

Faltungskalkül mit translationsinvarianten Amalgamräumen von Distributionen auf Euklidischen Räumen

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Tillmann Maximilian Kleiner

aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
Mitberichter:	Prof. Dr. M. Griesemer
Externer Mitberichter:	Prof. Dr. C. Bargetz
Tag der mündlichen Prüfung:	16. Oktober 2023

Institut für Computerphysik

Universität Stuttgart

2024

Danksagung

Zuallererst möchte ich meinem Betreuer Rudolf Hilfer meinen herzlichsten Dank aussprechen, für die Vergabe eines besonders spannenden Forschungsthemas, die weise Beratung und tatkräftige Unterstützung in meiner Forschungsarbeit und seine aufrichtige Begeisterung für die erzielten Resultate. Das alles hat mich sehr motiviert, mir erlaubt meine Forschungsziele selbstständig zu setzen und meine Arbeitsmethoden selbst zu wählen, mit sehr zufriedenstellenden Ergebnissen.

Bei meiner Arbeit bin ich von zahlreichen Kollegen aus der Mathematik und der Physik nicht nur fachlich und anderweitig inspiriert worden, sondern hatte mit ihnen auch eine richtig gute Zeit am Institut für Computerphysik! Dabei richtet sich mein Dank besonders an all die Aarons von Aarons United und an alle meine Musikerkollegen, speziell Tobi und Konrad von ICPain, die mir stets klangvoll mit Gitarre, Bass und Keyboard, und manchmal sogar mit Gesang, im Seminarraum zur Seite standen. Insbesondere auch an Christian Holm, der die musikalischen Aktivitäten (und in Büros herumfahrende Ausrüstung) seiner Institutsmitglieder stets wohlwollend geduldet und manchmal sogar mit Gitarre, Gesang und Mundharmonika unterstützt hat.

Hinter einer erfolgreichen Promotion steht meist auch eine unterstützende Familie, und das ist in meinem Fall nicht anders! Ganz besonders danke ich meinen Eltern für die ununterbrochene Unterstützung meines Studiums und meines Promotionsvorhabens. Es ist auch die Sicherheit und die moralische Unterstützung im Hintergrund, die mir erleichtert hat der Mathematik (und der Physik) so viel Aufmerksamkeit zu schenken, ohne dabei meine Drums zu vergessen.

Zusammenfassung

Modelle von linearen Medien mit fraktionaler Dynamik, deren Beschreibung auf fraktionalen Anfangswertproblemen beruht, werden als Faltungsgleichungen auf der ganzen reellen Achse mathematisch neu betrachtet. Als Bereich für diese wird ein Distributionenraum konstruiert der Relaxations- und Oszillationsprozesse abdeckt und die eindeutige Lösbarkeit der Faltungsgleichungen in beide Richtungen garantiert. Im Zuge dessen werden erstmals Definitionsbereiche kausaler fraktionaler Ableitungen unter Verwendung des allgemeinen Konzepts der Faltung von Distributionen von Laurent Schwartz erweitert.

Die Beschreibung adäquater lokalkonvexer Topologien auf den dabei auftretenden Distributionenräumen erwies sich als schwierig da sich dazu mehrere Ansätze anboten, deren Äquivalenz ein nicht triviales Resultat ist. Mit dem Ziel solche Probleme systematisch zu lösen wurde die Untersuchung einer allgemeinen Klasse von Distributionenräumen, den Amalgamräumen, zum Hauptanliegen dieser Doktorarbeit.

Amalgamräume sind translationsinvariante Banach-Funktionenräume die aus einer globalen und einer lokalen Komponente zusammengesetzt werden. In dieser Arbeit wird dieses Konzept erweitert um eine vereinheitlichte Beschreibung bekannter und neu eingeführter lokalkonvexer Distributionenräume zu erhalten, die auch deren Anwendung erleichtert. Dazu wird der Raum der Distributionen oder der Raum der glatten Funktionen als lokale Komponente genutzt. Als globale Komponente werden Räume von signierten Radon-Maßen auf dem Euklidischen Raum oder von Funktionen auf dem Standardgitter eingesetzt an die nur Soliditäts- und Translationsinvarianzbedingungen gestellt werden. Wie bewiesen wird enthält die neu eingeführte Klasse von Räumen viele der von Laurent Schwartz eingeführten Räume. Sowie gewichtete Varianten, welche Gegenstand aktueller Forschung sind und häufig in Anwendungen auftreten.

Die Korrespondenzen von Amalgamräumen zu deren globalen Komponenten werden umfassend charakterisiert und als kommutatives Diagramm dargestellt. Im Zuge des-

sen wird die Äquivalenz von Amalgamräumen zu entsprechenden Konvolutorenräumen oder Faltungsbildern bewiesen. Weiter werden Isomorphismen von Amalgamräumen zu Räumen von Doppelfolgen auf dem Standardgitter aufgestellt. Damit werden die Valdivia-Vogt-Strukturtafeln erweitert, die Darstellungen dieser Art enthalten.

Aufbauend auf den Korrespondenzen wird die Vererbung von Eigenschaften der globalen Komponente untersucht. Dies betrifft die Gewichtung von Räumen, globale Approximationseigenschaften und die Gestalt kompakter Teilmengen. Ein für Anwendungen besonders nützlich Resultat ist die Vererbung von Stetigkeits- und Beschränktheitseigenschaften der allgemeinen Faltung von Distributionen.

Faltungsvollkommene Räume sind eine spezielle Klasse von Amalgamräumen die als größtmögliche Definitionsbereiche gegebener Mengen von Faltungsoperatoren entstehen, wenn diese durch die allgemeine Faltung von Distributionen realisiert werden. Diese Räume werden als Grundlage zur Entwicklung eines Kalküls von extremalen Definitions-, Werte- und Operationsbereichen verwendet. Die algebraisch-ordnungstheoretische Struktur dieses Kalküls wird quantaltheoretisch interpretiert. Der Kalkül wird auf kausale fraktionale Integrale und Ableitungen, auf die anfangs genannten Faltungsgleichungen und auf den fraktionalen negativen Laplace-Operator angewendet.

Abstract

Models of linear media with fractional dynamics, the description of which relies on fractional initial value problems, are reconsidered mathematically as convolution equations on the whole real axis. As domain for these a distribution space is constructed that covers relaxation and oscillation processes and guarantees the unique solvability of the equation in both directions. In this turn, domains of causal fractional derivatives are extended by using the general concept of convolution of distributions by Laurent Schwartz for the first time.

The description of adequate locally convex topologies on the arising distribution spaces turned out to be complicated due to multiple possible approaches, the equivalence of which being a non-trivial result. With the goal to solve such problems systematically the investigation of a general class of distribution spaces, the amalgam spaces, became the main subject of this thesis.

Amalgam spaces are translation invariant Banach function spaces that are composed of a global and a local component. In this work, the concept is extended in order to obtain a unified description of well known and newly introduced locally convex distribution spaces, which also facilitates their application. For this the space of distributions or the space of smooth functions is deployed as local component. As global component, spaces of signed Radon measures on Euclidean space or of functions on the standard lattice are deployed. Only solidity and translation invariance conditions are imposed on these. It is proved that this new class of spaces includes many of the spaces introduced by Laurent Schwartz. As well as weighted variants of these, which are subject to current research and frequently appear in applications.

The correspondences of amalgam spaces to their global components are comprehensively characterized and presented as a commutative diagram. In this turn, the equivalence of amalgam spaces to corresponding convolutor spaces or inverse images with respect to convolution are proved. Furthermore, isomorphisms of amalgam spaces to

spaces of double sequences on the standard lattice are established. These extend the Valdivia-Vogt structure tables, that contain representations of this kind.

Building on the correspondences, the inheritance of properties of the global component is examined. This concerns the weighting of spaces, global approximation properties and the shape of compact subsets. A result which is particularly useful for applications is the inheritance of continuity and boundedness properties of the general convolution of distributions.

Convolutionally perfect spaces are a special class of amalgam spaces that emerge as largest possible domains of given sets of convolution operators when these are realised using the general convolution of distributions. These spaces are used as the basis for the development of a calculus of extremal spaces as domains, codomains and domains of operation. The algebraic and order theoretic structure of this calculus is interpreted with reference to quantale theory. The calculus is applied to fractional integrals and derivatives, to the initially mentioned convolution equations and to the fractional negative Laplacian.

Mathematische Symbole

Notationen für Zahlenbereiche:

$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	ganze, reelle, komplexe Zahlen
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	natürliche Zahlen, mit Null
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{0+}$	positive, nichtnegative reelle Zahlen
$[a, b],]a, b[$	abgeschlossenes, offenes Intervall
$\mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$	reelle, komplexe Zahlen ohne Null
$\mathbb{H}, \overline{\mathbb{H}}$	offene, abgeschlossene rechte komplexe Halbebene
$\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$	nichtnegative erweiterte, reelle Zahlen ($0 \cdot \infty = 0$)

Einige Standardoperationen:

$\lceil x \rceil$	nächstgrößere ganze Zahl als $x \in \mathbb{R}$
$\Re z, \Im z$	Real-, Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
$ z $	Absolutwert von $z \in \mathbb{C}$
$\ x\ $	Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^d \dots$
$x^2 := x ^2$	\dots zum Quadrat

Spezielle Zahlen oder Funktionen:

e	Eulersche Zahl
$\log z$	natürlicher Logarithmus von z
$\binom{\alpha}{k}$	Binomialkoeffizient $\alpha \in \mathbb{C}$ über $k \in \mathbb{N}_0$
$\Gamma(z), \psi(z)$	Gamma-, Psi-Funktion von $z \in \mathbb{C}$

Operationen auf Funktionen:

$\check{f}, T_x f$	Spiegelung, Translation um $x \in \mathbb{R}^d$ von f
$ \mu $	Absolutwert vom Radon-Maß μ
$f^{(\alpha)} = \partial^\alpha f$	partielle Ableitung von f mit Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$
$\text{supp } f$	Träger von f
$f _A$	Einschränkung der Funktion f auf A

Notationen zur Faltung:

$*$	\mathcal{D}' -, ω -, \mathcal{I}_+ - oder $\bar{\omega}_+$ -Faltung	S. 29, 37, 196
f^{*p}, f^{*-1}	p -te Faltungspotenz, -inverse von $f \in \mathcal{D}'_+$	
$f \not\star g := f * g^{*-1}$	Faltungsquotient von $f, g \in \mathcal{D}'_+$	
$ f _{*\Phi}$	Faltungshalbnormfunktion von f mit Index Φ	S. 12, 25, 139
$*^p$	potenzierte Faltung ($1 \leq p < \infty$)	S. 100
$\blacksquare = *^\infty$	Supremalfaltung	S. 46ff, 100, 196
\square	Infimalfaltung	S. 103

Spezielle Distributionen und Funktionen:

1_M	Indikatorfunktion der Menge M	
φ^Δ	Kodiagonalfunktion ($\varphi^\Delta(x, y) := \varphi(x + y)$)	S. 28f
δ, δ_x	Diracsche Delta-Funktion, bei $x \in \mathbb{R}^d$	
$\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot)$	kanonische Einbettung $\omega \rightarrow \mathcal{D}'$	S. 135
Y_α	kausale potenzartige Distribution, Index $\alpha \in \mathbb{C}$	S. 4f, 10, 53
$Y = Y_1$	Heaviside-Funktion	S. 8
R_α	Riesz-Potential mit Index $\alpha \in \mathbb{C}$	S. 66
$\mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}]$	von $Y_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ erzeugte Faltungsalgebra	S. 60
$\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$	von $Y_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ in \mathcal{D}'_+ erzeugter Faltungskörper	S. 61

Einige elementare Funktionenräume über \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$ die in Unterabschnitt III.3.a, teilweise auch in Unterabschnitt II.1.a, diskutiert werden:

$\mathcal{E}, \mathcal{D}' (\mathcal{D}, \mathcal{E}')$	glatte Funktionen, Distributionen (mit komp. Träger)
$\mathcal{C}, \mathcal{K}' (\mathcal{K}, \mathcal{C}')$	stetige Funktionen, Radon-Maße (mit komp. Träger)
$L^p_{\text{lok}} (L^p_{\text{cs}})$	lokale L^p -Funktionen (mit komp. Träger)

Funktionenräume die vor allem in Unterabschnitt II.1.a und II.1.b diskutiert werden:

\mathcal{D}^F	Testfunktionen mit projektiver Topologie	S. 20f
\mathcal{D}'^F	Distributionen endlicher Ordnung	S. 20f
$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$	Schwartz-Raum, temperierte Distributionen	S. 20f
$\mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_M$	Multiplikatoren von \mathcal{S} , Dualraum davon	S. 20f
$\mathcal{O}'_C, \mathcal{O}_C$	Konvolutoren von \mathcal{S} , Dualraum davon	S. 22
\mathcal{C}^m	m -fach stetig differenzierbare Funktionen	
$\mathcal{C}_0, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$	im unendlichen verschwindende $f \in \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{D}'$	S. 20f, 22
$\mathcal{C}_b, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$	uniform beschränkte $f \in \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{D}'$	S. 20, 98
$\mathcal{C}_{b,s}, \mathcal{B}_c$	der Raum $\mathcal{C}_b, \mathcal{B}$ mit strikter Topologie	S. 98
L^p	Lebesgue-Raum mit $1 \leq p \leq \infty$	
$\mathcal{D}_{L^p}, \mathcal{D}'_{L^p}$	L^p -artige Funktionen $f \in \mathcal{E}, \mathcal{D}'$	S. 20
\mathcal{M}^1	integrierbare Radon-Maße	S. 98
\mathcal{D}'_+	$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $\inf \text{supp } f > -\infty$	S. 53

Einige Folgenräume, die in Unterabschnitt III.3.b beschrieben werden:

ω, ϕ	Raum aller Folgen, abbrechende Folgen
ℓ^p, c_0	p -summierbare Folgen, fallende Folgen
s, s'	schnell fallende, langsam wachsende Folgen

Räume mit $\overline{\mathbb{R}}_+$ -wertigen Funktionen aus Unterabschnitt VI.4.b:

$\overline{\mathcal{F}}_+ (\mathcal{I}_+)$	(unterhalbstetige) Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$
$\overline{\omega}_+$	Folgen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$

Spezielle Gewichte und gewichtete Räume:

$\mathcal{C}_W^m (\mathcal{C}_W, \mathcal{E}_W)$	gewichtete \mathcal{C}^m -Funktionen ($m = 0, \infty$)	S. 58, 20f
P, P^\blacksquare	langsam wachsende, schnell fallende $f \in \mathcal{C}_+$	S. 22, 58
ℓ_μ^p	potenzgewichtete p -summierbare Folgen	S. 37
$\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}, L^p_{\mu, k}$	potenzlogarithmisch gewichtete Räume	S. 32
$\mathcal{D}'_{\mu, k}, \mathcal{D}'_\mu$	Abkürzungen für (Durchschnitte)	S. 55
$\mathcal{D}'_{\mu, \downarrow k}, \mathcal{D}'_{\downarrow \mu}$	potenzlogarithmisch gewichtete(r) Räume	S. 57
$\mathcal{D}_{\mu, k}, \mathcal{D}_\mu$		S. 70
$\mathcal{C}_b (\mathcal{C}_{b,s})$	uniform beschränkte $f \in \mathcal{C}$ (strikte Topologie)	S. 71, 98

Modifikationssymbole für Räume:

$F', F'_\beta, F'_\sigma, F'_\kappa$	Dualraum, mit β -, σ -, κ -Topologie	
F_K, F_{cs}	$f \in F$ mit Träger in K , kompaktem Träger	S. 95
F_{loc}	lokaler Funktionenraum von F	
E_W, F_H, λ_V	Gewichtung von E, F, λ mit $W \subseteq \mathcal{C}_+, H \subseteq \mathcal{E}, V \subseteq \omega_+$	S. 162

Ordnungskategorien von Räumen:

${}_{1ctb}\text{Sub}(\cdot)$	Teilräume mit lokalkonvexer Topologie und einer kompatiblen Bornologie	S. 87
${}_{1ctb}\text{Id}(\cdot)$	Ideale mit lokalkonvex-soliden Topologie und einer kompatiblen soliden Bornologie	S. 87
SRI	SRI-Räume E (kont. glob. Komponenten)	S. 128
sti	STI-Folgenräume λ (diskr. glob. Komponenten)	S. 130
$Q_{\mathcal{D}'}^{**}, Q_\omega^{**}$	Quantal der faltungsvollkommenen Räume $F \subseteq \mathcal{D}', \lambda \subseteq \omega$ mit "0"- und "∞"-Element	S. 47f

Hüllen spezieller Teilmengen, siehe Unterabschnitt III.1.c:

$\text{co}(\cdot), \text{circ}(\cdot), \Gamma(\cdot)$	konvexe, kreisförmige, absolutkonvexe Hülle
$\text{sol}(\cdot), \Gamma_{ \cdot }(\cdot)$	solide, solidkonvexe Hülle

Hüllen spezieller Teilräume und assoziierte Relationen:

$\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{\text{lin}}, \langle \cdot \rangle_{\text{Id}}$	lineare Hülle, Idealhülle	S. 81
$\succsim_{\text{lin}}, \preceq_{\text{lin}}$	erz. gleiche, kleinere lineare Hülle	S. 115
$\langle \cdot \rangle_{\text{CI}}$	Kegelidealhülle	S. 34,79,163
$\succsim_{\text{CI}}, \preceq_{\text{CI}}$	erz. gleiches, kleineres Kegelideal	S. 115
$\langle \cdot \rangle_{\leq}$	abwärtsmonotone Hülle	S. 163

Abbildungen auf oder zwischen Vektorräumen und -verbänden,
siehe in den Unterabschnitten III.1.b und IV.1.a:

$X_{ \cdot }$	Index betont, dass $X_{ \cdot }$ Vektorverband ist	
X_+	nichtnegative Elemente von X	S. 78
$\text{sn} \cdot (\text{lsn} \cdot)$	(Verbands-)Halbnormen	S. 80
$\text{csn} \cdot (\text{clsn} \cdot)$	stetige (Verbands-)Halbnormen	S. 80
$\text{snf}(\cdot, \cdot)$ ($\text{lsnf}(\cdot, \cdot)$)	(Verbands-)Halbnormfunktionen	S. 107
$\text{map}(\cdot, \cdot)$	alle mengentheoretischen Abbildungen	S. 106
$\text{map}(X)$	$:= \text{map}(X, X)$ Selbstabbildungen von X	
$\text{hmg}(\cdot, \cdot)$	positivhomogene Abbildungen	S. 106
$\text{lin}(\cdot, \cdot)$ ($\text{lin}_+(\cdot, \cdot)$)	(positive) lineare Abbildungen	S. 106
$\text{lin}_{ \cdot }(\cdot, \cdot)$	Verbandshomomorphismen	S. 106

Allgemeine Mengensysteme und Bornologien auf lokalkonvexen Räumen,
siehe Unterabschnitt III.2.a:

\emptyset	leere Menge	
$\mathfrak{P}(\cdot), \mathfrak{F}(\cdot)$	Potenzmenge, endliche Teilmengen inkl. \emptyset	
$\mathfrak{S}(\cdot)$ ($\mathfrak{S}^{\text{sol}}(\cdot)$)	(solide) Polytopenbornologie	S. 84
$\mathfrak{B}(\cdot), \mathfrak{K}(\cdot), \text{p}\mathfrak{K}(\cdot)$	beschränkte, rel. kompakte, präkompakte Teilm.	S. 85
$\mathfrak{K}_{\sigma}(\cdot)$	schwach relativ kompakte Teilmengen	
$\mathfrak{T}(\cdot)$	straffe Teilmengen	S. 186
\mathfrak{K}	relativ kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^d	
$\mathcal{T}_X, \mathcal{U}_X, \mathcal{B}_X$	Topologie, Nullumgebungen, Bornologie auf X	S. 85
$\sigma(\mathcal{T})$	von \mathcal{T} abgeleitete schwache Topologie	

Notationen zu Urbildräumen, Amalgamräumen und Verwandtem, die in den Abschnitten II.1-II.3, IV.1 und V.2-V.4 auftauchen:

$\underline{M} X$	Urbildraum von X unter M	S. 111
$\mathcal{L}_T(E), \mathcal{L}_\tau(\lambda)$	Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{L} und kont., disk. globaler Komponente E, λ	S. 131
$\mathcal{D}'_{*Y}(F), \omega_{*Y}(F)$	Faltungsbild von F in \mathcal{D}' , ω bzgl. Y	S. 146, 135
$\mathcal{O}'_C(F, G)$	Raum der Konvolutoren $F \rightarrow G$	S. 26, 147
$\mathcal{E}_{T'}(W)$	ein Raum glatter Funktionen	S. 172
$\lambda\{X\}$	Amalgamraum X -wertiger Folgen mit globaler Komponente λ	S. 149

Notationen zu Faltungsquantalen die vor allem in Abschnitt II.4 auftauchen:

$(F)_{\mathcal{D}'}$	kleinster Amalgamraum der F enthält	S. 43
$ F _{*\mathfrak{B}(\mathcal{D})}^Y$	zu F assoziiertes moderiertes Kegelideal	S. 43
$F^* = (F)_{\mathcal{D}'}, (\lambda)_{\omega}^*$	\mathcal{D}' -, ω -Faltungsdual von $F \subseteq \mathcal{D}'$, $\lambda \subseteq \omega$	S. 41, 42
$F^{**} = (F)_{\mathcal{D}'}, (\lambda)_{\omega}^{**}$	\mathcal{D}' -, ω -Faltungsvervollkommnung	
$A^{*M} = (A)_{\mathcal{D}'}$	assoziertes Faltungsmodul	S. 44
$A^{*A} = (A)_{\mathcal{D}'}$	erz. faltungsvollkommene Faltungsalgebra	S. 45
$F \tilde{*} G$	$:= (F * G)^{**}$ Operation von $Q_{\mathcal{D}'}$ (Q_{ω}^{**})	S. 47
$F \tilde{\neq} G$	Residuum von F über G in $Q_{\mathcal{D}'}$ (Q_{ω}^{**})	S. 48
$\mathfrak{T}^*(\cdot), \mathfrak{B}^*(\cdot)$	normale Topologie, Bornologie	S. 49
$W^{\blacksquare} = (W)_{\mathcal{C}_+}$	\mathcal{C}_+ -Supremalfaltungsdual von $W \subseteq \mathcal{C}_+$	S. 58

Fraktionale Integral- und Ableitungsoperatoren von Ordnung α , die in den Abschnitten I.1, I.2 und II.5 auftauchen:

xI_+^α, xD_+^α	fraktionale(s) Integral, Ableitung auf $\mathbb{R} \dots$	S. 3ff
I_+^α, D_+^α	\dots basierend auf \mathcal{D}' -Faltung	S. 54
$I_{0+}^\alpha, xD_{0+}^\alpha$	fraktionale(s) Integral, Ableitung auf \mathbb{R}_+	S. 6ff
$D_{0+}^{\alpha \gamma}$	fraktionale Ableitung auf \mathbb{R}_+ mit Typ γ	S. 6ff, 72ff
I^α	Riesz-Potentialoperator auf \mathbb{R}^d	S. 66
$(-\Delta)^{\alpha/2}$	fraktionaler negativer Laplace-Operator auf \mathbb{R}^d	S. 66

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung und Motivation	1
I.1. Kausale fraktionale Ableitungen	3
I.2. Modellierung fraktionaler Relaxationen	6
I.3. Forschungsverlauf	9
I.4. Kapitelübersicht	15
II. Übersicht und Einordnung	17
II.1. Charakterisierung von Distributionenräumen	19
II.1.a. Die Ansätze von Laurent Schwartz	19
II.1.b. Charakterisierung als Regularisierungsbilder	21
II.1.c. Amalgamräume	24
II.1.d. Konvolutorenräume	26
II.1.e. Vereinheitlichung mit SRI-Räumen	27
II.2. Faltungen zwischen Distributionenräumen	28
II.2.a. Faltung von Distributionen	28
II.2.b. Regularisierung und Vererbung der Stetigkeit	30
II.2.c. Anwendung auf gewichtete Distributionenräume	31
II.3. Diskrete globale Komponenten	34
II.3.a. Amalgamräume mit diskreten globalen Komponenten	35
II.3.b. Scharfe Stetigkeitskriterien für die Faltung	37
II.3.c. Amalgamräume als Vektor- oder Doppelfolgenräume	38
II.4. Faltungsquantale von Distributionenräumen	40
II.4.a. Faltungsduale und Köthes α -Dual	41
II.4.b. Faltungsmodule und Algebren	44
II.4.c. Extremale Räume für Faltungsinklusionen	46
II.4.d. Universelle Topologien und Bornologien	49

II.4.e. Zwei Eigenschaften faltungsvollkommener Räume	50
II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration	52
II.5.a. Kausale fraktionale Integrale und Ableitungen	52
II.5.b. Fraktionale translationsinvariante lineare Systeme	59
II.5.c. Fraktionaler negativer Laplace als Faltung	65
II.5.d. Fraktionaler negativer Laplace per Transponierung	70
II.5.e. Verallgemeinerte sequentielle Ableitungen	72
III. Grundlagen	75
III.1. Lokalkonvexe Räume und Ordnungslehre	75
III.1.a. Hüllensysteme und extremumsvollständige Mengen	76
III.1.b. Lokalkonvexe Verbände	78
III.1.c. Hüllensysteme über Vektorräumen und -verbänden	81
III.2. Topologisch-bornologische Räume	82
III.2.a. Vektorbornologien auf lokalkonvexen Räumen	83
III.2.b. Ordnungskategorien von Unterräumen und Idealen	87
III.2.c. Bilineare Abbildungen	91
III.3. Funktionenräume und Faltung	94
III.3.a. Funktionenräume über dem Euklidischen Raum	94
III.3.b. Vektorfolgenräume über dem Standardgitter	96
III.3.c. Simultane Faltung von Tupeln und Assoziativität	97
III.3.d. Potenzierete Faltung und Supremalfaltung	100
IV. Urbildraumoperatoren	105
IV.1. Definitionen	105
IV.1.a. Halbnormfunktionen	106
IV.1.b. Komposition und Kegelidealhüllen	109
IV.1.c. Definition von Urbildraumoperatoren	110
IV.2. Eigenschaften	114
IV.2.a. Monotonie und Limiten	114
IV.2.b. Kompositionsregeln und kommutative Diagramme	117
IV.2.c. Vollständigkeit und relativ kompakte Teilmengen	120

V. Strukturtheorie	125
V.1. Die globalen Komponenten	126
V.1.a. Solide, regularisierungsinvariante Räume	127
V.1.b. Solide, translationsinvariante Folgenräume	129
V.2. Das Korrespondenzdiagramm	130
V.2.a. Assoziierte extremale globale Komponenten	132
V.2.b. Assoziierte diskrete globale Komponenten	134
V.2.c. Assoziierte kontinuierliche globale Komponenten	136
V.2.d. Amalgame glatter Funktionen oder Distributionen	139
V.2.e. Darstellung mit diskreter globaler Komponente	140
V.3. Faltungsbilder und Konvolutorenräume	142
V.3.a. Faktorisierungssätze	143
V.3.b. Charakterisierung von Amalgamräumen	146
V.4. Isomorphismen zu Vektorfolgenräumen	149
V.4.a. Amalgamräume von Vektorfolgen	149
V.4.b. Gitterzellenzerlegung solider Amalgamräume	150
V.4.c. Darstellungen durch Doppelfolgenräume	152
V.4.d. Vervollständigte Tensorprodukte	155
VI. Eigenschaftsvererbung	161
VI.1. Gewichtung von Amalgamräumen	162
VI.1.a. Gewichtung von SRI-Räumen	163
VI.1.b. Multiplikation und Halbnormfunktionen	166
VI.1.c. Gewichtete Bälle glatter Funktionen oder Distributionen	169
VI.1.d. Transformationsregeln für Gewichte	173
VI.2. Ausschöpfbarkeit und Vollständigkeit	176
VI.2.a. Ausschöpfbarkeit	177
VI.2.b. Vererbung von Ausschöpfbarkeit	179
VI.2.c. Ausschöpfbarkeit und Normalität	183
VI.2.d. Vererbung der Vollständigkeit	184
VI.3. Relativ kompakte und straffe Teilmengen	184
VI.3.a. Vererbung straffer Teilmengen	185
VI.3.b. Relative Kompaktheit in STI-Folgenräumen	188

VI.3.c. Relative Kompaktheit in Amalgamräumen	190
VI.3.d. Relativ schwache Kompaktheit	191
VI.3.e. Kriterien im glatten oder distributionellen Fall	194
VI.4. Faltung von Distributionen	195
VI.4.a. Nichtnegative Faltungen und Supremalfaltungen	196
VI.4.b. Alternativen zur Dreiecksungleichung	198
VI.4.c. Vererbung von Stetigkeitseigenschaften	199
Publikationen des Autors	203
Literaturverzeichnis	204

I. Einleitung und Motivation

Das Ausgangsthema dieser Doktorarbeit war die mathematische Formulierung von Modellen linearer Medien mit fraktionaler Dynamik im Sinne von [44]. Üblicherweise werden die Relaxationsprozesse in diesen Medien durch Anfangswertprobleme mit kausalen fraktionalen Ableitungen modelliert, wie zu Beispiel in [43, 41]. Die Problemstellung hierbei war der Übergang zu physikalisch gleichwertigen Konstitutivgleichungen die als Faltungsgleichungen auf geeigneten Distributionenräumen formuliert sind. Dies wird in Abschnitt I.2 genauer erläutert. Die Lösung, die in [60] publiziert wurde, wird in Abschnitt II.5.b zusammengefasst.

Kausale fraktionale Ableitungen von positiver reeller Ordnung sind Interpolationen zwischen gewöhnlichen Ableitungen positiver ganzzahliger Ordnung, die auf Funktionen oder Distributionen auf einem Intervall operieren. Bei nicht ganzzahliger Ordnung operieren diese nicht lokal, sondern nur kausal, sind also keine gewöhnlichen Differentialoperatoren. Die historischen Hintergründe zur Theorie fraktionaler Ableitungen und verschiedene Ansätze zur mathematischen Interpretation solcher Operatoren können in Grundlagenbüchern wie [99, 64, 41, 77, 81] nachgelesen werden. Das Erscheinen des achtbändigen “Handbook of Fractional Calculus with Applications” im Jahr 2019 weist auf die derzeit hohe Forschungsaktivität in diesem Gebiet hin.

In seinem Buch “Théorie des Distributions” von 1950/51 [106, 107] interpretierte Laurent Schwartz kausale fraktionale Ableitungen als Faltungsoperatoren die auf Distributionen auf der reellen Achse mit nach links beschränktem Träger operieren. Der gleiche Schwartz führte 1953/54 in einer Notiz [102] eine allgemeine Faltung von Distributionen ein, die jedoch weiterhin wenig verbreitet ist. So wird diese in dieser Doktorarbeit zum ersten mal angewendet um den Definitionsbereich der kausalen fraktionalen Ableitung von Schwartz zu erweitern. Dadurch wird die Beschränkung des Trägers zu einer Wachstumsbedingung auf der linken Halbachse abgeschwächt. Auch zur Formulierung der anfangs genannten Konstitutivgleichungen wurde die allgemeine Faltung von Distributionen be-

I. Einleitung und Motivation

nötigt. Definitionen und Literatur zur Faltung werden in Unterabschnitt II.2.a diskutiert, die Anwendung auf fraktionale Ableitungen in Unterabschnitt II.5.a. In Abschnitt I.1 werden einige Definitionen kausaler fraktionaler Ableitungen diskutiert die durch die neue Definition vereinheitlicht werden sollen.

Um die zwei genannten Anwendungsfälle von Faltungen einheitlich behandeln zu können wurden in dieser Doktorarbeit von Anfang an Definitionsbereiche für Faltungsoperatoren mit allgemeinen Klassen von Faltungskernen studiert. Zunächst wurden in [63, 59] Radon-Maße auf lokalkompakten Gruppen untersucht deren Operation auf gewichteten Räumen stetiger Funktionen punktweise durch ein Integral definiert wird. Dies wurde auf fraktionale Liouville-Ableitungen angewendet die als Komposition von fraktionalem Liouville-Integralen und gewöhnlichen Ableitungen definiert sind.

Um die fraktionale Ableitung, und andere singuläre Faltungsoperatoren, direkt als Faltung mit einer Distribution behandeln zu können wurden dann in [60, 61, 58] Distributionen auf Euklidischen Räumen betrachtet. Deren Operation auf Distributionenräumen wird durch die besagte allgemeine Faltung von Distributionen definiert. Der Forschungsverlauf dieser Doktorarbeit wird in Abschnitt I.3 detaillierter skizziert.

In Kapitel II dieser Dissertation werden die wichtigsten Resultate präsentiert die die Publikationen [63, 59, 46, 60, 61, 62, 58] hervorgebracht haben, die im Rahmen dieser Doktorarbeit entstanden sind. Dazu werden mathematische Problemstellungen, die in dieser Doktorarbeit bearbeitet wurden, aus dem Anfangszustand der Forschung heraus motiviert und in diesen eingeordnet. Eine Übersicht der Problemstellungen wird am Anfang von Kapitel II gegeben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Resultaten über Distributionenräume aus [61, 58] und deren Anwendung auf fraktionale Ableitungen in [60] und [61]. Anwendungen auf fraktionale Integrale und Ableitungen, auf die mathematische Modellierung linearer Medien mit fraktionaler Dynamik und auf den fraktionalem Laplace-Operator werden dort in Abschnitt II.5 behandelt.

In den Kapiteln V und VI dieser Dissertation werden die Resultate über Amalgamräume von Distributionen aus [58] nochmals in einigen Punkten weiterentwickelt: Neben Amalgamräumen von Distributionen werden nun parallel dazu auch Amalgamräume von glatten Funktionen behandelt. Zusätzlich zu kontinuierlichen werden auch diskrete globale Komponenten studiert. Dadurch können manche Resultate verbessert werden und strukturelle Zusammenhänge eindeutiger geklärt werden, wie in Abschnitt II.3 erläutert wird. Ein Beispiel sind scharfe Stetigkeitskriterien für Faltungsinklusiven zwischen po-

tenzgewichteten Distributionenräumen in Unterabschnitt II.3.b. Im Zuge dessen werden auch einheitliche verallgemeinerte Folgenraumisomorphismen aufgestellt. Diese erweitern die Valdivia-Vogt-Strukturtafeln, was in Unterabschnitt II.3.c beschrieben wird.

Die Definitionen von und Untersuchungen an Amalgamräumen in den Kapiteln V und VI basieren auf einem Urbildraumformalismus, der in Kapitel IV eingeführt und diskutiert wird. Hierbei werden Funktionenräume als lokalkonvexe topologisch-bornologischen Räume betrachtet, die in Abschnitt III.2 des Grundlagenkapitels III definiert werden. Das Übersichtskapitel II kommt ohne diese Formalismen aus und setzt nur Standardkenntnisse über lokalkonvexe Funktionenräume voraus, die in [52, 112] zu finden sind. Die Abschnitte II.1, II.2 und II.3 können damit auch zur Einführung in Kapitel V und VI gelesen werden. Abschnitt I.4 bietet eine Kapitelübersicht.

I.1. Kausale fraktionale Ableitungen

Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Definitionen für kausale translationsinvariante fraktionale Integrale I_+^α und Ableitungen D_+^α auf der reellen Achse eingeführt und untersucht, wie in der Grundlagenliteratur [99, 81, 77, 41] beschrieben wird. Verschiedene Definitionen können zu unterschiedlichen Definitionsbereichen für diese Operatoren führen, wie im folgenden anhand einiger Beispiele erläutert wird. Zu Beginn dieser Doktorarbeit mangelte es in der Literatur an einer einheitlichen Definition mit der all diese Definitionsbereiche abgedeckt werden.

Das *fraktionale Liouville-Integral* ${}_L I_+^\alpha f$ der Ordnung $\alpha \in \mathbb{H}$ einer Funktion f ist ein beliebiger Ausgangspunkt der Theorie. Dieses lässt sich als Faltung schreiben:

$${}_L I_+^\alpha f(t) := (f * Y_\alpha)(t) = \int_0^\infty f(t-s) \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.1.1})$$

Hier notiert Y_α die lokalintegrierbare Funktion mit $Y_\alpha(s) = s^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ für $s > 0$ und $Y_\alpha(s) = 0$ für $s \leq 0$. Gleichung (I.1.1) entspricht Gleichung (5.2) in [99, S. 94]. Ähnliche Ausdrücke wie in Gleichung (I.1.1) tauchen bereits 1832 bei Liouville auf. Für historische Details siehe [99, S. 160]. Der kanonische Definitionsbereich für das Liouville-Integral besteht aus den Funktionen $f \in L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass das Integral in Gleichung (I.1.1) als (absolutkonvergentes) Lebesgue-Integral interpretierbar ist.

Die *fraktionale Liouville-Ableitung* ${}_L D_+^\alpha f$ der Ordnung $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man ba-

I. Einleitung und Motivation

sierend auf dem Liouville-Integral als die Komposition

$${}_L D_+^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} {}_L I_+^{m-\alpha} f(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.1.2})$$

mit $m = \lceil \alpha \rceil := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \alpha \leq n\}$ für $\alpha \geq 0$ und $m = \lceil \Re \alpha \rceil + 1$ für $\alpha \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{R}$ und ${}_L I_+^0$ der identischen Abbildung von $L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R})$. Gleichung (I.1.2) entspricht Gleichung (5.7) in [99, S. 95]. Hier wird der Raum der absolutstetigen Funktionen als Definitionsbereich für d/dt gewählt. Der Definitionsbereich der Liouville-Ableitung ergibt sich dann aus der Komposition partiell definierter Operatoren.¹ Wegen $\int_0^\infty s^{m-\Re \alpha - 1} ds = \infty$ ist die konstante Funktion $1_{\mathbb{R}}$ nicht in diesem Bereich enthalten falls $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.

Einen größeren Definitionsbereich für die fraktionale Ableitung erhält man zum Beispiel mit dem Ansatz aus der Doktorarbeit von Marchaud [73] aus dem Jahr 1927: Sei $\alpha \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$. Dann wird das Liouville-Integral ${}_L I_+^{-\alpha}$ aus Gleichung (I.1.1) singularär bei $s = 0$. Die Definition der *fraktionalen Marchaud-Ableitung* ${}_M D_+^\alpha$ der Ordnung α basiert auf einer Regularisierung dieses Integrals bei $s = 0$. Dazu wird $f(t - s)$ durch die Linksdifferenz m -ter Ordnung $\Delta_s^m f(t)$ ersetzt mit $m > \alpha$, $m \in \mathbb{N}_0$ und durch eine Normierungskonstante $\chi(\alpha, m)$ dividiert, das heisst

$${}_M D_+^\alpha f(t) := \frac{1}{\chi(\alpha, m)} \int_0^\infty \frac{\Delta_s^m f(t)}{s^{\alpha+1}} ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.1.3})$$

Siehe in [99, S. 109ff, 116ff] für die Details. Die fraktionale Marchaud-Ableitung existiert für Funktionen $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ aufgrund der Asymptotik² $\Delta_s^m f(t) \in O(s^m)$ für $s \rightarrow 0$ und wegen $\int_1^\infty s^{-\alpha-1} ds < \infty$.

Schwartz beschrieb in seinem bekannten Buch [107] von 1951 einen fraktionalen Kalkül auf dem Raum \mathcal{D}'_+ der Distributionen mit nach links beschränktem Träger. In seinem Buch [104, S. 172f] charakterisierte Schwartz \mathcal{D}'_+ als nullteilerfreie Faltungsalgebra mit hypostetiger Faltung. Als Anwendung davon definierte er kausale fraktionale Integrale ${}_S I_+^\alpha$ von allgemeiner Ordnung $\alpha \in \mathbb{C}$ als die Faltungsoperatoren

$${}_S I_+^\alpha : \mathcal{D}'_+ \rightarrow \mathcal{D}'_+, \quad f \mapsto f * Y_\alpha. \quad (\text{I.1.4})$$

¹Dieser ist $\text{dom}(A \circ B) = \{f \in \text{dom } B : Bf \in \text{dom } A\}$ für Operatoren A und B deren Definitionsbereich und Wertebereiche in einem gemeinsamen Raum X enthalten sind.

²Diese Asymptotik ist gleichmäßig in $t \in I$ für beschränkte Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Die Definition der Distribution $Y_\alpha \in \mathcal{D}'_+$ wird vermöge der distributionellen Ableitung $Y_\alpha := (Y_{\alpha+m})^{(m)}$ mit $m := \lceil -\Re\alpha \rceil + 1$ auf den Fall $\Re\alpha \leq 0$ ausgedehnt.³ Fraktionale Ableitungen werden entsprechend durch ${}_sD_+^\alpha := {}_sI_+^{-\alpha}$ definiert. Siehe Unterabschnitt II.5.a für mehr Details.

Eine Zielsetzung dieser Doktorarbeit war es, die Zugänge zu fraktionalen Ableitungen von Marchaud und Schwartz durch eine neue Definition der Operatoren I_+^α und D_+^α zu vereinheitlichen. Für Ordnungen $\alpha > 0$ sollte der Definitionsbereich von D_+^α alle Distributionen enthalten die auf der linken Halbachse uniform beschränkt sind. In anderen Worten, der Definitionsbereich sollte den Raum $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R}) + \mathcal{D}'_+$ enthalten. Hier notiert $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R})$ den Raum der uniform beschränkten Distributionen auf der reellen Achse, der von Schwartz in [104] eingeführt wurde. Distributionenräume dieser Art werden in den Unterabschnitten II.1.a und II.1.b besprochen.

Wie bereits erwähnt konnte in dieser Doktorarbeit eine befriedigende Definition für die Operatoren I_+^α und D_+^α gefunden werden, die auf der \mathcal{D}' -Faltung basiert, die in Unterabschnitt II.2.a besprochen wird. Das heisst, man definiert $I_+^\alpha f := f * Y_\alpha$ für alle Distributionen $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die \mathcal{D}' -faltbar mit Y_α sind und setzt $D_+^\alpha := I_+^{-\alpha}$, siehe auch Definition II.5.1. Mit dieser Definition wurden die Operatoren I_+^α und D_+^α in Section 7 der Publikation [61, S. 145ff] aus dieser Doktorarbeit eingeführt und untersucht. Die Resultate daraus werden in Unterabschnitt II.5.a der Dissertation zusammengefasst.

Die folgende Frage zur Übereinstimmung der Marchaud-Ableitung mit der neuen distributionellen Definition ist noch offen geblieben: Für welche lokalintegrierbaren Funktionen f existiert die Marchaud-Ableitung (I.1.3) im fast-überall-Sinn und ist eine lokalintegrierbare Funktion mit ${}_M D_+^\alpha f = D_+^\alpha f$? Die gleiche Frage stellt sich für die *Grünwald-Letnikov-Ableitung* ${}_{GL}D_+^\alpha$ mit allgemeiner Ordnung $\alpha \in \mathbb{C}$. Diese beruht auf dem verallgemeinerten Linksdifferenzenquotienten

$${}_{GL}D_+^\alpha f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad (\text{I.1.5})$$

und geht auf Arbeiten aus den Jahren 1867/68 zurück. Siehe §20 von [99, S. 371ff] für mehr Informationen zu den Operatoren und Referenzen zu den Arbeiten.

³Diese Definition von Y_α entspricht Gleichung (II,2;31) in [104, S. 43] und Gleichung (I.3.1).

I.2. Modellierung fraktionaler Relaxationen

Zur mathematischen Modellierung anormaler Relaxationsprozesse in linearen Medien wurden in der Literatur [43, 45] unter anderem homogene fraktionale Anfangswertprobleme auf der rechten Halbachse $[0, \infty[$ vorgeschlagen. Deren Formulierung basiert auf den folgenden Operatoren: Das *fraktionale Riemann-Liouville-Integral* $I_{0+}^\alpha f$ der *Ordnung* $\alpha > 0$ einer lokalintegrierbaren Funktion f auf $[0, \infty[$ ist definiert als

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \int_0^t f(t-s) Y_\alpha(s) ds \quad \text{für } t > 0, \quad (\text{I.2.1})$$

mit der Funktion $Y_\alpha(s) = s^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ wie in Gleichung (I.1.1). Für $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$ ist die *fraktionale Ableitung* $D_{0+}^{\alpha|\gamma} f$ von *Ordnung* α und *Typ* γ der Funktion f definiert als die Komposition

$$D_{0+}^{\alpha|\gamma} f(t) = I_{0+}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\gamma} f(t) \quad \text{für } t > 0. \quad (\text{I.2.2})$$

Hier wird I_{0+}^0 als die Identität aufgefasst. Der Definitionsbereich von $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ wird analog zur Liouville-Ableitung aus Gleichung (I.1.2) definiert.⁴

Der Operator $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ aus Gleichung (I.2.2) enthält die Spezialfälle

$$\text{RL}D_{0+}^\alpha = D_{0+}^{\alpha|\alpha}, \quad \text{CD}_{0+}^\alpha = D_{0+}^{\alpha|1}, \quad \frac{d}{dt} = D_{0+}^{1|1}, \quad (\text{I.2.3})$$

also die *fraktionale Riemann-Liouville-Ableitung* $\text{RL}D_{0+}^\alpha$, die *fraktionale Caputo-Ableitung* CD_{0+}^α und die gewöhnliche Ableitung d/dt . Siehe auch Gleichungen (2.22) und (5.8) in [99, S. 35, 95] für die Definitionen dieser Operatoren.

⁴Mit einer anderen Parametrisierung wurde dieser Operator in Definition 3.3 von [41, S. 113] eingeführt, siehe auch Gleichung (7) in [43]. Die Notation $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ wurde in der Publikation [62] aus dieser Doktorarbeit eingeführt, wobei γ den Nullraum $\langle Y_\gamma \rangle$ von $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ charakterisiert. Dort wurde auch eine Verallgemeinerung dieser Operatoren studiert, wie in Unterabschnitt II.5.e dieser Dissertation besprochen wird. Der Definitionsbereich von $D_{0+}^{\alpha|\gamma_2}$ ist im Definitionsbereich von $D_{0+}^{\alpha|\gamma_1}$ enthalten falls $\gamma_1 < \gamma_2$. Die Operatoren $D_{0+}^{\alpha|\gamma_1}$ und $D_{0+}^{\alpha|\gamma_2}$ stimmen auf dem Definitionsbereich eines dritten Operators $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ überein, falls $\gamma > \gamma_1, \gamma_2$.

I.2. Modellierung fraktionaler Relaxationen

Die *idealisierte fraktionale Relaxation* wird durch das Anfangswertproblem

$${}_C D_{0+}^\alpha f(t) + f(t) = 0 \quad \text{für } t > 0, \quad (\text{I.2.4a})$$

$$f(0+) = f_{0+}, \quad (\text{I.2.4b})$$

mit Parametern $0 < \alpha \leq 1$ und $f_{0+} > 0$ beschrieben, siehe Section 5 von [43]. Bis auf Zeitskalierung und Normalisierung⁵ entspricht dies Gleichung (32) in [43]. Die eindeutige Lösung von Gleichung (I.2.4) ist gegeben durch $f(t) = f_{0+} \cdot E_\alpha(-t^\alpha)$ mit der Mittag-Leffler-Funktion $E_\alpha(z)$. Siehe Gleichung (24) und (25) in [43]. Im Fall $\alpha = 1$ ist die Lösung $f(t) = f_{0+} \cdot E_1(-t^1) = f_{0+} \cdot e^{-t}$.

Das etwas kompliziertere Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} f(t) + \lambda D_{0+}^{\alpha|\gamma} f(t) + f(t) = 0 \quad \text{für } t > 0, \quad (\text{I.2.5a})$$

$$f(0+) = f_{0+}, \quad (\text{I.2.5b})$$

mit Parametern $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$, $\lambda > 0$ und $f_{0+} > 0$, ist die *zusammengesetzte fraktionale Relaxation* aus Section 7 von [43]. Bis auf Zeitskalierung und Normalisierung ist dies Gleichung (32) in [43]. Die eindeutige Lösung $f(t)$ des Problems (I.2.5) hängt nicht kontinuierlich vom Typ γ ab, sondern nur davon, ob $\gamma = 1$ oder $\gamma < 1$ gilt. In Unterabschnitt II.5.e wird dieses Phänomen durch eine Kürzungsregel für Summen von Operatoren $D_{0+}^{\lambda|\gamma}$ mit verschiedenem Anfangswerttyp γ erklärt, siehe Gleichung (II.5.69). Die Lösung $f(t)$ kann durch die multinomialen Mittag-Leffler-Funktionen aus [47, 72] ausgedrückt werden, siehe Gleichungen (12) und (81) in [60, S. 7, 26].

Die Lösung $f(t)$, $t > 0$ von Gleichung (I.2.4) oder (I.2.5) wird *Relaxationsfunktion* genannt. Wie in Section 4 von [43] erläutert wird, enthält das Model des linearen Mediums noch einen Parameter $\chi^\infty \geq 0$ der den instantanen Anteil der Antwort des Mediums enthält. Der instantane Anteil kann nicht durch ein Anfangswertproblem auf der rechten Halbachse modelliert werden.

Die *Antwortfunktion* χ des linearen Mediums ist gegeben durch $\chi = -f'$ wenn f

⁵In [43] werden *normalisierte* Relaxationsfunktionen \hat{f} betrachtet. Die Zeitskalen τ und τ_1 aus [43] sind in (I.2.4) und (I.2.5) gleich 1. Der Parameter λ entspricht τ_2 .

I. Einleitung und Motivation

auf die linke Halbachse durch die Konstante $\chi^\infty + f_{0+}$ fortgesetzt wird:

$$f(t) := \chi^\infty + f_{0+} \quad \text{für } t < 0. \quad (\text{I.2.6})$$

Hierbei wird χ wie in Section 9.1 von [60, S. 23] als Distribution auf der ganzen reellen Achse interpretiert. Die Relaxationsfunktion f ist genau dann stetig in $t = 0$, und somit auf ganz \mathbb{R} , wenn $\chi^\infty = 0$.

Mit der Antwortfunktion χ lässt sich die Konstitutivgleichung des modellierten linearen Mediums, zunächst rein formal, schreiben als Faltungsgleichung

$$u = w * \chi \quad \text{für } u, w \in \mathcal{F}. \quad (\text{I.2.7})$$

Dies erklärt eine Relation zwischen den zeitabhängigen Observablen u und w aus einem Funktionenraum \mathcal{F} . Um die Relaxationsfunktion $f(t)$ zurückzuerhalten setzt man in Gleichung (I.2.7) die Funktion $w = \check{Y}$ und $f = u|_{]0, \infty[}$ ein. Hier ist $\check{Y}(t) := Y(-t)$ die Spiegelung der Heaviside-Funktion $Y := Y_1$. Die Funktion \check{Y} repräsentiert eine konstante Kraft, die bei $t = 0$ abrupt abgeschaltet wird. Die Wahl $w(t) = e^{i\omega t}$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ führt auf $u(t) = e^{i\omega t} X(\omega)$ mit der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ von $\chi(t)$. Die Funktion $X(\omega)$ beschreibt die komplexe Suszeptibilität, die experimentell durch dielektrische Breitbandspektroskopie zugänglich ist [43].

Zu Beginn dieser Doktorarbeit fehlte eine mathematisch zufriedenstellende Definition für einen Funktionenraum \mathcal{F} . Dieser hängt davon ab, welche Distributionen $\chi \in \mathcal{D}'_+$ als Antwortfunktionen zugelassen sind, und sollte die folgenden Anforderungen erfüllen:

1. Gleichung (I.2.7) definiert eine Bijektion $\mathcal{F} \ni u \leftrightarrow w \in \mathcal{F}$.
2. Es gelten die Inklusionen $\check{Y} \in \mathcal{F}$ und $e^{i\omega t} \in \mathcal{F}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.
3. In Gleichung (I.2.7) sollte “*” als \mathcal{D}' -Faltung interpretierbar sein.

Da die Faltung mit χ eine glättende Wirkung hat, falls $\chi \in L^p_{\text{lok}}$ mit $p > 1$, legt Bedingung 1 nahe direkt zu fordern, dass \mathcal{F} invariant unter Differentiation ist. Bedingung 2 folgt bereits aus der Inklusion $L^\infty \subseteq \mathcal{F}$. Zusammen ergibt dies $\mathcal{D}'_{L^\infty} \subseteq \mathcal{F}$, ähnlich wie für die Definitionsbereiche fraktionaler Ableitungen in Abschnitt I.1.

In der Publikation [60] dieser Doktorarbeit wurde ein Raum \mathcal{F} konstruiert der die obigen Anforderungen erfüllt. Die Definition basiert auf der neu in [60] eingeführten

Konstruktion A^{*M} eines Faltungsmoduls zu einer beliebigen gegebenen Faltungsalgebra $A \subseteq \mathcal{D}'$. Diese wurde in einer weiteren Publikation [61] dieser Doktorarbeit genauer untersucht. Die Resultate dazu werden in Unterabschnitt II.4.b zusammengefasst.

Zur Definition von \mathcal{F} wurde in [60] zunächst eine Faltungsalgebra \mathcal{R}_+ eingeführt. Diese ist eine Unter algebra des von den Distributionen Y_α aus Gleichung (I.3.1) erzeugten Faltungskörpers $\mathcal{Q}[Y_\mathbb{R}] \subseteq \mathcal{D}'_+$. Die Elemente χ der Automorphismengruppe $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ von \mathcal{R}_+ stellen die Antwortfunktionen verallgemeinerter fraktionaler Relaxationen dar. Damit wurde dann der Raum $\mathcal{F} := (\mathcal{R}_+)^{*M}$ eingeführt. Nach Konstruktion sind die Elemente von $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ Faltungsautomorphismen von \mathcal{F} . Die Details hierzu werden in Unterabschnitt II.5.b besprochen.

I.3. Forschungsverlauf

Wie in Abschnitt I.1 erläutert wurde mangelte es an einer vereinheitlichenden Definition der kausalen fraktionalen Ableitung von D_+^α mit ausreichend großem Definitionsbereich. Ein Ansatz zur Schließung dieser Lücke wurde bereits in der Masterarbeit [57] des Autors verfolgt und in den Publikationen [63, 59] dieser Doktorarbeit weiterentwickelt. Hierbei wurden fraktionale Liouville-Integrale⁶ ${}_L I_+^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{H}$ und fraktionale Liouville-Ableitungen ${}_L D_+^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ auf translationsinvarianten gewichteten Räumen stetiger oder glatter Funktionen studiert.⁷ Siehe Bemerkung II.5.7 für Details und Gleichungen (I.1.1) und (I.1.2) für die Definition von ${}_L I_+^\alpha$ und ${}_L D_+^\alpha$.

Mit diesen Resultaten wurden unter anderem die Beschreibungen der Operatoren ${}_L D_+^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ als lineare Endomorphismen auf dem Raum \mathfrak{S}_+ aus [99, S. 146] und auf der translationsinvarianten, gespiegelten Version des Raums $S_+(\mathbb{R}_+)$ aus [99, S. 155] um den topologischen Aspekt ergänzt.⁸ Mit gewichteten Räumen glatter Funktionen

⁶Teilweise wurden in der Literatur [77, 63, 59] die gespiegelten Liouville-Integrale ${}_L I_+^\alpha$ als Weyl-Integrale bezeichnet, wie zum Beispiel in Section VII von [77]. In den Arbeiten [57] wurden auch die Operatoren ${}_L I_+^\alpha$ Weyl-Integrale genannt. Sowohl ${}_L I_+^\alpha$ und ${}_L I_-^\alpha$ sollten eigentlich als Liouville-Integrale bezeichnet werden, da Weyl-Integrale als nicht zwangsläufig absolutkonvergente Integrale verstanden werden.

⁷Gewichtete Räume stetiger Funktionen wurden in Section 22 von [80] eingeführt, siehe auch [111], wo die Dualräume dieser lokalkonvexen Räume bestimmt wurden.

⁸Es gilt $\mathfrak{S}_+ = \mathcal{S} + (\mathcal{O}_M \cap \mathcal{D}'_+)$ mit dem Schwartz-Raum \mathcal{S} und dem Raum \mathcal{O}_M der schwach wachsenden glatten Funktionen, siehe Unterabschnitt II.1.a für diese Räume. Die translationsinvariante, gespiegelte Variante von $S_+(\mathbb{R}_+)$ kann als $\mathcal{S} + (\mathcal{E} \cap \mathcal{D}'_+)$ definiert werden.

I. Einleitung und Motivation

kann auch ein Testfunktionenraum für fraktionale Liouville-Ableitungen ${}_L D_+^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ eingeführt werden um diese per Transponierung auf Distributionenräumen zu definieren, siehe Bemerkung II.5.7. Ein anderer Ansatz lieferte größere Definitionsbereiche.

Dieser Ansatz zur Definition von D_+^α wurde in den Publikationen [46, 60, 61] dieser Doktorarbeit beschrieben und in [61] detailliert untersucht. Dieser basiert auf der Interpretation von D_+^α als Faltungsoperator $f \mapsto f * Y_{-\alpha}$ mit Faltungskern $Y_\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Die Distribution Y_α mit komplexem Index $\alpha \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto Y_\alpha(\varphi) := \int_0^\infty (-1)^m \varphi^{(m)}(t) \frac{t^{\alpha+m-1}}{\Gamma(\alpha+m)} dt. \quad (\text{I.3.1})$$

Hier ist $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\Re \alpha + m > 0$. Siehe auch Gleichung (II.5.3) und Definition II.5.1. Der Definitionsbereich ergibt sich durch die \mathcal{D}' -Faltbarkeit von Distributionen, die für die allgemeine Faltung von Distributionen vorausgesetzt wird. Diese wird im Rest der Arbeit als \mathcal{D}' -Faltung bezeichnet und in den Unterabschnitten II.2.a und III.3.c diskutiert.

Die \mathcal{D}' -Faltung bot sich dann auch an um den Bereich für die Variablen u und w zu erweitern die in Konstitutivgleichungen der Form

$$u = w * \chi \quad (\text{I.3.2})$$

auftreten mit festem $\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Siehe Abschnitt I.2 für Details dazu. Die Anforderung, dass (I.3.2) eine Bijektion zwischen u und v definieren soll, motivierte die Suche nach allgemeinen Konstruktionen von Bereichen für Faltungsoperatoren $g \mapsto g * f$ mit Faltungskernen $f \in F \subseteq \mathcal{D}'$. Als gemeinsamer Definitionsbereich für diese bietet sich das Faltungsdual F^* an: Die Menge aller $g \in \mathcal{D}'$ die \mathcal{D}' -faltbar mit allen $f \in F$ sind [121, S.20]. Dieses generiert per Bidualbildung die Klasse der faltungsvollkommenen Räume $F \subseteq \mathcal{D}'$ mit $F = F^{**} := (F^*)^*$, ähnlich zum Kötheschen α -Dual und den vollkommenen Folgenräumen aus [65, §30]. Mit dieser Notation ist $(Y_{-\alpha})^* = (\{Y_{-\alpha}\})^*$ der Definitionsbereich der neu eingeführten fraktionalen Ableitung D_+^α .

Ist A eine Faltungsalgebra von Distributionen so sind Bereiche von Interesse auf denen A als Faltungsmodul operiert. Diese werden in dieser Arbeit Operationsbereiche für $(\cdot) * A$ genannt. Auf solchen Bereichen M operieren die Elemente von $(\cdot) * A$ als Endomorphismen, das heisst $M * A \subseteq M$, und die Faltungsrelationen zwischen den Elementen von A entsprechen den Kompositionsrelationen zwischen den Operatoren aus $(\cdot) * A$, das

heisst $m * (a * b) = (m * a) * b$ für alle $m \in M$ and $a, b \in A$. Da das Faltungsdual A^* diesen Anforderungen im allgemeinen nicht genügt wurde in [60] das neue Faltungsmo-
dual A^{*M} eingeführt und charakterisiert. Dieser wird in Unterabschnitt II.4.b diskutiert.
Zur Anwendung auf fraktionale Relaxationen wurden diese Module für bestimmte Un-
teralgebren des Quotientenkörpers $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$ berechnet der von den Distributionen Y_{α} mit
 $\alpha \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Dies wird in Unterabschnitt II.5.b ausgeführt.

Systematische Untersuchungen von Konstruktionen wie F^* oder A^{*M} resultierten
schließlich in einem Kalkül von faltungsvollkommenen Räumen als extremalen Defi-
nitions-, Werte- oder Operationsbereichen. Dieser wurde in der Publikation [61] dieser
Doktorarbeit ausführlich studiert. Das Ausgangsproblem war dabei die Berechnung von
extremalen faltungsvollkommenen Bereichen $F_i = F_i^{**}$ in Faltungsinclusionen

$$F_1 * F_2 \subseteq F_3. \quad (\text{I.3.3})$$

Die Theorie des Kalküls wird in Abschnitt II.4 zusammengefasst. Zur Beschreibung der
ordnungstheoretisch-algebraischen Struktur dieses Kalküls wird Quantaltheorie genutzt,
in die in Unterabschnitt II.4.c eingeführt wird.

Theorem 5 aus der Publikation [59, S. 1561f] dieser Doktorarbeit liefert für oberhalb-
stetige, positive Gewichte $w, v, u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Äquivalenzen

$$w \blacksquare v \leq u \quad \Leftrightarrow \quad w[\mathcal{K}'] * v[\mathcal{K}'] \subseteq u[\mathcal{K}'] \quad \Leftrightarrow \quad w[\mathcal{K}'] * \mathcal{C}_0[u] \subseteq \mathcal{C}_0[v] \quad (\text{I.3.4})$$

mit den Supremalfaltung “ \blacksquare ” und den gewichteten Bällen

$$w[\mathcal{K}'] = \{\mu \in \mathcal{K}' : |\mu|(1/w) \leq 1\}, \quad (\text{I.3.5a})$$

$$\mathcal{C}_0[w] = \{f \in \mathcal{C} : \|fw\|_{\infty} \leq 1, f(x)w(x) \rightarrow \infty \text{ für } |x| \rightarrow \infty\}. \quad (\text{I.3.5b})$$

Siehe in [59] für die Formulierung des Resultats mit $\overline{\mathbb{R}}_+$ -wertigen Gewichten auf einer lo-
kalkompakten Gruppe. Beim Beweis der ersten Äquivalenz in (I.3.4) kommt die Dreiecks-
ungleichung der \mathcal{K}' -Faltung zum Einsatz: Zwei Radon-Maße μ_1 und μ_2 sind genau dann
 \mathcal{K}' -faltbar, wenn die Absolutwerte $|\mu_1|$ und $|\mu_2|$ es sind. Zudem gilt $|\mu_1 * \mu_2| \leq |\mu_1| * |\mu_2|$
für \mathcal{K}' -faltbare μ_1 und μ_2 , siehe Unterabschnitt III.3.c.

Um in ähnlicher Weise die Faltungsinclusion (I.3.3) durch eine einfachere Bedingung

I. Einleitung und Motivation

ersetzen zu können, wurde in [61] für die \mathcal{D}' -Faltung eine Art Dreiecksungleichung gesucht: Als Ersatz für den Absolutwert $|\cdot|$ assoziiert man zu jeder Distribution $f \in \mathcal{D}'$ die durch $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ indizierten Faltungshalbnormfunktionen

$$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto |f|_{*\Phi}(x) := \sup_{\varphi \in \Phi} |(f * \varphi)(x)|, \quad (\text{I.3.6})$$

die das globale Verhalten der Distribution f kontrollieren. Hier notiert $\mathfrak{B}(\mathcal{D})$ die Menge der beschränkten Teilmengen von \mathcal{D} . Es wurde dann gezeigt, dass zwei Distributionen $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$ genau dann \mathcal{D}' -faltbar sind, wenn

$$(|f_1|_{*\Phi} * |f_2|_{*\Phi})(x) < \infty \text{ für alle } \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) \text{ und } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{I.3.7a})$$

Weiter gibt es zu jedem $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ ein $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$, sodass

$$|f_1 * f_2|_{*\Phi} \leq |f_1|_{*\Psi} * |f_2|_{*\Psi} \text{ für alle } \mathcal{D}'\text{-faltbaren } f_1 \text{ und } f_2. \quad (\text{I.3.7b})$$

Damit wurde gezeigt, dass die Faltungsinklusion (I.3.3) äquivalent zur Faltungsinklusion $W_1 * W_2 \subseteq W_3$ ist mit W_i dem von $\{|f|_{*\Phi} : f \in F_i, \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})\}$ erzeugtem Kegelideal, siehe Theorem 5 in [61, S. 134]. Kegelideale werden in Gleichung (II.2.11) erklärt. Weitere \mathcal{D}' -Faltbarkeitskriterien wie (I.3.7a) und Ungleichungen der Art (I.3.7b) werden in Unterabschnitt VI.4.b bewiesen.

Eine ähnliche Anwendung von (I.3.7) wurde später in [58] beschrieben. Diese lässt sich anhand eines einfachen Beispiels illustrieren: Laurent Schwartz definierte in seinem Buch [104] die lokalkonvexen Räume \mathcal{D}'_{L^p} die aus Distributionen bestehen die sich “global wie L^p -Funktionen” verhalten. Die Definitionen solcher Räume werden in Unterabschnitt II.1.a und II.1.b besprochen. Schwartz bewies in [104], dass die Faltung eine stetige bilineare Abbildung $\mathcal{D}'_{L^p} \times \mathcal{D}'_{L^q} \rightarrow \mathcal{D}'_{L^r}$ definiert, falls $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1/r + 1$. Kurzgesagt, es gilt die stetige Faltungsinklusion

$$\mathcal{D}'_{L^p} * \mathcal{D}'_{L^q} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r}. \quad (\text{I.3.8})$$

Betrachte nun den lokalkonvexen Raum $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^p)$ der definiert ist als

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^p) := \{f \in \mathcal{D}' : \forall \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) : \|f\|_{p,\Phi} := \| |f| * \Phi \|_p < \infty\} \quad (\text{I.3.9})$$

mit der von den Halbnormen $\|\cdot\|_{p,\Phi}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ erzeugten lokalkonvexen Topologie. Aus Resultaten dieser Doktorarbeit erhält man die Identität $\mathcal{D}'_{L^p} = \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^p)$, wie in Unterabschnitt II.1.e erläutert wird. Mit dieser Identität zeigt man leicht, dass die stetige Faltungssinklusion (I.3.8) eine Konsequenz aus der Dreiecksungleichung für die \mathcal{D}' -Faltung (I.3.7) ist und von

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ für alle } f \in L^p, g \in L^q, \quad (\text{I.3.10})$$

der Faltungsungleichung von Young, siehe Satz II.4.4 in [120, S. 78]. Diese entspricht bis auf Normierung der stetigen Faltungssinklusion $L^p * L^q \subseteq L^r$. Dieser Beweis über eine ‘‘Vererbungsregel’’ ist deutlich einfacher als der von Schwartz in [104]. Siehe Unterabschnitt II.2.c für den Fall potenzlogarithmisch gewichteter Räume.

Der Raum $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ wird Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{D}' und globaler Komponente E genannt. Für allgemeinere lokalkonvexe Räume E von messbaren Funktionen oder Radon-Maßen ist $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ ähnlich wie in Gleichung (I.3.9) definiert, siehe in Unterabschnitt II.1.c, wo eine Einführung zu diesen Räumen gegeben wird. Mit Theorem 3.11 in [58, S. 8f] wurde gezeigt, dass die Räume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ mit den Konvolutorenräumen $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$ übereinstimmen, die in [58] als Ausgangsdefinition verwendet wurden und in Unterabschnitt II.1.d vorgestellt werden.

Zur Notation $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ und der Bezeichnung als Amalgamräume wurde erst in dieser Dissertation übergegangen. Das Interesse an diesen Räumen nährt sich unter anderem aus der Tatsache, dass die Abbildung $E \mapsto \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ stetige Faltungssinklusionen bewahrt, wie eben für L^p -Räume illustriert wurde. In Theorem 6.4 aus der Publikation [58, S. 23] dieser Doktorarbeit wurde der allgemeine Fall bewiesen. Eine allgemeinere Vererbungsregel für Faltungssinklusionen wird in Unterabschnitt II.2.b diskutiert.

Kapitel V in dieser Dissertation verallgemeinert und vertieft die Untersuchungen der Räume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$ in [58]. Dazu werden Amalgamräume $\mathcal{L}_{\mathbb{T}}(E)$ mit lokalen Komponenten $\mathcal{L} = \mathcal{D}'$, $\mathcal{L} = \mathcal{E}$, $\mathcal{L} = \mathcal{K}'$ oder $\mathcal{L} = L^p$ mit $1 \leq p \leq \infty$ eingeführt. Verweise auf die Definitionen sind in der Tabelle (V.2.1b) aufgeführt. Die Definitionen

I. Einleitung und Motivation

und Untersuchungen basieren auf einem Formalismus von Urbildraumoperatoren der in Kapitel IV behandelt wird. Die Räume E und $\mathcal{L}_T(E)$ werden dabei als lokalkonvexe topologisch-bornologische Räume betrachtet, deren Grundlagen in Abschnitt III.2 diskutiert werden. Dies dient zum einen als technisches Hilfsmittel und zum anderen werden damit in Unterabschnitt VI.4.c zusätzliche Vererbungsregeln für Eigenschaften von Faltungsinclusionen erhalten.⁹

Um einige Untersuchungen zu erleichtern und stärkere Resultate zu erhalten werden in dieser Dissertation auch Amalgamräume $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ mit diskreten globalen Komponenten λ studiert. Die Räume λ bestehen aus skalarwertigen Funktionen auf \mathbb{Z}^d . Die Zusammenhänge zwischen den Räumen λ , E , $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{L}_T(E)$ werden in Kapitel V ausführlich untersucht und in einem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) zusammengefasst.

Als Anwendung der diskreten globalen Komponenten λ wird in Unterabschnitt II.3.b erläutert wie mit diesen scharfe Kriterien für stetige Faltungsinclusionen

$$\mathcal{D}'_{L^p, \mu} * \mathcal{D}'_{L^q, \nu} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r, \rho} \quad (\text{I.3.11})$$

von potenzgewichteten Distributionenräumen $\mathcal{D}'_{L^p, \mu} := \mathcal{D}'_{L^p} \cdot (1 + x^2)^{-\mu/2}$ hergeleitet werden können. Eine weitere Anwendung diskreter globaler Komponenten sind verallgemeinerte Doppelfolgenraumdarstellungen für Amalgamräume $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ mit $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ oder $\mathcal{X} = \mathcal{E}$. Diese erweitern die Valdivia-Vogt-Strukturtafeln, wie in Unterabschnitt II.3.c erläutert wird.

⁹Wie in Bemerkung III.2.4 erläutert wird, übersetzt sich jedes Resultat über lokalkonvexe topologisch-bornologische Räume durch Vergessen der Bornologie in ein Resultat über lokalkonvexe Räume. Die Betrachtung von topologisch-bornologischen Räumen führt auch zu keiner Einschränkung an die lokalkonvexen Räume.

I.4. Kapitelübersicht

Die Kurzzusammenfassungen der Kapitel II-VI dieser Doktorarbeit lauten wie folgt:

- II. Die wichtigsten mathematischen Problemstellungen dieser Doktorarbeit werden erläutert und eingeordnet. Die in den Abschnitten I.1 und I.2 erläuterten Problemstellungen werden behandelt. Nur Grundkenntnisse über lokalkonvexe Funktionenräume aus [52, 112] werden vorausgesetzt.
- III. Abstrakte und konkrete Grundlagen aus Ordnungslehre und Funktionalanalysis werden zusammengefasst. Dazu gehören abstrakte Hüllensysteme und lokalkonvexe Verbände. Topologisch-bornologische Räume werden ausführlicher diskutiert da hierzu kaum Grundlagenliteratur vorhanden ist. Einige Funktionenräume und verschiedene Faltungsbegriffe werden besprochen.
- IV. Inspiriert durch projektive Topologien wird ein Urbildraumformalismus für lokalkonvexe topologisch-bornologische Räume und Verbände entwickelt. Dabei werden Urbildraumoperatoren zu Mengen von linearen Funktionen oder von vektorwertigen Halbnormen (genannt Halbnormfunktionen) assoziiert. Für diese Operatoren werden Kompositionsregeln hergeleitet, die in Kapitel V angewendet werden.
- V. Als kontinuierliche und diskrete globale Komponenten für Amalgamräume werden allgemeine Klassen von Räumen eingeführt und charakterisiert. Basierend auf dem Urbildraumformalismus aus Kapitel IV werden Amalgamräume eingeführt und verschiedene äquivalente Darstellungen bewiesen. Die Relationen zwischen verschiedenen globalen Komponenten und den assoziierten Amalgamräumen werden bestimmt und im Korrespondenzdiagramm (V.2.1) zusammengefasst. Isomorphismen von Amalgamräumen zu Vektorfolgenräumen werden aufgestellt.
- VI. Regeln für die Vererbung von Eigenschaften und Strukturen von globalen Komponenten auf Amalgamräume werden hergeleitet. Teilweise werden auch Äquivalenzen erhalten, vorallem für diskrete globale Komponenten. Untersucht werden unter anderem Transformationsregeln für die Gewichtung von Räumen, die Gestalt relativ kompakter Teilmengen und topologisch-bornologische Eigenschaften von Faltungsinclusionen zwischen Räumen.

II. Übersicht und Einordnung

Dieses Kapitel bietet eine Übersicht über die Resultate dieser Doktorarbeit und ordnet diese in die Ausgangslage in der Literatur ein. Dazu werden Definitionen und Resultate aus der Literatur rekapituliert und weiterführende mathematische Problemstellungen daraus entwickelt. Die Lösungen dieser Probleme sind in den Publikationen [46, 60, 61, 58] aus dieser Doktorarbeit und in den Kapiteln V und VI der Dissertation enthalten. Die Problemstellungen werden ohne Verwendung der Formalismen aus den Kapiteln III und IV beschrieben. Nur Standardkenntnisse aus der Funktionalanalysis und der Distributionentheorie werden vorausgesetzt, die zum Beispiel in [52, 112] zu finden sind. Alle Funktionenräume sind über \mathbb{R}^d mit $d \in \mathbb{N}$ so lang nichts anderes gesagt wird.

Es folgen Kurzzusammenfassungen der Abschnitte II.1-II.5 mit Auflistung der mathematischen Problemstellungen und wichtiger Resultate aus dieser Doktorarbeit:

- II.1. Definitionen von Distributionenräumen von Schwartz wie \mathcal{S}' oder \mathcal{D}'_{L^p} werden rekapituliert. Der topologische Aspekt bekannter Darstellungen dieser Räume als Regularisierungsbilder $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ ist Problem II.1.1. Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ mit kontinuierlichen globalen Komponenten E und Konvolutorenräume $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$ werden vorgestellt. Die Gleichheit der drei Distributionenräume ist Problem II.1.2.
- II.2. Schwartz' allgemeine Faltung von Distributionen, genannt \mathcal{D}' -Faltung, wird diskutiert. Die Bewahrung stetiger Faltungsinclusionen $F_1 * F_2 \subseteq F_3$ unter der Abbildung $F \mapsto \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(F)$ wird in Theorem II.2.1 beschrieben. Damit werden Stetigkeitsnachweise für Faltungsinclusionen zwischen potenz-logarithmisch gewichteten Distributionenräumen $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ vereinfacht. Hierbei stellt sich Problem II.2.2 zur Vertauschbarkeit von Gewichtung und Amalgamraumbildung.
- II.3. Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$ und $\mathcal{E}_{\tau}(\lambda)$ mit diskreten globalen Komponenten λ werden vorgestellt. Daraus ergibt sich Problem II.3.1, der Vergleich zu den Räumen $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$

II. Übersicht und Einordnung

und $\mathcal{E}_T(E)$. Problem II.3.2 ist die Äquivalenz zwischen Faltungsinclusionen von Amalgamräumen $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ und den entsprechenden Faltungsinclusionen der diskreten globalen Komponenten λ . Damit werden scharfe Kriterien für Faltungsinclusionen zwischen Räumen $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ erhalten. In Problem II.3.3 werden allgemeine Doppelfolgenraumdarstellungen für die Räume $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{E}_\tau(\lambda)$ gesucht.

II.4. Faltungsinclusionen faltungsvollkommener Distributionenräume $F = F^{**}$ werden über den Bezug zu einem Quantal $Q_{\mathcal{D}'}$ studiert, das bei den Gleichungen (II.4.20) und (II.4.21) eingeführt wird. Diskrete globale Komponenten von Räumen $F = F^{**}$ werden in Problem II.4.1 als faltungsvollkommene Folgeräume $\lambda = \lambda^{**}$ identifiziert. In Problem II.4.2 wird der größte faltungsvollkommene Faltungsmodul A^{*M} einer Faltungsalgebra $A \subseteq \mathcal{D}'$ gesucht. Als Gegenpart dazu charakterisiert Theorem II.4.3 die faltungsvollkommene Faltungsalgebra A^{*A} .

Problem II.4.4 fragt nach der Existenz extremaler Bereiche für Faltungsinclusionen $F_1 * F_2 \subseteq F_3$ mit $F_i = F_i^{**}$, was durch die Quantaleigenschaft von $Q_{\mathcal{D}'}$ in Theorem II.4.5 positiv beantwortet wird. Die Beschreibung der Quantalstruktur von $Q_{\mathcal{D}'}$ über diskrete globale Komponenten ist Problem II.4.6.

Als Lösung von Problem II.4.7 werden Topologien $\mathfrak{T}^*(F)$ und Bornologien $\mathfrak{B}^*(F)$ auf faltungsvollkommenen Räumen F definiert die Hypostetigkeit und Bornologiebewahrung von Faltungsinclusionen garantieren. Die Charakterisierung der relativ schwach kompakten Teilmengen $\mathfrak{K}_\sigma(F, \mathfrak{T}^*(F))$ wird dann als Problem II.4.8 gestellt. Und die Bestimmung der Dualräume $(F, \mathfrak{T}^*(F))'$ als Problem II.4.9.

II.5. Kausale fraktionale Integrale und Ableitungen werden in Definition II.5.1 unter Verwendung der \mathcal{D}' -Faltung aus Unterabschnitt II.2.a definiert. Die Beschreibung von Definitions- und Operationsbereichen basiert auf der Theorie aus Abschnitt II.4. Theorem II.5.2 beschreibt verallgemeinerte Indexgesetze für diese Operatoren und Theorem II.5.5 charakterisiert deren Operationsbereiche.

Zur Beschreibung verallgemeinerter fraktionaler Relaxationen werden die in Abschnitt I.2 der Motivation gesuchten Räume \mathcal{F} und $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ in den Gleichungen (II.5.33) und (II.5.41) konstruiert.

Auch Riesz-Potentialoperatoren I^α und fraktionale negative Laplace-Operatoren $(-\Delta)^{\alpha/2}$ werden in Gleichung (II.5.47) durch die \mathcal{D}' -Faltung definiert. Theo-

rem II.5.8 verallgemeinert eine bekannte Inversionsformel für Riesz-Potentialoperatoren I^α . Zudem wird eine notwendige Korrektur der Beschreibung des Operators $(-\Delta)^{\alpha/2}$ im “Handbook of Fractional Calculus” [67] angegeben.

Der Ansatz zur Verallgemeinerung sequentieller Ableitungen unter Verwendung von distributionellen kausalen fraktionalen Ableitungen aus der Publikation [62] dieser Doktorarbeit wird beschrieben.

