MODELLBASIERTE REGELSTRATEGIEN FÜR ADAPTIVE TRAGWERKE

Von der Fakultät

Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik

der Universität Stuttgart

zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Julia Laura Heidingsfeld

(geb. Wagner)

geboren in Nürtingen

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Oliver Sawodny
Mitberichter:	Prof. Dr. sc. techn. Mike Schlaich
Tag der mündlichen Prüfung:	14.04.2023

Institut für Systemdynamik der Universität Stuttgart

2023

VORWORT

Die Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Systemdynamik (ISYS) der Universität Stuttgart von März 2017 bis Oktober 2022 im Sonderforschungsbereich SFB 1244 *Adaptive Hüllen und Strukturen für die gebaute Umwelt von morgen*. Die Inhalte sind hauptsächlich die Ergebnisse des Teilprojekts B04 *Steuerungs- und Regelungskonzepte für adaptive Bauwerke*. Meine Promotionszeit war ein aufregendes Kapitel mit vielen Herausforderungen und Unwägbarkeiten. Ich habe viel gelernt und viele Leute kennen gelernt und denke gern und positiv an diese Zeit zurück. Hier möchte ich den Menschen danken, die mich in dieser Zeit begleitet und unterstützt haben.

Ich bedanke mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Oliver Sawodny für die Möglichkeit der Promotion am ISYS, für die fachlichen Diskussionen und die häufig pragmatischen Ansichten. Er schaffte ausdauernd den Rahmen für die Forschungstätigkeiten von uns Doktoranden und förderte stets das gemeinsame Miteinander am Institut. Meinen Dank verdient Prof. Dr. sc. techn. Mike Schlaich von der TU Berlin für die unkomplizierte und engagierte Übernahme des Mitberichts, für seine kritischen Anmerkungen und den ganzheitlichen Blick auf das Thema. Dem Prüfungsausschussvorsitzenden Prof. Dr.-Ing. Andreas Nicola gilt auch mein Dank.

Das Institut lebt von Personen, die sich täglich mit Engagement und Hingabe den organisatorischen und technischen Problemen aller Art annehmen. Allen voran danke ich Gerlind Preisenhammer, Corina Hommel und Adelheid Winkler für ihre administrative Arbeit im Sekretariat und feinsinnige menschliche Unterstützung. Herrn Arnold gilt großer Dank für seine ruhige Art und ein offenes Ohr, um Probleme zu diskutieren, die meist unlösbar erscheinen und häufig etwas mit Optimierung zu tun haben. Den technischen Mitarbeitern aus der Werkstatt, insbesondere Sven Gutekunst und Philipp Arnold, möchte ich für ihren Einsatz beim Bau des Maßstabsmodells und des Demonstrator-Hochhauses danken und den Kraftakt, der für dieses Großprojekt gefordert wurde. Prof. Dr.-Ing. Michael Zeitz danke ich für seine kompetenten Ratschläge und kritischen Kommentare zu Probevorträgen.

Ich bedanke mich bei allen Kollegen am Institut für die gemeinsame Auseinandersetzung mit fachliche Themen, aber auch für die lustige Zeit nach Feierabend und für die amüsanten Kaffeepausen. Danke an die Studierenden, die ich bei ihren Abschlussarbeiten betreut habe, für die hervorragende Arbeit und die neuen Blickwinkel, die ihr mir gezeigt habt.

Der SFB 1244 wurde zu einem einzigartigen Projekt durch den Austausch mit anderen Disziplinen, die teilweise sehr nah an der Regelungstechnik waren und teilweise sehr weit weg. Der Blick über den Tellerrand der Regelungstechnik hinaus hat meine Promotion sehr bereichert. Ich bedanke mich bei den SFB-Kollegen der anderen Institute, besonders denen des IBB, ILEK, IKTD, IGTE, ITM, VISUS.

Ein großes Danke geht an meine SFB-Kollegen am ISYS aus der ersten und der zweiten Förderperiode: Andreas Gienger, Alexander Warsewa, Janine Günther, Marius Oei, Spasena Dakova, Amelie Zeller, Jonas Stiefelmaier, Anja Rentz, Charlotte Stein und Melanie Gschweng. Besonders danke sagen möchte ich Michael Böhm für sein offenes Ohr zu Themen aller Art und die intensiven teilweise ausufernden Gespräche – ich bekam immer fundierte, konstruktive und kompetente Ratschläge. Die fachlichen Diskussionen haben meine Promotion maßgeblich geprägt und mich weiter gebracht.

Ich bedanke mich besonders bei meinen Eltern und meiner Schwester für das liebevolle Umfeld, die bedingungslose Unterstützung und den gesunden Blick von außen.

Der größte Dank geht an meinen Mann Michael! Für alles!

Flacht, Juni 2023

KURZFASSUNG

Bauwerke sind von zentraler Relevanz im Leben der Menschen, da diese einen Großteil ihrer Lebenszeit in Gebäuden verbringen. Zu deren Erstellung wendet der Bausektor einen großen Anteil der weltweiten Ressourcen auf und stößt große Mengen an Treibhausgasen aus. Mit Blick auf den prognostizierten Baubedarf dieses Jahrhunderts, um die Bedürfnisse der Menschen nach Wohnraum, Infrastruktur und Gewerbeflächen ressourcenschonend zu stillen, werden dringend neue Ansätze des Bauens gebraucht. Im Bauwesen ist die Notwendigkeit, aber auch das Potential gegeben, nachhaltiger zu agieren. Adaptive Gebäude bieten dafür einen vielversprechenden Lösungsansatz. Im Vergleich zu konventionellen Bauten, beinhalten adaptive Gebäude Sensoren, Aktoren und eine Steuereinheit im Tragwerk. Das Bauwerk ist dadurch in der Lage, sich aktiv an veränderliche Lasten anzupassen und das vorhandene Baumaterial effizient zu nutzen. So kann trotz des verringerten Materialeinsatzes die Gebrauchstauglichkeit und Standsicherheit uneingeschränkt gewährleistet werden.

Adaptive Tragwerke stellen neue Herausforderungen an die Branche, die nur mit einem interdisziplinären Ansatz gelöst werden können. Um adaptive Tragwerke in der baupraktischen Realität zu verwirklichen, sind systemdynamische und regelungstechnische Ansätze unabdingbar. Diese Dissertation beschäftigt sich mit den in diesem Kontext auftretenden Fragestellungen und erprobt die Methoden an verschiedenen adaptiven Tragwerken und Komponenten – dem Demonstrator-Hochhaus, ein 37 m hohes adaptives Hochhaus, dem Maßstabsmodell, eine 2 m hohe maßstäbliche Version dieses Hochhauses und dem Balken mit integrierten Fluidaktoren, eine Tragwerkskomponente mit Adaptionsfähigkeit.

Die Grundlage bildet die Modellierung der adaptiven Tragwerke, wobei Modelle mit dem für die Regelungstechnik relevanten Detaillierungsgrad hergeleitet werden. Aufbauend auf gängigen Methoden aus dem Bauingenieurwesen werden die notwendigen Modellgleichungen in geschlossener Form für die Reglersynthese erarbeitet. Darin integriert sind ebenfalls die Systemeingänge und -ausgänge. Insbesondere für druckschlaffe Elemente, die durch ihre Nichtlinearität unter Druck keine Kraft übertragen, werden Modellgleichungen in expliziter Form formuliert. Somit ist eine Abkehr von iterativen Lösungsmethoden möglich, wodurch die Modelle als Analyse- und Synthesemodelle in der Regelungstechnik einsetzbar sind. Die Schwingungsanalyse von Tragwerken mit druckschlaffen Elementen gelingt durch die datenbasierte Methode der Hauptkomponentenanalyse, wobei sich starke Ähnlichkeiten zu den Eigenmoden des linearen Modells zeigen. Diese Ergebnisse werden zudem zur Modellordnungsreduktion genutzt. Hinsichtlich der statischen Analyse wird die disziplinübergreifende Verbindung der Methode der Redundanz aus dem Bauingenieurwesen mit der statischen Übertragungsfunktion aus der Systemdynamik herausgestellt.

Die Aktorplatzierung ist bei adaptiven Tragwerken eine zentrale Frage in der Auslegung und Planung. Das Ziel hierbei ist die Auswahl von wenigen Aktorpositionen aus einer Vielzahl an möglichen Positionen, um die Systemkomplexität gering zu halten und gleichzeitig alle relevanten Verformungszustände beeinflussen zu können. Es werden Kriterien für die statische und dynamische Aktorplatzierung erarbeitet und diese hinsichtlich verschiedener Aktuierungsprinzipien untersucht. Anschließend steht ein Konzept zum Erhalt einer Aktormenge, die statische und dynamische Ansprüche vereint. Die statische Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix wird für örtlich verteilte Systeme formuliert und eine Aktorplatzierung am Beispiel eines Balkens durchgeführt.

Zum Betrieb adaptiver Tragwerke sind Regelungskonzepte zur Kompensation statischer Lasten und zur aktiven Dämpfung von Schwingungen notwendig. Die statische Lastkompensation setzt auf ein optimierungsbasiertes Verfahren zur Reduktion der Verformung von Tragwerken mit druckschlaffen Elementen unter Stellgrößenbeschränkungen. Eine Reduktion der mittleren Verformung von 87 % wird experimentell am Maßstabsmodell bestätigt. Für die aktive Schwingungsdämpfung wird die Methode der approximativ linearisierenden Eingangstransformation entwickelt. Der nichtlinearen Systemdynamik wird dabei durch eine Eingangstransformation eine lineare Zieldynamik aufgeprägt. Anschließend wird die am linearen Zielmodell entworfene und dadurch effizient zu berechnende Schwingungsdämpfung als modellprädiktive Regelung ausgeführt. Diese Dissertation folgt einer interdisziplinären Perspektive und schafft eine Basis für zukünftige Arbeiten in der Regelungstechnik mit Bezug zu adaptiven Tragwerken.

ABSTRACT

Buildings are of central relevance for the lives of people because on average a large share of one's lifetime is spent indoors. For their construction, the building industry is responsible for a large share of the world's resource consumption and emits large amounts of greenhouse gases. Considering the predicted construction volume of this century, new approaches to construction are urgently needed to meet people's needs for housing, infrastructure, and commercial space in a resource-efficient way. The construction industry shows the necessity but also the potential to operate more sustainably. Adaptive buildings are a promising approach to solve this challenge. Compared to conventional buildings, adaptive buildings contain sensors, actuators, and a control unit in their supporting structure. Thus, the building is able to actively adapt to changing loads and, therefore, use the available building material more efficiently. Despite the reduced use of materials, serviceability and structural stability can be guaranteed in adaptive buildings.

Adaptive structures pose new challenges, which can only be solved by an interdisciplinary approach. To realize adaptive structures in practice, the use of methods from system dynamics and control engineering is an indispensable part. This dissertation addresses the issues arising in this context and illustrates the methods on different adaptive structures and component: a 37 m tall, adaptive high-rise demonstrator building, a 2 m tall version of the same high-rise building, and an isolated beam with integrated fluid actuators providing the adaptive capability.

Modeling of the adaptive support structures serves as the basis for the following methods, where models contain the level of detail that is relevant for control engineering. Based on common methods from civil engineering, the model equations are developed in closed form for application in controller synthesis. The system inputs and outputs are directly integrated in the equations. In particular, model equations are formulated in explicit form for tension-only elements, which, due to their nonlinearity, do not transmit any compression loads. Models in closed form render iterative solvers obsolete, making them applicable as analysis and synthesis models in control engineering. Vibration analysis of structures with tension-only elements is achieved by the data-based method of proper orthogonal decomposition, and similarities to eigenmodes of linear models are shown. These derived basis functions are also applied for model order reduction. Regarding the static analysis, a connection between the method of redundancy from civil engineering and the static transfer function from system dynamics is established.

Actuator placement is a key issue in design and planning of adaptive structures. The goal is to select as few actuator positions from a large number of possible positions in order to keep the system complexity low while being able to influence all relevant deformation states. Criteria for static and dynamic actuator placement are developed and these are investigated with respect to different actuation principles. Subsequently, a concept for obtaining one actuator set that combines static and dynamic requirements is presented. The extension of the static

compensability Gramian is extended for systems with distributed parameters and actuator placement is done.

Control schemes for static load compensation and active vibration damping are necessary for the operation of adaptive structures. Static load compensation relies on an optimization-based method to reduce the deformation of structures with tension-only elements under constraints of input variables. The mean deformation of the scaled model is reduced by 87 % and is experimentally confirmed. The method of the approximatively linearizing input transformation is developed for active vibration damping. Linear target dynamics are imposed on the nonlinear system dynamics through a linearizing input transformation. Subsequently, the vibration damping designed on the linear target model is carried out by means of model predictive control, which can be computed efficiently. This dissertation not only serves as a basis for further work in the field of control engineering and adaptive structures, but also promotes an interdisciplinary perspective.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort iii

Kurzfassung & Abstract v

1 Einleitung 1
- 1.1 Stand der Technik . . . 3
  - 1.1.1 Druckschlaffe Elemente . . . 4
  - 1.1.2 Statische Lastkompensation . . . 5
  - 1.1.3 Aktive Schwingungsdämpfung . . . 7
  - 1.1.4 Eingangstransformationen . . . 9
  - 1.1.5 Aktorplatzierung . . . 11
  - 1.1.6 Zusammenfassung und Bewertung . . . 14
- 1.2 Zielsetzung der Dissertation . . . 15
- 1.3 Inhaltliche Gliederung . . . 15

2 Anwendungsbeispiele 17
- 2.1 Demonstrator-Hochhaus D1244 . . . 17
- 2.2 Maßstabsmodell . . . 21
- 2.3 Balken mit integrierten Fluidaktoren . . . 23

3 Modellierung adaptiver Tragwerke 25
- 3.1 Tragwerke . . . 26
  - 3.1.1 Mechanische Gleichungen . . . 26
  - 3.1.2 Störungen . . . 30
  - 3.1.3 Aktuierung . . . 31
  - 3.1.4 Mess- und Ausgangsgrößen . . . 38
  - 3.1.5 Stationäre Lösung . . . 43
  - 3.1.6 Experimentelle Untersuchung . . . 44
- 3.2 Elemente mit integrierten Fluidaktoren . . . 45
  - 3.2.1 Verteiltparameterische Modellgleichungen . . . 46
  - 3.2.2 Analytische Lösung . . . 49

4 Systemanalyse und Ordnungsreduktion 51
- 4.1 Schwingungsanalyse . . . 52
  - 4.1.1 Modalanalyse . . . 52
  - 4.1.2 Proper Orthogonal Decomposition . . . 56

4.1.3 Vergleich der Eigenmoden und POD-Moden . . . 59
4.2 Modellordnungsreduktion . . . 62
4.2.1 Modale Ordnungsreduktion . . . 63
4.2.2 Ordnungsreduktion mit POD-Moden . . . 64
4.2.3 Dezentrale reduzierte Tragwerksmodelle . . . 66
4.3 Zustandsraumdarstellung . . . 73
4.3.1 Lineare Zustandsraumdarstellung . . . 73
4.3.2 Zustandsraumdarstellung mit druckschlaffen Elementen . . . 74
4.3.3 Zustandsraumdarstellung dezentraler Modelle . . . 75
4.4 Systemtheoretische Eigenschaften . . . 75
4.5 Stationäre Lösung und Redundanz . . . 77

5 Optimale Aktorplatzierung 81
5.1 Aktorplatzierung für Tragwerke . . . 82
5.1.1 Optimierungsproblem und dessen Lösung . . . 82
5.1.2 Statische Aktorplatzierung . . . 84
5.1.3 Dynamische Aktorplatzierung . . . 96
5.1.4 Kombinierte Aktorplatzierung . . . 103
5.2 Statische Aktorplatzierung für aktuierbare Euler-Bernoulli-Balken . . . 108
5.2.1 Verteilte stationäre Kompensierbarkeit . . . 108
5.2.2 Definition des Gütekriteriums . . . 109
5.2.3 Optimierungsproblem . . . 111
5.2.4 Anwendung auf den Balken mit integrierten Fluidaktoren . . . 112

6 Regelung adaptiver Tragwerke 117
6.1 Regelungskonzepte . . . 118
6.2 Statische Lastkompensation . . . 119
6.2.1 Optimale Kompensation für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen . 119
6.2.2 Experimentelle Untersuchung . . . 121
6.3 Aktive Schwingungsdämpfung . . . 126
6.3.1 Approximativ linearisierende Eingangstransformation . . . 128

7 Zusammenfassung 139

A Ausführliche Spezifikation der Versuchsstände 143
A.1 Dimensionen und Modellparameter . . . 143
A.1.1 Demonstrator-Hochhaus . . . 143
A.1.2 Maßstabsmodell . . . 143
A.2 Sensorik und Ausgangsgleichungen . . . 145
A.2.1 Optisches Messsystem . . . 145
A.2.2 Dehnungsmessung . . . 146
A.2.3 Linearisierung zur Berechnung der Elementlängungen und Dehnungen 147
A.3 Aktorik . . . 148

A.3.1 Mechanische Kraftübersetzung 148
A.3.2 Unterlagerte Regelung 148
A.4 Hardware Struktur 149
A.5 Knoten-, Element- und Aktornummerierung 149

B Betrachtungen zu druckschlaffen Elementen 155
B.1 Stabilitätsnachweis mit Lyapunov 155
B.1.1 Vereinfachtes Beispiel 155
B.1.2 Demonstrator-Hochhaus 158
B.1.3 Approximativ linearisierende Eingangstransformation 159

C Statische Unbestimmtheit und Redundanzkonzept 161
C.1 Statische Unbestimmtheit 161
C.2 Redundanzkonzept 162
C.2.1 Herleitung der Redundanzmatrix 163
C.2.2 Eigenschaften der Redundanzmatrix 165
C.2.3 Redundanzmatrix und Kraftredundanzmatrix an einfachen Beispielen . 167

Abkürzungen 169

Symbolverzeichnis 171

Abbildungsverzeichnis 177

Tabellenverzeichnis 179

Literaturverzeichnis 181

1 EINLEITUNG

Bauwerke sind von zentraler Relevanz im Leben der Menschen, da diese durchschnittlich 87 % ihrer Lebenszeit im Gebäudeinneren verbringen [77]. Der Bausektor verantwortet bereits heute 50% des weltweiten Ressourcenverbrauchs [114]. Die Entwicklung der Weltbevölkerung, mit der Prognose von 9,7 Mrd. Menschen bis zum Jahr 2050 [143], zeigt die Notwendigkeit, weiteren Wohnraum, Infrastruktur und Gewerbeflächen zu schaffen. Im Sinne eines verantwortungsvollen Umgangs mit der Umwelt und eines nachhaltigen Ressourceneinsatzes ist es mit herkömmlichen Bautechniken kaum zu schaffen, diesen Baubedarf umzusetzen. Weltweit entfallen 37% der Treibhausgasemissionen auf Bautätigkeiten [115]. Damit übertrifft die klimaschädliche Wirkung des Bauschaffens bei weitem die des Flugverkehrs [114]. Die Emissionen werden durch den Energieeinsatz befeuert, der für den Abbau der Rohstoffe, die Herstellung und den Transport der Baustoffe, sowie die Errichtung und den Rückbau der Bauwerke notwendig ist. Diese über den Lebenszyklus eines Bauwerks eingesetzte Energie wird im Baubereich als graue Energie bezeichnet. Allein die Zementherstellung für Beton trägt mit 36% zum weltweiten Energieverbrauch bei [115].

Aufgrund der großen Volumina und des hohen Bedarfs ist im Bauwesen die Notwendigkeit, aber auch das Potential gegeben, nachhaltiger zu agieren. Dabei eignet sich die Art des Bauens als Ansatzpunkt. Die Dimensionierung von Bauwerken hat das Ziel, die Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit zu gewährleisten [28]. Ersteres bedeutet, dass keine Schäden an tragenden Bauteilen auftreten und das Gebäude nicht einstürzt, während Letzteres sicherstellt, dass ein Gebäude bestimmungsgemäß und ohne Beeinträchtigungen genutzt werden kann. Dabei werden, basierend auf Umwelteinflüssen und Nutzungsvorhaben, Lastfälle angenommen, denen ein Gebäude standhalten muss. Die statistische Auftretenswahrscheinlichkeit der Lastfälle, beispielsweise Wind oder Erdbeben, wird standortspezifisch berücksichtigt. Im konventionellen Bauwesen wird viel Material eingesetzt, um den Auslegungskriterien gerecht zu werden. Da die bestimmenden Lastfälle nur selten tatsächlich eintreten, bleibt die im eingesetzten Material gebundene graue Energie die meiste Zeit ungenutzt. Eine Verbesserung bietet der Leichtbau, der Einsparungen durch konsequente Optimierung der Materialausnutzung erzielt [75]. Dem Leichtbau sind jedoch Grenzen gesetzt, da unterschiedliche und zeitlich veränderliche Lastfälle bei einem unveränderlichen Entwurf immer zu einer Kompromisslösung führen.

An dieser Stelle setzen adaptive Tragwerke an, welche in der Lage sind, sich während des Betriebs an die aktuell wirkenden Lasten anzupassen. Dadurch kann das Material noch zielgerichteter genutzt und somit weiter reduziert werden [132]. Um dies zu erreichen, sind adaptive Tragwerke

mit Sensoren, Aktoren und einer Steuereinheit ausgestattet. Die Sensoren erfassen den Zustand des Tragwerks und lassen Rückschlüsse auf die wirkenden Lasten zu. Die Aktoren bringen Kräfte auf und manipulieren somit die Wirkung der Lasten auf das Tragwerk. Die Steuereinheit berechnet auf Basis der erfassten Sensorwerte die geeignete Ansteuerung der Aktoren. Der Betrieb der Sensoren, der Steuereinheit und insbesondere der Aktoren benötigt Energie. Bei der Auslegung müssen folglich die eingesetzte graue Energie und die prognostizierte Betriebsenergie gemeinsam betrachtet werden. Das volle Potential adaptiver Tragwerke ergibt sich, wenn die Betriebsenergie während der Lebenszeit eines Gebäudes nachhaltig aus erneuerbaren Quellen gewonnen wird.

Diese neue Technologie im Bauwesen erfordert den Einsatz systemdynamischer und regelungstechnischer Konzepte, um den Betrieb eines adaptiven Tragwerks überhaupt zu ermöglichen. Aufgrund des hohen technischen Aufwands eignen sich adaptive Tragwerke eher für große Bauwerke wie beispielsweise Hochhäuser, Brücken oder weitspannende Dächer. Bei Hochhäusern muss mit zunehmender Höhe mehr Material pro Bruttogeschossfläche eingesetzt werden, da Windlasten mit der Höhe zunehmen und die damit einhergehenden Querkräfte auf das Gebäude wirken. Dieser Mehreinsatz wird *premium for height* genannt. Der hohe Materialeinsatz bei Hochbauten dient im Wesentlichen der Erhöhung der Steifigkeit des Gebäudes, um komfortschädliche Auslenkungen zu vermeiden. Diese steifigkeitsdominierten Tragwerke nutzen die Festigkeit des verbauten Materials nicht effizient aus. Unter Nutzung adaptiver Ansätze kann Material eingespart werden, indem ein Tragwerk entworfen wird, bei dem die Auslenkungen durch aktiven Eingriff der Aktoren reduziert werden. Die für die Regelung relevanten Zielgrößen sind dabei einerseits die Spannungen in den Bauteilen, die die Standsicherheit repräsentieren, und andererseits die Verformungen des Tragwerks, die die Gebrauchstauglichkeit bestimmen.

Der sichere Betrieb adaptiver Tragwerke ist ein entscheidender Faktor bei der Anwendung dieser Technologie. Die Auslegung des Tragwerks und der Systemtechnik muss fehlertolerant sein. Bei Ausfall einzelner Aktoren oder Sensoren muss dies rechtzeitig erkannt werden, sodass andere oder redundante Komponenten deren Aufgaben übernehmen können. Im Fall von Extremwetterereignissen, die eine große Wirkung auf Bauwerke haben, kann es trotz Notstromversorgung zu einem Versorgungsausfall kommen. Ein adaptives Tragwerk sollte so ausgelegt sein, dass dann zwar größere Auslenkungen auftreten können, die die Gebrauchstauglichkeit zeitweise einschränken, die Standsicherheit jedoch nie gefährdet ist. Dabei können die Tragwerkskomponenten größeren Bewegungen ausgesetzt sein, die beispielsweise von Fassadenelementen toleriert werden müssen.

Neben den bereits genannten Aspekten wirkt sich der reduzierte Materialeinsatz auf die bauphysikalischen Eigenschaften aus. Beispielsweise sind die thermischen Eigenschaften verändert, sodass äußere Wettereinflüsse größere Auswirkungen auf den Innenraumkomfort haben. Dadurch können größere Kühl- und Heizleistungen nötig werden, um den Innenraum zu konditionieren. Durch einen nachhaltigen Energiegewinn in Kombination mit Konzepten zur Energiespeicherung kann der saisonbedingt erhöhte Energiebedarf gedeckt werden. Zur Klimatisierung in den Sommermonaten eignet sich solares Kühlen [53, 113].

Der Einsatz von Adaptivität im Bauwesen kann einen technologischen Beitrag zum nachhaltigen Bauen leisten und sollte Hand in Hand mit anderen Maßnahmen, wie der effizienten Nutzung und Wiederverwendung nachhaltiger Materialien und der Rezyklierung in den natürlichen Kreislauf, eingesetzt werden.

1.1 STAND DER TECHNIK

Bevor aktive Tragwerkselemente in das Bauwesen Einzug gehalten haben, wurden verschiedene technische Konstruktionen eingesetzt, die als Vorläufer bezeichnet werden können. Am Anfang standen passive Systeme, die hauptsächlich die durch Erdbeben induzierten Schwingungen in herkömmlichen Bauwerken dämpfen. Daraus entwickelten sich verschiedene Systeme, die heute in die Kategorien passive, semi-aktive, aktive und hybride Systeme unterteilt werden [35, 59, 121]. Passive Systeme wenden keine Energie auf, um Schwingungen zu dämpfen. Darunter fallen beispielsweise antriebslose Schwingungstilger in Form von großen Massen [33]. Semi-aktive Systeme setzen im Verhältnis zum Bauwerk eine geringe Antriebsenergie ein, um ihre Aufgabe zu erfüllen, wohingegen aktive Systeme große Energiemengen abrufen. Hybride Systeme sind eine Kombination aus den drei zuvor genannten Bauformen. Einige Beispiele für den praktischen Einsatz von semi-aktiven Systemen sind in [135, 165] zu finden. Solche Systeme sind hauptsächlich im asiatischen Raum installiert, einige befinden sich jedoch auch in Europa [6].

Durch immer höhere Gebäude sind schon bei herkömmlichen Bauten Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung unabdingbar. Die häufig eingesetzten passiven, meist sehr schweren Systeme ermöglichen erst große Gebäudehöhen und stehen somit im Widerspruch zu einer ressourcenarmen Bauform. Darüber hinaus beanspruchen sie viel Platz im Gebäude, der dann nicht anderweitig genutzt werden kann. Bei sehr leichten Bauwerken sind nicht nur die Dämpfung von dynamischen Lasten, die sich in Form von Schwingungen auf das Tragwerk auswirken, sondern auch die Kompensation von statischen Lasten relevant [133]. Unter dem Begriff Tragwerksregelung (engl.: *structural control*) wurde früher nur die Schwingungsdämpfung verstanden. Heutzutage wird, durch den Fortschritt in der Forschung und die Notwendigkeit sehr viel leichterer Gebäude, auch die statische Adaption eingeschlossen [79]. Die Referenz für diese Arbeit stellen aktive Systeme zur Tragwerksbeeinflussung und Methoden zu deren Betrieb dar. Es existieren auch Untersuchungen in der Luft- und Raumfahrt, da Strukturen im Weltall möglichst leicht sein sollten, um die Erde verlassen zu können und gleichzeitig großen, u. a. thermischen Laständerungen, unterliegen [41]. Ein Großteil der Forschungsarbeiten sind im Bauingenieurwesen verortet, wobei der Einfluss der Regelungstechnik vorhanden ist [59]. Die systematische Formulierung von aktiven Systemen zur Tragwerksbeeinflussung aus regelungstechnischer Sicht geht zurück in die 1970er Jahren [166]. Viele Ansätze zu aktiven Komponenten der Tragwerksbeeinflussung wurden theoretisch untersucht und simulativ getestet, die praktische Umsetzung erfolgte jedoch in den wenigsten Fällen.

Der Stand der Technik als Hinführung für diese Arbeit beleuchtet druckschlaffe Elemente, die statische Lastkompensation und die aktive Schwingungsdämpfung, Eingangstransformationen

zur Eingangs/Ausgangs-Linearisierung (E/A) und die Aktorplatzierung. Abschließend erfolgt die Bewertung des Stands der Technik und die Einordnung der Dissertation.

1.1.1 Druckschlaffe Elemente

Der Einsatz von ausschließlich auf Zug belasteten Elementen wie beispielsweise Seile ist im Bauingenieurwesen weit verbreitet. Häufig verwendet werden diese bei verschiedenen Brückenarten, aber auch zur Abspannung von Masten, Stadiondächern oder als Windverbände in Tragwerken [79]. Da in diesen Elementen kein Druck auftreten kann, muss kein Nachweis über das Eintreten der Knickfälle geführt werden. Dadurch können die druckschlaffen Elemente deutlich leichter und ressourcensparender ausgeführt werden, da kein Material zum Verhindern von Knicken vorgesehen wird. Seile sind zudem aus architektonischer Sicht ein beliebtes Stilmittel, da sie schlank und wenig auffallend sind. Beim Einsatz in adaptiven Tragwerken führt dies jedoch bei der Modellbildung zu Nichtlinearitäten. Häufig werden Seilelemente vorgespannt, sodass sie nie den schlaffen Zustand annehmen. Dies führt zu Aufwand bei der Installation, aber auch zu der Notwendigkeit von sehr starken Primärtragwerken, an denen die Seile angreifen und damit die Vorspannkräfte ableiten. Sind druckschlaffe Elemente aktuiert, kann ausschließlich eine Zugkraft aufgebracht werden. In [79] ist eine ausführliche Übersicht zu aktiv geregelten Tragwerken mit Seilen gegeben.

Bei der Betrachtung von einzelnen schlaffen Seilen werden in [1] Analysen durchgeführt und in [42] Schwingungen gedämpft sowie die Ergebnisse experimentell bestätigt. Die Autoren in [22] untersuchen einen Quadrocopter, an welchen mit einem Seil eine Last angehängt wird. Beim Start ist dieses Seil schlaff und wird erst vor dem Abheben der Last gespannt. Hierbei kommt ein hybrides Modell zum Einsatz, das differentiell flach ist, womit eine Trajektorienfolgeregelung simulativ untersucht wurde. Die verteiltparametrische Modellierung von Seilen, wie beispielsweise in [15], stellt eine für Bauwerke meist zu detaillierte Modellbeschreibung dar. Am Beispiel einer aktiven Seegangskompensation wird bei einem einzelnen Seil durch Einstellen einer konstanten Seilkraft Schlaffheit vollständig vermieden [83]. Diese Beispiele unterscheiden sich jedoch von Systemen mit einer Vielzahl an Seilen wie in typischen baupraktischen Anwendungen. Häufig werden auch Elemente eingesetzt, die ein Schlaffwerden der Zugelemente verhindern sollen [20, 167]. Die Autoren in [123] betrachten Netze, die weitestgehend aus druckschlaffen Seile bestehen, und bestimmen optimale Topologien der Seilnetze.

In [19] wird eine Tragwerksaktuierung an einem Labormodell, bestehend aus vorgespannten Seilen mit servohydraulischen Achsen, vorgestellt. Ein Seil verläuft in einer vertikalen Ebene mittig im ersten Stockwerk von links oben nach rechts unten und ist mit der am Boden verbauten Achse verbunden. Das andere Seil greift an ebendieser Achse auf der anderen Seite an und verläuft über links unten nach rechts oben. Somit steht für beide Auskreuzungen ein Aktor zur Verfügung, wodurch die Systemkomplexität gering gehalten wird, jedoch auch die Möglichkeiten der Manipulation begrenzt bleiben. Darüber hinaus wird von vorgespannten Seilen ausgegangen die immer eine Kraft übertragen. In einer großmaßstäblichen Erweiterung werden die Seile durch Stahlrohre ersetzt [134].

Der Autor in [112] beschreibt experimentelle Versuche zur Schwingungsdämpfung an mehreren Tragwerken, die Seile mit integrierten Aktoren enthalten. Beginnend bei einem einfachen Laboraufbau mit einem Seil, wird die Regelstrategie auf einen abgespannten Mast, einen Aufbau zur optischen Messung und auf Brücken angewendet. Die Tragwerke selbst sind durch lineare Modelle beschrieben und die aktuierten Seile wirken mit einer dezidierten Kraft auf ein Tragwerk. Die Schwingungsdämpfung ist durch ein kollokiertes Reglerkonzept realisiert und deren Wirkung wird für alle Beispiele experimentell bestätigt. In diesen Beispielen ist keine geschlossene Modellform mit Berücksichtigung der potentiell schlaffwerdenden Seile gegeben. Zudem sind im Verhältnis zur Größe des Tragwerks nur wenige Seile integriert.

Im Zusammenhang von Tragwerkskonstruktionen mit Seilelementen dürfen Tensegrity-Tragwerke nicht unerwähnt bleiben. Diese sind stabile Stabtragwerke, bestehend aus Druckstäben, die sich untereinander nicht berühren, sondern durch Seile verbunden sind. Durch die optimale Ausnutzung der Tragfähigkeit der Elemente, sodass ausschließlich Druckkräfte in den Stäben und Zugkräfte in den Seilen auftreten, können besonders leichte Tragwerke erstellt werden. Große Beliebtheit finden diese Konstruktionen in der Architektur oder Kunst, werden jedoch selten kommerziell in Gebäuden eingesetzt. Die Autoren in [30] stellen ein dynamisches Modell mit geometrisch nichtlinearer Steifigkeitsmatrix für einen Tensegrity-Kragarm auf. Es ist sichergestellt, dass die Seile immer gespannt sind und nicht schlaff werden. In mehreren Simulationsstudien mit aktuierten Seilen und einem quadratischen Regler wird eine deutliche Reduktion der Verschiebung nachgewiesen. In einem $15\,\mathrm{m}^2$ großen Tensegrity-Tragwerk kann durch längenveränderliche Stäbe die Spannung angepasst werden [2]. Dadurch werden die Eigenfrequenzen des Tragwerks verschoben, sodass der Abstand zu den Anregungsfrequenzen maximiert wird. Der Ansatz basiert auf einem geometrisch nichtlinearen Tragwerksmodell auf das ein stochastischer Suchalgorithmus zur Bestimmung der Eingangssignale angewendet wird. Im Hinblick auf schlaffwerdende Seile wird untersucht, wie viele Seile schlaff werden und ob der Ausfall eines Seiles zum Kollaps des ganzen Tragwerks führt. Die Autoren kommen zu dem Ergebnis, dass auch der Ausfall einiger Seile nicht kritisch für die Funktionalität des Tensegrity-Tragwerks ist, da redundante Lastpfade vorhanden sind.

1.1.2 Statische Lastkompensation

Die Adaption von Tragwerken hinsichtlich statischer Lasten ist bei herkömmlich gestalteten Bauwerken nicht notwendig. Dahingegen werden adaptive Tragwerke erst durch den Einsatz einer statischen Lastkompensation realisierbar. Bei statischen Lasten wird angenommen, dass sie sich zeitlich nicht oder in Realität nur sehr langsam ändern. Über ein Zeitintervall als statisch angenommene Lasten können bei sehr leichten Bauwerken zu Verformungen oder Spannungen führen, welche die Standsicherheit gefährden oder die Gebrauchstauglichkeit einschränken und somit kompensiert werden müssen. Zur theoretischen Untersuchung der statischen Adaption existieren einige Arbeiten, die praktische Umsetzung wird dahingegen deutlich seltener betrachtet.

Erste experimentelle Untersuchungen zur statischen Adaption gehen auf die 1970er Jahre zurück und wurden anfänglich an Einzelelementen oder einfachen Tragwerken durchgeführt. Der statische Lastabtrag wird in [74] an numerischen Beispielen von Balkentragwerken untersucht. Die Balken unterliegen einer begrenzten Anzahl von Lastfällen und sind mit verschieblichen Auflagern aktuiert. Unter Betrachtung der statischen Modellgleichungen wird das Aktorsignal optimierungsbasiert bestimmt, wobei Spannungsbeschränkungen berücksichtigt werden. Im Vergleich zu verschiedenen passiven Systemen mit und ohne Vorspannungsmechanismus kann mit dem aktiven Tragwerk eine deutliche Reduktion der Balkenquerschnitte erzielt werden. In einer Versuchsdurchführung in [31] kann die Durchbiegung eines 10 m langen Betonbalkens durch einen hydraulisch aktuierten Unterzug reduziert werden.

Unter *shape control* wird das Herbeiführen einer gewünschten Verformung bei Tragwerken oder Strukturen in der Luft- und Raumfahrt verstanden [63]. In [64] wird die statische Regelung der Verformung unter Verwendung von Eigenspannungen vorgestellt. Hierbei wird die Verteilung der Eigenspannungen bestimmt, die der durch Störungen hervorgerufenen Verformung so entgegenwirken, dass eine gewünschte Verformung erreicht wird.

Eine häufige Anwendung bezieht sich auf piezoelektrisch-aktuierte Elemente, um das untersuchte Objekt zu beeinflussen. Ein mit Piezoaktoren versehener Kragarm mit einer Länge von 50 cm wird für experimentelle Untersuchungen herangezogen [125]. Die Modellgleichung basiert auf der Euler-Bernoulli Balkengleichung. In einer experimentellen Validierung sind nur geringe Abweichungen zwischen den Messergebnissen und der numerischen Simulation des Systems für statische aber auch dynamische Fälle vorhanden. Die statische Adaption wie auch die Dämpfung von Schwingungen regelt den Sollwert mit sehr geringen Abweichungen ein.

In einer weiteren Anwendung von Tragwerken im Weltall wird eine Radioantenne mit 55 m Durchmesser unter thermischen Lasten untersucht [51]. Das Ziel ist es, Verformungen hervorgerufen durch thermische Störungen zu kompensieren, sodass die ursprüngliche Form eingestellt werden kann. Aufgezeigt wird die Methode anhand eines Balkens in einer Darstellung als System mit verteilten Parametern. Mit nur sieben thermischen Aktoren kann eine Reduktion der thermischen Störungen um den Faktor 50 erreicht werden. Für die Radioantenne wird ein diskretisiertes Modell eingesetzt und die statische Kompensation mit verschiedenen Aktormengen durchgeführt.

Ein Konzept zur Adaption von Tragwerken bestehend aus mehreren Elementen wird in [133] vorgestellt. Daran anknüpfend wird in [141] für den Entwurf von adaptiven Fachwerken ein mehrstufiges Verfahren eingesetzt. Die Geometrie der Tragwerke wird unter der Annahme von vordefinierten Lastfällen bestimmt, sodass das Eigengewicht minimal ist. Die erhaltenen optimalen Kraftpfade werden bei der statischen Adaption manipuliert. Es erfolgt die Adaption mit längen- und steifigkeitsveränderlichen Elementen durch Minimierung der Spannungen im Tragwerk unter Verformungsnebenbedingungen. Das Verfahren wird anhand dreier Fachwerke numerisch untersucht und an einem Beispieltragwerk experimentell validiert.

Die Erweiterung der vorherigen Arbeit auf Scheiben ist in [163] aufgezeigt. Es werden verschiedene Scheibengeometrien mit Dehnungsaktoren theoretisch untersucht. Mit Hilfe von

optimierungsbasierten Verfahren werden Inhomogenitäten in Spannungsfeldern reduziert, um in Tragwerken in Leichtbauweise eine höhere Tragfähigkeit zu gewährleisten.

Statische Untersuchungen werden an der Stuttgart SmartShell durchgeführt, einem doppelt gekrümmten, nur 4 cm dicken Schalentragwerk aus Holz das 10 m $\times$ 10 m überspannt [101, 102]. Die Schale ist an ihren vier Eckpunkten gelagert und wiegt 1,4 t. Das Tragwerk wurde so ausgelegt, dass unter dem formbestimmenden Lastfall des Eigengewichts ausschließlich Druckspannungen auftreten. Mit der Abweichung von dieser Form durch statische Lasten, beispielsweise Schneelasten, treten hauptsächlich nahe der Auflager große Biegespannungen auf. Um Schäden an der Schale zu vermeiden sind drei der vier Auflager mit je drei Hydraulikzylindern aktiv ausgeführt. Durch Verschieben der Auflagerpositionen können Spannungen im Tragwerk homogenisiert werden, sodass eine gleichmäßige Belastung und damit eine gleichmäßige Abnutzung erreicht wird. Die optimalen Auflagerpositionen unter bekannten Lasten werden durch Minimierung der maximalen Spannung im Tragwerk mittels *Simulated-Annealing* bestimmt. Das Verfahren wird sowohl numerisch als auch experimentell an der Stuttgart SmartShell untersucht. Die Homogenisierung von Spannungen eignet sich besonders für Schalentragwerke und dient als Vorbild für weit spannende Dachkonstruktionen.

Eine Methode zur statischen Adaption wird an einem adaptiven Kragarm validiert [127]. Das 6 m überspannende Tragwerk ist mit 45 Dehnungsmessstreifen (DMS) und zehn Linearaktoren ausgestattet. Der Kragarm wird durch Minimierung der dafür aufgewendeten Energie (graue Energie sowie Betriebsenergie) entworfen. Durch Homogenisierung der Spannungen und Minimierung der Verformungen im Tragwerk kann für eine Punktlast an der Spitze des Tragwerks eine Reduktion der Verformung von 17 cm auf 2 mm erreicht werden.

1.1.3 Aktive Schwingungsdämpfung

Herkömmlich gebaute, hohe und schlanke Gebäude kommen nicht ohne Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung aus. Eine Vielzahl an passiven und aktiven Vorkehrungen werden bereits bei nicht-adaptiven Tragwerken getroffen, sodass Schwingungen weder den Bewohnerkomfort noch die Tragfähigkeit beeinträchtigen. Ein Negativbeispiel ist die Tacoma-Narrows-Brücke, bei deren Auslegung ausschließlich statische Lasten berücksichtigt wurden, sodass diese durch die ressonante Anregung eines Herbststurms kurz nach der Inbetriebnahme kollabierte [96]. Je nach Gebäudestandort liegt das Augenmerk vermehrt auf erdbebeninduzierten Schwingungen, jedoch steigen die Windlasten mit der Höhe an und führen bei böiger Anregung zu Gebäudeschwingungen. Passive Strategien zur Reduktion der Schwingungsanfälligkeit sind eine speziell geformte Außenhaut eines Gebäudes, Durchbrüche oder eine Winddurchlässigkeit der Fassade oder eine intelligente Massenverteilung, beispielsweise dickere Bodenplatten in höheren Stockwerken. Eine weitere Maßnahme sind große Pendelmassen (engl.: *tuned mass dampers*), die entgegen der Gebäudeschwingungen pendeln und dadurch Schwingungsenergie dissipieren. Ein solcher Schwingungstilger kann nur eine Schwingungsmode, meist die Grundschwingungen, dämpfen.

Einen Überblick über den Einsatz verschiedener Arten von Schwingungstilgern an realen Gebäuden ist in [135] zu finden. Ein aktiver Betrieb solcher Systeme führt zu aktiven Schwingungstilgern

(engl.: *active mass dampers*) [116]. Der erste praktische Einsatz eines aktiven Schwingungstilgers erfolgte vor ca. 30 Jahren in einem Bürogebäude in Japan [78]. Das Gebäude ist mit zwei orthogonal zueinander ausgerichteten Tilgermassen ausgestattet, die über Feder-Dämpfer-Elemente an das Tragwerk gekoppelt sind und aktiv angetrieben werden. Ein linear-quadratischer Regler (LQR) übernimmt die Dämpfung von Schwingungen, die durch dort häufig auftretende Erdbeben oder Taifune angeregt werden. Heutzutage sind bereits viele Gebäude, hauptsächlich in Japan, mit aktiven Schwingungstilgern ausgestattet [165]. Ein gravierender Nachteil dieser Systeme ist deren große Masse, die entgegen dem Prinzip einer leichten Bauweise wirkt.

Eine weitere recht neue Vorrichtung zur Schwingungsdämpfung bietet das Konzept der Inerter. Im Bauingenieurwesen werden Inerter zur aktiven Schwingungsdämpfung eingesetzt. Eine Möglichkeit der Realisierung ist eine Zahnstange, die ein Schwungrad antreibt, wobei die Zahnstange und die Aufhängung des Schwungrads die Anschlusspunkte sind. Dadurch wird eine Kraft zur Dämpfung proportional zur relativen Beschleunigung beider Anschlusspunkte generiert. In der mathematischen Herleitung dieses Bauteils ist der erzeugte Effekt der einer negativen Steifigkeit. Dieser vielversprechende Ansatz wurde simulativ bereits häufig untersucht, in den wenigen Beispielen für eine praktische Validierung konnten diese Ergebnisse bisher noch nicht reproduziert werden [94]. Die Adaptivität liegt hierbei jedoch nicht im Tragwerk selbst, sondern in einem zusätzlichen Element. Erstmals publiziert wurde das Konzept der Inerter im Jahr 2002 abseits einer konkreten Anwendung. Der Ursprung liegt in der Analogiebetrachtung von elektrischen und mechanischen Systemen [131]. Der Autor füllt die Lücke in der mechanischen Betrachtung, die einem Kondensator zwischen zwei Komponenten im elektrischen Analogon gleichgestellt ist. Die mechanische Masse, die im elektrischen Ersatzschaltbild als Kondensator abgebildet wird, hat einen Anschluss am Null-Potential des Netzwerks. Der mechanische Inerter entspricht im elektrischen Ersatzschaltbild einem Kondensator der mit beiden Anschlüssen an weitere Bauteile grenzt.

Die experimentelle Anwendung einer aktiven Schwingungsdämpfung an einem dreistöckigen Labormodell eines Hochhauses im Maßstab 1:4 wurde schon Ende der 1980er Jahre realisiert [18]. Hierbei sind die aktiven Komponenten durch ein überkreuz vorgespanntes Seil im ersten Stock integriert. Das Seil wird über einen servohydraulischen Aktor manipuliert. Darüber hinaus wird das System mit Dehnungs- und Beschleunigungsmessungen überwacht. Durch ein verschiebbares Fundament können dem Labormodell Erdbebenlasten aufgeprägt werden. Zur Schwingungsdämpfung ist ein LQR implementiert, womit die ersten drei modalen Moden gedämpft werden können. Die Autoren berichten über Herausforderungen hinsichtlich Latenzen im Messsystem und des Spillover-Effekts. Der Übergang zu einem sechsstöckigen maßstabsgetreuen Hochhaus erfolgt in [119, 134] und wurde in Japan errichtet. Das ca. 20 m hohe Gebäude besitzt eine Grundfläche von 10 m $\times$ 10 m und wiegt 600 Tonnen. Das experimentelle Gebäude ist in Stahlbauweise errichtet und verfügt über armierte Betonplatten für die Böden. Die Grundmode des Gebäudes liegt bei ca. 1 Hz. Die vier mit Hydraulikzylindern versehenen Stahlrohre verlaufen von oben mittig im ersten Stock zu jeweils der Mitte einer Außenkante am Boden. Ein aktiver Massenschwinger wird entgegen dem oben beschrieben Einsatz zur Anregung von Schwingungen verwendet. Sensoren zur Erfassung der Geschwindigkeit und Beschleunigung sind über die Höhe des Gebäudes verteilt. Mit einer Geschwindigkeitsrückführung kann ei-

ne signifikante Reduktion der Schwingungsamplituden der ersten drei Moden nachgewiesen werden. Mit dem modellbasierten Ansatz können die Autoren eine große Übereinstimmung des Simulationsmodells mit der Realität erreichen und dadurch Abschätzungen für größere Gebäude angeben. Dieser sehr schwere Prototyp widerspricht dem nachhaltigen Bauen. Die Aktoren sind als zusätzliche Elemente nicht in das Tragkonzept des Gebäudes integriert und wurden an nur wenigen Stellen statt im Tragwerk verteilt eingebaut. Der Fokus liegt auf der aktiven Schwingungsdämpfung und lässt einen ganzheitlichen Ansatz hinsichtlich Adaptivität mit Berücksichtigung der statischen Kompensation vermissen. Trotzdem bieten diese frühen Forschungsarbeiten eine wichtige Grundlage für moderne adaptive Tragwerke.

Ein herausragendes Beispiel für eine Spannbandbrücke im Leichtbau-Stil findet sich in [11, 12]. Die Fußgängerbrücke überspannt 13 m und ist mit Positionssensoren und pneumatischen Muskeln zur Aktuierung ausgestattet. Die pneumatischen Muskeln befinden sich im Handlauf der Brücke und sind unterlagert kraftgeregelt. Aufgrund der leichten Bauweise regen überquerende Fußgänger die Brücke zum Schwingen an. Die modale Zustandsrückführung ermöglicht die Dämpfung der ersten drei Schwingungsmoden. Bei der praktischen Validierung kann eine deutliche Reduktion von fußgängerinduzierten Beschleunigungen erreicht werden. Die preiswerte Ausstattung der Brücke mit Beschleunigungssensoren und die Zustandsschätzung mit Hilfe eines Kalmanfilters werden in [91] gezeigt.

Für die zuvor bereits erwähnte Stuttgart SmartShell wird ebenfalls eine aktive Schwingungsdämpfung simulativ und experimentell untersucht [161]. Mit einem modalen Beobachter wird der Systemzustand rekonstruiert, sodass die Auslenkungen mit einem LQR, basierend auf dem modalen Modell, gedämpft werden. Bei der experimentellen Validierung werden verschiedene Lastszenarien untersucht. Für die ersten beiden Moden kann eine Reduktion der Schwingungen um bis zu 80 % gezeigt werden.

1.1.4 Eingangstransformationen

Die Linearisierung von Systemen ist ein beliebtes Mittel, um Methoden der linearen Regelungstheorie zur Regelung nichtlinearer Systeme anzuwenden. Die Vorteile der einfachen Implementierung und Anwendung liegen auf der Hand, hinzu kommt häufig eine geringe Rechenzeit, die in der Echtzeitanwendung vorteilhaft ist. Eine nichtlineare Transformation und anschließende nichtlineare Rückführung ermöglichen es, ein nichtlineares System in den neuen Koordinaten als lineares System darzustellen. Bedingungen für die Linearisierung von Eingrößensystemen bzw. SISO-Systemen (SISO, engl.: *single-input single-output*) wurden von den Autoren in [66] aufgestellt. Neben der exakten E/A-Linearisierung existieren einige Methoden zur approximativen Linearisierung, wobei ein Überblick in [46] gegeben ist.

Die exakte E/A-Linearisierung für nichtlineare eingangsaffine Systeme ist ein gängiges Vorgehen, um anschließend Methoden der linearen Regelungstechnik anzuwenden [65]. Ist der relative Grad gleich der Systemordnung wird auf die flachen Systeme im nächsten Absatz verwiesen, wodurch eine exakte Zustandslinearisierung möglich wird. Bei einem relativen Grad kleiner der Systemordnung ermöglicht der lokale Diffeomorphismus, das System in Byrnes-Isidori

Normalform zu überführen und die inverse Zustandstransformation zu berechnen. Der neue linearisierende Eingang bringt das Systeme auf die Form einer Integratorkette der Ordnung des relativen Grades mit der verbleibenden Nulldynamik.

Mit der Einführung der flachen Systeme als differentialgeometrische Methode ist es möglich, die Systemzustände und -eingänge durch einen flachen Ausgang und dessen Ableitungen zu parametrieren [36, 37]. Durch eine nichtlineare Zustandstransformation ist bei flachen Systemen eine exakte Zustandslinearisierung möglich. Dadurch lässt sich eine Vorsteuerung über die flachheitsbasierte Parametrierung realisieren und kann, im Sinne einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur, um einen linearen Regler für die resultierende Intergratorkette erweitert werden. Für lineare Systeme folgt aus der Eigenschaft der Steuerbarkeit direkt, dass ein System flach ist. Als nützliche Methode in der Regelungstechnik [120], muss zur Anwendung ein flacher Ausgang gefunden werden, was insbesondere bei nichtlinearen Mehrgrößensystemen bzw. MIMO-Systemen (MIMO, engl.: *multiple-input multiple-output*) oftmals mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Bevor die Theorie der flachen Systeme systematisch dargestellt wurde, wurde für nichtlineare MIMO-Systeme eine E/A-Linearisierung gezeigt [80]. Die Voraussetzungen sind eine identische Anzahl von Eingänge und Ausgänge, ein vollständiger relativer Grad und eine nicht-singuläre Koppelmatrix. Angewendet auf einen Semi-Batch Reaktor wurde mittels eines linearen Reglers das Vorgehen gezeigt.

Oftmals ist die exakte Linearisierung nicht anwendbar und Methoden zur approximativen Linearisierung versprechen auch für solche Systeme Erfolge. Teilweise erwiesen sich approximative Verfahren als die robustere Anwendung [46]. Einige Methoden für die approximative Linearisierung werden im Folgenden vorgestellt.

In [50] wird die exakte Zustandslinearisierung für nichtlineare Systeme erweitert, sodass eine approximative Linearisierung möglich wird. Dabei werden bestimmte Annahmen, die für die exakte Variante vorausgesetzt werden, als nicht erfüllt betrachtet und anschließend Beweise erbracht, wie eine nichtlineare Transformation und Rückführung für die approximative Linearisierung gefunden werden können. Die Methode wurde für SISO- als auch MIMO-Systeme gezeigt und beweist, dass Fehlerterme in einer Taylorentwicklung mindestens von dritter Ordnung sind.

Die Pseudo-E/A-Linearisierung ermöglicht nichtlinearen Systemen, durch eine Zustandstransformation und -rückführung, ein pseudolineares Verhalten zu erhalten. Die Methode der Pseudolinearisierung geht zurück auf [118] und wurde in [86] erweitert. Bei dieser Linearisierung wird eine Eingangs- und Zustandstransformation gefunden, die ein nichtlineares System mit unvollständigem relativen Grad unabhängig vom Arbeitspunkt linearisiert. Es werden Bedingungen angegeben, bei deren Erfüllung das System auf pseudonormale Form gebracht werden kann. Die Methode wird mittels einer kleinen Simulationsstudie an einem nichtlinearen MIMO-System evaluiert und mit einem linearen Regler verglichen.

Die Autoren in [52] schlagen eine approximative E/A-Linearisierung vor für SISO-Systeme, die keinen wohl definierten relativen Grad haben. Als Synthesemodell wird ein nichtlineares Modell verwendet, das exakt E/A-linearisierbar ist. In einem aufgeführten Beispiel entfallen Terme im Originalmodell, die zur Reduktion des relativen Grades führen würden. Dies wird durch eine

zustandsabhängige nichtlineare Koordinatentransformation erreicht. In Simulationsstudien an einem Beispielsystem konnte ein Folgeverhalten mit kleinen Fehlern gezeigt werden.

Eine approximative Linearisierung durch einen numerischen Ansatz wird in [27] basierend auf [81] vorgestellt. Eine nichtlineare Koordinatentransformation ermöglicht durch eine nichtlineare Rückführung, dass das System einem linearen Referenzmodell folgt. Im Vergleich zur exakten E/A-Linearisierung werden Fehlerresiduen einer bestimmten Ordnung eingeführt, wodurch der Ansatz das System approximativ auf das Referenzmodell linearisiert. In der Linearisierung wird eine lineare Matrixgleichung basierend auf Monomen hergeleitet, deren Lösung, sofern nicht direkt berechenbar, über eine Moore-Penrose-Pseudoinverse numerisch bestimmt wird. Anhand eines stehenden Pendels wird die Methode gezeigt und mit einem linearen Regler verglichen.

1.1.5 Aktorplatzierung

Aus Sicht der Zuverlässigkeit ist es ratsam, redundante Aktoren einzusetzen, um auch bei Ausfall einzelner Aktoren die Funktionsfähigkeit des adaptiven Tragwerks sicherzustellen. Darüber hinaus kann durch den Einsatz vieler über das Tragwerk verteilter Aktoren die von jedem einzelnen Aktor aufzubringende Kraft reduziert werden. Beim Entwurf adaptiver Tragwerke stellt sich somit die Frage der Aktorplatzierung, da es viele mögliche Positionen im Tragwerk gibt. Dabei muss die Platzierung statischen und dynamischen Anforderungen genügen, die separat betrachtet werden. Des Weiteren wird hier der Stand der Technik zur Aktorplatzierung bei verteiltparametrischen Systemen beleuchtet.

Werden Aktoren hinsichtlich dynamischer Anforderungen platziert, ist in der Regelungstechnik die Auswertung der Steuerbarkeit eine gängige und lang erprobte Methode. In [3] wird für einfache Beispiele schwingfähiger Systeme eine Aktorplatzierung basierend auf der Steuerbarkeitsmatrix durchgeführt. Die Autoren in [92] betrachten eine ähnliche Problemstellung angewendet auf planare Tragwerke, wie sie beispielsweise in der Raumfahrt eingesetzt werden. Dabei enthält das System Aktoren, die die Knoten aktuieren und das mechanische Modell wird modal reduziert. Die Anzahl an Aktoren wird vorgegeben und deren Positionen durch die Singulärwerte der Steuerbarkeitsmatrix quantifiziert und entsprechend ausgewählt.

Ein ausführlicher Bericht über die Aktorplatzierung basierend auf der Steuerbarkeit wird in [87] vorgestellt. Die Positionen werden durch die Auswertung von verschiedenen Metriken abgeleitet von der Steuerbarkeit bestimmt. Dabei werden diskretisierte und modal reduzierte Modelle verwendet, wobei eine Gewichtung der Moden möglich ist. Die Ergebnisse werden an einem einfach gelagerten Balken gezeigt. Darüber hinaus führt der Autor Untersuchungen zu Spillover-Effekten durch.

Die Autoren in [98] untersuchen verschiedene Platzierungskriterien vergleichend und bewerten die Platzierung hinsichtlich der verwendeten Reglergesetze. In der Studie wird die Abhängigkeit der Aktorpositionen von der Diskretisierung des mechanischen Modells am Beispiel eines Balkens untersucht.

In [55] werden an einem zweidimensionalen Beispieltragwerk Aktoren platziert, indem die Spur der Steuerbarkeitsmatrix eines modalen Modells ausgewertet wird. Zusätzlich werden durch die Platzierung Spillover-Effekte reduziert.

Die Aktoren in [48] werden platziert, sodass diese durchschnittlichen minimalen Energieanforderungen basierend auf der Steuerbarkeit genügen. Darüber hinaus konnten für einen Vorwärts- und Rückwärts-Greedy-Algorithmus Garantien über die Qualität der Ergebnisse für eine bestimmte Problemklasse erbracht werden. Zufällig generierte Netzwerke, deren Größe nicht an die von adaptiven Tragwerken heranreichen, dienen zur Ergebnisdarstellung.

Eine Aktorplatzierung für adaptive Tragwerke wird in [169] anhand eines zwanzigstöckigen Gebäudes durchgeführt. Hierbei wird für ein modales Modell die Steuerbarkeit ausgewertet und durch die Erweiterung um bei Erdbeben typische Störmoden ergänzt. Die Aktoren sind nicht verteilt im Tragwerk integriert, stattdessen können Aktoren, die ein ganzes Stockwerk betreffen, platziert werden, wodurch die Komplexität des Problems deutlich reduziert wird.

Wie in vielen der vorgestellten Publikationen erwähnt wird, stellt die Sensorplatzierung mit der Eigenschaft der Beobachtbarkeit das duale Problem dar und kann analog gelöst werden. Angewendet wurde die Sensorplatzierung auf adaptive Tragwerke in [117], wobei die Zustandsschätzung mittels eines Partikelfilters erfolgt.

Die Platzierung von Aktoren zur Kompensation statischer Lasten ist in der Regelungtechnik weit weniger verbreitet als die dynamische Platzierung. Die Notwendigkeit der statischen Adaption (s. Abschnitt 1.1.2) besteht jedoch bei Tragwerken, die in der Raumfahrt eingesetzt werden. Damit stellt sich auch die Frage der statischen Aktorplatzierung. Eine besonders exakte statische Positionierung von kosmischen Messinstrumenten ist für den Erfolg von Messungen im All erforderlich. Zur Lösung schlagen die Autoren vor, die Deformationsformen, die sich mit großen Abweichungen in den Messungen niederschlagen würden, als statische Störmoden zu definieren [128]. Durch Minimierung der Aktorhübe oder der eingesetzten Aktuierungsenergie werden die Elemente aktiv ausgestaltet, die die Störmoden optimal kompensieren. Zwei Heuristiken werden zur Minimierung vorgeschlagen und auf zwei flache Beispieltragwerke angewendet. Aktorplatzierung hinsichtlich statischer Aspekte bei Tragwerken im Weltraum werden an einer konkaven Reflektorkomponente mit 20 m Durchmesser untersucht [7, 122]. Das Ziel ist es, die Verformung des Reflektors konstant zu halten. Dabei werden die Aktoren ausgewählt, deren Längungen den größten Einfluss auf die Verschiebungen des Stabtragwerks haben. Die optimalen Positionen wurden für eine vorbestimmte Anzahl an Aktoren für fünf verschiedene Lastszenarien mit einer Greedy-Heuristik berechnet. Eine ähnliches Tragwerk wird wiederum mit längenveränderlichen Aktoren, die passive Elemente ersetzen, ausgestattet [106]. Die Autoren untersuchen verschiedene Optimierungsalgorithmen, u. a. zwei Arten Greedy-Algorithmen, Simulated Annealing und einen genetischen Ansatz. Die Ergebnisse zeigen eine Überlegenheit des genetischen Algorithmus. Es werden damit zehn Aktoren in dem Stabtragwerk platziert.

Um beim Flugzeugbau mit leichten Kompositmaterialien die vorab festgelegte Form eines Flugzeugrumpfes während des Herstellungsprozess einzuhalten, werden Aktoren eingesetzt, die während der Produktion Abweichungen korrigieren [32]. Die Aktoren müssen ein Vielzahl von Fertigungsfehlern und -toleranzen ausgleichen und sollen dafür optimal platziert werden.

Die statischen Abweichungen von der Wunschform werden mittels der Optimierung *alternating direction of multipliers* minimiert.

Für die Aktorplatzierung an Systemen mit verteilten Parametern hat sich ein eigenes Forschungsfeld etabliert. Besonders die Anwendung auf Balken wurde häufig untersucht.

Die Autoren in [49] fassen in ihrem Beitrag Optimierungskriterien zur Sensor- und Aktorplatzierung für dynamisch Probleme zusammen. Sie fokussieren sich auf die Positionierung von piezoelektrischen Sensoren und Aktoren auf Balken oder Platten. Der Anspruch ist, einen Leitfaden zu geben, welches Kriterium für welche Anwendung am geeignetsten erscheint. Es werden Kriterien vorgestellt, die Spannungen, Verformungen, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit oder eine Kombination betrachten. Die Wahl des Kriteriums wirkt sich sehr sensitiv auf das Ergebnis aus. Die Platzierung von Aktoren hat, verglichen mit Sensoren, aufgrund eines höheren Gewichts größere Auswirkungen. Darüber hinaus wird darauf hingewiesen, dass Platzierungsalgorithmen häufig nur auf akademische Beispiele angewendet werden und komplexere Strukturen bisher wenig betrachtet werden.

Einem ganzheitlichen Ansatz folgend, werden in [5] kollokierte Sensor-Aktor-Paare platziert und simultan eine Regelung entworfen. Die Methode wird an einem abgestuften Balken numerisch untersucht, wofür ein Finite-Elemente-Modell (FE) als Grundlage dient. Die Aktoren und Sensoren sind kollokiert und als piezoelektrische Komponenten ausgeführt. Zur aktiven Schwingungsdämpfung wird eine direkte Geschwindigkeitsrückführung eingesetzt, die an einem modal reduzierten Modell entworfen wird. Die Ergebnisse zeigen die Variation des Reglerparameters in Abhängigkeit der Aktorposition für die ersten vier Moden.

Zur Sensor- und Aktorplatzierung für allgemeine flexible Strukturen kann ein Ansatz, der auf einer verteilten $\mathcal{H}_2$-Norm basiert, angewendet werden [90]. Dazu wird das Modell des Systems diskretisiert und reduziert, sodass die dominanten Moden erhalten bleiben. Zur Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems zur Platzierung und gleichzeitigen Bestimmung des $\mathcal{H}_2$-Reglers wird ein genetischer Algorithmus eingesetzt. Mit dieser Methode wurden Aktor- und Sensorpositionen an einer beidseitig eingespannten Platte optimal bestimmt. In einer Simulationsstudie zur aktiven Schwingungsdämpfung konnten bessere Ergebnisse zur Dämpfung über das verteilte Gebiet erreicht werden, verglichen mit einer separaten Reglerauslegung und Platzierung. Von einem Co-Autor existieren weitere Publikationen zur Sensor- und Aktorplatzierung für verschiedene partielle Differentialgleichungen [25, 26].

Der Fokus der zuvor vorgestellten Arbeiten liegt auf der Platzierung hinsichtlich dynamischer Kriterien zur aktiven Schwingungsdämpfung. Einen Einblick in den Stand der Forschung zur Aktorplatzierung für statische Probleme zur aktiven Formbestimmungen von Balken und verteiltparametrischen Systemen wird im Folgenden gegeben.

In [17] wird ein Kragarm aus Glasfaser betrachtet, der mit einem Draht aus Formgedächtnislegierung aktuiert wird. Der Draht wird durch einen Hohlraum im Balken von der Spitze bis zur Basis geführt. Wird der Aktuierungsdraht exzentrisch zur neutralen Faser positioniert, kann Biegung in den Balken eingebracht werden. Diese Art der Aktuierung verringert die Neigung des Balkens zu knicken. Die statische Durchbiegung des Balkens wird über verteilte Modellgleichungen

numerisch untersucht. In einem Experiment wird ein ca. 2,5 cm langer Balken belastet und die Auslenkung an der Spitze gemessen. Dieser Beitrag untersucht grundsätzlich den Einsatz von Formgedächtnislegierungen zur Aktuierung der Biegung in Balken.

Um die statische Verformung eines Balkens an ausgewählten Stellen zu kompensieren, werden piezoelektrische Aktoren platziert [62]. Zur Anwendung kommen verschiedene Balkentheorien, die Deformationen aufgrund von Schub berücksichtigen. Durch Erweiterung von Mohrs Analogie wird eine Methode entwickelt, um Piezoaktoren entlang dieser Balken zu platzieren. Numerische Untersuchungen an einem Kragarm zeigen das Potential der Methode auf.

Eine andere Art der Aktuierung von adaptiven Tragwerken wird mit dem Einsatz von fotoresistiven Aktoren auf einem Stahlbalken eingeführt [130]. Den Autoren ist es gelungen eine analytische Form der Modellgleichungen zu finden, die die Durchbiegung des Balkens beschreibt und explizit die Form und Größe der Aktoren beinhaltet. Das Modell wurde an einem FE-Modell validiert. Der untersuchte Balken ist 1 m lang, 3 cm breit und 2 mm dick. In Simulationsszenarien wird der Baken mit unterschiedlichen Randbedingungen und statischen Lasten untersucht. Für maximal zwei Aktoren wird die optimale Position und Ausdehnung bestimmt.

1.1.6 Zusammenfassung und Bewertung

Die Erforschung adaptiver Tragwerke sowie die Untersuchung von Möglichkeiten zur Tragwerksbeeinflussung reichen einige Jahrzehnte zurück. Bei sehr hohen Gebäuden kommen bereits heute Komponenten zur aktiven Schwingungsdämpfung zum Einsatz – der Abstand zu vollständig adaptiven Bauwerken ist jedoch noch groß. Dies mag sowohl an der technischen Komplexität, als auch an der bisher nicht bestehenden Notwendigkeit zum ressourcenschonenden und nachhaltigen Bauen liegen. Gerade in der heutigen Zeit liefern steigende Rohstoffpreise, die Baukosten in die Höhe treiben, finanzielle Anreize mit weniger Material zu bauen. Die gleiche Intension verfolgt das politische Mittel der zunehmenden Kompensationszahlungen für den Ausstoß klimaschädlicher Emissionen.

Druckschlaffe Elemente wurden bisher in großen Tragwerksverbünden im Hinblick auf eine geschlossene Modellierung wenig beachtet. Diese sind jedoch durch ihr geringes Gewicht und den dadurch möglichen effektiven Materialeinsatz ein zukünftig wichtiger Bestandteil adaptiver Tragwerke. Deren Integration führt zu nichtlinearen Tragwerksmodellen, wofür Strategien zur Regelung entworfen werden müssen. Die Kompensation statischer Lasten wurde anhand einiger Beispiele bereits demonstriert, muss jedoch auch auf Tragwerke mit druckschlaffen Elementen erweitert werden. Eine Regelung zur aktiven Schwingungsdämpfung nichtlinearer Systeme mit druckschlaffen Elementen muss, zum Erhalt der Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit, Schwingungen dämpfen und effizient berechnet werden können. Eine Linearisierung des Systems macht lineare Methoden anwendbar, wobei für hochdimensionale MIMO-Systeme die Methoden zur Linearisierung häufig versagen.

1.2 ZIELSETZUNG DER DISSERTATION

In dieser Arbeit wird eine modellbasierte Entwurfskette mit regelungstechnischen Konzepten und Methoden für adaptive Tragwerke dargelegt. Die Inhalte fokussieren sich auf die Regelungstechnik und Systemdynamik und klammern die Tragwerksauslegung, die Konstruktion von Komponenten, architektonische Konzepte, die ganzheitliche Bilanzierung, die Innenraumkonditionierung oder Untersuchungen zur Akzeptanz durch Nutzer aus. Darüber hinaus sind sensorseitige Themen wie Beobachterkonzepte oder Zustandsschätzung, Lastrekonstruktion oder -schätzung sowie die Fehlerdiagnose nicht Teil dieser Arbeit. In dieser Dissertation wird ein erhöhter Detaillierungsgrad in der Modellbildung berücksichtigt, der sich entscheidend auf das Modellverhalten und die Regelungskonzepte auswirkt. Es werden die folgenden Ziele verfolgt:

- Systemdynamische Modellierung adaptiver Tragwerke, basierend auf bautechnisch ausgelegten Tragwerksentwürfen, mit Fokus auf der Integration druckschlaffer Elemente und Aktuierungsprinzipien, die das Ziel einer geschlossenen Modellform zur Anwendung regelungstechnischer Methoden erfüllt.
- Analyse der teilweise nichtlinearen Tragwerksmodelle, Reduktion zu niederdimensionalen Synthesemodellen für den Regelungsentwurf sowie das Aufzeigen von Zusammenhängen zu Methoden aus dem Bauwesen.
- Optimale Platzierung von Aktoren in Tragwerken hinsichtlich statischer und dynamischer Anforderungen zum Erhalt effizienter und performanter Gesamtsysteme sowie Herleitung einer Methode zur Aktorplatzierung bei verteiltparametrischen Problemstellungen.
- Regelung adaptiver Tragwerke zum Erhalt der Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit durch die Kompensation statischer Lasten und durch die aktive Schwingungsdämpfung unter Berücksichtigung nichtlinearer Modellgleichungen und Stellgrößenbeschränkungen. Insbesondere die Entwicklung der Methode der approximativ linearisierenden Eingangstransformation.

Die Ergebnisse werden numerisch und experimentell am Demonstrator-Hochhaus und Maßstabsmodell sowie an einem Balken mit integrierten Fluidaktoren dargestellt, dies schränkt jedoch die Anwendung auf adaptive Tragwerke jenseits der Hochbauten nicht ein. Die Inhalte dieser Dissertation wurden der Öffentlichkeit durch Erst- und Co-Autorschaften in den folgenden Publikation und Vorträgen zugänglich gemacht [13, 14, 16, 23, 24, 39, 44, 76, 107, 146–156, 158–160, 162].

1.3 INHALTLICHE GLIEDERUNG

Die Arbeit gliedert sich in Kapitel 2 bis 6, deren Zusammenhang in Abb. 1.1 dargestellt ist. Zuerst werden die drei experimentellen und numerischen Versuchsstände eingeführt, die zur Ergebnisdarstellung eingesetzt werden. In Kapitel 3 folgt die Modellierung adaptiver Tragwerke und Komponenten. Beginnend bei der mechanischen Beschreibung der passiven Tragstruktur, auch unter Berücksichtigung druckschlaffer Elemente, werden verschiedene Aktorprinzipien

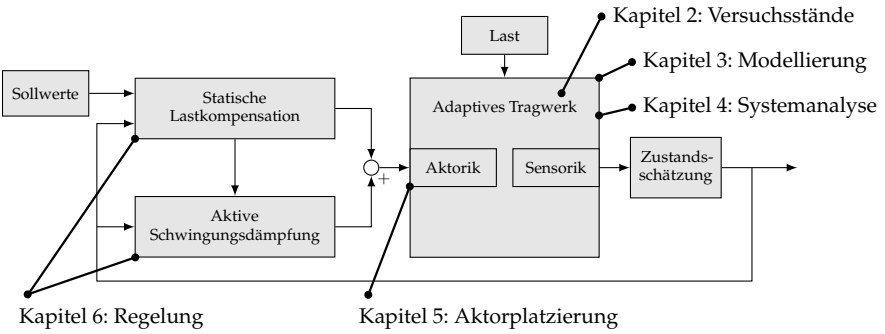


Abbildung 1.1: Übersichtsplan der Arbeit.
In einem Blockschaltbild wird visualisiert, wie die Kapitel im Kontext der Systembetrachtung zusammenhängen.

mathematisch beschrieben und in das Modell integriert. Nach Herleitung der stationären Modellgleichungen folgt die experimentelle Validierung. Das Modell mit verteilten Parametern für einen Balken mit integrierten Fluidaktoren und die analytische Lösung der Biegelinie werden hergeleitet. Diese Modelle dienen als Grundlage für die weiteren Kapitel, mit dem Ziel der modellbasierten Regelung adaptiver Tragwerke. Anschließend werden die Modelle in Kapitel 4 analysiert und in eine geeignete Form zum Einsatz als Synthesemodell überführt. Bei der stationären Eingangs-Ausgangs-Beziehung werden Parallelen zum Konzept der Redundanz aus dem Bauingenieurwesen aufgezeigt. Bei transienten Modellen wird eine Schwingungsanalyse am nichtlinearen Modell durchgeführt und mit den Eigenmoden eines linearen Modells verglichen. Die Modellordnungsreduktion und die Substrukturierung erlauben eine effiziente Modellberechnung zum weiteren Einsatz. In Kapitel 5 werden aus den vielen möglichen Aktorpositionen im Tragwerk die ausgewählt, die hinsichtlich statischer und dynamischer Anforderungen optimal sind. Dafür werden kombinatorische Optimierungsprobleme hinsichtlich der Gütemaße zur statischen Kompensierbarkeit und der Steuerbarkeit gelöst. Darüber hinaus wird die Methode der statischen Aktorplatzierung auf Systeme mit verteilten Parametern erweitert. Schließlich folgt das Kapitel 6, in dem die optimale statische Lastkompensation am Modell mit druckschlaffen Elementen und Stellgrößenbeschränkungen bestimmt und experimentell validiert wird. Zur aktiven Schwingungsdämpfung wird die Methode der approximativ linearisierenden Eingangstransformation entwickelt, bei der ein nichtlineares Systemverhalten in ein lineares überführt wird, um mit Methoden aus der linearen Regelungstechnik Schwingungen zu dämpfen. Abschließend werden die wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit in Kapitel 7 zusammengefasst.

2 ANWENDUNGSBEISPIELE

In dieser Arbeit werden zur praktischen und numerischen Untersuchung der entwickelten Regelungskonzepte mehrere experimentelle Versuchsstände herangezogen. Das Demonstrator-Hochhaus ist eine realitätsnahe Umsetzung eines adaptiven Hochhauses. Dieses wird neben den experimentellen Versuchen am Tragwerk auch als Versuchsplattform für bauphysikalische Untersuchungen genutzt. Davon abgeleitet ist in der ersten Förderperiode des Sonderfoschungsbereichs 1244 (SFB 1244) ein Modell des Hochhauses im Maßstab 1:18 entstanden. Das Maßstabsmodell bildet ausschließlich Eigenschaften des Tragwerks ab. Als Beispiel für ein adaptives Einzelelement, das in einen Tragwerksverbund eingebaut werden kann, wird ein Balken mit einem *integrierter Fluidaktor* verwendet. Im Folgenden werden die drei Versuchsstände detailliert beschrieben.

