeiwert  $\psi_2 < 1$  darf nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] nur dann in Ansatz gebracht werden, wenn der quasi-ständige Wert einer Einwirkung den größten Spannungsanteil bezogen auf die Festigkeit aufweist. Geht der größte Spannungsanteil bezogen auf die Festigkeit auf eine ständige Einwirkung zurück, ist nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2]  $\psi_2 = 1$  zu setzen. Bei den nachfolgend zu untersuchenden weitgestützten Konstruktionen aus Brettschichtholz ergibt sich bei einem Teil der untersuchten Fälle die größte Spannung bezogen auf die Festigkeit aus der veränderlichen Einwirkung der Schneelast. Für Orte bis zu +1000m ü. NN ist in DIN EN 1990:2010-12 [50]  $\psi_2 = 0$ . Das Langzeitverhalten infolge Schnee bleibt in diesen Fällen also unberücksichtigt. Im anderen Teil der untersuchten Fälle geht die größte Spannung auf die ständige Einwirkung zurück mit dem Kombinationsbeiwert  $\psi_2 = 1$ . Das Stabilitätsproblem des Kippens ist ein nicht-lineares Problem, so dass eine lineare Überlagerung der Spannungsanteile aus ständiger und veränderlicher Einwirkung nicht zulässig ist. Die Berechnung der Schnittgrößen und der daraus resultierenden Spannungen hat somit stets für die gesamte Lastfallkombination aus ständiger und veränderlicher Last zu erfolgen, dazu muss das gekoppelte Differentialgleichungssystem gelöst werden, mit dem das Biegetorsionspro-

blem II. Ordnung mathematisch, vgl. Kapitel 2.2, beschrieben ist. Soll nun das Langzeitverhalten durch eine verminderte Steifigkeit berücksichtigt werden, muss für die jeweilige Lastkombination der kriecherzeugende Lastanteil und damit der quasi-ständig wirkende Lastanteil aus ständiger und veränderlicher Last in den Ansatz der verminderten Steifigkeit einfließen.

Für den Formänderungsnachweis schlägt Gressel [42] vor, die Gesamtverformung  $w_{fin}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in Abhängigkeit des Quotienten aus ständiger und quasi-ständiger Einwirkung und der Gesamtlast  $q$  zu bestimmen:

$$w_{fin} = w_{inst} \cdot \left( 1 + \phi \cdot \frac{g + \psi_2 \cdot p}{q} \right) \quad (4.17)$$

$$\phi = \left( \frac{u + \Delta u}{12} \right) \cdot \left( \frac{\Delta u + 15}{20} \right) \quad (4.18)$$

mit:

$w_{inst}$	Anfangswert der Verformung, d. h. elastische Verformung infolge ständiger und veränderlicher Last
$\phi$	feuchtigkeitsabhängige Kriechzahl nach Gressel [42]
$g$	ständige Einwirkung
$p$	veränderliche Einwirkung
$q$	Gesamtlast
$\psi_2$	Kombinationsbeiwert
$u$	Einbaufeuchte in %
$\Delta u$	Differenz zwischen maximaler und minimaler Nutzungsfeuchte in %

Diese von Gressel [42] für den Formänderungsnachweis vorgeschlagene Vorgehensweise ermöglicht es, die Gesamtverformung so zu bestimmen, dass nur für die kriecherzeugenden Lastanteile eine Verformung aus Kriechen in die Gesamtverformung eingeht, vgl. auch DIN 1052-1:1988-04 [51]. Diese Vorgehensweise lässt sich vergleichsweise einfach auf das semiprobabilistische Sicherheitskonzept und den Grenzzustand der Tragfähigkeit übertragen. Dieser Ansatz ermöglicht es, eine Berechnung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung vorzunehmen, da jeder untersuchten Lastkombination die zugehörigen Steifigkeitseigenschaften in Abhängigkeit der Einwirkungsdauer der kriecherzeugenden Lastanteile mit dem Quotienten in Gl. (4.19) zugewiesen werden kann.

$$\frac{g_d + \psi_2 \cdot p_d}{q_d} \quad (4.19)$$

Die Steifigkeiten unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bestimmen sich damit zu:

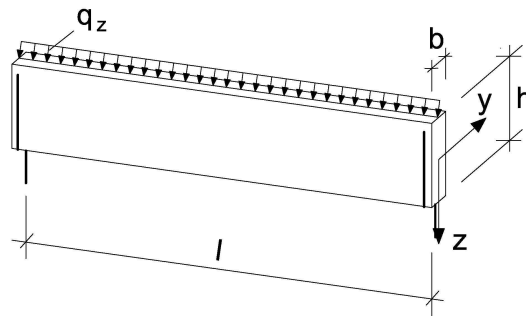
$$E_{0,05,fin} = \frac{E_{0,05}}{\left( 1 + k_{def} \cdot \frac{g_d + \psi_2 \cdot p_d}{q_d} \right)} \quad (4.20)$$

$$G_{0,05,fin} = \frac{G_{0,05}}{\left(1 + k_{def} \cdot \frac{g_d + \psi_2 \cdot p_d}{q_d}\right)} \quad (4.21)$$

mit:

$E_{0,05}$	5%-Quantilwert des Elastizitätsmoduls
$G_{0,05}$	5%-Quantilwert des Schubmoduls
$k_{def}$	Beiwert zur Bestimmung der Kriechverformung unter Berücksichtigung der maßgebenden Nutzungsklasse
$g_d$	Bemessungswert der ständigen Einwirkung
$p_d$	Bemessungswert der veränderlichen Einwirkung
$q_d$	Bemessungslast
$\psi_2$	Kombinationsbeiwert

Zur Veranschaulichung der Auswirkung des Langzeitverhaltens werden am gabelgelager-



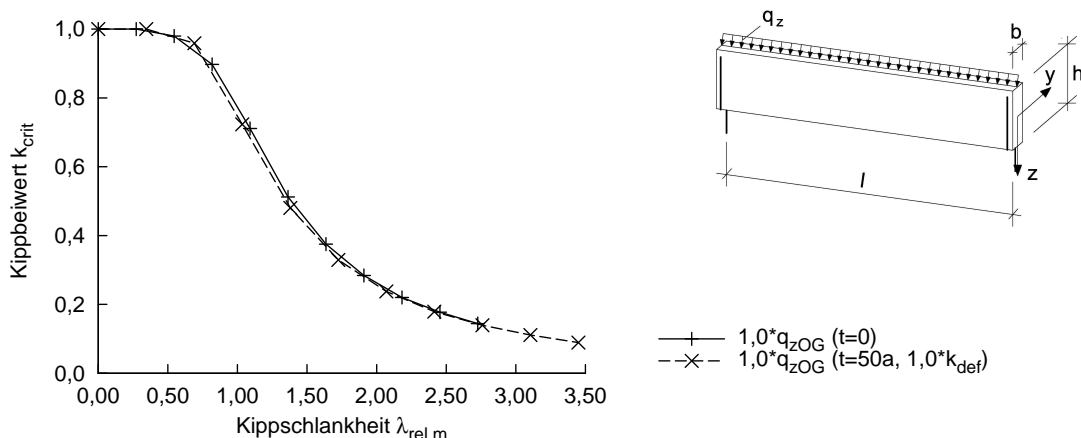
**Abbildung 4.12:** Gabelgelagerter Einfeldträger unter vertikaler Linienlast am Obergurt

ten Einfeldträger unter konstanter Linienlast in vertikaler Richtung am Obergurt wirkend, vgl. Abb. 4.12, Voruntersuchungen vorgenommen. Sämtliche Trägerkonfigurationen werden für eine horizontale Vorverformung mit Stich  $v_0 = l/400$  berechnet. In einem ersten Schritt wird die verminderte Steifigkeit infolge Langzeitverhalten für die Bemessung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung pauschal mit  $\psi_2 = 1,0$  berücksichtigt. Abb. 4.13 zeigt, dass die numerisch ermittelten Kippbeiwerte  $k_{crit}$  über der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  aufgetragen dieselben Werte annehmen, wie zum Zeitpunkt  $t=0$  und damit bei voller Steifigkeit. Infolge der verminderten Steifigkeit ergeben sich bei unveränderter Trägergeometrie und unveränderter freier Kipplänge  $l_{ef}$  aus Gl. (4.22) größere bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  zur Zeit  $t = 50$  Jahre im Vergleich zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

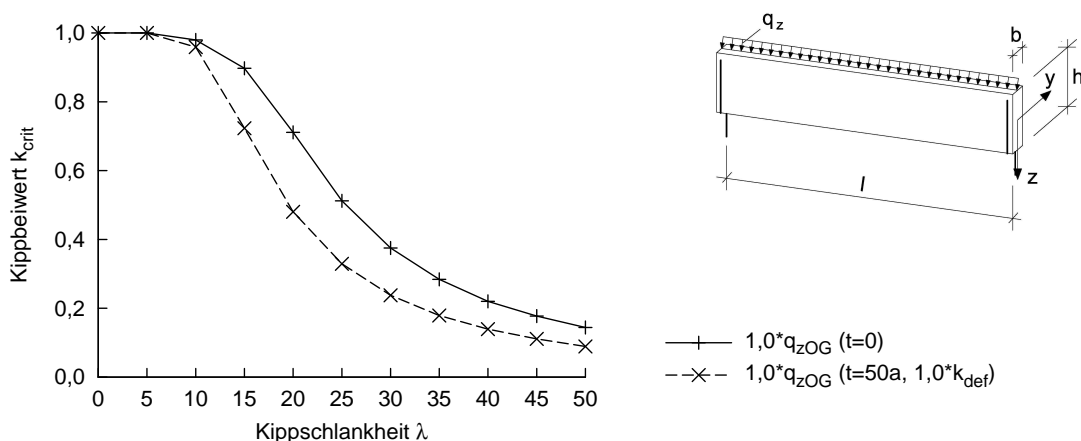
$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\pi \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot G_{0,05}}}} \cdot \sqrt{\frac{l_{ef} \cdot W_y}{\sqrt{I_z \cdot I_{tor}}}} \quad (4.22)$$

Um die Auswirkung der verminderten Steifigkeit infolge Langzeitverhalten auf den Kippbeiwert  $k_{crit}$  bei unveränderter Trägergeometrie und unveränderter freier Kipplänge  $l_{ef}$  zu veranschaulichen, wird auf die Kippschlankheit  $\lambda$ , vgl. Gl. (4.23), zurückgegriffen und die Kippbeiwertkurven über der Kippschlankheit  $\lambda$  in Abb. 4.14 aufgetragen.

$$\lambda = \sqrt{\frac{l \cdot h}{b^2}} \quad (4.23)$$



**Abbildung 4.13:** Kippbeiwert  $k_{crit}$  für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit ohne und mit Berücksichtigung des Langzeitverhaltens nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] am vorverformten gabelgelagerten Einfeldträger und konstanter Linienlast am Obergurt

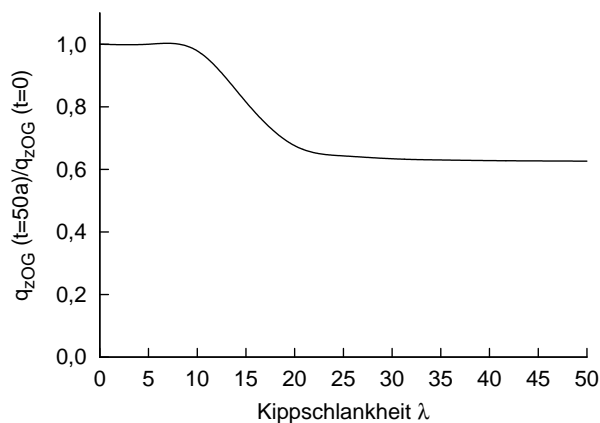


**Abbildung 4.14:** Kippbeiwert  $k_{crit}$  für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit ohne und mit Berücksichtigung des Langzeitverhaltens nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] am vorverformten gabelgelagerten Einfeldträger und konstanter Linienlast am Obergurt

Wie in Kapitel 2.3.2 anhand von Abb. 2.8 erläutert, beträgt die Gesamtbiegespannungsausnutzung des Querschnitts infolge  $M_y^{II}$  und  $M_z^{II}$  in allen hier untersuchten Trägerkonfigurationen stets 100% bzw.  $\eta = 1$ . Da die Kippschlankheit  $\lambda$  ausschließlich von den Querschnittsabmessungen und der Trägerlänge abhängig ist und im Vergleich zur Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  nicht von den Steifigkeitseigenschaften abhängt, wird die Auswirkung der verminderten Steifigkeitseigenschaften sichtbar. Ab einer Kippschlankheit  $\lambda > 10$  liegen in Abb. 4.14 die Spannungsanteile  $\eta_1$  aus planmäßiger Beanspruchung, vgl. Abb. 2.8, für den Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre jeweils deutlich unter der Kippbeiwertkurve für den Zeitpunkt  $t = 0$ . Für beide Zeitpunkte wurde für jede Trägerkonfiguration das Differentialgleichungssystem Gl. (2.1) bis Gl. (2.3) gelöst und somit ein Gleichgewicht am vorverformten Träger gefunden. Auf der linken Seite gehen bei jeder der Gl. (2.1) bis Gl. (2.3) die Steifigkeiten ein, auf der anderen, der rechten Seite der Gl. (2.1) die äußere Lasteinwirkung  $q_z$ . Daraus wird ersichtlich, dass eine Lösung des Differentialgleichungssystems für den Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre unter Berücksichtigung verminderter Steifigkeiten nur dann gefunden werden

kann, wenn die äußere Lasteinwirkung  $q_z$  auf der rechten Seite der Gl. (2.1) im Vergleich zum Zeitpunkt  $t=0$  ebenfalls verringert wird, siehe Abb. 4.15. Gleichzeitig nehmen durch die verminderte Steifigkeit die nicht-planmäßigen Spannungsanteile aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zwangsläufig schon für kleinere Kippschlankheiten  $\lambda$  im Vergleich zur Bemessung für den Zeitpunkt  $t=0$  zu, da die Gesamtbiegespannungsausnutzung stets  $\eta = 1,0$  beträgt.

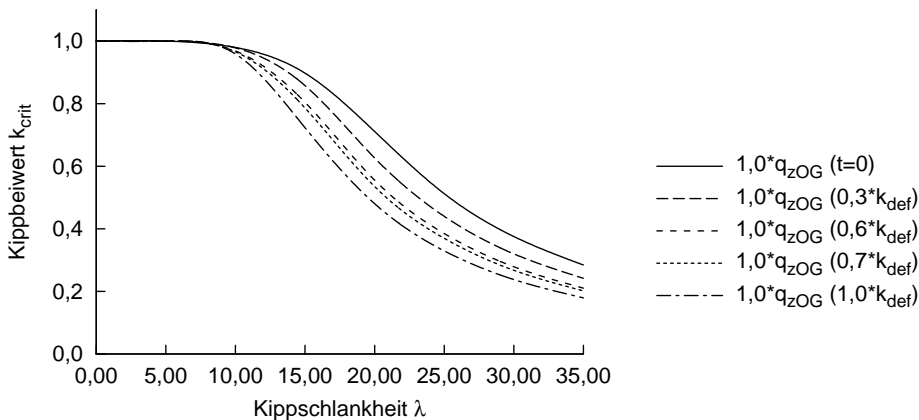
Im Vergleich zum ideal-geraden Biegeträger unter ständiger und veränderlicher Beanspruchung, bei dem die Steifigkeitseigenschaften keine Auswirkung auf die Schnittgrößenermittlung (Th. I. O.) und damit auf die daraus resultierende Biegespannung haben, wirkt sich das Langzeitverhalten und die verminderten Steifigkeitseigenschaften am kippgefährdeten Träger aufgrund der Biegetorsion II. Ordnung auf die Verteilung der Schnittgrößen aus. Durch die in diesem Beispiel vorgenommene Abminderung der Steifigkeiten zur Erfassung des Langzeitverhaltens ergibt sich für das Stabilitätsproblem des Kippens in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  ein Rückgang der maximal aufnehmbaren Bemessungslast von bis zu 40% im Vergleich zur Bemessung für den Zeitpunkt  $t=0$ .



**Abbildung 4.15:** Vergleich der Bemessungslast  $q_z$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit ohne und mit Berücksichtigung des Langzeitverhaltens nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2]

Mit Hilfe der nach Gl. (4.20) und Gl. (4.21) abgeminderten Steifigkeiten und den aus Gl. (4.19) bestimmten Vorfaktoren 0,3, 0,6, 0,7, 1,0 des Verformungsbeiwerts  $k_{def}$  lassen die numerisch berechneten Kippbeiwertkurven darstellen, vgl. Abb. 4.16. Die Referenzkurve bildet in Abb. 4.16 die Kurve für die volle Steifigkeit zum Zeitpunkt  $t=0$ .

Nachfolgend wird das Stabilitätsproblem des Kippens mit Hilfe rheologischer Modelle numerisch untersucht. Diese numerischen Berechnungen sind sehr aufwändig und zeitintensiv. Die Auswertung der Ergebnisse der numerischen Berechnungen wird anschließend mit dem vereinfachten Ansatz der verminderten Steifigkeiten nach Gl. (4.20) und Gl. (4.21) verglichen. Im Rahmen der Abgrenzung der Lasteinwirkungsdauer und des kriechezeugenden Lastanteils, siehe Kap. 8.2, für die Parameterstudie zum Langzeitverhalten wird auf diesen Sachverhalt explizit auch unter Berücksichtigung von Beispielrechnungen eingegangen.



**Abbildung 4.16:** Kippbeiwert  $k_{crit}$  für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in Abhängigkeit des Quotienten aus ständig wirkender Last und der Bemessungslast

## 4.5 Langzeitverhalten des Schubmoduls

In das Differentialgleichungssystem des Biegetorsionsproblems geht der Schubmodul ein. Um das Langzeitverhalten des kippgefährdeten Trägers untersuchen zu können, muss deshalb das Langzeitverhalten des Schubmoduls erfasst werden, da im Gegensatz zum ebenen Biegebalken beim räumlichen Problem des kippgefährdeten Brettschichtholzträgers die zusätzlichen Verformungen höhere Biegemomente um die schwache Bauteilachse und ein höheres Torsionsmoment infolge zusätzlicher Verdrehung des Querschnitts zur Folge haben. Gressel [42] gibt für Fichtenholz unter Torsionsbeanspruchung und den äußeren Klimabedingungen von 20°C und 55 % relativer Luftfeuchte in Abhängigkeit des Belastungsgrades eine Kriechzahl von 2,1 bis 2,3 unter ständiger Einwirkung zwischen 18 und 54% der maximal zulässigen Schubbeanspruchung nach 8000 Stunden an. Die maximal zulässige Schubbeanspruchung stellt dabei einen Wert unterhalb der Linearitätsgrenze da, vgl. Kap. 4.1. Blaß [52] berechnet unter Bezugnahme auf Gressel [42] die zeitliche Abminderung des Schubmoduls zu:

$$G_{\varphi} = \frac{G}{1 + \alpha_s \cdot \varphi(u) \cdot \frac{B(\tau)}{0,28}} \quad (4.24)$$

mit:

$$\alpha_s = 2,5 \quad \text{Beiwert zur Berücksichtigung der Beanspruchungsart}$$

$$B(\tau) = \frac{\tau_{max}}{\tau_{vorh}} \quad \text{Verhältniswert zur Berücksichtigung des Beanspruchungsgrads}$$

$$\varphi(u) = \frac{5}{12} \cdot u - 3,5 \quad \text{Kriechzahl unter Berücksichtigung der Holzfeuchte}$$

Gressel [42] und Blaß [52] gehen somit davon aus, dass nach einer Zeit von 8000 Stunden das lastbedingte Kriechen des torsionsbeanspruchten Trägers weitestgehend abgeschlossen ist. Möhler und Hemmer [53] stellten in den von ihnen bereits 1977 durchgeführten Dauerstandsversuchen an Brettschichtholzstäben fest, dass der Schubmodul un-



abhängig von der Höhe der Torsionsbeanspruchung mit der Zeit abfällt, dagegen war eine Abhängigkeit des Schubmoduls von der Holzfeuchte, der Rohdichte und dem Verhältnis von Höhe und Breite des Querschnitts zu verzeichnen. Benning [38] fasste die von Möhler und Hemmer ermittelten Zusammenhänge und Ergebnisse in einer Näherungsgleichung für Vollholz zusammen.

$$G_T = \left[ \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{h}{b} \right) \cdot \left( 1 + 5,6 \cdot \frac{\rho_{12} - 380}{1000} \right) \cdot \left( 1 - 1,242 \cdot \frac{u - 12}{100} \right) \cdot m_T^{VH} \right] \cdot G_0 \quad (4.25)$$

mit

$$m_T^{VH} = \frac{1,1167}{(1 + 0,1167 \cdot t^{0,257})} \cdot G_{T(t=1h)}$$

und

- $h/b$  = Verhältniswert Höhe zu Breite
- $\rho_{12}$  = Rohdichte des Holzes
- $u$  = Holzfeuchte
- $G_0$  = Grundwert des Schubmodul

Mit der Näherungsgleichung Gl. (4.25) berechnet sich für eine Standzeit von 8000 Stunden die Kriechzahl für Vollholz zu 2,2. Ein Vergleich mit den von Gressel [42] bestimmten Kriechzahlen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse in beiden Arbeiten. Für den Schubmodul bei Brettschichtholz wurde für dessen zeitliche Abnahme von Möhler und Hemmer [54] eine flachere Kurve als bei Vollholz aus den durchgeführten Versuchen ermittelt. Basierend auf den Ergebnissen von Möhler und Hemmer gibt Benning [38] für Brettschichtholz eine Regressionskurve für den Schubmodul an:

$$G_T = \left[ \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{h}{b} \right) \cdot \left( 1 + 5,6 \cdot \frac{\rho_{12} - 380}{1000} \right) \cdot \left( 1 - 1,242 \cdot \frac{u - 12}{100} \right) \cdot m_T^{BSH} \right] \cdot G_0 \quad (4.26)$$

mit

$$m_T^{BSH} = \frac{1,0495}{(1 + 0,0495 \cdot t^{0,261})} \cdot G_{T(t=1h)}$$

Für eine Standzeit von 8000 Stunden bei konstantem  $h/b$ -Verhältnis, konstanter Feuchte und Rohdichte berechnet sich die Kriechzahl zu:

$$\varphi = 1,52$$

Im Hochbau erfolgt die Bauteilbemessung für eine Nutzungsdauer von 50 Jahren. Aus Gl.

(4.26) folgt für die Standzeit  $t = 50$  a die Kriechzahl  $\varphi$ .

$$\varphi = 2,47$$

Die von Benning in [38] angegebene Regressionsgleichung für das Langzeitverhalten des Schubmoduls lässt sich als eine Aneinanderreihung von Kelvin-Voigt-Körpern entsprechend Abb. 4.10 beschreiben und in das Berechnungsprogramm *kriHo* implementieren.

$$G(t) = 1 + \sum_{i=1}^6 \left(1 - e^{-\frac{t}{t_n}}\right) \cdot J_n \quad (4.27)$$

mit  $G(t)$  zeitabhängiger Wert des Schubmoduls  
 $J_n$  Nachgiebigkeit in  $mm^2/N$ , siehe Tab. 4.2  
 $t_n$  Zeit in Stunden, siehe Tab. 4.2

**Tabelle 4.2:** Parameter für das rheologische Modell des Schubmoduls

	$J_n$ [ $mm^2/N$ ]	$t_n$ [Stunden]
1	0,07316373	2,4
2	0,04656566	24
3	0,099300958	240
4	0,195201925	2400
5	0,2892178156	24000
6	0,7384552544	240000

## 5 Stabilität und Langzeitverhalten

### 5.1 Interaktion von Stabilität und Langzeitverhalten

#### 5.1.1 Übersicht

Die vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, dass das Langzeitverhalten von Holz zu zusätzlichen Materialdehnungen führt und damit eine Abnahme der effektiven Steifigkeiten verbunden ist. Für die Stabilität eines Holzbauteils bedeutet dies eine Zunahme der vorhandenen Verformung mit der Zeit, mit der eine höhere Beanspruchung der Bauteile einhergeht. Auf Seite des Materials geht bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung das Langzeitverhalten in die anzusetzenden Steifigkeiten ein. Die gültige Norm DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] vereinfacht die komplexen Zusammenhänge des Kriechens von Holz, indem sie Beiwerte einführt, die das Langzeitverhalten in Abhängigkeit von der Nutzungsklasse wiedergeben. Wirkt eine Druckbelastung von mehr als 70% der ständigen Last in den Nutzungsklassen 2 und 3 auf den Querschnitt ein, werden die Steifigkeiten nach Gl. (4.15) und Gl. (4.16) für den Nachweis nach Theorie II. Ordnung reduziert. Kommt das Ersatzstabverfahren zum Einsatz, so werden die nach Theorie I. Ordnung ermittelten Schnittgrößen mit Beiwerten beaufschlagt, die die Effekte nach Theorie II. Ordnung wiedergeben sollen (vgl. auch [2], [3]). Das Langzeitverhalten wird hier in den Nachweis eingearbeitet, in dem die abgeminderten Steifigkeiten Eingang in den bezogenen Kippschlankheitsgrad  $\lambda_{rel,m}$  finden. Es kann damit in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] in Verbindung mit DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] eine starke Vereinfachung des Biegedrillknicknachweises als auch in der Berücksichtigung des Langzeitverhaltens auf diesen Stabilitätsfall festgestellt werden. Für den reinen Stabilitätsfall des Biegedrillknickens liegt der Nachweis nach Abschnitt 6.3.3 [2], [3] auf der sicheren Seite, was von Brüninghoff in [23] gezeigt wird. Inwieweit auch die gemachten Ansätze für das Langzeitverhalten auf der sicheren Seite liegen, kann hier nicht abgeschätzt werden. Um dies genauer untersuchen zu können und Aussagen über das wirkliche Langzeitverhalten von biegedrillknickgefährdeten Holzträgern machen zu können, ist zum einen eine genaue Berechnung der im Querschnitt vorhandenen Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung notwendig. Dazu muss ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem hergeleitet und gelöst werden. Anschließend ist das Langzeitverhalten über rheologische Modelle zu erfassen. Eine Verknüpfung dieser beiden Komponenten ermöglicht einen Vergleich mit den in der Norm [2], [3] in Bezug auf das Langzeitverhalten getroffenen Annahmen.

Das Kriechverhalten des Biegeträgers wurde von Schänzlin in [10] untersucht und durch das modifizierte Modell B nach Toratti [1] beschrieben. Im Rahmen von [10] ist das Berechnungsprogramm *kriHo* entstanden, mit dem es u. a. möglich ist, das Kriechverhalten von Biegebalken zu simulieren. Mit der Erweiterung von *kriHo* [10] um weitere Funktionen und das selbstständige Berechnungsprogramm *constantialigni* ist es möglich, das Kippproblem nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Langzeitver-

haltens zu simulieren. Um die Schnittstelle zwischen *constantialigni* und *kriHo* verifizieren zu können, wurde das statische System des Einfeldträgers auf einen einfachen Biegeträger reduziert, so dass keine Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung auftreten und damit das Berechnungsprogramm in Bezug auf das Kriechverhalten überprüft werden kann.

### 5.1.2 Beispiel 1: Kriechverformung des Biegeträgers infolge Biegung um die starke und die schwache Achse

Die Berechnung der Kriechverformung erfolgt unter konstanten Feuchtebedingungen, so dass die Holzfeuchte konstant 12% beträgt. Auf einen ideal-geraden Träger mit den Abmessungen

$b$	=	16	cm	Breite des Querschnitts
$h$	=	160	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	=	6,40	m	Länge
$E_d$	=	743,6	kN/cm <sup>2</sup>	(Bezugswert)

wird eine Gleichlast  $q_z = 0.63$  kN/cm aufgebracht, so dass sich das Biegetorsionsproblem II. Ordnung auf die Differentialgleichung eines einfachen Biegebalkens reduziert.

$$E \cdot I_y \cdot w_{el}^{IV} = q_z \quad (5.1)$$

Damit tritt ausschließlich eine vertikale Durchbiegung  $w_{el}$  auf, die über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren konstant ist. Die elastische Durchbiegung in Feldmitte berechnet sich für den Einfeldträger unter konstanter Gleichlast zu:

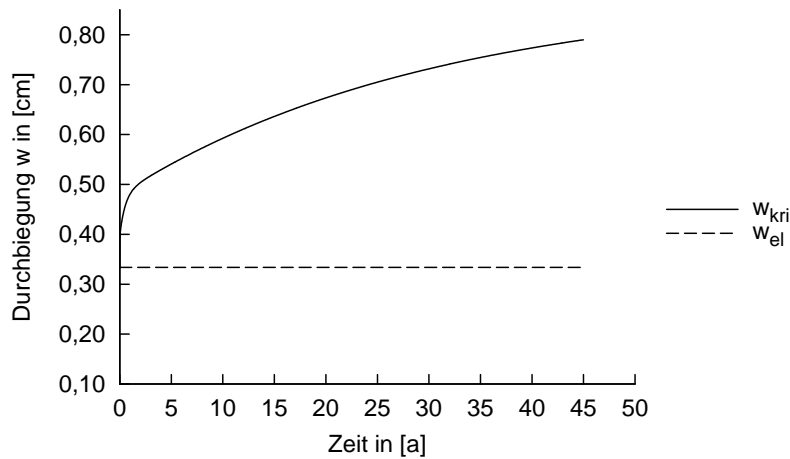
$$w_{el,m} = \frac{5 \cdot 0.63 \text{ kN/cm} \cdot 640 \text{ cm}^4}{384 \cdot 743,6 \text{ kN/cm}^2 \cdot 5461333 \text{ cm}^4} = 0,34 \text{ cm}$$

Die computergestützte Berechnung ergibt einen Wert für  $w_{el,m} = 0,33$  cm. Durch die Berücksichtigung weiterer Nachkommastellen ergibt sich eine Abweichung der analytischen von der numerischen Berechnung von 1,5% und damit eine hinreichende Genauigkeit. Erwartungsgemäß weist die vertikale Durchbiegung  $w_{el}$  über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren in der numerischen Berechnung einen konstanten Verlauf in Abb. 5.1 auf. Der Kriechfaktor in Abb. 5.2 berechnet sich aus dem Quotienten

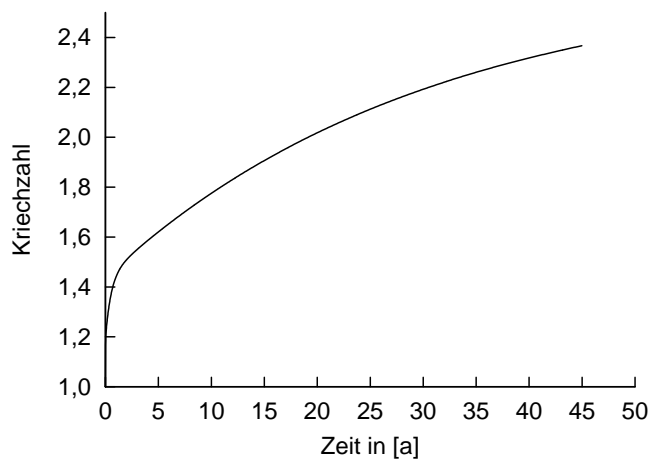
$$\frac{w_{ges}(t)}{w_{el}(t)} \quad (5.2)$$

Der zeitliche Verlauf entspricht der von Schänzlin in [10] anhand von Messungen gefundenen Regressionskurve, die im Berechnungsprogramm *kriHo* enthalten ist.

Da *kriHo* zunächst nur für Untersuchungen am Biegeträger unter vertikaler Beanspruchung entwickelt worden war, musste eine Erweiterung des Programms vorgenommen werden, um die horizontale Raumrichtung miteinfassen zu können. Für die Berechnung der Kriechverformung des Biegeträgers infolge Biegung um die schwache Achse werden die konstanten Feuchtebedingungen beibehalten. Auf einen ideal-geraden Träger mit den Abmessungen



**Abbildung 5.1:** Vertikale Durchbiegung in Feldmitte des Biegeträgers



**Abbildung 5.2:** Kriechzahl infolge vertikaler Kriechverformung

$b$	$=$	160	cm	Breite des Querschnitts
$h$	$=$	16	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	$=$	6,40	m	Länge
$E_d$	$=$	743,6	kN/cm <sup>2</sup>	(Bezugswert)

wird nun eine horizontale Gleichlast  $q_y = 0.63$  kN/cm aufgebracht, so dass sich auch hier das Biegetorsionsproblem II. Ordnung auf die Differentialgleichung eines einfachen Biegebalkens reduziert, vgl. Gl. (5.3) .

$$E \cdot I_z \cdot v_{el}^{IV} = q_y \quad (5.3)$$

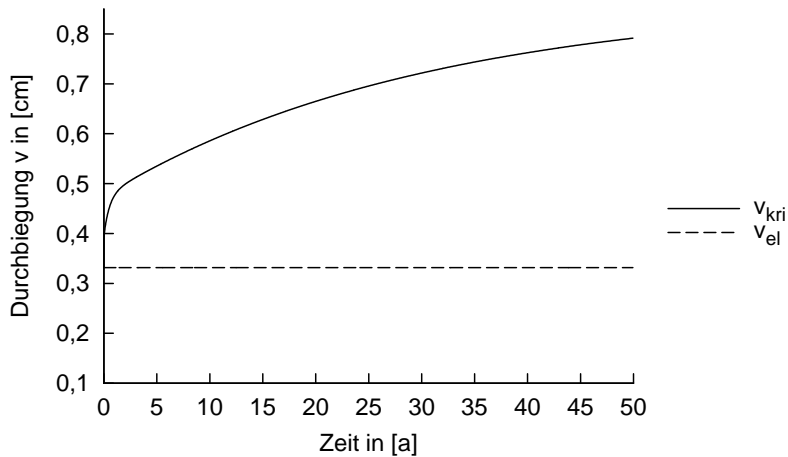
Aufgrund der gewählten Träbergeometrie bestimmt sich die horizontale Durchbiegung  $v_{el}$  erwartungsgemäß zu

$$v_{el,m} = \frac{5 \cdot 0.63 \text{ kN/cm} \cdot 640 \text{ cm}^4}{384 \cdot 743,6 \text{ kN/cm}^2 \cdot 5461333 \text{ cm}^4} = 0,34 \text{ cm}$$

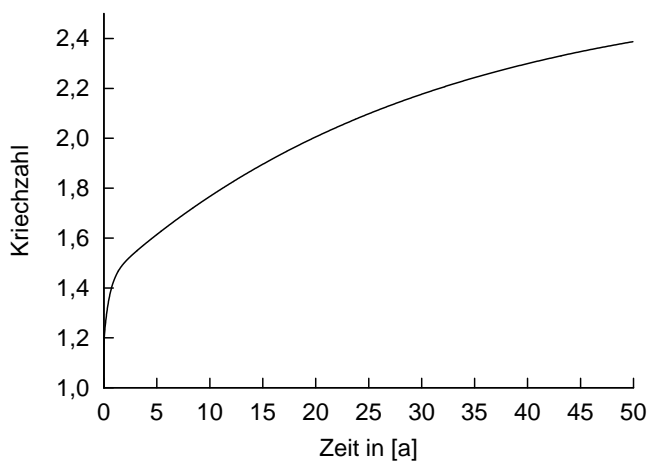
Die computergestützte Berechnung ergibt auch für diesen Fall einen Wert von  $v_{el,m} =$

0,33 cm, vgl. Abb. 5.3. Der Kriechfaktor in Abb. 5.4 berechnet sich analog zu Gl. (5.2) zu:

$$\frac{v_{ges}(t)}{v_{el}(t)} \quad (5.4)$$



**Abbildung 5.3:** Horizontale Durchbiegung in Feldmitte des Biegeträgers



**Abbildung 5.4:** Kriechzahl infolge horizontaler Kriechverformung

### 5.1.3 Beispiel 2: Kriechverformung des Biegeträgers infolge konstanter Torsionseinwirkung $m_x$

Die Berechnung der Kriechverdrehung erfolgt unter konstanten Feuchtebedingungen, so dass die Holzfeuchte konstant 12% beträgt. Auf einen ideal-geraden, an den Enden gabelgelagerten Einfeldträger mit den Abmessungen

$b$	= 16	cm	Breite des Querschnitts
$h$	= 112	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	= 9,14	m	Länge
$G_d$	= 46,2	kN/cm <sup>2</sup>	(Bezugswert)

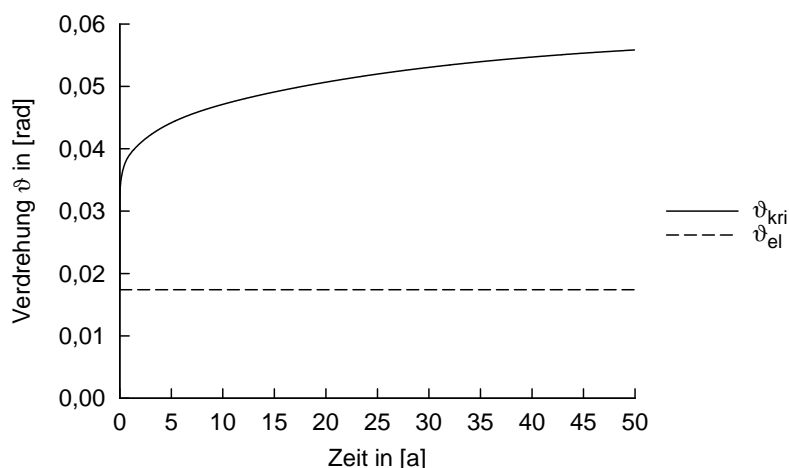
wird eine konstante Torsionsbeanspruchung  $m_x = 0.000987$  kNcm/cm aufgebracht, so dass sich das Biegetorsionsproblem II. Ordnung auf die Differentialgleichung eines torsiionsbeanspruchten Balkens reduziert.

$$G \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}^{II} - E \cdot I_\omega \cdot \vartheta_{el}^{IV} = m_x \quad (5.5)$$

Damit tritt ausschließlich eine Verdrehung  $\vartheta_{el}$  auf, die über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren konstant ist, vgl. Abb. 5.5. Mit der von Friemann in [55] angegebenen Anfangswerte-Lösung lässt sich unter Verwendung der Randbedingungen (Anfangswerte) die Verdrehung berechnen zu:

$$\begin{aligned} \vartheta_{el,m} &= \vartheta^I(0) \cdot \frac{l}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T}{2} + \frac{M_x(0) \cdot l}{G \cdot I_T} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T}{2} \right) \\ &+ \frac{m_x(0) \cdot l^2}{G \cdot I_T} \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_T^2} \cdot \left( \cosh \frac{\varepsilon_T}{2} - 1 \right) - \frac{x^2}{2 \cdot l^2} \right] = \\ &= 0,155 \text{ rad} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Um die Rechengenauigkeit der computergestützten Berechnung in Abhängigkeit der verwendeten Stützstellen werden zunächst 36 Stützstellen verwendet. Die computergestützte Berechnung ergibt einen Wert für  $\vartheta_{el,m} = 0,0174$  rad für die elastische Verdrehung zur Zeit  $t=0$ . Bereits durch Verdoppelung der verwendeten Stützstellen konvergieren die Ergebnisse aus computergestützter Berechnung und Anfangswert-Lösung. Der zeitliche

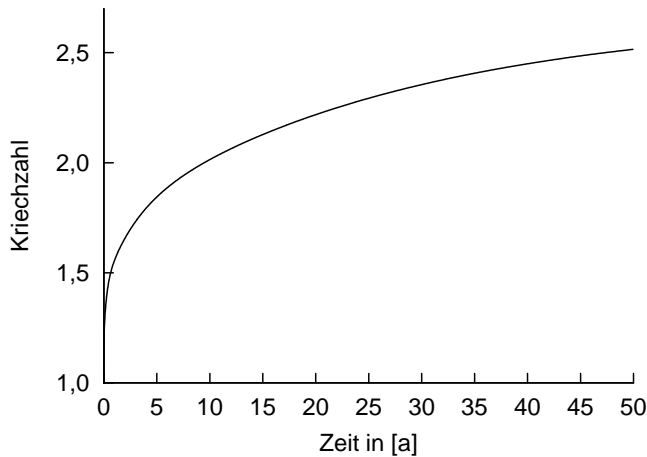


**Abbildung 5.5:** Verdrehung des Querschnitts um die Längsachse

Verlauf der Kriechverdrehung in Abb. 5.5 wurde, wie zuvor beschrieben, dem Berechnungsprogramm *kriHo* hinzugefügt, und bildet die von Benning in [38] angegebene Re-

gressionskurve ab. Der Kriechfaktor in Abb. 5.6 berechnet sich analog zu Gl. (5.2) zu:

$$\frac{\vartheta_{ges}(t)}{\vartheta_{el}(t)} \quad (5.7)$$



**Abbildung 5.6:** Kriechzahl infolge Kriechverdrehung des Querschnitts um die Längsachse

## 5.2 Zusammenfassung der Schnittstellenverifizierung

Durch die Reduzierung des gekoppelten Differentialgleichungssystems auf Problemstellungen, die entkoppelt betrachtet und analytischen Lösungen zugänglich sind, konnte anhand von Beispielen gezeigt werden, dass die Schnittstelle zwischen *constantialigni* und *kriHo* fehlerfrei arbeitet und die Dehnungen, Verdrehung und deren jeweils zugehörige zeitliche Änderung zwischen den beiden Programmmodulen fehlerfrei ausgetauscht werden. Nachdem die Berechnungsprogramme *constantialigni* und *kriHo* zuvor jedes für sich verifiziert worden ist, ist mit der Verifizierung der Schnittstelle die Grundlage für die numerischen Berechnungen und die Parameterstudie für das Langzeitverhalten geschaffen.



## 6 Eingangsgroßen und Voruntersuchungen

### 6.1 Schubfestigkeit von Brettschichtholz

#### 6.1.1 Übersicht

Beim anisotropen Werkstoff Holz muss zwischen der Schubfestigkeit unter Torsionsbeanspruchung und Schubbeanspruchung unter Querkraftbeanspruchung unterschieden werden. Der Nachweis lautet nach DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3]

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}} \right) + \left( \frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (6.1)$$

#### 6.1.2 Schubfestigkeit bei Torsionsbeanspruchung

Von Möhler und Hemmer [53] wurden umfangreiche Versuchsreihen an Vollholz- und Brettschichtholzstäben unter Torsionsbeanspruchung durchgeführt. Hierin wird vorgeschlagen, für die praktische Berechnung der Schubspannung infolge Torsion am anisotropen Werkstoff Holz die isotrope Betrachtungsweise zugrunde zu legen. Ausgehend von der isotropen Betrachtungsweise berechnet sich die Schubspannung infolge Torsion für den Rechteckquerschnitt mit:

$$\tau_{tor} = \frac{3 \cdot \eta_2 \cdot M_x}{h \cdot b^2} \quad (6.2)$$

Dabei ist:

- $\eta_2$  Beiwert zur Berechnung des Torsionswiderstandsmoments;
- $b$  Breite des Querschnitts;
- $h$  Höhe des Querschnitts;

mit  $\eta_2$ :

h/b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
$\eta_2$	1,609	1,356	1,247	1,183	1,144	1,117	1,099	1,086	1,075	1,067	1,055

Mit Hilfe dieser Annahmen wurde in Torsionsversuchen an Proben aus Brettschichtholz der Güteklasse I/II mit zunehmendem  $h/b$ -Verhältnis eine Zunahme der Torsionsmoduln  $G_T$  und der Torsionsfestigkeiten festgestellt. Aus der Auswertung der Torsionsversuche in [53] ergab sich der 5%-Quantilwert für die charakteristische Torsionsfestigkeit für den

quadratischen Querschnitt von Brettschichtholzstäben der Güteklassen I/II zu:

$$\tau_T = 3,48 \text{ N/mm}^2$$

Zur Erfassung des Formeinflusses wird in [53] vorgeschlagen, bei Brettschichtholz mit einem Seitenverhältnis  $h/b \geq 4$  eine Erhöhung der Torsionsfestigkeit bei Brettschichtholz um den Faktor 1,2 vorzunehmen, so dass die Schubspannung infolge Torsion formuliert werden kann:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{1,2 \cdot f_{v,d}} \right) \leq 1 \quad (6.3)$$

In DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] wird für den Formeinfluss der Beiwert  $k_{shape}$  eingeführt und der Nachweis angegeben mit:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}} \right) \leq 1 \quad (6.4)$$

Für den Rechteckquerschnitt gilt:

$$k_{shape} = \min \begin{cases} 1 + 0,15 \cdot \frac{h}{b} \\ 2,0 \end{cases} \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

Die nach [2] anzusetzenden Werte für  $k_{shape}$  können mit den Untersuchungen in [53] nicht gerechtfertigt werden, so dass in DIN EN 1995-1-1/A2:2014-07 [56] eine Korrektur für den Rechteckquerschnitt vorgenommen wird.

$$k_{shape} = \min \begin{cases} 1 + 0,05 \cdot \frac{h}{b} \\ 1,3 \end{cases} \quad (6.7)$$

Welche Auswirkungen sich aus dem in der Norm festgelegten Formeinfluss für den Schubnachweis ergeben, soll nachfolgend am Beispiel eines Einfeldträgers gezeigt werden.

### 6.1.3 Schubfestigkeit bei Querkraftbeanspruchung

Schickhofer [57] führte zur Bestimmung der Schubfestigkeit Drei-Punkt-Biegeversuche an I-Querschnitten durch. Insgesamt wurden 64 Versuche an Trägern mit I-Querschnitt mit einer Steghöhe von 352 mm und einer freien Trägerlänge von 3040 mm durchgeführt. Zudem wurden 6 Versuche an Trägern mit I-Querschnitt im Fünf-Punkt-Biegeversuch mit einer Steghöhe von 192 mm und einer freien Trägerlänge von  $2 \times 1565$  mm durchgeführt. Der in EN 1194:1999 [58] angegebene Zusammenhang

$$f_{v,g,k} = 0,32 \cdot f_{t,0,1,k}^{0,8} \quad (6.8)$$

konnte in [57] nicht bestätigt werden, dagegen kann aus den Versuchen eine charakteristische Schubfestigkeit

$$f_{v,g,k} = 3,5 \text{ N/mm}^2 \quad (6.9)$$

für alle Festigkeitsklassen bestimmt werden, die bereits in DIN 1052:2004-08 [31] enthalten war und so auch in der aktuell gültigen DIN EN 14080:2013-09 [59] enthalten ist.

Glos und Denzler [60] nahmen Versuche zur Bestimmung der Schubfestigkeit von Vollholz an 272 Prüfkörpern vor. Die Versuche wurden als Biegeversuche nach EN 408:2003-08 [61] durchgeführt. Diese Versuche zeigten, dass die Schubfestigkeit nur in sehr geringem Maße von der Rohdichte des Holzes abhängt. Genauso konnte für höhere Festigkeitsklassen keine höhere Schubfestigkeit festgestellt werden, so dass ein Zusammenhang von Schubfestigkeit und Biegezugfestigkeit, wie in [58] angenommen, nicht bestätigt werden konnte. Ebenso konnte die der EN 1194:1999 [58] zugrunde liegende Annahme einer höheren Schubfestigkeit mit abnehmender Ästigkeit in höheren Festigkeitsklassen nicht festgestellt werden. Aufgrund dessen wurde von Brüninghoff und Klapp in [62] zur Bestimmung der Schubfestigkeit von Brettschichtholz keine Unterscheidung der Festigkeitsklassen vorgenommen. Die in den Versuchen von [60] ermittelten Schubfestigkeiten zeigen in [62] eine gute Übereinstimmung mit einer Normalverteilung. In [62] wurde das verwendete Rechenmodell an [60] und [57] kalibriert und der Grundwert der charakteristischen Schubfestigkeit von Brettschichtholz zu

$$f_{v,k,0} = 2,89 \text{ N/mm}^2 \quad (6.10)$$

angegeben. Hierbei handelt es sich um einen Grundwert, der auf einen Referenzträger mit einer Höhe  $h_0 = 600 \text{ mm}$  und der Länge  $l_0 = 6000 \text{ mm}$  bezogen ist. Die Schubfestigkeit bestimmt sich nach [62] zu:

$$f_{v,k} = k_L \cdot k_H \cdot \left( \frac{h_0 \cdot l_0}{h \cdot l} \right)^{0,09} \cdot f_{v,k,0} \quad (6.11)$$

Die Beiwerte  $k_L$  und  $k_H$  sind Völligkeitsbeiwerte. Für eine konstante Querkraft über die Trägerlänge wird  $k_L = 0,95$  angegeben, für eine konstante Schubspannung über den Querschnitt beträgt  $k_H = 0,9$ . Im Sinne einer praktikablen Anwendbarkeit wird im Folgenden auf der sicheren Seite liegend  $k_L$  und  $k_H$  in den Grundwert der Schubfestigkeit eingerechnet, der dann für alle Festigkeitsklassen

$$f_{v,k,0} = 2,5 \text{ N/mm}^2 \quad (6.12)$$

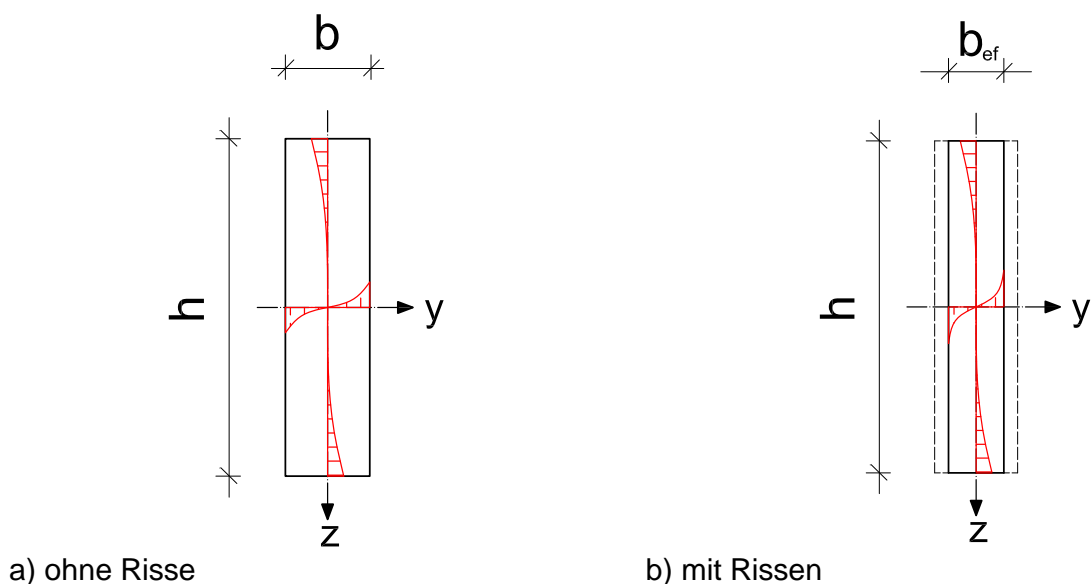
beträgt. Gl. (6.11) reduziert sich auf:

$$f_{v,k} = \left( \frac{h_0 \cdot l_0}{h \cdot l} \right)^{0,09} \cdot f_{v,k,0} \quad (6.13)$$

### 6.1.4 Materialbedingte Schwindrisse

Materialbedingt können Schwindrisse, die bei Brettschichtholz zumeist klein sind, nicht ausgeschlossen werden und sind in der Regel auf geringe Schwankungen der Holzfeuchte zurückzuführen, vgl. Radovic in [63]. Treten größere Klimaschwankungen auf, ist dementsprechend mit größeren Risstiefen zu rechnen, dabei darf die Risstiefe nach [63] ein Sechstel der Querschnittsbreite von jeder Seite betragen. Die rechnerisch ansetzbare charakteristische Schubtragfähigkeit  $f_{v,k} = 2,5$  [63] bereits die o. g. Risstiefen, so dass eine weitere Abminderung der Schubtragfähigkeit nicht vorgenommen werden musste.

Aufgrund der höheren charakteristischen Schubfestigkeit  $f_{v,k} = 3,5 \text{ N/mm}^2$  nach DIN EN 14080:2013-09 [59] in Verbindung mit DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3], muss dort mithilfe des Abminderungsfaktors  $k_{cr}$  eine wirksame Breite des Bauteils bestimmt werden, um eine Schwächung des Querschnitts durch auftretende Schwindrisse zu berücksichtigen. Gemäß [3] ist die wirksame Breite jedoch nur zur Bestimmung der Schubspannung infolge Querkraft anzuwenden, zur Bestimmung der Torsionsspannung braucht die verringerte Breite nicht berücksichtigt werden. Mechanisch lässt sich diese Vorgehensweise mithilfe der Schubspannungsverteilung im Rechteckquerschnitt erläutern. Der parabelförmige



**Abbildung 6.1:** Schubspannungsverlauf infolge Torsion am Rechteckquerschnitt

Schubspannungsverlauf infolge Querkraft weist über den gesamten Querschnitt hinweg eine hohe Volligkeit auf. Das Maximum tritt in der Schwerachse des Querschnitts auf. Da die Schubspannungen gleichmäßig über die Querschnittsbreite verteilt sind, können Spannungsspitzen infolge von Rissen nur schlecht umgelagert und ausgeglichen werden. Die maximale Torsionsspannung tritt bei Rechteckquerschnitten ( $h > b$ ) in der Mitte der längeren Seite auf und damit in der äußersten Faser der kürzeren Querschnittsseite, vgl. [64].

Durch das Vorhandensein von Schwindrissen muss eine Umlagerung der Torsionsspannung im Querschnitt stattfinden, so dass an der Stelle des Schwindrisses mit einer Spannungsspitze zu rechnen ist. Da die Torsionsspannung anders als die Schubspannung

infolge Querkraft nicht gleichmäßig über die Breite des Querschnitts verteilt ist und zum Schwerpunkt des Querschnitts hin vergleichsweise schnell abnimmt, vgl. Abb. 6.1, treten im Bereich von Rissen nur punktuelle Spannungsspitzen auf, so dass der Ansatz der von Möhler und Hemmer [53] in Torsionsversuchen bestimmten Torsionsfestigkeit  $f_{v,k} = 3,5 \text{ N/mm}^2$  gerechtfertigt erscheint.