II.1. Charakterisierung von Distributionenräumen

Neben klassischen Räumen wie \mathcal{D}' und \mathcal{S}' führte Laurent Schwartz weitere Räume von Distributionen ein deren globale Eigenschaften durch einen Funktionenraum charakterisierbar sind. Zum Beispiel den Raum \mathcal{D}'_{L^p} der Distributionen die sich global wie L^p -Funktionen verhalten. Schwartz' Definitionen solcher Räume werden in den Unterabschnitten II.1.a und II.1.b rekapituliert. Die topologische Charakterisierung dieser Räume durch die Regularisierungen $f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$ wird als Problem II.1.1 gestellt. Lösungen zu diesem Problem aus aktueller Literatur und aus dieser Doktorarbeit werden zusammengefasst.

Diese Resultate unterstützen den alternativen Ansatz Distributionenräume direkt als Regularisierungsbilder $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ einzuführen, siehe Gleichung (II.1.6). Hier kontrolliert der Funktionenraum E das globale Verhalten. Ähnliche Ansätze sind Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ und Konvolutorenräume $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$, die in den Unterabschnitten II.1.c und II.1.d vorgestellt werden. Dies führt zur Frage nach der Äquivalenz dieser drei Definitionen, gestellt in Problem II.1.2. Eine positive Antwort wurde in dieser Doktorarbeit für SRI-Räume E erhalten, wie in Unterabschnitt II.1.e erläutert wird.

II.1.a. Die Ansätze von Laurent Schwartz

In seinem Buch “Théorie des Distributions, Tome I” [106] definierte Laurent Schwartz den lokalkonvexen Raum der Distributionen \mathcal{D}' als den topologischen Dualraum des Raums der Testfunktionen \mathcal{D} [104, S. 24, 67] ausgestattet mit der stark*-Topologie [104, S. 71]. Analog definierte Schwartz die kompakt getragenen Distributionen \mathcal{E}' als starken Dualraum der glatten Funktionen \mathcal{E} und die temperierten Distributionen \mathcal{S}' als starken Dualraum der schnell fallenden glatten Funktionen \mathcal{S} . Diese Räume gehören mittler-

II. Übersicht und Einordnung

weile zum Standardrepertoire der Funktionalanalysis und werden unter anderem in den Grundlagenbüchern [49, 120, 34, 35, 22, 88, 113] diskutiert. Ausführlichere Diskussionen dieser lokalkonvexen Räume findet man zum Beispiel in [52, 112, 54].

Einen weitaus geringeren Bekanntheitsgrad erlangten allerdings die Räume \mathcal{D}_{L^p} und \mathcal{D}'_{L^p} mit $1 \leq p \leq \infty$, sowie die Räume \mathcal{B} und \mathcal{B}' , die Schwartz in “Tome II” [107] einführte. Die Räume $F \in \{\mathcal{E}', \mathcal{S}', \mathcal{D}'_{L^p}\}$ lassen sich durch die folgende Konstruktion einheitlich beschreiben: Zu einem lokalkonvexen Raum von Distributionen E assoziiert man den Urbildraum von E unter $\mathcal{E} \ni f \mapsto f^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und notiert diesen als \mathcal{D}_E (ähnlich zu Gleichung (13) in [23, S. 505]). Damit gemeint ist der Vektorraum

$$\mathcal{D}_E := \{f \in \mathcal{E} : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : f^{(\alpha)} \in E\} \quad (\text{II.1.1})$$

ausgestattet mit der von den Abbildungen $\mathcal{D}_E \ni f \mapsto f^{(\alpha)} \in E$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ induzierten projektiven Topologie.¹ Dann definiert man den Raum F durch

$$F := (\mathcal{D}_E)'_{\beta} \quad (\text{II.1.2})$$

als den starken Dualraum von \mathcal{D}_E . Dies ist der topologische Dualraum von \mathcal{D}_E ausgestattet mit der stark*-Topologie $\beta(F, \mathcal{D}_E)$, der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von \mathcal{D}_E . Ist \mathcal{D} eine dichte Teilmenge von \mathcal{D}_E , so kann F auf kanonische Weise als Teilraum von \mathcal{D}' verstanden werden.

Effektiv wendete Schwartz diese Konstruktion auf jedes Tripel (E, \mathcal{D}_E, F) aus der folgenden Tabelle an:

E	\mathcal{D}_E	F	Referenz
\mathcal{C}	\mathcal{E}	\mathcal{E}'	[104, S. 89]
\mathcal{C}_P	\mathcal{S}	\mathcal{S}'	[104, S. 237]
L^q	\mathcal{D}_{L^q}	\mathcal{D}'_{L^p}	[104, S. 200]
\mathcal{C}_0	\mathcal{B}	\mathcal{D}'_{L^1}	[104, S. 200]
\mathcal{C}_{P^\bullet}	\mathcal{O}_M	\mathcal{O}'_M	[104, S. 243f]
\mathcal{H}	\mathcal{D}^F	\mathcal{D}'^F	[52, S. 172], “ D ” in [103, S. 99]

¹Siehe [54, Sec. 7.2], [75, S. 30] oder, synonym dazu, “initiale Topologie” in [52, Ch. 2, §11]. Kapitel IV dieser Doktorarbeit behandelt systematisch allgemeinere Urbildraumkonstruktionen.

II.1. Charakterisierung von Distributionenräumen

Hier sind $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $p \neq 1$. Der Raum \mathcal{C} der stetigen Funktionen trägt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta und der Teilraum \mathcal{C}_0 der Funktionen die im unendlichen verschwinden trägt die Teilraumtopologie von L^∞ . Der gewichtete Raum \mathcal{C}_W ist als der Urbildraum von \mathcal{C}_0 unter $\mathcal{C} \ni f \mapsto f \cdot w$, $w \in W$ definiert (siehe auch Section 22 in [80] oder in [111]). Mit der Menge von Gewichten $P := \{f \in \mathcal{C}_+ : \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq 2^k(1 + x^2)^k\}$ ist \mathcal{C}_P der Raum der schnell fallenden stetigen Funktionen. Mit $P^\blacksquare = \mathcal{C}_P \cap \mathcal{C}_+$ (vgl. Gleichung (II.5.19)) ist $\mathcal{C}_{P^\blacksquare}$ der Raum der langsam wachsenden stetigen Funktionen. Schwartz nutzte die Notationen $\mathcal{B} := \mathcal{D}_{L^\infty}$ und $\mathcal{B}^\cdot := \mathcal{D}_{\mathcal{C}_0}$. Der Raum \mathcal{O}_M besteht aus den langsam wachsenden glatten Funktionen [104, S. 243f] und die Elemente des starken Dualraums \mathcal{O}'_M werden, wie von Grothendieck vorgeschlagen [38, Ch. II, S. 130], als *sehr* schnell fallende Distributionen bezeichnet.

Der Raum der Testfunktionen \mathcal{D} stimmt nicht mit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ überein: Definiert wird \mathcal{D} als die Vereinigung der Räume $\mathcal{D}_K := \mathcal{E}_K := \{f \in \mathcal{E} : \text{supp } f \subseteq K\}$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Die Räume \mathcal{D}_K tragen die Teilraumtopologie von \mathcal{E} und \mathcal{D} trägt die feinste lokalkonvexe Topologie, sodass $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}$ eine topologische Einbettung ist, siehe Seite 65 und Théorème II in [104, S. 65f]. Ersetzt man in dieser Konstruktion \mathcal{E} durch \mathcal{C} so erhält man den Raum \mathcal{K} der stetigen Testfunktionen, siehe Example 2.12.5 in [52, S. 164]. Dieser lässt sich auch als der gewichtete Raum $\mathcal{K} = \mathcal{C}_W$ mit $W = \mathcal{C}_+$ charakterisieren, siehe [8, S. 1f], Section 4.4 in [11, S. 150] oder [103, S. 94-99]. Die Elemente des starken Dualraums \mathcal{K}' werden als *Radon-Maße* bezeichnet. Der Raum $\mathcal{D}^F := \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ hat eine echt gröbere Topologie wie \mathcal{D} , siehe [52, S. 172ff]. Der Dualraum \mathcal{D}'^F besteht aus den Distributionen mit global endlicher Ordnung, siehe Proposition 2 in [52, S. 339].

II.1.b. Charakterisierung als Regularisierungsbilder

Außer für die Räume \mathcal{O}'_M und \mathcal{D}'^F lassen sich die Elemente f der Distributionenräume F aus Tabelle (II.1.3) durch die Wachstumseigenschaften der Regularisierungen $f * \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$ charakterisieren: Es gilt die Charakterisierung

$$F = \{f \in \mathcal{D}' : \forall \varphi \in \mathcal{D} : f * \varphi \in E\} \quad (\text{II.1.4})$$

II. Übersicht und Einordnung

und, zusätzlich, $F * \mathcal{D} \subseteq H$ für jedes Tripel (F, E, H) aus der folgenden Tabelle:²

F	E	H	Referenz
\mathcal{E}'	\mathcal{K}	\mathcal{D}	Thm. 3.11 und Exa. 5.7 in [58, S. 8f, 20]
\mathcal{S}'	\mathcal{C}_P	\mathcal{O}_C	Thm. VI 2° [104, S. 239]
\mathcal{D}'_{L^p}	L^p	\mathcal{D}'_{L^p}	Thm. XXV 2° in [104, S. 201]
$\dot{\mathcal{B}}'$	\mathcal{C}_0	$\dot{\mathcal{B}}$	Remark (3) in [82, S. 329]
\mathcal{O}'_C	\mathcal{C}_P	\mathcal{S}	Thm. IX 3° und Thm. XI in [104, S. 244, 247]
\mathcal{D}'	\mathcal{C}	\mathcal{E}	Thm. XI in [104, S. 166]

Hier notiert $\dot{\mathcal{B}}'$ den topologischen Abschluss von \mathcal{E}' in $\mathcal{B}' := \mathcal{D}'_{L^\infty}$ [104, S. 200]. Der Raum \mathcal{O}'_C der schnell fallenden Distributionen³ wurde als Urbildraum von \mathcal{B}' unter $\mathcal{D}' \ni f \mapsto f \cdot (1 + x^2)^k$, $k \in \mathbb{N}$ eingeführt [104, S. 244ff]. Der Raum \mathcal{O}_C ist der starke Dualraum von \mathcal{O}'_C und wird auch als Raum der *sehr* langsam wachsenden glatten Funktionen bezeichnet [38, Ch. II, S. 131].

Betrachte nun ein Paar (F, E) aus Tabelle (II.1.5). Die Charakterisierung der Menge F in Gleichung (II.1.4) führt auf die Frage, ob der Raum F auch die von den Abbildungen $F \ni f \mapsto f * \varphi \in E$ induzierte projektive Topologie trägt. In diesem Fall wäre F der Urbildraum von E unter $\mathcal{D}' \ni f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Definiere nun, allgemeiner, für einen lokalkonvexen Raum $E \subseteq \mathcal{D}'$ und eine Teilmenge $Y \subseteq \mathcal{E}'$ den Raum

$$\mathcal{D}'_{*Y}(E) := \{f \in \mathcal{D}' : \forall \varphi \in Y : f * \varphi \in E\} \quad (\text{II.1.6})$$

ausgestattet mit der von den Abbildungen $\mathcal{D}'_{*Y}(E) \ni f \mapsto f * \varphi \in E$ induzierten projektiven Topologie. In anderen Worten, $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$ ist der Urbildraum von E unter $\mathcal{D}' \ni f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in Y$. Dieser wird in Definition V.3.9 nochmals über den Urbildraumformalismus aus Kapitel IV eingeführt.

Die Frage von eben lässt sich nun wie folgt formulieren:

²Der erste Eintrag wird in [7] fälschlicherweise auf Thm. XI in [104, S. 166] zurückgeführt und der vierte in [9] auf Remarque 3° in [104, S. 202]. In beiden Fällen wurde dort nur die Inklusion “ \subseteq ” für Gleichung (II.1.4) bewiesen.

³Grothendieck charakterisierte \mathcal{O}'_C bzw. \mathcal{O}_M als den Raum aller Faltungs- bzw. Multiplikationsendomorphismen von \mathcal{S} , ausgestattet mit der starken Operatortopologie [38, Chap. II, S. 130]. Daher spricht man auch vom Raum der Konvolutoren bzw. Multiplikatoren.

Problem II.1.1. Sei (F, E) ein Paar von lokalkonvexen Räumen aus Tabelle (II.1.5). Gilt die Identität lokalkonvexer Räume $F = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$?

Schwartz bewies für $F = \mathcal{D}'$ und $F = \mathcal{D}'_{L^p}$ mit $1 \leq p \leq \infty$, dass F und $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ die gleichen beschränkten Mengen und die gleichen konvergenten Folgen besitzen. Siehe Théorème XXII und XXIII in [104, S. 195ff] und Remarque 2° in [104, S. 202]. Erst vor kurzem, also etwa siebzig Jahre später, wurde Problem II.1.1 für die Räume \mathcal{D}'_{L^p} positiv beantwortet, siehe in [8]: Proposition 4.1 (iii) für $1 < p \leq \infty$ und Proposition 4.10 (iii) für $p = 1$. Für die Räume \mathcal{S}' und \mathcal{O}'_C wurde eine andere Variante von Problem II.1.1 positiv beantwortet: Es wurde gezeigt, dass $F = \mathcal{S}'_{*\mathcal{S}}(E) := \mathcal{D}'_{*\mathcal{S}}(E) \cap \mathcal{S}'$, siehe Proposition 2.3 (ii) und Remark 3.2 (3) in [8].

Unabhängig von der Arbeit [8] konnte im Rahmen dieser Doktorarbeit für eine relativ allgemeine Klasse von Räumen $F = (\mathcal{D}_G)'_\beta$ mit $E = G'$ eine positive Antwort auf Problem II.1.1 gegeben werden [58]. Nämlich für den Fall, dass G ein solider⁴ Fréchet-Raum mit stetiger Inklusion $G \subseteq L^1_{\text{lok}}$ ist der \mathcal{D} als dichte Teilmenge hat und auf dem $f \mapsto f * \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ stetig operiert. Dieses Resultat deckt die Räume \mathcal{D}' , \mathcal{S}' , \mathcal{E}' , \mathcal{D}'_{L^p} mit $1 < p \leq \infty$ und \mathcal{B}' ab, siehe Examples 3.14 und 5.7-9 in [58, S. 9, 20f]. Durch Kombination von Theorem 5.1 aus [18, S. 853] und der Lösung von Problem II.1.2 in Unterabschnitt II.1.e erhält man auch das Resultat für \mathcal{D}'_{L^1} . Für die Räume \mathcal{D}' , \mathcal{S}' , \mathcal{E}' und \mathcal{B}' sind diese Resultate neu und bis jetzt nur in [58] publiziert worden.

Der Raum \mathcal{O}'_C kann nicht mit der Methode aus [58] behandelt werden da der Dualraum \mathcal{O}_C kein Fréchet-Raum ist. Allerdings löst Theorem 1.1(v) aus [18], in Verbindung mit der Lösung von Problem II.1.2, die positive Antwort auf Problem II.1.1 für \mathcal{O}'_C . Damit sind alle Räume aus Tabelle II.1.5 abgedeckt. Mit der Lösung von Problem II.2.2 lässt sich dies auch auf die potenz-logarithmisch gewichtete Räume $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ aus [85, S. 87] ausdehnen, die in Unterabschnitt II.2.c diskutiert werden.

Diese Lösungen von Problem II.1.1 stellen eine gewisse Symmetrie her: Aufgrund von $f^{(\alpha)} = f * \delta^{(\alpha)}$ entspricht der Raum \mathcal{D}_E aus Gleichung (II.1.1) dem Raum $\mathcal{D}'_{*\partial^*\delta}(E)$ mit der Menge $\partial^*\delta := \{\delta^{(\alpha)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$ und $\delta^{(\alpha)}$ der distributionellen partiellen Ableitung der Ordnung α von der δ -Distribution. Beim Übergang von Räumen glatter Funktionen zu Distributionenräumen übernehmen also Regularisierungen $f \mapsto f * \varphi$ die Rolle partieller Ableitungen $f \mapsto f^{(\alpha)}$.

⁴Siehe Seite 25.

II. Übersicht und Einordnung

II.1.c. Amalgamräume

Ein Amalgamraum, auch genannt “Raum Wiener Art” [29], ist ein translationsinvarianter lokalkonvexer Funktionenraum der aus einer globalen und einer lokalen Komponente zusammengesetzt wird. Dadurch können Wachstums- und Glattheitsbedingungen separat voneinander festgelegt werden [32].

Ein archetypisches Beispiel ist der Raum Wiener Art $W(L^p, L^q)$ mit lokaler Komponente L^p und globaler Komponente L^q mit $1 \leq p, q \leq \infty$. Dies ist der Raum

$$W(L^p, L^q) = \{f \in L_{\text{lok}}^1 : \|f\|_{L^p, L^q} < \infty\} \quad (\text{II.1.7a})$$

mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p, L^q}$ gegeben durch den Ausdruck

$$\|f\|_{L^p, L^q} := \||f| *^p 1_Q\|_{L^q} \quad (\text{II.1.7b})$$

für alle $f \in L_{\text{lok}}^1$ (vergleiche Gleichung (2.2) in [32]). Hier ist $|f| *^p 1_Q$ das “potenzierte Faltungsprodukt” von $|f|$ und der Indikatorfunktion 1_Q des Einheitswürfels $Q := [0, 1]^d$. Das potenzierte Faltungsprodukt $|f| *^p 1_Q$ ist punktweise erklärt durch

$$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto (|f| *^p 1_Q)(x) := \|f \cdot 1_{x-Q}\|_{L^p} \quad (\text{II.1.7c})$$

für alle $f \in L_{\text{lok}}^1$. Diese ist messbar falls $f \in L_{\text{lok}}^p$, im Fall $p < \infty$ sogar stetig. Diese Definition von $W(L^p, L^q)$ ist äquivalent zu Definition und Remark 3 in [29, S. 513, 517] und Abschnitt 2 und 12(iv) in [32, S. 1f, 17f].

Durch $f \mapsto |f| *^p 1_Q$ wird eine *Halbnormfunktion* $|\cdot| *^p 1_Q: L_{\text{lok}}^p \rightarrow L_{\text{lok}}^\infty$ definiert. Damit ist eine absolut homogene, subadditive Abbildung $L_{\text{lok}}^p \rightarrow L_{\text{lok}}^\infty$ gemeint. Diese Abbildungsklassen wird in Definition IV.1.3 eingeführt.

Allgemeinere Amalgamräume $W(B, C)$ mit lokaler Komponente B und globaler Komponente C werden in der Definition in [29, S. 513] eingeführt. Die Betrachtung schränkt sich dort auf geeignete Banach-Räume B und C ein. Eine interessante Eigenschaft von Amalgamräumen ist, dass $W(B_1, C_1) * W(B_2, C_2) \subseteq W(B_3, C_3)$ eine stetige Faltungsinklusion ist (in [29, S. 511] “Banach convolution triple” genannt), falls $B_1 * B_2 \subseteq B_3$ und $C_1 * C_2 \subseteq C_3$ dies sind. Siehe Theorem 3 in [29, S. 518] für die Details. Analoge Resultate wurden in dieser Doktorarbeit für Distributionenräume angestrebt.

II.1. Charakterisierung von Distributionenräumen

Die obige Definition von $W(L^p, L^q)$ wird nun als Inspiration verwendet um Räume der Art “ $W(\mathcal{D}', E)$ ” bzw. “ $W(\mathcal{E}, E)$ ” zu definieren, notiert als $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ bzw. $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E)$. Dabei ist die kontinuierliche globale Komponente ein *solider* lokalkonvexer Raum E mit stetiger Inklusion $E \subseteq L^1_{\text{lok}}$. Solidität bedeutet hier: 1.) Es gilt $g \in E$ für alle $f \in L^1_{\text{lok}}$ die $|g| \leq |f|$ für ein $f \in E$ erfüllen. 2.) Die Topologie von E wird von Verbandshalbnormen erzeugt. Verbandshalbnormen p sind Halbnormen mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $p(f) \leq p(g)$ für alle $f, g \in E$ mit $|f| \leq |g|$. Entsprechende Räume mit \mathcal{C} anstatt L^1_{lok} werden auch betrachtet.

Definiere nun in Analogie zu Gleichung (II.1.7c) die Funktion⁵

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto |f|_{*\Phi}(x) := \sup_{\varphi \in \Phi} |(f * \varphi)(x)| \quad (\text{II.1.8})$$

für jede Menge $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ und $f \in \mathcal{D}'$. Hier notiert $\mathfrak{B}(\mathcal{D})$ die beschränkten Teilmengen von \mathcal{D} . Dies definiert eine Halbnormfunktion $|\cdot|_{*\Phi}: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C}$. Definiere dann den Amalgamraum $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ als den Raum

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) := \{f \in \mathcal{D}' : \forall \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) : |f|_{*\Phi} \in E\} \quad (\text{II.1.9})$$

mit der Topologie die erzeugt wird von den Halbnormen

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) \ni f \mapsto p_{\Phi}(f) := p(|f|_{*\Phi}) \quad (\text{II.1.10})$$

mit $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ und p einer stetigen Verbandshalbnorm auf E .

Zur Definition des Amalgamraums $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E)$ verwendet man anstelle von \mathcal{D}' den Raum \mathcal{E} und anstelle von \mathcal{D} den Raum \mathcal{E}' . Der Amalgamraum $\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E)$ mit $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ oder $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ wird in Definition V.2.20 nochmals einheitlich mit dem Urbildraumformalismus aus Kapitel IV eingeführt.

⁵Siehe Definition 3.1 in [58, S. 5] und Definition 1 in [61, S. 126] mit der dort leicht abweichenden Notation $|f|_{\Phi}$ anstatt $|f|_{*\Phi}$. Dort wird die Bezeichnung “generalized absolute values” verwendet. In dieser Dissertation wird von Faltungshalbnormfunktionen gesprochen.

II. Übersicht und Einordnung

II.1.d. Konvolutorenräume

Der Konvolutorenraum $\mathcal{O}'_C(F, G)$ besteht, vereinfacht gesagt, aus den Distributionen die Faltungskerne stetiger Faltungsoperatoren $F \rightarrow G$ sind. Siehe Definition 12 in [7, S. 2246] für Details (siehe alternativ auch [105, S. 72] und [19, Eq. (1.2), Ex. S. 307]). Spezieller ist für einen lokalkonvexen Raum $E \subseteq \mathcal{D}'$ der Raum $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, E)$ definiert als der Vektorraum

$$\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, E) := \{f \in \mathcal{D}' : (\varphi \mapsto f * \varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, E)\} \quad (\text{II.1.11})$$

ausgestattet mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen in $\mathfrak{B}(\mathcal{D})$. Hier notiert $\mathcal{L}(\mathcal{D}, E)$ die stetigen linearen Operatoren $\mathcal{D} \rightarrow E$. Räume der Form $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, E)$ waren das primäre Untersuchungsobjekt in [58, S. 1].

In einer aktuellen Arbeit [18] wurden die Räume $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, L^1_{\mathcal{W}})$ mit einer Folge von Gewichten $\mathcal{W} = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ untersucht.⁶ An die Gewichte wird dort, in leicht abgewandelter Formulierung, die Translationsinvarianzbedingung

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n \forall K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt} \exists C \in \mathbb{R}_+ : w_n *^\infty 1_K \leq C \cdot w_m \quad (\text{II.1.12})$$

gestellt, siehe Gleichung (1.1) in [18, S. 830]. Hier notiert $*^\infty$ die *Supremalfaltung*, definiert wie in Gleichung (II.1.7c).

Ein Anwendungsbeispiel sind Räume Laplace-transformierbarer Distributionen: Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex. Dazu sei (K_n) eine kompakte Ausschöpfung von Γ aus konvexen Mengen K_n . Der Raum $\mathcal{S}'(\Gamma)$ wurde von L. Schwartz als Urbild von \mathcal{S}' unter $\mathcal{D}' \ni f \mapsto f \cdot e^{-\zeta \cdot x}$, $\zeta \in \Gamma$ eingeführt [104, S. 303]. Für die Gewichte

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto w_n(x) := \sup\{e^{-\zeta \cdot x} : \zeta \in K_n\} \quad (\text{II.1.13})$$

wurde in [17] die Identität lokalkonvexer Räume $\mathcal{S}'(\Gamma) = \mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, L^1_{\mathcal{W}})$ bewiesen, siehe Theorem 5.7 in [17, S. 8].

⁶Genau genommen wird in [18, S. 830] der Vektorraum $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^1_{\mathcal{W}})$ mit der Topologie von $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, L^1_{\mathcal{W}})$ eingeführt. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen wird dort die algebraische Identität $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, L^1_{\mathcal{W}}) = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^1_{\mathcal{W}})$ gefolgert. Dieses Vorgehen verwendet aber, dass $L^1_{\mathcal{W}}$ ein Fréchet-Raum ist und funktioniert nicht für allgemeinere Räume E anstatt $L^1_{\mathcal{W}}$.

II.1.e. Vereinheitlichung mit SRI-Räumen

Es wurden nun in den Unterabschnitten II.1.b, II.1.c und II.1.d drei verschiedene Konstruktionen $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$, $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$ von Distributionenräumen eingeführt. Hinter jeder dieser Definitionen steht eine eigene Motivation. Und es gibt auf den ersten Blick keinen Grund, warum diese übereinstimmen sollten. Es wäre allerdings sehr komfortabel, wenn dies der Fall wäre. Das gleiche gilt für die zwei verschiedenen Konstruktionen $\mathcal{E}_{\partial^\bullet}(E)$ und $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E)$ von Räumen glatter Funktionen.

Sei $\varphi \in \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ und p eine stetige Verbandshalbnorm auf einem soliden lokalkonvexen Raum $E \subseteq L^1_{\text{lok}}$ oder $E \subseteq \mathcal{C}$. Dann gilt die Kette von Ungleichungen

$$p(|f * \varphi|) \leq \sup\{p(|f * \varphi|) : \varphi \in \Phi\} \leq p(|f|_{*\Phi}) < \infty \quad (\text{II.1.14})$$

für alle $f \in \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$. Die erste Ungleichung gilt auch für $f \in \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$. Nach Example 3.7.2 in [52, S. 222] ist \mathcal{D} bornologisch und somit jede lokalbeschränkte lineare Abbildung $\mathcal{D} \rightarrow E$ stetig (Definition und Satz 24.10 in [75, S. 33f]). Somit liefert Gleichung (II.1.14) die stetigen Inklusionen

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) \subseteq \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E) \subseteq \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E). \quad (\text{II.1.15})$$

Hier können echte Ungleichungen auftreten: Sei zum Beispiel \mathcal{C}_{pw} der Raum der stetigen Funktionen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dieser Raum ist solide in \mathcal{C} , aber nicht in L^1_{lok} . Aus der Definition $|f * \varphi|(x) = |\langle f, T_x \check{\varphi} \rangle|$ folgert man

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(\mathcal{C}_{\text{pw}}) = \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C}_{\text{pw}}) = \mathcal{D}'_{\beta} \subsetneq \mathcal{D}'_{\sigma} = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(\mathcal{C}_{\text{pw}}). \quad (\text{II.1.16})$$

Hier notiert β bzw. σ die stark*- bzw. schwach*-Topologie auf \mathcal{D}' .

Problem II.1.2. *Welche soliden lokalkonvexen Räume $E \subseteq L^1_{\text{lok}}$ oder $E \subseteq \mathcal{C}$ erfüllen die topologischen Identitäten $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ und $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{D}'_{*\partial^*\delta}(E)$?*

Wie das Beispiel (II.1.16) zeigt, reicht es nicht aus Translationsinvarianz für E zu fordern, wie es in [29] für globale Komponenten getan wird. Eine positive Antwort auf Problem II.1.2 ergab sich im Rahmen dieser Doktorarbeit für Räume E auf denen Regularisierungen $f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$ stetige Endomorphismen sind. Diese Räume werden

II. Übersicht und Einordnung

in dieser Arbeit als *solide regularisierungsinvariante Räume*, oder kürzer, als *SRI-Räume* bezeichnet, siehe Definition V.1.2. Die Resultate werden in Theorem V.3.13 und Theorem V.3.16 in Unterabschnitt V.3.b dieser Dissertation präsentiert. Das Resultat $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ wurde auch in Theorem 3.11 der Publikation [58, S. 8f] erhalten.

Ein Beispiel für einen SRI-Raum ist der Lebesgue-Raum $E = L^p$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Zusammen mit der positiven Antwort auf Problem II.1.1 folgert man also daraus die Identitäten $\mathcal{D}'_{L^p} = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^p) = \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^p)$. Der Raum \mathcal{D}'_{L^p} wurde somit als Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{D}' und globaler Komponente L^p charakterisiert. Siehe Unterabschnitt II.2.c für analoge Resultate für gewichtete Varianten dieser Räume.

II.2. Faltungen zwischen Distributionenräumen

Mit der \mathcal{D}' -Faltung wird in Unterabschnitt II.2.a eine relativ allgemeine Definition der Faltung von Distributionen vorgestellt, die selten in der Literatur diskutiert wird. Die in Unterabschnitt II.1.b vorgestellten Distributionenräume $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ vertragen sich gut mit der \mathcal{D}' -Faltung. Dies ergibt sich aus Theorem II.2.1, einer Vererbungsregel für stetige Faltungsinclusionen die in Unterabschnitt II.2.b diskutiert wird.

Aus dieser Vererbungsregel ergibt sich eine neue Methode um hinreichende Kriterien für stetige Faltungsinclusionen zwischen potenz-logarithmisch gewichteten Distributionenräumen $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ zu beweisen. Damit können allgemeinere Kriterien für die Parameter p, μ und k hergeleitet werden, wie in Unterabschnitt II.2.c beschrieben wird. Diese neue Beweismethode benötigt auch die Lösung von Problem II.2.2, der Frage nach der Vertauschbarkeit von Gewichtung und Amalgamraumbildung.

II.2.a. Faltung von Distributionen

Die meisten Bücher zur Distributionentheorie oder partiellen Differentialoperatoren behandeln die Faltung von Distributionen f und g die die Bedingung (Σ) erfüllen:

$$(f \otimes g)\varphi^\Delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2d}) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D} \quad (\text{II.2.1a})$$

II.2. Faltungen zwischen Distributionenräumen

mit der Notation $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \varphi^\Delta(x, y) := \varphi(x + y)$. Dies erlaubt eine elegante Definition der Faltung $f * g$ als die Distribution

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f * g, \varphi \rangle := \langle (f \otimes g)\varphi^\Delta, \theta_\varphi \rangle \quad (\text{II.2.1b})$$

mittels der Abschneidefunktionen $\theta_\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\{\theta_\varphi = 1\} \supseteq \text{supp}((f \otimes g)\varphi^\Delta)$. Bis auf Details in der Formulierung findet man diese Definition in [113, 52, 112, 88, 49].

Mit Gleichung (II.2.1) erklärt man die \mathcal{E}' -Faltungsmodulstruktur auf \mathcal{D}' und die Faltungsalgebra \mathcal{D}'_{+A} der Distributionen mit Träger in $A + K$ für ein Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^d$, wie in [117, S. 63f] beschrieben. Hier ist A ein konvexer, spitzer, abgeschlossener Kegel in \mathbb{R}^d . Um die \mathcal{O}'_C -Faltungsmodulstruktur auf \mathcal{S}' zu erklären muss aber bereits zu einer anderen Definition gegriffen werden, wie in [52, 112, 88, 104] beschrieben wird.

Mehr Flexibilität bietet eine Definition der Faltung die auf distributionellen Integralen [104, S. 203], [51, S. 184] aufbaut: Da \mathcal{B} der Dualraum von \mathcal{D}'_{L^1} ist lässt sich das *distributionelle Integral von $f \in \mathcal{D}'_{L^1}$* über das Dualsystem $\langle \mathcal{D}'_{L^1}, \mathcal{B} \rangle$ definieren als

$$\int f := \langle f, 1_{\mathbb{R}^d} \rangle. \quad (\text{II.2.2})$$

Hier notiert $1_{\mathbb{R}^d} \in \mathcal{B}$ die konstante Funktion auf \mathbb{R}^d . Zwei Distributionen f und g werden *\mathcal{D}' -faltbar* genannt falls diese die Bedingung (Γ) erfüllen:

$$(f \otimes g)\varphi^\Delta \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{2d}) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (\text{II.2.3a})$$

Die *\mathcal{D}' -Faltung $f * g$ von \mathcal{D}' -faltbaren f und g* definiert man dann als

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f * g, \varphi \rangle := \int (f \otimes g)\varphi^\Delta. \quad (\text{II.2.3b})$$

Diese Definition geht auf L. Schwartz zurück [102] und wurde unabhängig davon zwanzig Jahre später von J. Horváth in [51] erneut vorgeschlagen [83, S. 371].

Ist (θ_k) eine Approximation der Eins, also eine in \mathcal{B} beschränkte Folge mit $\theta_k \in \mathcal{D}$ und $\theta_k \rightarrow 1_{\mathbb{R}^d}$ in \mathcal{E} , so gilt $\langle f, \theta_k \rangle \rightarrow \langle f, 1_{\mathbb{R}^d} \rangle$ für alle $f \in \mathcal{D}'_{L^1}$ [21, S. 187]. Mit der Annahme $\{\theta_k = 1\} \supseteq \{|x| \leq k\}$ erhält man, dass (II.2.3) eine Verallgemeinerung von (II.2.1) ist. Ähnlich erhält man die Äquivalenz von (II.2.3) und der von S. V. Vladimirov

II. Übersicht und Einordnung

verwendeten Definition der Faltung [116, S. 102-105], siehe [21].

Die allgemeine Faltung (II.2.3) wird nur in wenigen Büchern [86, 85, 117, 116] diskutiert, und dort nicht ausschöpfend. Um ein vollständiges Bild der Grundlagen zu erhalten müssen gegebenenfalls Journalartikel dazugezogen werden, wie zum Beispiel [82, 83, 21, 78, 108]. Informationen zu Assoziativgesetzen findet man zum Beispiel in [122, 123, 51, 108]. Diese Gesetze basieren auf der (simultanen) Faltung von p -Tupeln. Diese wird in Unterabschnitt III.3.c dieser Arbeit für skalare Funktionen auf \mathbb{Z}^d , sowie (signierte) Radon-Maße und Distributionen auf \mathbb{R}^d besprochen.

II.2.b. Regularisierung und Vererbung der Stetigkeit

Alternative Definitionen der \mathcal{D}' -Faltung wurden bereits von C. Chevalley aufgestellt, siehe [108] und dortige Zitate. Die Äquivalenz der Definitionen wurde von R. Shiraishi bewiesen, siehe Theorem 2 in [108, S. 24]. Zum Beispiel sind Distributionen f und g genau dann \mathcal{D}' -faltbar, wenn $(f * \varphi) \cdot (g * \psi) \in L^1$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Dies entspricht Bedingung $(\varphi, \psi - C)$ in [82, S. 315]. Ohne Mühe lässt sich diese umformulieren zu

$$(|f * \varphi| * |g * \psi|)(x) < \infty \text{ für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{D}, x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{II.2.4})$$

Hier ist die Faltung von $|f * \varphi|$ und $|g * \psi|$ punktweise als Integral von unterhalbstetigen Funktionen erklärt [37, S. 55 (a)], das nicht an allen Punkten endlich sein muss. Siehe auch Theorem VI.4.2 in Unterabschnitt VI.4.b für weitere \mathcal{D}' -Faltbarkeitskriterien.

Die \mathcal{D}' -Faltung wurde in der Literatur als bilineare Abbildung $E \times F \rightarrow G$ untersucht, für verschiedene Tripel lokalkonvexer Räume von Distributionen (E, F, G) . Zur einfacheren Formulierung solcher Resultate wird im folgenden genau dann von einer *stetigen Faltungsinklusion* $E * F \subseteq G$ gesprochen, wenn alle Paare $(f, g) \in E \times F$ \mathcal{D}' -faltbar sind und die \mathcal{D}' -Faltung eine stetige Abbildung $E \times F \rightarrow G$ definiert.

In dieser Doktorarbeit wurde entdeckt, dass Stetigkeitseigenschaften der Faltung unter $E \mapsto \mathcal{D}'_{*\varphi}(E)$ bewahrt werden. Bewiesen wird diese Vererbungsregel mit dem schwachen Faktorisierungstheorem

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D} * \mathcal{D} \rangle. \quad (\text{II.2.5})$$

Hier notiert $\langle \cdot \rangle$ die lineare Hülle. Gleichung (II.2.5) folgt aus Resultaten, die 1978

von Dixmier-Malliavin [24] und von Rubel-Squires-Taylor erhalten wurden [95]. Siehe Théorème 3.1 in [24, S.311] oder Theorem 3 in [95, S.554]. In Unterabschnitt V.3.a dieser Dissertation werden solche Faktorisierungstheoreme ausführlich diskutiert.

Theorem II.2.1. *Seien E_i , $i = 1, 2, 3$ lokalkonvexe Räume von Distributionen. Es gilt die folgende Vererbungsregel für stetige Faltungsinclusionen:*

$$E_1 * E_2 \subseteq E_3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_1) * \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_2) \subseteq \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_3). \quad (\text{II.2.6})$$

Theorem II.2.1 ist eine Konsequenz aus Theorem VI.4.2 und Theorem VI.4.5 von Kapitel VI dieser Arbeit. Im dortigen Theorem VI.4.5 wird auch die Vererbung weiterer Stetigkeitseigenschaften bilinearer Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen bewiesen. Wie zum Beispiel die Hypostetigkeit bezüglich einer allgemeinen Bornologie, die analog zur Topologie von E auf $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ vererbt wird.

Der Faktorisierungssatz (II.2.5) wurde schon in ähnlichen Zusammenhängen verwendet. Dennoch wurde die Vererbungsregel in dieser Form noch nicht in der Literatur erwähnt oder systematisch verwendet. Dies hängt vermutlich damit zusammen, dass Problem II.1.1 noch nicht gelöst worden war. Beispiele für Anwendungen von (II.2.5) sind Theorem 3.10 in [10, S.371], die Implikation “(ii) \Rightarrow (iii)” von Theorem 3 in [23, S.507], die Implikation “a) \Rightarrow b)” von Theorem 1 in [110, S.50f] und die Implikation “ $(\varphi, \psi - \text{CPS}) \Rightarrow (\text{CPS})$ ” von Proposition 4 in [82, S.327].

II.2.c. Anwendung auf gewichtete Distributionenräume

Als Analogie zur Youngschen Faltungsungleichung wurde die stetige Faltungsinclusion

$$\mathcal{D}'_{L^p} * \mathcal{D}'_{L^q} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r} \text{ für } 1 \leq p, q, r \leq \infty \text{ mit } 1/p + 1/q = 1/r + 1 \quad (\text{II.2.7})$$

von L. Schwartz bewiesen, siehe Théorème XXVI 2° aus [104, S.203].⁷ Mittlerweile sind einige Verallgemeinerungen von Gleichung (II.2.7) auf potenz-logarithmisch gewichtete Räume $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ erschienen [84, 40, 119], darunter auch ein Resultat aus dieser Doktorarbeit [58]. Definition 3.1.1 aus [85, S.87] folgend, definiert man für $\mu, k \in \mathbb{R}$ die

⁷L. Schwartz erklärt die Faltung in [104] durch eine stetige Fortsetzung und nicht durch Gleichung (II.2.3b). Diese Definitionen stimmen allerdings überein.

II. Übersicht und Einordnung

potenz-logarithmisch gewichteten Räume

$$\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k} := \mathcal{D}'_{L^p} \cdot w_{-\mu, -k}, \quad \mathcal{D}'_{L^p, \mu} := \mathcal{D}'_{L^p, \mu, 0} \quad (\text{II.2.8a})$$

$$L^p_{\mu, k} := L^p \cdot w_{-\mu, -k}, \quad L^p_{\mu} := L^p_{\mu, 0} \quad (\text{II.2.8b})$$

mit den entsprechenden Topologien.⁸ Das Gewicht $w_{\mu, k}$ ist definiert durch

$$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto w_{\mu, k}(x) := (1 + x^2)^{\mu/2} \cdot (1 + \log(1 + x^2))^k \quad (\text{II.2.9})$$

und man setzt $w_{\mu} := w_{\mu, 0}$.

Notiere im folgenden durch $p' := 1/(1 - 1/p)$ den zu $1 \leq p \leq \infty$ konjugierten Hölder-Index. Die Gültigkeit der stetigen Faltungsinclusion

$$\mathcal{D}'_{L^p, \mu} * \mathcal{D}'_{L^q, \nu} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r, \rho} \quad (\text{II.2.10})$$

wurde für jede der Bedingungen aus der folgenden Liste nachgewiesen:

[C1] Prop. 9(ii) in [84, S. 590]: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, $\mu + \nu \geq 0$, $\rho = \min\{\mu, \nu\}$.

[C2] Prop. 2 in [40, S. 295]: $p, r = 1$, $q = \infty$, $\mu = \rho$, $\nu > d$, $-\nu \leq \mu < \nu - d$.

[C3] Prop. 2.1 in [119, S. 473]: $p = r$, $q = \infty$, $\mu = \rho$, $\nu > d$, $-\nu + \frac{d}{p'} < \mu < \nu - \frac{d}{p}$.

[C4] Prop. 2.5 in [119, S. 476]: $p = r$, $\mu = \rho$, $\nu > \max\left\{\frac{|\mu|}{q} + \frac{d}{q'}, \mu + \frac{d}{pq'}, -\mu + \frac{d}{p'q'}\right\}$.

[C5] Exa. 6.7 in [58, S. 24f]: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{t}$, $1 < t \leq \min\{p, q, r\}$, $\mu + \nu > \frac{d}{t'}$ und

$$\begin{cases} \rho \leq \mu + \nu - d/t' & \text{falls } \max\{\mu, \nu\} < d/t', \\ \rho < \min\{\mu, \nu\} & \text{falls } \max\{\mu, \nu\} = d/t', \\ \rho \leq \min\{\mu, \nu\} & \text{falls } \max\{\mu, \nu\} > d/t'. \end{cases}$$

Hier ist [C3] eine Verallgemeinerung von [C2], bis auf den Grenzfall $\mu = -\nu$, und [C4] verallgemeinert [C3]. Auch für $p = r$, $\mu = \rho$ enthält [C5] Fälle, die nicht von [C4]

⁸Die Multiplikation mit $w_{\mu, k}$ definiert einen linearen Automorphismus von \mathcal{D}' . Somit kann die Topologie von $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ als die finale Topologie unter $f \mapsto f \cdot w_{-\mu, -k}$ erklärt werden. Alternativ kann $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ auch als Urbild von \mathcal{D}'_{L^p} unter $f \mapsto f \cdot w_{\mu, k}$ eingeführt werden.

II.2. Faltungen zwischen Distributionenräumen

abgedeckt werden. Weiter gibt es die folgenden Grenzfälle:

[C6] Prop. 3 in [40, S. 299]: $\mathcal{D}'_{L^1, \mu} * \mathcal{D}'_{L^\infty, d} \subseteq \mathcal{D}'_{L^1, \mu, -1}$ stetig falls $-d \leq \mu < 0$.

[C7] Die stetige Inklusion $\mathcal{D}'_{L^p, \mu} * \mathcal{D}'_{L^q, \nu} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r, \rho, -1/t'}$ gilt falls [C5] erfüllt ist mit $\max\{\mu, \nu\} = d/t'$ und $\rho \leq \min\{\mu, \nu\}$, analog zu Exa. 6.7 in [58, S. 24f].

Die Lösung von Problem II.1.1 aus Unterabschnitt II.1.b erlaubt die Anwendung einer einheitlichen Methode um die Resultate [C1]-[C7] zu beweisen. Die Methode wurde in dieser Doktorarbeit entwickelt, siehe Examples 6.6 und 6.7 in [58]. Das Vorgehen kann in vier Schritte unterteilt werden:

[P1] Beweise die stetige Faltungsinklusion $L^p_{\mu, k} * L^q_{\nu, l} \subseteq L^r_{\rho, m}$.

[P2] Beweise die Identität $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^p) = \mathcal{D}'_{L^p}$.

[P3] Beweise die Identität $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^p \cdot w_{\mu, k}) = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^p) \cdot w_{\mu, k}$.

[P4] Nutze Theorem II.2.1 und die Identität $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k} = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L^p_{\mu, k})$ aus [P2] und [P3].

Diese Beweismethode ist transparenter wie die Methoden aus [104, 84, 119] und wurde in Example 6.7 in [58, S. 24f] angewendet um [C5] zu erhalten. Ein detaillierter Vergleich zum Beweis für [C3] und [C4] in [119] wurde in Example 6.6 in [58] durchgeführt.

Der Beweisschritt [P2] wird durch die Lösung von Problem II.1.1 erledigt. Durch den Beweisschritt [P3] wird eine allgemeinere Problemstellung motiviert, die in Problem II.2.2 weiter unten gestellt wird. Eine wichtige Beobachtung ist, dass nur die Faltungsinklusion in Beweisschritt [P1] von den Parametern der Räume $L^p_{\mu, k}$ abhängt. Die Aussagen in [P2], [P3] und [P4] gelten unabhängig von p, q, r, k, l und m .

Diese Beweistruktur motiviert eine Suche nach scharfen Kriterien für die Gültigkeit der stetigen Faltungsinklusion $L^p_{\mu} * L^q_{\nu} \subseteq L^r_{\rho}$. Fündig wird man in der Arbeit [39], die 2018 erschienen ist, in welcher notwendige und hinreichende Kriterien aufgestellt und bewiesen werden. Die in [C1]-[C5] aufgelisteten Bedingungen sind allesamt in Theorem 1.3 von [39] enthalten. Durch Einführung diskreter globaler Komponenten werden aus [39] in Unterabschnitt II.3.b sogar scharfe Kriterien abgeleitet.

Die durch [P3] motivierte Problemstellung ergibt sich auch bei einer Betrachtung der Räume \mathcal{O}'_C aus Unterabschnitt II.1.b und $\mathcal{S}'(\Gamma)$ aus Unterabschnitt II.1.d. Diese sind, ähnlich wie $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$, durch die Gewichtung eines anderen Distributionenraums

II. Übersicht und Einordnung

definiert. Allerdings ist diese Praxis in der Literatur nicht einheitlich: So wurde zum Beispiel in [66, S. 3050] der Distributionenraum \mathcal{B}'_ω als starker Dualraum von \mathcal{D}_E mit $E = L^1_\omega$ eingeführt unter Verwendung der Gleichungen (II.1.1) und (II.1.2). Hier ist ω ein positives moderiertes Gewicht $\omega \in \mathcal{C}_+$, das heisst, zu jedem $k \in \mathcal{K}_+$ gibt es ein $C_k \in \mathbb{R}_+$ mit $\omega *^\infty k \leq \omega \cdot C_k$. Hier ist “ $*^\infty$ ” die Supremalfaltung, siehe (II.1.7c).⁹

Dies motiviert die folgende allgemeine Problemstellung:

Problem II.2.2. *Welche Paare (W, H) von Mengen $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $H \subseteq \mathcal{E}$ erfüllen die Transformationsregel $\mathcal{D}'_T(E_W) = (\mathcal{D}'_T(E))_H$ für alle SRI-Räume $E \subseteq L^1_{\text{lok}}$?*

In dieser Doktorarbeit wurde gezeigt, dass die Transformationsregel für jedes moderierte Kegelideal $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $H = W * \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, $\varphi \geq 0$ gilt, siehe Section 4 in [58]. Durch die Transformationsregeln für Gewichtsmengen in den Theoremen VI.1.26 und VI.1.28 dieser Dissertation wird Problem II.2.2 für beide Räume $\mathcal{D}'_T(E)$ und $\mathcal{E}_T(E)$ gelöst. *Kegelideale* sind nichtleere Mengen $W \subseteq \mathcal{C}_+$ die die Inklusion

$$\langle W + W \rangle_{\leq} \subseteq W \tag{II.2.11}$$

erfüllen mit $\langle V \rangle_{\leq} := \{w \in \mathcal{C}_+ : \exists v \in V : w \leq v\}$ und $\langle W \rangle_{\text{CI}}$ notiert das kleinste Kegelideal V mit $W \subseteq V$. Ein Kegelideal heisst *moderiert*, falls $W *^\infty \mathcal{K}_+ \subseteq W$. Siehe auch Definition VI.1.2 für ausführlichere Definitionen.

II.3. Diskrete globale Komponenten

Die Zuordnungen $E \mapsto \mathcal{D}'_T(E)$ und $E \mapsto \mathcal{E}_T(E)$ mit den Amalgamräumen aus Unterabschnitt II.1.c definieren keine injektiven Abbildungen auf den SRI-Räumen E aus Unterabschnitt II.1.e. Als Alternative werden daher die Amalgamräume $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{E}_\tau(\lambda)$ mit diskreten globalen Komponenten λ untersucht, die in Unterabschnitt II.3.a vorgestellt werden. Eine erschöpfende Beschreibung der Relationen zwischen diesen zwei Zugängen wird hier als Problem II.3.1 gestellt.

Die Lösung dieses Problems motiviert eine neue Betrachtung der hinreichenden Kriterien für stetige Faltungsinclusionen zwischen potenz-logarithmisch gewichteten Distributionenräumen $\mathcal{D}'_{L^p, \mu, k}$ in Unterabschnitt II.3.b. Dabei ergibt sich Problem II.3.2,

⁹Diese Definition von “moderiert” ist äquivalent zu “exponentially moderated” in [66, S. 3049].

dessen Lösung zu einer Äquivalenz der Stetigkeit der Faltung zwischen Amalgamräumen und der Stetigkeit der Faltung zwischen den entsprechenden diskreten globalen Komponenten führt. Als Anwendung werden die hinreichenden Stetigkeitskriterien aus Unterabschnitt II.2.c zu *scharfen* Stetigkeitskriterien verbessert.

Unterabschnitt II.3.c rekapituliert Teile der Valdivia-Vogt-Strukturtafeln aus der Literatur. Diese enthalten Isomorphismen der klassischen Distributionenräume von Schwartz zu vervollständigten Tensorprodukten von Folgenräumen, die als Räume von Doppelfolgen aufgefasst werden können. Problem II.3.3 ist die Verallgemeinerung der Valdivia-Vogt-Strukturtafeln durch Doppelfolgenraumdarstellungen für $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{E}_\tau(\lambda)$. Dies kann sogar für allgemeine globale Komponenten λ gelöst werden, wenn Folgenamalgamräume $\lambda\{s\}$ und $\lambda\{s'\}$ anstatt vervollständigte Tensorprodukte genutzt werden.

II.3.a. Amalgamräume mit diskreten globalen Komponenten

Notiere durch ℓ^p die p -summierbaren Funktionen $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (die beschränkten für $p = \infty$), vergleiche [54, S. 4]. Dann gelten einerseits die Äquivalenzen

$$\mathcal{D}'_{L^p} \subseteq \mathcal{D}'_{L^q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_{L^p} \subseteq \mathcal{D}_{L^q} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^p \subseteq \ell^q \quad \Leftrightarrow \quad p \leq q \quad (\text{II.3.1})$$

mit stetigen Inklusionen (siehe [104, S. 200f] für \mathcal{D}_{L^p} und \mathcal{D}'_{L^p}). Andererseits sind die Lebesgue-Räume L^p und L^q gleich für $p = q$ und unvergleichbar falls $p \neq q$. Dies weist auch darauf hin, dass $E \mapsto \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $E \mapsto \mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E)$ nicht injektiv sind und die Implikation in Theorem II.2.1 keine Umkehrung erlaubt.

Aus diesem Grund werden die Amalgamräume $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{E}_\tau(\lambda)$ mit diskreten globalen Komponenten λ eingeführt, siehe Definition V.2.24. Dabei werden solide translationsinvariante lokalkonvexe Räume $\lambda \subseteq \omega$ zugelassen, die in dieser Doktorarbeit *STI-Folgenräume* genannt werden, siehe Definition V.1.9. Hier notiert ω den Raum der Funktionen $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Translationsinvarianz bedeutet, dass alle Gittertranslationen T_z mit $z \in \mathbb{Z}^d$ stetige Endomorphismen von λ sind.

Betrachte zur Erläuterung wie in Unterabschnitt II.1.c das archetypische Beispiel: Der Amalgamraum (L^p, ℓ^q) mit lokaler Komponente L^p und diskreter globaler Komponente ℓ^q wird analog zu dem Raum $W(L^p, L^q)$ aus Gleichung (II.1.7) definiert. Dabei verwenden

II. Übersicht und Einordnung

det man für $p < \infty$ anstelle von $\|f\|_{L^p, L^q}$ aus Gleichung (II.1.7b) den Ausdruck¹⁰

$$\|f\|_{L^p, \ell^q} := \left\| (|f| *^p 1_Q) \Big|_{\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^q} \quad (\text{II.3.2})$$

für alle $f \in L^1_{\text{lok}}$ (vergleiche Gleichung (2.1) in [32]). Hier ist $(|f| *^p 1_Q) \Big|_{\mathbb{Z}^d}$ die Einschränkung auf \mathbb{Z}^d von der Funktion $|f| *^p 1_Q$ (siehe Gleichung (II.1.7c)). Nach Abschnitt 2 und 12(iv) in [32, S. 1f, 17f] gilt die Identität von lokalkonvexen Räumen

$$W(L^p, L^q) = (L^p, \ell^q) \text{ für alle } 1 \leq p, q \leq \infty. \quad (\text{II.3.3})$$

Den Raum $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ bzw. $\mathcal{E}'_\tau(\lambda)$ definiert man nun wie $\mathcal{D}'_\tau(E)$ bzw. $\mathcal{E}'_\tau(E)$, indem man λ anstelle von E und die Halbnormfunktionen $(|\cdot|_{*\Phi}) \Big|_{\mathbb{Z}^d} : \mathcal{D}' \rightarrow \omega$ anstelle der Halbnormfunktionen $|\cdot|_{*\Phi}$ verwendet. Siehe auch Definition V.2.24.

Problem II.3.1. *Welche Relationen bestehen zwischen Amalgamräumen $\mathcal{D}'_\tau(E)$ bzw. $\mathcal{E}'_\tau(E)$ mit SRI-Räumen E als kontinuierlichen globalen Komponenten und den Amalgamräumen $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ bzw. $\mathcal{E}'_\tau(\lambda)$ mit STI-Folgenräumen λ als diskreten globalen Komponenten?*

In dieser Doktorarbeit konnte zum Beispiel gezeigt werden, dass jeder Amalgamraum $\mathcal{D}'_\tau(E)$ mit vorgegebenem SRI-Raum E von der Form $\mathcal{D}'_\tau(\mu)$ ist für einen eindeutig bestimmten STI-Folgenraum $\mu = \omega_{*\mathcal{D}}(E)$, siehe Definition V.2.11 und Theorem V.2.26. Umgekehrt lassen sich für einen gegebenen STI-Folgenraum λ alle SRI-Räume F mit $\mathcal{D}'_\tau(\lambda) = \mathcal{D}'_\tau(F)$ charakterisieren. Siehe dafür Definition V.2.3 und Korollar V.2.9. Weitere solche Resultate werden am Anfang von Abschnitt V.2 zusammengefasst. Ein Großteil davon wird durch das Korrespondenzdiagramm (V.2.1) skizziert.

In diesem Diagramm werden auch die Amalgamräume $L^p_\tau(E)$ und $L^p_\tau(\lambda)$ verwendet, die in den Definitionen V.2.3 und V.2.15 eingeführt werden. Diese erfüllen die Identitäten $W(L^p, L^q) = L^p_\tau(L^q)$ und $(L^p, \ell^q) = L^p_\tau(\ell^q)$. Somit ergeben sich aus dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) für $E = L^q$ (und somit $\lambda = \ell^q$) die Identitäten

$$\mathcal{X}'_\tau(\ell^q) = \mathcal{X}'_\tau(L^q) = \mathcal{X}'_\tau(W(L^p, L^q)) = \mathcal{X}'_\tau((L^p, \ell^q)) \quad (\text{II.3.4})$$

¹⁰Für $p = \infty$ muss 1_Q durch $k \in \mathcal{K}_+$ mit $1_Q \leq k$ ersetzt werden da $|f| *^\infty 1_Q$ für $f \in L^\infty_{\text{lok}}$ im allgemeinen nicht punktweise wohldefiniert ist.

für $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ oder $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ und alle $1 \leq p, q \leq \infty$.

II.3.b. Scharfe Stetigkeitskriterien für die Faltung

Die Resultate aus dem vorherigen Unterabschnitt motivieren die Suche nach einer Vererbungsregel für Eigenschaften von Faltungen zwischen STI-Folgenräumen λ auf die Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$, ähnlich wie Theorem II.2.1. Hier definiert man die ω -Faltung $a * b$ von Funktionen $a, b \in \omega$ als die Funktion

$$\mathbb{Z}^d \ni z \mapsto (a * b)(z) := \sum_{\substack{z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d \\ z_1 + z_2 = z}} a(z_1)b(z_2) \quad (\text{II.3.5})$$

falls die Reihe für alle $z \in \mathbb{Z}^d$ absolut konvergiert, a und b also ω -faltbar sind. Dies ist äquivalent zu $\|a \cdot T_z \check{b}\|_1 < \infty$ für alle $z \in \mathbb{Z}^d$. Die Verallgemeinerung auf p -Tupel, die Dreiecksungleichung und das bedingte Assoziativgesetz dieser Operation werden in Unterabschnitt III.3.c diskutiert.

Betrachte als Anwendungsbeispiel die potenzgewichteten Folgenräume $\ell_{\mu}^p \subseteq \omega$, die analog zu den Räumen L_{μ}^p aus (II.2.9) definiert sind. Auch die Gültigkeit der stetigen Inklusion $\ell_{\mu}^p * \ell_{\nu}^q \subseteq \ell_{\rho}^r$ wurde in der Arbeit [39] erschöpfend charakterisiert, siehe Theorem 1.1 von [39]. Eine Konsequenz aus Theorem 1.1 und Theorem 1.3 in [39] ist die Äquivalenz

$$L_{\mu}^p * L_{\nu}^q \subseteq L_{\rho}^r \quad \Leftrightarrow \quad \ell_{\mu}^p * \ell_{\nu}^q \subseteq \ell_{\rho}^r \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} + 1. \quad (\text{II.3.6})$$

Die Ungleichung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} + 1$ ist äquivalent zu $L^p(\mathbb{T}^d) * L^q(\mathbb{T}^d) \subseteq L^r(\mathbb{T}^d)$, betrifft also nur die lokalen Komponenten. Hier ist $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der Torus.

Dies motiviert die folgende Fragestellung, ähnlich zu Theorem II.2.1:

Problem II.3.2. *Seien λ_1, λ_2 und λ_3 STI-Folgenräume. Ist die (stetige) Inklusion $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_1) * \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_2) \subseteq \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_3)$ äquivalent zur (stetigen) Inklusion $\lambda_1 * \lambda_2 \subseteq \lambda_3$?*

Die positive Antwort darauf wird in Theorem VI.4.8 aus Kapitel VI dieser Dissertation enthalten. Der Beweis basiert auf einer Art Dreiecksungleichung für die \mathcal{D}' -Faltung, siehe Theorem VI.4.4, und der Einbettung $\omega \ni a \mapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_z \cdot a(z) \in \mathcal{D}'$.

II. Übersicht und Einordnung

Die Lösung von Problem II.3.2 erlaubt eine erschöpfende Charakterisierung der stetigen Inklusion $\mathcal{D}'_{L^p, \mu} * \mathcal{D}'_{L^q, \nu} \subseteq \mathcal{D}'_{L^r, \rho}$ aus Gleichung (II.2.10): Dabei benötigt man die Identität aus Gleichung (II.3.4), ähnlich wie in Beweisschritt [P2] (siehe S. 33), und eine Transformationsregel zwischen diskreten und kontinuierlichen Gewichten, ähnlich wie in [P3]. Diese ist enthalten in den Theoremen VI.1.26 und VI.1.28. Die Lösung von Problem II.3.2 braucht man dann für [P4]. Das oben genannte Theorem 1.1 aus [39] liefert schließlich [P1].

II.3.c. Amalgamräume als Vektor- oder Doppelfolgenräume

Mittels Fourier-Reihen beschrieb Schwartz die topologischen Isomorphismen

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{T}^d) \cong s, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d) = \mathcal{E}'(\mathbb{T}^d) \cong s' \quad (\text{II.3.7})$$

in Example 2 in Chap. VII, §8 von [104, S. 253]. Hier ist s der Raum der *schnell fallenden Folgen* [54, S. 11, c)] und der starke Dualraum s' von s besteht aus den *langsam wachsenden Folgen* [112, S. 527]. Die Vorstellung einer gefensterten Fourier-Transformation führt auf die Vermutung, dass der Amalgamraum $\mathcal{E}_\tau(\lambda)$ bzw. $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ isomorph zum Doppelfolgenraum $\lambda\{s\}$ bzw. $\lambda\{s'\}$ ist. Hier notiert $\lambda\{X\}$ den *Amalgamfolgenraum mit lokaler Komponente X und globaler Komponente λ* .¹¹ Dies ist der Vektorraum

$$\lambda\{X\} := \{v: \mathbb{Z}^d \rightarrow X : \forall q \in \text{csn } X : q \circ v \in \lambda\} \quad (\text{II.3.8})$$

mit der von den Halbnormen $\lambda\{X\} \ni v \mapsto p(q \circ v)$, $p \in \text{clsn } \lambda$, $q \in \text{csn } X$ erzeugten lokalkonvexen Topologie. Dabei notiert $\text{csn } X$ bzw. $\text{clsn } \lambda$ die stetigen Halbnormen bzw. Verbandshalbnormen auf dem lokalkonvexen Raum X bzw. dem STI-Folgenraum λ . Siehe Definition V.4.1 für die formalere Definition mit Urbildraumoperatoren.

Initiiert durch Arbeiten von M. Valdivia und D. Vogt wurden bereits für jeden Raum glatter Funktionen oder Distributionen aus Unterabschnitt II.1.a Isomorphismen zu Doppelfolgenräumen gefunden [115, 118, 85, 4]. Diese werden häufig als vervollständigte

¹¹Definition (II.3.8) und die Notation $\lambda\{X\}$ gehen auf R. Rossier zurück [94, S. 490]. Allerdings wurden dort nur vollkommene Räume λ betrachtet. Der Spezialfall $\lambda = \ell^1$ ergibt den Raum $\ell^1_{\mathbb{Z}^d}\{X\}$ absolutsummierbarer X -wertiger Folgen von A. Pietsch, siehe Definition 1.4.2 in [89]. In allgemeiner Form taucht der Raum $\lambda\{X\}$ zum Beispiel in Definition 6 von [33, S. 109f] auf, aber mit der Notation $\lambda(X)$.

topologische Tensorprodukte dargestellt [89, 53]: Seien Y, X lokalkonvexe Räume wobei Y nuklear ist. Notiere dann durch $Y \widehat{\otimes} X$ die topologische Vervollständigung des π -Tensorprodukts $Y \otimes_{\pi} X$, welches in diesem Fall mit dem ε -Tensorprodukt $Y \otimes_{\varepsilon} X$ übereinstimmt. Es gelten die Isomorphismen

$$F \cong \lambda \widehat{\otimes} s, \quad G \cong \lambda \widehat{\otimes} s' \quad (\text{II.3.9})$$

für jedes Tripel (λ, F, G) aus der folgenden Tabelle:

λ	F	Referenz	G	Referenz
ω	\mathcal{E}	Ch.3,§1,12.(7) [115, S.383]	\mathcal{D}'	Ch.3,§1,13.(6) [115, S.385]
ϕ	\mathcal{D}^F	Theorem 1 in [4, S.7]	\mathcal{E}'	Ch.3,§1,12.(8) [115, S.383]
ℓ^p	\mathcal{D}_{L^p}	Theorem 3.2 in [118, S.415]	\mathcal{D}'_{L^p}	dual zu \mathcal{B} , \mathcal{D}_{L^q} [85, S.2] (II.3.10)
c_0	\mathcal{B}	Theorem 3.2 in [118, S.415]	\mathcal{B}'	Theorem 3 in [4, S.13]
s'	\mathcal{O}_M	Theorem 3 in [114, S.478]	\mathcal{S}'	VII, §8, Ex. 7 [104, S.260ff]
s	\mathcal{S}	VII, §8, Ex. 7 [104, S.260ff]	\mathcal{O}'_C	dual zu \mathcal{O}_M [85, S.2]

Hier notiert c_0 den Raum der fallenden Folgen mit der Teilraumtopologie von ℓ^∞ und ϕ den Raum der abbrechenden Folgen, definiert als der starke Dualraum von ω .

Tabelle (II.3.10) ist ein Auszug aus den ‘‘Valdivia-Vogt-Strukturtafeln’’, einer Zusammenfassung von Doppelfolgenraumdarstellungen die in [85] präsentiert wurde. Von C. Bargetz wurden Darstellungen für die Räume \mathcal{O}'_M und \mathcal{O}_C [2], sowie später auch für die Räume \mathcal{D}^F und \mathcal{B}' ergänzt [4]. Weiter konstruierte C. Bargetz Isomorphismen $\mathcal{E} \rightarrow \omega\{s\}$ und $\mathcal{D}' \rightarrow \omega\{s'\}$, aus denen man per Einschränkung Isomorphismen für alle Räume von glatten Funktionen oder von Distributionen aus den Valdivia-Vogt-Strukturtafeln erhält [3]. Ein Isomorphismus der beide Klassen von Räumen abdeckt wurde in [5] für den Fall $d = 1$ unter Verwendung einer Wilson-Basis konstruiert.

Problem II.3.3. Welche STI-Folgenräume λ erfüllen die topologischen Isomorphismen $\mathcal{E}_\tau(\lambda) \cong \lambda\{s\} \cong \lambda \widehat{\otimes} s$ und $\mathcal{D}'_\tau(\lambda) \cong \lambda\{s'\} \cong \lambda \widehat{\otimes} s'$?

In dieser Doktorarbeit werden die Isomorphismen $\mathcal{E}_\tau(\lambda) \cong \lambda\{s\}$ und $\mathcal{D}'_\tau(\lambda) \cong \lambda\{s'\}$ ohne Zusatzbedingungen an λ erhalten. Die Isomorphie $\lambda\{\mu\} \cong \lambda \widehat{\otimes} \mu$ mit $\mu \in \{s, s'\}$ ¹² benötigt nur eine offensichtlich notwendige Voraussetzung: Der Raum λ muss topologisch

¹²Hier kann μ auch ein beliebiger nuklearer, vollkommener Raum sein.

II. Übersicht und Einordnung

vollständig sein, wie es die Definition von $X \widehat{\otimes} Y$ als Vervollständigung von $X \otimes Y$ erzwingt. Amalgamfolgenräume $\lambda\{\mu\}$ sind also besser auf STI-Folgenräume angepasst, als vervollständigte Tensorprodukte $\lambda \widehat{\otimes} \mu$.¹³

II.4. Faltungsquantale von Distributionenräumen

In der Publikation [58] dieser Doktorarbeit wurde ein Kalkül zur Konstruktion extremer Definitions-, Werte- und Operationsbereiche für Faltungsoperatoren entwickelt. Die mathematische Struktur dieses Kalküls wird durch ein Faltungsquantal $(Q_{\mathcal{D}'}, \subseteq, \widetilde{*})$ von Bereichen beschrieben, wie in Unterabschnitt II.4.c erläutert wird. Als Bereiche treten dabei faltungsvollkommene Distributionenräume $F = F^{**}$ auf, die bereits 1958 in [121] eingeführt wurden. In der Publikation [58, Sec. 5] dieser Doktorarbeit wurden diese als Spezialfall der Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, E)$ aus Abschnitt II.1 betrachtet.

Im folgenden werden die wichtigsten Resultate dazu aus [61, 58] und aus dieser Dissertation zusammengefasst. Dabei wird auch skizziert wie die Untersuchungen in [61] durch Verwendung der Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$ mit diskreten globalen Komponenten λ etwas vereinfacht werden können, die in Abschnitt II.3 besprochen wurden.

Unterabschnitt II.4.a stellt das Faltungsdual $F \mapsto F^*$ und faltungsvollkommene Distributionenräume $F = F^{**}$ vor. Die diskreten globalen Komponenten dieser Räume mit einer translationsinvarianten Version von Köthe's vollkommenen Folgenräumen $\lambda = \lambda^{\times \times}$ aus [65, §30] identifiziert, siehe Problem II.4.1. Als alternative zum Faltungsdual F^* wird in Unterabschnitt II.4.b das Faltungsmodul F^{*M} diskutiert, das in dieser Doktorarbeit eingeführt wurde [60]. Dieses ist die Lösung von Problem II.4.2, der Suche nach einem größten Faltungsmodul zu gegebenen Faltungsalgebren. Theorem II.4.3 beschreibt die Eigenschaften der Faltungsalgebra $F^{*A} := (F^{*M})^*$, der Gegenpart zu F^{*M} .

Der Bezug zur Quantaltheorie wird in Unterabschnitt II.4.4 hergestellt. Dieser ergibt sich aus der Frage nach der Existenz extremer Bereiche für Faltungsinclusionen faltungsvollkommener Räume $F_1 * F_2 \subseteq F_3$, die in Problem II.4.4 gestellt wird. Um dies zu lösen wird eine Faltung $\widetilde{*}$ von faltungsvollkommenen Räumen eingeführt und mit Theorem II.4.5 gezeigt, dass $\widetilde{*}$ die binäre Operation eines Quantals $Q_{\mathcal{D}'}$ ist. Daraus ergibt sich die Wohldefiniertheit des Residuums $F_3 \widetilde{\not\prec} F_1$ für faltungsvollkommene

¹³Andererseits ermöglichen vervollständigte Tensorprodukte Folgenraumdarstellungen mit nicht-soliden globale Komponenten, siehe Theorem 4.1 und Example 4.5(iv) in [16, S. 7, 9].

$F_1 \subseteq F_3$, dem größten faltungsvollkommenem Raum G_2 mit $F_1 * G_2 \subseteq F_3$. Es wird dann Problem II.4.6 gelöst um die Berechnung der Operationen $\tilde{*}$ und $\tilde{\cdot}$ über die diskreten globalen Komponenten abwickeln zu können.

Die zunächst nur als Mengen betrachteten faltungsvollkommenen Räume $F = F^{**}$ werden in Unterabschnitt II.4.d mit Topologien $\mathfrak{T}^*(F)$ und Bornologien $\mathfrak{B}^*(F)$ ausgestattet, die Problem II.4.7 lösen: Die Garantie von Hypostetigkeit und Beschränktheit für Faltungsinclusionen zwischen faltungsvollkommenen Räumen. Unterabschnitt II.4.e behandelt dann Problem II.4.8, die Charakterisierung der relativ schwach kompakten Teilmengen $\mathfrak{K}_\sigma(F, \mathfrak{T}^*(F))$, und Problem II.4.9, die Bestimmung der Dualräume $(F, \mathfrak{T}^*(F))'$. Dies wird motiviert durch entsprechende bekannte Resultate für vollkommene Folgenräume $(\lambda, \mathfrak{T}^*(\lambda))$ die mit der normalen Topologie $\mathfrak{T}^*(\lambda)$ ausgestattet sind.

II.4.a. Faltungsduale und Köthes α -Dual

Das (\mathcal{D}' -)Faltungsdual $F^* = (F)_{\mathcal{D}'}$ einer Teilmenge $F \subseteq \mathcal{D}'$ ist definiert als

$$F^* := (F)_{\mathcal{D}'}^* := \{g \in \mathcal{D}' : \forall f \in F : f \text{ und } g \text{ sind } \mathcal{D}'\text{-faltbar}\}. \quad (\text{II.4.1})$$

Die Menge $F^{**} := (F^*)^*$ heisst *Faltungsvervollkommnung von F* und man nennt F *faltungsvollkommen* falls $F = F^{**}$. Diese Notationen entsprechen dem “c-dual”, dem “c-closure” und der Eigenschaft “c-closed” aus [121, S.20]. Ordnungstheoretisch betrachtet ist der Operator $(\cdot)^*$ die involutive Galois-Korrespondenz auf $\mathfrak{P}(\mathcal{D}')$ die zu der symmetrischen Relation $\Gamma \subseteq \mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ assoziiert wird.¹⁴ Hier meint Γ die “ \mathcal{D}' -Faltbarkeit” aus Gleichung (II.2.3a). Somit ist $(\cdot)^{**}$ ein Hüllenoperator¹⁵ auf \mathcal{D}' und $(\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))^{**}$ entspricht der Menge aller faltungsvollkommenen Räume.

Anhand der Definition der Faltbarkeitsbedingung Γ in Gleichung (II.2.3a) sieht man, dass faltungsvollkommene Mengen $F \subseteq \mathcal{D}'$ lineare Unterräume sind. Das Faltbarkeits-

¹⁴Jede Relation $R \subseteq X \times X'$ zwischen Mengen X und X' induziert eine Galois-Korrespondenz (φ, ψ) zwischen den Potenzmengen $\mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{P}(X')$, wie in Punkt (3) in [28, S.128] erläutert wird. Eine solche besteht aus inklusionsumkehrenden Abbildungen $\varphi: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X')$ und $\psi: \mathfrak{P}(X') \rightarrow \mathfrak{P}(X)$, sodass $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ Hüllenoperatoren sind, siehe Satz 6.21 in [28, S.124]. Ist R symmetrisch, so sieht man leicht, dass $\varphi = \psi$. In dieser Doktorarbeit wird eine solche Selbstabbildung φ von $\mathfrak{P}(X)$ als involutive Galois-Korrespondenz auf $\mathfrak{P}(X)$ bezeichnet. Im hier betrachteten Fall ist $R = \Gamma$ und $\varphi = (\cdot)^*$.

¹⁵Ein Hüllenoperator auf einer Menge X ist eine monotone, extensive und idempotente Selbstabbildung von $\mathfrak{P}(X)$, siehe auch Unterabschnitt III.1.a.

II. Übersicht und Einordnung

kriterium (II.2.4) führt darüberhinaus auf die Darstellung als Faltungsbild

$$F^* = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L_W^1) \quad \text{mit } W := |\check{F} * \mathcal{D}|. \quad (\text{II.4.2})$$

Bis auf den Raum \mathcal{B}' ist jeder der Räume F aus Tabelle (II.1.5) faltungsvollkommen, wie in Theorem 5 von [121, S. 22] beschrieben wird. So gelten zum Beispiel

$$\mathcal{D}' = (\mathcal{E}')^* = (\mathcal{D})^* \quad (\text{II.4.3a})$$

$$\mathcal{D}'_{L^p} = (\mathcal{D}'_{L^q})^* = (\mathcal{D}_{L^q})^* \quad (\text{II.4.3b})$$

für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$.

Formal ähnelt die Bedingung $F = F^{**}$ der Definition $\lambda = \lambda^{\times \times}$ vollkommener Folgenräume λ ,¹⁶ die von Köthe in [65, §30] beschrieben wurden. Hier ist $\lambda^\times = \ell^1_{|\lambda|}$ das α -Dual einer Teilmenge $\lambda \subseteq \omega$ mit ℓ^1_V dem diskreten gewichteten ℓ^1 -Raum

$$\ell^1_V = \{a \in \omega : \forall v \in V : \|a \cdot v\|_1 < \infty\} \quad (\text{II.4.4})$$

und $\lambda^{\times \times} := (\lambda^\times)^\times$ ist die *Vervollkommnung*. Es ist leicht zu sehen, dass die Spiegelung $\check{\lambda}^\times$ von λ^\times für translationsinvariante Teilmengen $\lambda \subseteq \omega$ mit dem ω -Faltungsdual $(\lambda)_\omega^*$ übereinstimmt. Analog zum \mathcal{D}' -Faltungsdual wird dieses als

$$(\lambda)_\omega^* := \{b \in \omega : \forall a \in \lambda : a \text{ und } b \text{ sind } \omega\text{-faltbar}\} \quad (\text{II.4.5})$$

definiert mit der ω -Faltung aus Gleichung (II.3.5). Nach Konstruktion ist klar, dass $(\lambda)_\omega^*$ für jede Teilmenge $\lambda \subseteq \omega$ ein STI-Folgenraum ist.

Problem II.4.1. *Induziert die Amalgamraumbildung $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ (siehe Unterabschnitt II.3.a) eine Bijektion zwischen den translationsinvarianten vollkommenen Folgenräumen und den faltungsvollkommenen Distributionenräumen?*

Diese Frage kann mit Resultaten aus dieser Dissertation positiv beantwortet werden: Dazu nutzt man die Transformationsregel $\mathcal{D}'_\tau((\lambda)_\omega^*) = (\mathcal{D}'_\tau(\lambda))_{\mathcal{D}'_\tau}^*$ für alle STI-Folgenräume λ und den Darstellungssatz $(F)_{\mathcal{D}'_\tau}^* = \mathcal{D}'_\tau((\lambda_F)_\omega^*)$ für alle $F \subseteq \mathcal{D}'$ aus

¹⁶Köthe betrachtete Räume von Folgen im eigentlichen Sinn, also von Funktionen $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. In dieser Arbeit werden stets Räume von Funktionen $a: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet.

II.4. Faltungsquantale von Distributionenräumen

Theorem VI.4.9. Hier ist λ_F der kleinste STI-Folgenraum λ der $F \subseteq \mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ erfüllt, der nach Theorem V.2.1 existiert. Man folgert daraus $\mathcal{D}'_\tau(\lambda) = \mathcal{D}'_\tau((\lambda)_\omega^{**}) = (\mathcal{D}'_\tau(\lambda))_\omega^{**}$ für alle $\lambda \in (\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}$ und somit $\mathcal{D}'_\tau((\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}) \subseteq (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'_\tau}^{**}$. Also ist die Abbildung

$$(\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**} \longrightarrow (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'_\tau}^{**}, \quad \lambda \longmapsto \mathcal{D}'_\tau(\lambda) \quad (\text{II.4.6})$$

wohldefiniert. Weiter erhält man $(F)_{\mathcal{D}'_\tau}^{**} = ((F)_{\mathcal{D}'_\tau}^*)_{\mathcal{D}'_\tau}^* = (\mathcal{D}'_\tau((\lambda_F)_\omega^*))_{\mathcal{D}'_\tau}^* = \mathcal{D}'_\tau((\lambda_F)_\omega^{**})$ für alle $F \subseteq \mathcal{D}'$. Also ist die Abbildung in Gleichung (II.4.6) auch surjektiv. Es ist klar, dass diese bijektiv ist, wie in der Antwort auf Problem II.3.1 beschrieben.

In der Publikation [61] dieser Doktorarbeit wurde anstatt der Bijektion (II.4.6) die folgende Abbildung verwendet:

$$F \longmapsto |F|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{D})}^\vee := \langle \{ |f|_{*\Phi} : f \in F, \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) \} \rangle_{\text{CI}}. \quad (\text{II.4.7})$$

Hier ist $|\cdot|_{*\Phi}$ die Faltungshalbnormfunktion aus Gleichung (II.1.8) und $\langle - \rangle_{\text{CI}}$ die Kegelidealhülle im Raum $\mathcal{S}_{+\text{lb}}$ der unterhalbstetigen, nichtnegativen, lokalbeschränkten Funktionen auf \mathbb{R}^d .¹⁷ Die Definition von $|F|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{D})}^\vee$ entspricht der aus Gleichung (3.11a) in [60, S. 133]. Wie aus Corollary 4 von Proposition 6 in [61, S. 134] folgt, bildet die Abbildung aus (II.4.7) Amalgamräume mit lokaler Komponente \mathcal{D}' (in Definition 3 von [61, S. 133] als “regularization-solid spaces of distributions” bezeichnet) bijektiv auf die moderierten Kegelideale von $\mathcal{S}_{+\text{lb}}$ ab. Zudem definiert der Raum

$$(F)_{\mathcal{D}'_\tau}^\blacksquare := \left\{ f \in \mathcal{D}' : \forall \Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) : |f|_{*\Psi} \in |F|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{D})}^\vee \right\} \quad (\text{II.4.8})$$

den kleinsten Amalgamraum G mit lokaler Komponente \mathcal{D}' der $F \subseteq G$ erfüllt (vergleiche auch Korollar V.2.2). Gleichung (II.4.8) entspricht Gleichung (3.12) in [61, S. 133].