2.1 DEMONSTRATOR-HOCHHAUS D1244

Das Demonstrator-Hochhaus (Abb. 2.1) wurde mit baubehördlicher Genehmigung von 2019 bis 2021 auf dem Campus der Universität Stuttgart errichtet. Die Integration der Steuerungshardware und der Anschluss der Sensoren und Aktoren erfolgten in 2022. Das Hochhaus umfasst eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 5,10 m. Die Höhe des Bauwerks beträgt 36 m und schließt mit einer Attika von 0,6 m ab. Das Demonstrator-Hochhaus hat zwölf Stockwerke mit einer Höhe von je 3 m, wobei aus struktureller Sicht drei Stockwerke zu einem Modul zusammengefasst sind. Das Tragwerk besteht aus beschichtetem Baustahl, die Zwischenböden sind aus Holz gefertigt. Vertikale Elemente, sogenannte Stützen, gewährleisten den Lastabtrag in das Fundament und sind in den Eckpunkten der Grundfläche gelagert. Die Stützen sind als quadratische Hohlprofile ausgeführt, deren Dimension über die Höhe variiert. Eine detaillierte Aufstellung der tragwerksspezifischen Parameter ist im Anhang A.1 aufgeführt. Die umlaufend angeordneten horizontalen Elemente trennen die Stockwerke voneinander ab. Diese Riegel sind als je zwei parallel verlaufende rechteckige Hohlprofile ausgeführt. Zur Aussteifung des Tragwerks sind diagonale Auskreuzungen montiert, die jeweils drei Stockwerke überspannen und als Flachstahl ausgeführt sind. Diese sind mit einer kleinen Kraft vorgespannt. An den Knotenpunkten werden die Tragwerkselemente über ein separates Bauteil verbunden. Das Demonstrator-Hochhaus ist provisorisch mit einer Folienfassade als Witterungsschutz versehen. Zukünftig soll das Gebäude

(a) (b)

Abbildung 2.1: Demonstrator-Hochhaus D1244.
Das Demonstrator-Hochhaus ist in (a) aus Süd-Süd-West Perspektive abgebildet. Das adaptive Hochhaus in (b) mit dem Erschließungsturm (rechts) steht auf dem Campus der Universität Stuttgart.

mit adaptiven Fassaden ausgestattet werden[1]. Ein armiertes Betonfundament bildet den Untergrund. Vier Verankerungen im Gestein sorgen für den Lastübertrag von den Stützen in das Fundament.

Die Aktoren sind verteilt im Tragwerk integriert. Im Demonstrator-Hochhaus können Stützen oder diagonale Auskreuzungen mit Aktoren versehen werden. Aufgrund der geforderten hohen Aktorkräfte kommen Hydraulikzylinder zum Einsatz [16]. In den Stützen werden die Aktoren innerhalb der Hohlprofile integriert (Abb. 2.2 b) und wirken über die komplette Höhe eines Moduls. Die Kraftübertragung erfolgt über das Aktorgestänge, welches im Hohlprofil geführt wird [152]. Die Hydraulikzylinder für die Stützen besitzen einen Kammerdurchmesser von 140 mm und einen Stangendurchmesser von 70 mm. Dies ermöglicht bei einem Versorgungsdruck von 315 bar eine Druckkraft von 485 kN und eine Zugkraft von 364 kN. Die Aktoren in den diagonalen Auskreuzungen sind direkt in deren unterem Teil eingesetzt (Abb. 2.1 c). Da die Auskreuzungen aus Flachstahl gefertigt sind, können sie prinzipiell keine signifikanten Druckkräfte aufnehmen. Deshalb umgibt die Hydraulikzylinder eine Konstruktion, die dazu führt, dass ein Ausfahren

[1] Änderungen an der Außenhaut können die Gebäudemasse signifikant beeinflussen und müssen dementsprechend bei der Modellidentifikation und Reglerauslegung berücksichtigt werden.

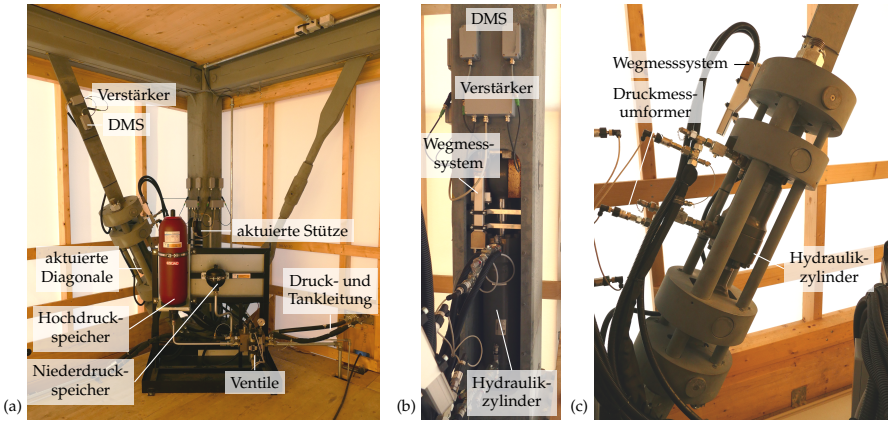


Abbildung 2.2: Aktorik des Demonstrator-Hochhauses.
In (a) ist die Versorgungseinheit mit Druckspeichern und Ventilen für einen Stützen- und einen Diagonalenaktor gezeigt. In (b) ist eine aktuierte Stütze und in (c) eine aktuierte Diagonale abgebildet.

des Zylinders zu einer Verkürzung der Diagonale führt und umgekehrt [153]. Der Durchmesser der Druckkammer und der Zylinderstange beträgt 125 mm bzw. 80 mm. Daraus ergibt sich mit dem oben angegebenen Versorgungsdruck eine Druckkraft im Zylinder bzw. eine Zugkraft in der Auskreuzung von 387 kN. Aus Sicherheitsgründen besitzt die Aktorik einen Anschlag, sodass die Diagonalen nicht weiter als zulässig ausfahren können. Im Fall, dass sich die Aktorik im Anschlag befindet, wird der Kraftfluss partiell am Hydraulikzylinder vorbei über die parallel verlaufenden Stangen geführt. Beide Kammern der Hydraulikzylinder sind mit Drucksensoren versehen, die zur unterlagerten Kraftregelung verwendet werden. Außerdem verfügt jeder Zylinder über ein Wegmesssystem. In allen Stützen der unteren beiden Module sind Aktoren verbaut sowie in allen acht Auskreuzungen des untersten Moduls und in je vier achsensymmetrisch angeordnete Auskreuzungen des zweiten und dritten Moduls. Eine detaillierte Beschreibung der Anordnung und der Methode zur Aktorplatzierung findet sich in Kapitel 5. Eine Änderung der Aktorkonfiguration oder eine Erweiterung durch andere Aktuierungsprinzipien am Demonstrator-Hochhaus sind prinzipiell möglich.

Die Hydraulikzylinder der Stützen und Diagonalen werden mit 4/3-Wege-Proportionalventilen angesteuert. Der hydraulische Kreis wird durch ein Aggregat mit einer momentengeregelten Axialkolbenpumpe mit 15 kW Leistung angetrieben und wird von einem Tankvolumen von 160 l gespeist. Der vom Aggregat maximal bereitgestellte Druck beträgt 315 bar und der maximale Volumenstrom 54 l/min. Zum Betrieb des Gebäudes muss bei gegebenem Druck der geforderte Volumenstrom vorgehalten werden. Deshalb sind nahe der Zylinder Membran- und Blasenspeicher installiert. Aus konstruktiver Sicht werden im unteren Modul ein Stützenzylinder und zwei Diagonalenzylinder mit einem hochdruckseitigen Membranspeicher und niederdruckseitigen

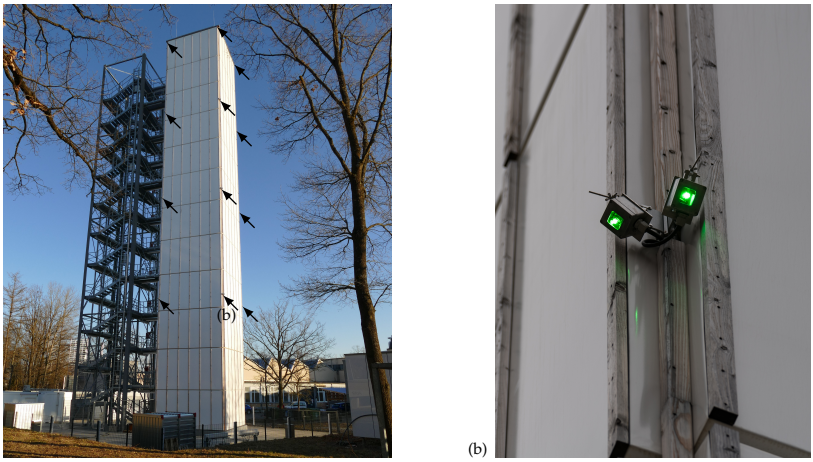


Abbildung 2.3: Optisches Messsystem am Demonstrator-Hochhaus.
Die am Demonstrator-Hochhaus montierten LED-Emitter sind in (a) markiert. (b) zeigt eine Detailaufnahme.

Blasenspeicher versorgt. Im zweiten Modul kommen die gleichen Speicher zum Einsatz und versorgen je einen Stützen- und einen Diagonalenzylinder (Abb. 2.2 a). Im dritten Modul sind nur hochdruckseitig Speicher im Einsatz. Zum Schutz vor Überdruck in den Zylindern durch Rückwirkungen vom Gebäude sind Überdruckventile verbaut, die beide Zylinderkammern bei Bedarf entlasten.

Neben den bereits erwähnten Sensoren an den Hydraulikzylindern ist das Tragwerk selbst mit Sensoren zur Überwachung und Zustandsrekonstruktion ausgestattet. In jeder Stütze und Diagonale sind zwei oder vier Dehnungsmessstreifen (DMS) mit je vier Messgittern verklebt, die zu einer Vollbrücke mit Messverstärkern verschaltet sind. Die DMS sind auf dem Grundkörper und nicht auf der Zinkbeschichtung der Metallelemente verklebt. Zur Erfassung der Gebäudedeformation ist ein optisches Messsystem integriert, welches im SFB 1244 am Institut für Technische Optik (ITO) entwickelt wurde (Abb. 2.3). Dabei sind am Gebäude Lichtemitter angebracht, die von einer Kamera erfasst werden. Durch eine Hologrammtechnik im optischen Pfad liegt die Genauigkeit des Systems im Submillimeterbereich [47]. Die 16 Emitter sind an den Knotenpunkten an den Modulenden an der West- und Nordseite angebracht. An der Westseite werden die x- und z-Verschiebungen an acht Knoten erfasst, an der Nordseite die y- und z-Verschiebungen. Neben den Aktoren und Sensoren, die das Tragwerk betreffen, sind Komponenten für bauphysikalische Messungen vorgesehen. Zur aktiven Beeinflussung des Raumklimas sind Heiz- und Kühlsysteme, Belüftungen oder neuartige adaptive Fassadensysteme vorgesehen. Zur Systemerfassung können Temperatur- oder Feuchtesensoren zum Einsatz kommen.

Die Mess- und Stellsignale werden in jedem Modul über eine speicherprogrammierbare Steuerung verarbeitet. Die Steuereinheiten auf Modulebene werden von einer zentralen Einheit, die

in einem Technikcontainer untergebracht ist, koordiniert. Die Algorithmen zur Regelung sind auf den Steuereinheiten implementiert. Zusätzlich werden durchgehend Sensordaten gespeichert, um ein permanentes Monitoring zu gewährleisten. Wie genehmigungsseitig vorgegeben, gehört zum Monitoringkonzept die Überwachung der Schwingspiele, sodass bei Erreichen der maximalen Anzahl Verschleißteile ausgetauscht werden können.

Im Demonstrator-Hochhaus selbst sind kein Treppenhaus und keine Leitungsführungen über die Stockwerke vorgesehen. Deshalb gibt es neben dem adaptiven Tragwerk einen Treppen- und Erschließungsturm in klassischem Gerüstbau. In jedem Stockwerk kann über eine ausklappbare Brücke das Demonstrator-Hochhaus betreten werden. Im eingefahrenen Zustand ist der Treppenturm entkoppelt, sodass das Demonstrator-Hochhaus frei schwingen kann. Entlang dieser Brücken werden Leitungen für Strom, Hydraulik, Lüftung usw. geführt, die am Übergang als Schlaufe ausgeführt sind.

Das Demonstrator-Hochhaus unterliegt deutschem Baurecht und ist dementsprechend ausgelegt. Für adaptive Gebäude im Speziellen gibt es keine Gesetzespassage. Deshalb ist das Demonstrator-Hochhaus so dimensioniert, dass bei üblichen externen Lasten, z.B. Wind, und maximaler Ansteuerung der Aktorik mit Effekt in die gleiche Richtung, kein unsicherer Zustand eintreten kann. Folglich führen externe Lasten auf das Tragwerk zu sehr geringen Auslenkungen. Bei der Durchführung von Schwingungsversuchen am Demonstrator-Hochhaus wird das Tragwerk aktiv durch einen Teil der vorhandenen Aktoren in Schwingung versetzt und der andere Teil wiederum zur Schwingungsdämpfung eingesetzt. Für Untersuchungen der statischen Kompensation kann ein von der Referenzlage abweichender Sollwert vorgegeben werden, um Rückschlüsse auf die Kompensation einer realen statischen Last zu ziehen. In dieser Arbeit wird die Kompensation statischer Lasten jedoch ausschließlich am Maßstabsmodell durchgeführt und validiert.

2.2 MASSSTABSMODELL

Aufgrund der langen Bauzeit des Demonstrator-Hochhauses und des sicherheitskritischen Einflusses der Regelungsalgorithmen wurde zum Zweck experimenteller Vorversuche ein maßstäbliches Modell errichtet, wie in Abb. 2.4 a abgebildet. Der angewendete Maßstab von 1:18 ergibt eine Modellhöhe von 2 m und eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge 0,26 m. Das Maßstabsmodell ist, anders als das Demonstrator-Hochhaus, in fünf Module mit je zwei Stockwerken unterteilt, was auf Änderungen während der Entwurfsphase zurück zu führen ist. Das zehnstöckige Modellgebäude weist den gleichen strukturellen Aufbau wie das Demonstrator-Hochhaus auf, mit der Ausnahme, dass die Auskreuzungen zwei Stockwerke überspannen. Realisiert ist das Maßstabsmodell mit Stützen in den Ecken der Grundfläche und diagonalen Auskreuzungen, sowie Plattenelementen, die die Module voneinander abtrennen.

Bei der Konzeption des Maßstabsmodells lag der Fokus auf dem Erhalt der systemdynamischen Eigenschaften, insbesondere der Eigenfrequenz, und nicht auf den geometrischen Dimensionen. Dies ist dadurch motiviert, dass Schwingungen mit dem Auge sichtbar sein sollen und die Bandbreite herkömmlicher Aktorelemente zur aktiven Dämpfung ausreichen soll. Das Quadrat der

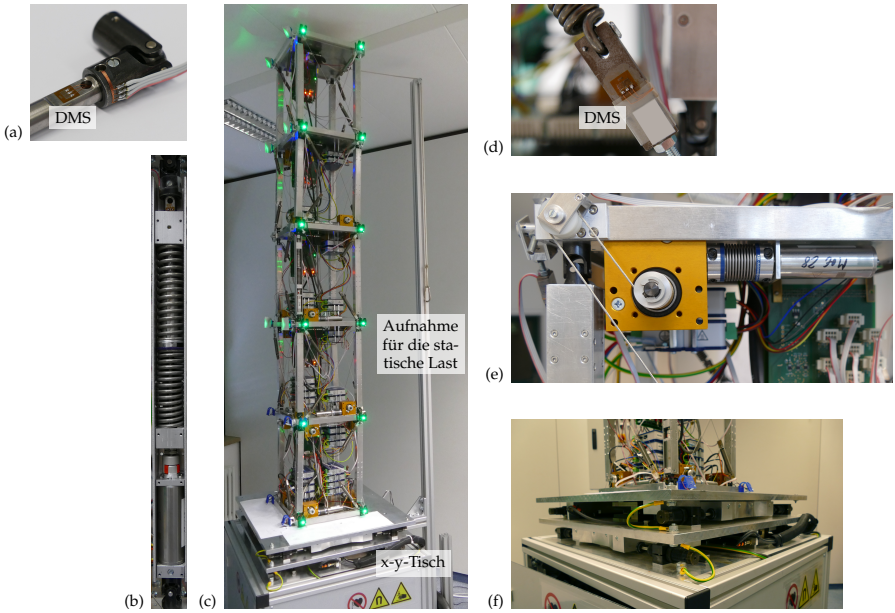


Abbildung 2.4: Maßstabsmodell des Demonstrator-Hochhauses.
Das Modell im Maßstab 1:18 ist in (c) abgebildet und ist mit 31 Aktoren (b), (e) in Form von Elektromotoren ausgestattet. Messungen am Maßstabsmodell werden mit Dehnungsmessstreifen (a), (d), Beschleunigungssensoren und einem optischen Messsystem aufgezeichnet. Zur Anregung von Schwingungen steht das Modell auf einem x-y-Tisch (f) und verfügt über eine Konstruktion zur Aufbringung von statischen Lasten.

Eigenfrequenzen eines mechanischen Systems ist proportional zur Steifigkeit und reziprok proportional zur Masse ($\omega \sim \sqrt{k/m}$). Durch die Verringerung der Größe sinkt die Masse des Systems kubisch mit dem Skalierungsfaktor, wohingegen die Steifigkeit linear mit dem Skalierungsfaktor vermindert wird. Dadurch führt eine einfache Skalierung zu zu hohen Eigenfrequenzen. Zum Erhalt der erwarteten Eigenfrequenzen des Demonstrator-Hochhauses, werden die Tragwerkselemente des Maßstabsmodells mit Spiralfedern ausgestattet. Durch die Federkennwerte sind die Steifigkeiten der Elemente festgelegt. Dies erfordert einen konstruktiven Aufwand zur Integration der Federelemente in eine Stütze (Abb. 2.4 c). Die sogenannte adaptive Federstütze beinhaltet zwei parallel verspannte Federn mit einer Einzelsteifigkeit von 11062 N/m, was zu einer resultierenden Elementsteifigkeit von 22124 N/m führt. Die Stützen sind über Kardangelenke mit den horizontalen Platten verbunden, wodurch diese vertikalen Elemente ausschließlich Normalkräfte und keine Momente übertragen. Die Auskreuzungen sind durch Seile realisiert, in die eine Feder mit Steifigkeit 18192 N/m integriert ist.

Es werden bürstenlose Gleichstrommotoren zur Aktuierung eingesetzt, die mit unterlagerten Reglern betrieben werden. In den Stützen erfolgt die Übersetzung der rotatorischen Motorbewegung mit einem Kugelgewindetrieb in eine translatorische Bewegung. Die Übersetzung, inklusive Wirkungsgrad, führt zu einer maximalen und minimalen Aktorkraft von ± 297 N. Die Aktuierung der Auskreuzungen erfolgt über das Auf- und Abrollen der Seile, Abb. 2.4 e. Damit die Seile durch eine rückwirkende Kraft des maßstäblichen Tragwerks nicht abgewickelt werden können, sind selbsthemmende Schneckengetriebe dazwischen geschaltet. Die maximale Zugkraft des Aktors beträgt 111 N. Alle Stützen der unteren beiden Module, sowie drei Stützen des dritten Moduls sind aktuiert. Bedingt durch die konstruktive Ausgestaltung sind die passiven Stützen etwas kürzer und weisen eine geringfügig erhöhte Steifigkeit auf als die aktiven Stützen. Darüber hinaus sind alle Auskreuzungen des unteren und je vier achsensymmetrisch angeordnete Auskreuzungen des zweiten bis vierten Moduls aktiv. Die detaillierte Beschreibung der Aktor- und Sensorpositionen findet sich in Abb. A.5 in Anhang A.5.

Das Maßstabsmodell ist mit ähnlicher Sensorik wie das Demonstrator-Hochhaus ausgestattet. Alle Stützen und Diagonalen werden mit DMS überwacht, wodurch 60 Messpunkte vorhanden sind, die beispielhaft in Abb. 2.4 b und d abgebildet sind. Pro Messstelle wurden auf gegenüberliegenden Bauteilseiten Messgitter in Form von T-Rosetten verklebt, die zu einer Vollbrücke verschaltet sind. Durch diese Messschaltung werden ausschließlich Zug- und Druckkräfte im Element gemessen, da die Querkontraktion kompensiert wird. Bei den Stützen sind die DMS auf der Achse angebracht. Bei den Diagonalen ist dahingegen ein Verbindungsstück zwischen Seil und Feder für die DMS-Montage vorgesehen. Das optische Messsystem besteht aus Leuchtdioden an den Knotenpunkten zwischen zwei Modulen, die von einer Kamera erfasst werden [159]. Dieses System befindet sich an zwei orthogonalen Seiten des Gebäudes, sodass alle Raumrichtungen gemessen werden können.

Pro Modul ist eine für das Maßstabsmodell entwickelte Steuerplatine mit einem Microcontroller verbaut. Des Weiteren sind die Messverstärkerschaltungen und eine Inertialmesseinheit darin integriert. Über diesen Microcontroller werden Sensor- und Aktorsignale ausgewertet und mittels CANOpen Protokoll die Daten übertragen. Die Kommunikation zum Bediencomputer wird mit einer Rapid Prototyping Hardware (dSpace MicroLabBox) realisiert. Die Algorithmen sind in Matlab/Simulink implementiert und mit dSpace ControlDesk kann der Versuchsaufbau bedient werden. Der Hardwareaufbau ist in Abb. A.1 schematisch dargestellt.

Zur repetetiven Anregung dynamischer Lasten ist das Maßstabsmodell auf einem x-y-Tisch montiert (Abb. 2.4 f). Der x-y-Tisch wird von Linearmotoren und Servoverstärkern angetrieben und verfügt über optische Wegmesssysteme. Zusätzlich ist eine Konstruktion zum Aufbringen von statischen Lasten vorhanden.

2.3 BALKEN MIT INTEGRIERTEN FLUIDAKTOREN

Neben einem adaptiven Tragwerksverbund, können auch Einzelelemente adaptiv gestaltet sein. Tragwerkselemente, wie beispielsweise Balken oder Platten, die mit integrierten Fluidaktoren

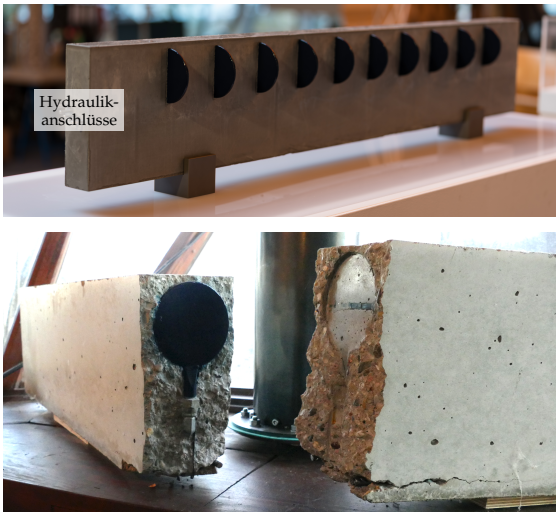


Abbildung 2.5: Balken mit integrierten Fluidaktoren.
In (a) ist ein halbseitige betonierter Balken mit zehn integrierten Fluidaktoren abgebilder. (b) zeigt einen geteilten Balken mit einer Druckkammer oberhalb der neutralen Faser.

ausgestattet sind, besitzen im Inneren Druckkammern. In diesen kann ein Fluid mit Druck beaufschlagt und das Tragwerkselement beeinflusst werden [69]. In dieser Arbeit werden ausschließlich Balken mit integrierten Fluidaktoren betrachtet. Unterliegt ein herkömmlicher passiver Balken einer nach unten gerichteten Last, verformt sich dieser und die typische Biegelinie stellt sich ein. Bei gängigen Modellvorstellungen teilt die neutrale Faser den Balken in eine Zugzone im unteren Bereich und eine Druckzone im oberen Bereich. Im Sinne eines ressourcenschonenden Bauens, sollen Tragwerkselemente besonders leicht ausgeführt werden, wodurch sich jedoch größere Verformungen unter Last einstellen. Dieser Balken wird mit fluidischen Druckkammern ausgestattet, die sich in der Druckzone des Balkens befinden (Abb. 2.5). Dadurch wird eine Kraft erzeugt, die der Last entgegen wirkt und die Durchbiegung des Balkens reduziert. Potentielle Anwendungsbereiche sind horizontal tragende Elemente, wie Balken zur Auflage von Decken, oder fluidisch aktuierte Decken. Solche Elemente weisen ein hohes Potential zur Gewichtseinsparung bei Gebäuden auf, da sie durch die Reduktion ihres Eigengewichts einen hohen Beitrag leisten. Die Tragwerkselemente mit integrierten Fluidaktoren sind als Ergänzung der vorherigen Versuchsstände zu verstehen und können in einen Tragwerksverbund integriert werden.

Der in dieser Arbeit untersuchte Balken mit Fluidaktoren ist 2 m lang, 0,2 m hoch und 0,1 m tief. Der Balken besteht aus Beton mit einem Elastizitätsmodul von $30 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}$ und einem Flächenträgheitsmoment von $3{,}33 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$. Die Druckkammern haben einen Durchmesser von 8 cm und bestehen aus Metall (Abb. 2.5). Über eine dünne Zuleitung wird ein hydraulisches Fluid in die Kammern gedrückt.

3 MODELLIERUNG ADAPTIVER TRAGWERKE

Da es sich bei Bauwerken in der Regel um Unikate handelt, werden modellbasierte Ansätze benötigt, die eine numerische Untersuchung des Tragwerksverhaltens und die Auslegung des Tragwerks in der Entwurfsphase ermöglichen. In diesem Kapitel wird die mathematische Modellierung adaptiver Tragwerke betrachtet, welche im Gegensatz zu passiven Tragwerken über Aktoren und Sensoren verfügen. Dabei wird sowohl das statische als auch das dynamische Tragwerksverhalten betrachtet. Die hergeleiteten Modelle sind die Grundlage für die Systemanalyse, Aktorplatzierung und den Regelungsentwurf in den folgenden Kapiteln.

Die Modellierung komplexer Tragwerke wird im Bauingenieurwesen meist mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt. Bei linearem Tragwerksverhalten resultieren Modellgleichungen in geschlossener Form, die für systemtheoretische Untersuchungen verwendet werden können. Die in dieser Arbeit betrachteten Tragwerke des Demonstrator-Hochhauses und Maßstabsmodells verfügen über druckschlaffe Elemente, die ein nichtlineares Tragwerksverhalten hervorrufen. In diesem Fall kann das Problem mit Hilfe der FEM weiterhin iterativ gelöst werden. Die Ableitung von Modellen in geschlossener Form ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich.

Die FEM geht bei der numerischen Berechnung des Tragverhaltens von konkreten bekannten Lastfällen aus. Darüber hinaus ist bei der Verwendung eines geschlossenen Regelkreises die Wirkung der Aktoren auf das Tragwerk nicht im Voraus bekannt. Gängige FE-Software erlaubt keine Integration von Aktoren und Sensoren in das Tragwerksmodell. Zur Verwendung der Modelle für die Aktoplatzierung und den Regelungsentwurf müssen die Modellgleichungen in geschlossener Form vorliegen und Aktoren und Sensoren integriert sein.

Daher verfolgt dieses Kapitel folgende Ziele:

- Herleitung mathematischer Modelle zur Beschreibung des Tragwerksverhaltens in geschlossener Form für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen und integrierte Fluidaktoren.
- Integration von Aktoren und Sensoren in die Tragwerksmodelle unter Berücksichtigung unterschiedlicher Aktuierungsprinzipien.
- Experimentelle Validierung des statischen Modells mit druckschlaffen Elementen am Maßstabsmodell.

Die Inhalte dieses Kapitels sind weitestgehend in [13, 146, 149–151] publiziert. Die Modellierung ist in zwei Abschnitte unterteilt, in denen einerseits die Gleichungen für Tragwerke (Abschnitt 3.1) und andererseits für Elemente mit integrierten Fluidaktoren (Abschnitt 3.2) betrachtet werden. Im ersten Teil finden sich in Abschnitt 3.1.1 die mechanischen Gleichungen, wie sie aus einer FE-Analyse resultieren. Nach Integration des Dämpfungsmodells nach Rayleigh folgt die geschlossene Beschreibung der Modellgleichungen für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen. Die systemtheoretischen Größen des Eingangs und Ausgangs werden in Abschnitt 3.1.3 und 3.1.4 in die Modellgleichungen integriert. In Abschnitt 3.1.5 wird die stationäre Lösung hergeleitet. Diese dient in Abschnitt 3.1.6 der experimentellen Validierung mit druckschlaffen Elementen am Maßstabsmodell. Im zweiten Teil wird die Modellierung des Balkens mit integrierten Fluidaktoren durchgeführt. Es werden die verteiltparametrischen Modellgleichung in Abschnitt 3.2.1 aufgestellt und deren analytische Lösung in Abschnitt 3.2.2 hergeleitet.

3.1 TRAGWERKE

3.1.1 Mechanische Gleichungen

In diesem Kapitel werden die Modellgleichungen adaptiver Tragwerke eingeführt. Der Fokus liegt auf adaptiven Hochhaustragwerken, wobei die Formulierung die Beschreibung allgemeiner mechanischer Systeme zulässt.

3.1.1.1 Bewegungsgleichungen 2. Ordnung

Flexible mechanische Systeme, zu welchen adaptive Tragwerke gehören, weisen unendlich viele Freiheitsgrade auf und können mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Deren analytische Lösung kann für einfache Modelle berechnet werden; für technisch relevante Systeme gelingt dies oft nicht. Zur numerischen Analyse solcher Systeme hat sich daher in der technischen Mechanik die FEM etabliert. Bei der FEM wird das System durch Zerlegung in endlich kleine Elemente diskretisiert und ein Ritz- oder Galerkin-Ansatz angewendet, um das Verhalten der finiten Elemente zu approximieren. Die Einzellösungen der finiten Elemente lassen sich zu einer Gesamtlösung zusammensetzen und die Interaktionen zwischen den Elementen über Randbedingungen berücksichtigen. Dadurch können rechnergestützt die Verformungen und Spannungen von komplexen mechanischen Systemen effizient berechnet werden. Durch die Diskretisierung resultiert eine Approximation, die jedoch das Systemverhalten unter den getroffenen Annahmen meist hinreichend genau beschreibt.

Die Punkte am Rand eines finiten Elements werden Knoten genannt. Die Verschiebungen und Verdrehungen der Knoten werden durch die Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ beschrieben. Für ein lineares gedämpftes mechanisches System ergibt sich mit der FEM ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL) in Form der Bewegungsgleichungen 2. Ordnung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \qquad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}_1. \tag{3.1}$$

mit den positiv (semi)-definiten Matrizen der Masse $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Steifigkeit $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Dämpfung $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Externe Kräfte und Momente, die auf das System wirken, sind in $\boldsymbol{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst. Bei adaptiven Tragwerken sind darin auch die manipulierbaren Kräfte der Aktoren erfasst. Die Anfangsbedingungen sind durch $\boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{q}_1$ gegeben.

Der Dämpfungsterm erfasst die Dissipation von Energie im System und wird als viskose Dämpfung approximiert. Die Dämpfungsmatrix wird in Abhängigkeit der Massen- und Steifigkeitsmatrix gewählt. Mit diesem Ansatz sind die Schwingungsformen des gedämpften Systems gleich denen des ungedämpften Systems. Die verwendete Form

$$\boldsymbol{D} = \alpha_0 \boldsymbol{M} + \alpha_1 \boldsymbol{K}. \tag{3.2}$$

heißt *Rayleigh-Dämpfung*. Die Parameter α_0 und α_1 können über empirisch ermittelte Dämpfungsmaße bestimmt oder am realen Modell identifiziert werden.

Der massenproportionale Term der *Rayleigh-Dämpfung* lässt sich physikalisch als äußere Dämpfung interpretieren, die hauptsächlich auf die niederen Eigenfrequenzen wirkt. Der steifigkeitsproportionale Term spiegelt die innere Dämpfung wider und hat größeren Einfluss auf die höheren Eigenfrequenzen. Da Gebäudeschwingungen von den niederen Eigenmoden dominiert werden, wird erwartet, dass der Koeffizient α_0 geringer als α_1 ist.

Die aktuell verfügbaren FE-Programme ermöglichen nur in sehr begrenztem Umfang die Integration von Aktoren und Sensoren in die Modellierung. Bei den betrachteten Hochhaustragwerken, wie dem Demonstrator-Hochhaus und dem Maßstabsmodell, orientiert sich die Diskretisierung an der Tragwerkstopologie, sodass die finiten Elemente den realen Tragwerkselementen entsprechen. Die Knoten und Elemente für beide Tragwerke sind in Anhang A.5 angegeben. Als Elementtypen werden Stäbe, Balken und Platten verwendet. Der Elementtyp bestimmt die Anzahl der Knoten, die zur Beschreibung notwendig sind. Ein Stabelement wird von zwei Knoten mit je drei translatorischen Freiheitsgraden im dreidimensionalen Raum beschrieben. Balkenelemente weisen zwei Knoten mit je sechs Freiheitsgraden auf, die drei Translationen und drei Rotationen im Raum beschreiben. Plattenelemente werden durch vier Knoten mit ebenfalls je sechs Freiheitsgraden definiert.

Demonstrator-Hochhaus Die Modellannahmen für das Demonstrator-Hochhaus und die verwendeten Elementansätze werden im Folgenden vorgestellt. Die vertikalen Stützenelemente, die mit quadratischen Hohlprofilen realisiert sind, werden als Balkenelemente angesetzt. Die horizontalen Elemente an jedem Stockwerksabschluss bestehen aus einem Paar rechteckiger Hohlprofile, die über einen Bolzen gelenkig mit den Stützen verbunden sind. Deshalb übertragen diese Elemente vernachlässigbar kleine Momente und sind durch Stäbe approximiert. Die diagonalen Elemente werden beim linearen Modellansatz vorerst auch durch Stäbe modelliert. Die eingelegten Zwischenböden für jedes Stockwerk tragen deutlich zur Steifigkeit des Tragwerks bei und sind auf den umlaufenden horizontalen Elementen aufgelegt. Diese Böden werden durch zusätzliche horizontale Stabelemente repräsentiert, die gegenüberliegende Knoten in einer horizontalen Ebene verbinden, sodass horizontale Auskreuzungen entstehen. Im realen

Tragwerk existieren diese Elemente an jedem Modulende zusätzlich zu den Zwischenböden. Die zusätzliche Masse durch Böden, Fassaden und Details, beispielsweise Schrauben, wird den vorhandenen Elementen entsprechend der Verteilung im Tragwerk zugerechnet. Die Masse der Zwischenböden und des Dachs wird entsprechend den horizontalen Auskreuzungen zugerechnet, die Masse der Fassaden, aufgrund der Montage, den horizontal umlaufenden Elementen. Die Masse der Details wird gleichmäßig über alle vertikalen Elemente verteilt. Die Lagerung des Demonstrator-Hochhauses fixiert die translatorischen Freiheitsgrade der vier Knoten am Boden sowie die Rotationsrichtung um die z-Achse. Diese Rotation muss in der Modellierung blockiert werden, da andernfalls die Balkenelemente im Modell um die Hochachse innerhalb des Balkens rotieren können. Im Modell wirkt kein anderes Element auf diesen Rotationsfreiheitsgrad. In Realität ist diese Bewegung nicht möglich. Die Parameter für die verwendeten Elemente sind im Anhang A.1.1 angegeben.

Maßstabsmodell Für das Maßstabsmodell gelten aufgrund einer anderen Konstruktion abweichende Annahmen. Die vertikalen Stützen werden durch Stabelemente repräsentiert. Die Anschlusspunkte der Stützen sind mit Kardangelenken ausgeführt und übertragen demnach keine Momente. Die Platten an den Modulgrenzen sind durch Plattenelemente modelliert. Die diagonalen Auskreuzungen werden bei der linearen Modellierung vorläufig auch durch Stabelemente approximiert. Die Lagerung der Bodenknoten sperrt Bewegungen in die drei translatorischen Richtungen. Die Parameter für das Maßstabsmodell sind im Anhang A.1.2 angegeben.

3.1.1.2 Druckschlaffe Elemente

Eine bautechnisch weit verbreitete Methode ist der Einsatz von im Tragwerk diagonal verlaufenden Elementen. Diese Auskreuzungen tragen in hohem Maße zur Steifigkeit des Tragwerks bei und werden deshalb auch Aussteifungselemente genannt. Gebäude werden dadurch widerstandsfähiger gegen Horizontallasten, die so in die Gründung abgeleitet werden. Der Einsatz von Aussteifungselementen eignet sich besonders beim Bau adaptiver Tragwerke, da die Steifigkeit maßgeblich erhöht wird, die Masse jedoch nur wenig zunimmt. Auskreuzungen sind oft paarweise angebracht und ausschließlich in Zugrichtung belastbar. Folglich nehmen diese Elemente keine Druckkräfte auf und zeigen damit ein nichtlineares Verhalten.

Die Beschreibung und Berechnung druckschlaffer Elemente ist in herkömmlichen FE-Programmen ein etablierter Standard. Im Vergleich zu einer linearen FE-Analyse resultiert daraus keine geschlossene Modellbeschreibung mit Massen- und Steifigkeitsmatrix. Die Software bedient sich iterativer Verfahren, wodurch die Lösung ausschließlich für die angenommenen Anfangsbedingungen und Lasten gültig ist. Für den Betrieb adaptiver Tragwerke werden Synthesemodelle für den Regler- und Beobachterentwurf benötigt, die von einer geschlossenen Modellbeschreibung abgeleitet werden. Deshalb wird in diesem Abschnitt ein Modellierungsansatz für druckschlaffe Elemente erarbeitet, der auf einem linearen FE-Modell basiert. Die Annahme, dass druckschlaffe Elemente ausreichend vorgespannt sind, sodass einem Erschlaffen vorgebeugt wird, kann

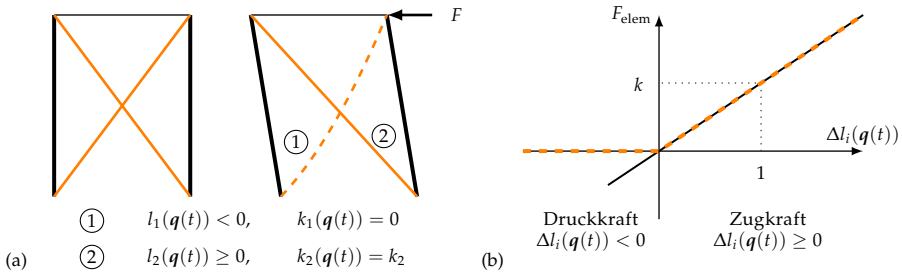


Abbildung 3.1: Skizze und Diagramm zum Verhalten von druckschlaffen Elementen.
In (a) ist exemplarisch ein zweidimensionales Tragwerk mit druckschlaffen Elementen (orange) dargestellt, welches durch eine Kraft F ausgelenkt wird. Daraufhin wird Diagonale Nummer 1 schlaff, nimmt keine Kraft auf und trägt nicht zur Steifigkeitsmatrix bei. In (b) ist die Kraft in einem druckschlaffen Element (orange gestrichelt) über dessen Längenänderung im Vergleich zu einem Zug-Druck Element (schwarz) aufgetragen.

nicht getroffen werden. Dies würde zu hohen Vorspannkräften führen, die über andere Tragwerkselemente abgetragen werden müssten und damit dem Ziel des materialsparenden Bauens widersprechen.

Das Verhalten von druckschlaffen Elementen wird im Folgenden anhand eines einzelnen Elements in einem zweidimensionalen Beispiel erläutert (Abb. 3.1 a). Wird ein druckschlaffes Element auf Zug beansprucht, ist die Kraft proportional zur Verlängerung des Elements. Die Steifigkeit k_i des Einzelelements i ist die Proportionalitätskonstante. Wird ein druckschlaffes Element virtuell mit Druck beaufschlagt, überträgt das Element keine Kraft (Abb. 3.1 b). Es gilt

$$k_i(\boldsymbol{q}(t)) = \begin{cases} k_i, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) \geq 0 \\ 0, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < 0 \end{cases}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\text{ds}}. \tag{3.3}$$

Die druckschlaffen Elemente sind in der Indexmenge $\mathcal{I}_{\text{ds}}$ indiziert. Die Art der Belastung, deren Auswirkung durch die Freiheitsgrade beschrieben ist, führt zu einer Zustandsabhängigkeit der Elementsteifigkeit. Der Term $\Delta l_i(\boldsymbol{q}(t))$ gibt die Längendifferenz zum Zeitpunkt t des druckschlaffen Elements gegenüber seiner Referenzlänge $l_{i,0}$ an

$$\Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) = l_i(\boldsymbol{q}(t)) - l_{i,0}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\text{ds}}. \tag{3.4}$$

Als Referenzlänge wird die Länge des unbelasteten Elements definiert. Der Einfluss von Eigengewicht oder Vorspannung in der Ruhelage kann berücksichtigt werden, in dem die Referenzlänge entsprechend angepasst wird. Die Elementlänge zum Zeitpunkt t wird durch den Abstand der Knoten $P_{i,1}$ und $P_{i,2}$ definiert, an denen das Element angreift. Somit können auch Verkürzungen des Elements berechnet werden, obwohl Druckkräfte in diesen Elementen nicht möglich sind. Die Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}(t)$ repräsentieren die relative Verschiebung um die Ruhelage. Zur Abstandsberechnung werden die Absolutwerte benötigt, die die Systembewegung bezüglich

des globalen Koordinatensystems beschreiben. Die Absolutverschiebungen sind als die Summe aus den Freiheitsgraden $\boldsymbol{q}(t)$ und der Referenzpose $\boldsymbol{p}$ definiert. Der absolute Abstand der beiden Knoten zum Zeitpunkt t ergibt sich zu

$$l_i(\boldsymbol{q}(t)) = \sqrt{(\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{p})^\intercal \Delta_i^\intercal \Delta_i (\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{p})}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ds}}, \tag{3.5}$$

mit der elementabhängigen Differenzenmatrix $\boldsymbol{\Delta}_i \in \mathbb{R}^{3\times n}$ der Form

$$\boldsymbol{\Delta}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ds}} \tag{3.6}$$

Dies entspricht dem euklidischen Abstand zweier Punkte im dreidimensionalen Raum. Die Positionen der Einträge ungleich Null in $\boldsymbol{\Delta}_i$ entsprechen den Freiheitsgraden, die durch das Element i beeinflusst werden. Die Linearisierung der Elementlängenberechnung befindet sich in Anhang A.2.3 und wird in der Berechnung verwendet.

Durch Aufnahme der druckschlaffen Elemente in (3.1) resultiert das Modell

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}(t))\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \qquad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}_1. \tag{3.7}$$

Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind zustandsabhängig. In jedem Zeitschritt muss der Zustand der druckschlaffen Elemente bestimmt und die Bedingungen für die Elementsteifigkeiten (3.3) ausgewertet werden. Dementsprechend sind die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix während der Simulation online zu berechnen.

Die Massenmatrix bleibt durch den temporären Ausfall druckschlaffer Elemente unverändert. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da sich die Masse eines druckschlaffen Elements nicht ändert. Lediglich eine Umverteilung der angreifenden Masse bleibt unbeachtet, da es möglich ist, dass ein schlaffes Zugelement einen der Knoten stärker belastet. Zudem ist die Wirkung der Elementträgheit auf das restliche Tragwerk durch die Schlaffheit leicht verändert. Diese Effekte sind jedoch vernachlässigbar, da die Position des ganzen Elements bezüglich des Massenschwerpunkts im Tragwerk die Massenmatrix dominiert und diese Relation nahezu unverändert bleibt.

Die Stabilitätseigenschaft druckschlaffer Elemente kann mit Hilfe eines Lyapunov-Ansatzes nachgewiesen werden (Anhang B.1). Die Berücksichtigung druckschlaffer Elemente im Tragwerksmodell führt zu nichtlinearen Modellgleichungen. Somit sind die Methoden der linearen Modellordnungsreduktion zur Synthesemodellgenerierung und der linearen Regelungstechnik nicht mehr direkt anwendbar.

3.1.2 Störungen

Adaptive Tragwerke sind externen Störungen ausgesetzt. Im Bauingenieurwesen spricht man von Lasten, die auf das Gebäude wirken. Herkömmliche Bauwerke sind so ausgelegt, dass sie

den an einem Standort wirkenden Lasten widerstehen, ohne dass die Gebrauchstauglichkeit oder Standsicherheit gefährdet ist. Bei adaptiven Tragwerken wird dies erst durch den Einsatz der Regelung erreicht. Umweltbedingte Lasten sind hauptsächlich Wind, aber auch Erdbeben oder Schneelasten. Je nach Tragwerk haben diese Lasten unterschiedlich starke Auswirkungen. Hochhaustragwerke werden, aufgrund ihrer Höhe, durch Windlasten stark beeinflusst, wohingegen weitspannende Tragwerke, wie Dächer oder Stadien, von Schneelasten ausgelenkt werden können. Darüber hinaus treten Nutzlasten aufgrund schwerer Gegenstände im Gebäude oder einer großen Personenzahl auf. Es wird zwischen statischen und dynamischen Lasten unterschieden. Erstere bewirken eine permanente Auslenkung des Tragwerks aus der unbelasteten Ruhelage und letztere führen zu Schwingungen des Tragwerks. Bei der Tragwerksplanung werden häufig ausschließlich statische Lasten berücksichtigt, wobei dynamische Lasten durch statische Ersatzlasten approximiert werden. Dadurch kann die Tragwerksberechnung anhand der einfacheren statischen Gleichungen erfolgen. Die approximierte Last der Prüfstatik für das Demonstrator-Hochhaus besteht aus dem Eigengewicht in vertikale Richtung (z-Richtung) und einer gleichverteilten Last über die Höhe des Tragwerks von 9,475 kN an jedem Knoten in horizontale Richtung (x-Richtung). Zur Kompensation von Lasten in adaptiven Tragwerken werden im nächsten Kapitel die Aktoren eingeführt.

Viele Ansätze in der Regelung adaptiver Tragwerke setzen Kenntnisse über die Lasten voraus. Die Lasten können über eine Lastrekonstruktion oder Lastschätzung aus der Reaktion des Tragwerks bestimmt werden [54]. Dabei können zusätzliche Messungen, beispielsweise die der Windgeschwindigkeit und -richtung durch ein Anemometer, die Genauigkeit der Schätzung erhöhen. In dieser Arbeit werden die Lasten als bekannt vorausgesetzt. Sie sind Teil der rechten Seite der Modellgleichungen (3.1) und durch

$$\boldsymbol{f}_z(t) = \boldsymbol{F}_z \boldsymbol{z}(t) \tag{3.8}$$

repräsentiert mit der Störeingangsmatrix $\boldsymbol{F}_z \in \mathbb{R}^{n \times l}$ und den Störamplituden $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^l$.

3.1.3 Aktuierung

Die bisher durchgeführte Modellierung beschränkt sich auf passive Tragwerke. Die Adaptivität von Tragwerken geht mit der Integration von Aktoren einher. Die Wirkung der Aktoren wird auf der rechten Seite der Modellgleichung (3.1) durch

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{u}(t) = \boldsymbol{B}_\mathrm{u} \boldsymbol{u}(t) \tag{3.9}$$

berücksichtigt. Dabei bestimmt die Matrix $\boldsymbol{B}_\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Verteilung der Wirkung der Stellgrößen $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ auf die Tragwerkselemente. Bei Aktoren mit zwei Angriffspunkten kann mit

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\mathrm{par} & \boldsymbol{B}_\mathrm{ser} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_\mathrm{par}(t) & \boldsymbol{u}_\mathrm{ser}(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{3.10}$$

zwischen paralleler $\boldsymbol{B}_\mathrm{par}\boldsymbol{u}_\mathrm{par}$ und serieller $\boldsymbol{B}_\mathrm{ser}\boldsymbol{u}_\mathrm{ser}$ Aktuierung unterschieden werden. Beide Aktuierungsprinzipien können in einen Verschiebungseingang überführt werden. Es zeigt sich,

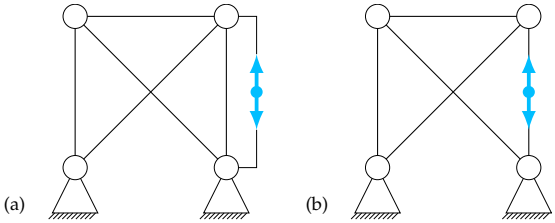


Abbildung 3.2: Parallele und serielle Aktuierung.
Beide Aktuierungsprinzipien sind mit Skizzen visualisiert. In (a) ist die parallele Aktuierung dargestellt und in (b) das serielle Prinzip. In Pfeilrichtung gerichtete Aktorkräfte sind positiv definiert.

dass das serielle Prinzip mit einem Verschiebungseingang Vorteile mit sich bringt. Das parallele und das serielle Aktuierungsprinzip sind in Abb. 3.2 schematisch dargestellt. Es wird die Konvention getroffen, dass Druckkräfte eines Aktors positiv und Zugkräfte negativ sind. Demnach sind die Kräfte in der Abbildung als Druckkräfte eingezeichnet. Diese Definition ist konsistent zur Integration in die Modellgleichungen (3.1). Diese Arten der Aktuierung werden im Demonstrator-Hochhaus und im Maßstabsmodell eingesetzt und deshalb im Folgenden näher erläutert.

3.1.3.1 Parallele Aktuierung

Bei der parallelen Aktuierung wird parallel zum vorhandenen Tragwerkselement ein Aktor angebracht (Abb. 3.2 a). Dadurch können auf die Knotenpunkte, über die der Aktor an das Tragwerk gekoppelt ist, Kräfte eingeprägt werden. Verlängert sich der Aktor, wird das parallele passive Element um den gleichen Wert gedehnt. Die Kraft, die zuvor nur über das passive Element abgetragen wurde, verteilt sich auf beide Elemente, abhängig von den Querschnitten und der Aktorkraft. Die Etablierung von parallelen Elementen in einem Tragwerk erscheint auf den ersten Blick widersinnig, da zusätzlich ein Paralleltragwerk aufgebaut wird. Diese Aktuierungsart eignet sich jedoch besonders in hochbelasteten Elementen, beispielsweise für Stützen, die das Eigengewicht tragen. Durch die parallele Ausführung kann der Großteil des permanent vorhandenen Eigengewichts über das passive Element abgetragen werden. Die zusätzliche Wirkung externer Lasten wird über den aktiven Teil manipuliert. Den Lastabtrag ausschließlich über einen Aktor zu realisieren, ohne paralleles Pendant, würde extrem hohe Aktorkräfte provozieren. Solche Aktorkräfte können unter zumutbarem Aufwand, hinsichtlich Kosten, Einbaugröße und Betrieb, nicht bereitgestellt werden. Aus konstruktiver Sicht fordert dieses Aktuierungsprinzip, dass der Aktor und das passive Element entlang einer Achse wirken. Andernfalls werden Momente ins Tragwerk eingeleitet.

Die parallele Aktuierung wird als Teil der rechten Seite $\boldsymbol{f}(t)$ von (3.1) modelliert. Wird ein paralleler Aktor i mit Krafteingang zwischen zwei Knoten installiert, bringt er eine Kraft in Richtung

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i = \frac{\Delta_i \boldsymbol{p}}{|\Delta_i \boldsymbol{p}|} \tag{3.11}$$

auf mit Δ_i nach (3.6) und $\boldsymbol{p}$ der Referenzpose. Die Referenzpose bezeichnet die absolute Position der Knoten im unverformten Zustand. Die Positionen der Einträge in Δ_i leiten sich entsprechend der Positionen der Freiheitsgrade beider Knoten ab, zwischen denen sich der Aktor befindet. Daraus ergibt sich der Eingangsvektor des i-ten Aktors zu

$$\boldsymbol{b}_i = \Delta_i^\mathsf{T} \bar{\boldsymbol{b}}_i. \tag{3.12}$$

Die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^{n \times m_{\text{par}}}$ aller m_{par} parallelen Aktoren mit Krafteingang ist definiert als

$$\boldsymbol{B}_{\text{par}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_{m_{\text{par}}} \end{bmatrix}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\text{par}} \tag{3.13}$$

und beschreibt, wie die parallelen Aktorkräfte $\boldsymbol{u}_{\text{par}}(t) \in \mathbb{R}^{m_{\text{par}}}$ auf das Tragwerk wirken. Die Indexsmenge $\mathcal{I}_{\text{par}}$ beinhaltet die parallelen Aktoren und deren Kardinalität entspricht der Anzahl an parallelen Aktoren $\left|\mathcal{I}_{\text{par}}\right| = m_{\text{par}}$.

In diesem Fall ist

$$\boldsymbol{f}_{\text{par}}(t) = \boldsymbol{B}_{\text{par}} \boldsymbol{u}_{\text{par}}(t). \tag{3.14}$$

Ein positiver Eintrage im Krafteingangsvektor $\boldsymbol{u}_{\text{par}}(t)$ bedeutet, dass dieser Aktor eine Druckkraft ausübt, ein negativer Eintragt bewirkt eine Zugkraft im Aktor. Eine Limitierung der Aktorkräfte $\boldsymbol{u}_{\text{par}}(t) \in [\boldsymbol{u}_{\text{par,min}}, \boldsymbol{u}_{\text{par,max}}]$ muss im Regelungskonzept berücksichtigt werden. Bei der parallelen Aktuierung entspricht der Aktorhub der Längung des parallelen passiven Elements. Die Kräfte im Aktor und passiven Teil unterscheiden sich. Beim parallelen Aktuierungsprinzip könnte der Krafteingang durch einen Verschiebungseingang ersetzt werden. Dabei entspricht der Verschiebungseingang der Längung des passiven Elements und provoziert eine zusätzliche Zwangsbedingung in den Modellgleichungen. Auf diesen Fall wird nicht weiter eingegangen, da diese in der vorliegenden Arbeit keinen Vorteil mit sich bringt.

Das parallele Aktuierungsprinzip ist für den Einsatz in druckschlaffen Elementen (Abschnitt 3.1.1.2) ungeeignet, da diese Elemente dadurch kurzgeschlossen würden. Ein paralleler Aktor würde die Wirkung des druckschlaffen Elements zwecklos machen. Druckschlaffe Elemente sind prinzipiell nicht zum Abtrag von Eigengewicht einsetzbar, da ein paralleler Aktor, der in diesem Fall ausschließlich Zugkräfte übertragen würde, den durch das parallele Element erhöhten Materialeinsatz nicht rechtfertigt.

3.1.3.2 Serielle Aktuierung

Der Begriff serielle Aktuierung beschreibt eine Aktorwirkung in Reihe mit einem passiven Element. Dabei wird ein Aktor direkt in den Lastpfad eines Elements integriert (Abb. 3.2 b). Unter der Annahme von Quasistationarität, d. h. die longitudinale Dynamik des passiven Elements wird vernachlässigt, entspricht die Kraft im Element genau der Aktorkraft und wird durch diese vorgegeben. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da die Schwingungsfrequenzen dieser longitudinalen Dynamik deutlich über denen des Tragwerks liegen und somit im Gesamtsystem nicht relevant sind. Die serielle Aktuierung eignet sich nicht für durch Eigengewicht hochbelastete Elemente, da diese bei Ausfall ein Sicherheitsrisiko darstellen. Serielle Aktoren werden jedoch besonders in Aussteifungselementen eingesetzt. Dadurch kann eine geringe Aktuierungskraft einen großen Effekt erzielen, was in der Auslegung der Aktoren zu ressourcensparenderen Ausführungen führt. Ist die Aktorkraft und damit die Elementkraft gleich Null, trägt dieses Element nicht zur Tragfähigkeit bei. Bei manchen Konfigurationen kann dies dazu führen, dass Tragwerke kinematisch werden (s. Anhang C.1).

Serieller Krafteingang

Die Integration der seriellen Aktorik mit Krafteingang in das Tragwerk unterliegt einem komplexeren Verhalten als die parallele Aktuierung mit Krafteingang. Die Elemente, in die serielle Aktoren installiert werden sollen, sind in der Massen- und Steifigkeitsmatrix bereits enthalten. Die Möglichkeit, diese Elemente im passiven Tragwerk auszusparen, damit die FE-Analyse durchzuführen und anschließend die Aktoren zu integrieren, kann zu kinematischen passiven Tragwerken führen, die erst über eine stabilisierende Regelung funktional sind. Dies ist nachteilig für Analysen von Tragwerken, wie sie im Bauingenieurwesen üblich sind. Zudem sind Aktorkräfte begrenzt und falls diese Limitationen erreicht werden, entfällt die Aktorwirkung auf das Tragwerk, da die Rückwirkung des Tragwerks die Elementkraft dominiert.

Bei seriell aktuierten Elementen ist die Elementkraft gleich der Aktorkraft. Die Kraft am seriellen Eingang $u_{\mathrm{ser},i}(t)$ entspricht der eines parallelen Krafteingangs $u_{\mathrm{par},i}(t)$ abzüglich der Elementkraft $k_i \boldsymbol{b}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{q}(t)$ des zuvor passiven Elements. Unter der oben beschriebenen Annahme der Quasistationarität ergibt sich für das i-te aktive Element:

$$u_{\mathrm{ser},i}(t) = u_{\mathrm{par},i}(t) - k_i \boldsymbol{b}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{q}(t), \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ser}}. \tag{3.15}$$

Die Steifigkeit von Element i ist k_i und $\boldsymbol{b}_i$ ist analog zu (3.12). Die Elemente mit seriellen Kraftaktoren sind durch die Indexmenge $\mathcal{I}_{\mathrm{ser}}$ beschrieben. Die Gleichung ist in Abb. 3.3 a und b veranschaulicht. Durch Auflösen nach $u_{\mathrm{par}}(t)$ ergibt sich für alle m_{ser} seriell aktuierten Elemente mit Krafteingang $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}(t) \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{ser}}}$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}}(t) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}^\mathsf{T} \boldsymbol{q}(t) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} = \mathrm{diag}(k_i), \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ser}}, \tag{3.16}$$

wobei $\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$ die Elementsteifigkeiten der entsprechenden Elemente umfasst. Die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}$ der seriellen Aktoren wird mit den Elementen aus dem Indexset $\mathcal{I}_{\mathrm{ser}}$ wie in der paralle-

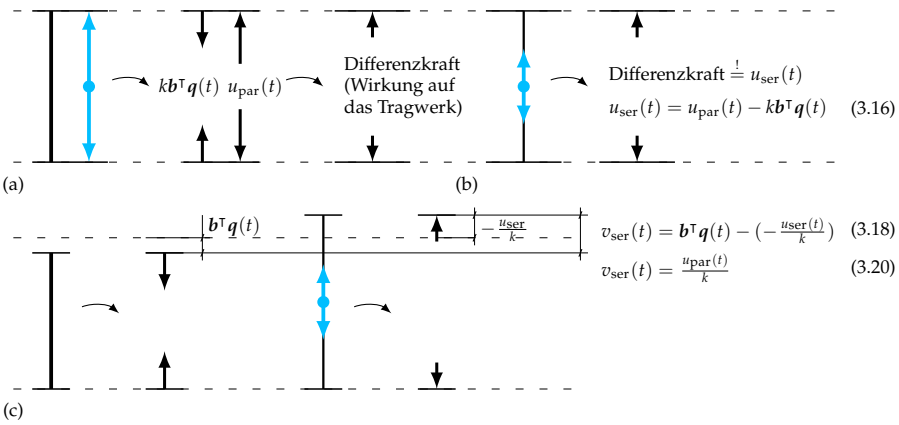


Abbildung 3.3: Veranschaulichungen zu paralleler und serieller Aktuierung.
In (a) ist die parallele Aktuierung mit Krafteingang gezeigt. Die Differenzkraft zwischen Elementraft $k\boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{q}(t)$ und paralleler Aktorkraft $u_{\text{par}}(t)$ wirkt auf das angrenzende Tragwerk. Um eine äquivalente Aktuierung durch einen seriellen Kraftaktor zu erhalten, muss in (b) die Differenzkraft auf das Tragwerk der parallelen Aktuierung gleich der einer seriellen Aktuierung $u_{\text{ser}}(t)$ sein. Dies ist die Veranschaulichung von (3.15). In (a) und (b) sind zur Übersichtlichkeit keine Verschiebungen eingezeichnet. In (c) wird auf den Verschiebungseingang bei der seriellen Aktuierung geschlossen. Die ursprüngliche Längung des passiven Elementteils $\boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{q}(t)$ und die Längung, die mit der Aktorkraft $u_{\text{ser}}(t)$ einhergeht, führen auf den notwendigen Verschiebungseingang $v_{\text{ser}}(t)$ eines seriellen Aktors. Diesen Zusammenhang erfasst (3.18). Durch Einsetzen von (3.15) folgt (3.20).

len Version (3.13) aufgebaut. Nach Einsetzen von (3.16) in (3.14) und (3.1) und anschließender Umformung resultiert

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + (\boldsymbol{D} - \alpha_1\boldsymbol{B}_{\text{ser}}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}_{\text{ser}}^\top)\dot{\boldsymbol{q}}(t)\\ &\quad + (\boldsymbol{K} - \quad \boldsymbol{B}_{\text{ser}}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}_{\text{ser}}^\top)\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{B}_{\text{ser}}\boldsymbol{u}_{\text{ser}}(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0, \quad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}_1.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Der Subtraktionsterm bei der Steifigkeitsmatrix entfernt den Anteil der zuvor passiven Elemente, die durch die seriellen Aktoren mit Krafteingang ersetzt werden. Darüber hinaus wird die Dämpfungsmatrix nach Rayleigh an die neue Konfiguration angepasst. Kommen im weiteren Verlauf der Arbeit serielle Aktoren mit Krafteingang zum Einsatz, sind die Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix entsprechend angepasst. Die Lösung des generalisierten Eigenwertproblems von (3.17) mit geänderter Steifigkeitsmatrix kann, im Fall eines kinematischen Tragwerks wie oben beschrieben, zu Nulleigenwerten führen. Durch eine Regelung können Eingangskräfte für die rechte Seite der Gleichung berechnet werden, wodurch sich das System stabilisieren lässt. Der kinematische Zustand eines Tragwerks entsteht in diesem Fall durch die Art der Modellierung und tritt in Realität durch den Einsatz mechanischer Anschläge nicht auf. Die Aktorkräfte der seriellen Aktoren unterliegen ebenfalls einer Begrenzung, sodass $\boldsymbol{u}_{\text{ser}}(t) \in [\boldsymbol{u}_{\text{ser,min}}, \boldsymbol{u}_{\text{ser,max}}]$ gilt.

Serieller Verschiebungseingang

Das duale Prinzip zur seriellen Aktuierung mit Krafteingang ist ein Verschiebungseingang. Die Distanz der Anschlussknoten $\boldsymbol{b}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{q}(t)$ ist die Summe der Aktorverlängerung $v_{\mathrm{ser},i}(t)$ und der Längung des passiven Elements $u_{\mathrm{ser},i}(t)/k_i$

$$\boldsymbol{b}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{q}(t) = v_{\mathrm{ser},i}(t) - \frac{u_{\mathrm{ser},i}(t)}{k_i}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{v,ser}}. \tag{3.18}$$

Die seriellen Aktoren mit Verschiebungseingang sind in der Indexmenge $\mathcal{I}_{\mathrm{v,ser}}$ spezifiziert. Die Gleichung ist in Abb. 3.3 c veranschaulicht. Prinzipiell gehört zu jeder aufgebrachten Aktorkraft eine sich konsistent einstellende Verschiebung – und umgekehrt, zu jeder aufgebrachten Verschiebung die dafür nötige Kraft. Bei einem parallelen Aktor mit Krafteingang $u_{\mathrm{par},i}(t)$ stellt sich eine Verschiebung $\boldsymbol{b}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{q}(t)$ ein. Nach (3.15) kann hierzu eine äquivalente serielle Aktuierung mit der Eingangskraft $u_{\mathrm{ser},i}(t)$ gefunden werden. Im seriellen Fall entspricht die Eingangskraft der sich einstellenden Elementkraft und führt zu einer zusätzlichen Elementlängung $u_{\mathrm{par},i}(t)/k_i$. Dieser Wert entspricht dem Aktorhub, der beim seriellen Modellierungsprinzip als Eingangsverschiebung dient. Die Kraft $u_{\mathrm{ser},i}(t)$ im seriellen passiven Teil wird durch die umgeformte Gleichung (3.15) ersetzt, sodass ein Zusammenhang zum parallelen Prinzip mit Krafteingang hergestellt ist

$$\boldsymbol{b}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{q}(t) = v_{\mathrm{ser},i}(t) - \Big(\frac{u_{\mathrm{par},i}(t)}{k_i} - \boldsymbol{b}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{q}(t)\Big), \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{v,ser}}. \tag{3.19}$$

In verktorieller Schreibweise ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}}(t), \quad \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} = \mathrm{diag}(k_i), \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{v,ser}}. \tag{3.20}$$

Die rechte Seite einer seriellen Aktuierung mit Verschiebungseingang $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}}(t) \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{v,ser}}}$ ist

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{v,ser}}(t) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}}(t). \tag{3.21}$$

Die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}$ setzt sich durch

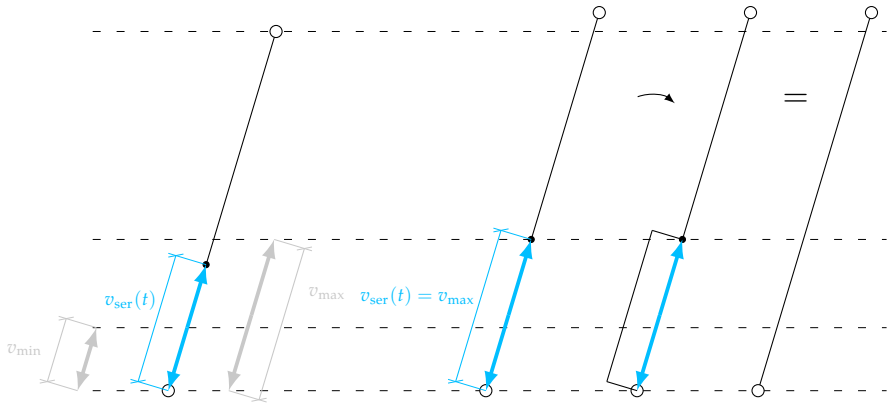
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_{m_{\mathrm{v,ser}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{v,ser}}, \tag{3.22}$$

zusammen. Es gilt die Stellgrößenbeschränkung $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}}(t) \in [\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser,min}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{ser,max}}]$. Zur Nutzung der seriellen Verschiebungseingänge werden in (3.10) $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}$ und $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}$ durch $\boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}$ und $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}}$ ersetzt.

Druckschlaffe Elemente mit serieller Kraftaktuierung und Stellgrößenbeschränkungen

Diese Modellierung ist auch für druckschlaffe Elemente geeignet. Die Stellgrößen sind auf Zugkräfte $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}(t) \in [\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser,min}}, \boldsymbol{0}]$ limitiert[1]. Dies führt zu einer zustandsabhängigen Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}(\boldsymbol{q}(t))$, da diese Elemente nur aktuiert werden können, wenn sie unter Zug stehen.

[1] Aktuierende Zugkräfte haben negative Werte, aktuierende Druckkräfte positive.

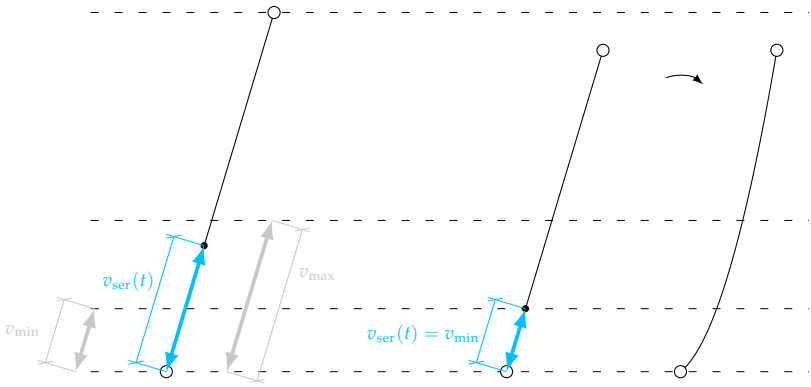


(a) $f_{\text{elem}} = u_{\text{ser}}(t) \in [u_{\text{ser,min}}, u_{\text{ser,max}}]$ (b) $f_{\text{elem}} = u_{\text{ser}}(t) = u_{\text{ser,min}}$ (c) $f_{\text{elem}} \geq u_{\min}$

Abbildung 3.4: Obere Begrenzung bei der seriellen Aktuierung druckschlaffer Elemente.
In (a) ist ein druckschlaffes Element zwischen zwei Knoten mit serieller Aktuierung (blau) dargestellt. Die Aktorlänge ist $v_{\text{ser}}(t) \in [v_{\text{ser,min}}, v_{\text{ser,max}}]$ und die Aktorkraft ist $u_{\text{ser}}(t) \in [u_{\text{ser,min}}, u_{\text{ser,max}}]$. Die Kraft im Element f_{elem} entspricht der Aktorkraft. Wird in (b) die maximale Zugkraft im Aktor $u_{\text{ser}}(t) = u_{\text{ser,min}}$ aufgebracht und durch die Rückwirkung vom Tragwerk auf den Aktor der maximale Aktorhub $v_{\text{ser}}(t) = v_{\max}$ erreicht, wirkt der aus Sicherheitsgründen installierte Anschlag, wie in (c) veranschaulicht. Der Aktor kann das Tragwerk temporär nicht mehr beeinflussen und das Element ist äquivalent zu einem passiven Element. Steigt die Rückwirkung des Tragwerks, kann die Elementkraft die maximale Aktorkraft übersteigen.

Zum sicheren Betrieb werden Anschläge installiert, sodass die Ausfahrlänge des Aktors limitiert ist ($\boldsymbol{v}_{\text{ser}}(t) \in [\boldsymbol{v}_{\text{ser,min}}, \boldsymbol{v}_{\text{ser,max}}]$). Im Arbeitsbereich des Aktors, d. h. ist weder eine Kraft- noch eine Verschiebungsbegrenzung des Aktors aktiv, ist (3.17) gültig (Abb. 3.4 a). Lässt jedoch die Rückwirkung des Tragwerks auf ein Element die Elementkraft über die maximale Zugkraft des Aktors steigen, wird der Aktor so weit ausgefahren, bis die maximale Aktorauslenkung erreicht ist (Abb. 3.4 b). Ist die Elementkraft größer, kann der serielle Krafteingang das Tragwerk temporär nicht mehr beeinflussen. Die Kraft wird über den sicherheitsbedingten Anschlag abgeleitet und das Element ist einem passiven gleichzusetzen (Abb. 3.4 c). Hierbei wird angenommen, dass die Aktoreinheit sehr viel steifer ist als der passive Teil. Folglich wird im temporären passivem Zustand die Elementsteifigkeit vom passiven Elementteil dominiert. Dies gilt auch bei seriellen Verschiebungseingängen, sodass hierbei auch eine Kraftbeschränkung bei der Stellgröße berücksichtigt werden muss.

Im Umkehrschluss, wenn die minimale Zugkraft im Aktor $u_{\text{ser}}(t) = u_{\text{ser,max}} = 0$ angefordert wird und die Rückwirkung des Tragwerks die untere Verschiebungsgrenze $\boldsymbol{v}_{\text{ser}}(t) = v_{\text{ser,min}}$ aktiviert, kann das Tragwerk wiederum nicht beeinflusst werden (Abb. 3.5). Dieser temporäre Zustand kann bei weiterer Rückwirkung zu Schlaffheit der Aktor-Element-Einheit führen. Die untere Verschiebungsbegrenzung sollte bei einem gut ausgelegten Tragwerk nie aktiv werden, da der Aktorhub entsprechend den zu erwartenden Auslenkungen am Tragwerk zu dimensionieren ist.



(a) $f_{\text{elem}} = u_{\text{ser}}(t) \in [u_{\text{ser,min}}, u_{\text{ser,max}}]$ (b) $f_{\text{elem}} = u_{\text{ser}}(t) = u_{\text{ser,max}} = 0$ (c) $f_{\text{elem}} = 0$

Abbildung 3.5: Untere Begrenzung bei der seriellen Aktuierung druckschlaffer Elemente.
In (a) ist ein druckschlaffes Element zwischen zwei Knoten mit serieller Aktuierung (blau) dargestellt. Die Aktorlänge ist $v_{\text{ser}}(t) \in [v_{\text{ser,min}}, v_{\text{ser,max}}]$ und die Aktorkraft ist $u_{\text{ser}}(t) \in [u_{\text{ser,min}}, u_{\text{ser,max}}]$. Die Kraft im Element f_{elem} entspricht der Aktorkraft. Ist in (b) die minimale Zugkraft im Aktor $u_{\text{ser}}(t) = u_{\text{ser,max}} = 0$ und der minimale Aktorhub $v_{\text{ser}}(t) = v_{\text{ser,min}}$ erreicht, wirkt über das Element keine Kraft auf das Tragwerk. Der Aktor kann das Tragwerk temporär nicht mehr beeinflussen, da das Element schlaff ist, wie in (c) veranschaulicht.

3.1.4 Mess- und Ausgangsgrößen

Für die dauerhafte Erfassung des Tragwerksverhaltens sind Sensoren eingebaut, wie in Abschnitt 2 beschrieben. Die von den Sensoren erfassten Messgrößen dienen als Grundlage für die Tragwerksregelung und -steuerung und können zur Überwachung des Systems herangezogen werden. Im Folgenden werden generell mögliche Messgrößen und deren Zweck aufgeführt, bevor die Sensorkonfiguration mit den Messgleichungen für die in dieser Arbeit betrachteten adaptiven Tragwerke und die Aktorik eingeführt werden.

Für die Gebrauchstauglichkeit sind hauptsächlich Verschiebungsmessungen und Beschleunigungsmessungen einzusetzen. Angrenzend daran ist die relative Verschiebung zweier Stockwerke zu überwachen, die darüber hinaus auch beispielsweise die Funktionalität von Aufzügen einschränken kann. Zu Erfassung der Tragwerksbewegung im Sinne der Standsicherheit sind neben den bereits erwähnten Positions- und Beschleunigungsmessung zusätzlich Geschwindigkeitsmessungen der Knotenpunkte interessant. Ein weiterer Bestandteil sind die wirkenden Kräfte und Dehnungen im Tragwerk, die eine Überlastung von Tragwerkselementen anzeigen.

3.1.4.1 Messgrößen

Die Systemantwort adaptiver Tragwerke wird in dieser Arbeit mit einem optischem System (s. Abb. 2.3) zur Verschiebungsmessung und Dehnungssensoren an ausgewählten diskreten Stel-

len erfasst. In Abhängigkeit der Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}(t)$ berechnen sich die Verschiebungen $\boldsymbol{y}_{\text{disp}}(t)$ mit Hilfe der linearen Messgleichung

$$\boldsymbol{y}_{\text{disp}}(t) = \boldsymbol{C}_{\text{disp}}\boldsymbol{q}(t). \tag{3.23}$$

Die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\text{disp}}$ ist eine Inzidenzmatrix, welche die zur Berechnung der jeweiligen Verschiebung relevanten Freiheitsgrade auswählt.

Eine einfache Möglichkeit zur Tragwerksüberwachung bieten Dehnungssensoren, die an den Tragwerkselementen angebracht werden. In der Ausgangsgleichung muss zwischen passiven Elementen – linearen und druckschlaffen – und den Elementen mit verschieden Aktuierungsprinzipien unterschieden werden.

Die Messgleichung der Dehnung $\boldsymbol{y}_\varepsilon(t)$ ergibt sich aus einem nichtlinearen Zusammenhang mit der Messfunktion $\boldsymbol{h}_\varepsilon(\cdot)$ allgemein zu

$$\boldsymbol{y}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{h}_\varepsilon(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{u}(t)). \tag{3.24}$$

Details zur Linearisierung sind im Anhang A.2.3 dargelegt. Über eine Taylor-Linearisierung um die Ruhelage von $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{0}$ kann (3.24) in die lineare Form

$$\boldsymbol{y}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{C}_\varepsilon\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}_\varepsilon\boldsymbol{u}(t) \tag{3.25}$$

überführt werden. Die Matrizen von (3.25) unterscheiden sich je nach Element und Aktuierungsart und setzen sich aus den folgenden Gleichungen zusammen.

Für lineare passive Elemente und lineare parallel aktuierte Elemente, die den Indexmengen $\mathcal{I}_{\text{p}}$ und $\mathcal{I}_{\text{par}}$ angehören, ist die Dehnung in einem Element

$$y_{\varepsilon,i}(t) = \boldsymbol{c}_\varepsilon\boldsymbol{q}(t), \quad i \in \mathcal{I}_{\text{p}} \cup \mathcal{I}_{\text{par}}. \tag{3.26}$$

Der Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}_{\varepsilon,\text{i}}$ ist die Zeile der linearen, passiven Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_\varepsilon$ für das Element i. Details zur Linearisierung der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_\varepsilon$ befinden sich in Abschnitt A.2.3. Im Folgenden wird ausschließlich die linearisierte Variante betrachtet, da nur diese zu den ebenfalls linearen Modellgleichungen (3.1) der FEM passt.

Bei passiven druckschlaffen Elementen erfasst die Dehnungsmessung den schlaffen und den linear gedehnten Fall. Ist ein solches Element gedehnt, gelten die linearen Gleichungen (3.26), bei negativer Längung ist das Element schlaff und ungedehnt. Daraus ergibt sich die Ausgangsgleichung für ein solches Element zu

$$y_{\varepsilon,i}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}\boldsymbol{q}(t), & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) \geq 0 \\ 0, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < 0 \end{cases}, \quad i \in \mathcal{I}_{\text{ds}} \tag{3.27}$$

mit $\Delta l_i(\boldsymbol{q}(t))$ nach (3.4) und der Indexmenge $\mathcal{I}_{\text{ds}}$ der druckschlaffen Elemente.

Darüber hinaus werden die Ausgangsgleichungen für Elemente mit seriellen Aktoren und Verschiebungseingang hergeleitet. Die Gesamtlängung setzt sich aus der Aktorlängung und der des passiven Elementteils zusammen. Für die Dehnung dieser Elemente, der durch eine Messung erfasst wird, gilt demnach

$$y_{\varepsilon,i}(t) = \boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}\boldsymbol{q}(t) + d_{\varepsilon,i}v_{\mathrm{ser},i}(t), \qquad \text{mit} \quad d_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{l_{0,i}} \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ser}}. \tag{3.28}$$

Der Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}$ entspricht der des linearen Falls aus (3.26), der Durchgriff ist $d_{\varepsilon,i}$ und die Referenzlänge des Elements $l_{0,i}$. Die Indexmenge $\mathcal{I}_{\mathrm{ser}}$ repräsentiert die Elemente mit seriellen Aktoren.