### 6.1.5 Zusammenfassung

Für die nachfolgende Parameterstudie zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung ist die Schubfestigkeit die entscheidende Eingangsgröße. Die vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, dass hierzu bereits umfangreiche Forschungsarbeiten vorhanden sind und der Stand der Forschung weitgehend in die Normung bereits eingegangen ist. Aufgrund dessen wird für die nachfolgenden Untersuchungen die Schubfestigkeit unter Torsionsbeanspruchung zu  $f_{v,k} = 3,5 \text{ N/mm}^2$  und die Schubfestigkeit unter Querkraftbeanspruchung zu  $f_{v,k} = 2,5 \text{ N/mm}^2$  angesetzt. Im Ansatz der Schubfestigkeit unter Querkraftbeanspruchung ist eine Risstiefe von je einem Sechstel der Querschnittsbreite von jeder Seite enthalten, vgl. [63], so dass der Abminderungsfaktor  $k_{cr}$  den Wert 1,0 annimmt und nicht weiter berücksichtigt werden muss. Die Schubfestigkeit unter Torsionsbeanspruchung wird in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses  $h/b$  durch den von Möhler und Hemmer [53] eingeführten Formbeiwert  $k_{shape}$  nach DIN EN 1995-1-1/A2:2014-07 [56] zu max. 1,3 angenommen.

Der Schubspannungsnachweis wird nach Gl. (6.14) geführt und die Schubfestigkeiten und Beiwerte wie folgt verwendet:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d,t}} \right) + \left( \frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d,q}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d,q}} \right)^2 \leq 1 \quad (6.14)$$

mit:

$$k_{shape} = \min \begin{cases} 1 + 0,15 \cdot \frac{h}{b} \\ 1,3 \end{cases}$$

$$f_{v,k,q} = \left( \frac{h_0 \cdot l_0}{h \cdot l} \right)^{0,09} \cdot f_{v,k,0}$$

$$f_{tor,k} = 3,5 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{v,k,0} = 2,5 \text{ N/mm}^2$$

## 6.2 Schubmodul von Brettschichtholz - Normensituation und Stand der Technik

Im Rahmen der von Möhler und Hemmer [53] durchgeführten Torsionsversuche wurde neben der Schubfestigkeit auch der Schubmodul bestimmt. Dabei war eine Zunahme der Torsionsmoduln  $G_T$  mit zunehmendem  $h/b$ -Verhältnis bei Brettschichtholz zu beobachten. Neben den Kurzzeitversuchen wurden Dauerstandsversuche durchgeführt, in denen eine Abnahme des Torsionsmoduls in Abhängigkeit von der Dauer der Lasteinwirkung festzustellen war. Die Abnahme des Torsionsmoduls erfolgte dabei unabhängig von der Höhe der Lasteinwirkung. Auf der sicheren Seite liegend wird der Rechenwert für Brettschichtholz für  $h/b > 4$  mit  $G_T = 500 \text{ N/mm}^2$  angegeben. Zudem zeigten die Versuche eine Abhängigkeit des Torsionsmoduls von der Rohdichte, vgl. Möhler [54]. EN 1194:1999 [58] gibt den Torsionsmodul für Brettschichtholz aus Nadelholz über das Verhältnis

$$\frac{E_{0,g,mean}}{G_{g,mean}} = 16 \quad (6.15)$$

an. Dieser Definition liegt die Annahme zugrunde, dass die Rohdichte und die Ästigkeit die gleichen Auswirkungen auf E- und Torsionsmodul haben, vgl. Görlacher und Kürth [65]. Mithilfe dynamischer Versuche an beinahe 1200 15 cm langen Brettabschnitten zeigten Görlacher und Kürth [65], dass das Verhältnis  $E/G$  nicht als konstant angesehen werden kann. Statt des in Gl. (6.15) angegebenen Verhältnisses wird in [65] die Regressionsgleichung

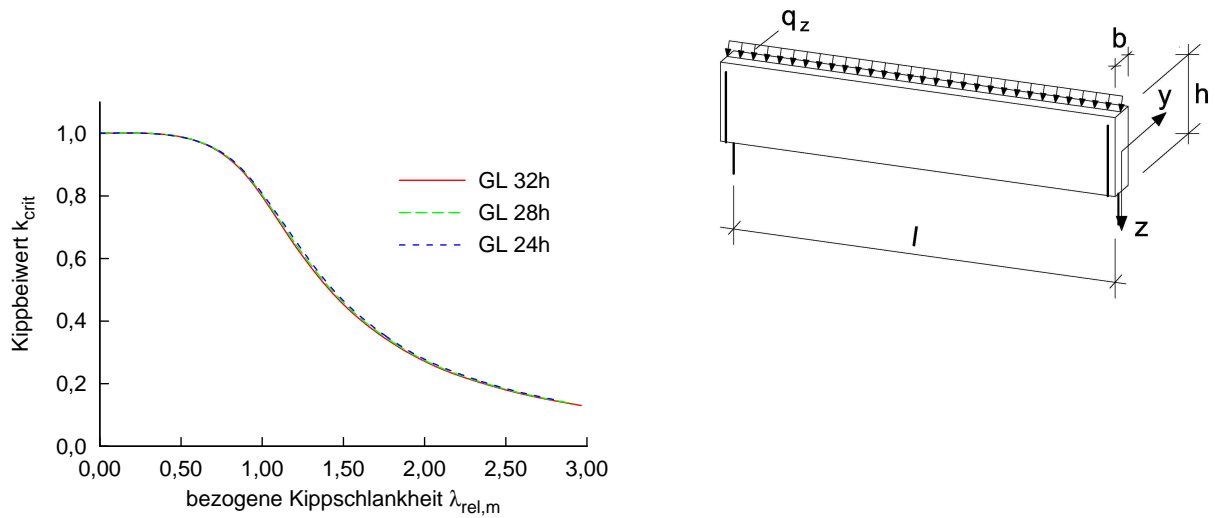
$$\frac{E_0}{G} = 0,00112 \cdot E_0 + 5,43 \quad (6.16)$$

angegeben, die sich aus der Auswertung der o. g. Versuche ergibt. In [66] wurden neben Biegeversuchen nach DIN EN 408 [61] auch Torsionsversuche zur Bestimmung des Schubmoduls durchgeführt, die für die Bestimmung des Schubmoduls gerade für Stabilitätsbetrachtungen als effizient und zuverlässig eingestuft werden. Basierend auf den Versuchsergebnissen, wird in [66] vorgeschlagen, für alle Festigkeitsklassen des kombinierten und homogenen Brettschichtholzes einen konstanten Wert für den Schubmodul von  $G_{g,mean} = 650 \text{ N/mm}^2$  festzusetzen. Für die nachfolgende Parameterstudie wird deshalb zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung ein konstanter Schubmodul  $G_{g,mean} = 650 \text{ N/mm}^2$  für die weiteren Berechnungen angesetzt.

## 6.3 Auswirkung unterschiedlicher Festigkeitsklassen auf das Kippverhalten schlanker BSH-Träger

Neben den unterschiedlichen Trägerquerschnittsabmessungen und Arten der Lasteinwirkung sind die Materialeigenschaften des zu untersuchenden Trägers für den Stabilitätsfall Kippen relevant. Für die Bestimmung der Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung müssen die zugehörigen Steifigkeiten, Elastizitäts- und Schubmodul des verwendeten Werkstoffs bekannt sein. Zunächst werden für die nachfolgenden Untersuchun-

gen die Steifigkeitskennwerte nach DIN 1052:2008-12 [24] angesetzt, die bis zur endgültigen bauaufsichtlichen Einführung von DIN EN 14080:2013-09 [59] für die Bemessung zugrunde gelegt werden musste.



**Abbildung 6.2:** Vergleich der Kippbeiwerte  $k_{crit}$  eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) ausgeführt in unterschiedlichen Festigkeitsklassen nach DIN 1052:2008-12 [24] mit Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$

Der Längsspannungsnachweis für den Stabilitätsfall Kippen wird anschließend nach [2] und [3] geführt, wobei die Festigkeitskennwerte nach DIN 1052:2008-12 [24] verwendet werden. Abb. 6.2 veranschaulicht den Kippbeiwert  $k_{crit}$  in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$ . Die bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  für einen Rechteckquerschnitt wird nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] und DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] analog zu DIN 1052:2008-12 [24] bestimmt zu

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \quad (6.17)$$

mit

$$\sigma_{m,crit} = \frac{0,78 \cdot b^2}{h \cdot l_{ef}} \cdot E_{0,05} \quad (6.18)$$

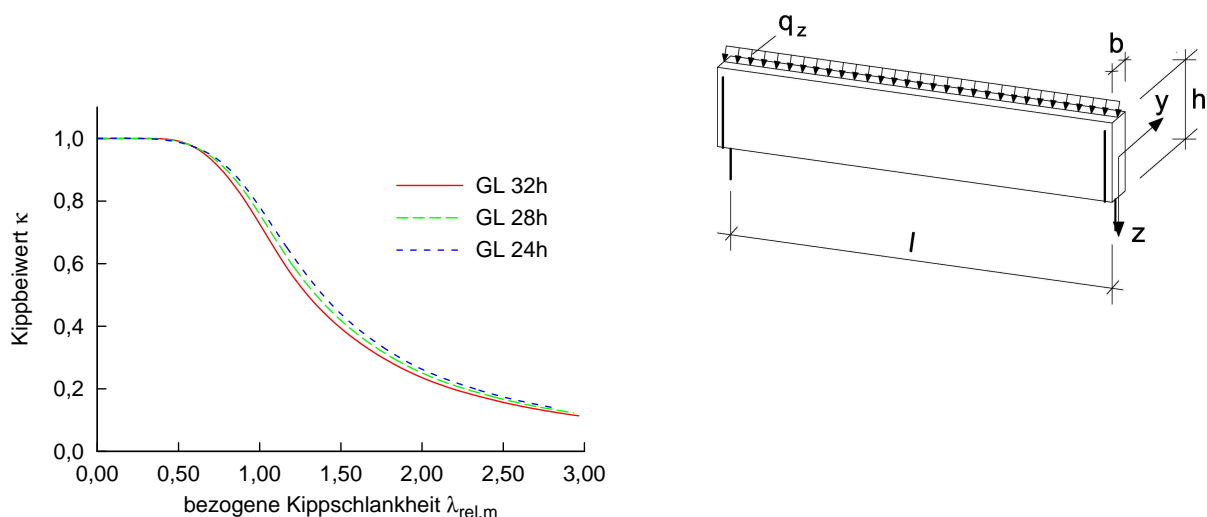
womit die bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  sowohl von der Biegefestigkeit  $f_{m,k}$  als auch vom 5%-Quantilwert des Elastizitätsmoduls abhängig ist. Mit Hilfe von Abb. 6.2 kann gezeigt werden, dass der Kippbeiwert  $k_{crit}$ , über der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  aufgetragen, unabhängig von der Festigkeitsklasse ist, wenn die Festigkeits- und Steifigkeitskennwerte nach [24] eingesetzt werden.

Die ersten numerischen Berechnungen wurden auf E DIN EN 14080:2011-01 [67] basierend durchgeführt, bevor DIN EN 14080:2013-09 [59] vorlag und bauaufsichtlich eingeführt worden ist. Im Folgenden wird auf E DIN EN 14080:2011-01 [67] Bezug genom-

men, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse der numerischen Berechnungen sicherzustellen. E DIN EN 14080:2011-01 [67] und die zwischenzeitlich bauaufsichtlich eingeführte DIN EN 14080:2013-09 [59] unterscheiden sich hinsichtlich der Elastizitätsmoduli durch geringfügige Anpassungen in einigen Festigkeitsklassen. E DIN EN 14080:2011-01 [67] enthält geänderte Steifigkeitskennwerte für die Berechnung im Vergleich zu DIN 1052:2008-12 [24]. Die Elastizitätsmoduli in den einzelnen Festigkeitsklassen wurden nur geringfügig reduziert. War in [24] der Schubmodul abhängig von der Festigkeitsklasse, so ist in E DIN EN 14080 [67] nur ein Wert für alle Festigkeitsklassen angegeben. Der bisher angenommene und in [24] zugrunde gelegte Zusammenhang

$$G = \frac{E}{16} \quad (6.19)$$

konnte durch Forschungsarbeiten, vgl. u. a. [65], [66] nicht bestätigt werden. Da die bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  in ihrer vereinfachten Formulierung für den Rechteckquerschnitt jedoch nur von der Biegefestigkeit  $f_{m,k}$  und dem Elastizitätsmodul  $E_{0,05}$  abhängt, zeigt der Kippbeiwert  $k_{crit}$  eine Abhängigkeit von der jeweiligen Festigkeitsklasse.



**Abbildung 6.3:** Vergleich eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) ausgeführt in unterschiedlichen Festigkeitsklassen nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] mit Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{z,OG}$  und Bestimmung der kritischen Biegespannung nach Gl. (6.18)

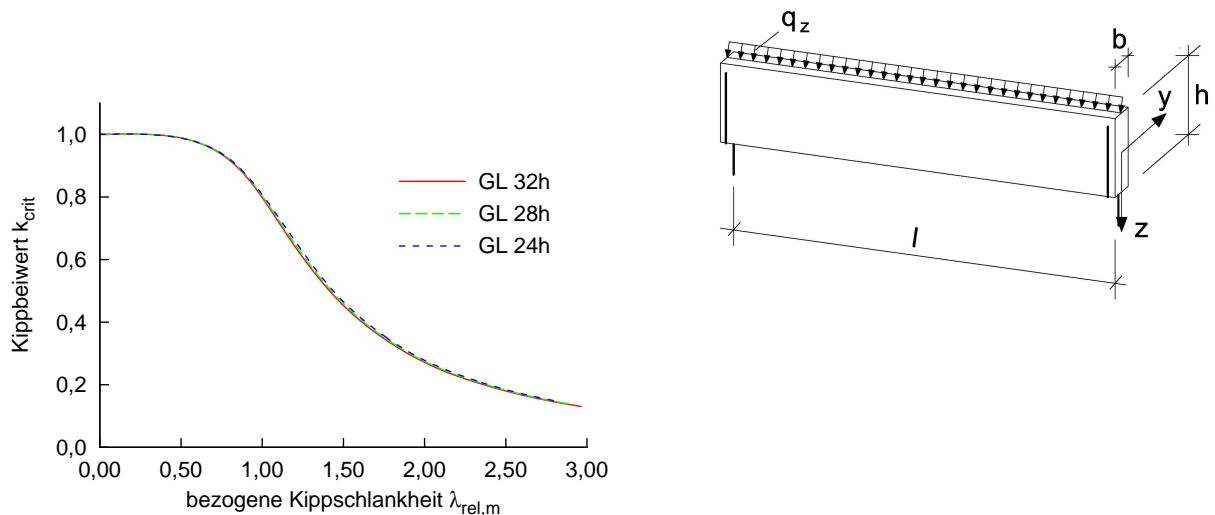
Wird die kritische Biegespannung nach der allgemeinen Berechnungsform

$$\sigma_{m,crit} = \frac{\pi \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot I_z \cdot G_{0,05} \cdot I_{tor}}}{l_{ef} \cdot W_y} \quad (6.20)$$

bestimmt, ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Kippbeiwerte  $k_{crit}$  in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  nach Gl. (6.17) über die untersuchten Festigkeitsklassen hinweg. Ein Vergleich der in Abb. 6.3 und Abb. 6.4 dargestellten Kurven zeigt, dass die mit Gl. (6.18) berechneten Kippbeiwerte  $k_{crit}$  durchschnittlich etwa 10% unter den nach Gl. (6.20) liegen, demzufolge wäre aufgrund der veränderten Steifigkeitskennwerte eine Überprüfung von Gl. (6.18) anzuraten, da die mit dieser Gleichung ermittelten Kippbeiwerte  $k_{crit}$  für die untersuchten Festigkeitsklassen zu einer ungünstigeren



Bemessung führen. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass in weiteren Untersuchungen nur eine Festigkeitsklasse stellvertretend zu untersuchen ist, da sich die Kippbeiwerte  $k_{crit}$  in Abb. 6.4 für unterschiedliche Festigkeitsklassen bei Bestimmung der kritischen Biegespannung nach Gl. (6.20) in nur vernachlässigbar geringem Maße unterscheiden.

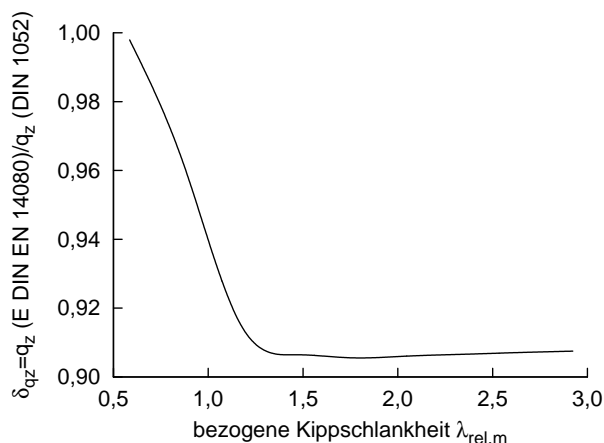


**Abbildung 6.4:** Vergleich eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) ausgeführt in unterschiedlichen Festigkeitsklassen nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] mit Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$  und Bestimmung der kritischen Biegespannung nach Gl. (6.20)

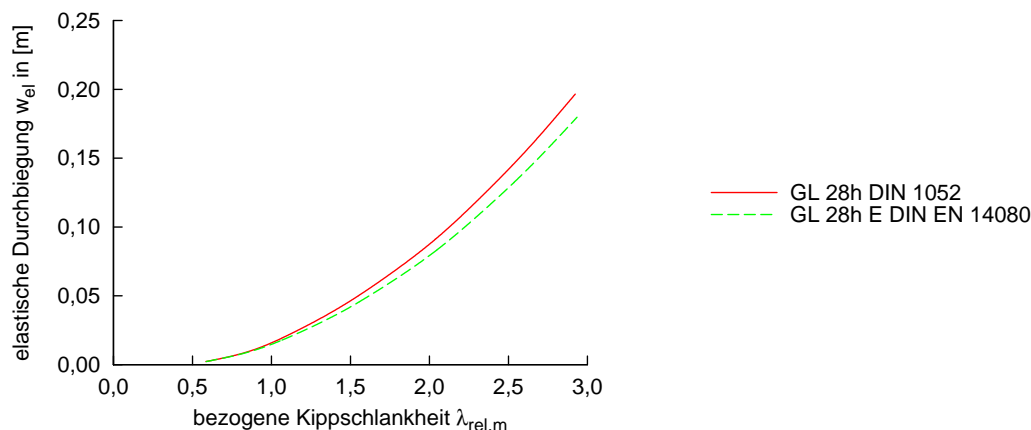
Infolge des nun für alle Festigkeitsklassen einheitlich geltenden Schubmoduls verringert sich bei homogenem Brettschichtholz die Schubsteifigkeit im Vergleich zu DIN 1052:2008-12 [24] in den unterschiedlichen Festigkeitsklassen unterschiedlich stark. Für die Berechnung eines Trägers nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung kann bei 100%-iger Längsspannungsausnutzung infolge der verringerten Steifigkeit nur eine verringerte planmäßige Lasteinwirkung aufgebracht werden. Für die Festigkeitsklasse GL 28h ist der Lastabminderungsfaktor

$$\delta_{qz} = \frac{q_z(EDINEN14080)}{q_z(DIN1052)} \quad (6.21)$$

im Vergleich zu DIN 1052:2008-12 in Abb. 6.5 dargestellt. Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,6$  ist quasi keine Verringerung der planmäßigen Last festzustellen. Bis zu einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} < 1,5$  findet anschließend eine vergleichsweise starke Verringerung der planmäßigen Last statt. Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \geq 1,5$  beträgt die Verringerung nahezu konstant 10%. Bei kleinen bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,8$  ist der Einfluss der Biegetorsionstheorie II. Ordnung auf die Verformungen und Schnittgrößen vergleichsweise gering, die geringfügige Änderung des Elastizitätsmoduls und damit der Biegesteifigkeit wirkt sich praktisch nicht wahrnehmbar auf die vertikale Durchbiegung aus, vgl. Abb. 6.6. Mit zunehmender bezogener Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  nimmt der Einfluss der Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu und infolge der verringerten planmäßig aufnehmbaren Last liegen die vertikalen Durchbiegungen  $w_{el}$ , berechnet mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01, unter denen, die mit Steifig-

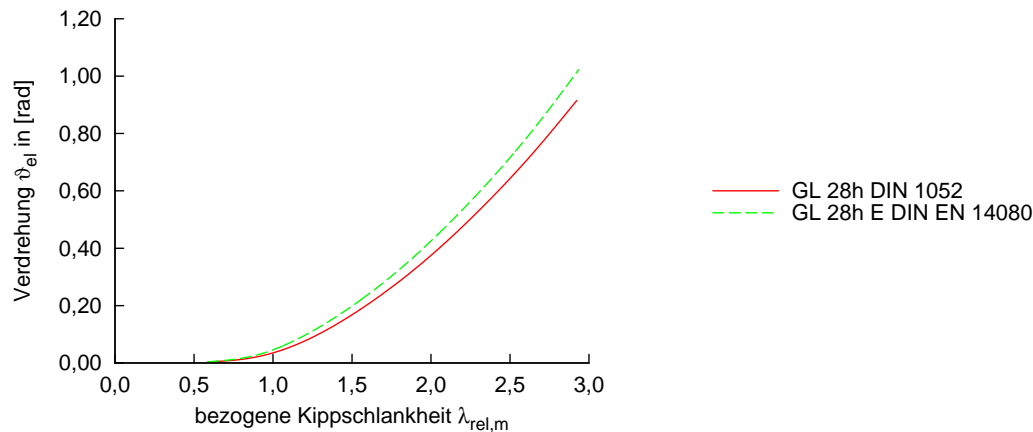


**Abbildung 6.5:** Verringerung der planmäßigen Last auf einen kippgefährdeten BSH-Träger ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) bei Berechnung der Schnittgrößen nach Th. II. O. mit Festigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] verglichen mit DIN 1052:2008-12 [24]



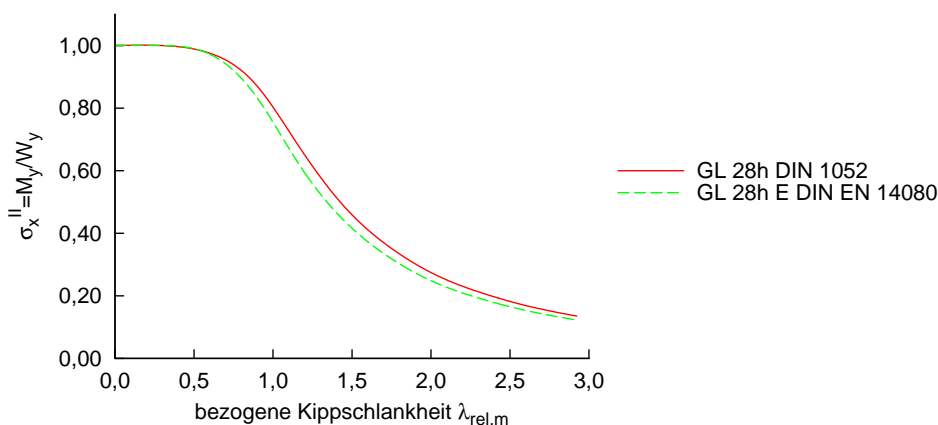
**Abbildung 6.6:** Vertikale Durchbiegung  $w_{el}$  eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) bei Berechnung nach Th. II. O. mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] verglichen mit DIN 1052:2008-12 [24]

keitskennwerten nach DIN 1052:2008-12 [24] berechnet wurden. Daraus folgend ergibt sich der in Abb. 6.8 dargestellte Längsspannungsverlauf infolge planmäßiger Lasteinwirkung. Da in beiden Fällen eine 100%-ige Längsspannungsausnutzung des gabelgelagerten Einfeldträgers in Feldmitte vorliegt, geht die Verringerung der planmäßigen Last auf die Verringerung der Schubsteifigkeit in E DIN EN 14080:2011-01 [67] im Vergleich zu DIN 1052:2008-12 [24] zurück. Mit der Verringerung der Schubsteifigkeit ist eine Zunahme der Verdrehung  $\vartheta_{el}$  verbunden, wie in Abb. 6.7 dargestellt, die über der Verdrehung  $\vartheta_{el}$ , berechnet mit Steifigkeitskennwerten nach DIN 1052:2008-12 [24], liegt. Durch die Kopplung der zweiten und dritten Differentialgleichung, vgl. Gl. (2.5) und Gl. (2.6), kann die Verdrehung  $\vartheta_{el}$  und die horizontale Verformung  $v_{el}$  nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. So nimmt die horizontale Verformung  $v_{el}$  infolge der Verdrehung  $\vartheta_{el}$ , berechnet mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67], im Vergleich zu DIN 1052:2008-12 [24] zu, mit der Folge, dass der Längsspannungsanteil  $\sigma_x^{II} = M_z^{II}/W_z$  in Abb. 6.9 gerade um das Maß zunimmt, um das der Längsspannungsanteil  $\sigma_x^{II} = M_y^{II}/W_y$



**Abbildung 6.7:** Verdrehung  $\vartheta_{el}$  eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) bei Berechnung nach Th. II. O. mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] verglichen mit DIN 1052:2008-12 [24]

in Abb. 6.8 abnimmt.



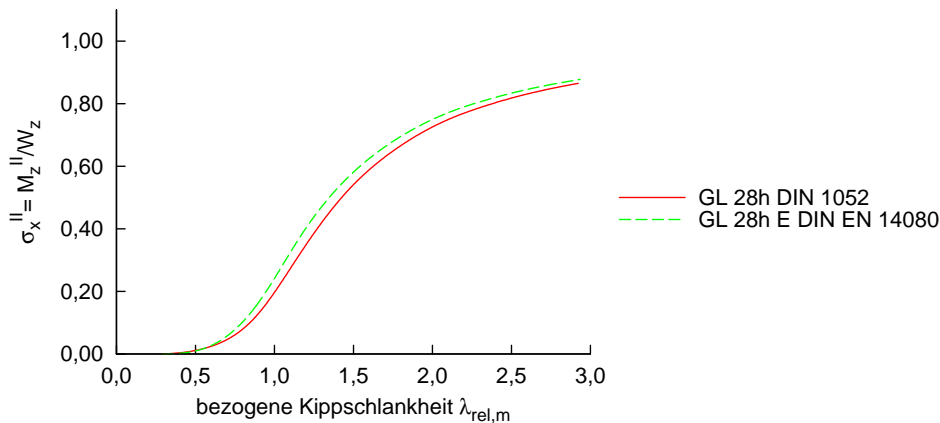
**Abbildung 6.8:** Längsspannungsanteil  $\sigma_x^{II} = M_y/W_y$  eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) bei Berechnung nach Th. II. O. mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] verglichen mit DIN 1052:2008-12 [24]

## 6.4 Vorkrümmungsansätze

Mit der Berechnung des kippgefährdeten Brett-schichtholzträgers nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung wird der statische Gleichgewichtszustand am verformten Träger gesucht. Für die eingeprägte, spannungslose Vorverformung  $e$  ist nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] mindestens

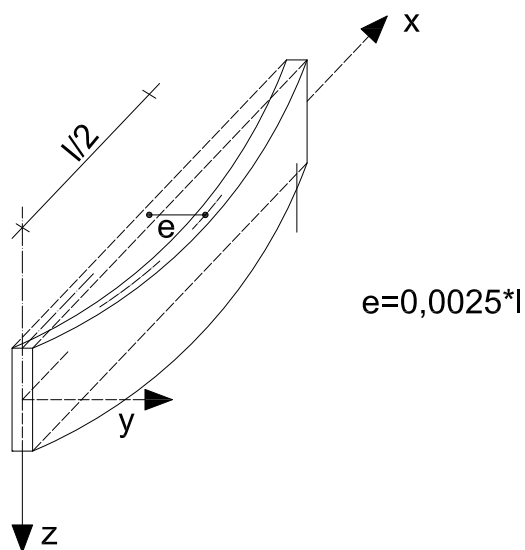
$$e = 0,0025 \cdot l \quad (6.22)$$

vorzusehen. In diesem Wert sind sowohl die geometrischen als auch die strukturellen Imperfektionen des Bauteils enthalten. Zu den strukturellen Imperfektionen werden Rohdichte, Ästigkeit, Druckholzanteil und Holzfeuchte gezählt. Eine Quantifizierung der einzelnen



**Abbildung 6.9:** Längsspannungsanteil  $\sigma_x^{II} = M_z^{II} / W_z$  eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm} / 112 \text{ cm}$ ) bei Berechnung nach Th. II. O. mit Steifigkeitskennwerten nach E DIN EN 14080:2011-01 [67] verglichen mit DIN 1052:2008-12 [24]

Anteile wird für den in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] angegebenen Wert nicht vorgenommen. Ferner sind keine genaueren Angaben über die Maßhaltigkeit bei der Produktion von Brettschichtholzträgern in der Literatur vorhanden, lediglich von Winter et al. in [68] wurden an einigen wenigen Brettschichtholzträgern in Hallentragwerken Messungen der horizontalen Verformung vorgenommen, die nachfolgend noch genauer betrachtet werden. Die Vorkrümmung nach [2] ist sinuswellenförmig zwischen den Knotenpunkten anzuset-



**Abbildung 6.10:** Vorkrümmungsansatz am gabelgelagerten Einfeldträger nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2]

zen, vgl. Abb. 6.10. Für die praxisrelevanten Trägersysteme mit seitlichen Stützungen des Druckgurts zur Verkürzung der Kipplänge ergibt sich aus [2] ein Vorkrümmungsverlauf gemäß Abb. 6.11a).

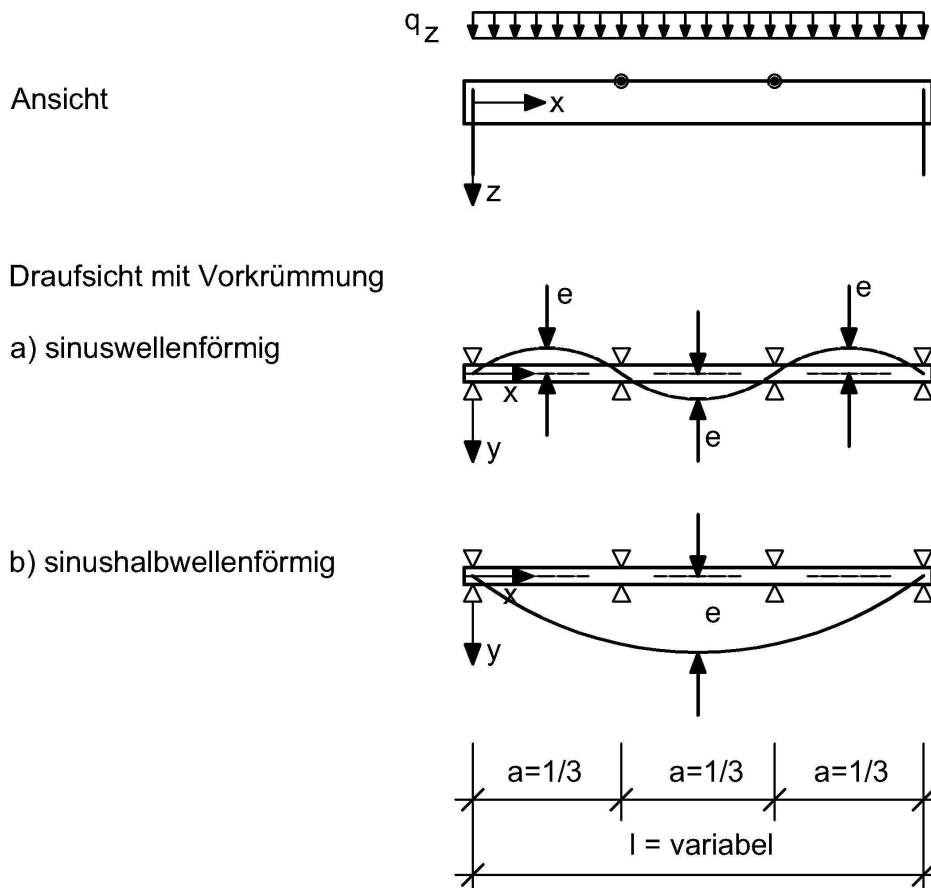
Generell sollte die Vorkrümmung so gewählt sein, dass sich infolge der spannungslosen Vorverformung bei Bestimmung der Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung das ungünstigste Spannungsverhalten im Träger einstellt. In der Regel führt der sinuswellenförmige Vorkrümmungsansatz gemäß Abb. 6.11a) zu der ungünstigsten Längsspan-

nungsverteilung im Querschnitt und ist damit maßgebend für den Nachweis der Kippstabilität. Für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung im Querschnitt an den Endauflagern muss ein zweiter Vorkrümmungsansatz genauer untersucht werden. Dieser Ansatz geht von einer parabel- oder sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung des Trägers über dessen gesamte Länge aus, wie in Abb. 6.11b) dargestellt, die bereits vor dem Einbau vorhanden ist und durch den Einbau von Horizontalverbänden lediglich reduziert werden kann. Die Reduzierung der parabel- oder sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung des Trägers über dessen gesamte Länge geschieht dabei durch das Ausrichten des Verbands. Um die Auswirkungen auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung in der Auflagergabel messbar zu machen, werden wie bereits im vorangegangenen Kapitel 6.3 Träger mit Querschnittsabmessungen  $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$  genauer untersucht. Alle Trägerkonfigurationen sind dabei so bemessen, dass der Längsspannungsnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung mit einer Ausnutzung von  $\eta = 1,0$  erbracht ist und die zugehörigen Schubspannung bestimmt wird. Für die ersten Modellrechnungen wird der Stich der sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung zunächst zu  $l/400$  festgelegt, um anschließend einen Vergleich der Schubspannungen mit sinus- und sinushalbwellenförmigem Vorkrümmungsverlauf vorzunehmen. Die Trägerkonfigurationen mit den in Abb. 6.11 dargestellten Querschnittsabmessungen  $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$  bei in Abhängigkeit von der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  berechneten Trägerlänge  $l$  und sinuswellenförmiger Vorkrümmung weisen in Abb. 6.12 und Abb. 6.13 mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  ein zunehmendes Torsionsmoment und daraus resultierend eine höhere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  an den gabelgelagerten Endauflagern des Trägers auf. Die Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,gesamt}$  setzt sich entsprechend Gl. (6.14) aus den Schubspannungsanteilen infolge Torsion und Querkraft zusammen, so dass Gl. (6.23) gilt:

$$\eta_{\tau,tor} + \eta_{\tau,y}^2 + \eta_{\tau,z}^2 = \eta_{\tau,gesamt} \leq 1 \quad (6.23)$$

In einem nächsten Schritt wird auf die gleichen Träger eine sinushalbwellenförmige Vorkrümmung aufgebracht.

Im Vergleich zu den Trägern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung muss die Last geringfügig erhöht werden, um eine vollständige Ausnutzung des Längsspannungsnachweises nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu erzielen. Die sinushalbwellenförmige Vorkrümmung wirkt sich ungünstiger auf das Torsionsmoment im Querschnitt vor dem Endauflager und damit auf den Anteil der Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  aus, wie aus Abb. 6.12 und Abb. 6.13 abgelesen werden kann. Die sinushalbwellenförmige Vorkrümmung ist deshalb für das Torsionsmoment im Querschnitt vor dem Endauflager maßgebend. Bei zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  ist eine Abnahme des Torsionsmoments im Querschnitt an der Auflagergabel und somit eine Abnahme der Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  zu beobachten. Bis zu einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} < 1,1$  (Abb. 6.12, Abb. 6.13) liegt die Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  an den Endauflagern bei Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung über der von Trägern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung. Die betragsmäßig größte Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  tritt bei Trägern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung und zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts an den seitlichen Stützungen im Feld auf, vgl. Abb. 6.12. Verfügt der Träger über drei seitliche Stützungen des Druckgurts, tritt die betragsmäßig größte Schubspannungsausnutzung



**Abbildung 6.11:** System des gabelgelagerten Einfeldträgers mit horizontaler Stützung des Obergurts in den Drittelpunkten unter konstanter Linienlast  $q_{zOG}$  am Obergurt und a) sinuswellenförmiger und b) sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

$\eta_{\tau,tor}$  an der Stützung in Feldmitte auf, vgl. Abb. 6.13. Die betragsmäßig größte Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  tritt bei den in Abb. 6.12 und Abb. 6.13 untersuchten Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung an den zum Endauflager hin nächstgelegenen seitlichen Stützungen des Druckgurts auf.

## 6.5 Vorkrümmungswerte aus Verformungsmessungen

Winter et al. haben in [68] an sieben ausgewählten Hallentragwerken eine Messung der horizontalen Verformung von Brettschichtholzträgern vorgenommen. Zwar ist der Umfang der untersuchten Stichproben nicht repräsentativ, doch ist interessant, dass an sechs der sieben untersuchten Hallentragwerke eine horizontale Verformung gemessen wurde, die näherungsweise einer Sinushalbwellenform entspricht. Aufgrund des Zeitpunkts der Messung im eingebauten Zustand, sind neben der Vorkrümmung und der Ausbiegung der Aussteifungskonstruktion auch elastische Verformungsanteile enthalten. Fünf der Tragwerke wurden kurz nach deren Fertigstellung vermessen, die beiden übrigen Tragwerke waren zum Zeitpunkt der Vermessung bereits länger fertiggestellt, vgl. [68]. Damit kommt aus der Kriechverformung ein weiterer Verformungsanteil hinzu, dessen Anteil für die nachfolgen-

de Parameterstudie eingegrenzt werden musste. Diese Eingrenzung erfolgte beispielhaft an einem ausgewählten Träger.

Untersuchungen zum Langzeitverhalten von kippgefährdeten Brettschichtholzträgern von Kuhlmann und Hofmann in [17] haben gezeigt, dass zur Bestimmung der Verformungen und Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung die Vorkrümmung und die Kriechverformungen in Abhängigkeit der Kippschlankheit nicht einfach addiert werden dürfen, um mit diesem Ansatz die Verformungen und Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu einem beliebigen Zeitpunkt nach Fertigstellung des Tragwerks zu bestimmen. Hierauf wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nachfolgend noch detailliert eingegangen. Entscheidend für die Bestimmung der horizontalen Kriechverformungen ist die freie Kipplänge zwischen den horizontalen Stützungen im Feld und der ständige Lastanteil an der Bemessungslast. Bei den in [68] untersuchten Tragkonstruktionen handelte es sich ausschließlich um Dachtragwerke, die aufgrund des Standorts der Gebäude der Schneelastzone 1a bzw. 2, vgl. [69] und [70], zugeordnet werden konnten. Unter Annahme eines herkömmlichen Dachaufbaus ohne extensive Begrünung konnte der ständige Lastanteil zu etwa 30% bis 40% der Bemessungslast abgeschätzt werden. In der Baupraxis wird eine bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  von 0,9 nur selten überschritten, da durch größere Kippschlankheiten die Wirtschaftlichkeit der Tragkonstruktion zunehmend verloren geht. Durch die baupraktische Begrenzung der Kippschlankheit war es möglich, die Kriechverformungen kippgefährdeter Träger mithilfe einer exemplarischen Simulation des Langzeitverhaltens auf der Grundlage von [17] näherungsweise zu quantifizieren. Gewählt wurde ein Träger mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts und nachfolgenden Abmessungen in Anlehnung an die in [68] vermessenen Träger.

$b$	=	16,00	cm	Breite des Querschnitts
$h$	=	112,00	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	=	14,29	m	Länge des Trägers
$v_0$	=	3,57	cm	Stich der sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung

In Abb. 6.17a) bis f) sind die Verformungs- und Verdrehungsverläufe über die Trägerlänge dargestellt. In den Abb. 6.14 bis Abb. 6.16 wird mithilfe isometrischer Darstellungen die horizontale Verformung und die Verdrehung des Trägers veranschaulicht. Zur besseren Verständlichkeit wird die vertikale Durchbiegung  $w$  nicht dargestellt, da diese ohnehin entkoppelt von der horizontalen Verformung  $v$  und der Verdrehung  $\vartheta$  ist, siehe Gl. (2.5) bis Gl. (2.6). Der elastische Anteil an der vertikalen Durchbiegung  $w_{el}$  (Abb. 6.17a)) bleibt über die Dauer von 50 Jahren erwartungsgemäß unverändert, während die Kriechverformung im selben Zeitraum zunimmt. Diese Verformung verursacht keine zusätzlichen Spannungen. In horizontaler Richtung weist der Träger zur Zeit  $t=0$  eine spannungslose Vorkrümmung auf, die sich sinushalbwellenförmig über die gesamte Trägerlänge erstreckt. Die Stützungen am Obergurt des Trägers sind gewöhnlich wesentlich steifer als der Träger in horizontaler Richtung, so dass die Stützungen des Obergurts hier als starr angenommen werden. Infolge der Erstbelastung zur Zeit  $t=0$  verformt und verdreht sich der Träger. Bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts ist eine horizontale Verformung  $v_{el}$  (Abb. 6.17b)) entgegen der Vorkrümmungsrichtung zu beobachten, die sich über den Zeitraum von 50 Jahren nur geringfügig verändert. Die horizontale Gesamtverformung bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts geht demzufolge zurück (Abb.

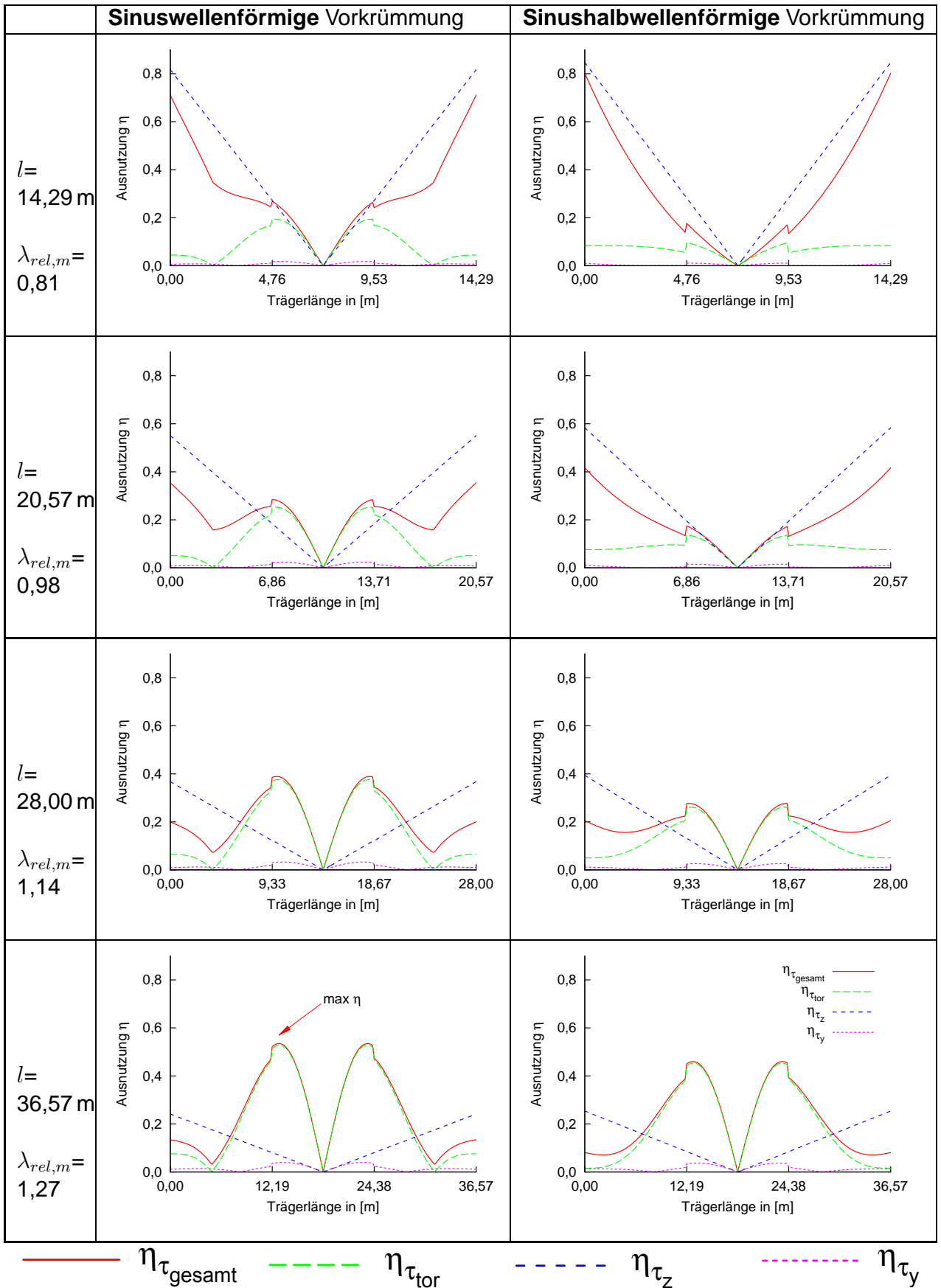
6.17e)), da die elastische Verformung und die Kriechverformung der Vorkrümmung entgegengesetzt sind. Ursache hierfür sind die diskreten Stützungen des Druckgurts sowie die Verdrehung  $\vartheta$ , die zwangsläufig mit der horizontalen Verformung einhergeht. Im Vergleich zur spannungslosen Vorkrümmung und der horizontalen, elastischen Verformung ist die Zunahme der horizontalen Verformung über den Zeitraum von 50 Jahren vergleichsweise gering. Für die in [68] gemessenen Verformungen an ausgeführten Tragwerken konnte aufgrund dieser exemplarischen Simulation davon ausgegangen werden, dass die zeitabhängigen Verformungen nur zu einer geringfügigen Änderung der Gesamtverformung führen.

Um die Auswirkungen eines veränderten Vorkrümmungsansatzes auf das Torsionsmoment in der Auflagergabel abschätzen zu können, wurde der Mittelwert aus den in [68] gemessenen horizontalen Verformungen gebildet, der sich zu

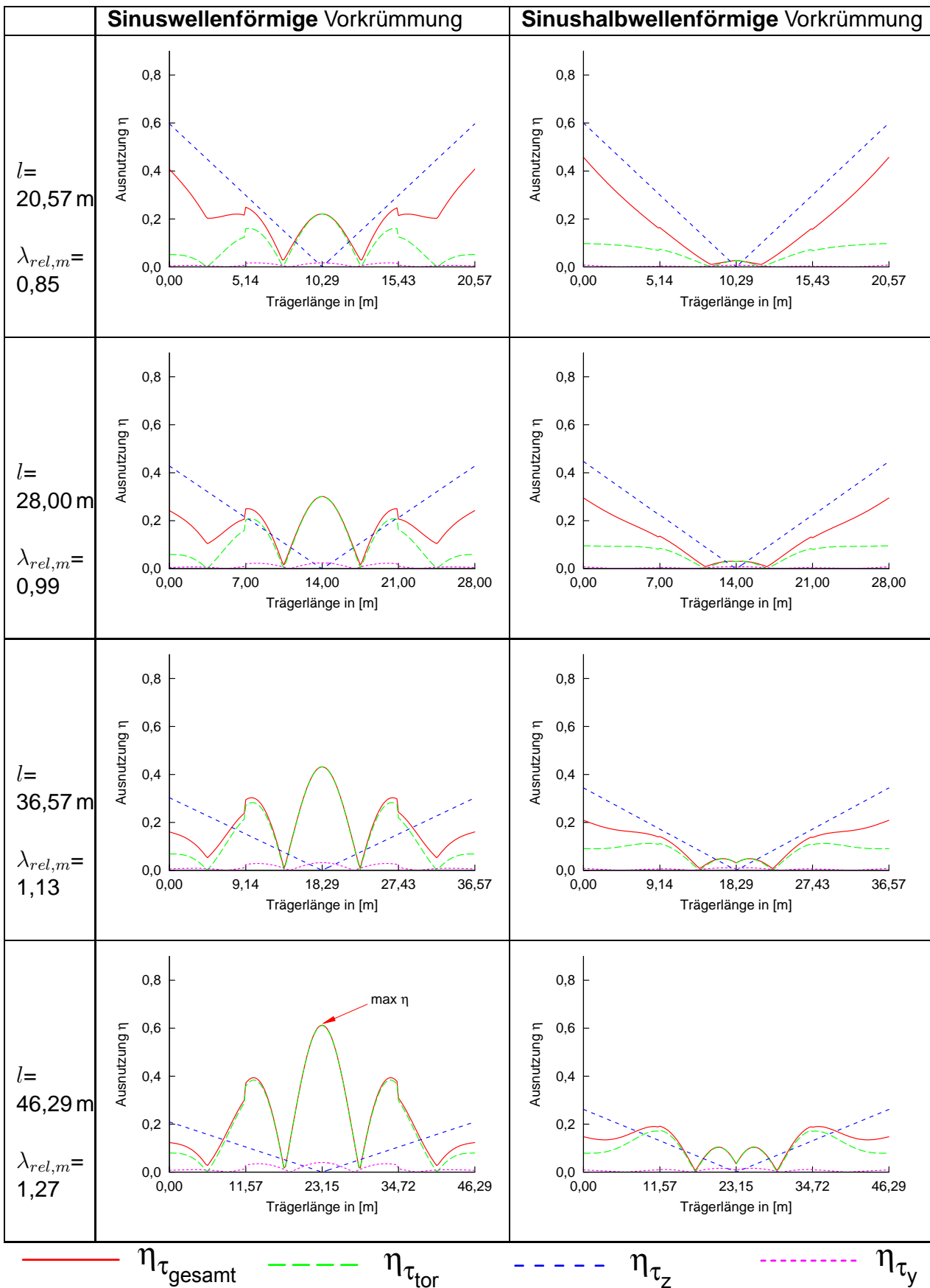
$$e = 0,00125 \cdot l \quad (6.24)$$

bestimmt. Mithilfe dieses Berechnungsansatzes wurden im Weiteren numerische Berechnungen an Trägerkonfigurationen, gewissermaßen als Tastversuche, vorgenommen, um die Auswirkungen einer verringerten Vorkrümmung auf den Schubspannungsnachweis infolge Torsion im Querschnitt am Auflager genauer quantifizieren zu können. Abb. 6.18 und Abb. 6.19 zeigen, dass unter verringerter Vorkrümmung nach Gl. (6.24) die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager im Vergleich zum Vorkrümmungsansatz nach DIN EN 1995-1-1 [2] abnimmt. Aus den Abb. 6.18 und Abb. 6.19 ist ablesbar, dass die mit dem Mittelwert der in [68] gemessenen horizontalen Verformungen berechneten Torsionsmomente in der Folge auch zu einer geringeren Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,ges}$  im Querschnitt an den Endauflagern führen. Gerade bei Trägern, die eine hohe Schubspannungsausnutzung aufweisen, kann demzufolge der anzusetzende Vorkrümmungsansatz ausschlaggebend dafür sein, ob ein Brettschichtholzquerschnitt aufgrund der Schubspannungsausnutzung mit zusätzlichen Lamellen ausgeführt werden muss. Deshalb ist die Kenntnis der in der Baupraxis tatsächlich vorkommenden Vorkrümmungen und die Quantifizierung ihrer Anteile aus geometrischer und struktureller Imperfektion von Bedeutung für die Höhe der auftretenden Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Da hierzu weitergehende Untersuchungen notwendig sind, die im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden kann, wird im Folgenden auf die Vorkrümmungsansätze der DIN EN 1995-1-1 [2] zurückgegriffen.

