



# Herleitung einer analytischen Optimierungsmethode für Beveloidräder durch lokale Anpassung der Verzahnungsdaten

Daniel Marino<sup>1</sup> · Matthias Bachmann<sup>1</sup> · Hansgeorg Binz<sup>1</sup>

Eingegangen: 27. Februar 2020 / Angenommen: 4. Juli 2020 / Online publiziert: 23. Juli 2020  
© Der/die Autor(en) 2020

## Zusammenfassung

Bei schneidend oder windschief angeordneter An- und Abtriebswelle (kleine Achswinkel bis  $30^\circ$ ) bieten Beveloidverzahnungen, auch konische Verzahnungen genannt, eine Möglichkeit, Bauraum und Gewicht einzusparen. Aufgrund der zueinander geneigten Grundzylinder liegt jedoch keine gemeinsame Eingriffsebene vor, weshalb Beveloidradpaarungen im Allgemeinen nur punktförmig an einer Breitenposition der Zahnflanke abwälzen. Dieser punktförmige Kontakt führt bei nicht modifizierten Beveloidradpaarungen zu hohen lokalen Flankenpressungen. Um wie bei Zylinderrädern einen konjugierten, linienartigen Eingriff zu erzielen, sind bei Beveloidrädern derzeit komplexe, iterative Modifikationen der Flankenfeingeometrie notwendig. Daher wird in diesem Bericht ein analytischer Ansatz hergeleitet, der eine Bestimmung der modifizierten Flankenfeingeometrie für Beveloidräder in beliebiger Achslage ermöglicht. Grundlage dieses Optimierungsansatzes ist die stirnschnittweise Anpassung der Verzahnungsdaten, sodass ein konjugierter Eingriff erzielt wird. Erste Untersuchungen zeigen, dass eine zusätzliche tangentielle Modifikation die korrekte Position der Stirnschnitte entlang der Zahnbreite gewährleistet. Hierzu wird ein analytischer Ansatz basierend auf dem Verzahnungsgesetz verwendet, welcher die evolventische Zahnform im Stirnschnitt nicht verändert. Die Wirksamkeit der Modifikation wird mit lastfreien Kontaktsimulationen für drei exemplarisch modifizierte Beveloidradpaarungen gezeigt. Das Tragbild ist wie beim konjugierten Eingriff voll ausgebildet und der Drehfehler ist vergleichbar gering zu nicht modifizierten Beveloidrädern.

## Derivation of an analytical optimization method for beveloid gears by locally adapting the gearing data

### Abstract

For intersecting or skewed input and output shafts (shaft angles up to  $30^\circ$ ), beveloid gears, known as conical gears, provide an opportunity to save space and weight. However, due to the inclined base cylinders, there is no common plane of action, so beveloid gear pairs generally only mesh at a certain point on the face width. This punctual contact results in high local flank pressures for unmodified beveloid gear pairs. To achieve a conjugated meshing, beveloid gears currently require complex, iterative modifications of the flank fine geometry. Therefore, this paper proposes an analytical approach enabling a direct determination of the optimized micro geometry. This optimization approach is based on adjusting the gearing data in the transverse section so that conjugated meshing is obtained.

---

✉ Daniel Marino  
daniel.marino@iktd.uni-stuttgart.de

Matthias Bachmann  
matthias.bachmann@iktd.uni-stuttgart.de

Hansgeorg Binz  
hansgeorg.binz@iktd.uni-stuttgart.de

<sup>1</sup> Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design,  
Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 9, 70569 Stuttgart,  
Deutschland

First studies indicate that an additional tangential modification ensures the correct position of the transverse section along the face width. For this purpose, an analytical approach based on the law of gearing is derived, which does not change the involute tooth shape in the transverse section. The effectiveness of the modification is shown with unloaded contact simulations for selected modified beveloid gear pairs. The contact pattern is fully developed as known from conjugated meshing and the transmission error remains comparably low compared to non-modified beveloid gears.

## 1 Einleitung und Motivation

Beveloidräder können aufgrund der konischen Zahnform in paralleler, schneidender und windschiefer Achsanordnung eingesetzt werden. Zu den praktischen Anwendungsfällen gehört neben Fahrzeug- und Schiffsgetrieben auch der Einsatz in Industriegetrieben z. B. für Zweiwellenextruder. Trotz der vielseitigen Einsatzmöglichkeiten werden für Beveloidräder geeignete Anwendungen z. T. durch andere Konzepte mit parallelen Achsen und dadurch zusätzlichen Konstruktionselementen umgesetzt. Ein Grund hierfür ist, dass eine effiziente Auslegung großes Wissen und Erfahrung erfordert. Um das komplette Potenzial der Beveloidräder auszuschöpfen, schließt sich zwingend an die Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten eine Optimierung der Flankenfeingeometrie an, da sonst ein punktförmiger Kontakt im Eingriff vorliegt. Dies resultiert in lokalen Beanspruchungsspitzen und schließlich in einer geringen Leistungsdichte des Getriebes.

Um einen konjugierten Eingriff bei Verzahnungen zu erzielen, können unterschiedliche Ansätze zur Bestimmung der Flankenfeingeometrie verfolgt werden. Allgemein wird entweder einer gegebenen Zahnform (z. B. Evolvente) eine Modifikation überlagert oder ein Zahnrad vorgegeben und das konjugierte Rad entsprechend abgeleitet. Für das konjugierte Rad entsteht die Flankenfeingeometrie punktweise numerisch aus dem Verzahnungsgesetz [7] und ist im Allgemeinen eine freie Flankenfeingeometrie.

Motiviert durch die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten der Beveloidräder soll deshalb ausgehend von den ermittelten Hauptverzahnungsdaten in [13] eine Optimierungsmethode entwickelt werden, die eine analytische Optimierung der Flankenfeingeometrie ermöglicht. Der große Vorteil dabei ist neben dem konjugierten Eingriff mit evolventischer Zahnform die Vermeidung von iterativen Berechnungen.

## 2 Stand der Forschung

Zwar weisen Beveloidräder geometrische Ähnlichkeiten mit Zylinderrädern auf, jedoch ist deren Auslegung und Optimierung aufgrund der komplexen Eingriffsverhältnisse ungleich schwieriger als bei Zylinderrädern [16]. Voraussetzung für ein konjugiertes Abwälzen ist eine gemeinsame Eingriffsebene, welche die beiden Grundzylinder tangiert. Bei Beveloidrädern mit nicht paralleler Achsanordnung

ist dies aufgrund der zueinander geneigten Grundzylinder nicht möglich [2]. Daher wälzen Beveloidräder im Allgemeinen nur punktförmig an einer Breitenposition der Zahnflanke ab. Allerdings kann durch Modifikation der Flankenfeingeometrie ein Linienkontakt realisiert werden, wie unter anderem in [15, 20, 22] gezeigt. Bestehende Ansätze zur Optimierung von Beveloidrädern werden nachfolgend vorgestellt.

Wagner [22] beschreibt eine Methode zur Optimierung der Tragbildlage und -größe von Beveloidrädern in beliebiger Achslage. Hierzu wird die Geometrie von einem Rad vorgegeben und das exakte Gegenrad mit dem Relativgeschwindigkeitsverfahren nach [6] bestimmt. In diese konjugiert abwälzende Geometrie wird anschließend ein Beveloidrad eingepasst, indem Konus- und Schrägungswinkel angenähert werden. In windschiefer Achslage kann jedoch nur für eine Drehrichtung eine gute Annäherung an das exakte Gegenrad erreicht werden. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen untersucht Winkler [23] hohlballig korrigierte Beveloidverzahnungen an einem Schiffsgetriebeprüfstand. Die Breitenballigkeit führt zu einem vergrößerten Tragbild, sodass Versuche eine erhöhte Tragfähigkeit der modifizierten Räder nachweisen.

Auch Komatsubara et al. [8, 9] stellen eine hohlballige Modifikation über der Zahnbreite der Beveloidräder vor. Hierbei wird die Flankenfeingeometrie durch eine hyperbolisch verlaufende Erzeugende modifiziert, sodass sich der punktförmige Kontaktbereich vergrößert. Basierend darauf wird in [10] ein mathematisches Modell zur Erzeugung einer hohlballigen Zahnflanke entwickelt. Für beide Ansätze werden Kontaktsimulationen durchgeführt und dabei gezeigt, dass der in [10] neu entwickelte Ansatz den Drehfehler minimiert. Jedoch ist eine der beiden Verzahnungen nicht durch eine Evolvente beschreibbar.

Börner et al. [3] bringen topologische Modifikationen durch einen Schleifprozess auf, um das Übertragungsverhalten zu verbessern. Die erzeugte Zahngeometrie zeigt ein ähnlich gutes Einsatzverhalten hinsichtlich Geräusch wie ein schrägverzahnendes Zylinderrad.