Für druckschlaffe Elemente mit seriellen Aktoren und einem Verschiebungseingang gilt für die Ausgangsgleichung analog

$$y_{\varepsilon,i}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}\boldsymbol{q}(t) + d_{\varepsilon,i}v_{\mathrm{ser},i}(t), & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) \geq 0 \\ 0, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < 0 \end{cases}, \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ds,ser}}, \tag{3.29}$$

wobei zusätzlich der schlaffe Fall auftreten kann. Der Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}$ und der Durchgriff $d_{\varepsilon,i}$ entsprechen der jeweilige Zeile aus (3.28). Die Indexmenge $\mathcal{I}_{\mathrm{ds,ser}}$ beinhaltet die druckschlaffen Elemente mit seriellen Aktoren. Mit der Annahme, dass der Aktorhub ausreichend dimensioniert wurde, sodass der minimale Aktorhub nie unterschritten wird und ein Schlaffwerden verhindert wird, tritt die zweite Zeile von (3.29) nicht ein. Wird der maximale Wert der Stellgröße erreicht, ändert sich die Gleichung wiederum nicht; der beschränkte Eingang $v(t)$ tritt in der Messgleichung auf. Über den Zusammenhang (3.19) kann diese Ausgangsgleichung auch mit einem seriellen Krafteingang aufgestellt werden.

In realistischen Tragwerken treten mehrere der aufgeführten Fälle ein und der Ausgangsvektor muss entsprechend zusammengestellt werden. Die Zeilen der Gleichung (3.25) setzen sich aus (3.26) bis (3.29) zusammen.

3.1.4.2 Ausgangsgrößen

Ausgangsgrößen werden im Gegensatz zu Messgrößen nicht direkt gemessen, sind jedoch in der regelungstechnischen Anwendung relevante Größen.

Die Elementlängungen $\boldsymbol{y}_{\mathrm{l}}(t)$ sind unter Wahrung der oben beschriebenen Fallunterscheidung

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{l}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{u}(t), \tag{3.30}$$

mit der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}$ und der Durchgriffsmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{l}}$. Diese lassen sich analog zur Dehnung beschreiben. Es werden die Fälle für passive, passive druckschlaffe, parallel aktuierte, seriell aktuierte und druckschlaffe seriell aktuierte Elemente unterschieden. Es gilt

$$y_{\mathrm{l},i}(t) = l_{0,i}y_{\varepsilon,i}(t) = \boldsymbol{c}_{\mathrm{l},i}\boldsymbol{q}(t) + d_{\mathrm{l},i}u_i(t). \tag{3.31}$$

Die Zeilen der Matrizen in (3.30) sind somit gegeben durch

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{l},i} = l_{0,i}\boldsymbol{c}_{\varepsilon,i} \qquad \text{und} \qquad d_{\mathrm{l},i} = l_{0,i}d_{\varepsilon,i}. \tag{3.32}$$

Die linearisierten Ausgangsgleichungen für die Elementkräfte $\boldsymbol{y}_{\mathrm{f}}(t)$ sind allgemein

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{f}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{u}(t) \tag{3.33}$$

mit der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{f}}$ und der Durchgriffsmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{f}}$. Deren Zusammensetzung ist durch die Fallunterscheidungen nach Elementart und Aktuierung gegeben.

Für passive lineare Elemente ist die Elementkraft

$$y_{\mathrm{f},i}(t) = \boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i}\boldsymbol{q}(t), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i} = k_i l_{0,i}\boldsymbol{c}_{\varepsilon,i}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{p}}. \tag{3.34}$$

Bei passiven druckschlaffen Elementen gilt

$$y_{\mathrm{f},i}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i}\boldsymbol{q}(t), & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) \geq 0 \\ 0, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < 0 \end{cases}, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ds}} \tag{3.35}$$

mit $\boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i}$ nach (3.34) und unter Berücksichtigung der Schlaffheit, bei der die Kraft Null ist.

Für Elemente mit parallelen Aktoren mit einem Krafteingang ist die linearisierte Ausgangsgleichung

$$y_{\mathrm{f},i}(t) = \boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i}\boldsymbol{q}(t) + d_{\mathrm{f},i}u_{\mathrm{par},i}(t), \qquad \text{mit} \qquad d_{\mathrm{f},i} = -1, \qquad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{par}}. \tag{3.36}$$

Durch die Parallelschaltung des passiven Elements mit einem Aktor kann die Elementkraft nicht auf die Freiheitsgrade zurückgeführt werden, da zwei Kraftpfade die Anschlussknoten verbinden. Durch die Vorgabe der Kraft im parallelen Eingang entsteht der Durchgriff.

Die Ausgangsgleichung bei einem linearen Element mit seriellem Aktor und Krafteingang ist

$$y_{\mathrm{f},i}(t) = d_{\mathrm{f},i}u_{\mathrm{ser},i}(t), \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ser}}. \tag{3.37}$$

Diese Gleichung gilt, solang keine Stellgrößenbeschränkungen vorliegen. Dies ist eine theoretischer Anschauung, da Aktorkräfte im praktischen Einsatz nicht unbeschränkt sind und somit das Tragwerk auf das betrachtete Element rückwirken kann. Übersteigt die Rückwirkung des Tragwerks die Aktorkraft, ähnelt solch ein Element einem passiven und es gilt (3.34). Darüber hinaus sind auch Verschiebungslimitationen zu beachten.

Bei druckschlaffen Elementen mit seriellen Aktoren mit Krafteingang haben die Beschränkungen Auswirkungen auf den Kraftsausgang. Somit sind die Ausgangsgleichungen in diesem Fall für solch ein Element

$$y_{\mathrm{f},i}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_{\mathrm{f},i}\boldsymbol{q}(t), & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) \geq 0 \\ d_{\mathrm{f},i}u_{\mathrm{ser},i}(t), & \Delta l_{i,\min} < \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < 0\ , \quad i \in \mathcal{I}_{\mathrm{ds,ser}} \\ 0, & \Delta l_i(\boldsymbol{q}(t)) < \Delta l_{i,\min}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Als Referenzlänge in (3.4) gilt die Elementlänge bei maximal ausgefahrenem Aktor. Die erste Zeile stellt den überdehnten Fall dar, sodass die maximale Aktorlänge überschritten wird und die Ausgangselementkraft der eines passiven Elements entspricht (Abb. 3.4 c). Im zweiten Fall dominiert die Aktorkraft die Elementkraft (Abb. 3.4 a). Beim dritten Fall wird das Element trotz Aktuierung schlaff; dies sollte in gut dimensionierten Tragwerken nicht eintreten (Abb. 3.5 c).

Liegt ein Verschiebungseingang vor, können die Ausgangsgleichungen mit Durchgriff über den Zusammenhang aus (3.19) umgeschrieben werden. Bei der verwiesenen Gleichung floss die Annahme der Quasistationarität ein, wodurch die Ergebnisse hier auch dieser Annahme unterliegen.

In einer Simulationsumgebung lassen sich die Ausgangsgrößen berechnen. Im Experiment können die nicht gemessenen Ausgangsgrößen am Tragwerk mittels Methoden zur Beobachtung und Schätzung bestimmt werden, wie beispielsweise in [157] für adaptive Tragwerke beschrieben. Bei den über den Durchgriff wirkenden Größen muss je nach Ausgang die Aktorkraft oder -längung gegeben oder bestimmt werden.

Bei der Betrachtung von linearen Elementen können Zusammenhänge zwischen den Eingangs- und Ausgangsmatrizen hergestellt werden. Wenn am Ausgang ausschließlich aktuierte Elemente betrachtet werden, gilt $\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}^{\mathsf{T}}$, wobei $\boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}$ die Eingangsmatrix der parallelen Aktuierung mit Krafteingang aus (3.13) ist. Die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}$ weist die Eingangskräfte dem Kräftegleichgewicht an den Knotenfreiheitsgraden zu. Die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}$ berechnet aus den Freiheitsgraden die Elementlängungen. Ein weiterer Zusammenhang gilt für die serielle Aktuierung mit Verschiebungseingang und den Elementkräften am Ausgang: $\boldsymbol{C}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}^{\mathsf{T}}$.

Für die Anwendung regelungstechnischer Methoden sind besonders die Knotenpositionen und -geschwindigkeiten von Interesse, da diese nach (4.28) den Zustand repräsentieren. Der vollständige Freiheitsgradevektor $\boldsymbol{q}(t)$ wird mit

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{disp,tot}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}}\boldsymbol{q}(t) \tag{3.39}$$

extrahiert, wobei $\boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}} = \boldsymbol{I}$. Die Ableitung $\boldsymbol{q}^{(i)}(t)$ für $i = [1,2]$ entspricht den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{vel}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}}\dot{\boldsymbol{q}}(t) \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{acc}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t). \tag{3.41}$$

Bei Fragen der Aktorplatzierung (s. Kapitel 5) wird z. B. eine Ausgangsgleichung verwendet, die nur die translatorischen Freiheitsgrade des Zustands auswählt

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{disp,t}}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,t}}\boldsymbol{q}(t). \tag{3.42}$$

3.1.5 Stationäre Lösung

Bei einem mechanischen System stellt sich unter konstanten Eingangsgrößen $\boldsymbol{u}_{(\cdot)} = \text{konst.}$ und Störgrößen $\boldsymbol{z} = \text{konst.}$ nach Abklingen transienter Schwingungen die Auslenkung $\boldsymbol{q}$ als stationärer Zustand ein[2].

Ausgehend von der linearen Form des mechanischen Systems (3.1) mit parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang sowie seriellen Aktoren mit Verschiebungseingang (s. (3.10)) erhält man durch Nullsetzen der zeitlichen Ableitungen und Auflösen nach den Freiheitsgraden die stationäre Lösung

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z}). \tag{3.43}$$

Die Existenz der inversen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ist durch deren positive Definitheit gewährleistet. Wirken kein Eingang und keine Störung $\boldsymbol{u}_{(\cdot)} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ entspricht die stationäre Lösung der trivialen Lösung $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$. Übt eine stationäre Last $\boldsymbol{z} = \text{konst.}$, z. B. Wind, eine Kraft auf das Tragwerk aus, stellt sich eine stationäre Auslenkung $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ ein.

Bei dem nichtlinearen mechanischen System mit druckschlaffen Elementen (3.7) mit Eingängen gemäß (3.10) ist eine Lösung durch Inversion der Steifigkeitsmatrix nicht möglich. Die stationäre Lösung $\boldsymbol{q}$ kann iterativ mit Hilfe numerischer Verfahren zur Nullstellensuche der stationären Gleichung

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{ser}} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z} = 0. \tag{3.44}$$

bestimmt werden.

Bei Gleichung (3.44) ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nicht gewährleistet. Es besteht die Möglichkeit, dass die stationäre Gleichung mehrere oder keine Lösung besitzt. Für die hier betrachteten adaptiven Tragwerke mit druckschlaffen Elementen wird davon ausgegangen, dass eine physikalisch sinnvolle Ruhelage existiert. Aus der intuitiven Anschauung führt eine auf das Tragwerk wirkende Last zu einer Auslenkung, die gegebenenfalls die druckschlaffen Elemente erschlaffen lässt. Da die druckschlaffen Elemente paarweise auf allen Seiten des Demonstrator-Hochhauses angebracht und entsprechend ausgelegt sind, wird von der Existenz einer Ruhelage ausgegangen.

Neben der Nullstellensuche kann ein Optimierungsproblem zur Berechnung der Ruhelage aufgestellt werden. Bei der Anwendung auf lineare Systeme ist die Lösung der Nullstellensuche

[2] Bei stationären Betrachtungen entfällt bei der Schreibweise in dieser Arbeit die Zeitabhängigkeit.

und der Optimierung, abgesehen von numerischen Effekten, identisch. Die Minimierung der euklidische Norm der Auslenkung $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q}^* = \arg\min \|\boldsymbol{q}\|_2 \tag{3.45}$$

$$\text{s.t.} \qquad \mathbf{0} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} - \boldsymbol{B}_{\text{par}}\boldsymbol{u}_{\text{par}} - \boldsymbol{B}_{\text{ser}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}_{\text{ser}} - \boldsymbol{B}_{\text{v,ser}}\boldsymbol{v}_{\text{ser}} - \boldsymbol{F}_{\text{z}}\boldsymbol{z} \tag{3.46}$$

unter der Nebenbedingung der stationären Gleichung führt zur optimalen stationären Lösung $\boldsymbol{q}^*$. Als Lösungsverfahren bietet sich bei diesem Typ adaptiver Tragwerke das Innere-Punkte-Verfahren an.

3.1.6 Experimentelle Untersuchung

Die experimentelle Untersuchung der passiven stationären Modellgleichungen (3.44) mit druckschlaffen Elementen erfolgt für das Maßstabsmodell. Die mit dem optischen Messsystem erfassten Verschiebungen der Knoten in der x-z-Ebene werden mit den vom Modell prädizierten Werten verglichen. Die Parameter für die Erstellung des Modells befinden sich im Anhang A.1.2. Die Referenzwerte sind diejenigen Verschiebungen der Knoten, die im unbelasteten Zustand erfasst werden. Auf diese Nulllage werden alle Messwerte bezogen. Es wirkt eine Last von 39 N in x-Richtung, die mittig am oberen Ende des Tragwerks angreift. Die Last an der Spitze hat den größten Effekt auf das Tragwerk und wird daher zur Auswertung herangezogen.

Die gemessenen und mittels Modell prädizierten Auslenkungen des Maßstabsmodells unter Last sind in Abb. 3.6 dargestellt. Der belastete passive Zustand ist ergänzend in Abb. 6.3 b abgebildet. Qualitativ kann das Modell die Verschiebung unter Last gut vorhersagen. Die mittlere absolute Abweichung zwischen Modell und Messung in x-Richtung beträgt 2,18 cm. Im mittleren Teil des Maßstabsmodells ist die quantitative Übereinstimmung der Werte sehr gut. Im unteren Bereich des Maßstabsmodells ist die hohe relative Abweichung den kleinen Absolutwerten geschuldet. Die Verschiebungen werden hier unterschätzt. Im oberen Bereich werden die Verschiebungen vom Modell überschätzt. Ausgehend von den Komponenten ist die Steifigkeit am realen Maßstabsmodell in allen Stützen durch die gewählten Spiralfedern identisch. Durch die konstruktive Ausführung der aktuierten und nicht aktuierten Stützen ergeben sich jedoch Unterschiede. Die leicht erhöhte Steifigkeit der passiven Stützen, die hauptsächlich in den oberen beiden Modulen verbaut sind, bedingen die geringeren Verschiebungen im experimentellen Aufbau. Des Weiteren ist beim ersten Modul zu erkennen, dass die gemessene Verschiebungen eher in x-Richtung zu verzeichnen sind bei gleichzeitig geringen Werten in z-Richtung. Hier überwiegt in der Realität die Verrautung innerhalb eines Moduls verglichen mit einer Biegung, wie vom Modell prädiziert. Dies hängt mit den gelenkigen Verbindungen zwischen Stützen und Platten sowie mit der sehr geringen Vorspannung in den diagonalen Auskreuzungen zusammen. Darüber hinaus tritt in den Stützen, aktiv wie auch passiv, durch die Gleitlager und in den aktiven Komponenten durch die Kugelgewindetriebe eine hohe Haftreibung auf. Dies führt dazu, dass kleine Bewegungen nicht auftreten und erst nach Überwinden der Losbrechkraft eine Verschiebung auftritt. Dem wurde bei der Versuchsdurchführung in der Transitionsphase durch leichte Vibrationen entgegengewirkt, dieser Effekt lässt sich jedoch nicht vollständig eliminieren.

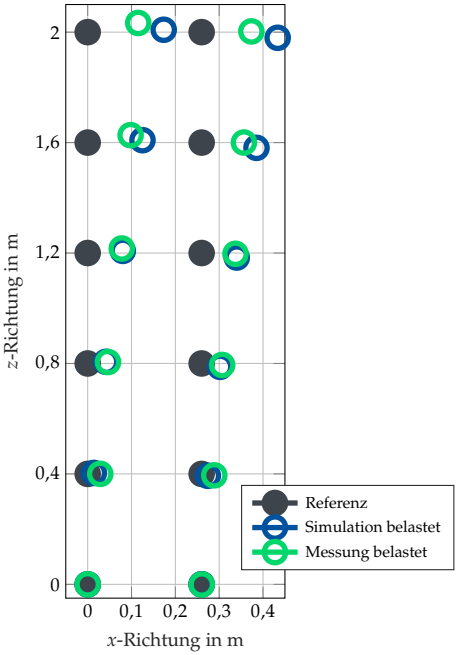


Abbildung 3.6: Messungen und Modellvorhersage unter einer statischen Last.
Die gemessenen Positionen sind in der x-z-Ebene des Maßstabsmodells für den Referenzzustand (grau), den belasteten gemessenen Zustand (grün) und den mittels Modell prädizierten Zustand (blau) dargestellt.

Mit dem theoretisch hergeleiteten FE-Modell des Maßstabsmodells können Verschiebungen durch eine Last akzeptabel prädiziert werden. Eine genauere Modellierung der adaptiven Federstütze (s. Abschnitt 2.2) würde die Genauigkeit erhöhen, geht jedoch mit einer erheblich höheren Komplexität einher. Die adaptive Federstütze ist im Maßstabsmodell eine Maßnahme zur Skalierung und tritt in realen adaptiven Tragwerken nicht auf, weshalb auf diesen Schritt verzichtet wurde.

3.2 ELEMENTE MIT INTEGRIERTEN FLUIDAKTOREN

In Abgrenzung zur Aktuierung ganzer Tragwerke wird die verteilte Momentenaktuierung einzelner Elemente betrachtet. Diese Elemente können prinzipiell in ein Tragwerk integriert werden. Hierbei wird entlang eines Elements ein Moment zur Aktuierung eingebracht. Dabei werden Elemente betrachtet, die dieses Moment aufnehmen können, wodurch Stabelemente, die nur Zug- und Druckkräfte übertragen, ausgeschlossen sind. In Frage kommende Elemente

transferieren Biegemomente, wie beispielsweise Balken oder Platten. Eine typische Anwendung sind horizontal verlaufende Balken, die als Auflagefläche dienen, oder Plattenelemente, die als Zwischenböden eingesetzt werden. Hierbei wird das Element selbst hinsichtlich der Biegung beeinflusst und über die Auflager kann das umliegende Tragwerk aktuiert werden. Die verteilte Momentenaktuierung wird am Balken mit integrierten Fluidaktoren angewendet. Im Folgenden werden die allgemeinen stationären Modellgleichungen beschrieben. Die zeitliche Abhängigkeit wird nicht betrachtet, da die Dynamik des hydraulischen Eingangs deutlich unterhalb der Bandbreite des Balkens liegt.

3.2.1 Verteiltparameterische Modellgleichungen

3.2.1.1 Allgemeine Modellgleichungen mit verteilten Parametern

Der statische Verformungszustand $w(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ eines adaptiven Elements entlang der Ortskoordinate $\boldsymbol{x} \in \Omega$, mit dem Definitionsbereich Ω, wird mit einer partiellen Differentialgleichung (PDGL) und einer Randbedingung (RB)

$$\text{PDGL}: \qquad \alpha \mathcal{D}_{\boldsymbol{x}} w(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \delta\Omega \tag{3.47}$$

$$\text{RB}: \qquad \mathcal{R}_{\boldsymbol{x}} w(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \delta\Omega \tag{3.48}$$

mit dem Differentialoperator $\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$ beschrieben. Der Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ skaliert das Modell abhängig vom physikalischen Verhalten des zugrunde liegenden mechanischen Systems. Die Aktuierung wird durch den örtlich verteilten Eingang in $u(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathcal{U}$ dargestellt, wobei $\mathcal{U}$ die realisierbaren Eingänge enthält. Die externe Last/Störung wird durch $z(\boldsymbol{x})$ repräsentiert. Die Randbedingung (3.48) mit dem Randoperator $\mathcal{R}_{\boldsymbol{x}}$ komplettiert die Systembeschreibung. Die Ausgangsgleichung $y = \mathcal{Y}_x w(\boldsymbol{x})$, mit dem Ausgangsoperator $\mathcal{Y}_x$, kann beispielsweise die Verformung $y = w(\boldsymbol{x})$ entlang der Ortskoordinate beschreiben. Diese Systembeschreibung wird im Folgenden für einen adaptiven Balken mit integrierten Fluidaktoren aufgestellt. Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist in [76] aufgezeigt, worin eine adaptive Platte betrachtet wird.

3.2.1.2 Balkengleichung mit integrierten Fluidaktoren

Die verwendete Balkengleichung folgt den Annahmen von Bernoulli, d.h.

- der Balken ist schlank, d. h. die Länge ist mindestens zehnmal größer als die Querschnittsabmessungen,
- der Balkenquerschnitt ist im verformten und unverformten Zustand orthogonal zur Balkenachse und eben,
- die Verformung durch Biegung ist klein im Verhältnis zur Länge,
- und es handelt sich um ein isotropes Material.

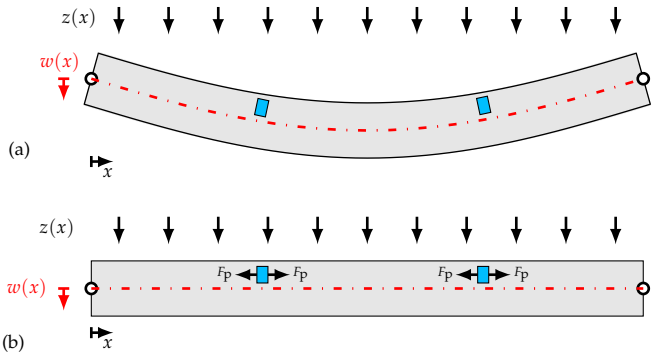


Abbildung 3.7: Prinzipskizze eines Balkens mit integrierten Fluidaktoren.
In (a) ist der belastete Balken skizziert. In (b) wird die Durchbiegung mit Hilfe der integrierten Druckkammern reduziert.

Die stationäre Euler-Bernoulli Balkengleichung nach [142] beschreibt die Verformung $w(x) \in \mathbb{R}$ der neutralen Faser entlang der normierten Ortskoordinate $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^4 w(x)}{\mathrm{d}x^4} = u(x) + z(x), \qquad 0 < x < 1. \tag{3.49}$$

Die Normierung erfolgt mit der Balkenlänge L, wodurch die Ortskoordinate ohne Einheit ist. Der Skalierungsfaktor $\alpha = \frac{EI}{L^4}$ hängt vom Elastizitätsmodul E, vom Flächenträgheitsmoment I und, durch die Normierung, von der Balkenlänge ab. Der Eingang, hervorgerufen durch die Druckkammern, wird in $u(x)$ erfasst. Die verteilte Last ist durch $z(x)$ repräsentiert. Zur vollständigen Beschreibung der Verformung werden Randbedingungen für einen beidseitig gelenkig gelagerten Balken festgelegt

$$w(0) = 0, \qquad w(1) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1} = 0. \tag{3.50}$$

Folglich treten an den Rändern keine Verformungen und keine Momente auf. Eine beispielhafte reale Ausführung entspricht idealisiert einem Balken, der beidseitig aufgelegt ist. Ein Balken mit integrierten Fluidaktoren ist in Abb. 3.7 a im passivem und in b im aktuierten Zustand skizziert.

3.2.1.3 Örtlich verteilter Eingang

Der Eingangsterm der rechten Seite wird durch die einzelnen Druckkammern und deren Drücke und Abmessungen bestimmt. Durch die Anwendung des Schnittprinzips auf den adaptiven Balken werden das Kräfte- und Momentengleichgewicht durch eine Druckkammer in Abb. 3.8 a - c betrachtet. In diesem Gleichgewichtszustand erzeugt die Druckkammer eine Normalkraft $F_\mathrm{p} = A_\mathrm{p} p$, die abhängig von der Fläche der Kammer A_p und dem innen herrschenden Druck p ist.

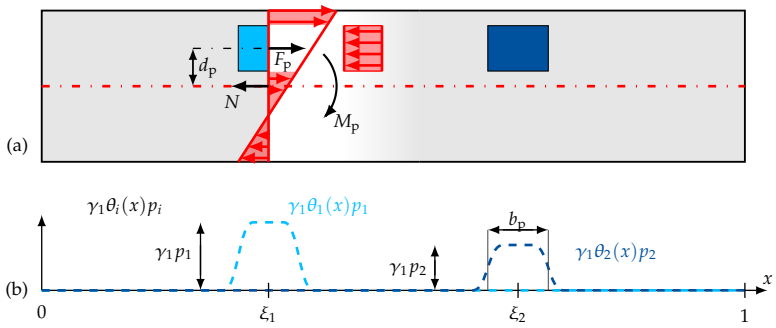


Abbildung 3.8: Schnittprinzip für die Druckkammer eines adaptiven Balkens.
In (a) ist ein Balken mit zwei integrierten Fluidaktoren gezeigt. Der Momentenverlauf durch eine Druckkammer ist in rot eingezeichnet. Der Abstand zwischen neutraler Faser und Mitte der Druckkammer beträgt d_p. Die Normalkräfte des Balkens N und der Druckkammer F_p sind eingezeichnet. Daraus ergibt sich das resultierende Ersatzmoment M_p. In (b) ist die stetig differenzierbare Approximationsfunktion $\gamma_1\theta_i(x)p_i$ des Momentenverlaufs für zwei Druckkammern $i = 1{,}2$ an den Positionen ξ_i über die normierte Balkenlänge dargestellt.

Durch die Position der Kammer in der Druckzone oberhalb der neutralen Faser wird ein Moment induziert, wobei der Bezugspunkt dem Durchstoßpunkt der neutralen Faser durch die Fläche entspricht. Der Abstand zwischen der neutralen Faser und der Mitte der Druckkammer ist d_p. Das induzierte Moment einer Druckkammer ist konstant über deren Breite und beträgt $M_\mathrm{p} = F_\mathrm{p} d_\mathrm{p}$. An Stellen entlang des Balkens ohne Druckkammer herrscht kein Moment $M_\mathrm{p} = 0$. Um einen kontinuierlich differenzierbaren Eingang zu erhalten, wird der Momentenverlauf (Abb. 3.8 d) der i-ten Druckkammer mit Hilfe einer stetig differenzierbaren Funktion $\theta_i(x)$ approximiert.

Der Eingangsverlauf ist für alle m Druckkammern durch

$$u(x) = \tilde{\gamma}_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}^2\theta_i(x)}{\mathrm{d}x^2} p_i, \tag{3.51}$$

mit $\tilde{\gamma}_1 = A_\mathrm{p} d_\mathrm{p} / L^2$ gegeben. Der Druck in der i-ten Kammer ist p_i. Für zwei Druckkammern an den Positionen ξ_i, $i = 1{,}2$ ist der approximierte Momentenverlauf in Abb. 3.8 d illustriert.

3.2.1.4 Örtlich verteilte Last

Die Biegelinie des passiven ($u(x) = 0$) Balkens nach (3.49) und (3.50) ist durch eine Last $z(x)$ eindeutig definiert. Die wirkenden Lasten sind meist unbekannt und variieren über die Lebenszeit eines adaptiven Balkens. Die Auswirkung dieser Störungen wird idealerweise von der statischen Lastkompensation neutralisiert. Bei der Modellierung werden l Einzellasten an den Stellen x_k mit

$k = 1...l$ entlang des Balkens angenommen, die die Lastamplituden s_k aufweisen. Im Störmodell lassen sich die Einzellasten mit der Dirac-Funktion beschreiben mit

$$z(x) = \sum_{k=1}^{l} \delta(x - x_k) s_k. \tag{3.52}$$

Die Anzahl der Einzellasten l kann beliebig hoch gewählt werden, um Lastprofile hinreichend genau abzubilden. Bei a priori Wissen über die Lastverteilung kann diese für $z(x)$ eingesetzt werden. Weiterhin kann $z(x)$ über Störmoden approximiert werden.

3.2.2 Analytische Lösung

Die Berechnung der analytischen Lösung, im Sinne eines *late lumping* Ansatzes, gewährleistet später die flexible Anwendbarkeit der Methoden, beispielsweise in Abschnitt 5.2 bei der statischen Aktorplatzierung. Die Durchbiegung $w(x)$ des Balkens entlang der örtlichen Variable x kann mittels Superpositionsprinzip separat für den Eingang und die Last gelöst werden

$$w(x) = w_{\mathrm{u}}(x) + w_{\mathrm{z}}(x). \tag{3.53}$$

Das resultierende Eingangsprofil für $z(x) = 0$ ist $w_{\mathrm{u}}(x)$ und das Lastprofil für $u(x) = 0$ ist $w_{\mathrm{z}}(x)$.

Das Profil $w_{\mathrm{u}}(x)$ lässt sich durch vierfache Integration von (3.49) nach x, mit vorherigem Einsetzen von (3.51), lösen

$$w_{\mathrm{u}}(x) = \int_0^x \int_0^\eta \sum_{i=1}^{m} (\gamma_1 \theta_i(\zeta)) p_i \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0. \tag{3.54}$$

Der Skalierungsfaktor $1/\alpha$, sowie die Normierung mit der Balkenlänge L gehen in $\tilde{\gamma}_1$ auf; es gilt $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1/\alpha$. Die Integrationskoeffizienten werden mit Hilfe der Randbedingungen (3.50) bestimmt

$$\begin{aligned} &c_0 = 0, && c_1 = -\sum_{i=1}^{m} \Theta_i p_i && \text{mit} && \Theta_i = \int_0^1 \int_0^\eta \gamma_1 \theta_i(\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta, \\ &c_2 = 0, && c_3 = 0 && \text{da} && \theta_i(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Der Koeffizient c_3 verschwindet, da am Rand keine Druckkammern integriert werden können, wodurch $\theta_i(1) = 0$ gilt. Das Eingangsprofil ist

$$w_{\mathrm{u}}(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x) p_i \quad \text{mit} \quad \beta_i(x) = \int_0^x \int_0^\eta \gamma_1 \theta_i(\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta - \Theta_i x. \tag{3.56}$$

Das Lastprofil $w_z(x)$ wird analog zu oben berechnet, indem (3.49) und (3.52) genutzt werden, sodass

$$w_z(x) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\gamma_2}{6} \langle x - x_k \rangle^3 s_k + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{3.57}$$

Es gilt $\gamma_2 = 1/\alpha$. Der Operator $\langle \cdot \rangle$ bezeichnet die Föppl-Klammer[3]. Die Integrationskoeffizienten werden durch die Randbedingung (3.50) erhalten

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \qquad & a_1 &= \sum_{k=1}^{l} \frac{\gamma_2}{6} \Big(\langle 1 - x_k \rangle - \langle 1 - x_k \rangle^3 \Big) s_k, \\ a_2 &= 0, \qquad & a_3 &= -\sum_{k=1}^{l} \frac{\gamma_2}{6} \langle 1 - x_k \rangle s_k. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Daraus folgt für das Lastprofil

$$w_z(x) = \sum_{k=1}^{l} \sigma_k(x) s_k \quad \text{mit} \quad \sigma_k(x) = \frac{\gamma_2}{6} \Big(\langle x - x_k \rangle^3 - \langle 1 - x_k \rangle x^3 + \Big(\langle 1 - x_k \rangle - \langle 1 - x_k \rangle^3 \Big) x \Big). \tag{3.59}$$

Einsetzen von (3.56) und (3.59) in (3.53) führt zur analytischen Lösung der Biegelinie. Wird dies in eine vektorielle Schreibweise überführt, gilt

$$w(x) = \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}(x) \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\sigma}(x)^\mathsf{T} \boldsymbol{s} \tag{3.60}$$

mit der Eingangscharakteristik $\boldsymbol{\beta}(x) = [\beta_1(x), \beta_2(x), ..., \beta_m(x)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$, den Eingangdrücken $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, ... p_m]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\sigma}(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), ... \sigma_l(x)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^l$ und den Störamplituden $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, ... s_l]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^l$.

Eine Erweiterung dieses Problems ist das Hintereinanderschalten mehrerer Balkenelemente. An den Koppelstellen ergeben sich durch Lagerung entweder neue Randbedingungen, sodass die Elemente separat betrachtet werden können, oder Übergangsbedingungen, die eine gemeinsame Untersuchung erfordern.

[3] Föppl-Klammer (engl. Macaulay brackets) nach [45]: $\langle x - a \rangle^i = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ (x-a)^i & \text{für } x > a \end{cases}$

4 SYSTEMANALYSE UND ORDNUNGSREDUKTION

Auf Basis der Modellgleichungen aus dem vorherigen Kapitel erfolgt die Untersuchung systemtheoretischer Eigenschaften adaptiver Tragwerke. Darauf aufbauend werden niederdimensionale Entwurfsmodelle als Grundlage für die folgenden Kapitel hergeleitet.

Die Forschungsziele dieses Kapitels sind:

- Schwingungsanalyse und modale Ordnungsreduktion von Modellen adaptiver Tragwerke unter Berücksichtigung druckschlaffer Elemente und der daraus resultierenden Nichtlinearität des Tragwerksverhaltens.
- Substrukturierung von Tragwerksmodellen für den dezentralen Regelungsentwurf.
- Analyse des Zusammenhangs zwischen den Konzepten der Redundanz aus dem Bauingenieurwesen und der stationären Lösung aus der Systemtheorie.

In Abschnitt 4.1 wird das Schwingungsverhalten linearer Tragwerksmodelle mit Hilfe der Modalanalyse untersucht. Für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen wird eine Hauptkomponentenanalyse (POD) durchgeführt, womit Schwingungsmoden nichtlinearer Tragwerksmodelle berechnet werden können. Der Vergleich beider Modenformen zeigt Zusammenhänge zwischen der linearen und nichtlinearen Modellierungsart auf.

Die hochdimensionalen Modellgleichungen sind wichtig für die Systemanalyse adaptiver Tragwerke. Für die Verwendung als Entwurfsmodell muss die Komplexität durch Reduktion der Modellgröße verringert werden. In Abschnitt 4.2 wird daher eine Modellordnungsreduktion auf Basis der zuvor berechneten Schwingungsmoden durchgeführt. Dabei kommen sowohl die linearen Eigenmoden als auch die nichtlinearen POD-Moden zum Einsatz [146].

Des Weiteren kann es aufgrund der großen Abmessungen von Bauwerken sinnvoll sein, das Gesamttragwerk in Teiltragwerke zu unterteilen. Diese Modularität kann die Zuverlässigkeit steigern, da bei Ausfall eines Subsystems die anderen die Funktionsfähigkeit weitestgehend erhalten. Durch diese Substrukturierung entstehen kleinere Teilmodelle, die bei einem dezentralen Regelungsentwurf genutzt werden können. Substukturierte Modelle für den dezentralen Regelungsentwurf finden sich in Abschnitt 4.2.3, wobei diese mit Hilfe der Craig-Bampton-Methode reduziert werden [147, 148].

Schließlich werden die Modelle in Abschnitt 4.3 in den Zustandsraum überführt, sodass systemtheoretische Eigenschaften in Abschnitt 4.4 untersucht werden können.

Zum Abschluss des Kapitels wird in Abschnitt 4.5 der Zusammenhang zwischen der strukturmechanischen Eigenschaft der Redundanz und den stationären Modellgleichungen untersucht. Insbesondere die hergeleitete Kraftredundanzmatrix lässt Rückschlüsse auf die Nutzung verschiedener Aktuierungsprinzipien zu. Es zeigt sich eine disziplinübergreifende Relevanz des Redundanzkonzepts auch in Bezug auf die optimale Aktorplatzierung [149].

4.1 SCHWINGUNGSANALYSE

In diesem Abschnitt wird das Schwingungsverhalten von linearen und nichtlinearen adaptiven Hochhaustragwerken untersucht. Bei linearen Modellen liefert die Lösung des Eigenwertproblems die Eigenmoden, welche zur Systemanalyse, Ordnungsreduktion und Regelung herangezogen werden können. Auf Basis der Eigenmoden können die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Modaltransformation entkoppelt werden. Die Superposition der Einzellösungen beschreibt das Verhalten des Gesamtsystems. Darüber hinaus wird aufgrund der Invarianz keine Energie zwischen den Eigenmoden transferiert.

Bei nichtlinearen Systemen ist dieses Konzept nicht direkt anwendbar. Es besteht die Möglichkeit, die Eigenmoden des um einen Arbeitspunkt linearisierten Systems zu bestimmen. Die Gültigkeit beschränkt sich dann auf ein Gebiet um diesen Arbeitspunkt. In der Praxis funktioniert dieser Ansatz häufig ausreichend gut. Die Erweiterung auf nichtlineare Eigenmoden nach [71] ist möglich, zeigt jedoch das komplexe Systemverhalten nichtlinearer Systeme mit Bifurkationen, Grenzzyklen usw. Die Eigenschaften der Superposition und Invarianz gelten nicht für nichtlineare Systeme [72]. Einen datenbasierten Ansatz bietet die POD, die die beste lineare Approximation eines nichtlinearen Modells berechnet. Sie ist eine gängige Methode in der Strukturdynamik und eignet sich zudem zur Ordnungsreduktion, wofür sie für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen im weiteren Verlauf angewendet wird.

4.1.1 Modalanalyse

Ausgehend von den Modellgleichungen (3.1) wird das homogene Problem, d. h. ohne Eingang ($\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$) und ohne externe Störungen ($\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0}$), sowie ohne Dämpfung betrachtet

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{0}, \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0, \quad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}_1. \tag{4.1}$$

Die Lösung dieser DGL mit dem harmonischen Ansatz $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{\phi}_i e^{j\omega_i t}$ und dessen Ableitungen führt durch Einsetzen und unter Ausnutzung von $e^{j\omega_i t} \geq 0$ zu dem generalisierten Eigenwertproblem

$$(\boldsymbol{K} - \omega_i^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{0}, \qquad i \in \mathbb{N}, i \in [1,n]. \tag{4.2}$$

Dabei ist $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ eine Eigenfrequenz, von denen im hier betrachteten konzentriertparametrischen Fall eine endliche Anzahl n existiert. Zusammen mit dem entsprechenden Eigenvek-

tor $\boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{R}^n$ bildet ein Paar ω_i und $\boldsymbol{\phi}_i$ eine Eigenmode, deren Gesamtheit das Schwingungsverhalten charakterisieren. Die Eigenfrequenzen werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach aufsteigender Eigenfrequenz sortiert, sodass $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$. Die Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$ sind paarweise orthogonal zueinander und nicht eindeutig, da sie skalierbar sind. Typischerweise werden sie auf die Massenmatrix normiert, so dass

$$\boldsymbol{\phi}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij} \omega_i^2, \qquad \text{mit} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.3}$$

gilt, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Mit $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix}$ führt die Orthogonalität der Moden zur Massen- und Steifigkeitsmatrix zu den Diagonalmatrizen

$$\boldsymbol{\Phi}^\mathsf{T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Phi}^\mathsf{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}(\omega_i^2), \qquad i \in \mathbb{N}, i \in [1,n]. \tag{4.4}$$

Durch das generalisierte Eigenwertproblem (4.2) können nur zwei Matrizen (Massen- und Steifigkeitsmatrix) diagonalisiert werden. Eine allgemeine Dämpfungsmatrix wird durch die Multiplikation mit der Eigenvektormatrix $\boldsymbol{\Phi}$ und deren Transponierter nicht zwingend diagonalisiert [29]. Durch die Wahl der Rayleigh-Dämpfung (3.2) und deren Transformation

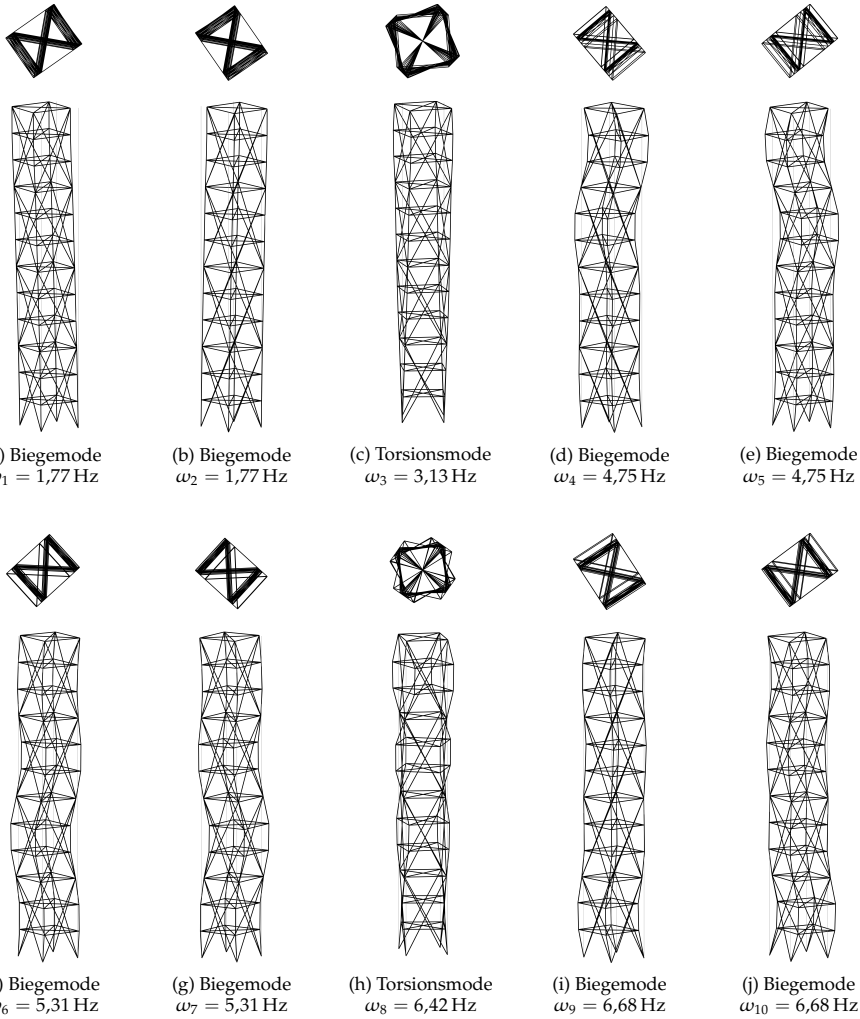
$$\boldsymbol{\Phi}^\mathsf{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}(2\zeta_i \omega_i), \quad i \in \mathbb{N}, i \in [1,n], \quad \text{mit} \quad \zeta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\omega_i} + \alpha_1 \omega_i\right) \tag{4.5}$$

ist die Diagonalisierung gewährleistet. Bei einer abweichenden Wahl der Dämpfung kann die Modalanalyse nicht über das generalisierte Problem erfolgen, sondern über die Zustandsraumdarstellung (4.28) und die Lösung eines gewöhnlichen Eigenwertproblems[1]. Bei der modalen Betrachtung wird davon ausgegangen, dass keine Energie zwischen den Moden transferiert wird und diese unabhängig sind. Tragwerke werden so ausgelegt, dass keine Starrkörpermoden vorliegen. Starrkörpermoden zeigen sich beispielsweise durch eine fehlende Lagerung, wodurch ein Tragwerk frei im Raum bewegt werden kann ohne dass Verformungen, Dehnungen oder Spannungen auftreten. Dies äußert sich bei einer Modalanalyse durch Null-Eigenwerte $\omega = 0$. Die Anzahl der Null-Eigenwerte entspricht den im Raum möglichen Verschiebungsrichtungen, die nicht durch eine Lagerung blockiert sind.

Eigenmoden des Demonstrator-Hochhauses

Am unbelasteten linearen Modell des Demonstrator-Hochhauses wird eine Modalanalyse durchgeführt. Die Lagerung des Tragwerks an den vier Auflagerpunkten in alle translatorischen Richtungen (x-, y-, z-Richtung) und die rotatorische Bewegungsrichtung um die Hochachse (r_z-Richtung) unterbindet Starrkörpermoden. Die ersten zehn Moden des Demonstrator-Hochhauses sind in Abb. 4.1 abgebildet. Um die Modenform erkennbar zu illustrieren, beträgt die maximale Auslenkung einer Mode 1 m. Durch die dreidimensionale Ausprägung des ex-

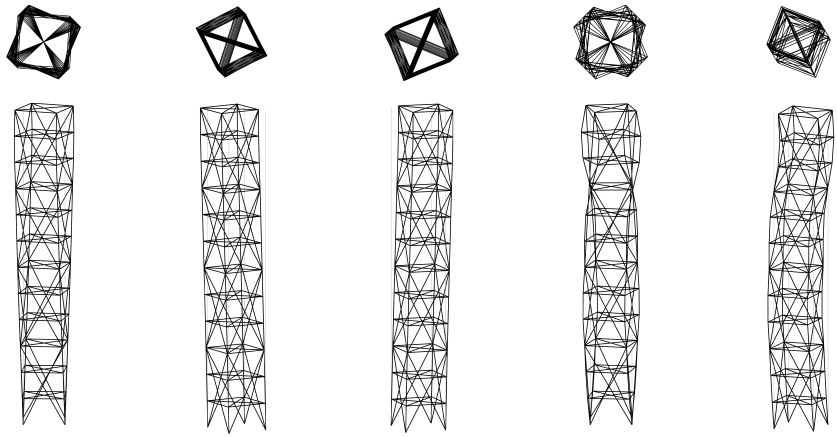
[1] Hierbei sind in (4.2) für $\boldsymbol{K}$ die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ und für $\boldsymbol{M}$ die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ einzusetzen.



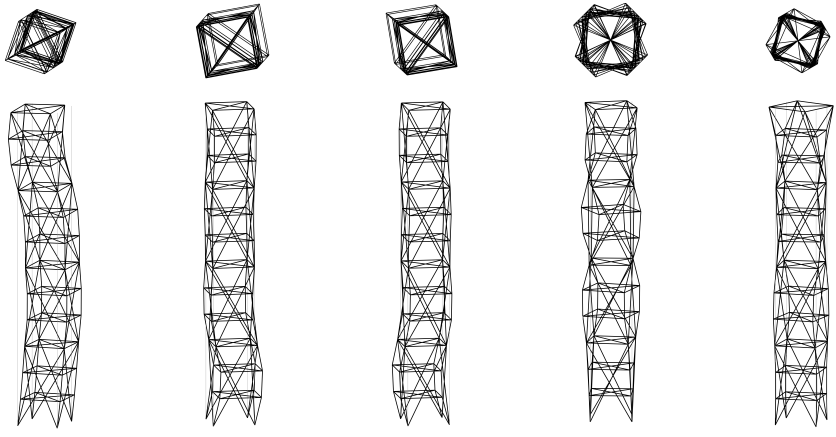
(a) Biegemode $\omega_1 = 1{,}77\,\text{Hz}$ | (b) Biegemode $\omega_2 = 1{,}77\,\text{Hz}$ | (c) Torsionsmode $\omega_3 = 3{,}13\,\text{Hz}$ | (d) Biegemode $\omega_4 = 4{,}75\,\text{Hz}$ | (e) Biegemode $\omega_5 = 4{,}75\,\text{Hz}$

(f) Biegemode $\omega_6 = 5{,}31\,\text{Hz}$ | (g) Biegemode $\omega_7 = 5{,}31\,\text{Hz}$ | (h) Torsionsmode $\omega_8 = 6{,}42\,\text{Hz}$ | (i) Biegemode $\omega_9 = 6{,}68\,\text{Hz}$ | (j) Biegemode $\omega_{10} = 6{,}68\,\text{Hz}$

Abbildung 4.1: Moden des Demonstrator-Hochhauses.
Die Eigenformen und Eigenfrequenzen der ersten 10 Moden des Demonstrator-Hochhauses sind illustriert. (a)-(j) sind aufsteigend sortiert und enthalten eine Seitenansicht und eine Draufsicht. Die Ruhelage der Stützen des unbelasteten Tragwerks ist als Orientierung dargestellt.



(a) Torsionsmode $\omega_1 = 2{,}15\,\text{Hz}$ (b) Biegemode $\omega_2 = 1{,}37\,\text{Hz}$ (c) Biegemode $\omega_3 = 1{,}36\,\text{Hz}$ (d) Torsionsmode $\omega_4 = 5{,}46\,\text{Hz}$ (e) Biegemode $\omega_5 = 3{,}87\,\text{Hz}$



(f) Biegemode $\omega_6 = 3{,}87\,\text{Hz}$ (g) Biegemode $\omega_7 = 6{,}17\,\text{Hz}$ (h) Biegemode $\omega_8 = 6{,}17\,\text{Hz}$ (i) Torsionsmode $\omega_9 = 6{,}45\,\text{Hz}$ (j) Torsionsmode $\omega_{10} = 12{,}66\,\text{Hz}$

Abbildung 4.2: POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses.
Die 10 Hauptkomponenten mit den höchsten Singulärwerten des Demonstrator-Hochhauses sind illustriert. Die zugehörigen Frequenzen wurden auf Basis der Simulationsdaten projiziert auf je eine Mode durch eine diskrete Fourier-Transformation (DFT) ermittelt. (a)-(j) sind absteigend nach den Singulärwerten sortiert und enthalten eine Seitenansicht und eine Draufsicht. Die Ruhelage der Stützen des unbelasteten Tragwerks ist als Orientierung dargestellt.

perimentellen Gebäudes und die Symmetrie treten Biegemoden paarweise auf, die orthogonal zueinander stehen. Die dominanten ersten Eigenmoden, die Biegemoden erster Ordnung mit 1,77 Hz in Abb. 4.1 a und b, weisen an der Spitze des Tragwerks die größte Auslenkung auf. Herkömmliche passive Schwingungsdämpfer, z. B. ein Pendeldämpfer, sind auf die Dämpfung dieser Mode ausgelegt und haben nach der linearen Theorie keinen Einfluss auf andere Moden. Es folgt eine Torsionsmode mit 3,13 Hz, die einer Torsion um die Hochachse des Tragwerks entspricht (Abb. 4.1 c). Die Biegemoden zweiter Ordnung in Abb. 4.1 d und e zeigen je einen Schwingungsknoten ca. zwischen dem dritten und vierten Modul und zwei Schwingungsbäuche. Die ungleichmäßige Verteilung der Schwingungsform ist der Tragwerksauslegung geschuldet. Die unteren Stützen sind wesentlich steifer ausgeführt, da diese die Aktoren der Stützen enthalten und potentiell höhere Kräfte erfahren. Im dritten und vierten Modul sind keine Stützenaktoren integriert und die Wandstärken der Hohlprofile deutlich schwächer. Die weiteren Biegemoden dritter (Abb. 4.1 f, g) und vierter (Abb. 4.1 i, j) Ordnung weisen pro Ordnung je einen Schwingungsbauch und -knoten mehr auf. Die Torisonsmode zweiter Ordnung beinhaltet eine doppelte Rotation um die Hochachse (Abb. 4.1 h). Ein weiterer Modentyp, die Streckmode, bei der das Tragwerk hauptsächlich in z-Richtung schwingt, wird in Realität kaum angeregt und tritt zum ersten Mal bei der 18. Mode auf.

4.1.2 Proper Orthogonal Decomposition

Die Modalanalyse ist für nichtlineare Systeme nicht definiert. Nach einer Linearisierung um einen Arbeitspunkt können Eigenmoden bestimmt werden, die jedoch nur im Umfeld des Linearisierungspunkts gültig sind. Ein Alternative bietet die Hauptkomponentenanalyse (POD), die auch als *Karhunen-Loève Decomposition* [68, 93] bekannt ist. Ein verwandte Methode aus der Statistik ist die *principal component analysis* [58, 108]. Das zugrunde liegende Prinzip wurde von mehreren Autoren unabhängig voneinander publiziert und ist in verschiedenen Fachdisziplinen unter weiteren Namen bekannt.

Die POD ist ein numerisches multivariates Verfahren und zielt auf eine kompakte Darstellung komplexer Daten ab. Basierend auf Datenpunkten, sogenannten *snapshots* soll ein optimaler Unterraum $\boldsymbol{V}$ gefunden werden, der diese Daten in reduzierter Form abbildet. Optimal bedeutet, dass die euklidische Norm des Fehlers durch die Reduktion über alle N Datenpunkte minimal ist:

$$\min \sum_{i=1}^{N} \left\| \boldsymbol{q}(t_i) - \boldsymbol{V}\boldsymbol{\zeta}(t_i) \right\|_2 , \tag{4.6}$$

mit den Datenpunkten $\boldsymbol{q}(t_i) \in \mathbb{R}^n$ und der neuen Koordinate $\boldsymbol{\zeta}(t_i)$ für $i \in \mathbb{N} \cap [1,N]$. Es wird angenommen, dass mehr Datenpunkte als Freiheitsgrade vorhanden sind $N > n$. Dieses Optimierungsproblem kann über eine Singulärwertzerlegung gelöst werden, die eine Matrix mit Datenpunkten $\boldsymbol{Q}_{\text{data}} = \left[\boldsymbol{q}(t_1), \boldsymbol{q}(t_2), \ldots, \boldsymbol{q}(t_N)\right]$ in drei Matrizen faktorisiert

$$\boldsymbol{Q}_{\text{data}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}^* . \tag{4.7}$$

Die orthogonale Matrix $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beinhaltet spaltenweise die Linkseigenvektoren, die auch als Hauptkomponenten bezeichnet werden. Die orthogonale Matrix $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ mit der konjugierten transponierten Matrix $\boldsymbol{W}^*$ umfasst die Rechtseigenvektoren. Während die Linkseigenvektoren das dominante örtliche Verhalten darstellen, erfassen die Rechtseigenvektoren deren zeitliche Komponente. Die Linkseigenvektoren werden auch als Hauptkomponenten oder Form der POD-Moden bezeichnet, analog zu den Eigenformen bei der Modalanalyse. Die absteigend sortierten nicht negativen realen Singulärwerte $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_{\min(n)}$ besetzen die Diagonale der Matrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Singulärwerte können als Fehlerschranke herangezogen werden, da sie die Wichtigkeit der Hauptkomponenten angeben. Die Links- bzw. Rechtseigenvektoren der Daten $\boldsymbol{Q}_{\text{data}}$ entsprechen den Eigenvektoren von $\boldsymbol{Q}_{\text{data}}\boldsymbol{Q}_{\text{data}}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$ bzw. $\boldsymbol{Q}_{\text{data}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Q}_{\text{data}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{W}^{\mathsf{T}}$ und können auch durch Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt werden. Die Singulärwerte von (4.7) sind identisch mit den Quadratwurzeln der Eigenwerte der zuvor genannten Eigenwertprobleme. Eine SVD ist nicht eindeutig, kann dies aber über die weitere Bedingung der Normierung erlangen, z. B. mit $\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$.

In [34] wurde eine POD auf ein lineares mechanisches System mit klassischer Dämpfung angewendet. Die POD-Moden näheren sich mit sinkender Dämpfung den Eigenmoden an. Für allgemeine Dämpfungsterme ist dies nicht gegeben, was aber nicht zwangsläufig bedeuten muss, dass die POD versagt. Angewandt auf Systeme mit Nichtlinearitäten ist zu bedenken, dass die POD nicht in der Lage ist, das nichtlineare Verhalten vollständig zu beschreiben. Es ist vielmehr die beste lineare Approximation des nichtlinearen Zusammenhangs. Obwohl die POD lineares Verhalten aufzeigt, werden dabei nicht die Restriktionen einer Linearisierung eingebracht [9]. Die Projektion mit den Hauptkomponenten ist optimal bezüglich des Energiegehalts im Sinne der kleinsten Quadrate (4.6), beinhaltet also mehr Energie als jede andere Basis [70].

Gewöhnlich sind wesentlich mehr Datenpunkte als Originalkoordinaten vorhanden $N >> n$. Dies impliziert einen erhöhten Aufwand bei der Generierung von Simulations- oder Messdaten, der jedoch vorab anfällt. Die Datengrundlage ist ein entscheidender Faktor für die Qualität der POD und der größte Schwachpunkt der Methode. In den Datenpunkten muss die Dynamik eines Systems möglichst vollständig angeregt werden, da ausschließlich das in den Daten vorhandene Verhalten in den Hauptkomponenten abgebildet werden kann.

POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses

Zur Bestimmung der POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses wird durch die Simulation der Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen (3.7) die Datengrundlage numerisch generiert. Alle vertikalen und diagonalen Elemente, also alle Elemente, die potentiell einen Aktor enthalten können, werden sukzessive mit zwei verschiedenen Anregungssignalen über eine parallele Aktorkonfiguration mit Krafteingang aktiviert. Einerseits kommt mittelwertfreies Gaußsches weißes Rauschen mit einer Varianz von 10 MN über einen Zeitraum von 4 s zum Einsatz. Andererseits wird ein *Chirp*-Signal angewendet, wobei die Frequenz von 0 Hz linear auf 10 Hz in 10 s Simulationszeit ansteigt. Die Amplitude des Chirp-Eingangsignals liegt bei 10 MN und die Schrittweite der gespeicherten Daten beträgt 0,01 s.

Nach Berechnung der SVD werden die Linkseigenvektoren in Abb. 4.2 illustriert, sortiert nach absteigenden Singulärwerten. Die Singulärwerte entsprechen *nicht* den Frequenzen der POD-Moden. Diese werden ermittelt, indem die Simulationsdaten auf jeweils eine Mode projiziert werden, wodurch der Einfluss anderer Moden weitestgehend ausscheidet. Anschließend erfolgt eine diskrete Fourier-Transformation (DFT) der projizierten Verschiebungsdaten zur Bestimmung der Frequenz der betrachteten Mode. Alternativ kann das Modell (3.7) mit jeweils einer POD-Mode als Anfangsbedingung simuliert werden und die DFT des Verschiebungausgangs (3.23) durchgeführt werden. Die Linkseigenvektoren sind normiert, sodass eine Mode eine maximale Auslenkung von 1 m aufweist. Die POD-Mode mit dem höchsten Singulärwert ist eine Torsionsmode um die Hochachse mit der Frequenz von 2,15 Hz (Abb. 4.2 a). Diese Mode wird durch die Aktuierung mit je nur einem Eingang in den diagonalen Elementen begünstigt. Anschließend folgen nach den Singulärwerten sortiert zwei orthogonale Biegemoden, die mit 1,37 Hz eine geringere Frequenz als die Torsionsmode besitzen. Weitere Torsionsmoden höherer Ordnung sind in Abb. 4.2 d, i und j dargestellt. Es ist eine stärkere Rotation im oberen Modul zu beobachten, das einen geringeren Materialeinsatz aufweist. In Abb. 4.2 d und i formen die unteren drei bzw. zwei Module eine Halbschwingung, während das oberste bzw. beide oberen Module je weitere Schwingungsbäuche aufweisen. Die Frequenzen liegen mit 5,46 Hz und 6,45 Hz nah beieinander. Die nächste Torsionsmode mit 12,66 Hz ist deutlich hochfrequenter und zeigt eine deutliche Auslenkung an der Spitze des Tragwerks. Die beiden Biegemoden zweiter Ordnung Abb. 4.2 e und f mit 3,87 Hz zeigen eine Halbschwingung über die drei unteren Module und eine weitere im oberen Modul. Diese Verteilung ist wieder durch den Materialeinsatz im Tragwerk zu begründen. In Ergänzung dazu zeigen die Biegemoden dritter Ordnung in g) und h) höhere Auslenkungen im unteren Tragwerksteil. Die paarweise auftretenden Biegemoden können durch Linearkombination beider so transformiert werden, dass eine Moden ausschließlich in x-Richtung und die andere in y-Richtung auftritt. Torsionsmoden treten bedingt durch die Art der Anregung vermehrt mit hohen Singulärwerten auf, obwohl ihre Frequenzen über denen von anderen Biegemoden liegen. Nicht abgebildet sind die Biegemoden vierter Ordnung mit 8,75 Hz, eine Torsionsmode mit 7,66 Hz und die Biegemoden fünfter Ordnung mit 13,3 Hz. Die Bestimmung der POD-Frequenzen über eine Fast-Fourier-Transformation (FFT) zeigt, dass das Invarianzprinzip bei nichtlinearen Systemen seine Gültigkeit verliert. Bei der Betrachtung einer Mode treten Einkopplungen von anderen Moden auf, die häufig vom gleichen Typ sind (Biegemoden regen benachbarte Biegemoden an; ebenso bei den Torsionsmoden).

Die Singulärwerte zeigen die Wichtigkeit der Linkseigenvektoren, allerdings basierend auf der vorhandenen Datengrundlage. Bei umfassender Anregung wird davon ausgegangen, dass dies die relevanten POD-Moden des Modells sind. Die Singulärwerte σ_i, logarithmisch aufgetragen über den Index i in Abb. 4.3, zeigen einen schnellen Abfall. Bereits der Singulärwert für $i = 50$ ist drei Dekaden geringer als der maximale Wert. Die geringsten Werte liegen bei $< 10^{-13}$. Die Singulärwerte implizieren durch einen schnellen Abfall gute Anwendbarkeit bei einer Ordnungsreduktion im Abschnitt 4.2.2.

In Abb. 4.4 ist das zeitliche Auftreten der ersten bis dritten POD-Mode in der Datengrundlage visualisiert. Die x-Achse ist mit dem zeitlichen Verlauf der generierten Daten assoziiert: von 0 s bis 320 s erfolgt die Anregung mit weißem Rauschen sukzessive durch die Aktoren beginnend

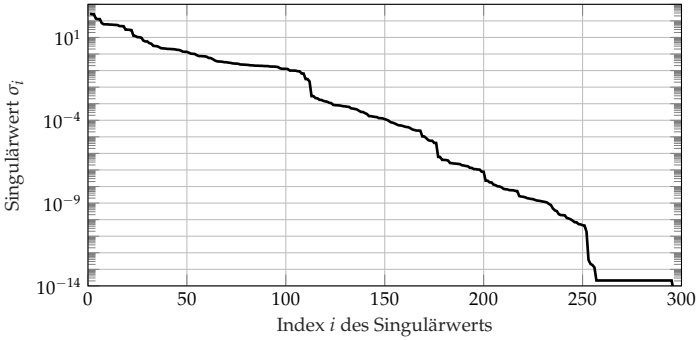


Abbildung 4.3: Singulärwerte des Demonstrator-Hochhauses.
Die Singulärwerte der POD am Demonstrator-Hochhaus sind in absteigender Reihenfolge logarithmisch aufgetragen.

bei den Stützen (grau hinterlegt), gefolgt von den aktuierten Diagonalen jeweils pro Modul. Ab 320 s bis zum Ende wird mit dem dargestellten Chirp-Signal angeregt. Die Signale sind für je eine Aktuierung in Abb. 4.4 oben stellvertretend dargestellt. Wie in Abb. 4.4 a durch einen Wert nahe 0 in den grauen Bereichen ersichtlich, können mit den Stützenaktoren keine Torsionsmoden angeregt werden. Aufgrund des linearen Charakters der FEM werden durch einen solchen Aktor ausschließlich die z-Koordinaten beeinflusst. Zudem ist durch den abnehmenden Wert über die Module zu erkennen, dass die erste Torsionsmode durch die unteren Diagonalenaktoren bei gleicher Eingangssignalstärke stärker angeregt wird. In Abb. 4.4 b und c sind die Rechtseigenvektoren der ersten Biegemoden dargestellt. Hierbei überwiegt auch die Anregung durch aktuierte Diagonalen und die Abnahme mit höher liegenden Modulen. Die Stützen in den oberen Modulen können das Tragwerk kaum beeinflussen. Des Weiteren werden beide Moden durch die Aktoren unterschiedlich angeregt, beispielsweise aktivieren die ersten Diagonalenaktoren im ersten Modul bei 440 s die dritte Mode (Abb. 4.4 c) deutlich stärker als die zweite (Abb. 4.4 b). Die Analyse durch die POD eröffnet Einblick in adaptive Tragwerke jenseits des im speziellen betrachteten Tragwerks mit druckschlaffen Elementen. Die Ergebnisse können intuitiv nachvollzogen werden und bestätigen sich bei anderen Untersuchungen.

4.1.3 Vergleich der Eigenmoden und POD-Moden

Obwohl die zugrunde liegenden Modelle der Eigenmoden und der POD-Moden verschieden sind, offenbart deren Vergleich ein größeres Modellverständnis. Die Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen bestehen stückweise aus linearen Modellen, abhängig von den schlaffen Zugelementen. Dadurch ist zu erwarten, dass die POD, als beste lineare Approximation des nicht-linearen Verhaltens, Schwingungsformen vergleichbar zur Modalanalyse liefert.

Die paarweise angelegten Biegemoden aufgrund der Dreidimensionalität des Tragwerks sind ein Ergebnis der POD. Unter Betrachtung der jeweils ersten drei Moden aus Abb. 4.1 und Abb. 4.2,

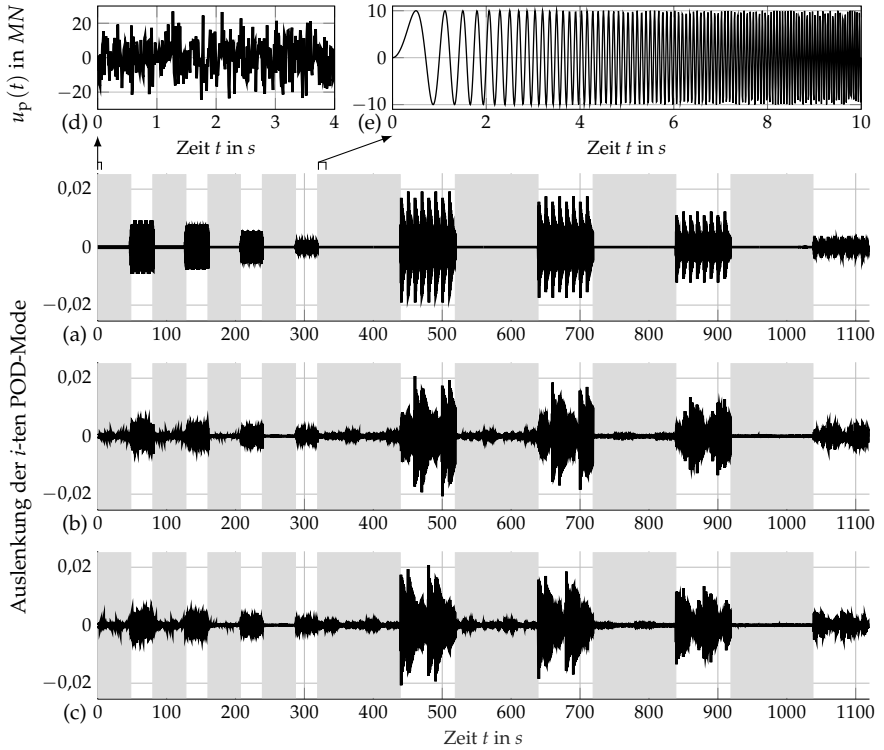
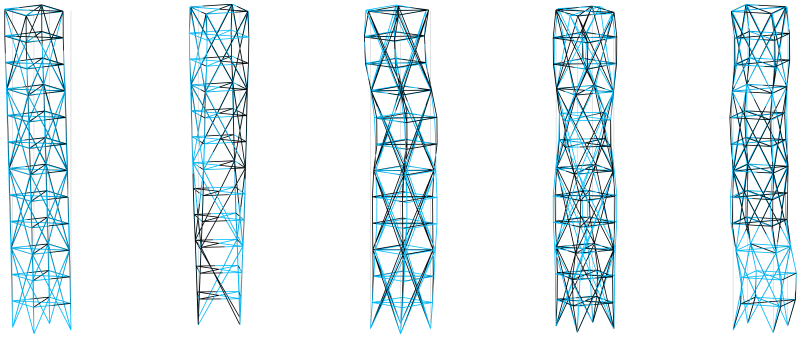


Abbildung 4.4: Zeitliches Auftreten der POD-Moden in der Datengrundlage.
Die Auslenkung der (a) ersten, sowie der (b) zweiten und (c) dritten POD-Mode sind über die Zeit der Daten abgebildet. Der Zeitraum der Aktuierung durch Stützen ist grau hinterlegt, die durch Diagonalen weiß. In der zeitlichen Abfolge wurden alle Aktoren in der Reihenfolge nach Anhang A.5 nacheinander mit Gaußschem weißen Rauschen (d) beaufschlagt, anschließend mit dem Chirp-Signal (e).

wobei die beiden Biegemoden und die Torsionsmoden verglichen werden, sind kaum Unterschiede in den Modenformen zu erkennen. Für den Vergleich wurden die Moden durch Linearkombination so normiert, dass die dargestellten Moden ausschließlich in x-Richtung ausgelenkt sind. Eine Biegemode und die Torsionsmode sind in Abb. 4.5 a und b vergleichend abgebildet. Die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler (RMSE, engl.: *root-mean-square error*) aller translatorischen Freiheitsgrade ist mit 4,01 mm bzw. 3,00 mm (s. Tab. 4.1) bei einer maximalen Auslenkung von 13 cm pro Mode sehr gering und entspricht 3,01 % bzw. 2,31 %. Der Unterschied ist in den Schwingungsfrequenzen ausgeprägt, die bei den POD-Moden niederer sind als die Eigenfrequenzen. Im Modell mit druckschlaffen Elementen werden diese je nach



(a) 1. Biegemode (b) 1. Torsionsmode (c) 2. Biegemode (d) 3./2. Torsionsmode (e) 4./3. Biegemode

Abbildung 4.5: Eigenmoden und POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses.
Drei Biegemoden und zwei Torsionsmoden werden grafisch mit einer maximalen Auslenkung von 1 m verglichen. Die quantitative Abweichung ist in Tab. 4.1 angegeben

Verformungszustand schlaff und tragen nicht zur Steifigkeit des Systems bei. Die Proportionalität der Schwingungsfrequenzen zur Wurzel der Steifigkeit $\omega \sim \sqrt{k}$ bei konstanter Masse führt zu diesem Effekt. Torsionsmoden sind davon besonders betroffen, da deren Verhalten maßgeblich von den diagonalen Elementen beeinflusst wird. In Abb. 4.6 sind die ersten 20 Eigenfrequenzen und die Frequenzen der POD-Moden aufsteigend sortiert abgebildet, wobei letztere immer unter den Eigenfrequenzen liegen. Die Abfolge der Modentypen (Biege- oder Torsionsmode) ist bis zur vierzehnten Mode identisch. Die Reduktion der POD-Frequenz, gegenüber den Eigenfrequenzen des linearen Modells, ist bei Torsionsmoden stärker ausgeprägt als bei Biegemoden. Dadurch gewinnen Torsionsmoden an Wichtigkeit bei Tragwerken mit druckschlaffen Elementen und können von Störungen leichter angeregt werden, da sie natürlich schwächer gedämpft sind. Der Einfluss von aussteifenden Elementen, wie Fassaden und zusätzliche Zwischenböden, die sehr systemspezifisch sind, wirkt diesem Effekt entgegen und muss individuell untersucht werden. Neben der geringeren Steifigkeit hinsichtlich Torsion, weisen Torsionsmoden einen höheren Singulärwert auf, was durch die asymmetrische Anregung durch je einen Aktor in der Datengrundlage für die POD verstärkt wird. Abgesehen von der Torsionsmode erster Ordnung zeigt ein Vergleich weiterer Torsionsmoden weniger Ähnlichkeit, da die Modenform durch den Einsatz druckschlaffer Elemente beeinflusst wird. Die Torsionsmode zweiter Ordnung der POD (Abb. 4.2 d) hat kein vergleichbares Pendant. In Abb. 4.5 d ist die qualitative Form der Torsionsmode zweiter Ordnung der Modalanalyse (Abb. 4.1 h) allenfalls ähnlich zur Torsionsmode dritter Ordnung der POD (Abb. 4.2 i) mit einem relativen RMSE von 35,14 %. Die Frequenzen dieser sind fast identisch (6,42 Hz und 6,45 Hz), wobei die der Torsionsmode zweiter Ordnung der POD etwas kleiner ist. Die Torsionsmode vierter Ordnung der POD (Abb. 4.2 j) kann mit der 17. Eigenmoden verglichen werden, mit einem relativen Fehler von 14,52 %.

Die Biegemoden zweiter Ordnung unterscheiden sich deutlich voneinander (Abb. 4.5 c). Der untere Schwingungsbauch der POD-Mode erstreckt sich aufgrund der geringeren Steifigkeit über die unteren drei Module (Abb. 4.2 e, f), während die Eigenform der Modalanalyse beide Schwingungsbäuche in den oberen beiden Modulen verortet (Abb. 4.1 d, e). Beim Tragwerk mit druckschlaffen Elementen weist die relative Steifigkeit entlang des Tragwerks kleinere Differenzen auf. Beim linearen Modell ist der untere Tragwerksteil relativ noch steifer als der obere Teil. Die modalen Biegemoden vierter Ordnung (Abb. 4.1 i, j) sind mit einen Fehler von 6,75 % ähnlich der POD-Biegemoden dritter Ordnung (Abb. 4.2 g, h). Vergleichend illustriert sind diese in Abb. 4.5 e. Für die Biegemoden dritter Ordnung der Modalanalyse (Abb. 4.1 f, g) stehen die vierzehnte und fünfzehnte POD-Mode, wobei der relative Fehler 22,67 % beträgt. Diese Biegemoden treten im Modell mit druckschlaffen Elementen später auf, da die Biegemode zweiter Ordnung schon eine Auslenkung im unteren Tragwerksteil einbringen kann.

Die Biege- und Torsionsmoden erster Ordnung, welche die Grundmoden darstellen, sind identisch. Generell ist die Tendenz zu erkennen, dass die Vergleichbarkeit mit steigender Frequenz nicht mehr zwingend gegeben ist. Die geänderte Steifigkeitsverteilung im Tragwerk führt zudem zu unterschiedlichen Modenformen, die nicht mehr direkt vergleichbar sind.

Tabelle 4.1: RMSE zwischen modalen und POD-Moden.
Verglichen werden die Modenformen der Biegemoden (B) und der Torsionsmoden (T). Die Modennummern befinden sich in der zweiten Zeile konsistent zu Abb. 4.1 und Abb. 4.2. Der RMSE wird zwischen allen Freiheitsgraden der modalen und der POD-Moden berechnet, bei einer maximalen Auslenkung von 13 cm (maximale Auslenkung des Tragwerks laut Baugenehmigung) pro Mode. Der relative Fehler bezogen auf die maximale Auslenkung ist in Zeile vier aufgeführt.

Modenfrom	B	B	T	B	B	B	B	T	B	B	T
Nr. mod./POD	1/2	2/3	3/1	4/5	5/6	6/14	7/15	8/9	9/7	10/8	17/10
Frequ. modal	1,77	1,77	3,13	4,75	4,75	5,31	5,31	6,42	6,68	6,68	16.29
Frequ. POD	1,37	1,36	2,15	3,87	3,87	4,96	4,97	6,45	6,17	6,17	12,66
Abb. 4.1/4.2	a/b	b/c	c/a	d/e	e/f	f/-	g/-	h/i	i/g	j/h	-/j
Abb. 4.5	a		b	c				d	e		
RMSE in mm	4,01	4,01	3,00	25,65	25,65	29,48	29,48	45,68	8,78	8,78	18,87
RMSE in %	3,01	3,01	2,31	19,72	19,72	22,67	22,67	35,14	6,75	6,75	14,52

4.2 MODELLORDNUNGSREDUKTION

Die Modellordnungsreduktion ist ein notwendiger Schritt, um von hochdimensionalen Modellen der FEM zu niederdimensionalen Reglerentwurfsmodellen zu gelangen. Besonders in der Strukturdynamik entstehen durch eine feine Diskretisierung der Ausgangsgeometrie Modelle mit vielen Freiheitsgraden. Die in Kapitel 3 hergeleiteten Modelle eignen sich ausgezeichnet als Simulationsmodelle, um das Systemverhalten zu untersuchen, sind jedoch sehr rechenintensiv. Modelle für den Beobachter- und Reglerentwurf fordern nicht diesen Detaillierungsgrad, sondern müssen vielmehr in annehmbar geringer Zeit berechnet werden können. Auch für

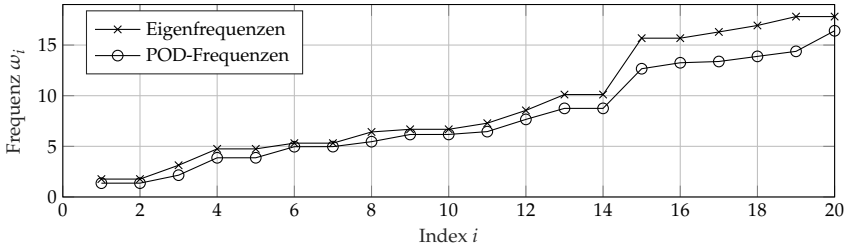


Abbildung 4.6: Aufsteigend sortierte Eigenfrequenzen und POD-Frequenzen.

Simulationsmodelle bieten sich weniger stark reduzierte Modelle an, um die Rechenzeit zu verkürzen. Insbesondere für die Auswertung nichtlinearer Modellgleichungen muss ein hoher Rechenaufwand betrieben werden, wodurch Reduktionsmethoden noch dringender gebraucht werden. Im Folgenden werden zwei Methoden zur Modellordnungsreduktion vorgestellt – die modale Ordnungsreduktion und die Ordnungsreduktion mit POD-Moden. Erstere ist für die lineare Theorie definiert, während zweitere auch auf nichtlineare Modelle anwendbar ist.

4.2.1 Modale Ordnungsreduktion

Ausgehend von den Ergebnissen der Modalanalyse in Abschnitt 4.1.1 können die Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}(t)$ für ein lineares System durch

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) \tag{4.8}$$

abgebildet werden. Dabei entspricht $\boldsymbol{\Phi}$ den zuvor bestimmten Eigenvektoren in Matrixform und $\boldsymbol{\eta}(t)$ den modalen Amplituden, mit $\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix}\eta_1(t) & \eta_2(t) & \dots & \eta_n(t)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Eine Komponente $\eta_i(t)$ mit $i \in \mathbb{N}, i \in [1,n]$ skaliert die Auslenkung einer Mode, beschreibt also die Auslenkung oder Amplitude der i-ten Mode. Die mit den modalen Amplituden gewichtete Summe aller n Moden beschreibt die Systemdynamik vollständig.

