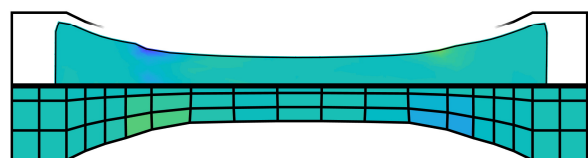
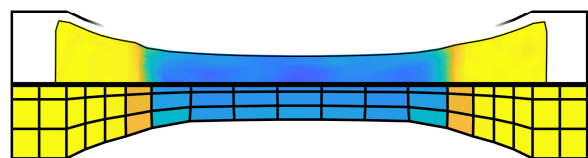
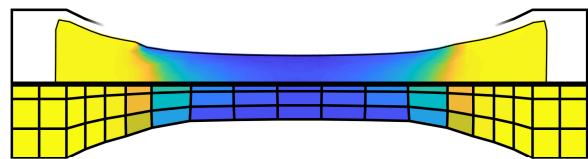
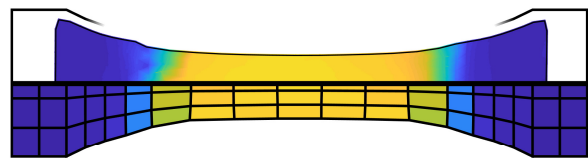
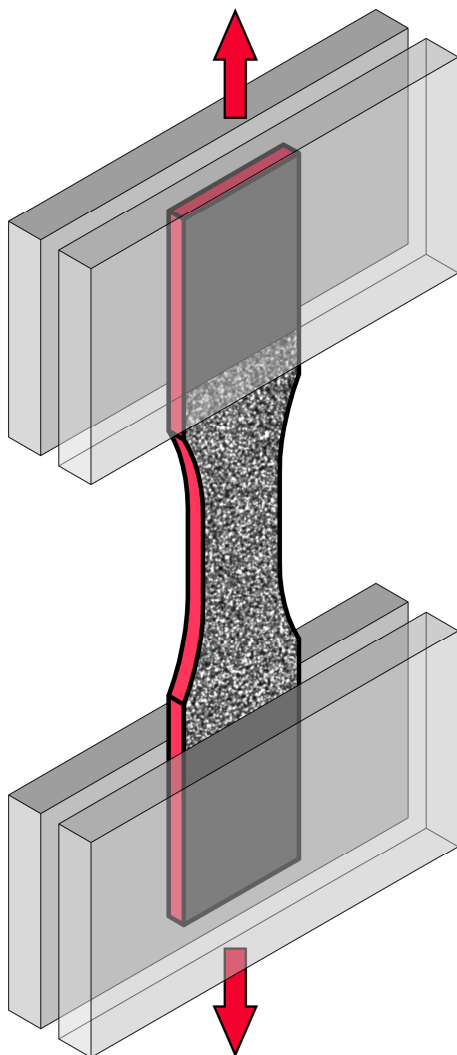


Automatisierbare direkte Kalibrierung von Materialmodellen auf Basis digitaler Bildkorrelation

Maximilian Benz



Automatisierbare direkte Kalibrierung von Materialmodellen auf Basis digitaler Bildkorrelation

von

Maximilian Benz

Bericht Nr. 75

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2022



© Maximilian Benz

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123
Fax: 0711 - 685 66130
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de
<https://www.ibb.uni-stuttgart.de>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D 93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-073726-8

Automatisierbare direkte Kalibrierung von Materialmodellen auf Basis digitaler Bildkorrelation

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Maximilian Benz

aus Karlsruhe

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier, Freiburg

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 2022

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2022

Kurzfassung

Die hochwertige Prognose des komplexen mechanischen Verhaltens von Thermoplasten in Simulationen birgt besondere Herausforderungen. Geeignete Modelle sind zwar seit einiger Zeit verfügbar, doch ihre ideale Kalibrierung ist sehr aufwendig. Angesichts einer Vielzahl an nicht direkt in Versuchen messbaren Parametern basiert sie üblicherweise auf iterativen Schemata im Sinne von Reverse Engineering. Werden in diesem Zusammenhang für die gesuchten Modellparameter analytische Beziehungen angesetzt, besteht das Risiko einer zu starken Einschränkung des Lösungsraums, so dass dieser das tatsächliche Optimum nicht enthält. Gleichzeitig ergeben sich aus zu vielen freien Variablen Schwierigkeiten hinsichtlich der Beherrschbarkeit im Rahmen einer Optimierung. In beiden Fällen ist es möglich, dass die Kalibrierung eines Materialmodells mit Versuchen auf Probenebene zwar zu einer hinreichend genauen Prognose des Kraftniveaus führt, nicht jedoch des Dehnungsfelds. Da Letzteres die Grundlage für die Versagenscharakterisierung bildet, hat das Forschungsgebiet eine besondere Relevanz. Dies gilt insbesondere für Crashsimulationen im Automobilbau, in deren Umfeld das Vorhaben angesiedelt ist.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines neuen Verfahrens zur direkten Kalibrierung der Parameter komplexer Materialmodelle, vor allem zur Prognose des Verhaltens von Thermoplasten. Sein Kern besteht aus dem Aufstellen und Lösen modellspezifischer Differentialgleichungen, wobei als Eingangsgrößen Daten aus mit digitaler Bildkorrelation erfassten Versuchen verwendet werden. Im Gegensatz zu anderen bereits verfügbaren Verfahren wird auf Reverse Engineering mit Optimierungsmethoden verzichtet. Darüber hinaus findet die Verwendung von analytischen Ansätzen für die gesuchten Modellparameter primär zur Nachbearbeitung diskreter Ergebnisse statt. Die Ausarbeitung geschieht für das Materialmodell *SAMP-1* bzw. *MAT_187 des Solvers *LS-DYNA*, welches speziell zur Simulation von Thermoplasten konzipiert ist und isotropes viskoelasto-viskoplastisches Verhalten sowie kompressible Plastizität abbilden kann. Es lässt sich als Erweiterung des für Metalle entwickelten *MAT_024 interpretieren. Dieses elasto-viskoplastische Modell mit inkompressibler Plastizität vom Typ nach von Mises wird ebenfalls unterstützt. Der Fokus liegt auf einer optimalen Prognosegüte für die im Automobilbau verbauten, überwiegend dünnwandigen Strukturen, welche in Crashsimulationen mit Schalenelementen abgebildet werden. Neben der Eingrenzung des Themengebiets auf solche Fälle werden exklusiv Zugversuche behandelt, weil diese für die Kalibrierung von *SAMP-1* am bedeutendsten sind.

Zu Beginn dieser Arbeit erfolgt die Vorstellung der elementaren Zusammenhänge zwischen den Verzerrungs- und Spannungsmaßen aus der Testauswertung und der Simulation. Messungen bzw. geeigneten Approximationen der Komponenten des Hencky-Verzerrungstensors und des Cauchy-Spannungstensors stehen inkrementell formulierte Materialroutinen gegenüber, die auf Basis des Dehnratentensors und der Zaremba-Jaumann-Rate des Cauchy-Spannungstensors operieren. Da für den Spintensor im Versuch keine Werte vorliegen, werden spezielle materielle Auswertepunkte gewählt, an denen er zu null angenommen werden kann. Dabei handelt es sich um Punkte in einem Schnitt

senkrecht zur Längsachse des Prüflings durch das Zentrum der Einschnürzone. In dieser Ebene ist bei Lagrangescher Betrachtung in einem mitbewegten Koordinatensystem für eine hinreichend dünne Probe der Hencky-Verzerrungstensor das Integral des Dehnraten-tensors und der Cauchy-Spannungstensor das Integral seiner Zaremba-Jaumann-Rate.

Während die Implementierung der Fließregel in *SAMP-1* bereits auf Gleichungen in einer differentiellen Form beruht, basiert die des rheologischen Modells auf Faltungsintegralen. Bei der Herleitung äquivalenter Differentialgleichungen wird daher auf elementare Beziehungen für Federn und Dämpfer zurückgegriffen. Da der Hypo-Elastizitätstensor des Materialmodells unter gewissen Umständen zeitabhängig ist, ergeben sich Integro-Differentialgleichungen. Eine gemeinsame Betrachtung der Gleichungen aus der Fließregel und dem rheologischen Modell ermöglicht die Bestimmung nicht direkt messbarer Größen in einem Versuch. Im viskoelastischen Regime stehen der Elastizitätsmodul E_C , die variable Materialsteifigkeit E_V , die Relaxationsrate β sowie die Querkontraktionszahl ν im Fokus. Dahingegen ist im viskoelasto-viskoplastischen Regime die Quantifizierung der plastischen Querkontraktion ν_p , der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung ε_{pct} , ihrer Rate $\dot{\varepsilon}_{pct}$ und der von-Mises-Vergleichsspannung σ_{vm} das Ziel. Um die Gleichungen numerisch zu lösen, werden unter anderem das Differenzenverfahren, die Sehnentrapezformel sowie das Verfahren von Heun vorgesehen. Ein entsprechender Programmcode wird in der Entwicklungsumgebung *MATLAB* implementiert. Aus messtechnischen Gründen erweist es sich als vorteilhaft, ν_p bei einer möglichst niedrigen Dehnrates zu bestimmen und bei der Auswertung hochdynamischer Versuche als bekannt vorauszusetzen.

Der Programmcode wird anhand virtueller Messdaten validiert, die aus mit *LS-DYNA* durchgeführten Ein-Element-Tests stammen. Vorteilhaft an diesem Vorgehen ist die Vergleichbarkeit der berechneten Parameter mit den im Materialmodell vorgegebenen. Aufgrund ihrer besonderen Relevanz bei gleichzeitiger Komplexität stehen die plastische Querkontraktion und der Pfad im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum, welcher die Basis für die Ermittlung von Fließkurven bildet, im Zentrum der Untersuchungen. Da bei ihrer Berechnung auch die Gleichungen des viskoelastischen Regimes angewendet und somit validiert werden, wird auf eine dedizierte Analyse mit Bezug auf die zugehörigen Modellparameter verzichtet. Die Funktionalität des Verfahrens kann für alle unterstützten Komplexitätsgrade von *SAMP-1* nachgewiesen werden.

Zur Anwendung auf reale Zugprüfprogramme werden entsprechende Versuchsdatenanforderungen und Auswertestrategien erarbeitet. Diesbezüglich erfolgt die Entwicklung einer neuen Methode, um im Zugversuch mittels dreidimensionaler digitaler Bildkorrelationsdaten der Probenfront insbesondere die Dicke, die Dickendehnung und die Querschnittsfläche des Prüflings zu approximieren. Sie basiert auf der Identifikation von unerwünschten Bewegungen des Prüflings senkrecht zur Maschinenachse und Separation der Effekte von der zu erfassenden materiellen Deformation. Dabei wird eine Symmetrie zwischen der Verschiebung der Probenfront und -rückseite in Dickenrichtung angenommen. Für die Quantifizierung der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors in Versuchen werden optimale Auswertepunkte gefunden. Diese liegen anfänglich an den zwei Gaußpunkten einer Gauß-Quadratur vom Exaktheitsgrad drei über die Breite der

Probe. Zur Ermittlung der bei der Spannungsberechnung benötigten Probendicke wird eine Anwendung der zuvor thematisierten Methode vorgesehen. Es folgt die Konzeption eines semi-empirischen Ansatzes, um auf Basis weniger, mit dreidimensionaler digitaler Bildkorrelation gewonnener Daten die x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors in ansonsten mit zweidimensionaler digitaler Bildkorrelation aufgezeichneten Materialprüfungen zu approximieren. Das Potenzial dieser Methode wird auf Grundlage von zwei Thermoplasten mit unterschiedlichem Plastizitätsverhalten aufgezeigt, für die dehnratenübergreifend vollständige Datensets zur Verfügung stehen.

Die im viskoelastischen Regime bestimmten Parameter repräsentieren zum Teil dedizierte Prüfgeschwindigkeiten. Dies gilt auch für die $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade. Für die Generierung einer kontinuierlichen funktionalen Beschreibung in Abhängigkeit der Dehnrate werden deshalb geeignete Ansätze definiert. Zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften dienen polynomiale Funktionen. Ihre Kalibrierung geschieht durch eine Regressionsanalyse innerhalb eines pragmatisch definierten Vertrauensbereichs für Messwerte. Aus einer analytischen Beschreibung der dehnratenabhängigen Initialsteigung D von Spannungs-Dehnungs-Kurven ergibt sich E_C und darauf aufbauend ein funktionaler Zusammenhang für E_V . Der Wert von β resultiert aus Monotoniebetrachtungen. Die Elastizitätsgrenze σ_E wird für alle Versuche auf Basis der Proportionalitätsgrenze approximiert. Unter Berücksichtigung dieses Werts erfolgt die Bestimmung der Querkontraktionszahl ν anhand der langsamsten Versuche.

Zur Beschreibung der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum, die das viskoplastische Materialverhalten charakterisiert, werden zweidimensionale B-Splines gewählt. Weil an den $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Rändern des untersuchten Gebiets sehr wenige Versuchsdaten vorliegen, findet die Modellierung von Randkurven statt. Grundlage dafür ist eine Extrapolation der Daten in Dehnratenrichtung unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ und σ_{vm} mit $\dot{\varepsilon}_{ref} = 1 \text{ ms}^{-1}$. Als Alternative zu Letzterer ist es denkbar, einzelne zusätzliche Materialprüfungen bei niedrigeren und höheren Abzugsgeschwindigkeiten durchzuführen und auszuwerten. Da Versuche bei unterschiedlichen Dehnraten nicht zwangsläufig bei der gleichen uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung versagen, werden die $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade und Randkurven bis zu einem einheitlichen Wert für ε_{pct} polynomiell ergänzt. Wie bei der Extrapolation in Dehnratenrichtung dient dies ausschließlich der Stützung von Bereichen auf der Fläche, für die keine Daten vorliegen und die für die Simulation der Versuche eine untergeordnete Rolle spielen. Die Notwendigkeit einer Beschreibung im gesamten untersuchten ε_{pct} - sowie $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Intervall ergibt sich insbesondere aus Anforderungen des Solvers *LS-DYNA*. Indem die konstruierte Fläche bei konstanten Werten für $\dot{\varepsilon}_{pct}$ geschnitten wird, resultiert für das Materialmodell eine dehnratenabhängige Fließkurvenschar.

Anhand von vier Thermoplasten, deren Eigenschaften die höchsten unterstützten Komplexitätsgrade von *SAMP-1* reflektieren, wird die Anwendung des Verfahrens demonstriert. In allen Fällen erfolgt mit der jeweiligen Modellkalibrierung eine Simulation der zugrundeliegenden Zugversuche. Anschließend Gegenüberstellungen der Kraftniveaus, der Komponenten der Dehnungsfelder sowie der Querschnittsflächen bzw. Breiten der

Prüflinge zeigen eine hervorragende Prognosegüte. Da die entwickelten Routinen für jeden analysierten Versuch die Komponenten des Cauchy-Spannungstensors sowie des Tensors der plastischen Verzerrungen bis zum Zeitpunkt des Bruchs liefern, ergibt sich eine optimale Ausgangslage für eine darauf aufbauende Versagenscharakterisierung. Die Kalibrierung eines geeigneten Modells ist jedoch nicht Teil der Untersuchungen.

Den Abschluss der Arbeit bildet eine Analyse, welche Schritte des beschriebenen Prozesses für eine vollständige Automatisierung noch adressiert werden müssen. In diesem Zusammenhang sind die Versuchsauswertung, die Datenglättung und die Anpassung der analytischen Ansätze zur Nachbearbeitung diskreter Ergebnisse zu nennen. Für eine erfolgreiche Übertragung des neuen Verfahrens auf andere Materialmodelle werden drei Grundvoraussetzungen festgehalten: Erstens muss das angesetzte Modell in der Lage sein, das zu erfassende Materialverhalten abzubilden. Zweitens müssen sich die zugrundeliegenden Routinen als Differentialgleichungen ausdrücken lassen. Drittens muss es messtechnisch möglich sein, die benötigten Eingangsdaten in Versuchen zu bestimmen. Insbesondere der letzte Punkt wird als herausfordernd angesehen.

Abstract

High-quality prediction of the complex mechanical behavior of thermoplastics in simulations poses particular challenges. Suitable models have been available for some time, but their ideal calibration is very elaborate. In view of a large number of parameters that cannot be measured directly in tests, it is usually based on iterative schemes in the sense of reverse engineering. If in this context analytical relations are applied for the sought model parameters, there is a risk that the solution space will be restricted such that it will not contain the actual optimum. At the same time, too many free variables result in difficulties with respect to controllability in the framework of an optimization. In both cases, it is possible that calibration of a material model with specimen level tests will result in a sufficiently accurate prediction of the force level, but not of the strain field. Since the latter forms the basis for failure characterization, the research area has special relevance. This applies in particular to crash simulations in automotive engineering, to which the project is related.

The subject of the present work is the development of a new procedure for direct calibration of the parameters of complex material models, especially for predicting the behavior of thermoplastics. Its core consists of setting up and solving model-specific differential equations, using experimental data acquired with digital image correlation as input. In contrast to other already available procedures, reverse engineering with optimization methods is not applied. Furthermore, analytical relations for the sought model parameters are used primarily for post-processing discrete results. The elaboration is done for the material model *SAMP-1* resp. *MAT_187 of the solver *LS-DYNA*, which is especially intended for simulating thermoplastics and capable of representing isotropic viscoelasto-viscoplastic behavior and compressible plasticity. It can be interpreted as an extension of *MAT_024 that is designed for metals. This elasto-viscoplastic model with incompressible von Mises type plasticity is also supported. Focus lies on an optimal prediction quality for the predominantly thin-walled structures used in automotive engineering. In crash simulations, these are represented with shell elements. Besides narrowing the subject area to such cases, tensile tests are exclusively treated due to their significance for the calibration of *SAMP-1*.

At the beginning of this work, the elementary relationships between the strain and stress measures from the test evaluation and the simulation are provided. Measurements or suitable approximations of the components of the Hencky strain tensor and the Cauchy stress tensor are contrasted with incrementally formulated material routines, which operate on the basis of the strain rate tensor and the Zaremba-Jaumann rate of the Cauchy stress tensor. Since no values are available for the spin tensor in the experiment, specific material evaluation points are chosen where it can be assumed to be zero. These are points in a section perpendicular to the longitudinal axis of the test piece through the center of the necking zone. For a Lagrangian perspective in a comoving coordinate system and a sufficiently thin specimen, in this plane the Hencky strain tensor is the integral of the strain rate tensor and the Cauchy stress tensor is the integral of its Zaremba-Jaumann rate.

While the implementation of the flow rule in *SAMP-1* is already built on equations in a differential form, that of the rheological model bases on convolution integrals. Therefore, elementary relations for springs and dampers are used to derive equivalent differential equations. Since the hypo-elasticity tensor of the material model is under certain circumstances time-dependent, integro-differential equations result. A joint consideration of the equations from the flow rule and the rheological model makes it possible to determine quantities that cannot be measured directly in an experiment. In the viscoelastic regime, the modulus of elasticity E_C , the variable material stiffness E_V , the relaxation rate β and the Poisson's ratio ν are in focus. In contrast, in the viscoelasto-viscoplastic regime, the goal is the quantification of the plastic Poisson's ratio ν_p , the uniaxial plastic equivalent strain ε_{pct} , its rate $\dot{\varepsilon}_{pct}$ and the von Mises equivalent stress σ_{vm} . To solve the equations numerically, the difference method, the trapezoidal formula and Heun's method, among others, are designated. A corresponding program code is implemented in the development environment *MATLAB*. For metrological reasons, it proves advantageous to determine ν_p at the lowest possible strain rate and to assume it as known when evaluating highly dynamic tests.

The program code is validated using virtual measurement data obtained from single-element tests performed with *LS-DYNA*. An advantage of this approach is the comparability between the calculated parameters and those specified in the material model. Due to their particular relevance combined with complexity, the plastic Poisson's ratio and the path in ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -space, which is the basis for the determination of yield curves, are at the center of the investigations. Since the equations of the viscoelastic regime are also applied in their calculation and thus validated, a dedicated analysis with respect to the associated model parameters is omitted. The functionality of the procedure can be demonstrated for all supported complexity levels of *SAMP-1*.

Appropriate test data requirements and evaluation strategies for application to real tensile test programs are elaborated. In this respect, a new method is developed to approximate in particular the thickness, thickness strain and cross-sectional area of the specimen in a tensile test by means of three-dimensional digital image correlation data of the specimen front. It is based on the identification of undesired movements of the test piece perpendicular to the machine axis and separation of the effects from the material deformation, which is to be detected. Thereby, a symmetry between the displacement of the specimen front and back in thickness direction is assumed. For the quantification of the x -component of the Cauchy stress tensor in experiments, optimal evaluation points are found. These lie initially at the two Gauss points of a Gaussian quadrature over the width of the sample that has a degree of exactness three. To determine the specimen thickness required in the stress calculation, an application of the previously discussed method is foreseen. Next follows the design of a semi-empirical approach to approximate the x -component of the Cauchy stress tensor in material tests recorded with two-dimensional digital image correlation, based on few data obtained with three-dimensional digital image correlation. The potential of this method is demonstrated on the basis of two thermoplastics with different plasticity behaviors for which complete datasets are available across strain rates.

The parameters determined in the viscoelastic regime partly represent dedicated test speeds. This also holds for the $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -paths. Therefore, suitable relations are defined to generate a continuous functional description dependent on the strain rate. Polynomial functions are used to characterize the viscoelastic properties. Their calibration is done through a regression analysis within a pragmatically defined confidence interval for measured values. An analytical description of the strain-rate-dependent initial slope D of stress-strain curves yields E_C and, subsequently, leads to a functional relationship for E_V . The value of β results from monotonicity considerations. For all experiments, the elasticity limit σ_E is approximated using the proportionality limit. Taking this value into account, the determination of the Poisson's ratio ν is done based on the slowest tests.

Two-dimensional B-splines are chosen to describe the surface in $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -space that characterizes the viscoplastic material behavior. Because very little experimental data is available at the $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -edges of the studied region, boundary curve modeling is performed. This is based on data extrapolation in strain rate direction under the assumption of a linear relationship between $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ and σ_{vm} with $\dot{\varepsilon}_{ref} = 1 \text{ ms}^{-1}$. An alternative to the latter is to carry out and analyze individual additional experiments at lower and higher test speeds. Since tests at different strain rates do not necessarily fail at the same uniaxial plastic equivalent strain, the $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ paths and boundary curves are polynomially complemented up to a uniform value for ε_{pct} . As with extrapolation in strain rate direction, this is done solely to support regions on the surface for which no data are available and which play a minor role in the simulation of the tests. The need for a description throughout the ε_{pct} - as well as $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -interval under investigation arises in particular from requirements of the *LS-DYNA* solver. By intersecting the constructed surface at constant values for $\dot{\varepsilon}_{pct}$, a strain-rate-dependent array of yield curves results for the material model.

Four thermoplastics, whose properties reflect the highest supported levels of complexity of *SAMP-1*, are used to demonstrate the application of the procedure. In all cases, the respective model calibration is used for simulating the underlying tensile tests. Subsequent comparisons of the force levels, the components of the strain fields and the cross-sectional areas or widths of the specimens show excellent prediction quality. Since the developed routines provide the components of the Cauchy stress tensor as well as the components of the plastic strain tensor for each analyzed test until the time of fracture, an ideal starting point for a following failure characterization is obtained. However, the calibration of a suitable model is not part of the investigations.

The work concludes by analyzing the steps of the described process that need to be addressed in order to achieve full automation. In this context, the test evaluation, data smoothing and adaptation of the analytical relations for post-processing of discrete results have to be mentioned. For a successful transfer of the new procedure to other material models, three basic requirements are noted: First, the chosen model must be capable of representing the material behavior to be depicted. Second, the underlying

routines have to be expressible as differential equations. Third, it must be metrologically possible to determine the required input data in experiments. Especially the last point is considered to be challenging.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Industriedoktorand bei der Daimler AG bzw. Mercedes-Benz AG in Sindelfingen. Während dieser Zeit arbeitete ich in einem Team, zu dessen Aufgaben die methodische Weiterentwicklung der unternehmenseigenen Crashsimulationen gehörte. Für mich ergab sich dadurch die einzigartige Chance, intensive wissenschaftliche Forschung unmittelbar mit ihrem Einsatz in der Praxis zu verbinden. Konsequenterweise war bei der Konzeption des neuen Verfahrens zur direkten Kalibrierung von Materialmodellen seine Anwendbarkeit in der Fahrzeugentwicklung ein wesentlicher Gesichtspunkt.

Mein besonderer Dank gilt meinem geschätzten Kollegen und Betreuer Dr.-Ing. Johannes Irslinger, der mich in den letzten Jahren immer unterstützt hat. Die vielen fruchtbaren Diskussionen mit ihm haben maßgeblich zum Erfolg dieses Projekts beigetragen. Seinen unerschütterlichen Optimismus selbst in besonders herausfordernden Phasen und seine Loyalität werde ich stets in Erinnerung behalten. Ebenfalls danke ich Paul Du Bois und Dr.-Ing. Markus Feucht, die als Mitentwickler des Materialmodells *SAMP-1* durch ihre tiefen Einblicke in seine Besonderheiten das Unterfangen erst möglich gemacht haben. Der fachliche Austausch mit ihnen war für mich ein großer Gewinn.

Auf der akademischen Seite war mein Promotionsvorhaben am Institut für Baustatik und Baudynamik (IBB) der Universität Stuttgart anhängig. Herzlichst bedanke ich mich an dieser Stelle bei meinem Doktorvater, Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, der sich dazu bereit erklärt hat, den Hauptbericht für diese in der Industrie verfasste Dissertation zu übernehmen. Abseits der vielen interessanten Gespräche rund um die Arbeit war er für mich eine beständige Quelle der Inspiration. Seine Hingabe für die Forschung, die Lehre, das Institut und die Universität wird für mich immer ein Musterbeispiel darstellen. Auch meinem Mitberichter, Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier, möchte ich aufrichtig Danke sagen. Seine Perspektive auf das Thema lieferte für mich wertvolle Impulse.

Für die Übernahme des Lektorats dieser Dissertation bedanke ich mich bei Dr.-Ing. Johannes Irslinger, Paul Du Bois, Robert Benz, Ursula Zöllner und Julia Seibicke.

Zu guter Letzt danke ich all den anderen guten Seelen, die mir in den letzten Jahren geholfen haben. Das wären vor allem meine Kollegen bei Mercedes-Benz, die Mitarbeiter des IBB sowie natürlich meine Freunde und meine Familie. Sei es durch den fachlichen Austausch, ein offenes Ohr, Verständnis und Nachsicht oder einfach die Ablenkung von der Doktorarbeit – diese liebenswerten Menschen waren starke Stützen, die mich durch die anstrengende Zeit trugen.

Ich schließe mit einem Satz von Thomas Gray, der mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unzählige Male aufgeheitert hat:

– *Ignorance is bliss.* –

Böblingen, im Oktober 2022

Maximilian Benz

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xix
Abkürzungen und Bezeichnungen	xxi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Technik	3
1.3 Zielsetzung	5
1.4 Gliederung der Arbeit	6
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Nichtlineare Festkörpermechanik	9
2.1.1 Kinematik	10
2.1.2 Verzerrungsmaße	12
2.1.3 Spannungsmaße	14
2.1.4 Konstitutivgleichungen	15
2.1.5 Übergang zur Finite-Elemente-Methode	19
2.2 SAMP-1: ein semi-analytisches Modell für die Simulation von Polymeren	19
2.2.1 Relevanz des lokalen Elementkoordinatensystems	20
2.2.2 Viskoelastizitätsmodell	20
2.2.3 Viskoplastizitätsmodell	24
2.2.4 Besonderheiten	27
2.3 Digitale Bildkorrelation	28
3 Direkte Kalibrierung von Modellparametern	31
3.1 Definitionen und Annahmen	31
3.1.1 Unterstützte Elementtechnologie und Grundannahme	32

3.1.2	Versuchsauswahl und Definition des Versuchsbeginns	32
3.1.3	Definition des globalen Koordinatensystems	33
3.1.4	Unterstützter Verzerrungs- und Spannungstensor	33
3.1.5	Vorteile von Auswertungen in der Einschnürebene	35
3.2	Viskoelastisches Regime	37
3.2.1	Definition des letzten Zeitschritts im Regime	37
3.2.2	Zusammenhänge aus dem rheologischen Modell	38
3.2.3	Materialsteifigkeit, Relaxationsrate und Querkontraktionszahl	41
3.2.4	Lösung von Differentialgleichungen für σ_{yy} , σ_{xy} und ε_{zz}	43
3.3	Viskoelasto-viskoplastisches Regime	45
3.3.1	Zusammenhänge aus dem rheologischen Modell	45
3.3.2	Zusammenhänge aus der Fließregel	47
3.3.3	Lösung einer Differentialgleichung für σ_{yy}	50
3.3.4	Berechnung von ν_p und Rückkopplung auf ν	55
3.3.5	Lösung einer Differentialgleichung für σ_{xy}	58
3.3.6	Berechnung der Vergleichsspannung und Vergleichsdehnung	60
3.3.7	Interpretation der Ergebnisse	61
3.4	Sonderfälle und Bemerkungen	62
3.4.1	Lösungsstrategien bei bekanntem ν_p	62
3.4.2	Bemerkungen zur Implementierung	69
4	Validierung der direkten Kalibrierung	73
4.1	Konzept und Modellbildung	73
4.2	Virtuelle Materialien steigender Komplexität	77
4.2.1	Elasto-plastisches Verhalten mit inkompressibler Plastizität	77
4.2.2	Elasto-viskoplastisches Verhalten mit inkompressibler Plastizität	79
4.2.3	Elasto-plastisches Verhalten mit kompressibler Plastizität	82
4.2.4	Elasto-viskoplastisches Verhalten mit kompressibler Plastizität	84
4.2.5	Viskoelasto-viskoplastisches Verhalten mit kompr. Plastizität	84
4.3	Schlussfolgerungen	87
5	Auswertestrategien für Zugprüfprogramme	89
5.1	Datenbasis	89
5.2	Datenanforderungen	92
5.2.1	Vermeidung versuchsbedingter Nichtlinearitäten	92
5.2.2	Datenglättung	93
5.2.3	Korrektur des Koordinatensystems aus der DIC	94
5.3	Erfassung der Dicke, Dickendehnung und Querschnittsfläche des Prüflings	96
5.3.1	Identifikation der Herausforderungen	96
5.3.2	Korrektur des Spannbackenversatzes	99

5.3.3	Korrektur der Torsion	101
5.3.4	Berechnung der Dicke und der Dickendehnung	103
5.3.5	Berechnung der Querschnittsfläche	103
5.4	Spannungsauswertung für 3D-DIC-Daten	104
5.5	Semi-empirische Ansätze	108
5.5.1	Spannungsapproximation für 2D-DIC-Daten	108
5.5.2	Charakterisierung viskoelastischen Materialverhaltens	114
5.5.3	Charakterisierung viskoplastischen Materialverhaltens	125
6	Beispielanwendungen	135
6.1	Grundlegendes	135
6.1.1	Modellierung eines Zugversuchs	135
6.1.2	Auswertung des Dehnungsfelds in der Simulation	137
6.2	Modellkalibrierungen	137
6.2.1	PC/ABS-Blend mit reduziertem PC-Anteil	137
6.2.2	PC/ABS-Blend mit erhöhtem PC-Anteil	151
6.2.3	Reines Polypropylen	162
6.2.4	Polypropylen mit 20 % Talkum	172
6.3	Automatisierbarkeit des Verfahrens	182
7	Zusammenfassung und Ausblick	183
7.1	Zusammenfassung	183
7.2	Ausblick	186
	Literaturverzeichnis	189

Abbildungsverzeichnis

2.1	Referenz- und Momentankonfiguration eines Körpers in \mathbb{R}^3	10
2.2	Dreiparametermodell mit nichtlinearem Maxwell-Körper	21
2.3	Fließkurve und ν_p -Verlauf eines typ. Thermoplasts bei uniaxialem Zug . .	26
2.4	Fließkurvenschar eines typ. Thermoplasts bei uniaxialem Zug	27
2.5	Eingespannte Zugprobe mit stochastischem Muster	29
2.6	Feld der wahren Längsdehnung einer Zugprobe	30
3.1	Zugversuch zum Zeitpunkt $t = 0$	34
3.2	Zugversuch zu einem Zeitpunkt $t \geq t_N$	36
3.3	Dreiparametermodell mit nichtlinearem Maxwell-Körper	38
3.4	Innere Iteration zur Berechnung von σ_{yy} sowie ε_{xx}^p , ε_{yy}^p und ε_{zz}^p	54
3.5	Äußere Iteration zur Berechnung von ν_p und Rückkopplung auf ν	57
3.6	Iteration zur Berechnung von σ_{xy} sowie ε_{xy}^p	59
3.7	Pfade und Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum für einen typ. Thermoplast . . .	61
3.8	Plausibilitätsprüfung von ν_p	64
3.9	Iteration zur Berechnung von σ_{yy} sowie ε_{xx}^p , ε_{yy}^p und ε_{zz}^p	67
3.10	Iteration bei Vorgabe einer Kurve für $\nu_p - 1/2$	68
3.11	Iteration bei Vorgabe einer Kurve für $\nu_p - 2/2$	69
3.12	Möglichkeit 1 zur Erzeugung eines ebenen Schubzustands	70
3.13	Möglichkeit 2 zur Erzeugung eines ebenen Schubzustands	71
4.1	Ein-Element-Test 1: uniaxialer ebener Spannungszustand	75
4.2	Ein-Element-Test 2: biaxialer ebener Spannungszustand	75
4.3	Ein-Element-Test 3: kombinierter ebener Spannungszustand	75
4.4	Validierungsmaterial 1 und 3: Fließkurve	78
4.5	Validierungsmaterial 1: Beurteilung der Güte der berechneten Größen . .	79
4.6	Validierungsmaterial 2, 4 und 5: Fließkurvenschar – 1/2	80
4.7	Validierungsmaterial 2, 4 und 5: Fließkurvenschar – 2/2	80
4.8	Validierungsmaterial 2: Beurteilung der Güte der berechneten Größen . .	81

4.9	Validierungsmaterial 3 bis 5: ν_p -Verlauf	82
4.10	Validierungsmaterial 3: Beurteilung der Güte der berechneten Größen	83
4.11	Validierungsmaterial 4: Beurteilung der Güte der berechneten Größen	84
4.12	Validierungsmaterial 5: variable Materialsteifigkeit	85
4.13	Validierungsmaterial 5: Beurteilung der Güte der berechneten Größen	86
4.14	Validierungsmaterial 5: Pfade im $\varepsilon_{eff}-\dot{\varepsilon}_{eff}-E_V$ -Raum	87
5.1	Zugversuch mit Front- und Seitenkamera zum Zeitpunkt $t = 0$	91
5.2	Versuchsbedingter nichtlinearer Anfangsbereich	93
5.3	Translation der DIC-Daten in das definierte Koordinatensystem	95
5.4	Perspektive der Seitenkamera zum Zeitpunkt $t = 0$ (vgl. Abb. 5.1)	97
5.5	PC/ABS R: Auswertung der z -Verschiebung bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$	98
5.6	PC/ABS E: Korr. d. Spannbackenversatzes bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 1/2$	100
5.7	PC/ABS E: Korr. d. Spannbackenversatzes bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 2/2$	100
5.8	PC/ABS E: Korrektur der Torsion bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 1/2$	102
5.9	PC/ABS E: Korrektur der Torsion bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 2/2$	102
5.10	Spannungsverteilung vor und nach dem Einschnüren der Probe	105
5.11	PC/ABS E: Vergleich zwischen $y_{1/2}^*$ und $\hat{y}_{1/2}$ bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	108
5.12	Uniaxialer Spannungszustand in einem infinitesimalen Volumen	109
5.13	PC/ABS E: Spannungsapproximation bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	111
5.14	PC/ABS E und PP T20: $\tilde{\nu}_t$ in Abhängigkeit von ε_{eff}	112
5.15	PC/ABS E und PP T20: $\sigma_{xx}-\varepsilon_{xx}$ -Diagramme	113
5.16	Zusammenhänge zwischen D , E_C und E_V	117
5.17	Idealisierte $\sigma_{0,xx}-\varepsilon_{0,xx}$ -Kurve bis zum ersten Maximum bei $\varepsilon_{0,xx} _P$	119
5.18	S/T , T/S und M für die Kurve aus Abb. 5.17	120
5.19	Verrauschte $\sigma_{0,xx}-\varepsilon_{0,xx}$ -Kurve bis zum ersten Maximum bei $\varepsilon_{0,xx} _P$	122
5.20	S/T , T/S und M für die Kurve aus Abb. 5.19	122
5.21	PP: Datenreduktion und Extrapolation an die $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Ränder	126
5.22	PP: Modellierung der Randkurven und Extrapolation der Pfade	128
5.23	PP: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum und Endergebnis	132
5.24	PP: Fließkurvenschar	133
6.1	Modellierung eines Zugversuchs	136
6.2	PC/ABS R: Vertrauensbereiche	138
6.3	PC/ABS R: Ermittlung von $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$	139
6.4	PC/ABS R: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$	140
6.5	PC/ABS R: ν_p - und $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	141
6.6	PC/ABS R: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	144
6.7	PC/ABS R: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	145
6.8	PC/ABS R: Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	145

6.9	PC/ABS R: Fließkurvenschar	146
6.10	PC/ABS R: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	147
6.11	PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	147
6.12	PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	149
6.13	PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	149
6.14	PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	150
6.15	PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	150
6.16	PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	151
6.17	PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	151
6.18	PC/ABS E: Vertrauensbereiche	152
6.19	PC/ABS E: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$	153
6.20	PC/ABS E: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$	153
6.21	PC/ABS E: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$	155
6.22	PC/ABS E: ν_p -Verläufe bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	156
6.23	PC/ABS E: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	157
6.24	PC/ABS E: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	157
6.25	PC/ABS E: Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	158
6.26	PC/ABS E: Fließkurvenschar	158
6.27	PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	159
6.28	PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	159
6.29	PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	160
6.30	PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	160
6.31	PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	161
6.32	PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	161
6.33	PP: Vertrauensbereiche	162
6.34	PP: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$	163
6.35	PP: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$	163
6.36	PP: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$	164
6.37	PP: ν_p - und $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	165
6.38	PP: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	166
6.39	PP: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	167
6.40	PP: Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	167
6.41	PP: Fließkurvenschar	168
6.42	PP: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	169
6.43	PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	169
6.44	PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	170
6.45	PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	170
6.46	PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	171
6.47	PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	171
6.48	PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	172

6.49	PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)	172
6.50	PP T20: Vertrauensbereiche	173
6.51	PP T20: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$	174
6.52	PP T20: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$	174
6.53	PP T20: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$	175
6.54	PP T20: ν_p -Verläufe bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$	176
6.55	PP T20: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	177
6.56	PP T20: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	177
6.57	PP T20: Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\epsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum	178
6.58	PP T20: Fließkurvenschar	178
6.59	PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	179
6.60	PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	179
6.61	PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	180
6.62	PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	180
6.63	PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	181
6.64	PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)	181

Tabellenverzeichnis

4.1	Zusammenstellung wichtiger Rahmenbedingungen der Ein-Element-Tests	76
4.2	Validierungsmaterial 1 bis 5: skalare Parameter	77
4.3	Validierungsmaterial 5: zusätzliche skalare Parameter	85
5.1	Übersicht zum Prüfprogramm 1	90
5.2	Übersicht zum Prüfprogramm 2	91
6.1	PC/ABS R: skalare Parameter	140
6.2	PC/ABS E: skalare Parameter	155
6.3	PP: skalare Parameter	164
6.4	PP T20: skalare Parameter	175

Abkürzungen und Bezeichnungen

Abkürzungen

ABS	Acrylnitril-Butadien-Styrol
DIC	digitale Bildkorrelation (engl.: <i>Digital Image Correlation</i>)
EET	Ein-Element-Test
EZ	Einschnürzentrum
FEM	Finite-Elemente-Methode
KOS	Koordinatensystem
MPP	massive Parallelverarbeitung (engl.: <i>Massively Parallel Processing</i>)
PC	Polycarbonat
PP	Polypropylen

Mathematische Notationen

$(\bullet)^{-1}$	Inverse von (\bullet)
$(\bullet)^{\top}$	Transponierte von (\bullet)
$\dot{(\bullet)}$	materielle Zeitableitung von (\bullet)
$(\bullet)^{\nabla J}$	Zaremba-Jaumann-Rate von (\bullet)
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	partielle Ableitung
$\lim(\bullet)$	Grenzwert von (\bullet)
$\ln(\bullet)$	natürlicher Logarithmus von (\bullet)
$\max(\bullet)$	Maximalwert von (\bullet)
$\min(\bullet)$	Minimalwert von (\bullet) /Minimierungsaufgabe
$\text{tr}(\bullet)$	Spur von (\bullet)
$ (\bullet) $	Betrag von (\bullet)

$\ (\bullet)\ _2$	Euklidische Norm von (\bullet)
$(\bullet) : (\bullet)$	doppelte Verjüngung
$(\bullet) \times (\bullet)$	Multiplikation
$:=$	Definition
\in	Element von
\notin	kein Element von
\wedge	logisches Und
\emptyset	leere Menge
δ_{ij}	Kronecker-Delta
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
NaN	keine Zahl
∞	unendlich
$\mathbf{0}$	Nullvektor/Nulltensor

Lateinische Buchstaben

a	Mengenausdruck für die Flächenrichtungen der B-Spline-Fläche
$\hat{a}, \hat{a}_1, \hat{a}_2$	Gewichtswert der Gauß-Quadratur
A	Querschnittsfläche in der Einschnürebene in \mathcal{K}
ΔA	Schnittflächenelement in \mathcal{K}
A_0	Querschnittsfläche in der Einschnürebene in \mathcal{K}_0
ΔA_0	Schnittflächenelement in \mathcal{K}_0
b	Breite der Probe
b_{DIC}	Breite der Flächenkomponente
b_{ID}	Breite der idealen Probengeometrie
\mathbf{B}_{i_1, i_2}	Eckpunkt des polygonalen Kontrollnetzes der B-Spline-Fläche als Koordinatentripel im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum
\mathbf{B}	Matrix, die die zu bestimmenden Eckpunkte des polygonalen Kontrollnetzes enthält
c	Mengenausdruck für die Spalten einer Matrix
\mathbf{C}, C_{ijkl}	Elastizitätstensor eines linear-elastischen isotropen Materials
$\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{C}_{ijkl}$	Anteil von \mathbf{C} ohne E
$\mathbf{C}^{\sigma J}, C_{ijkl}^{\sigma J}$	Hypo-Elastizitätstensor
d	Dehnrate im eindimensionalen Fall

\mathbf{d}, d_{ij}	Dehnratentensor/Deformationsgeschwindigkeitstensor
D	dehnratenabhängige Initialsteigung von Spannungs-Dehnungs-Kurven
D^*	Initialsteigung einer ausgewählten Spannungs-Dehnungs-Kurve
e	Eulersche Zahl
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standardbasis des \mathbb{R}^3
$\dot{\mathbf{e}}, \dot{e}_{ij}$	deviatorischer Dehnratentensor
E	Elastizitätsmodul
E_C	quasistatischer Elastizitätsmodul/konstante Materialsteifigkeit
E_V	variable Materialsteifigkeit
f	Fließfunktion
F	Kraft im Zugversuch
F_I	Vorspannkraft im Zugversuch
\mathbf{F}	Kraftvektor
$\Delta \mathbf{F}$	resultierender Kraftvektor an einem Schnittflächenelement
\mathbf{F}	Deformationsgradient
g	plastisches Potential
G	Schubmodul
\mathbf{G}	positiv definite quadratische Matrix, die von der Zeit abhängt
h	Grad des analytischen Ansatzes für E_V
\mathbf{H}	Hilfsmatrix
i	Laufvariable/Hilfsvariable
i_1, i_2	Laufvariable der B-Spline-Fläche
\mathbf{I}	Einheitstensor
j	Laufvariable/Hilfsvariable
\mathbf{J}	Hilfsvektor
\mathbf{J}	Hilfsmatrix
k	Hilfsvariable
k_1, k_2	B-Spline-Ordnung
k_i	Term eines Verfestigungsgesetzes
K	Kompressionsmodul
l	Hilfsvariable
ℓ	Grad des analytischen Ansatzes für D
ℓ	Geschwindigkeitsgradient

Abkürzungen und Bezeichnungen

L	Summe der Datenpunkte aller Versuche mit einem Material
M	Auswertefunktion zur Bestimmung der Obergrenze des Vertrauensbereichs
n	Zeitschritt
$n_1 + 1, n_1 + 1$	Anzahl der Eckpunkte des Kontrollnetzes der B-Spline-Fläche
n_E	letzter Zeitschritt des viskoelastischen Regimes
n_P	erster Zeitschritt des viskoelasto-viskoplastischen Regimes
n_{SH}	Parameter der Seth-Hill-Familie von Verzerrungstensoren
\mathbf{n}	Normaleneinheitsvektor des Schnittflächenelements ΔA
\mathbf{n}_0	Normaleneinheitsvektor des Schnittflächenelements ΔA_0
N	Summe der Datenpunkte innerhalb der Vertrauensbereiche aller Versuche mit einem Material
N_1, N_2	B-Spline-Basisfunktion der B-Spline-Fläche
$\tilde{\mathbf{N}}$	Matrix, die sich aus den Produkten der B-Spline-Basisfunktionen zusammensetzt
$\tilde{\mathbf{N}}_{equal}$	Matrix einer linearen Gleichheits-Nebenbedingung
$\tilde{\mathbf{N}}_{unequal}$	Matrix einer linearen Ungleichheits-Nebenbedingung
O	Ursprung
O'	neuer Ursprung
p	hydrostatischer Druck
Δp	Inkrement des hydrostatischen Drucks
P_1, P_2, P_3	Hilfsvariable
q	Datenpunkt
\mathbf{Q}, Q_{ij}	tensorielle Hilfsgröße
r	Schleifendurchlauf
R	Anzahl der Versuche mit einem Material
\mathbf{R}	eigentlich orthogonale Rotationsmatrix
s	Schleifendurchlauf
\mathbf{s}, s_{ij}	deviatorische Cauchy-Spannung
$\Delta \mathbf{s}, \Delta s_{ij}$	Inkrement der deviatorischen Cauchy-Spannung
S	Sekantenmodul
t	Zeit
Δt	Zeitinkrement
t_0	Referenzzeit

t_N	Einschnürzeitpunkt
\mathbf{t}	Cauchy-Spannungsvektor
\mathbf{t}_0	nomineller Spannungsvektor/technischer Spannungsvektor
T	Tangentenmodul
u	Verschiebung
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{U}	rechter Strecktensor
v	Grad des analytischen Ansatzes für σ_E
\mathbf{v}	linker Strecktensor
V	Summe der Datenpunkte eines Versuchs innerhalb des Vertrauensbereichs
w	Datenpunkt einer ausgewählten Kurve
\mathbf{w}	Spintensor/Drehgeschwindigkeitstensor
W	Summe der Datenpunkte einer Kurve
x	x -Achse des globalen kartesischen Koordinatensystems
x_1, x_2, x_l	x -Achse eines alternativen kartesischen Koordinatensystems
x_B	x -Koordinate des Flächenschwerpunkts der Flächenkomponente
\mathbf{x}	Ortsvektor in \mathcal{K}
\mathbf{X}	Ortsvektor in \mathcal{K}_0
y	y -Achse des globalen kartesischen Koordinatensystems
y_1, y_2, y_l	y -Achse eines alternativen kartesischen Koordinatensystems
\hat{y}_1, \hat{y}_2	Gaußpunkt
y_1^*, y_2^*	y -Koordinate eines materiellen Punkts, der bei t_0 an einem Gaußpunkt liegt
y_B	y -Koordinate des Flächenschwerpunkts der Flächenkomponente
z	z -Achse des globalen kartesischen Koordinatensystems
z_1, z_2, z_l	z -Achse eines alternativen kartesischen Koordinatensystems
Δz	Verschiebung in z -Richtung

Griechische Buchstaben

α	Parameter, der von ν_p abhängt
$\check{\alpha}$	$\alpha/9$
β	Relaxationsrate

Γ	Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems
Γ_{equal}	Matrix einer linearen Gleichheits-Nebenbedingung
$\Gamma_{unequal}$	Matrix einer linearen Ungleichheits-Nebenbedingung
δ	lokale Probendicke in \mathcal{K}
$\hat{\delta}$	arithmetisches Mittel der Probendicken bei $\hat{y}_{1/2}$ bzw. $y_{1/2}^*$ innerhalb von \mathcal{P}_A in \mathcal{K}
δ_0	Probendicke in \mathcal{K}_0
ϵ_{ν_p}	relativer Fehler bei der Berechnung von ν_p
$\epsilon_{\sigma_{vm}}$	relativer Fehler bei der Berechnung von σ_{vm}
ϵ_y	relative Abweichung zwischen $y_{1/2}^*$ und $\hat{y}_{1/2}$ innerhalb von \mathcal{P}_A
ϵ_{eff}	effektive Dehnung
$\dot{\epsilon}_{eff}$	effektive Dehnrage
$\dot{\epsilon}_{eq}$	effektive Dehnrage, bei der quasistatisches Materialverhalten angenommen wird
$\dot{\epsilon}_{nom}$	nominelle Dehnrage
ϵ_p	äquivalente plastische Dehnung
$\dot{\epsilon}_p$	äquivalente plastische Dehnrage
ϵ_{pct}	uniaxiale plastische Vergleichsdehnung
$\Delta\epsilon_{pct}$	Inkrement der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung
$\dot{\epsilon}_{pct}$	uniaxiale plastische Vergleichsdehnrage
$\Delta\dot{\epsilon}_{pct}$	Inkrement der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnrage
$\dot{\epsilon}_{ref}$	Referenzdehnrage, 1 ms^{-1}
$\dot{\epsilon}_v$	volumetrische Dehnrage
$\boldsymbol{\epsilon}, \epsilon_{ij}$	Hencky-Verzerrungstensor/wahre Dehnung
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\epsilon}_{ij}$	Dehnragentensor/Deformationsgeschwindigkeitstensor
$\boldsymbol{\epsilon}_0, \epsilon_{0,ij}$	Biot-Verzerrungstensor/nominelle Dehnung/technische Dehnung
$\boldsymbol{\epsilon}_G, \epsilon_{G,ij}$	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\epsilon}_{SH}, \epsilon_{SH,ij}$...	Verzerrungstensor der Seth-Hill-Familie
ζ_j	Koeffizient im analytischen Ansatz für σ_E
η_V	variable Materialdämpfung
ϑ	Torsionswinkel
θ_j	Koeffizient im analytischen Ansatz für D
κ_j	Koeffizient im analytischen Ansatz für E_V
$\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_i$	Verfestigungsvariable

$\dot{\lambda}$	plastischer Multiplikator
$\boldsymbol{\lambda}$	rechte Seite eines linearen Gleichungssystems
$\boldsymbol{\Lambda}$	Diagonalmatrix mit den Eigenwerten des rechten Strecktensors
$\boldsymbol{\mu}$	Koordinatentripel im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum
$\boldsymbol{\mu}$	Matrix, die die Koordinatentripel von Datenpunkten enthält
$\boldsymbol{\mu}_{equal}$	Matrix einer linearen Gleichheits-Nebenbedingung
$\boldsymbol{\mu}_{unequal}$	Matrix einer linearen Ungleichheits-Nebenbedingung
ν	Querkontraktionszahl
ν_p	plastische Querkontraktion
ν_t	totale Querkontraktion
$\tilde{\nu}_t$	invers kalibrierte totale Querkontraktion
$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$	Knotenvektor der B-Spline-Fläche
ρ	Dichte
ϱ_1, ϱ_2	Flächenparameter der B-Spline-Fläche
σ	Cauchy-Spannung im eindimensionalen Fall
σ_E	Elastizitätsgrenze
σ_E^*	Elastizitätsgrenze eines ausgewählten Versuchs
σ_{vm}	von-Mises-Vergleichsspannung
$\Delta\sigma_{vm}$	Inkrement der von-Mises-Vergleichsspannung
$\bar{\sigma}_{xx}$	Mittelwert von σ_{xx} in \mathcal{P}_A
$\hat{\sigma}_{xx}$	Gaußpunktapproximation von σ_{xx} in \mathcal{P}_A
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Cauchy-Spannungstensor/wahre Spannung
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\sigma}_{ij}$	materielle Zeitableitung des Cauchy-Spannungstensors
$\boldsymbol{\sigma}_0, \sigma_{0,ij}$	nominelle Spannung/technische Spannung
$\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{ij}^{tr}$	Testspannung eines Return-Mapping-Algorithmus
τ	zeitliche Integrationsvariable
τ_1, τ_2	Schwellenwert zur Bestimmung der Obergrenze des Vertrauensbereichs
Υ	boolesche Variable, die angibt, ob ν_p im aktuellen Zeitschritt modifiziert wurde
φ	Abbildung von \mathcal{K}_0 auf \mathcal{K}
$\boldsymbol{\Phi}$	orthogonale Matrix mit den auf eins normierten Eigenvektoren des rechten Strecktensors als Spalten
$\boldsymbol{\chi}$	Lösungsvektor eines linearen Gleichungssystems

Ψ, ψ_{ij}	tensorielle Hilfsgröße
ω_ν	Relaxationsparameter

Kalligraphische Buchstaben

\mathcal{F}	Hilfsfunktion
\mathcal{K}	Momentankonfiguration zur Zeit t
\mathcal{K}_0	Referenzkonfiguration zur Zeit t_0
\mathcal{P}_A	Einschnürebene

Kopf- und Fußzeiger

$(\bullet)^e$	Größe im viskoelastischen Regime/elastische Größe
$(\bullet)^n$	Größe im Zeitschritt n
$(\bullet)^p$	Größe im viskoelasto-viskoplastischen Regime/plastische Größe
$(\bullet)^q$	Größe, die dem Datenpunkt q zugeordnet wird
$(\bullet)^w$	Größe, die dem Datenpunkt w zugeordnet wird
$(\bullet)_c$	Auswertung der Spalte c einer Matrix
$(\bullet)_C$	Größe im Element C des rheologischen Modells
$(\bullet)_{lowest}$	Auswertung an dem Punkt, an dem die effektive Dehnrate einen Mindestwert überschreitet
$(\bullet)_{max}$	Maximalwert
$(\bullet)_{min}$	Minimalwert
$(\bullet)_O$	Auswertung am Ursprung
$(\bullet)_P$	Auswertung am ersten, möglicherweise lokalen Maximum einer technischen Spannungs-Dehnungs-Kurve
$(\bullet)_r$	Größe zum Schleifendurchlauf r
$(\bullet)_s$	Größe zum Schleifendurchlauf s
$(\bullet)_{Sim}$	Referenzgröße aus einer Simulation
$(\bullet)_{Surface}$	Wert auf der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum
$(\bullet)_\tau$	Auswertung an dem Punkt, an dem die Obergrenze des Vertrauensbereichs erreicht wird
$(\bullet)_V$	Größe im Element V des rheologischen Modells
$(\bullet)_{V1}$	Größe im Element $V1$ des rheologischen Modells
$(\bullet)_{V2}$	Größe im Element $V2$ des rheologischen Modells

Einleitung

1.1 Motivation

Als Carl Benz am 29. Januar 1886 ein Patent für sein *Fahrzeug mit Gasmotorenbetrieb* beantragte, legte er damit den Grundstein für eine Entwicklung, die die Welt verändern sollte (BENZ & CO. (1886)). Seit über einem Jahrhundert prägt das Automobil wie kein anderes Fortbewegungsmittel zuvor den Begriff der individuellen Mobilität und ein Ende seiner Erfolgsgeschichte ist nicht absehbar. Gleichwohl befindet sich die Branche heute mehr denn je in einer Phase des Wandels. Um die weltweiten Schadstoffemissionen zu verringern, wird von Antriebsarten, die auf der lokalen Verbrennung fossiler Energieträger basieren, zunehmend auf elektrische Alternativen ausgewichen. Die sich daraus ergebenden neuen Anforderungen an Fahrzeugdesigns und -plattformen machen für klassische Automobilhersteller große Investitionen in Umstrukturierungen und Neuentwicklungen erforderlich. Gleichzeitig eröffnen sie neuen Unternehmen die Chance für einen Markteintritt. Verschärft wird die Situation durch kostenintensive Forschungsaktivitäten im Bereich des autonomen Fahrens, ein Themenfeld, in dem sich auch Technologieunternehmen engagieren.

Die genannten Rahmenbedingungen in der Automobilbranche verstärken die allgemeinen Bestrebungen, den Materialeinsatz durch Leichtbaukonzepte zu reduzieren. Neben den Materialkosten lässt sich dadurch der Energieverbrauch eines Fahrzeugs senken und so seine Reichweite steigern. Angesichts ihres attraktiven Preises, ihrer vergleichsweise geringen Dichte und der Flexibilität bei ihrer Verarbeitung und Formgebung eignen sich Kunststoffe zur Erfüllung der Anforderungen in idealer Art und Weise. Insbesondere Thermoplaste spielen in der Materialauswahl eine immer größere Rolle und werden in allen Bereichen des Fahrzeugs im Interieur und Exterieur verwendet. Ihr Einsatzgebiet erstreckt sich von einfachen Verkleidungselementen bis hin zu sicherheitsrelevanten Strukturkomponenten.

Für ein erfolgreiches Bestehen innerhalb eines großen internationalen Wettbewerbersfelds ist es für einen Automobilhersteller von zentraler Bedeutung, neue Kundenbedürfnisse und Trends möglichst schnell in Produkten umzusetzen. Um kurze Entwicklungszyklen bei gleichzeitig hohen Qualitätsstandards zu realisieren, sind computergestützte Verfahren eine Grundvoraussetzung. Durch ihren Einsatz lassen sich Projektphasen, in denen Prototypen zum Einsatz kommen, zeitlich verkürzen oder ganz streichen. Dies ist natürlich nur möglich, sofern in der digitalen Produktauslegung eine hohe Prognosequalität sichergestellt werden kann. Bei der Auslegung der passiven Fahrzeugsicherheit mittels Crashsimulationen ist in diesem Zusammenhang die Abbildung des Materialverhaltens elementar. Nur wenn die Deformation von Bauteilen bzw. der gesamten Fahrzeugstruktur bis hin zum Versagen ausreichend genau erfasst wird, können die Anforderungen aus Gesetzen und Ratings bezüglich des Schutzes von Fußgängern und Insassen vollständig digital umgesetzt werden.

Die Vorhersage des Verhaltens von Thermoplasten ist besonders herausfordernd. Im Gegensatz zu Metallen kann für sie üblicherweise *keine isochore Plastizität* angenommen werden und auch der Prozess ihrer materiellen *Ent- bzw. Verfestigung* mit zunehmender Dehnung ist wesentlich komplexer. Darüber hinaus zeigen sie häufig neben *viskoplastischen* auch *viskoelastische* Eigenschaften. Geeignete Modelle, die diese Charakteristiken abbilden können, sind zwar seit einiger Zeit verfügbar, ihre ideale *Kalibrierung* gestaltet sich jedoch bis heute als schwierig. Der Hauptgrund dafür ist der Umstand, dass in der Regel kein einfacher Zusammenhang zwischen den im Modell vorzugebenden und den in Versuchen messbaren Größen besteht.

Konkrete Beispiele lassen sich anhand des in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden Materialmodells *SAMP-1* geben. Es handelt sich dabei um ein isotropes, viskoelasto-viskoplastisches Modell mit kompressibler Plastizität zur Simulation des Verhaltens von Thermoplasten, welches als *MAT_187 in aktuellen Versionen des Solvers *LS-DYNA* zur Verfügung steht. Innerhalb von *SAMP-1* erfolgt die Charakterisierung viskoelastischen Materialverhaltens durch die Vorgabe einer skalaren *Relaxationsrate* sowie eines funktionalen Zusammenhangs zwischen der *Materialsteifigkeit* und der Dehnrates. Die materielle Ent- bzw. Verfestigung beim Plastifizieren wird durch eine oder mehrere *Fließkurven* beschrieben, die die *von-Mises-Vergleichsspannung* in ausgewählten Spannungszuständen und eine zugehörige spezielle *plastische Vergleichsdehnung* in Relation setzen. Zur Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Beanspruchungsgeschwindigkeit im Rahmen viskoplastischen Materialverhaltens können für uniaxialen Zug Fließkurven in tabellierter Form für verschiedene Dehnrates angegeben werden. Zu guter Letzt charakterisiert die *plastische Querkontraktion* in Form eines skalaren Werts oder einer Funktion in Abhängigkeit der *uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung* die Volumenänderung des Materials während des Plastifizierens (HALLQUIST (2020B)). In der Regel können die

genannten Parameter nicht direkt in Versuchen gemessen werden, weswegen Näherungen üblich sind.

Mit den bereits existierenden Verfahren zur Modellkalibrierung, welche in Kap. 1.2 vorgestellt werden, gelingt es auf Probenebene nur in Spezialfällen auf Antrieb und selbst mit großem Aufwand nicht immer, gleichzeitig das Kraftniveau und das Dehnungsfeld hinreichend genau zu prognostizieren. Die Auswirkungen dieses Umstands können beträchtlich sein, denn lokale Dehnungen bilden die Grundlage der Versagensprognose mit Modellen wie z. B. *GISSMO* nach NEUKAMM U. A. (2008).

Bis heute gibt es Bestrebungen, bestehende Materialmodelle zu ergänzen oder neue, noch komplexere Modelle zu entwickeln, um das Verhalten von Thermoplasten mit zunehmender Genauigkeit abzubilden. Auch wenn dies sicherlich sinnvoll ist, ist es vor allem notwendig, Verfahren zu entwickeln, die die zugehörige Kalibrierung erleichtern und das komplexe Zusammenwirken der Parameter in der praktischen Anwendung beherrschbar machen. In diesem Forschungsbereich ist die vorliegende Arbeit angesiedelt.

1.2 Stand der Technik

Eine rein erfahrungsbasierte, manuelle Kalibrierung von Materialmodellen zur Charakterisierung von Thermoplasten führt in der Praxis nur in seltenen Fällen mit adäquatem Aufwand zu hinreichend guten Ergebnissen. Besser eignen sich iterative Schemata, die sich durch den Einsatz von Optimierungsprogrammen wie z. B. *LS-OPT* automatisieren lassen. Die Hauptunterschiede bestehen dabei in der mathematischen Formulierung der Zielfunktion. Klassischerweise wird das Optimum an eine möglichst gute Übereinstimmung von Kraft-Verschiebungs-Kurven oder technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven aus Versuchen und Simulationen gekoppelt. Beispiele für diese Vorgehensweise finden sich in BRINKMANN (2010), TAKEKOSHI UND NIWA (2012) sowie SCHILLING U. A. (2017). Bessere Ergebnisse lassen sich erzielen, indem mehrere Dehnungsfeldauswertungen berücksichtigt werden, deren Bestimmung mittels digitaler Bildkorrelation stattfindet. Diesen Weg verfolgen unter anderem SCHILLING U. A. (2019). Weitergehende Entwicklungen hin zur Vollfeldkalibrierung finden sich z. B. in STANDER U. A. (2017) und ILG U. A. (2018). Allerdings sind die dort vorgestellten Untersuchungen im Umfeld der Charakterisierung von Metalllegierungen zu verorten.

Die genannten Verfahren haben gemein, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt für die gesuchten Modellparameter analytische Beziehungen angesetzt werden, die den möglichen Lösungsraum einschränken. Ein Beispiel dafür ist ein Zusammenhang zwischen einem geeigneten Spannungsmaß, einem geeigneten Verzerrungsmaß und gegebenenfalls dessen Rate. Der Einsatz eines solchen Modells ist notwendig, weil die wahre Spannung

in Versuchen nur schwer zu erfassen ist. Im Zugversuch ist beispielsweise der Spannungszustand nach dem Einschnüren des Prüflings multiaxial. BRINKMANN (2010) verwendet im quasistatischen Fall einen modifizierten Ansatz nach DUFFO U. A. (1995), welcher wiederum auf G'SELL U. A. (1983) bzw. G'SELL UND JONAS (1979) zurückgeht. Zur Auswertung von dynamischen Versuchen entwickelt der Autor zwei weitere Formeln. SCHILLING U. A. (2017) sowie SCHILLING U. A. (2019) variieren die Gleichung von LUDWIK (1909) sowie einen der Ansätze von BRINKMANN (2010). TAKEKOSHI UND NIWA (2012) nutzen einen speziellen Integralausdruck und STANDER U. A. (2017) sowie ILG U. A. (2018) greifen für Metalle auf die Beziehung nach HOCKETT UND SHERBY (1975) zurück. Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des Verhaltens von Thermoplasten ist das *DSGZ-Modell* von DUAN U. A. (2001). Dieses kombiniert einzelne Aspekte der Formeln nach JOHNSON UND COOK (1983), G'SELL UND JONAS (1979), MATSUOKA (1986) und BROOKS (1997).

Für das in Kap. 1.1 eingeführte Materialmodell *SAMP-1* werden üblicherweise auch zur Beschreibung der Materialsteifigkeit in Abhängigkeit von der Dehnratesowie für die plastische Querkontraktion Modellannahmen getroffen. Ein analytischer Ansatz für die Materialsteifigkeit findet sich in SCHILLING U. A. (2019). Die plastische Querkontraktion wird dort als Konstante angesehen. Dahingegen steht in den Forschungen von TAKEKOSHI UND NIWA (2012) die Herstellung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen dieser Größe und der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung im Mittelpunkt.

Die größte Schwierigkeit bei der Wahl bzw. Definition von analytischen Ansätzen ist der richtige Kompromiss zwischen einer hinreichenden Flexibilität und einer überschaubaren Anzahl freier Variablen. Auf der einen Seite besteht das Risiko einer zu starken Einschränkung des Lösungsraums, so dass dieser das reale Werkstoffverhalten nicht enthält. Auf der anderen Seite ergeben sich aus einer zu großen Variabilität Schwierigkeiten hinsichtlich der Konvergenz im Rahmen einer Optimierung. Auch dies kann dazu führen, dass kein akzeptables Ergebnis erzielt wird. Aus diesem Grund setzen die genannten Entwicklungen auf dem Gebiet der Vollfeldkalibrierung, STANDER U. A. (2017) und ILG U. A. (2018), zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Spannung und Dehnung auf den Ansatz nach HOCKETT UND SHERBY (1975), bei dem nur zwei Variablen optimiert werden müssen. Zur Abbildung quasistatischer Versuche mit Metallen ist dieser zumeist hinreichend, für eine Charakterisierung von Thermoplasten im Allgemeinen jedoch nicht. Eine Berücksichtigung dehnratenabhängigen Werkstoffverhaltens müsste vor einer praktischen Anwendung im Bereich der Crashsimulation grundsätzlich noch ergänzt werden.

Wie aus den angeführten Beispielen hervorgeht, ist die Kalibrierung von Materialmodellen für Thermoplaste weiterhin mit vielen Unzulänglichkeiten verbunden. Daher werden immer wieder neue Anstrengungen unternommen, eine optimale *direkte Kalibrierung*

ohne Iterationen zu erzielen. Beispielsweise untersuchen HELBIG UND HAUFE (2018) für ein ausgewähltes Polycarbonat/Acrylnitril-Butadien-Styrol-Blend drei verschiedene Möglichkeiten zur unmittelbaren Approximation von Fließkurven auf Basis von Versuchsdaten. Eine allgemeingültige Beziehung wird dabei jedoch nicht gefunden. Darüber hinaus erfolgt in der genannten Ausarbeitung an mehreren anderen Stellen ebenfalls der Einsatz von *Reverse Engineering*. Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung der plastischen Querkontraktion, welche auf iterativen Optimierungen eines Ein-Element-Tests basiert. Eine andere Arbeit, deren Fokus auf der direkten Ermittlung dieser Größe liegt, ist die von MARTIN-SANTOS U. A. (2021). Allerdings betonen die Autoren, dass es sich bei dem von ihnen entwickelten *Non-Isochoric Plasticity Assessment* um eine Abschätzung handelt. Für die Auswertung eines Zugversuchs wird z. B. angenommen, dass die Spannungsverteilung im Parallelbereich des Prüflings auch nach dem Einschnüren homogen und der Probenquerschnitt rechteckig verbleibt. Dies ist in der Realität nicht der Fall.

1.3 Zielsetzung

Es zeigt sich deutlich, dass bis heute eine Möglichkeit fehlt, alle Parameter eines komplexen Materialmodells für Thermoplaste optimal und umfassend direkt zu kalibrieren. Die Entwicklung eines solchen Verfahrens ist das Ziel dieser Arbeit. Im Gegensatz zu bereits verfügbaren Ansätzen wird dabei auf Reverse Engineering mit Optimierungsmethoden verzichtet. Außerdem ist die Verwendung von analytischen funktionalen Zusammenhängen auf ein Mindestmaß begrenzt.

Die Konzeption des neuen Verfahrens zielt darauf ab, für die Modellparameter eine vollumfängliche Kompatibilität zu den an einem materiellen Punkt im Versuch vorherrschenden Verzerrungen und Spannungen herzustellen. Dies geht mit einer Erfüllung der zugehörigen Konstitutivgleichungen einher. Dementsprechend wird modellspezifischen Differentialgleichungen die Eignung zugeschrieben, die Parameter zu bestimmen. Sofern das Materialmodell das reale Werkstoffverhalten grundsätzlich abbilden kann, speist sich aus einer verfahrensbedingt optimalen Erfüllung der Konstitutivgleichungen die Erwartung, dass bei einer derartigen Kalibrierung sowohl eine optimale Prognose des Kraftniveaus eines Versuchs als auch des zugehörigen Dehnungsfelds resultiert. Diese Hypothese wird analysiert.

Aus den vorhergehenden Erläuterungen folgt, dass ein geeignetes Materialmodell selektiert werden muss. Die bereits thematisierte Wahl des für Thermoplaste entwickelten *SAMP-1* bzw. **MAT_187* wird aufgrund folgender Überlegungen getroffen: Erstens ist das Materialmodell grundsätzlich in der Lage, die wichtigsten Eigenschaften

abzubilden, die einem isotropen Thermoplast zugeschrieben werden, d. h. viskoelasto-viskoplastisches Werkstoffverhalten in Kombination mit kompressibler Plastizität. Zweitens findet *SAMP-1* breiten Einsatz im Anwenderkreis des Solvers *LS-DYNA*, was es als Forschungsgegenstand besonders relevant macht. Drittens kann das Materialmodell als Erweiterung des für Metalle konzipierten Modells **MAT_024* interpretiert werden, bei welchem es sich um ein isotropes, elasto-viskoplastisches Materialmodell mit inkompressibler Plastizität vom Typ nach von Mises handelt. Letzteres ist noch weiter verbreitet als *SAMP-1* (HALLQUIST (2020B)). Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren wird für beide genannten Materialmodelle ausgearbeitet.

Die im Automobilbau eingesetzten, überwiegend dünnwandigen Strukturen werden in Crashsimulationen mit Schalenelementen abgebildet. Dementsprechend liegt das Augenmerk der Betrachtungen auf einer optimalen Prognosegüte für solche Fälle. Zur weiteren Eingrenzung des Themengebiets werden ausschließlich Zugversuche untersucht, weil diese nach Kap. 2.2 für die Kalibrierung von *SAMP-1* am bedeutendsten sind. Um anhand von Materialprüfungen, die mittels digitaler Bildkorrelation erfasst werden, über den Industriestandard hinausgehende Messdaten zu gewinnen, erfolgt die Entwicklung entsprechender Auswertestrategien. Zentrale zeitabhängige Größen, die es zu quantifizieren gilt, sind die Dicke, die Dickendehnung und die Querschnittsfläche des Prüflings sowie die x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors.

Zur Reduktion von Kosten und Entwicklungszeiten wird bei der Konzeption des neuen Verfahrens eine Automatisierbarkeit angestrebt. Da die praktische Anwendbarkeit der Routinen eine zentrale Rolle spielt, werden geeignete Beispiele herangezogen, um diese zu demonstrieren.

1.4 Gliederung der Arbeit

In Kap. 2 findet die Vorstellung der theoretischen Grundlagen statt, die für das Verständnis des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens relevant sind. Nach einer allgemein gehaltenen Einführung in die nichtlineare Festkörpermechanik wird auf die Formulierung und die Eigenschaften des Materialmodells *SAMP-1* eingegangen. Da die Daten für die Kalibrierung, abgesehen von der Kraftmessung, mittels digitaler Bildkorrelation gewonnen werden, bildet die Erklärung einiger elementarer Zusammenhänge und Begrifflichkeiten dieses optischen Messverfahrens den Abschluss der Ausführungen.

Kap. 3 thematisiert die Herleitung und Implementierung des Programmcodes zur direkten Kalibrierung von *SAMP-1*. Im Anschluss an die Einführung diverser Definitionen und die Dokumentation der getroffenen Annahmen werden die modellspezifischen Integro-Differentialgleichungen aufgestellt. Eingebettet in die Ausführungen sind Vorschläge

zu ihrer numerischen Lösung, deren Fokus auf der Robustheit in der praktischen Anwendung liegt.

Die Validierung des Programmcodes erfolgt in Kap. 4. Dabei wird auf virtuelle Messdaten zurückgegriffen, die aus mit *LS-DYNA* simulierten Ein-Element-Tests gewonnen werden. Eine Anwendung auf diese Datenbasis ermöglicht den Vergleich der berechneten Parameter mit den im Modell vorgegebenen. Gegenstand der Untersuchungen sind insbesondere unterschiedliche Komplexitätsgrade der Materialmodellierung sowie verschiedene Spannungszustände.

In Kap. 5 werden Auswertestrategien für reale Zugprüfprogramme vorgestellt. Neben einer Dokumentation der Anforderungen an die Versuchsdaten umfasst dies beispielsweise eine neue Methode, um mittels dreidimensionaler digitaler Bildkorrelationsdaten der Probenfront im Zugversuch insbesondere die Dicke, die Dickendehnung und die Querschnittsfläche des Prüflings zu approximieren. Darüber hinaus ist die Spannungsverteilung in der Probe Gegenstand der Ausführungen. Den Abschluss des Kapitels bilden semi-empirische Ansätze, die auf Basis eines schlanken Prüfprogramms die dehnratenübergreifende Kalibrierung von viskoelastischen und viskoplastischen Zusammenhängen ermöglichen.

Kap. 6 dokumentiert eine ausführliche Anwendung des Verfahrens auf Versuchsdaten, welche die höchsten unterstützten Komplexitätsgrade von *SAMP-1* reflektieren. Nach der Kalibrierung des Modells werden für alle geprüften Dehnraten eines Materials repräsentative Zugversuche simuliert, um die Prognosegüte zu beurteilen. Die Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen geschieht auf Grundlage des Kraftverlaufs, des Dehnungsfelds und der Probenbreite bzw. Querschnittsfläche des Prüflings in der Einschnürebene. Der vermittelte Gesamtüberblick über die Vorgehensweise wird abschließend durch eine Beurteilung der Automatisierbarkeit des Verfahrens ergänzt.

Kap. 7 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und bewertet die einzelnen Arbeitsschritte. Außerdem wird ein Ausblick auf zukünftige Weiterentwicklungen und mögliche Forschungsfelder formuliert.

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die zentralen Grundlagen vorgestellt, auf denen das neu entwickelte Verfahren zur direkten Kalibrierung von Materialmodellen aufsetzt. Neben der Einführung wesentlicher Definitionen und Begriffe der nichtlinearen Festkörpermechanik findet die Vorstellung der im Folgenden verwendeten Notation für mechanische Größen statt. Der Fokus liegt dabei auf den Konstitutivgleichungen, welche die Verzerrungs- und Spannungsmaße in Relation setzen und Kernbestandteil aller Materialmodelle sind. Die Erläuterung der speziellen Eigenschaften des in *LS-DYNA* zur Simulation von Thermoplasten verfügbaren Materialmodells *SAMP-1* baut darauf auf. In diesem Zusammenhang wird insbesondere thematisiert, wie in seiner Formulierung gleichzeitig viskoelastische und viskoplastische Phänomene sowie kompressible Plastizität berücksichtigt werden. Da die Datenbasis für die Kalibrierung Deformationsmessungen mittels digitaler Bildkorrelation umfasst, erfolgt abschließend die Erklärung einiger elementarer Zusammenhänge und Begrifflichkeiten dieses optischen Messverfahrens.

2.1 Nichtlineare Festkörpermechanik

Das Fachgebiet der *Festkörpermechanik* behandelt die Auswirkung äußerer Lasten auf die Bewegung und Deformation fester Körper. Als Teil der *Kontinuumsmechanik* werden dabei diskrete Strukturen der Materie, wie z. B. kristalline oder amorphe Verbände von Atomen oder Molekülen, homogenisiert. Das bedeutet, dass bei der klassischen phänomenologischen Modellierung eines Körpers als *Kontinuum* die physikalischen Charakteristiken unabhängig von der Größenordnung des betrachteten Raums sind. Ein *materieller Punkt* lässt sich als infinitesimaler Anteil am Volumen interpretieren. Abzugrenzen ist die Disziplin von der *Strömungsmechanik* und der *kinetischen Gastheorie* (PARKUS (2005), ALTENBACH (2018) und BERGMANN (2013)).

2.1.1 Kinematik

Innerhalb des *Euklidischen Raums* \mathbb{R}^3 , wie er in Abb. 2.1 skizziert ist, kann ein Körper als Gesamtheit seiner materiellen Punkte beschrieben werden. Diese Definition ist zeitabhängig, sofern eine Bewegung oder Deformation stattfindet. Sei \mathbf{X} der Ortsvektor eines ausgewählten materiellen Punkts in der *Referenzkonfiguration* \mathcal{K}_0 eines Körpers zum Zeitpunkt $t = t_0$, so gilt nach BELYTSCHKO U. A. (2014) für denselben Punkt in der *Momentankonfiguration* \mathcal{K} bei $t > t_0$:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet φ die zugehörige Abbildung von \mathcal{K}_0 auf \mathcal{K} . Für die Verschiebung folgt entsprechend:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \tag{2.2}$$

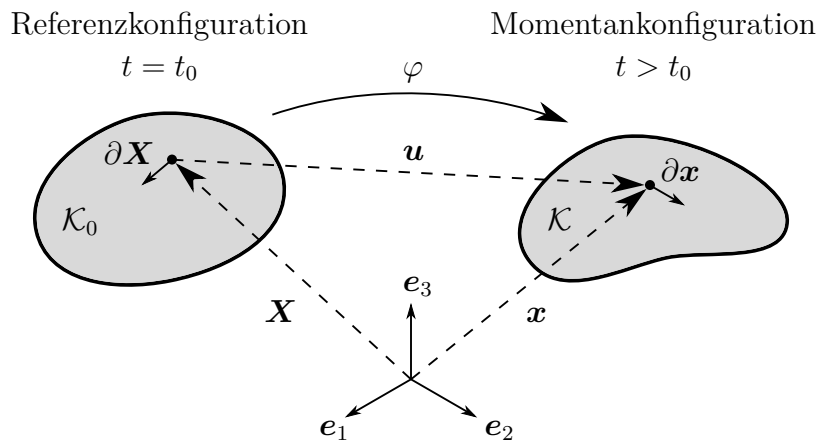


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines Körpers in \mathbb{R}^3

Die Analyse eines Körpers aus der Perspektive inhärenter materieller Punkte, mit auf die Referenzkonfiguration bezogenen Größen, ist im Bereich der Festkörpermechanik gebräuchlich und wird als *Lagrangesche Betrachtungsweise* bezeichnet. *Lagrangesche* bzw. *materielle* Koordinaten haben den Vorteil, dass sie ungeachtet einer Bewegung oder Deformation des Körpers dieselben materiellen Punkte charakterisieren. Auf diese Weise vereinfacht sich die Beschreibung von Effekten, die Funktionen der Belastungshistorie sind. In einem mitbewegten Koordinatensystem entspricht die *materielle Zeitableitung* der partiellen Zeitableitung. Das Pendant zu den eingeführten Zusammenhängen bildet die *Eulersche Betrachtungsweise* mit *Eulerschen* bzw. *räumlichen* Koordinaten, bei der der Körper aus der Perspektive eines räumlich festen Standpunkts betrachtet wird und

charakterisierende Größen in Bezug auf die Momentankonfiguration formuliert werden (BELYTSCHKO U. A. (2014), HAUPT (2002) und ALTENBACH (2018)).

Zur Quantifizierung der Deformation eines Körpers wird in der Festkörpermechanik der *Deformationsgradient* angesetzt, bei dem es sich nach MARSDEN UND HUGHES (1994) sowie ALTENBACH (2018) um einen *Doppelfeldtensor* handelt. Es gilt:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.3)$$

Die polare Zerlegung von \mathbf{F} in eine Sequenz aus zwei Tensoroperationen liefert:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}. \quad (2.4)$$

Dabei ist \mathbf{R} eine eigentlich orthogonale Rotationsmatrix, \mathbf{U} der materielle *rechte Strecktensor* und \mathbf{v} der räumliche *linke Strecktensor*. Die beiden letztgenannten Tensoren sind jeweils symmetrisch und positiv definit (BELYTSCHKO U. A. (2014)). Außerdem sind sie einander ähnlich, was bedeutet, dass sie identische Eigenwerte haben. Für die Eigenvektoren gilt dies im Allgemeinen nicht (ALTENBACH (2018) und WEINBERG (2012)).

Aus der spektralen Zerlegung von \mathbf{U} lässt sich folgern:

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}^\top. \quad (2.5)$$

Dabei ist $\mathbf{\Phi}$ eine orthogonale Matrix mit den auf eins normierten Eigenvektoren von \mathbf{U} als Spalten und $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten (STÖREN UND RICE (1975)).

Eine weitere wichtige Größe ist der räumliche *Geschwindigkeitsgradient*,

$$\boldsymbol{\ell} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad (2.6)$$

der in einen symmetrischen und einen antimetrischen Teil zerlegt werden kann:

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{d} + \mathbf{w}. \quad (2.7)$$

Für den symmetrischen, nach der Definition von ALTENBACH (2018) objektiven Teil,

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}^\top), \quad (2.8)$$

gibt es in der Literatur verschiedene Termini. Üblich sind zum Beispiel die Bezeichnungen *Dehnratentensor* oder *Deformationsgeschwindigkeitstensor*.

Der antimetrische, nicht objektive Teil,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^\top), \quad (2.9)$$

wird *Spintensor* oder *Drehgeschwindigkeitstensor* genannt (BELYTSCHKO U. A. (2014), HAUPT (2002) und ALTENBACH (2018)).