Auf Grundlage von breit angelegten Parameterstudien leitet Alxneit [1] eine zweistufige Optimierungsmethodik ab. Im ersten Schritt werden die Beveloidräder so modifiziert, dass im lastfreien Zustand ein geringer Drehfehler unter Berücksichtigung der Tragbilder vorliegt. Daran anknüpfend können die Räder durch Überlagern von Korrekturgeometrien optimiert werden, wobei deren Bestimmung

einen großen Aufwand erfordern [1]. Ebenfalls mit einem zweistufigen Vorgehen entwickelt Röthlingshöfer [15] eine Auslegungsmethodik, um das Betriebsverhalten von Beveloidrädern zu verbessern. Zunächst wird basierend auf Wagner [22] die Makrogeometrie der Verzahnung bestimmt und mittels Fertigungssimulationen erzeugt. Die Mikrogeometrie wird anschließend mit Variationsrechnungen so modifiziert, dass eine geringe Drehwinkelabweichung und ein mittiges Tragbild vorliegt. Das verbesserte Übertragungsverhalten durch die hohlballige Modifikation stößt bei Verzahnungen mit großer Klaffung an die Grenzen [15].

Zimmer [24] entwickelt auf Basis des räumlichen Verzahnungsgesetzes einen Flankengenerator, der beliebige Flankengeometrien in beliebigen Achslagen erzeugen kann. Die mathematische Beschreibung geht dabei auf [7] zurück. So kann bei Beveloidrädern durch Vorgabe eines Werkzeugprofils die Zahngeometrie erzeugt oder ausgehend von einer vorgegebenen Verzahnung das benötigte Werkzeug abgeleitet werden. Darüber hinaus zeigt [24] für eine gegebene Beveloidradpaarung, dass eine Optimierung der Verzahnung mit einem rückwärts konjugierten virtuellen Bezugsprofil möglich ist. Die notwendige Werkzeugbahn muss jedoch in einer Closed-Loop-Analyse über den Ease-Off ermittelt werden.

Brecher et al. [4] legen dar, dass zur Auslegung geeigneter Zahnradpaarungen umfangreiche Studien angestellt werden müssen, um unter Vorgabe von Zielgrößen (z. B. Lebensdauer) eine bestmögliche Lösung auszuwählen. Bei der Herstellung einer gewählten Mikrogeometrie sind Toleranzen unvermeidbar. Dieser Herausforderung begegnen Brecher et al. [4], indem auch ähnliche Varianten der Mikrogeometrie, die im möglichen Fertigungstoleranzfeld liegen, bei der Auswahl berücksichtigt werden. In Brimmers et al. [5] wird ein Ansatz mit mathematisch beschreibbaren Zahnflankenmodifikationen vorgestellt. Dazu wird ein zweidimensionales Polynom fünften Grads verwendet. Anhand der Beispielverzahnung aus [15] kann das Potenzial dieses Ansatzes gezeigt werden, da die freie Zahnflankenmodifikation ein ähnliches Einsatzverhalten wie eine konjugierte Flankengeometrie aufweist. Im Vergleich zur nicht modifizierten Grundvariante oder zur Variante mit Standardmodifikationen können deutliche Verbesserungen hinsichtlich Drehfehler und Beanspruchung erzielt werden.

Ni et al. [14] ersetzen zur Modifikation von Beveloidrädern die geradflankige Planverzahnung durch eine parabolisch ausgeführte. Die modifizierte Ausführung zeigt ein besseres Übertragungsverhalten in Bezug auf die Eingriffsteilung und Überdeckung. Allerdings wird abschließend nur eine Empfehlung hinsichtlich einer positiven Ausführung am Ritzel und einer negativen am Rad gegeben.

Liu et al. [11, 12] überlagern die mathematisch bestimmten Flankengeometrien der Beveloidräder mit Zahnflankenmodifikationen, die quadratisch in Richtung der Zahnbrei-

te und -höhe ausgeführt werden können. Die Modifikationen sind dabei konkav, was eine Verringerung der Zahndicke in der Zahnbreitenmitte bedeutet. Zur Bewertung der Modifikation wird eine exemplarische Beveloidradpaarung mit unterschiedlichen Zahnflankenmodifikationen überlagert und mittels Kontaktsimulationen untersucht. Es kann gezeigt werden, dass konkave Modifikationen einen positiven Einfluss auf die Schmierfilmbildung, Beanspruchung und Drehfehler haben. Darüber hinaus werden Kontaktsimulationen mit Verformungen der Welle und Abweichungen der Einbaulage durchgeführt und die Sensitivität der modifizierten Beveloidräder untersucht [12].

Im Gegensatz zu iterativen Ansätzen wird in Traut et al. [18–20] ein Ansatz für schneidende Achsen vorgestellt, durch den die notwendigen Flankenmodifikationen analytisch berechnet werden können. Hierbei erfolgt eine Modifikation der Profilverschiebungssumme entlang der Zahnbreite, sodass in jedem Stirnschnitt ein spielfreier Eingriff vorliegt. Zusätzlich wird eine tangentielle Anpassung der Stirnschnitte durchgeführt, sodass die Wälzpunkte in der Eingriffslage die gleiche Position haben [20]. Dies führt in beiden Drehrichtungen zu einer Vergrößerung des Tragbilds und somit zu einer verbesserten Lastverteilung auf der Zahnflanke. Die Änderung der Profilverschiebung wird durch lokales Anpassen des Konuswinkels erreicht, wodurch sich der links- und rechtsseitige Stirneingriffswinkel und somit der Grundkreisdurchmesser entlang der Zahnbreite ändert. Die Herstellbarkeit wird durch Fertigungssimulationen gezeigt und anhand von gefertigten Testradsätzen verifiziert [20]. Der Ansatz mit abgewinkeltem Achsabstand eignet sich ausschließlich zur Optimierung von Beveloidrädern bei schneidender Achslage.

### 3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Der Stand der Forschung zeigt mehrere Untersuchungen und Ansätze, um das Übertragungsverhalten von Beveloidrädern zu optimieren. Ziel ist es dabei, durch ein vergrößertes Tragbild die Lastverteilung zu verbessern und gleichzeitig den Drehfehler zu minimieren. Hohlballige Modifikationen stoßen bei Verzahnungen mit großer Klaffung an die Grenzen. Eine weitere Möglichkeit stellt die freie Modifikation der Flankenfeingeometrie dar. Die zugehörigen Zahnkontaktanalysen zeigen ähnlich gute Ergebnisse wie bei konjugierten Radsätzen, jedoch sind viele Simulationen für ein optimales Einsatzverhalten notwendig [4]. Beim Ansatz von Traut [20] hingegen wird der konjugierte Eingriff analytisch abgeleitet. Aufgrund der ebenen Betrachtungsweise eignet sich dieser Ansatz jedoch nicht für die windschiefe Achsanordnung. Es existiert derzeit keine Möglichkeit, Beveloidradsätze in beliebiger Achslage analytisch zu optimieren und dabei die evolventische

Zahnform beizubehalten. Zudem ist eine Verteilung und Skalierung der Modifikation bei den bestehenden Ansätzen für die windschiefe Achslage nicht möglich.

In diesem Bericht wird die Herleitung einer analytischen Optimierung vorgestellt, bei der die räumlich exakten Eingriffsverhältnisse für Beveloidräder in windschiefer Achslage berücksichtigt werden. Hierzu wird der Ansatz zur Ermittlung der Hauptverzahnungsdaten in Marino et al. [13] so erweitert, dass ein konjugierter Eingriff resultiert. Dabei ergeben sich stirnschnittabhängige Verzahnungsdaten für Schrägungswinkel, Konuswinkel und Profilverschiebung.

In BECAL [17] werden mittels lastfreier Kontaktsimulation die modellierten Zahnflanken untersucht. Die Modellierung erfolgt mit dem Flankengenerator in SimKoS, in welchem die Form und Position der Stirnschnitte durch veränderliche Verzahnungsdaten beschrieben werden kann. Für die Position ist die in Traut [20] definierte Stirnschnittbezugskurve zu ermitteln. Diese Kurve geht durch die Zahnlückenmitte der Bezugszahnstange im Stirnschnitt des Beveloidrads. Die Geometrie der Stirnschnitte wird über die Verdrehung um den lokalen Schrägungswinkel und Verkipfung um den lokalen Konuswinkel bestimmt.

#### 4 Analytische Optimierung durch lokales Anpassen der Verzahnungsdaten

Die Verzahnungsdaten sollen stirnschnittweise so angepasst werden, dass ein konjugierter Eingriff erzielt wird. Dazu werden zunächst die nötigen Gleichungen aus [21] und [13] erweitert. Anschließend wird analog zur schneidenden

Achslage in Traut [20] eine tangentielle Anpassung durchgeführt. Hierzu werden die Stirnschnitte so verdreht, dass sie sich am Wälzpunkt berühren und das Verzahnungsgesetz erfüllt wird. Da es sich bei der Optimierung um eine lokale Anpassung der Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite handelt, sollen deren Änderungen exemplarisch dargestellt werden.