In dieser Dissertation wird mit der Bijektion aus Gleichung (II.4.6) anstatt mit der aus Gleichung (II.4.7) gearbeitet. STI-Folgenräume haben gegenüber moderierten Kegelidealen den Vorteil, dass deren Elemente eine triviale lokale Struktur haben. Dagegen erzwingt die Verwendung von moderierten Kegelidealen die Einarbeitung von Translationshüllen $\overline{T}_K f = \sup_{x \in K} T_x f$ [61, S. 127] zur Berücksichtigung der lokalen Struktur.

¹⁷Durch $W \mapsto W \cap \mathcal{C}$ werden die moderierten Kegelideale von $\mathcal{S}_{+\text{lb}}$ bijektiv auf die moderierten Kegelideale von \mathcal{C}_+ abgebildet, welche in der Dissertation bevorzugt werden. Siehe Gleichung (II.2.11) oder Definition VI.1.2 für weitere Informationen über moderierte Kegelideale.

II. Übersicht und Einordnung

II.4.b. Faltungsmodule und Algebren

Sei $F \subseteq \mathcal{D}'$. Die \mathcal{D}' -Faltung definiert eine bilineare Abbildung

$$F^* \times F^{**} \longrightarrow (F^* * F^{**})^{**}. \quad (\text{II.4.9})$$

Dies sieht man leicht anhand der Definition der \mathcal{D}' -Faltung aus Gleichung (II.2.3) und den Eigenschaften des Faltungsduals F^* aus Unterabschnitt II.4.a. Somit kann der Raum F^* als Definitionsbereich für Faltungsoperatoren mit Faltungskernen aus F^{**} , insbesondere für solche aus F , genutzt werden.

Wegen $\delta \in \mathcal{E}' \subseteq F^{**}$ gilt stets $(F^* * F^{**})^{**} \supseteq F^*$. Gilt auch $(F^* * F^{**})^{**} \subseteq F^*$, so sind die Faltungsoperatoren mit Faltungskernen aus F^{**} Endomorphismen von F^* . Da dies im Allgemeinen nicht garantiert ist, motiviert dies

Problem II.4.2. *Konstruiere zu jeder Faltungsalgebra $A \subseteq \mathcal{D}'$ den größten faltungsvollkommenen Faltungsmodul von Distributionen A^{*M} über A .*

Dieses Problem wurde in dieser Doktorarbeit unter Verwendung der (simultanen) \mathcal{D}' -Faltbarkeit von p -Tupeln angegangen, die in Unterabschnitt III.3.c besprochen wird. Unter der Zusatzvoraussetzung $A = A^{**}$ zeigt Theorem II.4.3, dass die gleich folgende Konstruktion von A^{*M} das Problem löst. Für den allgemeinen Fall ist allerdings noch offen geblieben, ob A^{*M} tatsächlich größtmöglich ist.

In Definition 5 von [60, S. 17] (oder Definition 7 in [61, S. 140]) wurde der Raum

$$F^{*M} := \{g \in \mathcal{D}' : \forall f_1, \dots, f_p \in F, p \in \mathbb{N} : (f_1, \dots, f_p, g) \text{ ist } \mathcal{D}'\text{-faltbar}\} \quad (\text{II.4.10})$$

eingeführt, der für beliebige $F \subseteq \mathcal{D}'$ wohldefiniert ist. Die Faltungsmoduleigenschaft wurde in Theorem 8 von [60, S. 17] nachgewiesen. Es gilt die Darstellungsformel

$$F^{*M} = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(L_W^1) \quad \text{mit } W := \langle |\check{F} * \mathcal{D}| \rangle_*. \quad (\text{II.4.11})$$

Hier notiert $\langle V \rangle_*$ die Menge aller Faltungsprodukte $v_1 * \dots * v_p$ mit $v_1, \dots, v_p \in V$ und $p \in \mathbb{N}$. Gleichung (II.4.11) entspricht Theorem 9 von [60, S. 18].

Als (*unitäre*) *Faltungsalgebra von Distributionen* wird in dieser Doktorarbeit ein linearer Raum $A \subseteq \mathcal{D}'$ verstanden, der $A^{*M} \neq \{0\}$, $A * A \subseteq A$ (und $\delta \in A$) erfüllt, wie

II.4. Faltungsquantale von Distributionenräumen

in Definition 6.2 in [61, S. 139]. Aus dem Assoziativgesetz der Faltung von Distributionen (siehe Unterabschnitt III.3.c) folgt, dass $F^{*M} \neq \{0\}$ genau dann gilt, wenn alle Tupel (f_1, \dots, f_n) mit $f_k \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ faltbar sind. Tupel die eine Nullfunktion enthalten sind immer faltbar und somit gilt auch immer $0 \in F^{*M}$. Der Ausnahmefall ist durch

$$F^{*M} = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad (F^{*M})^* = \mathcal{D}' \quad \Leftrightarrow \quad (F^{*M})^{**} = \mathcal{E}' \quad (\text{II.4.12})$$

charakterisiert.

Das Faltungsdual generiert für jede Teilmenge $F \subseteq \mathcal{D}'$ ein Paar (F^*, F^{**}) von faltungsvollkommenen Distributionenräumen. Dies führt auf die Frage, ob es ähnlich dazu einen dualen Gegenpart zum Faltungsmodul F^{*M} gibt. Dieser Gegenpart sollte eine Faltungsalgebra sein, die auf F^{*M} operiert. Als Antwort auf diese Frage wurde in Gleichung (5.6b) von [61, S. 141] der Raum F^{*A} definiert als

$$F^{*A} := (F^{*M})^*. \quad (\text{II.4.13})$$

Die Hauptresultate dazu lassen sich zusammenfassen als

Theorem II.4.3. *Sei $F \subseteq \mathcal{D}'$. Es gelten die Identitäten*

$$(F^{*A})^{*M} = ((F^{*M})^*)^{*M} = F^{*M}. \quad (\text{II.4.14})$$

*Ist $F^{*M} \neq \{0\}$, so gelten auch die Identitäten*

$$F^{*M} = (F^{*M})^{**} = (F^{*A})^* \quad (\text{II.4.15})$$

*und F^{*A} ist eine unitäre Faltungsalgebra die auf F^{*M} operiert.*

Beweisskizze. Die Gleichungen (II.4.14) und (II.4.15) erhält man aus

$$F^{*M} \stackrel{(i)}{=} (F^{*M})^{**} = (F^{*A})^* \stackrel{(ii)}{=} ((F^{*A})^{**a})^* \stackrel{(iii)}{=} ((F^{*M})^*)^{*M}. \quad (\text{II.4.16})$$

Hier verwendet man für (i) die linke Seite von Gleichung (5.7) [61, S. 141] und die Relation $(\cdot)^{***} = (\cdot)^*$, für (ii) die Notation $(\cdot)^{**a}$ aus Definition 6.2 [61, S. 139] und die Konsequenz $(F^{*A})^{**a} = F^{*A}$ aus Theorem 7 [61, S. 141] und für (iii) die linke Seite von Gleichung (5.7) [61]. Beachte in (ii), dass nach Remark 3 und Lemma 3 [61, S. 137,

II. Übersicht und Einordnung

136] Faltungsduale “regularization-solid” im Sinne von Definition 3 [61, S. 133] sind. Nach Theorem 7 ist F^{*M} ein F^{*A} -Faltungsmodul. \square

Es ist klar, dass für alle $F \subseteq \mathcal{D}'$ die Inklusion $F^{*M} \subseteq F^*$ gilt und somit

$$F \subseteq F^{**} \subseteq F^{*A}. \quad (\text{II.4.17})$$

Aus Gleichung (II.4.14) erhält man $(F^{*A})^{*A} = (((F^{*M})^*)^{*M})^* = (F^{*M})^* = F^{*A}$. Somit ist $F \mapsto F^{*A}$ ein Hüllenoperator auf \mathcal{D}' und falls $F^{*M} \neq \{0\}$ ist F^{*A} die kleinste faltungsvollkommene Faltungsalgebra $A \subseteq \mathcal{D}'$ mit $F \subseteq A$. Andernfalls ist $F^{*A} = \mathcal{D}'$, siehe Gleichung (II.4.12). Wegen Gleichung (II.4.17) gilt stets $\mathcal{E}' \subseteq F^{*A}$.

II.4.c. Extremale Räume für Faltungsinkclusionen

Die zentrale Problemstellung in der Publikation [61] aus dieser Doktorarbeit waren extremale faltungsvollkommene Räume F_i in Faltungsinkclusionen der Form $F_1 * F_2 \subseteq F_3$. Das heisst, mit Theorem 1 von [61, S. 122] wurde das folgende Problem gelöst:

Problem II.4.4. Sei $F_i \in (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}$ für $i = 1, 2, 3$ und $F_1 * F_2 \subseteq F_3$. Gibt es ein kleinstes $G_3 \in (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}$ mit $F_1 * F_2 \subseteq G_3$ und ein größtes $G_1 \in (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}$ mit $G_1 * F_2 \subseteq F_3$?

Problem II.4.4 kann als quantaltheoretische Fragestellung aufgefasst werden, wie in [61] festgestellt wurde. Grundlegende Definitionen aus [93, 97] zu dieser Theorie werden zunächst sinngemäß rekapituliert. Ein *Quantal* ist ein Tripel (Q, \leq, \bullet) mit (Q, \leq) einer extremumsvollständigen geordneten Menge¹⁸ und (Q, \bullet) einer Halbgruppe, sodass

$$\sup(A \bullet B) = \sup A \bullet \sup B \quad \text{für alle } A, B \subseteq Q. \quad (\text{II.4.18})$$

Das *Residuum* von $c \in Q$ über $b \in Q$ ist definiert als

$$c \blacklozenge b := \max\{a \in Q : a \bullet b \leq c\} \quad (\text{II.4.19})$$

¹⁸In der Literatur wird auch von einer vollständigen geordneten Menge oder einem vollständigen Verband gesprochen. Siehe auch Unterabschnitt III.1.a für solche Notationen.

II.4. Faltungsquantale von Distributionenräumen

und ist stets wohldefiniert, wegen (II.4.18). Diese Definition ist in [93, S. 15] zu finden, wobei die hier verwendete Bezeichnung an [97, S. 922] orientiert ist.

Ein einfaches Beispiel für ein Quantal ist $(\overline{\mathcal{F}}_+(G), \leq, *^\infty)$. Hier notiert $*^\infty$ die Supremalfaltung $\overline{\mathbb{R}}_+$ -wertiger Funktionen $\overline{\mathcal{F}}_+(G)$ auf einer lokalkompakten Gruppe G (in [63, 59] durch “ Δ ” notiert). Siehe auch Unterabschnitt VI.4.a für $G = \mathbb{R}^d$ und $G = \mathbb{Z}^d$. Die Residuenbildung ist die “supremale Entfaltung” die in den Gleichungen (5.1) von [59, S. 1553] beschrieben wird. Im Fall $G = \{0\}$ erhält man das Quantal $(\overline{\mathbb{R}}_+, \leq, \cdot)$ mit \cdot der “supremalen Multiplikation” für welche $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ festgelegt wird.

Betrachte nun die partiell auf $(\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}$ definierte binäre Operation

$$F_1 \tilde{*} F_2 := (F_1 * F_2)_{\mathcal{D}'}^{**} \quad \text{für } \mathcal{D}'\text{-faltbare } F_1, F_2 \in (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}. \quad (\text{II.4.20})$$

Da $(\cdot)_{\mathcal{D}'}^{**}$ ein Hüllenoperator auf \mathcal{D}' ist, ist $F_1 \tilde{*} F_2$ der kleinste faltungsvollkommene Distributionenraum G_3 mit $F_1 * F_2 \subseteq G_3$. Damit ist bereits der erste Teil von Problem II.4.4 gelöst. Zur geordneten Menge $((\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**}, \subseteq)$ fügt man nun künstlich ein kleinstes Element “0” und ein größtes Element “ ∞ ” hinzu. Dies ergibt die Menge

$$Q_{\mathcal{D}'}^{**} := \{0\} \cup (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}^{**} \cup \{\infty\} \quad (\text{II.4.21})$$

deren Ordnung auch durch “ \subseteq ” notiert wird. Durch $0 \tilde{*} F := F \tilde{*} 0 := 0$ für $F \in Q_{\mathcal{D}'}^{**}$ und $F \tilde{*} \infty := \infty \tilde{*} F := \infty$ für $F \in Q_{\mathcal{D}'}^{**} \setminus \{0\}$ wird (II.4.20) auf ganz $Q_{\mathcal{D}'}^{**}$ fortgesetzt. Analog geht man mit $((\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}, \subseteq)$ vor um das Tripel $(Q_\omega^{**}, \subseteq, \tilde{*})$ zu definieren.

Ist $Q_{\mathcal{D}'}^{**}$ ein Quantal, so ist das Residuum $G_1 := F_3 \tilde{\not{*}} F_1$ von F_3 über F_1 in $Q_{\mathcal{D}'}^{**}$, die Lösung des zweiten Teils von Problem II.4.4. Aus Resultaten in [61] folgt in der Tat

Theorem II.4.5. *Das Tripel $(Q_{\mathcal{D}'}^{**}, \subseteq, \tilde{*})$ ist ein Quantal.*

Beweisskizze. In Proposition 4 von [61, S. 132f] wird die Menge \mathfrak{J}_T der moderierten Kegelideale von \mathcal{S}_+ als Faltungsquantal charakterisiert. Dann werden die faltungperfekten Elemente \mathfrak{J}_T^{**} von \mathfrak{J}_T in Definition 4 [61, S. 136] eingeführt und gezeigt, dass \mathfrak{J}_T^{**} ein Quotientenquantal von \mathfrak{J}_T konstituiert, siehe Remark 4 [61, S. 136]. Die binäre Operation von \mathfrak{J}_T^{**} ist ähnlich wie Gleichung (II.4.20) definiert. Mit Proposition 9 [61, S. 137] lässt sich dann folgern, dass die Bijektion aus Gleichung (II.4.7) einen ordnungsbewahrenden Homomorphismus $Q_{\mathcal{D}'}^{**} \rightarrow \mathfrak{J}_T^{**}$ induziert. □

II. Übersicht und Einordnung

Mit den gleichen Methoden wie in [61] kann man auch zeigen, dass Q_ω^{**} ein Quantal ist. Dabei ergeben sich auch einige Vereinfachungen. Zum Beispiel ist für $\lambda_1, \lambda_3 \in (\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}$ das Residuum $\lambda_3 \tilde{\neq} \lambda_1$ von λ_3 über λ_1 in Q_ω^{**} gegeben durch

$$\lambda_3 \tilde{\neq} \lambda_1 = \{a_2 \in \omega : \forall a_1 \in \lambda_1 : |a_1| * |a_2| \in \lambda_3\} = ((\lambda_3)_\omega^* * \lambda_1)_\omega^* \quad (\text{II.4.22})$$

falls $\lambda_1 \subseteq \lambda_3$ und $\lambda_3 \tilde{\neq} \lambda_1 = 0$ andernfalls. Weiter gelten für $\lambda \in Q_\omega^{**}$ die Gleichungen $\lambda \tilde{\neq} 0 = \infty \tilde{\neq} \lambda = \infty$, sowie $0 \tilde{\neq} \lambda = 0$ falls $\lambda \neq 0$ und $\lambda \tilde{\neq} \infty = 0$ falls $\lambda \neq \infty$. Durch Gleichung (II.4.22) werden entsprechende Formeln für moderierte Kegelideale aus Gleichung (3.6b) und Proposition 8 in [61, S. 132, 136] vereinfacht: Die Betrachtung diskreter Funktionen macht die Translationshüllen $\bar{T}_K f = \sup_{x \in K} T_x f$ überflüssig.

Problem II.4.6. *Induziert die Bijektion $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ aus Gleichung (II.4.6) einen Quantalisomorphismus $Q_\omega^{**} \rightarrow Q_{\mathcal{D}'_\tau}^{**}$?*

Die Abbildung $(\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**} \rightarrow (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'_\tau))_{\mathcal{D}'_\tau}^{**}$, $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ ist inklusionsbewahrend und bijektiv, also ein Ordnungsisomorphismus. Räume $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}$ erfüllen nach Theorem VI.4.8 die Äquivalenz $\lambda_1 * \lambda_2 \subseteq \lambda_3 \Leftrightarrow \mathcal{D}'_\tau(\lambda_1) * \mathcal{D}'_\tau(\lambda_2) \subseteq \mathcal{D}'_\tau(\lambda_3)$ (siehe auch Problem II.3.2). Aus dieser Äquivalenz folgt nach Konstruktion von $\tilde{*}$ die Gleichung

$$\mathcal{D}'_\tau(\lambda_1 \tilde{*} \lambda_2) = \mathcal{D}'_\tau(\lambda_1) \tilde{*} \mathcal{D}'_\tau(\lambda_2) \quad \text{für } \omega\text{-faltbare } \lambda_1, \lambda_2 \in (\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}. \quad (\text{II.4.23})$$

Dies ergänzt man um entsprechende Relationen in denen die Elemente 0 und ∞ vorkommen. Damit ist Problem II.4.6, und somit Problem II.4.4, positiv beantwortet.

Ein einfaches Beispiel für ein Residuum ist (vergleiche Example 2 in [61, S. 135])

$$\ell^p \tilde{\neq} \ell^p = \ell^1 \quad \text{für alle } 1 \leq p \leq \infty. \quad (\text{II.4.24})$$

Dies ist klar für $p = \infty$ und folgt aus Theorem 3.6.1 in [71, S. 82f] für $p < \infty$. Mit dem Quantalisomorphismus aus Problem II.4.6 und der Relation $\mathcal{D}'_\tau(\ell^p) = \mathcal{D}'_{L^p}$ aus Tabelle (II.3.10) erhält man aus Gleichung (II.4.24) das Residuum

$$\mathcal{D}'_{L^p} \tilde{\neq} \mathcal{D}'_{L^p} = \mathcal{D}'_{L^1} \quad \text{für alle } 1 \leq p \leq \infty. \quad (\text{II.4.25})$$

In diesem Kontext ist das folgende Beispiel interessant: Die Cauchy-Hauptwert-Distri-

bution $\text{vp}(1/t)$ ist definiert als

$$\text{vp}(1/t): \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(s)}{s} ds \quad (\text{II.4.26})$$

und erfüllt $\text{vp}(1/t) \notin \mathcal{D}'_{L^1}$. Dennoch ist die Hilbert-Transformation $H: f \mapsto f * \text{vp}(1/t)$ ein stetiger Automorphismus von \mathcal{D}'_{L^p} für $p > 1$. Siehe Example 9 in [61, S. 144f] und in [83, S. 355]. Dies weist auf eine Diskrepanz zwischen Residuen $F \not\approx G$ faltungsvollkommener Räume F, G und der Menge $\{f \in \mathcal{D}' : f * F \subseteq G\}$ hin.

II.4.d. Universelle Topologien und Bornologien

Jede Faltungsinclusion $F_1 * F_2 \subseteq F_3$ von faltungsvollkommenen Räumen induziert eine bilineare Faltungsabbildung $F_1 \times F_2 \rightarrow F_3$. Um Stetigkeits- und Beschränktheitseigenschaften dieser Abbildung diskutieren zu können müssen Topologien und Bornologien auf den Bereichen eingeführt werden. Dies führt auf

Problem II.4.7. *Definiere universelle Topologien $\mathfrak{T}^*(F)$ und Bornologien $\mathfrak{B}^*(F)$ auf faltungsvollkommenen Distributionenräumen F mit der folgenden Eigenschaft: Ist $F_i \in (\mathfrak{P}(\mathcal{D}'))_{\mathcal{D}'}$ für $i = 1, 2, 3$, sodass die Inklusion $F_1 * F_2 \subseteq F_3$ gilt, so ist die Faltung $F_1 \times F_2 \rightarrow F_3$ hypostetig und beschränkt.¹⁹*

Die Topologien $\mathfrak{T}^*(F)$ und Bornologien $\mathfrak{B}^*(F)$ wurden in Section 6 der Publikation [61] aus dieser Doktorarbeit eingeführt und studiert. Das Vorbild für die Topologie $\mathfrak{T}^*(F)$ ist die “normale Topologie \mathfrak{T} ” die Köthe in §30.2 von [65, S. 407] auf vollkommenen Folgenräumen $\lambda = \lambda^{\times \times}$ eingeführt hat. Diese ergibt sich aus der Darstellung $\lambda = \ell_V^1$ mit $V = |\lambda^\times|$ und wird im folgenden durch $\mathfrak{T}^*(\lambda)$ notiert. Die Bornologie definiert man als $\mathfrak{B}^*(\lambda) := \mathfrak{S}^{\text{sol}}(\lambda)$. Hier notiert $\mathfrak{S}^{\text{sol}}(\lambda)$ die Bornologie die von den Mengen $\text{sol}(b) = \{a \in \omega : |a| \leq b\}$ mit $b \in \lambda_+$ erzeugt wird, siehe Gleichung (III.2.3).

Aufgrund der Bijektion aus Gleichung (II.4.6) kann man nun die Topologie $\mathfrak{T}^*(F)$ direkt über die Abbildung $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ auf den Raum $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ transportieren. Mit den Notationen von Urbildtopologien und -bornologien aus Definition IV.1.11 schreibt man

$$\mathfrak{T}^*(\mathcal{D}'_\tau(\lambda)) := \mathcal{D}'_\tau(\mathfrak{T}^*(\lambda)), \quad \mathfrak{B}^*(\mathcal{D}'_\tau(\lambda)) := \mathcal{D}'_\tau(\mathfrak{B}^*(\lambda)). \quad (\text{II.4.27})$$

¹⁹Hypostetigkeit bedeutet: Zu $W \in \mathfrak{T}^*(F_3)$, $B \in \mathfrak{B}^*(F_{1(2)})$ gibt es $U \in \mathfrak{T}^*(F_{2(1)})$ mit $W * B \subseteq U$. Beschränktheit bedeutet $\mathfrak{B}^*(F_1) * \mathfrak{B}^*(F_2) \subseteq \mathfrak{B}^*(F_3)$. Vergleiche Unterabschnitt III.2.c.

II. Übersicht und Einordnung

Unter Verwendung der Relation $\mathcal{D}'_\tau(\lambda) = \mathcal{D}'_\tau(L_\tau^1(\lambda))$ aus dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) und einfacher Abschätzungen lässt sich die Topologie $\mathfrak{T}^*(F)$ charakterisieren als die von den Halbnormen

$$f \mapsto \| |f|_{*\Phi} \cdot |\check{g}|_{*\Phi} \|_{L^1} \quad \text{mit } \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}) \text{ und } g \in F^*, \quad (\text{II.4.28})$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie. Die Bornologie $\mathfrak{B}^*(F)$ besteht aus den Teilmengen $B \subseteq F$ mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{f \in B} |f|_{*\Phi} \in F \quad \text{für alle } \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}). \quad (\text{II.4.29})$$

Die Gleichungen (II.4.28) und (II.4.29) entsprechen Definition 8 aus [61, S. 142]. Gleichung (II.4.28) ist angelehnt an Gleichung (1) in [65, S. 407].

Die in Problem II.4.7 geforderte Hypostetigkeit und Bornologiebewahrung der Faltung wurde in Theorem 8 von [61, S. 143] für die Topologien $\mathfrak{T}^*(F)$ und die Bornologien $\mathfrak{B}^*(F)$ nachgewiesen. Mit den Lösungen der Probleme II.3.2 und II.4.1 in dieser Dissertation kann der explizite Beweis von Hypostetigkeit und Bornologiebewahrung der Faltung aus [61] vereinfacht werden: Sei $\lambda_1 * \lambda_2 \subseteq \lambda_3$ eine Faltungsinclusion von vollkommenen STI-Folgenräumen. Die Dreiecksungleichung $|a * b| \leq |a| * |b|$ für alle ω -faltbaren $a, b \in \omega$ liefert direkt $\mathfrak{B}^*(\lambda_1) * \mathfrak{B}^*(\lambda_2) \subseteq \mathfrak{B}^*(\lambda_3)$. Zum Beweis der Hypostetigkeit zeigt man zunächst $(\lambda_3)^* * \lambda_2 \subseteq (\lambda_1)^*$ und nutzt, dass die Halbnormen $a \mapsto \|a \cdot b\|_1$ mit $b \in (\lambda_i)^*$ die Topologie $\mathfrak{T}^*(\lambda_i)$ erzeugen. Theorem VI.4.8 überträgt diese Eigenschaften auf die Faltungsinclusion $\mathcal{D}'_\tau(\lambda_1) * \mathcal{D}'_\tau(\lambda_2) \subseteq \mathcal{D}'_\tau(\lambda_3)$.

Die Topologie auf $\mathfrak{T}^*(\mathcal{D}'_{L^p})$ stimmt genau dann mit der von Schwartz auf \mathcal{D}'_{L^p} eingeführten Topologie überein wenn $p = 1$. Andernfalls ist die Topologie $\mathfrak{T}^*(\mathcal{D}'_{L^p})$ echt größer. Die analoge Aussage trifft nämlich genauso auf die Räume ℓ^p zu, wie bereits in [65, S. 408] festgestellt wurde.

II.4.e. Zwei Eigenschaften faltungsvollkommener Räume

Motiviert durch die Bijektion aus Gleichung (II.4.6) stellt sich die folgende Frage: Welche Resultate aus [65, §30] über die Räume $\lambda \in (\mathfrak{P}(\omega))_\omega^{**}$ lassen sich auf die Räume $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$ übertragen? Zwei solche Probleme wurden in dieser Doktorarbeit behandelt.

Das erste Problem betrifft relativ schwach kompakte Teilmengen vollkommener Räu-

me $(\lambda, \mathfrak{T}^*(\lambda))$. Es wurde gezeigt, dass diese mit den relativ kompakten Teilmengen übereinstimmen, siehe §30.6.(3) von [65, S. 416].²⁰ Weiter wurden diese Mengen durch gleichgradige Summierbarkeit charakterisiert, siehe Theorem 3.2.4 in [96, S. 31].

Eine interessante Schlussfolgerung daraus ist, dass das Mengensystem der relativ schwach kompakten Teilmengen ein Fundamentalsystem aus soliden Teilmengen besitzt. Die Übertragung dieser Beobachtung auf faltungsvollkommene Räume führt auf

Problem II.4.8. *Können die relativ (schwach) kompakten Teilmengen K von faltungsvollkommenen Distributionenräumen $(F, \mathfrak{T}^*(F))$ durch die Gestalt der regularisierten Mengen $K * \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$ charakterisiert werden?*

Dieses Problem wird in Abschnitt VI.3 dieser Dissertation gelöst für vollständige Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(E)$ in denen \mathcal{D} dicht liegt. Die relativ kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E)$ werden durch die *Straffheit* der Mengen $K * \varphi$ in E für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ charakterisiert. Diese Eigenschaft wird in Definition VI.3.1 für relativ allgemeine Räume von Distribution auf \mathbb{R}^d oder von Folgen auf \mathbb{Z}^d eingeführt. Die straffen Teilmengen des Raums ℓ^1 sind genau die oben erwähnten gleichgradig summierbaren Teilmengen. Mit Proposition VI.3.5 und VI.3.4 gezeigt, dass Straffheit unter Amalgamraumbildungen bewahrt wird und stets eine Amalgamraumbornologie definiert. Dies stellt ein Analogon zur Erzeugbarkeit durch Fundamentalsysteme solider Mengen dar.

Diese Resultate führen unter Verwendung des Korrespondenzdiagramms (V.2.1a) und des Äquivalenzresultats aus Problem II.1.2 zu verschiedenen Charakterisierungen relativ kompakter Teilmengen. Diese werden in Theorem VI.3.19 in expliziter Form zusammengefasst. Für Räume der Form $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^1_W)$ oder $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}(L^1_W)$ mit $W \subseteq \mathcal{C}_+$ einem moderierten Kegeliteal (siehe Definition VI.1.2) wird gezeigt, dass relativ schwach kompakte Teilmengen auch relativ kompakt sind. Siehe auch Gleichung (VI.3.1). Dadurch sind auch faltungsvollkommene Räume $(F, \mathfrak{T}^*(F))$ abgedeckt und Problem II.4.8 ist gelöst.

Als zweites werden Dualräume betrachtet. Der Dualraum von ℓ^1_V kann leicht als der lineare Aufspann von V identifiziert werden, wie aus §30.2.(4) in [65, S. 409] folgt. Etwas komplizierter gestaltet sich

Problem II.4.9. *Wie beschreibt man die Dualräume $(F, \mathfrak{T}^*(F))'$ von faltungsvollkommenen Distributionenräumen $(F, \mathfrak{T}^*(F))$?*

²⁰In [65] wird vorausgesetzt, dass V von der Form $|\lambda^\times|$ ist. Dies wird im dortigen Beweis allerdings nicht verwendet. Vergleiche auch Theorem 3.2.4 in [96, S. 31].

II. Übersicht und Einordnung

Im Rahmen dieser Doktorarbeit wurden die Prädualräume und Dualräume der faltungsvollkommenen Distributionenräume $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}, L^1_W) = \mathcal{D}'_T(L^1_W)$ mit moderiertem Kegeliteal $W \subseteq \mathcal{C}_+$ bestimmt. Diese Resultate sind in Theorem 4.10 und 4.15 von [58, S. 15, 17] zu finden und verallgemeinern Theorem 4.6 und Proposition 4.11 (ii) aus [18, S. 842, 850]. Letztere betreffen den in Unterabschnitt II.1.d erwähnten Spezialfall einer Folge \mathcal{W} von Gewichten. Die Beweise in [58] kommen ohne gefensterte Fourier-Transformation aus (“short-time Fourier transform”, STFT), die in [18] verwendet wurde. Die Beschreibung des Dualitätsprodukts in Gleichung (4.22) von [58, S. 15] lässt sich direkt auf das distributionelle Integral aus Gleichung (II.2.2) zurückführen. Dies ist etwas praktischer als die Desingularisierungsformel der STFT (Gleichung (4.6) in [18, S. 850]).

Die Beschreibung der Dualräume von allgemeineren Amalgamräumen $\mathcal{D}'_T(E)$ oder $\mathcal{E}_T(E)$ die \mathcal{D} als dichte Teilmenge besitzen verbleibt als offenes Problem.

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

In den Publikationen [59, 60, 61] aus dieser Doktorarbeit wurden fraktionale Integrale und Ableitungen als \mathcal{D}' -Faltungsoperatoren eingeführt und untersucht. Zur Beschreibung der Definitions- und Operationsbereiche wurde in [61] die Theorie des Faltungsquantals faltungsvollkommener Distributionenräume angewendet, die in Abschnitt II.4 umrissen wird. Dieser Abschnitt fasst die wichtigsten Resultate zusammen.

Kausale translationsinvariante fraktionale Integrale I_+^α und Ableitungen D_+^α auf der reellen Achse werden in Unterabschnitt II.5.a diskutiert. Basierend darauf werden in Unterabschnitt II.5.b verallgemeinerte Relaxationen als Konstitutivgleichungen auf geeigneten Distributionenräumen beschrieben. Abschließend diskutiert Unterabschnitt II.5.c den fraktionalen negativen Laplace-Operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

II.5.a. Kausale fraktionale Integrale und Ableitungen

Kausale translationsinvariante fraktionale Integrale I_+^α und Ableitungen D_+^α können als Faltungsoperatoren mit distributionellen Faltungskernen aufgefasst werden, wie es Schwartz bereits 1950/51 in seinem Buch tat [106]. Um größere Definitionsbereiche zu erhalten wurden diese in dieser Doktorarbeit zum ersten mal über die \mathcal{D}' -Faltung eingeführt, die in Unterabschnitt II.2.a diskutiert wurde. Dies soll der Vereinheitlichung

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

verschiedener Definitionen dienen, wie in Abschnitt I.1 der Motivation erläutert wurde.

Die Definitionen und Resultate die im folgenden rekapituliert werden stammen aus der Publikation [61] dieser Doktorarbeit. Dazu zählen die Indexgesetze in Theorem II.5.2 und die Beschreibungen von Operationsbereichen in Theorem II.5.5. Im Hintergrund dieser Anwendungen steht die Theorie extremaler faltungsvollkommener Bereiche für Faltungsoperatoren, die in Abschnitt II.4 beschrieben wird. In diesem Abschnitt ist $d = 1$, das heisst, es gilt $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und alle Räume bestehen aus Distributionen auf der reellen Achse.

In seinem Buch [104, S. 172f] führte Schwartz den Raum \mathcal{D}'_+ ein und diskutierte die Faltung als binäre Operation auf \mathcal{D}'_+ . Schwartz folgend besteht \mathcal{D}'_+ aus den Distributionen $f \in \mathcal{D}'$ mit linksseitig beschränktem Träger, das heisst, mit $\inf \text{supp } f > -\infty$. Der Raum \mathcal{D}'_+ wird ausgestattet mit der Topologie des induktiven Limes

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{D}'_{t+} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{D}'_{t+}, \quad (\text{II.5.1})$$

wobei $\mathcal{D}'_{t+} = \{f \in \mathcal{D}' : \text{supp } f \subseteq [t, \infty[\}$ mit der von \mathcal{D}' induzierten Teilraumtopologie ausgestattet wird. Wie in [104, S. 172f] beschrieben wurde ist \mathcal{D}'_+ eine nullteilerfreie Faltungsalgebra mit hypostetiger Faltung. Die Faltung auf \mathcal{D}'_+ kann durch Gleichung (II.2.1) erklärt werden.

Basierend darauf definierte Schwartz in [104, S. 174] das (kausale) fraktionale Integral I_+^α der allgemeinen Ordnung $\alpha \in \mathbb{C}$ als den Faltungsoperator

$$\text{sI}_+^\alpha : \mathcal{D}'_+ \rightarrow \mathcal{D}'_+, \quad f \mapsto f * Y_\alpha \quad (\text{II.5.2})$$

mit dem Faltungskern $Y_\alpha \in \mathcal{D}'_+$ definiert durch²¹

$$Y_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0, \end{cases} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{H}, \quad (\text{II.5.3a})$$

$$Y_\alpha := D^m Y_{\alpha+m} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m > -\Re \alpha. \quad (\text{II.5.3b})$$

Hier notiert D^m die m -te distributionelle Ableitung und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.

²¹Diese Definition von Y_α ist äquivalent zu der von Schwartz in [104, S. 43].

II. Übersicht und Einordnung

Es gilt $Y_\alpha \in L_{\text{lok}}^1$ genau dann, wenn $\Re\alpha > 0$. Nach Definition ist $Y := Y_1$ die Heaviside-Funktion und somit ist $Y_{-m} = D^{m+1} Y_1 = \delta^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ die m -te distributionelle Ableitung der Diracschen δ -Distribution. Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann Y_m die eindeutige Fundamentallösung F des Differentialoperators D^m mit $\text{supp } F \subseteq [0, \infty[$. Die Einschränkung von Y_α auf $]0, \infty[$ hat die Dichtefunktion $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$.

Die Distributionen Y_α definieren eine Faltungsgruppe. Denn nach [104, S. 174] gilt

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta} \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.5.4})$$

Da die Faltung auf \mathcal{D}'_+ assoziativ ist erhält man daraus das Indexgesetz

$$sI_+^\alpha (sI_+^\beta f) = sI_+^{\alpha+\beta} f \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } f \in \mathcal{D}'_+. \quad (\text{II.5.5})$$

Das Indexgesetz (II.5.5) und die Hypostetigkeit der Faltung auf \mathcal{D}'_+ implizieren, dass die Operatoren sI_+^α und sD_+^α für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ zueinander inverse stetige Bijektionen sind, und somit lineare topologische Automorphismen von \mathcal{D}'_+ .

Im Rahmen dieser Doktorarbeit wurde zum ersten mal die Erweiterung der Operatoren sI_+^α und sD_+^α unter Verwendung der \mathcal{D}' -Faltung vorgeschlagen. Diese in Gleichung (7.4b) von [61, S. 146] präsentierte Definition lässt sich wie folgt formulieren:

Definition II.5.1. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Das *distributionelle kausale fraktionale Integral der Ordnung α* wird definiert als der Faltungsoperator

$$I_+^\alpha : (Y_\alpha)^* \rightarrow \mathcal{D}', \quad f \mapsto f * Y_\alpha. \quad (\text{II.5.6})$$

Hier notiert “ $*$ ” die \mathcal{D}' -Faltung aus Gleichung (II.2.3) und $(\cdot)^*$ das Faltungsdual aus Gleichung (II.4.1). Somit ist $I_+^\alpha f$ genau dann definiert, wenn f eine mit Y_α \mathcal{D}' -faltbare Distribution ist. Die entsprechende *fraktionale Ableitung* definiert man als

$$D_+^\alpha := I_+^{-\alpha}. \quad (\text{II.5.7})$$

Wie in Unterabschnitt II.2.a erläutert wurde, erweitert die \mathcal{D}' -Faltung die Definition der Faltung aus Gleichung (II.2.1). Somit stimmt die Faltung auf \mathcal{D}'_+ mit der \mathcal{D}' -Faltung überein und der Operator I_+^α erweitert den Operator sI_+^α von Schwartz.

Aus dem asymptotischen Verhalten der Regularisierung $(Y_{-\alpha} * \varphi)(t)$ für $t \rightarrow +\infty$

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

mit festem $\varphi \in \mathcal{D}$ und der Formel für Faltungsduale (II.4.2) folgert man leicht, dass der Definitionsbereich der fraktionalen Ableitung D_+^α mit Ordnung α gegeben ist durch

$$(Y_{-\alpha})^* = \left\{ f \in \mathcal{D}' : \forall \varphi \in \mathcal{D} : \int_1^\infty \frac{|(f * \varphi)(-s)|}{s^{\Re\alpha+1}} ds < \infty \right\} \quad (\text{II.5.8})$$

falls $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ und durch $(Y_{-\alpha})^* = \mathcal{D}'$ falls $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Gleichung (II.5.8) und die Charakterisierung von \mathcal{D}'_{L^∞} in Gleichung (II.1.4) liefern

$$(Y_{-\alpha})^* \supseteq \mathcal{D}'_{L^\infty} + \mathcal{D}'_+ \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{H} \cup \mathbb{N}_0. \quad (\text{II.5.9})$$

Damit erfüllt der Definitionsbereich von D_+^α die Anforderung aus Abschnitt I.1.

Seien $\mu, k \in \mathbb{R}$. Inspiriert durch [67, S. 177]²² wird (auch für $d \neq 1$) die Abkürzung

$$\mathcal{D}'_{\mu,k} := \mathcal{D}'_{L^1, -d-\mu,k}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d) \cdot (1+x^2)^{\frac{d+\mu}{2}} \cdot (1+\log(1+x^2))^{-k} \quad (\text{II.5.10})$$

verwendet mit dem Spezialfall $\mathcal{D}'_\mu := \mathcal{D}'_{\mu,0}$ (vergleiche mit Unterabschnitt II.2.c). Sei $\theta \in \mathcal{E}$ eine Abschneidefunktion mit $\theta(t) = 1$ für $t \leq -1$ und $\theta(t) = 0$ für $t \geq 1$. Das Faltungsdual $(Y_{-\alpha})^*$ lässt sich schreiben als

$$(Y_{-\alpha})^* = \mathcal{D}'_{\Re\alpha} + \mathcal{D}'_+ \quad (\text{II.5.11a})$$

$$= \{f \in \mathcal{D}' : f \cdot \theta \in \mathcal{D}'_{\Re\alpha}\} \quad (\text{II.5.11b})$$

falls $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$. Dies folgert man aus Gleichung (II.5.8) und der Charakterisierung von $\mathcal{D}'_{\mu,k}$ aus Proposition 3.1.2(b) in [85, S. 88].²³

Das Indexgesetz (II.5.5) lässt sich nicht ohne Einschränkungen auf die erweiterten Operatoren I_+^α übertragen. Entsprechend angepasste Indexgesetze findet man in Theorem 10 der Publikation [61, S. 146] aus dieser Doktorarbeit. Im folgenden wird eine leicht ergänzte Fassung dieses Resultats dargestellt.

²²Die Definition in Gleichung (II.5.10) entspricht der Intention des Autors von [67], wie in Unterabschnitt II.5.c erläutert wird.

²³Proposition 3.1.2(b) ist ein Spezialfall aus den Lösungen der Probleme II.1.1, II.1.2 und II.2.2 aus dieser Dissertation.

II. Übersicht und Einordnung

Theorem II.5.2. Sei $\alpha \in \mathbb{H}$ und $\beta \in \overline{\mathbb{H}}$. Es gelten die Indexgesetze

$$I_+^\alpha(I_+^\beta f) = I_+^\beta(I_+^\alpha f) = I_+^{\alpha+\beta} f \quad \text{für alle } f \in (Y_{\alpha+\beta})^*, \quad (\text{II.5.12a})$$

$$I_+^\alpha(D_+^\beta f) = D_+^\beta(I_+^\alpha f) = I_+^{\alpha-\beta} f \quad \text{für alle } f \in (Y_\alpha)^*, \quad (\text{II.5.12b})$$

$$D_+^\alpha(D_+^\beta f) = D_+^\beta(D_+^\alpha f) = D_+^{\alpha+\beta} f \quad \text{für alle } f \in (Y_{-\alpha})^* \cap (Y_{-\beta})^*. \quad (\text{II.5.12c})$$

Seien nun $\alpha, \beta \in i\mathbb{R}$. Mit der Notation $\mathcal{D}'_{0,1}$ aus Gleichung (II.5.10) gilt

$$I_+^\alpha(I_+^\beta f) = I_+^\beta(I_+^\alpha f) = I_+^{\alpha+\beta} f \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}'_{0,1} + \mathcal{D}'_+. \quad (\text{II.5.13})$$

Beweisskizze. Die Gleichungen (II.5.12) sind aus Theorem 10 in [61]. Die zusätzliche Gleichung (II.5.13) beweist man genauso wie Theorem 10, unter Verwendung von Gleichung (4.17b) aus [61, S. 139] mit $\mu = -1$, $d = 1$ und $k, l = 0$. Die elementare Beweisidee im Hintergrund ist es, zum Beispiel für Gleichung (II.5.12a), die \mathcal{D}' -Faltbarkeit des Tripels (f, Y_α, Y_β) nachzuweisen. Dazu verwendet man das Kriterium

$$|\check{f} * \varphi| \cdot (|Y_\alpha * \psi| * |Y_\beta * \theta|) \in L^1 \quad \text{für alle } \varphi, \psi, \theta \in \mathcal{D}. \quad (\text{II.5.14})$$

Dies ist äquivalent zur p -Tupelvariante des \mathcal{D}' -Faltbarkeitskriteriums aus Gleichung (II.2.4), die Kriterium 4 von Theorem VI.4.2 entspricht. \square

Korollar II.5.3. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$D_+^\alpha(f^{(m)}) = (D_+^\alpha f)^{(m)} = D_+^{\alpha+m} f \quad \text{für alle } f \in (Y_{-\alpha})^*. \quad (\text{II.5.15})$$

Beweis. Folgt aus Gleichung (II.5.12c) mit $\beta = m$. \square

Bemerkung II.5.4. Korollar II.5.3 zeigt, dass Definitionen wie $D_+^\alpha := D^m \circ I_+^{m-\alpha}$ oder $D_+^\alpha := I_+^{m-\alpha} \circ D^m$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ zu einem kleineren Definitionsbereich für den Operator D_+^α führen würden. Ähnlich dazu hat die Liouville-Ableitung ${}_L D_+^\alpha$ aus Gleichung (I.1.1) einen kleineren Definitionsbereich wie die Marchaud-Ableitung ${}_M D_+^\alpha$ aus Gleichung (I.1.3).

Die Faltungsmuldenkonstruktion $(\cdot)^{*M}$ aus Unterabschnitt II.4.b kann genutzt werden um Operationsbereiche für die Operatoren I_+^α einzuführen. Dies sind Unterräume des

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

Definitionsbereichs $(Y_\alpha)^*$ die invariant unter I_+^α sind. Dabei entstehen Durchschnitte von Räumen \mathcal{D}'_μ oder $\mathcal{D}'_{\mu,k}$. Notiere für $-\infty \leq \mu < \infty$ und $\rho \in \mathbb{R}$ die Räume

$$\mathcal{D}'_{\downarrow\mu} := \bigcap_{\nu > \mu} \mathcal{D}'_\nu, \quad \mathcal{D}'_{\rho, \downarrow\mu} := \bigcap_{\nu > \mu} \mathcal{D}'_{\rho, \nu} \quad (\text{II.5.16})$$

mit den Abkürzungen $\mathcal{D}'_{\downarrow-\infty} = \mathcal{D}'_\downarrow$ und $\mathcal{D}'_{\rho, \downarrow-\infty} = \mathcal{D}'_{\rho, \downarrow}$. Charakterisierungen von \mathcal{D}'_ν und \mathcal{O}'_C wie in Tabelle II.1.5 implizieren $\mathcal{O}'_C \subseteq \mathcal{D}'_\nu$. Wegen $\mathcal{D}'_{L^1} \subseteq \mathcal{B}'$ folgert man damit $\mathcal{O}'_C = \mathcal{D}'_\downarrow$ als Mengen aus der Definition von \mathcal{O}'_C in Unterabschnitt II.1.b.

Mit diesen Notationen kann Theorem 11 aus [61, S. 146] über die Operationsbereiche fraktionaler Integrale und Ableitungen formuliert werden als

Theorem II.5.5. *Sei $(A, F) \subseteq \mathbb{C} \times \mathcal{D}'$ eines der folgenden Tupel:*

$(\mathbb{C}, \mathcal{O}'_C)$, $(i\mathbb{R}, \mathcal{D}'_{0, \downarrow})$, $(\overline{\mathbb{H}}, \mathcal{D}'_{0, \downarrow})$, $(a + \mathbb{H}, \mathcal{D}'_{\downarrow a})$ mit $a \geq 0$ oder $(a + \overline{\mathbb{H}}, \mathcal{D}'_a)$ mit $a > 0$.

1. Die fraktionalen Ableitungen D_+^α mit Ordnungen $\alpha \in A \cup \mathbb{N}_0$ konstituieren eine Halbgruppe von Faltungsoperatoren die auf $F + \mathcal{D}'_+$ operiert.
2. Für $(A, F) = (\mathbb{C}, \mathcal{O}'_C)$ oder $(A, F) = (i\mathbb{R}, \mathcal{D}'_{0, \downarrow})$ konstituieren die fraktionalen Ableitungen D_+^α mit Ordnungen $\alpha \in A$ sogar bijektiv operierende Gruppen.
3. Für jedes Kompaktum $K \subseteq A$ ist $\{D_+^\alpha : \alpha \in K\}$ gleichstetig auf $F + \mathcal{D}'_+$ bezüglich der normalen Topologie $\mathfrak{T}^*(F + \mathcal{D}'_+)$ aus Unterabschnitt II.4.d.

Beweisskizze. Zum Beweis von Teil 1 und 2 nutzt man die Lösung von Problem II.4.2. Dabei setzt man die Darstellungsformel (II.4.11) ein um $(\{Y_{-\alpha} : \alpha \in A\})^{*M} = F + \mathcal{D}'_+$ zu berechnen. Zum Beweis von Teil 3 zeigt man, dass es $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass

$$(\sup \{|Y_{-\alpha}|_{*\Phi}(t) : \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}), \alpha \in K\}) \cdot (1 + t^2)^{1-k/2} \leq C \quad (\text{II.5.17})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit der Konstanten $k := -\inf \Re K \in A$. Somit besteht die Inklusion $\{Y_{-\alpha} : \alpha \in K\} \in \mathfrak{B}^*((F + \mathcal{D}'_+)^*)$ mit der universellen Bornologie $\mathfrak{B}^*(\cdot)$ aus Unterabschnitt II.4.d. Die Gleichstetigkeit folgt damit aus der Lösung von Problem II.4.7. \square

Bemerkung II.5.6. Die Transponierung von Operatoren auf Testfunktionenräumen ist eine weitere Methode fraktionale Integrale und Ableitungen einzuführen. So wurde

II. Übersicht und Einordnung

zum Beispiel in [69] gezeigt, dass die Operatoren I_-^α und D_-^α stetig auf den Räumen $\mathcal{D}_{L^p} \cdot e^{-\mu t}$ und $\mathcal{B} \cdot e^{-\mu t}$ operieren für $1 \leq p \leq \infty$ und $\mu > 0$. Siehe Theorem 3.8 in [69, S. 352]. Transponierung liefert stetige Operatoren I_+^α und D_+^α auf den gewichteten Räumen $\mathcal{D}'_{L^p} \cdot e^{\mu t}$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $\mu > 0$ [69]. Siehe Theorem 4.2 [69, S. 354].

Mit Methoden aus dieser Dissertation kann dies leichter nachgewiesen werden: Es ist bereits bekannt, dass die Faltungsalgebra \mathcal{D}'_{L^1} stetig auf \mathcal{D}'_{L^p} operiert für $1 \leq p \leq \infty$, siehe Unterabschnitt II.2.c. Dies überträgt sich entsprechend auf $\mathcal{D}'_{L^1} \cdot e^{\mu t}$ und $\mathcal{D}'_{L^p} \cdot e^{\mu t}$.²⁴ Da $Y_\alpha \in \mathcal{D}'_{L^1} \cdot e^{\mu t}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt, folgt daraus die Stetigkeit von I_+^α auf $\mathcal{D}'_{L^p} \cdot e^{\mu t}$.

Mit Teil 1 von Theorem VI.1.28, Gleichung (VI.1.43c) mit $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ und den Lösungen von Problem II.1.1 erhält man die Identität $\mathcal{D}'_{L^p} \cdot e^{\mu t} = \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(L^p \cdot e^{\mu t})$. Der Raum $L^p \cdot e^{\mu t}$ entspricht dem Raum $L_{p,-\mu}$ aus Gleichung (5.52) in [99, S. 108].

Bemerkung II.5.7. Liouville-Integrale ${}_L I_+^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{H}$ bzw. Liouville-Ableitungen ${}_L D_+^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, siehe Gleichung (I.1.1) bzw. (I.1.2),²⁵ wurden in [57, 63, 59] als stetige Endomorphismen verschiedener gewichteter Räume stetiger bzw. glatter Funktionen beschrieben. Definiere für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und Gewichte $W \subseteq \mathcal{C}_+$ den Raum

$$\mathcal{C}_W^m := \left\{ f \in \mathcal{C}^m : \forall w \in W, k \in \mathbb{N}_0, k \leq m : f^{(k)} \cdot w \in \mathcal{C}_0 \right\} \quad (\text{II.5.18})$$

mit der lokalkonvexen Topologie erzeugt von $f \mapsto \|f^{(k)} \cdot w\|_\infty$ mit $w \in W$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq m$. Der Raum \mathcal{C}_W^m hängt nur von dem von W erzeugten Kegelideal $\langle W \rangle_{\text{CI}}$ ab. Siehe Seite 34 oder Definition VI.1.2 für diese Notation. Setze $\mathcal{C}_W := \mathcal{C}_W^0$ und $\mathcal{E}_W := \mathcal{C}_W^\infty$. Mit der Notation aus Gleichung (II.1.1) gilt dann $\mathcal{E}_W = \mathcal{D}_E$ für $E = \mathcal{C}_W$. Ist das von W erzeugte Kegelideal moderiert, so erhält man aus Theorem V.3.13 mit $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ die Identität $\mathcal{E}_W = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}(\dot{L}_W^\infty)$ von lokalkonvexen Räumen. Hier notiert \dot{L}_W^∞ den topologischen Abschluss von L_{cs}^∞ in L_W^∞ .

Notiere das *Supremalfaltungsdual* von $W \subseteq \mathcal{C}_+$ als

$$W^\blacksquare = (W)_{\mathcal{C}_+}^\blacksquare := \{v \in \mathcal{C}_+ : \forall w \in W : w \blacksquare v \in L_{\text{lok}}^\infty\}. \quad (\text{II.5.19})$$

Mit den Notationen aus Gleichung (2.3), (4.1) und (9.1) entspricht dies dem Durchschnitt

²⁴Zwei Distributionen f und g sind genau dann \mathcal{D}' -faltbar, wenn $f \cdot e^{\mu t}$ und $g \cdot e^{\mu t}$ es sind. Gegebenenfalls gilt $(f \cdot e^{\mu t}) * (g \cdot e^{\mu t}) = (f * g) \cdot e^{\mu t}$.

²⁵Wähle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\Re \alpha + m > 0$ in Gleichung (I.1.2).

von \mathcal{C}_+ und dem Ausdruck “ $\mathcal{U}^+(\cdot, W; \mathcal{U}^+)$ ” in [63, S. 1246]. Mit ähnlichen Notationen wie in [63, S. 1245f] notiert man die moderierten Kegelideale $P := \langle (1+t^2)^n : n \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{C}\mathbb{I}}$ und $P_{\pm} := P \cap \mathcal{D}'_{\pm}$. Dann gelten $P^{\blacksquare} = \mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_P$ und $(P_{\pm})^{\blacksquare} = P^{\blacksquare} + (\mathcal{C}_+ \cap \mathcal{D}'_{\pm})$.

Sei nun $W \in \{P_-, (P_-)^{\blacksquare}, P_- + P^{\blacksquare}, \langle e^{-\mu t} \rangle_{\mathbb{I}\mathbb{d}} : \mu > 0\}$. Ähnlich wie in Section 11 von [63, S. 1245ff] zeigt man, dass $P_- \blacksquare W \subseteq W$. Aus Theorem 8.1 in [63, S. 1240] (siehe Theorem 6 in [59, S. 1565] für den Beweis) und Proposition 10.2 in [63, S. 1243] folgt, dass die Liouville-Integrale ${}_L I_+^{\alpha}$ mit $\Re \alpha > 0$ stetige Endomorphismen von \mathcal{C}_W definieren. Außer für $W = \langle e^{-\mu t} \rangle_{\mathbb{I}\mathbb{d}}$ folgt letzteres auch aus Korollar 3.7 in [57, S. 63]. Somit sind Liouville-Ableitungen ${}_L D_+^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ stetige Endomorphismen von \mathcal{E}_W .

Wie bereits in Section 8.1 von [60, S. 130] erwähnt wurde, kann der lokalkonvexe Raum $\mathcal{E}_{P_-} = \mathcal{S} + (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}'_+)$ als translationsinvariante, gespiegelte Version des “space of good functions \mathcal{E} ” von Miller [76] verstanden werden, der aus den schnell fallenden glatten Funktionen auf $]0, \infty[$ besteht. Dieser wird in Chapter VII von [77, S. 236] als “ \mathbf{S} ” notiert und in [99, S. 155] als “ $S_+(\mathbb{R}_+^1)$ ”. Die Gewichte $W = P_- + P^{\blacksquare}$ erfüllen die Identität $\mathcal{E}_W = \mathcal{S} + (\mathcal{O}_M \cap \mathcal{D}'_+) = \mathfrak{S}_+$ mit dem Raum \mathfrak{S}_+ aus [99, S. 146]. Dieser wurde dort nicht mit einer Topologie ausgestattet und somit die Stetigkeit von ${}_L D_+^{\alpha}$ nicht untersucht.²⁶

Betrachte nun die Gewichtsmenge $W = (P_-)^{\blacksquare}$. Der Dualraum von $\mathcal{E}_W = \mathcal{O}_M \cap \mathcal{D}'_+$ ist der Raum $(\mathcal{E}_W)' = \mathcal{O}'_M + (\mathcal{D}'^F \cap \mathcal{D}'_+)$, wie in [57, S. 67] erwähnt wurde. Somit lassen sich Liouville-Integrale I_+^{α} mit $\Re \alpha > 0$ und Liouville-Ableitungen D_+^{α} mit $\alpha \in \mathbb{C}$ per Transponierung auf $(\mathcal{E}_W)'$ definieren. Es ist bekannt, dass $e^{it^2} \in \mathcal{O}'_C \setminus \mathcal{O}'_M$ (Example in [104, S. 245]) und somit gilt auch, dass $e^{it^2} \in (\mathcal{O}'_C + \mathcal{D}'_+) \setminus (\mathcal{E}_W)'$. Die Verwendung gewichteter Räume als Testfunktionen liefert also bei der Transponierung kleinere Definitionsbereiche als die direktere Definition über die \mathcal{D}' -Faltbarkeit.

II.5.b. Fraktionale translationsinvariante lineare Systeme

Die Konstitutivgleichung eines linearen Mediums definiert, vermöge einer Antwortfunktion χ , eine Relation zwischen zwei zeitabhängigen Observablen u und w die sich formal als Faltungsgleichung $u = w * \chi$ schreiben lässt. In der Publikation [60] aus dieser Doktorarbeit wurde ein Raum $(\mathcal{R}_+)^{\times} \subseteq \mathcal{D}'_+$ von Antwortfunktionen χ verallgemeiner-

²⁶In [99, S. 146] wird irreführender Weise behauptet, dass eine geeignete lokalkonvexe Topologie für \mathfrak{S}_+ durch abzählbar viele Halbnormen erzeugt werden könne. Für die Topologie von \mathcal{E}_W gilt dies aber nicht.

II. Übersicht und Einordnung

ter fraktionaler Relaxationen konstruiert und ein Distributionenraum \mathcal{F} für die Observablen u und w . Dieser garantiert für alle $\chi \in (\mathcal{R}_+)^{\times}$ die Anforderungen aus der Motivation in Abschnitt I.2.

Das Vorgehen in [60] wird im folgenden rekapituliert. Die Konstruktion von $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ basiert auf Eigenschaften der Faltungsalgebra \mathcal{D}'_+ und der Distributionen Y_α aus Unterabschnitt II.5.a. Die Konstruktion von \mathcal{F} nutzt die Konstruktion des Faltungsmoduls A^{*M} einer Faltungsalgebra A aus Unterabschnitt II.4.b. Beachte, dass in dieser Dissertation die Notationen aus der Zusammenfassung in Subsection 2.2 der weiteren Publikation [62] aus dieser Doktorarbeit gegenüber den Notationen aus [60] bevorzugt werden.²⁷ Wie im vorherigen Unterabschnitt ist im folgenden $d = 1$.

Aufgrund des Indexgesetzes (II.5.4) lässt sich die von den Distributionen Y_α erzeugte unitäre Faltungsalgebra $\mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}]$ schreiben als

$$\mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}] = \langle Y_\alpha : \alpha \in \mathbb{R} \rangle \quad (\text{II.5.20})$$

mit $\langle \cdot \rangle$ dem linearen Aufspann. Als Unter algebra von \mathcal{D}'_+ ist $\mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}]$ ebenfalls nullteilerfrei und hat somit einen (Faltungs-)Quotientenkörper $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$. Dieser wurde in Theorem 1 von [60, S. 8] als Unter algebra von \mathcal{D}'_+ dargestellt. Dieses Resultat kann etwas einfacher als in [60] hergeleitet werden, wie im folgenden erläutert wird.

Sei $U \in \mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}] \setminus \{0\}$. Unter Verwendung des Indexgesetzes (II.5.4) berechnet man, dass sich U schreiben lässt als

$$U = c \cdot Y_\alpha * (\delta + V) \quad (\text{II.5.21})$$

mit eindeutigen $c \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $V \in \langle Y_\beta : \beta > 0 \rangle$. Die Eindeutigkeit folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Distributionen Y_α , $\alpha \in \mathbb{R}$. Diese folgt aus dem asymptotischen Verhalten von $Y_\alpha(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ und ist bekannt für $Y_{-m} = \delta^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $V \in \mathcal{D}'_{0+} \cap L^1_{\text{lok}}$ aufgrund der Relation

$$\langle Y_\beta : \beta > 0 \rangle = \mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}] \cap L^1_{\text{lok}}. \quad (\text{II.5.22})$$

Wegen Theorem 6.27 aus [22, S. 48] existiert die eindeutige Faltungsinverse $(\delta + V)^{*^{-1}}$

²⁷Die Notationen in [60] sind $p_+^\alpha = Y_\alpha$, $q_+^\alpha = Y_{-\alpha}$, $\mathcal{P}_+ = \mathcal{A}[Y_{\mathbb{R}}]$ und $\mathcal{F}_+ = \mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$.

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

von $\delta + V$ in \mathcal{D}'_+ und kann als von-Neumann-artige Reihe dargestellt werden. Damit erhält man die Darstellung von U^{*-1} durch die Reihe²⁸

$$U^{*-1} = c^{-1} \cdot Y_{-\alpha} * \sum_{p=0}^{\infty} (-V)^{*p}. \quad (\text{II.5.23})$$

Hier notiert $(-V)^{*p} = (-V) * \overset{p}{\cdot} * (-V)$ für $p \in \mathbb{N}$ und $(-V)^{*0} = \delta$ die Faltungspotenzen. Die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} (-V)^{*p}$ konvergiert absolut in $\mathcal{D}'_{0+} \cap L^1_{\text{lok}}$.

Mit diesen Feststellungen lässt sich $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$ schreiben als

$$\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}] = \{U \not{*} V : U, V \in \langle Y_{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R} \rangle, V \neq 0\}. \quad (\text{II.5.24})$$

Hier notiert $U \not{*} V := U * V^{*-1}$ den *Faltungsquotienten von "U über V"* in \mathcal{D}'_+ . Leicht sieht man, dass sich jeder Faltungsquotient $S \in \mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}] \setminus \{0\}$ in der Form

$$S = c \cdot Y_{\alpha} * \frac{\delta + U}{\delta + V} \quad (\text{II.5.25})$$

mit eindeutigen $c \in \mathbb{C}^{\times}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $U, V \in \langle Y_{\beta} : \beta > 0 \rangle$ darstellen lässt.

Der Raum $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$ ist der lineare Aufspann von Distributionen G der Form

$$G = \frac{Y_{-\gamma}}{\delta + V} \quad \text{mit } \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } V \in \langle Y_{\beta} : \beta < 0 \rangle. \quad (\text{II.5.26})$$

Nach Proposition 1 in [60, S. 7] hat die Einschränkung $G|_{]0, \infty[}$ eine analytische Dichtefunktion. Section 4 von [60] untersucht das asymptotische Verhalten der analytischen Fortsetzung $G(\zeta)$ der Dichtefunktion für $|\zeta| \rightarrow +\infty$ mit $|\arg \zeta| \leq \psi$ und $\psi > 0$ klein genug. Nach Gleichung (41) von dortigem Theorem 4 in [60, S. 14] gibt es ein trigonometrisches Polynom $T(t) \in \langle e^{i\omega t} : \omega \in \mathbb{R} \rangle$ und Konstanten $p, \lambda \in \mathbb{R}$, sodass²⁹

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Ha}} \frac{\zeta^{\gamma}}{1 + r(\zeta)} \cdot e^{t\zeta} d\zeta \sim T(t)t^p e^{\lambda t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.5.27})$$

²⁸In [60] wurde (II.5.23) auch als Reihe analytischer Funktionen auf der Riemannschen Fläche Σ_{\log} des Logarithmus betrachtet. In Proposition 1 [60, S. 7] wurden die Konvergenzeigenschaften der Reihe (II.5.23) als Reihe solcher Funktionen betrachtet. Mit Proposition 2 wurde daraus die Konvergenz in \mathcal{D}'_+ gefolgert.

²⁹Zwei skalare Funktionen f und g auf $]0, \infty[$ erfüllen $f(t) \sim g(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists T > 0 \forall t \geq T : |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon |g(t)|$.

II. Übersicht und Einordnung

Hier ist die Funktion $r(\zeta) \in \langle \zeta^\beta : \beta > 0 \rangle$ die Laplace-Transformierte von V im Sinne von [124, S. 255, Gl. (2)]. Die Hankel-Schleife “Ha” ist ein Integrationspfad in $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ von $-\infty - i0$ nach $-\infty + i0$ der die Nullstellen von $1 + r(\zeta)$ in mathematisch positiver Richtung umläuft. Die Integraldarstellung von $G(t)$, $t > 0$ in Gleichung (II.5.27) kann zum Beispiel unter Verwendung der Inversionsformel für die Laplace-Transformation und einer Deformation des Integrationspfades gewonnen werden, wie im Beweis von Theorem 6 in [60, S. 15f] beschrieben wird.

Aus Lemma 1 in [60, S. 14] und Gleichung (II.5.27) erhält man

$$\langle |G * \mathcal{D}| \rangle_{\text{CI}} = \langle (1 + |t|)^p e^{\lambda t} \rangle_{\text{CI}} \cap \mathcal{D}'_+ \quad (\text{II.5.28})$$

mit $\langle \cdot \rangle_{\text{CI}}$ der Kegelidealhülle in \mathcal{C}_+ . Der kleinste Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{D}' der G enthält (siehe Gleichung (II.4.8)) kann somit dargestellt werden als

$$(G)_{\mathcal{D}'}^\blacksquare = (1 + t^2)^{p/2} e^{\lambda t} (\mathcal{D}'_{L^\infty} \cap \mathcal{D}'_+). \quad (\text{II.5.29})$$

Das Faltungsdual von G berechnet man daraus als

$$(G)_{\mathcal{D}'}^* = (1 + t^2)^{-p/2} e^{-\lambda t} (\mathcal{D}'_{L^1} + \mathcal{D}'_+). \quad (\text{II.5.30})$$

Die Distributionen G der Form (II.5.26) wurden in Definition 3 in [60, S. 15] anhand ihrer Asymptotik für $t \rightarrow +\infty$ in verschiedene Teilmengen von $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$ eingeteilt. So ergibt zum Beispiel der lineare Aufspann der Distributionen $G \in \mathcal{D}'_{L^1}$ die Menge

$$\mathcal{R}_+ := \left\{ \frac{U}{*\delta + V} : \begin{array}{l} U \in \langle Y_\alpha : \alpha \leq 0 \rangle, (\delta + V)^{* -1} \in \mathcal{D}'_{L^1} \\ V \in \langle Y_\alpha : \alpha < 0 \rangle, \end{array} \right\}. \quad (\text{II.5.31})$$

Es ist leicht zu sehen, dass \mathcal{R}_+ eine Unteralgebra von $\mathcal{Q}[Y_{\mathbb{R}}]$ definiert. Die Faltungsgruppe $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ der Automorphismen von \mathcal{R}_+ ist definiert als

$$(\mathcal{R}_+)^{\times} := \{ S \in \mathcal{R}_+ \setminus \{0\} : S^{*-1} \in \mathcal{R}_+ \} \quad (\text{II.5.32})$$

und diese berechnet man als³⁰

$$(\mathcal{R}_+)^{\times} = \left\{ c \cdot \frac{U}{V} : \begin{array}{l} U, V \in \delta + \langle Y_{\alpha} : \alpha < 0 \rangle, \\ U^{*-1}, V^{*-1} \in \mathcal{D}'_{L^1}, \end{array} c \in \mathbb{C}^{\times} \right\}. \quad (\text{II.5.33})$$

Die Faltungsquotienten

$$\chi = \eta \cdot \frac{\delta + \tau_1 Y_{-\alpha_1} + \cdots + \tau_n Y_{-\alpha_n}}{\delta + \sigma_1 Y_{-\beta_1} + \cdots + \sigma_m Y_{-\beta_m}} \in (\mathcal{R}_+)^{\times} \quad (\text{II.5.34a})$$

mit den Parametern

$$\eta \in \mathbb{C}^{\times}, \quad \begin{array}{ll} \tau_1, \dots, \tau_n > 0, & 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n \leq 1, & n \in \mathbb{N}_0, \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m > 0, & 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m \leq 1, & m \in \mathbb{N}_0, \end{array} \quad (\text{II.5.34b})$$

sind ein interessanter Spezialfall, siehe Subsection 8.2 von [60, S. 22].

Die Anwendungsbeispiele aus Abschnitt I.2 der Motivation können nun mit der Faltungsalgebra \mathcal{R}_+ beschrieben werden: Die Antwortfunktion χ der idealisierten fraktionalen Relaxation aus Gleichung (I.2.4) kann berechnet werden als

$$\chi = \chi^{\infty} \cdot \delta + f_{0+} \cdot (\delta + Y_{-\alpha})^{*-1} = \frac{(\chi^{\infty} + f_{0+}) \cdot \delta + f_{0+} \cdot Y_{-\alpha}}{\delta + Y_{-\alpha}}. \quad (\text{II.5.35})$$

Dazu verwendet man die Definition $\chi = -f'$ und die Darstellung der durch Gleichung (I.2.6) auf \mathbb{R} fortgesetzten Lösung f von (I.2.4) als

$$f = (\chi^{\infty} + f_{0+}) \cdot \check{Y} + f_{0+} \cdot \frac{Y_{1-\alpha}}{\delta + Y_{-\alpha}}. \quad (\text{II.5.36})$$

Zur Berechnung von Gleichung (II.5.36) nutzt man die Rechenregel $(u * v)' = u' * v$ für $u, v \in \mathcal{D}'_+$ und die Potenzreihendarstellung

$$E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^{\alpha})^k}{\Gamma(1+k\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Y_{1+k\alpha}(t). \quad (\text{II.5.37})$$

Die Antwortfunktionen χ der zusammengesetzten fraktionalen Relaxation aus Gleichung

³⁰Gleichung (II.5.33) verbessert die Aussage aus Proposition 8 aus [60, S. 20] in welcher die Konstante $c \in \mathbb{C}^{\times}$ nicht aufgeführt wurde.

II. Übersicht und Einordnung

chung (I.2.5) wurde in Section 9 von [60] berechnet. Für $\chi^\infty = 0$ lautet diese

$$\chi = f_{0+} \cdot (\delta + \lambda Y_{-\alpha} + Y_{-1})^{*-1} * \begin{cases} \delta & \text{falls } \gamma = 1, \\ \delta + \lambda Y_{-\alpha} & \text{falls } \gamma < 1. \end{cases} \quad (\text{II.5.38})$$

Die Antwortfunktion χ aus den Gleichungen (II.5.35) und (II.5.38) erfüllen $\chi \in \mathcal{R}_+$, da diese Spezialfälle von Gleichung (II.5.34) sind.

Sei $0 < \alpha < 1$. Dann erhält man aus Theorem 3 in [60, S. 10f] die Asymptotik

$$(\delta + Y_{-\alpha})^{*-1}(t) \sim Y_{-\alpha}(t) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.5.39})$$

Analog zu Gleichung (II.5.30) folgert man daraus das Faltungsdual

$$((\delta + Y_{-\alpha})^{*-1})_{\mathcal{D}'}^* = \mathcal{D}'_\alpha + \mathcal{D}'_+ \quad (\text{II.5.40})$$

mit dem Raum \mathcal{D}'_α aus Gleichung (II.5.10).

Der Raum \mathcal{F} , der in Abschnitt I.2 als Bereich für die Konstitutivgleichung (I.2.7) gesucht wurde, kann nun unter Verwendung der Faltungsmodulkonstruktion F^{*M} aus Gleichung (II.4.10) definiert werden als

$$\mathcal{F} := (\mathcal{R}_+)^{*M}. \quad (\text{II.5.41})$$

Nach Konstruktion von $(\mathcal{R}_+)^{\times}$ und Theorem II.4.3 definiert $f \mapsto f * \chi$ einen Automorphismus von \mathcal{F} falls $\chi \in (\mathcal{R}_+)^{\times}$, vergleiche auch Corollary 1 in [60, S. 20]. Somit erfüllt \mathcal{F} die Anforderungen 1 und 3 aus Abschnitt I.2.

Unter Verwendung der Darstellungsformel (II.4.11) wurde in [60] gezeigt,³¹ dass der Raum $(\mathcal{R}_+)^{*M}$ charakterisiert ist durch³²

$$(\mathcal{R}_+)^{*M} = \left\{ f \in \mathcal{D}' : \forall \alpha > 0, \varphi \in \mathcal{D} : \int_1^\infty \frac{|(f * \varphi)(-s)|}{s^{\alpha+1}} ds < \infty \right\}. \quad (\text{II.5.42})$$

³¹Gleichung (64) in [60, S. 21] enthält einen Tippfehler: p muss durch $-p$ ersetzt werden.

³²Dieser wurde auch als $\mathcal{D}'_{L^1(Q_-)}$ notiert, siehe dazu in Definitionen 6 und 7 in [60, S. 18, 19].

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

Daraus folgert man auch die Identität

$$(\mathcal{R}_+)^{*M} = \mathcal{D}'_{\downarrow 0} + \mathcal{D}'_+ \quad (\text{II.5.43})$$

mit dem Raum $\mathcal{D}'_{\downarrow 0}$ aus Gleichung (II.5.16). Wegen Gleichung (II.5.40) gilt auch

$$(\mathcal{R}_+)^{*M} = (\mathcal{R}_+)^*. \quad (\text{II.5.44})$$

Aus Gleichung (II.5.43) wird ersichtlich, dass

$$\mathcal{D}'_{L^\infty} + \mathcal{D}'_+ \subseteq \mathcal{F} = (\mathcal{R}_+)^{*M}. \quad (\text{II.5.45})$$

Somit erfüllt \mathcal{F} auch die Anforderung 2 aus Abschnitt I.2.

Um Relaxationsprozesse zu modellieren, die durch eine zusätzliche externe Anregung gestört werden, setzt man die rechte Seite von (I.2.4a) oder (I.2.5a) gleich einer Inhomogenität $h \in \mathcal{C}([0, \infty[)$. Es notiere f_h die durch $\chi^\infty + f_{0+}$ auf die linke Halbachse fortgesetzte, gestörte Relaxationsfunktion. Wie in Subsection 9.2 von [60] festgestellt wurde ergibt sich für Gleichung (I.2.5) im Fall $\gamma < 1$ eine Inkonsistenz zwischen der Beschreibung als Anfangswertproblem und der Beschreibung durch die Konstitutivgleichung (I.2.7). Für Gleichung (I.2.4) und Gleichung (I.2.5) mit $\gamma = 1$ gilt

$$f_h = \chi * (\check{Y} + Y \cdot h), \quad (\text{II.5.46a})$$

wobei h durch 0 fortgesetzt wird. Im Fall $\gamma < 1$ liefert Gleichung (I.2.5) allerdings

$$f_h = \chi * \left(\check{Y} + * \frac{Y \cdot h}{\delta + \lambda Y_{-\alpha}} \right). \quad (\text{II.5.46b})$$

Siehe Gleichung (75) in [60, S. 24]. Die rechte Seite von Gleichung (I.2.5a) ist somit nur bis auf eine Faltungstransformation gleich der externen Kraft.

II.5.c. Fraktionaler negativer Laplace als Faltung

In Section 8 der Publikation [61] dieser Doktorarbeit wurde die Theorie aus Abschnitt II.4 verwendet um den fraktionalen negativen Laplace-Operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ allgemeiner Ord-

II. Übersicht und Einordnung

nung $\alpha \in \mathbb{C}$ als Faltungsoperator auf Distributionenräumen zu untersuchen. Dies führte zu Ergänzungen von Resultaten aus [85, 67] und zu einer Korrektur und Vereinfachung der Beschreibung von $(-\Delta)^{\alpha/2}$ mit $0 < \alpha < 2$ aus [67, 109] als stetiger Endomorphismus von \mathcal{D}'_{α} . Diese neuen Resultate aus [61] und bereits vorhandene Grundlagen aus [85, 67] werden im folgenden zusammengefasst.

Der *verallgemeinerte Riesz-Potentialoperator* I^{α} auf \mathbb{R}^d der Ordnung $\alpha \in \mathbb{C}$ wird definiert als der Faltungsoperator

$$I^{\alpha} : (R_{\alpha})^* \rightarrow \mathcal{D}', \quad f \mapsto f * R_{\alpha}. \quad (\text{II.5.47})$$

Hier notiert R_{α} das verallgemeinerte Riesz-Potential, das in Gleichung (II.5.48) eingeführt wird, und $(\cdot)^*$ das Faltungsdual aus Gleichung (II.4.1). Der Operator I^{α} wurde 1938 für $0 < \alpha < d$ von Riesz in Gleichung (5) und (6) in [90, S. 3] für geeignete messbare Funktionen eingeführt. Die Definition (II.5.47) versteckt sich bereits implizit in einem Spezialfall von Theorem 3 mit $k = 1$ aus der Arbeit [50, S. 185] von Horváth aus dem Jahr 1978, wie in [83, S. 360ff] angedeutet wird (dort wird I^{α} durch K_{α} notiert).

Der *fraktionale negative Laplace-Operator der Ordnung* $\alpha \in \mathbb{C}$ wird im folgenden als der Operator $(-\Delta)^{\alpha/2} := I^{-\alpha}$ aufgefasst. Für Ordnungen $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$ wurde diese Möglichkeit zur Definition des Operators $(-\Delta)^{\alpha/2}$ zum ersten mal im Kapitel [67, S. 177] vom “Handbook of Fractional Calculus with Applications” von 2019 explizit erwähnt. Wie bereits in [109] (und dann in [67]) richtig behauptet definiert $(-\Delta)^{\alpha/2}$ einen stetigen Endomorphismus auf seinem Definitionsbereich. Die Beschreibung des Definitionsbereichs $\mathcal{D}'_{\alpha} = (R_{-\alpha})^*$ von $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ist in [109, 67] allerdings mathematisch nicht konsistent, was in Unterabschnitt II.5.d diskutiert und korrigiert wird.

Folgt man [83, S. 369], so erklärt man das *verallgemeinerte Riesz-Potential* $R_{\alpha} \in \mathcal{D}'$ für $\alpha \in \mathbb{H} \setminus (d + 2\mathbb{N}_0)$ durch die lokalintegrierbare Dichtefunktion³³

$$R_{\alpha}(x) := \frac{\Gamma((d - \alpha)/2)}{2^{\alpha} \pi^{d/2} \Gamma(\alpha/2)} \cdot |x|^{\alpha-d} \quad (\text{II.5.48})$$

für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dadurch wird eine \mathcal{D}' -wertige holomorphe Funktion $\alpha \mapsto R_{\alpha}$ definiert,

³³In der Definition von $R_{\alpha} = u_{\alpha}$ in Gleichung (12) in [67, S. 163] scheint ein Tippfehler unterlaufen zu sein, da die Definition für $\alpha = d + 2n$, $n \in \mathbb{N}$ üblicherweise davon abweicht.

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

die eine meromorphe Fortsetzung nach ganz \mathbb{C} hat.³⁴ Diese hat ausschließlich einfache Polstellen die an den Punkten $d + 2n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ liegen. Die Definition von R_α wird auf die Polstellen ausgedehnt durch die lokalintegrierbare Dichtefunktion³⁵

$$R_{d+2n}(x) := -\frac{(-1)^n \cdot (n!)^{-1}}{2^{d+2n} \pi^{d/2} \Gamma((d+2n)/2)} \cdot |x|^{2n} \cdot (2 \log|x| - C_{d,n}) \quad (\text{II.5.49})$$

für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit der Konstanten $C_{d,n} := \log 4 + \psi(1+n) + \psi((d+2n)/2)$. Hier ist die *Psi-Funktion* $\psi := (\log \Gamma)' = \Gamma'/\Gamma$ die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion. Es gilt $\text{supp } R_\alpha = \{0\}$ genau dann, wenn $\alpha \in -2\mathbb{N}_0$ und sonst $\text{supp } R_\alpha = \mathbb{R}^d$. Im Fall des einelementigen Trägers gilt

$$R_{-2n} = (-\Delta)^n \delta \quad (\text{II.5.50})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Hier notiert Δ den distributionellen Laplace-Operator $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$.