Modelle von adaptiven Tragwerken beinhalten gewöhnlich sehr viele Freiheitsgrade, die für die Untersuchung des Systemverhaltens notwendig sind. Solche hochdimensionalen Modelle sind aufgrund ihrer Größe für den Einsatz als Reglerentwurfsmodell ungeeignet, weshalb eine reduzierte Eigenvektormatrix $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_r\end{bmatrix}$ mit $r < n$ in der Transformation (4.8) angewendet wird. Physikalisch betrachtet sind Moden mit hohen Frequenzen stark gedämpft, weshalb diese Moden im Reglerentwurfsmodell in der Regel unberücksichtigt bleiben können. Wichtig ist, im reduzierten Modell die Moden zu verwenden, die durch Störungen stark angeregt werden. Des Weiteren sind die realen Aktoren in ihrer Bandbreite limitiert, weshalb Moden mit hohen Frequenzen unter Berücksichtigung des Nyquist-Shannon-Theorems nicht gedämpft werden können [104, 129, 164]. Entsprechend kann die halbe Bandbreite der Aktoren zur Wahl

der reduzierten Modenzahl r herangezogen werden. Für ein Beobachterentwurfsmodell wird auf die Bandbreite des Sensorsystems zurückgegriffen.

Zur Modellordnungsreduktion linearer Modelle wird die Transformation (4.8) mit einer reduzierten Eigenvektormatrix $\boldsymbol{\Phi}$ in die Systemgleichung eingesetzt. Die anschließende Linksmultiplikation mit der transponierten Eigenvektormatrix $\boldsymbol{\Phi}^\intercal$ führt zu r entkoppelten DGL im modalen Raum

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{D}^* \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{B}_\mathrm{u}^* \boldsymbol{u}(t), \qquad t > 0, \qquad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \boldsymbol{\eta}_1, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}^* \boldsymbol{\eta}(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Durch die Orthogonalitätsbedingungen (4.4) und (4.5) ist das System diagonalisiert, es gilt $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{\Phi}^\intercal \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\omega_i^2)$ und $\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{\Phi}^\intercal \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(2\zeta_i \omega_i)$ mit $i \in \mathbb{N}, i \in [1,n]$. Die modalen Eingangs- und Ausgangsmatrizen sind $\boldsymbol{B}_\mathrm{u}^* = \boldsymbol{\Phi}^\intercal \boldsymbol{B}_\mathrm{u}$ und $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}$. Für die Anfangsbedingungen in modalen Koordinaten gilt $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_1$. Eine effiziente Berechnung der Inversen der Eigenvektormatrix ist $\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}^\intercal \boldsymbol{M}$, die durch Umstellen der Orthogonalitätsbeziehung (4.4) entsteht. Im modalen Raum sind $\boldsymbol{\eta}(t)$ die Freiheitsgrade des Tragwerks. Mit der Rücktransformation

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{q}(t) \tag{4.10}$$

kann das System in Originalkoordinaten approximativ rekonstruiert werden.

4.2.2 Ordnungsreduktion mit POD-Moden

Die Modellordnungsreduktion für nichtlineare Tragwerke, beispielsweise mit druckschlaffen Elementen, kann ähnlich einer modalen Modellordnungsreduktion (MOR) erfolgen. Die numerisch bestimmten Hauptkomponenten dienen als Transformationsmatrix $\boldsymbol{V}_\mathrm{r}$, sodass gilt

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{V}_\mathrm{r} \boldsymbol{\zeta}(t). \tag{4.11}$$

Die transformierten reduzierten Koordinaten sind $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ und minimieren das Problem (4.6). Die Transformationsmatrix $\boldsymbol{V}_\mathrm{r}$ beinhaltet eine möglichst geringe Anzahl an Hauptkomponenten, die das System möglichst genau beschreiben. Der schnelle Abfall der Singulärwerte am Beispiel des Demonstrator-Hochhauses in Abb. 4.3 spricht für eine gute Approximierbarkeit mit wenigen POD-Moden. Das Einsetzten der Transformation und Linksmultiplikation mit der Inversen Matrix der Hauptkomponenten führt zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_\mathrm{r} \ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) \boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{u,r}} \boldsymbol{u}(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}(0) = \boldsymbol{\zeta}_1, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_\mathrm{r} \boldsymbol{\eta}(t). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Die Funktionsauswertungen sind $\boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^\intercal \boldsymbol{D}(\boldsymbol{V}_\mathrm{r}\boldsymbol{\zeta}(t))\boldsymbol{V}_\mathrm{r}$ und $\boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^\intercal \boldsymbol{K}(\boldsymbol{V}_\mathrm{r}\boldsymbol{\zeta}(t))\boldsymbol{V}_\mathrm{r}$. Die Eingangs- und Ausgangsmatrizen sind $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u,r}} = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^\intercal \boldsymbol{B}_\mathrm{u}$ und $\boldsymbol{C}_\mathrm{r} = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^\intercal \boldsymbol{C}$. Die Anfangsbedingungen ergeben sich mit $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^{-1} \boldsymbol{q}_0$ und $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^{-1} \boldsymbol{q}_1$. Die Hauptkomponenten $\boldsymbol{V}_\mathrm{r}$ sind wiederum

auf die Massenmatrix normiert $\boldsymbol{M}_\mathrm{r} = \boldsymbol{V}_\mathrm{r}^\mathsf{T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_\mathrm{r} \approx \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r} \times n_\mathrm{r}}$. Aufgrund der Numerik muss die transformierte Massenmatrix nicht exakt der Einheitsmatrix entsprechen.

Wie bei der POD üblich, erfolgt die nichtlineare Auswertung im Originalraum. Die Integration während der Simulation erfolgt im reduzierten Raum. Diese Zeitersparnis geht mit einem vorab erhöhten Aufwand zur Bestimmung der POD-Moden einher. Die Modelle adaptiver Tragwerke mit druckschlaffen Elementen eignen sich besonders für die Reduktion mit ihren Hauptkomponenten, da das übergeordnete Modell weitgehend lineares Verhalten zeigt. Bei einer Schwingung ist eine wiederkehrende abwechselnde Schlaffheit einzelner Elemente zu erwarten, die zu einem beinahe linearen Verhalten führt. Im Bauingenieurwesen werden solche Phänomene häufig mit Ersatzsteifigkeiten approximiert. Dieser Ansatz konnte im vorliegenden Fall das Modellverhalten jedoch nicht hinreichend genau abbilden.

Ein Maß der Approximationsgüte bietet die Betrachtung der Singulärwerte mit

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_\mathrm{r}} \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} > \kappa, \tag{4.13}$$

wobei κ eine zu definierende Toleranzgrenze ist [140]. Für ein reduziertes Simulationsmodell ist typischerweise eine höhere Grenze zu wählen als für ein Beobachter- oder Reglerentwurfsmodell. Außerdem ist zu beachten, dass die Modellordnung des Beobachters größer ist als die des Regler.

Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus

Basierend auf der Ordnungsreduktion mit POD-Moden wird ein Simulationsmodell reduzierter Ordnung bereitgestellt. Das Modell (4.12) erreicht mit einer Ordnung $n_\mathrm{r} = 40$ die Approximationsgüte von $\kappa = 99{,}99\,\%$ nach (4.13). Das volle Modell mit druckschlaffen Elementen (3.7) ohne Aktuierung wird mit der reduzierten Version verglichen. Beide Simulationen werden mit einer Anfangsbedingung begonnen, ohne dass weitere Lasten wirken. Die Anfangsauslenkung ist die Verformung, die erreicht wird, wenn das Demonstrator-Hochhaus in x-Richtung mit der Last der Prüfstatik beaufschlagt wird.

Der zeitliche Verlauf der translatorischen Freiheitsgrade eines Knotens am oberen Ende (Knoten 49, s. Abb. A.2) $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ ist in Abb. 4.7 abgebildet. Die Zeitersparnis der Simulation beim reduzierten Modell beträgt 69 % im Vergleich zum vollen Modell. Gleichzeitig stimmt die Auslenkung in x-Richtung (Abb. 4.7 a) bei beiden Simulationen sehr gut überein. Die abklingende Schwingung wird von der ersten Mode dominiert. Am Ende der dargestellten Simulationszeit ist eine geringe Phasenverschiebung durch eine geringfügig erhöhte Frequenz des POD-reduzierten Modells ersichtlich.

Für längere Simulationszeiten zeigt das POD-reduzierte Modell eine geringfügig erhöhte Frequenz der Schwingung. In y-Richtung (Abb. 4.7 b) erfolgt originär keine Auslenkung durch die Anfangsbedingung. Durch die druckschlaffen Elemente, sowie durch numerische Ungenauigkeiten in der Simulation treten beim vollen und reduzierten Modell Schwingungen auf, wobei diese bei letzterem deutlich größer sind. Der maximale Wert in diesem Beispiel beträgt beim

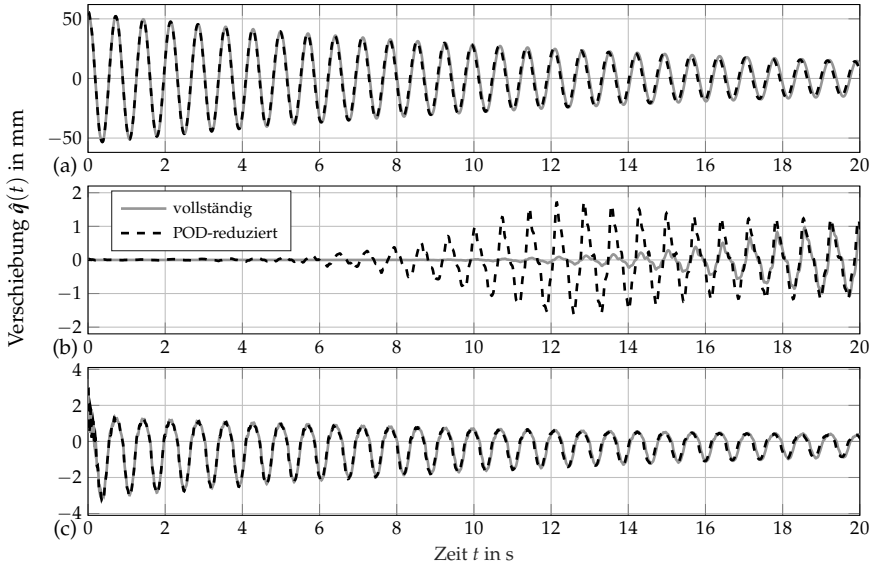


Abbildung 4.7: Vergleich des vollen und reduzierten Simulationsmodells.
Die Verschiebungen des vollen Modells (grau) sind im Vergleich zum POD-reduzierten Modell (schwarz, gestrichelt) in (a) für die x-Richtung, in (b) für die y-Richtung und in (c) für die z-Richtung des 49. Knotens abgebildet.

reduzierten Modell am oberen Ende des Tragwerks 1,72 mm, verglichen mit 1,12 mm beim vollen Modell. Diese Abweichung ist vertretbar, sodass die reduzierte Version des Simulationsmodells genutzt werden kann. Die Auslenkungen in z-Richtung (Abb. 4.7 c) stimmen wiederum sehr gut überein, wobei hier auch Oberschwingungen anklingen. Zusammenfassend ist die Reduktion des vollen Modells für die Simulation aufgrund der deutlich geringeren Rechenzeit und der immer noch ausreichende Modellgenauigkeit gerechtfertigt.

4.2.3 Dezentrale reduzierte Tragwerksmodelle

Für die dezentrale aktive Schwingungsdämpfung adaptiver Tragwerke wird im Folgenden die Substrukturierung durchgeführt. Daraus resultieren kleinere unabhängige Tragwerksmodelle, die in ihrer Gesamtheit das Tragwerk beschreiben. Mit den hergeleiteten Modellen in Kapitel 3 wird eine Substrukturierung für die linearen Modellgleichungen sowie für jene mit druckschlaffen Elementen durchgeführt. Inbegriffen ist eine Ordnungsreduktion mit beiden Methoden aus den vorherigen Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2. Dezentrale Regelungskonzepte, die diese Substrukturierung nutzen, finden sich in [147, 148].

Die in dieser Arbeit verfolgte Substrukturierung zielt auf kleine unabhängige Teilmodelle ab. Durch die gleichmäßige Unterteilung können die einzelnen Teilmodelle zu anderen Tragwerken zusammengesetzt werden, die eine beliebige Anzahl solcher Substrukturen enthalten. Das entworfene Regelungskonzept für eine Substruktur kann wiederholt eingesetzt werden. Dabei werden die Verkopplungen der Teilmodelle untereinander vernachlässigt. Die Wirkung der umliegenden Teilmodelle wird als externe Störung betrachtet.

4.2.3.1 Substrukturierung linearer Modelle

Die Zerlegung des Gesamtmodells in Teilmodelle legt die Grundlage für die Hardware- und Software-Topologie des Systems. Bauwerke sind individuell und werden selten in höherer Stückzahl gefertigt. Daher muss bei der Substrukturierung individuell auf das vorhandene Tragwerk eingegangen werden. Innerhalb eines Tragwerks sind sich wiederholende Tragwerkseinheiten wünschenswert, um den Entwicklungsaufwand gering zu halten und den Installationsablauf einheitlich zu gestalten.

Die Substrukturierung eines Tragwerks erfolgt durch Betrachtung der Geometrie oder der funktionalen Zusammenhänge. Die Elemente des Tragwerks werden je einer Substruktur zugeordnet. Die ungedämpften Modellgleichungen eines adaptiven Tragwerks mit dem Zustand $\boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ werden betrachtet. Die Rayleigh-Dämpfung wird nach erfolgter Substrukturierung wieder integriert. Bei der Substrukturierung entstehen n_{sub} Teilmodelle, die mit $i \in \mathbb{N}$, $i \in [1, n_{\text{sub}}]$ indiziert werden. Zur Unterteilung werden Inzidenzmatrizen[2] $\boldsymbol{C}_{\text{q}}^i \in \mathbb{R}^{n^i \times n}$ verwendet, die ausschließlich die Einträge 0 und 1 besitzen. Die Anzahl der Spalten der Inzidenzmatrix entspricht der Ordnung n des Gesamtsystems, die Anzahl der Zeilen der Ordnung n^i des Teilsystems. Die Inzidenzmatrix ermöglicht es, die Freiheitsgrade $\boldsymbol{q}^i(t) \in \mathbb{R}^{n^i}$ aus dem Zustand $\boldsymbol{q}(t)$ auszuwählen, die in der Substruktur i auftreten. Die Modellgleichungen der n_{sub} Substrukturen werden durch Einsetzen der Transformationen $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{C}_{\text{q}}^{i\,\mathsf{T}} \boldsymbol{q}^i(t)$ in die ungedämpfte Originalgleichungen (3.1) erzeugt. Nach Linksmultiplikation mit $\boldsymbol{C}_{\text{q}}^i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^i \ddot{\boldsymbol{q}}^i(t) + \boldsymbol{K}^i \boldsymbol{q}^i(t) &= \boldsymbol{B}_{\text{u}}^i \boldsymbol{u}^i(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}^i(0) = \boldsymbol{q}_0^i, \quad \dot{\boldsymbol{q}}^i(0) = \boldsymbol{q}_1^i, \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}^i \boldsymbol{q}^i(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Dimension des Eingangs ist $\boldsymbol{u}^i(t) \in \mathbb{R}^{m^i}$. Wirken auf die Freiheitsgrade weitere Elemente, die nicht in einem Teilmodell auftreten, müssen deren Einträge auf der Diagonalen der Massen- und Steifigkeitsmatrix im Zuge der Assemblierung in der FEM eliminiert werden. Die Ausgangsmatrix ergibt sich zu $\boldsymbol{C}^i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\text{q}}^{i\,\mathsf{T}}$. Neben den Zuständen werden die Inzidenzmatrizen auch zur Aufteilung der Aktoren $\boldsymbol{C}_{\text{u}}^i$ definiert, es folgt $\boldsymbol{B}_{\text{u}}^i = \boldsymbol{C}_{\text{q}}^i \boldsymbol{B}_{\text{u}} \boldsymbol{C}_{\text{u}}^{i\,\mathsf{T}}$ mit den Eingängen $\boldsymbol{u}^i(t)$ der Substrukturen. Die Knoten des FE-Modells beinhalten im dreidimensionalen Raum allgemein sechs Freiheitsgrade, die für gewöhnlich in einer Substruktur zusammen gehalten werden. Durch die Unterteilung hinsichtlich der Elemente treten die Knoten, an denen die Teilmodelle aneinander

[2] Diese sind bekannt aus der Theorie ungerichteter Graphen.

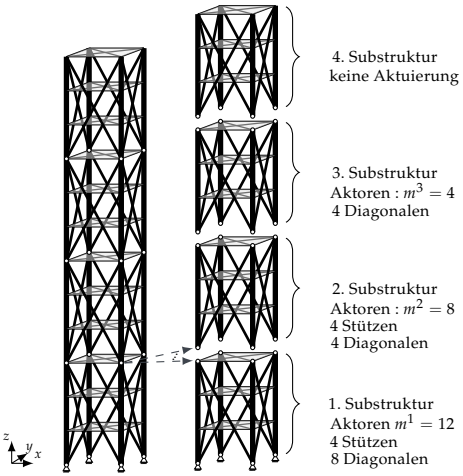


Abbildung 4.8: Substrukturierung des Demonstrator-Hochhauses.
Das Demonstrator-Hochhaus ist in vier Teilmodelle substrukturiert, die jeweils ein Modul umfassen. Die Knoten an den Koppelstellen treten in zwei Teilmodellen auf und sind durch Kreise gekennzeichnet.

grenzen, in beiden Untermodellen auf. Dabei ist bei den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}^i(0)$ und $\dot{\boldsymbol{q}}^i(0)$ auf Konsistenz zu achten.

Wie bereits in [148] auf das Demonstrator-Hochhaus angewendet, wird dieses in vier Teilmodelle substrukturiert, die jeweils ein Modul umfassen (Abb. 4.8). Dadurch treten die Knoten an den Koppelstellen in zwei Teilmodellen auf. Die Aktoren sind platziert, wie in Abschnitt 2.1 und Abschnitt 5.1.4 beschrieben und teilen sich entsprechend ihrer Position im Tragwerk auf die Teilmodelle auf.

Craig-Bampton-Reduktion

Auch die dezentralen Tragwerksmodelle erfordern die Notwendigkeit einer Modellordnungsreduktion, um niederdimensionale Reglerentwurfsmodelle zu generieren. Zur Berücksichtigung der physikalischen Kopplung bei Tragwerken wird die Reduktion nach Craig und Bampton verwendet [21]. Durch diese Reduktionsart wird die oben beschriebene modale Ordnungsreduktion um die Berücksichtigung der Kopplungen und der Starrkörpermoden erweitert, die durch die Dezentralisierung entstanden sind. Die Lösung ergibt sich als Kombination der Starrkörpermoden und der Eigenmoden. In einem Teilmodell werden *Randknoten* definiert, an welchen die Substrukturen aneinander gekoppelt sind. Die verbleibenden Knoten sind die *inneren Knoten*, die modal reduziert werden. Durch diese Aufteilung werden bessere Ergebnisse als mit einer reinen modalen Ordnungsreduktion erzielt. Die stationäre Lösung ist aufgrund der Erhaltung der Randknoten exakt.

Bei der Craig-Bampton-Methode wird der Zustandsvektor $\boldsymbol{q}^i(t)$, in diesem Fall der dezentralen Systeme, in die Freiheitsgrade der Randknoten $\boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) \in \mathbb{R}^{n^i_\mathrm{b}}$ und in die Freiheitsgrade der inneren Knoten $\boldsymbol{q}^i_\mathrm{i}(t) \in \mathbb{R}^{n^i_\mathrm{i}}$ aufgeteilt[3], mit $n^i_\mathrm{b} + n^i_\mathrm{i} = n^i$. Es wird davon ausgegangen, dass diese Reihenfolge bereits bei der Sortierung der Inzidenzmatrizen $\boldsymbol{C}^i_\mathrm{q}$ bei der Substrukturierung berücksichtigt wurde. Die aufgeteilten homogenen Modellgleichungen basierend auf (4.14) sind

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^i_\mathrm{bb} & \boldsymbol{M}^i_\mathrm{bi} \\ \boldsymbol{M}^i_\mathrm{ib} & \boldsymbol{M}^i_\mathrm{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{b}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^i_\mathrm{bb} & \boldsymbol{K}^i_\mathrm{bi} \\ \boldsymbol{K}^i_\mathrm{ib} & \boldsymbol{K}^i_\mathrm{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) \\ \boldsymbol{q}^i_\mathrm{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

wobei sich die Dimensionen der Massen- und Steifigkeitsmatrizen des Rands, des Inneren und der Verkopplung untereinander implizit ergeben. Die Starrkörpermoden berechnen sich durch Lösen der inneren Freiheitsgrade für eine vorgegebene stationäre Verschiebung der Randfreiheitsgrade. Dies ergibt sich durch Umstellen der zweiten Zeile von (4.15) für $\ddot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{b}(t) = \ddot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{i}(t) = \boldsymbol{0}$ nach

$$\boldsymbol{q}^i_\mathrm{i}(t) = \boldsymbol{\Phi}^i_\mathrm{c} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Phi}^i_\mathrm{c} = -{\boldsymbol{K}^i_\mathrm{ii}}^{-1} \boldsymbol{K}^i_\mathrm{ib}. \tag{4.16}$$

Dieser Zusammenhang ist im Bauingenieurwesen als statische Kondensation bekannt [10]. Der zweite Teil der Craig-Bampton-Transformation bezieht sich auf die dynamische Erweiterung der Reduktion durch die Eigenmoden der inneren Freiheitsgrade. Dafür wird die homogene Lösung der zweiten Zeile von (4.15) für $\boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) = \boldsymbol{0}$ über das generalisierte Eigenwertproblem (vgl. (4.2)) mit $\boldsymbol{M}^i_\mathrm{ii}$ und $\boldsymbol{K}^i_\mathrm{ii}$ berechnet. Eine reduzierte Anzahl $n^i_\mathrm{i,r}$ Eigenmoden wird zur Modaltransformation der inneren Freiheitsgrade mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{\Phi}^i = [\boldsymbol{\phi}_1, ..., \boldsymbol{\phi}_{n^i_\mathrm{i,r}}]$ angewendet.

Die Craig-Bampton-Transformation mit den reduzierten Zielkoordinaten $\boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t) \in \mathbb{R}^{n^i_\mathrm{c}}$ ist definiert als

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) \\ \boldsymbol{q}^i_\mathrm{i}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^i \boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t), \qquad \boldsymbol{T}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}^i_\mathrm{c} & \boldsymbol{\Phi}^i \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{b}(t) \\ \boldsymbol{\eta}^i(t) \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Die Zustandsvariablen $\boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t)$ beinhalten die Randfreiheitsgrade sowie die modalen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\eta}^i(t) \in \mathbb{R}^{n^i_\mathrm{i,r}}$ der inneren Knoten. Durch die Selektion der Randfreiheitsgrade n^i_b und der Anzahl der Eigenmoden $n^i_\mathrm{i,r}$ der inneren Knoten ist die reduzierte Systemordnung implizit definiert. Diese Methode der Substrukturierung ist damit für große dezentrale Systeme besonders geeignet, da viele innere Freiheitsgrade reduziert werden können. Die Anwendung dieser Transformation auf (4.14) und anschließende Linksmultiplikation mit ${\boldsymbol{T}^i}^\mathsf{T}$ führt zu der Craig-Bampton-Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^i_\mathrm{c} \ddot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{c}(t) + \boldsymbol{K}^i_\mathrm{c} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t) &= \boldsymbol{B}^i_{\mathrm{u,c}} \boldsymbol{u}^i(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(0) = \boldsymbol{q}^i_{0,\mathrm{c}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}}^i_\mathrm{c}(0) = \boldsymbol{q}^i_{1,\mathrm{c}}, \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}^i_\mathrm{c} \boldsymbol{q}^i_\mathrm{c}(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

[3] Der Index $(\cdot)_\mathrm{b}$ der Randknoten stammt aus dem Englischen für *boundary*.

Dabei sind $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^{i} = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{M}^{i}\boldsymbol{T}^{i}$ und $\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^{i} = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{K}^{i}\boldsymbol{T}^{i}$ blockdiagonal. Die Eingangsmatrizen ergeben sich zu $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u,c}}^{i} = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}^{i}$, die Ausgangsmatrix zu $\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^{i} = \boldsymbol{C}^{i}\boldsymbol{T}^{i}$. Die Dämpfung wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Herleitung weggelassen. Das identische Ergebnis ergibt sich durch Neudefinition der Dämpfung

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}^{i} = \alpha_1 \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^{i} + \alpha_2 \boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^{i}, \tag{4.19}$$

nach (3.2).

Elimination von Starrkörpermoden

Durch die Substrukturierung sind nicht mehr alle Teilmodelle gelagert. Folglich können diese frei im Raum verschoben und verdreht werden – sie weisen Starrkörpermoden auf und sind statisch überbestimmt, s. Anhang C.1. Mathematisch betrachtet, weist dabei ein System (4.18) im generalisierten Eigenwertproblem Eigenwerte gleich 0 auf. Dieses Phänomen ergibt sich in der Theorie durch die Substrukturierung und tritt in Realität am Tragwerk nicht auf. Die Anzahl der Starrkörpermoden im dezentralen Modell ist nicht gleichzusetzen mit den Freiheitsgraden am Rand. Wie in [21] mit Verweis auf [60] angegeben ist, vereinen die Randfreiheitsgrade implizit die Freiheitsgrade der Starrkörperbewegungen und der über das Modell abhängigen Koordinaten[4]. Eine nachträglich virtuelle Lagerung kann deshalb nicht eingesetzt werden, da durch die Wahl der gelagerten Randfreiheitsgrade das Tragwerksverhalten beeinflusst wird. Durch eine geeignete Transformation werden die Null-Eigenwerte der Starrkörpermoden eliminiert. Die Eigenvektoren der nicht-Null Eigenwerte sind in $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}$ zusammengefasst und enthalten die abhängigen Randfreiheitsgrade und die modal reduzierte Version der inneren Freiheitsgrade in einem Zustandsvektor $\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{l}}}$ mit $n_{\mathrm{l}}^{i} = n_{\mathrm{c}}^{i} - n_{\mathrm{c,rb}}^{i}$. Mit der Transformation $\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^{i}(t) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}^{i}(t)$ folgen die dezentralen Modelle ohne Starrkörpermoden

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{\mathrm{l}}^{i}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{l}}^{i}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{l}}^{i}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{l}}^{i}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{l}}^{i}\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}^{i}(t) &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{u,l}}^{i}\boldsymbol{u}^{i}(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}^{i}(0) = \boldsymbol{q}_{0,\mathrm{l}}^{i}, \quad \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{l}}^{i}(0) = \boldsymbol{q}_{1,\mathrm{l}}^{i}, \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{i}\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}^{i}(t), \end{aligned} \tag{4.20}$$

mit den erneut reduzierten Matrizen für die Masse $\boldsymbol{M}_{\mathrm{l}}^{i} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^{i}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}$, die Dämpfung $\boldsymbol{D}_{\mathrm{l}}^{i} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}^{i}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}$ und die Steifigkeit $\boldsymbol{K}_{\mathrm{l}}^{i} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i\mathsf{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^{i}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}$ sowie der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u,l}}^{i} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{c,u}}^{i}$ und der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{i} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^{i}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^{i}$.

4.2.3.2 Substrukturierung von Modellen mit druckschlaffen Elementen

Die Substukturierung und anschließende Ordnungsreduktion wird auf Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen übertragen. Die Abfolge in der Vorgehensweise ist identisch zu den linearen Modellgleichungen. Daher wird die Substurkturierung in Teilmodelle direkt von Abschnitt 4.2.3.1 übernommen. Gegengleich wirkende druckschlaffe Elemente sind bevorzugt

[4] Auf Englisch werden diese *constraint coordinates* genannt.

gemeinsam einem dezentralen Modell zuzuordnen. Durch die Bewegung des Tragwerks können diese Elemente schlaff werden und tragen kurzzeitig nicht mehr zum Tragverhalten bei (s. Abschnitt 3.1.1.2). Trotz partiell auftretender schlaffer Elemente ist im zentralen Modell durch die paarweise Anordnung dieser Elemente gesichert, dass keine kinematischen Gruppen auftreten. Bei substrukturierten Modellen sollte eine Trennung der paarweise angeordneten druckschlaffen Elemente mit gegengleicher Wirkung vermieden werden, da andernfalls diese Teilmodelle kinematisch sein können. Diese ergeben sich durch die dezentrale Modellierung und spielen im realen Tragwerk durch die physikalische Kopplung jedoch keine Rolle.

Die Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus mit druckschlaffen Elementen wurde in [147] durchgeführt. Die substrukturierten Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen entsprechen der Darstellung in Abb. 4.8. Die Gleichungen in Abschnitt 4.2.3.1 werden um den nichtlinearen Term erweitert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^i\ddot{\boldsymbol{q}}^i(t) + \boldsymbol{K}^i(\boldsymbol{q}^i(t))\boldsymbol{q}^i(t) = \boldsymbol{B}^i_{\mathrm{u}}\boldsymbol{u}^i(t), \qquad t>0, \quad \boldsymbol{q}^i(0)=\boldsymbol{q}^i_0, \quad \dot{\boldsymbol{q}}^i(0)=\boldsymbol{q}^i_1, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}^i\boldsymbol{q}^i(t). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die in Abschnitt 3.1.3.2 dargelegten Abhängigkeiten und Eingangsbeschränkungen gelten gegebenenfalls weiterhin. Zum Erhalt eingangsaffiner Systeme, was beispielsweise beim Reglerentwurf mit der approximativ linearisierenden Eingangstransformation (ALE) angenommen wird, wird der zweite Fall betrachtet.

Erweiterung der Craig-Bampton-Methode für druckschlaffe Elemente

Die Craig-Bampton-Methode zur Reduktion wurde prinzipiell für lineare Modellgleichungen entwickelt [21]. Für Modelle mit Nichtlinearitäten vergleichbar mit den druckschlaffen Elementen, kann das Modell in einen linearen und nichtlinearen Teil separiert werden. Um die druckschlaffen Elemente bei der Craig-Bampton-Reduktion handhabbar zu machen, werden an die Definition der Randknoten, analog zu Abschnitt 4.2.3.1, Bedingungen geknüpft. Neben den Freiheitsgraden der Koppelknoten, die die Teilmodelle verbinden, und den Freiheitsgraden, die von Aktoren manipuliert werden, müssen auch Freiheitsgrade, die relevant für die Auswertung der Nichtlinearitäten sind, als Randfreiheitsgrade $\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{b}}(t) \in \mathbb{R}^{n^i_{\mathrm{b}}}$ definiert werden. Die verbleibenden Freiheitsgrade sind in den inneren Freiheitsgraden zusammengefasst $\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{i}}(t) \in \mathbb{R}^{n^i_{\mathrm{i}}}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die Sortierung von $\boldsymbol{q}^i(t)$ entsprechend angenommen und kann bereits in der Substrukturierung bereitgestellt werden. Die homogenen Gleichungen sind

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{bb}} & \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{bi}} \\ \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{ib}} & \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{ii}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}^i_{\mathrm{b}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{q}}^i_{\mathrm{i}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^i_{\mathrm{bb}}(\boldsymbol{q}^i(t)) & \boldsymbol{K}^i_{\mathrm{bi}} \\ \boldsymbol{K}^i_{\mathrm{ib}} & \boldsymbol{K}^i_{\mathrm{ii}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^i_{\mathrm{b}}(t) \\ \boldsymbol{q}^i_{\mathrm{i}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Nach der Craig-Bampton-Transformation stehen diese Freiheitsgrade nach wie vor für nichtlineare Funktionsauswertungen zur Verfügung. Die inneren Freiheitsgrade, die ausschließlich von linearen Tragwerkselementen beeinflusst werden, werden modal reduziert, wodurch die Systemordnung sinkt. Die quasi-stationäre Lösung der zweiten Zeile von (4.22) ist identisch zu (4.16),

da $\boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}}^i$ positiv definit und linear ist und damit invertiert werden kann. Der lineare Zusammenhang der inneren Knoten lässt sich mit reduzierten modalen Koordinaten $\boldsymbol{\eta}^i(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{i,r}}^i}$ abbilden. Die Transformationsmatrix wird über die Lösung des generalisierten Eigenwertproblems der zweiten Zeile von (4.22) für $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^i(t) = \boldsymbol{0}$ bestimmt. Die Transformation ist $\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}}^i(t) = \boldsymbol{\Phi}^i \boldsymbol{\eta}^i(t)$ mit $\boldsymbol{\Phi}^i = [\boldsymbol{\phi}_1,...,\boldsymbol{\phi}_{n_{\mathrm{i,r}}^i}]$. So ergibt sich die Craig-Bampton-Transformation analog zu (4.17)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^i(t) \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{i}}^i(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^i \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t), \qquad \boldsymbol{T}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}^i & \boldsymbol{\Phi}^i \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^i(t) \\ \boldsymbol{\eta}^i(t) \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

mit den reduzierten Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{c}}^i}$ implizit vorgegebener Dimension.

Angewendet auf (4.21) und nach Linksmultiplikation mit $\boldsymbol{T}^i$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^i \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{c}}^i(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t)) \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{u,c}}^i \boldsymbol{u}^i(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(0) = \boldsymbol{q}_{0,\mathrm{c}}^i, \quad \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{c}}^i(0) = \boldsymbol{q}_{1,\mathrm{c}}^i, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^i \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

mit $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^i = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}} \boldsymbol{M}^i \boldsymbol{T}^i$, der blockdiagonalen Matrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t)) = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}} \boldsymbol{K}^i(\boldsymbol{T}^i \boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t)) \boldsymbol{T}^i$, der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u,c}}^i = \boldsymbol{T}^{i\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}^i$ und der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^i = \boldsymbol{C}^i \boldsymbol{T}^i$. Der Term $\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t))$ muss im Unterschied zum linearen Ansatz in jedem Zeitschritt ausgewertet werden. Die Dämpfungsmatrix kann nachträglich definiert werden durch

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t)) = \alpha_1 \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^i + \alpha_2 \boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^i(t)), \tag{4.25}$$

mit den Dämpfungskoeffizienten α_1 und α_2 und unterliegt wiederum der aufwendigeren nichtlinearen Auswertung. Diese Art der Craig-Bampton-Transformation ist durch eine geänderte Zuweisung der Randknoten möglich und eignet sich besonders für Systeme mit einer geringen Anzahl nichtlinearer Elemente.

Elimination von Starrkörpermoden

Auch beim nichtlinearen reduzierten dezentralen Modell treten durch die Substrukturierung Starrkörpermoden auf, die mit der gleichen Motivation wie in Abschnitt 4.2.3.1 eliminiert werden. Prinzipiell ist für nichtlineare Systeme die statische Unbestimmtheit nicht definiert. Zudem wird davon ausgegangen, dass keine maßgeblichen kinematischen Bewegungen durch den Ausfall druckschlaffer Elemente in den dezentralen Modellen auftreten. Mit der Annahme, dass sich Starrkörpermoden durch die Nichtlinearitäten nicht ändern und bei geschlossenem Regelkreis die Randknoten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^i(t)$ nahe Null sind, wird die Transformation zur Elimination der Starrkörpermoden für das linearisierte System durchgeführt. Dafür werden die generalisierten Eigenwertprobleme (4.2) für $\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}^i$ gelöst, die Approximation durch Rayleigh führt zu der Dämpfung $\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{0})$. Die resultierenden Eigenvektoren dienen als Transformationsbasis $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{l}}^i$.

Die $n^i_{\mathrm{c,rb}}$ Starrkörpermoden werden eliminiert mit der Transformation $\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{c}}(t) = \boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t)$ mit den neuen Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{l}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{l}}}$ und $n^i_{\mathrm{l}} = n^i_{\mathrm{c}} - n^i_{\mathrm{c,rb}}$. Die Modellgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^i_{\mathrm{l}}\ddot{\boldsymbol{q}}^i_{\mathrm{l}}(t) + \boldsymbol{D}^i_{\mathrm{l}}(\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t))\dot{\boldsymbol{q}}^i_{\mathrm{l}}(t) + \boldsymbol{K}^i_{\mathrm{l}}(\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t))\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t) = \boldsymbol{B}^i_{\mathrm{u,l}}\boldsymbol{u}^i(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(0) = \boldsymbol{q}^i_{0,\mathrm{l}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}}^i_{\mathrm{l}}(0) = \boldsymbol{q}^i_{1,\mathrm{l}}, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}^i_{\mathrm{l}}\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t), \end{aligned} \tag{4.26}$$

mit der Matrix für Masse $\boldsymbol{M}^i_{\mathrm{l}} = \boldsymbol{\Phi}^{i\mathsf{T}}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{M}^i_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}$, Steifigkeit $\boldsymbol{K}^i_{\mathrm{l}}(\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t)) = \boldsymbol{\Phi}^{i\mathsf{T}}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{K}^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t))\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}$ und Dämpfung $\boldsymbol{D}^i_{\mathrm{l}}(\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t)) = \boldsymbol{\Phi}^{i\mathsf{T}}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{D}^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}\boldsymbol{q}^i_{\mathrm{l}}(t))\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}$. Die Eingangsmatrix ist $\boldsymbol{B}^i_{\mathrm{u,l}} = \boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}\boldsymbol{B}^i_{\mathrm{c,u}}$ und die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}^i_{\mathrm{l}} = \boldsymbol{C}^i_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\Phi}^i_{\mathrm{l}}$.

4.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG

Die Modellgleichungen werden in den Zustandsraum überführt. Die Zustandsraumdarstellung ermöglicht die Untersuchung systemtheoretischer Eigenschaften im Zeitbereich mit etablierten Methoden.

4.3.1 Lineare Zustandsraumdarstellung

Die mechanischen Modellgleichungen zweiter Ordnung werden in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt. Für eine Mode sind zwei Zustände zur vollständigen Beschreibung notwendig, was durch zwei Energiespeicher (Masse und Steifigkeit) vorgegeben ist. In dieser Arbeit beinhaltet der Zustand $\boldsymbol{x}(t)$ die modalen Amplituden $\boldsymbol{\eta}(t)$ und die modalen Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$ für jede Mode:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r}. \tag{4.27}$$

Für das volle Modell ist der Zustand bestehend aus den Verschiebungen und Rotationen $\boldsymbol{q}(t)$ und den zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ eine mögliche Wahl. Die zeitinvariante Zustandsraumdarstellung, die die Beziehung zwischen Zustand, Eingang $\boldsymbol{u}(t)$, Störung $\boldsymbol{z}(t)$ und Ausgang $\boldsymbol{y}(t)$ beschreibt, ist

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z}(t)\ , \qquad t > 0, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z}(t)\ , \qquad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.28}$$

mit der Systemmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2r\times 2r}$, der Stelleingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} \in \mathbb{R}^{2r\times m}$, der Störeingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{z}} \in \mathbb{R}^{2r\times l}$, der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times 2r}$ und den Durchgriffsmatrizen $\boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ und $\boldsymbol{D}_{\mathrm{z}} \in \mathbb{R}^{p\times l}$. Für die Systemmatrix des mechanischen Systems (4.9) gilt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{K}^* & -\boldsymbol{D}^* \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Die Eingangsmatrix kann Anteile von parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang sowie von seriellen mit Verschiebungseingang enthalten und ist

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}^{*} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Die Störeingangsmatrix ist

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{z}}^{*} \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Die Ausgangs- und Durchgriffsmatrizen variieren je nach betrachtetem Messwert und setzen sich zusammen aus

$$\text{Verschiebungen :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp}}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{0} \tag{4.32}$$

$$\text{Dehnung :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\varepsilon}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{D}_{\varepsilon} \tag{4.33}$$

$$\tag{4.34}$$

Für weitere Größen, die nicht gemessen werden, jedoch bei der Analyse und Regelung verwendet werden, gilt

$$\text{Kraft :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{f}} \tag{4.35}$$

$$\text{Längung :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{l}} \tag{4.36}$$

$$\text{Position, vollständig :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{0} \tag{4.37}$$

$$\text{Geschwindigkeit :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,tot}}\boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{0} \tag{4.38}$$

$$\text{Verschiebungen, translatorisch :} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{disp,t}}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{0}. \tag{4.39}$$

4.3.2 Zustandsraumdarstellung mit druckschlaffen Elementen

Das nichtlineares Systemen n-ter Ordnung mit druckschlaffen Elementen wird in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführt. Es ergibt sich die allgemeine Zustandsraumdarstellung des nichtlinearen eingangaffine Systems ohne Störung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(t)\ , && t > 0, && \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\ , && t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

mit dem Zustand

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{\mathrm{r}}} \tag{4.41}$$

und der Eingangsmatrix äquivalent zu (4.30). Es ergibt sich

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t)) & \boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t)) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{u,r}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 \end{bmatrix}. \tag{4.42}$$

Die Ausgangsgleichung von (4.40) bildet für alle Mess- und Regelgrößen aus Kapitel 3.1.4, abgesehen von der Dehnung und den Kräften, einen linearen Zusammenhang ab. Für die Dehnungen und Kräfte in passiven druckschlaffen Elementen sowie mit seriellem Eingängen beinhaltet $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ mehrere Fälle (Gleichungen (3.27),(3.29),(3.35),(3.38)), mit $\boldsymbol{q}(t)$ transformiert in $\boldsymbol{\zeta}(t)$ und übertragen in den Zustand $\boldsymbol{x}(t)$.

4.3.3 Zustandsraumdarstellung dezentraler Modelle

Die linearen substrukturierten Modelle nach Abschnitt 4.2.3.1 in Zustandsraumdarstellung werden durch die Indizierung der Teilmodelle ergänzt. Die dezentrale Zustandsraumdarstellung ist

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^i(t) &= \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{x}^i(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}^i\boldsymbol{u}^i(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{z}}^i\boldsymbol{z}^i(t)\ , && t > 0, && \boldsymbol{x}^i(0) = \boldsymbol{x}_0^i \\ \boldsymbol{y}^i(t) &= \boldsymbol{C}^i\boldsymbol{x}^i(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}}^i\boldsymbol{u}^i(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{z}}^i\boldsymbol{z}^i(t)\ , && t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.43}$$

wobei die Matrizen wie in Abschnitt 4.3.1 zusammengesetzt werden.

Für die Zustandsraumdarstellung dezentraler Modelle mit druckschlaffen Elementen (4.21) gilt

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^i(t) &= \boldsymbol{f}^i(t, \boldsymbol{x}^i)\boldsymbol{x}^i(t) + \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{u}^i(t)\ , && t > 0, && \boldsymbol{x}^i(0) = \boldsymbol{x}_0^i \\ \boldsymbol{y}^i(t) &= \boldsymbol{h}^i(t, \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{u}^i)\ , && t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Die Funktionen ergeben sich analog zu Abschnitt 4.3.2.

4.4 SYSTEMTHEORETISCHE EIGENSCHAFTEN

Drei wichtige Eigenschaften in der Regelungstechnik sind die Stabilität einer Ruhelage sowie die Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit eines Systems. Diese Eigenschaften sollen im Folgenden für adaptive Tragwerke betrachtet werden.

Stabilität

Im Bauwesen ist Stabilität ein grundlegende Systemeigenschaft, die stets erfüllt sein muss. Intuitiv betrachtet sind passive Tragwerke im regelungstechnischen Sinn immer stabil ausgelegt, sodass die Standsicherheit gewährleistet ist. Adaptive Tragwerke könnten durch eine Regelung stabilisiert werden, sollten im passiven Zustand jedoch auch stabil sein, um bei Ausfall der

Aktoren kein Sicherheitsrisiko darzustellen. Bei Tragwerken mit druckschlaffen Elementen ist das Aufbringen von Vorspannung in diesen Elementen eine zentrale Maßnahme um Ausfall zu verhindern.

Ein lineares Zustandsraummodell ist nach Hurwitz asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ negative Realteile $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ besitzen [61, 72]. Dargestellt in Abhängigkeit der Schwingungsfrequenzen ω_i und der modalen Dämpfungsparameter ζ_i sind die paarweise konjugiert komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{2i-1,2i} = -\zeta_i \omega_i \pm j\omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}, \qquad i = 1,...,n. \tag{4.45}$$

Der Betrag entspricht der zugehörigen Schwingungsfrequenz ω_i [41].

Bei nichtlinearen Tragwerken kann die Stabilität einer Ruhelage nicht über Eigenwerte gezeigt werden. In Anhang B.1 ist der Stabilitätsnachweis für ein vereinfachtes Beispieltragwerk mit druckschlaffen Elementen gezeigt. Hierbei wird auf das Prinzip und die Effekte druckschlaffer Elemente eingegangen, bevor der Nachweis auf ein adaptives Tragwerk wie das Demonstrator-Hochhaus erweitert wird.

Für reduzierte Modelle kann die Stabilität nach der Ordnungsreduktion generell nicht als gegeben angenommen werden. Für ein POD-reduziertes Modell ist Stabilität der Ruhelagen nach der Reduktion nicht gewährleistet. Für projektionsbasierte Ordnungreduktionsmethoden existiert für lineare Systeme ein Nachweis [38, 126]. Gegeben sei die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ des stabilen Originalmodells in Zustandsraumdarstellung und eine positive symmetrische Matrix, die von links an $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ multipliziert ist[5]. Die Projektionsmatrix $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times n_\mathrm{r}}$ mit vollem Spaltenrang bestimmt die Größe des reduzierten Systems. Ist der Term $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ negativ semidefinit, ist jedes mit $\boldsymbol{V}$ reduzierte System nach anschließender Linksmultiplikation mit $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}$ stabil [126]. Für nichtlineare Systeme, die mittels POD reduziert werden, muss nach [111] negative Definitheit für $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}\right)^*$ gelten. Für die hier betrachteten mechanischen Systeme gilt nur negative Semidefinitheit. Es befinden sich nach der POD-Reduktion für die eingesetzte Ruhelage $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ in der dann linearen Betrachtung zumindest keine Pole in der rechten Halbebene.

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Eigenschaft der Steuerbarkeit ist entscheidend für die zielgerichtete Beeinflussung eines Systems. Die Steuerbarkeit wird bei der dynamischen Aktorplatzierung in Abschnitt 5.1.3 sichergestellt, indem das Gütekriterium aus der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix aufgebaut wird. Im Vorgriff auf die Aktorplatzierung werden dabei viele Aktoren platziert, die nicht alle für das Erreichen der Steuerbarkeit notwendig sind, vielmehr ist eine große Anzahl aufgrund begrenzter Aktorkräfte gefordert. Mit zu wenig oder schlecht platzierten Aktoren kann die Steuerbarkeit eines adaptiven Tragwerks verloren gehen. Mit dem Kriterium von Kalman kann Steuerbarkeit bei linearen Systemen einfach gezeigt werden. Motiviert aus der linearen Modellierung mittels FEM

[5] In dieser Arbeit ist dies immer die Einheitsmatrix.

(s. Abschnitt 3.1.1.1) ist ersichtlich, dass ein Stützenaktor Torsionsmoden nicht beeinflussen kann, da dieser nur in z-Richtung wirkt. Des Weiteren treten Biegemoden in x- und y-Richtung mit identischer Frequenz, aber unterschiedlichen Schwingungsformen (Eigenvektoren) auf. Damit beide Moden steuerbar sind, sind mindestens zwei Aktoren notwendig. Die linearen Modelle des Demonstrator-Hochhauses und des Maßstabsmodells sind steuerbar. Für nichtlineare Systeme sind keine globalen Aussagen zur Steuerbarkeit möglich. Wird Steuerbarkeit für einen linearisierten Arbeitspunkt festgestellt, gilt dies als hinreichendes Kriterium für die Steuerbarkeit des nichtlinearen Systems um diesen Punkt.

Die Beobachtbarkeit ist die duale Betrachtung zur Steuerbarkeit und hängt von den installierten Sensoren ab. Die in dieser Arbeit nicht betrachtete Sensorplatzierung kann analog zur Aktorplatzierung durch die Maximierung der Beobachtbarkeit erfolgen [117, 159]. Hierbei sind auch Kriterien relevant, die eine Fehlerdetektion qualitativ und quantitativ beschreiben [137]. Das Demonstrator-Hochhaus und das Maßstabsmodell sind mit den in Abschnitt 2 beschriebenen Versuchsständen beobachtbar.

4.5 STATIONÄRE LÖSUNG UND REDUNDANZ

In diesem Abschnitt wird ein Zusammenhang zwischen dem in der Systemtheorie gängigen Begriff der stationären Lösung und den aus dem Bauingenieurwesen stammenden Konzepten der statischen Unbestimmtheit und der Redundanz hergeleitet. Es werden ausschließlich lineare, statische Fachwerke betrachtet. Erweiterungen für Rahmentragwerke und kontinuierliche Theorien, wie Balken, Scheiben, Platten oder Schalen sind Inhalte aktueller Forschung [40, 144].

Das Konzept der Redundanz ist im Anhang C.2 ausführlich beschrieben. Im Zentrum der Betrachtung steht die sogenannte Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$, welche als Maß für die Verteilung der statischen Unbestimmtheit innerhalb eines Tragwerks dient und Rückschlüsse auf die Redundanz einzelner Tragwerkselemente zulässt [138, 144]. Der Rang der Redundanzmatrix ist identisch zum Grad der statischen Unbestimmtheit des untersuchten Tragwerks. Aufgrund der Idempotenz der Redundanzmatrix kann deren Rang aus der Spur der Matrix abgelesen werden.

Die Redundanz ist eine dem Tragwerk innewohnende Eigenschaft, weshalb äußere Störungen nicht betrachtet werden. Die stationäre Lösung der Systemgleichung (4.28) ($\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{0}$) und einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt das stationäre E/A-Verhalten

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{u}})\boldsymbol{u}. \tag{4.46}$$

Um den Zusammenhang zum Redundanzkonzept herzustellen, wird eine Tragwerkskonfiguration betrachtet, bei der alle Tragwerkselemente aktuiert werden und das resultierende Verhalten aller Tragwerkselemente messtechnisch erfasst wird. Dieser theoretisch motivierte Ansatz ermöglicht eine Charakterisierung aller Elemente. Das Konzept der Redundanz basiert auf dem Zusammenhang zwischen der virtuell vorgegebenen Einheitslängung $\Delta \boldsymbol{l}_0$ und der

elastischen Elementlängung $\Delta \boldsymbol{l}_{\mathrm{el}}$, welche der Differenz aus tatsächlicher Längung Δl und Einheitslängung entspricht. Deshalb werden die Eingänge und Ausgänge von (4.46) entsprechend definiert (3.31). Der Systemeingang wird als Einheitslängung festgelegt $\boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{l}_0$. Daraus folgt für die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$, sodass ein Kräftegleichgewicht entsteht. Die Matrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}$ ist in Abschnitt 3.1.4 durch (3.36) definiert. Der Ausgang entspricht der elastischen Elementlängung $\boldsymbol{y} := \Delta \boldsymbol{l}_{\mathrm{el}} = \Delta \boldsymbol{l} - \Delta \boldsymbol{l}_0$, woraus die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}$ und die Durchgriffsmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = -\boldsymbol{I}$ folgen. Einsetzen in (4.46) führt zu

$$\boldsymbol{y} = \underbrace{\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{l}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} - \boldsymbol{I}\right)}_{-\boldsymbol{R}} \boldsymbol{u}. \tag{4.47}$$

Durch Vergleich mit (C.11) zeigt sich, dass die stationäre Verstärkung der negativen Redundanzmatrix entspricht.

Auf ähnliche Weise kann eine zweite Kombination von Eingängen und Ausgängen definiert werden. Mit dem parallelen Krafteingang $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ gilt die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{\mathsf{T}}$ gemäß (3.14). Aus Sicht des Bauingenieurwesens kann $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ als Kraft in einem virtuellen parallelen Element aufgefasst werden. In den Ausgängen sind die Gesamtelementkräfte $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{F}_{\mathrm{elem,tot}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{elem}} - \boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ bestehend aus den Elementkräften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{elem}}$ und den parallelen Aktorkräften $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ erfasst, wodurch die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}$ entsprechend (3.36) und die Durchgriffsmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{u}} = -\boldsymbol{I}$ ist. Die Gesamtelementkraft entspricht der Kraft, die von einem Paar aus Element und parallelem Aktor auf das umliegende Tragwerk ausgeübt wird. Einsetzen in (4.46) ergibt

$$\boldsymbol{y} = \underbrace{\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{C}_{\mathrm{l}}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{I}\right)}_{-\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{u} \tag{4.48}$$

Die Matrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}$ wird im Folgenden als Kraftredundanzmatrix bezeichnet. Ihr Rang entspricht ebenfalls dem Grad der statischen Unbestimmtheit des Tragwerks.

Die Redundanzmatrix und die Kraftredundanzmatrix bilden ähnliche Sachverhalte ab und es besteht der Zusammenhang $\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$. Prinzipiell gilt, jede quadratische Matrix ist ähnlich zu ihrer Transponierten [168]. Die Ähnlichkeitstransformation ist mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$ definiert als

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}^{-1}. \tag{4.49}$$

Beide Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte und das gleiche charakteristische Polynom. Mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$ werden die Eingänge und Ausgänge von (4.47) in die Eingänge und Ausgänge von (4.48) überführt.

Aus systemdynamischer Sicht repräsentieren die negative Redundanzmatrix $-\boldsymbol{R}$ und Kraftredundanzmatrix $-\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}$ für (4.47) bzw. (4.48) die stationären Verstärkungsfaktoren zwischen den Eingängen und Ausgängen (vgl. Tab. 4.2).

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{u}. \tag{4.50}$$

Tabelle 4.2: Zusammenhang zwischen Zustandsraumdarstellung und Redundanzkonzept.
Die stationäre Zustandsraumdarstellung $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_\mathrm{u}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_\mathrm{u}\boldsymbol{u}$ ohne externe Störung kann mit dem Konzept der Redundanz in Verbindung gebracht werden. Bei gegebener Systemmatrix ergeben sich die Eingangs-, Ausgangs- und Durchgriffsmatrix entsprechend.

Eingang	Ausgang	Stationäre Verstärkung
$\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{l}_0$	$\boldsymbol{y} = \Delta\boldsymbol{l}_\mathrm{el}$	$-\boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_\mathrm{p}$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}_\mathrm{elem,tot}$	$-\boldsymbol{R}_\mathrm{f} = -(\boldsymbol{K}_\mathrm{elem}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_\mathrm{elem}^{-1})^\intercal$

Das negative Vorzeichen ergibt sich bei der Kraftredundanzmatrix durch die Definition der Ausgänge $\boldsymbol{y}$, wobei positive Werte Zugkräfte und negative Werte Druckkräfte repräsentieren. Im Vergleich dazu sind bei den Eingängen $\boldsymbol{u}$ positive Werte Druckkräfte und negative Werte Zugkräfte.

Ein weiterer Schritt zur Generalisierung des Konzepts ist die Herleitung einer dynamischen Redundanzmatrix. Dadurch kann das dynamische Verhalten eines adaptiven Tragwerks erfasst werden, was eine Verbindung zur Übertragungsfunktion aus der Systemtheorie vermuten lässt. Dies ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten im Bauingenieurwesen.

Die statische Unbestimmtheit, die aus der (Kraft-)Redundanzmatrix abgelesen werden kann, gibt an, wie viele unabhängige statische Kraftzustände in einem Tragwerk möglich sind. Um Vergleiche zwischen Redundanzmatrix und der optimalen statischen Aktorplatzierung in Abschnitt 5.1.2 herstellen zu können, können die Eingänge und Ausgänge in Abschnitt 5.1.2.2 entsprechend gewählt werden. Die Redundanzanteile einer Aktormenge entsprechen den zugehörigen Spalten der Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$. Werden die Eingänge und Ausgänge gemäß der Herleitung der Redundanzmatrix gewählt, bestimmt der Grad der statischen Unbestimmtheit die maximale Anzahl an platzierbaren Aktoren. Mit darüber hinaus platzierten zusätzlichen Aktoren können keine weiteren Kraftzustände eingestellt werden.

5 OPTIMALE AKTORPLATZIERUNG

Bei adaptiven Tragwerken und Tragwerkselementen ist die Frage der Aktorplatzierung ein zentrales Thema in der Planung und Auslegung. Aus systemdynamischer Sicht müssen Aktoren so platziert sein, dass alle relevanten Verformungs- und Bewegungszustände ausreichend beeinflusst werden können. Um die Anforderungen hinsichtlich der Zuverlässigkeit adaptiver Tragwerke zu erfüllen, werden viele Aktoren eingesetzt. Die entstandene Redundanz reduziert zudem die aufzubringenden Kräfte der Einzelaktoren. Die hohe Anzahl an Aktoren und Sensoren führt auf ein System mit mehreren Eingängen und Ausgängen (MIMO), die häufig eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden aufweisen. Eine große Anzahl von Aktoren steigert die Komplexität des Tragwerks, den Aufwand bei der Wartung und verbraucht wertvolle Ressourcen. Dieses Kapitel zur Aktorplatzierung gibt Methoden an die Hand, um mit möglichst wenig Aktoren äußere Lasten optimal zu kompensieren und zu regeln. Optimalität bezieht sich auf noch zu definierende Kostenfunktionen, die für die statische und die dynamische Aktorplatzierung hergeleitet werden. Die Aktoren werden unabhängig von der technischen Ausführung auf Kraft- oder Verschiebungseingänge abstrahiert.

Es muss klargestellt werden, dass eine Platzierung sehr spezifisch für unterschiedliche Tragwerke, wie beispielsweise Hochhäuser oder Brücken, ausfallen wird. Des Weiteren ist die anregende Last entscheidend, mit den Eigenschaften Intensität, Richtung oder örtliche und zeitliche Verteilung.

Eine optimale Aktorplatzierung bei adaptiven Tragwerken oder Elementen erhöht die erreichbare Güte der statischen Kompensation und aktiven Schwingungsdämpfung. Die zentralen Ziele dieses Kapitels sind:

- Definition der (verteilten) statischen Kompensierbarkeit und Wahl der Eingangs- und Ausgangsvariablen.
- Berechnung der optimalen Aktorpositionen im Sinne der Kostenfunktionen für statische und dynamische Lasten und deren Kombination zu einer Aktorkonfiguration.
- Optimale Aktorplatzierung unter statischen Lasten für Systeme mit verteilten Parametern.

Die Struktur des Kapitels zur Aktorplatzierung teilt sich nach zwei Aspekten auf: Im ersten Teil (Abschnitt 5.1) werden vollständige Tragwerke betrachtet und optimale Aktorpositionen hinsichtlich statischer und dynamischer Anforderungen bestimmt. In Abschnitt 5.1.1 wird das Optimierungsproblem vorgestellt in das sich beide Aufgaben fassen lassen. Die Methode zur statischen Aktorplatzierung in Abschnitt 5.1.2 minimiert den Ausgangsfehler, induziert durch

statische Lasten, und bezieht die benötigte Eingangskraft in die Optimierung ein [149, 154]. Die dynamische Aktorplatzierung in Abschnitt 5.1.3 basiert auf der systemtheoretischen Eigenschaft der Steuerbarkeit und ist unabhängig von dynamischen Lasten. Bei beiden Platzierungsalgorithmen werden parallele und serielle Aktuierungsprinzipien verwendet. Anschließend werden beide Ansätze in Abschnitt 5.1.4 kombiniert, sodass *eine* Aktorkonfiguration für die Bauausführung bestimmt wird. Das Demonstrator-Hochhaus dient als Anschauungsobjekt für die Aktorplatzierung an Tragwerken. Im zweiten Teil (Abschnitt 5.2) wird ein strukturelles Element betrachtet, das in ein Tragwerk integriert werden kann [151]. Im Unterschied zur Aktorplatzierung bei Tragwerken, wird von einem kontinuierlichen Modellansatz ausgegangen und es werden keine diskreten Aktorpositionen vorgegeben. Diese Methode der Aktorplatzierung an Systemen mit verteilten Parametern wird an einem Euler-Bernoulli-Balken mit kontinuierlich platzierbaren Aktoren illustriert.

5.1 AKTORPLATZIERUNG FÜR TRAGWERKE

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Frage, wo im Tragwerk Aktoren platziert werden müssen, um den Einfluss von Lasten optimal zu kompensieren. Die Systemauslegung im Sinne der Aktorplatzierung bei adaptiven Tragwerken muss der statischen Kompensation sowie der aktiven Schwingungsdämpfung gerecht werden. Die Anwendung von Algorithmen zur Aktorplatzierung hinsichtlich beider Fälle ist aufgrund der unterschiedlichen Ziele notwendig. Für beide Störungen existieren spezifische Kostenfunktionen, welche die Problemstellung jeweils sehr gut abbilden. Werden beide Aspekte in einer Optimierung erfasst, leidet die Interpretierbarkeit der Ergebnisse.

Die zugrunde liegenden Modelle sind zeitinvariant und linear, sodass der Berechnungsaufwand niedrig bleibt. Dies ist bei großen Tragwerken mit vielen Elementen entscheidend. Bei der statischen und dynamischen Aktorplatzierung werden zunächst separate Kostenfunktionen hergeleitet und die Ergebnisse verglichen. Anschließend erfolgt die Kombination beider Ergebnisse mit verschiedenen Ansätzen.

5.1.1 Optimierungsproblem und dessen Lösung

Bei adaptiven Tragwerken sollen die Aktoren in die Elemente der Tragstruktur integriert werden, wodurch sich eine endliche Menge an Aktorkandidaten C mit der Kardinalität $|C| = c$ ergibt. Die Bewertung einer beliebigen Teilmenge an Aktoren $S \subseteq C$, mit $|S| = k \leq c$ erfolgt mit Hilfe einer Kostenfunktion J. Dieses nimmt abhängig von der Aktormenge S einen skalaren Wert $J(S)$ an und beschreibt die Kosten im Sinne dieses Kriteriums. Mögliche Kostenfunktionen werden später eingeführt. Die optimale Aktormenge $S^* \subset C$ mit der Kardinalität $|S^*| = k^* \leq c$ ergibt sich durch Lösen eines Optimierungsproblems. Ist die Kostenfunktion so gestellt, dass kleinere Werte für eine bessere Aktormenge stehen, lautet das Optimierungsproblem

$$(S^*, k^*) = \arg \min_{S \subset C, 0 \leq k \leq c} J(S) \tag{5.1}$$

Die Formulierung (5.1) fällt in die Klasse der kombinatorischen Optimierungsprobleme. Eine Lösung mittels „brute-force“ Ansatz, d. h. die Bestimmung des Kostenwerts für jede Kombination, würde zur optimalen Lösung führen. Die Anzahl der Funktionsauswertung ist $N = \sum_{k=1}^{c} \binom{c}{k}$ und beträgt bereits bei dem vergleichsweise kleinen Demonstrator-Hochhaus $N \approx 1{,}2 \cdot 10^{24}$. Die vollständige Enumeration ist damit bei praktisch relevanten Problemen nicht praktikabel einsetzbar. „Branch and bound“ Algorithmen [85] garantieren eine optimale Lösung, enden jedoch im ungünstigsten Fall in der totalen Enumeration. Eine rechenintensive Alternative bieten evolutionäre Algorithmen [57], die, inspiriert durch die biologische Evolution, iterativ eine Lösungsmenge produzieren. Abgeleitet von einem Abkühlprozess von Materie ist das *simulated annealing* [73] als Heuristik bekannt, welches jedoch keine optimale Lösung garantiert.

Eine sehr effiziente Lösung von kombinatorischen Optimierungsproblemen bieten die Greedy-Algorithmen. Ähnlich zu den Gradientenverfahren fügen Greedy-Algorithmen in jedem Optimierungsschritt der Lösung das Element hinzu, das im Sinne der Kostenfunktion die größte Verbesserung verspricht. Dadurch finden sie besonders schnell eine Lösung, die meist jedoch nicht optimal ist. Zum Nachteil dieser Algorithmen dient, dass einmal hinzugefügte Lösungselemente nicht wiederholt im Kontext der gesamten Aktormenge evaluiert werden. Zuerst vorgeschlagen wurde ein solcher Algorithmus in [82]. Für die Aktorplatzierung wird ein Greedy-Algorithmus angewendet und formal beschrieben. Es wird bei der leeren Lösungsmenge $S_0 \leftarrow \emptyset$ begonnen. Für jedes Element $s \in C \backslash S_i$ der Kandidatenmenge C, das noch nicht hinzugefügt wurde, wird mit den bereits ausgewählten Elementen S_i die Kostenfunktion $J(S_i \cup \{s\})$ ausgewertet. Die Verbesserung der Kostenfunktion berechnet sich bei einer Minimierung mit $\Delta(S_i,s) = J(S_i) - J(S_i \cup \{s\})$. In jedem Schritt wird das Element der Lösungsmenge hinzugefügt, das die größte Verbesserung bringt:

$$S_{i+1} \leftarrow S_i \cup \{\arg\min_s \Delta(S_i,s) | s \in C \backslash S_i\}, \qquad i = 0,...,k-1, \qquad S_0 \leftarrow \emptyset. \tag{5.2}$$

Alternativ kann ein inverser Greedy-Algorithmus [82] verwendet werden. Dieser beginnt mit der vollständigen Aktormenge und reduziert diese um den Aktor, der durch Wegnehmen die Kostenfunktion am wenigsten verschlechtert. Daraus können sich Vorteile ergeben, jedoch konterkariert die große Menge an potentiellen Aktorpositionen bei einer final vertretbaren Aktorzahl in großen Tragwerken diesen Ansatz.

Unter der Annahme von monoton steigenden und submodularen Kostenfunktion können Garantien für die Güte der Lösung angegeben werden [100]. Des Weiteren kann bei modularen Kostenfunktionen die Verbesserung für jedes Element der Kandidatenmenge separat bestimmt werden, unabhängig von allen anderen Kandidaten. Dies wurde bei der dynamischen Aktorplatzierung in [54] angewendet.

Wird die Kostenfunktion definiert, sodass kein eindeutiges Optimum abhängig von der Aktorzahl existiert, entsteht eine Pareto-Menge. Bei Verwendung des Greedy-Algorithmus ist für eine bestimmt Anzahl Aktoren kein besserer Wert für die Kostenfunktion erreichbar. Bei der Systemauslegung kann demnach abgewogen werden, wie hoch der geforderte Kostenwert sein darf und die entsprechende Aktorzahl abgeleitet werden. Die Greedy-Algorithmen haben bei

adaptiven Tragwerken eine praktikable Anwendbarkeit bewiesen und führen zu funktionalen Ergebnissen.

5.1.2 Statische Aktorplatzierung

Durch die statische Kompensation in Abschnitt 6.2 wird ein Eingangsignal bereitgestellt, sodass Auswirkungen von statischen Lasten auf ein Tragwerk reduziert werden. Die statische Aktorplatzierung berechnet eine optimale Verteilung der Aktoren hinsichtlich der Kostenfunktion, die durch die euklidische Norm des Ausgangsfehlers spezifiziert wird. Der optimale Eingang zur statischen Kompensation bei einem linearen Modellierungsansatz wird während der Herleitung der Kostenfunktion berechnet und kann wiederum in die Kostenfunktion aufgenommen werden. Dieses wird durch eine Gramsche Matrix repräsentiert, wovon ein skalares Maß für die Bestimmung der optimalen Aktormenge abgeleitet wird. Die optimale statische Aktorplatzierung wird für das Demonstrator-Hochhaus durchgeführt.

5.1.2.1 Stationäre Kompensierbarkeit

Die stationären Modellgleichungen eines asymptotisch stabilen, zeitinvarianten Systems mit der Ausgangsgleichung sind mit dem Zustand $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ und der Störung $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^l$ gegeben durch

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}). \tag{5.3}$$

Die Existenz einer Ruhelage wird vorausgestezt. Starrkörpermoden, die bei sinnvoll ausgelegten Tragwerken nicht vorkommen, dürfen nicht auftreten, da die Kostenfunktion andernfalls nicht berechnet werden kann. Zur Kompensation von stationären Störungen an einem System wird die folgende Definition eingeführt:

Definition 1 (Stationäre Kompensierbarkeit)**.** *Eine konstante Störung $\boldsymbol{z}$, die auf ein System* (5.3) *wirkt, heißt stationär kompensierbar hinsichtlich des Ausgangsfehlers $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}_\mathrm{d} - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ für einen beliebigen aber festen Sollausgang $\boldsymbol{y}_\mathrm{d}$, wenn es einen konstanten Eingang $\boldsymbol{u}$ gibt, sodass $\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\|_2 < \|\boldsymbol{e}(\mathbf{0})\|_2$. Ein System* (5.3) *heißt vollständig stationär kompensierbar, wenn jede konstante Störung $\boldsymbol{z} \neq 0$ stationär kompensierbar ist.*

Der gewünschte Ausgang $\boldsymbol{y}_\mathrm{d}$ kann einen beliebigen Wert annehmen. Der Ausgangsfehler ist demnach mit kompensierendem Eingang kleiner als ohne Eingang.

Zu Herleitung einer Kostenfunktion für die statische Aktorplatzierung wird ein lineares Systemmodell betrachtet. Die Frage der Aktorplatzierung stellt sich gewöhnlich bei hochdimensionalen Systemen mit vielen möglichen Positionen für Aktoren. Liegt ein nichtlineares Modell vor, kön-

nen mittels Linearisierung lineare Modellgleichungen hergeleitet werden. Zur Beschreibung der Methode werden die asymptotisch stabilen, linearen, zeitinvarianten Modellgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_\mathrm{u}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_\mathrm{z}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_\mathrm{u}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}_\mathrm{z}\boldsymbol{z}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}_\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}_\mathrm{z} \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sowie $\boldsymbol{D}_\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ und $\boldsymbol{D}_\mathrm{z} \in \mathbb{R}^{p\times l}$ eingeführt. Es wird vorausgesetzt, dass die Ein- und Ausgangsmatrizen vollen Spaltenrang, respektive Zeilenrang, besitzen und diese Größen somit linear unabhängig sind. Die Voraussetzungen sind physikalisch motiviert, da andernfalls mehrere Aktoren die gleiche Wirkung haben oder Sensoren den gleichen Messwert erfassen. Die Durchgriffsmatrix des Störeingangs $\boldsymbol{D}_\mathrm{z}$ wird für diese Methode nicht berücksichtigt, da kein ausgangsseitiger Störeinfluss angenommen wird. Hingegen kann die Durchgriffsmatrix des Eingangs $\boldsymbol{D}_\mathrm{u}$ in einige Fällen nicht vernachlässigt werden

5.1.2.2 Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix

Um ein quantitatives Maß für die stationäre Kompensierbarkeit abzuleiten, wird der Ausgangsfehler $\boldsymbol{e}$ betrachtet. Vorerst wird von einer gegebenen Eingangskonfiguration ausgegangen. Die Störung wird als bekannt vorausgesetzt. Die Wahl der gewünschten Ausgangsgröße zu $\boldsymbol{y}_\mathrm{d} = \mathbf{0}$ ist bei adaptiven Tragwerken unter stationären Lasten der strukturmechanische und nutzungsgerechte Sollzustand. Der Ausgangsfehler in Abhängigkeit der Stell- und Störeingänge ergibt sich nach Auflösen der ersten Zeile von (5.4) nach $\boldsymbol{x}$ und Einsetzen in die Ausgangsgleichung in der zweiten Zeile zu

$$\boldsymbol{e} = \underbrace{\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_\mathrm{u} - \boldsymbol{D}_\mathrm{u}\right)}_{=:\boldsymbol{H}_\mathrm{u}}\boldsymbol{u} + \underbrace{\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_\mathrm{z} - \boldsymbol{D}_\mathrm{z}\right)}_{=:\boldsymbol{H}_\mathrm{z}}\boldsymbol{z}. \tag{5.5}$$

Die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ wird aufgrund der anfangs geforderten asymptotischen Stabilität als invertierbar vorausgesetzt. Es gilt $\boldsymbol{H}_\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ und $\boldsymbol{H}_\mathrm{z} \in \mathbb{R}^{p\times l}$. Ein verschwindender Ausgangsfehler $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ ist allgemein nicht möglich und wird nur in Ausnahmefällen erreicht. Deshalb wird der Ausgangsfehler im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate minimiert. Der optimale Eingang $\boldsymbol{u}^*$ ergibt sich durch Minimierung der euklidische Norm in Abhängigkeit der Störamplitude $\boldsymbol{z}$

$$\boldsymbol{u}^* = \arg\min_{\boldsymbol{u}} \|\boldsymbol{e}\|_2^2 = \underbrace{-\boldsymbol{H}_\mathrm{u}^+\boldsymbol{H}_\mathrm{z}}_{=:\boldsymbol{M}_\mathrm{u}}\boldsymbol{z} \tag{5.6}$$

Die euklidische Norm des Ausgangsfehlers ist minimal, wenn $\boldsymbol{e}$ orthogonal zu $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_\mathrm{u} - \boldsymbol{D}_\mathrm{u}$ ist. Eine eindeutige Lösung dieses Optimierungsproblems liegt vor, wenn das Gleichungssystem (über)bestimmt ist, wobei die Anzahl der Ausgänge die Eingänge übersteigt/gleich ist ($p \geq m$). Ist das Gleichungssystem unterbestimmt, existieren unendlich viele Lösungen, was eintritt, wenn mehr Eingänge als Ausgänge vorhanden sind ($p < m$). Bei adaptiven Tragwerken kommt dem

ersten Fall eine größere Bedeutung zu, da Ausgänge gewöhnlich zahlreich sind und Eingänge eher gering gehalten werden. Nach Einsetzen des optimalen Eingangs (5.6) in (5.5) folgt der optimale Ausgangsfehler mit

$$\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{H}\boldsymbol{z}, \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_\mathrm{u}\boldsymbol{H}_\mathrm{u}^+)\boldsymbol{H}_\mathrm{z} \tag{5.7}$$

bei gegebener Störung. Der Wert des optimalen Ausgangsfehlers tendiert eher zu Null, je besser der Term $\boldsymbol{H}_\mathrm{u}\boldsymbol{H}_\mathrm{u}^+$ die Einheitsmatrix annähert. Dies bedeutet, dass die Spaltenmatrix $\boldsymbol{H}_\mathrm{u}$ den Raum des durch Störungen angeregten Zustands vollständig abdeckt. Der quadratische optimale Ausgangsfehler ist

$$\|\boldsymbol{e}^*\|_2^2 = \boldsymbol{z}^\mathsf{T}\boldsymbol{W}_\mathrm{e}\boldsymbol{z}, \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{W}_\mathrm{e} = \boldsymbol{H}^\mathsf{T}\boldsymbol{H} \tag{5.8}$$

als *Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix*. Basierend darauf wird ein quantitatives Maß zur Bewertung der stationären Kompensierbarkeit abgeleitet, welches für eine Aktorplatzierung verwendet werden kann. Die Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix ist dabei unabhängig von der Störamplitude $\boldsymbol{z}$.

Die Methode der Aktorplatzierung wurde für allgemeine stationäre Systemgleichungen eingeführt, die in dieser Arbeit auf adaptive Tragwerke angewendet wird. Bei sinnvoll ausgelegten, d. h. nicht kinematischen und damit statisch (über)bestimmten Tragwerken, treten keine Starrkörpermoden auf, was im Einklang zur geforderten asymptotischen Stabilität steht. Dementsprechend ist stationär mit statisch gleichzusetzen da $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ gilt. Zur Anwendung auf adaptive Tragwerke mit dem Zustand $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{q}$ wird die Systemmatrix als Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{K}$, der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_\mathrm{u} = \boldsymbol{B}$ und der Störeingangsmatrix $\boldsymbol{B}_\mathrm{z} = \boldsymbol{E}$ gewählt.

Erweiterung um die Eingangswirkung

Darüber hinaus kann der Ausgangsfehler in der Kostenfunktion um zusätzliche Aspekte erweitert werden. Eine Berücksichtigung der Aktorkräfte während der Aktorplatzierung hat sich als zielführend erwiesen. Um eine lastinduzierte Verschiebung zu kompensieren, ist eine Aktorkraft notwendig, deren Größe von der Last abhängt. Aktorkräfte sind limitiert und stehen nicht unbeschränkt zur Verfügung. Durch die Bewertung der Eingangskräfte können keine festen Stellgrößenbeschränkungen vorgegeben werden (s. Abschnitt 5.1.2.2), jedoch werden große Aktorkräfte stärker bestraft. Die quadratischen optimalen Eingangskräfte der Aktuierung sind wiederum separierbar in der Störamplitude $\boldsymbol{z}$ und ergeben sich nach (5.6) zu

$$\|\boldsymbol{u}^*\|_2^2 = \boldsymbol{z}^\mathsf{T}\boldsymbol{M}_\mathrm{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{M}_\mathrm{u}\boldsymbol{z}. \tag{5.9}$$

Zwischen den physikalischen Größen von Ausgangsfehler und optimaler Aktorkraft können, je nach Modellierung, mehrere Zehnerpotenzen liegen, was eine Gewichtung notwendig macht. Eine Kombination beider Werte ergibt

$$\|e^*\|_2^2 + \|u^*\|_{2,Q}^2 = z^\mathsf{T} \underbrace{(W_\mathrm{e} + W_\mathrm{u})}_{:=W} z \qquad \text{mit} \qquad W_\mathrm{u} = M_\mathrm{u}^\mathsf{T} Q M_\mathrm{u}, \tag{5.10}$$

wobei Q eine Gewichtungsmatrix darstellt. Mit der Berücksichtigung des Eingangs durch die Matrix W_u entsteht in Kombination mit der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix W_e die erweiterte Form W.