#### 4.1 Herleitung der Berechnungsmethode zur Optimierung der Beveloidräder in windschiefer Achslage

Ausgangspunkt für die Optimierung sind die Hauptverzahnungsdaten der Beveloidradpaarung [13]. Diese beschreiben die Stirnschnitte in der Zahnbreitenmitte, welche das Referenzstirnschnittpaar bilden. An dieser Zahnbreitenposition wälzt das Zahnradpaar auf Höhe des Wälzkreises spielfrei oder mit einem definierten Verdrehflankenspiel miteinander ab, siehe Abb. 1 a blaue Stirnschnitte. Die Stirnschnitte abseits von dieser Position weisen eine Klaffung auf, die zur Zehe und Ferse ansteigt. Über alle Eingriffsstellungen betrachtet, ergibt sich der Ease-Off der Beveloidradpaarung. Dieser soll durch stirnschnittweises Anpassen der Verzahnungsdaten kompensiert werden. Die modifizierte Flankenfeingeometrie behält dabei die evolventische Zahnform bei und kann über Verzahnungsdaten beschrieben werden.

Die Herleitungen der Gleichungen sind in Tsai [21] veröffentlicht. Aufbauend auf der Berechnungsmethode in Marino et al. [13] können die Verzahnungsdaten für das Referenzstirnschnittpaar über die Korhammer'sche Gleichung

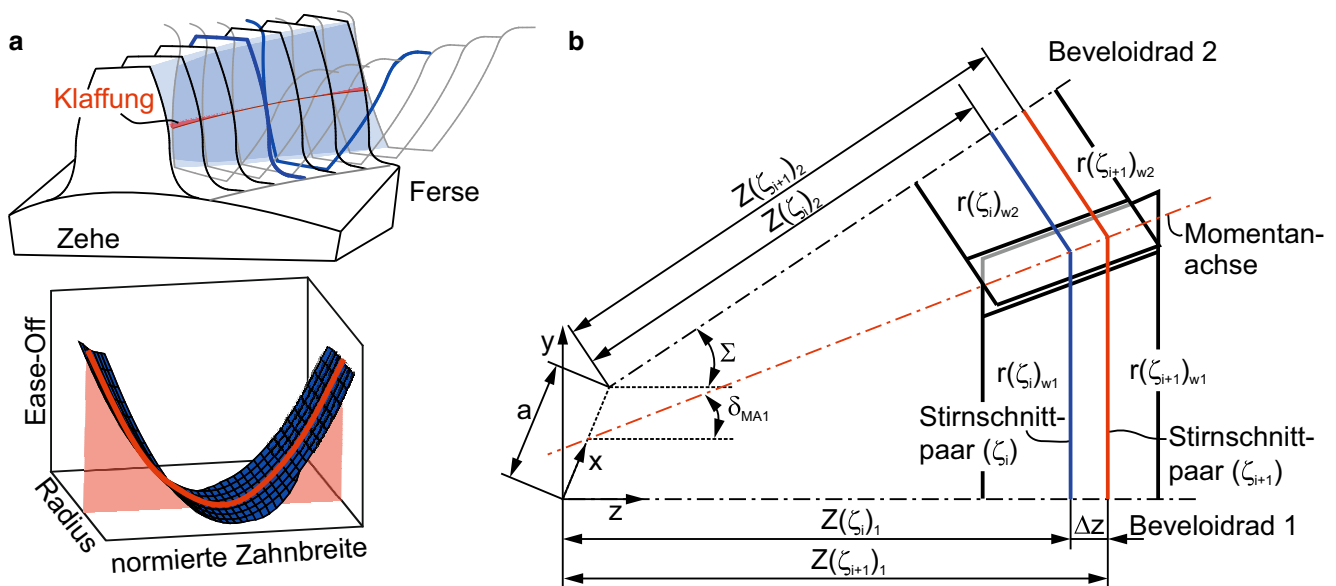
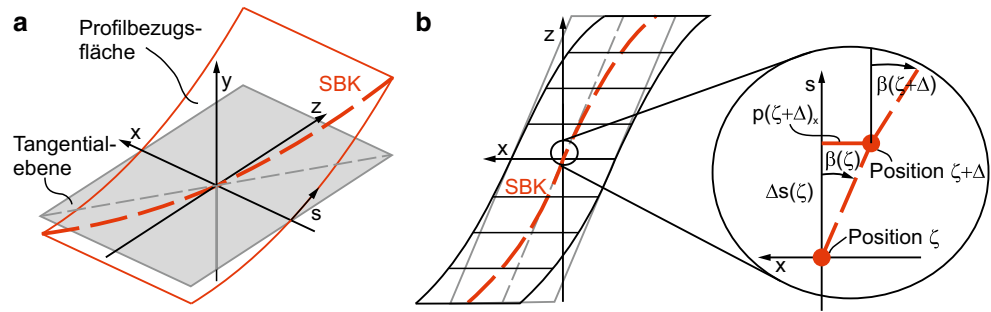


Abb. 1 a Zahneingriff mit Klaffung und Ease-Off über Zahnbreite und Radius, b Definition der stirnschnittweisen Optimierung ausgehend von Rad 1

**Abb. 2** Verlauf der Stirnschnittbezugskurve **a** im Raum und **b** in die Tangentialebene projiziert. (Nach [20])



mit definiertem Verdrehflankenspiel (1), den Achswinkel  $\Sigma$  (2) und den Achsversatz  $a$  (3) bestimmt werden.

$$2 \cdot \tan \alpha_p \cdot (x_{C1} \cdot \cos \theta_{p1} + x_{C2} \cdot \cos \theta_{p2}) + \frac{j_{t1,2}}{m_{w1,2}} \cdot \frac{r_{w1,2}}{r_{1,2}} = \frac{z_1}{2} \cdot (\text{inv} \alpha_{w1L} + \text{inv} \alpha_{w1R} - \text{inv} \alpha_{p1L} - \text{inv} \alpha_{p1R}) + \frac{z_2}{2} \cdot (\text{inv} \alpha_{w2L} + \text{inv} \alpha_{w2R} - \text{inv} \alpha_{p2L} - \text{inv} \alpha_{p2R}) \quad (1)$$

$$\cos \Sigma = \cos \theta_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} \cdot \cos (\beta_{w1} + \beta_{w2}) - \sin \theta_{w1} \cdot \sin \theta_{w2} \quad (2)$$

$$a = \frac{(r_{w1} \cdot \cos \theta_{w2} + r_{w2} \cdot \cos \theta_{w1}) \cdot \sin (\beta_{w1} + \beta_{w2})}{\sin \Sigma} \quad (3)$$

Diese Gleichungen bilden ein Gleichungssystem mit den Variablen Konuswinkel  $\theta_{p1,2}$ , Schrägungswinkel  $\beta_{p1,2}$  und Verhältnis  $\xi_n$  zwischen Profilwinkel  $\alpha_p$  am Teilkreis und  $\alpha_w$  am Wälzkreis [21]. Die Zahnbreitenposition bzw. das dazugehörige Stirnschnittpaar kann über den Einbauabstand  $Z$  in Gl. 4 ausgedrückt werden, siehe Abb. 1b.

$$Z_{1,2} = \frac{r_{w1,2} \cdot \cos \Sigma + r_{w2,1} \cdot \cos (\beta_{w1} + \beta_{w2}) - \frac{a \cdot \sin (\beta_{w1} + \beta_{w2}) \cdot \cos \theta_{w2,1}}{\tan \Sigma}}{\sin \theta_{w1,2} \cdot \cos \theta_{w2,1} \cdot \cos (\beta_{w1} + \beta_{w2}) + \cos \theta_{w1,2} \cdot \sin \theta_{w2,1}} \quad (4)$$

Nur das Referenzstirnschnittpaar erfüllt das Gleichungssystem, weshalb die Verzahnungsdaten lokal so verändert werden, dass für alle anderen Stirnschnittpaare ebenfalls die Gln. 1–3 gelten. Hierzu ist eine Anpassung der Profilverschiebung notwendig, was zu einem nichtlinearen Verlauf entlang der Zahnbreite führt. Die Profilverschiebung  $x_{C1,2}$  für die betrachtete Zahnbreitenposition  $\zeta$  ist folglich eine weitere unbekannte Größe im Gleichungssystem. Ausgehend vom Referenzstirnschnitt RSS muss für den Einbauabstand des betrachteten Stirnschnittpaars Gl. 5 gelten. Für eine Profilverschiebung von null stimmen Referenzstirnschnitt und Zahnbezugsebene [16] überein.

$$Z(\zeta)_{1,2} = Z_{RSS,1,2} + (\zeta - 0,5) \cdot b_{1,2} \quad \zeta \in [0,1] \quad (5)$$

Um die lokalen Verzahnungsdaten der Stirnschnittpaare entlang der Zahnbreite zu bestimmen, wird das Gleichungssystem um den Einbauabstand und die stirnschnittbezoge-

nen Größen erweitert, sodass für jede Zahnbreitenposition  $\zeta$  das Gleichungssystem (6) zu erfüllen ist.

$$\begin{aligned} p_w &= f(\theta(\zeta)_{p1,2}, \beta(\zeta)_{p1,2}, \xi(\zeta)_n, x(\zeta)_{C1,2}, j_{t1,2}) \\ \Sigma &= f(\theta(\zeta)_{p1,2}, \beta(\zeta)_{p1,2}, \xi(\zeta)_n) \\ a &= f(\theta(\zeta)_{p1,2}, \beta(\zeta)_{p1,2}, \xi(\zeta)_n) \\ Z &= f(\theta(\zeta)_{p1,2}, \beta(\zeta)_{p1,2}, \xi(\zeta)_n) \end{aligned} \quad (6)$$

Im Gegensatz zum Gleichungssystem (6) leitet Traut [20] die lokalen Verzahnungsdaten über den abgewinkelten Achsabstand  $a_E$  her. Dieses Vorgehen eignet sich nur für den ebenen Fall bei schneidender Achslage.