Die verallgemeinerten Riesz-Potentiale R_α erfüllen ein bedingtes Indexgesetz, wie in Example 3.3.2(c) von [85, S. 96f] beschrieben wird (siehe auch Theorem 6 in [83, S. 375]): Die Distributionen R_α und R_β mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sind genau dann \mathcal{D}' -faltbar, wenn

$$\Re(\alpha + \beta) < d \quad \text{oder} \quad \{\alpha, \beta\} \cap -2\mathbb{N}_0 \neq \emptyset. \quad (\text{II.5.51a})$$

Unter der Bedingung (II.5.51a) gilt das Indexgesetz

$$R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}. \quad (\text{II.5.51b})$$

Zwei Spezialfälle davon sind

$$R_\alpha * R_{-\alpha} = \delta \quad (\text{II.5.52a})$$

³⁴Die Theorie solcher Funktionen wird in Section 1.5 von [85] behandelt.

³⁵Es gibt keine einheitliche Definition für R_{d+2n} . Bei der Betrachtung von Riesz-Potentialen auf Lizorkin-Räumen, wie zum Beispiel in [98, S. 44], wird auch die Definition

$$R_{d+2n}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n!)^{-1}}{2^{d+2n} \pi^{d/2} \Gamma((d+2n)/2)} \cdot |x|^{2n} \cdot 2 \log|x|$$

verwendet. Diese erfüllt $(-\Delta)^m R_{d+2n} \neq R_{d+2(n-m)}$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$ falls $0 < m \leq n$, vergleiche Gleichung (II.5.52b). Immerhin gilt $(-\Delta)^m R_{d+2n} = R_{d+2(n-m)}$ für $m > n$.

II. Übersicht und Einordnung

und

$$(-\Delta)^n R_\alpha = R_{\alpha-2n} \quad (\text{II.5.52b})$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Aus den Gleichungen (II.5.51) lassen sich Indexgesetze für Riesz-Potentialoperatoren I^α und fraktionale negative Laplace-Operatoren $(-\Delta)^{\alpha/2}$ herleiten, die den Indexgesetzen aus Theorem II.5.2 und Theorem II.5.5 ähneln. Dabei können die gleichen Methoden verwendet werden. Allerdings ergeben sich zusätzliche Einschränkungen durch die Faltbarkeitsbedingung (II.5.51a).

Das Faltungsdual des Riesz-Potentials $R_{-\alpha}$ wurde in Example 3.3.2(a) von [85, S. 96] berechnet. Mit der Notation \mathcal{D}'_μ aus Gleichung (II.5.10) lautet dieses

$$(R_{-\alpha})^* = \begin{cases} \mathcal{D}'_{\Re\alpha} & \text{für } \alpha \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N}_0 \cup -(d + 2\mathbb{N}_0)), \\ \mathcal{D}'_{\Re\alpha,1} & \text{für } \alpha \in -d - 2\mathbb{N}_0, \\ \mathcal{D}' & \text{für } \alpha \in 2\mathbb{N}_0. \end{cases} \quad (\text{II.5.53})$$

Die Distribution $R_{-\alpha}$ erzeugt aufgrund der \mathcal{D}' -Faltbarkeitsbedingung (II.5.51a) genau dann eine Faltungsalgebra, wenn $\Re\alpha \geq 0$. Die Faltungsmodule der Riesz-Potentiale wurden in Gleichung (8.4) der Publikation [61, S. 148] dieser Doktorarbeit berechnet. Mit den Notationen $\mathcal{D}'_{\downarrow\mu}$ und $\mathcal{D}'_{\mu,\downarrow}$ aus Gleichung (II.5.16) lauten diese

$$(R_{-\alpha})^{*M} = \begin{cases} \mathcal{D}'_{\Re\alpha} & \text{für } \alpha \in \mathbb{H} \setminus 2\mathbb{N}, \\ \mathcal{D}'_{0,\downarrow} & \text{für } \alpha \in i(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \mathcal{D}' & \text{für } \alpha \in 2\mathbb{N}_0, \\ \{0\} & \text{für } \alpha \in -\mathbb{H}. \end{cases} \quad (\text{II.5.54})$$

Für die Berechnungen wurde die Darstellungsformel (II.4.11) und die Faltungsrelationen aus Gleichung (4.17) in Example 6 von [61, S. 138f] verwendet.

Analog zu Theorem II.5.5 folgert man aus Gleichung (II.5.54), dass die Operatoren $(-\Delta)^{\alpha/2}$ mit $\alpha \in \mathbb{H} \cup \{0\}$ bzw. $\alpha \in \overline{\mathbb{H}}$ eine Halbgruppe mit der Relation

$$(-\Delta)^{\alpha/2} \circ (-\Delta)^{\beta/2} = (-\Delta)^{(\alpha+\beta)/2} \quad (\text{II.5.55})$$

definieren die auf dem Raum $\mathcal{D}'_{\downarrow 0}$ bzw. $\mathcal{D}'_{0,\downarrow}$ per Faltung operieren.

Ein interessanter Spezialfall der in der Publikation [61] aus dieser Doktorarbeit erhalten wurde, ist

Theorem II.5.8. *Sei $\alpha \in \mathbb{H}$. Es gelten die Inversionsformeln*

$$(-\Delta)^{\alpha/2}(I^\alpha f) = I^\alpha((-\Delta)^{\alpha/2} f) = f \quad \text{für alle } f \in (R_\alpha)^*. \quad (\text{II.5.56})$$

Beweisskizze. Dies beweist man ähnlich wie Theorem II.5.2 unter Verwendung des Assoziativgesetzes der \mathcal{D}' -Faltung, dem Indexgesetz für die Riesz-Potentiale (II.5.51b) und der Faltungsrelationen aus Gleichung (4.17) in [61, S. 138f]. Siehe Remark 15 von [61, S. 150] für mehr Details. \square

Die Inversionsformel (II.5.56) aus Theorem II.5.8 ist analog zu der Inversionsformel (26.44) aus Theorem 26.3 in [99, S. 517]. Allerdings ist der in Gleichung (II.5.56) angegebene Gültigkeitsbereich $(R_\alpha)^*$ größer, wie der Gültigkeitsbereich L^p mit $1 \leq p < d/\alpha$, der in [99] angegeben wurde. Dies sieht man wie folgt: Ähnlich wie in Gleichung (II.5.58) zeigt man, dass $R_\alpha \in \mathcal{E}' + L^q \subseteq \mathcal{D}'_{L^q}$ für $q = 1/(1 - 1/p)$ falls $p < d/\alpha$. Da Faltungsduale Inklusionen umkehren erhält man daraus

$$L^p \subseteq \mathcal{D}'_{L^p} = (\mathcal{D}'_{L^q})^* \subseteq (R_\alpha)^* \quad (\text{II.5.57})$$

unter Verwendung von Gleichung (II.4.3b). Besonders hervorzuheben ist, dass in Theorem II.5.8 keine obere Schranke an α gefordert wird, während in Theorem 26.3 aus [99] von vornherein $\alpha < d$ gelten muss.

In Theorem 1.1(i) der Arbeit [68, S. 10] wurde für $0 < \alpha < d$ gezeigt, dass der Operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ als die eindeutige Inverse des Riesz-Potentialoperators I^α eingeführt werden kann. Dort wurden L^p , \mathcal{C}_0 und der Raum \mathcal{C}_{ub} der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktion als Definitionsbereiche betrachtet. Theorem II.5.8 zeigt, dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ die eindeutig bestimmte Inverse von I^α auf dem Bereich $(R_\alpha)^*$ ist. Dabei entfällt die Einschränkung $\alpha < d$.

Sei $\alpha \in \mathbb{H}$. Dann ist der fraktionale negative Laplace-Operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ein stetiger Endomorphismus von $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^\alpha}$, wie sich leicht zeigen lässt: Sei $\chi \in \mathcal{E}$ die Abschneidefunk-

II. Übersicht und Einordnung

tion mit $\chi(x) = 1$ falls $|x| \leq 1$ und $\chi(x) = 0$ falls $|x| \geq 2$. Dann gilt

$$R_{-\alpha} = R_{-\alpha} \cdot \chi + R_{-\alpha} \cdot (1 - \chi) \in \mathcal{E}' + \mathcal{D}_{L^\infty, \mathfrak{R}\alpha+d} \subseteq \mathcal{D}'_{L^\infty, \mathfrak{R}\alpha+d}. \quad (\text{II.5.58})$$

Nach dem Kriterium [C2] für die Stetigkeit der Faltungsinklusion (II.2.10) ist

$$\mathcal{D}'_{L^1, -\mathfrak{R}\alpha-d} * \mathcal{D}'_{L^\infty, \mathfrak{R}\alpha+d} \subseteq \mathcal{D}'_{L^1, -\mathfrak{R}\alpha-d} \quad (\text{II.5.59})$$

eine stetige Faltungsinklusion. Aus Gleichung (II.5.58) und (II.5.59) folgt, dass die Faltung mit $R_{-\alpha}$ ein stetiger Endomorphismus von $\mathcal{D}'_{\mathfrak{R}\alpha} = \mathcal{D}'_{L^1, -\mathfrak{R}\alpha-d}$ ist.³⁶

II.5.d. Fraktionaler negativer Laplace per Transponierung

Der fraktionale negative Laplace-Operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ mit $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$ kann auch per Transponierung auf \mathcal{D}'_α eingeführt und charakterisiert werden. Dazu muss zunächst ein geeigneter lokalkonvexer Raum von Testfunktionen \mathcal{D}_α definiert werden auf welchem $(-\Delta)^{\alpha/2}$ einen stetigen Endomorphismus definiert. Sinngemäß wurde dies in Definition 2.3 von [109, S. 73] vorgeschlagen und in [67, S. 177] übernommen. Wie in Remark 14 in [61, S. 149] festgestellt wurde, stimmt allerdings die Definition des Raums \mathcal{D}'_α aus [109, 67] nicht mit dem Raum $\mathcal{D}'_{L^1, -\alpha-d}$ überein (siehe Gleichung (II.5.10)). Allerdings wird an anderer Stelle in [67, S. 177] die Charakterisierung $\mathcal{D}'_\alpha = \mathcal{D}'_{L^1, -\alpha-d} = (R_{-\alpha})^*$ angegeben. Daher liegt nahe, dass eine äquivalente Definition zu Gleichung (II.5.10) die Intention der Autoren von [109, 67] war.

Um die Definition von \mathcal{D}'_α als Dualraum von \mathcal{D}_α zu reparieren kann man die übliche Topologie $\beta(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}'_\alpha)$ auf \mathcal{D}'_α durch eine andere ersetzen. Sei $\mu, k \in \mathbb{R}$. Definiere die Räume \mathcal{D}_μ und $\mathcal{D}_{\mu,k}$ als

$$\mathcal{D}_{\mu,k} := \mathcal{D}_{L^\infty, -d-\mu,k} := \mathcal{D}_{L^\infty} \cdot (1+x^2)^{\frac{d+\mu}{2}} \cdot (1+\log(1+x^2))^{-k} \quad (\text{II.5.60})$$

und $\mathcal{D}_\mu := \mathcal{D}_{\mu,0}$. Die Definition von \mathcal{D}_μ stimmt mit der aus Lemma 5.3(c) von [67, S. 177] überein. Die Testfunktionen \mathcal{D} sind keine dichte Teilmenge von \mathcal{D}_μ und somit ist der topologische Dualraum $(\mathcal{D}_\mu)'$ von \mathcal{D}_μ kein Raum von Distributionen, anders als

³⁶Dies ist eine elegante alternative zu der Argumentation aus Section 5 von [67]. In [40] wird eine ähnliche Argumentation auf die Hilbert-Transformation angewendet.

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

in [109, 67] behauptet wurde. Insbesondere stimmt $(\mathcal{D}_\mu)'$ nicht mit dem Raum \mathcal{D}'_μ aus Gleichung (II.5.10) überein. Betrachte daher den Raum

$$\mathcal{D}_{\mu,c} := (\mathcal{D}_\mu, \kappa(\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}'_\mu)) \quad (\text{II.5.61})$$

mit $\kappa(\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}'_\mu)$ der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den absolutkonvexen kompakten Teilmengen von \mathcal{D}'_μ . Nach dem Theorem von Mackey-Arens (Satz 23.8 in [75, S. 17]) hat dieser Raum den Dualraum $(\mathcal{D}_{\mu,c})' = \mathcal{D}'_\mu$.

Nach der Definition von \mathcal{D}_μ lässt sich der Raum $\mathcal{D}_{\mu,c}$ darstellen als

$$\mathcal{D}_{\mu,c} = \mathcal{B}_c \cdot (1 + x^2)^{-\frac{d+\mu}{2}} \quad (\text{II.5.62})$$

mit dem Raum $\mathcal{B}_c = \mathcal{D}_{L^\infty,c} = (\mathcal{D}_{L^\infty}, \kappa(\mathcal{D}_{L^\infty}, \mathcal{D}'_{L^1}))$. In Corollary in [20, S. 71] wurde \mathcal{B}_c in der Form (II.1.1) dargestellt als \mathcal{D}_E mit dem Raum $E = \mathcal{C}_{b,s}$ der beschränkten stetigen Funktion mit strikter Topologie (expliziter wird dies in Proposition 2.5 von [6, S. 1697] beschrieben). Der Raum $\mathcal{C}_{b,s}$ entspricht dem gewichteten Raum \mathcal{C}_W mit $W = \mathcal{C}_0$. Mit Theorem VI.1.28 aus dieser Dissertation erhält man die Darstellung

$$\mathcal{D}_{\mu,c} = \mathcal{D}_E \quad \text{mit } E = \mathcal{C}_{b,s} \cdot (1 + x^2)^{-\frac{d+\mu}{2}}, \quad (\text{II.5.63})$$

vergleiche auch Problem II.2.2.

In [109] wurde gezeigt, dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ für $0 < \alpha < 2$ einen stetigen Faltungsendomorphismus auf dem Raum \mathcal{D}_α definiert, siehe auch [67, S. 177]. Es wurde dann in [109, 67] per Transponierung argumentiert, dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ auch einen stetigen Endomorphismus auf dem Raum \mathcal{D}'_α definiert. Wie oben erläutert basierte dies auf einer falschen Definition von \mathcal{D}'_α . Um die Beweismethode dennoch zu korrigieren wird im folgenden ein Beweis dafür skizziert, dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ für $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$ einen stetigen Endomorphismus von \mathcal{D}_α und $\mathcal{D}_{\alpha,c}$ definiert.

Sei $\alpha > 0$ und betrachte das Gewicht $w(x) := w_{d+\alpha}(x) = (1+x^2)^{-\frac{d+\alpha}{2}}$. Aus Gleichung (4.17c) in [61, S. 139] erhält man $C \in \mathbb{R}_+$ mit

$$w * w \leq C \cdot w. \quad (\text{II.5.64})$$

II. Übersicht und Einordnung

Dies übersetzt sich in die Faltungsinkklusion

$$B_w * B_w \subseteq C \cdot B_w \quad \text{mit } B_w := \{f \in \mathcal{C} : |f| \leq w\}. \quad (\text{II.5.65})$$

Es ist klar, dass \mathcal{E}' per Faltung stetig auf \mathcal{D}_α operiert. Somit erhält man aus Gleichung (II.5.58) und (II.5.65), dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ein stetiger Endomorphismus von \mathcal{D}_α ist.

Um zu zeigen, dass $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ein stetiger Endomorphismus von $\mathcal{D}_{\alpha,c}$ ist, benötigt man nur noch die folgende Aussage über das Gewicht $w(x) = w_{d+\alpha}(x) = (1+x^2)^{-\frac{d+\alpha}{2}}$:

$$\forall u \in \mathcal{C}_{0,+}^\times \exists v \in \mathcal{C}_{0,+}^\times \quad : \quad \frac{w}{v} * w \leq \frac{w}{u}. \quad (\text{II.5.66})$$

Hier notiert $\mathcal{C}_+^\times := \{f \in \mathcal{C} : \forall x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 0\}$ und $\mathcal{C}_{0,+}^\times := \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^\times$. Nach Gleichung (II.5.65) ist die Menge $M_1 := \{(w \cdot T_x \check{w})/w(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ beschränkt in L^1 . Daraus folgt, dass $M_2 := \{u(x) \cdot (w \cdot T_x \check{w})/w(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ kompakt³⁷ in L^1 ist für alle $u \in \mathcal{C}_{0,+}^\times$. Die Menge M_2 ist lokal gleichstetig. Mit Theorem 6.4.12 in [101, S. 140] findet man somit ein $v \in \mathcal{C}_{0,+}^\times$, sodass die Menge $v^{-1} \cdot M_2$ beschränkt in L^1 ist. Die Beschränktheit von $v^{-1} \cdot M_2$ ist, bis auf eine Konstante, äquivalent zur Ungleichung (II.5.66). Aus Gleichung (II.5.66) und der Darstellung (II.5.63) erhält man die Stetigkeit von $(-\Delta)^{\alpha/2}$ auf $\mathcal{D}_{\alpha,c}$.

II.5.e. Verallgemeinerte sequentielle Ableitungen

Der Vollständigkeit halber wird noch das Thema der letzten Publikation [62] dieser Doktorarbeit umrissen, dessen mathematische Problemstellung sich vom Hauptthema dieser Arbeit absetzt, der Faltung auf Amalgamräumen von Distributionen. Example 5 von [62, S. 295ff] nimmt Bezug auf die Modellierung linearer Medien mit fraktionaler Dynamik in [43, 42].

Ersetzt man in Gleichung (I.2.4a) die Caputo-Ableitung ${}_c D_{0+}^\alpha$ durch die Ableitung $D_{0+}^{\alpha|\gamma}$ mit $\alpha \leq \gamma \leq 1$ aus Gleichung (I.2.2) so muss man die Anfangswertbedingung $f(0+) = f_{0+}$ durch eine Integralbedingung $I_{0+}^{1-\gamma} f(0+) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ ersetzen um die eindeutige Lösbarkeit von (I.2.4) zu garantieren. Siehe Subsection II.3.2 in [41, S. 115],

³⁷Der Abschluss einer Nullfolge eines Banach-Raums X ist kompakt und stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. Somit ist das Bild einer stetigen Abbildung $F: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ kompakt falls $F(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$.

II.5. Anwendung auf fraktionale Differintegration

wo das erhaltene Problem als verallgemeinerte Relaxation bezeichnet wird. Ersetzt man ${}_C D_{0+}^\alpha$ durch eine allgemeine Riemann-Liouville-Ableitung³⁸ ${}_{RL} D_{0+}^\alpha$ mit Ordnung $\alpha > 0$, so erhält man die Bedingungen $(I_{0+}^{1-\gamma} f)^{(k)}(0+) = c_k$ mit $k = 0, \dots, [\alpha] - 1$ und festem $0 < \gamma \leq 1$, siehe Gleichung (3.1.2) in [56, S. 136].

Um Bedingungen $(I_{0+}^{1-\gamma_k} f)(0+) = c_k$ mit allgemeinen Sequenzen $\gamma_1 < \dots < \gamma_n$ reeller Zahlen zuzulassen wurde in [62] die abstrakte Verallgemeinerung

$$D_{0+}^{\alpha|\gamma_1, \dots, \gamma_n} := D_{0+}^\alpha \circ R^{\gamma_n} \circ \dots \circ R^{\gamma_1} \quad (\text{II.5.67})$$

sequentieller fraktionaler Ableitungen eingeführt. Die Verknüpfung (II.5.67) wird als partiell definierter Operator auf dem Raum \mathcal{D}'_{0+} der Distributionen mit Träger auf rechten Halbachse verstanden. Hier ist $D_+^\alpha = {}_S D_+^\alpha$ die kausale fraktionale Ableitung von Schwartz eingeschränkt auf \mathcal{D}'_{0+} . Der Y_γ -Eliminator R^γ ist ein Projektionsoperator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}'_{Y, \gamma} \subseteq \mathcal{D}'_{0+}$ und mit eindimensionalem Nullraum $\langle Y_\gamma \rangle$.

Der Raum $\mathcal{D}'_{Y, \gamma}$ besteht aus den Distributionen $f \in \mathcal{D}'_{0+}$ mit der Eigenschaft, dass es ein Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ gibt, sodass die Einschränkung von $D_+^\gamma f$ auf $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ein Radon-Maß ist.³⁹ Die Stammfunktionen von Radon-Maßen sind genau die Funktionen von lokal beschränkter Variation (siehe in [27, S. 278f, 300] und in II,§2 ebenda). Somit ist für jedes $f \in \mathcal{D}'_{Y, 1}$ der Randwert $f(0+)$ wohldefiniert und es gilt

$$R^1 f = f - Y_1 \cdot f(0+) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}'_{Y, 1}. \quad (\text{II.5.68})$$

Die Darstellung anderer Eliminatoren erhält man aus $R^\gamma = I_{0+}^{\gamma-1} \circ R^1 \circ D_+^{\gamma-1}$.

Alternierende Kompositionen $I_{0+}^{\beta_n} \circ \frac{d}{dt} \circ I_{0+}^{\beta_{n-1}} \circ \dots \circ I_{0+}^{\beta_0}$ von Riemann-Liouville-Integralen mit Ordnungen $0 \leq \beta_k < 1$ und gewöhnlichen Ableitungen definieren einen Spezialfall der Operatoren (II.5.67) durch $\gamma_k := \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \beta_i)$ für $k = 1, \dots, n$. Dies führt zu den Einschränkungen $0 < \gamma_{k+1} - \gamma_k \leq 1$. Dieser Spezialfall entspricht den Dzherbashian-Nersesian-Ableitungen aus [26, 17], wie in [62, S. 285]⁴⁰ erläutert wurde. Weitere Spezialfälle aus der Literatur werden in Example 4.3 in [62, S. 282ff] diskutiert.

Es wurde bereits beobachtet, dass die Lösung von Gleichung (I.2.5) nur davon ab-

³⁸Analog zur Liouville-Ableitung definiert man ${}_{RL} D_{0+}^\alpha = \frac{d^m}{dt^m} \circ I_{0+}^{\alpha-m}$ mit $m := [\alpha]$ [56, S. 70].

³⁹Diese Aussagen über R^γ folgert man leicht aus Definition 1, Proposition 2 und Definition 2 von [62, S. 273ff].

⁴⁰Es müsste dort $\sigma_k := -1 + \sum_{i=0}^k \gamma_i$ für $k = 0, 1, \dots, n$ lauten.

II. Übersicht und Einordnung

hängt, ob $\gamma = 1$ oder $\gamma < 1$ gilt. Dieses Phänomen wurde in [43] durch eine Grenzwertbetrachtung des Riemann-Liouville-Integrals erklärt, siehe Gleichung (34) ebenda. Mit dem abstrakten Konzept in [62] wird das gleiche Phänomen durch die Kürzbarkeit der Y_γ -Eliminatoren in Summen formalisiert. So gilt zum Beispiel

$$D_{0+}^{\alpha|\gamma} + D_{0+}^{\beta|\delta} = D_{0+}^{\alpha|\gamma} + D_{0+}^{\beta} \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \gamma < \delta. \quad (\text{II.5.69})$$

Die allgemeine Kürzungsregel für Linearkombinationen von Operatoren $D_{0+}^{\alpha|\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ wird Theorem 2 in [62, S. 287] beschrieben.

III. Grundlagen

Dieses Kapitel fasst einige Notationen und Grundlagen zu lokalkonvexen Räumen und Verbänden zusammen, sowie zu Funktionenräumen und zur Faltung. Als Grundlagenliteratur zu abstrakten lokalkonvexen Räumen und zu konkreten Funktionenräumen dienen hier die Lehrbücher und Monographien [52, 75, 54, 53, 65, 120, 48, 74]. Die Grundlagen über lokalkonvexe Verbände stützen sich auf [1, 87]. Abstrakte ordnungstheoretische Notationen und Resultate sind aus [28, 36].

In dieser Arbeit werden häufig lokalkonvexe Räume mit einer spezifizierten Bornologie betrachtet. Diese Räume werden dann “lokalkonvexe topologisch-bornologische Räume” (oder kürzer: lokalkonvexe t.b. Räume) genannt. Da es in der Literatur unüblich ist mit Tripeln aus einem Vektorraum, einer Topologie und einer Bornologie zu arbeiten, werden die Notationen dazu detailliert besprochen.

Abstrakte ordnungstheoretische Notationen und lokalkonvexe Räume mit Ordnungsstrukturen werden in Abschnitt III.1 besprochen. Definitionen und fundamentale Grundlagen zu lokalkonvexen topologisch-bornologischen Räumen werden in Abschnitt III.2 zusammengefasst. Dazu zählen spezielle projektive und induktive Limiten, sowie Eigenschaften bilinearer Abbildungen zwischen solchen Räumen. Einige fundamentale Funktionenräume und Eigenschaften von Faltungen werden in Abschnitt III.3 diskutiert. Dort werden auch Modifikationen der Faltung “ $*$ ” besprochen, nämlich die potenzierte Faltung “ $*^p$ ”, die Supremalfaltung “ \blacksquare ” und die Infimalfaltung “ \square ”.

III.1. Lokalkonvexe Räume und Ordnungslehre

In der Theorie lokalkonvexer Räume treten in verschiedenen Zusammenhängen ordnungstheoretische Konzepte auf: Erstens werden häufig Funktionenräume mit einer natürlichen Ordnungsstruktur betrachtet. Zweitens definieren geometrisch ausgezeichnete Mengen häufig Hüllensysteme, wie zum Beispiel die absolutkonvexen oder die soliden Teilmen-

III. Grundlagen

gen. Drittens definieren manche Klassen von Funktionenräumen geordnete Mengen in denen das Infimum einem projektiven Limes und das Supremum einem induktiven Limes entspricht.

Einige Konzepte der Ordnungstheorie werden in Unterabschnitt III.1.a rekapituliert, wie zum Beispiel Hüllen- und Kernsysteme oder abstrakte Suprema und Infima. Vektorverbände und solide lokalkonvexe Topologien, werden in Unterabschnitt III.1.b besprochen. Notationen für wichtige Hüllenoperatoren auf lokalkonvexen Räumen oder Verbänden werden in Unterabschnitt III.1.c systematisch zusammengefasst.

III.1.a. Hüllensysteme und extremumsvollständige Mengen

In der Theorie lokalkonvexer Räume und Verbände treten häufig Mengensysteme geometrisch ausgezeichneten Mengen auf die Hüllensysteme oder gar A -Topologien bilden, siehe Unterabschnitt III.1.c. In Ordnungskategorien von Funktionenräumen können Teilmengen mit ordnungstheoretischen Abgeschlossenheits- oder Vollständigkeitseigenschaften von Interesse sein. Zum Beispiel durch Invarianzeigenschaften charakterisierte Klassen von Räumen, siehe Unterabschnitt III.2.b. Konkrete Beispiele sind kontinuierliche bzw. diskrete globale Komponenten \mathbf{SRI} bzw. \mathbf{sti} aus Definition V.1.2 bzw. V.1.9.

Im folgenden werden Notationen und Resultate zu den entsprechenden ordnungstheoretischen Konzepten zusammengefasst. Die Hauptreferenz ist [28], die “Einführung in die Ordnungstheorie” von M. Ern . Teilweise wird die Terminologie aus dem neuerem Buch [36] bevorzugt. Manche Termina sind modifiziert worden um Kollisionen mit Begriffen aus der Theorie lokalkonvexer Verbände zu vermeiden. Zum Beispiel wird “(ordnungstheoretisch) vollständig” durch “extremumsvollständig” ersetzt.

Sei M eine Menge und notiere durch $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M . Ein *Mengensystem iber M* ist eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Gehört der Durchschnitt¹ bzw. die Vereinigung jeder Teilmenge von \mathcal{M} wieder zu \mathcal{M} , so wird \mathcal{M} als *Hüllen-* bzw. *Kernsystem* bezeichnet [28, S. 30]. Ein *Hüllen-* bzw. *Kernoperator auf M* ist eine Selbstabbildung von $\mathfrak{P}(M)$ die inklusionsbewahrend, idempotent und extensiv bzw. intensiv ist [28, S. 32f].

Sei \mathcal{H} ein Hüllensystem und \mathcal{K} ein Kernsystem iber M . Dann sind der *Hüllenoperator*

¹Der Durchschnitt der leeren Familie \emptyset wird in diesem Kontext als $\bigcap \emptyset = M$ festgelegt.

$\langle - \rangle_{\mathcal{H}}$ von \mathcal{H} und der Kernoperator $(-)_K$ von \mathcal{K} definiert als

$$\langle A \rangle_{\mathcal{H}} := \bigcap \{ H \in \mathcal{H} : H \supseteq A \} \quad \text{für } A \subseteq M, \quad (\text{III.1.1a})$$

$$(A)_{\mathcal{K}} := \bigcup \{ K \in \mathcal{K} : K \subseteq A \} \quad \text{für } A \subseteq M. \quad (\text{III.1.1b})$$

Siehe Satz 2.6 aus [28, S. 34] für die Definition in Gleichung (III.1.1a). Nach Satz 2.8 und Satz 2.13 aus [28, S. 36, 41] induziert Gleichung (III.1.1a) eine Bijektion zwischen Hüllenoperatoren und \mathcal{H} -systemen. Analoges gilt für Gleichung (III.1.1b).

Die Menge aller Hüllensysteme und die Menge aller Kernsysteme konstituieren jeweils ein Hüllensystem über der Menge $\mathfrak{P}(M)$ [28, S. 109]. Seien nun \mathcal{H} und \mathcal{G} Hüllensysteme über einer Menge M , dann ist also $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ wieder ein Hüllensystem. Die assoziierten Hüllenoperatoren erfüllen die Kompositionsregel

$$\langle A \rangle_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}} \supseteq \langle \langle A \rangle_{\mathcal{G}} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } A \subseteq M, \quad (\text{III.1.2})$$

wobei hier im allgemeinen keine Gleichheit herrscht. Allerdings gilt die Äquivalenz

$$\langle A \rangle_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}} = \langle \langle A \rangle_{\mathcal{G}} \rangle_{\mathcal{H}} \text{ für alle } A \subseteq M \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{G}. \quad (\text{III.1.3})$$

Die Aussagen (III.1.2) und (III.1.3) folgen unmittelbar aus der Definition in Gleichung (III.1.1a).

Sei M eine Menge. Eine *A-Topologie über M* ist ein Mengensystem über M das gleichzeitig ein Hüllen- und ein Kernsystem ist [28, S. 30]. Eine transitive, reflexive Relation auf M wird als *Quasiordnung* auf M bezeichnet. Jede Quasiordnung \preceq auf einer Menge M definiert eine A-Topologie \mathcal{S}_{\preceq} über M vermöge

$$\mathcal{S}_{\preceq} := \{ A \subseteq M : \forall a \in A, b \in M : b \preceq a \Rightarrow b \in A \}. \quad (\text{III.1.4})$$

Dies induziert eine Bijektion zwischen A-Topologien und Quasiordnung, siehe Punkt (4) in [28, S. 130ff], insbesondere Satz 6.29.

Sei (M, \leq) eine geordnete Menge [36, S. 10f]. Nach Satz 5.3 aus [28, S. 98] hat genau dann jede Teilmenge von M ein Supremum in M , wenn jede Teilmenge von M ein Infimum in M hat. Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt wird M *extremumsvollständig* genannt. Sei nun L eine Teilmenge von M . Dann heisst L *supremums-* bzw.

III. Grundlagen

infimumsabgeschlossen, falls für jede Teilmenge $A \subseteq L$ das Supremum bzw. Infimum von A zu L gehört, falls es existiert. Zudem wird L *extremumsabgeschlossen* genannt, falls L supremums- und infimumsabgeschlossen zugleich ist. Die Menge aller supremums- oder aller infimumsabgeschlossenen Teilmengen von M definiert ein Hüllensystem über M [28, S. 109].

Sei nun M eine Menge. Die infimumsabgeschlossenen Teilmengen der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ sind genau die Hüllensysteme über M [28, S. 118]. Nach Korollar 5.5 aus [28, S. 99] konstituiert jedes Hüllensystem \mathcal{H} über M eine extremumsvollständige geordnete Menge (\mathcal{H}, \subseteq) . In \mathcal{H} entspricht die Infimumsbildung der Durchschnittsbildung. Allerdings ist das in (\mathcal{H}, \subseteq) gebildete Supremum $\mathcal{H}\text{-sup } \mathcal{M}$ einer Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ gegeben durch

$$\mathcal{H}\text{-sup } \mathcal{M} = \left\langle \bigcup \mathcal{M} \right\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (\text{III.1.5})$$

Analoge Aussagen gelten für Kernsysteme.

III.1.b. Lokalkonvexe Verbände

Lokalkonvexe Verbände sind eine Klasse geordneter Vektorräume mit lokalkonvexer Topologie. Die spezielle Ordnungsstruktur dieser Räume vereinfacht die Beschreibung manch ihrer funktionalanalytischer Eigenschaften. Im folgenden werden grundlegende Notationen und Resultate zu diesen Räumen basierend auf den Lehrbüchern [87, 1] zusammengefasst. Dabei werden Standardnotationen und -resultate zu lokalkonvexen Räumen vorausgesetzt, siehe z.B. [120, Kap. VIII]. Die unübliche, aber nützliche Notation der *Kegelideale* wird unten eingeführt.

Ein *geordneter Vektorraum* (X, \leq) ist ein reeller Vektorraum X ausgestattet mit einer Ordnung² \leq die folgende Implikation erfüllt [87, S. 2], [1, S. 1]:

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad \alpha x + z \leq \alpha y + z \quad \text{für alle } x, y, z \in X, \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{III.1.6})$$

Durch $X_+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ wird der Kegel der nichtnegativen Elemente von (X, \leq) notiert. Die Ordnung \leq wird in der Notation meist unterdrückt. Es werden die Notationen $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$ und $\mathbb{R}_{0+} = [0, \infty[$ genutzt.

²Eine transitive, reflexive und anti-symmetrische Relation auf X , vgl. Definition 2 in [36, S. 10f].

Ein *Vektorverband* ist ein geordneter Vektorraum X mit der Eigenschaft, dass das Supremum jeder nichtleeren endlichen Teilmenge von X existiert. Dies entspricht dem “vector lattice” in [87, S. 4] und dem “Riesz space” aus Definition 1.1 in [1, S. 2]. Auf jedem Vektorverband ist ein Absolutwert $|\cdot|$ erklärt als die Abbildung

$$|\cdot|: X \rightarrow X, \quad x \mapsto |x| := \sup\{x, -x\}. \quad (\text{III.1.7})$$

Der Absolutwert $|\cdot|$ bildet nach X_+ ab, erfüllt die Dreiecksungleichung, ist absolut homogen und idempotent. Das heisst, für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten

$$|x| \geq 0, \quad |x + y| \leq |x| + |y|, \quad |\alpha x| = |\alpha||x|, \quad ||x|| = |x|. \quad (\text{III.1.8})$$

Eine Teilmenge S eines Vektorverbands X heisst *solide*, falls

$$|x| \leq |y| \quad \Rightarrow \quad x \in S \quad \text{für alle } x \in X, y \in S. \quad (\text{III.1.9})$$

Eine lineare, solide Teilmenge von X wird *Ideal von X* genannt. Dies entspricht dem “lattice ideal” aus Definition 4.1 in [87, S. 35] und dem “ideal” aus Definition 1.16 in [1, S. 10].

Sei C ein konvexer Teilkegel eines Vektorverbands X mit $C \subseteq X_+$. Es ist leicht zu zeigen, dass folgenden Aussagen über eine Teilmenge $J \subseteq C$ äquivalent sind:

1. Die Menge J ist nichtleer und erfüllt die Implikation

$$x \leq \lambda \sup\{y, z\} \quad \Rightarrow \quad x \in J \quad \text{für alle } x \in C, y, z \in J, \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{III.1.10})$$

2. Die Menge J ist nichtleer, abwärtsmonoton³ und additiv abgeschlossen.
3. Es gilt $J = I \cap C$ für ein Ideal I von X .

Als *Kegelideal von C* wird jede Teilmenge J von C bezeichnet die eine, und somit alle, der obigen äquivalenten Aussagen erfüllt.

Sei (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Raum. Der Nullumgebungsfilter von (X, \mathcal{T}_X) wird stets

³Das heisst, es gilt $x \leq y \Rightarrow x \in J$ für alle $x \in X, y \in J$. Solche Mengen werden in [36, S. 15] als “Ordnungsideale” bezeichnet.

III. Grundlagen

durch \mathcal{U}_X notiert. Die Menge aller Halbnormen auf X wird notiert durch

$$\text{sn } X := \{p: X \rightarrow \mathbb{R}_{0+} : p \text{ ist eine Halbnorm}\} \quad (\text{III.1.11a})$$

und die Menge aller stetigen Halbnormen auf (X, \mathcal{T}_X) durch

$$\text{csn}(X, \mathcal{T}_X) := \{p \in \text{sn } X : p \text{ ist } \mathcal{T}_X\text{-stetig}\}. \quad (\text{III.1.11b})$$

Ist X ein Vektorverband, so wird die Menge der *Verbandshalbnormen* definiert als

$$\text{lsn } X := \{p \in \text{sn } X : \forall x, y \in X : |x| \leq |y| \Rightarrow p(x) \leq p(y)\}, \quad (\text{III.1.12a})$$

und die stetigen Verbandshalbnormen werden notiert durch

$$\text{clsn}(X, \mathcal{T}_X) := \text{lsn } X \cap \text{csn}(X, \mathcal{T}_X). \quad (\text{III.1.12b})$$

Die Definition von Verbandshalbnormen entspricht den ‘‘Riesz seminorms’’ oder, synonym, ‘‘lattice seminorms’’, wie in [1, S. 59].

Proposition III.1.1. *Sei X ein Vektorverband und \mathcal{T}_X eine lokalkonvexe Topologie auf X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Nullumgebungsfilter \mathcal{U}_X hat eine Basis aus soliden Teilmengen von X .*
2. *Die lokalkonvexe Topologie \mathcal{T}_X wird von Verbandshalbnormen erzeugt.*
3. *Der Absolutwert $|\cdot|$ ist gleichmäßig stetig bezüglich \mathcal{T}_X .*

Beweis. Dies folgt aus Theorem 2.17 und Theorem 2.25 in [1, S. 55, 59]. □

Eine lokalkonvexe Topologie \mathcal{T}_X auf einem Vektorverband X wird *solide* genannt, falls eine der äquivalenten Aussagen aus Proposition III.1.1 erfüllt ist. In diesem Fall nennt man (X, \mathcal{T}_X) einen *lokalkonvexen Verband*. Diese Definition entspricht ‘‘locally convex lattice’’ von Definition 4.6 in [87, S. 103] und ‘‘locally convex-solid Riesz space’’ in [1, S. 59].

III.1.c. Hüllensysteme über Vektorräumen und -verbänden

In diesem Abschnitt werden Notationen für Hüllensysteme und A-Topologien über Vektorräumen und -verbänden festgelegt und Eigenschaften zusammengefasst. Die meisten Definitionen und Aussagen sind standard und zu finden in [74, 120, 87, 1].

Sei X ein Vektorraum. Dann definieren die Eigenschaften “kreisförmig”, “konvex”, “absolutkonvex”, “ist ein Kegel” und “linear” jeweils ein Hüllensystem über X . Für $A \subseteq X$ notiert man entsprechend

$$\text{co}(A) \quad : \quad \text{konvexe Hülle von } A, \quad (\text{III.1.13a})$$

$$\text{circ}(A) \quad : \quad \text{kreisförmige Hülle von } A, \quad (\text{III.1.13b})$$

$$\Gamma(A) \quad : \quad \text{absolutkonvexe Hülle von } A, \quad (\text{III.1.13c})$$

$$\text{cone}(A) \quad : \quad \text{Kegelhülle von } A, \quad (\text{III.1.13d})$$

$$\langle A \rangle := \langle A \rangle_{\text{lin}} \quad : \quad \text{lineare Hülle von } A. \quad (\text{III.1.13e})$$

Per Definition ist eine Menge absolutkonvex wenn sie konvex und kreisförmig ist. Da die konvexe Hülle einer kreisförmigen Menge kreisförmig ist [48, S. 6, Cor. (2)], folgt aus der Äquivalenz (III.1.3) die Gleichung $\Gamma(A) = \text{co}(\text{circ}(A))$ für alle $A \subseteq X$.

Sei X ein Vektorverband und C ein konvexer Teilkegel von X_+ . Dann definieren die Eigenschaften “solide”, “solidkonvex”, “ist ein Ideal” und “ist ein Kegelideal in C ”, siehe Unterabschnitt III.1.b, jeweils ein Hüllensystem über X . Für $A \subseteq X$ notiert man

$$\text{sol}(A) \quad : \quad \text{solide Hülle von } A, \quad (\text{III.1.14a})$$

$$\Gamma_{|\cdot|}(A) \quad : \quad \text{solidkonvexe Hülle von } A, \quad (\text{III.1.14b})$$

$$\langle A \rangle_{\text{Id}} \quad : \quad \text{Idealhülle von } A, \quad (\text{III.1.14c})$$

$$\langle A \rangle_{\text{CI}} \quad : \quad \text{Kegelidealhülle von } A \text{ in } C. \quad (\text{III.1.14d})$$

Jede solide Menge ist kreisförmig. Die konvexe Hülle einer soliden Menge ist solide nach Theorem 1.11 aus [1, S. 8]. Insbesondere ist jede solidkonvexe Menge auch absolutkonvex. Die lineare Hülle einer soliden Menge ist ein Ideal. Aus der Äquivalenz (III.1.3) erhält man die Gleichungen $\Gamma_{|\cdot|}(A) = \text{co}(\text{sol}(A))$ und $\langle A \rangle_{\text{Id}} = \langle \text{sol}(A) \rangle$.

Die Mengensysteme der kreisförmigen Mengen, der Kegel und der soliden Mengen sind jeweils von der Form \mathcal{S}_{\preceq} mit einer Quasiordnung \preceq , wie in Gleichung (III.1.4), und

III. Grundlagen

somit A-Topologien. Hier wird “ $x \preceq y$ ” jeweils definiert als “ $x = \alpha y$ für ein $\alpha \in [-1, 1]$ ”, “ $x = \alpha y$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ” und “ $|x| \leq |y|$ ” für $x, y \in X$.

Jedes der oben definierten Hüllensysteme ist abgeschlossen unter der Bildung von Summen.⁴ Dies ist für jedes dieser Hüllensysteme leicht nachzuweisen. Zum Beispiel geht der Beweis für die Erhaltung der Solidität wie folgt: Sei $x = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_k \in S_k$, $S_k \subseteq X$ solide und $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $y \in X$ mit $|y| \leq |x|$. Dann gilt die Ungleichung $|y| \leq |x| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ und wegen Theorem 1.10 aus [1, S. 8] gibt es $y_k \in S_k$ mit $y = y_1 + \cdots + y_n$.

Sei (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Raum. Der topologische Abschluss in (X, \mathcal{T}_X) wird notiert als \bar{A} . Der topologische Abschluss bewahrt die Eigenschaften “kreisförmig”, “konvex”, “absolutkonvex”, “ist ein Kegel” und “linear”. Sei nun (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Verband. Dann bewahrt der topologische Abschluss in (X, \mathcal{T}_X) auch die Eigenschaften “solide”. Nach Proposition 4.8 aus [87, S. 104] bewahrt der topologische Abschluss somit auch die Eigenschaften “solidkonvex” und “ist ein Ideal”.

III.2. Topologisch-bornologische Räume

In der Theorie lokalkonvexer Räume tauchen an verschiedenen Stellen Bornologien auf. Beispiele sind Topologien auf Dualräumen oder allgemeine Stetigkeits- oder Beschränktheitskriterien für bilineare Abbildungen. In dieser Arbeit sind vor allem natürliche Konstruktionen von Bornologien von Interesse, wie zum Beispiel Hüllen und Kerne in Unterabschnitt III.2.b oder Urbilder in Kapitel IV. Letztere spielen eine wichtige Rolle bei “natürlichen” Charakterisierungen von beschränkten oder relativ kompakten Mengen.

Da Bornologien in der Grundlagenliteratur zu lokalkonvexen Räumen in der Regel nachrangig behandelt werden, eine Ausnahme ist [48], fasst Unterabschnitt III.2.a wichtige Definitionen detailliert zusammen. Dort werden dann lokalkonvexe t.b. Räume als lokalkonvexe Räume mit einer konvexen Vektorbornologie aus beschränkten Teilmengen eingeführt. Hüllen und Kerne von lokalkonvexen t.b. Räumen über einem festen Vektorraum werden in Unterabschnitt III.2.b diskutiert. Dort werden dann auch Permanenzgesetze für stetige Endomorphismen hergeleitet. Verschiedene Stetigkeits- oder Beschränktheitseigenschaften bilinearer Abbildungen zwischen lokalkonvexen t.b. Räu-

⁴Diese werden als Minkowski-Summen $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ verstanden.

men werden in Unterabschnitt III.2.c eingeführt.

III.2.a. Vektorbornologien auf lokalkonvexen Räumen

Auf einem unendlichdimensionalen lokalkonvexen Raum können die beschränkten, die präkompakten und die kompakten Teilmengen unterschiedliche Mengensysteme konstituieren. Bornologien können als Abstraktion dieser konkreten Mengensysteme betrachtet werden. Verwendet werden Bornologien unter anderem zur Beschreibung von hypostetig-beschränkten bilinearen Abbildungen, wie in Unterabschnitt III.2.c. Im folgenden werden basierend auf [48], ausgewählte Grundlagen zu Bornologien auf Vektorräumen und lokalkonvexen Räumen zusammengefasst. Diese werden ergänzt um Grundlagen zu Bornologien auf Vektorverbänden und lokalkonvexen Verbänden.

Basierend darauf werden in Definition III.2.3 Tripel $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$ eingeführt, die aus einem lokalkonvexen Raum (X, \mathcal{T}_X) und einer kompatiblen konvexen Vektorbornologie \mathcal{B}_X bestehen. Zu den meisten universellen Konstruktionen aus der Theorie lokalkonvexer Räume gibt es eine entsprechende Konstruktion für bornologische Vektorräume. Zum Beispiel für die Hüllen und Kerne aus Unterabschnitt III.2.b oder die Urbildräume aus Kapitel IV. Die Einführung der Tripel erlaubt es universelle topologische und bornologische Konstruktionen in einem Untersuchungsschritt abzuhandeln.

Unter Verwendung der Notationen aus Gleichungen (III.1.13) und (III.1.14) werden nun Vektorbornologien mit bestimmten geometrischen Eigenschaften eingeführt. Bis auf Solidität sind diese Notationen aus [48] oder [53]:

Definition III.2.1. Sei X ein Vektorraum. Eine *Vektorbornologie* auf X ist ein nichtleeres, hereditäres⁵ Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften

$$X = \bigcup \mathcal{B}, \quad (\text{III.2.1a})$$

$$\text{circ}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}, \quad (\text{III.2.1b})$$

$$\mathcal{B} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}. \quad (\text{III.2.1c})$$

Das Tupel (X, \mathcal{B}) wird dann als *bornologischer Vektorraum* bezeichnet.

1. Die Vektorbornologie \mathcal{B} heisst *konvex*, falls $\text{co}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.

⁵Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ über einer Menge M wird *hereditär* genannt, falls $B' \in \mathcal{B}$ für alle $B' \subseteq B$ mit $B \in \mathcal{B}$.

III. Grundlagen

2. Ist X ein Vektorverband, so wird \mathcal{B} *solide* genannt, falls $\text{sol}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.
3. Ist X mit einer lokalkonvexen Topologie \mathcal{T}_X ausgestattet, so heisst \mathcal{B} *saturiert*, falls \mathcal{B} konvex ist und $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$. Weiter wird \mathcal{B} als *Kompaktologie* bezeichnet, falls \mathcal{B} saturiert ist und aus relativ schwach- \mathcal{T}_X -kompakten Mengen besteht.

Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$ zwischen bornologischen Vektorräumen wird *bornologiebewahrend* genannt, falls $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$. Lineare, bornologiebewahrende Abbildungen zwischen bornologischen Vektorräumen fungieren als Morphismen für die Kategorie der bornologischen Vektorräume.

Bemerkung III.2.2. Zwei Bemerkungen zu Definitionen aus der Literatur:

1. Die obige Definition der Vektorbornologie ist äquivalent zu der Definition in [48, S. 18-19]. Insbesondere ist jede Vektorbornologie \mathcal{B} abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und erfüllt $\lambda B \in \mathcal{B}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}$.
2. In Definition III.2.1 wird eine Kompaktologie als hereditäres Mengensystem definiert während z.B. in [53, S. 157] eine Kompaktologie nur aus dem Erzeugendensystem der schwach-abgeschlossen, absolutkonvexen Mengen besteht. Dieser Unterschied hat aber keine praktische Relevanz.

Über jedem Vektorraum X bildet die Menge aller Vektorbornologien ein Hüllensystem. Die konvexen und die saturierten Vektorbornologien bilden ebenfalls Hüllensysteme. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ ist die größte Vektorbornologie. Die kleinste Vektorbornologie ist die *Polytopenbornologie*

$$\mathfrak{S}(X) := \{S \subseteq X : \exists F \subseteq X \text{ endlich} : S \subseteq \Gamma(F)\}. \quad (\text{III.2.2})$$

Die Vektorbornologien $\mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{S}(X)$ sind stets konvex und sogar saturiert bezüglich jeder lokalkonvexen Topologie auf X .

Über jedem Vektorverband X bildet die Menge aller soliden Vektorbornologien ein Hüllensystem. Die größte Vektorbornologie $\mathfrak{P}(X)$ ist solide und die kleinste solide Vektorbornologie ist

$$\mathfrak{S}^{\text{sol}}(X) := \{S \subseteq X : \exists x \in X_+ : S \subseteq \text{sol}(x)\}. \quad (\text{III.2.3})$$

Diese Vektorbornologie ist konvex und zudem saturiert bezüglich jeder soliden, lokal-konvexen Topologie auf X .

Nach Example (4), (5) und (9) aus [48, S. 20ff] sind auf jedem lokalkonvexen Raum (X, \mathcal{T}_X) die folgenden drei Vektorbornologien erklärt:

$$\mathfrak{B}(X, \mathcal{T}_X) := \{B \subseteq X : \forall U \in \mathcal{U}_X \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : B \subseteq \lambda U\}, \quad (\text{III.2.4a})$$

$$\text{p}\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X) := \{T \subseteq X : \forall U \in \mathcal{U}_X \exists F \subseteq X \text{ endlich} : T \subseteq F + U\}, \quad (\text{III.2.4b})$$

$$\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X) := \{K \subseteq X : \overline{K} \text{ ist } \mathcal{T}_X\text{-kompakt}\}. \quad (\text{III.2.4c})$$

Dies sind die Mengensysteme der \mathcal{T}_X -beschränkten, der \mathcal{T}_X -präkompakten⁶ und der relativ \mathcal{T}_X -kompakten Mengen. Die Vektorbornologien $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T}_X)$ und $\text{p}\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ sind stets saturiert, aber $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ muss nicht konvex sein. Falls $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ konvex ist, ist $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ auch saturiert. Die größte konvexe Bornologie die in $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ enthalten ist, ist gegeben durch

$$\mathfrak{K}_\Gamma(X, \mathcal{T}_X) := \{K \subseteq X : \Gamma(K) \text{ ist relativ } \mathcal{T}_X\text{-kompakt}\}, \quad (\text{III.2.5})$$

siehe Example (6) aus [48, S. 21]. Diese Vektorbornologie ist stets saturiert.

Ist (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Verband, so ist $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T}_X)$ auch solide. Für $\text{p}\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ und $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ trifft dies im allgemeinen nicht zu, auch falls $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ konvex ist. Daher werden die folgenden Vektorbornologien eingeführt:

$$\text{p}\mathfrak{K}_{\text{sol}}(X, \mathcal{T}_X) := \{T \subseteq X : \text{sol}(T) \text{ ist } \mathcal{T}_X\text{-präkompakt}\}, \quad (\text{III.2.6a})$$

$$\mathfrak{K}_{\text{sol}}(X, \mathcal{T}_X) := \{K \subseteq X : \text{sol}(K) \text{ ist relativ } \mathcal{T}_X\text{-kompakt}\}. \quad (\text{III.2.6b})$$

Es definiert $\text{p}\mathfrak{K}_{\text{sol}}(X, \mathcal{T}_X)$ bzw. $\mathfrak{K}_{\text{sol}}(X, \mathcal{T}_X)$ die größte solide Bornologie auf X , die in $\text{p}\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ bzw. $\mathfrak{K}(X, \mathcal{T}_X)$ enthalten ist. Die Bornologie $\text{p}\mathfrak{K}_{\text{sol}}(X, \mathcal{T}_X)$ ist stets saturiert.

Definition III.2.3. Ein *lokalkonvexer t.b. Raum* ist ein Tripel $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$ mit (X, \mathcal{T}_X) einem lokalkonvexen Raum und \mathcal{B}_X einer konvexen Vektorbornologie auf X welche die Inklusion $\mathcal{B}_X \subseteq \mathfrak{B}(X, \mathcal{T}_X)$ erfüllt.⁷ Ist zudem (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Verband und \mathcal{B}_X solide, so wird $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$ *lokalkonvexer t.b. Verband* genannt.

⁶Synonym: "der \mathcal{T}_X -totalbeschränkten"

⁷Dies ist die Kompatibilitätsbedingung aus Definition 4:4'1 aus [48, S. 47].

III. Grundlagen

Seien $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ lokalkonvexe t.b. Räume und $f: X \rightarrow Y$ linear. Ist f stetig und bornologiebewahrend, das heisst, f erfüllt $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$ und $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$, so bezeichnet man f als *t.b. Morphismus*

$$f: (X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y). \quad (\text{III.2.7})$$

Die t.b. Morphismen sind die Morphismen der Kategorie der lokalkonvexen t.b. Räume. Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls ein t.b. Morphismus, so wird f als *t.b. Isomorphismus* bezeichnet. Gilt $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X) = (Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$, so nennt man f einen *t.b. Endomorphismus*. Genau dann, wenn die drei Bedingungen

$$X \subseteq Y, \quad \mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_Y|_X, \quad \mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{B}_Y \quad (\text{III.2.8})$$

erfüllt sind schreibt man $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X) \subseteq (Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ und spricht von einer *t.b. Inklusion*. Hier notiert $\mathcal{T}_Y|_X := \{T \cap X : T \in \mathcal{T}_Y\}$ die Teilraumtopologie die \mathcal{T}_Y auf X induziert.

Bemerkung III.2.4. Aus den Definitionen ergibt sich auf natürliche Weise ein selbst-erklärendes kommutatives Quadrat von sogenannten “Vergissfunktoren”:

$$(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X) \begin{array}{c} \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X) \\ \longrightarrow (X, \mathcal{B}_X) \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} X \quad (\text{III.2.9})$$

Für die Praxis folgt daraus, dass aus jeder Aussage über Beziehungen zwischen, oder über universelle Konstruktionen von, lokalkonvexen t.b. Räumen eine entsprechende Aussage für Vektorräume, lokalkonvexe Räume oder konvexe bornologische Vektorräume folgt. Dies wird in dieser Arbeit verwendet für Hüllen, Kerne und Urbildräume von lokalkonvexen t.b. Räumen.

Umgekehrt kann jeder lokalkonvexe Raum (X, \mathcal{T}_X) mit der Bornologie der beschränkten Mengen $\mathcal{B}_X := \mathfrak{B}(\mathcal{T}_X)$ oder mit der Polytopenbornologie $\mathcal{B}_X := \mathfrak{S}(\mathcal{T}_X)$ zu einem topologisch-bornologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$ “aufgerüstet” werden. Dabei kommutiert der Funktor $(X, \mathcal{T}_X) \mapsto (X, \mathcal{T}_X, \mathfrak{B}(\mathcal{T}_X))$ mit Kernen und Urbildraumoperatoren, im allgemeinen aber nicht mit Hüllen.

III.2.b. Ordnungskategorien von Unterräumen und Idealen

Im folgenden wird die Menge aller lokalkonvexen t.b. Räume betrachtet die Untervektorräume eines festgelegten Vektorraums sind. Ordnet man diese Menge durch t.b. Inklusionen, so erhält man eine extremumsvollständige geordnete Menge, im Sinne von Unterabschnitt III.1.a. Diese wird als *Ordnungskategorie von lokalkonvexen t.b. Unterräumen* bezeichnet. Supremum und Infimum können explizit durch Hülle und Kern von lokalkonvexen t.b. Räumen dargestellt werden. Invarianzeigenschaften erzeugen extremumsabgeschlossene Teilmengen. Notationen und Resultate hierzu werden im folgenden zusammengefasst.

Definition III.2.5. Es werden die folgenden Kategorien von Unterräumen eingeführt:

1. Sei X ein Vektorraum. Ist Y ein Untervektorraum von X , so wird ein lokalkonvexer t.b. Raum der Form $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ als *lokalkonvexer t.b. Unterraum von X* bezeichnet. Die durch t.b. Inklusionen geordnete Menge

$${}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X) := \{(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y) \text{ lokalkonvexer t.b. Unterraum von } X\} \quad (\text{III.2.10})$$

wird *Ordnungskategorie der lokalkonvexen t.b. Unterräume von X* genannt.

2. Sei X ein Vektorverband. Ist Y ein Ideal von X , so wird ein lokalkonvexer t.b. Verband der Form $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ als *lokalkonvexes t.b. Ideal von X* bezeichnet. Die durch t.b. Inklusionen geordnete Menge

$${}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X) := \{(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y) \text{ lokalkonvexes t.b. Ideal von } X\} \quad (\text{III.2.11})$$

wird *Ordnungskategorie der lokalkonvexen t.b. Ideale von X* genannt.

Definition III.2.6. Sei X ein Vektorraum, I eine nichtleere Indexmenge und, für jedes $i \in I$, $(X_i, \mathcal{T}_{X_i}, \mathcal{B}_{X_i})$ ein lokalkonvexer t.b. Unterraum von X .

1. Die *Hülle der lokalkonvexen t.b. Räume* $(X_i, \mathcal{T}_{X_i}, \mathcal{B}_{X_i})$ mit $i \in I$ ist definiert

III. Grundlagen

als $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ mit

$$Y := \left\langle \bigcup \{X_i : i \in I\} \right\rangle, \quad (\text{III.2.12a})$$

$$\mathcal{T}_Y := \max\{\mathcal{T} \text{ lokalkonvexe Top. auf } Y : \forall i \in I : \mathcal{T}|_{X_i} \subseteq \mathcal{T}_{X,i}\}, \quad (\text{III.2.12b})$$

$$\mathcal{B}_Y := \left\{ B \subseteq Y : B \subseteq \sum_{k=1}^n B_k, B_k \in \mathcal{B}_{X,i(k)}, i(k) \in I, n \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (\text{III.2.12c})$$

Für eine leere Indexmenge setzt man $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y) = (\{0\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\})$.

2. Der *Kern der lokalkonvexen t.b. Räume* $(X_i, \mathcal{T}_{X,i}, \mathcal{B}_{X,i})$ mit $i \in I$ ist definiert als $(Z, \mathcal{T}_Z, \mathcal{B}_Z)$ mit

$$Z := \bigcap \{X_i : i \in I\}, \quad (\text{III.2.13a})$$

$$\mathcal{T}_Z := \{Z \cap T_1 \cap \cdots \cap T_n : T_k \in \mathcal{T}_{X,i(k)}, i(k) \in I, n \in \mathbb{N}_0\}, \quad (\text{III.2.13b})$$

$$\mathcal{B}_Z := \bigcap \{\mathcal{B}_{X,i} : i \in I\}. \quad (\text{III.2.13c})$$

Für eine leere Indexmenge setzt man $(Z, \mathcal{T}_Z, \mathcal{B}_Z) = (X, \{\emptyset, X\}, \mathfrak{P}(X))$.⁸

Bemerkung III.2.7. Die Bezeichnungen ‘‘Hülle’’ und ‘‘Kern’’ sind übernommen aus §19 in [65]. Definition III.2.6 orientiert sich an gebräuchlichen Konstruktionen von Topologien und Bornologien mit universellen Eigenschaften:

1. Nach Unterabschnitt III.1.c konstituieren die Untervektorräume von X ein Hüllensystem, und somit eine extremumsvollständige geordnete Menge. Zudem ist Gleichung (III.2.12a) bzw. (III.2.13a) eine explizite Formel für die Supremums- bzw. Infimumsbildung in dieser geordneten Menge, vergleiche mit Gleichung (III.1.5).
2. Man erkennt die Topologie \mathcal{T}_Y in Gleichung (III.2.12b) als Spezialfall der induktiven lokalkonvexen Topologie ‘‘ \mathfrak{T}^i ’’ aus [54, S. 153] wenn man für ‘‘ $v_j : E_j \rightarrow E$ ’’ die kanonische Inklusionsabbildung $X_i \rightarrow Y$ einsetzt. Somit hat \mathcal{T}_Y die universelle Eigenschaft aus [54, S. 153, d)]. Eine Basis für den Nullumgebungsfilter \mathcal{U}_Y der

⁸Genau wie beim Durchschnitt der leeren Menge von Teilmengen einer Menge M ist die Hülle der leeren Menge nur durch Bezug auf X wohldefiniert.

Topologie \mathcal{T}_Y ist gegeben durch die Mengen

$$\Gamma \left(\bigcup \{U_{X,i} : i \in I\} \right) \quad \text{mit } U_{X,i} \in \mathcal{U}_{X,i} \text{ für } i \in I, \quad (\text{III.2.14})$$

nach Gleichung (11) aus [54, S. 153].

Man erkennt die Topologie \mathcal{T}_Z in Gleichung (III.2.13b) als Spezialfall der projektiven Topologie “ \mathfrak{T}^p ” aus [54, S. 149] wenn man für “ $u_j: E \rightarrow E_j$ ” die kanonische Inklusionsabbildung $Z \rightarrow X_i$ einsetzt. Somit hat \mathcal{T}_Y die universelle Eigenschaft aus [54, S. 150, d)].

3. Das Mengensystem \mathcal{B}_Y in Gleichung (III.2.12c) ist in der Tat eine konvexe Vektorbornologie: Es ist klar, dass \mathcal{B}_Y hereditär ist und die Gleichungen (III.2.1a) und (III.2.1c) erfüllt. Da Absolutkonvexität unter Summenbildung bewahrt wird folgt auch (III.2.1b). Nach Konstruktion ist klar, dass \mathcal{B}_Y die kleinste Vektorbornologie ist, die jedes $\mathcal{B}_{X,i}$ enthält. Somit entspricht \mathcal{B}_Y der finalen Bornologie “ \mathcal{B} ” aus [48, Def. 1, S. 33] und \mathcal{B}_Y die universelle Eigenschaft aus [48, Rem. 1, S. 33]. Hier setzt man für “ $v_j: X_j \rightarrow X$ ” die kanonische Inklusionsabbildung $X_i \rightarrow Y$ ein.

Die Vektorbornologie \mathcal{B}_Z in Gleichung (III.2.13c) ist konvex und entspricht der Durchschnittsbornologie “ \mathcal{B} ” aus [48, S. 31]. Diese ist also ein Spezialfall der initialen Bornologie aus [48, Def. 1, S. 31] und somit hat \mathcal{B}_Z die universelle Eigenschaft aus [48, Rem. 1, S. 31].

Proposition III.2.8. *Sei X ein Vektorraum. Die Ordnungskategorie ${}_{1\text{ctb}}\mathbf{Sub}(X)$ ist extremumsvollständig. Ein Supremum bzw. Infimum in ${}_{1\text{ctb}}\mathbf{Sub}(X)$ wird realisiert durch die Hülle bzw. den Kern lokalkonvexer t.b. Räume.*

Beweis. Dies folgt aus Teil 1 von Bemerkung III.2.7 und den universellen Eigenschaften der lokalkonvexen Topologien \mathcal{T}_Y und \mathcal{T}_Z und der konvexen Vektorbornologien \mathcal{B}_Y und \mathcal{B}_Z . Verweise auf diese sind in Teil 2 und Teil 3 der Bemerkung III.2.7 angegeben. \square

Proposition III.2.9. *Sei X ein Vektorverband. Die Menge ${}_{1\text{ctb}}\mathbf{Id}(X)$ aller lokalkonvexen t.b. Ideale von X ist eine extremumsabgeschlossene Teilmenge der Ordnungskategorie ${}_{1\text{ctb}}\mathbf{Sub}(X)$ aller lokalkonvexen t.b. Unterräume von X .*

Beweis. Übernehme die Notationen aus Definition III.2.6. Der Beweis beruht auf den

III. Grundlagen

Permanenzeigenschaften von soliden Mengen und Bornologien aus den Unterabschnitten III.1.c und III.2.a.

Da Solidität unter beliebigen Vereinigungen, linearen Hüllen und konvexen Hüllen erhalten bleibt, ist Y ein Ideal von X und die Basis des Nullumgebungsfilters \mathcal{U}_Y von \mathcal{T}_Y aus Gleichung (III.2.14) besteht aus soliden Mengen. Nach Proposition III.1.1 ist somit (Y, \mathcal{T}_Y) ein lokalkonvexer Verband. Da Solidität unter Summenbildung erhalten bleibt, ist \mathcal{B}_Y eine solide Vektorbornologie auf Y .

Da Solidität unter beliebigen Durchschnitten erhalten bleibt ist Z ein Ideal von X und der Nullumgebungsfilter \mathcal{U}_Z von \mathcal{T}_Z hat eine Basis aus soliden Mengen. Also ist auch (Z, \mathcal{T}_Z) ein lokalkonvexer Verband. Als Durchschnitt von soliden Vektorbornologien ist \mathcal{B}_Z eine solide Vektorbornologie auf Z .

Die Bornologie \mathcal{B}_Y wird von endlichen Summen erzeugt und die Topologie \mathcal{T}_Z von endlichen Durchschnitten. Da jede endliche Teilmenge von \mathbb{R}_+ nach oben und unten beschränkt ist, folgen auch die beiden Kompatibilitätsbedingungen $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathfrak{B}(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $\mathcal{B}_Z \subseteq \mathfrak{B}(Z, \mathcal{T}_Z)$. \square

Sei $L \subseteq \text{lin}(X)$ und sei $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{P}(\text{lin}(X))$, wobei $\text{lin}(X)$ die Menge aller linearen Abbildungen $X \rightarrow X$ notiert. Ein lokalkonvexer t.b. Unterraum $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ von X wird als *L-invariant* bezeichnet, falls die Einschränkungen $l|_Y$ mit $l \in L$ t.b. Endomorphismen von $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ definieren. Es wird $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ als \mathcal{L} -invariant bezeichnet genau dann, wenn alle Mengen $\{l|_Y : l \in L\}$ mit $L \in \mathcal{L}$ gleichstetige Mengen stetiger Abbildungen $(Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ sind, das heisst, wenn

$$\bigcap \{l^{-1}(U) : l \in L\} \in \mathcal{U}_Y \quad \text{für alle } L \in \mathcal{L} \text{ und } U \in \mathcal{U}_Y, \quad (\text{III.2.15a})$$

und alle $L \in \mathcal{L}$ gleichmäßig bornologiebewahrend sind, das heisst, wenn

$$L(B) = \{l(b) : l \in L, b \in B\} \in \mathcal{B}_Y \quad \text{für alle } L \in \mathcal{L} \text{ und } B \in \mathcal{B}_Y. \quad (\text{III.2.15b})$$

Proposition III.2.10. *Sei X ein Vektorraum, $L \subseteq \text{lin}(X)$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{P}(\text{lin}(X))$. Die L -invarianten Räume konstituieren eine extremumsabgeschlossene Teilmenge der Ordnungskategorie ${}_{\text{ctb}}\text{Sub}(X)$. Das gleiche gilt für die \mathcal{L} -invarianten Räume.*

Beweis. Nach Unterabschnitt III.1.a bleibt Extremumsabgeschlossenheit unter Durchschnitten erhalten. Also genügt es die Proposition für einelementige Mengen $L = \{l\}$ zu

beweisen.

Im folgenden nutzt man Proposition III.2.8 und die universellen Eigenschaften auf die in Bemerkung III.2.7 verwiesen wird. Übernehme die Notationen aus Definition III.2.6 und sei die Einschränkung $l|_{X_i}$ ein t.b. Endomorphismus von $(X_i, \mathcal{T}_{X,i}, \mathcal{B}_{X,i})$ für alle $i \in I$. Nach Konstruktion hat man die t.b. Morphismen

$$l|_{X_i}: (X_i, \mathcal{T}_{X,i}, \mathcal{B}_{X,i}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y), \quad (\text{III.2.16a})$$

$$l|_Z: (Z, \mathcal{T}_Z, \mathcal{B}_Z) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_{X,i}, \mathcal{B}_{X,i}). \quad (\text{III.2.16b})$$

Daraus folgt $l(Z) \subseteq Z$ und, da l linear ist, $l(Y) \subseteq Y$. Die universellen Eigenschaften der lokalkonvexen Topologien \mathcal{T}_Y und \mathcal{T}_Z und der konvexen Vektorbornologien \mathcal{B}_Y und \mathcal{B}_Z garantieren, dass die Einschränkung $l|_Y$ bzw. $l|_Z$ ein t.b. Endomorphismus von $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$ bzw. $(Z, \mathcal{T}_Z, \mathcal{B}_Z)$ ist.

Zum Beweis der entsprechenden Aussagen für \mathcal{L} -Invarianz wendet man zunächst vorheriges auf $\bigcup \mathcal{L}$ -Invarianz an. Dann muss noch verifiziert werden, dass die Gleichungen (III.2.15) unter Kernen und Hüllen bewahrt bleiben. \square

III.2.c. Bilineare Abbildungen

Stetigkeit ist keine selbstverständliche Eigenschaft für bilineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen. So ist zum Beispiel die Multiplikation von Distributionen mit glatten Funktionen $\mathcal{D}' \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}'$, $(f, g) \mapsto f \cdot g$ nicht stetig, siehe Proposition 6 in [70]. Solche Fälle motivieren die Einführung abgeschwächter Stetigkeitsbegriffe, wie zum Beispiel der Hypostetigkeit [52, S. 355ff]. Nach Proposition 3.6.5 in [52, S. 360f] ist die obige Abbildung in der Tat Hypostetig.

Im folgenden werden vier elementare Stetigkeitseigenschaften bilinearer Abbildungen zwischen lokalkonvexen t.b. Räumen diskutiert. Seien dazu im gesamten Abschnitt $(X, \mathcal{T}_X, \mathcal{B}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y, \mathcal{B}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z, \mathcal{B}_Z)$ lokalkonvexe t.b. Räume mit Nullumgebungsfiltern \mathcal{U}_X , \mathcal{U}_Y , \mathcal{U}_Z und $b: X \times Y \rightarrow Z$ bilinear. Es wird zunächst an das folgende bekannte Resultat erinnert:

Proposition III.2.11. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

1. Die Abbildung $b: (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist stetig.⁹

⁹Hier trägt das Kartesische Produkt $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$ die Produkttopologie.

III. Grundlagen

2. Es gilt die folgende Bedingung (Stetigkeit im Ursprung):

$$\forall U_Z \in \mathcal{U}_Z \exists U_X \in \mathcal{U}_X, U_Y \in \mathcal{U}_Y \quad : \quad b(U_X, U_Y) \subseteq U_Z. \quad (\text{III.2.17})$$

3. Zu $p_Z \in \text{csn}(Z, \mathcal{T}_Z)$ gibt es $p_X \in \text{csn}(X, \mathcal{T}_X)$ und $p_Y \in \text{csn}(Y, \mathcal{T}_Y)$, sodass

$$p_Z(b(x, y)) \leq p_X(x)p_Y(y) \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y. \quad (\text{III.2.18})$$

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist Proposition 1 aus [52, S. 356]. Die Äquivalenz zur dritten Aussage ist klar. \square

Stetigkeit und Hypostetigkeit sind etablierte Notationen für bilineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen. Bei der Betrachtung von lokalkonvexen t.b. Räumen bietet sich eine Verfeinerung der Hypostetigkeit an, die von den spezifizierten Bornologien abhängt [52, S. 355ff]. Motiviert durch die Transponierung separat stetiger bilinear Abbildungen im linken oder rechten Argument werden in der folgenden Definition zusätzlich die Eigenschaften “bornologiebewahrend” und “kostetig” eingeführt. Diese werden jeweils als dual zu “hypostetig” und “stetig” betrachtet. Zusammengenommen mit Gleichung (III.2.17) wird eine Systematik ersichtlich.

Definition III.2.12. Man nennt b eine...

1. ... *bornologiebewahrende* Abbildung $(X, \mathcal{B}_X) \times (Y, \mathcal{B}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{B}_Z)$ falls

$$\forall B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y \exists B_Z \in \mathcal{B}_Z \quad : \quad b(B_X, B_Y) \subseteq B_Z. \quad (\text{III.2.19})$$

2. ... *linkskostetige* Abbildung $(X, \mathcal{B}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{B}_Z)$ falls

$$\forall B_X \in \mathcal{B}_X \exists U_Y \in \mathcal{U}_Y, B_Z \in \mathcal{B}_Z \quad : \quad b(B_X, U_Y) \subseteq B_Z. \quad (\text{III.2.20})$$

3. ... *linkshypostetige* Abbildung $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{B}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ falls

$$\forall U_Z \in \mathcal{U}_Z, B_Y \in \mathcal{B}_Y \exists U_X \in \mathcal{U}_X \quad : \quad b(U_X, B_Y) \subseteq U_Z. \quad (\text{III.2.21})$$

Es ist klar, wie die rechten Varianten von Gleichung (III.2.20) und (III.2.21) definiert sind.

Bemerkung III.2.13. Die bilineare Abbildung b ist \mathcal{B}_X - \mathcal{B}_Y -hypostetig im Sinne von [52, Def. 4.7.2, S. 358] genau dann, wenn sie links- und rechtshypostetig im Sinne von Gleichung (III.2.21) ist. Weiter ist die Abbildung b hypostetig (schlechthin) genau dann, wenn sie $\mathfrak{B}(\mathcal{T}_X)$ - $\mathfrak{B}(\mathcal{T}_Y)$ -hypostetig ist.

Es wird noch die folgende Abkürzung eingeführt:

Definition III.2.14. Man nennt b *hypostetig-beschränkt* genau dann, wenn b links-hypostetig, rechtshypostetig und bornologiebewahrend zugleich ist.

Proposition III.2.15. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

1. Die Abbildung $b: (X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{B}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ ist *linshypostetig*.
2. Für alle $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ ist $b(\cdot, B_Y)$ eine *gleichgradig stetige Menge von Abbildungen* $(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$.
3. Zu $p_Z \in \text{csn}(Z, \mathcal{T}_Z)$ und $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ gibt es $p_X \in \text{csn}(X, \mathcal{T}_X)$, sodass

$$\sup_{y \in B_Y} p_Z(b(x, y)) \leq p_X(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (\text{III.2.22})$$

Der Beweis dieser Proposition ist Routine und wird weggelassen.

Proposition III.2.16. *Sei X ein Vektorraum, Y ein lokalkonvexer t.b. Raum und $b: X \times Y \rightarrow X$ bilinear. Die lokalkonvexen t.b. Räume $F \in {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X)$ mit der Eigenschaft, dass $b: F \times Y \rightarrow F$ wohldefiniert und hypostetig-beschränkt ist konstituieren eine extremumsabgeschlossene Teilmenge der Ordnungskategorie ${}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X)$ aller lokalkonvexen t.b. Unterräume von X .*

Beweis. Es folgt aus Proposition III.2.10, dass die Wohldefiniertheit unter Kernen und Hüllen bewahrt wird. Die Beweise dafür, dass die Eigenschaften in den Gleichungen (III.2.21) und (III.2.19) bewahrt werden sind standard. \square

III.3. Funktionenräume und Faltung

Es werden in diesem Abschnitt zunächst Notationen und einige Fakten über Räume (verallgemeinerter) Funktionen ohne Wachstumsbeschränkungen oder mit kompaktem Träger wiederholt, siehe Unterabschnitt III.3.a. Notationen für Räume von Funktionen auf \mathbb{Z}^d werden in Unterabschnitt III.3.b besprochen. Um möglichst allgemeine Assoziativgesetze für Faltungen bereitzustellen werden in Unterabschnitt III.3.c Faltungen von p -Tupeln, $p \in \mathbb{N}_0$ diskutiert. Dabei werden skalare Funktionen auf \mathbb{Z}^d , (signierte) Radon-Maße und Distributionen auf \mathbb{R}^d betrachtet. Der letzte Unterabschnitt III.3.d diskutiert die potenzierte Faltung von L_{lok}^p -Funktionen mit stetigen, kompakten getragenen Funktionen. Dabei werden einige nützliche Ungleichungen für diese Operationen hergeleitet.

III.3.a. Funktionenräume über dem Euklidischen Raum

Einige Notationen und Fakten über Räume von Funktionen oder Distributionen werden wiederholt. Die Räume \mathcal{E} , \mathcal{C} , L_{lok}^p , \mathcal{K}' und \mathcal{D}' werden dabei auch als lokalkonvexe t.b. Räume oder Verbände im Sinne von Definition III.2.3 betrachtet. Räume kompakt getragener Elemente werden durch die allgemeine Konstruktion $F \mapsto F_{\text{cs}}$ in Gleichung (III.3.2) definiert oder charakterisiert. Die beschränkten Teilmengen von F_{cs} werden in Gleichung (III.3.5) charakterisiert. Es werden stets Funktionenräume über \mathbb{R}^d mit fester Dimension $d \in \mathbb{N}$ betrachtet.

Die Räume der (glatten) Testfunktionen \mathcal{D} , der glatten Funktionen \mathcal{E} , der Distributionen \mathcal{D}' und der Distributionen mit kompakten Träger \mathcal{E}' werden so definiert wie beschrieben in §1 und §2 von Kapitel 4 aus [52, S. 313ff]. Siehe auch [54, S. 27, 7, 37, 44]. Diese Räume bilden zwei Dualsysteme $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. Deren Dualitätsprodukte werden durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notiert. Standardmäßig werden die Räume \mathcal{D}' und \mathcal{E}' mit der starken Topologie [52, S. 201] ausgestattet, das heisst $\mathcal{T}_{\mathcal{D}'} := \beta(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{E}'} := \beta(\mathcal{E}', \mathcal{E})$. Die \mathcal{D} und \mathcal{E} definierten Topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ sind ebenfalls als starke Topologien charakterisiert. Zudem bilden die vier genannten Räume zwei Paare von zueinander dualen Montel-Räumen [54, S. 179f]. Nach Konstruktion ist \mathcal{E} auch ein Fréchet-Raum.

Der Raum der stetigen Funktionen, ausgestattet mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, wird notiert als \mathcal{C} [54, S. 232]. Sei $p \in [1, \infty]$. Es notiert L^p

den Banach-Raum der p -integrierbaren¹⁰ Funktionen [54, S. 4] und L_{lok}^p den lokalkonvexen Raum der lokal p -integrierbaren Funktionen [54, S. 33]. Die Topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, \mathcal{T}_{L^p} und $\mathcal{T}_{L_{\text{lok}}^p}$ sind als starke Topologien charakterisiert, da es sich um Fréchet-Räume handelt. Mit der punktweise bzw. fast überall definierten Ordnungsrelation werden \mathcal{C} , L^p und L_{lok}^p zu lokalkonvexen Verbänden.