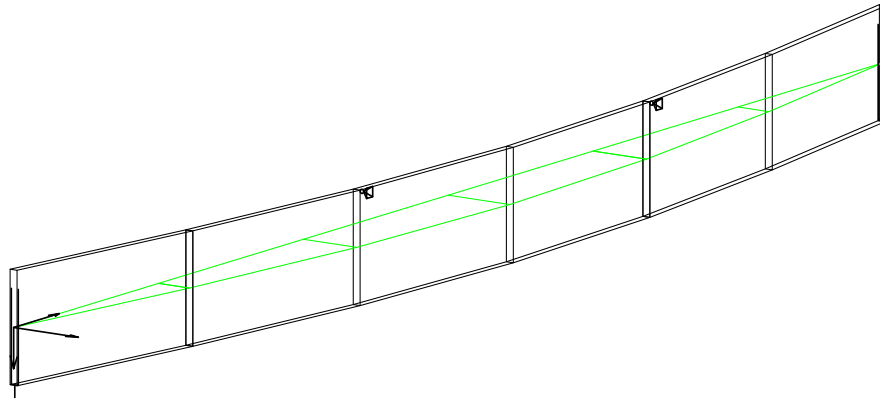




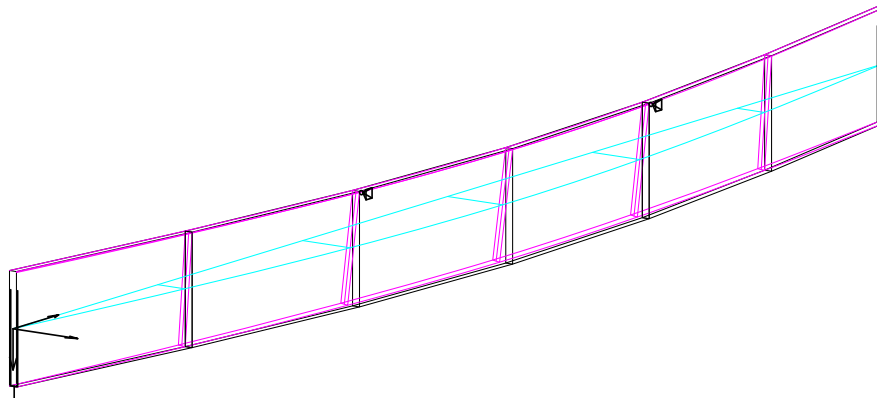
**Abbildung 6.12:** Schubspannungsausnutzung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Beispiel eines 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitts an Einfeldträgern mit zwei diskreten seitlichen Stützungen des Druckgurts



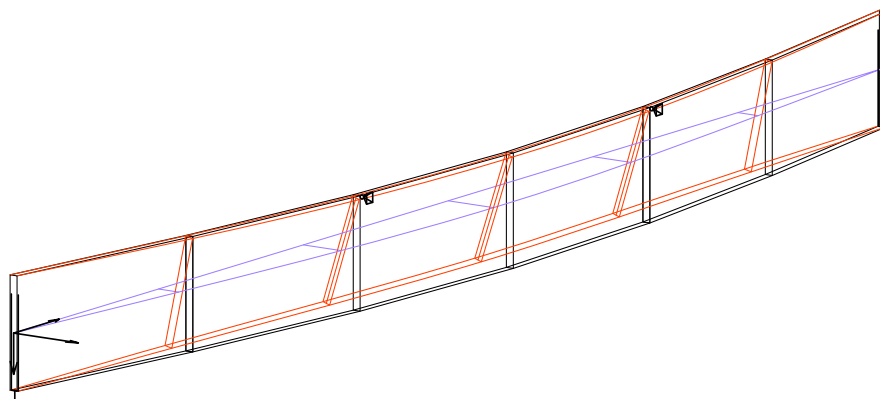
**Abbildung 6.13:** Schubspannungsausnutzung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Beispiel eines 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitts an Einfeldträgern mit drei diskreten seitlichen Stützungen des Druckgurts



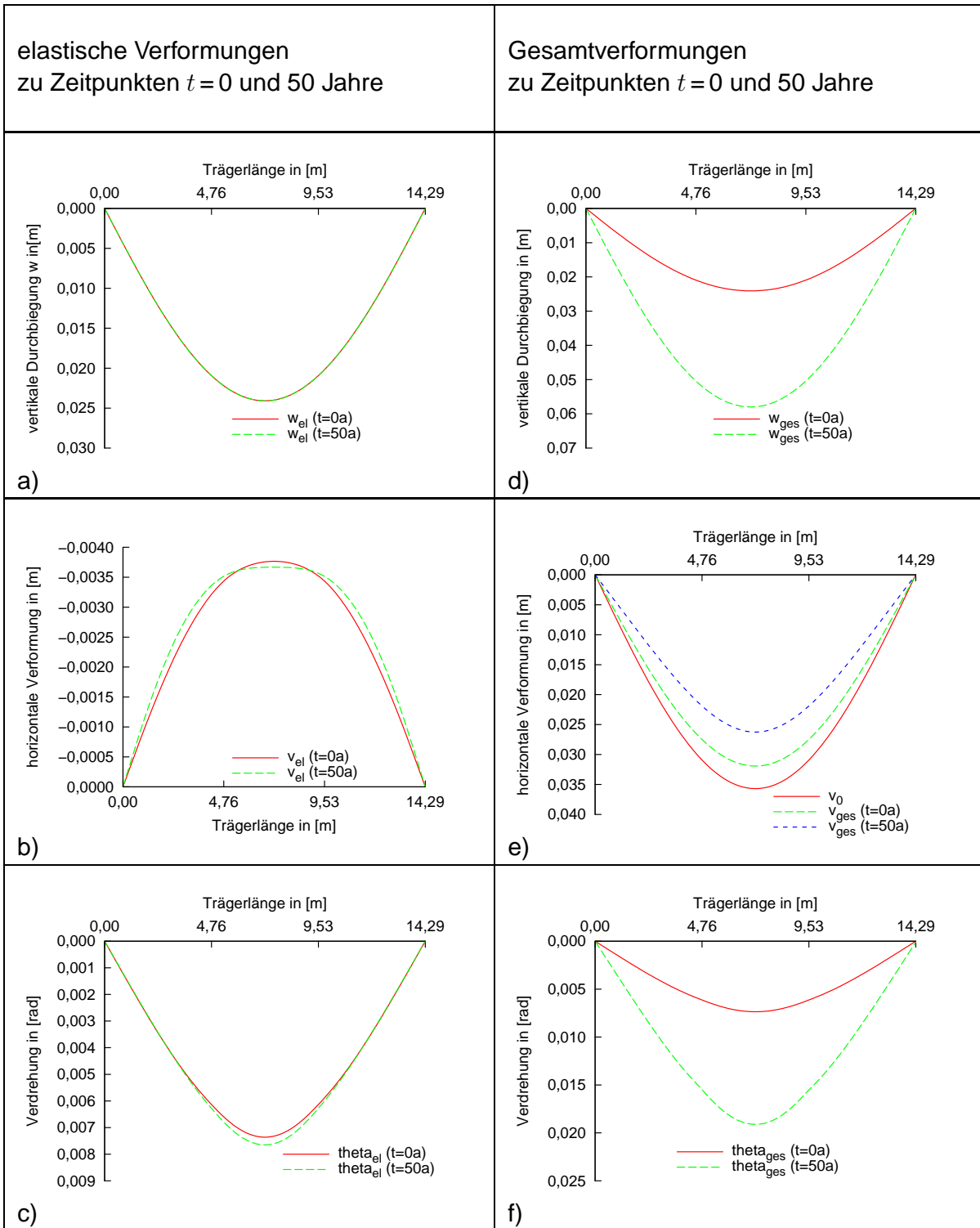
**Abbildung 6.14:** Isometrische Darstellung des unbelasteten vorgekrümmten Trägers aus Abb. 6.17 (200-fach überhöht)



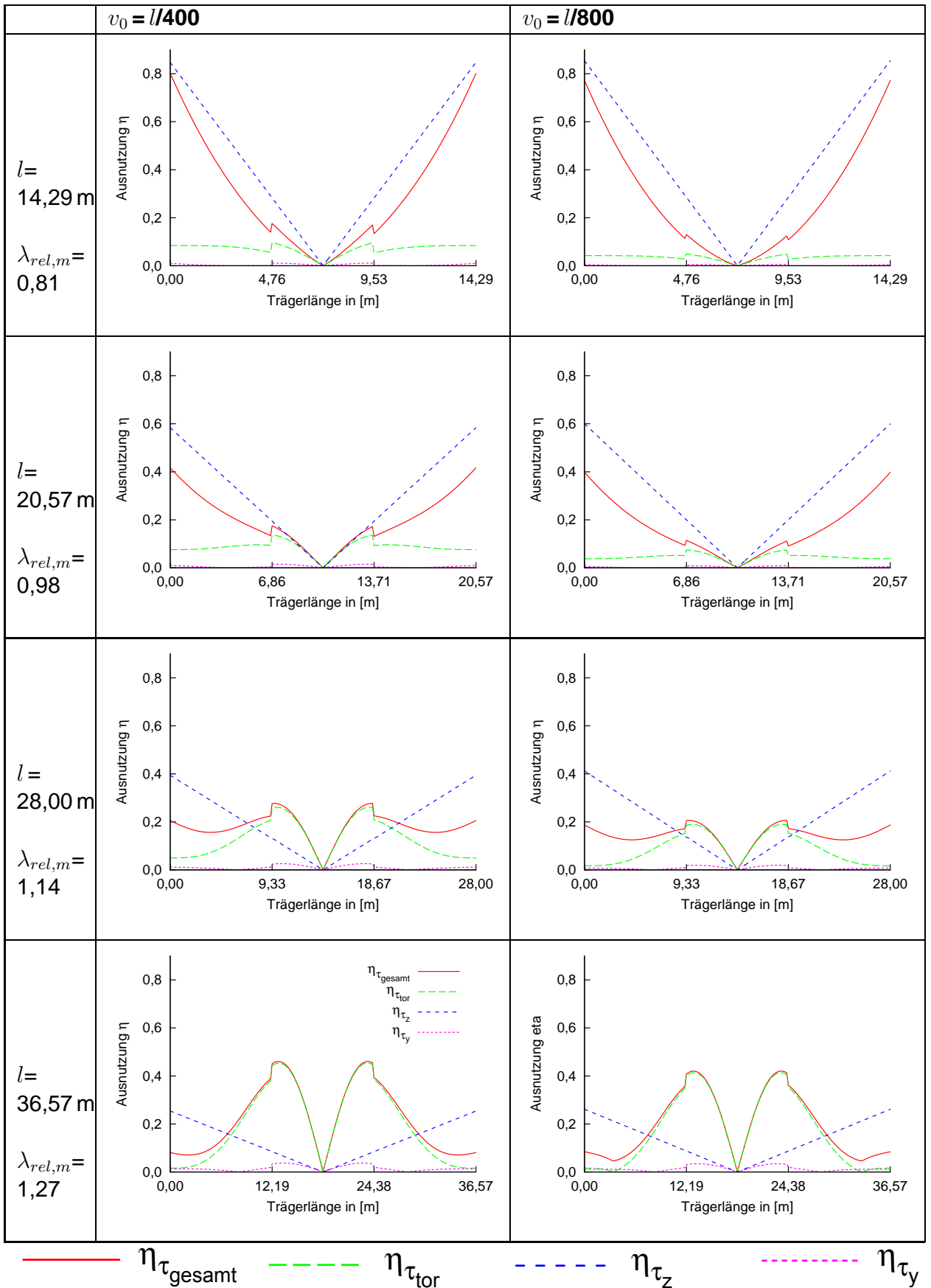
**Abbildung 6.15:** Isometrische Darstellung des belasteten Trägers zur Zeit  $t=0$  a aus Abb. 6.17 (200-fach überhöht)



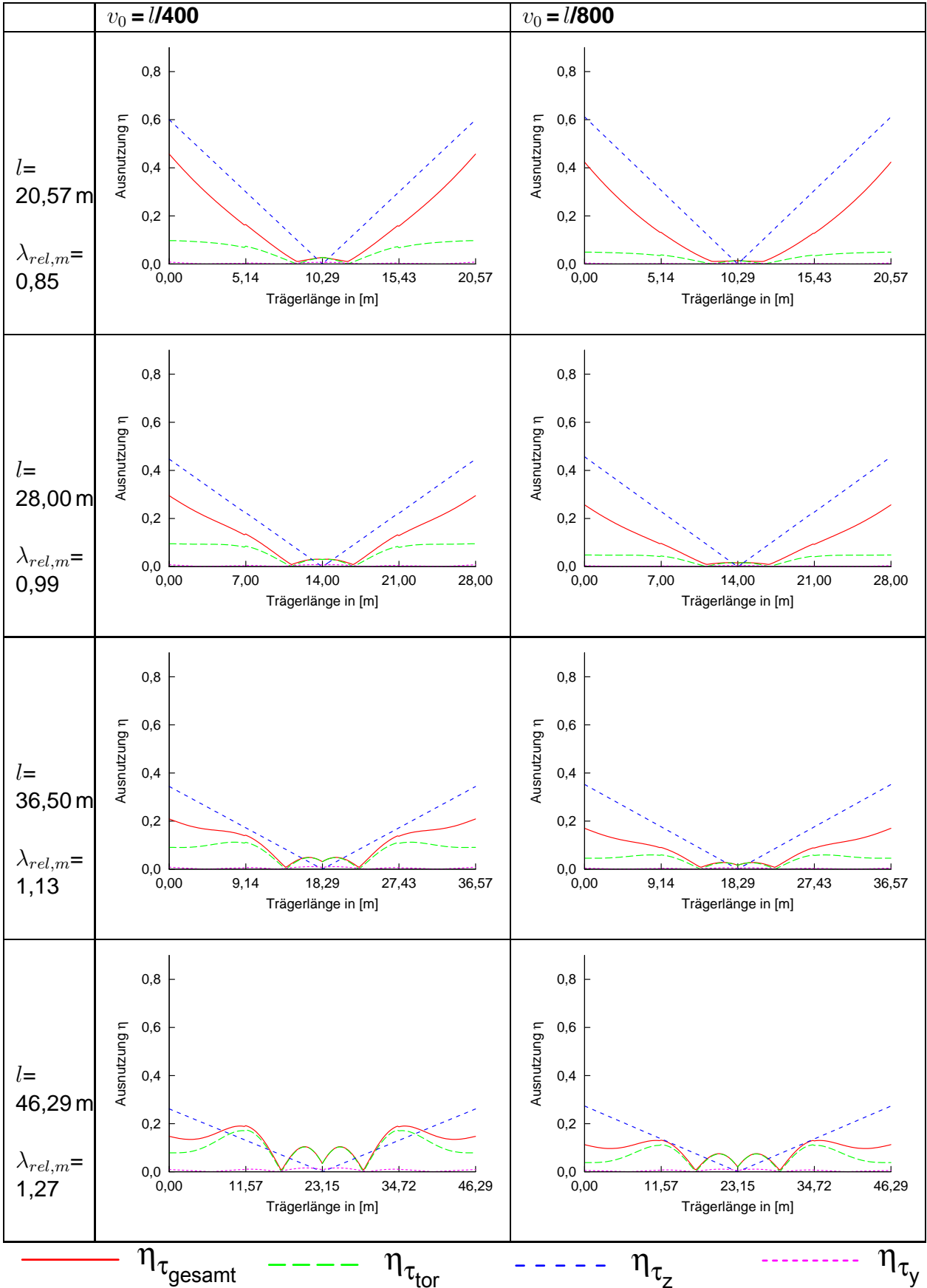
**Abbildung 6.16:** Isometrische Darstellung des belasteten Trägers zur Zeit  $t=50$  a aus Abb. 6.17 (200-fach überhöht)



**Abbildung 6.17:** Verformungen und Verdrehung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens am Beispiel eines 16 cm breiten, 112 cm hohen und 14,29 m langen Trägers mit horizontalen Stützungen des Druckgurts in den Drittelpunkten mit a) elastische vertikale Durchbiegung  $w_{el}$ , b) elastische horizontale Verformung  $v_{el}$ , c) elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$ , d) vertikale Gesamtdurchbiegung  $w_{ges}$ , e) horizontale Gesamtverformung  $v_{ges}$ , c) Gesamtverdrehung  $\vartheta_{ges}$

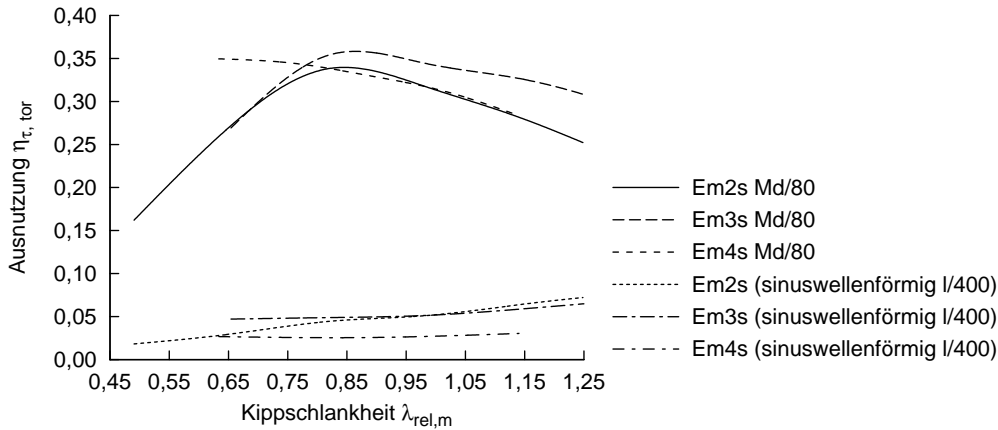


**Abbildung 6.18:** Schubspannungsausnutzung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung in einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung



**Abbildung 6.19:** Schubspannungsausnutzung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung in einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

## 6.6 Auswirkung des Vorkrümmungsansatzes auf das Torsionsmoment im Trägerquerschnitt



**Abbildung 6.20:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit zwei (Em2s), drei (Em3s) und vier (Em4s) seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

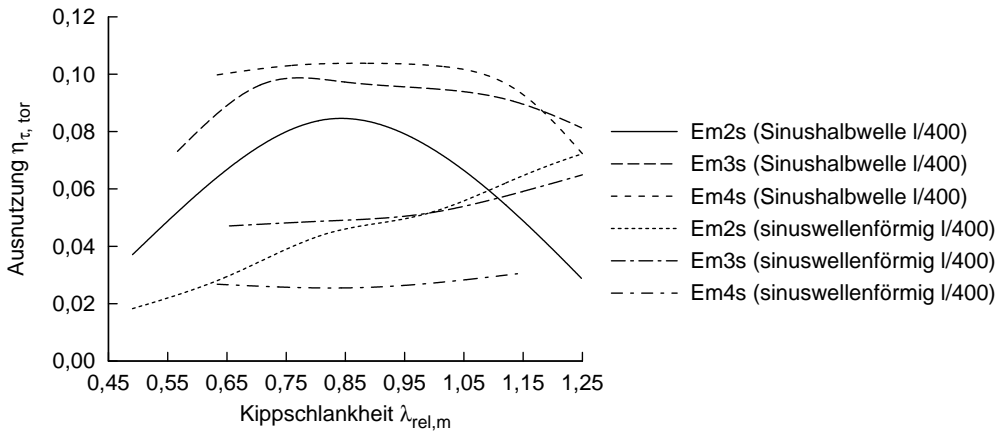
Für den im Vorfeld einer eingehenden Parameterstudie gewählten Referenzquerschnitt

$b = 16,00$  cm Breite des Querschnitts

$h = 112,00$  cm Höhe des Querschnitts

kann der Schubspannungsverlauf infolge Torsion über der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  aufgetragen werden. In Abb. 6.20 wurde zunächst die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am Endauflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers bestimmt. Untersucht wurden Einfeldträger mit zwei (Em2s), drei (Em3s) und vier (Em4s) seitlichen Stützungen des Druckgurts. Dabei wurde berücksichtigt, dass bei kurzen Trägern der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend wurde. In diesen Fällen begrenzte damit der zu 100% ausgenutzte Schubspannungsnachweis die Bemessungslast, im Unterschied zu weitgespannteren Trägern, bei denen der Längsspannungsnachweis maßgebend ist und die Bemessungslast hierdurch limitiert wird. Bis zu der praxisrelevanten bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  wächst der Grad der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion in keinem der untersuchten Fälle über 5% hinaus. Werden vier seitliche Stützungen des Druckgurts vorgesehen, liegt der Ausnutzungsgrad der Schubspannung infolge Torsion am Endauflager sogar deutlich unter 5%. Für jeden der untersuchten Trägerkonfigurationen wurde zudem das größte auftretende Biegemoment  $M_d$  bestimmt und der bisherigen Bemessungspraxis nach DIN EN 1995-1-1/NA:2010-12 [3] folgend, das Torsionsmoment in der Auflagergabel zu  $M_d/80$  bestimmt, vgl. hierzu Kap. 2.4. Der Ausnutzungsgrad der Schubspannung infolge des Torsionsmoments  $M_d/80$  im gewählten Brettschichtholzquerschnitt ist in Abb. 6.20 dargestellt und liegt deutlich über der Schubspannungsausnutzung, die sich infolge einer Berechnung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ergibt. Durch die hilfswise Koppelung des Torsionsmoments an das Biegemoment wird für kleine bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  ein vergleichsweise großes Torsionsmoment berechnet. Die nichtlinearen Spannungsanteile infolge von Imperfektionen sind vergleichsweise ge-

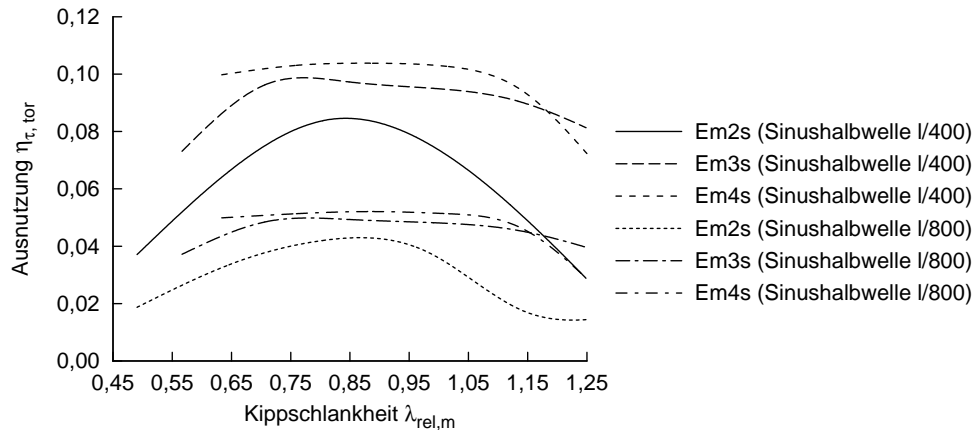
ring, so dass die Längsspannungsausnutzung nahezu ganz aus planmäßiger Beanspruchung herrührt. Aufgrund des planmäßigen Biegemoments  $M_d$  wird somit mit dem Ansatz  $M_d/80$  der Norm eine Torsionsbeanspruchung am Endauflager berechnet, die für seitlich gestützte Träger deutlich auf der sicheren Seite liegt. Neben dem sinuswellenförmigen Vorkrümmungsansatz wurden dieselben Träger mit einem sinushalbwellenförmigen Vorkrümmungsansatz untersucht.



**Abbildung 6.21:** Vergleich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger und sinuswellenförmiger Vorkrümmung und Variation der Anzahl der seitlichen Stützungen

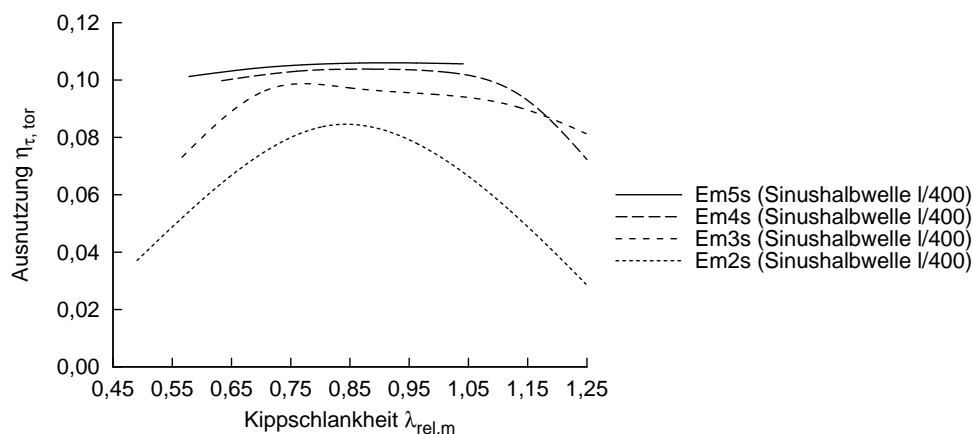
Abb. 6.21 zeigt, dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am Endauflager bei sinushalbwellenförmigem Vorkrümmungsansatz höher ist als bei sinuswellenförmigem Vorkrümmungsansatz. Darüber hinaus ist ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der seitlichen Stützungen und dem Ausnutzungsgrad der Schubspannungen infolge Torsion am Endauflager in Abb. 6.21 erkennbar. Die größte Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am Auflager weisen dabei Träger mit größerer Trägerlänge und einer dadurch bedingten größeren Anzahl seitlicher Stützungen des Druckgurts auf. Die Maxima bei drei und vier diskreten Stützungen des Druckgurts liegen im praxisrelevanten Bereich der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  sehr dicht beisammen und betragen  $\eta_{\tau,tor} \simeq 10\%$ . Für Träger mit zwei (Em2s) seitlichen Stützungen des Druckgurts ist der maximal auftretende Ausnutzungsgrad geringer und steigt im Bereich der praxisrelevanten bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  ebenfalls nicht über 10% an und liegt bei kleinen bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  weit unter diesem Wert, da in diesen Fällen aufgrund der Trägerlänge der Schubspannungsnachweis maßgebend ist. Abb. 6.21 veranschaulicht zudem, dass zusätzliche seitliche Stützungen bei gleicher bezogener Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  nicht zwangsläufig zu einem geringeren Torsionsmoment am Endauflager führen. Eine deutliche Mehrzahl der in [68] durchgeführten Messungen an bestehenden weitgestützten Brettschichtholztragwerken wies eine sinushalbwellenförmige Verformung in horizontaler Richtung auf, so dass der sinushalbwellenförmige Vorkrümmungsansatz nach Gl. (6.24) auf die bereits zuvor untersuchten Träger aufgebracht wird. Trotz des nichtlinearen Trägerverhaltens reduziert sich das Torsionsmoment am Endauflager auf nahezu den halben Wert, der zuvor mit dem Vorkrümmungsansatz  $l/400$  bestimmt worden war, vgl. Abb. 6.22. Durch Abb. 6.22 wird zudem deutlich, dass der qualitative Verlauf der Schubspannungs-





**Abbildung 6.22:** Vergleich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und Variation der Anzahl der seitlichen Stützungen

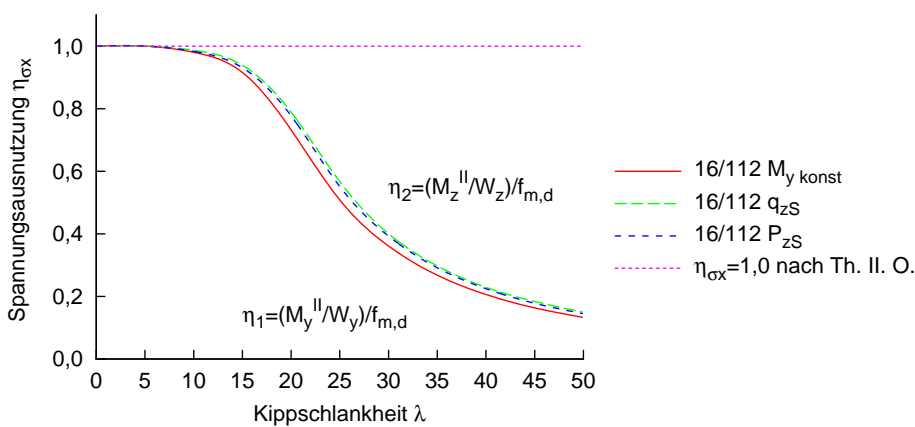
ausnutzung infolge Torsion nicht vom Stich der Vorkrümmung abhängt, sondern hauptsächlich von der Art des Vorkrümmungsansatzes und der Anzahl der seitlichen Stützungen des Druckgurts. Jedoch geht mit der Erhöhung der Anzahl der seitlichen Stützungen des Druckgurts ab einem Träger mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts nur noch eine geringe Steigerung des Torsionsmoments am Endauflager einher, wie Abb. 6.23 veranschaulicht. Der Grad der Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an dem in Abb. 6.23 untersuchten Querschnitt eines Einfeldträgers mit drei, vier und fünf seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung sehr dicht beieinander.



**Abbildung 6.23:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an einem 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitt eines Einfeldträgers mit zwei, drei, vier und fünf seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

## 6.7 Auswirkung unterschiedlicher Lasteinwirkungen auf kippgefährdeten BSH-Träger am Beispiel eines Trägerquerschnitts 16 cm/112 cm

Um weitergehende Untersuchungen vornehmen und dabei den Parameterbereich auf ein notwendiges Maß begrenzen zu können, werden unterschiedliche Trägerquerschnittsabmessungen und Arten der Lasteinwirkung zum Zeitpunkt  $t = 0$  untersucht und miteinander verglichen. Die Vergleichbarkeit ergibt aus dem Längsspannungsanteil  $\eta_1$ , der aus der planmäßigen Lasteinwirkung resultiert, und unter der Voraussetzung, dass die Längsspannungsausnutzung  $\eta_{\sigma_x}$  des Querschnitts nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung in den zu vergleichenden Fällen stets 1,0 beträgt. In Abb. 6.24 werden die Längsspan-

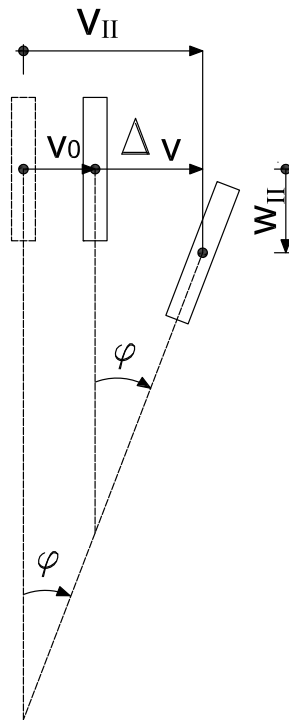


**Abbildung 6.24:** Vergleich eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) mit Lasteinwirkung im Querschnittsschwerpunkt aus konstanter Linienlast  $q_{zS}$ , zwei Einzellasten  $P_{zS}$  in den Drittelpunkten und einer konstanten Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$

nungsanteile  $\eta_1$  aus der planmäßigen Lasteinwirkung auf kippgefährdete BSH-Träger ( $h/b = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$ ) unter konstanter Linienlast  $q_{zS}$ , zwei Einzellasten  $P_{zS}$  in den Drittelpunkten und einer konstanten Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$  miteinander verglichen. Die Lasteinwirkung findet für die in Abb. 6.24 dargestellten Spannungsverläufe jeweils im Schwerpunkt des untersuchten Querschnitts statt. Die untersuchten Träger werden jeweils so belastet, dass der Biegespannungsnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu 100% ausgenutzt ist. Abb. 6.24 veranschaulicht, dass für den untersuchten Träger die Spannungskurven  $\eta_1$  aus planmäßiger Momentenbeanspruchung  $M_y^{II}$  infolge Lasteinwirkung im Querschnittsschwerpunkt aus konstanter Linienlast  $q_{zS}$  und zweier Einzellasten  $P_{zS}$  in den Drittelpunkten über der infolge konstanter Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$  liegt. Somit hängt der Spannungsanteil  $M_z^{II}$  infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung von der Art der Lasteinwirkung und der Völligkeit des zugehörigen Momentenverlaufs ab (vgl. Brüninghoff [21]). Je gleichmäßiger die Momentenverteilung über die Trägerlänge aus planmäßiger Beanspruchung ist, desto größer ist der Anteil der Spannung aus  $M_z^{II}$  infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Die Spannungskurve  $\eta_1$  infolge konstanter Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$  aus planmäßiger Beanspruchung weist damit bei den in Abb. 6.24 verglichenen Lasteinwirkungen aufgrund ihrer Völligkeit die geringsten Werte auf. Die Spannungskurve  $\eta_1$  infolge konstanter Momentenbeanspruchung

$M_{ykonst}$  aus Abb. 6.24 bildete damit die Grundlage für die Herleitung des Kippbeiwerts  $k_{crit}$  (Gl. (2.36)) für das Ersatzstabverfahren nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2], vgl. Kap. 2.3.3, und wird als Referenzkurve in Abb. 6.26 übernommen.

Findet die Lasteinwirkung aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$  und zweier Einzellasten  $P_{zOG}$  in den Drittelpunkten jeweils am Obergurt des Trägers statt, so verschieben sich die Spannungsverläufe, wie in Abb. 6.26 dargestellt. Die Lasteinleitung am Obergurt des Trägerquerschnitts führt zu einem Anwachsen des nichtlinearen Spannungsanteils aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung, der aus dem zusätzlichen Exzentrizitätsanteil aus der Lasteinleitung am Obergurt entsteht (vgl. Abb. 6.25). Der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie

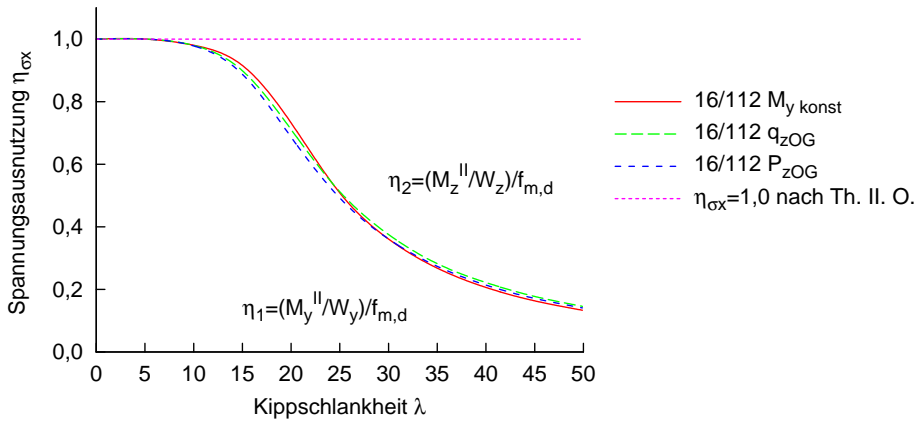


**Abbildung 6.25:** Horizontale Verformung  $v$  und Verdrehung  $\vartheta$  eines kippgefährdeten Biegeträgers mit horizontaler Imperfektion  $v_0$  nach [71]

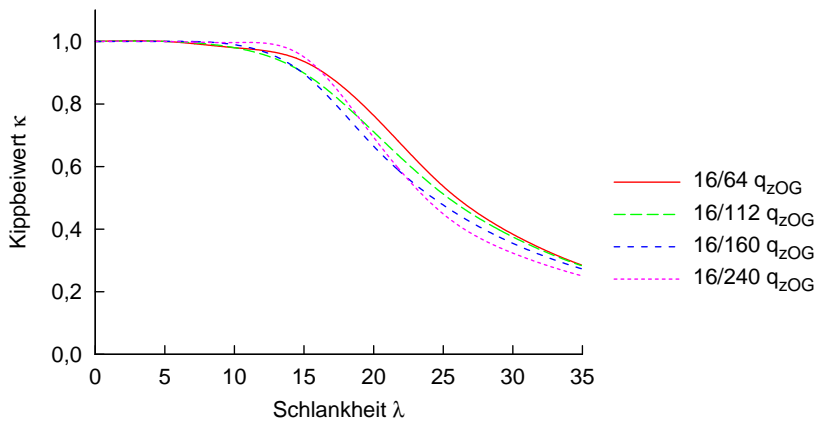
rie II. Ordnung in Abb. 6.26 ist bei einer Lasteinwirkung aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$  und zweier Einzellasten  $P_{zOG}$  in den Drittelpunkten höher als infolge konstanter Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$ . Beim untersuchten Querschnitt ist Spannungsausnutzung  $\eta_1$  aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$  und zweier Einzellasten  $P_{zOG}$  in den Drittelpunkten zwischen 5% und 10% geringer als aus konstanter Linienlast  $q_{zS}$  und zweier Einzellasten  $P_{zS}$  in den Drittelpunkten.

## 6.8 Auswirkung des $h/b$ -Verhältnisses auf kippgefährdete BSH-Träger

Variiert man nun in einem weiteren Schritt das  $h/b$ -Verhältnis zwischen 4 und 15, kann gezeigt werden, dass das  $h/b$ -Verhältnis unter gleicher Lasteinwirkungsart vergleichsweise geringe Auswirkungen auf die Spannungsanteile infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung

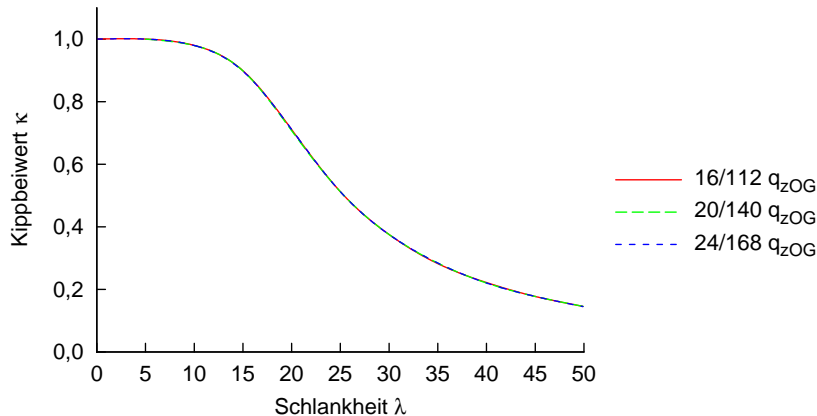


**Abbildung 6.26:** Vergleich eines kippgefährdeten BSH-Trägers ( $h/b = 16/112$ ) mit Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$ , zwei Einzellasten  $P_{zOG}$  in den Drittelpunkten und einer konstanten Momentenbeanspruchung  $M_{ykonst}$

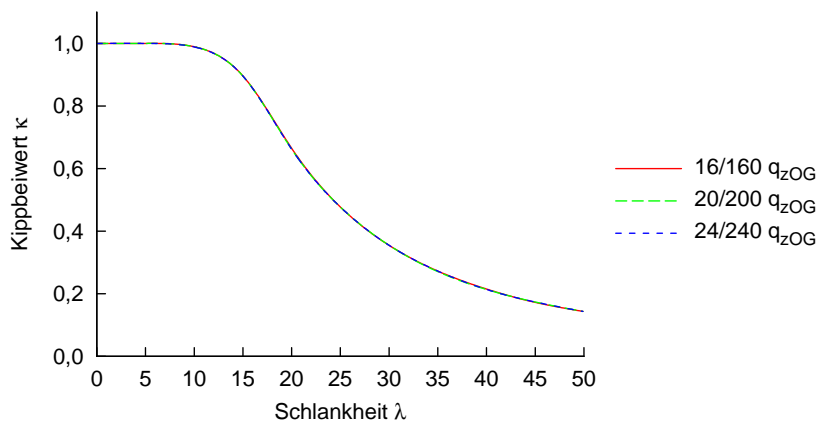


**Abbildung 6.27:** Vergleich der aus numerischer Berechnung bestimmten Kippbeiwerte  $\kappa$  für unterschiedliche  $h/b$ -Verhältnisse am kippgefährdeten Brettschichtholzträger mit Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$

hat. Lediglich für  $h/b = 15$  (Träger 16 cm/240 cm) ist für eine Kippschlankheit  $\lambda > 20$  ein höherer Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung aus Abb. 6.27 abzulesen als bei den anderen untersuchten  $h/b$ -Verhältnissen, der sich infolge der vergleichsweise kurzen Trägerlänge und der Berücksichtigung des Wölbwiderstands  $I_\omega$  ergibt. Die Variation der Trägerbreite  $b$  bei jeweils konstantem  $h/b$ -Verhältnis und konstanter Holzfeuchte zeigt, dass der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung für die untersuchten Trägerbreiten bei gleichem  $h/b$ -Verhältnis gleich groß sind. Die Spannungsverläufe über der Kippschlankheit  $\lambda$  in Abb. 6.28 und Abb. 6.29 weisen keine Unterschiede auf, so dass für die weiteren Betrachtungen lediglich das  $h/b$ -Verhältnis der zu untersuchenden Träger von Belang ist.



**Abbildung 6.28:** Vergleich der Kippbeiwerte  $\kappa$  kippgefährdeter BSH-Träger mit  $h/b=7$  mit unterschiedlichen Querschnittsbreiten unter Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$



**Abbildung 6.29:** Vergleich der Kippbeiwerte  $\kappa$  kippgefährdeter BSH-Träger mit  $h/b=10$  mit unterschiedlichen Querschnittsbreiten unter Lasteinwirkung am Obergurt aus konstanter Linienlast  $q_{zOG}$

## 6.9 Einfluss von Horizontalverbänden auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung

Horizontalverbänden kommt eine wesentliche Bedeutung bei der Aussteifung der vornehmlich biegebeanspruchten Haupttragglieder zu. Neben den äußeren Lasten, wie beispielsweise dem Wind, nehmen Horizontalverbände die Seitenlasten kippgefährdeter Biegeträger auf und verhindern damit ein seitliches Ausweichen der Haupttragglieder. Um diese Aufgabe erfüllen zu können, müssen Horizontalverbände über eine ausreichende Steifigkeit verfügen. Im Holzbau ist eine Begrenzung der horizontalen Ausbiegung eines Verbandes aus Seitenlasten und äußeren Einwirkungen auf  $l/500$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit normativ geregelt.

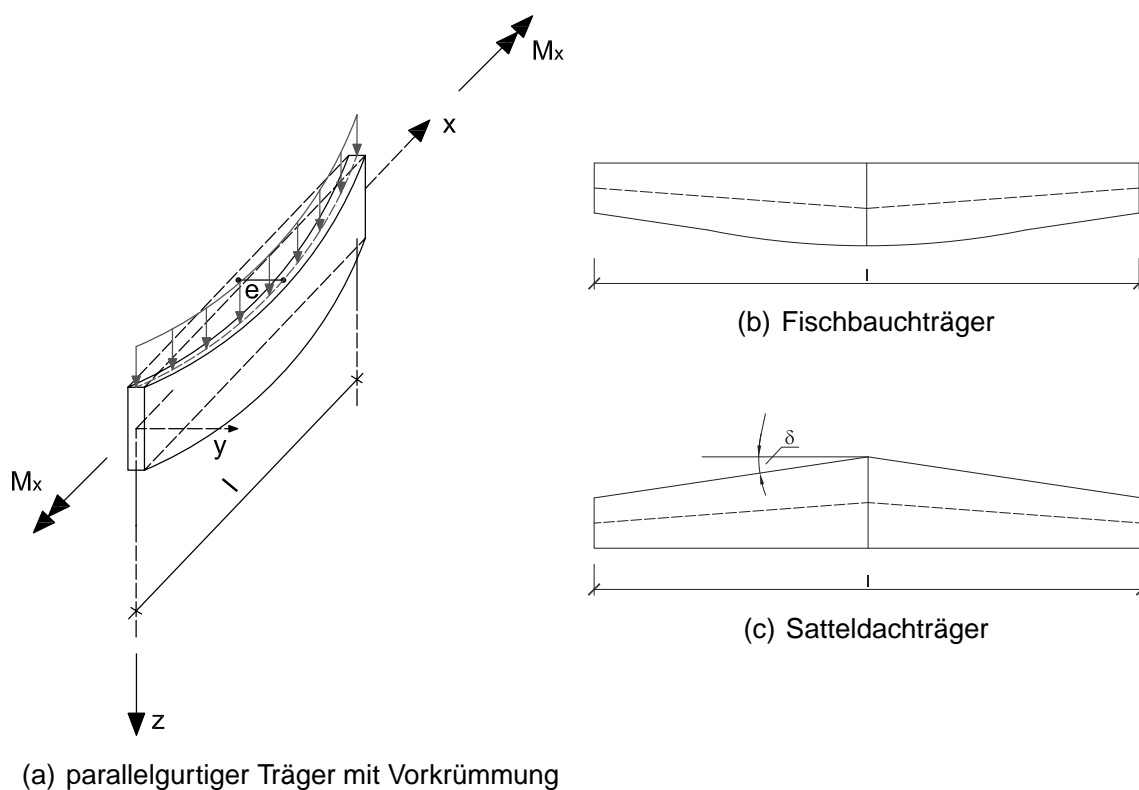
Aus der Interaktion des kippgefährdeten Trägers und des Verbandes sind Auswirkungen auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung zu erwarten, die im Rahmen der Parameterstudie in Kapitel 7.3 genauer untersucht werden.



## 7 Parameterstudie zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung

### 7.1 Praxisrelevante Binderformen und Stützweiten

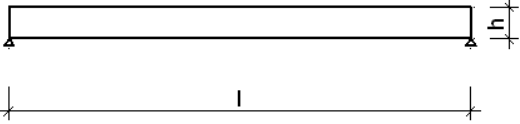
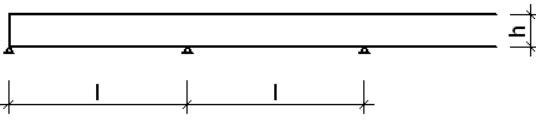
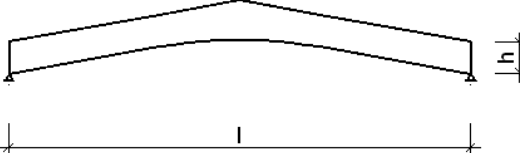
Die am häufigsten in der Praxis vorkommenden Brettschichtholzträger sind parallelgurtige Träger, Satteldach-, Pult- und Fischbauchträger, vgl. Abb. 7.1. In den allermeisten



**Abbildung 7.1:** In der Baupraxis häufig vorkommende Brettschichtholzträgerformen

Fällen wird versucht, Träger mit einer Lamellenbreite von max. 22 cm zum Einsatz zu bringen, um eine Blockverklebung zu vermeiden, die notwendig wird, wenn die maximal herstellbare Lamellenbreite überschritten wird. Als Planungsgrundlage werden von Cyron/Sengler in [72] (siehe Tab. 7.1) Anhaltswerte für Binder, Sparren- und Pfettensysteme angegeben, die für eine wirtschaftliche Bemessung neben den üblichen Stützweiten auch Angaben zur Bauteilhöhe enthalten. Mit Hilfe dieser Faustformeln kann die Binderhöhe bei bekannter Spannweite für eine erste überschlägige Bemessung vordimensioniert werden.

Tabelle 7.1: Planungsgrundlagen - Anhaltswerte für Bindersysteme nach [72]

Bindersysteme mit Achsabstand $e = 4$ bis 10 m	Spannweite in [m]	Höhe (Anhaltswert)
 <p>Träger auf 2 Stützen (Einfeld-Biegeträger)</p>	10 - 30	$h \sim \frac{1}{17} \cdot l$
 <p>Träger auf mehreren Stützen (Mehrfeld-Durchlaufträger)</p>	10 - 25	$h \sim \frac{1}{20} \cdot l$
 <p>Satteldachförmiger Träger (mit gerader und angehobener Unterkante)</p>	10 - 30	$h_{F\ddot{u}rst} \sim \frac{1}{16} \cdot l$ $h_{Auflager} \sim \frac{1}{30} \cdot l$

Für den parallelgurtigen Träger mit Rechteckquerschnitt wird eine Spannweite von 10 - 30 m angegeben. Die Binderhöhe soll dabei

$$h = \frac{l}{17} \quad (7.1)$$

betragen. Das  $h/b$ -Verhältnis wurde für die weiteren Untersuchungen auf 10 begrenzt und mit der maximalen Lamellenbreite von 22 cm, die von allen Brettschichtholzherstellern der Studiengemeinschaft Holzleimbau e. V. ohne besonderen Aufwand produziert werden [73], würde eine maximale Trägerhöhe von 220 cm erreicht. In der Regel können Trägerhöhen bis 200 cm gefertigt werden, einige Brettschichtholzhersteller der Studiengemeinschaft Holzleimbau e. V. besitzen jedoch herstellungstechnisch die Möglichkeit, Träger bis zu einer Höhe von 300 cm und einer Breite von 26 cm in einem Arbeitsgang herzustellen.

Tatsächlich sind größere Abmessungen möglich, jedoch aufgrund mehrerer dann notwendiger Arbeitsschritte aufwendig, so dass dies für Standardanwendungen in der Regel nicht in Betracht gezogen wird. Eine weitere bereits schon angesprochene Sonderform



der Herstellung von Brettschichtholzquerschnitten ist die Blockverklebung zu einem Verbundquerschnitt. Im Rahmen des im Auftrag der iVTH e. V. durchgeführten Forschungsvorhabens Vereinfachte Bemessung von Brettschichtholzträgern variabler Höhe für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung wurden von Kuhlmann und Hofmann [74] nur Standardmaße mit einer maximalen Trägerhöhe von 200 cm und einer Breite von 22 cm berücksichtigt. Die Materialgüten für Brettschichtholz wurden Kapitel 6.3 entsprechend eingesetzt.

Für alle im Rahmen der nachfolgenden Parameterstudie untersuchten Träger wird die Gabelagerung an den Endauflagern als starr angenommen. Dadurch lässt sich für jeden der untersuchten Träger das ungünstigst wirkende Torsionsmoment im Querschnitt an den Endauflagern bestimmen.

## 7.2 Parameterstudie an vorgekrümmten Einzelträgern

### 7.2.1 Vorgehensweise und Begrenzung der effektiven Kipplänge $l_{ef}$

In der nachfolgenden Parameterstudie wurden Einzelträger mit einer ungewollten Ausmitte  $e = 0,0025 \cdot l$  untersucht. Die Vorkrümmung wurde dabei sinuswellenförmig zwischen den Knotenpunkten aufgebracht und sinushalbwellenförmig zwischen den Endauflagern des Trägers.

Aus der Eingrenzung der Berechnungsparameter für die einzelnen Querschnittsformen ergibt sich die Anzahl der horizontalen Stützungen, die vorzusehen sind, um die effektive Kipplänge  $l_{ef}$  auf ein sinnvolles Maß zu begrenzen. Der Kippbeiwert  $k_{crit}$  soll nahe bei 1 liegen, um die Zusatzeffekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung möglichst gering zu halten und damit eine wirtschaftliche Bemessung zu gewährleisten. Ausgehend von einer maximalen Trägerlänge von 30 m, wurden die Berechnungen an Einfeldträgern im Rahmen der Parameterstudie auf drei diskrete horizontale Stützungen des Druckgurts begrenzt, da bereits durch die Voruntersuchungen gezeigt werden konnte, dass eine größere Anzahl horizontaler Stützungen nur eine geringe Änderung des Torsionsmoments zur Folge hat, vgl. Abb. 6.23.

In der praktischen Anwendung kommen in der Regel Träger zum Einsatz, bei denen die freie Kipplänge zwischen den seitlichen Stützungen des Druckgurts eine bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  nicht überschreitet. Dieser Wert stellt für eine wirtschaftliche Bemessung einen gebräuchlichen oberen Grenzwert dar. Unterhalb dieses Grenzwerts sind die Effekte aus Theorie II. Ordnung vergleichsweise gering. Um die qualitative Entwicklung des Torsionsmoments in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  hinreichend genau untersuchen und die erzielten Ergebnisse einordnen zu können, wurden in der nachfolgenden Parameterstudie auch Träger untersucht, deren freie Kipplänge das praxisübliche Maß übersteigt.

## 7.2.2 Berechnungsparameterbereich für den parallelgurtigen geraden Träger

### 7.2.2.1 Parameter

**Tabelle 7.2:** Berechnungsparameter für den parallelgurtigen geraden Träger

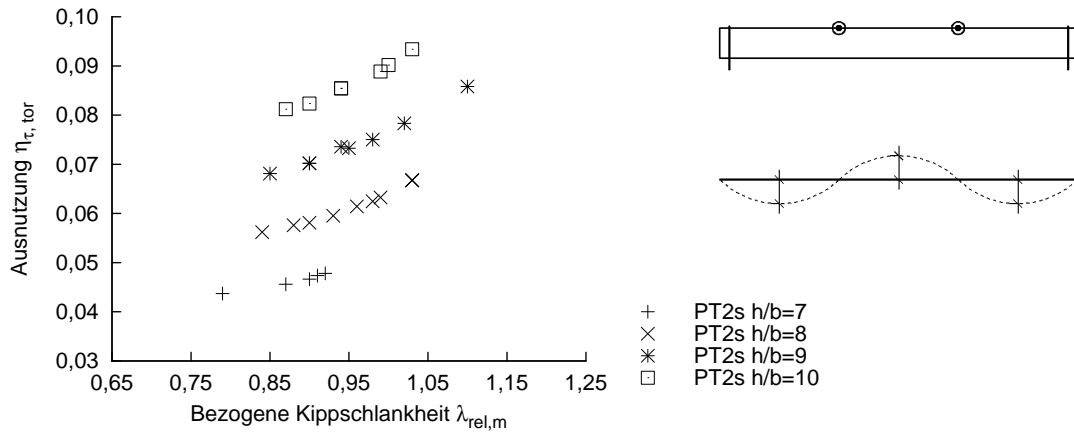
	min	max
Spannweite	10 m	30 m
Trägerhöhe	64 cm	200 cm
Breite	12 cm	22 cm
$h/b$ -Verhältnis	4	10

Unter Einbeziehung der Randbedingungen aus Kapitel 7.1 ergibt sich die in Tab. 7.2 angegebene Eingrenzung der Parameter für die Bestimmung des Torsionsmoments in der Auflagergabel am parallelgurtigen Träger.

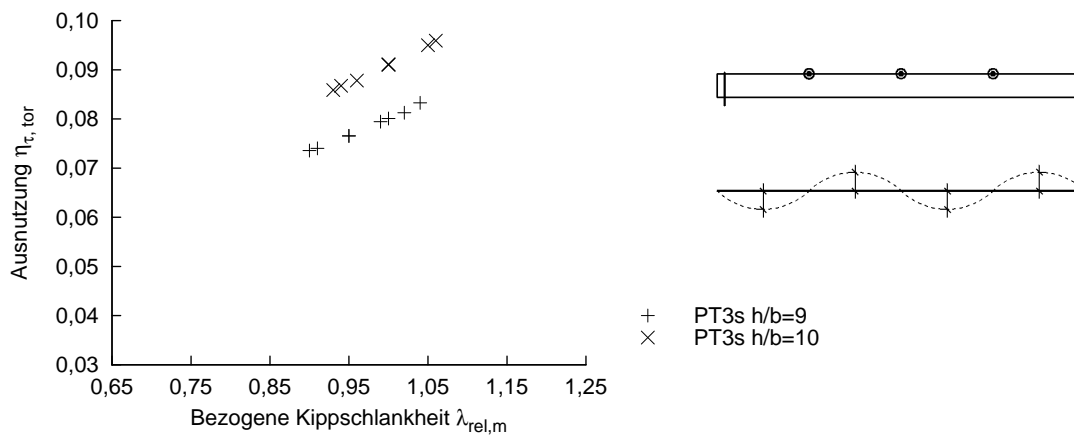
### 7.2.2.2 Der parallelgurtige Träger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung

In einer ersten Parameterreihe wurden parallelgurtige gerade Träger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung untersucht. Die Abmessungen der Träger orientierten sich an den praxisüblichen Abmessungen parallelgurtiger Brettschichtholzträger. Die Trägerbreite der untersuchten Träger betrug 12 bis 22 cm, die Stützweite variierte zwischen 10 und 30 m. Die Trägerhöhe wurde abhängig von der Trägerlänge gewählt und betrug  $h \sim l/17$ , wie in [72] vorgeschlagen. In Abb. 7.2 sind die Ergebnisse für parallelgurtige gerade Träger mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts (PT2s) und in Abb. 7.3 für parallelgurtige gerade Träger mit drei seitlichen Stützungen (PT3s) dargestellt, vgl. auch Kuhlmann/Hofmann in [75]. Alle untersuchten Träger wurden mit einer Gleichlast am Obergurt  $q_{zOG}$  belastet, so dass der Kippspannungsnachweis nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] zu 100% ausgenutzt ist. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager liegt bei allen untersuchten Trägern unter 10%.