Die lokalen Verzahnungsdaten bestehen aus der Größe am Referenzstirnschnitt und einem modifizierten Anteil, wie in Gl. 7 für Schrägungs- und Konuswinkel dargestellt. Bei der Profilverschiebung ergeben der lineare Verlauf  $x(\zeta)_{lin1,2}$  und die modifizierte Größe  $x(\zeta)_{mod1,2}$  die Profilverschiebung der modifizierten Verzahnung.

$$\begin{aligned} \beta(\zeta)_{p1,2} &= \beta_{p1,2} + \beta(\zeta)_{mod1,2} \\ \theta(\zeta)_{p1,2} &= \theta_{p1,2} + \theta(\zeta)_{mod1,2} \\ x(\zeta)_{C1,2} &= \frac{(\zeta - 0,5) \cdot b_{1,2}}{m_n} \cdot \tan \theta_{p1,2} + x(\zeta)_{mod1,2} \end{aligned} \quad (7)$$

Die Anteile können in Anlehnung an das Verhältnis der Schrägungs- und Konuswinkel in [13] über Gl. 8 beliebig auf Rad 1 und 2 aufgeteilt werden.

$$k' = \frac{k(\zeta)_2}{k(\zeta)_1 + k(\zeta)_2} \quad (8)$$

mit  $k(\zeta)_{1,2} = x(\zeta)_{mod1,2}, \beta(\zeta)_{mod1,2}, \theta(\zeta)_{mod1,2}$

Zunächst erfolgt die Bestimmung der Hauptverzahnungsdaten für das Referenzstirnschnittpaar. Ausgehend von einem der beiden Räder wird die Optimierung durchgeführt. Abb. 1b zeigt die Definition über Rad 1, wobei ausgehend von der Breitenposition  $\zeta_i$  der nächste Stirnschnitt mit dem Einbauabstand  $Z(\zeta_{i+1})_1$  mit dem Abstand  $\Delta z$  nach Gl. 5 bestimmt wird. Für dieses neue Stirnschnittpaar muss das Gleichungssystem (6) gelöst werden. Für den zugehörigen Stirnschnitt von Rad 2 erfolgt die Berechnung des Einbauabstands  $Z(\zeta_{i+1})_2$  nach Gl. 4. Analoge Ergebnisse werden erzielt, wenn die Optimierung über Rad 2 definiert wird.



Mit den stirnschnittabgängigen Verzahnungsdaten kann die räumliche Stirnschnittbezugskurve (SBK) in Abb. 2a bestimmt werden. Die Kurve liegt in der Profilbezugsfläche, welche den nichtlinearen Verlauf der Profilverschiebung entlang der Zahnbreite wiedergibt. Diese Fläche schneidet die Tangentialebene bei  $x(\zeta_0)_C = 0$ . Der Schrägungswinkel  $\beta_p$  ist in der gekrümmten Profilbezugsfläche definiert. Wird die SBK mit konstantem Schrägungswinkel auf die Tangentialebene projiziert, bildet sich aufgrund der Krümmung ein S-förmiger Verlauf, siehe Abb. 2b; [20]. Durch Betrachtung von lokalen Schrägungswinkeln ändert sich nicht nur der Verlauf der SBK innerhalb der Profilbezugsfläche sondern auch die Tangentialebene, welche zu einer gekrümmten Fläche wird.

Die Koordinaten der SBK sind in Gl. 9 dargestellt. Die y- und z-Komponente können direkt bestimmt werden, da die Kurve innerhalb der Profilbezugsfläche liegt.

$$SBK = \begin{pmatrix} \zeta(\zeta) \cdot r(\zeta) \\ x(\zeta)_C \cdot m_n \\ (\zeta - 0,5) \cdot b \end{pmatrix} \text{ mit } \xi(\zeta) = \frac{p(\zeta)_x}{r(\zeta)} \quad (9)$$

Die x-Komponente ergibt sich durch die in Abb. 2b dargestellte Diskretisierung. Dabei wird der Verlauf der SBK zwischen zwei Stirnschnitten mit einer hinreichend großen Anzahl an Punkten ( $\Delta \ll \Delta z$ ) durch einen Polygonzug diskretisiert, siehe Gl. 10.

$$p(\zeta)_x = \Delta s(\zeta) \cdot \tan(\beta(\zeta))$$

$$\text{mit } \Delta s(\zeta) \approx \sqrt{(m_n \cdot (x(\zeta)_C - x(\zeta + \Delta)_C))^2 + (\Delta)^2} \quad (10)$$

Mit den lokalen Verzahnungsgrößen und dem Verlauf der SBK im Raum können Form und Position der Stirnschnitte und somit die Zahnform der Beveloidräder bestimmt werden.

### 4.2 Tangentiale Anpassung der Stirnschnittbezugskurve

Wie von [20] gezeigt, ist eine minimale tangentielle Verschiebung der Stirnschnitte notwendig, um die durch lokale Verzahnungsgrößen modifizierte Zahnform an die konju-

gierte anzugleichen. In Abb. 3 sind exemplarisch die Tragbilder einer modifizierten Flankenfeingeometrie vor und nach der tangentialen Anpassung dargestellt. Die Simulation wurde mit einer Tuschierrastendicke von  $6\mu\text{m}$  durchgeführt. Ohne tangentielle Anpassung ist das Tragbild auf der Linksflanke in Richtung Ferse und auf der Rechtsflanke in Richtung Zehe verschoben. Wird die dargestellte tangentielle Anpassung angewendet, werden die Stirnschnitte minimal verdreht und ein komplettes Tragbild erzielt. Die berechnete evolventische Zahnform wird durch die Anpassung nicht geändert.

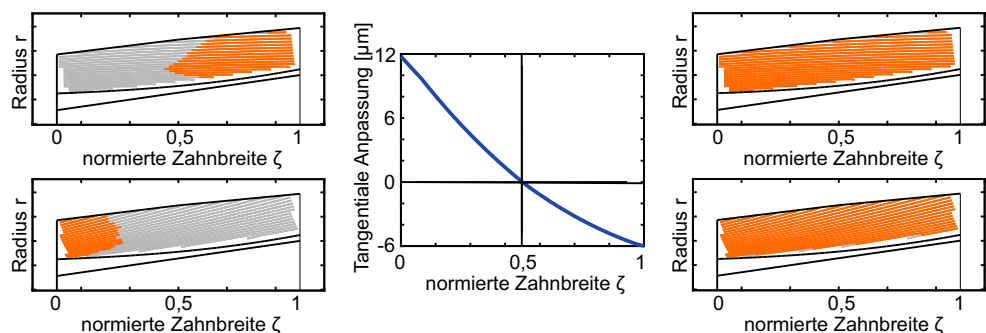
Das Vorgehen ist abgeleitet von der exakten Bestimmung der Gegenflankenfläche in [22], welches auf dem Relativgeschwindigkeitsverfahren von [6] beruht. Die Optimierung erfolgt dabei jeweils für ein Stirnschnittpaar. Für die unteren Tragbilder in Abb. 3 werden die Stirnschnitte von Rad 1 so verdreht, dass die Wälzkreise von Rad 1 und 2 sich berühren und das Verzahnungsgesetz in Gl. 11 erfüllen.