Aufgrund der Relevanz in der vorliegenden Arbeit werden zum Abschluss dieses Abschnitts Spezialfälle vorgestellt, in denen $\boldsymbol{\ell}$ keinen antimetrischen Anteil aufweist und infolgedessen $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ist. Einsetzen der rechten Seite von Gl. (2.6) in Gl. (2.9) und Ausmultiplizieren liefert:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} - (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^\top \right) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top + \frac{1}{2}\mathbf{R} \left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} \right) \mathbf{R}^\top. \quad (2.10)$$

Bei festen Verzerrungs-Hauptachsen bzw. konstanten Eigenvektoren des materiellen rechten Strecktensors ($\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0}$) lässt sich zeigen, dass

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.11)$$

ist, womit

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top \quad (2.12)$$

gilt. Falls zusätzlich keine Starrkörperrotation vorliegt ($\mathbf{R} = \mathbf{I}$), wird aus Gl. (2.12):

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Gemäß Gl. (2.4) ist in diesem Fall:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

Trivialerweise ist der Spintensor auch null für eine reine Starrkörpertranslation.

2.1.2 Verzerrungsmaße

Als *Seth-Hill-Familie von Verzerrungstensoren* wird eine Gruppe von Verzerrungsmaßen bezeichnet, die sich mit der folgenden Gleichung bilden lassen (SETH (1961), OKEREKE UND KEATES (2018), ALTENBACH (2018) und BAŞAR UND WEICHERT (2000)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{SH} = \frac{1}{n_{SH}} (\mathbf{U}^{n_{SH}} - \mathbf{I}). \quad (2.15)$$

Dabei ist n_{SH} ein Parameter. Als körperbezogene materielle Verzerrungstensoren werden aus Gl. (2.15) abgeleitete Verzerrungsmaße nicht durch Starrkörperbewegungen beeinflusst. Nach ALTENBACH (2018) sind sie deshalb *als körperbezogene Tensoren objektiv*. Für $n_{SH} = 2$ folgt aus Gl. (2.15) der materielle *Green-Lagrange-Verzerrungstensor*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^\top \mathbf{U} - \mathbf{I}). \quad (2.16)$$

Dahingegen lässt sich mit $n_{SH} = 1$ der materielle *Biot-Verzerrungstensor* gewinnen, der auch *nominelle* oder *technische Dehnung* genannt wird (OKEREKE UND KEATES (2018) sowie FARAHANI UND NAGHDABADI (2003)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{U} - \mathbf{I}. \quad (2.17)$$

Der materielle *Hencky-Verzerrungstensor* ergibt sich als Grenzwert für $n_{SH} \rightarrow 0$. In der Notation von STÖREN UND RICE (1975) kann für ihn

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ln(\mathbf{U}) := \boldsymbol{\Phi} \ln(\boldsymbol{\Lambda}) \boldsymbol{\Phi}^\top \quad (2.18)$$

geschrieben werden. Dabei operiert der natürliche Matrixlogarithmus $\ln(\boldsymbol{\Lambda})$ per Definition ausschließlich auf der Hauptdiagonale von $\boldsymbol{\Lambda}$. Der Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird unter anderem auch als *wahre Dehnung* bezeichnet (BAŞAR UND WEICHERT (2000) sowie ALTENBACH (2018)). Liegt $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ vor, lässt er sich folgendermaßen berechnen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ln(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_0). \quad (2.19)$$

Nachfolgend wird ein Zusammenhang zwischen dem Hencky-Verzerrungstensor und dem Dehnratentensor hergestellt. Nach z. B. HABER (2021) gilt für eine von t abhängige, positiv definite, quadratische Matrix $\mathbf{G} = \mathbf{G}(t)$, die sich mit $\partial \mathbf{G} / \partial t$ kommutativ verhält:

$$\frac{\partial (\ln(\mathbf{G}))}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Für \mathbf{U} ist dies bei festen Verzerrungs-Hauptachsen erfüllt. Umstellen von Gl. (2.7) nach \mathbf{d} und Ausnutzen von Gl. (2.4) und Gl. (2.6) liefert:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\ell} - \mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^\top - \mathbf{w}. \quad (2.21)$$

Einsetzen des Spintensors für $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0}$ aus Gl. (2.12) ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (2.18) sowie Gl. (2.20):

$$\mathbf{d} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^\top = \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{R}^\top. \quad (2.22)$$

Daraus folgt, dass bei festen Verzerrungs-Hauptachsen und gleichzeitiger Abwesenheit einer Starrkörperrotation gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{d}, \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \mathbf{d} \, d\tau. \quad (2.24)$$

Die hergeleiteten Zusammenhänge decken sich mit den Aussagen von GURTIN UND SPEAR (1983) und HOGER (1986) bezüglich $\ln(\mathbf{v})$. Im Folgenden werden die Begriffe *Verzerrung* und *Dehnung* als Synonyme verwendet.

2.1.3 Spannungsmaße

Zur Quantifizierung der inneren Beanspruchung eines Körpers werden in der Festkörpermechanik Spannungsvektoren und -tensoren formuliert, die aus Schnittbetrachtungen hervorgehen. Bei einem beliebigen Schnittflächenelement ΔA in der Momentankonfiguration \mathcal{K} eines Körpers mit dem resultierenden Kraftvektor $\Delta \mathbf{F}$ ergibt sich der zugehörige, vom Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} des Flächenelements abhängige, räumliche *Cauchy-Spannungsvektor* wie folgt:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (2.25)$$

Basierend auf diesen Betrachtungen ist der räumliche *Cauchy-Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ als der Tensor definiert, der am betrachteten materiellen Punkt einen beliebigen Normaleneinheitsvektor auf den zugehörigen Cauchy-Spannungsvektor abbildet:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^\top \mathbf{n}. \quad (2.26)$$

Dies wird als *Cauchysches Fundamentaltheorem* bezeichnet. Eine alternative Bezeichnung für $\boldsymbol{\sigma}$ ist *wahre Spannung*. Es handelt sich dabei um eine objektive Größe (ALTENBACH (2018) und BELYTSCHKO U. A. (2014)).

Wird $\Delta \mathbf{F}$ aus der Momentankonfiguration \mathcal{K} auf das Flächenelement ΔA_0 in der zugehörigen Referenzkonfiguration \mathcal{K}_0 bezogen, ergibt sich analog zu Gl. (2.25) und Gl. (2.26) die Definition der *nominellen* oder *technischen Spannung* $\boldsymbol{\sigma}_0$. Mit

$$\mathbf{t}_0 = \lim_{\Delta A_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A_0} \quad (2.27)$$

folgt:

$$\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0^\top \mathbf{n}. \quad (2.28)$$

Die Transponierte von $\boldsymbol{\sigma}_0$ wird *erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* genannt. BE-LYTSCHKO U. A. (2014), deren Nomenklatur die gewählten Termini entsprechen, weisen explizit darauf hin, dass die Bezeichnungen in der Literatur teilweise diametral verwendet werden. Nach MARSDEN UND HUGHES (1994) sowie ALTENBACH (2018) handelt es sich bei $\boldsymbol{\sigma}_0$ um einen Doppelfeldtensor. Er ist nicht objektiv.

Als objektive Rate des Cauchy-Spannungstensors wird häufig die zugehörige *Zaremba-Jaumann-Rate* gebildet (ZAREMBA (1903) und JAUMANN (1911)):

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w} - \mathbf{w} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.29)$$

Bei festen Verzerrungs-Hauptachsen und gleichzeitiger Abwesenheit einer Starrkörperrotation entspricht die Zaremba-Jaumann-Rate der materiellen Zeitableitung des Cauchy-Spannungstensors. Es gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}. \quad (2.30)$$

Außerdem lässt sich nach Kap. 2.1.1 bei Lagrangescher Betrachtung in einem mit dem materiellen Punkt mitbewegten Koordinatensystem folgern:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} d\tau. \quad (2.31)$$

2.1.4 Konstitutivgleichungen

Verzerrungen und resultierende Spannungen in einem Körper lassen sich mit Materialgesetzen in Gestalt von *Konstitutivgleichungen* verknüpfen. Die folgenden Ausführungen thematisieren die gewählte Beschreibung von *elastischem* sowie *plastischem* Werkstoffverhalten.

Beschreibung elastischen Werkstoffverhaltens

In der vorliegenden Arbeit wird eine *hypo-elastische* Formulierung untersucht. Es gilt:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{d}. \quad (2.32)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$ die objektive Zaremba-Jaumann-Rate des Cauchy-Spannungstensors nach Gl. (2.29), $\mathbf{C}^{\sigma J}$ ein von $\boldsymbol{\sigma}$ abhängiger *Hypo-Elastizitätstensor* vierter Ordnung (Nomenklatur nach XIAO U. A. (1997)) und \mathbf{d} der objektive Dehnratentensor nach Gl. (2.8). Letzterer umfasst bei einem rein hypo-elastischen Materialverhalten ausschließlich elastische Dehnraten:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e. \quad (2.33)$$

Eine Definition hypo-elastischer Materialgesetze auf Grundlage anderer objektiver Raten und Spannungsmaße ist möglich, wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter erörtert. Die Begründung der *Hypo-Elastizität* wird im Allgemeinen TRUESDELL (1955) zugeschrieben. Ein ergänzender Überblick über die historischen Ursprünge dieses Modells und mögliche Abwandlungen findet sich z. B. in TRUESDELL (1963) und XIAO U. A. (1997).

Unter dem Begriff *Hooke-artige isotrope Hypo-Elastizität* wird im Folgenden eine Variation von Gl. (2.32) verstanden, bei der für $\mathbf{C}^{\sigma J}$ der *Elastizitätstensor* \mathbf{C} eines *linear-elastischen isotropen Materials* angesetzt wird. Die Nomenklatur orientiert sich an KOROBAYNIKOV (2020), mit dem Unterschied, dass dort anstelle der Cauchy-Spannung die *Kirchhoff-Spannung* angesetzt wird. Der Tensor $\mathbf{C}^{\sigma J} = \mathbf{C}$ lässt sich nach BELYTSCHKO U. A. (2014) und BAŞAR UND WEICHERT (2000) mit dem *Kronecker-Delta*,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases} \quad (2.34)$$

wie folgt berechnen:

$$C_{ijkl}^{\sigma J} = C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.35)$$

Dabei ist G der *Schubmodul*,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.36)$$

K der *Kompressionsmodul*,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad (2.37)$$

E der *Elastizitätsmodul* und ν die *Querkontraktionszahl*. Die Komponenten von $\mathbf{C}^{\sigma J}$ müssen weiterhin nicht zwangsweise zeitlich konstant sein.

Bei festen Verzerrungs-Hauptachsen, gleichzeitiger Abwesenheit einer Starrkörperrotation und konstantem $\mathbf{C}^{\sigma J}$ resultiert aus Gl. (2.32) das *Hookesche Gesetz* in der folgenden Form (BAŞAR UND WEICHERT (2000)):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.38)$$

Die Gründe hierfür sind in Kap. 2.1.2 und Kap. 2.1.3 dokumentiert.

Als *viskoelastisch* wird das Verhalten von Materialien bezeichnet, deren elastische Deformationseigenschaften durch dehnratenabhängige viskose Charakteristiken beeinflusst und überlagert werden. TSCHOEGL (1989) führt dies bei Polymeren insbesondere auf die zeitabhängige Bewegung und Neuordnung von Molekülketten zurück. Rheologisch kann *Viskoelastizität* durch das Kombinieren von Feder- und Dämpferelementen abgebildet werden. Aufgrund der großen Anzahl an Modellen und zugehörigen Konstitutivgleichungen wird für einen allgemeinen Überblick auf die Literatur verwiesen. Lesenswert sind z. B. die Abhandlungen von FERRY (1980), SIMO (1987), TSCHOEGL (1989), DROZDOV (1996), BETTEN (2001) und EFFINGER (2016). Die Vorstellung des speziell in dieser Arbeit behandelten Viskoelastizitätsmodells findet in Kap. 2.2.2 statt.

Beschreibung plastischen Werkstoffverhaltens

Zum Studium der dieser Arbeit inhärenten Plastizitätslehre wird unter anderem auf WANG U. A. (1997), SIMO UND HUGHES (1998), DE SOUZA NETO U. A. (2008) und BELYTSCHKO U. A. (2014) verwiesen. Die Erweiterung der hypo-elastischen Konstitutivgleichungen um *Plastizität* erfolgt durch eine additive Aufspaltung des Dehnratentensors in einen elastischen und einen plastischen Teil:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p. \quad (2.39)$$

Um die Größe der beiden Anteile in einem Spannungszustand zu beurteilen, eignet sich eine skalare *Fließfunktion* $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i)$, für die gilt:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) \leq 0. \quad (2.40)$$

Dabei steht $\boldsymbol{\varkappa}_i$ für eine oder mehrere *interne Verfestigungsvariablen*. Spannungszustände, bei denen

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) < 0 \quad (2.41)$$

ausfällt, sind rein elastischen Verzerrungen zuzuordnen.

Dahingegen tritt plastisches Fließen ein, wenn die *Fließbedingung*,

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) = 0, \quad (2.42)$$

erfüllt ist. Gl. (2.42) definiert die sogenannte *Fließortfläche*, auf der ein Spannungszustand während plastischen Fließens verbleibt:

$$\dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) = 0. \quad (2.43)$$

Die Größe $\dot{\lambda}$ bezeichnet dabei den *plastischen Multiplikator*, für den gilt:

$$\dot{\lambda} \geq 0. \quad (2.44)$$

Gl. (2.40), Gl. (2.43) und Gl. (2.44) werden zusammen *Kuhn-Tucker-Bedingungen* genannt. Aus Gl. (2.43) folgt die *Konsistenzbedingung*:

$$\dot{\lambda} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) = 0. \quad (2.45)$$

Im Allgemeinen Fall liegt eine *nicht-assozierte Fließregel* vor:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.46)$$

Dabei ist g das *plastische Potential* des Materialgesetzes, welches in Gestalt des Tensors $\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i)/\partial \boldsymbol{\sigma}$ die Fließrichtung vorgibt. Für eine *assozierte Fließregel* ist \mathbf{d}^p koaxial zur Fließortflächennormale. Aus Gl. (2.46) ergibt sich in diesem Fall:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.47)$$

Bekannte Fließbedingungen für isotrope Werkstoffe sind z. B. die nach VON MISES (1913), TRESCA (1864) oder DRUCKER UND PRAGER (1952). Für die internen Verfestigungsvariablen werden Evolutionsgleichungen der Form

$$\dot{\boldsymbol{\varkappa}}_i = \dot{\lambda} k_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i) \quad (2.48)$$

angenommen. Durch die Wahl von $\boldsymbol{\varkappa}_i$ und $k_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}_i)$ können verschiedene *Verfestigungsgesetze* umgesetzt werden, über die neben einer Dehnungsabhängigkeit auch eine Dehnratenabhängigkeit der Plastizität abgebildet werden kann. Der Begriff *Viskoplastizität* wird in diesem Zusammenhang im Sinne des *Konsistenzmodells* nach WANG U. A. (1997) verstanden – im Gegensatz zu reinen Konstitutivgesetzen wie denen von z. B. PERZYNA (1966) oder DUVAUT UND LIONS (1972).

Die beschriebenen Zusammenhänge lassen sich programmatisch durch einen *Return-Mapping-Algorithmus* umsetzen. Als bekannteste Vertreter nennen SIMO UND HUGHES (1998) die *Closest-Point-Projektion* und den *Cutting-Plane-Algorithmus*. In beiden Fällen wird für einen Zeitschritt zunächst eine Testspannung σ^{tr} berechnet, die anschließend, sofern sie außerhalb der Fließortfläche liegt, zurückprojiziert wird.

2.1.5 Übergang zur Finite-Elemente-Methode

Zur vollständigen Beschreibung eines Strukturproblems müssen ergänzend zu den bisher vorgestellten Grundlagen der nichtlinearen Festkörpermechanik noch materialunabhängige, fundamentale *Bilanzgleichungen* aufgestellt und *Anfangs- und Randbedingungen* formuliert werden. Die zugehörigen Zusammenhänge lassen sich z. B. in BELYTSCHKO U. A. (2014) nachschlagen. Zur Bilanzierung rein mechanischer, isothermer Modellierungen sind neben der *Massenerhaltung*, die *Drehimpulserhaltung* und die *Impulserhaltung* relevant. Die Lösung eines Strukturproblems erfolgt nach dem Umformulieren seiner differentiellen starken Form in seine integrale schwache Form mit einem numerischen Näherungsverfahren. Im Bereich der Festkörpermechanik ist in diesem Zusammenhang die *Finite-Elemente-Methode* (kurz: *FEM*) am weitesten verbreitet (HUGHES (2000) und BELYTSCHKO U. A. (2014)).

Für das weiterführende Studium der vorgestellten Grundlagen sowie der numerischen Implementierung eignen sich die Werke von BELYTSCHKO U. A. (2014), ZIENKIEWICZ UND TAYLOR (2000A), ZIENKIEWICZ UND TAYLOR (2000B), HUGHES (2000), BAŞAR UND WEICHERT (2000), ALTENBACH (2018), HAUPT (2002) sowie WRIGGERS (2001).

In dieser Arbeit wird zur *expliziten* Lösung von Strukturproblemen der in der Crashsimulation weit verbreitete Solver *LS-DYNA* von *Ansys/LST* verwendet. Die eingesetzten Features sind ab den Versionen *R12.1.0* und *R13.1.0* verfügbar. In diesem Zusammenhang sei auf den Abschnitt zum Return-Mapping-Algorithmus in Kap. 2.2.4 verwiesen. Bei den Simulationen wird mit doppelter Genauigkeit gerechnet und es findet eine als *massive Parallelverarbeitung* (engl.: *Massively Parallel Processing*, kurz: *MPP*) bezeichnete Art der Datenverarbeitung statt.

2.2 SAMP-1: ein semi-analytisches Modell für die Simulation von Polymeren

Das in dieser Arbeit zur Analyse von Thermoplasten angesetzte Materialmodell *SAMP-1* geht auf HAUFE U. A. (2005A), KOLLING U. A. (2005), HAUFE U. A. (2005B), DU BOIS

U. A. (2006) sowie DU BOIS U. A. (2017) zurück. Es handelt sich dabei um ein isotropes, viskoelasto-viskoplastisches Modell mit kompressibler Plastizität, welches in *LS-DYNA* unter der Bezeichnung *MAT_187 bzw. *MAT_SAMP-1 implementiert ist. *SAMP-1* kann als Erweiterung des Modells *MAT_024 bzw. *MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY interpretiert werden, bei dem es sich um ein elasto-viskoplastisches Materialmodell mit inkompressibler Plastizität vom Typ nach VON MISES (1913) handelt. Letzteres wird zur Simulation von Metallen eingesetzt (HALLQUIST (2020B) und HALLQUIST (2019)).

2.2.1 Relevanz des lokalen Elementkoordinatensystems

Sowohl *MAT_187 als auch *MAT_024 operieren bei den eingesetzten *Schalenelementen* vom vollintegrierten Elementtyp ELFORM=16 im lokalen Elementkoordinatensystem. In diesem wird bei der Integration des Dehnratentensors und der Zaremba-Jaumann-Rate des Cauchy-Spannungstensors der Spintensor vernachlässigt, so dass unabhängig von \mathbf{w} für den ausgegebenen Verzerrungs- und Spannungstensor Beziehungen in der Form von Gl. (2.24) und Gl. (2.31) gelten (HALLQUIST (2020A), HALLQUIST (2019) und DU BOIS (2018–2022)). Da das lokale Elementkoordinatensystem standardmäßig auf der Konnektivität der Knoten basiert, existiert ein funktionaler Zusammenhang mit deren Nummerierung. Um diese Sensitivität zu eliminieren, ist in *LS-DYNA* eine Option mit der Bezeichnung *Invariant Node Numbering* implementiert. Indem in *CONTROL_ACCURACY der Flag INN auf einen Wert von zwei gesetzt wird, ergibt sich ein lokales Elementkoordinatensystem, welches nahezu unabhängig von der Reihenfolge der Knoten ist (HALLQUIST (2020A), JENSEN (2011), BALA UND DAY (2012) und HARTMANN (2014)). Diese Definition ist auch deswegen zu bevorzugen, weil das System näherungsweise durch seine Rotation den Spintensor neutralisiert, was die implementierten Integrationen von \mathbf{d} und $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$ aufwertet (DU BOIS (2018–2022)). Die nachfolgende Veranschaulichung der theoretischen Grundlagen zu *SAMP-1* bezieht sich stets auf das lokale Elementkoordinatensystem.

2.2.2 Viskoelastizitätsmodell

Gemäß HAUFE U. A. (2005A) basiert das Elastizitätsmodell von *SAMP-1* auf einer Generalisierung der Hooke-artigen isotropen Hypo-Elastizität nach Kap. 2.1.4 zu einem pfadabhängigen, *hereditären* Materialgesetz. Auf diese Weise lässt sich viskoelastisches Verhalten charakterisieren, während im Modell reine Hypo-Elastizität als Spezialfall erhalten bleibt. Rheologisch werden die beschriebenen Zusammenhänge durch ein *Drei-parametermodell* umgesetzt, wie es in Abb. 2.2 skizziert ist. Beim Element C handelt es sich um eine lineare *Hookesche Feder*, während das parallel geschaltete Element V einen

nichtlinearen *Maxwell-Körper* darstellt. Letzteres ist eine Besonderheit von *SAMP-1*. E_C bezeichnet die *konstante Materialsteifigkeit*, $E_V(\dot{\epsilon}_{eff})$ die *variable Materialsteifigkeit*, $\eta_V(\dot{\epsilon}_{eff})$ die *variable Materialdämpfung* und $\dot{\epsilon}_{eff}$ die *effektive Dehnrates* (DU BOIS U. A. (2017) und RANZ (2007)).

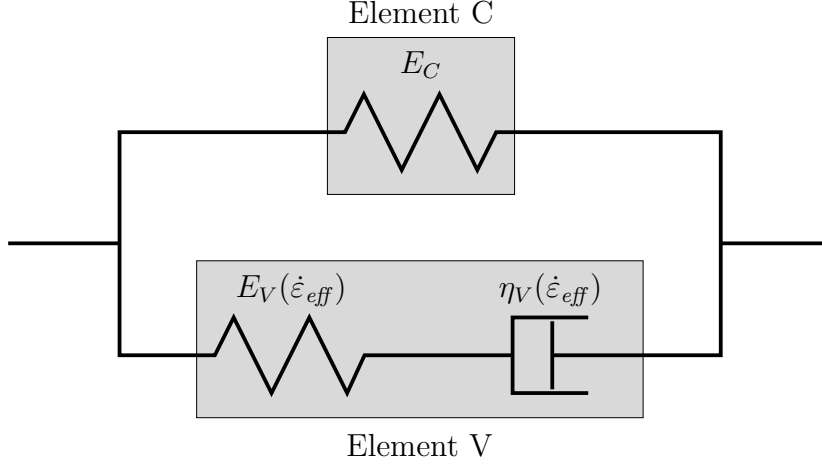


Abbildung 2.2: Dreiparametermodell mit nichtlinearem Maxwell-Körper

Der Wert von $\dot{\epsilon}_{eff}$ ergibt sich auf Basis des *deviatorischen Dehnratesensors*,

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} \mathbf{I}, \quad (2.49)$$

wobei $\dot{\epsilon}_v$ die *volumetrische Dehnrates* bezeichnet:

$$\dot{\epsilon}_v = \text{tr}(\mathbf{d}) = d_{xx} + d_{yy} + d_{zz}. \quad (2.50)$$

Es gilt:

$$\dot{\epsilon}_{eff} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{e}} : \dot{\mathbf{e}}}. \quad (2.51)$$

Nach DU BOIS (2018–2022) wird für Schalenelemente bei der Berechnung von $\dot{\epsilon}_{eff}$ die folgende Approximation für d_{zz} angesetzt, die bei Hooke-artiger isotroper Hypo-Elastizität in einem ebenen Spannungszustand exakt ist:

$$d_{zz} \approx -\frac{\nu}{1-\nu} (d_{xx} + d_{yy}). \quad (2.52)$$

Auf diese Weise lassen sich Iterationen vermeiden, die ausschließlich der Ermittlung der effektiven Dehnrates dienen würden. Der Wert der Querkontraktionszahl wird in

Gl. (2.52) unabhängig von der in Kap. 2.2.4 beschriebenen Thematik für alle Zeitschritte als konstant angenommen.

Gemäß BETTEN (2001) lautet die *Relaxationsfunktion* des Dreiparametermodells aus Abb. 2.2:

$$E = E_C + E_V e^{-\frac{E_V}{\eta_V} t}. \quad (2.53)$$

Für sehr langsame Belastungsvorgänge ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E = E_C, \quad (2.54)$$

weswegen E_C als quasistatischer Elastizitätsmodul gedeutet werden kann. In *SAMP-1* ist zur Berücksichtigung viskoelastischen Verhaltens unter der Bezeichnung LCEMOD eine Kurve für die Summe aus E_C und E_V in Abhängigkeit der effektiven Dehnrate anzugeben (HALLQUIST (2020B)). Unterhalb der niedrigsten darin vorkommenden effektiven Dehnrate $\dot{\epsilon}_{eq}$ wird rein linear-elastisches Verhalten mit der Materialsteifigkeit E_C angenommen. Ein stetiger Übergang bei $\dot{\epsilon}_{eq}$ ist zu empfehlen (DU BOIS (2018–2022)).

Auf Grundlage von Gl. (2.53) lässt sich für einen eindimensionalen Lastfall das folgende Faltungsintegral aufstellen:

$$\sigma = \int_0^t \left(E_C + E_V e^{-\frac{E_V}{\eta_V} (t-\tau)} \right) d\epsilon \, d\tau. \quad (2.55)$$

Die Erweiterung auf einen mehrdimensionalen Fall erfolgt in *SAMP-1* durch die getrennte Behandlung der *deviatorischen Cauchy-Spannung* und des *hydrostatischen Drucks* (HAUFE U. A. (2005A)). Es gilt:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}, \quad (2.56)$$

$$p = -\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{s} = \int_0^t \frac{E_C + E_V e^{-\frac{E_V}{\eta_V} (t-\tau)}}{1 + \nu} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \, d\tau, \quad (2.58)$$

$$p = \int_0^t \frac{E_C + E_V e^{-\frac{E_V}{\eta_V} (t-\tau)}}{3(1 - 2\nu)} \dot{\epsilon}_v^e \, d\tau. \quad (2.59)$$

Die Größen $\dot{\mathbf{e}}^e$ und $\dot{\varepsilon}_v^e$ ergeben sich analog zu Gl. (2.49) und Gl. (2.50) durch die Verwendung von \mathbf{d}^e anstelle von \mathbf{d} .

Das Verhältnis von E_V zu η_V kann nach EFFINGER (2016) als *Relaxationsrate* interpretiert werden. In *SAMP-1* gilt:

$$\beta = \frac{E_V(\dot{\varepsilon}_{eff})}{\eta_V(\dot{\varepsilon}_{eff})} := \text{konst.} \quad (2.60)$$

Die Definition als Konstante geht auf DU BOIS U. A. (2017) zurück, welche diese Entscheidung durch algorithmische Effizienz begründen. Ist β konstant, lassen sich die Faltungsintegrale aufteilen und ihre Lösungen zeitschrittweise aufsummieren. Unter Ausnutzung der Definitionen des Schubmoduls G und des Kompressionsmoduls K nach Gl. (2.36) bzw. Gl. (2.37) folgt für die deviatorische Cauchy-Spannung im Zeitschritt $n + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}|^{n+1} &= \int_0^{t|^{n+1}} 2G_C \dot{\mathbf{e}}^e d\tau + \int_0^{t|^{n+1}} 2G_V e^{-\beta(t|^{n+1}-\tau)} \dot{\mathbf{e}}^e d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t|n} 2G_C \dot{\mathbf{e}}^e d\tau}_{\mathbf{s}_C|n} + \underbrace{\int_{t|n}^{t|^{n+1}} 2G_C \dot{\mathbf{e}}^e d\tau}_{\Delta \mathbf{s}_C} \\ &+ e^{-\beta \Delta t} \underbrace{\int_0^{t|n} 2G_V e^{-\beta(t|n-\tau)} \dot{\mathbf{e}}^e d\tau}_{\mathbf{s}_V|n} + \underbrace{\int_{t|n}^{t|^{n+1}} 2G_V e^{-\beta(t|^{n+1}-\tau)} \dot{\mathbf{e}}^e d\tau}_{\Delta \mathbf{s}_V}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Analog ergibt sich für den hydrostatischen Druck:

$$\begin{aligned} p|^{n+1} &= \int_0^{t|^{n+1}} K_C \dot{\varepsilon}_v^e d\tau + \int_0^{t|^{n+1}} K_V e^{-\beta(t|^{n+1}-\tau)} \dot{\varepsilon}_v^e d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t|n} K_C \dot{\varepsilon}_v^e d\tau}_{p_C|n} + \underbrace{\int_{t|n}^{t|^{n+1}} K_C \dot{\varepsilon}_v^e d\tau}_{\Delta p_C} \\ &+ e^{-\beta \Delta t} \underbrace{\int_0^{t|n} K_V e^{-\beta(t|n-\tau)} \dot{\varepsilon}_v^e d\tau}_{p_V|n} + \underbrace{\int_{t|n}^{t|^{n+1}} K_V e^{-\beta(t|^{n+1}-\tau)} \dot{\varepsilon}_v^e d\tau}_{\Delta p_V}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

In beiden Fällen gilt:

$$\Delta t = t^{|n+1} - t|^n. \quad (2.63)$$

Für $E_V = 0$ und $\beta = 0$ entfallen die viskosen Anteile, womit sich Gl. (2.58) und Gl. (2.59) wie folgt reduzieren:

$$\mathbf{s} = \int_0^t \frac{E_C}{1 + \nu} \dot{\mathbf{e}}^e d\tau, \quad (2.64)$$

$$p = \int_0^t \frac{E_C}{3(1 - 2\nu)} \dot{\epsilon}_v^e d\tau. \quad (2.65)$$

Damit ergibt sich eine Entsprechung zum in *MAT_024 implementierten Hooke-artigen isotropen Hypo-Elastizitätsmodell.

Die Bestimmung von E_C und ν ist z. B. in einem quasistatischen Zugversuch möglich. Für Kunststoffe sind in diesem Zusammenhang insbesondere die Normen DIN EN ISO 527-1 (2019) und ASTM D638 (2014) zu nennen, während Metalle analog in den Standards DIN EN ISO 6892-1 (2020) und ASTM E8/E8M (2021) thematisiert werden. Darüber hinaus existiert mit der ASTM E111 (2017) eine werkstoffübergreifende Norm zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls. Im Gegensatz zu E_C sollten die modellspezifischen Größen E_V und β nicht als intrinsische Materialeigenschaften betrachtet werden. Zutreffender erscheint die Interpretation als Parameter, deren Festlegung im Modell eine bestmögliche Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines ausgewählten Werkstoffs zum Ziel hat. Dementsprechend sind dynamische Prüfprogramme zur Charakterisierung des in *SAMP-1* implementierten Viskoelastizitätsmodells weder normiert noch anderweitig standardisiert.

Die Gültigkeit des Modells ist üblicherweise auf kleine Verzerrungen beschränkt. Das Dehnungsintervall, in dem sich ein materieller Punkt gemäß den vorgestellten Zusammenhängen verhält, wird im Folgenden als *viskoelastisches Regime* bezeichnet.

2.2.3 Viskoplastizitätsmodell

Die Fließregel von *SAMP-1* ist nach KOLLING U. A. (2005) nicht-assoziert und enthält ein plastisches Potential der folgenden Form:

$$g = \sqrt{\sigma_{vm}^2 + \alpha p^2}. \quad (2.66)$$

Dabei bezeichnet σ_{vm} die *von-Mises-Vergleichsspannung*, die mit der deviatorischen Cauchy-Spannung eines Spannungszustands wie folgt berechnet werden kann:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}. \quad (2.67)$$

Die Größe α ist ein Parameter, für den in einem uniaxialen Spannungszustand gilt:

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p}. \quad (2.68)$$

In diesem Ausdruck ist ν_p die *plastische Querkontraktion*, welche im Modell entweder als Konstante oder Kurve vorzugeben ist. Sie trägt dem Umstand Rechnung, dass Thermoplaste im Gegensatz zu Metallen nicht isochor plastifizieren. Für einen uniaxialen Spannungszustand gilt analog zur Querkontraktionszahl

$$\nu_p = -\frac{d_{yy}^p}{d_{xx}^p} = -\frac{d_{zz}^p}{d_{xx}^p}, \quad (2.69)$$

wobei im Gegensatz zur Definition von ν die plastischen Dehnraten ausgewertet werden. Die Größe ist innerhalb der folgenden Grenzen zu verorten:

$$0 \leq \nu_p \leq 0,5. \quad (2.70)$$

Für $\nu_p = 0,5$ liegt volumenerhaltende Plastizität vor. Der Parameter α wird in diesem Fall null und das plastische Potential vereinfacht sich zu:

$$g = \sigma_{vm}. \quad (2.71)$$

Die Fließfunktion von *SAMP-1* ist entweder ein stückweise linearer Ausdruck oder eine quadratische Beziehung gemäß der folgenden Formel (HALLQUIST (2020B) sowie KOLLING U. A. (2005)):

$$f = \sigma_{vm}^2 - \varkappa_0 - \varkappa_1 p - \varkappa_2 p^2 \leq 0. \quad (2.72)$$

Bei \varkappa_0 , \varkappa_1 , \varkappa_2 handelt es sich um interne Verfestigungsvariablen. Sofern eine Modellkalibrierung wie in dieser Arbeit ausschließlich mit Zugversuchen erfolgt, reduzieren sich beide Varianten auf eine Fließfunktion vom Typ nach VON MISES (1913). Im Falle von Gl. (2.72) ist dann $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$.

Generell werden die internen Verfestigungsvariablen auf Grundlage von *Fließkurven* aus experimentellen Untersuchungen unterschiedlicher Spannungszustände kalibriert. Eine Fließkurve beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen der von-Mises-

Vergleichsspannung in einem ausgewählten Spannungszustand und einer zugehörigen speziellen *plastischen Vergleichsdehnung*. Für uniaxialen Zug und Druck ist die *uniaxiale plastische Vergleichsdehnung* ε_{pct} als das Integral des Betrags der *uniaxialen plastischen Vergleichsdehnrates* $\dot{\varepsilon}_{pct}$ definiert. Dabei handelt es sich um diejenige plastische Dehnrates in Belastungsrichtung, die im Falle eines rein uniaxialen Belastungspfads demselben plastischen Multiplikator zugeordnet würde wie der tatsächliche, unter Umständen vom uniaxialen Idealfall abweichende, Belastungspfad im analysierten Versuch (KOLLING U. A. (2005) und BENZ (2018)). Es gilt:

$$|\dot{\varepsilon}_{pct}| := \dot{\varepsilon}_p \frac{g}{\sigma_{vm}} \sqrt{\frac{3}{2(1 + \nu_p)}}. \quad (2.73)$$

Darin bezeichnet $\dot{\varepsilon}_p$ die *äquivalente plastische Dehnrates*,

$$\dot{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p}, \quad (2.74)$$

wobei sich $\dot{\mathbf{e}}^p$ analog zu Gl. (2.49) durch die Verwendung von \mathbf{d}^p anstelle von \mathbf{d} ergibt. Für $\nu_p = 0,5$ gilt Gl. (2.71). Somit entspricht die uniaxiale plastische Vergleichsdehnrates in diesem Fall der äquivalenten plastischen Dehnrates, die in *MAT_024 Anwendung findet. Die Größe ε_{pct} stellt auch die Abszisse eines möglichen ν_p -Verlaufs dar. Dabei ist der negative Abszissenabschnitt zur Vorgabe des Verhaltens unter uniaxialem Druck vorgesehen. Dementsprechend sind die zugehörigen ε_{pct} -Werte mit dem Faktor (-1) zu multiplizieren. Aufgrund ihrer besonderen Relevanz in der vorliegenden Arbeit sind zur Veranschaulichung in Abb. 2.3 die Fließkurve und der ν_p -Verlauf eines typischen Thermoplasts bei uniaxialem Zug dargestellt.

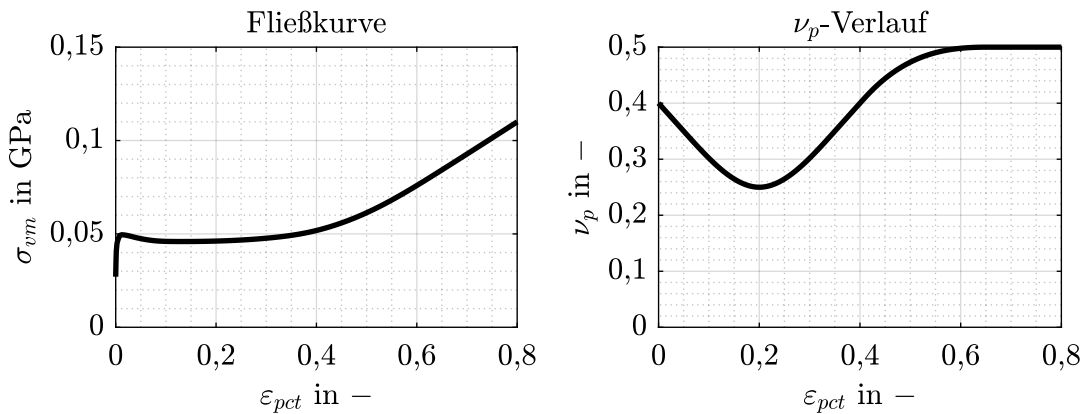


Abbildung 2.3: Fließkurve und ν_p -Verlauf eines typ. Thermoplasts bei uniaxialem Zug

Um Dehnratesabhängigkeit zu berücksichtigen, können für uniaxialen Zug Fließkurven in tabellierter Form für verschiedene $\dot{\varepsilon}_{pct}$ angegeben werden (HALLQUIST (2020B)).

Diese *Fließkurvenschar* lässt sich als Menge von Schnitten durch eine Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum interpretieren. Ein Beispiel für einen typischen Thermoplast ist in Abb. 2.4 dargestellt. Üblicherweise werden mehr als die zu Anschauungszwecken gezeigten vier Fließkurven vorgegeben.

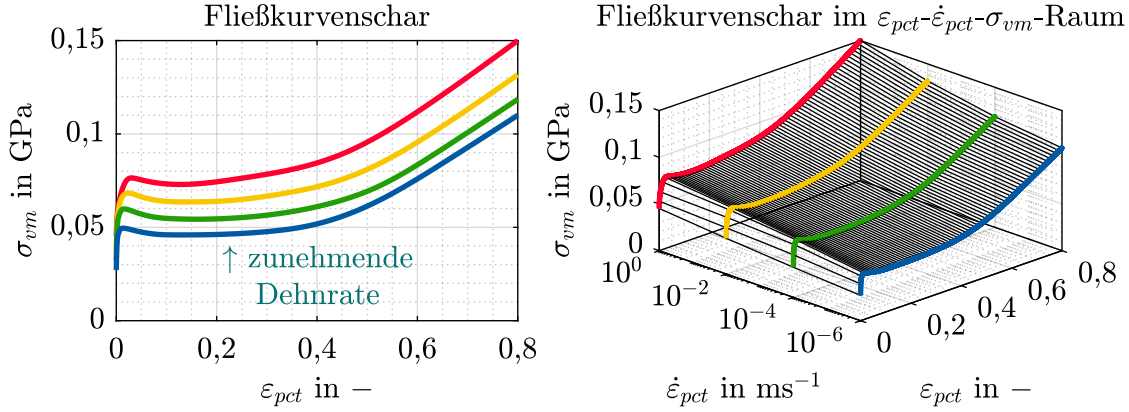


Abbildung 2.4: Fließkurvenschar eines typ. Thermoplasts bei uniaxialem Zug

Im Sinne einer *Fließspannung* wird in dieser Arbeit diejenige von-Mises-Vergleichsspannung als *Elastizitätsgrenze* definiert, bei deren Überschreitung im Materialmodell für eine uniaxiale Belastung zum ersten Mal plastische Verzerrungen prognostiziert werden. Auf Basis von Gl. (2.72) lässt sich im Falle von $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ schreiben:

$$\sigma_E = \sqrt{\varkappa_0|_{\varepsilon_{pct}=0}}. \quad (2.75)$$

Für $\beta = 0$ und $E_V = 0$ entspricht σ_E der *Proportionalitätsgrenze*, welche das Ende des linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung kennzeichnet.

Das Erreichen der Elastizitätsgrenze markiert die Obergrenze des viskoelastischen Regimes nach Kap. 2.2.2. Daran anschließend müssen zur Beschreibung des Verhaltens eines materiellen Punkts simultan das Viskoelastizitätsmodell und das Viskoplastizitätsmodell berücksichtigt werden. Zur Verdeutlichung dieses Umstands wird nachfolgend vom *viskoelasto-viskoplastischen Regime* gesprochen.

2.2.4 Besonderheiten

Das Materialmodell *SAMP-1* zeichnet sich durch einige Besonderheiten aus, die bei seinem Einsatz zu beachten sind. Zwei für die vorliegende Arbeit maßgebliche Punkte werden nachfolgend thematisiert. Dabei handelt es sich um eine Fallunterscheidung im Return-Mapping-Algorithmus sowie eine mögliche Rückkopplung der plastischen Querkontraktion auf die Querkontraktionszahl.

Fallunterscheidung im Return-Mapping-Algorithmus

Gemäß HALLQUIST (2020B) ist in *SAMP-1* ein Cutting-Plane-Algorithmus implementiert. Aus dem rheologischen Modell nach Abb. 2.2 folgt für die Testspannung vor der Rückprojektion:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}_C^{tr} + \boldsymbol{\sigma}_V^{tr}. \quad (2.76)$$

Da die Fließfunktion $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \boldsymbol{\varepsilon}_i)$ zeitschrittweise mit $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ ausgewertet wird und im Falle detektierter Plastizität eine Rückprojektion aller Komponenten erfolgt, kann es sein, dass $\boldsymbol{\sigma}_C^{tr}$ relaxiert, obwohl dieser Anteil innerhalb der Fließortfläche liegt. Um dies zu verhindern, wird anhand von $f(\boldsymbol{\sigma}_C^{tr}, \boldsymbol{\varepsilon}_i)$ entschieden, ob sowohl $\boldsymbol{\sigma}_C^{tr}$ als auch $\boldsymbol{\sigma}_V^{tr}$ oder ausschließlich $\boldsymbol{\sigma}_V^{tr}$ korrigiert werden (DU BOIS (2018–2022)). Nachteilig an diesem Vorgehen ist, dass die Implementierung nicht mehr exakt dem rheologischen Modell nach Abb. 2.2 entspricht. Als Konsequenz aus den Ergebnissen dieser Arbeit ist ab den in Kap. 2.1.5 genannten Versionen von *LS-DYNA* die Fallunterscheidung im Return-Mapping-Algorithmus von *SAMP-1* deaktivierbar. In allen folgenden Untersuchungen ist sie inaktiv.

Rückkopplung von ν_p auf ν

Ohne eingreifende Maßnahmen kann es im Fall von $\nu_p < \nu$ dazu kommen, dass die Fließortfläche bei der Rückprojektion der Spannung verfehlt wird. Um oszillierende Spannungszustände und daraus resultierende programmspezifische Instabilitäten in *LS-DYNA* zu vermeiden, wird in *SAMP-1* die Querkontraktionszahl zeitschrittweise auf den Wert der plastischen Querkontraktion herabgesetzt, falls $\nu_p |^n < \nu$ sein sollte. Daraus ergibt sich für ν und infolgedessen \mathbf{C} eine Zeitabhängigkeit. Aufgrund des Gültigkeitsbereichs der Querkontraktionszahl für ein isotropes Material ist bei isochorer Plastizität nie eine Rückkopplung erforderlich (DU BOIS (2018–2022)).

2.3 Digitale Bildkorrelation

Im Allgemeinen wird unter der Bezeichnung *digitale Bildkorrelation* (engl.: *Digital Image Correlation*, kurz: *DIC*) eine Klasse optischer Verfahren verstanden, mit denen sich Bewegungen und Deformationen einer Objektoberfläche kontaktlos erfassen lassen. Die Grundlage bildet dabei die Analyse von Veränderungen zwischen digitalen Bildaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten. Der Beginn der Adaption derartiger Techniken zur Auswertung von Versuchen mit Festkörpern lässt sich auf die 1980er Jahre datieren.

Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang die Arbeiten von PETERS UND RANSON (1982), SUTTON U. A. (1983), PETERS U. A. (1983) und CHU U. A. (1985). Eine Übersicht über die historischen Ursprünge, die theoretischen Grundlagen und verschiedenen Weiterentwicklungen auf diesem Gebiet gibt SCHREIER U. A. (2009). Heutzutage stehen einem Anwender diverse Softwarepakete und Toolboxen zur Verfügung, um eine DIC-Auswertung durchzuführen. Im Rahmen dieser Arbeit wird das kommerzielle Programm *GOM Correlate Professional 2018* von GOM eingesetzt, auf welches sich die nachfolgenden Erläuterungen und Begrifflichkeiten beziehen. Als Referenz wird auf GALANULIS (2016) verwiesen, worin die im Programm implementierte digitale Bildkorrelation und Dehnungsberechnung dokumentiert ist.

Die Identifikation materieller Punkte eines Körpers findet in *GOM Correlate* auf Grundlage stochastischer Bildinformationen und einer Korrelation von Grauwerten statt. Hierzu muss die zu untersuchende Oberfläche ein möglichst kontrastreiches *stochastisches Muster* aufweisen, welches mit diversen Methoden aufgebracht werden kann. Eine einfache Strategie ist der Einsatz von speziellem schwarzen oder weißen Sprühlack. Zur Veranschaulichung zeigt Abb. 2.5 den frontalen Blick auf eine derartig präparierte eingespannte Zugprobe. Darüber hinaus ist in Abb. 3.1 eine solche Konfiguration in einer isometrischen Ansicht zu sehen.

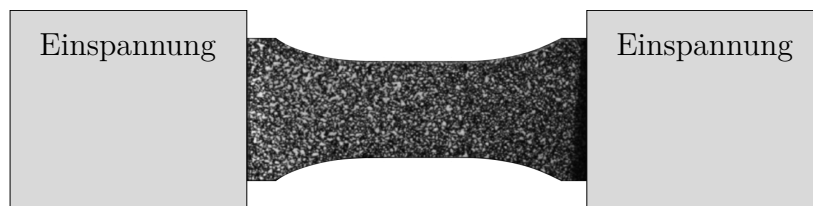


Abbildung 2.5: Eingespannte Zugprobe mit stochastischem Muster

Da in der Software eine begrenzte Anzahl an Grauwerten unterschieden wird und eine hohe Wahrscheinlichkeit besteht, dass im Bild ein diskreter Pixelwert mehrfach auftritt, erfolgt zur Punktidentifikation das Heranziehen von Bildbereichen. Diese werden in *GOM Correlate* als *Facetten* bezeichnet. Eindeutig identifizierte materielle Punkte lassen sich in einem zu definierenden Koordinatensystem verorten und ermöglichen die Ermittlung von Relativverschiebungen, welche das Fundament der Dehnungsberechnung bilden. Feldauswertungen sind in der Software an zuvor definierte Oberflächenbereiche gekoppelt und werden in Datenstrukturen zusammengefasst, die *Flächenkomponenten* heißen. In Abb. 2.6 ist exemplarisch das Feld der wahren Längsdehnung einer Zugprobe zu sehen, wie es in *GOM Correlate* bei Auswahl des gesamten sichtbaren Bereichs zwischen den Spannbacken ermittelt wird. Aufgrund der Punktidentifikation und Dehnungsberechnung auf Basis von Bildbereichen ist eine Auswertung technologisch bedingt nicht bis zum Rand der Probe möglich.

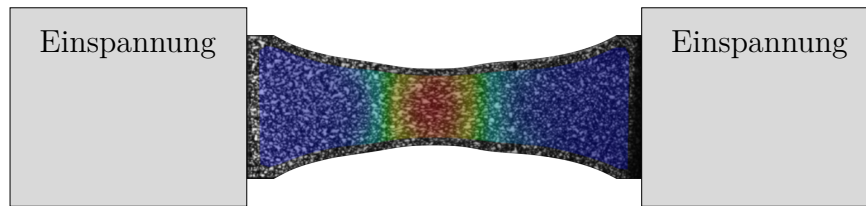


Abbildung 2.6: Feld der wahren Längsdehnung einer Zugprobe

Wird durch den Einsatz zweier synchronisierter Kameras *stereoskopisches* Bildmaterial generiert, sind dreidimensionale Messungen realisierbar. Für die dargestellte Zugprobe bedeutet dies, dass Verschiebungen in Dickenrichtung erfasst werden können. Zur Spezifikation der Datenbasis hinsichtlich einer zwei- oder dreidimensionalen Messung werden im Folgenden die Begriffe *2D-DIC* und *3D-DIC* verwendet.

Abschließend sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass wie bei jeder Dehnungsermittlung die Bezugs- bzw. Messlänge einen entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisse hat, insbesondere bei signifikanten Gradienten im Dehnungsfeld. In *GOM Correlate* wird sie über die sogenannte *Referenzlänge* eingestellt. Um Versuchsauswertungen mit Simulationen vergleichen zu können, hat es sich in der Praxis bewährt, diese Größe entsprechend der mittleren Elementkantenlänge der vernetzten Geometrie zu wählen.

Direkte Kalibrierung von Modellparametern

Wie bereits in Kap. 1.3 thematisiert, zielt die Konzeption des neuen Verfahrens darauf ab, die Modellparameter so zu bestimmen, dass sie vollumfänglich kompatibel zu den an einem materiellen Punkt im Versuch vorherrschenden Verzerrungen und Spannungen sind. Dementsprechend werden im Folgenden für das untersuchte *SAMP-1* auf Basis der Konstitutivgleichungen spezifische Integro-Differentialgleichungen aufgestellt, mit denen sich nicht in Versuchen messbare Größen berechnen lassen. Neben der Herleitung der grundlegenden Beziehungen zur Parameterbestimmung im viskoelastischen Regime stehen insbesondere die komplexen Zusammenhänge im viskoelasto-viskoplastischen Regime im Zentrum der Betrachtungen. Hierbei ist das Ziel die Bestimmung des ν_p -Verlaufs, also des funktionalen Zusammenhangs zwischen ν_p und ε_{pct} , und des Pfads des betrachteten materiellen Punkts im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum. Dieser ist das Fundament einer späteren Bestimmung von tabellierten Fließkurven für verschiedene $\dot{\varepsilon}_{pct}$. Eingebettet in die Ausführungen sind Vorschläge zur numerischen Lösung der Gleichungen, deren Fokus auf der Robustheit in der praktischen Anwendung liegt.

3.1 Definitionen und Annahmen

Als Erstes werden die maßgeblichen Definitionen und Annahmen eingeführt, auf die sich das Verfahren gründet. Sie beinhalten Aspekte der gewählten Materialmodellierung, der unterstützten Elementtechnologie sowie der messtechnischen Datenerfassung und Versuchsauswertung.

3.1.1 Unterstützte Elementtechnologie und Grundannahme

Aufgrund der besonderen Relevanz für die Crashesimulation wird die Kalibrierung von *SAMP-1* im Zusammenspiel mit einer Schalenmodellierung angestrebt. Konkret werden vollintegrierte, lineare Schalenelemente mit *Reissner-Mindlin-Kinematik* unterstützt, bei denen ein zeitschrittweises Dickenupdate auf Basis der Membrandehnungen erfolgt. Letzteres ist essentiell bei der Untersuchung von großen Verzerrungen und Lokalisierungsphänomenen, weil sich aus dem Querschnitt lokale Lastumlagerungen ergeben. In *LS-DYNA* entspricht die genannte Elementtechnologie Schalenelementen der `ELFORM=16` mit in `*CONTROL_SHELL` aktivierter Option `ISTUPD=1`. Sofern die z -Richtung der Dickenrichtung des Elements entspricht, kann ε_{zz} Werte ungleich null annehmen, während $\sigma_{zz} = 0$ verbleibt (vgl. HALLQUIST (2020A)).

Eine Modellkalibrierung ist immer dann erfolgversprechend, wenn sich das abzubildende Verhalten des untersuchten Materials grundsätzlich mit dem angesetzten, isotropen Materialmodell beschreiben lässt und dünnwandige Strukturen analysiert werden. Die Eigenschaften von *SAMP-1* nach Kap. 2.2 und der betrachteten Elementtechnologie definieren die maximal erzielbare Prognosegüte.

3.1.2 Versuchsauswahl und Definition des Versuchsbeginns

In einem reinen Schubzustand findet keine Volumenänderung des Materials statt, weswegen sich Versuche, in denen gezielt Schub geprüft wird, nicht zur Quantifizierung von ν_p eignen. Eine Volumenänderung des Materials lässt sich durch Zug-, Druck- oder gesteuerte Biaxialversuche bewirken. Aus dieser Aufzählung liegt der Fokus der Arbeit auf der Durchführung und Analyse von Zugversuchen, weil diese nach Kap. 2.2 für die Kalibrierung von *SAMP-1* am bedeutendsten sind. Eine Erweiterung der vorgestellten Methodik auf andere Arten von Materialprüfungen ist naheliegend.

Ein Versuch, auf den das Verfahren in der vorgestellten Form angewendet werden soll, ist ohne Vorspannkraft durchzuführen:

$$F_I = 0. \tag{3.1}$$

Als $t = 0$ bzw. t_0 wird der Zeitpunkt definiert, an dem die Kraft zu Versuchsbeginn zum letzten Mal null ist. Im zugehörigen ersten Zeitschritt $n = 1$ gilt:

$$F|^{n=1} = 0, \tag{3.2}$$

$$\dot{F}|^{n=1} \neq 0. \tag{3.3}$$

3.1.3 Definition des globalen Koordinatensystems

Die Probenachse, in der die primäre Belastung erfolgen soll und entlang derer die betragsmäßig höchste Dehnrate zu erwarten ist, wird *Längsachse* genannt. Beim Einspannen des Prüflings ist sicherzustellen, dass diese mit der zugehörigen Maschinenachse übereinstimmt.

Das verwendete globale Koordinatensystem x - y - z lässt sich wie folgt konstruieren: Der Ursprung liegt im (innenliegenden) Schwerpunkt der Probe zum Zeitpunkt $t = 0$. Die x -Achse ist parallel zur Längsachse des Prüflings und ihr positiver Achsenabschnitt erstreckt sich per Definition in Richtung der beweglichen Einspannung. Sind beide Einspannungen beweglich, ist die Ausrichtung der x -Achse irrelevant. Die z -Achse ist orthogonal zur Probenoberfläche zum Zeitpunkt $t = 0$ und in Richtung des DIC-Messsystems zeigend anzusetzen. Die y -Achse vervollständigt das Rechtssystem. Eine Anwendung dieser Vorschrift auf einen Zugversuch mit einem Prüfling nach Typ 3 der DIN EN ISO 8256 (2005) ist in Abb. 3.1 dargestellt. Die x -Achse zeigt in Abzugsrichtung. Neben dem Koordinatensystem sind in der Grafik das stochastische Muster, welches gemäß Kap. 2.3 auf der zu untersuchenden Oberfläche aufzutragen ist, sowie ein 3D-DIC-Messsystem abgebildet.

3.1.4 Unterstützter Verzerrungs- und Spannungstensor

Es wird angenommen, dass die Probe so dünn ist, dass die Änderung der Komponenten des Hencky-Verzerrungstensors und des Cauchy-Spannungstensors über die lokale Probendicke δ innerhalb jedes Zeitschritts n vernachlässigbar ist:

$$\delta(x,y) \text{ so dass } \left(\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(x,y) &\approx \frac{1}{\delta(x,y)} \int_{-\delta(x,y)/2}^{\delta(x,y)/2} \boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z) dz \\ \boldsymbol{\sigma}(x,y) &\approx \frac{1}{\delta(x,y)} \int_{-\delta(x,y)/2}^{\delta(x,y)/2} \boldsymbol{\sigma}(x,y,z) dz \end{aligned} \right). \quad (3.4)$$

Auf eine Untersuchung des Approximationsfehlers, der mit der Anwendung von Gl. (3.4) in Abhängigkeit von δ einhergeht, wird an dieser Stelle verzichtet. Basierend auf Erfahrungen aus der ingenieurmäßigen Praxis wird stattdessen die Hypothese vertreten, dass der Fehler der eingeführten Näherung zumindest für $\delta \leq 2$ mm hinreichend klein ist. Dementsprechend bilden gemäß Kap. 5.1 Zugversuche mit $\delta_0 = 2$ mm dicken Proben die Datenbasis für diese Arbeit.

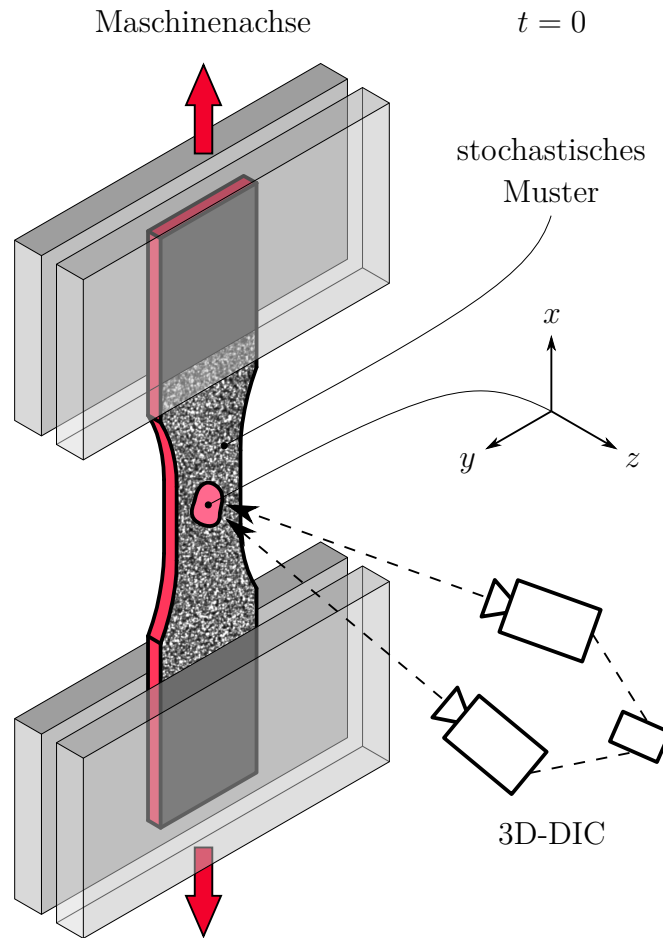


Abbildung 3.1: Zugversuch zum Zeitpunkt $t = 0$

Digitale Bildkorrelation ermöglicht die Messung von ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{xy} auf der Probenoberfläche. Für ε_{zz} lässt sich auf Basis von 3D-DIC-Daten unter der Annahme einer Symmetrie zwischen der Verschiebung der Probenfront und -rückseite zur x - y -Ebene ein Mittelwert bestimmen. Die Beschreibung der Methode erfolgt in Kap. 5.3.

Bei Gültigkeit von Gl. (3.4) können die gemessenen Verzerrungen als im Inneren der Probe bei $z = 0$ vorherrschend interpretiert werden. Dort lassen sich infolge der thematisierten Symmetrie ε_{xz} und ε_{yz} mit null quantifizieren. Für einen hinreichend dünnen Prüfling sind die Beträge dieser Verzerrungen auch abseits $z = 0$ vernachlässigbar klein, was zu Gl. (3.4) passt. Zusammenfassend kann für einen beliebigen Punkt im Inneren der Probe bei $z = 0$ in *Voigt-Notation* der folgende Verzerrungstensor aufgestellt werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & 0 & 0 & 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (3.5)$$

Aufgrund ihrer Kompaktheit findet die Voigt-Notation im weiteren Verlauf bei allen tensoriellen Größen Anwendung.

Auf Seiten des Spannungstensors wird im Zugversuch die Komponente σ_{xx} als bekannt vorausgesetzt. Mögliche Strategien zu ihrer Quantifizierung anhand von realen Versuchsdaten innerhalb einer mitbewegten Schnittebene werden in Kap. 5.4 vorgestellt. Aus der unterstützten Elementtechnologie nach Kap. 3.1.1 folgt $\sigma_{zz} = 0$. Gilt die Annahme aus Gl. (3.4), ist diese Größe auch im realen Zugversuch im Vergleich zu σ_{xx} sehr klein. Für *SAMP-1* folgt aus $\varepsilon_{xz} = 0$ und $\varepsilon_{yz} = 0$ unmittelbar $\sigma_{xz} = 0$ und $\sigma_{yz} = 0$. Die Spannungskomponenten σ_{yy} und σ_{xy} sind als unbekannte Größen zu behandeln. Damit lässt sich für einen beliebigen Punkt im Inneren der Probe bei $z = 0$ in Voigt-Notation der folgende Spannungstensor formulieren:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (3.6)$$

3.1.5 Vorteile von Auswertungen in der Einschnürebene

Infolge von Kap. 2.2.1 wird für das Aufstellen und Lösen modellspezifischer Differentialgleichungen vorausgesetzt, dass der verwendete Verzerrungstensor das Integral des Dehnratentensors und der verwendete Spannungstensor das Integral der Zaremba-Jaumann-Rate des Cauchy-Spannungstensors ist. Nach Gl. (2.24) und Gl. (2.31) erfüllen der Hencky-Verzerrungstensor und der Cauchy-Spannungstensor diese Voraussetzungen, wenn der Spintensor null ist und Gl. (3.5) sowie Gl. (3.6) gemäß der Lagrangeschen Betrachtungsweise in einem mitbewegten lokalen Koordinatensystem quantifiziert werden. Dort ist eine materielle Zeitableitung eine partielle Zeitableitung.

Zur Auswertung eines idealen Zugversuchs eignen sich ab dem *Einschnürzeitpunkt* t_N materielle Punkte in der *Einschnürebene* \mathcal{P}_A nach Abb. 3.2. Der Grund dafür sind die festen Verzerrungs-Hauptachsen sowie die gleichzeitige Abwesenheit einer Starrkörperrotation. Die Achsen des mitbewegten lokalen Koordinatensystems eines materiellen Punkts verlaufen in diesem Fall parallel zu denen des globalen Koordinatensystems. Entsprechend lässt sich aus Symmetriegründen innerhalb von \mathcal{P}_A unabhängig von der z -Koordinate ε_{xy} mit null quantifizieren.

Aufgrund von Imperfektionen der Probengeometrie und des Materials können in einem realen Zugversuch auch in der Einschnürebene Schubkomponenten von null abweichen. Da zumindest für ε_{xy} Messwerte aus der DIC vorliegen, werden ε_{xy} und das zugehörige σ_{xy} bei der Herleitung der Gleichungen berücksichtigt. So lange der Schubanteil klein ist, lassen sich im mitbewegten lokalen Koordinatensystem weiterhin der Dehnratentensor und die Zaremba-Jaumann-Rate des Cauchy-Spannungstensors durch partielles Ableiten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ nach der Zeit approximieren. In der vorliegenden Arbeit erfolgt dies jeweils numerisch durch zentrale Differenzenquotienten zweiter Ordnung. Lediglich beim ersten

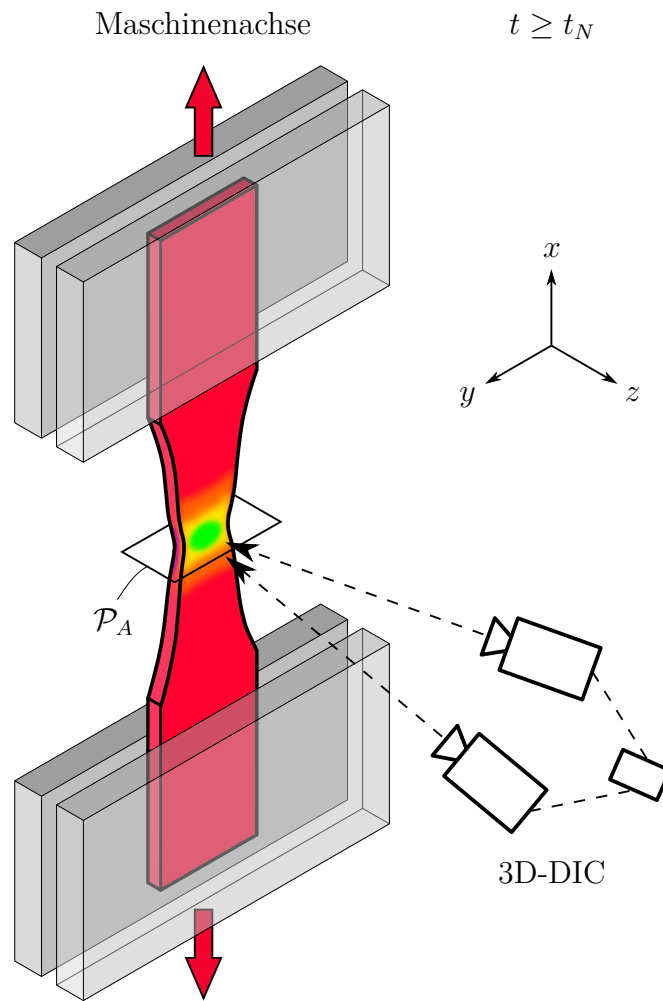


Abbildung 3.2: Zugversuch zu einem Zeitpunkt $t \geq t_N$

und letzten Zeitschritt kommt ein rechtsseitiger bzw. linksseitiger Differenzenquotient zweiter Ordnung zum Einsatz. Zur Vereinfachung der Nomenklatur wird im Folgenden nach Gl. (2.23) $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ statt \mathbf{d} und nach Gl. (2.30) $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ statt $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$ geschrieben.

3.2 Viskoelastisches Regime

Im viskoelastischen Regime nach Kap. 2.2.2 entsprechen gemäß Gl. (2.33) die totalen Dehnraten den elastischen Dehnraten:

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon}. \quad (3.7)$$

Das bedeutet, dass sie direkt im Versuch gemessen werden können.

3.2.1 Definition des letzten Zeitschritts im Regime

Die dehnratenabhängige Elastizitätsgrenze aus Gl. (2.75), bei deren Überschreiten ein materieller Punkt vom viskoelastischen ins viskoelasto-viskoplastische Regime nach Kap. 2.2.3 übergeht, muss a priori bekannt sein. Hierzu sind je nach Werkstoff gesonderte Untersuchungen oder geeignete Abschätzungen nötig (siehe Kap. 5.5.2). Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die zugehörige Spannung im Zugversuch als Funktion der effektiven Dehnraten ausgedrückt werden kann und der Zusammenhang vorliegt:

$$\sigma_E = \sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff}). \quad (3.8)$$

Damit lässt sich ein materieller Punkt zu einem bestimmten Zeitpunkt im Versuch anhand von σ_{vm} und $\dot{\epsilon}_{eff}$ eindeutig einem Regime zuordnen. Der letzte Zeitschritt n , an dem

$$\sigma_{vm}|^n \leq \sigma_E \quad (3.9)$$

gilt, ist noch dem viskoelastischen Regime zuzurechnen und wird als n_E bezeichnet. Demgegenüber lässt sich der folgende Zeitschritt, an dem die Elastizitätsgrenze gerade überschritten wird, dem viskoelasto-viskoplastischen Regime zuschlagen:

$$n_P = n_E + 1. \quad (3.10)$$

Weil im Zugversuch bis zum Einschnüren des Prüflings ein uniaxialer Spannungszustand vorherrscht und dieser Punkt im viskoelasto-viskoplastischen Regime zu verorten ist, gilt im viskoelastischen Regime:

$$\sigma_{vm} = \sigma_{xx}. \quad (3.11)$$

Nach dem Einschnüren sind σ_{yy} und σ_{xy} auch für diesen Versuchstyp ungleich null.

3.2.2 Zusammenhänge aus dem rheologischen Modell

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden $\tilde{\mathbf{C}}$ als der Anteil des Hypo-Elastizitätstensors für ein isotropes Material ohne Elastizitätsmodul eingeführt. In Voigt-Notation gilt:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Der entsprechende Anteil des zugehörigen *Nachgiebigkeitstensors* ergibt sich durch Invertieren von Gl. (3.12):

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Wie bereits in Kap. 2.2.2 thematisiert, liegt *SAMP-1* ein rheologisches Modell nach Abb. 3.3 zugrunde.

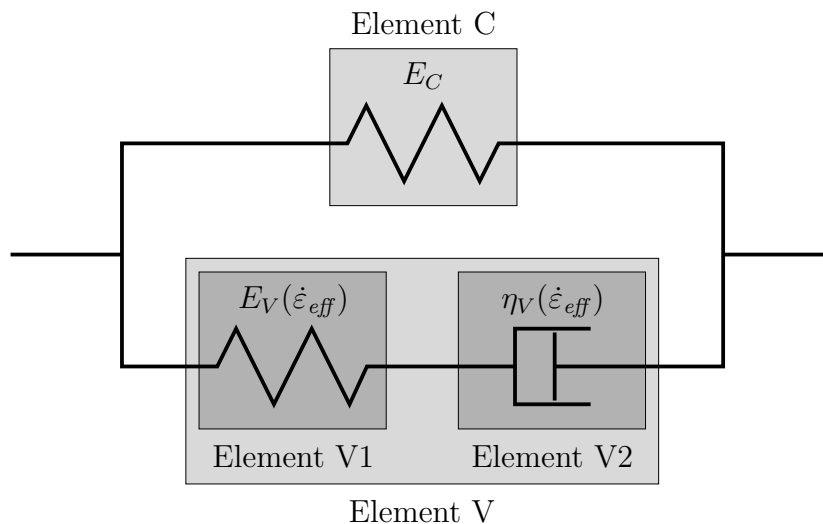


Abbildung 3.3: Dreiparametermodell mit nichtlinearem Maxwell-Körper

Dabei gilt die Beziehung aus Gl. (2.60):

$$\beta = \frac{E_V(\dot{\epsilon}_{eff})}{\eta_V(\dot{\epsilon}_{eff})} := \text{konst.}$$

Die Elemente C und V sind parallel geschaltet. Damit ergibt sich für die Dehnraten:

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon}_C^e = \dot{\epsilon}_V^e. \quad (3.14)$$

Außerdem lässt sich für die Spannungen der nachfolgende Zusammenhang aufstellen:

$$\sigma = \sigma_C + \sigma_V. \quad (3.15)$$

Innerhalb des Elements V sind die Elemente V1 und V2 in Reihe geschaltet. Es folgen

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon}_V^e = \dot{\epsilon}_{V1}^e + \dot{\epsilon}_{V2}^e \quad (3.16)$$

und

$$\sigma_V = \sigma_{V1} = \sigma_{V2}. \quad (3.17)$$

Für die lineare Feder C gilt mit Gl. (3.14):

$$\dot{\sigma}_C = E_C \tilde{\mathbf{C}} \dot{\epsilon}_C^e = E_C \tilde{\mathbf{C}} \dot{\epsilon}^e. \quad (3.18)$$

Analog kann für die nichtlineare Feder V1 mit Gl. (3.17)

$$\dot{\sigma}_V = \dot{\sigma}_{V1} = E_V \tilde{\mathbf{C}} \dot{\epsilon}_{V1}^e \quad (3.19)$$

geschrieben werden. Für den nichtlinearen Dämpfer V2 gilt mit Gl. (3.17):

$$\sigma_V = \sigma_{V2} = \eta_V \tilde{\mathbf{C}} \dot{\epsilon}_{V2}^e. \quad (3.20)$$

Zur Vermeidung programmspezifischer Instabilitäten in *LS-DYNA* wird in *SAMP-1* gemäß Kap. 2.2.4 unter bestimmten Umständen die Querkontraktionszahl herabgesetzt, woraus sich für ν und $\tilde{\mathbf{C}}$ eine Zeitabhängigkeit ergibt. Obwohl der beschriebene Sachverhalt ausschließlich im viskoelasto-viskoplastischen Regime eintritt, wird zur Wahrung der Allgemeingültigkeit der hergeleiteten Beziehungen Gl. (3.18) partiell integriert:

$$\sigma_C = \int_0^t \dot{\sigma}_C d\tau = E_C \tilde{\mathbf{C}} \epsilon^e - E_C \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \epsilon^e d\tau. \quad (3.21)$$

Dabei ist $\dot{\tilde{\mathbf{C}}}$ die materielle bzw. partielle Zeitableitung von $\tilde{\mathbf{C}}$ aus Gl. (3.12).

Umstellen von Gl. (3.19) nach $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{V1}^e$ und Gl. (3.20) nach $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{V2}^e$ sowie anschließendes Einsetzen in Gl. (3.16) ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_V} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_V + \frac{1}{\eta_V} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_V. \quad (3.22)$$

Mit Gl. (2.60) folgt daraus:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_V} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_V + \beta \boldsymbol{\sigma}_V). \quad (3.23)$$

Umstellen von Gl. (3.15) nach $\boldsymbol{\sigma}_V$ liefert:

$$\boldsymbol{\sigma}_V = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_C. \quad (3.24)$$

Dieser Ausdruck sowie seine materielle bzw. partielle Zeitableitung kann in Gl. (3.23) eingefügt werden:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_V} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_C + \beta (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_C)). \quad (3.25)$$

Einsetzen von Gl. (3.18) und Gl. (3.21) ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_V} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma} - E_C \tilde{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \beta E_C \left(\tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon}^e d\tau \right) \right). \quad (3.26)$$

Daraus folgt

$$E_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - E_C \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \beta E_C \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon}^e d\tau \right) \quad (3.27)$$

bzw.

$$(E_C + E_V) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - \beta E_C \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon}^e d\tau \right) \quad (3.28)$$

oder

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_C + E_V} \left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - \beta E_C \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon}^e d\tau \right) \right). \quad (3.29)$$

Im Folgenden werden für den Integralausdruck auf der rechten Seite die Abkürzungen $\boldsymbol{\psi}$ und \mathbf{Q} eingeführt:

$$\boldsymbol{\psi} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \boldsymbol{\varepsilon}^e d\tau. \quad (3.30)$$

Damit wird aus Gl. (3.29):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_C + E_V} \left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - \beta E_C (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\psi}) \right). \quad (3.31)$$

Gl. (3.31) stellt ein System von gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Integro-Differentialgleichungen für die elastischen Verzerrungen dar. Die an dieser Stelle hergeleitete allgemeine Formulierung wird bei der Behandlung des viskoelasto-viskoplastischen Regimes in Kap. 3.3.1 erneut aufgegriffen. Da ν im viskoelastischen Regime konstant ist, vereinfacht sich Gl. (3.31) hier zu einem System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die elastischen Verzerrungen:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{E_C + E_V} \left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - \beta E_C \boldsymbol{\varepsilon}^e \right). \quad (3.32)$$

Einsetzen des Verzerrungstensors aus Gl. (3.5) sowie des Spannungstensors aus Gl. (3.6) sowie ihrer materiellen bzw. partiellen Zeitableitungen führt zusammen mit $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ aus Gl. (3.13) unter Berücksichtigung von Gl. (3.7) zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^e \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^e \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^e \\ 0 \\ 0 \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}^e \end{bmatrix}}_{=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = \frac{1}{E_C + E_V} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx} - \nu (\dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy}) \\ -\nu (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy} \\ -\nu (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}) - \nu (\dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy}) \\ 0 \\ 0 \\ (2 + 2\nu) (\dot{\sigma}_{xy} + \beta \sigma_{xy}) \end{bmatrix} - \beta E_C \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \varepsilon_{zz}^e \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{xy}^e \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{\varepsilon}^e}. \quad (3.33)$$

Dieser Ausdruck bildet die Basis für die folgenden Untersuchungen.

3.2.3 Materialsteifigkeit, Relaxationsrate und Querkontraktionszahl

Gemäß den Überlegungen um Gl. (3.11) sind in einem Zugversuch die Größen σ_{xy} und σ_{yy} im viskoelastischen Regime konstant null. Dementsprechend lässt sich aus der ersten

Zeile von Gl. (3.33) die folgende Beziehung für die konstante Materialsteifigkeit E_C extrahieren:

$$E_C = \frac{\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - E_V\dot{\varepsilon}_{xx}^e}{\dot{\varepsilon}_{xx}^e + \beta\varepsilon_{xx}^e}. \quad (3.34)$$

Sie charakterisiert das Werkstoffverhalten bei der Dehnrates $\dot{\varepsilon}_{eq}$, denn nach Kap. 2.2.2 ergibt sich für die variable Materialsteifigkeit E_V die Bedingung:

$$E_V(\dot{\varepsilon}_{eq}) = 0. \quad (3.35)$$

Wenn $\dot{\varepsilon}_{eq}$ hinreichend klein ist, so dass quasistatisches Materialverhalten angenommen werden kann, entfallen in Gl. (3.34) die Terme $\dot{\sigma}_{xx}$ sowie $\dot{\varepsilon}_{xx}^e$ und es folgt:

$$E_C = \frac{\beta\sigma_{xx}}{\beta\varepsilon_{xx}^e} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}^e}. \quad (3.36)$$

Als quasistatischer Elastizitätsmodul ist E_C auf Grundlage eines Zugversuchs bei einer geeigneten Dehnrates $\dot{\varepsilon}_{eq}$ direkt bestimmbar und wird nicht durch die Relaxationsrate beeinflusst. Anders sieht es für E_V aus. Bei einem dynamischen Zugversuch lässt sich aus der ersten Zeile von Gl. (3.33) der nachfolgende Ausdruck gewinnen:

$$E_V = \frac{\dot{\sigma}_{xx} - E_C\dot{\varepsilon}_{xx}^e + \beta(\sigma_{xx} - E_C\varepsilon_{xx}^e)}{\dot{\varepsilon}_{xx}^e}. \quad (3.37)$$

Das Viskoelastizitätsmodell von *SAMP-1* ist gemäß Kap. 2.2.2 vor allem durch algorithmische Effizienz motiviert. Insbesondere die Definition von β als Konstante, unabhängig von der Dehnung und der Dehnrates, ist eine sehr restriktive Annahme. Aufgrund der Einfachheit des Modells ist es umso wichtiger, sich bei seiner Kalibrierung auf den Dehnratesbereich zu fokussieren, der für die angestrebten Crashsimulationen relevant ist. Relaxationsversuche, wie sie z. B. in FRITSCH (2012) bei sehr niedrigen Dehnrates durchgeführt werden, sind deshalb im Allgemeinen nicht zielführend, um in diesem Anwendungsfall die konstante Relaxationsrate von *SAMP-1* zu ermitteln. Stattdessen hat sich das pragmatische Vorgehen bewährt, β so groß festzulegen, dass beim Auswerten von Gl. (3.37) für alle Versuche eines dynamischen Zugprüfprogramms gerade noch gilt:

$$\frac{\partial E_V(\dot{\varepsilon}_{eff}, \beta)}{\partial \dot{\varepsilon}_{eff}} \geq 0. \quad (3.38)$$

Der monotone Anstieg von E_V mit zunehmender effektiver Dehnrates ist in der Praxis aus Materialprüfungen mit Thermoplasten bekannt (DU BOIS (2018–2022)). Überschreitet die Relaxationsrate eine materialspezifische Grenze und repräsentiert nicht das reale Werkstoffverhalten, konvergieren die Iterationen der folgenden Abschnitte nicht.

Nach der Festlegung von β können dehnratenübergreifend für alle Versuche eines Prüfprogramms Werte für die variable Materialsteifigkeit bestimmt werden. Diese sind anschließend mit einem analytischen Ansatz zu beschreiben. Eine Möglichkeit zur Generierung der kontinuierlichen Funktion $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$ findet sich in Kap. 5.5.2.

Liegen E_C , β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$ vor, lässt sich aus der zweiten und dritten Zeile von Gl. (3.33) jeweils eine Beziehung für die Querkontraktionszahl extrahieren:

$$\nu = -\frac{(E_C + E_V) \dot{\epsilon}_{yy}^e + \beta E_C \epsilon_{yy}^e}{\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}}, \quad (3.39)$$

$$\nu = -\frac{(E_C + E_V) \dot{\epsilon}_{zz}^e + \beta E_C \epsilon_{zz}^e}{\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}}. \quad (3.40)$$

Im viskoelastischen Regime kann ν je nach Verfügbarkeit eines geeigneten Messwerts für ϵ_{zz}^e mit einer oder beiden Gleichungen als arithmetisches Mittel der Werte aller vorliegenden Zeitschritte berechnet werden.

Sind die elastischen Charakteristiken des untersuchten Materials nicht dehnratenabhängig, vereinfacht sich das rheologische Modell aus Abb. 3.3 durch den Wegfall des Elements V. Infolgedessen verschwinden in Gl. (3.34) die Terme E_V sowie β und die Dehnrate, bei der E_C zu bestimmen ist, wird in der Theorie beliebig:

$$E_C = \frac{\dot{\sigma}_{xx}}{\dot{\epsilon}_{xx}^e} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}^e}. \quad (3.41)$$

Damit reduzieren sich Gl. (3.39) und Gl. (3.40) zur ihrer bekannten Form für ein isotropes Material im uniaxialen Spannungszustand:

$$\nu = -\frac{\dot{\epsilon}_{yy}^e}{\dot{\epsilon}_{xx}^e} = -\frac{\dot{\epsilon}_{zz}^e}{\dot{\epsilon}_{xx}^e}. \quad (3.42)$$

3.2.4 Lösung von Differentialgleichungen für σ_{yy} , σ_{xy} und ϵ_{zz}

Wie in Kap. 3.2.3 thematisiert, wird bei der Bestimmung von E_C , E_V , β und ν in Zugversuchen ausgenutzt, dass dort die Größen σ_{yy} und σ_{xy} im viskoelastischen Regime konstant null sind. Für andere Versuchstypen, bei denen sich an einem materiellen Punkt ein Verzerrungstensor nach Gl. (3.5) und ein Spannungstensor nach Gl. (3.6) formulieren lässt, ist das nicht zwangsläufig der Fall. Um eine größere Allgemeingültigkeit zu erzielen, wird daher, sobald die Parameter des viskoelastischen Regimes bekannt sind, auf die Annahme eines uniaxialen Spannungszustands verzichtet.