Dabei ist die Höhe der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager abhängig vom  $h/b$ -Verhältnis der untersuchten Träger und nimmt ab einem mittleren  $h/b=7$  bis zu  $h/b=10$  jeweils um etwa ein Prozent zu. Bei einem sinuswellenförmigen Vorkrümmungsansatz ist eine Zunahme der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager sowohl in Abhängigkeit des  $h/b$ -Verhältnisses als auch mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  zu erkennen. Insgesamt macht die Schubspannung infolge Torsion einen nur sehr geringen Anteil an der maximal aufnehmbaren Schubspannung

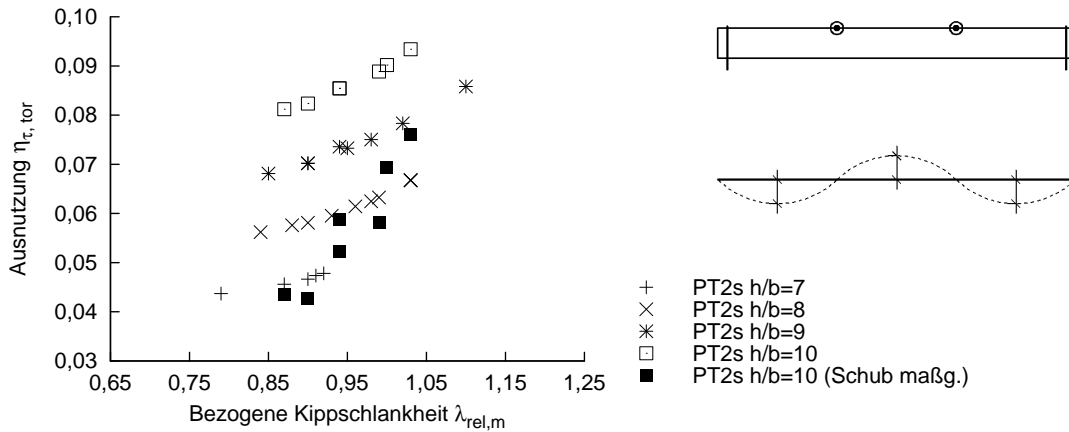


**Abbildung 7.2:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

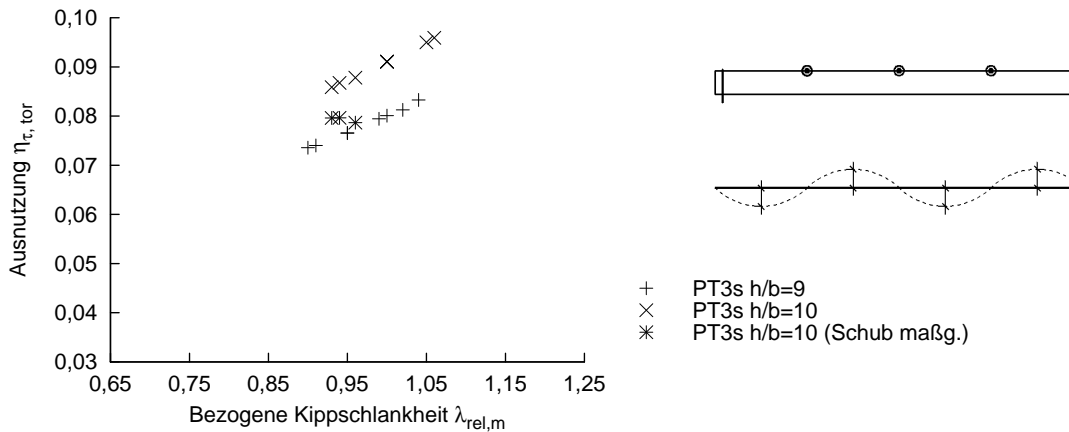


**Abbildung 7.3:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

aus. Der Schwankungsbereich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion liegt zwischen 4% und 12% der durch den jeweiligen Querschnitt aufnehmbaren Schubspannung. Die Untersuchungen zeigen außerdem, dass für  $h/b = 10$  an etlichen Trägern mit zwei und drei seitlichen Stützungen des Druckgurts der Schubspannungsnachweis am Endauflager nach Gl. (6.14) maßgebend wird. Bei diesen Trägern führt die Reduzierung der aufgetragenen Gleichlast am Obergurt  $q_{zOG}$  zu einer Reduzierung der Effekte aus Biegetorsion II. Ordnung, so dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager an diesen Trägern abnimmt, vgl. Abb. 7.4 und Abb. 7.5. Damit wird der Schubspannungsnachweis am Endauflager nur für Träger mit großem  $h/b$ -Verhältnis und vergleichsweise geringer Trägerlänge maßgebend. Wird der Schubspannungsnachweis am Endauflager an Trägern mit einer in der Praxis üblichen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  maßgebend, so beträgt die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager weniger als 5% in den untersuchten Fällen. Die quantitative Abnahme der Schubspannungen infolge Torsion im Querschnitt am Endauflager ist hauptsächlich von der Trägerlänge abhängig. Für kurze Träger mit großer Querschnittshöhe in Abb. 7.4 wird der Schub-



**Abbildung 7.4:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts, sinuswellenförmiger Vorkrümmung und mit Berücksichtigung von Trägern, bei denen der Schubspannungsnachweis maßgebend ist



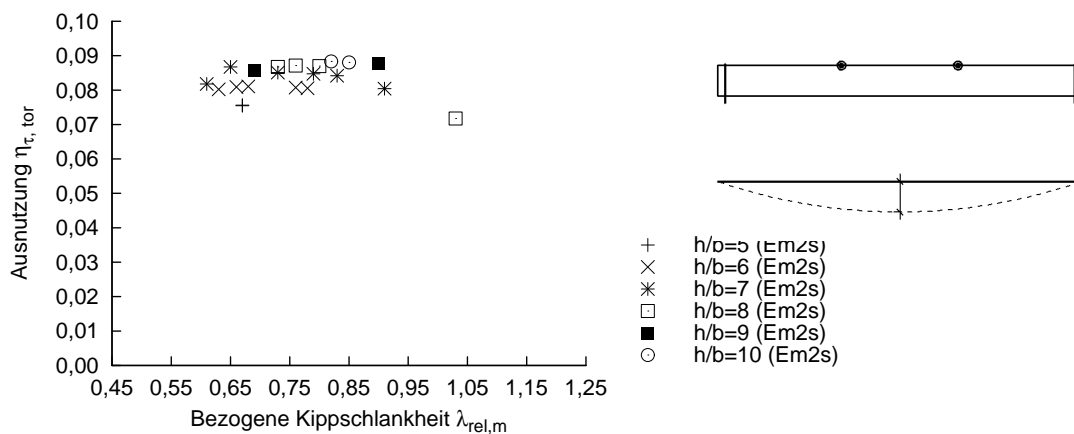
**Abbildung 7.5:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts, sinuswellenförmiger Vorkrümmung und mit Berücksichtigung von Trägern, bei denen der Schubspannungsnachweis maßgebend ist

spannungsnachweis sehr viel schneller maßgebend als bei langen Trägern bei gleicher Querschnittshöhe und bezogener Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$ . Demzufolge ist für kurze Träger eine größere Abnahme zu verzeichnen als für längere.

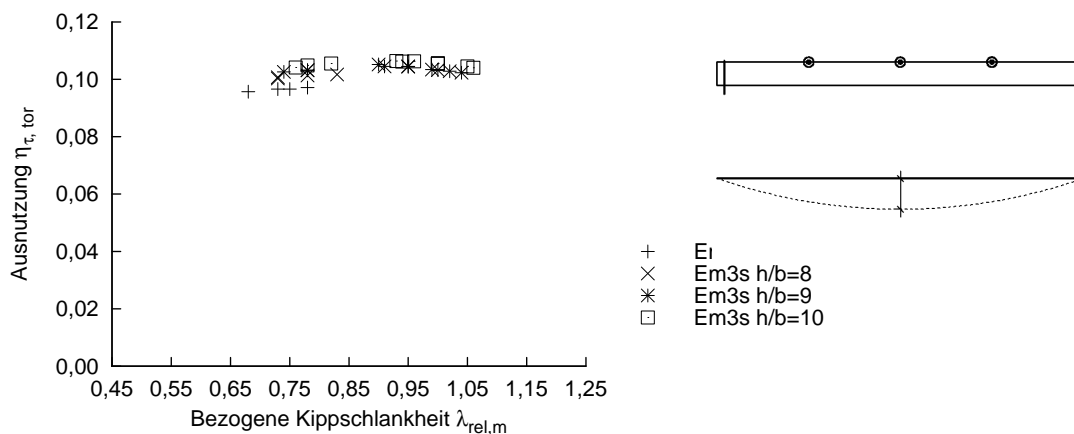
### 7.2.2.3 Der parallelgurtige gerade Träger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

In einem nächsten Schritt wurden parallelgurtige gerade Träger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung untersucht. Es wurden dazu dieselben parallelgurtigen geraden Träger wie zuvor in Kap. 7.2.2.2 beim sinuswellenförmigen Vorkrümmungsansatz gewählt und die Vorkrümmung durch einen sinushalbwellenförmigen Vorkrümmungsansatz über die gesamte Trägerlänge gemäß Abb. 6.11 ersetzt, vgl. auch Kuhlmann/Hofmann in [75]. Im praxisrelevanten Kippschlankheitsbereich  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  ist beim Referenzeinfeldträger aus

Kapitel 6.6, Abb. 6.20 mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts bis zu einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,65$  der Schubspannungsnachweis maßgebend. In der untersuchten Parameterreihe wurde dies bei den in Abb. 7.6 dargestellten Ergebnissen zunächst nicht berücksichtigt. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager bleibt in allen in Abb. 7.6 untersuchten Trägerkonfigurationen mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts (Em2s) unter 10%. Im Vergleich zu den Trägern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung ist bei den untersuchten Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung keine Abhängigkeit der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager vom  $h/b$ -Verhältnis erkennbar. Der Schwankungsbereich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion für alle untersuchten Träger liegt zwischen 7% und 9% und ist damit sehr gering.



**Abbildung 7.6:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

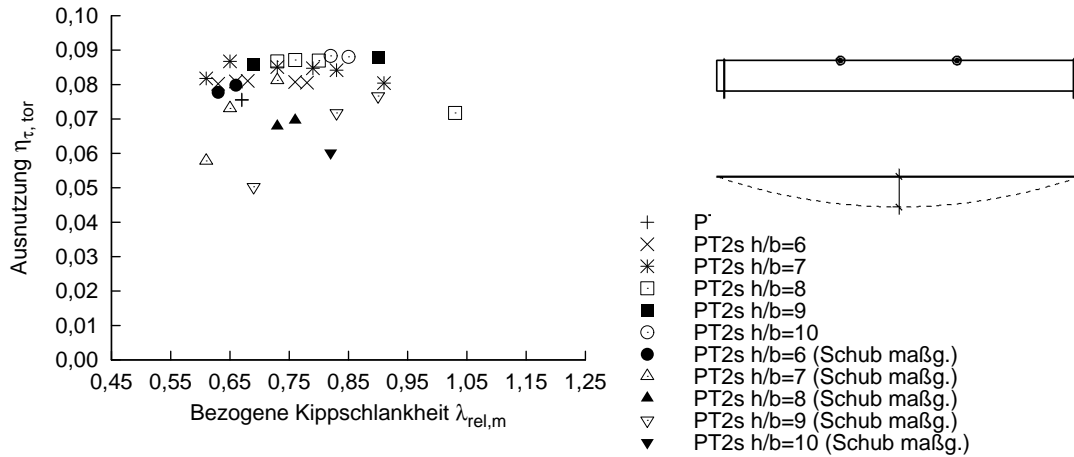


**Abbildung 7.7:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

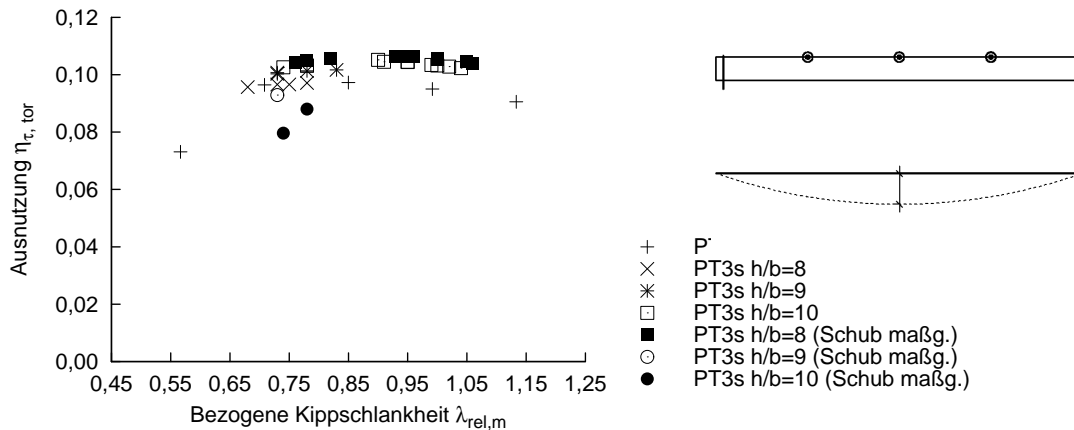
In einem nächsten Schritt wurden Träger mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung (Em3s) untersucht. Wie bereits in Abb. 7.6 zeigen die in Abb. 7.7 dargestellten Ergebnisse der Parameterstudie zunächst nur Ergebnisse an Trägern, für die der Längsspannungsnachweis maßgebend ist, wobei auch am

Träger mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts keine signifikante Abhängigkeit der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager vom  $h/b$ -Verhältnis erkennbar ist und diese am Endauflager in allen untersuchten Trägerkonfigurationen unter 10% bleibt.

Anschließend wurden die Träger mit zwei und drei seitlichen Stützungen des Druckgurts mitbetrachtet, für die der Schubspannungsnachweis maßgebend ist. Aus Abb. 7.8 und Abb. 7.9 wird deutlich, dass der Anteil der Schubspannung infolge Torsion am Endauflager abnimmt, wenn der Schubspannungsnachweis maßgebend ist.



**Abbildung 7.8:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

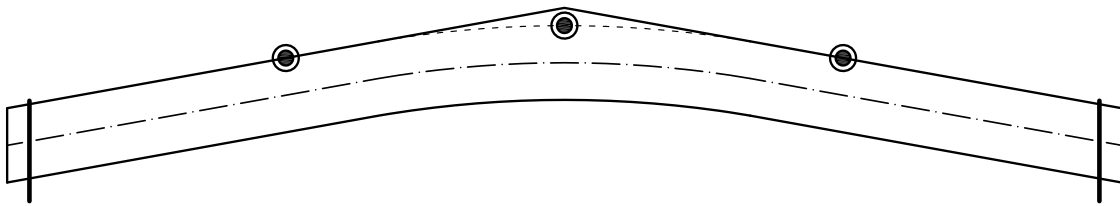


**Abbildung 7.9:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

### 7.2.3 Berechnungsparameterbereich für den parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt

#### 7.2.3.1 Parameter

Um Querkzugspannungen im Firstquerschnitt von Satteldachträgern zu verringern, werden Satteldachträger mit aufgesatteltem Firstkeil ausgeführt. Je nach Art der Ausführung entstehen somit Trägerquerschnitte, die über deren Länge konstant sind. Für die Sonderform des parallelgurtigen Trägers mit angehobenem Untergurt (Abb. 7.10) ist in Tab. 7.3 die Abgrenzung des Parameterbereichs für die anschließende Bestimmung des Torsionsmoments angegeben.



**Abbildung 7.10:** Schematische Darstellung: Parallelgurtiger Träger mit angehobenem Untergurt und aufgesatteltem Firstkeil

**Tabelle 7.3:** Berechnungsparameter für den parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt

	min	max
Spannweite	10 m	30 m
Trägerhöhe	64 cm	200 cm
Breite	12 cm	22 cm
$h/b$ -Verhältnis	4	10

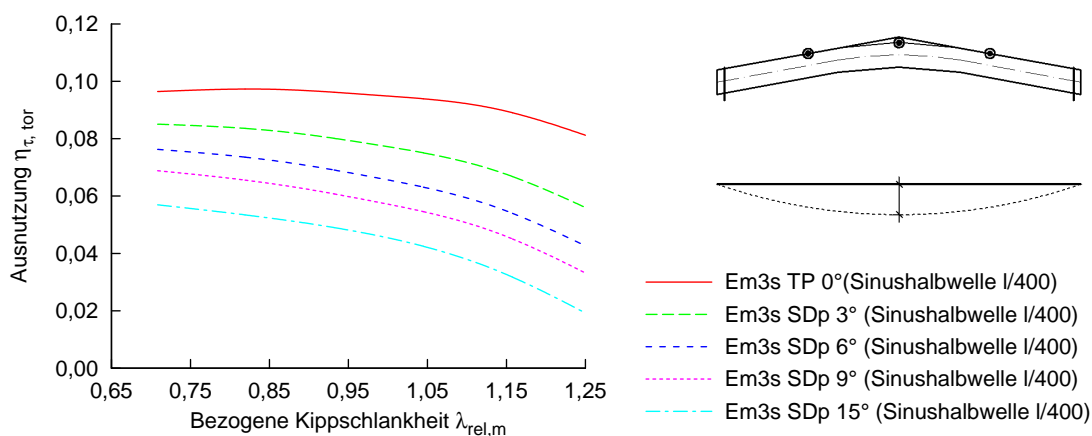
#### 7.2.3.2 Der parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt

Die Voruntersuchungen zum parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt wurden mit dem schon für die Voruntersuchungen am parallelgurtig geraden Träger gewählten Referenzquerschnitt durchgeführt:

$$b = 16,00 \text{ cm} \quad \text{Breite des Querschnitts}$$

$$h = 112,00 \text{ cm} \quad \text{Höhe des Querschnitts}$$

Die Referenzträger verfügen alle über drei diskrete seitliche Stützungen des Druckgurts. Es wurde auch für diese Trägerart ein mittleres  $h/b$ -Verhältnis von sieben für die Voruntersuchungen zugrunde gelegt, um die untersuchten parallelgurtigen Referenzträger mit angehobenem Untergurt mit den parallelgurtigen geraden vergleichen zu können. Die Art der Vorkrümmung sowie die Trägerform und damit verbunden die Lage der horizontalen Stützung in Bezug auf deren Ordinate  $z$  wirken sich in unterschiedlicher Weise auf das Torsionsmoment im Querschnitt an den Endauflagern aus. So führt eine sinuswellenförmige Vorkrümmung an den betrachteten Trägern, vgl. Abb. 7.11, mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  zu einer Abnahme des Torsionsmoments am Endauflager. Die Neigung des Untergurts wirkt sich zudem günstig auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung aus. Mit zunehmender Neigung des Untergurts gegen die Horizontale ist eine Abnahme des Torsionsmoments am Endauflager festzustellen.



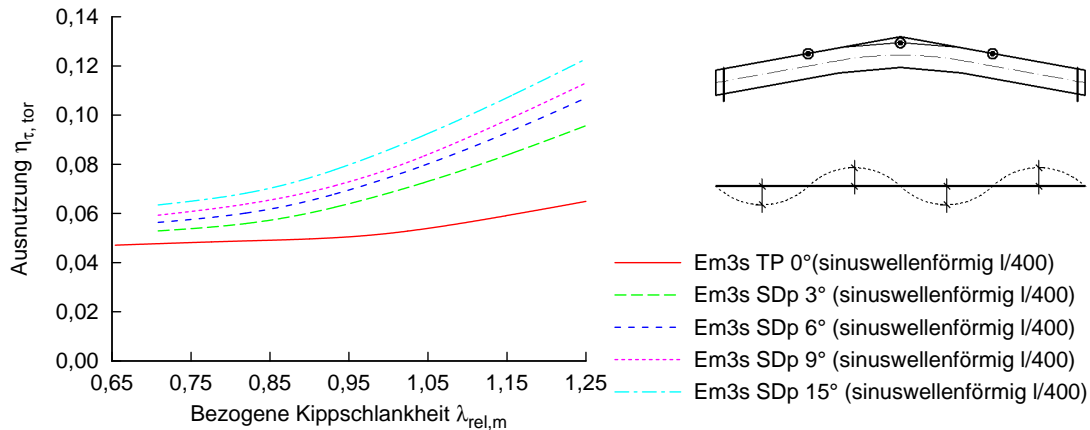
**Abbildung 7.11:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit (SDp) und ohne angehobenem (TP) Untergurt bei drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

Eine sinuswellenförmige Vorkrümmung hat mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  eine Zunahme des Torsionsmoments am Endauflager zur Folge. Bei parallelgurtigen Trägern mit angehobenem Untergurt ist eine weitere Zunahme des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung in Abhängigkeit der Neigung des Untergurts zur Horizontalen zu beobachten. So nimmt mit zunehmender Dachneigung das Torsionsmoment am Querschnitt im Endauflager zu, vgl. Abb. 7.12.

Ein Vergleich der Schubspannungen infolge des Torsionsmoments am Auflager in Abb. 7.11 und Abb. 7.12 zeigt, dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Endauflager des parallelgurtigen Trägers mit angehobenem Untergurt (SDp) und sinuswellenförmiger Vorkrümmung und dem parallelgurtigen geraden Träger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung im praxisrelevanten Bereich der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  zwischen 6% und 8% der maximal vom jeweiligen Querschnitt aufnehmbaren Schubspannungen liegen.

Der gegenläufige Verlauf der Schubspannungsausnutzung infolge des Torsionsmoments





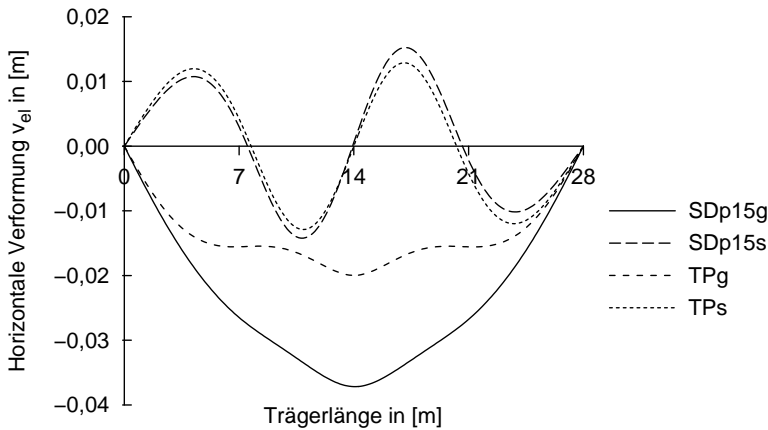
**Abbildung 7.12:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit (SDp) und ohne angehobenem (TP) Untergurt bei drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

am Auflager bei sinuswellenförmiger und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung bei zunehmender bezogener Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  bedarf einer genaueren Betrachtung. Die Ursache hierfür liegt nur mittelbar im Differentialgleichungssystem der Biegetorsionstheorie II. Ordnung, sondern in der Anordnung der horizontalen Stützungen des Druckgurts im Feld begründet. Die mechanischen Zusammenhänge werden im Folgenden anhand der elastischen Verformung und der Verdrehung in der Schwerachse des nachfolgenden Referenzträgers erläutert.

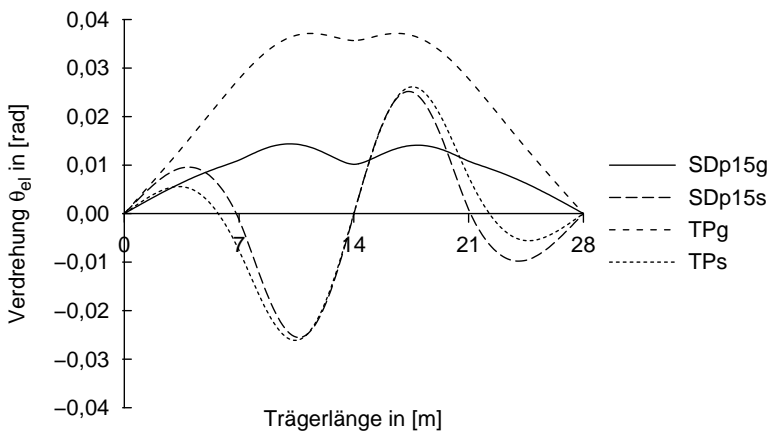
$b$	=	16,00	cm	Breite des Querschnitts
$h$	=	112,00	cm	Höhe des Querschnitts
$l$	=	28	m	Länge des Trägers
$\lambda_{rel,m}$	=	0,99		
		3		seitliche Stützungen des Druckgurts

Mit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  liegt der Referenzträger außerhalb der praxisüblichen Kippschlankheiten, dennoch wird dieser Träger als Referenzträger gewählt, da er sich zur Erläuterung der mechanischen Zusammenhänge eignet.

Sämtliche Verformungen und Schnittgrößen werden auf den Ursprung des Koordinatensystems im Querschnittsschwerpunkt im Endauflager bezogen. Damit sind beim gekrümmten Träger die seitlichen Halterungen bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Querschnitts im Endauflager weiter oben (negative  $z$ -Koordinate) angeordnet. Dies hat zur Folge, dass der sinushalbwellenförmig vorgekrümmte parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt (SDp15g) im Vergleich zum parallelgurtigen geraden Träger (TPg) unter der gleichen vertikalen Beanspruchung eine größere horizontale Verformung, vgl. Abb. 7.13, erfährt. Der Grund für die größere horizontale Verformung des parallelgurtigen Trägers mit angehobenem Untergurt liegt in der weiter in negative  $z$ -Richtung verschobenen Drehachse bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts im Endauflager, vgl. Abb. 7.15. Die Verdrehung des Querschnitts bezogen auf die Ausgangslage des jeweils betrachteten Querschnitts ist beim parallelgurtigen Träger



**Abbildung 7.13:** Horizontale Verformung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig geraden (TP) und parallelgurtig gekrümmten (SDp) Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger (s) und sinushalbwellenförmiger (g) Vorkrümmung



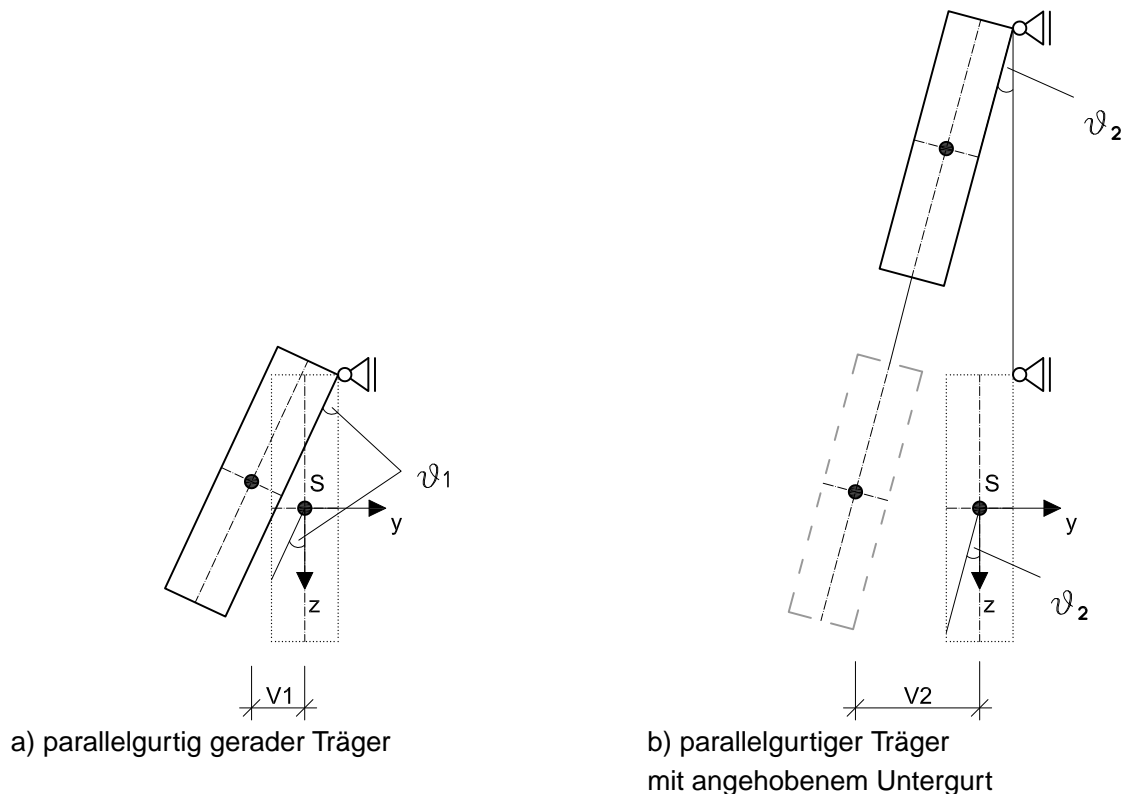
**Abbildung 7.14:** Verdrehung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig geraden (TP) und parallelgurtig gekrümmten (SDp) Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger (s) und sinushalbwellenförmiger (g) Vorkrümmung

mit angehobenem Untergurt  $\vartheta_2$  geringer als beim parallelgurtigen, geraden Träger  $\vartheta_1$ . Die Ursache liegt auch hier in der weiter in negativer z-Richtung liegenden Drehachse des Querschnitts, durch die eine „steifere“ Lagerung des Querschnitts gegen ein Verdrehen erzeugt wird. Abb. 7.15 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen horizontaler Verformung und Verdrehung.

Für das Torsionsmoment in der Auflagergabel ist der Anteil aus St. Venant'scher Torsion der maßgebende, der sich aus der 1. Ableitung der Verdrehung berechnet.

$$M_t = G \cdot I_t \cdot \vartheta^I \quad (7.2)$$

Die anhand von Abb. 7.14 und Abb. 7.15 erläuterten mechanischen Zusammenhänge spiegeln sich in der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  in den Abb. 7.7 und Abb. 7.16 wider. Aufgrund der kleineren Verdrehung ( $\vartheta_2 < \vartheta_1$ ) des parallelgurtigen Trägers mit angehobenem Untergurt (SDp15g) entsteht eine kleinere Schubspannungs-



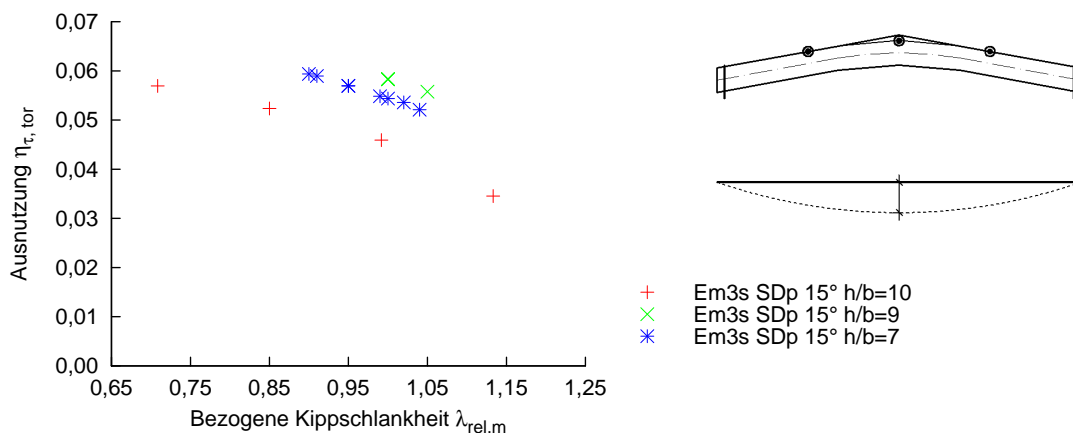
**Abbildung 7.15:** Horizontale Verformung und Verdrehung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei seitlicher Stützung des Druckgurts

ausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  als bei parallelgurtigen geraden Trägern (TPg) bei sinus-halbwellenförmiger Vorkrümmung.

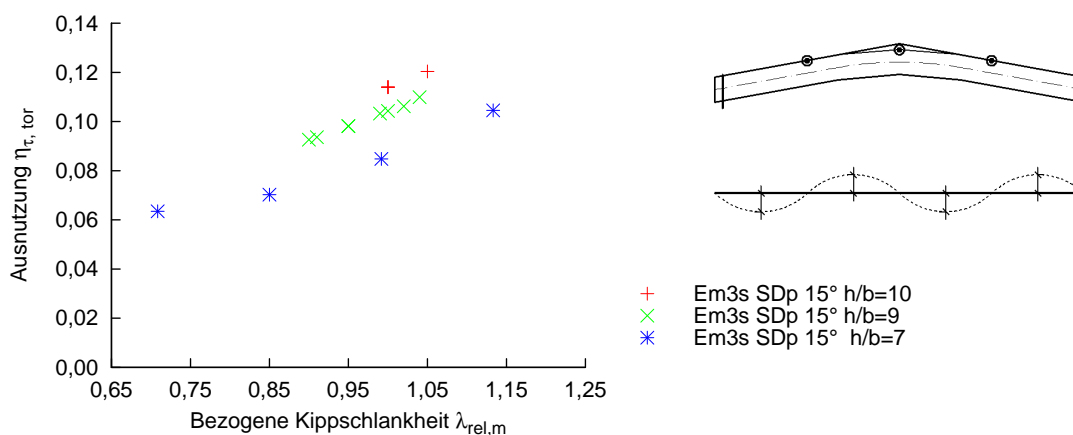
Für die sinuswellenförmig vorgekrümmten Träger muss eine gesonderte Betrachtung erfolgen. Durch den sinuswellenförmigen Vorkrümmungsverlauf erfahren die diskreten Punkte, in denen die horizontale Stützung des Druckgurts erfolgt, keine Verschiebung infolge Vorkrümmung. Infolge der planmäßigen Gleichlast am Obergurt  $q_{zOG}$  ist die Verdrehung am parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt größer als am parallelgurtigen geraden Träger. Aufgrund des sinuswellenförmigen Vorkrümmungsverlaufs sind in den diskreten Stützungen des Druckgurts Wendepunkte im Vorkrümmungsverlauf vorhanden, so dass durch die wechselnden Exzentrizitäten gegenläufige Verdrehungen in den einzelnen Feldern entstehen. Durch den sinuswellenförmigen Vorkrümmungsverlauf und die Lagerung entsteht zunächst in beiden Trägern eine gegenläufige Verdrehung (Schränkung) des Trägers bezogen auf den jeweiligen Schwerpunkt des Querschnitts im Auflager. Die seitliche Lagerung und die Lage der Drehachse haben zur Folge, dass sich der parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt bei Belastung stärker verdreht als der parallelgurtige, gerade Träger. Die größere Verdrehung in den Feldern an den Endauflagern führt damit über die 1. Ableitung der Verdrehung zu einem größeren Torsionsmoment im Endauflager beim parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt als am parallelgurtigen geraden Träger.

Die Auswertung der Parameterstudie an parallelgurtigen Einfeldträgern mit angehobenem Untergurt bei drei seitlichen Stützungen des Druckgurts mit sinus-halbwellenförmiger

(Abb. 7.16) und sinuswellenförmiger (Abb. 7.17) Vorkrümmung weisen keine signifikante Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau,tor}$  am Endauflager liegt im praxisrelevanten Bereich bei  $\leq 10\%$ .



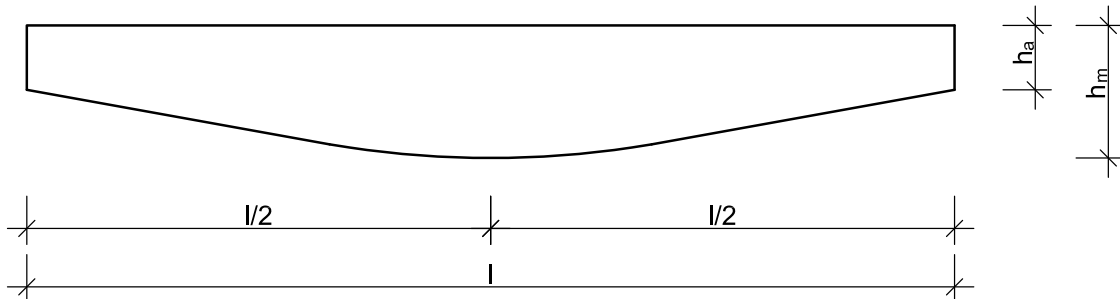
**Abbildung 7.16:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit angehobenem Untergurt bei drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung



**Abbildung 7.17:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit angehobenem Untergurt bei drei seitlichen Stützungen des Druckgurts und sinuswellenförmiger Vorkrümmung

## 7.2.4 Parameterbereich der Berechnungen für den Fischbauchträger

### 7.2.4.1 Parameter



**Abbildung 7.18:** Schematische Darstellung: Fischbauchträger

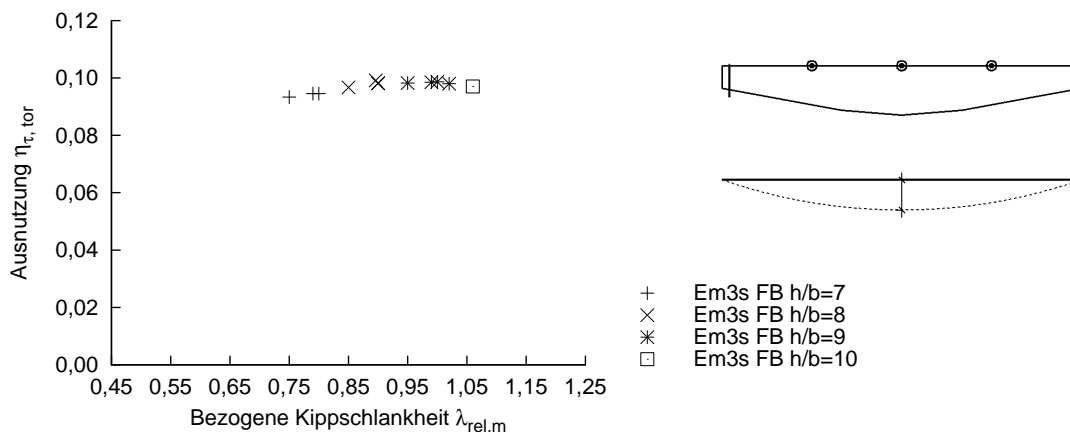
Gelegentlich werden Brettschichtholzträger auch als Fischbauchträger gefertigt, siehe Abb. 7.18. Aus statischer Sicht betrachtet, wird beim Fischbauchträger der Momentenverlauf des Einfeldträgers an der Formgebung des Querschnitts sichtbar. In Feldmitte besitzt der Fischbauchträger die größte Höhe und damit das größte Widerstandsmoment, das sich positiv auf Längsspannungen infolge Biegung auswirkt. In Bezug auf den Schubspannungsverlauf über die Trägerlänge ist die Anpassung der Trägerform an den Momentenverlauf eher nachteilig. Das Maximum der Schubspannungen infolge planmäßiger Querkraft tritt am Auflager auf. Infolge des verringerten Querschnitts dort, sind somit größere Schubspannungen zu erwarten als bei parallelgurtigen Trägern. Der untersuchte Parameterbereich für den Fischbauchträger ist in Tab. 7.4 zusammengestellt.

**Tabelle 7.4:** Berechnungsparameter für den Fischbauchträger

	min	max
Spannweite	10 m	30 m
Trägerhöhe (First)	64 cm	200 cm
Höhe am Auflager (Traufhöhe)	$l/25$	$l/20$
Breite	12 cm	22 cm
$h/b$ -Verhältnis (First)	4	10

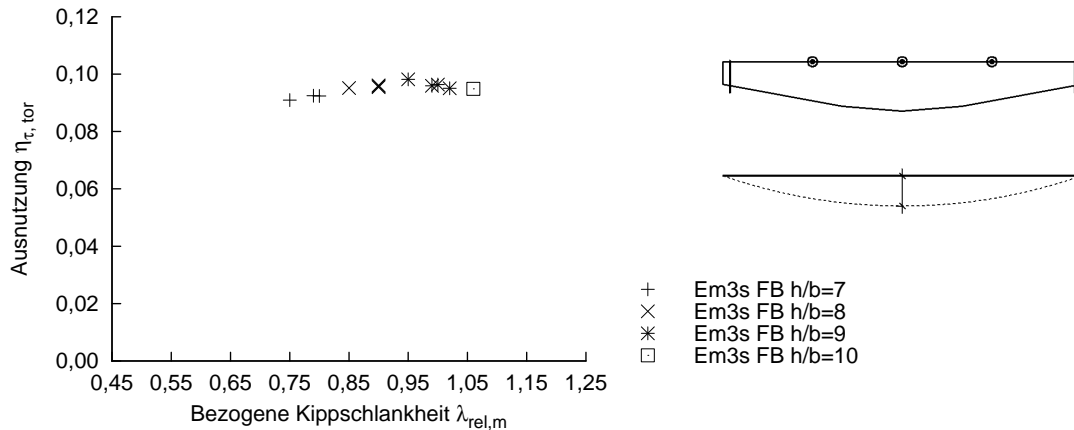
### 7.2.4.2 Der Fischbauchträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

Die Untersuchungen am Fischbauchträger wurden zunächst mit einer sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung der Träger durchgeführt und die Querschnittshöhen an den Endauflagern zwischen  $l/20$  und  $l/25$  variiert. Die Trägerhöhe in Feldmitte beträgt bei allen untersuchten Trägern  $l/17$ , so dass sich aus den Trägerhöhen an den Endauflagern und in Feldmitte ein Neigungswinkel des Untergurts gegen die Horizontale zwischen  $1^\circ$  und  $3^\circ$  ergibt. In der Baupraxis sind herstellungstechnisch Untergurtneigungswinkel bis  $15^\circ$  möglich. Aus statischer Sicht und aufgrund der geringen Schubfestigkeit des Werkstoffs Holz im Vergleich zu dessen Biegefestigkeit erscheinen derart große Untergurtneigungswinkel wenig sinnvoll, da in diesen Fällen stets der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend wird und somit die volle Biegetragfähigkeit des Querschnitts nicht ausgenutzt werden kann. In den Abb. 7.19 und Abb. 7.20 ist die Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für die untersuchten Fischbauchträger mit einer Trägerhöhe am Endauflager  $h_a = l/20$  und  $h_a = l/25$  dargestellt. Der Vergleich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion der in Abb. 7.19 und Abb. 7.20 dargestellten Ergebnisse zeigt, dass für Fischbauchträger mit einer Trägerhöhe am Endauflager  $h_a = l/20$  und drei seitlichen Stützungen des Druckgurts die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion sich nur unwesentlich vom Fischbauchträger mit einer Trägerhöhe am Endauflager  $h_a = l/25$  unterscheidet. Die Schubspannung infolge Torsion führt in den untersuchten Querschnitten an den Endauflagern zu einer Schubspannungsausnutzung  $\eta_{\tau,tor}$  von maximal 10% der aufnehmbaren Schubspannung, wobei kein Einfluss des  $h/b$ -Verhältnis auf die Schubspannungsausnutzung feststellbar ist.



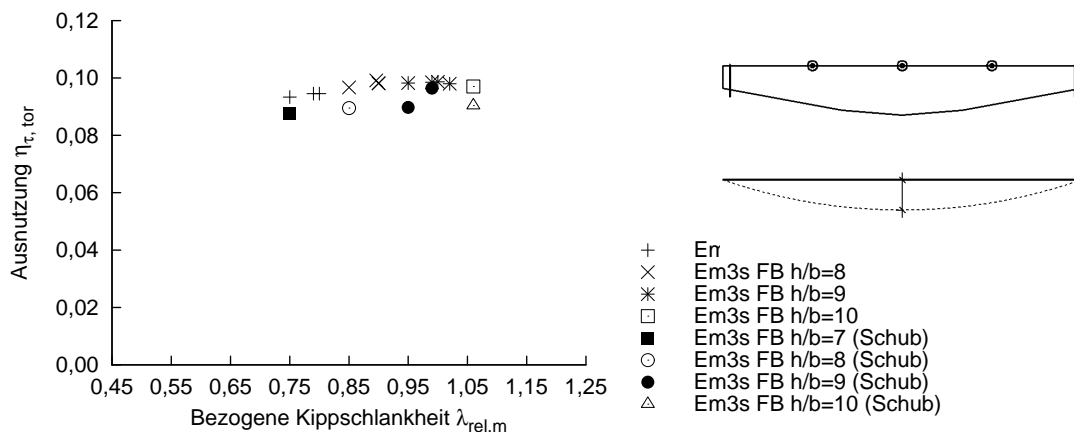
**Abbildung 7.19:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/20$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

Die verringerte Trägerhöhe am Endauflager hat für Fischbauchträger mit einer Trägerhöhe am Endauflager  $h_a = l/20$  zur Folge, dass für eine geringe Anzahl der untersuchten Träger der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend ist, so dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion an den Endauflagern geringfügig unter der von Fischbauchträgern liegt, für die der Längsspannungsnachweis maßgebend ist, vgl. Abb. 7.21. Wird die Trägerhöhe am Endauflager der Fischbauchträger auf  $h_a = l/25$  reduziert, nimmt die Zahl der Träger, bei denen die Schubspannungsausnutzung infolge



**Abbildung 7.20:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/25$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

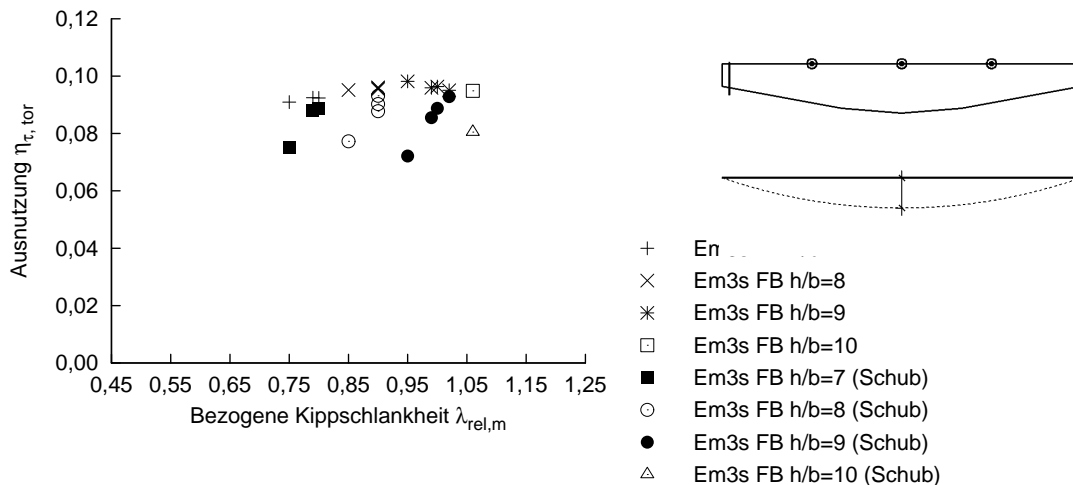
Torsion an den Endauflagern maßgebend ist, deutlich zu. Im Vergleich zu Trägern, bei denen die volle Biegetragfähigkeit erreicht wird, sinkt die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion um bis zu 3% ab.



**Abbildung 7.21:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/20$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

### 7.2.4.3 Der Fischbauchträger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung

Für die weiteren numerischen Untersuchungen am Fischbauchträger wurden die Trägergeometrien aus dem vorangegangenen Abschnitt 7.2.4.2 übernommen und nun anstatt der sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung eine sinuswellenförmige Vorkrümmung auf die Träger aufgebracht. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion an Fischbauchträgern ( $h_a = l/20$ ) ist in Abb. 7.23 dargestellt. Die sinuswellenförmige Vorkrümmung hat im Vergleich zur sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung eine höhere Schubspannungsaus-

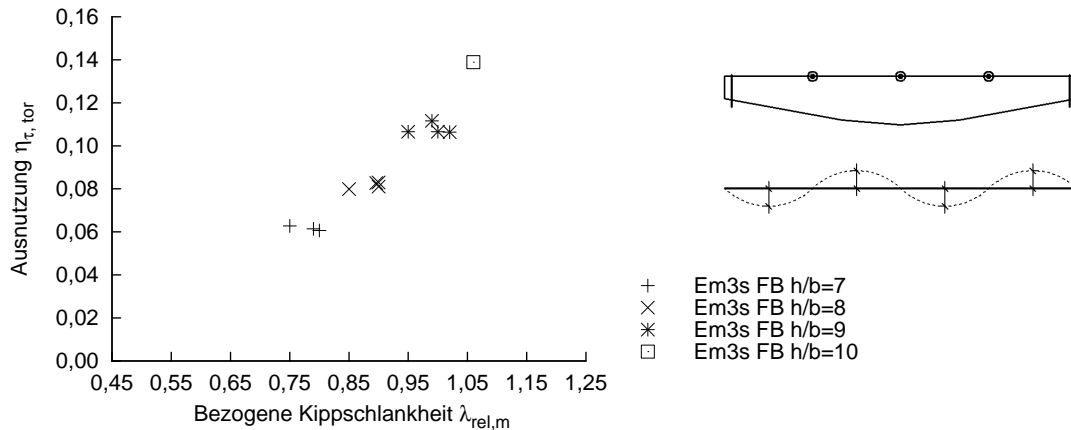


**Abbildung 7.22:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/25$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

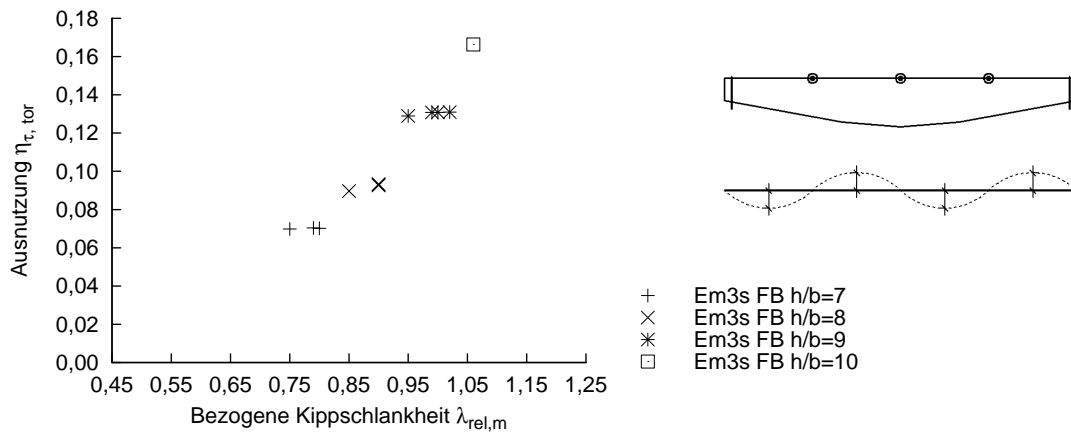
nutzung infolge Torsion an den Endauflagern zur Folge. Zudem ist für den sinuswellenförmigen Vorkrümmungsverlauf eine Abhängigkeit vom auf den Firstquerschnitt bezogenen  $h/b$ -Verhältnis des Trägers feststellbar. Träger mit kleinerem  $h/b$  weisen dabei eine geringere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion an den Endauflagern auf, als Träger mit großem  $h/b$ . Da die Trägerhöhe am Auflager durch die Annahme  $h_a = l/20$  bzw.  $h_a = l/25$  ausschließlich an die Trägerlänge gekoppelt ist, ist die Verjüngung des Querschnitts vom First zu den Auflagern hin bei Trägern mit großem  $h/b$  ausgeprägter als bei Trägern mit kleinem  $h/b$ , der Neigungswinkel des Untergurts gegen die Horizontale nimmt mit zunehmendem  $h/b$ -Verhältnis zu. Zudem wirkt sich die unterschiedliche Steifigkeitsverteilung über die Trägerlänge zusammen mit der sinuswellenförmigen Vorkrümmung insgesamt ungünstig auf die Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung aus. Am kleineren Trägerquerschnitt am Endauflager ( $h_a = l/25$ ) ist die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion geringfügig größer als am größeren Trägerquerschnitt am Endauflager ( $h_a = l/20$ ). Die geringere Steifigkeit des kleineren Trägerquerschnitts am Endauflager ( $h_a = l/25$ ) führt zu einer größeren Verdrehung des Trägers am Endauflager als beim größeren Trägerquerschnitt ( $h_a = l/20$ ).

Der Vergleich zwischen Fischbauchträgern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und Fischbauchträgern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung zeigt, dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei Fischbauchträgern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung bei den untersuchten Trägern im Mittel bei etwa 10% der zulässigen Schubspannung liegt und bei Fischbauchträgern mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung bis zu 17% der zulässigen Schubspannung erreicht. Insgesamt ist beim Fischbauchträger eine höhere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion festzustellen als bei den parallelgurtigen geraden und parallelgurtigen Trägern mit angehobenem Untergurt. Je ausgeprägter die Wölbung des Fischbauchs ist, desto mehr ähnelt die Tragwirkung des Fischbauchträgers der eines unterspannten Trägers und umso größer sind die auftretenden Zusatzspannungen aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Durch die Wölbung des Trägers im Zuggurtbereich ist dieser nicht gerade, strebt infolge seiner Zugbeanspruchung jedoch danach die kürzest mögliche Strecke im Raum zwischen den Endauflagern einzunehmen. Aufgrund





**Abbildung 7.23:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/20$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung

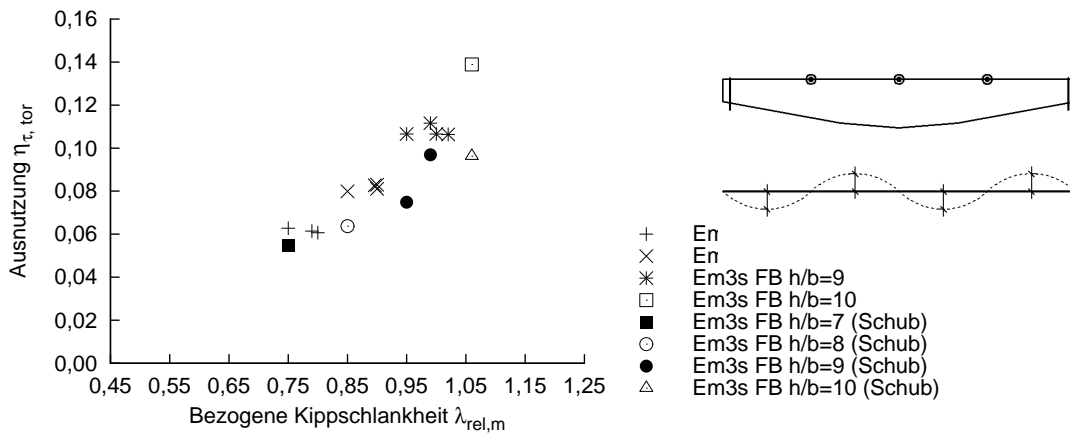


**Abbildung 7.24:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/25$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung

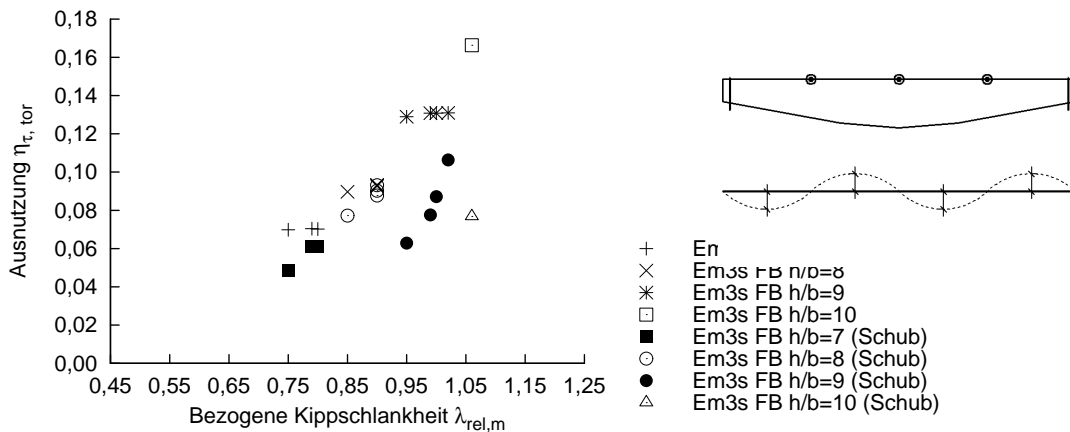
der aufgebrachtten seitlichen Vorkrümmung hat die Stabilisierung des Fischbauchträgers eine größere Verdrehung zur Folge und damit eine höhere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion als bei parallelgurtigen geraden und parallelgurtigen Trägern mit angeho-benem Untergurt.