Basiert der quadratische Fehler auf dem Verschiebungsausgang ist die Gewichtungsmatrix den quadratischen Elementsteifigkeiten der aktuierten Elemente gleichzusetzen

$$Q = \frac{\alpha}{K_\mathrm{act}^2 m} = \frac{\alpha}{\mathrm{diag}(k_i^2) m}, \qquad i \in \mathcal{I}_\mathrm{act}. \tag{5.11}$$

Durch den Nenner werden die optimalen Aktorkräfte in die Größenordnung der Verschiebungen im Ausgang versetzt und entsprechen damit der Änderung der Aktorlängen bei der Aktuierung. Mit α wird der optimale Ausgangsfehler gegen den optimalen Eingang gewichtet. Die Berücksichtigung des Verschiebungsausgangs und der Aktorkräfte in (5.10) ist weiterhin unabhängig von der Störamplitude z. Prinzipiell kann die Gewichtung ein Designparameter sein und dem Problem entsprechend frei gewählt.

Generell ist es möglich eine Auswahl der in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Ausgangsgrößen zu betrachten. Bei adaptiven Tragwerken hat sich die Wahl der translatorischen Knotenverschiebungen im gesamten Tragwerk (3.42) als Ausgangsgröße kombiniert mit den Aktorkräften für die Aktorplatzierung bewährt und wird bei der Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus in Abschnitt 5.1.2.3 eingesetzt.

Interpretation Gramscher Matrizen

Die (erweiterte) Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix beschreibt den Zusammenhang zwischen Störungen und Ausgangsfehlern. Für die folgende Betrachtung werden die Störamplituden beschränkt, sodass $\{z : \|z\|_2^2 = 1\}$ auf einer l-dimensionalen Hyperkugel mit Radius 1 liegt.

Der Zusammenhang zwischen beschränkten Störamplituden und Ausgangsfehler wird anhand eines zweidimensionalen Beispiels in Abb. 5.1 a graphisch interpretiert. Erstere liegen aufgrund der Beschränkung auf dem Einheitskreis, während der Ausgangsfehler auf eine Ellipse abgebildet wird. Die Richtungen der Hauptachsen sind durch die Eigenvektoren der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix gegeben. Die dazugehörenden Eigenwerte λ definieren die Längen der Hauptachsen. Der Zusammenhang zwischen Störamplituden und optimalem Eingang kann auf die gleiche Weise dargestellt werden (Abb. 5.1 b). Die erweiterte Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix liefert, durch die Definition des Kostenfunktionals, die kombinierte Abbildung von Ausgangsfehler und optimalem Eingang in z-Koordinaten auch in Form einer Ellipse. Durch die

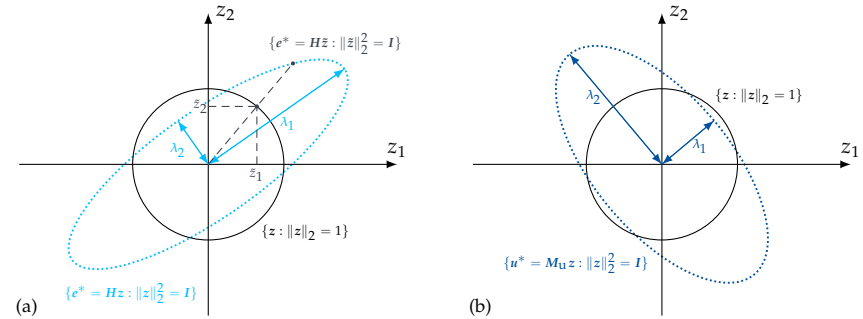


Abbildung 5.1: Geometrische Visualisierung zur Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix.
Bei der geometrischen Interpretation für ein zweidimensionales Beispiel der Abbildung $\{e^* = Hz : \|z\|_2^2 = 1\}$ wird der Einheitskreis auf eine Ellipse projiziert (a). Die Richtungen und Längen der Hauptachsen entsprechen den Eigenvektoren und Eigenwerten des Problems $(W_e - \lambda_i I)z_i = 0, i = 1,2$. In (b) ist die Darstellung für die Abbildung des optimalen Eingangs gegeben. Das zugehörige Eigenwertproblem ist $(M_u^T M_u - \lambda_i I)z_i = 0, i = 1,2$.

Aktorplatzierung soll die Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix abhängig von der Aktormenge bestimmt werden, sodass die Hauptachsen der Ellipse möglichst klein sind. Bei der Wahl eines Sollausgangs $y_d \neq 0$ ist die Ellipse der Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix nicht mehr um $(0,0)$ zentriert.

Das beschränkte Optimierungsproblem über die Störamplituden z, das den kleinsten Ausgangsfehler bereitstellt, lautet

$$\min_z \{\|Hz\|_2^2 + \|M_u z\|_{2,Q}^2 \mid \|z\|_2^2 = 1\}. \tag{5.12}$$

Nach Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(z, \lambda) = z^T H^T H z + z^T M_u^T M_u z - \lambda(1 - z^T z) \tag{5.13}$$

ergibt sich die Optimalitätsbedingung

$$\nabla_z L(z, \lambda) = 2(W_e + W_u)z - 2\lambda z = 2Wz - 2\lambda z \stackrel{!}{=} 0. \tag{5.14}$$

Dies wird durch das Eigenwertproblem $(W - \lambda_i I)z_i = 0, i = 1,...,l$ gelöst. Bei der beschränkten Störung ist die Abschätzung des optimalen Ausgangsfehlers mit $\lambda_{min} \leq \|e^*\|_2^2 \leq \lambda_{max}$ gegeben, wobei $\lambda_{min/max}$ der minimale/maximale Eigenwert ist.

Skalare Kostenfunktionen für die Aktorplatzierung

Die oben hergeleiteten Gramschen Matrizen zur quantitativen Beschreibung werden für die Aktorplatzierung verwendet. Je kleiner die Werte des quadratischen Ausgangsfehlers $\|e(S)^*\|_2^2$

oder deren Erweiterung $\|\boldsymbol{e}(S)^*\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}(S)^*\|_{2,\mathrm{Q}}^2$ für eine Aktormenge S, desto besser ist dieses Set zur effizienten Kompensation des Ausgangs geeignet. Für die optimierungsbasierte Berechnung einer Aktorkonfiguration wird die von einer Aktormenge abhängige (erweiterte) Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix $\boldsymbol{W}_\mathrm{e}(S)$ oder $\boldsymbol{W}(S)$ herangezogen. Dadurch kann die optimale Aktorplatzierung unabhängig von den Lastamplituden $\boldsymbol{z}$ durchgeführt werden. Die Ableitung eines skalaren Maßes aus der Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix und deren Erweiterung zum Einsatz in der Optimierung ist beispielsweise die (gewichtete) Spur

$$J_\mathrm{s}(S) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_\mathrm{e}(S)) \qquad \text{oder} \qquad J_\mathrm{s}(S) = \mathrm{tr}(\frac{1}{l}\boldsymbol{W}_\mathrm{e}(S) + \boldsymbol{W}_\mathrm{u}(S)). \tag{5.15}$$

Beim ersten Term ergeben die Spur und die gewichtete Spur dieselben Ergebnisse. Die Interpretation dieser Kostenfunktionen besagt, dass die mittleren Werte des Ausgangsfehlers minimiert werden. In Bezug auf die Veranschaulichung durch Hyperellipsoide, bewirkt die Spur die gleichmäßige Berücksichtigung aller Hauptachsen.

Alternativ kann der *maximale Eigenwert* der betrachteten Matrix minimiert werden

$$J_\mathrm{s}(S) = \lambda_\mathrm{max}(\boldsymbol{W}_\mathrm{e}(S)) \qquad \text{oder} \qquad J_\mathrm{s}(S) = \lambda_\mathrm{max}(\boldsymbol{W}_\mathrm{e}(S) + \boldsymbol{W}_\mathrm{u}(S)). \tag{5.16}$$

Bei einer gegebenen Aktormenge S repräsentiert dieser Wert die maximale Auswirkung durch die Störung auf den (erweiterten) Ausgang, d. h. der schlechteste Werte wird verbessert. Beim Hyperellipsoid wird dabei in jedem Schritt die größte Hauptachse betrachtet, die sich in jedem Schritt ändern kann. Der Kehrwert des minimalen Eigenwerts bietet sich als ähnliche Kostenfunktion an, ist jedoch nicht identisch.

Die Ableitung weiterer skalarer Kostenfunktionale der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix beruhen beispielsweise auf der Determinante oder der Konditionszahl, werden hier jedoch nicht angewendet. Die skalaren Kostenfunktionale sind Mittel der Wahl, um die hergeleiteten Kompensierbarkeitsmatrizen für eine Aktorplatzierung nutzbar zu machen.

Zur Darstellung wird die Kostenfunktion normiert

$$J_\mathrm{s,n}(S) = \frac{J_\mathrm{s}(S)}{J_\mathrm{s}(\emptyset)}. \tag{5.17}$$

Im Fall eines passiven Tragwerks, d. h. es ist kein Aktor integriert, beträgt damit die normierte Kostenfunktionen $J_\mathrm{s,n}(\emptyset) = 1$. Im Fall von $J_\mathrm{s,n}(S) = 0$ ist der Ausgangsfehler $\boldsymbol{e}$ komplett kompensiert.

Wahl des Ausgangs

Der Ausgangsfehler wurde bisher allgemein und damit unabhängig von der konkreten Wahl des Ausgangs eingeführt. Die Wahl des Ausgangs hat großen Einfluss auf das Ergebnis der Aktorplatzierung und lässt unterschiedliche Interpretationen sowie die Ableitung weiterer Eigenschaften

zu. Den Ausgang $\boldsymbol{y}$ dem Zustand $\boldsymbol{x}$ gleichzusetzen und die Ausgangsmatrix als Einheitsmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ zu wählen ist eine probater Ansatz. Dadurch werden in der Aktorplatzierung die relevanten Systemgrößen – der Zustand – berücksichtigt. Bei adaptiven Tragwerken entspricht dies den translatorischen und rotatorischen Knotenfreiheitsgraden. Die Auswahl von ausschließlich Translationen (3.42) erweist sich bei adaptiven Tragwerken mit vielen Stabelementen als sinnvoll, da die Rotationen der Knoten eine untergeordnete Rolle spielen.

Neben den Verschiebungen sind die Kräfte im Tragwerk (3.33) relevante Größen. Werden die Elementkräfte als Ausgang gewählt, können diese in der Aktorplatzierung minimiert werden. Eine ähnliche Alternative dazu bieten die Elementspannungen als Ausgang, wobei die Elementkräfte relativ zur Querschnittfläche gesetzt werden. Die vorgegebene Sollgröße $\boldsymbol{y}_\mathrm{d} = 0$ kann auch hierbei eingesetzt werden und führt zu interpretierbaren Ergebnissen. Diese Wahl ist bei Hochhaustragwerken jedoch zumindest fragwürdig, da alle Elementkräfte oder -spannungen im Tragwerk diesen Wert nie erreichen können. Des Weiteren ist bei Fachwerken[1] bei einem Kraftausgang die Anzahl der maximal zu platzierenden Aktoren gleich den Grad der statischen Unbestimmtheit (s. Anhang C.1). Dieser Wert gibt an, wie viele unabhängige Kraftzustände im Fachwerk einstellbar sind. Demzufolge wird der Wert der Kostenfunktion bei dieser Anzahl an Aktoren minimal und ändert sich durch Hinzufügen weiterer Aktoren nicht. Damit ist die Platzierung im Sinne der Aktorzahl limitiert. In der praktischen Anwendung, hängt der Erfolg bei diesem Ausgang stark vom Tragwerk und der statischen Bestimmtheit ab. Wird bei einem Kraftausgang der Sollwert ungleich Null gewählt, entspricht dies der Vorgabe der Elementkräfte, die wiederum von der wirkenden Last abhängen. Ein Ausweg bietet die Homogenisierung der Spannungen als Ausgang bei der Aktorplatzierung. Ergebnisse zur *Gramschen Homogenisierbarkeit* sind in [14] zu finden.

Prinzipiell ist die Wahl des Ausgangs eng mit der Zielgröße in der Reglung verknüpft. Es stellen sich die gleichen Fragen, welche Größen in der Aktorplatzierung berücksichtigt werden und bei der statischen Kompensation genutzt werden sollen.

Gewichtung der Störgrößen

Die angenommene Störung hat elementaren Einfluss auf die Aktorplatzierung. Die gewonnene Aktorkonfiguration soll für möglichst viele Lastfälle gute Ergebnisse in der Kompensation liefern. Gleichzeitig treten jedoch einige wenige bestimmte Störungen öfter auf. Die für die Aktorplatzierung angenommen Einheitsstörung ist ein theoretischer Ansatz. Für in der Praxis auftretende Störungen ist diese Lösung gegebenenfalls suboptimal und es gäbe ander Aktorkonfigurationen, die für die realen, aber unbekannten Störungen, bessere Ergebnisse liefern würden. Zu spezifische Annahmen für die Last könnten wiederum zu Aktorkonfigurationen führen, die selten auftretende Lastfälle schlecht kompensieren. Der Ansatz, dass Störungen auf einer l-dimensionalen Hyperkugel liegen, ermöglicht prinzipiell, dass über die Lastamplituden $\boldsymbol{z}$ sämtliche Störungen abgebildet werden können. Annahmen beispielsweise hinsichtlich der Stetigkeit

[1] In Fachwerken sind nur Stäbe verbaut, wodurch keine Momente übertragen werden und demnach keine rotatorischen Freiheitsgrade vorkommen.

der Störung oder einer Gewichtung einzelner Störungen kann durch die Einführung einer neuen, virtuellen Störgröße $\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{z} = \mathcal{A}\boldsymbol{w}$ realisiert werden. Im ersten Fall ist $\mathcal{A}$ ein Integraloperator, im zweiten Fall eine Gewichtungsmatrix. Die Gramschen Kompensierbarkeitsmatrizen ändern sich daraufhin zu

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{e}}(S) = \mathcal{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{e}}(S)\mathcal{A} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{u}}(S) = \mathcal{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{u}}(S)\mathcal{A}. \tag{5.18}$$

Ein aussagekräftiger Ansatz wurde mit dem Einsatz der Einheitsstörung bei der Aktorplatzierung und des Lastfalls aus der Bemessungsgrundlage für die Baugenehmigung zur anschließenden Auswertung erarbeitet.

Nichtlineare Tragwerksmodelle

Die bisherige Betrachtung linearer Systeme stellt eine Vereinfachung dar, die nicht immer gerechtfertigt ist. Dies ermöglichte eine anschauliche Interpretation der Methode. Nichtlineare Systeme können beispielsweise durch eine (Taylor)-Linearisierung in die geforderte Form gebracht werden. Sind die dadurch gewonnenen Ergebnisse nicht zufriedenstellend, kann auf die Originalgleichungen nach (5.3) zurückgegriffen werden. Bei nichtlinearen Systeme ist eine lineare Abbildung $\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{H}\boldsymbol{z}$ nicht existent. Es ist nicht möglich den optimalen Eingang $\boldsymbol{u}^*$ und den optimalen Ausgangsfehler $\boldsymbol{e}^*$ analytisch zu berechnen. Durch eine nichtlineare Optimierung können diese Größen numerisch bestimmt werden und eine numerische Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix abgeleitet werden. Dadurch kann der Rechenaufwand erheblich steigen und die Methode ist für große nichtlineare Tragwerke nur bedingt anwendbar. Das Optimierungsproblem für Tragwerke von druckschlaffen Elementen, wie in Abschnitt 6.2.1 für die nichtlineare statische Kompensation, müsste pro platzierten Aktor für jede mögliche Aktorposition und jedes Aktorprinzip gelöst werden. Ein Vorteil der nichtlinearen Betrachtung ist die Möglichkeit der Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen, was jedoch zu weiteren Nebenbedingungen und gegebenenfalls zu einer weiter erhöhten Rechenzeit der Optimierung führen kann.

5.1.2.3 Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus

Die vorgestellte Methode der stationären Aktorplatzierung wird unter Verwendung der linearen Modellgleichungen aus Abschnitt 3.1 auf das Demonstrator-Hochhaus angewendet. Aktoren können in vertikalen und diagonalen Elementen integriert werden und bilden die Kandidatenmenge mit 80 möglichen Positionen. Es stehen das parallele und der serielle Prinzip mit Krafteingang aus Abschnitt 3.1.3.1 und 3.1.3.2 zur Verfügung, wobei bei letzterem die Anpassung der Steifigkeitsmatrix durch (3.17) berücksichtigt werden muss. Beim Einsatz dieser Aktoren wird ein Element ersetzt und dessen Beitrag zur passiven Steifigkeit eliminiert. Dadurch kann die angepasste Steifigkeitsmatrix im Verlauf der Aktorplatzierung (beinahe) singulär werden, v. a. bei einer weit fortgeschrittenen Zahl platzierter Aktoren. Das adaptive Tragwerk selbst ist dadurch *nicht* kinematisch, da die Aktoren im Eingangsterm enthalten sind. Die Inversion der Steifigkeitsmatrix ist jedoch nicht mehr möglich, weshalb die Platzierung serieller Aktoren mit Krafteingang

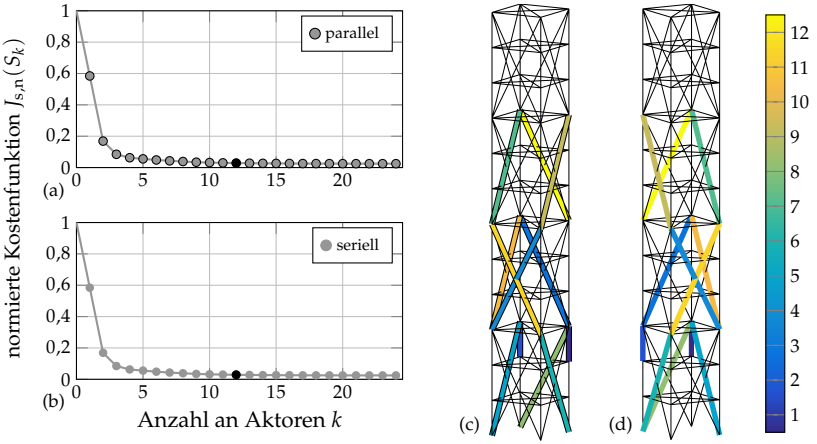


Abbildung 5.2: Statische Platzierung separat für parallele und serielle Aktoren mit Krafteingang. Die normierte Kostenfunktion $J_n(S_k)$ ist über die Anzahl von platzierten Aktoren aufgetragen, in (a) ausschließlich für das parallele und in (b) für das serielle Aktuierungsprinzip. Die darin schwarz markierten Ergebnisse für $k = 12$ Aktoren sind in (c) für die parallele und in (d) für die serielle Konfiguration am Demonstrator-Hochhaus dargestellt. Die platzierten Aktoren sind farbcodiert hervorgehoben, wobei die aufsteigende Reihenfolge von blau über grün und orange zu gelb festgelegt ist.

in diesem Fall unterbunden wird. Die translatorischen Knotenverschiebungen in alle drei Raumrichtungen werden als Ausgang gewählt. Das Tragwerk wird für die Aktorplatzierung mit der Einheitslast beaufschlagt.

Zur Darstellung des Unterschieds von parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang wird die Platzierung separat für beide Prinzipien durchgeführt. Die verwendete Kostenfunktion ist die Spur der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix (5.15). In Abb. 5.2 sind die normierten Kosten über die Anzahl für (a) parallele und (b) serielle Aktoren mit Krafteingang aufgetragen. Mit bereits wenig platzierten Aktoren verbessern sich die Kosten beträchtlich und der Ausgangsfehler wird reduziert. Dabei werden die benötigten Aktorkräfte vorerst nicht betrachtet. Wird die Spur der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix verwendet, sind die Kosten unabhängig vom Aktuierungsprinzip; die Platzierung der parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang führen zum gleichen Ergebnis. Für eine vorgegebene Aktormenge nimmt das Kostenfunktional in beiden Fällen den gleichen Wert an. Parallele und serielle Aktoren mit Krafteingang können das Tragwerk auf die gleiche Art und Weise beeinflussen, wenn die Bewertung über den Ausgangsfehler erfolgt. Generell ist es in der Modellierung möglich, eine parallele in eine serielle Aktuierung zu überführen, wie in (3.16) in Abschnitt 3.1.3 beschrieben ist. Ein Unterschied ergibt sich bei den Aktorkräften. Bei paralleler Aktuierung wird ein Teil der Aktuierungskraft aufgewendet, um das parallele Element zu dehnen oder stauchen, wodurch die benötigte Kraft höher liegt als bei serieller Aktuierung.

Dieses Ergebnis lässt sich anhand Abb. 5.2 c und d veranschaulichen. In Abb. 5.2 c sind die platzierten Aktoren in farblich codierter Reihenfolge für $k = 12$ parallele Aktoren mit Krafteingang dargestellt. Die schwarze Umrandung weist auf diese Aktuierungsart hin. Die Aktoren sind gleichmäßig über die ersten drei Module verteilt. Tendenziell erfolgt die Platzierung zuerst unten im Tragwerk und mit steigender Aktorzahl werden höhere Module mit Aktoren besetzt. In Abb. 5.2 d ergibt sich für $k = 12$ serielle Aktoren mit Krafteingang ein ähnliches Ergebnis, wenn man zwischen beiden Skizzen eine Spiegelebene annimmt. Durch die Symmetrie im Tragwerk besitzt das passive Demonstrator-Hochhaus eine Drehsymmetrieachse und mehrere Spiegelebenen. Dadurch existieren für eine Aktormenge weitere äquivalente Lösungen. Des Weiteren sind die ersten beiden Aktoren, die Stützen im ersten Modul, nicht spiegelsymmetrisch. Jedoch führen beide Prinzipien, aufgrund der Drehsymmetrie, für einen und zwei platzierte Aktoren zu identischen Kosten. Die zweite Abweichung in der Aktormenge beider Prinzipien zeigt sich bei der rückwärtigen Diagonale im ersten Modul. Da bei der Platzierung serieller Aktoren mit Krafteingang die Singularität der Steifigkeitsmatrix geprüft wird, kann diese Diagonale nicht wie in c) positioniert werden. Deshalb kann bei einer fortgeschrittenen Platzierung kein weiterer serieller Aktor positioniert werden, da jeder weitere zu einer (beinahe) singulären angepassten Steifigkeitsmatrix führen würde. Diese Grenze ist nicht dem Aktorprinzip geschuldet, sondern der Modellierung dieser Aktoren.

Die Wirkung von parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang ist bei der statischen Aktorplatzierung identisch, sofern die Spur der Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix verwendet wird. Einzig die Invertierbarkeit der Steifigkeitsmatrix kann zu Unterschieden führen. Der Unterschied beider Aktuierungsprinzipien besteht in der aufzubringenden Eingangskraft. Im Folgenden wird deshalb nach (5.10) der minimierte Ausgangsfehler und der zugehörige optimale Eingang in der Kostenfunktion (5.15) berücksichtigt.

Prinzipiell ist es möglich, Symmetrien des Tragwerks bei der optimalen Aktorplatzierung mit einzubeziehen. Bei einer adaptiven Fassade in [54] führte die brute-force Lösung zu symmetrischen Ergebnissen. Beim Anwendungsbeispiel Demonstrator-Hochhaus wird auf eine erzwungene symmetrische Lösung verzichtet, da viele Symmetrieachsen und -ebenen vorhanden sind. Bei einer Berücksichtigung würde die Platzierung einer Stütze automatisch zu vier hinzugefügten Stützenaktoren in den Ecken des Tragwerks führen. Bei einer Diagonalen wären es sogar acht Aktoren. Dies würde bei der Größe des Demonstrator-Hochhauses eine Verzerrung der Lösung bewirken. Die Symmetrie ist individuell vom Tragwerk abhängig, weshalb von einem pauschalen Ausschluss einer Symmetriebetrachtung abgesehen wird.

Im Folgenden werden parallele und serielle Aktoren mit Krafteingang gemeinsam platziert. Zudem wird festgelegt, dass in den vertikalen Elementen keine seriellen Aktoren integriert werden können. Diese Einschränkung ist gerechtfertigt, da in der Aktorplatzierung kein Eigengewicht berücksichtigt wird. Das Eigengewicht ist eine weitere externe Last und soll generell nicht kompensiert werden. Das Eigengewicht wird hauptsächlich von den vertikalen Elementen abgetragen, die Diagonalen und horizontalen Elemente tragen dahingegen zur Quersteifigkeit des Tragwerks bei. Würde ein serieller Aktor anstatt eines vertikalen Elements eingesetzt, müsste dieser permanent die Kraft aufbringen, um das Eigengewicht auszugleichen. Dies würde zu

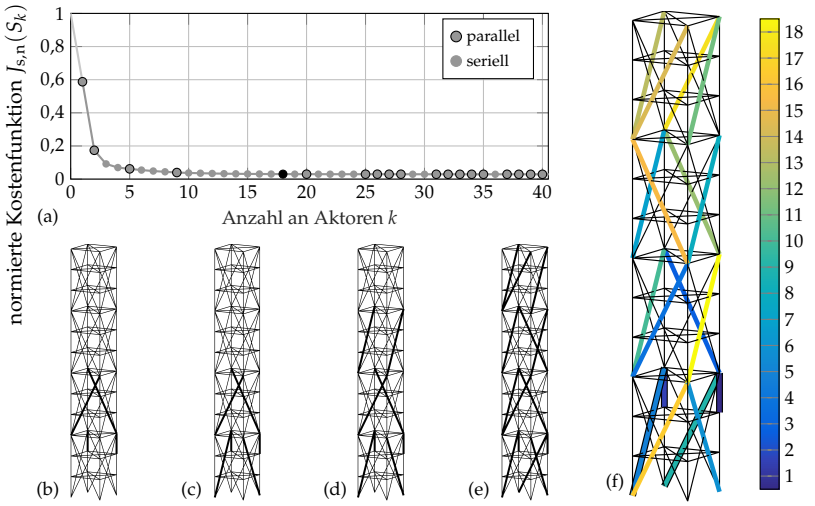


Abbildung 5.3: Statische Aktorplatzierung für das Demonstrator-Hochhaus.
In (a) wird das normierte Gürkriterium für $k = 40$ Aktoren gezeigt mit dem parallelen, (schwarz umrandet) und dem seriellen (kein Rand) Aktuierungsprinzip mit Krafteingang. In (b) bis (e) sind die Ergebnisse für $k = \{4,6,8,14\}$ Aktoren dargestellt. Die Reihenfolge der Aktoren ist für $k = 18$ in (f) illustriert und in (a) schwarz markiert.

ineffizienten adaptiven Tragwerken führen und wäre nicht im Sinne der strukturmechanischen Wirkung der Elemente. Die gewichtete Spur des optimalen Ausgangsfehlers und des optimalen Eingangs dienen mit $\alpha = 1$ als Kostenfunktion.

Die Werte der Kostenfunktion der gemeinsamen Platzierung in Abb. 5.3 a nehmen bereits für wenige parallele und serielle Aktoren mit Krafteingang drastisch ab. In (b) bis (e) sind die Konfigurationen für $k = \{4,6,8,14\}$ Aktoren abgebildet. Der Algorithmus wählt Lösungen aus, sodass die Aktoren möglichst gleichmäßig im Tragwerk verteilt sind. Nach den beiden Stützenaktoren im untersten Modul, werden zwei Diagonalen im zweiten Modul hinzugefügt (b) und danach zwei Diagonalen im ersten Modul (c). Diese sind in einem Modul paarweise auf gegenüberliegenden Seiten gelegen und decken mit beiden Modulen die $x-$ und $y-$Richtung ab. Im dritten Modul folgt erneut ein Paar gegenüberliegender Diagonalen (d) bevor jedes Modul mit drei diagonalen Aktoren versehen wird (e). Die Regelmäßigkeit der Aktorkonfigurationen lässt sich durch die Verteilung der statischen Lasten erklären. Die Einheitslast wirkt auf jeden translatorischen Freiheitsgrad und verursacht Verschiebungen, die kompensiert werden müssen. Angreifende horizontale Windlasten wirken ebenfalls entlang des gesamten Tragwerks. Die Platzierung der ersten Aktoren im unteren Teil des Demonstrator-Hochhauses begründet sich durch die Einspannung an den Auflagern, worüber die Kräfte abgeleitet werden. Für $k = 18$ Aktoren ist die Platzierung farblich codiert in Abb. 5.3 f illustriert. Mit vier paarweise gruppierten diagonalen Aktoren pro Modul wird die regelmäßige Verteilung fortgesetzt.

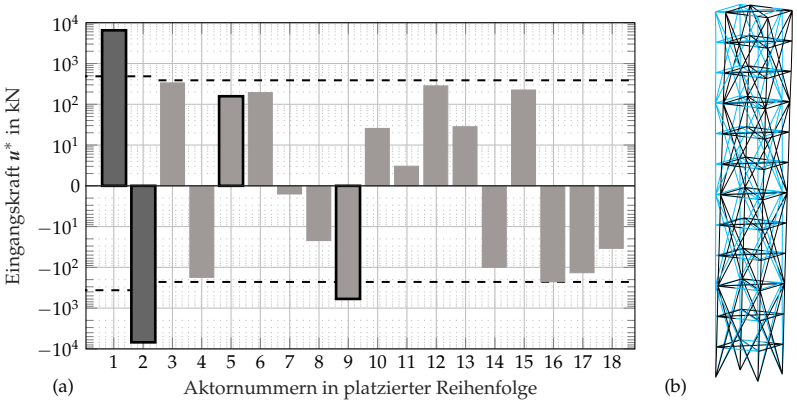


Abbildung 5.4: Eingangskräfte zur statischen Kompensation.
Bei $k = 18$ Aktoren sind die benötigten Aktorkräfte zur statischen Kompensation der Prüfstatiklast am Demonstrator-Hochhaus in (a) logarithmisch aufgetragen. Aktoren in Stützen (anthrazit) sind unterscheidbar von Diagonal (hellgrau) und parallele Aktoren sind schwarz umrandet. Die gestrichelten Linien markieren die Stellgrößenbeschränkungen für Stützen- und Diagonalenaktoren. Die Deformation des passiven Tragwerks (schwarz) unter Last sowie der kompensierte Verschiebungszustand (blau) sind in (b) in zehnfacher Überhöhung abgebildet.

Im Bereich von neun bis 20 Aktoren treten keine weiteren parallelen Aktoren auf. Nach Aktor $k = 37$ sind alle platzieren Aktoren von diesem Typ. Dies liegt einerseits an einer potentiell singulären Steifigkeitsmatrix, verursacht durch serielle Aktoren, und andererseits an den verbleibenden Stützen im Kandidatenset die nur eine parallele Aktuierung umsetzen können. Auffallend ist der Einsatz von parallelen Aktoren ausschließlich im untersten Modul und eher zu Beginn der Platzierung, wenn wenige Aktoren verwendet werden. Durch die Art des Platzierungsalgorithmus muss zu Beginn mit nur einem Aktor die Störung kompensiert werden, wodurch unrealistisch hohe Aktorkräfte benötigt werden. Folglich sind Ergebnisse mit einer niederen Aktorzahl nicht repräsentativ, weil die geringe Anzahl noch nicht ausreichend ist, um Lasten ausreichend zu kompensieren. Eine inverse Platzierung, die mit einem vollaktuierten Tragwerk beginnt (s. [149]), ist bei großen Tragwerken aufgrund des Rechenaufwands nicht praktikabel. Eine Möglichkeit zur Berechnung der Lösung ist durch die Gruppe der genetischen Algorithmen gegeben.

Die starke Abnahme des Kostenfunktionals durch zwei parallele Aktoren mit Krafteingang in Abb. 5.3 a liegt an der Vernachlässigung der Stellgrößenbeschränkungen. Dazu sind die optimalen Eingangskräfte in Abb. 5.4 über die platzierten Aktoren für das Demonstrator-Hochhaus bei beaufschlagter Prüfstatiklast aufgetragen. Die geforderten Eingangskräfte für beide Stützenaktoren übersteigen die Stellgrößenbeschränkungen erheblich. Bei der linearen Berechnung der Stellkräfte ist solch ein Ergebnis trotz Gewichtung der Stellgrößen in $\boldsymbol{M}_{\mathrm{u}}$ nicht vermeidbar. In Abb. 5.4 b lässt sich die Reduktion des absoluten Ausgangsfehlers bei 18 Aktoren darstellen. Dieser konnte am Dach des Tragwerks (Knoten 49) ohne Beschränkung der Eingangskraft von

55,6 mm auf 2,7 mm reduziert werden. Das realistische Szenario mit limitierten Aktorkräften, wie in Abschnitt 2.1 angegeben, liefert eine Reduktion auf 33,4 mm. Nach Berechnung der optimalen Eingangskräfte unter Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkungen (s. Abschnitt 6.2) ergibt sich eine Verminderung der Auslenkung am Dach auf 21,3 mm.

Festzuhalten ist, dass das Prinzip der seriellen Aktuierung mit Krafteingang in diagonalen Aussteifungselementen bei der statischen Kompensation zu bevorzugen ist. Durch serielle Aktoren sind geringere Eingangskräfte ausreichend, um in den strukturell vorgesehenen diagonalen Elementen Horizontallasten im Tragwerk zu kompensieren.

5.1.3 Dynamische Aktorplatzierung

Die dynamische Aktorplatzierung folgt einer ähnlichen Motivation wie im statischen Fall. Eine Voraussetzung für eine performante aktive Schwingungsdämpfung sind intelligent platzierte Aktoren. Die Steuerbarkeit eines Systems wird als Gütekriterium bei der dynamische Aktorplatzierung herangezogen und soll durch das Hinzufügen von Aktoren verbessert werden. Die Quantifizierung dieser erfolgt über die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix, von der ein skalares Maß als Gütekriterium abgeleitet wird. Ein direkter Zusammenhang zur Stellgröße besteht im Gegensatz zur statischen Platzierung nicht. Die dynamische Aktorplatzierung wird auf das Demonstrator-Hochhaus angewendet.

5.1.3.1 Gramsche Steuerbarkeitsmatrix

Gegeben ist ein System

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \qquad && t > 0, \qquad && \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), && t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

mit dem Zustand $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$. Die Definition der Steuerbarkeit nach Kalman [67] ist:

Definition 2 (Steuerbarkeit)**.** *Der Zustand $\boldsymbol{x}(t)$ eines Systems* (5.19) *heißt steuerbar, wenn eine Eingangsfunktion $\boldsymbol{u}(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq t_\mathrm{e}$ existiert, die den Anfangszustand $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ in der Zeit t_e in einen Endzustand $\boldsymbol{x}(t_\mathrm{e}) = \boldsymbol{x}_\mathrm{e}$ überführt. Das System heißt vollständig steuerbar, wenn jeder Zustand steuerbar ist.*

Im Folgenden werden lineare zeitinvariante Systeme der Form (4.28) mit $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0}$ verwendet. Hierbei können auch reduzierte Systeme zum Einsatz kommen. Vorerst wird von einer beliebigen, aber festen Aktorkonfiguration ausgegangen. Es kann die minimale Steuerenergie

$$E(t_\mathrm{e}, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0^\mathsf{T} \boldsymbol{W}_\mathrm{con}^{-1}(t_\mathrm{e}) \boldsymbol{x}_0 \tag{5.20}$$

untersucht werden, die notwendig ist um den Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ in den Endzustand[2] $\boldsymbol{x}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$ zu überführen. Die Matrix

$$\boldsymbol{W}_\mathrm{con}(t_\mathrm{e}) = \int_0^{t_\mathrm{e}} e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\mathsf{T} e^{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.21}$$

heißt Gramsche Steuerbarkeitsmatrix[3]. Ist ein System nicht steuerbar, so ist $\boldsymbol{W}_\mathrm{con}(t_\mathrm{e})$ nicht invertierbar. Demnach kann mindestens ein Zustand nicht in den Endzustand überführt werden, wodurch mathematisch gesprochen unendlich viel Steuerenergie benötigt wird.

Eine graphische Interpretation kann analog zur Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix gegeben werden, indem der Anfangszustand $\{\boldsymbol{x}_0 : \|\boldsymbol{x}_0\|_2^2 = 1\}$ auf die Einheitshyperkugel beschränkt wird. Die Eigenvektoren mit den Eigenwerten $\lambda_i, i = 1...n$ der inversen Gramschen Steuerbarkeitsmatrix spannen aufgrund der quadratischen Form ein Ellipsoid auf [170]. Lange Hauptachsen des Ellipsoids stehen für Zustände für die viel Energie aufgewendet wird, um in den Endzustand überführt zu werden. Kurze Hauptachsen zeigen in Richtung von Zuständen die wenig Energie benötigen und somit besser steuerbar sind. Die Steuerenergie ist beschränkt durch

$$\frac{1}{\lambda_\mathrm{max}(\boldsymbol{W}_\mathrm{con}(t_\mathrm{e}))} = \lambda_\mathrm{min}(\boldsymbol{W}_\mathrm{con}^{-1}(t_\mathrm{e})) \leq E(t_\mathrm{e}, \boldsymbol{x}_0) \leq \lambda_\mathrm{max}(\boldsymbol{W}_\mathrm{con}^{-1}(t_\mathrm{e})) = \frac{1}{\lambda_\mathrm{min}(\boldsymbol{W}_\mathrm{con}(t_\mathrm{e}))}. \tag{5.22}$$

Für nicht steuerbare Systeme kann diese Interpretation nicht angegeben werden, da die inverse Gramsche Steuerbarkeitsmatrix nicht berechnet werden kann. Stattdessen wird die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix direkt betrachtet. Der Zusammenhang ist durch (5.22) gegeben. Diese spannt wieder ein Hyperellipsoid auf, wobei lange Hauptachsen mit einer hohen Steuerbarkeit assoziiert sind. Ist ein System nicht steuerbar, kollabiert eine Hauptachse, repräsentiert durch einen Null-Eigenwert. Bei steuerbaren Systemen ist die Gramschen Steuerbarkeitsmatrix positiv definit, bei nicht steuerbaren positiv semidefinit.

Ein wichtiges Detail bei der Nutzung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix in der Aktorplatzierung ist deren Berechnung. Vor allem bei großen Systeme, wozu die meisten adaptiven Tragwerke zählen, ist die Bestimmung des Integrals (5.21) mit den Matrixexponentialen zeitintensiv [97]. Zudem muss für t eine systemspezifische Wahl getroffen werden, sodass die relevante Dynamik abgebildet werden kann. Für asymptotisch stabile lineare zeitinvariante Systeme kann für den Übergang $t \to \infty$ die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{W}_{\mathrm{con},\infty} = \lim_{t_\mathrm{e}\to\infty} \boldsymbol{W}_\mathrm{con}(t_\mathrm{e})$ über die Lyapunov-Gleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{\mathrm{con},\infty} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{con},\infty}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\mathsf{T} \tag{5.23}$$

effizient berechnet werden. Bei Auslegungsfragen adaptiver Tragwerke, wie der Aktorplatzierung, ist diese Annahme gerechtfertigt und ein entsprechendes Modell wird herangezogen. Im Folgenden gilt $\boldsymbol{W}_\mathrm{con} := \boldsymbol{W}_{\mathrm{con},\infty}$.

[2] Bei linearen, zeitinvarianten Systemen gilt $\boldsymbol{x}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit.

[3] Index con steht für Steuerbarkeit, engl. *controllability*.

5.1.3.2 Skalare Kostenfunktionen zur Aktorplatzierung

Basierend auf der (inversen) Gramschen Steuerbarkeitsmatrix werden skalare Kostenfunktionen für die dynamische Aktorplatzierung hergeleitet. Hierfür wird die Gramschen Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{W}_{\text{con}}(S)$ in Abhängigkeit einer Aktormenge S angegeben. Es können mehrere quantitative Strukturmaße für diese Matrix abgeleitet werden; diese wurden in der Literatur intensiv untersucht [8, 89, 99]. Diese Maße bilden unterschiedliche Aspekte ab und führen bei der Verwendung in der Aktorplatzierung zu unterschiedlichen Ergebnissen. Die Wahl des Strukturmaßes muss entsprechend zum Ziel der Aktorplatzierung ausgewählt werden. Wichtige Eigenschaften sind die Unabhängigkeit vom gewählten Zustandsraum und von der Transformation mit Eigenvektoren, die Konsistenz zur Steuerbarkeit nach Kalman und die physikalische Motivation für die Wahl. Da bei der Aktorplatzierung erst ein steuerbares System entstehen soll, sind Maße basierend auf der inversen Gramschen Steuerbarkeitsmatrix nur bedingt geeignet. Zudem ist der Rechenaufwand für deren Bestimmung erheblich. Bei den im Folgenden aufgeführten Maßen und deren Bedeutung gilt $\{\boldsymbol{x}_0 : \|\boldsymbol{x}_0\|_2^2 = 1\}$, wenn von der Steuerenergie oder von Steuerbarkeit gesprochen wird:

- Die Spur der inversen Gramschen Steuerbarkeitsmatrix repräsentiert die durchschnittliche minimale Steuerenergie, die aufgewendet werden muss, um einen Anfangszustand auf der Hypereinheitskugel in den Ursprung zu überführen. Eine gegebene Aktormenge ist umso besser im Sinne der Metrik, je kleiner

$$J_{\text{dyn,tr}-}(S) = \text{tr}(\boldsymbol{W}_{\text{con}}^{-1}(S)). \tag{5.24}$$

- Alternativ kann die Spur der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix angewendet werden. Diese ist assoziiert mit der durchschnittlichen Steuerbarkeit. Eine gegebene Aktormenge ist umso besser je größer die durchschnittliche Steuerbarkeit ist. Zur Minimierung wird folgende Funktion verwendet

$$J_{\text{dyn,tr}}(S) = -\text{tr}(\boldsymbol{W}_{\text{con}}(S)). \tag{5.25}$$

- Der maximale Eigenwert der inversen Gramschen Steuerbarkeitsmatrix gibt den maximalen Wert der minimalen Steuerenergie an. Eine gegebene Aktormenge ist umso besser im Sinne der Metrik, je kleiner

$$J_{\text{dyn},\lambda_{\max}}(S) = \lambda_{\max}(\boldsymbol{W}_{\text{con}}^{-1}(S)). \tag{5.26}$$

- Der minimale Eigenwert der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix entspricht der minimalen Steuerbarkeit und ist reziprok zum vorherigen Maß. Eine gegebene Aktormenge ist umso besser je größer der Wert dieser Metrik ist. Zur Minimierung wird folgende Funktion verwendet

$$J_{\text{dyn},\lambda_{\min}}(S) = -\lambda_{\min}(\boldsymbol{W}_{\text{con}}(S)) = -\frac{1}{J_{\text{dyn},\lambda_{\max}}}. \tag{5.27}$$

Weitere Metriken basierend auf der (invertierten) Gramschen Steuerbarkeitsmatrix sind beispielsweise der Rang, die Determinante oder die Kondition.

Lässt sich für ein solches Maß die Eigenschaft der Modularität nachweisen und wird die Lösung mit einer Greedy-Heuristik bestimmt, kann für die Güte der Lösung eine unteren Schranke garantiert werden [100]. Bei der Spur der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix wurde Modularität nachgewiesen [139], wohingegen diese Eigenschaft für die inverse Gramschen Steuerbarkeitsmatrix widerlegt wurde [105]. Wird die Spur $J_{\mathrm{dyn,tr}}(S)$ als Gütekriterium verwendet, kann wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben, die vereinfachte Berechnung verwendet werden.

Nach erfolgter Minimierung wird für die Darstellung der Ergebnisse am Beispiel des Demonstrator-Hochhauses die Kostenfunktion auf ein Gütekriterium

$$J_{\mathrm{dyn,n}}(S) = \frac{J_{\mathrm{dyn},(\cdot)}(S)}{J_{\mathrm{dyn},(\cdot)}(C)} \tag{5.28}$$

normiert. Die normierten Gütekriterium nehmen aufgrund der Definitheit der (inversen) Gramschen Steuerbarkeitsmatrix ausschließlich Werte in $\mathbb{R}_0^+$ an. Der Wert des Gütekriteriums, wenn alle Aktorkandidaten platziert sind, wird als maximal erreichbarer Wert definiert und auf $J_{\mathrm{dyn,n}}(C) = 1$. Dies trägt zu einer intuitiven Interpretation der Ergebnisse bei, wobei höhere Werte für Maße basierend auf der Steuerbarkeit besser sind. Für ein passives System ohne Aktoren gilt $J_{\mathrm{dyn,n}}(\emptyset) = 0$.

Unterscheidung von Aktuierungsprinzipien

Die Unterscheidung von unterschiedlichen Aktuierungsprinzipien ist mit Hilfe von Metriken basierend auf der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix prinzipiell möglich. Diese Unterschiede werden im Folgen erläutert, da diese Zusammenhänge zum Verständnis des Platzierungsalgorithmus beitragen. Im vorliegenden Fall werden parallele und serielle Aktuierungsmöglichkeiten mit Krafteingang und serielle mit Verschiebungseingang betrachtet.

Zuerst wird die Annahme getroffen, dass Krafteingänge für die parallele und serielle Aktuierung vorliegen. Im Gegensatz zum Hinzufügen eines parallelen Aktors, bewirkt ein weiterer serieller Aktor mit Krafteingang eine Änderung des Modells. Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix werden nach (3.17) angepasst, was eine Änderung des dynamischen Verhaltens zu Folge hat. Bei der statischen Aktorplatzierung tritt eine Änderung der Steifigkeitsmatrix auch ein, wird jedoch direkt durch die Wirkung eines Aktors ersetzt. Da die Aktorkraft bei der Platzierung miteinfließt, beeinflusst dies nicht die statische Platzierung, solange keine Singularitäten auftreten. Bei der dynamischen Aktorplatzierung wird die Anpassung der Systemmatrix nicht kompensiert, weshalb diese Methode für seriellen Aktoren mit Krafteingang nicht geeignet ist.

Im zweiten Fall werden parallele Aktoren mit Krafteingang und serielle Aktoren mit Verschiebungseingang (s. Abschnitt 3.1.3.2) verwendet. Der sich ergebende Unterschied beschränkt sich auf die Eingangmatrizen; so kann die serielle Eingangsmatrix mit Verschiebungseingang als $\boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser}}(S_{\mathrm{ser}}) = \boldsymbol{B}(S_{\mathrm{ser}})\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$ abgebildet werden, wobei S_{ser} die platzierten seriellen Aktoren

umfasst. Dies entspricht einer Gewichtung des Eingangs mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\text{elem}}$, wonach sich die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix um $\boldsymbol{K}_{\text{elem}}^2$ ändert.

Die parallelen und seriellen Aktoren können in einem Tragwerk das gleiche systemdynamische Verhalten hervorrufen. Der Unterschied besteht in der aufzuwendenden Kraft und des Weiteren in der konstruktiven Ausführung. Basierend auf den Ausführung oben ist im Einzelfall zu prüfen, welches Aktorprinzip besser geeignet ist.

Nichtlineare Tragwerksmodelle

Für nichtlineare Systeme, beispielsweise Tragwerke mit druckschlaffen Elementen, können lineare Modellgleichungen über eine Linearisierung um eine Ruhelage oder einen Arbeitspunkt gewonnen werden. Für eine systemübergreifende Lösung kann auf empirische Gramsche Matrizen zurückgegriffen werden [56]. Diese Methode wurde für die Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme eingeführt [84] und ist das Pendant zum Balancierten Abschneiden (s. z. B. [38]). Die empirische Gramsche Matrix erfordert jedoch Simulationsdaten vom System unter Aufschaltung repräsentativer Testsignale. Dies im Sinne einer Aktorplatzierung durchzuführen, erfordert diese Simulationen für jeden Aktorkandidaten in einem Greedy-Schritt und ist damit sehr rechenintensiv.

Für paarweise angelegte druckschlaffe Elemente kann ein heuristischer Ansatz erwogen werden, indem beide Elemente gemeinsam betrachtet werden. Dadurch kooperieren beide Elemente, sodass nicht abwechselnd Druck- und Zugkräfte auftreten.

5.1.3.3 Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus

Die Aktoren werden für das Demonstrator-Hochhaus anhand der linearen Modellgleichungen 4.28 für den dynamischen Anwendungsfall platziert. Das Kandidatenset der Aktoren umfasst wiederum alle vertikalen und diagonalen Elemente, was 80 mögliche Positionen ergibt. Vorerst werden parallele Aktoren mit Krafteingang und serielle mit Verschiebungseingang separat unter Betrachtung der Spur der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix positioniert. Auf die Untersuchungen mit der inversen Gramschen Steuerbarkeitsmatrix wird aufgrund des hohen Rechenaufwands bei großen Tragwerken verzichtet. Aus denselben Gründen wird auf ein reduziertes dynamisches Tragwerksmodell mit acht Moden zurückgegriffen (s. Abschnitt 4.2.1).

Bei der Verwendung der Spur der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix kann auf die Greedy-Optimierung verzichtet werden, da es sich um eine modulare Funktion handelt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.5 a für die Platzierung paralleler Aktoren mit Krafteingang und in Abb. 5.5 b für serielle Aktoren mit Verschiebungseingang dargestellt. Das normierte Gütekriterium $J_{\text{dyn,n}}(S)$ ist über die Aktorzahl aufgetragen und nimmt unterschiedliche Werte für beide Konfigurationen an. Der Änderung des Kriteriums ist deutlich geringer als bei der statischen Platzierung. Es werden mehr Aktoren benötigt um die gleiche relative Güte zu erhalten, begründet durch die unterschiedlichen Kostenfunktionen. Im statischen Fall wird der Ausgangsfehler betrachtet, während

im dynamischen Fall die Steuerbarkeit herangezogen wird. Bei der parallelen Platzierung werden die Diagonalen modulweise, beginnend beim unteren Modul bis zum oberen, ausgewählt. Anzumerken ist, dass die Verbesserung für jede Diagonale in einem Modul identisch ist, wie in Abb. 5.5 a dargestellt. Wie die Eigenschaft der Modularität der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix erahnen lässt, trägt jede Diagonale in einem Modul den gleichen Zuwachs zur Steuerbarkeit bei. Dieser Anstieg nimmt ab, je höher ein Modul angesiedelt ist. Die Aktuierung der Stützen bewirkt kaum eine Verbesserung der Güte. Der Beitrag zur Steuerbarkeit ist identisch für die Stützen in einem Stockwerk. Das Resultat für $k = 32$ parallel platzierte Aktoren ist in Abb. 5.5 c farbcodiert dargestellt.

Die Platzierung der seriellen Aktoren mit Verschiebungseingang bevorzugt zu Beginn die Stützen aufsteigend nach Modul (Abb. 5.5 d) und ist somit nicht gleich wie bei der parallelen Platzierung. Wie in Abschnitt 5.1.3.2 beschrieben, unterscheiden sich die Eingangsmatrizen durch die Gewichtung mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\text{elem}}$. Da diese quadratisch in die Gramschen Steuerbarkeitsmatrix eingeht und der sehr hohen Steifigkeit der Stützen im Demonstrator-Hochhaus verglichen mit den Diagonalen, werden die Stützen nach diesem Kriterium bevorzugt platziert. Dem Algorithmus ist nach wie vor nicht bekannt, dass serielle Aktoren in den Stützen im Kraftpfad des Eigengewichts liegen und somit nicht sinnvoll einsetzbar sind. Deshalb würde eine gemeinsame Platzierung bewirken, dass ausschließlich serielle Aktoren platziert werden. Werden die Stützen bei der Platzierung serieller Aktoren mit Verschiebungseingang ausgeschlossen, wären die Ergebnisse vergleichbar mit der parallelen Platzierung.

Die Metriken basierend auf der Spur stellen nicht sicher, dass steuerbare Systeme resultieren. Eine große Verbesserung des Gütekriteriums durch einen bereits steuerbaren Zustands kann einer kleinen Verbesserung eines noch nicht steuerbaren Zustands bevorzugt werden. Beispielsweise ist die Platzierung aus Abb. 5.5 a mit zwei Aktoren steuerbar nach dem Kalman-Kriterium, wohingegen das Ergebnis aus Abb. 5.5 b ebenfalls mit zwei Aktoren nicht steuerbar ist. Wird ein System linear modelliert, können Aktoren in den Stützen Torsionsmoden, wie Mode drei und acht (aus Abb. 4.1), nicht beeinflussen.

Mit Hilfe des beschriebenen Greedy-Algorithmus wird die dynamische Aktorplatzierung für die Kostenfunktion $J_{\text{dyn},\lambda_{\min}}(S)$ durchgeführt. Parallele Aktoren mit Krafteingang und serielle mit Verschiebungseingang werden gemeinsam platziert, wobei letztere nicht in vertikale Elemente integriert werden können. Eine separate Platzierung, auf die nicht eingegangen wird, liefert im Gegensatz zur Verwendung der Spur ähnliche Ergebnisse. Um den Einfluss der Moden auf die Platzierung zu untersuchen, sind die Ergebnisse in Abb. 5.6 a und b mit einem auf drei und acht Moden reduzierten Modell dargestellt. In c) und d) ist das Ergebnis für $k = 32$ Aktoren am Demonstrator-Hochhaus illustriert. Es zeigt sich in beiden Fällen, dass zuerst die Diagonalen und anschließend die Stützen verwendet werden, wobei letztere die Güte nur marginal verbessern. Bei drei Moden werden die Diagonalen unten im Tragwerk vor höher liegenden platziert. Bei acht Moden befinden sich früh platzierte Aktoren im ersten und vierten Modul, danach im dritten und im zweiten. Dieses Verhalten bewirken die Biegemoden höherer Ordnung $\{4,5,6,7\}$, die oben am Tragwerk Schwingungsbäuche aufweisen. Bei der Platzierung müssen Überlegungen angestellt werden, welche Moden bei einer Regelung Beachtung finden sollen in Abhängigkeit von Eigenfrequenz und Aktorbandbreite.

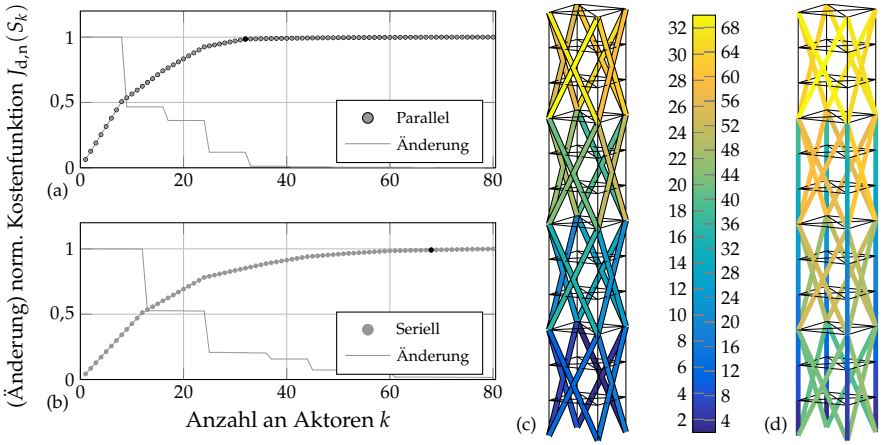


Abbildung 5.5: Dynamische Platzierung mit $J_{\mathrm{dyn,tr}}(S)$ für parallele und serielle Aktoren.
Die normierte Kostenfunktion $J_{\mathrm{dyn,n}}(S_k)$ mit der Spur als Gütekriterium ist über die Anzahl von platzierten Aktoren aufgetragen, in (a) ausschließlich für das parallele Aktuierungsprinzip mit Krafteingang und in (b) für das serielle mit Verschiebungseingang. Der zweite Graph zeigt die normierte Änderung der Gütewerte. Die schwarz markierten Ergebnisse für $k = 32$ Aktoren sind in (c) für die parallele und für $k = 68$ in (d) für die serielle Konfiguration am Demonstrator-Hochhaus dargestellt. Die platzierten Aktoren sind farbcodiert hervorgehoben, wobei die aufsteigende Reihenfolge von blau über grün und orange zu gelb festgelegt ist.

Eine Platzierung durch Maximierung des minimalen Eigenwerts verbessert in jedem Schritt den am schlechtesten steuerbaren Zustand. Wird an diesem Beispiel der erste Aktor platziert, resultiert, egal welcher Aktor ausgewählt wird, ein nicht steuerbares System. Folglich sind alle minimalen Eigenwerte Null und die Platzierung des ersten Aktors unterliegt numerischen Abweichungen bei der Berechnung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix. An den Diagrammen in Abb. 5.6 befindet sich der erste platzierte Aktor nicht in der Nähe der direkt danach folgenden. Für (noch) nicht steuerbare Systeme ist diese Kostenfunktion deshalb nur bedingt geeignet, kann jedoch durch eine initial gewählte Aktormenge gelöst werden. Ein Vorteil dieses Kriteriums ist das frühest mögliche Erreichen von steuerbaren Systemen im Gegensatz zur Spur als Kostenfunktion.

Bei der Wahl einer beliebigen Aktorzahl existieren, bedingt durch die Symmetrie des Tragwerks, andere gleichwertige Lösungen. Symmetrie-Effekte, wie in Abschnitt 5.1.2.3 erläutert, werden von der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix nicht direkt erfasst, sind jedoch im Hinblick auf die unbeabsichtigte Anregung von Torsionsmoden entscheidend.

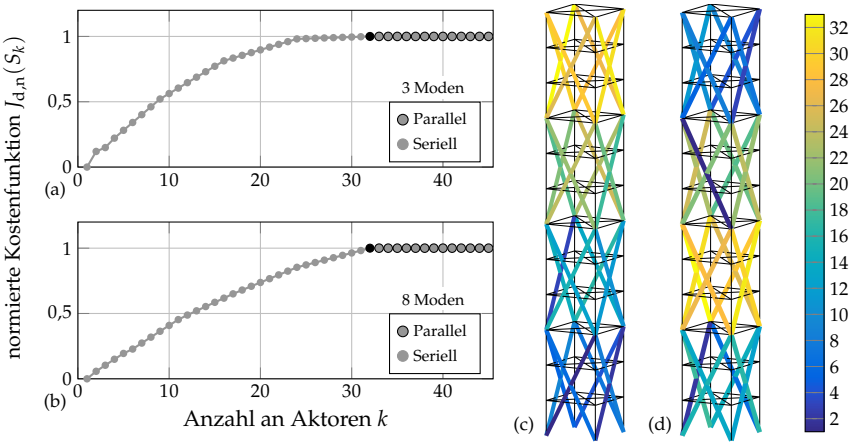


Abbildung 5.6: Dynamische Platzierung mit $J_{d,\lambda_{min}}(S)$ für 3 und 8 Moden.
Die normierte Kostenfunktion $J_n(S_k)$ ist über die Anzahl von platzierten Aktoren für parallele (schwarz umrandet) und serielle Konfiguration gemeinsam aufgetragen. In (a) werden 3 Moden berücksichtigt und in (b) 8 Moden. Die darin schwarz markierten Ergebnisse für $k = 32$ Aktoren sind in (c) für 3 Moden und in (d) für 8 Moden am Demonstrator-Hochhaus dargestellt. Die platzierten Aktoren sind farbcodiert hervorgehoben, wobei die aufsteigende Reihenfolge von blau über grün und orange zu gelb festgelegt ist.

5.1.4 Kombinierte Aktorplatzierung

Die optimale Aktorplatzierung wurde separat für die statische Kompensation und für die aktive Schwingungsdämpfung ermittelt. Die Unterscheidung beider Anwendungsfälle ergab sich durch die unterschiedlichen Optimierungsziele und die davon abgeleiteten Kostenfunktionen. Bei der Auslegung von adaptiven Tragwerken muss jedoch eine Aktormenge definiert werden, die sowohl für die statische als auch für die dynamische Adaption geeignet ist. Die Kombination der Aktormengen muss im Kontext des untersuchten Tragwerks evaluiert werden, da eine Platzierung spezifisch an die Bedingungen angepasst werden muss. Dabei sind, wie schon bei der Bestimmung der separaten Aktormengen, u. a. die auftretenden Lasten, verfügbare Aktorzahl, Aktuierungsprinzipien oder die Bandbreite der Aktoren von Bedeutung. Zudem muss eine Strategie für die Handhabung verschiedener Aktuierungsprinzipien für doppelt auftretende Aktoren gefunden werden. Im Folgenden werden verschiedene Kombinationsmöglichkeiten vorgestellt und bewertet:

- Bei der *Vereinigung* der Lösungsmengen werden die optimalen Ergebnisse der statischen und dynamischen Aktorplatzierung kombiniert. Dabei wird für beide Fälle die optimale Lösungsmenge separat bestimmt, die gemeinsam zur finalen Menge vereinigt werden. Aktoren die in beiden Mengen enthalten sind, werden einmal verwendet, wodurch die Aktorzahl nicht direkt feststeht. Mit den Aktorzahlen k_{stat} und k_{dyn} für die statische und dynamische Lösung ergibt sich für die Vereinigung $\max(k_{stat},k_{dyn}) \leq k \leq (k_{stat} + k_{dyn})$.

Die optimalen Einzellösungen sind Untermengen der Gesamtlösung, die weiteren Aktoren der jeweils anderen Menge können zusätzlich zur Erreichung der Ziele eingesetzt werden. Zusätzliche Aktoren können die dynamische Lösung nicht verschlechtern, die statische Güte kann prinzipiell abnehmen aufgrund der Definition der Kostenfunktion mit Berücksichtigung des Eingangs. Durch die Untersuchungen in Abschnitt 5.1.2.3 tritt dieser Effekt erst bei sehr vielen Aktoren auf. Dies steht im Gegensatz zu einer möglichst geringen Aktorzahl. Die Vereinigung kann einerseits auf einer vorgegebenen Aktorzahl für beide Fälle beruhen oder das Erreichen eines bestimmten Gütewerts fordern. Der letzte Ansatz führt dazu, dass unterschiedlich viele Aktoren von der statischen und der dynamischen Lösungsmenge hinzugefügt werden.

Eine Erweiterung dieses Ansatzes bietet die Vereinigung der Lösungsmengen abhängig von der noch möglichen Verbesserung der Güte. Die wird im folgenden *Vereinigung nach Potential* genannt. Zugrunde liegen die separat bestimmten optimalen Aktorplatzierungen für den statischen und dynamischen Fall. Begonnen wird mit einer leeren Menge. Es wird die Differenz zur maximal erreichbaren Güte für beide Fälle berechnet. Die größere Abweichung bestimmt die Aktormenge, aus welcher der nächste Aktor zu der kombinierten Lösung hinzugefügt wird. Basierend auf dieser Menge wird wieder die Differenz bestimmt. Sollten beide Fälle das gleiche Potential aufweisen, kann beispielsweise ein Fall bevorzugt werden. Durch diesen Ansatz kann, motiviert durch die Ergebnisse der Einzeloptimierung, unter Berücksichtigung der Aktoren der jeweils anderen Menge die Lösung bestimmt werden. Im Gegensatz zur simplen Vereinigung, muss keine Aktoranzahl oder ein zu erreichendes Gütekriterium gewählt werden und kann über die Pareto-Optimalität ausgesucht werden.

- Als Pendant zu den vorherigen Ansätzen wird die *Schnittmenge* der beiden Lösungen gebildet. Dabei sollten für den statischen und dynamischen Fall große Lösungsmengen herangezogen werden, da sonst die Schnittmenge sehr klein ausfallen kann. Die Aktorzahl der Schnittmenge ist $0 \leq k \leq \min(k_{\text{stat}}, k_{\text{dyn}})$. Ein gravierender Nachteil ist, dass nur Aktoren verwendet werden, die in beiden Lösungsmengen enthalten sind. Dadurch können Aktoren mit beispielsweise viel Wirkung bei der statischen Aktorplatzierung ausgespart werden, weil nur eine geringe Verbesserung bei der dynamischen Lösung eintritt.

- Bei einer *sequenziellen Kombination* wird eine große Lösungsmenge der einen optimale Aktorplatzierung als Kandidatenmenge für die andere herangezogen. Der statische und dynamische Ansatz eigenen sich als Erstkandidat. Zu beachten ist, dass in der ersten Optimierung Aktoren ausgeschlossen werden, die für die zweite Optimierung großes Potential ausweisen könnten.

- Bei der *alternierenden Optimierung* wird eine Lösungsmenge bestimmt, indem beide Gütekriterien abwechselnd ausgewertet werden. Ähnlich zum zweiten Ansatz werden die Aktoren der jeweils anderen Lösung berücksichtigt. Diese Kombination ist möglich, weil beide Platzierungen die gleiche Formulierung des kombinatorischen Optimierungsproblems aufweisen und mit dem Greedy-Algorithmus gelöst werden.

- Des Weiteren kann ein Optimierungsproblem gelöst werden, indem beide *Gütekriterien gewichtet* kombiniert werden. Möglich sind z. B. die gewichtete Summe oder der Quotient. Die Bestimmung des Gewichtungsfaktors stellt eine Schwierigkeit dar und beeinflusst entscheidend das Ergebnis. Dabei kann ein Ungleichgewicht der beiden Fälle entstehen oder Aktoren mit stark unterschiedlichen Verbesserungspotentialen benachteiligt werden. Außerdem wird die physikalische Interpretierbarkeit der Lösung verschleiert.

Anwendung auf das Demonstrator-Hochhaus

Auf das Demonstrator-Hochhaus werden die Kombination durch Vereinigung, Schnittmengenbildung und Vereinigung nach Potential angewendet. Bei den ersten beiden Varianten werden einerseits eine Aktorzahl für die Einzellösungen vorgegeben und andererseits ein mindestens zu erreichender Gütewert. Das zugrunde liegende Ergebnis für die statische Lösung ist die Minimierung der gewichteten Spur der Gramschen Matrix basierend auf dem optimalen Ausgangsfehler und dem optimalen Eingang aus Abb. 5.3. Für die dynamische Lösung dient das Ergebnis der Maximierung des minimalen Eigenwerts der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix unter Berücksichtigung von drei Moden, wie in Abb. 5.6 a und c illustriert.

Unterschiede, die sich bei der statischen und dynamischen Platzierung bezüglich integrierter Aktorprinzipien in dem gleichen Element ergeben, werden aufgelöst, indem Stützen ausschließlich mit parallelen Aktoren versehen werden und Diagonalen mit seriellen Aktoren. Die physikalische Begründung liegt beim ersten Fall am nicht betrachteten Eigengewicht des Tragwerks. Im zweiten Fall spricht die geringere Aktorkraft bei serieller Integration mit Krafteingang für das Vorgehen.

Im Folgenden werden die quantitativen Angaben $J_{\mathrm{s},\%}(S)$ und $J_{\mathrm{dyn},\%}(S)$ zu den Aktorkonfigurationen für den statischen und dynamischen Fall in Prozent auf Basis der schon normierten Gütewerte als

$$J_{\mathrm{s},\%}(S) = (1 - J_{\mathrm{s,n}}(S)) \qquad \text{und} \qquad J_{\mathrm{dyn},\%}(S) = J_{\mathrm{dyn,n}}(S) \tag{5.29}$$

angegeben. Um Vergleichbarkeit zu gewährleisten enthalten alle Kombinationen 18 Aktoren. Die definierten Gütekriterien für die statische und dynamische Platzierung dienen als Indikator für die kombinierte Lösung. Der Wert der Gütekriteriums der optimalen statischen Platzierung mit 18 Aktoren beträgt 97,0 %, ebendieser Wert für die optimale dynamischen Konfiguration 85,5 %.

Die Vereinigung von je 11 Aktoren (Abb. 5.7 a) der statischen und dynamischen Platzierung führt zu Werten von 93,1 % und 73,2 %. Das Gütekriterium der statischen Lösung nimmt kaum ab, während der schon geringere Wert der dynamischen Lösung um über zehn Prozentpunkte sinkt. Bei der Vereinigung, sodass die Gütewerte der Einzellösungen (s. Abb. 5.7 b) mindestens 80 % einer Vollaktuierung betragen, belaufen sich die Gütewerte bei der kombinierten Aktormenge auf 91,2 % und 81,3 %. Beide Werte nehmen in einer ähnlichen, aber kleinen, Größenordnung ab. Der Gütewert des dynamischen Falls verbessert sich deutlich, wenn auch auf Kosten des statischen Werts, die jedoch gering sind. Eine Vereinigung nach Gütewerten der Einzeloptimierungen ist demnach einer fest vorgegebenen Aktorzahl der Einzelergebnisse vorzuziehen.

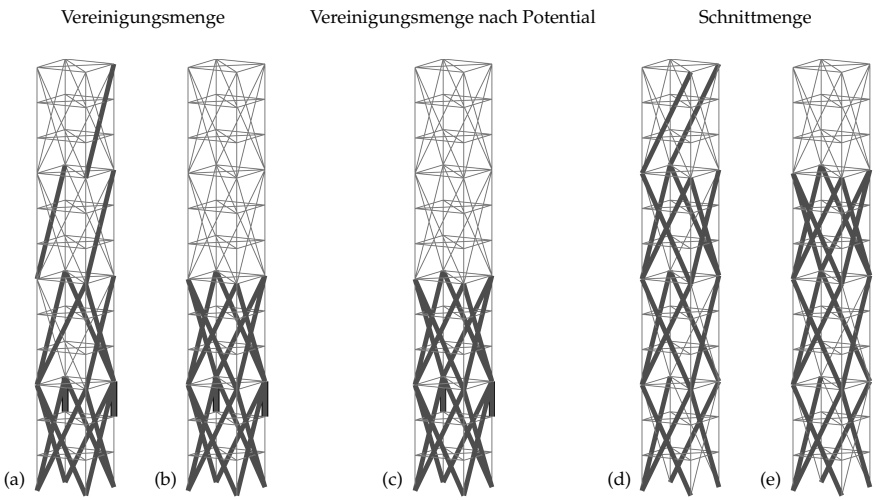


Abbildung 5.7: Kombinierte Mengen durch Vereinigung und Schnittmengenbildung.
Die Kombination der statischen und dynamischen Lösungsmengen zu insgesamt 18 Aktoren ist dargestellt, in (a) durch Vereinigung mit je 11 Aktoren der Einzellösungen und in (b) mit einem erreichten Gütewert der Einzellösungen von 80,0 %. Das Ergebnis durch Schnittmengenbildung ist in (d) mit je 27 Aktoren in den Einzellösungen dargestellt und in (e) mit einem Mindestgütewert von 97,0 % der Einzellösungen. In (c) ist die Lösungsmenge durch Vereinigung unter Berücksichtigung des Verbleibenden Potentials mit 18 Aktoren angegeben.

Bei der Schnittmengenbildung (Abb. 5.7 d) sind für 18 Aktoren in der kombinierten Menge 27 in den Einzelmengen notwendig. Dies umfasst beinahe die halbe Kandidatenmenge. Für den statischen Fall werden noch Gütewerte von 86,9 % erreicht und für den dynamische Fall 63,9 %. Wenn beide Einzellösungen mehr als 97 % erreichen sollen (Abb. 5.7 e), belaufen sich die kombinierten Werte auf 87,5 %und 67,6 % und eine marginale Verbesserung stellt sich ein. Für beide Schnittmengen sind deutlich größere Einzelmengen notwendig, die für große Tragwerke aufwendig zu berechnen sind. Zudem kann die Güte dieser Kombination nicht die Qualität der Vereinigung erreichen und wird nicht weiter empfohlen.

Die Vereinigung nach dem verbleibenden Potential ist in Abb. 5.7 c dargestellt und entspricht der Vereinigung (Abb. 5.7 b). Allerdings ist hierbei die willkürliche Wahl einer zu erreichenden Güte der Einzellösungen nicht notwendig. Es kann unter Abwägung der Anforderungen die Aktorzahl der Gesamtlösung bestimmt werden. Höhere Anforderungen führen zu größeren Aktormengen. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.1 aufgeführt. Auf dieser Grundlage ist die Vereinigung nach dem verbleibenden Potential die beste Option.

Das Ergebnis mit 18 Aktoren ist eine brauchbare Lösung für das Demonstrator-Hochhaus. Ausschließlich der Aktoren in den Stützen ist die Lösung symmetrisch, was zu einem homogeneren Verhalten hinsichtlich verschiedener Lastrichtungen führt. Die Aktorzahl ist für ein Tragwerk

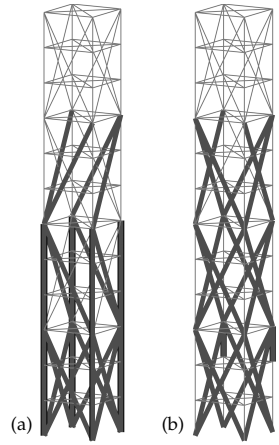


Abbildung 5.8: Reale Konfiguration am Demonstrator-Hochhaus und Lösungsmenge durch Vereinigung mit 24 Aktoren.
In (a) ist die reale Aktorkonfiguration des Demonstrator-Hochhauses dargestellt. Im Unterschied zur bisherigen Betrachtung, überspannen die Aktoren in den Stützen drei Stützenelemente. In (b) ist die Vereinigung nach dem verbleibenden Gütepotential für die gleiche Aktorzahl illustriert.

dieser Größe recht hoch, so können jedoch bei Ausfall von Aktoren geringere Leistungseinbußen erreicht werden [24], wodurch Redundanz im Tragwerk gegeben ist. Bei der Aktorplatzierung können, ohne einen drastischen Anstieg der Berechnungskomplexität, Stellgrößenbeschränkungen und nichtlineares Systemverhalten nicht berücksichtigt werden. Die integrierbaren Aktoren sind jedoch in ihrer Kraft beschränkt und die druckschlaffen Elemente können die Aktorkraft in nur eine Richtung weiterleiten. Ein Puffer bei der Aktorzahl kann somit eingesetzt werden, um Stellgrößenbeschränkungen oder Modellabweichungen durch nichtlineares Systemverhalten zu kompensieren.

Tabelle 5.1: Ergebnisse der kombinierten Aktorplatzierung für 18 Aktoren.
Quantitative Gütewerte der Konfigurationen sind in Prozent nach (5.29) angegeben. In Spalte 1 sind die Gütewerte der separaten Lösungen für 18 Aktoren angegeben.

	Einzel-lösung	Vereinigung		Schnittmenge		Vereinigung nach Potential
		$k_{(\cdot)} = 11$	$J_{(\cdot),\%} > 80\,\%$	$k_{(\cdot)} = 27$	$J_{(\cdot),\%} > 97\,\%$	
$J_{\mathrm{s},\%}$	97,0 %	93,1 %	91,2 %	86,9 %	87,5 %	91,2 %
$J_{\mathrm{dyn},\%}$	85,5 %	73,2 %	81,3 %	63,9 %	67,6 %	81,3 %

Reale Aktorkonfiguration am Demonstrator-Hochhaus

Die reale Aktorkonfiguration am Demonstrator-Hochhaus ist in Abb. 5.8 a dargestellt und beinhaltet 24 Aktoren, wie in Anhang A.5 beschrieben. Die Aktoren in den Stützen verlaufen über drei Stützenelemente. Es wurden zusätzliche Aktoren integriert, um experimentelle Untersuchungen auch hinsichtlich unterschiedlicher Aktorkonfigurationen zu ermöglichen. Die Baugenehmigung des Demonstrator-Hochhauses verlangte, die Aktormenge in einem frühen Entwicklungsstadium basierend auf den damaligen Modellannahmen festzulegen. Die reale Konfiguration am Demonstrator-Hochhaus soll mit den 24 optimal platzierten Aktoren durch Vereinigung nach dem verbleibendem Potential verglichen werden (Abb. 5.8 b). Dabei erstreckt sich ein Stützenaktor über ein Element, wie in diesem Kapitel bisher angenommen wurde. Die optimale Lösungsmenge mit 24 Aktoren beträgt hinsichtlich des statischen Gütekriteriums 97,0 % und fällt durch die Kombination auf 91,9 % ab. Im dynamischen Fall erreicht die optimale dynamische Lösungsmenge 98,1 % und reduziert sich durch Kombination auf 94,0 %. Die reale Konfiguration erreicht einen statischen Gütewert von 96,8 % und einen dynamischen Gütewert von 73,0 %. Hierbei ist der statische Fall besser als bei der optimal platzierten Aktormenge (91,9 %), was hauptsächlich durch die vielen Stützenaktoren verursacht wird. Diese benötigen wiederum sehr hohe Kräfte, um Einfluss auf das Tragwerk zu nehmen. Der dynamische Gütewert ist wiederum bei der optimierungsbasierten Lösung deutlich besser. Durch Stützenaktoren sind Torsionsmoden nicht steuerbar, weshalb diese unter Berücksichtigung des minimalen Eigenwerts nicht zum Gütekriterium beitragen. Aktoren in den Diagonalen überwiegen in der optimalen Aktormenge, womit diese bei einer dynamischen Betrachtung besser geeignet ist.

5.2 STATISCHE AKTORPLATZIERUNG FÜR AKTUIERBARE EULER-BERNOULLI-BALKEN

Das Problem der Aktorplatzierung wird auf Einzelelmente, wie die Balken mit integrierten Fluidaktoren, erweitert. Im Unterschied zu den bisher betrachteten Tragwerken, ist durch die verteilte Momentenaktuierung eine Abkehr von diskreten Aktorpositionen nötig. Die Balken mit Fluidaktoren bieten die Möglichkeit, die Druckkammern entlang des Balkens zu platzieren. Dabei wird beim zugrunde liegenden Optimierungsproblem die Einhaltung von Nebenbedingen erzwungen, da Aktoren nicht übereinander oder in der Nähe des Rands liegen dürfen. Die Untersuchungen fokussieren sich beim Balken mit integrierten Fluidaktoren auf die Kompensation von statischen Lasten und die dafür optimal zu bestimmenden Aktorpositionen.