Bei Vorliegen von E_C , E_V , β und ν folgt aus den ersten drei Zeilen von Gl. (3.33) ein überbestimmtes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für σ_{yy} :

$$\begin{bmatrix} -\nu \\ 1 \\ -\nu \end{bmatrix} \dot{\sigma}_{yy} + \begin{bmatrix} -\nu\beta \\ \beta \\ -\nu\beta \end{bmatrix} \sigma_{yy} = \begin{bmatrix} (E_C + E_V) \dot{\varepsilon}_{xx}^e - \dot{\sigma}_{xx} - \beta\sigma_{xx} + \beta E_C \varepsilon_{xx}^e \\ (E_C + E_V) \dot{\varepsilon}_{yy}^e + \nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \beta E_C \varepsilon_{yy}^e \\ (E_C + E_V) \dot{\varepsilon}_{zz}^e + \nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \beta E_C \varepsilon_{zz}^e \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Ist ε_{zz}^e unbekannt, entfällt die dritte Zeile. Für σ_{xy} lässt sich aus der letzten Zeile von Gl. (3.33) eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung extrahieren:

$$(1 + \nu) \dot{\sigma}_{xy} + (1 + \nu) \beta \sigma_{xy} = (E_C + E_V) \dot{\varepsilon}_{xy}^e + \beta E_C \varepsilon_{xy}^e. \quad (3.44)$$

Im Falle rein linear-elastischen Werkstoffverhaltens vereinfacht sich Gl. (3.43) zu

$$\begin{bmatrix} -\nu \\ 1 \\ -\nu \end{bmatrix} \dot{\sigma}_{yy} = \begin{bmatrix} E_C \dot{\varepsilon}_{xx}^e - \dot{\sigma}_{xx} \\ E_C \dot{\varepsilon}_{yy}^e + \nu \dot{\sigma}_{xx} \\ E_C \dot{\varepsilon}_{zz}^e + \nu \dot{\sigma}_{xx} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

wobei die dritte Zeile wie bei Gl. (3.43) unter Umständen entfällt. Darüber hinaus reduziert sich Gl. (3.44) auf:

$$(1 + \nu) \dot{\sigma}_{xy} = E_C \dot{\varepsilon}_{xy}^e. \quad (3.46)$$

Bei der Lösung der Gleichungen sind die Anfangswerte zu berücksichtigen:

$$\sigma_{yy}|^{n=1} = 0, \quad (3.47)$$

$$\sigma_{xy}|^{n=1} = 0. \quad (3.48)$$

Die hergeleiteten Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssysteme werden unter Einbeziehung der Anfangswerte mit einem *Differenzenverfahren* in lineare Gleichungssysteme überführt. Dabei kommen linksseitige Differenzenquotienten zweiter Ordnung zum Einsatz. Lediglich für den zweiten Zeitschritt wird ein zentraler Differenzenquotient zweiter Ordnung vorgesehen. Im Falle von Gl. (3.43) und Gl. (3.45) ergeben sich überbestimmte lineare Gleichungssysteme, die als lineare *Least-Squares-Probleme* aufgefasst werden können. Für Gl. (3.44) und Gl. (3.46) folgt ein quadratisches lineares Gleichungssystem. Die numerische Lösung nach σ_{yy} bzw. σ_{xy} ist jeweils mit unterschiedlichen Methoden möglich. Bezüglich der Umsetzung in der vorliegenden Arbeit wird auf Kap. 3.4.2 verwiesen (MUNZ UND WESTERMANN (2019) sowie DEMMEL (1997)).

Im Falle eines unbekanntes ε_{zz}^e erfolgt die Berechnung dieser Größe nach Kenntnis von σ_{yy} auf Basis der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung aus der dritten Zeile von Gl. (3.33):

$$\dot{\varepsilon}_{zz}^e + \frac{\beta E_C}{E_C + E_V} \varepsilon_{zz}^e = \frac{1}{E_C + E_V} (-\nu (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}) - \nu (\dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy})). \quad (3.49)$$

Bei rein linear-elastischem Werkstoffverhalten vereinfacht sich Gl. (3.49) zu:

$$\dot{\varepsilon}_{zz}^e = \frac{1}{E_C} (-\nu \dot{\sigma}_{xx} - \nu \dot{\sigma}_{yy}). \quad (3.50)$$

Unter Berücksichtigung des Anfangswerts

$$\varepsilon_{zz}|^{n=1} = 0 \quad (3.51)$$

wird analog zu σ_{xy} mit einem Differenzenverfahren ein quadratisches lineares Gleichungssystem aufgestellt und nach ε_{zz}^e gelöst.

3.3 Viskoelasto-viskoplastisches Regime

Nach Gl. (2.39) gilt im viskoelasto-viskoplastischen Regime für die totalen Dehnraten:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p. \quad (3.52)$$

Diese additive Zerlegung ist bei der Interpretation von gemessenen Werten stets zu berücksichtigen. Das jeweilige Verhältnis der Anteile ist zunächst unbekannt. Für die elastischen Dehnraten lässt sich entsprechend schreiben:

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p. \quad (3.53)$$

3.3.1 Zusammenhänge aus dem rheologischen Modell

Einsetzen von Gl. (3.53) sowie ihres Integrals in Gl. (3.31) liefert:

$$\underbrace{\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p}_{=\dot{\varepsilon}^e} = \frac{1}{E_C + E_V} \left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma}) - \beta E_C \left(\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p}_{=\boldsymbol{\varepsilon}^e} - \boldsymbol{\psi} \right) \right). \quad (3.54)$$

Mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus Gl. (3.5), $\boldsymbol{\sigma}$ aus Gl. (3.6), $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ aus Gl. (3.13) und $\boldsymbol{\psi}$ sowie \mathbf{Q} aus Gl. (3.30) folgen die Ausdrücke auf der nächsten Seite.

Es gilt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\varepsilon}_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy} \end{bmatrix}}_{=\dot{\varepsilon}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^p \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^p \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^p \\ 0 \\ 0 \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \end{bmatrix}}_{=\dot{\varepsilon}^p} = \frac{1}{E_C + E_V} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) \\ -\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy} \\ -\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) \\ 0 \\ 0 \\ (2 + 2\nu)(\dot{\sigma}_{xy} + \beta\sigma_{xy}) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$-\beta E_C \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^p \\ \varepsilon_{yy}^p \\ \varepsilon_{zz}^p \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_{xx} \\ \psi_{yy} \\ \psi_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 2\psi_{xy} \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{=\varepsilon^e} \hspace{1em} \underbrace{\hspace{10em}}_{=\psi} \end{array} \right],$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{xx} \\ \psi_{yy} \\ \psi_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 2\psi_{xy} \end{bmatrix}}_{=\psi} = \begin{bmatrix} Q_{xx} - \nu Q_{yy} - \nu Q_{zz} \\ -\nu Q_{xx} + Q_{yy} - \nu Q_{zz} \\ -\nu Q_{xx} - \nu Q_{yy} + Q_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ (2 + 2\nu) 2Q_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 2Q_{xy} \end{bmatrix}}_{=Q} = \begin{bmatrix} \int_0^t \left(P_1 (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p) + P_2 (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p) + P_2 (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p) \right) d\tau \\ \int_0^t \left(P_2 (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p) + P_1 (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p) + P_2 (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p) \right) d\tau \\ \int_0^t \left(P_2 (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p) + P_2 (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p) + P_1 (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p) \right) d\tau \\ 0 \\ 0 \\ \int_0^t P_3 (2\varepsilon_{xy} - 2\varepsilon_{xy}^p) d\tau \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Bei P_1 , P_2 und P_3 handelt es sich um Hilfsvariablen zur Beschreibung der materiellen bzw. partiellen Zeitableitung von $\tilde{\mathbf{C}}$ aus Gl. (3.12):

$$\dot{\tilde{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & P_2 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$P_1 = \frac{2\dot{\nu}(2-\nu)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}, \quad (3.59)$$

$$P_2 = \frac{\dot{\nu}(1+2\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}, \quad (3.60)$$

$$P_3 = -\frac{\dot{\nu}}{2(1+\nu)^2}. \quad (3.61)$$

3.3.2 Zusammenhänge aus der Fließregel

Da in Gl. (3.55) zusätzlich zu σ_{yy} und σ_{xy} die Komponenten des Tensors der plastischen Verzerrungen als Unbekannte auftreten, müssen zur Lösung weitere Gleichungen aufgestellt werden. Für die folgende Herleitung wird zunächst von einem allgemeinen, dreidimensionalen Spannungszustand ausgegangen, bevor anschließend das Einsetzen des Zustands aus Gl. (3.5) und Gl. (3.6) erfolgt.

Das in *SAMP-1* angesetzte plastische Potential lautet gemäß Gl. (2.66):

$$g = \sqrt{\sigma_{vm}^2 + \alpha p^2}.$$

Ferner besteht zwischen α und ν_p der Zusammenhang aus Gl. (2.68):

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{1-2\nu_p}{1+\nu_p}.$$

Mit dem hydrostatischen Druck auf Basis von Gl. (2.57),

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}, \quad (3.62)$$

lässt sich die von-Mises-Vergleichsspannung aus Gl. (2.67) schreiben als:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \left((\sigma_{xx} + p)^2 + (\sigma_{yy} + p)^2 + (\sigma_{zz} + p)^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{yz}^2 + 2\sigma_{xz}^2 \right)}. \quad (3.63)$$

Die in *SAMP-1* implementierte nicht-assozierte Fließregel nach Gl. (2.46) liefert den folgenden Zusammenhang zwischen dem plastischen Dehnratentensor, dem plastischen Multiplikator, dem plastischen Potential und dem Spannungstensor:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.64)$$

Der Ausdruck $\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$ lautet in Voigt-Notation:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yy}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{zz}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yz}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xz}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xy}} \right]^T. \quad (3.65)$$

Mit

$$\frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2\sigma_{vm}} 3(\sigma_{xx} + p) \quad (3.66)$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{xx}} = -\frac{1}{3} \quad (3.67)$$

ergibt sich für $\partial g / \partial \sigma_{xx}$ mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2g} \left(2\sigma_{vm} \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \sigma_{xx}} + 2\alpha p \frac{\partial p}{\partial \sigma_{xx}} \right) = \frac{3}{2g} \left(\sigma_{xx} + p - \frac{2}{9}\alpha p \right). \quad (3.68)$$

Für $\partial g / \partial \sigma_{yy}$ und $\partial g / \partial \sigma_{zz}$ folgen entsprechend

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{yy}} = \frac{3}{2g} \left(\sigma_{yy} + p - \frac{2}{9}\alpha p \right) \quad (3.69)$$

sowie

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{zz}} = \frac{3}{2g} \left(\sigma_{zz} + p - \frac{2}{9}\alpha p \right). \quad (3.70)$$

Bezüglich $\partial g / \partial \sigma_{xy}$ lässt sich mit

$$\frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{1}{2\sigma_{vm}} 6\sigma_{xy} \quad (3.71)$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{xy}} = 0 \quad (3.72)$$

zeigen, dass gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{1}{2g} \left(2\sigma_{vm} \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \sigma_{xy}} + 2\alpha p \frac{\partial p}{\partial \sigma_{xy}} \right) = \frac{3}{2g} 2\sigma_{xy}. \quad (3.73)$$

Analog resultieren für $\partial g / \partial \sigma_{xz}$ und $\partial g / \partial \sigma_{yz}$ die Beziehungen

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xz}} = \frac{3}{2g} 2\sigma_{xz} \quad (3.74)$$

sowie

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{yz}} = \frac{3}{2g} 2\sigma_{yz}. \quad (3.75)$$

Mit der Abkürzung

$$\check{\alpha} = \frac{\alpha}{9} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p} \quad (3.76)$$

und dem Spannungstensor aus Gl. (3.6) folgt für die Fließregel aus Gl. (3.64)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^p \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^p \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^p \\ 0 \\ 0 \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \end{bmatrix}}_{=\dot{\varepsilon}^p} = \frac{3\dot{\lambda}}{2g} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 6\sigma_{xy} \end{bmatrix} - 2\check{\alpha} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^p \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^p \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^p \\ 0 \\ 0 \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \end{bmatrix}}_{=\dot{\varepsilon}^p} = \frac{\dot{\lambda}}{2g} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 6\sigma_{xy} \end{bmatrix} - 2\check{\alpha} \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

3.3.3 Lösung einer Differentialgleichung für σ_{yy}

Im Allgemeinen ist die plastische Querkontraktion als unbekannte Größe zu behandeln. Dementsprechend lässt sich aus Gl. (3.55) und Gl. (3.78) ein System aus acht Gleichungen mit den acht Unbekannten σ_{yy} , σ_{xy} , $\dot{\lambda}$, $\check{\alpha}(\nu_p)$, ε_{xx}^p , ε_{yy}^p , ε_{zz}^p und ε_{xy}^p extrahieren:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^p = \dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx})), \quad (3.79a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy}^p = \dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{1}{E_C + E_V} (-\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy} - \beta E_C (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy})), \quad (3.79b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz}^p = \dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{1}{E_C + E_V} (-\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p - \psi_{zz})), \quad (3.79c)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy}^p = \dot{\varepsilon}_{xy} - \frac{1}{E_C + E_V} ((1 + \nu)(\dot{\sigma}_{xy} + \beta\sigma_{xy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^p - \psi_{xy})), \quad (3.79d)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2g} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \quad (3.79e)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2g} (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \quad (3.79f)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2g} (-\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \quad (3.79g)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2g} 3\sigma_{xy}. \quad (3.79h)$$

Das plastische Potential g kann gemäß Gl. (2.66) als Funktion von σ_{yy} , σ_{xy} und $\check{\alpha}(\nu_p)$ ausgedrückt werden und die Komponenten von $\boldsymbol{\psi}$ sind gemäß Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) Funktionen von ν , $\dot{\nu}$ sowie den Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

Im Folgenden werden kurz die arithmetischen Operationen zusammengefasst, um aus dem Gleichungssystem eine einzelne Differentialgleichung für die unbekannte Komponente σ_{yy} des Spannungstensors zu extrahieren.

Zunächst erfolgt die Division der plastischen Dehnraten $\dot{\varepsilon}_{yy}^p$, $\dot{\varepsilon}_{zz}^p$ und $\dot{\varepsilon}_{xy}^p$ durch $\dot{\varepsilon}_{xx}^p$ aus Gl. (3.79a) bzw. Gl. (3.79e). Auf diese Weise wird der unbekannte plastische Multiplikator $\dot{\lambda}$ aus dem System eliminiert und es resultieren sieben Gleichungen mit sieben Unbekannten:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^p = \dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx})), \quad (3.80a)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{1}{E_C + E_V} (-\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy} - \beta E_C (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy}))}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}))}, \quad (3.80b)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{1}{E_C + E_V} (-\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p - \psi_{zz}))}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}))}, \quad (3.80c)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{xy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xy} - \frac{1}{E_C + E_V} ((1 + \nu)(\dot{\sigma}_{xy} + \beta\sigma_{xy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^p - \psi_{xy}))}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}))}, \quad (3.80d)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}, \quad (3.80e)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{-\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}, \quad (3.80f)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{xy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{3\sigma_{xy}}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}. \quad (3.80g)$$

Umstellen von Gl. (3.80f) nach $\check{\alpha}$ liefert:

$$\check{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}}{2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}\right)}. \quad (3.81)$$

Einsetzen von Gl. (3.81) in Gl. (3.80e) ergibt:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}} + \left(1 - \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right) \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}. \quad (3.82)$$

Dieser Ausdruck kann mit Gl. (3.80b) gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}} + \left(1 - \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right) \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p} \\ &= \frac{\dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{1}{E_C + E_V} \left(-\nu(\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy} - \beta E_C (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy})\right)}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta\sigma_{xx} - \nu(\dot{\sigma}_{yy} + \beta\sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}))}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Einsetzen von Gl. (3.80c) in Gl. (3.83) führt nach einigen Umformungen zur folgenden linearen gewöhnlichen Differentialgleichung für σ_{yy} :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \nu}{E_C + E_V} \sigma_{xx} \right) \dot{\sigma}_{yy} + \left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{1 + \nu}{E_C + E_V} \dot{\sigma}_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{\beta E_C}{E_C + E_V} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx} - \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}^p + \psi_{zz}) \right) \sigma_{yy} \\ &= \sigma_{xx} (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz}) - \frac{\beta E_C}{E_C + E_V} \sigma_{xx} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p - \psi_{zz} - \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^p + \psi_{yy}). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Im Falle elasto-viskoplastischen Materialverhaltens vereinfacht sich Gl. (3.84) zu:

$$\left(\frac{1 + \nu}{E_C} \sigma_{xx} \right) \dot{\sigma}_{yy} + \left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{1 + \nu}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} \right) \sigma_{yy} = \sigma_{xx} (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz}). \quad (3.85)$$

Wie bereits thematisiert, wird in *SAMP-1* in einem Zeitschritt $n + 1$ innerhalb des viskoelasto-viskoplastischen Regimes der Wert von ν auf den von ν_p herabgesetzt, wenn $\nu_p < \nu$ ausfällt (siehe Kap. 2.2.4). Wegen der daraus resultierenden Zeitabhängigkeit ist ν bei der schrittweisen Lösung von Gl. (3.84) zunächst als unbekannt anzusehen. Darüber hinaus treten in der Gleichung die unbekanntenen Komponenten des plastischen Verzerrungstensors ε_{xx}^p , ε_{yy}^p und ε_{zz}^p sowie die Terme ψ_{xx} , ψ_{yy} und ψ_{zz} auf, die gemäß Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) jeweils Funktionen dieser Größen sowie ν und $\dot{\nu}$ sind. Zur Berücksichtigung der beschriebenen Zusammenhänge wird in der vorliegenden Arbeit ein iteratives Lösungsschema mit zwei verschachtelten Schleifen angesetzt. Es folgt die Vorstellung der inneren Schleife, im Rahmen derer σ_{yy} sowie ε_{xx}^p , ε_{yy}^p und ε_{zz}^p berechnet

werden. Mit der äußeren Schleife zur Iteration von ν_p , ν und $\dot{\nu}$ beschäftigt sich anschließend Kap. 3.3.4.

Als Anfangswert ist für σ_{yy} der letzte Wert aus dem viskoelastischen Regime anzusetzen. Für einen Zugversuch gilt:

$$\sigma_{yy}|^{n_E} = 0. \quad (3.86)$$

Der nachfolgend beschriebene Algorithmus ist schematisch in Abb. 3.4 dargestellt. Eine Dokumentation der genannten numerischen Verfahren ist z. B. in MUNZ UND WESTERMANN (2019) enthalten. Es wird angenommen, dass geeignete Werte für $\nu|^{n+1}$ und $\dot{\nu}|^{n+1}$ aus der äußeren Iteration vorliegen. Startwerte $\varepsilon_{xx}^p|_{s=0}^{n+1}$, $\varepsilon_{yy}^p|_{s=0}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}^p|_{s=0}^{n+1}$ für die innere Iteration lassen sich mit dem *Euler-Cauchy-Verfahren* berechnen. Innerhalb der Schleife werden zunächst die Terme $\psi_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $\psi_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\psi_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ nach Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) bestimmt. Die Approximation der darin enthaltenen Integrale $Q_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $Q_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $Q_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ findet schrittweise mit der *Sehnentrapezformel* statt. Da sich diese implizite Formel für den Spezialfall einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung explizit nach dem gesuchten Funktionswert zum Zeitpunkt $n + 1$ auflösen lässt, kommt sie auch zur Lösung des Anfangswertproblems für σ_{yy} zum Einsatz. Liegt $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ vor, erfolgt ebenfalls mit der Sehnentrapezformel eine Korrektur der Komponenten des plastischen Verzerrungstensors $\varepsilon_{xx}^p|_{s+1}^{n+1}$, $\varepsilon_{yy}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ durch Approximieren der Lösungen für die gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Integro-Differentialgleichungen nach Gl. (3.79a) bis Gl. (3.79c). Eine anschließende Auswertung der Gleichungen liefert die zeitlichen Ableitungen der genannten Größen.

Für den nächsten Durchlauf der Schleife bilden die aktualisierten Werte $\varepsilon_{xx}^p|_{s+1}^{n+1}$, $\varepsilon_{yy}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ die Basis. Der Iterationsschritt $s + 1$ wird als konvergiert angesehen, wenn der Betrag der auf $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ bezogenen Differenz zwischen $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ kleiner als 10^{-10} ist. In diesem Fall folgt der Abbruch der inneren Iteration. Bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten ist keine Iteration notwendig und die Schleife wird nach einem Durchlauf verlassen.

3.3.4 Berechnung von ν_p und Rückkopplung auf ν

Sind für einen Zeitschritt $n+1$ die Größen $\dot{\varepsilon}_{xx}^p$, $\dot{\varepsilon}_{yy}^p$, $\dot{\varepsilon}_{zz}^p$ und σ_{yy} bekannt, lässt sich damit die plastische Querkontraktion berechnen. Umstellen von Gl. (3.80e) und Gl. (3.80f) nach $\check{\alpha}$ liefert die folgenden zwei Beziehungen:

$$\check{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} - 2\sigma_{yy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}}{2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}\right)}, \quad (3.87)$$

$$\check{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}}{2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}\right)}. \quad (3.88)$$

In dieser Arbeit erfolgt eine Berücksichtigung beider Gleichungen mit:

$$\check{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{xx} - 2\sigma_{yy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}}{2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}\right)} + \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}}{2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}^p}{\dot{\varepsilon}_{xx}^p}\right)} \right). \quad (3.89)$$

Umformen von Gl. (3.76) nach ν_p ergibt:

$$\nu_p = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\check{\alpha}}{1 + \check{\alpha}}. \quad (3.90)$$

Ist $\nu_p|^{n+1}$ kleiner als ν , wird Letzteres gemäß Kap. 2.2.4 im Sinne eines $\nu|^{n+1}$ auf $\nu_p|^{n+1}$ herabgesetzt. Da dies umgekehrt die plastische Querkontraktion im Zeitschritt $n+1$ beeinflusst, muss die Berechnung von $\sigma_{yy}|^{n+1}$ mit $\nu|^{n+1}$ sowie dem sich daraus ergebenden $\dot{\nu}|^{n+1}$ wiederholt und erneut $\nu_p|^{n+1}$ ermittelt werden. Zur Auflösung der Problematik wird die innere Iteration aus Kap. 3.3.3 in eine äußere Iteration eingebettet.

Der nachfolgend beschriebene Algorithmus ist schematisch in Abb. 3.5 dargestellt. Darin finden sich zwei Funktionsaufrufe, die kursiv geschrieben und mit einem Stern gekennzeichnet sind. Bei jedem dieser Einträge handelt es sich um eine Routine, die den Umgang mit realen Messdaten erleichtert, zum Verständnis des grundsätzlichen Vorgehens jedoch zweitrangig ist. Weitere Informationen hierzu enthält Kap. 3.4.1. Als Startwerte $\nu|_{r=0}^{n+1}$ und $\dot{\nu}|_{r=0}^{n+1}$ werden $\nu|_r^n$ und $\dot{\nu}|_r^n$ angesetzt. Nach Durchlauf der inneren Iteration und Berechnung der plastischen Querkontraktion erfolgt im Falle einer gebotenen Rückkopplung die schrittweise Aktualisierung der Querkontraktionszahl:

$$\nu|_{r+1}^{n+1} = \omega_\nu \nu_p|_{r+1}^{n+1} + (1 - \omega_\nu) \nu|_r^{n+1}. \quad (3.91)$$

Bei ω_ν handelt es sich um einen *Relaxationsparameter*, mit dem Oszillationen unterbunden werden können. Ein Wert von 0,1 hat sich bei der Anwendung des Verfahrens als gute Wahl erwiesen. Die Berechnung der zeitlichen Ableitung $\dot{\nu}|_{r+1}^{n+1}$ geschieht mit einem linksseitigen Differenzenquotienten zweiter Ordnung:

$$\dot{\nu}|_{r+1}^{n+1} = \frac{3\nu|_{r+1}^{n+1} - 4\nu|_r^n + \nu|_r^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.92)$$

Für den nächsten Durchlauf der Schleife bilden die aktualisierten Werte $\nu|_{r+1}^{n+1}$ und $\dot{\nu}|_{r+1}^{n+1}$ die Basis. Der Iterationsschritt $r + 1$ wird als konvergiert angesehen, wenn der Betrag der auf $\nu_p|_r^{n+1}$ bezogenen Differenz zwischen $\nu_p|_{r+1}^{n+1}$ und $\nu_p|_r^{n+1}$ kleiner als 10^{-10} ist. In diesem Fall folgt der Abbruch der äußeren Iteration. Sofern sich $\nu|_{r=1}^{n+1}$ und $\dot{\nu}|_{r=1}^{n+1}$ im Vergleich zu den Startwerten $\nu|_{r=0}^{n+1}$ und $\dot{\nu}|_{r=0}^{n+1}$ nicht ändern, ist keine Iteration notwendig und die Schleife wird nach einem Durchlauf verlassen. Dies tritt ein, wenn sich keine Rückkopplung ergibt oder die plastische Querkontraktion konstant verbleibt.

Eingabe der erf. zeitabh. Größen bis einschl. Zeitschritt n			
$r = 0$			
$\nu _r^{n+1} = \nu _r^n$			
$\dot{\nu} _r^{n+1} = \dot{\nu} _r^n$			
Wiederholung solange $r + 1 \leq 1000$ (maximale Anzahl an Iterationen)			
innere Iteration nach Kap. 3.3.3, Abb. 3.4			
$\check{\alpha}_1 _{r+1}^{n+1} = \frac{\sigma_{xx} ^{n+1} - 2\sigma_{yy} ^{n+1} + (2\sigma_{xx} ^{n+1} - \sigma_{yy} ^{n+1}) \frac{\dot{\epsilon}_{yy}^p ^{n+1}}{\dot{\epsilon}_{xx}^p ^{n+1}}}{2(\sigma_{xx} ^{n+1} + \sigma_{yy} ^{n+1}) \left(1 - \frac{\dot{\epsilon}_{yy}^p ^{n+1}}{\dot{\epsilon}_{xx}^p ^{n+1}}\right)}$			
$\check{\alpha}_2 _{r+1}^{n+1} = \frac{\sigma_{xx} ^{n+1} + \sigma_{yy} ^{n+1} + (2\sigma_{xx} ^{n+1} - \sigma_{yy} ^{n+1}) \frac{\dot{\epsilon}_{zz}^p ^{n+1}}{\dot{\epsilon}_{xx}^p ^{n+1}}}{2(\sigma_{xx} ^{n+1} + \sigma_{yy} ^{n+1}) \left(1 - \frac{\dot{\epsilon}_{zz}^p ^{n+1}}{\dot{\epsilon}_{xx}^p ^{n+1}}\right)}$			
$\check{\alpha} _{r+1}^{n+1} = \frac{1}{2} (\check{\alpha}_1 _{r+1}^{n+1} + \check{\alpha}_2 _{r+1}^{n+1})$			
$\nu_p _{r+1}^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\check{\alpha} _{r+1}^{n+1}}{1 + \check{\alpha} _{r+1}^{n+1}}$			
Plausibilitätsprüfung von ν_p nach Kap. 3.4.1, Abb. 3.8 *			
$\nu_p _{r+1}^{n+1} \leq \nu _r^{n+1} ?$			
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">WAHR</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">FALSCH</td> </tr> </table>		WAHR	FALSCH
WAHR	FALSCH		
$\nu_p _{r+1}^{n+1} = 0 ?$	$\nu_p _{r+1}^{n+1} \geq \nu ?$		
WAHR	FALSCH		
FALSCH	WAHR		
FALSCH	FALSCH		
$\nu _{r+1}^{n+1} = 0$	$\nu _{r+1}^{n+1} = \omega_\nu \nu_p _{r+1}^{n+1} + (1 - \omega_\nu) \nu _r^{n+1}$		
$\nu _{r+1}^{n+1} = \nu$	$\nu _{r+1}^{n+1} = \omega_\nu \nu_p _{r+1}^{n+1} + (1 - \omega_\nu) \nu _r^{n+1}$		
$\dot{\nu} _{r+1}^{n+1} = \frac{3\nu _{r+1}^{n+1} - 4\nu _r^{n+1} + \nu _r^{n-1}}{2\Delta t}$			
$r + 1 > 1 ?$			
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">WAHR</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">FALSCH</td> </tr> </table>		WAHR	FALSCH
WAHR	FALSCH		
$\left \frac{\nu_p _{r+1}^{n+1} - \nu_p _r^{n+1}}{\nu_p _r^{n+1}} \right < 10^{-10} ?$	$\nu _{r=1}^{n+1} = \nu _{r=0}^{n+1} \wedge \dot{\nu} _{r=1}^{n+1} = \dot{\nu} _{r=0}^{n+1} ?$		
WAHR	FALSCH		
FALSCH	WAHR		
FALSCH	FALSCH		
Abbruch	weiter		
Abbruch	weiter		
$r = r + 1$			
Iteration nach Kap. 3.4.1, Abb. 3.9 *			
Rückgabe der berechneten Größen zum Zeitschritt $n + 1$			

 Abbildung 3.5: Äußere Iteration zur Berechnung von ν_p und Rückkopplung auf ν

3.3.5 Lösung einer Differentialgleichung für σ_{xy}

Gleichsetzen von Gl. (3.80d) und Gl. (3.80g) führt nach einigen Umformungen auf die folgende lineare gewöhnliche Differentialgleichung für σ_{xy} :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \nu}{E_C + E_V} \right) \dot{\sigma}_{xy} \\ & + \left(\frac{3 \left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx} - \nu (\dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy})) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}) \right)}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})} \right) \\ & + \frac{1 + \nu}{E_C + E_V} \beta \sigma_{xy} = \dot{\varepsilon}_{xy} + \frac{\beta E_C}{E_C + E_V} (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^p - \psi_{xy}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Im Falle elasto-viskoplastischen Materialverhaltens wird Gl. (3.93) zu:

$$\left(\frac{1 + \nu}{E_C} \right) \dot{\sigma}_{xy} + \left(\frac{3 \left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C} (\dot{\sigma}_{xx} - \nu \dot{\sigma}_{yy}) \right)}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})} \right) \sigma_{xy} = \dot{\varepsilon}_{xy}. \quad (3.94)$$

Ist der Werkstoff zusätzlich plastisch inkompressibel, folgt mit $\check{\alpha} (\nu_p = 0,5) = 0$:

$$\left(\frac{1 + \nu}{E_C} \right) \dot{\sigma}_{xy} + \left(\frac{3 \left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C} (\dot{\sigma}_{xx} - \nu \dot{\sigma}_{yy}) \right)}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \sigma_{xy} = \dot{\varepsilon}_{xy}. \quad (3.95)$$

Liegen σ_{yy} , ε_{xx}^p , ε_{yy}^p , ε_{zz}^p , $\check{\alpha}$, ν , $\dot{\nu}$ und ψ_{xx} vor, verbleibt in Gl. (3.93) neben σ_{xy} die Komponente ε_{xy}^p des plastischen Verzerrungstensors als unbekannte Größe. Der Term ψ_{xy} ist gemäß Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) eine Funktion von ε_{xy}^p , ν und $\dot{\nu}$. Die wechselseitige Abhängigkeit von σ_{xy} und ε_{xy}^p wird bei der numerischen Lösung durch ein iteratives Vorgehen adressiert, dessen Aufbau sich am Algorithmus aus Kap. 3.3.3 orientiert.

Als Anfangswert ist für σ_{xy} der letzte Wert aus dem viskoelastischen Regime anzusetzen. Für einen Zugversuch gilt:

$$\sigma_{xy}|^{nE} = 0. \quad (3.96)$$

Der nachfolgend beschriebene Algorithmus ist schematisch in Abb. 3.6 dargestellt. Ein geeigneter Startwert $\varepsilon_{xy}^p|_{s=0}^{n+1}$ für die Iteration lässt sich mit dem Euler-Cauchy-Verfahren berechnen. Innerhalb der Schleife wird zunächst der Term $\psi_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ nach Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) bestimmt. Die Approximation des darin enthaltenen Integrals $Q_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ findet schrittweise mit der Sehnentrapezformel statt. Wie in Kap. 3.3.3 wird diese Formel auch

zur Lösung des Anfangswertproblems für σ_{xy} eingesetzt. Liegt $\sigma_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ vor, erfolgt ebenfalls mit der Sehnentrapezformel die Berechnung von $\varepsilon_{xy}^p|_{s+1}^{n+1}$ durch Approximieren der Lösung für die lineare gewöhnliche Integro-Differentialgleichung nach Gl. (3.79d). Eine anschließende Auswertung der Gleichung liefert die zeitliche Ableitung der genannten Größe.

Für den nächsten Durchlauf der Schleife bildet die aktualisierte Komponente $\varepsilon_{xy}^p|_{s+1}^{n+1}$ des plastischen Verzerrungstensors die Basis. Der Iterationsschritt $s + 1$ wird als konvergiert angesehen, wenn der Betrag der auf $\sigma_{xy}|_s^{n+1}$ bezogenen Differenz zwischen $\sigma_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\sigma_{xy}|_s^{n+1}$ kleiner als 10^{-10} ist. In diesem Fall folgt der Abbruch der Iteration. Bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten ist keine Iteration notwendig und die Schleife wird nach einem Durchlauf verlassen.

Eingabe der erf. zeitabh. Größen bis einschl. Zeitschritt n			
$P_3 ^{n+1} = -\frac{\dot{\nu} ^{n+1}}{2(1+\nu ^{n+1})^2}$			
$s = 0$			
$\varepsilon_{xy}^p _s^{n+1} = \varepsilon_{xy}^p _s^n + \dot{\varepsilon}_{xy}^p _s^n \Delta t$			
Wiederholung solange $s + 1 \leq 1000$ (maximale Anzahl an Iterationen)			
$\varepsilon_{xy}^e _{s+1}^{n+1} = \varepsilon_{xy} _{s+1}^{n+1} - \varepsilon_{xy}^p _s^{n+1}$			
$Q_{xy} _{s+1}^{n+1} = Q_{xy} _s^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_3 _s^n \varepsilon_{xy}^e _s^n + P_3 _{s+1}^{n+1} \varepsilon_{xy}^e _{s+1}^{n+1} \right)$			
$\psi_{xy} _{s+1}^{n+1} = (2 + 2\nu ^{n+1}) Q_{xy} _{s+1}^{n+1}$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.93) nach $\sigma_{xy} _{s+1}^{n+1}$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.79d) nach $\varepsilon_{xy}^p _{s+1}^{n+1}$			
$s + 1 > 1 ?$			
WAHR		FALSCH	
$\left \frac{\sigma_{xy} _{s+1}^{n+1} - \sigma_{xy} _s^{n+1}}{\sigma_{xy} _s^{n+1}} \right < 10^{-10} ?$		$\beta = 0 \wedge E_V = 0 ?$	
WAHR	FALSCH	WAHR	FALSCH
Abbruch	weiter	Abbruch	weiter
$s = s + 1$			
Rückgabe der berechneten Größen zum Zeitschritt $n + 1$			

Abbildung 3.6: Iteration zur Berechnung von σ_{xy} sowie ε_{xy}^p

3.3.6 Berechnung der Vergleichsspannung und Vergleichsdehnung

Bei einem Spannungstensor nach Gl. (3.6) vereinfacht sich Gl. (3.62) für den hydrostatischen Druck wie folgt:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3}. \quad (3.97)$$

Außerdem wird Gl. (3.63) für die von-Mises-Vergleichsspannung zu:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \left((\sigma_{xx} + p)^2 + (\sigma_{yy} + p)^2 + p^2 + 2\sigma_{xy}^2 \right)}. \quad (3.98)$$

Sind neben der vorgegebenen Größe σ_{xx} auch σ_{yy} und σ_{xy} bekannt, lässt sich σ_{vm} somit einfach berechnen. Einsetzen von Gl. (2.68) in Gl. (2.66) ermöglicht darüber hinaus eine Quantifizierung des plastischen Potentials im aktuellen Zeitschritt:

$$g = \sqrt{\sigma_{vm}^2 + \left(\frac{9}{2} \frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p} \right) p^2}. \quad (3.99)$$

Mit der plastischen volumetrischen Dehnrate,

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{\varepsilon}_{xx}^p + \dot{\varepsilon}_{yy}^p + \dot{\varepsilon}_{zz}^p, \quad (3.100)$$

folgt für den Tensor der plastischen deviatorischen Dehnraten in Voigt-Notation:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^p - \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{3} & \dot{\varepsilon}_{yy}^p - \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{3} & \dot{\varepsilon}_{zz}^p - \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{3} & 0 & 0 & 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Damit ergibt sich die äquivalente plastische Dehnrate zu:

$$\dot{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \left((\dot{\varepsilon}_{xx}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{yy}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{zz}^p)^2 + 2(\dot{\varepsilon}_{xy}^p)^2 \right)}. \quad (3.102)$$

Liegen für einen Zeitschritt $n + 1$ die Größen σ_{vm} , g , $\dot{\varepsilon}_p$ und ν_p vor, kann mit Gl. (2.73) der Betrag der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnrate berechnet werden:

$$|\dot{\varepsilon}_{pct}| := \dot{\varepsilon}_p \frac{g}{\sigma_{vm}} \sqrt{\frac{3}{2(1 + \nu_p)}}.$$

Bei Kenntnis von $|\dot{\varepsilon}_{pct}|^{n+1}$ folgt die zugehörige uniaxiale plastische Vergleichsdehnung $|\varepsilon_{pct}|^{n+1}$ durch numerische Integration mit der Sehnentrapezformel.

3.3.7 Interpretation der Ergebnisse

Beim ν_p -Verlauf handelt es sich gemäß Kap. 2.2.3 um eine Kurve mit der plastischen Querkontraktion als Ordinate und der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung als Abszisse. Da beide Größen im Rahmen der Analyse eines einzelnen Versuchs bestimmt werden können, ist die Quantifizierung dieser Charakteristik ein unmittelbares Resultat des Verfahrens. Ein ν_p -Verlauf für einen typischen Thermoplast ist in Abb. 2.3 dargestellt.

Das zweite besonders wichtige Ergebnis nach der Lösung der Integro-Differentialgleichungen für einen materiellen Punkt ist der zugehörige Pfad im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum. Dieser verläuft auf einer Fläche, die werkstoffspezifisch ist. Je mehr Versuche unterschiedlicher Abzugsgeschwindigkeiten durchgeführt werden, desto deutlicher zeigt sich ihre Gestalt. Abb. 3.7 zeigt ein Beispiel für einen typischen Thermoplast. Die drei farbigen $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade entsprechen dabei drei Zugversuchen bei unterschiedlichen Dehnraten.

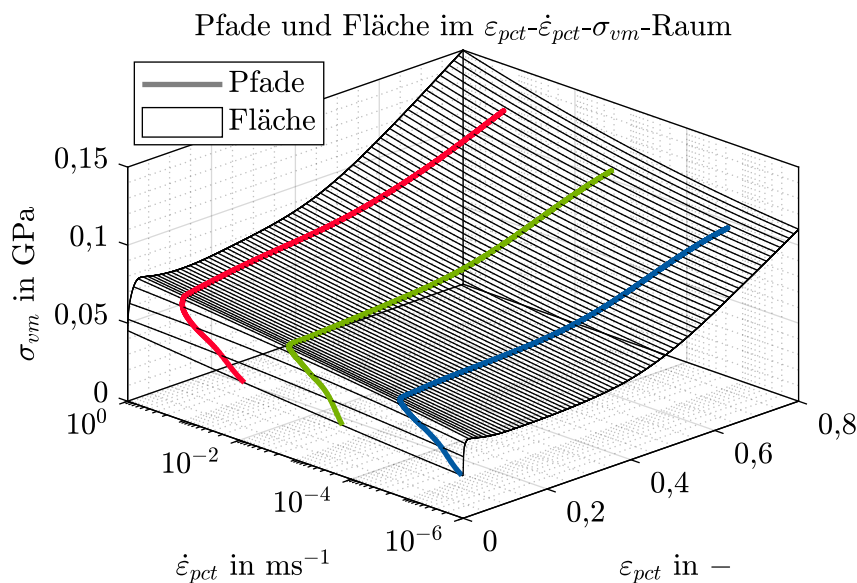


Abbildung 3.7: Pfade und Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum für einen typ. Thermoplast

Tabellierte Fließkurven für uniaxialen Zug zur Charakterisierung viskoplastischen Materialverhaltens ergeben sich, indem die Fläche, welche die $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade aufspannen, bei konstanten Werten für $\dot{\varepsilon}_{pct}$ geschnitten wird. Die zugrundeliegende Thematik ist Gegenstand von Kap. 5.5.3.

3.4 Sonderfälle und Bemerkungen

Nach der Vorstellung der grundsätzlichen Vorgehensweise werden in diesem Unterkapitel Ergänzungen behandelt, die sich durch die praktische Anwendung motivieren. Außerdem folgen Bemerkungen zur Implementierung.

3.4.1 Lösungsstrategien bei bekanntem ν_p

In zwei Sonderfällen, deren Vorstellung an dieser Stelle erfolgt, ist der Wert der plastischen Querkontraktion vor der Berechnung eines Zeitschritts bekannt. Wird in den Systemen nach Gl. (3.79) und Gl. (3.80) anstelle von $\check{\alpha}(\nu_p)$ die schwierig zu erfassende Größe ε_{zz} als unbekannt angesehen, ergibt sich für σ_{yy} eine von Gl. (3.84) abweichende Differentialgleichung. Gleichsetzen von Gl. (3.80b) und Gl. (3.80e) liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{1}{E_C + E_V} \left(-\nu (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}) + \dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy} - \beta E_C (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy}) \right)}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{E_C + E_V} \left(\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx} - \nu (\dot{\sigma}_{yy} + \beta \sigma_{yy}) - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}) \right)} \\ &= \frac{-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\check{\alpha}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Umformungen führen auf diese nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung für σ_{yy} :

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1 - 2\check{\alpha} - \nu(2 + 2\check{\alpha})}{E_C + E_V} \right) \sigma_{yy} - \frac{2 + 2\check{\alpha} - \nu(1 - 2\check{\alpha})}{E_C + E_V} \sigma_{xx} \right) \dot{\sigma}_{yy} \\ & + \left(\left(\frac{1 - 2\check{\alpha} - \nu(2 + 2\check{\alpha})}{E_C + E_V} \beta \right) \sigma_{yy} + (-2 - 2\check{\alpha}) \dot{\varepsilon}_{xx} + (2\check{\alpha} - 1) \dot{\varepsilon}_{yy} \right. \\ & + \frac{2 + 2\check{\alpha}}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} - \beta E_C (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx})) \\ & \left. + \frac{2\check{\alpha} - 1}{E_C + E_V} (\nu \dot{\sigma}_{xx} + \beta E_C (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy})) \right) \sigma_{yy} \\ &= -(1 - 2\check{\alpha}) \sigma_{xx} \dot{\varepsilon}_{xx} - (2 + 2\check{\alpha}) \sigma_{xx} \dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{2\check{\alpha} - 1 + \nu(2 + 2\check{\alpha})}{E_C + E_V} (\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx}) \sigma_{xx} \\ & - \frac{1 - 2\check{\alpha}}{E_C + E_V} \beta E_C \sigma_{xx} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p - \psi_{xx}) - \frac{2 + 2\check{\alpha}}{E_C + E_V} \beta E_C \sigma_{xx} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^p - \psi_{yy}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Auch wenn sich auf den ersten Blick in Gl. (3.104) kein Einfluss von ε_{zz} zeigt, ist er doch vorhanden. Die Kopplung erfolgt gemäß Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) durch die Terme ψ_{xx} sowie ψ_{yy} und muss bei der Lösung entsprechend berücksichtigt werden.

Bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten entfällt der genannte Zusammenhang. In diesem Fall reduziert sich Gl. (3.104) auf:

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\frac{1 - 2\check{\alpha} - \nu(2 + 2\check{\alpha})}{E_C} \right) \sigma_{yy} - \frac{2 + 2\check{\alpha} - \nu(1 - 2\check{\alpha})}{E_C} \sigma_{xx} \right) \dot{\sigma}_{yy} \\
 & + \left((2\check{\alpha} - 1) \dot{\epsilon}_{yy} + (-2 - 2\check{\alpha}) \dot{\epsilon}_{xx} + \frac{2 + 2\check{\alpha}}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} + \frac{2\check{\alpha} - 1}{E_C} \nu \dot{\sigma}_{xx} \right) \sigma_{yy} \\
 & = - (1 - 2\check{\alpha}) \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} - (2 + 2\check{\alpha}) \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{2\check{\alpha} - 1 + \nu(2 + 2\check{\alpha})}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} \sigma_{xx}.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Ist der Werkstoff zusätzlich plastisch inkompressibel, folgt mit $\check{\alpha}(\nu_p = 0,5) = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\frac{1 - 2\nu}{E_C} \right) \sigma_{yy} - \frac{2 - \nu}{E_C} \sigma_{xx} \right) \dot{\sigma}_{yy} + \left(-\dot{\epsilon}_{yy} - 2\dot{\epsilon}_{xx} + \frac{2}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} - \frac{\nu}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} \right) \sigma_{yy} \\
 & = -\sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} - 2\sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{-1 + 2\nu}{E_C} \dot{\sigma}_{xx} \sigma_{xx}.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Wie in Kap. 3.3.3 ist als Anfangswert für σ_{yy} der letzte Wert aus dem viskoelastischen Regime anzusetzen. Für einen Zugversuch gilt Gl. (3.86):

$$\sigma_{yy}|^{nE} = 0.$$

Einbeziehung der Modellgrenzen von ν_p

Es ist möglich, dass bei der Anwendung des Verfahrens auf reale Messdaten in einem Zeitschritt $n + 1$ ein Wert für ν_p berechnet wird, der außerhalb des zulässigen Bereichs nach Gl. (2.70) liegt:

$$0 \leq \nu_p \leq 0,5.$$

Die Gründe dafür können z. B. fehlerbehaftete Messdaten oder gegebenenfalls spannungs- bzw. verzerrungsinduzierte Anisotropie sein. In den ersten Zeitschritten des viskoelasto-viskoplastischen Regimes wird zudem regelmäßig beobachtet, dass die plastische Querkontraktion stark oszilliert, was unter anderem mit den dort vorherrschenden sehr kleinen plastischen Verzerrungen zusammenhängt. Die Bestimmung eines Werts für $\nu_p|^{n+1}$ innerhalb der Modellgrenzen erfolgt an der gekennzeichneten Stelle in Abb. 3.5 mit dem Algorithmus aus Abb. 3.8.

Die erste Plausibilitätsprüfung detektiert Rechenergebnisse außerhalb der Menge der reellen Zahlen. In diesem Zusammenhang werden z. B. numerische Werte wie NaN oder $\pm\infty$ herausgefiltert und mit sinnvollen Annahmen überschrieben. Die anderen beiden Abfragen prüfen, ob der Wert des berechneten $\nu_p|^{n+1}$ kleiner als 0 oder größer als 0,5 ist.

3 Direkte Kalibrierung von Modellparametern

Trifft einer dieser Fälle zu, wird die plastische Querkontraktion auf den entsprechenden Rand des zulässigen Intervalls gesetzt. Den Abschluss des Algorithmus bildet eine Aktualisierung von $\check{\alpha}|^{n+1}$ in Abhängigkeit von Modifikationen von $\nu_p|^{n+1}$.

Eingabe von n_E sowie ν , ν_p und $\check{\alpha}$ bis einschl. Zeitschritt $n + 1$	
$\Upsilon = \text{FALSCH}$	
$\nu_p ^{n+1} \notin \mathbb{R} ?$	
WAHR	FALSCH
$n = n_E ?$	\emptyset
WAHR	
FALSCH	
$\nu_p ^{n+1} = \nu$	$\nu_p ^{n+1} = \nu_p ^{n+1}$
$\Upsilon = \text{WAHR}$	
$\nu_p ^{n+1} < 0 \wedge \Upsilon = \text{FALSCH} ?$	
WAHR	FALSCH
$\nu_p ^{n+1} = 0$	\emptyset
$\Upsilon = \text{WAHR}$	
$\nu_p ^{n+1} > 0,5 \wedge \Upsilon = \text{FALSCH} ?$	
WAHR	FALSCH
$\nu_p ^{n+1} = 0,5$	\emptyset
$\Upsilon = \text{WAHR}$	
$\Upsilon = \text{WAHR} ?$	
WAHR	FALSCH
$\check{\alpha} ^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu_p ^{n+1}}{1+\nu_p ^{n+1}}$	\emptyset
Rückgabe von ν_p und $\check{\alpha}$ zum Zeitschritt $n + 1$ sowie von Υ	

Abbildung 3.8: Plausibilitätsprüfung von ν_p

Wird der Wert von $\nu_p|^{n+1}$ mit dem Vorgehen aus Abb. 3.8 modifiziert, was anhand der booleschen Variable Υ nachvollziehbar ist, ergibt sich eine Inkonsistenz in den Gleichungen. Um diese abzumildern, erfolgt im Anschluss an die Schleife aus Abb. 3.5 die erneute Berechnung von $\sigma_{yy}|^{n+1}$ unter Vorgabe von $\nu_p|^{n+1}$ und $\nu|^{n+1}$ mit Gl. (3.104). Da $\varepsilon_{zz}|^{n+1}$ in diesem Zusammenhang als Unbekannte auftritt, dieser Wert zur Berechnung der Terme ψ_{xx} und ψ_{yy} jedoch elementar ist, folgt die Notwendigkeit seiner Bestimmung auf Basis von Gl. (3.79c). Daraus ergibt sich neben den bereits in Kap. 3.3.3 diskutierten gegenseitigen Abhängigkeiten von σ_{yy} , $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ und $\boldsymbol{\psi}$ eine zusätzliche Relation, die in der nachfolgend vorgestellten Iteration adressiert wird. Eine schematische Darstellung ist in Abb. 3.9 zu sehen.

Als Startwerte dienen die Endwerte der Schleife aus Abb. 3.5. Da $\nu|^{n+1}$, $\dot{\nu}|^{n+1}$ und $\nu_p|^{n+1}$ bekannt sind, folgen daraus unmittelbar $P_1|^{n+1}$ und $P_2|^{n+1}$. Innerhalb der Schleife werden zunächst die Terme $\psi_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $\psi_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\psi_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ nach Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) bestimmt. Die Approximation der darin enthaltenen Integrale $Q_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $Q_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $Q_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ findet schrittweise mit der Sehnentrapezformel statt. Anschließend wird die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung für σ_{yy} nach Gl. (3.104) mit dem *Verfahren von Heun* gelöst. Für die folgenden numerischen Integrationsschritte kommt jeweils wieder die Sehnentrapezformel zum Einsatz. Liegt $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ vor, erfolgt die Aktualisierung $\varepsilon_{xx}^p|_{s+1}^{n+1}$ durch Approximieren der Lösung von Gl. (3.79a). $\varepsilon_{yy}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ werden durch numerische Integration von Gl. (3.80e) und Gl. (3.80f) berechnet. Eine anschließende Auswertung der Gleichungen liefert die zeitlichen Ableitungen der genannten Größen. Sobald $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\dot{\varepsilon}_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ vorliegen, geschieht die Berechnung von $\varepsilon_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ auf Grundlage von Gl. (3.79c). $\dot{\varepsilon}_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ ergibt sich durch darauffolgendes Auswerten der Gleichung.

Für den nächsten Durchlauf der Schleife sind die aktualisierten Werte $\varepsilon_{xx}^p|_{s+1}^{n+1}$, $\varepsilon_{yy}^p|_{s+1}^{n+1}$, $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ die Basis. Der Iterationsschritt $s + 1$ wird als konvergiert angesehen, wenn der Betrag der auf $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ bezogenen Differenz zwischen $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ kleiner als 10^{-10} ist. In diesem Fall folgt der Abbruch der Iteration. Bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten ist keine Iteration notwendig und die Schleife wird nach einem Durchlauf verlassen.

Vorgabe eines ν_p -Verlaufs

Je höher die in einem Versuch untersuchte Dehnrates ist, desto größer sind die Anforderungen an das eingesetzte Messequipment sowie die zu erwartende Versuchsstreuung. Es ist daher sinnvoll, die Quantifizierung einer so sensiblen Größe wie der plastischen Querkontraktion mit sehr langsamen, im besten Fall quasistatischen Materialprüfungen durchzuführen und den gewonnenen Verlauf anschließend bei der Auswertung hochdynamischer Versuche vorzugeben. Dabei wird angenommen, dass ν_p unabhängig von der Dehnrates ist, was sowohl empirischen Erfahrungswerten im untersuchten Dehnratesbereich nach Kap. 5.1 als auch der Implementierung in *SAMP-1* nach Kap. 2.2 entspricht.

Da als Abszisse eines ν_p -Verlaufs die uniaxiale plastische Vergleichsdehnung gemäß Kap. 2.2.3 auftritt, kann die im Zeitschritt $n + 1$ vorherrschende plastische Querkontraktion erst nach Quantifizierung dieser Größe bestimmt werden. Die Berechnung von $\varepsilon_{pct}|^{n+1}$ setzt wiederum die Kenntnis von $\sigma_{yy}|^{n+1}$, $\sigma_{xy}|^{n+1}$, $\dot{\varepsilon}_{xx}^p|^{n+1}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}^p|^{n+1}$, $\dot{\varepsilon}_{zz}^p|^{n+1}$ und $\dot{\varepsilon}_{xy}^p|^{n+1}$ voraus. Analog zur Einbeziehung der Modellgrenzen von ν_p ergibt sich eine zusätzliche Schwierigkeit durch das Auftreten der unbekanntten Größe ε_{zz} in Gl. (3.104) in Gestalt der Terme ψ_{xx} und ψ_{yy} . Im viskoelastischen Regime kann diese Größe gemäß

Kap. 3.2.4 durch Lösen von Gl. (3.49) berechnet werden. Der letzte so ermittelte Wert $\varepsilon_{zz}|^{nE}$ bildet dann den Anfangswert für die schrittweise numerische Lösung im viskoelasto-viskoplastischen Regime. In der nachfolgend beschriebenen Iteration sind sämtliche Abhängigkeiten berücksichtigt. Sie ist schematisch in Abb. 3.10 und Abb. 3.11 dargestellt.

Startwerte $\varepsilon_{xx}^p|_{s=0}^{n+1}$, $\varepsilon_{yy}^p|_{s=0}^{n+1}$, $\varepsilon_{zz}^p|_{s=0}^{n+1}$, $\varepsilon_{xy}^p|_{s=0}^{n+1}$, $\varepsilon_{zz}|_{s=0}^{n+1}$ und $\varepsilon_{pct}|_{s=0}^{n+1}$ werden mit dem Euler-Cauchy-Verfahren berechnet. Aus $\varepsilon_{pct}|_{s=0}^{n+1}$ folgt mit dem vorgegebenen Verlauf für die plastische Querkontraktion unmittelbar $\nu_p|_{s=0}^{n+1}$ bzw. $\check{\alpha}|_{s=0}^{n+1}$ und damit unter Berücksichtigung von Kap. 2.2.4 direkt $\nu|_{s=0}^{n+1}$. Die zeitliche Ableitung $\dot{\nu}|_{s=0}^{n+1}$ wird analog zu Gl. (3.92) mit einem linksseitigen Differenzenquotienten zweiter Ordnung angenähert:

$$\dot{\nu}|_{s=0}^{n+1} = \frac{3\nu|_{s=0}^{n+1} - 4\nu|_{s=0}^n + \nu|_{s=0}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.107)$$

Innerhalb der Schleife werden zunächst die Terme $\psi_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $\psi_{yy}|_{s+1}^{n+1}$, $\psi_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ und $\psi_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ nach Gl. (3.56) bis Gl. (3.61) bestimmt. Die Approximation der darin enthaltenen Integrale $Q_{xx}|_{s+1}^{n+1}$, $Q_{yy}|_{s+1}^{n+1}$, $Q_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ und $Q_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ findet schrittweise mit der Sehnentrapezformel statt. Anschließend wird die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung für σ_{yy} nach Gl. (3.104) mit dem Verfahren von Heun gelöst. Für die folgenden numerischen Integrationsschritte kommt jeweils wieder die Sehnentrapezformel zum Einsatz. Liegt $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ vor, erfolgt die Aktualisierung $\varepsilon_{xx}^p|_{s+1}^{n+1}$ durch Approximieren der Lösung von Gl. (3.79a). $\varepsilon_{yy}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ werden durch numerische Integration von Gl. (3.80e) und Gl. (3.80f) berechnet. Eine anschließende Auswertung der Gleichungen liefert die zeitlichen Ableitungen der genannten Größen. Sobald $\varepsilon_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\dot{\varepsilon}_{zz}^p|_{s+1}^{n+1}$ vorliegen, geschieht die Berechnung von $\varepsilon_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ auf Basis von Gl. (3.79c). $\dot{\varepsilon}_{zz}|_{s+1}^{n+1}$ ergibt sich durch darauffolgendes Auswerten der Gleichung. $\sigma_{xy}|_{s+1}^{n+1}$ wird durch Lösen von Gl. (3.93) ermittelt. $\varepsilon_{xy}^p|_{s+1}^{n+1}$ und $\dot{\varepsilon}_{xy}^p|_{s+1}^{n+1}$ folgen auf Grundlage von Gl. (3.80g). Das Ende der Iterationsschleife bildet die Berechnung von $\varepsilon_{pct}|_{s+1}^{n+1}$, $\nu_p|_{s+1}^{n+1}$ bzw. $\check{\alpha}|_{s+1}^{n+1}$ sowie $\nu|_{s+1}^{n+1}$. Die zeitliche Änderung $\dot{\nu}|_{s+1}^{n+1}$ folgt mit Gl. (3.92), wobei hier $r = s$ ist.

Für den nächsten Durchlauf der Schleife sind die aktualisierten Werte die Basis. Der Iterationsschritt $s + 1$ wird als konvergiert angesehen, wenn der Betrag der auf $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ bezogenen Differenz zwischen $\sigma_{yy}|_{s+1}^{n+1}$ und $\sigma_{yy}|_s^{n+1}$ kleiner als 10^{-10} ist. In diesem Fall folgt der Abbruch der Iteration. Bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten ist keine Iteration notwendig und die Schleife wird nach einem Durchlauf verlassen.

Eingabe der erf. zeitabh. Größen bis einschl. Zeitschritt n sowie von Υ , $\nu ^{n+1}$, $\dot{\nu} ^{n+1}$, $\check{\alpha} ^{n+1}$ und Startwerten für den Iterationsschritt $s = 0$			
$\Upsilon = \text{WAHR} \quad ?$			
WAHR		FALSCH	
weiter		Verlassen der Funktion	
$P_1 ^{n+1} = \frac{2\dot{\nu} ^{n+1}\nu ^{n+1}(2-\nu ^{n+1})}{(1+\nu ^{n+1})^2(1-2\nu ^{n+1})^2}$ und $P_2 ^{n+1} = \frac{\dot{\nu} ^{n+1}(1+2(\nu ^{n+1})^2)}{(1+\nu ^{n+1})^2(1-2\nu ^{n+1})^2}$			
$s = 0$			
Wiederholung solange $s + 1 \leq 1000$ (maximale Anzahl an Iterationen)			
$\varepsilon_{xx} _{s+1}^e = \varepsilon_{xx} ^{n+1} - \varepsilon_{xx} _s^p$			
$\varepsilon_{yy} _{s+1}^e = \varepsilon_{yy} ^{n+1} - \varepsilon_{yy} _s^p$			
$\varepsilon_{zz} _{s+1}^e = \varepsilon_{zz} ^{n+1} - \varepsilon_{zz} _s^p$			
$Q_{xx} _{s+1}^{n+1} = Q_{xx} ^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 ^{n+1} \varepsilon_{xx} ^n + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{yy} ^n + \varepsilon_{zz} ^n) + P_1 ^{n+1} \varepsilon_{xx} _{s+1}^e + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{yy} _{s+1}^e + \varepsilon_{zz} _{s+1}^e) \right)$			
$Q_{yy} _{s+1}^{n+1} = Q_{yy} ^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 ^{n+1} \varepsilon_{yy} ^n + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{xx} ^n + \varepsilon_{zz} ^n) + P_1 ^{n+1} \varepsilon_{yy} _{s+1}^e + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{xx} _{s+1}^e + \varepsilon_{zz} _{s+1}^e) \right)$			
$Q_{zz} _{s+1}^{n+1} = Q_{zz} ^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 ^{n+1} \varepsilon_{zz} ^n + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{xx} ^n + \varepsilon_{yy} ^n) + P_1 ^{n+1} \varepsilon_{zz} _{s+1}^e + P_2 ^{n+1} (\varepsilon_{xx} _{s+1}^e + \varepsilon_{yy} _{s+1}^e) \right)$			
$\psi_{xx} _{s+1}^{n+1} = Q_{xx} _{s+1}^{n+1} - \nu ^{n+1} Q_{yy} _{s+1}^{n+1} - \nu ^{n+1} Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$			
$\psi_{yy} _{s+1}^{n+1} = -\nu ^{n+1} Q_{xx} _{s+1}^{n+1} + Q_{yy} _{s+1}^{n+1} - \nu ^{n+1} Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$			
$\psi_{zz} _{s+1}^{n+1} = -\nu ^{n+1} Q_{xx} _{s+1}^{n+1} - \nu ^{n+1} Q_{yy} _{s+1}^{n+1} + Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$			
Verfahren von Heun: Lösung von Gl. (3.104) nach $\sigma_{yy} _{s+1}^{n+1}$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.79a) nach $\varepsilon_{xx} _{s+1}^p$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.80e) nach $\varepsilon_{yy} _{s+1}^p$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.80f) nach $\varepsilon_{zz} _{s+1}^p$			
Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.79c) nach $\varepsilon_{zz} _{s+1}^{n+1}$			
$s + 1 > 1 \quad ?$			
WAHR		FALSCH	
$\left \frac{\sigma_{yy} _{s+1}^{n+1} - \sigma_{yy} _s^{n+1}}{\sigma_{yy} _s^{n+1}} \right < 10^{-10} \quad ?$		$\beta = 0 \wedge E_V = 0 \quad ?$	
WAHR	FALSCH	WAHR	FALSCH
Abbruch	weiter	Abbruch	weiter
$s = s + 1$			
Rückgabe der berechneten Größen zum Zeitschritt $n + 1$			

Abbildung 3.9: Iteration zur Berechnung von σ_{yy} sowie ε_{xx}^p , ε_{yy}^p und ε_{zz}^p

3 Direkte Kalibrierung von Modellparametern

Eingabe der erf. zeitabh. Größen bis einschl. Zeitschritt n
$s = 0$
$\varepsilon_{xx}^p _s^{n+1} = \varepsilon_{xx}^p _s^n + \dot{\varepsilon}_{xx}^p _s^n \Delta t$
$\varepsilon_{yy}^p _s^{n+1} = \varepsilon_{yy}^p _s^n + \dot{\varepsilon}_{yy}^p _s^n \Delta t$
$\varepsilon_{zz}^p _s^{n+1} = \varepsilon_{zz}^p _s^n + \dot{\varepsilon}_{zz}^p _s^n \Delta t$
$\varepsilon_{xy}^p _s^{n+1} = \varepsilon_{xy}^p _s^n + \dot{\varepsilon}_{xy}^p _s^n \Delta t$
$\varepsilon_{zz} _s^{n+1} = \varepsilon_{zz} _s^n + \dot{\varepsilon}_{zz} _s^n \Delta t$
$\varepsilon_{pct} _s^{n+1} = \varepsilon_{pct} _s^n + \dot{\varepsilon}_{pct} _s^n \Delta t$
$\nu_p _s^{n+1} = \nu_p(\varepsilon_{pct} _s^{n+1})$
$\nu _s^{n+1} = \nu(\nu_p _s^{n+1})$
$\check{\alpha} _s^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu_p _s^{n+1}}{1+\nu_p _s^{n+1}}$
$\dot{\nu} _s^{n+1} = \frac{3\nu _s^{n+1}-4\nu _s^n+\nu _s^{n-1}}{2\Delta t}$
Wiederholung solange $s + 1 \leq 1000$ (maximale Anzahl an Iterationen)
$\varepsilon_{xx}^e _{s+1}^{n+1} = \varepsilon_{xx} _{s+1}^{n+1} - \varepsilon_{xx}^p _s^{n+1}$
$\varepsilon_{yy}^e _{s+1}^{n+1} = \varepsilon_{yy} _{s+1}^{n+1} - \varepsilon_{yy}^p _s^{n+1}$
$\varepsilon_{zz}^e _{s+1}^{n+1} = \varepsilon_{zz} _{s+1}^{n+1} - \varepsilon_{zz}^p _s^{n+1}$
$\varepsilon_{xy}^e _{s+1}^{n+1} = \varepsilon_{xy} _{s+1}^{n+1} - \varepsilon_{xy}^p _s^{n+1}$
$P_1 _{s+1}^{n+1} = \frac{2\dot{\nu} _s^{n+1}\nu _s^{n+1}(2-\nu _s^{n+1})}{(1+\nu _s^{n+1})^2(1-2\nu _s^{n+1})^2}$
$P_2 _{s+1}^{n+1} = \frac{\dot{\nu} _s^{n+1}(1+2(\nu _s^{n+1})^2)}{(1+\nu _s^{n+1})^2(1-2\nu _s^{n+1})^2}$
$P_3 _{s+1}^{n+1} = -\frac{\dot{\nu} _s^{n+1}}{2(1+\nu _s^{n+1})^2}$
$Q_{xx} _{s+1}^{n+1} = Q_{xx} _s^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 _s^n \varepsilon_{xx}^e _s^n + P_2 _s^n (\varepsilon_{yy}^e _s^n + \varepsilon_{zz}^e _s^n) + P_1 _{s+1}^{n+1} \varepsilon_{xx}^e _{s+1}^{n+1} + P_2 _{s+1}^{n+1} (\varepsilon_{yy}^e _{s+1}^{n+1} + \varepsilon_{zz}^e _{s+1}^{n+1}) \right)$
$Q_{yy} _{s+1}^{n+1} = Q_{yy} _s^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 _s^n \varepsilon_{yy}^e _s^n + P_2 _s^n (\varepsilon_{xx}^e _s^n + \varepsilon_{zz}^e _s^n) + P_1 _{s+1}^{n+1} \varepsilon_{yy}^e _{s+1}^{n+1} + P_2 _{s+1}^{n+1} (\varepsilon_{xx}^e _{s+1}^{n+1} + \varepsilon_{zz}^e _{s+1}^{n+1}) \right)$
$Q_{zz} _{s+1}^{n+1} = Q_{zz} _s^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_1 _s^n \varepsilon_{zz}^e _s^n + P_2 _s^n (\varepsilon_{xx}^e _s^n + \varepsilon_{yy}^e _s^n) + P_1 _{s+1}^{n+1} \varepsilon_{zz}^e _{s+1}^{n+1} + P_2 _{s+1}^{n+1} (\varepsilon_{xx}^e _{s+1}^{n+1} + \varepsilon_{yy}^e _{s+1}^{n+1}) \right)$
$Q_{xy} _{s+1}^{n+1} = Q_{xy} _s^n + \frac{\Delta t}{2} \left(P_3 _s^n \varepsilon_{xy}^e _s^n + P_3 _{s+1}^{n+1} \varepsilon_{xy}^e _{s+1}^{n+1} \right)$

Abbildung 3.10: Iteration bei Vorgabe einer Kurve für $\nu_p - 1/2$

$\psi_{xx} _{s+1}^{n+1} = Q_{xx} _{s+1}^{n+1} - \nu _s^{n+1} Q_{yy} _{s+1}^{n+1} - \nu _s^{n+1} Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$	
$\psi_{yy} _{s+1}^{n+1} = -\nu _s^{n+1} Q_{xx} _{s+1}^{n+1} + Q_{yy} _{s+1}^{n+1} - \nu _s^{n+1} Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$	
$\psi_{zz} _{s+1}^{n+1} = -\nu _s^{n+1} Q_{xx} _{s+1}^{n+1} - \nu _s^{n+1} Q_{yy} _{s+1}^{n+1} + Q_{zz} _{s+1}^{n+1}$	
$\psi_{xy} _{s+1}^{n+1} = (2 + 2\nu _s^{n+1}) Q_{xy} _{s+1}^{n+1}$	
	Verfahren von Heun: Lösung von Gl. (3.104) nach $\sigma_{yy} _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.79a) nach $\varepsilon_{xx}^p _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.80e) nach $\varepsilon_{yy}^p _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.80f) nach $\varepsilon_{zz}^p _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.79c) nach $\varepsilon_{zz} _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.93) nach $\sigma_{xy} _{s+1}^{n+1}$
	Sehnentrapezformel: Lösung von Gl. (3.80g) nach $\varepsilon_{xy}^p _{s+1}^{n+1}$
Berechnung von $\varepsilon_{pct} _{s+1}^{n+1}$ gemäß Kap. 3.3.6	
$\nu_p _{s+1}^{n+1} = \nu_p(\varepsilon_{pct} _{s+1}^{n+1})$	
$\nu _{s+1}^{n+1} = \nu(\nu_p _{s+1}^{n+1})$	
$\check{\alpha} _{s+1}^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu_p _{s+1}^{n+1}}{1+\nu_p _{s+1}^{n+1}}$	
$\dot{\nu} _{s+1}^{n+1} = \frac{3\nu _{s+1}^{n+1} - 4\nu _s^{n+1} + \nu _s^{n-1}}{2\Delta t}$	
$s + 1 > 1 ?$	
WAHR FALSCH	
$\left \frac{\sigma_{yy} _{s+1}^{n+1} - \sigma_{yy} _s^{n+1}}{\sigma_{yy} _s^{n+1}} \right < 10^{-10} ?$	$\beta = 0 \wedge E_V = 0 ?$
WAHR FALSCH	WAHR FALSCH
Abbruch weiter	Abbruch weiter
$s = s + 1$	
Rückgabe der berechneten Größen zum Zeitschritt $n + 1$	

Abbildung 3.11: Iteration bei Vorgabe einer Kurve für $\nu_p - 2/2$

3.4.2 Bemerkungen zur Implementierung

Bezüglich der Überführung der hergeleiteten Zusammenhänge in einen Programmcode sind der Umgang mit redundanten Informationen, die algorithmische Bedeutung des Koordinatensystems sowie Besonderheiten der gewählten Programmierumgebung erwähnenswert. Die genannten Aspekte werden nachfolgend thematisiert.

Selektion bei Gleichungen mit redundanten Informationen

Erfahrungsgemäß ist die Erfassung von ε_{zz} mittels 3D-DIC besonders herausfordernd (siehe Kap. 5.3). Infolgedessen werden in dieser Arbeit Gleichungen, die ε_{zz} enthalten, vernachlässigt, wenn die enthaltenen Informationen redundant vorliegen. Konkret trifft dies auf die überbestimmten Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen aus Gl. (3.43) und Gl. (3.45) sowie die Berechnung von ν nach Kap. 3.2.3 zu.

Algorithmische Bedeutung des Koordinatensystems

Gemäß der Definition des verwendeten Koordinatensystems nach Kap. 3.1.3 muss die x -Achse parallel zur Richtung des Systems verlaufen, in der betragsmäßig die höchste Dehnrate zu erwarten ist. Neben der Verfügbarkeit von Werten für die Komponenten des Spannungstensors an einem materiellen Punkt in einem Versuch hat diese Randbedingung einen zweiten Grund: Zur Eliminierung des unbekanntem plastischen Multiplikators $\dot{\lambda}$ werden die plastischen Dehnraten $\dot{\varepsilon}_{yy}^p$, $\dot{\varepsilon}_{zz}^p$ und $\dot{\varepsilon}_{xy}^p$ durch $\dot{\varepsilon}_{xx}^p$ aus Gl. (3.79a) bzw. Gl. (3.79e) dividiert. Die entsprechenden Verhältnisse tauchen auch in den Formeln für $\check{\alpha}(\nu_p)$ nach Gl. (3.87) und Gl. (3.88) auf. Je kleiner $\dot{\varepsilon}_{xx}^p$ im Vergleich zu den anderen plastischen Dehnraten wird, desto schlechter ist das Problem konditioniert.

Wie bereits in Kap. 3.1.2 thematisiert, bildet ein reiner Schubzustand einen Grenzfall, in dem das Verfahren in der vorgestellten Form kollabiert. In Abb. 3.12 und Abb. 3.13 sind für ein einzelnes Schalelement beispielhaft zwei Möglichkeiten zur Realisierung ebener Schubzustände dargestellt. Zusätzlich sind zwei mögliche Koordinatensysteme angegeben.

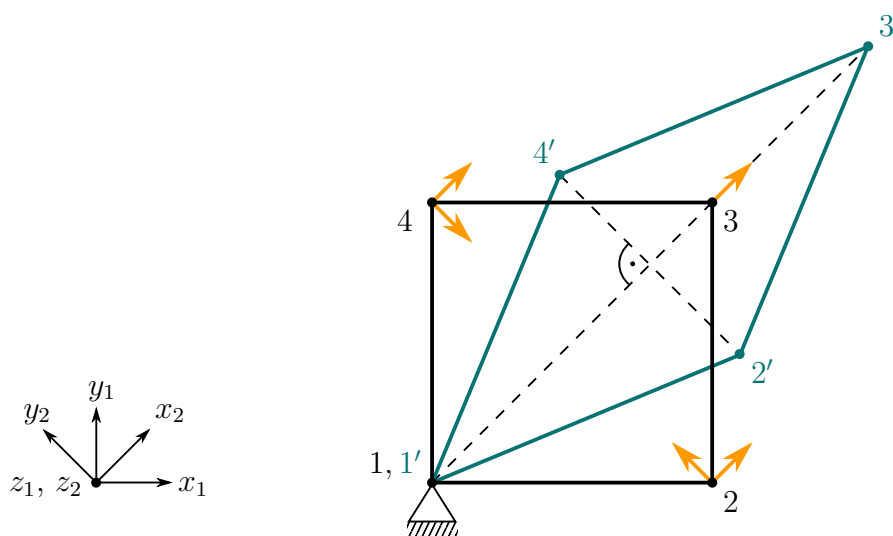


Abbildung 3.12: Möglichkeit 1 zur Erzeugung eines ebenen Schubzustands

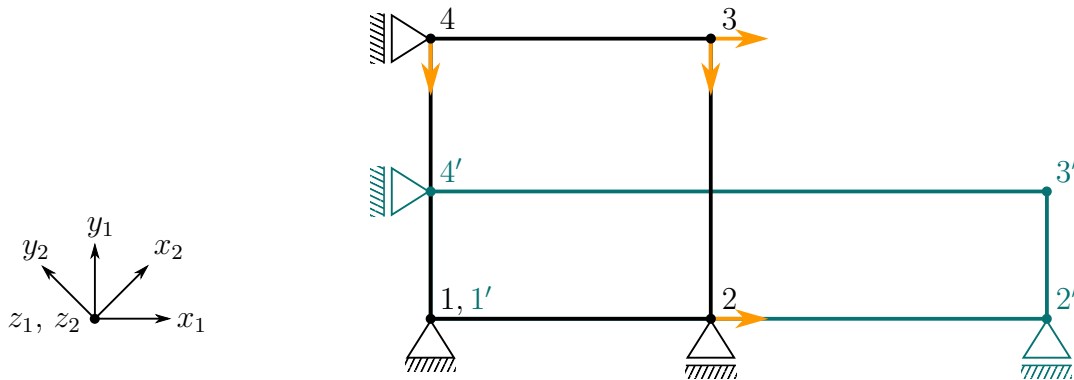


Abbildung 3.13: Möglichkeit 2 zur Erzeugung eines ebenen Schubzustands

Die Ausgangsgeometrie ist jeweils schwarz und ein willkürlich ausgewählter deformierter Zustand petrolfarben eingezeichnet. Die orangefarbenen Pfeile stellen Verschiebungsrandbedingungen dar. In beiden Fällen ergibt sich in beiden Koordinatensystemen für alle Zeitschritte:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0. \tag{3.108}$$

Damit würde in Gl. (3.87) und Gl. (3.88) durch null dividiert. Auch wenn Gl. (3.80g) nach $\check{\alpha}$ umgestellt wird, ist die Problematik offensichtlich:

$$\check{\alpha} = \frac{-3\sigma_{xy} + (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\check{\epsilon}_{xy}^p}{\check{\epsilon}_{xx}^p}}{-2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \frac{\check{\epsilon}_{xy}^p}{\check{\epsilon}_{xx}^p}}. \tag{3.109}$$

Durch eine alternative Wahl des Koordinatensystems ist diese Eigenschaft unter Umständen nicht mehr auf den ersten Blick in den Gleichungen ersichtlich. An der grundsätzlichen Problematik ändert sich jedoch nichts.

Gewählte Programmierung

Die numerische Lösung der Integro-Differentialgleichungen wird in der Programmierung *MATLAB* von *The MathWorks* realisiert. Dabei kommt die Version *R2018a* zum Einsatz. Für die Behandlung der linearen Gleichungssysteme aus Kap. 3.2.4 wird auf die proprietäre Funktion `mldivide` zurückgegriffen, bei deren Aufruf die automatische Wahl eines geeigneten Solvers mit minimaler Rechenzeit erfolgt. Alle weiteren Bestandteile des Programmcodes entsprechen den in Kap. 3.2 bis Kap. 3.4 vorgeschlagenen Routinen.

4

Validierung der direkten Kalibrierung

In diesem Kapitel werden die hergeleiteten Integro-Differentialgleichungen und ihre numerische Lösung validiert. Dies erfolgt anhand *virtueller Messdaten*, die aus Simulationen mit *LS-DYNA* stammen. Konkret werden sogenannte *Ein-Element-Tests* mit Materialmodellkalibrierungen unterschiedlicher Komplexität durchgeführt und anschließend solche Größen extrahiert, die auch in realen Zugversuchen an einem materiellen Punkt quantifizierbar sind. Durch eine Verwendung dieser Daten als Eingangsgrößen für den Programmcode aus dem vorherigen Kapitel lassen sich die berechneten Modellparameter mit den in der Simulation vorgegebenen vergleichen. Dies ermöglicht eine Beurteilung der erzielten Genauigkeit. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung sowie der Komplexität ihrer Berechnung stehen bei den Betrachtungen der ν_p -Verlauf und der Pfad im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum im Fokus. Weil ihre Ermittlung neben der Gültigkeit der Gleichungen des viskoelasto-viskoplastischen Regimes auch die der Gleichungen des viskoelastischen Regimes voraussetzt, wird auf eine dedizierte Analyse mit Bezug auf die Parameter des letzteren verzichtet. Die untersuchten Komplexitätsgrade reichen von elasto-plastischem Materialverhalten mit inkompressibler Plastizität bis zu viskoelasto-viskoplastischem Materialverhalten mit kompressibler Plastizität.

4.1 Konzept und Modellbildung

Wie einleitend beschrieben, konzentrieren sich die Analysen auf die Modellparameter des viskoelasto-viskoplastischen Regimes in Gestalt des ν_p -Verlaufs sowie des Pfads im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum. Diesbezüglich werden ausschließlich die Ergebnisse für den zu Kap. 3.2 und Kap. 3.3 gehörenden Programmcode inklusive der Einbeziehung der Modellgrenzen von ν_p nach Kap. 3.4.1 vorgestellt, weil dieser den allgemeinsten und komplexesten Fall repräsentiert. Aus einer gesonderten Betrachtung des speziellen Modus, in dem ein ν_p -Verlauf vorgegeben wird, ergeben sich keine zusätzlichen Erkenntnisse.

Nacheinander stehen im Zentrum der Untersuchungen fünf *virtuelle Materialien* mit steigendem Komplexitätsgrad, welche sich am Verhalten typischer Thermoplaste orientieren. Diese *Instanzen* der Materialmodelle *SAMP-1* bzw. *MAT_187 sowie *MAT_024 werden im Folgenden *Validierungsmaterialien* genannt. Im Rahmen der Modellbildung für die Ein-Element-Tests kommt die Elementtechnologie aus Kap. 3.1.1 zum Einsatz und das lokale Elementkoordinatensystem ist nach Kap. 2.2.1 durch $INN=2$ definiert. Die Elementkantenlänge in der Referenzkonfiguration wird auf 10 mm und die Elementdicke auf 2 mm festgelegt.

Im Anschluss an die Simulation eines Ein-Element-Tests mit einem Validierungsmaterial werden die Komponenten des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ sowie die x -Komponente des Spannungstensors σ_{xx} an einem ausgewählten Integrationspunkt ausgegeben. Ihre Ableitung nach der Zeit erfolgt jeweils mit zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung. Lediglich für den ersten und letzten Zeitschritt wird ein rechtsseitiger bzw. linksseitiger Differenzenquotient zweiter Ordnung angesetzt. Die Daten werden zusammen mit der Materialsteifigkeit E_C bzw. E_V , der Querkontraktionszahl ν , der Relaxationsrate β und dem letzten Zeitschritt des viskoelastischen Regimes n_E als Eingangsgrößen bei der Lösung der Integro-Differentialgleichungen verwendet. Auf diese Weise findet die Berechnung der plastischen Querkontraktion ν_p , der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung ε_{pct} , ihrer Rate $\dot{\varepsilon}_{pct}$ und der von-Mises-Vergleichsspannung σ_{vm} statt. Da die Kalibrierung der Materialmodelle ausschließlich mit Fließkurven für den uniaxialen Fall erfolgt, lassen beliebige untersuchte Spannungszustände vollständige oder teilweise Rückschlüsse auf dieselben Modellparameter zu. Dies wird ausgenutzt, um die einzelnen Terme in den Integro-Differentialgleichungen zu prüfen und geschieht, indem pro Validierungsmaterial je drei verschiedene Ein-Element-Tests mit unterschiedlichen Spannungszuständen untersucht werden. Damit sich ihre Pfade im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum nicht überdecken, wird zudem auf unterschiedliche Dehnraten gesetzt.

Der erste Ein-Element-Test (EET 1) nach Abb. 4.1 untersucht einen uniaxialen ebenen Spannungszustand, welchen eine *Triaxialität* von $1/3$ eindeutig beschreibt. In der Skizze ist die ursprüngliche Konfiguration in Schwarz und ein Beispiel für ein deformiertes Pendant am Ende der Simulation in Rot dargestellt. Die orangefarbenen Pfeile deuten die Verschiebungsrandbedingungen an. Bedingt durch ν und ν_p induziert im uniaxialen Fall die Verzerrung in x -Richtung eine Verzerrung in y -Richtung. Damit ergeben sich die y -Koordinaten der Knoten 3 und 4 aus dem Materialmodell.

Im zweiten Ein-Element-Test (EET 2) findet gemäß Abb. 4.2 zusätzlich das Aufprägen einer negativen Verzerrung in y -Richtung statt, deren betragsmäßige Rate nach Kap. 3.1 kleiner ist als ihr Äquivalent in x -Richtung. Um nicht vom dominierenden Zugcharakter abzuweichen, wird sichergestellt, dass die resultierende Triaxialität stets positiv ausfällt. Die deformierte Konfiguration am Simulationsende ist in Grün dargestellt.

Mit dem Ziel einer Aktivierung aller Terme in den Integro-Differentialgleichungen wird im dritten Ein-Element-Test (EET 3) gemäß Abb. 4.3 eine Überlagerung des biaxialen ebenen Spannungszustands aus Abb. 4.2 mit einer einfachen Scherung untersucht. Auch hierbei erfolgt die Sicherstellung einer positiven Triaxialität. In der Skizze ist die deformierte Konfiguration am Ende der Simulation in Blau eingezeichnet.