Räume von Funktionen oder Distributionen mit kompakten Trägern können durch eine einheitliche Konstruktion definiert oder charakterisiert werden. Sei $F \subseteq \mathcal{D}'$ ein lokalkonvexer t.b. Unterraum und $K \in \mathfrak{K}$. Hier notiert \mathfrak{K} die kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^d . Definiere den lokalkonvexen t.b. Raum F_K als

$$F_K := \{f \in F : \text{supp } f \subseteq K\}, \quad (\text{III.3.1})$$

ausgestattet mit der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{F,K} := \mathcal{T}_F \cap X_K$ und der Teilraumbornologie $\mathcal{B}_{F,K} := \mathcal{B}_F \cap X_K$. Mit dieser Notation gilt die Relation $F_K = F \cap \mathcal{E}'_K$, im Sinne des t.b. Kerns (III.2.13). Definiere den Raum F_{cs} als

$$F_{\text{cs}} := \bigvee \{F_K : K \in \mathfrak{K}\} \quad (\text{III.3.2})$$

mit “ \bigvee ” der lokalkonvexe t.b. Hülle aus Definition 1. Nach Definition gilt die Identität lokalkonvexer Räume $\mathcal{D} = \mathcal{E}_{\text{cs}}$. Nach Theorem 1 aus [52, S. 321] gilt die Identität lokalkonvexer Räume $\mathcal{E}' = (\mathcal{D}')_{\text{cs}}$.

Der Raum der stetigen Testfunktionen ist, analog zu \mathcal{D} , definiert als der lokalkonvexe Raum $\mathcal{K} := \mathcal{E}_{\text{cs}}$ (siehe Example 2.12.5 in [52, S. 164]). Mit der üblichen Ordnungsrelation ist dieser ein lokalkonvexer Verband. Der Raum der *Radon-Maße* ist, analog zu \mathcal{D}' , definiert als der topologische Dualraum von \mathcal{K} , ausgestattet mit der starken Topologie. Ausgestattet mit der von \mathcal{K} induzierten Ordnungsrelation

$$\mu \leq \nu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}_+ : \mu(\varphi) \leq \nu(\varphi), \quad (\text{III.3.3})$$

wird der Raum \mathcal{K}' zu einem lokalkonvexen Vektorverband. Siehe [87, S. 71, 110] und Proposition 4.17 in [87, S. 108]. Die starke Topologie von \mathcal{K}' stimmt mit der absolut-schwachen Topologie überein, das heisst, diese Topologie wird erzeugt von den Halbnor-

¹⁰Hier ist “ ∞ -integrierbar” als “wesentlich beschränkt” zu lesen.

III. Grundlagen

men $\mu \mapsto |\mu|(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathcal{K}_+$. Vergleiche Definition 6.3 in [1, S. 144]. Der Dualraum \mathcal{C}' von \mathcal{C} besteht aus den Elementen von \mathcal{K} mit kompaktem Träger. Stattet man \mathcal{C}' mit der starken Topologie aus gilt die Identität lokalkonvexer Räume $(\mathcal{K}')_{\text{cs}} = \mathcal{C}'$ (analog zu Theorem 1 aus [52, S. 321]).

Vermöge $f \mapsto (\mathcal{K} \ni \varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x) dx)$ wird L_{lok}^1 mit einem Unterraum von \mathcal{K}' identifiziert. Vermöge der Einschränkung $\mu \mapsto \mu|_{\mathcal{D}}$ wird \mathcal{K}' mit einem Unterraum von \mathcal{D}' identifiziert. Damit besteht die Kette von stetigen Inklusionen

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \subseteq L_{\text{lok}}^q \subseteq L_{\text{lok}}^p \subseteq \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{D}' \quad \text{für alle } 1 \leq p \leq q \leq \infty. \quad (\text{III.3.4})$$

Sei $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{K}'\} \cup \{L^p : p \in [1, \infty]\}$. Die topologisch beschränkten Mengen $\mathfrak{B}(\mathcal{L}_{\text{cs}})$ des lokalkonvexen Raums \mathcal{L}_{cs} der Elemente von \mathcal{L} mit kompaktem Träger sind charakterisiert durch

$$\mathfrak{B}(\mathcal{L}_{\text{cs}}) = \{B \subseteq \mathcal{L} : \exists K' \in \mathfrak{K} : B \in \mathfrak{B}(\mathcal{L}_{K'})\}. \quad (\text{III.3.5a})$$

Hierbei folgt aus der Definition der Teilraumtopologie unmittelbar

$$\mathfrak{B}(\mathcal{L}_K) = \{B \subseteq \mathcal{L}_K : B \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{L})\}. \quad (\text{III.3.5b})$$

Gleichung (III.3.5a) folgt für $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ aus Théorème IV aus [104, S. 69] und für $\mathcal{L} = \mathcal{D}'$ aus den Erläuterungen in [104, S. 89f]. Die Beweise für die anderen Räume sind analog.

Auf der rechten Seite von (III.3.5b) erkennt man Teilraumbornologie und auf der rechten Seite von (III.3.5a) die finale Bornologie, die auch in der lokalkonvexen t.b. Hülle (III.2.12) auftritt. Die Gleichungen (III.3.5a) und (III.3.5b) besagen also, dass die Identitäten $\mathcal{D} = \mathcal{E}_{\text{cs}}$, $\mathcal{K} = \mathcal{C}_{\text{cs}}$, etc. als Identitäten von lokalkonvexen t.b. Räumen aufgefasst werden können, falls für den Ausgangsraum \mathcal{L} die Bornologie $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \mathfrak{B}(\mathcal{L})$ festgelegt wurde.

III.3.b. Vektorfolgenräume über dem Standardgitter

Es werden einige Notation für Räume skalarer oder vektorwertiger Folgen eingeführt. Mit Folgenräumen sind in dieser Arbeit stets Räume von Funktionen auf dem Standardgitter \mathbb{Z}^d gemeint wenn nichts anderes gesagt wird.

Sei X ein lokalkonvexer t.b. Raum. Dann definiert man das Produkt und die Summe im Sinne lokalkonvexer t.b. Räume

$$\omega\{X\} := X^{\mathbb{Z}^d} := \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} X, \quad X^{(\mathbb{Z}^d)} := \bigoplus_{z \in \mathbb{Z}^d} X. \quad (\text{III.3.6})$$

Der Raum $\omega\{X\}$ besteht aus den Abbildungen $\mathbb{Z}^d \rightarrow X$ und trägt die Topologie $\mathcal{T}_{\omega\{X\}}$ der punktweisen Konvergenz in \mathcal{T}_X (vergleiche [75, S. 28]). Der Raum $X^{(\mathbb{Z}^d)}$ kann mit den Funktionen von $\omega\{X\}$ mit endlichem Träger identifiziert werden und trägt die induktive Topologie, wie beschrieben in der Definition aus [75, S. 28]. Die Bornologie $\mathcal{B}_{\omega\{X\}}$ wird durch die punktweise in \mathcal{B}_X beschränkten Mengen definiert (Definition 2:2(1) aus [48, S. 30]). Die Bornologie auf $X^{(\mathbb{Z}^d)}$ besteht aus den Teilmengen $B \in \mathcal{B}_{\omega\{X\}}$ für welche $\bigcup\{\text{supp } b : b \in B\}$ endlich ist (Definition und Proposition 2:9(1) aus [48, S. 34]).

Für reellwertige Folgenräume nutzt man die Notationen

$$\omega := \omega\{\mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \quad \phi := \mathbb{R}^{(\mathbb{Z}^d)}, \quad (\text{III.3.7})$$

(vergleiche [54, S. 155, c])). Für $p \in [1, \infty]$ notiert ℓ^p den *Raum der p -summierbaren Folgen* (vergleiche [54, S. 4]). Der Raum der *schnell fallenden Folgen* wird notiert als s [54, S. 11, c]). Der Dualraum von s mit der starken Topologie $\beta(s', s)$ wird notiert als s' und kann mit dem Raum der *langsam wachsenden Folgen* [112, S. 527] identifiziert werden. Weiter notiert c_0 den Raum der fallenden Folgen.

III.3.c. Simultane Faltung von Tupeln und Assoziativität

Die (simultane) Faltbarkeit eines p -Tupels liefert eine nützliche hinreichende Bedingung zur Anwendbarkeit des Assoziativgesetzes. Dieses Prinzip funktioniert für Faltungen von skalaren Funktionen auf \mathbb{Z}^d genauso wie für Faltungen von signierten Radon-Maßen und Distributionen auf \mathbb{R}^d . In dieser Arbeit werden diese Faltungen als ω -Faltung, \mathcal{K}' -Faltung und \mathcal{D}' -Faltung bezeichnet. Diese Operationen werden im folgenden definiert und das Assoziativgesetz wird am Ende dieses Unterabschnitts besprochen.

Sei $p \in \mathbb{N}_2$ und $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathcal{K}'$. Die \mathcal{K}' -Faltung $\mu_1 * \dots * \mu_p$ des *Tupels*

III. Grundlagen

(μ_1, \dots, μ_p) ist definiert als

$$\mathcal{K} \ni \varphi \longmapsto \langle \mu_1 * \dots * \mu_p, \varphi \rangle := \int \varphi(x_1 + \dots + x_p) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_p)(x_1, \dots, x_p) \quad (\text{III.3.8})$$

falls das Integral für alle $\varphi \in \mathcal{K}$ absolutkonvergiert. Das heisst, falls (μ_1, \dots, μ_p) ein \mathcal{K}' -faltbares Tupel ist. Die Faltung des Einzeltupels (μ_1) ist μ_1 und die Faltung des leeren Tupels \emptyset ist die Diracsche δ -Distribution δ . Das Integral in (III.3.8) ist über die Bourbakische Integrationsmethode definiert, siehe Chapter VIII, §1, No. 1 in [13].

Sei $p \in \mathbb{N}_2$ und $a_1, \dots, a_p \in \omega$. Die ω -Faltung $a_1 * \dots * a_p$ des Tupels (a_1, \dots, a_p) ist definiert als

$$\mathbb{Z}^d \ni z \longmapsto (a_1 * \dots * a_p)(z) := \sum_{\substack{z_1, \dots, z_p \in \mathbb{Z}^d \\ z_1 + \dots + z_p = z}} a_1(z_1) \dots a_p(z_p) \quad (\text{III.3.9})$$

falls die Summen absolutkonvergieren. Das heisst, falls (a_1, \dots, a_p) ein ω -faltbares Tupel ist. Die Faltung des Einzeltupels (a_1) ist a_1 und die Faltung des leeren Tupels \emptyset ist die Indikatorfunktion 1_0 der Teilmenge $\{0\}$ von \mathbb{Z}^d .

Die \mathcal{K}' -Faltung ist mit Absolutwerten verträglich: Ein Tupel (μ_1, \dots, μ_p) ist genau dann \mathcal{K}' -faltbar, wenn dies für $(|\mu_1|, \dots, |\mu_p|)$ gilt und die Dreiecksungleichung

$$|\mu_1 * \dots * \mu_p| \leq |\mu_1| * \dots * |\mu_p| \quad (\text{III.3.10})$$

gilt für alle \mathcal{K}' -faltbaren (μ_1, \dots, μ_p) , siehe Chapter VIII, §1, No. 1 in [13]. Entsprechendes gilt für die ω -Faltung.

Definiere den Raum $\mathcal{C}_{b,s}$ der uniform beschränkten stetigen Funktionen mit der *strikten Topologie* als den Vektorraum $\mathcal{C}_b := \mathcal{C} \cap L^\infty$ mit der lokalkonvexen Topologie die von den Halbnormen $f \mapsto \|f \cdot g\|_\infty$, $g \in \mathcal{C}_0$ erzeugt wird. Der Raum der *integrierbaren Radon-Maße*

$$\mathcal{M}^1 := \{\mu \in \mathcal{K}' : \|\mu\|_1 = |\mu|(\mathbb{R}^d) < \infty\} \quad (\text{III.3.11})$$

ist der gemeinsame Dualraum von \mathcal{C}_0 und $\mathcal{C}_{b,s}$, siehe Proposition 1.2.1 in [85, S. 6].

Laurent Schwartz definierte den Raum \mathcal{B}_c als den Vektorraum \mathcal{B} mit der feinsten lokalkonvexen Topologie die auf den beschränkten Teilmengen des lokalkonvexen Raums

\mathcal{B} mit \mathcal{E} übereinstimmt [85, S. 11], [104, S. 203]. Nach Corollary (3.5)(a) in [20, S. 71] gilt die Charakterisierung $\mathcal{B}_c = \mathcal{E}_{\partial^\bullet}(\mathcal{C}_{b,s})$ (Notation von S. 22). Der Raum der integrierbaren Distributionen \mathcal{D}'_{L^1} ist der gemeinsame Dualraum von \mathcal{B} und \mathcal{B}_c . Der Dualraum von \mathcal{D}'_{L^1} ist \mathcal{B} , siehe [85, S. 11]. Das *distributionelle Integral von $f \in \mathcal{D}'_{L^1}$* wird definiert als

$$\int f := \langle f, 1_{\mathbb{R}^d} \rangle \quad (\text{III.3.12})$$

unter Verwendung des Dualsystems $\langle \mathcal{D}'_{L^1}, \mathcal{B} \rangle$ [104, S. 203], [51, S. 184]. Nach Konstruktion von \mathcal{B}_c sind glatte Approximationen der Eins (θ_n) dadurch charakterisiert, dass $\theta_n \rightarrow 1$ im Raum \mathcal{B}_c . Daraus erhält man die Approximationsregel $\langle f, \theta_n \rangle \rightarrow \langle f, 1_{\mathbb{R}^d} \rangle$ für glatte Approximationen der Eins (θ_n), siehe auch [85, S. 11f].

Sei $p \in \mathbb{N}_2$ und $\varphi \in \mathcal{K}$. Definiere die zu φ assoziierte *p-Kodiagonalfunktion* als

$$\mathbb{R}^{dp} \ni (x_1, \dots, x_p) \mapsto \varphi^{\Delta p}(x_1, \dots, x_p) := \varphi(x_1 + \dots + x_p). \quad (\text{III.3.13})$$

Sei $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{D}'$. Das Tupel (f_1, \dots, f_p) wird *\mathcal{D}' -faltbar* genannt, falls

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_p) \varphi^{\Delta p} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{dp}) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (\text{III.3.14})$$

Die *\mathcal{D}' -Faltung $f_1 * \dots * f_p$ eines \mathcal{D}' -faltbaren Tupels (f_1, \dots, f_p)* wird definiert als

$$\mathcal{D} \ni \varphi \mapsto \langle f_1 * \dots * f_p, \varphi \rangle := \int (f_1 \otimes \dots \otimes f_p) \varphi^{\Delta p}. \quad (\text{III.3.15})$$

Die \mathcal{D}' -Faltung des Einzeltupels (f_1) ist f_1 und δ ist die Faltung des leeren Tupels \emptyset .

Die (simultane) \mathcal{K}' -Faltbarkeit eines p -Tupels (μ_1, \dots, μ_p) ist hinreichend für Assoziativität: Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck $\mu_1 * \dots * \mu_p$ für jede Klammersetzung wohldefiniert und das Ergebnis unabhängig von der Klammersetzung. Gilt zusätzlich $\mu_k \neq 0$ für alle $k = 1, \dots, p$, dann existiert der Ausdruck $\mu_1 * \dots * \mu_p$ unabhängig von jeder Klammersetzung im Sinne der \mathcal{K}' -Faltbarkeit, siehe Chapter VIII, §1, No. 2 in [13]. Die ω -Faltung und die \mathcal{D}' -Faltung erfüllen völlig analoge Assoziativgesetze. Der Fall $p = 3$ ist zu finden in [108, 51, 82]. Der allgemeine Fall wird beschrieben in Theorem 2 von [123, S. 163].

III. Grundlagen

Betrachte ein Tupel $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ mit $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{D}'$ und $g_1, \dots, g_q \in \mathcal{E}'$. Dann ist dieses \mathcal{D}' -faltbar, falls (f_1, \dots, f_p) ein \mathcal{D}' -faltbares Tupel ist. Siehe Theorem 1 in [123, S. 162] oder Theorem 1 in [92, S. 195].

III.3.d. Potenzierete Faltung und Supremalfaltung

Die Funktionen $|f * \varphi|$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$ erlauben es das globale Verhalten einer Distribution f durch eine Schar von stetigen (sogar glatten) Funktionen zu charakterisieren. Mit der gleichen Motivation wird in diesem Unterabschnitt die potenzierte Faltung “ $*^p$ ” eingeführt für $p \in [1, \infty]$. Diese erlaubt es das globale Verhalten einer L_{lok}^p -Funktion f durch eine stetige Funktion $|f| *^p k$ mit $k \in \mathcal{K}_+$, $k \neq 0$ zu charakterisieren. Der Fall $p = \infty$ ergibt eine Variante der Supremalfaltung [63], die zur Verstetigung von L_{lok}^∞ -Funktionen verwendet wird.

Auf jedem der Abbildungsbereiche

$$\mathcal{D}' \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \times \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \mathcal{K}' \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C} \quad (\text{III.3.16a})$$

kann die Faltung durch die Zuordnung

$$(f, \varphi) \mapsto (x \mapsto \langle f, T_x \check{\varphi} \rangle) \quad (\text{III.3.16b})$$

erklärt werden, siehe Proposition 4.4.10 in [52, S. 402]. Hier notiert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das entsprechende Dualitätsprodukt von $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ oder $(\mathcal{K}', \mathcal{K})$, $T_x f$ ist die Translation von f um $x \in \mathbb{R}^d$ und \check{f} die Spiegelung von f .

Als Modifikation von (III.3.16b) definiert man nun:

Definition III.3.1. Sei $p \in [1, \infty]$, $f \in L_{\text{lok},+}^p$ und $k \in \mathcal{K}_+$. Die p -Faltung $f *^p k$ von f und k ist punktweise definiert als

$$(f *^p k)(x) := \|f \cdot T_x \check{k}\|_p \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{III.3.17})$$

Die ∞ -Faltung wird auch *Supremalfaltung* genannt und alternative auch notiert als

$$f \blacksquare k := f *^\infty k \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^\infty, k \in \mathcal{K}_+. \quad (\text{III.3.18})$$

Die 1-Faltung $*^1$ aus (III.3.17) stimmt auf ihrem Definitionsbereich mit der Faltung (III.3.16b) überein. Mehr Informationen zur Supremalfaltung von nichtnegativen und oberhalbstetigen Funktionen auf lokalkompakten Gruppen findet man zum Beispiel in [63]. In Unterabschnitt VI.4.a dieser Arbeit wird die Supremalfaltung von unterhalbstetigen Funktionen diskutiert.

Proposition III.3.2. *Die p -Faltung $*^p$ ist eine binäre, monotone Operation*

$$L_{\text{lok},+}^p \times \mathcal{K}_+ \longrightarrow \mathcal{C}_+ \quad (\text{III.3.19})$$

die positivhomogen ist und argumentweise mit Translationen kommutiert.

Beweis. Es wird nur die Stetigkeit der Faltung $f *^p k$ nachgewiesen. Die verbleibenden Eigenschaften von $*^p$ sind klar. Sei $f \in L_{\text{lok},+}^p$ und $k \in \mathcal{K}_+$. Sei weiter $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte Umgebung der Null und definiere die kompakte Menge $K := U - \text{supp } k$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} |(f *^p k)(x) - (f *^p k)(y)| &= \left| \|f \cdot \mathbb{T}_x \check{k}\|_p - \|f \cdot \mathbb{T}_y \check{k}\|_p \right| \\ &\leq \|f \cdot (\mathbb{T}_x \check{k} - \mathbb{T}_y \check{k})\|_p \\ &\leq \|f \cdot 1_{x+K}\|_p \|\mathbb{T}_x \check{k} - \mathbb{T}_y \check{k}\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in x + U$. Da k nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gleichmäßig stetig ist, geht der letzte Ausdruck in dieser Ungleichung gegen Null für $y \rightarrow x$. \square

Proposition III.3.3. *Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Dann gelten die Ungleichungen*

$$(f *^p k) *^q h \leq f *^p (k *^q h) \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok},+}^p, k, h \in \mathcal{K}_+. \quad (\text{III.3.20})$$

Im Fall $p = 1$ kann man auch $f \in \mathcal{K}'_+$ in (III.3.20) einsetzen. Bei Vertauschung der Rollen von p und q kehrt sich die Ungleichung (III.3.20) um.

Beweis. Im Fall $p \leq q < \infty$ berechnet man unter Verwendung der Minkowskischen

III. Grundlagen

Integralungleichung, siehe z.B. Corollary 2.2 in [100], dass

$$\begin{aligned}
((f *^p k) *^q h)(x) &= \left(\int \left(\int (f(z)k(y-z))^p dz \right)^{\frac{q}{p}} h(x-y)^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int f(z)^p \left(\int (k(y-z)h(x-y))^q dz \right)^{\frac{p}{q}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int f(z)^p \left(\int (k(y)h(x-z-y))^q dz \right)^{\frac{p}{q}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (f *^p (k *^q h))(x)
\end{aligned}$$

für alle $f \in L_{\text{lok}}^p$, $k, h \in \mathcal{K}_+$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Für den Fall $q = \infty$ verwendet man Proposition 2.1 in [100], wobei man für “ λ ” die Norm $\|\cdot\|_p$ wählt. \square

Lemma III.3.4. *Sei $p \in [1, \infty]$ und $0 \neq k \in L_{\text{cs},+}^p$ (oder auch $0 \neq k \in \mathcal{C}'_+$ für $p = 1$). Dann gilt die Kegelidealäquivalenz*

$$k *^p \mathcal{K}_+ \simeq_{\text{CI}} \mathcal{K}_+. \quad (\text{III.3.21})$$

Beweis. Sei $h \in \mathcal{K}_+$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Für alle $y \in \text{supp } T_{-x}k$ gilt dann

$$(1_{\text{supp } k} \blacksquare \check{h})(y) = \sup\{h(-y+z) : z \in \text{supp } k\} \geq h(x). \quad (\text{III.3.22})$$

Setze $h' := C \cdot 1_K \blacksquare h \in \mathcal{K}_+$ mit $C := 1/\|k\|_p$ und $K := -\text{supp } k$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
(k *^p h')(x) &= \|h' \cdot T_x \check{k}\|_p = \|\check{h}' \cdot T_{-x}k\|_p = C \cdot \|(1_{-K} \blacksquare \check{h}) \cdot T_{-x}k\|_p \\
&\geq C \cdot h(x) \cdot \|k\|_p \\
&= h(x)
\end{aligned} \quad (\text{III.3.23})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Umgekehrt ist klar, dass $k *^p \mathcal{K}_+ \subseteq \mathcal{K}_+$. \square

Die additive Variante der Infimalfaltung wurde in [79] eingeführt und wird zum Beispiel in [91] diskutiert. Im Zusammenspiel der p -Faltung, der Supremalfaltung und der Infimalfaltung ergibt sich die praktische Ungleichung (III.3.25).

Definition III.3.5. Sei $k \in \mathcal{K}_+$ und $f \in L_{\text{lok},+}^\infty$. Die *Infimalfaltung* $f \square k$ von f und k ist definiert als

$$(f \square k)(x) := \operatorname{ess\,inf}_{y \in \mathbb{R}^d} f(x-y)k(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{III.3.24})$$

Lemma III.3.6. Sei $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_+$, $f_1 \in L_{\text{lok},+}^p$, $p \in [1, \infty]$ und $f_2 \in L_{\text{lok},+}^\infty$. Dann gelten die Ungleichungen

$$(f_1 *^p k_1)(f_2 \square k_2) \leq (f_1 f_2) *^p (k_1 k_2) \leq (f_1 *^p k_1)(f_2 \blacksquare k_2). \quad (\text{III.3.25})$$

Beweis. Aus der Hölderschen Ungleichung erhält man

$$\|f_1 f_2 T_x(\check{k}_1 \check{k}_2)\|_p \leq \|f_1 T_x \check{k}_1\|_p \|f_2 T_x \check{k}_2\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{III.3.26})$$

Dies ergibt die rechte Ungleichung in (III.3.25). Analog beweist man die linke. \square

IV. Urbildraumoperatoren

Bereits in Unterabschnitt II.1.a der Einleitung wurde das Urbild eines lokalkonvexen Raums unter einer Menge linearer Abbildungen definiert. Nämlich als Durchschnitt der einzelnen Urbilder, ausgestattet mit der entsprechenden initialen Topologie. Amalgamraumkonstruktionen basieren allerdings auf Urbildern lokalkonvexer Verbände bezüglich funktionswertiger Halbnormen. Dies motiviert eine, soweit möglich, einheitliche Behandlung von Urbildern um möglichst allgemeine Kompositionsregeln und Vergleichskriterien aufstellen zu können.

Dazu werden im ersten Abschnitt IV.1 zunächst die Eigenschaften einiger Klassen von Abbildungen zwischen Vektorräumen und -verbänden diskutiert, wie zum Beispiel Halbnormfunktionen. Dann werden Urbildräume definiert und die Wohldefiniertheit der zwei oben genannten Spezialfälle etabliert. Der zweite Abschnitt IV.2 behandelt Monotonie- und Permanenzeigenschaften, sowie die Kompositionsregeln. Diese sind wichtig für das Korrespondenzdiagramm und die Transformationsregeln für Gewichtsmengen. Denn diese basieren auf Identitäten zwischen Räumen die durch die Anwendung einer oder mehrerer Urbildraumoperatoren verschiedenen Typs entstehen.

IV.1. Definitionen

Zur Vorbereitung auf Urbildräume werden zunächst in Unterabschnitt IV.1.a verschiedene Klassen von Abbildungen eingeführt und diskutiert, wie zum Beispiel Halbnormfunktionen. Deren Verknüpfungsrelationen werden dann in Unterabschnitt IV.1.b untersucht. Als Vorarbeit zu Kompositionsregeln und Wohldefiniertheit wird auch die Verträglichkeit der Komposition mit linearen Hüllen oder Kegelidealhüllen untersucht. Schließlich wird in Unterabschnitt IV.1.c zunächst eine abstrakte Notation für Urbildräume lokalkonvexer t.b. Räume unter einer Menge homogener Abbildungen angegeben. Dann werden

IV. Urbildraumoperatoren

Urbilder lokalkonvexer t.b. Räume unter linearen Abbildungen und Urbilder lokalkonvexer t.b. Verbände unter Halbnormfunktionen charakterisiert.

IV.1.a. Halbnormfunktionen

Halbnormen mit Werten in Vektorverbänden anstatt in \mathbb{R} gehören nicht zu dem Standardrepertoire der Literatur zu geordneten Vektorräumen [1, 87]. Im folgenden werden zunächst Standardnotation zu Abbildungen zwischen Vektorräumen und -verbänden zusammengefasst. Dann werden Halbnormfunktionen in Definition IV.1.3 eingeführt. Proposition IV.1.5 beschreibt dann Urbilder von soliden Mengen und Idealen unter Halbnormfunktionen. Die Bewahrung der verschiedenen Abbildungsklassen unter der Komposition von Abbildungen wird in Proposition IV.1.6 beschrieben.

Seien im gesamten Abschnitt X, Y, Z Vektorräume und $X_{|\cdot|}, Y_{|\cdot|}, Z_{|\cdot|}$ Vektorverbände. Notiere die folgenden Klassen von Abbildungen zwischen Vektorräumen:

$$\text{map}(Y, X) := \{m: Y \rightarrow X\}, \quad (\text{IV.1.1})$$

$$\text{hmg}(Y, X) := \{m \in \text{map}(Y, X) : \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, y \in Y : m(\lambda y) = \lambda m(y)\}, \quad (\text{IV.1.2})$$

$$\text{lin}(Y, X) := \{l \in \text{map}(Y, X) : l \text{ linear}\}. \quad (\text{IV.1.3})$$

Die positiven linearen Abbildungen $Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$ werden notiert als

$$\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) := \{l \in \text{lin}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) : l(Y_{|\cdot|,+}) \subseteq X_{|\cdot|,+}\}. \quad (\text{IV.1.4})$$

Die Verbandshomomorphismen $Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$ werden notiert als

$$\text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) := \{l \in \text{lin}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) : \forall y \in Y : l(|y|) = |l(y)|\}. \quad (\text{IV.1.5})$$

In der Literatur [87, S. 19] bzw. [1, S. 15] heissen die Elemente von $\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ “positive, linear mappings” bzw. “positive operators”. Die Elemente von $\text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ heissen auch “Riesz homomorphisms” [1, S. 15].

Bemerkung IV.1.1. Eine lineare Abbildung $Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$ ist genau dann positiv, wenn sie monoton ist. Denn für $y_1, y_2 \in Y_{|\cdot|}$ ist $y_1 \leq y_2$ äquivalent zu $0 \leq y_2 - y_1$.

Bemerkung IV.1.2. Jedes $m \in \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ erfüllt die Dreiecksungleichung

$$|\cdot| \circ m \leq m \circ |\cdot| \quad (\text{IV.1.6})$$

wegen $m(y) \leq m(|y|)$ und $-m(y) = m(-y) \leq m(|y|)$ für alle $y \in Y$.

Definition IV.1.3. Eine Abbildung $p: Y \rightarrow X_{|\cdot|}$ heisst *Halbnormfunktion* falls

$$p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2) \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in Y, \quad (\text{IV.1.7a})$$

$$p(\alpha y) = |\alpha|p(y) \quad \text{für alle } y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{IV.1.7b})$$

Eine *Verbandshalbnormfunktion* ist eine Halbnormfunktion $q: Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$ sodass

$$|y_1| \leq |y_2| \quad \Rightarrow \quad q(y_1) \leq q(y_2) \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in Y. \quad (\text{IV.1.8})$$

Die Mengen dieser Abbildungen werden notiert als

$$\text{snf}(Y, X_{|\cdot|}) = \{p: Y \rightarrow X_{|\cdot|} \text{ Halbnormfunktion}\}, \quad (\text{IV.1.9a})$$

$$\text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) = \{p: Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|} \text{ Verbandshalbnormfunktion}\}. \quad (\text{IV.1.9b})$$

Bemerkung IV.1.4. Leicht sind die folgenden Aussagen zu verifizieren:

1. Jede Halbnormfunktion $p: Y \rightarrow X_{|\cdot|}$ erfüllt $p(y) \geq 0$ für alle $y \in Y$.
2. Verbandshalbnormfunktionen $q: Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$ erfüllen $q(y) = q(|y|)$ für $y \in Y_{|\cdot|}$.
3. Der Absolutwert $|\cdot|$ auf $X_{|\cdot|}$ ist eine idempotente Verbandshalbnormfunktion.
4. Unmittelbar nach Definition gelten die Relationen

$$\text{lin}(Y, X_{|\cdot|}) \cup \text{snf}(Y, X_{|\cdot|}) \subseteq \text{hmg}(Y, X_{|\cdot|}), \quad (\text{IV.1.10a})$$

$$\text{lin}(Y, X_{|\cdot|}) \cap \text{snf}(Y, X_{|\cdot|}) = \{0\}. \quad (\text{IV.1.10b})$$

Proposition IV.1.5. *Halbnormfunktionen haben folgende Urbildeigenschaften:*

1. Sei $p \in \text{snf}(Y, X_{|\cdot|})$. Urbilder solidkonvexer Teilmengen unter p sind absolutkonvex und Urbilder von Idealen unter p sind Untervektorräume.

IV. Urbildraumoperatoren

2. Sei $q \in \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Urbilder solider Teilmengen unter q sind solide und Urbilder von Idealen unter q sind Ideale.

Beweis. Sei $S \subseteq X_{|\cdot|}$ solide und konvex. Seien dann $y_1, y_2 \in p^{-1}(S)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 1$. Dann folgt $p(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \leq |\alpha_1| p(y_1) + |\alpha_2| p(y_2) \in S$ und somit $p(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in S$. Also ist $p^{-1}(S)$ absolutkonvex. Ähnlich beweist man die verbleibenden Aussagen. \square

Proposition IV.1.6. *Die Komposition von Abbildungen*

$$Z \rightarrow Y \rightarrow X, \quad Z \rightarrow Y \rightarrow X_{|\cdot|}, \quad Z \rightarrow Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|} \quad \text{oder} \quad Z_{|\cdot|} \rightarrow Y_{|\cdot|} \rightarrow X_{|\cdot|}$$

erhält Klassen von Abbildungen entsprechend der Verknüpfungsinclusionen

$$\begin{aligned} \text{lin} \circ \text{lin} &\subseteq \text{lin}, & \text{snf} \circ \text{lin} &\subseteq \text{snf}, & \text{lsnf} \circ \text{lin}_{|\cdot|} &\subseteq \text{lsnf}, \\ \text{lin}_+ \circ \text{lin}_+ &\subseteq \text{lin}_+, & \text{lin}_+ \circ \text{snf} &\subseteq \text{snf}, & \text{lin}_+ \circ \text{lsnf} &\subseteq \text{lsnf}, & \text{(IV.1.11)} \\ \text{lin}_{|\cdot|} \circ \text{lin}_{|\cdot|} &\subseteq \text{lin}_{|\cdot|}, & \text{lsnf} \circ \text{snf} &\subseteq \text{snf}, & \text{lsnf} \circ \text{lsnf} &\subseteq \text{lsnf}. \end{aligned}$$

Beweis. Die linke Spalte und die oberen beiden Zeilen von (IV.1.11) sind klar.

Sei also $p \in \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$, $q \in \text{snf}(Z, Y_{|\cdot|})$ und $r \in \text{lsnf}(Z_{|\cdot|}, Y_{|\cdot|})$. Es ist klar, dass $p \circ q$ und $p \circ r$ absoluthomogen sind. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung für p, q und der Monotonie von p auf $Y_{|\cdot|,+}$ berechnet man

$$p(q(z_1 + z_2)) \leq p(q(z_1) + q(z_2)) \leq p(q(z_1)) + p(q(z_2)) \quad \text{(IV.1.12)}$$

für alle $z_1, z_2 \in Z$ und folgert $p \circ q \in \text{snf}(Z, X_{|\cdot|})$. Ähnlich erhält man die Ungleichung $p(r(z_1)) \leq p(r(z_2))$ für alle $z_1, z_2 \in Z_{|\cdot|}$ mit $|z_1| \leq |z_2|$, also $p \circ r \in \text{lsnf}(Z_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. \square

Korollar IV.1.7. *Es gelten die Inklusionen*

$$\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) \circ |\cdot| \subseteq \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}), \quad \text{(IV.1.13a)}$$

$$|\cdot| \circ \text{lin}(Y, X_{|\cdot|}) \subseteq \text{snf}(Y, X_{|\cdot|}), \quad \text{(IV.1.13b)}$$

$$|\cdot| \circ \text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) \subseteq \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}). \quad \text{(IV.1.13c)}$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition IV.1.6 und Teil 3 von Bemerkung IV.1.4. \square

IV.1.b. Komposition und Kegelidealhüllen

Es werden nun Ordnungsstrukturen und Hüllenoperatoren auf Räumen von Abbildungen eingeführt. Für Halbnormfunktionen werden Kegelideale als Hüllen verwendet. Räume von positiven linearen Abbildungen oder Verbandshomomorphismen benötigen eine Hilfskonstruktion um Kegelideale einzuführen, die in Lemma IV.1.8 und Definition IV.1.9 behandelt wird. Abschließend werden in Proposition IV.1.10 Verträglichkeitsrelationen für die Komposition von Abbildung und die verschiedenen Hüllenbildungen aufgestellt.

Die Vektorraumoperationen von X werden punktweise auf $\text{lin}(Y, X)$ erklärt, womit dies ein Vektorraum wird. Somit ist auf $\text{lin}(Y, X)$ ein linearer Aufspann $\langle \cdot \rangle$ erklärt. Die kanonische Ordnungsrelation \leq auf dem Vektorraum $\text{lin}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ ist erklärt durch

$$m_1 \leq m_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y_{|\cdot|,+} : m_1(y) \leq m_2(y) \quad (\text{IV.1.14})$$

und macht diesen zu einem geordneten Vektorraum. Der Kegel der nichtnegativen Elemente von $\text{lin}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ ist gegeben durch $\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ [87, S. 20].

Der Raum $\text{map}(Y, X_{|\cdot|})$ wird zu einem Vektorverband indem die Vektorraumoperation von $X_{|\cdot|}$ punktweise auf $\text{lin}(Y, X_{|\cdot|})$ erklärt werden. Auf dem nichtnegativen, konvexen Teilkegel $\text{snf}(Y, X_{|\cdot|})$ wird die von $\text{map}(Y, X_{|\cdot|})$ induzierte Ordnung erklärt. Aufgrund der Relation (IV.1.10b) entstehen dadurch keine Notationskonflikte zu der Ordnungsrelation (IV.1.14) auf $\text{lin}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Auf dem konvexen, nichtnegativen Teilkegel $\text{snf}(Y, X_{|\cdot|})$ bzw. $\text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ von $\text{map}(Y, X_{|\cdot|})$ bzw. $\text{map}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ ist der Kegelidealoperator $\langle \cdot \rangle_{\text{CI}}$ bezüglich der von $X_{|\cdot|}$ induzierten punktweisen Ordnung auf $\text{map}(Y, X_{|\cdot|})$ erklärt.

Die Räume $\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ und $\text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ sind im allgemeinen keine Vektorverbände bezüglich der Ordnungsrelation (IV.1.14). Somit kann die allgemeine Definition von Kegelidealen aus Unterabschnitt III.1.b nicht auf diese Räume angewendet werden. Das folgende Lemma erlaubt dennoch einen Kegelidealoperator in der unteren Definition IV.1.9 einzuführen, der verträglich mit der Ordnungsrelation (IV.1.14) auf $\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ ist.

Lemma IV.1.8. *Seien $l, m \in \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Dann gilt die Äquivalenz*

$$l \leq m \quad \text{in } \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) \quad \Leftrightarrow \quad l \circ |\cdot| \leq m \circ |\cdot| \quad \text{in } \text{snf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.1.15})$$

IV. Urbildraumoperatoren

Seien $l, m \in \text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Dann gilt die Äquivalenz

$$l \leq m \quad \text{in } \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) \quad \Leftrightarrow \quad |\cdot| \circ l \leq |\cdot| \circ m \quad \text{in } \text{snf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.1.16})$$

Beweis. Gleichung (IV.1.15) folgt unmittelbar aus der Definition der Ordnung (IV.1.14). Gleichung (IV.1.16) folgt aus $m \circ |\cdot| = |\cdot| \circ m$ für $m \in \text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. \square

Definition IV.1.9. Der *Kegelidealoperator* $\langle \cdot \rangle_{\text{CI}}$ auf $\text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ wird definiert als

$$\langle M \rangle_{\text{CI}} := \{ l \in \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) : l \circ |\cdot| \in \langle M \circ |\cdot| \rangle_{\text{CI}} \} \quad (\text{IV.1.17})$$

für alle $M \subseteq \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Analog wird $\langle \cdot \rangle_{\text{CI}}$ auf $\text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$ definiert.

Proposition IV.1.10. Seien M und N Mengen von Abbildungen deren Komposition $M \circ N$ sich zu einer der Verknüpfungsinclusionen aus Gleichung (IV.1.11) zuordnen lässt. Dann ist die Komposition mit Hüllenbildungen verträglich in dem Sinne dass

$$\langle \langle M \rangle_{\mathbf{A}} \circ \langle N \rangle_{\mathbf{B}} \rangle_{\mathbf{A}} = \langle M \circ N \rangle_{\mathbf{A}}. \quad (\text{IV.1.18})$$

Hier ist (\mathbf{A}, \mathbf{B}) im Fall “ $\text{lin} \circ \text{lin}$ ” das Tupel (lin, lin) , im Fall “ $\text{snf} \circ \text{lin}$ ” das Tupel (CI, lin) und in den anderen sieben Fällen das Tupel “ (CI, CI) ”.¹

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften von Hüllenoperatoren aus Unterabschnitt III.1.a genügt es zu zeigen, dass $\langle M \rangle_{\mathbf{A}} \circ \langle N \rangle_{\mathbf{B}} \subseteq \langle M \circ N \rangle_{\mathbf{A}}$. Der Fall “ $\text{lin} \circ \text{lin}$ ” folgt aus dem Distributivgesetz. Den Fall “ $\text{snf} \circ \text{lin}$ ” erhält man aus der Dreiecksungleichung. Für den Fall “ $\text{lsnf} \circ \text{snf}$ ” nutzt man zusätzlich, dass Verbandshalbnormfunktion monoton auf dem Kegel der nichtnegativen Elemente sind. Alle anderen Fälle können analog behandelt werden. \square

IV.1.c. Definition von Urbildraumoperatoren

Ausgehend von der abstrakten Definition IV.1.11 werden Urbilder von lokalkonvexen t.b. Unterräumen oder Idealen bezüglich Mengen von linearen Funktionen, Halbnormfunk-

¹Hier ist $\langle \cdot \rangle_{\text{lin}} = \langle \cdot \rangle$.

tionen oder Verbandshalbnormfunktionen eingeführt. Wohldefiniertheitsgarantien und praktischere Beschreibungen für diese Urbilder werden in Proposition IV.1.14 gegeben.

Die folgende abstrakte Definition eines Urbildraums bezüglich einer Menge positivhomogener Abbildungen, siehe Gleichung (IV.1.2), ist inspiriert durch die Voraussetzungen die für Proposition 1 in [33, S. 105f] angegeben werden:

Definition IV.1.11. Seien X, Y Vektorräume, $M \subseteq \text{hmg}(Y, X)$ und $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ ein lokalkonvexer t.b. Unterraum von X . Notiere den Nullumgebungsfilter von \mathcal{T}_F als \mathcal{U}_F und die endlichen Teilmengen von M als $\mathfrak{F}(M)$. Setze dann

$$G := \{y \in Y : \forall m \in M : m(y) \in F\}, \quad (\text{IV.1.19a})$$

$$\mathcal{U}_G := \left\{ V \subseteq G : \exists \tilde{m} \in \mathfrak{F}(M), U \in \mathcal{U}_F : \bigcap \{m^{-1}(U) : m \in \tilde{m}\} \subseteq V \right\}, \quad (\text{IV.1.19b})$$

$$\mathcal{B}_G := \{B \subseteq G : \forall m \in M : m(B) \in \mathcal{B}_F\}. \quad (\text{IV.1.19c})$$

Der *Urbildraum* $\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ von $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ unter M existiert falls jede der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

1. Die Menge G ist ein linearer Unterraum von Y .
2. Das Mengensystem \mathcal{U}_G ist der Nullumgebungsfilter einer lokalkonvexen Topologie \mathcal{T}_G auf G .
3. Die Abbildung $m|_G : (G, \mathcal{T}_G) \rightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ ist gleichmäßig stetig für alle $m \in M$.
4. Das Mengensystem \mathcal{B}_G ist eine konvexe Vektorbornologie auf (G, \mathcal{T}_G) .

In diesem Fall wird $\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ definiert als

$$\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) := (\underline{M} F, \underline{M} \mathcal{T}_F, \underline{M} \mathcal{B}_F) := (G, \mathcal{T}_G, \mathcal{B}_G). \quad (\text{IV.1.20})$$

Durch Gleichung (IV.1.20) und die vier Bedingungen wird eine Abbildung \underline{M} mit Definitionsbereich $D \subseteq \text{1ctbSub}(X)$ und Wertebereich $\text{1ctbSub}(Y)$ definiert. Diese wird der zu M assoziierte *Urbildoperator* genannt.

Durch Weglassen von Topologie und/oder Bornologie erklärt Gleichung (IV.1.20) auch Urbildräume von lokalkonvexen Räumen, bornologischen Vektorräumen und Vektorräu-

IV. Urbildraumoperatoren

men. Urbildraumoperatoren vertragen sich also mit dem Diagramm (III.2.9) von Vergissfunktoren.

Bemerkung IV.1.12. Die Definitionen aus Gleichung (IV.1.19) lassen sich wie folgt umformulieren: Die Menge G ist der Durchschnitt von Urbildern

$$G := \bigcap \{m^{-1}(F) : m \in M\}. \quad (\text{IV.1.21a})$$

Das Mengensystem \mathcal{U}_G ist der Filter auf G der erzeugt wird von der Filterbasis²

$$\left\{ \bigcap \{m^{-1}(U) : m \in \tilde{M}\} : U \in \mathcal{U}_F, \tilde{M} \in \mathfrak{F}(M) \right\}. \quad (\text{IV.1.21b})$$

Das Mengensystem \mathcal{B}_G ist das hereditäre Mengensystem auf G das erzeugt wird von³

$$\left\{ \bigcap \{m^{-1}(B_m) : m \in M\} : (B_m) \in (\mathcal{B}_F)^M \right\}. \quad (\text{IV.1.21c})$$

Hier notiert $(\mathcal{B}_F)^M$ die Menge aller Abbildungen $M \ni m \mapsto B_m \in \mathcal{B}_F$.

Die Annahme homogener Abbildungen m stellt sicher, dass die topologische Beschränktheit von Mengen, siehe Gleichung (III.2.4a), mit Urbildern verträglich ist:

Proposition IV.1.13. *Übernehme die Notationen aus Definition IV.1.11 und seien die Bedingungen 1 und 2 erfüllt. Unter der Voraussetzung $\mathcal{B}_F = \mathfrak{B}(F, \mathcal{T}_F)$ gilt auch $\mathcal{B}_G = \mathfrak{B}(G, \mathcal{T}_G)$. Insbesondere gilt stets $\mathcal{B}_G \subseteq \mathfrak{B}(G, \mathcal{T}_G)$.*

Beweis. Angenommen, es gilt $\mathcal{B}_F = \mathfrak{B}(F, \mathcal{T}_F)$. Die Vektorbornologie $\mathfrak{B}(F, \mathcal{T}_F)$ wird von Mengen der Form $V = \bigcap \{\lambda_U U : U \in \mathcal{U}_F\}$ erzeugt mit einer Abbildung der Art $\mathcal{U}_F \ni U \mapsto \lambda_U \in \mathbb{R}_+$. Da die Abbildungen $m \in M$ positiv-homogen sind, erhält man $m^{-1}(V) = \bigcap \{\lambda_U m^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_F\}$. Da endliche Durchschnitte der Mengen $m^{-1}(U)$ eine Filterbasis für \mathcal{U}_G definieren, folgt $\mathcal{B}_G = \mathfrak{B}(G, \mathcal{T}_G)$. Aus Monotoniegründen folgt daraus die zweite Aussage der Proposition. \square

Proposition IV.1.14. *Es gelten die folgenden Wohldefiniertheitsgarantien und Charakterisierungen für den Urbildraum $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{B}_G) = \underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$:*

²Eine Filterbasis $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ist nichtleer, abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und enthält nicht die leere Menge. Der erzeugte Filter ist $\{A \subseteq M : \exists B \in \mathcal{B} : A \supseteq B\}$.

³Das von einem Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ erzeugte hereditäre Mengensystem auf M ist gegeben durch $\{A \subseteq M : \exists B \in \mathcal{M} : A \subseteq B\}$.

1. Seien X, Y Vektorräume, $M \subseteq \text{lin}(Y, X)$ und $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ ein lokalkonvexer t.b. Unterraum von X . Dann existiert $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{B}_G)$ und die Topologie \mathcal{T}_G wird erzeugt von den Halbnormen

$$p \circ m|_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+, y \mapsto p(m(y)) \quad \text{mit } m \in M, p \in \text{csn } \mathcal{T}_F. \quad (\text{IV.1.22})$$

2. Sei $X_{|\cdot|}$ Vektorverband, Y ein Vektorraum, $M \subseteq \text{snf}(Y, X_{|\cdot|})$ und $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ ein lokalkonvexes t.b. Ideal von $X_{|\cdot|}$. Dann existiert $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{B}_G)$ und die Topologie \mathcal{T}_G wird erzeugt von den Halbnormen

$$p \circ m|_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+, y \mapsto p(m(y)) \quad \text{mit } m \in M, p \in \text{clsn } \mathcal{T}_F. \quad (\text{IV.1.23})$$

3. Seien $X_{|\cdot|}, Y_{|\cdot|}$ Vektorverbände und $M \subseteq \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}) \cup \text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$. Dann gilt $(G, \mathcal{T}_G, \mathcal{B}_G) \in {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(Y_{|\cdot|})$, falls $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X_{|\cdot|})$.

Beweis. Zeige jeweils die vier Bedingungen aus Definition IV.1.11.

Bedingung 1. Nach Unterabschnitt III.1.c sind Untervektorräume und Ideale stabil unter Durchschnitten. Urbilder von Untervektorräumen unter linearen Abbildungen sind Untervektorräume. Dies liefert die Bedingung 1 für Teil 1. Für Teil 2 und 3 verwendet man Proposition IV.1.5.

Bedingung 2. Endliche Durchschnitte von ε -Kugeln der Halbnormen aus Gleichung (IV.1.22) oder (IV.1.23) bilden eine Filterbasis für \mathcal{U}_G , vergleiche Bemerkung IV.1.12. Wegen der Kompositionsinclusionen $\text{snf} \circ \text{lin} \subseteq \text{snf}$ und $\text{lsnf} \circ \text{snf} \subseteq \text{snf}$ aus Proposition IV.1.6 sind die Topologien aus Teil 1 und 2 dieser Proposition wohldefiniert. Wegen Proposition III.1.1 und wegen der beiden Kompositionsinclusionen $\text{lsnf} \circ \text{lsnf} \subseteq \text{lsnf}$ und $\text{lsnf} \circ \text{lin}_{|\cdot|} \subseteq \text{lsnf}$ aus Proposition IV.1.6 ist (G, \mathcal{T}_G) in Teil 3 ein lokalkonvexer Verband.

Bedingung 3. Die Abbildungen $m|_G$ sind nach Konstruktion von \mathcal{U}_G stetig am Ursprung. Die gleichmäßige Stetigkeit folgt in Teil 1 aus der Linearität und in Teil 2 aus der Dreiecksungleichung.

Bedingung 4. Teil 1 ist klar. Für Teil 2 bzw. Teil 3 beweist man unter Verwendung von Proposition IV.1.5, dass \mathcal{B}_G eine konvexe bzw. eine solide, konvexe Vektorbornologie ist. \square

Bemerkung IV.1.15. In Teil 1 von Proposition IV.1.14 entspricht \mathcal{T}_G der projektiven

IV. Urbildraumoperatoren

Topologie von \mathcal{T}_F und \mathcal{B}_G der initialen Bornologie von \mathcal{B}_F bezüglich der Menge linearer Abbildungen $\{m|_F : m \in M\}$, siehe [54, S. 149] und [48, Def. 1, S. 31].

Bemerkung IV.1.16. Seien $X_{|\cdot|}$, $Y_{|\cdot|}$ Vektorverbände, Y ein Vektorraum und sei $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X_{|\cdot|})$. Aus Teil 3 von Proposition IV.1.14 und Bemerkung IV.1.2 folgt die Inklusion

$$\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \supseteq \underline{M \circ |\cdot|}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \quad \text{für alle } M \subseteq \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.1.24a})$$

Aus Teil 2 von Bemerkung IV.1.4 und Gleichung (IV.1.13b) von Korollar IV.1.7 folgt

$$\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) = \underline{|\cdot| \circ M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \quad \text{für alle } M \subseteq \text{lin}(Y, X_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.1.24b})$$

IV.2. Eigenschaften

Der Nutzen von Urbildoperatoren ergibt sich aus funktionellen Eigenschaften und Vererbungsgesetzen. Dazu zählen Monotonieeigenschaften und die Bewahrung von Kernen lokalkonvexer t.b. Räume, die im ersten Unterabschnitt IV.2.a besprochen werden. Die Kompositionsregeln für Urbildoperatoren spielen eine zentrale Rolle in dieser Doktorarbeit und werden in Unterabschnitt IV.2.b besprochen. Der letzte Unterabschnitt IV.2.c untersucht die Bewahrung der topologischen Vollständigkeit und der Gestalt relativ kompakter Teilmengen.

IV.2.a. Monotonie und Limiten

Unmittelbar aus der Konstruktion von Urbildräumen folgen gewisse Monotoniegesetze, die in allgemeiner Form in Proposition IV.2.1 und in spezieller Form in Proposition IV.2.2 angegeben werden. Zusätzlich lassen sich Invarianzeigenschaften von lokalkonvexen t.b. Räumen mit Urbildoperatoren ausdrücken, wie in Proposition IV.2.5 beschrieben.

Urbilder erfüllen die folgende Monotonie- und Grenzwertregel:

Proposition IV.2.1. *Seien X, Y Vektorräume. Für $i = 1, 2$ sei $M_i \subseteq \text{hmg}(Y, X)$ und $(F_i, \mathcal{T}_{F_i}, \mathcal{B}_{F_i})$ ein lokalkonvexer t.b. Unterraum von X . Bestehen die Inklusion $M_1 \supseteq M_2$ und die t.b. Inklusion $(F_1, \mathcal{T}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_1}) \subseteq (F_2, \mathcal{T}_{F_2}, \mathcal{B}_{F_2})$, so besteht auch*

die t.b. Inklusion

$$\underline{\leftarrow} M_1(F_1, \mathcal{T}_{F,1}, \mathcal{B}_{F,1}) \subseteq \underline{\leftarrow} M_2(F_2, \mathcal{T}_{F,2}, \mathcal{B}_{F,2}), \quad (\text{IV.2.1})$$

falls beide Urbilder existieren. Darüberhinaus gilt die Grenzwertregel

$$\bigwedge \left\{ \underline{\leftarrow} M(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) : M \in \mathcal{M}, (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in \mathcal{F} \right\} = \underline{\leftarrow} \mathcal{M} \left(\bigwedge \mathcal{F} \right), \quad (\text{IV.2.2})$$

für $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{P}(\text{hmg}(Y, X))$ und $\mathcal{F} \subseteq {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X)$ falls jedes Urbild $\underline{\leftarrow} M(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ existiert. Hier notiert \bigwedge den Kern lokalkonvexer t.b. Räume im Sinne von Definition III.2.6.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Gleichungen (IV.1.19) und aus den expliziten Formeln für Kerne lokalkonvexer t.b. Räume aus den Gleichungen (III.2.13). \square

Beim Vergleich von Urbildern wie in Proposition IV.1.14 genügt es Mengen von Abbildungen mit größeren Ordnungsrelationen zu vergleichen als mit der Inklusionsrelation. Sei X ein Vektorraum. Mit der Notation (III.1.13e) für lineare Hüllen schreibt man

$$A \preceq_{1\text{in}} B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle \quad \text{für alle } A, B \subseteq X, \quad (\text{IV.2.3a})$$

$$A \succsim_{1\text{in}} B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A \rangle = \langle B \rangle \quad \text{für alle } A, B \subseteq X. \quad (\text{IV.2.3b})$$

Sei $X_{|\cdot|}$ ein Vektorverband, C ein konvexer Teilkegel von $X_{|\cdot|,+}$ und $\langle - \rangle_{\text{CI}}$ die Kegelidealhülle in C , wie in Gleichung (III.1.14d). Man nutzt die Notationen

$$A \preceq_{\text{CI}} B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A \rangle_{\text{CI}} \subseteq \langle B \rangle_{\text{CI}} \quad \text{für alle } A, B \subseteq C, \quad (\text{IV.2.4a})$$

$$A \succsim_{\text{CI}} B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A \rangle_{\text{CI}} = \langle B \rangle_{\text{CI}} \quad \text{für alle } A, B \subseteq C. \quad (\text{IV.2.4b})$$

Dadurch werden Quasiordnungen $\preceq_{1\text{in}}$ und \preceq_{CI} mit assoziierten Äquivalenzrelationen $\succsim_{1\text{in}}$ und \succsim_{CI} definiert. Der Kegel C ist im folgenden stets $\text{snf}(Y, X_{|\cdot|})$ oder $\text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})$.

Proposition IV.2.2. *Seien X, Y Vektorräume und $X_{|\cdot|}, Y_{|\cdot|}$ Vektorverbände. Dann definiert die Zuordnung*

$$(M, (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)) \longmapsto \underline{\leftarrow} M(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \quad (\text{IV.2.5})$$

IV. Urbildraumoperatoren

eine binäre monotone Operation für die Abbildungsbereiche

$$(\mathfrak{P}(\text{lin}(Y, X)), \succeq_{\text{lin}}) \times {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X) \longrightarrow {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(Y), \quad (\text{IV.2.6a})$$

$$(\mathfrak{P}(\text{snf}(Y, X_{|\cdot|})), \succeq_{\text{CI}}) \times {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X_{|\cdot|}) \longrightarrow {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(Y), \quad (\text{IV.2.6b})$$

$$(\mathfrak{P}(\text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})), \succeq_{\text{CI}}) \times {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X_{|\cdot|}) \longrightarrow {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(Y_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.2.6c})$$

$$(\mathfrak{P}(\text{lin}_{|\cdot|}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|})), \succeq_{\text{CI}}) \times {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(X_{|\cdot|}) \longrightarrow {}_{1\text{ctb}}\text{Id}(Y_{|\cdot|}). \quad (\text{IV.2.6d})$$

Auf den Kartesischen Produkten ist hier jeweils die Produktordnung erklärt.

Beweis. Aus Proposition IV.1.14 und Proposition IV.2.1 folgt bereits die Aussage für die Ordnungsrelation “ \supseteq ” anstatt “ \succeq_{lin} ” bzw. “ \succeq_{CI} ”. Ist N eine Menge von Halbnormen oder Verbandshalbnormen, so hängt die von N erzeugte Topologie nur von dem erzeugten Kegelideal $\langle N \rangle_{\text{CI}}$ ab. Wegen Proposition IV.1.10 verändern somit lineare Hüllen bzw. Kegelidealhüllen von M den Urbildraum nicht. Nach Definition der Ordnungsrelationen “ \succeq_{lin} ” bzw. “ \succeq_{CI} ” in Gleichungen (IV.2.3) bzw. (IV.2.4) folgt daraus die Proposition. \square

Korollar IV.2.3. *Der Situation (IV.2.6) entsprechend hängt $\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ nur von der linearen Hülle von M bzw. dem von M erzeugten Kegelideal ab.*

Korollar IV.2.4. *Der Situation (IV.2.6) entsprechend bildet jeder Urbildoperator $\underline{M} : (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \mapsto \underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ Hüllensysteme auf Hüllensysteme ab.*

Beweis. Wegen Gleichung (IV.2.2) und da Wertebereich und Bildbereich von \underline{M} extremumsvollständig sind, folgt dies aus allgemeinen ordnungstheoretischen Gründen. \square

Die Monotonieeigenschaften von Urbildoperatoren erlauben es Invarianzeigenschaften von lokalkonvexen t.b. Räumen durch t.b. Inklusionen auszudrücken:

Proposition IV.2.5. *Sei X ein Vektorraum. Seien weiter $M \subseteq \text{hmg}(X)$ und $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{1\text{ctb}}\text{Sub}(X)$ so, dass $\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ existiert. Die t.b. Inklusion*

$$\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \supseteq (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \quad (\text{IV.2.7})$$

ist genau dann erfüllt, wenn $\{m|_F : m \in M\}$ aus Selbstabbildungen von $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F)$ besteht die stetig im Ursprung und bornologiebewahrend sind. In diesem Fall ist jedes $m|_F$ mit $m \in M$ auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Nach Voraussetzung gelten $m(F) \subseteq F$, $m^{-1}(\mathcal{U}_F) \subseteq \mathcal{U}_F$ und $m(\mathcal{B}_F) \subseteq \mathcal{B}_F$ für alle $m \in M$. Hier ist \mathcal{U}_F der Nullumgebungsfilter von \mathcal{T}_F . Somit folgt die Proposition direkt aus den Gleichungen (IV.1.19) und der Bedingung 3. \square

IV.2.b. Kompositionsregeln und kommutative Diagramme

Identitätsnachweise für verschiedene Urbildraumkonstruktionen lassen sich durch Verwendung von Kompositionsregeln für Urbildraumoperatoren vereinfachen. Dazu wird die Bewahrung der Identischen Abbildung in Proposition IV.2.6 und die allgemeine Kompositionsregel in Proposition IV.2.7 aufgestellt. Vereinfachte Kompositionsregeln für die Anwendungen in den Kapiteln V und VI werden in Lemma IV.2.8 bereitgestellt. Zur übersichtlicheren Darstellung komplexere Zusammenhänge wird in Definition IV.2.9 eine Diagrammnotation eingeführt. Unter Verwendung der genannten Regeln wird Lemma IV.2.10 bewiesen. Dieses erleichtert den Nachweis von Isomorphismen zwischen verschiedenen Urbildraumkonstruktionen.

Proposition IV.2.6. *Sei X ein Vektorraum. Der Urbildoperator der Identischen Abbildung von X ist die Identische Abbildung von ${}_{\text{1ctb}}\text{Sub}(X)$, das heisst*

$$\underline{\text{Id}}_X = \text{Id}_{{}_{\text{1ctb}}\text{Sub}(X)}. \quad (\text{IV.2.8})$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition IV.1.11. \square

Proposition IV.2.7. *Seien X, Y und Z Vektorräume mit Mengen von Abbildungen $M \subseteq \text{hmg}(Y, X)$ und $N \subseteq \text{hmg}(Z, Y)$. Sei weiter $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{\text{1ctb}}\text{Sub}(X)$. Dann gilt die Kompositionsregel*

$$\underline{N} \left(\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \right) = \underline{M \circ N}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \quad (\text{IV.2.9})$$

immer dann, wenn die linke Seite dieser Gleichung existiert. (In diesem Fall existiert auch die rechte Seite.)

Beweis. Dies ergibt sich direkt durch Einsetzen der Definitionen auf der linken Seite. \square

Lemma IV.2.8. *Seien X, Y, Z Vektorräume und $X_{|\cdot|}, Y_{|\cdot|}$ Vektorverbände.*

Sei eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt:

IV. Urbildraumoperatoren

1. Sei $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{1\text{ctb}}\mathbf{Sub}(X)$ und seien Abbildungen

$$M \subseteq \text{lin}(Y, X), \quad N \subseteq \text{lin}(Z, Y), \quad K \subseteq \text{lin}(Z, X) \quad (\text{IV.2.10})$$

gegeben mit der Eigenschaften, dass

$$M \circ N \simeq_{\text{lin}} K. \quad (\text{IV.2.11})$$

2. Sei $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in {}_{1\text{ctb}}\mathbf{Id}(X_{|\cdot|})$, gelte eine der drei folgenden Gleichungen

$$M \subseteq \text{snf}(Y, X_{|\cdot|}), \quad N \subseteq \text{lin}(Z, Y), \quad K \subseteq \text{snf}(Z, X_{|\cdot|}), \quad (\text{IV.2.12a})$$

$$M \subseteq \text{lsnf}(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}), \quad N \subseteq \text{snf}(Z, Y_{|\cdot|}), \quad K \subseteq \text{snf}(Z, X_{|\cdot|}), \quad (\text{IV.2.12b})$$

$$M \subseteq \text{lin}_+(Y_{|\cdot|}, X_{|\cdot|}), \quad N \subseteq \text{snf}(Z, Y_{|\cdot|}), \quad K \subseteq \text{snf}(Z, X_{|\cdot|}), \quad (\text{IV.2.12c})$$

und gelte

$$M \circ N \simeq_{\text{ct}} K. \quad (\text{IV.2.13})$$

Dann gilt die Kompositionsregel

$$\underline{N} \left(\underline{M}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \right) = \underline{K}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F). \quad (\text{IV.2.14})$$

Beweis. Die Kompositionsinclusionen aus Proposition IV.1.6 und Proposition IV.1.14 liefern die Existenz der linken Seite. Wegen Korollar IV.2.3 und der Voraussetzungen kann $M \circ N$ in Gleichung (IV.2.9) durch K ersetzt werden. \square

Definition IV.2.9. Um die Voraussetzungen für die Kompositionsregel aus Lemma IV.2.8 auszudrücken verwendet man die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} X & & M \\ & \swarrow & \searrow \\ K & \uparrow [1] & Y \\ & \nwarrow & \nearrow \\ Z & & N \end{array} & \begin{array}{ccc} X_{|\cdot|} & & M \\ & \swarrow & \searrow \\ K & \uparrow [2] & Y \\ & \nwarrow & \nearrow \\ Z & & N \end{array} & \begin{array}{ccc} X_{|\cdot|} & & M \\ & \swarrow & \searrow \\ K & \uparrow [3] & Y_{|\cdot|} \\ & \nwarrow & \nearrow \\ Z & & N \end{array} \end{array} \quad (\text{IV.2.15})$$

1. Das Diagramm [1] kommutiert nach linearen Hüllen wenn (IV.2.11) gilt.

2. Das Diagramm [2] bzw. [3] kommutiert nach Kegelidealhüllen wenn Gleichung (IV.2.13) gilt, mit der entsprechenden Voraussetzung (IV.2.12a) bzw. (IV.2.12b) oder (IV.2.12c).

Analog werden komplexere Diagramme verwendet um mehrere Gleichungen der Form

$$M_1 \circ \cdots \circ M_n \simeq N_1 \circ \cdots \circ N_m \quad (\text{IV.2.16})$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$ auszudrücken.

Lemma IV.2.10. *Sei I ein linearer Isomorphismus $Y \rightarrow X$ mit inversem Isomorphismus $J := I^{-1}: X \rightarrow Y$. Dann definieren die Urbildoperatoren von I und J zueinander inverse Ordnungsisomorphismen*

$$\underline{I}: \mathbf{1ctbSub}(X) \longrightarrow \mathbf{1ctbSub}(Y), \quad (\text{IV.2.17a})$$

$$\underline{J}: \mathbf{1ctbSub}(Y) \longrightarrow \mathbf{1ctbSub}(X). \quad (\text{IV.2.17b})$$

Sei $(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \in \mathbf{1ctbSub}(X)$. Dann induzieren entsprechende Einschränkungen von I und J die t.b. Isomorphismen

$$I|_{J(F)}: \underline{I}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F), \quad (\text{IV.2.18a})$$

$$J|_F: (F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F) \longrightarrow \underline{J}(F, \mathcal{T}_F, \mathcal{B}_F). \quad (\text{IV.2.18b})$$

Beweis. Nach Teil 1 von Proposition IV.1.14 sind die Urbildoperatoren von I und J wohldefiniert mit Werte- und Bildbereichen wie in den Gleichungen (IV.2.17). Wegen Proposition IV.2.2 sind diese Abbildungen ordnungsbewahrend. Nach Voraussetzung gelten $\text{Id}_X = J \circ I$ und $\text{Id}_Y = I \circ J$. Wegen der Kompositionsregel aus Lemma IV.2.8 und Proposition IV.2.6 erfüllen die Urbildoperatoren von I und J entsprechende Relationen und sind somit zueinander inverse Abbildungen.

Die Abbildungen $I|_{J(F)}$ und $J|_F$ aus den Gleichungen (IV.2.18) sind nach Konstruktion lineare t.b. Morphismen, vergleiche Bemerkung IV.1.15. Wegen $\text{Id}_F = I|_{J(F)} \circ J|_F$ und $\text{Id}_{J(F)} = J|_F \circ I|_{J(F)}$ sind diese Abbildungen auch t.b. Isomorphismen. \square

IV.2.c. Vollständigkeit und relativ kompakte Teilmengen

Aus Proposition IV.1.13 ist bereits bekannt, dass bei der Bildung des Urbildraums die Gestalt der topologisch beschränkten Mengen bewahrt wird. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen können ähnliche Aussagen für die relativ (schwach) kompakten Teilmengen gewonnen werden, wie in den unteren Propositionen IV.2.12 und IV.2.13 dargestellt wird. Da die Vollständigkeit in den Voraussetzungen wichtig ist, wird zunächst die Frage nach der Vererbung der Vollständigkeit unter Urbildern in Proposition IV.2.11 positiv beantwortet.

Die Propositionen in diesem Abschnitt sind anwendungsfreundlichere Varianten von Proposition 1 aus [33, S. 106]. Der Beweis von Proposition 1 aus [33] wurde als Vorlage verwendet und entsprechend angepasst.

Sei (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Raum und $(F, \mathcal{T}_F) \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$ ein lokalkonvexer Unterraum. Sei $M \subseteq \text{hmg}(Y, X)$ und nehme an, dass die Urbilder $(G, \mathcal{T}_G) := \underline{\leftarrow} M(F, \mathcal{T}_F)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y) := \underline{\leftarrow} M(X, \mathcal{T}_X)$ existieren. Für jedes $m \in M$ entsteht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} m: (Y, \mathcal{T}_Y) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}_X) \\ \cup & & \cup \\ m|_G: (G, \mathcal{T}_G) & \longrightarrow & (F, \mathcal{T}_F) \end{array} \quad . \quad (\text{IV.2.19})$$

Nach Bedingung 3 von Definition IV.1.11 sind die Abbildung m und deren Einschränkung $m|_G$ gleichmäßig stetig. Es wird angenommen, dass die Räume (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) Hausdorffsch sind, womit auch (F, \mathcal{T}_F) und (G, \mathcal{T}_G) Hausdorffsch sind.

Proposition IV.2.11. *Übernehme die Annahmen aus (IV.2.19) und nehme zusätzlich an, dass (Y, \mathcal{T}_Y) und (F, \mathcal{T}_F) vollständig sind. Dann ist auch (G, \mathcal{T}_G) vollständig.*

Beweis. Sei \mathcal{F} ein Cauchy-Filter in (G, \mathcal{T}_G) . Wegen $\mathcal{T}_Y|_G \subseteq \mathcal{T}_G$ ist \mathcal{F} auch ein Cauchy-Filter in dem vollständigen Raum (Y, \mathcal{T}_Y) . Also gibt es $y \in Y$ mit $\mathcal{F} \rightarrow y$. Aus der Stetigkeit von $m: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ und $m(0) = 0$ folgt, dass

$$m(\mathcal{F}) \rightarrow m(y) \quad \text{und} \quad m(\mathcal{F} - y) \rightarrow 0 \quad \text{in } (X, \mathcal{T}_X) \quad \text{für alle } m \in M. \quad (\text{IV.2.20})$$

Da $m|_G: (G, \mathcal{T}_G) \rightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ gleichmäßig stetig ist, ist auch $m(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter

in dem vollständigen Raum (F, \mathcal{T}_F) . Also gibt es $x_m \in F$ so, dass

$$m(\mathcal{F}) \rightarrow x_m \quad \text{in } (F, \mathcal{T}_F) \text{ für alle } m \in M. \quad (\text{IV.2.21})$$

Wegen Gleichung (IV.2.20) und $\mathcal{T}_X|_F \subseteq \mathcal{T}_F$ folgt daraus $m(y) = x_m$, und somit auch $m(y) \in F$ für alle $m \in M$. Nach Definition des Urbildraums in Gleichung (IV.1.19a) ist somit $y \in G$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $m|_G$ folgt weiter, dass $m(\mathcal{F} - y)$ ein Cauchy-Filter ist, und somit konvergent, in (F, \mathcal{T}_F) . Aus Gleichung (IV.2.20) und der Relation $\mathcal{T}_X \cap F \subseteq \mathcal{T}_F$ folgt

$$m(\mathcal{F} - y) \rightarrow 0 \quad \text{in } (F, \mathcal{T}_F) \text{ für alle } m \in M. \quad (\text{IV.2.22})$$

Nach Definition des Nullumgebungsfilters \mathcal{U}_G aus Gleichung (IV.1.19b) ist dies äquivalent zu $\mathcal{F} \rightarrow y$ in (G, \mathcal{T}_G) . \square

Proposition IV.2.12. *Übernehme die Annahmen aus (IV.2.19), sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge und treffe zusätzlich die folgenden Annahmen:*

1. *Der Raum (Y, \mathcal{T}_Y) ist vollständig.*
2. *Es ist $M \subseteq \text{lin}(Y, X)$.*

Dann ist die Menge A genau dann relativ (schwach) \mathcal{T}_G -kompakt, wenn $m(A)$ für alle $m \in M$ relativ (schwach) \mathcal{T}_F -kompakt ist.

Beweis. Die Implikation “ \Rightarrow ” folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen $m|_G : G \rightarrow F$.

Notiere die Abbildung $P_M : Y \rightarrow X^M$, $y \mapsto (m(y) : m \in M)$ und die Produkträume $X^M := \prod_{m \in M} (X, \mathcal{T}_X)$ und $F^M := \prod_{m \in M} (F, \mathcal{T}_F)$. Nach Annahme induziert P_M Homöomorphismen $(Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (P_M(Y), \mathcal{T}_{X^M})$ und $(G, \mathcal{T}_G) \rightarrow (P_M(G), \mathcal{T}_{F^M})$. Die schwache Topologie $\sigma(\mathcal{T}_G)$ auf (G, \mathcal{T}_G) ist die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $m|_G : G \rightarrow \prod_{m \in M} (F, \sigma(\mathcal{T}_F))$ mit $m \in M$. Denn nach Theorem 8.8.5 aus [53, S. 167] ist schwache Topologie von F^M die Produkttopologie von $(F, \sigma(\mathcal{T}_F))^M$.

Die Menge $P_M(Y)$ ist abgeschlossen in X^M da (Y, \mathcal{T}_Y) vollständig ist. Somit ist die Menge $P_M(G) = P_M(Y) \cap F^M$ abgeschlossen in F^M . Da $P_M(G)$ absolutkonvex ist, ist diese Menge auch schwach abgeschlossen in F^M , siehe Bemerkung 23.9 aus [75, S. 18].

Ist nun umgekehrt $m(A)$ relativ (schwach) kompakt für alle $m \in M$, so ist das Produkt $\prod_{m \in M} m(A)$ nach dem Satz von Tikhonov relativ (schwach) kompakt in F^M .

IV. Urbildraumoperatoren

Da der Durchschnitt einer relativ kompakten mit einer abgeschlossenen Menge wieder relativ kompakt ist folgt, dass $P_M(A) = P_M(G) \cap \prod_{m \in M} m(A)$, und somit auch A , relativ (schwach) kompakt ist. \square

Proposition IV.2.13. *Übernehme die Annahmen aus (IV.2.19), sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge und treffe zusätzlich die folgenden Annahmen:*

1. *Die Räume (Y, \mathcal{T}_Y) und (F, \mathcal{T}_F) sind vollständig.*
2. *Es ist (X, \mathcal{T}_X) ein lokalkonvexer Verband, (F, \mathcal{T}_F) ein lokalkonvexes Ideal von (X, \mathcal{T}_X) und $M \subseteq \text{snf}(Y, X)$. Die solide Hülle jeder relativ kompakten Teilmenge von (F, \mathcal{T}_F) ist ebenfalls relativ kompakt.*

Dann ist die Menge A genau dann relativ \mathcal{T}_G -kompakt, wenn A relativ \mathcal{T}_Y -kompakt ist und wenn $m(A)$ für alle $m \in M$ relativ \mathcal{T}_F -kompakt ist.

Beweis. Wegen Annahme 1 und Proposition IV.2.11 ist auch (G, \mathcal{T}_G) vollständig. Somit können in den Räumen (Y, \mathcal{T}_Y) , (F, \mathcal{T}_F) und (G, \mathcal{T}_G) “relativ kompakt” und “präkompakt” wie Synonyme verwendet werden.

Ist A relativ \mathcal{T}_G -kompakt, so ist A auch relativ \mathcal{T}_Y -kompakt. Da m stetig ist folgt, dass $m(A)$ für alle $m \in M$ relativ \mathcal{T}_F -kompakt ist.

Sei nun umgekehrt A relativ \mathcal{T}_Y -kompakt und $m(A)$ relativ \mathcal{T}_F -kompakt für alle $m \in M$. Wegen der Dreiecksungleichung ist $m(A - A)$ enthalten in der soliden Hülle von $m(A) + m(A)$. Aus Annahme 2 folgt somit, dass $m(A - A)$ relativ \mathcal{T}_F -kompakt ist.

Sei nun \mathcal{F} ein Filter in A . Da A präkompakt in (Y, \mathcal{T}_Y) ist gibt es einen \mathcal{T}_Y -Cauchy-Filter \mathcal{F}_c in A mit $\mathcal{F}_c \supseteq \mathcal{F}$. Um den Beweis abzuschließen wird nun gezeigt, dass \mathcal{F}_c auch ein \mathcal{T}_G -Cauchy-Filter ist. Sei \mathcal{H} der Filter auf $A - A$ der von der Filterbasis $\{B - B : B \in \mathcal{F}_c\}$ erzeugt wird und sei $m \in M$. Dann gilt

$$m(\mathcal{H}) \rightarrow 0 \quad \text{in } (X, \mathcal{T}_X), \quad (\text{IV.2.23})$$

da m gleichmäßig stetig ist. Da $m(A - A)$ relativ kompakt in dem vollständigen Raum (F, \mathcal{T}_F) ist, hat $m(\mathcal{H})$ einen Häufungspunkt in F . Wegen Gleichung (IV.2.23) und der Inklusion $\mathcal{T}_X|_F \subseteq \mathcal{T}_F$ kann dieser Häufungspunkt nur der Ursprung 0 sein. Also folgt

$$m(\mathcal{H}) \rightarrow 0 \quad \text{in } (F, \mathcal{T}_F). \quad (\text{IV.2.24})$$

Da $m \in M$ beliebig gewählt war, folgt daraus $\mathcal{H} \rightarrow 0$ in (G, \mathcal{T}_G) . Nach Konstruktion von \mathcal{H} folgt daraus, dass \mathcal{F}_c ein \mathcal{T}_G -Cauchy-Filter ist. \square

V. Strukturtheorie

In diesem Kapitel wird die allgemeine Strukturtheorie von Amalgamräumen behandelt. Dies sind lokalkonvexe Funktionenräume die aus einer lokalen Komponente für Glattheitsbedingungen und einer globalen Komponente für Wachstumsbedingungen zusammengesetzt werden [29, 32, 31, 30], siehe auch in Unterabschnitt II.1.c der Einleitung. In dieser Doktorarbeit sind Amalgamräume von Interesse deren lokale Komponente entweder der Raum der Distributionen \mathcal{D}' oder der Raum der glatten Funktionen \mathcal{E} ist. Die globalen Komponenten sind möglichst allgemeine solide Funktionen- oder Folgenräume, nämlich SRI-Räume $E \in \mathbf{SRI}$ und STI-Folgenräume $\lambda \in \mathbf{sti}$. Diese werden in Abschnitt V.1 definiert und charakterisiert. Als Hilfsmittel werden auch die lokalen Komponenten L^p und \mathcal{K}' eingesetzt. Dabei werden stets Funktionenräume über \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d mit fester Dimension $d \in \mathbb{N}$ betrachtet.

Da weite Teile dieser Theorie für \mathcal{D}' und \mathcal{E} simultan abgehandelt werden können wird in den Kapiteln V und VI das Symbol \mathcal{X} genutzt, das global durch \mathcal{D}' oder \mathcal{E} ersetzt werden kann. Von \mathcal{X} abgeleitete oder damit gekoppelte Notationen werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 \mathcal{X} & \mathcal{X}' & \mathcal{X}_{\text{cs}} & \mathcal{X}'_{\text{loc}} & \mu \\
 \hline
 \mathcal{D}' & \mathcal{D} & \mathcal{E}' & \mathcal{E} & s' \\
 \mathcal{E} & \mathcal{E}' & \mathcal{D} & \mathcal{D}' & s
 \end{array} \tag{V.0.1}$$

Hier hat \mathcal{X}' stets die Rolle eines Raums von “Testfunktionen”. Der Raum \mathcal{X}_{cs} aus Gleichung (III.3.2) besteht aus den kompakt getragenen Elementen von \mathcal{X} und der Raum $\mathcal{X}'_{\text{loc}} := (\mathcal{X}_{\text{cs}})'$ hat lokal duale Eigenschaften zu \mathcal{X} . Der Folgenraum μ wird als lokale Komponente verwendet bei der Darstellung von Amalgamräumen als Doppelfolgenräume.