Infolge der gewählten Trägerform kann bei einer Vielzahl der Träger die volle Biegetragfähigkeit des Trägers nicht erreicht werden, da der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend wird. In Abb. 7.25 und Abb. 7.26 ist die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion für den Querschnitt am Endauflager für Fischbauchträger dargestellt, bei denen der Schubspannungsnachweis maßgebend ist. Für Fischbauchträger mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/20$  am Endauflager ist der Schubspannungsnachweis bei einer geringeren Anzahl an Trägern als bei Fischbauchträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/25$  am Endauflager maßgebend. Die Schubspannungsausnutzung infolge des Torsionsmoments liegt in allen untersuchten Fällen, in denen der Schubspannungsnachweis

maßgebend ist, unterhalb der Schubspannungsausnutzung infolge des Torsionsmoments von Fischbauchträgern, bei denen die volle Biegetragfähigkeit ausgenutzt werden kann.



**Abbildung 7.25:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/20$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung

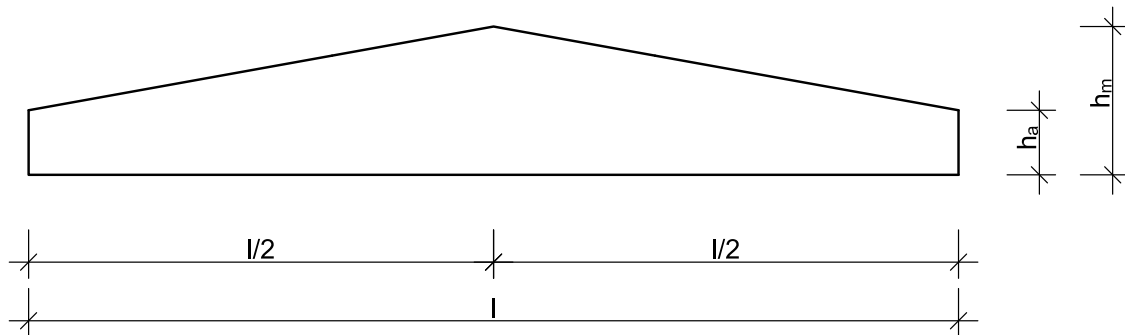


**Abbildung 7.26:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Fischbauchträger ( $h_a = l/25$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung

Die quantitative Abnahme der Schubspannungen infolge des Torsionsmoments im Querschnitt am Endauflager ist auch hier, wie in Kapitel 7.2.2.2 erläutert, hauptsächlich von der Trägerlänge und dem  $h/b$ -Verhältnis des Querschnitts abhängig. Durch die Verjüngung der Querschnittshöhe zum Auflager hin verringert sich der Schubspannungsquerschnitt und damit die maximal aufnehmbaren Querkräfte und Torsionsmomente. Die maximale Schubtragfähigkeit wird bei Fischbauchträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/25$  am Endauflager früher erreicht als bei Fischbauchträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/20$  am Endauflager.

## 7.2.5 Parameterbereich der Berechnungen für den Satteldachträger mit geradem Untergurt

### 7.2.5.1 Parameter



**Abbildung 7.27:** Schematische Darstellung: Satteldachträger

Als weitere holzbautypische Trägerform wird im Rahmen der Parameterstudie der Satteldachträger mit geradem Untergurt und diskreter seitlicher Stützung des Druckgurts untersucht, siehe Abb. 7.27. Tab. 7.5 beinhaltet den Parameterbereich der Berechnungen für diese Trägerform.

**Tabelle 7.5:** Berechnungsparameter für den Satteldachträger mit geradem Untergurt

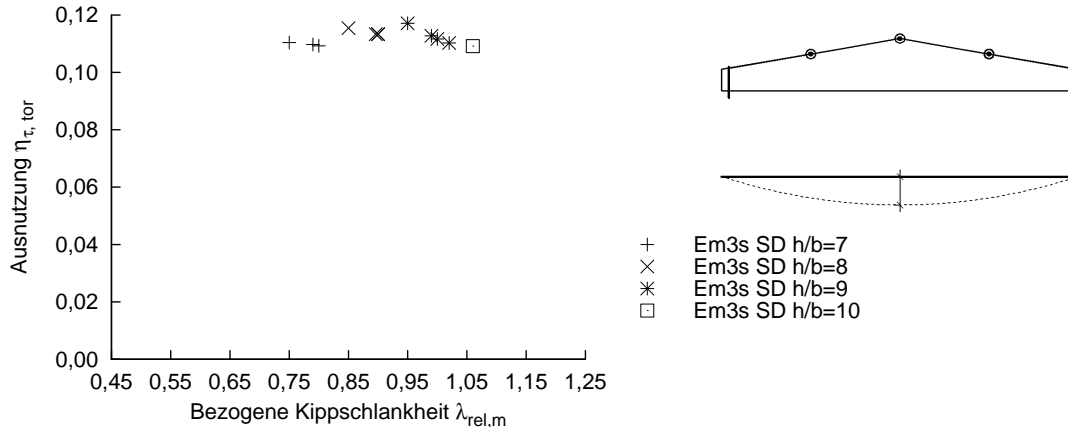
	min	max
Spannweite	10 m	30 m
Trägerhöhe (First)	64 cm	200 cm
Querschnittshöhe am Auflager	$l/30$	$l/30$
Breite	12 cm	22 cm
$h/b$ -Verhältnis (First)	4	10

Mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/30$  am Endauflager fällt der Schubspannungsquerschnitt noch kleiner aus als am Fischbauchträger, vgl. Kap. 7.2.4. Aus der Begrenzung der Trägerhöhe auf 200 cm am First ergeben sich die Trägergeometrien der untersuchten Träger. Der Neigungswinkel des Obergurts gegen die Horizontale beträgt für alle untersuchten Träger zwischen  $3^\circ$  und  $5^\circ$ . Nachfolgend wird die Schubspannungsausnutzung

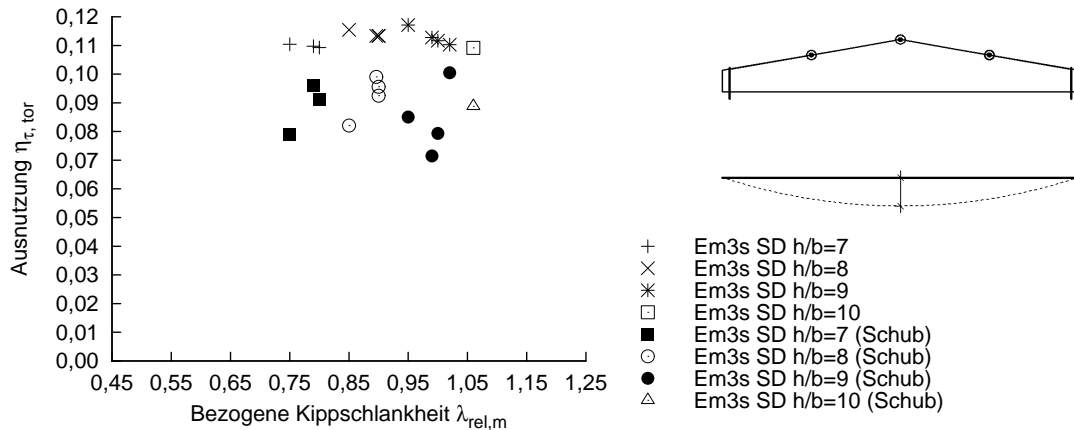
infolge Torsionsmoment für Satteldachträger mit sinuswellen- und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung untersucht.

### 7.2.5.2 Der Satteldachträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

Für Satteldachträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung stellt sich an den untersuchten Trägerkonfigurationen eine Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment von 10% bis 12% der maximal aufnehmbaren Schubspannung ein, siehe Abb. 7.28. Die Schwankungsbreite der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion ist damit bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung sehr gering. Auch zeigt die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion keine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis des Trägers. Im Vergleich zum parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung, vgl. Abb. 7.11, wirkt sich die Trägerform des Satteldachträgers bei gleicher Neigung des Obergurts gegen die Horizontale negativ auf die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Auflager aus. Durch die Verjüngung der Querschnittshöhe zum Auflager hin, weist der Satteldachträger eine höhere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am Auflager auf als der parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt, so dass für einige Trägerkonfiguration die Schubtragfähigkeit am Auflager maßgebend wird, vgl. Abb. 7.29. Zudem führen die veränderlichen Steifigkeiten über die Trägerlänge zu einem Anstieg der Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung, so dass die Bemessungslast auf den Träger bei voller Ausnutzung der Biegefestigkeit unter der des parallelgurtigen Trägers mit angehobenem Untergurt liegt.



**Abbildung 7.28:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Satteldachträger ( $h_a = l/30$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

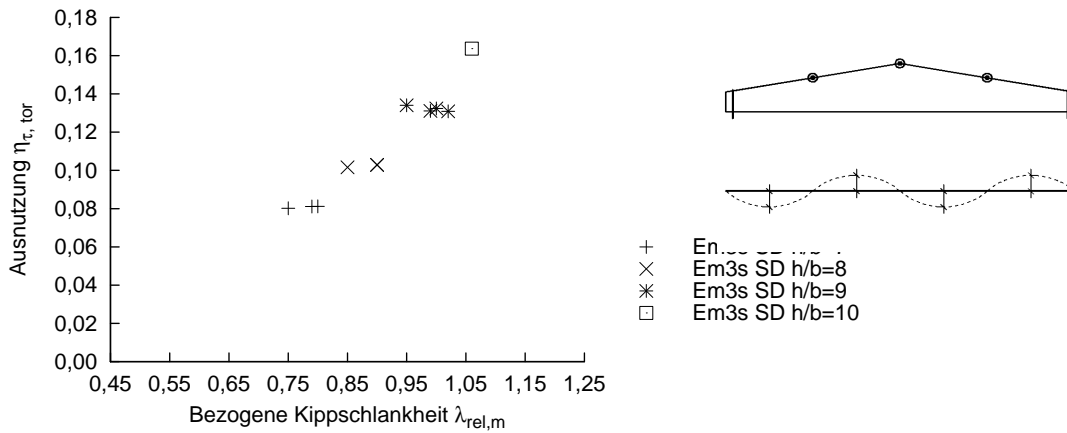


**Abbildung 7.29:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Satteldachträger ( $h_a = l/30$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

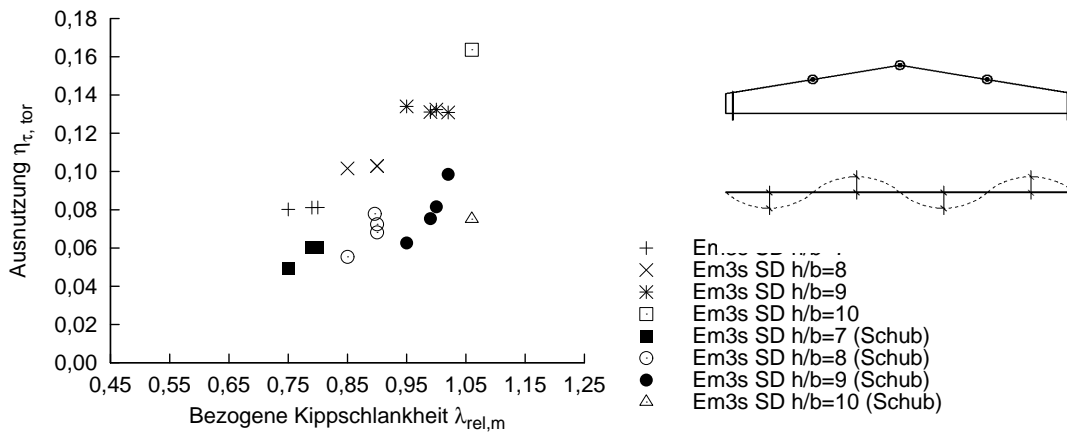
### 7.2.5.3 Der Satteldachträger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung

Für die Untersuchung der Satteldachträger mit sinuswellenförmiger Vorkrümmung werden die gleichen Träger wie im vorangegangenen Abschnitt verwendet. Wird eine sinuswellenförmige Vorkrümmung auf den Satteldachträger aufgebracht, ist im Vergleich zur sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung für große  $h/b$  ein Anstieg der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion an den Endauflagern festzustellen, vgl. Abb. 7.30, für kleine und mittlere  $h/b$  liegt die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion unter der bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung. Damit ist bei sinuswellenförmigem Vorkrümmungsverlauf eine Abhängigkeit der Schubspannungsausnutzung vom  $h/b$ -Verhältnis des Trägers in Abb. 7.30 zu erkennen. Da die Trägerhöhe am Auflager durch die Annahme  $h_a = l/30$  an die Trägerlänge gekoppelt ist, ist die Verjüngung der Querschnittshöhe vom First zu den Auflagern hin bei Trägern mit großem  $h/b$  ausgeprägter als bei Trägern mit kleinem  $h/b$ . Die unterschiedliche Steifigkeitsverteilung über die Trägerlänge zusammen mit der sinuswellenförmigen Vorkrümmung wirkt sich somit insgesamt ungünstig auf die Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung aus.

Die Verjüngung der Querschnittshöhe vom First zu den Auflagern hin hat außerdem zur Folge, dass in vielen Fällen der Schubspannungsnachweis maßgebend wird. Abb. 7.31 veranschaulicht die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion unter Berücksichtigung des für die Bemessung der Träger maßgebenden Schubspannungsnachweises. Wie bei den zuvor untersuchten Trägerformen reduziert sich die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion, wenn der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend wird. Bei gleichem  $h/b$ -Verhältnis halbiert sich bei einzelnen Trägern die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion gegenüber Trägern, bei denen die volle Biegetragfähigkeit für die Bemessung maßgebend wird.



**Abbildung 7.30:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Satteldachträger ( $h/h_a = l/30$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung



**Abbildung 7.31:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Satteldachträger ( $h/h_a = l/30$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung

## 7.3 Parameterstudie an vorgekrümmten Einzelträgern unter Berücksichtigung verformter Aussteifungsverbände

### 7.3.1 Erfassung der Nachgiebigkeit eines Aussteifungsverbands

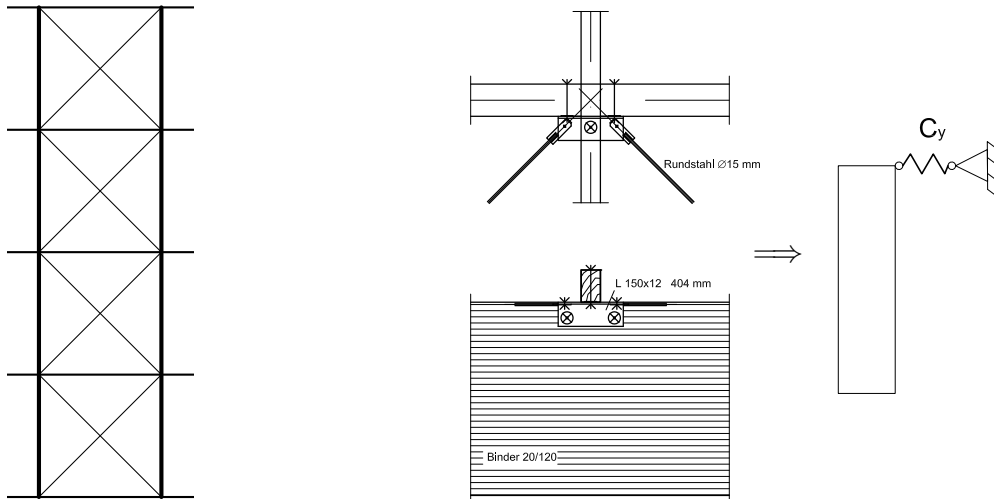
Im vorangegangenen Kapitel 7.2 wurden ausschließlich vorgekrümmte Einzelträger mit starrer Stützung des Druckgurts in diskreten Einzelpunkten untersucht. Diese Art der Lagerung kann in der Praxis jedoch häufig nicht realisiert werden. Häufig erfolgt die Aussteifung der Druckgurte kippgefährdeter Träger über Verbände, siehe Abb. 7.32, die selbst eine gewisse Nachgiebigkeit aufweisen. Die Wirkungsweise solcher Aussteifungsverbände



**Abbildung 7.32:** Ausgeführte Hallenkonstruktion mit Brettschichtholzbindern und Aussteifungsverbänden

ist möglichst zutreffend zu erfassen. Dafür kommen zwei mögliche Herangehensweisen infrage:

- **Modellierung der diskreten Stützungen mit Einzelfedern:** Die Modellierung von Einzelfedern stellt für den Einzelträger die bestmögliche Abbildung des statischen Systems aus Träger und Horizontalverband dar. Die Federsteifigkeit in den diskreten Punkten der Stützung können für den zum Einbau vorgesehenen Verband unter Berücksichtigung seiner Nachgiebigkeit vergleichsweise einfach, aber auch hinreichend genau berechnet werden. Die Anschlüsse müssen hierfür bereits dimensioniert sein, um die tatsächliche Steifigkeit des Aussteifungsverbands in das Rechenmodell integrieren zu können, siehe Abb. 7.33. Als Nachteil dieser Herangehensweise ist zu nennen, dass die Bestimmung der Verformung des Verbands und die daraus resultierenden Verformungen und Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung nur iterativ vorgenommen werden kann, wenn mehr als ein Träger an den Aussteifungsverband angeschlossen ist, wie dies in der Praxis in der Regel der Fall ist. Äußere Lasten sowie die Seitenlasten der angeschlossenen Binder werden als Normalkraft auf die Einzelfedern aufgebracht, um die tatsächliche zu erwartende Verformung des Aussteifungsverbands und damit die Schnittgrößen



a) Grundriss Aussteifungsverband    b) Verbandsknoten    c) Federelement

**Abbildung 7.33:** Abstraktion des Aussteifungsverband mittels Einzelfedern in den Verbandsknoten

nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung berechnen zu können. Die Bestimmung des Torsionsmoments im Querschnitt an den Endauflagern kippgefährdeter Biegeträger ist zudem stark system- und steifigkeitsabhängig.

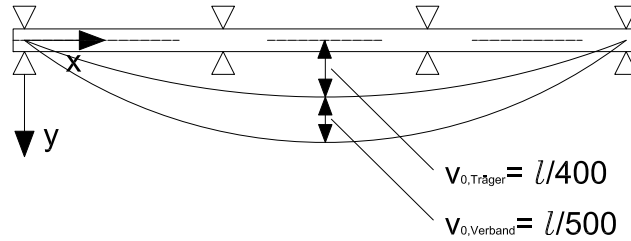
- **Modellierung der Verbandsverformung als zusätzliche Vorkrümmung:** In der Holzbaunormung, vgl. [51], [24] und [2], ist die Verformung von Aussteifungsverbänden infolge äußerer Lasten und Binderseitenlasten auf  $l/500$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit begrenzt. Daraus ergibt sich eine Mindestanforderung an die konstruktive Ausführung aussteifender Horizontalverbände, die für die Anwendung des Ersatzstabverfahrens am stabilitätsgefährdeten Träger eine mechanisch hergeleitete Grundbedingung darstellt. Der Aussteifungsverband ist gegen den maximal zulässigen Wert der Verformung von  $l/500$  im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung der auf ihn einwirkenden Lasten nachzuweisen. Für die Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung wird die horizontale Ausbiegung eines Aussteifungsverbands für die Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am kippgefährdeten Biegeträger als zusätzliche Vorkrümmung angesehen und mit der Vorkrümmung des Trägers überlagert, vgl. Abb. 7.34. Die Bestimmung der Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung erfolgt dann unter Berücksichtigung der Gesamtvorkrümmung

$$v_{0,ges} = v_{0,Träger} + v_{0,Verband} \quad (7.3)$$

Durch die Überlagerung der Vorkrümmung des Binders mit der größten zulässigen Verformung des Aussteifungsverbands wird die größtmögliche seitliche Auslenkung des Binders erzielt und damit eine auf der sicheren Seite liegende Erfassung der Nachgiebigkeit des Aussteifungsverbands möglich.

Für die nachfolgende Parameterstudie wurde die Modellierung des Aussteifungsverbands mittels Erhöhung der Vorkrümmung um das höchste zulässige Maß der Verformung von



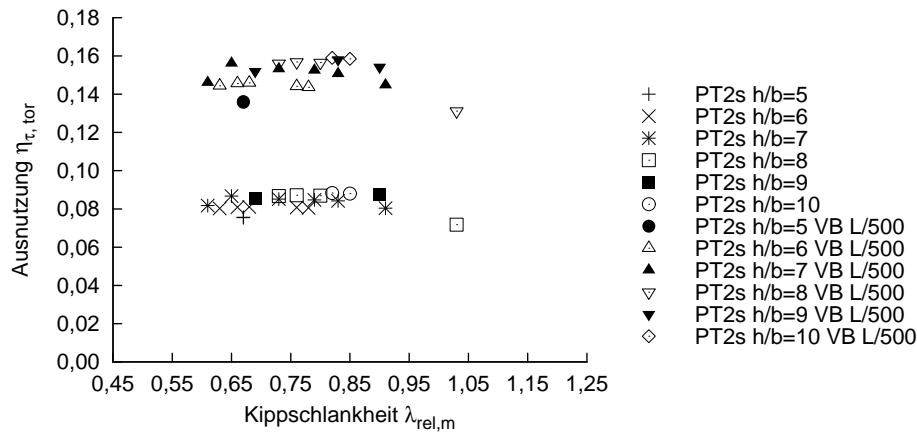


**Abbildung 7.34:** Sinushalbwellenförmige Vorkrümmung des Trägers und horizontale Ausbiegung des Horizontalverbands

Aussteifungsverbänden  $l/500$  vorgenommen. Durch die Wahl dieser Vorgehensweise wurde es möglich, eine sichere Aussage über das Torsionsmoment im Querschnitt an den Endauflagern kippgefährdeter Biegeträger zu machen, ohne den aufgeführten Aussteifungsverband und das System im Detail zu kennen.

### 7.3.2 Der parallelgurtige Träger mit Vorkrümmung und Verformung des Verbands

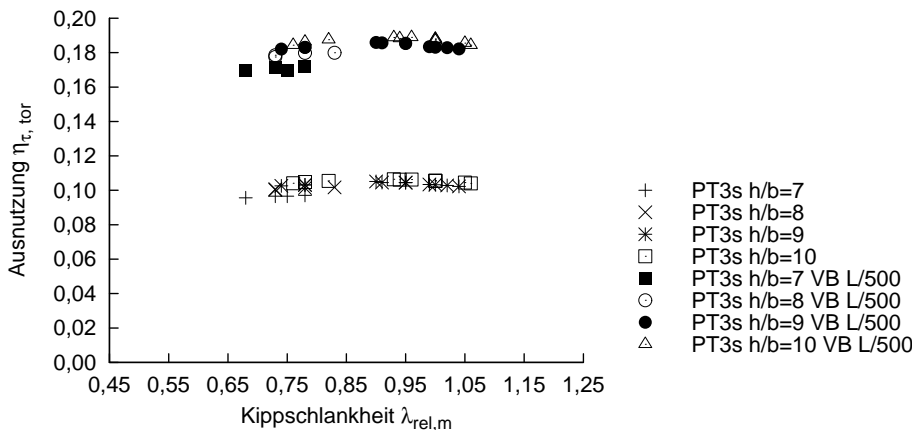
Für den parallelgurtigen geraden Einzelträger stellt sich unter sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung das ungünstigste Torsionsmoment im Querschnitt am Auflager ein, wie in Kapitel 7.2.2.3 dargestellt. Im Folgenden wird nun die sinushalbwellenförmige Vorkrümmung mit der maximal zulässigen Durchbiegung des Verbands  $l/500$  überlagert und anschließend eine Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung vorgenommen.



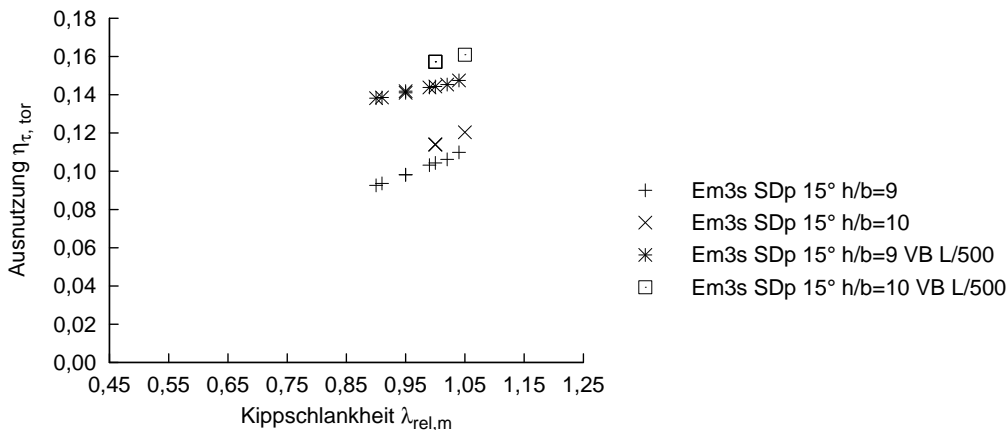
**Abbildung 7.35:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung ohne und mit Berücksichtigung eines Verbands (VB)

Im Vergleich zum Einzelträger mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung verdoppelt sich bei Trägern mit zwei horizontalen Stützungen des Druckgurts die Schubspannungsausnutzung infolge Schub nahezu, wenn die maximal zulässige Verformung des Verbands mit in Ansatz gebracht wird, wie aus Abb. 7.35 ersichtlich ist. Für parallelgurtige, gerade Träger mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts steigt die Schubspannungsausnutzung

infolge Torsion im Querschnitt am Auflager auf maximal 19% bei Berücksichtigung der maximal zulässigen Durchbiegung des Verbands, siehe Abb. 7.36. Anschließend wurde stichprobenartig an einigen der zuvor untersuchten Trägerkonfigurationen eine sinuswellenförmige Vorkrümmung aufgebracht und mit dem höchsten zulässigen Maß der Verformung von Aussteifungsverbänden  $l/500$  überlagert, dabei wurde in keiner untersuchten Konfiguration die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager von 19% überschritten. Für parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt ist

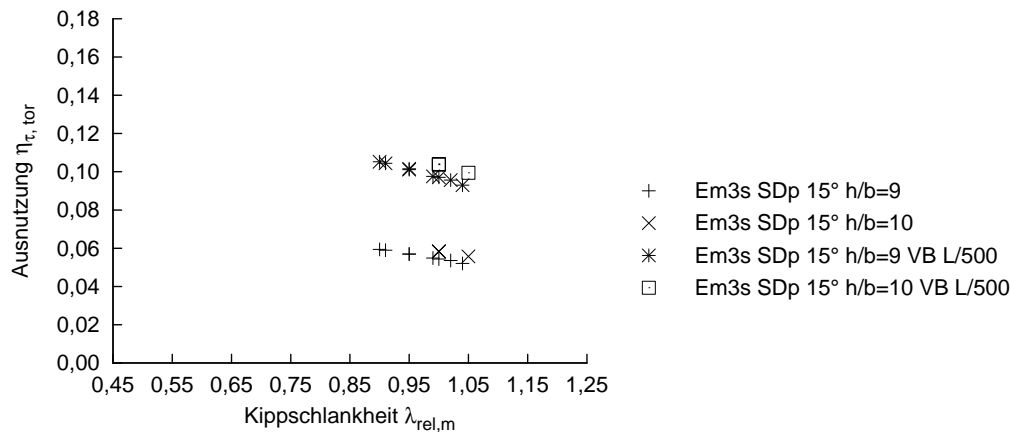


**Abbildung 7.36:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung ohne und mit Berücksichtigung eines Verbands (VB)



**Abbildung 7.37:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit angehobenem Untergurt und drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung des Trägers und überlagerter sinuswellenförmiger Durchbiegung des Verbands (VB)

in Kapitel 7.2.3.2 unter sinuswellenförmiger Vorkrümmung des Einzelträgers die ungünstigste Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager festgestellt worden. Zur Berücksichtigung der Durchbiegung des Verbands wird die sinuswellenförmige Vorkrümmung mit der maximal zulässigen Durchbiegung des Verbands  $l/500$



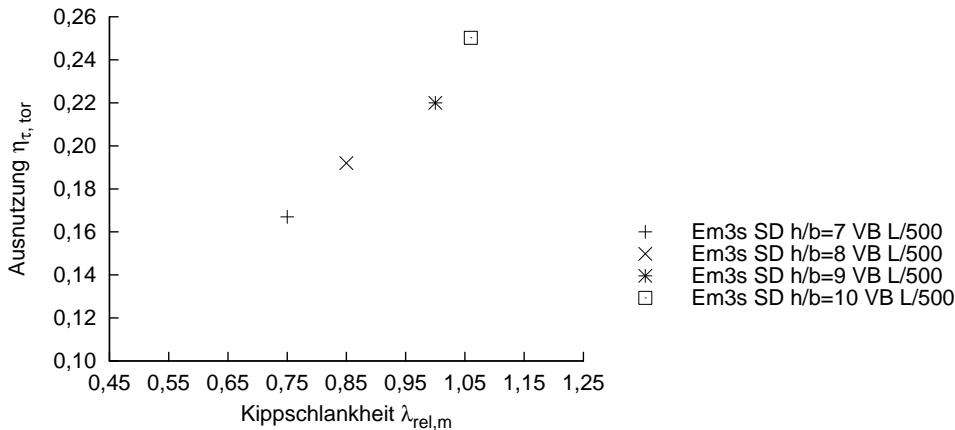
**Abbildung 7.38:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an parallelgurtigen Einfeldträgern mit angehobenem Untergurt und drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung des Trägers und überlagerter sinushalbwellenförmiger Durchbiegung des Verbands (VB)

überlagert. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion überschreitet 12% unter sinuswellenförmiger Vorkrümmung des Einzelträgers nicht. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der maximal zulässigen Durchbiegung des Verbands  $l/500$  steigt die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion auf maximal 17%, vgl. Abb. 7.37. Damit ist die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt quantitativ vergleichbar mit der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am parallelgurtigen, geraden Träger, so dass für die nachfolgende Entwicklung eines Bemessungskonzepts zur vereinfachten Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung keine Unterscheidung der beiden Trägerformen als notwendig erachtet wird.

Zur Absicherung der maximal auftretenden Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am parallelgurtigen Träger mit angehobenem Untergurt wurde an den zuvor untersuchten Trägerkonfigurationen die sinuswellenförmige Vorkrümmung durch eine sinushalbwellenförmige Vorkrümmung ersetzt, vgl. Abb. 7.38. Es kann gezeigt werden, dass bei keiner der untersuchten Trägerkonfigurationen mit diesem Vorkrümmungsansatz die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion für die Bemessung maßgebend wird.

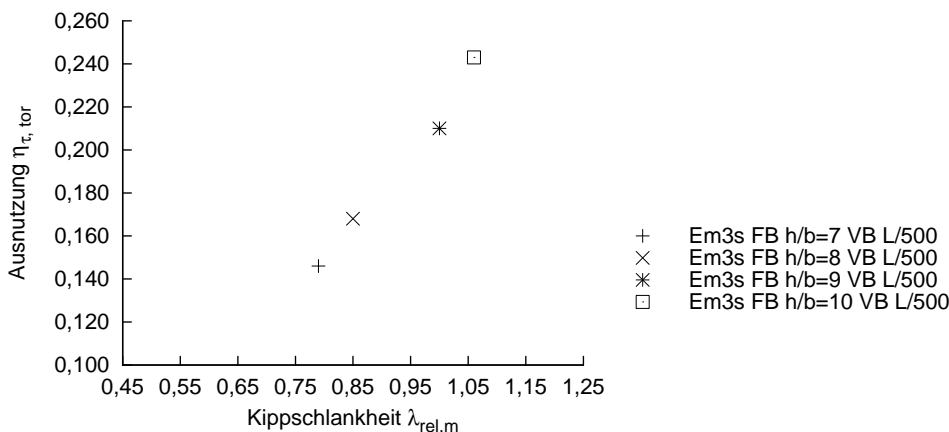
### 7.3.3 Satteldach- und Fischbauchträger mit Vorkrümmung und Verformung des Verbands

Die im vorangegangenen Kapitel 7.3.2 dargestellten Ergebnisse an parallelgurtigen Trägern mit Vorkrümmung und Verformung des Verbands zeigt deutlich, dass die zusätzlich aufgebrachte Verformung des Verbands eine Erhöhung der Schubspannungsausnutzung bewirkt, die sich qualitativ an der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion am Träger ohne zusätzliche Verformung des Verbands orientiert. In den Kapiteln 7.2.4.2, 7.2.4.3 und 7.2.5.2, 7.2.5.3 wurden Satteldach- und Fischbauchträger mit starrer Stützung des Druckgurts in einzelnen Punkten untersucht und die Ergebnisse dargestellt. Aus den erzielten



**Abbildung 7.39:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an Satteldachträgern ( $h_a = l/30$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung des Trägers und überlagerter sinushalbwellenförmiger Durchbiegung des Verbands (VB)

Erkenntnissen lässt sich eine Systematik in der Bestimmung der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei Berücksichtigung der Verformung des Verbands ableiten, so dass die Zahl der numerisch untersuchten Satteldach- und Fischbauchträger erheblich reduziert werden kann. Aus den in den Kapiteln 7.2.4.2, 7.2.4.3 und 7.2.5.2, 7.2.5.3 untersuchten Satteldach- und Fischbauchträger mit starrer Stützung des Druckgurts in einzelnen Punkten wurden einige, repräsentative Trägerkonfigurationen ausgewählt und die Vorkrümmung der Träger mit der maximal zulässigen Durchbiegung des Verbands  $l/500$  überlagert. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager



**Abbildung 7.40:** Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung an Fischbauchträgern ( $h_a = l/25$ ) mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung des Trägers und überlagerter sinushalbwellenförmiger Durchbiegung des Verbands (VB)

beim Satteldachträger beträgt maximal 25% für die Schlankheit  $h/b = 10$ . Damit weisen die numerischen Berechnungen in Abb. 7.39 für Satteldachträger ( $h_a = l/30$ ) eine nahezu verdoppelte Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei Berücksichtigung der Verbandsverformung auf im Vergleich zu den Trägern ohne Berücksichtigung der Verformung des Aussteifungsverbands, vgl. Abb. 7.30.

Die numerischen Berechnungen in Abb. 7.40 weisen für Fischbauchträger ( $h_a = l/25$ ) wie bei Satteldachträgern eine nahezu verdoppelte Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei Berücksichtigung der Verbandsverformung auf im Vergleich zu den Trägern ohne Berücksichtigung der Verformung des Aussteifungsverbands, vgl. Abb. 7.24. Die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager beim Fischbauchträger beträgt im untersuchten Parameterbereich maximal 25%.

## 7.4 Vergleich der Ergebnisse der Parameterstudie mit der vereinfachten Bestimmung des Torsionsmoments zur Gabelbemessung $M_d/80$

Nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] mit Nationalem Anhang DIN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] darf ein durch einachsige Biegung kippgefährdeter Biegestab nach dem Ersatzstabverfahren nachgewiesen werden, für das nur die Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung berechnet werden müssen.

Eine Quantifizierung des einwirkenden Torsionsmoments im Querschnitt am Auflager ist mit dem Ersatzstabverfahren jedoch nicht möglich. In DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] erfolgt eine vereinfachte Angabe des Torsionsmoments am gabelgelagerten Einfeldträger unter konstanter Gleichlast  $q_z$ , für das die Gabelagerung eines kippgefährdeten Trägers zu dimensionieren ist. Das Bemessungsmoment im Auflager als Grundlage für DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] wurde in den Erläuterungen zu DIN 1052:2004-08 [28] hergeleitet und in Kapitel 2.4.2 beschrieben.

Für die Bemessung der Gabelagerung stellt dieser vereinfachte Ansatz eine hinreichend genaue Näherung dar, die zu einer statisch sicheren Dimensionierung der Auflagergabel führt. In der Bemessungspraxis wurde bis zur Neuregelung in DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] sehr häufig, dem Prinzip von actio und reactio folgend, das durch den vereinfachten Berechnungsansatz bestimmte Torsionsmoment  $M_d/80$  auch zum Nachweis der Schubspannungen im Querschnitt berücksichtigt.

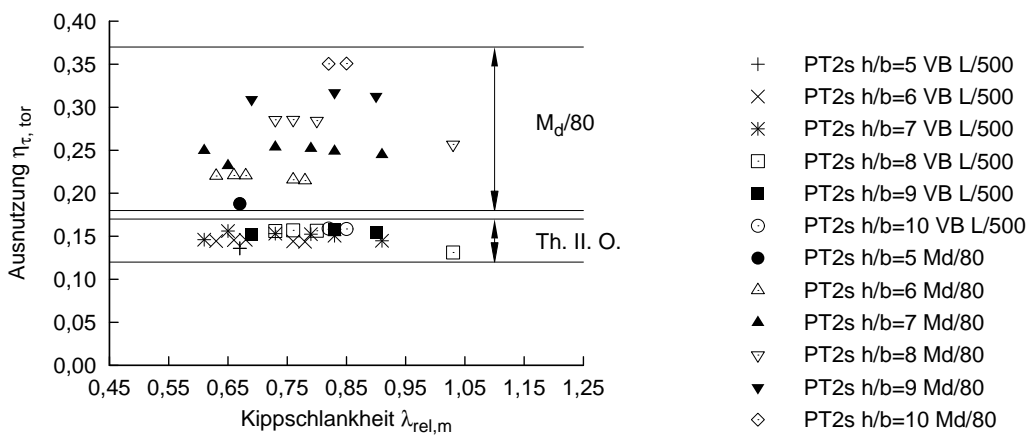
Diese vereinfachte Abschätzung des Torsionsmoments im Querschnitt am Auflager ohne Berücksichtigung diskreter horizontaler Stützungen des Druckgurts führt im Vergleich zu einer Bestimmung des Torsionsmoments nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu einem weit auf der sicheren Seite liegenden Ansatz für die Schubspannungen infolge Torsion, vgl. Abb. 7.41 und Abb. 7.42.

Die aktuelle Neuregelung in DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] zur Berücksichtigung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung beim Nachweis der Querschnittstragfähigkeit an Auflagern sieht vor, dass der Nachweis der Querschnittstragfähigkeit an Auflagern bei Bauteilen ohne Berücksichtigung der Torsionsspannungsanteile aus Gabelmoment erfolgen darf, wenn die mit der Ersatzstablänge  $l_{ef}$  ermittelte Kippschlankheit  $\lambda_{ef} \leq 225$  ist, vgl. Gl. (2.42) in Kap. 2.4.2, und die Stabilisierungskräfte im Bereich der Auflagergabel abgeleitet werden. Damit müssen Verbandspfetten von Aussteifungsverbände in Auflagernähe stets so angeschlossen sein, dass die Stützkräfte dem Torsionsmoment im Querschnitt entgegenwirken. In der Praxis ist eine derartige Ausführung nicht immer möglich, so dass ein genauerer Nachweis notwendig ist. Das Nachweisverfahren wird in DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] dem Anwender nicht vorgegeben, es ist jedoch eine spannungslose

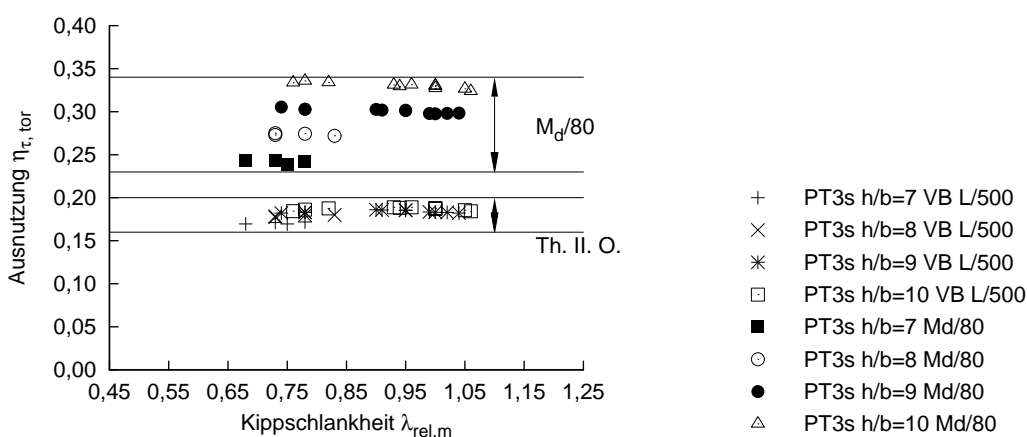
seitliche Vorverformung gemäß Abs. 9.2.5.3 (NA.5), DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] zu

$$e = \frac{l}{400} \cdot k_l \tag{7.4}$$

anzunehmen. Für den Fall, dass doch das Torsionsmoment auch im Querschnitt berücksichtigt werden muss, wird im Folgenden ein Näherungsverfahren auf der Basis von Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Vorkrümmung des Trägers und der Nachgiebigkeit von Aussteifungsverbänden hergeleitet.



**Abbildung 7.41:** Vergleich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung und infolge Näherung  $M_d/80$  an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit zwei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung



**Abbildung 7.42:** Vergleich der Schubspannungsausnutzung infolge Torsionsmoment am Auflager nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung und infolge Näherung  $M_d/80$  an parallelgurtig, geraden Einfeldträgern mit drei seitlichen Stützungen des Druckgurts bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung

## 7.5 Ansatz für ein vereinfachtes Bemessungsverfahren für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung

### 7.5.1 Übersicht

Um das räumliche Tragverhalten kippgefährdeter Biegeträger weiterhin wie ein ebenes Problem nach dem Ersatzstabverfahren behandeln zu können, soll im Folgenden ein Näherungsansatz formuliert werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, das Torsionsmoment unter Berücksichtigung aussteifender Verbände als Effekt aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu berechnen, ohne eine computergestützte Berechnung der Schnittgrößen durchführen zu müssen. Die Schnittgrößen sollen weiterhin nach Theorie I. Ordnung bestimmt werden können und ein Nachweis nach dem Ersatzstabverfahren möglich sein.

Alle im Rahmen der Parameterstudie durchgeführten numerischen Berechnungen wiesen eine Abhängigkeit des Torsionsmoments im Querschnitt am Auflager von der einwirkenden Last  $q_{zOG}$  am Obergurt, sowie der Trägerlänge  $l$ , der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  des Querschnitts auf.

Die Parameterstudie am parallelgurtigen geraden Träger zeigte, dass sich eine sinushalbwellenförmige Vorkrümmung des Trägers am ungünstigsten auf das Torsionsmoment an den Endauflagern des kippgefährdeten Trägers auswirkt. Dabei war bereits im Rahmen der Voruntersuchungen festgestellt worden, dass die Anzahl der seitlichen Stützungen des Druckgurts nur einen geringen Einfluss auf das Torsionsmoment an den Endauflagern des kippgefährdeten Trägers hat, vgl. Abb. 6.23. Durch die Parameterstudie konnte gezeigt werden, dass das  $h/b$ -Verhältnis einen sehr geringen Einfluss auf das Torsionsmoment an den Endauflagern parallelgurtiger, gerader Träger und parallelgurtiger Träger mit angehobenem Untergurt besitzt. Mit zunehmender Anzahl der horizontalen Stützungen des Druckgurts, vgl. Abb. 7.6 und Abb. 7.7, ist zudem nur noch ein sehr geringer Anstieg des Torsionsmoments im Querschnitt an den Endauflagern zu verzeichnen im Falle eines für die Bemessung maßgebenden Biegespannungsnachweises. Ist der Schubspannungsnachweis für die Bemessung maßgebend, geht der Grad der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt an den Endauflagern zurück, vgl. Abb. 7.8 und Abb. 7.9. Dieser Rückgang ist jedoch im starken Maße davon abhängig, wie viel Biegetragfähigkeit bei diesen Trägern „verschenkt“ wird. Aus diesem Grund ist die Streuung des Grads der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt an den Endauflagern vergleichsweise groß. Darüber hinaus zeigen jüngste Forschungsarbeiten u. a. Winter et al. [76] und Blaß/Krüger [77], dass mit Hilfe stiftförmiger Verbindungsmittel weitgespannte Konstruktionen des Ingenieurholzbaus im Hinblick auf die Schubtragfähigkeit sinnvoll verstärkt werden können und damit eine Ertüchtigung des anisotropen Werkstoffes Holz zu erzielen ist. Somit könnte es im Sinne eines wirtschaftlichen Einsatzes des Werkstoffes Holz schon bald möglich sein, auch bei weitgespannten Konstruktionen des Ingenieurholzbaus durch eine gezielte Schubverstärkung die volle Biegetragfähigkeit der Brettschichtholzträger zu nutzen, ohne dabei Abstriche an die ästhetischen Ansprüche an das Holztragwerk hinnehmen zu müssen.

Der im Folgenden hergeleitete Näherungsansatz zur Berechnung des Torsionsmoments im Querschnitt an den Endauflagern beruht demzufolge auf einer vollständigen Biegespannungsausnutzung, die für die Trägerbemessung maßgebend ist, vgl. Kuhlmann/Hofmann in [78], [79].

Wie die Voruntersuchungen am ausgesteiften Biegeträger von Kuhlmann/Hofmann in [74] zeigten, ist die Schubspannung  $\tau_y$  äußerst gering bzw. im Endauflager nicht vorhanden, so dass für die weitere Herleitung Gl. (2.37) reduziert werden kann:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}} \right) + \left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (7.5)$$

Für den kippgefährdeten Einzelträger und kippgefährdete Träger, die über diskrete seitliche Stützungen des Druckgurts verfügen, kann die Schubspannung infolge Torsion nachgewiesen werden mit:

$$\left( \frac{\tau_{tor,d}}{k_{shape} \cdot f_{v,d}} \right) \simeq \eta_{\tau_{tor}} \quad (7.6)$$

Die Schubspannung infolge Torsion berechnet sich zu:

$$\tau_{tor} = \frac{3 \cdot \eta_2 \cdot M_{tor}}{h \cdot b^2} \quad (7.7)$$

Dabei ist:

- $\eta_2$  Beiwert zur Berechnung des Torsionswiderstandsmoments
- $b$  Breite des Querschnitts;
- $h$  Höhe des Querschnitts;

mit  $\eta_2$ :

$h/b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
$\eta_2$	1,609	1,356	1,247	1,183	1,144	1,117	1,099	1,086	1,075	1,067	1,055

Durch Einsetzen von Gl. (7.7) in Gl. (7.6) folgt als Näherung bei bekannter Schubspannungsausnutzung infolge Torsion  $\eta_{\tau_{tor}}$  das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung im Querschnitt am Auflager:

$$M_{tor} = k_{tor} \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{v,d} \quad (7.8)$$

mit:

$$k_{tor} = \frac{\eta_{\tau_{tor}}}{3} \quad (7.9)$$

Der Vorfaktor  $k_{tor}$  ist abhängig von der Trägerform und vom  $h/b$ -Verhältnis des jeweiligen Trägers, an der Stelle mit der größten Höhe. Der Formbeiwert  $k_{shape}$  wird dabei für die hier untersuchten Querschnitte mit  $h/b \geq 4$  gemäß [80] mit 1,3 angesetzt.



## 7.5.2 Parallelgurtige, gerade Träger und parallelgurtige Träger mit angehobenem Untergurt

Bei den untersuchten Konfigurationen an parallelgurtigen, geraden Trägern und parallelgurtigen Trägern mit angehobenem Untergurt liegt die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei maximal 12% der aufnehmbaren Schubspannung bei starrer Abstützung, beispielsweise gegen einen als starr angenommenen Kern. Der Grad der Schubspannungsausnutzung weist dabei nur eine geringe Streuung und keine signifikante Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf. Der Vorfaktor  $k_{tor}$  beträgt damit:

$$k_{tor} = \frac{\eta_{\tau_{tor}}}{3} = \frac{0,12}{3} = 0,04 \quad (7.10)$$

Mit dem Näherungsansatz aus Gl. (7.8) kann das Torsionsmoment im Querschnitt an den Endauflagern dieser Träger bestimmt werden zu:

$$M_{tor} = 0,04 \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.11)$$

Werden die Druckgurte der kippgefährdeten Träger durch Horizontalverbände in diskreten Punkten am Druckgurt gestützt, ist in der durchgeführten Studie an parallelgurtigen, geraden Trägern und parallelgurtigen Trägern mit angehobenem Untergurt mit Vorkrümmung und einer maximal zulässigen Verformung des Horizontalverbands von  $l/500$  eine höhere Schubspannungsausnutzung infolge Schub aus Torsion im Querschnitt am Auflager kippgefährdeter Biegeträger festzustellen, vgl. Kapitel 7.3. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion beträgt dabei maximal 19% bei Berücksichtigung der maximalen Durchbiegung des Verbands.

Als Näherung für das Torsionsmoment im Querschnitt an den Endauflagern kippgefährdeter parallelgurtiger, gerader Träger und parallelgurtiger Träger mit angehobenem Untergurt sowie diskreter Stützung der Druckgurte durch Horizontalverbände kann analog zur Vorgehensweise für den Einzelträger folgende Gleichung angegeben werden:

$$M_{tor} = 0,065 \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.12)$$

mit dem Vorfaktor  $k_{tor}$ :

$$k_{tor} = \frac{\eta_{\tau_{tor}}}{3} = \frac{0,19}{3} = 0,063 \sim 0,065 \quad (7.13)$$

Die in der Praxis vorkommenden Horizontalverbände weisen in der Regel eine geringere Verformung auf als den normativ geregelten zulässigen Höchstwert der Verformung von  $l/500$ , wodurch sich auch eine geringere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager kippgefährdeter Träger einstellt. Wird für die angeschlossenen Horizontalverbände ein Verformungsnachweis auch unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Anschlüsse geführt, kann das Torsionsmoment im Querschnitt am Auflager zwischen der Näherungsgleichung bei starrer Stützung Gl. (7.11) und der Näherungsgleichung Gl. (7.12) für eine maximal zulässige Verformung des Horizontalverbands von

$l/500$  interpoliert werden.

### 7.5.3 Satteldachträger

Für Trägerformen mit veränderlicher Querschnittshöhe, dem Satteldachträger und dem Fischbauchträger, muss eine differenziertere Betrachtung erfolgen, um einen Näherungsansatz formulieren zu können. In der Betrachtung von Satteldachträgern mit sinuswellenförmiger und sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung konnte gezeigt werden, dass bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung absolut betrachtet die höchste Schubspannungsausnutzung infolge Torsion beim größten untersuchten Schlankheitsverhältnis  $h/b = 10$  auftritt. Die in Abb. 7.30 dargestellten Ergebnisse der Parameterstudie an **Satteldachträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/30$  am Auflager** weisen jedoch eine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf, so dass bei einem mittleren  $h/b = 7$  die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion nur etwa die Hälfte der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei einem  $h/b = 10$  ausmacht. Wird nun die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion bei sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung in Abb. 7.28 in die Betrachtung miteinbezogen, so ist festzustellen, dass für  $h/b < 8$  die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion über der bei sinuswellenförmiger Vorkrümmung auftretenden liegt. Für Schlankheiten  $h/b < 8$  beläuft sich die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion auf maximal 11% bei starrer Stützung des Druckgurts in diskreten Punkten, vgl. Abb. 7.28. Für die vereinfachte Bestimmung des Torsionsmoments bei Satteldachträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/30$  am Auflager und Stützung gegen einen als starr angesehenen Kern ergibt sich das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung:

$$M_{tor} = 0,037 \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.14)$$

mit dem Vorfaktor  $k_{tor}$ :

$$k_{tor} = \frac{\eta_{\tau_{tor}}}{3} = \frac{0,11}{3} = 0,037 \quad (7.15)$$

Für Schlankheiten  $h/b > 8$  wird der sinuswellenförmige Vorkrümmungsansatz maßgebend, vgl. Abb. 7.30. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion liegt höher als bei Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und weist zudem eine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf, das im Sinne einer wirtschaftlichen Bemessung in der Herleitung des Näherungsansatzes berücksichtigt wird. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion beträgt für die Schlankheit  $h/b = 10$  maximal 17%. Für den Näherungsansatz zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung für Schlankheiten  $h/b > 8$  kann aufgrund der in Abb. 7.30 dargestellten Ergebnisse aus den numerischen Berechnungen ein linearer Anstieg der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager angenommen werden. Für die vereinfachte Bestimmung des Torsionsmoments bei Satteldachträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/30$  am Auflager und Stützung gegen einen als starr angesehenen Kern ergibt sich das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung:

$$M_{tor} = k_{tor} \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.16)$$

mit dem Vorfaktor  $k_{tor}$ :

$$k_{tor} = 0,0085 \cdot \frac{h}{b} - 0,031 \quad (7.17)$$

Werden die Satteldachträger dagegen durch Horizontalverbände gestützt, erhöht sich die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt an den Auflagern, vgl. Abb. 7.39. Für Schlankheiten  $h/b > 8$  wird der sinuswellenförmige Vorkrümmungsansatz maßgebend. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion liegt höher als bei Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und weist auch hier eine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf, das im Sinne einer wirtschaftlichen Bemessung in der Herleitung des Näherungsansatzes berücksichtigt wird. Für den Näherungsansatz zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung für Schlankheiten  $h/b > 8$  kann, wie für Träger mit starrer Stützung des Druckgurts in diskreten Punkten, ein linearer Anstieg der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager angenommen werden. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion beträgt für die Schlankheit  $h/b = 10$  maximal 25%. Als Vorfaktor  $k_{tor}$  sollte angesetzt werden:

$$\text{für } h/b < 8 \quad k_{tor} = 0,067$$

$$\text{für } h/b \geq 8 \quad k_{tor} = 0,008 \cdot \frac{h}{b} + 0,003$$

### 7.5.4 Fischbauchträger

Bei den Untersuchungen am **Fischbauchträger** wurden außer der sinuswellenförmigen und der sinushalbwellenförmigen Vorkrümmung die Querschnittshöhen am Auflager  $h_a = l/20$  und  $h_a = l/25$  untersucht. Die numerischen Untersuchungen in den Kapiteln 7.2.4.2, 7.2.4.3 haben gezeigt, dass sich die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager für  $h_a = l/20$  und  $h_a = l/25$  in nur vernachlässigbar geringem Umfang unterscheiden. Wie am Satteldachträger ist auch beim Fischbauchträger die höchste Schubspannungsausnutzung infolge Torsion unter sinuswellenförmiger Vorkrümmung zu beobachten und tritt für das größte untersuchte  $h/b = 10$  auf. Für kleinere  $h/b$ -Verhältnisse ist eine geringere Schubspannungsausnutzung infolge Torsion aus Abb. 7.23 und Abb. 7.24 abzulesen, so dass die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion unter sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung des Trägers maßgebend wird, vgl. Abb. 7.20. Für Schlankheiten  $h/b < 8$  beläuft sich die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion auf maximal 10% bei starrer Stützung des Druckgurts in diskreten Punkten, vgl. Abb. 7.20. Für die vereinfachte Bestimmung des Torsionsmoments bei Fischbauchträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/25$  am Auflager und Stützung gegen einen als starr angesehenen Kern ergibt sich das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung:

$$M_{tor} = 0,033 \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.18)$$

mit dem Vorfaktor  $k_{tor}$ :

$$k_{tor} = \frac{\eta_{\tau_{tor}}}{3} = \frac{0,10}{3} = 0,033 \quad (7.19)$$

Für Schlankheiten  $h/b > 8$  wird wie bei den Satteldachträgern der sinuswellenförmige Vorkrümmungsansatz maßgebend, vgl. Abb. 7.24. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion liegt höher als bei Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und weist zudem eine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion beträgt für die Schlankheit  $h/b = 10$  maximal 18%. Für den Näherungsansatz zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung für Schlankheiten  $h/b > 8$  kann, wie schon zuvor für den Satteldachträger ein linearer Anstieg der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager angenommen werden. Für die vereinfachte Bestimmung des Torsionsmoments bei Fischbauchträgern mit einer Querschnittshöhe  $h_a = l/25$  am Auflager und Stützung gegen einen als starr angesehenen Kern ergibt sich das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung:

$$M_{tor} = k_{tor} \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.20)$$

mit dem Vorfaktor  $k_{tor}$ :

$$k_{tor} = 0,0135 \cdot \frac{h}{b} - 0,075 \quad (7.21)$$

Werden die Fischbauchträger dagegen durch Horizontalverbände gestützt, erhöht sich die Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt an den Auflagern, vgl. Abb. 7.40. Für Schlankheiten  $h/b > 8$  wird der sinuswellenförmige Vorkrümmungsansatz maßgebend. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion liegt höher als bei Trägern mit sinushalbwellenförmiger Vorkrümmung und weist auch hier eine Abhängigkeit vom  $h/b$ -Verhältnis auf. Für den Näherungsansatz zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung für Schlankheiten  $h/b > 8$  kann, wie für Träger mit starrer Stützung des Druckgurts in diskreten Punkten, ein linearer Anstieg der Schubspannungsausnutzung infolge Torsion im Querschnitt am Auflager angenommen werden. Die Schubspannungsausnutzung im Querschnitt am Auflager infolge Torsion beträgt für die Schlankheit  $h/b = 10$  maximal 25%. Als Vorfaktor  $k_{tor}$  sollte angesetzt werden:

$$\text{für } h/b < 8 \quad k_{tor} = 0,057$$

$$\text{für } h/b \geq 8 \quad k_{tor} = 0,0125 \cdot \frac{h}{b} - 0,043$$

## 7.6 Zusammenfassung des vereinfachten Bemessungsverfahrens für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung

Zur Bestimmung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung wird folgende Berechnung vorgeschlagen:

$$M_{tor} = k_{tor} \cdot \frac{h \cdot b^2}{\eta_2} \cdot k_{shape} \cdot f_{tor,d} \quad (7.22)$$

mit:

Trägerform	$k_{tor}$	
	starre Stützung	Horizontalverband
parallelgurtig gerade und parallelgurtig mit angehobenem Untergurt	0,04	0,065
Satteldachträger* $h/b < 8$ $h/b \geq 8$	0,037 $0,0085 \cdot h/b - 0,031$	0,067 $0,008 \cdot h/b + 0,03$
Fischbauchträger* $h/b < 8$ $h/b \geq 8$	0,033 $0,0135 \cdot h/b - 0,075$	0,057 $0,0125 \cdot h/b + 0,03$

\* $h$ = Trägerhöhe am First

Alternativ kann der Schubspannungsnachweis unter Berücksichtigung des Torsionsmoments aus Kippstabilisierung direkt geführt werden, wenn die Schubspannung wie folgt begrenzt wird:

$$\left( \frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq (1 - k_{tor}) \quad (7.23)$$



# 8 Parameterstudie zum Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger

## 8.1 Ziele der Parameterstudie

Primäres Ziel der nachfolgenden Parameterstudie an kippgefährdeten Brettschichtholzträgern unter konstanten und wechselnden Feuchtebedingungen ist es, einen geeigneten Ansatz für die Berücksichtigung des Langzeitverhaltens für den Nachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung aus den zeitschrittweisen Modellberechnungen ableiten zu können. Durch einen solchen Ansatz soll es möglich sein, die Spannungszunahmen infolge Langzeitverhalten zu erfassen, wie sie durch Kriechen entstehen. In einem weiteren Schritt soll dann ein Ansatz zur Erfassung des Langzeiteinflusses beim Kippstabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren hergeleitet werden.