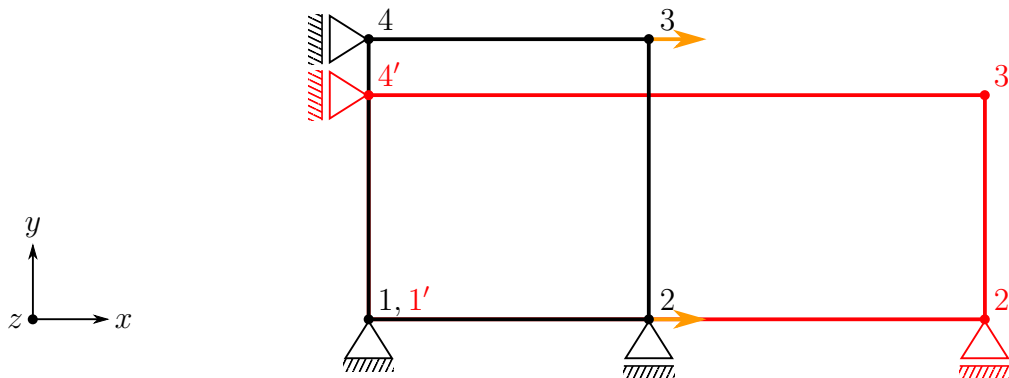


Abbildung 4.1: Ein-Element-Test 1: uniaxialer ebener Spannungszustand

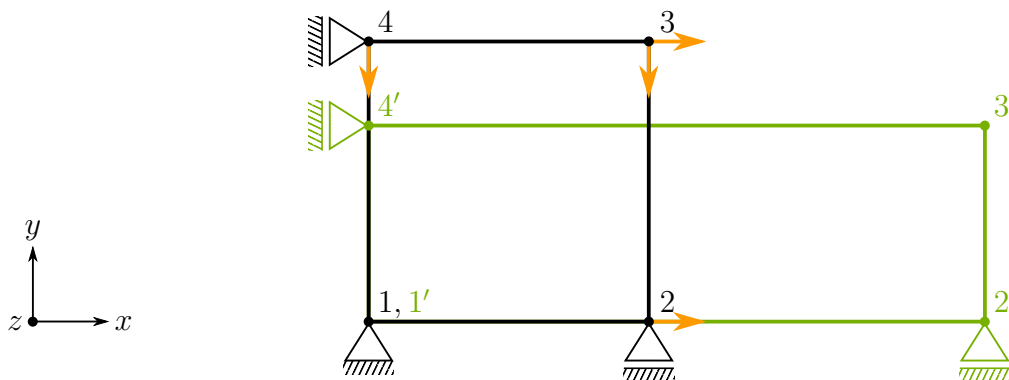


Abbildung 4.2: Ein-Element-Test 2: biaxialer ebener Spannungszustand

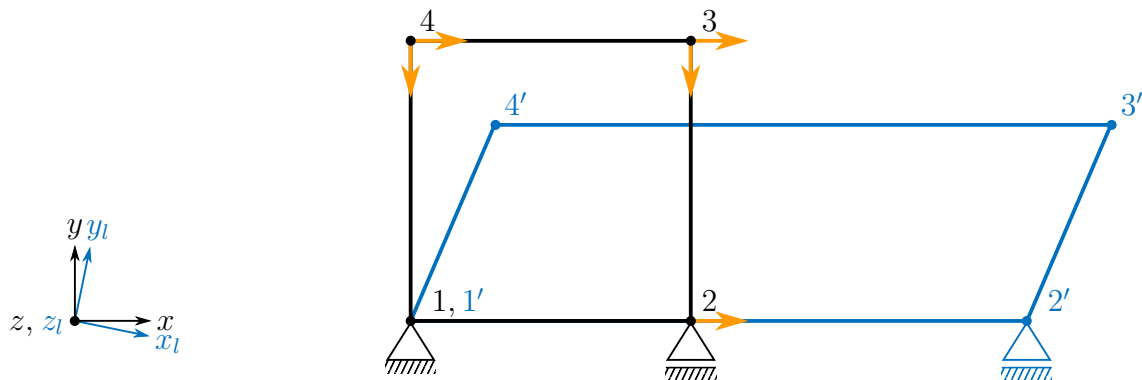


Abbildung 4.3: Ein-Element-Test 3: kombinierter ebener Spannungszustand

Im Falle des EET 3 dreht sich das lokale Elementkoordinatensystem $x_l-y_l-z_l$ entsprechend seiner Definition durch $\text{INN}=2$ mit. Die darin von *LS-DYNA* ausgegebenen Verzerrungen und Spannungen entsprechen wegen $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ nicht exakt den Hencky-Verzerrungen und Cauchy-Spannungen, erfüllen jedoch aufgrund der Zusammenhänge aus Kap. 2.2.1 die in Kap. 3.1.5 genannten Voraussetzungen zur Anwendung des Verfahrens. Ein reiner Schubzustand ist gemäß den Erläuterungen in Kap. 3.1.2 und Kap. 3.4.2 nicht zur Validierung geeignet.

Entsprechend Tab. 4.1 sind die Zeiträume, in denen in den Ein-Element-Tests die Verschiebungen auf die Knoten aufgeprägt werden, so gewählt, dass sich effektive Dehnraten von näherungsweise 10^{-1} ms^{-1} , 10^{-3} ms^{-1} und 10^{-5} ms^{-1} ausbilden. Dadurch wird eine Äquivalenz zu den in dieser Arbeit untersuchten Prüfprogrammen nach Kap. 5.1 hergestellt. Die Kurven für die Verschiebungen weisen in den ersten $0,06 \times 10^1 \text{ ms}$, $0,06 \times 10^3 \text{ ms}$ bzw. $0,06 \times 10^5 \text{ ms}$ einen parabelförmigen Verlauf auf, der daran anschließend tangenstetig in einen linearen Verlauf übergeht. Die Parabelfunktion ist so gewählt, dass die Knotengeschwindigkeiten und -beschleunigungen zu Beginn der Ein-Element-Tests null sind. Zur Generierung der virtuellen Messdaten werden alle Simulationen mit einem konstanten Zeitschritt durchgeführt und insgesamt 1×10^4 Zeitschritte ausgegeben.

Ein-Element-Tests zur Beurteilung der Prognosegüte des Verfahrens heranzuziehen ist naheliegend und vielversprechend. Allerdings ist dabei stets zu beachten, dass der Charakter der mit ihnen generierten Ergebnisse nicht analytisch ist und numerische Fehler aus der Zeitintegration von *LS-DYNA* beinhaltet. Besonders stark fallen diese beim EET 1 ins Gewicht, weil im Rahmen dessen ein idealer uniaxialer Spannungszustand untersucht wird. Während eine analytische Lösung für σ_{yy} , σ_{xy} und ε_{xy} Werte von exakt null vorhersagen würde, sind diese Größen in der Simulation lediglich sehr klein. Um den Anteil numerischer Fehler an den virtuellen Messdaten zu minimieren, wird der EET 1 daher mit einem um den Faktor 10 verkleinerten Zeitschritt simuliert. Die beschriebenen Zusammenhänge sind ausschließlich bei der Validierung des Verfahrens mit Simulationsdaten zu beachten.

Ein-Element-Test	Effektive Soldehnraten	Endzeitpunkt der Simulation	Zeitschritt
EET 1	10^{-1} ms^{-1}	$1,23 \times 10^1 \text{ ms}$	$3,3 \times 10^{-4} \text{ ms}$
EET 2	10^{-3} ms^{-1}	$1,23 \times 10^3 \text{ ms}$	$3,3 \times 10^{-3} \text{ ms}$
EET 3	10^{-5} ms^{-1}	$1,23 \times 10^5 \text{ ms}$	$3,3 \times 10^{-3} \text{ ms}$

Tabelle 4.1: Zusammenstellung wichtiger Rahmenbedingungen der Ein-Element-Tests

4.2 Virtuelle Materialien steigender Komplexität

Nachfolgend werden sowohl die fünf Validierungsmaterialien als auch die zugehörigen Ergebnisse aus den Untersuchungen mit den drei Ein-Element-Tests vorgestellt. In allen Simulationen erfolgt die Vorgabe der in Tab. 4.2 aufgelisteten skalaren Parameterwerte. Diese sind an jene eines typischen Thermoplasts angelehnt.

Parameter	Wert
E_C	2,5 GPa
ν	0,35
ρ	$1,1 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$

Tabelle 4.2: Validierungsmaterial 1 bis 5: skalare Parameter

4.2.1 Elasto-plastisches Verhalten mit inkompressibler Plastizität

Elasto-plastisches Materialverhalten mit inkompressibler Plastizität kann in *LS-DYNA* mit dem Modell *MAT_024 erfasst werden, welches gemäß Kap. 2.2 als Spezialfall im Funktionsumfang von *MAT_187 bzw. *SAMP-1* enthalten ist. Eine derartige Modellierung stellt den einfachsten Fall mit Plastizität dar, den der in Kap. 3 entwickelte Programmcode unterstützt. Für das Validierungsmaterial 1 wird zusätzlich zu den skalaren Parametern aus Tab. 4.2 eine Fließkurve gemäß Abb. 4.4 angesetzt, welche das Verhalten des Werkstoffs bei uniaxialer Belastung definiert. Insbesondere die zwischen dem Einschnürpunkt und dem Beginn der Materialverfestigung liegende Entfestigungs- bzw. Stabilisierungszone ist eine charakteristische Eigenschaft vieler unverstärkter Thermoplaste (ANDRADE U. A. (2017)).

Mit dem vollständig beschriebenen Validierungsmaterial erfolgt eine Simulation der drei Ein-Element-Tests aus Kap. 4.1 und durch deren Auswertung die Generierung der virtuellen Messdaten. Darauf aufbauend werden mit dem Programmcode aus Kap. 3 die Größen ν_p , ε_{pct} , $\dot{\varepsilon}_{pct}$ und σ_{vm} bestimmt. Anschließend findet eine Gegenüberstellung mit den Werten aus der Simulation statt. Dieser Schritt ist nur bei virtuellen Messdaten möglich, weil die genannten Größen in einem realen Versuch nicht zugänglich sind. Der Wert von $\dot{\varepsilon}_{pct}$ ist im vorliegenden Beispiel für den Vergleich irrelevant, weil das Validierungsmaterial 1 kein viskoplastisches Verhalten zeigt. Damit entspricht eine Projektion der Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum in eine $\varepsilon_{pct}-\sigma_{vm}$ -Ebene unmittelbar der vorgegebenen Fließkurve.

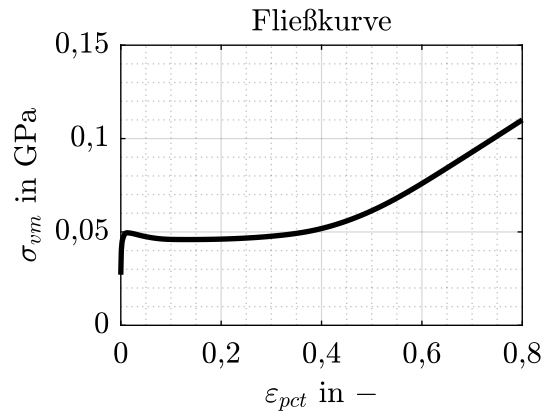


Abbildung 4.4: Validierungsmaterial 1 und 3: Fließkurve

Im linken bzw. rechten oberen Teil von Abb. 4.5 sind in Schwarz die Fließkurve und die plastische Querkontraktion des Validierungsmaterials 1 dargestellt. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass aufgrund der inkompressiblen Plastizität die plastische Querkontraktion einen konstanten Wert von 0,5 aufweist. Ergänzt werden die Kurven jeweils durch ihre für alle drei Ein-Element-Tests berechneten Gegenstücke. Im linken bzw. rechten unteren Teil der Abbildung erfolgt die Quantifizierung der relativen Abweichungen für jeden Zeitschritt. Mit dem in der Simulation unmittelbar zur Verfügung stehenden Wert $\sigma_{vm}|_{Sim}$ berechnet sich der Fehler $\epsilon_{\sigma_{vm}}$ gemäß:

$$\epsilon_{\sigma_{vm}} = \left| \frac{\sigma_{vm} - \sigma_{vm}|_{Sim}}{\sigma_{vm}|_{Sim}} \right|. \quad (4.1)$$

Für ϵ_{ν_p} gilt:

$$\epsilon_{\nu_p} = \left| \frac{\nu_p - \nu_p|_{Sim}}{\nu_p|_{Sim}} \right|. \quad (4.2)$$

Es zeigt sich, dass die relativen Fehler $\epsilon_{\sigma_{vm}}$ und ϵ_{ν_p} für alle Zeitschritte kleiner als 5×10^{-5} bzw. 5×10^{-3} ausfallen. Auffällig ist, dass zu Beginn des elasto-plastischen Regimes größere relative Abweichungen in σ_{vm} auftreten. Als Hauptursache werden die zu Beginn der Simulationen sehr kleinen Spannungen und Verzerrungen in den Elementen identifiziert, infolge derer Rundungsfehler sowie Fehler bei der numerischen Approximation von Differentialen und Integralen stärker ins Gewicht fallen. Wahrscheinlich ist zudem, dass durch die Begrenzung der Ausgabe von *LS-DYNA* auf 1×10^4 Zeitschritte der exakte Übergang zwischen dem elastischen und dem elasto-plastischen Regime zwischen zwei Stützstellen liegt. Auch dieser Umstand kann im Zusammenhang mit dem beobachteten Verhalten eine Rolle spielen.

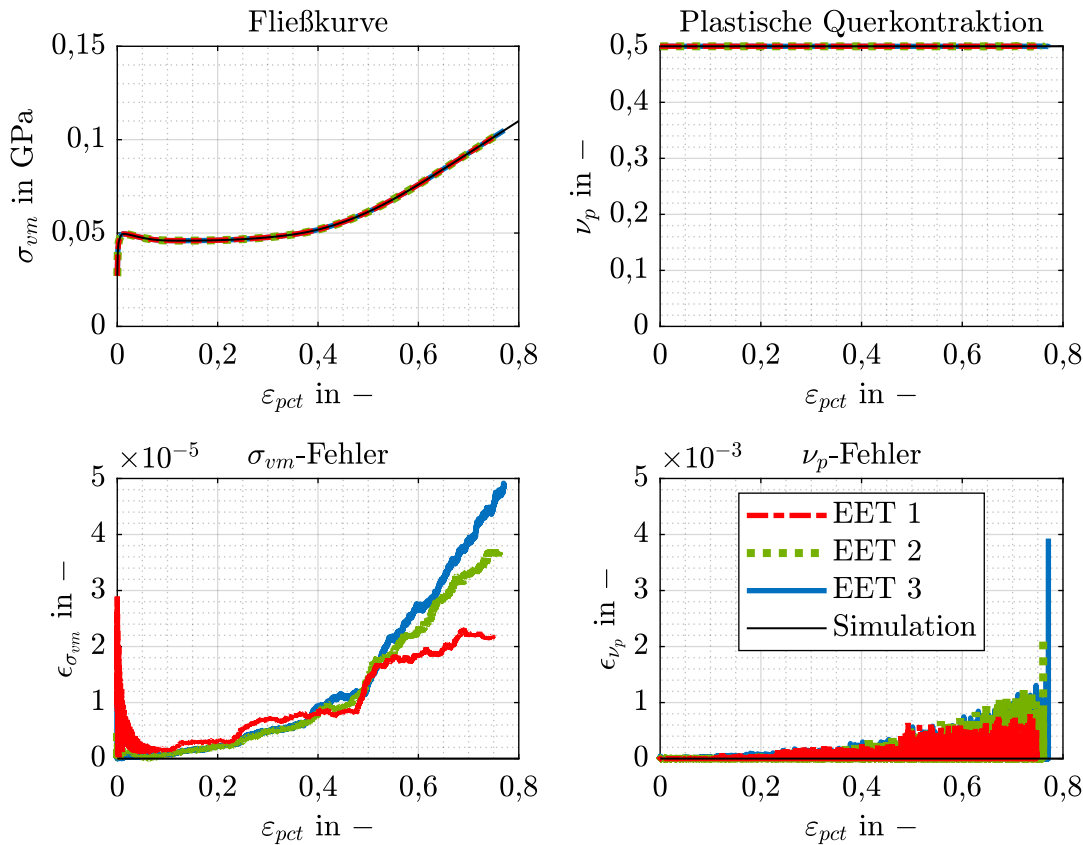


Abbildung 4.5: Validierungsmaterial 1: Beurteilung der Güte der berechneten Größen

Ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,1$ lassen sich sowohl für σ_{vm} als auch für ν_p Anstiege der relativen Abweichungen feststellen. Neben sich aufsummierenden Fehlern bei der numerischen Lösung der Differentialgleichungen ist die algorithmische Beschränkung von ν_p auf einen Maximalwert von 0,5 ein möglicher Grund. Da gemäß Kap. 3.4.1 bei einer Überschreitung dieses Werts ein Korrekturalgorithmus aktiviert wird, nicht jedoch bei einem betragsmäßig gleichen Fehler mit entgegengesetztem Vorzeichen, sind Oszillationen denkbar.

4.2.2 Elasto-viskoplastisches Verhalten mit inkompressibler Plastizität

Eine Erweiterung der Komplexität um Viskoplastizität lässt sich ebenfalls mit *MAT_024 abbilden. Hierzu wird bei der Konzeption des Validierungsmaterials 2 der Flag VP=1 gesetzt und die Fließkurve aus Abb. 4.4 um neun weitere Kurven ergänzt, welche verschiedene konstante Werte für $\dot{\varepsilon}_{pct}$ repräsentieren (HALLQUIST (2020B)). Die resultierende Fließkurvenschar ist in Abb. 4.6 dargestellt. Wie in Kap. 4.2.1 orientiert sich das viskoplastische Verhalten an einem realen Thermoplast. Indem zwischen den Fließkurven

4 Validierung der direkten Kalibrierung

unter der Annahme einer linearen Abhängigkeit von $\ln(\dot{\epsilon}_{pct}/\dot{\epsilon}_{ref})$ und σ_{vm} interpoliert wird, ergibt sich die in Abb. 4.7 gezeigte Fläche. $\dot{\epsilon}_{ref}$ ist dabei 1 ms^{-1} . Die Farbgebung der Kurven entspricht Abb. 4.6.

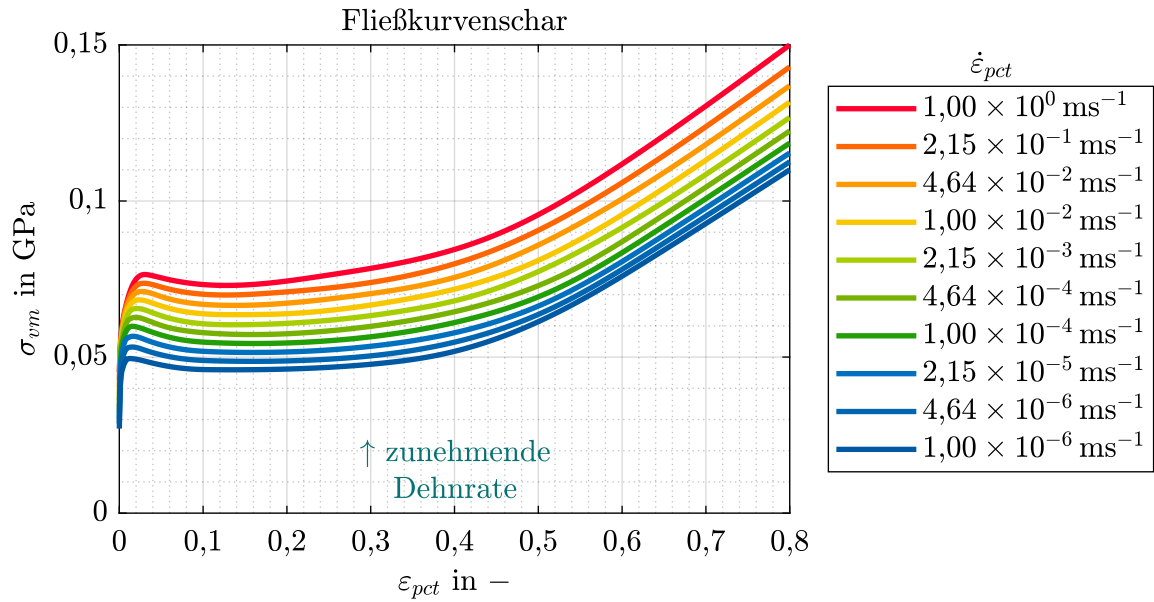


Abbildung 4.6: Validierungsmaterial 2, 4 und 5: Fließkurvenschar – 1/2

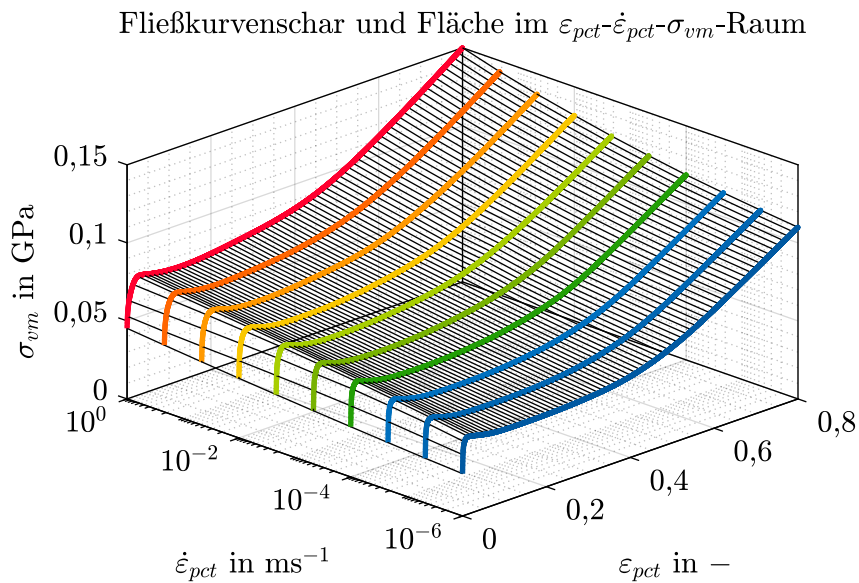


Abbildung 4.7: Validierungsmaterial 2, 4 und 5: Fließkurvenschar – 2/2

Analog zum vorherigen Abschnitt werden mit dem Validierungsmaterial 2 und den vorgestellten Ein-Element-Tests virtuelle Messdaten generiert. Anschließend erfolgt mit dem Programmcode die Berechnung der Modellparameter des elasto-viskoplastischen Regimes. In Abb. 4.8 ist der Vergleich zwischen den Größen aus der Simulation und den Ergebnissen des Verfahrens dargestellt. Der jeweilige Pfad im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum verläuft auf der Fläche, die von der Fließkurvenschar aufgespannt wird.

Bis auf einen einzelnen Ausreißer von ε_{ν_p} fallen die relativen Fehler ähnlich zu denen aus dem vorherigen Beispiel aus und sind kleiner als 5×10^{-5} bzw. 5×10^{-3} . Grundsätzlich lässt sich das beobachtete Verhalten auf die bereits in Kap. 4.2.1 thematisierten Ursachen zurückführen. Bezüglich der Anomalie in ν_p im ersten Zeitschritt des elasto-viskoplastischen Regimes ist zu ergänzen, dass dort gemäß Gl. (3.87) und Gl. (3.88) sehr kleine plastische Dehnraten dividiert werden. Die daraus resultierenden numerischen Fehler sind beim Ein-Element-Test 1 am größten, weil sich im uniaxialen Fall durch die Abwesenheit von σ_{yy} die Größe σ_{xx} aus den Gleichungen kürzt und infolgedessen die plastische Querkontraktion ausschließlich vom Verhältnis der plastischen Dehnraten abhängt.

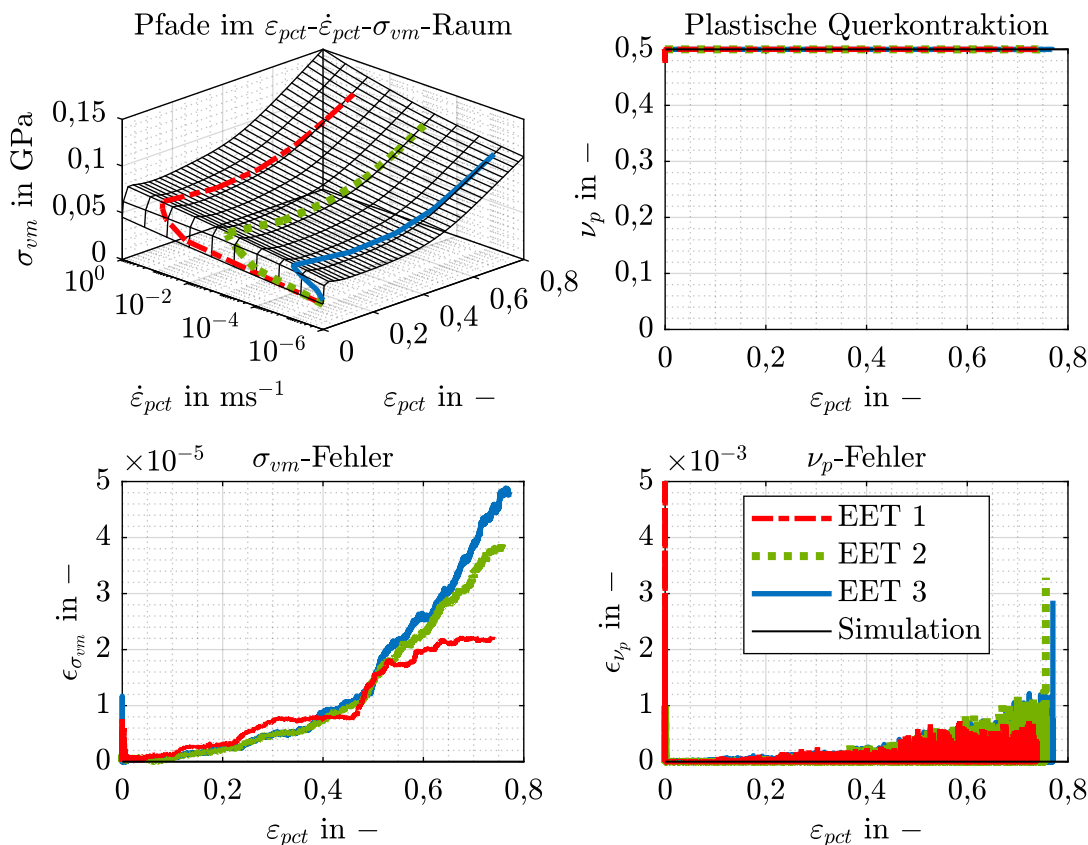


Abbildung 4.8: Validierungsmaterial 2: Beurteilung der Güte der berechneten Größen

4.2.3 Elasto-plastisches Verhalten mit kompressibler Plastizität

Durch einen Wechsel des Materialmodells zu *SAMP-1* bzw. *MAT_187 kann kompressible Plastizität abgebildet werden. Hierzu ist für ν_p innerhalb des Wertebereichs aus Gl. (2.70) entweder ein konstanter Wert oder eine Kurve in Abhängigkeit von ε_{pct} vorzugeben. Im Rahmen der Konzeption des Validierungsmaterials 3 wird die Fließkurve aus Abb. 4.4 durch einen ν_p -Verlauf nach Abb. 4.9 ergänzt. Dieser weist Merkmale auf, die typisch für einen Thermoplast sind. Hinsichtlich ν_p bei $\varepsilon_{pct} = 0$ wird der allgemeinste Fall angenommen, bei dem dieser Startwert nicht ν , hier 0,35, entspricht. Der ν_p -Verlauf enthält darüber hinaus ein Intervall $\varepsilon_{pct} \in (0,05, 0,35)$, in dem durch $\nu_p < \nu$ im Materialmodell die Aktivierung der Rückkopplung aus Kap. 2.2.4 erfolgt. Dementsprechend wird ν zeitabhängig. Für $\varepsilon_{pct} \geq 0,65$ ist $\nu_p = 0,5$.

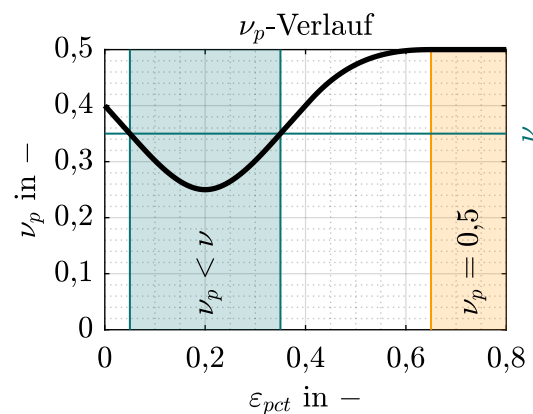


Abbildung 4.9: Validierungsmaterial 3 bis 5: ν_p -Verlauf

Die in Kap. 2.1.5 genannten Versionen von *LS-DYNA* beinhalten für *SAMP-1* die Option, die Fallunterscheidung im Return-Mapping-Algorithmus nach Kap. 2.2.4 zu deaktivieren. Diese Möglichkeit wird genutzt. Zur Quantifizierung der relativen Abweichung des berechneten ν_p von dem in der Simulation vorgegebenen Wert findet darüber hinaus die Auswertung einer neuen *Geschichtsvariable* statt.

In Abb. 4.10 sind die berechneten Größen σ_{vm} , ν_p und ε_{pct} den Werten aus der Simulation gegenübergestellt. Im Vergleich zu den bisherigen Validierungsmaterialien verbleibt ϵ_{ν_p} auf dem gleichen Niveau. Dagegen ist auffällig, dass $\epsilon_{\sigma_{vm}}$ so lange tendenziell klein ausfällt, wie $\nu_p < 0,5$ ist. Für alle Ein-Element-Tests lässt sich ein starker Anstieg der relativen Fehler in σ_{vm} beobachten, sobald der ν_p -Verlauf aus Abb. 4.9 auf den konstanten Wert von 0,5 zugeht. Dieser Umstand erhärtet die Vermutung aus Kap. 4.2.1, dass die

algorithmische Beschränkung von ν_p auf einen Maximalwert von 0,5 Oszillationen begünstigt. Es wird erneut darauf hingewiesen, dass der Korrekturalgorithmus für die plastische Querkontraktion ausschließlich bei einer Überschreitung von 0,5 eingreift, nicht jedoch bei einem betragsmäßig gleichen Fehler mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für den EET 1 zeigt sich im Intervall $\varepsilon_{pct} \in (0, 0,05)$ eine Art Schwingung in ϵ_{ν_p} , die abrupt eliminiert wird, sobald $\nu_p < \nu$ ist und zur Berücksichtigung der zeitabhängigen Querkontraktion die Aktivierung der äußeren Iteration aus Abb. 3.5 erfolgt. Als mögliche Gründe werden die in Kap. 4.1 diskutierten numerischen Fehler bei der Simulation des idealen uniaxialen Spannungszustands sowie die sehr kleinen plastischen Dehnraten in den ersten Zeitschritten angeführt. Da der Fehler verglichen mit den späteren Zeitschritten gering ausfällt, ist eine weitere Untersuchung der Ursache nicht Gegenstand dieser Arbeit.

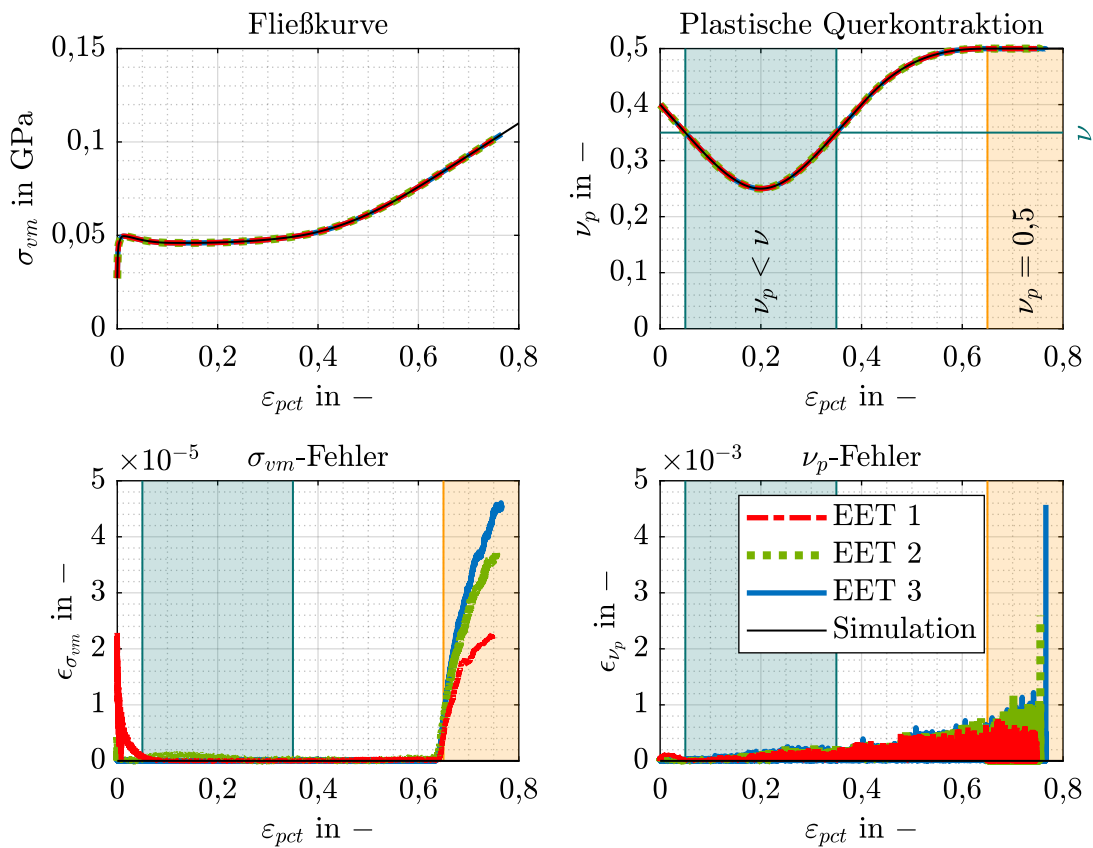


Abbildung 4.10: Validierungsmaterial 3: Beurteilung der Güte der berechneten Größen

4.2.4 Elasto-viskoplastisches Verhalten mit kompressibler Plastizität

Das Validierungsmaterial 4 zielt auf die Untersuchung von elasto-viskoplastischem Materialverhalten in Kombination mit kompressibler Plastizität ab. Hierzu wird *SAMP-1* mit einer Fließkurvenschar nach Abb. 4.6 und einem ν_p -Verlauf nach Abb. 4.9 kalibriert.

In Abb. 4.11 sind analog zu den vorhergehenden Abschnitten die Ergebnisse zusammengetragen. Im Vergleich zu den bereits thematisierten Untersuchungen zeigen sich keine neuen Phänomene. Die Größen ν_p , ε_{pct} , $\dot{\varepsilon}_{pct}$ und σ_{vm} lassen sich durch Anwendung des Verfahrens sehr präzise bestimmen.

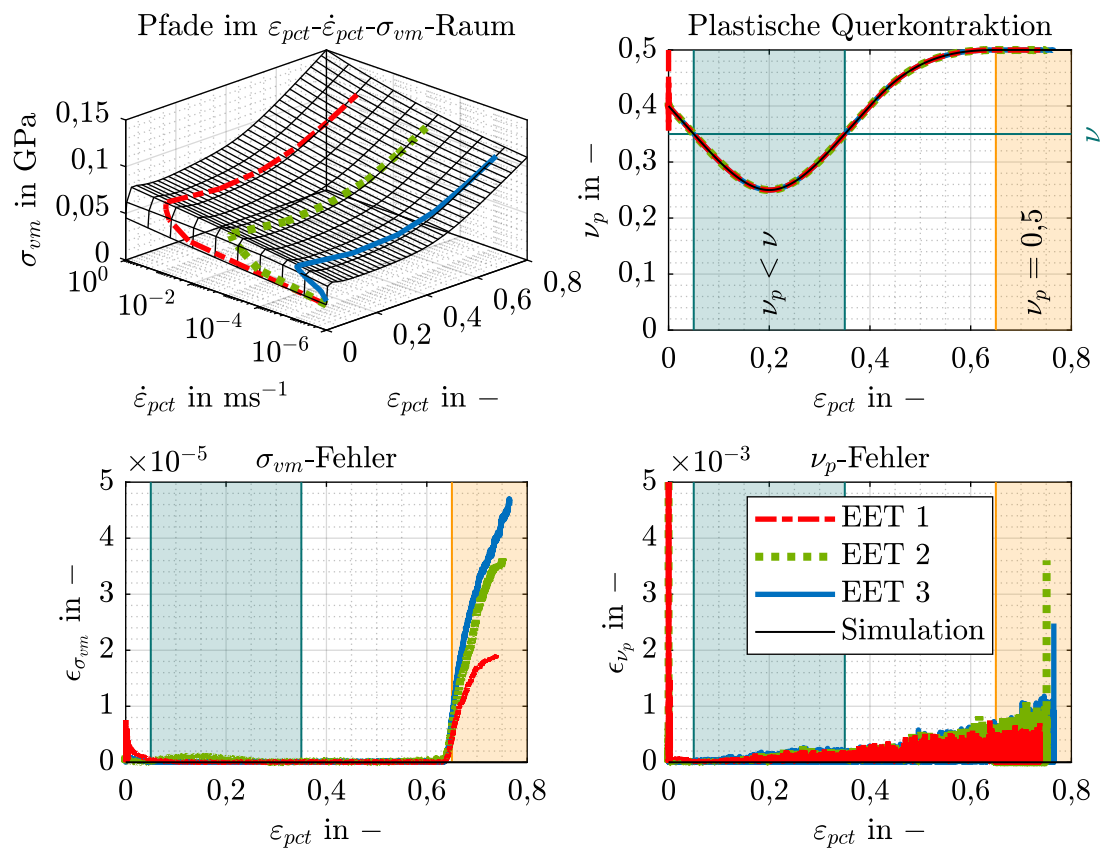


Abbildung 4.11: Validierungsmaterial 4: Beurteilung der Güte der berechneten Größen

4.2.5 Viskoelasto-viskoplastisches Verhalten mit kompressibler Plastizität

Viskoelasto-viskoplastisches Materialverhalten mit kompressibler Plastizität stellt den komplexesten Fall dar, der in dieser Arbeit untersucht wird. Zur Erzeugung des Validierungsmaterials 5 erfolgt eine Ergänzung des Validierungsmaterials 4 durch die Vorgabe

einer Relaxationsrate und eines funktionalen Zusammenhangs für die variable Materialsteifigkeit. Der gewählte Wert für β findet sich in Tab. 4.3. Er ist typisch für Materialcharakterisierungen von Thermoplasten und hinreichend groß, um die mit ihm multiplizierten Terme in Gl. (3.54) zu aktivieren. In derselben Tabelle ist auch der Parameter `FILT` angegeben, welcher gemäß HALLQUIST (2020B) der Dehnratenfilterung dient und im Rahmen der Validierung null ist. Für E_V wird die Kurve aus Abb. 4.12 verwendet, welche sich ebenfalls an realen Thermoplasten orientiert. Zur Erzeugung von LCEMOD ist bei der Kalibrierung des Materialmodells die Kurvenordinate mit einem positiven Offset von E_C zu versehen (siehe Kap. 2.2.2).

Parameter	Wert
β	10^{-2} ms^{-1}
<code>FILT</code>	0

Tabelle 4.3: Validierungsmaterial 5: zusätzliche skalare Parameter

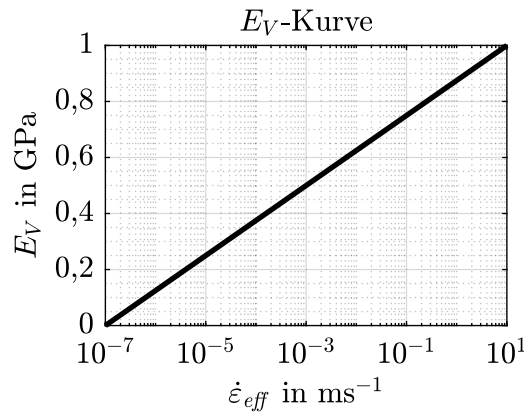


Abbildung 4.12: Validierungsmaterial 5: variable Materialsteifigkeit

In Abb. 4.13 sind die Ergebnisse der Untersuchungen dargestellt. Zusätzlich zu den bereits diskutierten Charakteristiken zeigen sich für den EET 3 in ϵ_{ν_p} bei $\epsilon_{pct} = 0,05$ und $\epsilon_{pct} = 0,35$ impulsartige Abweichungen. Der Grund dafür ist, dass hier die zeitliche Ableitung von ν aufgrund der Rückkopplung von ν_p Sprungstellen aufweist. Durch die Approximation von $\dot{\nu}$ mit einem linksseitigen Differenzenquotienten zweiter Ordnung gemäß Gl. (3.92) resultiert an diesen Stellen ein Fehler, der über P_1 bis P_3 aus Gl. (3.59) bis Gl. (3.61) in die Gleichungen eingeht. Für die Validierungsmaterialien 1 bis 4 spielt dies keine Rolle, weil durch $\beta = 0$ der Term $\boldsymbol{\psi}$ in Gl. (3.54) entfällt. Bei den anderen beiden Ein-Element-Tests zeigt sich dieses Verhalten nicht. Die Gründe dafür werden nicht weiter untersucht. Auch bezüglich des beobachteten Verhaltens, dass $\epsilon_{\sigma_{vm}}$ für den

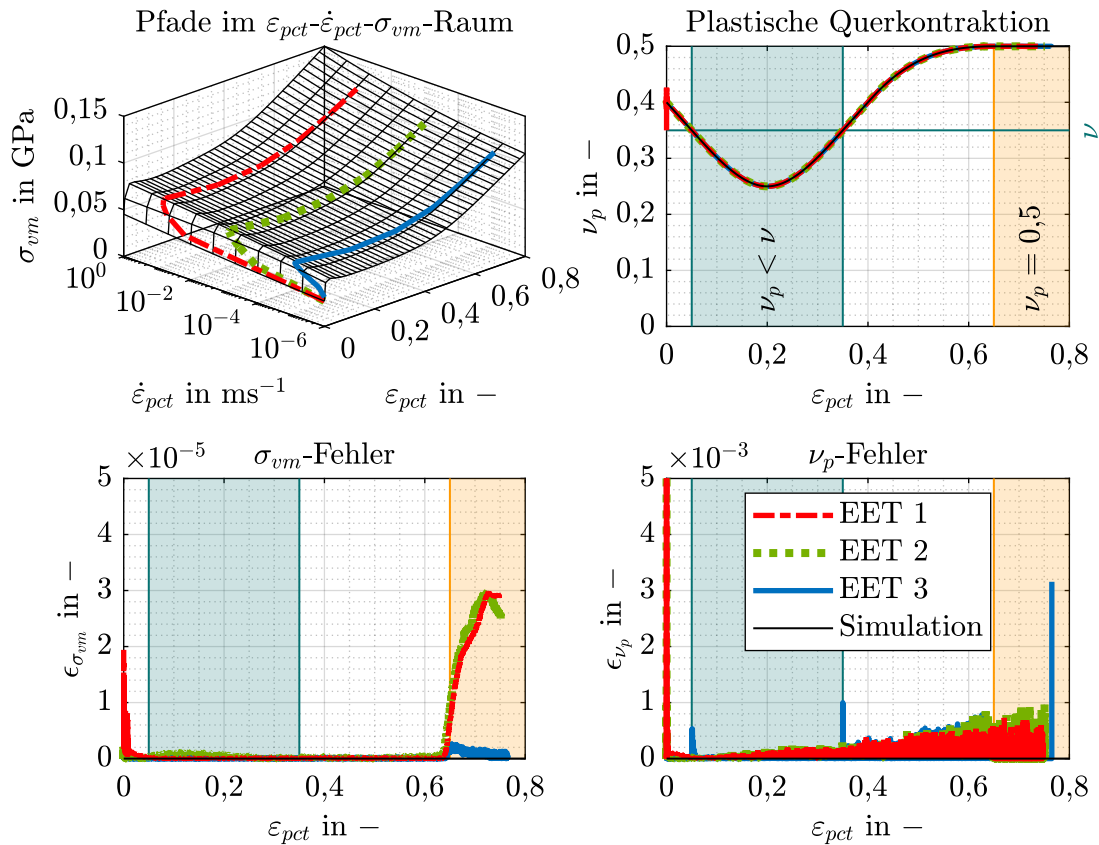


Abbildung 4.13: Validierungsmaterial 5: Beurteilung der Güte der berechneten Größen

EET 3 ab $\varepsilon_{pct} \geq 0,65$ wesentlich geringer ausfällt als beim EET 1 und beim EET 2, folgen keine zusätzlichen Analysen.

Die Bestimmung eines relativen Fehlers für E_V analog zu ν_p und σ_{vm} liefert keinen besonderen Mehrwert, weil diese Größe bei der numerischen Lösung der Integro-Differentialgleichungen als Kurve vorgegeben wird. Allerdings kann es dem Verständnis dienen, die Veränderung von E_V in Abhängigkeit der effektiven Dehnrates zu visualisieren. Zu diesem Zweck wird in Abb. 4.14 die Kurve aus Abb. 4.12 um die zusätzliche Dimension ε_{eff} zu einer Fläche erweitert. Auf dieser verlaufen die Pfade der drei Ein-Element-Tests.

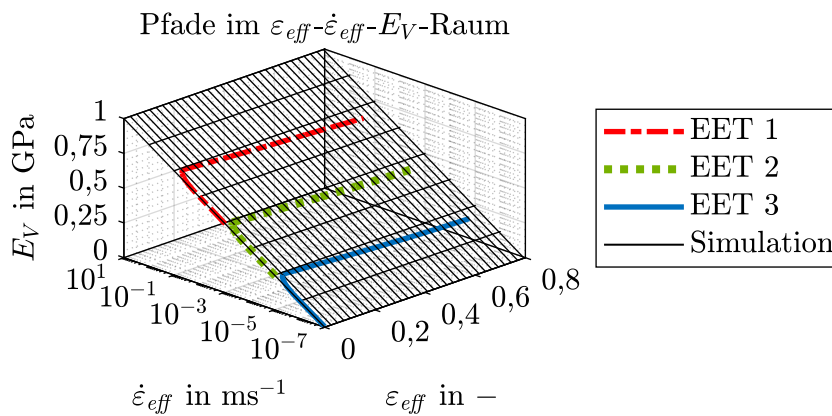


Abbildung 4.14: Validierungsmaterial 5: Pfade im $\varepsilon_{eff}-\dot{\varepsilon}_{eff}-E_V$ -Raum

4.3 Schlussfolgerungen

Die Untersuchungen aus den vorhergehenden Abschnitten zeigen, dass der Programmcode aus Kap. 3 für alle untersuchten Spannungszustände und unterstützten Komplexitätsgrade von *SAMP-1* in der Lage ist, aus den virtuellen Messdaten auf die zugrundeliegenden Modellparameter zu schließen. Wie in Kap. 4.1 erläutert, gilt dies auch bei der unmittelbaren Vorgabe des ν_p -Verlaufs nach Kap. 3.4.1.

Im nächsten Kapitel werden die Voraussetzungen zur Anwendung auf reale Zugprüfprogramme geschaffen. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der qualitativ hochwertigen Bestimmung der erforderlichen Messdaten. Außerdem wird die Charakterisierung viskoser Materialeffekte behandelt, die der gleichzeitigen Analyse mehrerer Versuche bei unterschiedlichen Dehnraten bedarf.

Auswertestrategien für Zugprüfprogramme

Die versuchsseitige Erfassung der Größen, die zur direkten Kalibrierung von *SAMP-1* erforderlich sind, ist messtechnisch herausfordernd. Entsprechende Datenanforderungen und Aufbereitungsstrategien werden im folgenden Kapitel thematisiert. Dies umfasst eine neue Methode, um mit einem einzelnen 3D-DIC-Messsystem im Zugversuch die Dicke, die Dickendehnung und die Querschnittsfläche des Prüflings zu bestimmen. Außerdem werden zur Quantifizierung der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors optimale Auswertepunkte gefunden. Da die Spannungsauswertung ebenfalls auf der Messung der Probendicke basiert, ist 3D-DIC zur Analyse von Zugversuchen jedoch noch nicht stark verbreitet, erfolgt die Konzeption eines semi-empirischen Ansatzes. Mit diesem lässt sich anhand weniger, mit 3D-DIC gewonnener Daten, die Größe σ_{xx} in ansonsten mit 2D-DIC aufgezeichneten Materialprüfungen approximieren. Zum Abschluss des Kapitels werden Ansätze vorgestellt, um auf Grundlage eines schlanken Prüfprogramms die Charakterisierung viskoelastischen und viskoplastischen Materialverhaltens vorzunehmen. In diesem Zusammenhang stehen die konstante sowie variable Materialsteifigkeit, die Relaxationsrate, die Elastizitätsgrenze und die Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum im Zentrum der Betrachtungen.

5.1 Datenbasis

Die Strategien zur adäquaten Auswertung von Zugversuchen basieren neben Literaturquellen insbesondere auf den Erkenntnissen aus zwei unternehmensinternen Prüfprogrammen der Mercedes-Benz AG. Davon stammt das erste aus der Zeit vor dieser Arbeit und das zweite aus demselben Zeitraum. Beide umfassen Zugversuche mit aus spritzgegossenen Platten gefrästen Proben der Dicke $\delta_0 = 2 \text{ mm}$ bei Raumtemperatur.

Die gewählte Probengeometrie entspricht dem Typ 3 der DIN EN ISO 8256 (2005), welcher einen 10 mm langen und 10 mm breiten Parallelbereich aufweist. Jeweilige Untersuchungen der nominellen Dehnraten 10^{-5} ms^{-1} , 10^{-3} ms^{-1} und 10^{-1} ms^{-1} stellen eine besondere Aussagekraft im Hinblick auf die Analyse von Crashlastfällen sicher. Als *nominelle Dehnrates* $\dot{\epsilon}_{nom}$ ist dabei die Dehnrates zu verstehen, welche sich zu Beginn des Zugversuchs bei kleinen Dehnungen im Parallelbereich der Probe in Abzugsrichtung einstellt. Die praktische Umsetzung erfolgt, indem bei der Wahl der Traversengeschwindigkeit der Einfluss der höheren Steifigkeit aufgrund der Querschnittszunahme im Bereich der Schultern des Prüflings berücksichtigt wird. Hierzu ist anstelle der *Einspannlänge*, die den Anfangsabstand zwischen den Spannbacken bezeichnet, eine sogenannte *reduzierte Einspannlänge* heranzuziehen. Diverse Autoren, wie z. B. KEUERLEBER (2006) und BIERÖGEL (2015), verweisen diesbezüglich auf die zurückgezogene DIN 53455 (1981).

Für alle Versuche liegen Aufzeichnungen mit einem DIC-System vor. Die Referenzlänge der zugehörigen Auswertungen reflektiert die Elementkantenlänge des FEM-Modells nach Kap. 6.1.1 und beträgt ca. 2 mm (siehe Kap. 2.3). Grundsätzlich existieren zu jeder Abzugsgeschwindigkeit drei gültige Versuchswiederholungen.

Das *Prüfprogramm 1* umfasst Zugversuche mit einem Polycarbonat/Acrylnitril-Butadien-Styrol-Blend mit reduziertem PC-Anteil (PC/ABS R) und einem reinen Polypropylen (PP). Von diesen gibt es jeweils 2D-DIC-Aufnahmen einer Front- und Seitenkamera. In Abb. 5.1 ist der Versuchsaufbau zum Zeitpunkt $t = 0$ skizziert. Wie dort dargestellt, beträgt die Einspannlänge 30 mm. Für zusätzliche Werkstoffprüfungen bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ mit Material derselben Chargen stehen 3D-DIC-Aufnahmen zur Verfügung, die auf den Einsatz von zwei Frontkameras zurückgehen. Die Versuche berücksichtigen durch eine auf 35 mm vergrößerte Einspannlänge die Anforderungen aus Kap. 5.3 zur Erfassung der Dicke, der Dickendehnung und der Querschnittsfläche des Prüflings. In Abb. 3.1 findet sich eine Darstellung des beschriebenen Versuchsaufbaus zum Zeitpunkt $t = 0$. Eine kurze Übersicht zum Prüfprogramm 1 gibt Tab. 5.1.

Materialien	PC/ABS-Blend mit reduziertem PC-Anteil (PC/ABS R) reines Polypropylen (PP)
DIC	grundsätzlich 2D-DIC zusätzlich 3D-DIC für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$
Einspannlänge	30 mm bei 2D-DIC 35 mm bei 3D-DIC

Tabelle 5.1: Übersicht zum Prüfprogramm 1

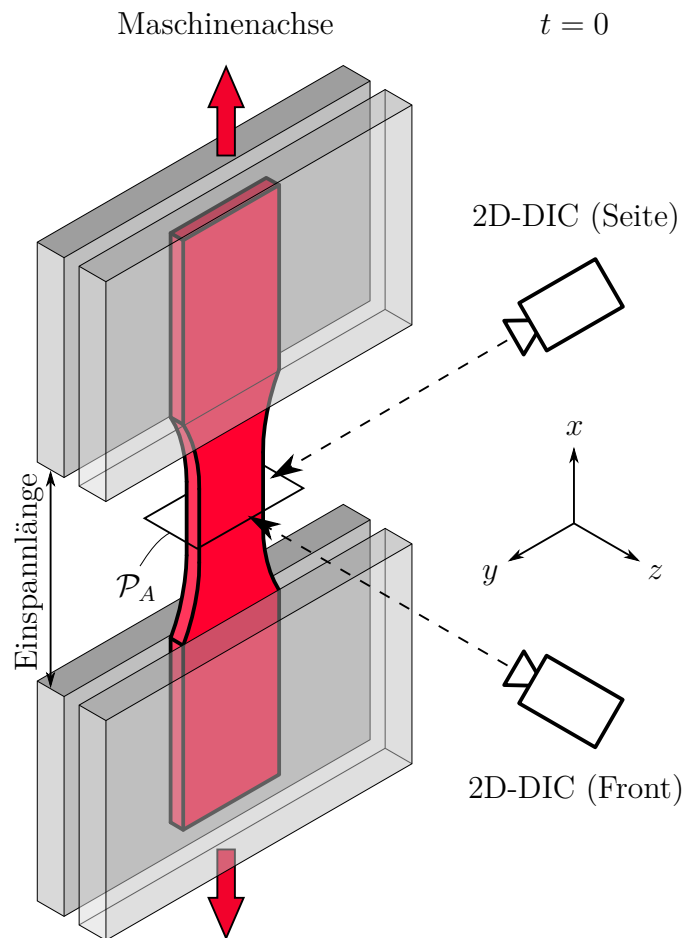


Abbildung 5.1: Zugversuch mit Front- und Seitenkamera zum Zeitpunkt $t = 0$

Im Rahmen des *Prüfprogramms 2* liegen mit zwei Frontkameras generierte 3D-DIC-Daten zu Zugversuchen mit einem Polycarbonat/Acrylnitril-Butadien-Styrol-Blend mit erhöhtem PC-Anteil (PC/ABS E) und einem Polypropylen mit 20 % Talkum (PP T20) vor. Eine Einspannlänge von 35 mm berücksichtigt die Anforderungen aus Kap. 5.3 hinsichtlich der Versuchsauswertung. Tab. 5.2 beinhaltet eine kurze Übersicht.

Materialien	PC/ABS-Blend mit erhöhtem PC-Anteil (PC/ABS E) Polypropylen mit 20 % Talkum (PP T20)
DIC	grundsätzlich 3D-DIC
Einspannlänge	35 mm

Tabelle 5.2: Übersicht zum Prüfprogramm 2

Die Eigenschaften der untersuchten Thermoplaste decken alle Komplexitätsgrade ab, die *SAMP-1* bzw. das dafür ausgearbeitete Verfahren unterstützt. PC/ABS R verhält sich rein linear-elastisch und plastifiziert mit zunehmender Dehnung tendenziell volumenerhaltend. Letzteres gilt auch für den Werkstoff PC/ABS E, dessen elastische Charakteristiken im Gegensatz zu PC/ABS R jedoch dehnratenabhängig sind. Auch für PP ist viskoelastisches Verhalten typisch. Darüber hinaus variiert die plastische Querkontraktion dieses Materials innerhalb eines großen Wertebereichs, der beidseitig bis an die Grenzen des Modells heranreicht. Unter den betrachteten Thermoplasten weist PP T20 die mit Abstand ausgeprägtesten viskoelastischen Eigenschaften auf. Außerdem plastifiziert es mit zunehmender Dehnung unter starker Volumenzunahme.

Eine ausführliche Auseinandersetzung mit den Versuchsdaten findet in Kap. 6 statt. Zu Anschauungszwecken werden einzelne Beispiele bereits in den folgenden Ausführungen aufgegriffen.

5.2 Datenanforderungen

Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren stellt spezielle Anforderungen an die Versuchsdaten. Drei besonders wichtige Punkte werden nachfolgend behandelt.

5.2.1 Vermeidung versuchsbedingter Nichtlinearitäten

In der Literatur wird darauf hingewiesen, dass bei der Auswertung von quasistatischen Zugversuchen ein nichtlinearer Anfangsbereich in Spannungs-Dehnungs-Kurven auftreten kann, wie er in Abb. 5.2 skizziert ist. Ursachen dafür können, abhängig von der verwendeten Messtechnik, unter anderem ein anfängliches mechanisches Spiel in der Prüfmaschine, ein Eingraben der Spannbacken in das Probenmaterial oder ein Begraden, Rutschen oder Ausrichten des Prüflings sein (LEDWORUSKI U. A. (1999) sowie LORD UND MORRELL (2006)). HAASE (2018–2022) sieht darüber hinaus eine mögliche Fehlerquelle in der zeitlichen Synchronisierung von Kraftsignal und DIC-Daten.

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls in einem quasistatischen Versuch, in dem diese Effekte auftreten, kann im Spannungs-Dehnungs-Diagramm z. B. nach den Normen ASTM E8/E8M (2021) und ASTM D638 (2014) ein neuer Ursprung O' definiert werden. Da eine derartige Korrektur im Hinblick auf die Kompatibilität mit den Felddaten jedoch kritisch zu betrachten ist, gefährden solche Effekte die Anwendbarkeit des entwickelten Verfahrens. Dementsprechend müssen sie durch eine sorgfältige Versuchsplanung und -durchführung minimiert bzw. vermieden werden. Neben der Probenfertigung und

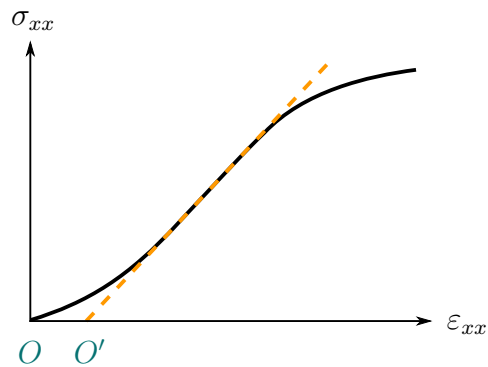


Abbildung 5.2: Versuchsbedingter nichtlinearer Anfangsbereich

der Wahl geeigneter Spannbacken ist ein Winkelversatz zwischen der Längsachse des eingespannten Prüflings und der Maschinenachse eine häufige Fehlerquelle, die es zu eliminieren gilt. Eine Einhaltung der in Kap. 3.1.3 erläuterten Einspannung ist essentiell.

Sämtliche der beschriebenen Ursachen für versuchsbedingte Nichtlinearitäten im quasi-statischen Dehnratenbereich können auch bei Hochgeschwindigkeitszugversuchen auftreten und sind entsprechend zu adressieren. Zusätzlich ist es, je nach geprüfter nomineller Dehnrates und eingesetztem Messequipment, möglich, dass bei der zeitlichen Synchronisierung von Kraftsignal und DIC-Aufzeichnung die Laufzeit der mechanischen Welle zum Kraftsensor berücksichtigt werden muss (HAASE (2018–2022)). Darüber hinaus lässt sich regelmäßig die Überlagerung der zu prüfenden Materialantwort durch Schwingungen beobachten. BÖHME U. A. (2007) verweisen in diesem Zusammenhang insbesondere auf die Störanfälligkeit des Kraftmesssystems und unterbreiten Vorschläge, wie Oszillationen in der Kraft durch einen geeigneten Versuchsaufbau reduziert bzw. vermieden werden können. Zu guter Letzt sind auf Schnellzerreißen gemäß KEUERLEBER (2006) Abweichungen von der Sollgeschwindigkeit möglich, die in Kombination mit viskoelastischem Materialverhalten gegebenenfalls Krümmungen in Spannungs-Dehnungs-Kurven verursachen. Dies ist bei der Auswahl der eingesetzten Prüfmaschinen zu beachten.

Die Prüfprogramme aus Kap. 5.1 berücksichtigen die in diesem Abschnitt thematisierten Punkte. Entsprechend ist in den Daten die Ausprägung der beschriebenen versuchsbedingten Nichtlinearitäten sehr gering.

5.2.2 Datenglättung

Das Verfahren zur direkten Kalibrierung von *SAMP-1* ist sensitiv gegenüber verrauschten Messdaten. Einer der Gründe dafür ist das Auftreten der materiellen bzw. partiellen

Zeitableitungen verschiedener Größen in den Differentialgleichungen. Bei deren Berechnung mit Differenzenquotienten wird Signalrauschen verstärkt. Hinreichend glatte Daten sind deshalb eine essentielle Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode.

In eingehenden Untersuchungen verschiedener Glättungsverfahren aus der Statistik und Signalverarbeitung erweisen sich Ansätze auf Spline-Basis als besonders vielversprechend. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit *B-Splines* eingesetzt, um Felddaten und skalare Messwerte in der Zeit bzw. in Raum und Zeit zu glätten. Nicht in allen Fällen sind dafür offene uniforme Knotenvektoren geeignet. Die Wahl der Knotenanzahl und Knotenpositionen gestaltet sich damit als nichtlineares, multivariates, üblicherweise multimodales Optimierungsproblem (YOSHIMOTO U. A. (2003)). Zur effizienten Adressierung dieser Herausforderung wird das Verfahren nach DUNG UND TJAHOJOWIDODO (2017) implementiert, welches unter Berücksichtigung einer zulässigen Fehlerschranke eine optimierte B-Spline-Approximation berechnet. Dabei erfolgt automatisiert die Identifikation erforderlicher multipler Knoten zur Wiedergabe von un stetigen Übergängen, Spitzen und Extrempunkten in den Daten. Durch den Einsatz eines *Bisektionsalgorithmus* zur Datensegmentierung und die Verwendung des *Gauß-Newton-Verfahrens* zur Lösung der nichtlinearen Optimierungsprobleme werden kurze Rechenzeiten realisiert (DUNG UND TJAHOJOWIDODO (2017)).

Treten in einem Hochgeschwindigkeitszugversuch trotz entsprechender Vorkehrungen Oszillationen im Kraftsignal auf, wird gemäß BÖHME U. A. (2007) eine nachträgliche Signalglättung vorgenommen, die die Messung auf signifikante Merkmale reduziert. In diesem Fall findet die Datenaufbereitung mit einem *Butterworth-Filter* (BUTTERWORTH (1930)) statt. Um eine *Null-Phasen-Filterung* zu erzielen, wird ein *Vorwärts/Rückwärts-Filtermodell* angesetzt (GUSTAFSSON (1996)). Die Analyse der DIC-Aufzeichnung des Versuchs trägt dazu bei, den Anteil des Kraftsignals, welcher zur Materialantwort der Probe gehört, zu identifizieren.

5.2.3 Korrektur des Koordinatensystems aus der DIC

Für Messungen von ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{xy} in einem Versuch ist es hinreichend, wenn sie in einem globalen Koordinatensystem zur Verfügung stehen, dessen Achsen gemäß der in Kap. 3.1 eingeführten Definition ausgerichtet sind. Dahingegen erfordert die Bestimmung der Dicke, der Dickendehnung und der Querschnittsfläche des Prüflings gemäß Kap. 5.3 sowie der Vergleich mit einer Simulation auch eine korrekte Festlegung des Koordinatenursprungs. Sofern dies für eine mit *GOM Correlate* generierte Flächenkomponente nach Kap. 2.3 nicht der Fall ist, muss eine translatorische Korrektur ihrer x - und y -Koordinaten nachträglich erfolgen. Zur Veranschaulichung der Problemstellung sowie des nachfolgend vorgestellten Vorgehens wird auf Abb. 5.3 verwiesen. Die zugehörigen

1) DIC-Koordinaten in der Ausgangssituation

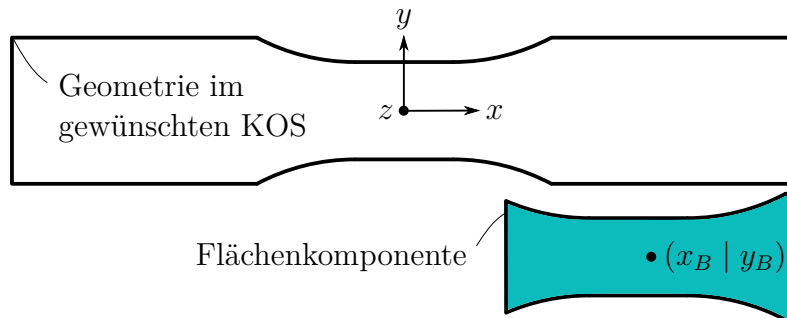
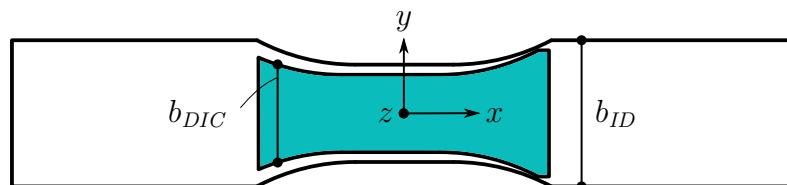
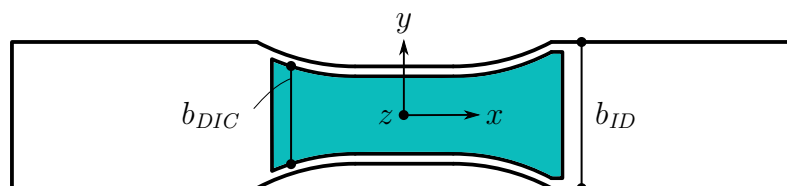
2) Starrkörpertranslation von $(x_B | y_B)$ in den Ursprung3) Korrektur der x -Koordinaten auf Basis von b_{DIC} und b_{ID} 

Abbildung 5.3: Translation der DIC-Daten in das definierte Koordinatensystem

Betrachtungen setzen voraus, dass sich die Flächenkomponente über den gesamten sichtbaren Bereich zwischen den Spannbacken erstreckt.

In einem ersten Schritt werden für den Zeitpunkt $t = 0$ dreidimensionale Oberflächennmessungen in die x - y -Ebene projiziert. Bei zweidimensionalen Daten entfällt dies. Anschließend wird der Flächenschwerpunkt $(x_B | y_B)$ der zweidimensionalen Punktwolke anhand der x - und y -Koordinaten ihrer Einhüllenden berechnet und dieser durch eine Starrkörpertranslation in den Ursprung des Zielkoordinatensystems verschoben. Während die auf diese Weise durchgeführte y -Translation erfahrungsgemäß hinreichend genau ist, gilt dies regelmäßig nicht für die berechnete x -Translation. Der Grund dafür ist eine zur Probenmitte unsymmetrische Ausleuchtung in der Nähe der Spannbacken, insbesondere aufgrund von Schatten. Aus einer darauf zurückzuführenden unsymmetrischen Auswertbarkeit des stochastischen Musters folgt eine Asymmetrie der DIC-Daten, welche

sich unmittelbar in der berechneten x -Translation niederschlägt. Zu Anschauungszwecken ist der Effekt in Abb. 5.3 unrealistisch groß dargestellt. Um auch in solchen Fällen zuverlässige Ergebnisse zu erzielen, wird die lokale Breite der Flächenkomponente b_{DIC} mit der der idealen Probengeometrie b_{ID} abgeglichen und daraus ein Korrekturterm für die x -Koordinaten ermittelt.

Bei der Anwendung auf die vorliegende Datenbasis erweist sich das beschriebene Vorgehen als besonders robust. Ein alternativer Ansatz, welcher auf einem *Iterative-Closest-Point-Algorithmus* basiert, wird aufgrund seiner Sensitivität gegenüber Artefakten aus der Messtechnik zügig verworfen.

5.3 Erfassung der Dicke, Dickendehnung und Querschnittsfläche des Prüflings

Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Erfassung der Dicke, der Dicken-
dehnung und der Querschnittsfläche des Prüflings mittels digitaler Bildkorrelation.

5.3.1 Identifikation der Herausforderungen

Chronologisch vor dieser Arbeit wird in BENZ (2018) mit den seitlichen 2D-DIC-Daten von PC/ABS R aus dem Prüfprogramm 1 die Größe ε_{zz} am Probenrand bestimmt und als Näherung für den materiellen Punkt im Einschnürzentrum angesetzt. Außerdem erfolgt unter Einbeziehung der 2D-DIC-Aufnahmen der Frontkamera die Quantifizierung der Querschnittsfläche des Prüflings A in der Einschnürebene \mathcal{P}_A . Beiden Approximationen liegt die Annahme eines rechteckig verbleibenden Querschnitts zugrunde. Die Untersuchungsergebnisse deuten auf große Unsicherheiten in den auf diese Weise bestimmten Daten hin. Daraus wird gefolgert, dass die getroffene Annahme nicht haltbar ist und sich der im Prüfprogramm 1 verwendete Versuchsaufbau nach Abb. 5.1 nicht dazu eignet, die genannten Größen mit hinreichender Präzision zu bestimmen.

Eine zusätzliche Beobachtung, die anhand der mit 2D-DIC erfassten Versuche des Prüfprogramms 1 gemacht werden kann, ist das Auftreten von Bewegungen des Prüflings senkrecht zur Maschinenachse. Auf der einen Seite sind diese so klein, dass sie bei der Detektion von Verzerrungen in x - und y -Richtung vernachlässigt werden können. Auf der anderen Seite weisen sie die gleiche Größenordnung auf wie die z -Verschiebung der Probenfront infolge der materiellen z -Verzerrung. Eine systematische Analyse derartiger Zusammenhänge ist z. B. in SUTTON U. A. (2008) enthalten.

In der vorliegenden Arbeit findet eine Untersuchung der Effekte für die Materialien des Prüfprogramms 1 auf Grundlage der mit 2D-DIC erfassten Zugversuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ statt, weil diese dort am stärksten ausgeprägt sind. Im Folgenden werden in den seitlichen DIC-Daten elf bei $t = 0$ in x -Richtung äquidistante Punkte auf dem Probenrand betrachtet, wie sie in Abb. 5.4 dargestellt sind. Sie liegen in z -Richtung jeweils mittig. Da nach Kap. 2.3 technologisch bedingt eine DIC-Auswertung nicht bis zum Rand des sichtbaren Bereichs möglich ist, beträgt der Abstand der äußersten Punkte 28 mm anstatt 30 mm. Aus der Annahme einer Symmetrie zwischen der Verschiebung der Probenfront und -rückseite in Dickenrichtung folgt die Unabhängigkeit der z -Koordinaten der Punkte von der lokalen z -Verzerrung. Dementsprechend sind Verschiebungen $\Delta z \neq 0$ unerwünschten Bewegungen des Prüflings zuzuschreiben.

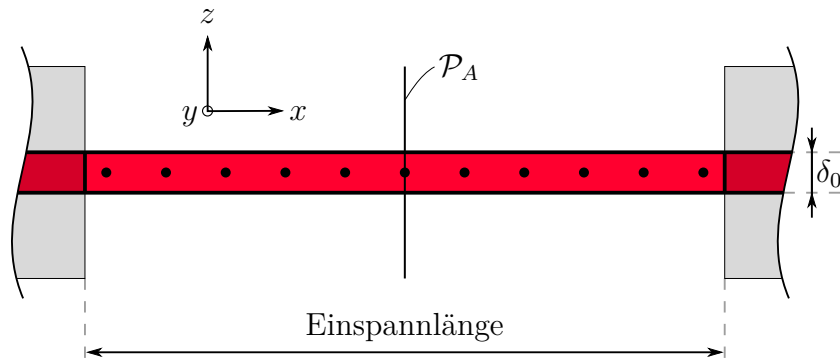


Abbildung 5.4: Perspektive der Seitenkamera zum Zeitpunkt $t = 0$ (vgl. Abb. 5.1)

In Abb. 5.5 ist beispielhaft für einen repräsentativen Versuch mit PC/ABS R für alle Punkte die Größe Δz über der x -Koordinate und der Zeit aufgetragen. Die elf blauen Verläufe werden durch die schwarz dargestellten Ergebnisse einer schrittweise linearen Regression in x -Richtung ergänzt. Bei der Betrachtung fällt auf, dass es während des Versuchs zu einem gegenseitigen Versatz der Spannbacken in z -Richtung kommt. Zurückzuführen ist dieses Verhalten auf Toleranzen in der Kolbenführung der verwendeten Zugprüfmaschine sowie in den Spannbacken selbst.

Für beide untersuchten Materialien ist die maximale Abweichung zwischen Δz und einem in x -Richtung durch lineare Regression bestimmten linearen Verlauf ca. fünf bis fünfzehn Mal kleiner als das Maximum des *Spannbackenversatzes*. Ursächlich für die Abweichungen von einem linearen Verlauf zwischen den Spannbacken sind insbesondere zwei dominierende Einflüsse: Zum einen lassen die Aufnahmen eine zusätzliche Torsion der Probe um die x -Achse erkennen. Zum anderen ist die Ausrichtung der Seitenkamera gegenüber der Normale der Seitenfläche des Probenparallelbereichs um die x -Achse verdreht. Auf Grundlage der Videoaufnahmen aller Versuche wird beiden Winkeln eine Größenordnung von ca. 1° zugeschrieben, was Effekte in der registrierten Ausprägung

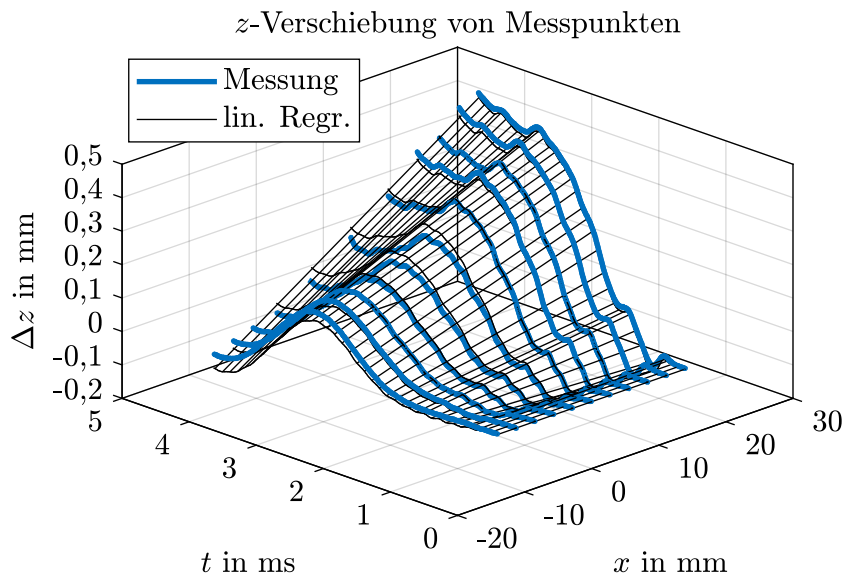


Abbildung 5.5: PC/ABS R: Auswertung der z -Verschiebung bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$

und Größe erklärt. Ein *Flattern* des Prüflings entlang der x -Achse mit einer Elongation in z -Richtung kann nicht festgestellt werden. Falls vorhanden, ist die Amplitude um Größenordnungen kleiner als die anderen Einflüsse oder die Wellenlänge der Schwingung wesentlich größer als die aktuelle Länge der Probe.

Die Untersuchungsergebnisse aus BENZ (2018) sprechen dafür, eine Approximation von ε_{zz} und A auf Basis der mit einem 3D-DIC-System gemessenen z -Verschiebung der Probenfront anzustreben. Eine derartige Strategie ist vielversprechend, wenn es gelingt, den in x -Richtung linearen Beitrag durch den Versatz der Spannbacken sowie den auf die Prüflingstorsion um die x -Achse zurückzuführenden Anteil an Δz zu isolieren und zu eliminieren. Als notwendig werden hierfür DIC-Auswertungen an den Übergängen zwischen den Schulter- und Einspannbereichen der Probe angesehen, weswegen die Einspannlänge in zugehörigen Versuchen um beidseitig 2,5 mm auf insgesamt 35 mm Länge zu vergrößern ist. Es lässt sich experimentell zeigen, dass die veränderten äußeren Zwänge, welche sich aus der in x -Richtung verlagerten Einspannung ergeben, einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Materialverhalten im Versuch haben. Auch sonst resultieren aus der Modifikation keine Nachteile, die gegen ihre Umsetzung sprechen (HAASE (2018–2022)).

In den zusätzlichen Versuchen des Prüfprogramms 1 für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ sowie allen Versuchen des Prüfprogramms 2 werden die beschriebenen Anforderungen im Hinblick auf die Versuchsauswertung berücksichtigt (siehe Kap. 5.1). Der Einsatz derselben Zugprüfmaschinen wie bei den vorhergehenden Materialprüfungen stellt eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse sicher. Hervorzuheben ist bei der erweiterten Datenbasis die gezielte Adressierung und Minimierung von systematischen Fehlerquellen in der Messtechnik,

insbesondere einer perspektivischen Ausrichtung der Kameras. Konsistent mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnissen zeigen weder die zusätzlichen Zugversuche im Prüfprogramm 1 noch die Zugversuche des Prüfprogramms 2 Flattern.

5.3.2 Korrektur des Spannbackenversatzes

Um auf die materielle z -Verzerrung schließen zu können, muss zunächst der Anteil eines Versatzes der Spannbacken in z -Richtung an der gemessenen Verschiebung der Probenfront eliminiert werden. Gemäß den Überlegungen um Abb. 5.5 ist es legitim, diesen Einfluss als in x -Richtung linear anzunehmen.

Zur Korrektur des Spannbackenversatzes werden auf der Oberfläche der Probenfront in der x - z -Ebene die zwei gegenüberliegenden materiellen Punkte an den Übergängen zwischen den Schulter- und Einspannbereichen identifiziert. Aufgrund der Entfernung zur Einschnürzone lässt sich der dort vorherrschende Spannungszustand als näherungsweise uniaxial annehmen. Zwänge durch die Spannbacken werden vernachlässigt. Damit gilt für ein isotropes Material:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy}. \quad (5.1)$$

Mit Gl. (5.1) ist es möglich, die erwartete z -Koordinate an den beiden Referenzpunkten durch Auswerten von ε_{yy} zu berechnen. Das z -Feld der Flächenkomponente aus dem Versuch wird anschließend um den erwarteten linearen Verlauf zwischen den beiden Punkten korrigiert. Dies erfolgt durch eine Projektion in z -Richtung ohne Modifikation der x - und y -Koordinaten, da die beobachteten Winkel hinreichend klein sind.

In Abb. 5.6 ist beispielhaft für einen Zugversuch mit dem Material PC/ABS E bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ die unkorrigierte Flächenkomponente zu einem Zeitpunkt kurz vor dem Versagen des Prüflings dargestellt. Abb. 5.7 zeigt das korrigierte Gegenstück. Anhand des gewählten Beispiels kann sowohl die Korrektur des Spannbackenversatzes als auch, in Kap. 5.3.3, die Korrektur der Torsion veranschaulicht werden. Im vorliegenden Versuch ist der zweite Effekt dominant, dies ist jedoch nicht zwangsläufig der Fall. Das dargestellte Dreiecksnetz wird von der Software *GOM Correlate* automatisiert angelegt. Die Elementkantenlänge und die Referenzlänge hängen nicht direkt zusammen.