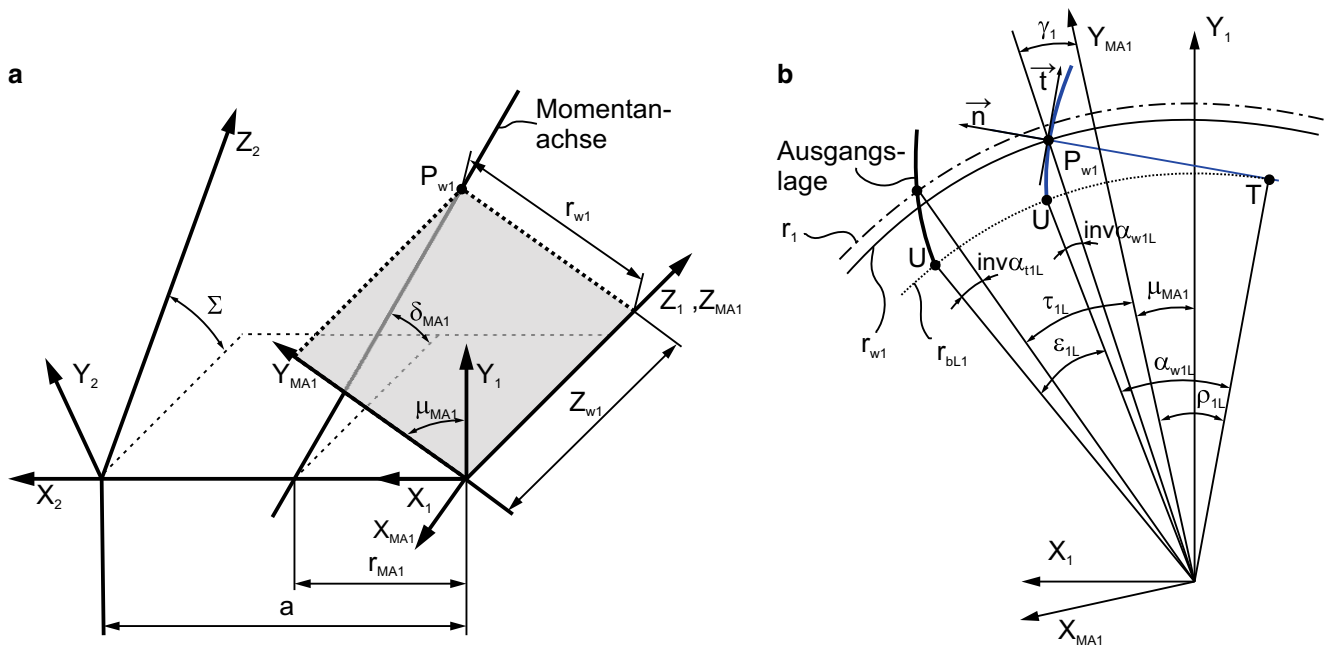
$$\begin{pmatrix} \vec{v}_{w1}^{MA1} & -\vec{v}_{w2}^{MA1} \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_1^{MA1} = 0 \quad (11)$$

Die Geschwindigkeitsvektoren am Wälzpunkt und der Normalenvektor werden im Koordinatensystem MA1 ausgedrückt, welches aus einer Verdrehung des Koordinatensystems von Rad 1 um den Winkel  $\mu_{MA1}$  resultiert, siehe Abb. 4a. Die Momentanachse kann mit dem Abstand  $r_{MA1}$  und dem Wälzkegelwinkel  $\delta_{MA1}$  beschrieben werden, welche von Achswinkel  $\Sigma$  und Übersetzung  $i$  abhängen [22].

Abb. 4b zeigt die Linksflanke von Rad 1 mit dem Grund-, Teil- und Wälzkreis. Die Ausgangslage beschreibt die räumliche Anordnung der Stirnschnitte aufgrund der Verschraubung. Ausgehend von der Ausgangslage wird der Stirnschnitt um den Winkel  $\epsilon_{iL,R}$  verdreht, bis der Normalenvektor  $n$  senkrecht durch den Wälzpunkt  $P_{w1}$  verläuft. In dieser Lage an der Momentanachse (Eingriffslage) wird das Verzahnungsgesetz erfüllt. Zur Erreichung dieser Lage muss sich Rad 2 um den Winkel  $\nu_{2L,R}$  gedreht haben, der aus  $\epsilon_{iL,R}$  unter Berücksichtigung der Übersetzung folgt. Die nachfolgende Herleitung der tangentialen Anpassung wird für jedes Stirnschnittpaar durchgeführt, jedoch soll

Abb. 3 Tragbild der Links- und Rechtsflanke von Rad 1 ohne (links) und mit (rechts) tangentialer Anpassung sowie deren Verlauf über der normierten Zahnbreite





**Abb. 4** **a** Koordinatensysteme von Rad 1 und 2 sowie der Momentanachse und **b** Verdrehung der Linksflanke von Rad 1 von der Ausgangslage in die Eingriffslage mit Rad 2. (Nach [22])

der Übersichtlichkeit wegen die Kennzeichnung der betrachteten Zahnbreitenposition  $\zeta$  weggelassen werden.

$$\varepsilon_{1L,R} = \tau_{1L,R} \pm \text{inv}\alpha_{t1L,R} - \gamma_1 \mp \text{inv}\alpha_{w1L,R} \quad (12)$$

und  $v_{2L,R} = -\frac{z_1}{z_2} \cdot \varepsilon_{1L,R}$

Die Verdrehung  $\tau_{1L,R}$  lässt sich aus dem Verlauf der SBK und dem Zahndickenwinkel für Links- und Rechtsflanke berechnen.

$$\tau_{1L,R} = \xi_1 \pm \psi_{1L,R} \quad (13)$$

mit  $\psi_{1L,R} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_{c1} \cdot (\tan\alpha_p \cdot \cos\theta_{p1} \pm \sin\beta_{p1} \cdot \sin\theta_{p1})}{z_1}$

Der Ortsvektor zum Wälzpunkt von Rad 2  $\mathbf{P}_{w2}$  kann mit den Koordinaten  $(r_{w2}, Z_{w2}, \varphi_2)$  nach Gl. 14 beschrieben werden, siehe Koordinatensystem in Abb. 4a.

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}}_{w2} = \begin{bmatrix} -r_{w2} \cdot \sin\varphi_2 \\ r_{w2} \cdot \cos\varphi_2 \\ Z_{w2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Durch Koordinatentransformationen und der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{1,2}$  können ausgehend von  $\mathbf{P}_{w2}$  die Geschwindigkeiten für Rad 1 und 2 im Koordinatensystem MA1 ausgedrückt werden.

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{w1}^{MA1} = \omega_1 \cdot \begin{bmatrix} -(a - r_{w2} \cdot \sin\varphi_2) \cdot \sin\mu_{MA1} + \\ (a - r_{w2} \cdot \sin\varphi_2) \cdot \cos\mu_{MA1} + \\ 0 \\ (r_{w2} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Sigma + Z_{w2} \cdot \sin\Sigma) \cdot \cos\mu_{MA1} \\ (r_{w2} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Sigma + Z_{w2} \cdot \sin\Sigma) \cdot \sin\mu_{MA1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{w2}^{MA1} = \omega_2 \cdot \begin{bmatrix} r_{w2} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\mu_{MA1} - \\ r_{w2} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \sin\mu_{MA1} + \\ 0 \\ r_{w2} \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\Sigma \cdot \sin\mu_{MA1} \\ r_{w2} \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\Sigma \cdot \cos\mu_{MA1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  berechnet sich aus dem Kreuzprodukt des Tangentialvektors  $\mathbf{t}$  aus Abb. 4b und dem Differenzvektor  $\mathbf{d}$ , welcher in Breitenrichtung die Verschraubung von Rad 1 charakterisiert. Der Tangentialvektor kann mit den Verzahnungsgrößen der modifizierten Flankenfeingeometrie bestimmt werden.

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{t}}_1^{MA1} = \begin{bmatrix} -\sin\rho_{1L,R} \\ \cos\rho_{1L,R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

mit  $\rho_{1L,R} = \gamma_1 \pm \sqrt{\left(\frac{r_{w1}}{r_{b1L,R}}\right)^2 - 1}$

Der Winkel  $\gamma_1$  lässt sich in Abhängigkeit der Koordinaten  $r_{w2}$ ,  $Z_{w2}$  und  $\phi_2$  ausdrücken.

$$\sin \gamma_1 = \frac{(a-r_{w2} \cdot \sin \phi_2) \cdot \cos \mu_{MA1}}{\sqrt{(a-r_{w2} \cdot \sin \phi_2)^2 + (r_{w2} \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_{w2} \cdot \sin \Sigma)^2}} - \frac{(r_{w2} \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_{w2} \cdot \sin \Sigma) \cdot \sin \mu_{MA1}}{\sqrt{(a-r_{w2} \cdot \sin \phi_2)^2 + (r_{w2} \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos \Sigma + Z_{w2} \cdot \sin \Sigma)^2}} \quad (18)$$

Der Differenzvektor  $\mathbf{d}$  beschreibt die Verschraubung, welche direkt aus den Verzahnungsdaten der Zahnbreitenpositionen  $\zeta + \Delta$  und  $\zeta - \Delta$  vor und hinter dem untersuchten Stirnschnitt abgeleitet wird.

$$\begin{aligned} \vec{d}_1^{MA1} &= \vec{P}_{w1+\Delta}^{MA1} - \vec{P}_{w1-\Delta}^{MA1} \\ &= \begin{bmatrix} r_1 \cdot [\sin(\gamma_1 + \tau_{IL,R}(\zeta + \Delta)_{IL,R}) - \sin(\gamma_1 + \tau_{IL,R}(\zeta - \Delta)_{IL,R})] \\ r_1 \cdot [\cos(\gamma_1 + \tau_{IL,R}(\zeta + \Delta)_{IL,R}) - \cos(\gamma_1 + \tau_{IL,R}(\zeta - \Delta)_{IL,R})] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Durch Lösen des Verzahnungsgesetzes in Gl. 11 und Bestimmen der Rückdrehung von Rad 2  $\nu_{2L,R}$  von der Eingriffslage in die Ausgangslage kann die notwendige Tangentialmodifikation  $\Delta \xi_2$  abgeleitet werden. Die über alle Stirnschnitte konstante Verdrehung  $\delta_{M2}$  positioniert den Stirnschnitt in der Zahnbreitenmitte so, dass die x-Komponente der SBK gleich null ist ( $\xi_{M2} = 0$ ). Die berechnete Tangentialmodifikation  $\Delta \xi_2$  wird mit der Aufteilung  $k'$  aus Gl. 8 auf Rad 1 und 2 verteilt.

$$\Delta \xi_2 = \xi_2 + \nu_{2L,R} + \phi_2 \mp \text{inv} \alpha_{t2L,R} - \psi_{2L,R} \pm \text{inv} \alpha_{w2L,R} - \delta_{M2} \quad (20)$$

Der Unterschied der Tangentialmodifikation für Links- und Rechtsflanke ist dabei vernachlässigbar gering.