Nach der Charakterisierung der globalen Komponenten $E \in \mathbf{SRI}$ und $\lambda \in \mathbf{sti}$ in

V. Strukturtheorie

Abschnitt V.1 wird die Strukturtheorie in drei Teilen abgehandelt: Im ersten Teil, Abschnitt V.2, werden die Amalgamräume $\mathcal{L}_T(E)$ und $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ eingeführt und studiert. Als lokale Komponente \mathcal{L} werden \mathcal{D}' , \mathcal{E} L^p , $p \in [1, \infty]$ und \mathcal{K}' betrachtet. Es werden die Korrespondenzen zwischen diesen Amalgamräumen und ihren globalen Komponenten geklärt und im Korrespondenzdiagramm (V.2.1) dargestellt. Zusätzlich werden die zu einem Amalgamraum assoziierten extremalen kontinuierlichen globalen Komponenten bestimmt. Diese Resultate lösen Problem II.3.1 aus Unterabschnitt II.3.a.

Im zweiten Teil, Abschnitt V.3, werden zwei Charakterisierungen von $\mathcal{X}_T(E)$ bewiesen: Zum einen wird $\mathcal{X}_T(E)$ als der Urbildraum $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$ von E unter den Faltungen $f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in Y$ dargestellt. Dabei ist Y eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' , siehe Definition V.3.6, mit \mathcal{X}' wie in Tabelle (V.0.1). Zum anderen charakterisiert man $\mathcal{X}_T(E)$ als den Konvolutorenraum $\mathcal{O}'_C(\mathcal{X}', E)$ der Distributionen $f \in \mathcal{D}'$ die stetige Abbildungen $\mathcal{X}' \rightarrow E$, $\varphi \mapsto f * \varphi$ definieren. Diese Resultate lösen Problem II.1.2 aus Unterabschnitt II.1.e.

Im dritten Teil, Abschnitt V.4, werden Isomorphismen zwischen den Amalgamräumen $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ und Amalgamräumen von Doppelfolgen $\lambda\{\mu\}$ aufgestellt. Hier ist μ der Folgenraum aus Tabelle (V.0.1). Weiter wird der Amalgamraum $\lambda\{\mu\}$ für vollständige Räume λ als vervollständigtes Tensorprodukt $\lambda \widehat{\otimes} \mu$ dargestellt. Dies löst Problem II.3.3 aus Unterabschnitt II.3.c, erweitert also die Valdivia-Vogt-Strukturtafeln.

Die Räume E , λ , $\mathcal{L}_T(E)$, $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$, $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$, $\mathcal{O}'_C(\mathcal{X}', E)$ und $\lambda\{\mu\}$ werden in diesem Kapitel als lokalkonvexe topologisch-bornologische Räume behandelt. Dadurch werden zusätzliche strukturelle Zusammenhänge erhalten die in Kapitel VI für die Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen ausgenutzt werden. Aussagen über lokalkonvexe Räume entstehen durch Vergessen der Bornologien, dem Diagramm (III.2.9) von Vergissfunktoren entsprechend. Nur auf den vervollständigten Tensorprodukten $\lambda \widehat{\otimes} \mu$ wurden keine Bornologien spezifiziert.

V.1. Die globalen Komponenten

Räume die sich als globale Komponenten für Amalgamräume eignen werden in den Definitionen V.1.2 und V.1.9 über eine der äquivalenten Eigenschaften aus den Propositionen V.1.1 und V.1.8 eingeführt. Dies sind im kontinuierlichen Fall die *SRI-Räume* $E \in \text{SRI}$, also die lokalkonvexen t.b. Ideale von \mathcal{K}' die invariant unter den Regulari-

sierungen $f \mapsto f * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$ sind. Im diskreten Fall sind dies die *STI-Folgenräume* $\lambda \in \mathbf{sti}$, also die lokalkonvexen t.b. Ideale von ω die invariant unter den Translationen $a \mapsto T_z a$, $z \in \mathbb{Z}^d$ sind. Der Raum \mathcal{K}' der Radon-Maße und der Raum ω der Funktionen auf \mathbb{Z}^d werden in Unterabschnitt III.3.a beschrieben. Notationen für Ordnungskategorien von lokalkonvexen t.b. Idealen werden in Unterabschnitt III.2.b eingeführt.

V.1.a. Solide, regularisierungsinvariante Räume

Die Klasse **SRI** der soliden, regularisierungsinvarianten Räume E , genannt **SRI-Räume**, wird in Definition V.1.2 über die äquivalenten Eigenschaften aus Proposition V.1.1 eingeführt. Man erhält in Proposition V.1.3, dass **SRI** eine extremumsvollständige Ordnungskategorie konstituiert.

Proposition V.1.1. *Sei E ein lokalkonvexes t.b. Ideal des Vektorverbands \mathcal{K}' .*

Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. *Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $f \mapsto f * \varphi$ ein t.b. Endomorphismus von E .*
2. *Die t.b. Inklusion $E \subseteq \underbrace{|\cdot| * \mathcal{K}_+}_{\leftarrow} E$ ist erfüllt.*
3. *Die Faltung $*$: $E \times L_{\text{cs}}^\infty \rightarrow E$ ist hypostetig-beschränkt.*

Hier notiert $|\cdot| * \mathcal{K}_+$ die Menge der Verbandshalbnormfunktionen $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}'$, $f \mapsto |f| * k$ mit $k \in \mathcal{K}_+$ und L_{cs}^∞ trägt die Bornologie $\mathfrak{B}(L_{\text{cs}}^\infty)$ der beschränkten Teilmengen, die in (III.3.5) charakterisiert wird.

Beweis. Trivialerweise folgt Aussage 1 aus Aussage 3. Nach Proposition III.1.1 ist der Absolutwert $|\cdot|$ eine gleichmäßig stetige Selbstabbildung von E . Nach Teil 2 von Definition III.2.1 und Definition III.2.3 ist klar, dass $|\cdot|$ bornologiebewahrend ist. Somit folgt wegen Proposition IV.2.5 auch Aussage 2 aus Aussage 3.

Sei $K \in \mathfrak{K}$ und U_K die solide Hülle von 1_K . Dann definiert $\{\lambda \cdot U_K : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ gleichzeitig eine Nullumgebungsbasis und ein Fundamentalsystem für die beschränkten Teilmengen von L_K^∞ . Sei $\varphi_K \in \mathcal{D}$ mit $1_K \leq \varphi_K$. Dann gilt

$$|f * k| \leq |f| * |k| \leq |f| * \varphi_K \quad \text{für alle } f \in \mathcal{K}', k \in U_K. \quad (\text{V.1.1})$$

V. Strukturtheorie

Wegen Proposition III.1.1 kann man aus dieser Ungleichung schlussfolgern, dass Aussage 2 aus Aussage 1 folgt.

Nehme nun an, dass die Aussage 1 gilt. Zum Beweis der Aussage 3 sei $B_E \in \mathcal{B}_E$ und $U_E \in \mathcal{U}_E$ mit $U_E = \Gamma(U_E)$. Wegen (V.1.1) und Aussage 1 gibt es zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ eine Menge $B'_{E,K} \in \mathcal{B}_E$ so, dass $B_E * U_K \subseteq B'_{E,K}$. Somit ist $*$: $E \times L_{\text{cs}}^\infty \rightarrow E$ bornologiebewahrend. Wegen $B'_{E,K} \in \mathcal{B}_E \subseteq \mathfrak{B}(E, \mathcal{T}_E)$ gibt es zu jedem $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^d)$ ein $\lambda_K \in \mathbb{R}_+$ so, dass $B_E * (\lambda_K U_K) \subseteq U_E$. Dann ist $U = \Gamma(\bigcup_{K \in \mathfrak{K}} \lambda_K U_K)$ eine Nullumgebung von L_{cs}^∞ , die $B_E * U \subseteq U_E$ erfüllt. Andererseits existiert wegen Gleichung (V.1.1) und Aussage 1 zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ eine weitere Nullumgebung $U'_E \in \mathcal{U}_E$ mit $U'_E * U_K \subseteq U_E$. Dies beweist die Hypostetigkeit von $*$: $E \times L_{\text{cs}}^\infty \rightarrow E$. \square

Definition V.1.2. Ein *SRI-Raum* E ist ein lokalkonvexes t.b. Ideal des Vektorverbandes \mathcal{K}' das eine der äquivalenten Aussagen aus Proposition V.1.1 erfüllt. Die durch t.b. Inklusionen geordnete Menge aller SRI-Räume wird als *Kategorie der SRI-Räume* bezeichnet und notiert durch **SRI**.

Proposition V.1.3. *Die Kategorie der SRI-Räume ist extremumsvollständig. Das Supremum wird realisiert durch die Hülle und das Infimum durch den Kern von lokalkonvexen t.b. Unterräumen des Vektorraums \mathcal{K}' .*

Beweis. Nach Proposition III.2.9 ist die Ordnungskategorie ${}_{1\text{ctb}}\text{Id}(\mathcal{K}')$ aller lokalkonvexen t.b. Ideale des Vektorverbandes \mathcal{K}' extremumsvollständig. Die Eigenschaft 1 aus Proposition V.1.1 impliziert, in Verbindung mit Proposition III.2.10, dass die SRI-Räume eine extremumsabgeschlossene Teilmenge von ${}_{1\text{ctb}}\text{Id}(\mathcal{K}')$ konstituieren. Diese ist somit extremumsvollständig in sich, vergleiche Unterabschnitt III.1.a. \square

Bemerkung V.1.4. Lässt man die Bornologie \mathcal{B}_E der Räume E weg und verlangt *stetige* Inklusionen $\mathcal{K} \subseteq E \subseteq \mathcal{K}'$, so erhält man die “solid, regularisation invariant spaces” aus [58] zurück. Definition V.1.2 verallgemeinert also Definition 3.8 aus [58, S. 8] und Teil 3 von Proposition V.1.1 ist stärker wie Proposition 3.10 aus [58, S. 8].

Bemerkung V.1.5. Der Raum L_{lok}^1 kann stets die Rolle von \mathcal{K}' übernehmen. Die meisten Resultate dieser Arbeit funktionieren auch mit L_{lok}^1 .

V.1.b. Solide, translationsinvariante Folgenräume

Die Klasse **sti** der soliden, translationsinvarianten Folgenräume λ , genannt STI-Folgenräume, wird in Definition V.1.9 über die Eigenschaften in Proposition V.1.8 eingeführt. Nach Proposition V.1.10 ist **sti** eine extremumsvollständige Ordnungskategorie.

Definition V.1.6. Sei $p \in [1, \infty]$. Erkläre die Menge

$$|\cdot| *^p \phi_+ := \{a \mapsto |a| *^p b : b \in \phi_+\} \quad (\text{V.1.2})$$

von Verbandshalbnormfunktionen $\omega \rightarrow \omega$.

Behauptung V.1.7. Für $p, q \in [1, \infty]$ gelten die Kegelidealäquivalenzen

$$|\cdot| *^p \phi_+ \succ_{\text{CI}} |\cdot| *^q \phi_+, \quad (\text{V.1.3})$$

$$(|\cdot| *^p \phi_+) \circ (|\cdot| *^p \phi_+) \succ_{\text{CI}} |\cdot| *^p \phi_+. \quad (\text{V.1.4})$$

Beweis. Gleichung (V.1.3) folgt aus

$$a \blacksquare b \leq a *^p b \leq a \blacksquare (\|b\|_p \cdot 1_{\text{supp}b}) \quad \text{für alle } a \in \omega_+, b \in \phi_+. \quad (\text{V.1.5})$$

Gleichung (V.1.4) folgt aus $\phi_+ *^p \phi_+ \succ_{\text{CI}} \phi_+$ (vergleiche Lemma III.3.4). \square

Proposition V.1.8. Sei λ ein lokalkonvexes t.b. Ideal von ω und $p \in [1, \infty]$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Gittertranslationen $T_z, z \in \mathbb{Z}^d$ sind t.b. Endomorphismen von λ .
2. Die Abbildungen $a \mapsto a * b, b \in \phi$ sind t.b. Endomorphismen von λ .
3. Der Raum λ erfüllt die t.b. Inklusion $\lambda \subseteq \underbrace{|\cdot| *^p \phi_+}_{\lambda}$.
4. Der Raum λ erfüllt die t.b. Inklusion $\lambda = \underbrace{|\cdot| *^p \phi_+}_{\lambda}$.
5. Die Faltung $*$: $\lambda \times \phi \rightarrow \lambda$ ist hypostetig-beschränkt.

Beweis. Für $p = 1$ beweist man die Äquivalenzen “2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 5” wie für Proposition V.1.1. Behauptung V.1.7 liefert den Fall $p \neq 1$. Da die Faltung mit $b \in \phi$ eine endliche Summe von Translationen ist, folgt “1 \Leftrightarrow 2”. Wegen $|\cdot| \in |\cdot| *^p \phi_+$ und da λ solide ist, besteht die t.b. Inklusion $\lambda \supseteq \underbrace{|\cdot| *^p \phi_+}_{\lambda}$. Somit folgt “3 \Leftrightarrow 4”. \square

Definition V.1.9. Ein *STI-Folgenraum* λ ist ein lokalkonvexes t.b. Ideal von ω das eine der äquivalenten Eigenschaften aus Proposition V.1.8 erfüllt. Die durch t.b. Inklusionen geordnete Menge aller STI-Folgenräume wird als *Kategorie der STI-Folgenräume* bezeichnet und notiert durch **sti**.

Proposition V.1.10. Die Kategorie der STI-Folgenräume ist extremumsvollständig. Das Supremum wird realisiert durch die Hülle und das Infimum durch den Kern von lokalkonvexen t.b. Unterräumen des Vektorraums ω .

Beweis. Analog zu Proposition V.1.10. □

V.2. Das Korrespondenzdiagramm

Basierend auf der Theorie der Urbildraumoperatoren aus Kapitel IV werden die Amalgamräume $\mathcal{L}_T(E)$ und $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ mit $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{K}'\} \cup \{L^p : p \in [1, \infty]\}$ in diesem Abschnitt eingeführt. Im Zuge dessen werden die Korrespondenzen zwischen den Räumen $\mathcal{L}_T(E)$ und $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ und den globalen Komponenten $E \in \text{SRI}$ und $\lambda \in \text{sti}$ studiert. Daraus resultiert ein kommutatives Diagramm von Urbildoperatoren (rechts):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}' & \xleftarrow{\quad} & L^p_{\text{lok}} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow \\
 \omega & & \mathcal{X} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \omega_{*\mathcal{D}}(E) = \lambda & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}_T(E) = \mathcal{X}_\tau(\lambda)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\quad} & L^p_T(E) = L^p_\tau(\lambda) \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 \omega_{*\mathcal{D}}(E) = \lambda & & \mathcal{X}_T(E) = \mathcal{X}_\tau(\lambda) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \omega_{*\mathcal{D}}(E) = \lambda & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}_T(E) = \mathcal{X}_\tau(\lambda)
 \end{array}
 \tag{V.2.1a}$$

Das linke Diagramm zeigt die Abbildungsmengen $M = \{y \mapsto m_i(y) : i \in I\}$ und das rechte Diagramm die assoziierten Urbildraumoperatoren \underline{M} gemäß der folgenden

Legende:

	\underline{M}	$y \mapsto m_i(y)$	$i \in I$	Klasse	Definition	
—	\mathcal{X}_T	$f \mapsto f _{*\Phi}$	$\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$	snf	V.2.20	
- - -	\mathcal{X}_τ	$f \mapsto (f _{*\Phi}) _{\mathbb{Z}}$	$\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$	snf	V.2.24	(V.2.1b)
—	L_T^p	$f \mapsto f *^p k$	$k \in \mathcal{K}_+$	lsnf	V.2.3	
- - -	L_τ^p	$f \mapsto (f *^p k) _{\mathbb{Z}}$	$k \in \mathcal{K}_+$	lsnf	V.2.15	
—	$\omega_{*\mathcal{D}}$	$a \mapsto a * \varphi$	$\varphi \in \mathcal{D}$	lin	V.2.11	

Hier ist $|f|_{*\Phi} := \sup_{\varphi \in \Phi} |f * \varphi|$, die potenzierte Faltung $|f| *^p k$ aus Definition III.3.1 und die Reihe $a * \varphi := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) T_z \varphi$ in \mathcal{E} absolutkonvergent. Siehe Unterabschnitt IV.1.a für die Abbildungsklassen “lin”, “snf” und “lsnf”. Die Definition der Urbildraumoperatoren \underline{M} basiert auf Definition IV.1.11 und Proposition IV.1.14.

Anstatt L^p und L_{lok}^p kann im Diagramm (V.2.1) auch \mathcal{K}' eingesetzt werden. Die lokalen Komponenten L^p , speziell $p \in \{1, \infty\}$, und \mathcal{K}' werden betrachtet um die größte oder kleinste globale Komponente eines Amalgamraums $\mathcal{X}_T(E)$ zu charakterisieren.

Die Kommutativität des rechten Diagramms in (V.2.1a) entspricht einer Zusammenfassung aus Identitäten, die in den Abschnitten V.2 und V.3 erhalten werden. Diese basieren auf der Anwendung der Kompositionsregeln für Urbildraumoperatoren aus Lemma IV.2.8. Speziell entspricht die Kommutativität der zwei Dreiecke *linksoben* den Identitäten (V.2.30a) und (V.2.30b) von Theorem V.2.17 (beachte auch Bemerkung V.2.19). Als Korollar erhält man die Bijektionen $\lambda \leftrightarrow L_\tau^p(\lambda)$ und $\lambda \leftrightarrow \mathcal{K}'_\tau(\lambda)$, siehe Gleichung (V.2.31). Das Dreieck *rechtsoben* entspricht der Identität (V.2.38) von Theorem V.2.22. Die zwei Dreiecke *linksunten* entsprechen den Identitäten (V.2.45) von Theorem V.2.26 und (V.2.50) von Theorem V.2.28 mit $X = \mathcal{D}$. In den drei Dreiecken *rechtsunten* tauchen wieder die Identitäten (V.2.45) und (V.2.50) auf; zusätzlich noch die Identität (V.2.46) von Theorem V.2.26. Daraus folgt auch die Bijektion $\lambda \leftrightarrow \mathcal{X}_\tau(\lambda)$, siehe Gleichung (V.2.51) mit $X = \mathcal{D}$.

Aus dem Diagramm (V.2.1) ergeben sich Surjektionen von den SRI-Räumen E auf die STI-Folgenräume λ und die Amalgamräume $\mathcal{L}_T(E)$ und $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$. Dies impliziert auch

$$\mathcal{L}_T(\text{SRI}) = \mathcal{L}_\tau(\text{sti}). \quad (\text{V.2.2})$$

V. Strukturtheorie

Die Surjektionen sind nicht injektiv, aber die Urbilder dieser Surjektionen können charakterisiert werden. Dazu wird zunächst in Theorem V.2.6 bewiesen, dass L_T^∞ ein Kernoperator und \mathcal{K}'_T ein Hüllenoperator ist, wobei diese über die Absorptionsrelationen $\mathcal{K}'_T \circ L_T^\infty = \mathcal{K}'_T$ und $L_T^\infty \circ \mathcal{K}'_T = L_T^\infty$ verbunden sind. Aus den Korollaren V.2.9 und V.2.23 erhält man dann, dass SRI-Räume E, F genau dann $\mathcal{L}_T(E) = \mathcal{L}_T(F)$ erfüllen, wenn die Inklusionen $L_T^\infty(E) \subseteq F \subseteq \mathcal{K}'_T(E)$ erfüllt sind. Somit ist $L_T^\infty(E)$ der kleinste und $\mathcal{K}'_T(E)$ der größte SRI-Raum F , der die Identität $\mathcal{L}_T(E) = \mathcal{L}_T(F)$ erfüllt. Schränkt man sich auf SRI-Räume $F \subseteq L_{\text{lok}}^1$ ein, so übernimmt $L_T^1(E)$ die Rolle von $\mathcal{K}'_T(E)$.

Theorem V.2.1. *Sei $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{K}'\} \cup \{L^p : p \in [1, \infty]\}$. Zu jeder Teilmenge $F \subseteq \mathcal{L}$ gibt es einen kleinsten STI-Folgenraum λ mit $F \subseteq \mathcal{L}_\tau(\lambda)$ und einen kleinsten SRI-Raum E mit $F \subseteq \mathcal{L}_T(E)$. Dieser erfüllt $E = L_\tau^\infty(\lambda)$.*

Beweis. Wegen Proposition V.1.10 und Korollar IV.2.4, und da $\lambda \mapsto \mathcal{L}_\tau(\lambda)$ eine Bijektion ist, existiert das gesuchte λ . Mit Korrespondenzdiagramm (V.2.1) und Theorem V.2.6 erhält man $E = L_\tau^\infty(\lambda)$. \square

Korollar V.2.2. *Die Ordnungskategorie $\mathcal{L}_T(\text{SRI}) = \mathcal{L}_\tau(\text{sti})$ konstituiert ein Hüllensystem über \mathcal{L} .*

V.2.a. Assoziierte extremale globale Komponenten

Im Vergleich zu STI-Folgenräumen bilden SRI-Räume eine sehr unspezifische Klasse von Räumen. Die Amalgamräume $L_T^p(E)$ mit $p \in [1, \infty]$ und $\mathcal{K}'_T(E)$, die in Definition V.2.3 eingeführt werden, haben besondere Eigenschaften. Die Operatoren \mathcal{K}'_T und L_T^∞ werden in Theorem V.2.6 als Hüllen- und Kernoperatoren auf der Kategorie der SRI-Räume SRI charakterisiert, die durch die Absorptionsrelation (V.2.8) verbunden sind. Dadurch entsteht eine natürliche Einteilung der SRI-Räume in Äquivalenzklassen.

Definition V.2.3. Sei $p \in [1, \infty]$ und E ein SRI-Raum. Der *Amalgamraum* $L_T^p(E)$ mit *globaler Komponente* E und *lokaler Komponente* L^p wird definiert als

$$L_T^p(E) := \underbrace{|\cdot|^* \mathcal{K}'_+ E}_{\text{Hülle}} \quad (\text{V.2.3})$$

mit der Menge $|\cdot| *^p \mathcal{K}_+$ von Verbandshalbnormfunktionen $L_{\text{lok}}^p \rightarrow \mathcal{C}$ gegeben durch

$$|\cdot| *^p \mathcal{K}_+ := \{f \mapsto |f| *^p k : k \in \mathcal{K}_+\}. \quad (\text{V.2.4})$$

Den *Amalgamraum* $\mathcal{K}'_{\text{T}}(E)$ mit globaler Komponente E und lokaler Komponente \mathcal{K}' definiert man analog als Urbild von E unter $|\cdot| * \mathcal{K}_+ \subseteq \text{lsnf}(\mathcal{K}')$.

Bemerkung V.2.4. Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt die Kegelidealabschätzung

$$|\cdot| *^p \mathcal{K}_+ \preceq_{\text{CI}} |\cdot| *^q \mathcal{K}_+ \quad (\text{V.2.5})$$

von Verbandshalbnormfunktionen $L_{\text{lok}}^q \rightarrow \mathcal{K}'$.

Behauptung V.2.5. Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Dann gilt die Kegelidealäquivalenz

$$(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) \circ (|\cdot| *^q \mathcal{K}_+) \simeq_{\text{CI}} |\cdot| *^q \mathcal{K}_+ \quad (\text{V.2.6})$$

von Verbandshalbnormfunktionen $L_{\text{lok}}^q \rightarrow \mathcal{C}$ (oder auch $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{C}$ im Fall $q = 1$).

Beweis. Da die Operationen $*^p$, $*^q$ und $|\cdot|$ monoton und subadditiv sind genügt es zu zeigen, dass für alle $w, v, u \in \mathcal{K}_+$ weitere $\tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{u} \in \mathcal{K}_+$ existieren, sodass

$$\| |f| *^q w \| *^p v \leq \| |f| *^q \tilde{u} \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^q, \quad (\text{V.2.7a})$$

$$\| |f| *^q u \| \leq \| |f| *^q \tilde{w} \| *^p \tilde{v} \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^q. \quad (\text{V.2.7b})$$

Dazu verwendet man Proposition III.3.3 und die Relation $\mathcal{K}_+ \simeq_{\text{CI}} \mathcal{K}_+ *^q \mathcal{K}_+$, siehe Lemma III.3.4. □

Theorem V.2.6. Sei $p, q \in [1, \infty]$. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität

$$L_{\text{T}}^p(L_{\text{T}}^q(E)) = L_{\text{T}}^p(E). \quad (\text{V.2.8})$$

(Gleichung (V.2.8) wird auch Absorptionsrelation genannt.) Dabei kann L_{T}^1 durch \mathcal{K}'_{T} ersetzt werden.

Die Abbildung $E \mapsto \mathcal{K}'_{\text{T}}(E)$ konstituiert einen Hüllenoperator und die Abbildung $E \mapsto L_{\text{T}}^\infty(E)$ einen Kernoperator auf der Kategorie der SRI-Räume.

V. Strukturtheorie

Beweis. Die Monotonie von $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$ folgt direkt aus Proposition IV.2.2. Die Idempotenz von $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$ folgt aus Behauptung V.2.5. Die Absorptionsrelationen (V.2.8) erhält man ebenfalls aus Behauptung V.2.5. Die Abbildung $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$ ist intensiv aufgrund von Solidität und da $\{g\} \preceq g \blacksquare \mathcal{K}_+$ für alle $g \in L^{\infty}_{\text{lok},+}$ gilt.

Die obigen Aussagen behalten ihre Gültigkeit wenn man $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$ im Sinne von Definition V.2.3 auf die Kategorie der lokalkonvexen t.b. Ideale von \mathcal{K}' ausdehnt. Auf der Kategorie der SRI-Räume ist die Abbildung $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ extensiv aufgrund der Eigenschaft 2 aus Proposition V.1.1 und Proposition IV.2.5.

Es muss noch gezeigt werden, dass $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E)$ stets SRI-Räume sind. Die Absorptionsrelationen (V.2.8), die Ungleichung $|\cdot| * \mathcal{K}_+ \preceq |\cdot| \blacksquare \mathcal{K}_+$ und die Idempotenz von $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ implizieren

$$\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E)) = \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E) \supseteq L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E), \quad \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)) = \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)$$

für alle lokalkonvexen t.b. Ideale E von \mathcal{K}' . Somit haben die Räume $L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E)$ und $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)$ die Eigenschaft 2 aus Proposition V.1.1. \square

Korollar V.2.7. *Die Abbildungen $E \mapsto \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $E \mapsto L^p_{\mathbb{T}}(E)$ können als Funktoren betrachtet werden die von der Kategorie der SRI-Räume auf sich selbst abbilden.*

Korollar V.2.8. *Die Funktoren $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$ induzieren zueinander inverse Bijektionen zwischen dem Hüllenbereich von $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ und dem Kernbereich von $L^{\infty}_{\mathbb{T}}$.*

Korollar V.2.9. *Sei $p \in [1, \infty]$. SRI-Räume E, F erfüllen die Äquivalenzen*

$$L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E) \subseteq F \subseteq \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E) \quad \Leftrightarrow \quad L^p_{\mathbb{T}}(E) = L^p_{\mathbb{T}}(F) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(F). \quad (\text{V.2.9})$$

Bemerkung V.2.10. *Schränkt man sich auf SRI-Räume ein, die in L^1_{lok} enthalten sind, so übernimmt $L^1_{\mathbb{T}}$ die Rolle von $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}$ in Theorem V.2.6 und seinen Korollaren.*

V.2.b. Assoziierte diskrete globale Komponenten

Als Urbilder bezüglich der Faltungsabbildungen $\omega \ni a \mapsto a * k$ mit geeigneten $k \in L^{\infty}_{\text{cs}}$ können STI-Folgenräume zu SRI-Räumen assoziiert werden. Theorem V.2.13 zeigt die Unabhängigkeit von k falls $0 \neq k$ und $(\text{supp } k + \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \cap \text{supp } k = \emptyset$. Somit kann

auch der naheliegende Verbandshomomorphismus $a \mapsto a * 1_Q$ mit $Q = \frac{1}{2}[-1, 1]^d$ von ω nach L_{lok}^∞ verwendet werden, siehe Korollar V.2.14.

Definition V.2.11. Sei $Y \subseteq \mathcal{E}'$ und F ein lokalkonvexer t.b. Unterraum des Vektorraums \mathcal{D}' . Definiere das *diskrete Faltungsbild von F bezüglich Y* als

$$\omega_{*Y}(F) := \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * Y} F \quad (\text{V.2.10})$$

mit der Menge $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * Y$ linearer Abbildungen $\omega \rightarrow \mathcal{D}'$ gegeben durch

$$\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * Y := ((\cdot) * Y) \circ \delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) = \{a \mapsto a * g : g \in Y\} \quad (\text{V.2.11})$$

und der linearen Abbildung $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot): \omega \rightarrow \mathcal{D}'$ gegeben durch

$$\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) = \left(a \mapsto \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_z a(z) \right) \quad (\text{V.2.12})$$

mit der in \mathcal{D}' absolut konvergenten Reihe

$$a * g := \delta_{\mathbb{Z}^d}(a) * g = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) T_z g. \quad (\text{V.2.13})$$

Bemerkung V.2.12. Sei $0 \neq k \in \mathcal{C}'_+$. Dann folgt die Kegelidealäquivalenz

$$(|\cdot| * \mathcal{K}_+) \circ (\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * k) \simeq_{\text{CI}} \delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+, \quad (\text{V.2.14})$$

mit der Abkürzung $\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) := \delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) \circ |\cdot|$, direkt aus Lemma III.3.4.

Theorem V.2.13. Sei $0 \neq k \in K \subseteq L_{\text{cs}}^\infty$ mit $(\text{supp } k + \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \cap \text{supp } k = \emptyset$. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E) = \omega_{*K}(E). \quad (\text{V.2.15})$$

Beweis. Sei E ein SRI-Raum. Es folgt $|\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * k| = \delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * |k|$ aus der Trägerbedin-

V. Strukturtheorie

gung an k . Damit liefert Gleichung (IV.1.24b) von Bemerkung IV.1.16

$$\omega_{*\{k\}}(E) = \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * k} E = \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * |k|} E. \quad (\text{V.2.16})$$

Es gibt $h \in \mathcal{K}_+$ mit $|k| \leq h$. Somit folgt aus dem Monotoniegesetz Proposition IV.2.2, Gleichung (V.2.14) und Proposition V.1.1 die Kette von t.b. Inklusionen

$$\omega_{*\{k\}}(E) \supseteq \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+} E = \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * |k|} \underleftarrow{|\cdot| * \mathcal{K}_+} E \supseteq \omega_{*\{k\}}(E). \quad (\text{V.2.17})$$

Mit $k = \varphi \in \mathcal{D}$ und $\varphi \geq 0$ erhält man aus Gleichung (V.2.17), dass

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E) \supseteq \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+} E = \omega_{*\{\varphi\}}(E) \supseteq \omega_{*\mathcal{D}}(E). \quad (\text{V.2.18})$$

Aus den Gleichungen (V.2.17) und (V.2.18) folgt nun Gleichung (V.2.15). \square

Korollar V.2.14. Sei $Q := \frac{1}{2}[-1, 1]^d$. Alle SRI-Räume E erfüllen die Identität

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E) = \omega_{*\{1_Q\}}(E). \quad (\text{V.2.19})$$

V.2.c. Assoziierte kontinuierliche globale Komponenten

Die Amalgamräume $\mathcal{K}'_{\mathbb{T}}(E)$ und $L^{\infty}_{\mathbb{T}}(E)$ werden in Theorem V.2.17 dieses Unterabschnitts mit ihren assoziierten STI-Folgenraum $\omega_{*\mathcal{D}}(E)$ als globaler Komponente dargestellt. Dabei entsteht jeweils eine Bijektion.

Definition V.2.15. Sei $p \in [1, \infty]$ und λ ein STI-Folgenraum. Der *Amalgamraum* $L^p_{\mathbb{T}}(\lambda)$ mit globaler Komponente λ und lokaler Komponente L^p ist definiert als

$$L^p_{\mathbb{T}}(\lambda) := \underleftarrow{(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) |_{\mathbb{Z}^d}} \lambda \quad (\text{V.2.20})$$

mit $(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) |_{\mathbb{Z}^d}$ den Verbandshalbnormfunktionen $L^p_{\text{lok}} \rightarrow \omega$ gegeben durch

$$(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) |_{\mathbb{Z}^d} := (\cdot) |_{\mathbb{Z}^d} \circ (|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) = \{f \mapsto (|f| *^p k) |_{\mathbb{Z}^d} : k \in \mathcal{K}_+\} \quad (\text{V.2.21})$$

und mit dem Verbandshomomorphismus $(\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} : \mathcal{C} \rightarrow \omega$ gegeben durch

$$(\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} = (f \mapsto f|_{\mathbb{Z}^d}). \quad (\text{V.2.22})$$

Den Amalgamraum $\mathcal{K}'_\tau(\lambda)$ mit globaler Komponente λ und lokaler Komponente \mathcal{K}' definiert man analog als Urbild von λ unter $(|\cdot| * \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \subseteq \text{lsnf}(\mathcal{K}', \omega)$.

Behauptung V.2.16. Sei $p \in [1, \infty]$. Es gelten die Kegelidealäquivalenzen

$$(\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * \mathcal{K}_+) \circ (|\cdot| *^p \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \simeq_{\text{CI}} |\cdot| *^p \mathcal{K}_+, \quad (\text{V.2.23})$$

$$(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+) \circ (\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+) \simeq_{\text{CI}} \delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+, \quad (\text{V.2.24})$$

$$(|\cdot| *^p \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \circ (\delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+) \simeq_{\text{CI}} |\cdot| * \phi_+. \quad (\text{V.2.25})$$

Beweis. Im folgenden sei $Q := \frac{1}{2}[-1, 1]^d$.

Gleichung (V.2.23): Sei $k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{K}_+$. Setze $h_1 := C \cdot k_2 \blacksquare k_3$ mit der Konstanten $C := \#\{z \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } k_3 \cap (z + \text{supp } k_3) \neq \emptyset\}$. Gleichung (III.3.20) liefert dann

$$(|f| *^p k_2)|_{\mathbb{Z}^d} * k_3 \leq C \cdot (|f| *^p k_2) \blacksquare k_3 \leq |f| *^p h_1 \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^p. \quad (\text{V.2.26a})$$

Umgekehrt findet man $h_2, h_3 \in \mathcal{K}_+$ mit

$$|f| *^p k_1 \leq (|f| *^p h_2)|_{\mathbb{Z}^d} * h_3 \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^p. \quad (\text{V.2.26b})$$

Um Gleichung (V.2.26b) zu erfüllen setze $h_2 = k_1 \blacksquare 1_Q$ und wähle $h_3 \in \mathcal{K}_+$ mit $h_3 \geq 1_Q$. Dann folgt nämlich

$$(|f| *^p k_1)(z + x) \leq ((|f| *^p k_1) \blacksquare 1_Q)(z) \leq (|f| *^p h_2)(z) \quad (\text{V.2.27})$$

für alle $z \in \mathbb{Z}^d$, $x \in Q$ und somit Gleichung (V.2.26b). Die Kegelidealäquivalenz (V.2.23) folgt nun aus den Ungleichungen (V.2.26a) und (V.2.26b).

Gleichung (V.2.24): Sei $k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{K}_+$. Wegen der Ungleichung (V.2.5) genügt es

V. Strukturtheorie

$h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{K}_+$ zu finden, sodass

$$(|a| * k_1) \blacksquare k_2 \leq |a| * h_3 \quad \text{für alle } a \in \omega, \quad (\text{V.2.28a})$$

$$|a| * k_3 \leq |a| * h_1 * h_2 \quad \text{für alle } a \in \omega. \quad (\text{V.2.28b})$$

Dies gelingt mit $h_3 = k_1 \blacksquare k_2$ und $k_3 \leq h_1 * h_2$.

Gleichung (V.2.25): Sei $b \in \phi_+$ und $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_+$. Wegen Behauptung V.1.7 genügt es $c \in \phi_+$ und $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_+$ zu finden, sodass

$$|a| * b \leq (|a| * h_1 * h_2)|_{\mathbb{Z}^d} \quad \text{für alle } a \in \omega, \quad (\text{V.2.29a})$$

$$((|a| * k_1) \blacksquare k_2)|_{\mathbb{Z}^d} \leq |a| * c \quad \text{für alle } a \in \omega. \quad (\text{V.2.29b})$$

Aufgrund von $(|a| * k_1) \blacksquare k_2 \leq |a| * (k_1 \blacksquare k_2)$, infinitärer Additivität und Gittertranslationsinvarianz ist es hinreichend, die Ungleichungen (V.2.29a) und (V.2.29b) für $a = \delta$ zu erfüllen. Dazu wählt man h_1, h_2 und c so, dass $b \leq (h_1 * h_2)|_{\mathbb{Z}^d}$ und $(k_1 \blacksquare k_2)|_{\mathbb{Z}^d} \leq c$. \square

Theorem V.2.17. *Sei $p \in [1, \infty]$. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identitäten*

$$L_{\mathbb{T}}^p(E) = L_{\tau}^p(\omega_{*\mathcal{D}}(E)), \quad (\text{V.2.30a})$$

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E) = \omega_{*\mathcal{D}}(L_{\mathbb{T}}^p(E)). \quad (\text{V.2.30b})$$

Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Identität

$$\lambda = \omega_{*\mathcal{D}}(L_{\tau}^p(\lambda)). \quad (\text{V.2.31})$$

Beweis. Wende Lemma IV.2.8 auf die Kegelidealäquivalenzen aus Behauptung V.2.16 an. Die Kegelidealäquivalenz (V.2.23) impliziert die Identität (V.2.30a) und die Kegelidealäquivalenz (V.2.24) impliziert die Identität (V.2.30b). Die Kegelidealäquivalenz (V.2.24) und die Eigenschaft 3 von Proposition V.1.8 liefern die Identität (V.2.31). \square

Korollar V.2.18. *Sei $p, q \in [1, \infty]$. Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Identität*

$$L_{\tau}^p(\lambda) = L_{\mathbb{T}}^p(L_{\tau}^q(\lambda)). \quad (\text{V.2.32})$$

Bemerkung V.2.19. In Theorem V.2.17 und Korollar V.2.18 kann die lokale Kom-

ponente L^1 durch \mathcal{K}' ersetzt werden.

V.2.d. Amalgame glatter Funktionen oder Distributionen

Es wird nun der Amalgamraum $\mathcal{X}_T(E)$ eingeführt. Mit Theorem V.2.22 und Korollar V.2.23 wird bewiesen, dass $\mathcal{X}_T(E)$ nur von der ‘globalen Struktur’ von E abhängt.

Definition V.2.20. Sei E ein SRI-Raum. Der Amalgamraum $\mathcal{X}_T(E)$ mit globaler Komponente E und lokaler Komponente \mathcal{X} wird definiert als der Urbildraum

$$\mathcal{X}_T(E) := \underleftarrow{|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} E} \quad (\text{V.2.33})$$

mit der Menge $|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')}$ von Halbnormfunktionen $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ gegeben durch

$$|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} := \{f \mapsto |f|_{*\Phi} : \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')\} \quad (\text{V.2.34})$$

mit der Abkürzung

$$|f|_{*\Phi} := \sup_{\varphi \in \Phi} |f * \varphi|. \quad (\text{V.2.35})$$

Behauptung V.2.21. Für alle $p \in [1, \infty]$ gilt die Kegelidealäquivalenz

$$(|\cdot|^{*p} \mathcal{K}_+) \circ |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \simeq_{\text{CI}} |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} . \quad (\text{V.2.36})$$

Beweis. Sei $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ und $k \in \mathcal{K}_+$. Aufgrund der Ungleichung (V.2.5) genügt es $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ und $h \in \mathcal{K}_+$ anzugeben, sodass

$$\| |f|_{*\Phi_2} \blacksquare k \leq |f|_{*\Psi_1} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}, \quad (\text{V.2.37a})$$

$$|f|_{*\Phi_1} \leq \| |f|_{*\Psi_2} \| * h \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{V.2.37b})$$

Gleichung (V.2.37a) wird erfüllt von $\Psi_1 = \{k(x)T_x\varphi : \varphi \in \Phi_2, x \in \text{supp } k\}$. Da mit $Q := \frac{1}{2}[-1, 1]^d$ die Ungleichung $1_{2Q} * 1_{2Q} \geq 1_{2Q}$ gilt wird Gleichung (V.2.37b) für $\Psi_2 = T_{2Q}\Phi_1$ und jedes $h \in \mathcal{K}_+$ mit $h \geq 1_{2Q}$ erfüllt. \square

Theorem V.2.22. Sei $p \in [1, \infty]$. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identitäten

$$\mathcal{X}_T(E) = \mathcal{X}_T(\mathcal{K}'_T(E)) = \mathcal{X}_T(L_T^p(E)). \quad (\text{V.2.38})$$

Beweis. Dies folgt aus Behauptung V.2.21 und Lemma IV.2.8. \square

Korollar V.2.23. Für SRI-Räume E und F gilt die Äquivalenz

$$\mathcal{X}_T(E) = \mathcal{X}_T(F) \quad \Leftrightarrow \quad L_T^\infty(E) \subseteq F \subseteq \mathcal{K}'_T(E). \quad (\text{V.2.39})$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition IV.2.1, Korollar V.2.9 und Theorem V.2.22. \square

V.2.e. Darstellung mit diskreter globaler Komponente

Im folgenden wird der Amalgamraum $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ eingeführt. Theorem V.2.26 zeigt, dass jeder Raum $\mathcal{X}_T(E)$ durch den Raum $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ dargestellt werden kann, wenn λ die zu E assoziierte diskrete globale Komponente ist. Weiter erhält man mit Theorem V.2.28 eine Formel mit der die globale Komponente λ aus $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ gewonnen werden kann.

Definition V.2.24. Sei λ ein STI-Folgenraum. Der Amalgamraum $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ mit lokaler Komponente \mathcal{X} und globaler Komponente λ ist definiert als

$$\mathcal{X}_\tau(\lambda) := \underbrace{(|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')})|_{\mathbb{Z}^d}}_{\lambda} \quad (\text{V.2.40})$$

mit der Menge $(|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')})|_{\mathbb{Z}^d}$ von Halbnormfunktionen $\mathcal{X} \rightarrow \omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} (|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')})|_{\mathbb{Z}^d} &:= (\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} \circ |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \\ &= \{f \mapsto (|f|_{*\Phi})|_{\mathbb{Z}^d} : \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')\}. \end{aligned} \quad (\text{V.2.41})$$

Behauptung V.2.25. Für alle $p \in [1, \infty]$ gelten die Kegelidealäquivalenzen

$$(\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * \mathcal{K}_+) \circ (|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')})|_{\mathbb{Z}^d} \simeq_{\text{CI}} |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')}, \quad (\text{V.2.42})$$

$$(|\cdot|_{*^p \mathcal{K}_+})|_{\mathbb{Z}^d} \circ |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \simeq_{\text{CI}} (|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')})|_{\mathbb{Z}^d}. \quad (\text{V.2.43})$$

Beweis. Gleichung (V.2.42): Sei $k \in \mathcal{K}_+$ und $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Es genügt $h \in \mathcal{K}_+$

und $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ zu finden, sodass

$$|f|_{*\Phi_1} \leq |(|f|_{*\Psi_2})|_{\mathbb{Z}^d}| * h \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}, \quad (\text{V.2.44a})$$

$$|(|f|_{*\Phi_2})|_{\mathbb{Z}^d}| * k \leq |f|_{*\Psi_1} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{V.2.44b})$$

Sei $Q = \frac{1}{2}[-1, 1]^d$. Die Ungleichungen (V.2.44) erfüllt man mit den Wahlen $\Psi_2 = \text{T}_Q\Phi_1$, $h \in \mathcal{K}_+$ mit $h \geq 1_Q$ und $\Psi_1 = \{\|k\|_1 \cdot \text{T}_x\varphi : \varphi \in \Phi_2, x \in \text{supp } k\}$.

Gleichung (V.2.43): Man wendet die Einschränkung $(\cdot)|_{\mathbb{Z}^d}$ auf beiden Seiten der Ungleichungen (V.2.37) an und verwendet (V.2.36). \square

Theorem V.2.26. *Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität*

$$\mathcal{X}_{\text{T}}(E) = \mathcal{X}_{\tau}(\omega_{*\mathcal{D}}(E)). \quad (\text{V.2.45})$$

Sei $p \in [1, \infty]$. Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Identitäten

$$\mathcal{X}_{\tau}(\lambda) = \mathcal{X}_{\text{T}}(\mathcal{K}_{\tau}'(\lambda)) = \mathcal{X}_{\text{T}}(L_{\tau}^p(\lambda)). \quad (\text{V.2.46})$$

Beweis. Unter Verwendung von Lemma IV.2.8 erhält man Gleichung (V.2.45) aus den Gleichungen (V.2.42) und (V.2.15). Analog erhält man Gleichung (V.2.46) aus Gleichung (V.2.43). \square

Behauptung V.2.27. Sei $X \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{E}'$ mit $\varphi \in X \setminus \{0\}$ so, dass

$$(\text{supp } \varphi + \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \cap \text{supp } \varphi = \emptyset. \quad (\text{V.2.47})$$

Dann gilt die Kegelidealäquivalenz

$$|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \circ (\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * X) \simeq_{\text{CI}} \delta_{\mathbb{Z}^d}(|\cdot|) * \mathcal{K}_+. \quad (\text{V.2.48})$$

Beweis. Sei $\theta \in X$ und $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Mit $h := \sup_{\varphi \in \Phi} (|\theta| * |\varphi|) \in \mathcal{K}_+$ erhält man

$$|a * \theta|_{*\Phi} \leq |a| * h \quad \text{für alle } a \in \omega. \quad (\text{V.2.49a})$$

V. Strukturtheorie

Sei nun umgekehrt $k \in \mathcal{K}_+$. Man sucht $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$, sodass

$$|a| * k \leq |a * \theta|_{*\Psi} \quad \text{für alle } a \in \omega. \quad (\text{V.2.49b})$$

Um Gleichung (V.2.49b) zu erfüllen sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen sodass $(M + \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \cap M = \emptyset$ mit $M = \text{supp } \varphi + U$ und sei $0 \neq \psi \in \mathcal{X}'$ mit $\text{supp } \psi \subseteq U$. Dann gibt es $x \in M$ und $\nu > 0$, sodass $|a * (\varphi * \psi)|(x + z) = |a(z)| \cdot \nu$ für alle $a \in \omega$, $z \in \mathbb{Z}^d$. Somit gibt es $N \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\alpha \in \mathbb{R}_+$, sodass Gleichung (V.2.49b) für $\Psi = \{\alpha \cdot T_x \psi : x \in N\}$ erfüllt ist. \square

Theorem V.2.28. *Sei X wie in Behauptung V.2.27. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität*

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E) = \omega_{*X}(\mathcal{X}_T(E)). \quad (\text{V.2.50})$$

Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Identität

$$\lambda = \omega_{*X}(\mathcal{X}_\tau(\lambda)). \quad (\text{V.2.51})$$

Beweis. Wende Lemma IV.2.8 auf Gleichung (V.2.48) an um die Identität (V.2.50) zu erhalten. Die Identität (V.2.51) erhält man aus der Gleichungskette

$$\lambda = \omega_{*\mathcal{D}}(\mathcal{K}_\tau'(\lambda)) = \omega_{*X}(\mathcal{X}_T(\mathcal{K}_\tau'(\lambda))) = \omega_{*X}(\mathcal{X}_\tau(\lambda)), \quad (\text{V.2.52})$$

wo die Identität (V.2.31), dann (V.2.50) mit $E = \mathcal{K}_\tau'(\lambda)$ und dann (V.2.46) verwendet wurde. \square

V.3. Faltungsbilder und Konvolutorenräume

Der Amalgamraum $\mathcal{X}_T(E)$ wird in Unterabschnitt V.3.b als Faltungsbild $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$ und als Konvolutorenraum $\mathcal{O}'_C(\mathcal{X}', E)$ dargestellt, siehe in Definition V.3.9 und V.3.14 und Theorem V.3.13 und V.3.16. Hier ist Y eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' , siehe Definition V.3.6 und Beispiel V.3.8. Der Beweis dieser Resultate basiert auf Faktorisierungseigenschaften der topologischen Faltungsalgebren $(\mathcal{D}, *)$ und $(\mathcal{E}', *)$, die in den Theoremen V.3.2 und V.3.5 von Unterabschnitt V.3.a erhalten werden.

V.3.a. Faktorisierungssätze

Der Beweis der alternativen Darstellungsformeln für die Räume $\mathcal{X}_T(E)$ basiert auf verbesserten Faktorisierungseigenschaften der topologischen Faltungsalgebren $(\mathcal{E}', *)$ und $(\mathcal{D}, *)$ aus [104, 24, 95]. Diese werden in den Theoremen V.3.2 und V.3.5 erhalten. Zur Vereinheitlichung des Vorgehens werden in Definition V.3.6 Faktorisierungsmengen Y für \mathcal{X}' eingeführt. Solche Mengen werden in Beispiel V.3.8 angegeben.

Lemme 2.5, kombiniert mit Remarque 2.6, aus [24, S. 309ff] ergibt:

Lemma V.3.1. *Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $(b_k) \subseteq \mathbb{R}_+$ eine Folge. Dann gibt es eine Folge $(a_k) \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $a_k \leq b_k$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \varphi, \text{supp } \psi \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, sodass*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \varphi^{(2k)} \rightarrow \delta + \psi \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (\text{V.3.1})$$

Das folgende Theorem präzisiert Theorem 3.2 aus [58, S. 6] und wird genauso aus einer leichten Modifikation des Beweises von Théorème 3.1 in [24, S. 311] erhalten.

Theorem V.3.2. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Umgebung von 0. Zu jedem $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}_K)$ gibt es ein $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}_K)$ und $\Theta \in \mathfrak{F}(\mathcal{D}_U)$ mit*

$$\Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Theta). \quad (\text{V.3.2})$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $[-\varepsilon, \varepsilon]^d \subseteq U$. Die Beschränktheit von Φ garantiert, dass

$$M_{\alpha, e, k} := \sup_{\varphi \in \Phi} \|\partial^\alpha \partial_e^{2k} \varphi\|_\infty < \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d, e = 1, \dots, d, k \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{V.3.3})$$

Hier notiert ∂_e die partielle Ableitung in der e -ten Koordinate. Aus Lemma V.3.1 erhält man $(a_k) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0)$ und $\theta, \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \theta, \text{supp } \psi \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, sodass Gleichung (V.3.1) erfüllt ist und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k M_{\alpha, e, k} < \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d, e = 1, \dots, d. \quad (\text{V.3.4})$$

V. Strukturtheorie

Aus Gleichung (V.3.1) erhält man

$$\theta_e * \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \partial_e^{2k} \varphi = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \partial_e^{2k} \theta_e \right) * \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi + \chi_e * \varphi, \quad (\text{V.3.5})$$

wobei hier θ_e, χ_e die Bildmaße von θ, χ unter der kanonischen Injektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ der e -ten Koordinate sind. Aus Gleichung (V.3.4) und (V.3.5) folgert man, dass

$$\theta_e * \psi(\varphi) = \varphi + \chi_e * \varphi \quad \text{mit } \psi(\varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \partial_e^{2k} \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in \Phi. \quad (\text{V.3.6})$$

Aufgrund von Gleichung (V.3.3) und (V.3.4) ist $\psi(\varphi)$ durch eine in \mathcal{D}_K konvergente Reihe definiert. Gleichung (V.3.6) liefert

$$\theta_e * \tilde{\Phi} + \chi_e * \tilde{\Phi} \supseteq \Phi \quad \text{mit } \tilde{\Phi} := \{\psi(\varphi) : \varphi \in \Phi\} \cup -\Phi. \quad (\text{V.3.7})$$

Die Gleichungen (V.3.3) und (V.3.4) implizieren auch, dass $\tilde{\Phi} \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}_K)$. Jede der Funktionen $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_d$ mit $\eta_e \in \{\theta_e, \chi_e\}$, $e = 1, \dots, d$ gehört zu \mathcal{D}_U . Notiert man die Menge dieser Funktionen als Θ und wendet Gleichung (V.3.7) sukzessive in jeder Dimension an, so erhält man Gleichung (V.3.2) für eine Menge $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D}_K)$. \square

Korollar V.3.3. Sei $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$. Es gibt $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$, sodass $\Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Psi)$.

Korollar V.3.4. Sei $\Phi \in \mathfrak{F}(\mathcal{D})$. Es gibt $\Psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{D})$, sodass $\Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Psi)$.

Theorem V.3.5. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und L eine Umgebung von K . Dann gibt es zu jedem $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}'_K)$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $B_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}_L)$ so, dass

$$B \subseteq \sum_{|\alpha|_1 \leq m} \partial^\alpha B_0. \quad (\text{V.3.8})$$

Beweisskizze. Wende Proposition 4.13 in [58, S. 16] auf den metrisierbaren Raum \mathcal{C} für “ F ” an.¹ Dies liefert $B \subseteq \tilde{B}_0 + \Delta^k \tilde{B}_0$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\tilde{B}_0 \in \mathcal{C}'$. Um die Inklusion (V.3.8) mit $B_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ zu erreichen, wendet man nochmals die “Parametrixmethode” wie im Beweis der Implikation “(vi) \Rightarrow (v)” von Theorem 3 aus [23, S. 507] an. Um schließlich die

¹Der Beweis von Proposition 4.13 funktioniert genauso wenn man die einzelne Distribution “ f ” durch eine beschränkte Menge B von Distributionen ersetzt.

Trägerbedingung an B_0 zu erfüllen multipliziert man Gleichung (V.3.8) mit einer glatten Abschneidefunktion und verwendet die Leibniz-Regel für partielle Ableitungen. \square

Definition V.3.6. Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathcal{X}'$ heisst *Faktorisierungsmenge* für \mathcal{X}' , falls für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^d$, jede Umgebung L von K und jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 die folgende Faktorisierungseigenschaft besteht:

$$\forall \Phi \in \mathfrak{B}((\mathcal{X}')_K) \exists \Psi \in \mathfrak{B}((\mathcal{X}' \cap \mathcal{K})_L), \Theta \in \mathfrak{F}(Y_U) : \Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Theta). \quad (\text{V.3.9})$$

Hier wird die Notation $F_K = \{f \in F : \text{supp } f \subseteq K\}$ aus Gleichung (III.3.1) genutzt.

Bemerkung V.3.7. Die Mengensysteme $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ und $\mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ werden in Gleichung (III.3.5) charakterisiert. Der Durchschnitt $\mathfrak{B}(\mathcal{K}) \cap \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ in Gleichung (V.3.9) ergibt $\mathfrak{B}(\mathcal{D})$ im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ und ergibt $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{E}$.

Beispiel V.3.8. Wichtige Beispiele von Faktorisierungsmengen für \mathcal{X}' sind:

1. Im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ erfüllt die Menge $Y = \partial^* \delta = \{\delta^{(\alpha)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$ Gleichung (V.3.9) aufgrund von Theorem V.3.5. Mit der ‘‘Parametrixmethode’’ von L. Schwartz kann man zeigen, dass auch $Y = \{\Delta^k \delta : k \in \mathbb{N}_0\}$ Gleichung (V.3.9) erfüllt. Siehe dafür zum Beispiel Gleichung (VI,6;22) in [104, S. 191] oder Gleichung (17) in [23, S. 506].
2. Im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ garantiert Theorem V.3.2, dass $Y = \mathcal{D}_U$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $U \neq \emptyset$ Gleichung (V.3.9) erfüllt.

Nach Teil 1 und 2 ist $Y = \mathcal{X}'$ eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' . Aus dieser Feststellung erhält man auch die klassischen Faktorisierungssätze

$$\mathcal{E}' = \langle \partial^{\mathbb{N}_0^d} \mathcal{K} \rangle = \langle \partial^\alpha k : \alpha \in \mathbb{N}_0^d, k \in \mathcal{K} \rangle, \quad (\text{V.3.10a})$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D} * \mathcal{D} \rangle = \langle \varphi * \psi : \varphi, \psi \in \mathcal{D} \rangle. \quad (\text{V.3.10b})$$

Gleichung (V.3.10a) folgt aus Théorème XXVI in [104, S. 91]. Gleichung (V.3.10b) ist äquivalent zu Korollar V.3.4 und wurde bewiesen in Théorème 3.1 in [24, S. 311]. Gleichung (V.3.10b) ist auch äquivalent zu Theorem 3 in [95, S. 554].

Zuvor wurde der Faktorisierungssatz $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D} * \mathcal{K} \rangle$ bewiesen, siehe Lémme 1.1 in [15, S. 04]. Leider kann der Beweis dieses Satzes nicht so einfach modifiziert werden um einen kürzeren Beweis für Gleichung (V.3.9) mit $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ und $Y = \mathcal{D}$ zu erhalten.

V.3.b. Charakterisierung von Amalgamräumen

Die im vorherigen Unterabschnitt diskutierte Faktorisierungseigenschaft (V.3.9) von Mengen $Y \subseteq \mathcal{X}'$ wird nun verwendet um die Amalgamräume $\mathcal{X}_T(E)$ als Faltungsurbilder der $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$ oder Konvolutorenräume $\mathcal{O}'_C(\mathcal{X}', E)$ darzustellen. Siehe Definition V.3.9 mit Theorem V.3.13 und Definition V.3.14 mit Theorem V.3.16. Zusammen mit Beispiel V.3.8 vereinheitlichen und verbessern diese Theoreme das Theorem 3.11 aus [58, S. 8f]. Die untere Behauptung V.3.11 und Bemerkung V.3.12 verallgemeinern entsprechend die Propositionen 3.6 und 5.5 aus [58, S. 7, 19]. Denn, nach Beispiel V.3.8 ist die Menge $Y = \mathcal{X}'$ eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' (im Sinne von Gleichung (V.3.9)).

Definition V.3.9. Sei $Y \subseteq \mathcal{E}'$ und F ein lokalkonvexer t.b. Unterraum des Vektorraums \mathcal{D}' . Das *distributionelle Faltungsurbild von F bezüglich Y* ist definiert als der Urbildraum

$$\mathcal{D}'_{*Y}(F) := \underbrace{(\cdot) * Y}_F F \quad (\text{V.3.11})$$

mit der Menge $(\cdot) * Y$ von linearen Abbildungen $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ gegeben durch

$$(\cdot) * Y := \{f \mapsto f * g : g \in Y\}. \quad (\text{V.3.12})$$

Bemerkung V.3.10. Es gilt $\mathcal{D}'_{*Y}(E) \subseteq \mathcal{E}$ falls $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ und $Y \subseteq \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$ eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' ist (im Sinne von Gleichung (V.3.9)). Ähnlich wie für Theorem V.3.13 beweist man, dass $\mathcal{D}'_{*Y}(E)$ unabhängig von Y ist. Dann nutzt man Théorème XIX aus [104, S. 191] und, dass die Menge $\partial^* \delta = \{\delta^{(\alpha)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$ nach Teil 1 aus Beispiel V.3.8 eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' ist.

Behauptung V.3.11. Sei $p \in [1, \infty]$ und $Y \subseteq \mathcal{X}'$ sei eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' . Dann gilt die folgende Kegelidealäquivalenz:

$$|(\cdot) * Y|^p \mathcal{K}_+ = (|\cdot|^p \mathcal{K}_+) \circ ((\cdot) * Y) \succ_{\text{CI}} |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')}. \quad (\text{V.3.13})$$

Beweis. Sei $\varphi \in Y$ und $k \in \mathcal{K}_+$. Mit $\Psi := \{T_x \varphi k(x) : x \in \text{supp } k\} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ gilt

$$|f * \varphi| \blacksquare k \leq |f|_{*\Psi} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{V.3.14a})$$

Sei umgekehrt $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Wähle $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ und $\Theta \in \mathfrak{F}(Y)$ mit $\Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Theta)$, siehe (V.3.9), und sei $h \in \mathcal{K}_+$ mit $|\psi| \leq h$ für alle $\psi \in \Psi$. Dann erhält man

$$|f|_{*\Phi} \leq \sup_{\psi \in \Psi, \theta \in \Theta} |(f * \theta) * \psi| \leq |f|_{*\Theta} * h \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{V.3.14b})$$

Die Kegelidealäquivalenz (V.3.13) folgt nun aus der Ungleichung (V.2.5) und den Abschätzungen aus (V.3.14). \square

Bemerkung V.3.12. Offensichtlich gilt die Kegelidealabschätzung

$$|(\cdot) * Y| = \{f \mapsto |f * \varphi| : \varphi \in Y\} \preceq_{\text{CI}} |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \quad (\text{V.3.15})$$

von Halbnormfunktionen $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$.

Theorem V.3.13. *Sei Y eine Faktorisierungsmenge für \mathcal{X}' . Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität*

$$\mathcal{X}_T(E) = \mathcal{D}'_{*Y}(E). \quad (\text{V.3.16})$$

Beweis. Sei E ein SRI-Raum. Da E solide ist folgt aus der Abschätzung (V.3.15) und Proposition IV.2.2 die Inklusion $\mathcal{D}'_{*Y}(E) \supseteq \mathcal{X}_T(E)$. Andererseits erhält man aus Lemma IV.2.8 und Behauptung V.3.11 die Gleichung $\mathcal{X}_T(E) = \mathcal{D}'_{*Y}(\mathcal{K}'_T(E))$. Dabei nutzt man, dass $\mathcal{D}'_{*Y}(E) \subseteq \mathcal{X}$ nach Bemerkung V.3.10. Theorem V.2.6 liefert $\mathcal{D}'_{*Y}(\mathcal{K}'_T(E)) \supseteq \mathcal{D}'_{*Y}(E)$ und somit die umgekehrte Inklusion. \square

Definition V.3.14. Sei F ein lokalkonvexer t.b. Unterraum von \mathcal{D}' .

1. Es notiert $\mathcal{L}_b(\mathcal{X}', F)$ bzw. $\mathcal{L}_s(\mathcal{X}', F)$ den Raum der stetigen, linearen Operatoren $\mathcal{X}' \rightarrow F$ ausgestattet mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen $\mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ von \mathcal{X}' bzw. der punktweisen Konvergenz.
2. Die Bornologie von $\mathcal{L}_b(\mathcal{X}', F)$ bzw. $\mathcal{L}_s(\mathcal{X}', F)$ besteht aus den Teilmengen L mit der Eigenschaft, dass für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ bzw. $\varphi \in \mathcal{X}'$ die Menge $L(\Phi)$ bzw. $L(\varphi)$ in der Bornologie \mathcal{B}_F von F enthalten ist, unter Verwendung der Notation $L(\Phi) = \{l(\varphi) : l \in L, \varphi \in \Phi\}$.

V. Strukturtheorie

3. Der Raum der Konvolutoren $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}', F)$ von \mathcal{X}' nach F ist der Raum aller Distributionen $f \in \mathcal{D}'$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi \mapsto f * \varphi$ einen stetigen, linearen Operator $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}'|_{\mathcal{D}}}) \rightarrow F$ definiert, vergleiche Definition 12 aus [7, S. 2246]. Hier ist $\mathcal{T}_{\mathcal{X}'|_{\mathcal{D}}}$ die Teilraumtopologie die \mathcal{X}' auf \mathcal{D} induziert.

Bemerkung V.3.15. Für jedes $f \in \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}', F)$ ist die Faltung $\mathcal{E}' \ni \varphi \mapsto f * \varphi \in F$ die stetige Fortsetzung von $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}'|_{\mathcal{D}}})$ nach \mathcal{E}' , da \mathcal{D} dicht in \mathcal{E}' liegt und die Faltung $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ hypostetig ist [52, Prop. 4.9.7, S. 388].

Theorem V.3.16. Jeder SRI-Raum E erfüllt die Identität

$$\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E) = \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}', E), \quad (\text{V.3.17})$$

wenn $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}', E)$ mit der Teilraumtopologie und der Teilraumbornologie des Raums $\mathcal{L}_{\text{b}}(\mathcal{X}', E)$ oder des Raums $\mathcal{L}_{\text{s}}(\mathcal{X}', E)$ ausgestattet wird.

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{X}' \rightarrow E$, $\varphi \mapsto f * \varphi$ ist für jedes $f \in \mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E)$ beschränkt, da

$$\sup\{p(f * \varphi) : \varphi \in \Phi\} \leq p(|f|_{*\Phi}) \quad \text{für alle } p \in \text{clsn } E, \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'). \quad (\text{V.3.18})$$

Da \mathcal{X}' ein bornologischer lokalkonvexer Raum ist, ist diese Abbildung nach Proposition 3.7.1(a) aus [52, S. 220] auch stetig. Aus Bemerkung V.3.15 folgt

$$\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E) \subseteq \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}', E) \subseteq \mathcal{D}'_{*\mathcal{X}'}(E), \quad (\text{V.3.19})$$

zunächst im Sinne von Mengen. Für alle $\varphi \in \Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ und $F \subseteq \mathcal{X}$ gilt

$$|F * \varphi| \subseteq |F * \Phi| \subseteq \bigcup \{\text{sol}(|f|_{*\Phi}) : f \in F\} \quad (\text{V.3.20})$$

mit $\text{sol}(\cdot)$ der soliden Hülle in E (siehe Gleichung (III.1.14a) in Unterabschnitt III.1.b). Aus den Inklusionen (V.3.20) und der Solidität der Topologie \mathcal{T}_E und der Bornologie \mathcal{B}_E von E folgt, dass (V.3.19) auch im Sinne von t.b. Inklusionen gilt. Theorem V.3.13 erzwingt schließlich Gleichheit in Gleichung (V.3.19). \square

V.4. Isomorphismen zu Vektorfolgenräumen

Die Amalgamräume $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ mit $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{K}'\} \cup \{L^p : p \in [1, \infty]\}$ werden in diesem Abschnitt durch Amalgamräume von Vektorfolgen $\lambda\{X\}$ dargestellt, im Sinne von t.b. Isomorphismen. In Unterabschnitt V.4.a werden die Räume $\lambda\{X\}$ definiert und die Bijektion $\lambda \leftrightarrow \lambda\{X\}$ wird für nichttriviale X gezeigt. Auf die Räume $L^p_\tau(\lambda)$ und $\mathcal{K}'_\tau(\lambda)$ wird in Unterabschnitt V.4.b die naive Gitterzellenzerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{Z}^d + \frac{1}{2}[-1, 1[$ angewendet. Zur Darstellung der Amalgamräume $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ als Doppelfolgenräume $\lambda\{\mu\}$ wird dann in Unterabschnitt V.4.c die glatte Gitterzellenzerlegung von C. Bargetz [4] verwendet. Abschließend wird in Unterabschnitt V.4.d gezeigt, dass der topologische Isomorphismus $\lambda\{\mu\} \cong \lambda \widehat{\otimes} \mu$ für alle vollständigen STI-Folgenräume besteht.

V.4.a. Amalgamräume von Vektorfolgen

Sei X ein Vektorraum, f eine Funktion $\mathbb{Z}^d \rightarrow X$ und $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Dann ist die Komposition $p \circ f$ eine nichtnegative Funktion $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Element von ω_+ . Da die Ordnung auf ω punktweise erklärt ist folgt zudem, dass die Abbildung $f \mapsto p \circ f$ eine Halbnormfunktion $\omega\{X\} \rightarrow \omega$ ist. Aufbauend auf dieser Feststellung ist

Definition V.4.1. Sei λ ein STI-Folgenraum und X ein lokalkonvexer Raum. Definiere den *Amalgamfolgenraum* $\lambda\{X\}$ mit *lokaler Komponente* X und *globaler Komponente* λ als

$$\lambda\{X\} := \underleftarrow{\text{csn } X \circ (\cdot)} \lambda \quad (\text{V.4.1})$$

mit der Menge $\text{csn } X \circ (\cdot)$ von Halbnormfunktionen $\omega\{X\} \rightarrow \omega$ gegeben durch

$$\text{csn } X \circ (\cdot) := \{f \mapsto p \circ f : p \in \text{csn } X\}. \quad (\text{V.4.2})$$

Theorem V.4.2. Sei X ein Hausdorffscher, lokalkonvexer Raum und $x \in X$, $x \neq 0$. Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt

$$\lambda = \underleftarrow{(\cdot) \otimes x} \lambda\{X\} \quad (\text{V.4.3})$$

V. Strukturtheorie

mit der linearen Abbildung $(\cdot) \otimes x: \omega \rightarrow \omega\{X\}$ gegeben durch

$$(\cdot) \otimes x := (a \mapsto a \otimes x). \quad (\text{V.4.4})$$

Hier wird $a \otimes x$ als die Funktion $\mathbb{Z}^d \rightarrow X$, $z \mapsto a(z) \cdot x$ aufgefasst.

Beweis. Dies folgt aus der Gleichung $p(a(z) \cdot x) = |a(z)| \cdot p(x)$ für alle $z \in \mathbb{Z}^d$, $a \in \omega$ und $p \in \text{lsn } X$. Denn es gibt $p \in \text{lsn } X$ mit $p(x) \neq 0$. \square

V.4.b. Gitterzellenzerlegung solider Amalgamräume

Basierend auf der naiven Gitterzellenzerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{Z}^d + Q$ mit der halboffenen, Einheitsgitterzelle $Q := [0, 1[^d$ werden im folgenden t.b. Isomorphismen $L_\tau^p(\lambda) \cong \lambda\{L_Q^p\}$ aufgestellt. Siehe unteres Theorem V.4.6.

Definition V.4.3. Notiere für $Q := [0, 1[^d$ die Räume

$$\mathcal{K}'_Q := \{\mu \in \mathcal{K}' : |\mu|(\mathbb{R}^d \setminus Q) = 0\}, \quad (\text{V.4.5a})$$

$$L^p_Q := L^p \cap \mathcal{K}'_Q \quad (\text{V.4.5b})$$

und definiere die Abbildungen

$$I_Q: \mathcal{K}' \rightarrow \omega\{\mathcal{K}'_Q\}, \quad f \mapsto I_Q(f) := (1_Q \cdot T_{-z}f)_{z \in \mathbb{Z}^d}, \quad (\text{V.4.6a})$$

$$J_Q: \omega\{\mathcal{K}'_Q\} \rightarrow \mathcal{K}', \quad g \mapsto J_Q(g) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} T_z(g(z)). \quad (\text{V.4.6b})$$

Bemerkung V.4.4. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildungen I_Q und J_Q zueinander inverse lineare Isomorphismen zwischen \mathcal{K}' und $\omega\{\mathcal{K}'_Q\}$ definieren. Per Einschränkung erhält man Isomorphismen zwischen L^p_{lok} und $\omega\{L^p_Q\}$ für alle $p \in [1, \infty]$.

Behauptung V.4.5. Für alle $p \in [1, \infty]$ kommutiert das folgende Diagramm nach

Kegelidealhüllen (im Sinne von Definition IV.2.9, Teil 2):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \omega & \xleftarrow{\quad} & \omega \\
 \uparrow |\cdot| *^p \mathcal{K}_+ & & (\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} & & |\cdot| * \phi_+ \\
 L_{\text{lok}}^p & \xrightleftharpoons[\text{J}_Q]{\text{I}_Q} & \omega\{L_Q^p\} & & \uparrow \|\cdot\|_p \circ (\cdot)
 \end{array} \tag{V.4.7}$$

Im Fall $p = 1$ gilt dies auch für \mathcal{K}' anstatt L_{lok}^1 .

Beweis. Sei $k_1 \in \mathcal{K}_+$. Dann gibt es $C \in \mathbb{R}_+$ und $K \subseteq \mathbb{Z}^d$ endlich, sodass

$$\begin{aligned}
 (|f| *^p k_1)(0) &= \|\check{k}_1 \cdot f\|_p \\
 &\leq C \cdot \sum_{w \in K} \|1_{w+Q} \cdot f\|_p = ((\|\cdot\|_p \circ \text{I}_Q f) * h_1)(0)
 \end{aligned} \tag{V.4.8a}$$

für alle $f \in L_{\text{lok}}^p$. Hier setzt man $h_1 := C \cdot 1_K \in \phi_+$.

Sei umgekehrt $k_2 \in \phi_+$. Dann findet man auf ähnliche Weise ein $h_2 \in \mathcal{K}_+$, sodass

$$((\|\cdot\|_p \circ \text{I}_Q f) * k_2)(0) \leq (|f| *^p h_2)(0) \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^p. \tag{V.4.8b}$$

Ein Translationsinvarianzargument, wie im Beweis von Behauptung V.4.8, liefert

$$|f| *^p k_1 \leq (\|\cdot\|_p \circ \text{I}_Q f) * h_1 \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^p, \tag{V.4.9a}$$

$$(\|\cdot\|_p \circ \text{I}_Q f) * k_2 \leq |f| *^p h_2 \quad \text{für alle } f \in L_{\text{lok}}^p. \tag{V.4.9b}$$

In Verbindung mit einem Bijektionsargument, wie im Beweis von Behauptung V.4.8, implizieren die Ungleichungen (V.4.9) die Kommutativität des Diagramms (V.4.7). \square

Theorem V.4.6. *Sei λ ein lokalkonvexer t.b. STI-Folgenraum und $p \in [1, \infty]$. Dann induzieren die Abbildungen I_Q und J_Q die t.b. Isomorphismen*

$$\text{I}_Q|_{L_{\tau}^p(\lambda)} : L_{\tau}^p(\lambda) \rightarrow \lambda\{L_Q^p\}, \tag{V.4.10a}$$

$$\text{J}_Q|_{\lambda\{L_Q^p\}} : \lambda\{L_Q^p\} \rightarrow L_{\tau}^p(\lambda). \tag{V.4.10b}$$

In diesen Gleichungen kann L^p auch durch \mathcal{K}' ersetzt werden.

V. Strukturtheorie

Beweis. Das Diagramm (V.4.7) und die Eigenschaft 3 aus Proposition V.1.8 implizieren

$$L_\tau^p(\lambda) = \underset{\leftarrow}{I_Q} \left(\underset{\leftarrow}{\|\cdot\|_p} \circ (\cdot) \left(\underset{\leftarrow}{|\cdot| * \phi_+} \lambda \right) \right) = \underset{\leftarrow}{I_Q} \left(\lambda \{L_Q^p\} \right). \quad (\text{V.4.11})$$

Wegen Lemma IV.2.10 ist die Abbildung (V.4.10a) ein Isomorphismus und ihr inverser Isomorphismus ist gegeben durch (V.4.10b). Analog geht man für \mathcal{H}' vor. \square

V.4.c. Darstellungen durch Doppelfolgenräume

Sei im folgenden $(\mathcal{X}, \mu) \in \{(\mathcal{D}', s'), (\mathcal{E}, s)\}$, gemäß Tabelle V.0.1. Es wird gezeigt, dass jede translationsinvariante Folgenraumdarstellung von \mathcal{X} , im Sinne von Definition V.4.7, für jeden STI-Folgenraum λ einen t.b. Isomorphismus von $\mathcal{X}_\tau(\lambda)$ auf $\lambda\{\mu\}$ liefert, siehe Theorem V.4.9. Schließlich wird in Beispiel V.4.10 erläutert, wie hier ein von C. Bargetz konstruierter Isomorphismus [3] angewendet werden kann.

Definition V.4.7. Sei $I_{\mathcal{X}}$ ein topologischer Isomorphismus

$$I_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \omega\{\mu\} \quad (\text{V.4.12})$$

mit der Eigenschaft

$$T_z \circ I_{\mathcal{X}} = I_{\mathcal{X}} \circ T_z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{V.4.13})$$

Dann wird $I_{\mathcal{X}}$ *translationsinvariante Folgenraumdarstellung* für \mathcal{X} genannt. Der inverse Isomorphismus von $I_{\mathcal{X}}$ wird dann notiert als

$$J_{\mathcal{X}}: \omega\{\mu\} \rightarrow \mathcal{X}. \quad (\text{V.4.14})$$

Behauptung V.4.8. Sei $I_{\mathcal{X}}$ eine translationsinvariante Folgenraumdarstellung für \mathcal{X} . Dann kommutiert das folgende Diagramm nach Kegeldealhüllen (im Sinne von

Definition IV.2.9, Teil 2):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \omega \longleftarrow \omega \\
 \uparrow |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} & \begin{array}{c} (\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} \\ \downarrow \\ |\cdot| \blacksquare \phi_+ \end{array} & \uparrow \text{csn } \mu \circ (\cdot) \\
 \mathcal{X} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad I_{\mathcal{X}} \quad} \\ \xleftarrow{\quad J_{\mathcal{X}} \quad} \end{array} & \omega\{\mu\}
 \end{array} \tag{V.4.15}$$

Beweis. Sei $K \subseteq \mathbb{Z}^d$ endlich, $p \in \text{csn } \mu$ und $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Aufgrund der Stetigkeit von $I_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \omega\{\mu\}$ gibt es $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$, sodass

$$\begin{aligned}
 ((p \circ I_{\mathcal{X}} f) \blacksquare 1_{-K})(0) &= \sup \{p(I_{\mathcal{X}} f(z)) : z \in K\} \\
 &\leq \sup_{\psi \in \Psi} |\langle f, \check{\psi} \rangle| = |f|_{*\Psi}(0)
 \end{aligned} \tag{V.4.16a}$$

für alle $f \in \mathcal{X}$. Analog gibt es $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ endlich und $q \in \text{csn } \mu$, sodass

$$|f|_{*\Phi}(0) \leq ((q \circ I_{\mathcal{X}} f) \blacksquare 1_{-L})(0) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \tag{V.4.16b}$$

Alle Operationen die in den Ungleichungen (V.4.16) auftreten kommutieren mit den Translationsoperatoren T_z , $z \in \mathbb{Z}^d$. Dies gilt allgemein für den Kompositionsoperator $p \circ (\cdot)$, die Supremumsbildung \sup , die Absolutwertbildung $|\cdot|$, die Supremalfaltung \blacksquare und die Faltung $*$. Der Isomorphismus $I_{\mathcal{X}}$ erfüllt dies nach der Voraussetzung (V.4.13). Ersetzt man also f durch $T_{-z}f$ mit $z \in \mathbb{Z}^d$ in den Ungleichungen (V.4.16), so wird dadurch effektiv 0 durch z ersetzt. In argumentfreier Darstellung lauten die daraus erhaltenen Ungleichungen

$$(p \circ I_{\mathcal{X}} f) \blacksquare 1_{-K} \leq (|f|_{*\Psi})|_{\mathbb{Z}^d}, \quad (|f|_{*\Phi})|_{\mathbb{Z}^d} \leq (q \circ I_{\mathcal{X}} f) \blacksquare 1_{-L} \tag{V.4.17}$$

für alle $f \in \mathcal{X}$. Da $J_{\mathcal{X}}$ die inverse Bijektion zu $I_{\mathcal{X}}$ ist, folgt auch

$$(p \circ g) \blacksquare 1_{-K} \leq (|J_{\mathcal{X}}g|_{*\Psi})|_{\mathbb{Z}^d}, \quad (|J_{\mathcal{X}}g|_{*\Phi})|_{\mathbb{Z}^d} \leq (q \circ g) \blacksquare 1_{-L} \tag{V.4.18}$$

für alle $g \in \omega\{\mu\}$. Die Ungleichungen (V.4.17) und (V.4.18) drücken aus, dass das Diagramm (V.4.15) kommutativ ist. \square

Theorem V.4.9. *Sei λ ein STI-Folgenraum und $I_{\mathcal{X}}$ eine translationsinvariante Folgenraumdarstellung von \mathcal{X} . Dann induzieren $I_{\mathcal{X}}$ und $J_{\mathcal{X}}$ ein Paar von t.b. Isomorphismen*

$$I_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_{\tau}(\lambda)} : \mathcal{X}_{\tau}(\lambda) \rightarrow \lambda\{\mu\}, \quad (\text{V.4.19a})$$

$$J_{\mathcal{X}}|_{\lambda\{\mu\}} : \lambda\{\mu\} \rightarrow \mathcal{X}_{\tau}(\lambda). \quad (\text{V.4.19b})$$

Beweis. Das Diagramm (V.4.15) und die Eigenschaft 5 aus Proposition V.1.8, in Verbindung mit der Äquivalenz (V.1.3), liefern

$$\mathcal{X}_{\tau}(\lambda) = \underleftarrow{I_{\mathcal{X}}} \left(\underleftarrow{\text{csn } \mu \circ (\cdot)} \left(\underleftarrow{|\cdot| \blacksquare \phi_+} \lambda \right) \right) = \underleftarrow{I_{\mathcal{X}}} (\lambda\{\mu\}). \quad (\text{V.4.20})$$

Somit folgt aus Lemma IV.2.10, dass die Abbildung (V.4.19a) ein Isomorphismus ist und dessen Inverse durch Gleichung (V.4.19b) gegeben ist. \square

Beispiel V.4.10. In [3] wurde ein topologischer Isomorphismus konstruiert der eine glatte Funktion auf \mathbb{R}^d in eine Folge von Whitney-Funktionen auf $[0, 1]^d$ zerlegt. Damit wurden in [3, 4] die Valdivia-Vogt-Tabellen als kommutatives Diagramm interpretiert. Wie im folgenden erläutert wird, erhält man aus der Konstruktion in [3] Isomorphismen die mit Gittertranslationen kommutieren, genau wie in Definition V.4.7.