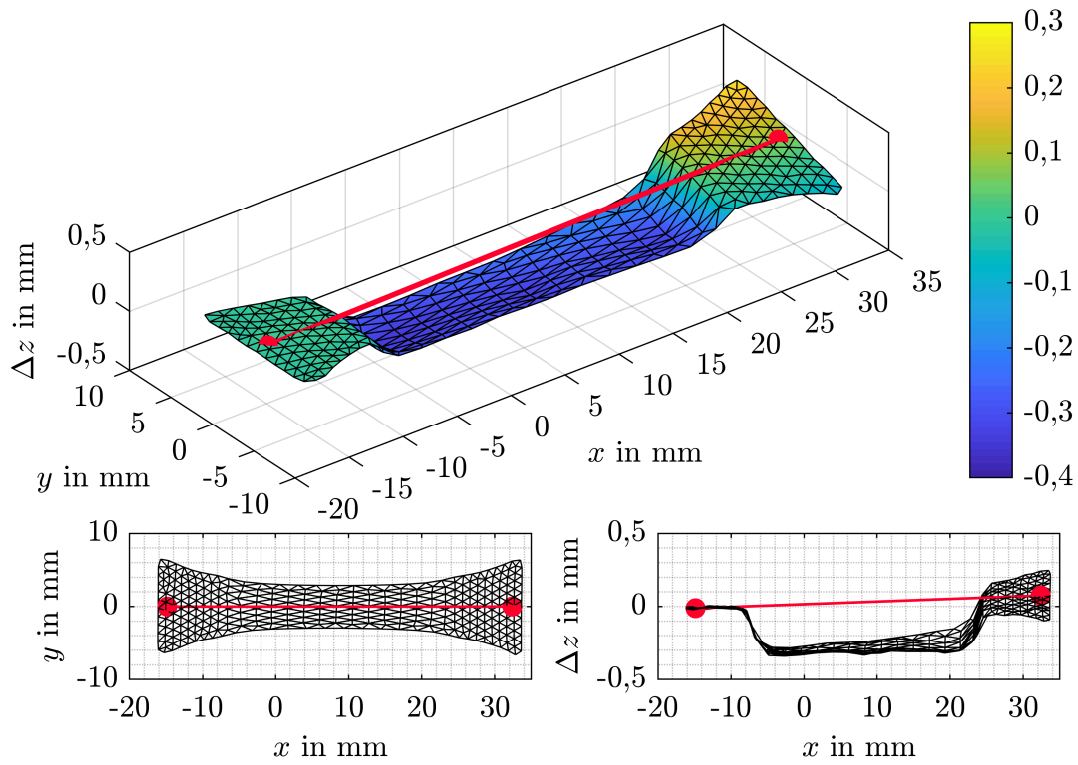


Abbildung 5.6: PC/ABS E: Korr. d. Spannbackenversatzes bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 1/2$

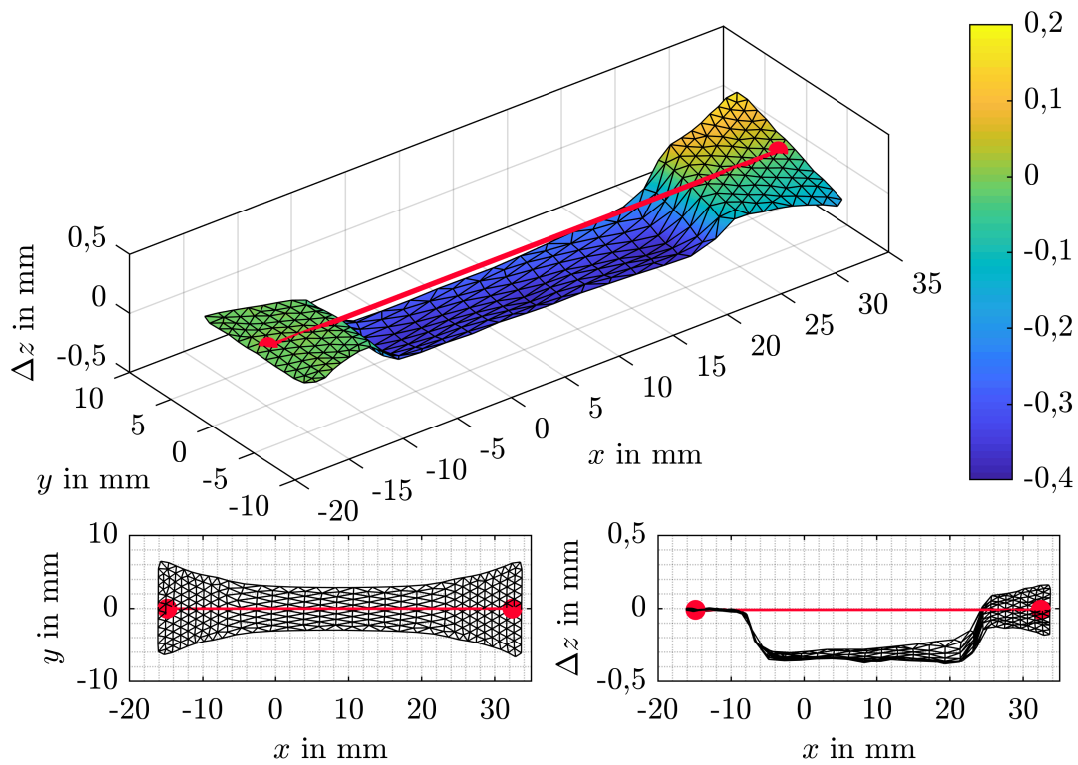


Abbildung 5.7: PC/ABS E: Korr. d. Spannbackenversatzes bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1} - 2/2$

5.3.3 Korrektur der Torsion

Der Einfluss der Torsion des Prüflings auf die z -Verschiebung der Probenfront infolge einer Verdrehung der Spannbacken um die x -Achse lässt sich mit einem diskreten Ansatz eliminieren. In einem ersten Schritt findet durch eine Gebietszerlegung eine Diskretisierung der Flächenkomponente der Probe entlang ihrer aktuellen Länge statt. Anschließend wird innerhalb eines jeden Auswertestreifens mittels linearer Regression ein Ausgleichselement an die Knotenkoordinaten der DIC-Daten angepasst. Diese Elemente berücksichtigen in y -Richtung einen linearen und in x -Richtung einen konstanten Verlauf von Δz .

Die Korrektur der Flächenkomponente erfolgt, indem innerhalb der Auswertestreifen die linearen Anteile der z -Verschiebung in y -Richtung aus den Felddaten herausgerechnet werden. Wie bei der Korrektur des Spannbackenversatzes geschieht dies ohne eine Modifikation der x - und y -Koordinaten der Knoten durch eine Projektion in z -Richtung, da die beobachteten Winkel klein sind. Die z -Verschiebung von Punkten in der x - z -Ebene bleibt bei diesem Vorgehen unbeeinflusst.

Abb. 5.8 zeigt für den Versuch aus Kap. 5.3.2 die um den Spannbackenversatz korrigierte Flächenkomponente zu einem Zeitpunkt kurz vor dem Versagen des Prüflings. Rechts unten ist der Torsionswinkel ϑ über der aktuellen Länge des Prüflings zwischen den Spannbacken aufgetragen. Im vorliegenden Fall sind die beiden Enden um ca. $1,5^\circ$ gegeneinander verdreht. Auffällig ist, dass die Torsion primär durch die bewegliche Einspannung in den Versuch eingebracht wird. Die korrigierten Daten sind in Abb. 5.9 dargestellt.

Abschließend sei erwähnt, dass das vorgestellte Vorgehen von der Diskretisierung in x -Richtung abhängt. Für die in dieser Arbeit untersuchten Thermoplaste wird die Breite der Auswertestreifen ohne eine detaillierte Variantenstudie entsprechend der Referenzlänge aus der DIC zu 2 mm gewählt.

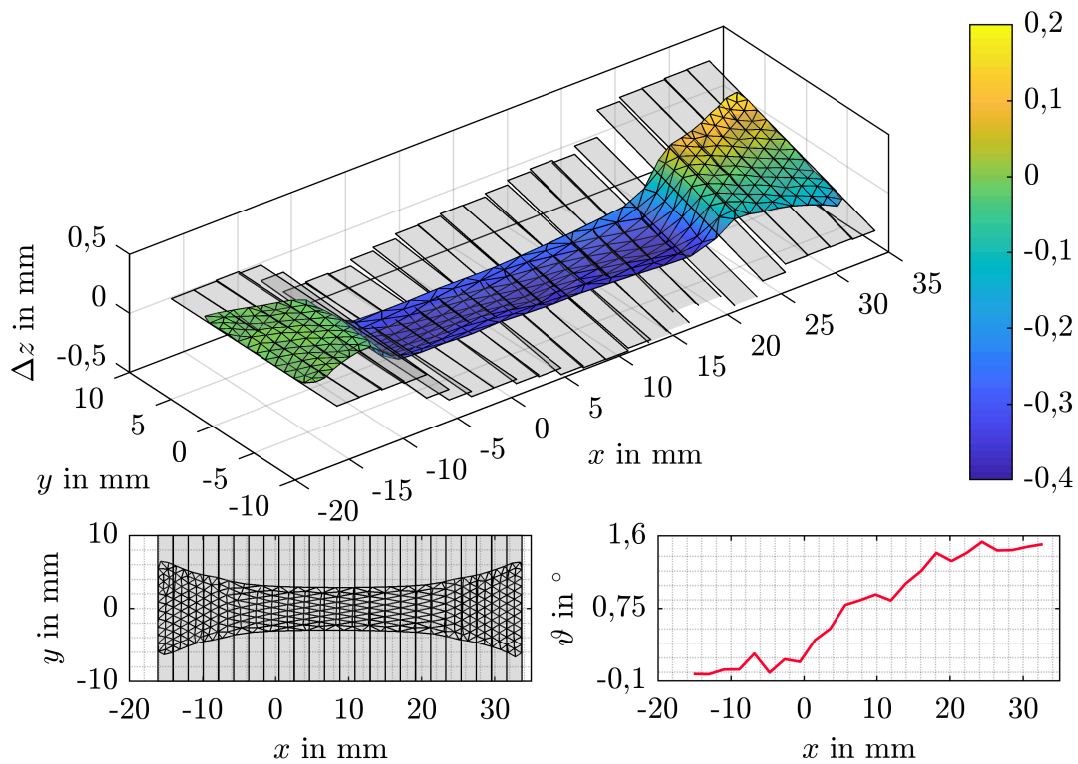


Abbildung 5.8: PC/ABS E: Korrektur der Torsion bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ms}^{-1} - 1/2$

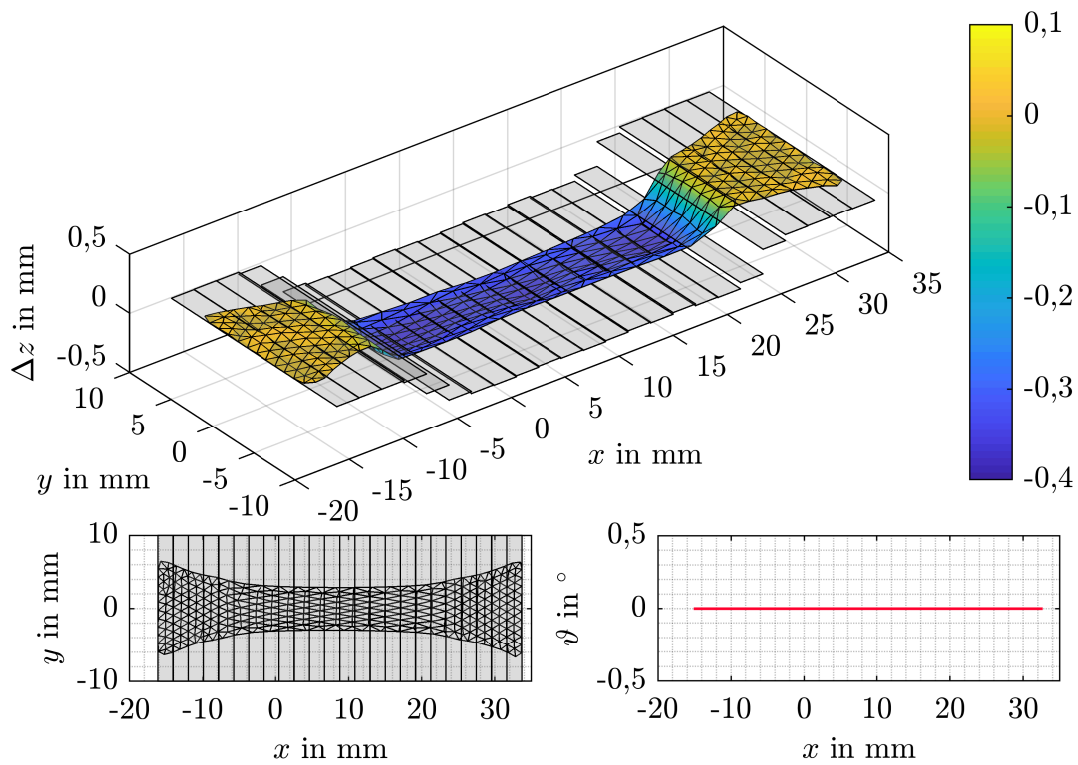


Abbildung 5.9: PC/ABS E: Korrektur der Torsion bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ms}^{-1} - 2/2$

5.3.4 Berechnung der Dicke und der Dickendehnung

Sobald die lokale z -Verschiebung der Probenfront infolge der materiellen z -Verzerrung bekannt ist, gilt unter der Annahme eines in Dickenrichtung symmetrischen Verhaltens der Probenrückseite für die lokale Dicke des Prüflings:

$$\delta = \delta_0 + 2\Delta z. \quad (5.2)$$

Dabei ist zu beachten, dass Δz dem globalen Koordinatensystem entsprechend ein negatives Vorzeichen aufweist. Für die technische Dehnung folgt unter derselben Annahme:

$$\varepsilon_{0,zz} = \frac{2\Delta z}{\delta_0}. \quad (5.3)$$

Da gemäß Kap. 3.1.4 für einen beliebigen Punkt im Inneren der Probe bei $z = 0$ die Größen ε_{xz} und ε_{yz} null sind, ergibt sich für die Hencky-Verzerrung nach Gl. (2.19):

$$\varepsilon_{zz} = \ln \left(1 + \frac{2\Delta z}{\delta_0} \right). \quad (5.4)$$

Wie bereits in Kap. 5.2.1 thematisiert, sind versuchsbedingte Nichtlinearitäten durch entsprechende Maßnahmen bei der Materialprüfung zu minimieren bzw. zu vermeiden. Trotzdem kann für ein isotropes Material eine leichte Krümmung des Prüflings in z -Richtung zu Beginn des Versuchs berücksichtigt werden, indem bis zum Ende des Ausrichtvorgangs für das gesamte Verzerrungsfeld der Zusammenhang aus Gl. (5.1) angesetzt wird. Dies ist möglich, solange sich derartige Effekte auf die ersten Zeitschritte des Versuchs beschränken und näherungsweise ein uniaxialer Spannungszustand vorherrscht.

5.3.5 Berechnung der Querschnittsfläche

Auf Basis der lokalen z -Verschiebung der Probenfront infolge der materiellen z -Verzerrung kann auch die Querschnittsfläche in der Einschnürebene ermittelt werden. Unter der Annahme eines in Dickenrichtung symmetrischen Verhaltens der Probenrückseite gilt:

$$A = \int_{-b/2}^{b/2} (\delta_0 + 2\Delta z(y)) dy. \quad (5.5)$$

Dabei ist b die Breite des Prüflings. Weil technologisch bedingt eine DIC-Auswertung nicht bis zum Probenrand möglich ist, wird vom im Messbereich liegenden Gebiet in

\mathcal{P}_A unter Berücksichtigung der äußersten Messwerte für ε_{yy} linear auf b extrapoliert. Sobald die tatsächliche Breite bekannt ist, erfolgt zur Bestimmung des zugehörigen Δz ebenfalls eine lineare Extrapolation.

5.4 Spannungsauswertung für 3D-DIC-Daten

Wegen der in Kap. 3.1.5 thematisierten Zusammenhänge findet die lokale Auswertung eines Zugversuchs an materiellen Punkten in der mit der Probe mitbewegten Einschnürebene statt. Während die zur Anwendung des Verfahrens benötigten Komponenten des Hencky-Verzerrungstensors mittels DIC hier direkt gemessen werden können, ist dies für die Komponenten des Cauchy-Spannungstensors grundsätzlich nicht möglich. Eine Strategie, um die in den Differentialgleichungen vorzugebende Größe σ_{xx} im Zugversuch zu bestimmen, ist es, das Verhältnis zwischen der gemessenen Kraft und der nach Kap. 5.3.5 mit 3D-DIC quantifizierten Querschnittsfläche in \mathcal{P}_A zu bilden:

$$\sigma_{xx} \approx \frac{F}{A}. \quad (5.6)$$

Da die Spannungsverteilung im Parallelbereich bis zum Einschnüren des Prüflings zum Zeitpunkt $t = t_N$ homogen ausfällt, ist Gl. (5.6) bis zu diesem Punkt exakt. Für $t \geq t_N$ bildet sich jedoch ein inhomogener Spannungszustand aus und der Zusammenhang wird zur Näherung. In diesem Fall liefert die Gleichung für einen materiellen Punkt im Einschnürzentrum tendenziell einen zu niedrigen und für einen materiellen Punkt am Rand der Probe tendenziell einen zu hohen Wert. Unter der Annahme aus Gl. (3.4), dass die Änderung der Komponenten des Cauchy-Spannungstensors über die Probendicke innerhalb jedes Zeitschritts n vernachlässigbar ist, kann die Problematik zweidimensional behandelt werden. Dies ist in Abb. 5.10 skizziert. Dabei bezeichnet $\bar{\sigma}_{xx}$ den Mittelwert von $\sigma_{xx}(y)$ in \mathcal{P}_A . Die Ausprägung des Verlaufs hängt von dem betrachteten Zeitpunkt, dem Material und der Probengeometrie ab.

Zur Approximation eines lokalen σ_{xx} für jeden Zeitschritt n sind mehrere Strategien denkbar. Gegebenenfalls ließe sich eine vorzugebende polynomiale Funktion für $\sigma_{xx}(y)$ mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmus kalibrieren, womit für jeden materiellen Punkt in der Einschnürebene ein Wert für σ_{xx} zur Verfügung stünde. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch ein anderes Vorgehen gewählt: Anstatt eine bestmögliche Approximation der gesuchten Spannungskomponente für einen beliebigen materiellen Punkt in \mathcal{P}_A anzustreben, wird dessen Position optimiert.

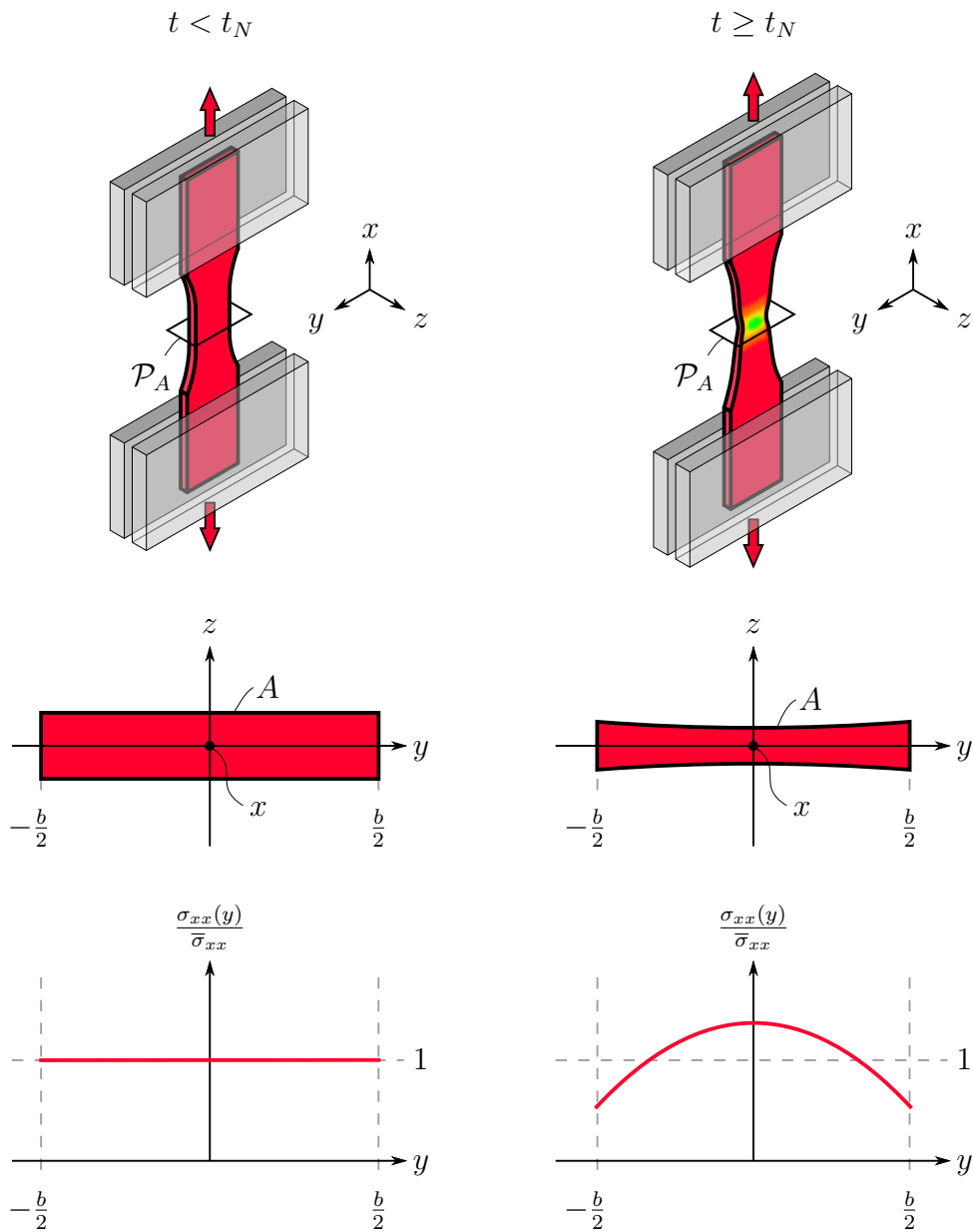


Abbildung 5.10: Spannungsverteilung vor und nach dem Einschnüren der Probe

Für jeden Zeitschritt n lässt sich mit der Breite der Probe b und der Dicke der Probe δ der folgende Zusammenhang für die Kraft formulieren:

$$F = \int_{-b/2}^{b/2} \mathcal{F}(y) dy = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{xx}(y) \delta(y) dy. \quad (5.7)$$

Dieses Integral kann mittels *Gauß-Integration* durch Auswerten an den zwei Stützstellen $\hat{y}_{1/2}$ approximiert werden:

$$F \approx \frac{b}{2} (\hat{a}_1 \mathcal{F}(\hat{y}_1) + \hat{a}_2 \mathcal{F}(\hat{y}_2)) = \frac{b}{2} (\hat{a}_1 \sigma_{xx}(\hat{y}_1) \delta(\hat{y}_1) + \hat{a}_2 \sigma_{xx}(\hat{y}_2) \delta(\hat{y}_2)). \quad (5.8)$$

Dabei liegen die Stützstellen bzw. *Gaußpunkte* bei:

$$\hat{y}_{1/2} = \mp \frac{b}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (5.9)$$

Für die *Gewichte* gilt:

$$\hat{a}_{1/2} = \hat{a} = 1. \quad (5.10)$$

Gl. (5.8) ist exakt, wenn es sich bei $\mathcal{F}(y)$ um eine polynomiale Funktion handelt, deren Grad kleiner oder gleich drei ist (MUNZ UND WESTERMANN (2019)).

Im Allgemeinen schnüren Zugproben aus isotropem Material symmetrisch zur x - z -Ebene ein, weswegen für δ und σ_{xx} eine Spiegelsymmetrie festgehalten werden kann:

$$\delta(y) = \delta(-y), \quad (5.11)$$

$$\sigma_{xx}(y) = \sigma_{xx}(-y). \quad (5.12)$$

Aus Gl. (5.12) folgt, dass σ_{xx} an den beiden Gaußpunkten gleich ausfällt. Deswegen wird eine Abkürzung eingeführt:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(\hat{y}_1) = \sigma_{xx}(\hat{y}_2). \quad (5.13)$$

Damit vereinfacht sich Gl. (5.8) zu:

$$F \approx \hat{a} \hat{\sigma}_{xx} b \frac{\delta(\hat{y}_1) + \delta(\hat{y}_2)}{2}. \quad (5.14)$$

Die Dicke der Probe an den Gaußpunkten ist nach Kap. 5.3.4 mittels 3D-DIC erfassbar, so dass sich die Symmetrie nach Gl. (5.11) nachvollziehen lässt. Der Term $(\delta(\hat{y}_1) + \delta(\hat{y}_2)) / 2$ in Gl. (5.14) kann als arithmetisches Mittel der Messwerte interpretiert werden. Mit

$$\hat{\delta} = \frac{\delta(\hat{y}_1) + \delta(\hat{y}_2)}{2} \quad (5.15)$$

folgt:

$$F \approx \hat{a} \hat{\sigma}_{xx} b \hat{\delta}. \quad (5.16)$$

Umstellen von Gl. (5.16) nach $\hat{\sigma}_{xx}$ liefert:

$$\hat{\sigma}_{xx} \approx \frac{F}{\hat{a} b \hat{\delta}}. \quad (5.17)$$

Auf diese Weise kann die x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors an den Gaußpunkten approximiert werden.

Folgendes ist bei diesem Vorgehen zu beachten: Zum einen kann zur näherungsweisen Bestimmung des Integrals aus Gl. (5.7) keine Integrationsformel mit einem Exaktheitsgrad größer als drei angesetzt werden, weil sich sonst durch die zusätzlichen Stützstellen neben $\hat{\sigma}_{xx}$ weitere Unbekannte ergäben. Zum anderen sind zur Anwendung des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens stets materielle Punkte auszuwerten und es kann nicht werkstoffunabhängig garantiert werden, dass es solche gibt, die während des gesamten Versuchs an den von $b(t)$ abhängigen Positionen $\hat{y}_{1/2}$ liegen.

Die Problematik der Relativverschiebung zwischen den materiellen Punkten und den Gaußpunkten lässt sich adressieren, indem in Abhängigkeit des Abstands eine Modifikation der Gewichte der Gauß-Integration erfolgt. Allerdings müssen in diesem Fall unerwünschte Nebeneffekte in Kauf genommen werden. So ist es zwar möglich, $\hat{a}_{1/2}$ im Sinne eines $\hat{a}(t)$ so anzupassen, dass der Fehler bei der Integration eines quadratischen Terms reduziert wird, jedoch folgt aus einer Abweichung vom Wert eins ein Fehler bei der Integration einer konstanten Funktion. Je nachdem, welche Charakteristik in der unbekanntem zeitabhängigen Spannungsverteilung dominiert, kann eine derartige Korrektur einen größeren Fehler hervorrufen, als sie eliminiert. Aus diesen Gründen wird auf eine Modifikation der Gewichte verzichtet. Entsprechend vereinfacht sich Gl. (5.17) zur im Folgenden *Gaußpunktapproximation* genannten Näherung für die gesuchte Spannungskomponente:

$$\hat{\sigma}_{xx} \approx \frac{F}{b \hat{\delta}}. \quad (5.18)$$

Für alle in dieser Arbeit analysierten Materialien und Versuche liegen die maximalen relativen Abweichungen zwischen den verfolgten materiellen Punkten und den zugeordneten Gaußpunkten im unteren, einstelligen Prozentbereich und sind damit klein. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge wird ein Zugversuch mit dem Material PC/ABS E bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ herangezogen.

Auf der linken Seite von Abb. 5.11 sind die gemessenen y -Koordinaten $y_{1/2}^*$ von materiellen Punkten, die zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Gaußpunkten liegen, den von $b(t)$ abhängigen $\hat{y}_{1/2}$ gegenübergestellt. Die rechte Seite verbildlicht die relativen Abweichungen gemäß der Formel:

$$\epsilon_y = \left| \frac{y_{1/2}^* - \hat{y}_{1/2}}{\hat{y}_{1/2}} \right|. \quad (5.19)$$

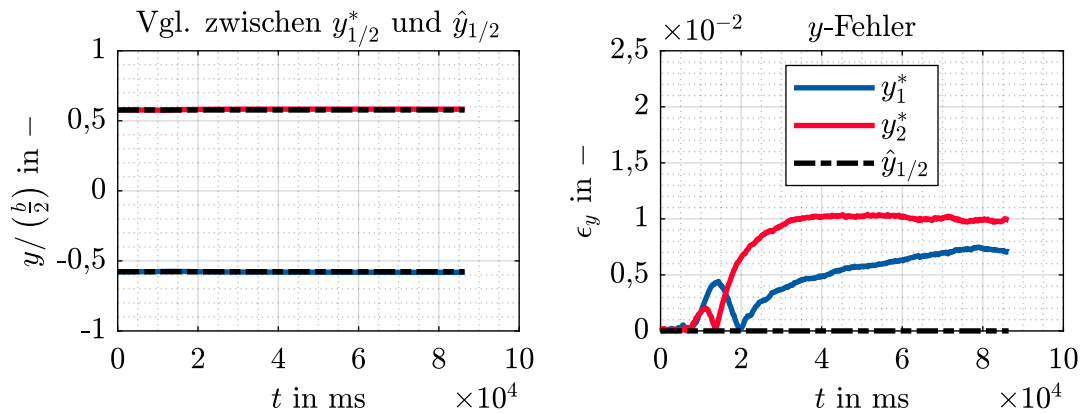


Abbildung 5.11: PC/ABS E: Vergleich zwischen $y_{1/2}^*$ und $\hat{y}_{1/2}$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

5.5 Semi-empirische Ansätze

In diesem Unterkapitel werden semi-empirische Ansätze zur Spannungsapproximation für 2D-DIC-Daten sowie zur Charakterisierung viskoelastischen bzw. viskoplastischen Materialverhaltens vorgestellt.

5.5.1 Spannungsapproximation für 2D-DIC-Daten

Zur Bestimmung der plastischen Querkontraktion mit dem Programmcode aus Kap. 3 ist in jedem Fall eine 3D-DIC-Datenbasis erforderlich. Doch auch wenn der ν_p -Verlauf gemäß Kap. 3.4.1 mit sehr langsamen Materialprüfungen bestimmt und anschließend bei der Auswertung hochdynamischer Versuche vorgegeben wird, verbleibt mit σ_{xx} eine Größe, deren Quantifizierung nach Kap. 5.4 dreidimensionale Messungen voraussetzt. Dies ist insofern unpraktisch, als die Analyse von Zugversuchen bis heute hauptsächlich mit 2D-DIC stattfindet. Eine 3D-DIC-Auswertung, wie sie in Kap. 5.3 vorgestellt wird, ist aktuell kein Industriestandard.

Es folgt eine Untersuchung, wie sich die Dehnratenunabhängigkeit von ν_p nach Kap. 3.4.1 sowie ν nutzen lässt, um auf Grundlage weniger 3D-DIC-Daten die x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors in ansonsten mit 2D-DIC aufgezeichneten Materialprüfungen zu prognostizieren.

Herleitung

Wird einem würfelförmigen infinitesimalen Volumen aus einem isotropen Werkstoff ein uniaxialer Spannungszustand in x -Richtung aufgeprägt, resultiert im allgemeinsten Fall eine Querkontraktion in y - und z -Richtung, wie sie in Abb. 5.12 skizziert ist.

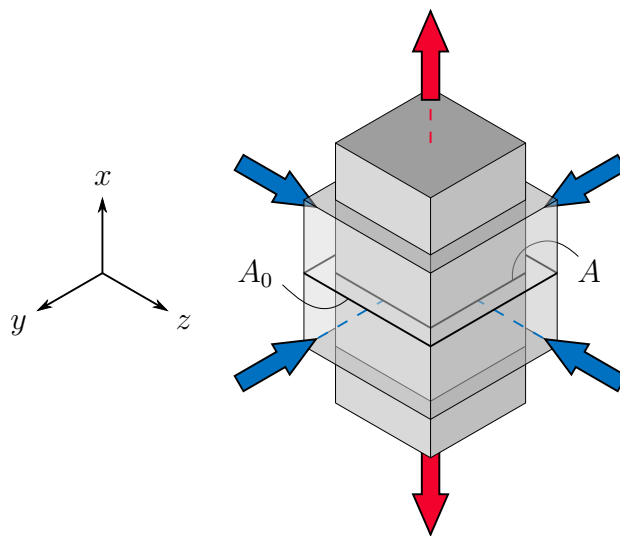


Abbildung 5.12: Uniaxialer Spannungszustand in einem infinitesimalen Volumen

Zwischen der aktuellen Querschnittsfläche A und der ursprünglichen Querschnittsfläche A_0 lässt sich der folgende Zusammenhang herstellen:

$$A = A_0 (1 + \varepsilon_{0,yy}) (1 + \varepsilon_{0,zz}). \quad (5.20)$$

Unter Ausnutzung von Gl. (2.19) kann dies geschrieben werden als:

$$A = A_0 e^{\varepsilon_{yy}} e^{\varepsilon_{zz}}. \quad (5.21)$$

Im nächsten Schritt wird die *totale Querkontraktion* eingeführt. Ist diese Größe konstant, lässt sie sich für einen uniaxialen Spannungszustand äquivalent entweder als differentielles oder absolutes Verhältnis beschreiben.

Es gilt

$$\nu_t = -\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}_{xx}} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\dot{\varepsilon}_{xx}} \quad (5.22)$$

bzw.

$$\nu_t = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}. \quad (5.23)$$

Einsetzen von Gl. (5.23) in Gl. (5.21) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$A = A_0 e^{-2\nu_t \varepsilon_{xx}}. \quad (5.24)$$

Gemäß Kap. 2.1.3 wird zur Ermittlung der technischen Spannung die aufgebrachte Kraft auf die ursprüngliche Querschnittsfläche bezogen:

$$\sigma_{0,xx} = \frac{F}{A_0}. \quad (5.25)$$

Dahingegen erfolgt die Bestimmung der wahren Spannung durch einen Bezug der Kraft auf die aktuelle Querschnittsfläche:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}. \quad (5.26)$$

Umformen von Gl. (5.25) nach F und Einsetzen in Gl. (5.26) führt auf:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{0,xx} \frac{A_0}{A}. \quad (5.27)$$

Aus Gl. (5.24) und Gl. (5.27) folgt:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{0,xx} e^{2\nu_t \varepsilon_{xx}}. \quad (5.28)$$

Wird durch $\nu_t = 0,5$ eine isochore Kontraktion des Volumenelements angenommen, reduziert sich Gl. (5.28) auf den im Zusammenhang mit Metallen bekannten Ausdruck zur Berechnung der wahren Spannung:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{0,xx} e^{\varepsilon_{xx}} = \sigma_{0,xx} (1 + \varepsilon_{0,xx}). \quad (5.29)$$

Vor einer praktischen Anwendung der an einem infinitesimalen Volumen hergeleiteten Beziehungen ist Folgendes zu beachten: Im Allgemeinen ist für einen Thermoplast die Größe ν_t nicht konstant, weswegen Gl. (5.22) und Gl. (5.23) nicht äquivalent sind. Außerdem liegt in einem realen Zugversuch nach dem Einschnüren kein uniaxialer

Spannungszustand vor und der Querschnitt behält seine ursprünglich rechteckige Form nicht bei. Zu guter Letzt wird gemäß Kap. 5.4 bei der Anwendung des Programmcodes aus Kap. 3 auf Zugversuche die Gaußpunktapproximation von σ_{xx} nach Gl. (5.18) gegenüber der Näherung aus Gl. (5.6) favorisiert.

Die Auswirkungen der beschriebenen Zusammenhänge können empirisch nachvollzogen werden. In Abb. 5.13 sind exemplarisch Ergebnisse für einen Versuch mit dem Thermo-
plast PC/ABS E bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ dargestellt. Das Beispiel wird gewählt, weil in diesem Fall die Einwölbung der Probenfront in z -Richtung besonders ausgeprägt ist. Auf der linken Seite ist in Blau die Spannung aufgetragen, die sich nach Gl. (5.6) ergibt. In Grün und Rot gestrichelt folgen Approximationen mit Gl. (5.28), bei denen die Auswertung an einem materiellen Punkt im Einschnürzentrum stattfindet. Auf der rechten Seite ist in Blau die Spannung nach der Gaußpunktapproximation aus Gl. (5.18) dargestellt. Für die grün und rot gestrichelte Näherung wird der materielle Punkt herangezogen, der zu Versuchsbeginn am Gaußpunkt \hat{y}_1 nach Gl. (5.9) liegt. Er hat gemäß Kap. 5.4 die y -Koordinate y_1^* .

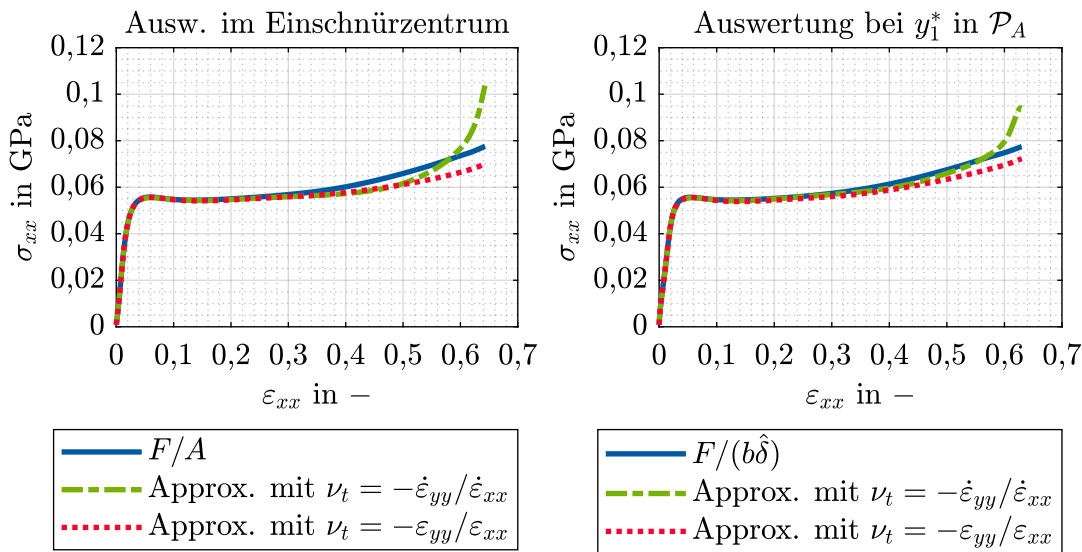


Abbildung 5.13: PC/ABS E: Spannungsapproximation bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

Erwartungsgemäß zeigt sich, dass die Genauigkeit der Approximationen mit zunehmender Dehnung sinkt. Als Konsequenz aus den Beobachtungen erfolgt die Einführung der Größe $\tilde{\nu}_t$, die ν_t in Gl. (5.28) ersetzt und wie folgt invers kalibriert wird:

$$\tilde{\nu}_t = \frac{1}{2\epsilon_{xx}} \ln \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{0,xx}} \right). \quad (5.30)$$

Für σ_{xx} ist entweder der Mittelwert nach Gl. (5.6) oder die Gaußpunktapproximation nach Gl. (5.18) einzusetzen. Entsprechend wird Gl. (5.28) zu einer Korrelation:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{0,xx} e^{2\tilde{\nu}_t \varepsilon_{xx}}. \quad (5.31)$$

Gl. (5.31) hat einen Nutzen, wenn sich zeigen lässt, dass die mit Gl. (5.30) bestimmte Größe $\tilde{\nu}_t$ dehnratenunabhängig ist und ein Zusammenhang mit der effektiven Dehnung ε_{eff} besteht. Letztere ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (2.52) durch Integration von Gl. (2.51). In diesem Fall kann für einen mit 2D-DIC aufgezeichneten Zugversuch auf Basis eines mit 3D-DIC bestimmten $\tilde{\nu}_t$ die x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors berechnet werden.

Beurteilung der Zusammenhänge

Die hergeleiteten Zusammenhänge werden anhand der Materialprüfungen des Prüfprogramms 2 nach Kap. 5.1 verifiziert. Dies ist möglich, weil in diesem Fall für alle untersuchten nominellen Dehnraten 3D-DIC-Daten vorliegen. In Abb. 5.14 ist für alle Versuche mit PC/ABS E und PP T20 $\tilde{\nu}_t$ über ε_{eff} aufgetragen. Dabei werden die in Gl. (5.30) enthaltenen Größen jeweils an den materiellen Punkten ausgewertet, die zu Versuchsbeginn an den Gaußpunkten $\hat{y}_{1/2}$ liegen. Farbnuancen innerhalb einer nominellen Dehnrate stehen für einzelne Versuchswiederholungen. Als dicke schwarze Strichpunktlinie ist in beiden Fällen das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel der Ergebnisse für die Materialprüfungen bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ visualisiert. Für $\varepsilon_{eff} = 0$ wird ihm jeweils der Wert der im viskoelastischen Regime bestimmten Querkontraktionszahl zugeschrieben. Diesbezüglich erfolgt die Separation des viskoelastischen und viskoelasto-viskoplastischen Regimes mit $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$ nach Kap. 5.5.2. Da eine Auswertung im Einschnürzentrum dieselben Beobachtungen zulässt, wird auf eine Darstellung verzichtet.

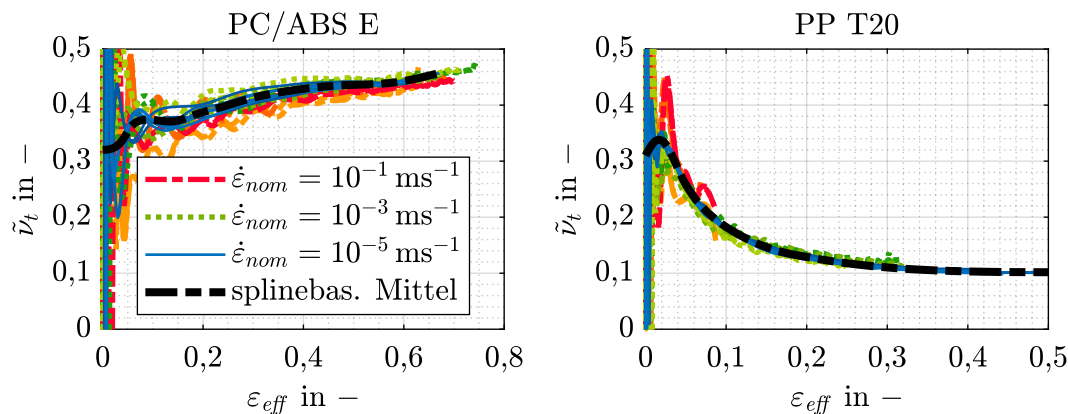


Abbildung 5.14: PC/ABS E und PP T20: $\tilde{\nu}_t$ in Abhängigkeit von ε_{eff}

Sowohl für PC/ABS E als auch für PP T20 ist die Streuung der $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe für kleine Dehnungen am größten. Als Ursache dafür wird die Erfassung der Dickendehnung mittels 3D-DIC identifiziert, welche zu Versuchsbeginn besonders herausfordernd ist. Abgesehen davon zeigt sich, dass die Abweichungen zwischen den unterschiedlichen Prüfgeschwindigkeiten in der gleichen Größenordnung liegen wie zwischen den Versuchswiederholungen einer nominellen Dehnrates. Beim PC/ABS E liegt das arithmetische Mittel für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ tendenziell unter dem der beiden langsameren Abzugsgeschwindigkeiten, die wiederum sehr gut übereinstimmen. Neben einer geringen materiellen Dehnratenabhängigkeit kann als Ursache insbesondere in diesem Hochdynamikbereich eine Verfälschung der Ergebnisse durch Messfehler nicht ausgeschlossen werden. Bei PP T20 ist der Zusammenhang unabhängig von der Dehnrates.

Im Folgenden wird für beide Thermoplaste jeweils das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel für $\tilde{\nu}_t$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ genutzt, um für die schnelleren Versuche mit Gl. (5.31) die Gaußpunktapproximation der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors anzunähern. Die Ergebnisse für alle Versuchswiederholungen finden sich in Abb. 5.15. Darin sind die mittels 3D-DIC bestimmten Gaußpunktapproximationen nach Gl. (5.18) als dicke rote Strichpunktlinien bzw. dicke grüne gepunktete Linien eingezeichnet und die Werte nach Gl. (5.31) als dünne schwarze Strichpunktlinien aufgetragen. Ausgewertet wird jeweils an dem materiellen Punkt, der zu Versuchsbeginn am Gaußpunkt \hat{y}_1 nach Gl. (5.9) liegt.

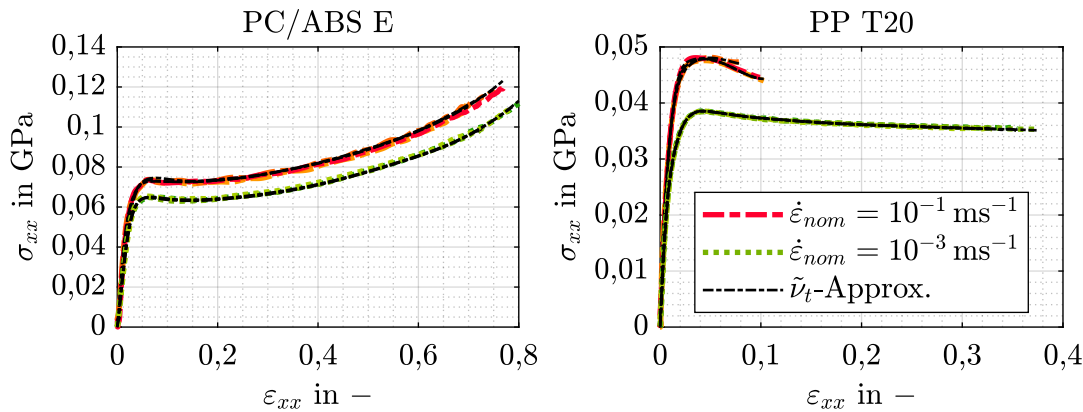


Abbildung 5.15: PC/ABS E und PP T20: σ_{xx} - ϵ_{xx} -Diagramme

Das in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehen liefert für die beiden betrachteten Werkstoffe eine sehr gute Prognose von σ_{xx} . Bezüglich PC/ABS E ist anzumerken, dass die Bruchdehnung der Versuche bei den nominellen Dehnrates 10^{-3} ms^{-1} und 10^{-1} ms^{-1} teilweise etwas oberhalb der bei 10^{-5} ms^{-1} liegt. In den vorliegenden Untersuchungen wird ab Erreichen des letzten verfügbaren Werts für $\tilde{\nu}_t$ auf Basis von ϵ_{eff} linear extrapoliert.

Zwar lässt der kleine Stichprobenumfang nur eine begrenzte Aussage zur Allgemeingültigkeit des Ansatzes zu, doch sind die Ergebnisse so ermutigend, dass er in Kap. 6 zur Auswertung des Prüfprogramms 1 angewendet wird. Bei diesem liegen ausschließlich für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ 3D-DIC Versuche vor. Weitergehende Untersuchungen werden empfohlen.

5.5.2 Charakterisierung viskoelastischen Materialverhaltens

Die elementaren Gleichungen und Zusammenhänge, mit denen sich in einem Versuch die Parameter des viskoelastischen Regimes bestimmen lassen, sind in Kap. 3.2.3 dokumentiert. Das Vorgehen bei ihrer praktischen Anwendung sowie die Nachbereitung der Ergebnisse wird im Folgenden beschrieben.

Analytische Beschreibung dehnratenabhängiger Größen

Gemäß Kap. 3.2.3 ist die konstante Materialsteifigkeit E_C im Rahmen einer quasistatischen Zugprüfung zu ermitteln und kann entsprechend als quasistatischer Elastizitätsmodul interpretiert werden. Im Hinblick auf die niedrigste nominelle Dehnrates der beiden Prüfprogramme nach Kap. 5.1, $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, ist diesbezüglich zu beachten, dass Thermoplaste hier im Allgemeinen noch kein quasistatisches Verhalten zeigen. Um zusätzliche Materialprüfungen zu vermeiden, die ausschließlich der Ermittlung von E_C dienen und für die Crashsimulation darüber hinaus nur einen bedingten Mehrwert haben, wird ein semi-empirischer Ansatz eingeführt. Dieser ermöglicht durch eine Extrapolation die Approximation des gesuchten Werts auf Basis von Versuchen bei den drei geprüften nominellen Dehnrates.

Der Ansatz beruht auf zwei Beobachtungen: Zum einen lässt sich für viele viskoelastische Thermoplaste sowohl für quasistatische als auch für dynamische Zugversuche zu Beginn ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung feststellen. Zum anderen genügt häufig eine einfache analytische Funktion, um eine Korrelation zwischen diesen für verschiedene $\dot{\epsilon}_{nom}$ erfassten *Initialsteigungen* und der effektiven Dehnrates herzustellen. Derartige Beobachtungen dokumentiert unter anderem KEUERLEBER (2006) und hält in Anlehnung an das *Eyring-Modell* nach EYRING (1936) für Zugversuche einen linearen Zusammenhang zwischen der Initialsteigung und der in einem Diagramm logarithmisch aufgetragenen Abzugsgeschwindigkeit fest.

Dies lässt sich polynomial verallgemeinern und führt auf den folgenden Ausdruck in Abhängigkeit der effektiven Dehnrates:

$$D(\dot{\varepsilon}_{eff}) = \sum_{j=0}^{\ell} \theta_j \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}}{\dot{\varepsilon}_{ref}} \right)^j \quad \text{mit } \ell \geq 0. \quad (5.32)$$

Dabei ist D die dehnratenabhängige Initialsteigung der Spannungs-Dehnungs-Kurven und $\ln(\dot{\varepsilon}_{eff}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ der natürliche Logarithmus der auf die *Referenzdehnrates* $\dot{\varepsilon}_{ref} = 1 \text{ ms}^{-1}$ bezogenen vorherrschenden effektiven Dehnrates. ℓ bezeichnet den Grad der Funktion. Eine Wahl von $\ell = 0$ bildet für Materialien ohne oder mit vernachlässigbaren viskoelastischen Eigenschaften eine dehnratenunabhängige Initialsteigung ab. Dahingegen wird mit $\ell = 1$ ein linearer und mit $\ell = 2$ ein quadratischer Zusammenhang proklamiert. Die Koeffizienten θ_j sind so zu wählen, dass die folgende Nebenbedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial D(\dot{\varepsilon}_{eff})}{\partial \dot{\varepsilon}_{eff}} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\theta_j j \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}}{\dot{\varepsilon}_{ref}} \right)^{j-1}}{\dot{\varepsilon}_{eff}} \geq 0. \quad (5.33)$$

Auf diese Weise wird der empirischen Erfahrung Rechnung getragen, dass D mit zunehmender effektiver Dehnrates monoton steigt.

Für $\ell = 0$ entspricht D dem konstanten E_C , denn E_V ist in diesem Fall null. Andererseits kann D bei $\ell > 0$ nicht unmittelbar der Summe aus E_C und E_V gleichgesetzt werden, weil in der dehnratenabhängigen Initialsteigung auch der Einfluss der Relaxationsrate enthalten ist. Zur Approximation der konstanten Materialsteifigkeit bzw. des quasistatischen Elastizitätsmoduls wird ausgenutzt, dass für einen quasistatischen Versuch Gl. (3.34),

$$E_C = \frac{\dot{\sigma}_{xx} + \beta \sigma_{xx} - E_V \dot{\varepsilon}_{xx}^e}{\dot{\varepsilon}_{xx}^e + \beta \varepsilon_{xx}^e},$$

in Gl. (3.36) übergeht:

$$E_C = \frac{\beta \sigma_{xx}}{\beta \varepsilon_{xx}^e} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}^e}.$$

Da somit E_C dem Wert von D bei $\dot{\varepsilon}_{eq}$ entspricht, kann die gesuchte Größe durch Auswerten von Gl. (5.32) bei dieser effektiven Dehnrates angenähert werden. Für eine adäquate Approximation sollte sich die Wahl von $\dot{\varepsilon}_{eq}$ und damit die Extrapolation auf zwei Dekaden unterhalb des geprüften Dehnratenbereichs beschränken.

Bei der Anwendung des Verfahrens auf reale Versuchsdaten in Kap. 6 wird $\dot{\varepsilon}_{eq} = 1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$ angenommen. Es handelt sich dabei um die in der DIN EN ISO 527-2

(2012) genannte Näherung der Dehnrates, bei welcher der Elastizitätsmodul bestimmt werden soll. Auf diese Weise lässt sich unabhängig vom Grad ℓ in Gl. (5.32) das ermittelte E_C mit dem entsprechenden Datenblattwert vergleichen. Bei der Plausibilitätsprüfung ist zu beachten, dass sich die in der DIN EN ISO 527-2 (2012) herangezogenen Probekörper mit einer Dicke von vorzugsweise 4 mm vom in dieser Arbeit eingesetzten, 2 mm dick gefertigten Typ 3 der DIN EN ISO 8256 (2005) unterscheiden. Zudem ist es gestattet, Prüflinge direkt im Spritzgussverfahren oder durch Pressen herzustellen, anstatt sie durch mechanische Bearbeitung zu gewinnen. Demgegenüber basieren die in Kap. 5.1 vorgestellten Prüfprogramme exklusiv auf aus spritzgegossenem Plattenmaterial gefrästen Proben. Auch bei einem Thermoplast mit in sehr guter Näherung isotropen Eigenschaften können die genannten Unterschiede zu gewissen Abweichungen im beobachteten Materialverhalten führen.

Die Ergebnisse von FRITSCH (2012) für einen faserverstärkten Thermoplast deuten darauf hin, dass die Kunststoffe aus Kap. 5.1 auch bei Versuchen mit der Dehnrates aus der DIN EN ISO 527-2 (2012) noch kein quasistatisches Materialverhalten zeigen. Diese Unschärfe bei der Festlegung von $\dot{\epsilon}_{eq}$ und damit der Bestimmung von E_C wird hingenommen, weil im Rahmen der Kalibrierung von E_V Abweichungen bis zu einem gewissen Grad ausgeglichen werden können. Außerdem sollte die Materialcharakterisierung gemäß Kap. 3.2.3 auf den Dehnratesbereich abzielen, der für die angestrebten Crashsimulationen relevant ist. Im Folgenden steht die variable Materialsteifigkeit im Fokus.

Liegt E_C vor, ergeben sich für jeden Versuch in Abhängigkeit des nach Kap. 3.2.3 festzulegenden β diskrete Werte für E_V . Da Messungen im viskoelastischen Regime besonders empfindlich sind, erfolgt in dieser Arbeit anstelle eines direkten Einsetzens der Messwerte σ_{xx} und $\dot{\sigma}_{xx}$ in Gl. (3.34) das Ausnutzen der Definition von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$:

$$\sigma_{xx} = D(\dot{\epsilon}_{eff})\epsilon_{xx}^e, \quad (5.34)$$

$$\dot{\sigma}_{xx} = \dot{D}(\dot{\epsilon}_{eff})\epsilon_{xx}^e + D(\dot{\epsilon}_{eff})\dot{\epsilon}_{xx}^e. \quad (5.35)$$

Um ausgehend von den diskreten Werten zu einer analytischen Beschreibung der variablen Materialsteifigkeit zu gelangen, wird in Anlehnung an Gl. (5.32) die folgende Beziehung angesetzt:

$$E_V(\dot{\epsilon}_{eff}) = \sum_{j=1}^h \kappa_j \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}}{\dot{\epsilon}_{eq}} \right)^j \quad \text{mit } h > 0. \quad (5.36)$$

Dabei ist h der Grad der Funktion. Die Randbedingung nach Gl. (3.35),

$$E_V(\dot{\epsilon}_{eq}) = 0,$$

wird durch Gl. (5.36) automatisch erfüllt. Analog zu Gl. (5.33) lautet die empirische Nebenbedingung für die Wahl der Koeffizienten κ_j :

$$\frac{\partial E_V(\dot{\epsilon}_{eff})}{\partial \dot{\epsilon}_{eff}} = \sum_{j=1}^h \frac{\kappa_j j \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}}{\dot{\epsilon}_{eq}}\right)^{j-1}}{\dot{\epsilon}_{eff}} \geq 0. \quad (5.37)$$

Dies entspricht Gl. (3.38). In Abb. 5.16 sind die beschriebenen Zusammenhänge für $\ell = 1$ und $h = 1$ skizziert.

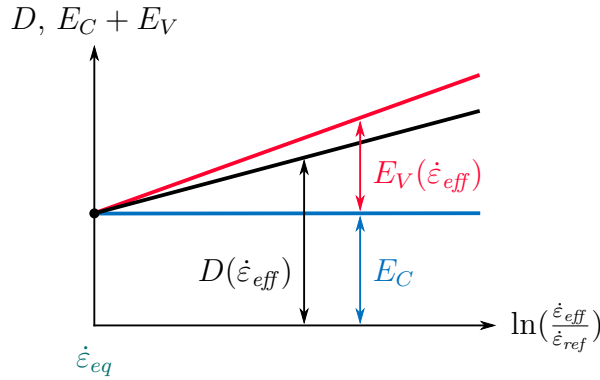


Abbildung 5.16: Zusammenhänge zwischen D , E_C und E_V

Zur Vervollständigung der Ansätze wird, wie in Kap. 3.2 gefordert, ein analytischer Zusammenhang zwischen der Elastizitätsgrenze und der effektiven Dehnrate eingeführt. Liegen für unterschiedliche $\dot{\epsilon}_{eff}$ diskrete Werte für σ_E vor, erfolgt ähnlich zu Gl. (5.32) eine kontinuierliche Beschreibung mit der folgenden Beziehung:

$$\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff}) = \sum_{j=0}^v \zeta_j \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^j \quad \text{mit } v \geq 0. \quad (5.38)$$

Darin ist v der Grad der Funktion. Die Koeffizienten ζ_j müssen die folgende empirisch motivierte Nebenbedingung erfüllen:

$$\frac{\partial \sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})}{\partial \dot{\epsilon}_{eff}} = \sum_{j=1}^v \frac{\zeta_j j \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^{j-1}}{\dot{\epsilon}_{eff}} \geq 0. \quad (5.39)$$

Abschließend wird darauf hingewiesen, dass die Datenbasis, anhand der sämtliche eingeführten semi-empirischen Ansätze geprüft werden, nicht ausreicht, um die Grenzen bei

deren Anwendung auf beliebige Werkstoffe und Dehnraten auszuloten. Trotzdem sind die Ergebnisse für die Thermoplaste aus Kap. 5.1 äußerst vielversprechend und legen zumindest eine Übertragbarkeit auf Materialien derselben Klassen nahe. Die Bestimmung der Koeffizienten ist Gegenstand der nächsten Abschnitte.

Eingesetzte Verzerrungs- und Spannungsmaße

Im für die Kalibrierung der Modellparameter des viskoelastischen Regimes relevanten, üblicherweise sehr kleinen Dehnungsintervall, stimmen die wahre und technische Spannung sowie die wahre und technische Dehnung in sehr guter Näherung überein. Gegenüber diesen Approximationen sind die Fehler bei der Ermittlung der wahren Spannung auf Basis von 3D-DIC-Daten nach Kap. 5.4 insbesondere zu Versuchsbeginn größer einzuschätzen. Dies zeigt sich beispielsweise in der Streuung der $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe in Abb. 5.14, welche für kleine Dehnungen am stärksten ausgeprägt ist. Aus diesem Grund werden zur Bestimmung von D , E_C , E_V , β , ν und σ_E die technischen Größen verwendet. Dieser Ansatz orientiert sich an den europäischen Normen für Zugversuche mit Kunststoffen und Metallen, DIN EN ISO 527-1 (2019) bzw. DIN EN ISO 6892-1 (2020). Damit sind die vorgestellten Methoden auch anwendbar, wenn ausschließlich 2D-DIC-Daten vorliegen, was auf einen Großteil der Versuche des Prüfprogramms 1 nach Kap. 5.1 zutrifft und dem aktuell in der Industrie verfolgten Vorgehen entspricht (HAASE (2018–2022)). Zur Quantifizierung der Fehler für die vorliegende Datenbasis werden innerhalb des im nächsten Abschnitt eingeführten *Vertrauensbereichs* jeweils die Abweichungen zwischen den wahren und technischen Größen auf die wahren Größen bezogen. Dabei lässt sich für das Spannungsmaß ein maximaler Fehler kleiner als 1,5% und für das Verzerrungsmaß ein maximaler Fehler kleiner als 1% feststellen.

Die effektive Dehnrade ist in *SAMP-1* durch Gl. (2.49) bis Gl. (2.52) definiert. Weil die Berechnung der Querkontraktionszahl erst nach Vorliegen der Elastizitätsgrenze möglich ist, muss $\dot{\epsilon}_{eff}$ ohne Kenntnis dieses Werts bestimmt werden. Da gemäß den Überlegungen um Gl. (3.11) in einem Zugversuch im viskoelastischen Regime ein uniaxialer Spannungszustand vorherrscht, lässt sich die Herausforderung für einen isotropen Werkstoff durch Gleichsetzen der Verzerrungen in y - und z -Richtung lösen.

Um Messrauschen abzumildern, welches vor allem bei der Betrachtung lokaler DIC-Daten einen signifikanten Einflussfaktor darstellt, wird für die Ermittlung der Dehnung $\epsilon_{0,xx}$ die Länge des Parallelbereichs als Bezugsgröße gewählt. Außerdem erfolgt die Bestimmung eines zugehörigen räumlichen Mittels für $\epsilon_{0,yy}$. Dies ist zulässig, weil das Dehnungsfeld vor dem Einschnüren zum Zeitpunkt $t = t_N$ homogen ist.

Einführung eines Vertrauensbereichs

Wie in Kap. 5.2.1 beschrieben, ist in den Materialprüfungen aus Kap. 5.1 der Einfluss versuchsbedingter Nichtlinearitäten sehr gering. Entsprechend ihrer Größenordnung können sie im Folgenden vernachlässigt und beobachtete Effekte dem Werkstoff zugeschrieben werden. Das bedeutet, dass sich ein potentieller linearer Bereich in den (technischen) Spannungs-Dehnungs-Kurven direkt an den Versuchsbeginn anschließt. Eine Korrektur des Ursprungs gemäß Abb. 5.2 erübrigt sich.

Die Formulierung einer möglichst allgemeingültigen Strategie zur Identifikation eines näherungsweise linearen Anfangsbereichs von (technischen) Spannungs-Dehnungs-Kurven ist herausfordernd. Ein Zeugnis dieser Problematik sind die zahlreichen wissenschaftlichen Abhandlungen, die für quasistatische Zugversuche zu diesem Thema existieren und unterschiedliche Strategien vorschlagen. Neben den in Kap. 2.2.2 vorgestellten Normen sind beispielsweise HESSE U. A. (1991), DEAN U. A. (1995), SONNE (1999), LEDWORUSKI U. A. (1999), LORD U. A. (2005), KEUERLEBER (2006) sowie LORD UND MORRELL (2006) zu nennen. Weil darüber hinaus für dynamische Zugversuche kein Standard verfügbar ist, wird im Rahmen dieser Arbeit ein pragmatisches Vorgehen gewählt. Wie einige Verfahren in der genannten Literatur basiert die Methode auf dem *Tangentenmodul* und dem *Sekantenmodul*. Mit ihnen erfolgt die Definition eines vom Versuchsbeginn bei $\varepsilon_{0,xx} = 0$ ausgehenden Dehnungsintervalls, welches das Fundament einer Regressionsanalyse für das Modell aus Gl. (5.32) bildet. Es wird im Folgenden *Vertrauensbereich* genannt. Die verfolgte Strategie lässt sich anhand des zunächst linearen Anfangsbereichs der idealisierten technischen Spannungs-Dehnungs-Kurve aus Abb. 5.17 motivieren. Ihr Verlauf ist einem isotropen Thermoplast nachempfunden. Trotz dieses Schwerpunkts kann das Vorgehen auf andere Werkstoffe, insbesondere Metalle, angewendet werden.

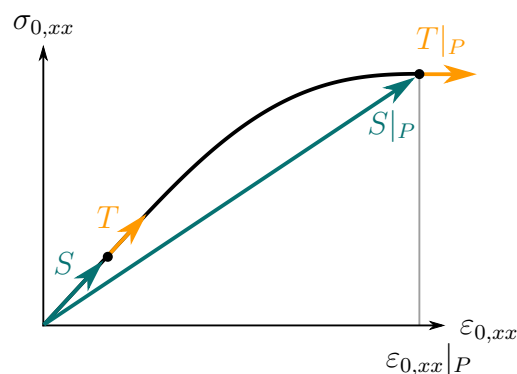


Abbildung 5.17: Idealisierte $\sigma_{0,xx}$ - $\varepsilon_{0,xx}$ -Kurve bis zum ersten Maximum bei $\varepsilon_{0,xx}|_P$

Der lokale Tangentenmodul ist definiert als:

$$T = \frac{\partial \sigma_{0,xx}}{\partial \varepsilon_{0,xx}}. \quad (5.40)$$

Für den auf den Ursprung O bezogenen Sekantenmodul gilt:

$$S = \frac{\sigma_{0,xx} - \sigma_{0,xx}|_O}{\varepsilon_{0,xx} - \varepsilon_{0,xx}|_O} = \frac{\sigma_{0,xx}}{\varepsilon_{0,xx}}. \quad (5.41)$$

Die Größe $\varepsilon_{0,xx}|_P$ bezeichnet die technische Längsdehnung, bei deren Erreichen das technische Spannungs-Dehnungs-Diagramm ein erstes, möglicherweise lokales Maximum aufweist. Sie legt die obere Grenze des Intervalls fest, innerhalb dessen die Obergrenze des Vertrauensbereichs $\varepsilon_{0,xx}|_\tau$ verortet wird. Versagt der Prüfling vor dem Erreichen einer horizontalen Tangente, erfolgt die Suche nach $\varepsilon_{0,xx}|_\tau$ bis zum Versagenspunkt. Bei der Anwendung der Methode auf einen Stahl mit ausgeprägter Streckgrenze definiert die technische Längsdehnung bei Erreichen der oberen Streckgrenze das Intervall.

In Abb. 5.18 sind für die Kurve aus Abb. 5.17 die Verhältnisse S/T und T/S über $\varepsilon_{0,xx}$ dargestellt. Ergänzt werden sie durch ihr arithmetisches Mittel:

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{T} + \frac{T}{S} \right). \quad (5.42)$$

Im Falle der idealisierten technischen Spannungs-Dehnungs-Kurve aus Abb. 5.17 stimmen im linearen Anfangsbereich Tangenten- und Sekantenmodul überein, weswegen alle gezeigten Zusammenhänge hier den Wert eins liefern. In der Praxis schwingen S/T und T/S um diesen, bevor sie mit zunehmender Längsdehnung davon abweichen. Während das Verhältnis T/S bei Erreichen von $\varepsilon_{0,xx}|_P$ null wird, strebt der Kehrwert S/T für $\varepsilon_{0,xx} \rightarrow \varepsilon_{0,xx}|_P$ gegen unendlich. Das Gleiche gilt für das arithmetische Mittel M .

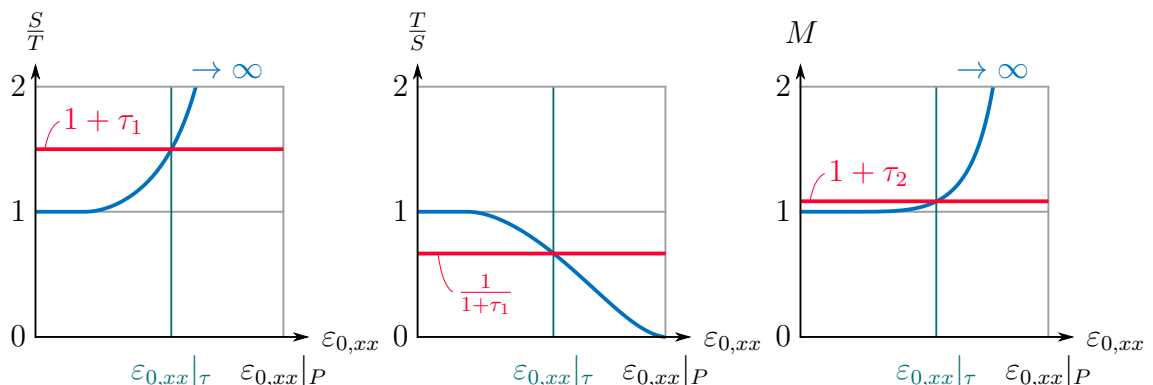


Abbildung 5.18: S/T , T/S und M für die Kurve aus Abb. 5.17

Angesichts dieser Beobachtungen ist es naheliegend, die Obergrenze des Vertrauensbereichs an die Überschreitung eines empirisch festzulegenden Schwellenwerts zu koppeln. Die folgenden Formulierungen sind dabei äquivalent:

$$\varepsilon_{0,xx}|_{\tau} = \max \left(\left\{ (0, \varepsilon_{0,xx}|_P) \text{ für die gilt } \frac{S}{T} \leq 1 + \tau_1 \right\} \right), \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_{0,xx}|_{\tau} = \max \left(\left\{ (0, \varepsilon_{0,xx}|_P) \text{ für die gilt } \frac{T}{S} \geq \frac{1}{1 + \tau_1} \right\} \right), \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_{0,xx}|_{\tau} = \max \left(\left\{ (0, \varepsilon_{0,xx}|_P) \text{ für die gilt } M \leq \frac{2 + 2\tau_1 + \tau_1^2}{2 + 2\tau_1} = 1 + \tau_2 \right\} \right). \quad (5.45)$$

Um T in realen technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven zu ermitteln, die Messrauschen enthalten, ist eine lineare Regression zweckmäßig. In diesem Zusammenhang erfolgt für die vorliegenden Versuchsdaten neben dem Datenpunkt der betrachteten technischen Längsdehnung die Auswertung der zwei vorhergehenden und der zwei nachfolgenden Nachbarn. Zu Versuchsbeginn und -ende wird beidseitig je ein zusätzlicher Punkt berücksichtigt.

Vorteilhaft an einer Untersuchung des arithmetischen Mittels ist die Dämpfung von Schwingungen in T/S und S/T . Da außerdem die Ungleichung

$$M \geq 1 \quad \text{für } \frac{T}{S} \in (0, \infty) \quad (5.46)$$

gilt, lässt sich auch bei einer Anwendung des Vorgehens auf reale Messdaten bereits visuell eine sehr gute Abschätzung für $\varepsilon_{0,xx}|_{\tau}$ geben. Zu Demonstrationszwecken wird die idealisierte technische Spannungs-Dehnungs-Kurve aus Abb. 5.17 mit einem künstlichen Rauschen überlagert, welches sich an realen Zugversuchen orientiert. Das Ergebnis ist in Abb. 5.19 dargestellt. Die zugehörigen Verhältnisse S/T , T/S sowie M folgen in Abb. 5.20.

Zu Anschauungszwecken sind die in Abb. 5.18 und Abb. 5.20 angedeuteten Werte für τ_1 und τ_2 stark überhöht. In der Praxis hat sich ein Wert von $\tau_2 = 0,01$ bewährt. Seine Festlegung geht auf Zugversuche ohne versuchsbedingte Nichtlinearitäten zurück, für die jeweils sowohl eine technische Spannungs-Dehnungs-Kurve als auch ein darin bestimmter Elastizitätsmodul vorliegt. Die Datenbasis für Thermoplaste entstammt dem Informationssystem CAMPUS (2020). Anhand eines Teils des Datensatzes aus dem europäischen Forschungsprojekt *TENSTAND* lässt sich die Übertragbarkeit des Vorgehens auf Metalle zeigen (LORD U. A. (2005)).

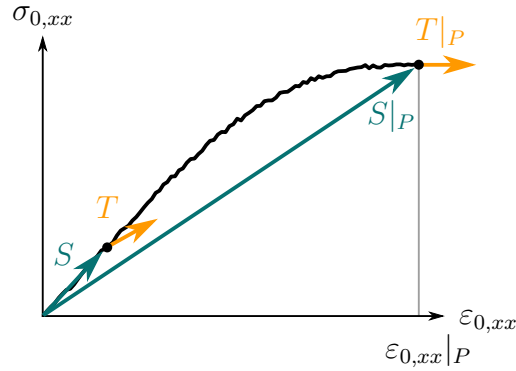


Abbildung 5.19: Verrauschte $\sigma_{0,xx}$ - $\epsilon_{0,xx}$ -Kurve bis zum ersten Maximum bei $\epsilon_{0,xx}|_P$

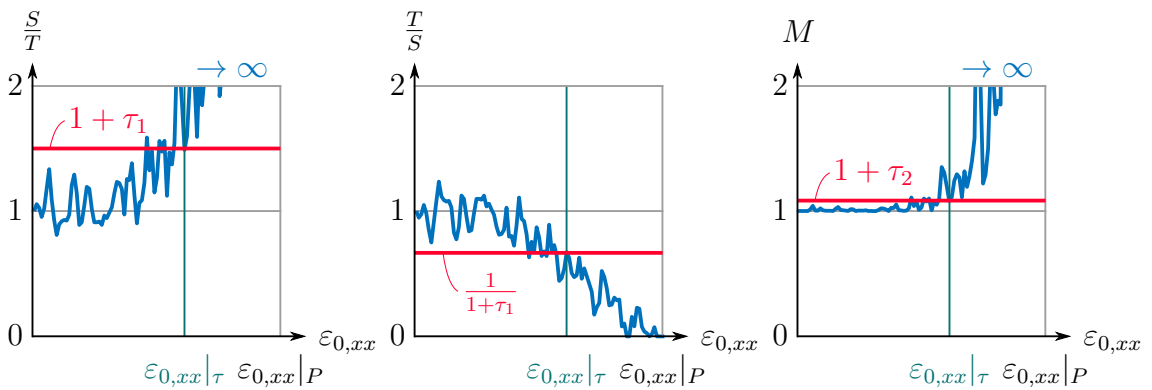


Abbildung 5.20: S/T , T/S und M für die Kurve aus Abb. 5.19

Kalibrierung der dehnratenabhängigen Größen

Die Anwendung der Methode aus dem vorhergehenden Abschnitt auf ein dynamisches Zugprüfprogramm erfordert dehnratenübergreifend für jeden vorliegenden Versuch die Identifikation des Vertrauensbereichs. Innerhalb der Gesamtheit dieser Intervalle lassen sich die Koeffizienten θ_j in Gl. (5.32) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung aus Gl. (5.33) durch Lösen des folgenden überbestimmten linearen Gleichungssystems berechnen:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{0,xx}|^1 & \epsilon_{0,xx}|^1 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^1}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \epsilon_{0,xx}|^1 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^1}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^\ell \\ \epsilon_{0,xx}|^2 & \epsilon_{0,xx}|^2 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^2}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \epsilon_{0,xx}|^2 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^2}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{0,xx}|^N & \epsilon_{0,xx}|^N \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^N}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \epsilon_{0,xx}|^N \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}|^N}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{0,xx}|^1 \\ \sigma_{0,xx}|^2 \\ \vdots \\ \sigma_{0,xx}|^N \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Dabei ist N die Gesamtsumme der Datenpunkte innerhalb der Vertrauensbereiche.

Die Ermittlung der Koeffizienten κ_j in Gl. (5.36) erfolgt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung aus Gl. (5.37) auf Grundlage dieses überbestimmten linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^1}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^1}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^h \\ 1 & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^N}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^N}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_V|1 \\ E_V|2 \\ \vdots \\ E_V|N \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Für niedrige Dehnraten ermöglichen Retardationsversuche, wie sie z. B. in FRITSCH (2012) durchgeführt werden, die Bestimmung der Elastizitätsgrenze eines Materials. Im Geschwindigkeitsbereich, in dem sich Crashlastfälle abspielen, ist die versuchstechnische Ermittlung dieses von der Dehnrate und dem Spannungszustand abhängigen Werts jedoch sehr herausfordernd und mit großen Unsicherheiten verbunden. Darum findet in der vorliegenden Arbeit die Approximation der Elastizitätsgrenze durch die Proportionalitätsgrenze statt, welche das Ende des linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung kennzeichnet. Der Fehler, der insbesondere bei Thermoplasten daraus erwächst, wird in Kauf genommen. Sollten in Zukunft geeignete Messwerte vorliegen, kann auf die Annahme verzichtet werden.

Zur Bestimmung der Initialsteigung D^* eines ausgewählten Versuchs im technischen Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist für die zugehörigen, insgesamt V Datenpunkte im Vertrauensbereich das folgende überbestimmte lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{0,xx}|1 \\ \varepsilon_{0,xx}|2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{0,xx}|V \end{bmatrix} [D^*] = \begin{bmatrix} \sigma_{0,xx}|1 \\ \sigma_{0,xx}|2 \\ \vdots \\ \sigma_{0,xx}|V \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Damit gilt für die zugehörige Proportionalitätsgrenze:

$$\sigma_E^* = \max(\{(0, \sigma_{0,xx}|P) \text{ für die gilt } D^* \varepsilon_{0,xx} - \sigma_{0,xx} \leq 0\}). \quad (5.50)$$

Unter Einbeziehung aller R Versuche mit dem zu analysierenden Werkstoff und Berücksichtigung der Nebenbedingung aus Gl. (5.39) können die Koeffizienten ζ_j in Gl. (5.38) mit dem nachfolgenden überbestimmten linearen Gleichungssystem ermittelt werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^1}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^1}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^v \\ 1 & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^2}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^2}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^R}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^1 & \dots & \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eff}^R}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_E^*|^1 \\ \sigma_E^*|^2 \\ \vdots \\ \sigma_E^*|^R \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Alle in diesem Abschnitt aufgestellten Gleichungssysteme lassen sich schreiben als:

$$\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.52)$$

Die Adressierung ihrer inhärenten Überbestimmtheit erfolgt durch eine Interpretation als lineare Least-Squares-Probleme. Diskrete Auswertungen von Gl. (5.33), Gl. (5.37) und Gl. (5.39) ergänzen diese durch lineare Nebenbedingungen, was auf Optimierungsprobleme der nachfolgenden Gestalt führt:

$$\min_{\boldsymbol{\chi}} \frac{1}{2} \|\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\lambda}\|_2^2 \text{ so dass } \mathbf{\Gamma}_{unequal}\boldsymbol{\chi} \leq \mathbf{0}. \quad (5.53)$$

Zur Lösung wird in dieser Arbeit der Solver *OOQP* nach GERTZ UND WRIGHT (2003) eingesetzt, welcher in der *OPTI Toolbox 2.28* von CURRIE UND WILSON (2012) für *MATLAB* zur Verfügung steht. Hierzu ist es erforderlich, Gl. (5.53) in ein *quadratisches Programm* umzuformulieren:

$$\min_{\boldsymbol{\chi}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{H}\boldsymbol{\chi} + \mathbf{J}^\top \boldsymbol{\chi} \right) \text{ so dass } \mathbf{\Gamma}_{unequal}\boldsymbol{\chi} \leq \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

Dabei gilt:

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Gamma}, \quad (5.55)$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{\Gamma}^\top \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.56)$$

Die Umformulierung ist möglich, weil die linearen Least-Squares-Probleme mit linearen Nebenbedingungen konvex sind (NOCEDAL UND WRIGHT (2006) sowie BOYD UND VANDENBERGHE (2004)).

5.5.3 Charakterisierung viskoplastischen Materialverhaltens

Der Programmcode aus Kap. 3 ermöglicht die Berechnung des Pfads eines materiellen Punkts im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum während eines Versuchs. Dieser verläuft auf einer Fläche, deren Gestalt sich umso deutlicher zeigt, je mehr Abzugsgeschwindigkeiten und Versuchswiederholungen untersucht werden (siehe Kap. 3.3.7 und Kap. 4.2.2). Da deren analytische Beschreibung für die Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens elementar ist, erfolgt die Konzeption eines geeigneten Modellierungsansatzes für die Datenbasis aus Kap. 5.1. Nach Kap. 2.2.3 lassen sich anschließend im Materialmodell Flächenschnitte bei konstanten Werten für $\dot{\varepsilon}_{pct}$ als eine tabellierte Fließkurvenschar vorgeben.

Datenreduktion und Extrapolation an die $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Ränder

Sofern die $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade aus Versuchswiederholungen einer geprüften nominellen Dehnrates eine hinreichend genaue Reproduzierbarkeit zeigen, ist es naheliegend, zur Datenreduktion einen *repräsentativen Pfad* pro $\dot{\varepsilon}_{nom}$ zu bestimmen. Die genannte Voraussetzung ist für die Zugversuche der beiden Prüfprogramme aus Kap. 5.1 erfüllt. Der Nachteil einer arithmetischen Mittelung von $\dot{\varepsilon}_{pct}$ und σ_{vm} über ε_{pct} besteht darin, dass dadurch die Versuchswiederholung einer nominellen Dehnrates, welche bei der kleinsten uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung versagt, eine begrenzende Rolle einnimmt. Daher werden alternativ für jedes Inkrement $\Delta\varepsilon_{pct}$ die absoluten Änderungen $\Delta\dot{\varepsilon}_{pct}$ und $\Delta\sigma_{vm}$ der bis zu diesem Punkt intakten Prüflinge gemittelt und anschließend aufsummiert. Auf diese Weise lassen sich auch Funktionswerte bestimmen, wenn einzelne Proben bei kleineren ε_{pct} versagen. Die Abschnitte unmittelbar vor dem Bruch der berücksichtigten Prüflinge sind kritisch auf ihre Güte hin zu beurteilen.

Abb. 5.21 zeigt beispielhaft die Ergebnisse für den Thermoplast PP des Prüfprogramms 1 aus Kap. 5.1. Auf der linken Seite finden sich farbig und durchgezogen die berechneten $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade für sämtliche Versuchswiederholungen der geprüften nominellen Dehnrates. Für jede Abzugsgeschwindigkeit liegen sechs Datensätze vor, weil nach Kap. 5.4 pro Versuch jeweils zwei materielle Punkte ausgewertet werden. Die Farbe Blau entspricht $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, Grün $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und Rot $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$. Farbnuancen deuten Versuchswiederholungen an. Auf der rechten Seite der Abbildung sind die zugehörigen gemittelten repräsentativen Pfade aufgetragen. Das Material wird auch für die weiteren Schritte als Anschauungsbeispiel herangezogen.

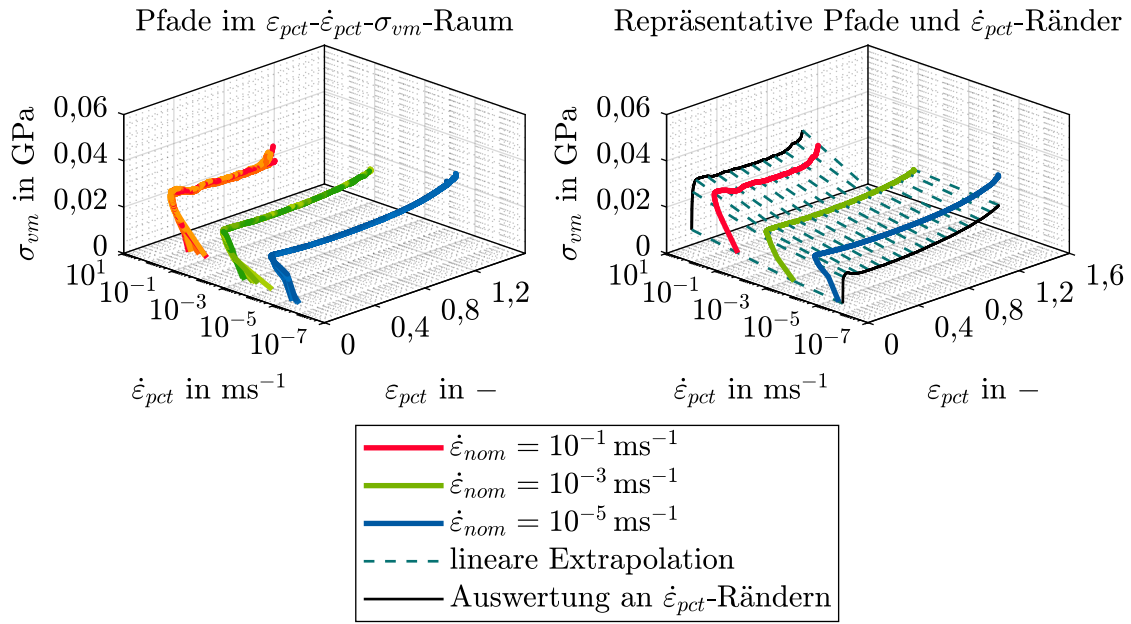


Abbildung 5.21: PP: Datenreduktion und Extrapolation an die $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Ränder

Für die in dieser Arbeit behandelte Datenbasis ist das $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Intervall der zu modellierenden Fläche folgendermaßen definiert:

$$\dot{\varepsilon}_{pct}|_{Surface} \in [\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}, \dot{\varepsilon}_{pct}|_{max}]. \quad (5.57)$$

Unter Berücksichtigung der insgesamt L über alle Versuche hinweg erfassten Datenpunkte für einen Werkstoff wird $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}$ festgelegt als:

$$\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} = \min \left(\left\{ \min \left(\left\{ \dot{\varepsilon}_{pct}|^1, \dot{\varepsilon}_{pct}|^2, \dots, \dot{\varepsilon}_{pct}|^L \right\} \right), 10^{-6} \text{ ms}^{-1} \right\} \right). \quad (5.58)$$

Analog gilt für $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max}$:

$$\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} = \max \left(\left\{ \max \left(\left\{ \dot{\varepsilon}_{pct}|^1, \dot{\varepsilon}_{pct}|^2, \dots, \dot{\varepsilon}_{pct}|^L \right\} \right), 10^0 \text{ ms}^{-1} \right\} \right). \quad (5.59)$$

Dadurch wird sichergestellt, dass $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} \leq 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$ und $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} \geq 10^0 \text{ ms}^{-1}$ ist und alle erfassten ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade für ein Material dazwischen verlaufen.