Mit der Herleitung des gekoppelten Differentialgleichungssystems zur Lösung des Biegetorsionsproblems II. Ordnung, vgl. Kapitel 3, wird deutlich, dass dieses von den Eingangsparametern Einwirkung, Querschnittswerte, Steifigkeiten und Vorverformungen abhängt, vgl. Kapitel 6. Um den Stabilitätsnachweis des Kippens führen zu können, stellen die Festigkeitseigenschaften des Werkstoffs Holz einen weiteren Parameter dar. Im Rahmen der numerischen Untersuchungen des Biegetorsionsproblems II. Ordnung mit dem Berechnungsprogramm *constantialigni*, das mit dem erweiterten Berechnungsprogramm *kriHo* [10] über eine Schnittstelle verbunden ist, vgl. Kapitel 5, kann immer nur eine bestimmte Anzahl Modellrechnungen durchgeführt werden, so dass eine Verallgemeinerung ausgehend von den durchgeführten Modellrechnungen nur dann möglich ist, wenn eine hinreichende Anzahl numerischer Berechnungen vorgenommen wurde, so dass eine statistische Auswertung möglich ist, oder aber auf andere Weise von einer begrenzten Anzahl numerischer Berechnungen eine Verallgemeinerung vorgenommen werden kann. Aufgrund der in Kapitel 6 dargestellten Voruntersuchungen kann der zu untersuchende Parameterbereich eingegrenzt werden. In Kapitel 6 konnte gezeigt werden, dass unterschiedliche Festigkeitsklassen keine Auswirkung auf die Kippstabilität gabelgelagerter Einfeldträger haben. Die Art der Lasteinwirkung und das  $h/b$ -Verhältnis dagegen haben Einfluss auf die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Eine Lasteinwirkung aus konstanter Linienlast am Obergurt  $q_{zOG}$  stellt den ungünstigsten Fall dar, so dass die nachfolgende Parameterstudie ausschließlich für kippgefährdete Träger mit konstanter Linienlast am Obergurt  $q_{zOG}$  durchgeführt wurde. Aufgrund der Ergebnisse aus den Voruntersuchungen werden Querschnitte mit den  $h/b$ -Verhältnissen 4, 7 und 10 untersucht. Sämtlichen Trägerkonfigurationen der Modellberechnungen liegt ein gabelgelagerter Einfeldträger ohne seitliche Stützung des Druckgurts und mit seitlicher Vorkrümmung  $e = 0,0025 \cdot l$  zugrunde.

## 8.2 Lasteinwirkungsdauer und kriecherzeugender Lastanteil

Hohe Biegeträger gelangen vornehmlich dort zum Einsatz, wo große Stützweiten realisiert werden sollen. Die einwirkende Last setzt sich daher aus einem ständigen Anteil  $g_{zOG}$  und einem kurzzeitig wirkenden Anteil wie der Schneelast  $s_{zOG}$  zusammen:

$$q_{zOG} = g_{zOG} + s_{zOG} \quad (8.1)$$

Bei praxisrelevanten Systemen variiert der ständige Lastanteil aus Eigengewicht  $g_{zOG}$  an der Bemessungslast  $q_{zOG}$  in Abhängigkeit der Art der Dachkonstruktion, der Dacheindeckung und der geographischen Lage des Bauwerks. Nachfolgend wird exemplarisch anhand eines ausgewählten Dachaufbaus zunächst der Anteil der ständigen Last aus Eigengewicht  $g_{zOG}$  an der Bemessungslast  $q_{zOG}$  bestimmt:

### Ständige Lasten:

Dacheindeckung inkl. Notdach	=	0,20 kN/m <sup>2</sup>
Pfetten	=	0,10 kN/m <sup>2</sup>
Wärmedämmung	=	0,15 kN/m <sup>2</sup>
Installation + Beleuchtung	=	0,15 kN/m <sup>2</sup>

$$\Sigma \quad 0,60 \text{ kN/m}^2$$

In Abhängigkeit der geographischen Lage kann jeder Ort in Deutschland einer Schneelastzone zugeordnet werden. Damit lässt sich die charakteristische Schneelast in Abhängigkeit von der Geländehöhe ü. N. N. bestimmen. Nach DIN EN 1991-1-3:2010-12 [69] mit DIN EN 1991-1-3/NA:2010-12 [70] beträgt in Schneelastzone I der Sockelwert 0,65 kN/m<sup>2</sup>. Die Schneelast auf Flachdächern ergibt sich für das obige Beispiel zu:

### Schneelast (Zone I):

$$s_i = 0,8 \cdot s_k = 0,52 \text{ kN/m}^2$$

Dieser Wert stellt die untere Grenze der veränderlichen Lasten auf das Tragwerk dar. Die Obergrenze der veränderlichen Lasten bestimmt sich für die Schneelast in Zone III, wobei den nachfolgenden Betrachtungen eine Geländehöhe ü. N. N. < 1000 m zugrunde gelegt wird, da nur bis zu einer Geländehöhe ü. N. N. < 1000 m von einer kurzen Lasteinwirkungsdauer, vgl. DIN EN 1995-1-1:2010-12 [3], ausgegangen werden darf und diese dementsprechend als nicht kriecherzeugend einzustufen ist.

### Schneelast (Zone III):

$$s_i = 0,8 \cdot s_k = 5,48 \text{ kN/m}^2$$



Unter Berücksichtigung der Teilsicherheiten ergibt sich eine obere Grenze

$$\frac{1,35 \cdot 0,6}{(1,35 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,52)} = 0,51 \sim 0,5$$

und eine untere Grenze des ständigen Lastanteils

$$\frac{1,35 \cdot 0,6}{(1,35 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 5,48)} = 0,09 \sim 0,1$$

Aufgrund dieser Betrachtung wäre bezogen auf den einzelnen kippgefährdeten Biegeträger, der im Folgenden auf dessen Langzeitverhalten untersucht werden soll, der ständige Lastanteil aus Eigengewicht  $g_{zOG}$  zwischen 10% und 50% an der Bemessungslast  $q_{zOG}$  anzunehmen.

Für die numerische Untersuchung des Langzeitverhaltens werden in diesem Arbeitsschritt nur ständig wirkende Beanspruchungen benötigt, da ausschließlich diese kriecherzeugend sind. Damit wird es möglich, zunächst den Spannungszuwachs infolge des Kriechverhaltens von Holz am kippgefährdeten Träger zu bestimmen. Nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [3] in Verbindung mit DIN EN 1990:2010-12 [50] mit DIN EN 1990/NA:2010-12 [81] braucht für Schneelasten bis zu einer Geländehöhe ü. N. N. < 1000 m auch kein quasi-ständiger Anteil berücksichtigt werden. Der Kombinationsbeiwert ist demzufolge angegeben zu:

$$\psi_2 = 0 \quad (8.2)$$

Im Sinne der praktischen Anwendbarkeit ist diese Vereinfachung nachvollziehbar. Welchen Einfluss eine kurzzeitig einwirkende, veränderliche Beanspruchung auf das Kriechverhalten tatsächlich hat, geht aus dem vereinfachten Normansatz nicht hervor. Das Kriechen von Holz ist ein zeitabhängiger Vorgang, so dass die zeitliche Dauer einer Einwirkung wesentlichen Einfluss auf die zu erwartenden Kriechverformungen hat. Dabei ist der zeitliche Verlauf des Auftretens einer kurzzeitig einwirkenden, veränderlichen Beanspruchung ebenso von wesentlicher Bedeutung.

Schänzlin bestimmte in [10] den Einfluss von veränderlichen Beanspruchungen auf das Kriechverhalten mithilfe des Modell B nach Toratti [1] und dem modifizierten Modell B nach [10] für unterschiedliche zeitliche Verläufe ihres Auftretens. Für jährlich wiederkehrende Ereignisse der Beanspruchung konnte mit dem modifizierten Modell B ein beinahe linearer Zusammenhang zwischen der jährlich wiederkehrenden Einwirkungsdauer und dem Verhältnis aus quasi-ständigem Lastanteil an der veränderlichen Einwirkung und der gesamten veränderlichen Einwirkung festgestellt werden.

$$\psi = \frac{p_{eff}}{p_{total}} \quad (8.3)$$

mit:

$\psi$	Verhältniswert
$p_{eff}$	quasi-ständiger Anteil an einer veränderlichen Einwirkung
$p_{total}$	gesamte veränderliche Einwirkung

Um den zeitlichen Verlauf des Auftretens der veränderlichen Einwirkung zu berücksichtigen, wird ein unterer und oberer Grenzwert für den quasi-ständig wirkenden Lastanteil der veränderlichen Einwirkung in [10] definiert. Die Anpassung der von Toratti in [1] angegebenen Koeffizienten durch Schänzlin in [10] erfolgte auf der Grundlage von Messungen im süddeutschen Raum.

$$\psi_{min} = m \cdot t_{DOL} \quad (8.4)$$

$$\psi_{max} = \frac{1 - c_{DOL}}{8760 \, h/a} \cdot t_{DOL} \cdot c_{DOL} \quad (8.5)$$

mit:

$t_{DOL}$  Dauer der Lasteinwirkung pro Jahr (a) in Stunden (h)  
 $m, c_{DOL}$  Koeffizienten siehe Tab. 8.1

**Tabelle 8.1:** Koeffizienten  $m$  und  $c_{DOL}$  zur Bestimmung des quasi-ständigen Lastanteils jährlich wiederkehrender, veränderlicher Einwirkungen nach [10]

	Modell B nach [1]	Modifiziertes Modell B nach [10]
$m$	$7,65776 \cdot 10^{-5}$	$9,64957 \cdot 10^{-5}$
$c_{DOL}$	0,335423977	0,159844344

Der Lasteinwirkungsdauer „kurz“ liegt die Annahme zugrunde, dass die Lasteinwirkung kürzer als 1 Woche andauert. Für die jährlich wiederkehrende Schneelast liegt der quasi-ständige Lastanteil infolge Schnee nach Gl. (8.4) und Gl. (8.5) im Intervall zwischen 0,016 und 0,18 unter Verwendung des modifizierten Modells nach [10]. Unter Berücksichtigung der Teilsicherheiten ergibt sich für den oben ausgewählten Dachaufbau eine obere Grenze

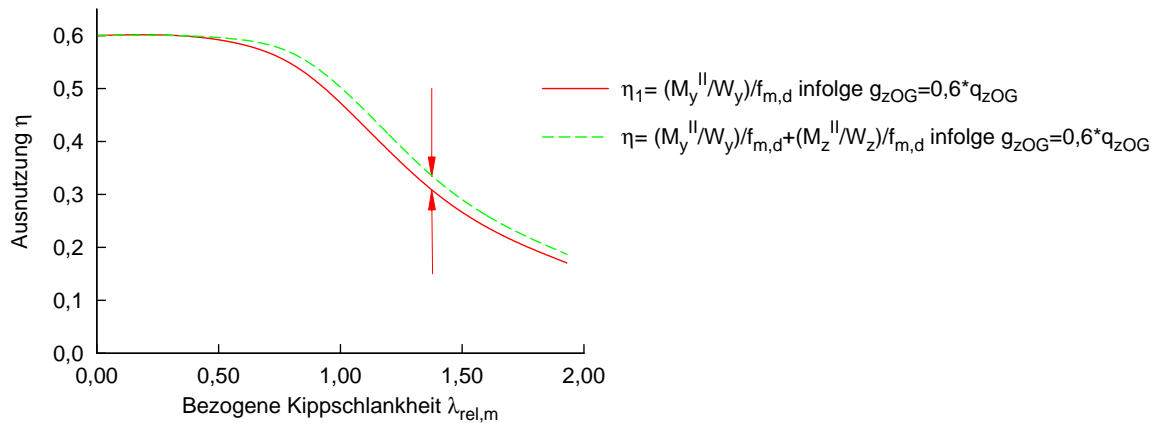
$$\frac{1,35 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,18 \cdot 0,52}{(1,35 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,52)} = 0,61 \sim 0,6$$

und eine untere Grenze des ständigen Lastanteils

$$\frac{1,35 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,18 \cdot 5,48}{(1,35 \cdot 0,9 + 1,5 \cdot 5,48)} = 0,26 \sim 0,3$$

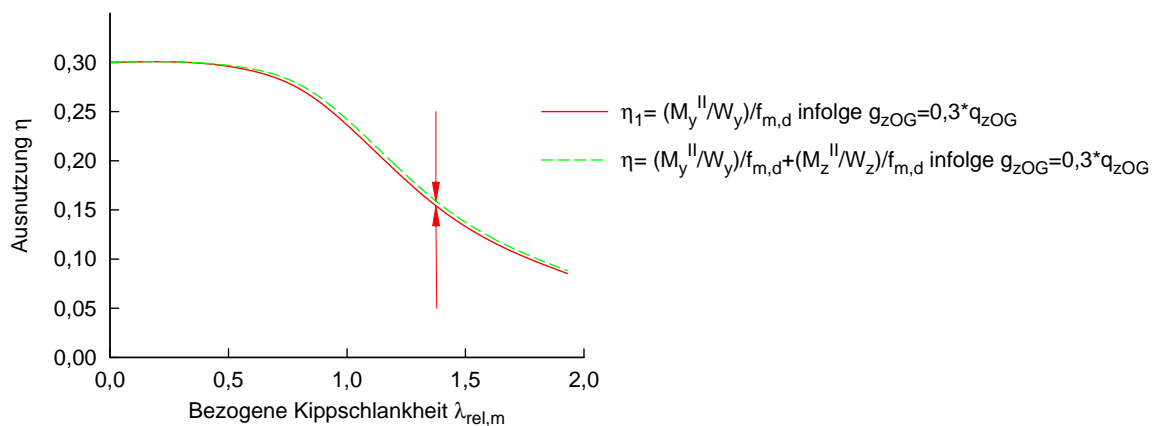
Als Eingangsgröße wird damit für die numerischen Berechnungen der ständige Lastanteil aus Eigengewicht  $g_{zOG}$  mit 30% der Bemessungslast  $q_{zOG}$  als untere Grenze veranschlagt. Als obere Grenze für die numerischen Berechnungen wird der ständige Lastanteil aus Eigengewicht  $g_{zOG}$  mit 60% der Bemessungslast  $q_{zOG}$  angesetzt. Dieser jeweilige Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung stellt den Eingangswert zur Zeit  $t = 0$  dar, mit dem der Einfluss des Langzeitverhaltens auf die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung am kippgefährdeten Träger berechnet werden kann. Die numerische

Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen erfolgt jeweils für einen Zeitraum von 50 Jahren und wird nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung, siehe Kapitel 2.2, vorgenommen. Zur Veranschaulichung werden gabelgelagerte Einfeldträger untersucht, die eine



**Abbildung 8.1:** Ausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$ ) zur Zeit  $t = 0$  bei einer Gesamtausnutzung von 100% aus  $q_{zOG} = g_{zOG} + s_{zOG}$

Gesamtausnutzung von 100% aus  $q_{zOG} = g_{zOG} + s_{zOG}$  haben. Wird nun die einwirkende Last auf den Anteil aus ständiger Einwirkung  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  reduziert, zeigt Abb. 8.1, dass unter reduzierter Last der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung nichtlinear zurückgeht. Für das zuvor gewählte Beispiel eines Einfeldträgers mit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 1,4$  reduziert sich die Querschnittsausnutzung zum Zeitpunkt  $t = 0$  unter ausschließlich ständiger Last  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  auf 30%, unter Berücksichtigung der Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung beträgt die anteilige Querschnittsausnutzung für  $g_{zOG}$  33%. Bei einem Anteil der ständigen Last  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  an



**Abbildung 8.2:** Ausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$ ) zur Zeit  $t = 0$  bei einer Gesamtausnutzung von 100% aus  $q_{zOG} = g_{zOG} + s_{zOG}$

der Gesamteinwirkung beträgt die Ausnutzung infolge  $g_{zOG}$  15%. Der zugehörige Anteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung ist in den in Abb. 8.2 dargestellten Kurvenpunkten kaum ersichtlich und liegt unter 1%. In Abb. 8.1 und Abb. 8.2 ist der Anteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zunächst gering, wird die Lasteinwirkung nun um den kurzzeitig wirkenden Anteil erhöht, bis die Querschnittsausnutzung 100% beträgt, steigt die Quer-

schnittsausnutzung nichtlinear an (vgl. Abb. 2.8). Es ist somit eine Abhängigkeit des Anteils aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung von der Höhe der einwirkenden Last erkennbar, die eine ausgeprägte Nichtlinearität aufweist. Dieses ausgeprägte nichtlineare Verhalten wurde u. a. auch in Versuchen von Hooley und Madsen in [20] nachgewiesen.

Damit wird deutlich, dass der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung sowohl von der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  als auch vom Grad der Spannungsausnutzung abhängig ist. Je kleiner der Grad der Querschnittsausnutzung, desto geringer der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Nimmt der Grad der Querschnittsausnutzung zu, steigt der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung nichtlinear an.

Obwohl der Anteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zum Zeitpunkt  $t=0$  für den unteren Grenzwert des ständigen Lastanteils  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  und den oberen Grenzwert  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  vernachlässigbar gering erscheint, kann nachfolgend gezeigt werden, dass der Spannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zum Zeitpunkt  $t=0$  einen signifikanten Einfluss auf die Spannungszunahme infolge Kriechen haben kann.

### 8.3 Biegespannungsanteile nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung infolge Kriechen unter konstanter Feuchte

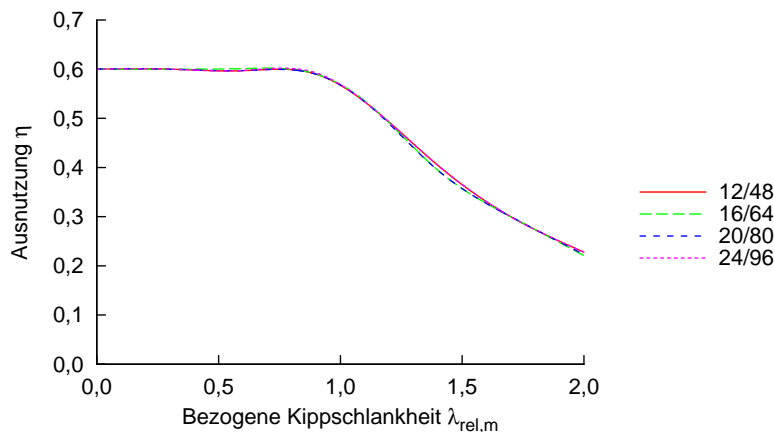
Für das Langzeitverhalten ist neben der Abhängigkeit der Biegetorsionseffekte von der Kippschlankheit die Höhe der Einwirkung, der ständige Lastanteil  $g_{zOG}$  und der quasi-ständige Lastanteil einer veränderlichen Last von Bedeutung (vgl. auch Hooley/Madsen [20]). Ausgehend von Abb. 2.8 wird die Bemessungslast  $q_{zOG}$ , die zu einer 100%-igen Ausnutzung des gewählten Querschnitts nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zum Zeitpunkt  $t=0$  geführt hat, um den kurzzeitig wirkenden Lastanteil  $s_{zOG}$  reduziert. Den Modellberechnungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens wird also nur der ständige Lastanteil  $g_{zOG}$  und der quasi-ständig wirkende Lastanteil aus Schneelast zu Grunde gelegt. Für die Modellberechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zur Ermittlung der Tragfähigkeit des gabelgelagerten Trägers zum Zeitpunkt  $t=0$  wird eine sinusförmige Vorkrümmung  $e = 0,0025 \cdot l$  in horizontaler Richtung aufgebracht, vgl. Kapitel 6.4. Im Wert der Vorkrümmung werden sowohl die geometrischen als auch die strukturellen Imperfektionen des Bauteils erfasst. Zu den strukturellen Imperfektionen werden Rohdichte, Ästigkeit, Druckholzanteil und Holzfeuchte gezählt. Eine genaue Quantifizierung der einzelnen Anteile wird in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] und der Literatur nicht vorgenommen, für die Modellrechnungen wird deshalb die Ersatzimperfektion nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] angenommen.

In den anschließenden Modellberechnungen wird das Langzeitverhalten unter ständigem Lastanteil zunächst für den unteren und den oberen Grenzwert von 30% und 60% der Bemessungslast  $q_{zOG}$  untersucht. Dabei wird von einer konstanten Holzfeuchte über die gesamte Dauer der Modellberechnungen ausgegangen. Die Modellberechnungen erfolgen für Träger mit einem  $h/b$ -Verhältnis von 4, 7 und 10. Die Trägerbreite variiert von 12 bis 24 cm. In Abhängigkeit dieser Parameter und der Kippschlankheit  $\lambda$  lassen sich die Träger für die Modellberechnungen konfigurieren. In den Abb. 8.3 bis Abb. 8.5 ist die Längsspannungsausnutzung zum Zeitpunkt  $t=50$  Jahre nach Biegetorsionstheorie II.

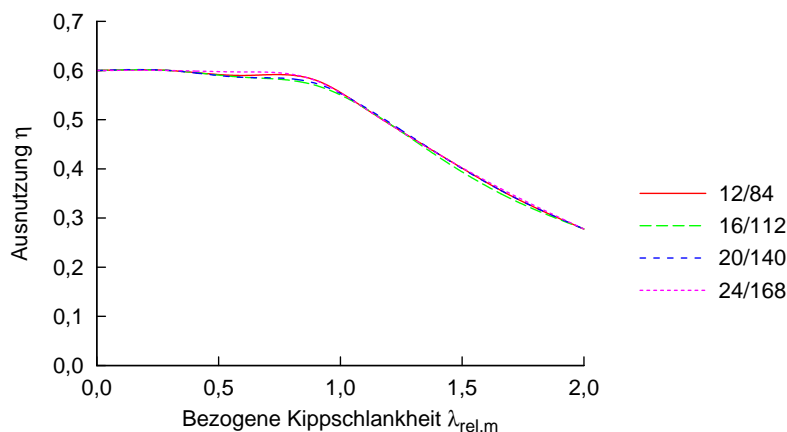
Ordnung

$$\frac{\frac{M_{y,\infty}^{II}}{W_y}}{f_{m,y,d}} + \frac{\frac{M_{z,\infty}^{II}}{W_z}}{f_{m,z,d}} \quad (8.6)$$

für Träger mit einem 60%-igen ständigen Lastanteil an der Bemessungslast  $q_{zOG}$  dargestellt. Die Abbildungen 8.3 bis 8.5 zeigen, dass bei konstanter Holzfeuchte die Längsspannungsausnutzung zum Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre unabhängig vom gewählten Querschnitt ist, da die Längsspannungsverläufe in allen untersuchten Fällen bei gleichem  $h/b$ -Verhältnis identisch sind. Ein Vergleich der Längsspannungsausnutzung nach Biegetorsionstheorie

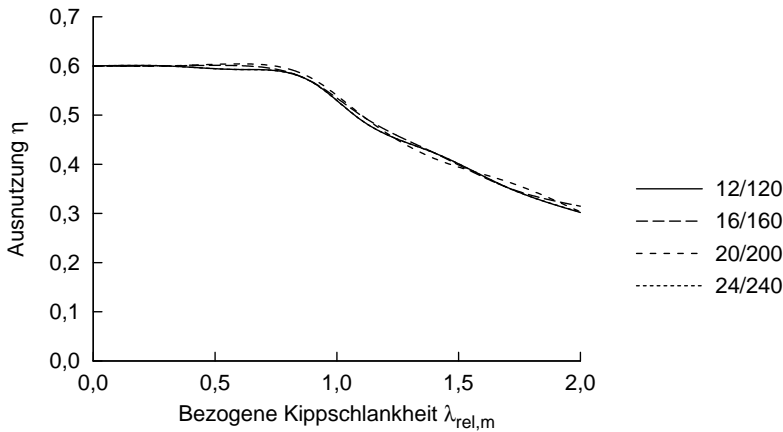


**Abbildung 8.3:** Spannungsausnutzung an Querschnitten mit einem  $h/b=4$  infolge ständigem Lastanteil ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t = 50$  a



**Abbildung 8.4:** Spannungsausnutzung an Querschnitten mit einem  $h/b=7$  infolge ständigem Lastanteil ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t = 50$  a

II. Ordnung zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t = 50$  Jahren in Abb. 8.6 veranschaulicht die Zunahme der Längsspannungen am kippgefährdeten Träger. Die Längsspannung infolge planmä-



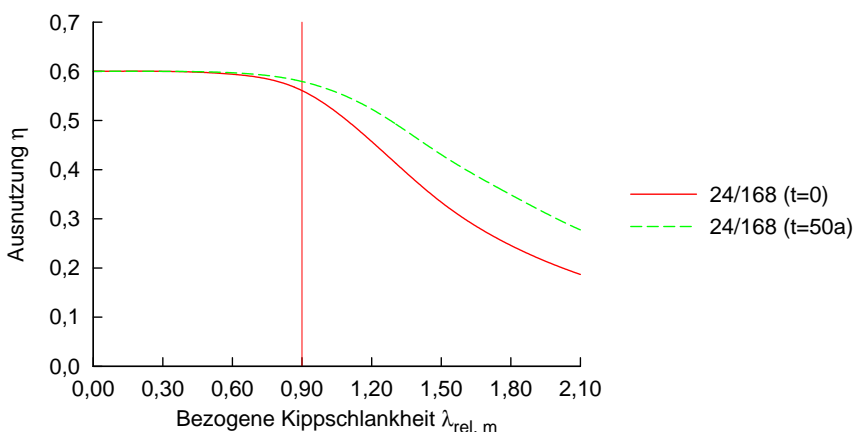
**Abbildung 8.5:** Spannungsausnutzung an Querschnitten mit einem  $h/b=10$  infolge ständigem Lastanteil ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t=50$  a

ßiger Biegung um die starke Achse sind zeitlich konstant, so dass gilt:

$$\frac{\frac{M_{y,0}^{II}}{W_y}}{f_{m,y,d}} = \frac{\frac{M_{y,\infty}^{II}}{W_y}}{f_{m,y,d}} \quad (8.7)$$

Der Längsspannungsanteil aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung nimmt dagegen über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren infolge der zunehmenden Kriechverformungen zu, so dass hierfür gilt:

$$\frac{\frac{M_{z,0}^{II}}{W_z}}{f_{m,z,d}} < \frac{\frac{M_{z,\infty}^{II}}{W_z}}{f_{m,z,d}} \quad (8.8)$$

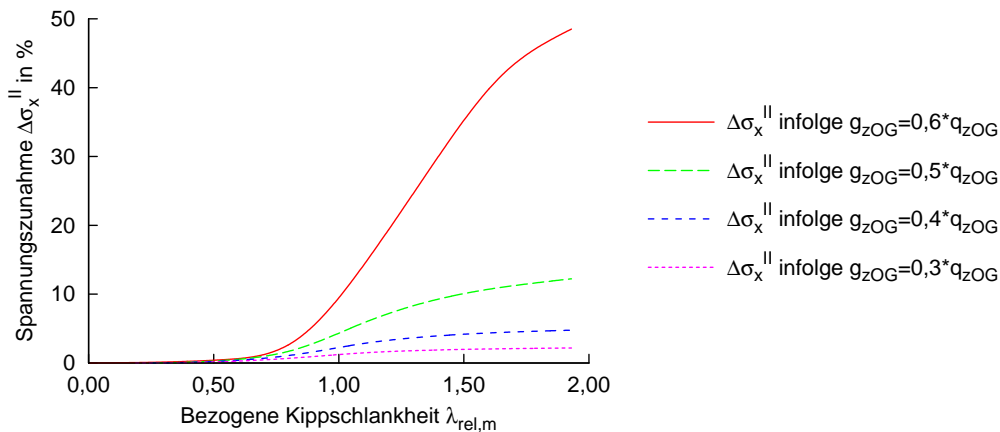


**Abbildung 8.6:** Spannungsausnutzung an Querschnitten mit einem  $h/b=7$  infolge ständigem Lastanteil ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) zur Zeit  $t=0$  und  $t=50$  a

Für den Sonderfall des Kippens lässt sich die Längsspannungszunahme, die durch das Kriechverhalten des Werkstoffs bedingt wird, vergleichsweise einfach beschreiben. Die horizontale Vorkrümmung  $e$  zur Zeit  $t=0$  bewirkt eine elastische horizontale Verformung

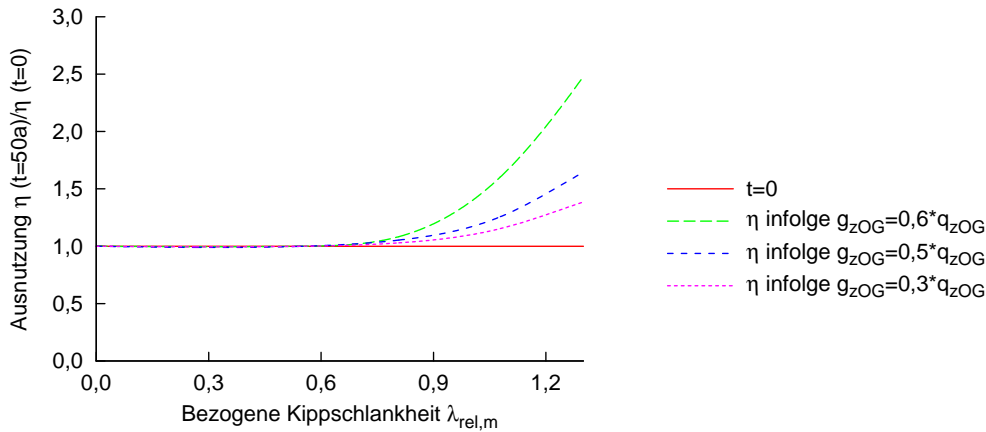
$v_{el}$  sowie eine elastische Verdrehung  $\vartheta_{el}$  des Querschnitts. Die Größe hängt dabei von der Höhe der ständigen Lasteinwirkung zur Zeit  $t=0$  ab, wie in Kapitel 8.2 gezeigt werden konnte. Im Laufe der Zeit nehmen nun die Kriechdehnungen im Träger zu. Der Träger befindet sich zu jedem Zeitpunkt  $t$  im statischen Gleichgewicht. Im Gegensatz zum einfachen Biegeträger wirkt sich die Änderung der Kriechdehnungen auf die elastische Verformung und Verdrehung des Querschnitts aus und sorgt damit für eine Änderung der Längsspannungen im Querschnitt nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Die Zunahme der spannungslosen Verformung verursacht also die Änderung der Längsspannungen im Querschnitt nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Die Kriechverformung nimmt für jeden Zeitpunkt  $t$  einen festen Wert an und ist damit zeitlich konstant, vgl. Kapitel 2.2. Gemäß Gl. (2.7) bis Gl. (2.9) können damit Kriechverformungen zu jedem Zeitpunkt  $t$  als zusätzliche Imperfektion angesehen werden.

Unter Kriecheinfluss zeigt sich, dass die elastische Verformung zur Zeit  $t=0$  maßgebenden Einfluss auf die Verformungen und damit auf die prozentuale Spannungszunahme eines mit einer ständigen Last beanspruchten Kippträgers infolge Kriechen besitzt (vgl. Abb. 8.6).



**Abbildung 8.7:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last bei einem durch Gleichlast am Obergurt nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung belasteten Träger für  $g_{zOG}$  ( $t = 50$  a) gegenüber der Spannung infolge  $g_{zOG}$  für  $t = 0$

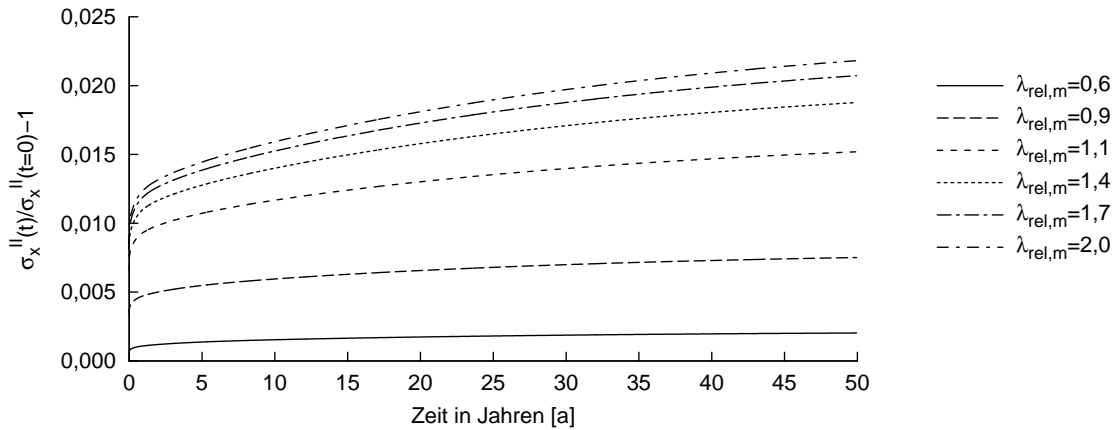
Je größer die horizontale Verformung zur Zeit  $t=0$  und damit die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung, desto größer die prozentuale Zunahme der Spannung  $\sigma_x^{II}$  infolge Kriechen zur Zeit  $t=50$  a. Mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda$  nimmt bei gleichbleibenden Querschnittsabmessungen und Werkstoffkennwerten die Länge  $l$  der Träger zu und damit die Vorkrümmung  $e$ . Infolgedessen ist mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda$  eine größere horizontale Verformung zur Zeit  $t=0$  zu verzeichnen, die wiederum mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda$  zu einer höheren Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  infolge Kriechen führt, wie in Abb. 8.6 gezeigt werden kann. Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,9$  sind in Abb. 8.1 die Spannungsanteile aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zur Zeit  $t=0$  nahezu nicht vorhanden, so dass zur Zeit  $t=50$  Jahre nur eine vernachlässigbar geringe Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  infolge Kriechen in Abb. 8.6 festzustellen ist und damit für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,9$  der Einfluss aus Kriechen nicht signifikant ist. Neben der horizontalen Verformung zur Zeit  $t=0$  ist die Höhe des ständigen Lastanteils ausschlaggebend für die Zunahme der Spannung  $\Delta\sigma_x^{II}$ . Während für einen ständigen Lastanteil von 30% der Bemessungslast  $q_{zOG}$  nur eine geringe Zunahme



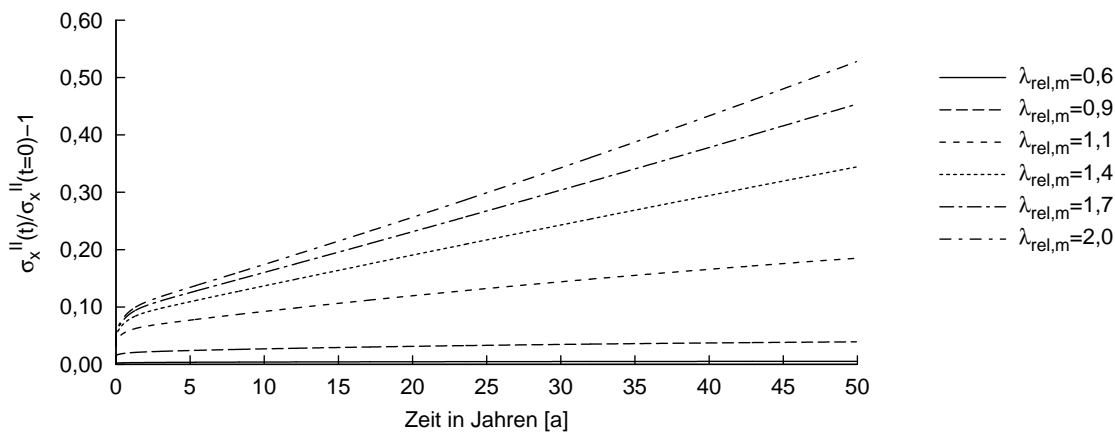
**Abbildung 8.8:** Ausnutzung  $\eta$  in Bezug auf die Bemessungslast  $q_{zOG} = g_{zOG} + s_{zOG}$  zur Zeit  $t = 0$  am Obergurt unter Berücksichtigung des Kriechverhaltens nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

me der Spannung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  (siehe Abb. 8.7) zu verzeichnen ist, steigt die Spannung  $\sigma_{x2}^{II}$  für höhere ständige Lastanteile zunehmend nichtlinear an. Für einen ständigen Lastanteil von 60% der Bemessungslast ist im untersuchten Parameterbereich eine Zunahme der Eigengewichtsspannung infolge Langzeitverhalten von bis zu 60% zu beobachten. Der Spannungsanteil  $\sigma_{x1}^{II}$  nach Gl. (8.7) bleibt dabei für den Stabilitätsfall Kippen konstant. Der Spannungsanteil  $\sigma_{x2}^{II}$  nach Gl. (8.6) aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung vervielfacht sich infolge des Langzeitverhaltens und bewirkt so die Zunahme der Spannung. Ausgehend von der Bemessungslast  $q_{zOG}$  ( $t = 0$ ) tritt in Abhängigkeit des ständigen Anteils an der Bemessungslast und der Kippschlankheit eine unterschiedlich hohe, stark nichtlineare Spannungserhöhung infolge Kriechen ein. Das ausgeprägt nichtlineare Verhalten ist somit signifikant abhängig von der Höhe der statischen Beanspruchung, der Dauer der Einwirkung und der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$ . In den Abb. 8.9 und Abb. 8.10 ist die Zunahme der Spannung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  über der Zeit aufgetragen. Die statische Beanspruchung beträgt für die untersuchten Träger in Abb. 8.9  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  und in Abb. 8.10  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$ . Für die ständige Belastung  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  ist bei den untersuchten Trägern für alle bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten, vgl. Kap.4.1, festzustellen. Die Spannungszunahme ist für alle bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  gering und strebt einem Endwert entgegen. Bei einer ständigen Belastung  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  ist nur für Träger bis zu einer bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten festzustellen. Für Träger mit bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  ist ein starker linearer Anstieg der Spannungen  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  zu verzeichnen. Der Nationale Anhang zu DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] sieht auf der Grundlage der Arbeit von Blaß [52] für druckbeanspruchte Bauteile in den Nutzungsklasse 2 und 3 eine Berücksichtigung des Kriechens im Grenzzustand der Tragfähigkeit vor für den Fall, dass der ständige Lastanteil 70% des Bemessungswerts der Gesamlast überschreitet. Um zu überprüfen, ob diese Grenze auch auf kipppgefährdete Träger übertragen werden kann, wird der ständige Lastanteil der untersuchten Träger auf  $g_{zOG} = 0,7 \times q_{zOG}$  erhöht. Bis zu einer bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  ist an den mit diesem Lastanteil untersuchten Trägern ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten festzustellen, vgl. Abb. 8.11. Die Spannungsänderung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  beträgt nach dem betrachteten Zeitraum von 50 Jahren gerade 5%.





**Abbildung 8.9:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,3 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a

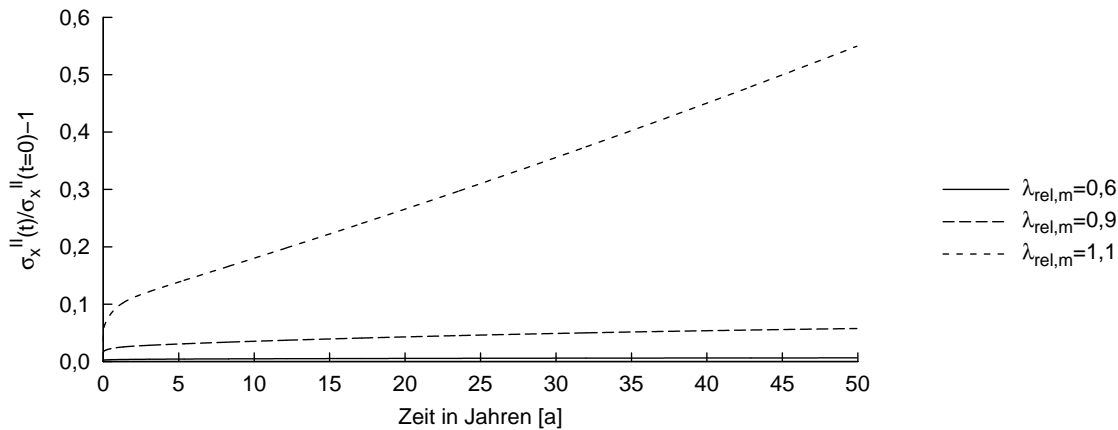


**Abbildung 8.10:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,6 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a

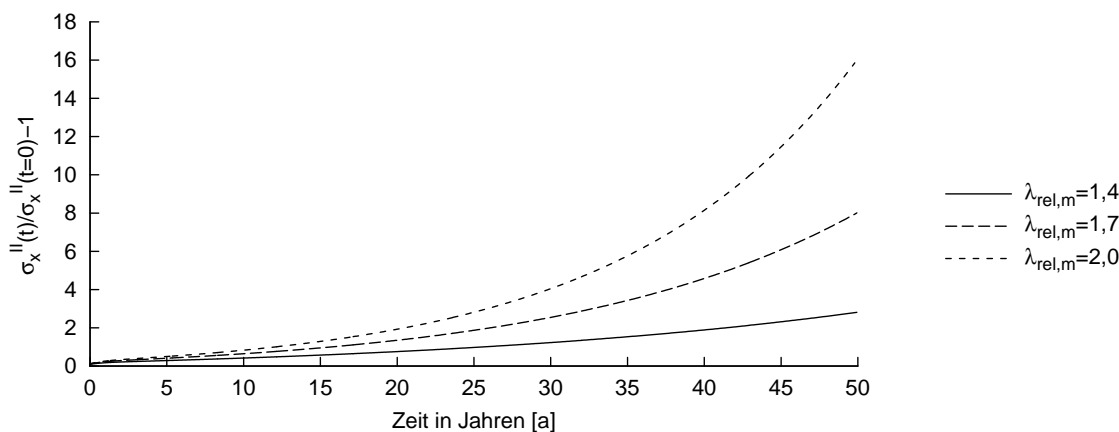
An Trägern mit größeren bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  steigt die Spannungsänderung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  überproportional an und die Dehnungsgeschwindigkeit weist eine starke Zunahme auf. Für die in Abb. 8.12 dargestellten Verläufe der Spannungszunahme  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  beträgt die Spannungszunahme  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  bis zum Erreichen der Zeit  $t = 50$  Jahre ein Vielfaches der Längsspannungen im jeweiligen Querschnitt zur Zeit  $t = 0$ , so dass bereits unter ausschließlich ständiger Beanspruchung rechnerisch die Bruchdehnung infolge Kriechen erreicht wird, vgl. Abb. 8.14. Aus den Abb. 8.11 und Abb. 8.12 wird deutlich, dass ein linear-viskoelastisches Verhalten nur für kleine bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  vorhanden ist und die Linearitätsgrenze sehr schnell überschritten wird. Der Grenzwert für eine Berücksichtigung des Kriechens im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei einem ständigen Lastanteil von 70% des Bemessungswerts der Gesamtlast bei druckbeanspruchten Bauteilen markiert auch für kippgefährdete Bauteile einen Grenzwert, ab dem infolge ständiger Lasteinwirkung bei konstanter Holzfeuchte eine deutliche Spannungszunahme nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung infolge Kriechen zu verzeichnen ist.

Da die Spannungszunahme infolge Kriechen bei kippgefährdeten Trägern stark von der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  abhängt, wie in Abb. 8.11 und Abb. 8.12 veranschaulicht wird, scheint eine pauschale Berücksichtigung des Kriechens für kippgefährdete Trä-

ger nicht angemessen.



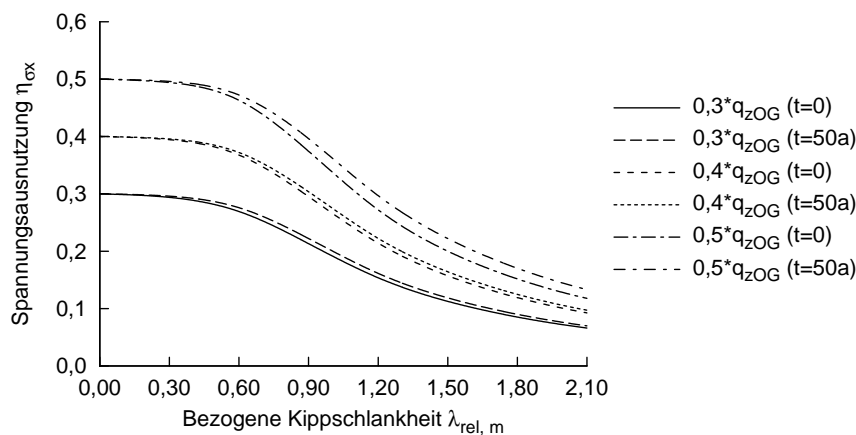
**Abbildung 8.11:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,7 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a



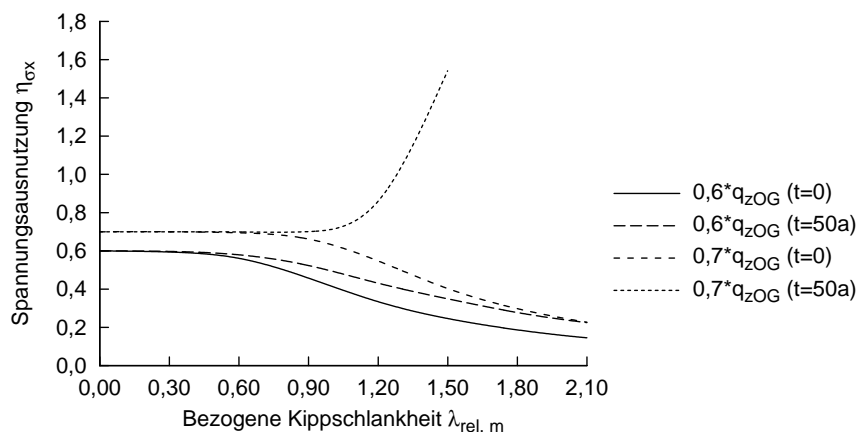
**Abbildung 8.12:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,7 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a

Für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  kann in den hier zugrunde gelegten Grenzen der ständigen, statischen Beanspruchung von 30-70% der Bemessungslast von einem linear-viskoelastischen Kriechverhalten ausgegangen werden, das zu einer moderaten Spannungszunahme  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  während des Simulationszeitraums von 50 Jahren führt, vgl. Abb. 8.13 und Abb. 8.14. Bei Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  hat der Grad der ständigen Beanspruchung wesentlichen Einfluss auf die Spannungszunahme  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  während des Simulationszeitraums von 50 Jahren. Solange die ständige, statische Beanspruchung maximal 30-50% der Bemessungslast beträgt, ist von einem linear-viskoelastischen Kriechverhalten auszugehen, das ebenfalls zu einer moderaten Spannungszunahme  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  führt. Steigt die ständige, statische Beanspruchung über 50% der Bemessungslast an, wird die Grenze des linear-viskoelastischen Kriechens überschritten und die Spannung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  nimmt für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  überproportional zu. Die Ursache für das Überschreiten der Grenze des linear-viskoelastischen Kriechens geht dabei allein auf die Effekte aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu. Bei einer ständigen, statischen Beanspruchung von 70% der Bemessungslast wird für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 1,4$  der

tertiäre Kriechbereich, vgl. Kap.4.1, erreicht, wie aus Abb. 8.12 hervorgeht. Die exponentielle Spannungszunahme hat ein Vielfaches der Spannung  $\Delta\sigma_{x2}^{II}$  nach 50 Jahren im Vergleich zum Zeitpunkt  $t=0$  zur Folge und führt in Abb. 8.14 zu einem ebenso exponentiellen Anstieg der Spannungsausnutzung bei Berücksichtigung des Langzeitverhaltens. Ein ständiger Lastanteil von 70% des Bemessungswerts der Gesamlast markiert somit nicht nur einen Grenzwert für kippgefährdete Träger, sondern muss ausgeschlossen werden. In DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] mit DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 [3] wird dieser Ausschluss über den im Spannungsnachweis eingeführten Modifikationsbeiwert  $k_{mod}$  vollzogen, durch den die ständige, statische Beanspruchung für die Einhaltung des Nachweises der ständige Lastanteil maßgebend wird und damit die Einwirkung auf einen Wert  $< 70\%$  sinkt.