Setze $B_1 := [0, 1]^d \setminus [0, 1[{}^d$. Sei \mathcal{E}_0 der Raum der Whitney-Funktionen auf $[0, 1]^d$ die Flach auf B_1 sind, das heisst

$$\mathcal{E}_0 := \left\{ f \in \mathcal{E}([0, 1]^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : (\partial^\alpha f)|_{B_1} = 0 \right\}, \quad (\text{V.4.21})$$

wie in Definition 2.7 aus [3, S. 13]. Hier ist $\mathcal{E}([0, 1]^d)$ der Raum der Einschränkungen von glatten Funktionen auf \mathbb{R}^d nach $[0, 1]^d$, das heisst

$$\mathcal{E}([0, 1]^d) = \left\{ f|_{[0, 1]^d} : f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \right\}. \quad (\text{V.4.22})$$

In Kapitel 3 von [3] wurde ein topologischer Isomorphismus $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \omega\{\mathcal{E}_0\}$ konstruiert (Proposition 3.2). Weiter existiert nach Proposition 2.8 aus [3] ein topologischer

Isomorphismus $\Psi: \mathcal{E}_0 \rightarrow s(\mathbb{Z}^d)$.² Somit erhält man einen topologischen Isomorphismus

$$I_{\mathcal{E}} := \left(\prod_{z \in \mathbb{Z}^d} \Psi \right) \circ \Phi: \mathcal{E} \rightarrow \omega\{s\}. \quad (\text{V.4.23})$$

Nach Proposition 3.2 erhält man per Einschränkung einen topologischen Isomorphismus

$$I_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow s(\mathbb{Z}^d). \quad (\text{V.4.24})$$

Da s reflexiv ist, mit Dualraum s' , sind $s(\mathbb{Z}^d)$ und $\omega\{s'\}$ nach Satz 24.3 aus [75, S. 29] ebenfalls reflexiv und zueinander in Dualität. Nach Satz 23.30 aus [75, S. 26] liefert die Transponierung somit einen topologischen Isomorphismus

$$J_{\mathcal{D}'} := (I_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{D}})' : \omega\{s'\} \rightarrow \mathcal{D}'. \quad (\text{V.4.25})$$

Aus der Konstruktion geht unmittelbar hervor (siehe zweite Gleichung auf Seite 14 in [3]), dass $I_{\mathcal{E}}$ mit Gittertranslationen T_z , $z \in \mathbb{Z}^d$ kommutiert. Ohne Berücksichtigung der Definitionsbereiche gilt $(T_z)' = (T_z)^{-1} = T_{-z}$. Somit überträgt sich die Gittertranslationsinvarianz auf $J_{\mathcal{D}'}$ und somit auf $I_{\mathcal{D}'} := (J_{\mathcal{D}'})^{-1}$.

V.4.d. Vervollständigte Tensorprodukte

In Theorem V.4.12 werden die lokalkonvexen Räume $\lambda\{s\}$ und $\lambda\{s'\}$, die in Definition V.4.1 eingeführt wurden, mit den vervollständigten Tensorprodukten $\lambda \widehat{\otimes} s$ und $\lambda \widehat{\otimes} s'$ identifiziert falls λ ein vollständiges, lokalkonvexes Ideal von ω ist. Aus bekannten Permanenzeigenschaften von vervollständigten Tensorprodukten [53] wird dann die Proposition V.4.13 hergeleitet. Die Betrachtung der Bornologien wird in diesem Unterabschnitt ausgeklammert.

Sei λ ein lokalkonvexes Ideal von ω und X ein beliebiger lokalkonvexer Raum. Das Tensorprodukt $\lambda \otimes X$ von λ und X kann auf kanonische Weise mit einem Untervektor-

²Die Isomorphie $s(\mathbb{N}) \cong s(\mathbb{Z}^d)$ erhält man durch Umordnung von Folgen mittels der Bijektion $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d$ mit der Eigenschaft, dass $k \mapsto |\pi(k)|$ monoton wachsend ist.

V. Strukturtheorie

raum von $\lambda\{X\}$ identifiziert werden:

$$\lambda \otimes X \cong \{v \in \lambda\{X\} : v(\mathbb{Z}^d) \text{ ist endlichdimensional}\}. \quad (\text{V.4.26})$$

Unter Verwendung der Identifikation

$$a \otimes x \cong ax = (a(z)x : z \in \mathbb{Z}^d) \quad \text{für } a \in \lambda, x \in X, \quad (\text{V.4.27})$$

kann jedes $v \in \lambda \otimes X$ dargestellt werden als

$$v = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \text{mit } a_i \in \lambda, x_i \in X, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{V.4.28})$$

Zu jedem Tupel $(p, q) \in \text{csn } \lambda \times \text{csn } X$ können die Halbnormen $\varepsilon_{p,q}$ und $\pi_{p,q}$ auf $\lambda \otimes X$ assoziiert werden. Für $v \in \lambda \otimes X$ definiert man dazu

$$\varepsilon_{p,q}(v) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a'(a_i) x'(x_i) \right| : (\text{V.4.28}), \begin{array}{l} a' \in \lambda', \quad |a'(\cdot)| \leq p \\ x' \in X', \quad |x'(\cdot)| \leq q \end{array} \right\}, \quad (\text{V.4.29a})$$

$$\pi_{p,q}(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p(a_i) q(x_i) : (\text{V.4.28}) \right\}. \quad (\text{V.4.29b})$$

Hier notiert λ' bzw. X' den Dualraum von λ bzw. X . Die Gleichungsklammer (V.4.28) drückt aus, dass sich das Supremum bzw. Infimum über alle Darstellungen von v der Form (V.4.28) erstreckt. Die von all diesen Halbnormen $\varepsilon_{p,q}$ bzw. $\pi_{p,q}$ erzeugte Topologie auf $\lambda \otimes X$ wird als *injektive* bzw. *projektive Topologie* bezeichnet und notiert durch $\mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \varepsilon}$ bzw. $\mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \pi}$. Dies entspricht der Definition 7.1 aus [89, S. 108] und den Definitionen aus Kapitel 15 und 16 von [53].

Proposition V.4.11. *Sei λ ein lokalkonvexes Ideal des Vektorverbands ω und X ein lokalkonvexer Raum. Dann bestehen die Inklusionen*

$$\mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \varepsilon} \subseteq \mathcal{T}_{\lambda\{X\}}|_{\lambda \otimes X} \subseteq \mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \pi}. \quad (\text{V.4.30})$$

Beweis. Sei $v \in \lambda \otimes X$ von der Form (V.4.28), $a' \in \lambda'$ und $x' \in X'$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^n a'(a_i)x'(x_i) = a' \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x'(x_i) \right) = a'(x' \circ v). \quad (\text{V.4.31})$$

Sei nun $p \in \text{clsn } \lambda$ und $q \in \text{csn } X$. Unter den Annahmen $|a'(\cdot)| \leq p$ und $|x'(\cdot)| \leq q$ erhält man die Ungleichungen

$$\left| \sum_{i=1}^n a'(a_i)x'(x_i) \right| \leq p(x' \circ v) \leq p(|x' \circ v|) \leq p(q \circ v). \quad (\text{V.4.32a})$$

Umgekehrt liefert die Dreiecksungleichung

$$p(q \circ v) \leq p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|q(x_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n p(a_i)q(x_i). \quad (\text{V.4.32b})$$

Aus einem Vergleich der Ungleichungen (V.4.32) mit den Definitionen (V.4.29) folgert man die Inklusionen (V.4.30). \square

Sei wieder λ ein lokalkonvexes Ideal von ω und diesmal X ein *nuklearer* lokalkonvexer Raum (siehe Definition 4.1.2 aus [89, S. 70]). Nach Proposition 7.3.2 aus [89, S. 113] stimmt dann die projektive mit der injektiven Topologie überein, das heisst

$$\mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \varepsilon} = \mathcal{T}_{\lambda \otimes X, \pi}. \quad (\text{V.4.33})$$

In diesem Fall notiert man diese übereinstimmenden Topologien durch $\mathcal{T}_{\lambda \otimes X}$.

Sei μ ein vollständiges, nukleares, lokalkonvexes Ideal von ω , sodass $\phi \subseteq \mu$ eine dichte Teilmenge ist. Auf diese Räume lassen sich die Charakterisierungen aus Theorem 6.1.2 und Theorem 10.2.2 aus [89, S. 98, 174] anwenden. Aufgrund dieser Charakterisierungen sind die Räume μ als lokalkonvexe Räume identisch zu den gewichteten ℓ^1 -Räumen

$$\mu = \ell_W^1 := \underleftarrow{(\cdot) \cdot W} \ell^1 \quad (\text{V.4.34a})$$

mit einem Kegelideal $W \subseteq \omega_+$ mit der Eigenschaft

$$\forall w \in W \exists u \in \ell_+^1, v \in W : w \leq u \cdot v \quad (\text{V.4.34b})$$

V. Strukturtheorie

mit der Menge $(\cdot) \cdot W$ positiver linearer Abbildungen $\omega \rightarrow \omega$ gegeben durch

$$(\cdot) \cdot W := \{a \mapsto a \cdot w : w \in W\}. \quad (\text{V.4.35})$$

Ist also $p \in \text{csn } \mu$, so gibt es $q \in \text{csn } \mu$ und $w \in \ell_+^1$, sodass

$$|a(z)|p(1_z) \leq w(z)q(a) \quad \text{für alle } a \in \mu, z \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{V.4.36})$$

Standardbeispiele für solche Räume sind der Raum s der schnell fallenden Folgen und der Raum s' der langsam wachsenden Folgen.

Theorem V.4.12. *Sei λ ein vollständiges, lokalkonvexes Ideal von ω und μ ein Folgenraum der Form (V.4.34). Dann besteht die Isomorphie lokalkonvexer Räume*

$$\lambda\{\mu\} \cong \lambda \widehat{\otimes} \mu. \quad (\text{V.4.37})$$

Hier notiert $\lambda \widehat{\otimes} \mu$ die topologische Vervollständigung von $(\lambda \otimes \mu, \mathcal{T}_{\lambda \otimes \mu})$.

Beweis. Wegen Proposition V.4.11 und weil $\lambda\{\mu\}$ nach Proposition VI.2.16 vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass $\lambda \otimes \mu$ dicht in $\lambda\{\mu\}$ liegt. Sei dazu $v \in \lambda\{\mu\}$. Definiere die Approximationen v_R als

$$v_R := \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ |z| \leq R}} v(\cdot)(z) \cdot 1_z \quad \text{für } R \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{V.4.38})$$

Es ist klar, dass das Bild $v_R(\mathbb{Z}^d)$ endlichdimensional ist.

Sei $p \in \text{csn } \mu$. Dann gibt es $q \in \text{csn } \mu$ und $w \in \ell_+^1$, sodass (V.4.36) erfüllt ist. Wendet man die Ungleichung (V.4.36) punktweise an, so erhält man

$$|v(\cdot)(z)| \cdot p(1_z) \leq w(z) \cdot q \circ v \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{V.4.39})$$

Die Dreiecksungleichung und eine Summation über $z \in Z$ liefert

$$p \left(\sum_{z \in Z} v(\cdot)(z) \cdot 1_z \right) \leq (q \circ v) \sum_{z \in Z} w(z) \quad \text{für alle } Z \subseteq \mathbb{Z}^d. \quad (\text{V.4.40})$$

Wegen $q \circ v \in \lambda$ folgt daraus $v_R \in \lambda\{\mu\}$, und somit $v_R \in \lambda \otimes \mu$, für alle $R \in \mathbb{R}_+$.

Sei nun $r \in \text{clsn } \lambda$. Wendet man r auf die Ungleichung (V.4.40) an erhält man

$$r \left(p \left(\sum_{z \in Z} v(\cdot)(z) \cdot 1_z \right) \right) \leq r(q \circ v) \sum_{z \in Z} w(z) < \infty \quad \text{für alle } Z \subseteq \mathbb{Z}^d, \quad (\text{V.4.41})$$

wegen $w \in \ell_+^1$ und $q \circ v \in \lambda\{\mu\}$. Ungleichung (V.4.41) impliziert, dass

$$r(p \circ (v - v_R)) \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \quad (\text{V.4.42})$$

Damit ist gezeigt, dass $v_R \rightarrow v$ bezüglich $\mathcal{T}_{\lambda\{\mu\}}$ für $R \rightarrow \infty$. □

Proposition V.4.13. *Sei λ ein vollständiges, lokalkonvexes Ideal von ω .*

1. *Ist λ ein Fréchet-(Montel)-Raum, so ist auch $\lambda\{s\}$ ein Fréchet-(Montel)-Raum.*
2. *Ist λ ein (tonnelierter, Montelscher) (DF)-Raum, so ist auch $\lambda\{s'\}$ ein (tonnelierter, Montelscher) (DF)-Raum.*
3. *Ist λ nuklear, so sind auch $\lambda\{s\}$ und $\lambda\{s'\}$ nuklear.*

Beweis. Die Räume s und s' sind von der Form (V.4.34), also vollständig und nuklear. Damit sind sie auch Schwartz-Räume und somit auch Montel-Räume. Die Räume s und s' sind auch tonneliert und bornologisch. Wegen Theorem V.4.12 können Permanenzeigenschaften von vervollständigten projektiven und injektiven Tensorprodukten ausgenutzt werden:

1. ...folgt aus Proposition 16.1.2 und Proposition 16.4.5 von [53, S. 345, 355].
2. ...folgt aus Proposition 15.6.8 von [53, S. 338].³
3. ...folgt aus Corollary 21.2.3 von [53, S. 483].

□

³Hier wird verwendet, dass die Vervollständigung eines tonnelierten Raums ebenfalls tonneliert ist, nach Teil (ii) von Corollary 4.2.2 in [14, S. 103].

VI. Eigenschaftsvererbung

Die globalen Komponenten $E \in \mathbf{SRI}$ und $\lambda \in \mathbf{sti}$ aus Abschnitt V.1 vererben zahlreiche Eigenschaften auf die assoziierten Amalgamräume $\mathcal{L}_T(E)$, $\mathcal{L}_\tau(\lambda)$ und $\lambda\{X\}$ aus den Abschnitten V.2 und V.4. Die meisten Eigenschaften wirken auch auf die diskreten Komponenten λ zurück, manche sogar auf E . Als lokale Komponenten \mathcal{L} werden hier \mathcal{D}' , \mathcal{E} , L^p , $p \in [1, \infty]$ und \mathcal{K}' betrachtet und X ist ein lokalkonvexer Raum. Wie in Kapitel V notiert \mathcal{X} entweder \mathcal{D}' oder \mathcal{E} , siehe auch Tabelle V.0.1.

Die Untersuchungen wurden in vier Bereiche unterteilt. Abschnitt VI.1 untersucht die Konstruktion gewichteter Räume $F \mapsto F_W$ in Bezug auf Amalgamräume. Dies ergibt Transformationsregeln für Gewichtsmengen W unter Amalgamraumbildungen und somit die Lösung von Problem II.2.2 in Unterabschnitt II.2.c. Die Regeln werden in den Theoremen VI.1.26 und VI.1.28 zusammengefasst.

In Abschnitt VI.2 werden die Ausschöpfbarkeit von lokalkonvexen Funktionenräumen auf \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d , siehe Definition VI.2.2, und die topologische Vollständigkeit betrachtet. Dies wird zur Vorbereitung auf Abschnitt VI.3 benötigt. Theorem VI.2.11 und Proposition VI.2.16 liefern die Vererbungsregeln für diese Eigenschaften.

In Abschnitt VI.3 werden die relativ kompakten Teilmengen vollständiger, ausschöpfbarer Amalgamräume charakterisiert. Dabei wird die globale Gestalt durch “Straffheit” charakterisiert, im Sinne von Definition VI.3.1. Für Räume der Form $\mathcal{X}_T(E)$ (und, spezieller, für $\mathcal{X}_T(L_W^1)$) wird in Theorem VI.3.19 eine Reihe expliziter Kriterien für relativ (schwache) Kompaktheit angegeben. Dies löst Problem II.4.8 aus Unterabschnitt II.4.a.

Abschnitt VI.4 untersucht die Eigenschaftsvererbung bilinearer Faltungsabbildungen von allgemeinen Räumen $E \subseteq \mathcal{D}'$ auf Faltungsurbilder $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ und von STI-Folgenräumen λ auf Amalgamräume $\mathcal{D}'_\tau(\lambda)$. Dies beweist Theorem II.2.1 in Unterabschnitt II.2.b und löst Problem II.3.2 in Unterabschnitt II.3.b. Im Zuge dessen werden nützliche Alternativen zur Dreiecksungleichung für die Faltung von Distributionen erhalten.

VI.1. Gewichtung von Amalgamräumen

In diesem Abschnitt wird untersucht in wie fern die in Kapitel V studierten Amalgambildungen $E \mapsto \mathcal{L}_T(E)$, $\lambda \mapsto \mathcal{L}_\tau(\lambda)$ und $\lambda \mapsto \lambda\{X\}$ mit Gewichtungen von Räumen $F \mapsto F_W$ kommutieren. Dies resultiert in Transformationsregeln für die Gewichtsmengen W die in den Theoremen VI.1.26 und VI.1.28 von Unterabschnitt VI.1.d zusammengefasst werden. Hierbei wird die Gewichtung von Räumen wie folgt in den Formalismus der Urbildraumoperatoren aus Kapitel IV eingeordnet:

Definition VI.1.1. Sei X ein lokalkonvexer Raum, W eine Teilmenge von \mathcal{C} , \mathcal{E} bzw. ω und F ein lokalkonvexer t.b. Unterraum des Vektorraums \mathcal{K}' , \mathcal{D}' bzw. $\omega\{X\}$. Dann wird der *gewichtete Raum* F_W definiert als der Urbildraum

$$F_W := \underbrace{(\cdot) \cdot W}_F \quad (\text{VI.1.1a})$$

mit der Menge $(\cdot) \cdot W$ linearer Endomorphismen von \mathcal{K}' , \mathcal{D}' bzw. $\omega\{X\}$ definiert als

$$(\cdot) \cdot W := \{f \mapsto f \cdot w : w \in W\}. \quad (\text{VI.1.1b})$$

Die Transformationsregeln werden wie folgt erarbeitet: In Unterabschnitt VI.1.a werden kontinuierliche und diskrete moderierte Kegelideale zur Gewichtung von SRI-Räumen oder STI-Folgenräumen definiert und zueinander in Korrespondenz gesetzt, siehe in den Definitionen VI.1.2 und VI.1.4. Unterabschnitt VI.1.b untersucht Stetigkeitseigenschaften der Multiplikation mit uniform beschränkten Funktionen als Endomorphismus von SRI-Räumen, STI-Folgenräumen und Amalgamräumen mit lokaler Komponente \mathcal{X} . Als Hilfsmittel werden die gewichteten Bälle glatter Funktionen $B(w; C)$ in Definition VI.1.12 eingeführt.

Unter Verwendung dieser Resultate werden in Unterabschnitt VI.1.c geeignete Mengen glatter Gewichte H zu Mengen stetiger Gewichte W assoziiert. Hierzu wird der Raum glatter Funktionen $\mathcal{E}_T(W)$ in Definition VI.1.24 eingeführt. Es wird gezeigt, dass sich dies mit den Halbnormfunktionen für Amalgamräume mit lokaler Komponente \mathcal{X} verträgt. Als Hilfsmittel für die Beweise werden die gewichteten Bälle $\mathcal{X}_{*Y}[w, C]$ in Definition VI.1.19 eingeführt.

VI.1.a. Gewichtung von SRI-Räumen

Moderierte Kegelideale von \mathcal{C}_+ bzw. ω_+ , die in Definition VI.1.2 eingeführt werden, konstituieren natürliche Mengen zur Gewichtung von SRI-Räumen bzw. STI-Folgenräumen. Das diese Gewichtung wieder Räume der gleichen Art liefert garantiert Proposition VI.1.9. Definition VI.1.4 führt die natürliche Korrespondenz der moderierten Kegelideale von \mathcal{C}_+ zu denen von ω_+ ein. Proposition VI.1.5 zeigt, dass dies Wohldefiniert ist. Lemma VI.1.7 und Korollar VI.1.8 garantieren die Verträglichkeit der Gewichtung durch moderierte Kegelideale mit den Halbnormfunktionen $|\cdot| \bullet \mathcal{K}_+$ aus Gleichung (V.2.4) (mit $\bullet = *^p$, $1 \leq p \leq \infty$ oder $\bullet = *$), $|\cdot| * \phi_+$ aus Gleichung (V.1.2) und $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * \mathcal{K}_+$ aus Gleichung (V.2.11).

Definition VI.1.2. Sei $\mathcal{W} = \mathcal{C}_+$ bzw. $\mathcal{W} = \omega_+$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathbb{Z}^d)$. Notiere die *abwärtsmonotone Hülle* von $W \subseteq \mathcal{W}$ als

$$\langle W \rangle_{\leq} := \{v \in \mathcal{W} : \exists w \in W : v \leq w\}. \quad (\text{VI.1.2})$$

Eine nichtleere Teilmenge $W \subseteq \mathcal{W}$ heisst *Kegelideal*, falls

$$\langle W \rangle_{\leq} \subseteq W, \quad (\text{VI.1.3a})$$

$$W + W \subseteq W. \quad (\text{VI.1.3b})$$

Ein Gewicht $w \in \mathcal{W}$ heisst *moderiert*, falls

$$\forall K \in \mathfrak{K} \exists C \in \mathbb{R}_+ : w \blacksquare 1_K \leq C \cdot w. \quad (\text{VI.1.4})$$

Ein Kegelideal $W \subseteq \mathcal{W}$ heisst *moderiert*, falls

$$W \blacksquare 1_K \subseteq W \quad \text{für alle } K \in \mathfrak{K}. \quad (\text{VI.1.5})$$

Es notiert $\langle W \rangle_{\text{CI}}$ das von einer Teilmenge $W \subseteq \mathcal{W}$ erzeugte Kegelideal.

Bemerkung VI.1.3. Einige Anmerkungen zu Definition VI.1.2:

1. Die Definition VI.1.2 ist konsistent mit der allgemeinen Definition von Kegelidealen aus Unterabschnitt III.1.b. Insbesondere definieren die Kegelideale ein Hüllensy-

VI. Eigenschaftsvererbung

stem. Da die Eigenschaft (VI.1.5) unter beliebigen Durchschnitten bewahrt wird konstituieren auch die moderierten Kegelideale ein Hüllensystem.

2. Sei E bzw. λ ein lokalkonvexes t.b. Ideal von \mathcal{K}' bzw. ω und sei $W \subseteq \mathcal{C}_+$ bzw. $V \subseteq \omega_+$. Dann ist $E_W = E_{\langle W \rangle_{\text{CI}}}$ bzw. $\lambda_V = \lambda_{\langle V \rangle_{\text{CI}}}$.
3. Analog zu Proposition V.1.8 zeigt man, dass die moderierten Kegelideale von ω_+ den translationsinvarianten Kegelidealen von ω_+ entsprechen. Ein translationsinvariantes Kegelideal von \mathcal{C}_+ ist aber nicht zwangsläufig moderiert.
4. Die Zuordnungen $W \mapsto \text{sol}(W)$ und $E \mapsto E \cap \mathcal{C}_+$ definieren zueinander inverse Bijektionen zwischen den moderierten Kegelidealen von \mathcal{C}_+ und den Amalgamräumen mit lokaler Komponente L^∞ . Entsprechend definieren die Zuordnungen $V \mapsto \text{sol}(V)$ und $\lambda \mapsto \lambda \cap \omega_+$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den moderierten Kegelidealen von ω_+ und den STI-Folgenräumen.

Definition VI.1.4. Seien $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $V \subseteq \omega_+$ moderierte Kegelideale. Dann wird $W|_{\mathbb{Z}^d} = \{w|_{\mathbb{Z}^d} : w \in W\}$ das zu W assoziierte moderierte Kegelideal von ω_+ und $\langle V * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq}$ das zu V assoziierte moderierte Kegelideal von \mathcal{C}_+ genannt.

Moderierte Gewichte $w \in \mathcal{C}_+$ und $v \in \omega_+$ werden zueinander assoziiert genannt wenn dies auf deren erzeugte Kegelideale $\langle w \rangle_{\text{CI}}$ und $\langle v \rangle_{\text{CI}}$ zutrifft.

Proposition VI.1.5. Die Zuordnungen $W \mapsto W|_{\mathbb{Z}^d}$ und $V \mapsto \langle V * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq}$ definieren zueinander inverse, inklusionsbewahrende Bijektionen zwischen den moderierten Kegelidealen von \mathcal{C}_+ und denen von ω_+ . Zudem gelten

$$W|_{\mathbb{Z}^d} = \{v \in \omega_+ : v * \mathcal{K}_+ \subseteq W\}, \quad (\text{VI.1.6a})$$

$$\langle V * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq} = \{w \in \mathcal{C}_+ : (w \blacksquare \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \subseteq V\}, \quad (\text{VI.1.6b})$$

für alle moderierten Kegelideale $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $V \subseteq \omega_+$.

Beweis. Zum Nachweis der Bijektion berechnet man, dass

$$W \subseteq \langle W|_{\mathbb{Z}^d} * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq} = \langle W|_{\mathbb{Z}^d} \blacksquare \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq} \subseteq \langle W \blacksquare \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq} \subseteq W, \quad (\text{VI.1.7a})$$

und somit $W = \langle W|_{\mathbb{Z}^d} * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq}$. Umgekehrt ist

$$(\langle V * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq})|_{\mathbb{Z}^d} = \langle (V * \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \rangle_{\leq} = \langle V * \phi_+ \rangle_{\leq} = V. \quad (\text{VI.1.7b})$$

Wegen der Identitäten (VI.1.6) sind $W|_{\mathbb{Z}^d}$ und $\langle V * \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq}$ moderierte Kegelideale.

Die Inklusion “ \subseteq ” in Gleichung (VI.1.6a) folgt aus

$$w|_{\mathbb{Z}^d} * \mathcal{K}_+ \subseteq \langle w|_{\mathbb{Z}^d} \blacksquare \mathcal{K}_+ \rangle_{\leq} \subseteq W. \quad (\text{VI.1.8})$$

Die Inklusion “ \supseteq ” in Gleichung (VI.1.6a) folgt aus $v \leq (v \blacksquare k)|_{\mathbb{Z}^d}$ für alle $v \in V$ und $k \in \mathcal{K}_+$ mit $k(0) \geq 1$. Die Inklusion “ \subseteq ” in Gleichung (VI.1.6b) folgt aus

$$((V * \mathcal{K}_+) \blacksquare \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \subseteq \langle (V * \mathcal{K}_+)|_{\mathbb{Z}^d} \rangle_{\leq} = \langle V * \phi_+ \rangle_{\leq} = V. \quad (\text{VI.1.9})$$

Die Inklusion “ \supseteq ” in Gleichung (VI.1.6b) folgt aus $w \leq (w \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} * 1_Q$ für alle $w \in \mathcal{C}_+$ mit der Notation $Q := \frac{1}{2}[-1, 1]^d$. \square

Bemerkung VI.1.6. Es gelten $|\mu \cdot w| = |\mu| \cdot w$ für alle $\mu \in \mathcal{K}'$, $w \in \mathcal{C}_+$ und $|a \cdot v| = |a| \cdot v$ für alle $a \in \omega$, $v \in \omega_+$. Somit erhält sogar Verbandsendomorphismen

$$(\cdot) \cdot W \subseteq \text{lin}_{|\cdot|}(\mathcal{K}') \quad \text{für alle } W \subseteq \mathcal{C}_+, \quad (\text{VI.1.10a})$$

$$(\cdot) \cdot V \subseteq \text{lin}_{|\cdot|}(\omega) \quad \text{für alle } V \subseteq \omega_+. \quad (\text{VI.1.10b})$$

Lemma VI.1.7. Seien $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $V \subseteq \omega_+$ moderierte Kegelideale. Dann gelten die Kegelidealäquivalenzen

$$(|\cdot| \bullet \mathcal{K}_+) \cdot W \simeq_{\text{CI}} (|\cdot) \cdot W| \bullet \mathcal{K}_+, \quad (\text{VI.1.11a})$$

$$(|\cdot| * \phi_+) \cdot V \simeq_{\text{CI}} (|\cdot) \cdot V| * \phi_+ \quad (\text{VI.1.11b})$$

mit $(\bullet, \mathcal{Y}) \in \{(*^p, L^p), (*, \mathcal{K}')\}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Beweis. Sei $k \in \mathcal{K}_+$ und setze $K := \text{supp } k$. Für $h \in \mathcal{K}_+$ mit $1_K \leq h$ erhält man

$$\begin{aligned} ((|\mu|w) \bullet k)(x) &= \left\| \mu w \Gamma_x \check{k} \right\|_p \\ &\leq \left\| \mu \Gamma_x \check{k} \right\|_p (w \blacksquare h)(x) = ((|\mu| \bullet k)(w \blacksquare h))(x) \end{aligned} \quad (\text{VI.1.12a})$$

VI. Eigenschaftsvererbung

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathcal{Y}$ und $w \in \mathcal{C}_+$. Für $h \in \mathcal{K}_+$ mit $1_K \leq h$ erhält man

$$\begin{aligned} ((|\mu| \bullet k)w)(x) &= \left\| \mu T_x \check{k} \right\|_p w(x) \\ &\leq \left\| \mu(w \blacksquare h) T_x \check{k} \right\|_p = ((|\mu|(w \blacksquare h)) \bullet k)(x) \end{aligned} \quad (\text{VI.1.12b})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathcal{Y}$ und $w \in \mathcal{C}_+$. Dies ergibt Gleichung (VI.1.11a) und analog beweist man Gleichung (VI.1.11b). \square

Korollar VI.1.8. *Seien $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $V \subseteq \omega_+$ assoziierte moderierte Kegelideale. Dann gilt die folgende Kegelidealäquivalenz von Abbildungen $\omega \rightarrow \mathcal{K}'$:*

$$(|\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot)| * \mathcal{K}_+) \cdot W \simeq_{\text{CI}} |\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) \cdot V| * \mathcal{K}_+. \quad (\text{VI.1.13})$$

Beweis. Man verknüpft beide Seiten von Gleichung (VI.1.11a) mit der Abbildung $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot)$ aus Definition V.2.11. \square

Proposition VI.1.9. *Ist E in SRI-Raum und $W \subseteq \mathcal{C}_+$ ein moderiertes Kegelideal, so ist der Raum E_W ein SRI-Raum. Ist λ in STI-Folgenraum und $V \subseteq \omega_+$ ein moderiertes Kegelideal, so ist der Raum λ_V ein STI-Folgenraum.*

Beweis. Aufgrund von Bemerkung VI.1.6 und Teil 3 von Proposition IV.1.14 ist E_W solide. Lemma VI.1.7 und die Kompositionsregel aus Proposition IV.2.7 liefern

$$\underbrace{|\cdot| * \mathcal{K}_+}_{\left(\underbrace{(\cdot) \cdot W}_{E} \right)} = \underbrace{(\cdot) \cdot W}_{\left(\underbrace{|\cdot| * \mathcal{K}_+}_{E} \right)} \supseteq \underbrace{(\cdot) \cdot W}_{E}. \quad (\text{VI.1.14})$$

Also erfüllt E_W Kriterium 2 von Proposition V.1.1. Analog geht man für λ_V vor. \square

VI.1.b. Multiplikation und Halbnormfunktionen

Die Multiplikation mit uniform beschränkten Funktionen definiert Endomorphismen auf allen Amalgamräumen aus Kapitel V. Bei SRI-Räumen und STI-Folgenräumen führt dies zudem zu einer stetigen bornologiebewahrenden bilinearen Abbildung, wie in folgender Proposition VI.1.10 beschrieben. Für Amalgamräume mit lokaler Komponente \mathcal{X} ist die Situation etwas komplizierter zu klären. Dazu wird die Verträglichkeit der Halbnormfunktionen $|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')}$ aus Definition V.2.20 mit der Multiplikation mit gewichteten Mengen $B(w; C)$ glatter Funktionen aus Definition VI.1.12 untersucht. Dies resultiert

in Lemma VI.1.14, Korollar VI.1.15, Lemma VI.1.16 und Lemma VI.1.17. Diese dienen auch als Vorarbeit für Unterabschnitt VI.1.c. Insbesondere liefert Proposition VI.1.18 eine hypostetig-beschränkte bilineare Multiplikation $F \times \mathcal{B} \rightarrow F$ für Amalgamräume F mit lokaler Komponente \mathcal{X} .

Proposition VI.1.10. *Sei E ein SRI-Raum, λ ein STI-Folgenraum und X ein lokalkonvexer Raum. Die Multiplikationen $E \times \mathcal{C}_b \rightarrow E$ und $\lambda\{X\} \times \ell^\infty \rightarrow \lambda\{X\}$ sind stetig und bornologiebewahrend.*

Beweis. Dies folgt aus $|f \cdot g| \leq |f| \cdot \|g\|_\infty$ für $f \in \mathcal{X}'$, $g \in \mathcal{C}_b$ und der Solidität von E . Ähnlich argumentiert man für λ . \square

Bemerkung VI.1.11. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Die Multiplikation ist hypostetig als Abbildung $\cdot : \mathcal{E}(\Omega) \times \mathcal{X}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}'(\Omega)$ nach den beiden Propositionen 3.6.4 und 3.6.5 in [52, S. 360f]. Somit gilt auch die Inklusion $\mathfrak{B}(\mathcal{E}(\Omega)) \cdot \mathfrak{B}(\mathcal{X}'(\Omega)) \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{X}'(\Omega))$, das heisst, Produkte beschränkter Mengen sind beschränkt.

Definition VI.1.12. Sei $w \in \mathcal{C}_+$ und $C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d)$. Definiere die Menge

$$B(w; C) := \{f \in \mathcal{E} : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\partial^\alpha f| \leq C_\alpha w\}. \quad (\text{VI.1.15})$$

Bemerkung VI.1.13. Die Mengen $B(w; C)$ mit $w \in \mathcal{C}_+$ und $C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d)$ bilden ein Fundamentalsystem der beschränkten Teilmengen von \mathcal{E} . Die Mengen $B(1_{\mathbb{R}^d}; C)$ mit $C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d)$ bilden ein Fundamentalsystem der beschränkten Teilmengen von \mathcal{B} .

Lemma VI.1.14. *Sei $K \in \mathfrak{K}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und $C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d)$. Dann gibt es eine Menge $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\sup_{b \in B(w; C)} |f \cdot b|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \cdot (w \blacksquare 1_K) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}, w \in \mathcal{C}_+. \quad (\text{VI.1.16})$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{\partial_y^\alpha (T_{-x}h(y))}{(w \blacksquare 1_K)(x)} \leq C_\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d, y \in K, h \in B(w; C), \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \quad (\text{VI.1.17})$$

Eingeschränkt auf K ist die Menge der Funktionen $T_{-x}h/(w \blacksquare 1_K)(x)$ also beschränkt in \mathcal{E} . Da die Multiplikation eine lokale Operation ist und wegen Bemerkung VI.1.11 gibt

VI. Eigenschaftsvererbung

es somit $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ mit

$$\check{\Phi} \cdot \mathbb{T}_{-x}h \subseteq \check{\Psi} \cdot (w \blacksquare 1_K)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d, h \in B(w; C). \quad (\text{VI.1.18})$$

Also gibt es zu jedem $\varphi \in \Phi$ ein $\psi \in \Psi$ sodass

$$\begin{aligned} ((f \cdot h) * \varphi)(x) &= \langle f \cdot h, \mathbb{T}_x \check{\varphi} \rangle \\ &= \langle f, \mathbb{T}_x(\check{\varphi} \cdot \mathbb{T}_{-x}h) \rangle \\ &= \langle f, \mathbb{T}_x \check{\psi} \rangle \cdot (w \blacksquare k)(x) = (f * \psi)(x) \cdot (w \blacksquare k)(x) \end{aligned}$$

für alle $f \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $h \in B(w; C)$. Man nimmt nun Absolutwerte und bildet dann das Supremum über $\varphi \in \Phi$. \square

Korollar VI.1.15. Sei $K \in \mathfrak{K}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{B})$. Dann gibt es eine Menge $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{b \in B} |f \cdot b|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{VI.1.19})$$

Beweis. Dies ist Lemma VI.1.14 mit $w = 1_{\mathbb{R}^d}$. \square

Lemma VI.1.16. Sei $K \in \mathfrak{K}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und (b_n) eine Nullfolge in \mathcal{B} . Dann gibt es $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und eine positive Nullfolge (ε_n) in \mathbb{R} , sodass

$$|f \cdot b_n|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \cdot \varepsilon_n \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{VI.1.20})$$

Beweis. Da \mathcal{B} ein Fréchet-Raum ist gibt es eine positive Nullfolge reeller Zahlen (ε_n) , sodass $b_n/\varepsilon_n \rightarrow 0$ in \mathcal{B} . Wende nun Korollar VI.1.15 auf $B := \{b_n/\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ an. \square

Lemma VI.1.17. Sei $K \in \mathfrak{K}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und (h_n) eine Nullfolge in \mathcal{E} . Dann gibt es $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und eine Nullfolge (w_n) in \mathcal{E} , sodass

$$|f \cdot h_n|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \cdot w_n \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{VI.1.21})$$

Beweis. Da \mathcal{E} ein Fréchet-Raum ist gibt es eine positive Nullfolge reeller Zahlen (ε_n) , sodass $h_n/\varepsilon_n \rightarrow 0$ in \mathcal{E} . Weiter ist $\{h_n/\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ in einer Menge der Form $B(w; C)$

mit $w \in \mathcal{C}_+$ und $C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d)$ enthalten. Lemma VI.1.14 liefert dann die gesuchte Nullfolge $w_n = w \cdot \varepsilon_n$. \square

Proposition VI.1.18. *Sei X ein Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{X} . Dann ist die Multiplikation $X \times \mathcal{B} \rightarrow X$ hypostetig-beschränkt.*

Beweis. Im folgenden wird stets verwendet, dass $X = \mathcal{X}_T(E)$ für einen SRI-Raum E . Aus Korollar VI.1.15 erhält man die Inklusion $\mathcal{B}_X \cdot \mathfrak{B}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}_X$ und die $(\mathcal{T}_X, \mathfrak{B}(\mathcal{B}))$ - \mathcal{T}_X -Hypostetigkeit der Multiplikation. Aus Lemma VI.1.16 folgert man, dass $b \mapsto f \cdot b$ für jedes $f \in X$ folgenstetig, und somit stetig, als Abbildung $\mathcal{B} \rightarrow X$ ist. Da \mathcal{B} ein Fréchet-Raum, und somit tonneliert ist, erhält man nun aus Proposition 1.4.1 in [85, S. 18] die $(\mathfrak{B}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ - \mathcal{T}_X -Hypostetigkeit, und somit die $(\mathcal{B}_X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ - \mathcal{T}_X -Hypostetigkeit. \square

VI.1.c. Gewichtete Bälle glatter Funktionen oder Distributionen

In diesem Unterabschnitt wird untersucht wie glatte Gewichte zu einem moderierten Kegelideal assoziiert werden können, sodass diese Assoziation mit den Halbnormfunktionen $|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')}$ aus Definition V.2.20 kompatibel ist. Dies führt zu den linearen Räumen $\mathcal{E}_T(W)$, die in Definition VI.1.24 eingeführt werden. Das gefundene Kompatibilitätsresultat wird dann in Korollar VI.1.25 dargestellt.

Eine Richtung der gesuchten Abschätzungen ist bereits durch Lemma VI.1.14 aus Unterabschnitt VI.1.b abgedeckt. Als technisches Hilfsmittel für den Beweis der umgekehrten Abschätzung werden in Definition VI.1.19 die gewichteten Mengen $\mathcal{X}_{*Y}[w, C]$ eingeführt. Eigenschaften dieser Mengen werden in den Lemma VI.1.21 und VI.1.22 untersucht. Dies resultiert in der umgekehrten Abschätzung in Lemma VI.1.23.

Definition VI.1.19. Sei $w \in \mathcal{C}_+$, $Y \subseteq \mathcal{X}'$ und $C \in \mathbb{R}_+^Y$. Definiere die Menge

$$\mathcal{X}_{*Y}[w, C] := \{f \in \mathcal{X} : \forall \varphi \in Y : |f * \varphi| \leq C_\varphi \cdot w\}. \quad (\text{VI.1.22})$$

Bemerkung VI.1.20. Setzt man $Y = \{\partial^{\alpha\delta} : \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$, so gilt

$$\mathcal{E}_{*Y}[w, C] = B(w; C) \quad \text{für alle } w \in \mathcal{C}_+, C \in \mathbb{R}_+^Y \cong \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d), \quad (\text{VI.1.23})$$

mit der Menge $B(w; C)$ aus Gleichung (VI.1.15).

VI. Eigenschaftsvererbung

Lemma VI.1.21. Sei $Y \subseteq \mathcal{X}'$ mit (V.3.9), $C = (C_\varphi) \in \mathbb{R}_+^Y$, $K \in \mathfrak{K}$ und L eine kompakte Umgebung von K . Dann gibt es zu jedem $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$|f|_{*\Phi} \leq \alpha \cdot w \blacksquare 1_L \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C]. \quad (\text{VI.1.24})$$

Beweis. Gleichung (V.3.9) liefert $\varphi_i \in Y$, $k_i \in \mathcal{K}_+$ mit $\text{supp } k_i \subseteq L$, $i = 1, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f|_{*\Phi} \leq \sum_{i=1}^n |f * \varphi_i| * k_i \leq \alpha \cdot w \blacksquare 1_L \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C], \quad (\text{VI.1.25})$$

mit einer festen Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$. □

Lemma VI.1.22. Sei $\theta \in \mathcal{D}$ mit $\theta \geq 0$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine relativ kompakte Umgebung von 0 , sei $Y \subseteq \mathcal{X}'_U$ mit (V.3.9) und sei $C = (C_\varphi) \in \mathbb{R}_+^Y$. Dann gibt es $C' = (C'_\varphi) \in \mathbb{R}_+^Y$ und $K \in \mathfrak{K}$, mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle $w \in \mathcal{C}_+$ gibt es $W \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_+)$ mit $w' \leq w \blacksquare 1_K$ für alle $w' \in W$ so, dass

$$\mathcal{X}_{*Y}[w, C] \subseteq \Gamma(\mathcal{X}_{*Y}[1, C'] \cdot (W * \theta)). \quad (\text{VI.1.26})$$

Beweis. Setze $Q := [-1, 1]^d$. Aufgrund der Möglichkeit umzuskalieren kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $\theta \in \mathcal{D}_{Q/8}$ und $\int \theta(x) dx = 1$. Wähle $\eta \in \mathcal{D}_Q$ so, dass die Reihe $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} T_z \eta$ in \mathcal{E} gegen 1 konvergiert. Sei L der Abschluss von $Q + 2U$ und $w \in \mathcal{C}_+$. Wegen Korollar VI.1.15 und Lemma VI.1.21 gibt es zu jedem $\varphi \in Y$ ein $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_{Q+U})$ und $C'_\varphi \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$|(f \cdot T_z \eta) * \varphi| \leq |f|_{*\Psi} \cdot 1_{z+Q+U} \leq C'_\varphi \cdot (w \blacksquare 1_L) \cdot 1_{z+L} \quad (\text{VI.1.27})$$

für alle $f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C]$ und $z \in \mathbb{Z}^d$. Setze $v := w \blacksquare 1_{2L}$. Dann gilt

$$(w \blacksquare 1_L)(z + x) \leq v(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d \text{ und } x \in L. \quad (\text{VI.1.28})$$

Also gibt es $\alpha \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$\left| \left(\sum_{z \in Z} \frac{f \cdot T_z \eta}{v(z)} \right) * \varphi \right| \leq C'_\varphi \sum_{z \in Z} \frac{(w \blacksquare 1_L) 1_{z+L}}{v(z)} \leq C'_\varphi \sum_{z \in Z} 1_{z+L} \leq C'_\varphi \cdot \alpha \quad (\text{VI.1.29})$$

und somit

$$\sum_{z \in Z} \frac{f \cdot T_z \eta}{v(z)} \in \mathcal{X}_{*Y}[1, C'] \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C] \text{ und } Z \subseteq \mathbb{Z}^d. \quad (\text{VI.1.30})$$

Hier wird für die Quotienten $f \cdot T_z \eta / v(z)$ die Konvention $0/0 = 0$ verwendet. Basierend darauf definiert man die Funktionen

$$b_{f,k} := \sum_{z \in k+3\mathbb{Z}^d} \frac{f \cdot T_z \eta}{v(z)} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C] \text{ und } k \in \{0, 1, 2\}^d. \quad (\text{VI.1.31})$$

Definiere nun die \mathcal{C}_+ -Funktionen

$$w_k := \sum_{z \in k+3\mathbb{Z}^d} v(z) \cdot (1_{z+(3/2)Q} * \theta) \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, 2\}^d. \quad (\text{VI.1.32})$$

Die Annahmen an θ liefern $(1_{(3/2)Q} * \theta * \theta)(x) = 1$ für alle $x \in Q$ und somit

$$(w_k * \theta)(z + x) = v(z) \quad \text{für alle } x \in Q, z \in k + 3\mathbb{Z}^d, k \in \{0, 1, 2\}^d. \quad (\text{VI.1.33})$$

Sei K der Abschluss von $4(Q + U)$. Dann gelten die Ungleichungen

$$w_k \leq v \blacksquare 1_{2Q} = w \blacksquare 1_{2(Q+L)} = w \blacksquare 1_K \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, 2\}^d. \quad (\text{VI.1.34})$$

Aus den Gleichungen (VI.1.31) und (VI.1.33) folgt

$$f = \sum_{k \in \{0, 1, 2\}^d} \left(\sum_{z \in k+3\mathbb{Z}^d} \frac{f \cdot T_z \eta}{v(z)} \cdot v(z) \right) = \sum_{k \in \{0, 1, 2\}^d} b_{f,k} \cdot (\theta * w_k) \quad (\text{VI.1.35})$$

für alle $f \in \mathcal{X}_{*Y}[w, C]$. Hier gilt $b_{f,k} \in \mathcal{X}_{*Y}[1, C']$ wegen Gleichung (VI.1.30) und (VI.1.31). Setze nun $W := \{3^d \cdot w_1, \dots, 3^d \cdot w_{3^d}\}$. Dann folgt die Aussage des Lemmas aus $b_{f,k} \in \mathcal{X}_{*Y}[1, C']$ und den Gleichungen (VI.1.34) und (VI.1.35). \square

VI. Eigenschaftsvererbung

Lemma VI.1.23. Sei $\theta \in \mathcal{D}$ mit $\theta \succeq 0$ und $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Dann gibt es Mengen $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$ und $L \in \mathfrak{K}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle $v \in \mathcal{C}_+$ gibt es $V \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_+)$ mit $v' \leq v \blacksquare 1_L$ für alle $v' \in V$ so, dass

$$|f|_{*\Phi} \cdot v \leq \sup_{v' \in V} |f \cdot (v' * \theta)|_{*\Psi} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{X}. \quad (\text{VI.1.36})$$

Beweis. Nutze die Abkürzung $\widetilde{\mathcal{X}} := \mathcal{X}'_{\text{loc}}$, siehe Tabelle V.0.1. Sei $v \in \mathcal{C}_+$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine relativ kompakte Umgebung von 0 und $Y \subseteq \mathcal{X}'_U$ mit (V.3.2). Wähle geeignetes $C = (C_\varphi) \in \mathbb{R}_+^Y$ und $M \in \mathfrak{K}$ so, dass

$$\text{T}_x \check{\Phi} \cdot v(x) \subseteq \widetilde{\mathcal{X}}_{*Y}[v \blacksquare 1_M, C] \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.1.37})$$

Seien nun K, W, θ und $C' = (C'_\varphi)$, wie in Lemma VI.1.22, angewendet auf $w := v \blacksquare 1_M$. Setze $V := W$ und $L := M + K$. Dann erfüllen die Elemente v' die Ungleichung $v' \leq v \blacksquare 1_L$. Weiter erhält man aus (VI.1.24) und (VI.1.37) die Inklusion

$$\text{T}_x \check{\Phi} \cdot v(x) \subseteq \Gamma \left(\widetilde{\mathcal{X}}_{*Y}[1, C'] \cdot (V * \theta) \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.1.38})$$

Sei $\chi \in \mathcal{D}$ mit $\{\chi = 1\} \supseteq \bigcup \text{supp } \check{\Phi}$ und definiere die Menge

$$\Psi := \left\{ \check{\chi} \cdot \text{T}_x \check{b} : x \in \mathbb{R}^d, b \in \widetilde{\mathcal{X}}_{*Y}[1, C'] \right\}. \quad (\text{VI.1.39})$$

Nach Konstruktion ist $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$. Die Multiplikation von (VI.1.38) mit $\text{T}_x \chi$ liefert

$$\text{T}_x \check{\Phi} \cdot v(x) \subseteq \Gamma \left(\text{T}_x \check{\Psi} \cdot (V * \theta) \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.1.40})$$

Diese Inklusion setzt man nun auf der linken Seite von Gleichung (VI.1.36) ein, um die Ungleichung zu erhalten. \square

Definition VI.1.24. Sei W ein moderiertes Kegelideal. Definiere den linearen Raum

$$\mathcal{E}_{\text{TV}}(W) := \bigcup \{ B(w; C) : w \in W, C \in \mathbb{R}_+(\mathbb{N}_0^d) \} \quad (\text{VI.1.41})$$

mit den Mengen $B(w; C)$ aus Gleichung (VI.1.15).

Korollar VI.1.25. Sei $W \subseteq \mathcal{C}_+$ ein moderiertes Kegelideal, $\theta \in \mathcal{D}$ mit $\theta \succeq 0$ und H eine Menge mit $W * \theta \subseteq H \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(W)$. Dann gilt die Kegelidealäquivalenz

$$|\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} \circ ((\cdot) \cdot H) \simeq_{\text{CI}} ((\cdot) \cdot W) \circ |\cdot|_{*\mathfrak{B}(\mathcal{X}')} . \quad (\text{VI.1.42})$$

Beweis. Dies ist eine Konsequenz aus den Lemmas VI.1.16 und VI.1.23. □

VI.1.d. Transformationsregeln für Gewichte

Transformationsregeln für Gewichte unter Amalgamraumbildungen werden im folgenden zusammengefasst. Dabei werden moderierte Kegelideale als Gewichtsmengen in Theorem VI.1.26 betrachtet und einzelne moderierte Gewichte in Theorem VI.1.28. Der Übergang zu strikten Topologien ist ein interessantes Anwendungsbeispiel, das in Beispiel VI.1.29 und Proposition VI.1.32 betrachtet wird.

Im folgenden ist $\mathcal{Y} \in \{L^p : p \in [1, \infty]\} \cup \{\mathcal{K}'\}$, $\mathcal{X} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}\}$ und X ein lokalkonvexer Raum.

Theorem VI.1.26. Seien $W \subseteq \mathcal{C}_+$ und $V \subseteq \omega_+$ zueinander assoziierte moderierte Kegelideale (Definition VI.1.4). Sei $\theta \in \mathcal{D}$ mit $\theta \succeq 0$ und H eine Menge mit $W * \theta \subseteq H \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(W)$. Hier ist $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(W)$ der Raum aus Definition VI.1.24.

Jeder SRI-Raum E erfüllt die Kommutativgesetze

$$\omega_{*\mathcal{D}}(E_W) = (\omega_{*\mathcal{D}}(E))_V, \quad (\text{VI.1.43a})$$

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{T}}(E_W) = (\mathcal{Y}_{\mathbb{T}}(E))_W, \quad (\text{VI.1.43b})$$

$$\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E_W) = (\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E))_H. \quad (\text{VI.1.43c})$$

Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Kommutativgesetze

$$\mathcal{Y}_{\tau}(\lambda_V) = (\mathcal{Y}_{\tau}(\lambda))_W, \quad (\text{VI.1.44a})$$

$$\mathcal{X}_{\tau}(\lambda_V) = (\mathcal{X}_{\tau}(\lambda))_H, \quad (\text{VI.1.44b})$$

$$\lambda_V\{X\} = (\lambda\{X\})_V. \quad (\text{VI.1.44c})$$

Beweis. Die folgenden Diagramme von Abbildungsmengen kommutieren nach Ke-

VI. Eigenschaftsvererbung

gelidealhüllen im Sinne von Definition IV.2.9:

$$\begin{array}{ccccc}
 \omega \xrightarrow{(\cdot) \cdot V} \omega & \omega \xrightarrow{(\cdot) \cdot V} \omega & \omega \xrightarrow{(\cdot) \cdot V} \omega & & \\
 \vdots \downarrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 \mathcal{H}' \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{H}' & \mathcal{C} \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{C} & \mathcal{C} \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{C} & & \\
 \vdots \downarrow & \vdots \downarrow & \vdots \downarrow & & \\
 \omega\{X\} \xrightarrow{(\cdot) \cdot V} \omega\{X\} & \mathcal{Y} \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{Y} & \mathcal{X} \xrightarrow{(\cdot) \cdot H} \mathcal{X} & & \\
 \vdots \downarrow & \vdots \downarrow & \vdots \downarrow & & \\
 \omega \xrightarrow{(\cdot) \cdot V} \omega & \mathcal{H}' \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{H}' & \mathcal{H}' \xrightarrow{(\cdot) \cdot W} \mathcal{H}' & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 [1] \\
 [2a] \\
 [3a] \\
 [2b] \\
 [3b] \\
 [4] \\
 [2c] \\
 [3c]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \cdots |\cdot| * \mathcal{K}_+ \\
 \text{---} (\cdot)|_{\mathbb{Z}^d} \\
 \cdots |\cdot| \bullet \mathcal{K}_+ \\
 \cdots |\cdot| * \mathfrak{B}(\mathcal{X}') \\
 \cdots \text{csn } X \circ (\cdot)
 \end{array}
 \tag{VI.1.45}$$

Die Kommutativität von [1] entspricht Gleichung (VI.1.13). Entsprechend stehen [2b] und [2c] jeweils zu Gleichung (VI.1.11a) und [3b] und [3c] jeweils zu Gleichung (VI.1.42). Die Kommutativität von [2a] und [3a] folgt daraus, dass die Multiplikation eine punktweise definierte Operation ist. Die Kommutativität von [4] folgt aus $q \circ (v \cdot a) = (q \circ v) \cdot a$ für alle $v \in \omega\{X\}$, $a \in \omega$ und $q \in \text{csn } X$.

Unter Verwendung der Kompositionsregeln für Urbildoperatoren aus Lemma IV.2.8 und der Monotonieregeln aus Proposition IV.2.1 erhält man nun: Gleichung (VI.1.43a) folgt aus [1], (VI.1.43b) aus [2c], (VI.1.43c) aus [3c], (VI.1.44a) aus [2a+2b], (VI.1.44b) aus [3a+3b] und (VI.1.44c) aus [4]. \square

Bemerkung VI.1.27. Sei $w \in \mathcal{C}_+$ moderiert, $\theta \in \mathcal{D}$ mit $\theta \geq 0$ und setze $h := w * \theta$. Ist $h \neq 0$, so gelten $h \in \mathcal{B}_w$ und $1/h \in \mathcal{B}_{1/w}$.

Theorem VI.1.28. Seien $w \in \mathcal{C}_+$ und $v \in \omega_+$ zueinander assoziierte moderierte Gewichte (Definition VI.1.4) mit $w, v \neq 0$. Sei weiter $h \in \mathcal{B}_w$ mit $1/h \in \mathcal{B}_{1/w}$.

1. Theorem VI.1.26 gilt genauso für w, v bzw. h anstatt W, V bzw. H .
2. Die Multiplikation mit w, v bzw. h induziert einen Isomorphismus

$$E \cong E_w, \quad \lambda \cong \lambda_v \quad \text{bzw.} \quad F \cong F_h \tag{VI.1.46}$$

von lokalkonvexen t.b. Räumen für jeden SRI-Raum E , jeden STI-Folgenraum λ bzw. jeden Amalgamraum F mit lokaler Komponente \mathcal{X} .

Beweis. Die von w und v erzeugten Kegelideale sind moderiert und zueinander assoziiert. Analoges gilt für $1/w$ und $1/v$. Theorem VI.1.26 impliziert also die Einzelgewichtvariante der Gleichungen (VI.1.43a), (VI.1.43b), (VI.1.44a) und (VI.1.44c).

Die Voraussetzungen garantieren $h \in \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(\langle w \rangle_{\text{CI}})$ und $1/h \in \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(\langle 1/w \rangle_{\text{CI}})$. Somit liefern Theorem VI.1.26 und die Monotonieregel aus Proposition IV.2.1 die Inklusionen

$$\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E_w) \subseteq (\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E))_h, \quad (\text{VI.1.47a})$$

$$(\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E))_h = (\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E_{w/w}))_h \subseteq ((\mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E_w))_h)_{1/h} = \mathcal{X}_{\mathbb{T}}(E_w). \quad (\text{VI.1.47b})$$

Hier wurde die Kompositionsregel aus Lemma IV.2.8 auf Produkte von Gewichten angewandt. Daraus folgt die Einzelgewichtvariante von Gleichung (VI.1.43c). Gleichung (VI.1.44b) wird analog bewiesen.

Die Multiplikation mit w , v bzw. h induziert einen linearen Automorphismus von \mathcal{X}' , $\omega\{X\}$ bzw. \mathcal{D}' . Somit folgt Teil 2 direkt aus Lemma IV.2.10. \square

Beispiel VI.1.29. Die Kegelideale $\mathcal{C}_{0,+}$ und $c_{0,+}$ sind zueinander assoziiert. Die Kegelideale $\mathcal{C}_{0,+}$ und $c_{0,+}$ werden von moderierten Gewichten erzeugt wie sich leicht zeigen lässt. Weiter gilt die Relation

$$\dot{\mathcal{B}} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}(\mathcal{C}_{0,+}). \quad (\text{VI.1.48})$$

Diese folgert man daraus, dass es zu jeder Folge $(w_n) \subseteq \mathcal{C}_+$ ein $w \in \mathcal{C}_+$ und eine Folge $(C_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ gibt mit $w_n \leq w \cdot C_n$.

Beispiel VI.1.30. Das potenzlogarithmische Gewicht $w_{\mu,k}$ ist definiert durch

$$w_{\mu,k}: \mathbb{R}^d \ni x \mapsto (1+x^2)^{\mu/2} \cdot (1+\log(1+x^2))^k \quad (\text{VI.1.49})$$

für $\mu, k \in \mathbb{R}$. Setzt man $w := h := w_{\mu,k}$ und $v := w|_{\mathbb{Z}}$, so sind die Voraussetzungen von Theorem VI.1.28 erfüllt. Dies wird in Unterabschnitt II.2.c angewendet.

Beispiel VI.1.31. Das Gewicht $w_{G,a}(x) := \exp(ax^2)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht

VI. Eigenschaftsvererbung

moderiert. Das von $w_{G,a}$ erzeugte *moderierte* Kegelideal ist das von den Gewichten

$$w_{G,a,r} := w_{G,a} \cdot 1_{B(r)} = \sup\{T_y w_{G,a} : |y| \leq r\} \quad \text{mit } r > 0 \quad (\text{VI.1.50a})$$

erzeugte Kegelideal. Hier notiert $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq r\}$ und es gilt

$$w_{G,a,r}(x) = e^{ar^2} \cdot \exp(2|a|r \cdot |x|) \cdot w_{G,a}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.1.50b})$$

Proposition VI.1.32. *Der Übergang zur strikten Variante eines Raums, das heisst, die Gewichtung $\Lambda \mapsto \Lambda_{(c_{0,+})}$, $E \mapsto E_{(\mathcal{C}_{0,+})}$ bzw. $F \mapsto F_{(\mathcal{D})}$ definiert einen Hüllenoperator in der Ordnungskategorie $\mathbf{sti}\{X\}$, $\mathcal{Y}_T(\mathbf{SRI})$ bzw. $\mathcal{X}_T(\mathbf{SRI})$.*

Beweis. Hüllenoperatoren sind durch Idempotenz, Monotonie und Extensivität charakterisiert, siehe Unterabschnitt III.1.a. Für die Kategorien $\mathbf{sti}\{X\}$ und $\mathcal{Y}_T(\mathbf{SRI})$ folgt die Idempotenz aus $c_{0,+} \cdot c_{0,+} = c_{0,+}$ und $\mathcal{C}_{0,+} \cdot \mathcal{C}_{0,+} = \mathcal{C}_{0,+}$, die Monotonie aus der Monotonie von Urbildraumoperatoren und Proposition VI.1.10 liefert die Extensivität. Mit Proposition VI.1.18 und Theorem VI.1.26 in Verbindung mit Gleichung (VI.1.48) aus Beispiel VI.1.29 erhält man entsprechendes für $\mathcal{X}_T(\mathbf{SRI})$. \square

VI.2. Ausschöpfbarkeit und Vollständigkeit

Die Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen in Abschnitt VI.3 setzt vollständige, ausschöpfbare Räume voraus. Ausschöpfbarkeit beschreibt die Approximierbarkeit von Elementen eines Distributionen- oder Folgenraums F unter Verwendung von Approximationen der Eins, siehe Definition VI.2.2 in Unterabschnitt VI.2.a. Ausschöpfbarkeit wird von allen Urbildoperatoren aus dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) bewahrt, wie in Theorem VI.2.11 von Unterabschnitt VI.2.b erhalten wird. Proposition VI.2.13 von Unterabschnitt VI.2.c zeigt, dass ein Amalgamraum $F \in \mathcal{L}_T(\mathbf{SRI})$ mit lokaler Komponente $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}\} \cup \{L^p : p < \infty\}$ genau dann ausschöpfbar ist, wenn \mathcal{D} dicht in F liegt, also “normal” ist.

Schließlich wird mit Proposition VI.2.16 in Unterabschnitt VI.2.d noch bewiesen, dass Vollständigkeit von globalen Komponenten auf Amalgamräume und auf diskrete globale Komponenten vererbt wird.

VI.2.a. Ausschöpfbarkeit

In diesem Abschnitt wird ‘‘Ausschöpfbarkeit’’ für relativ allgemeine lokalkonvexe Räume F von Distributionen oder Vektorfolgen F eingeführt und studiert. Dabei wird im gesamten Abschnitt angenommen, dass F ein lokalkonvexer Unterraum von \mathcal{D}' bzw. $\omega\{X\}$ ist der *regulär \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -invariant* im Sinne von Definition VI.2.1 ist. Dabei ist X ein beliebiger lokalkonvexer Raum. Aus Proposition VI.1.10 und Proposition VI.1.18 folgt, dass SRI-Räume und Amalgamräume mit lokaler Komponente \mathcal{X} diese Invarianzeigenschaft erfüllen. Proposition VI.1.10 impliziert auch, dass $\lambda\{X\}$ für jeden STI-Folgenraum λ diese Eigenschaft erfüllt.

Ausschöpfbarkeit von F wird in Definition VI.2.2 eingeführt. Eine äquivalente Charakterisierung von Ausschöpfbarkeit von Räumen F wird in Proposition VI.2.3 gegeben.

Definition VI.2.1. Ein lokalkonvexer Unterraum F von \mathcal{D}' bzw. $\omega\{X\}$ wird *regulär \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -invariant* genannt, wenn die Multiplikation $F \times \mathcal{B} \rightarrow F$ bzw. $F \times \ell^\infty \rightarrow F$ wohldefiniert und $\mathfrak{S}(F)$ - $\mathfrak{B}(\mathcal{B})$ -hypostetig ist. (Siehe Bemerkung III.2.13 und (III.2.2).)

Eine *glatte Approximation der Eins* ist eine Folge (θ_n) mit den drei Eigenschaften

$$\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}, \quad \{\theta_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}(\mathcal{B}), \quad \theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ in } \mathcal{E}. \quad (\text{VI.2.1a})$$

Entsprechend ist eine *diskrete Approximation der Eins* eine Folge (θ_n) mit

$$\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \phi, \quad \{\theta_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}(\ell^\infty), \quad \theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ in } \omega. \quad (\text{VI.2.1b})$$

Es notiert \mathcal{A}_1 die Menge aller glatten bzw. diskreten Approximationen der Eins.

Definition VI.2.2. Der Raum F heisst *ausschöpfbar* wenn

$$p(f \cdot (1 - \theta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } f \in F, p \in \text{csn } F \text{ und } (\theta_n) \in \mathcal{A}_1. \quad (\text{VI.2.2})$$

Im folgenden wird die Notation F_{cs} für die kompakt getragenen Elemente von F verwendet, wie in Unterabschnitt III.3.a eingeführt. Die Voraussetzungen an F garantieren, dass $F_{\text{cs}} = F \cdot \mathcal{D} = F_{\text{cs}} \cdot \mathcal{D}$.

Proposition VI.2.3. *Der Raum F ist genau dann ausschöpfbar, wenn F_{cs} dicht in F liegt.*

VI. Eigenschaftsvererbung

Beweis. Die Richtung “ \Rightarrow ” folgt aus $F_{\text{cs}} = F \cdot \mathcal{D}$. Nimm für die Umkehrung an, dass F_{cs} dicht in F ist. Sei $(\theta_n) \in \mathcal{A}_1$, $p \in \text{csn } F$, $f \in F$ und $g \in F_{\text{cs}}$. Die Dreiecksungleichung liefert für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$p(f \cdot (1 - \theta_n)) \leq p(f - g) + p(g \cdot (1 - \theta_n)) + p((f - g) \cdot \theta_n). \quad (\text{VI.2.3})$$

Aufgrund der Hypostetigkeit der Multiplikation $F \times \mathcal{B} \rightarrow F$ bzw. $F \times \ell^\infty \rightarrow F$ gibt es ein $q \in \text{csn } F$ mit $p((f - g) \cdot \theta_n) \leq q(f - g)$ für alle $f \in F$, $g \in F_{\text{cs}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zu beliebigem, aber festem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es $g \in F_{\text{cs}}$ mit $p(f - g) \leq \varepsilon$ und $q(f - g) \leq \varepsilon$. Sei nun $\chi \in \mathcal{D}$ mit $\{\chi = 1\} \supseteq \text{supp } g$. Dann gilt $g \cdot (1 - \theta_n) = g \cdot (\chi \cdot (1 - \theta_n))$ und die Hypostetigkeit der Multiplikation liefert $g \cdot (1 - \theta_n) \rightarrow 0$ in F . Da ε beliebig war folgt mit (VI.2.3) insgesamt $p(f \cdot (1 - \theta_n)) \rightarrow 0$ in F , also die Ausschöpfbarkeit von F . \square

Bemerkung VI.2.4. Es genügt, die Bedingung (VI.2.2) für eine einzelne glatte bzw. diskrete Approximation der Eins (θ_n) zu fordern. Im glatten Fall kann $\theta_n = \varphi * 1_{\{|x| \leq n\}}$ gewählt werden mit einem $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int \varphi(x) \, dx = 1$. Im diskreten Fall kann man $\theta_n = 1_{Z(n)}$ wählen mit $Z(n) := \mathbb{Z}^d \cap [-n, n]^d$.

Proposition VI.2.5. *Die Ordnungskategorie aller regulär \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -invarianten lokalkonvexen Unterräume des Vektorraums \mathcal{D}' bzw. $\omega\{X\}$ ist extremumsabgeschlossen. Die ausschöpfbaren Räume dieser Kategorie sind abgeschlossen unter Kernen und Hüllen.*

Beweis. Reguläre \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -Invarianz wird von Hüllen und Kernen bewahrt: Dies folgt aus Proposition III.2.16.

Hüllen und Kerne bewahren Ausschöpfbarkeit: Dies beweist man genauso wie Theorem 5.5(b) in Chapter 3 von [96, S. 80]. \square

Bemerkung VI.2.6. Es gibt ein Beispiel von lokalkonvexen Räumen $\lambda, \mu \subseteq \omega$ mit der Eigenschaft, dass ϕ jeweils dicht in λ und μ ist, aber nicht im Kern λ und μ . Siehe dazu im Beweis von Theorem 5.5(c) in Chapter 3 von [96, S. 80].

Korollar VI.2.7. *Die ausschöpfbaren Räume der Ordnungskategorie SRI , $\mathcal{Y}_T(\text{SRI})$, $\mathcal{X}_T(\text{SRI})$ oder $\text{sti}\{X\}$ sind jeweils abgeschlossen unter Hüllen und Kernen.*

VI.2.b. Vererbung von Ausschöpfbarkeit

Ausschöpfbarkeit wird von den Urbildoperatoren des Korrespondenzdiagramms (V.2.1) bewahrt, wie im Hauptresultat dieses Unterabschnitts dargestellt wird, siehe Theorem VI.2.11. Der Beweis des Theorems basiert auf den Lemmas VI.2.9 und VI.2.10. Diese besagen im wesentlichen, dass sich Approximationen der Eins mit den Halbnormfunktionen $|\cdot|_{\bullet k}$, $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot) * \varphi$ und $|\cdot|_{*\Phi}$ aus den Gleichungen (V.2.4), (V.2.11) und (V.2.34) vertragen. Im gesamten Unterabschnitt ist $(\mathcal{Y}, \bullet) \in \{(\mathcal{X}', *), (L^p, *^p) : p \in [1, \infty]\}$ fest gewählt und X ein fest gewählter Hausdorffscher, lokalkonvexer Raum mit $X \neq \{0\}$.

Lemma VI.2.8. *Sei $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{B})$. Dann gilt $1/B \in \mathfrak{B}(\mathcal{B})$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $|b| \geq \varepsilon$ für alle $b \in B$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist $\partial^\alpha(1/b)$ eine Linearkombination aus Termen der Form $\partial^{\alpha_1} b \dots \partial^{\alpha_k} b / b^{k+1}$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha$ und $k \in \mathbb{N}_0$. \square

Lemma VI.2.9. *Sei (θ_n) eine glatte Approximation der Eins und $K \in \mathfrak{K}$. Es gibt glatte Approximationen der Eins (χ_n) und $(\tilde{\chi}_n)$ mit Werten in $[0, 1]$, sodass*

1. *Zu $k \in \mathcal{K}_{K,+}$ gibt es $C \in \mathbb{R}_+$, sodass*

$$|f \cdot \theta_n|_{\bullet k} \leq C \cdot (|f|_{\bullet k}) \cdot \chi_n, \quad (\text{VI.2.4a})$$

$$(|f|_{\bullet k}) \cdot |\theta_n| \leq C \cdot |f \cdot \chi_n|_{\bullet k}, \quad (\text{VI.2.4b})$$

$$|f \cdot (1 - \theta_n)|_{\bullet k} \leq C \cdot (|f|_{\bullet k}) \cdot (1 - \tilde{\chi}_n), \quad (\text{VI.2.4c})$$

$$(|f|_{\bullet k}) \cdot |1 - \theta_n| \leq C \cdot |f \cdot (1 - \tilde{\chi}_n)|_{\bullet k}, \quad (\text{VI.2.4d})$$

jeweils für alle $f \in \mathcal{Y}$ und $n \in \mathbb{N}$.

2. *Zu $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ gibt es $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$, sodass*

$$|f \cdot \theta_n|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \cdot \chi_n, \quad (\text{VI.2.5a})$$

$$|f|_{*\Phi} \cdot |\theta_n| \leq |f \cdot \chi_n|_{*\Psi}, \quad (\text{VI.2.5b})$$

$$|f \cdot (1 - \theta_n)|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} \cdot (1 - \tilde{\chi}_n), \quad (\text{VI.2.5c})$$

$$|f|_{*\Phi} \cdot |1 - \theta_n| \leq |f \cdot (1 - \tilde{\chi}_n)|_{*\Psi}, \quad (\text{VI.2.5d})$$

jeweils für alle $f \in \mathcal{X}$ und $n \in \mathbb{N}$.

VI. Eigenschaftsvererbung

Beweis. Definiere die Konstante

$$C := 1 + \sup\{\|\theta_n\|_\infty : n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{VI.2.6})$$

und wähle eine glatte Approximation der Eins (χ_n) mit den Eigenschaften

$$0 \leq \chi_n \leq 1, \quad \{\chi_n = 1\} \supseteq \text{supp } \theta_n + (K \cup -K). \quad (\text{VI.2.7})$$

Dann sind die Ungleichungen (VI.2.4a) und (VI.2.4b) erfüllt.

Korollar VI.1.15, angewendet auf die Menge $B_1 := \{\theta_n, 1 - \theta_n : n \in \mathbb{N}\}$, und Lemma VI.1.17, angewendet auf die \mathcal{E} -Nullfolge $(h_n) := (1 - \theta_n)$, liefern eine Menge $\Psi_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$ und eine Nullfolge (w_n) in \mathcal{C}_+ mit $w_n \leq 1$, sodass

$$|f \cdot \theta_n|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi_1}, \quad (\text{VI.2.8a})$$

$$|f \cdot (1 - \theta_n)|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi_1} \cdot w_n, \quad (\text{VI.2.8b})$$

jeweils für alle $f \in \mathcal{X}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wähle nun eine Nullfolge (ε_n) in \mathbb{R}_+ mit $\varepsilon_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes Kompaktum von \mathbb{R}^d für ein $n = n(K) \in \mathbb{N}$ groß genug in der Menge $\{|1 - \theta_n| \leq \varepsilon_n\}$ enthalten ist. Wähle dann eine glatte Approximation der Eins $(\tilde{\chi}_n)$ mit den Eigenschaften

$$\max\{\varepsilon_n/C, w_n\} \leq 1 - \tilde{\chi}_n \leq 1, \quad \text{supp } \tilde{\chi}_n + (K \cup -K) \subseteq \{|1 - \theta_n| \leq \varepsilon_n\}. \quad (\text{VI.2.9})$$

Mit dieser Wahl von $(\tilde{\chi}_n)$ sind nun auch (VI.2.4c) und (VI.2.4d) erfüllt.

Aus $1 - \tilde{\chi}_n \geq \varepsilon_n/C$ und Lemma VI.2.8 erhält man die in \mathcal{B} beschränkte Menge

$$B_2 := \left\{ \frac{\varepsilon_n}{1 - \tilde{\chi}_n} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (\text{VI.2.10})$$

Korollar VI.1.15, angewendet auf B_2 , liefert eine Menge $\Psi_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}'_K)$, sodass

$$|f|_{*\Phi} \cdot \varepsilon_n \leq \left| f \cdot (1 - \tilde{\chi}_n) \cdot \frac{\varepsilon_n}{1 - \tilde{\chi}_n} \right|_{*\Phi} \leq |f \cdot (1 - \tilde{\chi}_n)|_{*\Psi_2} \quad (\text{VI.2.11})$$

für alle $f \in \mathcal{X}$ und $n \in \mathbb{N}$. Setze nun

$$\Psi := \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup (C \cdot \Phi). \quad (\text{VI.2.12})$$

Damit folgt nun die Ungleichung (VI.2.5a) aus (VI.2.8a) und (VI.2.7). Die Ungleichung (VI.2.5b) folgt aus (VI.2.6) und (VI.2.7). Die Ungleichung (VI.2.5c) folgt aus (VI.2.8b) und (VI.2.9). Die Ungleichung (VI.2.5d) folgt aus (VI.2.11) und (VI.2.9). \square

Lemma VI.2.10. *Zu jeder diskreten Approximation der Eins (θ_n) gibt es eine glatte Approximation Eins (χ_n) , sodass*

$$\chi_n(z + x) = \theta_n(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d \text{ und } x \in [-1/4, 1/4]^d. \quad (\text{VI.2.13})$$

Beweis. Wähle $\chi \in \mathcal{D}$ so, dass $\{\chi = 1\} \supseteq [-1/4, 1/4]^d$, $\text{supp } \chi \subseteq [-3/4, 3/4]^d$ und $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} T_z \chi = 1$ als konvergente Reihe in \mathcal{E} . Dann ist $\chi_n := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \theta_n(z) T_z \chi$ die gesuchte glatte Approximation der Eins. \square

Theorem VI.2.11. *Sei E ein SRI-Raum.*

1. *Ist E ausschöpfbar, so sind auch die Räume $\mathcal{Y}_T(E)$, $\mathcal{X}_T(E)$ und $\omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$ ausschöpfbar.*
2. *Entweder alle oder keine der Räume $\mathcal{Y}_T(E)$, $\mathcal{X}_T(E)$ und $\omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$ sind ausschöpfbar.*

Beweis. Der Raum $\omega_{*\mathcal{D}}(E)$ ist genau dann ausschöpfbar, wenn $\omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$ es ist. Sei (θ_n) eine diskrete Approximation der Eins. Allgemein gilt die Relation

$$q \circ (v \cdot a) = (q \circ v) \cdot a \quad \text{für alle } v \in \omega\{X\}, a \in \omega \text{ und } q \in \text{csn } X. \quad (\text{VI.2.14})$$

Nutzt man diese Relation nun für $a = \theta_n$ oder $a = 1 - \theta_n$, $v \in \omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$ und wendet eine Halbnorm $p \in \text{csn } \omega_{*\mathcal{D}}(E)$ auf beide Seiten an, so erhält man

$$p(q \circ (v \cdot \theta_n)) = p((q \circ v) \cdot \theta_n), \quad (\text{VI.2.15a})$$

$$p(q \circ (v \cdot (1 - \theta_n))) = p((q \circ v) \cdot (1 - \theta_n)), \quad (\text{VI.2.15b})$$

VI. Eigenschaftsvererbung

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach den Definitionen V.4.1 und VI.2.2 liefert dies die Implikation “ \Rightarrow ” der Behauptung. Um auch die Rückimplikation “ \Leftarrow ” zu erhalten wählt man $q \in \text{csn } X$ und $z \in X$ mit $q(z) > 0$. Dann setzt man spezieller $v = z \otimes b$ mit $b \in \omega_{*\mathcal{D}}(E)$, womit $q \circ v = q(z) \cdot b$.