Zur Stützung der zu modellierenden Fläche an den Intervallgrenzen sind *Randkurven* zu definieren. Da in diesen Bereichen sehr wenige Datenpunkte vorliegen, müssen geeignete Annahmen getroffen werden. Um insbesondere das erste lokale Maximum der Fließkurven an den $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Rändern zu approximieren, hat es sich in der Praxis bewährt, jeweils unter Berücksichtigung der nächsten beiden repräsentativen Pfade eine Extrapolation in Dehnratenrichtung vorzunehmen. Bei dieser wird von einem linearen Zusammenhang zwischen $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ und σ_{vm} ausgegangen. Für das PP sind die so generierten Kurven

als dünne schwarze Linien auf der rechten Seite von Abb. 5.21 dargestellt. Gestrichelte und petrolfarbene Geraden visualisieren für einige ausgewählte Punkte die Extrapolation. Es zeigt sich deutlich, dass von den beiden repräsentativen Pfaden, die für diese herangezogen werden, dem in ε_{pct} -Richtung kürzeren eine limitierende Rolle zukommt.

Für zukünftige Anwendungen ist eine zusätzliche Durchführung einzelner Versuche bei den nominellen Dehnraten 10^{-7} ms^{-1} und 10^1 ms^{-1} denkbar. Indem auf Grundlage von $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ und σ_{vm} linear zwischen den Pfaden für 10^{-7} ms^{-1} und 10^{-5} ms^{-1} bei $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}$ sowie zwischen den Pfaden für 10^{-1} ms^{-1} und 10^1 ms^{-1} bei $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max}$ interpoliert wird, kann auf die beschriebene Extrapolation verzichtet werden.

Die abschließende Modellierung der Randkurven ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

Modellierung der Randkurven und Extrapolation der repräsentativen Pfade

Bei der Vorgabe tabellierter Fließkurven nach Kap. 2.2.3 ist es wichtig, dass diese bei einem einheitlichen $\varepsilon_{pct}|_{max}$ enden. Der Grund dafür ist die automatische Datenvervollständigung durch *LS-DYNA* bei nicht aufeinander abgestimmten Endpunkten. Weil dies in Simulationen schwer nachvollziehbare Effekte nach sich ziehen kann, gibt der Solver in diesem Fall eine entsprechende Warnung aus. Die Modellierung der Fläche in den Bereichen, in denen wenige oder keine Datenpunkte vorliegen, ist so zu realisieren, dass der durch berechnete Werte definierte Teil nur in geringem Maße beeinflusst wird. Zur Flächenstützung sind sowohl die Randkurven als auch die repräsentativen Pfade auf plausible Art und Weise in Richtung höherer ε_{pct} zu ergänzen.

Zunächst wird die Modellierung der Randkurven abgeschlossen. Hierzu haben sich für die untersuchten Werkstoffe zwei Methoden als geeignet erwiesen. Im Rahmen der *Methode 1* wird der in ε_{pct} -Richtung längste repräsentative Pfad identifiziert und seine Steigung $\partial\sigma_{vm}/\partial\varepsilon_{pct}$ herangezogen, um nach dem ersten lokalen Maximum die Randkurven auszugestalten. Für darüber hinausgehende ε_{pct} findet die Prognose mit einem polynomialen Ansatz statt, dessen Grad den innerhalb eines Übergangsbereichs liegenden vorhergehenden Verlauf möglichst gut approximiert. Alternativ werden die Daten an den $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Rändern direkt mit einem polynomialen Ansatz in ε_{pct} -Richtung ergänzt. Dies wird als *Methode 2* bezeichnet.

Für das PP erfolgt aufgrund der großen Unterschiede zwischen den Bruchdehnungen bei den drei nominellen Dehnraten die Anwendung der Methode 1. Nach dem ersten lokalen Maximum werden die Randkurven auf Basis der Steigung $\partial\sigma_{vm}/\partial\varepsilon_{pct}$ des repräsentativen Pfads für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ modelliert. Die anschließende Extrapolation geschieht mit einem quadratischen Polynom. Auf der linken Seite von Abb. 5.22 sind die Ergebnisse dargestellt. Für $\varepsilon_{pct}|_{max}$ wird ein Wert von 1,6 definiert.

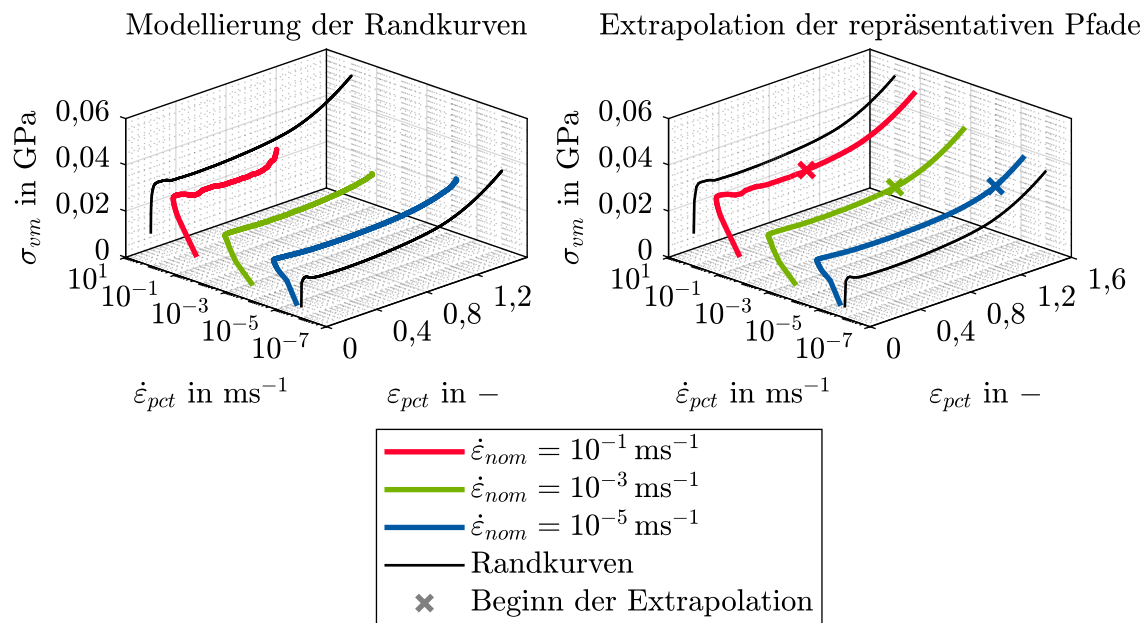


Abbildung 5.22: PP: Modellierung der Randkurven und Extrapolation der Pfade

Im nächsten Schritt werden die repräsentativen Pfade extrapoliert. Dies erfolgt durch eine Interpolation in Dehnratenrichtung zwischen den Steigungen $\partial\sigma_{vm}/\partial\epsilon_{pct}$ der Randkurven unter der Annahme einer linearen Abhängigkeit von $\ln(\dot{\epsilon}_{pct}/\dot{\epsilon}_{ref})$. Zur Vermeidung von Knicken ist es legitim, die Extrapolation kurz vor dem Abschluss der Pfade zu beginnen. Auf diese Weise können auch kritisch zu hinterfragende Endabschnitte, wie sie im gewählten Beispiel bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} ms^{-1}$ auftreten, plausibel modifiziert werden. Ein derartiges Verhalten deutet z. B. auf Probenanrisse, das Lösen des aufgesprühten Lacks von der Oberfläche der Prüflinge oder andere Messfehler hin. Die Ergebnisse sind auf der rechten Seite von Abb. 5.22 dargestellt. Zusammen bilden die repräsentativen ϵ_{pct} - $\dot{\epsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade und die beiden Randkurven die Menge der Datenpunkte $|\mu|^q$, mit denen im Folgenden die Fläche kalibriert wird.

Das beschriebene Vorgehen stellt eine Möglichkeit dar, um bei der Modellierung der Fläche die Anforderungen von *LS-DYNA* an die Endpunkte der Fließkurven zu berücksichtigen. Dabei sollte stets bedacht werden, dass es vor allem der Beschreibung von Bereichen im ϵ_{pct} - $\dot{\epsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum dient, die für die Simulation von ausgewählten Versuchen eine untergeordnete Rolle spielen. Die Verfolgung anderer Strategien ist möglich.

Analytische Beschreibung der Fläche mit B-Splines

Zur analytischen Beschreibung der Fläche wird ein Ansatz gesucht, der zum einen auf eine möglichst einfache Gestalt führt und zum anderen nicht zu stark einschränkt.

Im Sinne einer Datenglättung sollten zudem Oszillationen und irrelevante Details aus den Versuchsauswertungen keinen Einzug in das Endergebnis erhalten. In dieser Arbeit erfolgt die Umsetzung der beschriebenen Anforderungen mit einer biparametrischen B-Spline-Fläche. Für diese gilt nach ROGERS (2000):

$$\boldsymbol{\mu}(\varrho_1, \varrho_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \sum_{i_2=1}^{n_2+1} \mathbf{B}_{i_1, i_2} N_1|_{i_1, k_1}(\varrho_1) N_2|_{i_2, k_2}(\varrho_2). \quad (5.60)$$

Mit Einführen einer Mengennotation für die Flächenrichtungen,

$$a \in \{1, 2\}, \quad (5.61)$$

lassen sich in Gl. (5.60) die beiden *Flächenparameter* ϱ_a , die zugehörigen *B-Spline-Ordnungen* k_a und die Laufvariablen i_a identifizieren. $\boldsymbol{\mu}(\varrho_1, \varrho_2)$ steht für einen Punkt auf der Fläche und \mathbf{B}_{i_1, i_2} für einen Eckpunkt des polygonalen *Kontrollnetzes*. Beide können als Zeilenvektoren mit drei Spalten für ε_{pct} , $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ und σ_{vm} interpretiert werden. Die Endwerte $n_a + 1$ der Summen entsprechen jeweils der Anzahl an Eckpunkten des Kontrollnetzes in ϱ_a -Richtung. Bei N_a handelt es sich um die *B-Spline-Basisfunktionen*, welche über die *Cox-de-Boor-Rekursionsformeln* definiert sind:

$$N_a|_{i_a, 1}(\varrho_a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \boldsymbol{\xi}_a|_{i_a} \leq \varrho_a < \boldsymbol{\xi}_a|_{i_a+1}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.62)$$

$$N_a|_{i_a, k_a}(\varrho_a) = \frac{(\varrho_a - \boldsymbol{\xi}_a|_{i_a}) N_a|_{i_a, k_a-1}(\varrho_a)}{\boldsymbol{\xi}_a|_{i_a+k_a-1} - \boldsymbol{\xi}_a|_{i_a}} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_a|_{i_a+k_a} - \varrho_a) N_a|_{i_a+1, k_a-1}(\varrho_a)}{\boldsymbol{\xi}_a|_{i_a+k_a} - \boldsymbol{\xi}_a|_{i_a+1}}. \quad (5.63)$$

Darin steht $\boldsymbol{\xi}_a$ für die *Knotenvektoren*, die angesichts der erwarteten Flächenausprägungen und bekannten Ränder offen und uniform gewählt werden:

$$\boldsymbol{\xi}_a|_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 1 \leq j \leq k_a, \\ j - k_a & \text{wenn } k_a + 1 \leq j \leq n_a + 1, \\ n_a - k_a + 2 & \text{wenn } n_a + 2 \leq j \leq n_a + k_a + 1. \end{cases} \quad (5.64)$$

Vor der Kalibrierung der Fläche sind entlang der repräsentativen $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade und der beiden Randkurven die Parameterwerte ϱ_a zu approximieren. Für die ϱ_1 -Richtung erfolgt dies mit der Sehnenlänge. Nach ROGERS (2000) lautet bei W Kurvenpunkten der Parameterwert am Kurvenpunkt w :

$$\varrho_1|_w = \begin{cases} 0 & \text{wenn } w = 1, \\ \frac{\varrho_1|_{max} \sum_{j=2}^w \sqrt{(\varepsilon_{pct}|^j - \varepsilon_{pct}|^{j-1})^2 + (\sigma_{vm}|^j - \sigma_{vm}|^{j-1})^2}}{\sum_{j=2}^W \sqrt{(\varepsilon_{pct}|^j - \varepsilon_{pct}|^{j-1})^2 + (\sigma_{vm}|^j - \sigma_{vm}|^{j-1})^2}} & \text{wenn } w \geq 2. \end{cases} \quad (5.65)$$

Zur Parametrisierung der ϱ_2 -Richtung hat es sich bei den vorliegenden Daten als robust und zweckmäßig erwiesen, die $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Koordinaten eines Punkts unter Berücksichtigung von $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}$ und $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max}$ nach der folgenden Formel umzurechnen:

$$\varrho_2|^w = \varrho_2|_{max} \frac{\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{pct}|^w}{\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}}\right)}{\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max}}{\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}}\right)}. \quad (5.66)$$

Vorteilhaft an diesem Ansatz ist, dass dadurch konstante Werte für $\dot{\varepsilon}_{pct}$ bzw. $\ln(\dot{\varepsilon}_{pct}/\dot{\varepsilon}_{ref})$ konstanten Werten für ϱ_2 entsprechen, was später die Extraktion einer Fließkurvenschar durch Schneiden der Fläche vereinfacht.

In beiden Fällen ist $\varrho_a|_{max}$ jeweils der Maximalwert des zugehörigen Knotenvektors. Unter Berücksichtigung von Gl. (5.64) gilt:

$$\varrho_a|_{max} = n_a - k_a + 2. \quad (5.67)$$

Zur Kalibrierung der B-Spline-Fläche müssen neben den Datenpunkten $\boldsymbol{\mu}^q$ und den Parameterwerten $\varrho_a|^q$ die beiden B-Spline-Ordnungen k_a sowie die Summen der Eckpunkte des Kontrollnetzes $n_a + 1$ vorgegeben werden. Anschließend lässt sich gemäß ROGERS (2000) aus Gl. (5.60) für jeden Datenpunkt eine lineare Gleichung extrahieren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^q(\varrho_1|^q, \varrho_2|^q) = & N_1|_{1,k_1}(\varrho_1|^q) [N_2|_{1,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{1,1} + N_2|_{2,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{1,2} + \dots + \\ & N_2|_{n_2+1,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{1,n_2+1}] + \\ & \vdots \\ N_1|_{n_1+1,k_1}(\varrho_1|^q) [N_2|_{1,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{n_1+1,1} + N_2|_{2,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{n_1+1,2} + \dots + \\ & N_2|_{n_2+1,k_2}(\varrho_2|^q) \mathbf{B}_{n_1+1,n_2+1}]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

In Matrizenschreibweise führt dies auf das folgende System:

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}. \quad (5.69)$$

Dabei enthält die Matrix $\boldsymbol{\mu}$ die vorgegebenen Datenpunkte und die Matrix \mathbf{B} die zu bestimmenden Eckpunkte des polygonalen Kontrollnetzes. Da beide Punkttypen im dreidimensionalen $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum zu verorten sind, haben $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{B} jeweils drei Spalten. Die Matrix $\tilde{\mathbf{N}}$ setzt sich aus den Produkten der B-Spline-Basisfunktionen zusammen.

Bei der Lösung des Systems aus Gl. (5.69) erfolgt die Berücksichtigung von zwei Nebenbedingungen. Zum einen werden mit einer Anfangsrandbedingung für $\varepsilon_{pct} = 0$ die Startpunkte der repräsentativen Pfade und Randkurven explizit vorgegeben:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{equal} \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_{equal}. \quad (5.70)$$

Zum anderen wird für jeden Punkt auf der Fläche erzwungen:

$$-\varepsilon_{pct}|_{Surface} \leq 0, \quad (5.71)$$

$$-\dot{\varepsilon}_{pct}|_{Surface} \leq -\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min}, \quad (5.72)$$

$$-\sigma_{vm}|_{Surface} \leq 0. \quad (5.73)$$

Dies führt auf eine Nebenbedingung der folgenden Form:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{unequal} \mathbf{B} \leq \boldsymbol{\mu}_{unequal}. \quad (5.74)$$

Mit Einführen einer Mengennotation für die drei Spalten von $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{B} ,

$$c \in \{1, 2, 3\}, \quad (5.75)$$

folgt jeweils ein lineares Least-Squares-Problem mit linearen Nebenbedingungen:

$$\min_{\mathbf{B}_c} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{B}_c - \boldsymbol{\mu}_c\|_2^2 \text{ so dass } \begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_{equal} \mathbf{B}_c = \boldsymbol{\mu}_{equal}|_c, \\ \tilde{\mathbf{N}}_{unequal} \mathbf{B}_c \leq \boldsymbol{\mu}_{unequal}|_c. \end{cases} \quad (5.76)$$

Zur Lösung wird der Solver *OOQP* nach GERTZ UND WRIGHT (2003) eingesetzt. Hierzu ist Gl. (5.76) in ein quadratisches Programm umzuformulieren:

$$\min_{\mathbf{B}_c} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}_c^\top \mathbf{H} \mathbf{B}_c + \mathbf{J}_c^\top \mathbf{B}_c \right) \text{ so dass } \begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_{equal} \mathbf{B}_c = \boldsymbol{\mu}_{equal}|_c, \\ \tilde{\mathbf{N}}_{unequal} \mathbf{B}_c \leq \boldsymbol{\mu}_{unequal}|_c. \end{cases} \quad (5.77)$$

Dabei gilt:

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{N}}^\top \tilde{\mathbf{N}}, \quad (5.78)$$

$$\mathbf{J}_c = -\tilde{\mathbf{N}}^\top \boldsymbol{\mu}_c. \quad (5.79)$$

Die Umformulierung ist möglich, weil die linearen Least-Squares-Probleme mit linearen Randbedingungen aus Gl. (5.76) konvex sind (NOCEDAL UND WRIGHT (2006) sowie BOYD UND VANDENBERGHE (2004)).

Nach der Lösung von Gl. (5.76) bzw. Gl. (5.77) ist es denkbar, die mit Gl. (5.65) sowie Gl. (5.66) approximierten Parameterwerte der Datenpunkte im Rahmen einer Iteration zu korrigieren, um die Güte der Fläche zu erhöhen. Da sich für alle in dieser Arbeit untersuchten Thermoplaste jedoch bereits nach einem Durchlauf sehr gute Ergebnisse erzielen lassen, wird auf die Implementierung einer solchen Strategie verzichtet.

In Abb. 5.23 sind beispielhaft die Ergebnisse für das PP dargestellt. Während die linke Seite die Konstruktion der Fläche auf Basis der repräsentativen Pfade und Randkurven dokumentiert, sind auf der rechten Seite die ursprünglichen Versuchsauswertungen dargestellt. Da pro Materialprüfung nach Kap. 5.4 jeweils zwei materielle Punkte herangezogen werden, liegen für jede Abzugsgeschwindigkeit sechs Kurven vor. Farbnuancen deuten Versuchswiederholungen an.

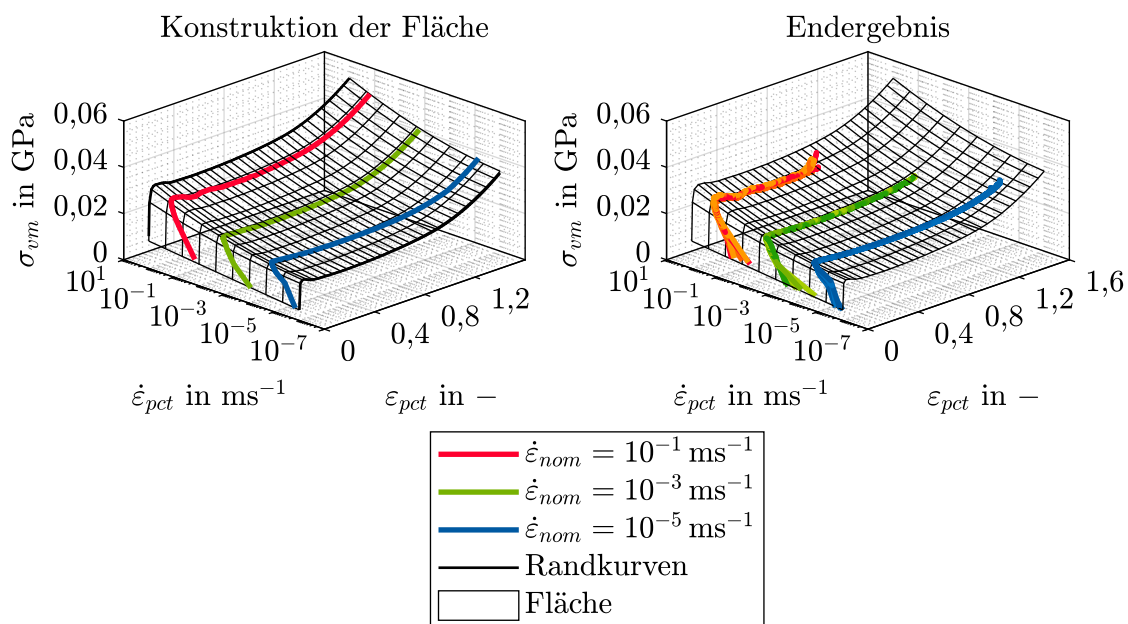


Abbildung 5.23: PP: Konstruktion der Fläche im ϵ_{pct} - $\dot{\epsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum und Endergebnis

Indem die Fläche bei konstanten Werten für $\dot{\epsilon}_{pct}$ geschnitten wird, folgt die Fließkurvenschar zur Kalibrierung von *SAMP-1* nach Kap. 2.2.3. Für das PP sind die entsprechenden zehn Flächenschnitte in Abb. 5.23 als dünne schwarze Linien eingezeichnet. Eine äquivalente Darstellung zeigt Abb. 5.24.

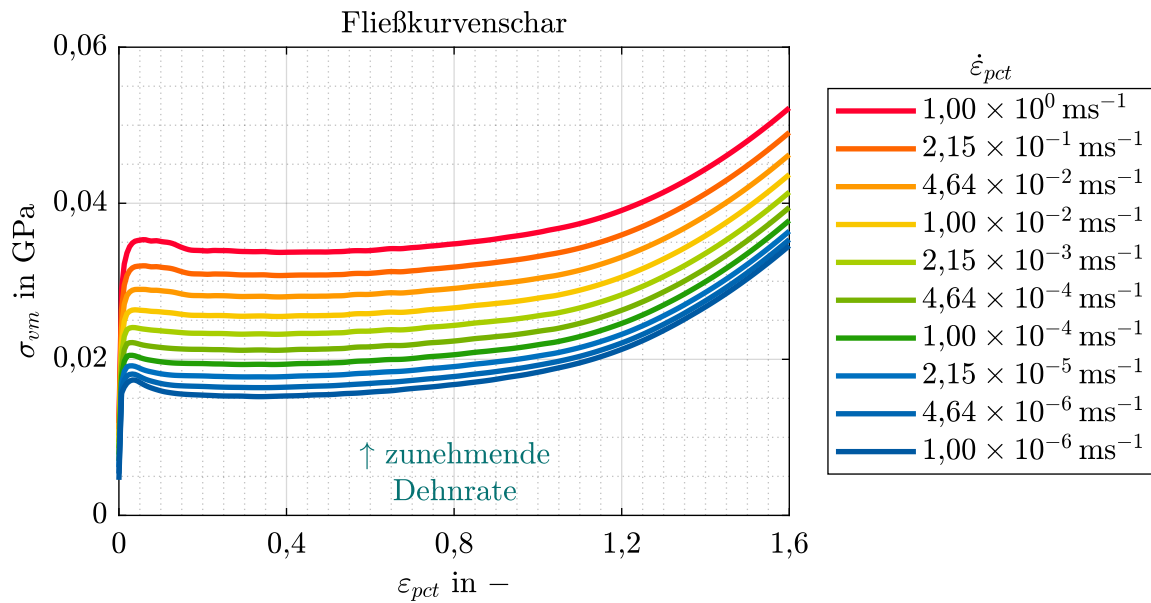


Abbildung 5.24: PP: Fließkurvenschar

Die im Beispiel gewählten Parameter zur Erzeugung der Fläche werden in Kap. 6.2.3 vorgestellt. Generell ist bei der Wahl der beiden Ordnungen der B-Spline-Formulierung sowie der Anzahl der Eckpunkte des Kontrollnetzes darauf zu achten, dass keine Oszillationen entstehen. Vor allem der Anfangsbereich mit kleinen Werten für ϵ_{pct} bedarf in dieser Hinsicht besonderer Aufmerksamkeit.

6

Beispielanwendungen

Nachfolgend wird das entwickelte Verfahren dazu genutzt, um *SAMP-1* für vier verschiedene Thermoplaste zu kalibrieren. Den Ausgangspunkt bilden die mit den Methoden aus Kap. 5.2 und Kap. 5.3 aufbereiteten Versuchsdaten nach Kap. 5.1. Die Reihenfolge der behandelten Werkstoffe spiegelt die steigende Komplexität ihrer Eigenschaften und somit der entsprechenden Anpassungen von *SAMP-1* wider. Nach der erfolgreichen Kalibrierung des Materialmodells erfolgt die Durchführung von Simulationen und der Vergleich der Ergebnisse mit den Versuchsdaten. Die Gegenüberstellung findet anhand des Kraftverlaufs, des Dehnungsfelds und der Probenbreite statt. Sofern 3D-DIC-Daten vorliegen, wird anstelle Letzterer die Querschnittsfläche des Prüflings in der Einschnürebene ausgewertet. Nach der Vorstellung der Beispiele und dem damit vermittelten Gesamtüberblick über die Vorgehensweise bildet die Beurteilung der Automatisierbarkeit des Verfahrens den Abschluss der Ausführungen.

6.1 Grundlegendes

Zu Beginn wird die mechanische Modellbildung für die durchgeführten Zugversuche vorgestellt. Ein weiterer grundlegender Punkt, der einer Klärung bedarf, ist die Auswertung des Dehnungsfelds in der Simulation.

6.1.1 Modellierung eines Zugversuchs

Die in den Prüfprogrammen nach Kap. 5.1 für Zugversuche verwendete Probengeometrie nach Typ 3 der DIN EN ISO 8256 (2005) wird derart vernetzt, dass die Elemente im Parallelbereich eine Kantenlänge von 2 mm aufweisen. Diese räumliche Diskretisierung motiviert sich durch die angestrebte spätere Übertragbarkeit des kalibrierten

Materialmodells auf Komponenten- und Gesamtfahrzeugrechnungen. Sie entspricht der Referenzlänge der Versuchsauswertungen. In den Simulationen wird die Elementdicke gemäß der gemessenen Dicke des jeweils abzubildenden Prüflings festgelegt. Aufgrund von Toleranzen bei der Fertigung kann sie vom in Kap. 5.1 dokumentierten Sollwert von 2 mm abweichen. Als Elementtechnologie kommt die aus Kap. 3.1.1 zum Einsatz und das lokale Elementkoordinatensystem ist nach Kap. 2.2.1 durch $\text{INN}=2$ definiert. Die Abbildung der Randbedingungen im Zugversuch geschieht durch eine feste Lagerung der Knoten im einen Einspannbereich und die Vorgabe einer Verschiebung $u(t)$ in x -Richtung für die Knoten im anderen Einspannbereich. In Letzterem sind alle übrigen Knotenfreiheitsgrade ebenfalls gesperrt. Das Modell ist in Abb. 6.1 skizziert.

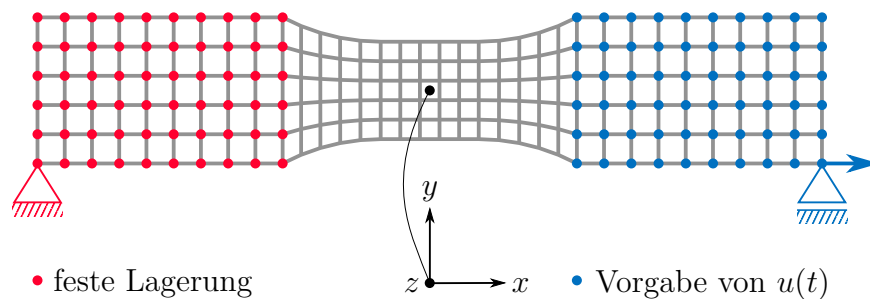


Abbildung 6.1: Modellierung eines Zugversuchs

Bei der Simulation eines repräsentativen Zugversuchs wird die Verschiebung $u(t)$ vorgegeben, deren Bestimmung mittels DIC möglichst an den Übergängen zwischen Schulter- und Einspannbereichen der Probe in der x - z -Ebene erfolgt. Für die mit 3D-DIC aufgezeichneten Versuche ist eine exakte Quantifizierung möglich, weil diese eine vergrößerte Einspannlänge von 35 mm aufweisen und somit die Auswertepunkte in der Flächenkomponente liegen. Dies gilt nicht für die mit 2D-DIC erfassten Versuche. Aufgrund der bei ihnen gewählten Einspannlänge von 30 mm greifen die Spannbacken genau an den Stellen, an denen $u(t)$ im Idealfall zu bestimmen ist und gemäß Kap. 2.3 ist eine DIC-Auswertung technologisch bedingt nicht bis zum Rand möglich. In diesem Fall findet die Quantifizierung der Verschiebung auf Grundlage der äußersten erfassbaren Punkte auf der Probenoberfläche statt. Das beschriebene Vorgehen ist legitim, weil nach Kap. 5.3.1 die Unterschiede in den äußeren Zwängen, welche mit den beiden verwendeten Einspannkonfigurationen einhergehen, einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Materialverhalten im Versuch haben. Die Vorgabe des Kolbenwegs als Verschiebung wird nicht als Option erachtet, da dieser z. B. aufgrund der Maschinensteifigkeit und der in Kap. 5.2.1 beschriebenen Effekte nicht zwangsläufig exakt mit dem tatsächlichen $u(t)$ übereinstimmt, welches die Probe erfährt.

6.1.2 Auswertung des Dehnungsfelds in der Simulation

Nach Kap. 2.1.2 und Kap. 2.2.1 entsprechen die von *LS-DYNA* ausgegebenen Dehnungen nur bei festen Verzerrungs-Hauptachsen und gleichzeitiger Abwesenheit einer Starrkörperrotation den Hencky-Verzerrungen. Da keine Standardoption zur Verfügung steht, um sich diese anzeigen zu lassen, wird ein Algorithmus entwickelt, welcher das Verzerrungsmaß im Zentrum eines Schalenelements nachträglich berechnet. Wertvoll ist in diesem Zusammenhang die Dokumentation von MCGINTY (2012). Alle im Folgenden dargestellten Dehnungsfelder aus Simulationen sind Ergebnisse dieses Vorgehens und zeigen somit Hencky-Verzerrungen.

6.2 Modellkalibrierungen

Es folgt die Anwendung des entwickelten Verfahrens auf die Datenbasis nach Kap. 5.1. Da zur Reduktion des Umfangs jeweils nur neu auftretende Effekte ausführlich vorgestellt und diskutiert werden, ist das Unterkapitel chronologisch zu lesen.

6.2.1 PC/ABS-Blend mit reduziertem PC-Anteil

Als erstes werden die Versuche mit dem Polycarbonat/Acrylnitril-Butadien-Styrol-Blend mit reduziertem PC-Anteil (PC/ABS R) aus dem Prüfprogramm 1 analysiert. Soweit möglich, findet die Kalibrierung von *SAMP-1* mit den ursprünglichen 2D-DIC-Daten statt. Die nachträglich durchgeführten, mit 3D-DIC erfassten Versuche für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ werden ausschließlich zur Bestimmung von ν_p und $\tilde{\nu}_t$ herangezogen.

Charakterisierung des elastischen Materialverhaltens

Zur Charakterisierung des elastischen Materialverhaltens wird dehnratenübergreifend für alle mit 2D-DIC erfassten Versuche die Funktion M nach Gl. (5.42) ausgewertet und jeweils die Obergrenze des Vertrauensbereichs durch das Kriterium aus Gl. (5.45) identifiziert. Da die Nutzung dieses arithmetischen Mittels von T/S und S/T durch die inhärente Dämpfung von Schwingungen auf den Umgang mit verrauschten Messdaten abzielt, basiert die Bestimmung der Parameter des linear-elastischen bzw. bei den anderen Beispielen viskoelastischen Regimes auf den ungeglätteten Daten.

Die linke Seite von Abb. 6.2 zeigt als dicke farbige Linien die entsprechenden Verläufe von M über der technischen Längsdehnung. Sobald zum letzten Mal $M \leq 1 + \tau_2$ ist, wird jeweils die Obergrenze des Vertrauensbereichs erreicht. Der Schwellenwert entspricht der

dünnen schwarzen Strichpunktlinie. In den technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven auf der rechten Seite der Abbildung, deren Darstellung nur bis zum jeweiligen Maximum bei $\varepsilon_{0,xx}|_P$ erfolgt, sind die zu $\varepsilon_{0,xx}|_\tau$ gehörenden Punkte durch ein Kreuz markiert. Abb. 6.2 bis Abb. 6.4 verwenden dieselbe Farbgebung: Blau entspricht $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, Grün $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und Rot $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$. Farbnuancen deuten die unterschiedlichen Versuchswiederholungen an.

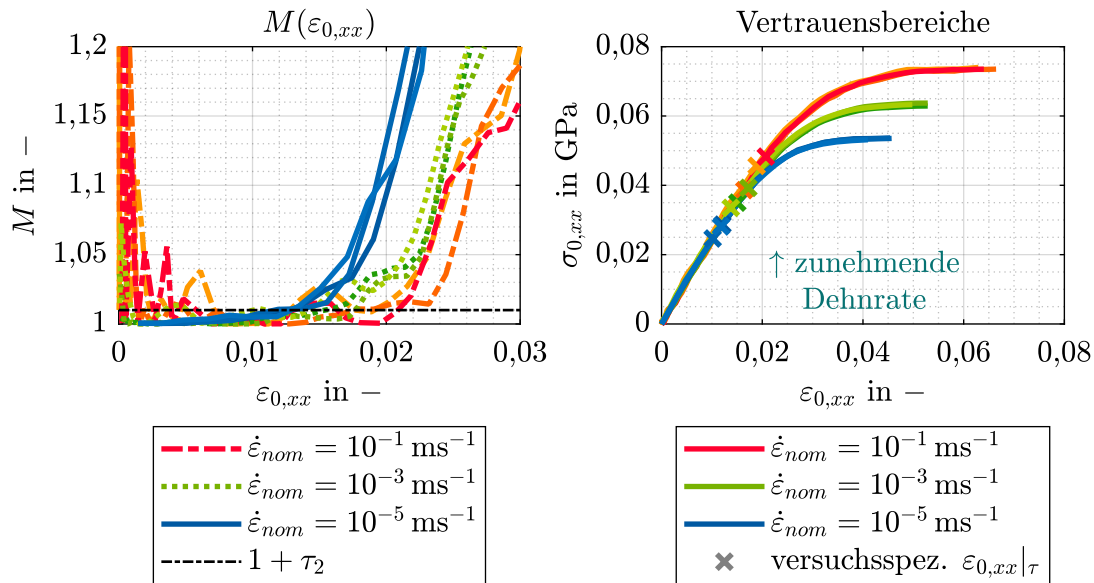


Abbildung 6.2: PC/ABS R: Vertrauensbereiche

Durch Lösen von Gl. (5.49) lässt sich für jeden einzelnen Versuch eine Initialsteigung D^* bestimmen. Davon unabhängig ergibt sich der funktionale Zusammenhang $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$ aus Gl. (5.32) dehnratenübergreifend auf Basis aller Datenpunkte innerhalb der Vertrauensbereiche durch Lösen von Gl. (5.47). Da der Thermoplast kein viskoelastisches Verhalten zeigt, wird als Grad der Funktion $\ell = 0$ gewählt. Entsprechend entfallen in den Differentialgleichungen die Relaxationsrate β und die variable Materialsteifigkeit E_V . Damit entspricht nach Kap. 5.5.2 die Initialsteigung der Spannungs-Dehnungs-Kurven dem Elastizitätsmodul.

Auf der linken Seite von Abb. 6.3 sind die versuchsspezifischen D^* über den Werten für $\dot{\varepsilon}_{eff}$ aufgetragen, bei denen das später mit ihnen bestimmte σ_E^* eines Versuchs erreicht wird. Außerdem ist die dehnratenübergreifend kalibrierte Funktion $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$ zu sehen. Der Verlauf beginnt bei $\dot{\varepsilon}_{eq} = 1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$, was sich gemäß Kap. 5.5.2 an der DIN EN ISO 527-2 (2012) orientiert und petrolfarben hervorgehoben ist. Der rechte Teil der Abbildung zeigt durchgezogen und farbig die technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche bis zum jeweiligen Maximum bei $\varepsilon_{0,xx}|_P$. Ergänzt werden sie um eine schwarze Strichpunktlinie durch den Ursprung mit der Steigung $D = E_C$.

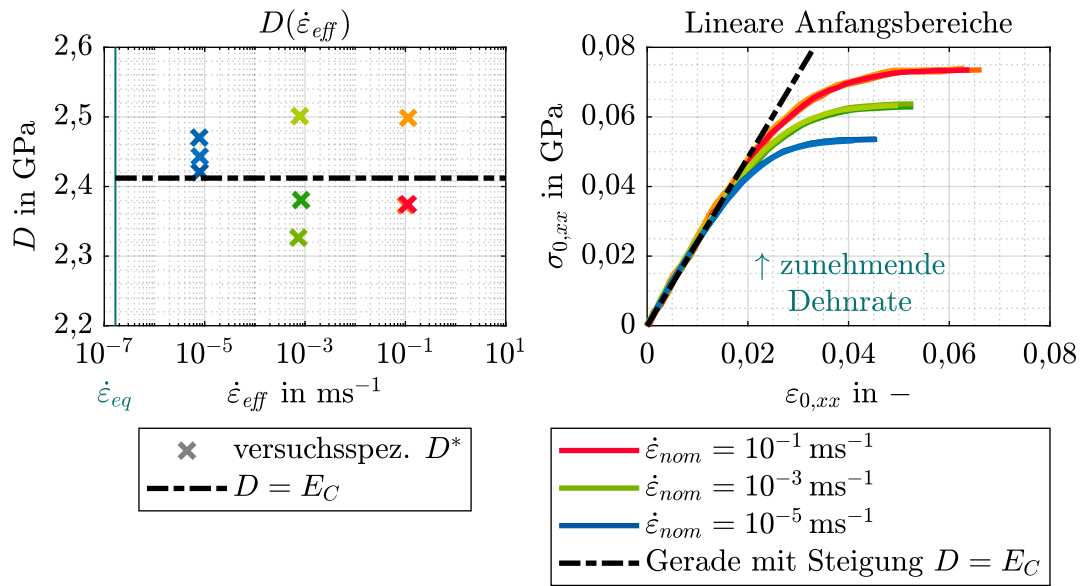


Abbildung 6.3: PC/ABS R: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$

Bezogen auf den im Datenblatt des Werkstoffs angegebenen Elastizitätsmodul, 2,35 GPa, weist E_C mit 2,41 GPa eine relative Abweichung von 2,6 % auf, was eine sehr gute Übereinstimmung darstellt. Allerdings sollte bei dieser Plausibilitätsprüfung insbesondere beachtet werden, dass der Datenblattwert auf Versuche mit direkt im Spritzgussverfahren hergestellten Prüflingen einer anderen Dicke zurückgeht. Auch bei einem Thermoplast mit in sehr guter Näherung isotropen Eigenschaften kann dies zu gewissen Abweichungen im beobachteten Materialverhalten führen (siehe Kap. 5.5.2).

Wie bereits angedeutet, werden die versuchsspezifischen D^* genutzt, um mit Gl. (5.50) die Elastizitätsgrenze σ_E^* eines Versuchs zu approximieren. In Abb. 6.4 sind die resultierenden diskreten Werte aus allen Versuchen analog zur linken Seite von Abb. 6.3 über den Werten für $\dot{\epsilon}_{eff}$ aufgetragen, bei denen jeweils das Erreichen von σ_E^* stattfindet. Der ebenfalls gezeigte funktionale Zusammenhang $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$ aus Gl. (5.38) folgt durch Lösen von Gl. (5.51) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung aus Gl. (5.39) für $\dot{\epsilon}_{eff} \geq \dot{\epsilon}_{eq}$. Da die Datenlage auf eine lineare Beziehung zwischen σ_E und $\ln(\dot{\epsilon}_{eff}/\dot{\epsilon}_{ref})$ schließen lässt, wird als Grad der Funktion $v = 1$ gewählt. Wie auf der linken Seite von Abb. 6.3 ist $\dot{\epsilon}_{eq}$ petroldarkrot eingezeichnet.

Sobald $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$ bekannt ist, lassen sich mit Gl. (3.9) das linear-elastische und das elasto-viskoplastische Regime separieren. Innerhalb des Ersteren wird die Querkontraktionszahl für alle vorliegenden Datenpunkte bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} ms^{-1}$ mit Gl. (3.39) bestimmt und anschließend arithmetisch gemittelt. Dies geschieht unter Beachtung von Kap. 5.5.2. In Ermangelung von Angaben in den Datenblättern ist es für keinen der in dieser Arbeit untersuchten Thermoplaste möglich, eine vergleichende Aussage über die Genauigkeit

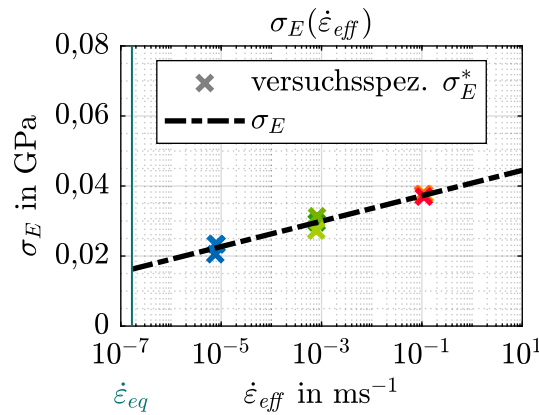


Abbildung 6.4: PC/ABS R: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$

der bestimmten Querkontraktionszahl zu treffen. In Tab. 6.1 sind die skalaren Parameterwerte für $\dot{\epsilon}_{eq}$, E_C und ν zusammengestellt. Die ebenfalls enthaltene Dichte entstammt einer Messung im Rahmen der Materialprüfung.

Parameter	Wert
$\dot{\epsilon}_{eq}$	$1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$
E_C	2,41 GPa
ν	0,38
ρ	$1,13 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$

Tabelle 6.1: PC/ABS R: skalare Parameter

Bestimmung der plastischen Querkontraktion

Zur Bestimmung der plastischen Querkontraktion werden die mittels 3D-DIC erfassten Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ herangezogen. Wie alle folgenden Auswertungen basiert sie auf den geglätteten Daten, weil der Programmcode aus Kap. 3 sensitiv gegenüber verrauschten Messungen ist. Die Berechnung eines ν_p -Verlaufs erfolgt jeweils für die beiden materiellen Punkte in der Einschnürebene, die nach Kap. 5.4 zu Beginn des Versuchs an den Gaußpunkten liegen.

Eine Darstellung der Ergebnisse findet sich auf der linken Seite von Abb. 6.5. Darin sind die drei Versuchswiederholungen durchgezogen in Blau, Grün und Rot aufgetragen. Farbnuancen dienen der Unterscheidung zwischen den beiden Auswertepunkten. Als schwarze Strichpunktlinie ist das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel der Ergebnisse eingezeichnet. Dieses wird später im Materialmodell vorgegeben.

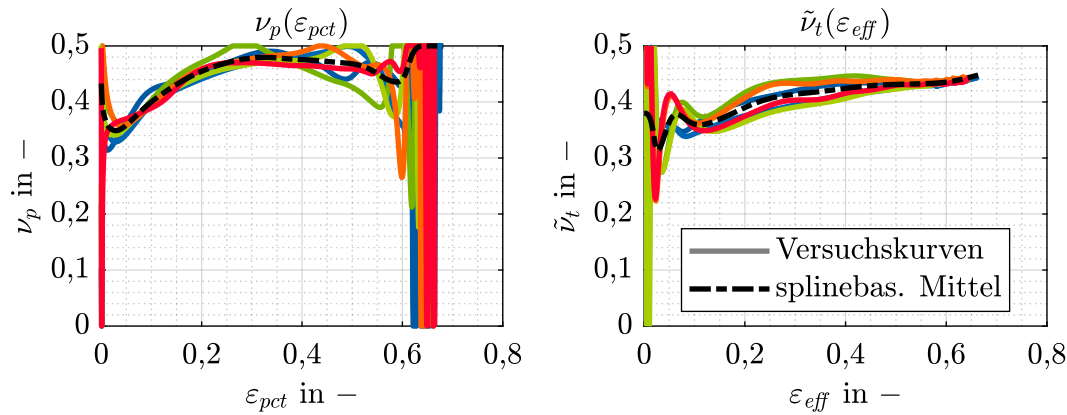


Abbildung 6.5: PC/ABS R: ν_p - und $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

Aus den ν_p -Verläufen geht hervor, dass PC/ABS R mit zunehmender uniaxialer plastischer Vergleichsdehnung tendenziell volumenerhaltend plastifiziert. Bei der gemittelten Kurve ist nur im Anfangsbereich für ein kleines ε_{pct} -Intervall $\nu_p < \nu$. Aus diesem Grund sind im Materialmodell die Auswirkungen der in Kap. 2.2.4 thematisierten Rückkopplung von ν_p auf ν sehr gering.

Die größte Streuung in der plastischen Querkontraktion zeigt sich an den Rändern des untersuchten Intervalls der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung. In diesen Bereichen ist es schwierig, die Güte des splinebasiert geglätteten arithmetischen Mittels zu bewerten. Allerdings lassen sich die Ursachen für die Oszillationen eingrenzen: Zu Beginn des elasto-viskoplastischen Regimes kann neben Messfehlern die Division sehr kleiner plastischer Dehnraten nach Gl. (3.87) und Gl. (3.88) ursächlich sein. Dies zeigt sich in wesentlich geringerer Ausprägung auch in Kap. 4 bei der Validierung des Programmcodes mit Ein-Element-Tests. Unabhängig davon wandern ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,575$ die Ränder der Einschnürzonen der Prüflinge in deren Schulterbereiche, was für einen raschen Anstieg der Kraftniveaus sorgt. Gleichzeitig verändern sich die Verzerrungen an den ausgewerteten materiellen Punkten im Vergleich dazu in wesentlich geringerem Maße (HELBIG UND HAUFE (2018)). Da in F der Einfluss der Wechselwirkung zwischen der Probengeometrie und dem Material dominant ist, sind die Auswirkungen in den Spannungswerten der ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade, welche im nächsten Abschnitt behandelt werden, am deutlichsten zu sehen. Auch die Störungen in ν_p lassen sich womöglich teilweise darauf zurückführen, wenngleich die Herstellung einer Kausalität angesichts der Kopplung bei der Lösung der Differentialgleichungen schwerfällt.

Der Mechanismus hinter der kontinuierlichen Vergrößerung der Einschnürzone in Richtung der Einspannung ohne externe Wärmezufuhr wird *Teleskopeffekt* genannt und resultiert aus zwei parallel ablaufenden, lokalen Prozessen im Prüfling: Zum einen findet

aufgrund der Querschnittsreduktion ein Anwachsen der Zugspannung statt. Zum anderen verursachen interne Reibungsvorgänge einen Temperaturanstieg. Beides setzt die Dehnviskosität herab und begünstigt damit das örtliche Fließen des Materials. Der Teleskopeffekt ist typisch für viele unverstärkte Thermoplaste (ELIAS (1996)). Ob die Ränder der Einschnürzone in die Schulterbereiche eines Prüflings wandern oder nicht, hängt von der Dehnrates ab. Im vorliegenden Fall tritt dies nur bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ auf.

Auffällig an den ν_p -Verläufen sind die zwei lokalen Minima bei ϵ_{pct} -Werten zwischen 0 und 0,05 sowie zwischen 0,55 und 0,6. Neben den bereits thematisierten Punkten können diese auch auf molekulare Gleitprozesse zurückzuführen sein, die bei unterschiedlichen Energieniveaus ablaufen (EYRING (1936), REE UND EYRING (1955A), REE UND EYRING (1955B)).

Zur Abschätzung, ob auch spannungs- bzw. verzerrungsinduzierte Anisotropie einen Anteil an den beobachteten Phänomenen hat, erfolgt mit den totalen Dehnungen die Approximation des sogenannten *r-Werts* nach der DIN EN ISO 10113 (2021) bzw. LANKFORD U. A. (1950). Dabei werden keine sich vergrößernden Abweichungen vom Wert eins festgestellt, die diesen Verdacht erhärten. Eine Auswertung mit den vorliegenden plastischen Dehnungen ist zu vermeiden, weil ihrer Berechnung mit dem Programmcode aus Kap. 3 die Annahme isotropen Materialverhaltens zugrunde liegt.

Für eine abschließende Ursachenklärung werden weitere Untersuchungen empfohlen. Ungeachtet der beschriebenen, teilweise mit der Abzugsgeschwindigkeit zusammenhängenden Effekte, zeigen die Untersuchungen von PC/ABS E und PP T20, für die jeweils vollständige 3D-DIC-Datensets vorliegen, keine relevante Dehnratenabhängigkeit der plastischen Querkontraktion. Es bestätigt sich lediglich, dass die Streuung der Ergebnisse zusammen mit der Dehnrates zunimmt. Aus diesen Gründen bleibt die Strategie nach Kap. 3.4.1, den ν_p -Verlauf anhand der langsamsten Versuche zu bestimmen und ihn bei der Auswertung der schnelleren Materialprüfungen vorzugeben, legitim und zielführend.

Auf der rechten Seite von Abb. 6.5 sind für die mittels 3D-DIC erfassten Versuche die funktionalen Zusammenhänge $\tilde{\nu}_t(\epsilon_{eff})$ dargestellt. Ihre Kalibrierung mit der Methode aus Kap. 5.5.1 basiert auf den Gaußpunktapproximationen der *x*-Komponente des Cauchy-Spannungstensors nach Gl. (5.18). Analog zur linken Seite der Abbildung sind die drei Versuchswiederholungen durchgezogen in Blau, Grün und Rot aufgetragen. Farbnuancen dienen der Unterscheidung zwischen den beiden Auswertepunkten. Als schwarze Strichpunktlinie ist das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel der Ergebnisse eingezeichnet. Bei seiner Bestimmung wird der Funktionswert bei $\epsilon_{eff} = 0$ in Gestalt der zuvor quantifizierten Querkontraktionszahl als Randbedingung vorgegeben.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen für ν_p zeigt sich in $\tilde{\nu}_t$ kein auffälliges Verhalten, welches gegebenenfalls mit einer Wechselwirkung zwischen der Probengeometrie und dem

Material in Verbindung gebracht werden kann. Der Grund dafür wird bei Betrachtung von Gl. (5.30),

$$\tilde{\nu}_t = \frac{1}{2\varepsilon_{xx}} \ln \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{0,xx}} \right),$$

evident. Einsetzen der Gaußpunktapproximation für σ_{xx} aus Gl. (5.18) sowie $\sigma_{0,xx}$ aus Gl. (5.25) führt auf:

$$\tilde{\nu}_t = \frac{1}{2\varepsilon_{xx}} \ln \left(\frac{F A_0}{b\hat{\delta} F} \right) = \frac{1}{2\varepsilon_{xx}} \ln \left(\frac{A_0}{b\hat{\delta}} \right). \quad (6.1)$$

Wie zu sehen, kürzt sich die Kraft aus dem Ausdruck. Der Anstieg von F hat somit auf $\tilde{\nu}_t$ nur einen indirekten Einfluss im Rahmen seiner Wechselwirkung mit ε_{xx} , b und $\hat{\delta}$. Diese ist nicht dominant. Die Beobachtungen decken sich mit den Untersuchungen für PC/ABS E und PP T20 in Kap. 5.5.1, die für $\tilde{\nu}_t$ keinen funktionalen Zusammenhang mit der Abzugsgeschwindigkeit erkennen lassen.

Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens

Mit dem splinebasiert geglätteten arithmetischen Mittel des $\tilde{\nu}_t$ -Verlaufs lässt sich für alle mit 2D-DIC aufgezeichneten Versuche σ_{xx} an den materiellen Punkten approximieren, die zu Versuchsbeginn an den Gaußpunkten liegen. Bei der Berechnung der ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade für die so ergänzte Datenbasis mit dem Programmcode aus Kap. 3 wird das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel des ν_p -Verlaufs vorgegeben. In Abb. 6.6 sind die Ergebnisse für sämtliche Versuchswiederholungen der geprüften nominellen Dehnraten dargestellt. Da pro Versuch nach Kap. 5.4 jeweils zwei materielle Punkte ausgewertet werden, liegen für jede Abzugsgeschwindigkeit sechs Kurven vor. Die Farbe Blau entspricht $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, Grün $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und Rot $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$. Farbnuancen deuten Versuchswiederholungen an.

Die linke Seite von Abb. 6.6 zeigt deutlich, dass die zu $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ gehörenden ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade bei großen ε_{pct} höhere σ_{vm} -Werte aufweisen, als diejenigen für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. Wie bereits ausführlich im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, wird als Hauptursache der Teleskopeffekt angeführt. Exklusiv bei der niedrigsten Dehnraten wandern ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,575$ die Ränder der Einschnürzonen der Prüflinge in deren Schulterbereiche. Aufgrund der Wechselwirkung zwischen der Probengeometrie und dem Material ist die Verwertbarkeit der erzeugten Daten ab diesem Punkt kritisch zu hinterfragen. Da sich überschneidende Fließkurven innerhalb von *LS-DYNA* programmspezifische Instabilitäten begünstigen, sollte die zu modellierende Fläche in $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Richtung

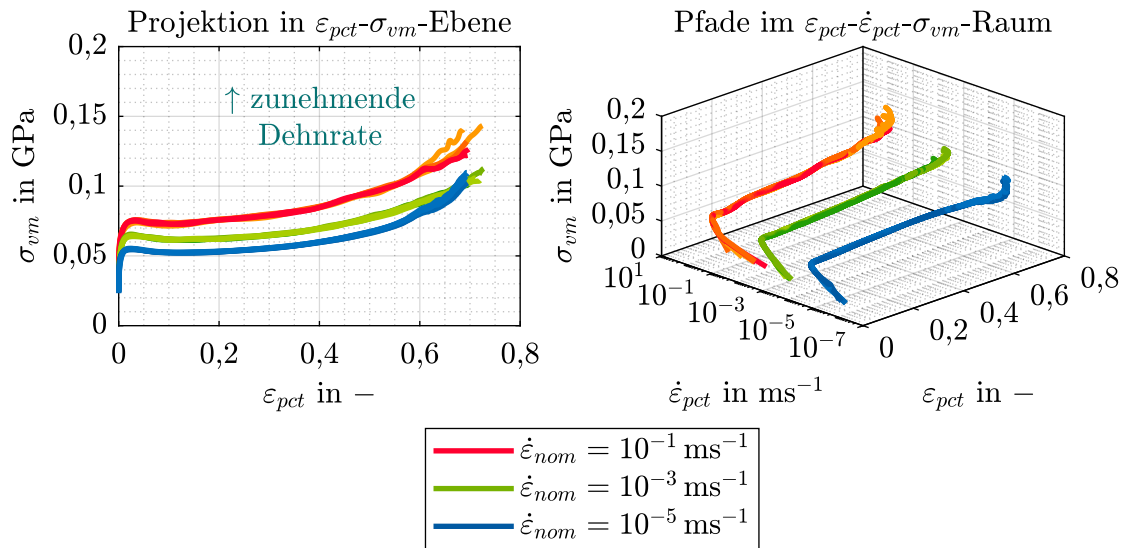
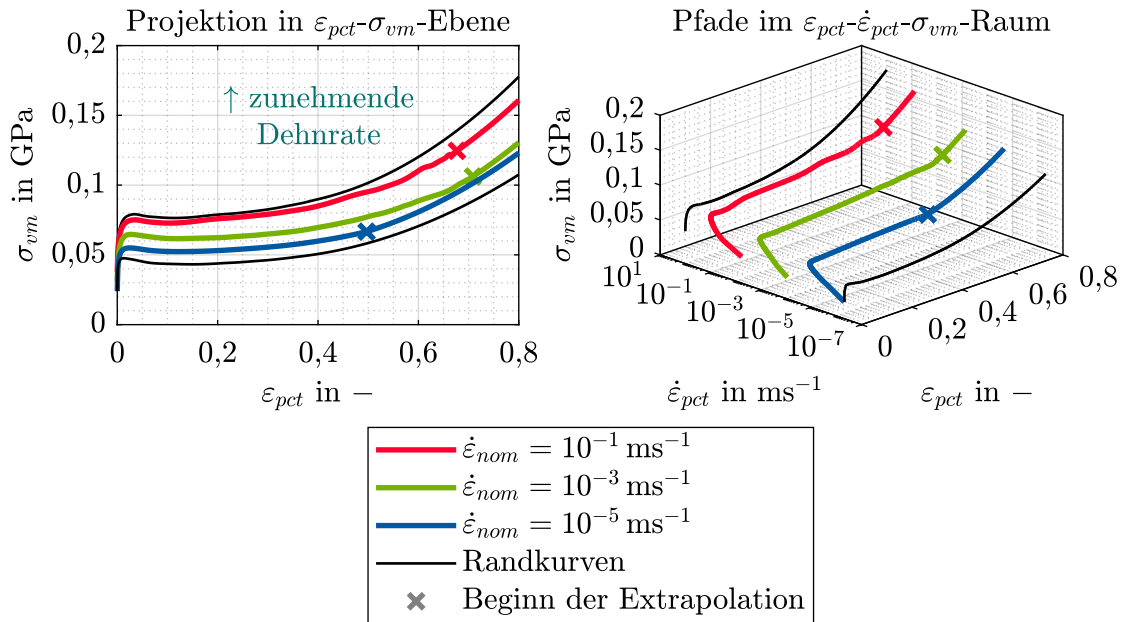
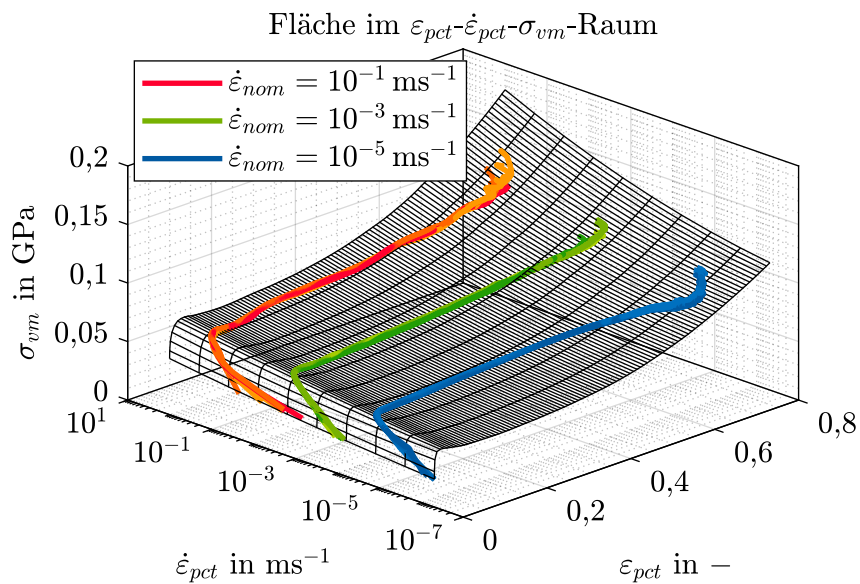


Abbildung 6.6: PC/ABS R: Pfade im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum

monoton ansteigen. Dementsprechend müssen die zu $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ms}^{-1}$ gehörenden ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade durch Extrapolation sinnvoll ergänzt werden, um dies zu garantieren.

Die Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens geschieht nach Kap. 5.5.3. Im Anschluss an die Erzeugung von repräsentativen Pfaden für die drei untersuchten Abzugsgeschwindigkeiten werden die Flächenränder definiert. Entsprechend Gl. (5.58) und Gl. (5.59) ist $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} = 4,83 \times 10^{-7} \text{ms}^{-1}$ und $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} = 1,00 \times 10^0 \text{ms}^{-1}$. Als $\varepsilon_{pct}|_{max}$ wird 0,8 gewählt. Für die Modellierung der Randkurven kommt die Methode 2 mit quadratischen Polynomen zum Einsatz. Danach folgt die Extrapolation der repräsentativen Pfade. Zur Wahrung der Monotonie in $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Richtung findet die Datenergänzung für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ms}^{-1}$ bereits ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,5$ statt. In Abb. 6.7 sind die modellierten Randkurven als dünne schwarze Linien und die repräsentativen Pfade für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ms}^{-1}$, $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ms}^{-1}$ und $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ms}^{-1}$ als dickere Verläufe in Blau, Grün und Rot dargestellt. Der Beginn der jeweiligen Extrapolation ist mit einem Kreuz markiert.

Zusammen bilden die repräsentativen Pfade und Randkurven das Fundament der Flächenkalibrierung. In Abb. 6.8 ist das Ergebnis zusammen mit den originalen ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfadern für sämtliche Versuchswiederholungen dargestellt. Das aufgespannte Kontrollnetz weist einundsechzig Eckpunkte in ϱ_1 -Richtung und drei Eckpunkte in ϱ_2 -Richtung auf. Für die B-Spline-Ordnungen wird jeweils ein Wert von drei gewählt. Durch Schneiden der Fläche bei konstanten $\dot{\varepsilon}_{pct}$ folgt die Fließkurvenschar zur Kalibrierung von *SAMP-1*. Die entsprechenden zehn Flächenschnitte sind in Abb. 6.8 als dünne schwarze Linien eingezeichnet. Eine äquivalente Darstellung zeigt Abb. 6.9.

Abbildung 6.7: PC/ABS R: Konstruktion der Fläche im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -RaumAbbildung 6.8: PC/ABS R: Fläche im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum

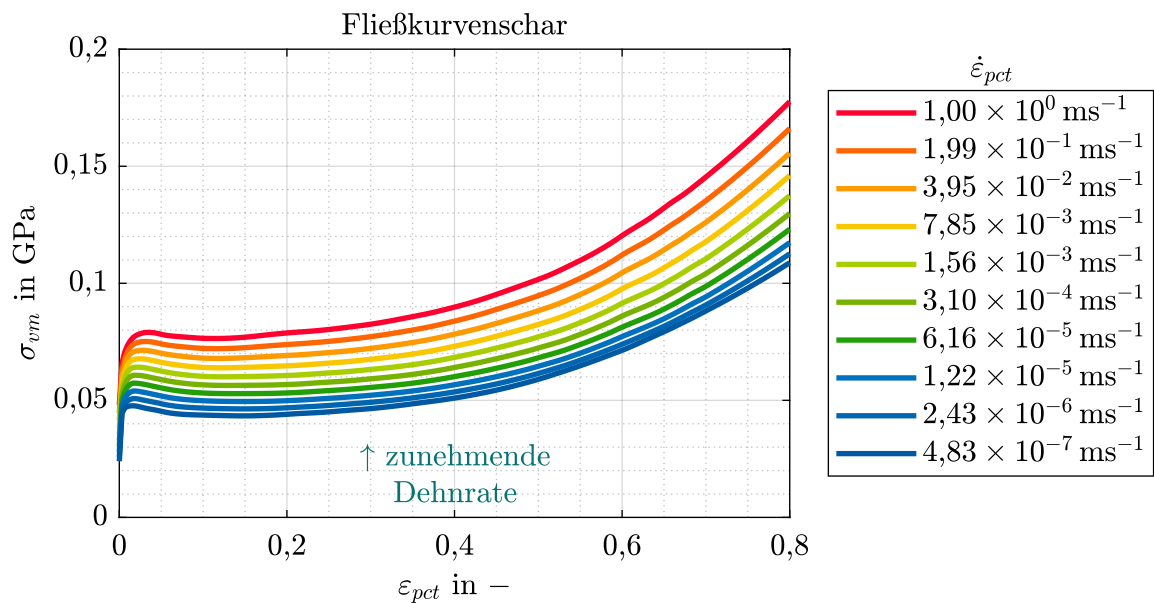


Abbildung 6.9: PC/ABS R: Fließkurvenschar

Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen

Für jede geprüfte nominelle Dehnrate, sowohl aus dem mit 2D-DIC als auch aus dem mit 3D-DIC erfassten Teil der Datenbasis, wird ein repräsentativer Versuch ausgewählt und mit *LS-DYNA* simuliert. Dabei findet gemäß Kap. 6.1.1 die Vorgabe der versuchsspezifischen Verschiebung $u(t)$ statt.

In Abb. 6.10 sind für einen repräsentativen, mit 3D-DIC erfassten Versuch bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ die Kraft F und die Querschnittsfläche A in der Einschnürebene \mathcal{P}_A über der Verschiebung u aufgetragen. Für die Versuchsdaten läuft die Bestimmung von A nach Kap. 5.3.5 ab. Auf Seiten der Simulation wird für jedes Element in \mathcal{P}_A auf Basis der Anfangsdicke δ_0 und ϵ_{zz} eine aktuelle Dicke ermittelt und diese mit der Elementbreite multipliziert. Die Querschnittsfläche ergibt sich anschließend durch Aufsummieren. Sowohl für $F(u)$ als auch für $A(u)$ zeigt sich insgesamt eine hervorragende Übereinstimmung zwischen dem Versuch und der Simulation. Die größten Abweichungen im Kraftniveau treten beim Entfestigen des Materials nach dem Einschnürpunkt auf. Der Grund dafür liegt vermutlich an der Modellierung der Randkurven. Wie in Kap. 5.5.3 beschrieben, können in Zukunft zusätzliche Versuche bei den nominellen Dehnraten 10^{-7} ms^{-1} und 10^1 ms^{-1} dazu beitragen, diese zu optimieren. Dadurch ließe sich vermutlich die bereits hohe erzielte Prognosegüte weiter steigern.

Die Auswertung des Dehnungsfelds erfolgt beispielhaft an den Verschiebungen u_1 und u_2 , die in Abb. 6.10 petrolfarben eingezeichnet sind. In Abb. 6.11 sind die Komponenten ϵ_{xx} ,

ε_{yy} , ε_{zz} und ε_{xy} des Hencky-Verzerrungstensors zu sehen. Während dabei in der oberen Hälfte eines jeden Bilds die DIC-Daten dargestellt sind, entspricht die untere Hälfte den Simulationsergebnissen. Vom Einspannbereich des Prüflings sind jeweils nur zwei Elementreihen dargestellt. Grundsätzlich ist beim Vergleich der Felddaten zu beachten, dass im idealen Fall ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{zz} spiegelsymmetrisch zur x - z -Ebene ausfallen und ε_{xy} punktsymmetrisch zum Einschnürzentrum ist.

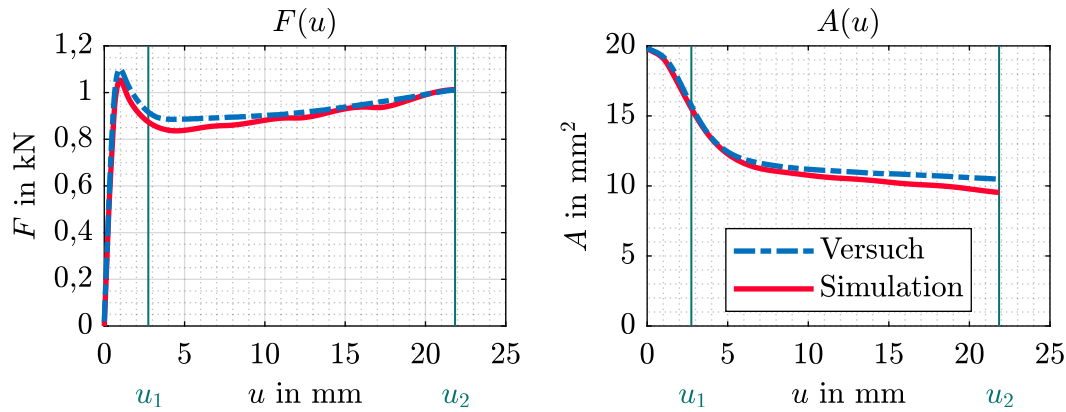


Abbildung 6.10: PC/ABS R: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

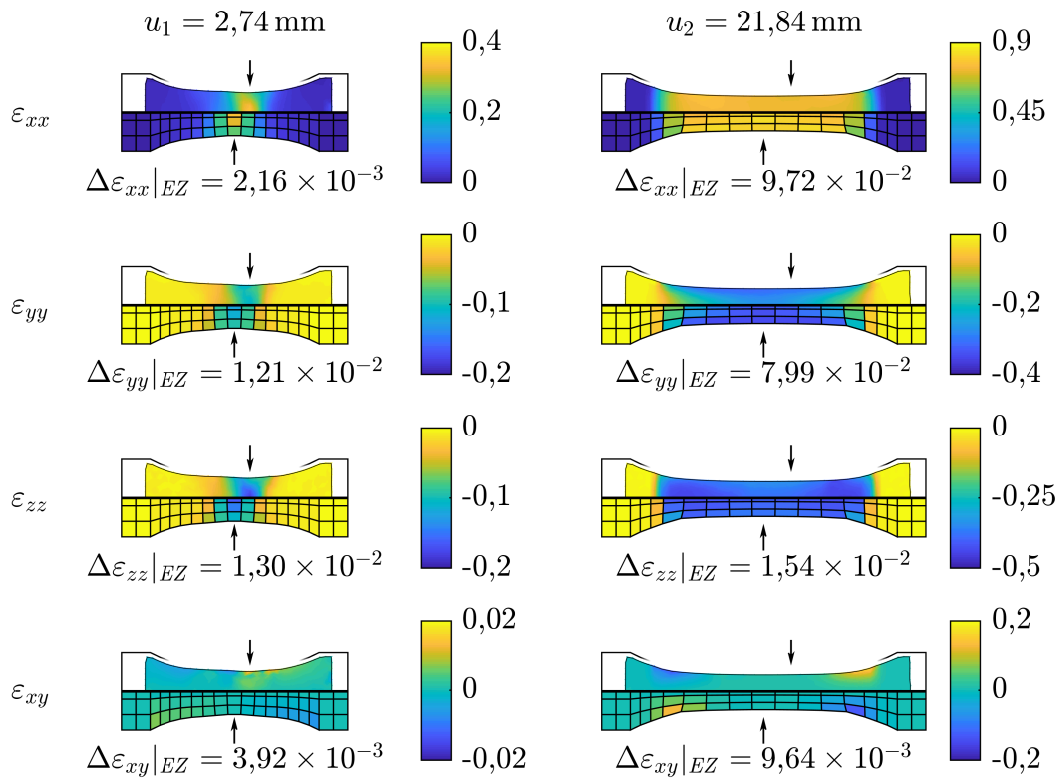


Abbildung 6.11: PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

Für beide exemplarisch dargestellten Verschiebungen stimmt das prognostizierte Dehnungsfeld sehr gut mit den DIC-Daten überein. Diese Aussage lässt sich für den gesamten Bereich von u verallgemeinern. Abgesehen davon zeigt Abb. 6.11 deutlich, dass die DIC-Messung auf den für die Kamera erfassbaren Bereich zwischen den Spannbanken beschränkt ist. Zur Veranschaulichung werden die DIC-Daten links und rechts mit einem schwarzen Rahmen ergänzt, der die Außenkanten des Prüflings anzeigt. Die kleinen schwarzen Pfeile deuten die Einschnürebene an. Unter jedem Bild findet sich ein Zahlenwert, der angibt, um welchen Betrag sich die Verzerrung im Einschnürzentrum (EZ) in \mathcal{P}_A zwischen dem Versuch und der Simulation unterscheidet. Bei seiner Interpretation ist zu beachten, dass die materielle Lage der Ebene im Versuch zu Beginn des Einschnürvorgangs identifiziert wird. Aufgrund von Imperfektionen des Materials und des Probekörpers stimmt sie nicht zwangsweise mit der y - z -Ebene überein, welche den Prüfling zum Zeitpunkt $t = 0$ mittig schneidet. Außerdem wächst die Einschnürzone in x -Richtung nicht notwendigerweise exakt symmetrisch zu \mathcal{P}_A . Das bedeutet, dass die kleinste Probenbreite, die geringste Querschnittsfläche sowie die betragsmäßig höchsten Verzerrungen in x -, y - und z -Richtung mit fortschreitender Versuchsdauer leicht versetzt zur Einschnürebene auftreten können.

Im Folgenden werden die mit 2D-DIC erfassten Versuche mit PC/ABS R betrachtet. Da keine dreidimensionalen Daten vorliegen, wird anstelle der Querschnittsfläche die Probenbreite b in der Einschnürebene über der Verschiebung aufgetragen. Auch eine dedizierte Betrachtung von ε_{zz} ist aus dem genannten Grund nicht möglich. Nach dem vorgestellten Schema wird in Abb. 6.12 und Abb. 6.13 ein repräsentativer Versuch bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, in Abb. 6.14 und Abb. 6.15 einer bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und in Abb. 6.16 und Abb. 6.17 einer bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ betrachtet. Anhand der Gegenüberstellungen von Versuchen und zugehörigen Simulationen kann für alle Abzugsgeschwindigkeiten eine sehr hohe Prognosegüte festgestellt werden. Dies bestätigt die Anwendbarkeit des gesamten Verfahrens.

Ähnlich zu den repräsentativen Versuchen für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ nach Abb. 6.10 bzw. Abb. 6.12 zeigen sich für den Versuch bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ gemäß Abb. 6.16 größere Abweichungen im Kraftniveau beim Entfestigen des Materials nach dem Einschnürpunkt. Als Grund dafür kommt, wie bereits thematisiert, die Modellierung der Randkurven nach Kap. 5.5.3 infrage. Dafür spricht auch, dass gemäß Abb. 6.14 für einen Versuch bei der mittleren der drei untersuchten Abzugsgeschwindigkeiten die Abweichungen in diesem Bereich wesentlich geringer sind.

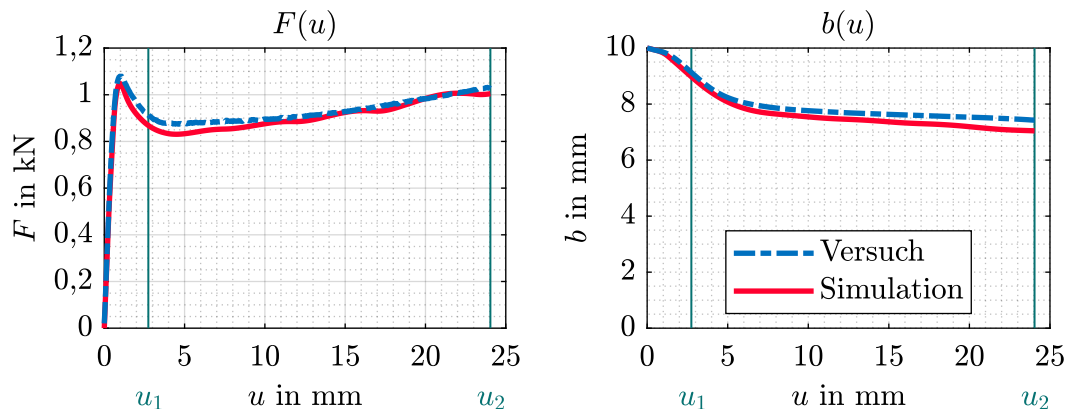


Abbildung 6.12: PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

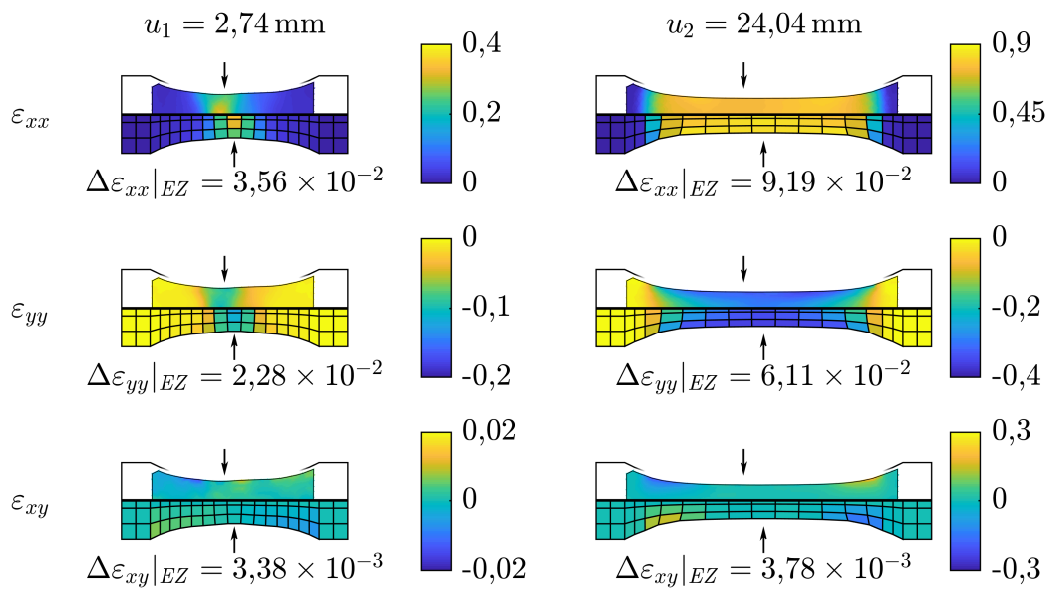


Abbildung 6.13: PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

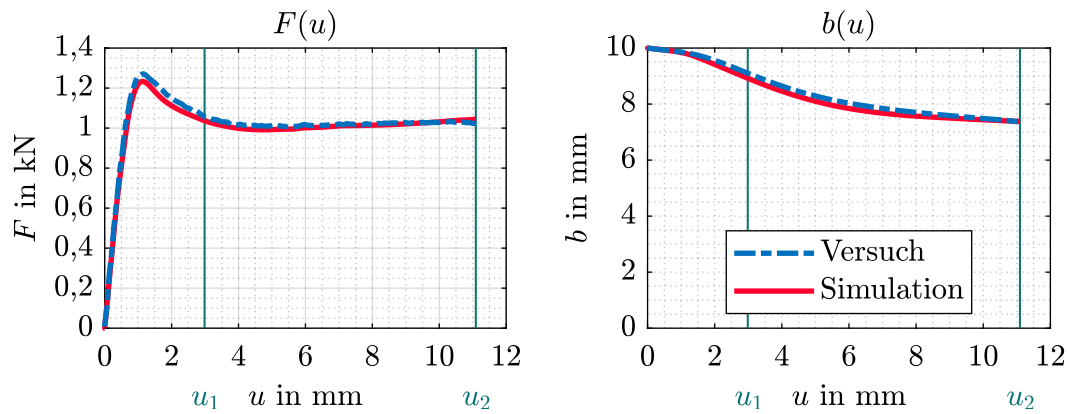


Abbildung 6.14: PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

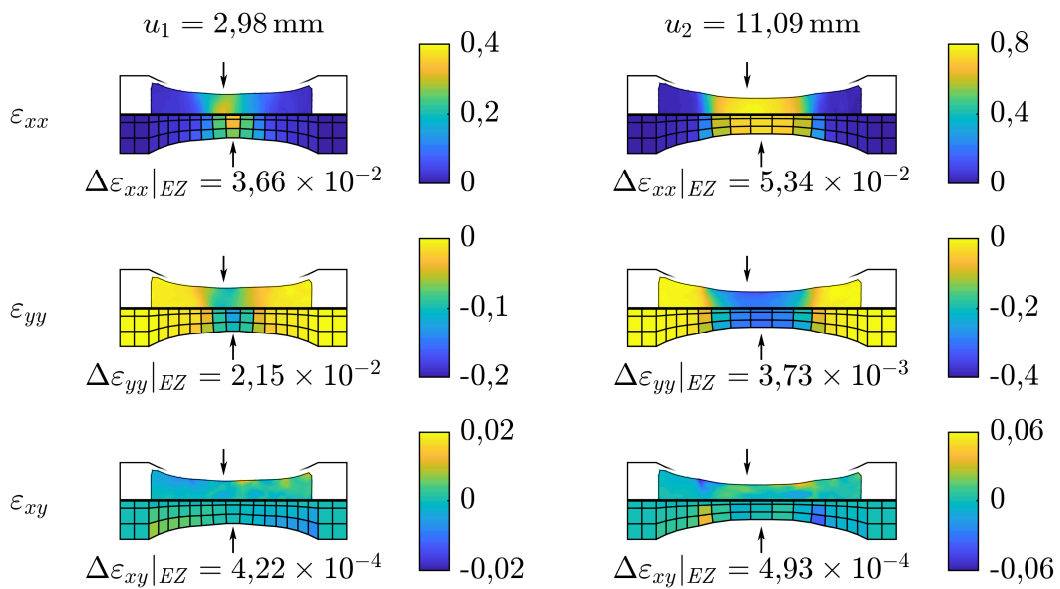


Abbildung 6.15: PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

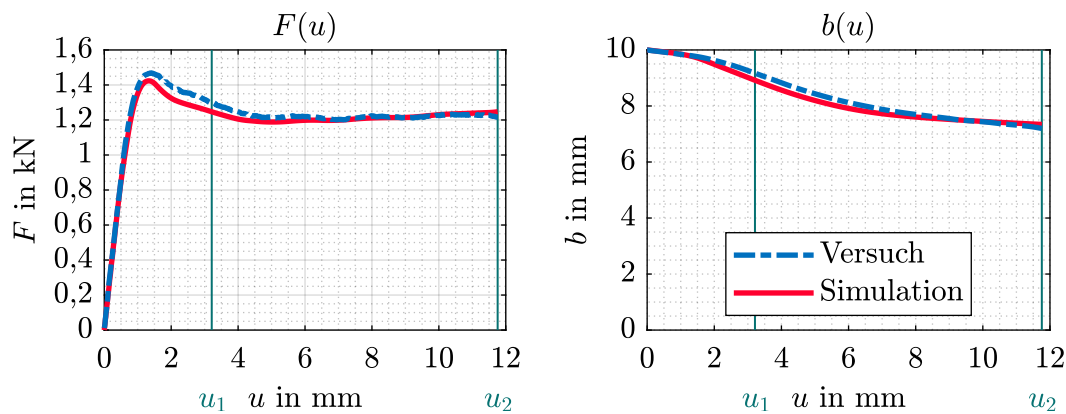


Abbildung 6.16: PC/ABS R: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

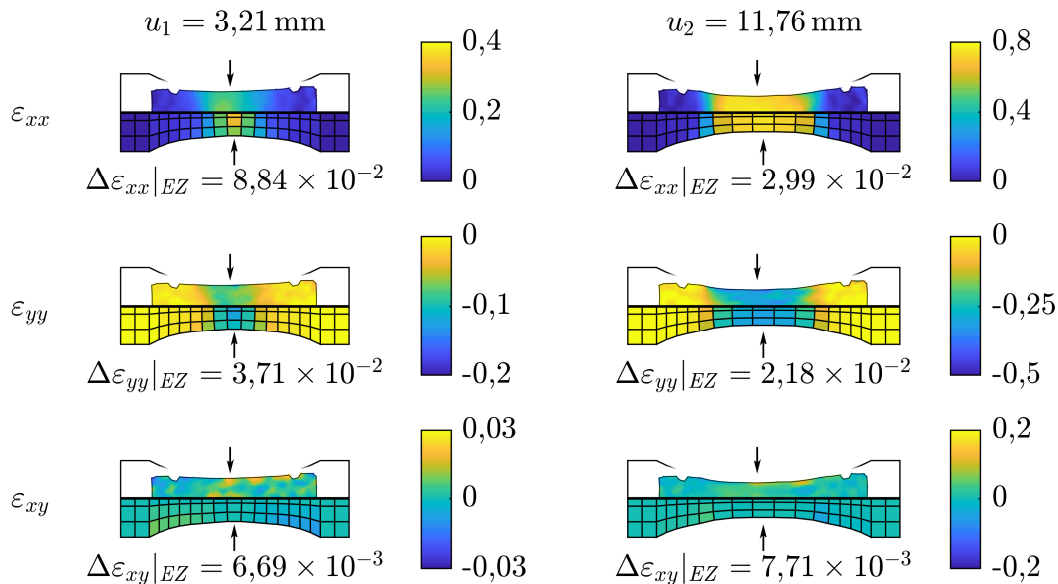


Abbildung 6.17: PC/ABS R: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

6.2.2 PC/ABS-Blend mit erhöhtem PC-Anteil

Beim zweiten betrachteten Thermoplast handelt es sich um das Polycarbonat/Acrylnitril-Butadien-Styrol-Blend mit erhöhtem PC-Anteil (PC/ABS E) aus dem Prüfprogramm 2. Sofern nicht anders angegeben, entsprechen im Folgenden die Vorgehensweisen und Darstellungsarten denen aus Kap. 6.2.1.

Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens

Abb. 6.18 zeigt links die Verläufe von M und rechts die Obergrenzen der Vertrauensbereiche in den technischen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen.

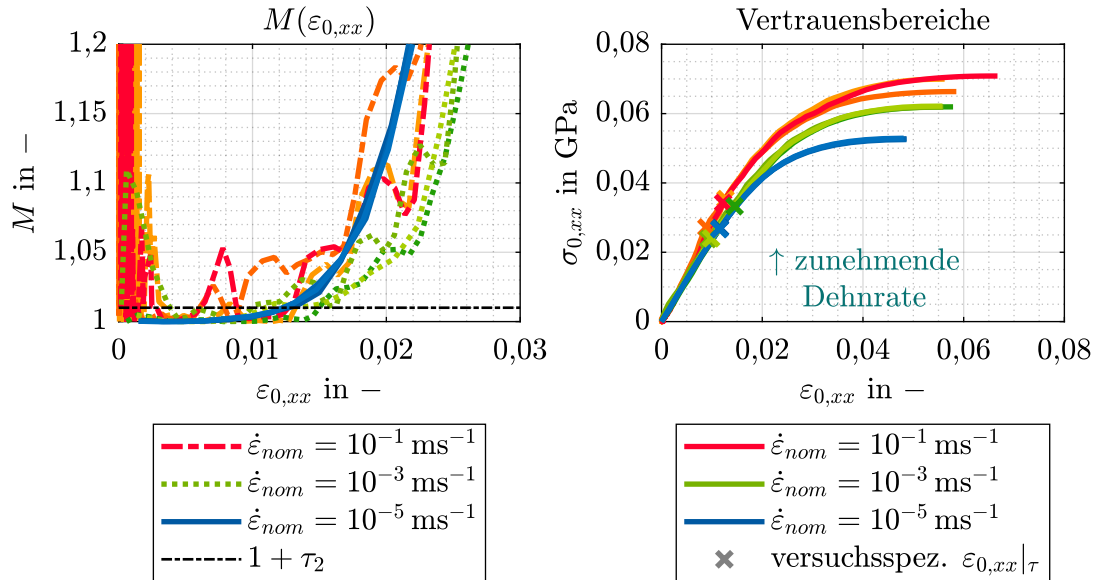
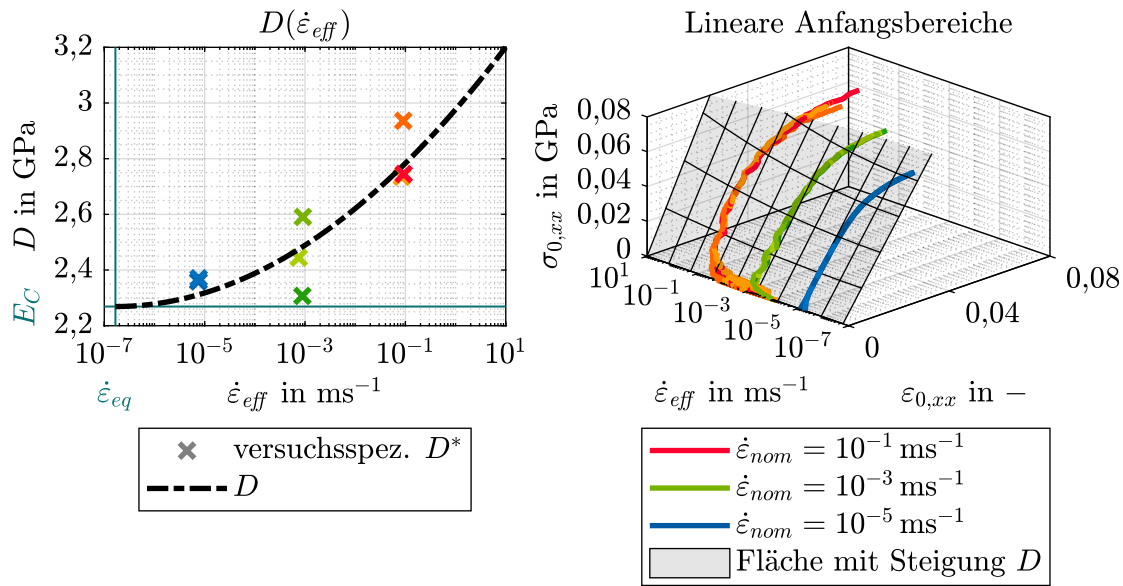
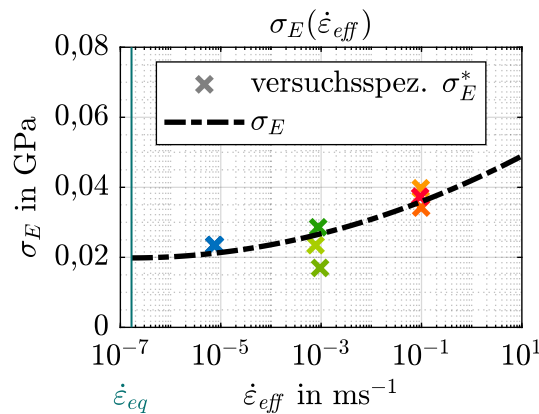


Abbildung 6.18: PC/ABS E: Vertrauensbereiche

Auf der linken Seite von Abb. 6.19 sind die versuchsspezifischen D^* der davon unabhängig dehnratenübergreifend kalibrierten Funktion $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$ gegenübergestellt. Petrolfarben ist das nach DIN EN ISO 527-2 (2012) zu $1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$ gewählte $\dot{\varepsilon}_{eq}$ eingezeichnet. Im Gegensatz zu PC/ABS R verhält sich PC/ABS E viskoelastisch. Indem als Grad der Funktion aus Gl. (5.32) $\ell = 2$ gewählt wird, lässt sich eine gute Approximation der Initialsteigungen ermitteln. Die Lösung von Gl. (5.47) erfolgt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung aus Gl. (5.33) für $\dot{\varepsilon}_{eff} \geq \dot{\varepsilon}_{eq}$. Im rechten Teil der Abbildung werden die technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche um eine Fläche ergänzt, deren Steigung in $\varepsilon_{0,xx}$ -Richtung $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$ entspricht.

Bei $\dot{\varepsilon}_{eq}$ lässt sich gemäß den Überlegungen aus Kap. 5.5.2 für E_C ein Wert von 2,27 GPa ermittelt, was eine relative Abweichung von 1,3% vom im Datenblatt des Werkstoffs angegebenen Elastizitätsmodul, 2,30 GPa, bedeutet und die Anwendbarkeit des semiempirischen Vorgehens bestätigt.

In Abb. 6.20 sind die versuchsspezifischen Elastizitätsgrenzen sowie die dehnratenübergreifend kalibrierte Funktion $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$ eingezeichnet. Der gewählte Grad ist $\nu = 2$. Sobald $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$ bekannt ist, können mit Gl. (3.9) das viskoelastische und das viskoelasto-viskoplastische Regime separiert werden.

Abbildung 6.19: PC/ABS E: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$ Abbildung 6.20: PC/ABS E: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$

Bei der Betrachtung der rechten Seite von Abb. 6.19 fallen für die höchste geprüfte nominelle Dehnrates $10^{-1} ms^{-1}$ zu Versuchsbeginn Schwingungen in $\dot{\epsilon}_{eff}$ -Richtung auf, welche mit der Beschleunigung und dem Einkoppeln des Kolbens der dynamischen Zugprüfmaschine zusammenhängen. Da sich das Verhalten auf sehr kleine Werte für $\epsilon_{0,xx}$ beschränkt, spielt es bei der dehnratenübergreifenden Bestimmung der Initialsteigung der technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven eine untergeordnete Rolle und wird deshalb vernachlässigt. Hingegen haben solche Effekte einen wesentlich größeren Störeinfluss auf die Bestimmung von β und E_V . Aus diesem Grund erfolgt bei der Ermittlung der genannten Größen keine Berücksichtigung der Anlaufphase der Versuche für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} ms^{-1}$. Dies geschieht, indem aus den zugehörigen drei Versuchswiederholungen nur solche Datenpunkte weiterverarbeitet werden, deren effektive Dehnrates

einen Mindestwert $\dot{\epsilon}_{eff}|_{lowest}$ überschreitet. Für alle im Rahmen dieser Arbeit behandelten Thermoplaste gilt:

$$\dot{\epsilon}_{eff}|_{lowest} = 0,5 \times \dot{\epsilon}_{eff}|^{n_E}. \quad (6.2)$$

Dabei ist $\dot{\epsilon}_{eff}|^{n_E}$ die effektive Dehnrates, welche dem letzten Datenpunkt im viskoelastischen Regime zugeordnet wird.

Nach Kap. 3.2.3 und Kap. 5.5.2 folgen mit dem ermittelten E_C für alle herangezogenen Datenpunkte des viskoelastischen Regimes in Abhängigkeit von β diskrete Werte für E_V . Um einen dehnratenübergreifenden funktionalen Zusammenhang zu erhalten, wird Gl. (5.48) mit der Nebenbedingung aus Gl. (5.37) für $\dot{\epsilon}_{eff} \geq \dot{\epsilon}_{eq}$ gelöst. In diesem Zusammenhang ist der Grad der Funktion aus Gl. (5.36) $h = 2$. In Abb. 6.21 sind die resultierenden Kurven visualisiert. Darin entspricht jede betrachtete Relaxationsrate einer Farbe. Ergänzt werden die Verläufe durch die diskreten Werte für E_V , die als Punktmarkierungen eingezeichnet sind. Als dünne schwarze Strichpunktlinie ist die dehnratenabhängige Initialsteigung abzüglich E_C dargestellt. Wie aus der Abbildung hervorgeht, wirkt sich ein Anstieg von β umso stärker auf die diskreten Werte für E_V aus, je niedriger die effektive Dehnrates ist. Dies hat zur Folge, dass ab einem bestimmten Punkt, selbst unter Berücksichtigung der Versuchsstreuung, Gl. (3.38) nicht mehr als erfüllt angesehen werden kann. Im vorliegenden Fall kommt es ab $\beta = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$ zu unplausiblen Ergebnissen, weil sich für die Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ tendenziell höhere diskrete Werte für E_V ergeben, als für die Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. Da gemäß Kap. 3.2.3 als Relaxationsrate der größte Wert auszuwählen ist, bei dem die genannte Bedingung gilt, wird für die Modellkalibrierung $\beta = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ identifiziert. Es zeigt sich, dass $(D - E_C)$ eine akzeptable Approximation für den resultierenden funktionalen Zusammenhang $E_V(\dot{\epsilon}_{eff})$ ist. Bei $\dot{\epsilon}_{eff} = 10^1 \text{ ms}^{-1}$ beträgt die relative Abweichung bezogen auf E_V 5,7%.

Die Bestimmung der Querkontraktionszahl läuft analog zu Kap. 6.2.1 ab. Eine Zusammenstellung der skalaren Parameter der Modellkalibrierung für PC/ABS E findet sich in Tab. 6.2. Dort ist auch der gewählte Faktor `FILT` zur Dehnratenfilterung angegeben, der einem erfahrungsbasierten Standard entspricht (HALLQUIST (2020B)). Ein Wert von null, wie er in Kap. 4 bei der Validierung des Programmcodes aus Kap. 3 mit Ein-Element-Tests verwendet wird, ist im Hinblick auf den Einsatz des kalibrierten Materialmodells in der Praxis nicht empfehlenswert.

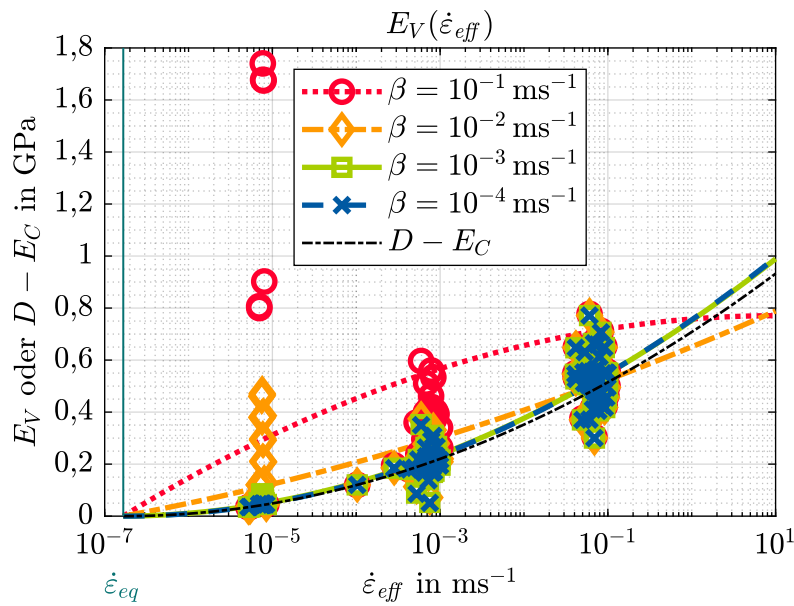


Abbildung 6.21: PC/ABS E: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$

Parameter	Wert
$\dot{\epsilon}_{eq}$	$1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$
E_C	2,27 GPa
β	10^{-3} ms^{-1}
ν	0,32
ρ	$1,14 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$
FILT	0,95

Tabelle 6.2: PC/ABS E: skalare Parameter

Bestimmung der plastischen Querkontraktion

Im Gegensatz zu PC/ABS R stehen für PC/ABS E gemäß Kap. 5.1 für alle geprüften nominellen Dehnrates 3D-DIC-Daten zur Verfügung. Infolge der Überlegungen aus Kap. 3.4.1 sowie Kap. 6.2.1 wird der ν_p -Verlauf dennoch exklusiv anhand der Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.22 dargestellt.

Ähnlich zu PC/ABS R plastifiziert PC/ABS E mit zunehmender uniaxialer plastischer Vergleichsdehnung tendenziell volumenerhaltend. Zu keinem Zeitpunkt ist in der gemittelten Kurve $\nu_p < \nu$, weswegen im Materialmodell keine Rückkopplung nach Kap. 2.2.4 erfolgt.

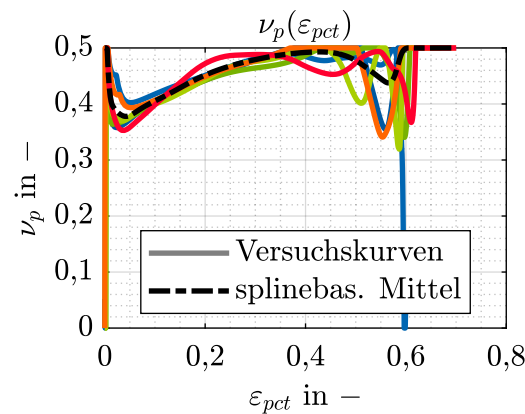


Abbildung 6.22: PC/ABS E: ν_p -Verläufe bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

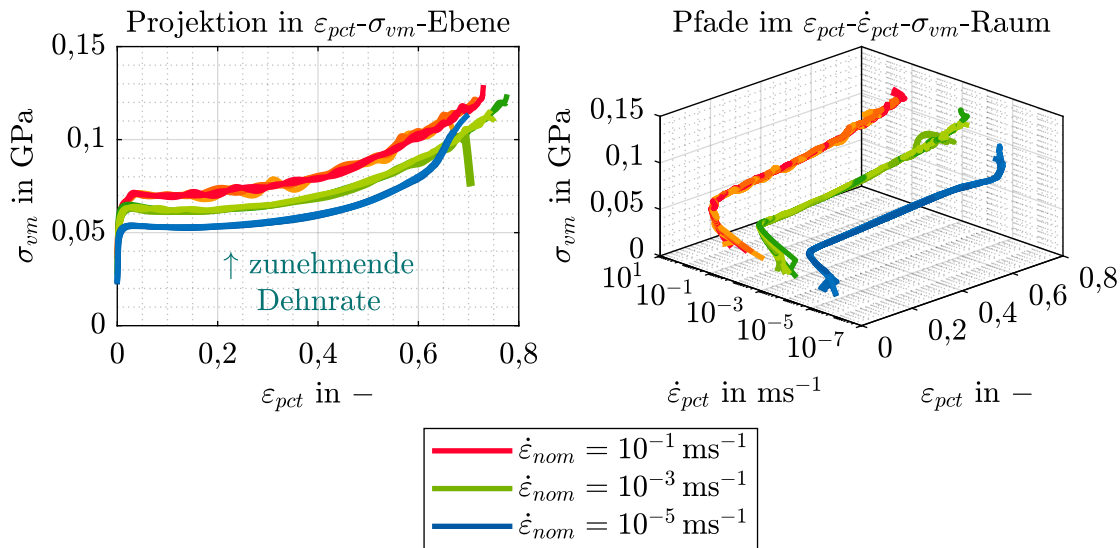
Analog zu den Ergebnissen für PC/ABS R zeigt sich die größte Streuung an den Rändern des untersuchten Intervalls der uniaxialen plastischen Vergleichsdehnung. Die Gründe dafür sind die gleichen wie in Kap. 6.2.1. Auch für den hier untersuchten Thermoplast ist der Teleskopeffekt typisch. Bedingt durch dieses Phänomen wandern bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,6$ die Ränder der Einschnürzonen der Prüflinge in deren Schulterbereiche. Der mit den totalen Dehnungen angenäherte r -Wert deutet keine spannungs- bzw. verzerrungsinduzierte Anisotropie an.

Da die Datenbasis ausschließlich 3D-DIC-Daten beinhaltet, erübrigt sich die Notwendigkeit des semi-empirischen Ansatzes aus Kap. 5.5.1 zum Umgang mit 2D-DIC-Daten.

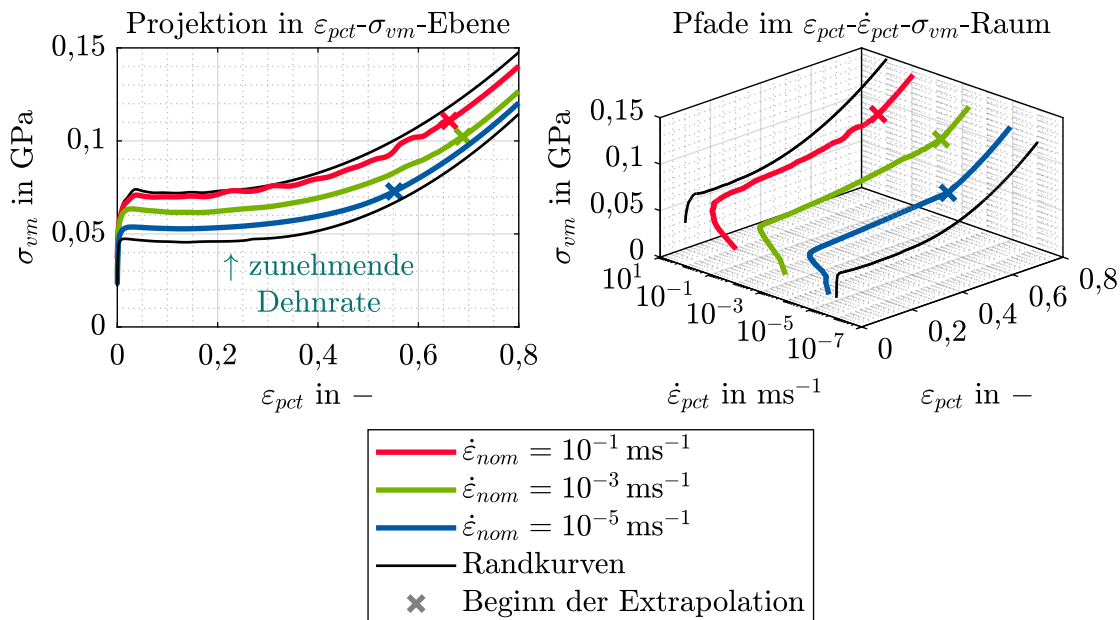
Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens

Bei der Berechnung der Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum wird gemäß Kap. 3.4.1 das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel des ν_p -Verlaufs vorgegeben. In Abb. 6.23 sind die Ergebnisse für sämtliche Versuchswiederholungen der geprüften nominellen Dehnraten dargestellt.

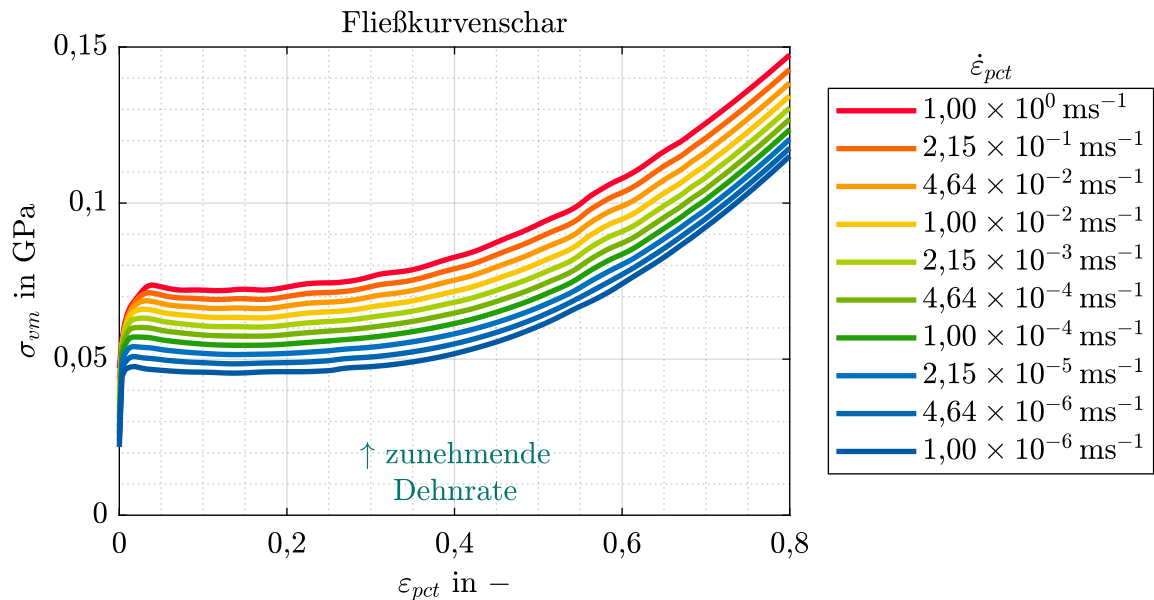
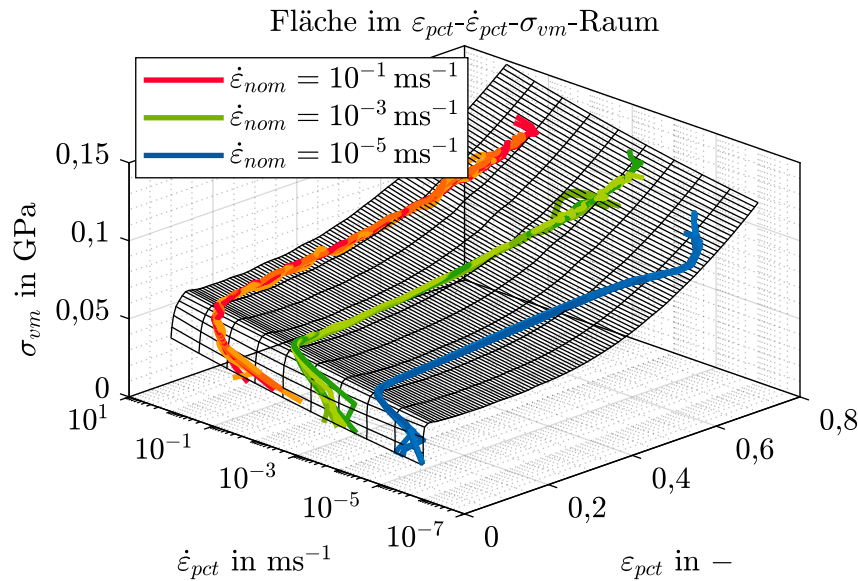
Die linke Seite der Abbildung zeigt deutlich, dass die zu $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ gehörenden $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Pfade bei großen ε_{pct} höhere σ_{vm} -Werte aufweisen, als diejenigen für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. Der Grund dafür ist, wie in Kap. 6.2.1, der Teleskopeffekt, infolgedessen ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,6$ ein rascher Anstieg des Kraftniveaus erfolgt. Aufgrund der Wechselwirkung zwischen der Probengeometrie und dem Materialverhalten ist die Verwertbarkeit der erzeugten Daten ab diesem Punkt kritisch zu hinterfragen. Obwohl die Versuche bei den beiden höheren Abzugsgeschwindigkeiten bei ähnlichen Werten für ε_{pct} versagen, sind die jeweiligen Einschnürzonen aufgrund der materiellen Viskosität von geringerer Ausdehnung, so dass dort das beschriebene Phänomen nicht auftritt.

Abbildung 6.23: PC/ABS E: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum

Bezüglich der Flächenkonstruktion ist $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} = 1,00 \times 10^{-6} \text{ms}^{-1}$, $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} = 1,00 \times 10^0 \text{ms}^{-1}$ und $\varepsilon_{pct}|_{max} = 0,8$. Für die Modellierung der Randkurven kommt die Methode 2 aus Kap. 5.5.3 mit quadratischen Polynomen zum Einsatz. Danach folgt die Extrapolation der repräsentativen Pfade. Zur Sicherstellung einer in $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Richtung monoton ansteigenden Fläche findet die Datenergänzung für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ms}^{-1}$ bereits ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,55$ statt. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.24 visualisiert.

Abbildung 6.24: PC/ABS E: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum

Zusammen bilden die repräsentativen Pfade und Randkurven das Fundament der Flächenkalibrierung. In Abb. 6.25 ist das Ergebnis zusammen mit den originalen ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfadern für sämtliche Versuchswiederholungen dargestellt. Das aufgespannte Kontrollnetz weist einundsechzig Eckpunkte in ϱ_1 -Richtung und drei Eckpunkte in ϱ_2 -Richtung auf. Für die B-Spline-Ordnungen wird jeweils ein Wert von drei gewählt. Die generierte Fließkurvenschar findet sich in Abb. 6.26.



Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen

Wie bereits erwähnt, liegen für die Materialprüfungen mit PC/ABS E stets 3D-DIC-Daten vor. In Abb. 6.27 und Abb. 6.28 wird ein repräsentativer Versuch bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, in Abb. 6.29 und Abb. 6.30 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und in Abb. 6.31 und Abb. 6.32 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ betrachtet.

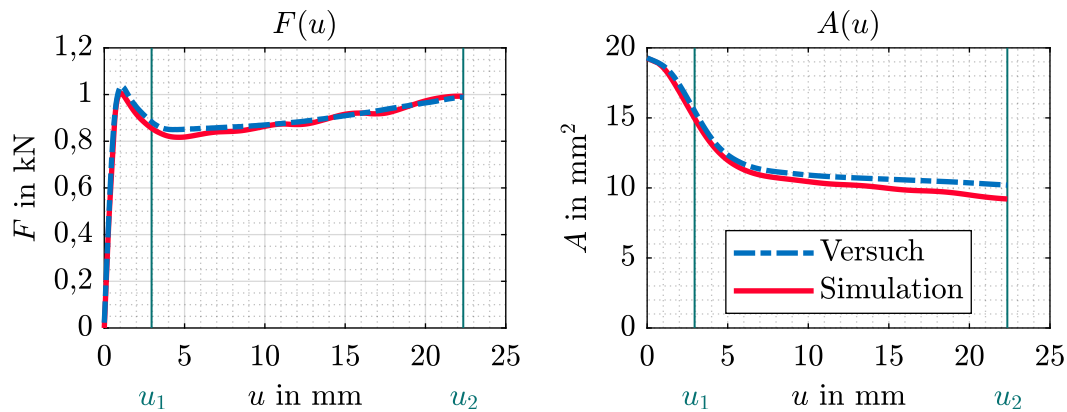


Abbildung 6.27: PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

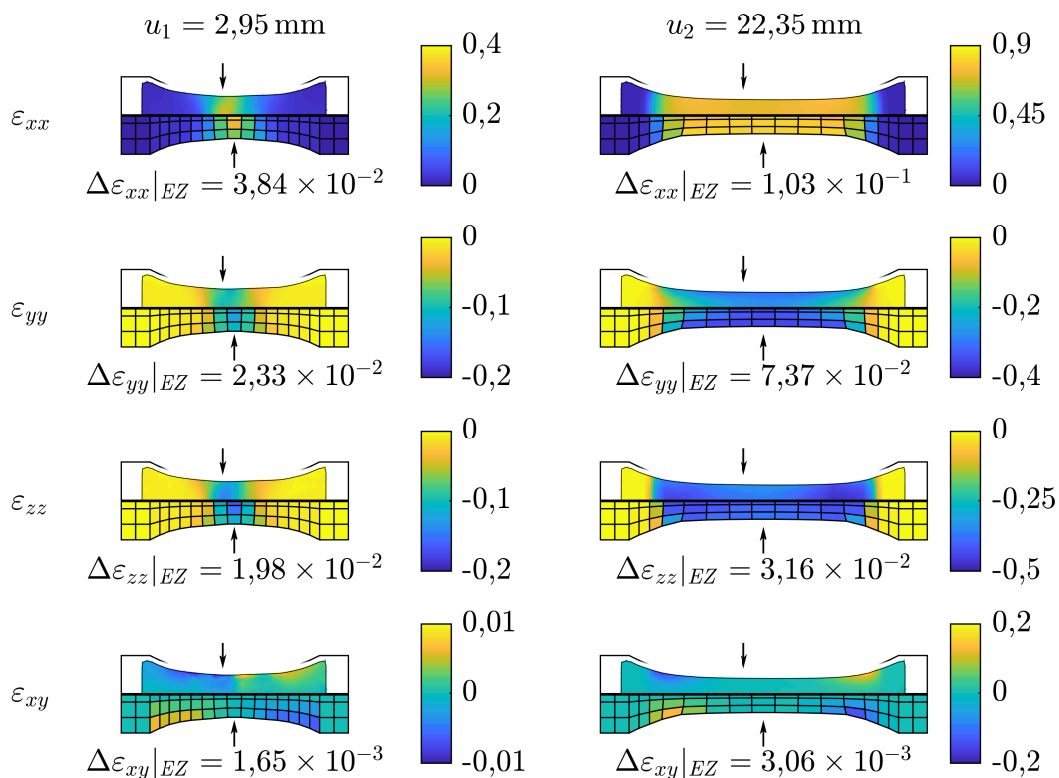


Abbildung 6.28: PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

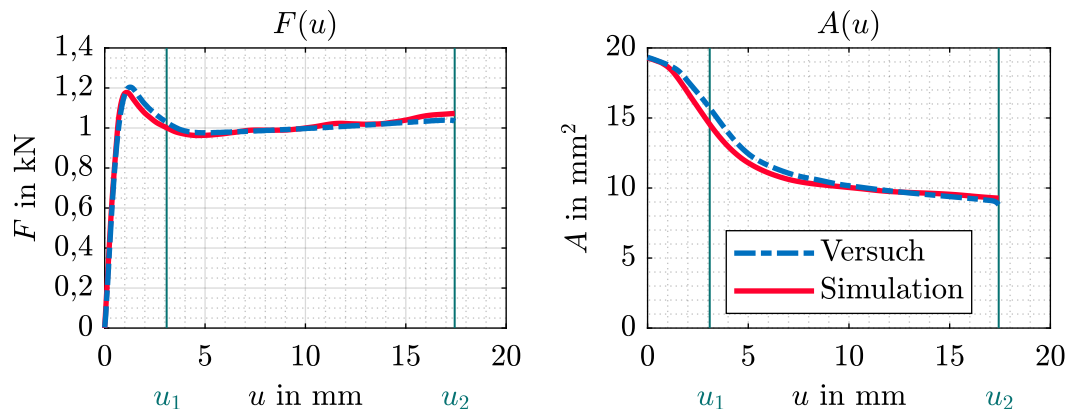


Abbildung 6.29: PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

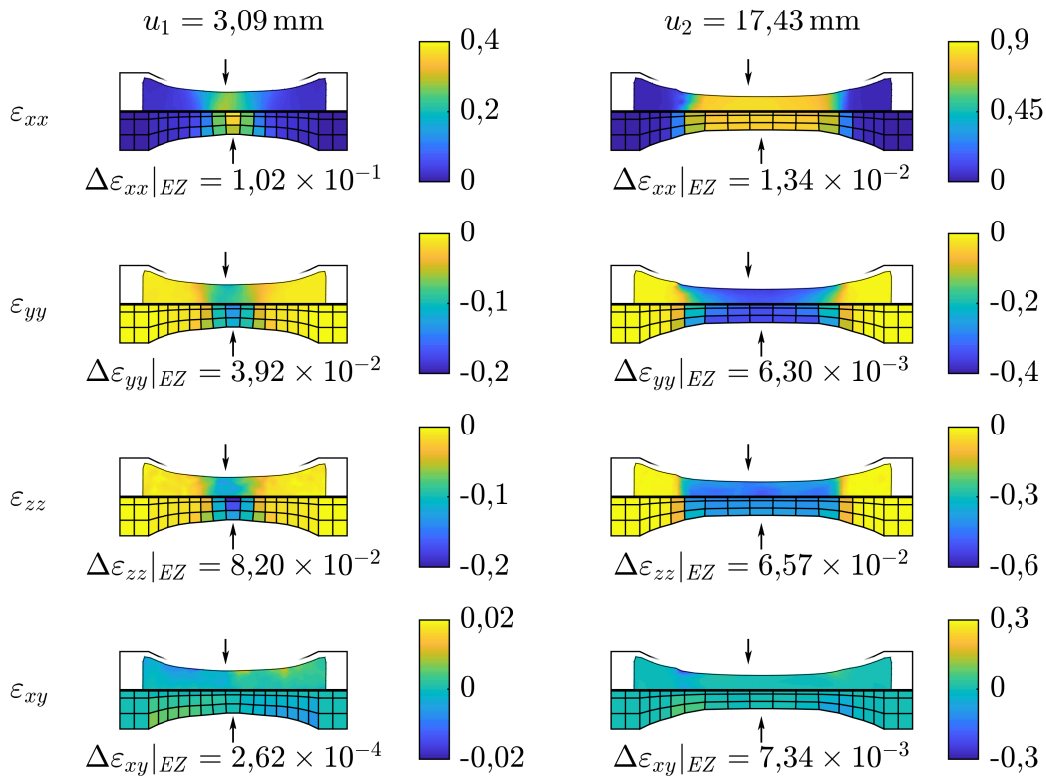


Abbildung 6.30: PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

Generell kann eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Versuchen und den Simulationen festgehalten werden. Lediglich bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ ergeben sich gemäß Abb. 6.31 größere Abweichungen in $F(u)$ und $A(u)$ beim Entfestigen des Materials nach dem Einschnürpunkt. In diesem Zusammenhang verhält sich das betrachtete PC/ABS E ähnlich zum vorhergehenden PC/ABS R. Als Grund dafür wird, wie bereits thematisiert, die Modellierung der Randkurven nach Kap. 5.5.3 vermutet. Darüber hinaus ist zu

beachten, dass die Einschnürzone in x -Richtung nicht exakt symmetrisch zu \mathcal{P}_A wächst. Das bedeutet, dass die kleinste Probenbreite, die geringste Querschnittsfläche sowie die betragsmäßig höchsten Verzerrungen in x -, y - und z -Richtung mit fortschreitender Versuchsdauer leicht versetzt zur Einschnürebene auftreten.

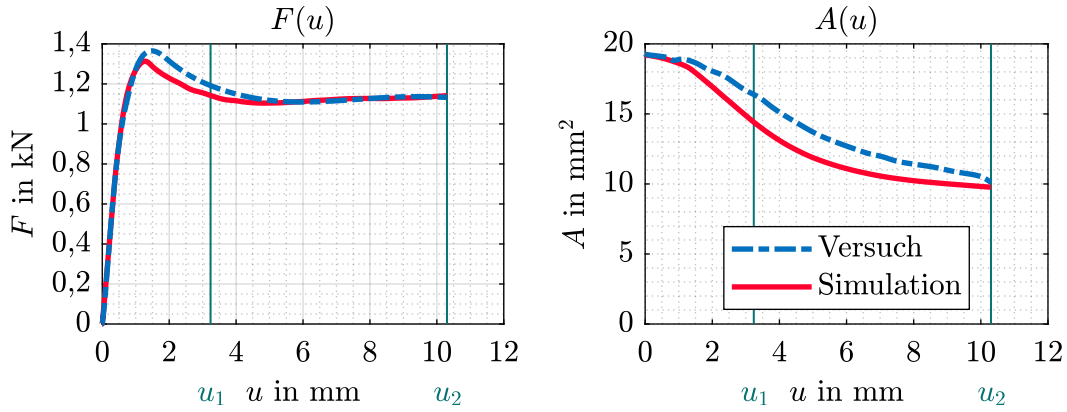


Abbildung 6.31: PC/ABS E: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

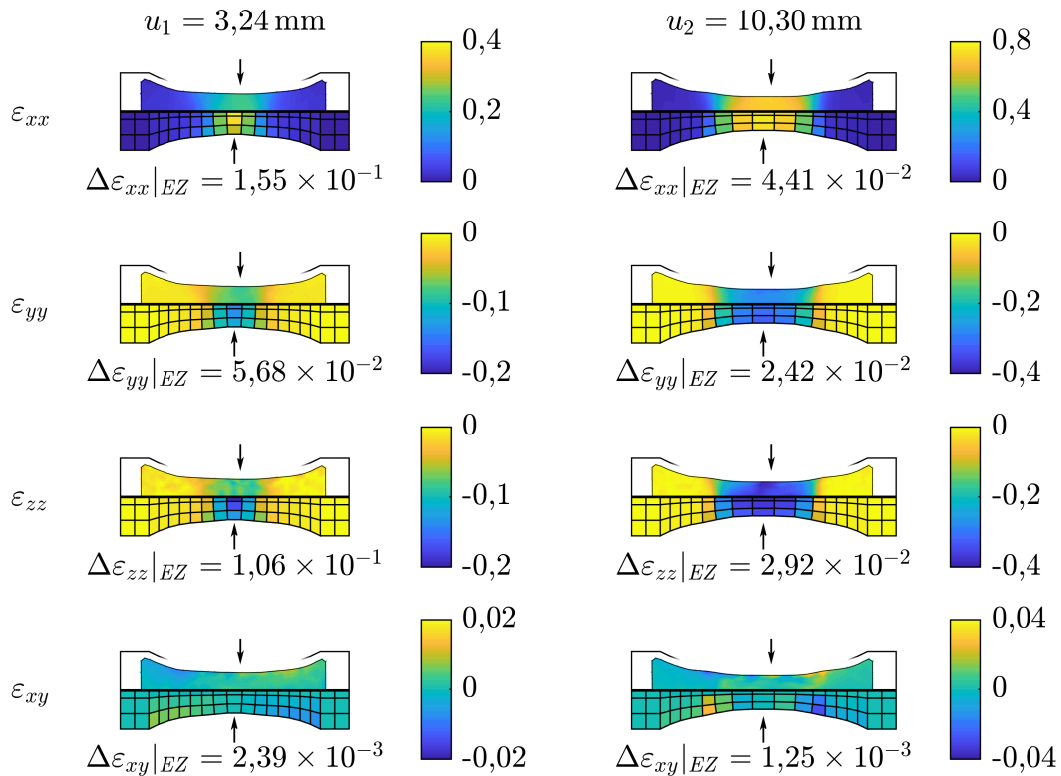


Abbildung 6.32: PC/ABS E: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

6.2.3 Reines Polypropylen

Als dritter Thermoplast wird das reine Polypropylen (PP) aus dem Prüfprogramm 1 betrachtet. Wie für PC/ABS R erfolgt die Kalibrierung, soweit möglich, anhand der ursprünglichen 2D-DIC-Daten. Die nachträglich durchgeführten, mit 3D-DIC erfassten Versuche für $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ werden ausschließlich zur Bestimmung von ν_p und $\tilde{\nu}_t$ herangezogen. Das Vorgehen ist analog zu Kap. 6.2.1 bzw. Kap. 6.2.2.

Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens

Abb. 6.33 zeigt links die Verläufe von M und rechts die Obergrenzen der Vertrauensbereiche in den technischen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen.

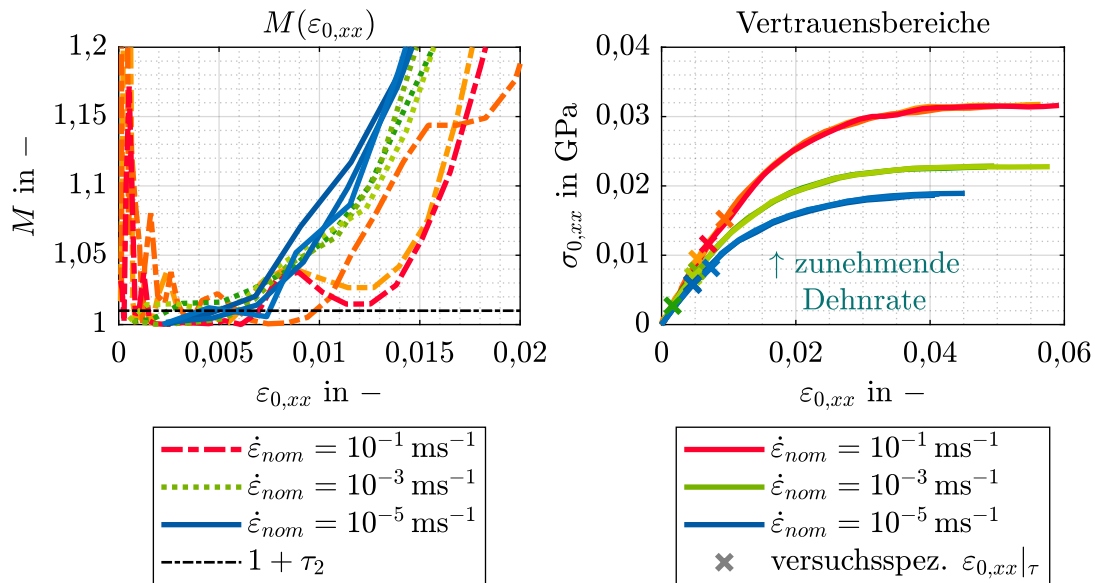
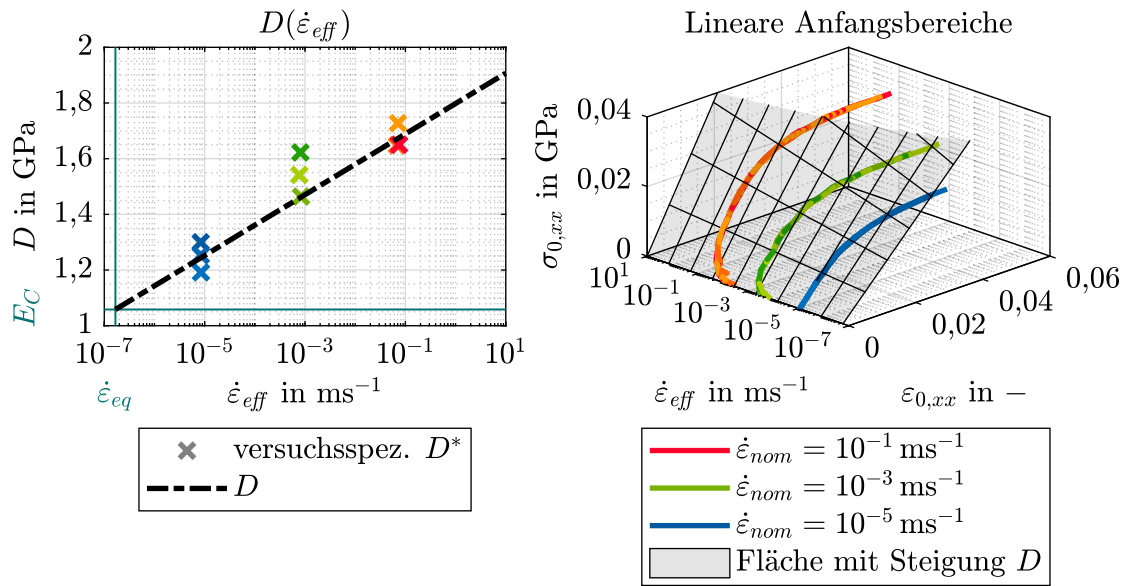


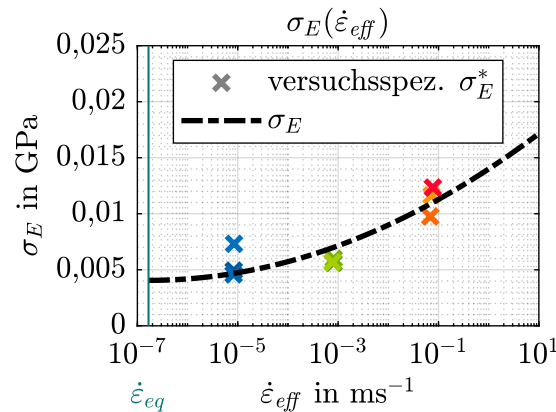
Abbildung 6.33: PP: Vertrauensbereiche

Auf der linken Seite von Abb. 6.34 sind die versuchsspezifischen D^* der davon unabhängig dehnratenübergreifend kalibrierten Funktion $D(\dot{\epsilon}_{eff})$ gegenübergestellt. Petrolfarben ist $\dot{\epsilon}_{eq} = 1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$ hervorgehoben. Da sich PP viskoelastisch verhält, ist zur Approximation der Initialsteigungen mit Gl. (5.32) ein Grad $\ell > 0$ zu wählen. Im konkreten Fall führt $\ell = 1$ zu einer plausiblen analytischen Beschreibung. Im rechten Teil der Abbildung werden die technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche um eine Fläche ergänzt, deren Steigung in $\epsilon_{0,xx}$ -Richtung $D(\dot{\epsilon}_{eff})$ entspricht.

Abbildung 6.34: PP: Ermittlung von $D(\dot{\varepsilon}_{eff})$

Gemäß Kap. 5.5.2 lässt sich für E_C ein Wert von 1,06 GPa ermitteln, was eine relative Abweichung von 5,0% vom im Datenblatt des Werkstoffs angegebenen Elastizitätsmodul, 1,01 GPa, bedeutet.

In Abb. 6.35 sind die versuchsspezifischen Elastizitätsgrenzen sowie die dehnratenübergreifend kalibrierte Funktion $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$ eingezeichnet. Der gewählte Grad ist $v = 2$.

Abbildung 6.35: PP: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\varepsilon}_{eff})$

Im Anschluss an die Quantifizierung von E_C folgen für alle herangezogenen Datenpunkte des viskoelastischen Regimes in Abhängigkeit von β diskrete Werte für E_V , die sich durch den analytischen Ansatz aus Gl. (5.36) approximieren lassen. Der Grad der Funktion wird als $h = 2$ festgelegt. Die diskreten Werte und kalibrierten Kurven sind in

Abb. 6.36 visualisiert. Als dünne schwarze Strichpunktlinie ist die dehnratenabhängige Initialsteigung abzüglich E_C dargestellt. Das beobachtete Verhalten ähnelt dem von PC/ABS E. Bei $\beta = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ fallen die ermittelten diskreten Werte für E_V für die niedrigste geprüfte nominelle Dehnrates teilweise so hoch aus, dass sie außerhalb des Bildbereichs liegen. Bereits ab $\beta = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$ kommt es zu mit Gl. (3.38) unvereinbaren Ergebnissen, weil sich für die Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ tendenziell höhere diskrete Werte für E_V ergeben, als für die Versuche bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. Aus diesem Grund wird zur Modellkalibrierung $\beta = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ identifiziert. Wieder ist $(D - E_C)$ eine akzeptable Approximation für den resultierenden funktionalen Zusammenhang $E_V(\dot{\epsilon}_{eff})$. Bei $\dot{\epsilon}_{eff} = 10^1 \text{ ms}^{-1}$ beträgt die relative Abweichung bezogen auf E_V 5,9%.

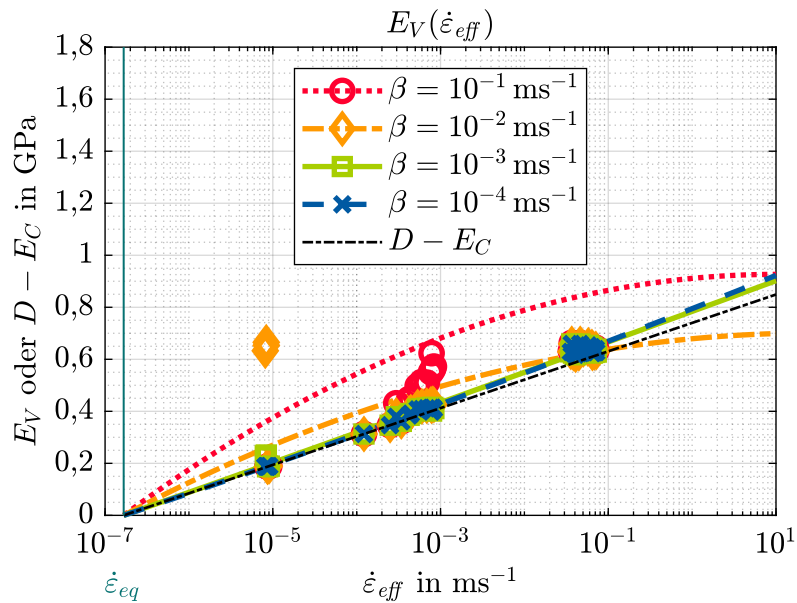


Abbildung 6.36: PP: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$

Die skalaren Parameter der Modellkalibrierung für das PP finden sich in Tab. 6.3.

Parameter	Wert
$\dot{\epsilon}_{eq}$	$1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$
E_C	1,06 GPa
β	10^{-3} ms^{-1}
ν	0,38
ρ	$9,05 \times 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$
FILT	0,95

Tabelle 6.3: PP: skalare Parameter

Bestimmung der plastischen Querkontraktion

Zur Bestimmung des ν_p -Verlaufs werden die mittels 3D-DIC erfassten Versuche bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ausgewertet. Die Ergebnisse sind auf der linken Seite von Abb. 6.37 dargestellt.

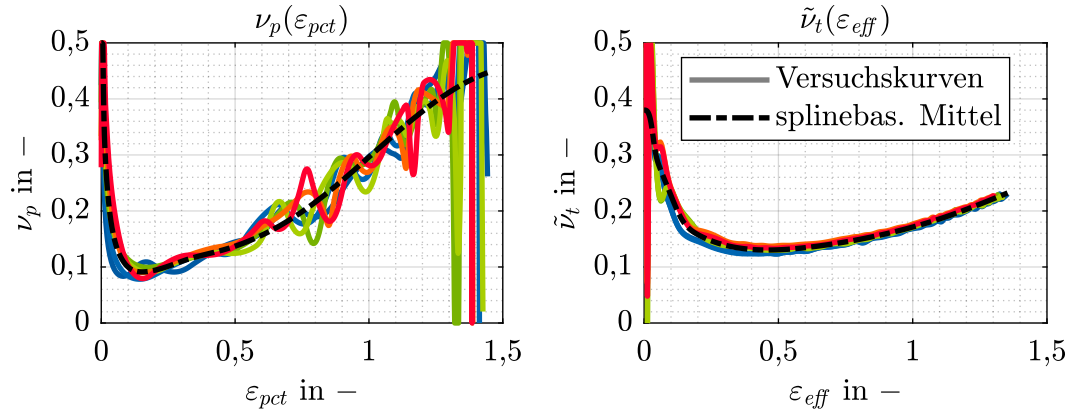


Abbildung 6.37: PP: ν_p - und $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

Die plastische Querkontraktion des PP variiert innerhalb eines großen Wertebereichs, der beidseitig bis an die Grenzen des Modells heranreicht. Während der Thermoplast zunächst unter starker Volumenzunahme plastifiziert, kehrt sich dieses Verhalten ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,15$ um und der ν_p -Verlauf strebt gegen einen Wert von 0,5. Die Gründe dafür werden auf molekularer Ebene vermutet. Da die Querkontraktionszahl gemäß Tab. 6.3 einen Wert von 0,38 aufweist, gilt für einen Großteil des analysierten ε_{pct} -Intervalls: $\nu_p < \nu$. Dort ist im Materialmodell die in Kap. 2.2.4 thematisierte Rückkopplung von ν_p auf ν aktiv.

Am größten fällt die Streuung ab ca. $\varepsilon_{pct} = 1,25$ aus. Als Hauptgrund werden Messfehler angesehen, weil das stochastische Muster bei solch großen Dehnungen stark verzerrt wird und die Qualität der Grauwertkorrelation nach Kap. 2.3 entsprechend sinkt. Angesichts der besonderen Sensitivität der Bestimmung von ν_p ist das beobachtete Verhalten plausibel. Eine Näherung des r -Werts mit den totalen Dehnungen deutet nicht auf spannungs- bzw. verzerrungsinduzierte Anisotropie hin.

Auf der rechten Seite von Abb. 6.37 sind für die mittels 3D-DIC erfassten Versuche die funktionalen Zusammenhänge $\tilde{\nu}_t(\varepsilon_{eff})$ dargestellt. Ihre Kalibrierung basiert auf den Gaußpunktapproximationen der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors nach Gl. (5.18). Ergänzt werden die Verläufe durch ihr splinebasiert geglättetes arithmetisches Mittel. Für $\varepsilon_{eff} = 0$ wird diesem der Wert der vorab bestimmten Querkontraktionszahl zugeschrieben.

Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens

Mit dem splinebasiert geglätteten arithmetischen Mittel des $\tilde{\nu}_t$ -Verlaufs lässt sich für alle mit 2D-DIC aufgezeichneten Versuche σ_{xx} an den materiellen Punkten approximieren, die zu Versuchsbeginn an den Gaußpunkten liegen. Bei der Berechnung der ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfade für die so ergänzte Datenbasis wird das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel des ν_p -Verlaufs vorgegeben. In Abb. 6.38 sind die Ergebnisse für sämtliche Versuchswiederholungen der geprüften nominellen Dehnraten dargestellt.

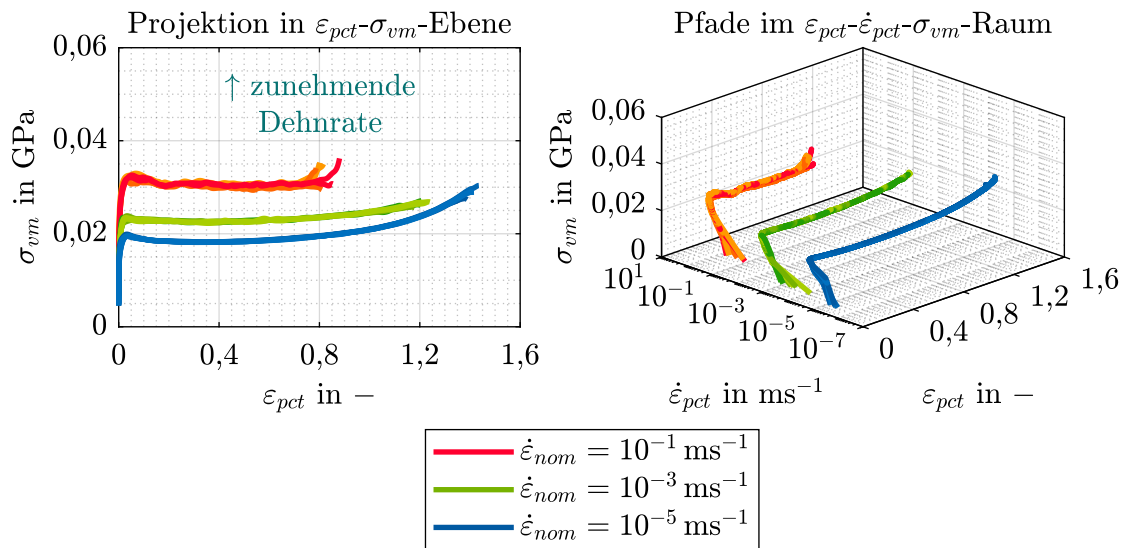


Abbildung 6.38: PP: Pfade im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum

Nach der Erzeugung von repräsentativen Pfaden für die drei untersuchten Abzugsgeschwindigkeiten werden die Flächenränder definiert. Entsprechend Gl. (5.58) und Gl. (5.59) ist $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} = 1,00 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$ und $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} = 1,00 \times 10^0 \text{ ms}^{-1}$. Als $\varepsilon_{pct}|_{max}$ wird 1,6 gewählt. Aufgrund der stark unterschiedlichen Länge der repräsentativen Pfade in ε_{pct} -Richtung wird bei der Modellierung der Randkurven auf die Methode 1 aus Kap. 5.5.3 gesetzt. Nach dem ersten lokalen Maximum erfolgt diese mit der Steigung $\partial\sigma_{vm}/\partial\varepsilon_{pct}$ des repräsentativen Pfads für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$. Zur anschließenden Extrapolation wird ein quadratisches Polynom angenommen. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.39 visualisiert.

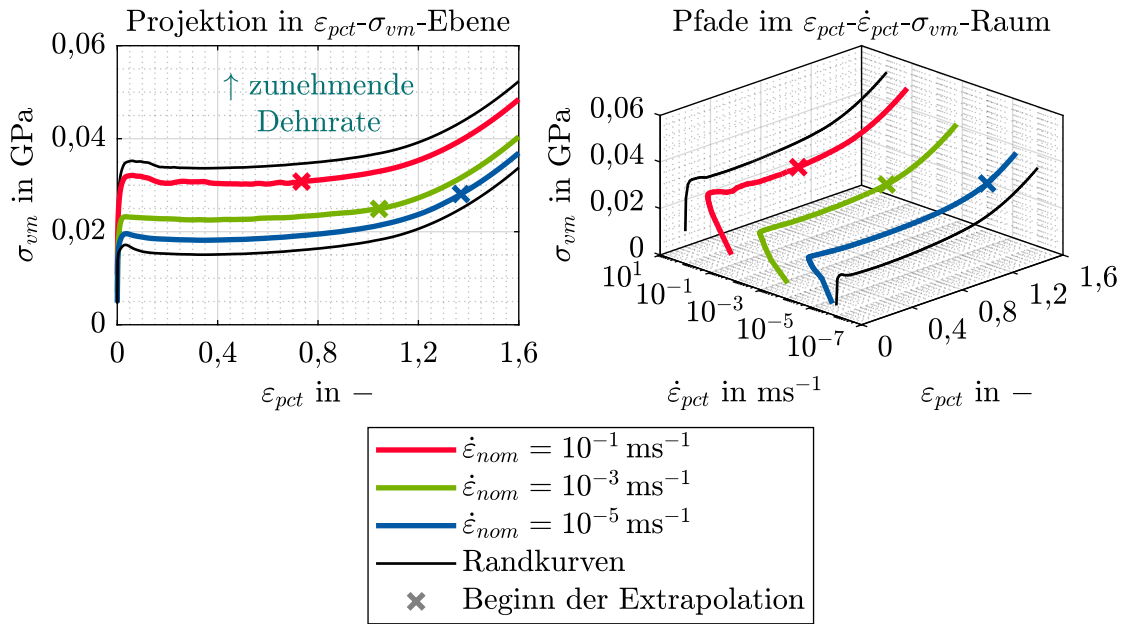


Abbildung 6.39: PP: Konstruktion der Fläche im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum

Zusammen bilden die repräsentativen Pfade und Randkurven das Fundament der Flächenkalibrierung. In Abb. 6.40 ist das Ergebnis zusammen mit den originalen ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfadern für sämtliche Versuchswiederholungen dargestellt. Das aufgespannte Kontrollnetz weist 121 Eckpunkte in ϱ_1 -Richtung und drei Eckpunkte in ϱ_2 -Richtung auf. Für die B-Spline-Ordnungen wird jeweils ein Wert von drei gewählt. Die generierte Fließkurvenschar findet sich in Abb. 6.41.

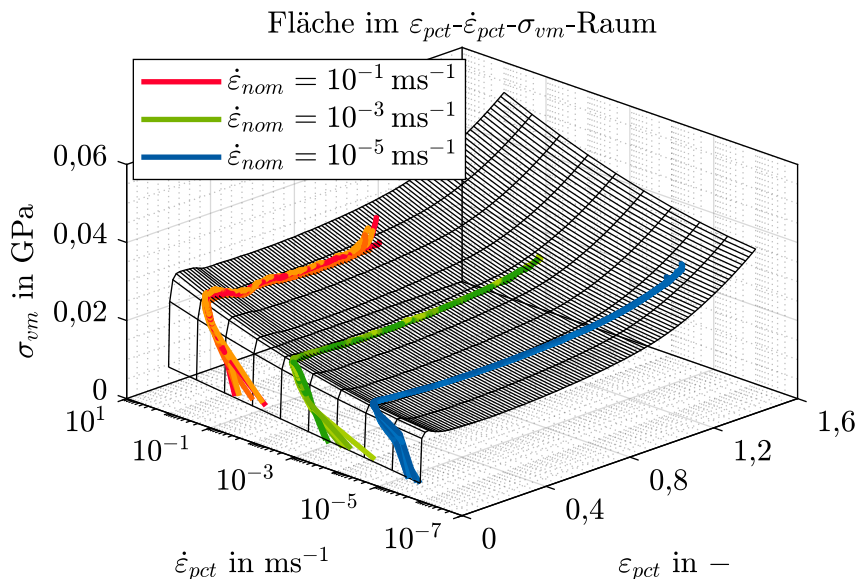
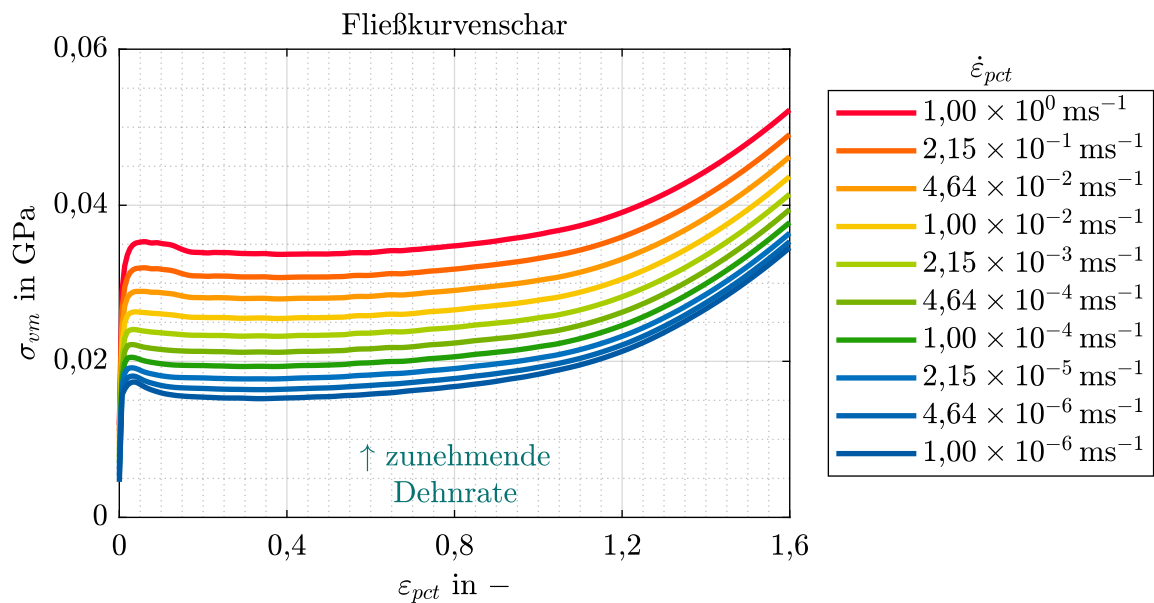


Abbildung 6.40: PP: Fläche im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum



Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen

Die Prognosegüte der Modellkalibrierung wird entsprechend des in Kap. 6.2.1 vorgestellten Schemas beurteilt. Zunächst findet in Abb. 6.42 und Abb. 6.43 die Betrachtung eines repräsentativen mit 3D-DIC erfassten Versuchs bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ statt. Anschließend folgt der mit 2D-DIC erfasste Teil der Datenbasis. In Abb. 6.44 und Abb. 6.45 steht ein repräsentativer Versuch bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, in Abb. 6.46 und Abb. 6.47 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und in Abb. 6.48 und Abb. 6.49 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ im Fokus.

Wenngleich die Abweichungen in Relation zu den ersten beiden Thermoplasten etwas größer einzuschätzen sind, lässt der Vergleich zwischen den Versuchen und Simulationen auch für diesen Werkstoff eine hohe Prognosegüte erkennen. Wie beim PC/ABS E ist zu beachten, dass die Einschnürzone in x -Richtung nicht exakt symmetrisch zu \mathcal{P}_A wächst. Aus diesem Grund treten die kleinste Probenbreite, die geringste Querschnittsfläche sowie die betragsmäßig höchsten Verzerrungen in x -, y - und z -Richtung mit fortschreitender Versuchsdauer leicht versetzt zur Einschnürebene auf. Die gute Wiedergabe des Kraftniveaus bekräftigt die Anwendbarkeit des semi-empirischen Vorgehens nach Kap. 5.5.1 zur Spannungsapproximation für 2D-DIC-Daten.

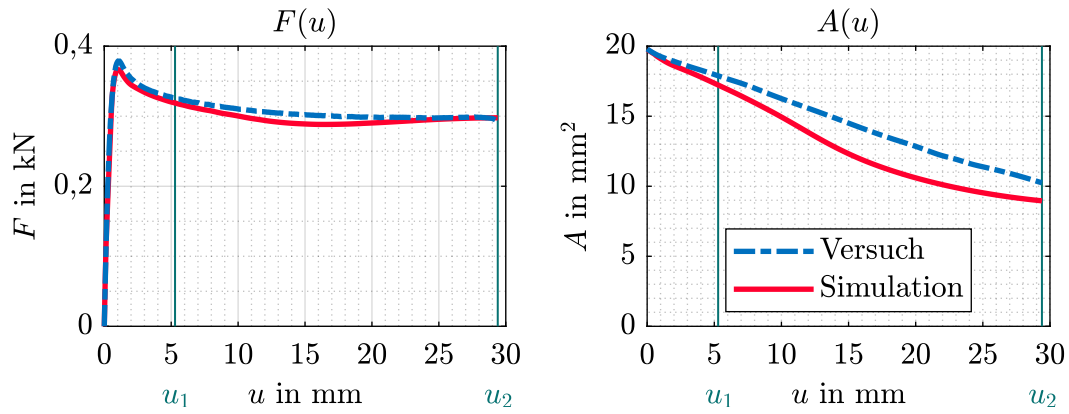


Abbildung 6.42: PP: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

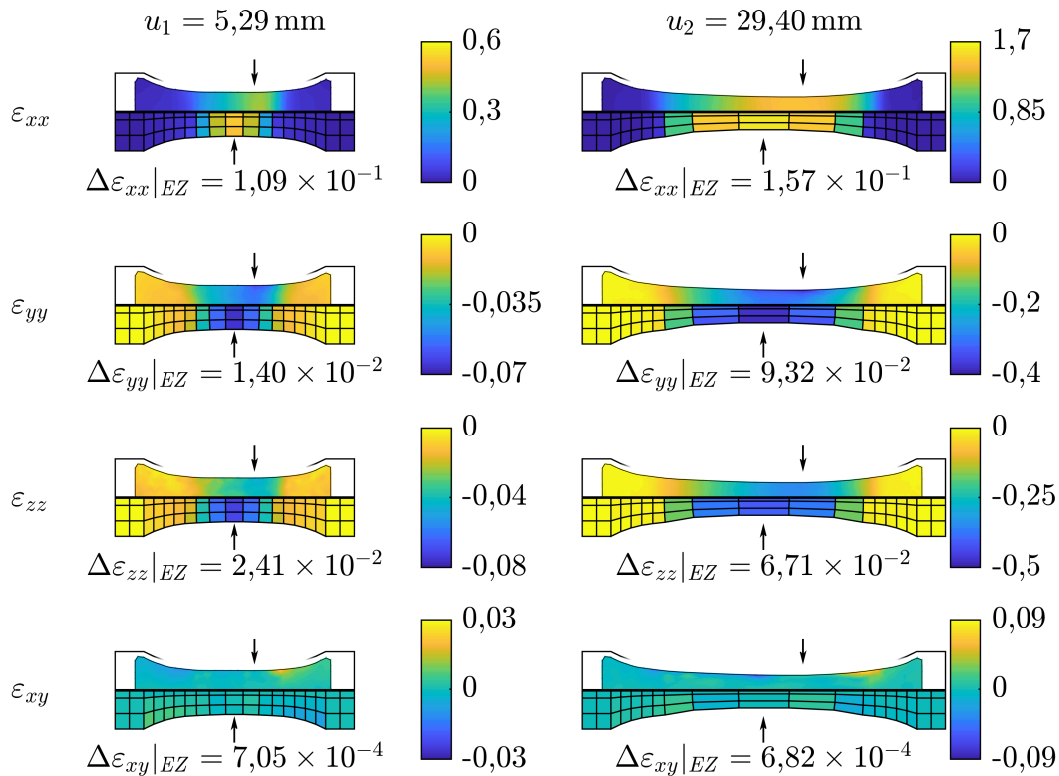


Abbildung 6.43: PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

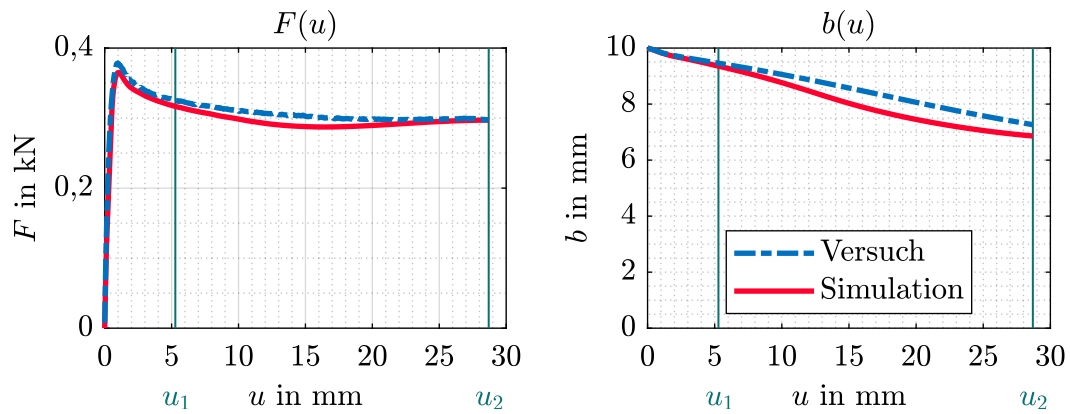


Abbildung 6.44: PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

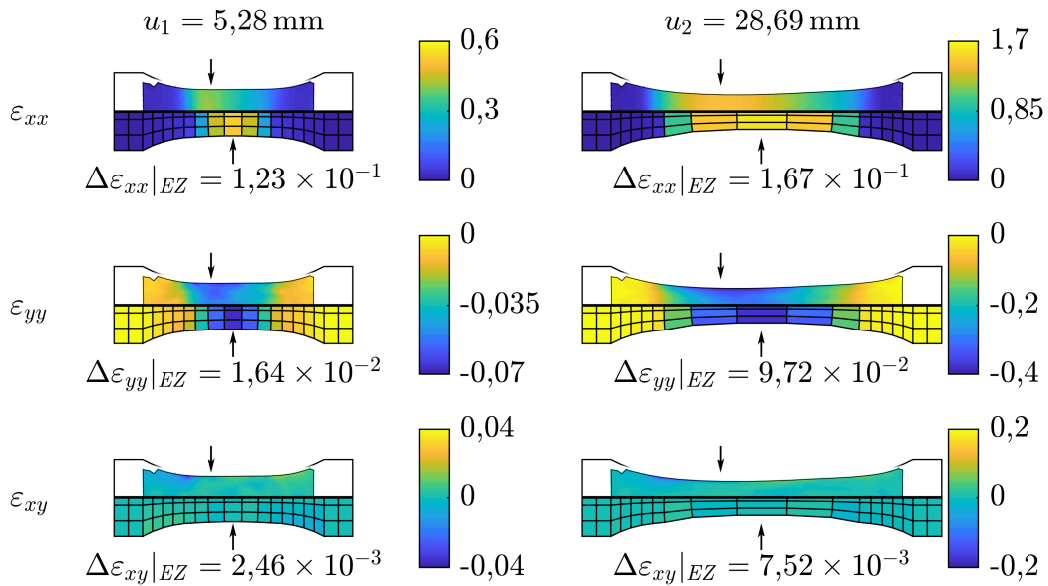


Abbildung 6.45: PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

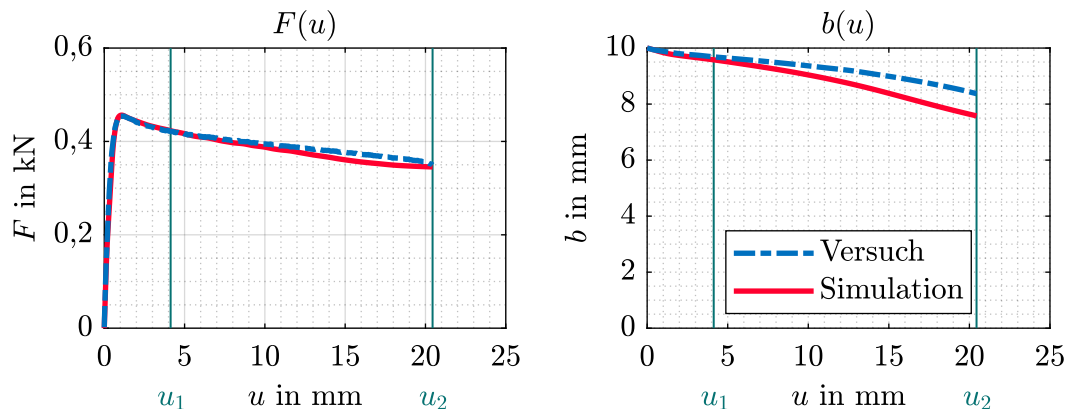


Abbildung 6.46: PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

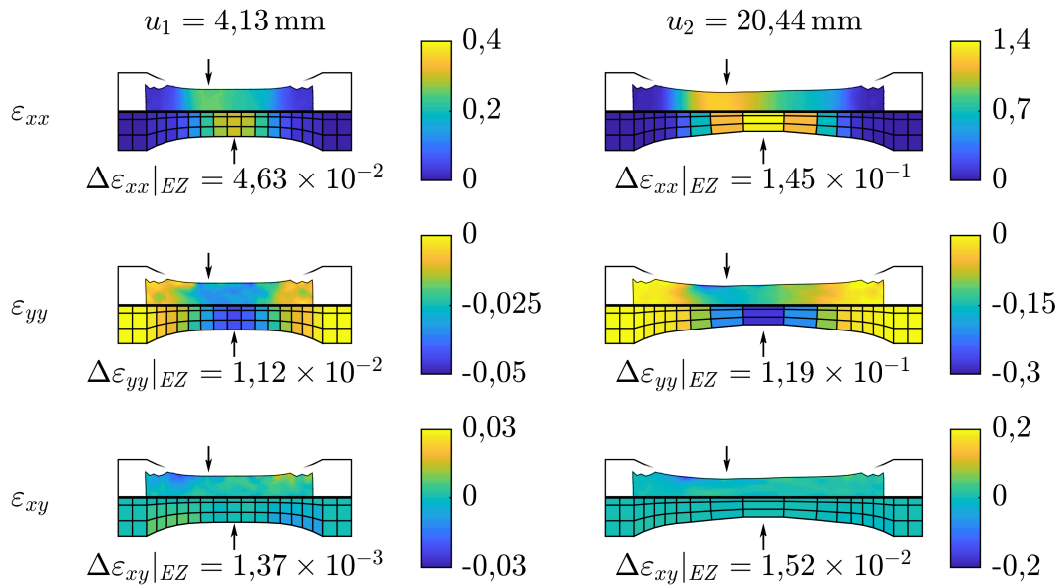


Abbildung 6.47: PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

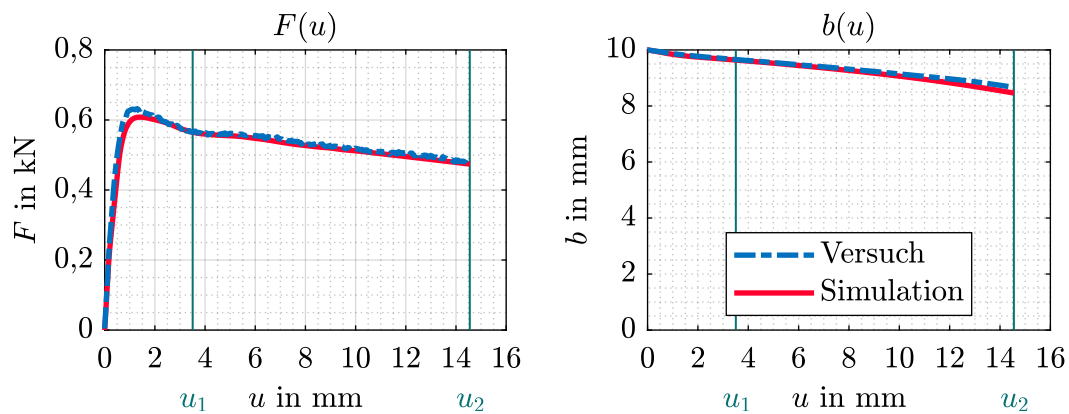


Abbildung 6.48: PP: $F(u)$ und $b(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

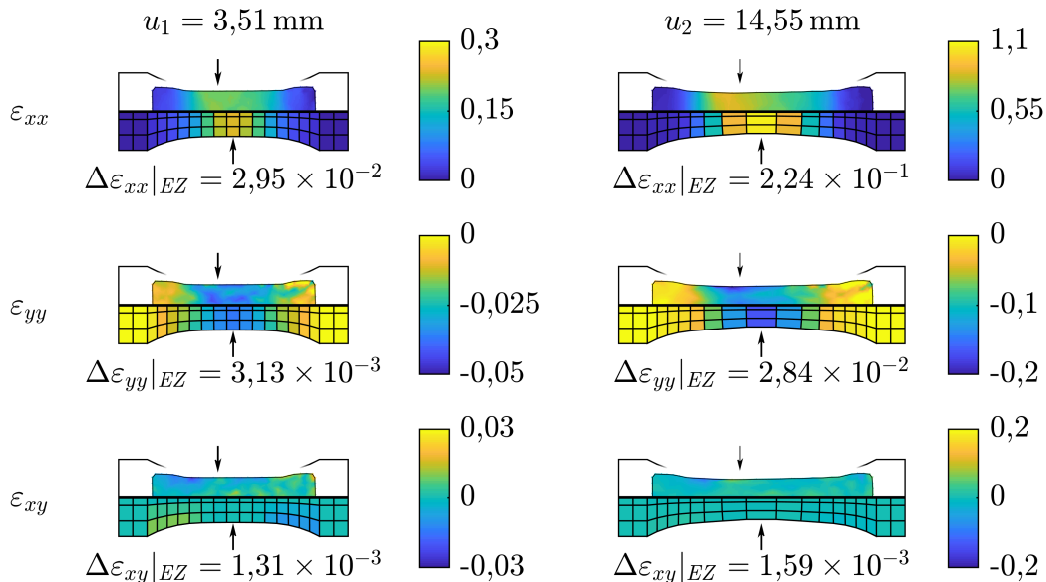


Abbildung 6.49: PP: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (2D-DIC)

6.2.4 Polypropylen mit 20 % Talkum

Der letzte untersuchte Thermoplast ist das Polypropylen mit 20 % Talkum (PP T20) aus dem Prüfprogramm 2. Erneut orientieren sich die Ausführungen an den vorhergehenden Abschnitten.

Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens

Abb. 6.50 zeigt links die Verläufe von M und rechts die Obergrenzen der Vertrauensbereiche in den technischen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen.