5.2.1 Verteilte stationäre Kompensierbarkeit

Für ein verteiltes System (3.47) mit den Randbedingungen (3.48), gilt:

Definition 3 (Verteilte stationäre Kompensierbarkeit)**.** *Eine konstante Störung $z(\boldsymbol{x})$, die auf ein System* (3.47) *und* (3.48) *wirkt, heißt stationär kompensierbar hinsichtlich des Ausgangsfehlers $e(u(\boldsymbol{x})) =$*

$y_\mathrm{d}(\boldsymbol{x}) - y(u(\boldsymbol{x}))$, *wenn ein konstanter Eingang* $u(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathcal{U}$ *existiert, sodass* $\|e(u(\boldsymbol{x}))\| < \|e(0)\|$. *Ein System* (3.47) *und* (3.48) *heißt vollständig stationär kompensierbar, wenn jede konstante Störung* $z(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *stationär kompensierbar ist.*

Der Sollausgang $y_\mathrm{d}(\boldsymbol{x})$ kann beliebige Werte annehmen, wird im Weiteren jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu Null gesetzt.

5.2.1.1 Systemmodell in Abhängigkeit der Aktorpositionen

Die Modellgleichungen (3.49) mit den Randbedingungen (3.50) für den Balken mit integrierten Fluidaktoren unterliegen der Annahme einer beliebigen jedoch fest spezifizierten Aktorkonfiguration. Für die verteilte Aktorplatzierung wird der Vektor der Aktorpositionen $\boldsymbol{\xi}$ eingeführt. Die Beschreibung des örtlich verteilten Eingangs (3.51) wandelt sich in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ zu

$$u(x, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{\gamma}_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}^2 \theta_i(x, \xi_i)}{\mathrm{d}x^2} p_i. \tag{5.30}$$

Daraus lässt sich die Lösung der Biegelinie als

$$w(x, \boldsymbol{\xi}) = w_\mathrm{u}(x, \boldsymbol{\xi}) + w_\mathrm{z}(x) \tag{5.31}$$

darstellen. Der Superpositionsansatz, wie in (3.53), bleibt bestehen und das Lastprofil $w_\mathrm{z}(x)$ ändert sich nicht. Das Eingangsprofil hingegen ist

$$w_\mathrm{u}(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x, \xi_i) p_i \qquad \text{mit} \quad \beta_i(x, \xi_i) \quad = \int_0^x \int_0^\eta \gamma_1 \theta_i(\zeta, \xi_i) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta - \Theta_i(\xi_i) x. \tag{5.32}$$

Analog zu (3.60) ist die Biegelinie in Abhängigkeit der Aktorpositionen

$$w(x, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}(x, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\sigma}(x)^\mathsf{T} \boldsymbol{s} \tag{5.33}$$

mit der Eingangscharakteristik $\boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi}) = [\beta_1(x, \xi_1), \beta_2(x, \xi_2), \ldots, \beta_m(x, \xi_m)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$, den Eingangdrücken $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, \ldots p_m]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\sigma}(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots \sigma_l(x)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^l$ und den Störamplituden $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, \ldots s_l]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^l$.

5.2.2 Definition des Gütekriteriums

Zur statischen Aktorplatzierung beim Balken mit integrierten Fluidaktoren wird ein quantitatives Gütemaß basierend auf dem Ausgangsfehler hergeleitet, vergleichbar mit dem konzentriert-parametrischen Fall in Abschnitt 5.1.2.2. Der Ausgang $y(x)$ beschreibt die Durchbiegung des Balkens $w(x, \boldsymbol{\xi})$ entlang der Ortskoordinate. Der gewünschte Ausgang ist $y_\mathrm{d} = 0$. Das Ziel, den Ausgangsfehler ($e = 0$) und damit die Durchbiegung in der örtlichen Domäne vollständig zu

eliminieren $w(x,\boldsymbol{\xi}) = 0\ \forall x$, ist mit einer limitierten Aktorzahl allgemein nicht möglich. Durch die Anwendung einer adäquaten Norm auf die Durchbiegung, kann diese minimiert werden und der dafür notwendige Eingang bestimmt werden. Nach der Galerkin Methode ([124]) ist die Durchbiegung im Sinne der $\mathcal{L}_1$-Norm minimal, mit den gewichteten Aktorcharakteristika $\boldsymbol{g}^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})$, wenn

$$\min_{\boldsymbol{p}} \|w(x,\boldsymbol{\xi})\|_{\boldsymbol{g}^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})} = \min_{\boldsymbol{p}} \left| \int_0^1 \boldsymbol{g}^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi}) w(x,\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}x \right|. \tag{5.34}$$

Das Integral (5.34) verschwindet für alle Gewichte $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m$ mit dem optimalen Eingang

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{opt}} = -\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \int_0^1 \boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}^\mathsf{T}(x)\mathrm{d}x\, \boldsymbol{s}, \quad \forall \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m \tag{5.35}$$

mit

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^1 \boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}(x,\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}x. \tag{5.36}$$

Aufgrund der Anforderungen an die Aktoren sind die Aktorcharakteristika $\beta_i(x,\boldsymbol{\xi})$ für $i = 1,...,m$ linear unabhängig. Damit ist $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$ eine reguläre Fundamentalmatrix, deren Inverse existiert, und der optimale Eingang $\boldsymbol{p}_{\mathrm{opt}}$ kann berechnet werden. Die Parallele im konzentriert-parametrischen Fall ist die Pseudoinverse in (5.6).

Durch Einsetzen von (5.35) in (5.33) ist die optimale Biegelinie

$$w_{\mathrm{opt}}(x,\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{H}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{s} \tag{5.37}$$

mit

$$\boldsymbol{H}(x,\boldsymbol{\xi}) = \left(\boldsymbol{\sigma}^\mathsf{T}(x) - \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \int_0^1 \boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}^\mathsf{T}(x)\mathrm{d}x \right). \tag{5.38}$$

Die minimale Durchbiegung bei einer gegebenen Aktorkonfiguration und vorhandenen Lastamplituden $\boldsymbol{s}$ ist durch (5.37) gegeben. Der Ausdruck $\boldsymbol{H}(x,\boldsymbol{\xi})$ hängt a-priori von den formbestimmenden Lastfunktionen $\boldsymbol{\sigma}(x)$ ab, jedoch nicht von den Lastamplituden. Da die Lastamplituden nicht mit der Aktorkonfiguration zusammenhängen, können die Aktorpositionen $\boldsymbol{\xi}$, die die Biegelinie $w_{\mathrm{opt}}(x,\boldsymbol{\xi})$ minimieren, bestimmt werden, indem $\boldsymbol{H}(x,\boldsymbol{\xi})$ minimiert wird. Eine anschauliche Interpretation kann analog zum konzentriert-parametrischen Fall in Abb. 5.1 a gefunden werden.

Die Durchbiegung des gesamten Balkens soll bei der Bestimmung der Aktorpositionen berücksichtigt werden, weshalb die $\mathcal{L}_2$-Norm betrachtet wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_{\mathrm{opt}}^2(x,\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}x &= \boldsymbol{s}^\mathsf{T} \int_0^1 \boldsymbol{H}^\mathsf{T}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{H}(x,\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}x\, \boldsymbol{s} \\ &= \boldsymbol{s}^\mathsf{T}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{s}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Die ortsabhängige Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{l\times l}$ ist hier für örtlich verteilte Systeme aufgestellt. Diese setzt die Lastamplituden $\boldsymbol{s}$ mit der minimalen Durchbiegung des Balkens in Relation. Die verteilte Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})$ selbst ist unabhängig von den Lastamplituden. Größere Störamplituden bei konstanter Matrix $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})$ für eine gegebenen Aktorkonfiguration führen zu größeren Durchbiegungen als kleinere Störamplituden. Bei beliebigen Störamplituden kann eine bessere Wahl der Aktorpositionen $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})$ so beeinflussen, dass kleinere Durchbiegungen resultieren. Deshalb werden die Aktorpositionen durch die Minimierung eines Maßes basierend auf der verteilten Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix bestimmt, unabhängig von speziellen Lastamplituden. Bei a-priori Wissen über Lastverteilungen kann entweder direkt die Lastfunktionen $\boldsymbol{\sigma}$ angepasst werden oder über die Transformation $\boldsymbol{s} = \mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{s}}$ eine Gewichtungsmatrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ eingeführt werden. Diese skaliert die Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix, sodass

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\mathcal{A}. \tag{5.40}$$

Skalare Gütemaße zur Bestimmung der optimalen Aktorpositionen nach [99] sind beispielsweise

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\big), \qquad J(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_{\max}\big(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})\big). \tag{5.41}$$

Die Spur der Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix erfasst den mittleren Wert der Norm der Durchbiegung und der maximale Eigenwert den schlechtesten Wert von (5.39). Das skalare Gütemaß wird normiert, sodass

$$J_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{J(\boldsymbol{\xi})}{J_0} \tag{5.42}$$

gilt, wobei der Wert J_0 den passiven Balken beschreibt, der keine Aktoren enthält.

5.2.3 Optimierungsproblem

Die Aktorkonfiguration für den Balken mit integrierten Fluidaktoren wird bestimmt, indem ein skalares Gütemaß, basierend auf der Norm der Durchbiegung, minimiert wird. Im Folgenden wird die Spur der verteilten Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix als skalares Gütemaß verwendet. Die Anzahl an zu platzierenden Aktoren wird vorgegeben. Das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen zur Berechnung der Aktorpositionen $\boldsymbol{\xi}$ ist

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{\xi}} J(\boldsymbol{\xi}) &= \min_{\boldsymbol{\xi}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})) \\ &= \min_{\boldsymbol{\xi}} \operatorname{tr}\left(\int_0^1 \boldsymbol{\sigma}(x)\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \boldsymbol{\sigma}(x)\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}(x,\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}x\, \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \int_0^1 \boldsymbol{\beta}(x,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}(x)\mathrm{d}x \right)\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.} \qquad & d_{\mathrm{m}} < \boldsymbol{\xi} < (1 - d_{\mathrm{m}}), \\ & (\xi_i - \xi_j) > d_{\mathrm{m}},\ i \neq j.\end{aligned} \tag{5.44}$$

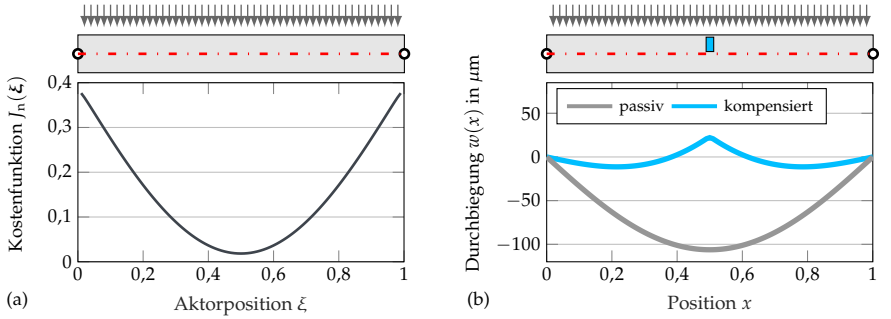


Abbildung 5.9: Platzierung eines Aktors im Balken mit integrierten Fluidaktoren.
In (a) ist der Verlauf der Kostenfunktion $J_n(\xi)$ in Abhängigkeit der normierten Aktorposition ξ aufgetragen. Darüber ist die verwendete diskretisierte Streckenlast illustriert. In (b) sind die passive Biegelinie (grau) und die durch einen Aktor in der Mitte kompensierte Durchbiegung (blau) abgebildet.

Die Kostenfunktion (5.43) ist kontinuierlich, da Druckkammern entlang des Balkens kontinuierlich platziert werden können. Die Nebenbedingungen garantieren, dass Aktoren physikalisch im Balken integriert werden können und somit die zulässigen Eingangscharakteristika $\mathcal{U}$ erfüllen. Aktoren müssen den Abstand d_m zum Rand des Balkens einhalten. Zudem verbieten die Nebenbedingungen, dass zwei beliebige Aktoren zu nah beieinander liegen; es wird der Abstand d_m eingehalten. Dadurch wird die lineare Unabhängigkeit der Spalten von $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$ und damit die Existenz der Inversen $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ gewährleistet. Der erste Term von (5.44) beinhaltet die Lastfunktionen und ist unabhängig von den Aktorpositionen $\boldsymbol{\xi}$, wodurch er vorab berechnet werden kann. Die verbleibenden drei Terme werden in Abhängigkeit der Aktorpositionen $\boldsymbol{\xi}$ in jedem Iterationsschritt berechnet.

5.2.4 Anwendung auf den Balken mit integrierten Fluidaktoren

Die Methode der statischen Aktorplatzierung für aktuierbare Euler-Bernoulli Balken wird auf ebendiese Balkenart mit integrierten Fluidaktoren (s. Abschnitt 2.3) mit verteilter Momentenaktuierung (s. Abschnitt 3.2) angewendet. Zuerst wird für die Bestimmung der optimalen Aktorpositionen eine allgemeine Last angenommen, die aus $l = 49$ Einzellasten (Dirac-Impulsen) entlang des Balkens besteht. Die Einzellasten greifen somit im Abstand von 4 cm an. Die Lastamplituden $\boldsymbol{s}$ beeinflussen die Optimierung der Aktorpositionen nicht. Diese werden zur Berechnung der Durchbiegung und der Kammerdrücke so gewählt, dass die allgemeine Last einer diskretisierten Streckenlast von 1000 N/m entspricht. Vorerst wird zum Verständnis der Methode, ein Aktor im Balken platziert. Das Optimierungsproblem (5.43) wird mit einem Innere-Punkte-Verfahren gelöst [103].

Abb. 5.9 a zeigt das Kostenfunktional in Abhängigkeit der normierten Aktorposition. Darüber ist der Balken mit den Annahmen zum Lastprofil illustriert. Die optimale Aktorposition ist in

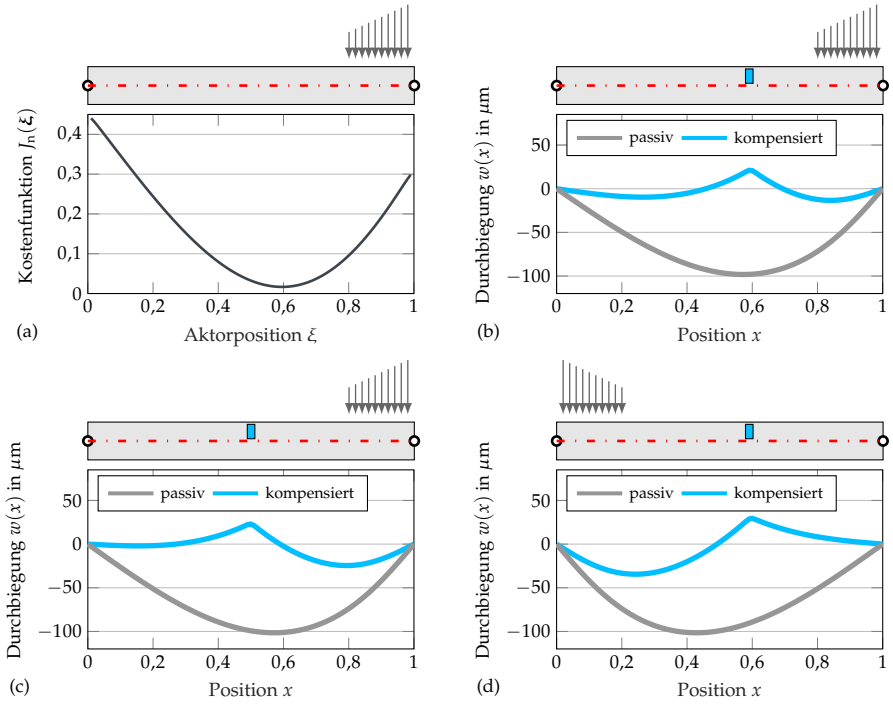


Abbildung 5.10: Aktorplatzierung am Balken bei verschiedenen Lasten.
In (a) ist das normierte Konstfunktional über die Aktorpositionen für die Trapezlast dargestellt und in (b) die dazugehörige kompensierte Biegelinie $\xi = 0{,}59$. In (c) wird die Trapezlast auf dem letzten Fünftel des Balken mit dem mittig positionierten Aktor $\xi = 0{,}5$ kompensiert. Die gespiegelte Trapezlast, die auf das erste Fünftel des Balkens wirkt, wird mit einem Aktor in (d) für $\xi = 0{,}59$ kompensiert.

diesem Fall in der Balkenmitte bei $\xi = 0{,}5$. Bei einer gleichbleibenden Streckenlast, egal welcher Größe, die über die gesamten Balkenlänge wirkt, zeigt sich die maximale Durchbiegung immer in der Mitte. Da das Gütefunktional die Durchbiegung bewertet, war das Ergebnis erwartbar und stimmt mit einer intuitiven Wahl überein. Diese Übereinstimmung bestätigt die Methode. Die sich einstellende Durchbiegung des passiven Balkens ist in Abb. 5.9 b abgebildet. Die Durchbiegung des eingesetzten Betonbalkens ist sehr gering und befinden sich im μm-Bereich. Durch die Aktuierung mit einem Aktor, wie darüber illustriert, wird die maximale Auslenkung, die sich in diesem Fall in der Balkenmitte befindet, um 79,2 % reduziert. Die sich einstellende Form der Biegelinie mit der Überhöhung in der Balkenmitte ist auf den lokalen Einfluss der Druckkammer zurückzuführen. Der optimale Druck in der Kammer beträgt $p_{\text{opt}} = 516\,\text{bar}$.

Für weitere Untersuchungen wird eine Trapezlast eingeführt. Die Trapezlast wirkt auf dem letzten Fünftel des Balkens und steigt von 10000 N/m auf 12500 N/m an. Die Störung[4] $z(x)$ ist

$$z(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0{,}8 \\ 12500x, & 0.8 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{5.45}$$

In Abb. 5.10 c ist die passive und kompensierte Biegelinie des Balkens unter Lastfall zwei für die optimale Aktorposition hinsichtlich des ersten Lastfalls, der Streckenlast (Abb. 5.9 a), dargestellt. Der optimale Kammerdruck beträgt $p_{\text{opt}} = 491$ bar und kann das zweite Last-Szenario mit einer Reduktion der maximalen Auslenken um 75,8 % etwas schlechter kompensieren als das erste Last-Szenario. Ein für diese Trapezlast optimal platzierter Aktor ist nach der Kostenfunktion in Abb. 5.10 a bei $\xi = 0{,}59$. Die kompensierte Biegelinie in Abb. 5.10 b erfordert zwar mit $p_{\text{opt}} = 514$ bar einen leicht höheren Druck, kann jedoch die Durchbiegung mit 78,6 % weiter reduzieren. Wird diese Trapezlast gespiegelt auf das erste Fünftel des Balkens angewendet (Abb. 5.10 d), wird nur noch eine Reduktion um 66,1 % erreicht. Für die allgemeine Annahme der gleichverteilten Last mit der Aktorposition bei $\xi = 0{,}5$ werden bei diesem Lastfall aus Symmetriegründen ebenfalls 75,8 % der maximalen Durchbiegung kompensiert. Dies entspricht der seitenvertauschten Darstellung von Abb. 5.10 c. Der Mittelwert der maximalen Durchbiegungen von Abb. 5.10 b und d führt zu einer Reduktion um 72,4 %, die verglichen mit Abb. 5.10 c und dessen Spiegelung mit 75,8 %, niedriger liegt. Auf Basis dieses Beispiels zeigt sich der Vorteil der allgemeinen Lastannahme zur Bestimmung der Aktorpositionen, wenn keine Vorkenntnisse zu erwartbaren Lasten vorliegen. Durch die gleichverteilte Last werden günstige Aktorpositionen bestimmt, die für eine Vielzahl von unterschiedlichen Lasten hinreichend gut kompensieren. Bei konkreten bekannten häufig auftretenden Lasten, kann auf die gewichtete Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix zurückgegriffen werden.

Die Platzierung eines Aktors fördert das Verständnis der Methode; zur praktischen Umsetzung ist jedoch eine höhere Aktorzahl erforderlich. Zur Bestimmung der Aktorzahl wird das Pareto-Prinzip angewendet. Unter der allgemeinen Lastannahme wurde für einen bis acht Aktoren das normierte Kostenfunktional über die Aktorzahl aufgetragen (Abb. 5.11 a). Nach Paretos Prinzip würden zwei Aktoren gewählt werden. Durch einen dritten Aktor ist jedoch eine signifikante Verbesserung zu verzeichnen und wird im Sinn der ingenieurtechnischen Auslegung hinzugenommen. Bei drei Aktoren ergeben sich die Aktorpositionen zu $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0{,}27 & 0{,}5 & 0{,}73 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ und die maximale Durchbiegung wird um 96,4 % reduziert. Die optimalen Kammerdrücke für eine Streckenlast von 1000 N/m sind $\boldsymbol{p}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 198 & 229 & 198 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ bar. Mehr Aktoren führen zu geringeren Kammerdrücken und das System kann mit einer kleiner dimensionierten Versorgungseinheit zur Druckbereitstellung betrieben werden. Die lokale Wirkung der Druckkammern bleibt erhalten. Bei steigender Aktorzahl rechtfertigt sich diese Methode zur Aktorplatzierung, da ein intuitive optimale Positionierung mehrerer Druckkammern, im Vergleich zu einem Aktor, schwer möglich erscheint. Alle Ergebnisse sind in Tab. 5.2 tabellarisch zusammengefasst und um die mittlere Reduktion (∅) ergänzt, die die Durchbiegung entlang des Balkens berücksichtigt.

[4] Mit $l = 10$ Lastangriffspunkte im letzten Fünftel des Balkens lassen sich $\boldsymbol{\sigma}(x)$ und $\boldsymbol{s}$ berechnen.

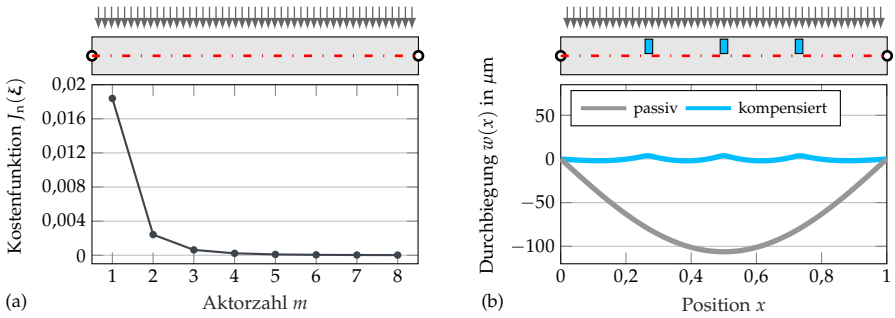


Abbildung 5.11: Verschiedene Aktoranzahlen am Balken mit integrierten Fluidaktoren.
In (a) sind die Werte des Kostenfunktionals für einen bis acht Aktoren aufgetragen. Die passive und kompensierte Biegelinie für drei Aktoren ist in (b) gezeigt.

Durch die Methode der verteilten Aktorplatzierung am Euler-Bernoulli Balken konnten die Druckkammern für die Balken mit integrierten Fluidaktoren optimal platziert werden. Eine Möglichkeit der Erweiterung auf aktuierte Platten [76] wurde bereits gezeigt. Eine anschließende Untersuchung kann sich mit der optimalen Aktorform und der daraus resultierenden Ortscharakteristik $\boldsymbol{\beta}(x, \boldsymbol{\xi})$ des Eingangs $\boldsymbol{p}$ befassen. Somit kann neben den optimalen Aktorpositionen auch die konstruktive Ausführung der Druckkammern bestimmt werden. Dabei stellt sich die Frage nach der Dicke der Druckkammern und dem damit induzierten Momentenverlauf im aktuierten Balken. Eine Aktorplatzierung hinsichtlich dynamischer Lasten ist für den Balken mit integrierten Fluidaktoren nicht gefordert, da dessen Eigenfrequenzen jenseits der Bandbreite der Aktoren liegen und solche hochfrequenten Lasten nicht mit relevanter Amplitude erwartbar sind. Für längere Balken mit integrierten Fluidaktoren muss dieser Sachverhalt neu bewertet werden.

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Aktorplatzierung am Balken mit integrierten Fluidaktoren.
Die Ergebnisse für verschiedene Last-Szenarien und die resultierenden Aktorpositionen sind angegeben. Die ersten beiden Spalten beziehen sich auf die Optimierung zur Bestimmung der Aktorpositionen. Die Trapezlast kann rechts- (r) und linksseitig (l) wirken. Die Reduktion der Durchbiegung ist für die maximalen Positionen (max) sowie für die durchschnittlichen Verbesserung (∅) entlang des Balkens angegeben.

Last bei der Optimierung	Aktor-position(en)	wirkende Last	Reduktion der Durchbiegung max	∅	Druck p_{opt}	Abb.
Streckenlast	$\xi = 0{,}5$	Streckenlast	79,2 %	88,1 %	516 bar	5.9 a), b)
Streckenlast	$\xi = 0{,}5$	Trapezlast (r)	75,8 %	84,6 %	491 bar	5.9 a), 5.10 c)
Trapezlast (r)	$\xi = 0{,}59$	Trapezlast (r)	78,6 %	87,5 %	514 bar	5.10 a), b)
Trapezlast (r)	$\xi = 0{,}59$	Trapezlast (l)	66,1 %	74,1 %	497 bar	5.10 a), d)
Streckenlast	$\xi = 0{,}27$	Streckenlast	96,4 %	97,7 %	198 bar	5.11 a, b)
	$\xi = 0{,}5$				229 bar	
	$\xi = 0{,}73$				198 bar	

6 REGELUNG ADAPTIVER TRAGWERKE

Der Betrieb adaptiver Tragwerke erfordert eine Regelung, welche auf Basis des mit Hilfe der Sensoren bestimmten Systemzustands eine geeignete Ansteuerung der Aktoren ermittelt. Das Ziel der Regelung ist, die Wirkung externer Störungen auf das Tragwerk zu kompensieren, sodass die Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit des Gebäudes jederzeit und dauerhaft gewährleistet sind. Die Regelung adaptiver Tragwerke teilt sich in zwei Aufgaben ein: die statische Lastkompensation und die aktive Schwingungsdämpfung. Quasi-stationäre Lasten wie Schnee, Nutzlasten oder ein konstanter Winddruck verursachen quasi-stationäre Verformungen. Um Schäden am Gebäude zu verhindern und den Nutzerkomfort zu erhalten, müssen diese Verformungen vermindert oder idealerweise vollständig eliminiert werden. Zudem existieren für die maximale Auslenkung von Bauwerken rechtliche Vorgaben, die auch bei adaptiven Tragwerken eingehalten werden müssen. Der kompensierte Zustand unter statischen Lasten dient als Sollwert für den zweiten Teil der Regelung, die aktive Schwingungsdämpfung. Auftretende Schwingungen werden bei adaptiven Tragwerken beispielsweise durch Windböen induziert. Durch den reduzierten Materialeinsatz sind adaptive Tragwerke anfälliger für Schwingungen. Die Dämpfung dieser Schwingungen ist zur Sicherstellung der Gebrauchstauglichkeit und zum Erhalt der geplanten Lebensdauer durch Verminderung der dynamischen Belastungen notwendig.

Basierend auf den reduzierten Systemmodellen und der Aktorplatzierung der vorherigen Kapitel werden Regelungsmethoden für adaptive Tragwerke abgeleitet. Die angestrebten Ziele dieses Kapitels sind:

- Optimale statischen Lastkompensation unter Eingangsbeschränkungen an Tragwerken mit druckschlaffen Elementen und experimentelle Untersuchung am Maßstabsmodell.
- Herleitung einer Methode zur approximativ linearisierenden Eingangstransformation für nichtlineare Systeme und simulative Anwendung auf adaptive Tragwerke.

Für den Betrieb und die Regelung adaptiver Tragwerke ist die Kompensation von statischen und dynamischen Lasten notwendig. In Abschnitt 6.1 wird auf die konzeptuelle Unterteilung der beiden Probleme eingegangen und die Vielzahl an potentiellen Regelgrößen aufgezeigt. Es folgt die optimale statische Lastkompensation in Abschnitt 6.2 für Modelle mit druckschlaffen Elementen sowie unter Berücksichtigung von Eingangsbeschränkungen [150]. Angewendet am experimentellen Aufbau des Maßstabsmodells wird die statische Lastkompensation praktisch unterucht. Die aktive Schwingungsdämpfung adaptiver Tragwerke schließt in Abschnitt 6.3 an.

Die Methode der approximativ linearisierenden Eingangstransformation ermöglicht es, einem System mit nichtlinearer Dynamik, bedingt durch druckschlaffe Elemente, ein lineares Verhalten aufzuprägen [146]. Daraufhin wird eine lineare modellprädiktive Regelung (MPC, engl.: *model predictive control*) angewendet, bei der Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt werden.

6.1 REGELUNGSKONZEPTE

Die klassische bauingenieurstechnische Auslegung adaptiver Tragwerke berücksichtigt keine Regelungskonzepte zur statischen Adaption oder zur aktiven Schwingungsdämpfung. Im Bauingenieurwesen werden sämtliche dynamische Lasten durch repräsentative statische Ersatzlasten substituiert, sodass eine statische Bemessung ausreicht. Adaptive Tragwerke sind durch ihre sehr leichte Bauweise anfällig für induzierte Schwingungen durch dynamische Lasten. Für die Steuerung und Regelung adaptiver Tragwerke muss deshalb neben der statischen Kompensation eine aktive Schwingungsdämpfung entworfen werden, wie in Abb. 6.1 illustriert. Die statische Lastkompensation reduziert die Effekte von statischen Lasten auf ein adaptives Tragwerk. Die wirkende Last als Störgröße $\boldsymbol{z}(t)$ kann durch Beobachterverfahren geschätzt werden. Diese Lasten ändern sich sehr langsam über die Zeit, wodurch die Berechnung der nötigen Eingangssignale in vergleichsweise großen zeitlichen Intervallen erfolgen kann und damit ausreichend Rechenzeit zur Verfügung steht. Dies ermöglicht die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen und Nichtlinearitäten. Der aus der Lastkompensation resultierende stationäre Systemzustand wird als Sollwert an die aktive Schwingungsdämpfung kommuniziert. Schwingungen werden um diese Ruhelage gedämpft. Für die aktive Schwingungsdämpfung wird davon ausgegangen, dass der Systemzustand bekannt ist. Entsprechende Konzepte zur Schätzung des Systemzustands adaptiver Tragwerke finden sich z. B. in [157] und sind nicht Teil dieser Arbeit. Die statische Kompensation erfordert sehr hohe Aktorkräfte, um die Verschiebungen zu reduzieren. Bei einem ähnlich starken böigen Wind sind für die Schwingungsdämpfung deutlich geringere Kräfte ausreichend.

Die Wahl der Regelgrößen für die Regelungsaufgabe ist nicht trivial und hängt stark vom betrachteten Tragwerk ab. Für Schalentragwerke, wie beispielsweise die Stuttgart SmartShell [101, 161], oder Flächentragwerke, eignet sich die Betrachtung der Spannungen oder Dehnungen im Tragwerk. Eine Homogenisierung dieser verhindert Spannungsspitzen und damit einer Überlastung einzelner Bereiche. Für Hochhaustragwerke, die hoch und schlank sind, müssen Kräfte über eine verhältnismäßig kleine Grundfläche in die Gründung übertragen werden. Eine Berücksichtigung der Spannungen relativ zu den maximalen Spannungen ist denkbar [14].

Bei adaptiven Hochhaustragwerken ist darüber hinaus das Regelziel maßgeblich. In der Regel gehen mit großen Verformungen auch hohe Spannungen einher und die Grenzen beider Größen dürfen nicht verletzt werden. Zum Erhalt der Standsicherheit dürfen die maximal zulässigen Spannungen in den Elementen nicht überschritten werden. Zu große Verformungen können zudem bei anderen Komponenten wie beispielsweise Fassaden Schäden verursachen. Für die Gebrauchstauglichkeit sind große Verformungen nachteilig und hohe Beschleunigungswerte haben einen negativen Einfluss auf das Wohlbefinden der Bewohner. Hochhäuser sind eher

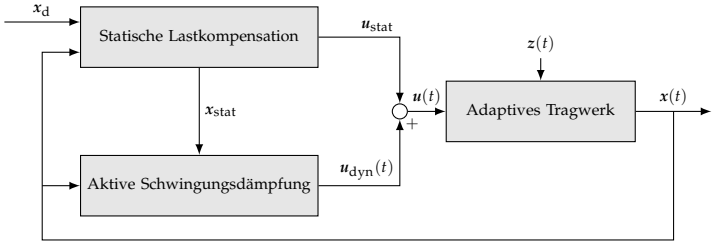


Abbildung 6.1: Blockschaltbild des Regelungskonzepts adaptiver Tragwerke.
Zur Nivellierung von Störung werden überlagerte Eingänge der statischen Lastkompensation und der aktiven Schwingungsdämpfung eingesetzt.

steifigkeitsdominiert als festigkeitsdominiert, sodass die von der Verschiebung abhängigen Komfortgrenzen beachtet werden müssen. Im Fortgang dieser Arbeit liegt deshalb der Schwerpunkt auf der Reduktion der Verschiebungen und Beschleunigungen.

6.2 STATISCHE LASTKOMPENSATION

Statische Lasten führen zu Verformungen am Tragwerk, die durch die Aktorik kompensiert werden müssen. Während für lineare Tragwerksmodelle dafür analytische Lösungen existieren, müssen Eingangssignale der Aktoren für nichtlineare Modelle häufig numerisch berechnet werden. In dieser Arbeit wird dazu eine Optimierung eingesetzt. Dabei können allerdings auch Eingangsbeschränkungen berücksichtigt werden. An dieser Stelle wird vorausgesetzt, dass die wirkende Last bekannt ist. Diese kann auf Basis der Sensorwerte und der bekannten Aktorsignale, über einen modellbasierten Ansatz zur Rekonstruktion bestimmt werden [54]. Der Begriff *statisch* meint hier eigentlich *quasi-statisch*, da sich die Lasten am Tragwerk in Ort und Zeit ändern können, jedoch in jedem Zeitschritt der Lastkompensation als konstant angenommen werden. Die Neuberechnung der Aktorsignale durch die Optimierung erfolgt je nach Änderung der statischen Störung im Zeitbereich von Sekunden bis wenigen Minuten.

6.2.1 Optimale Kompensation für Tragwerke mit druckschlaffen Elementen

Dieses Kapitel widmet sich der Bestimmung von Eingangssignalen $\boldsymbol{u}$ zur Kompensation stationärer Lasten im Sinne der statischen Kompensierbarkeit aus Definition 1. In der Regel sind sehr viel weniger Aktoren vorhanden, als das System Freiheitsgrade besitzt – das System ist unteraktuiert. Demnach ist es allgemein nicht möglich, die Wirkung der Last vollständig zu kompensieren und den Sollzustand exakt einzustellen. Es verbleibt ein Fehler $\boldsymbol{e}$. Solange jedoch Definition 1 erfüllt und eine Reduktion der Fehlernorm $\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\|_2 < \|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{0})\|_2$ erreichbar ist, wird ein Teil der statischen Last kompensiert.

Betrachtet werden die statischen Modellgleichungen (3.44) mit druckschlaffen Elementen, die parallele Aktoren mit Krafteingang in den Stützen und serielle Aktoren mit Verschiebungseingang in den druckschlaffen Diagonalen enthalten

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z} = 0. \tag{6.1}$$

Die Last $\boldsymbol{z}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Prinzipiell sind auch andere Aktuierungsprinzipien oder lineare Modellgleichungen in diesem Verfahren anwendbar.

Bei Hochhäusern sind zu große Verformungen des Tragwerks unzulässig [28]. Die Kostenfunktion für die statische Lastkompensation basiert deshalb auf den translatorischen Verschiebungen relativ zur ursprünglichen Position aller Knoten im Tragwerk

$$J(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{y}_{\mathrm{disp}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{disp}} = \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{disp}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{disp}}\boldsymbol{q}. \tag{6.2}$$

Durch die Minimierung der Kostenfunktion sind die optimalen Eingangssignale der parallelen Aktoren $\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}}^{*}$ und der seriellen Aktoren $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}^{*}$ mit Krafteingang gegeben durch

$$(\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}}^{*},\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}^{*},\boldsymbol{q}^{*}) = \arg\min_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}},\boldsymbol{q}} J(\boldsymbol{q}) \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \qquad & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z} \\ & \boldsymbol{u}_{\mathrm{ser,min}} \leq \boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}} \leq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{u}_{\mathrm{par,min}} \leq \boldsymbol{u}_{\mathrm{par}} \leq \boldsymbol{u}_{\mathrm{par,max}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Die zustandsabhängige Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})$ kann je nach Verformung des Tragwerks durch Ausfall druckschlaffer Elemente singulär werden, wodurch der Zustand in Abhängigkeit der externen Störungen und Eingangssignale nicht durch Inversion der Steifigkeitsmatrix (s. (3.43)) berechnet werden kann. Deshalb werden zusätzlich zu den Eingangssignalen die resultierenden optimalen Zustandsgrößen $\boldsymbol{q}^{*}$ bestimmt, wobei die statischen Modellgleichungen als Nebenbedingung fungieren. Die Reformulierung des Optimierungsproblems erhöht die Anzahl an Optimierungsvariablen erheblich, garantiert jedoch die Bestimmbarkeit des Zustands. Die Stellgrößenbeschränkungen der Eingangssignale entsprechen den Eigenschaften der betrachteten Aktuierungsprinzipien; die seriellen Aktoren mit Krafteingang in den druckschlaffen Elementen können ausschließlich Zugkräfte aufbringen, der Arbeitsraum der parallelen Aktoren beinhaltet weiterhin Druckkräfte. Im Gegensatz zu Elementkräften weisen von Aktoren aufgebrachte Zugkräfte ein negatives Vorzeichen und Druckkräfte ein positives Vorzeichen auf.

Die Initialisierung des Optimierungsproblems erfolgt mit einer Anfangsbedingung $\boldsymbol{q}_0$, die der Verformung des passiven Tragwerks unter der bekannten Last entspricht. Die Anfangsbedingung der Eingangssignale $\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}}$ und $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}$ werden analytisch auf Basis des um $\boldsymbol{q}_0$ linearisierten Systems bestimmt. Mit den zusammengefassten Eingangssignalen $\boldsymbol{u}_{\mathrm{stat}} = [\boldsymbol{u}_{\mathrm{par}}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{ser}}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$ ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{stat},0} = -(\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{q}_0)\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}})^{+}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{q}_0)\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{z}), \tag{6.5}$$

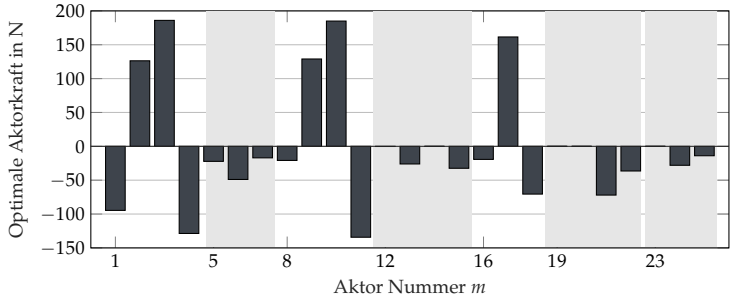


Abbildung 6.2: Optimale Aktorkräfte der statischen Kompensation.
Aufgetragen sind die optimalen Aktorkräfte in der Reihenfolge der Aktornummern nach Abb. A.5. Die aktuierten vertikalen Elemente beinhalten das parallele Prinzip, die druckschlaffen Diagonalen serielle Aktoren, die grau hinterlegt sind.

mit $\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}} = [\boldsymbol{B}_{\mathrm{par}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{ser}}]$.

Wird eine geänderte stationäre Last $\boldsymbol{F}_z \boldsymbol{z}$ detektiert, erfolgt die Neuberechnung von (6.3) unter den Nebenbedingungen (6.4). Als Anfangsbedingung dient entweder (6.5) oder die letzte Lösung des vorherigen Problems als Warmstart.

6.2.2 Experimentelle Untersuchung

Die statische Lastkompensation aus dem vorherigen Kapitel wird auf das Maßstabsmodell angewendet, das in Abschnitt 2.2 und Anhang A.5 detailliert beschrieben ist. Das Maßstabsmodell eignet sich besonders zur Evaluation der statischen Lastkompensation, da statische Lasten definiert, einfach und wiederholbar aufgebracht werden können. Bei dem beispielhaft aufgeführten Lastfall wirkt eine Kraft von 39 N an der Spitze des Tragwerks mittig auf der Ebene der obersten Knoten in x-Richtung. Die betrachteten Modellgleichungen des Maßstabsmodells beinhalten druckschlaffe Elemente und die Beschränkungen sind gemäß den Spezifikationen der Elektromotoren und der Übersetzung festgelegt. Die Aktoren in den vertikalen Elementen sind parallel ausgeführt, die in den Diagonalen seriell, wodurch sich die Eingangsgleichungen entsprechend Abschnitt 3.1.3 ergeben. Das Optimierungsproblem (6.3) unter den Nebenbedingungen (6.4) wird für das parametrierte Modell des Maßstabsmodells mit einem Innere-Punkte-Verfahren nach [145] gelöst. Die optimalen Aktorkräfte sind in Abb. 6.2 dargestellt, wobei Zugkräfte ein negatives Vorzeichen und Druckkräfte ein positives Vorzeichen aufweisen. Die Kraftbegrenzungen werden eingehalten. Wie intuitiv erwartet applizieren die Aktoren 1, 4, 8, 11, 16 und 19 Zugkräfte und 2, 3, 9, 10 und 17 Druckkräfte. Die Zugaktoren in den druckschlaffen Diagonalen bringen ausschließlich Zugkräfte auf und genügen den Nebenbedingungen. Obwohl eine symmetrische Last aufgebracht wird, resultiert aufgrund der Asymmetrie der Aktormenge eine asymmetrische Lösung der optimalen Aktorkräfte.

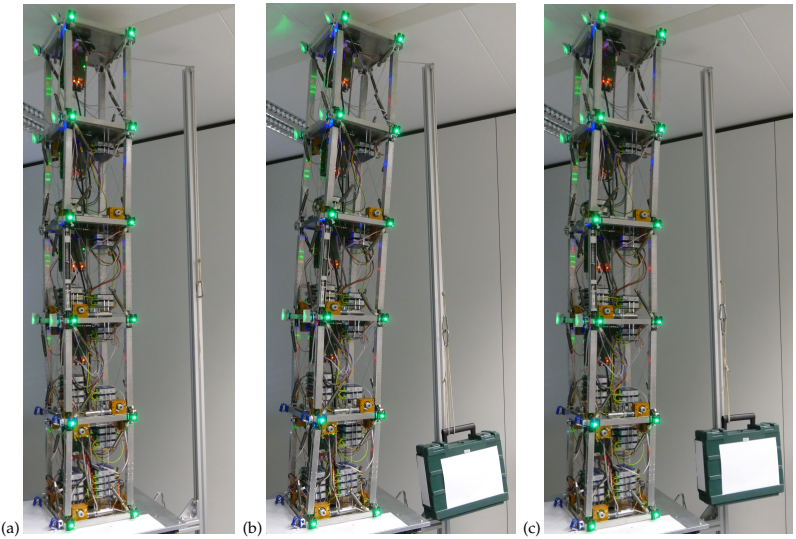


Abbildung 6.3: Verformungen des Maßstabsmodells bei der statischen Lastkompensation.
Die Fotos des Maßstabsmodells zeigen in (a) den Referenzzustand, in (b) den belasteten Zustand und in (c) den unter Last kompensierten Zustand.

Ausgewertet werden die Sensorwerte des optischen Messsystems in der x-z-Ebene sowie der DMS. Im unbelasteten passiven Zustand des Tragwerks (Abb. 6.3 a) werden die Verschiebungen des optischen Messsystems und die Dehnungen in den Stützen als Referenzwerte für die Nulllage aufgezeichnet. Die Nulllage der Dehnungen in den Diagonalen wird bestimmt, indem die Elemente sukzessive in den schlaffen Zustand versetzt werden und die Dehnung gemessen wird. Dieses Verfahren ist bei den DMS in den Stützen ohne das Maßstabsmodell zu zerlegen nicht möglich. Alle aufgeführten Messungen sind relativ zum Referenzzustand dargestellt.

Im passiven Zustand des Tragwerks wird die Verformung nicht kompensiert, die Aktoren in den diagonalen druckschlaffen Elementen sind jedoch trotzdem aktiv, da diese die Vorspannung gewährleisten müssen. Die Elektromotoren sind vom Hersteller mit einer unterlagerten Geschwindigkeitsregelung versehen. Wie in Abschnitt A.3.2 beschrieben wird die Kraft, die nach der Übersetzung durch ein Kugelgewindetrieb oder Schneckengetriebe auf das Tragwerk wirkt, durch die kollokierte Rückführung der Dehnungsmessung mit einer PI-Regelung eingestellt.

Es sind Fotos des Referenzzustands (Abb. 6.3 a), des Tragwerks unter Last (Abb. 6.3 b) und des kompensierten Tragwerks unter Last (Abb. 6.3 c) abgebildet. Durch die für dieses Tragwerk große Last und die dadurch resultierende Auslenkung, können die Verformungsunterschiede und die Verbesserung durch die optimierungsbasierte Kompensation der Last mit bloßem Auge erkannt werden. Die zu diesen drei Zuständen gehörenden Messwerte des optischen Messsystems sind

Knotennummer	5	6	9	10	13	14	17	18	21	22
x-Verschiebung in cm										
passiv	2,87	2,88	4,62	4,68	7,78	7,72	9,80	9,64	11,53	11,34
aktiv	0,48	0,54	1,31	1,28	0,64	0,64	0,43	0,45	0,33	0,32
Reduktion in %	83,41	81,19	71,66	72,57	91,83	91,69	95,57	95,37	97,17	97,17

Tabelle 6.1: Experimentelle Ergebnisse der statischen Lastkompensation.
Die Knotennummern sind Abb. A.4 zu entnehmen. Die Knotenverschiebungen in der x-z-Ebene sind in x-Richtung für den passiven Zustand unter Last und den kompensierten aktiven Zustand absolut angegeben. Die prozentuale Reduktion der Verschiebungen wird aus beiden Werten berechnet.

in Abb. 6.4 a aufgetragen und für den belasteten passiven und den kompensierten Fall in Tab. 6.1 eingetragen. Die Verformung des Tragwerks aufgrund der Last kann durch die statische Lastkompensation deutlich reduziert werden. Der mittlere quadratische Fehler der Verschiebungen zwischen Simulation und Experiment im kompensierten Zustand beträgt 0,76 cm. Die mittlere Reduktion der Verformung über die gemessenen Knotenverschiebungen in x-Richtung beträgt ca. 87 %. Oben am Maßstabsmodell wird eine Verminderung von über 97 % erreicht. Durch die Unteraktuierung können statische Verformungen prinzipiell nicht vollständig an allen Freiheitsgraden kompensiert werden, sodass geringe Abweichungen verbleiben. Besonders am Ende des zweiten Moduls auf einer Höhe von 0,8 m werden nur Reduktionswerte von über 70 % erreicht. Ein Vergleich der gemessenen und simulierten Kompensation in Abb. 6.4 b zeigt an dieser Stelle eine Abweichung; theoretisch sollte die Verminderung der Verformung bessere Ergebnisse liefern. Wie in Abb. A.5 beschrieben, sind im zweiten Modul in der x-z-Ebene keine Aktoren, die von links unten nach rechts oben verlaufen. Element 17 und 22 sind passiv. Die Aktoren 12 und 14 können ausschließlich Zugkräfte aufbringen, die bei diesem Lastfall keinen Effekt auf die Kompensation haben. Den Stützenaktoren 8 bis 11 allein, die diese Freiheitsgrade hauptsächlich beeinflussen, gelingt die Kompensation unzureichend. Begründet werden kann dies damit, dass die Haftreibung in der Kraftübersetzung nicht überwunden wird oder der Wirkungsgrad durch Imperfektionen im Kugelgewindetrieb vermindert ist. Für diesen spezifischen Lastfall könnten mit einer anderen Aktorplatzierung bessere Ergebnisse erzielt werden. Die Bestimmung der Aktorpositionen erfolgt für den in Abschnitt 5.1.2 angenommenen allgemeinen Lastfall.

Abb. 6.5 zeigt die Sollwerte und Messwerte der Elementkräfte in den aktuierten Bauteilen. In a) sind die Elementkräfte der diagonalen Aktoren im belasteten aber passiven Zustand abgebildet, passend zu Abb. 6.3 b und Abb. 6.4 a (grün). Diese Werte entsprechen den Vorspannungen, die auch in der Nulllage eingestellt sind. Die Sollwerte können weitestgehend durch die unterlagerte Regelung eingestellt werden. Die Elemente mit den Aktoren 14 und 15 sind gerade kraftlos, was sich durch Werte nahe Null zeigt. Ein kleiner negativer Wert kann sich einstellen, da die Nulllage nur auf wenige Newton genau bestimmt werden kann. Die Kräfte der diagonalen Aktoren 13, 20, 23 und 24 bleiben unter den Sollwerten, da die Maximalkraft der Aktoren doch geringer ist als vorab bestimmt. Dies hängt an größeren Verlusten in der Kraftübersetzung der mechanischen Komponenten. Die Elementkraft bei Aktor 6 ist im Vergleich zum Sollwert deutlich überhöht. Es wurden mechanische Anschläge bei den diagonalen Aktoren eingebaut, um ein vollständiges

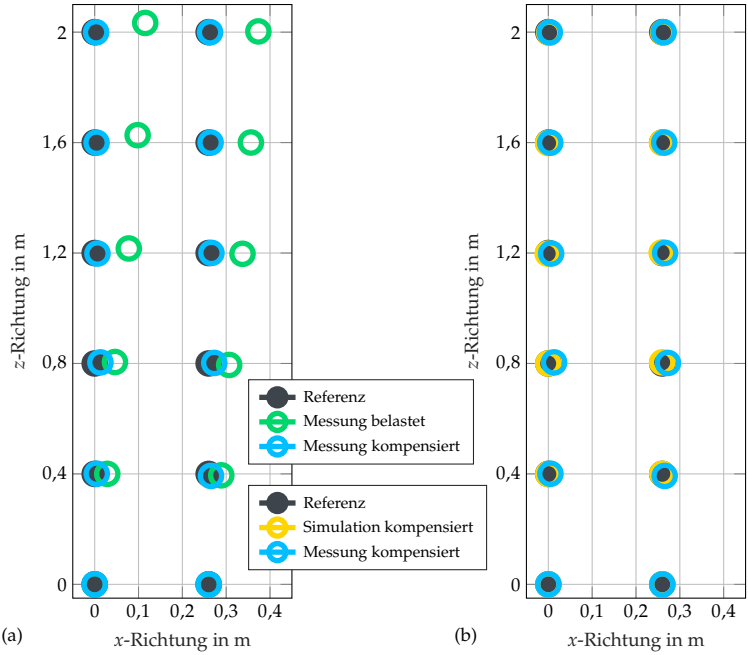


Abbildung 6.4: Messungen und Simulation der statischen Lastkompensation.
In (a) sind die gemessenen Positionen in der x-z-Ebene des Maßstabsmodells für den Referenzzustand (grau), den belasteten (grün) und den kompensierten Zustand (blau) aus Abb. 6.3 dargestellt. In (b) ist der kompensierte Zustand vergleichend für die Messung (blau) und die numerische Auswertung (gelb) abgebildet.

Abwickeln der Seile und damit den Kollaps des Maßstabsmodells zu verhindern. Bei diesem Aktor in der belasteten Lage ist die Rückwirkung des Tragwerks auf das Element so groß, sodass der Anschlag erreicht wird.

In Abb. 6.5 b sind die Elementkräfte im belasteten und kompensierten Fall dargestellt, entsprechend Abb. 6.3 c und Abb. 6.4 a (blau). Diese Elementkräfte sind assoziiert mit den optimal berechneten Aktorkräften aus (6.2). Aufgrund der Modellierung sind Zugkräfte in den Elementen positiv und wohingegen Zugkräfte in den Aktoren ein negatives Vorzeichen aufweisen; für Druck ist es andersherum gültig. Des Weiteren werden Elementkräfte in den parallel aktuierten Stützen auf Basis von (3.16) berechnet. Die aktuierten Stützen mit den Aktoren 1, 2, 3, 4 und 8 erreichen den Kraft-Sollwert mit hoher Genauigkeit. Kleine, jedoch noch akzeptable Abweichungen sind in 11, 16 und 17 sichtbar. Aufgrund von nicht ausreichenden Motorkräften und Reibungseffekten in der mechanischen Übersetzung stellen sich die Sollwerte der Aktoren 9, 10 und 18 unzureichend ein. Darin ist auch der Fehler in der Verschiebung in Abb. 6.4 begründet. Die ausschließlich positiven Sollwerte der diagonalen Elemente werden im Mittel gut erreicht, in einige Fällen sehr

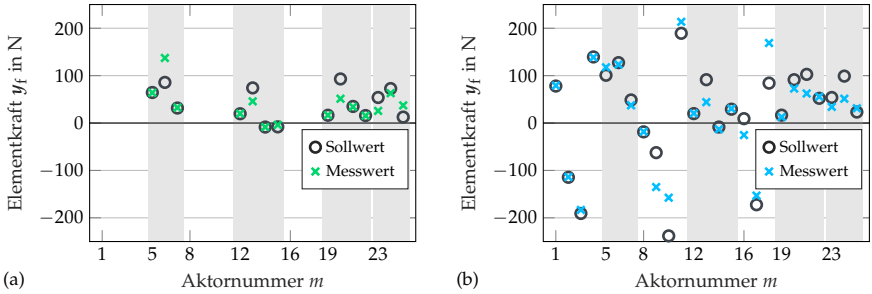


Abbildung 6.5: Elementkräfte in den aktuierten Elementen.
Die Sollwerte und Messwerte der Elementkräfte sind für (a) den belasteten passiven Fall und (b) den belasteten kompensierten Fall illustriert. Die Last an der Tragwerkspitze beträgt 39 N. Bei (a) sind die seriellen diagonalen Aktoren mit Krafteingang aktiv, um die Vorspannung aufrecht zu halten.

gut. D.h. in den aktuierten Diagonalen herrscht Zug. Oft sind die gemessenen Kräfte geringer als die Sollwerte. Dies spricht für eine zu schwache Auslegung dieses Aktorprinzips, die durch große Verluste aufgrund der Getriebeübersetzung entsteht. Der zuvor erwähnte Aktor 6 ist durch die Aktuierung anderer Aktoren wieder im gültigen Positionsbereich und stellt die Sollkraft bei der Kompensation gut ein.

Die Ergebnisse der Elementkräfte bei der statischen Lastkompensation sind in Abb. 6.6 für den belasteten Zustand und Abb. 6.7 für den kompensierten Zustand illustriert. Diese werden basierend auf der Dehnungsmessung berechnet. Sie stehen in Zusammenhang mit den zuvor dargestellten Aktorkräften. Als Grundlage dienen die gemessenen DMS-Werte in den Elementen. Die Kräfte in den diagonalen Elementen sind Absolutkräfte wohingegen die Kräfte in den Stützen relativ zum Referenzzustand angegeben sind. Die druckschlaffen Diagonalen zeigen nie Druckkräfte, sondern stehen unter Zug oder sind schlaff. Entsprechend der Wirkung der Last stehen die Stützen in den unteren drei Modulen in Abb. 6.6 auf der rechten Seite eher unter Druck und die auf der linken Seite unter Zug. Element 15 (s. Anhang A.5) weicht davon ab, jedoch ist die Elementkraft durch die Last verglichen mit der Referenzlage deutlich reduziert. Mit Blick auf den kompensierten Zustand in Abb. 6.7 reduzieren sich die Elementkräfte in den Stützen aufgrund der aufrechteren Position des Tragwerks. Element 26 ist die einzige passive Stütze im dritten Modul und zeigt, bedingt durch die verkürzte Bauform der passiven Stützenelemente, ein anderes Verhalten. Durch eine limitierte Motorkraft und die mechanische Kraftübersetzung kann die Kraft im kompensierten Zustand nur marginal reduziert werden. In den oberen beiden Modulen sind aufgrund der passiven Stützen kaum Unterschiede sichtbar.

Bei der Betrachtung der diagonalen Elemente hat die Vorspannung großen Einfluss. Die Elementkraft, wie auch die Aktorkraft, erhöhen sich durch die Kompensation und ziehen, intuitiv betrachtet, das Gebäude zurück in eine aufrechte Position. Element 10 sollte ein ähnliches Verhalten aufweisen, hier ist jedoch die maximale Aktorkraft erreicht, sodass eine weitere Erhöhung der Kraft nicht möglich ist (vgl. Abb. 6.5 a). Die Diagonalen auf der rechten Seite in Abb. 6.7

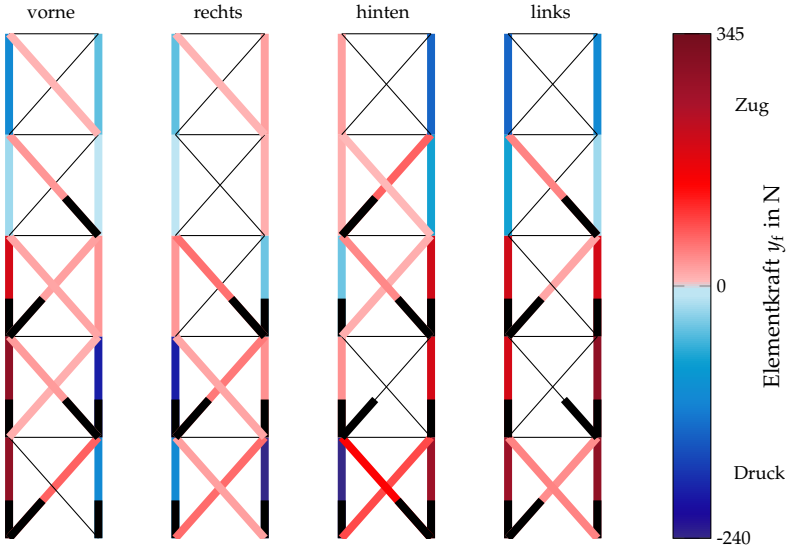


Abbildung 6.6: Elementkräfte im belasteten Zustand.
Die Zugkräfte (rot) und Druckkräfte (blau) im Maßstabsmodell sind für die Element im belasteten Zustand illustriert. Dünne schwarze Linien implizieren Schlaffheit oder die Abwesenheit eines Sensors. Die Kräfte in den diagonalen Elementen entsprechen Absolutkräften, wohingegen in den Stützen die Kräfte relativ zum Referenzzustand angegeben sind. Aktoren sind in schwarz gekennzeichnet.

haben wenig Einfluss auf die betrachtete Last. Kleine Kräfte werden durch die nichtlineare Optimierung berechnet und dienen dem Ausgleich der nicht-symmetrischen Aktormenge, sodass keine Torsion des Gebäudes auftritt. Die aktiven Diagonalen im zweiten Modul können der Last wenig entgegensetzen, einzig die Elementkraft in Nummer 24 ist erhöht. Die Elementkräfte in 18 und 21 bleiben unverändert, da eine Erhöhung größere Verschiebungen zur Folge hätte. Die Elementkräfte der Diagonalen im dritten Modul ähneln denen im ersten Modul.

6.3 AKTIVE SCHWINGUNGSDÄMPFUNG

Adaptive Tragwerke sind durch ihren stark reduzierten Materialeinsatz besonders leicht. Dynamische Lasten, wie Windböen oder zeitlich veränderliche Nutzlasten, haben im Vergleich zu einem herkömmlichen Bauwerk einen größeren Effekt auf ultra-leichte Bauten. Deshalb werden in adaptiven Tragwerken vermehrt Schwingungen angeregt, die die Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit beeinträchtigen können. Diese lastinduzierten Schwingungen müssen gedämpft werden, um ermüdungsbedingtes Versagen der Elemente durch zu viele Schwingspiele mit großer Amplitude zu verhindern und den Bewohnerkomfort zu erhalten sowie dem

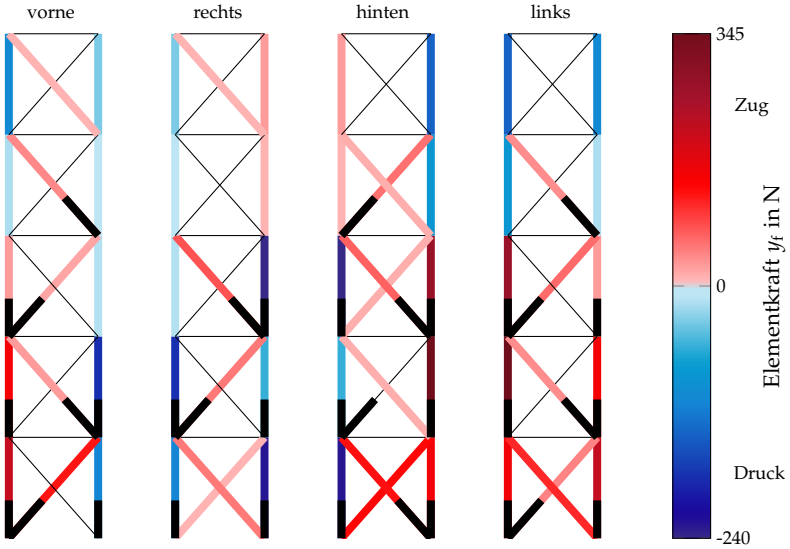


Abbildung 6.7: Elementkräfte im kompensierten Zustand.
Die Zugkräfte (rot) und Druckkräfte (blau) im Maßstabsmodell sind für die Element im kompensierten Zustand illustriert. Dünne schwarze Linien implizieren Schlaffheit oder die Abwesenheit eines Sensors. Die Kräfte in den diagonalen Elementen entsprechen Absolutkräften, wohingegen in den Stützen die Kräfte relativ zum Referenzzustand angegeben sind. Aktoren sind in schwarz gekennzeichnet.

vorbestimmten Nutzungszweck gerecht zu werden. Die aktive Schwingungsdämpfung ist ein viel behandeltes Problem in der Regelungstechnik bei unerwünschten Vibrationen und es existieren zahlreiche Methoden zur Umsetzung. Bei Hochhäusern in Weltregionen, in denen große dynamische Lasten wie Erdbeben auftreten, werden heutzutage bereits Maßnahmen zur meist passiven Schwingungsdämpfung ergriffen. Schwingungen in Tragwerken sind ein bekanntes Problem bei Bauwerken, müssen jedoch bei adaptiven Tragwerken aktiv gedämpft werden.

Einen modellfreien Ansatz zur aktiven Schwingungsdämpfung bei großen mechanischen Systemen bietet die kollokierte Regelung. Dabei ist ein Eingangs-Ausgangs-Paar installiert, wobei der Sensor den gleichen Freiheitsgrad erfasst, der durch den zugehörigen Aktor beeinflusst wird. Beispiele dafür sind die positive Positionsrückführung, die direkte Geschwindigkeitsrückführung oder die integrale Kraftrückführung [112]. Adaptive Tragwerke weisen typischerweise eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden, die potentiell alle einem Sollwert folgen sollen, bei gleichzeitig einer niedrigen Anzahl an Aktoren auf. Die Aktoren befinden sich vorwiegend im unteren Tragwerksteil (Abschnitt 5.1.4). Sensoren werden häufig in größerer Anzahl integriert, um die Tragwerksüberwachung sicher zu ermöglichen. Schwingungen müssen im ganzen Tragwerk mitigiert werden und führen im oberen Bereich meist zu besonders großen Amplituden. Eine kollokierte Regelung bietet sich bei adaptiven Hochhäuser, trotz Stabilitätsgarantien und einfacher

Anwendbarkeit, nicht an. Adaptive Bauwerke müssen aufgrund individueller Gegebenheiten dahingehend bewertet werden. Gegebenenfalls muss bereits bei der Auslegung das Regelungskonzept berücksichtigt werden. Aktoren und Sensoren können platziert werden, sodass mit einer kollokierten Regelung Schwingungen im gesamten Gebäude gedämpft werden können. In adaptiven Seil-hinterspannten Glasfassaden [54] wurde das Konzept der kollokierten Regelung bereits erfolgreich eingesetzt.

Die exakte E/A-Linearisierung in Kombination mit einer flachheitsbasierten Vorsteuerung oder Folgeregelung ist ein Ansatz zur Schwingungsdämpfung bei adaptiven Tragwerken. Jedoch muss die Koppelmatrix quadratisch sein, was bei adaptiven Tragwerken nicht immer problemlos realisierbar ist. Ist die Anzahl der Eingänge ungleich der Ausgänge, ist die Koppelmatrix nicht quadratisch und nur eine Approximation der Ein-Ausgangslinearisierung gegeben. Zudem muss ein flacher Ausgang gefunden werden. Das Zielverhalten der Integratorkette ist tendenziell ein unnatürliches Verhalten eines Tragwerks und erfordert oft große Stellgrößen zur Realisierung.

Aufgrund der Struktur des Problems bei adaptiven Tragwerken, die häufig MIMO-Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen darstellen, eignet sich eine MPC. Im Folgenden wird eine Methode zur approximativen Linearisierung von nichtlinearen Systemen mit Hilfe einer linearen Zieldynamik vorgestellt, sodass lineare Ansätze für die aktive Schwingungsdämpfung, entworfen am Zielmodell, angewendet werden können. Wie bereits in Abschnitt 4.1.3 gezeigt, ähneln die POD-Moden den linearen Eigenmoden. Durch die Wahl eines linearen Zielmodells mit ähnlichem physikalischen Verhalten, liegt nahe, dass die Originaldynamik durch den linearisierenden Eingang nur in geringem Umfang geändert wird, jedoch einen linearen Charakter bekommt. Des Weiteren sind bei geringer Änderung der Dynamik auch kleine Stellgrößen zu erwarten.

6.3.1 Approximativ linearisierende Eingangstransformation

Für den Reglerentwurf wird vom allgemeinen nichtlinearen eingangsaffinen System

$$\Sigma: \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.6}$$

mit $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ausgegangen. Bei der approximativ linearisierenden Eingangstransformation (ALE) soll dem nichtlinear modellierten System eine gewünschte Zieldynamik aufgeprägt werden. Das lineare Zielmodell wird zu

$$\Sigma_\mathrm{d}: \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{d},0} \tag{6.7}$$

gewählt mit identischen Dimensionen zu (6.6). Der virtuelle Eingang des Zielmodells ist $\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)$. Durch die Forderung, dass das nichtlineare System der Dynamik des Zielmodells folgt, gilt $\Sigma \stackrel{!}{=} \Sigma_\mathrm{d}$. Aus dieser Bedingung ergibt sich der Eingang

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))^{-1}\Big(\boldsymbol{f}_\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\Big). \tag{6.8}$$

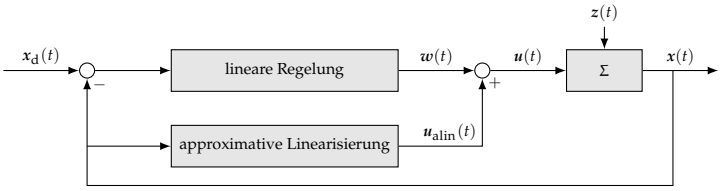


Abbildung 6.8: Blockschaltbild der approximativ linearisierenden Eingangstransformation ALE. Der Regeleingang $\boldsymbol{u}(t)$ setzt sich zusammen aus dem approximativ linearisierenden Eingang $\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t)$ und aus dem Eingang $\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)$ der dämpfenden linearen Regelung.

Vorerst wird von einem autonomen Zielsystem ausgegangen, womit $\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t) = \boldsymbol{0}$ gilt. Der verbleibende Teil beschreibt die Abweichung zwischen dem nichtlinearen Modell und dem Zielmodell. Der Eingang $\boldsymbol{u}(t)$ wird so gewählt, dass die Dynamik des geregelten nichtlinearen Modells der Dynamik des Zielmodells entspricht. Die Berechnung hängt von der Existenz der inversen Eingangsmatrix $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))$ ab. Ist die Eingangsmatrix invertierbar, so ist $\boldsymbol{u}(t)$ eindeutig bestimmbar. Allgemein kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Eingangsmatrix invertierbar ist. Sind Systemordnung und die Anzahl der Eingänge identisch, dann gilt $n = m$ und die Eingangsmatrix ist quadratisch. Vorausgesetzt diese ist regulär, dann ist $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))$ invertierbar und der linearisierende Eingang kann eindeutig berechnet werden. Das Präfix *approximativ* linearisierende Eingangstransformation muss ergänzt werden, da gewöhnlich $n \neq m$ ist. Die Pseudoinverse wird in diesen Fällen herangezogen und abhängig von der Größe von n und m kann $\boldsymbol{u}(t)$ nicht exakt bestimmt werden, sodass die Zieldynamik nur approximativ aufgeprägt werden kann.

Folgt das nichtlineare System der Zieldynamik, können einfache Regelungen aus der linearen Theorie, entworfen am linearen Zielmodell, angewendet werden. Hierbei erfolgt der Regelungsentwurf für den virtuellen Eingang $\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)$. In Abb. 6.8 ist das Blockschaltbild der linearisierenden Eingangstransformation angegeben. Für adaptive Tragwerke, wie in dieser Arbeit beschrieben, wird diese Methode im Folgenden spezifiziert.

ALE bei adaptiven Tragwerken

Die Konkretisierung der Methode für adaptive Tragwerke mit druckschlaffen Elementen erfolgt an den reduzierten eingangsaffinen Modellgleichungen zweiter Ordnung (4.12). Die Eingänge sind parallel mit Krafteingang oder seriell mit Verschiebungseingang modelliert (s. Abschnitt 3.1.3). Die Zustandsabhängigkeit der Eingangsmatrix $\boldsymbol{G}$ entfällt. Die Aktorplatzierung gewährleistet linear unabhängige Spalten in der Eingangsmatrix. Für rechteckige Spaltenmatrizen $n_\mathrm{r} > m$ existiert eine Linksinverse, sodass eine Einheitsmatrix resultiert $\boldsymbol{G}^+\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$. Gilt $n_\mathrm{r} = m$ ist aufgrund der linear unabhängigen Spalten die Invertierbarkeit sichergestellt und der linearisierende Eingang kann eindeutig berechnet werden. Durch den Wunsch ein niederdimensionales Reglerentwurfsmodell zu erhalten, kann die reduzierte Dimension $n_\mathrm{r} < m$ kleiner der Aktorzahl sein. Für $n_\mathrm{r} < m$ ergibt die Rechtsmultiplikation der Eingangsmatrix mit der Rechtsinversen $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^+ = \boldsymbol{I}$ eine Einheitsmatrix. Als Ausgangspunkt gelten nach (4.14)

die POD-reduzierten Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen in der mechanischen Domäne

$$\begin{aligned} \Sigma: \qquad & \ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t))\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t))\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{B}_\mathrm{r}\boldsymbol{u}(t), \qquad t>0, \quad \boldsymbol{\zeta}(0)=\boldsymbol{\zeta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}(0)=\boldsymbol{\zeta}_1 \\ & \text{mit} \qquad \boldsymbol{B}_\mathrm{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{par,r}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{v,ser,r}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_\mathrm{par}(t) \\ \boldsymbol{v}_\mathrm{ser}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Das Zielmodell ist das allgemeine mechanische System

$$\Sigma_\mathrm{d}: \qquad \ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{B}_\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t), \qquad t>0, \quad \boldsymbol{\zeta}(0)=\boldsymbol{\zeta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}(0)=\boldsymbol{\zeta}_1. \tag{6.10}$$

Es wird ein approximativer Eingang $\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t)$ mit $\Sigma \stackrel{!}{=} \Sigma_\mathrm{d}$ bestimmt, sodass die Dynamik des autonomen Zielmodells ($\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(t)=\boldsymbol{0}$) dem nichtlinearen Modell aufgeprägt wird, gilt

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{r}\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t) = (\boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{K}_\mathrm{d})\boldsymbol{\zeta}(t) + (\boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{D}_\mathrm{d})\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t), \tag{6.11}$$

mit $\boldsymbol{B}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{d}\times m}$. Auf die Verwendung des Eingangs des Zielmodells $\boldsymbol{w}(t)$ wird am Ende des Kapitels eingegangen. Es wird der Fall $n_\mathrm{r} < m$ betrachtet. Durch die Inexistenz einer Linksinversen, sodass $\boldsymbol{B}_\mathrm{r}^+\boldsymbol{B}_\mathrm{r} \neq \boldsymbol{I}$, kann diese Gleichung nicht weiter nach $\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t)$ aufgelöst werden. Zur Bestimmung der ALE wird die Eingangsmatrix in einen quadratischen und den verbleibenden Teil aufgespalten:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}} \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{K}_\mathrm{d}\right)\boldsymbol{\zeta}(t) + \left(\boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{D}_\mathrm{d}\right)\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t). \tag{6.12}$$

Der quadratische Teil $\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r}\times n_\mathrm{rq}}$ ist regulär, hat vollen Rang und ist invertierbar. Weiter gilt $\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r}\times n_\mathrm{re}}$ sowie $\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{rq}}$ und $\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{re}}$. Gelöst nach $\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}}(t)$ ergibt der eindeutig bestimmbare Teil des approximativ linearisierenden Eingangs

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}}(t) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}^{-1}\left(\left(\boldsymbol{K}_\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\zeta}(t)\right) - \boldsymbol{K}_\mathrm{d}\right)\boldsymbol{\zeta}(t) + \left(\boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{D}_\mathrm{d}\right)\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right) - \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}(t). \tag{6.13}$$

Da $n_\mathrm{r} < m$ reicht die verminderte Anzahl n_rq aus, um alle n_r Freiheitsgrad des reduzierten System zu dämpfen. Das System ist deshalb hinsichtlich Aktorik nicht überdimensioniert. Die weiteren Aktoren werden benötigt, da Stellgrößenbeschränkungen bisher unbeachtet bleiben. Der linearisierende Eingang ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}}(t) \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}^{-1}((\boldsymbol{K}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{K}_\mathrm{d})\boldsymbol{\zeta}(t) + (\boldsymbol{D}_\mathrm{r}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{D}_\mathrm{d})\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}_\zeta\left(\boldsymbol{\zeta}(t),\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}_\mathrm{r}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}(t). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Bei der Linearisierung werden die übrigen Aktorfreiheitsgrade eingesetzt, um den Absolutwert von $\boldsymbol{u}_{\text{alin}}(t)$ zu minimieren. Der freie Eingang $\boldsymbol{u}_{\text{alin,re}}$ wird bestimmt, sodass

$$\boldsymbol{u}^*_{\text{alin,re}}(t) = \arg\min_{\boldsymbol{u}_{\text{alin,re}}} \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}_{\text{alin}}(t)\boldsymbol{u}_{\text{alin}}(t) = -\boldsymbol{H}_{\text{r}}^{+}\boldsymbol{H}_{\zeta}(\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)). \tag{6.15}$$

Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung muss die Dimension der Rest-Eingänge kleiner gleich der Anzahl aller Eingänge $m_{\text{r}} \leq m$ sein, was jedoch per Definition gegeben ist. Dadurch ist sichergestellt, dass durch $\boldsymbol{H}_{\text{r}}^{+}$ eine Lösung für (6.15) existiert. Nach Einsetzen des optimalen Eingangs (6.15) in (6.14) gilt für den approximativ linearisierenden Eingang

$$\boldsymbol{u}_{\text{alin}}(t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_{\text{r}}\boldsymbol{H}_{\text{r}}{}^{+})\boldsymbol{H}_{\zeta}\left(\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right). \tag{6.16}$$

Der nichtlineare Systemteil befindet sich ausschließlich in $\boldsymbol{H}_{\zeta}(\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t))$. Die Aufteilung der Eingangsmatrix bedeutet eine Aufteilung der Aktoren während der Linearisierung. Diese Unterscheidung wird bei der Anwendung der Regelung nicht gemacht.

Der linearisierende Term $\boldsymbol{u}_{\text{alin}}(t)$ ergänzt durch eine dämpfende Rückführung $\boldsymbol{w}(t)$, ergibt den Regeleingang

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_{\text{alin}}(t) + \boldsymbol{w}(t). \tag{6.17}$$

Zur Bestimmung der Linearisierung gilt vorerst $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{0}$. Sämtliche Eingangs- und Zustandsbeschränkungen bleiben bei der Linearisierung unberücksichtigt. Die druckschlaffen Elemente können nicht mit einer Druckkraft aktuiert werden, weshalb starke Eingangsbeschränkungen gelten. Um die physikalischen Grenzen des Systems einzuhalten, werden Beschränkungen bei der Bestimmung von $\boldsymbol{w}(t)$ gesetzt. Da das nichtlineare System die Dynamik des lineares Zielsystems approximativ innehat, kann eine lineare Regelung, entworfen am Zielsystem, appliziert werden. Der Einsatz einer MPC gewährleistet die Einhaltung der Beschränkungen und ist aufgrund der Linearität effizient lösbar.

Basierend auf dem Stabilitätsnachweis nach Lyapunov des Systems mit druckschlaffen Elementen ist in Anhang B.1 die Stabilität der ALE gezeigt. Dabei ist ausschließlich der linearisierende Teil berücksichtigt, für den Stabilitätsbeweis der dämpfenden linearen Regelung sei auf die Literatur verwiesen.

Zielmodell

Das Zielmodell (6.10), das für die ALE verwendet wird, hat entscheidende Auswirkungen auf die erreichbare Regelgüte der Methode. Generell kann ein Zielmodell beliebig gewählt werden und muss nicht linear sein. Zu Bedenken ist, dass in der Praxis nicht jede Zieldynamik geeignet ist. Bei der Wahl eines linearen Zielmodells ergeben sich die bereits erwähnten Vorteile der anwendbaren linearen Regelungstheorie. Die Wahl des Zielmodels ist ein zentraler Entwurfsparameter bei der ALE. Für adaptive Tragwerke mit druckschlaffen Elementen werden im folgenden Abschnitt Kriterien für Zielmodelle genannt.