Der Raum $\omega_{\mathcal{D}}(E)$ ist ausschöpfbar, falls dies für E , $\mathcal{Y}_T(E)$ oder $\mathcal{X}_T(E)$ gilt.* Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi \neq 0$, $\varphi \geq 0$ und $\text{supp } \varphi \subseteq [-1/4, 1/4]^d$. Lemma VI.2.10 liefert dann zu jeder diskreten Approximation der Eins (θ_n) eine glatte Approximation der Eins (χ_n) , sodass

$$p((a \cdot \theta_n) * \varphi) = p((a * \varphi) \cdot \chi_n), \quad (\text{VI.2.16a})$$

$$p((a \cdot (1 - \theta_n)) * \varphi) = p((a * \varphi) \cdot (1 - \chi_n)), \quad (\text{VI.2.16b})$$

für alle $a \in \omega_{*\mathcal{D}}(E)$, $p \in \text{csn } E \cup \text{csn } \mathcal{Y}_T(E) \cup \text{csn } \mathcal{X}_T(E)$ und $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Identitäten (V.2.15), (V.2.31) und (V.2.50) ist $\omega_{*\mathcal{D}}(E)$ jeweils das Urbild von E , $\mathcal{Y}_T(E)$ und $\mathcal{X}_T(E)$ unter der Abbildung $a \mapsto a * \varphi$. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $\omega_{*\{\varphi\}}$ in Gleichung (V.2.10) und aus Definition VI.2.2.

Der Raum $\mathcal{Y}_T(E)$ ist ausschöpfbar, falls $\omega_{\mathcal{D}}(E)$ es ist.* Sei (θ_n) eine glatte Approximation der Eins, $p \in \text{clsn } \omega_{*\mathcal{D}}(E)$ und $k \in \mathcal{K}_+$. Dann gibt es nach Gleichung (VI.2.4b) von Lemma VI.2.9 eine glatte Approximation der Eins (χ_n) und $C \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} p(|f| \bullet k|_{\mathbb{Z}^d} \cdot \theta_n|_{\mathbb{Z}^d}) \leq C \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} p(|f| \cdot \chi_n| \bullet k|_{\mathbb{Z}^d}) \quad (\text{VI.2.17})$$

für alle $f \in \mathcal{Y}_T(E)$. Dabei sind $(\theta_n|_{\mathbb{Z}^d})$ und $(\chi_n|_{\mathbb{Z}^d})$ diskrete Approximationen der Eins.

Gleichung (VI.2.4d) von Lemma VI.2.9 liefert eine glatte Approximation der Eins $(\tilde{\chi}_n)$ mit Werten in $[0, 1]$, sodass

$$p(|f| \cdot (1 - \theta_n)| \bullet k|_{\mathbb{Z}^d}) \leq C \cdot p(|f| \bullet k|_{\mathbb{Z}^d} \cdot (1 - \tilde{\chi}_n)|_{\mathbb{Z}^d}) \quad (\text{VI.2.18})$$

für alle $f \in \mathcal{Y}_T(E)$ und $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathcal{Y}_T(E)$ ausschöpfbar, falls $\omega_{*\mathcal{D}}(E)$ es ist.

Der Raum $\mathcal{X}_T(E)$ ist ausschöpfbar, falls $\omega_{\mathcal{D}}(E)$ es ist.* Dies beweist man analog zu vorherigem unter Verwendung von Teil 2 von Lemma VI.2.9. \square

Proposition VI.2.12. *Sei E ein SRI-Raum, λ ein STI-Folgenraum und F ein regulär \mathcal{B} -invarianter Unterraum von \mathcal{D}' .*

1. *Seien $W \subseteq \mathcal{C}_+$, $V \subseteq \omega_+$ und $H \subseteq \mathcal{E}$. Ist E , λ bzw. F ausschöpfbar, so ist auch E_W , λ_V bzw. F_H ausschöpfbar.*
2. *Die Räume $E_{(\mathcal{C}_{0,+})}$, $\lambda_{(c_{0,+})}\{X\}$ und $F_{\mathcal{B}}$ sind ausschöpfbar.*

Beweis. Teil 1: Wegen $\theta_n \cdot (h \cdot f) = h \cdot (\theta_n \cdot f)$ kann die Ausschöpfbarkeit des gewichteten Raums E_W , λ_V bzw. F_H direkt auf E , λ bzw. F zurückgeführt werden.

Teil 2: Wegen Theorem VI.1.28 und Beispiel VI.1.29 genügt es die Ausschöpfbarkeit von $\lambda_{(c_{0,+})}$ zu beweisen. Zu jedem $w \in c_{0,+}$ gibt es $v \in c_{0,+}$ mit $w/v \in c_{0,+}$. Dann gelten $w \cdot |a| = (w/v) \cdot v \cdot |a|$ und $v \cdot |a| \in \lambda$ für alle $a \in \lambda_{c_{0,+}}$ und $(w/v) \cdot \theta_n \rightarrow 0$ in ℓ^∞ für alle diskreten Approximationen der Eins (θ_n). Wegen Proposition VI.1.10 folgt daraus die Bedingung (VI.2.2). \square

VI.2.c. Ausschöpfbarkeit und Normalität

In der klassischen Literatur zu Funktionen- und Distributionenräumen hat sich die Notation des “normalen” Distributionenraums etabliert, siehe Definition 4.2.3 in [52, S. 319]. Ein Distributionenraum F heisst demnach *normal*, wenn \mathcal{D} eine dichte Teilmenge von F ist. “Normalität” beschreibt im Gegensatz zur “Ausschöpfbarkeit” aus Definition VI.2.2 auch die Approximierbarkeit in der “lokalen Komponente” anstatt nur in der “globalen Komponente” eines Raums. Proposition VI.2.13 beschreibt für welche Amalgamräume die beiden Begriffe dennoch äquivalent sind.

Proposition VI.2.13. *Sei F ein lokalkonvexer Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{X} oder L^p , $1 \leq p < \infty$. Dann ist F genau dann ausschöpfbar, wenn F normal ist. Lokalkonvexe Amalgamräume mit lokaler Komponente L^∞ oder \mathcal{K}' sind nicht normal.*

Beweis. Die Menge \mathcal{D} ist dicht in \mathcal{X}_{cs} und L^p_{cs} , aber weder in L^∞_{cs} noch in \mathcal{C}' . Damit vollendet eine Anwendung von Proposition VI.2.3 den Beweis. \square

Bemerkung VI.2.14. Sei F ein lokalkonvexer Unterraum von \mathcal{D}' der \mathcal{D} enthält. Dann wird \mathcal{D} vermöge $\varphi \mapsto (f \mapsto \langle f, \varphi \rangle)$ auf kanonische Weise in F' eingebettet.

Bemerkung VI.2.15. Jeder normale, lokalkonvexe Amalgamraum X mit lokaler Komponente \mathcal{X} ist auch durch Glätten und Abschneiden approximierbar.

VI.2.d. Vererbung der Vollständigkeit

Es wird nun untersucht wie sich topologische Vollständigkeit und Vervollständigung mit dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) vertragen. Das Hauptresultat ist Proposition VI.2.16 zur Bewahrung der Vollständigkeit. Eine Schlussfolgerung für Ordnungskategorien von Amalgamräumen wird in Proposition VI.2.17 erhalten.

Im folgenden ist $\mathcal{L} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{K}'\} \cup \{L^p : p \in [1, \infty]\}$ und X ist ein vollständiger, Hausdorffscher, lokalkonvexer Raum mit $X \neq \{0\}$.

Proposition VI.2.16. *Sei E ein SRI-Raum.*

1. *Ist E vollständig, so sind dies auch die Räume $\mathcal{L}_T(E)$ und $\omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$.*
2. *Genau dann, wenn $\mathcal{L}_T(E)$ vollständig ist, ist auch $\omega_{*\mathcal{D}}(E)\{X\}$ vollständig.*

Beweis. Sei zunächst $X = \mathbb{R}$. Man wendet Proposition IV.2.11 auf die Urbildoperatoren aus dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) an und nutzt die Vollständigkeit von \mathcal{L} und ω . Um allgemeine X abzudecken nutzt man Theorem V.4.2 und die Vollständigkeit von $\omega\{X\}$ als \mathbb{N} -faches Produkt des vollständigen Raums X , siehe Satz 24.4 aus [75, S. 29]. □

Proposition VI.2.17. *Die topologisch vollständigen Räume definieren jeweils ein Hüllensystem in den Ordnungskategorien SRI, $\mathcal{L}_T(\text{SRI})$ und $\text{sti}\{X\}$.*

Beweis. Die Ordnungskategorien lokalkonvexer Räume SRI, $\mathcal{L}_T(\text{SRI})$ und $\text{sti}\{X\}$ sind abgeschlossen unter der Bildung von Kernen und jeder Kern vollständiger lokalkonvexer Räume ist ebenfalls vollständig. □

VI.3. Relativ kompakte und straffe Teilmengen

In diesem Abschnitt werden die relativ kompakten Teilmengen $\mathfrak{K}(F)$ vollständiger ausschöpfbarer Amalgamräume $F \in \mathcal{L}_T(\text{SRI})$ charakterisiert. Für die lokalen Komponenten $\mathcal{L} = \mathcal{K}'$ oder $\mathcal{L} = L^p_{\text{lok}}$ mit $1 \leq p \leq \infty$ liefert Proposition VI.3.12 die

Charakterisierung $\mathfrak{K}(F) = \mathfrak{T}(F) \cap \mathfrak{K}(\mathcal{L})$ mit dem Mengensystem der straffen Teilmengen $\mathfrak{T}(F)$, das in Definition VI.3.1 eingeführt wird. Straffheit beschreibt also die globalen Eigenschaften relativ kompakter Teilmengen. Für die lokalen Komponenten $\mathcal{L} = \mathcal{X} \in \{\mathcal{D}', \mathcal{E}\}$ erhält man sogar $\mathfrak{K}(F) = \mathfrak{T}(F)$ in Proposition VI.3.14. Zudem erhält man mit Theorem VI.3.17 die Charakterisierung $\mathfrak{K}_\sigma(\mathcal{X}_T(L_W^1)) = \mathfrak{T}(\mathcal{X}_T(L_W^1))$ für die relativ schwach kompakten Teilmengen $\mathfrak{K}_\sigma(\mathcal{X}_T(L_W^1))$ von $\mathcal{X}_T(L_W^1)$.

Das Auswerten von Urbildbornologien überführt die Resultate für $\mathcal{L} = \mathcal{X}$ in explizitere Kriterien, siehe Theorem VI.3.19 in Unterabschnitt VI.3.e. Zum Beispiel besagt die Äquivalenz “(1) \Leftrightarrow (1’)” dieses Theorems, dass relative Kompaktheit und relativ schwache Kompaktheit in $\mathcal{D}'_T(L_W^1)$ übereinstimmen. Weiter ist nach “(1) \Leftrightarrow (2’)” eine beschränkte Menge $K \subseteq \mathcal{D}'_T(L_W^1)$ genau dann relativ schwach kompakt, wenn

$$\sup_{\substack{f \in K \\ |x| \geq r}} \int |(f * \varphi)(x)| w(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}, w \in W. \quad (\text{VI.3.1})$$

Zusammen mit der Beschränktheit von $K * \varphi$ bedeutet Gleichung (VI.3.1), dass $K * \varphi$ straff in L^1_W ist, im Sinne von Definition VI.3.1. Diese Charakterisierung beantwortet Problem II.4.8 aus Unterabschnitt II.4.a der Einleitung.

Die Beweise der Resultate haben drei wichtige Zutaten: Erstens ist die Bornologie der straffen Teilmengen \mathfrak{T} mit SRI-Räumen und STI-Folgenräumen verträglich und bleibt unter Amalgamraumbildungen erhalten, siehe Unterabschnitt VI.3.a. Zweitens sind die präkompakten Teilmengen eines ausschöpfbaren STI-Folgenraums λ durch Straffheit charakterisierbar, siehe Proposition VI.3.7 in Unterabschnitt VI.3.b. Ähnliches erhält man durch Übertragung der bekannten Charakterisierung relativ schwach kompakter Teilmengen der Räume $L^1(\mu)$ mit Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf die Räume L^1_W , siehe Lemma VI.3.16 von Unterabschnitt VI.3.d. Drittens werden Vererbungsregeln für relativ kompakte Teilmengen von Urbildräumen aus Unterabschnitt IV.2.c genutzt.

VI.3.a. Vererbung straffer Teilmengen

Straffe Teilmengen $\mathfrak{T}(F)$ werden für Räume F von Distributionen oder Vektorfolgen mit einer milden Multiplikationsinvarianzbedingung eingeführt. Proposition VI.3.4 besagt, dass diese zu einer Topologie assoziierte Bornologie mit SRI-Räumen und STI-Folgenräumen kompatibel ist. Proposition VI.3.5 liefert die Vererbungseigenschaft für

VI. Eigenschaftsvererbung

straffe Teilmengen unter Amalgamraumbildungen.

Im folgenden ist X ein lokalkonvexer Raum.

Definition VI.3.1. Sei F ein gleichmäßig \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -invarianter lokalkonvexer Distributionen- bzw. X -Folgenraum. Dann wird eine Teilmenge $B \subseteq F$ *straff* (in F) genannt, falls B beschränkt in F ist und

$$\sup_{f \in B} p(f \cdot (1 - \theta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } p \in \text{csn } F \text{ und } (\theta_n) \in \mathcal{A}_1. \quad (\text{VI.3.2})$$

Es notiert $\mathfrak{T}(F)$ das Mengensystem aller straffen Teilmengen von F .

Bemerkung VI.3.2. Die Definition von “straff” in obiger Definition VI.3.1 weicht leicht von der gängigen Definition ab, siehe zum Beispiel Definition VIII.4.18 aus [27, S. 392]: Eine Menge K ist straff in \mathcal{M}^1 im Sinne von Definition VI.3.1 genau dann, wenn K beschränkt in \mathcal{M}^1 und straff im Sinne von Definition VIII.4.18 aus [27] ist. Hier notiert \mathcal{M}^1 den Raum der integrierbaren Radon-Maße (Gleichung (III.3.11)).

Bemerkung VI.3.3. Ein gleichmäßig \mathcal{B} - bzw. ℓ^∞ -invarianter lokalkonvexer Distributionen- bzw. X -Folgenraum F ist genau dann ausschöpfbar, wenn jede einelementige Teilmenge $\{f\}$ von F straff in F ist.

Proposition VI.3.4. Für lokalkonvexe SRI-Räume E ist $\mathfrak{T}(E)$ eine SRI-Bornologie. Für lokalkonvexe STI-Folgenräume λ ist $\mathfrak{T}(\lambda)$ eine STI-Bornologie.

Beweis. Da die Topologie von E bzw. λ von Verbandshalbnormen erzeugt wird, muss die Bedingung (VI.3.2) nur für $p \in \text{clsn } E$ bzw. $p \in \text{clsn } \lambda$ gefordert werden. Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}$ bzw. $\varphi \in \phi$. Zu jeder glatten bzw. diskreten Approximation der Eins (θ_n) gibt es eine glatte bzw. diskrete Approximation der Eins (χ_n) , sodass

$$(|f| * \varphi) \cdot |1 - \theta_n| \leq (|f| \cdot (1 - \chi_n)) * \varphi \quad (\text{VI.3.3})$$

für alle $f \in \mathcal{K}'$ bzw. $f \in \omega_+$, $n \in \mathbb{N}$. Siehe dazu Lemma VI.2.9. Da der Faltungsoperator $(\cdot) * \varphi$ ein stetiger Endomorphismus von E bzw. λ ist, folgt die Proposition aus der Ungleichung (VI.3.3) und der Bedingung 1 aus Proposition V.1.1 bzw. Bedingung 2 aus Proposition V.1.8. \square

Proposition VI.3.5. Sei \mathcal{L} einer der Räume \mathcal{D}' , \mathcal{E} , \mathcal{K}' oder L_{lok}^p mit $p \in [1, \infty]$ und X ein vollständiger, Hausdorffscher, lokalkonvexer Raum mit $X \neq \{0\}$.

1. Jeder lokalkonvexe SRI-Raum E erfüllt

$$\mathfrak{T}(\mathcal{L}_{\mathbb{T}}(E)) = \mathcal{L}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{T}(E)). \quad (\text{VI.3.4})$$

2. Jeder lokalkonvexe STI-Folgenraum λ erfüllt

$$\mathfrak{T}(\mathcal{L}_{\tau}(\lambda)) = \mathcal{L}_{\tau}(\mathfrak{T}(\lambda)), \quad (\text{VI.3.5a})$$

$$\mathfrak{T}(\lambda\{X\}) = \mathfrak{T}(\lambda)\{X\}. \quad (\text{VI.3.5b})$$

Beweis. Nach Bemerkung VI.3.3 müssen die Argumente im Beweis von Theorem VI.2.11 lediglich gleichmäßig in Teilmengen F anstatt Elementen f wiederholt werden. \square

Proposition VI.3.6. Sei E bzw. λ ein vollständiger, ausschöpfbarer Fréchet-SRI-Raum bzw. -STI-Folgenraum. Eine Teilmenge B von E bzw. λ ist genau dann straff, wenn es ein $w \in \mathcal{C}_+$ bzw. $w \in \omega_+$ gibt, sodass $K \subseteq wB$.

Beweis. Es genügt, den Beweis für λ zu führen. Sei θ_n die spezielle Approximation der Eins $\theta_n = 1_{Z_n}$ mit $Z_n := ([-n, n] \cap \mathbb{Z})^d$. Die Topologie \mathcal{T}_{λ} wird von einer aufsteigenden Folge $(p_m : m \in \mathbb{N}_0)$ von Verbandshalbnormen erzeugt. Angenommen, K ist straff. Dann gibt es nach Gleichung (VI.3.2) zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ ein $n(m) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sup_{a \in K} p_m (a \cdot (1 - \theta_{n(m)})) \leq 2^{-m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{VI.3.6})$$

Die Folge $n(m)$ wird streng aufsteigend gewählt. Definiere nun $w \in c_{0,+}$ durch

$$w(z) := 2^{-m} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } z \in Z_{n(m)} \setminus Z_{n(m-1)} \quad (\text{VI.3.7})$$

mit der Konvention $Z_{n(-1)} = \emptyset$. Betrachte dann die Menge $B := K/w$. Da K beschränkt ist gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ein $C_m < \infty$ so, dass für alle $a \in B$ die Ungleichung

$$p_m (a/w) \leq p_m ((a/w)\theta_{n(m)}) + p_m ((a/w)(1 - \theta_{n(m)})) \leq C_m + 1 \quad (\text{VI.3.8})$$

erfüllt ist. Daraus folgt, dass B beschränkt in λ ist. \square

VI.3.b. Relative Kompaktheit in STI-Folgenräumen

Eine Teilmenge K von ℓ^1 ist genau dann relativ (schwach) kompakt wenn K straff im Sinne von Definition VI.3.1 ist. Dieses klassische Resultat findet man zum Beispiel in [65, §22, 4.(3), S. 282], [55, Prop. 2.6.11, S. 108f] und [96, Thm. 2.2.4, S. 31]. Die Verallgemeinerung auf ℓ^p mit $p \in [1, \infty[$ wird in [120, Aufgabe II.5.23, S. 85] angegeben.

Eine Übertragung des Beweises aus [65] liefert eine analoge Charakterisierung der präkompakten Teilmengen $\text{p}\mathfrak{K}(\lambda)$ eines ausschöpfbaren, lokalkonvexen STI-Folgenraums λ , und somit der relativ kompakten Teilmengen $\mathfrak{K}(\lambda)$, falls λ vollständig ist. Siehe Proposition VI.3.7 und Korollar VI.3.8. Weiter wird erhalten, dass vollständige STI-Folgenräume mit strikter Topologie Semi-Montel-Räume sind, siehe Proposition VI.3.9.

Proposition VI.3.7. *Die präkompakten Teilmengen eines ausschöpfbaren, lokalkonvexen STI-Folgenraums λ entsprechen den straffen Teilmengen, das heisst,*

$$\text{p}\mathfrak{K}(\lambda) = \mathfrak{T}(\lambda). \quad (\text{VI.3.9})$$

Beweis. Sei $K \in \mathfrak{T}(\lambda)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$p(a \cdot (1 - \theta_n)) \leq 1/3 \quad \text{für alle } a \in K. \quad (\text{VI.3.10a})$$

Somit liefert die Dreiecksungleichung

$$p(a - b) \leq p((a - b) \cdot \theta_n) + 2/3 \quad \text{für alle } a, b \in K. \quad (\text{VI.3.10b})$$

Da $K \cdot \theta_n$ endlich dimensional ist, findet man $b_1, \dots, b_m \in K$, sodass

$$\min_{l=1, \dots, m} p((a - b_l) \cdot \theta_n) \leq 1/3. \quad \text{für alle } a \in K. \quad (\text{VI.3.10c})$$

Aus den Gleichungen (VI.3.10) folgt

$$K \subseteq (b_1 + U_p) \cup \dots \cup (b_m + U_p) \quad (\text{VI.3.11})$$

mit der Notation $U_p := \{c \in \lambda : p(c) \leq 1\}$.

Sei umgekehrt $K \subseteq \lambda$ mit $K \notin \mathfrak{T}(\lambda)$. Dann gibt es $p \in \text{clsn } \lambda$ und eine Folge

$(a_n) \subseteq K$ mit der Eigenschaft

$$p(a_n \cdot (1 - \theta_n)) \geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{VI.3.12})$$

Angenommen, es gibt $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ so, dass

$$p(a_{n_{l'}} - a_{n_{l''}}) \geq 1/2 \quad \text{für alle } l', l'' = 1, \dots, l \text{ mit } l' \neq l''. \quad (\text{VI.3.13})$$

Da p eine Verbandshalbnorm und $(\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ normal ist kann man $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\begin{aligned} p(a_{n_{l'}} - a_n) &\geq p((a_{n_{l'}} - a_n) \cdot (1 - \theta_n)) \\ &\geq p(a_n \cdot (1 - \theta_n)) - p(a_{n_{l'}} \cdot (1 - \theta_n)) \\ &\geq 1 - 1/2 = 1/2 \end{aligned} \quad (\text{VI.3.14})$$

für alle $l' = 1, \dots, l$. Daraus folgt per vollständiger Induktion, dass es eine Teilfolge (b_n) von (a_n) gibt mit

$$p(b_n - b_{n'}) \geq 1/2 \quad \text{für alle } n, n' \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq n'. \quad (\text{VI.3.15})$$

Somit ist K nicht präkompakt. □

Korollar VI.3.8. *Jeder vollständige, ausschöpfbare, lokalkonvexe STI-Folgenraum λ erfüllt $\mathfrak{K}(\lambda) = \mathfrak{T}(\lambda)$.*

Proposition VI.3.9. *Ist λ ein vollständiger, ausschöpfbarer STI-Folgenraum, so ist der gewichtete Raum $\lambda_{(c_0,+)}$ ein Semi-Montel-Raum.*

Beweis. Nach Korollar VI.3.8 genügt es zu zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge von λ straff ist. Nach Bemerkung VI.3.3 ist dies analog zu Teil 2 von Proposition VI.2.12. □

Proposition VI.3.10. *Ein vollständiger, lokalkonvexer STI-Folgenraum λ ist genau dann ausschöpfbar wenn die solide Hülle jeder relativ kompakten Teilmenge von λ ebenfalls relativ kompakt ist.*

Beweis. Implikation “ \Rightarrow ”: Diese folgt aus Proposition VI.3.4 und Korollar VI.3.8.

Rückimplikation “ \Leftarrow ”: Sei $a \in \lambda$ und setze $Z(n) := [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Die solide Hülle von $\{a\}$ enthält die Menge $\{a \cdot 1_{Z(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ und ist nach Annahme relativ kompakt.

VI. Eigenschaftsvererbung

Aus der Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (d) von Theorem 3.11 aus [55, S. 61] folgt daher $a \cdot 1_{Z(n)} \rightarrow a$ in λ für $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung VI.3.11. Proposition VI.3.10 kann als Verallgemeinerung der Äquivalenz (d) \Leftrightarrow (e) aus §30,7.(1) in [65, S. 417] verstanden werden. Die Beweisidee ist die selbe wie aus [65].

VI.3.c. Relative Kompaktheit in Amalgamräumen

Zur Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen in kontinuierlichen soliden Amalgäumen muss zusätzlich zur Straffheit ein lokales Kriterium an die Teilmengen angegeben werden. Dies wird in Proposition VI.3.12 erledigt und in Korollar VI.3.13 auf SRI-Räume übertragen. Proposition VI.3.14 liefert $\mathfrak{T}(X) = \mathfrak{K}(X)$ für vollständige, ausschöpfbare Räume $X \in \mathcal{X}_T(\text{SRI})$, genau wie für STI-Folgenräume. Die Gewichtung solcher Räume mit \mathcal{B} macht diese dann zu Semi-Montel-Räumen, siehe Proposition VI.3.15.

Proposition VI.3.12. *Sei \mathcal{Y} einer der Räume \mathcal{K}' oder L_{lok}^p mit $p \in [1, \infty]$ und E ein vollständiger, ausschöpfbarer, lokalkonvexer Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{Y} . Eine Teilmenge $B \subseteq E$ ist genau dann relativ kompakt, wenn B straff in E und relativ kompakt in \mathcal{Y} ist.*

Beweis. Sei λ der STI-Folgenraum mit $E = \mathcal{Y}_\tau(\lambda)$. Dann ist λ ausschöpfbar nach Proposition VI.2.11 und vollständig nach Proposition VI.2.16. Aus Proposition VI.3.5 und Korollar VI.3.8 folgt $\mathfrak{T}(\mathcal{Y}_\tau(\lambda)) = \mathcal{Y}_\tau(\mathfrak{T}(\lambda)) = \mathcal{Y}_\tau(\mathfrak{K}(\lambda))$. Da \mathcal{Y} vollständig ist und $\mathfrak{K}(\lambda) = \mathfrak{T}(\lambda)$ nach Proposition VI.3.4 eine SRI-Bornologie ist vollendet nun eine Anwendung von Proposition IV.2.13 den Beweis. \square

Korollar VI.3.13. *Sei E ein vollständiger, ausschöpfbarer lokalkonvexer SRI-Raum. Eine lokalgleichstetige Menge $B \subseteq E \cap \mathcal{C}$ ist genau dann relativ kompakt, wenn B straff ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist B relativ kompakt in L_{lok}^∞ . Somit folgt das Korollar aus Proposition VI.3.12 und den stetigen Inklusionen $L_T^\infty(E) \subseteq E \subseteq \mathcal{K}'_T(E)$. \square

Proposition VI.3.14. *Jeder vollständige, ausschöpfbare Amalgamraum X mit lokaler Komponente \mathcal{X} erfüllt $\mathfrak{K}(X) = \mathfrak{T}(X)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition VI.3.12 findet man einen vollständigen STI-Folgenraum λ mit $\mathfrak{T}(\mathcal{X}_\tau(\lambda)) = \mathcal{X}_\tau(\mathfrak{K}(\lambda))$. Da im vollständigen Semi-Montel-Raum \mathcal{X} relativ kompakte Mengen und beschränkte Mengen übereinstimmen vollendet dann eine Anwendung von Proposition IV.2.13 und Proposition IV.1.13 den Beweis. \square

Proposition VI.3.15. *Sei X ein lokalkonvexer Amalgamraum mit lokaler Komponente \mathcal{X} . Dann ist der gewichtete Raum $X_{\mathcal{J}}$ ein Semi-Montel-Raum.*

Beweis. Sei λ ein STI-Folgenraum mit $X = \mathcal{X}_\tau(\lambda)$. Nach Beispiel VI.1.29 und Theorem VI.1.26 gilt $X_{\mathcal{J}} = \mathcal{X}_\tau(\lambda_{(c_0,+)})$. Nach Proposition VI.3.9 ist $\lambda_{(c_0,+)}$ ein Semi-Montel-Raum und auch \mathcal{X} ist ein Semi-Montel-Raum. Somit folgt aus den Propositionen IV.1.13 und IV.2.13, dass auch $X_{\mathcal{J}}$ ein Semi-Montel-Raum ist. \square

VI.3.d. Relativ schwache Kompaktheit

Jeder STI-Folgenraum der Form ℓ_V^1 mit moderiertem Kegelideal $V \subseteq \omega_+$ hat die Eigenschaft, dass die relativ schwach kompakten Teilmengen mit den relativ kompakten Teilmengen zusammenfallen. Dies folgt im wesentlichen¹ aus §30.6.(3) von [65, S. 416]. Vergleiche auch Theorem 3.2.4 in [96, S. 31]. Nach Korollar VI.3.8 wiederum entsprechen die relativ kompakten Teilmengen den straffen Teilmengen von ℓ_V^1 , im Sinne von Definition VI.3.1.

In diesem Unterabschnitt wird die entsprechende Aussage für die Räume $\mathcal{X}_T(L_W^1)$ bewiesen, siehe Theorem VI.3.17. Der Beweis basiert unter anderem auf Lemma VI.3.16. Dieses wiederum baut auf der folgenden klassischen Charakterisierung von Dunford und Pettis auf: Eine beschränkte Teilmenge H von $L^1(\mu)$, μ ein endliches Maß, ist genau dann relativ schwach kompakt, wenn H gleichgradig integrierbar ist. Siehe Satz VIII.6.9 und Definition VIII.6.6 in [120, S. 445, 442].

Lemma VI.3.16. *Sei $W \subseteq L_{\text{lok},+}^\infty$ und $K \subseteq L_W^1 \cap L_{\text{lok}}^\infty$ beschränkt in L_{lok}^∞ . Dann ist K genau dann relativ schwach kompakt in L_W^1 wenn K straff in L_W^1 ist.*

Beweis. Nach Definition VI.3.1 ist K genau dann straff in L_W^1 wenn K beschränkt in

¹In [65] wird vorausgesetzt, dass V von der Form $|\lambda^\times|$ ist. Dies wird im dortigen Beweis allerdings nicht verwendet.

VI. Eigenschaftsvererbung

L_W^1 ist und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{f \in K} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)| w(x) dx \longrightarrow 0 \quad \text{für alle } w \in W. \quad (\text{VI.3.16})$$

(a) Das Lemma gilt für $W = \{1\}$: Durch $d\mu(x) = e^{-\pi x^2} dx$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}^d erklärt. Vermöge der Abbildung $L^1 \ni f \mapsto f(x) \cdot e^{\pi x^2}$ ist L^1 isomorph zu $L^1(\mu)$. Kombiniert mit Satz VIII.6.9 aus [120, S. 445] erhält man, dass K genau dann relativ schwach kompakt ist, wenn

$$\sup_{f \in K} \int_E |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad \int_E e^{-\pi x^2} dx \rightarrow 0 \quad \text{mit messbaren } E \subseteq \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.3.17})$$

Da $E = \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$ für $R \rightarrow \infty$ die Annahme auf der rechten Seite von (VI.3.17) erfüllt, die Implikation für $W = \{1\}$.

Nehme nun an, dass (VI.3.16) für $W = \{1\}$ gilt und sei $\varepsilon > 0$. Für alle $\delta, R \in \mathbb{R}_+$ und $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar gilt die Implikation

$$\int_E e^{-\pi x^2} dx < \delta \quad \Rightarrow \quad \text{vol}(E \cap B_R(0)) < \delta e^{\pi R^2}. \quad (\text{VI.3.18})$$

Da K beschränkt in L_{lok}^∞ ist, gibt es zu jedem $R \in \mathbb{R}_+$ ein $C_R \in \mathbb{R}_+$, sodass

$$\int_{E \cap B_R(0)} |f(x)| dx < C_R \cdot \text{vol}(E \cap B_R(0)) \quad \text{für alle } f \in K. \quad (\text{VI.3.19})$$

Wählt man also $R \in \mathbb{R}_+$ so, dass

$$\sup_{f \in K} \int_{E \setminus B_R(0)} |f(x)| dx < \varepsilon/2 \quad (\text{VI.3.20})$$

und setzt $\delta = \varepsilon e^{-\pi R^2} / (2C_R)$, dann folgt

$$\sup_{f \in K} \int_E |f(x)| dx < \varepsilon \quad (\text{VI.3.21})$$

aus der Ungleichung auf der linken Seite von (VI.3.18).

(b) Das Lemma gilt für $W = \{w\}$ mit $w \in L_{\text{loc},+}^\infty$: Der Raum L_w^1 isomorph zu

$L^1(\{w > 0\})$ vermöge $f \mapsto w \cdot f|_{\{w>0\}}$ und $L^1(\{w > 0\})$ entspricht auf kanonische Weise einem abgeschlossenen Unterraum von L^1 . Also folgt (b) aus (a).

(c) *Das Lemma gilt für allgemeines W :* Nach Definition ist K genau dann straff bezüglich W , wenn K straff bezüglich $\{w\}$ für alle $w \in W$ ist. Da L_W^1 der Kern der vollständigen Räume L_w^1 ist, ist K genau dann relativ schwach kompakt in L_W^1 , wenn K relativ schwach kompakt in L_w^1 ist, für alle $w \in W$. Also folgt (c) aus (b). \square

Theorem VI.3.17. *Sei $W \subseteq \mathcal{C}_+$ ein moderiertes Kegelideal. Dann stimmen in dem lokalkonvexen Raum $\mathcal{X}_T(L_W^1)$ die relativ schwach kompakten, die relativ kompakten und die straffen Teilmengen überein, das heisst,*

$$\mathfrak{K}_\sigma(\mathcal{X}_T(L_W^1)) = \mathfrak{K}(\mathcal{X}_T(L_W^1)) = \mathfrak{T}(\mathcal{X}_T(L_W^1)). \quad (\text{VI.3.22})$$

Beweis. Die Gleichung $\mathfrak{T}(\mathcal{X}_T(L_W^1)) = \mathfrak{K}(\mathcal{X}_T(L_W^1))$ ist ein Spezialfall von Proposition VI.3.14. Für die andere Gleichung berechnet man

$$\mathfrak{K}_\sigma(\mathcal{X}_T(L_W^1)) \stackrel{(i)}{=} \mathfrak{K}_\sigma(\mathcal{D}'_{*\mathcal{X}'}(L_W^1)) \quad (\text{VI.3.23a})$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \mathcal{D}'_{*\mathcal{X}'}(\mathfrak{K}_\sigma(L_W^1)) \quad (\text{VI.3.23b})$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \mathcal{D}'_{*\mathcal{X}'}(\mathfrak{T}(L_W^1)) \quad (\text{VI.3.23c})$$

$$\stackrel{(iv)}{=} \mathcal{X}_T(\mathfrak{T}(L_W^1)) \stackrel{(v)}{=} \mathfrak{T}(\mathcal{X}_T(L_W^1)). \quad (\text{VI.3.23d})$$

Hier folgt (i) aus Theorem V.3.13 und (ii) aus Proposition IV.2.12. Da die Menge $B * \varphi$ für alle $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ und $\varphi \in \mathcal{X}'$ beschränkt in L_{lok}^∞ ist, folgt aus Lemma VI.3.16 die Identität (iii). Theorem V.3.13 und Proposition VI.3.4 liefern die Identität (iv). Die letzte Identität (v) folgt aus Proposition VI.3.5. \square

Bemerkung VI.3.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nichtleer. Von P. Dierolf und S. Dierolf wurde bewiesen, dass in dem Dualraum $\dot{\mathcal{B}}(\Omega)'$ von $\dot{\mathcal{B}}(\Omega)$ die relativ schwach kompakten Teilmengen mit den relativ stark kompakten Teilmengen übereinstimmen, siehe Corollary (3.5),(b) in [20, S. 71]. Im Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}^d$ ist $(\dot{\mathcal{B}}(\Omega)', \beta(\dot{\mathcal{B}}(\Omega)', \dot{\mathcal{B}}(\Omega))) = \mathcal{D}'_{L^1}$ und somit verallgemeinert Theorem VI.3.17 diesen Spezialfall von Corollary (3.5),(b).

Um die Äquivalenz von schwacher und starker Konvergenz von Folgen in ℓ^1 zu zeigen, setzte I. Schur die “Methode des gleitenden Buckels” ein [120, S. 133]. In [20] wurde diese Methode auf den Raum $\dot{\mathcal{B}}(\Omega)'$ übertragen, was zu einem sehr technischen, müh-

VI. Eigenschaftsvererbung

samen Beweis führt [20, S. 64-71]. Die Beweismethode für Theorem VI.3.17 aus dieser Arbeit ist es dagegen, die Charakterisierung der schwach relativ kompakten Teilmengen $H \subseteq L^1(\mu)$ von Dunford und Pettis [25, Thm. 3.2.1, S. 376] per Gewichtungsisomorphismen oder per Urbildoperatoren auf die Räume $\mathcal{X}_T(L_W^1)$ zu übertragen. Zum einen wird dadurch ein langer technischer Beweis vermieden und zum anderen wurden leicht wiederverwendbare Hilfsmittel eingesetzt, wie zum Beispiel Proposition IV.2.12 oder Proposition VI.3.5

VI.3.e. Kriterien im glatten oder distributionellen Fall

Die Resultate aus Proposition VI.3.14 und Theorem VI.3.17 können durch Einsetzen der Definitionen von Urbildbornologien in explizite Kriterien überführt werden. Für vollständige, ausschöpfbare SRI-Räume E führt dies zu stärkeren und expliziteren Resultaten als die aus Corollary 3.16 aus [58, S. 10]:

Theorem VI.3.19. *Sei $E \in \text{SRI}$ vollständig und ausschöpfbar, $\lambda := \omega_{*\mathcal{Q}}(E)$ und $X := \mathcal{X}_T(E)$. Dann sind die folgenden Aussagen über $K \subseteq X$ äquivalent:*

- (1)/(1') *Es ist K relativ kompakt/straff in X .*
- (2)/(2') *Es ist $K * \varphi$ relativ kompakt/straff in E für alle $\varphi \in \mathcal{X}'$.*
- (3)/(3') *Es ist $|K|_{*\Phi}$ relativ kompakt/straff in E für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$.*
- (4)/(4') *Es ist $(|K|_{*\Phi})|_{\mathbb{Z}}$ relativ kompakt/straff in λ für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$.*

Im Spezialfall $E = L_W^1$ mit moderiertem Kegelideal W kommt noch dazu:

- (1'') *Die Menge K ist relativ schwach kompakt in X .*

Die Äquivalenz von (1)-(4) gilt auch für "beschränkt" anstatt "relativ kompakt", sogar für allgemeine $E \in \text{SRI}$.

Beweis. Beachte, dass $X = \mathcal{X}_\tau(\lambda)$ nach dem Korrespondenzdiagramm (V.2.1) oder, spezieller, Gleichung (V.2.45) von Theorem V.2.26. Weiter sind X und λ nach Proposition VI.2.16 und Theorem VI.2.11 vollständig und ausschöpfbar.

- (1) \Leftrightarrow (1'): Entspricht Korollar VI.3.8.

$(1') \Leftrightarrow (3') \Leftrightarrow (4')$: Dies folgt aus Proposition VI.3.5 und der Definition der Urbildbornologien durch Gleichung (IV.1.19c), Definition V.2.20 und Definition V.2.24.

$(2') \Leftrightarrow (3')$: Folgt aus Proposition VI.3.4 und Theorem V.3.13.

$(4) \Leftrightarrow (4')$: Folgt aus Korollar VI.3.8.

$(2) \Leftrightarrow (2')$ und $(3) \Leftrightarrow (3')$: Dies folgt aus Korollar VI.3.13. Berücksichtige dabei, dass alle Mengen $K * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$ lokal gleichstetig sind, falls alle Mengen $K * \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}$ lokal beschränkt sind. Entsprechendes gilt für die Mengen $|K|_{*\Phi}$, $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}')$.

$(1) \Leftrightarrow (1') \Leftrightarrow (1'')$: Enthalten in Theorem VI.3.17.

Beschränktheit: Dies folgt aus Proposition IV.1.13, dem Korrespondenzdiagramm V.2.1 und Theorem V.3.13. \square

VI.4. Faltung von Distributionen

Stetigkeitseigenschaften bilinearer Faltungsabbildungen vererben sich von allgemeinen Räumen von Distributionen E auf die Faltungsbilder $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ und von STI-Folgenräumen λ auf die Amalgamräume $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$. Die Details werden in den Theoremen VI.4.5 und VI.4.8 in Unterabschnitt VI.4.c beschrieben. Theorem VI.4.5 deckt Theorem II.2.1 aus Unterabschnitt II.2.b des Übersichtskapitels ab und durch Theorem VI.4.8 wird das Problem II.3.2 aus Unterabschnitt II.3.b gelöst.

Diese Vererbungsregeln sind eng verknüpft mit alternativen zur (nichtexistenten) Dreiecksungleichung für die \mathcal{D}' -Faltung, die in den Theoremen VI.4.3 und VI.4.4 in Unterabschnitt VI.4.b beschrieben werden. Im gleichen Atemzug werden einige neue Kriterien für \mathcal{D}' -Faltbarkeit von Tupeln bereitgestellt, siehe Theorem VI.4.2. Die Beweise der Ungleichungen basieren auf Faktorisierungssätzen für Testfunktionen, die in den Korollaren V.3.3 und V.3.4 in Unterabschnitt V.3.a beschrieben wurden.

Faltungen und Supremalfaltungen von $\overline{\mathbb{R}}_+$ -wertigen Funktionen auf \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d erwiesen sich in den Untersuchungen als praktisch und werden in Unterabschnitt VI.4.a betrachtet. Mit einer Ungleichung in Lemma VI.4.1 kann die kontinuierliche Faltung durch die diskrete Faltung kontrolliert werden.

VI.4.a. Nichtnegative Faltungen und Supremalfaltungen

Notiere im folgenden die Funktionenmengen

$$\overline{\mathcal{F}}_+ := \{\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+\}, \quad \mathcal{I}_+ := \{f \in \overline{\mathcal{F}}_+ : f \text{ unterhalbstetig}\}, \quad (\text{VI.4.1a})$$

$$\overline{\omega}_+ := \{\mathbb{Z}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+\}. \quad (\text{VI.4.1b})$$

Für die Multiplikation von Zahlen aus $\overline{\mathbb{R}}_+$ und $\overline{\mathbb{R}}_+$ -wertige Funktionen wird die Konvention $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ verwendet. Dies garantiert, dass $(\overline{\mathbb{R}}_+, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ für alle $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, also ein Quantal (siehe Unterabschnitt II.4.c).

Sei $f, g \in \mathcal{I}_+$ und $a, b \in \overline{\omega}_+$. Die \mathcal{I}_+ -Faltung $f * g$ von f und g und die $\overline{\omega}_+$ -Faltung $a * b$ von a und b sind definiert als

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (f * g)(x) := \int f(x - y)g(y) \, dy, \quad (\text{VI.4.2a})$$

$$\mathbb{Z}^d \ni z \mapsto (a * b)(z) := \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} a(z - w)b(w). \quad (\text{VI.4.2b})$$

Das Integral in (VI.4.2a) ist als oberes Integral von unterhalbstetigen Funktionen erklärt [12]. Mit dem Satz von Fubini für nichtnegative unterhalbstetige Funktionen erhält man, dass $(\mathcal{I}_+, *)$ eine Halbgruppe ist. Allerdings hat $(\mathcal{I}_+, *)$ kein neutrales Element. Die Halbgruppe $(\overline{\omega}_+, *)$ hat das neutrale Element 1_0 .

Sei $f, g \in \overline{\mathcal{F}}_+$ und $a, b \in \overline{\omega}_+$. Ersetzt man in Gleichung (VI.4.2a) bzw. (VI.4.2b) das Integral bzw. die Summe durch ein Supremum, so erhält man die punktweise erklärten Supremalfaltungen $f \blacksquare g$ und $a \blacksquare b$:

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (f \blacksquare g)(x) := \sup\{f(x - y)g(y) : y \in \mathbb{R}^d\}, \quad (\text{VI.4.3a})$$

$$\mathbb{Z}^d \ni z \mapsto (a \blacksquare b)(z) := \sup\{a(z - w)b(w) : w \in \mathbb{Z}^d\}. \quad (\text{VI.4.3b})$$

Dies definiert Halbgruppen $(\overline{\mathcal{F}}_+, \blacksquare)$ und $(\overline{\omega}_+, \blacksquare)$, jeweils mit neutralem Element 1_0 . Es gilt $\mathcal{I}_+ \blacksquare \overline{\mathcal{F}}_+ \subseteq \mathcal{I}_+$ da \mathcal{I}_+ supremumsabgeschlossen ist und wegen der Relation

$$f \blacksquare g = \sup\{T_x f \cdot g(x) : x \in \mathbb{R}^d\}, \quad (\text{VI.4.4})$$

wobei “sup” hier das punktweise gebildete Supremum in \mathcal{S}_+ notiert. Zwischen Faltung und Supremalfaltung bestehen die Ungleichungen

$$(f * g) \blacksquare h \leq f * (g \blacksquare h) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}_+, h \in \overline{\mathcal{F}}_+, \quad (\text{VI.4.5a})$$

$$a \blacksquare b \leq a * b \quad \text{für alle } a, b \in \overline{\omega}_+. \quad (\text{VI.4.5b})$$

Die Ungleichung (VI.4.5a) folgt aus Gleichung (VI.4.4) und der Monotonie der Integration. Eine nützliche Konsequenz aus der Ungleichung (VI.4.5a) ist, dass

$$(f * g) \blacksquare 1_{K+L} \leq (f \blacksquare 1_K) * (g \blacksquare 1_L) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}_+, K, L \subseteq \mathbb{R}^d. \quad (\text{VI.4.6})$$

Die Abbildung $f \mapsto f \blacksquare 1_K$ wurde in Definition 3.1 von [58, S. 5] als “translation shell” bezeichnet und durch \overline{T}_K notiert.

Lemma VI.4.1. *Sei $Q := \frac{1}{2}[-1, 1]^d$ der zentrierte Einheitswürfel. Dann gilt*

$$((f * g) \blacksquare 1_{2Q})|_{\mathbb{Z}^d} \leq (f \blacksquare 1_{2Q})|_{\mathbb{Z}^d} * (g \blacksquare 1_{2Q})|_{\mathbb{Z}^d} \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}_+. \quad (\text{VI.4.7})$$

Beweis. Da die Einschränkung $(\cdot)|_{\mathbb{Z}^d}$ und die Faltungen “*” und “ \blacksquare ” eintragsweise mit Gittertranslationen $T_z, z \in \mathbb{Z}^d$ kommutieren muss die Ungleichung (VI.4.7) nur in $z = 0$ bewiesen werden. Es gilt die Abschätzung

$$\int f \leq \sum (f \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}_+. \quad (\text{VI.4.8})$$

Unter Verwendung von (VI.4.8) erhält man für $f, g \in \mathcal{S}_+$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (f * g)(0) &= \int (\check{f} \cdot g) \leq \sum ((\check{f} \cdot g) \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} \\ &\leq \sum (\check{f} \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} \cdot (g \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} \\ &= ((f \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d} * (g \blacksquare 1_Q)|_{\mathbb{Z}^d})(0). \end{aligned} \quad (\text{VI.4.9})$$

Man erhält $(f * g) \blacksquare 1_{2Q} \leq (f \blacksquare 1_Q) * (g \blacksquare 1_Q)$ aus (VI.4.6). Dies liefert die Ungleichung (VI.4.7) in $z = 0$ nach Substitution von $f \mapsto f \blacksquare 1_Q$ und $g \mapsto g \blacksquare 1_Q$ in (VI.4.9). \square

VI.4.b. Alternativen zur Dreiecksungleichung

Die \mathcal{K}' -Faltung und die ω -Faltung von p -Tupeln erfüllen die Dreiecksungleichung, wie in Unterabschnitt III.3.c beschrieben wurde. Im allgemeinen ist der Absolutwert einer Distribution nicht definiert. Jedoch gibt es nützliche Alternativen zur Dreiecksungleichung für die \mathcal{D}' -Faltung die in den folgenden drei Theoremen dargestellt werden.

Theorem VI.4.2. *Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{D}'$. Die folgenden Aussagen über das Tupel (f_1, \dots, f_p) sind äquivalent:*

1. *Das Tupel (f_1, \dots, f_p) ist \mathcal{D}' -faltbar.*
2. *Das Tupel $(f_1 * \varphi_1, \dots, f_p * \varphi_p)$ ist \mathcal{D}' -faltbar für alle $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{D}$.*
3. *Das \mathcal{I}_+ -Faltungsprodukt des Tupels $(|f_k|_{*\Phi} : k = 1, \dots, p)$ ist eine lokalbeschränkte Funktion für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$.*
4. *Das \mathcal{I}_+ -Faltungsprodukt des Tupels $(|f_k * \varphi_k| : k = 1, \dots, p)$ ist überall endlich für alle $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{D}$.*
5. *Das $\bar{\omega}_+$ -Faltungsprodukt des Tupels $(|f_k|_{*\Phi}|_{\mathbb{Z}^d} : k = 1, \dots, p)$ ist überall endlich für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$. (In anderen Worten, dieses Tupel ist ω -faltbar.)*

Beweis. Die Äquivalenzen “1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4” sind in Theorem 6.2 in [58, S. 23] zu finden. Die Äquivalenz “3 \Leftrightarrow 5” erhält man dann mithilfe von Lemma VI.4.1. \square

Die folgenden beiden Theoreme werden der Übersichtlichkeit halber nur für $p = 2$ angegeben. Die Verallgemeinerungen auf allgemeines $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ sind klar.

Theorem VI.4.3. *Sei $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$. Es gibt $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ so, dass*

$$|f * g|_{*\Phi} \leq |f|_{*\Psi} * |g|_{*\Psi} \quad (\text{VI.4.10})$$

für alle \mathcal{D}' -faltbaren f und g . Entsprechendes gilt für \mathfrak{F} anstatt \mathfrak{B} .

Beweis. Nach Korollar V.3.3 gibt es $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ mit $\Phi \subseteq \Gamma(\Psi * \Psi)$ (verwende Korollar V.3.4 für $\mathfrak{F}(\mathcal{D})$). Mit dem Assoziativgesetz [92, Proposition 1] erhält man

$$|f * g|_{*\Phi} \leq \sup_{\psi_1, \psi_2 \in \Psi} |(f * g) * (\psi_1 * \psi_2)| \leq \sup_{\psi \in \Psi} |f * \psi| * \sup_{\psi \in \Psi} |g * \psi| \quad (\text{VI.4.11})$$

für alle \mathcal{D}' -faltbaren f und g . □

Theorem VI.4.4. Sei $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$. Es gibt $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ so, dass

$$(|f * g|_{*\Phi})|_{\mathbb{Z}^d} \leq (|f|_{*\Psi})|_{\mathbb{Z}^d} * (|g|_{*\Psi})|_{\mathbb{Z}^d} \quad (\text{VI.4.12})$$

für alle \mathcal{D}' -faltbaren f und g .

Beweis. Dies ergibt sich aus einer Kombination von Lemma VI.4.1 und Theorem VI.4.4, sowie der Relation $1_{2Q} \blacksquare |f|_{*\Phi} = |f|_{*\Psi}$ mit $\Psi = T_{2Q}\Phi = \{T_x\varphi : x \in 2Q\}$. □

VI.4.c. Vererbung von Stetigkeitseigenschaften

Die Abbildungen $E \mapsto \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E)$ und $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$ vererben topologisch-bornologische Eigenschaften der Faltung, wie in den unteren Theoremen VI.4.5 und VI.4.8 beschrieben wird. Für die Abbildung $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$ erhält man sogar Äquivalenzen. Desweiteren zeigt Theorem VI.4.9 die Verträglichkeit von Faltungsdualen und $\lambda \mapsto \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda)$.

Seien E_i , $i = 1, 2, 3$ Untervektorräume von \mathcal{D}' . Falls $E_1 \times E_2$ aus \mathcal{D}' -faltbaren Tupeln besteht und die Faltungsinclusion $E_1 * E_2 \subseteq E_3$ erfüllt ist, so sagt man, *die \mathcal{D}' -Faltung $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ ist wohldefiniert*. Entsprechendes gilt für die ω -Faltung.

Es wird nun die Vererbung aller folgenden Eigenschaften bilinearer Abbildungen zwischen lokalkonvexen t.b. Räumen untersucht:

$$\begin{array}{l} \text{Wohldefiniiertheit} \\ \text{Stetigkeit, Links-/Rechtskostetigkeit} \\ \text{Bornologiebewahrend, Links-/Rechtshypostetigkeit} \end{array} \quad (\text{VI.4.13})$$

Diese Eigenschaften wurden in Unterabschnitt III.2.c zusammengefasst.

Theorem VI.4.5. Seien E_1, E_2 und E_3 lokalkonvexe t.b. Unterräume des Vektorraums \mathcal{D}' und (P) eine der Eigenschaften aus (VI.4.13). Dann gilt die folgende Implikation: Hat die \mathcal{D}' -Faltung $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ die Eigenschaft (P) , so hat die \mathcal{D}' -Faltung $\mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_1) \times \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_3)$ ebenfalls die Eigenschaft (P) .

Beweis. Setze $F_i := (F_i, \mathcal{U}_{F,i}, \mathcal{B}_{F,i}) = \mathcal{D}'_{*\mathcal{D}}(E_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

VI. Eigenschaftsvererbung

Sei $\varphi \in \mathcal{D}$. Nach Korollar V.3.4 gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_{i,k} \in \mathcal{D}$ mit $i = 1, 2$ und $k = 1, \dots, n$, sodass $\varphi = \varphi_{1,1} * \varphi_{2,1} + \dots + \varphi_{1,n} * \varphi_{2,n}$. Das Assoziativgesetz liefert

$$(f_1 * f_2) * \varphi = \sum_{k=1}^n (f_1 * \varphi_{1,k}) * (f_2 * \varphi_{2,k}) \quad (\text{VI.4.14})$$

für alle \mathcal{D}' -faltbaren Tupel (f_1, f_2) .

Wohldefiniertheit: Besteht $E_1 \times E_2$ aus \mathcal{D}' -faltbaren Tupeln, so besteht nach Kriterium 2 von Theorem VI.4.2 auch $F_1 \times F_2$ aus \mathcal{D}' -faltbaren Tupeln. Gilt zudem $E_1 * E_2 \subseteq E_3$, so folgt $F_1 * F_2 \subseteq F_3$ aus Gleichung (VI.4.14) und aus der Linearität von F_3 .

Stetigkeit: Sei $*$: $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ stetig und sei $p_3 \in \text{csn } E_3$. Aufgrund der Annahme, Gleichung (VI.4.14) und der Dreiecksungleichung gibt es $p_i \in \text{csn } E_i$, $i = 1, 2$ so, dass

$$p_3((f_1 * f_2) * \varphi) \leq \sum_{k=1}^n p_1(f_1 * \varphi_{1,k}) \cdot \sum_{l=1}^n p_2(f_2 * \varphi_{2,l}) \quad (\text{VI.4.15})$$

für alle $f_i \in F_i$, $i = 1, 2$. Die Topologie von F_i wird erzeugt von den Halbnormen $f \mapsto p_i(f * \varphi)$ mit $p_i \in \text{csn } E_i$ und $\varphi \in \mathcal{D}$. Somit folgt aus der Ungleichung (VI.4.15) die Stetigkeit der \mathcal{D}' -Faltung $*$: $F_1 \times F_2 \rightarrow F_3$.

Bornologiebewahrend: Sei $*$: $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ bornologiebewahrend und $B_i \in \mathcal{B}_{F,i}$. Aus Gleichung (VI.4.14) erhält man dann die Inklusion

$$(B_1 * B_2) * \varphi \subseteq \sum_{k=1}^n (B_1 * \varphi_{1,k}) * (B_2 * \varphi_{2,k}). \quad (\text{VI.4.16})$$

Hier ist $B_i * \varphi_{i,k} \in \mathcal{B}_{E,i}$ für $i = 1, 2$ und $k = 1, \dots, n$. Aufgrund der Annahme, und da Bornologien additiv abgeschlossen sind, folgt $(B_1 * B_2) * \varphi \in \mathcal{B}_{E,3}$. Da letzteres für beliebige $\varphi \in \mathcal{D}$ gezeigt wurde, impliziert dies $B_1 * B_2 \in \mathcal{B}_{F,3}$.

Die Vererbung von Kostetigkeit und Hypostetigkeit beweist man analog. □

Die folgende Vererbungsregel ist eine Variante von Theorem 6.4 aus [58, S. 23f]. Letzteres wurde in [58] unter Verwendung von Theorem VI.4.3 bewiesen, welches Theorem 6.3 in [58, S. 23] oder Theorem 3 in [61, S. 129] entspricht.

Korollar VI.4.6. *Seien E_1, E_2, E_3 SRI-Räume und (P) eine der Eigenschaften aus (VI.4.13). Hat die \mathcal{D}' -Faltung $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ die Eigenschaft (P) , so hat die \mathcal{D}' -Faltung $\mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E_1) \times \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{\mathbb{T}}(E_3)$ ebenfalls die Eigenschaft (P) .*

Beweis. Dies folgt aus Theorem VI.4.5 und Theorem V.3.13 mit $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$, $Y = \mathcal{D}$. \square

Lemma VI.4.7. *Sei $a, b \in \omega$. Dann sind a und b genau dann ω -faltbar, wenn $\delta_{\mathbb{Z}^d}(a)$ und $\delta_{\mathbb{Z}^d}(b)$ \mathcal{D}' -faltbar sind. In diesem Fall gilt $\delta_{\mathbb{Z}^d}(a * b) = \delta_{\mathbb{Z}^d}(a) * \delta_{\mathbb{Z}^d}(b)$.*

Beweis. Wende die Äquivalenz “1 \Leftrightarrow 4” von Theorem VI.4.2 an. Betrachte dabei für die Implikation “ \Rightarrow ” $\varphi_i \in \mathcal{D}$ mit $\text{supp } \varphi_i \subseteq \frac{1}{2}[-1, 1]^d$ für $i = 1, 2$. Den Homomorphismus verifiziert man durch direktes Nachrechnen, wobei der Satz von Fubini für absolut konvergente Reihen in \mathcal{D}' angewendet wird. \square

Theorem VI.4.8. *Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ STI-Folgenräume und (P) eine der Eigenschaften aus (VI.4.13). Die ω -Faltung $\lambda_1 \times \lambda_2 \rightarrow \lambda_3$ hat die Eigenschaft (P) genau dann, wenn die \mathcal{D}' -Faltung $\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_1) \times \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_3)$ die Eigenschaft (P) hat.*

Beweis. Implikation “ \Rightarrow ”: Dies beweist man genauso wie Korollar VI.4.5. Anstatt Korollar V.3.4 und der Implikation “2 \Rightarrow 1” aus Theorem VI.4.2 verwendet man hier Theorem VI.4.4 und die Implikation “5 \Rightarrow 1” von Theorem VI.4.2. Die Solidität der Räume λ_i , $i = 1, 2, 3$ muss dabei benutzt werden.

Rückimplikation “ \Leftarrow ”: Die Identität (V.2.51) mit $X = \{\delta\}$ und $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ ergibt die Identität $\lambda_i = \underleftarrow{\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot)} \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_i)$ mit der Abbildung $\delta_{\mathbb{Z}^d}(\cdot)$ aus Gleichung (V.2.12). Wende nun Lemma VI.4.7 an. \square

Theorem VI.4.9. *Jeder STI-Folgenraum λ erfüllt die Identität von Mengen*

$$\mathcal{D}'_{\tau}((\lambda)_{\omega}^*) = (\mathcal{D}'_{\tau}(\lambda))_{\mathcal{D}'}^*. \quad (\text{VI.4.17})$$

Sei $F \subseteq \mathcal{D}'$ und λ_F der kleinste STI-Folgenraum mit $F \subseteq \mathcal{D}'_{\tau}(\lambda_F)$ (der nach Theorem V.2.1 existiert). Dann gilt die Identität von Mengen

$$(F)_{\mathcal{D}'}^* = \mathcal{D}'_{\tau}((\lambda_F)_{\omega}^*). \quad (\text{VI.4.18})$$

Hier ist $(\cdot)_{\mathcal{D}'}^ = (\cdot)^*$ das \mathcal{D}' -Faltungsdual aus Gleichung (II.4.1) und $(\cdot)_{\omega}^*$ ist das ω -Faltungsdual aus Gleichung (II.4.5).*

VI. Eigenschaftsvererbung

Beweis. Gleichung (VI.4.17): Sei $f \in \mathcal{D}'$. Nach Definition von \mathcal{D}'_τ und $(\cdot)_\omega^*$ gilt $f \in \mathcal{D}'_\tau((\lambda)_\omega^*)$ genau dann, wenn $(|f|_{*\Phi}|_{\mathbb{Z}}, a)$ ω -faltbar ist für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ und $a \in \lambda$. Somit liefern die Inklusion $|\mathcal{D}'_\tau(\lambda)|_{*\Phi}|_{\mathbb{Z}} \subseteq \lambda$ für alle $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$ und das \mathcal{D}' -Faltbarkeitskriterium 5 von Theorem VI.4.2 die Inklusion $\mathcal{D}'_\tau((\lambda)_\omega^*) \subseteq (\mathcal{D}'_\tau(\lambda))_{\mathcal{D}'}^*$. Die umgekehrte Inklusion erhält man aus der Ungleichung $|b| \leq |\delta_{\mathbb{Z}^d}(b)|_{*\{\varphi\}}|_{\mathbb{Z}}$ für alle $b \in \omega$ und $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi(0) = 1$ und $\text{supp } \varphi \subseteq \frac{1}{2}[-1, 1]^d$.

Gleichung (VI.4.18): Unter Verwendung von Theorem VI.4.2 zeigt man die Identität $(F)_{\mathcal{D}'}^* = (\mathcal{D}'_\tau(\lambda_F))_{\mathcal{D}'}^*$. Wegen Gleichung (VI.4.17) folgt daraus Gleichung (VI.4.18). \square

Publikationen des Autors

- [46] R. Hilfer und T. Kleiner. „Maximal Domains for Fractional Derivatives and Integrals“. In: *Mathematics* 8.7 (2020).
- [57] T. Kleiner. „Lokalkonvexe Funktionenräume und fraktionale Weyl-Ableitungen“. Masterarbeit. Universität Stuttgart, 2016.
- [58] T. Kleiner und R. Hilfer. „Convolution on Distribution Spaces Characterized by Regularization“. In: *Math. Nachr.* 296.5 (2023), S. 1938–1963.
- [59] T. Kleiner und R. Hilfer. „Convolution operators on weighted spaces of continuous functions and supremal convolution“. In: *Ann. Mat. Pura Appl.* 199.4 (2020), S. 1547–1569.
- [60] T. Kleiner und R. Hilfer. „Fractional glassy relaxation and convolution modules of distributions“. In: *Anal. Math. Phys.* 11.3 (2021).
- [61] T. Kleiner und R. Hilfer. „On extremal domains and codomains for convolution of distributions and fractional calculus“. In: *Monatsh. für Math.* 198 (2022), S. 121–152.
- [62] T. Kleiner und R. Hilfer. „Sequential generalized Riemann-Liouville derivatives based on distributional convolution“. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 25 (2022), S. 267–298.
- [63] T. Kleiner und R. Hilfer. „Weyl integrals on weighted spaces“. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 22.5 (2019), S. 1225–1248.

Literaturverzeichnis

- [1] C. D. Aliprantis und O. Burkinshaw. *Locally Solid Riesz Spaces*. Bd. 105. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [2] C. Bargetz. „A sequence space representation of L. Schwartz' space \mathcal{O}_C “. In: *Arch. Math.* 98.4 (2012), S. 317–326.
- [3] C. Bargetz. „Commutativity of the Valdivia-Vogt table of representations of function spaces“. In: *Math. Nachr.* 287.1 (2014), S. 10–22.
- [4] C. Bargetz. „Completing the Valdivia-Vogt tables of sequence-space representations of spaces of smooth functions and distributions“. In: *Monatsh. Math.* 177 (2015), S. 1–14.
- [5] C. Bargetz, A. Debrouwere und E. A. Nigsch. „Sequence space representations for spaces of smooth functions and distributions via Wilson bases“. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 150 (2022), S. 3841–3852.
- [6] C. Bargetz, E. A. Nigsch und N. Ortner. „A simpler description of the κ -topologies on the spaces \mathcal{D}_{L^p} , L^p , \mathcal{M}^1 “. In: *Math. Nachr.* (2020), S. 1–16.
- [7] C. Bargetz, E. A. Nigsch und N. Ortner. „Convolvability and regularization of distributions“. In: *Annali di Matematica Pura et Applicata* 196 (2017), S. 2239–2251.
- [8] C. Bargetz, Eduard A. Nigsch und N. Ortner. „Projective descriptions of spaces of functions and distributions“. In: *Math. Nachr* (2023).
- [9] C. Bargetz und N. Ortner. „Kernel identities and vectorial regularisation“. In: *Monatsh. Math.* 186.2 (2018), S. 201–214.
- [10] B. Basit und H. Günzler. „Generalized vector valued almost periodic and ergodic distributions“. In: *J. Math. Anal. Appl.* 314 (2006), S. 363–381.

- [11] K. D. Bierstedt, R. Meise und W. H. Summers. „A projective description of weighted inductive limits“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 272.1 (1982), S. 107–160.
- [12] N. Bourbaki. *Integration I - Chapters 1-6*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [13] N. Bourbaki. *Integration II - Chapters 7-9*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [14] P. P. Carreras und J. Bonet. *Barrelled locally convex spaces*. Bd. 131. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.
- [15] P. Cartier. „Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie“. In: *Séminaire Bourbaki* 454 (1974), S. 20–34.
- [16] A. Debrouwere und L. Neyt. „Sequence space representations for translation-modulation invariant function and distribution spaces“. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 28.87 (2022).
- [17] A. Debrouwere und E. A. Nigsch. „On the space of Laplace transformable distributions“. In: *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 114.4 (2020).
- [18] A. Debrouwere und J. Vindas. „Topological properties of convolutor spaces via the short-time Fourier transform“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 374.2 (2021), S. 829–861.
- [19] P. Dierolf. „Multiplication and convolution operators between spaces of distributions“. In: *Functional Analysis: Surveys and Recent Results: III*. Bd. 90. North-Holland Mathematical Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, S. 305–330.
- [20] P. Dierolf und S. Dierolf. „Topological properties of the dual pair $\langle \dot{\mathcal{B}}(\Omega)', \dot{\mathcal{B}}(\Omega)'' \rangle$ “. In: *Pacific J. Math.* 108.1 (1983), S. 51–82.
- [21] P. Dierolf und J. Voigt. „Convolution and \mathcal{S}' -convolution of distributions“. In: *Collect. Math.* 29.3 (1978), S. 185–196.
- [22] G. van Dijk. *Distribution theory. Convolution, Fourier transform, and Laplace transform*. De Gruyter Graduate Lectures. De Gruyter, Berlin, 2013.

- [23] P. Dimovski, S. Pilipovic und J. Vindas. „New distribution spaces associated to translation-invariant Banach spaces“. In: *Monatsh. Math.* 177.4 (2015), S. 495–515.
- [24] J. Dixmier und P. Malliavin. „Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables“. In: *Bull. Sci. Math* 102.2 (1978), S. 305–330.
- [25] N. Dunford und B. J. Pettis. „Linear Operators and Summable Functions“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 47.3 (1940), S. 323–392.
- [26] M. M. Dzherbashian und A. B. Nersessian. „Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order“. In: *Izv. AN Armenian SSR. Ser. Math.* 3.1 (1968). (In Russian), S. 3–29.
- [27] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie, 7. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [28] M. Ern . *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1982.
- [29] H. G. Feichtinger. „Banach convolution algebras of Wiener type“. In: *Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980)*. Bd. 35. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, S. 509–524.
- [30] H. G. Feichtinger. „Choosing function spaces in harmonic analysis“. In: *Excursions in Harmonic Analysis*. Bd. 4. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, S. 65–101.
- [31] H. G. Feichtinger. „Generalized amalgams, with applications to Fourier transform“. In: *Canadian J. Math.* XLII.3 (1990), S. 395–409.
- [32] J. J. F. Fournier. „Amalgams of L^p and l^q “. In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 13.1 (1985), S. 1–21.
- [33] L. Frerick. „On complete, precompact and compact sets“. In: *Collect. Math.* 44.1–3 (1993), S. 105–114.
- [34] F. G. Friedlander. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press, 1982.
- [35] A. Friedman. *Generalized Functions and Partial Differential Equations*. Prentice-Hall, 1963.

- [36] B. Ganter. *Diskrete Mathematik: geordnete Mengen*. Springer Spektrum, 2013.
- [37] R. Godement. *Analysis IV*. Universitext, 2015.
- [38] A. Grothendieck. „Produits tensoriels topologique et espaces nucléaires“. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 16 (1955).
- [39] W. Guo u. a. „Sharp weighted convolution inequalities and some applications“. In: *Studia Math.* 241.3 (2018), S. 201–239.
- [40] M. Guzmán-Partida, N. Ortner und P. Wagner. „M. Riesz’ kernels as boundary values of conjugate Poisson kernels“. In: *Bull. Sci. Math.* 135 (2011), S. 291–302.
- [41] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, 2000.
- [42] R. Hilfer. „Excess wing physics and nearly constant loss in glasses“. In: *J. Stat. Mech.* (2019).
- [43] R. Hilfer. „Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials“. In: *Chemical Physics* 284 (2002), S. 399–408.
- [44] R. Hilfer. „Fitting the excess wing in the dielectric α -relaxation of propylene carbonate“. In: *J. Phys.: Condens. Matter* 14 (2002), S. 2297–2301.
- [45] R. Hilfer. „Fractional time evolution“. In: *Applications of fractional calculus in physics*. Hrsg. von R. Hilfer. World Sci. Publ. River Edge, NJ, 2000, S. 209–227.
- [47] R. Hilfer, Y. Luchko und Z. Tomovski. „Operational Method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives“. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* (2009).
- [48] H. Hogbe-Nlend. *Bornologies and Functional Analysis*. Bd. 26. North-Holland Mathematical Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1977.
- [49] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [50] J. Horvath. „Composition of Hypersingular Integral Operators“. In: *Appl. Anal.* 7.3 (1978), S. 171–190.
- [51] J. Horváth. „Sur la convolution des distributions“. In: *Bull. Sc. Math.* 2. Ser. 98 (1974), S. 183–192.

- [52] J. Horváth. *Topological Vector Spaces and Distributions*. Addison-Wesley, Reading, 1966.
- [53] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner Stuttgart, 1981.
- [54] W. Kaballo. *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie*. Springer Spektrum, 2014.
- [55] P. K. Kamthan und M. Gupta. *Sequence Spaces and Series*. Bd. 65. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York und Basel, 1981.
- [56] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava und J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Bd. 204. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.
- [64] A. Kochubei und Y. Luchko, Hrsg. *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. Bd. 1. DeGruyter, Berlin, 2019.
- [65] G. Koethe. *Topological Vector Spaces I*. Bd. 159. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [66] S. Kostadinova u. a. „The short-time Fourier transform of distributions of exponential type and Tauberian theorems for shift-asymptotics“. In: *Filomat* 30.11 (2016), S. 3047–3061.
- [67] M. Kwaśnicki. „Fractional Laplace operator and its properties“. In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. Bd. 1. De Gruyter, 2019, S. 159–193.
- [68] M. Kwaśnicki. „Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator“. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 20.1 (2017), S. 7–51.
- [69] W. Lamb. „A distributional theory of fractional calculus“. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*. A 99.3–4 (1985), S. 347–357.
- [70] J. Larcher. „Multiplications and convolutions in L. Schwartz’ spaces of test functions and distributions and their continuity“. In: *Analysis (Berlin)* 33.4 (2013), S. 319–332.

- [71] R. Larsen. *An Introduction to the Theory of Multipliers*. Bd. 175. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.
- [72] Y. Luchko und R. Gorenflo. „An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives“. In: *Acta Mathematica Vietnamica* 24.2 (1999), S. 207–233.
- [73] A. Marchaud. „Sur les derivees et sur les differences des fonctions de variables reelles“. In: *J. Math. Pures et Appl.* 38.1-4 (1927), S. 337–425.
- [74] J. T. Marti. *Konvexe Analysis*. Bd. 54. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1977.
- [75] R. Meise und D. Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis, Kapitel III*. Springer, 2011.
- [76] K. S. Miller. „The Weyl fractional calculus“. In: *Fractional calculus and its applications (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974)*. Bd. 457. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1975, S. 80–89.
- [77] K. S. Miller und B. Ross. *An Introduction to the fractional Calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1993.
- [78] S. Mincheva-Kaminska. „Convolution of Distributions in Sequential Approach“. In: *Filomat* 28.8 (2014), S. 1543–1557.
- [79] J. J. Moreau. „Fonctionelles convexes.“ In: *Séminaire Jean Leray. Sur les équations aux dérivées partielles* 2 (1966/67), S. 1–108.
- [80] L. Nachbin. *Elements of Approximation Theory*. Institute de Matematica Pura e Aplicada de Consello Nacional de Pesquises, Rio de Janeiro, 1965.
- [81] K. B. Oldham und J. Spanier. *Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press, New York-London, 1974.
- [82] N. Ortner. „On convolvability conditions for distributions“. In: *Monatsh. Math.* 160.3 (2010), S. 313–335.
- [83] N. Ortner. „On some contributions of John Horváth to the theory of distributions“. In: *J. Math. Anal. Appl.* 297.2 (2004), S. 353–383.

- [84] N. Ortner und P. Wagner. „Applications of Weighted \mathcal{D}'_{L^p} -Spaces to the Convolution of Distributions“. In: *Bull. Pol. Sci. Math.* 37 (1989), S. 579–595.
- [85] N. Ortner und P. Wagner. *Distribution-Valued Analytic Functions*. edition swk, 2013.
- [86] N. Ortner und P. Wagner. *Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators*. Springer International Publishing, 2015.
- [87] A. L. Peressini. *Ordered topological vector spaces*. Harper & Row, Publishers, New York-London, 1967.
- [88] B. E. Petersen. *Introduction to the Fourier transform & pseudodifferential operators*. Bd. 19. Monographs and Studies in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1983.
- [89] A. Pietsch. *Nuclear Locally Convex Spaces*. Bd. 66. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
- [90] M. Riesz. „Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels“. In: *Acta Sci. Math. Szeged* 9 (1938), S. 1–42.
- [91] H. Rockafellar und R. Wets. *Variational Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *vol. 317*. Springer, Berlin, 2009.
- [92] B. Roider. „Sur la convolution des distributions“. In: *Bull. Sc. Math.* 2. Ser. 100 (1976), S. 193–199.
- [93] K. I. Rosenthal. *Quantales and their Applications*. Longman Scientific und Technical, 1990.
- [94] R. C. Rosier. „Dual Spaces of Certain Vector Sequence Spaces“. In: *Pacific Jour. Math.* 46.2 (1973), S. 487–501.
- [95] L. A. Rubel, W. A. Squires und B. A. Taylor. „Irreducibility of certain entire functions with applicationsto harmonic analysis“. In: *Ann. of Math. (2)* 108.3 (1978), S. 553–567.
- [96] W. H. Ruckle. *Sequence Spaces*. Bd. 49. Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1981.
- [97] C. Russo. „Quantale modules and their operators, with applications“. In: *J. Logic Comput.* 20.4 (2010), S. 917–946.

- [98] G. Samko. *Hypersingular Integrals and Their Applications*. Taylor & Francis, New York, 2002.
- [99] S.G. Samko, A.A. Kilbas und O.I. Marichev. *Fractional Derivatives and Integrals: Theory and Applications*. Gordon und Breach, 1993.
- [100] A. R. Schep. „Minkowski’s integral inequality for function norms“. In: *Operator Theory in function spaces and Banach lattices*. Hrsg. von C. B. Huijsmanns et al. Operator Theory: Advances and Applications. Der Beweis von Theorem 2.3 wurde in einer im Internet erhältlichen Fassung korrigiert. Birkhäuser, Basel, 1995, S. 299–308.
- [101] L. Schwartz. *Analyse IV: Applications à la théorie de la mesure*. Paris: Hermann, 1993.
- [102] L. Schwartz. „Définition intégrale de la convolution de deux distributions“. In: *Séminaire Schwartz 1.22 (1953/54)*, S. 1–7.
- [103] L. Schwartz. „Espaces des fonctions différentiables a valeurs vectorielles“. In: *J. Anal. Math.* 4 (1954/55), S. 88–148.
- [104] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [105] L. Schwartz. „Théorie des distributions à valeurs vectorielles I“. In: *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 7 (1957), S. 1–141.
- [106] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome I*. Hermann & Cie, Paris, 1950.
- [107] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome II*. Hermann & Cie, Paris, 1951.
- [108] R. Shiraishi. „On the Definition of Convolutions for Distributions“. In: *J. Hiroshima Univ.* 23.1 (1959), S. 19–32.
- [109] L. Silvestre. „Regularity of the Obstacle Problem for a Fractional Power of the Laplace Operator“. In: *Comm. Pure and Appl. Math.* LX.1 (2006), S. 67–112.
- [110] B. Stanković. „Structural Theorems for S-Bounded Distributions“. In: *Novi Sad J. Math.* 25.2 (1995), S. 49–55.
- [111] W. Summers. „Dual Spaces of Weighted Spaces“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 151 (1970), S. 323–333.
- [112] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York-London, 1967.

- [113] H. Triebel. *Higher Analysis*. Johann Ambrosius Barth, 1997.
- [114] M. Valdivia. „A representation of the space \mathcal{O}_M “. In: *Math. Z.* 177.4 (1981), S. 463–478.
- [115] M. Valdivia. *Topics in Locally Convex Spaces*. Bd. 67. North-Holland Mathematical Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.
- [116] S. V. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*. Hrsg. von A. Jeffrey. Marcel Dekker Inc., New York, 1971.
- [117] V. S. Vladimirov. *Methods of the theory of generalized functions*. CRC Press, 2002.
- [118] D. Vogt. „Sequence space representations of spaces of test functions and distributions“. In: *Functional analysis, holomorphy and approximation theory (Rio de Janeiro, 1979)*. Bd. 83. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Dekker, New York, 1983, S. 405–443.
- [119] P. Wagner. „On convolution in weighted \mathcal{D}'_{L^p} -spaces“. In: *Math. Nachr.* 287.4 (2014), S. 472–477.
- [120] D. Werner. *Funktionalanalysis, 7. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [121] K. Yoshinaga und H. Ogata. „On Convolutions“. In: *J. Hiroshima Univ.* 22.1 (1958), S. 15–24.
- [122] H. K. Youn und I. Richards. „On the general definition of convolution for distributions“. In: *J. Korean Math. Soc.* 17.1 (1980), S. 13–37.
- [123] H. K. Youn und I. Richards. „On the general definition of convolution for several distributions“. In: *J. Korean Math. Soc.* 17.2 (1981), S. 161–168.
- [124] A. H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1965.