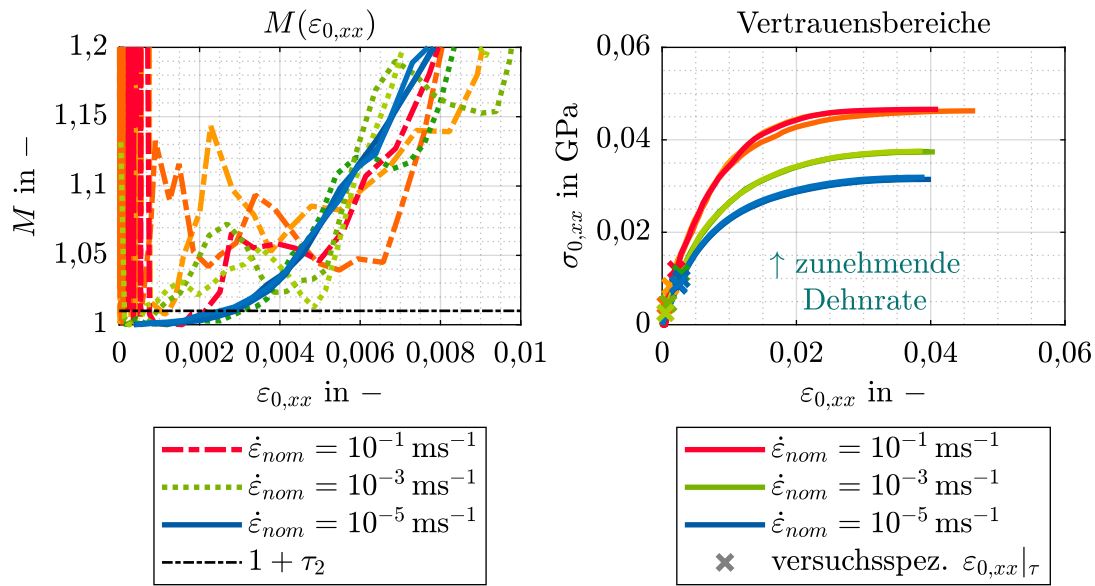


Abbildung 6.50: PP T20: Vertrauensbereiche

Im Vergleich zu den vorhergehenden Materialien weicht M für die nominellen Dehnraten $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ wesentlich stärker von einer idealen Ausprägung ab, wie sie Abb. 5.18 zeigt. Der Grund dafür ist, dass sich der näherungsweise lineare Anfangsbereich in den technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven für PP T20 auf ein besonders kleines $\epsilon_{0,xx}$ -Intervall beschränkt. Die Erfassung der dort vorherrschenden, sehr kleinen Deformationen ist insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten messtechnisch herausfordernd. Um in Zukunft eine höhere Datenqualität in diesem Versuchsabschnitt zu erzielen, wird empfohlen, die Aufnahmefrequenz des DIC-Messsystems zu erhöhen. Darüber hinaus ist es denkbar, die Berechnung des lokalen Sekanten- und Tangentenmoduls aus Kap. 5.5.2 auf Basis von geglätteten Daten durchzuführen. Obwohl die linke Seite von Abb. 6.50 auf den ersten Blick so aussieht, als wären die Ergebnisse schwer zu verwerten, gestatten die Versuchswiederholungen in ihrer Summe eine adäquate Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens.

Auf der linken Seite von Abb. 6.51 sind die versuchsspezifischen D^* der davon unabhängig dehnratenübergreifend kalibrierten Funktion $D(\dot{\epsilon}_{eff})$ gegenübergestellt. Petrolfarben ist $\dot{\epsilon}_{eq} = 1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$ hervorgehoben. Das viskoelastische Verhalten von PP T20 lässt sich mit einem Grad von $\ell = 1$ in Gl. (5.32) hinreichend gut beschreiben. Im rechten Teil der Abbildung werden die technischen Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche um eine Fläche ergänzt, deren Steigung in $\epsilon_{0,xx}$ -Richtung $D(\dot{\epsilon}_{eff})$ entspricht.

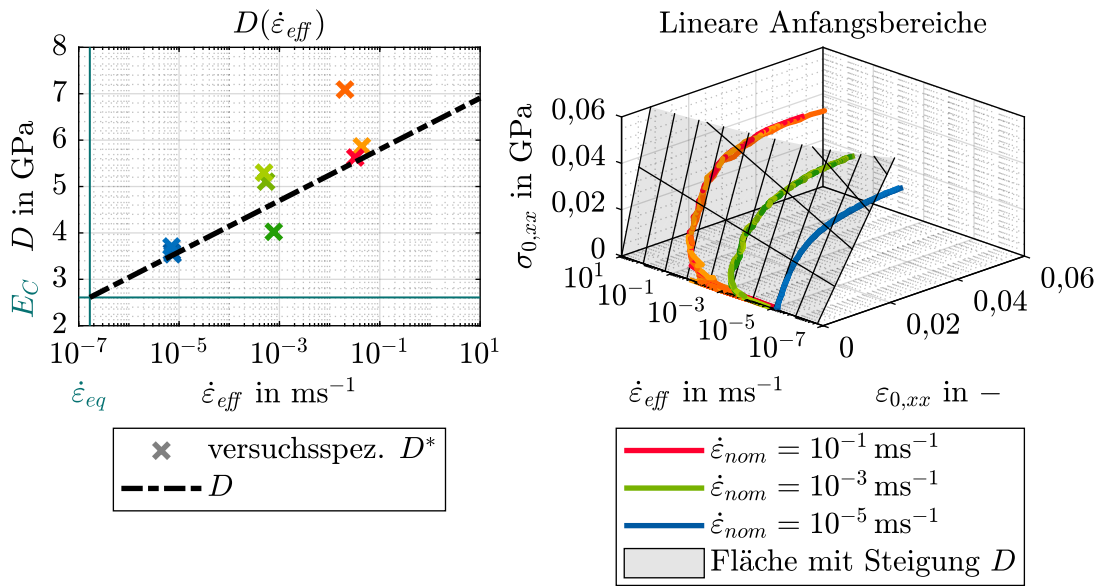


Abbildung 6.51: PP T20: Ermittlung von $D(\dot{\epsilon}_{eff})$

Gemäß Kap. 5.5.2 lässt sich für E_C ein Wert von 2,61 GPa ermitteln. Da im Datenblatt des Werkstoffs die Angabe eines im Zugversuch bestimmten Elastizitätsmoduls fehlt, ist eine Plausibilitätsprüfung nur indirekt anhand des darin genannten *Biegemoduls* in Höhe von 2,50 GPa möglich. Bezogen auf diesen beträgt die relative Abweichung von E_C 4,4%.

Abb. 6.52 zeigt die versuchsspezifischen Elastizitätsgrenzen sowie die dehnratenübergreifend kalibrierte Funktion $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$. Der gewählte Grad ist $v = 1$.

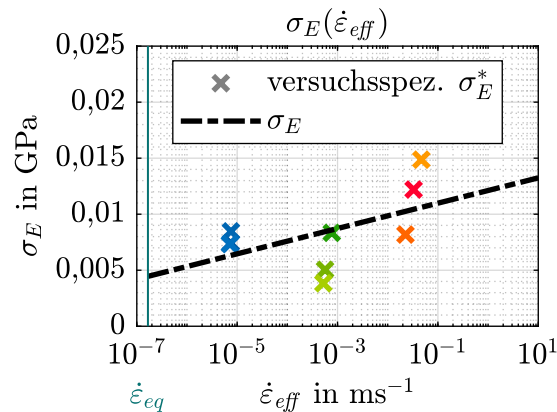


Abbildung 6.52: PP T20: Ermittlung von $\sigma_E(\dot{\epsilon}_{eff})$

In Abb. 6.53 sind die mit E_C ermittelten diskreten Werte für E_V und ihre zugehörigen analytischen Beschreibungen dargestellt. Der Grad der Funktion aus Gl. (5.36) ist $h = 2$. Ergänzt werden die Darstellungen durch die dehnratenabhängige Initialsteigung abzüglich E_C , welche als dünne schwarze Strichpunktlinie visualisiert ist. Auch für PP T20 ähnelt das Verhalten Abb. 6.21 für PC/ABS E und Abb. 6.36 für PP. Da es bereits ab $\beta = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$ zu mit Gl. (3.38) unvereinbaren Ergebnissen kommt, wird zur Modellkalibrierung $\beta = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ identifiziert. In diesem Fall ist die Verwendung von $(D - E_C)$ als Approximation für den resultierenden funktionalen Zusammenhang $E_V(\dot{\epsilon}_{eff})$ wesentlich schlechter als für PC/ABS E und PP. Bei $\dot{\epsilon}_{eff} = 10^1 \text{ ms}^{-1}$ beträgt die relative Abweichung bezogen auf E_V bereits 10,9%.

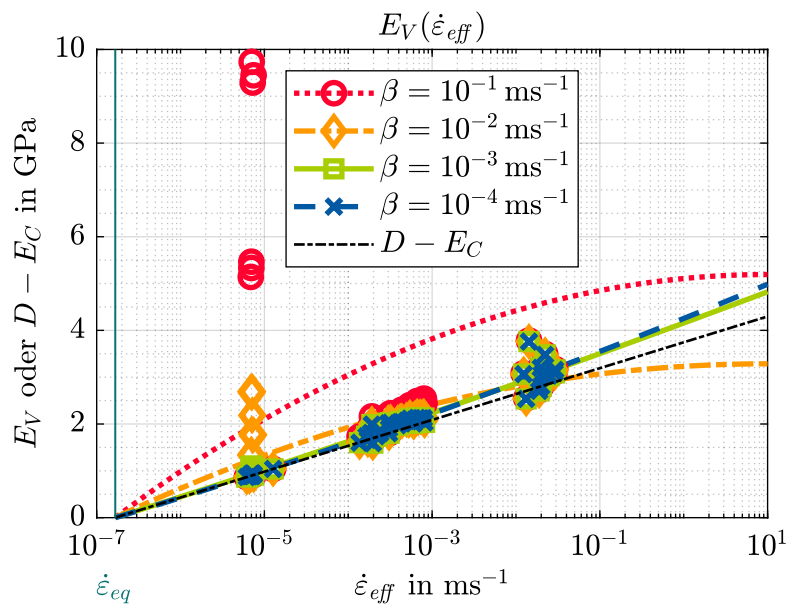


Abbildung 6.53: PP T20: Ermittlung von β und $E_V(\dot{\epsilon}_{eff}, \beta)$

Die skalaren Parameter der Modellkalibrierung für PP T20 finden sich in Tab. 6.4.

Parameter	Wert
$\dot{\epsilon}_{eq}$	$1,67 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$
E_C	2,61 GPa
β	10^{-3} ms^{-1}
ν	0,31
ρ	$1,08 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$
FILT	0,95

Tabelle 6.4: PP T20: skalare Parameter

Bestimmung der plastischen Querkontraktion

Wie beim PC/ABS E stehen für PP T20 gemäß Kap. 5.1 dehnratenübergreifend 3D-DIC-Daten zur Verfügung. Infolge der Überlegungen aus Kap. 3.4.1 wird der ν_p -Verlauf dennoch exklusiv anhand der Versuche bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.54 dargestellt.

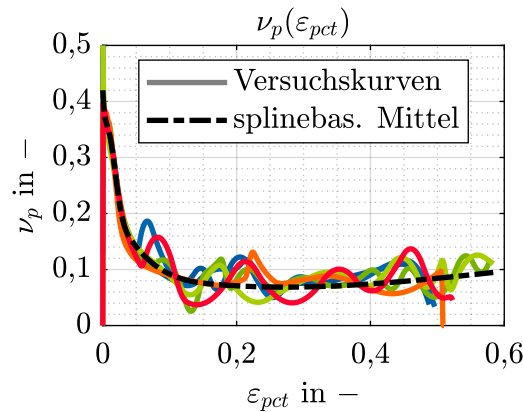


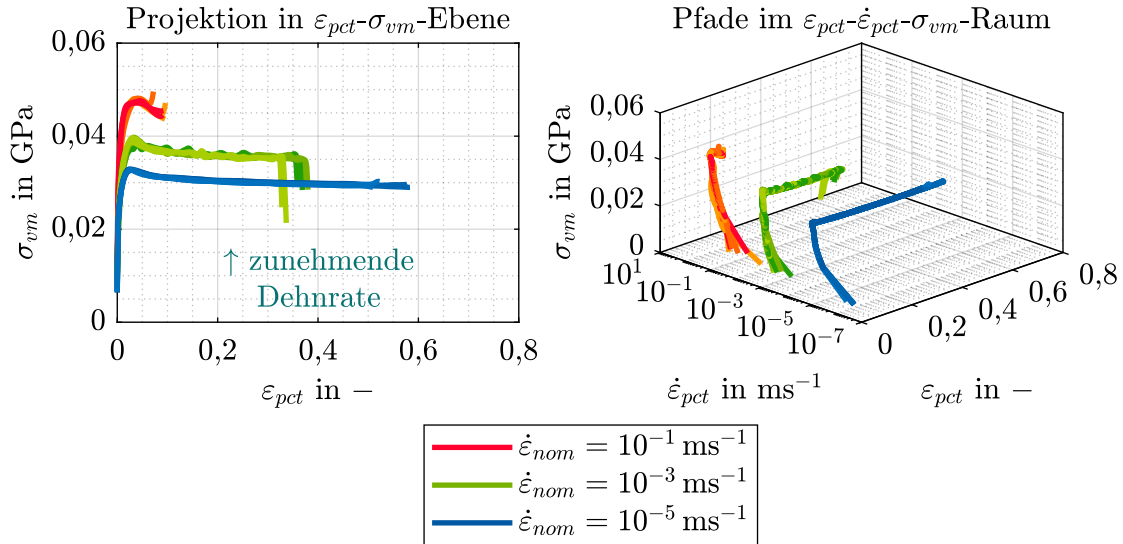
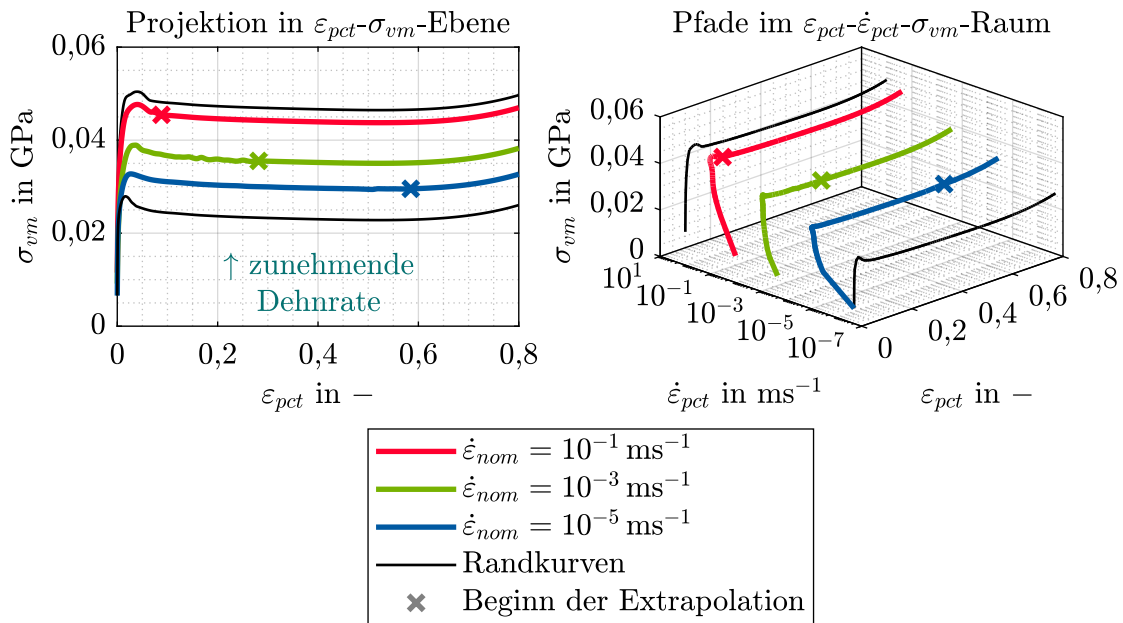
Abbildung 6.54: PP T20: ν_p -Verläufe bei $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

Es zeigt sich, dass PP T20 mit zunehmender Längsdehnung unter starker Volumenzunahme plastifiziert. Da die Querkontraktionszahl gemäß Tab. 6.4 einen Wert von 0,31 aufweist, ist für nahezu das gesamte analysierte ε_{pct} -Intervall $\nu_p < \nu$, was im Materialmodell die in Kap. 2.2.4 thematisierte Rückkopplung von ν_p auf ν aktiviert. In keinem Bereich streuen die Kurven besonders stark.

Charakterisierung des viskoplastischen Materialverhaltens

Bei der Berechnung der Pfade im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum wird gemäß Kap. 3.4.1 das splinebasiert geglättete arithmetische Mittel des ν_p -Verlaufs vorgegeben. In Abb. 6.55 sind die Ergebnisse dargestellt.

Bezüglich der Flächenkonstruktion ist $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{min} = 1,98 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-1}$, $\dot{\varepsilon}_{pct}|_{max} = 1,00 \times 10^0 \text{ ms}^{-1}$ und $\varepsilon_{pct}|_{max} = 0,8$. Aufgrund der stark unterschiedlichen Länge der repräsentativen Pfade in ε_{pct} -Richtung wird bei der Modellierung der Randkurven auf die Methode 1 aus Kap. 5.5.3 gesetzt. Nach dem ersten lokalen Maximum erfolgt diese mit der Steigung $\partial\sigma_{vm}/\partial\varepsilon_{pct}$ des repräsentativen Pfads für $\dot{\varepsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$. Zur anschließenden Extrapolation wird ein quadratisches Polynom angenommen. Die positive Steigung ab ca. $\varepsilon_{pct} = 0,5$, welche einer Materialverfestigung entspricht, hat günstige Auswirkungen auf die Robustheit und Stabilität der Simulation. In Abb. 6.56 sind die Ergebnisse visualisiert.

Abbildung 6.55: PP T20: Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -RaumAbbildung 6.56: PP T20: Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum

Zusammen bilden die repräsentativen Pfade und Randkurven das Fundament der Flächenkalibrierung. In Abb. 6.57 ist das Ergebnis zusammen mit den originalen ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Pfadern für sämtliche Versuchswiederholungen dargestellt. Das aufgespannte Kontrollnetz weist einundsechzig Eckpunkte in ϱ_1 -Richtung und drei Eckpunkte in ϱ_2 -Richtung auf. Für die B-Spline-Ordungen wird jeweils ein Wert von drei gewählt. Die generierte Fließkurvenschar findet sich in Abb. 6.58.

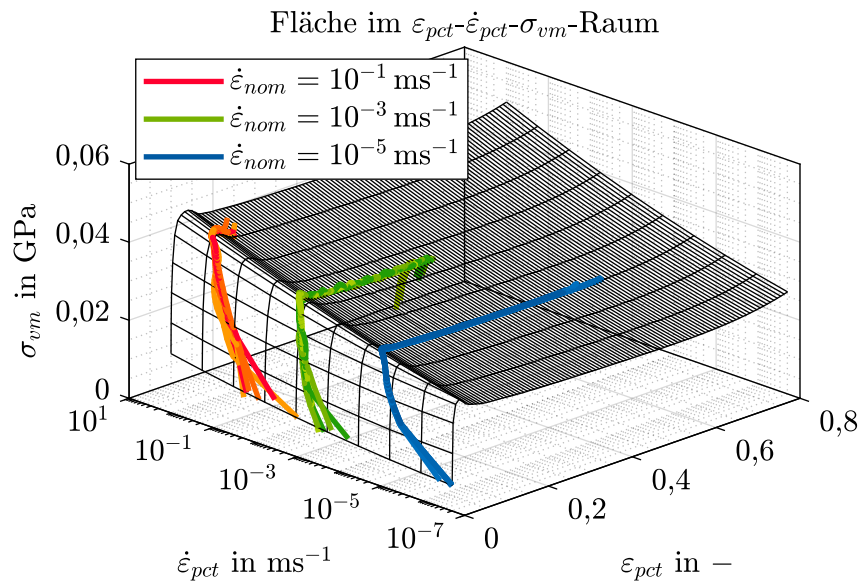


Abbildung 6.57: PP T20: Fläche im ε_{pct} - $\dot{\varepsilon}_{pct}$ - σ_{vm} -Raum

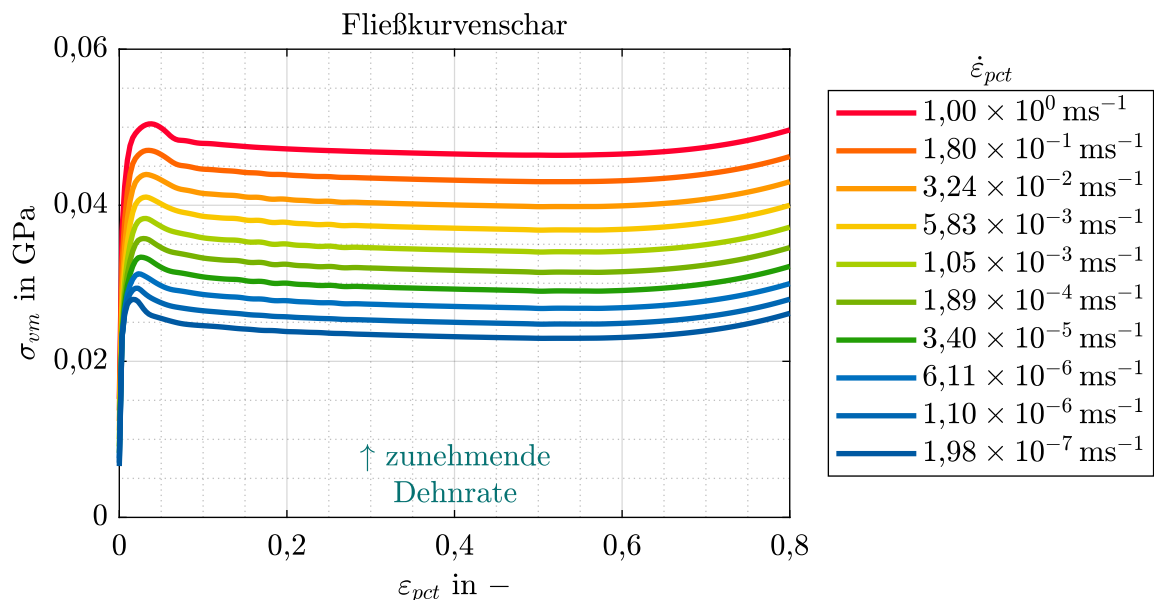


Abbildung 6.58: PP T20: Fließkurvenschar

Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen

Die Gegenüberstellung von Versuchen und Simulationen erfolgt analog zu PC/ABS E in Kap. 6.2.2. In Abb. 6.59 und Abb. 6.60 wird ein repräsentativer Versuch bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$, in Abb. 6.61 und Abb. 6.62 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ und in Abb. 6.63 und Abb. 6.64 einer bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ betrachtet.

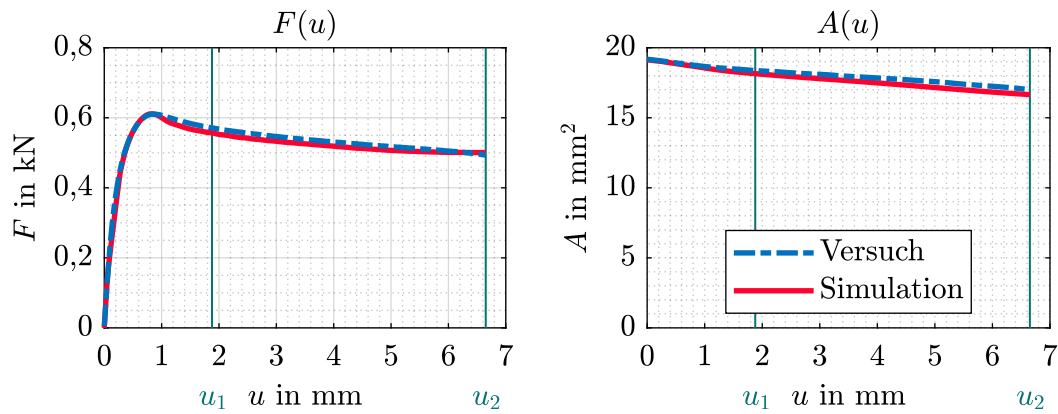


Abbildung 6.59: PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

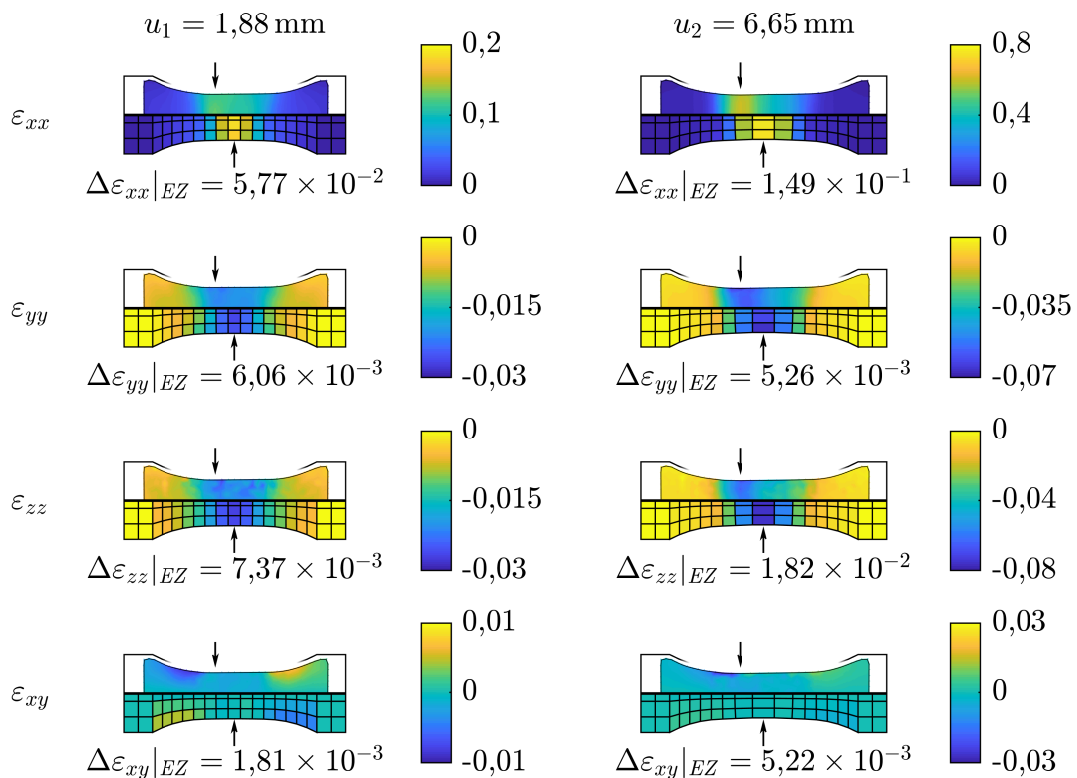


Abbildung 6.60: PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

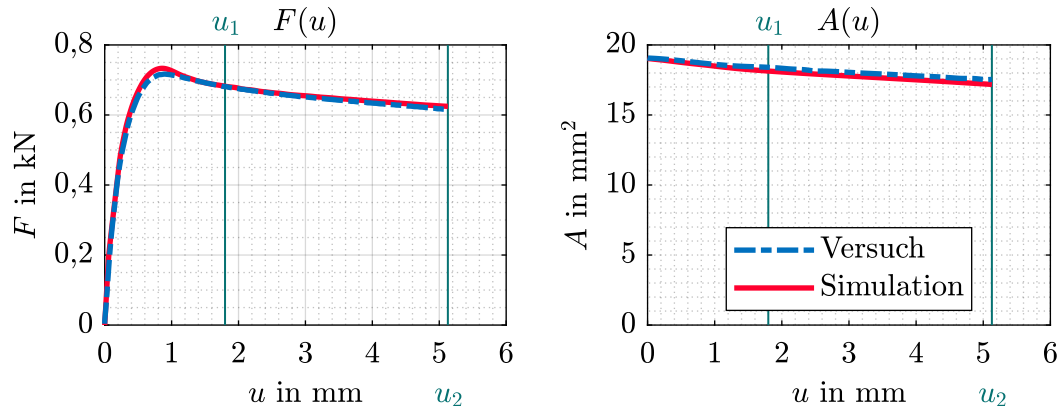


Abbildung 6.61: PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

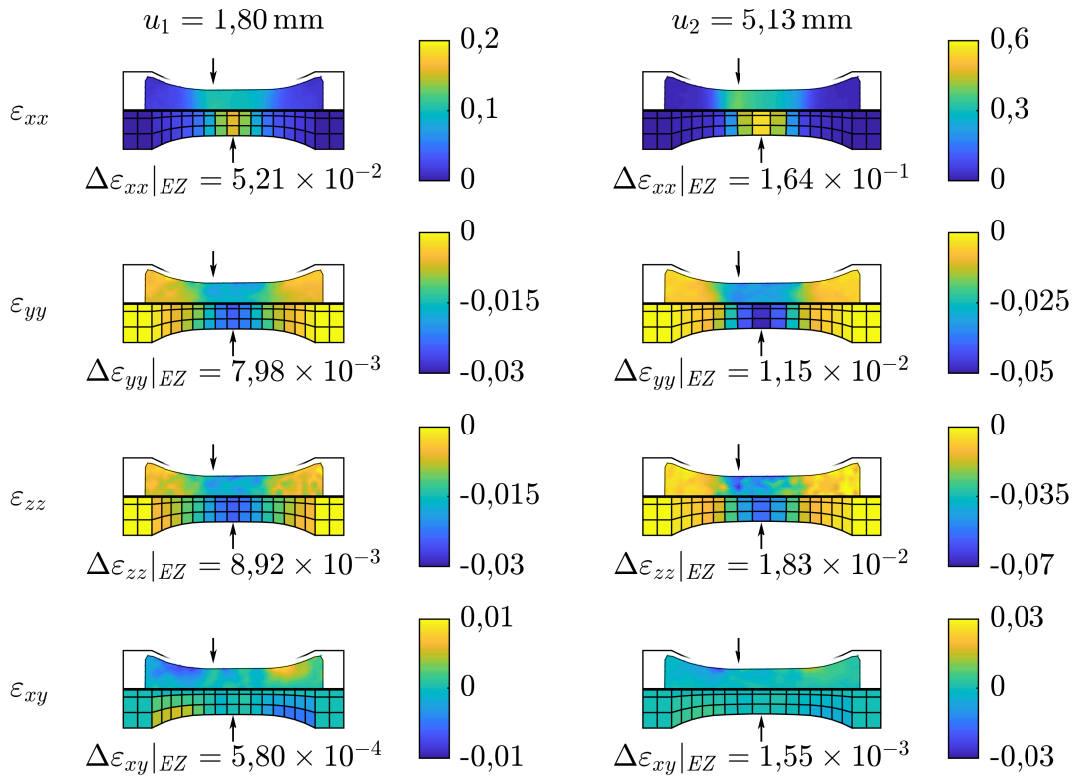


Abbildung 6.62: PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

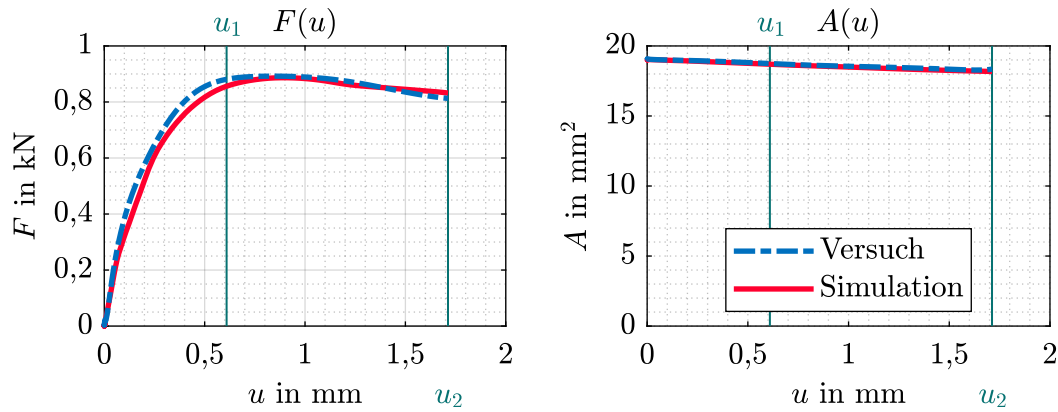


Abbildung 6.63: PP T20: $F(u)$ und $A(u)$ bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

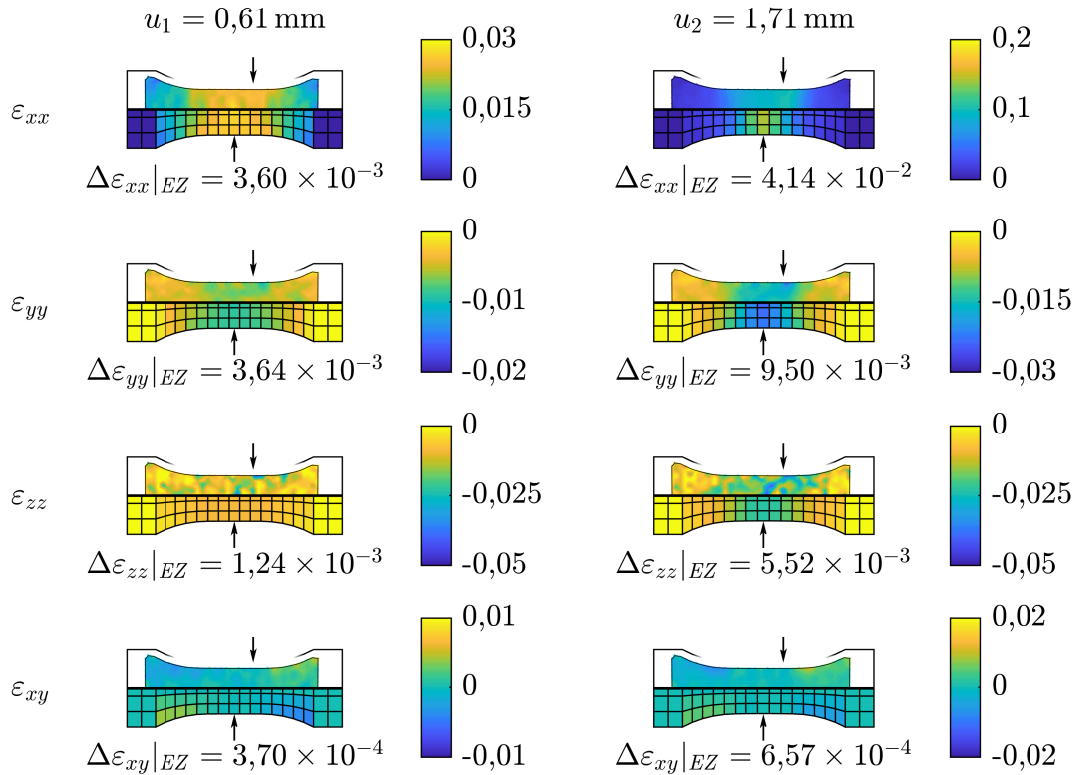


Abbildung 6.64: PP T20: Dehnungsfeld bei $\dot{\epsilon}_{nom} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ (3D-DIC)

Während $F(u)$ und $A(u)$ in Versuchen und Simulationen hervorragend übereinstimmen, zeigen die prognostizierten Dehnungsfelder etwas größere Abweichungen zu den Werten aus der DIC. Dies ist auf die starke Volumenzunahme beim Plastifizieren des Materials zurückzuführen. Da es sich dabei um einen sehr sensitiven Prozess handelt, der in der Simulation maßgeblich von der Interaktion zwischen dem ν_p -Verlauf und den Fließkurven abhängt, ist die Ergebnisqualität insgesamt als hoch einzustufen.

6.3 Automatisierbarkeit des Verfahrens

Das Verfahren zur direkten Kalibrierung von Materialmodellen leitet die Parameter unmittelbar aus Messungen ab und kommt gänzlich ohne ihre iterative Anpassung aus (Reverse Engineering). Daher eignet es sich intrinsisch für eine durchgängige Automatisierung. Welche zentralen Aspekte in dieser Hinsicht noch adressiert werden müssen, wird im Folgenden kurz umrissen. Die beschriebenen Prozessschritte setzen an dem Punkt an, ab welchem die Rohdaten eines Versuchs wie Videoaufnahmen und Kraftsignal vorliegen. Inwiefern sich die Durchführung von Materialprüfungen z. B. durch robotergestütztes Fertigen, Vorbereiten und Einspannen der Proben automatisieren lässt, wird an dieser Stelle nicht thematisiert.

Im Rahmen des Postprocessings der DIC-Daten auf Basis von Filmaufnahmen von Versuchen sind aktuell noch einige Tätigkeiten manuell durchzuführen. Dies betrifft die Definition des Koordinatensystems, der Flächenkomponente und der Lage der Einschnürebene in *GOM Correlate*. Um den Anteil von Handarbeit zu reduzieren bzw. eine solche im Idealfall ganz zu vermeiden, ist die Entwicklung umfangreicher Auswerteskripte denkbar, die gegebenenfalls auch Bilderkennungsverfahren einschließen.

Ein zentraler Baustein für die durchgängige Automatisierung der Kalibrierung ist die computerbasierte Definition der Grade für die semi-empirischen Ansätze aus Kap. 5.5.2 zur Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens. Naheliegender hierfür erscheint die Beurteilung der jeweiligen *Anpassungsgüte* eines funktionalen Zusammenhangs mittels *statistischer Tests* (HEDDERICH UND SACHS (2020)). Die vorgestellte Strategie kann auch bei der Festlegung der Relaxationsrate anhand eines schlanken Zugprüfprogramms unterstützen.

Für die Glättung der Rohdaten und der berechneten ν_p - und $\tilde{\nu}_t$ -Verläufe sollten die Parametersätze konsolidiert werden. Hierzu ist eine größere Datenbasis zu generieren, die insbesondere weitere Arten von Thermoplasten umfasst. Eine Berücksichtigung der Materialklasse bei der Datenaufbereitung sowie die Konzeption eines heuristischen Algorithmus zur Generierung optimaler Ergebnisse ist vielversprechend. Das gleiche kann für die Konstruktion der Fläche im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum zur Charakterisierung viskoplastischen Materialverhaltens festgehalten werden. Abgesehen von intelligenten Algorithmen lässt sich die Robustheit dieses Vorgangs durch gezielte zusätzliche Versuche bei höheren und niedrigeren Dehnraten steigern (siehe Kap. 5.5.3).

Es ist klar erkennbar, dass der Kalibrierungsprozess aus aufeinanderfolgenden Schritten besteht, die sich zu einzelnen Modulen zusammenfassen lassen. Dies erleichtert die Entwicklung einer voll automatisierten Industrielösung auf Grundlage dieser Arbeit ungenügend. Selbst bei einer sequentiellen Ausreifung ergibt sich instantan ein Nutzen sowohl für die direkte Kalibrierung von Materialmodellen als auch das konventionelle Vorgehen.

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neues Verfahren entwickelt, um die Parameter eines komplexen Materialmodells für Thermoplaste in Crashesimulationen optimal und umfassend direkt zu kalibrieren. Im Gegensatz zu anderen bereits existierenden Verfahren basiert es nicht auf iterativen Schemata im Sinne von Reverse Engineering bzw. auf dem Einsatz von Optimierungsprogrammen. Stattdessen bilden das Aufstellen und Lösen modellspezifischer Differentialgleichungen sein Fundament. Auf diese Weise wird erreicht, dass die gesuchten Modellparameter vollumfänglich kompatibel zu den an einem materiellen Punkt im Versuch vorherrschenden Verzerrungen und Spannungen sind. Analytische Ansätze zur Beschreibung der Zusammenhänge stehen nicht im Zentrum, sondern werden primär zur Nachbereitung diskreter Ergebnisse verwendet. Das Verfahren erfordert Messdaten aus mit digitaler Bildkorrelation aufgezeichneten Zugversuchen. Durch die Art und Weise seiner Konzeption eignet es sich hervorragend für eine Automatisierung.

Die Ausarbeitung erfolgte für das von HAUFE U. A. (2005A) zur Prognose von Thermoplasten in Crashesimulationen konzipierte Materialmodell *SAMP-1* bzw. *MAT_187 des Solvers *LS-DYNA*. Als isotropes, viskoelasto-viskoplastisches Modell mit kompressibler Plastizität ist es grundsätzlich dazu geeignet, maßgebliche Eigenschaften, die einem solchen unverstärkten Kunststoff bei hochdynamischen Belastungen zugeschrieben werden, abzubilden. Außerdem beinhaltet es als Spezialfall das für Metalle entwickelte *MAT_024, bei dem es sich um ein isotropes, elasto-viskoplastisches Materialmodell mit inkompressibler Plastizität vom Typ nach von Mises handelt (HALLQUIST (2020B)). Um für *SAMP-1* Differentialgleichungen aufzustellen, wurden das rheologische Modell sowie die Fließregel ausgewertet. Gewisse Vereinfachungen in den Beziehungen ergaben sich durch die Fokussierung der Arbeit auf die Behandlung von dünnwandigen Strukturen,

welche in Simulationen mit Schalenelementen modelliert werden. Sie haben den größten Anteil an den im Automobilbau verbauten Komponenten. In diesem Zusammenhang zeigte sich deutlich, dass technologische Limitierungen der eingesetzten Messtechnik ein entscheidender Faktor sind, der die Grenzen des Verfahrens definiert. Bei der Entwicklung von Lösungsstrategien für die Differentialgleichungen stand die Robustheit in der praktischen Anwendung im Mittelpunkt. Davon abweichende Vorgehensweisen sind denkbar.

Als geeignete Methodik zur Prüfung der hergeleiteten Gleichungen und ihrer numerischen Lösung wurden Ein-Element-Tests identifiziert. Ausschlaggebend waren dabei zwei Eigenschaften: Zum einen können in diesen Simulationen auch Größen ausgewertet werden, die in Versuchen nicht zur Verfügung stehen. Zum anderen lassen sich die durch Lösen der Differentialgleichungen berechneten Parameter direkt mit den ursprünglich im Modell vorgegebenen vergleichen. Der speziell für *SAMP-1* bzw. *MAT_187 und *MAT_024 entwickelte Programmcode konnte auf diese Weise für alle unterstützten Komplexitätsgrade erfolgreich validiert werden. Aufgrund ihrer Universalität ist die Validierungsstrategie auch auf Differentialgleichungen anderer Materialmodelle übertragbar.

Ein zentraler Anspruch dieser Arbeit war die praktische Anwendbarkeit des neuen Verfahrens. Entsprechend wurden im Bereich der Messtechnik unter phänomenologischen Aspekten neue Auswertestrategien für Zugversuche erarbeitet. Ihr allgemeiner Charakter ermöglicht einen generellen Einsatz im Rahmen von Materialprüfungen. Die erste Methode gestattet es, mit einem einzelnen 3D-DIC-System insbesondere die Dicke, die Dickendehnung und die Querschnittsfläche des Prüflings zu approximieren. In diesem Zusammenhang wird eine Symmetrie zwischen der Verschiebung der Probenfront und -rückseite in Dickenrichtung angenommen. Eine Voraussetzung zur Anwendung der Auswertestrategie ist, dass die Probe nicht entlang der x -Achse flattert. Die in der vorliegenden Arbeit behandelte Datenbasis erfüllte dies ausnahmslos.

Aufbauend auf der mit 3D-DIC bestimmten Probendicke adressiert eine zweite Methode die Quantifizierung der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors an materiellen Punkten im Zugversuch, welche im Gegensatz zu Verzerrungen nicht direkt messbar ist. Die Positionen der zwei gefundenen optimalen Auswertepunkte sind abhängig vom Einschnürverhalten des Prüflings und stimmen nicht zwangsläufig mit materiellen Punkten überein, an denen eine Analyse zu erfolgen hat. Für die untersuchten Versuchsdaten war die Divergenz und damit der resultierende Fehler jedoch klein. Ein in der Arbeit entworfener semi-empirischer Ansatz ermöglicht die Approximation der x -Komponente des Cauchy-Spannungstensors in mit 2D-DIC aufgezeichneten Materialprüfungen auf Basis weniger, mit 3D-DIC gewonnener Daten. Anhand von zwei Thermoplasten mit unterschiedlichem Plastizitätsverhalten wurde demonstriert, dass das Potential der Methode

besonders groß ist, wenn die totale Querkontraktion des Werkstoffs dehnratenunabhängig ist. Dies traf auf die behandelten Beispiele zu und entspricht der Implementierung im Materialmodell.

Die hergeleiteten Gleichungen ermöglichen die Berechnung von Modellparametern für die im jeweils betrachteten Versuch geprüfte Abzugsgeschwindigkeit. Allerdings erfordert die Kalibrierung von *SAMP-1* kontinuierliche Beschreibungen in Abhängigkeit von Vergleichsdehnungen und Vergleichsdehnraten. Aus diesem Grund fand die Konzeption von Ansätzen zur Aufbereitung von direkt aus den Versuchen bestimmten diskreten Datenpunkten statt. Für die Erfassung des viskoelastischen Materialverhaltens wurden polynomiale Funktionen als geeignet eingestuft. Bei der Anwendung auf reale Versuchsdaten zeigte sich, dass die erforderliche Definition einer effektiven Dehnrate, unterhalb derer einem Material quasistatisches Verhalten zugeschrieben wird, besonders herausfordernd ist. In diesem Zusammenhang erfolgte ein Bezug zur DIN EN ISO 527-2 (2012). Ein weiterer maßgeblicher Punkt war die Approximation der Elastizitätsgrenze durch die Proportionalitätsgrenze. Dieses Vorgehen wurde gewählt, weil die Quantifizierung des von der Dehnrate und dem Spannungszustand abhängigen Werts vor allem im Hochdynamikbereich äußerst komplex und mit großen Unsicherheiten behaftet ist. Beim Vorliegen geeigneter Messwerte ist es möglich, auf die Annahme zu verzichten, ohne andere Teile des Verfahrens negativ zu beeinflussen.

Zur Charakterisierung der viskoplastischen Eigenschaften müssen die für materielle Punkte berechneten Pfade im $\varepsilon_{pct}-\dot{\varepsilon}_{pct}-\sigma_{vm}$ -Raum, welche jeweils bei veränderlichen uniaxialen plastischen Vergleichsdehnraten verlaufen, in eine für konstante $\dot{\varepsilon}_{pct}$ tabellierte Fließkurvenschar überführt werden. Hierzu wurde das Aufspannen einer Fläche mit zweidimensionalen B-Splines vorgesehen, welche sich bei ausgewählten konstanten uniaxialen plastischen Vergleichsdehnraten schneiden lässt. Insbesondere aus Anforderungen des Solvers *LS-DYNA* ergab sich die Notwendigkeit, bei der Flächengenerierung auch solche Bereiche im untersuchten ε_{pct} - sowie $\dot{\varepsilon}_{pct}$ -Intervall abzudecken, in denen wenige Versuchsdaten vorliegen. Im Hinblick auf die daraus resultierenden besonderen Herausforderungen wurde angemerkt, dass sich zusätzliche einzelne Versuche bei niedrigeren und höheren Abzugsgeschwindigkeiten dazu eignen, diese zu reduzieren.

In vier Beispielen erfolgte die Demonstration des entwickelten Verfahrens. Die gewählten Thermoplaste reflektierten dabei die höchsten unterstützten Komplexitätsgrade von *SAMP-1*. Für alle Materialien wurde mit der jeweiligen Modellkalibrierung eine Simulation der zugrundeliegenden Zugversuche durchgeführt. Dabei ließ sich eine hervorragende Prognose des Kraftniveaus, der Komponenten des Dehnungsfelds sowie des Probenquerschnitts bzw. der Probenbreite nachweisen. Die Ergebnisse sind starke Indizien für die zu Beginn der Arbeit formulierte Hypothese. Nach dieser folgt aus einer vollumfänglichen Kompatibilität der Modellparameter zu den Verzerrungen und Spannungen an

einem materiellen Punkt eine optimale Prognose des Kraftniveaus sowie des Dehnungsfelds, sofern eine grundsätzliche Abbildbarkeit des realen Werkstoffverhaltens durch das Modell gegeben ist.

7.2 Ausblick

Für eine abschließende Beurteilung der universellen Anwendbarkeit des Verfahrens sollte eine erweiterte Datenbasis herangezogen werden. Interessant wären beispielsweise Untersuchungen mit einem reinen Acrylnitril-Butadien-Styrol (ABS), Acrylnitril-Styrol-Acrylester (ASA), Polyamid (PA), Polybutylenterephthalat (PBT), Polycarbonat (PC), Polyethylen (PE) und Polyoxymethylen (POM). Neben Polymerblends und Kunststoffen mit Rezyklatanteil sind auch Gemische mit unterschiedlichen Füllstoffen denkbare Beispiele, solange die Eigenschaften der resultierenden Materialien als isotrop angenommen werden können. Die erweiterte Datenbasis muss nicht zwangsweise nur Versuche mit Thermoplasten oder gegebenenfalls auch Duroplasten enthalten. Da für Metalle bekannt ist, dass sie im Allgemeinen isochor plastifizieren, wäre es aufschlussreich zu sehen, ob sich diese Eigenschaft in berechneten Verläufen für die plastische Querkontraktion widerspiegelt. Neben einer generellen Verfahrensvalidierung ließen sich mit zusätzlichen Versuchsdaten auch die Parameter zur Datenglättung sowie die semi-empirischen Ansätze konsolidieren. Dementsprechend sollte parallel zu einer Vergrößerung der Datenbasis eine durchgängige Automatisierung der Prozessschritte erfolgen.

Das Plastifizieren eines Thermoplasts hängt üblicherweise vom Spannungszustand ab. Insbesondere eine Zug-Druck-Asymmetrie ist typisch, aber auch in Schubversuchen zeigt sich regelmäßig ein sehr spezifisches Werkstoffverhalten. In diesem Zusammenhang unterstützt das Materialmodell *SAMP-1* neben der Spezifikation einer Fließkurvenschar für uniaxiale Zugbelastungspfade jeweils die zusätzliche Vorgabe einer quasistatischen Fließkurve für einen uniaxialen Druck-, reinen Schub- und äquibiaxialen Zugbelastungspfad (HALLQUIST (2020B)). Die vollständige oder teilweise Übertragung der in dieser Arbeit entwickelten Routinen auf die zugehörigen Versuchstypen ist somit naheliegend. Bei allen Erweiterungen ist stets die erforderliche Quantifizierung der an einem materiellen Punkt im Versuch vorherrschenden Verzerrungen und Spannungen zu beachten, welche das Rückgrat des neuen Verfahrens bildet. Sofern es im Bereich der Messtechnik signifikante Neuerungen gibt, haben diese einen direkten Einfluss auf die Weiterentwicklungsmöglichkeiten der in dieser Arbeit vorangetriebenen Forschung. Neben der gegebenenfalls sehr komplexen messtechnischen Erfassung anderer Versuchstypen ist diesbezüglich auch die bislang besonders herausfordernde Auswertung von Versuchen mit dicken Probekörpern zu nennen.

Nach der Anwendung des Verfahrens auf einen Zugversuch sind die Komponenten des Cauchy-Spannungstensors sowie des Tensors der plastischen Verzerrungen bis zum Zeitpunkt des Bruchs bekannt. Durch eine zukünftige Unterstützung weiterer Versuchstypen, die ein großes Triaxialitätsintervall abdecken, könnten Versagensmodelle wie *GISSMO* nach NEUKAMM U. A. (2008) direkt kalibriert werden. Unter Berücksichtigung der Schädigungsakkumulation wäre vordergründig die Art der Interpolation zwischen den Stützstellen zu klären. Auch für eine Datenbasis, welche exklusiv Zugversuche umfasst, könnte mit Ansätzen wie dem nach COCKCROFT UND LATHAM (1968) unter gewissen Annahmen eine Versagenskurve in Abhängigkeit der Triaxialität generiert werden. Nach der Implementierung einer derartigen Erweiterung sollte die Prognosegüte der kalibrierten Modelle auf Bauteilebene evaluiert werden.

Inwiefern sich das Verfahren zur direkten Kalibrierung auf andere Materialmodelle übertragen lässt, ist zu untersuchen. Drei Grundvoraussetzungen können jedoch festgehalten werden: Erstens muss das angesetzte Materialmodell grundsätzlich in der Lage ein, die als relevant eingestuften Werkstoffeigenschaften abzubilden. Zweitens müssen sich seine Routinen als Differentialgleichungen auszudrücken lassen. Drittens muss es messtechnisch möglich sein, die erforderlichen Versuchsdaten zu bestimmen. Ein neues Materialmodell, auf welches die genannten Anforderungen zutreffen, ist *SAMP LIGHT* bzw. *MAT_187L. Dabei handelt es sich um eine schlanke Variante von *SAMP-1* mit optimierter Effizienz (HELBIG U. A. (2020)). Eine entsprechende Übertragung des Verfahrens ist naheliegend und mit nur sehr geringen Anpassungen verbunden. Als besonders relevant wird ein zukünftiger Fokus auf anisotrope Materialmodelle angesehen, da vor allem faserverstärkte Thermoplaste anisotropes Verhalten zeigen. Dies gilt im Allgemeinen auch für gewalzte Metalle.

Literaturverzeichnis

ALTENBACH 2018

ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2018

ANDRADE U. A. 2017

ANDRADE, F. ; GRAF, T. ; KARAJAN, N. ; MATTERN, S.: *Einführung in LS-DYNA*. DYNAmore, Stuttgart. 2017. – Schulungsunterlage

ASTM D638 2014

ASTM INTERNATIONAL: *ASTM D638-14. Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics*. 2014

ASTM E111 2017

ASTM INTERNATIONAL: *ASTM E111-17. Standard Test Method for Young's Modulus, Tangent Modulus, and Chord Modulus*. 2017

ASTM E8/E8M 2021

ASTM INTERNATIONAL: *ASTM E8/E8M-21. Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials*. 2021

BAŞAR UND WEICHERT 2000

BAŞAR, Y. ; WEICHERT, D.: *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2000

BALA UND DAY 2012

BALA, S. ; DAY, J.: *General Guidelines for Crash Analysis in LS-DYNA*. Livermore Software Technology Corporation, Livermore. 2012. – Schulungsunterlage

BELYTSCHKO U. A. 2014

BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 2. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 2014

BENZ & CO. 1886

BENZ & CO.: *Fahrzeug mit Gasmotorenbetrieb*. DRP 37435. Berlin : Kaiserliches Patentamt, 1886

BENZ 2018

BENZ, M.: *Dehnungsfeldoptimierte Materialcharakterisierung für die Crashsimulation*, Bericht Nr. 19, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Masterthesis, 2018

BERGMANN 2013

BERGMANN, W.: *Werkstofftechnik*. Bd. 1: *Grundlagen: Struktureller Aufbau von Werkstoffen - Metallische Werkstoffe - Polymerwerkstoffe - Nichtmetallisch-anorganische Werkstoffe*. 7. Auflage. München : Carl Hanser Verlag, 2013

BETTEN 2001

BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik: Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2001

BÖHME U. A. 2007

BÖHME, W. ; LUKE, M. ; BLAUDEL, J. G. ; SUN, D.-Z. ; ROHR, I. ; HARWICK, W.: *FAT-Schriftenreihe*. Bd. 211: *FAT-Richtlinie: Dynamische Werkstoffkennwerte für die Crashsimulation*. Frankfurt am Main : Forschungsvereinigung Automobiltechnik, 2007

BIERÖGEL 2015

BIERÖGEL, C.: *Mechanische Eigenschaften von Kunststoffen: Quasistatische Prüfverfahren*. In: GRELLMANN, W. (Hrsg.) ; SEIDLER, S. (Hrsg.): *Kunststoffprüfung*. 3. Auflage. München : Carl Hanser Verlag, 2015, Kap. 4.3

BOYD UND VANDENBERGHE 2004

BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L.: *Convex Optimization*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004

BRINKMANN 2010

BRINKMANN, M.: *Materialdatenermittlung für die Crashsimulation thermoplastischer Spritzgussbauteile*, IKV-Berichte aus der Kunststoffverarbeitung Bd. 212, Institut für Kunststoffverarbeitung, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 2010

BROOKS 1997

BROOKS, J. W.: Processing Wrought Nickel and Titanium Superalloys. In: HUTCHINSON, B. (Hrsg.): *Thermomechanical Processing in Theory, Modelling and Practice, [TMP]²: Proceedings of an International Conference Organised in Celebration of the 75th Anniversary of the Swedish Society for Materials Technology, 4-6 September 1996, Stockholm, Sweden*. Stockholm : Swedish Society for Materials Technology, 1997, S. 52–77

BUTTERWORTH 1930

BUTTERWORTH, S.: On the Theory of Filter Amplifiers. In: *Experimental Wireless & the Wireless Engineer* 7 (1930), Nr. 6, S. 536–541

CAMPUS 2020

CHEMIE WIRTSCHAFTSFÖRDERUNGS-GESELLSCHAFT: *CAMPUS: Computer Aided Material Preselection by Uniform Standards*. 2020. – URL <https://www.campusplastics.com>. – Zugriffsdatum: 2020-10-03. – Informationssystem

CHU U. A. 1985

CHU, T. C. ; RANSON, W. F. ; SUTTON, M. A. ; PETERS, W. H.: Applications of Digital-Image-Correlation Techniques to Experimental Mechanics. In: *Experimental Mechanics* 25 (1985), Nr. 3, S. 232–244

COCKCROFT UND LATHAM 1968

COCKCROFT, M. G. ; LATHAM, D. J.: Ductility and the Workability of Metals. In: *Journal of the Institute of Metals* 96 (1968), S. 33–39

CURRIE UND WILSON 2012

CURRIE, J. ; WILSON, D. I.: OPTI: Lowering the Barrier Between Open Source Optimizers and the Industrial MATLAB User. In: *Foundations of Computer-Aided Process Operations, FOCAPO*. Savannah, 2012

DEAN U. A. 1995

DEAN, G. D. ; LOVEDAY, M. S. ; COOPER, P. M. ; READ, B. E. ; ROEBUCK, B. ; MORRELL, R.: Aspects of modulus measurement. In: DYSON, B. F. (Hrsg.) ; LOVEDAY, M. S. (Hrsg.) ; GEE, M. G. (Hrsg.): *Materials Metrology and Standards for Structural Performance*. Dordrecht : Springer Science & Business Media, 1995, Kap. 8, S. 150–209

DEMMELE 1997

DEMMELE, J. W.: *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997

DIN 53455 1981

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN 53455:1981-08. Prüfung von Kunststoffen – Zugversuch (zurückgezogen)*. 1981

DIN EN ISO 10113 2021

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN EN ISO 10113:2021-06. Metallische Werkstoffe - Blech und Band - Bestimmung der senkrechten Anisotropie*. 2021

DIN EN ISO 527-1 2019

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN EN ISO 527-1:2019-12. Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften - Teil 1: Allgemeine Grundsätze*. 2019

DIN EN ISO 527-2 2012

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN EN ISO 527-2:2012-06. Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften - Teil 2: Prüfbedingungen für Form- und Extrusionmassen*. 2012

DIN EN ISO 6892-1 2020

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN EN ISO 6892-1:2020-06. Metallische Werkstoffe - Zugversuch - Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur*. 2020

DIN EN ISO 8256 2005

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *DIN EN ISO 8256:2005-05. Kunststoffe - Bestimmung der Schlagzugzähigkeit*. 2005

DROZDOV 1996

DROZDOV, A. D.: *Finite Elasticity and Viscoelasticity: A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids*. Singapur : World Scientific, 1996

DRUCKER UND PRAGER 1952

DRUCKER, D. C. ; PRAGER, W.: Soil Mechanics and Plastic Analysis on Limit Design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), Nr. 2, S. 157–165

DU BOIS 2018–2022

DU BOIS, P.: *o.T.* Consultant. 2018–2022. – Persönliche Kommunikation

DU BOIS U. A. 2006

DU BOIS, P. ; FEUCHT, M. ; HAUFE, A. ; KOLLING, S.: A Generalized Damage and Failure Formulation for SAMP. In: *5. LS-DYNA Anwenderforum*. Ulm, 2006

DU BOIS U. A. 2017

DU BOIS, P. ; FEUCHT, M. ; IRSLINGER, J. ; ERHART, T.: Implementation of a VE-VP Material Law for the Simulation of Energy Absorbing Thermoplastic Components. In: *11th European LS-DYNA Conference*. Salzburg, 2017

DUAN U. A. 2001

DUAN, Y. ; SAIGAL, A. ; GREIF, R. ; ZIMMERMAN, M. A.: A Uniform Phenomenological Constitutive Model for Glassy and Semicrystalline Polymers. In: *Polymer Engineering & Science* 41 (2001), Nr. 8, S. 1322–1328

DUFFO U. A. 1995

DUFFO, P. ; MONASSE, B. ; HAUDIN, J. M. ; G'SELL, C. ; DAHOUN, A.: Rheology of polypropylene in the solid state. In: *Journal of Materials Science* 30 (1995), Nr. 3, S. 701–711

DUNG UND TJAHHJOWIDODO 2017

DUNG, V. T. ; TJAHHJOWIDODO, T.: A direct method to solve optimal knots of B-spline curves: An application for non-uniform B-spline curves fitting. In: *PLOS ONE* 12 (2017), Nr. 3, S. 1–24

DUVAUT UND LIONS 1972

DUVAUT, G. ; LIONS, J. L.: *Travaux et recherches mathématiques*. Bd. 21: *Les inéquations en mécanique et en physique*. Paris : Dunod, 1972

EFFINGER 2016

EFFINGER, V. M.: *Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymerschäume*, Bericht Nr. 65, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2016

ELIAS 1996

ELIAS, H.-G.: *Polymere: Von Monomeren und Makromolekülen zu Werkstoffen. Eine Einführung*. Zug, Heidelberg, Oxford (CT/USA) : Hüthig und Wepf, 1996

EYRING 1936

EYRING, H.: Viscosity, Plasticity, and Diffusion as Examples of Absolute Reaction Rates. In: *The Journal of Chemical Physics* 4 (1936), Nr. 4, S. 283–291

FARAHANI UND NAGHDABADI 2003

FARAHANI, K. ; NAGHDABADI, R.: Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), Nr. 22, S. 5887–5900

FERRY 1980

FERRY, J. D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*. 3. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 1980

FRITSCH 2012

FRITSCH, J.: *Charakterisierung und Modellierung glasfaserverstärkter Thermoplaste unter dynamischen Lasten*, Epsilon Punkt - Forschungsergebnisse aus der Kurzzeitdynamik Nr. 22, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, Dissertation, 2012

GALANULIS 2016

GALANULIS, K. (Hrsg.): *GOM Testing: Technische Dokumentation ab V8 SR1. Grundlagen der digitalen Bildkorrelation und Dehnungsberechnung*. Braunschweig : GOM, 2016

GERTZ UND WRIGHT 2003

GERTZ, E. M. ; WRIGHT, S. J.: Object-Oriented Software for Quadratic Programming. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 29 (2003), Nr. 1, S. 58–81

G'SELL U. A. 1983

G'SELL, C. ; ALY-HELAL, N. A. ; JONAS, J. J.: Effect of stress triaxiality on neck propagation during the tensile stretching of solid polymers. In: *Journal of Materials Science* 18 (1983), Nr. 6, S. 1731–1742

G'SELL UND JONAS 1979

G'SELL, C. ; JONAS, J. J.: Determination of the plastic behaviour of solid polymers at constant true strain rate. In: *Journal of Materials Science* 14 (1979), Nr. 3, S. 583–591

GURTIN UND SPEAR 1983

GURTIN, M. E. ; SPEAR, K.: On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor. In: *International Journal of Solids and Structures* 19 (1983), Nr. 5, S. 437–444

GUSTAFSSON 1996

GUSTAFSSON, F.: Determining the initial states in forward-backward filtering. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 44 (1996), Nr. 4, S. 988–992

HAASE 2018–2022

HAASE, T.: *o.T.* Fraunhofer-Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Freiburg im Breisgau. 2018–2022. – Persönliche Kommunikation

HABER 2021

HABER, H. E.: *Notes on the Matrix Exponential and Logarithm*. Santa Cruz Institute for Particle Physics, University of California, Santa Cruz. 2021. – Manuskript

HALLQUIST 2019

HALLQUIST, J. O. (Hrsg.): *LS-DYNA Theory Manual*. LS-DYNA Dev, r:11261. Livermore : Livermore Software Technology Corporation, 2019

HALLQUIST 2020A

HALLQUIST, J. O. (Hrsg.): *LS-DYNA Keyword User's Manual. Volume I*. LS-DYNA R12, r:13109. Livermore : Livermore Software Technology, 2020

HALLQUIST 2020B

HALLQUIST, J. O. (Hrsg.): *LS-DYNA Keyword User's Manual. Volume II: Material Models*. LS-DYNA R12, r:13191. Livermore : Livermore Software Technology, 2020

HARTMANN 2014

HARTMANN, S.: *Various aspects of composites modeling in LS-DYNA*. DYNAMore, Stuttgart. 2014. – Schulungsunterlage

HAUFE U. A. 2005A

HAUFE, A. ; DU BOIS, P. ; KOLLING, S. ; FEUCHT, M.: A semi-analytical model for polymers subjected to high strain rates. In: *5th European LS-DYNA Users Conference*. Birmingham, 2005

HAUFE U. A. 2005B

HAUFE, A. ; KÖSTERS, M. ; DU BOIS, P. ; FEUCHT, M. ; KOLLING, S.: On the Development, Verification and Validation of a semi-analytical Model for Polymers subjected to dynamic Loading. In: *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, ADMOS*. Barcelona, 2005

HAUPT 2002

HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2002

HEDDERICH UND SACHS 2020

HEDDERICH, J. ; SACHS, L.: *Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R*. 17. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2020

HELBIG U. A. 2020

HELBIG, M. ; ERHART, A. ; HAUFE, A.: Characterization and Material Card Generation for Thermoplastics. In: *16th International LS-DYNA Users Conference*. Virtuelles Event, 2020

HELBIG UND HAUFE 2018

HELBIG, M. ; HAUFE, A.: Modeling of Crazing in Rubber-toughened Polymers with LS-DYNA. In: *15th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit, 2018

HESSE U. A. 1991

HESSE, B. ; SONNE, H.-M. ; ROBILLER, G.: Zuverlässige Dehngrenzen im rechnergesteuerten Zugversuch ermitteln: Ein Verfahren zur Neigungsbestimmung der Hookeschen Geraden. In: *Materialprüfung* 33 (1991), Nr. 7-8, S. 208–211

HOCKETT UND SHERBY 1975

HOCKETT, J. E. ; SHERBY, O. D.: Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23 (1975), Nr. 2, S. 87–98

HOGER 1986

HOGER, A.: The material time derivative of logarithmic strain. In: *International Journal of Solids and Structures* 22 (1986), Nr. 9, S. 1019–1032

HUGHES 2000

HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Edition, 1. Auflage. Mineola : Dover Publications, 2000

ILG U. A. 2018

ILG, C. ; HAUFE, A. ; KOCH, D. ; STANDER, N. ; WITOWSKI, K. ; SVEDIN, Å. ; LIEWALD, M.: Application of a Full-Field Calibration Concept for Parameter Identification of HS-Steel with LS-OPT. In: *15th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit, 2018

JAUMMANN 1911

JAUMMANN, G.: Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie der Wissenschaften in Wien. Abteilung IIa. Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Technik*. 120 (1911), S. 385–530

JENSEN 2011

JENSEN, M. R.: *Specification of Directional Depended Materials in LS-DYNA*. Livermore Software Technology Corporation, Livermore. 2011. – Schulungsunterlage

JOHNSON UND COOK 1983

JOHNSON, G. R. ; COOK, W. H.: A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures. In: *Seventh International Symposium on Ballistics: Proceedings, The Hague, The Netherlands, 19–21 April 1983*. Den Haag : Royal Institution of Engineers in the Netherlands, Division for Military Engineering; American Defense Preparedness Association, 1983, S. 541–547

KEUERLEBER 2006

KEUERLEBER, M.: *Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Kunststoffen bei hohen Dehnraten am Beispiel von PP*, Institut für Kunststoffprüfung und Kunststoffkunde, Universität Stuttgart, Dissertation, 2006

KOLLING U. A. 2005

KOLLING, S. ; HAUFE, A. ; FEUCHT, M. ; DU BOIS, P.: SAMP-1: A Semi-Analytical Model for the Simulation of Polymers. In: *4. LS-DYNA Anwenderforum*. Bamberg, 2005

KOROBAYNIKOV 2020

KOROBAYNIKOV, S. N.: Analysis of Hooke-like isotropic hypoelasticity models in view of applications in FE formulations. In: *Archive of Applied Mechanics* 90 (2020), Nr. 2, S. 313–338

LANKFORD U. A. 1950

LANKFORD, W. T. ; SNYDER, S. C. ; BAUSHER, J. A.: New criteria for predicting the press performance of deep drawing sheets. In: *Transactions of the American Society for Metals* 42 (1950), S. 1197–1205

LEDWORUSKI U. A. 1999

LEDWORUSKI, S. ; ELL, M. ; KÜHN, H.-J.: Zur Problematik der sicheren Bestimmung des E-Moduls in der mechanischen Werkstoffprüfung. In: *Vortrags- und Diskussionstagung Werkstoffprüfung 1999, 2. und 3. Dezember 1999 in Bad Nauheim*. Berlin : Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, 1999, S. 231–240

LORD U. A. 2005

LORD, J. ; LOVEDAY, M. ; RIDES, M. ; MCENTEGGART, I.: *"Tenstand": WP2 Final Report. Digital Tensile Software Evaluation*. Teddington : National Physical Laboratory, 2005

LORD UND MORRELL 2006

LORD, J. D. ; MORRELL, R.: *Elastic Modulus Measurement*. Measurement Good Practice Guide No. 98. Teddington : National Physical Laboratory, 2006

LUDWIK 1909

LUDWIK, P.: *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1909

MARSDEN UND HUGHES 1994

MARSDEN, J. E. ; HUGHES, T. J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Edition, 1. Auflage. Mineola : Dover Publications, 1994

MARTIN-SANTOS U. A. 2021

MARTIN-SANTOS, E. ; MARTORELL, L. ; CRUZ, P. ; LOBDELL, M. ; LOBO, H.: Non-Isochoric Plasticity Assessment for Accurate Crashworthiness CAE Analysis. Application to SAMP-1 and SAMP-Light. In: *13th European LS-DYNA Conference*. Ulm, 2021

MATSUOKA 1986

MATSUOKA, S.: Nonlinear Viscoelastic Stress-Strain Relationships in Polymeric Solids. In: BROSTOW, W. (Hrsg.) ; CORNELIUSSEN, R. D. (Hrsg.): *Failure of Plastics*. München, Wien, New York : Hanser Publishers, 1986, Kap. 3, S. 24–59

MCGINTY 2012

MCGINTY, B.: *Continuum Mechanics: Finite Element Coordinate Mapping*. 2012. – URL <https://www.continuummechanics.org/finiteelementmapping.html>. – Zugriffsdatum: 2021-12-01. – Website

VON MISES 1913

MISES, R. von: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*. (1913), Nr. 4, S. 582–592

MUNZ UND WESTERMANN 2019

MUNZ, C.-D. ; WESTERMANN, T.: *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen: Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch für Ingenieure*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2019

NEUKAMM U. A. 2008

NEUKAMM, F. ; FEUCHT, M. ; HAUFE, A. ; ROLL, K.: On Closing the Constitutive Gap Between Forming and Crash Simulation. In: *10th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit, 2008

NOCEDAL UND WRIGHT 2006

NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S. J.: *Numerical Optimization*. 2. Auflage. New York : Springer, 2006

OKEREKE UND KEATES 2018

OKEREKE, M. ; KEATES, S.: *Finite Element Applications: A Practical Guide to the FEM Process*. Cham : Springer, 2018

PARKUS 2005

PARKUS, H.: *Mechanik der festen Körper*. 2. Auflage. Wien, New York : Springer, 2005

PERZYNA 1966

PERZYNA, P.: Fundamental Problems in Viscoplasticity. In: CHERNYI, G. G. (Hrsg.) ; DRYDEN, H. L. (Hrsg.) ; GERMAIN, P. (Hrsg.) ; HOWARTH, L. (Hrsg.) ; OLSZAK, W. (Hrsg.) ; PRAGER, W. (Hrsg.) ; PROBSTEIN, R. F. (Hrsg.) ; ZIEGLER, H. (Hrsg.): *Advances in Applied Mechanics* Bd. 9. New York, London : Academic Press, 1966, S. 243–377

PETERS UND RANSON 1982

PETERS, W. H. ; RANSON, W. F.: Digital imaging techniques in experimental stress analysis. In: *Optical Engineering* 21 (1982), Nr. 3, S. 427–431

PETERS U. A. 1983

PETERS, W. H. ; RANSON, W. F. ; SUTTON, M. A. ; CHU, T. C. ; ANDERSON, J.: Application of digital correlation methods to rigid body mechanics. In: *Optical Engineering* 22 (1983), Nr. 6, S. 738–742

RANZ 2007

RANZ, T. ; LION, A. (Hrsg.): *Beiträge zur Materialtheorie*. Bd. 5: *Elementare Materialmodelle der Linearen Viskoelastizität im Zeitbereich*. Neubiberg : Institut für Mechanik der Universität der Bundeswehr München, 2007

REE UND EYRING 1955A

REE, T. ; EYRING, H.: Theory of Non-Newtonian Flow. I. Solid Plastic System. In: *Journal of Applied Physics* 26 (1955), Nr. 7, S. 793–800

REE UND EYRING 1955B

REE, T. ; EYRING, H.: Theory of Non-Newtonian Flow. II. Solution System of High Polymers. In: *Journal of Applied Physics* 26 (1955), Nr. 7, S. 800–809

ROGERS 2000

ROGERS, D. F.: *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2000

SCHILLING U. A. 2017

SCHILLING, S. ; STANG, S. ; BLOME, P.: Automated Procedure for Characterization and Validation of the Material Behavior of a Non-reinforced Thermoplastic Polymer Under Dynamic Loading. In: *NAFEMS World Congress 2017*. Stockholm, 2017

SCHILLING U. A. 2019

SCHILLING, S. ; SUPPINGER, P. ; BLOME, P.: Automated Kinetic and Strain Field Based Calibration for a Thermoplastic Material Model using High-Speed Tensile Tests. In: *12th European LS-DYNA Conference*. Koblenz, 2019

SCHREIER U. A. 2009

SCHREIER, H. ; ORTEU, J.-J. ; SUTTON, M. A.: *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements: Basic Concepts, Theory and Applications*. New York : Springer, 2009

SETH 1961

SETH, B. R.: *MRC Technical Summary Report*. Bd. 248: *Generalized strain measure with applications to physical problems*. Madison : Mathematics Research Center, United States Army; University of Wisconsin, Madison, 1961

SIMO 1987

SIMO, J. C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 60 (1987), Nr. 2, S. 153–173

SIMO UND HUGHES 1998

SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R. ; MARSDEN, J. E. (Hrsg.) ; SIROVICH, L. (Hrsg.) ; WIGGINS, S. (Hrsg.): *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Bd. 7: *Computational Inelasticity*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer, 1998

SONNE 1999

SONNE, H.-M.: Bestimmung des Elastizitätsmoduls im Zugversuch. In: *Vortrags- und Diskussionstagung Werkstoffprüfung 1999, 2. und 3. Dezember 1999 in Bad Nauheim*. Berlin : Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, 1999, S. 219–230

DE SOUZA NETO U. A. 2008

SOUZA NETO, E. A. de ; PERIĆ, D. ; OWEN, D. R. J.: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Chichester : John Wiley & Sons, 2008

STANDER U. A. 2017

STANDER, N. ; WITOWSKI, K. ; ILG, C. ; HAUFE, A. ; HELBIG, M. ; KOCH, D.: Application of Digital Image Correlation to Material Parameter Identification using LS-OPT. In: *11th European LS-DYNA Conference*. Salzburg, 2017

STÖREN UND RICE 1975

STÖREN, S. ; RICE, J. R.: Localized necking in thin sheets. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23 (1975), Nr. 6, S. 421–441

SUTTON U. A. 1983

SUTTON, M. A. ; WOLTERS, W. J. ; PETERS, W. H. ; RANSON, W. F. ; MCNEILL, S. R.: Determination of displacements using an improved digital correlation method. In: *Image and Vision Computing* 1 (1983), Nr. 3, S. 133–139

SUTTON U. A. 2008

SUTTON, M. A. ; YAN, J. H. ; TIWARI, V. ; SCHREIER, H. W. ; ORTEU, J. J.: The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. In: *Optics and Lasers in Engineering* 46 (2008), Nr. 10, S. 746–757

TAKEKOSHI UND NIWA 2012

TAKEKOSHI, K. ; NIWA, K.: Validation and Material Modeling of Polymers by Employing MAT_SAMP-1. In: *12th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit, 2012

TRESCA 1864

TRESCA, H.: Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. In: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 59 (1864), S. 754–758

TRUESDELL 1955

TRUESDELL, C.: Hypo-elasticity. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 4 (1955), S. 83–133, 1019–1020

TRUESDELL 1963

TRUESDELL, C.: Remarks on Hypo-Elasticity. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B: Mathematics and Mathematical Physics* 67B (1963), Nr. 3, S. 141–143

TSCHOEGL 1989

TSCHOEGL, N. W.: *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1989

WANG U. A. 1997

WANG, W. M. ; SLUYS, L. J. ; BORST, R. de: Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), Nr. 20, S. 3839–3864

WEINBERG 2012

WEINBERG, K.: *Tensoralgebra und -Analysis*. Lehrstuhl für Festkörpermechanik, Universität Siegen. 2012. – Manuskript

WRIGGERS 2001

WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2001

XIAO U. A. 1997

XIAO, H. ; BRUHNS, O. T. ; MEYERS, A.: Hypo-Elasticity Model Based upon the Logarithmic Stress Rate. In: *Journal of Elasticity* 47 (1997), S. 51–68

YOSHIMOTO U. A. 2003

YOSHIMOTO, F. ; HARADA, T. ; YOSHIMOTO, Y.: Data fitting with a spline using a real-coded genetic algorithm. In: *Computer-Aided Design* 35 (2003), Nr. 8, S. 751–760

ZAREMBA 1903

ZAREMBA, M. S.: Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation. In: *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.* (1903), Nr. 8, S. 594–614

ZIENKIEWICZ UND TAYLOR 2000A

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method.* Bd. 1: *The basis.* 5. Auflage. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000

ZIENKIEWICZ UND TAYLOR 2000B

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method.* Bd. 2: *Solid mechanics.* 5. Auflage. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000

Lebenslauf

Persönliche Angaben:

Name: Maximilian Robert Benz
 Geburtsjahr: 1993
 Geburtsort: Karlsruhe

Schulische Ausbildung:

09/2004 – 06/2012 Albertus-Magnus-Gymnasium in Ettlingen
 06/2012 Allgemeine Hochschulreife

Akademischer Werdegang:

10/2012 – 03/2016 Bachelorstudium der Luft- und Raumfahrttechnik
 an der Universität Stuttgart
 03/2016 Bachelor of Science
 04/2016 – 08/2018 Masterstudium der Luft- und Raumfahrttechnik
 an der Universität Stuttgart
 08/2017 – 02/2018 Auslandsaufenthalt an der TU Delft
 08/2018 Master of Science
 12/2018 – 12/2021 Doktorand am Institut für Baustatik und
 Baudynamik der Universität Stuttgart
 (Industriepromotion)

Beruflicher Werdegang:

03/2018 – 08/2018 Daimler AG in Sindelfingen:
 Masterand
 12/2018 – 12/2021 Daimler AG/Mercedes-Benz AG in Sindelfingen:
 Doktorand
 seit 01/2022 Mercedes-Benz AG in Sindelfingen:
 Berechnungsingenieur

Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nicht-lineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.

- 10 (1989) **K. M. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. L. M. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

-
- 21 (1996) **C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) **W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.

- 33 (2001) A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton
mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichtappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-
optimierung.
- 42 (2004) G. A. D’Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.

-
- 44 (2004) **T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.
- 64 (2015) M. E. Matzen:**
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.

-
- 65 (2016) V. M. Effinger:**
Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-schäume.
- 66 (2017) C. M. Wilking:**
Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen.
- 67 (2018) B. Oesterle:**
Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen.
- 68 (2018) F. Neukamm:**
Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen.
- 69 (2019) A.-K. Schäuble:**
Variationally consistent inertia templates for speed-up and customization in explicit dynamics.
- 70 (2019) T. Willerding:**
Multiscale simulation of phase transformation in metals.
- 71 (2020) S. Roth:**
Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen.
- 72 (2020) R. Sachse:**
Variational Motion Design for Adaptive Structures.
- 73 (2021) A. Tkachuk:**
Parametrized variational principles in dynamics.
- 74 (2022) F. Geiger:**
Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke.



Maximilian Benz

Materialmodelle, die sich zur Vorhersage des komplexen mechanischen Verhaltens von Thermoplasten in Crashsimulationen eignen, sind zwar seit einiger Zeit verfügbar, doch sehr aufwendig zu kalibrieren. Da viele ihrer Parameter nicht direkt in Versuchen gemessen werden können, erfolgt die Anpassung üblicherweise iterativ durch Reverse Engineering mit Optimierungsmethoden. Allerdings ist die hierzu erforderliche Einschränkung des Lösungsraums durch analytische Beziehungen regelmäßig entweder zu restriktiv oder zu extensiv. Insbesondere die Prognose des Dehnungsfelds, welches die Grundlage für die Versagenscharakterisierung bildet, ist deshalb häufig ungenügend.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, um die Parameter entsprechender Materialmodelle in automatisierbarer Art und Weise optimal und umfassend direkt zu kalibrieren. Iterative Schemata im Sinne von Reverse Engineering werden dabei nicht verwendet. Der Kern des Verfahrens besteht aus dem Aufstellen und Lösen modellspezifischer Differentialgleichungen, deren Eingangsgrößen aus mit digitaler Bildkorrelation erfassten Versuchen stammen. Ausgearbeitet wird es für ein isotropes Materialmodell, welches speziell zur Simulation von Thermoplasten konzipiert ist und viskoelasto-viskoplastisches Werkstoffverhalten in Kombination mit kompressibler Plastizität unterstützt. Im verwendeten Solver LS-DYNA steht es unter der Bezeichnung SAMP-1 bzw. *MAT_187 zur Verfügung. Die durchgeführten Untersuchungen konzentrieren sich auf eine optimale Prognosegüte für dünnwandige Strukturen sowie Zugversuche. Anhand von vier Thermoplasten, die die höchsten unterstützten Komplexitätsgrade des gewählten Materialmodells reflektieren, wird die Anwendbarkeit des Verfahrens demonstriert.