Durch die Ähnlichkeit der POD-Moden und Eigenmoden liegt es nahe, das ursprüngliche lineare Modell (3.1) zu wählen. Das lineare Zielmodell (6.10) wird mit den beschriebenen Methoden auf die gleiche Ordnung reduziert, wie das nichtlineare Reglerentwurfsmodell. Die Eingangsmatrizen beider Modelle sind somit identisch, sodass die physikalisch vorhandenen Aktoren im Zielmodell erhalten bleiben. Die Rayleigh-Koeffizienten können erhöht werden, sodass $\alpha_{0,\mathrm{d}}$ und $\alpha_{1,\mathrm{d}}$ im Zielmodell eingesetzt werden. Zur weiteren Feinabstimmung kann die Steifigkeitsmatrix mit dem Faktor k_{alin} skaliert werden, da die Schwingungsfrequenzen des linearen Ursprungsmodells nicht mit den des nichtlinearen Entwurfsmodell übereinstimmen. Der Faktor k_{alin} kann alle Einträge gleichermaßen skalieren, entsprechend den Unterschieden der Frequenzen zwischen Eigenfrequenzen und POD- Frequenzen (vgl. Abb. 4.6). Alternativ kann k_{alin} vektorwertig angelegt werden, sodass die Frequenzen im Zielmodell einzeln angepasst werden. Dadurch erhöhen sich die Entwurfsfreiheitsgrade bei der ALE.

Unterliegt das System keinen Eingangsbeschränkungen, ist eine Regelung des Zielmodells nicht zwingend notwendig und dieses kann als autonomes System gewählt werden. Zur dämpfenden Wirkung können erhöhte Rayleigh-Koeffizienten eingesetzt werden. Um Modellfehlern zu begegnen ist eine Regelung jedoch auch dann empfehlenswert.

Aufteilung der Aktoren in den quadratischen und verbleibenden Teil

In dieser Arbeit wird das zu Grunde liegende Prinzip der Methode der ALE erläutert. Bei der Anwendung stellt sich die Frage, wie die Aktoren in den quadratischen und den verbleibenden Teil unterteilt werden sollen. Zum Nachweise der Funktionalität wird in Abschnitt 6.3.1 eine gleichmäßige Verteilung beider Aktormengen gewählt. Beiden Gruppen werden sowohl parallele Stützenaktoren als auch seriellen Diagonalenaktoren zugewiesen. Zur breiteren Anwendung der ALE müssen Entwurfskriterien erarbeitet werden, die zu einer validen Unterteilung führen. Beispielweise kann auf die Steuerbarkeit des quadratischen Teils Wert gelegt werden. In dem Zwischenschritt der approximativen Linearisierung ohne zusätzliche lineare Rückführung und ohne Stellgrößenbeschränkungen, wird approximativ die Dynamik des Zielmodells eingestellt. Im Sinn eines minimalen Eingangs (6.15) können dabei Stellsignale Null werden. Dies muss bei der Unterteilung bedacht und gegebenenfalls berücksichtigt werden.

Mit Bezug auf die Aktorplatzierung kann für das dynamische Problem (s. Abschnitt 5.1.3) ein Gütefunktional ergänzt werden, das Anforderungen der approximative Linearisierbarkeit beinhaltet. Ein Möglichkeit besteht darin eine Metrik zu finden, die berücksichtigt, dass die Eingangsmatrix multipliziert mit ihrer Inversen die Einheitsmatrix ergibt $\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}}^{+} = \boldsymbol{I}$. Darüber hinaus kann bereits bei der Aktorplatzierung versucht werden, optimale Positionen hinsichtlich der Unterteilung in den quadratischen und den verbleibenden Teil zu bestimmen.

Lineare MPC

Prinzipiell kann nach erfolgter Linearisierung eine beliebige lineare Regelung entworfen werden. Mit einem LQR konnten bereits gute Ergebnisse erzielt werden. Adaptive Tragwerke mit druck-

schlaffen Elementen unterliegen starken Eingangsbeschränkungen, die in einer linearen MPC berücksichtigt werden können. Des Weiteren ist die Linearisierung der ALE approximativ, wodurch eine Regelung auftretende Abweichungen kompensieren kann. Um die Nachteile einer nichtlinearen MPC für das Gesamtproblem zu umgehen, beispielsweise lokale Minima und lange Lösungszeiten, eignet sich die ALE in Kombination mit einer linearen MPC. Die Lösung des MPC-Problems erfolgt in jedem Schritt, wobei das Gütefunktional mit den Nebenbedingungen optimiert wird:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{w}}(t) &= \arg\min_{\bar{\boldsymbol{w}}(\cdot;t)} J(\boldsymbol{y}(t), \bar{\boldsymbol{w}}(t)) \\ &= \arg\min_{\bar{\boldsymbol{w}}(\cdot;t)} \int_t^{t+T} \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T}(\tau;t)\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{y}}(\tau;t) + \bar{\boldsymbol{w}}^\mathsf{T}(\tau;t)\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{w}}(\tau;t)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.} \quad \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(\tau;t) &= \boldsymbol{A}_\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}(\tau;t) + \boldsymbol{B}_\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{w}}(\tau;t) && \text{für alle} \quad \tau \in (t, t+T) \\ \bar{\boldsymbol{y}}(\tau;t) &= \boldsymbol{C}_\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}(\tau;t) && \text{für alle} \quad \tau \in (t, t+T) \\ \bar{\boldsymbol{x}}(t;t) &= \boldsymbol{x}(t) \\ \bar{\boldsymbol{w}}(\tau;t) &\in \mathcal{U}(\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t)) && \text{für alle} \quad \tau \in (t, t+T).\end{aligned} \tag{6.19}$$

Das quadratische Gütefunktional berücksichtigt den Ausgang $\bar{\boldsymbol{y}}(\cdot;t)$ sowie den Eingang $\bar{\boldsymbol{w}}(\cdot;t)$ mit den Gewichtungsmatrizen $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$. Der betrachtete MPC-Horizont ist T. Die Variable τ beschreibt die Zeitschritte während der Optimierung, wohingegen $(\cdot;t)$ den Zeitschritt bei dem die aktuelle Lösung gestartet wurde, impliziert. Mit $\bar{(\cdot)}$ werden prädizierte Werte gekennzeichnet, wie der prädizierte Zustand $\bar{\boldsymbol{x}}(\cdot;t)$, der prädizierte Ausgang $\bar{\boldsymbol{y}}(\cdot;t)$ und der prädizierte Eingang $\bar{\boldsymbol{w}}(\cdot;t)$. Die ersten beiden Nebenbedingungen enthalten die lineare Systemdynamik in Form der Modellgleichungen, gefolgt vom Anfangswert eines MPC-Schritts, der dem aktuellen Zustand $\boldsymbol{x}(t)$ entspricht. Der Lösungsraum $\mathcal{U}(\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t))$ des prädizierten Eingangs ist abhängig vom approximativ linearisierenden Eingang $\boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t)$. Dieser wird zu Beginn eines MPC-Schritts an den aktuellen Wert angepasst und während der Optimierung konstant gehalten. Eine zusätzliche Prädiktion des linearisierenden Eingangs wäre möglich, erfordert jedoch eine nichtlineare Auswertung von (6.16) und ist damit zeit- und rechenintensiv. Die physikalischen Grenzen der Aktoren werden absolut mit den maximalen und minimalen Werten $\boldsymbol{u}_\mathrm{max}$ und $\boldsymbol{u}_\mathrm{min}$ gleich gesetzt. Das bedeutet bei der MPC eine Anpassung durch die bereits berechnete linearisierende Eingangstransformation für die obere und untere Grenze

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{olim}(t) = \boldsymbol{u}_\mathrm{max} - \boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{u}_\mathrm{ulim}(t) = \boldsymbol{u}_\mathrm{min} - \boldsymbol{u}_\mathrm{alin}(t). \tag{6.20}$$

Numerische Ergebnisse

Die Methode der ALE mit MPC wird simulativ am Demonstrator-Hochhaus untersucht. In der Simulation wird das in Abschnitt 4.2.2 POD-reduzierte Modell (4.12) mit druckschlaffen Elementen verwendet. Mit 18 Moden als Reduktionsbasis liegt es hinreichend genau am vollen Modell und führt zu einer akzeptablen Simulationszeit. Als Reglerentwurfsmodell dient selbiges

Modell, reduziert auf 8 Moden. Die Schwingungsfrequenzen dieser Moden liegen noch in der erreichbaren Bandbreite des Hydrauliksystems. Die eingesetzten Aktoren sind parallel in den Stützen des ersten Moduls und serielle Verschiebungseingänge in den druckschlaffen Diagonalen mit den Nummern 5, 8, 10, 11, 17 - 24 (Abb. A.3). Mit insgesamt 16 Aktoren ist die Anforderung $n_\mathrm{r} < m$ der Methode der linearisierenden Eingangstransformation erfüllt. Die Aktorzahl entspricht einem realen Szenario am Demonstrator-Hochhaus, da die verbleibenden acht der 24 Aktoren zur Anregung bei der experimentellen Durchführung verwendet werden. Die Aktoren, die dem quadratischen Teil der Eingangsmatrix angehören sind die Stützenaktoren 1 und 2 sowie die Diagonalenaktoren 5, 10, 18, 20, 21 und 23. Die verbleibenden Aktoren beinhalten die Nummern 3, 4, 8, 11, 17, 19, 22 und 24.

Das lineare Zielmodell entspricht dem linearen Ausgangsmodell in Zustandsraumdarstellung (4.28) reduziert wiederum auf 8. Ordnung mit den POD-Moden. Der Faktor $k_\mathrm{alin} = 1{,}4$ wird entsprechend dem Frequenzverhältnis zwischen der ersten Eigenmode und der POD-Mode (s. Abschnitt 4.1.3) gewählt. Dadurch entsprechen die Schwingungsfrequenzen des linearen Zielmodells eher denen des nichtlinearen Modells. Zukünftig kann untersucht werden, welche Moden am Demonstrator-Hochhaus durch typische Störungen hauptsächlich angeregt werden um k_alin entsprechend deren Verhältnis auszulegen. Die Koeffizienten der Rayleigh-Dämpfung werden gegenüber dem Simulationsmodell leicht erhöht auf $\alpha_{0,\mathrm{d}} = 0{,}05$ und $\alpha_{1,\mathrm{d}} = 0{,}005$.

Für die Schwingungsdämpfung mittels MPC wird ein Prädiktionshorizont von $T = 2\,\mathrm{s}$ und eine Schrittweite der Vorwärtssimulation von $0{,}01\,\mathrm{s}$ gewählt. Der Sollwert ist die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = \boldsymbol{0}$. Im Fall einer überlagerten statischen Kompensation resultiert der Sollwert aus dem darin berechneten optimalen Zustand [1], der jedoch nahe Null ist. Die Gewichtungsmatrizen sind $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\boldsymbol{Q} = 10 \cdot \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{red} \times n_\mathrm{red}}$, mit den Einheitsmatrizen $\boldsymbol{I}$ in passenden Dimensionen. Die Stellgrößenbeschränkungen werden von den Spezifikationen des Hydrauliksystems abgeleitet. Für die parallelen Stützenaktoren mit Krafteingang gelten $\boldsymbol{u}_\mathrm{par,max/min} = \pm 400\,\mathrm{kN}$ und für die serielle Diagonalenaktoren mit Verschiebungseingang $\boldsymbol{v}_\mathrm{min} = -8{,}6\,\mathrm{mm}$ und $\boldsymbol{v}_\mathrm{max} = 0\,\mathrm{mm}$. Die Lösung der MPC erfolgt mit einem Algorithmus für konvexe quadratische Probleme, der auf der Methode *alternating direction method of multipliers* basiert [136].

Die Anfangsgeschwindigkeiten sind Null und die Anfangsauslenkungen des Demonstrator-Hochhauses entsprechen der Verformung durch eine über die Höhe gleichverteilte Last von $100\,\mathrm{kN}$ in positive x-Richtung, die an der Westseite des Gebäudes an den Knoten am Ende eines Moduls angreifen. Durch die Lösung der MPC können Druckkräfte in geringem Maß gefordert werden, die jedoch in der Simulation nicht aufgebracht werden.

In Abb. 6.9 sind die Verschiebungen des 49. Knotens in x-, y- und z-Richtung abgebildet. Die Schwingung, aufgrund einer Anfangsbedingung ungleich Null, wird durch die ALE mit MPC deutlich gedämpft im Vergleich zum passiven ungedämpften System. Betrachtet wird das zeitliche Integral über die quadratische Auslenkung aller Knoten. Nach einem Betrachtungszeitraum von 2,5 s sind die Schwingungen weitestgehend gedämpft, sodass sich im Vergleich zum passiven System eine Reduktion um 78,7 % ergibt. Die Anfangsbedingung lenkt das Hochhaus in x-

[1] Dies entspricht der Ruhelage des Systems unter einer statischen Last und einem statischen Eingang.

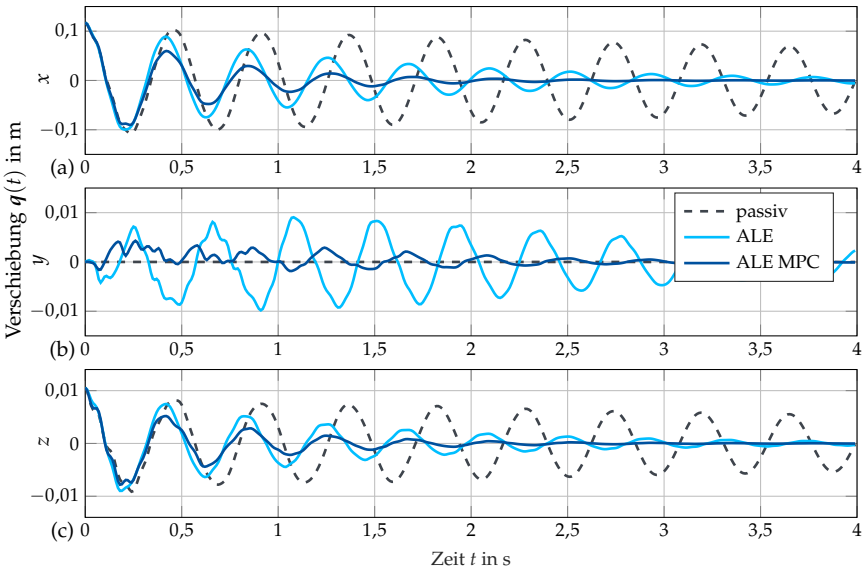


Abbildung 6.9: Knotenverschiebungen des Tragwerks bei der ALE.
Die Verschiebungen des 49. Knotens (oben links, s. Anhang A.5) sind gezeigt für (a) die x-Richtung, (b) die y-Richtung und (c) die z-Richtung. Der Kurvenverlauf des passiven Tragwerks (anthrazit, gestrichelt) ist im Vergleich zu der ALE ohne lineare Rückführung (hellblau) und der ALE mit dämpfender linearer MPC (dunkelblau) aufgetragen.

und z-Richtung aus und beide Richtungen werden gedämpft. In y-Richtung tritt initial keine Verschiebung auf. Die Nichtlinearitäten und die Regelung verkoppeln jedoch die Richtungen. Durch die nur bedingt symmetrische Aktorkonfiguration und den approximativen Charakter der Linearisierung werden in diese Richtung Auslenkungen durch die Regelung hervorgerufen, die jedoch eine Zehnerpotenz kleiner sind als in x-Richtung. Diese klingen mit der Regelung jedoch auch schnell ab. Neben der Dämpfung der dominanten Schwingung können durch die Regelung höherfrequente Schwingungen angeregt werden, die durch eine *spill-over* Reduktion verhindert werden können.

Als virtuelles Zwischenergebnis ist das Systemverhalten durch die approximative Linearisierung dargestellt. Hierbei wirken keine Stellgrößenbeschränkungen, da diese erst bei der MPC Berücksichtigung finden. Es wird deutlich, dass sich die Schwingungsfrequenzen, hier dominiert von der Grundfrequenz der POD, durch die approximative Linearisierung in Richtung des Zielmodells verschieben. Im Vergleich zum passiven System kommt die erhöhte Dämpfung im Zielmodell zum Tragen und die Schwingungen klingen schneller ab. Für die y-Richtung in Abb. 6.9 b treten mit der ALE Vibrationen auf, die nach 1 s abklingen.

In Abb. 6.10 sind das nichtlineare Modell geregelt durch ALE und MPC und das mit einer MPC geregelte lineare Zielmodell gegenübergestellt. Für die Hauptauslenkung des Gebäudes in x-

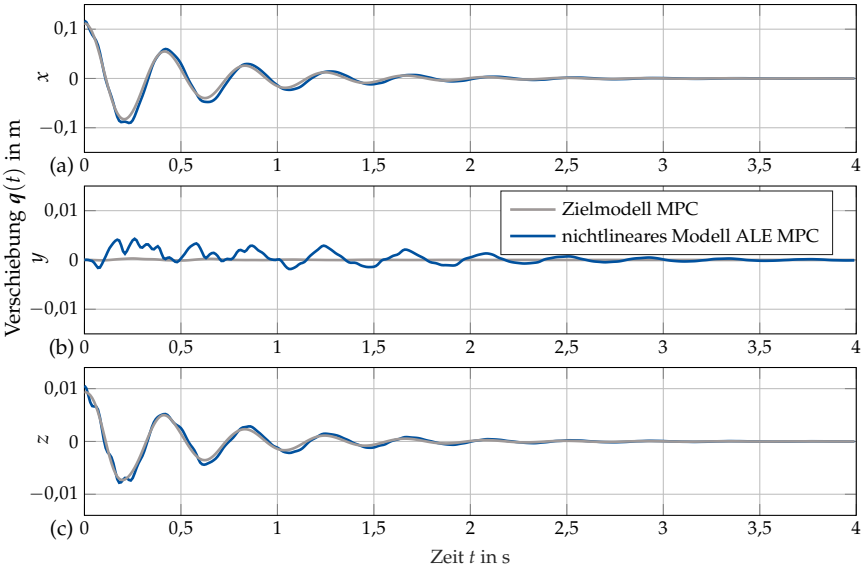


Abbildung 6.10: Vergleich der ALE mit dem MPC geregelten Zielsystem.
Das nichtlineare Modell mit der ALE und MPC (dunkelblau) wird mit dem geregelten Zielsystem mit der gleichen MPC (grau) verglichen. Dargestellt sind die Verschiebungen des 49. Knoten in (a) die x-Richtung, (b) die y-Richtung und (c) die z-Richtung.

und z-Richtung ähneln sich beide Verläufe deutlich. Folglich kann das System mit druckschlaffen Elementen der Dynamik des Zielsystems weitestgehend folgen und basierend darauf geregelt werden. Die zuvor beschriebene Anregung höherfrequenter Moden tritt im einfachen Zielsystem nicht auf. Für die sehr kleinen Auslenkungen in y-Richtung treten durch die Regelung größere Abweichungen auf, die jedoch schnell abklingen. Ähnliche Ergebnisse zeigen sich für den virtuellen Vergleich zwischen approximativ linearisiertem System mit druckschlaffen Elementen und dem ungeregelten Zielsystem. Nicht jedes Zielmodell eignet sich für diese Methode.

Ausgewählte Eingangssignale für die ALE mit und ohne MPC sind in Abb. 6.11 für zwei Stützenaktoren im ersten Modul und für vier Diagnonalenaktoren im ersten und zweiten Modul über die Zeit aufgetragen. Die Stützenaktoren arbeiten mit Zug- und Druckkräften gegen die Schwingung. Die Aktoren 1 und 2 agieren 180 ° phasenverschoben aufgrund ihrer Position im Tragwerk. Für die Auslenkung des Gebäudes in positive x-Richtung zu Beginn der Simulation berechnet die Regelung eine Zugkraft für den 1. Aktor, um das Gebäude in die Nulllage zu bringen. Die Begrenzungen der Aktorkräfte werden nicht verletzt, es besteht sogar ein großer Abstand zu den Minimal- und Maximalkräften sodass genug Reserve für ein statische Kompensation vorhanden ist.

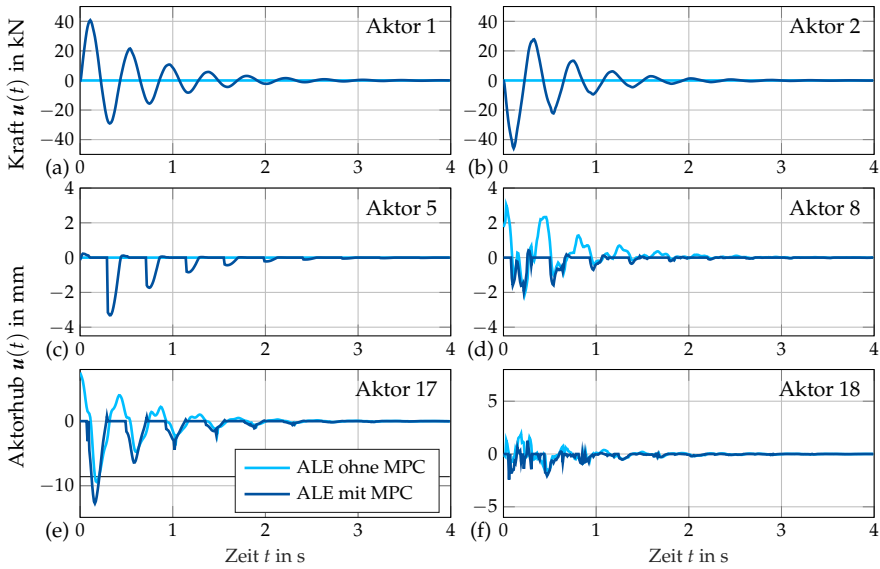


Abbildung 6.11: Eingangssignale der ALE mit und ohne MPC.
Die Eingangssignale sind für die Stützenaktoren 1 und 2 in (a) und (b) sowie für die Diagonalenaktoren 5, 8,17 und 18 in (c) bis (f) abgebildet. Die ALE mit MPC (dunkelblau) ist ergänzt durch die virtuellen Signale die ausschließlich zur approximativen Linearisierung ALE (hellblau) berechnet werden.

Die Aktoren 5 und 17 sind im ersten und zweiten Modul platziert und agieren in der x-z-Ebene. Die Elemente, in die diese Aktoren integriert sind, verlaufen von links unten nach rechts oben und von rechts unten nach links oben. Folglich ist ihre Wirkrichtung entgegengesetzt. In Abb. 6.11 c und e wird dies hauptsächlich durch den versetzten Einsatz von Zugkräften (negative Werte) deutlich. Bei Aktor 5 sind die Halbwellen leicht unförmig und verlaufen im abfallenden Teil steiler. Kurz bevor die Zugkraft aufgebracht wird, ist das Element virtuell unter Druck, also schlaff. Durch die Modellvorstellung der seriellen Aktoren mit Verschiebungseingang und den Aktorbeschränkungen in Kombination mit einer virtuellen Druckkraft im Element, kann die Aktorkraft nicht aufgebracht werden. Erst durch Längung des Elements und/oder Erhöhung des Eingangssignals ist die Gesamtbetrachtung des Elements im gültigen Bereich, also unter Zug. Durch diesen Effekt treten in Aktor 17 die Spitzen des Eingangssignals im Druckbereich auf. Die Stellgrößenbeschränkungen werden weitestgehend eingehalten, sodass keine Druckkräfte durch die Diagonalenaktoren aufgebracht werden. Einzig bei Aktor 17 ist bei der ersten Halbwelle eine deutliche Überschreitung sichtbar. Es existieren wenig Diagonalenaktoren die in diese Wirkrichtung arbeiten. Auf dieser Seite des Tragwerks ist dies der einzige Aktor der ein Element von rechts unten nach links oben aktiviert. Die anderen Diagonalenaktoren sind aufgrund der Beschränkungen zu diesem Zeitpunkt wirkungslos. Die gegenüberliegenden Aktoren mit

gleicher Wirkrichtung verhalten sich sehr ähnlich wie die gezeigten Aktorsignale. Die Diagonalen im dritten Modul zeigen aufgrund ihrer Positionen ein ähnliches Verhalten wie im ersten Modul, weisen jedoch kleinere Aktorhübe auf. Die Aktoren 8 und 18 befinden sich im ersten und zweiten Modul und wirken in der y-z-Ebene. Die Elemente, in die diese Aktoren integriert sind, wirken in unterschiedliche Richtungen. Diese Aktorsignale sind deutlich kleiner als in der x-z-Ebene, da die Last orthogonal hierzu wirkt. Zum Ausgleich von Asymmetrien und durch die Verkopplung über die z-Koordinaten sind die Eingangssignale trotzdem ungleich Null.

Zusätzlich sind die virtuellen Eingangssignale die ausschließlich zur approximativen Linearisierung berechnet werden in Abb. 6.11 (hellblau) abgebildet. Da hierbei noch keine Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt werden, bestimmt die Methode acht Eingangssignale ungleich Null, was der Systemordnung des reduzierten Synthesemodells entspricht. Ohne Stellgrößenbeschränkungen kann die ALE analytisch berechnet werden und erlaubt eine recheneffiziente Umsetzung der Methode. Werden bei der Lösung von (6.15) Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt, kann diese Einschränkung durch weitere Eingangssignale ungleich Null ermöglicht werden. Eine Reformulierung von (6.15) und gegebenenfalls eine online Lösung könnte diese Schwingungsdämpfung erweitern. Bei dem hier betrachteten Beispiel werden die Aktoren 8, 10, 11, 17, 18, 22, 23, 24 zur ALE verwendet. Darunter fällt keine Stütze, woraus zu folgern ist, dass die Diagonalen besser zur Linearisierung eingesetzt werden können. Für die virtuellen Eingangssignale in Abb. 6.11 d und e sind bei der Linearisierung Druckkräfte gefordert (positive Werte), die von der MPC entsprechend der Stellgrößenbeschränkungen auf null gesetzt werden.

7 ZUSAMMENFASSUNG

Adaptive Tragwerke können dazu beitragen, den enormen Ressourcenverbauch im Bausektor und den damit verbundenen Ausstoß von klimaschädlichen Emissionen zu reduzieren. Nachhaltiges und ressourcenschonendes Bauen ist unabdingbar, um der wachsenden Weltbevölkerung Wohnraum und Infrastruktur zu schaffen. Adaptive Tragwerke können sich autonom an wechselnde Umwelteinflüsse und Lasten anpassen. Damit ergibt sich ein Potential der Masseneinsparung. Diese Technologie erfordert den Einsatz regelungstechnischer und systemdyamischer Methoden im Bauwesen. In dieser Arbeit wurden anhand von adaptiven Hochhaustragwerken Aspekte der modellbasierten Entwurfskette untersucht. Beginnend mit der Modellierung der Tragwerke, über deren Analyse und die Aktorplatzierung bis hin zur Regelung wurden Methoden vorgestellt, diese experimentell oder numerisch untersucht und Verbindungen zum Bauingenieurwesen aufgezeigt.

Für den Einsatz modellbasierter Methoden aus der Regelungstechnik sind niederdimensionale Synthesemodelle in geschlossener Form notwendig. In dieser Arbeit basiert die Modellierung auf einem FE-Ansatz, bei welchem die adaptiven Hochhaustragwerke des Demonstrator-Hochhauses und des Maßstabsmodells durch eine Kombination aus Stab-, Balken- und Plattenelementen beschrieben werden. Darüber hinaus kommen bei den Tragwerken Aussteifungselemente zum Einsatz, die ausschließlich auf Zug belastet werden können. Durch die druckschlaffen Elemente weist das Tragwerk ein nichtlineares Verhalten auf. Im Unterschied zu herkömmlichen FE-Programmen, die nichtlineare Probleme iterativ lösen, erfolgt die Modellierung druckschlaffer Elemente in dieser Arbeit in geschlossener Form. Des Weiteren wurden die Modelle um die nötigen Terme zur Berücksichtigung der Systemeingänge und -ausgänge ergänzt. Dabei wurden die zwei Aktorprinzipien der parallelen und seriellen Aktuierung betrachtet. Es konnte gezeigt werden, dass sich beide Konzepte in die im Bauingenieurwesen bevorzugten Verschiebungseingänge überführen lassen. Beim seriellen Prinzip mit Verschiebungseingang ergibt sich der Vorteil, dass die Steifigkeitsmatrix unabhängig von der Aktuierung bleibt. Die statischen Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen wurden am Maßstabsmodell validiert und zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

Im Anschluss wurden die statischen und dynamischen Modellgleichungen analysiert. Bei der dynamischen Analyse wurden mittels POD die Schwingungsformen und -frequenzen der nichtlinearen Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen berechnet. Die Modenformen weisen große Ähnlichkeiten zu den Eigenmoden des linearen Modells mit Zug-Druck-Elementen auf. Die niederen Moden sind nahezu identisch. Die Schwingungsfrequenzen des nichtlinearen Systems

liegen jeweils unterhalb denen des linearen Systems, womit ein abweichendes Schwingungsverhalten gezeigt werden konnte, welches in der Regelung berücksichtigt werden muss. Zudem konnten Unterschiede im Einfluss aktuierter Elemente auf die Moden herausgearbeitet werden, die sich mit den Ergebnissen in der Aktorplatzierung decken. Elemente im unteren Teil des Tragwerks sowie diagonale Elemente tragen bei Hochhaustragwerken wirksamer zur Steuerbarkeit und Kompensierbarkeit bei. Basierend auf den POD-Moden wurden die Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen zum Erhalt von Synthesemodellen reduziert. Des Weiteren wurde die Substrukturierung adaptiver Tragwerke betrachtet, welche die Grundlage für dezentrale Regelungsansätze darstellt. Das Tragwerksmodell wurde unterteilt und die Teilmodelle mit der Craig-Bampton-Methode reduziert, sodass die Koppelknoten zwischen den Teilmodellen erhalten bleiben. Dies konnte auf Modelle mit druckschlaffen Elementen erweitert werden, indem Freiheitsgrade mit angreifenden druckschlaffen Elementen als Randknoten definiert wurden. Die dezentrale Regelung linearer und nichtlinearer Tragwerke wurde in dieser Arbeit nicht betrachtet. Erste Ansätze wurden jedoch bereits in weiteren Publikationen gezeigt [147, 148]. Darüber hinaus wurde der Zusammenhang zwischen dem Konzept der Redundanz aus dem Bauingenieurwesen und der stationären Lösung der Bewegungsgleichungen aufgezeigt. Systemdynamisch betrachtet beschreibt die Redundanz den stationären Verstärkungsfaktor zwischen bestimmten Ein- und Ausgangsgrößen. Bei der Redundanz wird typischerweise der Zusammenhang zwischen den Einheitslängungen als Eingang und den elastischen Längenänderungen als Ausgang betrachtet. Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Elementsteifigkeitsmatrix konnte das Konzept auf die parallelen Eingangskräfte und den Ausgang der Elementkräfte übertragen werden. Die so entstandene Kraftredundanzmatrix ist die Transponierte der Redundanzmatrix und hat die gleichen Eigenschaften inne.

Methoden zur optimalen Aktorplatzierung wurden basierend auf gängigen Methoden erweitert und auf adaptive Hochhaustragwerke mit vielen möglichen Aktorpositionen angewendet. Bei der Aktorplatzierung müssen wie bei der Regelung sowohl statische als auch dynamische Eigenschaften berücksichtigt werden. Die statische Aktorplatzierung basiert auf der Optimierung der stationären Kompensierbarkeit, die durch die Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix quantifiziert ist. In dieser Arbeit wurde das Gütekriterium um einen Term zur Berücksichtigung der Eingangskraft erweitert, sodass nicht nur eine effektive, sondern auch eine möglichst effiziente statische Kompensation erreicht wird. Es wurde zudem gezeigt, dass bei statischen Anwendungen der Einsatz von parallelen und seriellen Aktoren mit Krafteingang zu den gleichen Platzierungsergebnissen führt. Der Unterschied besteht in den resultierenden Aktorkräften, wobei serielle Aktoren in diagonalen Elementen als leistungsfähiger anzusehen sind. Darüber hinaus konnte die verteilte Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix definiert werden, die eine optimale kontinuierliche Positionierung von Aktoren in verteilparametrisch modellierten Komponenten ermöglicht. Zur Kombination der statischen Aktorplatzierung mit der dynamischen Aktorplatzierung basierend auf der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix wurde verschiedene Kriterien untersucht und eine Aktormenge für ein adaptives Hochhaustragwerk ermittelt. Die verwendeten Greedy-Verfahren zu Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme haben den Nachteil, dass einmal ausgewählte Aktoren im Laufe der Optimierung wieder zu entfernen. Ein mögliches Potential zur Weiterentwicklung besteht daher in der Verwendung alternativer Optimierungsverfahren wie

beispielsweise genetischen Algorithmen. Die zu erzielenden Verbesserungen müssen bei großen Bauwerken jedoch mit den langen Rechenzeiten abgewogen werden.

Bei der Regelung adaptiver Tragwerke wird zwischen der statischen Lastkompensation und der überlagerten aktiven Schwingungsdämpfung unterschieden. Die statische Lastkompensation bestimmt die Ruhelage, um welche auftretende Schwingungen gedämpft werden. Die statische Lastkompensation wurde in dieser Arbeit mittels einer Optimierung auf Basis der stationären Modellgleichungen mit druckschlaffen Elementen unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen gelöst. Die experimentelle Validierung am Maßstabsmodell beweist die Leistungsfähigkeit der Methode. Zur aktiven Schwingungsdämpfung wurde die neue Methode der approximativ linearisierenden Eingangstransformation erarbeitet. Hierbei wird das Ein-Ausgangsverhalten eines nichtlinearen Systems näherungsweise linearisiert. Dazu wird ein lineares Zielsystem gewählt, dessen Dynamik dem nichtlinearen System durch geeignete Wahl der Eingangsgrößen aufgeprägt wird. Die Wahl des Zielsystems ist dabei ein entscheidender Entwurfsfreiheitsgrad, der es ermöglicht, ein gewünschtes Schwingungsverhalten und eine erhöhte Dämpfung einzustellen. Aufgrund der Ähnlichkeit der Eigenmoden und der POD-Moden, bietet sich ein um die Ruhelage linearisiertes Modell des nichtlinearen Systems als Zielsystem an. Im Vergleich zur exakten E/A-Linearisierung, muss einerseits kein flacher Ausgang gefunden werden und andererseits entfällt die aufwendige Berechnung der Koppelmatrix. Darüber hinaus scheint die aus der exakten E/A-Linearisierung resultierende Zieldynamik einer Integratorkette schlechter geeignet als die natürliche Wahl eines linearen mechanischen Zielsystems. Aufbauend auf der approximativen Linearisierung wurde eine lineare modellprädiktive Regelung entworfen. Dabei wurden die Stellgrößen unter Berücksichtigung der bereits berechneten Eingangssignale beschränkt. Diese Methode eignet sich für große insbesondere nichtlineare MIMO-Systeme, wie adaptive Tragwerke.

Zukünftig können die in dieser Arbeit entwickelten Ansätze und Methoden experimentell validiert werden, sobald geeignete Versuchsaufbauten fertiggestellt sind. Neben den bereits betrachteten Fragestellungen, ist eine übergeordnete optimale Stellgrößenaufteilung zwischen statischer Kompensation und aktiver Schwingungsdämpfung von anwendungsbezogener Relevanz. Neben der Regelung ist die Zustandsschätzung mit der entsprechenden Methodik zu integrieren. Im Sinne eines nachhaltigen und sicheren Betriebs sind fehlertolerante Regelungskonzepte als Erweiterung der vorgestellten Methoden notwendig.

A AUSFÜHRLICHE SPEZIFIKATION DER VERSUCHSSTÄNDE

A.1 DIMENSIONEN UND MODELLPARAMETER

In der baulich Ausführungsplanung werden Dimensionen und Parameter des Demonstrator-Hochhauses festgelegt, so wie das Bauwerk realisiert wird. Für die Modellierung werden, aufgrund der Komplexität des realen Aufbaus, Vereinfachungen getroffen (s. Abschnitt 3.1.1.1). Die im Folgenden angegebenen Werte entsprechen den Modellparametern und sind nicht zwingend gleich den Werten des realen Demonstrator-Hochhaus oder des Maßstabsmodell.

A.1.1 Demonstrator-Hochhaus

Die Parameter des Demonstrator-Hochhauses sind in Tab. A.1 benannt. Aufgrund des Eigengewichts und der integrierten Aktorik sind die vertikalen Elemente über die zwölf Stockwerke des Demonstrator-Hochhauses unterschiedlich dimensioniert. Das Tragwerk besteht vollständig aus Baustahl. Je nach installierten Fassaden und Zwischenböden fällt zusätzliche Masse an, die im Modell auf die vorhandenen Elemente entsprechend Abschnitt 3.1.1.1 verteilt wird.

A.1.2 Maßstabsmodell

Die Parameter des Maßstabsmodells befinden sich in Tab. A.2. Das Maßstabsmodell als skalierte Version des Demonstrator-Hochhauses wurde so dimensioniert, dass die Schwingungsfrequenzen in der gleichen Größenordnung rangieren. Die Steifigkeit der Elemente wird durch verbaute Spiralfedern vorgegeben. Elektromotoren sorgen beim Maßstabsmodell für die Aktuierung und bedürfen zum Anschluss an das Tragwerk einer Kraftwandlung. In den Stützen ist ein Kugelgewindetrieb und in den Diagonale ein selbsthemmendes Schneckengetriebe eingesetzt. Die Seile in den diagonalen Elementen werden auf eine Rolle aufgewickelt, die am Schneckengetriebe angeflanscht ist.

Tabelle A.1: Geometrieparameter des Demonstrator-Hochhauses.

Bezeichnung		Formelzeichen	Wert	Einheit
Materialdichte		ρ	7850	kg/m^3
Elastizitätsmodul		E	210×10^9	N/m^2
Poissonzahl		ν	0,3	
Vertikale Elemente (quadratisches Hohlprofil)				
	Länge	l_v	3,0	m
1. Stock	Breite & Höhe	$w_{v,1}$	0,33	m
	Wandstärke	$t_{v,1}$	0,03	m
2. - 3. Stock	Breite & Höhe	$w_{v,2}$	0,306	m
	Wandstärke	$t_{v,2}$	0,0175	m
4. Stock	Breite & Höhe	$w_{v,3}$	0,302	m
	Wandstärke	$t_{v,3}$	0,0175	m
5. - 6. Stock	Breite & Höhe	$w_{v,4}$	0,29	m
	Wandstärke	$t_{v,4}$	0,01	m
7. - 12. Stock	Breite & Höhe	$w_{v,5}$	0,3	m
	Wandstärke	$t_{v,5}$	0,01	m
Horizontale Elemente	Länge	l_h	4,7	m
(rechteckiges Hohlprofil)	Breite	$w_{1,h}$	0,2	m
	Höhe	$w_{2,h}$	0,12	m
	Wandstärke	t_h	0,01	m
Diagonale vertikale Elemente	Länge	l_d	10,18	m
(Flachstahl, druckschlaff)	Breite	$w_{1,d}$	0,15	m
	Höhe	$w_{2,d}$	0,015	m
Diagonale horizontale Elemente	Länge	l_{dh}	6,65	m
(Flachstahl)	Breite	$w_{1,dh}$	0,06	m
	Höhe	$w_{2,dh}$	0,01	m
Dämpfungskoeffizienten		α_0	0,05	$1/s$
$(1 - 3\%$ Materialdämpfung)		α_1	0,001	s
Masse pro m^2				
Zwischenböden		m_z	100	kg/m^2
Dach		m_r	200	kg/m^2
Fassaden		m_f	10	kg/m^2
Flächen				
Zwischenböden		A_z	242,44	m^2
Dach		A_r	22,04	m^2
Fassaden		A_f	754,21	m^2
Gewicht Details, 10% des Gesamtgewichts		m_d	7636,03	kg
Gesamtmasse		m_{tot}	83.996,34	kg

Tabelle A.2: Geometrieparameter des Maßstabsmodells.

Bezeichnung		Formelzeichen	Wert	Einheit
Vertikale Elemente	Länge	l_v	3	m
	Gewicht	m_tot	≈35	kg
	Höhe	h_tot	2,0	m
	Grundfläche	A_b	0,0676	m^2
Vertikale Elemente	Länge	l_v	0,4	m
	Steifigkeit	k_v	22124	N/m
Diagonale Elemente	Länge	l_d	0,48	m
(Seile, druckschlaff)	Steifigkeit	k_d	18192	N/m
Plattenelemente	Seitenlänge	l_p	0,26	m
Kraftübersetzung				
Stützen	Kugelgewindetrieb ∅	d_v	0,006	m
	Kugelgewindetrieb Steigung	s_v	0,001	m
	Wirkungsgrad	η	0,8	
Diagonalen	Übersetzung	i	65	
	Rolle ∅	r_d	0,01	N/m
	Wirkungsgrad	η	0,29	

A.2 SENSORIK UND AUSGANGSGLEICHUNGEN

Am Demonstrator-Hochhaus und am Maßstabsmodell sind zwei Messsysteme installiert, die im Folgenden genauer beschrieben werden.

A.2.1 Optisches Messystem

Im Vergleich zur herkömmlichen Dehnungsmessung ist das optische Messsysteme eine neuartige Messmethode. Aus regelungstechnischer Sicht ist die Absolutmessung der Tragwerksverschiebung von großem Interesse, da die Verschiebungen Teil des Zustands sind. Andere Messmittel für die Verschiebung, z. B. Laservibrometer, sind teuer in der Anschaffung und in ihrem Arbeitsbereich beschränkt. Das optische Messsysteme besteht aus LED-Emittern, die an diskreten Stellen am Tragwerk installiert sind. Die Signale der Emitter werden von einem Bildsensor (Kamera) detektiert. Zuvor passiert das Licht ein computergeneriertes Hologramm, das zu mehreren Abbildungen der Quelle auf dem Bildsensor führt. Durch diese Technik kann die Präzision der Messung stark erhöht werden. In prototypischen Untersuchungen konnte eine Auflösung von 0,055 mm bei einem Abstand von 11,4 m erreicht werden. Eine zeitlich Auflösung von 100 Hz ermöglicht den Einsatz des Systems bei dynamischen Problemen. Eine detaillierte Beschreibung des optischem Messsystems ist in [47] gegeben. Dieses Messsystem ist an der Nord- und Westseite des Demonstrator-Hochhauses angebracht.

A.2.2 Dehnungsmessung

Die Dehnung ε beschreibt die relative Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{A.1}$$

Dabei wird die Längenänderung Δl auf die Gesamtlänge l_0 des Bauteils bezogen. Ein DMS besteht aus einem oder mehreren meanderförmigen Drähten, Messgitter genannt, und ist auf das Bauteil appliziert. Aufgrund der durch die Dehnung hervorgerufene geometrische Verformung ändert sich der Widerstand des Messgitters. Dominiert durch diesen geometrischen Anteil ist die Änderung des außerdem beeinflussten spezifischen Widerstands vernachlässigbar. Die Widerstandsänderung ΔR_i im Verhältnis zum Grundwiderstand $R_{0,i}$ hängt über den Proportionalitätsfaktor k_{DMS} mit der Dehnung zusammen

$$\frac{\Delta R_i}{R_{0,i}} = k_{\mathrm{DMS}} \varepsilon_i. \tag{A.2}$$

Der k-Faktor k_{DMS} hängt vom DMS-Typ ab. Die Dehnungsmessung an den experimentellen Aufbauten erfolgt mit eine Vollbrücken, die aus je vier Messgittern bestehen. Diese Schaltung bestehend aus vier (veränderlichen) Widerständen als Wheatstonesche Messbrücke. Die Messgitter von Widerstand 1 und 3 sind in Längsrichtung orientiert, die von Widerstand 2 und 4 in Querrichtung. Deshalb gilt

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -\nu\varepsilon, \tag{A.3}$$

mit der Querkontraktionszahl ν. Die Wheatstonesche Brücke wird mit der Speisespannung U_{s} versorgt. Durch die Dehnung wird die Brücke verstimmt, weil sich die Einzelwiderständen ändern, und es tritt eine Differenzspannung U_{d} auf. Für kleine Widerstandsänderungen $\Delta R_i \ll R_{i,0}$ für $i \in \mathbb{N}$, $i \in [1{,}4]$ gilt näherungsweise

$$\frac{U_{\mathrm{d}}}{U_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\Delta R_1}{R_{1,0}} - \frac{\Delta R_2}{R_{2,0}} + \frac{\Delta R_3}{R_{3,0}} - \frac{\Delta R_4}{R_{4,0}}\Big). \tag{A.4}$$

Durch Einsetzen von (A.2)-(A.4) ist

$$\frac{U_{\mathrm{d}}}{U_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{2}(1+\nu) k_{\mathrm{DMS}} \varepsilon. \tag{A.5}$$

Die Differenzspannung ist aufgrund der sehr kleinen Widerstandsänderungen ebenfalls sehr klein und wird, um dies digitalisierbar zu machen, mit dem Faktor k_{amp} analog verstärkt

$$U_{\mathrm{a}} = k_{\mathrm{amp}} U_{\mathrm{d}}. \tag{A.6}$$

Für die Dehnung in Abhängigkeit der gemessenen verstärkten Spannung U_a gilt

$$\varepsilon = \frac{2}{(1+\nu)k_\mathrm{DMS}k_\mathrm{amp}U_\mathrm{S}}U_\mathrm{a}. \tag{A.7}$$

Die Dehnungsmessung mit DMS ist ein einfaches und günstiges Messmittel. Nachteilig ist der Installationsaufwand, da jeder Messpunkt mit einem Verstärker am Tragwerk auf dem Grundkörper appliziert werden muss. Durch die verwendeten Vollbrücken können Widerstandsänderungen aufgrund von Temperatureinflüssen kompensiert werden. Temperaturlasten auf das gesamte Tragwerk können jedoch zu Spannungen führen, die von den DMS erfasst werden, weshalb eine Kalibrierung zur Messung von Absolutwerten notwendig ist.

A.2.3 Linearisierung zur Berechnung der Elementlängungen und Dehnungen

Die exakte Berechnung der Elementlängenänderung ist bereits durch (3.4) gegeben. Die Linearisierung dieser Gleichung verspricht eine schnelle Berechnung mit nur kleinen Abweichungen zur exakten Lösung. Die Linearisierung nach Taylor um $\boldsymbol{q}(t) = \mathbf{0}$ ist

$$\bar{\Delta}l_i(\boldsymbol{q}(t)) = \nabla l_i(\boldsymbol{q}(t))\big|_{\boldsymbol{q}(t)=\mathbf{0}}\,\boldsymbol{q}(t), \tag{A.8}$$

da $l(\mathbf{0})$ der Referenzlänge l_0 entspricht. Der Nabla-Operator $\nabla(\cdot)$ beschreibt den Gradient der Längenänderungsfunktion nach $\boldsymbol{q}(t)$. Diese Gleichung wird bei der Berechnung der Elementlängen angewendet, um Schlaffheit in einem Element festzustellen.

Für die Bestimmung der linearisierten Elementdehnung in 3.1.4 gilt für das i-te Element

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{l_{i,0}}\nabla l_i(\boldsymbol{q}(t))\bigg|_{\boldsymbol{q}(t)=\mathbf{0}}\boldsymbol{q}(t). \tag{A.9}$$

Die Matrix-Vektor-Schreibweise für eine Tragwerk mit mehreren Elementen ist

$$\boldsymbol{y}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{C}_\varepsilon\boldsymbol{q}(t), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{C}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\varepsilon,1} \\ \boldsymbol{c}_{\varepsilon,2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_{\varepsilon,n_e} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_{\varepsilon,i} = \frac{1}{l_{i,0}}\nabla l_i(\boldsymbol{q}(t))\bigg|_{\boldsymbol{q}(t)=\mathbf{0}}. \tag{A.10}$$

Dies ist Teil der Messgleichung (3.25). Die Ausgangsmatrix C_ε enthält an den Stellen der betroffenen Knoten der Elemente die Werte der linearisierten Terme.

A.3 AKTORIK

Im Maßstabsmodell sind zwei Aktuierungsprinzipien eingebaut: die Stützen enthalten parallele Aktoren, die diagonalen Auskreuzungen serielle Aktoren. Die mechanische Übersetzung der Motorkraft in eine auf das Tragwerk wirkende Kraft wird für Stützen und Diagonalen beschrieben. Anschließend wird auf die unterlagerte Regelung zum Erreichen der Sollkraft eingegangen.

A.3.1 Mechanische Kraftübersetzung

Die maximale Kraft, die auf das Tragwerk aufgebracht werden kann, hängt von der Kraftübersetzung in den aktiven Stützen und Diagonalen ab. Bei den aktuierten Stützen erfolgt die Kraftübertragung, von einer Rotationsbewegung des Motors in eine Linearbewegung, mit einem Kugelgewindetrieb. Der Zusammenhang zwischen dem Motormoment M_N und der Kraft u auf das Tragwerk

$$u = \frac{\eta M_\mathrm{N}}{\tan(\beta) r_\mathrm{v}}, \tag{A.11}$$

mit dem Radius der Gewindestange r_v, dem Gewindesteigungswinkel β und dem Wirkungsgrad η. Diese Werte können aus den Angaben in A.2 berechnet werden.

Bei den aktuierten Diagonalen ist der Elektromotor an die Welle eines Schneckengetriebes angeschlossen. Abtriebsseitig ist eine Rolle, die ein Seil aufwickelt, montiert. Die Kraft u auf das Tragwerk wird aus dem Motormoment M_N berechnet

$$u = \frac{i \eta M_\mathrm{N}}{r_\mathrm{d}}, \tag{A.12}$$

mit der Übersetzungszahl i und dem Radius der Rolle r_d. Durch die hohe Übersetzung mit $i = 65$ ist das Schneckengetriebe selbsthemmend, sodass im passiven Zustand keine unerwünschte Abwicklung des Seils möglich ist. Durch die unterlagerte Regelung wird die Sollkraft in den Elementen sichergestellt.

A.3.2 Unterlagerte Regelung

Die Elektromotoren mit einem Nennmoment M_N, die vom Hersteller unterlagert geschwindigkeitsgeregelt sind, fungieren in beiden Fällen als Antrieb. Um bei der statischen Lastkompensation eine Sollkraft im Element einzuregeln, wird ein PI-Regler eingesetzt. Mit dem Regelfehler $e(t) = y_\mathrm{f,d} - y_\mathrm{f}$ zwischen Sollkraft und Istkraft, ergibt sich das Reglergesetz zu

$$v(t) = k_\mathrm{P} e(t) + k_\mathrm{I} \int e(t), \tag{A.13}$$

mit den Reglerparametern k_P und k_I.

A.4 HARDWARE STRUKTUR

In Abb. A.1 ist der Aufbau der Hardware des Maßstabsmodells schematisch dargestellt sowie die zentralen Softwarekomponenten beschrieben.

A.5 KNOTEN-, ELEMENT- UND AKTORNUMMERIERUNG

Entsprechend der FE-Modellierung sind die Element- und Knotennummern des Demonstrator-Hochhauses in Abb. A.2 und des Maßstabsmodells in Abb. A.4 aufgeführt. Die Nummerierung der Aktoren und Sensoren folgt für das Demonstrator-Hochhaus in Abb. A.3 und für das Maßstabsmodell in Abb. A.5. Die Identifikationsnummern der DMS entsprechen den Elementnummern.

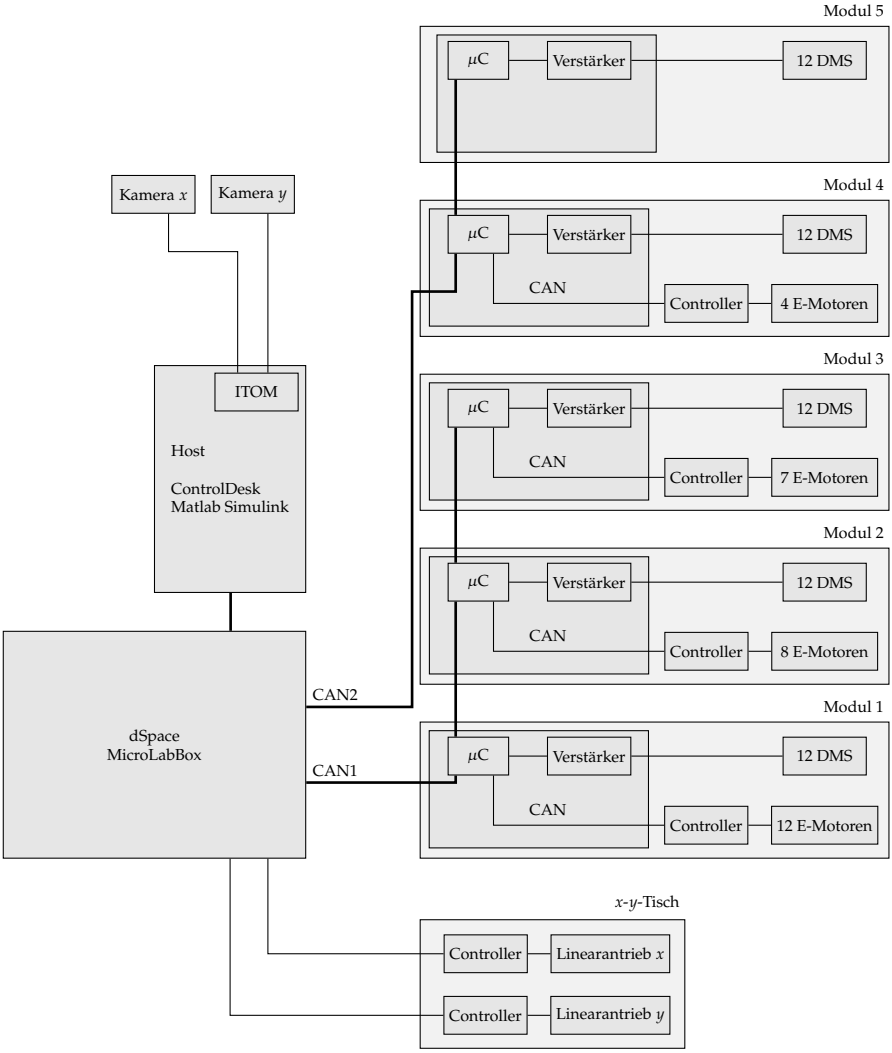


Abbildung A.1: Hard- und Software Struktur des Maßstabsmodells.
Mit dem Host-PC wird über die dSpace MicroLabBox auf die Komponenten des Maßstabsmodells zugegriffen. Die Programmierung erfolgt in Matlab/Simulink und die Bedienung erfolgt mit Controldesk. Pro Modul ist ein Microcontroller (μC) auf einer Platine verbaut. Auf dieser Platine sind zudem die Verstärkerschaltungen für die DMS integriert. Des Weiteren steuern die μC die Elektromotoren über die Motorcontroller (in der Abbildung: Controller) an. Das optische Messsystem mit beiden Kameraswerden über die Softwarekomponente ITOM zu deren Betrieb an den Host-PC angeschlossen. Der x-y-Tisch wird von Linearaktoren mit Servocontrollern betrieben.

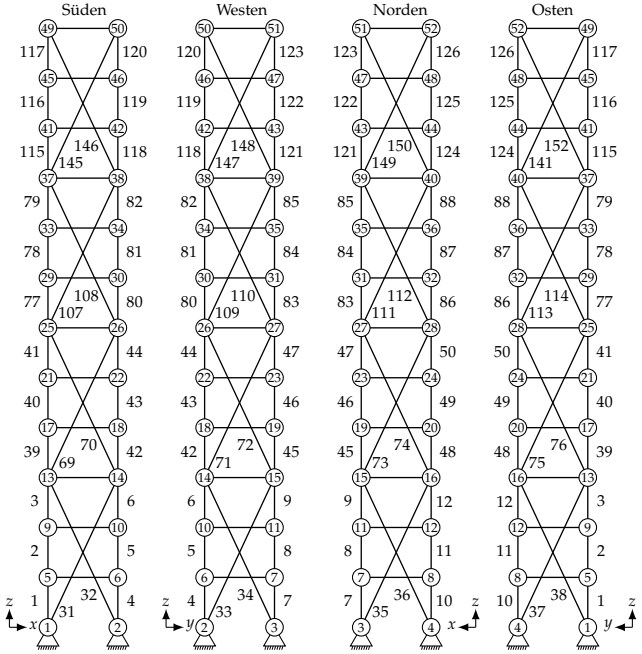


Abbildung A.2: Element- und Knotennummern des Demonstrator-Hochhauses.
Das Demonstrator-Hochhaus ist von allen vier Seiten schematisch dargestellt. Die Knotennummern in den Kreisen beginnen unten im Tragwerk und sind in den Ebenen gegen den Uhrzeigersinn benannt. Die Elementnummern beginnen unten mit den Stützen, gefolgt von den horizontalen und horizontal auskreuzenden Elementen. Es schließen sich die vertikal auskreuzenden Diagonalen in einem Modul an. Die horizontalen und horizontal auskreuzenden Elemente sind in der Skizze nicht benannt und letzte sind in dieser Ansicht nicht sichtbar.

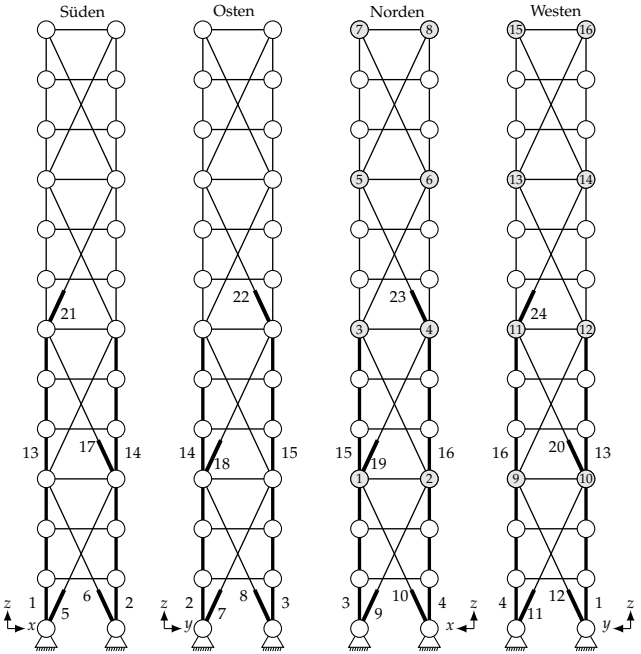


Abbildung A.3: Aktor- und Sensornummern des Demonstrator-Hochhauses.
Die Nummern 1 bis 8 der optischen Sensoren in den grauen Kreisen messen die x- und z-Richtung der zugehörigen Knoten, 9 bis 16 erfassen die y- und z-Richtung. DMS befinden sich in allen Elementen. An den Stützen sind je zwei DMS auf zwei Seitenflächen auf einer Höhe angebracht. An den vertikalen Diagonalen befinden sich auf beiden Seiten des Flachstahls je ein DMS. Aktoren sind hervorgehoben und nummeriert.

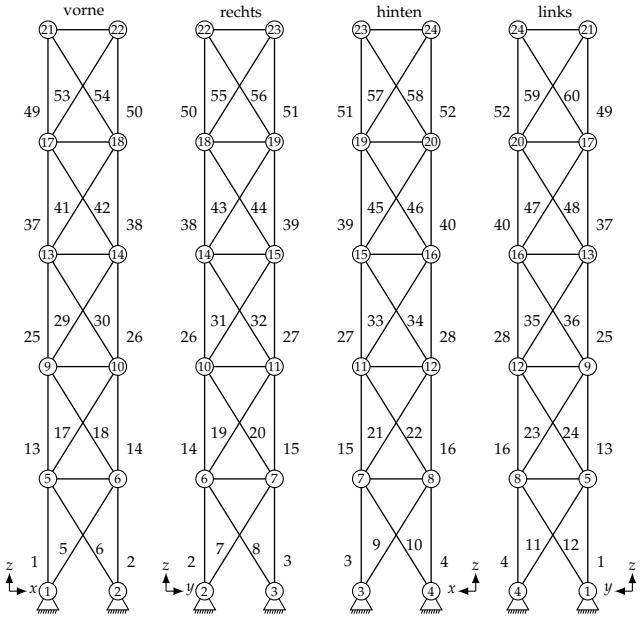


Abbildung A.4: Element- und Knotennummern des Maßstabsmodells.
Das Maßstabsmodell ist von allen vier Seiten schematisch dargestellt und die Blickrichtung ist angegeben. Die Knotennummern in den Kreisen beginnen unten im Tragwerk und sind in jeder Ebene gegen den Uhrzeigersinn benannt. Die Elementnummern beginnen unten mit den Stützen, gefolgt von den Diagonalen in einem Modul. Diese Systematik wird aufwärts fortgeführt.

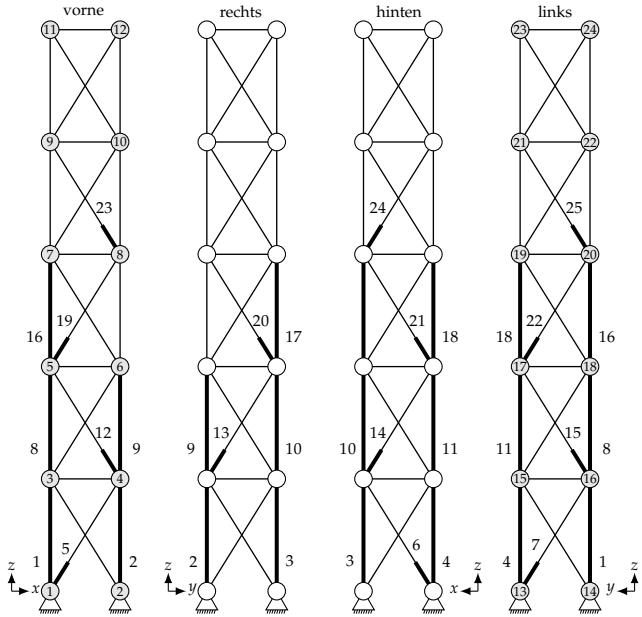


Abbildung A.5: Aktor- und Sensornummern des Maßstabsmodells.
Die Nummern 1 bis 12 der optischen Sensoren in den grauen Kreisen messen die x- und z-Richtung der zugehörigen Knoten, 13 bis 24 erfassen die y- und z-Richtung. DMS befinden sich in allen Elementen, außer in den Elementen 23, 55 und 59. Aktoren sind hervorgehoben und nummeriert.

B BETRACHTUNGEN ZU DRUCKSCHLAFFEN ELEMENTEN

B.1 STABILITÄTSNACHWEIS MIT LYAPUNOV

Der Stabilitätsnachweis mittels Lyapunov-Funktion wird an einem einfachen Tragwerk mit druckschlaffen Elementen in Abschnitt B.1.1 durchgeführt und anschließend auf das Demonstrator-Hochhaus erweitert (Abschnitt B.1.2). Für die approximativ linearisierende Eingangstransformation (ALE) aus Abschnitt 6.3.1 genügt eine Erweiterung, sodass durch die Wahl eines stabilen Zielsystems die Stabilität mit approximativ linearisierendem Eingang nachgewiesen ist (Abschnitt B.1.3).

B.1.1 Vereinfachtes Beispiel

Ein zweidimensionales Beispieltragwerk ist so gewählt, dass es die wesentlichen Eigenschaften eines mechanischen Systems mit druckschlaffen Elementen beinhaltet. Durch diese Vereinfachung kann ein Stabilitätsnachweis mit einer Lyapunov-Funktion nachvollziehbar durchgeführt werden. In Abb. B.1 ist das Tragwerk abgebildet. Die diagonalen Federn sind druckschlaff; die vertikale Feder ist eine gewöhnliches lineares Zug-Druck Element. Die Dämpferelemente fallen auch aus, wenn die diagonalen Elemente nicht unter Zug sind. Die Dynamikgleichungen für die Freiheitsgrade x und y sind

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= -\beta_1(x(t),y(t))x(t) - \beta_2(x(t),y(t))\dot{x}(t), \\
\ddot{y}(t) &= -\gamma_1(x(t),y(t))y(t) - \gamma_2(x(t),y(t))\dot{y}(t) \qquad \text{mit} \\
\beta_1(x(t),y(t)) &= \frac{\cos(\alpha)k_1}{m}(\sigma(\Delta l_1 > 0) + \sigma(\Delta l_3 > 0)), \\
\beta_2(x(t),y(t)) &= \frac{\cos(\alpha)d_1}{m}(\sigma(\Delta l_1 > 0) + \sigma(\Delta l_3 > 0)), \\
\gamma_1(x(t),y(t)) &= \frac{\sin(\alpha)k_1}{m}(\sigma(\Delta l_1 > 0) + \sigma(\Delta l_3 > 0)) + \frac{k_2}{m}, \\
\gamma_2(x(t),y(t)) &= \frac{\sin(\alpha)d_1}{m}(\sigma(\Delta l_1 > 0) + \sigma(\Delta l_3 > 0)) + \frac{d_2}{m},
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

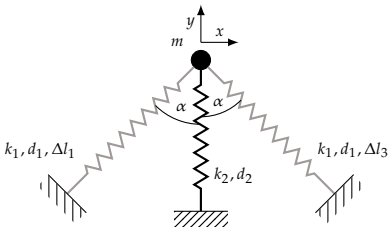


Abbildung B.1: Zweidimensionales Beispieltragwerk.
Parallel zu den drei Federelementen befinden sich Dämpfungselemente, die der Übersichtlichkeit wegen, nicht eingezeichnet sind. Die Masse m besitzt zwei Freiheitsgrade, x und y. Die diagonalen Federn mit dem Index 1 sind druckschlaff. Die Dämpferelemente wirken demnach nur unter Zug.

mit der Masse $m > 0$, den Steifigkeiten $k_{(\cdot)} > 0$ und den Dämpfungskonstaten $d_{(\cdot)} > 0$. Für den Winkel α gilt $0\,° < \alpha < 90\,°$. Der Verlauf der nichtlinearen Federkraft im Kraft-Weg Diagramm eines druckschlaffen Elements ist in Abb. 3.1 a abgebildet. Die Bedingung, wann ein druckschlaffes Elementen schlaff wird, ist mit der Heaviside-Funktion $\sigma(\cdot)$ modelliert. Die Argumente

$$\Delta l_1 = -\bar{l}_\mathrm{x} x(t) + \bar{l}_\mathrm{y} y(t) \qquad \text{und} \qquad \Delta l_3 = \bar{l}_\mathrm{x} x(t) + \bar{l}_\mathrm{y} y(t) \tag{B.2}$$

beschreiben die lineareisierte Abweichung von der Referenzlänge für beide Federelemente. Die Konstanten sind $\bar{l}_\mathrm{x} = \frac{1}{l_0}(x_{01} - x_{02})$ und $\bar{l}_\mathrm{y} = \frac{1}{l_0}(y_{01} - y_{02})$, wobei l_0 die Referenzlänge ist. Die Koordinaten x_{01}, x_{02} und y_{01}, y_{02} sind die Nullpositionen der angreifenden Knoten eines Elements in x- und y-Richtung. Diese linearisierte Betrachtung ist vergleichbar mit (3.4).

Der Kandidat für die Lyapunov-Funktion wird zu

$$\begin{aligned} V(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = & a \int_0^{x(t)} \beta_1(w(t),y(t))w(t)\mathrm{d}w(t) + \frac{1}{2} b\dot{x}(t)^2 \\ & + c \int_0^{y(t)} \gamma_1(x(t),w(t))w(t)\mathrm{d}w(t) + \frac{1}{2} d\dot{y}(t)^2 \end{aligned} \tag{B.3}$$

gewählt. Die Konstanten $a, b, c, d > 0$ sind größer als Null. Die Integrale sind im betrachteten Intervall $[0, x(t)]$ bzw. $[0, y(t)]$ monoton steigend und die Kandidatenfunktion ist stetig differenzierbar. Es gilt

$$V(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) > 0. \tag{B.4}$$

Weiter gilt für die Ruhelage $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$

$$V(0,0,0,0) = 0 \qquad . \tag{B.5}$$

Damit ist $V(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ positiv definit und ein gültiger Kandidat für eine Lyapunov-Funktion. Gilt für die Ableitung einer Lyapunov-Funktion

$$\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) < 0, \tag{B.6}$$

ist $V(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ eine strenge Lyapunov-Funktion und die Ruhelage (x_0,y_0) ist asymptotisch stabil [72].

Ableiten von (B.3) unter Nutzung der Leibniz-Regel für Parameterintegrale und einsetzen von (B.1) liefert

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) =& a\beta_1(x(t),y(t))x(t)\dot{x}(t) + b\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + c\gamma_1(x(t),y(t))y(t)\dot{y}(t) + d\dot{y}(t)\ddot{y}(t)\\ =& -b\beta_2(x(t),y(t))\dot{x}^2(t) - d\gamma_2(x(t),y(t))\dot{y}^2(t),\end{aligned} \tag{B.7}$$

unter den Bedingungen $a = b$ und $c = d$. Offensichtlich ist die Ruhelage x_0,y_0 im Sinne von Lyapunov stabil, da $\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ negativ semidefinit ist. Die Energie im System nimmt ab, und bleibt für $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ konstant, da $\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = 0$. Ein Blick auf die Vorfaktoren $b\beta_2$ des ersten Terms zeigt eine Abhängigkeit von $\sigma(\Delta l_1 > 0) + \sigma(\Delta l_3 > 0)$. Im Fall $y < 0$ ist es nach (B.2) möglich, dass $\beta_2 = 0$ wird, da $\Delta l_1 < 0$ und $\Delta l_3 < 0$. Anschaulich wird die Masse m in negative y-Richtung verschoben und beide druckschlaffen Elemente werden schlaff. Folglich existiert keine Kraftkomponente in x-Richtung. In diesem Zustand entspricht $\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = -\frac{dd_z}{m}\dot{y}^2(t)$ und ist weiterhin negativ semidefinit. Die DGL (B.1) zeigt, dass $\dot{y} = 0$ ausschließlich erreicht wird, wenn $y = 0$, was außerhalb des betrachteten Falls $y < 0$ liegt. Für den ersten Fall $y < 0$ ist $\dot{V}(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ negativ definit und konvergiert unweigerlich in den folgenden zweiten Fall. Gilt im zweiten Fall $y \leq 0$ ist durch (B.2) sichergestellt, dass mindestens eine Bedingung $\Delta l_1 > 0$ und $\Delta l_3 > 0$ oder beiden gelten, sodass $\beta_2 \neq 0$. Das Invarianzprinzip von Krassovskki-LaSalle zeigt mit (B.1), dass $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ ausschließlich erreicht wird, wenn $x = 0$ und $y = 0$. Dies entspricht der Ruhelage (x_0,y_0). Durch Energiedissipation in den Dämpferelementen ist offensichtlich, dass die Energie im bewegten System nicht konstant bleiben kann. Damit ist (B.3) eine strenge Lyapunov-Funktion und der Nullpunkt ist eine asymptotisch stabile Ruhelage. □

Bei einer Last von oben in negative y-Richtung ist diese Beweisführung nicht mehr gültig. Bei einem konstanten Wert für $y < 0$ ist es dann möglich, dass sich die Masse in x-Richtung bewegen kann. Die Energie bleibt dabei konstant, da beide druckschlaffen Federelemente keine Kraft entgegensetzen. Diese Bewegung bleibt erhalten, bis eine der Federn wieder unter Zug steht. Es bildet sich abhängig vom Winkel α ein Bereich, in dem die Energie im System nicht abnimmt (Abb. B.2 a). Dieser Effekt würde sich auch an realen Bauten zeigen. Um dies zu verhindern, wird eine Vorspannung auf die druckschlaffen Elemente aufgebracht. Dadurch verschiebt sich dieser Bereich, abhängig von der Größe der Vorspannkraft, nach unten (Abb. B.2 b).

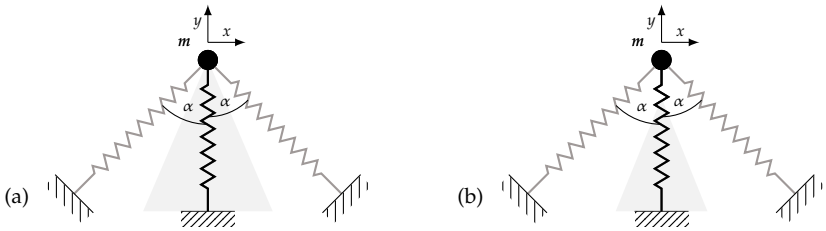


Abbildung B.2: Auswirkung der Vorspannkraft.
Befindet sich die Masse im grau gekennzeichneten Bereich, sind beide diagonalen druckschlaffen Elemente schlaff. Hierbei nimmt die Energie bei einer Bewegung in x-Richtung nicht ab. Dieser Bereich ist linearisiert dargestellt. In (a) ist keine Vorspannkraft aufgebracht in (b) eine Vorspannkraft größer Null.

B.1.2 Demonstrator-Hochhaus

Das zuvor eingeführte Beispiel mit dem Stabilitätsnachweis beschreibt die Wirkung der druckschlaffen Elemente auf ein Tragwerk. Das Tragwerk des Demonstrator-Hochhauses kann aus verkoppelten Vielfachen dieses Beispieltragwerks zusammengesetzt werden. Ein vertikales Element über drei Stockwerke steht analog für das vertikale Element in Abb. B.1. Die am oberen Ende angreifenden Diagonalen werden durch die druckschlaffen Elemente aus dem Beispiel beschrieben. Die zusätzliche horizontale Verkopplung durch die Querbalken fügt Abhängigkeiten zwischen den Knoten am Ende der Stützen ein, ändert jedoch die für die Stabilität relevanten Effekte nicht. Die autonome störungsfreie Zustandsraumdarstellung mit druckschlaffen Elementen (4.40)-(4.42) dient als Ausgangsgleichung. Die Ruhelage ist $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Die positiv definite Lyapunov-Funktion wird zu

$$V(\boldsymbol{x}(t)) = a \int_0^{\boldsymbol{x}(t)} \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{w}(t))\boldsymbol{w}(t)^{\mathsf{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t) + \frac{1}{2} b\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{B.8}$$

gewählt. Die Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{w}(t))$ sind positiv definit. Es gilt $a, b > 0$. Zudem ist $V(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und $V(\boldsymbol{x}(t)) > 0$. Durch Ableiten und Einsetzen der Zustandsgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) =& a\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + b\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}(t)\ddot{\boldsymbol{x}}(t)\\ =& a\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + b\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}(t)(-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t))\\ =& -b\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}(t))\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t),\end{aligned} \tag{B.9}$$

wobei $a = b$ gilt. Die Energie im System nimmt aufgrund der negativ semidefinite Funktion $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))$ ab und ist nur in der Ruhelage konstant. Die Argumentationskette zum Stabilitätsnachweis erfolgt analog zum Beispieltragwerk aus Abschnitt B.1.1. Damit ist die Ruhelage $\boldsymbol{x}_0$ des Demonstrator-Hochhauses asymptotisch stabil. □

B.1.3 Approximativ linearisierende Eingangstransformation

Die Stabilität der ALE aus Abschnitt 6.3.1 ist eine wünschenswerte Eigenschaft der Methode. Die Stabilität des Reglerentwurfsmodells wird in Abschnitt 4.4 diskutiert. Ausgehend vom nichtlinearen POD-reduzierten Modell (6.9) wird die Unterteilung in den quadratischen Teil des Eingangs und den Rest vorgenommen

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t))\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t))\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}. \tag{B.10}$$

Nach Einsetzen des linearisierenden Eingangs $\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,qu}}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}$ aus (6.13) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t))\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t))\boldsymbol{\zeta}(t) \\
&\qquad = \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{r,qu}}^{-1}\left(\left((\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}})\boldsymbol{\zeta}(t)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. +(\boldsymbol{D}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\zeta}(t)) - \boldsymbol{D}_{\mathrm{d}})\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right) - \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}}\right) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{r,re}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{alin,re}} \\
&\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Dadurch eliminiert sich der Einfluss des Rest-Eingangs, sowie des nichtlinearen Systemanteils. Durch die ALE folgt das System, wie beabsichtigt, der Dynamik des Zielmodells. Mit der Wahl eines stabilen Zielmodells folgt aus der Transformation die Stabilität des approximativ linearisierten Modells. Für das Zielmodell können beispielsweise mit der Methode von Hurwitz negative Eigenwerte nachgewiesen werden. □

C STATISCHE UNBESTIMMTHEIT UND REDUNDANZKONZEPT

C.1 STATISCHE UNBESTIMMTHEIT

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist eine fundamentale Eingenschaft von Tragwerken und gibt Aufschluss über das Tragverhalten [95, 109]. Damit kann bestimmt werden, ob ein Tragwerk unter innerem Zwang steht. Der Grad der statischen Unbestimmtheit entspricht der Differenz zwischen der Anzahl an unbekannten inneren Kräften und der Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen. Es existieren statisch bestimmte und statisch unbestimmte Tragwerke. Ist ein Tragwerk statisch bestimmt, ist die Anzahl der unbekannten inneren Kräfte gleich der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. Bei statisch unbestimmten Tragwerken verbleibt eine Differenz ungleich Null. Diese unterteilt sich in statisch unterbestimmte und überbestimmte Tragwerke. Beim ersten Fall reichen die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus um alle unbekannten Kräfte zu berechnen. Im mathematischen Sinn ist das daraus formulierte Gleichungssystem unterbestimmt. Statisch überbestimmte Tragwerke exponieren Starrkörpermoden und sind kinematisch. Diese sind in der bautechnischen Praxis aufgrund der kinematischen Mechanismen in der Regel nicht relevant. Deshalb wird häufig der Begriff *statisch unbestimmt* mit *statisch unterbestimmt* gleichgesetzt. In der Literatur sind die Definitionen von statischer Unter- und Überbestimmtheit inkonsistent. Basierend auf der mathematischen Definition von unter- und überbestimmten Gleichungssystemen ist die oben eingeführte Systematik zu bevorzugen.