**Abbildung 8.13:** Spannungsausnutzung infolge Gleichlast am Obergurt nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bei unterschiedlicher Gesamtausnutzung des Querschnitts



**Abbildung 8.14:** Spannungsausnutzung infolge Gleichlast am Obergurt nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bei unterschiedlicher Gesamtausnutzung des Querschnitts

## 8.4 Ansätze zur Erfassung des Langzeitverhaltens

### 8.4.1 Erfassung durch den Verformungsbeiwert $k_{def}$

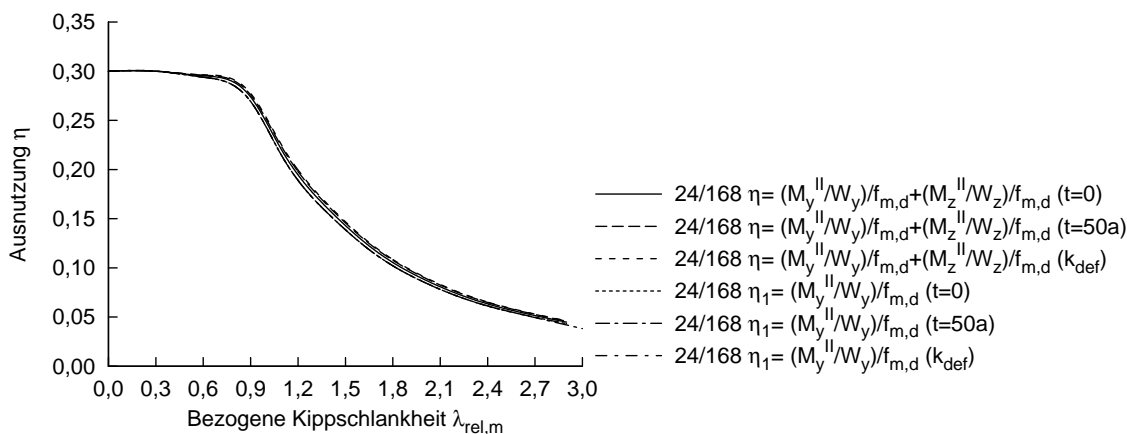
Das Langzeitverhalten wirkt sich bei kippgefährdeten Trägern auf die Verteilung der Schnittgrößen im Tragwerk aus und muss nach DIN EN 1995-1-1 [2] für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit berücksichtigt werden. Hierzu ist vorgesehen, die Steifigkeiten um  $1/(1 + k_{def})$  abzumindern. Für das Biegetorsionsproblem II. Ordnung des kippgefährdeten Trägers ergibt sich das nachfolgende Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung der abgeminderten Steifigkeiten:

$$\frac{E_{0,05d}}{(1 + k_{def})} \cdot I_y \cdot w_{el}'''' = q_z \quad (8.9)$$

$$\frac{E_{0,05d}}{(1 + k_{def})} \cdot I_z \cdot v_{el}'''' + (M_y \cdot \vartheta_{ges})'' = 0 \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{0,05d}}{(1 + k_{def})} \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}'' - \frac{E_{0,05d}}{(1 + k_{def})} \cdot I_\omega \cdot \vartheta_{el}'''' &= -q_z \cdot e_{y,qz} \\ -M_{yq} \cdot v_{ges}'' - q_z \cdot \vartheta_{ges} \cdot e_{z,qz} & \end{aligned} \quad (8.11)$$

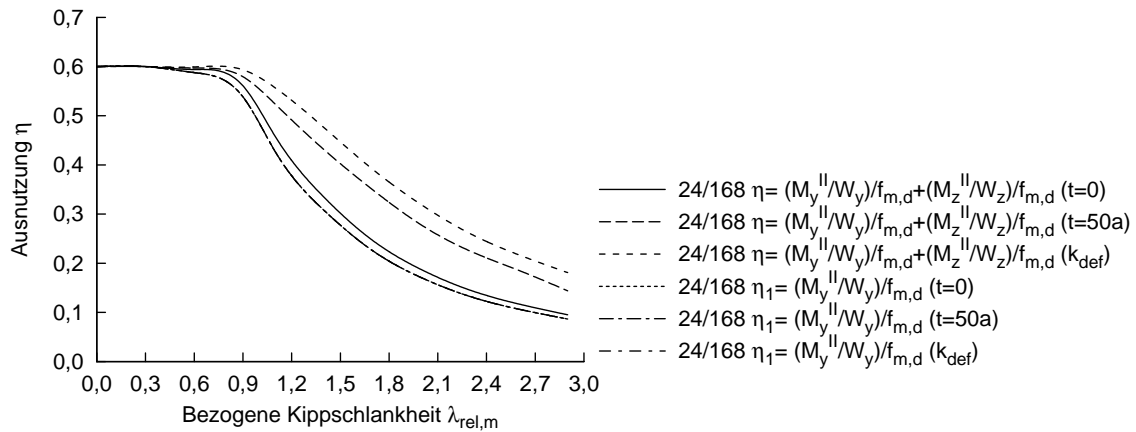
Um die Ergebnisse aus den Modellberechnungen mit denen aus Berechnungen unter verminderter Steifigkeit vergleichen zu können, wird nur der ständig wirkende Lastanteil in beide Berechnungsansätze eingesetzt. Der Kriechbeiwert beträgt in den Vergleichsrechnungen  $k_{def} = 0,6$  gemäß DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2]. In den Abb. 8.1 und Abb. 8.2 konnte gezeigt werden, dass der Anteil der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei geringer Beanspruchung sehr klein ist und mit zunehmendem Grad der Beanspruchung nichtlinear ansteigt. Bei einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} =$



**Abbildung 8.15:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $= 0,3 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge um den Verformungsbeiwert  $k_{def}$  abgeminderter Steifigkeiten

$0,3 \cdot q_{zOG}$  ist der Anteil der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung für den Zeitpunkt  $t = 0$  vernachlässigbar gering. Über einen Zeitraum von 50 Jahren ist ein geringfügiger Anstieg infolge Kriechen unter konstanten Feuchtebedingungen festzustellen, vgl. Abb. 8.13. Wird nun das Langzeitverhalten durch die abgeminderten Steifigkeiten

erfasst, ist bei einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  eine gute Übereinstimmung mit den Modellberechnungen zu erzielen, wie aus Abb. 8.15 hervorgeht. Die Spannungsanteile aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung sind zum Zeitpunkt  $t = 0$  und unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens zum Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre so gering, dass die Kurven der Ausnutzung  $\eta$  in Abb. 8.15 übereinander liegen.



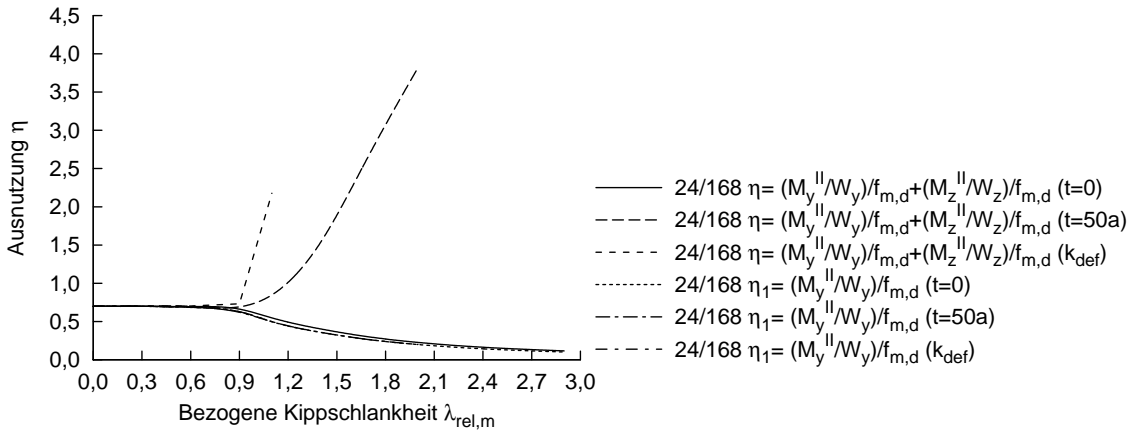
**Abbildung 8.16:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $= 0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge um den Verformungsbeiwert  $k_{def}$  abgeminderter Steifigkeiten

Bei einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  beträgt der Anteil der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung für den Zeitpunkt  $t = 0$  bis zu 3%. Nach 50 Jahren ist der Anteil der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  auf bis zu 12% angestiegen. Der Graph der Spannungsausnutzung  $\eta$  liegt in Abb. 8.16 für den Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre bis zu diesem Betrag über dem Graph für den Zeitpunkt  $t = 0$ . Wird auch in diesem Fall das Langzeitverhalten versucht durch Abminderung der Steifigkeiten zu erfassen, ist ein Anstieg des Anteils der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung auf bis zu 17% zu verzeichnen. Der Graph der Spannungsausnutzung  $\eta$  liegt in Abb. 8.16 bei Berücksichtigung des Langzeitverhaltens durch den Verformungsbeiwert  $k_{def}$  bis zu diesem Betrag über dem Graph für den Zeitpunkt  $t = 50$  Jahre. Damit wird mit den abgeminderten Steifigkeiten der Anteil der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei kippgefährdeten Trägern unter konstanten Feuchtebedingungen auf der sicheren Seite liegend überschätzt.

Steigt der ständige Lastanteil auf  $g_{zOG} = 0,7 \cdot q_{zOG}$ , ist ab einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} > 1,4$  in den Modellrechnungen ein überproportionaler Anstieg des Anteils der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu verzeichnen, siehe Abb. 8.12. Der Spannungsverlauf nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei Erfassung des Langzeitverhaltens durch eine Abminderung der Steifigkeiten weist einen früheren und deutlich schnelleren Anstieg des Anteils der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung bereits bei einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  auf, so dass ein rechnerisches Bruchversagen schon bei kleineren Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  auftritt, als dies bei den Modellberechnungen mithilfe rheologischer Modelle der Fall ist.

Die Abminderung der Steifigkeiten liegt in diesen Fall deutlich auf der sicheren Seite, so dass der überproportionale Anstieg der Spannungsausnutzung bereits sehr früh einsetzt.

Aufgrund der Ausführungen im vorangegangenen Kapitel 8.3 ist dieser Fall jedoch ausgeschlossen. Die Abschätzung des Langzeitverhaltens an kippgefährdeten Trägern durch abgeminderte Steifigkeiten im Biegetorsionsproblem II. Ordnung zeigt somit unter geringer Beanspruchung zunächst eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den Modellberechnungen. Mit zunehmendem Grad der Beanspruchung wird durch die Abmin-



**Abbildung 8.17:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $=0,7 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge um den Verformungsbeiwert  $k_{def}$  abgeminderter Steifigkeiten

derung der Steifigkeiten das Langzeitverhalten kippgefährdeter Träger unter konstanten Feuchtebedingungen überschätzt und dies obwohl der Kriechbeiwert aus DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] kleiner ist als der von Schänzlin in [10] bestimmte Kriechfaktor  $\varphi_0$ .

Der Kriechfaktor  $\varphi_0$  wurde von Schänzlin [10] auf Grundlage von Messreihen an Holztragwerken im süddeutschen Raum bestimmt, die in einem Zeitraum von ca. 50 Jahren vor der Verformungsvermessung errichtet worden sind, und gibt das Ergebnis dieser Messreihen wieder. Mit dem modifizierten Modell B aus [10] kann der Kriechfaktor unter konstanten Luftfeuchtebedingungen berechnet werden:

$$\varphi_0 = \frac{1 - 1,06 \cdot u}{0,788} \cdot \left( \frac{t}{t_d} \right)^k \quad (8.12)$$

mit  $u$  Holzfeuchte  
 $t$  Laufzeit  
 $t_d$  8994 Tage  
 $k$  = 0,35

In den Modellrechnungen wird von einer Holzfeuchte  $u = 12\%$  und einer Laufzeit  $t = 50$  Jahre ausgegangen. Der Kriechfaktor beträgt dann:

$$\varphi_0 = 1,42 \quad (8.13)$$

Im Folgenden werden nun die Steifigkeiten um den Kriechfaktor  $\varphi_0$  reduziert und in das

Differentialgleichungssystem der Biegetorsionstheorie II. Ordnung eingesetzt.

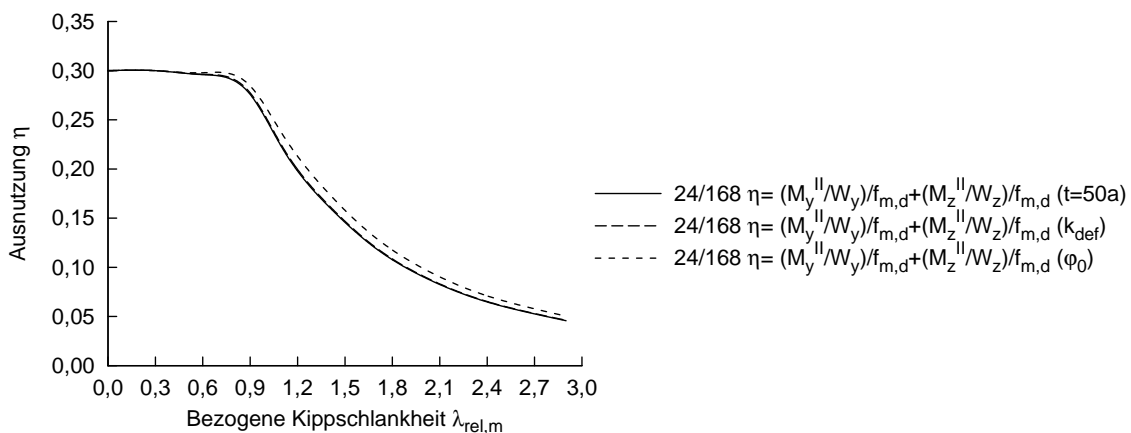
$$\frac{E_{0,05d}}{(1 + \varphi_0)} \cdot I_y \cdot w_{el}'''' = q_z \quad (8.14)$$

$$\frac{E_{0,05d}}{(1 + \varphi_0)} \cdot I_z \cdot v_{el}'''' + (M_y \cdot \vartheta_{ges})'' = 0 \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{0,05d}}{(1 + \varphi_0)} \cdot I_T \cdot \vartheta_{el}'' - \frac{E_{0,05d}}{(1 + \varphi_0)} \cdot I_\omega \cdot \vartheta_{el}'''' &= -q_z \cdot e_{y,qz} \\ -M_{yq} \cdot v_{ges}'' - q_z \cdot \vartheta_{ges} \cdot e_{z,qz} & \end{aligned} \quad (8.16)$$

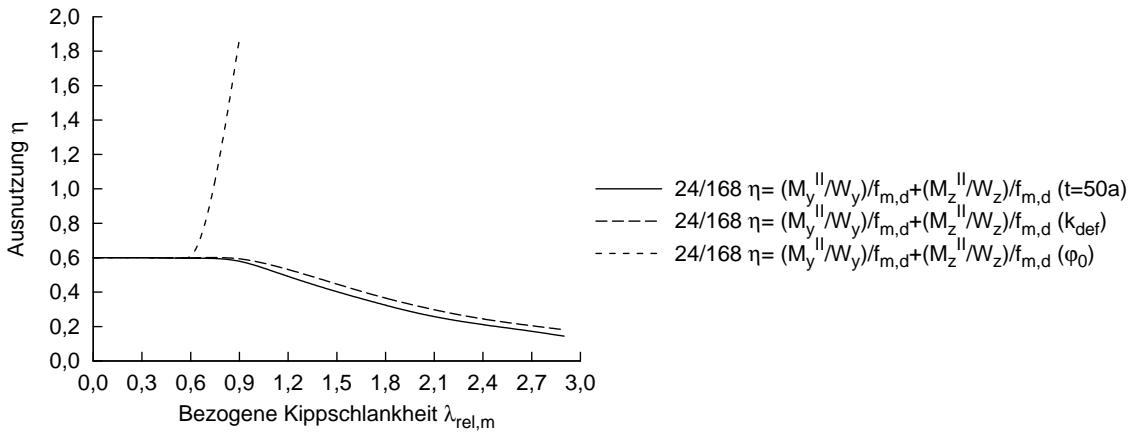
Auch in diesen Vergleichsberechnungen werden die untersuchten Träger ausschließlich mit dem ständigen Lastanteil der Bemessungslast belastet. In einem ersten Schritt wird wiederum ein ständiger Lastanteil  $g_{zOG} = 0,3 \times q_{zOG}$  gewählt. Da  $\varphi_0 > k_{def}$  für den untersuchten Zeitraum von 50 Jahren, ist aufgrund der größeren Abminderungen der Steifigkeiten bei Berücksichtigung des Kriechfaktors  $\varphi_0$  eine größere Zunahme der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  als bei Berücksichtigung der um  $k_{def}$  abgeminderten Steifigkeiten zu beobachten. Verglichen mit den Modellrechnungen wird das Langzeitverhalten und die daraus resultierende Zunahme der Spannungsausnutzung  $\eta_2$  mit den um  $\varphi_0$  abgeminderten Steifigkeiten auf der sicheren Seite liegend abgeschätzt.

Wie in den vorangegangenen Vergleichsrechnungen wird der ständige Lastanteil auf  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  erhöht. Infolge der um den Kriechfaktor  $\varphi_0$  verminderten Steifigkeiten nimmt die Spannungsausnutzung  $\eta_2$  ab einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} > 0,6$  exponentiell zu, so dass die maximal zulässige Spannung sehr schnell überschritten wird und damit ein rechnerisches Bruchversagen eintritt. Der Kriechfaktor  $\varphi_0$  wurde von Toratti [1] und



**Abbildung 8.18:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $= 0,3 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge um den Kriechfaktor  $\varphi_0$  abgeminderter Steifigkeiten

Schänzlin [10] für lineare Problemstellungen wie den einfachen Biegeträger hergeleitet. Am kippgefährdeten Träger lässt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem des Biegetorsionsproblems II. Ordnung um die 1. Gleichung (Gl. (8.9) und Gl. (8.14)) reduzieren, da diese entkoppelt betrachtet werden kann und damit eine lineare Problemstellung darstellt.



**Abbildung 8.19:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge um den Kriechfaktor  $\varphi_0$  abgeminderter Steifigkeiten

Mit den Kriechfaktoren  $\varphi_0$  nach Toratti [1] und Schänzlin [10] und dem Verformungsbeiwert nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] lassen sich die Kriechverformungen berechnen. Für einen Biegeträger unter konstanter Gleichlast  $q_{zOG}$  beträgt die vertikale Durchbiegung

$$w = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_{zOG} \cdot l^4}{E \cdot I} \quad (8.17)$$

Die Längsspannung infolge Biegung bleibt über den gesamten betrachteten Zeitraum konstant, so dass gilt:

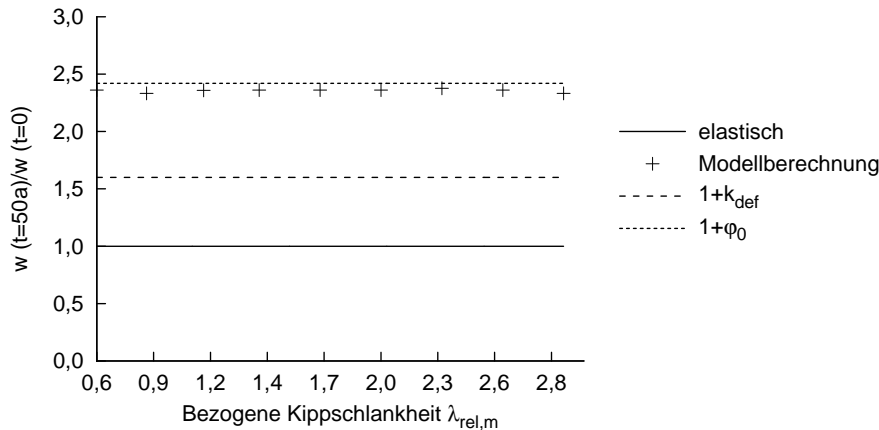
$$M_y = \frac{q_{zOG} \cdot l^2}{8} = konst. \quad (8.18)$$

$$w = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot l^2}{E \cdot I} \quad (8.19)$$

Infolge der Abminderung der Steifigkeiten um den Faktor  $1+k_{def}$  bzw.  $1+\varphi_0$  kann so im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit der Formänderungsnachweis unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens geführt werden.

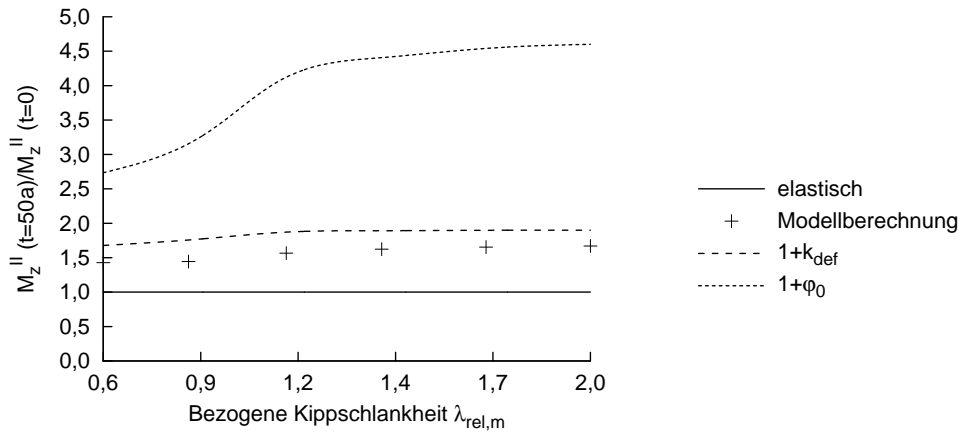
In Abb. 8.20 sind die zeitabhängigen vertikalen Verformungen bezogen auf die elastische Verformung zum Zeitpunkt  $t=0$  über der Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  aufgetragen. Die in numerischen Berechnungen mit dem modifizierten Modell B aus [10] bestimmten vertikalen Verformungen zeigen dabei eine sehr gute Übereinstimmung mit den Verformungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens, die sich durch die Abminderung der Steifigkeiten in Gl. (8.14) ergeben. Die vertikalen Verformungen, die sich bei Abminderung der Steifigkeiten um  $1+k_{def}$  in Gl. (8.9) ergeben, sind geringer als die durch numerische Berechnung bestimmten, was aufgrund der Herleitung jedoch dem Erwartungswert entspricht. In allen untersuchten Fällen weist die zeitabhängige Änderung der vertikalen Verformungen keine Abhängigkeit von der Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  auf.



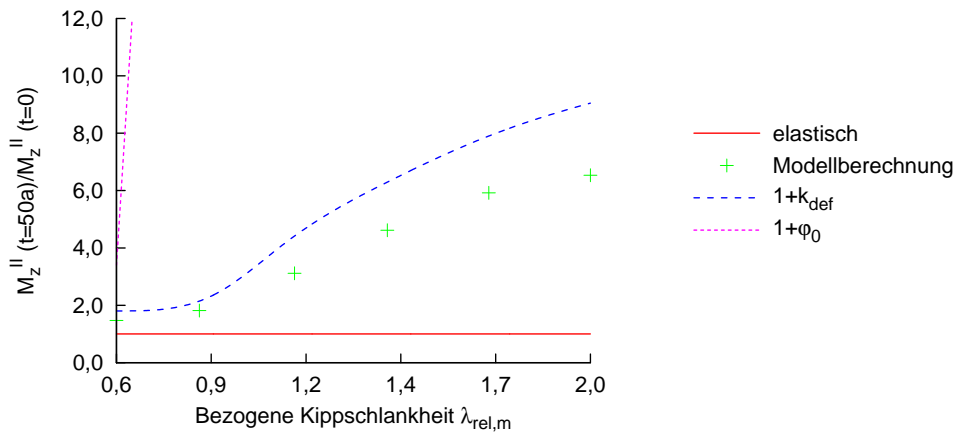


**Abbildung 8.20:** Vertikale Durchbiegung infolge ständiger Einwirkung ( $=0,3 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge abgeminderter Steifigkeiten

Wie die vertikale Verformung nimmt auch die horizontale Verformung und die Verdrehung infolge Kriechen zu. Die verbleibenden Differentialgleichungen Gl. (8.10) und Gl. (8.12) lassen sich jedoch im Gegensatz zu Gl. (8.9) nicht entkoppelt betrachten, dies führt infolge der planmäßigen Beanspruchung  $q_{zOG}$  und der spannungslosen Zunahme der Kriechverformung und -verdrehung zu einem elastischen Verformungs- und Verdrehungsanteil. Für den Kippnachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist die zeitliche Änderung des Biegemoments  $M_z^{II}$  von Interesse, das sich aus der zeitlichen Änderung der horizontalen Verformung  $v_{el}$  ergibt. Sowohl in den Modellrechnungen als auch infolge abgeminderter Steifigkeiten nimmt das Biegemoment  $M_z^{II}$  infolge Kriechen mit zunehmender Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  nichtlinear zu. Die Zunahme des Biegemoments  $M_z^{II}$  infolge Kriechen ist dabei abhängig vom Grad der ständigen Beanspruchung, wie aus den Abb. 8.21 und Abb. 8.22 hervorgeht. Die Biegemomente  $M_z^{II}$  infolge Kriechen, die in den Modellrechnungen bestimmt wurden, sind geringer als jene Biegemomente  $M_z^{II}$  infolge Kriechen, die mithilfe abgeminderter Steifigkeiten bestimmt wurden. Für einen ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  steigt bei um  $1+\varphi_0$  abgeminderten Steifigkeiten das Biegemoment  $M_z^{II}$  schon für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,6$  stark exponentiell an, so dass für größere Kippschlankheiten kein statisches Gleichgewicht mehr erzielt werden kann. Aus dem rheologischen Modell folgte der Kriechfaktor  $\varphi_0$ , vgl. Gl. (8.12), in Schänzlin [10]. Für den Biegeträger konnte eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer Berechnung und der Näherungsberechnung mithilfe abgeminderter Steifigkeiten erzielt werden. Wird dieser Näherungsansatz auf das Biegetorsionsproblem II. Ordnung des kippgefährdeten Trägers übertragen und die Steifigkeiten um  $1+\varphi_0$  abgemindert, ergibt sich eine deutliche Divergenz zwischen den numerischen Berechnungen und dem Näherungsansatz. Da der Kriechfaktor  $\varphi_0$  größer ist als der Verformungsbeiwert  $k_{def}$ , ist bei einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  die Linearitätsgrenze bereits überschritten und die Spannungsausnutzung  $\eta$  steigt exponentiell an. Aufgrund dessen lassen sich die Ergebnisse logisch in die Beobachtungen für einen ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,7 \cdot q_{zOG}$  einreihen, vgl. Abb. 8.14. Die Ergebnisse machen aber auch deutlich, dass das Langzeitverhalten beim Stabilitätsnachweis Kippen nicht mithilfe einer pauschalen Abminderung der Steifigkeiten erfasst werden sollte und im Folgenden andere Ansätze zur näherungsweise Erfassung des Langzeitverhaltens beim Stabilitätsnachweis Kippen untersucht werden müssen.



**Abbildung 8.21:** Biegemomente  $M_z^{II}$  infolge ständiger Einwirkung ( $=0,3 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge abgeminderter Steifigkeiten



**Abbildung 8.22:** Biegemomente  $M_z^{II}$  infolge ständiger Einwirkung ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens aus numerischer Untersuchung und infolge abgeminderter Steifigkeiten

### 8.4.2 Erfassung durch äquivalente Vorkrümmung

Unter ständiger Einwirkung stellt sich, wie in Kapitel 8.3 erläutert, ein Spannungszuwachs nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ein. Dieser ist abhängig von der Höhe des ständigen Lastanteils und der Kippschlankheit  $\lambda$ . Aus den Ergebnissen der numerischen Berechnungen, die zeitschrittweise erfolgten und daher sehr aufwändig und zeitintensiv sind, konnte die Größe des Langzeiteinflusses abgeleitet werden. Aufgrund der Nichtlinearität der Biegetorsionstheorie II. Ordnung und unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens kann aus den bisher vorgestellten Ergebnissen noch kein Rückschluss auf eine praktikable Bestimmung der Biegespannungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens gezogen werden. Eine pauschale Abminderung der Steifigkeiten, wie in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] vorgeschlagen für Tragwerke mit Einfluss der Steifigkeitsverteilung auf die Schnittgrößen, liefert keine ausreichend genaue Näherung für das Langzeitverhalten, wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt werden konnte.

Um die Auswirkungen des Langzeitverhaltens auf den Biegespannungsnachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung quantifizieren zu können, werden die Ergebnisse der zeitschrittweisen Modellberechnungen aus Abb. 8.7 herangezogen. In den Modellberechnungen wurde stets eine über die zeitliche Dauer konstante Lasteinwirkung  $g_{zOG}$  in Ansatz gebracht. Infolge des Kriechverhaltens war eine Zunahme der elastischen Horizontalverformung  $v_{el}$  sowie der elastischen Verdrehung  $\vartheta_{el}$  festzustellen und eine damit verbundene Zunahme der Schnittgrößen und der daraus resultierenden Biegespannungen. Die vertikale Kriechverformung besitzt keinen zeitabhängigen elastischen Anteil und hat somit keine zeitliche Änderung der zugehörigen Schnittgrößen zur Folge. Die zeitabhängige Änderung der Schnittgrößen tritt also nur für diejenigen Schnittgrößen auf, die aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung hervorgehen. Aufgrund der stark ausgeprägten Nichtlinearität konnten keine sinnvollen Kriechzahlen abgeleitet werden, wie sie für den Verformungsnachweis des Biegebalkens im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] Anwendung finden.

Zur Beschreibung wird deshalb im Folgenden die Spannungszunahme in Abb. 8.7 infolge Kriechen in eine äquivalente Vorkrümmung  $e_{\infty}$ , die unter ständiger Lasteinwirkung die gleiche Spannungszunahme bewirkt, umgerechnet und in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  und des ständig wirkenden Lastanteils aufgetragen.

Für die Herleitung wird die ständige Lasteinwirkung aus der vorangegangenen Modellberechnung übernommen und die Vorkrümmung  $e_{\infty}$  des kippgefährdeten Trägers so lange variiert, bis eine Übereinstimmung der Längsspannungen aus der Modellrechnung und einer Berechnung der Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung erreicht ist. Dadurch gelingt es, bei konstanter Spannungsausnutzung nach Gl. (2.23) den Zuwachs der Spannung  $\sigma_{x2}^{II}$  und die daraus resultierende Spannungsausnutzung nach Gl. (2.24) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens an die Ergebnisse aus den Modellberechnungen anzunähern. Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \leq 0,6$  ist der Einfluss aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung und des Langzeitverhaltens auf die Gesamtspannung  $\sigma_x^{II}$  unwesentlich, hier kann der Ansatz der Vorkrümmung nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] unabhängig vom Anteil ständiger Lasten unverändert beibehalten werden. Für größere bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m}$  zeigt der Vorkrümmungsansatz zur näherungsweise Bestimmung von Schnittgrößen und Verformungen zum Zeitpunkt  $t = 50$  a nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten. Zur Beschreibung kann die Vorkrümmung  $e_{\infty}$  in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  und des ständigen Lastanteils genähert werden. Für einen ständigen Lastanteil  $0,3 \leq g/q \leq 0,5$  lässt sich das Langzeitverhalten kippgefährdeter Träger unter konstanter Feuchteinwirkung mit der äquivalenten Vorkrümmung  $e_{\infty}$  abbilden. Das Verhältnis des ständigen Lastanteils an der Gesamteinwirkung  $q$  lässt sich mithilfe des Beiwerts  $k_{v0}$  beschreiben, vgl. auch Abb. 8.23. Der Beiwert  $k_{v0}$  dient als Vorfaktor zur Bestimmung der äquivalenten Vorkrümmung  $e_{\infty}$  in Gl. (8.21)

$$k_{v0} = 0,0064 \cdot \frac{g}{q} + 0,0032 \quad \text{für } 0,3 \leq \frac{g}{q} \leq 0,5 \quad (8.20)$$

Da das Langzeitverhalten bei kleinen Kippschlankheiten nur vernachlässigbar geringe Auswirkungen auf die Spannungsverteilung im Querschnitt hat, kann der in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] angegebene Vorkrümmungsansatz für diese weiter verwendet werden. Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,6$  können die in den Modellrechnungen be-

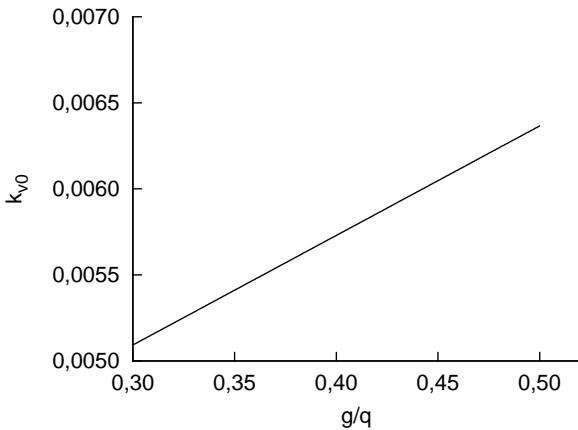


Abbildung 8.23: Beiwert  $k_{v0}$

stimmten Zusatzspannungen infolge Langzeitverhalten bei konstanter Feuchte durch die Funktion des Arkustangens in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  beschrieben werden. Übersteigt die bezogene Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  den Wert 1,5 kann das Langzeitverhalten in Abhängigkeit des  $g/q$ -Verhältnisses bestimmt werden, indem die Vorkrümmung  $e_\infty$  aus dem Produkt des Beiwerts  $k_{v0}$  und dem konstanten Faktor 0,98 in eine Berechnung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung eingesetzt wird. Damit lässt sich die äquivalente Vorkrümmung  $e_\infty$  in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  und dem Verhältnis  $g/q$  bestimmen zu:

$$e_\infty = \begin{cases} \frac{l}{400} & \text{für } \lambda_{rel,m} \leq 0,6 \\ k_{v0} \cdot \arctan(\lambda_{rel,m}) & \text{für } 0,6 < \lambda_{rel,m} \leq 1,5 \\ k_{v0} \cdot 0,98 & \text{für } \lambda_{rel,m} > 1,5 \end{cases} \quad (8.21)$$

In Abb. 8.24 ist die Näherung mittels äquivalenter Vorkrümmung  $e_\infty$  an die in den Modellrechnungen bestimmten Längsspannungsausnutzungen  $\eta_{\sigma_x}$  dargestellt.

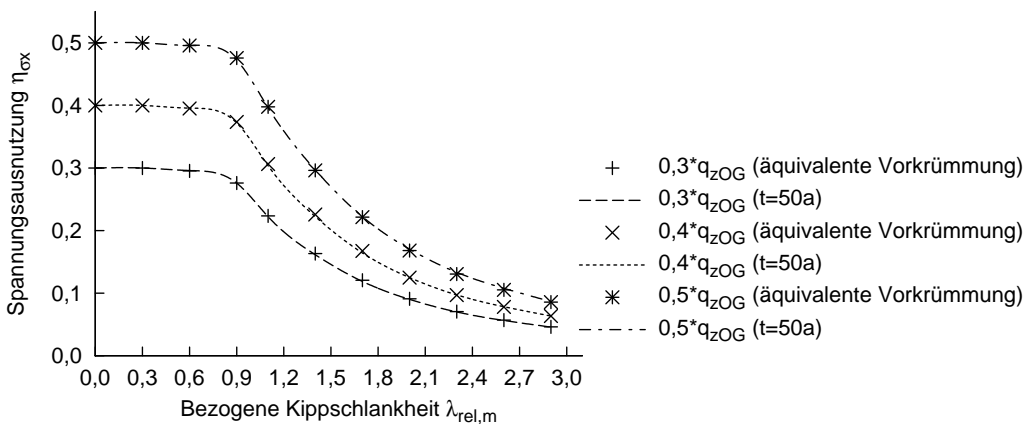
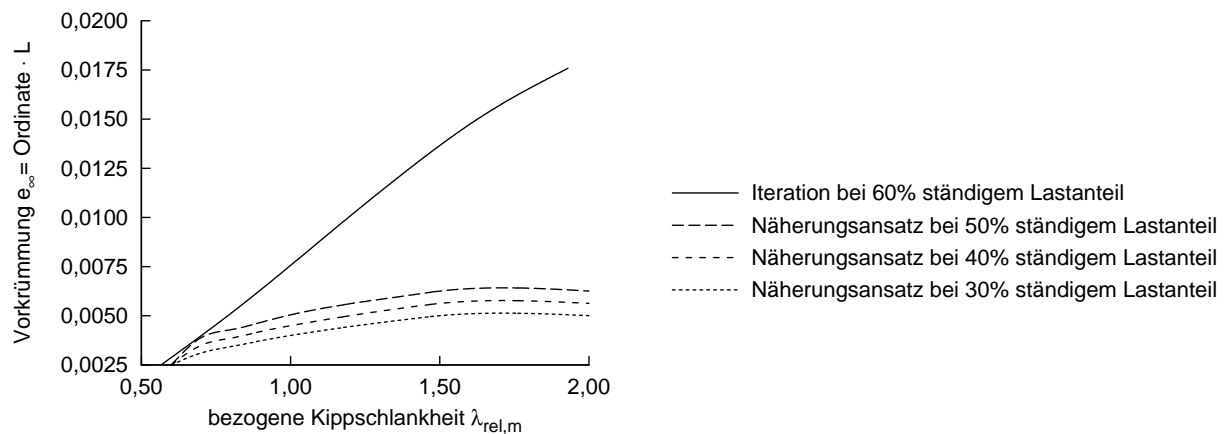


Abbildung 8.24: Vergleich der Spannungsausnutzung  $\eta_{\sigma_x}$  infolge Modellrechnung und äquivalentem Vorkrümmungsansatz  $e_\infty$  zur Berücksichtigung des Langzeitverhaltens

Für ständige Lastanteile von 60% und 70% ist, wie in Kapitel 8.3 gezeigt werden konnte,

mit zunehmender Kippschlankheit eine überproportionale Zunahme der Längsspannungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung zu beobachten. Bei einem Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  konnte bis zu einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten festgestellt werden, vgl. Abb. 8.10. Für größere Kippschlankheiten nehmen die Kriechverformungen und die daraus resultierenden Zusatzspannungen überproportional zu, so dass eine äquivalente Vorkrümmung  $e_\infty$  nicht mit dem in Gl. (8.21) hergeleiteten Ansatz angenähert werden kann, da die Vorkrümmung beinahe linear mit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  zunimmt, vgl. Abb. 8.25. Aufgrund des beschleunigten Kriechens streben die Kriechverformungen und die daraus resultierenden Zusatzspannungen keinem Endwert mehr entgegen und sollten damit generell vermieden werden. Es wird deshalb keine Näherungsgleichung für einen äquivalenten Vorkrümmungsansatz  $e_\infty$  zur Berücksichtigung des Langzeitverhaltens für einen ständigen Lastanteil  $g_{zOG} > 0,6 \cdot q_{zOG}$  hergeleitet.



**Abbildung 8.25:** Vorkrümmungsansatz  $e_\infty$  zur Berücksichtigung des Langzeitverhaltens für den Nachweis nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

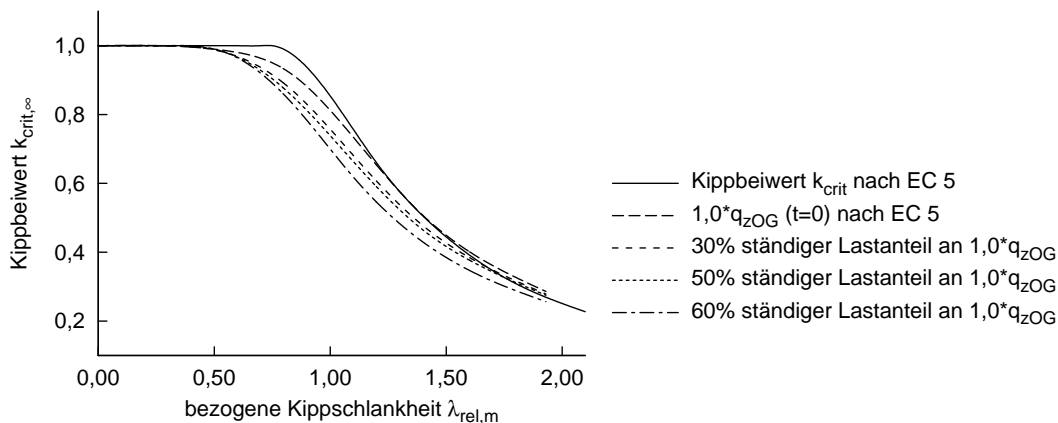
Abb. 8.25 zeigt den Graph der Funktionen für die Vorkrümmung  $e_\infty$  in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  und des jeweils ständig wirkenden Lastanteils. Je größer der ständige Lastanteil ist, desto höher muss der Vorkrümmungsansatz  $e_\infty$  gewählt werden. Für den Nachweis der Kippstabilität nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung bei großen Kippschlankheiten bedeutet die Berücksichtigung des Langzeitverhaltens eine entsprechende Verringerung der Bemessungslast in Abhängigkeit des ständigen Lastanteils.

### 8.4.3 Erfassung durch modifizierten Kippbeiwert

Für die Bestimmung von Schnittgrößen und Verformungen zum Zeitpunkt  $t = 50$  a nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung sind die variierenden Vorkrümmungsansätze sehr umständlich in der Handhabung. Aus diesem Grund wird in Anlehnung an das Ersatzstabverfahren der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  eingeführt. Basierend auf der Kenntnis der äquivalenten Vorkrümmung in Abhängigkeit des ständigen Lastanteils wird das Differentialgleichungssystem (Gl. (2.1) bis Gl. (2.3)) erneut gelöst und so die Bemessungslast  $q_{zOG}$  für den Zeitpunkt  $t = 50$  a bestimmt.

Aus der Bemessungslast  $q_{zOG}$  ( $t = 50$  a) kann der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  hergeleitet und der Kippnachweis mit Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung für den Zeitpunkt  $t = 50$  a in Abhängigkeit des ständigen Lastanteils geführt werden. Der Kippstabilitätsnachweis kann nach Gl. (8.22) erfolgen.

$$\eta = \frac{\frac{M_y^I}{W_y}}{k_{crit,\infty} \cdot f_{m,d}} \quad (8.22)$$



**Abbildung 8.26:** Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t = 50$  a

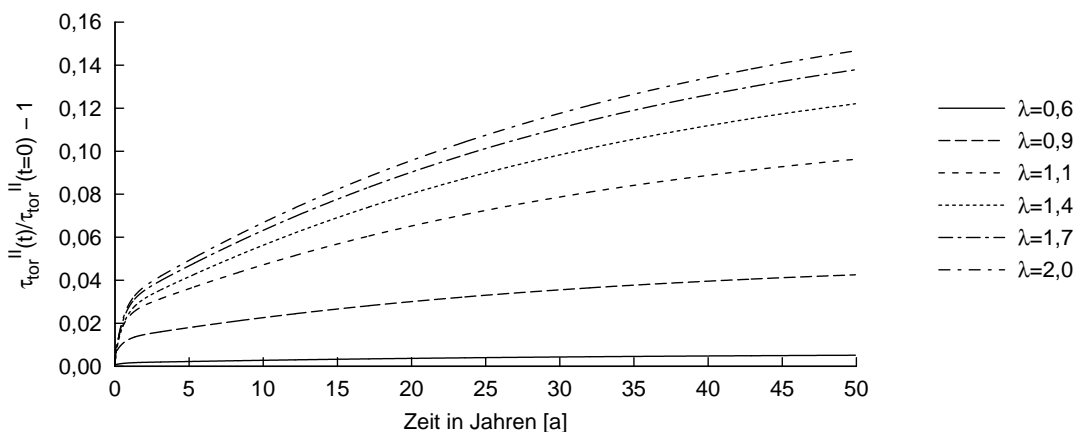
In Abb. 8.26 sind die Kippbeiwertkurven in Abhängigkeit des ständigen Lastanteils an der Gesamteinwirkung dargestellt, der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  kann für unterschiedliche ständige Lastanteile direkt aus Abb. 8.26 abgelesen werden. Die Berücksichtigung des Langzeitverhaltens hat zur Folge, dass in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  kleinere Werte annimmt als in der Referenzkurve zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Je nach Größe des ständigen Lastanteils und in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit reduziert sich durch das Kriechverhalten des Werkstoffs Holz der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  und damit die Bemessungslast  $q_{zOG}$  am Obergurt des kippgefährdeten Trägers unterschiedlich stark. Für einen ständigen Lastanteil von 60% bei konstanter Holzfeuchte beträgt der Rückgang des Kippbeiwerts und damit des Biegemoments um die starke Achse bis zu 16% für große bezogene Kippschlankheiten. Für die praxisrelevanten bezogenen Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  ist die Spannungszunahme infolge Kriechen vergleichsweise gering. Durch das Kriechen werden die Abtriebskräfte am Druckgurt des kippgefährdeten Trägers größer. Je größer diese bereits zur Zeit  $t = 0$  sind, desto größer ist deren Zunahme über eine zeitliche Dauer von 50 Jahren. Die durch das Kriechverhalten des Werkstoffs Holz größer werdenden Abtriebskräfte stellen damit eine Änderung der Lasteinwirkung dar. Das statische System des kippgefährdeten Trägers reagiert, wie Hooley/Madsen in [20] am vorgekrümmten Biegeträger zur Zeit  $t = 0$  zeigen konnte, mit zunehmender Schlankheit zunehmend sensibel auf geringfügige Änderungen der Lasteinwirkungen. Das hat zur Folge, dass unter einem 100%-igen Lastansatz für  $t = 0$  und unter einer Vorkrümmung nach Abb. 8.8 der Biegespannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung um ein Vielfaches überschritten wird. Infolge dessen muss die Bemessungslast reduziert werden, so dass auch unter Ansatz der entsprechenden Vorkrümmung mit

Langzeiteinfluss der Nachweis erfüllt ist. Um dies sicherzustellen, ist die Bemessungslast vergleichsweise geringfügig zu verringern.

## 8.5 Torsionsspannungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens

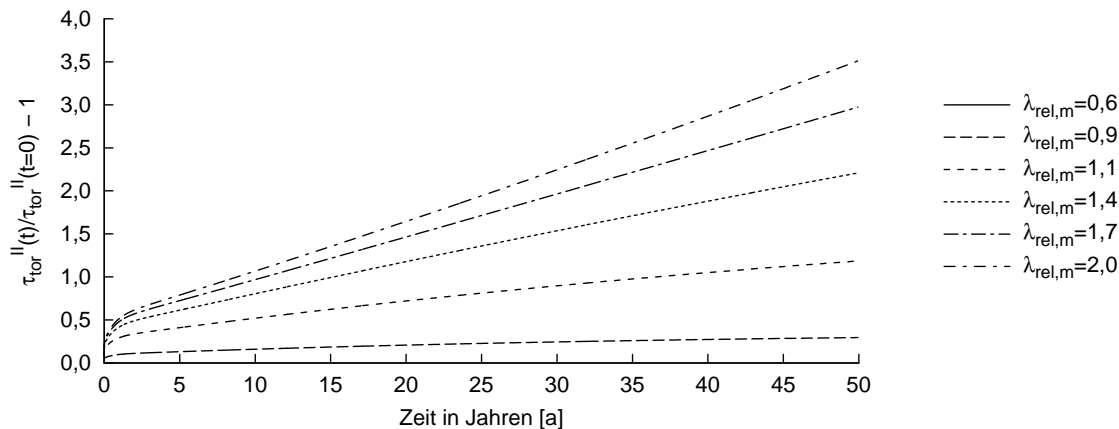
Beim Stabilitätsfall Kippen tritt am Einfeldträger unter konstanter Gleichlast am Obergurt  $q_{zOG}$  neben der Biegungsspannung  $\sigma_{x2}$  um die schwache Achse eine Schubspannung infolge Torsion  $\tau_{tor}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung auf. Während bei der Biegungsspannung die Anteile aus planmäßiger Biegung infolge Biegetorsionstheorie II. Ordnung in Bezug auf deren Langzeitverhalten gemeinsam betrachtet wurden, wird nachfolgend ausschließlich auf die Schubspannungen infolge Torsion  $\tau_{tor}$  eingegangen und die planmäßig auftretenden Schubspannungen infolge Querkraft von der Betrachtung ausgenommen.

Da beim Stabilitätsfall Kippen die horizontale Verformung  $v_{el}$  und die Verdrehung  $\vartheta_{el}$  durch das Differentialgleichungssystem der Biegetorsionstheorie II. Ordnung aneinander gekoppelt sind, ist unter Langzeiteinflüssen ein ähnliches Verhalten der Schubspannung infolge Torsion  $\tau_{tor}$  wie bei der Biegungsspannung  $\sigma_{x2}$  um die schwache Achse zu erwarten. Wie bereits bei der Biegungsspannung ist unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  ein



**Abbildung 8.27:** Zunahme der Torsionsspannung infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,3 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50a$

linear-viskoelastisches Kriechverhalten festzustellen, vgl. Abb. 8.27. Dabei ist die Zunahme der Schubspannungen infolge Torsion abhängig von der Kippschlankheit  $\lambda$ . Für die Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,6$  nimmt die Schubspannung infolge Torsion über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren um weniger als 1% zu. Bei einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  sind es nach 50 Jahren etwa 4% und steigt bis zu einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 2,0$  auf 15% an, ohne dass der linear-viskoelastische Bereich verlassen wird. Die Spannungszunahme infolge Langzeitverhalten kann bei ständiger Last  $g_{zOG} = 0,3 \cdot q_{zOG}$  als gering eingestuft werden und strebt einem Endwert entgegen. Unter einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$ , Abb. 8.28, kann ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten uneingeschränkt nur bis zu einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  in den Modellrechnungen festgestellt werden. Für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  ist ein starker linearer Anstieg der Torsi-



**Abbildung 8.28:** Zunahme der Torsionsspannung infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,6 \times q_{zOG}$  nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a

onsspannungen zu verzeichnen, die sich in Abhängigkeit der Kippschlankheit über den betrachteten Zeitraum von 50 Jahren zum Teil vervielfachen. Damit weist die Schubspannung infolge Torsion erwartungsgemäß bei Berücksichtigung des Langzeitverhaltens ein ähnliches Verhalten wie die Biegespannung auf.

## 8.6 Untersuchungen des Langzeiteinflusses bei wechselnder Feuchte

Der Werkstoff Holz reagiert hygroskopisch auf seine Umgebung, wenn dieser unter die Fasersättigung getrocknet wird. Um die Hygroskopizität des Werkstoffs Holz und deren Auswirkung auf die Festigkeit des Holzes zu erfassen, werden in DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] Nutzungsklassen definiert. Die Zuordnung der Bauteile erfolgt in Abhängigkeit der Umgebungsbedingungen eines Bauteils. Für die Herstellung von Brettschichtholzquerschnitten werden die Nadelholzlamellen vor der Verklebung technisch getrocknet. In DIN EN 14080:2013-09 [59] sind die Anforderungen an die Herstellung von Brettschichtholz geregelt. Der Feuchtegehalt von Lamellen aus unbehandeltem Holz darf demnach beim Zusammenbau zwischen 8% und 15% liegen.

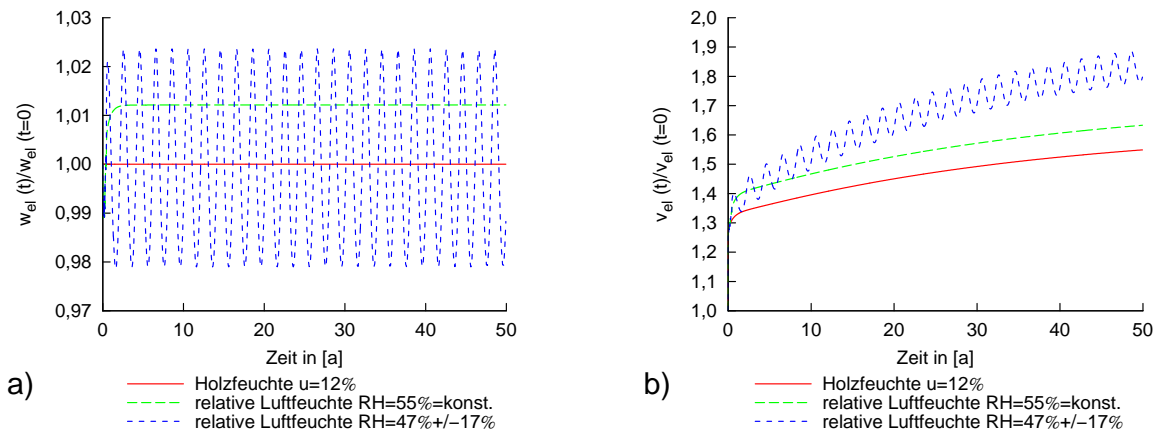
Um Modellrechnungen durchzuführen und diese mit den bisherigen Modellrechnungen, denen eine konstante Holzfeuchte zugrunde gelegt worden ist, vergleichen zu können, werden Querschnitte in Nutzungsklasse 1 gewählt. Nach DIN EN 1995-1-1:2010-12 [2] darf in allseitig geschlossenen und beheizten Bauwerken (Nutzungsklasse 1) die relative Luftfeuchte bei  $20^\circ\text{C}$  einen Wert von 65% nur für einige Wochen übersteigen. Die Gleichgewichtsfeuchte beträgt in diesem Fall nach DIN 1052-1:1988-04 [51] zwischen 6% und 12% Holzfeuchte, der zugehörige Schwankungsbereich der relativen Luftfeuchte bestimmt sich nach Keylwerth [82] und liegt zwischen 30 und 65% relativer Luftfeuchte. In der Praxis wird für das Verkleben ein mittlerer Wert von 12% angestrebt. Dieser Wert stellt sich auch ungefähr unter definiertem Normalklima ein, vgl. Becker [49]. Um die Auswirkungen wechselnder Luftfeuchte auf Holzbauteile im eingebauten Zustand zu bestimmen, schlägt Häglund [83] vor, den tatsächlichen Verlauf der relativen Luftfeuchte mit seinen



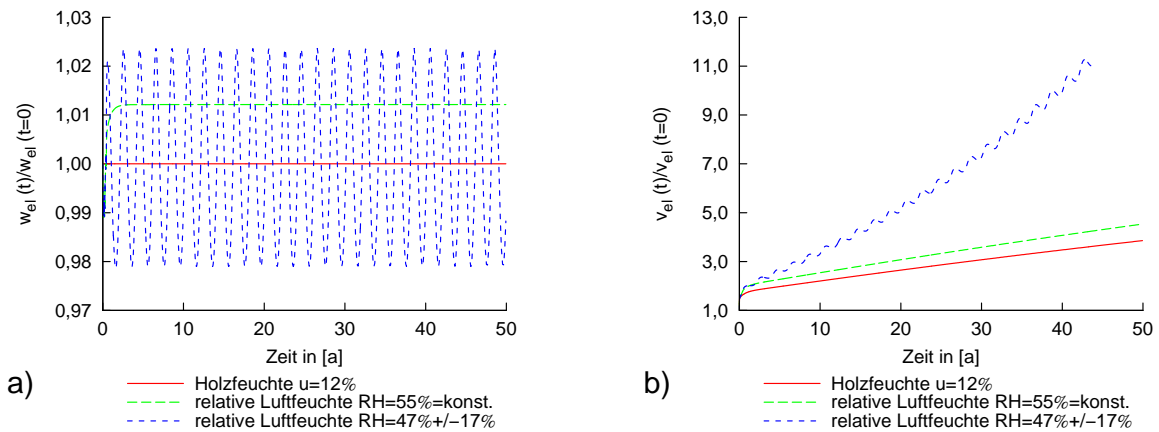
täglich und jährlich auftretenden Schwankungen zu erfassen. Da die Auswirkung der täglichen Schwankung der relativen Luftfeuchte auf die Holzfeuchte auf einen sehr kleinen oberflächennahen Bereich begrenzt bleibt und die Auswirkungen auf das Kriechverhalten vernachlässigbar gering sind, siehe Schänzlin in [10], werden die täglichen Schwankungen der relativen Luftfeuchte in den nachfolgend beschriebenen Modellrechnungen nicht berücksichtigt.

Winter et al. haben in [76] Langzeitmessungen an weitgespannten Holztragwerken vorgenommen, dabei wurden neben der in unterschiedlichen Bauteiltiefen gemessenen Holzfeuchte auch die zugehörigen Temperaturverläufe und die relative Luftfeuchte aufgezeichnet. Damit konnten Erkenntnisse zu den zeitlichen Verläufe und den jahreszeitlich bedingten Schwankungen gewonnen werden. Die Messungen in [76] wurden an insgesamt 21 Hallen mit unterschiedlichster Nutzung durchgeführt. Für die nachfolgenden Untersuchungen werden zunächst die untersuchten Hallen, die der Nutzungsklasse 1 zuzuordnen sind, einer näheren Betrachtung unterzogen. Im Rahmen von [76] wurden Messungen an 3 Turnhallen vorgenommen. Alle Messungen weisen einen Verlauf der relativen Luftfeuchtigkeit auf, der jahreszeitabhängig ist. Die tiefsten Werte der relativen Luftfeuchte wurden dabei im Winter gemessen, im Sommer dagegen die höchsten. Im Frühjahr und Herbst ist jeweils eine Entwicklung vom einen hin zum jeweiligen anderen Extremum zu beobachten. In guter Näherung kann diese jährliche Schwankung der relativen Luftfeuchte mit einem sinusförmigen Verlauf beschrieben werden.