### 4.3 Auswirkung der Optimierung auf die lokalen Verzahnungsdaten

Die analytische Optimierung verändert die Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite, sodass das Gleichungssystem in Abschn. 4.1 in jedem Stirnschnittpaar erfüllt wird. Abb. 5 zeigt exemplarisch für eine Beveloidradpaarung in windschiefer Achslage (Variante #1 in Tab. 1) die lokalen Verzahnungsdaten über der normierten Zahnbreite. Die oberen Diagramme zeigen die Verläufe der Konus- und Schrägungswinkel sowie der Profilverchiebung von Rad 1 und 2. Bei diesem Beispiel wird die Modifikation mit einem Faktor  $k' = 0,25$  aufgeteilt, weshalb die Änderungen bei Rad 1 deutlich größer ausfallen im Vergleich zu Rad 2. Der Konuswinkel wird im Referenzschnitt gleichmäßig aufgeteilt ( $\theta_{p1,2} = 7,68^\circ$ ). Ausgehend vom Referenzstirnschnitt verringert sich der Wert zur Zehe und vergrößert sich zur Ferse hin. Auch der Schrägungswinkel ändert minimal seinen Wert entlang der Zahnbreite. Die Profilverchiebung wird im Vergleich zum linearen Verlauf in Richtung Zehe und Ferse so vergrößert, dass unter Berücksichtigung des Verdrehflankenspiels die Zahndicken am Wälzkreis der Teilung entsprechen und somit die Klaffung kompensiert wird.

Die Auswirkungen der variablen Konus- und Schrägungswinkel zeigen sich im Verlauf der Stirneingriffswinkel sowie der Teil- und Grundkreise, Abb. 5 untere Diagramme. Aufgrund des abnehmenden Schrägungswinkels nimmt der Teilkreis von Zehe zu Ferse ab. Die Grundkreise

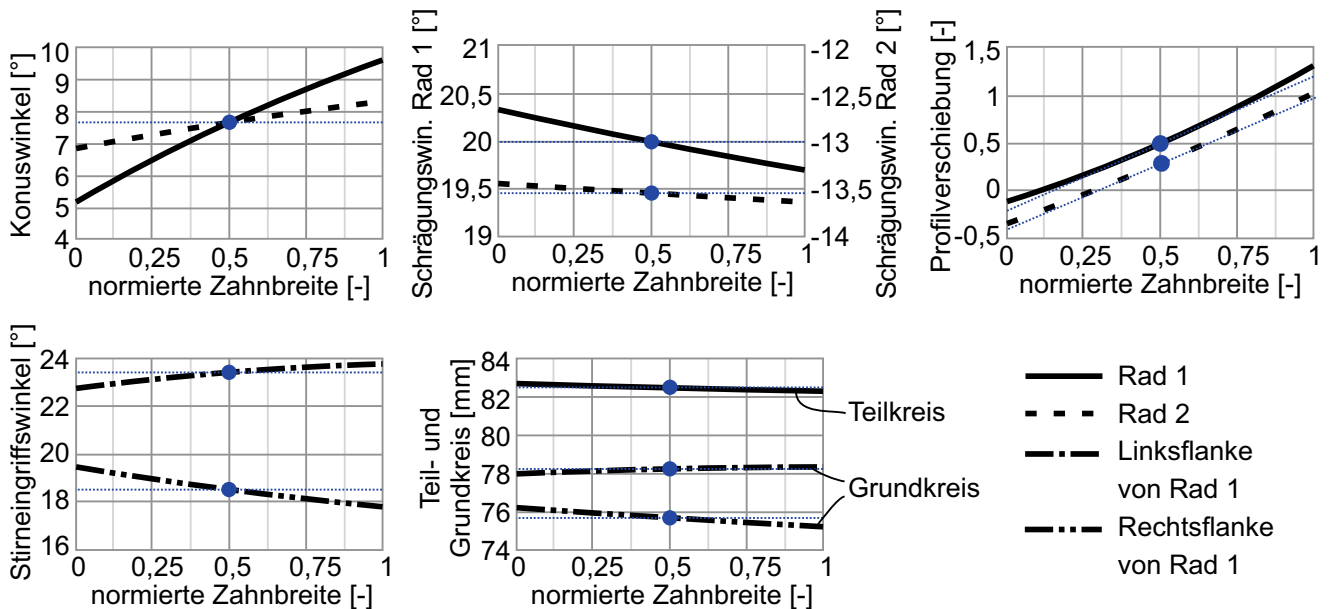


Abb. 5 Variable Verzahnungsdaten entlang der Zahnbreite für modifizierte Beveloidräder (Variante #1, Tab. 1)



**Tab. 1** Verzahnungsdaten der Beveloidräder

Parameter		Einheit	Rad 1	Rad 2
Normalmodul	$m_n$	[mm]	5	
Zähnezahl	$z$	[-]	31	37
Zahnbreite	$b$	[mm]	52	50
Profilverschiebung	$x_c$	[-]	0,5	0,3
Verdrehflankenspiel	$j_{12}$	[ $\mu$ m]	150	
<i>Achswinkel</i>				
Variante #1, #3	$\Sigma$	[°]	15	
Variante #2	$\Sigma$	[°]	12	
<i>Achsversatz</i>				
Variante #1, #2	$a$	[mm]	80	
Variante #3	$a$	[mm]	175	
<i>Konuswinkel</i>				
Variante #1, #3	$t'$	[-]	0,5	
Variante #2	$\theta_p$	[°]	0	-
<i>Schrägungswinkel</i>				
Variante #1, #3	$\beta_p$	[°]	20	-
Variante #2	$b'$	[-]	1,5	
<i>Modifikationsaufteilung</i>				
Variante #1, #3	$k'$	[-]	0,25	
Variante #2	$k'$	[-]	1	

von Links- und Rechtsflanke werden mit den nach Gl. 21 ermittelten Stirneingriffswinkeln berechnet.

$$\alpha(\zeta)_{iL,R} = \text{atan} \left( \frac{\tan \alpha_p}{\cos \beta(\zeta)_{p1,2}} \cdot \cos \beta(\zeta)_{p1,2} \pm \tan \beta(\zeta)_{p1,2} \cdot \sin \theta(\zeta)_{p1,2} \right) \quad (21)$$

### 5 Übertragungsverhalten von modifizierten Beveloidrädern

Die Anwendbarkeit der vorgestellten Berechnungsmethode soll exemplarisch anhand von drei Beveloidradpaarungen gezeigt werden, deren Verzahnungsdaten in Tab. 1 zusammengestellt sind.

Die modifizierte Flankenfeingeometrie wird mit SimKoS modelliert und in BECAL mittels lastfreier Kontaktsimulationen untersucht. Abb. 6 zeigt die Tragbilder der Links- und Rechtsflanke von Rad 1. Auf den Tragbildern wird der prozentuale Traganteil bei einer Tuschierpastendicke von 6  $\mu$ m dargestellt. Bei den drei Varianten wird auf Links- und Rechtsflanke ein voll ausgebildetes Tragbild mit einem Traganteil >90 % erreicht. Der Drehfehler über zwei Teilungen ist aufgeteilt in Links- und Rechtsflanke. Allgemein kann festgehalten werden, dass sich der maximale Wert nur geringfügig erhöht im Vergleich zur nicht modifizierten Paarung.