Bei statisch unterbestimmten Tragwerken hängen die inneren Kräfte von der Verteilung der Elementsteifigkeiten ab. Als Folge können diese Kräfte durch eine Änderung der Querschnittseigenschaften oder Materialparameter der Elemente umverteilt werden. So hängt auch der Lastabtrag bei adaptiven Tragwerken mit dem Grad der statischen Unbestimmtheit steht (s. Abschnitt 4.5) zusammen.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit n_s bei Fachwerken kann mit dem Abzählkriterium

$$n_\mathrm{s} = n_\mathrm{c} + n_\mathrm{e} - n_\mathrm{p} n_\mathrm{n} \tag{C.1}$$

bestimmt werden. Diese Gleichung enthält die Anzahl der Auflagerkräfte n_c, die Anzahl der Elemente n_e, die Anzahl der Knoten n_n und die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten n_p. Bei

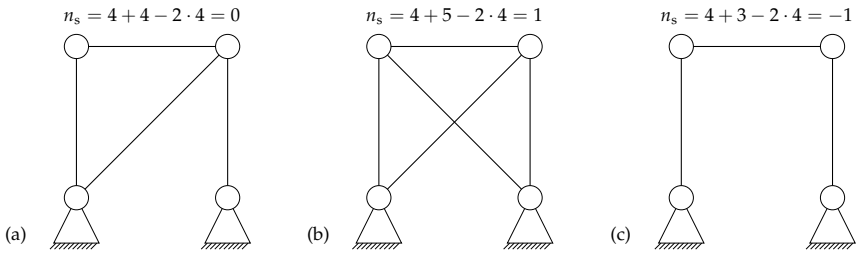


Abbildung C.1: Akademische Beispiel-Fachwerke für den Grad der statischen Unbestimmtheit. Alle Fachwerke sind auf zwei Festlagern mit je zwei Auflagerkräften gelagert. Alle Knoten sind gelenkig und besitzen zwei Freiheitsgrade. Der Grad der statischen Unbestimmtheit n_s wird nach (C.1) berechnet. Tragwerk (a) ist statisch bestimmt, Tragwerk (b) ist statisch unterbestimmt (statisch unbestimmt) und Tragwerk (c) ist statisch überbestimmt (kinematisch). Bei letzterem ist intuitiv zu erkennen, dass das Tragwerk kollabieren würde.

einem zweidimensionalen Tragwerk ist $n_p = 2$, bei einem dreidimensionalen Tragwerk ist $n_p = 3$. Nach (C.1) gilt:

$$\begin{aligned} n_s &= 0 \quad \text{statisch bestimmt} \\ n_s &> 0 \quad \text{statisch unterbestimmt (statisch unbestimmt)} \\ n_s &< 0 \quad \text{statisch überbestimmt (kinematisch).} \end{aligned}$$

Der Grad der statischen Unbestimmtheit wird an drei einfachen Tragwerken in Abb. C.1 veranschaulicht. Das Abzählkriterium kann in bestimmten Fällen kinematische Tragwerke oder kinematisch Gruppen nicht erkennen, z. B. bei einem von Mises Tragwerk mit drei Knoten auf einer Linie. Aus systemtheoretischer Sicht weist die Systemmatrix des Tragwerks Abb. C.1 c einen Null-Eigenwert auf und dieses Tragwerk besitzt damit eine instabile Ruhelage.

C.2 REDUNDANZKONZEPT

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist eine elementare Eigenschaft bei der strukturmechanischen Betrachtung von Tragwerken. Dieser Wert trifft Aussagen über das Tragwerk als gesamte Einheit. Die Redundanzmatrix nach [144] erweitert dieses Verständnis auf die Ebene von Einzelelementen. Die Redundanz trifft Aussagen über die Verteilung der statischen Unbestimmtheit in einem Tragwerk.

Ein erstes Konzept zur elastischen Redundanz hat den Ursprung in der Geodäsie [138], die auf den Arbeiten von [4] und [88] basieren. Eine ausführliche Dokumentation sowie die Erweiterung der Redundanzmatrix im stukturmechanischen Sinn auf Rahmentragwerke und 1D Kontinua ist in [144] angegeben. Untersuchungen zur Redundanz für allgemeine kontinuierliche Theorien finden sich in [40]. Die Redundanzmatrix wird im Kontext adaptiver Tragwerke zu deren Charakterisierung und Analyse angewendet, sowie zum Entwurf [43] und zur Aktorplatzierung [149].

Eine kurze Einführung in die Thematik der Redundanz wird im Folgenden gegeben, um Verbindungen zu einer systemtheoretischen Betrachtung in Abschnitt 4.5 und bei der statischen Aktorplatzierung aufzeigen zu können.

C.2.1 Herleitung der Redundanzmatrix

Die Redundanzmatrix erfasst die Verteilung der Redundanz im Tragwerk und beschreibt damit den inneren Zwang. Es kann ein Wert angegeben werden, wie groß der Einfluss eines Elements auf die Umgebung, d. h. umliegende Elemente, ist. Dieser gilt auch in der umgekehrten Betrachtung und quantifiziert den Einfluss der Umgebung auf ein Element. Je geringer dieser Wert, desto weniger redundant ist ein Element.

Zum grundlegenden Verständnis wird der Wert der Redundanz für ein Element in einem Tragwerksverbund berechnet. Die Redundanz beschreibt wie sich die Längung eines Elements nach einer vordefinierte unbeschränkte Einheitslängung verhält. Anschaulich beschrieben, wird das Element dem Tragwerk entnommen und um eine vordefinierte Einheitslängung Δl_0 verlängert. Anschließend wird das Element wieder an der ursprünglichen Stelle im Tragwerk verbaut. Das Element beeinflusst das umliegende Tragwerk und umgekehrt und hat selbst die Längung Δl. Die Differenz

$$\Delta l_{\mathrm{el}} = \Delta l - \Delta l_0 \tag{C.2}$$

beschreibt den elastischen Teil der Längung, mit der die entsprechende Normalkraft im Element einhergeht. Die Redundanz r ergibt sich als Verhältnis zwischen elastischer Längung und vordefinierter Einheitslängung

$$\boldsymbol{R}_{i,j} = \frac{\Delta l_{0,i} - \Delta l_i}{\Delta l_{0,j}} = \frac{-\Delta l_{\mathrm{el},i}}{\Delta l_{0,j}}, \qquad i,j \in \mathbb{N},\ \ i,j \in [1,n_{\mathrm{e}}]. \tag{C.3}$$

Die abstrakte vordefinierte unbeschränkte Einheitslängung kann als Imperfektion in der Fertigung oder als Temperaturlast aufgefasst werden. Der Wert $R_{i,i}$ steht auf der Diagonale der Redundanzmatrix, da die vordefinierte Einheitslängung auf das Element selbst bezogen wird. Wird die vordefinierte Einheitslängung eines Elements auf ein anderes Element im Tragwerk bezogen, finden sich diese Werte $R_{i,j}$ mit $i \neq j$ auf einer Nebendiagonalen.

Die Redundanzmatrix kann für lineare diskrete Fachwerke analytisch berechnet werden. In der statischen Gleichgewichtslage

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{z}} \tag{C.4}$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen den externen statischen Lasten $\boldsymbol{f}_{\mathrm{z}} \in \mathbb{R}^n$, die auf die Knotenfreiheitsgrade wirken, und den inneren Kräften in den Elementen $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{e}}}$. Die Gleichgewichtsmatrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_{\mathrm{e}}}$ setzt diese ins Verhältnis. Aus systemtheoretischer Sicht entspricht $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C}_1^{\mathsf{T}}$, also der Eingangsmatrix für parallele Aktoren mit Krafteingang, die der transponierten Ausgangsmatrix der Elementlängunen für alle Elemente entsprechen (s. 3.1.4).

Nach der Werkstoff-Gleichung sind die Elementkräfte über die Elementsteifigkeiten mit den elastischen Längungen verknüpft

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{K}_{\text{elem}} \Delta \boldsymbol{l}_{\text{el}}. \tag{C.5}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\text{elem}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Einzelelementsteifigkeiten k auf der Hauptdiagonalen. Bei statischer Betrachtung sind die Elementsteifigkeiten bei Fachwerken ohne Starrkörpermoden definiert als $k = EA/l$.

Die resultierende Längung $\Delta \boldsymbol{l}$ ist über die Kinematikgleichung

$$\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{q} \tag{C.6}$$

festgelegt. Der Vektor $\boldsymbol{q}$ beinhaltet die Knotenverschiebung des Tragwerks. Die Matrix $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ ist die Transponierte der Gleichgewichtsmatrix und wird im Bauingenieurwesen Kompatibilitätsmatrix genannt.

Unter Verwendung der Gleichungen (C.2) und (C.4) - (C.6) werden die Elementkräfte $\boldsymbol{N}$ und Elementlängungen $\Delta \boldsymbol{l}$ ersetzt, sodass die Gleichung

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{q} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}} \Delta \boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{f}_{\text{z}} \tag{C.7}$$

den Zusammenhang zwischen externen Kräften $\boldsymbol{f}_z$ und Knotenverschiebungen $\boldsymbol{q}$ beschreibt. Der Term $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ entspricht der Steifigkeitsmatrix des Tragwerks. Die Gleichung (C.7) wird nach den Knotenveschiebungen

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^{-1}(\boldsymbol{f}_{\text{z}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}} \Delta \boldsymbol{l}_0) \tag{C.8}$$

gelöst. Die Invertierbarkeit für $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ ist für nicht kinematische Tragwerke stets garantiert. Die Redundanz wird als eine dem Tragwerk innewohnende Eigenschaft definiert ohne Berücksichtigung von externen Lasten. Im Folgenden wird in (C.8) nur der Term unabhängig von $\boldsymbol{f}_z$ berücksichtigt und die resultierenden Knotenverschiebungen $\boldsymbol{q}$ in (C.6) eingesetzt

$$\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{A}_0 \Delta \boldsymbol{l}_0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}. \tag{C.9}$$

Die Längungsmatrix $\boldsymbol{A}_0$ bildet die vordefinierte unbeschränkte Einheitslängung auf die resultierende Längung $\Delta \boldsymbol{l}$ ab. Unter Verwendung von (C.2) verknüpft die Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$ die vordefinierte unbeschränkte Einheitslängung $\Delta \boldsymbol{l}$ mit den negativen elastischen Elementlängungen

$$\Delta \boldsymbol{l}_{\text{el}} = \underbrace{(\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{I})}_{-\boldsymbol{R}} \Delta \boldsymbol{l}_0. \tag{C.10}$$

Die Redundanzmatrix ergibt sich zu

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\text{elem}}. \tag{C.11}$$

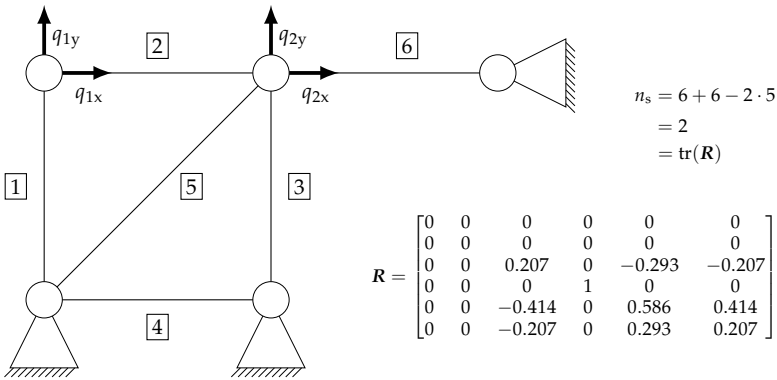


Abbildung C.2: Akademisches Beispiel für die Redundanz eines Tragwerks.
Das zweidimensionale Tragwerk besteht aus sechs Elementen mit Steifigkeit k und ist auf zwei Festlager gelagert. Die Knotenverschiebungen sind $\boldsymbol{q} = [q_{1x}, q_{1y}, q_{2x}, q_{2y}]^\mathsf{T}$. Der Grad der statischen Unbestimmtheit beträgt $n_s = 2$ und entspricht der Spur der Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$. Die Elemente 1 und 2 bilden zusammen ein statisch bestimmtes Teiltragwerk, wodurch beide Elemente einen Redundanzwert von $R_{11} = R_{22} = 0$ besitzen. Das vierte Element besitzt einen Redundanzwert $R_{44} = 1$ und kann aus dem Tragwerk entfernt werden ohne Änderungen im Tragverhalten zu bewirken. Das dritte, fünfte und sechste Element sind nicht redundant. Ohne diese Elemente ist das Tragwerk kinematisch.

C.2.2 Eigenschaften der Redundanzmatrix

Die Interpretation der Redundanzmatrix trifft Aussagen über die Bedeutung einzelner Elemente im Fachwerk. Ist der Wert auf der Hauptdiagonalen der Redundanzmatrix $R_{i,i} = 1$ für ein Element i, ist dieses Element vollständig redundant. Das bedeutet, dass das Element aus dem Tragwerk entfernt werden kann und sich dessen Tragverhalten nicht ändert. Dies trifft beispielsweise auf ein Element zu, das zwischen zwei Auflagern eingespannt ist (Abb. C.2, Element 4). Für Werte $R_{i,i} = 0$ ist das Element i nicht redundant und kann frei verlängert werden (Abb. C.2, Elemente 2, 3). Wird dieses Element dem Tragwerk entnommen, versagt das Tragwerk zumindest teilweise. Dieses Element gehört zu einem statisch bestimmten Tragwerk oder Teiltragwerk. Einträge auf den Nebendiagonalen der Redundanzmatrix stellen den Einfluss der Element gegenseitig dar. Einträge ungleich Null in der Spalte i geben an, welche Element von Element i beeinflusst werden. Die Größe gibt die elastische Längenänderung an und lässt gemeinsam mit der Steifigkeitsverteilung Rückschlüsse auf die dadurch hervorgerufenen Normalkräfte zu.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit beschreibt das komplette Tragwerk, kann jedoch keine Aussage über einen Teil des Tragwerks treffen. Es ist möglich, dass ein Fachwerk nach (C.1) statisch unbestimmt ist ($n_s > 0$), jedoch ein Abschnitt des Tragwerks trotzdem kinematisch, also statisch überbestimmt, ist. Bei der Berechnung der Redundanzmatrix werden solche kinematische Ketten durch eine Singularität in der Steifigkeitsmatrix angezeigt. Die Werte auf der Hauptdiagonalen der Redundanzmatrix beinhalten den Beitrag eines Elements zur statischen Unbestimmtheit und werden als verteilte statische Unbestimmtheit beschrieben.

Die Spur der Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$ entspricht dem Grad der statischen Unbestimmtheit

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}) = n_\mathrm{s}. \tag{C.12}$$

Die Spur der Längungsmatrix $\boldsymbol{A}_0$ erfüllt

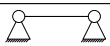
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_0) = n. \tag{C.13}$$

Die Redundanzmatrix $\boldsymbol{R}$ und die Längungsmatrix $\boldsymbol{A}_0$ sind idempotent, folglich gilt

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0. \tag{C.14}$$

Idempotente Matrixen sind diagonalisierbar und besitzen Eigenwerte $\lambda_i \in \{0, 1\}$ für $i \in \mathbb{N}, i = [1, n_\mathrm{e}]$. Die Spur einer idempotenten Matrix ist gleich ihrem Rang $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{R})$. Bei der Redundanzmatrix entspricht diese dem Grad der statischen Unbestimmtheit. Eine ausführliche Beschreibung der Eigenschaften der Redundanzmatrix ist in [144] aufgeführt.

Tabelle C.1: Beispiele von Redundanzwerten einfacher Tragwerke für Längungen und Kräfte.
Die Redundanz wird mit der Kraftredundanz verglichen. Das erste Beispiel ist ein Stab zwischen zwei Festlagern. Die Redundanz dieses Tragwerks ist $R = 1$, d. h. der Stab ist vollkommen redundant und kann dem Tragwerk entnommen werden, ohne dass sich dessen Tragverhalten ändert. Bei Beispiel zwei ist ein Stab zwischen einem Festlager und einem verschieblichen Lager angebracht. Die Redundanz beträgt $R = 0$, dementsprechend ist der Stab nicht redundant. In beiden Bespielen wird die Einheitslängung Δl_0 bzw. die Einheitsstabkraft F_elem vorgegeben. Es ergeben sich die Längung Δl bzw. die Stabkraft F und die elastische Längung Δl_el und die virtuell parallele Kraft f_p.

Redundanz		Kraftredundanz	
Beispiel 1: Redundanz $R = 1$ 			
$\Delta l_0 = 1$	vordefinierte Einheitslängung	$f_\mathrm{p} = 1$	vordefinierte parallele Eingangskraft (hier: Druck)
$\Delta l = 0$	der eingebaute Stab kann sich nicht ausdehnen	$F_\mathrm{elem} = 0$	der Stab nimmt keine Kraft auf
$\Delta l_\mathrm{el} = 1$	(negative) Längung bleibt im Stab	$F_\mathrm{elem,tot} = 1$	Kraft (hier: Druck) wird auf das Resttragwerk übertragen
Beispiel 2: Redundanz $R = 0$			
$\Delta l_0 = 1$	vordefinierte Einheitslängung	$f_\mathrm{p} = 1$	vordefinierte parallele Eingangskraft (hier: Druck)
$\Delta l = 1$	der eingebaute Stab dehnt sich aus	$F_\mathrm{elem} = 1$	der Stab nimmt die Kraft (hier: Zug) vollständig auf
$\Delta l_\mathrm{el} = 0$	keine elastische Längung des Stabes	$F_\mathrm{elem,tot} = 0$	Resttragwerk erfährt keine Kraft

C.2.3 Redundanzmatrix und Kraftredundanzmatrix an einfachen Beispielen

Die Redundanz und die Kraftredundanz beschreiben prinzipiell die gleichen Eigenschaften von Fachwerken und sind dual zueinander. Intuitiv ist der Zusammenhang damit zu begründen, dass wenn im Tragwerk eine Verschiebung auftritt, diese mit einer Kraft einhergeht und umgekehrt. Deshalb können über die Ähnlichkeitstransformation (4.49) beide Matrizen ineinander überführt werden. Der Zusammenhang der Redundanzmatrix aus Abschnitt C.2.1 und der Kraftredundanzmatrix aus Abschnitt 4.5 wird in Tab. C.1 anhand zweier Beispiele für zwei sehr einfache Tragwerke dargestellt. Dabei liegt der Fokus auf den anschaulichen Beispielen, wobei der Stab in Tab. C.1 Beispiel 1 vollkommen redundant ist und und Beispiel 2 nicht redundant ist. Diese Grenzzustände veranschaulichen das Konzept Redundanz, wobei Beispiel 1 in realen Tragwerken nicht auftritt.

In Abb. C.3 sind die Längungen und Kräfte eines Stabes in einem Tragwerksverbund illustriert. Dabei werden ausschließlich die Werte der Redundanz und Kraftredundanz für den betrachteten Stab dargestellt, die ein Element der Hauptdiagonalen der entsprechenden Matrix sind. Die Werte der Redundanz und Kraftredundanz sind wie in Abschnitt 4.5 über die Elementsteifigkeit ineinander überführbar. Die analoge Gleichung zu (C.3) für die Kraftredundanz ist

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{f},i,j} = \frac{f_{\mathrm{p},i} - F_{\mathrm{elem},i}}{f_{\mathrm{p},j}} = \frac{-F_{\mathrm{elem,tot},i}}{f_{\mathrm{p},j}}, \qquad i,j \in \mathbb{N}, \;\; i,j \in [1,n_{\mathrm{e}}], \tag{C.15}$$

mit der parallelen Eingangskraft $f_{\mathrm{p},(\cdot)}$ von Element $(\cdot)$, der Elementkraft $F_{\mathrm{elem},i}$ und der Gesamtelementkraft $F_{\mathrm{elem,tot},i}$ von Element i.

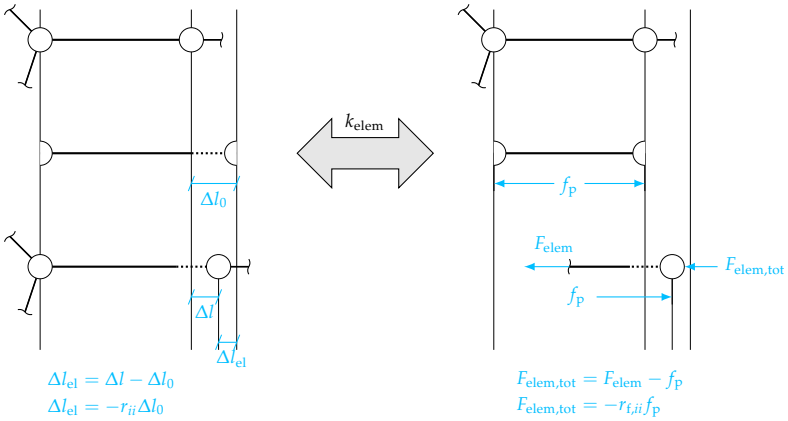


Abbildung C.3: Graphische Interpretation der Redundanz und der Kraftredundanz.
Im linken Bild wird die Redundanz eines Elements illustriert, rechts die Kraftredundanz. Die Verbindung beider Matrizen besteht über die Elementsteifigkeit. Das oberste Element zeigt den Stab im Tragwerksverbund. Darunter ist der Stab losgelöst vom Resttragwerk mit Einheitslängung Δl_0 abgebildet, sodass der Stab sich kraftfrei ausdehnt (links). Rechts ist der Stab parallel aufgebrachter Kraft f_{p} abgebildet, wobei die Knoten feststehen, sodass keine Längung auftritt. Anschließend wird der Stab wieder ins Tragwerk integriert wird. Der sich dann einstellende Zustand zeigt die elastische Längung Δl_{el} im Stab und die Längung Δl (rechts). Der Zusammenhang zwischen Δl_0 und Δl_{el} über den Redundanzwert $R_{i,i}$ des Stabs ist angegeben. Links sind die Elementkraft F_{elem} und die Gesamtelementkraft $F_{\text{elem,tot},i}$, die auf das Tragwerk wirkt, gezeigt. Diese stehen im Gleichgewicht mit der parallel aufgebrachter Kraft f_{p}. Die Gleichung mit dem Kraftredundanzwert $R_{\text{f},i,i}$ des Stabs setzt F_{elem} und f_{p} in Relation.

ABKÜRZUNGEN

Abkürzung	Bedeutung
ALE	approximativ linearisierende Eingangstransformation
DFT	diskrete Fourier-Transformation
DGL	gewöhnliche Differentialgleichung
DMS	Dehnungsmessstreifen
E/A	Eingangs/Ausgangs
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	Fast-Fourier-Transformation
LQR	linear-quadratischer Regler
MIMO	Mehrgrößensystem (engl.: *multiple-input multiple-output*)
MOR	Modellordnungsreduktion
MPC	modellprädiktive Regelung (engl.: *model predictive control*)
PDGL	partielle Differentialgleichung
PI	Proportional-Integral
POD	Hauptkomponentenanalyse (engl.: *proper orthogonal decomposition*)
RB	Randbedingung
RMSE	Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler (engl.: *root-mean-square error*)
SFB 1244	Sonderfoschungsbereich
SISO	Eingrößensystem (engl.: *single-input single-output*)
SVD	Singulärwertzerlegung (engl.: *singular value decomposition*)

SYMBOLVERZEICHNIS

Im Folgenden werden die verwendeten Variablen, Konstanten, Indizes und Notationen aufgeführt. Generell sind Vektoren mit fett gedruckten Kleinbuchstaben gekennzeichnet und Matrizen mit fettgedruckten Großbuchstaben.

Formelzeichen konzentrierte Parameter

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\boldsymbol{A}$		Systemmatrix
$\mathcal{A}$		Integraloperator/Gewichtungsmatrix von $\boldsymbol{W}$
$\boldsymbol{B}$		Eingangsmatrix
$\bar{\boldsymbol{b}}$		Wirkrichtung eines aktuierten Elements in lokalen Koordinaten
$\boldsymbol{b}_i$		i-ter Eingangsvektor
$\boldsymbol{C}$		Ausgangsmatrix
$\boldsymbol{C}^i_{(\cdot)}$		Transformationsmatrix Substurkturierung
c		Kardinalität des Kandidatensets
$\boldsymbol{c}$		Eingangsvektor
$\boldsymbol{D}$		Durchgriffsmatrix
d		Durchgriff
$\boldsymbol{D}$	$\mathrm{kg/s}$	Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}(t))$	$\mathrm{kg/s}$	zustandsabhängige Dämpfungsmatrix
E	$\mathrm{N/m^2}$	Elastizitätsmodul
$\boldsymbol{e}$		(Ausgangs-)Fehler
$F_{\mathrm{elem,tot},i}$	N	Gesamtelementkraft
$\boldsymbol{f}(t)$	N	rechte Seite (Kräfte des Systemeingangs, externe Kräfte)
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$		Systemfunktion
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{z}(t))$		nichtlineare Funktion zur Systembeschreibung
$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$		Eingangsfunktion
$\boldsymbol{H}$		Abbildungsmatrix von $\boldsymbol{z}$ auf $\boldsymbol{e}^*$
$\boldsymbol{H}_{\mathrm{u}}$		Abbildungsmatrix von $\boldsymbol{u}$ auf $\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{H}_{\mathrm{z}}$		Abbildungsmatrix von $\boldsymbol{z}$ auf $\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{z}(t))$		nichtlineare Ausgangsfunktion
$\mathcal{I}$		Indexmenge
J		Gütefunktional
$\boldsymbol{K}$	$\mathrm{N/m}$	Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}(t))$	$\mathrm{N/m}$	zustandsabhängige Steifigkeitsmatrix
k		Kardinalität des Aktorsets
$\boldsymbol{K}_{\mathrm{elem}}$	$\mathrm{N/m}$	Diagonalmatrix mit Elementsteifigkeiten
k_i , $k_i(\boldsymbol{q}(t))$	$\mathrm{N/m}$	Federsteifigkeit von Element i
$L(\cdot)$		Lagrange-Funktion

(Fortsetzung: Formelzeichen konzentrierte Parameter)

Symbol	Einheit	Beschreibung
l		Anzahl der Störeingänge
$l_i(\boldsymbol{q}(t))$	m	Länge des i-ten Elements zum Zeitpunkt t
$l_{i,0}$	m	Referenzlänge des i-ten Elements
$\Delta l_i(\boldsymbol{q}(t))$	m	Längendifferenz des i-ten Elements bzgl. der Referenzlänge
$\boldsymbol{M}$	kg	Massenmatrix
$\boldsymbol{M}_\mathrm{u}$		Gramsche Eingangsgewichtungsmatrix
m		Anzahl der Eingänge
N		Anzahl der Datenpunkte
n		Anzahl der Freiheitsgrade
$P_{i,1}$, $P_{i,2}$		Knoten an denen das i-te Element angreift
$\boldsymbol{p}$		Referenzpose
p		Anzahl an Ausgängen
$\boldsymbol{Q}$		Gewichtungsmatrix (Aktorplatzierung, LQR)
$\boldsymbol{Q}_\mathrm{data}$		Datenmatrix für die POD
$\boldsymbol{q}(t)$	m	Verschiebungen
$\dot{\boldsymbol{q}}(t)$	m/s	Geschwindigkeiten
$\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$	m/s^2	Beschleunigungen
$\hat{\boldsymbol{q}}(t)$	m	translatorisch FHG an Knoten 49
$\boldsymbol{R}$		Redundanzmatrix
$\boldsymbol{R}_\mathrm{f}$		Redundanzmatrix mit Krafteingang und -ausgang
r		Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade
T	s	Zeithorizont der MPC
$\boldsymbol{T}$		Craig-Bampton-Transformationsmatrix
t	s	Zeit
t_e	s	Endzeit
$\boldsymbol{u}(t)$		Stellgröße, Systemeingang
$\boldsymbol{V}$		Linkseigenvektoren
$v(t)$		serieller Verschiebungseingang
$\boldsymbol{W}$		Rechtseigenvektoren
$\boldsymbol{W}$		erweiterte Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{W}_\mathrm{con}$		Steuerbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{W}_\mathrm{e}$		Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{W}_\mathrm{u}$		Gramsche Matrix zur Berücksichtigung des Eingangs
$\boldsymbol{w}(t)$		(virtueller) Eingang des Zielmodells
$\boldsymbol{x}(t)$		Zustandsvektor
y_d		Sollausgang
$\boldsymbol{z}(t)$		Störamplitude
α		Dämpfungskoeffizienten nach Caughey
α_0		massenproportionaler Rayleigh Dämpfungskoeffizient
α_1		steifigkeitsproportionaler Rayleigh Dämpfungskoeffizient
Δ_i		Differenzenmatrix
ζ		modaler Dämpfungsparameter
$\boldsymbol{\zeta}(t)$		mittels POD-Moden reduzierter Zustand
$\boldsymbol{\eta}(t)$		modale Amplitude
κ	%	Toleranzgrenze
λ		Eigenwerte
$\boldsymbol{\Sigma}$		Singulärwertmatrix

(Fortsetzung: Formelzeichen konzentrierte Parameter)

Symbol	Einheit	Beschreibung
Σ		System
σ		Singulärwert
$\boldsymbol{\Phi}$		Eigenvektormatrix (komplett oder reduziert)
$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}$		Transformationsmatrix zur statischen Kondensation
$\boldsymbol{\phi}$		Eigenvektor
ω	Hz , rad	Eigenfrequenz

Formelzeichen verteilte Parameter

Symbol	Einheit	Beschreibung
$a_{(\cdot)}$		Integrationskonstanten
A_{P}	m^2	Fläche der Druckkammer
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$		Integral über die Eingangsfunktionen
b_{P}	m	Breite einer Druckkammer
C		Kandidatenmenge
$c_{(\cdot)}$		Integrationskonstanten
$\mathscr{D}_{(\cdot)}$		Differentialoperator
d_{P}	m	Abstand der Druckkammer zur neutralen Faser
F_{P}	N	Normalkraft der Druckkammer
$\boldsymbol{g}$		Gewichtungsfunktion
$\boldsymbol{H}(x, \boldsymbol{\xi})$		Abbildungsfunktion von Lastamplitude auf den Verformungszustand
I	m^4	Flächenträgheitsmoment
l		Anzahl der Einzellasten
L	m	Balkenlänge
l		Anzahl der Einzellasten
M_{P}	$\mathrm{N/m}$	durch Druckkammer induziertes Moment
N	N	Normalkraft im Balken
p	Pa	Druck im integrierten Fluidaktor
$\boldsymbol{p}$	Pa	Eingangsdrücke vektoriell
$\mathscr{R}_{(\cdot)}$		Randoperator
S		Aktormenge
$\boldsymbol{s}$		Störamplitude vektoriell
s_k	N	Störamplituden
$\mathcal{U}$		realisierbare Eingänge
$u(\boldsymbol{x})$		örtlich verteilter Eingang
$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi})$		verteilte Gramsche Kompensierbarkeitsmatrix
$w(\boldsymbol{x}), w(x)$		Verformungszustand, Biegelinie
$\boldsymbol{x}, x$		Ortskoordinate
x_k	m	Positionen der Einzellasten
$\mathscr{Y}_{(\cdot)}$		Ausgangsoperator
$z(\boldsymbol{x})$		örtlich verteilte Störung/Last
α		Physikalische Skalierungsfaktor bei einer PDGL
$\beta_i(x)$		Eingangscharakteristik der analytischen Lösung

(Fortsetzung: Formelzeichen verteilte Parameter)

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\boldsymbol{\beta}(x)$		Eingangscharakteristik vektoriell
γ_1	$^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$	physikalischer Skalierungsfaktor des Eingangs
γ_2	$^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^2}$	physikalischer Skalierungsfaktor der verteilten Last
$\delta(\cdot)$		Rand von $(\cdot)$
$\theta_i(x)$		polynomielle Approximationsfunktion des Momentenverlaufs
Θ_i		Doppelte Integration der skalierten Approximationsfunktion
$\boldsymbol{\xi}$	m	Aktorpositionen
$\sigma_i(x)$		Lastfunktion der analytischen Lösung
$\boldsymbol{\sigma}(x)$		Lastfunktion vektoriell
Ω		Domäne einer PDGL

Indizes

Symbol	Beschreibung
$(\cdot)_0$	Anfangswert der Größe $(\cdot)$, Referenzwert
$(\cdot)_1$	Anfangswert der Größe $(\cdot)$, Referenzwert
$(\cdot)_{\mathrm{acc}}$	bezogen auf Beschleunigungen (engl.: *acceleration*)
$(\cdot)_{\mathrm{act}}$	aktuiert (engl.: *actuated*)
$(\cdot)_{\mathrm{alin}}$	approximativ linearisiert
$(\cdot)_{\mathrm{b}}$, $(\cdot)_{\mathrm{bb}}$	bezogen auf die Randknoten
$(\cdot)_{\mathrm{bi}}$	bezogen auf die Kopplung zw. Randknoten und inneren Knoten
$(\cdot)_{\mathrm{c}}$	Craig-Bampton-reduziertes System
$(\cdot)_{\mathrm{con}}$	Steuerbarkeit (engl. *Controllability*)
$(\cdot)_{\mathrm{d}}$	bezogen auf die Sollgröße, das Wunschmodell (engl. *desired*)
$(\cdot)_{\mathrm{disp}}$	bezogen auf Verschiebungen (engl.: *displacements*)
$(\cdot)_{\mathrm{disp,t}}$	bezogen auf die translatorischen Verschiebungsfreiheitsgrade
$(\cdot)_{\mathrm{disp,tot}}$	bezogen auf alle Verschiebungsfreiheitsgrade
$(\cdot)_{\mathrm{ds}}$	druckschaff
$(\cdot)_{\mathrm{dyn}}$	dynamisch
$(\cdot)_{\mathrm{el}}$	elastisch
$(\cdot)_{\mathrm{f}}$	bezogen auf die Kraft
$(\cdot)^i$	dezentrales Modell
$(\cdot)_{\mathrm{i}}$, $(\cdot)_{\mathrm{ii}}$	bezogen auf die inneren Knoten
$(\cdot)_{\mathrm{ib}}$	bezogen auf die Kopplung zw. inneren Knoten und Randknoten
$(\cdot)_{i,j,k}$	Laufindizes
$(\cdot)_{\mathrm{l}}$	bezogen auf die Längung
$(\cdot)_{\mathrm{l}}$	Craig-Bampton-reduziertes System ohne Starrkörpermoden
$(\cdot)_{\mathrm{max}}$	maximaler Wert von $(\cdot)$
$(\cdot)_{\mathrm{min}}$	minimaler Wert von $(\cdot)$
$(\cdot)_{\mathrm{n}}$	normiert
$(\cdot)_{\mathrm{opt}}$	optimaler Wert
$(\cdot)_{\mathrm{p}}$	passiv
$(\cdot)_{\mathrm{par}}$	parallel
$(\cdot)_{\mathrm{q}}$	bezogen auf den Zustand

(Fortsetzung: Indizes)

Symbol	Beschreibung
$(\cdot)_{\mathrm{qu}}$	quadratisch
$(\cdot)_{\mathrm{r}}$	reduziert
$(\cdot)_{\mathrm{re}}$	bezogen auf den Rest
$(\cdot)_{\mathrm{s}}$	statisch
$(\cdot)_{\mathrm{ser}}$	seriell
$(\cdot)_{\mathrm{tr}}$	bezogen auf die Spur
$(\cdot)_{\mathrm{u}}$	bezogen auf den Eingang
$(\cdot)_{\mathrm{vel}}$	bezogen auf Geschwindigkeit (engl.: *velocity*)
$(\cdot)_{\mathrm{z}}$	bezogen auf die Störung/Last
$(\cdot)_{\varepsilon}$	bezogen auf die Dehnung
$(\cdot)_{\lambda_{\max}}$	bezogen auf den maximalen Eigenwert

Notation

Symbol	Beschreibung
$(\cdot)^{+}$	Moore Penrose Pseudoinverse [110]
$(\cdot)^{-1}$	Inverse Größe $(\cdot)$
$(\cdot)^{*}$	optimaler Wert von $(\cdot)$ oder komplex konjugiert Größe $(\cdot)$
$(\cdot)^{\intercal}$	Transposition der Größe $(\cdot)$
$\bar{(\cdot)}$	prädizierte Größen in der MPC
$\dot{(\cdot)}$	Zeitableitung der Größe $(\cdot)$
$\tilde{(\cdot)}$	Skalierung, Gewichtung der Größe $(\cdot)$
$\lvert(\cdot)\rvert$	Kardinalität
$\lVert\cdot\rVert_2$	Euklidische Norm
$\langle\cdot\rangle$	Föppl-Klammer (engl.: *Macaulay bracket*)
$\varnothing$	Durchschnitt
$\emptyset$	leere Menge
$\arg(\cdot)$	Argument von $(\cdot)$
$\mathrm{diag}(\cdot)$	quadratische Diagonalmatrix mit $(\cdot)$ auf der Diagonalen
$\frac{\mathrm{d}^4(\cdot)}{\mathrm{d}(*)^4}$	vierter absoluter Differentialquotient der Größe $(\cdot)$ bezüglich $(*)$
$\min_{(\cdot)}(*)$	Minimum von $(*)$ über $(\cdot)$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
s.t.	unter den Nebenbedingungen (engl.: *subject to*)
$\mathrm{tr}(\cdot)$	Spur von $(\cdot)$
$\delta(\cdot)$	Dirac-Funktion
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\sigma(\cdot)$	Heaviside-Funktion

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1.1 Übersichtsplan der Arbeit 16

2.1 Demonstrator-Hochhaus D1244 18
2.2 Aktorik des Demonstrator-Hochhauses 19
2.3 Optisches Messsystem am Demonstrator-Hochhaus 20
2.4 Maßstabsmodell des Demonstrator-Hochhauses 22
2.5 Balken mit integrierten Fluidaktoren 24

3.1 Skizze und Diagramm zum Verhalten von druckschlaffen Elementen 29
3.2 Parallele und serielle Aktuierung 32
3.3 Veranschaulichungen zu paralleler und serieller Aktuierung 35
3.4 Obere Begrenzung bei der seriellen Aktuierung druckschlaffer Elemente 37
3.5 Untere Begrenzung bei der seriellen Aktuierung druckschlaffer Elemente 38
3.6 Messungen und Modellvorhersage unter einer statischen Last 45
3.7 Prinzipskizze eines Balkens mit integrierten Fluidaktoren 47
3.8 Schnittprinzip für die Druckkammer eines adaptiven Balkens 48

4.1 Moden des Demonstrator-Hochhauses 54
4.2 POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses 55
4.3 Singulärwerte des Demonstrator-Hochhauses 59
4.4 Zeitliches Auftreten der POD-Moden in der Datengrundlage 60
4.5 Eigenmoden und POD-Moden des Demonstrator-Hochhauses 61
4.6 Aufsteigend sortierte Eigenfrequenzen und POD-Frequenzen 63
4.7 Vergleich des vollen und reduzierten Simulationsmodells 66
4.8 Substrukturierung des Demonstrator-Hochhauses 68

5.1 Geometrische Visualisierung zur Gramschen Kompensierbarkeitsmatrix 88
5.2 Statische Platzierung separat für parallele und serielle Aktoren mit Krafteingang 92
5.3 Statische Aktorplatzierung für das Demonstrator-Hochhaus 94
5.4 Eingangskräfte zur statischen Kompensation 95
5.5 Dynamische Platzierung mit $J_{\mathrm{dyn,tr}}(S)$ für parallele und serielle Aktoren 102
5.6 Dynamische Platzierung mit $J_{\mathrm{d},\lambda_{\min}}(S)$ für 3 und 8 Moden 103
5.7 Kombinierte Mengen durch Vereinigung und Schnittmengenbildung 106
5.8 Reale Konfiguration am Demonstrator-Hochhaus und Lösungsmenge durch Vereinigung mit 24 Aktoren 107

5.9 Platzierung eines Aktors im Balken mit integrierten Fluidaktoren 112
5.10 Aktorplatzierung am Balken bei verschiedenen Lasten 113
5.11 Verschiedene Aktoranzahlen am Balken mit integrierten Fluidaktoren 115

6.1 Blockschaltbild des Regelungskonzepts adaptiver Tragwerke 119
6.2 Optimale Aktorkräfte der statischen Kompensation 121
6.3 Verformungen des Maßstabsmodells bei der statischen Lastkompensation 122
6.4 Messungen und Simulation der statischen Lastkompensation 124
6.5 Elementkräfte in den aktuierten Elementen 125
6.6 Elementkräfte im belasteten Zustand 126
6.7 Elementkräfte im kompensierten Zustand 127
6.8 Blockschaltbild der approximativ linearisierenden Eingangstransformation ALE 129
6.9 Knotenverschiebungen des Tragwerks bei der ALE 135
6.10 Vergleich der ALE mit dem MPC geregelten Zielsystem 136
6.11 Eingangssignale der ALE mit und ohne MPC 137

A.1 Hard- und Software Struktur des Maßstabsmodells 150
A.2 Element- und Knotennummern des Demonstrator-Hochhauses 151
A.3 Aktor- und Sensornummern des Demonstrator-Hochhauses 152
A.4 Element- und Knotennummern des Maßstabsmodells 153
A.5 Aktor- und Sensornummern des Maßstabsmodells 154

B.1 Zweidimensionales Beispieltragwerk 156
B.2 Auswirkung der Vorspannkraft 158

C.1 Akademische Beispiel-Fachwerke für den Grad der statischen Unbestimmtheit . 162
C.2 Akademisches Beispiel für die Redundanz eines Tragwerks 165
C.3 Graphische Interpretation der Redundanz und der Kraftredundanz 168

TABELLENVERZEICHNIS

4.1 RMSE zwischen modalen und POD-Moden 62
4.2 Zusammenhang zwischen Zustandsraumdarstellung und Redundanzkonzept . 79

5.1 Ergebnisse der kombinierten Aktorplatzierung für 18 Aktoren 107
5.2 Ergebnisse der Aktorplatzierung am Balken mit integrierten Fluidaktoren 115

6.1 Experimentelle Ergebnisse der statischen Lastkompensation 123

A.1 Geometrieparameter des Demonstrator-Hochhauses 144
A.2 Geometrieparameter des Maßstabsmodells 145

C.1 Beispiele von Redundanzwerten einfacher Tragwerke für Längungen und Kräfte 166

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. Ahmadizadeh. „Three-dimensional geometrically nonlinear analysis of slack cable structures“. *Computers & Structures* 128 (2013), S. 160–169 (zitiert auf Seite 4).

[2] N. B. H. Ali und I. F. C. Smith. „Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure“. *International Journal of Solids and Structures* 47.9 (2010), S. 1285–1296 (zitiert auf Seite 5).

[3] A. Arbel. „Controllability measures and actuator placement in oscillatory systems“. *International Journal of Control* 33.3 (1981), S. 565–574 (zitiert auf Seite 11).

[4] J. Bahndorf. „Zur Systematisierung der Seilnetzberechnung und zu Optimierung von Seilnetzen“. Dissertation. Universität Stuttgart, 1991 (zitiert auf Seite 162).

[5] H. Baier und G. Locatelli. „Optimization of actuator placement and structural parameters in smart structures“. *Smart Structures and Materials 1999: Mathematics and Control in Smart Structures*. Band 3667. 1999, S. 267–276 (zitiert auf Seite 13).

[6] B. Basu, O. S. Bursi, F. Casciati, S. Casciati, A. E. Del Grosso, M. Domaneschi, L. Faravelli, J. Holnicki-Szulc, H. Irschik, M. Krommer u. a. „A European Association for the Control of Structures joint perspective. Recent studies in civil structural control across Europe“. *Structural Control and Health Monitoring* 21.12 (2014), S. 1414–1436 (zitiert auf Seite 3).

[7] C. M. Baycan, S. Utku, S. K. Das und B. K. Wada. „Optimal Actuator Placement in Adaptive Precision Trusses“. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, 33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 1992, S. 418–223 (zitiert auf Seite 12).

[8] N. Benninger und J. Rivoir. „Ein neues konsistentes Maß zur Beurteilung der Steuerbarkeit in linearen, zeitinvarianten Systemen“. *at-Automatisierungstechnik* 34.1-12 (1986), S. 473–479 (zitiert auf Seite 98).

[9] G. Berkooz, P. Holmes und J. L. Lumley. „The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows“. *Annual review of fluid mechanics* 25.1 (1993), S. 539–575 (zitiert auf Seite 57).

[10] M. Bischoff und M. von Scheven. „Finite Elemente. Ergänzendes Material zur Vorlesung“. Vorlesungsskript. Universität Stuttgart, 2020 (zitiert auf Seite 69).

[11] A. Bleicher. „Aktive Schwingungskontrolle einer Spannbandbrücke mit pneumatischen Aktuatoren“. *Bautechnik* 89.2 (2012), S. 89–101 (zitiert auf Seite 9).

[12] A. Bleicher, M. Schlaich, Y. Fujino und T. Schauer. „Model-based design and experimental validation of active vibration control for a stress ribbon bridge using pneumatic muscle actuators“. *Engineering structures* 33.8 (2011), S. 2237–2247 (zitiert auf Seite 9).

[13] M. Böhm, J. Wagner, S. Steffen, J. Gade, F. Geiger, W. Sobek, M. Bischoff und O. Sawodny. „Input modeling for active structural elements – extending the established FE-Workflow for modeling of adaptive structures“. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. 2020, S. 1595–1600 (zitiert auf Seiten 15, 26).

[14] M. Böhm, J. Wagner, S. Steffen, W. Sobek und O. Sawodny. „Homogenizability of Element Utilization in Adaptive Structures“. *IEEE 15th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. 2019, S. 1263–1268 (zitiert auf Seiten 15, 90, 118).

[15] M. Böhm, M. Krstic, S. Küchler und O. Sawodny. „Modeling and boundary control of a hanging cable immersed in water“. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 136.1 (2014) (zitiert auf Seite 4).

[16] T. Burghardt, C. Honold, M. Bachmann, D. Roth, H. Binz, M. Böhm, J. Wagner, O. Sawodny, S. Weidner und W. Sobek. „Anforderungsermittlung für adaptive Stützen und Aussteifungselemente in Tragkonstruktionen“. *Konstruktion* (2021) (zitiert auf Seiten 15, 18).

[17] Z. Chaudhry und C. Rogers. „Response of composite beams to an internal actuator force“. *Journal of Mechanical Design* 114.3 (1992), S. 343–348 (zitiert auf Seite 13).

[18] L. Chung, R. Lin, T. Soong und A. Reinhorn. „Experimental study of active control for MDOF seismic structures“. *Journal of Engineering Mechanics* 115.8 (1989), S. 1609–1627 (zitiert auf Seite 8).

[19] L. Chung, A. Reinhorn und T. Soong. „Experiments on active control of seismic structures“. *Journal of Engineering Mechanics* 114.2 (1988), S. 241–256 (zitiert auf Seite 4).

[20] J. Cook, G. Rodgers, G. MacRae und G. Chase. „Experimentation with tension-only devices for use with seismic energy dissipation systems“. *Proceedings of the Tenth Pacific Conference on Earthquake Engineering*. 2015 (zitiert auf Seite 4).

[21] R. R. Craig und M. Bampton. „Coupling of substructures for dynamic analyses“. *AIAA Journal* 6.7 (1968), S. 1313–1319 (zitiert auf Seiten 68, 70, 71).

[22] P. J. Cruz, M. Oishi und R. Fierro. „Lift of a cable-suspended load by a quadrotor: A hybrid system approach“. *2015 American control conference (ACC)*. 2015, S. 1887–1892 (zitiert auf Seite 4).

[23] S. Dakova, J. Heidingsfeld, M. Böhm und O. Sawodny. „An Optimal Control Strategy to Distribute Element Wear for Adaptive High-Rise Structures“. *American Control Conference*. 2022 (zitiert auf Seite 15).

[24] S. Dakova, J. Wagner, A. Gienger, C. Tarín, M. Böhm und O. Sawodny. „Reconfiguration Strategy for Fault-Tolerant Control of High-Rise Adaptive Structures“. *IEEE Robotics and Automation Letters* 6.4 (2021), S. 6813–6819 (zitiert auf Seiten 15, 107).

[25] M. A. Demetriou. „Integrated observer and sensor placement design of parabolic PDEs using modified Centroidal Voronoi Tessellations“. *2018 Annual American Control Conference (ACC)*. 2018, S. 2545–2550 (zitiert auf Seite 13).

[26] M. A. Demetriou und A. Armaou. „Optimal actuator placement and model reduction for a class of parabolic partial differential equations using spatial H/sub 2/norm“. *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.* 2005, S. 4569–4574 (zitiert auf Seite 13).

[27] J. Deutscher und C. Schmid. „A numerical approach to approximate feedback linearization“. *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design*. 2006, S. 1934–1939 (zitiert auf Seite 11).

[28] D. e.V. Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN EN 1990:2020 Eurocode – Grundlagen der Tragwerksplanung 1990:2020*. 2020 (zitiert auf Seiten 1, 120).

[29] D. Dinkler. *Einführung in die Strukturdynamik*. Springer Vieweg, 2016 (zitiert auf Seite 53).

[30] S. Djouadi, R. Motro, J. Pons und B. Crosnier. „Active control of tensegrity systems“. *Journal of Aerospace Engineering* 11.2 (1998), S. 37–44 (zitiert auf Seite 5).

[31] H. Domke. „Aktive Tragwerke“. *Aktive Tragwerke*. Springer, 1992, S. 7–37 (zitiert auf Seite 6).

[32] J. Du, X. Yue, J. H. Hunt und J. Shi. „Optimal placement of actuators via sparse learning for composite fuselage shape control“. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 141.10 (2019) (zitiert auf Seite 12).

[33] S. Elias und V. Matsagar. „Research developments in vibration control of structures using passive tuned mass dampers“. *Annual Reviews in Control* 44 (2017), S. 129–156 (zitiert auf Seite 3).

[34] B. Feeny und R. Kappagantu. „On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations“. *Journal of sound and vibration* 211.4 (1998), S. 607–616 (zitiert auf Seite 57).

[35] N. Fisco und H. Adeli. „Smart structures: part I—active and semi-active control“. *Scientia Iranica* 18.3 (2011), S. 275–284 (zitiert auf Seite 3).

[36] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon. „On differentially flat nonlinear systems“. *Nonlinear Control Systems Design 1992*. Elsevier, 1993, S. 159–163 (zitiert auf Seite 10).

[37] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon. „Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples“. *International journal of control* 61.6 (1995), S. 1327–1361 (zitiert auf Seite 10).

[38] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. VDE Verlag, 2013 (zitiert auf Seiten 76, 100).

[39] B. Fröhlich, J. L. Wagner, M. Böhm, O. Sawodny und P. Eberhard. „Combining Optimal Control and Shape Optimization for an Adaptive Engineering Structure with Parametrized Reduced Order Finite Element Models“. *ECCOMAS Conference on Smart Structures and Materials*. 2019, S. 43–54 (zitiert auf Seite 15).

[40] J. Gade, A. Tkachuk, M. von Scheven und M. Bischoff. „A continuum-mechanical theory of redundancy in elastostatic structures“. *International Journal of Solids and Structures* 226 (2021), S. 110977 (zitiert auf Seiten 77, 162).

[41] W. K. Gawronski. *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. 3. Auflage. New York: Springer-Verlag, 2004 (zitiert auf Seiten 3, 76).

[42] R. Gehle und S. Masri. „Active control of shallow, slack cable using the parametric control of end tension“. *Nonlinear Dynamics* 17.1 (1998), S. 77–94 (zitiert auf Seite 4).

[43] F. Geiger, J. Gade, M. von Scheven und M. Bischoff. „Anwendung der Redundanzmatrix bei der Bewertung adaptiver Strukturen“. *Baustatik - Baupraxis 14*. Stuttgart, 2020, S. 119–128 (zitiert auf Seite 162).

[44] A. Gienger, J. Wagner, M. Böhm, O. Sawodny und C. Tarín. „Robust Fault Diagnosis for Adaptive Structures With Unknown Stochastic Disturbances“. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 29.3 (2020), S. 1131–1146 (zitiert auf Seite 15).

[45] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall. *Technische Mechanik 1 Statik*. Band 12. Springer, 2013 (zitiert auf Seite 50).

[46] G. O. Guardabassi und S. M. Savaresi. „Approximate linearization via feedback—an overview“. *Automatica* 37.1 (2001), S. 1–15 (zitiert auf Seiten 9, 10).

[47] F. Guerra, T. Haist, A. Warsewa, S. Hartlieb, W. Osten und C. Tarín. „Precise building deformation measurement using holographic multipoint replication“. *Appl. Opt.* 59.9 (2020), S. 2746–2753 (zitiert auf Seiten 20, 145).

[48] B. Guo, O. Karaca, T. Summers und M. Kamgarpour. „Actuator placement under structural controllability using forward and reverse greedy algorithms“. *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.12 (2020), S. 5845–5860 (zitiert auf Seite 12).

[49] V. Gupta, M. Sharma und N. Thakur. „Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review“. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21.12 (2010), S. 1227–1243 (zitiert auf Seite 13).

[50] L. Guzzella und A. Isidori. „On approximate linearization of nonlinear control systems“. *International journal of robust and nonlinear control* 3.3 (1993), S. 261–276 (zitiert auf Seite 10).

[51] R. T. Haftka und H. M. Adelman. „An analytical investigation of shape control of large space structures by applied temperatures“. *AIAA journal* 23.3 (1985), S. 450–457 (zitiert auf Seite 6).

[52] J. Hauser, S. Sastry und P. Kokotovic. „Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example“. *IEEE transactions on automatic control* 37.3 (1992), S. 392–398 (zitiert auf Seite 10).

[53] J. L. Heidingsfeld, O. Böckmann, M. Schäfer, M. Böhm und O. Sawodny. „Low Order Hybrid Model for Control Design of an Adsorption Facade System for Solar Cooling“. *IEEE Conference on Control Technology and Application*. 2022 (zitiert auf Seite 2).

[54] M. Heidingsfeld. *Modellierung, Systemanalyse und Regelung adaptiver Tragwerke am Beispiel von Seilfassaden*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 2018 (zitiert auf Seiten 31, 83, 93, 119, 128).

[55] M. Heidingsfeld, P. Rapp, M. Böhm und O. Sawodny. „Gramian-based Actuator Placement with Spillover Reduction for Active Damping of Adaptive Structures“. *Proc. of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Munich, 2017, S. 904–909 (zitiert auf Seite 12).

[56] C. Himpe. „emgr—The Empirical Gramian Framework“. *Algorithms* 11.7 (2018), S. 91 (zitiert auf Seite 100).

[57] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. 1975 (zitiert auf Seite 83).

[58] H. Hotelling. „Analysis of a complex of statistical variables into principal components“. *Journal of educational psychology* 24.6 (1933), S. 417 (zitiert auf Seite 56).

[59] G. Housner, L. Bergman, T. Caughey, A. Chassiakos, R. Claus, S. Masri, R. Skelton, T. Soong, B. Spencer und J. Yao. „Structural Control: Past, Present, and Future“. *Journal of engineering mechanics* (1997) (zitiert auf Seite 3).

[60] W. C. Hurty. „Dynamic analysis of structural systems using component modes“. *AIAA journal* 3.4 (1965), S. 678–685 (zitiert auf Seite 70).

[61] A. Hurwitz. „Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt“. 46 (1985), S. 273–284 (zitiert auf Seite 76).

[62] H. Irschik und M. Nader. „Actuator placement in static bending of smart beams utilizing Mohr's analogy“. *Engineering Structures* 31.8 (2009), S. 1698–1706 (zitiert auf Seite 14).

[63] H. Irschik. „A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation“. *Engineering Structures* 24.1 (2002), S. 5–11 (zitiert auf Seite 6).

[64] H. Irschik und F. Ziegler. „Eigenstrain without stress and static shape control of structures“. *AIAA journal* 39.10 (2001), S. 1985–1990 (zitiert auf Seite 6).

[65] A. Isidori und A. Ruberti. „On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems“. *Systems & Control Letters* 4.1 (1984), S. 17–22 (zitiert auf Seite 9).

[66] B. Jakubczyk u. a. „On linearization of control systems“. *Bulletindel Academic Polonaise Sciences, Serie Sciences Mathematiques* 28.1 (1980), S. 517–522 (zitiert auf Seite 9).

[67] R. E. Kalman. „On the general theory of control systems“. *Proceedings First International Conference on Automatic Control, Moscow*. 1960, S. 481–492 (zitiert auf Seite 96).

[68] K. Karhunen. *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Band 37. Universitat Helsinki, 1946, S. 3–79 (zitiert auf Seite 56).

[69] C. Kelleter, T. Burghardt, H. Binz, L. Blandini und W. Sobek. „Adaptive Concrete Beams Equipped With Integrated Fluidic Actuators“. *Frontiers in Built Environment* 6 (2020) (zitiert auf Seite 24).

[70] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. F. Vakakis und L. A. Bergman. „The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview“. *Nonlinear dynamics* 41.1 (2005), S. 147–169 (zitiert auf Seite 57).

[71] G. Kerschen, M. Peeters, J.-C. Golinval und A. F. Vakakis. „Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist“. *Mechanical systems and signal processing* 23.1 (2009), S. 170–194 (zitiert auf Seite 52).

[72] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Band 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002 (zitiert auf Seiten 52, 76, 157).

[73] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt und M. P. Vecchi. „Optimization by simulated annealing“. *Science* 220.4598 (1983), S. 671–680 (zitiert auf Seite 83).

[74] U. Kirsch und F. Moses. „Optimization of structures with control forces and displacements“. *Engineering Optimization* 3.1 (1977), S. 37–44 (zitiert auf Seite 6).

[75] B. Klein. *Leichtbau-Konstruktion*. Springer, 2009 (zitiert auf Seite 1).

[76] T. Kleine, J. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Optimal Actuator Placement and Static Load Compensation for a Class of Distributed Parameter Systems“. *at-Automatisierungstechnik* 69.9 (2021), S. 739–749 (zitiert auf Seiten 15, 46, 115).

[77] N. E. Klepeis, W. C. Nelson, W. R. Ott, J. P. Robinson, A. M. Tsang, P. Switzer, J. V. Behar, S. C. Hern und W. H. Engelmann. „The National Human Activity Pattern Survey (NHAPS): a resource for assessing exposure to environmental pollutants“. *Journal of Exposure Science & Environmental Epidemiology* 11.3 (2001), S. 231–252 (zitiert auf Seite 1).

[78] T. Kobori, N. Koshika, K. Yamada und Y. Ikeda. „Seismic-response-controlled structure with active mass driver system. Part 1: Design“. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 20.2 (1991), S. 133–149 (zitiert auf Seite 8).

[79] S. Korkmaz. „A review of active structural control: challenges for engineering informatics“. *Computers & Structures* 89.23-24 (2011), S. 2113–2132 (zitiert auf Seiten 3, 4).

[80] C. Kravaris und M. Soroush. „Synthesis of multivariable nonlinear controllers by input/output linearization“. *AIChE Journal* 36.2 (1990), S. 249–264 (zitiert auf Seite 10).

[81] A. J. Krener. „Approximate linearization by state feedback and coordinate change“. *Systems & Control Letters* 5.3 (1984), S. 181–185 (zitiert auf Seite 11).

[82] J. B. Kruskal. „On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem“. *Proceedings of the American Mathematical society* 7.1 (1956), S. 48–50 (zitiert auf Seite 83).

[83] S. Küchler. *Aktive Seegangskompensation mit beobachtergestützter Prognose der vertikalen Schiffsbewegung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 2012 (zitiert auf Seite 4).

[84] S. Lall, J. E. Marsden und S. Glavaški. „Empirical model reduction of controlled nonlinear systems“. *Proceedings of the 14th World Congress* 32.2 (1999), S. 2598–2603 (zitiert auf Seite 100).

[85] A. Land und A. Doig. „An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems“. *Econometrica* 28.3 (1960), S. 497 (zitiert auf Seite 83).

[86] D. A. Lawrence und W. J. Rugh. „Input-output pseudolinearization for nonlinear systems“. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.11 (1994), S. 2207–2218 (zitiert auf Seite 10).

[87] R. E. Lindberg Jr. *Actuator-Placement Considerations for the Control of Large Space Structures.* Techn. Ber. NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC, 1983 (zitiert auf Seite 11).

[88] K. Linkwitz. „Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme“. Dissertation. Technische Hochschule München, 1996 (zitiert auf Seite 162).

[89] L. Litz. „Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz-Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege“. *Regelungstechnik* 31.5 (1983), S. 148–158 (zitiert auf Seite 98).

[90] W. Liu, Z. Hou und M. A. Demetriou. „A computational scheme for the optimal sensor/actuator placement of flexible structures using spatial H2 measures“. *Mechanical systems and signal processing* 20.4 (2006), S. 881–895 (zitiert auf Seite 13).

[91] X. Liu, T. Schauer, A. Goldack, A. Bleicher und M. Schlaich. „Accelerometer-based estimation and modal velocity feedback vibration control of a stress-ribbon bridge with pneumatic muscles“. *Journal of Physics: Conference Series*. Band 744. 1. IOP Publishing. 2016, S. 012041 (zitiert auf Seite 9).

[92] Z.-S. Liu, D.-J. Wang, H.-C. Hu und M. Yu. „Measures of modal controllability and observability in vibration control of flexible structures“. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 17.6 (1994), S. 1377–1380 (zitiert auf Seite 11).

[93] M. Loève. „Fonctions Aléatoires du Second Ordre“. *Processus stochastiques et mouvement Brownien* (1948). Herausgegeben von P. Levy (zitiert auf Seite 56).

[94] R. Ma, K. Bi und H. Hao. „Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review“. *Engineering Structures* 243 (2021), S. 112655 (zitiert auf Seite 8).

[95] J. C. Maxwell. „L. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182 (1864), S. 294–299 (zitiert auf Seite 161).

[96] W. D. Middleton. *In the Wake of Tacoma: Suspension Bridges and the Quest for Aerodynamic Stability*. 2003 (zitiert auf Seite 7).

[97] C. Moler und C. Van Loan. „Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later“. *SIAM review* 45.1 (2003), S. 3–49 (zitiert auf Seite 97).

[98] K. Morris und S. Yang. „Comparison of actuator placement criteria for control of structures“. *Journal of Sound and Vibration* 353 (2015), S. 1–18 (zitiert auf Seite 11).

[99] P. C. Müller und H. I. Weber. „Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical Systems“. *Automatica* 8.3 (1972), S. 237–246 (zitiert auf Seiten 98, 111).

[100] G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey und M. L. Fisher. „An analysis of approximations for maximizing submodular set functions—I“. *Mathematical programming* 14.1 (1978), S. 265–294 (zitiert auf Seiten 83, 99).

[101] S. Neuhäuser. „Untersuchungen zur Homogenisierung von Spannungsfeldern bei adaptiven Schalentragwerken mittels Auflagerverschiebung“. Dissertation. Universität Stuttgart, 2014 (zitiert auf Seiten 7, 118).

[102] S. Neuhäuser, W. Haase, M. Weickgenannt und O. Sawodny. „Adaptive Tragwerke–Aktuelle Forschungen im Ultraleichtbau“. *Stahlbau* 82.6 (2013), S. 428–437 (zitiert auf Seite 7).

[103] J. Nocedal und S. J. Wright. *Numerical Optimization*. 2. Auflage. New York: Springer, 2006 (zitiert auf Seite 112).

[104] H. Nyquist. „Certain Topics in Telegraph Transmission Theory“. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47.2 (1928), S. 617–644 (zitiert auf Seite 63).

[105] A. Olshevsky. „On (non) supermodularity of average control energy“. *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 5.3 (2017), S. 1177–1181 (zitiert auf Seite 99).

[106] J. Onoda und Y. Hanawa. „Optimal locations of actuators for statistical static shape control of large space structure-A comparison of approaches“. *33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 1992, S. 2558 (zitiert auf Seite 12).

[107] A. Ostertag, F. Schlegl, A. Gienger, J. Wagner, M. Dazer, B. Bertsche, S. Albrecht, P. Leistner, C. Tarín und O. Sawodny. „Reliable Design of Adaptive Load-bearing Structures with Focus on Sustainability“. *Proc. of the European Safety and Reliability Conf. and the Probabilistic Safety Assessment and Management Conf.* 2020 (zitiert auf Seite 15).

[108] K. Pearson. „LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space“. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.11 (1901), S. 559–572 (zitiert auf Seite 56).

[109] S. Pellegrino und C. R. Calladine. „Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks“. *International Journal of Solids and Structures* 22.4 (1986), S. 409–428 (zitiert auf Seite 161).

[110] R. Penrose. „A Generalized Inverse for Matrices“. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. Band 51. 3. Cambridge University Press. 1955, S. 406–413 (zitiert auf Seite 175).

[111] S. Prajna. „POD model reduction with stability guarantee“. *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*. Band 5. IEEE. 2003, S. 5254–5258 (zitiert auf Seite 76).

[112] A. Preumont. *Vibration control of active structures*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011 (zitiert auf Seiten 5, 127).

[113] A. Prieto, U. Knaack, T. Auer und T. Klein. „Solar coolfacades: Framework for the integration of solar cooling technologies in the building envelope“. *Energy* 137 (2017), S. 353–368 (zitiert auf Seite 2).

[114] U. N. E. Programme. „2021 GLOBAL STATUS REPORT FOR BUILDINGS AND CONSTRUCTION. Towards a zero-emissions, efficient and resilient buildings and construction sector“ (2020) (zitiert auf Seite 1).

[115] U. N. E. Programme. „2021 GLOBAL STATUS REPORT FOR BUILDINGS AND CONSTRUCTION. Towards a zero-emissions, efficient and resilient buildings and construction sector“ (2021) (zitiert auf Seite 1).

[116] F. Rahimi, R. Aghayari und B. Samali. „Application of tuned mass dampers for structural vibration control: a state-of-the-art review“. *Civil Engineering Journal* (2020), S. 1622–1651 (zitiert auf Seite 8).

[117] P. Rapp, M. Heidingsfeld, M. Böhm, O. Sawodny und C. Tarín. „Multimodal sensor fusion of inertial, strain, and distance data for state estimation of adaptive structures using particle filtering“. *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. IEEE. 2017, S. 921–928 (zitiert auf Seiten 12, 77).

[118] C. Reboulet und C. Champetier. „A new method for linearizing nonlinear systems: the pseudolinearization“. *Internation Journal of Control* 40.4 (1984), S. 631–638 (zitiert auf Seite 10).

[119] A. Reinhorn, T. Soong, M. Riley, R. Lin, S. Aizawa und M. Higashino. „Full-scale implementation of active control. II: installation and performance“. *Journal of Structural Engineering* 119.6 (1993), S. 1935–1960 (zitiert auf Seite 8).

[120] R. Rothfuß, J. Rudolph und M. Zeitz. „Flachheit: ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme“. *at-Automatisierungstechnik* 45.11 (1997), S. 517–525 (zitiert auf Seite 10).

[121] T. E. Saaed, G. Nikolakopoulos, J.-E. Jonasson und H. Hedlund. „A state-of-the-art review of structural control systems“. *Journal of Vibration and Control* 21.5 (2015), S. 919–937 (zitiert auf Seite 3).

[122] M. Salama, J. Umland, R. Bruno und J. Garba. „Shape adjustment of precision truss structures: analytical and experimental validation“. *Smart Materials and Structures* 2.4 (1993), S. 240–248 (zitiert auf Seite 12).

[123] E. D. Sanders, A. S. Ramos und G. H. Paulino. „Topology optimization of tension-only cable nets under finite deformations“. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 62.2 (2020), S. 559–579 (zitiert auf Seite 4).

[124] K. Schmidt. *Störgrößenkompensation und Strahlformung in adaptiven Hochleistungslasern durch deformierbare Spiegel*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 2020 (zitiert auf Seite 110).

[125] J. Schoeftner, G. Buchberger, A. Brandl und H. Irschik. „Theoretical prediction and experimental verification of shape control of beams with piezoelectric patches and resistive circuits“. *Composite Structures* 133 (2015), S. 746–755 (zitiert auf Seite 6).

[126] R. C. Selga, B. Lohmann und R. Eid. „Stability preservation in projection-based model order reduction of large scale systems“. *European journal of control* 18.2 (2012), S. 122–132 (zitiert auf Seite 76).

[127] G. Senatore. „Adaptive building structures“. Dissertation. University College London, 2016 (zitiert auf Seite 7).

[128] M. Sener, S. Utku und B. K. Wada. „Geometry control in prestressed adaptive space trusses“. *Smart materials and structures* 3.2 (1994), S. 219 (zitiert auf Seite 12).

[129] C. E. Shannon. „A Mathematical Theory of Communication“. *The Bell system technical journal* 27.3 (1948), S. 379–423 (zitiert auf Seite 63).

[130] H.-R. Shih, J. Watkins und H.-S. Tzou. „Displacement control of a beam using photostrictive optical actuators“. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 16.4 (2005), S. 355–363 (zitiert auf Seite 14).

[131] M. C. Smith. „Synthesis of mechanical networks: the inerter“. *IEEE Transactions on automatic control* 47.10 (2002), S. 1648–1662 (zitiert auf Seite 8).

[132] W. Sobek. „Ultra-lightweight construction“. *International Journal of Space Structures* (2016) (zitiert auf Seite 1).

[133] W. Sobek und P. Teuffel. „Adaptive systems in architecture and structural engineering“. *Smart Structures and Materials 2001: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways*. Band 4330. International Society for Optics und Photonics. 2001, S. 36–45 (zitiert auf Seiten 3, 6).

[134] T. Soong, A. Reinhorn, Y.-P. Wang und R. Lin. „Full-scale implementation of active control. I: Design and simulation“. *Journal of Structural Engineering* 117.11 (1991), S. 3516–3536 (zitiert auf Seiten 4, 8).

[135] B. Spencer Jr und S. Nagarajaiah. „State of the Art of Structural Control“. *Journal of structural engineering* (2003) (zitiert auf Seiten 3, 7).

[136] B. Stellato, G. Banjac, P. Goulart, A. Bemporad und S. Boyd. „OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs“. *Mathematical Programming Computation* 12.4 (2020), S. 637–672 (zitiert auf Seite 134).

[137] J. Stiefelmaier, A. Gienger, M. Böhm, O. Sawodny und C. Tarín. „Sensor Placement for Qualitative Fault Diagnosability in Large-Scale Adaptive Structures“. *International Conference on Mechatronics, Robotics and Systems Engineering*. IEEE. 2021 (zitiert auf Seite 77).

[138] D. Ströbel. „Die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf elastomechanische Systeme“. Dissertation. Universität Stuttgart, 1995 (zitiert auf Seiten 77, 162).

[139] T. H. Summers, F. L. Cortesi und J. Lygeros. „On submodularity and controllability in complex dynamical networks“. *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 3.1 (2015), S. 91–101 (zitiert auf Seite 99).

[140] R. Swischuk, L. Mainini, B. Peherstorfer und K. Willcox. „Projection-based model reduction: Formulations for physics-based machine learning“. *Computers & Fluids* (2018) (zitiert auf Seite 65).

[141] P. Teuffel. „Entwerfen adaptiver Strukturen“. Dissertation. Universität Stuttgart, 2004 (zitiert auf Seite 6).

[142] S. Timoshenko. *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. Courier Corporation, 1983 (zitiert auf Seite 47).

[143] United Nations Department of Economic and Social Affairs. „World population prospects 2022“ (2022) (zitiert auf Seite 1).

[144] M. von Scheven, E. Ramm und M. Bischoff. „Quantification of the redundancy distribution in truss and beam structures“. *International Journal of Solids and Structures* 213 (2021), S. 41–49 (zitiert auf Seiten 77, 162, 166).

[145] A. Wächter und L. T. Biegler. „On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming“. *Mathematical Programming* 106.1 (2006), S. 25–57 (zitiert auf Seite 121).

[146] J. L. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Nonlinear modeling and control of tension-only elements in adaptive structures“. *SMART, 9th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials*. 2019, S. 90–101 (zitiert auf Seiten 15, 26, 51, 118).

[147] J. L. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Decentralized Control Design for Adaptive Structures with Tension-only Elements“. *IFAC-PapersOnLine* 53.2 (2020), S. 8370–8376 (zitiert auf Seiten 15, 51, 66, 71, 140).

[148] J. L. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Decentralized structural control using Craig-Bampton reduction and local controller design“. *Proceedings of the International Conference on Industrial Design*. 2020 (zitiert auf Seiten 15, 51, 66, 68, 140).

[149] J. L. Wagner, J. Gade, M. Heidingsfeld, F. Geiger, M. von Scheven, M. Böhm, M. Bischoff und O. Sawodny. „On steady-state disturbance compensability for actuator placement in adaptive structures“. *at-Automatisierungstechnik* 66.8 (2018), S. 591–603 (zitiert auf Seiten 15, 26, 52, 82, 95, 162).

[150] J. L. Wagner, A. Gienger, C. Stein, P. Arnold, C. Tarín, O. Sawodny und M. Böhm. „Optimal Static Load Compensation With Fault Tolerance in Nonlinear Adaptive Structures Under Input and State Constraints“. *Frontiers in Built Environment* 6 (2020) (zitiert auf Seiten 15, 26, 117).

[151] J. L. Wagner, K. Schmidt, M. Böhm und O. Sawodny. „Optimal Actuator Placement and Static Load Compensation for Euler-Bernoulli Beams with Spatially Distributed Inputs“. *8th IFAC Symposium on Mechatronic Systems, MECHATRONICS*. Band 52. 2019, S. 489–494 (zitiert auf Seiten 15, 26, 82).

[152] J. L. Wagner, M. Böhm, C. Honold, T. Burghardt, W. Haase, O. Sawodny, H. Binz und W. Sobek. *Adaptives Tragwerk mit vollintegrierter Aktorik*. Patent. Universität Stuttgart, 2018 (zitiert auf Seiten 15, 18).

[153] J. L. Wagner, M. Böhm, C. Honold, T. Burghardt, W. Haase, O. Sawodny, H. Binz und W. Sobek. *Tragwerk mit adaptiven Aussteifungselementen*. Patent. Universität Stuttgart, 2019 (zitiert auf Seiten 15, 19).

[154] J. L. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Gramian-based actuator placement for static load compensation in adaptive structures“. *GACM Colloquium on Computational Mechanics*. 2017 (zitiert auf Seiten 15, 82).

[155] J. L. Wagner, M. Böhm und O. Sawodny. „Model-Based Control of Integrated Fluidic Actuators for Adaptive Structures“. *13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*. 2018 (zitiert auf Seite 15).

[156] J. L. Wagner, A. G. C. Stein, P. Arnold, C. Tarín, O. Sawodny und M. Böhm. „Optimal Static Load Compensation for Nonlinear Adaptive Structures“. *14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*. 2020 (zitiert auf Seite 15).

[157] A. Warsewa. *Energy-based modeling and decentralized observers for adaptive structures*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 2021 (zitiert auf Seiten 42, 118).

[158] A. Warsewa, J. L. Wagner, M. Böhm, O. Sawodny und C. Tarín. „Decentralized LQG control for adaptive high-rise structures“. *IFAC-PapersOnLine* 53.2 (2020), S. 9131–9137 (zitiert auf Seite 15).

[159] A. Warsewa, M. Böhm, F. Guerra, J. L. Wagner, T. Haist, C. Tarín und O. Sawodny. „Self-tuning state estimation for adaptive truss structures using strain gauges and camera-based position measurements“. *Mechanical Systems and Signal Processing* 143 (2020) (zitiert auf Seiten 15, 23, 77).

[160] A. Warsewa, J. L. Wagner, M. Böhm, O. Sawodny und C. Tarín. „Networked Decentralized Control for Adaptive Structures“. *Journal of Communications* 15.6 (2020), S. 496–502 (zitiert auf Seite 15).

[161] M. Weickgenannt. *Konzepte zur modellbasierten Regelung adaptiver Schalentragwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 2013 (zitiert auf Seiten 9, 118).

[162] S. Weidner, C. Kelleter, P. Sternberg, W. Haase, F. Geiger, T. Burghardt, C. Honold, J. Wagner, M. Böhm, M. Bischoff, O. Sawodny und H. Binz. „The implementation of adaptive elements into an experimental high-rise building“. *Steel Construction* 11.2 (2018), S. 109–117 (zitiert auf Seite 15).

[163] A. Weilandt. „Adaptivität bei Flächentragwerken“. Dissertation. Universität Stuttgart, 2008 (zitiert auf Seite 6).

[164] E. T. Whittaker. „XVIII.— On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory“. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 35 (1915), S. 181–194 (zitiert auf Seite 63).

[165] M. Yamamoto und T. Sone. „Behavior of active mass damper (AMD) installed in high-rise building during 2011 earthquake off Pacific coast of Tohoku and verification of regenerating system of AMD based on monitoring“. *Structural Control and Health Monitoring* 21.4 (2014), S. 634–647 (zitiert auf Seiten 3, 8).

[166] J. Yao. „Concept of Structural Control“. *ASCE Journal of the Structural Division* 98.07 (1972), S. 1567–1574 (zitiert auf Seite 3).

[167] S. M. Zahrai, S. A. Mousavi und M. Saatcioglu. „Analytical study on seismic behavior of proposed hybrid tension-only braced frames“. *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 26.3 (2017), e1310 (zitiert auf Seite 4).

[168] E. Zeidler, H. Schwarz, W. Hackbusch, B. Luderer, J. Blath, A. Schied, S. Dempe, G. Wanka und S. Hromkovic J. Gottwald. *Springer-Taschenbuch der Mathematik. Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew, Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler*. Herausgegeben von E. Zeidler. Springer-Verlag, 2013 (zitiert auf Seite 78).

[169] J. Zhang, Y. Zhu, Z. Li und J. Tu. „Research on Optimal Placement of Actuators of High-Rise Buildings Considering the Influence of Seismic Excitation on Structural Modes“. *Buildings* 12.1 (2021), S. 8 (zitiert auf Seite 12).

[170] R. Zurmühl. *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964 (zitiert auf Seite 97).