Die gemessene Schwingbreite der relativen Luftfeuchte schwankt in [76] bei den Turnhallen zwischen 30 und 65%, wobei im Winter in Ausnahmefällen die relative Luftfeuchte auch weniger als 30% betragen hat. Aufgrund des geringen Umfangs der Stichproben können die in [76] gemessenen Werte nicht als allgemein verbindlich betrachtet werden. Die im Rahmen dieser Parameterstudie durchgeführten Modellrechnungen erfolgen deshalb auf der Grundlage von Richtwerten aus der Bauphysik. So liegt die Schwingbreite der relativen Luftfeuchte in beheizten Bauwerken zwischen 30 und 70% (vgl. Willems [84]). Bei den Modellrechnungen unter wechselnden Feuchteverhältnissen werden Dehnungsänderungen infolge mechano-sorptiven Kriechens in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$ , der mittleren Luftfeuchte und der jährlichen Schwankungsamplitude berechnet. Das Beispiel in Abb. 8.29 zeigt die elastischen Verformungen in vertikaler und horizontaler Richtung eines 16 cm breiten und 112 cm hohen Einfeldträgers mit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  unter ständiger Gleichlast  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  am Obergurt. Während die vertikale, elastische Durchbiegung  $w_{el}$  in Abb. 8.29a unter wechselnder Feuchte erwartungsgemäß in nur sehr geringem Maße um den Wert der elastischen Durchbiegung bei konstanter Holzfeuchte oszilliert, weisen die horizontalen, elastischen Kriechverformungen  $v_{el}$  unter wechselnder Feuchte (Abb. 8.29b) einen Verlauf auf, der mit einem linear-viskoelastischen Materialverhalten beschrieben werden kann, vgl. Rautenstrauch [39]. Die Dehnungen und Verformungen streben dabei einem Endwert entgegen. Wird die Kippschlankheit desselben Querschnitts auf  $\lambda_{rel,m} = 1,4$  erhöht, bleibt der zeitliche Verlauf der vertikalen Durchbiegung  $w_{el}$  (Abb. 8.30a) im Vergleich zur bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 0,9$  unverändert. Die horizontale, elastische Kriechverformung  $v_{el}$  unter wechselnder Feuchte (Abb. 8.30b) nimmt über den untersuchten Zeitraum von 50 Jahren überproportional zu, während bei konstanter Holzfeuchte und unter konstanter relativer Luftfeuchte  $RH = 55\%$  die horizontalen, elastischen Kriechverformungen einem Endwert entgegen gegangen sind. Die Modellrechnungen zeigen, dass der jährliche Schwankungsbereich der relativen Luftfeuchte und die bezogene Kippschlankheit



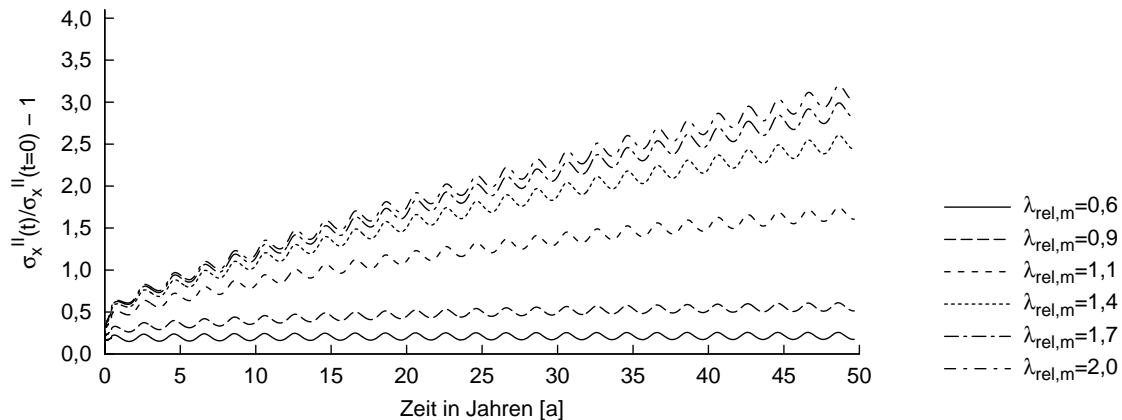
**Abbildung 8.29:** Vergleich der elastischen Verformungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in Abhängigkeit wechselnder Feuchteeinwirkung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Beispiel eines 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitts eines Einfeldträgers der Schlankheit  $\lambda = 15$  unter ständiger Gleichlast  $g_{zOG} = 0,6 \times q_{zOG}$  am Obergurt



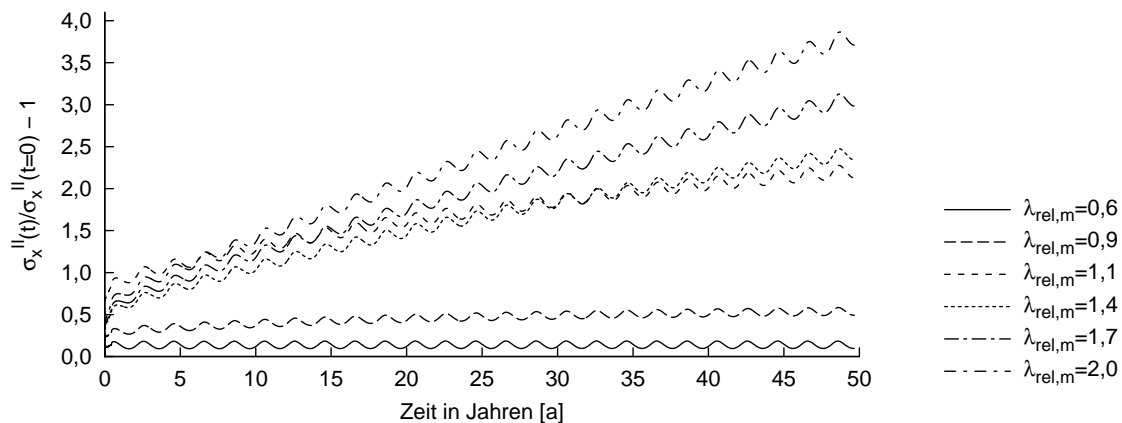
**Abbildung 8.30:** Vergleich der elastischen Verformungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in Abhängigkeit wechselnder Feuchteeinwirkung nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung am Beispiel eines 16 cm breiten und 112 cm hohen Querschnitts eines Einfeldträgers der Schlankheit  $\lambda = 25$  unter ständiger Gleichlast  $g_{zOG} = 0,6 \times q_{zOG}$  am Obergurt

$\lambda_{rel,m}$  des Trägers den Verlauf der elastischen Kriechverformungen wesentlich beeinflussen. Die Modellberechnungen unter wechselnden Feuchtebedingungen erfolgen für Träger mit einem  $h/b$ -Verhältnis von 4, 7 und 10. Die Trägerbreite variiert von 12 bis 24 cm. In Abhängigkeit dieser Parameter, der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  und einem sinusförmigem Verlauf der relativen Luftfeuchte lassen sich die Träger für die Modellberechnungen konfigurieren.

Unter konstanten Feuchtebedingungen markierte der ständige Lastanteil an der Bemessungslast von  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  den Übergang vom linear-viskoelastischen Kriechverhalten hin zum überproportionalen Kriechen. Um den Übergang zu einer überproportionalen Längsspannungszunahme eingrenzen zu können, werden zunächst unter wechselnden Luftfeuchtebedingungen Träger untersucht, deren ständiger Lastanteil an der Bemessungslast auf  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  beträgt. Es werden Träger mit einem  $h/b$ -Verhältnis



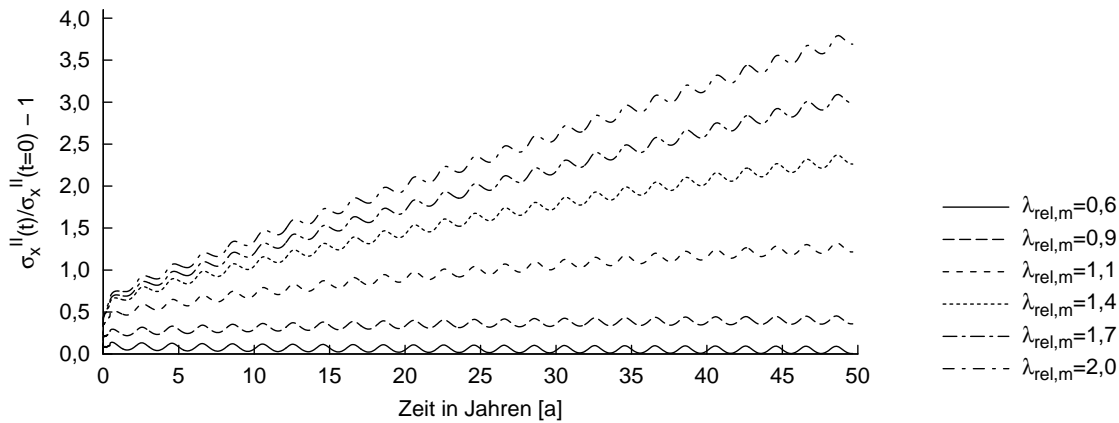
**Abbildung 8.31:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH = 47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a an Trägern mit Querschnitt  $h/b = 4 = 12 \text{ cm}/48 \text{ cm}$



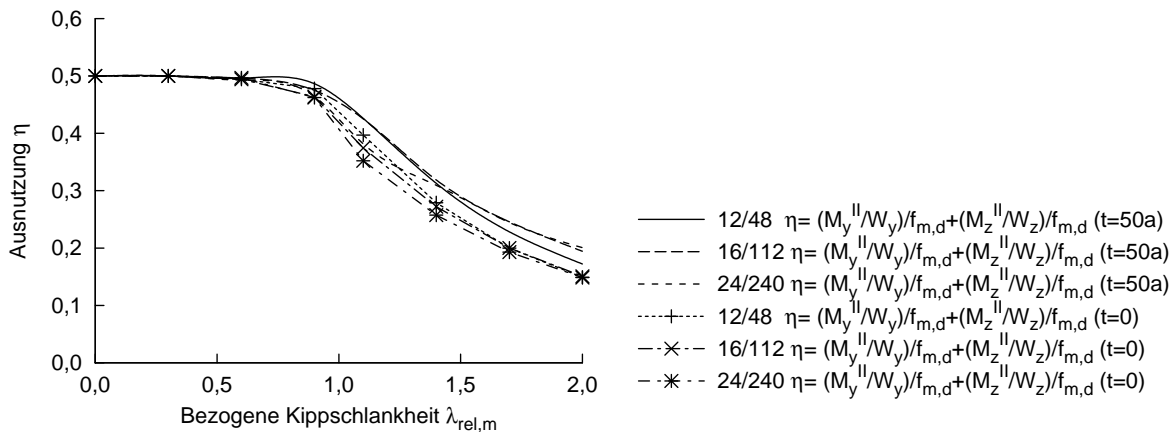
**Abbildung 8.32:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH = 47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50$  a an Trägern mit Querschnitt  $h/b = 7 = 16 \text{ cm}/112 \text{ cm}$

von 4, 7 und 10 mit Trägerbreiten von 12 bis 24 cm hierfür einer numerischen Modellberechnung unterzogen. In den Abb. 8.31 bis Abb. 8.33 ist die Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  infolge Kriechen unter wechselnder Luftfeuchte für Träger mit unterschiedlichen  $h/b$ -Verhältnissen dargestellt.

Für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,9$  sind in Abb. 8.34 die Spannungsanteile aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zur Zeit  $t = 0$  nahezu nicht vorhanden und zur Zeit  $t = 50$  Jahre nur eine vernachlässigbar geringe Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  infolge Kriechen festzustellen. Bei einer ständigen Belastung  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  ist nur für Träger bis zu einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 1,1$  ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten festzustellen. Für Träger mit einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} > 1,1$  ist ein deutlich linearer Anstieg der Spannungen  $\Delta\sigma_x^{II}$  zu verzeichnen, wie aus den Abb. 8.31 bis Abb. 8.33 abgelesen werden kann. An der in Abb. 8.34 über der Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m}$  aufgetragenen Spannungsausnutzung



**Abbildung 8.33:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG} = 0,5 \times q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH = 47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t = 50a$  an Trägern mit Querschnitt  $h/b = 10 = 24\text{ cm}/240\text{ cm}$

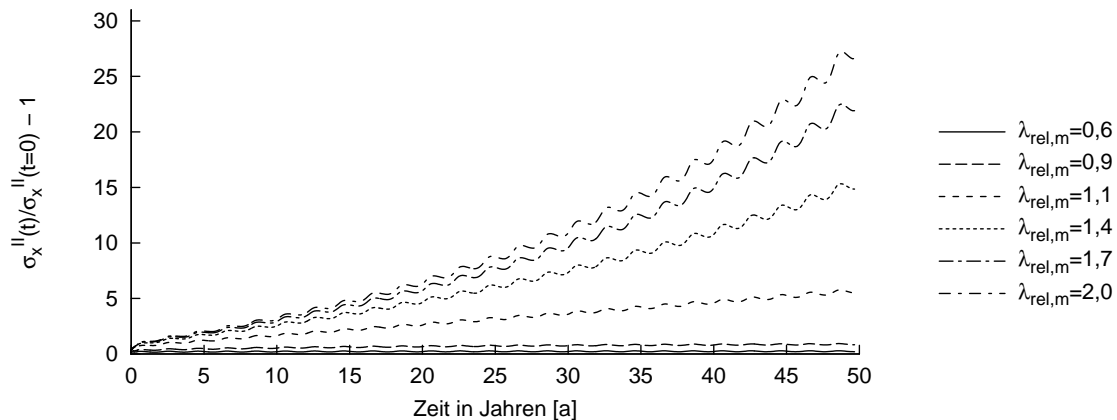


**Abbildung 8.34:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $= 0,5 \times \text{ Bemessungs- last}$ ) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH = 47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

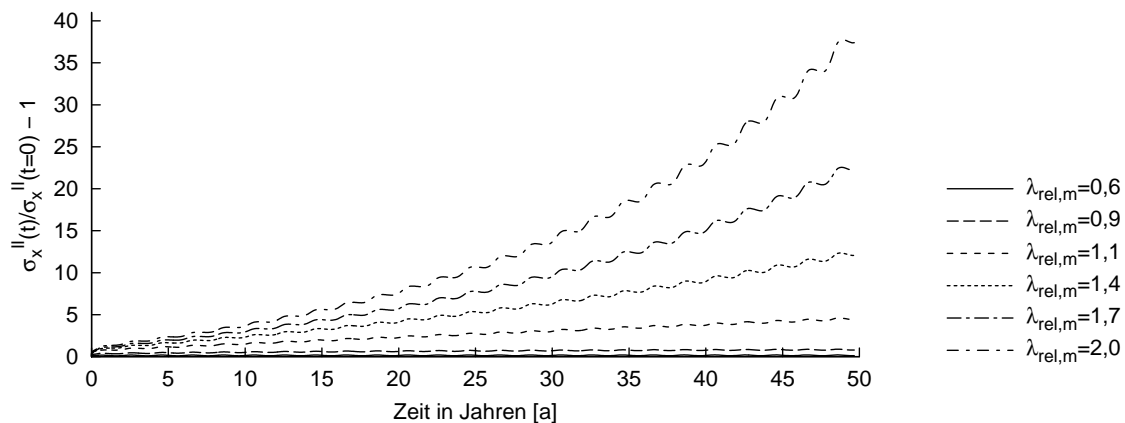
$\eta$  infolge ständiger Einwirkung  $g_{zOG} = 0,5 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH = 47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung ist eine Zunahme der Spannungsausnutzung von bis zu 8% nach 50 Jahren erkennbar.

Im nächsten Schritt wird der ständige Lastanteil an der Bemessungslast auf  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  erhöht und weitere Modellrechnungen an den konfigurierten Trägern vorgenommen.

Für einen ständigen Lastanteil von  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  ist in den Schaubildern Abb. 8.35 bis Abb. 8.37 bis zu einer Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  eine einem Endwert entgegen strebende Spannungszunahme festzustellen und damit ein linear-viskoelastisches Kriechverhalten, vgl. auch Kuhlmann/Hofmann in [85] und [86]. Für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  ist ein starker, nichtlinearer Anstieg der Spannungszunahme zu verzeichnen. Dieser nichtlineare Anstieg der Längsspannung  $\Delta\sigma_x^{II}$  schlägt sich in der Spannungsausnutzung  $\eta$  zum betrachteten Zeitpunkt nach  $t = 50$  Jahre nieder. Abb. 8.38 veranschaulicht dies für die Trägerquerschnitte  $h/b = 4 = 12\text{ cm}/48\text{ cm}$ ,  $h/b = 7 = 16\text{ cm}/112\text{ cm}$  und  $h/b = 10 = 24\text{ cm}/240\text{ cm}$ . Unter ständiger Gleichlast  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  am Obergurt nimmt der Spannungsanteil  $\sigma_x^{II}$



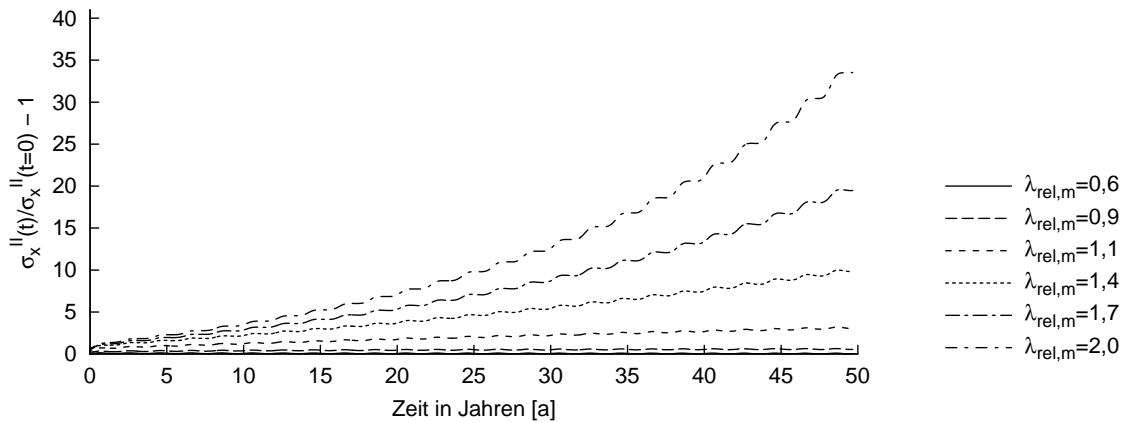
**Abbildung 8.35:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG}=0,6 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH=47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t=50$  a an Trägern mit Querschnitt  $h/b=4=12$  cm/48 cm



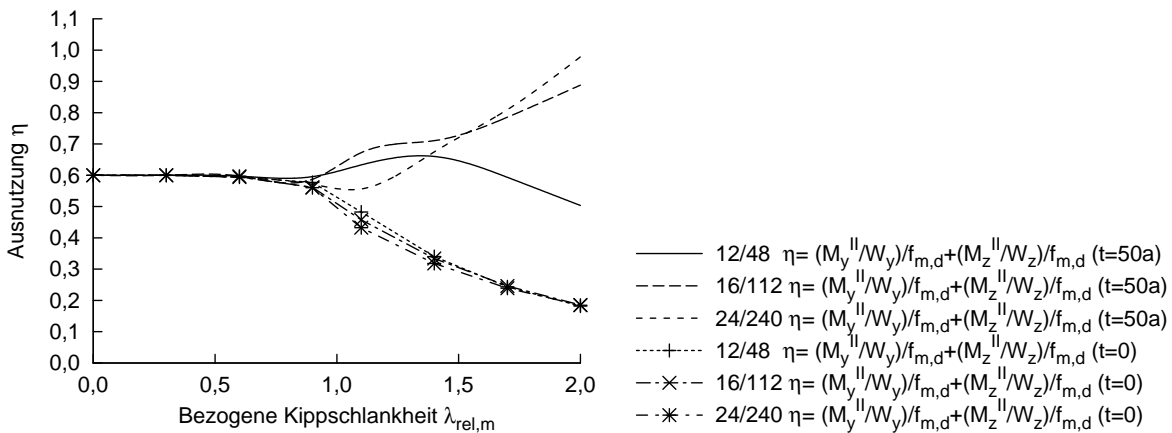
**Abbildung 8.36:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG}=0,6 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH=47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t=50$  a an Trägern mit Querschnitt  $h/b=7=16$  cm/112 cm

infolge Kriechen unter wechselnder Luftfeuchte zu und führt zu einer deutlich höheren Spannungsausnutzung  $\eta$ , die bei den untersuchten Trägerquerschnitten bei einer bezogenen Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} = 2,0$  bis fast zum Versagen des Querschnitts führt und dies, ohne dass die äußere Last bis zur Bemessungslast gesteigert wird. Zwar sind zwischen den einzelnen  $h/b$ -Verhältnissen quantitative Unterschiede in den Kurven der Spannungsausnutzung  $\eta$  zur Zeit  $t=50$  Jahre aus Abb. 8.38 abzulesen, qualitativ ist jedoch eine deutliche Zunahme der Spannungsausnutzung  $\eta$  im Vergleich zur Spannungsausnutzung  $\eta$  unter konstanten Feuchtebedingungen, vgl. Abb. 8.16, zu verzeichnen, die im wesentlichen auf die überproportionale Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  zurückzuführen ist.

Eine ähnlich hohe überproportionale Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  für größere Schlankheiten war unter konstanten Feuchtebedingungen erst ab einem ständigen Lastanteil von  $g_{zOG} = 0,7 \cdot q_{zOG}$  festzustellen, vgl. Abb. 8.12.



**Abbildung 8.37:** Spannungszunahme infolge Kriechen unter ständiger Last  $g_{zOG}=0,6 \cdot q_{zOG}$  bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH=47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung für einen Zeitraum von  $t=50$  a an Trägern mit Querschnitt  $h/b=10=24\text{ cm}/240\text{ cm}$



**Abbildung 8.38:** Spannungsausnutzung  $\eta$  infolge ständiger Einwirkung ( $=0,6 \times$  Bemessungslast) unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bei wechselnder Luftfeuchte ( $RH=47\% \pm 17\%$ ) nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung

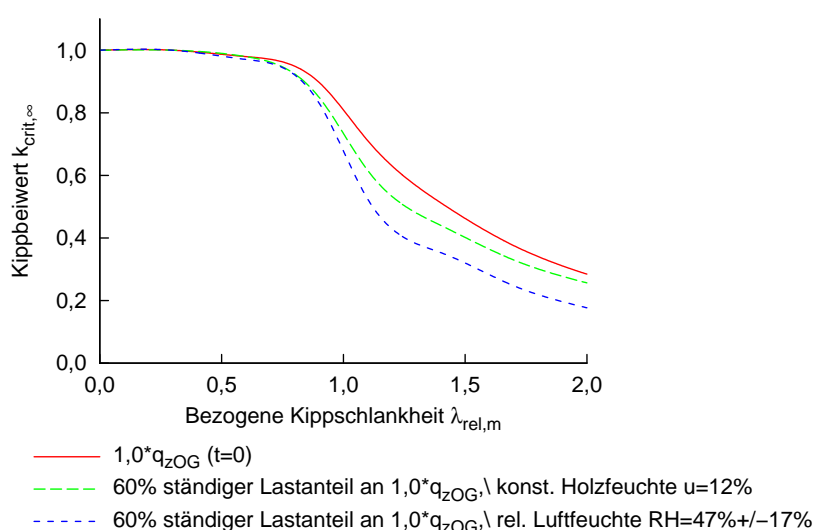
Es kann somit gezeigt werden, dass die wechselnde Luftfeuchte zu einer weiteren Spannungszunahme führt und eine überproportionale Längsspannungszunahme bei wechselnder Luftfeuchte schon bei einem geringeren ständigen Lastanteil der Bemessungslast als unter konstanten Feuchtebedingungen auftritt.

### 8.7 Schlussfolgerung

Ausgehend von den zeitschrittweisen numerischen Berechnungen bei konstanter Holzfeuchte konnte der Langzeiteinfluss auf kippgefährdete Biegeträger bestimmt werden. Aus den erzielten Ergebnissen konnte eine Referenzkurve zunächst unter konstanten Holzfeuchtebedingungen abgeleitet werden. Der Vergleich unterschiedlicher Ansätze zur Erfassung des Langzeitverhaltens, vgl. Kapitel 8.4, machte deutlich, dass mit Hilfe der äquivalenten Vorkrümmung die Bemessungslast zur Zeit  $t=50$  a berechnet werden kann

und in einem weiteren Schritt sich die Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens daraus bestimmen lassen.

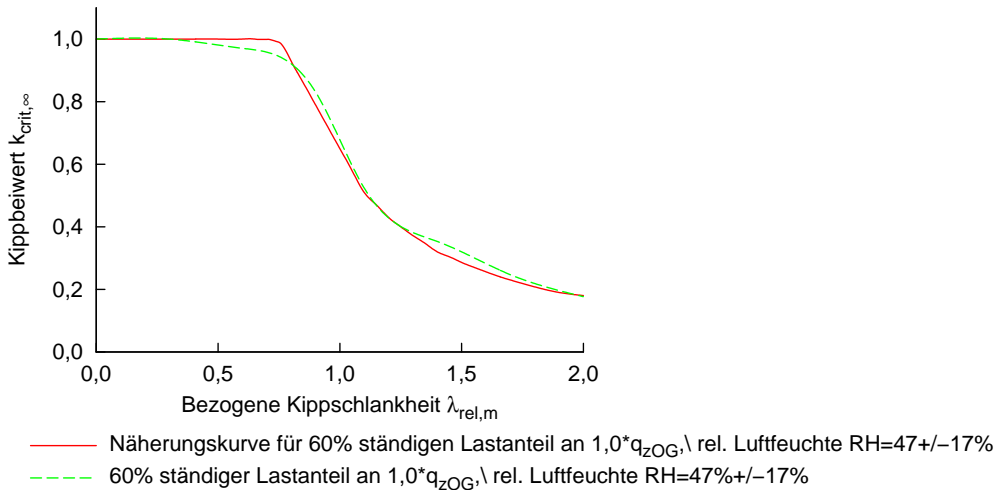
Da eine konstante Holzfeuchte allenfalls unter Laborbedingungen erreicht werden kann, waren weitere numerische Untersuchungen notwendigen, in denen die jährliche Schwankung der Luftfeuchte in allseitig geschlossenen und beheizten Räumen in Nutzungsklasse 1 berücksichtigt werden konnte. Damit war es möglich numerische Untersuchungen für baupraxisrelevante Trägerkonfigurationen zu untersuchen. Mit den zuvor für konstante Holzfeuchte erarbeiteten Grundlagen konnte mit Hilfe der äquivalenten Vorkrümmung die Bemessungslast zur Zeit  $t = 50$  a und die Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens bei wechselnder Luftfeuchte bestimmt werden. Die Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  werden für Träger mit einem ständigen Lastanteil  $g_{zOG} = 0,6 \cdot q_{zOG}$  an der Bemessungslast angegeben und sind in Abb. 8.39 dargestellt. Die Berücksichtigung des Lang-



**Abbildung 8.39:** Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t = 50$  a bei wechselnder Luftfeuchte

zeitverhaltens bei wechselnder Luftfeuchte in Nutzungsklasse 1 bewirkt eine Verringerung des Kippbeiwerts  $k_{crit,\infty}$  im Vergleich zu den Referenzkurven zum Zeitpunkt  $t = 0$  und bei konstanter Holzfeuchte zur Zeit  $t = 50$  a. In der in Abb. 8.39 dargestellten Kippbeiwertkurve spiegelt sich die Längsspannungszunahme  $\Delta\sigma_x^{II}$  aus Abb. 8.38 infolge Kriechen unter wechselnder Luftfeuchte wider. Für Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} < 0,9$  unterscheiden sich die Kippbeiwertkurven ohne Berücksichtigung des Langzeitverhaltens und mit Berücksichtigung des Langzeitverhaltens unter konstanten und wechselnden Feuchtebedingungen nur marginal.

Für bezogene Kippschlankheiten  $\lambda_{rel,m} > 0,9$  nimmt infolge des starken, nichtlinearen Anstiegs der Spannungszunahme die Kippbeiwertkurve im Vergleich zu den Referenzkurven zum Zeitpunkt  $t = 0$  und bei konstanter Holzfeuchte zur Zeit  $t = 50$  a geringere Werte an. Die Kippbeiwertkurve fällt im Vergleich zur Referenzkurve zum Zeitpunkt  $t = 0$  früher und steiler ab. Der nichtlineare Anstieg der Längsspannung  $\Delta\sigma_x^{II}$  führt somit beim Kippnachweis bei Berücksichtigung des Langzeitverhaltens unter wechselnder Luftfeuchte zu einer Verringerung der Bemessungslast im Vergleich zum Kippnachweis ohne Berücksichtigung des Langzeitverhaltens. Die Kippbeiwertkurve lässt sich in Anlehnung an die



**Abbildung 8.40:** Näherungskurve an die Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t=50a$  bei wechselnder Luftfeuchte

abschnittsweise definierte Näherungskurve für den Kippnachweis nach dem Ersatzstabverfahren, siehe Gl. (2.36), unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens in Nutzungsklasse 1 als Näherungskurve in Gl. (8.23) beschreiben:

$$k_{crit,\infty} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_{rel,m} \leq 0,75 \\ 2,04 - 1,4 \cdot \lambda_{rel,m} & \text{für } 0,75 < \lambda_{rel,m} \leq 1,4 \\ \frac{1}{1,73 \cdot \lambda_{rel,m}^2} + 0,03 & \text{für } \lambda_{rel,m} > 1,4 \end{cases} \quad (8.23)$$

In Abb. 8.40 sind die Ausgangskurve der Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens  $t = 50a$  bei wechselnder Luftfeuchte und die zugehörige Näherungskurve dargestellt. Mit Hilfe der Näherungsgleichung in Gl. (8.23) kann das Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger vergleichsweise einfach abgeschätzt werden.

Die erzielten Ergebnisse bilden damit die Basis für weitere Forschungsarbeiten zum Langzeitverhalten stabilitätsgefährdeter Biegeträger. Die durchgeführten numerischen Berechnungen haben gezeigt, dass dem Vorkrümmungsansatz eine wesentliche Bedeutung für das Langzeitverhalten zukommt. Der bisherige normativ geregelte Vorkrümmungsansatz, der den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zugrunde gelegt worden ist, beinhaltet sowohl geometrische als auch strukturelle Imperfektionen eines Bauteils, ohne deren jeweiligen Anteil näher zu quantifizieren. Durch genauere Kenntnis der tatsächlich in der Baupraxis auftretenden Vorkrümmungen, lässt sich unter Berücksichtigung eines präzisierten Vorkrümmungsansatzes das Langzeitverhalten noch weiter präzisieren.



## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend vom Kippproblem nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung wurden numerische Untersuchungen zum Torsionsmoment aus Kippstabilisierung und Modellrechnungen zum Kippen schlanker Brettschichtholzträger unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens durchgeführt. Für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung konnte ein Näherungsverfahren abgeleitet werden, das eine einfache und zuverlässige Bestimmung des Torsionsmoments ermöglicht.

Hierfür wurden umfangreiche numerische Untersuchungen an parallelgurtigen geraden Trägern, parallelgurtigen Trägern mit angehobenem Untergurt, Satteldach- und Fischbauchträgern mit und ohne seitlicher Stützung des Druckgurts durchgeführt. Bei den Untersuchungen wurde ferner zwischen Trägern unterschieden, deren Druckgurte als starr gestützt angesehen werden können und solchen, die eine nachgiebige seitliche Stützung aufweisen. Im Rahmen der Untersuchungen hat sich gezeigt, dass der zulässige Höchstwert der Verformung von  $l/500$  für Horizontalverbände für weitgestützte Konstruktionen des Ingenieurholzbaus sehr große Verformungen zulässt, die sich negativ auf die Spannungen aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung auswirken. Unter Berücksichtigung des aktuellen Stands der Technik wurde für alle untersuchten Trägerkonfigurationen der am ungünstigsten wirkende Vorkrümmungsansatz auf das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung bestimmt.

Der Werkstoff Holz weist zeitabhängige Dehnungen auf, die beim Kippproblem nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung nicht nur zu größeren Verformungen des betrachteten Systems, sondern auch zu Spannungszunahmen führen und sich auf die Tragfähigkeit auswirken. Um das Langzeitverhalten kippgefährdeter Biegeträger zu erfassen, wurde ein numerisches Modell gebildet, das das Kippproblem nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung unter Berücksichtigung von rheologischen Modellen für das Langzeitverhalten beschreibt. Die Modellrechnungen unter Langzeiteinfluss zeigen in Abhängigkeit der bezogenen Kippschlankheit  $\lambda$  und dem kriecherzeugenden ständigen Lastanteil für große Kippschlankheiten eine Zunahme des Spannungsanteils aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Die Höhe der Spannungszunahme ist nicht nur von der Kippschlankheit, sondern auch von den Umgebungsbedingungen abhängig. Unter konstanten Feuchtebedingungen konnte eine geringere Spannungszunahme als unter wechselnden Feuchtebedingungen in der Nutzungsklasse 1 festgestellt werden. In allen untersuchten Fällen ist ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Höhe des Spannungsanteils aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung zur Zeit  $t=0$  und dem Spannungszuwachs zur Zeit  $t=50$  a ablesbar. Für kleine Schlankheiten  $\lambda$  hat das Langzeitverhalten einen sehr geringen Einfluss auf das Kippverhalten eines Brettschichtholzträgers, so dass für eine praxisübliche Kippschlankheit  $\lambda_{rel,m} \leq 0,9$  das Langzeitverhalten keine Auswirkung auf den Querschnittsnachweis zur Zeit  $t=50$  a hat.

Bei größeren Kippschlankheiten erhöht sich durch den Langzeiteinfluss unter zeitlich konstantem ständigen Lastanteil die Ausnutzung des Querschnitts. Aus den zeitschrittweisen

Modellberechnungen unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens konnten für konstante und wechselnde Holzfeuchte äquivalente Vorkrümmungen  $e_\infty$  bestimmt werden, die beim Nachweis nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung die gleichen Spannungszunahmen bewirken, wie sie durch Kriechen entstehen. Diese äquivalenten Vorkrümmungen sind durch kubische Funktionen beschreibbar. Außerdem konnten durch Bezugnahme auf die Spannungswerte nach Theorie I. Ordnung modifizierte Kippbeiwerte  $k_{crit,\infty}$  zur Erfassung des Langzeiteinflusses beim Kippstabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren hergeleitet werden. Für den Kippstabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren reduziert sich die maximal aufnehmbare Einwirkung in Abhängigkeit der Kippschlankheit  $\lambda$  und des ständigen Lastanteils an der Gesamteinwirkung. Mit zunehmender Schlankheit  $\lambda$  nehmen die Spannungen aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung nichtlinear zu und der Kippbeiwert  $k_{crit,\infty}$  verkleinert sich entsprechend.

Die Auswirkungen, die sich für weitgestützte Brettschichtholzträger ergeben, deren effektive Kipplänge durch Horizontalverbände reduziert wird, sind dabei noch weiter zu untersuchen. Ein besonderes Augenmerk muss hierbei auf die Steifigkeit der Horizontalverbände gerichtet werden.

Zur Reduzierung der Kipplänge und zur Stabilisierung gegen seitliches Ausweichen werden in den Druckzonen der Träger Verbände oder gleichwertige Konstruktionen angeordnet. Diese müssen eine ausreichende Steifigkeit aufweisen, so dass ein seitliches Ausweichen des Trägers über die gesamte Trägerlänge vermieden werden und der Kippnachweis nach dem Ersatzstabverfahren geführt werden kann. Durch das Kriechverhalten nehmen die horizontale Verformung und die Verdrehung des Biegeträgers und damit die einwirkende Seitenlast auf die Verbandskonstruktion im Lauf der Zeit zu. Höhere Seitenlasten bewirken eine Vergrößerung der Verformung des Verbands, wodurch die aussteifende Wirkung auf den kippgefährdeten Biegeträger reduziert wird. Die Problematik der Seitenlasten wird durch variable Trägerhöhen im Holzbau zudem verschärft, da die meisten Brettschichtholzträger nicht als parallelgurtige Träger sondern in Form von Satteldachbindern, Pultträgern oder gelegentlich auch als Fischbauchträger ausgeführt werden. Aus diesem Grunde sind weitere Untersuchungen zum Einfluss des Langzeitverhaltens auf die Größe der anzusetzenden Stabilisierungslasten im Holzbau unter Verwendung der in diesem Forschungsvorhaben gewonnenen Erkenntnisse zu ermitteln und ein Modell für die Bemessung und praxisnahe Anwendung zu schaffen, das auch eine ausreichende Steifigkeit der Verbände zur Aufnahme der Seitenlasten sicherstellt.

Bei sämtlichen Untersuchungen zur Kippstabilität hat sich gezeigt, dass die Vorkrümmung wesentlichen Einfluss auf die Schnittgrößen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung hat und sich auch auf die Spannungszunahme infolge Langzeitverhalten auswirkt. Untersuchungen von Winter et al. [68] an einigen wenigen ausgeführten Objekten belegen, dass die tatsächlich auftretenden horizontalen Verformungen weit geringer sind, als die rechnerisch zulässigen. Da die auftretenden Spannungen aus Biegetorsionstheorie II. Ordnung einen nichtlinearen Effekt darstellen, sollten die tatsächlich auftretenden Vorkrümmungen und horizontalen Verformungen genauer untersucht werden, mit dem Ziel die anzusetzenden Vorkrümmungen und den bisherigen zulässigen Höchstwert der Verformung für Horizontalverbände auf deren Anwendbarkeit auf weitgestützte Tragkonstruktionen zu überprüfen und anschließend zulässige Höchstwerte zu definieren, mit denen Berechnungen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung vorgenommen werden können.

## 10 Literaturverzeichnis

- [1] TORATTI, T.: *Creep of timber beams in variable environment*, Helsinki University of Technology, Laboratory of Structural Engineering and Building Physics, Dissertation, 1992
- [2] DIN EN 1995-1-1:2010-12: *Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten- Teil 1-1: Allgemeines- Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1995-1-1:2004 + AC:2006 + A1:2008*
- [3] DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08: *Nationaler Anhang, National festgelegte Parameter; Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten- Teil 1-1: Allgemeines, Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau*
- [4] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Zur Berechnung des Torsionsmoments im Auflager gabelgelagerter Biegeträger (Dokument N1579 des NA 005 Normenausschuss Bauwesen (NABau) NA 005-04-01 AA Arbeitsausschuss Holzbau (Sp CEN/TC124, CEN/TC250/SC5). In: *Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf Nr. 2010-9x, Universität Stuttgart* (2010)
- [5] MISTLER, H. L.: Torsion. In: *Dokument N 1599 des NA 005 Normenausschuss Bauwesen (NABau), NA 005-04-01 AA Arbeitsausschuss Holzbau (Sp CEN/TC124, CEN/TC250/SC5)* (2010)
- [6] MISTLER, H. L.: Erläuterung zu N 1599. In: *Dokument N 1606 des NA 005 Normenausschuss Bauwesen (NABau), NA 005-04-01 AA Arbeitsausschuss Holzbau (Sp CEN/TC124, CEN/TC250/SC5)* (2010)
- [7] KUHLMANN, U.; TEICHMANN, G.: Influence of creep on the lateral torsional buckling of glued laminated timber beams. In: *Proceedings of the 9th World Conference on Timber Engineering, WCTE 2006, Portland, USA* (2006)
- [8] TEICHMANN, G.: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf die Stabilität hoher Biegeträger. In: *Doktorandenkolloquium Holzbau Forschung + Praxis, Stuttgart, 2006, S.149-156*
- [9] SCHÄNZLIN, J.: A contribution for the description of the time dependent behaviour of timber by different models. (2006)
- [10] SCHÄNZLIN, J.: *Modeling the long-term behaviour of structural timber for typical serviceclass-II-conditions in South-West Germany*. Habilitation, Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf Nr. 2010-2, Universität Stuttgart, Oktober 2010
- [11] HOFMANN, R.: *Kippen bei schlanken Holzträgern unter Berücksichtigung des Langzeitverhaltens*. Diplomarbeit, Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf Nr. 2006-6x, Universität Stuttgart, Mai 2006
- [12] PETERSEN, C.: *Stahlbau - Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*. 4. Auflage (2013)
- [13] PETERSEN, C.: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*. (1980)

- [14] ROIK, K.; CARL, J.; LINDNER, J.: *Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe*. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1972
- [15] KINDMANN, R.; FRICKEL, J.: *Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit-Grundlagen, Methoden, Berechnungsverfahren, Beispiele*. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2002
- [16] NEUHAUS, H.: *Lehrbuch des Ingenieurholzbaus*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart. 1994
- [17] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: *Erfassung des Langzeitverhaltens von schlanken Brettschichtholzträgern beim Stabilitätsnachweis Kippen*. Abschlussbericht zum DFG Forschungsvorhaben KU 1130/11-1; Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf Nr. 2011-01X, Universität Stuttgart, Januar 2011
- [18] STALLER, A.: Ein numerisches Lösungsverfahren für das Differentialgleichungssystem des Biegetorsionsproblems nach Theorie II. Ordnung. In: *Bauingenieur* 54 (1979), S. S.103–110
- [19] BRÄUNING, G.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4., neubearbeitete Auflage*. Verlag Harri Deutsch, 1975
- [20] HOOLEY, R. F.; MADSEN, B.: Lateral stability of glued laminated beams. In: *Journal of the Structural Division* (1964), June, S. 201–218
- [21] BRÜNINGHOFF, H.: *Spannungen und Stabilität bei quergestützten Brettschichtholzträgern*. Dissertation, Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen Universität Karlsruhe (TH), 1973
- [22] BRÜNINGHOFF, H.: *Verbände und Abstützungen; genauere Nachweise, komplette Fassung Teil 2*. Bericht Entwicklungsgemeinschaft Holzbau i. d. Deutschen Gesellschaft für Holzforschung; Informationsdienst Holz, Oktober 1989
- [23] BRÜNINGHOFF, H.: Stabilitätsnachweis im Holzbau - Biegedrillknicken. In: *Ingenieurholzbau; Karlsruher Tage 2005*, 2005
- [24] DIN 1052:2008-12: *Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken - Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*. 2008
- [25] PRANDTL, L.: *Kipp-Erscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischen Gleichgewicht*, 1899
- [26] MICHELL, A. G. M.: Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces. In: *Philosophical Magazine* 48 (September 1899), S. 298 – 309
- [27] TIMOSHENKO, S. ; MONOGRAPHS, Engineering S. (Hrsg.): *Theory of elastic stability*. Bd. 1. Auflage. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1936
- [28] ERLÄUTERUNGEN ZU DIN 1052: 2004-08: Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken. 1. Auflage (2004)
- [29] CHOO, B. S.: Biegung. In: *STEP 1, Holzbauwerke, Bemessung und Baustoffe nach Eurocode 5* (1995)
- [30] HEIMESHOF, B.: Berechnung und Ausführung von Holzbauwerken. In: *Ingenieur-Holzbau 86, Fachtagung für Bauingenieure, S.1-41* (Juli 1986)
- [31] DIN 1052:2004-08: *Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken - Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*. 2004

- [32] COLLING, F.: *Holzbau - Grundlagen, Bemessungshilfen*. Bd. 1. Auflage. Vieweg, 2004
- [33] VINNAKOTA, S.: Inelastic stability of laterally unsupported I-beams. In: *Computer and Structures* 7 (1977), S. S.377–389
- [34] HAUSWIRTH, D.; ZWEIDLER, S.: *Mathematische Behandlung von variablen Biegesteifigkeiten im konstruktiven Ingenieurbau*, Fachhochschule Aargau, Semesterarbeit, Dezember 2002
- [35] FRIEDRICH + LOCHNER GMBH: *Berechnungsprogramm Biegetorsionstheorie II. Ordnung, Version 01/2007 A*
- [36] KINDMANN, R. ET AL.: *RUBSTAHL2008 -Lehr- und Lernprogramme für Studium und Weiterbildung*. 2008
- [37] GLOS, P.; HEIMESHOF, B.; KELLETSHOFER, W.: Einfluss der Belastungsdauer auf die Zug- und Druckfestigkeit von Fichten-Brettlamellen. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 45 (1987), S. S.243–249
- [38] BENNING, H. H.: *Beitrag zur Traglastberechnung stabilitätsgefährdeter Brettschicht-holzträger*. Dissertation, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Baukonstruktionen, Ingenieurholzbau und Bauphysik der Ruhr-Universität Bochum, Januar 1997
- [39] RAUTENSTRAUCH, K.: *Untersuchungen zur Beurteilung des Kriechverhaltens von Holzbiegeträgern*. Dissertation, Institut für Bautechnik und Holzbau, Universität Hannover, 1989
- [40] HARTNACK, R.: *Langzeitverhalten von druckbeanspruchten Bauteilen aus Holz*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, Professur Holz- und Mauerwerksbau, 2004
- [41] GRESSEL, P.: Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen - Auswirkungen auf den Formänderungsnachweis. In: *Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis; Hrsg.: Ehlbeck, J.; Steck, G.; Karl Möhler gewidmet* (1982)
- [42] GRESSEL, P.: Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen - Folgerungen für den Formänderungsnachweis in DIN 1052. In: *Bauen mit Holz* 4 (1984), S. S.216–223
- [43] MORLIER, P.; PALKA, L. C.: Creep in Timber Structures. In: *RILEM Report* 8 (RILEM Publications 1994), S. 9–42
- [44] SCHWARTE, J.: Rheologie. In: *Werkstoffe im Bauwesen II, Skriptum zur Vorlesung* Ausgabe 2002/03, S. 107-130; Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart
- [45] SCHULTE, C.: *Entwicklung eines Rechenmodells zur Bestimmung der Tragfähigkeit von stabilitätsgefährdeten Brettschicht-holzträgern unter Berücksichtigung streuender Einflußgrößen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, April 1998
- [46] HANHIJÄRVI, A.: *Modelling of creep deformation mechanisms in wood*. PhD-Thesis, Helsinki University of Technology, Technical Research Centre of Finland. VTT Publications. Espoo (SF), 1995
- [47] MARTENSSON, A.: *Mechanical behaviour of wood exposed to humidity variations*. Thesis, Report TVBK-1006, Lund Institute of Technology, Dept. Structural Engineering, Sweden, 1992
- [48] SCHÄNZLIN, J.: Description of the time dependent behaviour of timber using different

- models. Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf 2006-26X, Universität Stuttgart, Juli 2006. – Forschungsbericht
- [49] BECKER, P.: *Modellierung des zeit- und feuchteabhängigen Materialverhaltens zur Untersuchung des Langzeittragverhaltens von Druckstäben aus Holz*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2002
- [50] DIN EN 1990:2010-12: Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010. (2010)
- [51] DIN 1052-1:1988-04 : Holzbauwerke: Berechnung und Ausführung. (1988)
- [52] BLASS, H. J.: *Tragfähigkeit von Druckstäben aus Brettschichtholz unter Berücksichtigung streuender Einflußgrößen*. Dissertation, Universität Fredericana zu Karlsruhe (TH), 1987
- [53] MÖHLER, K.; HEMMER, K.: Verformungs- und Festigkeitsverhalten von Nadelvoll- und Brettschichtholz bei Torsionsbeanspruchung. Holz als Roh- und Werkstoff 35 (1977), S. 473 – 478
- [54] MÖHLER, K.: Strength and long-term behaviour of lumbar and glued-laminated timber under torsion loads, Paper 7-6-1, CIB-W18-Meeting, Februar/März 1977
- [55] FRIEMANN, H.: *Schub und Torsion in geraden Stäben*. 1993
- [56] DIN EN 1995-1-1/A2:2014-07: *Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten- Teil 1-1: Allgemeines- Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1995-1-1:2004 /A2:2014*. 2014
- [57] SCHICKHOFER, G.: Determination of Shear Strength Values for GLT using Visual and Machine Graded Spruce and Laminations, Paper 34-12-6, CIB-W18-Meeting, August 2001
- [58] EN 1194:1999: *Brettschichtholz -Festigkeitsklassen und Bestimmung charakteristischer Werte*. 1999
- [59] DIN EN 14080:2013-09: *Holzbauwerke - Brettschichtholz und Balkenschichtholz - Anforderungen; Deutsche Fassung EN 14080:2013*. 2013
- [60] GLOS, P.; DENZLER, J. K.: Kalibrierung der charakteristischen Schubfestigkeitskennwerte für Vollholz in EN 338 entsprechend den Rahmenbedingungen der nationalen Sortiernorm / Technische Universität München, Bericht Nr. 04502. 2004. – Forschungsbericht
- [61] DIN EN 408:2012-10: *Holzbauwerke - Bauholz für tragende Zwecke und Brettschichtholz - Bestimmung einiger physikalischer und mechanischer Eigenschaften: Deutsche Fassung EN 408:2010+A1:2012*. 2012
- [62] KLAPP, H.; BRÜNINGHOFF, H.: Shear strength of glued laminated timber, Paper 38-6-3, CIB-W18-Meeting, August 2005
- [63] RADOVIC, B.; WIEGAND, T.: Oberflächenqualität von Brettschichtholz. In: *Bauen mit Holz 7/8* (2005), S. 33–38 und S. 24–28
- [64] SZABÓ, I.: Höhere Technische Mechanik. 6. Auflage (Springer Verlag, 2001)
- [65] GÖRLACHER, R.; KÜRTH, J.: Determination of shear modulus, Paper 27-10-1, CIB-W18-Meeting, Juli 1994
- [66] BRANDNER, R.; GEHRI, E.; BOGENSPERGER, T.; SCHICKHOFER, G.: Determination

- of modulus of shear and elasticity of glued laminated timber and related examinations, Paper 40-12-2, CIB-W18-Meeting, August 2007
- [67] E DIN EN 14080:2011-01: *Holzbauwerke - Brettschichtholz und Balkenschichtholz - Anforderungen; Deutsche Fassung prEN 14080:2011*. 2011
- [68] WINTER, S.; SIEDER, M.; DIETSCH, P.; HENKE, K.: Verformungsmessungen an weitgespannten Brettschichtholzträgern zur Ermittlung der horizontalen Verformung / Technische Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. unterstützt durch: Studiengemeinschaft Holzleimbau e. V., Mai 2010. – Abschlussbericht
- [69] DIN EN 1991-1-3:2010-12: *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke- Teil 1-3: Allgemeine Einwirkungen, Schneelasten; Deutsche Fassung EN 1991-1-3:2003 + AC:2009*
- [70] DIN EN 1991-1-3/NA:2010-12: *Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter, Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke- Teil 1-3: Allgemeine Einwirkungen, Schneelasten*
- [71] REYER, E.; STOJIC, D.: Zum genaueren Nachweis der Kippstabilität biegebeanspruchter parallelgurtiger Brettschichtholz-Träger mit seitlichen Zwischenabstützungen des Obergurtes nach Theorie II. Ordnung, Teil 1. In: *Bauen mit Holz*, S. 100-106 (1991)
- [72] CYRON, G.; SENGLER, D.: *Holzleimbau, Bauen mit Brettschichtholz*. Informationsdienst Holz; Düsseldorf: Arbeitsgemeinschaft Holz, 1985
- [73] STUDIENGEMEINSCHAFT HOLZLEIMBAU E. V.: ABMESSUNGEN BRETTSCHICHTHOLZ SONDERBAUTEILE: <https://www.brettschichtholz.de/brettschichtholz-bs-holz/sonderbauteile/abmessungen/mn42550>. , besucht am 19.02.2021
- [74] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: *Vereinfachte Bemessung von Brettschichtholzträgern variabler Höhe für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung*. Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben 17398N im Auftrag des ivTH e. V. finanziert durch die AiF, Mitteilung des Instituts für Konstruktion und Entwurf Nr. 2013-49X, Universität Stuttgart, November 2013
- [75] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Simplified design of glued laminated timber girders for the torsional moment caused by stability effects. In: *Materials and Joints in Timber Structures - Recent Developments of Technology; Hrsg.: Aicher, S.; Reinhardt, H.-W.; Garrecht, H.* (2013), S. 823 – 830
- [76] WINTER, S.; SIEDER, M.; GAMPER, A.; DIETSCH, P.; MERK, M.: Gebäudeklima - Langzeitmessung zur Bestimmung der Auswirkungen auf Feuchtegradienten in Holzbauteilen / Technische Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2012. – Schlussbericht zum Forschungsvorhaben Forschungsinitiative Zukunft Bau des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung
- [77] BLASS, H.-J., KRÜGER, O.: *Schubverstärkung von Holz mit Holzschrauben und Gewindestangen*. Karlsruher Berichte zum Ingenieurholzbau, Band 15, 2010
- [78] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Näherungsverfahren für das Torsionsmoment aus Kippstabilisierung bei Brettschichtholzträgern. In: *Bautechnik* 92. Jahrgang (2015), S. 716 – 724
- [79] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Simplified method to determine the torsional moment due to lateral torsional buckling. In: *Proceedings of the International Network on*

- Timber Engineering Research, 49th Meeting, Graz, Austria, 2016*, Nr. 49-10-2
- [80] CEN/TC 250/SC 5 EUROCODE 5 - DESIGN OF TIMBER STRUCTURES: *Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten Teil 1-1: Allgemeines*. Bd. Document CEN/TC 250/SC 5: N 281. 2014
- [81] DIN EN 1990/NA:2010-12: *Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter, Eurcode: Grundlagen der Tragwerksplanung*
- [82] KEYLWERTH, R.; NOACK, D.: Die Kammertrocknung von Schnittholz; Betriebsblatt 1 Neufassung 1964. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* (22) (1964), S. 29–36
- [83] HÄGLUND, M.: On moisture induced stresses in timber structural elements, Proceedings of COST E55 Meeting in Helsinki, März 2008
- [84] WILLEMS, W. M.; SCHILD, K.; DINTER, S.: *Handbuch Bauphysik Teil 1; Wärme- und Feuchteschutz, Behaglichkeit, Lüftung*. Vieweg, 2006
- [85] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Influence of creep on the lateral torsional buckling of glued laminated timber girders. In: *Proceedings of the 11th World Conference on Timber Engineering, WCTE 2010, Riva del Garda, Italy, June 20-24* (2010)
- [86] KUHLMANN, U.; HOFMANN, R.: Influence of creep under changing moisture conditions on the lateral torsional buckling of glued laminated timber girders. In: *Proceedings of the 12th World Conference on Timber Engineering, WCTE 2012, Auckland, New Zealand, July 16-19* (2012)