Variante #1:

- Windschiefe Beveloidradpaarung mit gleichmäßiger Verteilung der Konuswinkel  $t' = 0,5$  ( $\theta_{p1,2} = 7,68^\circ$ )
- Vorgabe des Schrägungswinkels von Rad 1  $\beta_{p1} = 20^\circ$
- Verteilung der Modifikation auf beide Räder  $k' = 0,25$  (Rad 1: 25 % und Rad 2: 75 %)
- Praktisch linienartiger Eingriff auf der Rechtsflanke, auf der Linksflanke im Kopfbereich der Zehe kein Eingriff  $\rightarrow$  Geringerer Traganteil von ca. 94 %

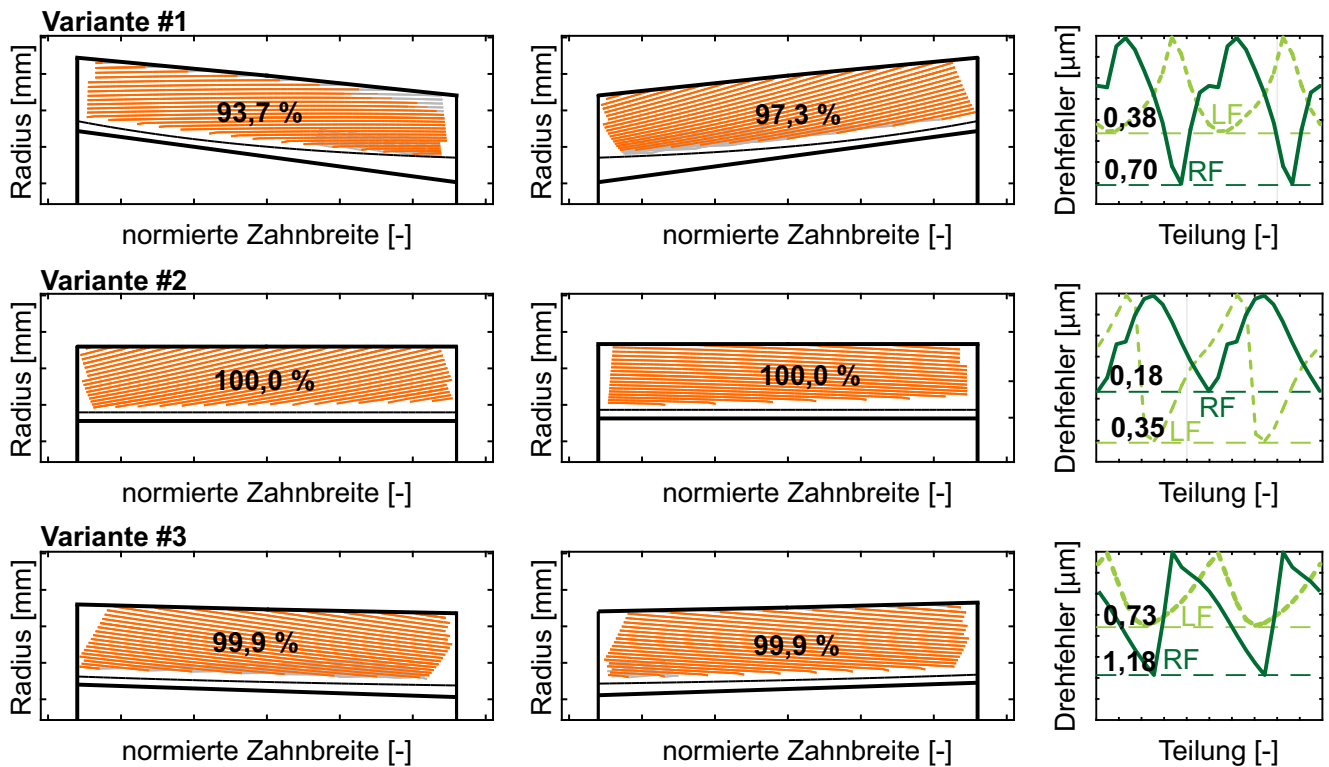
Variante #2:

- Windschiefe Paarung bestehend aus Zylinder- und Beveloidrad ( $\theta_{p2} = 12,3^\circ$ )
- Verteilung der Schrägungswinkel  $b' = 1,5$  ( $\beta_{p1} = -2,71^\circ$  und  $\beta_{p2} = 8,14^\circ$ )
- Verteilung der Modifikation auf Beveloidrad  $k' = 1$  (Zylinderrad ist nicht modifiziert)
- Beidseitig linienartiger Eingriff mit voll ausgebildetem Tragbild

Variante #3:

- Windschiefe Beveloidradpaarung mit gleichmäßiger Verteilung der Konuswinkel  $t' = 0,5$
- Vorgabe des Schrägungswinkels von Rad 1  $\beta_{p1} = 20^\circ$
- Extremer Achsversatz  $a = 175$  mm  $\rightarrow$  Geringe Konuswinkel  $\theta_{p1,2} = 1,89^\circ$
- Weitere Vergrößerung des Achsversatzes führt zu Schraubradpaarung ( $\theta_{p1,2} = 0^\circ$ )
- Beidseitig linienartiger Eingriff mit voll ausgebildetem Tragbild
- Rechtsflanke mit geringfügig erhöhtem Drehfehler

In Abb. 7a ist der Ease-Off Verlauf über der Zahnflanke einer nicht modifizierten Beveloidradpaarung mit den Hauptverzahnungsdaten von Variante #1 gezeigt. Aufgrund der windschiefen Achslage ist dieser asymmetrisch verteilt, wobei auf beiden Zahnflanken der Kontakt in der Radbreitenmitte stattfindet. Für ein voll ausgebildetes Tragbild ist der Ease-Off durch Modifikation der Flankenfeingeometrie zu kompensieren. Der Verlauf des Ease-Offs über der Zahnflanke lässt sich zwar durch eine Breitenballigkeit charakterisieren, jedoch sind für eine gute Annäherung Polynome höheren Grads erforderlich [5]. Durch Aufbringen von Standardmodifikationen in Form von Balligkeiten und Winkelmodifikationen in Profil- und Flankenrichtung kann das in Abb. 7b dargestellte schräg über die Zahnflanke verlaufende Tragbild für Links- und Rechtsflanke erzielt werden. Dieses erreicht lediglich einen Anteil von knapp 30 % bzw. 40 % der Flankenfläche, da die im Ease-Off ersichtliche Schränkung durch Standardmodifikationen nicht abgebildet werden kann. Bei der Variante #2 mit einem Beveloid- und einem Zylinderrad liegt nur eine geringe Schränkung vor, weshalb sich der Ease-Off Verlauf gut über Standardmodi-



**Abb. 6** Tragbilder von Rad 1 für Links- und Rechtsflanke sowie Drehfehler (*unterbrochene Linie*: Linksflanke, *durchgezogene Linie*: Rechtsflanke) der modifizierten Beveloidräder

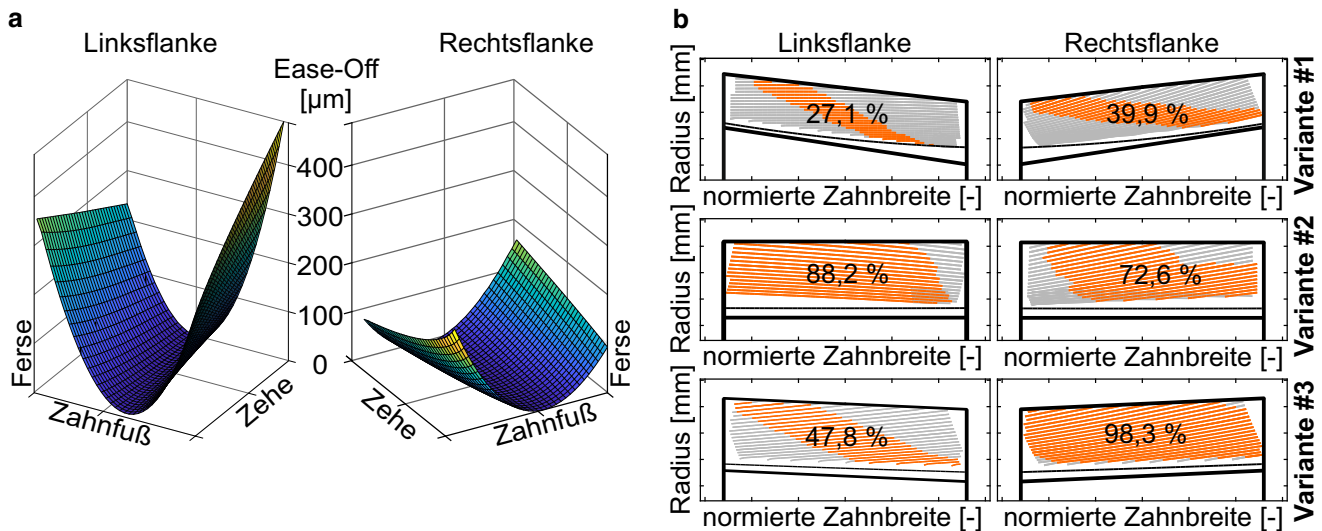
fikationen annähern lässt. Bei Variante #3 können mit Standardmodifikationen auf der Linksflanke ein Tragbildanteil von knapp 50 % und auf der Rechtsflanke ein voll ausgebildetes Tragbild erzielt werden. Der konjugierte Eingriff auf der Rechtsflanke kann darauf zurückgeführt werden, dass die Summe der Grundkreisradien der Rechtsflanke etwa dem Achsversatz entspricht und so bereits im nicht modifizierten Zustand fast Linienkontakt vorliegt.

Die dargestellten Ergebnisse und der Vergleich zu Standardmodifikation zeigen das Potenzial der vorgestellten Flankenmodifikation durch lokal angepasste Verzahnungsdaten. Der Ansatz ermöglicht eine analytische Beschreibung der komplexen Flankenfeingeometrie von Beveloidrädern in beliebiger Achslage, wodurch bereits bei der Auslegung ein voll ausgebildetes Tragbild wie bei Zylinderrädern erzielt wird. Ausgehend davon kann auf Erfahrungen von Zylinderrädern zurückgegriffen werden, um je nach Auslegungsziel weitere Modifikationen an der Flankenfeingeometrie vorzunehmen [20]. Mit diesen Flankenmodifikationen können die lastbedingten Verlagerungen und Abweichungen durch Montage oder Fertigung kompensiert und so Kantenträgen verhindert werden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wird die Herleitung der analytischen Optimierung von Beveloidrädern in windschiefer Achslage vorgestellt und exemplarisch für drei Beveloidradpaarungen angewandt. Grundlage dieser Berechnungsmethode ist die stirnschnittweise Anpassung der Verzahnungsdaten, sodass ein konjugierter Eingriff erzielt wird. Zunächst wird das hier verwendete Gleichungssystem zum Bestimmen der lokalen Verzahnungsdaten aufgestellt. Durch Lösen der Gleichungen verändern sich Profilverchiebung, Schrägungs- und Konuswinkel entlang der Zahnbreite, was breitenpositionsabhängige Stirneingriffswinkel, Teil- und Grundkreise zur Folge hat.

Darüber hinaus ist eine tangentielle Anpassung der Stirnschnittbezugskurve notwendig, um die korrekte Position der Stirnschnitte entlang der Zahnbreite zu gewährleisten. Hierzu wird ein analytischer Ansatz basierend auf dem Verzahnungsgesetz hergeleitet, welcher eine Rückdrehung der Stirnschnitte aus der Eingriffslage in die Ausgangslage ermöglicht. Dieser Ansatz verändert die evolventische Zahnform im Stirnschnitt nicht. Die lastfreien Kontaktsimulationen für die modifizierten Beveloidradpaarungen zeigen, dass ein voll ausgebildetes Tragbild erreicht wird. Auch der Drehfehler verändert sich vernachlässigbar gering im Vergleich zu den nicht modifizierten Beveloidrädern.



**Abb. 7** a Ease-Off für Variante #1 und b Tragbilder von Rad 1 bei Modifikation über Standardmodifikationen

Der große Vorteil zum Erzielen des konjugierten Eingriffs bei dieser Optimierungsmethode liegt in der beliebigen Verteilung der Modifikation auf Rad 1 und 2. Darauf aufbauend soll die Stirnschnittbezugskurve gezielt modifiziert werden, sodass eine Restklaffung an Zehe und Ferse ausgelegt und ein definiertes Tragbild eingestellt wird. Zur Validierung dieser rein analytischen Auslegung sollen eine Parameterstudie durchgeführt und exemplarisch nach dieser Methode ausgelegte Radsätze mittels 5-Achs-Simultanfräsen gefertigt und experimentell untersucht werden. Daneben soll in einer Fertigungssimulation beurteilt werden, inwieweit die Flankenfeingeometrie mit lokalen Verzahnungsdaten mittels kontinuierlichem Wälzfräsen an einer konventionellen Verzahnungsmaschine umsetzbar ist bzw. welche Einschränkungen aufgrund der Maschinenkinematik getroffen werden müssen.

**Förderung** Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Proj.-Nr.: 426043448) für die Bereitstellung der finanziellen Mittel zur Durchführung des den vorgestellten Ergebnissen zugrunde liegenden Forschungsprojekts.

**Funding** Open Access funding provided by Projekt DEAL.

**Open Access** Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

## Literatur

- Alxneit H (2010) Optimierung des Übertragungsverhaltens konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen. Dissertation, Universität Stuttgart
- Beam A-S (1954) Beveloid gearing. *Mach Des* 22:220–238
- Börner J, Humm K, Joachim F (2005) Development of conical involute gears (beveloids) for vehicle transmissions. *Gear Technol* 6:28–35
- Brecher C, Löpenhaus C, Brimmers J (2016) Function-oriented Tolerancing of Tooth Flank Modifications of Beveloid Gears. 14th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing (CAT). *Proc CIRP* 43:124–129
- Brimmers J, Brecher C, Löpenhaus C (2017) Potenzial von freien Flankenmodifikationen für Beveloidverzahnungen. *Forsch Ingenieurwes* 81:83–94. <https://doi.org/10.1007/s10010-017-0232-2>
- Fort P (1977) Berechnen und Messen gekrümmter Flächen aufgrund der Erzeugungskinetik am Beispiel von Spiralkegelrädern. Dissertation, ETH Zürich
- Johann A, Scheurle J (2009) On the generation of conjugate flanks for arbitrary gear geometries. *GAMM Mit* 32(1):61–79. <https://doi.org/10.1002/gamm.200910005>
- Komatsubara H, Mitome K-I, Ohmachi T (2002) Development of concave conical gear used for marine transmissions. *JSME Int J Ser C* 45(1):371–377
- Komatsubara H, Mitome K-I, Ohmachi T (2002) Development of concave conical gear used for marine transmissions. *Jpn Soc Mech Eng* 45(2):543–550
- Liu C-C, Tsay C-B (2002) Contact characteristics of beveloid gears. *Mech Mach Theory* 37(4):333–350. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(01\)00082-9](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(01)00082-9)
- Liu S, Song C, Zhu C, Fan Q (2018) Concave modifications of tooth surfaces of beveloid gears with crossed axes. *Proc IMechE Part C J Mech Eng Sci* 233(4):1411–1425. <https://doi.org/10.1177/0954406218768842>
- Liu S, Song C, Zhu C, Ni G, Ullah N (2019) Concave and convex modifications analysis for skewed beveloid gears considering misalignment.

- alignments. *Mech Mach Theory* 133(3):127–149. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.11.012>
13. Marino D, Binz H, Bachmann M (2019) Analytical design method for beveloid gears with a small shaft angle and offset. *Forsch Ingenieurwes* 83:611–620. <https://doi.org/10.1007/s10010-019-00369-y>
  14. Ni G, Zhu C, Song C, Du X, Zhou Y (2017) Tooth contact analysis of crossed beveloid gear transmission with parabolic modification. *Mech Mach Theory* 113(7):40–52. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.03.004>
  15. Röthlingshöfer T (2012) Auslegungsmethodik zur Optimierung des Einsatzverhaltens von Beveloidverzahnungen. Dissertation, RWTH Aachen
  16. Roth K (1998) Zahnradtechnik – Evolventen-Sonderverzahnungen. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
  17. Schlecht B, Schaefer S, Hutschenreiter B (2014) Beveloidräder – Entwicklung einer Zahnkontaktanalyse zur Berechnung der Tragfähigkeit und Geräuschanregung von kegeligen Stirnrädern (Beveloidräder). Abschlussbericht Forschungsvorhaben Nr. 657. FVA-Heft, Bd. 1115. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e. V., Frankfurt a. M.
  18. Traut C, Binz H, Bachmann M (2011) Analytische Auslegung hohlballiger Flankenkorrekturen für konische Stirnräder zur Realisierung von Linienkontakt, 1. Aufl. Maschinenelemente Kolloquium (DMK), Dresden, 29.–30. Dezember 2011 TUDpress, Dresden, S 215–226
  19. Traut C, Binz H, Bachmann M (2013) Calculation of the conjugate tooth flank geometry of conical involute gears by correction of the addendum modification. *Int Conference on Gears (ICG)*, Garching bei München, 07.–08. Oktober 2013 VDI, Düsseldorf, S 231–242
  20. Traut C (2019) Geometrische Auslegung der Mikrogeometrie konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen. Dissertation, Universität Stuttgart
  21. Tsai S-J (2007) Geometrical design of conical gear drives with profile-shifted transmission. 12th IFToMM World Congress, Beşançon, 18.–21. Juni 2007
  22. Wagner M (1993) Beitrag zur geometrischen Auslegung von Stirnradpaaren mit kleinen Achsenkreuzungswinkeln. Dissertation, Universität Stuttgart
  23. Winkler T (2002) Untersuchung zur Belastbarkeit hohlkorrigierter Beveloidgetriebe für Schiffsgetriebe mittlerer Leistung. Dissertation, Universität Stuttgart
  24. Zimmer M, Otto M, Stahl K (2016) Berechnung und Optimierung von Geometrie und Eingriffsverhalten von Zahnformen beliebiger Achslage. *Forsch Ingenieurwes* 80:1–16. <https://doi.org/10.1007/s10010-016-0201-1>